FACULDADE DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
UNIVERSIDADE NOVA DE LISBOA
Departamento de Matemática

Prova de acesso alunos maiores de 23 anos de ***Matemática***
5 de Junho 2019
Duração: duração: 2h00 tolerância: 30 m

Justifique as suas respostas e apresente os cálculos efectuados.
Mude de folha quando mudar de grupo.

Grupo 1

Na sua folha de resposta, indique, para cada item, qual a opção correcta.
Apresente os resultados na forma de uma grelha.

(*Resposta correcta:* $1,2$ *valores. Resposta errada:* $(-0,4)$ *valores.*)

1. Um certo código binário é uma sequência de cinco dígitos, que podem ser zeros ou uns (considere, como exemplo, 00110). Quantos sequência existem, nestas condições, com exactamente três zeros?

(a) 10 **(b)** 32 **(c)** 50 **(d)** 10^5

2. Dados dois acontecimentos A e B contidos num espaço de acontecimentos X, sabe-se que

$$P(A|B) = \frac{1}{3}, \quad P(B|A) = \frac{1}{4} \quad \text{e que} \quad AUB = X$$

Qual o valor de $P(A \cap B)$?

(a) $\frac{1}{9}$ **(b)** $\frac{1}{6}$ **(c)** $\frac{1}{3}$ **(d)** $\frac{1}{2}$

3. Sejam a, b números reais tais que $e^{a+b} = 1$ e $\ln(a) = 4$. Qual o valor de b?

(a) $-e^4$ **(b)** -4 **(c)** 2 **(d)** e^2

4. Considere a função definida em $\mathbb{R}$ por $f(x) = x^2 + \cos(2x)$. Qual dos seguintes valores é uma abcissa de um ponto de inflexão do gráfico de f?

(a) 0 **(b)** $\frac{\pi}{6}$ **(c)** $\frac{\pi}{3}$ **(d)** $\frac{\pi}{2}$

5. Seja $z = r \cdot \text{cis}\,(\theta)$ um número complexo não nulo. Sabemos que

$$w = cis\left(\frac{\pi}{3}\right) \cdot z$$

é um número complexo com parte real nula. Qual das seguintes opções pode representar um argumento θ de z?

(a) $\frac{\pi}{2}$ **(b)** $\frac{\pi}{3}$ **(c)** $\frac{\pi}{6}$ **(d)** 0

6. Qual o limite da sucessão $u_n = \tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2n}\right)$?

(a) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ **(b)** 1 **(c)** $\sqrt{3}$ **(d)** $+\infty$

(Continua no verso)

Grupo 2

[1,4] **(a)** Justifique que a equação $e^{-x} = \ln(x)$ tem pelo menos uma solução $x_0 \in]1,3[$. Para tal, estude a existência de zeros para a função $h(x) = e^{-x} - \ln(x)$.

[1,4] **(b)** Admita que a solução x_0 da equação $e^{-x} = \ln(x)$ considerada na alínea anterior é única. Utilizando a calculadora gráfica, indique uma aproximação de x_0 às centésimas.

*(Alternativa: Estude a monotonia da função definida em $\mathbb{R}^+$ por $h(x) = e^{-x} - \ln(x)$ e justifique que a solução da equação $e^{-x} = \ln(x)$ considerada na alínea **(a)** é única.)*

Grupo 3

Considere a função

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1-\cos(2x)}{x} & \text{se} \quad x \in]-\infty, 0[\\ 0 & \text{se} \quad x = 0 \\ \frac{\ln(1+x^2)}{x} & \text{se} \quad x > 0 \end{cases}$$

[1,5] **(a)** Mostre que f é contínua em $x = 0$.

[1,5] **(b)** Determine os zeros da função f no intervalo $[-2\pi, 0[$.

[1,0] **(c)** Estude a existência de assímptota horizontal para f em $+\infty$.
(Pode utilizar o facto de que, para valores de x suficientemente grandes, $\ln(1 + x^2) < \ln(x^3)$.)

Grupo 4

Considere a função $g : \mathbb{R}^+ \mapsto \mathbb{R}$ definida por $g(t) = e^{-t}$. Dado $P = (x, e^{-x})$, um ponto no gráfico de g, considere a recta r, tangente ao gráfico no ponto P. A recta r intersecta o eixo das ordenadas e o eixo das abcissas nos pontos Q e R, respectivamente. Seja A a área do triângulo OQR, em que O é a origem do referencial.

[2,0] **(a)** Verifique que a área A do triângulo OQR é dada, em função da abcissa x do ponto P, por

$$A(x) = \frac{1}{2} \cdot e^{-x} \cdot (x+1)^2 \qquad (x > 0)$$

[2,0] **(b)** Determine os intervalos de monotonia da função $A(x)$ e estude a existência de extremos.

Grupo 5

[1,0] **(a)** Determine a forma algébrica do número complexo

$$w = \frac{(\text{cis}(\frac{\pi}{3}))^5}{(1-i)^2}$$

[1,0] **(b)** Determine a área da região delimitada, no plano complexo, pelas condições

$$z \cdot \overline{z} \geq 1\,, \qquad 0 \leq Im(z) \leq 1 \quad \text{e} \quad 0 \leq Re(z) \leq 1$$

Fim