ESCOLA SECUNDÁRIA DE PENAFIEL

3º Ficha Formativa

Duração da Ficha Formativa: 90 min | 29.01.2018

Caderno 1 + Caderno 2

12.º Ano de Escolaridade | Turma K-G

Caderno 1

- **Neste Caderno é permitida a utilização de calculadora**

1. Supondo que ${}^{2017}C_{99} = x$ e ${}^{2017}C_{100} = y$, então, pode-se afirmar que:
   (A) ${}^{2018}C_{100} = x + y$
   (B) ${}^{2018}C_{99} = x + y$
   (C) ${}^{2018}C_{100} = x \times y$
   (D) ${}^{2018}C_{99} = x \times y$

2. Um grupo de escuteiros tem uma tenda com a forma de um sólido como a que se apresenta na figura 1.

   A tenda tem dezasseis faces visíveis, oito faces laterais e oito faces na parte superior (teto).

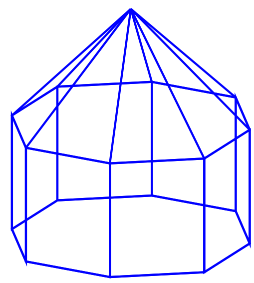

Figura 1

   Admite que se instala um referencial ortonormado $Oxyz$, como se observa na figura 2.

   2.1. Com todos os pontos assinalados (vértices do sólido):
      2.1.1. quantos triângulos se podem desenhar, se um dos vértices for necessariamente o ponto V?
      2.1.2. quantas retas, não paralelas ao plano xOy, se podem desenhar?

   2.2. Quantas diagonais espaciais existem no sólido?

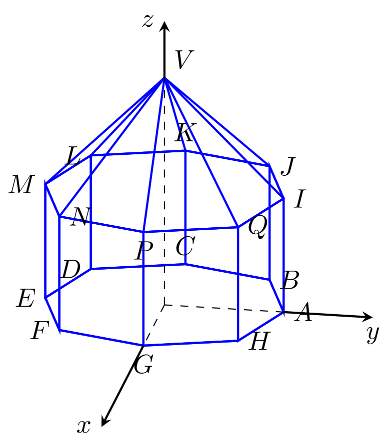

Figura 2

3. O Rodrigo depositou no banco APN 15000 euros numa conta poupança.
A taxa de juro é de 2.5% ao ano, na modalidade de juros compostos.

O banco oferece dois regimes:

- capitalizações semestrais
- capitalizações trimestrais

3.1. Qual é o regime mais favorável ao Rodrigo?

3.2. Qual é o capital acumulado, em euros, ao fim de um ano, em cada um dos regimes?

4. Na figura 3 está representado, num referencial *o.n.* xOy, parte do gráfico da função f, de domínio $\mathbb{R} \setminus \{1\}$, definida por $f(x) = \dfrac{e^{-x}}{x-1}$.

Na figura está também representada a reta r, que é tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa -1.

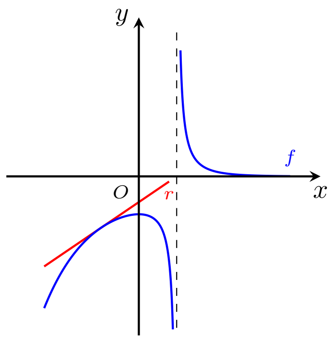

Figura 3

Em qual das opções está a equação reduzida da reta r?

(A) $y = \dfrac{e}{2}x + \dfrac{e}{2} - \dfrac{e}{4}$

(B) $y = \dfrac{e}{4}x + \dfrac{e}{4} - \dfrac{e}{2}$

(C) $y = \dfrac{e}{4}x - \dfrac{e}{4} + \dfrac{e}{2}$

(D) $y = \dfrac{e}{4}x + \dfrac{e}{4} + \dfrac{e}{2}$

5. Na figura 4 está representado, num referencial *o.n.* $Oxyz$, um triângulo $[ABO]$.

Admite que:

- o ponto B tem coordenadas $(0; 8, 6)$;
- o ponto A desloca-se ao longo do semieixo positivo Oz , nunca coincidindo com a origem do referencial.

Seja f , a função que faz corresponder, à cota z do ponto A , o perímetro do triângulo $[ABO]$.

5.1. Determina a expressão que dá, em função de z , o perímetro do triângulo $[ABO]$.

5.2. Determina, recorrendo às potencialidades da calculadora gráfica, a cota do ponto A de modo que o perímetro do triângulo $[ABO]$ é igual a 21. Apresenta o valor arredondado às décimas.

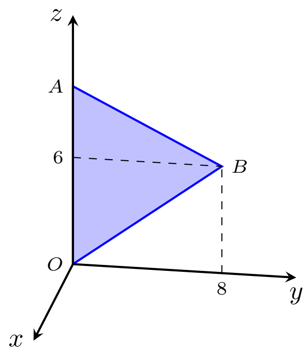

Figura 4

Caderno 2

- **Neste Caderno não é permitida a utilização de calculadora**

6. Considera a função g, real, de variável real, definida por $g(x) = \sqrt{1+x^2}$.

   Na figura 5 estão representados, em referencial *o.n.* xOy, parte do gráfico da função g e das suas assíntotas não verticais.

   Em qual das opções estão as equações reduzidas das assíntotas ao gráfico de g?

   (A) $y = x$ e $y = -x$

   (B) $y = 2x$ e $y = -2x$

   (C) $y = \sqrt{2}x$ e $y = -\sqrt{2}x$

   (D) $y = 4x$ e $y = -4x$

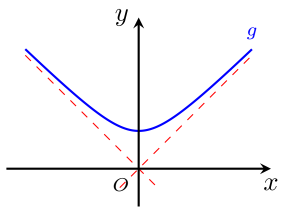

Figura 5

7. Considera a sucessão (a_n), de termo geral $a_n = \left(\dfrac{4n+1}{4n+3}\right)^{\frac{n}{2}}$.

   Determina $k \in \mathbb{R}$, de modo que $\lim a_n = \dfrac{1}{e^{2k-1}}$

8. Considera a função f, real de variável real, definida por $f(x) = 2e^{x-e}$.
   Recorrendo à definição de derivada de uma função, determina $f'(e)$.

9. Resolve as condições seguintes:

   9.1. $\dfrac{1}{3^{-2x+1}} - \left(\dfrac{1}{27}\right)^{-x} > 0.$

   9.2. $-2 \times 4^{-x} + 4^x = 1$

10. Considera as funções f e g, reais, de variável real, definidas por $f(x) = e^{2x} + 5$ e $g(x) = 6 \times e^x$.

    Na figura 6 estão representados, em referencial *o.n.* xOy, parte dos gráficos das funções f e g', sendo g' a função derivada da função g. Determina, analiticamente, as abcissas dos pontos, A e B, de interseção dos dois gráficos representados.

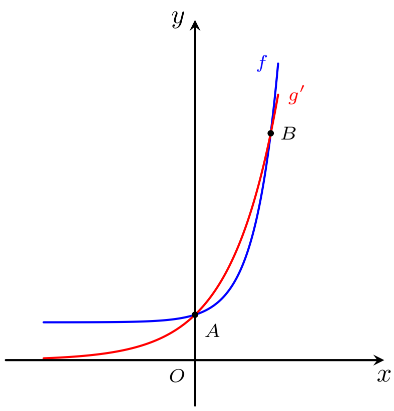

Figura 6

11. Escreve a expressão da função derivada da função h, real de variável real, definida por $h(x) = xe^{\frac{1}{x-1}}$.

12. Considera a função f, real de variável real, $f : \mathbb{R} \setminus \{1\} \mapsto \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 2x - 1 + \dfrac{2}{1-x}$.

    Na figura 7 estão representados, em referencial *o.n.* xOy, parte do gráfico da função f e das retas r e s, as suas assíntotas. A é o ponto de interseção das retas r e s.

    12.1. Mostra que a reta de equação $y = 2x - 1$ é assíntota ao gráfico da função f quando $x \to +\infty$ e indica as coordenadas do ponto A.

    12.2. Estuda a função f quanto ao sentido das concavidades e existência de pontos de inflexão do seu gráfico.

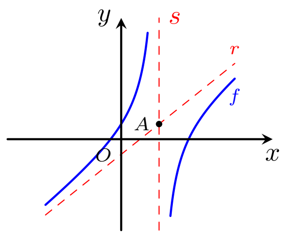

Figura 7

Formulário

Geometria

Comprimento de um arco de circunferência:

αr *(α - amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r - raio)*

área de um polígono regular: *Semiperímetro* $\times$ *Apótema*

área de um setor circular:

$\frac{\alpha r^2}{2}$ *(α- amplitude, em radianos, do ângulo ao centro, r - raio)*

área lateral de um cone: $\pi r g$ *(r - raio da base, g - geratriz)*

área de uma superfície esférica: $4\pi r^2$ *(r - raio)*

Volume da pirâmide: $\frac{1}{3}\times$ *área da base* $\times$ *Altura*

Volume do cone: $\frac{1}{3}\times$ *área da base* $\times$ *Altura*

Volume da esfera: $\frac{4}{3}\pi r^3$ *(r - raio)*

Progressões

Soma dos n primeiros termos de uma progressão (u_n):

Progressão aritmética: $\frac{u_1 + u_n}{2} \times n$

Progressão geométrica: $u_1 \times \frac{1 - r^n}{1 - r}$, $r \neq 1$

Trigonometria

$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$

$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$

Lei dos senos

$\frac{\sin \hat{A}}{a} = \frac{\sin \hat{B}}{b} = \frac{\sin \hat{C}}{c}$

Lei dos cossenos ou Teorema de Carnot

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos \hat{A}$

Complexos

$(\rho cis\theta)^n = \rho^n cis(n\theta)$ ou $(\rho e^{i\theta})^n = \rho^n e^{in\theta}$

$\sqrt[n]{\rho cis\theta} = \sqrt[n]{\rho} cis\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right)$ ou $\sqrt[n]{\rho e^{i\theta}} = \sqrt[n]{\rho} e^{\frac{\theta+2k\pi}{n}}$

$(k \in \{0, \cdots, n-1\}$ e $n \in \mathbb{N})$

Probabilidades

$\mu = p_1 x_1 + \cdots + p_n x_n$

$\sigma = \sqrt{p_1(x_1-\mu)^2 + \cdots + p_n(x_n - \mu)^2}$

Se $X \sim N(\mu, \sigma)$, então:

$P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) \approx 0.6827$

$P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) \approx 0.9545$

$P(\mu - 3\sigma < X < \mu + 3\sigma) \approx 0.9973$

Regras de derivação

$(u+v)' = u' + v'$

$(uv)' = u'v + uv'$

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$

$(u^n)' = nu^{n-1}u' \quad (n \in \mathbb{R})$

$(\sin u)' = u' \cos u$

$(\cos u)' = -u' \sin u$

$(\tan u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$

$(e^u)' = u'e^u$

$(a^u)' = u'a^u \ln a \quad (a \in \mathbb{R}^+ \backslash \{1\})$

$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$

$(\log_a u)' = \frac{u'}{u \ln a} \quad (a \in \mathbb{R}^+ \backslash \{1\})$

Limites notáveis

$\lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e \quad (n \in \mathbb{N})$

$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^p} = +\infty \quad (p \in \mathbb{R})$