



Matemática A

12.º Ano de Escolaridade • Turma: B + C + H

Aula de Apoio

março de 2023

Funções trigonométricas - Função exponencial - Função logaritmo - Números complexos

1. Seja \mathbb{C} , o conjunto dos números complexos

Resolve, em \mathbb{C} , cada uma das seguintes equações

1.1. $2z^2 - 2z + 1 = 0$

1.2. $z^3 - z^2 + 4z - 4 = 0$, sabendo que 1 é uma das soluções da equação

2. Seja \mathbb{C} , o conjunto dos números complexos e sejam $z_1 = -2 + 2i^{163}$ e $z_2 = -1$, dois números complexos

2.1. Seja $w = x + yi$, com $x, y \in \mathbb{R}$

Determina w , de modo que $wz_1 - 2i \times \overline{1+i} = \overline{w}z_2$

2.2. Escreve, na forma $a + bi$, com $a, b \in \mathbb{R}$, o número complexo $w = \frac{-i(\overline{z_1} - \overline{3+4i}) - 1 - i^4}{\overline{z_2} + 2i}$

3. Seja $f: \mathbb{R} \setminus \{1\} \rightarrow \mathbb{R}$, a função real, de variável real, definida por $f(x) = \frac{x - e^x}{x - 1}$

Em qual das opções está a equação da assíntota horizontal ao gráfico de f , quando $x \rightarrow -\infty$?

(A) $y = 2$

(B) $y = 1$

(C) $y = \frac{3}{2}$

(D) $y = \frac{4}{3}$

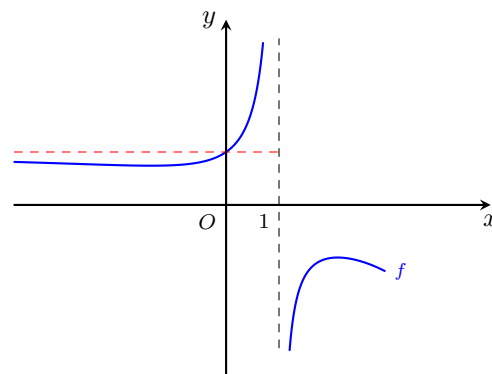


Figura 1

4. Seja g , a função real, de variável real, definida por

$$g(x) = (\sin(x-2) - \cos(x-2))(\sin(x-2) + \cos(x-2))\sin(2x-4)$$

4.1. Mostra que $g(x) = -\frac{1}{2}\sin(4x-8)$

4.2. Calcula $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{g(x)}{x^2 - 4}$

5. Calcula $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \ln(x+1)}{2e - 2e^{x+1}}$

6. Seja f , a função real, de variável real, definida por $f(x) = 2 \cos x - 1$

Calcula $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{-f(x)}{\sin\left(2x - \frac{2\pi}{3}\right)}$

7. Seja f , uma função real, de variável real, de domínio \mathbb{R}

Sabe-se que a função f' , função derivada de f , tem domínio \mathbb{R} , e é definida por $f'(x) = (x^2 + x)e^{2x}$

Resolve, analiticamente, os quatro itens seguintes

7.1. Determina o conjunto-solução da condição $f'(x) \geq 2e^{2x}$

7.2. Escreve a equação reduzida da reta tangente ao gráfico da função $f'(x)$, no ponto de abscissa 1

7.3. Estuda a função f quanto à monotonia e existência de extremos relativos, e determina esses extremos, caso existam

Na tua resposta, apresenta o(s) intervalo(s) de monotonia

7.4. Estuda a função f , quanto ao sentido das concavidades e existência de pontos de inflexão do seu gráfico

8. Resolve, em \mathbb{R} , a condição $\ln(1 - 2x)3^x + 3^x \ln(-x) < \frac{\ln 2}{3-x}$

9. Considera a circunferência trigonométrica, representada num plano munido de um referencial ortonormado xOy , como se observa na figura 2

Sabe-se que:

- $E(1; 0)$
- os pontos A e D pertencem à circunferência
- os pontos A e D são simétricos em relação ao eixo Oy
- os pontos A e B , têm a mesma abscissa
- os pontos B e C são simétricos em relação ao eixo Oy
- os pontos B e C têm ordenada 1
- o ponto A move-se no segundo quadrante, e os pontos B , C e D acompanham esse movimento
- $\widehat{EOA} = x$, com $x \in \left] \frac{\pi}{2}; \pi \right[$

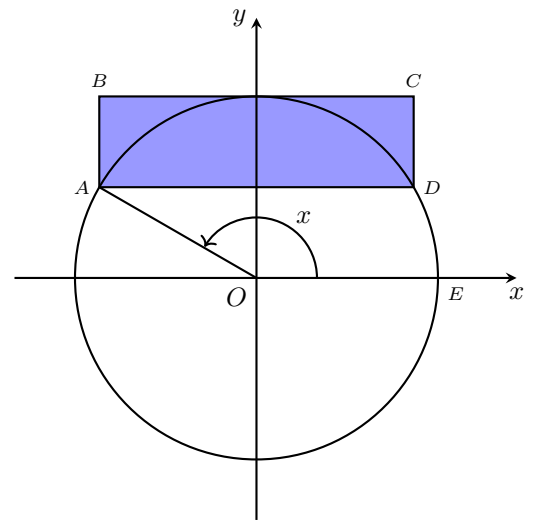


Figura 2

Resolve, analiticamente, os três itens seguintes

9.1. Mostra que a área do retângulo $[ABCD]$, é dada, em função de x , por

$$A(x) = -2 \cos(x) + \sin(2x), \text{ com } x \in \left] \frac{\pi}{2}; \pi \right[$$

9.2. Para certo $\alpha \in \left] \frac{\pi}{2}; \pi \right[$, sabe-se que $\cos(\pi - \alpha) = \frac{1}{5}$

Determina a área do retângulo $[ABCD]$, para esse valor de α

9.3. Para certo $x \in \left] \frac{\pi}{2}; \pi \right[$, sabe-se que $A(x) = -\cos x$

Determina esse valor de x