Exercício 1

Seja $(u_n)_n$ uma sucessão definida por: $u_n = \frac{2n-3}{3n}$

a)

Estude $(u_n)_n$ quanto à monotonia

$(u_{n+1}) - (u_n) < 0$ é monótona decrescente
$(u_{n+1}) - (u_n) > 0$ é monótona crescente

$$\left[\frac{3n}{3n}\right]\left[\frac{2n-1}{3n+3}\right] - \left[\frac{2n-3}{3n}\right]\left[\frac{3n+3}{3n+3}\right]$$

$$\frac{6n^2-3n}{(3n)\,(3n+3)} - \frac{6n^2-9n+6n-9}{(3n)\,(3n+3)}$$

$$\frac{6n^2-3n-6n^2+9n-6n+9}{(3n)\,(3n+3)}$$

$$\frac{9}{(3n)\,(3n+3)} > 0, \forall n \in \mathbb{N}$$

u_n é monótona crescente

b)

$(u_n)_n$ é uma sucessão limitada? Justifique.

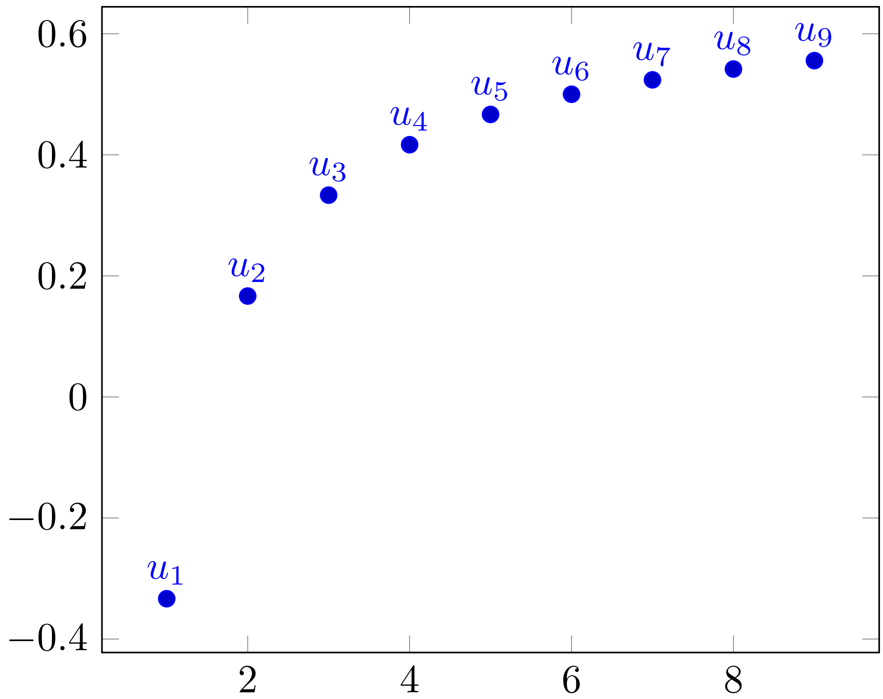
$$\lim_n \frac{2n-3}{3n} = \lim_n \frac{\cancel{n}\left(2-\frac{3}{n}\right)}{\cancel{n}(3)} = \frac{2-\overset{0}{\cancel{\frac{3}{n}}}}{3} = \frac{2}{3}$$

$(u_n)_n$ é convergente pois tende para um número real. Toda a sucessão convergente é limitada. Como $(u_n)_n$ é crescente sabemos que:

$$\frac{2n-3}{3n} = \frac{2}{3} - \frac{1}{n}$$

$$-\frac{1}{n} < 0, \text{então qualquer termo será sempre inferior a } \frac{2}{3}$$

$$-\frac{1}{3} < u_n < \frac{2}{3}, \forall n \in \mathbb{N}$$



Exercício 2

Considere a sucessão $(a_n)_n$ de termo geral $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$.

a)

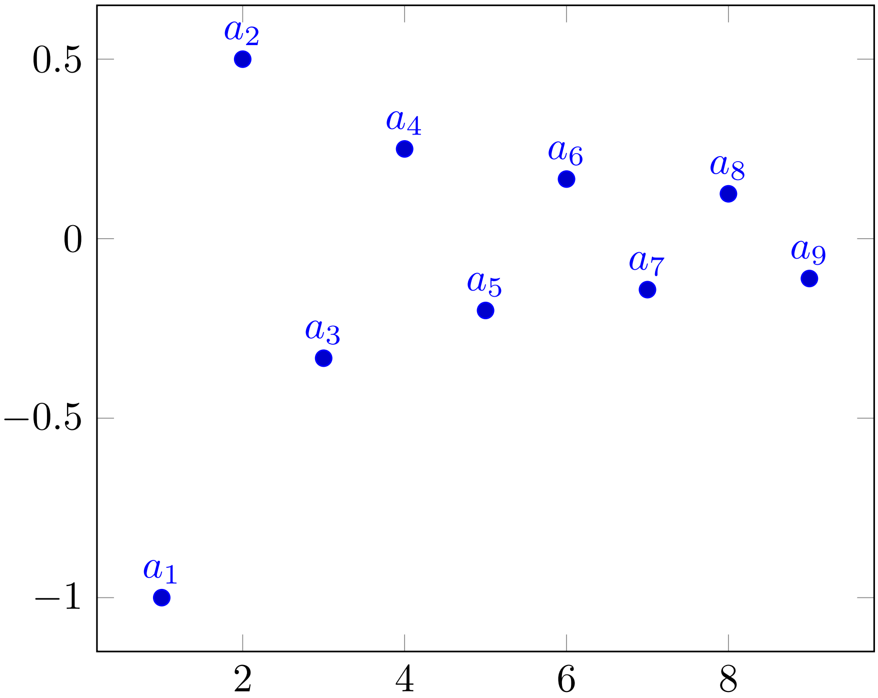
Determine os três primeiros termos da sucessão $(a_n)_n$.

b)

Verifique se $(a_n)_n$ é uma sucessão convergente.

$$\begin{cases} \text{Para n par: } \lim\limits_{n} \frac{1}{n} = \frac{1}{+\infty} = 0 \\ \text{Para n ímpar: } \lim\limits_{n} -\frac{1}{n} = \frac{-1}{+\infty} = 0 \end{cases}$$

$(a_n)_n$ é convergente para zero.



Exercício 3

Determine, caso existam, os seguintes limites:

a)

$$\lim_{n} \left(\frac{2n}{\sqrt{n^2+1}} \right) \overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}$$

$$\lim_{n} \left(\frac{\cancel{n}(2)}{\cancel{n}\sqrt{1+\cancel{\frac{1}{n^2}}^{\,0}}} \right)$$

$$= \frac{2}{\sqrt{1}} = 2$$

b)

$$\lim_{n} \left(\sqrt{n+10} - \sqrt{n}\right) \overset{\infty-\infty}{=}$$

$$\lim_{n} \left(\frac{\left(\sqrt{n+10} - \sqrt{n}\right)\left(\sqrt{n+10} + \sqrt{n}\right)}{\left(\sqrt{n+10} + \sqrt{n}\right)} \right)$$

$$\lim_{n} \frac{10}{\sqrt{n+10} + \sqrt{n}} = \frac{10}{+\infty} = 0$$

c)

$$\lim_n \left(1+\frac{10}{n}\right)^{\frac{n}{2}} \stackrel{1^\infty}{=}$$

$$\left[\lim_n \left(1+\frac{10}{n}\right)^{n}\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$=\left[e^{10}\right]^{\frac{1}{2}} = e^5$$

Exercício 4

Considere a função real de variável real definida por $f(x)=\frac{\sqrt{x+5}}{x}$

$$D_f=\{x\in\mathbb{R}: x+5\geq 0 \wedge x\neq 0\} = [-5,+\infty[\setminus\{0\}$$

Exercício 5

Considere a função quadrática f, $f(x)=\frac{\sqrt{x+5}}{x}$

a)

b)

Averigue se o ponto de coordenadas $\left(8,\sqrt{2}\right)$ pertence ao gráfico de f.

$$f\left(8\right)=\frac{\sqrt{8}}{8-6}=\frac{\cancel{2}\sqrt{2}}{\cancel{2}}=\sqrt{2}$$

Logo $\left(8,\sqrt{2}\right)$ pertence a f

Considere a função real de variável real definida pela expressão $f(x)=(m-3)x^2-2x+1, m\in\mathbb{R}\setminus 3$. Determine o valor de m de modo que o ponto de coordenadas (-1, 2) pertença ao gráfico de f.

$$f(-1)=2 \Leftrightarrow m=2$$

Exercício 6

Considere a função polinomial definida em $\mathbb{R}$ por $p(x)=x^3-7x-6$.

a)

Mostre, usando a regra de Ruffini, que $p(x)=(x+1)(x^2-x-6)$, para qualquer $x\in\mathbb{R}$.

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 0 & -7 & -6 \\ -1 & & -1 & 1 & 6 \\ \hline & 1 & -1 & -6 & 0 \end{array}$$

Logo, $(x+1)(x^2-x-6)$

b)

Determine, sob a forma de intervalo ou união de intervalos, o conjunto de números reais que verificam a condição $p(x) \leq 0$.

$$(x+1)(x^2-x-6) \leq 0$$

x	$-\infty$	-2		-1		3	$+\infty$
$x+1$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
x^2-x-6	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$(x+1)\left(x^2-x-6\right)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

Decrescente Decrescente

$$C.S. =]-\infty,-2] \cup [-1,3]$$

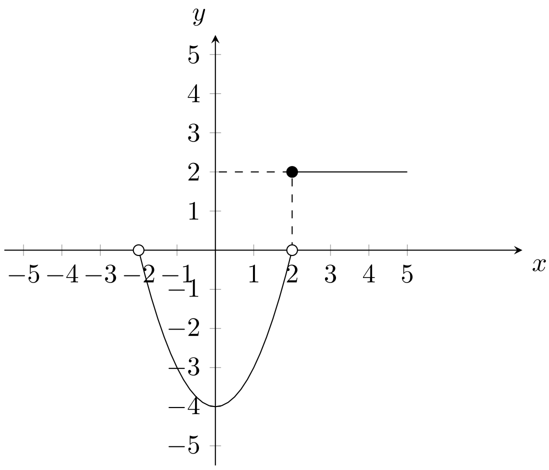
Exercício 7

Considere a função real de domínio $\mathbb{R} \setminus 1$ definida por:

$$g(x) = \begin{cases} x^2-4, \text{ se } -2 < x < 2, \\ 2, \text{ se } x \geq 2. \end{cases}$$

a)

Represente graficamente a função g. (Nota: não é necessário apresentar cálculos.)



$$D_g =]-2,+\infty[$$

$$D'_g = [-4,0[\cup\{2\}$$

b)

Verifique se a função g é injetiva. Justifique.

A funcão não é injetiva pois há objetos diferentes com imagem igual, por exemplo:

$$-2 \neq -3 \wedge f(-2) = f(-3) = -3$$

c)

Justifique se é verdadeira a seguinte afirmação: "A função g é uma função ímpar."

Exercício 7

Considere a funcão quadrática itf, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $f(x) = -2x^2 - 4x + 1$.

a)

Mostre que o vértice da parábola definida pelo gráfico de f é V(-1, 3).

$$f(x) = -2\left(x+1\right)^2 + 3$$

Logo, o vértice da parábola á V(-1,3)

b)

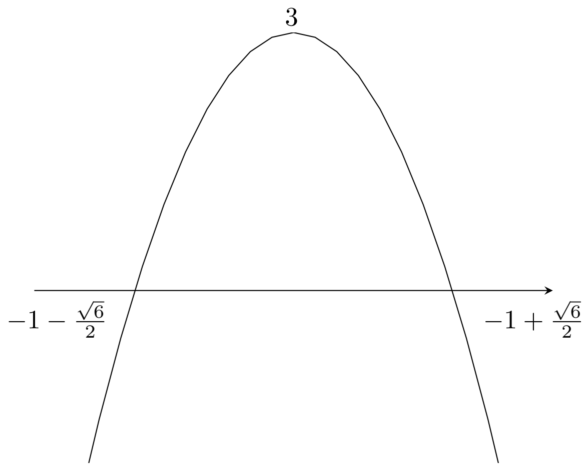
Indique o contradomínio de f.

$$D'_f =]-\infty, 3]$$

c)

Indique, caso existam, o máximo e o mínimo absoluto de f.

A funcão tem como máximo absoluto 3 mas não tem mínimo absoluto


3
$-1-\frac{\sqrt{6}}{2}$
$-1+\frac{\sqrt{6}}{2}$