Propostas de Resolução

Geometria e Medida

Polígonos. Quadriláteros. Áreas

Rever + Praticar – páginas 106 a 109

1.

1.1. O triângulo [*ABC*] é equilátero. Como a lados de igual comprimento se opõem ângulos com a mesma amplitude, então $A\hat{C}B = C\hat{B}A = 60^\circ$. Como o pentágono é regular, $\hat{\beta} = D\hat{C}A = F\hat{E}D = 108^\circ$.

1.2. $\hat{\alpha} = 180^\circ - \hat{\beta} - A\hat{C}B = 180^\circ - 108^\circ - 60^\circ =$
$= 12^\circ$

1.3. $B\hat{A}F = B\hat{A}C + C\hat{A}F$

$B\hat{A}F = 60^\circ + 108^\circ = 168^\circ$

2. [A] Verdadeira, pois, num triângulo, a amplitude de um ângulo externo é igual à soma das amplitudes dos ângulos internos não adjacentes.

[B] Verdadeira, pois $\hat{w}$ e $\hat{z}$ são ângulos adjacentes e suplementares.

[C] Verdadeira, pois, num triângulo, a soma das amplitudes dos ângulos internos é igual a 180º.

A opção correta é a [D].

3.

3.1. A soma das amplitudes dos ângulos internos de um quadrilátero é igual a 360º.

3.2. $\hat{\alpha} = 360^\circ - 117^\circ - 90^\circ - 90^\circ = 63^\circ$

4.

4.1. $A = \frac{P}{2} \times ap$, sendo P – perímetro do polígono e ap – apótema do polígono.

$P = 6 \times 8$ dm $= 48$ dm

$ap = 6{,}93$ dm

$A = \frac{48}{2} \times 6{,}93 = 166{,}32$

Logo, $A = 166{,}32$ dm^2.

4.2. $A = \frac{P}{2} \times ap$, sendo P – perímetro do polígono e ap – apótema do polígono.

$P = 8 \times 6$ cm $= 48$ cm

$ap = 7{,}2$ cm

$A = \frac{48}{2} \times 7{,}2 = 172{,}8$

Logo, $A = 172{,}8$ cm^2.

5.

5.1. $A = \frac{B + b}{2} \times h$, sendo b – base menor, B – base maior e h – altura.

$A = \frac{7 + 4}{2} \times 3{,}5 = \frac{11}{2} \times 3{,}5 = 5{,}5 \times 3{,}5 = 19{,}25$

Logo, $A = 19{,}25$ cm^2.

5.2. $A = \frac{B + b}{2} \times h$, sendo b – base menor, B – base maior e h – altura.

$A = \frac{6 + 2}{2} \times 3 = \frac{8}{2} \times 3 = 4 \times 3 = 12$

Logo, $A = 12$ cm^2.

6.

6.1. $A_{\triangle} = \frac{b \times h}{2}$, sendo b – base e h – altura.

$A_{[HFE]} = \frac{8 \times 2}{2} = 8$

$A_{[FHG]} = \frac{8 \times 6}{2} = 24$

$A_{[HEFG]} = 8 + 24 = 32$

Logo, $A_{[HEFG]} = 32$ cm^2.

6.2. $A_{[ABCD]} = \frac{B + b}{2} \times h$, sendo b – base menor, B – base maior e h – altura.

$A_{[ABCD]} = \frac{16 + 4}{2} \times 12 = 120$

$A_{\text{sombreada}} = 120 - 32 = 88$

Logo, a área colorida da figura é 88 cm^2.

Praticar + – páginas 110 a 113

1.

1.1. B, C, D, E e F são trapézios porque são quadriláteros com lados paralelos.

1.2. F é um trapézio não paralelogramo, porque é um quadrilátero que não tem dois pares de lados paralelos.

1.3. C e E são retângulos, porque são quadriláteros com quatro ângulos retos.

1.4. D e E são losangos, porque são paralelogramos com quatro lados geometricamente iguais.

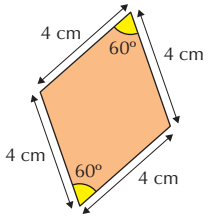
1.5. A e G são papagaios, porque são quadriláteros com dois pares de lados consecutivos geometricamente iguais e cujos lados opostos não são iguais.

1.6. E é um quadrado, porque é um paralelogramo com quatro lados geometricamente iguais e quatro ângulos retos.

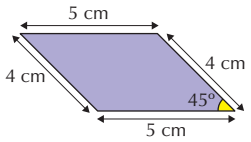
Propostas de Resolução

1.7. G é um polígono côncavo, uma vez que existem segmentos de reta que unem dois pontos do polígono e não estão contidos no polígono.
1.8. D é um polígono convexo, uma vez que quaisquer que sejam dois dos seus pontos, o segmento de reta que os une está contido no polígono.

2.
2.1.



2.2.



3.
3.1. Losango
3.2. Quadrado
3.3. Paralelogramo

4. A amplitude de um ângulo interno de um polígono regular é $\frac{180º \times (n-2)}{n}$, sendo n o número de lados do polígono. Assim:
$\frac{180º \times (20-2)}{20} = \frac{3240º}{20} = 162º$
Logo, a opção correta é a [C].

5.
5.1. Num paralelogramo, os ângulos consecutivos são suplementares.
$C\hat{B}A = 180º - B\hat{A}D$, pois CBA e BAD são ângulos suplementares. Assim, $C\hat{B}A = 180º - 50º = 130º$.
5.2. Num paralelogramo, os ângulos opostos têm a mesma amplitude.
$A\hat{D}C = C\hat{B}A$ porque ADC e CDA são ângulos opostos de um paralelogramo. Assim, $A\hat{D}C = 130º$.

6.
6.1. $A = \frac{P}{2} \times ap$, sendo P – perímetro do polígono e ap – apótema do polígono.
$P = 5 \times 15$ cm $= 75$ cm
$ap = 10{,}2$ cm
$A = \frac{75}{2} \times 10{,}2 = 382{,}5$
A área do pentágono é 382,5 cm^2.

6.2. $A = \frac{P}{2} \times ap$, sendo P – perímetro do polígono e ap – apótema do polígono.
$P = 9 \times 12$ cm $= 108$ cm
$ap = 16{,}5$ cm
$A = \frac{108}{2} \times 16{,}5 = 891$ cm^2
A área do eneágono é 891 cm^2.

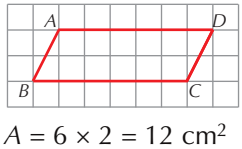
7.
7.1. $A = \frac{b+B}{2} \times h$, sendo b – base menor, B – base maior e h – altura.
$A = \frac{4+12}{2} \times 4 = 32$
A área do trapézio é 32 cm^2.
7.2. $A = \frac{b+B}{2} \times h$, sendo b – base menor, B – base maior e h – altura.
$A = \frac{8+12}{2} \times 6 = 60$
A área do trapézio é 60 cm^2.
7.3. $A = \frac{b+B}{2} \times h$, sendo b – base menor, B – base maior e h – altura.
$A = \frac{2+4}{2} \times 5 = 15$
A área do trapézio é 15 cm^2.

8. A soma das amplitudes dos ângulos internos de um polígono convexo de n lados é $(n-2) \times 180º$.
Neste caso, $(5-2) \times 180º = 3 \times 180º = 540º$.
Assim:
$\hat{\alpha} = 540º - (74º + 115º + 100º + 104º)$
$\Leftrightarrow \hat{\alpha} = 540º - 393º$
$\Leftrightarrow \hat{\alpha} = 147º$

9. Um hexágono tem 6 diagonais e um triângulo não tem diagonais, uma vez que não é possível unir dois vértices não consecutivos.

10. A opção [C] pode ser falsa. O único losango com diagonais geometricamente iguais é o quadrado. Todos os outros losangos têm diagonais com comprimentos diferentes.

11.
11.1.



11.2. $A = 6 \times 2 = 12$ cm^2

12. A soma das amplitudes dos ângulos internos de um polígono convexo de n lados é $(n - 2) \times 180^\circ$.

12.1. A soma das amplitudes dos ângulos internos do polígono é $(5 - 2) \times 180^\circ = 3 \times 180^\circ = 540^\circ$.

Assim:

$x = 540^\circ - (68^\circ + 125^\circ + 122^\circ + 70^\circ) =$
$= 540^\circ - 385^\circ =$
$= 155^\circ$

12.2. A soma das amplitudes dos ângulos internos do polígono é $(4 - 2) \times 180^\circ = 2 \times 180^\circ = 360^\circ$.

Assim:

$$x + 2x + 90^\circ + 90^\circ = 360^\circ \Leftrightarrow 3x = 180^\circ \Leftrightarrow x = \frac{180^\circ}{3} \Leftrightarrow x = 60^\circ$$

12.3. A amplitude de um ângulo interno de um polígono regular é $\frac{180^\circ \times (n - 2)}{n}$. Logo:

$$x = \frac{180^\circ \times 7}{9} \Leftrightarrow x = \frac{1260^\circ}{9} \Leftrightarrow x = 140^\circ$$

12.4. Dois ângulos consecutivos de um losango são suplementares. Logo:

$x = 180^\circ - 48^\circ \Leftrightarrow x = 132^\circ$

13. A amplitude de um ângulo interno de um polígono regular com n lados é $\frac{(n - 2) \times 180^\circ}{n}$. Assim:

$$\frac{(n - 2) \times 180^\circ}{n} = 140 \Leftrightarrow 180n - 360^\circ = 140n \Leftrightarrow 180n - 140n = 360^\circ \Leftrightarrow 40n = 360^\circ \Leftrightarrow n = \frac{360^\circ}{40} \Leftrightarrow n = 9$$

O polígono tem nove lados.

14.

14.1. Como DCB e BAD são ângulos opostos do paralelogramo, então são geometricamente iguais. Logo, $D\hat{C}B = 119^\circ$.

14.2. Como CBA e BAD são ângulos consecutivos do paralelogramo, então são suplementares.

Logo, $C\hat{B}A = 180^\circ - 119^\circ = 61^\circ$.

14.3. $\overline{DC} = \overline{AB} = 6$ cm, porque lados opostos de um paralelogramo são geometricamente iguais.

15. Os ângulos CED e AEC são suplementares. Logo, $\hat{y} = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$.

Como a soma das amplitudes dos ângulos internos de um triângulo é 180° e os ângulos BAD e DCB são ângulos opostos do paralelogramo, então são geometricamente iguais.

Assim:

$\hat{z} = 180^\circ - 70^\circ - 60^\circ = 50^\circ$

$\hat{x} = 60^\circ - \hat{z} = 60^\circ + 50^\circ = 110^\circ$

16. Como o retângulo $[ABCD]$ é equivalente a um losango, então têm a mesma área.

$A = \frac{d \times D}{2}$, sendo d – diagonal menor e D – diagonal maior.

$$A = \frac{25 \times 8}{2} = 100$$

Então, a área do retângulo também é 100 cm^2.

Como $A = b \times h$, sendo b – base e h – altura, temos:

$100 = 10 \times \overline{AD} \Leftrightarrow \overline{AD} = 10$

Assim, $\overline{AD} = 10$ cm.

17. A afirmação é falsa. O retângulo é um quadrilátero com quatro ângulos retos e não é regular.

18.

18.1. A soma das amplitudes dos ângulos internos de um polígono convexo é $(n - 2) \times 180^\circ$.

Assim:

$$(n - 2) \times 180^\circ = 4140 \Leftrightarrow n - 2 = \frac{4140}{180} \Leftrightarrow n - 2 = 23 \Leftrightarrow n = 23 + 2 \Leftrightarrow n = 25$$

O polígono tem 25 lados.

18.2. $n - 3 = 25 - 3 = 22$

Podem ser traçadas 22 diagonais.

19. $\overline{BC} = \frac{3}{2}\overline{AD} \Leftrightarrow \overline{BC} = \frac{3}{2} \times 4 \Leftrightarrow \overline{BC} = 6$ cm

$$A_{[ABCD]} = \frac{\overline{BC} + \overline{AD}}{2} \times \overline{DE}$$

$$A_{[ABCD]} = \frac{4 + 6}{2} \times 5 = 5 \times 5 = 25$$

Logo, $A_{[ABCD]} = 25$ cm^2.

20. $A_{[BCDE]} = 16 \Leftrightarrow \frac{\overline{DC} + \overline{EB}}{2} \times \overline{CF} = 16$

Como $\overline{DC} = \overline{AB}$, temos:

$$\frac{\overline{AB} + \frac{1}{3}\overline{AB}}{2} \times 4 = 16$$

$$\Leftrightarrow \frac{3}{3}\overline{AB} + \frac{1}{3}\overline{AB} = \frac{16 \times 2}{4}$$

$$\Leftrightarrow \frac{4}{3}\overline{AB} = 8$$

$$\Leftrightarrow \overline{AB} = \frac{8 \times 3}{4}$$

Propostas de Resolução

$\Leftrightarrow \overline{AB} = 6$
$A_{[ABCD]} = \overline{AB} \times \overline{CF}$
$A_{[ABCD]} = 6 \times 4 = 24 \text{ cm}^2$

21. Como o polígono foi dividido em cinco triângulos, o número de lados é $5 + 2 = 7$.
Logo, é um heptágono.

22. Não concordo com o João. Os únicos paralelogramos cujas diagonais são perpendiculares são o quadrado e o losango.

23. $E\hat{C}D = \frac{180^\circ}{3} = 60^\circ$, porque $[CED]$ é um triângulo equilátero e a soma das amplitudes dos ângulos internos de um triângulo é 180º.
$B\hat{C}F = 360^\circ - 90^\circ - 90^\circ - 60^\circ = 120^\circ$
A soma das amplitudes dos ângulos internos do polígono $[BHIFC]$ é $(5 - 2) \times 180^\circ = 3 \times 180^\circ = 540^\circ$.
Assim, $\hat{\theta} = 540^\circ - 79^\circ - 87^\circ - 129^\circ - 120^\circ = 125^\circ$.

24.
24.1. $\overline{AB} = \overline{AE}$ porque $[AB]$ e $[AE]$ são raios da mesma circunferência de centro A.
24.2. Como AEB e EAD são ângulos agudos de lados paralelos, então $A\hat{E}B = E\hat{A}D = 56^\circ$.
24.3. Como o triângulo $[ABE]$ é isósceles, $(\overline{AB} = \overline{AE})$, então $A\hat{E}B = E\hat{B}A$.
Como a soma das amplitudes dos ângulos internos de um triângulo é 180º, $B\hat{A}E = 180^\circ - 56^\circ - 56^\circ = 68^\circ$.
24.4. Como DCB e BAD são ângulos opostos de um paralelogramo, então são geometricamente iguais.
$D\hat{C}B = B\hat{A}D = B\hat{A}E + E\hat{A}D = 68^\circ + 56^\circ = 124^\circ$

25. Como o polígono $[ABCDE]$ é um pentágono regular, então $\hat{\alpha} = \frac{(5 - 2) \times 180^\circ}{5} = 540^\circ : 5 = 108^\circ$.
Considerando o triângulo $[BAF]$, temos:
$F\hat{A}B = A\hat{B}F = 180^\circ - 108^\circ = 72^\circ$
Logo, como a soma das amplitudes dos ângulos internos de um triângulo é 180º, então:
$\hat{\beta} = B\hat{F}A = 180^\circ - 72^\circ - 72^\circ = 36^\circ$
Assim, $\hat{\alpha} = 108^\circ$ e $\hat{\beta} = 36^\circ$.

Congruência e semelhança

Rever + Praticar – páginas 114 a 117

1. $r = 2$
A razão de semelhança entre duas figuras semelhantes é a razão entre quaisquer comprimentos de dois segmentos de reta correspondentes, ou seja:
- $\frac{12}{c} = 2$, $c = \frac{12}{2} = 6$
- $\frac{10}{\ell} = 2$, $\ell = \frac{10}{2} = 5$

As dimensões da figura B são 6 cm e 5 cm.

2. A. Verdadeira. Se são geometricamente iguais têm a mesma forma e dimensões. Se têm a mesma forma são semelhantes.
B. Falsa. Duas figuras semelhantes podem não ter as mesmas dimensões, pelo que podem não ser geometricamente iguais.

3. A razão de semelhança entre dois círculos é igual ao quociente entre os respetivos raios, ou seja, é igual a $\frac{1,2}{r}$. Por outro lado, sabe-se que a razão de semelhança é $\frac{2}{5}$. Assim:
$\frac{1,2}{r} = \frac{2}{5} \Leftrightarrow r = \frac{5 \times 1,2}{2} \Leftrightarrow r = 3$
Podemos então concluir que o comprimento do raio do círculo original é 3 cm.

4. Os retângulos $[QRST]$ e $[UVWZ]$ são semelhantes porque são quadrados, ou seja, polígonos regulares com o mesmo números de lados.
Os retângulos $[ABCD]$ e $[IJKL]$ são semelhantes porque os ângulos correspondentes são geometricamente iguais (90º) e os comprimentos dos lados correspondentes são diretamente proporcionais $\left(\frac{2}{1} = \frac{6}{3} = 2\right)$.
Os retângulos $[EFGH]$ e $[MNOP]$ são semelhantes porque os ângulos correspondentes são geometricamente iguais (90º) e os comprimentos dos lados correspondentes são diretamente proporcionais $\left(\frac{4}{2} = \frac{2}{1} = 2\right)$.

5.
5.1. $\frac{\overline{DE}}{\overline{AB}} = \frac{12,5}{5} = 2,5$
$\frac{\overline{EF}}{\overline{BC}} = \frac{10}{4} = 2,5$
$\frac{\overline{DF}}{\overline{AC}} = \frac{5}{2} = 2,5$
} Os comprimentos dos lados correspondentes são proporcionais.
Pelo critério LLL, o triângulo $[ABC]$ é semelhante ao triângulo $[DEF]$, ou seja, a afirmação é verdadeira.
5.2. a) segundo uma ampliação ($r > 1$):
$r = \frac{\overline{DE}}{\overline{AB}} = \frac{12,5}{5} = 2,5$

b) segundo uma redução ($r < 1$):

$r = \frac{\overline{AB}}{\overline{DE}} = \frac{5}{12,5} = 0,4$

6. $B\hat{E}A = A\hat{C}D = 90^\circ$ e $D\hat{A}C = E\hat{A}C$ porque é um ângulo comum aos dois triângulos. Assim, pelo critério Ângulo-Ângulo, os triângulos [*ABE*] e [*ACD*] são semelhantes.

7.

7.1. Como as retas *CB* e *ED*, que são paralelas, intersetam as retas *AC* e *AB*, que são concorrentes, então, pelo teorema de Tales, os triângulos obtidos têm os comprimentos dos lados correspondentes proporcionais. Assim:

$\frac{\overline{AC}}{\overline{AE}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AD}}$

$\frac{9}{4} = \frac{\overline{AB}}{3} \Leftrightarrow \overline{AB} = \frac{9 \times 3}{4} \Leftrightarrow \overline{AB} = \frac{27}{4}$

Logo, $\overline{AB} = \frac{27}{4}$ cm.

7.2. Como as retas *BE* e *CD*, que são paralelas, intersetam as retas *AD* e *AC*, que são concorrentes, então, pelo teorema de Tales, os triângulos obtidos têm os comprimentos dos lados correspondentes proporcionais. Assim:

$\frac{\overline{AD}}{\overline{AE}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}}$

$\frac{8}{3} = \frac{\overline{AB} + 2}{\overline{AB}} \Leftrightarrow 8\overline{AB} = 3\overline{AB} + 6 \Leftrightarrow 5\overline{AB} = 6$

$\Leftrightarrow \overline{AB} = \frac{6}{5}$

Logo, $\overline{AB} = \frac{6}{5}$ cm.

7.3. Como as retas *BC* e *DE*, que são paralelas, intersetam as retas *AD* e *AE*, que são concorrentes, então, pelo teorema de Tales, os triângulos obtidos têm os comprimentos dos lados correspondentes proporcionais. Assim:

$\frac{\overline{AD}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AE}}{\overline{AC}}$

$\frac{10}{\overline{AB}} = \frac{12}{4} \Leftrightarrow \overline{AB} = \frac{10 \times 4}{12} \Leftrightarrow \overline{AB} = \frac{40}{12}$

$\Leftrightarrow \overline{AB} = \frac{10}{3}$

Logo, $\overline{AB} = \frac{10}{3}$ cm.

8. Sabe-se que se duas retas determinam em duas retas concorrentes, segmentos de reta correspondentes proporcionais, então essas duas retas são paralelas.

Basta então verificar se $\frac{\overline{AB}}{\overline{AD}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AE}}$.

Como $\frac{10}{5} = \frac{8}{4}$, isto é, $2 = 2$ (verdadeiro), podemos concluir que as retas *BC* e *DE* são paralelas.

Praticar + – páginas 118 a 121

1. A razão de semelhança é igual à razão entre os comprimentos dos lados correspondentes.

Retângulo C: razão de semelhança $\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

Retângulo F: razão de semelhança $\frac{2}{2} = \frac{4}{4} = 1$

2. A opção correta é a [A].

3. A razão de semelhança é igual à razão entre os comprimentos dos lados correspondentes.

$\frac{\overline{FA'}}{\overline{FA}} = \frac{2}{3}$

4.

4.1. Utilizando, por exemplo, o critério LLL, temos:

$\frac{\overline{FE}}{\overline{IJ}} = \frac{\overline{DE}}{\overline{HI}} = \frac{\overline{DF}}{\overline{HJ}}$

Assim, $\frac{10}{15} = \frac{6}{9} = \frac{8}{12} \Leftrightarrow \frac{2}{3} = \frac{2}{3} = \frac{2}{3}$ (V).

Os triângulos [*DEF*] e [*IHJ*] são semelhantes, pelo critério LLL.

4.2. Utilizando o critério LAL, temos:

- $A\hat{C}B = D\hat{E}F$
- $\frac{\overline{AC}}{\overline{DF}} = \frac{\overline{CB}}{\overline{FE}}$, ou seja, $\frac{6}{4} = \frac{12}{8} \Leftrightarrow \frac{3}{2} = \frac{3}{2}$ (V)

Os triângulos [*ABC*] e [*DEF*] são semelhantes, pelo critério LAL.

4.3. Utilizando o critério AA, temos:

- $G\hat{I}H = 180^\circ - 50^\circ - 58^\circ = 72^\circ$.
- $Y\hat{X}Z = 180^\circ - 72^\circ - 52^\circ = 58^\circ$.

Assim, $\hat{H} = \hat{X}$ e $\hat{G} = \hat{J}$.

Os triângulos [*GHI*] e [*JXY*] são semelhantes, pelo critério AA.

4.4. Utilizando o critério LAL, temos:

- $T\hat{R}S = V\hat{U}K = 90^\circ$
- $\frac{\overline{TR}}{\overline{KU}} = \frac{\overline{RS}}{\overline{UV}}$, ou seja, $\frac{12}{16} = \frac{3}{4} \Leftrightarrow \frac{3}{4} = \frac{3}{4}$ (V)

Os triângulos [*STR*] e [*KUV*] são semelhantes, pelo critério LAL.

Propostas de Resolução

5.

5.1. Aplicando o teorema de Tales:

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{CE}}{\overline{CD}}$$

Assim:

$$\frac{\overline{AC}}{4} = \frac{6}{3} \Leftrightarrow \overline{AC} = \frac{4 \times 6}{3}$$

$$\Leftrightarrow \overline{AC} = 8$$

Como $\overline{AB} = \overline{AC} - \overline{BC}$, então $\overline{AB} = 8 - 4 = 4$.

Assim, $\overline{AB} = 4$ cm.

5.2. Aplicando o teorema de Tales:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{CD}} = \frac{\overline{AE}}{\overline{CE}}$$

Assim:

$$\frac{\overline{AB}}{5} = \frac{8}{4} \Leftrightarrow \overline{AB} = \frac{8 \times 5}{4}$$

$$\Leftrightarrow \overline{AB} = 10$$

Logo, $\overline{AB} = 10$ cm.

6. [A] Todos os círculos são semelhantes, sendo a razão de semelhança igual à razão entre os comprimentos dos raios.

A opção [B] não é a correta. Se dois círculos tiverem raios diferentes, os círculos não são geometricamente iguais.

A opção [C] não é a correta. Se dois círculos tiverem raios diferentes, eles têm áreas diferentes e, portanto, não são equivalentes.

A opção [D] também não é correta. Os círculos não são polígonos porque não são formados por linhas poligonais fechadas.

Logo, a opção correta é a [A].

7.

7.1. $\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{AD}}{\boldsymbol{\overline{AB}}}$

7.2. $\frac{\overline{AD}}{\overline{DC}} = \frac{\boldsymbol{\overline{BD}}}{\overline{AD}}$

8. Como os triângulos são semelhantes, a razão de semelhança é $r = \frac{51}{17} = 3$.

$P_{[ABC]} = 12 + 14 + 17 = 43$

Como a razão dos perímetros é igual à razão de semelhança, então, $\frac{P_{[TVJ]}}{P_{[ABC]}} = 3$.

Logo, $P_{[TVJ]} = 3 \times 43 \Leftrightarrow P_{[TVJ]} = 129$.

Assim, $P_{[TVJ]} = 129$ u.c.

9. Os triângulos $[ABD]$ e $[BDC]$ são semelhantes pelo critério AA de semelhança de triângulos:

$C\hat{B}A = B\hat{D}C = 90^\circ$ e $B\hat{A}C = B\hat{A}D$ (ângulo comum).

10.

10.1. Como os triângulos $[ABC]$ e $[PQR]$ são semelhantes, os ângulos correspondentes têm a mesma amplitude. Então, $Q\hat{P}R = B\hat{A}C = 16^\circ$.

10.2. Como os triângulos $[ABC]$ e $[PQR]$ são semelhantes, os comprimentos dos lados correspondentes são diretamente proporcionais, ou seja:

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{PR}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{PQ}}$$

Assim:

$$\frac{9}{\overline{PR}} = \frac{14}{7} = \Leftrightarrow \overline{PR} = \frac{7 \times 9}{14}$$

$$\Leftrightarrow \overline{PR} = 4{,}5 \text{ cm}$$

10.3. A razão de semelhança entre $[ABC]$ e $[PQR]$ é $r = \frac{\overline{AB}}{\overline{PQ}} = \frac{14}{7} = 2$.

Como a razão das áreas é o quadrado da razão de semelhança, temos:

$$\frac{A_{[ABC]}}{A_{[PQR]}} = r^2$$

ou seja:

$$\frac{A_{[ABC]}}{7} = 2^2 \Leftrightarrow A_{[ABC]} = 28$$

Assim, $A_{[ABC]} = 28$ cm^2.

11.

11.1. Os triângulos $[CDF]$ e $[ABC]$ são semelhantes, pelo critério AA:

$C\hat{F}D = C\hat{B}A$ e $F\hat{D}C = B\hat{A}C$ (ângulos de lados paralelos).

11.2. $A_{[AFDE]} = \overline{EB} \times \overline{BF}$.

Os triângulos $[AED]$ e $[ABC]$ são semelhantes, pelo critério AA ($D\hat{E}A = C\hat{B}A$ e o ângulo BAC é comum aos dois triângulos). Assim:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AE}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{BF}} \Leftrightarrow \frac{6}{2} = \frac{4}{\overline{BF}}$$

$$\Leftrightarrow \overline{BF} = \frac{2 \times 4}{6}$$

$$\Leftrightarrow \overline{BF} = \frac{4}{3}$$

Logo, $A_{[BFDE]} = 4 \times \frac{4}{3} = \frac{16}{3}$ cm^2.

12.

12.1. Como a razão entre as áreas é o quadrado da razão de semelhança, temos $\frac{A_{[AEFG]}}{A_{[ABCD]}} = r^2$, ou seja:

$$\frac{\frac{81}{4}}{A_{[ABCD]}} = \left(\frac{3}{2}\right)^2 \Leftrightarrow A_{[ABCD]} = \frac{81}{4} : \frac{9}{4}$$

$$\Leftrightarrow A_{[ABCD]} = \frac{81}{4} \times \frac{4}{9}$$

$$\Leftrightarrow A_{[ABCD]} = 9$$

Assim, $A_{[ABCD]} = 9$ u.a.

12.2. Como a razão entre os perímetros é igual à razão de semelhança, temos $\frac{P_{[AEFG]}}{P_{[ABCD]}} = r$, ou seja:

$$\frac{P_{[AEFG]}}{18} = \frac{3}{2} \Leftrightarrow P_{[AEFG]} = \frac{18 \times 3}{2}$$

$$\Leftrightarrow P_{[AEFG]} = 27$$

Logo, o perímetro do retângulo $[AEFG]$ é 27 u.c.

13.

13.1. Como as retas r e s são paralelas, podemos aplicar o teorema de Tales.

Assim, $\frac{\overline{JL}}{\overline{JM}} = \frac{\overline{KJ}}{\overline{JI}}$, ou seja:

$$\frac{x}{8} = \frac{24}{6} \Leftrightarrow x = \frac{24 \times 8}{6} \Leftrightarrow x = 32$$

Assim, $x = 32$ cm.

13.2. Como as retas r e s são paralelas, podemos aplicar o teorema de Tales.

Assim, $\frac{\overline{HF}}{\overline{EH}} = \frac{\overline{GD}}{\overline{EG}}$, ou seja:

$$\frac{x}{16} = \frac{30}{20} \Leftrightarrow x = \frac{16 \times 30}{20} \Leftrightarrow x = 24$$

Assim, $x = 24$ cm.

14. Se as retas DE e BC forem paralelas, então, pelo teorema de Tales, $\frac{\overline{AD}}{\overline{DB}} = \frac{\overline{AE}}{\overline{EC}}$.

Como $\frac{112}{42} \neq \frac{96}{32}$, podemos concluir que as retas não são paralelas.

15.

15.1. Método da homotetia.

15.2. a) $D'\hat{B}'A' = 60°$, porque é o ângulo correspondente ao ângulo DBA.

b) Se $\overline{OA'} = \frac{1}{3}\overline{OA}$, então a razão de semelhança é igual a $\frac{1}{3}$, considerando uma redução.

Como a razão entre as áreas é o quadrado da razão de semelhança, temos $\frac{A_{[A'B'C'D']}}{A_{[ABCD]}} = r^2$, ou seja:

$$\frac{A_{[A'B'C'D']}}{90} = \left(\frac{1}{3}\right)^2 \Leftrightarrow A_{[A'B'C'D']} = \frac{1}{9} \times 90$$

$$\Leftrightarrow A_{[A'B'C'D']} = 10$$

Assim, $A_{[A'B'C'D']} = 10$ cm^2.

16.

16.1. Os triângulos $[ABC]$ e $[AFE]$ são semelhantes, pelo critério AA de semelhança de triângulos:
$C\hat{B}A = A\hat{E}F = 90°$ e $B\hat{A}C = F\hat{A}E$ (ângulo comum aos dois triângulos).

16.2. $A_{[BCEF]} = A_{[ABC]} - A_{[AFE]}$

$$A_{[ABC]} = \frac{\overline{BC} \times \overline{AB}}{2}$$

$$A_{[ABC]} = \frac{3 \times 4}{2} = 6$$

Como os triângulos são semelhantes, os comprimentos dos lados correspondentes são diretamente proporcionais. Assim, $\frac{\overline{FE}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{AE}}{\overline{AB}}$, ou seja:

$$\frac{\overline{FE}}{3} = \frac{2{,}5}{4} \Leftrightarrow \overline{FE} = \frac{2{,}5 \times 3}{4}$$

$$\Leftrightarrow \overline{FE} = 1{,}875$$

$$A_{[AFE]} = \frac{\overline{AE} \times \overline{FE}}{2}$$

$$A_{[AFE]} = \frac{2{,}5 \times 1{,}875}{2} = 2{,}34375$$

$A_{[BCEF]} = 6 - 2{,}34375 \approx 3{,}66$

Assim, $A_{[BCEF]} \approx 3{,}66$ cm^2.

17. Como a razão entre as áreas é o quadrado da razão de semelhança, temos $\frac{A_1}{A_2} = r^2$, ou seja:

$$\frac{144}{A_2} = 4^2 \Leftrightarrow A_2 = \frac{144}{16} \Leftrightarrow A_2 = 9$$

Como $A = \ell^2$, então $A_2 = 9 \Leftrightarrow \ell^2 = 9 \Leftrightarrow \ell = 3$.

Logo, $P = 4 \times 3 = 12$.

Assim, o perímetro do quadrado mais pequeno é 12 cm.

18.

18.1. Os triângulos $[ABC]$ e $[AMN]$ são semelhantes, pelo critério AA: $B\hat{A}C = M\hat{A}N$ (ângulo comum) e $C\hat{B}A = N\hat{M}A$ (ângulos agudos de lados paralelos).

18.2. Como os triângulos são semelhantes e a razão das áreas é o quadrado da razão de semelhança, temos $\frac{A_{[ABC]}}{A_{[AMN]}} = r^2$.

Propostas de Resolução

Assim, como $A_{[AMN]} = A_{\text{trapézio}}$ e $A_{[ABC]} = 2 \times A_{[AMN]}$, então:

$$\frac{2 \times A_{[AMN]}}{A_{[AMN]}} = r^2 \Leftrightarrow r^2 = 2 \Leftrightarrow r = \pm\sqrt{2}$$

Logo, $r = \sqrt{2}$.

Como os triângulos são semelhantes:

$$\frac{\overline{BC}}{\overline{MN}} = r, \text{ ou seja, } \frac{\overline{BC}}{10} = \sqrt{2} \Leftrightarrow \overline{BC} = 10\sqrt{2}.$$

Assim, $\overline{BC} = 10\sqrt{2}$ cm.

Teorema de Pitágoras

Rever + Praticar – páginas 122 a 125

1.

1.1. A altura referente à hipotenusa decompõe um triângulo retângulo em dois triângulos semelhantes entre si e semelhantes ao triângulo dado.

Como os triângulos são semelhantes, têm os lados correspondentes diretamente proporcionais. Assim, $\frac{\overline{BD}}{\overline{AD}} = \frac{\overline{AD}}{\overline{DC}}$.

$$\frac{8}{x} = \frac{x}{3} \Leftrightarrow x^2 = 24$$
$$\Leftrightarrow x = -\sqrt{24} \ \vee \ x = \sqrt{24}$$

Assim, $x = \sqrt{24} \approx 4{,}90$ (2 c.d.)

1.2. A altura referente à hipotenusa decompõe um triângulo em dois triângulos semelhantes entre si e semelhantes ao triângulo dado. Como os triângulos são semelhantes, têm os lados correspondentes diretamente proporcionais. Assim, $\frac{\overline{AC}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{DC}}$.

$$\frac{x + 4{,}2}{7{,}8} = \frac{7{,}8}{4{,}2} \Leftrightarrow x + 4{,}2 = \frac{7{,}8 \times 7{,}8}{4{,}2}$$
$$\Leftrightarrow x \approx 10{,}29 \text{ (2 c.d.)}$$

2.

2.1. $\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{BD}}{\overline{\boldsymbol{AD}}}$

2.2. $\frac{\overline{EF}}{\overline{EG}} = \frac{\overline{\boldsymbol{EH}}}{\overline{EF}}$

3. Pelo teorema de Pitágoras, sabemos que, em cada figura, a área do quadrado maior é igual à soma das áreas dos dois quadrados menores.

3.1. $32 = x + 4 \Leftrightarrow x = 32 - 4 \Leftrightarrow x = 28$

3.2. Calculemos as áreas dos quadrados azul e rosa.

$A_{\text{azul}} = 2 \times 2 = 4 \text{ m}^2$ e $A_{\text{rosa}} = 3 \times 3 = 9 \text{ m}^2$

$x = 4 + 9 \Leftrightarrow x = 13$

4. Pelo teorema de Pitágoras, sabe-se que, num triângulo retângulo, o quadrado da hipotenusa é igual à soma dos quadrados dos catetos.

4.1. $h^2 = 5^2 + 11^2 \Leftrightarrow h^2 = 25 + 121$
$\Leftrightarrow h^2 = 146$
$\Leftrightarrow h = -\sqrt{146} \ \vee \ h = \sqrt{146}$

Como $h > 0$, $h = \sqrt{146} \approx 12{,}08$ cm (2 c.d.).

4.2. $h^2 = (\sqrt{72})^2 + 32 \Leftrightarrow h^2 = 72 + 9$
$\Leftrightarrow h^2 = 81$
$\Leftrightarrow h = -\sqrt{81} \ \vee \ h = \sqrt{81}$
$\Leftrightarrow h = -9 \ \vee \ h = 9$

Como $h > 0$, $h = 9$ cm.

5. Pelo teorema de Pitágoras, sabe-se que num triângulo retângulo, o quadrado da hipotenusa é igual à soma dos quadrados dos catetos.

5.1. $10^2 = c^2 + 8^2 \Leftrightarrow c^2 = 100 - 64$
$\Leftrightarrow c^2 = 36$
$\Leftrightarrow c = -\sqrt{36} \ \vee \ c = \sqrt{36}$
$\Leftrightarrow c = -6 \ \vee \ c = 6$

Como $c > 0$, $c = 6$ cm.

5.2. $12^2 = c^2 + 10^2 \Leftrightarrow c^2 = 144 - 100$
$\Leftrightarrow c^2 = 44$
$\Leftrightarrow c = -\sqrt{44} \vee c = \sqrt{44}$

Como $c > 0$, $c = \sqrt{44} \approx 6{,}63$ cm (2 c.d.).

6. Num triângulo retângulo, o quadrado da hipotenusa é igual à soma dos quadrados dos catetos. Aplicando o recíproco do teorema de Pitágoras, podemos descobrir qual dos triângulos é retângulo.

[A] $7^2 = 3^2 + 4^2 \Leftrightarrow 49 = 9 + 16$
$\Leftrightarrow 49 = 25$ (F)

[B] $(\sqrt{32})^2 = 4^2 + 4^2 \Leftrightarrow 32 = 16 + 16$
$\Leftrightarrow 32 = 32$ (V)

[C] $(\sqrt{150})^2 = 3^2 + 12^2 \Leftrightarrow 150 = 9 + 144$
$\Leftrightarrow 150 = 152$ (F)

[D] $6{,}5^2 = 3^2 + 4^2 \Leftrightarrow 42{,}25 = 9 + 16$
$\Leftrightarrow 42{,}25 = 25$ (F)

Apenas o triângulo [B] é retângulo.

7. Um terno diz-se pitagórico se o quadrado do maior número for igual à soma dos quadrados dos outros dois.

7.1. $15^2 = 12^2 + 10^2 \Leftrightarrow 225 = 144 + 100$
$\Leftrightarrow 225 = 244$ (F)

7.2. $25^2 = 24^2 + 7^2 \Leftrightarrow 625 = 576 + 49$
$\Leftrightarrow 625 = 625$ (V)

7.3. $29^2 = 21^2 + 20^2 \Leftrightarrow 841 = 441 + 400$
$\Leftrightarrow 841 = 841$ (V)
Os ternos (7, 24, 25) e (20, 21, 29) são pitagóricos.

8. A diagonal espacial de um paralelepípedo de comprimento a, largura b e altura c é dada por:
$$d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$
8.1. $a = 3$ cm; $b = 3$ cm e $c = 3$ cm
$d = \sqrt{3^2 + 3^2 + 3^2} \Leftrightarrow d = \sqrt{9 + 9 + 9}$
$\Leftrightarrow d = \sqrt{27}$
A diagonal espacial do cubo tem $\sqrt{27}$ cm $\approx$ 5,20 cm (2 c.d.).
8.2. A base do prisma é um quadrado com área 16 cm^2. Para calcular o comprimento do lado:
$\ell \times \ell = 16 \Leftrightarrow \ell^2 = 16$
$\Leftrightarrow \ell = -\sqrt{16} \vee \ell = \sqrt{16}$
$\Leftrightarrow \ell = -4 \vee \ell = 4$
Como $\ell > 0$, $\ell = 4$.
O quadrado da base tem lado 4 cm. Então, $a = 4$ cm, $b = 4$ cm e $c = 7$ cm.
$d = \sqrt{4^2 + 4^2 + 7^2} \Leftrightarrow d = \sqrt{16 + 16 + 49}$
$\Leftrightarrow d = \sqrt{81}$
$\Leftrightarrow d = 9$
A diagonal espacial do prisma tem comprimento 9 cm.

Praticar + – páginas 126 a 131

1.
1.1. Pelo teorema de Pitágoras:
$x^2 = 7^2 + 10^2 \Leftrightarrow x^2 = 49 + 100$
$\Leftrightarrow x^2 = 149$
$\Leftrightarrow x = \pm\sqrt{149}$
Como $x > 0$, então $x = \sqrt{149}$.
Assim, $x = \sqrt{149}$ m.
1.2. Pelo teorema de Pitágoras:
$x^2 = 4^2 + 4^2 \Leftrightarrow x^2 = 16 + 16$
$\Leftrightarrow x^2 = 32$
$\Leftrightarrow x = \pm\sqrt{32}$
Como $x > 0$, então $x = \sqrt{32} \Leftrightarrow x = 4\sqrt{2}$.
Assim, $x = 4\sqrt{2}$ cm.
1.3. Pelo teorema de Pitágoras:
$4^2 = x^2 + 1^2 \Leftrightarrow x^2 = 16 - 1$
$\Leftrightarrow x^2 = 15$
$\Leftrightarrow x = \pm\sqrt{15}$
Como $x > 0$, então $x = \sqrt{15}$.
Assim, $x = \sqrt{15}$ cm.
1.4. Pelo teorema de Pitágoras:
$(\sqrt{244})^2 = x^2 + 12^2 \Leftrightarrow x^2 = 244 - 144$
$\Leftrightarrow x^2 = 100$
$\Leftrightarrow x = \pm\sqrt{100}$
Como $x > 0$, então $x = 10$.
Assim, $x = 10$ dm.
1.5. Pelo teorema de Pitágoras:
$8^2 = 5^2 + x^2 \Leftrightarrow x^2 = 64 - 25 \Leftrightarrow x^2 = 39$
$\Leftrightarrow x = \pm\sqrt{39}$
Como $x > 0$, então $x = \sqrt{39}$.
Assim, $x = \sqrt{39}$ mm.
1.6. Pelo teorema de Pitágoras:
$6^2 = 5^2 + x^2 \Leftrightarrow x^2 = 36 - 25$
$\Leftrightarrow x^2 = 11$
$\Leftrightarrow x = \pm\sqrt{11}$
Como $x > 0$, então $x = \sqrt{11}$.
Assim, $x = \sqrt{11}$ cm.

2. A opção [A] não é a correta, pois:
$52^2 = 46^2 + 20^2 \Leftrightarrow 2704 = 2116 + 400$
$\Leftrightarrow 2704 = 2516$
A opção [B] não representa um termo pitagórico porque:
$52^2 = 18^2 + 46^2 \Leftrightarrow 2704 = 324 + 2116$
$\Leftrightarrow 2704 = 2440$ (F)
A opção [C] é a correta, pois:
$52^2 = 48^2 + 20^2 \Leftrightarrow 2704 = 2304 + 400$
$\Leftrightarrow 2704 = 2704$ (V)
A opção [D] não é a correta, pois:
$52^2 = 48^2 + 18^2 \Leftrightarrow 2704 = 2304 + 324$
$\Leftrightarrow 2704 = 2628$ (F)
Logo, a opção correta é a [C].

3.
3.1. Pelo teorema de Pitágoras:
$d^2 = 6^2 + 3^2 \Leftrightarrow d^2 = 36 + 9 \Leftrightarrow d^2 = 45$
$\Leftrightarrow d = \pm\sqrt{45}$
Como $d > 0$, então $d = \sqrt{45} \Leftrightarrow d = 3\sqrt{5}$.
Assim, $d = 3\sqrt{5}$ cm.
3.2. $D = \sqrt{3^2 + 6^2 + 4^2} \Leftrightarrow D = \sqrt{9 + 36 + 16}$
$\Leftrightarrow D = \sqrt{61}$ cm

4. Aplicando o recíproco do teorema de Pitágoras, verificamos se o triângulo é retângulo.
$\overline{AB} = 18$ mm
$\overline{BC} = 8$ cm $= 80$ mm
$\overline{AC} = 0{,}82$ dm $= 82$ mm (lados de maior comprimento)

Propostas de Resolução

$\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 \Leftrightarrow 82^2 = 18^2 + 80^2$
$\Leftrightarrow 6724 = 324 + 6400$
$\Leftrightarrow 6724 = 6724$ (V)

O triângulo [*ABC*] é retângulo.

5.

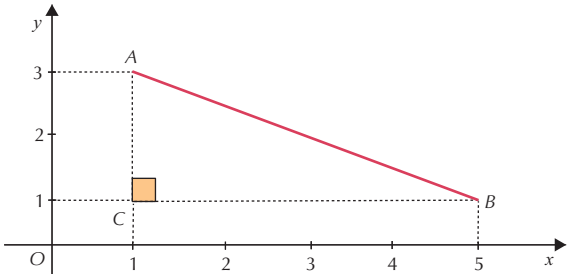
5.1. Os triângulos [*ABC*] e [*BCD*] são semelhantes, pelo critério AA de semelhança de triângulos ($C\hat{D}A = B\hat{D}C$ e *CBA* é comum aos dois triângulos). Assim, os comprimentos dos lados correspondentes dos triângulos são diretamente proporcionais, ou seja, $\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{DB}}$.

$\frac{5}{3} = \frac{3}{x} \Leftrightarrow x = \frac{9}{5} \Leftrightarrow x = 1{,}80$ u.c.

5.2. Os triângulos [*ABC*] e [*ABD*] são semelhantes pelo critério AA ($A\hat{D}B = C\hat{B}A$ e $B\hat{A}D = B\hat{A}C$). Então, os comprimentos dos lados correspondentes dos triângulos são diretamente proporcionais, ou seja, $\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{BD}}{\overline{BC}}$.

$\frac{8}{17} = \frac{x}{15} \Leftrightarrow x \approx 7{,}06$ u.c.

6.



Pelo teorema de Pitágoras $\overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{CB}^2$. Assim:

$\overline{AB}^2 = 2^2 + 4^2 \Leftrightarrow \overline{AB}^2 = 4 + 16$
$\Leftrightarrow \overline{AB}^2 = 20$
$\Leftrightarrow \overline{AB} = \pm\sqrt{20}$

Como $\overline{AB} > 0$, então $\overline{AB} = \sqrt{20} \Leftrightarrow \overline{AB} = 2\sqrt{5}$ u.c.

7. O triângulo [*ABC*] é retângulo em *B* e $\overline{AB} = \overline{BC}$. Pelo teorema de Pitágoras, $\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2$. Assim:

$(\sqrt{50})^2 = x^2 + x^2 \Leftrightarrow 50 = 2x^2 \Leftrightarrow x^2 = 25$
$\Leftrightarrow x = \pm\sqrt{25}$

Como $x > 0$, então $x = 5$.

$\overline{BE} = 5$ m e $\overline{BD} = 2 \times 5$ cm $= 10$ cm

$A_{[BEFD]} = 5 \times 10 = 50$

Assim, $A_{[BEFD]} = 50$ cm^2.

8. $A_{[ACGF]} = 25 \Leftrightarrow \overline{FA} = \sqrt{25} \Leftrightarrow \overline{FA} = 5$ cm

Pelo teorema de Pitágoras:

$\overline{AC}^2 = 5^2 + 12^2 \Leftrightarrow \overline{AC}^2 = 25 + 144$
$\Leftrightarrow \overline{AC}^2 = 169$
$\Leftrightarrow \overline{AC} = \pm\sqrt{169}$

Como $\overline{AC} > 0$, então $\overline{AC} = 13$.

$P_{[ABCDE]} = 5 + 12 + 3 \times 13 = 56$

Assim, $P_{[ABCDE]} = 56$ cm.

9. $A = 225 \Leftrightarrow \ell = \sqrt{225} \Leftrightarrow \ell = 15$

Pelo teorema de Pitágoras:

$d^2 = 15^2 + 15^2 \Leftrightarrow d^2 = 2 \times 225 \Leftrightarrow d^2 = 450$
$\Leftrightarrow d = \pm\sqrt{450}$

Como $d > 0$, então $d = 15\sqrt{2}$.

A diagonal do quadrado tem comprimento $15\sqrt{2}$ cm.

10. Pelo teorema de Pitágoras, $\overline{CE}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{BE}^2$.

$10^2 = \overline{BC}^2 + 8^2 \Leftrightarrow \overline{BC}^2 = 100 - 64$
$\Leftrightarrow \overline{BC}^2 = 36$
$\Leftrightarrow \overline{BC} = \pm\sqrt{36}$

Como $\overline{BC} > 0$, então $\overline{BC} = 6$.

$A_{[ABCD]} = \overline{BC}^2 = 6^2 = 36$

Assim, $A_{[ABCD]} = 36$ cm^2.

11. Pelo recíproco do teorema de Pitágoras:

[A] $6^2 = 3^2 + 4^2 \Leftrightarrow 36 = 9 + 16 \Leftrightarrow 36 = 25$ (F)

[B] $(\sqrt{90})^2 = 7^2 + 7^2 \Leftrightarrow 90 = 49 + 49 \Leftrightarrow 90 = 98$ (F)

[C] $(\sqrt{42})^2 = (\sqrt{5})^2 + (\sqrt{37})^2 \Leftrightarrow 42 = 5 + 37$
$\Leftrightarrow 42 = 42$ (V)

[D] $10^2 = 6^2 + 4^2 \Leftrightarrow 100 = 36 + 16 \Leftrightarrow 100 = 52$ (F)

Logo, a opção correta é a [C].

12.

12.1. Sabemos que $P_{[ABCD]} = 13 + \sqrt{41}$. Então:

$13 + \sqrt{41} = \overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CD} + \overline{DA}$
$\Leftrightarrow 13 + \sqrt{41} = 5 + 5 + 3 + \overline{DA}$
$\Leftrightarrow \overline{DA} = \sqrt{41}$

Assim, $\overline{DA} = \sqrt{41}$ cm.

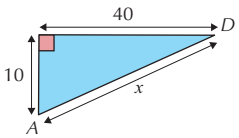
12.2. Como $D\hat{B}A = 90°$, segundo o teorema de Pitágoras, temos $\overline{AD}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BD}^2$. Assim:

$(\sqrt{41})^2 = 5^2 + \overline{BD}^2 \Leftrightarrow \overline{BD}^2 = 41 - 25$
$\Leftrightarrow \overline{BD}^2 = 16$
$\Leftrightarrow \overline{BD} = \pm\sqrt{16}$

Como $\overline{BD} > 0$, então $\overline{BD} = 4$ cm.

O triângulo [*BCD*] é retângulo se $\overline{BC}^2 = \overline{BD}^2 + \overline{CD}^2$, ou seja, $5^2 = 4^2 + 3^2 \Leftrightarrow 25 = 16 + 9$ (V).

13.



Pelo teorema de Pitágoras:

$x^2 = 10^2 + 40^2 \Leftrightarrow x^2 = 100 + 1600$

$\Leftrightarrow x^2 = 1700$

$\Leftrightarrow x = \pm\sqrt{1700}$

Como $x > 0$, então $x = \sqrt{1700}$.

$3 \times \sqrt{1700} \approx 124$

O custo da construção do novo troço é, aproximadamente, 124 milhões de euros.

14. $A_{[ABCD]} = 225 \Leftrightarrow \overline{CD} = \sqrt{225} \Leftrightarrow \overline{CD} = 15$ cm

Então, $\overline{DE} = 2 \times \overline{CD} = 2 \times 15 = 30$ cm.

Pelo teorema de Pitágoras, $\overline{DE}^2 = \overline{DF}^2 + \overline{EF}^2$.

$30^2 = x^2 + x^2 \Leftrightarrow 900 = 2x^2 \Leftrightarrow x^2 = \frac{900}{2}$

$\Leftrightarrow x^2 = 450$

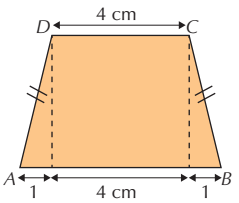
$\Leftrightarrow x = \pm\sqrt{450}$

Como $x > 0$, então $x = \sqrt{450}$.

Logo, $A = (\sqrt{450})^2 = 450$.

A área do quadrado $[BEFD]$ é 450 cm^2.

15.



Pelo teorema de Pitágoras:

$4^2 = h^2 + 1^2 \Leftrightarrow h^2 = 16 - 1$

$\Leftrightarrow h = \pm\sqrt{15}$

Como $h > 0$, então $h = \sqrt{15}$.

A área do trapézio é:

$A = \frac{b + B}{2} \times h$, sendo b – base menor, B – base maior maior e h – altura.

$A = \frac{4 + 6}{2} \times \sqrt{15} = 5\sqrt{15}$ cm^2

16.

16.1. $\overline{AC} = \overline{AD}$ e, como o triângulo $[ABC]$ é isósceles, $\overline{AB} = \overline{BC}$.

Pelo teorema de Pitágoras:

$\overline{AC}^2 = 3^2 + 3^2 \Leftrightarrow \overline{AC}^2 = 9 + 9$

$\Leftrightarrow \overline{AC} = \pm\sqrt{18}$

Como $\overline{AC} > 0$, então $\overline{AC} = 3\sqrt{2}$.

$\overline{AD} = 3\sqrt{2}$

$D \smile -1 + 3\sqrt{2}$

16.2. Erro: $0{,}2 = \frac{1}{5}$

$3\sqrt{2} = \sqrt{18}$

$18 \times 5^2 = 450$

$21^2 = 441$ e $22^2 = 484$

$441 < 450 < 484 \Leftrightarrow 21^2 < 18 \times 5^2 < 22^2$

$\Leftrightarrow \sqrt{21^2} < \sqrt{18 \times 5^2} < \sqrt{22^2}$

$\Leftrightarrow 21 < 5\sqrt{18} < 22$

$\Leftrightarrow \frac{21}{5} < \sqrt{18} < \frac{22}{5}$

$\Leftrightarrow 4{,}2 < 3\sqrt{2} < 4{,}4$

$\Leftrightarrow -1 + 4{,}2 < -1 + 3\sqrt{2} < -1 + 4{,}4$

$\Leftrightarrow 3{,}2 < -1 + 3\sqrt{2} < 3{,}4$

17.

17.1. $\frac{10}{8} = \frac{6}{x} \Leftrightarrow x = 4{,}8$ cm

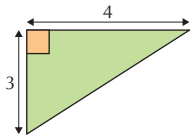
17.2. $\frac{60}{x} = \frac{36}{60} \Leftrightarrow x = 100$ cm

17.3. $\frac{11 + 4}{2} = \frac{x}{4} \Leftrightarrow x^2 = 15 \times 4$

$\Leftrightarrow x^2 = 60$

$\Leftrightarrow x = \sqrt{60}$ cm

18. Cada degrau forma um triângulo retângulo. Pelo teorema de Pitágoras:



$5^2 = x^2 + 4^2 \Leftrightarrow x^2 = 25 - 16$

$\Leftrightarrow x^2 = 9$

$\Leftrightarrow x = \pm\sqrt{9}$

Como $x > 0$, então $x = 3$.

Assim, cada degrau tem altura 3 dm.

Como $5 \times 3 + 3 = 18$ e 18 dm = 1,8 m, a altura do palco é 1,8 m.

19. A área do semicírculo é igual a $\frac{\pi r^2}{2}$.

Assim:

$\frac{\pi r^2}{2} = \frac{9\pi}{8} \Leftrightarrow r^2 = \frac{18}{8}$

$\Leftrightarrow r^2 = \frac{9}{4}$

$\Leftrightarrow r = \pm\sqrt{\frac{9}{4}}$

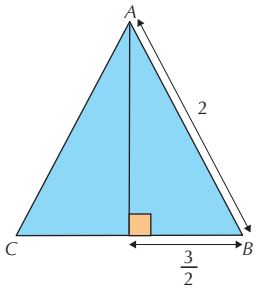
Como $r > 0$, então $r = \frac{3}{2}$ cm.

Então:

$\overline{AB} = 2 \times r = 2 \times \frac{3}{2} = 3$ cm

Propostas de Resolução

Determinemos a altura do triângulo [*ABC*], pelo teorema de Pitágoras:



$$2^2 = x^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2 \Leftrightarrow x^2 = 4 - \frac{9}{4}$$
$$\Leftrightarrow x^2 = \frac{7}{4}$$
$$\Leftrightarrow x = \pm\sqrt{\frac{7}{4}}$$

Como $x > 0$, então $x = \frac{\sqrt{7}}{2}$.

$$A_{[ABC]} = \frac{b \times h}{2}$$

Logo, $A_{[ABC]} = \dfrac{3 \times \frac{\sqrt{7}}{2}}{2} = \frac{3}{4}\sqrt{7}$.

Logo, $A_{\text{total}} = A_{\text{semicírculo}} + A_{\text{triângulo}}$

$$A_{\text{total}} = \frac{9\pi}{8} + \frac{3}{4}\sqrt{7} \approx 5{,}52$$

A área da figura é, aproximadamente, 5,52 cm².

20. A área do círculo é 4π cm². Logo:

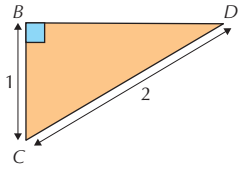
$\pi r^2 = 4\pi \Leftrightarrow r^2 = 4$

$\Leftrightarrow r = \pm\sqrt{4}$

Como $r > 0$, então $r = 2$.

Então, $\overline{AC} = 2$ cm.

$\overline{CD} = \overline{AC} = 2$ cm e, como *B* é o ponto médio de [*AC*], $\overline{BC} = 1$ cm.



Pelo teorema de Pitágoras:

$2^2 = 1^2 + \overline{BD}^2 \Leftrightarrow \overline{BD}^2 = 4 - 1$

$\Leftrightarrow \overline{BD} = \pm\sqrt{3}$

Como $\overline{BD} > 0$, então $\overline{BD} = \sqrt{3}$.

Assim, $\overline{BD} = \sqrt{3}$ cm.

21. Como $\overline{AD} = \overline{AC}$, então $\overline{AC} = 8$ cm.

Pelo teorema de Pitágoras, $\overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2$.

Assim:

$\overline{AB}^2 = 8^2 + 15 \Leftrightarrow \overline{AB}^2 = 64 + 225$

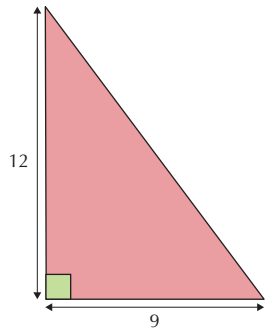
$\Leftrightarrow \overline{AB} = \pm\sqrt{289}$

Como $\overline{AB} > 0$, então $\overline{AB} = 17$.

$P_{[ABC]} = 8 + 15 + 17 = 40$

Assim, $P_{[ABC]} = 40$ cm.

22.



Pelo teorema de Pitágoras:

$x^2 = 9^2 + 12^2 \Leftrightarrow x^2 = 81 + 124$

$\Leftrightarrow x^2 = 225$

$\Leftrightarrow x = \pm\sqrt{225}$

Como $x > 0$, então $x = \sqrt{225} \Leftrightarrow x = 15$.

A corda tem 15 m.

23.

23.1. Como o triângulo [*ABC*] é isósceles, $\overline{AB} = \overline{BC}$.

Pelo teorema de Pitágoras:

$\overline{AC}^2 = 3^2 + 3^2 \Leftrightarrow \overline{AC}^2 = 18$

$\Leftrightarrow \overline{AC} = \pm\sqrt{18}$

Como $\overline{AC} > 0$, então $\overline{AC} = \sqrt{18}$.

Como o triângulo [*ACD*] é isósceles, $\overline{AC} = \overline{CD}$, e, pelo teorema de Pitágoras, $\overline{AD}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{DC}^2$.

$\overline{AD}^2 = (\sqrt{18})^2 + (\sqrt{18})^2 \Leftrightarrow \overline{AD}^2 = 36$

$\Leftrightarrow \overline{AD} = \pm\sqrt{36}$

Como $\overline{AD} > 0$, então $\overline{AD} = 6$.

Como $\overline{AD} = \overline{AE} = \overline{AF} = 6$, então a abcissa do ponto *E* é –6 e a abcissa do ponto *F* é 6.

23.2. $A_{[ABC]} = \dfrac{\overline{AB} \times \overline{BC}}{2}$

$$A_{[ABC]} = \frac{3 \times 3}{2} = \frac{9}{2}$$

$$A_{[ABC]} = \frac{\sqrt{18} \times \sqrt{18}}{2} = \frac{18}{2} = 9$$

Logo, $A_{[ABCD]} = A_{[ABC]} + A_{[ACD]}$, ou seja:

$$A_{[ABCD]} = \frac{9}{2} + 9 = \frac{27}{2} = 13{,}5$$

Assim, $A_{[ABCD]} = 13{,}5$ u.a.

24. Pelo teorema de Pitágoras, $\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2$.

Assim:

$\overline{AC}^2 = 16^2 + 8^2 \Leftrightarrow \overline{AC}^2 = 256 + 64$

$\Leftrightarrow \overline{AC}^2 = 320$

$\Leftrightarrow \overline{AC} = \pm\sqrt{320}$

Como $\overline{AC} > 0$, então $\overline{AC} = \sqrt{320} \Leftrightarrow \overline{AC} = 8\sqrt{5}$.

320	2
160	2
80	2
40	2
20	2
10	2
5	5
1	

Área do semicírculo cujo raio é $r = \frac{8\sqrt{5}}{2} = 4\sqrt{5}$:

$$\frac{\pi \times r^2}{2} = \frac{\pi \times (4\sqrt{5})^2}{2} = \frac{80\pi}{2} = 40\pi$$

$$A_{[ADC]} = \frac{b \times h}{2}$$

$$A_{[ADC]} = \frac{8 \times 16}{2} = \frac{128}{2} = 64$$

Logo, $A_{\text{colorida}} = A_{\text{semicírculo}} - A_{[ADC]}$.

$A_{\text{colorida}} = (40\pi - 64)\ \text{cm}^2 \approx 61{,}7\ \text{cm}^2$

25. 1.º processo

$V = \overline{AB} \times \overline{BC} \times \overline{CG}$

$\overline{CG} = \overline{BF} = \sqrt{11}$

$\overline{AG} = \overline{HB} = 6$

Pelo teorema de Pitágoras no espaço,

$\overline{AG}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 + \overline{CG}^2$. Assim:

$6^2 = 4^2 + \overline{BC}^2 + (\sqrt{11})^2 \Leftrightarrow \overline{BC}^2 = 36 - 16 - 11$

$\Leftrightarrow \overline{BC} = \pm\sqrt{9}$

Como $\overline{BC} > 0$, então $\overline{BC} = 3$.

$V = 4 \times 3 \times \sqrt{11} = 12\sqrt{11}\ \text{cm}^3$

2.º processo

$V = \overline{AB} \times \overline{BC} \times \overline{BF}$

$\overline{AB} = \overline{DC} = 4$ cm

Pelo teorema de Pitágoras, $\overline{HB}^2 = \overline{HF}^2 + \overline{BF}^2$.

Assim:

$6^2 = \overline{HF}^2 + (\sqrt{11})^2 \Leftrightarrow \overline{HF}^2 = 36 - 11$

$\Leftrightarrow \overline{HF}^2 = 25$

$\Leftrightarrow \overline{HF} = \pm\sqrt{25}$

Como $\overline{HF} > 0$, então $\overline{HF} = \sqrt{25} \Leftrightarrow \overline{HF} = 5$.

Pelo teorema de Pitágoras, $\overline{HF}^2 = \overline{HG}^2 + \overline{FG}^2$.

Assim:

$5^2 = 4^2 + \overline{FG}^2 \Leftrightarrow \overline{FG}^2 = 25 - 16$

$\Leftrightarrow \overline{FG}^2 = 9$

$\Leftrightarrow \overline{FG} = \pm\sqrt{9}$

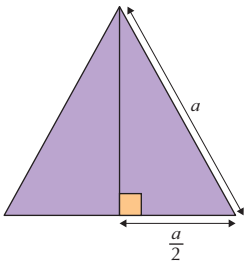
Como $\overline{FG} > 0$, então $\overline{FG} = 3$.

Como $\overline{BC} = \overline{FG}$, então $V = 4 \times \sqrt{11} \times 3 = 12\sqrt{11}$.

O volume do paralelepípedo é $V = 12\sqrt{11}\ \text{cm}^3$.

26. Seja a a medida do lado do triângulo.

Comecemos por determinar a altura do triângulo, recorrendo ao teorema de Pitágoras.



$$x^2 = a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 \Leftrightarrow x^2 = \frac{4}{4}a^2 - \frac{a^2}{4}$$

$$\Leftrightarrow x^2 = \frac{3}{4}a^2$$

$$\Leftrightarrow x = \pm\sqrt{\frac{3}{4}a^2}$$

Como $x > 0$, então $x = \frac{\sqrt{3}}{2}a$.

Como $A = 5\sqrt{75}$ e $A = \frac{b \times h}{2}$, temos:

$$\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}a \times a}{2} = 5\sqrt{75} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2}a^2 = 10\sqrt{75}$$

$$\Leftrightarrow a^2 = \frac{20\sqrt{75}}{\sqrt{3}}$$

$$\Leftrightarrow a^2 = 20\sqrt{\frac{75}{3}}$$

$$\Leftrightarrow a^2 = 20\sqrt{25}$$

$$\Leftrightarrow a^2 = 20 \times 5$$

$$\Leftrightarrow a^2 = 100$$

$$\Leftrightarrow a = \pm\sqrt{100}$$

Como $a > 0$, então $a = 10$ cm.

Logo, $P = 3 \times 10 = 30$.

O perímetro do triângulo equilátero é 30 cm.

27. Como a área do quadrado $[ABCD]$ é 144 cm^2, então $\overline{AB} = \sqrt{144} = 12$ cm.

Como a área do quadrado $[BEFG]$ é 81 cm^2, então $\overline{EB} = \sqrt{81} = 9$ cm.

Vamos determinar $\overline{DM}$ e $\overline{MF}$, utilizando o teorema de Pitágoras:

$\overline{DM}^2 = \overline{AM}^2 + \overline{AD}^2 \Leftrightarrow \overline{DM}^2 = 6^2 + 12^2$

$\Leftrightarrow \overline{DM}^2 = \sqrt{180}$

$\overline{MF}^2 = \overline{FE}^2 + \overline{ME}^2 \Leftrightarrow \overline{MF}^2 = 9^2 + (9 + 6)^2$

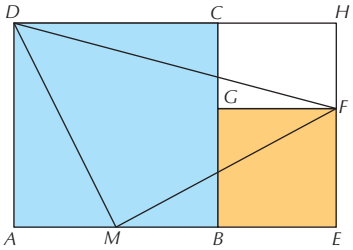
$\Leftrightarrow \overline{MF}^2 = 306$

$\Leftrightarrow \overline{MF} = \pm\sqrt{306}$

Como $\overline{MF} > 0$, então $\overline{MF} = \sqrt{306}$.

Propostas de Resolução

Consideremos a figura:



[*HDF*] é um triângulo retângulo. Então:

$\overline{DF}^2 = \overline{HD}^2 + \overline{HF}^2$, ou seja:

$\overline{DF}^2 = (12 - 9)^2 + (12 + 9)^2 \Leftrightarrow \overline{DF}^2 = 9 + 441$

$\Leftrightarrow \overline{DF}^2 = 450$

$\Leftrightarrow \overline{DF} = \pm\sqrt{450}$

Como $\overline{DF} > 0$, então $\overline{DF} = \sqrt{450}$.

Vamos verificar se o triângulo [*MDF*] é retângulo.

$\overline{DF}^2 = \overline{DM}^2 + \overline{MF}^2$, ou seja:

$(\sqrt{450})^2 = (\sqrt{180})^2 + (\sqrt{306})^2 \Leftrightarrow 450 = 486$ (F)

Logo, como o triângulo [*DMF*] não é retângulo, o ângulo *FMD* não é reto.

28.

28.1. $\frac{x}{12} = \frac{\mathbf{16}}{20}$

28.2. Determinemos o valor de x:

$x = \frac{12 \times 16}{20} = 9{,}6$

Sabemos a medida da hipotenusa e de um dos catetos, aplicando o teorema de Pitágoras, calculamos a medida do outro cateto:

$12^2 = 9{,}6^2 + y^2 \Leftrightarrow y^2 = 144 - 92{,}16$

$\Leftrightarrow y^2 = 51{,}84$

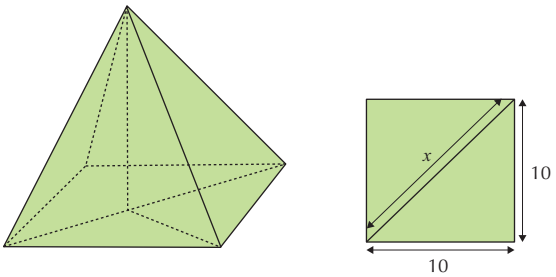
$\Leftrightarrow y = \sqrt{51{,}84} \vee y = -\sqrt{51{,}84}$

Como $y > 0$, $y = \sqrt{51{,}84}$.

A área do triângulo mais pequeno é dada por:

$A = \frac{\sqrt{51{,}84} \times 9{,}6}{2} \approx 34{,}56$ u.a.

29.



Comecemos por determinar a diagonal da base.

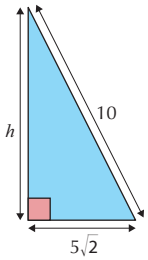
Pelo teorema de Pitágoras:

$x^2 = 10^2 + 10^2 \Leftrightarrow x^2 = 200$

$\Leftrightarrow x = \pm\sqrt{200}$

Como $x > 0$, então $x = \sqrt{200} \Leftrightarrow x = 10\sqrt{2}$.

Para determinar a altura da pirâmide, recorremos novamente ao teorema de Pitágoras:



$10^2 = h^2 + (5\sqrt{2})^2 \Leftrightarrow h^2 = 100 - 50$

$\Leftrightarrow h^2 = 50$

$\Leftrightarrow h = \pm\sqrt{50}$

Como $h > 0$, então $h = 5\sqrt{2}$.

$V_{\text{pirâmide}} = \frac{1}{3} A_{\text{base}} \times h$

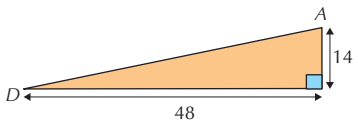
$V_{\text{pirâmide}} = \frac{1}{3} \times 10^2 \times 5\sqrt{2} =$

$= \frac{500}{3}\sqrt{2}$

$\approx 235{,}7$

O volume da pirâmide é 235,7 u.v.

30.



Utilizando o teorema de Pitágoras, temos:

$\overline{AD}^2 = 48^2 + 14^2 \Leftrightarrow \overline{AD}^2 = 2500$

$\Leftrightarrow \overline{AD} = \pm\sqrt{2500}$

Como $\overline{AD} > 0$, então $\overline{AD} = 50$.

Como $\overline{DC} = 10$ cm e $\overline{AB} = 24$ cm, então

$\overline{CB} = 50 - 24 - 10 = 16$.

Assim, $\overline{CB} = 16$ cm.

31. $\overline{AD} + \overline{AC} = \overline{DB} + \overline{BC} \Leftrightarrow 2 + \overline{AC} = 3 + \overline{BC}$

$\Leftrightarrow \overline{AC} = 1 + \overline{BC}$

Utilizando o teorema de Pitágoras, temos:

$\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2$, ou seja:

$(1 + \overline{BC})^2 = 5^2 + \overline{BC}^2 \Leftrightarrow 1 + 2\,\overline{BC} + \overline{BC}^2 = 25 + \overline{BC}^2$

$\Leftrightarrow 2\overline{BC} = 25 - 1$

$\Leftrightarrow \overline{BC} = 12$

Assim, $\overline{AC} = 1 + 12 = 13$ cm.

$P_{[ABC]} = \overline{AB} + \overline{BC} + \overline{AC} = 5 + 12 + 13 = 30$

Assim, $P_{[ABC]} = 30$ cm.

32. Como $A_{[AGD]} = 6$ cm^2, então $\frac{\overline{AG} \times \overline{GD}}{2} = 6$, ou seja;

$\frac{3 \times \overline{GD}}{2} = 6 \Leftrightarrow \overline{GD} = \frac{6 \times 2}{3}$

$\Leftrightarrow \overline{GD} = 4$ cm

Pelo teorema de Pitágoras $\overline{AD}^2 = \overline{AG}^2 + \overline{GD}^2$, isto é:

$\overline{AD}^2 = 3^2 + 4^2 \Leftrightarrow \overline{AD}^2 = 9 + 16$

$\Leftrightarrow \overline{AD} = \pm\sqrt{25}$

Como $\overline{AD} > 0$, então $\overline{AD} = 5$ cm.

Então, $\overline{BC} = 5$ cm.

Pelo teorema de Pitágoras $\overline{BC}^2 = \overline{BH}^2 + \overline{HC}^2$, ou seja:

$$5^2 = \overline{BH}^2 + \left(\frac{\sqrt{91}}{2}\right)^2 \Leftrightarrow \overline{BH}^2 = 25 - \frac{91}{4}$$

$$\Leftrightarrow \overline{BH}^2 = \frac{9}{4}$$

$$\Leftrightarrow \overline{BH} = \pm\sqrt{\frac{9}{4}}$$

Como $\overline{BH} > 0$, então $\overline{BH} = \frac{3}{2}$.

Assim, $A_{[BHC]} = \frac{\overline{BH} \times \overline{HC}}{2}$.

$$A_{[BHC]} = \frac{\frac{3}{2} \times \frac{\sqrt{91}}{2}}{2} = \frac{3}{8}\sqrt{91}$$

$A_{[ABCD]} = 5^2 = 25$

Logo, $A_{\text{laranja}} = A_{[ABCD]} - A_{[AGD]} - A_{[BHC]} =$

$A_{\text{laranja}} = 25 - 6 - \frac{3}{8}\sqrt{91} \approx 15{,}4$

A área da região cor de laranja é 15,4 cm^2.

Vetores, translações e isometrias

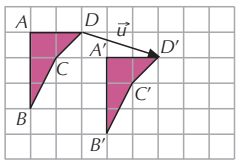
Rever + Praticar – páginas 132 a 137

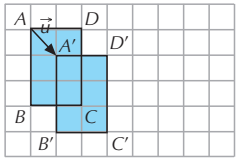
1. [B], pois as translações são transformações geométricas que não alteram a forma nem o tamanho da figura.

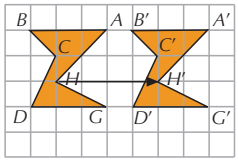
2. Não, porque numa translação qualquer figura é transformada numa figura geometricamente igual à primeira e um triângulo retângulo não pode ser geometricamente igual a um triângulo equilátero.

3. Por exemplo:
3.1. [*A*, *G*] e [*C*, *E*]
3.2. [*A*, *H*] e [*C*, *D*]
3.3. [*A*, *C*] e [*D*, *E*]
3.4. [*B*, *C*] e [*F*, *E*]

4.
4.1. a) Por exemplo, os vetores $\overrightarrow{FC}$ e $\overrightarrow{ED}$.
b) Por exemplo, os vetores $\overrightarrow{EC}$ e $\overrightarrow{BG}$.
c) Por exemplo, os vetores $\overrightarrow{AG}$ e $\overrightarrow{DA}$.
4.2. a) $\overrightarrow{FG} + \overrightarrow{GD} = \overrightarrow{\boldsymbol{FD}}$
b) $\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{GD} = \overrightarrow{\boldsymbol{AD}}$
c) $\overrightarrow{EC} + \overrightarrow{CF} = \overrightarrow{\boldsymbol{EF}}$
d) $\overrightarrow{EB} + \overrightarrow{GF} = \overrightarrow{\boldsymbol{EA}}$
e) $\overrightarrow{\boldsymbol{GC}} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{GD}$
f) $\overrightarrow{\boldsymbol{FE}} + \overrightarrow{EB} = \overrightarrow{FB}$
g) $\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{\boldsymbol{GC}} = \overrightarrow{AC}$
h) $\overrightarrow{FC} + \overrightarrow{\boldsymbol{CA}} = \overrightarrow{FA}$

5.
5.1.


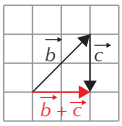
5.2.


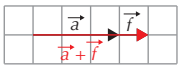
5.3.


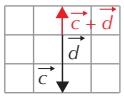
6.
6.1. Rotação de centro *P* e amplitude 90º, seguida de reflexão de eixo *m*.
6.2. Translação segundo a direção de *m*, seguida de rotação de centro *P* e amplitude 90º.
6.3. Reflexão de eixo *m*, seguida de rotação de centro *P* e amplitude 180º.

Praticar + – páginas 138 a 141

1.
1.1. Reflexão.
1.2. Rotação.
1.3. Reflexão deslizante ou translação.
1.4. Translação.

2.
2.1. a) $\vec{e}$ e $\vec{f}$ **b)** $\vec{a}$ **c)** $\vec{a}$ e $\vec{e}$
2.2. $\vec{a}$, $\vec{e}$ e $\vec{f}$; $\vec{c}$ e $\vec{d}$ e $\vec{b}$ e $\vec{h}$
2.3. $\vec{a}$ e $\vec{e}$ são simétricos porque $\vec{a} + \vec{e} = \vec{0}$.
2.4. a)


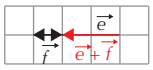
b)


c)


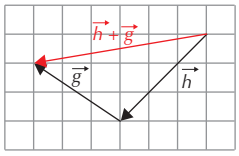
d) $\vec{a} + \vec{e} = \vec{0}$

Propostas de Resolução

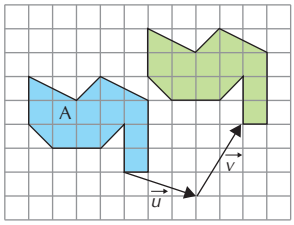
e)



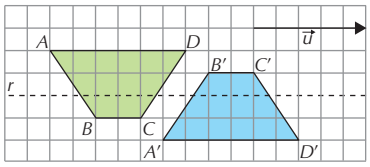
f)



3.



4.

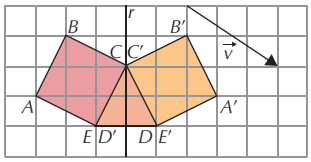


5. A. A afirmação é falsa.
Para além de terem o mesmo comprimento e a mesma direção, os segmentos de reta têm de ter o mesmo sentido, para serem iguais.
Corrigindo a afirmação:
"Dois segmentos de reta orientados com a mesma direção, o mesmo comprimento e o mesmo sentido são equipolentes".
B. A afirmação é verdadeira.
C. A afirmação é verdadeira.

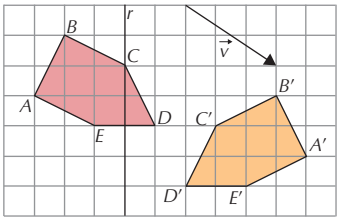
6.
6.1. a) Por exemplo, [*C*, *E*] e [*B*, *I*].
b) Por exemplo, [*A*, *B*] e [*D*, *F*].
c) Por exemplo, [*A*, *B*] e [*D*, *B*].
d) Por exemplo, [*C*, *E*] e [*B*, *F*].
e) Por exemplo, [*H*, *E*] e [*G*, *I*].
6.2. a) $\overrightarrow{BE} + \overrightarrow{ED} = \overrightarrow{BD}$
b) $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{EJ} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CI} = \overrightarrow{AI}$
c) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DB} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} = \vec{0}$
d) $H + \overrightarrow{HJ} = J$
e) $I + \overrightarrow{HE} = I + \overrightarrow{IG} = G$
f) $B - \overrightarrow{DA} = B + \overrightarrow{AD} = B + \overrightarrow{BF} = F$
6.3. Os ângulos são iguais, porque a translação conserva as amplitudes dos ângulos.

7.
7.1. Ponto *A*.
7.2. Ponto *B*.
7.3. [*GF*]
7.4. [*CDE*]
7.5. [*HG*]
7.6. [*GF*]

8.
8.1. a)



b)



8.2. A afirmação é verdadeira, porque as isometrias conservam as amplitudes dos ângulos.

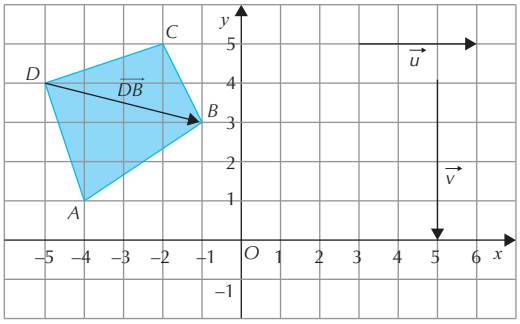
9.
9.1. a) Por exemplo, $\overrightarrow{AD}$ e $\overrightarrow{BC}$.
b) Por exemplo, $\overrightarrow{AE}$ e $\overrightarrow{CA}$.
c) Por exemplo, $\overrightarrow{AD}$ e $\overrightarrow{AB}$.
d) Por exemplo, $\overrightarrow{AD}$ e $\overrightarrow{CB}$.
e) Por exemplo, $\overrightarrow{AD}$ e $\overrightarrow{BC}$.
f) Por exemplo, $\overrightarrow{AD}$ e $\overrightarrow{CB}$.
9.2. A. A afirmação é verdadeira.
$\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{BC}$
B. A afirmação é falsa.
$\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BD}$ e $\overrightarrow{BD} \neq \overrightarrow{AC}$
C. A afirmação é falsa.
$\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{BA}$ e $\overrightarrow{BA} \neq \overrightarrow{AB}$
D. A afirmação é verdadeira.
$\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AB} = \vec{0}$

10.
10.1. a) Ponto *E* **b)** Ponto *C*
c) Ponto *H* **d)** Ponto *C*
10.2. Ponto *C*
10.3. $\overrightarrow{FC}$
10.4. Ponto *G*
10.5. Ponto *F*
10.6. Ponto *E*
10.7. a) *E* **b)** *D* **c)** *A* **d)** $\overrightarrow{HG}$
e) $\overrightarrow{DH}$; $\overrightarrow{HF}$; $\overrightarrow{CF}$

11.
11.1. a) $\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{SR} = \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{DA}$
b) $\overrightarrow{FH} + \overrightarrow{JT} = \overrightarrow{FH} + \overrightarrow{HR} = \overrightarrow{FR}$
c) $\overrightarrow{RQ} + \overrightarrow{DN} = \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CM} = \overrightarrow{DM}$
d) $\overrightarrow{IG} + \overrightarrow{NO} = \overrightarrow{IG} + \overrightarrow{GH} = \overrightarrow{IH}$
e) $\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{RF} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{FR} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CO} = \vec{0}$
f) $\overrightarrow{JH} - \overrightarrow{QG} = \overrightarrow{JH} + \overrightarrow{GQ} = \overrightarrow{JH} + \overrightarrow{HR} = \overrightarrow{JR}$
11.2. a) Ponto *I* **b)** Ponto *S* **c)** Ponto *S* **d)** Ponto *G*
11.3. [*RT*]
11.4. [*MHG*]
11.5. Por exemplo, reflexão de eixo *RC*. Esta isometria não é única, podia ser uma rotação ou uma reflexão deslizante.

12.
12.1. *A*′(1, –1), *B*′(–4, –1), *C*′(–4, 5) e *D*′(1, 4)
12.2. *A*″(–1, –2)

13.
13.1. *A*′(–4, –1), *B*′(–1, –3), *C*′(–2, –5) e *D*′(–5, –4)
13.2. a) *A*′(–1, 1), *B*′(2, 3), *C*′(1, 5) e *D*′(–2, 4)
b) *A*′(–1, –3), *B*′(2, –1), *C*′(1, 1) e *D*′(–2, 0)
13.3.



C′(2, 4)

Geometria euclidiana. Paralelismo e perpendicularidade. Volumes

Rever + Praticar – páginas 142 a 145

1.
1.1. a) Retas concorrentes perpendiculares.
b) Retas não complanares.
c) Retas concorrentes oblíquas.
1.2. A afirmação é verdadeira. Uma reta e um ponto que não lhe pertença definem um plano.

2.
2.1. Por exemplo, a reta *EH*.
2.2. Por exemplo, a reta *PC*.
2.3. O plano *EHG*.
2.4. Por exemplo, a reta *BP*.

3.
3.1. A planificação corresponde a uma pirâmide quadrangular.
3.2. A área lateral corresponde à área dos quatro triângulos cuja base é 8 cm e a altura é 5 cm.

$$A_{\text{faces laterais}} = 4 \times \left(\frac{\overset{\text{base do triângulo}}{b} \times \overset{\text{altura do triângulo}}{h}}{2}\right) = 4 \times \left(\frac{8 \times 5}{2}\right) = 80$$

A área lateral do sólido é 80 cm².
3.3. $A_{\text{faces laterais}} = 80$

$$A_{\text{base}} = \overset{\text{lado do quadrado}}{\ell} \times \ell = 8 \times 8 = 64$$

$A_{\text{Total}} = A_{\text{faces laterais}} + A_{\text{base}} = 80 + 64 = 144$
A área da superfície do sólido é 144 cm².

Praticar + – páginas 146 a 149

1. A opção [A] é falsa porque as retas *DF* e *AB* são não complanares.
A opção [B] é verdadeira, porque a reta *CF* é paralela à reta *AD* e a reta *AD* pertence ao plano *ABE*.
A opção [C] é falsa, porque os planos *CBE* e *CAF* são concorrentes oblíquos.
A opção [D] é falsa, porque as retas *AB* e *BE* são perpendiculares.
Logo, a opção correta é a [B].

2.
2.1. a) Por exemplo, *FG*.
b) Por exemplo, *AB*.
c) Por exemplo, *HA* e *GF*.
d) Por exemplo, *HP* e *HA*.
e) Por exemplo, *ABG* e *EHC*.
f) Por exemplo, *ABG* e *ABC*.
g) Por exemplo, *HGP* e *ABC*.
2.2. A afirmação é falsa porque as retas *FG* e *BC* são não complanares.

3.
3.1. $V_{\text{cubo}} = \overset{\text{aresta}}{a}^3$
$V_{\text{cubo}} = 3^3 = 27$ u.v.

Propostas de Resolução

3.2. $V_{\text{paralelepípedo}} = \underset{\text{área da base}}{A_b} \times \underset{\text{altura}}{h}$

$V_{\text{paralelepípedo}} = 2 \times 3 \times 4 = 24.$ u.v.

3.3. $V_{\text{prisma}} = \underset{\text{área da base}}{A_b} \times \underset{\text{altura}}{h}$

$V_{\text{prisma}} = \dfrac{4 \times 3}{2} \times 5 = 30.$ u.v.

3.4. $V_{\text{pirâmide}} = \dfrac{1}{3} \times \underset{\text{área da base}}{A_b} \times \underset{\text{altura}}{h}$

$V_{\text{pirâmide}} = \dfrac{1}{3} \times 4 \times 4 \times 3 = 16$ u.v.

3.5. $V_{\text{cone}} = \dfrac{1}{3} \times \underset{\text{área da base}}{A_b} \times \underset{\text{altura}}{h} = \dfrac{1}{3} \times \pi r^2 \times h$

$V_{\text{cone}} = \dfrac{1}{3} \times \pi \times 3^2 \times 9 = 27\pi$ u.v.

3.6. $V_{\text{esfera}} = \dfrac{4}{3} \times \pi \underset{r \text{ – raio}}{r^3}$

$V_{\text{esfera}} = \dfrac{4}{3} \times \pi \times 2{,}5^3 = \dfrac{125}{6}\pi$ u.v.

4.

4.1. $A = 2 \times A_{\text{base}} + A_{\text{faces laterais}}$

$A = 2 \times 5^2 + 4 \times 5^2 = 150$ u.a.

4.2. $A = 2 \times A_{\text{base}} + A_{\text{faces laterais}}$

$A = 2 \times 4 \times 3 + 2 \times 3 \times 1 + 2 \times 4 \times 1 = 38$ u.a.

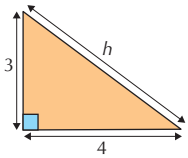
4.3. $A = 2 \times A_{\text{base}} + A_{\text{faces laterais}}$

Pelo teorema de Pitágoras:

$h^2 = 3^2 + 4^2 \Leftrightarrow h^2 = 9 + 16$

$\Leftrightarrow h = \pm\sqrt{25} \wedge h > 0$

$\Leftrightarrow h = 5$



Logo:

$A = 2 \times \dfrac{3 \times 4}{2} + 7 \times 5 + 4 \times 7 + 7 \times 3 = 96$ u.a.

4.4. $A = 4 \times \pi \times r^2$

$A = 4 \times \pi \times 6^2 = 144\,\pi$ u.a.

4.5. $A = A_{\text{base}} + 4 \times A_{\text{superfície lateral}} =$

$= \ell \times \ell + 4 \times \dfrac{b \times h}{2} =$

$= 8 \times 8 + 4 \times \dfrac{8 \times 5}{2} =$

$= 64 + 4 \times 20 =$

$= 64 + 80 =$

$= 144$ u.a.

4.6. $A = 2 \times A_{\text{base}} + A_{\text{lateral}} =$

$= 2 \times \pi \underset{\text{raio}}{r}^2 + \underset{\text{altura}}{h} \times 2\pi \underset{\text{raio}}{r}$

$A = 2\pi \times 5^2 + 14 \times 2\pi \times 5 =$

$= 50\pi + 140\pi =$

$= 190\pi$ u.a.

5.

5.1. a) Por exemplo, *IE*.

b) Por exemplo, *IG*.

5.2. $V_{[ABCDIGFJ]} = V_{[ABCDEFGH]} + V_{[EFGHIJ]} =$

$= \overline{AB} \times \overline{BC} \times \overline{AE} + A_{[EFJ]} \times \overline{FG}$

Logo:

$V_{[ABCDIGFJ]} = 6 \times 9 \times 4 + \dfrac{6 \times 4}{2} \times 9 =$

$= 216 + 108 =$

$= 324$

Assim, o volume do sólido é 324 cm^3.

6.

6.1. $V_{\text{cilindro}} = \underset{\text{área da base}}{A_b} \times \underset{\text{altura}}{h} =$

$= \pi \times r^2 \times h \quad r$ – raio

Como $d = 50$ cm, então $r = 25$ cm.

Assim, $V_{\text{cilindro}} = \pi \times 25^2 \times 20 = 12\,500\pi$.

O volume da embalagem é $12\,500\pi$ cm^3.

6.2. $A_{\text{lateral}} = 2 \times \pi \times \underset{\text{raio}}{r} \times \underset{\text{altura}}{h}$

$A_{\text{lateral}} = 2 \times \pi \times 25 \times 20 =$

$= 1000\pi$

$A = 1000\pi$ cm^2.

7.

7.1. $V_{\text{pirâmide}} = \dfrac{1}{3} A_b \times h$

$V_{\text{pirâmide}} = \dfrac{1}{3} \times 5^2 \times 3 = 25$

O volume da pirâmide é 25 cm^3.

7.2. a) Por exemplo, *DC* e *DA*.

b) Por exemplo, *ADE* e *DCE*.

8. $V_{\text{observatório}} = V_{\text{cilindro}} + V_{\text{semiesfera}} =$

$= \pi \times \underset{\text{raio}}{r}^2 \times \underset{\text{altura}}{h} + \dfrac{\frac{4}{3}\pi r^3}{2} =$

$$V_{\text{observatório}} = \pi \times 6^2 \times 18 + \left(\frac{4}{3}\pi \times 6^3\right) \times \frac{1}{2} =$$
$$= 648\pi + 144\pi =$$
$$= 792\pi$$
$$\approx 2488$$

O volume do observatório turístico é aproximadamente 2488 m^3.

9.

9.1. a) Por exemplo, *GH*.

b) Por exemplo, *ACE* e *ABC*.

c) Por exemplo, *AB* e *FE*.

9.2. *ACE* e *HEF*

9.3. $V_{\text{prisma}} = \overline{AD} \times \overline{DC} \times \overline{DE}$

$$V_{\text{pirâmide}} = \frac{1}{3} \times \frac{\overline{AD} \times \overline{DC}}{2} \times \overline{DE} =$$
$$= \frac{\overline{AD} \times \overline{DC} \times \overline{DE}}{6}$$

Como o volume do prisma é 80, então:

$$V_{\text{pirâmide}} = \frac{80}{6} = \frac{40}{3}$$

O volume da pirâmide é $\frac{40}{3}$ u.v.

10.

10.1. a) Não complanares

b) Estritamente paralelas

10.2. Ponto *I*

10.3. $V_{\text{cubo}} = \overline{AF}^3 = 7^3 = 343$

$$V_{\text{paralelepípedo}} = \frac{2}{7} V_{\text{cubo}}$$

$$V_{\text{paralelepípedo}} = \frac{2}{7} \times 343 = 98$$

Por outro lado, $V_{\text{paralelepípedo}} = \overline{BM} \times \overline{MN} \times \overline{BL}$, ou seja:

$$98 = \overline{BM} \times \overline{MN} \times \overline{BL} \Leftrightarrow 98 = 7 \times 7 \times \overline{BL}$$
$$\Leftrightarrow \overline{BL} = 2 \text{ u.c.}$$

10.4. Como $V_{\text{pirâmide}} = V_{\text{cubo}}$, então:

$$\frac{1}{3} \underbrace{A_b}_{\text{área da base}} \times \underbrace{h}_{\text{altura}} = 343 \Leftrightarrow \frac{1}{3} \times 7^2 \times h = 343$$
$$\Leftrightarrow h = \frac{343 \times 3}{49}$$
$$\Leftrightarrow h = 21$$

A altura da pirâmide é 21 u.c.

11.

11.1. O sólido é composto por um cone (com altura 13 cm e raio da base 7 cm e uma semiesfera (raio 7 cm).

$$\left.\begin{array}{l} V_{\text{cone}} = \frac{1}{3} \underbrace{A_b}_{\text{área da base}} \times \underbrace{h}_{\text{altura}} \\ A_b = \pi \times 7^2 = 49\pi \\ h = 13 \end{array}\right\} \begin{array}{l} V_{\text{cone}} = \frac{1}{3} \times 49\pi \times 13 \\ \Leftrightarrow V_{\text{cone}} = \frac{637}{3}\pi \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{l} V_{\text{semiesfera}} = \dfrac{\frac{4}{3} \times \pi \times r^3}{2} \\ r = 7 \end{array}\right\} \begin{array}{l} V_{\text{semiesfera}} = \dfrac{\frac{4}{3} \times \pi \times 7^3}{2} \\ \Leftrightarrow V_{\text{semiesfera}} = \frac{686}{3}\pi \end{array}$$

$$V = \frac{637}{3}\pi + \frac{686}{3}\pi \Leftrightarrow V = \frac{1323}{3}\pi$$
$$\Leftrightarrow V = 441\pi$$

O volume do sólido é 441π cm^3 $\approx$
$\approx 1385{,}44$ cm^3 (2 c.d.).

11.2. $441\pi \times 0{,}94 \approx 1302{,}32$ g $\approx 1{,}3$ kg

O sólido terá, aproximadamente, 1,3 kg.

11.3. A geratriz do cone corresponde à hipotenusa de um triângulo retângulo cujos catetos medem 7 cm e 13 cm. Assim:

$$g^2 = 7^2 + 13^2 \Leftrightarrow g^2 = 49 + 169$$
$$\Leftrightarrow g^2 = 218$$
$$\Leftrightarrow g = -\sqrt{218} \vee g = \sqrt{218}$$

Como $g > 0$, $g = \sqrt{218}$.

Calcula-se, agora, a área da superfície lateral do cone.

$$\left.\begin{array}{l} A_{\text{lateral}} = \frac{P_{\text{base}}}{2} \times \text{geratriz} \\ P_{\text{base}} = 2 \times \pi \times 7 = 14\pi \\ \text{Geratriz} = \sqrt{218} \end{array}\right\} \begin{array}{l} A_{\text{lateral}} = \frac{14\pi}{2} \times \sqrt{218} \\ \Leftrightarrow A_{\text{lateral}} = 7\pi\sqrt{218} \end{array}$$

A área da superfície lateral do cone é
$7\pi\sqrt{218}$ cm^2 $\approx 324{,}70$ cm^2 (2 c.d.).

11.4. Comecemos por calcular a área da superfície da semiesfera (metade da área da superfície esférica).

$$\left.\begin{array}{l} A_{\text{sup. semiesfera}} = \frac{4 \times \pi \times r^2}{2} \\ r = 7 \text{ cm} \end{array}\right\} \begin{array}{l} A_{\text{sup. semiesfera}} = \\ = 2\pi \times 49 = 98\pi \end{array}$$

Para pintar a superfície do sólido, gastaram-se 26 €.

$$A_{\text{superfície do sólido}} = 7\pi\sqrt{218} + 98\pi = (7\pi\sqrt{218} + 98)\pi$$

$(7\sqrt{218} + 98)\pi$ cm^2 ——— 26 €
1 cm^2 ——— x

$$x = \frac{26}{(\sqrt{128} + 98)\pi} \Leftrightarrow x \approx 0{,}04$$

A tinta custa, aproximadamente, 4 cêntimos por cm^2.

Propostas de Resolução

12.

12.1. $V_{cone} = \frac{1}{3} \underset{\text{área da base}}{A_b} \times \underset{\text{altura}}{h}$

$V_{cone} = \frac{1}{3} \pi \times r^2 \times 15 \quad r$ – raio

$V_{cone} = \frac{1}{3} \pi \times 5^2 \times 15 = 125\pi$

O volume da parte cónica do cone é 125π cm^3.

12.2. a) $V_{esfera} = \frac{4}{3} \pi r^3 \quad r$ – raio

$= \frac{4}{3} \times \pi \times 2^3$

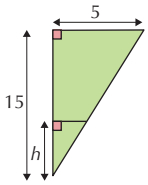
$V_{esfera} = \frac{32}{3} \pi$

Logo, $V_{duas\ esferas} = 2 \times \frac{32}{3} \pi = \frac{64}{3} \pi$.

O volume das duas esferas de gelo é $\frac{64}{3} \pi$ cm^3.

b) Como o volume das duas esferas é igual a $\frac{64}{3} \pi$ e o volume do cone é igual a $\frac{1}{3} \pi \times r^2 \times h$, temos:

$\frac{\underset{\text{altura}}{15}}{\underset{\uparrow}{h}} = \frac{\underset{\text{raio}}{5}}{\underset{\uparrow}{r}} \Leftrightarrow r = \frac{5 \times h}{15}$



$\Leftrightarrow r = \frac{h}{3}$

$\frac{1}{3} \pi \times r^2 \times h = \frac{64}{3} \pi \Leftrightarrow r^2 \times h = 64$

Logo:

$\left(\frac{h}{3}\right)^2 \times h = 64 \Leftrightarrow h^3 = 64 \times 9$

$\Leftrightarrow h = \sqrt[3]{64 \times 9}$

$\Leftrightarrow h = 4\sqrt[3]{9}$

O cone formado pelo gelo derretido tem altura $4\sqrt[3]{9}$ u.c.

13.

13.1. $V_{líquido} = A_b \times h =$

$= \pi \times r^2 \times h$

$V_{líquido} = \pi \times 8^2 \times 1{,}5 = 96\pi$

O volume do líquido que foi colocado no recipiente é 96π cm^3.

13.2. A opção correta é a [C].

14.

14.1. Sabemos que o comprimento do arco AB (do setor circular representado) corresponde ao perímetro do círculo da base do cone, de raio 2 cm, ou seja:

$P = 2 \times \pi \times 2$ cm $= 4\pi$ cm

Calculemos agora o perímetro do círculo com raio 12 cm:

$P = 2 \times \pi \times 12$ cm $= 24\pi$ cm

Assim, para determinar a:

24π cm ———— 360º

4π cm ———— α

$\alpha = \frac{4\pi \times 360}{24\pi} = 60º$

A amplitude do ângulo α é 60º.

14.2. A área da superfície do cone corresponde à soma da área da base (círculo com raio 2 cm) com a área lateral (setor circular de raio 12 cm e amplitude 60º):

$\left.\begin{array}{l} A_{base} = \pi \times r^2 \\ r = 2 \end{array}\right\} A_{base} = \pi \times 2^2 \Leftrightarrow A_{base} = 4\pi$

$\left.\begin{array}{l} A_{círculo} = \pi \times r^2 \\ r = 12 \end{array}\right\} \begin{array}{l} A_{círculo} = \pi \times 12^2 \\ \Leftrightarrow A_{círculo} = 144\pi \end{array}$

Sabemos a área do círculo de raio 12 cm; contudo, a área pretendida é a área do setor circular de amplitude 60º:

144π cm ———— 360º

x ———— 60º

$x = \frac{144\pi \times 60}{360} = 24\pi$ cm^2

Então, a área da superfície do cone será:

$A_{superfície} = A_{base} + A_{setor\ circular}$

$A_{superfície} = 4\pi$ cm$^2 + 24\pi$ cm$^2 = 28\pi$ cm^2

A área da superfície do cone é 28π cm$^2 \approx 87{,}96$ cm^2 (2 c.d.).

14.3. Já calculámos a área da base do cone, na alínea anterior. Calculemos a altura do cone, sabendo que essa altura corresponde a um dos catetos de um triângulo retângulo, cuja hipotenusa é a geratriz do cone (12 cm) e o outro cateto é o raio da base (2 cm). Então, aplicando o teorema de Pitágoras:

$a^2 + 2^2 = 12^2 \Leftrightarrow a^2 = 144 - 4$

$\Leftrightarrow a^2 = 140$

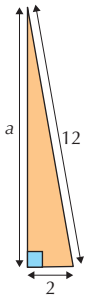
$\Leftrightarrow a = -\sqrt{140} \vee a = \sqrt{140}$

Como $a > 0$, $a = \sqrt{140} \Leftrightarrow a = 2\sqrt{35}$.

$$\begin{array}{r|l} 140 & 2 \\ 70 & 2 \\ 35 & 5 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array}$$

$$140 = 2^2 \times 5 \times 7$$

$$\sqrt{140} = 2\sqrt{35}$$



Assim:

$$\left.\begin{array}{l} V = \frac{1}{3} \times A_{base} \times h \\ A_{base} = 4\pi \\ h = \sqrt{140} \end{array}\right\} \begin{array}{l} V = \frac{1}{3} \times 4\pi \times 2\sqrt{35} \\ \Leftrightarrow V = \frac{2\sqrt{35}}{3}\pi \end{array}$$

O volume do cone é $\frac{8\sqrt{35}}{3}\pi \text{ cm}^3 \approx 49{,}56 \text{ cm}^3$ (2 c.d.).

Lugares geométricos

Exercícios de margem – páginas 150 e 151

1.

1.1. $P_{[ABP]} = \overline{AP} + \overline{PB} + \overline{AB}$

$P_{[ABP]} = 5 + 5 + 6 = 16$

Logo, $P_{[ABP]} = 16$ cm.

1.2. Pelo teorema de Pitágoras, sabemos que $\overline{AP}^2 = \overline{MP}^2 + \overline{AM}^2$. Assim:

$5^2 = \overline{MP}^2 + 3^2 \Leftrightarrow \overline{MP}^2 = 25 - 9$

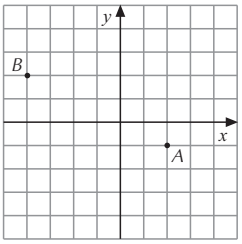
$\Leftrightarrow \overline{MP}^2 = 16$

$\Leftrightarrow \overline{MP} = \pm 4$

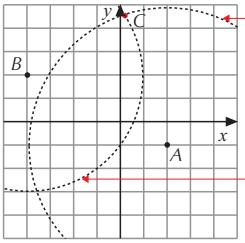
Como $\overline{MP} > 0$, então $\overline{MP} = 4$ cm.

2.

2.1.



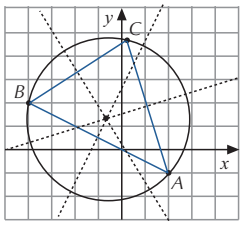
2.2.



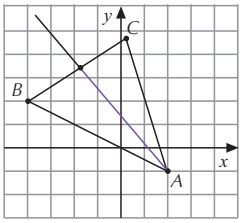
arco de circunferência de centro no ponto A e raio 6 unidades.

arco de circunferência de centro no ponto B e raio 5 unidades.

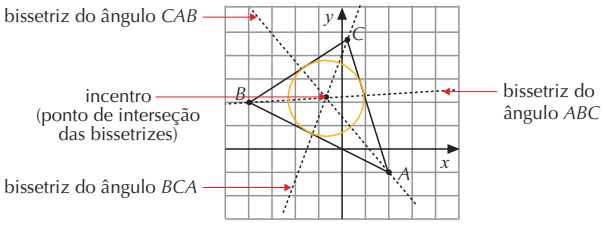
2.3. Para inscrever um triângulo numa circunferência, começamos por traçar as mediatrizes de $[AB]$, $[AC]$ e $[BC]$ e assim encontrar o centro da circunferência, ou seja, o ponto de interseção das mediatrizes.



2.4. Encontram-se assinalados a roxo os pontos do triângulo que pertencem ao eixo de simetria do ângulo CAB, ou seja, à bissetriz do ângulo CAB.



2.5. A circunferência tangente aos lados do triângulo é a circunferência inscrita no triângulo. Para a traçar, devemos encontrar o incentro do triângulo, ou seja, o ponto de interseção das bissetrizes dos seus ângulos internos.



2.6. Observando as mediatrizes desenhadas em 2.3., facilmente compreendemos que nenhum dos vértices pertence à mediatriz do segmento de reta que lhe é oposto; portanto, o triângulo é escaleno. De novo, observando as mediatrizes, podemos constatar que o triângulo é acutângulo, pois o circuncentro encontra-se no interior do triângulo. Basta pensar que, se fosse retângulo, a mediatriz de qualquer um dos catetos dividiria o triângulo em dois triângulos semelhantes e intersetaria a hipotenusa no seu ponto médio, fazendo com que o circuncentro fosse um ponto do triângulo. Aplicando o mesmo raciocínio, se fosse obtusângulo, o circuncentro seria um ponto exterior ao triângulo.

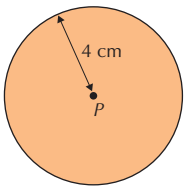
Propostas de Resolução

Praticar + – páginas 152 a 155

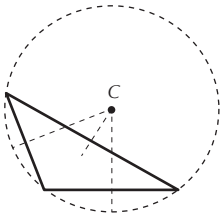
1. [A] Falsa, pois o raio é 7 cm.
[B] Falsa, pois não se trata de uma superfície esférica.
[C] Falsa, pois é um lugar geométrico no espaço e não no plano.
A opção correta é a [D].

2. Circunferência de centro em *A* e raio 8 cm.

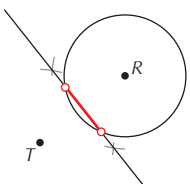
3. **1.º** Marcar o ponto *P*.
2.º Colocar a ponta seca do compasso no ponto *P* e, com abertura 4 cm, traçar a circunferência de centro no ponto *P* e raio 4 cm.
3.º Sombrear a circunferência e o seu interior.



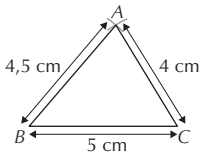
4. A opção correta é a [B]. O circuncentro de um triângulo pode situar-se no exterior do triângulo.
Por exemplo:



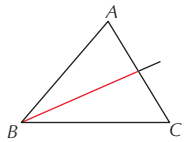
5. **1.º** Colocar a ponta seca do compasso no ponto *R* e, com abertura superior a metade da distância do ponto *R* ao ponto *T*, traçar um arco de circunferência.
2.º Colocar a ponta seca do compasso no ponto *T* e, com a mesma abertura do 1.º passo, traçar um arco de circunferência.
3.º Traçar a reta que passa pelos dois pontos de interseção dos dois arcos – a mediatriz do segmento de reta [*TR*].
4.º Colocar a ponta seca do compasso no ponto *R* e, com abertura 2 cm, traçar a circunferência de centro no ponto *R* e raio 2 cm.
5.º O lugar geométrico pedido é o segmento de reta a vermelho.



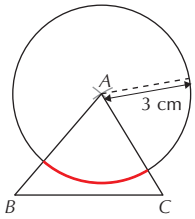
6.
6.1. **1.º** Traçar o segmento de reta [*BC*], de comprimento 5 cm.
2.º Colocar a ponta seca do compasso no ponto *B* e, com abertura 4,5 cm, traçar um arco de circunferência.
3.º Colocar a ponta seca do compasso no ponto *C* e, com abertura 4 cm, traçar um arco de circunferência.
4.º Marcar o ponto *A*, ponto de interseção dos dois arcos de circunferência.
5.º Traçar *BA* e *CA*.



6.2. a) **1.º** Colocar a ponta seca do compasso no ponto *B* e, com uma abertura qualquer, traçar um arco de circunferência. O arco interseta os segmentos de reta [*AB*] e [*BC*].
2.º Com a mesma abertura do 1.º passo e com a ponta seca num dos pontos, traçar um arco de circunferência. Realizar o mesmo processo para o outro ponto. Os arcos intersetam-se num ponto.
3.º Traçar a semirreta com origem no ponto *B* e que passa no ponto de interseção dos dois arcos – a bissetriz do ângulo *CBA*.
4.º Marcar a vermelho os pontos da bissetriz que pertencem ao interior do triângulo [*ABC*].

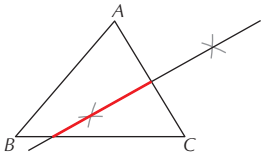


b) **1.º** Colocar a ponta seca do compasso no ponto *A* e, com abertura 3 cm, traçar a circunferência de centro no ponto *A* e raio 3 cm.
2.º Marcar os pontos da circunferência que pertencem ao triângulo [*ABC*].

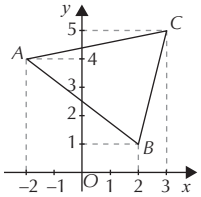


c) **1.º** Colocar a ponta seca do compasso no ponto *A* e, com abertura superior a metade da distância do ponto *A* ao ponto *C*, traçar um arco de circunferência.
2.º Colocar a ponta seca do compasso no ponto *C* e, com a mesma abertura do 1.º passo, traçar um arco de circunferência.

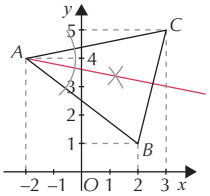
3.º Traçar a reta que passa pelos dois pontos de interseção dos dois arcos – a mediatriz do segmento de reta [*AC*].
4.º Marcar os pontos da mediatriz que pertencem ao triângulo [*ABC*].



7.
7.1. **1.º** Marcar os pontos *A*, *B* e *C*.
2.º Traçar [*AB*], [*BC*] e [*AC*].

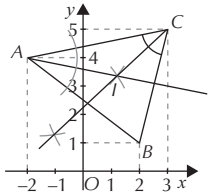


7.2. **1.º** Colocar a ponta seca do compasso no ponto *A* e, com uma abertura qualquer, traçar um arco de circunferência. O arco interseta os segmentos de reta [*AC*] e [*AB*].
2.º Com a mesma abertura do 1.º passo e com a ponta seca num dos pontos, traçar um arco de circunferência. Realizar o mesmo processo para o outro ponto. Os arcos intersetam-se num ponto.
3.º Traçar a semirreta com origem no ponto *A* e que passa no ponto de interseção dos dois arcos – a bissetriz do ângulo *BAC*.

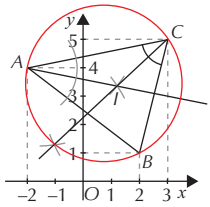


7.3. **1.º** Colocar a ponta seca do compasso no ponto *C* e, com uma abertura qualquer, traçar um arco de circunferência. O arco interseta os segmentos de reta [*AC*] e [*BC*].
2.º Com a mesma abertura do 1.º passo e com a ponta seca num dos pontos, traçar um arco de circunferência. Realizar o mesmo processo para o outro ponto. Os arcos intersetam-se num ponto.
3.º Traçar a semirreta com origem no ponto *C* e que passa no ponto de interseção dos dois arcos – a bissetriz do ângulo *ACB*.

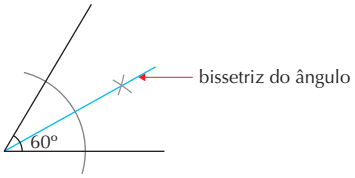
4.º Marcar o ponto *I*, ponto de interseção das duas bissetrizes – *I* é o incentro do triângulo.



7.4. **1.º** Colocar a ponta seca do compasso no ponto *I* e com abertura $\overline{IC}$ traçar a circunferência de centro no ponto *I* e raio $\overline{IC}$.



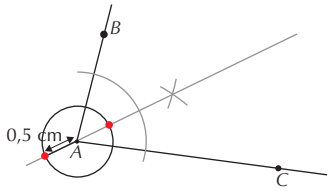
8. **1.º** Traçar um segmento de reta.
2.º Com o transferidor, marcar um ângulo com amplitude 60º.
3.º Colocar a ponta seca do compasso no vértice do ângulo e, com uma abertura qualquer, traçar um arco de circunferência. O arco interseta os lados do ângulo.
4.º Com a mesma abertura do 3.º passo e com a ponta seca num dos pontos, traçar um arco de circunferência. Realizar o mesmo processo para o outro ponto. Os arcos intersetam-se num ponto.
5.º Traçar a semirreta com origem no vértice do ângulo e que passa no ponto de interseção dos dois arcos – a bissetriz do ângulo.



9. **1.º** Colocar a ponta seca do compasso no ponto *A* e, com uma abertura qualquer, traçar um arco de circunferência. O arco interseta os segmentos de reta [*AB*] e [*AC*].
2.º Com a mesma abertura do 1.º passo e com a ponta seca num dos pontos, traçar um arco de circunferência. Realizar o mesmo processo para o outro ponto. Os arcos intersetam-se num ponto.
3.º Traçar a reta que passa por *A* e pelo ponto de interseção dos dois arcos – reta que contém a bissetriz do ângulo *CBA*.

Propostas de Resolução

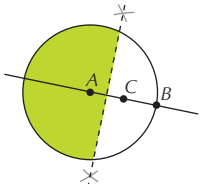
4.º Com a ponta seca do compasso no ponto *A*, traçar uma circunferência de centro *A* e raio 0,5 cm.
5.º Assinalar os dois pontos de interseção da circunferência com a reta traçada no 3.º passo.



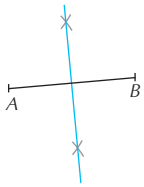
10.
10.1. A reta *PM* é a mediatriz do segmento de reta [*AB*].
10.2. Como o ponto *P* pertence à mediatriz do segmento de reta [*AB*], então está à mesma distância de *A* e de *B*.
10.3. A opção correta é a [B]. O triângulo [*AMP*] é um triângulo acutângulo.

11. Reta paralela às duas retas dadas, que dista 5 cm de cada uma delas.

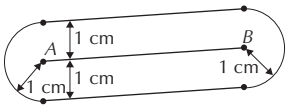
12.
12.1. Como o ponto *C* é o ponto médio de [*AB*], ele está à mesma distância de *A* e de *B*. Logo, o ponto *C* pertence à mediatriz de [*AB*].
12.2. **1.º** Colocar a ponta seca do compasso no ponto *A* e com abertura superior a metade da distância do ponto *A* ao ponto *C*, traçar um arco de circunferência.
2.º Colocar a ponta seca do compasso no ponto *C* e, com a mesma abertura, traçar um arco de circunferência.
3.º Traçar a reta que passa pelos dois pontos de interseção dos dois arcos – a mediatriz de [*AC*].
4.º Marcar os pontos do círculo mais próximos de *A* do que de *C*.



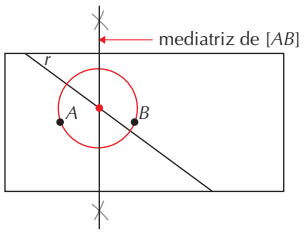
13.
13.1. **1.º** Colocar a ponta seca do compasso no ponto *A* e, com abertura superior a metade da distância do ponto *A* ao ponto *B*, traçar um arco de circunferência.
2.º Colocar a ponta seca do compasso no ponto *B* e, com a mesma abertura do 1.º passo, traçar um arco de circunferência.
3.º Traçar a reta que passa pelos dois pontos de interseção dos dois arcos – a mediatriz de [*AB*].



13.2. **1.º** Traçar um segmento de reta perpendicular a [*AB*], com 2 cm de comprimento (1 cm para cada lado de [*AB*]).
2.º Traçar os segmentos retas paralelos a [*AB*] e perpendiculares ao segmento de reta anterior, que passam nos extemos desse segmento de reta, com o mesmo comprimento de [*AB*].
3.º Colocar a ponta seca do compasso no ponto *A* e, com abertura 1 cm, traçar a semicircunferência de centro *A*.
4.º Colocar a ponta seca do compasso no ponto *B* e, com abertura 1 cm, traçar a semicircunferência de centro *B*.

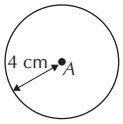


14. **1.º** Colocar a ponta seca do compasso no ponto *A* e, com abertura superior a metade da distância do ponto *A* ao ponto *B*, traçar um arco de circunferência.
2.º Colocar a ponta seca do compasso no ponto *B* e, com a mesma abertura do 1.º passo, traçar um arco de circunferência.
3.º Traçar a reta que passa pelos dois pontos de interseção dos dois arcos – a mediatriz de [*AB*].
4.º Marcar o ponto de interseção da mediatriz de [*AB*] com a reta *r*.
5.º Colocar a ponta seca do compasso no ponto de interseção da mediatriz com a reta *r* e com abertura até um dos pontos, A ou B, traçar a circunferência.

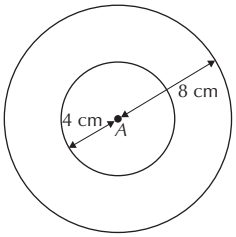


15.

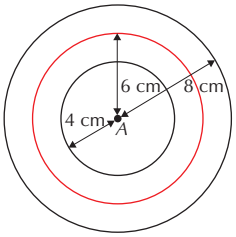
15.1. Colocar a ponta seca do compasso no ponto *A* e com abertura 4 cm, traçar a circunferência de centro no ponto *A* e raio 4 cm.



15.2. Colocar a ponta seca do compasso no ponto *A* e, com abertura 8 cm, traçar a circunferência de centro no ponto *A* e raio 8 cm.

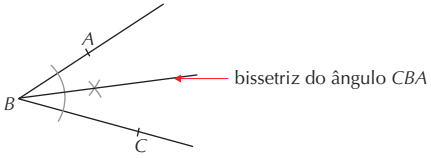


15.3. A circunferência de centro no ponto *A* e raio 6 cm é o lugar geométrico dos pontos que distam igualmente das duas circunferências anteriores.
Colocar a ponta seca do compasso no ponto *A* e, com abertura 6 cm, traçar a circunferência de centro no ponto *A* e raio 6 cm.

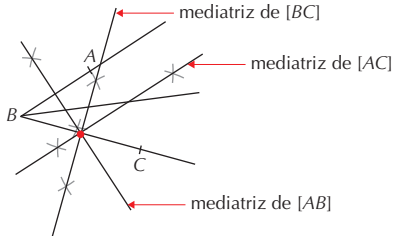


16.

16.1. **1.º** Colocar a ponta seca do compasso no vértice do ângulo, ponto *B*, e, com uma abertura qualquer, traçar um arco de circunferência. O arco interseta os lados do ângulo.
2.º Com a mesma abertura do 1.º passo e com a ponta seca num dos pontos, traçar um arco de circunferência. Realizar o mesmo processo para o outro ponto. Os arcos intersetam-se num ponto.
3.º Traçar a semirreta com origem no vértice do ângulo e que passa no ponto de interseção dos dois arcos – a bissetriz do ângulo *CBA*.



16.2. **1.º** Colocar a ponta seca do compasso no ponto *A* e, com abertura superior a metade da distância do ponto *A* ao ponto *B*, traçar um arco de circunferência.
2.º Colocar a ponta seca do compasso no ponto *B* e, com a mesma abertura do 1.º passo, traçar um arco de circunferência.
3.º Traçar a reta que passa pelos dois pontos de interseção dos dois arcos – a mediatriz de [*AB*].
4.º Colocar a ponta seca do compasso no ponto *A* e, com abertura superior a metade da distância do ponto *A* ao ponto *C*, traçar um arco de circunferência.
5.º Colocar a ponta seca do compasso no ponto *C* e, com a mesma abertura do 4.º passo, traçar um arco de circunferência.
6.º Traçar a reta que passa pelos dois pontos de interseção dos dois arcos – a mediatriz de [*AC*].
7.º Colocar a ponta seca do compasso no ponto *C* e, com abertura superior a metade da distância do ponto *C* ao ponto *B*, traçar um arco de circunferência.
8.º Colocar a ponta seca do compasso no ponto *B* e, com a mesma abertura do 7.º passo, traçar um arco de circunferência.
9.º Traçar a reta que passa pelos dois pontos de interseção dos dois arcos – a mediatriz de [*BC*].
10.º Assinalar o ponto de interseção das três mediatrizes traçadas.

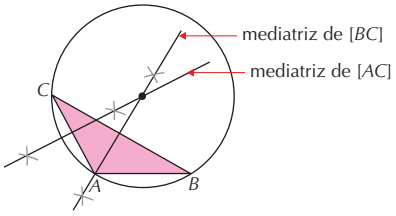


17.

17.1. **1.º** Colocar a ponta seca do compasso no ponto *C* e, com abertura superior a metade da distância do ponto *C* ao ponto *B*, traçar um arco de circunferência.
2.º Colocar a ponta seca do compasso no ponto *B* e, com a mesma abertura do 1.º passo, traçar um arco de circunferência.
3.º Traçar a reta que passa pelos dois pontos de interseção dos dois arcos – a mediatriz de [*BC*].
4.º Colocar a ponta seca do compasso no ponto *A* e, com abertura superior a metade da distância do ponto *A* ao ponto *C*, traçar um arco de circunferência.
5.º Colocar a ponta seca do compasso no ponto *C* e, com a mesma abertura do 4.º passo, traçar um arco de circunferência.

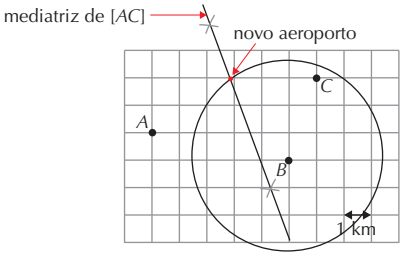
Propostas de Resolução

6.º Traçar a reta que passa pelos dois pontos de interseção dos dois arcos – a mediatriz de [*AC*].
7.º Marcar o ponto de interseção das duas mediatrizes.
8.º Colocar a ponta seca do compasso no ponto encontrado no passo anterior e, com abertura até qualquer uns dos pontos, *A*, *B* ou *C*, traçar uma circunferência.



17.2. O centro da circunferência designa-se por circuncentro.

18. **1.º** Colocar a ponta seca do compasso no ponto *A* e, com abertura superior a metade da distância do ponto *A* ao ponto *C*, traçar um arco de circunferência.
2.º Colocar a ponta seca do compasso no ponto *C* e, com a mesma abertura do 1.º passo, traçar um arco de circunferência.
3.º Traçar a reta que passa pelos dois pontos de interseção dos dois arcos – a mediatriz de [*AC*].
4.º Colocar a ponta seca do compasso no ponto *B* e, com abertura 4 unidades de quadrícula, que corresponde a 4 km, traçar uma circunferência.
5.º Assinalar, no mapa, o ponto de interseção da mediatriz com a circunferência – localização do novo aeroporto.

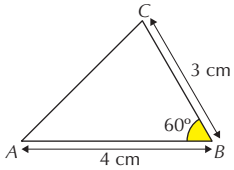


19. Mediatriz dos outros dois lados do quadrado.

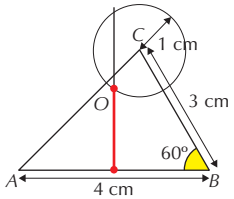
20. Na segunda situação.

21. Conjunto dos pontos do quadrado [*ABCD*] que estão mais próximos de [*AD*] do que de [*BC*] e que distam 3 cm ou mais do ponto *A*.

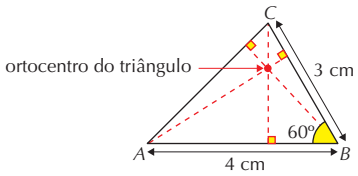
22.
22.1. **1.º** Traçar o segmento de reta [*AB*] com 4 cm.
2.º Com o transferidor, marcar o ângulo *CBA* com amplitude 60º.
3.º Traçar o segmento de reta [*BC*] com 3 cm.
4.º Traçar o segmento de reta [*AC*].



22.2. **1.º** Colocar a ponta seca do compasso no ponto *A* e, com abertura superior a metade da distância do ponto *A* ao ponto *B*, traçar um arco de circunferência.
2.º Colocar a ponta seca do compasso no ponto *B* e, com a mesma abertura do 1.º passo, traçar um arco de circunferência.
3.º Traçar a reta que passa pelos dois pontos de interseção dos dois arcos – a mediatriz de [*AB*].
4.º Colocar a ponta seca do compasso no ponto *C* e, com abertura 1 cm, traçar uma circunferência.
5.º Marcar a vermelho os pontos do triângulo que estão no exterior da circunferência e que pertencem à mediatriz de [*AB*].



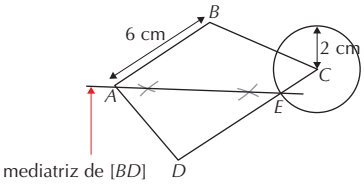
22.3. **1.º** Traçar as retas suporte das alturas dos três lados do triângulo [*ABC*].
2.º Marcar o ponto de interseção das três retas suporte – o ortocentro do triângulo [*ABC*].



23.
23.1. 60 m = 6000 cm

Assim, $\frac{1}{6000} = \frac{1}{1000}$.
Logo, a escala utilizada é 1 : 1000.
23.2. **1.º** Colocar a ponta seca do compasso no ponto *B* e, com abertura superior a metade da distância do

ponto *B* ao ponto *D*, traçar um arco de circunferência.
2.º Colocar a ponta seca do compasso no ponto *D* e, com a mesma abertura do 1.º passo, traçar um arco de circunferência.
3.º Traçar a reta que passa pelos dois pontos de interseção dos dois arcos a mediatriz de [*BD*].
4.º Colocar a ponta seca do compasso no ponto *C* e, com abertura 2 cm, traçar uma circunferência.
5.º Assinalar o ponto *E*, ponto de interseção da circunferência com a mediatriz de [*BD*].



Circunferência

Rever + Praticar – páginas 156 a 161

1.
1.1. Como a amplitude de um ângulo ao centro é igual à amplitude do arco compreendido entre os seus lados, então a amplitude do ângulo *JKA* é 36º.
$G\hat{K}J = 180º - 36º - 36º = 108º$
1.2. Sim, as cordas [*FG*] e [*JA*] são geometricamente iguais, pois, numa circunferência, a ângulos ao centro geometricamente iguais correspondem cordas geometricamente iguais.

2. A tangente a uma circunferência é perpendicular ao raio no ponto de tangência, logo o triângulo [*CDA*] é retângulo em *D*.
$C\hat{A}D = 180º - 41º - 90º = 49º$ (a soma das amplitudes dos ângulos internos de um triângulo é 180º).
Sabemos que a amplitude de um ângulo ao centro é igual à amplitude do arco compreendido entre os seus lados, logo o arco *ED* tem amplitude 49º.
Assim, $\widehat{DBE} = 360º - 49º = 311º$.

3.
3.1. A amplitude de um ângulo ao centro é igual à amplitude do arco compreendido entre os seus lados, logo $\hat{x} = 110º$.
A amplitude de um ângulo inscrito é metade da amplitude do arco compreendido entre os seus lados, logo $\hat{y} = 55º$.
3.2. Ângulos inscritos no mesmo arco de circunferência são geometricamente iguais. Então, $\hat{x} = 36º$ e $\hat{y} = 36º$.
3.3. Ângulos inscritos numa semicircunferência são retos. O triângulo representado é isósceles e sabemos que, num triângulo, a lados de igual comprimento opõem-se ângulos com a mesma amplitude.
Então, $\hat{x} = \hat{y}$ e $\hat{x} + \hat{y} = 90º$.
Logo, $\hat{x} = 45º$ e $\hat{y} = 45º$.

4. O ângulo α é um ângulo excêntrico, cujo vértice se encontra no interior da circunferência mas não é o centro da circunferência:
4.1. $\hat{\alpha} = \dfrac{60º + 40º}{2} \Leftrightarrow \hat{\alpha} = 50º$
4.2. $\hat{\alpha} = \dfrac{127º + 74º}{2} \Leftrightarrow \hat{\alpha} = 100{,}5º$
4.3. $\hat{\alpha} = \dfrac{45º + 26º}{2} \Leftrightarrow \hat{\alpha} = 35{,}5º$

5. O ângulo β é um ângulo excêntrico, cujo vértice se encontra no exterior da circunferência:
5.1. $\hat{\beta} = \dfrac{119º - 42º}{2} \Leftrightarrow \hat{\beta} = 38{,}5º$
5.2. $\hat{\beta} = \dfrac{119º - 31º}{2} \Leftrightarrow \hat{\beta} = 44º$
5.3. $\hat{\beta} = \dfrac{198º - 50º}{2} \Leftrightarrow \hat{\beta} = 74º$

6. A soma das amplitudes dos ângulos internos de um polígono com seis lados é dada pela fórmula:
$(6 - 2) \times 180º = 720º$
Vamos calcular a amplitude do ângulo α, sabendo as amplitudes dos restantes cinco ângulos internos e conhecendo a soma das amplitudes de todos os ângulos internos:
$\hat{\alpha} + 81º + 156º + 107º + 88º + 146º = 720º$
$\Leftrightarrow \hat{\alpha} = 720º - 578º$
$\Leftrightarrow \hat{\alpha} = 142º$
O ângulo α tem amplitude 142º.

7. Vamos determinar quantos lados tem esse polígono regular e depois calcular a soma das amplitudes de todos os ângulos internos.

$$180 - \frac{360}{n} = 144 \Leftrightarrow 180n - 360 = 144n$$
$$\Leftrightarrow 36n = 360$$
$$\Leftrightarrow n = \frac{360}{36}$$
$$\Leftrightarrow n = 10$$

O polígono regular tem 10 lados. A soma das amplitudes dos ângulos internos de um polígono com 10 lados é dada por $(10 - 2) \times 180º = 1440º$.
A soma das amplitudes de todos os ângulos internos desse polígono é 1440º.

Propostas de Resolução

8. A soma das amplitudes dos ângulos opostos de um quadrilátero inscrito numa circunferência é 180º.

8.1. $\hat{\beta} = 180º - 116º = 64º$

8.2. $\hat{\beta} = 180º - 113º = 67º$

8.3. Vamos calcular a amplitude do ângulo α, suplementar do ângulo β:

$\hat{\alpha} = 180º - 91º = 89º$

Então, $\hat{\beta} = 180º - 89º = 91º$.

9. Seja n o número de lados desse polígono:

$\frac{360º}{n} = 20º \Leftrightarrow n = 18$

O polígono tem 18 lados.

Praticar + – páginas 162 a 166

1.

1.1. $x = \overset{\frown}{BA} = 128º$, pois BOA é um ângulo ao centro e a amplitude de um ângulo ao centro é igual à amplitude do arco compreendido entre os seus lados.

1.2. $x = \frac{\overset{\frown}{AC}}{2} = \frac{140º}{2} = 70º$, pois ABC é um ângulo inscrito correspondente ao ângulo ao centro AOC e a amplitude de um ângulo inscrito é metade da amplitude do arco compreendido entre os seus lados.

1.3. ABC e ADC são ângulos inscritos no mesmo arco de circunferência (arco AC), logo têm a mesma amplitude.

Logo, $x = y = \frac{\overset{\frown}{AC}}{2} = \frac{98º}{2} = 49º$.

1.4. Como ADC é um ângulo inscrito, $A\hat{D}C = \frac{\overset{\frown}{AC}}{2}$, ou seja, $\overset{\frown}{AC} = 2A\hat{D}C$.

Assim, $y = \overset{\frown}{AC} = 2 \times 38º = 76º$.

Como ABC e ADC são ângulos inscritos no mesmo arco de circunferência, $x = A\hat{B}C = A\hat{D}C = 38º$.

2.

2.1. DEC é um ângulo com o vértice no interior da circunferência.

Logo, $D\hat{E}C = \frac{\overset{\frown}{BA} + \overset{\frown}{DC}}{2}$.

Então, $D\hat{E}C = \frac{128º + 77º}{2} = \frac{205º}{2} = 102{,}5º$.

2.2. AED é um ângulo com o vértice no interior da circunferência.

Logo, $A\hat{E}D = \frac{\overset{\frown}{AD} + \overset{\frown}{CB}}{2}$.

Então, $D\hat{E}A = \frac{44º + 80º}{2} = \frac{124º}{2} = 62º$.

2.3. CEB é um ângulo com o vértice no interior da circunferência.

Logo, $C\hat{E}B = \frac{\overset{\frown}{CB} - \overset{\frown}{AD}}{2}$.

Então, $C\hat{E}B = \frac{130º - 40º}{2} = \frac{90º}{2} = 45º$.

2.4. AED é um ângulo com o vértice no exterior da circunferência.

Logo, $A\hat{E}D = \frac{\overset{\frown}{AD} - \overset{\frown}{CB}}{2}$.

Então, $A\hat{E}D = \frac{218º - 44º}{2} = \frac{174º}{2} = 87º$.

3. A soma das amplitudes dos ângulos opostos de um quadrilátero inscrito numa circunferência é 180º.

Logo, $A\hat{D}C = 180º - 70º = 110º$ e

$B\hat{A}D = 180º - 85º = 95º$.

4. 1.º processo

$Z\hat{O}X = 180º - 110º = 70º$ porque ZOX e YOZ são ângulos suplementares.

Como o triângulo $[XOZ]$ é isósceles ($\overline{OX} = \overline{OZ}$ porque são raios da circunferência), então $X\hat{Z}O = O\hat{X}Z$.

Como a soma das amplitudes dos ângulos internos de um triângulo é 180º, então:

$X\hat{Z}O = \frac{180º - 70º}{2} = \frac{110º}{2} = 55º$

2.º processo

A amplitude de um ângulo externo de um triângulo é igual à soma das amplitudes dos ângulos internos não adjacentes a esse ângulo, ou seja:

$X\hat{Z}O = \frac{Y\hat{O}Z}{2} = \frac{110º}{2} = 55º$

5. $\overset{\frown}{DC} = \overset{\frown}{BC} - \overset{\frown}{BD}$

Como BAC é um ângulo inscrito, $B\hat{A}C = \frac{\overset{\frown}{BC}}{2}$, ou seja, $\overset{\frown}{BC} = 2 \times B\hat{A}C$.

Assim, $\overset{\frown}{BC} = 2 \times 65º = 130º$.

Como BOD é um ângulo ao centro, $B\hat{O}D = \overset{\frown}{BD}$.

Logo, $\overset{\frown}{DC} = 130º - 40º = 90º$.

6. $C\hat{O}B = 180º - D\hat{O}A - A\hat{O}C$

Como os segmentos de reta $[BD]$ e $[CA]$ são paralelos, $\overset{\frown}{CB} = \overset{\frown}{DA}$ e, consequentemente, os ângulos ao centro COB e DOA são geometricamente iguais. Assim:

$C\hat{O}B = 180º - C\hat{O}B - 115º \Leftrightarrow 2\,C\hat{O}B = 180º - 115º$

$\Leftrightarrow 2\,C\hat{O}B = 65º$

$\Leftrightarrow C\hat{O}B = \frac{65º}{2}$

$\Leftrightarrow C\hat{O}B = 32{,}5º$

7.

7.1. A reta AD é tangente à circunferência no ponto A se AD e AO forem perpendiculares.
Consideremos o triângulo $[ABO]$.
Como $[ABO]$ é um triângulo isósceles ($\overline{OA} = \overline{OB}$ porque são raios da circunferência), então
$O\hat{B}A = B\hat{A}O = 60^\circ$.
Por outro lado, a soma das amplitudes dos ângulos internos de um triângulo é 180°.
Logo, $A\hat{O}B = 180^\circ - 60^\circ - 60^\circ = 60^\circ$.
Considerando agora o triângulo $[ADO]$, temos que $D\hat{A}O = 180^\circ - 30^\circ - 60^\circ = 90^\circ$.
Concluímos, então, que AD e DO são perpendiculares e, portanto, a reta AD é tangente à circunferência no ponto A.

7.2. 1.º processo

Como COA é um ângulo ao centro, $\overset{\frown}{CA} = C\hat{O}A$.
Por outro lado, $C\hat{O}A = 180^\circ - A\hat{O}B$ porque COA e AOB são suplementares.
Assim, $C\hat{O}A = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$.
Logo, $\overset{\frown}{CA} = 120^\circ$.

2.º processo

Como $O\hat{B}A = 60^\circ$ é um ângulo inscrito,
$\overset{\frown}{CA} = 2 \times 60^\circ = 120^\circ$.

8. $A = \dfrac{x \times \pi \times r^2}{360}$, sendo x° a amplitude do ângulo ao centro.
Como ABC é um ângulo inscrito, $A\hat{B}C = \dfrac{\overset{\frown}{AC}}{2}$, ou seja, $\overset{\frown}{CA} = 2 \times A\hat{B}C$.
Assim, $\overset{\frown}{CA} = 2 \times 60^\circ = 120^\circ$. Logo:

$$A = \frac{120 \times \pi \times 4^2}{360} = \frac{1920\pi}{360} = \frac{16}{3}\pi \approx 17$$

A área do setor circular é 17 cm^2.

9. Como ACD é um ângulo inscrito, $A\hat{C}D = \dfrac{\overset{\frown}{AD}}{2}$.
Como AOB é um ângulo ao centro, $A\hat{O}B = \overset{\frown}{AB}$.
Assim, $\overset{\frown}{AB} = 60^\circ$ e $\overset{\frown}{AD} = \dfrac{1}{3}\overset{\frown}{AB} = \dfrac{1}{3} \times 60^\circ = 20^\circ$.
Logo, $A\hat{C}D = \dfrac{20^\circ}{2} = 10^\circ$.

10.

10.1. Sabemos que $A_{[OTC]} = 8$ cm^2 e que
$A_{[OTC]} = \dfrac{\overline{TC} \times \overline{TO}}{2}$, ou seja, $8 = \dfrac{4 \times \overline{TO}}{2}$. Logo:

$$\begin{aligned} 8 \times 2 = 4\,\overline{TO} &\Leftrightarrow 16 = 4\,\overline{TO} \\ &\Leftrightarrow \overline{TO} = \frac{16}{4} \\ &\Leftrightarrow \overline{TO} = 4 \end{aligned}$$

Concluímos, então, que o triângulo $[OTC]$ é isósceles porque tem dois lados iguais ($\overline{TC} = \overline{TO} = 4$ cm).

10.2. Como AOT é um ângulo ao centro $A\hat{O}T = \overset{\frown}{AT}$.
Por outro lado, os ângulos AOT e TOC são suplementares. Logo, $A\hat{O}T = 180^\circ - T\hat{O}C$.
Como o triângulo $[OTC]$ é retângulo e isósceles,

$$T\hat{O}C = \frac{180^\circ - 90^\circ}{2} = \frac{90^\circ}{2} = 45^\circ.$$

Assim, $A\hat{O}T = 180^\circ - 45^\circ = 135^\circ$ e $\overset{\frown}{AT} = A\hat{O}T = 135^\circ$.

11.

11.1. Numa circunferência, a cordas geometricamente iguais correspondem arcos geometricamente iguais.
Assim, como $\overline{AB} = \overline{AC}$, podemos concluir que
$\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{AC}$.

11.2. Como ADC é um ângulo inscrito, $A\hat{D}C = \dfrac{\overset{\frown}{AC}}{2}$.
Como BAC é um ângulo inscrito, $B\hat{A}C = \dfrac{\overset{\frown}{BC}}{2}$, ou seja, $\overset{\frown}{BC} = 2 \times B\hat{A}C$.
Assim, $\overset{\frown}{BC} = 2 \times 30^\circ = 60^\circ$.
Como $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{CA} =$ (por 11.1.) e $\overset{\frown}{AB} + \overset{\frown}{BC} + \overset{\frown}{CA} = 360^\circ$, então:

$$\begin{aligned} \overset{\frown}{AB} + 60^\circ + \overset{\frown}{AB} = 360^\circ &\Leftrightarrow 2\overset{\frown}{AB} = 360^\circ - 60^\circ \\ &\Leftrightarrow 2\overset{\frown}{AB} = 300^\circ \\ &\Leftrightarrow \overset{\frown}{AB} = \frac{300^\circ}{2} \\ &\Leftrightarrow \overset{\frown}{AB} = 150^\circ \end{aligned}$$

Assim, como $\overset{\frown}{AC} = \overset{\frown}{AB} + \overset{\frown}{BC}$, então
$\overset{\frown}{AC} = 150^\circ + 60^\circ = 210^\circ$.
Logo, $A\hat{D}C = \dfrac{210^\circ}{2} = 105^\circ$.

12. Consideremos o ponto D, que é outro extremo do diâmetro da circunferência que contém $[OB]$.
Como CBO é um ângulo ex-inscrito, então:

$$C\hat{B}O = \frac{\overset{\frown}{AB} + \overset{\frown}{BD}}{2}$$

$$C\hat{B}O = \frac{100^\circ + 180^\circ}{2} = \frac{280^\circ}{2} = 140^\circ$$

13. Como FEB é um ângulo com o vértice no exterior da circunferência, então $F\hat{E}B = \dfrac{\overset{\frown}{CB} - \overset{\frown}{AD}}{2}$.
Os ângulos FCA e ACD são suplementares.
Logo, $A\hat{C}D = 180^\circ - F\hat{C}A = 180^\circ - 160^\circ = 20^\circ$.
Como ACD é um ângulo inscrito, $A\hat{C}D = \dfrac{\overset{\frown}{AD}}{2}$, ou seja, $\overset{\frown}{AD} = 2 \times A\hat{C}D$.
Assim, $\overset{\frown}{AD} = 2 \times 20^\circ = 40^\circ$.
Logo, $F\hat{E}B = \dfrac{100^\circ - 40^\circ}{2} = \dfrac{60^\circ}{2} = 30^\circ$.

Propostas de Resolução

14. Como AEB é um ângulo com o vértice no interior da circunferência, $A\hat{E}B = \frac{\overset{\frown}{AB} + \overset{\frown}{CD}}{2}$, ou seja,

$A\hat{E}B = \frac{120^\circ + 58^\circ}{2} = \frac{178^\circ}{2} = 89^\circ$.

- Como CAD é um ângulo inscrito, $C\hat{A}D = \frac{\overset{\frown}{CD}}{2}$, ou seja, $C\hat{A}D = \frac{58^\circ}{2} = 29^\circ$.
- Como FDA é um ângulo ex-inscrito,

$F\hat{D}A = \frac{\overset{\frown}{DA} + \overset{\frown}{BD}}{2}$, ou seja:

$$F\hat{D}A = \frac{\overset{\frown}{BDA}}{2} = \frac{360^\circ - \overset{\frown}{AB}}{2} = \frac{360^\circ - 120^\circ}{2} = \frac{240^\circ}{2} = 120^\circ$$

15. Como BFC é um ângulo com o vértice no interior da circunferência, $B\hat{F}C = \frac{\overset{\frown}{BC} + \overset{\frown}{DA}}{2}$.

Como $B\hat{E}C$ é um ângulo com o vértice no exterior da circunferência $B\hat{E}C = \frac{\overset{\frown}{BC} - \overset{\frown}{DA}}{2}$, ou seja:

$$70^\circ = \frac{\overset{\frown}{BC} - 50^\circ}{2} \Leftrightarrow 140^\circ = \overset{\frown}{BC} - 50^\circ \Leftrightarrow 140^\circ + 50^\circ = \overset{\frown}{BC} \Leftrightarrow \overset{\frown}{BC} = 190^\circ$$

Assim:

$$B\hat{F}C = \frac{190^\circ + 50^\circ}{2} = \frac{240^\circ}{2} = 120^\circ$$

16.

16.1. $\overset{\frown}{CB} = 360^\circ - \overset{\frown}{BC}$

Como BAC é um ângulo inscrito, $B\hat{A}C = \frac{\overset{\frown}{BC}}{2}$, ou seja, $\overset{\frown}{BC} = 2 \times B\hat{A}C$.

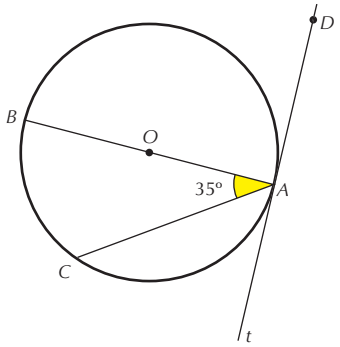
Assim, $\overset{\frown}{BC} = 2 \times 35^\circ = 70^\circ$ e, portanto, $\overset{\frown}{CB} = 360^\circ - 70^\circ = 290^\circ$.

16.2. Como CBA é um ângulo inscrito, $C\hat{B}A = \frac{\overset{\frown}{CA}}{2}$.

Assim:

$$C\hat{B}A = \frac{180^\circ - \overset{\frown}{BC}}{2} = \frac{180^\circ - 70^\circ}{2} = \frac{110^\circ}{2} = 55^\circ$$

16.3.



Como a reta t é tangente à circunferência no ponto A, então t é perpendicular a BA, $D\hat{A}B = 90^\circ$.

Logo, $C\hat{A}D = D\hat{A}B + B\hat{A}C = 90^\circ + 35^\circ = 125^\circ$.

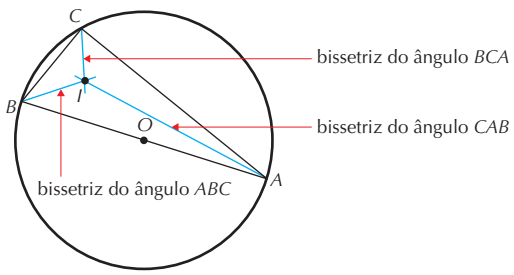
17.

17.1. a) $\overset{\frown}{AC} = 180^\circ - \overset{\frown}{CB} = 180^\circ - \frac{1}{4}\overset{\frown}{AB} = 180^\circ - \frac{1}{4} \times 180^\circ = 180^\circ - 45^\circ = 135^\circ$

b) Como CAB é um ângulo inscrito, $C\hat{A}B = \frac{\overset{\frown}{CB}}{2}$.

Assim, como $\overset{\frown}{CB} = \frac{1}{4}\overset{\frown}{AB} = \frac{1}{4} \times 180^\circ = 45^\circ$, então $C\hat{A}B = \frac{45^\circ}{2} = 22{,}5^\circ$.

17.2.



O ponto que está à mesma distância dos três lados do triângulo $[ABC]$ é o incentro, I.

18. Queremos determinar $D\hat{C}A = \frac{\overset{\frown}{CA}}{2}$.

Consideremos o triângulo $[BCO]$. Como o triângulo é isósceles ($\overline{OB} = \overline{OC}$ porque são raios da circunferência), então $O\hat{C}B = C\hat{B}O$.

Como a soma das amplitudes dos ângulos internos de um triângulo é 180º, então:

$$O\hat{C}B = C\hat{B}O = \frac{180^\circ - 120^\circ}{2} = \frac{60^\circ}{2} = 30^\circ$$

Assim, $C\hat{B}A = 30^\circ + 20^\circ = 50^\circ$ e, como CBA é um ângulo inscrito, $C\hat{B}A = \frac{\overset{\frown}{CA}}{2}$, ou seja, $\overset{\frown}{CA} = 2 \times C\hat{B}A$.

Logo, $\overset{\frown}{CA} = 2 \times 50^\circ = 100^\circ$ e $D\hat{C}A = \frac{100^\circ}{2} = 50^\circ$.

19.

19.1. Como DFC é um ângulo inscrito, $D\hat{F}C = \frac{\overset{\frown}{DC}}{2}$, ou seja, $\overset{\frown}{DC} = 2 \times D\hat{F}C$.

Assim, $\overset{\frown}{DC} = 2 \times 115^\circ = 230^\circ$.

Logo, $\overset{\frown}{CD} = 360^\circ - \overset{\frown}{DC} = 360^\circ - 230^\circ = 130^\circ$.

19.2. Como BEC é um ângulo com o vértice no interior da circunferêcia, $B\hat{E}C = \frac{\overset{\frown}{BC} + \overset{\frown}{DA}}{2}$.

Sabemos que $\overset{\frown}{BC} + \overset{\frown}{CD} + \overset{\frown}{DA} + \overset{\frown}{AB} = 360^\circ$. Assim:

$\overset{\frown}{BC} + 130^\circ + \overset{\frown}{DA} + 120^\circ = 360^\circ$

$\Leftrightarrow \overset{\frown}{BC} + \overset{\frown}{DA} = 360^\circ - 130^\circ - 120^\circ$

$\Leftrightarrow \overset{\frown}{BC} + \overset{\frown}{DA} = 110^\circ$

Logo, $B\hat{E}C = \frac{110^\circ}{2} = 55^\circ$.

19.3. $D\hat{E}A = B\hat{E}C$ porque DEA e BEC são ângulos verticalmente opostos.

Logo, $D\hat{E}A = 55^\circ$.

20. 1.º processo

Como $D\hat{H}F$ é um ângulo com o vértice no interior da circunferência, então $D\hat{H}F = \frac{\overset{\frown}{DF} + \overset{\frown}{EG}}{2}$.

Como $AB \perp CF$ e $[CF] \,//\, [ED]$, então $AB \perp ED$. Assim, $E\hat{O}A = 90^\circ$ e, como EOA é um ângulo ao centro, então $\overset{\frown}{EA} = E\hat{O}A = 90^\circ$.

Logo, $\overset{\frown}{EG} = 90^\circ - \overset{\frown}{GA} = 90^\circ - 40^\circ = 50^\circ$.

Como arcos compreendidos entre cordas paralelas são geometricamente iguais, $\overset{\frown}{DF} = \overset{\frown}{CE} = 30^\circ$.

Logo, $D\hat{H}F = \frac{30^\circ + 50^\circ}{2} = \frac{80^\circ}{2} = 40^\circ$.

2.º processo

Como $[CF] \,//\, [ED]$, CFH e DHF são ângulos de lados paralelos, ou seja, $C\hat{F}H = D\hat{H}F$.

Como CFH é um ângulo inscrito na circunferência, então $C\hat{F}H = \frac{\overset{\frown}{CG}}{2}$.

Como $AB \perp CF$ e $[CF] \,//\, [ED]$ então, $AB \perp ED$. Assim, $E\hat{O}A = 90^\circ$ e, como EOA é um ângulo ao centro, $\overset{\frown}{EA} = E\hat{O}A = 90^\circ$. Assim:

$\overset{\frown}{EG} = 90^\circ - \overset{\frown}{GA} = 90^\circ - 40^\circ = 50^\circ$

Logo:

$$D\hat{H}F = C\hat{F}H = \frac{\overset{\frown}{CG}}{2} = \frac{\overset{\frown}{CE} + \overset{\frown}{EG}}{2} = \frac{30^\circ + 50^\circ}{2} = \frac{80^\circ}{2} = 40^\circ$$

21.

21.1. Como o polígono é regular, divide a circunferência em 12 arcos geometricamente iguais, cada um com 30º (360º : 12 = 30º).

Como GEA é um ângulo inscrito, então:

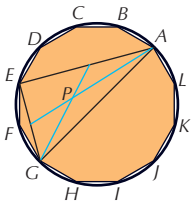
$G\hat{E}A = \frac{\overset{\frown}{GA}}{2} = \frac{6 \times 30^\circ}{2} = 90^\circ$

Concluímos, então, que o triângulo $[GEA]$ é um triângulo retângulo porque tem um ângulo de amplitude 90º.

21.2. Como AGE é um ângulo inscrito, então:

$A\hat{G}E = \frac{\overset{\frown}{AE}}{2} = \frac{4 \times 30^\circ}{2} = 60^\circ$

21.3.



Sabemos que $A_{\odot} = 81\pi$ e que $A_{\odot} = \pi r^2$. Assim:

$\pi r^2 = 81\pi \Leftrightarrow r^2 = 81 \Leftrightarrow r = \pm\sqrt{81} \Leftrightarrow r = 9,\ r > 0$

Seja O o centro da circunferência. O é o ponto médio do segmento de reta $[AG]$ e $[EO]$ é uma mediana do triângulo $[GEA]$.

Assim, $\overline{EP} = \frac{2}{3}r$ e $\overline{PO} = \frac{1}{3}r$.

Logo, a distância do baricentro ao centro da circunferência é $\overline{PO} = \frac{1}{3} \times 9 = 3$.

Trigonometria

Rever + Praticar – páginas 167 e 168

1.

1.1. $\text{sen}\,\alpha = \frac{\text{medida do cateto oposto a } \alpha}{\text{medida da hipotenusa}} = \frac{20}{29}$

$\cos\alpha = \frac{\text{medida do cateto adjacente a } \alpha}{\text{medida da hipotenusa}} = \frac{21}{29}$

$\text{tg}\,\alpha = \frac{\text{medida do cateto oposto a } \alpha}{\text{medida do cateto adjacente a } \alpha} = \frac{20}{21}$

1.2. $\text{sen}\,\beta = \frac{\text{medida do cateto oposto a } \beta}{\text{medida da hipotenusa}}$

$\Leftrightarrow \text{sen}\,\beta = \frac{8}{10} \Leftrightarrow \text{sen}\,\beta = \frac{4}{5}$

$\cos\beta = \frac{\text{medida do cateto adjacente a } \beta}{\text{medida da hipotenusa}}$

$\Leftrightarrow \cos\beta = \frac{6}{10} \Leftrightarrow \cos\beta = \frac{3}{5}$

$\text{tg}\,\beta = \frac{\text{medida do cateto oposto a } \beta}{\text{medida do cateto adjacente a } \beta} \Leftrightarrow \text{tg}\,\beta = \frac{8}{6}$

$\Leftrightarrow \text{tg}\,\beta = \frac{4}{3}$

Propostas de Resolução

2. Sabe-se que $\text{tg}\,\alpha = \dfrac{\text{sen}\,\alpha}{\cos\alpha}$. Assim:

$$\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} \Leftrightarrow \text{tg}\,\alpha = 1$$

3. Sabe-se que $\text{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$ e que $\text{sen}\,x = \dfrac{1}{3}$.
Assim:

$$\left(\frac{1}{3}\right)^2 + \cos^2 x = 1 \Leftrightarrow \cos^2 x = \frac{9}{9} - \frac{1}{9}$$

$$\Leftrightarrow \cos^2 x = \frac{8}{9}$$

$$\Leftrightarrow \cos x = \pm\sqrt{\frac{8}{9}}$$

$$\Leftrightarrow \cos x = \pm\frac{\sqrt{8}}{9}$$

Cálculo auxiliar

$$\begin{array}{r|l} 8 & 2 \\ 4 & 2 \\ 2 & 2 \\ 1 & \end{array} \qquad \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

Como x é um ângulo agudo, então $\cos x = \dfrac{\sqrt{8}}{9}$
$\Leftrightarrow \cos x = \dfrac{2\sqrt{2}}{9}$.

4. $(\text{sen}\,x + \cos x)^2 = \text{sen}^2 x + 2\,\text{sen}\,x\cos x + \cos^2 x =$

$$= \underbrace{\text{sen}^2 x + \cos^2 x}_{1} + 2\,\text{sen}\,x\cos x =$$

$= 1 + 2\,\text{sen}\,x\cos x$, como queríamos demonstrar.

5.

5.1. Como $[ABC]$ é um triângulo equilátero, a altura $[MC]$ divide a base $[AB]$ em duas partes iguais. Logo, $\overline{AM} = \dfrac{\overline{AB}}{2} = \dfrac{1}{2}$.

5.2. Pelo teorema de Pitágoras, $\overline{AC}^2 = \overline{AM}^2 + \overline{MC}^2$.
Assim:

$$1^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \overline{MC}^2 \Leftrightarrow 1 = \frac{1}{4} + \overline{MC}^2$$

$$\Leftrightarrow \overline{MC}^2 = 1 - \frac{1}{4}$$

$$\Leftrightarrow \overline{MC}^2 = \frac{3}{4}$$

$$\Leftrightarrow \overline{MC} = \pm\sqrt{\frac{3}{4}}$$

Como $\overline{MC} > 0$, $\overline{MC} = \sqrt{\dfrac{3}{4}} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

5.3. Sabe-se que $\overline{AC} = 1$, $\overline{AM} = \dfrac{1}{2}$ e $\overline{MC} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Logo:

$$\text{tg } 30^\circ = \frac{\overline{AM}}{\overline{MC}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\text{sen } 30^\circ = \frac{\overline{AM}}{\overline{AC}} = \frac{\frac{1}{2}}{1} = \frac{1}{2}$$

$$\cos 30^\circ = \frac{\overline{MC}}{\overline{AC}} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{1} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Praticar + – páginas 169 a 174

1.

1.1. $\text{sen}\,\alpha = \dfrac{\text{medida do cateto oposto a } \alpha}{\text{medida da hipotenusa}} = \dfrac{15}{17}$

$\cos\alpha = \dfrac{\text{medida do cateto adjacente a } \alpha}{\text{medida da hipotenusa}} = \dfrac{8}{17}$

$\text{tg}\,\alpha = \dfrac{\text{medida do cateto oposto a } \alpha}{\text{medida do cateto adjacente a } \alpha} = \dfrac{15}{8}$

1.2. $\text{sen}\,\beta = \dfrac{\text{medida do cateto oposto a } \beta}{\text{medida da hipotenusa}} = \dfrac{5}{13}$

$\cos\beta = \dfrac{\text{medida do cateto adjacente a } \beta}{\text{medida da hipotenusa}} = \dfrac{12}{13}$

$\text{tg}\,\beta = \dfrac{\text{medida do cateto oposto a } \beta}{\text{medida do cateto adjacente a } \beta} = \dfrac{5}{12}$

2.

2.1. $\cos x = \dfrac{\text{medida do cateto adjacente a } x}{\text{medida da hipotenusa}}$

Assim:

$$\cos x = \frac{9}{12} \Leftrightarrow x = \cos^{-1}\left(\frac{9}{12}\right) \Leftrightarrow x \approx 41{,}4^\circ$$

2.2. $\text{sen}\,x = \dfrac{\text{medida do cateto oposto a } x}{\text{medida da hipotenusa}}$

Assim:

$$\text{sen}\,x = \frac{4}{6} \Leftrightarrow x = \text{sen}^{-1}\left(\frac{4}{6}\right) \Leftrightarrow x \approx 41{,}8^\circ$$

2.3. $\text{tg}\,x = \dfrac{\text{medida do cateto oposto a } x}{\text{medida do cateto adjacente a } x}$

Assim:

$$\text{tg}\,x = \frac{4}{5} \Leftrightarrow x = \text{tg}^{-1}\left(\frac{4}{5}\right) \Leftrightarrow x \approx 38{,}7^\circ$$

3.

3.1. $\text{tg}\,\alpha = \dfrac{\text{medida do cateto oposto a } \alpha}{\text{medida do cateto adjacente a } \alpha}$

$$\text{tg } 20^\circ = \frac{x}{12} \Leftrightarrow x = 12 \times \text{tg } 20^\circ$$
$$\Leftrightarrow x \approx 4{,}37$$

3.2. $\cos\alpha = \dfrac{\text{medida do cateto adjacente a } \alpha}{\text{medida da hipotenusa}}$

$$\cos 63^\circ = \frac{x}{8} \Leftrightarrow x = 8 \times \cos 63^\circ$$
$$\Leftrightarrow x \approx 3{,}63$$

3.3. $\text{sen}\,\alpha = \dfrac{\text{medida do cateto oposto a } \alpha}{\text{medida da hipotenusa}}$

$\cos 63^\circ = \dfrac{3}{x} \Leftrightarrow x = \dfrac{3}{\text{sen } 35^\circ}$

$\Leftrightarrow x \approx 5{,}23$

4.

4.1. $\text{tg } 60^\circ = \dfrac{x}{3} \Leftrightarrow x = 3 \text{ tg } 60^\circ$

$\Leftrightarrow x = 3\sqrt{3}$

4.2. $\cos 30^\circ = \dfrac{x}{10} \Leftrightarrow x = 10 \cos 30^\circ$

$\Leftrightarrow x = 10 \times \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$\Leftrightarrow x = 5\sqrt{3}$

4.3. $\text{sen } 45^\circ = \dfrac{x}{8} \Leftrightarrow x = 8 \times \text{sen } 45^\circ$

$\Leftrightarrow x = 8 \times \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$\Leftrightarrow x = 4\sqrt{2}$

4.4. Como o triângulo é isósceles, os dois ângulos agudos são iguais. Assim:

$\alpha = \dfrac{180^\circ - 90^\circ}{2} = 45^\circ$

$\cos 45^\circ = \dfrac{x}{2} \Leftrightarrow x = 2 \cos 45^\circ$

$\Leftrightarrow x = 2 \times \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$\Leftrightarrow x = \sqrt{2}$

5.

5.1. $\text{sen } (42^\circ) + \cos (48^\circ) = 0{,}6691 + \text{sen } (90^\circ - 48^\circ) =$

$= 0{,}6691 + \text{sen } (42^\circ) =$

$= 0{,}6691 + 0{,}6691 =$

$= 1{,}3382$

5.2. $3 \times \text{sen } (44^\circ) + \cos (44^\circ) =$

$= 3 \times 0{,}6947 + \text{sen } (90^\circ - 44^\circ) =$

$= 2{,}0841 + \text{sen } (46^\circ) =$

$= 2{,}0841 + 0{,}7193 =$

$= 2{,}8034$

6. $\text{tg } 60^\circ = \dfrac{h}{30} \Leftrightarrow h = 30 \times \text{tg } 60^\circ$

$\Leftrightarrow h = 30\sqrt{3}$

Assim, a altura da roda é igual a:

$30\sqrt{3} + 1{,}65 = 30 \times 1{,}73 + 1{,}65 =$

$= 51{,}9 + 1{,}65 =$

$= 53{,}55$

A roda tem uma altura de 53,55 m.

7. O algarismo que falta é o 0, porque o cosseno de um ângulo agudo varia entre –1 e 1.

Assim, $\cos^{-1} (0{,}615\,661) \approx 52^\circ$.

8. $\text{sen}\,\alpha = \dfrac{\text{medida do cateto oposto a } \alpha}{\text{medida da hipotenusa}}$ e

$\cos\alpha = \dfrac{\text{medida do cateto adjacente a } \alpha}{\text{medida da hipotenusa}}$

$\text{sen } \alpha = \dfrac{12}{37}$

Para determinar cos α, podemos calcular a medida do cateto adjacente a α.

Utilizando o teorema de Pitágoras:

$37^2 = x^2 + 12^2 \Leftrightarrow x^2 = 1369 - 144$

$\Leftrightarrow x = \pm\sqrt{1225}$

$\Leftrightarrow x = 35$

Assim, $\cos \alpha = \dfrac{35}{37}$. Logo:

$\cos\alpha + 2\,\text{sen}\,\alpha = \dfrac{35}{37} + 2 \times \dfrac{12}{37} = \dfrac{35}{37} + \dfrac{24}{37} = \dfrac{59}{37}$

9.

9.1. Como o perímetro é igual a 24 cm e o triângulo é equilátero, então $\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{AC} = \dfrac{24}{3} = 8$ cm.

9.2. Como o triângulo [*ABC*] é equilátero, então $B\hat{A}C = \dfrac{180^\circ}{3} = 60^\circ$.

Como o ponto *D* é o ponto médio de [*AB*], então $\overline{AD} = \overline{DB} = 4$ cm.

Como o triângulo [*DAC*] é retângulo, temos:

$\text{sen } 60^\circ = \dfrac{\overline{CD}}{8} \Leftrightarrow \overline{CD} = 8 \times \text{sen } 60^\circ$

$\Leftrightarrow \overline{CD} = 8 \times \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$\Leftrightarrow \overline{CD} = 4\sqrt{3}$

Assim, $B\hat{A}C = 60^\circ$ e $\overline{CD} = 4\sqrt{3}$ cm.

9.3. $A_{[ABC]} = \dfrac{\overline{AB} \times \overline{DC}}{2}$

Logo, $A = \dfrac{8 \times 4\sqrt{3}}{2} = 16\sqrt{3}$

A área do triângulo [*ABC*] é $16\sqrt{3}$ cm^2.

10. Utilizando a fórmula fundamental da trigonometria, temos $\text{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$, ou seja:

$\text{sen}^2\alpha + \left(\dfrac{4}{5}\right)^2 = 1 \Leftrightarrow \text{sen}^2\alpha = 1 - \dfrac{16}{25}$

$\Leftrightarrow \text{sen}^2\alpha = \dfrac{9}{25}$

$\Leftrightarrow \text{sen}\,\alpha = \pm\sqrt{\dfrac{9}{25}}$

Propostas de Resolução

α é um ângulo agudo, logo $\text{sen}\,\alpha = \frac{3}{5}$.

Como $\text{tg}\,\alpha = \frac{\text{sen}\,\alpha}{\cos\alpha}$, então $\text{tg}\,\alpha = \frac{\frac{3}{5}}{\frac{4}{5}} = \frac{3}{4}$.

11.

11.1. Traçando a altura h do triângulo, relativamente à base $[AB]$, obtemos um triângulo retângulo.
Como o triângulo é isósceles e a soma das amplitudes dos seus ângulos internos é 180º, então:

$C\hat{B}A = \frac{180^\circ - 46^\circ}{2} = 67^\circ$

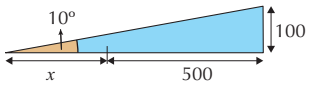
Logo:

$\text{tg}\,(67^\circ) = \frac{h}{5} \Leftrightarrow h = 5\,\text{tg}\,67^\circ$

11.2. $A_{[ABC]} = \frac{\overline{AB} \times h}{2} = \frac{10 \times 5\,\text{tg}\,67^\circ}{2} \approx 59$

A área do triângulo $[ABC]$ é 59 cm^2.

12.



$\text{tg}\,10^\circ = \frac{100}{x + 500} \Leftrightarrow x + 500 = \frac{100}{\text{tg}\,10^\circ}$

$\Leftrightarrow x = \frac{100}{\text{tg}\,10^\circ} - 500$

$\Leftrightarrow x \approx 67$

O barco encontra-se a 67 metros da costa.

13.

13.1. A opção correta é a [C] porque

$\text{sen}\,(A\hat{C}B) = \frac{\text{medida do cateto oposto a } B\hat{C}A}{\text{medida da hipotenusa}} = \frac{\overline{DE}}{\overline{CD}}$

13.2. Num triângulo, a lados de maior comprimento opõem-se ângulos de maior amplitude. Como $\overline{EC} > \overline{ED}$, então $E\hat{D}C > D\hat{C}E$.

$\text{sen}\,(E\hat{D}C) = \text{sen}\,(B\hat{A}C) = \frac{4}{5}$

$\cos\,(E\hat{D}C) = \cos\,(B\hat{A}C) = \frac{3}{5}$

$\text{tg}\,(E\hat{D}C) = \text{tg}\,(B\hat{A}C) = \frac{4}{3}$

14. $\text{tg}\,(90^\circ - 15^\circ) = \frac{x}{1200} \Leftrightarrow \text{tg}\,75^\circ = \frac{x}{1200}$

$\Leftrightarrow x = 1200\,\text{tg}\,75^\circ$

$\Leftrightarrow x = 4478$

O avião encontra-se a 4478 pés do ponto de aterragem.

15. O cateto de maior comprimento do triângulo rosa tem medida 12 cm, porque corresponde ao lado do retângulo antes da dobragem.

$\cos 30^\circ = \frac{12}{x} \Leftrightarrow x = \frac{12}{\cos 30^\circ} \Leftrightarrow x = \frac{12}{\frac{\sqrt{3}}{2}}$

$\Leftrightarrow x = \frac{24}{\sqrt{3}}$

$\Leftrightarrow x = \frac{24\sqrt{3}}{3}$

$\Leftrightarrow x = 8\sqrt{3}$

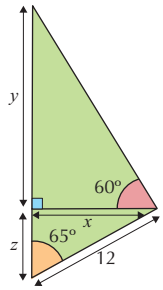
$\Leftrightarrow x \approx 13{,}9$

O vinco mede 13,9 cm.

16. $\text{tg}\,x = \frac{12}{100} \Leftrightarrow x = \text{tg}^{-1}\left(\frac{12}{100}\right)$

$\Leftrightarrow x \approx 7^\circ$

17.



$\text{sen}\,(65^\circ) = \frac{x}{12} \Leftrightarrow x = 12\,\text{sen}\,(65^\circ) \approx 10{,}88$ m

$\text{tg}\,(60^\circ) = \frac{y}{10{,}88} \Leftrightarrow x = 10{,}88 \times \text{tg}\,(60^\circ) \approx 18{,}84$ m

$\cos\,(65^\circ) = \frac{z}{12} \Leftrightarrow z = 12\cos\,(65^\circ) \Leftrightarrow z = 5{,}07$ m

A altura do *placard* é $y + z$.

$y + z = 18{,}84 + 5{,}07 = 23{,}91$

A altura do *placard* é 23,91 m.

18.

18.1. $(\text{sen}\,x + \cos x)^2 - 2\,\text{sen}\,x\cos x =$

Aplicando o caso notável $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$, tem-se:

$= \text{sen}^2 x + 2\,\text{sen}\,x\cos x + \cos^2 x - 2\,\text{sen}\,x\cos x =$

$= \underbrace{\text{sen}^2 x + \cos^2 x}_{1} + \underbrace{2\,\text{sen}\,x\cos x - 2\,\text{sen}\,x\cos x}_{0} =$

$= 1$

18.2. $(\text{tg } x \times \cos x)^2 - 1 = \text{tg}^2 x \times \cos^2 x - 1 =$

$$= \left(\frac{\text{sen} x}{\cos x}\right)^2 \times \cos^2 x - 1 =$$

$$= \frac{\text{sen}^2 x}{\cos^2 x} \times \cos^2 x - 1 =$$

$$= \text{sen}^2 x - 1$$

Como $\text{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$, então $\text{sen}^2 x = 1 - \cos^2 x$.

Assim:

$\text{sen}^2 x - 1 = 1 - \cos^2 x - 1 =$

$= -\cos^2 x$

18.3. $(\text{sen} x + \cos x)(\text{sen} x - \cos x) =$

Aplicando o caso notável $(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$, temos $\text{sen}^2 x - \cos^2 x$.

Como $\text{sen}^2 x = 1 - \cos^2 x$, então:

$\text{sen}^2 x - \cos^2 x = 1 - \cos^2 x - \cos^2 x =$

$= 1 - 2\cos^2 x$

18.4. $\cos(90^\circ - x) \times \text{sen} x = \text{sen} x \times \text{sen} x =$

$= \text{sen}^2 x =$

$= 1 - \cos^2 x$

19. $A_{[ABC]} = \dfrac{\overline{AB} \times \overline{CB}}{2}$

$\text{tg } 25^\circ = \dfrac{1{,}5}{\overline{AD}} \Leftrightarrow \overline{AD} = \dfrac{1{,}5}{\text{tg } 25^\circ}$

$\Leftrightarrow \overline{AD} \approx 3{,}2168$

Logo, $\overline{AB} = 3{,}2168 + 5 = 8{,}2168$.

$\text{tg } 25^\circ = \dfrac{\overline{CB}}{8{,}2168} \Leftrightarrow \overline{CB} = 8{,}2168 \times \text{tg } 25^\circ$

$\Leftrightarrow \overline{CB} \approx 3{,}8316$

Assim:

$A_{[ABC]} = \dfrac{8{,}2168 \times 3{,}8316}{2} = 15{,}74$

A área do triângulo $[ABC[$ é 15,74 cm^2.

20. O ponto B tem abcissa 0 e ordenada igual a $\overline{OB}$. Consideremos o triângulo retângulo $[OAB]$.

$B\hat{A}O = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$

$\text{tg } 60^\circ = \dfrac{\overline{OB}}{2} \Leftrightarrow \overline{OB} = 2 \times \text{tg } 60^\circ$

$\Leftrightarrow \overline{OB} = 2\sqrt{3}$

Logo, $B(0, 2\sqrt{3})$.

21. Como o losango tem os lados iguais e o seu perímetro é 20, então:

$\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CD} = \overline{AD} = \dfrac{20}{4} = 5$

$\text{sen}\left(\dfrac{50^\circ}{2}\right) = \dfrac{x}{5} \Leftrightarrow x = 5 \text{ sen } 25^\circ$

$\Leftrightarrow x \approx 2{,}1131$

$\cos\left(\dfrac{50^\circ}{2}\right) = \dfrac{y}{5} \Leftrightarrow y = 5 \cos 25^\circ$

$\Leftrightarrow y \approx 4{,}5315$

Assim, o comprimento da diagonal menor é $2{,}1131 \times 2 = 4{,}2262$ cm e o comprimento da diagonal maior é $4{,}5315 \times 2 = 9{,}0630$ cm.

Como $A = \dfrac{d \times D}{2}$, temos:

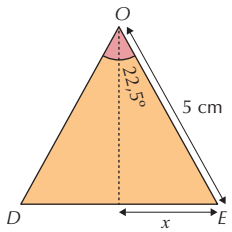
$A = \dfrac{4{,}2262 \times 9{,}0630}{2} = 19{,}15$

A área do losango é 19,15 cm^2.

22.

22.1. Como se trata de um octógono regular inscrito numa circunferência e $B\hat{O}C$ é um ângulo ao centro, inscrito no arco $\overset{\frown}{BC}$, então $B\hat{O}C = \dfrac{360^\circ}{8} = 45^\circ$.

22.2.



$\text{sen } (22{,}5^\circ) = \dfrac{x}{5} \Leftrightarrow x = 5 \text{ sen } (22{,}5^\circ)$

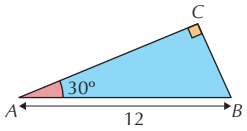
$\overline{DE} = 2 \times 5 \text{ sen } (22{,}5^\circ) \Leftrightarrow \overline{DE} = 3{,}827$

Logo, $P = 8 \times 3{,}827 = 30{,}6$.

O perímetro do octógono regular é 30,6 cm.

23. O triângulo $[ABC]$ é um triângulo retângulo, pois ACB é um ângulo inscrito numa semicircunferência, ou seja, $A\hat{C}B = \dfrac{180^\circ}{2} = 90^\circ$.

$A_{[ABC]} = \dfrac{\overline{AC} \times \overline{BC}}{2}$



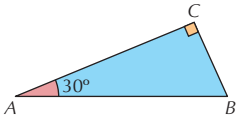
Como BAC é um ângulo inscrito, então:

$B\hat{A}C = \dfrac{\overset{\frown}{BC}}{2} = \dfrac{60^\circ}{2} = 30^\circ$

A hipotenusa do triângulo, $[AB]$, é um diâmetro da circunferência. Logo, sendo $P = 2\pi r = d \times \pi$ e $P = 12\pi$, temos:

$d \times \pi = 12\pi \Leftrightarrow d = 12$

Utilizando as razões trigonométricas, temos:



Propostas de Resolução

$\text{sen}\,(B\hat{A}C) = \dfrac{\overline{CB}}{\overline{AB}}$, ou seja:

$$\text{sen } 30^\circ = \frac{\overline{CB}}{12} \Leftrightarrow \overline{CB} = 12 \text{ sen } 30^\circ$$
$$\Leftrightarrow \overline{CB} = 12 \times \frac{1}{2}$$
$$\Leftrightarrow \overline{CB} = 6$$

$\cos\,(B\hat{A}C) = \dfrac{\overline{AC}}{\overline{AB}}$, ou seja:

$$\cos 30^\circ = \frac{\overline{AC}}{12} \Leftrightarrow \overline{AC} = 12 \cos 30^\circ$$
$$\Leftrightarrow \overline{AC} = 12 \times \frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$\Leftrightarrow \overline{AC} = 6\sqrt{3}$$

Logo, $A_{[ABC]} = \dfrac{6 \times 6\sqrt{3}}{2} = 18\sqrt{3}$.

A área do triângulo $[ABC]$ é $18\sqrt{3}$ u.a.

24.

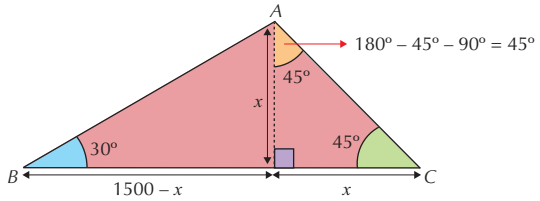
$$\begin{cases} \text{tg } 45^\circ = \dfrac{h}{x} \\ \text{tg } 30^\circ = \dfrac{h}{300 + x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 \times x = h \\ \text{———} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} h = x \\ \dfrac{\sqrt{3}}{3} \times (300 + x) = h \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{———} \\ \dfrac{300\sqrt{3}}{3} + \dfrac{\sqrt{3}}{3} h = h \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \text{———} \\ 3h - \sqrt{3}h = 300\sqrt{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{———} \\ h = \dfrac{300\sqrt{3}}{3 - \sqrt{3}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \approx 410 \\ h \approx 410 \end{cases}$$

O monte tem 410 m de altura.

25. $\text{tg } 30^\circ = \dfrac{x}{1500 - x}$



$$1500 \times \frac{\sqrt{3}}{3} - \frac{\sqrt{3}}{3} x = x \Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{3} x + x = 1500 \frac{\sqrt{3}}{3}$$
$$\Leftrightarrow (\sqrt{3} + 3)x = 1500\sqrt{3}$$
$$\Leftrightarrow x = \frac{1500\sqrt{3}}{\sqrt{3} + 3}$$
$$\Leftrightarrow x \approx 549{,}04$$

$$\text{sen } 30^\circ = \frac{549{,}04}{\overline{AB}} \Leftrightarrow \overline{AB} = \frac{549{,}04}{\text{sen } 30^\circ}$$
$$\Leftrightarrow \overline{AB} = 1098{,}08$$

A distância entre os acampamentos A e B é 1098,08 m.

26. $\overline{OR} = \overline{OP} = 1$, porque são raios de circunferência.

$$\text{tg}x = \frac{\overline{SR}}{\overline{OR}} \Leftrightarrow \overline{SR} = \text{tg}x$$

$$\text{sen}x = \frac{\overline{PQ}}{\overline{OP}} \Leftrightarrow \overline{PQ} = \text{sen}x$$

$$\cos x = \frac{\overline{OQ}}{\overline{OP}} \Leftrightarrow \overline{OQ} = \cos x$$

Então, $\overline{QR} = 1 - \cos x$.

$$A_{[PQRS]} = \frac{\overline{RS} + \overline{QP}}{2} \times \overline{QR}$$

$$A_{[PQRS]} = \frac{\text{tg}x + \text{sen}x}{2} \times (1 - \cos x) =$$

$$= \frac{\text{tg}x - \text{tg}x \cos x + \text{sen}x - \text{sen}x \cos x}{2} =$$

$$= \frac{\text{tg}x - \dfrac{\text{sen}x}{\cos x} \cos x + \text{sen}x - \text{sen}x \cos x}{2} =$$

$$= \frac{\text{tg}x - \text{sen}x + \text{sen}x - \text{sen}x \cos x}{2} =$$

$$= \frac{\text{tg}x - \text{sen}x \cos x}{2}$$