Exercícios de aplicação **(págs. 131 a 141)**

1.

1.1. $u_{n+1} - u_n = \frac{5(n+1)-1}{2(n+1)+3} - \frac{5n-1}{2n+3} = \frac{5n+5-1}{2n+2+3} - \frac{5n-1}{2n+3} =$

$= \frac{5n+4}{2n+5} - \frac{5n-1}{2n+3} =$

$= \frac{(5n+4)(2n+3)-(5n-1)(2n+5)}{(2n+5)(2n+3)} =$

$= \frac{\cancel{10n^2}+15n+8n+12-\cancel{10n^2}-25n+2n+5}{(2n+5)(2n+3)} =$

$= \frac{17}{(2n+5)(2n+3)}$

Como $(2n+5)(2n+3) > 0, \forall n \in \mathbb{N}$ e $17 > 0$, então $\frac{17}{(2n+5)(2n+3)} > 0, \forall n \in \mathbb{N}$.

Logo, (u_n) é crescente.

Como (u_n) é crescente, u_1 é um minorante, isto é, $u_n \geq u_1$.

$u_1 = \frac{4}{5}$

$u_n = \frac{5n-1}{2n+3} = \frac{5}{2} + \frac{-\frac{17}{2}}{2n+3}$

Logo, $\frac{4}{5} \leq u_n \leq \frac{5}{2}$ e, por isso, (u_n) é limitada.

Cálculos auxiliares

$u_1 = \frac{5\times1-1}{2\times1+3} = \frac{4}{5}$

$$\begin{array}{r|l} 5n-1 & 2n+3 \\ \hline -5n-\frac{15}{2} & \frac{5}{2} \\ \hline -\frac{17}{2} & \end{array}$$

1.2. (u_n) é convergente porque é monótona e limitada.

1.3. $\lim u_n = \frac{5}{2}$

2.

2.1. $v_{n+1} - v_n = \frac{6(n+1)^2-4(n+1)}{2(n+1)} - \frac{6n^2-4n}{2n} = \frac{6n^2+12n+6-4n-4}{2(n+1)} - \frac{6n^2-4n}{2n} =$

$= \frac{6n^2+8n+2}{2(n+1)} - \frac{6n^2-4n}{2n} =$

$= \frac{n(6n^2+8n+2)-(6n^2-4n)(n+1)}{2n(n+1)} =$

$= \frac{6n^3+8n^2+2n-6n^3-6n^2+4n^2+4n}{2n(n+1)} =$

$= \frac{6n^2+6n}{2n(n+1)} =$

$= \frac{6n(n+1)}{2n(n+1)} =$

$= 3$

Logo, (v_n) é uma progressão aritmética de razão 3.

2.2. $v_{n+1} - v_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}$ (pela alínea anterior).

Logo, (v_n) é uma sucessão crescente.

2.3. $\frac{6n^2-4n}{2n} = 6055 \Leftrightarrow 3n - 2 = 6055 \Leftrightarrow 3n = 6057 \Leftrightarrow n = \frac{6057}{3} \Leftrightarrow n = 2019$

6055 é o termo de ordem 2019.

2.4. $\frac{6n^2-4n}{2n} = 3n - 2$

$35 < 3n - 2 < 92$

$37 < 3n < 94$

$\frac{37}{3} < n < \frac{94}{3}$

$\frac{37}{3} = 12,(3); \frac{94}{3} = 31,(3)$

$v_{13} = 37; v_{31} = 93$

$S = \frac{37+93}{2} \times 19 = 1216$

3.

3.1. $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\frac{u_n}{4}}{u_n} = \frac{u_n}{4u_n} = \frac{1}{4}$

Logo, (u_n) é uma progressão geométrica de razão $\frac{1}{4}$. A afirmação é verdadeira.

3.2. Como $u_1 = -4$ e $r = \frac{1}{4}$, concluímos que (u_n) é uma sucessão crescente.

3.3. $\lim S_n = \lim\left(u_1 \times \frac{1-r^n}{1-r}\right) = \lim\left(-4 \times \frac{1-\left(\frac{1}{4}\right)^n}{1-\frac{1}{4}}\right) = \lim\left(-4 \times \frac{1-0}{\frac{3}{4}}\right) =$

$= -4 \times \frac{4}{3} =$

$= -\frac{16}{3}$

Este valor representa a soma de todos os termos da sucessão (u_n).

4. $|u_n - 3| < \delta \Leftrightarrow \left|\frac{3n}{n+2} - 3\right| < \delta \Leftrightarrow \left|\frac{3n-3n-6}{n+2}\right| < \delta$

$\Leftrightarrow \frac{6}{n+2} < \delta$

$\Leftrightarrow \frac{n+2}{6} > \frac{1}{\delta}$

$\Leftrightarrow n + 2 > \frac{6}{\delta}$

$\Leftrightarrow n > \frac{6}{\delta} - 2$

$\Leftrightarrow n > \frac{6-2\delta}{\delta}$

Então, a cada $\delta > 0$ corresponde um $p = \frac{6-2\delta}{\delta}$ tal que $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq p \Longrightarrow \left|\frac{3n}{n+2} - 3\right| < \delta$, o que prova que $\lim \frac{3n}{n+2} = 3$.

LeYa EDUCAÇÃO Daniela Raposo e Luzia Gomes

5.

5.1. $P(n): 1 \times 1! + 2 \times 2! + \cdots + n \times n! = (n+1)! - 1, \forall n \in \mathbb{N}$

i. $P(1)$ é verdadeira

$1 \times 1! = (1+1)! - 1 \Leftrightarrow 1 = 2! - 1 \Leftrightarrow 1 = 2 \times 1 - 1 \Leftrightarrow 1 = 1$

ii. $\forall n \in \mathbb{N}, P(n) \Longrightarrow P(n+1)$ é verdadeira

$P(n): 1 \times 1! + 2 \times 2! + \cdots + n \times n! = (n+1)! - 1$ (hipótese de indução)

$P(n+1): 1 \times 1! + 2 \times 2! + \cdots + n \times n! + (n+1) \times (n+1)! = (n+2)! - 1$ (tese)

$1 \times 1! + 2 \times 2! + \cdots + n \times n! = (n+1)! - 1$

$\Leftrightarrow 1 \times 1! + 2 \times 2! + \cdots + n \times n! + (n+1) \times (n+1)! = (n+1)! - 1 + (n+1) \times (n+1)!$

$\Leftrightarrow 1 \times 1! + 2 \times 2! + \cdots + n \times n! + (n+1) \times (n+1)! = (n+1)!\,(1 + n + 1) - 1$

$\Leftrightarrow 1 \times 1! + 2 \times 2! + \cdots + n \times n! + (n+1) \times (n+1)! = (n+1)!\,(n+2) - 1$

$\Leftrightarrow 1 \times 1! + 2 \times 2! + \cdots + n \times n! + (n+1) \times (n+1)! = (n+2)(n+1)! - 1$

$\Leftrightarrow 1 \times 1! + 2 \times 2! + \cdots + n \times n! + (n+1) \times (n+1)! = (n+2)! - 1$

Por **i.** e **ii.**, pelo princípio de indução matemática, provámos que $\forall n \in \mathbb{N}$, $P(n)$ é verdadeira.

5.2. $P(n): \sum_{k=1}^{n} k \cdot k! = (n+1)! - 1, \forall n \in \mathbb{N}$

i. $P(1)$ é verdadeira

$$\sum_{k=1}^{1} k \cdot k! = (1+1)! - 1 \Leftrightarrow 1 \times 1! = (1+1)! - 1 \Leftrightarrow 1 \times 1 = 2! - 1$$

$$\Leftrightarrow 1 = 2 \times 1 - 1$$

$$\Leftrightarrow 1 = 1$$

ii. $\forall n \in \mathbb{N}, P(n) \Longrightarrow P(n+1)$ é verdadeira

$$P(n): \sum_{k=1}^{n} k \cdot k! = (n+1)! - 1$$ (hipótese de indução)

$$P(n+1): \sum_{k=1}^{n} k \cdot k! = (n+2)! - 1$$ (tese)

$$\sum_{k=1}^{n} k \cdot k! = (n+1)! - 1$$

$$\sum_{k=1}^{n+1} k \cdot k! = \sum_{k=1}^{n} k \cdot k! + \sum_{k=n+1}^{n+1} k \cdot k! =$$

$$= (n+1)! - 1 + (n+1)(n+1)! =$$

$$= (n+1)!\,(1 + n + 1) - 1 =$$

$$= (n+2)(n+1)! - 1 =$$

$$= (n+2)! - 1$$

Por **i.** e **ii.**, pelo princípio de indução matemática, provámos que $\forall n \in \mathbb{N}$, $P(n)$ é verdadeira.

6. $\forall n \in \mathbb{N}, v_{n+1} = 5 + v_n \Leftrightarrow v_{n+1} - v_n = 5$

Logo, (v_n) é uma progressão aritmética de razão 5.

$$\begin{cases} S_n = \frac{v_1+v_n}{2} \times n \\ v_n = v_1 + (n-1)r \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1085 = \frac{v_1+v_1+(n-1)\times 5}{2} \times n \\ v_{10} = v_1 + (10-1) \times 5 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1085 = \frac{2v_1+5n-5}{2} \times n \\ 5 = v_1 + 45 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1085 = \frac{-80+5n-5}{2} \times n \\ v_1 = -40 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1085 = \frac{5n-85}{2} \times n \\ \_\_\_\_\_\_ \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2170 = (5n-85) \times n \\ \_\_\_\_\_\_ \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2170 = 5n^2 - 85n \\ \_\_\_\_\_\_ \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 5n^2 - 85n - 2170 = 0 \\ \_\_\_\_\_\_ \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} n^2 - 17n - 434 = 0 \\ \_\_\_\_\_\_ \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} n = 31 \lor n = -14 \\ \_\_\_\_\_\_ \end{cases}$$

Como $n \in \mathbb{N}$, então $n = 31$.

Cálculo auxiliar

$$n^2 - 17n - 434 = 0 \Leftrightarrow n = \frac{17 \pm \sqrt{(-17)^2 - 4\times 1\times(-434)}}{2\times 1}$$

$$\Leftrightarrow n = \frac{17 \pm \sqrt{289+1736}}{2}$$

$$\Leftrightarrow n = \frac{17 \pm \sqrt{2025}}{2}$$

$$\Leftrightarrow n = \frac{17 \pm 45}{2}$$

$$\Leftrightarrow n = \frac{62}{2} \lor n = \frac{-28}{2}$$

$$\Leftrightarrow n = 31 \lor n = -14$$

7.

7.1. $P(n): a_n = \frac{3}{2-4n}, \forall n \in \mathbb{N}$

i. $P(1)$ é verdadeira

$$a_1 = \frac{3}{2-4\times 1} \Leftrightarrow -\frac{3}{2} = \frac{3}{2-4} \Leftrightarrow -\frac{3}{2} = \frac{3}{-2} \Leftrightarrow -\frac{3}{2} = -\frac{3}{2}$$

ii. $\forall n \in \mathbb{N}, P(n) \Longrightarrow P(n+1)$ é verdadeira

$P(n): a_n = \frac{3}{2-4n}$ (hipótese de indução)

$P(n+1): a_{n+1} = \frac{3}{2-4(n+1)}$ (tese)

$$a_{n+1} = \frac{3a_n}{3-4a_n} = \frac{3 \times \frac{3}{2-4n}}{3-4\times\frac{3}{2-4n}} =$$

$$= \frac{\frac{9}{2-4n}}{3-\frac{12}{2-4n}} =$$

$$= \frac{\frac{9}{2-4n}}{\frac{6-12n-12}{2-4n}} =$$

$$= \frac{9(2-4n)}{(-6-12n)(2-4n)} =$$

LeYa EDUCAÇÃO Daniela Raposo e Luzia Gomes

$= \frac{9}{-6-12n} =$

$= \frac{3}{-2-4n} =$

$= \frac{3}{2-4-4n} =$

$= \frac{3}{2-4(n+1)} =$

$= a_{n+1}$

7.2. $a_{n+1} - a_n = \frac{3}{2-4(n+1)} - \frac{3}{2-4n} = \frac{3}{2-4n-4} - \frac{3}{2-4n} =$

$= \frac{3}{-2-4n} - \frac{3}{2-4n} =$

$= \frac{-3}{2+4n} - \frac{3}{2-4n} =$

$= \frac{-3(2-4n)-3(2+4n)}{(2+4n)(2-4n)} =$

$= \frac{-6+12n-6-12n}{4-16n^2} =$

$= \frac{-12}{4-16n^2} =$

$= \frac{12}{16n^2-4}$

Como $16n^2 - 4 > 0, \forall n \in \mathbb{N}$ e 12 > 0, então $\frac{12}{16n^2-4} > 0, \forall n \in \mathbb{N}$. Logo, (a_n) é crescente.

7.3. Como (a_n) é crescente, a_1 é um minorante, isto é, $a_n \geq a_1$.

$a_1 = -\frac{3}{2}$

$\lim a_n = \lim \frac{3}{2-4n} = 0$

Logo, $-\frac{3}{2} \leq a_n \leq 0$ e, por isso, (a_n) é limitada.

8. $c_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{k}{n^2} = 0 + \frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \cdots + \frac{n}{n^2} == \frac{1+2+\cdots+n}{n^2}$

$$= \frac{\sum_{k=1}^{n} k}{n^2} =$$

$= \frac{S_n}{n^2}$, S_n progressão aritmética de razão 1.

$\lim c_n = \lim \frac{S_n}{n^2} = \lim \frac{\frac{n+1}{2} \times n}{n^2} =$

$= \lim \frac{n^2+n}{2n^2} \overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}$

$= \lim \frac{\cancel{n^2}\left(1+\frac{1}{n}\right)}{2\cancel{n^2}} =$

$= \frac{1}{2}$

9.

9.1. $\lim \frac{n^3-4n}{2n^3+n^2+1} \overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=} \lim \frac{\cancel{n^3}\left(1-\frac{4}{n^2}\right)}{\cancel{n^3}\left(2+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^3}\right)} = \frac{1}{2}$

9.2. $\lim \frac{5n^2+n}{n^3+n^2-1} \overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=} \lim \frac{n^2\left(5+\frac{1}{n}\right)}{n^3\left(1+\frac{1}{n}-\frac{1}{n^3}\right)} = \lim \frac{5+\frac{1}{n}}{n\left(1+\frac{1}{n}-\frac{1}{n^3}\right)} = \frac{5}{\infty} = 0$

9.3. $\lim \frac{-5n^6+n}{n^5+2n^4-n} \overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=} \lim \frac{n^6\left(-5+\frac{1}{n^5}\right)}{n^5\left(1+\frac{2}{n}-\frac{1}{n^4}\right)} = \lim \frac{n\left(-5+\frac{1}{n^5}\right)}{1+\frac{2}{n}-\frac{1}{n^4}} = \frac{-\infty}{1} = -\infty$

9.4. $\lim \frac{-3n^6+n}{-n^5+2n^4-n} \overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=} \lim \frac{-n^6\left(3-\frac{1}{n^5}\right)}{-n^5\left(1-\frac{2}{n}+\frac{1}{n^4}\right)} = \lim \frac{n\left(3-\frac{1}{n^5}\right)}{1-\frac{2}{n}+\frac{1}{n^4}} = \frac{+\infty}{1} = +\infty$

9.5. $\lim \frac{\frac{2}{n^2-n}}{\frac{1}{n^3+n}} = \lim \frac{2n^3+2n}{n^2-n} \overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=} \lim \frac{n^3\left(2+\frac{2}{n^2}\right)}{n^2\left(1-\frac{1}{n}\right)} = \lim \frac{n\left(2+\frac{2}{n^2}\right)}{1-\frac{1}{n}} = \frac{+\infty}{1} = +\infty$

9.6. $\lim \frac{\sqrt{9n^2+3n+1}}{n+4} \overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=} \lim \frac{\sqrt{n^2\left(9+\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}\right)}}{n+4} = \lim \frac{\cancel{n}\sqrt{9+\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}}}{\cancel{n}\left(1+\frac{4}{n}\right)} = \frac{\sqrt{9}}{1} = 3$

9.7. $\lim \frac{\sqrt{4n^2-1}}{n} \overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=} \lim \frac{\sqrt{n^2\left(4-\frac{1}{n}\right)}}{n} = \lim \frac{\cancel{n}\sqrt{4-\frac{1}{n}}}{\cancel{n}} = \sqrt{4} = 2$

9.8. $\lim \frac{n}{1+\sqrt{n+5}} \overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=} \lim \frac{n}{1+\sqrt{n^2\left(\frac{1}{n}+\frac{5}{n^2}\right)}} = \lim \frac{n}{1+n\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{5}{n^2}}} = \lim \frac{\cancel{n}}{\cancel{n}\left(\frac{1}{n}+\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{5}{n^2}}\right)} = \frac{1}{0^+} = +\infty$

9.9. $\lim \left(\sqrt{n-1}-\sqrt{n}\right) \overset{(\infty-\infty)}{=} \lim \frac{\left(\sqrt{n-1}-\sqrt{n}\right)\left(\sqrt{n-1}+\sqrt{n}\right)}{\sqrt{n-1}+\sqrt{n}} = \lim \frac{n-1}{\sqrt{n-1}+\sqrt{n}} = \frac{1}{+\infty} = 0$

9.10. $\lim \left(\sqrt{16n^2+9n+1}-4n\right) \overset{(\infty-\infty)}{=} \lim \frac{\left(\sqrt{16n^2+9n+1}-4n\right)\left(\sqrt{16n^2+9n+1}+4n\right)}{\sqrt{16n^2+9n+1}+4n} =$

$$= \lim \frac{16n^2+9n+1-16n^2}{\sqrt{16n^2+9n+1}+4n} =$$

$$= \lim \frac{9n+1}{\sqrt{16n^2+9n+1}+4n} =$$

$$= \lim \frac{n\left(9+\frac{1}{n}\right)}{\sqrt{n^2\left(16+\frac{9}{n}+\frac{1}{n}\right)}+4n} =$$

$$= \lim \frac{\cancel{n}\left(9+\frac{1}{n}\right)}{\cancel{n}\left(\sqrt{16+\frac{9}{n}+\frac{1}{n}}+4\right)} =$$

$$= \frac{9}{\sqrt{16}+4} =$$

$$= \frac{9}{4+4} =$$

$$= \frac{9}{8}$$

9.11. $\lim \frac{9^n}{10^n} \overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=} \lim \left(\frac{9}{10}\right)^n = 0$

LeYa EDUCAÇÃO Daniela Raposo e Luzia Gomes

9.12. $\lim\,(3^n - \pi^n) \overset{(\infty-\infty)}{\cong} \lim \pi^n\left(\frac{3^n}{\pi^n} - 1\right) = \lim \pi^n\left[\left(\frac{3}{\pi}\right)^n - 1\right] = +\infty(0-1) = -\infty$

10. $\lim\,(u_n) = -\infty$ e $v_n \geq 2 + u_n,\ n \geq 2019$

$$\begin{aligned}\lim\,(u_n + v_n) \geq 2 &\Leftrightarrow \lim\,(u_n) + \lim\,(v_n) \geq 2 \Leftrightarrow -\infty + \lim\,(v_n) \geq 2\\ &\Leftrightarrow \lim\,(v_n) \geq 2 + \infty\\ &\Leftrightarrow \lim\,(v_n) = +\infty\end{aligned}$$

11.

11.1. $\forall n \in \mathbb{N}, -1 \leq \cos\left(\frac{n\pi}{4}\right) \leq 1 \Leftrightarrow -\frac{1}{4n+1} \leq \frac{\cos\left(\frac{n\pi}{4}\right)}{4n+1} \leq \frac{1}{4n+1}$

Como $\lim\left(-\frac{1}{4n+1}\right) = \lim \frac{1}{4n+1} = 0$, pelo teorema das sucessões enquadradas, concluímos que $\lim \frac{\cos\left(\frac{n\pi}{4}\right)}{4n+1} = 0.$

11.2. $\forall n \in \mathbb{N}, 0 < \left(\frac{3}{2}\right)^{-n} < 1 \Leftrightarrow \frac{n+0}{n} \leq \frac{n+\left(\frac{3}{2}\right)^{-n}}{n} \leq \frac{n+1}{n}$

Como $\lim\left(\frac{n+0}{n}\right) = \lim \frac{n+1}{n} = 1$, pelo teorema das sucessões enquadradas, concluímos que $\lim \frac{n+\left(\frac{3}{2}\right)^{-n}}{n} = 1.$

Exercícios propostos **(págs. 142 a 150)**

Itens de seleção **(págs. 142 e 143)**

1. $\lim u_n = \lim\left(3 + \frac{1}{n}\right) = 3$

Logo, (u_n) é uma sucessão convergente.

Opção (C)

2. A opção (A) não é correta. Como $u_1 = -2$, $u_2 = 4$ e $u_3 = -6$, a sucessão (u_n) não é monótona.

$$\begin{aligned}w_{n+1} - w_n = 2 + \frac{1}{n+1} - \left(2 + \frac{1}{n}\right) &= \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} =\\ &= \frac{n-n-1}{n(n+1)} =\\ &= \frac{-1}{n(n+1)}\end{aligned}$$

Como $n(n+1) > 0, \forall n \in \mathbb{N}$ e $-1 < 0$, então $\frac{-1}{n(n+1)} < 0, \forall n \in \mathbb{N}$. Logo, (w_n) é decrescente e a opção (B) não é a correta. Como $0 < \frac{1}{n} \leq 1$, temos $2 < \frac{1}{n} \leq 3$. Logo, 4 é um majorante de (w_n).

Opção (C)

3. $u_{10} = u_1 + 9r$

$81 = u_1 + 9 \times 5 \Leftrightarrow 81 = u_1 + 45 \Leftrightarrow u_1 = 81 - 45 \Leftrightarrow u_1 = 36$

Opção (B)

4. $t_1 = 1 = 1^2$

$t_2 = 4 = 2^2$

$t_3 = 9 = 3^2$

$t_4 = 16 = 4^2$

…

$t_n = n^2$

Opção (B)

5. Uma sucessão é limitada se existe um número real positivo L tal que $\forall n \in \mathbb{N}, |a_n| \leq L$.

Opção (C)

6. $\frac{3n+2}{n+4} = 3 + \frac{-10}{n+4}$

$\lim\left(3 - \frac{10}{n+4}\right) = 3$

$u_1 = 3 - \frac{10}{5} = 3 - 2 = 1$

Logo, $1 \leq u_n < 3$.

Cálculo auxiliar

$$\begin{array}{r|l} 3n+2 & n+4 \\ \cline{2-2} -3n-12 & 3 \\ \cline{1-1} -10 & \end{array}$$

Opção (B)

7. Como $v_n = -v_{n-1}, n \geq 2$, temos que $v_n + v_{n-1} = 0$. Assim:

$v_2 + v_1 = 0 \Leftrightarrow v_2 = -v_1 \Leftrightarrow v_2 = -1$

Logo, se n é par, $v_n = -1$ e, por isso, $v_{2014} = -1$.

Opção (A)

8. $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{2^{-2(n+1)}}{2^{-2n}} = \frac{2^{-2n-2}}{2^{-2n}} =$

$= 2^{-2n-2-(-2n)} =$

$= 2^{-2n-2+2n} =$

$= 2^{-2} =$

$= \frac{1}{4}$

Opção (D)

LeYa EDUCAÇÃO Daniela Raposo e Luzia Gomes

9. A soma $1 + \pi + \pi^2 + \cdots + \pi^{2019}$ é uma progressão geométrica de razão π. Assim:

$$S_{20} = 1 \times \frac{1-\pi^{2020}}{1-\pi} = \frac{1-\pi^{2020}}{1-\pi}$$

Opção (D)

10. Sabemos que (u_n) é uma progressão geométrica de razão r, $u_1 = r$ e $u_1 + u_2 = 20$.

$$\begin{aligned} u_1 + u_2 = 20 &\Leftrightarrow u_1 + u_1 \times r = 20 \\ &\Leftrightarrow r + r \times r = 20 \\ &\Leftrightarrow r + r^2 = 20 \\ &\Leftrightarrow r^2 + r - 20 = 0 \\ &\Leftrightarrow r = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \times 1 \times (-20)}}{2 \times 1} \\ &\Leftrightarrow r = \frac{-1 \pm \sqrt{1+80}}{2} \\ &\Leftrightarrow r = \frac{-1 \pm 9}{2} \\ &\Leftrightarrow r = \frac{-1-9}{2} \vee r = \frac{-1+9}{2} \\ &\Leftrightarrow r = -5 \vee r = 4 \end{aligned}$$

Como $r > 0, r = 4$.

Opção (B)

11. Sabemos que $1\,300\,000 = 1300$ milhares de habitantes e que $r = 1{,}6\% = 0{,}016$.

$2030 - 2012 = 18$

Logo, $1300 \times 1{,}016^{18}$

Opção (A)

12. $u_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2^n}$

(u_n) é uma progressão geométrica de razão $\frac{1}{2}$.

Assim, $\lim S_n = \lim u_1 \times \frac{1-r^n}{1-r}$.

$$\begin{aligned} \lim S_n = \lim \left(1 \times \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}}\right) &= \\ = \lim \left(1 \times \frac{\frac{1}{2^n}}{\frac{1}{2}}\right) &= \\ = \frac{1}{\frac{1}{2}} &= \\ = 2 & \end{aligned}$$

Opção (B)

LeYa EDUCAÇÃO Daniela Raposo e Luzia Gomes

13. $\frac{u_{2014}}{u_{2015}} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{u_{2015}}{u_{2014}} = 2$

(u_n) é uma progressão geométrica de razão $r = 2$.

$S_7 = u_1 \times \frac{1-r^7}{1-r}$, ou seja:

$$381 = u_1 \times \frac{1-2^7}{1-2} \Leftrightarrow 381 = u_1 \times \frac{1-128}{-1} \Leftrightarrow 381 = u_1 \times \frac{-127}{-1}$$

$$\Leftrightarrow 381 = 127u_1$$

$$\Leftrightarrow u_1 = \frac{381}{127}$$

$$\Leftrightarrow u_1 = 3$$

Assim, $u_{10} = 3 \times 2^9$.

Opção (C)

14. Como $b_n < 0$ e -1 é um minorante, temos $-1 < b_n < 0$. Logo, $\exists k \in \mathbb{R}^-: \lim b_n = k$.

Opção (D)

15. Como (u_n) é uma progressão aritmética de razão 3, $u_n = u_1 + (n-1)r$. Assim:

$$v_n = 2^{-3u_n} = 2^{-3[u_1+(n-1)r]} =$$

$$= 2^{-3[u_1+(n-1)\times 3]} =$$

$$= 2^{-3(u_1+3n-3)} =$$

$$= 2^{-3u_1-9n+9}$$

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{2^{-3u_1-9(n+1)+9}}{2^{-3u_1-9n+9}} = \frac{2^{-3u_1-9n-9+9}}{2^{-3u_1-9n+9}} =$$

$$= 2^{-3u_1-9n-(-3u_1-9n+9)} =$$

$$= 2^{-3u_1-9n+3u_1+9n-9} =$$

$$= 2^{-9}$$

Logo, (v_n) é uma progressão geométrica de razão 2^{-9}.

Opção (A)

16. $c_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{k}{n^2} = 0 + \frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \cdots + \frac{n}{n^2} =$

$$= \frac{1+2+\cdots+n}{n^2} =$$

$$= \frac{\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k}{n^2} =$$

$$= \frac{S_n}{n^2}$$ (S_n progressão aritmética de razão 1)

$$= \frac{\frac{n^2+n}{2}}{n^2} =$$

$$= \frac{n^2+n}{2n^2} =$$

$$\lim c_n = \lim \frac{n^2+n}{2n^2} = \lim \frac{n^2\left(1+\frac{1}{n}\right)}{2n^2} = \frac{1}{2}$$

Opção (B)

Itens de construção (págs. 144 a 150)

1.

1.1. $a_n = (-1)^n$

$a_1 = -1$

$a_2 = 1$

$a_3 = -1$

Logo, (a_n) não é monótona.

1.2. $b_n = 4n - 5$

$$b_{n+1} - b_n = 4(n+1) - 5 - (4n-5) = 4n + 4 - 5 - 4n + 5 =$$
$$= 4 \text{ e } 4 > 0$$

Logo, (b_n) é crescente.

1.3. $c_n = \frac{3n+2}{n}$

$$c_{n+1} - c_n = \frac{3(n+1)+2}{n+1} - \frac{3n+2}{n} = \frac{3n+3+2}{n+1} - \frac{3n+2}{n} =$$

$$= \frac{3n+5}{n+1} - \frac{3n+2}{n} =$$

$$= \frac{n(3n+5)-(n+1)(3n+2)}{n(n+1)} =$$

$$= \frac{3n^2+5n-\left(3n^2+2n+3n+2\right)}{n(n+1)} =$$

$$= \frac{3n^2+5n-3n^2-5n-2}{n(n+1)} =$$

$$= \frac{-2}{n(n+1)}$$

Como $n(n+1) > 0, \forall n \in \mathbb{N}$ e $-2 < 0$, então $\frac{-2}{n(n+1)} < 0, \forall n \in \mathbb{N}$. Logo, (c_n) é decrescente.

2.

2.1. $u_n = 2 + \frac{1}{n}$

$$\left|2 + \frac{1}{n}\right| < L \Leftrightarrow 2 + \frac{1}{n} < L \Leftrightarrow \frac{1}{n} < L - 2 \Leftrightarrow n > \frac{1}{L-2}$$

Logo, $\exists L \in \mathbb{R}: \forall n \in \mathbb{N}, |u_n| \leq L$.

2.2. $v_n = \frac{3n-1}{n}$

$$\left|\frac{3n-1}{n}\right| < L \Leftrightarrow \frac{3n-1}{n} < L \Leftrightarrow 3n-1 < nL$$

$$\Leftrightarrow 3n - nL < 1$$

$$\Leftrightarrow n(3-L) < 1$$

$$\Leftrightarrow -n(L-3) < 1$$

$$\Leftrightarrow -n < \frac{1}{L-3}$$

$$\Leftrightarrow n > -\frac{1}{(L-3)}$$

$$\Leftrightarrow n > \frac{1}{3-L}$$

Logo, $\exists L \in \mathbb{R}: \forall n \in \mathbb{N}, |v_n| \leq L$.

2.3. $w_n = (-1)^n$

$-1 \leq w_n \leq 1$

Logo, $\exists L \in \mathbb{R}: \forall n \in \mathbb{N}, |u_n| \leq L$.

3.

3.1. $\lim\left(1 + \frac{3}{n} + 3^{\frac{1}{n}}\right) = 1 + 0 + 3^0 = 1 + 1 = 2$

3.2. $\lim\left(\frac{4n+7}{1-2n} + \sqrt[n]{2}\right) \overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=} \lim \frac{n\left(4+\frac{7}{n}\right)}{n\left(\frac{1}{n}-2\right)} + \lim 2^{\frac{1}{n}} = \frac{4}{-2} + 2^0 = -2 + 1 = -1$

3.3. $\lim \frac{n^2+3}{n} \overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=} \lim \frac{n^2\left(1+\frac{3}{n}\right)}{n} = \lim\left[n\left(1+\frac{3}{n}\right)\right] = +\infty(1+0) = +\infty$

3.4. $\lim \frac{n}{n^2+3} \overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=} \lim \frac{n}{n^2\left(1+\frac{3}{n}\right)} = \lim \frac{1}{n\left(1+\frac{3}{n}\right)} = \frac{1}{+\infty(1+0)} = \frac{1}{+\infty} = 0$

3.5. $\lim \frac{4n^2+n}{n^2+3} \overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=} \lim \frac{n^2\left(4+\frac{1}{n}\right)}{n^2\left(1+\frac{3}{n}\right)} = \lim \frac{4+\frac{1}{n}}{1+\frac{3}{n}} = 4$

3.6. $\lim \sqrt{2n^2-4n+3} \overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=} \lim \sqrt{n^2\left(2-\frac{4}{n}+\frac{3}{n^2}\right)} = \lim\left(n\sqrt{2-\frac{4}{n}+\frac{3}{n^2}}\right) = +\infty \times \sqrt{2} = +\infty$

4.

4.1. $u_n = \frac{2}{5}n + 1$

$$u_{n+1} - u_n = \frac{2}{5}(n+1) + 1 - \left(\frac{2}{5}n + 1\right) =$$

$$= \frac{2}{5}n + \frac{2}{5} + 1 - \frac{2}{5}n - 1 = \frac{2}{5}$$

Logo, (u_n) é uma progressão aritmética de razão $\frac{2}{5}$.

4.2. $v_n = \frac{2n+1}{n}$

$$v_{n+1} - v_n = \frac{2(n+1)+1}{n+1} - \frac{2n+1}{n} = \frac{2n+2+1}{n+1} - \frac{2n+1}{n} =$$
$$= \frac{2n+3}{n+1} - \frac{2n+1}{n} =$$
$$= \frac{n(2n+3)-(n+1)(2n+1)}{n(n+1)} =$$
$$= \frac{2n^2+3n-\left(2n^2+n+2n+1\right)}{n(n+1)} =$$
$$= \frac{2n^2+3n-2n^2-3n-1}{n(n+1)} =$$
$$= \frac{-1}{n(n+1)}$$

Logo, (v_n) não é uma progressão aritmética.

4.3. $w_n = n^2 + n$

$$w_{n+1} - w_n = (n+1)^2 + n + 1 - (n^2 + n) = n^2 + 2n + 1 + n + 1 - n^2 - n =$$
$$= 2n + 2$$

Logo, (w_n) não é uma progressão aritmética.

4.4. $x_n = \frac{n^2-2n}{n} = \frac{n(n-2)}{n} = n - 2$

$$x_{n+1} - x_n = n + 1 - 2 - (n - 2) = n - 1 - n + 2 =$$
$$= 1$$

Logo, (x_n) é uma progressão aritmética de razão 1.

4.5. $y_n = \begin{cases} y_1 = 4 \\ y_{n+1} = y_n - \pi \end{cases}$

$$y_{n+1} = y_n - \pi \Leftrightarrow y_{n+1} - y_n = -\pi$$

Logo, (y_n) é uma progressão aritmética de razão $-\pi$.

5.

5.1. $u_n = 2\pi^n$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{2\pi^{n+1}}{2\pi^n} = \pi^{n+1-n} = \pi$$

Logo, (u_n) é uma progressão geométrica de razão π.

5.2. $v_n = \left(\sqrt{3}\right)^{n-1}$

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{\left(\sqrt{3}\right)^{n+1-1}}{\left(\sqrt{3}\right)^{n-1}} = \frac{\left(\sqrt{3}\right)^{n}}{\left(\sqrt{3}\right)^{n-1}} = \sqrt{3}^{n-n+1} = \sqrt{3}$$

Logo, (v_n) é uma progressão geométrica de razão $\sqrt{3}$.

5.3. $w_n = n^2 + n$

$$\frac{w_{n+1}}{w_n} = \frac{(n+1)^2+n+1}{n^2+n} = \frac{n^2+2n+1+n+1}{n^2+n} = \frac{n^2+3n+2}{n^2+n}$$

Logo, (w_n) não é uma progressão geométrica.

5.4. $x_n = \frac{4^n}{5}$

$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{\frac{4^{n+1}}{5}}{\frac{4^n}{5}} = \frac{4^{n+1}}{4^n} = 4^{n+1-n} = 4$

Logo, (x_n) é uma progressão geométrica de razão 4.

5.5. $y_n = \frac{4}{5^n}$

$\frac{y_{n+1}}{y_n} = \frac{\frac{4}{5^{n+1}}}{\frac{4}{5^n}} = \frac{5^n}{5^{n+1}} = 5^{n-n-1} = 5^{-1} = \frac{1}{5}$

Logo, (y_n) é uma progressão geométrica de razão $\frac{1}{5}$.

5.6. $z_n = \frac{2^{n+1}}{3^n}$

$\frac{z_{n+1}}{z_n} = \frac{\frac{2^{n+1+1}}{3^{n+1}}}{\frac{2^{n+1}}{3^n}} = \frac{2^{n+2} \times 3^n}{2^{n+1} \times 3^{n+1}} = 2^{n+2-n-1} \times 3^{n-n-1} = 2 \times 3^{-1} = \frac{2}{3}$

Logo, (z_n) é uma progressão geométrica de razão $\frac{2}{3}$.

6.

6.1. $u_n = 100 \Leftrightarrow 3n + 9 = 100 \Leftrightarrow 3n = 91 \Leftrightarrow n = \frac{91}{3}$ e $\frac{91}{3} \notin \mathbb{N}$

Logo, 100 não é termo da sucessão.

6.2. $u_p > 400 \Leftrightarrow 3p + 9 > 400 \Leftrightarrow 3p > 391 \Leftrightarrow p > \frac{391}{3}$

Logo, $p = 131$.

6.3. $u_{n+1} - u_n = 3(n+1) + 9 - (3n+9) = 3n + 3 + 9 - 3n - 9 = 3$

Como $3 > 0$, (u_n) é crescente. Como $u_{n+1} - u_n = 3$, (u_n) é uma progressão aritmética de razão 3.

6.4. $S_n = 957 \Leftrightarrow \frac{u_1 + u_n}{2} \times n = 957 \Leftrightarrow \frac{12+3n+9}{2} \times n = 957$

$\Leftrightarrow \frac{3n+21}{2} \times n = 957$

$\Leftrightarrow (3n+21) \times n = 1914$

$\Leftrightarrow 3n^2 + 21n - 1914 = 0$

$\Leftrightarrow n = \frac{-21 \pm \sqrt{21^2 - 4 \times 3 \times (-1914)}}{2 \times 3}$

$\Leftrightarrow n = \frac{-21 \pm \sqrt{441 + 22\,968}}{6}$

$\Leftrightarrow n = \frac{-21 \pm \sqrt{23\,409}}{6}$

$\Leftrightarrow n = \frac{-21 \pm 153}{6}$

$\Leftrightarrow n = \frac{-21-153}{6} \quad \vee \quad n = \frac{-21+153}{6}$

$\Leftrightarrow n = -29 \quad \vee \quad n = 22$

Como $n \in \mathbb{N}, n = 22$. Assim, é preciso adicionar 21 termos.

7.

7.1. $u_n = 20 \Leftrightarrow \frac{2n-1}{n} = 20$

$\Leftrightarrow 2n - 1 = 20n$

$\Leftrightarrow 18n = -1$

$\Leftrightarrow n = -\frac{1}{18}$ e $-\frac{1}{18} \notin \mathbb{N}$

Logo, 20 não é termo da sucessão.

7.2. $u_{n+1} - u_n = \frac{2(n+1)-1}{n+1} - \frac{2n-1}{n} =$

$= \frac{2n+2-1}{n+1} - \frac{2n-1}{n} =$

$= \frac{n(2n+1)-(n+1)(2n-1)}{n(n+1)} =$

$= \frac{2n^2+n-(2n^2-n+2n-1)}{n(n+1)} =$

$= \frac{2n^2+n-2n^2-n+1}{n(n+1)} =$

$= \frac{1}{n(n+1)}$

Como $n(n+1) > 0, \forall n \in \mathbb{N}$ e $1 > 0$, então $\frac{1}{n(n+1)} > 0, \forall n \in \mathbb{N}$.

Logo, (u_n) é crescente.

7.3. (u_n) não é uma progressão aritmética porque $u_{n+1} - u_n$ não é constante.

7.4. $u_n = \frac{2n-1}{n} = 2 - \frac{1}{n}$

Como (u_n) é crescente, u_1 é um minorante, isto é, $u_n \geq u_1$.

$u_1 = 2 - 1 = 1$

$\lim u_n = \lim\left(2 - \frac{1}{n}\right) = 2$

Logo, $1 \leq u_n < 2$ e, por isso, (u_n) é limitada.

Minorante: por exemplo, 1.

Majorante: por exemplo, 2.

8. (u_n) é uma progressão aritmética de razão 2, com $u_1 = 10$ e $u_2 = 12$. Assim:

$u_n = u_1 + (n-1) \times r = 10 + (n-1) \times 2 =$

$= 10 + 2n - 2 =$

$= 2n + 8$

$S_{15} = \frac{u_1+u_{15}}{2} \times 15$ e $u_{15} = 2 \times 15 + 8 = 38$

Logo:

$S_{15} = \frac{10+38}{2} \times 15 = 24 \times 15 = 360$

O estudante fez 360 exercícios.

9.

9.1. $a_1 = 2$

$a_2 = 6$

$a_3 = 6$

$a_4 = 12$

$a_5 = 10$

Como $a_4 - a_3 = 6 > 0$ e $a_5 - a_4 = -2 < 0$, podemos concluir que (a_n) não é monótona.

9.2. $b_1 = 9$

$b_2 = 4$

$b_3 = 1$

$b_4 = 0$

$b_5 = 1$

Como $b_4 - b_3 = -1 < 0$ e $b_5 - b_4 = 1 > 0$, podemos concluir que (b_n) não é monótona.

9.3. $c_{n+1} - c_n = 3 \times 2^n - 3 \times 2^{n-1} =$

$= 3 \times 2^{n-1}(2-1) =$

$= 3 \times 2^{n-1}$

Como $3 \times 2^{n-1} > 0$, podemos concluir que (c_n) é crescente.

9.4. $d_{n+1} - d_n = \frac{n+1+1}{2(n+1)+1} - \frac{n+1}{2n+1} =$

$= \frac{n+2}{2n+3} - \frac{n+1}{2n+1} =$

$= \frac{(n+2)(2n+1)-(n+1)(2n+3)}{(2n+1)(2n+3)} =$

$= \frac{2n^2+n+4n+2-(2n^2+3n+2n+3)}{(2n+1)(2n+3)} =$

$= \frac{2n^2+5n+2-2n^2-5n-3}{(2n+1)(2n+3)} =$

$= \frac{-1}{(2n+1)(2n+3)}$

Como $(2n+1)(2n+3) > 0, \forall n \in \mathbb{N}$ e $-1 < 0$, então $\frac{-1}{(2n+1)(2n+3)} < 0, \forall n \in \mathbb{N}$.

Logo, (d_n) é decrescente.

9.5. Se $n \leq 10$: $(e_n) = n$ é crescente.

Se $n > 10$:

$\frac{n+1+1}{2} - \frac{n+1}{2} = \frac{n+2-n-1}{2} = \frac{1}{2}$

Logo, $(e_n) = \frac{n+1}{2}$ é crescente.

$e_{11} - e_{10} = \frac{12}{2} - 10 = 6 - 10 = -4$

Assim, como $e_{11} - e_{10} < 0$ e $e_{10} - e_9 > 0$, podemos concluir que (e_n) não é monótona.

LeYa EDUCAÇÃO Daniela Raposo e Luzia Gomes

9.6. $f_1 = 4$

$f_2 = 3$

$f_3 = 2$

$f_4 = 1$

$f_5 = 0$

$f_6 = 1$

Como $f_5 - f_4 = -1 < 0$ e $f_6 - f_5 = 1 > 0$, podemos concluir que (f_n) não é monótona.

10.

10.1. $a_{n+1} - a_n = \frac{n+1+1}{n+1+3} - \frac{n+1}{n+3} = \frac{n+2}{n+4} - \frac{n+1}{n+3} =$

$= \frac{(n+2)(n+3)-(n+1)(n+4)}{(n+3)(n+4)} =$

$= \frac{n^2+3n+2n+6-(n^2+4n+n+4)}{(n+3)(n+4)} =$

$= \frac{n^2+5n+6-n^2-5n-4}{(n+3)(n+4)} =$

$= \frac{2}{(n+3)(n+4)}$

Como $(n+3)(n+4) > 0, \forall n \in \mathbb{N}$ e $2 > 0$, então $\frac{2}{(n+3)(n+4)} > 0, \forall n \in \mathbb{N}$.

Logo, (a_n) é crescente.

Como (a_n) é crescente, a_1 é um minorante, isto é, $a_n \geq a_1$.

$a_1 = \frac{1+1}{1+3} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

$\lim a_n = \lim \frac{n+1}{n+3} \overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{\cong} \lim \frac{n\left(1+\frac{1}{n}\right)}{n\left(1+\frac{3}{n}\right)} = \frac{1+0}{1+0} = 1$

Logo, $\frac{1}{2} \leq u_n < 1$ e, por isso, (a_n) é limitada.

10.2. $-1 \leq \cos(n) \leq 1 \Leftrightarrow 4 - 1 \leq 4 + \cos(n) \leq 4 + 1 \Leftrightarrow 3 \leq b_n \leq 5$

Logo, (b_n) é limitada.

10.3. $c_{n+1} - c_n = \pi^{-(n+1)} - \pi^{-n} = \pi^{-n-1} - \pi^{-n} =$

$= \pi^{-n-1}(1 - \pi) =$

$= \frac{1-\pi}{\pi^{n+1}}$

Como $\pi^{n+1} > 0, \forall n \in \mathbb{N}$ e $1 - \pi < 0$, então $\frac{1-\pi}{\pi^{n+1}} < 0, \forall n \in \mathbb{N}$. Logo, (c_n) é decrescente.

Como (c_n) é decrescente, c_1 é um majorante, isto é, $c_n \leq c_1$.

$c_1 = \pi^{-1} = \frac{1}{\pi}$

$\lim c_n = \lim \pi^{-n} = \lim \frac{1}{\pi^n} = 0$

Logo, $0 < c_n \leq \frac{1}{\pi}$ e, por isso, (c_n) é limitada.

10.4. $d_n = \begin{cases} -\frac{1}{n} & \text{se } n \text{ ímpar} \\ \frac{1}{n} & \text{se } n \text{ par} \end{cases}$

Como $\lim\left(-\frac{1}{n}\right) = 0$ e $\lim\left(\frac{1}{n}\right) = 0$, temos:

- Se n é ímpar: $d_1 \leq d_n < 0$, ou seja, $-1 \leq d_n < 0$.
- Se n é par: $0 < d_n \leq d_2$, ou seja, $0 < d_n \leq \frac{1}{2}$.

Assim, $-1 \leq d_n \leq \frac{1}{2}$ e, por isso, (d_n) é limitada.

11.

11.1. $u_{n+1} - u_n = \frac{4(n+1)}{3(n+1)+2} - \frac{4n}{3n+2} =$

$$= \frac{4n+4}{3n+5} - \frac{4n}{3n+2} =$$

$$= \frac{(4n+4)(3n+2)-4n(3n+5)}{(3n+5)(3n+2)} =$$

$$= \frac{12n^2+8n+12n+8-12n^2-20n}{(3n+5)(3n+2)} =$$

$$= \frac{8}{(3n+5)(3n+2)}$$

Como $(3n+5)(3n+2) > 0, \forall n \in \mathbb{N}$ e $8 > 0$, então $\frac{8}{(3n+5)(3n+2)} > 0, \forall n \in \mathbb{N}$.

Logo, (u_n) é crescente.

Como (u_n) é crescente, u_1 é um minorante, isto é, $u_n \geq u_1$.

$u_1 = \frac{4\times1}{3\times1+2} = \frac{4}{5}$

$\lim u_n = \lim \frac{4n}{3n+2} \overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=} \lim \frac{4n}{n\left(3+\frac{2}{n}\right)} = \lim \frac{4}{3+\frac{2}{n}} = \frac{4}{3+0} = \frac{4}{3}$

Logo, $\frac{4}{5} \leq u_n < \frac{4}{3}$ e, por isso, (u_n) é limitada.

11.2. $v_{n+1} - v_n = 1 - \frac{1}{2}(n+1) - \left(1 - \frac{1}{2}n\right) =$

$$= 1 - \frac{1}{2}n - \frac{1}{2} - 1 + \frac{1}{2}n =$$

$$= -\frac{1}{2} < 0$$

Logo, (v_n) é decrescente.

Como (v_n) é decrescente, v_1 é um majorante, isto é, $v_n \leq v_1$.

$v_1 = 1 - \frac{1}{2} \times 1 = 1 - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$

$\lim v_n = \lim\left(1 - \frac{1}{2}n\right) = 1 - \infty = -\infty$

Logo, (v_n) não é limitada.

11.3. $w_n = \begin{cases} n & \text{se } n \text{ par} \\ -n & \text{se } n \text{ ímpar} \end{cases}$

$w_1 = -1$

$w_2 = 2$

$w_3 = -3$

Como $w_2 - w_1 > 0$ e $w_3 - w_2 < 0$, podemos concluir que (w_n) não é monótona.

- Se n é par, $\lim\,(-1)^n n = \lim n = +\infty$.
- Se n é ímpar, $\lim\,(-1)^n n = \lim\,(-n) = -\infty$.

Logo, (w_n) não é limitada.

11.4. $x_n = \begin{cases} 3 + \frac{1}{n} & \text{se } n \text{ par} \\ 3 - \frac{1}{n} & \text{se } n \text{ ímpar} \end{cases}$

$x_1 = 3 - 1 = 2$

$x_2 = 3 + \frac{1}{2} = \frac{7}{2}$

$x_3 = 3 - \frac{1}{3} = \frac{8}{3}$

Como $x_2 - x_1 > 0$ e $x_3 - x_2 < 0$, podemos concluir que (x_n) não é monótona.

$\lim\,\left[3 + (-1)^n \frac{1}{n}\right] = 3$

$x_1 = 2$

Logo, $2 \leq u_n < 3$ e, por isso, (x_n) é limitada.

12.

12.1. $u_{2014} - u_{2015} = 1 - 2\text{sen}\left(\frac{2014\pi}{3}\right) - \left[1 - 2\text{sen}\left(\frac{2015\pi}{3}\right)\right] =$

$= 1 - 2\text{sen}\left(\frac{4\pi}{3}\right) - 1 + 2\text{sen}\left(\frac{5\pi}{3}\right) =$

$= -2\text{sen}\left(\frac{4\pi}{3}\right) + 2\text{sen}\left(\frac{5\pi}{3}\right) =$

$= -2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + 2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) =$

$= \sqrt{3} - \sqrt{3} =$

$= 0$

12.2. $u_n = 1 \Leftrightarrow 1 - 2\text{sen}\left(\frac{n\pi}{3}\right) = 1 \Leftrightarrow -2\text{sen}\left(\frac{n\pi}{3}\right) = 0$

$\Leftrightarrow \text{sen}\left(\frac{n\pi}{3}\right) = 0$

$\Leftrightarrow \frac{n\pi}{3} = k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

$\Leftrightarrow n\pi = 3k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

$\Leftrightarrow n = 3k,\ k \in \mathbb{Z}$

Os termos de ordem $n = 3k$, $k \in \mathbb{Z}$ são iguais a 1.

12.3. $u_1 = 1 - 2\text{sen}\left(\frac{\pi}{3}\right) = 1 - 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 1 - \sqrt{3}$

$u_2 = 1 - 2\text{sen}\left(\frac{2\pi}{3}\right) = 1 - 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 1 - \sqrt{3}$

$u_3 = 1 - 2\text{sen}(\pi) = 1 - 0 = 1$

$u_4 = 1 - 2\text{sen}\left(\frac{4\pi}{3}\right) = 1 - 2 \times \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 1 + \sqrt{3}$

$u_5 = 1 - 2\text{sen}\left(\frac{5\pi}{3}\right) = 1 - 2 \times \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 1 + \sqrt{3}$

$u_6 = 1 - 2\text{sen}(2\pi) = 1 - 0 = 1$

Como $u_3 - u_2 > 0$ e $u_6 - u_5 < 0$, podemos concluir que (u_n) não é monótona.

12.4. $-1 \leq \text{sen}\left(\frac{n\pi}{3}\right) \leq 1 \Leftrightarrow -2 \leq -2\text{sen}\left(\frac{n\pi}{3}\right) \leq 2$

$\Leftrightarrow -1 \leq 1 - 2\text{sen}\left(\frac{n\pi}{3}\right) \leq 3$

$\Leftrightarrow -1 \leq u_n \leq 3$

Logo, (u_n) é limitada.

13.

13.1. $\lim \left(\frac{2n^5+3n^2}{4n^5+1}\right) \overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=} \lim \frac{\cancel{n^5}\left(2+\frac{3}{n^3}\right)}{\cancel{n^5}\left(4+\frac{1}{n^5}\right)} = \lim \frac{2+\frac{3}{n^3}}{4+\frac{1}{n^5}} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

13.2. $\lim \left(1 + \frac{2+3n^4}{4n+1}\right) = 1 + \lim \left(\frac{2+3n^4}{4n+1}\right) \overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=} 1 + \lim \frac{n^4\left(\frac{2}{n^4}+3\right)}{n\left(4+\frac{1}{n}\right)} = 1 + \lim \frac{n^3\left(\frac{2}{n^4}+3\right)}{4+\frac{1}{n}} = 1 + \frac{+\infty}{4} = +\infty$

13.3. $\lim \left(\frac{1}{n+1}(n^2+2)\right) \overset{(0\times\infty)}{=} \lim \left(\frac{n^2+2}{n+1}\right) \overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=} \lim \frac{n^2\left(1+\frac{2}{n^2}\right)}{n\left(1+\frac{1}{n}\right)} = \lim \frac{n\left(1+\frac{2}{n^2}\right)}{1+\frac{1}{n}} = \frac{+\infty}{11} = +\infty$

13.4. $\lim \left(\frac{1}{n^2+3} \div \frac{2}{n}\right) = \lim \left(\frac{n}{2n^2+6}\right) \overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=} \lim \frac{n}{n^2\left(2+\frac{6}{n^2}\right)} = \lim \frac{1}{n\left(2+\frac{6}{n^2}\right)} = \frac{1}{+\infty} = 0$

13.5. $\lim \sqrt{\frac{12n}{n+1}} = \sqrt{\lim \left(\frac{12n}{n+1}\right)} \overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=} \sqrt{\lim \left(\frac{12\cancel{n}}{\cancel{n}\left(1+\frac{1}{n}\right)}\right)} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$

13.6. $\lim \left(n^{2015} - n^2\right) \overset{(\infty-\infty)}{=} \lim \left[n^{2015}\left(1 - \frac{1}{n^{2013}}\right)\right] = +\infty(1-0) = +\infty$

13.7. $\lim \left(n^2 - n^{2015}\right) \overset{(\infty-\infty)}{=} \lim \left[n^{2015}\left(\frac{1}{n^{2013}} - 1\right)\right] = +\infty(0-1) = -\infty$

13.8. $\lim \left(2 + \frac{(-1)^n}{n}\right) = 2 + \lim \frac{(-1)^n}{n} = 2 + 0 = 2$

13.9. $\lim \left(-n + \frac{(-1)^n}{n}\right) = -\infty + 0 = -\infty$

13.10. $\lim \left(\sqrt{n^2+1} + \sqrt{n^2+2}\right) = +\infty + \infty = +\infty$

13.11. $\lim\left(\sqrt{n^2+1}-\sqrt{n^2+2}\right)=\lim\frac{\left(\sqrt{n^2+1}-\sqrt{n^2+2}\right)\left(\sqrt{n^2+1}-\sqrt{n^2+2}\right)}{\sqrt{n^2+1}+\sqrt{n^2+2}}=$

$=\lim\frac{n^2+1-(n^2+2)}{\sqrt{n^2+1}+\sqrt{n^2+2}}=$

$=\lim\frac{n^2+1-n^2-2}{\sqrt{n^2+1}+\sqrt{n^2+2}}=$

$=\lim\frac{-1}{\sqrt{n^2+1}+\sqrt{n^2+2}}=$

$=\frac{-1}{+\infty}=$

$=0$

13.12. $\lim\left(\frac{1+2^n+3^n}{3^n}\right)=\lim\frac{\cancel{3^n}\left(\frac{1}{3^n}+\left(\frac{2}{3}\right)^n+1\right)}{\cancel{3^n}}=\lim\left[\frac{1}{3^n}+\left(\frac{2}{3}\right)^n+1\right]=0+0+1=1$

13.13. $\lim\left(\frac{n^n+4^{n+1}}{3^n}\right)=\lim\left(\frac{n^n}{3^n}+\frac{4^{n+1}}{3^n}\right)=\lim\left[\left(\frac{n}{3}\right)^n+\left(\frac{4}{3}\right)^n\times 4\right]=+\infty+\infty=+\infty$

13.14. $\lim\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2^n}\right)=\lim\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)=$

$=1-0=$

$=1$

Cálculo auxiliar

$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2^n}$ é a soma dos n termos de uma progressão geométrica de razão $\frac{1}{2}$.

$S_n=u_1\times\frac{1-r^n}{1-r}$

$S_n=\frac{1}{2}\times\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}\times\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{\frac{1}{2}}=1-\left(\frac{1}{2}\right)^n$

13.15. $\lim\left[\left(\sqrt{4n^2-1}-2n\right)\cos(n)\right]\overset{(\infty-\infty)}{=}\lim\frac{\left(\sqrt{4n^2-1}-2n\right)\left(\sqrt{4n^2-1}+2n\right)\cos(n)}{\sqrt{4n^2-1}+2n}=$

$=\lim\frac{(4n^2-1-4n^2)\cos(n)}{\sqrt{4n^2-1}+2n}=$

$=\lim\frac{-\cos(n)}{\sqrt{4n^2-1}+2n}$

Como $-1\le\cos(n)\le 1$, temos:

$-1\le-\cos(n)\le 1\Leftrightarrow\frac{-1}{\sqrt{4n^2-1}+2n}\le\frac{\cos(n)}{\sqrt{4n^2-1}+2n}\le\frac{1}{\sqrt{4n^2-1}+2n}$

Como $\lim\frac{-1}{\sqrt{4n^2-1}+2n}=\lim\frac{1}{\sqrt{4n^2-1}+2n}=0$, então, pelo teorema das sucessões enquadradas, concluímos que $\lim\frac{-\cos(n)}{\sqrt{4n^2-1}+2n}=0$.

13.16. $\lim\left[\left(3+\frac{\sqrt{9n^2-4n+1}}{-n}\right)\mathrm{sen}(n)\right]\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}\lim\left(3\mathrm{sen}(n)+\frac{\left(\sqrt{n^2\left(9-\frac{4}{n}+\frac{1}{n^2}\right)}\right)\mathrm{sen}(n)}{-n}\right)=$

$=\lim 3\mathrm{sen}(n)+\lim\frac{\left(n\sqrt{9-\frac{4}{n}+\frac{1}{n^2}}\right)}{-n}\times\lim\mathrm{sen}(n)=$

$=\lim 3\mathrm{sen}(n)-\lim\sqrt{9-\frac{4}{n}+\frac{1}{n^2}}\times\lim\mathrm{sen}(n)=$

$=\lim 3\mathrm{sen}(n)-\sqrt{9}\times\lim\mathrm{sen}(n)=$

$=\lim(3\,\mathrm{sen}(n)-3\mathrm{sen}(n))=$

$=0$

Como $-1 \leq \cos(n) \leq 1$, temos:

$-1 \leq -\cos(n) \leq 1 \Leftrightarrow \frac{-1}{\sqrt{4n^2-1}+2n} \leq \frac{\cos(n)}{\sqrt{4n^2-1}+2n} \leq \frac{1}{\sqrt{4n^2-1}+2n}$

Como $\lim \frac{-1}{\sqrt{4n^2-1}+2n} = \lim \frac{1}{\sqrt{4n^2-1}+2n} = 0$, então, pelo teorema das sucessões enquadradas, concluímos que $\lim \frac{-\cos(n)}{\sqrt{4n^2-1}+2n} = 0$.

14.

14.1. Se $\text{sen}(n) = -1$, temos $\lim \frac{-n}{2+1} = \lim \frac{-n}{3}$.

Se $\text{sen}(n) = 1$, temos $\lim \frac{-n}{2-1} = \lim(-n)$.

Então, $\lim(-n) \leq \lim \frac{-n}{2-\text{sen}(n)} \leq \lim \frac{-n}{3}$, isto é, $-\infty \leq \lim \frac{-n}{2-\text{sen}(n)} \leq -\infty$.

Logo, $\lim \frac{-n}{2-\text{sen}(n)} = -\infty$.

14.2. Sabemos que $0 \leq \text{sen}^2(n) \leq 1$.

Se $\text{sen}^2(n) = 0$, temos $\lim(-n-0) = \lim(-n)$.

Se $\text{sen}^2(n) = 1$, temos $\lim(-n-1)$.

Então, $\lim(-n-1) \leq \lim(-n-\text{sen}^2(n)) \leq \lim(-n)$, isto é, $-\infty \leq \lim(-n-\text{sen}^2(n)) \leq -\infty$.

Logo, $\lim(-n-\text{sen}^2(n)) = -\infty$.

14.3. Se $\text{sen}(n) = -1$, temos $\lim(-1+n)$.

Se $\text{sen}(n) = 1$, temos $\lim(1+n)$.

Então, $\lim(-1+n) \leq \lim(\text{sen}(n)+n) \leq \lim(1+n)$, isto é, $+\infty \leq \lim(\text{sen}(n)+n) \leq +\infty$.

Logo, $\lim(\text{sen}(n)+n) = +\infty$.

14.4. Se $\cos(n) = -1$, temos $\lim\big(-n-(-1)\big) = \lim(-n+1)$.

Se $\cos(n) = 1$, temos $\lim(-n-1)$.

Então, $\lim(-n-1) \leq \lim\big(-n-\cos(n)\big) \leq \lim(-n+1)$, isto é,

$-\infty \leq \lim\big(-n-\cos(n)\big) \leq -\infty$. Logo, $\lim\big(-n-\cos(n)\big) = -\infty$.

15.

15.1. Como $-1 \leq \text{sen}(2n) \leq 1$, temos $\frac{4n-1}{n+1} \leq \frac{4n+\text{sen}(2n)}{n+1} \leq \frac{4n+1}{n+1}$.

$$\lim \frac{4n-1}{n+1} = \lim \frac{n\left(4-\frac{1}{n}\right)}{n\left(1+\frac{1}{n}\right)} = \lim \frac{4-\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n}} = 4$$

$$\lim \frac{4n+1}{n+1} = \lim \frac{n\left(4+\frac{1}{n}\right)}{n\left(1+\frac{1}{n}\right)} = \lim \frac{4+\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n}} = 4$$

Assim, $\lim \frac{4n-1}{n+1} \leq \lim \frac{4n+\text{sen}(2n)}{n+1} \leq \lim \frac{4n+1}{n+1}$ e, pelo teorema das sucessões enquadradas, $\lim \frac{4n+\text{sen}(2n)}{n+1} = 4$.

15.2. Como $-1 \leq \cos(n) \leq 1$, temos $\frac{2n}{6n+1} \leq \frac{2n}{6n-\cos(n)} \leq \frac{2n}{6n-1}$.

$\lim \frac{2n}{6n+1} = \lim \frac{2n}{n\left(6+\frac{1}{n}\right)} = \lim \frac{2}{6+\frac{1}{n}} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

$\lim \frac{2n}{6n-1} = \lim \frac{2n}{n\left(6-\frac{1}{n}\right)} = \lim \frac{2}{6-\frac{1}{n}} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

Assim, $\lim \frac{2n}{6n+1} \leq \lim \frac{2n}{6n-\cos(n)} \leq \lim \frac{2n}{6n-1}$ e, pelo teorema das sucessões enquadradas, $\lim \frac{2n}{6n-\cos(n)} = \frac{1}{3}$.

15.3. Como $-1 \leq \cos(n) \leq 1$, temos $-\frac{n^2+n+1}{n^3+1} \leq \cos(n)\frac{n^2+n+1}{n^3+1} \leq \frac{n^2+n+1}{n^3+1}$.

$\lim \left(-\frac{n^2+n+1}{n^3+1}\right) = \lim \frac{n^2\left(-1-\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}\right)}{n^3\left(1+\frac{1}{n^3}\right)} = \lim \frac{-1-\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}}{n\left(1+\frac{1}{n^3}\right)} = \frac{-1}{+\infty} = 0$

$\lim \left(\frac{n^2+n+1}{n^3+1}\right) = \lim \frac{n^2\left(1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right)}{n^3\left(1+\frac{1}{n^3}\right)} = \lim \frac{1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}{n\left(1+\frac{1}{n^3}\right)} = \frac{1}{+\infty} = 0$

Assim, $\lim \left(-\frac{n^2+n+1}{n^3+1}\right) \leq \lim \left[\cos(n)\frac{n^2+n+1}{n^3+1}\right] \leq \lim \left(\frac{n^2+n+1}{n^3+1}\right)$ e, pelo teorema das sucessões enquadradas, $\lim \left[\cos(n)\frac{n^2+n+1}{n^3+1}\right] = 0$.

15.4. Como $-1 \leq \operatorname{sen}(n) \leq 1$, temos $\frac{-1}{4n} \leq \frac{\operatorname{sen}(n)}{4n} \leq \frac{1}{4n}$.

$\lim \frac{-1}{4n} = \frac{-1}{+\infty} = 0$

$\lim \frac{1}{4n} = \frac{-1}{+\infty} = 0$

Assim, $\lim \frac{-1}{4n} \leq \lim \frac{\operatorname{sen}(n)}{4n} \leq \lim \frac{1}{4n}$ e, pelo teorema das sucessões enquadradas, $\lim \frac{\operatorname{sen}(n)}{4n} = 0$.

15.5. Como $-1 \leq \cos\left(n\frac{\pi}{8}\right) \leq 1$, temos $\frac{-1}{n+3} \leq \frac{\cos\left(n\frac{\pi}{8}\right)}{n+3} \leq \frac{1}{n+3}$.

$\lim \frac{-1}{n+3} = \frac{-1}{+\infty} = 0$

$\lim \frac{1}{n+3} = \frac{1}{+\infty} = 0$

Assim, $\lim \frac{-1}{n+3} \leq \lim \frac{\cos\left(n\frac{\pi}{8}\right)}{n+3} \leq \lim \frac{1}{n+3}$ e, pelo teorema das sucessões enquadradas, $\lim \frac{\cos\left(n\frac{\pi}{8}\right)}{n+3} = 0$.

15.6. Como $0 \leq \operatorname{sen}^2(n\alpha) \leq 1$, temos $0 \leq \frac{\operatorname{sen}^2(n\alpha)}{n+3} \leq \frac{1}{n+3}$.

$\lim 0 = 0$

$\lim \frac{1}{n+3} = \frac{1}{+\infty} = 0$

Assim, $\lim 0 \leq \lim \frac{\operatorname{sen}^2(n\alpha)}{n+3} \leq \lim \frac{1}{n+3}$ e, pelo teorema das sucessões enquadradas, $\lim \frac{\operatorname{sen}^2(n\alpha)}{n+3} = 0$.

15.7. Seja (a_n) a sucessão de termo geral $a_n = \frac{n}{2n+1}$.

$$a_{n+1} - a_n = \frac{n+1}{2(n+1)+1} - \frac{n}{2n+1} = \frac{n+1}{2n+3} - \frac{n}{2n+1} =$$
$$= \frac{(n+1)(2n+1)-n(2n+3)}{(2n+3)(2n+1)} =$$
$$= \frac{2n^2+n+2n+1-2n^2-3n}{(2n+3)(2n+1)} =$$
$$= \frac{1}{(2n+3)(2n+1)}$$

Como $\frac{1}{(2n+3)(2n+1)} > 0, \forall n \in \mathbb{N}$, (a_n) é crescente.

$a_1 = \frac{1}{3}$ é um minorante, isto é, $a_n \geq \frac{1}{3}$.

Como $a_n = \frac{1}{2} - \frac{\frac{1}{2}}{2n+1} = \frac{1}{2} - \frac{1}{4n+2}$, temos que $\frac{n}{2n+1} < \frac{1}{2}, \forall n \in \mathbb{N}$.

Então, $\frac{1}{3} \leq \frac{n}{2n+1} < \frac{1}{2}, \forall n \in \mathbb{N}$ e $\left(\frac{1}{3}\right)^n \leq \left(\frac{n}{2n+1}\right)^n < \left(\frac{1}{2}\right)^n$.

Como $\lim \left(\frac{1}{3}\right)^n = \lim \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$, então, pelo teorema das sucessões enquadradas, $\lim \left(\frac{n}{2n+1}\right)^n = 0$.

Cálculo auxiliar

$$\begin{array}{r|l} n & 2n+1 \\ \hline -n+\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \hline \frac{1}{2} & \end{array}$$

15.8. Seja (a_n) a sucessão de termo geral $a_n = \frac{2n-1}{4n}$.

$$a_{n+1} - a_n = \frac{2(n+1)-1}{4(n+1)} - \frac{2n-1}{4n} = \frac{2n+1}{4(n+1)} - \frac{2n-1}{4n} =$$
$$= \frac{n(2n+1)-(n+1)(2n-1)}{4n(n+1)} =$$
$$= \frac{2n^2+n-2n^2+n-2n+1}{4n(n+1)} =$$
$$= \frac{1}{4n(n+1)}$$

Como $\frac{1}{4n(n+1)} > 0, \forall n \in \mathbb{N}$, (a_n) é crescente.

$a_1 = \frac{1}{4}$ é um minorante, isto é, $a_n \geq \frac{1}{4}$.

Como $a_n = \frac{2n}{4n} - \frac{1}{4n} = \frac{1}{2} - \frac{1}{4n}$, temos que $\frac{2n-1}{4n} < \frac{1}{2}, \forall n \in \mathbb{N}$.

Então, $\frac{1}{4} \leq \frac{2n-1}{4n} < \frac{1}{2}, \forall n \in \mathbb{N}$ e $\left(\frac{1}{4}\right)^n \leq \left(\frac{2n-1}{4n}\right)^n < \left(\frac{1}{2}\right)^n$.

Como $\lim \left(\frac{1}{4}\right)^n = \lim \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$, então, pelo teorema das sucessões enquadradas, $\lim \left(\frac{2n-1}{4n}\right)^n = 0$.

16. Sabemos que:

$$u_n = \begin{cases} \pi + 1 & \text{se } n \text{ par} \\ \pi - 1 & \text{se } n \text{ ímpar} \end{cases}$$

Logo, (u_n) é divergente.

$$v_n = \begin{cases} \pi + 1 & \text{se } n \text{ ímpar} \\ \pi - 1 & \text{se } n \text{ par} \end{cases}$$

Logo, (v_n) é divergente.

$$u_n \times v_n = \begin{cases} (\pi + 1)(\pi - 1) & \text{se } n \text{ par} \\ (\pi - 1)(\pi + 1) & \text{se } n \text{ ímpar} \end{cases} \Leftrightarrow u_n \times v_n = \pi^2 - 1$$

$\lim(u_n \times v_n) = \lim(\pi^2 - 1) = \pi^2 - 1$

Logo, $(u_n \times v_n)$ é convergente.

17.

17.1. Como $u_{n+1} - u_n = -3$, (u_n) é uma progressão aritmética de razão -3.

Assim, $u_n = u_1 + (n-1) \times r$.

$u_n = 4 + (n-1) \times (-3) = 4 - 3n + 3 = -3n + 7$

Como $u_1 > 0$ e $r < 0$, podemos concluir que (u_n) é decrescente.

17.2. Sabemos que $u_{10} = 8$ e $u_{60} = 33$.

$$\begin{cases} u_{10} = 8 \\ u_{60} = 33 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + 9r = 8 \\ u_1 + 59r = 33 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 8 - 9r \\ 8 - 9r + 59r = 33 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overline{\qquad\quad} \\ 50r = 25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overline{\qquad} \\ r = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 8 - 9 \times \frac{1}{2} \\ \underline{\qquad\qquad} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = \frac{7}{2} \\ r = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Assim:

$$u_n = \frac{7}{2} + (n-1) \times \frac{1}{2} \Leftrightarrow u_n = \frac{7}{2} + \frac{1}{2}n - \frac{1}{2} \Leftrightarrow u_n = \frac{1}{2}n + 3$$

Como $u_1 > 0$ e $r > 0$, podemos concluir que (u_n) é crescente.

18. Sabemos que (u_n) é uma progressão aritmética de razão 4 e $u_1 = 3$.

$$S_n = 465 \Leftrightarrow \frac{u_1 + u_n}{2} \times n = 465 \Leftrightarrow \frac{3 + 4n - 1}{2} \times n = 465$$

$$\Leftrightarrow \frac{4n+2}{2} \times n = 465$$

$$\Leftrightarrow \frac{4n^2 + 2n}{2} = 465$$

$$\Leftrightarrow 2n^2 + n = 465$$

$$\Leftrightarrow 2n^2 + n - 465 = 0$$

$$\Leftrightarrow n = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \times 2 \times (-465)}}{2 \times 2}$$

$$\Leftrightarrow n = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 3720}}{4}$$

$$\Leftrightarrow n = \frac{-1 \pm \sqrt{3721}}{4}$$

$$\Leftrightarrow n = \frac{-1 \pm 61}{4}$$

$$\Leftrightarrow n = \frac{-62}{4} \quad \wedge \quad n = \frac{60}{4}$$

$$\Leftrightarrow n = -\frac{31}{2} \quad \wedge \quad n = 15$$

$\Leftrightarrow n = 15$, pois $n \in \mathbb{N}$

Cálculo auxiliar

$u_n = u_1 + (n-1) \times r$

$u_n = 3 + (n-1) \times 4$

$\Leftrightarrow u_n = 3 + 4n - 4$

$\Leftrightarrow u_n = 4n - 1$

LeYa EDUCAÇÃO Daniela Raposo e Luzia Gomes

19. Sejam $u_n = u_1 + (n-1) \times r_1$ e $v_n = v_1 + (n-1) \times r_2$ duas progressões aritméticas de razões r_1 e r_2, respetivamente e seja $w_n = u_n + v_n$. Assim:

$w_n = u_1 + (n-1) \times r_1 + v_1 + (n-1) \times r_2 =$

$= u_1 + v_1 + (n-1)(r_1 + r_2)$

Seja $w_1 = u_1 + v_1$ e $r_1 + r_2 = r_w$.

Assim, $w_n = w_1 + (n-1)r_w$.

Logo, (w_n) é uma progressão aritmética de razão $r_w = r_1 + r_2$.

20. $v_{n+1} = 5 + v_n \Leftrightarrow v_{n+1} - v_n = 5$

Assim, (v_n)é uma progressão aritmética de razão 5.

Como $v_{10} = 5$, temos:

$v_1 + 9r = 5 \Leftrightarrow v_1 + 9 \times 5 = 5$

$\Leftrightarrow v_1 + 45 = 5$

$\Leftrightarrow v_1 = -40$

$S_m = 1085 \Leftrightarrow \frac{v_1+v_m}{2} \times m = 1085 \Leftrightarrow \frac{-40+5m-45}{2} \times m = 1085$

$\Leftrightarrow \frac{5m-85}{2} \times m = 1085$

$\Leftrightarrow \frac{5m^2-85m}{2} = 1085$

$\Leftrightarrow 5m^2 - 85m = 2170$

$\Leftrightarrow m^2 - 17m - 434 = 0$

$\Leftrightarrow m = \frac{17 \pm \sqrt{(-17)^2 - 4 \times 1 \times (-434)}}{2 \times 1}$

$\Leftrightarrow m = \frac{17 \pm \sqrt{289+1736}}{2}$

$\Leftrightarrow m = \frac{17 \pm \sqrt{2025}}{2}$

$\Leftrightarrow m = \frac{17 \pm 45}{2}$

$\Leftrightarrow m = \frac{-28}{2} \quad \wedge \quad m = \frac{62}{2}$

$\Leftrightarrow m = -14 \quad \wedge \quad m = 31$

$\Leftrightarrow m = 31$, pois $n \in \mathbb{N}$

Cálculo auxiliar

$v_m = v_1 + (m-1) \times r$

$v_m = -40 + (m-1) \times 5$

$\Leftrightarrow v_m = -40 + 5m - 5$

$\Leftrightarrow v_m = 5m - 45$

21.

21.1. Como $\frac{v_{n+1}}{v_n} = 3$, (v_n) é uma progressão geométrica de razão 3. Assim:

$v_n = v_1 \times r^{n-1}$

$v_n = 4 \times 3^{n-1}$

Como $v_1 > 0$ e $r > 0$, podemos concluir que (v_n) é crescente.

LeYa EDUCAÇÃO Daniela Raposo e Luzia Gomes

21.2. Sabemos que $v_3 = 150$ e $v_7 = 93\,750$.

$$\begin{cases} v_3 = 150 \\ v_7 = 93\,750 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v_1 \times r^2 = 150 \\ v_3 \times r^4 = 93\,750 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overline{\qquad\qquad\qquad} \\ 150r^4 = 93\,750 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \overline{\qquad\qquad} \\ r^4 = \frac{93\,750}{150} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overline{\qquad\qquad} \\ r^4 = 625 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \overline{\qquad\qquad} \\ r = \pm 5 \end{cases} \underset{r<0}{\underbrace{\Leftrightarrow}} \begin{cases} v_1 \times (-5)^2 = 150 \\ r = -5 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} v_1 = \frac{150}{25} \\ \overline{\qquad\qquad} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v_1 = 6 \\ r = -5 \end{cases}$$

Assim, $v_n = 6 \times (-5)^{n-1}$.

Como $v_1 > 0$ e $r < 0$, podemos concluir que (v_n) não é monótona.

22. $w_n = \frac{2}{3^n}$

22.1. $\frac{w_{n+1}}{w_n} = \frac{\frac{2}{3^{n+1}}}{\frac{2}{3^n}} = \frac{3^n}{3^{n+1}} = \frac{1}{3}$

Logo, (w_n) é uma progressão geométrica de razão $\frac{1}{3}$.

22.2. $w_{n+1} - w_n = \frac{2}{3^{n+1}} - \frac{2}{3^n} = \frac{2-6}{3^{n+1}} = \frac{-4}{3^{n+1}}$

Como $3^{n+1} > 0, \forall n \in \mathbb{N}$ e $-4 < 0$, então $\frac{-4}{(2n+3)(2n+1)} > 0, \forall n \in \mathbb{N}$.

Logo, (w_n) é decrescente.

22.3. $S_n = w_1 \times \frac{1-r^n}{1-r}$

$$S_n = \frac{2}{3} \times \frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^n}{1-\frac{1}{3}} = \frac{2}{3} \times \frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^n}{\frac{2}{3}} =$$

$$= 1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n$$

22.4. $\lim S_n = \lim \left[1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n\right] = 1 - 0 = 1$

23. Sejam $u_n = u_1 \times r_1^{n-1}$ e $v_n = v_1 \times r_2^{n-1}$ duas progressões geométricas de razões r_1 e r_2, respetivamente, e seja $w_n = u_n \times v_n$.

Assim:

$$w_n = u_1 \times r_1^{n-1} \times v_1 \times r_2^{n-1} =$$

$$= u_1 v_1 \times (r_1 \times r_2)^{n+1}$$

Seja $w_1 = u_1 \times v_1$ e $r_1 \times r_2 = r_w$.

Assim, $w_n = w_1 \times r_w^{n-1}$.

Logo, (w_n) é uma progressão geométrica de razão $r_w = r_1 \times r_2$.

LeYa EDUCAÇÃO Daniela Raposo e Luzia Gomes

24.

24.1. $P = 2\pi r$

$P_1 = 6\pi$

$P_2 = 3\pi = \frac{1}{2}P_1$

$P_3 = \frac{3}{2}\pi = \frac{1}{2}P_2$

…

Assim, $P_n = \begin{cases} P_1 = 6\pi \\ P_{n+1} = \frac{1}{2}P_n \end{cases}, \ n \geq 2.$

Como $P_{n+1} = \frac{1}{2}P_n$, temos $\frac{P_{n+1}}{P_n} = \frac{1}{2}$. Logo, (P_n) é uma progressão geométrica de razão $\frac{1}{2}$.

$P_n = P_1 \times r^{n-1}$

$P_n = 6\pi \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

24.2. $A = \pi r^2$

$A_1 = 9\pi$

$A_2 = \frac{9}{4}\pi = \frac{1}{4}A_1$

$A_3 = \frac{9}{16}\pi = \frac{1}{4}A_2$

…

Assim, $A_n = \begin{cases} A_1 = 9\pi \\ A_{n+1} = \frac{1}{4}A_n \end{cases}, \ n \geq 2.$

Como $A_{n+1} = \frac{1}{4}A_n$, temos $\frac{A_{n+1}}{A_n} = \frac{1}{4}$. Logo, (A_n) é uma progressão geométrica de razão $\frac{1}{4}$.

$A_n = A_1 \times r^{n-1}$

$A_n = 9\pi \times \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$

25. $P(n)$: $\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{4}\right)\dots\left(1-\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n}, \forall n \in \mathbb{N}$

i. $P(2)$ é verdadeira

$\left(1-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

ii. $\forall n \in \mathbb{N}, P(n) \Longrightarrow P(n+1)$ é verdadeira

$P(n)$: $\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{4}\right)\dots\left(1-\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n}$ (hipótese de indução)

$P(n+1)$: $\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{4}\right)\dots\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{1}{n+1}\right) = \frac{1}{n+1}$ (tese)

$\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{4}\right)\dots\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{1}{n+1}\right) = \frac{1}{n+1}$

$\Leftrightarrow \frac{1}{n} \times \left(1-\frac{1}{n+1}\right) = \frac{1}{n+1}$, por hipótese de indução

$\Leftrightarrow \frac{1}{n} - \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n+1}$

$\Leftrightarrow \frac{n+1-1}{n(n+1)} = \frac{1}{n+1}$

$\Leftrightarrow \frac{n}{n(n+1)} = \frac{1}{n+1}$

$\Leftrightarrow \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n+1}$

Por **i.** e **ii.**, pelo princípio de indução matemática, provámos que $\forall n \in \mathbb{N}$, $P(n)$ é verdadeira.

26. $P(n): \frac{1}{1\times2} + \frac{1}{2\times3} + \frac{1}{3\times4} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}, \forall n \in \mathbb{N}$

i. $P(1)$ é verdadeira

$\frac{1}{1\times2} = \frac{1}{1+1} \Leftrightarrow \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

ii. $\forall n \in \mathbb{N}, P(n) \Longrightarrow P(n+1)$ é verdadeira

$P(n): \frac{1}{1\times2} + \frac{1}{2\times3} + \frac{1}{3\times4} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}$ (hipótese de indução)

$P(n+1): \frac{1}{1\times2} + \frac{1}{2\times3} + \frac{1}{3\times4} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{n+1}{n+2}$ (tese)

$\frac{1}{1\times2} + \frac{1}{2\times3} + \frac{1}{3\times4} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{n+1}{n+2}$

$\Leftrightarrow \frac{1}{1\times2} + \frac{1}{2\times3} + \frac{1}{3\times4} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{n+1}{n+2}$

$\Leftrightarrow \frac{n}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{n+1}{n+2}$, por hipótese de indução

$\Leftrightarrow \frac{n(n+2)+1}{(n+1)(n+2)} = \frac{n+1}{n+2}$

$\Leftrightarrow \frac{n^2+2n+1}{(n+1)(n+2)} = \frac{n+1}{n+2}$

$\Leftrightarrow \frac{(n+1)^2}{(n+1)(n+2)} = \frac{n+1}{n+2}$

$\Leftrightarrow \frac{n+1}{n+2} = \frac{n+1}{n+2}$

Por **i.** e **ii.**, pelo princípio de indução matemática, provámos que $\forall n \in \mathbb{N}$, $P(n)$ é verdadeira.

27. $u_n = \sqrt{n^2+1} - n$

$u_{n+1} - u_n = \sqrt{(n+1)^2+1} - (n+1) - \left(\sqrt{n^2+1} - n\right) =$

$= \sqrt{n^2+2n+1} - n - 1 - \sqrt{n^2+1} + n =$

$= \sqrt{n^2\left(1+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}\right)} - \sqrt{n^2\left(1+\frac{1}{n^2}\right)} - 1 =$

$= n\sqrt{1+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}} - n\sqrt{1+\frac{1}{n^2}} - 1 =$

$= n\left(\sqrt{1+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}} - \sqrt{1+\frac{1}{n^2}}\right) - 1$

LeYa EDUCAÇÃO Daniela Raposo e Luzia Gomes

Como $\sqrt{1+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}}-\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}$ tende para 0, podemos concluir que $u_{n+1}-u_n<0$, ou seja, (u_n) é decrescente e u_1 é um majorante, isto é, $u_n \leq u_1$.

$u_1=\sqrt{2}-1=1$

$$\lim u_n=\lim\left(\sqrt{n^2+1}-n\right)=\lim\frac{(\sqrt{n^2+1}-n)(\sqrt{n^2+1}+n)}{\sqrt{n^2+1}+n}=$$
$$=\lim\frac{n^2+1-n^2}{\sqrt{n^2+1}+n}=$$
$$=\lim\frac{1}{\sqrt{n^2+1}+n}=$$
$$=\frac{1}{\infty}=$$
$$=0$$

Logo, $0<u_n\leq\sqrt{2}-1$ e, por isso, (u_n) é limitada.

28.

28.1. $C_3=A_0A_1A_2A_3$

$$C_3=\sqrt{5}+\frac{\sqrt{5}}{2}+\frac{\sqrt{5}}{4}=$$
$$=\frac{4\sqrt{5}+2\sqrt{5}+\sqrt{5}}{4}=$$
$$=\frac{7\sqrt{5}}{4}$$

28.2. Como (C_n) é uma progressão geométrica de razão $\frac{1}{2}$, temos:

$$S_n=\sqrt{5}\times\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}}=\sqrt{5}\times\frac{1-\frac{1}{2^n}}{\frac{1}{2}}=$$
$$=2\sqrt{5}(1-2^{-n})=$$
$$=2\sqrt{5}-\sqrt{5}\times 2^{1-n}$$

28.3. $\lim S_n=\lim\left(2\sqrt{5}-\sqrt{5}\times 2^{1-n}\right)=2\sqrt{5}-\sqrt{5}\times 2^{-\infty}=$
$$=2\sqrt{5}-0=$$
$$=2\sqrt{5}$$

29.

29.1. $u_n=\frac{3}{2n+1}$

$u_1=\frac{3}{1}=3$

$\lim\frac{3}{2n+1}=\frac{3}{+\infty}=0$

Logo, $0<\ u_n\leq 3$.

A proposição é verdadeira.

29.2. $u_n = \frac{2n+1}{3}$

$\lim \frac{2n+1}{3} = \frac{+\infty}{3} = +\infty$

A proposição é falsa.

30. $u_n = -4 - \frac{1}{n}$

$u_{n+1} - u_n = -4 - \frac{1}{n+1} - 4 - \frac{1}{n} =$

$= -4 - \frac{1}{n+1} + 4 + \frac{1}{n} =$

$= -\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n} =$

$= \frac{-n+n+1}{n(n+1)} =$

$= \frac{1}{n(n+1)}$

Como $n(n+1) > 0, \forall n \in \mathbb{N}$ e $1 > 0$, então $\frac{1}{n(n+1)} > 0, \forall n \in \mathbb{N}$.

Logo, (u_n) é crescente.

Como (u_n) é crescente, u_1 é um minorante, isto é, $u_n \geq u_1$.

$u_1 = -4 - 1 = -5$

$\lim u_n = \lim\left(-4 - \frac{1}{n}\right) = -4 - 0 = -4$

Logo, $\exists L > 0: \forall n \in \mathbb{N}, |u_n| < L$.

31.

31.1. $|u_n - 0| < \delta \Leftrightarrow \left|(-1)^n \frac{1}{n}\right| < \delta$

$\Leftrightarrow \frac{1}{n} < \delta$

$\Leftrightarrow n > \frac{1}{\delta}$

$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq p \Longrightarrow |u_n - 0| < \delta$

31.2. $|v_n| < \delta \Leftrightarrow |3n - 2| < \delta$

$\Leftrightarrow 3n < \delta + 2$

$\Leftrightarrow n < \frac{\delta+2}{3}$

Como a condição não é válida para $n \geq p$, $\nexists n \in \mathbb{N}: n \geq p \wedge |u_n| < \delta$.

Então, $\lim v_n = \lim(3n - 2) = +\infty$.

32. $\lim b_n = \lim(-a_n) = -\lim a_n = -(-\infty) = +\infty$

LeYa EDUCAÇÃO Daniela Raposo e Luzia Gomes

33. $|c_n-(-1)|<\delta \Leftrightarrow \left|\frac{-n-3}{n+2}+1\right|<\delta \Leftrightarrow \left|\frac{-n-3+n+2}{n+2}\right|<\delta$

$$\Leftrightarrow \left|\frac{-1}{n+2}\right|<\delta$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{n+2}<\delta$$

$$\Leftrightarrow n+2>\frac{1}{\delta}$$

$$\Leftrightarrow n>\frac{1}{\delta}-2$$

$\forall n\in\mathbb{N}, n\geq p \Longrightarrow |c_n+1|<\delta$

Logo, $\lim c_n=-1$.

34.

34.1. $\lim\left(\frac{1+3n}{2n}\right)^n=\lim\left(\frac{3}{2}+\frac{1}{2n}\right)^n$

Como $\lim\left(\frac{3}{2}\right)^n<\lim\left(\frac{1+3n}{2n}\right)^n$ e $\lim\left(\frac{3}{2}\right)^n=+\infty$, podemos concluir que $\lim\left(\frac{1+3n}{2n}\right)^n=+\infty$.

34.2. Como $\frac{2n}{n+5}<\frac{2n+6}{n+5}$, temos que $\lim\left(\frac{2n}{n+5}\right)^n<\lim\left(\frac{2n+6}{n+5}\right)^n$.

$$\lim\left(\frac{2n}{n+5}\right)^n=\lim\left(\frac{2n}{n\left(1+\frac{5}{n}\right)}\right)^n=\lim\left(\frac{2}{1+\frac{5}{n}}\right)^n=\lim 2^n=+\infty$$

Assim, podemos concluir que $\lim\left(\frac{2n+6}{n+5}\right)^n=+\infty$.

34.3. Sabemos que $-1\leq \text{sen}\,(n)\leq 1$. Assim, $n^2[\text{sen}\,(n)-2]\leq -n^2$.

Como $\lim(-n^2)=-\infty$, podemos concluir que $\lim[n^2(\text{sen}\,(n)-2\,)]=-\infty$.

34.4. Sabemos que $-1\leq \text{sen}\,(n)\leq 1$. Assim, $n^5\leq n^5[2-\text{sen}\,(n)]$.

Como $\lim(n^5)=+\infty$, podemos concluir que $\lim\left[n^5\left(2-\text{sen}\,(n)\right)\right]=+\infty$.

34.5. $\sum_{k=1}^{n}\frac{2}{\sqrt{k+3n}}=\frac{2}{\sqrt{1+3n}}+\frac{2}{\sqrt{2+3n}}+\cdots+\frac{2}{\sqrt{n+3n}}$

Temos que $n\times\frac{2}{\sqrt{4n}}=\frac{2n}{\sqrt{4n}}$ e que $\frac{2n}{\sqrt{4n}}\leq\sum_{k=1}^{n}\frac{2}{\sqrt{k+3n}}$.

$$\lim\left(\frac{2n}{\sqrt{4n}}\right)=\lim\left(\frac{2n}{n\sqrt{\frac{4}{n}}}\right)=\frac{2}{0^+}=+\infty$$

Como $\lim\left(\frac{2n}{\sqrt{4n}}\right)=+\infty$, podemos concluir que $\lim\sum_{k=1}^{n}\frac{2}{\sqrt{k+3n}}=+\infty$.

34.6. $\sum_{k=0}^{n}\frac{-n-\sqrt{n}}{n+k+1}=\frac{-n-\sqrt{n}}{n+1}+\frac{-n-\sqrt{n}}{n+2}+\cdots+\frac{-n-\sqrt{n}}{2n+1}$

Temos que $(n+1)\times\frac{-n-\sqrt{n}}{n+1}=-n-\sqrt{n}$ e que $\sum_{k=0}^{n}\frac{-n-\sqrt{n}}{n+k+1}\leq -n-\sqrt{n}$

$$\lim\left(-n-\sqrt{n}\right)=-\infty-\infty=-\infty$$

Como $\lim\left(-n-\sqrt{n}\right)=-\infty$, podemos concluir que $\lim\sum_{k=0}^{n}\frac{-n-\sqrt{n}}{n+k+1}=-\infty$.

35.

35.1. Como $\frac{2n+2}{4n+2} \leq \frac{2n+2}{4n+1} \leq \frac{2n+2}{4n}$, temos $\lim\left(\frac{2n+2}{4n+2}\right)^n \leq \lim\left(\frac{2n+2}{4n+1}\right)^n \leq \lim\left(\frac{2n+2}{4n}\right)^n$.

$$\lim\left(\frac{2n+2}{4n+2}\right)^n = \left(\lim\frac{2n+2}{4n+2}\right)^n = \left(\lim\frac{\cancel{n}\left(2+\frac{2}{n}\right)}{\cancel{n}\left(4+\frac{2}{n}\right)}\right)^n = \left(\frac{1}{2}\right)^{\lim n} = \left(\frac{1}{2}\right)^{+\infty} = 0$$

$$\lim\left(\frac{2n+2}{4n}\right)^n = \left(\lim\frac{2n+2}{4n}\right)^n = \left(\lim\frac{\cancel{n}\left(2+\frac{2}{n}\right)}{4\cancel{n}}\right)^n = \left(\frac{1}{2}\right)^{\lim n} = \left(\frac{1}{2}\right)^{+\infty} = 0$$

Assim, podemos concluir, pelo teorema das sucessões enquadradas, que $\lim\left(\frac{2n+2}{4n+1}\right)^n = 0$.

35.2. Como $\frac{2n-4}{3n-2} \leq \frac{2n-2}{3n-2} \leq \frac{2n}{3n-2}$, temos $\lim\left(\frac{2n-4}{3n-2}\right)^n \leq \lim\left(\frac{2n-2}{3n-2}\right)^n \leq \lim\left(\frac{2n}{3n-2}\right)^n$.

$$\lim\left(\frac{2n-4}{3n-2}\right)^n = \left(\lim\frac{2n-4}{3n-2}\right)^n = \left(\lim\frac{\cancel{n}\left(2-\frac{4}{n}\right)}{\cancel{n}\left(3-\frac{2}{n}\right)}\right)^n = \left(\frac{2}{3}\right)^{\lim n} = \left(\frac{2}{3}\right)^{+\infty} = 0$$

$$\lim\left(\frac{2n}{3n-2}\right)^n = \left(\lim\frac{2n}{3n-2}\right)^n = \left(\lim\frac{2\cancel{n}}{\cancel{n}\left(3-\frac{2}{n}\right)}\right)^n = \left(\frac{2}{3}\right)^{\lim n} = \left(\frac{2}{3}\right)^{+\infty} = 0$$

Assim, podemos concluir, pelo teorema das sucessões enquadradas, que $\lim\left(\frac{2n-2}{3n-2}\right)^n = 0$.

35.3. Sabemos que:

$$-1 \leq \operatorname{sen}^2(n) \leq 1 \Leftrightarrow 2n-1 \leq 2n+\operatorname{sen}^2(n) \leq 2n+1$$

$$\Leftrightarrow \frac{2n-1}{n+3} \leq \frac{2n+\operatorname{sen}^2(n)}{n+3} \leq \frac{2n+1}{n+3}$$

Como $\lim\frac{2n-1}{n+3} = \lim\frac{n\left(2-\frac{1}{n}\right)}{n\left(1+\frac{3}{n}\right)} = 2$ e $\lim\frac{2n+1}{n+3} = \lim\frac{n\left(2+\frac{1}{n}\right)}{n\left(1+\frac{3}{n}\right)} = 2$, podemos concluir, pelo teorema das sucessões enquadradas, que $\lim\frac{2n+\operatorname{sen}^2(n)}{n+3} = 2$.

35.4. Sabemos que:

$$-1 \leq \operatorname{sen}(n) \leq 1 \Leftrightarrow 1 \geq -\operatorname{sen}(n) \geq -1$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{4} \leq -\frac{\operatorname{sen}(n)}{4} \leq \frac{1}{4}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{3}-\frac{1}{4} \leq \frac{1}{3}-\frac{\operatorname{sen}(n)}{4} \leq \frac{1}{3}+\frac{1}{4}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{12} \leq \frac{1}{3}-\frac{\operatorname{sen}(n)}{4} \leq \frac{7}{12}$$

Assim, $\lim\left(\frac{1}{12}\right)^n \leq \lim\left(\frac{1}{3}-\frac{\operatorname{sen}(n)}{4}\right)^n \leq \lim\left(\frac{7}{12}\right)^n$.

Como $\lim\left(\frac{1}{12}\right)^n = 0$ e $\lim\left(\frac{7}{12}\right)^n = 0$, podemos concluir, pelo teorema das sucessões enquadradas, que $\lim\left(\frac{1}{3}-\frac{\operatorname{sen}(n)}{4}\right)^n = 0$.

35.5. $\sum_{k=0}^{n}\frac{5n^2}{n^3+k} = \frac{5n^2}{n^3}+\frac{5n^2}{n^3+1}+\cdots+\frac{5n^2}{n^3+n}$

$$\frac{5n^2}{n^3+n}\times(n+1) \leq \sum_{k=0}^{n}\frac{5n^2}{n^3+k} \leq \frac{5n^2}{n^3+1}\times(n+1)$$

$\lim\left(\frac{5n^2}{n^3+n}\times(n+1)\right)=\lim\frac{5n^3+5n}{n^3+n}=\lim\frac{n^3\left(5+\frac{5}{n^2}\right)}{n^3\left(1+\frac{1}{n^2}\right)}=5$

$\lim\left(\frac{5n^2}{n^3+1}\times(n+1)\right)=\lim\frac{5n^3+5n}{n^3+1}=\lim\frac{n^3\left(5+\frac{5}{n^2}\right)}{n^3\left(1+\frac{1}{n^3}\right)}=5$

Como $\lim\left(\frac{5n^2}{n^3+n}\times(n+1)\right)=5$ e $\lim\left(\frac{5n^2}{n^3+1}\times(n+1)\right)=5$, podemos concluir, pelo teorema das sucessões enquadradas, que $\lim\sum_{k=0}^{n}\frac{5n^2}{n^3+k}=5$.

35.6. $\sum_{k=0}^{2n}\frac{7}{\sqrt{n^2+k}}=\frac{7}{\sqrt{n^2}}+\frac{7}{\sqrt{n^2+1}}+\cdots+\frac{7}{\sqrt{n^2+2n}}$

$\frac{7}{\sqrt{n^2+2n}}\times(2n+1)\leq\sum_{k=0}^{2n}\frac{7}{\sqrt{n^2+k}}\leq\frac{7}{n}\times(2n+1)$

$\lim\left(\frac{7}{\sqrt{n^2+2n}}\times(2n+1)\right)=\lim\frac{14n+7}{\sqrt{n^2+2n}}=\lim\frac{n\left(14+\frac{7}{n}\right)}{\sqrt{n^2\left(1+\frac{2}{n^2}\right)}}=\lim\frac{n\left(14+\frac{7}{n}\right)}{n\sqrt{1+\frac{2}{n^2}}}=14$

$\lim\left(\frac{7}{n}\times(2n+1)\right)=\lim\frac{14n+7}{n}=\lim\frac{n\left(14+\frac{7}{n}\right)}{n}=14$

Como $\lim\left(\frac{7}{\sqrt{n^2+2n}}\times(2n+1)\right)=14$ e $\lim\left(\frac{7}{n}\times(2n+1)\right)=14$, podemos concluir, pelo teorema das sucessões enquadradas, que $\lim\sum_{k=0}^{2n}\frac{7}{\sqrt{n^2+k}}=14$.

36. $P(n)\colon\frac{n!}{n^n}\leq\frac{1}{n},\forall n\in\mathbb{N}$

i. $P(1)$ é verdadeira

$\frac{1!}{1^1}\leq\frac{1}{1}\Leftrightarrow 1\leq 1$

ii. $\forall n\in\mathbb{N}, P(n)\Longrightarrow P(n+1)$ é verdadeira

$P(n)\colon\frac{n!}{n^n}\leq\frac{1}{n}$ (hipótese de indução)

$P(n+1)\colon\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}\leq\frac{1}{n+1}$ (tese)

$\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}=\frac{(n+1)n!}{(n+1)^n(n+1)}=\frac{n!}{(n+1)^n}$

Como $\frac{n!}{(n+1)^n}<\frac{n!}{n^n}$, então, por hipótese de indução, $\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}=\frac{n!}{(n+1)^n}<\frac{n!}{n^n}\leq\frac{1}{n}<\frac{1}{n+1}$.

Assim, por transitividade, temos que $\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}<\frac{1}{n+1}$.

Por **i.** e **ii.**, pelo princípio de indução matemática, provámos que $\forall n\in\mathbb{N}$, $P(n)$ é verdadeira.

Então, $\lim\left(\frac{n!}{n^n}\right)\leq\lim\left(\frac{1}{n}\right)$ e, como $\lim\left(\frac{1}{n}\right)=0$, podemos concluir que $\lim\left(\frac{n!}{n^n}\right)=0$.

37. $151<n<413$

$\frac{413-151}{2}+1=\frac{262}{2}+1=132$

Assim, $S_n=\frac{151+413}{2}\times 132=\frac{564}{2}\times 132=37\ 224$.

38. $P(n): \sum_{k=1}^{2n}(-1)^k(2k+1) = 2n, \forall n \in \mathbb{N}$

i. $P(1)$ é verdadeira

$\sum_{k=1}^{2}(-1)^k(2k+1) = 2 \times 1 \iff (-1)(2+1) + (-1)^2(4+1) = 2 \iff -3+5 = 2 \iff 2 = 2$

ii. $\forall n \in \mathbb{N}, P(n) \Longrightarrow P(n+1)$ é verdadeira

$P(n): \sum_{k=1}^{2n}(-1)^k(2k+1) = 2n$ (hipótese de indução)

$P(n+1): \sum_{k=1}^{2n+2}(-1)^k(2k+1) = 2n+2$ (tese)

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{2n+2}(-1)^k(2k+1) &= \sum_{k=1}^{2n}(-1)^k(2k+1) + \sum_{k=2n+1}^{2n+2}(-1)^k(2k+1) = \\ &= 2n + (-1)^{2n+1}(4n+3) + (-1)^{2n+2}(4n+5) = \\ &= 2n - 4n - 3 + 4n + 5 = \\ &= 2n+2\end{aligned}$$

Por **i.** e **ii.**, pelo princípio de indução matemática, provámos que $\forall n \in \mathbb{N}$, $P(n)$ é verdadeira.

39.

39.1. $P(n): 3^{2n} - 1$ é divisível por 8, $\forall n \in \mathbb{N}$.

i. $P(1)$ é verdadeira

$3^2 - 1$ é divisível por 8, ou seja, 8 é divisível por 8.

ii. $\forall n \in \mathbb{N}, P(n) \Longrightarrow P(n+1)$ é verdadeira.

$P(n): 3^{2n} - 1$ é divisível por 8. (hipótese de indução)

$P(n+1): 3^{2n+2} - 1$ é divisível por 8. (tese)

$3^{2n+2} - 1 = 3^{2n} \times 3^2 - 1 = 3^{2n} \times (8+1) - 1 = 3^{2n} \times 8 + 3^{2n} \times 1 - 1$

Como $3^{2n} \times 8$ é divisível por 8 e, por hipótese de indução $3^{2n} \times 1 - 1$ é divisível por 8, concluímos que $3^{2n} \times 8 + 3^{2n} \times 1 - 1$ é divisível por 8.

Por **i.** e **ii.**, pelo princípio de indução matemática, provámos que $\forall n \in \mathbb{N}$, $P(n)$ é verdadeira.

39.2. $P(n): 3n^2 + n - 2$ é um número par, $\forall n \in \mathbb{N}$.

i. $P(1)$ é verdadeira

$3 \times 1^2 + 1 - 2 = 3 + 1 - 2 = 2$ e 2 é um número par.

ii. $\forall n \in \mathbb{N}, P(n) \Longrightarrow P(n+1)$ é verdadeira

$P(n): 3n^2 + n - 2$ é um número par. (hipótese de indução)

$P(n+1): 3(n+1)^2 + (n+1) - 2$ é um número par. (tese)

$$\begin{aligned}3(n+1)^2 + (n+1) - 2 &= 3(n^2 + 2n + 1) + n + 1 - 2 = \\ &= 3n^2 + 6n + 3 + n + 1 - 2 = \\ &= 3n^2 + n - 2 + 6n + 4\end{aligned}$$

Como $6n + 4 = 2(3n+2)$ é um número par e, por hipótese de indução $3n^2 + n - 2$ é um número par, concluímos que $3(n+1)^2 + (n+1) - 2$ é um número par.

Por **i.** e **ii.**, pelo princípio de indução matemática, provámos que $\forall n \in \mathbb{N}$, $P(n)$ é verdadeira.

40.

40.1. $P(n): n! > 2^{n-1}, \forall n \in \mathbb{N} \ \wedge \ n \geq 3$

i. $P(3)$ é verdadeira

$3! > 2^{3-1} \Leftrightarrow 6 > 4$

ii. $\forall n \in \mathbb{N}, P(n) \Rightarrow P(n+1)$ é verdadeira

$P(n): n! > 2^{n-1}$ (hipótese de indução)

$P(n+1): (n+1)! > 2^n$ (tese)

$n! > 2^{n-1} \Leftrightarrow (n+1)n! > (n+1)2^{n-1}$

$\Leftrightarrow (n+1)! > (n+1)2^{n-1}$

Temos, então, de provar que $(n+1)2^{n-1} \geq 2^n$.

$(n+1)2^{n-1} \geq 2^n \Leftrightarrow (n+1) \times 2^n \times 2^{-1} \geq 2^n$

$\Leftrightarrow (n+1) \times \frac{1}{2} \geq 1$

$\Leftrightarrow n+1 \geq 2$

$\Leftrightarrow n \geq 1$ condição universal em $\mathbb{N}$

Então, podemos concluir que $(n+1)! > (n+1)2^{n-1} > 2^n$.

Logo, $(n+1)! > 2^n$.

Por **i.** e **ii.**, pelo princípio de indução matemática, provámos que $\forall n \in \mathbb{N}$, $P(n)$ é verdadeira.

40.2. $P(n): 4^n > n^2, \forall n \in \mathbb{N}$

i. $P(1)$ é verdadeira

$4^1 > 1^2 \Leftrightarrow 4 > 1$

ii. $\forall n \in \mathbb{N}, P(n) \Rightarrow P(n+1)$ é verdadeira

$P(n): 4^n > n^2$ (hipótese de indução)

$P(n+1): 4^{n+1} > (n+1)^2$ (tese)

$4^n > n^2 \Leftrightarrow 4^n \times 4 > 4n^2 \Leftrightarrow 4^{n+1} > 4n^2$

Temos, então, de provar que $4n^2 \geq (n+1)^2$.

$4n^2 \geq (n+1)^2 \Leftrightarrow 4n^2 \geq n^2 + 2n + 1$

$\Leftrightarrow 3n^2 - 2n - 1 \geq 0$

$\Leftrightarrow n \leq -\frac{1}{3} \vee n \geq 1$

$\Leftrightarrow n \geq 1$ condição universal em $\mathbb{N}$

Então, podemos concluir que $4^{n+1} > 4n^2 > (n+1)^2$.

Logo, $4^{n+1} > (n+1)^2$.

Cálculo auxiliar

$3n^2 - 2n - 1 = 0$

$\Leftrightarrow n = \frac{2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \times 3 \times (-1)}}{2 \times 3}$

$\Leftrightarrow n = \frac{2 \pm \sqrt{4+12}}{6}$

$\Leftrightarrow n = \frac{2 \pm 4}{6}$

$\Leftrightarrow n = -\frac{1}{3} \vee n = 1$

Por **i.** e **ii.**, pelo princípio de indução matemática, provámos que $\forall n \in \mathbb{N}$, $P(n)$ é verdadeira.

LeYa EDUCAÇÃO Daniela Raposo e Luzia Gomes

40.3. $P(n): (1+x)^n > 1+nx, \forall x \in \mathbb{R}^+, \forall n \in \mathbb{N}$

i. $P(1)$ é verdadeira

$(1+x)^1 > 1 + 1 \times x \Leftrightarrow 1 + x > 1 + x$

ii. $\forall n \in \mathbb{N}, P(n) \Longrightarrow P(n+1)$ é verdadeira

$P(n): (1+x)^n > 1+nx$ (hipótese de indução)

$P(n+1): (1+x)^{n+1} > 1+(n+1)x$ (tese)

$(1+x)^n > 1+nx \Leftrightarrow (1+x)^n(1+x) > (1+nx)(1+x)$

$\Leftrightarrow (1+x)^{n+1} > 1+x+nx+nx^2$

$\Leftrightarrow (1+x)^{n+1} > 1+(n+1)x+nx^2$

Como $1+(n+1)x+nx^2 \geq 1+(n+1)x$, temos:

$(1+x)^{n+1} > 1+(n+1)x+nx^2 \geq 1+(n+1)x$

Logo, $(1+x)^{n+1} \geq 1+(n+1)x$.

Por **i.** e **ii.**, pelo princípio de indução matemática, provámos que $\forall n \in \mathbb{N}$, $P(n)$ é verdadeira.

41.

41.1. $P(n)$: ${}^nC_0 + {}^nC_1 + {}^nC_2 + \cdots + {}^nC_n = 2^n, \forall n \in \mathbb{N}$

i. $P(1)$ é verdadeira

${}^nC_0 + {}^nC_1 = 2^1 \Leftrightarrow 1 + 1 = 2 \Leftrightarrow 2 = 2$

ii. $\forall n \in \mathbb{N}, P(n) \Longrightarrow P(n+1)$ é verdadeira

$P(n)$: ${}^nC_0 + {}^nC_1 + {}^nC_2 + \cdots + {}^nC_n = 2^n$ (hipótese de indução)

$P(n+1)$: ${}^{n+1}C_0 + {}^{n+1}C_1 + {}^{n+1}C_2 + \cdots + {}^{n+1}C_{n+1} = 2^{n+1}$ (tese)

${}^{n+1}C_0 + {}^{n+1}C_1 + {}^{n+1}C_2 + \cdots + {}^{n+1}C_n + {}^{n+1}C_{n+1} =$

$= {}^nC_0 + {}^{n+1}C_1 + {}^{n+1}C_2 + \cdots + {}^{n+1}C_n + {}^nC_n$

Como ${}^{n+1}C_k = {}^nC_{k-1} + {}^nC_k$, temos:

${}^nC_0 + {}^{n+1}C_1 + {}^{n+1}C_2 + \cdots + {}^{n+1}C_n + {}^nC_n =$

$= {}^nC_0 + {}^nC_0 + {}^nC_1 + {}^nC_1 + {}^nC_2 + \cdots + {}^nC_{n-1} + {}^nC_n + {}^nC_n =$

$= 2 \times {}^nC_0 + 2 \times {}^nC_1 + 2 \times {}^nC_2 + \cdots + 2 \times {}^nC_n =$

$= 2 \times ({}^nC_0 + {}^nC_1 + {}^nC_2 + \cdots + {}^nC_n) =$

$= 2 \times 2^n =$

$= 2^{n+1}$

Por **i.** e **ii.**, pelo princípio de indução matemática, provámos que $\forall n \in \mathbb{N}$, $P(n)$ é verdadeira.

41.2. Sabemos que dado um conjunto com n elementos:

- ${}^nC_0$ é o número de subconjuntos com 0 elementos;
- ${}^nC_1$ é o número de subconjuntos com 1 elemento;
- ${}^nC_2$ é o número de subconjuntos com 2 elementos;
- …
- ${}^nC_n$ é o número de subconjuntos com n elementos.

Assim, a soma ${}^nC_0 + {}^nC_1 + {}^nC_2 + \cdots + {}^nC_n$ representa o número total de subconjuntos do conjunto dado, $P\ (E)$, que é igual a 2^n.

42.

42.1. $P(n): u_n > 1, \forall n \in \mathbb{N}$

i. $P(1)$ é verdadeira

$u_1 > 1 \Leftrightarrow 2 > 1$

ii. $\forall n \in \mathbb{N}, P(n) \Longrightarrow P(n+1)$ é verdadeira

$P(n): u_n > 1$ (hipótese de indução)

$P(n+1): u_{n+1} > 1$ (tese)

$u_n > 1 \Leftrightarrow u_n + 2 > 3 \Leftrightarrow \frac{u_n+2}{3} > \frac{3}{3} \Leftrightarrow u_{n+1} > 1$

Por **i.** e **ii.**, pelo princípio de indução matemática, provámos que $\forall n \in \mathbb{N}$, $P(n)$ é verdadeira.

42.2. $u_{n+1} - u_n = \frac{u_n+2}{3} - u_n = \frac{u_n+2-3u_n}{3} =$

$= \frac{2-2u_n}{3}$

$u_n > 1 \Leftrightarrow -2u_n < -2 \Leftrightarrow 2 - 2u_n < 0 \Leftrightarrow \frac{2-2u_n}{3} < 0$

Logo, $u_{n+1} - u_n < 0$ e (u_n) é decrescente.

43.

43.1. $P(n): u_n < \frac{3}{2}, \forall n \in \mathbb{N}$

i. $P(1)$ é verdadeira

$u_1 < \frac{3}{2} \Leftrightarrow 1 < \frac{3}{2}$

ii. $\forall n \in \mathbb{N}, P(n) \Longrightarrow P(n+1)$ é verdadeira

$P(n): u_n < \frac{3}{2}$ (hipótese de indução)

$P(n+1): u_{n+1} < \frac{3}{2}$ (tese)

$u_{n+1} < \frac{3}{2} \Leftrightarrow 1 + \frac{u_n}{3} < \frac{3}{2} \Leftrightarrow \frac{u_n}{3} < \frac{1}{2} \Leftrightarrow u_n < \frac{3}{2}$

Por **i.** e **ii.**, pelo princípio de indução matemática, provámos que $\forall n \in \mathbb{N}$, $P(n)$ é verdadeira.

43.2. Como $u_n < \frac{3}{2}$ e $u_1 = 1$, temos que $1 \leq u_n < \frac{3}{2}$.

$u_n > 0 \Leftrightarrow \frac{1}{3}u_n > 0 \Leftrightarrow 1 + \frac{1}{3}u_n > 1 \Leftrightarrow u_{n+1} > 1$

Assim, $u_{n+1} - u_n > 0$ e (u_n) é crescente.

44.

44.1. $P(n): a_n = \frac{2}{1-3n}, \forall n \in \mathbb{N}$

i. $P(1)$ é verdadeira

$a_1 = \frac{2}{1-3} \Leftrightarrow -1 = \frac{2}{-2} \Leftrightarrow -1 = -1$

ii. $\forall n \in \mathbb{N}, P(n) \Longrightarrow P(n+1)$ é verdadeira

$P(n): a_n = \frac{2}{1-3n}$ (hipótese de indução)

$P(n+1): a_{n+1} = \frac{2}{1-3(n+1)} = \frac{2}{-3n-2}$ (tese)

$$a_{n+1} = \frac{2a_n}{2-3a_n} = \frac{2\times\frac{2}{1-3n}}{2-3\times\frac{2}{1-3n}} =$$

$$= \frac{\frac{4}{1-3n}}{2-\frac{6}{1-3n}} =$$

$$= \frac{\frac{4}{1-3n}}{\frac{2-6n-6}{1-3n}} =$$

$$= \frac{4}{-6n-4} =$$

$$= \frac{2}{-3n-2}$$

Por **i.** e **ii.**, pelo princípio de indução matemática, provámos que $\forall n \in \mathbb{N}$, $P(n)$ é verdadeira.

44.2. $$\lim\left[a_n \times \frac{\sqrt{n}-\sqrt{4n-1}}{2}\right] = \lim\left[\frac{2}{1-3n} \times \frac{\sqrt{n}-\sqrt{4n-1}}{2}\right] \overset{(0\times\infty)}{\cong} \lim\frac{\sqrt{n}-\sqrt{4n-1}}{1-3n} \overset{(\infty\times\infty)}{\cong}$$

$$= \lim\frac{(\sqrt{n}-\sqrt{4n-1})(\sqrt{n}+\sqrt{4n-1})}{(1-3n)(\sqrt{n}+\sqrt{4n-1})} =$$

$$= \lim\frac{n-(4n-1)}{(1-3n)(\sqrt{n}+\sqrt{4n-1})} =$$

$$= \lim\frac{n-4n+1}{(1-3n)(\sqrt{n}+\sqrt{4n-1})} =$$

$$= \lim\frac{-3n+1}{(1-3n)(\sqrt{n}+\sqrt{4n-1})} =$$

$$= \lim\frac{-(3n-1)}{(1-3n)(\sqrt{n}+\sqrt{4n-1})} =$$

$$= \lim\frac{-1}{\sqrt{n}+\sqrt{4n-1}} =$$

$$= -\frac{1}{+\infty} =$$

$$= 0$$