Exame nacional de Matemática A **(2012, Época especial)**

Proposta de resolução

GRUPO I

1. Como o primeiro e último algarismo são iguais, o segundo e o penúltimo também, o mesmo acontecendo com o terceiro e o antepenúltimo, apenas consideramos as escolhas para os 3 primeiros algarismos, sendo os restantes, a repetição das escolhas já feitas, por ordem inversa.

   Assim, para o primeiro algarismo existem 9 hipóteses de escolha (excluímos o algarismo zero). Para o segundo e o terceiro podemos considerar 10 hipóteses para cada um, porque podem ocorrer repetições de algarismos e o zero pode ocorrer em todas as posições à excepção da primeira.

   Assim o um número total de capicuas diferentes (com 6 algarismos) é

   $$9 \times 10 \times 10 = 900$$

   Resposta: **Opção B**

2. Como

   $P(X = 0 \vee X = 1) = 0{,}81 \Leftrightarrow P(X = 0) + P(X = 1) = 0{,}81 \Leftrightarrow 2a + a = 0{,}81 \Leftrightarrow 3a = 0{,}81 \Leftrightarrow a = 0{,}27$

   Temos que o valor médio da variável X, é:

   $$\mu = -1 \times (1 - 3a) + 0 \times 2a + 1 \times a = -1 + 3a + 0 + a = 4a - 1$$

   Substituindo o valor de a, vem:

   $$\mu = 4 \times 0{,}27 - 1 = 0{,}08$$

   Resposta: **Opção C**

3. Como o zero é o elemento neutro da multiplicação, o produto dos números saídos é zero, se, pelo menos um deles for zero.
   Como no dado não existe qualquer face com o número zero, a ocorrência de um produto igual a zero, depende da bola extraída ter o número zero, independentemente da face do dado que sair.

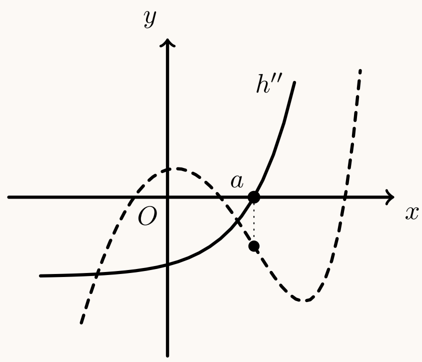
   Assim, a probabilidade de o produto dos números ser igual a zero é igual à probabilidade de extrair a bola com o número zero do saco, e como existem 5 bolas no saco (número de casos possíveis) e apenas 1 tem o número zero (número de casos possíveis), recorrendo à Regra de Laplace, temos que a probabilidade de o produto dos números ser igual a zero é

   $$p = \frac{1}{5}$$

   Resposta: **Opção D**

4. Seja a, o único zero da segunda derivada ($h''(a) = 0$). Como o zero está associado a uma mudança de sinal da segunda derivada, é um ponto de inflexão do gráfico de h.

   Os gráficos das opções (B) e (C) têm a concavidade voltada para cima para todos os valores do domínio.
   O gráfico da opção (D) tem um ponto de inflexão de abcissa negativa, por isso, incompatível com a segunda derivada apresentada.
   O único gráfico compatível com a abcissa do ponto de inflexão detetado é o gráfico da opção (A).



   Resposta: **Opção A**

5. Como o domínio de g é $]0, +\infty[$, a reta defina por $x = k$ é assíntota do gráfico de g, se

$$k = \lim_{x\to+\infty} g(x)$$

   Assim, como a reta de equação $y = 3$ é assíntota horizontal do gráfico de f, (e o domínio de f é $]0, +\infty[$), temos que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 3$.
   Logo

$$k = \lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^{-x} - 3}{f(x)} = \frac{\lim\limits_{x\to+\infty}(e^{-x} - 3)}{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)} = \frac{e^{-\infty} - 3}{3} = \frac{0^+ - 3}{3} = \frac{-3}{3} = -1$$

   Pelo que a reta de equação $y = -1$ é uma assíntota do gráfico de e quando x tende para $+\infty$

   Resposta: **Opção D**

6. Como

$$\log_a \sqrt{c} = 3 \Leftrightarrow \log_a (c)^{\frac{1}{2}} = 3 \Leftrightarrow \frac{1}{2}\log_a c = 3 \Leftrightarrow \log_a c = 6$$

   e $\log_a b = c$, usando as propriedades dos logaritmos, temos que

$$\log_a \sqrt{b \times c} = \log_a (b \times c)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\log_a (b \times c) = \frac{1}{2}(\log_a b + \log_a c) = \frac{1}{2}(c + 6) = \frac{c+6}{2} = \frac{c}{2} + 3$$

   Resposta: **Opção C**

7. Se z e w são inversos um do outro, temos que $\frac{1}{z} = w$

   Por um lado $\frac{1}{z} = \frac{1}{1+i} = \frac{1-i}{(1-i)(1-i)} = \frac{1-i}{1^2 - i^2} = \frac{1-i}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$

   Por outro lado. como $11 = 4 \times 2 + 3$, sabemos que $i^{11} = i^3 = -i$ e assim
   $w = (k-1) + 2pi^{11} = (k-1) + 2p(-i) = (k-1) - (2p)i$

   Como $\frac{1}{z} = w$ temos que $\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i = (k-1) - (2p)i$

   Logo $\frac{1}{2} = k - 1 \ \wedge \ \frac{1}{2} = 2p \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{2} + 1 = k \ \wedge \ \frac{1}{4} = p \quad \Leftrightarrow \quad \frac{3}{2} = k \ \wedge \ \frac{1}{4} = p$

   Assim temos que $k + p = \frac{3}{2} + \frac{1}{4} = \frac{6}{4} + \frac{1}{4} = \frac{7}{4}$

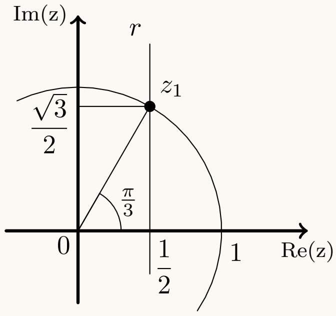
   Resposta: **Opção D**

8. Seja $\theta = \arg(z_1)$. Como $\text{Re}(z_1) = \frac{1}{2} = \cos\theta$, $|z_1| = 1$ e θ é um ângulo do 1º quadrante, temos que $\theta = \frac{\pi}{3}$

   Logo, temos que:

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{\sqrt{3}}{2} = \text{Im}(z)$$

   Resposta: **Opção B**



GRUPO II

1.

1.1. Escrevendo z na f.t. temos $z = \rho \operatorname{cis}\theta$, onde:

- $\rho = |z| = \sqrt{(8\sqrt{3})^2 + (-8)^2} = \sqrt{64 \times 3 + 64} = \sqrt{64 \times 4} = 8 \times 2 = 16$
- $\operatorname{tg}\theta = \frac{-8}{8\sqrt{3}} = -\frac{1}{\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

  como $\operatorname{sen}\theta < 0$ e $\cos\theta > 0$, θ é um ângulo do 4º quadrante, logo $\theta = -\frac{\pi}{6}$

Assim $z = 16 \operatorname{cis}\left(-\frac{\pi}{6}\right)$, e por isso, usando a fórmula de Moivre, temos:

$\sqrt[4]{z} = \sqrt[4]{16} \operatorname{cis}\left(\frac{-\frac{\pi}{6} + 2k\pi}{4}\right)$, $k \in \{0,1,2,3\}$, ou seja, temos 4 raízes de índice 4:

- $k = 0 \rightarrow z_1 = 2\operatorname{cis}\left(-\frac{\pi}{24}\right)$
- $k = 1 \rightarrow z_2 = 2\operatorname{cis}\left(-\frac{\pi}{24} + \frac{2\pi}{4}\right) = 2\operatorname{cis}\left(-\frac{\pi}{24} + \frac{12\pi}{24}\right) = 2\operatorname{cis}\frac{11\pi}{24}$
- $k = 2 \rightarrow z_3 = 2\operatorname{cis}\left(-\frac{\pi}{24} + \frac{4\pi}{4}\right) = 2\operatorname{cis}\left(-\frac{\pi}{24} + \frac{24\pi}{24}\right) = 2\operatorname{cis}\frac{23\pi}{24}$
- $k = 3 \rightarrow z_4 = 2\operatorname{cis}\left(-\frac{\pi}{24} + \frac{6\pi}{4}\right) = 2\operatorname{cis}\left(-\frac{\pi}{24} + \frac{36\pi}{24}\right) = 2\operatorname{cis}\frac{35\pi}{24}$

1.2. Temos que metade do inverso de w é $\frac{\frac{1}{w}}{2} = \frac{1}{2w}$

Logo, como o conjugado de w é igual a metade do inverso de w, vem que: $\overline{w} = \frac{1}{2w} \Leftrightarrow w \times \overline{w} = \frac{1}{2}$

Se $w = \rho\operatorname{cis}\theta$, então $\overline{w} = \rho\operatorname{cis}(-\theta)$ e, por isso, $w \times \overline{w} = (\rho \times \rho)\operatorname{cis}(\theta + (-\theta)) = \rho^2 cis0 = \rho^2 = |w|^2$

Assim, temos que:

$\overline{w} = \frac{1}{2w} \Leftrightarrow w \times \overline{w} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow |w|^2 = \frac{1}{2} \Leftrightarrow |w| = \pm\sqrt{\frac{1}{2}} \Leftrightarrow |w| = \pm\frac{1 \times \sqrt{2}}{\sqrt{2} \times \sqrt{2}} \Leftrightarrow |w| = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$

Como $|w|$ é um valor positivo, temos que $\overline{w} = \frac{1}{2w} \Leftrightarrow |w| = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow |w - 0| = \frac{\sqrt{2}}{2}$ é a condição que define os números complexos, cujas imagens geométricas, no plano complexo, pertencem à circunferência de centro na origem e de raio $\frac{\sqrt{2}}{2}$

2.

2.1. Considerando a experiência aleatória que consiste em escolher, ao acaso, um funcionário desta empresa, e os acontecimentos:
T:≪O funcionário aposta no totoloto≫
E:≪O funcionário aposta no euromilhões≫
Temos que $P(E) = 0{,}8$, $P(T|E) = 0{,}25$ e $P\left(\overline{T} \cap \overline{E}\right) = 0{,}05$

Organizando os dados numa tabela obtemos:

- $P(E) = 1 - P(F) = 1 - 0{,}55 = 0{,}45$
- $P\left(\overline{E}\right) = 1 - P(E) = 1 - 0{,}8 = 0{,}2$
- $P\left(T \cap \overline{E}\right) = P\left(\overline{E}\right) - P\left(\overline{T} \cap \overline{E}\right) = 0{,}2 - 0{,}05 = 0{,}15$

	T	$\overline{T}$	
E	0,2		0,8
$\overline{E}$	0,15	0,05	0,2
	0,35		1

Assim, a probabilidade de, ao escolher, ao acaso, um funcionário dessa empresa, ele apostar no totoloto é

$$P(T) = P(T \cap E) + P\left(T \cap \overline{E}\right) = 0{,}2 + 0{,}15 = 0{,}35$$

2.2. Como selecionamos 8 trabalhadores de entre o total de 50, sem considerar a ordem relevante, temos ${}^{50}C_8$ grupos possíveis de serem selecionados.

Como 80% são apostadores no euromilhões, temos exatamente $50 \times 0{,}8 = 40$ trabalhadores que apostam no euromilhões.
Assim, a probabilidade de selecionar 8 trabalhadores que sejam apostadores pode ser calculada como $\frac{{}^{40}C_8}{{}^{50}C_8}$, sendo o número de casos possíveis, o número de grupos de 8 trabalhadores que se podem fazer com os 40 que são apostadores no euromilhões.

Como existem , $50 - 40 = 10$ trabalhadores que não jogam no euromilhões, temos que existem ${}^{40}C_7 \times 10$ grupos de 8 trabalhadores, onde 7 são apostadores no euromilhões e 1 (de entre 10), não é. Pelo que a probabilidade de selecionar um grupo de 8, onde 7 são apostadores no euromilhões é $\frac{{}^{40}C_7 \times 10}{{}^{50}C_8}$

Assim, calculando a probabilidade de, pelo menos, sete dos oito funcionários selecionados serem apostadores no euromilhões como a soma das duas probabilidades anteriores, e arredondando o resultado às centésimas, vem

$$\frac{{}^{40}C_7 \times 10}{{}^{50}C_8} + \frac{{}^{40}C_8}{{}^{50}C_8} = \frac{{}^{40}C_7 \times 10 + {}^{40}C_8}{{}^{50}C_8} \approx 0{,}49$$

3. Como A e B são acontecimentos independentes, temos que:

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$$

E desta forma, podemos verificar que:

$$\begin{aligned}
P\left(\overline{A} \cap B\right) + P\left(\overline{A}\right) \times \Big(1 - P(B)\Big) &= P\left(\overline{A} \cap B\right) + \Big(1 - P(A)\Big) \times \Big(1 - P(B)\Big) && (1) \\
&= P\left(\overline{A} \cap B\right) + 1 - P(B) - P(A) + P(A) \times P(B) \\
&= P\left(\overline{A} \cap B\right) + 1 - P(B) - P(A) + P(A \cap B) && (2) \\
&= P\left(\overline{A} \cap B\right) + P(A \cap B) + 1 - P(B) - P(A) \\
&= P(B) + 1 - P(B) - P(A) && (3) \\
&= 1 - P(A) \\
&= P\left(\overline{A}\right) && (1)
\end{aligned}$$

(1) Teorema: $P\left(\overline{X}\right) = 1 - P(X)$
(2) Hipótese: $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$
(3) Teorema: $P(X) = P(X \cap Y) + P\left(X \cap \overline{Y}\right)$

Logo $P\left(\overline{A} \cap B\right) + P\left(\overline{A}\right) \times \Big(1 - P(B)\Big) = P\left(\overline{A}\right)$ *q.e.d.*

4.

4.1.

Como a função C resulta de operações sucessivas de funções contínuas em $\mathbb{R}_0^+$, é contínua em $\mathbb{R}_0^+$, e também, em $[0,15]$, porque $[0,15] \subset \mathbb{R}_0^+$

Como $0 < 13 < 25{,}102$, ou seja, como $C(0) < 13 < C(15)$, então, podemos concluir, pelo Teorema de Bolzano, que existe $t_0 \in \,]0,15[$ tal que $C(t_0) = 13$, ou seja que, durante os primeiros 15 minutos após a colocação do produto químico na água, houve, pelo menos, um instante em que a concentração do produto foi 13 gramas por litro.

C.A.

$C(0) = 0{,}5(0)^2 \times e^{-0{,}1\times 0} =$

$= 0 \times e^0 = 0$

$C(15) = 0{,}5(15)^2 \times e^{-0{,}1\times 15} \approx$

$\approx 25{,}102$

4.2. Começamos por determinar a expressão da derivada:

$$C'(t) = \left(0{,}5t^2 \times e^{-0{,}1t}\right)' = 0{,}5\left((t^2)' \times e^{-0{,}1t} + t^2 \times (e^{-0{,}1t})'\right) = 0{,}5\left(2te^{-0{,}1t} + t^2(-0{,}1e^{-0{,}1t})\right) =$$
$$= 0{,}5 \times 2te^{-0{,}1t} - 0{,}5 \times 0{,}1t^2e^{-0{,}1t} = te^{-0{,}1t} - 0{,}05t^2e^{-0{,}1t} = te^{-0{,}1t}(1 - 0{,}05t)$$

Calculando os zeros da derivada, vem:

$$C'(t) = 0 \;\Leftrightarrow\; t \times e^{-0{,}1t} \times (1 - 0{,}05t) = 0 \;\Leftrightarrow\; \underbrace{t = 0}_{\text{Eq.Imp.},t>0} \;\vee\; \underbrace{e^{-0{,}1t} = 0}_{\text{Eq.Imp.},e^{-0{,}1t}>0} \;\vee\; 1 - 0{,}05t = 0 \;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\; -0{,}05t = -1 \;\Leftrightarrow\; t = \frac{1}{0{,}05} \;\Leftrightarrow\; t = 20$$

Estudando a variação do sinal da derivada e relacionando com a monotonia da função, vem:

t	0		20	$+\infty$
C'	+	+	0	−
C	min	↗	Máx	↘

Assim, como C é crescente no intervalo $]0,20]$ e decrescente no intervalo $[20,+\infty[$ podemos concluir que quando $t = 20$, a concentração do produto químico na água é máxima.

5.

5.1. A função g é contínua em $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ porque resulta de operações sucessivas entre funções contínuas. Para que a função g seja contínua em $\mathbb{R}$, tem que ser contínua em $x=0$, ou seja, tem que verificar a condição $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = f(0)$

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{-x+\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right)}{x} = \lim_{x\to 0} -\frac{x}{x} + \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right)}{x} = -1 + \lim_{y\to 0}\frac{\operatorname{sen} y}{2y} =$$

$$= -1 + \frac{1}{2}\underbrace{\lim_{y\to 0}\frac{\operatorname{sen} y}{y}}_{\text{Lim. Notável}} = -1+\frac{1}{2}(1) = -\frac{1}{2}$$

Seja $y=\frac{x}{2}$

logo $x=2y$

Se $x\to 0$
então $y\to 0$

Como $f(0)=e^k-1$, para que a função seja contínua, tem que se verificar:

$$e^k - 1 = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow e^k = 1-\frac{1}{2} \Leftrightarrow e^k = \frac{1}{2} \Leftrightarrow k = \ln\left(\frac{1}{2}\right) \Leftrightarrow k = \ln 1 - \ln 2 \Leftrightarrow k = -\ln 2$$

5.2. Para resolver a equação, começamos por determinar a expressão analítica de f':

$$f'(x) = \left(-x+\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right)\right)' = (-x)' + \left(\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right)\right)' = -1 + \left(\frac{x}{2}\right)'\cos\left(\frac{x}{2}\right) = -1+\frac{1}{2}\cos\left(\frac{x}{2}\right)$$

Logo, vem que:

$$2f'(x) = (f(x)+x)^2 - 1 \Leftrightarrow 2\left(-1+\frac{1}{2}\cos\left(\frac{x}{2}\right)\right) = \left(-x+\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right)+x\right)^2 - 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -2+\cos\left(\frac{x}{2}\right) = \operatorname{sen}^2\left(\frac{x}{2}\right) - 1 \Leftrightarrow -2+\cos\left(\frac{x}{2}\right) = -\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cos^2\left(\frac{x}{2}\right) + \cos\left(\frac{x}{2}\right) - 2 = 0 \Leftrightarrow y^2+y-2=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y = \frac{-1\pm\sqrt{1^2-4(1)(-2)}}{2(1)} \Leftrightarrow y=1 \lor y=-2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cos\left(\frac{x}{2}\right) = 1 \lor \cos\left(\frac{x}{2}\right) = -2$$

(fórmula fundamental)

Se $y=\cos\left(\frac{x}{2}\right)$

Como $\cos\left(\frac{x}{2}\right) = -2$ é uma equação impossível, temos:

$$\cos\left(\frac{x}{2}\right) = 1 \Leftrightarrow \frac{x}{2} = 2k\pi\,, k\in\mathbb{Z} \Leftrightarrow x = 4k\pi\,, k\in\mathbb{Z}$$

Logo, o conjunto das soluções da equação (em $]-2\pi,5\pi[$), é $\{0,4\}$

6. Das funções representadas graficamente, a única que satisfaz cumulativamente todas as condições definidas é a **opção (I)**.
Podemos rejeitar:

- a **opção (II)**, porque sabemos que $\lim\limits_{x\to-\infty}(h(x)-1)=0$, ou seja $\lim\limits_{x\to-\infty}h(x)=1$, e na função representada nesta opção temos que $\lim\limits_{x\to-\infty}h(x)=-1$
- a **opção (III)**, porque sabemos que h tem um mínimo relativo em $]a,c[$, porque a função representada nesta opção é crescente neste intervalo, pelo que não se verifica a existência de um mínimo.
- a **opção (IV)**, porque sabemos que $h''(x)>0$ para $x>b$, ou seja, no intervalo $]b,+\infty[$, o gráfico tem a concavidade voltada para cima, e no gráfico da função representada nesta opção, verifica-se o oposto - no intervalo $]b,+\infty[$, o gráfico tem a concavidade voltada para baixo.

7. Para que um ponto esteja a 2 unidades de distância da origem, deve estar sobre a circunferência de centro na origem e raio 2, ou seja verificar a condição $x^2 + y^2 = 2^2 \quad \Leftrightarrow \quad y^2 = 4 - x^2 \quad \Leftrightarrow \quad y = \pm\sqrt{4 - x^2}$

   Logo temos que a abcissa do ponto do gráfico de f que dista 2 unidades da origem é a solução da equação $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$ ou então da equação $f(x) = -\sqrt{4 - x^2}$

   Assim, traçando, na calculadora gráfica, os gráficos da função f, numa janela compatível com o domínio f, $(x > 0)$ - reproduzidos na figura ao lado, vemos que a abcissa pretendida é a solução da equação $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$, pelo que também é necessário traçar o gráfico de $g(x) = \sqrt{4 - x^2}$ (também reproduzido na figura ao lado).

   Recorrendo à função da calculadora para determinar valores aproximados das coordenadas dos pontos de interseção de dois gráficos, obtemos o valor, aproximado às centésimas, de 0,48 para a abcissa do ponto P