



Matemática A

12.º Ano de Escolaridade • Turma: B + C + H

Aula de Apoio

maio de 2023

**Números complexos - Funções trigonométricas, exponenciais, logarítmicas - Sucessões,
Cálculo combinatório**

1. O novo sistema de matrículas dos automóveis é composto por uma sequência de duas letras, seguido de uma sequência de dois algarismos e terminando numa sequência de duas letras

Quantas matrículas podem ser constituídas neste sistema, considerando as 26 letras do alfabeto e os algarismos de 0 a 9?

2. Um código de um cofre é constituído por sete dígitos

Quantos códigos existem

- 2.1. com os dígitos todos diferentes?
- 2.2. que terminam num algarismo ímpar?
- 2.3. que terminam num algarismo par e não há repetição de algarismos?
- 2.4. que têm exatamente quatro algarismos iguais a 5?

3. Um grupo de amigos é constituído por cinco rapazes e quatro raparigas

Quatro desses amigos vão ficar responsáveis por organizar um passeio ao Porto

De quantas maneiras pode ser constituído esse grupo de quatro amigos,

- 3.1. se tiver tantos rapazes como raparigas?
- 3.2. se tiver pelo menos duas raparigas?
- 3.3. se tiver rapazes, mas no máximo três?

4. Seja \mathbb{C} , o conjunto dos números complexos e sejam $z_1 = 2e^{i\frac{3\pi}{4}}$ e $z_2 = 2e^{i\frac{\pi}{4}}$, dois números complexos

4.1. Representa o número complexo $\frac{\overline{-z_2} \times (1 - i)}{(z_1)^2}$ na forma trigonométrica e na forma algébrica

4.2. Determina o menor número natural n , de modo que $(z_2)^n$ seja um imaginário puro

4.3. Sabe-se que z_1 e z_2 são duas raízes índice n , consecutivas, de um número complexo z

Determina n e z

5. Seja \mathbb{C} , o conjunto dos números complexos

5.1. Resolve, em \mathbb{C} , a equação $z^4 + iz = 0$

Apresenta as soluções na forma trigonométrica

5.2. Representa, no plano complexo, o conjunto de pontos definido pela condição

$$|z - 2 - 2i| \geq |z + 2 + 2i| \wedge |z - i| \leq 2$$

6. Na Figura 1 está representado, em referencial ortonormado xOy , o trapézio $[ABCD]$, retângulo em A

Sabe-se que:

- a circunferência está centrada na origem O e tem raio 2
- o ponto B pertence à circunferência
- o ponto C pertence ao semieixo positivo Oy
- o ponto D é o ponto de interseção da circunferência com o semieixo positivo Ox

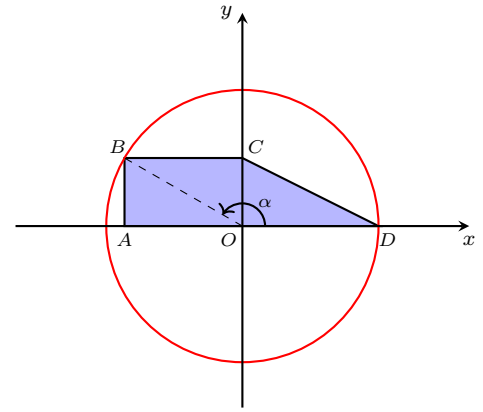


Figura 1

Tal como a figura sugere, o ponto B pertence ao segundo quadrante e o ângulo DOB de amplitude α , em radianos, tem por lado origem o semieixo positivo Ox e lado extremidade a semirreta \vec{OB} , com $\alpha \in \left] \frac{\pi}{2}; \pi \right[$

Resolve os itens seguintes, recorrendo exclusivamente a métodos analíticos

- 6.1. Mostra que a expressão que representa, em função de α , a área do trapézio $[ABCD]$ é

$$A(\alpha) = 2 \sin \alpha (1 - 2 \cos \alpha)$$

- 6.2. Para um certo valor de $\alpha \in \left] \frac{\pi}{2}; \pi \right[$, sabe-se que $\tan \alpha = -\frac{\sqrt{5}}{2}$

Determina o valor exato da área do trapézio $[ABCD]$

- 6.3. Determina o valor de $\alpha \in \left] \frac{\pi}{2}; \pi \right[$ para o qual a área do trapézio $[ABCD]$ é igual a $-8 \sin \alpha \cos \alpha$

7. Seja f , a função real, de variável real, definida no intervalo $[0, +\infty[$ por $f(x) = xe^{1-x} + 2$

Resolve os itens seguintes, recorrendo exclusivamente a métodos analíticos

- 7.1. O gráfico da função f apresenta uma assíntota horizontal de equação $y = b$

Determina b

- 7.2. Estuda a monotonia da função f , a existência de extremos relativos e, caso existam, determina-os

Na tua resposta, deves indicar o(s) intervalo(s) de monotonia

8. Considera a função g definida por

$$g(x) = \begin{cases} \frac{x-2}{\sqrt{2}-x} & \text{se } x < 2 \\ b+2 & \text{se } x = 2 \\ \frac{x^2 - 2x + a \ln(x-1)}{x-2} & \text{se } x > 2 \end{cases} \quad \text{com } a, b \in \mathbb{R}$$

Recorrendo exclusivamente a métodos analíticos, determina os valores, de a e de b , de modo que g seja contínua em $x = 2$

9. Seja f a função, de domínio $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, definida por $f(x) = \frac{\tan(-x)}{5x}$

Considera a sucessão de números reais (x_n) tal que $x_n = \frac{1}{n+1}$

Qual é o valor de $\lim (f(x_n))$?

- (A) -5 (B) $-\frac{1}{5}$ (C) 5 (D) $\frac{1}{5}$