Matemática
Teste II
25 · 05 · 2021

23 + curso

Universidade do Minho
DMA

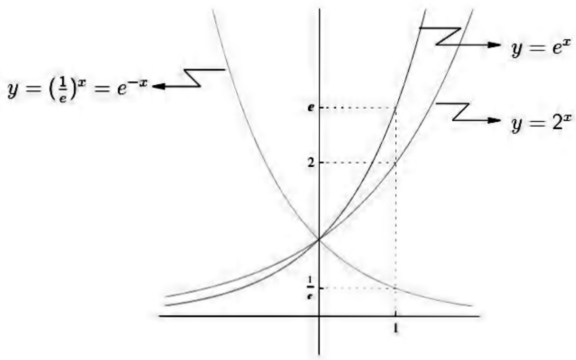
Duração: 120 minutos

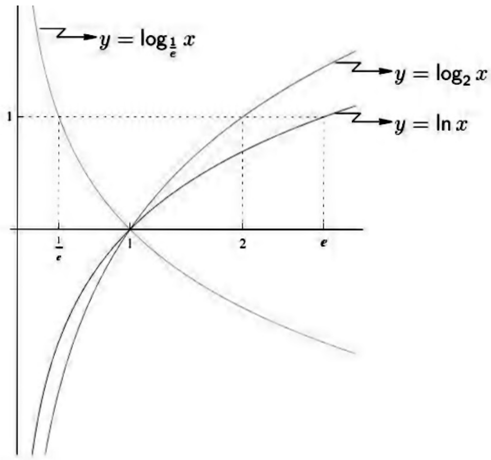
Nome:

N.º de identificação civil: **Turma:**

Formulário

Gráficos de funções exponenciais e logarítmicas





Regras de derivação

$(a)' = 0 \qquad (a \in \mathbb{R})$

$(x)' = 1$

$(ax+b)' = a \qquad (a, b \in \mathbb{R})$

$(ax^p)' = apx^{p-1} \quad (a \in \mathbb{R}, p \in \mathbb{Z}\backslash\{0\})$

$(f+g)' = f' + g'$

$(fg)' = f'g + f\,g'$

$\left(\dfrac{f}{g}\right)' = \dfrac{f'g - f\,g'}{g^2}$

$\left(f^n\right)' = n\,f^{n-1}f' \qquad (n \in \mathbb{R})$

$\left(\sqrt[n]{f}\right)' = \dfrac{f'}{n\sqrt[n]{f^{n-1}}} \qquad (n \in \mathbb{N})$

$(\text{sen } f)' = f' \cos f$

$(\cos f)' = -f' \text{ sen } f$

$(\text{tg } f)' = \dfrac{f'}{\cos^2 f}$

$\left(e^f\right)' = f'e^f$

$\left(a^f\right)' = f'a^f \ln a \qquad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

$(\ln f)' = \dfrac{f'}{f}$

$(\log_a f)' = \dfrac{f'}{f \ln a} \qquad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

Justifique convenientemente todas as suas respostas.

Cotações:
1. a) 12 b) 12 **2.** a) 12 b) 12 **3.** a) 12 b) 8 **4.** 10 **5.** a) 10 b) 12 c) 8 **6.** 12
7. a) 10 b) 10 **8.** a) 10 b) 10 **9.** 12 **10.** a) 10 b) 10 **11.** 8

Exercício 1 Considere a sucessão $(u_n)_n$, definida por $u_n = \frac{(-1)^n}{n+1}$.

a) Determine u_1, u_2 e u_3. Estude $(u_n)_n$ quanto à monotonia. Justifique.

b) A sucessão $(u_n)_n$ é convergente? E limitada? Justifique.

Exercício 2 Determine, caso existam, os seguintes limites:

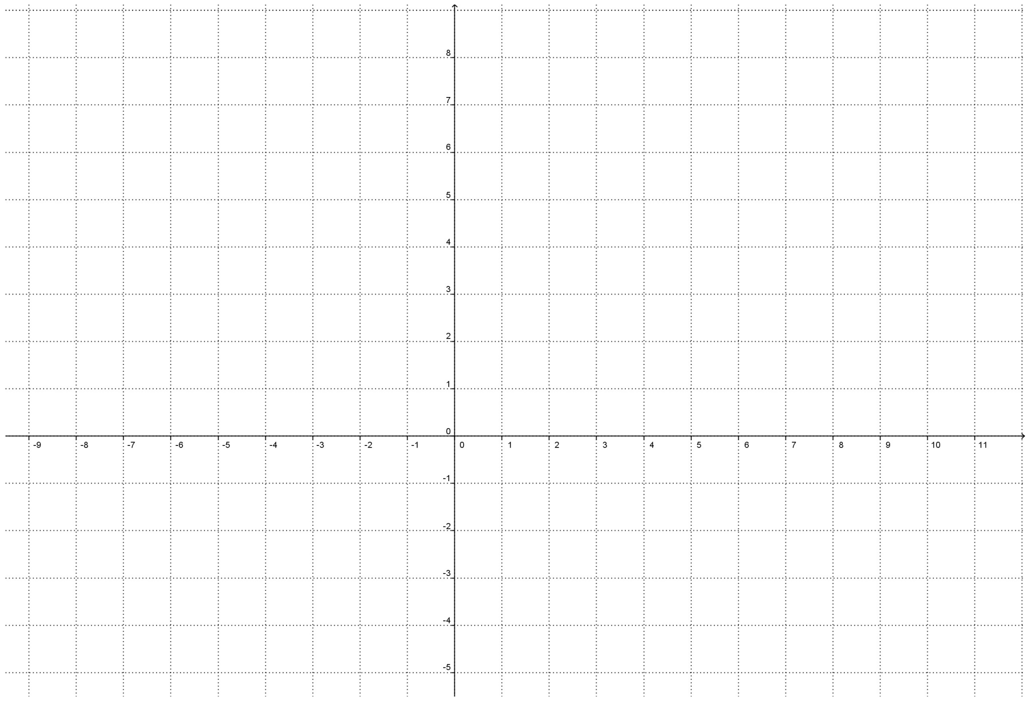
a) $\lim_n (\sqrt{n^2+4} - n)$;

b) $\lim_n \left(1 + \frac{4}{n}\right)^{\frac{n}{2}}$.

Exercício 3 Considere a função $g : [-1, +\infty[\to \mathbb{R}$ definida por

$$g(x) = \begin{cases} -x^2 + 1 & \text{se } x \in \ [-1, 1[, \\ -2 & \text{se } x \in \ [1, +\infty[. \end{cases}$$

a) Esboce uma representação gráfica de g. (Nota: não é necessário apresentar cálculos.)



b) Diga, justificando, se a função é injetiva.

Exercício 4 Considere a função real de variável real definida por $t(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{x^2 - 9}$. Determine o domínio de t.

Exercício 5 Considere a função polinomial definida em $\mathbb{R}$ por $p(x) = x^4 - 8x^2 + 16$.

a) Mostre, usando a regra de Ruffini, que $p(x) = (x-2)(x^3 + 2x^2 - 4x - 8)$, para qualquer $x \in \mathbb{R}$.

b) Determine $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^4 - 8x^2 + 16}{x - 2}$.

c) Mostre que a função p é uma função par.

Nota: Uma função f real de variável real é par quando, para qualquer $a \in D_f$, se tem $-a \in D_f$ e $f(-a) = f(a)$.

Exercício 6 Resolva em $\mathbb{R}$ a seguinte equação fracionária $\frac{x^2-1}{x^2+x} = 0$.

Exercício 7 Calcule y', sendo:

a) $y = \dfrac{x^2+1}{2x}$;

b) $y = (x+1) \times \ln(x)$.

Exercício 8 Considere a função real de variável real definida por $h(x) = 2^{x+1}$.

a) Determine as coordenadas do ponto de interseção do gráfico da função h com a reta de equação $y = 16$.

b) Verifique se o ponto de coordenadas $(-2, \frac{1}{2})$ pertence ao gráfico da função h.

Exercício 9 Caracterize a função inversa da função g definida por $g(x) = 4 - \log_2(2x + 2)$.

Exercício 10 Resolva, em $\mathbb{R}$, as seguintes condições:

a) $\ln(2x + 5) \geq \ln(x)$;

b) $x \cdot 3^{x+1} = 9x$.

Exercício 11 Considere h a função real de variável real definida por $h(x) = x^2 + mx + 1$, com $m \in \mathbb{R}$. Determine os valores de m de modo que a função h seja sempre positiva.