Exercícios de aplicação **(págs. 373 a 395)**

1. $z = \frac{k+2i}{1+ki} = \frac{(k+2i)(1-ki)}{(1+ki)(1-ki)} = \frac{k-k^2i+2i-2ki^2}{1-(ki)^2} =$

$$= \frac{k+2k+(2-k^2)i}{1+k^2} =$$

$$= \frac{3k}{1+k^2} + \frac{2-k^2}{1+k^2}i$$

Para que z seja um imaginário puro $\text{Re}(z) = 0 \ \wedge \ \text{Im}(z) \neq 0$.

Assim:

$\frac{3k}{1+k^2} = 0 \Leftrightarrow 3k = 0 \Leftrightarrow k = 0$

2.

2.1. $2 + \frac{2\sqrt{3}-\sqrt{3}i^{13}}{1+2i} = 2 + \frac{2\sqrt{3}-\sqrt{3}i}{1+2i} = 2 + \frac{(2\sqrt{3}-\sqrt{3}i)(1-2i)}{(1+2i)(1-2i)} =$

$$= 2 + \frac{2\sqrt{3}-4\sqrt{3}i-\sqrt{3}i+2\sqrt{3}i^2}{1-4i^2} =$$

$$= 2 + \frac{2\sqrt{3}-5\sqrt{3}i-2\sqrt{3}}{1+4} =$$

$$= 2 + \frac{-5\sqrt{3}i}{5} =$$

$$= 2 - \sqrt{3}i$$

Cálculo auxiliar

$$\begin{array}{r|l} 13 & 4 \\ \hline 1 & 3 \end{array}$$

2.2. $\frac{(2-i)^2+1+i}{1-2i} + 3i^{-21} + 1 = \frac{4-4i+i^2+1+i}{1-2i} + 3i^3 + 1 =$

$$= \frac{4-3i-1+1}{1-2i} + 3 \times (-i) + 1 =$$

$$= \frac{(4-3i)(1+2i)}{(1-2i)(1+2i)} - 3i + 1 =$$

$$= \frac{4+8i-3i-6i^2}{1-4i^2} - 3i + 1 =$$

$$= \frac{4+5i+6}{1+4} - 3i + 1 =$$

$$= \frac{10+5i}{5} - 3i + 1 =$$

$$= 2 + i - 3i + 1 =$$

$$= 3 - 2i$$

Cálculo auxiliar

$-21 = -24 + 3$

3.

3.1. Seja $z = 5$.

Atendendo à representação geométrica de z, temos que:

- o módulo de z é 5;
- um argumento de z é, por exemplo, 0.

Assim, $z = 5e^{i0}$.

LeYa EDUCAÇÃO Daniela Raposo e Luzia Gomes

3.2. Seja $z = -3$.

Atendendo à representação geométrica de z, temos que:

- o módulo de z é 3;
- um argumento de z é, por exemplo, π.

Assim, $z = 3e^{i\pi}$.

3.3. Seja $z = 4i$.

Atendendo à representação geométrica de z, temos que:

- o módulo de z é 4;
- um argumento de z é, por exemplo, $\frac{\pi}{2}$.

Assim, $z = 4e^{i\frac{\pi}{2}}$.

3.4. Seja $z = -11i$.

Atendendo à representação geométrica de z, temos que:

- o módulo de z é 11;
- um argumento de z é, por exemplo, $-\frac{\pi}{2}$.

Assim, $z = 11e^{i\left(-\frac{\pi}{2}\right)}$.

3.5. Seja $z = \sqrt{3} + i$.

- $|z| = \sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2 + 1^2} = \sqrt{3+1} = \sqrt{4} = 2$
- Seja θ um argumento de z. Como o afixo de z está no 1º quadrante, concluímos que θ pertence ao 1º quadrante.

  $\text{tg}\ \theta = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \ \wedge \ \theta \in 1º\ Q$

  Então, podemos concluir que $\theta = \frac{\pi}{6}$.

Assim, $z = 2e^{i\frac{\pi}{6}}$.

3.6. Seja $z = -2 + 2i$.

- $|z| = \sqrt{(-2)^2 + 2^2} = \sqrt{4+4} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$
- Seja θ um argumento de z. Como o afixo de z está no 2º quadrante, concluímos que θ pertence ao 2º quadrante.

  $\text{tg}\ \theta = \frac{2}{-2} = -1 \ \wedge \ \theta \in 2º\ Q$

  Então, podemos concluir que $\theta = \frac{3\pi}{4}$.

Assim, $z = 2\sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}$.

Daniela Raposo e Luzia Gomes

3.7. Seja $z = -3i - \sqrt{3} = -\sqrt{3} - 3i$.

- $|z| = \sqrt{\left(-\sqrt{3}\right)^2 + (-3)^2} = \sqrt{3+9} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$
- Seja θ um argumento de z. Como o afixo de z está no 3º quadrante, concluímos que θ pertence ao 3º quadrante.

  $\text{tg}\,\theta = \frac{-3}{-\sqrt{3}} = \frac{3\sqrt{3}}{3} = \sqrt{3} \;\wedge\; \theta \in 3º\text{ Q}$

  Então, podemos concluir que $\theta = \frac{4\pi}{3}$.

Assim, $z = 2\sqrt{3}e^{i\frac{4\pi}{3}}$.

3.8. Seja $z = \sqrt{6} - 3\sqrt{2}i$.

- $|z| = \sqrt{\left(\sqrt{6}\right)^2 + \left(-3\sqrt{2}\right)^2} = \sqrt{6+18} = \sqrt{24} = 2\sqrt{6}$
- Seja θ um argumento de z. Como o afixo de z está no 4º quadrante, concluímos que θ pertence ao 4º quadrante.

  $\text{tg}\,\theta = \frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{6}} = \frac{3}{\sqrt{3}} = \frac{3\sqrt{3}}{3} = \sqrt{3} \;\wedge\; \theta \in 4º\text{ Q}$

  Então, podemos concluir que $\theta = -\frac{\pi}{3}$.

Assim, $z = 2\sqrt{6}e^{i\left(-\frac{\pi}{3}\right)}$.

4.

4.1. $e^{i0} = \cos(0) + i\text{sen}(0) = 1 + 0 = 1$

4.2. $5e^{i(-15\pi)} = 5[\cos(-15\pi) + i\text{sen}(-15\pi)] = 5[\cos(\pi) + i\text{sen}(\pi)] =$

$= 5[(-1) + 0] =$

$= -5$

4.3. $2e^{i\frac{5\pi}{2}} = 2\left[\cos\left(\frac{5\pi}{2}\right) + i\text{sen}\left(\frac{5\pi}{2}\right)\right] = 2\left[\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i\text{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right)\right] =$

$= 2(0 + i) =$

$= 2i$

4.4. $2e^{i\frac{3\pi}{2}} = 2\left[\cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) + i\text{sen}\left(\frac{3\pi}{2}\right)\right] = 2(0 - i) = -2i$

4.5. $2e^{i\frac{7\pi}{6}} = 2\left[\cos\left(\frac{7\pi}{6}\right) + i\text{sen}\left(\frac{7\pi}{6}\right)\right] = 2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right) = -\sqrt{3} - i$

4.6. $-6e^{i\frac{2\pi}{3}} = -6\left[\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i\text{sen}\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right] = -6\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = 3 - 3\sqrt{3}i$

4.7. $\overline{4e^{i\frac{5\pi}{3}}} = 4e^{i\left(-\frac{5\pi}{3}\right)} = 4\left[\cos\left(-\frac{5\pi}{3}\right) + i\text{sen}\left(-\frac{5\pi}{3}\right)\right] = 4\left[\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\text{sen}\left(\frac{\pi}{3}\right)\right] =$

$= 4\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) =$

$= 2 + 2\sqrt{3}i$

4.8. $\overline{-\frac{1}{2}e^{i\frac{2\pi}{3}}} = -\frac{1}{2}e^{i\left(-\frac{2\pi}{3}\right)} = -\frac{1}{2}\left[\cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right) + i\text{sen}\left(-\frac{2\pi}{3}\right)\right] =$

$= -\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) =$

$= \frac{1}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4}i$

5.

5.1. $\bar{z} = \overline{3e^{i\frac{3\pi}{8}}} = 3e^{i\left(-\frac{3\pi}{8}\right)}$

$-z = 3e^{i\left(\pi+\frac{3\pi}{8}\right)} = 3e^{i\frac{11\pi}{8}}$

5.2. $\bar{z} = \overline{-4e^{i\frac{13\pi}{7}}} = -4e^{i\left(-\frac{13\pi}{7}\right)} = -4e^{i\left(\frac{\pi}{7}\right)} = 4e^{i\left(\pi+\frac{\pi}{7}\right)} = 4e^{i\frac{8\pi}{7}}$

$-z = 4e^{i\frac{13\pi}{7}}$

5.3. $z = \sqrt{3}\cos\alpha - i\sqrt{3}\text{sen}\alpha = \sqrt{3}(\cos\alpha - i\text{sen}\alpha) =$

$= \sqrt{3}\big(\cos\alpha + i\text{sen}(-\alpha)\big) =$

$= \sqrt{3}\big(\cos(-\alpha) + i\text{sen}(-\alpha)\big) =$

$= \sqrt{3}e^{i(-\alpha)}$

$\bar{z} = \sqrt{3}e^{i\alpha}$

$-z = \sqrt{3}e^{i(\pi-\alpha)}$

5.4. $z = \text{sen}\alpha - i\cos\alpha = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) - i\text{sen}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) =$

$= \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) + i\text{sen}\left(-\frac{\pi}{2} + \alpha\right) =$

$= \cos\left(-\frac{\pi}{2} + \alpha\right) + i\text{sen}\left(-\frac{\pi}{2} + \alpha\right) =$

$= e^{i\left(-\frac{\pi}{2} + \alpha\right)}$

$\bar{z} = e^{i\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)}$

$-z = e^{i\left(\pi - \frac{\pi}{2} + \alpha\right)} = e^{i\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)}$

6.

6.1. $\frac{2+3i+i^{31}-2\left(e^{i\frac{\pi}{7}}\right)^{21}}{1-2i} - 2 = \frac{2+3i+i^3-2e^{i3\pi}}{1-2i} - 2 = \frac{2+3i-i-2(\cos(3\pi)+i\text{sen}(3\pi))}{1-2i} - 2 =$

$= \frac{2+2i-2(-1+0)}{1-2i} - 2 =$

$= \frac{2+2i+2}{1-2i} - 2 =$

$= \frac{(4+2i)(1+2i)}{(1-2i)(1+2i)} - 2 =$

$= \frac{4+8i+2i+4i^2}{1-4i^2} - 2 =$

$$= \frac{4+10i-4}{1+4} - 2 =$$

$$= \frac{10i}{5} - 2 =$$

$$= -2 + 2i$$

Seja $z = -2 + 2i$.

- $|z| = \sqrt{(-2)^2 + 2^2} = \sqrt{4+4} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$
- Seja θ um argumento de z. Como o afixo de z está no 2º quadrante, concluímos que θ pertence ao 2º quadrante.

  $\text{tg}\,\theta = \frac{2}{-2} = -1 \;\; \wedge \;\; \theta \in$ 2º Q

  Então, podemos concluir que $\theta = \frac{3\pi}{4}$.

Assim, $z = 2\sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}$.

6.2. $-z_2 + (z_1)^2 = e^{i\left(\pi + \frac{\pi}{7}\right)} + (2+3i)^2 = e^{i\left(\frac{8\pi}{7}\right)} + 4 + 12i + 9i^2 =$

$$= \cos\left(\frac{8\pi}{7}\right) + i\text{sen}\left(\frac{8\pi}{7}\right) + 4 + 12i - 9 =$$

$$= \cos\left(\frac{8\pi}{7}\right) + i\text{sen}\left(\frac{8\pi}{7}\right) - 5 + 12i =$$

$$= \cos\left(\frac{8\pi}{7}\right) - 5 + \left(\text{sen}\left(\frac{8\pi}{7}\right) + 12\right)i$$

7.

7.1. Seja $z_1 = 4\sqrt{2}$.

- $|z_1| = 4\sqrt{2}$
- $\theta_1 = 0$

Assim, $z_1 = 4\sqrt{2}e^{i0}$.

Seja $z_2 = -2 + 2i$.

- $|z_2| = \sqrt{(-2)^2 + 2^2} = \sqrt{4+4} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$
- Seja θ_2 um argumento de z. Como o afixo de z está no 2º quadrante, concluímos que θ_2 pertence ao 2º quadrante.

  $\text{tg}\,\theta_2 = \frac{2}{-2} = -1 \;\; \wedge \;\; \theta_2 \in$ 2º Q

  Então, $\theta_2 = \frac{3\pi}{4}$.

Assim, $z_2 = 2\sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}$.

Logo:

$$\left(\frac{4\sqrt{2}e^{i\frac{5\pi}{6}}}{-2+2i}\right)^n = \left(\frac{4\sqrt{2}e^{i0} \times e^{i\frac{5\pi}{6}}}{2\sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}}\right)^n = \left(\frac{2 \times e^{i\frac{5\pi}{6}}}{e^{i\frac{3\pi}{4}}}\right)^n = \left(2e^{i\frac{5\pi}{6} - i\frac{3\pi}{4}}\right)^n =$$

$$= \left(2e^{i\left(\frac{5\pi}{6} - \frac{3\pi}{4}\right)}\right)^n = \left(2e^{i\frac{\pi}{12}}\right)^n = 2^n e^{in\frac{\pi}{12}}$$

Para que $z = 2^n e^{in\frac{\pi}{12}}$ seja um imaginário puro, o seu argumento deve ser da forma $\frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Assim:

$$n\frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow n = \frac{\pi}{2} \times \frac{12}{\pi} + k\pi \times \frac{12}{\pi}, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow n = 6 + 12k, k \in \mathbb{Z}$$

- Se $k = 0, n = 6$.
- Se $k = 1, n = 18$.
- Se $k = -1, n = -6$ e $-6 \notin \mathbb{N}$.

Logo, $n = 6$.

7.2. $\left(\left(-\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\overline{\left(-\sqrt{6} + \sqrt{2}i\right)}\right)^n = \left(\left(-\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\left(-\sqrt{6} - \sqrt{2}i\right)\right)^n$

Seja $z_1 = -\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$.

- $|z_1| = \sqrt{\left(-\frac{3}{2}\right)^2 + \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{9}{4} + \frac{3}{4}} = \sqrt{\frac{12}{4}} = \sqrt{3}$
- Seja θ_1 um argumento de z_1. Como o afixo de z_1 está no 3º quadrante, concluímos que θ_1 pertence ao 3º quadrante.

  $\text{tg}\,\theta_1 = \frac{-\frac{\sqrt{3}}{2}}{-\frac{3}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \;\; \wedge \;\; \theta_1 \in 3º\text{ Q}$

  Então, $\theta_1 = \frac{7\pi}{6}$.

Assim, $z_1 = \sqrt{3}e^{i\frac{7\pi}{6}}$.

Seja $z_2 = -\sqrt{6} - \sqrt{2}i$.

- $|z_2| = \sqrt{\left(-\sqrt{6}\right)^2 + \left(-\sqrt{2}\right)^2} = \sqrt{6+2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$
- Seja θ_2 um argumento de z_2. Como o afixo de z_2 está no 3º quadrante, concluímos que θ_2 pertence ao 3º quadrante.

  $\text{tg}\,\theta_2 = \frac{-\sqrt{2}}{-\sqrt{6}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \;\; \wedge \;\; \theta_2 \in 3º\text{ Q}$

  Então, $\theta_2 = \frac{7\pi}{6}$.

Assim, $z_2 = 2\sqrt{2}e^{i\frac{7\pi}{6}}$.

Logo:

$$\left(\left(-\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\left(-\sqrt{6} - \sqrt{2}i\right)\right)^n = \left(\sqrt{3}e^{i\frac{7\pi}{6}} \times 2\sqrt{2}e^{i\frac{7\pi}{6}}\right)^n = \left(2\sqrt{6}e^{i\left(\frac{7\pi}{6}+\frac{7\pi}{6}\right)}\right)^n =$$

$$= \left(2\sqrt{6}e^{i\frac{7\pi}{3}}\right)^n = \left(2\sqrt{6}\right)^n e^{in\frac{7\pi}{3}}$$

Daniela Raposo e Luzia Gomes

Para que $z = \left(2\sqrt{6}\right)^n e^{in\frac{7\pi}{3}}$ seja um número real negativo, o seu argumento deve ser da forma $k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Assim:

$n\frac{7\pi}{3} = k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow n = k\pi \times \frac{3}{7\pi}, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow n = \frac{3k}{7}, k \in \mathbb{Z}$

- Se $k = 0, n = 0$ e $0 \notin \mathbb{N}$.
- …
- Se $k = 7, n = 3$.
- Se $k = -1, n = -\frac{3}{7}$ e $-\frac{3}{7} \notin \mathbb{N}$.

Logo, $n = 3$.

8.

8.1. $z_1 = -2 - 2\sqrt{3}i$

- $|z_1| = \sqrt{(-2)^2 + \left(-2\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{4+12} = \sqrt{16} = 4$
- Seja θ_1 um argumento de z_1. Como o afixo de z_1 está no 3º quadrante, concluímos que θ_1 pertence ao 3º quadrante.

  $\text{tg}\ \theta_1 = \frac{-2\sqrt{3}}{-2} = \sqrt{3} \ \wedge \ \theta_1 \in 3º\ \text{Q}$

  Então, $\theta_1 = \frac{4\pi}{3}$.

Assim, $z_1 = 4e^{i\frac{4\pi}{3}}$.

$z_3 = \cos\alpha + i\,\text{sen}\,\alpha = e^{i\alpha}$

Assim:

$$z_1 \times z_2 \times z_3 = 4e^{i\frac{4\pi}{3}} \times 5e^{i\frac{5\pi}{4}} \times e^{i\alpha} = 4 \times 5e^{i\left(\frac{4\pi}{3}+\frac{5\pi}{4}+\alpha\right)} =$$
$$= 20e^{i\left(\frac{31\pi}{12}+\alpha\right)}$$

8.2. $z_1 \times z + i^{2019} = 0 \Leftrightarrow \left(-2-2\sqrt{3}i\right) \times z + i^3 = 0$

$$\Leftrightarrow z = \frac{-i^3}{-2-2\sqrt{3}i}$$
$$\Leftrightarrow z = \frac{-i}{2+2\sqrt{3}i}$$
$$\Leftrightarrow z = \frac{-i\left(2-2\sqrt{3}i\right)}{\left(2+2\sqrt{3}i\right)\left(2-2\sqrt{3}i\right)}$$
$$\Leftrightarrow z = \frac{-2i+2\sqrt{3}i^2}{4-12i^2}$$
$$\Leftrightarrow z = \frac{-2\sqrt{3}-2i}{16}$$
$$\Leftrightarrow z = -\frac{\sqrt{3}}{8} - \frac{1}{8}i$$

Cálculo auxiliar

$$\begin{array}{r|l} 2019 & 4 \\ \hline 019 & 504 \\ 3 & \end{array}$$

8.3. $\frac{z_2}{z_3} = \frac{5e^{i\frac{5\pi}{4}}}{e^{i\alpha}} = 5e^{i\left(\frac{5\pi}{4}-\alpha\right)}$

Para que o afixo de $\frac{z_2}{z_3}$ pertença à bissetriz dos quadrantes pares, o seu argumento é da forma $\frac{3\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Assim:

$$\frac{5\pi}{4} - \alpha = \frac{3\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \alpha = \frac{5\pi}{4} - \frac{3\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$
$$\Leftrightarrow \alpha = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

9.

9.1. $z - 1 = 2iz + i \Leftrightarrow z - 2iz = 1 + i \Leftrightarrow (1 - 2i)z = 1 + i$

$$\Leftrightarrow z = \frac{1+i}{1-2i}$$
$$\Leftrightarrow z = \frac{(1+i)(1+2i)}{(1-2i)(1+2i)}$$
$$\Leftrightarrow z = \frac{1+2i+i+2i^2}{1-4i^2}$$
$$\Leftrightarrow z = \frac{1+3i-2}{1+4}$$
$$\Leftrightarrow z = \frac{-1+3i}{5}$$
$$\Leftrightarrow z = -\frac{1}{5} + \frac{3}{5}i$$

C.S. $= \left\{-\frac{1}{5} + \frac{3}{5}i\right\}$

9.2. $z^3 - 2z^2 + 2z = 0 \Leftrightarrow z(z^2 - 2z + 2) = 0 \Leftrightarrow z = 0 \ \vee \ z^2 - 2z + 2 = 0$

$$\Leftrightarrow z = 0 \ \vee \ z = \frac{2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 8}}{2}$$
$$\Leftrightarrow z = 0 \ \vee \ z = \frac{2 \pm \sqrt{-4}}{2}$$
$$\Leftrightarrow z = 0 \ \vee \ z = \frac{2 \pm 2i}{2}$$
$$\Leftrightarrow z = 0 \ \vee \ z = 1 - i \ \vee \ z = 1 + i$$

C.S. $= \{0, 1 + i, 1 - i\}$

10.

10.1. Utilizando a regra de Ruffini, temos:

	1	$-1-2i$	-3	$-1+2i$
i		i	$1-i$	$1-2i$
	1	$-1-i$	$-2-i$	$\boxed{0}$

Assim:

$$z^3 + (-1 - 2i)z^2 - 3z - 1 + 2i = (z - i)(z^2 + (-1 - i)z - 2 - i)$$

Logo:

$$z^3+(-1-2i)z^2-3z-1+2i=0 \Leftrightarrow (z-i)(z^2+(-1-i)z-2-i)=0$$
$$\Leftrightarrow z-i=0 \lor z^2+(-1-i)z-2-i=0$$
$$\Leftrightarrow z=i \lor z=\frac{1+i\pm\sqrt{(-1-i)^2-4(-2-i)}}{2}$$
$$\Leftrightarrow z=i \lor z=\frac{1+i\pm\sqrt{1+2i+i^2+8+4i}}{2}$$
$$\Leftrightarrow z=i \lor z=\frac{1+i\pm\sqrt{1+6i-1+8}}{2}$$
$$\Leftrightarrow z=i \lor z=\frac{1+i\pm\sqrt{8+6i}}{2}$$

Cálculo auxiliar

$\sqrt{8+6i}=a+bi \Leftrightarrow 8+6i=(a+bi)^2 \Leftrightarrow 8+6i=a^2+2abi+(bi)^2 \Leftrightarrow 8+6i=a^2-b^2+2abi$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}8=a^2-b^2\\ 6=2ab\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}8=a^2-\left(\frac{3}{a}\right)^2\\ b=\frac{3}{a}\end{cases}, a\neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases}a^4-8a^2-9=0\\ \_\_\_\_\_\_\end{cases}, a\neq 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}a^2=\frac{8\pm\sqrt{64+36}}{2}\\ \_\_\_\_\_\_\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a^2=\frac{8\pm 10}{2}\\ \_\_\_\_\_\_\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a^2=9 \lor a^2=-1\\ \_\_\_\_\_\_\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a=3\\ b=1\end{cases} \lor \begin{cases}a=-3\\ b=-1\end{cases}$$

Assim, $\sqrt{8+6i}=3+i \lor \sqrt{8+6i}=-3-i$.

Então:

$$z=i \lor z=\frac{1+i\pm\sqrt{8+6i}}{2} \Leftrightarrow z=i \lor z=\frac{1+i\pm(3+i)}{2} \lor z=\frac{1+i\pm(-3-i)}{2}$$
$$\Leftrightarrow z=i \lor z=\frac{1+i+3+i}{2} \lor z=\frac{1+i-3-i}{2} \lor z=\frac{1+i-3-i}{2} \lor z=\frac{1+i+3+i}{2}$$
$$\Leftrightarrow z=i \lor z=\frac{4+2i}{2} \lor z=\frac{-2}{2}$$
$$\Leftrightarrow z=i \lor z=2+i \lor z=-1$$

C.S. $=\{-1,i,2+i\}$

10.2. Utilizando a regra de Ruffini, temos:

	1	$-3-i$	$6+2i$	$-12-4i$	$8+8i$
$2i$		$2i$	$-2-6i$	$8+8i$	$-8-8i$
	1	$-3+i$	$4-4i$	$-4+4i$	0
$-2i$		$-2i$	$-2+6i$	$4-4i$	
	1	$-3-i$	$2+2i$	0	

Assim:

$$z^4+(-3-i)z^3+(6+2i)z^2+(-12-4i)z+8+8i=$$
$$=(z-2i)(z+2i)(z^2+(-3-i)z+2+2i)$$

Logo:

$$z^4+(-3-i)z^3+(6+2i)z^2+(-12-4i)z+8+8i=0$$
$$\Leftrightarrow (z-2i)(z+2i)(z^2+(-3-i)z+2+2i)=0$$
$$\Leftrightarrow z-2i=0 \lor z+2i=0 \lor z^2+(-3-i)z+2+2i=0$$
$$\Leftrightarrow z=2i \lor z=-2i \lor z=\frac{3+i\pm\sqrt{(-3-i)^2-4(2+2i)}}{2}$$

Daniela Raposo e Luzia Gomes

$$\Leftrightarrow z = 2i \ \vee \ z = -2i \ \vee \ z = \frac{3+i\pm\sqrt{9+6i+i^2-8-8i}}{2}$$
$$\Leftrightarrow z = 2i \ \vee \ z = -2i \ \vee \ z = \frac{3+i\pm\sqrt{9-2i-1-8}}{2}$$
$$\Leftrightarrow z = 2i \ \vee \ z = -2i \ \vee \ z = \frac{3+i\pm\sqrt{-2i}}{2}$$

Cálculo auxiliar

$\sqrt{-2i} = \sqrt{2e^{i\frac{3\pi}{2}}} = \sqrt{2}e^{i\frac{\frac{3\pi}{2}+2k\pi}{2}}, k \in \{0,1\}$

Se $k = 0, z_0 = \sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}} = \sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) + i\text{sen}\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right] = \sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i\right) = -1+i$

Se $k = 1, z_1 = \sqrt{2}e^{i\frac{7\pi}{4}} = \sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{7\pi}{4}\right) + i\text{sen}\left(\frac{7\pi}{4}\right)\right] = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i\right) = 1-i$

Então:

$$z = 2i \ \vee \ z = -2i \ \vee \ z = \frac{3+i\pm\sqrt{-2i}}{2} \Leftrightarrow z = 2i \ \vee \ z = -2i \ \vee \ z = \frac{3+i+1-i}{2} \ \vee \ z = \frac{3+i-1+i}{2}$$
$$\Leftrightarrow z = 2i \ \vee \ z = -2i \ \vee \ z = \frac{4}{2} \ \vee \ z = \frac{2+2i}{2}$$
$$\Leftrightarrow z = 2i \ \vee \ z = -2i \ \vee \ z = 2 \ \vee \ z = 1+i$$

C.S. $= \{-2i, 2i, 1+i, 2\}$

11. Utilizando a regra de Ruffini, temos:

	1	$1-i$	$-2i$	$-2-2i$
$-1+i$		$-1+i$	0	$2+2i$
	1	0	$-2i$	0

Assim:

$$z^3 + (1-i)z^2 - 2iz - (2+2i) = (z+1-i)(z^2-2i)$$

Logo:

$$z^3 + (1-i)z^2 - 2iz - (2+2i) = 0 \Leftrightarrow (z+1-i)(z^2-2i) = 0$$
$$\Leftrightarrow z+1-i = 0 \ \vee \ z^2 - 2i = 0$$
$$\Leftrightarrow z = -1+i \ \vee \ z^2 = 2i$$
$$\Leftrightarrow z = -1+i \ \vee \ z = \sqrt{2i}$$

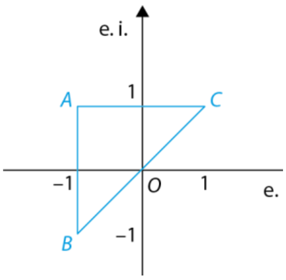
Cálculo auxiliar

$\sqrt{2i} = \sqrt{2e^{i\frac{\pi}{2}}} = \sqrt{2}e^{i\frac{\frac{\pi}{2}+2k\pi}{2}}, k \in \{0,1\}$

Se $k = 0, z_0 = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}} = \sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\text{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right)\right] = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i\right) = 1+i$

Se $k = 1, z_1 = \sqrt{2}e^{i\frac{5\pi}{4}} = \sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{5\pi}{4}\right) + i\text{sen}\left(\frac{5\pi}{4}\right)\right] = \sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i\right) = -1-i$

Então, $z = -1+i \ \vee \ z = 1+i \ \vee \ z = -1-i$.



Sejam A, B e C os afixos de $z_1 = -1+i$, $z_2 = -1-i$ e $z_3 = 1+i$, respetivamente.

$A_{[ABC]} = \frac{\overline{AC}\times\overline{AB}}{2}$, ou seja, $A_{[ABC]} = \frac{2\times 2}{2} = 2$.

12. Seja $z = \sqrt{2} + \sqrt{2}i$.

- $|z| = \sqrt{\left(\sqrt{2}\right)^2 + \left(\sqrt{2}\right)^2} = \sqrt{2+2} = \sqrt{4} = 2$
- Seja θ um argumento de z. Como o afixo de z está no 1º quadrante, concluímos que θ pertence ao 1º quadrante.

  $\text{tg}\,\theta = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 1 \ \wedge\ \theta \in 1º\ \text{Q}$

  Então, podemos concluir que $\theta = \frac{\pi}{4}$.

Assim, $z = 2e^{i\frac{\pi}{4}}$.

Logo, $\sqrt[3]{z} = \sqrt[3]{2e^{i\frac{\pi}{4}}} = \sqrt[3]{2}e^{i\frac{\frac{\pi}{4}+2k\pi}{3}}, k \in \{0, 1, 2\}$.

- Se $k = 0, z_0 = \sqrt[3]{2}e^{i\frac{\pi}{12}}$.
- Se $k = 1, z_1 = \sqrt[3]{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}$.
- Se $k = 2, z_2 = \sqrt[3]{2}e^{i\frac{17\pi}{12}}$.

C.S. $= \left\{\sqrt[3]{2}e^{i\frac{\pi}{12}}, \sqrt[3]{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}, \sqrt[3]{2}e^{i\frac{17\pi}{12}}\right\}$

13.

13.1. $z = 3 + \frac{-\sqrt{3}+2\sqrt{3}i^{-3}}{2+i} = 3 + \frac{-\sqrt{3}+2\sqrt{3}i}{2+i} =$

$$= 3 + \frac{\left(-\sqrt{3}+2\sqrt{3}i\right)(2-i)}{(2+i)(2-i)} =$$

$$= 3 + \frac{-2\sqrt{3}+\sqrt{3}i+4\sqrt{3}i-2\sqrt{3}i^2}{4-i^2} =$$

$$= 3 + \frac{-2\sqrt{3}+5\sqrt{3}i+2\sqrt{3}}{5} =$$

$$= 3 + \frac{5\sqrt{3}i}{5} =$$

$$= 3 + \sqrt{3}i$$

- $|z| = \sqrt{3^2 + \left(\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{9+3} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$
- Seja θ um argumento de z. Como o afixo de z está no 1º quadrante, concluímos que θ pertence ao 1º quadrante.

  $\text{tg}\,\theta = \frac{\sqrt{3}}{3} \ \wedge\ \theta \in 1º\ \text{Q}$

  Então, podemos concluir que $\theta = \frac{\pi}{6}$.

Assim, $z = 2\sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{6}}$.

A raiz de ordem 4 de w pertencente ao 2º quadrante é $2\sqrt{3}e^{i\left(\frac{\pi}{6}+\frac{2\pi}{4}\right)} = 2\sqrt{3}e^{i\frac{2\pi}{3}}$.

LeYa EDUCAÇÃO Daniela Raposo e Luzia Gomes

13.2. $\sqrt[4]{w} = z \Leftrightarrow w = \left(2\sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{6}}\right)^4 \Leftrightarrow w = \left(2\sqrt{3}\right)^4 \Leftrightarrow w = 144e^{i\frac{2\pi}{3}}$

13.3. Os afixos das raízes de ordem 4 de w são os vértices de um quadrado cuja diagonal tem comprimento igual a $2|z| = 4\sqrt{3}$.

Assim, pelo teorema de Pitágoras:

$l^2 + l^2 = \left(4\sqrt{3}\right)^2 \Leftrightarrow 2l^2 = 48 \Leftrightarrow l^2 = 24$

Logo, a área do quadrado é 24.

13.4. Sejam z, z_1, z_2 e z_3 as raízes (consecutivas) de w.

Os afixos de z e z_2 são simétricos em relação à origem do referencial. Logo, $z = -z_2$.

Do mesmo modo, $z_1 = -z_3$.

Assim, $z + z_1 + z_2 + z_3 = -z_2 - z_3 + z_2 + z_3 = 0$.

14.

14.1. $z^4 + 16 = 0 \Leftrightarrow z^4 = -16 \Leftrightarrow z^4 = 16e^{i\pi}$

$$\Leftrightarrow z = \sqrt[4]{16}e^{i\frac{\pi+2k\pi}{4}}, k \in \{0,1,2,3\}$$

$$\Leftrightarrow z = 2e^{i\frac{\pi+2k\pi}{4}}, k \in \{0,1,2,3\}$$

- Se $k = 0$, $z_0 = 2e^{i\frac{\pi}{4}}$.
- Se $k = 1$, $z_1 = 2e^{i\frac{3\pi}{4}}$.
- Se $k = 2$, $z_2 = 2e^{i\frac{5\pi}{4}}$.
- Se $k = 3$, $z_3 = 2e^{i\frac{7\pi}{4}}$.

C.S. $= \left\{2e^{i\frac{\pi}{4}}, 2e^{i\frac{3\pi}{4}}, 2e^{i\frac{5\pi}{4}}, 2e^{i\frac{7\pi}{4}}\right\}$

14.2. $z^3 + 27e^{i\frac{\pi}{3}} = 0 \Leftrightarrow z^3 = -27e^{i\frac{\pi}{3}} \Leftrightarrow z^3 = 27e^{i\left(\pi+\frac{\pi}{3}\right)}$

$$\Leftrightarrow z = \sqrt[3]{27}e^{i\frac{\frac{4\pi}{3}+2k\pi}{3}}, k \in \{0,1,2\}$$

$$\Leftrightarrow z = 3e^{i\frac{\frac{4\pi}{3}+2k\pi}{3}}, k \in \{0,1,2\}$$

- Se $k = 0$, $z_0 = 3e^{i\frac{4\pi}{9}}$.
- Se $k = 1$, $z_1 = 3e^{i\frac{10\pi}{9}}$.
- Se $k = 2$, $z_2 = 3e^{i\frac{16\pi}{9}}$.

C.S. $= \left\{3e^{i\frac{4\pi}{9}}, 3e^{i\frac{10\pi}{9}}, 3e^{i\frac{16\pi}{9}}\right\}$

14.3. Seja $z = re^{i\theta}$.

$|z|z^2 + 8i = 0 \Leftrightarrow r\left(re^{i\theta}\right)^2 + 8e^{i\frac{\pi}{2}} = 0 \Leftrightarrow r \times r^2e^{i(2\theta)} = -8e^{i\frac{\pi}{2}}$

$$\Leftrightarrow r^3e^{i(2\theta)} = 8e^{i\left(\pi+\frac{\pi}{2}\right)}$$

LeYa EDUCAÇÃO Daniela Raposo e Luzia Gomes

$$\Leftrightarrow r^3e^{i(2\theta)} = 8e^{i\frac{3\pi}{2}}$$

$$\Leftrightarrow r^3 = 8 \ \wedge \ 2\theta = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow r = 2 \ \wedge \ \theta = \frac{3\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

- Para $k = 0, \theta = \frac{3\pi}{4}$.
- Para $k = 1, \theta = \frac{7\pi}{4}$.

Assim:

$$z_1 = 2e^{i\frac{3\pi}{4}} = 2\left[\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) + i\,\text{sen}\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right] = 2\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right) = -\sqrt{2} + \sqrt{2}i$$

$$z_2 = 2e^{i\frac{7\pi}{4}} = 2\left[\cos\left(\frac{7\pi}{4}\right) + i\,\text{sen}\left(\frac{7\pi}{4}\right)\right] = 2\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i\right) = \sqrt{2} - \sqrt{2}i$$

C.S. $= \left\{-\sqrt{2} + \sqrt{2}i, \sqrt{2} - \sqrt{2}i \right\}$

14.4. Seja $z = re^{i\theta}$ e seja $z_1 = 1 + \sqrt{3}i$.

- $|z_1| = \sqrt{1^2 + \left(\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{1+3} = \sqrt{4} = 2$
- Seja θ_1 um argumento de z_1. Como o afixo de z_1 está no 1º quadrante, concluímos que θ_1 pertence ao 1º quadrante.

  $\text{tg}\,\theta_1 = \frac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3} \ \wedge \ \theta_1 \in 1º\text{ Q}$

  Então, podemos concluir que $\theta_1 = \frac{\pi}{3}$.

Assim, $z_1 = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$.

Temos então:

$$z^2 = \left(1 + \sqrt{3}i\right)\bar{z} \Leftrightarrow \left(re^{i\theta}\right)^2 = 2e^{i\frac{\pi}{3}} \times \overline{re^{i\theta}} \Leftrightarrow r^2e^{i(2\theta)} = 2e^{i\frac{\pi}{3}} \times re^{i(-\theta)}$$

$$\Leftrightarrow r^2e^{i(2\theta)} = 2re^{i\left(\frac{\pi}{3}-\theta\right)}$$

$$\Leftrightarrow r^2e^{i(2\theta)} - 2re^{i\left(\frac{\pi}{3}-\theta\right)} = 0$$

$$\Leftrightarrow r\left[re^{i(2\theta)} - 2e^{i\left(\frac{\pi}{3}-\theta\right)}\right] = 0$$

$$\Leftrightarrow r = 0 \ \vee \ re^{i(2\theta)} - 2e^{i\left(\frac{\pi}{3}-\theta\right)} = 0$$

$$\Leftrightarrow r = 0 \ \vee \ re^{i(2\theta)} = 2e^{i\left(\frac{\pi}{3}-\theta\right)}$$

$$\Leftrightarrow r = 0 \ \vee \ \left(r = 2 \ \wedge \ 2\theta = \frac{\pi}{3} - \theta + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\right)$$

$$\Leftrightarrow r = 0 \ \vee \ \left(r = 2 \ \wedge \ 3\theta = \frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\right)$$

$$\Leftrightarrow r = 0 \ \vee \ \left(r = 2 \ \wedge \ \theta = \frac{\pi}{9} + \frac{2k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}\right)$$

Se $r = 0$, então $z = 0$.

Se $r = 2$, temos:

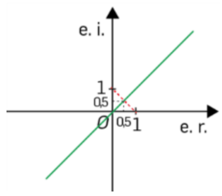
- Para $k = 0, \theta = \frac{\pi}{9}$.
- Para $k = 1, \theta = \frac{7\pi}{9}$.
- Para $k = 2, \theta = \frac{13\pi}{9}$.

Assim, $z_1 = 2e^{i\frac{\pi}{9}}, z_2 = 2e^{i\frac{7\pi}{9}}$ e $z_3 = 2e^{i\frac{13\pi}{9}}$.

C.S. $= \left\{0, 2e^{i\frac{\pi}{9}}, 2e^{i\frac{7\pi}{9}}, 2e^{i\frac{13\pi}{9}}\right\}$

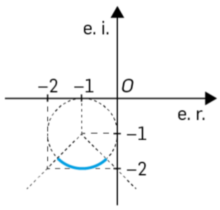
15.

15.1. $\left|\frac{z-1}{z-i}\right| = 1 \Leftrightarrow |z-1| = |z-i|$

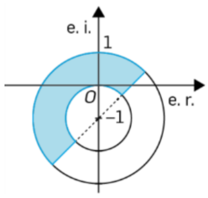


15.2. $-\frac{3\pi}{4} \leq \operatorname{Arg}(z+1+i) \leq -\frac{\pi}{4} \;\wedge\; |z+1+i| = 1$

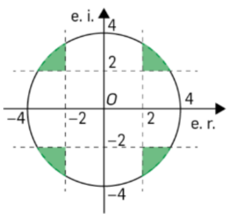
$\Leftrightarrow \; -\frac{3\pi}{4} \leq \operatorname{Arg}\big(z-(-1-i)\big) \leq -\frac{\pi}{4} \;\wedge\; |z-(-1-i)| = 1$



15.3. $1 \leq |z+i| \leq 2 \;\wedge\; \operatorname{Im}(z) \geq \operatorname{Re}(z) - 1 \Leftrightarrow 1 \leq |z-(-i)| \leq 2 \;\wedge\; \operatorname{Im}(z) \geq \operatorname{Re}(z) - 1$



15.4. $|\operatorname{Re}(z)| > 2 \;\wedge\; |\operatorname{Im}(z)| > 2 \;\wedge\; |z| < 4$



16.

16.1. $|z-2i| \leq 2 \;\wedge\; \left(\frac{\pi}{2} \leq \operatorname{Arg}(z-2i) \leq \frac{3\pi}{4} \;\vee\; \frac{3\pi}{2} \leq \operatorname{Arg}(z-2i) \leq \frac{7\pi}{4}\right)$

LeYa EDUCAÇÃO Daniela Raposo e Luzia Gomes

16.2. $|z-2-3i| \leq \sqrt{13} \ \wedge \ |z| \geq |z-2-3i|$

17.

17.1. $w=\frac{x+yi+1}{x+yi-2i}=\frac{x+1+yi}{x+(y-2)i}=\frac{[(x+1)+yi][x-(y-2)i]}{[x+(y-2)i][x-(y-2)i]}=$

$$=\frac{x(x+1)-(x+1)(y-2)i+xyi-y(y-2)i^2}{x^2-(y-2)^2i^2}=$$

$$=\frac{x^2+x-(xy-2x+y-2)i+xyi+y(y-2)}{x^2+(y-2)^2}=$$

$$=\frac{x^2+x+(-xy+2x-y+2)i+xyi+y^2-2y}{x^2+(y-2)^2}=$$

$$=\frac{x^2+x+y^2-2y+(-xy+2x-y+2+xy)i}{x^2+(y-2)^2}=$$

$$=\frac{x^2+x+y^2-2y}{x^2+(y-2)^2}+\frac{(2x-y+2)i}{x^2+(y-2)^2}$$

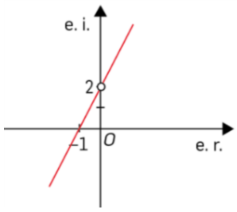
Assim, $\operatorname{Re}(w)=\frac{x^2+x+y^2-2y}{x^2+(y-2)^2}$ e $\operatorname{Im}(w)=\frac{2x-y+2}{x^2+(y-2)^2}i$, com $(x,y)\neq(0,2)$.

17.2. w é um número real se $\frac{2x-y+2}{x^2+(y-2)^2}=0$.

$\frac{2x-y+2}{x^2+(y-2)^2}=0 \Leftrightarrow 2x-y+2=0$, com $(x,y)\neq(0,2)$

$\Leftrightarrow y=2x+2=0$, com $(x,y)\neq(0,2)$

Os afixos destes pontos pertencem à reta de equação $y=2x+2$, exceto o ponto de coordenadas $(0,2)$.



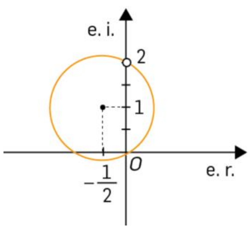
17.3. w é um imaginário puro se $\frac{x^2+x+y^2-2y}{x^2+(y-2)^2}=0$.

$\frac{x^2+x+y^2-2y}{x^2+(y-2)^2}=0 \Leftrightarrow x^2+x+y^2-2y=0$, com $(x,y)\neq(0,2)$

$\Leftrightarrow x^2+x+\left(\frac{1}{2}\right)^2+y^2-2y+1=\frac{1}{4}+1$, com $(x,y)\neq(0,2)$

$\Leftrightarrow \left(x+\frac{1}{2}\right)^2+(y-1)^2=\frac{5}{4}$, com $(x,y)\neq(0,2)$

Os afixos destes pontos pertencem à circunferência de centro $\left(-\frac{1}{2},1\right)$ e raio $\frac{\sqrt{5}}{2}$, exceto o ponto de coordenadas $(0,2)$.



Exercícios propostos (págs. 396 a 408)

Itens de seleção (págs. 396 a 398)

1. Se o afixo de z é um ponto do 2º quadrante, o afixo de $w = 4z$ também pertence ao 2º quadrante.

Opção (B)

2.

2.1. Seja z o número complexo cujo afixo é o ponto A. Como o raio da circunferência é 2, $|z| = 2$.

Um argumento de z é $\theta = \frac{\pi}{2} - \frac{2\pi}{5} = \frac{\pi}{10}$.

Assim, $z = 2e^{i\frac{\pi}{10}}$.

Opção (D)

2.2. Como os afixos das raízes de ordem n são os vértices de um pentágono, então $n = 5$.

Assim:

$$\sqrt[5]{w} = 2e^{i\frac{\pi}{10}} \Leftrightarrow w = \left(2e^{i\frac{\pi}{10}}\right)^5 \Leftrightarrow w = 2^5 e^{i\frac{5\pi}{10}}$$

$$\Leftrightarrow w = 32e^{i\frac{\pi}{2}}$$

$$\Leftrightarrow w = 32i$$

Opção (B)

3. $(2-3i)^2 = 2^2 - 12i + (3i)^2 = 4 - 12i - 9 = -5 - 12i$

$(-2-3i)^2 = (-2)^2 + 12i + (3i)^2 = 4 + 12i - 9 = -5 + 12i$

$(-2+3i)^2 = (-2)^2 - 12i + (3i)^2 = 4 - 12i - 9 = -5 - 12i$

$(2+3i)^2 = 2^2 + 12i + (3i)^2 = 4 + 12i - 9 = -5 + 12i$

$(2-3i)^{-1} = \frac{1}{2-3i} = \frac{2+3i}{(2-3i)(2+3i)} = \frac{2+3i}{4-9i^2} = \frac{2}{13} + \frac{3}{13}i$

A opção correta é a (B), pois $(2-3i)^2 = (-2+3i)^2$.

Opção (B)

4. $|z + 3 - 3i| \leq 2 \Leftrightarrow |z - (-3+3i)| \leq 2$

Assim, a condição define um círculo de centro no afixo de $z_1 = -3 + 3i$, ou seja, de centro no ponto de coordenadas $(-3, 3)$ e raio 2.

Opção (B)

5. $z = i + i^2 + i^3 + i^4 = i - 1 - i + 1 = 0$

Opção (A)

6. $\frac{-z \times (\bar{z})^5 \times |z|}{e^{i\frac{\pi}{3}}} = \frac{2e^{i\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right)} \times \left[2e^{i\left(-\frac{\pi}{3}\right)}\right]^5 \times \left|2e^{i\frac{\pi}{3}}\right|}{e^{i\frac{\pi}{3}}} = \frac{2e^{i\frac{4\pi}{3}} \times 32e^{i\left(-\frac{5\pi}{3}\right)} \times 2}{e^{i\frac{\pi}{3}}} =$

$$= \frac{128e^{i\left(\frac{4\pi}{3} - \frac{5\pi}{3}\right)}}{e^{i\frac{\pi}{3}}} =$$

$$= 128e^{i\left(\frac{4\pi}{3} - \frac{5\pi}{3} - \frac{\pi}{3}\right)} =$$

$$= 128e^{i\left(-\frac{2\pi}{3}\right)}$$

Assim, o argumento positivo mínimo do número complexo dado é $-\frac{2\pi}{3} + 2\pi = \frac{4\pi}{3}$.

Opção (D)

7. A opção (A) não é a correta, pois $i^{4n} + i^{4n+1} = i^{4n+2} + i^{4n+3} \Leftrightarrow 1 + i = -1 - i$ (falso).

A opção (C) não é a correta, pois $\frac{i}{|i|} = 1 \Leftrightarrow i = 1$ (falso).

A opção (D) não é a correta, pois $\text{Arg}(i) = \frac{\pi}{2}$.

A opção correta é a (B), pois $\frac{1}{i^3} = \frac{1}{-i} = i$ e $\overline{-i} = i$.

Opção (B)

8. Seja $z = a + bi$, com $a > 0$ e $b > 0$.

Seja $w = \frac{z}{i} + \bar{z} = \frac{a+bi}{i} + a - bi = (a + b) - (a + b)i$.

Assim, como $a > 0$ e $b > 0$, temos que:

- $a + b > 0$, isto é, $\text{Re}(w) > 0$;
- $-(a + b) < 0$, isto é, $\text{Im}(w) < 0$.

Logo, o afixo de w pertence ao 4º Q.

Além disso, $\text{tg}\, \theta = \frac{-(a+b)}{a+b} = -1$, isto é, $\theta = \frac{\pi}{4}$.

Concluímos assim que o afixo de w pertence à bissetriz dos quadrantes pares.

Logo, é o ponto *E*.

Opção (D)

9. $(1 + i)^3 = (1 + i)^2(1 + i) = (1 + 2i + i^2)(1 + i) =$

$$= 2i(1 + i) =$$

$$= 2i + 2i^2 =$$

$$= -2 + 2i$$

Opção (C)

Daniela Raposo e Luzia Gomes

10. O comprimento do arco AB é dado por αr, sendo α a amplitude do ângulo ao centro correspondente e r o raio da circunferência de centro na origem, ou seja, $r = \overline{OA}$.

Como $[AB]$ é um dos lados de um polígono regular cujos vértices são os afixos das raízes de ordem 7 de um número complexo, podemos concluir que $\alpha = \frac{2\pi}{7}$ e que $r = \sqrt[7]{128} = 2$.

Assim, o comprimento do arco AB é $\alpha r = \frac{2\pi}{7} \times 2 = \frac{4\pi}{7}$.

Opção (A)

11. Sabemos que os argumentos das n raízes de um número complexo formam uma progressão aritmética de razão $\frac{2\pi}{n}$. Assim:

$$-\frac{\pi}{28} + k\frac{2\pi}{n} = \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow \frac{2\pi k}{n} = \frac{8\pi}{28} \Leftrightarrow \frac{2\pi k}{n} = \frac{2\pi}{7}$$

$$\Leftrightarrow n = \frac{7 \times 2\pi k}{2\pi}$$

$$\Leftrightarrow n = 7k$$

Opção (B)

12. O domínio plano representado é a parte da circunferência de centro $(0, -2)$ e raio 2 situada à esquerda da reta vertical $\text{Re}(z) = 1$.

Assim, temos:

$$\text{Re}(z) < 1 \ \wedge \ |z - (-2i)| = 2 \Leftrightarrow \text{Im}(iz) < 1 \ \wedge \ |z + 2i| = 2$$

Opção (A)

13. Seja $z = a + bi$, com $a > 0$ e $b > 0$.

$$(a + bi) \times \left(-2 + \frac{i}{2}\right) = -2a + \frac{a}{2}i - 2bi + \frac{bi^2}{2} = \left(-2a - \frac{b}{2}\right) + \left(\frac{a}{2} - 2b\right)i$$

Opção (B)

14. $z = i + i^2 + i^3 + i^4 + i^5 + i^6 + i^7 + i^8 + \ldots + i^{2015} =$

$= i + i^2 + i^3 + i^4 + i + i^2 + i^3 + i^4 + \ldots + i + i^2 + i^3 =$

$= i - 1 - i + 1 + i - 1 - i + 1 + \ldots + i - 1 - i =$

$= (i - 1 - i + 1) \times 503 + i - 1 - i =$

$= 0 + i - 1 - i =$

$= -1$

Cálculo auxiliar

$$\begin{array}{r|l} 2015 & 4 \\ \hline 015 & 503 \\ 3 & \end{array}$$

Opção (B)

15. Seja $z_1 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i$.

- $|z_1| = \sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}} = 1$
- Seja θ_1 um argumento de z_1. Como o afixo de z_1 está no 2º quadrante, concluímos que θ_1 pertence ao 2º quadrante.

  $\text{tg}\ \theta_1 = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{-\frac{1}{2}} = -\sqrt{3} \ \wedge\ \theta_1 \in 2º\ Q$

  Então, $\theta_1 = \frac{2\pi}{3}$.

Assim, $z_1 = e^{i\frac{2\pi}{3}}$.

Seja $z_2 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i$.

- $|z_2| = \sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}} = 1$
- Seja θ_2 um argumento de z_2. Como o afixo de z_2 está no 3º quadrante, concluímos que θ_2 pertence ao 3º quadrante.

  $\text{tg}\ \theta_2 = \frac{-\frac{\sqrt{3}}{2}}{-\frac{1}{2}} = \sqrt{3} \ \wedge\ \theta_2 \in 3º\ Q$

  Então, $\theta_2 = \frac{4\pi}{3}$.

Assim, $z_2 = e^{i\frac{4\pi}{3}}$.

Então:

$$\left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)^{3n} + \left(\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\right)^{3n} = \left(e^{i\frac{2\pi}{3}}\right)^{3n} + \left(e^{i\frac{4\pi}{3}}\right)^{3n} = e^{i3n\times\frac{2\pi}{3}} + e^{i3n\times\frac{4\pi}{3}} =$$
$$= e^{i2n\pi} + e^{i4n\pi} =$$
$$= 1 + 1 = 2$$

Opção (C)

16. $$\left(\frac{\cos\theta - i\text{sen}\,\theta}{\text{sen}\,\theta + i\cos\theta}\right)^5 = \left(\frac{\cos(-\theta) + i\cos(-\theta)}{\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) + i\text{sen}\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)}\right)^5 = \left(\frac{e^{i(-\theta)}}{e^{i\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)}}\right)^5 =$$
$$= \left(e^{i\left(-\theta - \frac{\pi}{2} + \theta\right)}\right)^5 =$$
$$= \left(e^{i\left(-\frac{\pi}{2}\right)}\right)^5 =$$
$$= e^{i\left(-\frac{5\pi}{2}\right)} =$$
$$= -i$$

Opção (B)

17. $|w| = |z| = \sqrt{\left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{3}{5}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{9} + \frac{9}{25}} = \sqrt{\frac{106}{225}} = \frac{\sqrt{106}}{15}$

Seja $z = |z|e^{i\theta}$.

Como $|w| = |z|$ e $\mathrm{Arg}(w) = 3\mathrm{Arg}(z)$, podemos concluir que $w = |z|e^{i(3\theta)}$.

Assim, $\frac{w}{z} = \frac{|z|e^{i(3\theta)}}{|z|e^{i\theta}} = e^{i(2\theta)}$.

Logo, $|z|^2 \times \frac{w}{z} = \frac{106}{225}e^{i(2\theta)} = \frac{106}{225}\,[\cos(2\theta) + i\,\mathrm{sen}(2\theta)]$.

Assim, $\mathrm{Im}\left(|z|^2 \times \frac{w}{z}\right) = \frac{106}{225}\,\mathrm{sen}(2\theta)$.

Como $z = \frac{1}{3} + \frac{3}{5}i$, então $\mathrm{tg}\,\theta = \frac{\frac{3}{5}}{\frac{1}{3}} = \frac{9}{5}$.

Sabemos que $1 + \mathrm{tg}^2\,\theta = \frac{1}{\cos^2\theta}$. Assim:

$$1 + \left(\frac{9}{5}\right)^2 = \frac{1}{\cos^2\theta} \Leftrightarrow 1 + \frac{81}{25} = \frac{1}{\cos^2\theta} \Leftrightarrow \frac{106}{25} = \frac{1}{\cos^2\theta}$$

$$\Leftrightarrow \cos^2\theta = \frac{25}{106}$$

$$\Leftrightarrow \cos\theta = \frac{5\sqrt{106}}{106}, \text{ porque } \theta \in 1^{\text{o}}\text{ Q.}$$

Sabemos que $\mathrm{sen}^2\,\theta = 1 - \cos^2\theta$. Assim:

$$\mathrm{sen}^2\,\theta = 1 - \frac{25}{106} \Leftrightarrow \mathrm{sen}^2\,\theta = \frac{81}{106} \Leftrightarrow \mathrm{sen}\,\theta = \frac{9\sqrt{106}}{106}, \text{ porque } \theta \in 1^{\text{o}}\text{ Q.}$$

Logo:

$$\mathrm{Im}\left(|z|^2 \times \frac{w}{z}\right) = \frac{106}{225}\,\mathrm{sen}(2\theta) = \frac{106}{225} \times 2\mathrm{sen}(\theta)\cos(\theta) =$$

$$= \frac{106}{225} \times 2 \times \frac{9\sqrt{106}}{106} \times \frac{5\sqrt{106}}{106} =$$

$$= \frac{90}{225} =$$

$$= \frac{2}{5}$$

Opção (D)

18. Seja $z = \sqrt{3} - i$.

- $|z| = \sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2 + (-1)^2} = \sqrt{3+1} = 2$

- Seja θ um argumento de z. Como o afixo de z está no 4º quadrante, concluímos que θ pertence ao 4º quadrante.

  $\mathrm{tg}\,\theta = \frac{-1}{\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3} \ \wedge\ \theta \in 4^{\text{o}}\text{ Q}$

  Então, $\theta = -\frac{\pi}{6}$.

Assim, $z = 2e^{i\left(-\frac{\pi}{6}\right)}$.

Então, $\left(\sqrt{3}-i\right)^k = \left(2e^{i\left(-\frac{\pi}{6}\right)}\right)^k = 2^k e^{i\left(-\frac{k\pi}{6}\right)}$.

Para que $2^k e^{i\left(-\frac{k\pi}{6}\right)}$ represente um número real positivo, o seu argumento deve ser da forma $2\lambda\pi, \lambda \in \mathbb{Z}$.

Assim:

$-\frac{k\pi}{6} = 2\lambda\pi, \lambda \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow k = -12\lambda,\ \lambda \in \mathbb{Z}$

- Se $\lambda = 0, k = 0$, mas $0 \notin \mathbb{Z}^+$.
- Se $\lambda = 1, k = -12$, mas $-12 \notin \mathbb{Z}^+$.
- Se $\lambda = -1, k = 12$.

Logo, $k = 12$.

Opção (D)

Itens de construção (págs. 399 a 408)

1.

1.1. $z + w = 2 - 3i + (-4 + 5i) = 2 - 3i - 4 + 5i = -2 + 2i$

1.2. $3w - 2z = 3(-4 + 5i) - 2(2 - 3i) = -12 + 15i - 4 + 6i = -16 + 21i$

1.3. $z \times w = (2 - 3i)(-4 + 5i) = -8 + 10i + 12i - 15i^2 = -8 + 22i + 15 = 7 + 22i$

1.4. $\frac{1}{z} = \frac{1}{2-3i} = \frac{2+3i}{(2-3i)(2+3i)} = \frac{2+3i}{4-9i^2} = \frac{2+3i}{4+9} = \frac{2}{13} + \frac{3}{13}i$

1.5. $\frac{z}{w} = \frac{2-3i}{-4+5i} = \frac{(2-3i)(-4-5i)}{(-4+5i)(-4-5i)} = \frac{-8-10i+12i+15i^2}{16-25i^2} =$

$= \frac{-8+2i-15}{16+25} = \frac{-23+2i}{41} = -\frac{23}{41} + \frac{2}{41}i$

1.6. $\frac{-i}{\bar{z}} = \frac{-i}{2+3i} = \frac{-i(2-3i)}{(2+3i)(2-3i)} = \frac{-2i+3i^2}{4-9i^2} =$

$= \frac{-3-2i}{4+9} = -\frac{3}{13} - \frac{2}{13}i$

1.7. $\frac{2i}{z-w} = \frac{2i}{2-3i-(-4+5i)} = \frac{2i}{2-3i+4-5i} = \frac{2i}{6-8i} =$

$= \frac{2i(6+8i)}{(6-8i)(6+8i)} = \frac{12i+16i^2}{36-64i^2} =$

$= \frac{12i-16}{36+64} = -\frac{16}{100} + \frac{12}{100}i =$

$= -\frac{4}{25} + \frac{3}{25}i$

1.8. Por 1.1., $z + w = -2 + 2i$.

Assim:

$(z + w)^2 = (-2 + 2i)^2 = 4 - 8i + 4i^2 = -8i$

1.9. $z^3+w^2 = (2-3i)^2(2-3i)+(-4+5i)^2 =$

$= (4-12i+9i^2)(2-3i)+16-40i+25i^2 =$

$= (4-12i-9)(2-3i)+16-40i-25 =$

$= (-5-12i)(2-3i)-9-40i =$

$= -10+15i-24i+36i^2-9-40i =$

$= -10+15i-24i-36-9-40i =$

$= -55-49i$

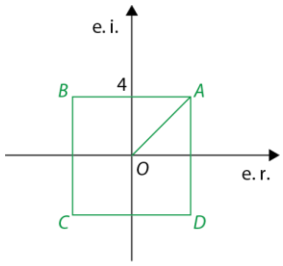
1.10. $\frac{i^{10}-2w}{5i^5} = \frac{i^2-2(-4+5i)}{5i} =$

$= \frac{-1+8-10i}{5i} = \frac{7-10i}{5i} =$

$= \frac{-5i(7-10i)}{5i(-5i)} = \frac{-35i+50i^2}{-25i^2} =$

$= \frac{-50-35i}{25} = -\frac{50}{25}-\frac{35}{25}i =$

$= -2-\frac{7}{5}i$



2. Como $P = 32$, temos que $l = \overline{AB} = 8$. Assim, $A(4,4)$.

Logo, $z = 4+4i$.

3. Seja $z = a+bi$.

3.1. $\frac{z+\bar{z}}{2} = \frac{a+bi+a-bi}{2} = \frac{2a}{2} = a = \text{Re}(z)$

3.2. $\frac{z-\bar{z}}{2i} = \frac{a+bi-(a-bi)}{2i} = \frac{a+bi-a+bi}{2i} = \frac{2bi}{2i} = b = \text{Im}(z)$

3.3. $z = \bar{z} \Leftrightarrow a+bi = a-bi \Leftrightarrow bi = -bi$

$\Leftrightarrow 2bi = 0$

$\Leftrightarrow b = 0$

Logo, z é um número real.

3.4. $z = -\bar{z} \Leftrightarrow a+bi = -(a-bi) \Leftrightarrow a+bi = -a+bi$

$\Leftrightarrow a = -a$

$\Leftrightarrow 2a = 0$

$\Leftrightarrow a = 0$

Logo, z é um imaginário puro.

4.

4.1. $2e^{i\frac{\pi}{2}} = 2\left[\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)+ i\text{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right)\right] = 2(0+i) = 2i$

4.2. $\sqrt{2}e^{i\left(-\frac{\pi}{4}\right)} = \sqrt{2}\left[\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+ i\text{sen}\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right] = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i\right) = 1-i$

4.3. $e^{i\frac{\pi}{6}} = \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + i\text{sen}\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$

4.4. $3e^{i\frac{5\pi}{3}} = 3\left[\cos\left(\frac{5\pi}{3}\right) + i\text{sen}\left(\frac{5\pi}{3}\right)\right] = 3\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = \frac{3}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{2}i$

4.5. $5e^{i0} = 5[\cos(0) + i\text{sen}(0)] = 5(1+0) = 5$

4.6. $5e^{i\frac{\pi}{2}} = 5\left[\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i\text{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right)\right] = 5(0+i) = 5i$

4.7. $5e^{i\pi} = 5[\cos(\pi) + i\text{sen}(\pi)] = 5(-1+0) = -5$

4.8. $5e^{i\frac{3\pi}{2}} = 5\left[\cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) + i\text{sen}\left(\frac{3\pi}{2}\right)\right] = 5(0-i) = -5i$

4.9. $\frac{1}{4}e^{i\frac{7\pi}{2}} = \frac{1}{4}\left[\cos\left(\frac{7\pi}{2}\right) + i\text{sen}\left(\frac{7\pi}{2}\right)\right] = \frac{1}{4}(0-i) = -\frac{1}{4}i$

4.10. $\frac{1}{2} + e^{i\left(-\frac{\pi}{3}\right)} = \frac{1}{2} + \cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\text{sen}\left(-\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i = 1 - \frac{\sqrt{3}}{2}i$

5.

5.1. Seja $z = 2i$.

Atendendo à representação geométrica de z, temos que:

- o módulo de z é 2;
- um argumento de z é, por exemplo, $\frac{\pi}{2}$.

Assim, $z = 2e^{i\frac{\pi}{2}}$.

5.2. Seja $z = -10i$.

Atendendo à representação geométrica de z, temos que:

- o módulo de z é 10;
- um argumento de z é, por exemplo, $\frac{3\pi}{2}$.

Assim, $z = 10e^{i\frac{3\pi}{2}}$.

5.3. Seja $z = 2013$.

Atendendo à representação geométrica de z, temos que:

- o módulo de z é 2013;
- um argumento de z é, por exemplo, 0.

Assim, $z = 2013e^{i0}$.

5.4. Seja $z = -3\sqrt{2}$.

Atendendo à representação geométrica de z, temos que:

- o módulo de z é $3\sqrt{2}$;
- um argumento de z é, por exemplo, π.

Assim, $z = 3\sqrt{2}e^{i\pi}$.

5.5. Seja $z = 1 + i$.

- $|z| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$
- Seja θ um argumento de z. Como o afixo de z está no 1º quadrante, concluímos que θ pertence ao 1º quadrante.

  $\operatorname{tg} \theta = \frac{1}{1} = 1 \ \wedge \ \theta \in 1º\ \text{Q}$

  Então, podemos concluir que $\theta = \frac{\pi}{4}$.

Assim, $z = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$.

5.6. Seja $z = 1 - i$.

- $|z| = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$
- Seja θ um argumento de z. Como o afixo de z está no 4º quadrante, concluímos que θ pertence ao 4º quadrante.

  $\operatorname{tg} \theta = \frac{-1}{1} = -1 \ \wedge \ \theta \in 4º\ \text{Q}$

  Então, podemos concluir que $\theta = -\frac{\pi}{4}$.

Assim, $z = \sqrt{2}e^{i\left(-\frac{\pi}{4}\right)}$.

5.7. Seja $z = -\frac{1}{5} - \frac{1}{5}i$.

- $|z| = \sqrt{\left(-\frac{1}{5}\right)^2 + \left(-\frac{1}{5}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{25} + \frac{1}{25}} = \sqrt{\frac{2}{25}} = \frac{\sqrt{2}}{5}$
- Seja θ um argumento de z. Como o afixo de z está no 3º quadrante, concluímos que θ pertence ao 3º quadrante.

  $\operatorname{tg} \theta = \frac{-\frac{1}{5}}{-\frac{1}{5}} = 1 \ \wedge \ \theta \in 3º\ \text{Q}$

  Então, podemos concluir que $\theta = \frac{5\pi}{4}$.

Assim, $z = \frac{\sqrt{2}}{5}e^{i\frac{5\pi}{4}}$.

5.8. Seja $z = 1 - \sqrt{3}i$.

- $|z| = \sqrt{1^2 + \left(-\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{1+3} = \sqrt{4} = 2$
- Seja θ um argumento de z. Como o afixo de z está no 4º quadrante, concluímos que θ pertence ao 4º quadrante.

  $\operatorname{tg} \theta = \frac{-\sqrt{3}}{1} = -\sqrt{3} \ \wedge \ \theta \in 4º\ \text{Q}$

  Então, podemos concluir que $\theta = -\frac{\pi}{3}$.

Assim, $z = 2e^{i\left(-\frac{\pi}{3}\right)}$.

5.9. Seja $z = -\sqrt{2} - \sqrt{6}i$.

- $|z| = \sqrt{\left(-\sqrt{2}\right)^2 + \left(-\sqrt{6}\right)^2} = \sqrt{2+6} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$
- Seja θ um argumento de z. Como o afixo de z está no 3º quadrante, concluímos que θ pertence ao 3º quadrante.

  $\text{tg}\, \theta = \frac{-\sqrt{6}}{-\sqrt{2}} = \sqrt{3} \;\; \wedge \;\; \theta \in 3º\text{ Q}$

  Então, podemos concluir que $\theta = \frac{4\pi}{3}$.

Assim, $z = 2\sqrt{2}e^{i\frac{4\pi}{3}}$.

5.10. Seja $z = -\sqrt{3} + i$.

- $|z| = \sqrt{\left(-\sqrt{3}\right)^2 + 1^2} = \sqrt{3+1} = \sqrt{4} = 2$
- Seja θ um argumento de z. Como o afixo de z está no 2º quadrante, concluímos que θ pertence ao 2º quadrante.

  $\text{tg}\, \theta = \frac{1}{-\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3} \;\; \wedge \;\; \theta \in 2º\text{ Q}$

  Então, podemos concluir que $\theta = \frac{5\pi}{6}$.

Assim, $z = 2e^{i\frac{5\pi}{6}}$.

6.

6.1. $\bar{z} = \overline{3e^{i\frac{\pi}{5}}} = 3e^{i\left(-\frac{\pi}{5}\right)}$ $\qquad -z = 3e^{i\left(\pi + \frac{\pi}{5}\right)} = 3e^{i\frac{6\pi}{5}}$ $\qquad \frac{1}{z} = \frac{1}{3}e^{i\left(-\frac{\pi}{5}\right)}$

6.2. Seja $z = 1 + i$.

- $|z| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$
- Seja θ um argumento de z. Como o afixo de z está no 1º quadrante, concluímos que θ pertence ao 1º quadrante.

  $\text{tg}\, \theta = \frac{1}{1} = 1 \;\; \wedge \;\; \theta \in 1º\text{ Q}$

  Então, podemos concluir que $\theta = \frac{\pi}{4}$.

Assim, $z = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$.

Logo:

$\bar{z} = \overline{\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}} = \sqrt{2}e^{i\left(-\frac{\pi}{4}\right)}$ $\qquad -z = \sqrt{2}e^{i\left(\pi + \frac{\pi}{4}\right)} = \sqrt{2}e^{i\frac{5\pi}{4}}$ $\qquad \frac{1}{z} = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{i\left(-\frac{\pi}{4}\right)} = \frac{\sqrt{2}}{2}e^{i\left(-\frac{\pi}{4}\right)}$

6.3. Seja $z = 5$.

Atendendo à representação geométrica de z, temos que:

- o módulo de z é 5;

- um argumento de z é, por exemplo, 0.

Assim, $z = 5e^{i0}$.

Logo:

$\bar{z} = \overline{5e^{i0}} = 5e^{i0}$ $\qquad -z = 5e^{i\pi}$ $\qquad \frac{1}{z} = \frac{1}{5}e^{i0}$

6.4. Seja $z = i$.

Atendendo à representação geométrica de z, temos que:

- o módulo de z é 1;
- um argumento de z é, por exemplo, $\frac{\pi}{2}$.

Assim, $z = e^{i\frac{\pi}{2}}$.

Logo:

$\bar{z} = \overline{e^{i\frac{\pi}{2}}} = e^{i\left(-\frac{\pi}{2}\right)}$ $\qquad -z = e^{i\left(\pi+\frac{\pi}{2}\right)} = e^{i\left(-\frac{\pi}{2}\right)}$ $\qquad \frac{1}{z} = e^{i\left(-\frac{\pi}{2}\right)}$

7.

7.1. $\frac{(2+i)^2+1+6i^{35}}{1+2i} = \frac{4+4i+i^2+1+6i^3}{1+2i} = \frac{4+4i+6(-i)}{1+2i} =$

$= \frac{4+4i-6i}{1+2i} =$

$= \frac{(4-2i)(1-2i)}{(1+2i)(1-2i)} =$

$= \frac{4-8i-2i+4i^2}{1-4i^2} =$

$= \frac{4-10i-4}{1+4} =$

$= -\frac{10i}{5} =$

$= -2i$

7.2. $\frac{(1+2i)(3+i)-i^6+i^7}{3i} = \frac{3+i+6i+2i^2-i^2+i^3}{3i} = \frac{3+7i-2+1-i}{3i} =$

$= \frac{2+6i}{3i} =$

$= \frac{(2+6i)(-3i)}{-9i^2} =$

$= \frac{-6i-18i^2}{9} =$

$= \frac{18-6i}{9} =$

$= 2 - \frac{2}{3}i$

7.3. $\frac{2(1-i)-i^{18}-3}{1-2i} = \frac{2-2i-i^2-3}{1-2i} = \frac{-2i}{1-2i} =$

$= \frac{-2i(1+2i)}{(1-2i)(1+2i)} =$

$= \frac{-2i-4i^2}{1-4i^2} =$

$$= \frac{4-2i}{1+4} =$$

$$= \frac{4}{5} - \frac{2}{5}i$$

7.4. $\frac{3-2i+(3-2i)^2+2i^{43}}{8e^{i\frac{3\pi}{2}}} = \frac{3-2i+9-12i+4i^2+2i^3}{8\left[\cos\left(\frac{3\pi}{2}\right)+i\text{sen}\left(\frac{3\pi}{2}\right)\right]} = \frac{3-2i+9-12i-4-2i}{8(0-i)} =$

$$= \frac{8-16i}{-8i} =$$

$$= \frac{8i(8-16i)}{-64i^2} =$$

$$= \frac{64i-128i^2}{64} =$$

$$= \frac{128+64i}{64} =$$

$$= 2 + i$$

7.5. $\frac{\left(\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}\right)^4+4i}{i} = \frac{4e^{i\frac{4\pi}{4}}+4i}{i} = \frac{4e^{i\pi}+4i}{i} =$

$$= \frac{4[\cos(\pi)+i\text{sen}(\pi)]+4i}{i} =$$

$$= \frac{4(-1+0)+4i}{i} =$$

$$= \frac{-4+4i}{i} =$$

$$= \frac{(-4+4i)(-i)}{-i^2} =$$

$$= \frac{4i-4i^2}{1} =$$

$$= 4 + 4i$$

7.6. $\frac{3-i\left(e^{i\frac{\pi}{7}}\right)^7}{2-i} = \frac{3-ie^{i\frac{7\pi}{7}}}{2-i} = \frac{3-ie^{i\pi}}{2-i} =$

$$= \frac{3-i[\cos(\pi)+i\text{sen}(\pi)]}{2-i} =$$

$$= \frac{3-i(-1+0)}{2-i} =$$

$$= \frac{3+i}{2-i} =$$

$$= \frac{(3+i)(2+i)}{(2-i)(2+i)} =$$

$$= \frac{6+3i+2i+i^2}{4-i^2} =$$

$$= \frac{6+5i-1}{4+1} =$$

$$= \frac{5+5i}{5} =$$

$$= 1 + i$$

7.7. $\frac{\left(e^{i\frac{\pi}{7}}\right)^7+(2+i)^3}{4e^{i\frac{3\pi}{2}}} = \frac{e^{i\frac{7\pi}{7}}+(2+i)(2+i)^2}{4\left[\cos\left(\frac{3\pi}{2}\right)+i\text{sen}\left(\frac{3\pi}{2}\right)\right]} = \frac{e^{i\pi}+(2+i)(4+4i+i^2)}{4(0-i)} =$

$$= \frac{[\cos(\pi)+i\text{sen}(\pi)]+(2+i)(3+4i)}{-4i} =$$

$$= \frac{(-1+0)+6+8i+3i+4i^2}{-4i} =$$

$$= \frac{-1+6+11i-4}{-4i} =$$

$$= \frac{(1+11i)(4i)}{-16i^2} =$$

$$= \frac{4i+44i^2}{16} =$$

$$= \frac{-44+4i}{16} =$$

$$= -\frac{44}{16} + \frac{4}{16}i =$$

$$= -\frac{11}{4} + \frac{1}{4}i$$

7.8. Seja $z = 1 + i$.

- $|z| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$
- Seja θ um argumento de z. Como o afixo de z está no 1º quadrante, concluímos que θ pertence ao 1º quadrante.

  $\text{tg}\,\theta = \frac{1}{1} = 1 \;\wedge\; \theta \in 1º\text{ Q}$

  Então, podemos concluir que $\theta = \frac{\pi}{4}$.

Assim, $z = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$.

Logo:

$$\frac{(1+i)\left(\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{12}}\right)-2}{\sqrt{3}e^{i\left(-\frac{\pi}{2}\right)}} = \frac{\left(\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}\right)\left(\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{12}}\right)-2}{\sqrt{3}\left[\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)+i\text{sen}\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right]} = \frac{2e^{i\frac{4\pi}{12}}-2}{\sqrt{3}(0-i)} =$$

$$= \frac{2e^{i\frac{\pi}{3}}-2}{-\sqrt{3}i} =$$

$$= \frac{2\left[\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)+i\text{sen}\left(\frac{\pi}{3}\right)\right]-2}{-\sqrt{3}i} =$$

$$= \frac{2\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)-2}{-\sqrt{3}i} =$$

$$= \frac{1+\sqrt{3}i-2}{-\sqrt{3}i} =$$

$$= \frac{-1+\sqrt{3}i}{-\sqrt{3}i} =$$

$$= \frac{(-1+\sqrt{3}i)(\sqrt{3}i)}{-\sqrt{3}i(\sqrt{3}i)} =$$

$$= \frac{-\sqrt{3}i+3i^2}{-3i^2} =$$

$$= \frac{-3-\sqrt{3}i}{3} =$$

$$= -1 - \frac{\sqrt{3}}{3}i$$

8. Seja $z = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$.

- $|z| = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}} = \sqrt{1} = 1$
- Seja θ um argumento de z. Como o afixo de z está no 1º quadrante, concluímos que θ pertence ao 1º quadrante.

  $\text{tg}\,\theta = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = 1 \ \wedge \ \theta \in 1º\text{ Q}$

  Então, podemos concluir que $\theta = \frac{\pi}{4}$.

Assim, $z = e^{i\frac{\pi}{4}}$.

Logo:

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right)^{2020} = \left(e^{i\frac{\pi}{4}}\right)^{2020} = e^{i\frac{2020\pi}{4}} =$$

$$= e^{i505\pi} = e^{i\pi} =$$

$$= \cos(\pi) + i\text{sen}(\pi) = -1 + 0 = -1$$

9.

9.1. $(\bar{z})^2 + \sqrt{3} \times i^{35} = \left(\sqrt{3} + i\right)^2 + \sqrt{3} \times i^3 = 3 + 2\sqrt{3}i + i^2 + \sqrt{3} \times (-i) =$

$$= 3 + 2\sqrt{3}i - 1 - \sqrt{3}i =$$

$$= 2 + \sqrt{3}i$$

9.2. $2a(\sqrt{3} - i) + bi = \sqrt{3} \Leftrightarrow 2\sqrt{3}a - 2ai + bi = \sqrt{3} \Leftrightarrow 2\sqrt{3}a + (-2a + b)i = \sqrt{3}$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{3}a = \sqrt{3} \ \wedge \ -2a + b = 0$$

$$\Leftrightarrow a = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} \ \wedge \ b = 2a$$

$$\Leftrightarrow a = \frac{1}{2} \ \wedge \ b = 1$$

10.

10.1. $iz - 5i = 1 \Leftrightarrow iz = 1 + 5i \Leftrightarrow z = \frac{1+5i}{i}$

$$\Leftrightarrow z = \frac{(1+5i)(-i)}{-i^2}$$

$$\Leftrightarrow z = \frac{-i-5i^2}{1}$$

$$\Leftrightarrow z = 5 - i$$

C.S. $= \{5 - i\}$

10.2. $(z - i)(1 + i) = 1 + 2i \Leftrightarrow z - i = \frac{1+2i}{1+i} \Leftrightarrow z = \frac{1+2i}{1+i} + i$

$$\Leftrightarrow z = \frac{(1+2i)(1-i)}{(1+i)(1-i)} + i$$

$$\Leftrightarrow z = \frac{1-i+2i-2i^2}{1-i^2} + i$$

$$\Leftrightarrow z = \frac{1+i+2}{2} + i$$

$$\Leftrightarrow z = \frac{3}{2} + \frac{1}{2}i + i$$

$$\Leftrightarrow z = \frac{3}{2} + \frac{3}{2}i$$

C.S. $= \left\{\frac{3}{2} + \frac{3}{2}i\right\}$

10.3. $\frac{1}{z} - 1 + 3i = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{z} = 1 - 3i \Leftrightarrow z = \frac{1}{1-3i}$

$$\Leftrightarrow z = \frac{1+3i}{(1-3i)(1+3i)}$$

$$\Leftrightarrow z = \frac{1+3i}{1-9i^2}$$

$$\Leftrightarrow z = \frac{1+3i}{1+9}$$

$$\Leftrightarrow z = \frac{1}{10} + \frac{3}{10}i$$

C.S. $= \left\{\frac{1}{10} + \frac{3}{10}i\right\}$

10.4. $\bar{z} - 2 = i - 3z \Leftrightarrow \overline{x+yi} - 2 = i - 3(x+yi) \Leftrightarrow x - yi - 2 = i - 3x - 3yi$

$$\Leftrightarrow 4x + 2yi = 2 + i$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4x = 2 \\ 2y = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y = \frac{1}{2} \end{cases}$$

C.S. $= \left\{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\right\}$

10.5. $z + \frac{4}{z+2i} = 2i \Leftrightarrow z(z+2i) + 4 = 2i(z+2i) \Leftrightarrow z^2 + 2zi + 4 = 2zi + 4i^2$

$$\Leftrightarrow z^2 + 2zi - 2zi = -4 - 4$$

$$\Leftrightarrow z^2 = -8$$

$$\Leftrightarrow z = \pm\sqrt{-8}$$

$$\Leftrightarrow z = \pm 2\sqrt{2}i$$

C.S. $= \{-2\sqrt{2}i, 2\sqrt{2}i\}$

10.6. $(z-1+i)^2 + i(z-1+i)^3 = 0 \Leftrightarrow (z-1+i)^2[1 + i(z-1+i)] = 0$

$$\Leftrightarrow z - 1 + i = 0 \ \vee\ 1 + i(z-1+i) = 0$$

$$\Leftrightarrow z = 1 - i \ \vee\ 1 + zi - i + i^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow z = 1 - i \ \vee\ zi - i = 0$$

$$\Leftrightarrow z = 1 - i \ \vee\ (z-1)i = 0$$

$$\Leftrightarrow z = 1 - i \ \vee\ z = 1$$

C.S. $= \{1 - i, 1\}$

10.7. $2z^2+5=0 \Leftrightarrow z^2=-\frac{5}{2} \Leftrightarrow z=\pm\sqrt{-\frac{5}{2}}$

$\Leftrightarrow z=\pm\sqrt{\frac{5}{2}}i$

$\Leftrightarrow z=\frac{\sqrt{10}}{2}i \ \vee \ z=-\frac{\sqrt{10}}{2}i$

C.S. $=\left\{\frac{\sqrt{10}}{2}i, -\frac{\sqrt{10}}{2}i\right\}$

10.8. $5z^2-z+1=0 \Leftrightarrow z=\frac{1\pm\sqrt{(-1)^2-4\times5\times1}}{2\times5} \Leftrightarrow z=\frac{1\pm\sqrt{1-20}}{10}$

$\Leftrightarrow z=\frac{1\pm\sqrt{-19}}{10}$

$\Leftrightarrow z=\frac{1}{10}+\frac{\sqrt{19}}{10}i \ \vee \ z=\frac{1}{10}-\frac{\sqrt{19}}{10}i$

C.S. $=\left\{\frac{1}{10}+\frac{\sqrt{19}}{10}i, \frac{1}{10}-\frac{\sqrt{19}}{10}i\right\}$

10.9. $-3z^2+z-1=0 \Leftrightarrow z=\frac{-1\pm\sqrt{1^2-4\times(-3)\times(-1)}}{2\times(-3)} \Leftrightarrow z=\frac{-1\pm\sqrt{1-12}}{-6}$

$\Leftrightarrow z=\frac{-1\pm\sqrt{-11}}{-6}$

$\Leftrightarrow z=\frac{1}{6}+\frac{\sqrt{11}}{6}i \ \vee \ z=\frac{1}{6}-\frac{\sqrt{11}}{6}i$

C.S. $=\left\{\frac{1}{6}+\frac{\sqrt{11}}{6}i, \frac{1}{6}-\frac{\sqrt{11}}{6}i\right\}$

10.10. $3z^2+z+1=0 \Leftrightarrow z=\frac{-1\pm\sqrt{1^2-4\times3\times1}}{2\times3} \Leftrightarrow z=\frac{-1\pm\sqrt{1-12}}{6}$

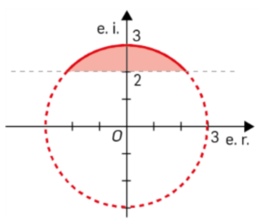
$\Leftrightarrow z=\frac{-1\pm\sqrt{-11}}{6}$

$\Leftrightarrow z=-\frac{1}{6}+\frac{\sqrt{11}}{6}i \ \vee \ z=-\frac{1}{6}-\frac{\sqrt{11}}{6}i$

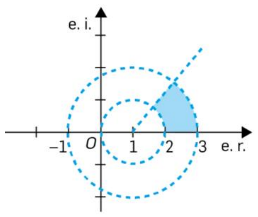
C.S. $=\left\{-\frac{1}{6}+\frac{\sqrt{11}}{6}i, -\frac{1}{6}-\frac{\sqrt{11}}{6}i\right\}$

11.

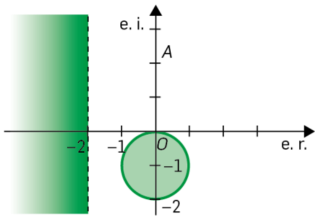
11.1. $|z|\le 3 \ \wedge \operatorname{Im}(z)\ge 2$



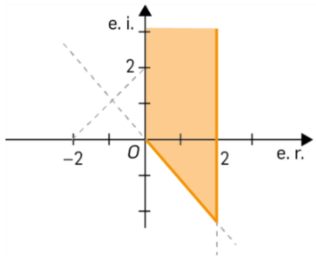
11.2. $1<|z-1|<2 \ \wedge \ 0\le \operatorname{Arg}(z-1)\le\frac{\pi}{4}$



11.3. $|z+i| \leq 1 \ \vee \ \operatorname{Re}(z)+1 < -1$



11.4. $|z-2i| \leq |z+2| \ \wedge \ 0 \leq \operatorname{Re}(z) \leq 2$



12.

12.1. $|z-1-2i| \leq 3 \ \wedge \ 0 \leq \operatorname{Arg}(z-1-2i) \leq \frac{\pi}{4}$

12.2. $\operatorname{Im}(z) \leq 2 \ \wedge \ \frac{\pi}{3} \leq \operatorname{Arg}(z) \leq \pi - \frac{\pi}{6} \Leftrightarrow \operatorname{Im}(z) \leq 2 \ \wedge \ \frac{\pi}{3} \leq \operatorname{Arg}(z) \leq \frac{5\pi}{6}$

13.

13.1. Seja $z = 1 - i$.

- $|z| = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$
- Seja θ um argumento de z. Como o afixo de z está no 4º quadrante, concluímos que θ pertence ao 4º quadrante.

  $\operatorname{tg}\theta = \frac{-1}{1} = -1 \ \wedge \ \theta \in 4º\ Q$

  Então, podemos concluir que $\theta = -\frac{\pi}{4}$.

Assim, $z = \sqrt{2}e^{i\left(-\frac{\pi}{4}\right)}$.

$z \times w = \sqrt{2}e^{i\left(-\frac{\pi}{4}\right)} \times \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}} = 2e^{i\left(-\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4}\right)} = 2e^{i0} = 2$

$|z|^2 = \left(\sqrt{2}\right)^2 = 2$

Logo, $z \times w = |z|^2$.

13.2. $\left(\frac{w}{z}\right)^n = \left(\frac{\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2}e^{i\left(-\frac{\pi}{4}\right)}}\right)^n = \left(e^{i\left(\frac{2\pi}{4}\right)}\right)^n =$

$= e^{i\left(\frac{n\pi}{2}\right)} =$

$= \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{2}\right)$

14.

14.1. $z_1 = \frac{-1+i}{4i^8} = \frac{-1+i}{4} = -\frac{1}{4} + \frac{1}{4}i$

- $|z_1| = \sqrt{\left(-\frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{1}{4}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{16} + \frac{1}{16}} = \sqrt{\frac{2}{16}} = \frac{\sqrt{2}}{4}$
- Seja θ_1 um argumento de z_1. Como o afixo de z_1 está no 2º quadrante, concluímos que θ_1 pertence ao 2º quadrante.

  $\text{tg}\,\theta_1 = \frac{\frac{1}{4}}{-\frac{1}{4}} = -1 \;\wedge\; \theta_1 \in 2º\text{ Q}$

  Então, podemos concluir que $\theta_1 = \frac{3\pi}{4}$.

Assim, $z_1 = \frac{\sqrt{2}}{4}e^{i\frac{3\pi}{4}}$.

$z_2 = -3 + i^{1000} = -3 + i^0 = -3 + 1 = -2$

- $|z_2| = 2$
- um argumento de z_2 é, por exemplo, π.

Assim, $z_2 = 2e^{i\pi}$.

Seja $z_3 = z_1 \times z_2 = \frac{\sqrt{2}}{4}e^{i\frac{3\pi}{4}} \times 2e^{i\pi} = \frac{\sqrt{2}}{2}e^{i\frac{7\pi}{4}}$.

14.2. $az^4 + bz^{-2} = 8i$

Se z_1 é solução da equação, temos:

$$a\left(\frac{\sqrt{2}}{4}e^{i\frac{3\pi}{4}}\right)^4 + b\left(\frac{\sqrt{2}}{4}e^{i\frac{3\pi}{4}}\right)^{-2} = 8i$$

$$\Leftrightarrow a\left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right)^4 e^{i3\pi} + b\left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right)^{-2} e^{i\left(-\frac{3\pi}{2}\right)} = 8i$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{64}a[\cos(3\pi) + i\text{sen}\,(3\pi)] + 8b\left[\cos\left(-\frac{3\pi}{2}\right) + i\text{sen}\,\left(-\frac{3\pi}{2}\right)\right] = 8i$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{64}a(-1+0) + 8b(0+i) = 8i$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{64}a + 8bi = 8i$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{1}{64}a = 0 \\ 8b = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 1 \end{cases}$$

15.

15.1. $$\left[\frac{4e^{i\frac{\pi}{6}} + 8e^{i\frac{5\pi}{6}}}{\sqrt{24}[(2+i)^3 - 3 - 10i]}\right]^{12} = \left[\frac{4\left[\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + i\text{sen}\,\left(\frac{\pi}{6}\right)\right] + 8\left[\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) + i\text{sen}\,\left(\frac{5\pi}{6}\right)\right]}{2\sqrt{6}[(2+i)(4+4i+i^2) - 3 - 10i]}\right]^{12} =$$

$$= \left[\frac{4\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) + 8\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)}{2\sqrt{6}[(2+i)(3+4i) - 3 - 10i]}\right]^{12} =$$

$$= \left[\frac{2\sqrt{3} + 2i - 4\sqrt{3} + 4i}{2\sqrt{6}(6+8i+3i+4i^2-3-10i)}\right]^{12} =$$

$$= \left[\frac{-2\sqrt{3}+6i}{2\sqrt{6}(6+11i-4-3-10i)}\right]^{12} =$$

$$= \left[\frac{2\left(-\sqrt{3}+3i\right)}{2\sqrt{6}(-1+i)}\right]^{12} =$$

$$= \left[\frac{-\sqrt{3}+3i}{\sqrt{6}(-1+i)}\right]^{12} =$$

$$= \left[\frac{-\sqrt{3}+3i}{-\sqrt{6}+\sqrt{6}i}\right]^{12}$$

Seja $z_1 = -\sqrt{3} + 3i$.

- $|z_1| = \sqrt{\left(-\sqrt{3}\right)^2 + 3^2} = \sqrt{3+9} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$
- Seja θ_1 um argumento de z_1. Como o afixo de z_1 está no 2º quadrante, concluímos que θ_1 pertence ao 2º quadrante.

  $\operatorname{tg} \theta_1 = \frac{3}{-\sqrt{3}} = -\frac{3\sqrt{3}}{3} = -\sqrt{3} \ \wedge \ \theta_1 \in 2º\text{ Q}$

  Então, $\theta_1 = \frac{5\pi}{6}$.

Assim, $z_1 = 2\sqrt{3}e^{i\frac{5\pi}{6}}$.

Seja $z_2 = -\sqrt{6} + \sqrt{6}i$.

- $|z_2| = \sqrt{\left(-\sqrt{6}\right)^2 + \left(\sqrt{6}\right)^2} = \sqrt{6+6} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$
- Seja θ_2 um argumento de z_2. Como o afixo de z_2 está no 2º quadrante, concluímos que θ_2 pertence ao 2º quadrante.

  $\operatorname{tg} \theta_2 = \frac{\sqrt{6}}{-\sqrt{6}} = -1 \ \wedge \ \theta_2 \in 2º\text{ Q}$

  Então, $\theta_2 = \frac{3\pi}{4}$.

Assim, $z_2 = 2\sqrt{3}e^{i\frac{3\pi}{4}}$.

Logo:

$$\left[\frac{-\sqrt{3}+3i}{-\sqrt{6}+\sqrt{6}i}\right]^{12} = \left[\frac{2\sqrt{3}e^{i\frac{5\pi}{6}}}{2\sqrt{3}e^{i\frac{3\pi}{4}}}\right]^{12} = \left[e^{i\left(\frac{5\pi}{6}-\frac{3\pi}{4}\right)}\right]^{12} =$$

$$= \left[e^{i\left(\frac{\pi}{12}\right)}\right]^{12} = e^{i\pi} = -1$$

15.2. $\dfrac{\overline{18\sqrt{2}e^{i\left(-\frac{22\pi}{24}\right)}}}{(1+i)^3+4e^{i(-7\pi)}+4e^{i\left(-\frac{3\pi}{2}\right)}} = \dfrac{18\sqrt{2}e^{i\left(\frac{22\pi}{24}\right)}}{(1+2i+i^2)(1+i)+4(-1)+4\times i} = \dfrac{18\sqrt{2}e^{i\left(\frac{11\pi}{12}\right)}}{2i(1+i)-4+4i} =$

$$= \frac{18\sqrt{2}e^{i\left(\frac{11\pi}{12}\right)}}{2i+2i^2-4+4i} =$$

$$= \frac{18\sqrt{2}e^{i\left(\frac{11\pi}{12}\right)}}{-6+6i}$$

Daniela Raposo e Luzia Gomes

Seja $z = -6 + 6i$.

- $|z| = \sqrt{(-6)^2 + 6^2} = \sqrt{36+36} = \sqrt{72} = 6\sqrt{2}$
- Seja θ um argumento de z. Como o afixo de z está no 2º quadrante, concluímos que θ pertence ao 2º quadrante.

  $\operatorname{tg}\theta = \frac{6}{-6} = -1 \ \wedge \ \theta \in 2º\text{ Q}$

  Então, podemos concluir que $\theta = \frac{3\pi}{4}$.

Assim, $z = 6\sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}$.

Logo:

$$\frac{18\sqrt{2}e^{i\left(\frac{11\pi}{12}\right)}}{-6+6i} = \frac{18\sqrt{2}e^{i\left(\frac{11\pi}{12}\right)}}{6\sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}} = 3e^{i\left(\frac{11\pi}{12}-\frac{3\pi}{4}\right)} =$$

$$= 3e^{i\frac{\pi}{6}} =$$

$$= 3\left[\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + i\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{6}\right)\right] =$$

$$= 3\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) =$$

$$= \frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i$$

15.3. $$\left[\frac{-2e^{i\left(-\frac{7\pi}{33}\right)}\times e^{i\left(-\frac{4\pi}{33}\right)}+\sqrt{2}e^{i\frac{25\pi}{3}}\times\overline{\sqrt{8}e^{i7\pi}}}{\sqrt{12}e^{i\frac{\pi}{8}}}\right]^{12} = \left[\frac{-2e^{i\left(-\frac{11\pi}{33}\right)}+\sqrt{2}e^{i\frac{25\pi}{3}}\times\sqrt{8}e^{i(-7\pi)}}{\sqrt{12}e^{i\frac{\pi}{8}}}\right]^{12} =$$

$$= \left[\frac{-2e^{i\left(-\frac{\pi}{3}\right)}+4e^{i\left(\frac{25\pi}{3}-7\pi\right)}}{\sqrt{12}e^{i\frac{\pi}{8}}}\right]^{12} =$$

$$= \left[\frac{-2e^{i\left(-\frac{\pi}{3}\right)}+4e^{i\frac{4\pi}{3}}}{\sqrt{12}e^{i\frac{\pi}{8}}}\right]^{12} =$$

$$= \left[\frac{-2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+i\operatorname{sen}\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)+4\left(\cos\left(\frac{4\pi}{3}\right)+i\operatorname{sen}\left(\frac{4\pi}{3}\right)\right)}{\sqrt{12}e^{i\frac{\pi}{8}}}\right]^{12} =$$

$$= \left[\frac{-2\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)+4\left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)}{\sqrt{12}e^{i\frac{\pi}{8}}}\right]^{12} =$$

$$= \left[\frac{-1+\sqrt{3}i-2-2\sqrt{3}i}{\sqrt{12}e^{i\frac{\pi}{8}}}\right]^{12} =$$

$$= \left(\frac{-3-\sqrt{3}i}{\sqrt{12}e^{i\frac{\pi}{8}}}\right)^{12}$$

Seja $z = -3 - \sqrt{3}i$.

- $|z| = \sqrt{(-3)^2 + \left(-\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{9+3} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$
- Seja θ um argumento de z. Como o afixo de z está no 3º quadrante, concluímos que θ pertence ao 3º quadrante.

$\text{tg}\ \theta = \frac{-\sqrt{3}}{-3} = \frac{\sqrt{3}}{3} \ \wedge \ \theta \in 3^{\text{o}}\ \text{Q}$

Então, $\theta = \frac{7\pi}{6}$.

Assim, $z = 2\sqrt{3}e^{i\frac{7\pi}{6}}$.

Logo:

$$\left(\frac{-3-\sqrt{3}i}{\sqrt{12}e^{i\frac{\pi}{8}}}\right)^{12} = \left(\frac{2\sqrt{3}e^{i\frac{7\pi}{6}}}{2\sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{8}}}\right)^{12} = \left(e^{i\left(\frac{7\pi}{6}-\frac{\pi}{8}\right)}\right)^{12} =$$

$$= \left(e^{i\frac{25\pi}{24}}\right)^{12} =$$

$$= e^{i\frac{25\pi}{2}} =$$

$$= e^{i\frac{\pi}{2}} =$$

$$= i$$

16.

16.1. $\frac{\bar{z}+i}{\bar{z}-2} = \frac{x-yi+i}{x-yi-2} = \frac{x+(1-y)i}{(x-2)-yi} =$

$$= \frac{[x+(1-y)i][(x-2)+yi]}{[(x-2)-yi][(x-2)+yi]} =$$

$$= \frac{x(x-2)+xyi+(x-2)(1-y)i+y(1-y)i^2}{(x-2)^2-(yi)^2} =$$

$$= \frac{x(x-2)+xyi+(x-2)(1-y)i-y(1-y)}{(x-2)^2+y^2} =$$

$$= \frac{x(x-2)-y(1-y)+xyi+(x-2)(1-y)i}{(x-2)^2+y^2} =$$

$$= \frac{x(x-2)-y(1-y)}{(x-2)^2+y^2} + \frac{xy+(x-2)(1-y)}{(x-2)^2+y^2}i$$

Se $\frac{\bar{z}+i}{\bar{z}-2}$ é um número real, então:

$$\frac{xy+(x-2)(1-y)}{(x-2)^2+y^2} = 0 \Leftrightarrow xy + (x-2)(1-y) = 0 \Leftrightarrow xy + x - xy - 2 + 2y = 0$$

$$\Leftrightarrow 2y = -x + 2$$

$$\Leftrightarrow y = -\frac{1}{2}x + 1$$

16.2. Pela alínea anterior, sabemos que $\frac{\bar{z}+i}{\bar{z}-2} = \frac{x(x-2)-y(1-y)}{(x-2)^2+y^2} + \frac{xy+(x-2)(1-y)}{(x-2)^2+y^2}i$.

Se $\frac{\bar{z}+i}{\bar{z}-2}$ é um imaginário puro, então:

$$\frac{x(x-2)-y(1-y)}{(x-2)^2+y^2} = 0 \Leftrightarrow x(x-2) - y(1-y) = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 2x - y + y^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x^2 - 2x + 1) + \left(y^2 - y + \frac{1}{4}\right) = 1 + \frac{1}{4}$$

$$\Leftrightarrow (x-1)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{5}{4}$$

Daniela Raposo e Luzia Gomes

16.3. $5z^2 + 3z\bar{z} + 20i = 5(x+yi)^2 + 3(x+yi)(x-yi) + 20i =$

$= 5(x^2 + 2xyi + (yi)^2) + 3(x^2 - (yi)^2) + 20i =$

$= 5(x^2 + 2xyi - y^2) + 3(x^2 + y^2) + 20i =$

$= 5x^2 + 10xyi - 5y^2 + 3x^2 + 3y^2 + 20i =$

$= 8x^2 - 2y^2 + (10xy + 20)i$

Se $5z^2 + 3z\bar{z} + 20i$ é um número real, então $10xy + 20 = 0 \Leftrightarrow xy = -2$.

16.4. Pela alínea anterior sabemos que $5z^2 + 3z\bar{z} + 20i = 8x^2 - 2y^2 + (10xy + 20)i$.

Se $5z^2 + 3z\bar{z} + 20i$ é um imaginário puro, então:

$8x^2 - 2y^2 = 0 \Leftrightarrow 2y^2 = 8x^2 \Leftrightarrow y^2 = 4x^2$

$\Leftrightarrow y = \pm\sqrt{4x^2}$

$\Leftrightarrow y = 2x \ \vee \Leftrightarrow y = -2x$

17. $\frac{w}{z} = \frac{e^{i3\alpha}}{e^{i\alpha}} = e^{i2\alpha} = \cos(2\alpha) + i\,\text{sen}(2\alpha)$

Como $\text{Re}\left(\frac{w}{z}\right) = -\frac{1}{9}$, então:

$\cos(2\alpha) = -\frac{1}{9} \Leftrightarrow \cos^2\alpha - \text{sen}^2\alpha = -\frac{1}{9} \Leftrightarrow \cos^2\alpha - (1 - \cos^2\alpha) = -\frac{1}{9}$

$\Leftrightarrow 2\cos^2\alpha - 1 = -\frac{1}{9}$

$\Leftrightarrow 2\cos^2\alpha = \frac{8}{9}$

$\Leftrightarrow \cos^2\alpha = \frac{4}{9}$

$\Leftrightarrow \cos\alpha = \pm\frac{2}{3}$

$\Leftrightarrow \cos\alpha = -\frac{2}{3}$, pois $\alpha \in 3^{\text{o}}$ Q.

Como $\text{sen}^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha$, temos:

$\text{sen}^2\alpha = 1 - \frac{4}{9} \Leftrightarrow \text{sen}^2\alpha = \frac{5}{9} \Leftrightarrow \text{sen}\,\alpha = \pm\frac{\sqrt{5}}{3}$

$\Leftrightarrow \text{sen}\,\alpha = -\frac{\sqrt{5}}{3}$, pois $\alpha \in 3^{\text{o}}$ Q.

Logo, $z = e^{i\alpha} = \cos\alpha + i\,\text{sen}\,\alpha = -\frac{2}{3} - \frac{\sqrt{5}}{3}i$.

18.

18.1. Seja $z_1 = -3 + \sqrt{3}i$.

- $|z_1| = \sqrt{(-3)^2 + \left(\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{9+3} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$
- Seja θ_1 um argumento de z_1. Como o afixo de z_1 está no 2º quadrante, concluímos que θ_1 pertence ao 2º quadrante.

$\text{tg}\,\theta_1 = \frac{\sqrt{3}}{-3} = -\frac{\sqrt{3}}{3} \ \wedge \ \theta_1 \in 2.º\text{ Q}$

Então, $\theta_1 = \frac{5\pi}{6}$.

Assim, $z_1 = 2\sqrt{3}e^{i\frac{5\pi}{6}}$.

Seja $z_2 = -2 - 2\sqrt{3}i$.

- $|z_2| = \sqrt{(-2)^2 + \left(-2\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{4+12} = \sqrt{16} = 4$
- Seja θ_2 um argumento de z_2. Como o afixo de z_2 está no 3º quadrante, concluímos que θ_2 pertence ao 3º quadrante.

  $\text{tg}\,\theta_2 = \frac{-2\sqrt{3}}{-2} = \sqrt{3} \ \wedge \ \theta_2 \in 3.º\text{ Q}$

  Então, $\theta_2 = \frac{4\pi}{3}$.

Assim, $z_2 = 4e^{i\frac{4\pi}{3}}$.

Logo:

$$\left(\frac{-3+\sqrt{3}i}{-2-2\sqrt{3}i}\right)^n = \left(\frac{2\sqrt{3}e^{i\frac{5\pi}{6}}}{4e^{i\frac{4\pi}{3}}}\right)^n = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}e^{i\left(\frac{5\pi}{6}-\frac{4\pi}{3}\right)}\right)^n =$$

$$= \left(\frac{\sqrt{3}}{2}e^{i\left(\frac{5\pi}{6}-\frac{4\pi}{3}\right)}\right)^n =$$

$$= \left(\frac{\sqrt{3}}{2}e^{i\left(-\frac{\pi}{2}\right)}\right)^n =$$

$$= \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n e^{i\left(-\frac{n\pi}{2}\right)}$$

Para que $z = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n e^{i\left(-\frac{n\pi}{2}\right)}$ seja um imaginário puro, o seu argumento deve ser da forma $k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$.

Assim:

$$-\frac{n\pi}{2} = k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow n\pi = -k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow n = -k, k \in \mathbb{Z}$$

- Se $k = 0, n = 0$ e $0 \notin \mathbb{N}$.
- Se $k = 1, n = -1$ e $-1 \notin \mathbb{N}$.
- Se $k = -1, n = 1$.

Logo, $n = 1$.

18.2. $\left(3e^{i\frac{\pi}{4}} \times \overline{2e^{i\frac{\pi}{8}}}\right)^n = \left(3e^{i\frac{\pi}{4}} \times 2e^{i\left(-\frac{\pi}{8}\right)}\right)^n = \left(6e^{i\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{8}\right)}\right)^n =$

$$= \left(6e^{i\frac{\pi}{8}}\right)^n =$$

$$= 6^n e^{i\frac{n\pi}{8}}$$

Para que $z = 6^n e^{i\frac{n\pi}{8}}$ seja um número real, o seu argumento deve ser da forma $k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Assim:

$-\frac{n\pi}{8} = k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow n\pi = -8k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow n = -8k, k \in \mathbb{Z}$

- Se $k = 0, n = 0$ e $0 \notin \mathbb{N}$.
- Se $k = 1, n = -8$ e $-8 \notin \mathbb{N}$.
- Se $k = -1, n = 8$.

Logo, $n = 8$.

19. Seja $z = |z|e^{i\theta}$.

$$-2iz = -2e^{i\frac{\pi}{2}} \times |z|e^{i\theta} = 2e^{i\left(\pi + \frac{\pi}{2}\right)} \times |z|e^{i\theta} =$$
$$= 2|z|e^{i\left(\frac{3\pi}{2}+\theta\right)}$$

Para que o afixo deste número complexo pertença ao 3º quadrante e à bissetriz dos quadrantes ímpares:

$\frac{3\pi}{2} + \theta = \frac{5\pi}{4} \Leftrightarrow \theta = \frac{5\pi}{4} - \frac{3\pi}{2} \Leftrightarrow \theta = -\frac{\pi}{4}$

20. Seja $z_1 = -1 + \sqrt{3}i$.

- $|z_1| = \sqrt{(-1)^2 + \left(\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{1+3} = \sqrt{4} = 2$
- Seja θ_1 um argumento de z_1. Como o afixo de z_1 está no 2º quadrante, concluímos que θ_1 pertence ao 2º quadrante.

  $\operatorname{tg} \theta_1 = \frac{\sqrt{3}}{-1} = -\sqrt{3} \;\;\wedge\;\; \theta_1 \in 2º\text{ Q}$

  Então, $\theta_1 = \frac{2\pi}{3}$.

Assim, $z_1 = 2e^{i\frac{2\pi}{3}}$.

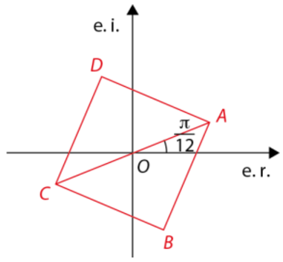
$$z = \left(3e^{i\alpha}\right)^4 \times \left(-1 + \sqrt{3}i\right) = 3^4 e^{i4\alpha} \times 2e^{i\frac{2\pi}{3}} =$$
$$= 162e^{i\left(4\alpha + \frac{2\pi}{3}\right)}$$

Como z é um imaginário puro:

$$4\alpha + \frac{2\pi}{3} = \frac{\pi}{2} + k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}, \text{ com } \frac{\pi}{4} < \alpha < \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow 4\alpha = \frac{\pi}{2} - \frac{2\pi}{3} + k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$$
$$\Leftrightarrow 4\alpha = -\frac{\pi}{6} + k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$$
$$\Leftrightarrow \alpha = -\frac{\pi}{24} + k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$$

- Se $k = 0, \alpha = -\frac{\pi}{24}$ e $-\frac{\pi}{24} \notin \left]\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right[$.
- Se $k = 1, \alpha = -\frac{\pi}{24} + \frac{\pi}{2} = \frac{11\pi}{24}$.

21.



21.1. Sabemos que $l = \sqrt{36} = 6$.

$|z| = \frac{1}{2}\overline{AC}$

$\overline{AC}^2 = 6^2 + 6^2 \Leftrightarrow \overline{AC} = 6\sqrt{2}$

Assim, $|z| = \frac{1}{2} \times 6\sqrt{2} = 3\sqrt{2}$.

Como $\text{Arg}(z) = \frac{\pi}{12}$, então $z = 3\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{12}}$.

21.2. $\overrightarrow{OD} \cdot \overrightarrow{OE} = \|\overrightarrow{OD}\| \times \|\overrightarrow{OE}\| \times \cos\left(\widehat{\overrightarrow{OD}, \overrightarrow{OE}}\right)$

$$-iz = e^{i\frac{3\pi}{2}} \times 3\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{12}} = 3\sqrt{2}e^{i\left(\frac{3\pi}{2}+\frac{\pi}{12}\right)} =$$
$$= 3\sqrt{2}e^{i\frac{19\pi}{12}}$$

Assim:

$$\overline{-iz} = \overline{3\sqrt{2}e^{i\frac{19\pi}{12}}} = 3\sqrt{2}e^{i\left(-\frac{19\pi}{12}\right)} =$$
$$= 3\sqrt{2}e^{i\left(\frac{5\pi}{12}\right)}$$

$\text{Arg}(iz) = \frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{2} = \frac{7\pi}{12}$

Assim, sendo α o ângulo formado por $\overrightarrow{OD}$ e $\overrightarrow{OE}$, $\alpha = \frac{7\pi}{12} - \frac{5\pi}{12} = \frac{\pi}{6}$.

Logo:

$$\overrightarrow{OD} \cdot \overrightarrow{OE} = \|\overrightarrow{OD}\| \times \|\overrightarrow{OE}\| \times \cos\left(\widehat{\overrightarrow{OD}, \overrightarrow{OE}}\right) = 3\sqrt{2} \times 3\sqrt{2} \times \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) =$$
$$= 18 \times \frac{\sqrt{3}}{2} =$$
$$= 9\sqrt{3}$$

22. Seja $z = re^{i\theta}$.

Sabemos que o comprimento do arco é dado por αr, sendo α o ângulo ao centro correspondente e r o raio da circunferência.

Assim, temos $\frac{2\pi}{3} = \frac{\pi}{3}r \Leftrightarrow r = 2$, ou seja, $|z| = 2$.

$\text{Arg}(z) = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} \times \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6} = \frac{2\pi}{6} = \frac{\pi}{3}$

Logo:

$$z = 2e^{i\frac{\pi}{3}} = 2\left[\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\,\text{sen}\left(\frac{\pi}{3}\right)\right] =$$
$$= 2\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) =$$
$$= 1 + \sqrt{3}i$$

Então, $\bar{z} = 1 - \sqrt{3}i$.

23.

23.1. $z_1 = \frac{i^1+i^2+i^3+i^4+i^5+i^6+i^7-\sqrt{3}i}{i^8} = \frac{i-1-i+1+i-1-i-\sqrt{3}i}{1} =$

$= -1-\sqrt{3}i$

- $|z_1| = \sqrt{(-1)^2+\left(-\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{1+3} = \sqrt{4} = 2$
- Seja θ_1 um argumento de z_1. Como o afixo de z_1 está no 3º quadrante, concluímos que θ_1 pertence ao 3º quadrante.

  $\operatorname{tg} \theta_1 = \frac{-\sqrt{3}}{-1} = \sqrt{3} \;\wedge\; \theta_1 \in 3º\ \mathrm{Q}$

  Então, $\theta_1 = \frac{4\pi}{3}$.

Assim, $z_1 = 2e^{i\frac{4\pi}{3}}$.

$z_2 = 1-\sqrt{3}i$

- $|z_2| = \sqrt{1^2+\left(-\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{1+3} = \sqrt{4} = 2$
- Seja θ_2 um argumento de z_2. Como o afixo de z_2 está no 4º quadrante, concluímos que θ_2 pertence ao 4º quadrante.

  $\operatorname{tg} \theta_2 = \frac{-\sqrt{3}}{1} = -\sqrt{3} \;\wedge\; \theta_2 \in 4º\ \mathrm{Q}$

  Então, $\theta_2 = \frac{5\pi}{3}$.

Assim, $z_2 = 2e^{i\frac{5\pi}{3}}$.

23.2. $\frac{5\pi}{3} - \frac{4\pi}{3} = \frac{\pi}{3}$

$\frac{2\pi}{n} = \frac{\pi}{3} \Leftrightarrow n = \frac{6\pi}{\pi} = 6$

$z = \left(2e^{i\frac{4\pi}{3}}\right)^6 = 2^6 e^{i\frac{24\pi}{3}} = 64e^{i8\pi} = 64$

24.

24.1. Utilizando a regra de Ruffini, temos:

	1	$-2\sqrt{3}-2i$	$4+4\sqrt{3}i$	$-8i$
$2i$		$2i$	$-4\sqrt{3}i$	$8i$
	1	$-2\sqrt{3}$	4	0

Assim:

$z^3 - 2\left(\sqrt{3}+i\right)z^2 + 4\left(1+\sqrt{3}i\right)z - 8i = (z-2i)\left(z^2-2\sqrt{3}z+4\right)$

24.2. $P(z) = 0 \Leftrightarrow (z-2i)\left(z^2-2\sqrt{3}z+4\right) = 0 \Leftrightarrow z-2i = 0 \;\vee\; z^2-2\sqrt{3}z+4 = 0$

$\Leftrightarrow z = 2i \;\vee\; z = \frac{2\sqrt{3}\pm\sqrt{\left(2\sqrt{3}\right)^2-4\times1\times4}}{2}$

$$\Leftrightarrow z = 2i \;\vee\; z = \frac{2\sqrt{3} \pm \sqrt{12-16}}{2}$$

$$\Leftrightarrow z = 2i \;\vee\; z = \frac{2\sqrt{3} \pm \sqrt{-4}}{2}$$

$$\Leftrightarrow z = 2i \;\vee\; z = \frac{2\sqrt{3} \pm 2i}{2}$$

$$\Leftrightarrow z = 2i \;\vee\; z = \sqrt{3} - i \;\vee\; z = \sqrt{3} + i$$

Seja $z_1 = 2i$.

- $|z_1| = 2$
- Um argumento de z_1 é, por exemplo, $\frac{\pi}{2}$.

Assim, $z_1 = 2e^{i\frac{\pi}{2}}$.

Seja $z_2 = \sqrt{3} - i$.

- $|z_2| = \sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2 + 1^2} = \sqrt{3+1} = \sqrt{4} = 2$
- Seja θ_2 um argumento de z_2. Como o afixo de z_2 está no 4º quadrante, concluímos que θ_2 pertence ao 4º quadrante.

  $\operatorname{tg} \theta_2 = \frac{-1}{\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3} \;\wedge\; \theta_2 \in 4º\text{ Q}$

  Então, $\theta_2 = -\frac{\pi}{6}$.

Assim, $z_2 = 2e^{i\left(-\frac{\pi}{6}\right)}$.

Seja $z_3 = \sqrt{3} + i$

- $|z_3| = \sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2 + 1^2} = \sqrt{3+1} = \sqrt{4} = 2$
- Seja θ_3 um argumento de z_3. Como o afixo de z_3 está no 1º quadrante, concluímos que θ_3 pertence ao 1º quadrante.

  $\operatorname{tg} \theta_3 = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \;\wedge\; \theta_3 \in 1º\text{ Q}$

  Então, $\theta_3 = \frac{\pi}{6}$.

Assim, $z_3 = 2e^{i\frac{\pi}{6}}$.

Logo, C.S. $= \left\{2e^{i\frac{\pi}{2}}, 2e^{i\frac{\pi}{6}}, 2e^{i\left(-\frac{\pi}{6}\right)}\right\}$.

25. $z = \frac{1+\mu i}{1-\mu i}, \mu \in \mathbb{R}$

Seja $w = 1 + \mu i = |w|e^{i\theta}$.

Então, $\frac{w}{\bar{w}} = \frac{|w|e^{i\theta}}{|w|e^{i(-\theta)}} = e^{i2\theta}$.

Logo, $|z| = 1$.

26.

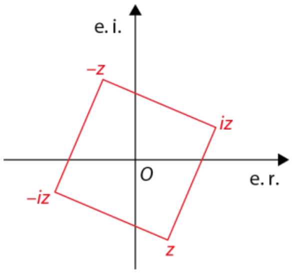
26.1. As raízes de ordem quatro de w são $z, -iz, -z$ e iz.

Assim, como $z = 2 - 5i$, temos:

$-iz = -i(2-5i) = -2i + 5i^2 = -5 - 2i$

$-z = -(2-5i) = -2 + 5i$

$iz = i(2-5i) = 2i - 5i^2 = 5 + 2i$



26.2. $\sqrt[4]{w} = z \Leftrightarrow w = z^4 \Leftrightarrow w = (2-5i)^4$

$\Leftrightarrow w = [(2-5i)^2]^2$

$\Leftrightarrow w = (4 - 20i + 25i^2)^2$

$\Leftrightarrow w = (-21 - 20i)^2$

$\Leftrightarrow w = 441 + 840i + 400i^2$

$\Leftrightarrow w = 41 + 840i$

27.

27.1. $\frac{(z_1)^5 + 2z_2 + 4\sqrt{3}}{i^{2018}} = \frac{\left(4e^{i\frac{\pi}{10}}\right)^5 + 2(-2\sqrt{3} - 2i) + 4\sqrt{3}}{i^2} = \frac{4^5 e^{i\frac{\pi}{2}} - 4\sqrt{3} - 4i + 4\sqrt{3}}{-1} =$

$= -(256i - 4i) =$

$= -252i$

27.2. $z^4 = z_2 \Leftrightarrow z^4 = -2\sqrt{3} - 2i$

$z_2 = -2\sqrt{3} - 2i$

- $|z_2| = \sqrt{\left(-2\sqrt{3}\right)^2 + (-2)^2} = \sqrt{12+4} = \sqrt{16} = 4$
- Seja θ_1 um argumento de z_2. Como o afixo de z_2 está no 3º quadrante, concluímos que θ_1 pertence ao 3º quadrante.

  $\operatorname{tg} \theta_1 = \frac{-2}{-2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \ \wedge \ \theta_1 \in$ 3º Q

  Então, $\theta_1 = \frac{7\pi}{6}$.

Assim, $z_2 = 4e^{i\frac{7\pi}{6}}$.

Logo:

$z^4 = 4e^{i\frac{7\pi}{6}} \Leftrightarrow z = \sqrt[4]{4e^{i\frac{7\pi}{6}}} \Leftrightarrow z = \sqrt[4]{4}e^{i\left(\frac{\frac{7\pi}{6}+2k\pi}{4}\right)}, k \in \{0,1,2,3\}$

$\Leftrightarrow z = \sqrt{2}e^{i\left(\frac{\frac{7\pi}{6}+2k\pi}{4}\right)}, k \in \{0,1,2,3\}$

- Se $k = 0$, $z_0 = \sqrt{2}e^{i\frac{7\pi}{24}}$.
- Se $k = 1$, $z_1 = \sqrt{2}e^{i\frac{19\pi}{24}}$.

- Se $k = 2$, $z_2 = \sqrt{2}e^{i\frac{31\pi}{24}}$.
- Se $k = 3$, $z_3 = \sqrt{2}e^{i\frac{43\pi}{24}}$.

C.S.= $\left\{\sqrt{2}e^{i\frac{7\pi}{24}}, \sqrt{2}e^{i\frac{19\pi}{24}}, \sqrt{2}e^{i\frac{31\pi}{24}}, \sqrt{2}e^{i\frac{43\pi}{24}}\right\}$

27.3. $\sqrt[6]{w} = z_1 \Leftrightarrow w = z_1^6$

Como se trata de um hexágono regular, a amplitude de cada ângulo ao centro definido pelos vértices do hexágono é $\frac{2\pi}{6} = \frac{\pi}{3}$. Assim, as raízes de ordem n de w são:

$4e^{i\frac{\pi}{10}}$

$4e^{i\left(\frac{\pi}{10}+\frac{\pi}{3}\right)} = 4e^{i\frac{13\pi}{30}}$

$4e^{i\left(\frac{13\pi}{30}+\frac{\pi}{3}\right)} = 4e^{i\frac{23\pi}{30}}$

$4e^{i\left(\frac{23\pi}{30}+\frac{\pi}{3}\right)} = 4e^{i\frac{33\pi}{30}} = 4e^{i\frac{11\pi}{10}}$

$4e^{i\left(\frac{11\pi}{10}+\frac{\pi}{3}\right)} = 4e^{i\frac{43\pi}{30}}$

$4e^{i\left(\frac{43\pi}{30}+\frac{\pi}{3}\right)} = 4e^{i\frac{53\pi}{30}}$

Assim, $w = z_1^6 = \left(4e^{i\frac{\pi}{10}}\right)^6 = 4^6e^{i\frac{6\pi}{10}} = 4096e^{i\frac{3\pi}{5}}$.

28.

28.1. Como os vértices do hexágono são os afixos das raízes de ordem n de z, então $n = 6$ e a amplitude de cada ângulo ao centro definido pelos vértices do hexágono é $\frac{2\pi}{6} = \frac{\pi}{3}$.

Assim, as raízes de ordem 6 de z, são:

$z_1 = 3e^{i\frac{\pi}{4}}$

$z_2 = 3e^{i\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{3}\right)} = 3e^{i\frac{7\pi}{12}}$

$z_3 = 3e^{i\left(\frac{7\pi}{12}+\frac{\pi}{3}\right)} = 3e^{i\frac{11\pi}{12}}$

$z_4 = 3e^{i\left(\frac{11\pi}{12}+\frac{\pi}{3}\right)} = 3e^{i\frac{15\pi}{12}} = 3e^{i\frac{5\pi}{4}}$

$z_5 = 3e^{i\left(\frac{5\pi}{4}+\frac{\pi}{3}\right)} = 3e^{i\frac{19\pi}{12}}$

$z_6 = 3e^{i\left(\frac{19\pi}{12}+\frac{\pi}{3}\right)} = 3e^{i\frac{23\pi}{12}}$

28.2. $z = z_1^6 = \left(3e^{i\frac{\pi}{4}}\right)^6 = 3^6e^{i\frac{6\pi}{4}} =$

$= 729e^{i\frac{3\pi}{2}} =$

$= 729 \times (-i) =$

$= -729i$

28.3. $|z| < 3 \ \wedge\ \frac{7\pi}{12} \leq \mathrm{Arg}(z) \leq \frac{11\pi}{12}$

29. Sabemos que $w = iz = |z|e^{i\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)}$.

Assim, como $\frac{\pi}{2} = \frac{2\pi}{4}$, podemos concluir que $n = 4$.

Logo, os pontos *A* e *B* são vértices de um quadrado cuja diagonal tem comprimento igual a $2|z|$.

Então, pelo teorema de Pitágoras, temos:

$$\overline{AB}^2 = |z|^2 + |z|^2 \Leftrightarrow \overline{AB} = \sqrt{2|z|^2}$$

$$\Leftrightarrow \overline{AB} = |z|\sqrt{2}$$

30. $\frac{17\pi}{10} - \frac{\pi}{5} = \frac{17\pi}{10} - \frac{2\pi}{10} = \frac{15\pi}{10} = \frac{3\pi}{2}$

Assim, os afixos das raízes definem um arco de amplitude $\frac{3\pi}{2}$ rad $= -\frac{\pi}{2}$ rad.

Como $\frac{2\pi}{\frac{\pi}{2}} = 4$, temos:

$$z = \left(\sqrt{2}e^{i\frac{17\pi}{10}}\right)^4 = \left(\sqrt{2}\right)^4 e^{i\frac{34\pi}{5}} = 4e^{i\frac{4\pi}{5}}$$

$$z = \left(\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{5}}\right)^4 = \left(\sqrt{2}\right)^4 e^{i\frac{4\pi}{5}} = 4e^{i\frac{4\pi}{5}}$$

31.

31.1. $z + \frac{1}{z} + 1 = 0 \Leftrightarrow z^2 + 1 + z = 0$

$$\Leftrightarrow z^2 + z + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow z = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4\times1\times1}}{2}$$

$$\Leftrightarrow z = \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2}$$

$$\Leftrightarrow z = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \ \vee \ z = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

C.S. $= \left\{-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i, -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right\}$

31.2. $z^4 - 2z^2 = 15 \Leftrightarrow z^4 - 2z^2 - 15 = 0$

$$\Leftrightarrow z^2 = \frac{2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 4\times1\times(-15)}}{2}$$

$$\Leftrightarrow z^2 = \frac{2 \pm \sqrt{4+60}}{2}$$

$$\Leftrightarrow z^2 = \frac{2 \pm 8}{2}$$

$$\Leftrightarrow z^2 = -3 \ \vee \ z^2 = 5$$

$$\Leftrightarrow z = \pm\sqrt{-3} \ \vee \ z = \pm\sqrt{5}$$

$$\Leftrightarrow z = \sqrt{3}i \ \vee \ z = -\sqrt{3}i \ \vee \ z = -\sqrt{5} \ \vee \ z = \sqrt{5}$$

C.S. $= \left\{\sqrt{3}i, -\sqrt{3}i, \sqrt{5}, -\sqrt{5}\right\}$

31.3. Utilizando a regra de Ruffini, temos:

	1	$-8+i$	$17-8i$	$17i$
$-i$		$-i$	$8i$	$-17i$
	1	-8	17	0

Assim:

$$z^3+(-8+i)z^2+(17-8i)z+17i=(z+i)(z^2-8z+17)$$

Logo:

$$z^3+(-8+i)z^2+(17-8i)z+17i=0 \Leftrightarrow (z+i)(z^2-8z+17)=0$$

$$\Leftrightarrow z+i=0 \ \vee \ z^2-8z+17=0$$

$$\Leftrightarrow z=-i \ \vee \ z=\frac{8\pm\sqrt{(-8)^2-4\times1\times17}}{2}$$

$$\Leftrightarrow z=-i \ \vee \ z=\frac{8\pm\sqrt{64-68}}{2}$$

$$\Leftrightarrow z=-i \ \vee \ z=\frac{8\pm\sqrt{-4}}{2}$$

$$\Leftrightarrow z=-i \ \vee \ z=4+i \ \vee \ z=4-2i$$

C.S. $=\{4+i, 4-i, -i\}$

31.4. $z^2-4\bar{z}-5=0 \Leftrightarrow (x+yi)^2-4(x-yi)-5=0$

$$\Leftrightarrow x^2+2xyi+(yi)^2-4x+4yi-5=0$$

$$\Leftrightarrow x^2-y^2-4x-5+2xyi+4yi=0$$

$$\Leftrightarrow x^2-y^2-4x-5+(2xy+4y)i=0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2-y^2-4x-5=0 \\ 2xy+4y=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \{2y(x+2)=0$$

$$\Leftrightarrow \{2y=0 \ \vee \ \{x+2=0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2-4x-5=0 \\ y=0 \end{cases} \vee \begin{cases} 4-y^2+8-5=0 \\ x=-2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=-1 \\ y=0 \end{cases} \vee \begin{cases} x=5 \\ y=0 \end{cases} \vee \begin{cases} y^2=7 \\ x=-2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=-1 \\ y=0 \end{cases} \vee \begin{cases} x=5 \\ y=0 \end{cases} \vee \begin{cases} y=\pm\sqrt{7} \\ x=-2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=-1 \\ y=0 \end{cases} \vee \begin{cases} x=5 \\ y=0 \end{cases} \vee \begin{cases} y=\sqrt{7} \\ x=-2 \end{cases} \vee \begin{cases} y=-\sqrt{7} \\ x=-2 \end{cases}$$

Cálculo auxiliar

$$x^2-4x-5=0$$

$$\Leftrightarrow x=\frac{4\pm\sqrt{(-4)^2-4\times1\times(-5)}}{2}$$

$$\Leftrightarrow x=\frac{4\pm\sqrt{16+20}}{2}$$

$$\Leftrightarrow x=\frac{4\pm\sqrt{36}}{2}$$

$$\Leftrightarrow x=\frac{4\pm6}{2}$$

$$\Leftrightarrow x=-1 \ \vee \ x=5$$

Assim:

$$z=-1 \ \vee \ z=6 \ \vee \ z=-2+\sqrt{7}i \ \vee \ z=-2-\sqrt{7}i$$

C.S. $=\{-1, 5, -2-\sqrt{7}i, -2+\sqrt{7}i\}$

32.

32.1. $z^3 + 8e^{i\frac{2\pi}{3}} = 0 \Leftrightarrow z^3 = -8e^{i\frac{2\pi}{3}} \Leftrightarrow z = \sqrt[3]{-8e^{i\frac{2\pi}{3}}}$

$$\Leftrightarrow z = \sqrt[3]{8e^{i\left(\pi+\frac{2\pi}{3}\right)}}$$

$$\Leftrightarrow z = \sqrt[3]{8e^{i\frac{5\pi}{3}}}$$

$$\Leftrightarrow z = \sqrt[3]{8}\, e^{i\frac{\frac{5\pi}{3}+2k\pi}{3}}, k \in \{0, 1, 2\}$$

$$\Leftrightarrow z = 2e^{i\frac{\frac{5\pi}{3}+2k\pi}{3}}, k \in \{0, 1, 2\}$$

- Se $k = 0, z_0 = 2e^{i\frac{5\pi}{9}}$.
- Se $k = 1, z_1 = 2e^{i\frac{11\pi}{9}}$.
- Se $k = 2, z_2 = 2e^{i\frac{17\pi}{9}}$.

C.S. $= \left\{2e^{i\frac{5\pi}{9}}, 2e^{i\frac{11\pi}{9}}, 2e^{i\frac{17\pi}{9}}\right\}$

32.2. $z - \frac{2i}{z} = 0 \Leftrightarrow z^2 - 2i = 0 \Leftrightarrow z^2 = 2i$

$$\Leftrightarrow z^2 = 2e^{i\frac{\pi}{2}}$$

$$\Leftrightarrow z = \sqrt{2e^{i\frac{\pi}{2}}}$$

$$\Leftrightarrow z = \sqrt{2}e^{i\frac{\frac{\pi}{2}+2k\pi}{2}}, k \in \{0, 1\}$$

- Se $k = 0, z_0 = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$.
- Se $k = 1, z_1 = \sqrt{2}e^{i\frac{5\pi}{4}}$.

C.S. $= \left\{\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}, \sqrt{2}e^{i\frac{5\pi}{4}}\right\}$

32.3. $z^4 \times \overline{e^{i\frac{\pi}{6}}} = 4i \Leftrightarrow z^4 \times e^{i\left(-\frac{\pi}{6}\right)} = 4e^{i\frac{\pi}{2}} \Leftrightarrow z^4 = \frac{4e^{i\frac{\pi}{2}}}{e^{i\left(-\frac{\pi}{6}\right)}}$

$$\Leftrightarrow z^4 = 4e^{i\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{6}\right)}$$

$$\Leftrightarrow z^4 = 4e^{i\frac{2\pi}{3}}$$

$$\Leftrightarrow z = \sqrt[4]{4e^{i\frac{2\pi}{3}}}$$

$$\Leftrightarrow z = \sqrt{2}e^{i\frac{\frac{2\pi}{3}+2k\pi}{4}}, k \in \{0, 1, 2, 3\}$$

- Se $k = 0, z_0 = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{6}}$.
- Se $k = 1, z_1 = \sqrt{2}e^{i\frac{2\pi}{3}}$.
- Se $k = 2, z_2 = \sqrt{2}e^{i\frac{7\pi}{6}}$.

- Se $k = 3, z_3 = \sqrt{2}e^{i\frac{5\pi}{3}}$.

C.S. $= \left\{\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{6}}, \sqrt{2}e^{i\frac{2\pi}{3}}, \sqrt{2}e^{i\frac{7\pi}{6}}, \sqrt{2}e^{i\frac{5\pi}{3}}\right\}$

32.4. $z^3 \times \bar{z} = 81i \Leftrightarrow (x+yi)^3 \times (x-yi) = 81i$

$$\Leftrightarrow [x^2 + 2xyi + (yi)^2](x+yi)(x-yi) = 81i$$

$$\Leftrightarrow (x^2 - y^2 + 2xyi)[x^2 - (yi)^2] = 81i$$

$$\Leftrightarrow (x^2 - y^2 + 2xyi)(x^2 + y^2) = 81i$$

$$\Leftrightarrow x^2 - y^2 + 2xyi = \frac{81}{x^2+y^2}i$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = 0 \\ 2xy = \frac{81}{x^2+y^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = y^2 \\ 2xy = \frac{81}{y^2+y^2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \overline{\qquad} \\ 2xy = \frac{81}{2y^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overline{\qquad} \\ x = \frac{81}{4y^3} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left(\frac{81}{4y^3}\right)^2 = y^2 \\ \underline{\qquad} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{(3^4)^2}{4^2y^6} = y^2 \\ \underline{\qquad} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y^8 = \frac{3^8}{2^4} \\ \underline{\qquad} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \pm\sqrt[8]{\frac{3^8}{2^4}} \\ \underline{\qquad} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = \pm\frac{3}{\sqrt{2}} \\ \underline{\qquad} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \pm\frac{3\sqrt{2}}{2} \\ x = \pm\frac{3\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

Assim, $z_1 = \frac{3\sqrt{2}}{2} + \frac{3\sqrt{2}}{2}i \;\vee\; z_2 = -\frac{3\sqrt{2}}{2} - \frac{3\sqrt{2}}{2}i$.

Seja $z_1 = \frac{3\sqrt{2}}{2} + \frac{3\sqrt{2}}{2}i$.

- $|z_1| = \sqrt{\left(\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{9}{2} + \frac{9}{2}} = \sqrt{9} = 3$
- Seja θ_1 um argumento de z_1. Como o afixo de z_1 está no 1º quadrante, concluímos que θ_1 pertence ao 1º quadrante.

  $\text{tg}\,\theta_1 = \frac{\frac{3\sqrt{2}}{2}}{\frac{3\sqrt{2}}{2}} = 1 \;\wedge\; \theta_1 \in$ 1º Q

  Então, $\theta_1 = \frac{\pi}{4}$.

Assim, $z_1 = 3e^{i\frac{\pi}{4}}$.

Seja $z_2 = -\frac{3\sqrt{2}}{2} - \frac{3\sqrt{2}}{2}i$.

- $|z_2| = \sqrt{\left(-\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(-\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{9}{2} + \frac{9}{2}} = \sqrt{9} = 3$
- Seja θ_2 um argumento de z_2. Como o afixo de z_2 está no 3º quadrante, concluímos que θ_2 pertence ao 3º quadrante.

$\text{tg}\ \theta_2 = \frac{-\frac{3\sqrt{2}}{2}}{-\frac{3\sqrt{2}}{2}} = 1 \ \wedge \ \theta_2 \in 3º\ \text{Q}$

Então, $\theta_2 = \frac{5\pi}{4}$.

Assim, $z_2 = 3e^{i\frac{5\pi}{4}}$.

C.S. $= \left\{3e^{i\frac{\pi}{4}},\ 3e^{i\frac{5\pi}{4}}\right\}$

32.5. Seja $z = |z|e^{i\theta}$.

$$8z^2\bar{z} = \frac{1}{i} \Leftrightarrow 8\left(|z|e^{i\theta}\right)^2|z|e^{i(-\theta)} = e^{i\left(-\frac{\pi}{2}\right)} \Leftrightarrow 8|z|^2e^{i(2\theta)}|z|e^{i(-\theta)} = e^{i\left(-\frac{\pi}{2}\right)}$$

$$\Leftrightarrow |z|^3e^{i\theta} = \frac{1}{8}e^{i\left(-\frac{\pi}{2}\right)}$$

Assim, $|z|^3 = \frac{1}{8} \Leftrightarrow z = \frac{1}{2}$.

Logo, $z = \frac{1}{2}e^{i\left(-\frac{\pi}{2}\right)}$.

C.S. $= \left\{\frac{1}{2}e^{i\left(-\frac{\pi}{2}\right)}\right\}$

32.6. Seja $z = |z|e^{i\theta}$.

$$z^4 = \bar{z}i \Leftrightarrow \left(|z|e^{i\theta}\right)^4 = |z|e^{i(-\theta)}e^{i\frac{\pi}{2}} \Leftrightarrow |z|^4e^{i(4\theta)} = |z|e^{i\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} |z|^4 = |z| \\ 4\theta = \frac{\pi}{2} - \theta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |z|^4 - |z| = 0 \\ 5\theta = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} |z|(|z|^3 - 1) = 0 \\ \theta = \frac{\pi}{10} + \frac{2k\pi}{5}, k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |z| = 0 \ \vee |z| = 1 \\ \theta = \frac{\pi}{10} + \frac{2k\pi}{5}, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Se $|z| = 0, z = 0$.

Se $|z| = 1$, temos:

- Para $k = 0, \theta_1 = \frac{\pi}{10}$.
- Para $k = 1, \theta_2 = \frac{\pi}{2}$.
- Para $k = 2, \theta_3 = \frac{9\pi}{10}$.
- Para $k = 3, \theta_4 = \frac{13\pi}{10}$.
- Para $k = 4, \theta_5 = \frac{17\pi}{10}$.

C.S. $= \left\{0, e^{i\frac{\pi}{10}}, e^{i\frac{\pi}{2}}, e^{i\frac{9\pi}{10}}, e^{i\frac{13\pi}{10}}, e^{i\frac{17\pi}{10}}\right\}$

32.7. $z^5 = 81z \Leftrightarrow z^5 - 81z = 0 \Leftrightarrow z(z^4 - 81) = 0$

$$\Leftrightarrow z = 0 \ \vee \ z^4 = 81$$

$$\Leftrightarrow z = 0 \ \vee \ z = \sqrt[4]{81}$$

$$\Leftrightarrow z = 0 \ \vee \ z = \sqrt[4]{81e^{i0}}$$

Daniela Raposo e Luzia Gomes

$$\Leftrightarrow z = 0 \ \vee \ z = 3e^{i\frac{0+2k\pi}{4}}, k \in \{0, 1, 2, 3\}$$

$$\Leftrightarrow z = 0 \ \vee \ z = 3e^{i\frac{k\pi}{2}}, k \in \{0, 1, 2, 3\}$$

- Se $k = 0, z_0 = 3e^{i0} = 3$.
- Se $k = 1, z_1 = 3e^{i\frac{\pi}{2}} = 3i$.
- Se $k = 2, z_2 = 3e^{i\pi} = -3$.
- Se $k = 3, z_3 = 3e^{i\frac{3\pi}{2}} = -3i$.

C.S. $= \{0, 3, 3i, -3, -3i\}$

32.8. $z^3 = -\sqrt{3}z - iz \Leftrightarrow z^3 + (\sqrt{3} + i)z = 0 \Leftrightarrow z[z^2 + (\sqrt{3} + i)] = 0$

$$\Leftrightarrow z = 0 \ \vee \ z^2 = -\sqrt{3} - i$$

Seja $z_1 = -\sqrt{3} - i$.

- $|z_1| = \sqrt{\left(-\sqrt{3}\right)^2 + (-1)^2} = \sqrt{3+1} = \sqrt{4} = 2$
- Seja θ_1 um argumento de z_1. Como o afixo de z_1 está no 3º quadrante, concluímos que θ_1 pertence ao 3º quadrante.

  $\text{tg}\,\theta_1 = \frac{-1}{-\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \ \wedge \ \theta_1 \in$ 3º Q

  Então, $\theta_1 = \frac{7\pi}{6}$.

Assim, $z_1 = 2e^{i\frac{7\pi}{6}}$.

Logo:

$z = 0 \ \vee \ z^2 = -\sqrt{3} - i \Leftrightarrow z = 0 \ \vee \ z^2 = 2e^{i\frac{7\pi}{6}}$

$$\Leftrightarrow z = 0 \ \vee \ z = \sqrt{2}e^{i\frac{\frac{7\pi}{6}+2k\pi}{2}}, k \in \{0, 1\}$$

- Se $k = 0, z_0 = \sqrt{2}e^{i\frac{7\pi}{12}}$.
- Se $k = 1, z_1 = \sqrt{2}e^{i\frac{19\pi}{12}}$.

C.S. $= \left\{0, \sqrt{2}e^{i\frac{7\pi}{12}}, \sqrt{2}e^{i\frac{19\pi}{12}}\right\}$

33.

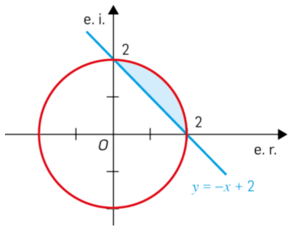
33.1. $\text{Re}(z - iz) \geq 2 \quad \wedge \quad |z| \leq 2$

$\text{Re}(z - iz) \geq 2 \Leftrightarrow \text{Re}(x + yi - i(x + yi)) \geq 2 \Leftrightarrow \text{Re}(x + yi - ix - yi^2) \geq 2$

$$\Leftrightarrow \text{Re}(x + y + (y - x)i) \geq 2$$

$$\Leftrightarrow x + y \geq 2$$

$$\Leftrightarrow y \geq -x + 2$$

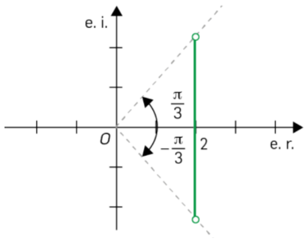


33.2. $|\text{Arg}(z)| < \frac{\pi}{3} \ \wedge\ \text{Im}(iz) = 2 \Leftrightarrow -\frac{\pi}{3} < \text{Arg}(z) < \frac{\pi}{3} \ \wedge\ \text{Im}(iz) = 2$

$$\text{Im}(iz) = 2 \Leftrightarrow \text{Im}(i(x+yi)) = 2 \Leftrightarrow \text{Im}(ix + yi^2) = 2$$

$$\Leftrightarrow \text{Im}(-y + ix) = 2$$

$$\Leftrightarrow x = 2$$



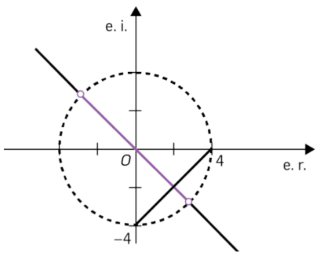
33.3. $|z+4i| = |z-4| \ \wedge\ z \cdot \bar{z} + 16e^{i\pi} < 0$

$$z \cdot \bar{z} + 16e^{i\pi} < 0 \Leftrightarrow |z|e^{i\theta} \cdot |z|e^{i(-\theta)} = -16e^{i\pi} \Leftrightarrow |z|^2 e^{i0} = 16e^{i(\pi+\pi)}$$

$$\Leftrightarrow |z|^2 e^{i0} = 16e^{i(2\pi)}$$

$$\Leftrightarrow |z|^2 = 16$$

$$\Leftrightarrow |z| = 4$$



33.4. $z + \bar{z} \leq -z \cdot \bar{z} \ \wedge\ |\text{Re}(z)| \leq 1 \ \wedge\ \frac{\pi}{2} < \text{Arg}(z) \leq \pi$

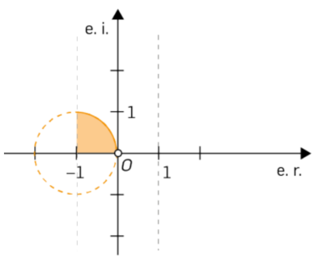
$$\Leftrightarrow z + \bar{z} \leq -z \cdot \bar{z} \ \wedge\ -1 \leq \text{Re}(z) \leq 1 \ \wedge\ \frac{\pi}{2} < \text{Arg}(z) \leq \pi$$

$$z + \bar{z} \leq -z \cdot \bar{z} \Leftrightarrow x + yi + x - yi \leq -(x+yi)(x-yi) \Leftrightarrow 2x \leq -(x^2+y^2)$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + 2x \leq 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 2x + 1 + y^2 \leq 1$$

$$\Leftrightarrow (x+1)^2 + y^2 \leq 1$$



34.

34.1. $|z+2i| \leq 2 \ \wedge \ \frac{\pi}{4} \leq \operatorname{Arg}(z+4i) \leq \frac{3\pi}{4}$

34.2. $(-1 < \operatorname{Re}(z) < 3) \ \wedge \ \left[0 \leq \operatorname{Arg}(z-1-2i) \leq \frac{\pi}{4} \ \vee \ \pi \leq \operatorname{Arg}(z-1-2i) \leq \frac{5\pi}{4}\right]$

34.3. $|z| < 3 \ \wedge \ \frac{\pi}{2} \leq \operatorname{Arg}(z) \leq \frac{9\pi}{10}$

34.4. $|z-4-4i| \leq 4 \ \wedge \ \operatorname{Im}(z) \leq \operatorname{Re}(z)+4 \ \wedge \ \operatorname{Im}(z) \geq \operatorname{Re}(z)-4$

35.

35.1. $\sqrt[3]{z} = z_1$

$$z_1 = 2+\sqrt{3}i + i^{4n+2014}, n \in \mathbb{N} \Leftrightarrow z_1 = 2+\sqrt{3}i+i^2$$
$$\Leftrightarrow z_1 = 1+\sqrt{3}i$$

- $|z_1| = \sqrt{1^2+\left(\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{1+3} = \sqrt{4} = 2$
- Seja θ_1 um argumento de z_1. Como o afixo de z_1 está no 1º quadrante, concluímos que θ_1 pertence ao 1º quadrante.

  $\operatorname{tg} \theta_1 = \frac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3} \ \wedge \ \theta_1 \in$ 1º Q

  Então, $\theta_1 = \frac{\pi}{3}$.

Assim, $z_1 = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$.

Logo:

$$\sqrt[3]{z} = 2e^{i\frac{\pi}{3}} \Leftrightarrow z = \left(2e^{i\frac{\pi}{3}}\right)^3 \Leftrightarrow z = 2^3 e^{i\frac{3\pi}{3}}$$
$$\Leftrightarrow z = 8e^{i\pi}$$
$$\Leftrightarrow z = 8(\cos\pi + i\operatorname{sen}\pi)$$
$$\Leftrightarrow z = 8(-1+0i)$$
$$\Leftrightarrow z = -8+0i$$

35.2. A condição $|z-z_2| \leq 1$ define, no plano complexo, o círculo de centro no ponto C e raio 1, incluindo a circunferência. Assim, pode rejeitar-se a opção (III).

A condição $\frac{\pi}{2} \leq \operatorname{Arg}(z) \leq 2\pi$ define, no plano complexo, a reunião dos 2º, 3º e 4º quadrantes, incluindo os eixos do referencial. Assim, pode rejeitar-se a opção (I).

A condição $|z| \geq |z-z_2|$ define, no plano complexo, o semiplano definido pela mediatriz do segmento de reta $[OC]$ e que contém o ponto C. Assim, pode rejeitar-se a opção (II).

Portanto, a opção correta é a (IV).

GAVE

36.

36.1. Sejam $z = x + yi$ e $z' = x' + y'i$.

Sabemos que:

- $\text{Re}(z + z') = 1 \Leftrightarrow \text{Re}(x + yi + x' + y'i) = 1 \Leftrightarrow x + x' = 1$
- $z - z'$ é um número real, ou seja:

  $\text{Im}(z - z') = 0 \Leftrightarrow \text{Im}(x + yi - x' - y'i) = 0 \Leftrightarrow y - y' = 0$
- $(x + yi)(x' + y'i) = -16 + 2i \Leftrightarrow xx' + xy'i + x'yi + yy'i^2 = -16 + 2i$

  $\Leftrightarrow xx' - yy' + (xy' + x'y)i = -16 + 2i$

Assim, temos:

$$\begin{cases} x + x' = 1 \\ y - y' = 0 \\ xx' - yy' = -16 \\ xy' + x'y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = 1 - x \\ y' = y \\ x(1-x) - y \times y = -16 \\ x \times y + (1-x)y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \underline{\qquad} \\ \underline{\qquad} \\ x(1-x) - y \times y = -16 \\ x \times y + (1-x)y = 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \underline{\qquad} \\ \underline{\qquad} \\ x - x^2 - y^2 = -16 \\ xy + y - xy = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \underline{\qquad} \\ y' = 2 \\ -x^2 + x - 4 = -16 \\ y = 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \underline{\qquad} \\ y' = 2 \\ -x^2 + x + 12 = 0 \\ y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = 4 \\ y' = 2 \\ x = -3 \\ y = 2 \end{cases} \vee \begin{cases} x' = -3 \\ y' = 2 \\ x = 4 \\ y = 2 \end{cases}$$

Cálculo auxiliar

$-x^2 + x + 12 = 0$

$\Leftrightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \times (-1) \times 12}}{2 \times (-1)}$

$\Leftrightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 48}}{-2}$

$\Leftrightarrow x = \frac{-1 \pm 7}{-2}$

$\Leftrightarrow x = -3 \ \vee \ x = 4$

Assim, $z = -3 + 2i$ e $z' = 4 + 2i$ ou $z = 4 + 2i$ e $z' = -3 + 2i$.

36.2. Sejam $z = x + yi$ e $z' = x' + y'i$.

Sabemos que:

- $z + z' = 3 + i \Leftrightarrow x + yi + x' + y'i = 3 + i$

  $\Leftrightarrow x + x' + (y + y')i = 3 + i$

  $\Leftrightarrow x + x' = 3 \wedge y + y' = 1$
- $\text{Re}(z) = 2 \Leftrightarrow x = 2$
- $\frac{x + yi}{x' + y'i}$ é um imaginário puro, ou seja:

  $\text{Re}\left(\frac{x+yi}{x'+y'i}\right) = 0 \Leftrightarrow \text{Re}\left(\frac{(x+yi)(x'-y'i)}{(x'+y'i)(x'-y'i)}\right) = 0 \Leftrightarrow \text{Re}\left(\frac{xx' - xy'i - x'yi - yy'i^2}{(x')^2 - (y'i)^2}\right) = 0$

  $\Leftrightarrow \text{Re}\left(\frac{xx' + yy' - xy'i - x'yi}{(x')^2 + (y')^2}\right) = 0$

  $\Leftrightarrow \frac{xx' + yy'}{(x')^2 + (y')^2} = 0$

Assim, temos:

$$\begin{cases} x + x' = 3 \\ y + y' = 1 \\ x = 2 \\ \frac{xx' + yy'}{(x')^2 + (y')^2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = 3 - 2 \\ y' = 1 - y \\ x = 2 \\ \underline{\qquad} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = 1 \\ \underline{\qquad} \\ \underline{\qquad} \\ \frac{2 \times 1 + y(1-y)}{(-1)^2 + (1-y)^2} = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \_\_\_\_ \\ \_\_\_\_ \\ \_\_\_\_ \\ \frac{2+y-y^2}{1+(1-y)^2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \_\_\_\_ \\ \_\_\_\_ \\ \_\_\_\_ \\ y^2 - y - 2 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x' = 1 \\ y' = 2 \\ x = 2 \\ y = -1 \end{cases} \vee \begin{cases} x' = 1 \\ y' = -1 \\ x = 2 \\ y = 2 \end{cases}$$

Assim, $z = 2 - i$ e $z' = 1 + 2i$ ou $z = 2 + 2i$ e $z' = 1 - i$.

Cálculo auxiliar

$y^2 - y + 2 = 0$

$\Leftrightarrow y = \frac{1 \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \times 1 \times (-2)}}{2}$

$\Leftrightarrow y = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2}$

$\Leftrightarrow y = \frac{1 \pm 3}{2}$

$\Leftrightarrow y = -1 \ \vee \ y = 2$

37. Sejam $z_1 = x_1 + y_1 i$ e $z_2 = x_2 + y_2 i$.

37.1. $\bar{z}_1 z_2 - z_1 \overline{z_2} = (x_1 - y_1 i)(x_2 + y_2 i) - (x_1 + y_1 i)(x_2 - y_2 i) =$

$= x_1x_2 + x_1y_2 i - x_2y_1 i + y_1y_2 - (x_1x_2 - x_1y_2 i + x_2y_1 i + y_1y_2) =$

$= x_1x_2 + x_1y_2 i - x_2y_1 i + y_1y_2 - x_1x_2 + x_1y_2 i - x_2y_1 i - y_1y_2 =$

$= x_1y_2 i - x_2y_1 i + x_1y_2 i - x_2y_1 i =$

$= 2x_1y_2 i - 2x_2y_1 i =$

$= 2(x_1y_2 - x_2y_1)i$

$2\mathrm{Im}(\bar{z}_1 z_2)i = 2\mathrm{Im}[(x_1 - y_1 i)(x_2 + y_2 i)]i =$

$= 2\mathrm{Im}(x_1x_2 + x_1y_2 i - x_2y_1 i + y_1y_2)i =$

$= 2\mathrm{Im}[(x_1x_2 + y_1y_2) + (x_1y_2 - x_2y_1)i]i =$

$= 2(x_1y_2 - x_2y_1)i$

Assim, $\bar{z}_1 z_2 - z_1 \overline{z_2} = 2\mathrm{Im}(\bar{z}_1 z_2)i$.

37.2. $\bar{z}_1 z_2 + z_1 \overline{z_2} = (x_1 - y_1 i)(x_2 + y_2 i) + (x_1 + y_1 i)(x_2 - y_2 i) =$

$= x_1x_2 + x_1y_2 i - x_2y_1 i + y_1y_2 + x_1x_2 - x_1y_2 i + x_2y_1 i + y_1y_2 =$

$= 2x_1x_2 + 2y_1y_2$

Logo, $\bar{z}_1 z_2 + z_1 \overline{z_2}$ é um número real.

37.3. $(\bar{z}_1 + z_2)(z_1 + \overline{z_2}) =$

$= (x_1 - y_1 i + x_2 + y_2 i)(x_1 + y_1 i + x_2 - y_2 i) =$

$= [(x_1 + x_2) + (-y_1 + y_2)i][(x_1 + x_2) + (y_1 - y_2)i] =$

$= (x_1 + x_2)^2 + (x_1 + x_2)(y_1 - y_2)i + (x_1 + x_2)(-y_1 + y_2)i - (-y_1 + y_2)(y_1 - y_2) =$

$= (x_1 + x_2)^2 + (x_1 + x_2)(y_1 - y_2)i - (x_1 + x_2)(y_1 - y_2)i + (y_1 - y_2)(y_1 - y_2) =$

$= (x_1 + x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2$

$|z_1|^2 + |z_2|^2 + 2\mathrm{Re}(z_1 z_2) =$

$= \left(\sqrt{(x_1)^2 + (y_1)^2}\right)^2 + \left(\sqrt{(x_2)^2 + (y_2)^2}\right)^2 + 2\mathrm{Re}[(x_1 + y_1 i)(x_2 + y_2 i)] =$

$= (x_1)^2 + (y_1)^2 + (x_2)^2 + (y_2)^2 + 2\mathrm{Re}(x_1x_2 + x_1y_2 i + x_2y_1 i - y_1y_2) =$

$= (x_1)^2 + (y_1)^2 + (x_2)^2 + (y_2)^2 + 2(x_1x_2 - y_1y_2) =$

$= (x_1)^2 + (y_1)^2 + (x_2)^2 + (y_2)^2 + 2x_1x_2 - 2y_1y_2 =$

$= (x_1)^2 + 2x_1x_2 + (x_2)^2 + (y_1)^2 + (y_2)^2 - 2y_1y_2 =$

$= (x_1 + x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2$

Logo, $(\bar{z}_1 + z_2)(z_1 + \bar{z}_2) = |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2\mathrm{Re}(z_1 z_2)$.

37.4. $|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 =$

$= |x_1 + y_1 i + x_2 + y_2 i|^2 + |x_1 + y_1 i - x_2 - y_2 i|^2 =$

$= |(x_1 + x_2) + (y_1 + y_2)i|^2 + |(x_1 - x_2) + (y_1 - y_2)i|^2 =$

$= \left(\sqrt{(x_1 + x_2)^2 + (y_1 + y_2)^2}\right)^2 + \left(\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}\right)^2 =$

$= (x_1 + x_2)^2 + (y_1 + y_2)^2 + (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 =$

$= x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 + y_1^2 + 2y_1y_2 + y_2^2 + x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2 + y_1^2 + 2y_1y_2 + y_2^2 =$

$= 2x_1^2 + 2x_2^2 + 2y_1^2 + 2y_2^2 =$

$= 2(x_1^2 + x_2^2) + 2(y_1^2 + y_2^2) =$

$= 2|z_1|^2 + 2|z_2|^2$

37.5. $|z_1 + 1|^2 = 2|z_1|^2 \Leftrightarrow |x_1 + y_1 i + 1|^2 = 2|x_1 + y_1 i|^2$

$\Leftrightarrow |x_1 + 1 + y_1 i|^2 = 2|x_1 + y_1 i|^2$

$\Leftrightarrow \left(\sqrt{(x_1 + 1)^2 + {y_1}^2}\right)^2 = 2\left(\sqrt{{x_1}^2 + {y_1}^2}\right)^2$

$\Leftrightarrow (x_1 + 1)^2 + {y_1}^2 = 2({x_1}^2 + {y_1}^2)$

$\Leftrightarrow x_1^2 + 2x_1 + 1 + {y_1}^2 = 2{x_1}^2 + 2{y_1}^2$

$\Leftrightarrow -x_1^2 + 2x_1 - {y_1}^2 = -1$

$\Leftrightarrow x_1^2 - 2x_1 + {y_1}^2 = 1$

$\Leftrightarrow x_1^2 - 2x_1 + 1 + {y_1}^2 = 1 + 1$

$\Leftrightarrow (x_1 - 1)^2 + {y_1}^2 = 2$

$\Leftrightarrow |z_1 - 1|^2 = 2$

38. Seja $z = a + bi$.

$\frac{z}{\bar{z}} = \frac{a+bi}{a-bi} = \frac{(a+bi)^2}{(a-bi)(a+bi)} =$

$= \frac{a^2+2abi-b^2}{a^2+b^2} =$

$= \frac{a^2-b^2}{a^2+b^2} + \frac{2ab}{a^2+b^2} i$

Assim:

$\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2} + \frac{2ab}{a^2+b^2} i = c + di \Leftrightarrow \frac{a^2-b^2}{a^2+b^2} = c \wedge \frac{2ab}{a^2+b^2} = d$

Logo:

$c^2 + d^2 = \left(\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}\right)^2 + \left(\frac{2ab}{a^2+b^2}\right)^2 = \frac{a^4-2a^2b^2+b^4+4a^2b^2}{(a^2+b^2)^2} =$

$$= \frac{a^4+2a^2b^2+b^4}{(a^2+b^2)^2} =$$

$$= \frac{\left(a^2+b^2\right)^2}{(a^2+b^2)^2} =$$

$$= 1$$

39.

39.1. Seja $z = x + yi$.

$$\bar{z} + z^{-1} = x - yi + \frac{1}{x+yi} = \frac{(x+yi)(x-yi)+1}{x+yi} =$$

$$= \frac{x^2+y^2+1}{x+yi} =$$

$$= \frac{\left(x^2+y^2+1\right)(x-yi)}{(x+yi)(x-yi)} =$$

$$= \frac{x^3+xy^2+x-x^2yi+y^3i-yi}{x^2+y^2} =$$

$$= \frac{x^3+xy^2+x}{x^2+y^2} + \frac{-x^2y+y^3-y}{x^2+y^2}\, i$$

$$\bar{z} \times \frac{|z|^2+1}{|z|^2} = (x-yi) \times \frac{x^2+y^2+1}{x^2+y^2} = \frac{(x-yi)\left(x^2+y^2+1\right)}{x^2+y^2} =$$

$$= \frac{x^3+xy^2+x-x^2yi-y^3i-yi}{x^2+y^2} =$$

$$= \frac{x^3+xy^2+x}{x^2+y^2} + \frac{-x^2y-y^3-y}{x^2+y^2}\, i$$

Logo, $\bar{z} + z^{-1} = \bar{z} \times \frac{|z|^2+1}{|z|^2}$.

39.2. Seja $z = |z|e^{i\theta}$.

$$\left|\frac{2z}{|z|} - \frac{3i|z|}{\bar{z}}\right| = \left|\frac{2|z|e^{i\theta}}{|z|} - \frac{3e^{i\frac{\pi}{2}}|z|}{|z|e^{i(-\theta)}}\right| =$$

$$= \left|2e^{i\theta} - 3e^{i\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)}\right| =$$

$$= \left|2(\cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta) - 3\left[\cos\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right) + i\,\text{sen}\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)\right]\right| =$$

$$= |2\cos\theta + 2i\,\text{sen}\,\theta + 3\,\text{sen}\,\theta - 3i\cos\theta| =$$

$$= |2\cos\theta + 3\,\text{sen}\,\theta + (2\,\text{sen}\,\theta - 3\cos\theta)i| =$$

$$= \sqrt{(2\cos\theta + 3\,\text{sen}\,\theta)^2 + (2\,\text{sen}\,\theta - 3\cos\theta)^2} =$$

$$= \sqrt{4\cos^2\theta + 12\cos\theta\,\text{sen}\theta + 9\,\text{sen}^2\theta + 4\,\text{sen}^2\theta - 12\cos\theta\,\text{sen}\theta + 9\cos^2\theta} =$$

$$= \sqrt{13\cos^2\theta + 13\,\text{sen}^2\theta} =$$

$$= \sqrt{13(\cos^2\theta + \text{sen}^2\theta)} =$$

$$= \sqrt{13 \times 1} = \sqrt{13}$$

40. Seja $z = x + yi$.

$$|z-i|^2 = |x+yi-i|^2 = |x+(y-1)i|^2 =$$
$$= \left(\sqrt{x^2+(y-1)^2}\right)^2 =$$
$$= x^2+(y-1)^2 =$$
$$= x^2+y^2-2y+1 =$$
$$= |z|^2 - 2\mathrm{Im}(z)+1 =$$
$$= |z|^2+1-2\mathrm{Im}(z)$$

41. $z^{-1}-w^{-1} = \frac{1}{z}-\frac{1}{w} = \frac{1}{|z|^2}\bar{z}-\frac{1}{|w|^2}\overline{w} =$

$$= \frac{1}{|z|^2}\bar{z}-\frac{1}{\frac{|z|^2}{4}}\overline{w} =$$
$$= \frac{1}{|z|^2}\bar{z}-\frac{4}{|z|^2}\overline{w} =$$
$$= \frac{1}{|z|^2}(\bar{z}-4\overline{w}) =$$
$$= \frac{1}{|z|^2}(\overline{z-4w})$$

42. Sabemos que $z_1 = |z_1|e^{i\alpha} = e^{i\alpha}$ e que $z_2 = |z_2|e^{i\beta} = e^{i\beta}$.

$$\frac{(z_1+z_2)^2}{z_1z_2} = \frac{z_1^2+2z_1z_2+z_2^2}{z_1z_2} = \frac{z_1^2+z_2^2}{z_1z_2}+\frac{2z_1z_2}{z_1z_2} =$$
$$= \frac{e^{i(2\alpha)}+e^{i(2\beta)}}{e^{i\alpha}e^{i\beta}}+2 =$$
$$= \frac{e^{i(2\alpha)}+e^{i(2\beta)}}{e^{i(\alpha+\beta)}}+2 =$$
$$= \frac{[e^{i(2\alpha)}+e^{i(2\beta)}]e^{i(-\alpha-\beta)}}{e^{i(\alpha+\beta)}e^{i(-\alpha-\beta)}}+2 =$$
$$= \frac{e^{i(\alpha-\beta)}+e^{i(\beta-\alpha)}}{e^{i0}}+2 =$$
$$= e^{i(\alpha-\beta)}+e^{i(\beta-\alpha)}+2 =$$
$$= \cos(\alpha-\beta)+i\,\mathrm{sen}(\alpha-\beta)+\cos(\beta-\alpha)+i\,\mathrm{sen}(\beta-\alpha)+2 =$$
$$= [\cos(\alpha-\beta)+\cos(\beta-\alpha)]+i[\mathrm{sen}(\alpha-\beta)+\mathrm{sen}(\beta-\alpha)]+2 =$$
$$= (\cos\alpha\cos\beta+\mathrm{sen}\alpha\,\mathrm{sen}\beta+\cos\beta\cos\alpha+\mathrm{sen}\beta\,\mathrm{sen}\alpha)+$$
$$+i(\mathrm{sen}\alpha\cos\beta-\mathrm{sen}\beta\cos\alpha+\mathrm{sen}\beta\cos\alpha-\mathrm{sen}\alpha\cos\beta)+2 =$$
$$= 2\cos\alpha\cos\beta+2\mathrm{sen}\alpha\,\mathrm{sen}\beta+2 =$$
$$= 2\cos(\alpha-\beta)+2$$

Como $-1 \le \cos(\alpha-\beta) \le 1$, temos:

$-1 \le \cos(\alpha-\beta) \le 1 \Leftrightarrow -2 \le 2\cos(\alpha-\beta) \le 2 \Leftrightarrow 0 \le 2\cos(\alpha-\beta)+2 \le 4$

Logo, $\frac{(z_1+z_2)^2}{z_1z_2}$ é um número real pertencente ao intervalo $[0, 4]$.

43.

43.1. Se w e $\frac{1}{w}$ são raízes de um número complexo z, então $\sqrt[n]{z} = w$ e $\sqrt[n]{z} = \frac{1}{w}$.

Assim, temos que $z = w^n$ e $z = \left(\frac{1}{w}\right)^n$.

Logo:

$$w^n = \left(\frac{1}{w}\right)^n \Leftrightarrow w^n = \frac{1}{w^n} \Leftrightarrow (w^n)^2 = 1$$

$$\Leftrightarrow w^n = \pm 1$$

$$\Leftrightarrow z = 1 \ \vee \ z = -1$$

43.2. Se w e $\overline{w}$ são raízes de um número complexo z, então $\sqrt[n]{z} = w$ e $\sqrt[n]{z} = \overline{w}$.

Assim, temos que $z = w^n$ e $z = \overline{w}^n$.

Logo:

$$w^n = \overline{w}^n \Leftrightarrow |w|e^{i\theta} = |w|e^{i(-\theta)} \Leftrightarrow \theta = -\theta$$

$$\Leftrightarrow 2\theta = 0$$

$$\Leftrightarrow \theta = 0$$

Assim, sendo $\theta = 0$, podemos concluir que $z \in \mathbb{R}$.

43.3. $\overline{w} = 2 \times \frac{1}{w} \Leftrightarrow \overline{w} \times w = 2 \Leftrightarrow |w|e^{i\theta} \times |w|e^{i(-\theta)} = 2$

$$\Leftrightarrow |w|^2 e^{i0} = 2$$

$$\Leftrightarrow |w|^2 = 2$$

$$\Leftrightarrow |w| = \sqrt{2}$$

$$\Leftrightarrow |z| = \sqrt{2}, \text{ pois } |w| = |z|$$

Como $|z| = \sqrt{2}$ define a circunferência de centro $(0, 0)$ e raio 2, podemos concluir que o afixo de w pertence a esta circunferência.

43.4. Seja $w = x + yi$ e seja $z = w + \frac{i|w|^2}{w}$.

$$w + \frac{i|w|^2}{w} = x + yi + \frac{i(x^2+y^2)}{x+yi} = x + yi + \frac{i(x^2+y^2)(x-yi)}{(x+yi)(x-yi)} =$$

$$= x + yi + \frac{i(x^2+y^2)(x-yi)}{x^2+y^2} =$$

$$= x + yi + i(x - yi) =$$

$$= x + yi + xi + y =$$

$$= x + y + (x + y)i$$

Seja θ um argumento de z.

$\operatorname{tg} \theta = \frac{x+y}{x+y} = 1$

Assim, $\theta = \frac{\pi}{4} \ \vee \ \theta = \frac{3\pi}{4}$, ou seja o afixo de $z = w + \frac{i|w|^2}{w}$ pertence à bissetriz dos quadrantes ímpares.

44.

44.1. $P(n)$: $\forall n \sum_{k=1}^{n} ki^{k-1} = \frac{-(n+1)i^{n+1}-ni^n+i}{2} \in \mathbb{N}$

i. $P(1)$ é verdadeira

$\sum_{k=1}^{1} ki^{k-1} = \frac{-(1+1)i^{1+1}-i+i}{2} \Leftrightarrow i^0 = \frac{-2i^2}{2} \Leftrightarrow 1 = \frac{2}{2} \Leftrightarrow 1 = 1$

ii. $\forall n \in \mathbb{N}, P(n) \Rightarrow P(n+1)$ é verdadeira

$P(n): \sum_{k=1}^{n} ki^{k-1} = \frac{-(n+1)i^{n+1}-ni^n+i}{2}$ (hipótese de indução)

$P(n+1): \sum_{k=1}^{n+1} ki^{k-1} = \frac{-(n+2)i^{n+2}-(n+1)i^{n+1}+i}{2}$ (tese)

$$\sum_{k=1}^{n+1} ki^{k-1} = \sum_{k=1}^{n} ki^{k-1} + \sum_{k=n+1}^{n+1} ki^{k-1} = \frac{-(n+1)i^{n+1}-ni^n+i}{2} + (n+1)i^n =$$

$$= \frac{-(n+1)i^{n+1}-ni^n+i+2(n+1)i^n}{2} =$$

$$= \frac{-(n+1)i^{n+1}+(2n+2)i^n-ni^n+i}{2} =$$

$$= \frac{-(n+1)i^{n+1}+(2n+2-n)i^n+i}{2} =$$

$$= \frac{-(n+1)i^{n+1}+(n+2)i^n+i}{2} =$$

$$= \frac{(n+2)i^n-(n+1)i^{n+1}+i}{2} =$$

$$= \frac{-i^2(n+2)i^n-(n+1)i^{n+1}+i}{2} =$$

$$= \frac{-(n+2)i^{n+2}-(n+1)i^{n+1}+i}{2}$$

Por **i.** e **ii.**, pelo princípio de indução matemática, provámos que $\forall n \in \mathbb{N}$, $P(n)$ é verdadeira.

44.2.

a) $P(n): 1 - 3 + 5 - 7 + \ldots + (-1)^n(2n+1) = (-1)^n(n+1), \forall n \in \mathbb{N}$

i. $P(0)$ é verdadeira

$(-1)^0(2 \times 0 + 1) = (-1)^0(0+1) \Leftrightarrow 1 \times 1 = 1 \times 1 \Leftrightarrow 1 = 1$

ii. $\forall n \in \mathbb{N}, P(n) \Rightarrow P(n+1)$ é verdadeira

$P(n): 1 - 3 + 5 - 7 + \ldots + (-1)^n(2n+1) = (-1)^n(n+1)$ (hipótese de indução)

$P(n+1): 1 - 3 + 5 - 7 + \ldots + (-1)^{n+1}(2n+3) = (-1)^{n+1}(n+2)$ (tese)

$1 - 3 + 5 - 7 + \ldots + (-1)^n(2n+1) + (-1)^{n+1}(2n+3) =$

$= (-1)^n(n+1) + (-1)^{n+1}(2n+3) =$

$= (-1)^n[(n+1) + (-1)(2n+3)] =$

$= (-1)^n(n + 1 - 2n - 3) =$

$= (-1)^n(-n-2) =$

$= (-1)^n(-1)(n+2) =$

$= (-1)^{n+1}(n+2)$

Por **i.** e **ii.**, pelo princípio de indução matemática, provámos que $\forall n \in \mathbb{N}$, $P(n)$ é verdadeira.

b) $P(n): 2 - 4 + 6 + \ldots + (-1)^{n-1}2n = \frac{1+(-1)^{n+1}(2n+1)}{2}, \forall n \in \mathbb{N}$

i. $P(1)$ é verdadeira

$(-1)^0 \times 2 \times 1 = \frac{1+(-1)^2\times 3}{2} \Leftrightarrow 1 \times 2 = \frac{1+(-1)^2\times 3}{2} \Leftrightarrow 2 = \frac{1+3}{2} \Leftrightarrow 2 = 2$

ii. $\forall n \in \mathbb{N}, P(n) \Rightarrow P(n+1)$ é verdadeira

$P(n): 2 - 4 + 6 + \ldots + (-1)^{n-1}2n = \frac{1+(-1)^{n+1}(2n+1)}{2}$ (hipótese de indução)

$P(n+1): 2 - 4 + 6 + \ldots + (-1)^{n-1}2n + (-1)^n 2(n+1) = \frac{1+(-1)^{n+2}(2n+3)}{2}$ (tese)

$$2 - 4 + 6 + \ldots + (-1)^{n-1}2n + (-1)^n 2(n+1) = \frac{1+(-1)^{n+1}(2n+1)}{2} + (-1)^n(2n+2) =$$

$$= \frac{1+(-1)^{n+1}(2n+1)+2(-1)^n(2n+2)}{2} =$$

$$= \frac{1+(-1)^n\times(-1)(2n+1)+2(-1)^n(2n+2)}{2} =$$

$$= \frac{1+(-1)^n[-1(2n+1)+2(2n+2)]}{2} =$$

$$= \frac{1+(-1)^n(-2n-1+4n+4)}{2} =$$

$$= \frac{1+(-1)^n(2n+3)}{2} =$$

$$= \frac{1+(-1)^n(-1)^2(2n+3)}{2} =$$

$$= \frac{1+(-1)^{n+2}(2n+3)}{2}$$

Por **i.** e **ii.**, pelo princípio de indução matemática, provámos que $\forall n \in \mathbb{N}$, $P(n)$ é verdadeira.

45.

45.1. $z_1 = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}i}{2} = \frac{\sqrt{6}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i$

- $|z_1| = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right)^2 + \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{6}{4}+\frac{2}{4}} = \frac{\sqrt{8}}{2} = \frac{2\sqrt{2}}{2}$
- Seja θ_1 um argumento de z_1. Como o afixo de z_1 está no 4º quadrante, concluímos que θ_1 pertence ao 4º quadrante.

  $\operatorname{tg} \theta_1 = \frac{\frac{-\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{6}}{2}} = \frac{-\sqrt{2}}{\sqrt{6}} = -\frac{1}{\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3} \wedge \theta_1 \in$ 4º Q

  Então, $\theta_1 = -\frac{\pi}{6}$.

Assim, $z_1 = \sqrt{2}e^{i\left(-\frac{\pi}{6}\right)}$.

Seja $z_2 = 1 - i$.

- $|z_2| = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$
- Seja θ_2 um argumento de z_2. Como o afixo de z_2 está no 4º quadrante, concluímos que θ_2 pertence ao 4º quadrante.

  $\operatorname{tg} \theta_2 = \frac{-1}{1} = -1 \ \wedge \ \theta_2 \in 4º\ Q$

  Então, podemos concluir que $\theta_2 = -\frac{\pi}{4}$.

Assim, $z_2 = \sqrt{2}e^{i\left(-\frac{\pi}{4}\right)}$.

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\sqrt{2}e^{i\left(-\frac{\pi}{6}\right)}}{\sqrt{2}e^{i\left(-\frac{\pi}{4}\right)}} = e^{i\left(-\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{4}\right)} = e^{i\frac{\pi}{12}}$$

45.2. $e^{i\frac{\pi}{12}} = \cos\left(\frac{\pi}{12}\right) + i\,\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{12}\right) =$

$$= \cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6}\right) + i\,\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6}\right) =$$

$$= \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{6}\right) + i\left[\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) - \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{6}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\right] =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{1}{2} + i\left(\frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2}\right) =$$

$$= \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} + i\,\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

Assim, podemos concluir que $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ e que $\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$.

45.3. $\left(\sqrt{6} + \sqrt{2}\right)\cos x + \left(\sqrt{6} - \sqrt{2}\right)\operatorname{sen} x = 2 \Leftrightarrow 4 \times \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\cos x + 4 \times \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\operatorname{sen} x = 2$

$$\Leftrightarrow 4\cos\frac{\pi}{12}\cos x + 4\operatorname{sen}\frac{\pi}{12}\operatorname{sen} x = 2$$

$$\Leftrightarrow 4\left(\cos\frac{\pi}{12}\cos x + \operatorname{sen}\frac{\pi}{12}\operatorname{sen} x\right) = 2$$

$$\Leftrightarrow \cos\left(\frac{\pi}{12} - x\right) + \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{12} - x\right) = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\pi}{12} - x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \ \vee \ \frac{\pi}{12} - x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi \ \vee \ x = \frac{5\pi}{12} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

C.S. $= \left\{-\frac{\pi}{4} + 2k\pi, \frac{5\pi}{12} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$

46. $z^5 + z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = 0 \Leftrightarrow z^4(z+1) + z^2(z+1) + (z+1) = 0$

$$\Leftrightarrow (z+1)(z^4 + z^2 + 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow z + 1 = 0 \ \vee \ z^4 + z^2 + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow z = -1 \ \vee \ z^2 = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4\times1\times1}}{2}$$

$$\Leftrightarrow z = -1 \ \vee \ z^2 = \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2}$$

$$\Leftrightarrow z=-1 \ \vee\ z^2=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i \ \vee\ z^2=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$$

Cálculos auxiliares	
$z_1=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$	$z_2=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$
$\lvert z_1\rvert=\sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2+\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}=1$	$\lvert z_2\rvert=\sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}=1$
$\operatorname{tg}\theta_1=\frac{-\frac{\sqrt{3}}{2}}{-\frac{1}{2}}=\sqrt{3}\ \wedge\ \theta_1\in 3^{\text{o}}\text{ Q}$	$\operatorname{tg}\theta_2=\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{-\frac{1}{2}}=\sqrt{3}\ \wedge\ \theta_2\in 3^{\text{o}}\text{ Q}$
$\theta_1=\frac{4\pi}{3}$	$\theta_2=\frac{2\pi}{3}$

$$\Leftrightarrow z=e^{i\pi} \ \vee\ z^2=e^{i\frac{4\pi}{3}} \ \vee\ z^2=e^{i\frac{2\pi}{3}}$$

$$\Leftrightarrow z=e^{i\pi} \ \vee\ z=e^{i\frac{\frac{4\pi}{3}+2k\pi}{2}} \ \vee\ z=e^{i\frac{\frac{2\pi}{3}+2k\pi}{2}}, k\in\{0,1\}$$

$$\Leftrightarrow z=e^{i\pi} \ \vee\ z=e^{i\frac{2\pi}{3}} \ \vee\ z=e^{i\frac{5\pi}{3}} \ \vee\ z=e^{i\frac{\pi}{3}} \ \vee\ z=e^{i\frac{4\pi}{3}}$$

C.S. $=\left\{e^{i\frac{\pi}{3}}, e^{i\frac{2\pi}{3}}, e^{i\pi}, e^{i\frac{4\pi}{3}}, e^{i\frac{5\pi}{3}}\right\}$

47. $\sqrt[n]{1e^{i0}}=\sqrt[n]{1}e^{i\frac{2k\pi}{n}}, k\in\{0,1,\dots,n-1\}=e^{i\frac{2k\pi}{n}}, k\in\{0,1,\dots,n-1\}$

Os argumentos das raízes de ordem n estão em progressão aritmética de razão $\frac{2\pi}{n}$.

Assim:

$$e^{i0}\times e^{i\frac{2\pi}{n}}\times e^{i\frac{4\pi}{n}}\times\dots\times e^{i\frac{2(n-1)\pi}{n}}=e^{i\left(0+\frac{2\pi}{n}+\frac{4\pi}{n}+\dots+\frac{2(n-1)\pi}{n}\right)}=e^{i\left(\frac{\frac{2\pi}{n}+\frac{2(n-1)\pi}{n}}{2}\times(n-1)\right)}=$$

$$=e^{i\left(\frac{\pi}{n}+\frac{(n-1)\pi}{n}\right)\times(n-1)}=$$

$$=e^{i\pi(n-1)}=$$

$$=\left(e^{i\pi}\right)^{n-1}=$$

$$=(-1)^{n-1}$$

48. Uma das raízes de ordem n de $1=1e^{i0}$ é $\sqrt[n]{1}e^{i0}$.

As n raízes de ordem n de $1e^{i0}$ estão em progressão geométrica de razão $e^{i\frac{2\pi}{n}}$.

Aplicando a fórmula que dá a soma de n termos de uma progressão geométrica, temos:

$$\sqrt[n]{1}e^{i0}\times\frac{1-\left(e^{i\frac{2\pi}{n}}\right)^n}{1-e^{i\frac{2\pi}{n}}}=1\times\frac{1-e^{i2\pi}}{1-e^{i\frac{2\pi}{n}}}=\frac{0}{1-e^{i\frac{2\pi}{n}}}=0$$

49. Seja $z_1=|z|e^{i\theta}$ uma das raízes de ordem 3 do número complexo z.

Então, $z=(z_1)^3=|z|^3e^{i(3\theta)}$.

Seja w_1 a raiz de ordem 3 do número complexo w, tal que o afixo de w_1 está no lado do triângulo maior oposto ao afixo de z_1.

Então, $w_1 = \frac{|z|}{2} e^{i\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)}$.

Assim:

$$w = (w_1)^3 = \left(\frac{|z|}{2}\right)^3 e^{i(3\theta+\pi)} =$$

$$= [\cos(3\theta + \pi) + i \operatorname{sen}(3\theta + \pi)] =$$

$$= \frac{|z|^3}{8}\left[-e^{i(3\theta)}\right] =$$

$$= -\frac{|z|^3 e^{i(3\theta)}}{8} =$$

$$= -\frac{z}{8}$$