



MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
E CIÊNCIA

ESCOLA
SECUNDÁRIA
DE PENAFIEL

Exame Modelo III de Matemática A

Duração do Exame: 150 minutos + 30 minutos de tolerância | junho de 2018

Caderno 1 (75 minutos + 15min) + Caderno 2 (75 minutos + 15min)

12.º Ano de Escolaridade | Turma - G - K

Caderno 1

- **Duração: 75 minutos + 15 minutos de tolerância**
 - **É permitido o uso de calculadora gráfica**
-

Indica de forma legível a versão da prova. A prova é constituída por dois cadernos (Caderno 1 e Caderno 2). Utiliza apenas caneta ou esferográfica de tinta azul ou preta. Só é permitido o uso de calculadora no Caderno 1. Não é permitido o uso de corretor. Risca o que pretendes que não seja classificado. Para cada resposta identifica o item. Apresenta as tuas respostas de forma legível. Apresenta apenas uma resposta para cada item. A prova apresenta um formulário no Caderno 1. As cotações dos itens de cada Caderno encontram-se no final de cada Caderno.

Na resposta aos itens de seleção (escolha múltipla), seleciona a resposta correta. Escreve na folha de respostas o número do item e a letra que identifica a opção escolhida.

Na resposta aos restantes itens, apresenta o teu raciocínio de forma clara, indicando todos os cálculos que tiveres de efetuar e todas as justificações necessárias. Quando, para um resultado, não é pedida aproximação apresenta sempre o valor exato.

Geometria

Comprimento de um arco de circunferência:

αr (α - amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r - raio)

área de um polígono regular: $\text{Semiperímetro} \times \text{Apótema}$

área de um setor circular:

$\frac{\alpha r^2}{2}$ (α - amplitude, em radianos, do ângulo ao centro, r - raio)

área lateral de um cone: $\pi r g$ (r - raio da base, g - geratriz)

área de uma superfície esférica: $4\pi r^2$ (r - raio)

Volume da pirâmide: $\frac{1}{3} \times \text{área da base} \times \text{Altura}$

Volume do cone: $\frac{1}{3} \times \text{área da base} \times \text{Altura}$

Volume da esfera: $\frac{4}{3}\pi r^3$ (r - raio)

Progressões

Soma dos n primeiros termos de uma progressão (u_n) :

Progressão aritmética: $\frac{u_1 + u_n}{2} \times n$

Progressão geométrica: $u_1 \times \frac{1 - r^n}{1 - r}$, $r \neq 1$

Trigonometria

$\sin(a + b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$

$\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$

Lei dos senos

$$\frac{\sin \hat{A}}{a} = \frac{\sin \hat{B}}{b} = \frac{\sin \hat{C}}{c}$$

Lei dos cossenos ou Teorema de Carnot

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \hat{A}$$

Complexos

$(|z| \operatorname{cis} \theta)^n = |z|^n \operatorname{cis}(n\theta)$ ou $(|z| e^{i\theta})^n = |z|^n e^{i(n\theta)}$

$\sqrt[n]{|z| \operatorname{cis} \theta} = \sqrt[n]{|z|} \operatorname{cis} \left(\frac{\theta + 2k\pi}{n} \right)$ ou

$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|} e^{i \left(\frac{\theta + 2k\pi}{n} \right)}$, $k \in \{0; 1; 2; \dots; n-1\}$ e $n \in \mathbb{N}$

Probabilidades

$$\mu = p_1 x_1 + \dots + p_n x_n$$

$$\sigma = \sqrt{p_1 (x_1 - \mu)^2 + \dots + p_n (x_n - \mu)^2}$$

Se $X \sim N(\mu, \sigma)$, então:

$$P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) \approx 0.6827$$

$$P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) \approx 0.9545$$

$$P(\mu - 3\sigma < X < \mu + 3\sigma) \approx 0.9973$$

Regras de derivação

$$(u + v)' = u' + v'$$

$$(uv)' = u'v + uv'$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

$$(u^n)' = nu^{n-1}u' \quad (n \in \mathbb{R})$$

$$(\sin u)' = u' \cos u$$

$$(\cos u)' = -u' \sin u$$

$$(\tan u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$$

$$(e^u)' = u' e^u$$

$$(a^u)' = u' a^u \ln a \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$$

$$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$$

$$(\log_a u)' = \frac{u'}{u \ln a} \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$$

Limites notáveis

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e \quad (n \in \mathbb{N})$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^p} = +\infty \quad (p \in \mathbb{R})$$

1. .

1.1	1.2
P2001/2002	PMC2015

1.1. Sabe-se que 7% dos pregos produzidos por uma máquina são defeituosos

Os pregos são comercializados em caixas de 500 pregos

Calcula a probabilidade de, numa caixa, existirem exatamente dez pregos defeituosos

Numa das opções está, em notação científica, o valor aproximado desta probabilidade

Em qual delas?

(A) 2.5×10^{-6}

(B) 2.5×10^{-8}

(C) 2.6×10^{-7}

(D) 2.5×10^{-7}

1.2. Em qual das opções está o valor de $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{11^n + 12^n + 13^n}$?

(A) 11

(B) 12

(C) 13

(D) 14

2. Num saco há dez cartões, sendo seis azuis e quatro vermelhos

Extraem-se do saco três cartões, sucessivamente e sem reposição

Qual é a probabilidade de dois e só dois cartões terem a cor azul?

Numa das opções está o valor dessa probabilidade

Em qual delas?

(A) 20%

(B) 30%

(C) 40%

(D) 50%

3. Seja $(E, P(E), P)$ um espaço de probabilidade

Sejam A e B dois acontecimentos possíveis de $P(E)$

Sabe-se que:

$$P(A) = 0.2, P(A \cap \overline{B}) = 0.1 \text{ e } P(A \cup B) = p, \text{ com } p > 0$$

Determina o valor de p , de modo que $P(B \mid \overline{A}) = \frac{3}{8}$

4. Numa caixa há dezassete bolas, sendo oito azuis, numeradas com o número dois, quatro vermelhas, numeradas com o número três, três brancas, numeradas com o número quatro e duas pretas, numeradas com o número um

Retiram-se, de uma só vez, duas bolas da caixa e multiplicam-se os números das bolas

Qual é a probabilidade de o produto das duas bolas ser um número par?

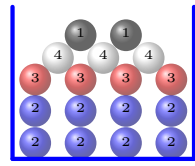


Figura 1

Uma resposta a esta questão é dada por $P = \frac{{}^{11}C_2 + {}^{11}C_1 \times {}^6C_1}{{}^{17}C_2}$

Numa pequena composição, justifica esta resposta

Nota:

Na tua resposta deves:

- indicar e explicar o número de casos possíveis e o número de casos favoráveis
- fazer uma referência à Lei de Laplace

5. Na figura 2 estão representados em referencial ortonormado xOy :

- uma circunferência de raio 2
- o raio $[OA]$ da circunferência
- um triângulo $[OAC]$

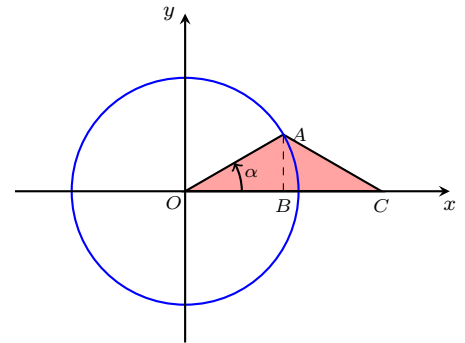


Figura 2

Tal como a figura sugere, o ponto A pertence ao primeiro quadrante, o ponto B pertence ao eixo Ox , e o ângulo de amplitude α assinalado na figura, tem por lado origem o semieixo positivo Ox e lado extremidade a semirreta \vec{OA} , com $\alpha \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[$

Admite que um ponto C se encontra no semieixo positivo Ox , de tal modo que se tem sempre $\overline{OA} = \overline{AC}$

Em qual das opções está a expressão que dá, em função de α , o perímetro do triângulo $[OAC]$?

- (A) $4 + 4 \cos(\alpha)$
 (B) $2 + 2 \cos(\alpha)$
 (C) $2 + 2 \sin(\alpha)$
 (D) $4 + 4 \sin(\alpha)$

6. Considera as funções f e g , reais de variável real, definidas em \mathbb{R} , respetivamente, por: $f(x) = -3^x + 9$ e $g(x) = -3^{-x-1} + 9$
No referencial cartesiano xOy da figura 3, estão representados partes dos gráficos das duas funções e um triângulo $[ABC]$

Mostra que o valor da área do triângulo $[ABC]$ é igual a

$$A_{[ABC]} = \frac{135 - 5\sqrt{3}}{6} \text{ u.a.}$$

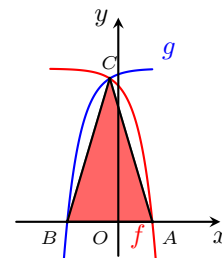


Figura 3

7. Seja a função f , real de variável real, definida em \mathbb{R} , por $f(x) = e^{\frac{x}{2}} - \frac{x}{2e}$
No referencial ortonormado da figura 4, está representado parte do gráfico da função f , uma reta r e um triângulo $[ABC]$

Sabe-se que:

- a reta r , é assíntota ao gráfico de f , quando $x \rightarrow -\infty$
- o ponto B pertence ao eixo das ordenadas e tem ordenada $2e$
- o ponto A é o ponto de interseção do gráfico de f com o eixo Oy
- o ponto C é o ponto do gráfico de f de abscissa positiva que tem a mesma ordenada do ponto B

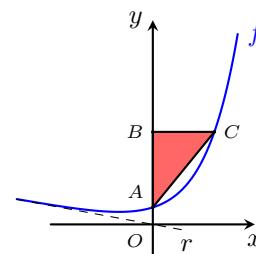


Figura 4

7.1. Escreve a equação reduzida da reta r

7.2. Recorrendo às potencialidades da calculadora gráfica, determina um valor arredondado às centésimas da área do triângulo $[ABC]$

Nota: Na tua resposta deves reproduzir o gráfico visualizado na calculadora, devidamente identificado, desenhar o triângulo $[ABC]$, e assinalar os pontos notáveis, com as coordenadas arredondadas às centésimas (se houver necessidade)

7.3. Sabe-se que a função f é duas vezes diferenciável em \mathbb{R}

Mostra que, sendo $a \in \mathbb{R}$, $\frac{1}{2}f'(a) - f''(a) + \frac{1}{4e} = 0$

8. Seja \mathbb{C} , conjunto dos números complexos

Em qual das opções pode estar a condição na variável complexa que define o conjunto de pontos representado?

- (A) $1 < |z| < 2 \wedge 0 < \text{Arg}(z) < \frac{\pi}{4}$
(B) $1 \leq |z| \leq 2 \wedge 0 < \text{Arg}(z) < \frac{\pi}{4}$
(C) $1 < |z| < 2 \wedge 0 \leq \text{Arg}(z) \leq \frac{\pi}{4}$
(D) $1 \leq |z| \leq 2 \wedge 0 \leq \text{Arg}(z) \leq \frac{\pi}{4}$

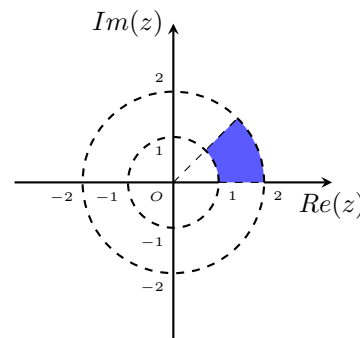


Figura 5

FIM DO CADERNO 1

COTAÇÕES

1.	5 pontos
2.	5 pontos
3.	10 pontos
4.	10 pontos
5.	10 pontos
6.	15 pontos
7.		
7.1	15 pontos
7.2	15 pontos
7.3	10 pontos
8.	5 pontos
TOTAL		<u>100 pontos</u>

PÁGINA EM BRANCO

Caderno 2

- Duração: 75 minutos + 15 minutos de tolerância
 - Neste Caderno não é permitida a utilização de calculadora
-

9. .

9.1	9.2
P2001/2002	PMC2015

- 9.1.** Admite que a variável peso, expressa em gramas, das laranjas de um pomar é bem modelada por uma distribuição normal $N(50; 4)$, em que 50 é o valor médio e 4 é o valor do desvio-padrão da distribuição

Retira-se, ao acaso, uma dessas laranjas

Considera os acontecimentos

A : "o peso da laranja retirada é inferior a 40 gramas"

B : "o peso da laranja retirada é superior a 55 gramas"

Qual das seguintes afirmações é verdadeira?

- (A) $P(A) + P(B) = 1$
- (B) $P(A) < P(B)$
- (C) $P(A) = P(B)$
- (D) $P(A) > P(B)$

- 9.2.** Em qual das opções está o valor exato de $\cos\left(\arcsin\left(\frac{1}{3}\right)\right)$

- (A) $\frac{2\sqrt{2}}{9}$
- (B) $-\frac{2\sqrt{2}}{9}$
- (C) $-\frac{2\sqrt{2}}{3}$
- (D) $\frac{2\sqrt{2}}{3}$

10. Em \mathbb{C} , conjunto dos números complexos, considera os números complexos, $z_1 = -2 + 2i^{41}$ e $z_2 = \frac{\sqrt{2}}{e^{i(-\frac{\pi}{4})}}$

- 10.1.** Determina os números reais a e b , de modo que $a\overline{z_1} - i(z_2)^2 = \frac{b}{i^3}$

- 10.2.** Escreve o número complexo z_2 na forma trigonométrica e determina o menor valor de $n \in \mathbb{N}$, para o qual $(z_2)^n$ é um número real positivo

11. O Rodrigo está a aquecer água para colocar no saco de água quente. Depois de aquecer a água vai encher o saco de água quente e colocá-lo na cama

A temperatura da água, t minutos após se ter enchido o saco de água quente, é bem modelada pela função $f(t) = 15 + 65e^{-0.02t}$

- 11.1.** O Rodrigo, por questões de segurança, só vai para a cama quando a temperatura da água que se encontra no saco de água quente é de 40°C . Quanto tempo vai ter de esperar para ir para a cama? Apresenta a resposta em minutos, arredondados às décimas

- 11.2.** Sabe-se que, com o passar do tempo, a temperatura da água que se encontra no saco de água quente tende a ficar à temperatura ambiente do quarto. Qual é a temperatura ambiente do quarto?

12. Considera, num referencial o.n. $Oxyz$, os planos de equações $\alpha : 2k^2x + 2y - 2z - 1 = 0$, com $k \in \mathbb{R}$ e $\beta : 2x + 4z - 3 = 0$

Os dois planos α e β são perpendiculares se e somente se,

- (A) $k \in \{-\sqrt{2}; \sqrt{2}\}$
 (B) $k \in \{-2; 2\}$
 (C) $k \in \{-\sqrt{3}; \sqrt{3}\}$
 (D) $k \in \{-1; 1\}$
13. Sejam $x \in \mathbb{R}^+$ e $y \in \mathbb{R}^+$
 No desenvolvimento de $(\sqrt{x} + \sqrt{y})^{10}$ há um termo da forma ax^3y^2 , com $a \in \mathbb{N}$

Em qual das opções está o seu coeficiente a ?

- (A) ${}^{10}C_2$
 (B) ${}^{10}C_4$
 (C) ${}^{10}C_7$
 (D) ${}^{10}C_8$
14. Seja f , a função real de variável real, definida em $] - 1; +\infty[$, por $f(x) = \ln(x + 1) + x$
 Na afigura 6, está representado parte do gráfico da função f e uma reta r , tangente ao gráfico no ponto I , de abcissa $e - 1$

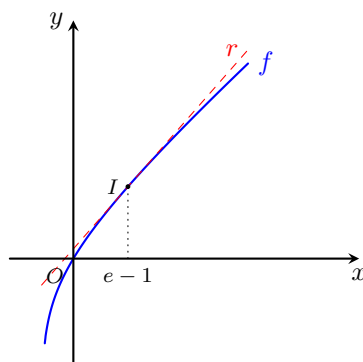


Figura 6

- 14.1.** Mostra, analiticamente, que a função f é estritamente crescente em todo o seu domínio
14.2. Em qual das opções está a equação reduzida da reta r ?

- (A) $y = \frac{e-1}{e}x + \frac{1}{e}$
 (B) $y = \frac{e+1}{e}x - \frac{1}{e}$
 (C) $y = \frac{e+1}{e}x + \frac{1}{e}$
 (D) $y = \frac{e+1}{e}x + \frac{2}{e}$

- 14.3.** Determina $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x + 2}{2} \times \frac{1}{(f(x-1) - x + 1)}$

15. Seja (a_n) a sucessão de números reais definida por $a_n = \left(\frac{2n+3}{2n-2}\right)^n$

Determina o número real k de modo que $\lim(a_n) = \frac{1}{e^{k+1}}$

16. Seja $k \in \mathbb{R}$ e h , a função definida por

$$h(x) = \begin{cases} \frac{1 - e^{x - \frac{\pi}{2}}}{(\pi - 2x) \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)} & se \quad x < \frac{\pi}{2} \\ \frac{1}{2} & se \quad x = \frac{\pi}{2} \\ \ln\left(e^{\cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)} + 1 - e\right) - \frac{2k}{3} & se \quad x > \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

Determina o valor de k para o qual a função h é contínua no ponto $x = \frac{\pi}{2}$

FIM DO CADERNO 2

COTAÇÕES

9.	5 pontos	
10.			
10.1	10 pontos	
10.2	10 pontos	
11.			
11.1	10 pontos	
11.2	10 pontos	
12.	5 pontos	
13.	5 pontos	
14.			
14.1	5 pontos	
14.2	10 pontos	
14.3	10 pontos	
15.	10 pontos	
16.	10 pontos	
TOTAL		100 pontos	

PÁGINA EM BRANCO