Tópicos de Matemática II
2º Teste
9 · 06 · 2020

Universidade do Minho
DMA

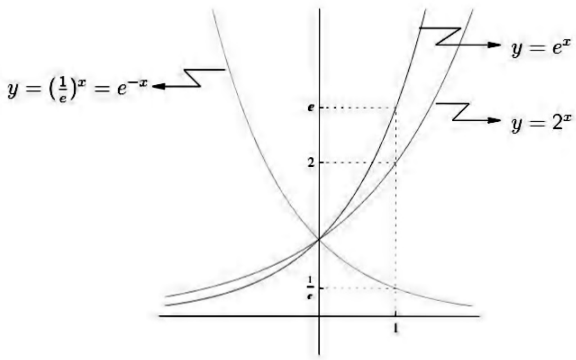
Duração: 90 minutos

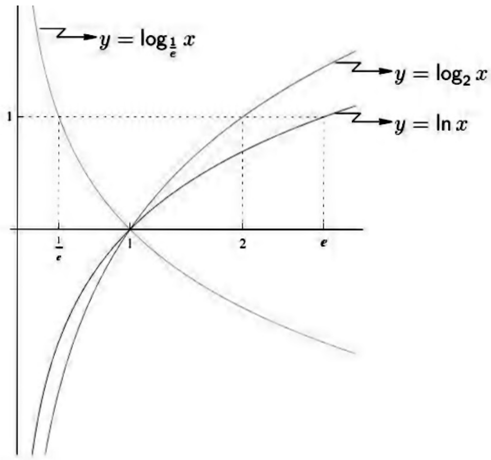
**Nome:**

**N.º de identificação civil:** **Turma:**

**Formulário**

**Gráficos de funções exponenciais e logarítmicas**




**Regras de derivação**

$(a)' = 0 \qquad (a \in \mathbb{R})$

$(x)' = 1$

$(ax+b)' = a \qquad (a, b \in \mathbb{R})$

$(ax^p)' = apx^{p-1} \quad (a \in \mathbb{R}, p \in \mathbb{Z}\backslash\{0\})$

$(f+g)' = f' + g'$

$(fg)' = f'g + f\,g'$

$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - f\,g'}{g^2}$

$(f^n)' = n\,f^{n-1}f' \qquad (n \in \mathbb{R})$

$\left(\sqrt[n]{f}\right)' = \frac{f'}{n\sqrt[n]{f^{n-1}}} \qquad (n \in \mathbb{N})$

$(\text{sen } f)' = f' \cos f$

$(\cos f)' = -f' \text{ sen } f$

$(\text{tg } f)' = \frac{f'}{\cos^2 f}$

$(e^f)' = f'e^f$

$(a^f)' = f'a^f \ln a \qquad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

$(\ln f)' = \frac{f'}{f}$

$(\log_a f)' = \frac{f'}{f \ln a} \qquad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

**Justifique convenientemente todas as suas respostas.**

Cotações:
**1.** a) 15 b) 15 c) 15 **2.** a) 15 b) 15 **3.** a) 15 b) 15

**4.** a) 15 b) 15 **5.** 15 **6.** 10 **7.** a) 15 b) 15 **8.** 10

Exercício 1 Considere a função real, de variável real, definida por $h(x) = \log_3(-3x + 5)$.

a) Indique o seu domínio, apresentando o resultado na forma de intervalo.

b) Calcule as coordenadas do ponto de interseção do gráfico da função $h$ com a reta de equação $y = -1$.

c) Caracterize a função inversa de $h$.

Exercício 2 Determine, caso existam, os seguintes limites:

a) $\lim_{x \to -\infty} (x^3 + x^2 + 5x)$;

b) $\lim_{x \to 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{x - 1}$.

Exercício 3 Resolva, em $\mathbb{R}$, as seguintes condições:

a) $3^x \times x^2 - 3^x \times 4 = 0$;

b) $5^{x^2+2} = 25^{-\frac{1}{2}x+2}$.

Exercício 4 Seja $h$ a função definida em $\mathbb{R} \setminus \{-3\}$ por: $h(x) = \begin{cases} \frac{x^3-27}{-x^2+9} & \text{se } x < 3 \\ -\frac{x^2}{2} & \text{se } x \geq 3. \end{cases}$

Calcule analiticamente, se existirem, os seguintes limites:

a) $\lim\limits_{x\to-\infty} h(x)$.

b) $\lim\limits_{x\to 3^-} h(x)$ e $\lim\limits_{x\to 3^+} h(x)$. Diga se existe $\lim\limits_{x\to 3} h(x)$, justificando.

Exercício 5 Resolva em $\mathbb{R}$ a seguinte equação fracionária $\frac{x^2+2x}{x^2-4} = 0$.

Exercício 6 Considere a função $f$, real de variável real, definida por $f(x) = -\frac{2x^5}{5} + \sqrt{2}x^2$. Mostre que a reta tangente ao gráfico de $f$ no ponto de abcissa $\sqrt{2}$ tem declive $-4$.

Exercício 7 Calcule $y'$, sendo:

a) $y = (2x^3 + 2)^2$

b) $y = \dfrac{2}{x} \times (5 - 2x)$

Exercício 8 Para certos valores de $a$ e de $b$ ($a > 1$ e $b > 1$) tem-se $\log_a b = \frac{1}{3}$. Determine, para esses valores de $a$ e de $b$, o valor de $\log_a(b\sqrt{a})$.