Preparação para exame

12.º Ano de Escolaridade | Turma G-K

FUNÇÕES REAIS DE VARIÁVEL REAL

1. 1.1. $A(a) = A_{[ABC]} = \dfrac{\overline{AB} \times g(a)}{2} = \dfrac{4 \times \frac{1}{4}(a^2-4)(a-3)}{2} = \dfrac{(a^2-4)(a-3)}{2}$, com $a \in]-2;2[$

   1.2. Determinemos a função derivada A

$$A(a) = \frac{(a^2-4)(a-3)}{2}$$
$$A'(a) = \left[\frac{(a^2-4)(a-3)}{2}\right]' = \frac{1}{2} \times \left[2a \times (a-3) + (a^2-4) \times 1\right] = \frac{1}{2}(3a^2-6a-4) =$$
$$= \frac{3}{2}a^2 - 3a - 2$$

Zeros de A'

$$A'(a) = 0 \Leftrightarrow \frac{3}{2}a^2 - 3a - 2 = 0 \Leftrightarrow 3a^2 - 6a - 4 = 0 \Leftrightarrow a = \frac{6 \pm \sqrt{(-6)^2 - 4 \times 3 \times (-4)}}{2 \times 3} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow a = \frac{3-\sqrt{21}}{3} \vee a = \frac{3+\sqrt{21}}{3}$$

Quadro de sinal de A'

a	-2		$\frac{3-\sqrt{21}}{3}$		2
$A'(a)$	\\\	$+$	0	$-$	\\\
$A(a)$	\\\	$\nearrow$	$\frac{27+7\sqrt{21}}{9}$	$\searrow$	\\\

$$A\left(\frac{3-\sqrt{21}}{3}\right) = \frac{\left(\left(\frac{3-\sqrt{21}}{3}\right)^2 - 4\right)\left(\frac{3-\sqrt{21}}{3} - 3\right)}{2} = \frac{27+7\sqrt{21}}{9}$$

A área do triângulo $[ABC]$ é máxima e igual a a $\dfrac{27+7\sqrt{21}}{9} \approx 6.56$,

quando $a = \dfrac{3-\sqrt{21}}{3} \approx -0.53$

   1.3. .

Pretende-se encontrar as soluções da equação $A(a) = 3$

Inserir as funções $y_1 = \frac{(a^2-4)(a-3)}{2}$ e $y_2 = 3$

ajustar a janela de visualização:

$a_{min}: -3$

$a_{max}: 3$

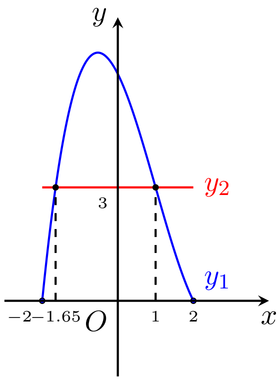
$y_{min}: 0$

$y_{max}: 4$

Desenhar os gráficos

O problema tem duas soluções:

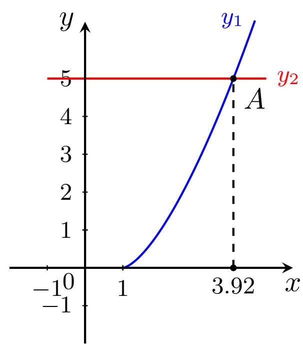
$a \approx -1.65$ e $a = 1$



2. .

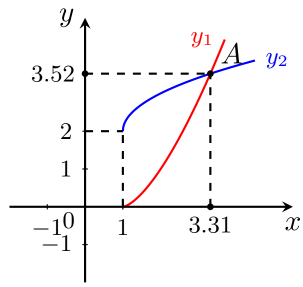
2.1. Como se tem sempre $\overline{AB} = \overline{BC}$, então, tem-se que $\overline{AC} = 2 \times |x-1| = 2(x-1)$, visto que $x \geq 1$
Por outro lado, a altura do triângulo é dada, em função de x, por: $h = |f(x) - 2| =$
$= |\sqrt{x-1} + 2 - 2| = |\sqrt{x-1}| = \sqrt{x-1}$, visto que $\sqrt{x-1} \geq 0$
Sendo assim, $A_{[ABC]} = \frac{base \times altura}{2} = \frac{2(x-1) \times \sqrt{x-1}}{2} = (x-1)\sqrt{x-1}$, *c.q.d.*

2.2. Pretende-se encontrar as soluções da equação $g(x) = 5$
Inserir as funções:
$y_1 = (x-1)\sqrt{x-1}$
e $y_2 = 5$
Ajustar a janela de visualização:
$x_{min} : -1$
$x_{max} : 4$
$y_{min} : -1$
$y_{max} : 6$



a área do triângulo $[ABC]$ é igual a 5 unidades quadradas se $x \approx 3.92$.

2.3. Pretende-se encontrar as soluções da equação $f(x) = g(x)$
Inserir as funções:
$y_1 = (x-1)\sqrt{x-1}$
e $y_2 = \sqrt{x-1} + 2$
Ajustar a janela de visualização:
$x_{min} : -2$
$x_{max} : 4$
$y_{min} : -2$
$y_{max} : 4$



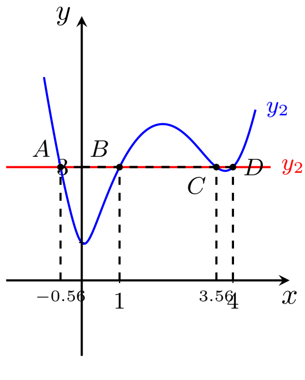
Os gráficos de f e de g intersetam-se no ponto $A = (3.31; 3.52)$.

3. .

3.1. O ponto P, que percorre a curva do gráfico da função f tem coordenadas: $P = (x; f(x))$
Ora, $g(x) = d(A;P) = \overline{AP} = \sqrt{(x-1)^2 + (f(x) - 0)^2} = \sqrt{x^2 - 2x + 1 + (-x^2 + 4x)^2} =$
$= \sqrt{x^2 - 2x + 1 + x^4 - 8x^3 + 16x^2} = \sqrt{x^4 - 8x^3 + 17x^2 - 2x + 1}$, *c.q.d.*

3.2. As abcissas dos pontos do gráfico de f que distam três unidades do ponto A, são as soluções da equação $g(x) = 3$.

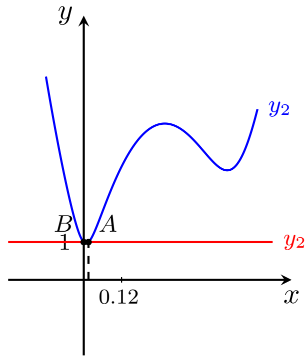
Pretende-se encontrar as soluções da equação $g(x) = 3$
Inserir as funções:
$y_1 = \sqrt{x^4 - 8x^3 + 17x^2 - 2x + 1}$
e $y_2 = 3$
Ajustar a janela de visualização:
$x_{min} : -2$
$x_{max} : 4$
$y_{min} : -1$
$y_{max} : 4$



As abcissas dos pontos do gráfico de f que distam três unidades do ponto A, são: $x_1 \approx -0.56$;$x_2 = 1$; $x_3 \approx 3.56$ e $x_4 = 4$

3.3. As abcissas dos pontos do gráfico de f que distam uma unidade do ponto A, são as soluções da equação $g(x) = 1$.

Pretende-se encontrar as soluções da equação $g(x) = 1$
Inserir as funções:
$y_1 = \sqrt{x^4 - 8x^3 + 17x^2 - 2x + 1}$
e $y_2 = 1$
Ajustar a janela de visualização:
$x_{min} : -2$
$x_{max} : 4$
$y_{min} : -1$
$y_{max} : 4$



As abcissas dos pontos do gráfico de f que distam uma unidade do ponto A, são: $x_1 = 0$ e $x_2 \approx 0.12$.

3.4. Comecemos por resolver a equação $f(x) = g(x)$ para encontra as abcissas desses pontos de interseção
Seja D o domínio de validade da equação
$f(x) = g(x) \wedge x \in D \Leftrightarrow \sqrt{x^4 - 8x^3 + 17x^2 - 2x + 1} = -x^2 + 4x$
$\Rightarrow (\sqrt{x^4 - 8x^3 + 17x^2 - 2x + 1})^2 = (-x^2 + 4x)^2 \wedge x \in D$
$\Rightarrow x^4 - 8x^3 + 17x^2 - 2x + 1 = x^4 - 8x^3 + 16x^2 \wedge x \in D$
$\Rightarrow x^2 - 2x + 1 = 0 \wedge x \in D$
$\Rightarrow (x - 1)^2 = 0 \wedge x \in D$
$\Leftrightarrow x - 1 = 0 \wedge x \in D$
$\Leftrightarrow x = 1 \wedge x \in D$
Se existir solução da equação $f(x) = g(x)$ ela será $x = 1$
Verificação:
$x = 1 \twoheadrightarrow$
$\sqrt{1^4 - 8 \times 1^3 + 17 \times 1^2 - 2 \times 1 + 1} = -1^2 + 4 \times 1$
$\sqrt{9} = 3$
$3 = 3(verdadeiro)$
Logo $x = 1$ é a solução da equação $f(x) = g(x)$
Vamos agora determinar a ordenada do ponto de interseção: $y_0 = f(1) = -1^2 + 4 \times 1 = 3$

Resumindo, os gráficos de f e de g intersetam-se no ponto $I = (1; 3)$. Geometricamente, significa que o ponto P tem coordenadas $(1; 3)$, ou seja, o ponto P é a imagem do ponto A pela função f.

4. 4.1. Comecemos por determinar a medida de comprimento de $\overline{AC}$
Ora, pelo teorema de Pitágoras tem-se que:
$\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 \Leftrightarrow \overline{AC}^2 = (x+1)^2 + x^2 \Leftrightarrow \overline{AC}^2 = 2x^2 + 2x + 1 \Leftrightarrow \overline{AC} = \pm\sqrt{2x^2 + 2x + 1}$,
mas como $\overline{AC}$ é um amedida de comprimento, tem-se que: $\overline{AC} = \sqrt{2x^2 + 2x + 1}$
Sendo assim, o perímetro do trapézio é dado por:
$P_{[ACDE]} = \overline{AC} + \overline{CD} + \overline{DF} + \overline{FA} = 4x + 2 + 2\sqrt{2x^2 + 2x + 1}$, *c.q.d.*

4.2. Seja D o domínio de validade da equação
$D = \{x \in \mathbb{R} : 2x^2 + 2x + 1 \geq 0 \wedge 11 - 2x \geq 0\} = \{x \in \mathbb{R} : x \leq \frac{11}{2}\}$
$f(x) = 24 \Leftrightarrow 4x + 2 + 2\sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 24 \Leftrightarrow \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 11 - 2x \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow (\sqrt{2x^2 + 2x + 1})^2 = (11 - 2x)^2 \Leftrightarrow 2x^2 + 2x + 1 = 121 - 44x + 4x^2 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x^2 - 23x + 60 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{23 \pm \sqrt{(-23)^2 - 4 \times 1 \times 60}}{2 \times 1} \Leftrightarrow x = \frac{23 \pm \sqrt{289}}{2} \Leftrightarrow x = \frac{23-17}{2} \vee x = \frac{23+17}{2} \Leftrightarrow$
$x = 3 \vee x = 20 \Leftrightarrow$. Como 20 não pertence ao domínio de validade da equação, então 3 é a solução da equação. Este valor representa a medida do lado do quadrado $[BCDE]$ para o qual o perímetro do trapézio $[ACDF]$ é igual a 24.