Binómio de Newton, Acontecimentos Independentes, Derivada da Função Composta, Modelos Exponenciais e Condições em $\mathbb{C}$

"Conhece a Matemática e dominarás o Mundo."
Galileu Galilei

1. Considere o desenvolvimento do binómio $\left(\frac{2}{x}-x^2\right)^n$, com $x \neq 0$ e $n \in \mathbb{N}$.

Sabe-se que n satisfaz a equação ${}^nC_3 - {}^nC_7 = 0$.

Qual é o coeficiente do termo cuja parte literal é x^{11}?

A -960

B -360

C 360

D 960

Proposta de Resolução:

Tem-se que ${}^nC_3 - {}^nC_7 = 0 \Leftrightarrow {}^nC_3 = {}^nC_7 \Leftrightarrow n-3=7 \Leftrightarrow n=10$.

Logo, a forma geral dos termos deste desenvolvimento é ${}^{10}C_p \times \left(\frac{2}{x}\right)^{10-p} \times \left(-x^2\right)^p$, de onde:

$$ {}^{10}C_p \times \left(\frac{2}{x}\right)^{10-p} \times \left(-x^2\right)^p = {}^{10}C_p \times 2^{10-p} \times \frac{1}{x^{10-p}} \times (-1)^p \times \left(x^2\right)^p = {}^{10}C_p \times 2^{10-p} \times (-1)^p \times x^{p-10} \times x^{2p} = $$

$$ = {}^{10}C_p \times 2^{10-p} \times (-1)^p \times x^{p-10+2p} = {}^{10}C_p \times 2^{10-p} \times (-1)^p \times x^{3p-10} $$

Logo, como se pretende o coeficiente do termo em x^{11}, vem $3p-10=11 \Leftrightarrow 3p=21 \Leftrightarrow p=7$.

$\therefore$ O coeficiente do termo em x^{11} é ${}^{10}C_7 \times 2^{10-7} \times (-1)^7 = 120 \times 2^3 \times (-1) = -960$.

Resposta: A

2. Considere o desenvolvimento de $(ax-3)^{21}$, com $a \in \mathbb{R}$.

Sabendo que a soma de todos os coeficientes do desenvolvimento é 1, qual é o valor de a?

A 1 **B** 2

C 3 **D** 4

Proposta de Resolução:

Para sabermos a soma dos coeficientes de um desenvolvimento basta substituir a(s) variáveis por 1, neste caso, basta substituir o x por 1. Assim, a soma dos coeficientes do desenvolvimento de $(ax-3)^{21}$ é dado por $(a \times 1 - 3)^{21} = (a-3)^{21}$, pelo que:

$$(a-3)^{21} = 1 \Leftrightarrow a-3 = \sqrt[21]{1} \Leftrightarrow a-3 = 1 \Leftrightarrow a = 4$$

Resposta: D

3. Seja E o espaço de resultados associados a uma certa experiência aleatória e A e B dois acontecimentos possíveis, não certos e são independentes ($A \subset E$ e $B \subset E$).

Admitindo que $P(A \cap \bar{B}) = 9P(A \cap B)$, qual é o valor de $P(B)$?

A $0{,}1$ **B** $0{,}3$ **C** $0{,}5$ **D** $0{,}7$

Proposta de Resolução:

Tem-se que $P(A \cap \bar{B}) = 9P(A \cap B) \Leftrightarrow P(A) - P(A \cap B) = 9P(A \cap B) \Leftrightarrow P(A) = 10P(A \cap B) \Leftrightarrow$

$$\underset{P(A)\neq 0}{\Leftrightarrow} \frac{1}{10} = \underbrace{\frac{P(A \cap B)}{P(A)}}_{P(B|A)} \Leftrightarrow P(B|A) = \frac{1}{10} \underset{\substack{A \text{ e } B \text{ independentes} \\ \Downarrow \\ P(B|A) = P(B)}}{\Leftrightarrow} P(B) = 0{,}1$$

Outra maneira: $P(A \cap \bar{B}) = 9P(A \cap B) \Leftrightarrow P(A) = 10P(A \cap B) \underset{A \text{ e } B \text{ independentes}}{\Leftrightarrow} \cancel{P(A)} = 10\cancel{P(A)} \times P(B) \Leftrightarrow$

$$\underset{P(A)\neq 0}{\Leftrightarrow} 1 = 10P(B) \Leftrightarrow P(B) = \frac{1}{10} \Leftrightarrow P(B) = 0{,}1$$

Resposta: A

4. Seja E o espaço de resultados associados a uma certa experiência aleatória e A e B dois acontecimentos possíveis e independentes ($A \subset E$ e $B \subset E$) tais que:

- $P(B) = 0,2$
- $P(A|B) = 0,7$

Qual é o valor de $P(\bar{A} \cup B)$?

A $0,26$ **B** $0,36$

C $0,44$ **D** $0,84$

Resolução:

Tem-se que A e B são independentes, pelo que $P(A|B) = P(A)$ e portanto, como $P(A|B) = 0,7$, vem que $P(A) = 0,7$. Logo:

$$P(\bar{A} \cup B) = P(\bar{A}) + \underbrace{P(B)}_{0,2} - \underbrace{P(\bar{A} \cap B)}_{P(B)-P(A\cap B)} = 1 - \underbrace{P(A)}_{0,7} + 0,2 - \left(P(B) - P(A \cap B)\right) =$$

$$\underset{\substack{A \text{ e } B \text{ são} \\ \text{independentes, logo} \\ P(A\cap B)=P(A)\times P(B)}}{=} 1 - 0,7 + 0,2 - \left(P(B) - P(A) \times P(B)\right) = 0,5 - (0,2 - 0,7 \times 0,2)$$

$$= 0,5 - 0,2 + 0,14 = 0,44$$

Resposta: C

5. Sejam f e g duas funções reais de variável real tais que $f(x) = \ln(x^2 + x)$ e a recta tangente ao gráfico de g no ponto de abcissa 1 é perpendicular à recta de equação $y = -\frac{x}{2} + 1$ e contém o ponto de coordenadas $(2,3)$.

Qual é o valor de $(f \circ g)'(1)$?

A 1 **B** 2

C 3 **D** 4

Proposta de Resolução:

Tem-se que $(f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \times g'(x)$. Portanto, $(f \circ g)'(1) = f'(g(1)) \times g'(1)$.

- Seja t a recta tangente ao gráfico de g no ponto de abcissa 1. Como t é perpendicular a r, vem:

$$m_t = -\frac{1}{m_r} = -\frac{1}{-\frac{1}{2}} = 2$$

Logo, $g'(1) = m_t = 2$. O ponto de coordenadas $(2,3)$, pertence à recta t, assim, a sua equação é dada por:

$$t: y - 3 = 2(x-2) \Leftrightarrow y = 2x - 4 + 3 \Leftrightarrow y = 2x - 1$$

O ponto de coordenadas $(1, g(1))$ é o ponto de tangência, portanto $(1, g(1)) \in t$. Logo, $g(1) = 2 \times 1 - 1 = 1$.

- Tem-se $f'(x) = \frac{(x^2+x)'}{x^2+x} = \frac{2x+1}{x^2+x}$.

Assim, $(f \circ g)'(1) = f'(g(1)) \times g'(1) = f'(1) \times 2 = \frac{2\times 1+1}{1^2+1} \times 2 = \frac{3}{2} \times 2 = 3$

Resposta: C

6. Considere as funções f e g, ambas diferenciáveis em $\mathbb{R}$ tais que:

- $f(-1) = -1$ e $f'(-1) = 3$
- $g(x) = (f(x))^n + \frac{1}{f(x)}$, com $n \in \mathbb{N}$ e n par;
- $(g \circ f)'(-1) = -45$

Resolução do exercício 8:

https://youtu.be/eHxbWVye06Q

Qual é o valor de n?

A 4 **B** 6

C 8 **D** 10

7. Num tanque de criação de peixe a água tem de ser mudada regularmente.

Na altura de fazer a mudança da água são precisos alguns cuidados. Antes de a água velha começar a ser drenada são colocadas duas centenas de metros cúbicos de água nova no tanque.

Após essa operação, a água velha começa a ser drenada e continua-se a adicionar água nova no tanque de tal forma que o volume V, de água velha no tanque e o volume N, de água nova no tanque, em centenas metros cúbicos são dado, em função do tempo t, em horas, por:

$$V(t)=4e^{-0,4t} \qquad \text{e} \qquad N(t)=\frac{4}{1+e^{-0,4t}} \text{ com } t\geq 0$$

7.1. Determine $x\in\mathbb{R}^+$ de modo que $V(t+x)=\frac{1}{3}\times V(t)$.

Comece por apresentar o valor de x na forma $\ln\sqrt{n}$, com $n\in\mathbb{N}$, e em seguida apresente o seu valor em horas e minutos, com minutos arredondados às unidades.

Interprete o resultado no contexto da situação descrita.

7.2. Determine o instante após o início da drenagem na água velha, em que o volume de água velha no tanque é igual a metade do volume de água nova.

Recorra a métodos analíticos e utilize a calculadora para eventuais cálculos numéricos.

Apresente o instante em horas e minutos, minutos arredondados às unidades. Caso faça arredondamentos em cálculos intermédios utilize no mínimo quatro casas decimais.

Resolução do exercício 7.1.:

https://youtu.be/mUmpBoenoE0

Resolução do exercício 7.2.:

https://youtu.be/L3NVFA0yvrY

8. A massa de um elemento radioactivo desintegra-se segundo a lei $m(t) = m_0\, e^{-kt}$, em que:

- m_0 é a massa de uma amostra desse elemento quando é colocada em repouso;
- k é uma constante real;
- t é o tempo em minutos.

Resolução do exercício 8.:

https://youtu.be/f1UiLZliKMM

Sabe-se que uma amostra elemento radiactivo polónio 218 (Po218), quando colocada em repouso, reduz-se 37% a cada dois minutos.

Qual é o valor de k, arredondado às milésimas?

A $0{,}157$ **B** $0{,}231$

C $0{,}497$ **D** $0{,}655$

9. Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, considere $w_1 = 1 - 2i$ e w_2 tal que $(w_1)^2 \times \overline{w}_2$ pertence ao conjunto:

$$A = \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(z) = 0 \ \wedge \ \mathrm{Im}(z) > 0\}$$

Então, o afixo de w_2 pertence ao:

A primeiro quadrante. **B** segundo quadrante.

C terceiro quadrante. **D** quarto quadrante.

Proposta de Resolução:

Tem-se que $(w_1)^2 \times \overline{w}_2 = (1-2i)^2 \times \overline{w}_2 = (1 - 4i + 4i^2) \times \overline{w}_2 = (-3-4i) \times \overline{w}_2$. Como $(w_1)^2 \times \overline{w}_2 \in A$, vem que $(w_1)^2 \times \overline{w}_2 = 0 + bi$, com $b > 0$, pelo que:

$$(-3-4i) \times \overline{w}_2 = bi \Leftrightarrow \overline{w}_2 = \frac{bi}{-3-4i} \times \frac{-3+4i}{-3+4i} \Leftrightarrow \overline{w}_2 = \frac{-3bi + 4bi^2}{9 - 16i^2} \Leftrightarrow \overline{w}_2 = -\frac{4b}{25} - \frac{3b}{25}i \Leftrightarrow w_2 = -\frac{4b}{25} + \frac{3b}{25}i$$

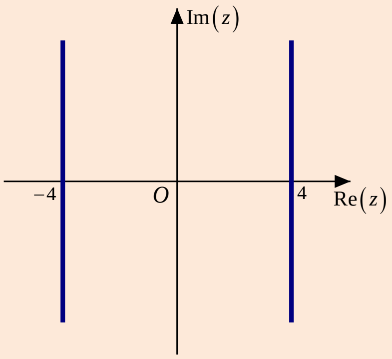
Como $b > 0$, vem que $\mathrm{Re}(w_2) = -\frac{4b}{25} < 0$ e $\mathrm{Im}(w_2) = \frac{3b}{25} > 0$, pelo que o afixo de w_2 pertence ao segundo quadrante.

Resposta: B

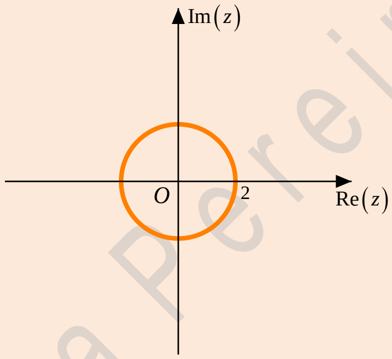
10. Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, considere a condição $(z+\overline{z})^2-(z-\overline{z})^2=16$.

Em qual das figuras pode estar representado, no plano complexo, o conjunto de pontos definido por esta condição?

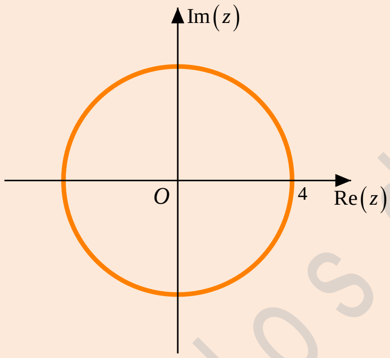
A



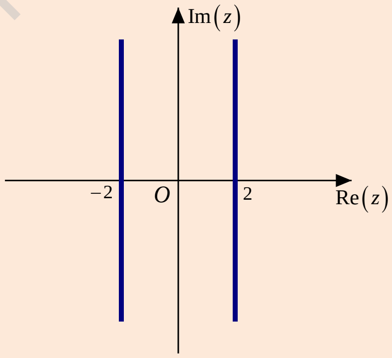
B



C



D



Proposta de Resolução:

Fazendo $z=x+yi$, vem que $(z+\overline{z})^2-(z-\overline{z})^2=16 \Leftrightarrow \left(x+\cancel{yi}+x-\cancel{yi}\right)^2-\left(\cancel{x}+yi-\cancel{x}+yi\right)^2=16 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow (2x)^2-(2yi)^2=16 \Leftrightarrow 4x^2-4y^2i^2=16 \underset{\div 4}{\Leftrightarrow} x^2+y^2=4$$

Logo, a condição define uma circunferência de raio 2 centrada na origem.

Resposta: B

F I M