Funções (12.º ano)

Funções trigonométricas

Exercícios de Provas Nacionais e Testes Intermédios - Propostas de resolução

1. Como a função f é contínua em $x = 1$, temos que:

$$f(1) = \lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^-} f(x)$$

Assim, temos que:

- $f(1) = 1 - 2 + \ln(3 - 2(1)) = 1 - 2 + \ln(1) = -1 + 0 = -1$
- $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} \left(\dfrac{\operatorname{sen}(x-1)}{1-x^2} + k \right) = \dfrac{\operatorname{sen}(1-1)}{1-1^2} + k = \dfrac{0}{0} + k$ (Indeterminação)

(fazendo $y = x - 1$, se $x \to 1$, então $y \to 0$, e observando que $1 - x^2 = 1^2 - x^2 = (1-x)(1+x) = -(x-1)(x+1)$)

$$\lim_{x \to 1^+} \left(\frac{\operatorname{sen}(x-1)}{1-x^2} + k \right) = \lim_{x \to 1^+} \left(\frac{\operatorname{sen}(x-1)}{-(x-1)(x+1)} + k \right) = \lim_{x \to 1^+} \left(\frac{\operatorname{sen}(x-1)}{x-1} \times \frac{1}{-(x+1)} + k \right) =$$

$$= \lim_{x \to 1^+} \frac{\operatorname{sen}(x-1)}{x-1} \times \lim_{x \to 1^+} \frac{1}{-(x+1)} + \lim_{x \to 1^+} k = \underbrace{\lim_{y \to 0} \frac{\operatorname{sen} y}{y}}_{\text{Lim. Notável}} \times \frac{1}{-(1+1)} + k = 1 \times \left(-\frac{1}{2} \right) + k = -\frac{1}{2} + k$$

Como a função é contínua em $x = 1$, podemos determinar o valor de k:

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = f(1) \Leftrightarrow -\frac{1}{2} + k = -1 \Leftrightarrow k = -1 + \frac{1}{2} \Leftrightarrow k = -\frac{2}{2} + \frac{1}{2} \Leftrightarrow k = -\frac{1}{2}$$

Exame – 2021, Ép. especial

2. Recorrendo às regras operatórias de logaritmos, e observando que $\operatorname{sen}(2x) = 2 \operatorname{sen} x . \cos x$, temos:

$$g(x) = \log_2(1 - \cos x) + \log_2(1 + \cos x) + 2\log_2(2\cos x) = \log_2\big((1-\cos x)(1+\cos x)\big) + \log_2(2\cos x)^2 =$$

$$= \log_2(1 + \cos x - \cos x - \cos^2 x) + \log_2(4\cos^2 x) = \log_2(1 + \cos^2 x) + \log_2(4\cos^2 x) =$$

$$= \log_2(\operatorname{sen}^2 x) + \log_2(4\cos^2 x) = \log_2(2^2 \operatorname{sen}^2 x . \cos^2 x) = \log_2(2 \operatorname{sen} x . \cos x)^2 =$$

$$= \log_2 \big(\operatorname{sen}(2x)\big)^2 = 2\log_2 \big(\operatorname{sen}(2x)\big)$$

Exame – 2021, Ép. especial

3. Começamos por determinar a expressão da derivada da função h:

$$h'(x) = \left(\operatorname{sen} x + \cos^2 x\right)' = \left(\operatorname{sen} x\right)' + \left(\cos x \times \cos x\right)' = \cos x + (\cos x)' \times \cos x + \cos(x) \times (\cos x)' =$$

$$= \cos x + (-\operatorname{sen} x) \times \cos x + \cos(x) \times (-\operatorname{sen} x) = \cos x - 2\operatorname{sen} x \cos x = \cos x(1 - 2\operatorname{sen} x)$$

Calculando os zeros da derivada, no domínio da função ($\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$), vem:

$$h'(x) = 0 \Leftrightarrow \cos x(1 - 2\operatorname{sen} x) = 0 \Leftrightarrow \cos x = 0 \vee 1 - 2\operatorname{sen} x = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cos x = 0 \vee -2\operatorname{sen} x = -1 \Leftrightarrow \cos x = 0 \vee \operatorname{sen} x = \frac{1}{2}$$

Como $x \in \left[0,\frac{\pi}{2}\right[$, temos:

- $\cos x > 0$, pelo que $\cos x = 0$ é uma condição impossível
- $\operatorname{sen} x = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{\pi}{6}$

Assim, temos que $h'(x)$ tem um zero em $\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$ e estudando a variação do sinal da derivada e relacionando com a monotonia da função, vem:

x	0		$\frac{\pi}{6}$		$\frac{\pi}{2}$
$\cos x$	$+$	$+$	$+$	$+$	n.d.
$1 - 2\operatorname{sen} x$	$+$	$+$	0	$-$	n.d.
h'	$+$	$+$	0	$-$	n.d.
h	min.	$\nearrow$	Máx	$\searrow$	n.d.

Assim, podemos concluir que a função h:

- é crescente no intervalo $\left[0,\frac{\pi}{6}\right]$;
- é decrescente no intervalo $\left[\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2}\right[$;
- tem um minimo relativo para $x = 0$, cujo valor é:

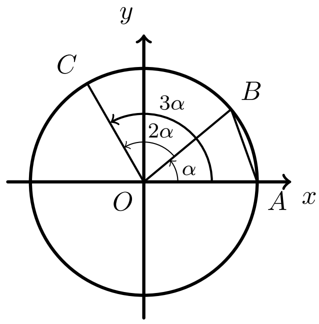
$$h\left(0\right) = \operatorname{sen} 0 + \cos^2 0 = 0 + (1)^2 = 0 + 1 = 1$$

- tem um máximo relativo para $x = \frac{\pi}{6}$, cujo valor é:

$$h\left(\frac{\pi}{6}\right) = \operatorname{sen}\frac{\pi}{6} + \cos^2\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{1}{2} + \frac{3}{4} = \frac{2}{4} + \frac{3}{4} = \frac{5}{4}$$

Exame – 2021, 2.ª Fase

4. Designado a amplitude do ângulo AOBpor α,temos que:
   - $A\hat{O}B = \alpha$
   - $B\hat{O}C = 2 \times A\hat{O}B = 2\alpha$
   - $A\hat{O}C = A\hat{O}B + B\hat{O}C = \alpha + 2\alpha = 3\alpha$



Como o triângulo $[AOB]$ tem área k, considerando o lado $[OA]$ como a base, temos que a altura é $\operatorname{sen}\alpha$, pelo que:

$$A_{[AOB]} = k \Leftrightarrow \frac{\overline{OA} \times \operatorname{sen}\alpha}{2} = k \Leftrightarrow 1 \times \operatorname{sen}\alpha = 2k \Leftrightarrow \operatorname{sen}\alpha = 2k$$

E assim, vem que:

$$\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \Leftrightarrow (2k)^2 + \cos^2\alpha = 1 \Leftrightarrow \cos^2\alpha = 1 - 4k^2$$

Como a ordenada do ponto C é $\operatorname{sen}(3\alpha)$, e como:
- $\operatorname{sen}(3\alpha) = \operatorname{sen}(2\alpha + \alpha)$
- $\operatorname{sen}(\alpha + \beta) = \operatorname{sen}\alpha\cos\beta + \operatorname{sen}\beta\cos\alpha$
- $\operatorname{sen}(2\alpha) = 2\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha$
- $\cos(2\alpha) = \cos^2\alpha - \operatorname{sen}^2\alpha$

Então, vem que:

$$\begin{aligned} y_C &= \operatorname{sen}(3\alpha) = \operatorname{sen}(2\alpha + \alpha) = \\ &= \operatorname{sen}(2\alpha)\cos\alpha + \operatorname{sen}\alpha\cos(2\alpha) = \\ &= 2\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha \times \cos\alpha + \operatorname{sen}\alpha\big(\cos^2\alpha - \operatorname{sen}^2\alpha\big) = \\ &= 2\operatorname{sen}\alpha\cos^2\alpha + 2k \times \big(1 - 4k^2 - (2k)^2\big) = \\ &= 2 \times 2k \times (1 - 4k^2) + 2k(1 - 4k^2 - 4k^2) = \\ &= 4k(1 - 4k^2) + 2k(1 - 8k^2) = \\ &= 4k - 16k^3 + 2k - 16k^3 = \\ &= 6k - 32k^3 \end{aligned}$$

Exame – 2021, 2.ª Fase

5. Começamos por determinar a expressão da derivada da função g:

$$g'(x) = \big(x\cos x + \operatorname{sen} x\big)' = \big(x\cos x\big)' + \big(\operatorname{sen} x\big)' = (x)'\cos x + x(\cos x)' + \cos x =$$

$$= \cos x + x(-\operatorname{sen} x) + \cos x = 2\cos x - x\operatorname{sen} x$$

Como o declive da reta tangente ao gráfico num ponto corresponde ao valor da função derivada nesse ponto, mostrar, que existe pelo menos um ponto pertencente ao gráfico da função g tal que a reta tangente ao gráfico da função nesse ponto tem declive $-\frac{1}{2}$ é equivalente a mostrar que a equação $g'(x) = -\frac{1}{2}$ tem pelo menos uma solução.

Como $g'(x)$ resulta da soma e de produtos de funções contínuas, então é contínua no domínio, ou seja, é contínua em $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$

Como $-\frac{\pi}{2} < -\frac{1}{2} < \frac{3\pi}{2}$, ou seja, $g'\left(\frac{\pi}{2}\right) < -\frac{1}{2} < g'\left(\frac{3\pi}{2}\right)$, então, podemos concluir, pelo Teorema de Bolzano, que existe $c \in \left]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right[$ tal que $g'(c) = -\frac{1}{2}$, ou seja, que existe pelo menos um ponto pertencente ao gráfico da função g tal que a reta tangente ao gráfico da função nesse ponto tem declive $-\frac{1}{2}$

C.A.

$g'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2cos\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} \times \operatorname{sen}\frac{\pi}{2} =$
$= 2 \times 0 - \frac{\pi}{2} \times 1 = 0 - \frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{2}$

$g'\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 2cos\frac{3\pi}{2} - \frac{3\pi}{2} \times \operatorname{sen}\frac{3\pi}{2} =$
$= 2 \times 0 - \frac{3\pi}{2} \times (-1) = 0 + \frac{3\pi}{2} = \frac{3\pi}{2}$

Exame – 2021, 1.ª Fase

6. Determinando as abcissas dos pontos de interseção temos:

$$f(x) = g(x) \Leftrightarrow k\,\text{sen}\,(2x) = k\cos x \Leftrightarrow k\,\text{sen}\,(2x) = k\cos x \Leftrightarrow 2\,\text{sen}\,x\cos x = \frac{k\cos x}{k} \underset{k\neq 0}{\Leftrightarrow}$$

$$\Leftrightarrow 2\,\text{sen}\,x\cos x = \cos x \Leftrightarrow 2\,\text{sen}\,x\cos x - \cos x = 0 \Leftrightarrow \cos x(2\,\text{sen}\,x - 1) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cos x = 0 \lor 2\,\text{sen}\,x - 1 = 0 \Leftrightarrow \cos x = 0 \lor \text{sen}\,x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi \lor x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \lor x = \pi - \frac{\pi}{6} + 2k,\ k \in \mathbb{Z}$$

Atribuindo os valores -1 e 0 obtemos as três soluções da equação que pertencem ao domínio das funções $\left(\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]\right)$:

$$x = -\frac{\pi}{2} \lor x = \frac{\pi}{6} \lor x = \frac{\pi}{2}$$

Assim, podemos determinar as ordenadas dos pontos de interseção:

- $g\left(-\frac{\pi}{2}\right) = k\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) = k \times 0 = 0 \quad \left(A\left(-\frac{\pi}{2},0\right)\right)$
- $g\left(\frac{\pi}{6}\right) = k\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = ktimes\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{k\sqrt{3}}{2} \quad \left(B\left(\frac{\pi}{6},\frac{k\sqrt{3}}{2}\right)\right)$
- $g\left(\frac{\pi}{2}\right) = k\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = k \times 0 = 0 \quad \left(C\left(\frac{\pi}{2},0\right)\right)$

Como o triângulo $[ABC]$ é retângulo em B, temos que $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC} = 0$

Calculando as coordenadas dos vetores indicados, temos:

- $\overrightarrow{BA} = A - B = \left(-\frac{\pi}{2},0\right) - \left(\frac{\pi}{6},\frac{k\sqrt{3}}{2}\right) = \left(-\frac{3\pi}{6} - \frac{\pi}{6}, -\frac{k\sqrt{3}}{2}\right) = \left(-\frac{4\pi}{6}, -\frac{k\sqrt{3}}{2}\right) = \left(-\frac{2\pi}{3}, -\frac{k\sqrt{3}}{2}\right)$
- $\overrightarrow{BC} = C - B = \left(\frac{\pi}{2},0\right) - \left(\frac{\pi}{6},\frac{k\sqrt{3}}{2}\right) = \left(\frac{3\pi}{6} - \frac{\pi}{6}, -\frac{k\sqrt{3}}{2}\right) = \left(\frac{2\pi}{6}, -\frac{k\sqrt{3}}{2}\right) = \left(\frac{\pi}{3}, -\frac{k\sqrt{3}}{2}\right)$

E assim, calculamos o valor de k:

$$\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC} = 0 \Leftrightarrow \left(-\frac{2\pi}{3}, -\frac{k\sqrt{3}}{2}\right).\left(\frac{\pi}{3}, -\frac{k\sqrt{3}}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow -\frac{2\pi}{3} \times \frac{\pi}{3} + \left(-\frac{k\sqrt{3}}{2}\right) \times \left(-\frac{k\sqrt{3}}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -\frac{2\pi^2}{9} + \left(-\frac{k\sqrt{3}}{2}\right)^2 = 0 \Leftrightarrow -\frac{2\pi^2}{9} + \frac{k^2 \times 3}{4} = 0 \Leftrightarrow \frac{3k^2}{4} = \frac{2\pi^2}{9} \Leftrightarrow k^2 = \frac{2\pi^2 \times 4}{9 \times 3} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow k^2 = \frac{8\pi^2}{27} \underset{k>0}{\Leftrightarrow} k = \sqrt{\frac{8\pi^2}{27}} \Leftrightarrow k = \sqrt{\frac{8}{27}}\pi$$

Exame – 2021, 1.ª Fase

7. Como o domínio da função é $\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$, não existem assíntotas não verticais.

   E como a função resulta de operações com funções contínuas em, as retas $\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$, as retas definida por $x=0$ e $x=\frac{\pi}{2}$ são as únicas retas que podem ser assíntotas do gráfico de f

   Assim temos que:

   $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{e^{2x}-1}{\operatorname{tg} x} = \frac{e^{2\times 0}-1}{\operatorname{tg} 0} = \frac{0}{0}$ (Indeterminação)

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{e^{2x}-1}{2x}}{\frac{\operatorname{tg} x}{2x}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{e^{2x}-1}{2x}}{\frac{\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}}{2x}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{e^{2x}-1}{2x}}{\frac{\operatorname{sen} x}{2x\cos x}} = \frac{\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{e^{2x}-1}{2x}}{\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\frac{\operatorname{sen} x}{x}\times\frac{1}{2\cos x}\right)} =$$

   (fazendo $y=2x$, temos que se $x\to 0^+$, então $y\to 0^+$)

$$= \frac{\underbrace{\lim\limits_{y\to 0^+}\frac{e^{y}-1}{y}}_{\text{Lim. Notável}}}{\underbrace{\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\operatorname{sen} x}{x}}_{\text{Lim. Notável}}\times\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{1}{2\cos x}} = \frac{1}{1\times\frac{1}{2\times\cos 0}} = \frac{1}{\frac{1}{2\times 1}} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$$

   Pelo que a reta $x=0$ não é uma assíntota vertical do gráfico de f

   Da mesma forma, temos que:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} f(x) = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} \frac{e^{2x}-1}{\operatorname{tg} x} = \frac{e^{2\times\frac{\pi}{2}}-1}{\operatorname{tg}\frac{\pi}{2}^-} = \frac{e^{\pi}-1}{+\infty} = 0$$

   Pelo que a reta $x=\frac{\pi}{2}$ também não é uma assíntota vertical do gráfico de f e assim podemos concluir que o gráfico de f não tem qualquer assíntota.

Exame – 2020, Ép. especial

8.

8.1. Como:

- $h\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{5}{4+3\cos\left(2\times\frac{\pi}{6}\right)} = \frac{5}{4+3\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)} = \frac{5}{4+3\times\frac{1}{2}} = \frac{5}{4+\frac{3}{2}} = \frac{10}{11}$
- $h\left(\frac{7\pi}{6}\right) = \frac{5}{4+3\cos\left(2\times\frac{7\pi}{6}\right)} = \frac{5}{4+3\cos\left(\frac{14\pi}{6}\right)} = \frac{5}{4+3\cos\left(\frac{14\pi}{6}-2\pi\right)} = \frac{5}{4+3\cos\left(\frac{2\pi}{6}\right)} =$

$$= \frac{5}{4+3\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)} = \frac{5}{4+3\times\frac{1}{2}} = \frac{5}{4+\frac{3}{2}} = \frac{10}{11}$$

Calculando a taxa média de variação da função h no intervalo $\left[\frac{\pi}{6}\,;\,\frac{7\pi}{6}\right]$, temos:

$$\text{TVM}_{\left[\frac{\pi}{6}\,;\,\frac{7\pi}{6}\right]} = \frac{h\left(\frac{7\pi}{6}\right) - h\left(\frac{\pi}{6}\right)}{\frac{7\pi}{6}-\frac{\pi}{6}} = \frac{\frac{11}{10}-\frac{11}{10}}{\frac{6\pi}{6}} = \frac{0}{\pi} = 0$$

Resposta: **Opção C**

8.2. As abcissas dos pontos do gráfico da função h, pertencentes ao intervalo $]-\pi,\pi[$, cuja ordenada é 2 são as soluções da equação $h(x)=2$ que pertencem ao intervalo.

Assim, resolvendo a equação, temos:

$$h(x)=2 \Leftrightarrow \frac{5}{4+3\cos(2x)} = 2 \underset{4+3\cos(2x)\neq 0}{\Leftrightarrow} 5 = 2(4+3\cos(2x)) \Leftrightarrow 5 = 8+6\cos(2x) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 5-8 = 6\cos(2x) \Leftrightarrow -\frac{3}{6} = \cos(2x) \Leftrightarrow \cos(2x) = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos(2x) = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cos(2x) = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) \Leftrightarrow 2x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \vee 2x = -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi, k\in\mathbb{Z} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{2\pi}{2\times 3} + \frac{2k\pi}{2} \vee x = -\frac{2\pi}{2\times 3} + \frac{2k\pi}{2}, k\in\mathbb{Z} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3} + k\pi \vee x = -\frac{\pi}{3} + k\pi, k\in\mathbb{Z}$$

Como se pretende identificar as soluções do intervalo $]-\pi,\pi[$, atribuindo valores inteiros a k para identificar as soluções no intervalo definido, temos:

- $k=-1 \to x = \frac{\pi}{3} - \pi = -\frac{2\pi}{3} \vee x = -\frac{\pi}{3} - \pi = -\frac{4\pi}{3} \quad \left(-\frac{4\pi}{3} \notin]-\pi,\pi[\right)$
- $k=0 \to x = \frac{\pi}{3} \vee x = -\frac{\pi}{3}$
- $k=1 \to x = \frac{\pi}{3} + \pi = -\frac{4\pi}{3} \vee x = -\frac{\pi}{3} + \pi = \frac{2\pi}{3} \quad \left(\frac{4\pi}{3} \notin]-\pi,\pi[\right)$

Assim, existem quatro pontos no intervalo dado cuja ordenada 2, ou seja, os pontos cujas abcissas são:

$$-\frac{2\pi}{3}\,;\,-\frac{\pi}{3}\,;\,\frac{\pi}{3} \text{ e } \frac{2\pi}{3}$$

Exame – 2020, Ép. especial

9.

9.1. Temos que: $(f \circ g)(x) = f\big(g(x)\big) = f\big(\cos(x)\big) = \big(\cos(x)\big)^2 = \cos^2 x$

Como o declive da reta tangente num ponto é dado pelo valor da função derivada nesse ponto, determinamos a derivada da função $f \circ g$:

$$(f \circ g)'(x) = (\cos^2 x)' = \big((\cos x)(\cos x)\big)' = (\cos x)'(\cos x) + (\cos x)(\cos x)' = 2(\cos x)'(\cos x) =$$

$$= 2(-\operatorname{sen} x)(\cos x) = -2 \operatorname{sen} x \cos x$$

E assim, o declive da reta tangente no ponto de abcissa $\frac{\pi}{4}$ é:

$$(f \circ g)'\left(\frac{\pi}{4}\right) = -2 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right) \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = -2 \times \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = -2 \times \frac{2}{4} = -\frac{4}{4} = -1$$

Resposta: **Opção B**

9.2.

Como $f(x) = g(x) \Leftrightarrow f(x) - g(x) = 0$ e as funções f e g são ambas contínuas em $\mathbb{R}$, então a função $f - g$ também é contínua em $\mathbb{R}$, e em particular é contínua em $\left[0, \frac{\pi}{3}\right]$.

Como $-1 < 0 < 0{,}6$, ou seja, $f(0) - g(0) < 0 < f\left(\frac{\pi}{3}\right) - g\left(\frac{\pi}{3}\right)$, então, podemos concluir, pelo Teorema de Bolzano, que existe $c \in \left]0, \frac{\pi}{3}\right[$ tal que $f(c) - g(c) = 0$, ou seja, que a equação $f(x) - g(x) = 0$ e também a equação $f(x) = g(x)$ têm, pelo menos, uma solução em $\left]0, \frac{\pi}{3}\right[$

C.A.

$f(0) - g(0) = 0^2 - \cos 0 = 0 - 1 = -1$

$f\left(\frac{\pi}{3}\right) - g\left(\frac{\pi}{3}\right) = \left(\frac{\pi}{3}\right)^2 - \cos\frac{\pi}{3} \approx 0{,}6$

Exame – 2020, 1.ª Fase

10. Para averiguar se a função h é contínua em $x=1$, temos que verificar se $h(1)=\lim\limits_{x\to 1^-} h(x)=\lim\limits_{x\to 1^+} h(x)$

- $h(1)=1+1\times e^{1-1}=1+e^0=1+1=2$
- $\lim\limits_{x\to 1^-} h(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}\left(1+xe^{x-1}\right)=1+1\times e^{1-1}=1+e^0=1+1=2$
- $\lim\limits_{x\to 1^+} h(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{\sqrt{x}-1}{\operatorname{sen}(x-1)}=\dfrac{\sqrt{1}-1}{\operatorname{sen}(1-1)}=\dfrac{1-1}{\operatorname{sen}0}=\dfrac{0}{0}$ (Indeterminação)

  (fazendo $y=x-1$, temos $x=y+1$ e se $x\to 1^+$, então $y\to 0^+$)

$$\lim_{x\to 1^+} h(x)=\lim_{y\to 0^+}\frac{\sqrt{y+1}-1}{\operatorname{sen}y}=\lim_{y\to 0^+}\frac{\frac{\sqrt{y+1}-1}{y}}{\frac{\operatorname{sen}y}{y}}=\frac{\lim\limits_{y\to 0^+}\frac{(\sqrt{y+1}-1)(\sqrt{y+1}+1)}{y(\sqrt{y+1}+1)}}{\lim\limits_{y\to 0^-}\frac{\operatorname{sen}y}{y}}=$$

$$=\frac{\lim\limits_{y\to 0^+}\frac{(\sqrt{y+1})^2-1^2)}{y(\sqrt{y+1}+1)}}{\lim\limits_{y\to 0^-}\frac{\operatorname{sen}y}{y}}=\frac{\lim\limits_{y\to 0^+}\frac{y+1-1}{y(\sqrt{y+1}+1)}}{\lim\limits_{y\to 0^-}\frac{\operatorname{sen}y}{y}}=\frac{\lim\limits_{y\to 0^+}\frac{y}{y(\sqrt{y+1}+1)}}{\lim\limits_{y\to 0^-}\frac{\operatorname{sen}y}{y}}=\frac{\lim\limits_{y\to 0^+}\frac{1}{\sqrt{y+1}+1}}{\underbrace{\lim\limits_{y\to 0^-}\frac{\operatorname{sen}y}{y}}_{\text{Lim. Notável}}}=$$

$$=\frac{\frac{1}{\sqrt{0+1}+1}}{1}=\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}$$

Assim, temos que, como $\lim\limits_{x\to 1^-} h(x)\neq\lim\limits_{x\to 1^+} h(x)$, a função h não é contínua em $x=1$

Exame – 2020, 1.ª Fase

11. Para averiguar se a função g é contínua em $x=0$, temos que verificar se $g(0)=\lim\limits_{x\to 0^-} g(x)=\lim\limits_{x\to 0^+} g(x)$

- $g(0)=0$
- $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\left(x^2\ln x\right)=0\times(-\infty)$ (Indeterminação)

  (fazendo $y=\dfrac{1}{x}$, temos $x=\dfrac{1}{y}$ e se $x\to 0^+$, então $y\to+\infty$)

$$\lim_{x\to 0^+}\left(x^2\ln x\right)=\lim_{y\to+\infty}\left(\left(\frac{1}{y}\right)^2\times\ln\frac{1}{y}\right)=\lim_{y\to+\infty}\left(\frac{1}{y^2}\times(\ln 1-\ln y)\right)=\lim_{y\to+\infty}\left(-\frac{\ln y}{y^2}\right)=$$

$$=-\lim_{y\to+\infty}\left(\frac{\ln y}{y^2}\right)=-\lim_{y\to+\infty}\left(\frac{\ln y}{y}\times\frac{1}{y}\right)=-\underbrace{\lim_{y\to+\infty}\frac{\ln y}{y}}_{\text{Lim. Notável}}\times\lim_{y\to+\infty}\frac{1}{y}=-0\times\frac{1}{+\infty}=0\times 0^+=0$$

- $\lim\limits_{x\to 0^-} g(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\left(1+\dfrac{\operatorname{sen}x}{1-e^x}\right)=1+\dfrac{\operatorname{sen}0}{1-e^0}=1+\dfrac{0}{0}$ (Indeterminação)

$$\lim_{x\to 0^-} g(x)=\lim_{x\to 0^-}\left(1+\frac{\operatorname{sen}x}{1-e^x}\right)=\lim_{x\to 0^-}1+\lim_{x\to 0^-}\frac{\operatorname{sen}x}{1-e^x}=1+\lim_{x\to 0^-}\frac{\operatorname{sen}x}{-(-1+e^x)}=$$

$$=1+\lim_{x\to 0^-}\frac{\frac{\operatorname{sen}x}{x}}{-\frac{e^x-1}{x}}=1+\frac{\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{\operatorname{sen}x}{x}}{\lim\limits_{x\to 0^-}\left(-\frac{e^x-1}{x}\right)}=1+\frac{\underbrace{\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{\operatorname{sen}x}{x}}_{\text{Lim. Notável}}}{-\underbrace{\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{e^x-1}{x}}_{\text{Lim. Notável}}}=1+\frac{1}{-1}=1-1=0$$

Como $g(0)=\lim\limits_{x\to 0^+} g(x)=\lim\limits_{x\to 0^-} g(x)$, a função g é contínua em $x=0$

Exame – 2020, 1.ª Fase

12.

12.1. Como $\operatorname{sen}(\pi - x) = \operatorname{sen} x$ e $\cos(\pi - x) = -\cos x$, calculando o valor do limite, temos:

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(\pi - x)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{\operatorname{sen}(\pi - x)}{2+\cos(\pi - x)}}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{\operatorname{sen} x}{2-\cos x}}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} x}{x(2-\cos x)} = \frac{\operatorname{sen} 0^+}{0(2-\cos 0)} = \frac{0}{0} \text{ (Indet.)}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} x}{x(2-\cos x)} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{\operatorname{sen} x}{x} \times \frac{1}{2-\cos x}\right) = \underbrace{\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} x}{x}}_{\text{Lim. Notável}} \times \lim_{x\to 0}\frac{1}{2-\cos x} =$$

$$= 1 \times \frac{1}{2-\cos 0} = 1 \times \frac{1}{2-1} = 1 \times \frac{1}{1} = 1$$

12.2. Começamos por determinar a expressão da derivada da função f, no intervalo $]0,\pi[$:

$$f'(x) = \left(\frac{\operatorname{sen} x}{2+\cos x}\right)' = \frac{(\operatorname{sen} x)'(2+\cos x) - \operatorname{sen} x\,(2+\cos x)'}{(2+\cos x)^2} =$$

$$= \frac{\cos x(2+\cos x) - \operatorname{sen} x\,((2)' + (\cos x)')}{(2+\cos x)^2} = \frac{2\cos x + \cos^2 x - \operatorname{sen} x\,(0 - \operatorname{sen} x)}{(2+\cos x)^2} =$$

$$= \frac{2\cos x + \cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x}{(2+\cos x)^2} = \frac{2\cos x + 1}{(2+\cos x)^2}$$

Calculando os zeros da derivada, no domínio da função ($]0,\pi[$), vem:

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{2\cos x + 1}{(2+\cos x)^2} = 0 \Leftrightarrow 2\cos x + 1 = 0 \wedge \underbrace{(2+\cos x)^2 \neq 0}_{\text{condição universal}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2\cos x = -1 \Leftrightarrow \cos x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos x = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) \Leftrightarrow \cos x = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) \Leftrightarrow$$

$$x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \vee x = -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Como se pretende identificar os valores de $x \in]0,\pi[$, atribuindo valores inteiros a k para identificar as soluções no intervalo definido, temos:

- $k = 0 \rightarrow x = \frac{2\pi}{3} \vee x = -\frac{2\pi}{3} \quad \left(-\frac{2\pi}{3} \notin]0,\pi[\right)$
- $k = 1 \rightarrow x = \frac{2\pi}{3} + 2\pi \vee x = -\frac{2\pi}{3} + 2\pi = -\frac{2\pi}{3} + \frac{6\pi}{3} = \frac{4\pi}{3} \quad \left(\frac{2\pi}{3} + 2\pi \notin]0,\pi[\quad \text{e} \quad \frac{4\pi}{3} \notin]0,\pi[\right)$

Assim, temos que $f'(x)$ tem um zero em $]0,\pi]$ e estudando a variação do sinal da derivada e relacionando com a monotonia da função, vem:

x	0		$\frac{2\pi}{3}$		π
$2\cos x + 1$	n.d.	$+$	0	$-$	n.d.
$(2+\cos x)^2$	n.d.	$+$	$+$	$+$	n.d.
f'	n.d.	$+$	0	$-$	n.d.
f	n.d.	$\nearrow$	Máx	$\searrow$	n.d.

Cálculos auxiliares:

$$f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{2\cos\frac{\pi}{2} + 1}{\left(2+\cos\frac{\pi}{2}\right)^2} = \frac{2\times 0 + 1}{(2+0)^2} =$$
$$= \frac{1}{4} > 0$$

$$f'\left(\frac{5\pi}{6}\right) = \frac{2\cos\frac{5\pi}{6} + 1}{\left(2+\cos\frac{5\pi}{6}\right)^2} =$$
$$= \frac{2\times\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + 1}{(2+\frac{\sqrt{3}}{2})^2} = \frac{-\sqrt{3}+1}{\left(\frac{4+\sqrt{3}}{4}\right)^2} < 0$$

Assim, podemos concluir que a função f, no intervalo $]0,\pi[$:

- é crescente no intervalo $\left]0, \frac{2\pi}{3}\right]$;
- é decrescente no intervalo $\left[\frac{2\pi}{3}, \pi\right[$;
- tem um máximo relativo para $x = \frac{2\pi}{3}$, cujo valor é:

$$f\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \frac{\operatorname{sen}\frac{2\pi}{3}}{2+\cos\frac{2\pi}{3}} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{2-\frac{1}{2}} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{3}{2}} = \frac{2\sqrt{3}}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Exame – 2019, Ép. especial

13.

13.1. Para estudar o sentido das concavidades do gráfico e a existência de pontos de inflexão, vamos determinar a expressão da segunda derivada, pelo que começamos por determinar g':

$$g'(x) = \left(\frac{1}{4}\cos(2x) - \cos x\right)' = \left(\frac{1}{4}\cos(2x)\right)' - (\cos x)' = \frac{1}{4}\left(\cos(2x)\right)' - (-\operatorname{sen} x) =$$

$$= \frac{1}{4}\left(-(2x)'\operatorname{sen}(2x)\right) + \operatorname{sen} x = \frac{1}{4} \times (-2) \times \operatorname{sen}(2x) + \operatorname{sen} x = -\frac{1}{2}\operatorname{sen}(2x) + \operatorname{sen} x$$

Assim, determinando g'', temos que:

$$g''(x) = (g'(x))' = \left(-\frac{1}{2}\operatorname{sen}(2x) + \operatorname{sen} x\right)' = \left(-\frac{1}{2}\operatorname{sen}(2x)\right)' + (\operatorname{sen} x)' = -\frac{1}{2}\left(\operatorname{sen}(2x)\right)' + \cos x =$$

$$= -\frac{1}{2}\left((2x)'\cos(2x)\right) + \cos x = -\frac{1}{2} \times 2 \times \cos(2x) + \cos x = -\cos(2x) + \cos x$$

Como os pontos de inflexão são zeros da segunda derivada, vamos determiná-los:

$$g''(x) = 0 \Leftrightarrow -\cos(2x) + \cos x = 0 \Leftrightarrow \cos x = \cos(2x) \Leftrightarrow x = 2x + 2k\pi \vee x = -2x + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x - 2x = 2k\pi \vee x + 2x = 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow -x = 2k\pi \vee 3x = 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = -2k\pi \vee x = \frac{2k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$$

Para $k = 1$, vem $x = -2\pi \vee x = \frac{2\pi}{3}$, e como $x \in \left]0,\pi\right[$, podemos verificar que a única solução da equação é $x = \frac{2\pi}{3}$

Assim, estudando o sinal da segunda derivada para relacionar com o sentido das concavidades, vem:

x	0		$\frac{2\pi}{3}$		π
$g''(x)$	n.d.	+	0	−	n.d.
$g(x)$	n.d.	$\smile$	Pt. I.	$\frown$	n.d.

Cálculos auxiliares:

$$g''\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\cos\left(2 \times \frac{\pi}{2}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) =$$
$$= -\cos\pi + 0 = -(-1) + 0 = 1 > 0$$

$$g''\left(\frac{3\pi}{4}\right) = -\cos\left(2 \times \frac{3\pi}{4}\right) + \cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) =$$
$$= -\cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) - \frac{\sqrt{2}}{2} = -0 - \frac{\sqrt{2}}{2} = -\frac{\sqrt{2}}{2} < 0$$

Logo, podemos concluir que o gráfico de g:

- tem a concavidade voltada para baixo no intervalo $\left[\frac{2\pi}{3},\pi\right[$
- tem a concavidade voltada para cima no intervalo $\left]0,\frac{2\pi}{3}\right]$
- tem um ponto de inflexão de abcissa $\frac{2\pi}{3}$ e cuja ordenada é:

$$g\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \frac{1}{4}\cos\left(2 \times \frac{2\pi}{3}\right) - \cos\frac{2\pi}{3} = \frac{1}{4}\cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) - \left(-\cos\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{4}\left(-\cos\frac{\pi}{3}\right) + \frac{1}{2} =$$

$$= \frac{1}{4}\left(-\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2} = -\frac{1}{8} + \frac{1}{2} = -\frac{1}{8} + \frac{4}{8} = \frac{3}{8}$$

Ou seja, o ponto de inflexão do gráfico da função tem coordenadas $\left(\frac{2\pi}{3}, \frac{3}{8}\right)$

13.2. Simplificando a expressão da função f, como $\cos(-\alpha) = \cos\alpha$, $\cos(\pi - \alpha) = -\cos\alpha$ e $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \operatorname{sen}\alpha$, temos:

$$f(x) = g(-x) + g\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \frac{1}{4}\cos(2(-x)) - \cos(-x) + \frac{1}{4}\cos\left(2\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right) - \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) =$$

$$= \frac{1}{4}\cos(-2x) - \cos(-x) + \frac{1}{4}\cos(\pi - 2x) - \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \frac{1}{4}\cos(2x) - \cos x + \frac{1}{4}(-\cos(2x)) - \operatorname{sen} x =$$

$$= \frac{1}{4}\cos(2x) - \cos x - \frac{1}{4}\cos(2x) - \operatorname{sen} x = -\cos x - \operatorname{sen} x = -\operatorname{sen} x - \cos x$$

Resposta: **Opção B**

Exame – 2019, 2.ª Fase

14. Para mostrar que a função f é contínua em $x = 0$, temos que verificar que $f(0) = \lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$:

- $f(0) = 0$
- $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} \left(\frac{x}{x - \ln x}\right) = \frac{0^+}{0^+ - \ln 0^+} = \frac{0^+}{0^+ - (-\infty)} = \frac{0^+}{+\infty} = 0$
- $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} \left(\frac{1 - \cos x}{x}\right) = \frac{1 - \cos(0^-)}{0^-} = \frac{0}{0}$ (Indeterminação)

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{1 - \cos x}{x} = \lim_{x\to 0^-} \left(\frac{1 - \cos x}{x} \times \frac{1 + \cos x}{1 + \cos x}\right) = \lim_{x\to 0^-} \frac{1^2 - \cos^2 x}{x(1 + \cos x)} = \lim_{x\to 0^-} \frac{\operatorname{sen}^2 x}{x(1 + \cos x)} =$$

$$= \lim_{x\to 0^-} \left(\frac{\operatorname{sen} x \times \operatorname{sen} x}{x \times (1 + \cos x)}\right) = \underbrace{\lim_{x\to 0^-} \frac{\operatorname{sen} x}{x}}_{\text{Lim. Notável}} \times \lim_{x\to 0^-} \frac{\operatorname{sen} x}{1 + \cos x} = 1 \times \frac{\operatorname{sen} 0^+}{1 + \cos 0^+} = 1 \times \frac{0}{1 + 1} = 1 \times 0 = 0$$

Assim, temos que, como $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = f(0)$, a função f é contínua em $x = 0$

Exame – 2019, 1.ª Fase

15. Para mostrar que a função h é contínua em $x = 0$, temos que verificar que $h(0) = \lim\limits_{x\to 0^-} h(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} h(x)$:

- $h(0) = \frac{e^0}{0 + 1} = \frac{1}{1} = 1$
- $\lim\limits_{x\to 0^+} h(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} \left(\frac{e^x}{x + 1}\right) = \frac{e^0}{0 + 1} = \frac{1}{1} = 1$
- $\lim\limits_{x\to 0^-} h(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} \left(\frac{\operatorname{sen}^2 x}{\operatorname{sen}(x^2)}\right) = \frac{\operatorname{sen}^2(0)}{\operatorname{sen}(0^2)} = \frac{0}{0}$ (Indeterminação)

$$\lim_{x\to 0^-} \left(\frac{\operatorname{sen}^2 x}{\operatorname{sen}(x^2)}\right) = \lim_{x\to 0^-} \left(\frac{\operatorname{sen} x \times \operatorname{sen} x}{\operatorname{sen}(x^2)} \times \frac{x^2}{x^2}\right) = \lim_{x\to 0^-} \left(\frac{\operatorname{sen} x}{x} \times \frac{\operatorname{sen} x}{x} \times \frac{x^2}{\operatorname{sen}(x^2)}\right) =$$

$$= \underbrace{\lim_{x\to 0^-} \left(\frac{\operatorname{sen} x}{x}\right)}_{\text{Lim. Notável}} \times \underbrace{\lim_{x\to 0^-} \left(\frac{\operatorname{sen} x}{x}\right)}_{\text{Lim. Notável}} \times \lim_{x\to 0^-} \left(\frac{x^2}{\operatorname{sen}(x^2)}\right) = 1 \times 1 \times \lim_{x\to 0^-} \left(\frac{x^2}{\operatorname{sen}(x^2)}\right) = \lim_{x\to 0^-} \left(\frac{x^2}{\operatorname{sen}(x^2)}\right) =$$

(fazendo $y = x^2$, temos que se $x \to 0^-$, então $y \to 0^+$)

$$= \lim_{y\to 0^-} \left(\frac{y}{\operatorname{sen} y}\right) = \lim_{y\to 0^-} \left(\frac{1}{\frac{\operatorname{sen} y}{y}}\right) = \frac{\lim\limits_{y\to 0^-} 1}{\underbrace{\lim\limits_{y\to 0^-} \left(\frac{\operatorname{sen} y}{y}\right)}_{\text{Lim. Notável}}} = \frac{1}{1} = 1$$

Assim, temos que, como $\lim\limits_{x\to 0^-} h(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} h(x) = h(0)$, a função h é contínua em $x = 0$

Exame – 2018, Ép. especial

16. Como o declive da reta tangente ao gráfico de g em cada ponto é dado pela função derivada, começamos por determinar a expressão de g':

$$g'(x) = \left(2\,\text{sen}\,x + \text{sen}^2 x\right)' = \left(2\,\text{sen}\,x\right)' + \left(\text{sen}^2 x\right)' = 2\cos x + \left(\text{sen}\,x \times \text{sen}\,x\right)' =$$

$$= 2\cos x + \left(\text{sen}\,x\right)' \times \text{sen}\,x + \text{sen}\,x \times \left(\text{sen}\,x\right)' = 2\cos x + \cos x \times \text{sen}\,x + \text{sen}\,x \times \cos x =$$

$$= 2\cos x + 2 \times \text{sen}\,x \times \cos x = 2\cos x + \text{sen}\,(2x)$$

Como o máximo de uma função corresponde a um zero da função derivada, vamos determinar a expressão da função derivada da função g', ou seja g'', para determinar o declive máximo:

$$g''(x) = (g'(x))' = (2\cos x + \text{sen}\,(2x))' = (2\cos x)' + (\text{sen}\,(2x))' = 2 \times (-\text{sen}\,x) + (2x)' \times \cos(2x) =$$

$$= -2\,\text{sen}\,x + 2\cos(2x)$$

Calculando os zeros da derivada, no domínio da função ($[0,\pi]$), vem:

$$-2\,\text{sen}\,x + 2\cos(2x) = 0 \Leftrightarrow 2\cos(2x) = 2\,\text{sen}\,x \Leftrightarrow \cos(2x) = \text{sen}\,x \underset{\text{sen}\,x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}{\Leftrightarrow}$$

$$\Leftrightarrow \cos(2x) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \Leftrightarrow 2x = \frac{\pi}{2} - x + 2k\pi \vee 2x = -\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2x + x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \vee 2x = -\frac{\pi}{2} + x + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow 3x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \vee 2x - x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3} \vee x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Como se pretende identificar os valores de $x \in [0,\pi]$, atribuindo valores inteiros a k para identificar as soluções no intervalo definido, temos:

- $k = 0 \rightarrow x = \frac{\pi}{6} \vee x = -\frac{\pi}{2} \quad \left(-\frac{\pi}{2} \notin [0,\pi]\right)$
- $k = 1 \rightarrow x = \frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{3} = \frac{\pi}{6} + \frac{4\pi}{6} = \frac{5\pi}{6} \vee x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi = -\frac{\pi}{2} + \frac{4\pi}{2} = \frac{3\pi}{2} \quad \left(\frac{3\pi}{2} \notin [0,\pi]\right)$
- $k = 2 \rightarrow x = \frac{\pi}{6} + \frac{4\pi}{3} = \frac{\pi}{6} + \frac{8\pi}{6} = \frac{9\pi}{6} = \frac{3\pi}{2} \vee x = -\frac{\pi}{2} + 4\pi \quad \left(\frac{3\pi}{2} \notin [0,\pi] \quad \text{e} \quad 4\pi - \frac{\pi}{2} \notin [0,\pi]\right)$

Assim, as soluções da equação $g''(x) = 0$, que pertencem ao domínio da função, são $\frac{\pi}{6}$ e $\frac{5\pi}{6}$, pelo que
Estudando a variação do sinal da derivada de g', e relacionando com a monotonia do declive, vem:

x	0		$\frac{\pi}{6}$		$\frac{5\pi}{6}$		π
g''	+	+	0	−	0	+	+
g'	min	$\nearrow$	Máx	$\searrow$	min	$\nearrow$	Máx

Assim temos que os valores máximos do declive são:

- $g'\left(\frac{\pi}{6}\right) = 2\cos\frac{\pi}{6} + \text{sen}\left(2 \times \frac{\pi}{6}\right) = 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} + \text{sen}\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{2\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$
- $g'(\pi) = 2\cos\pi + \text{sen}\,(2\pi) = 2 \times (-1) + 0 = -2$

Como $g'\left(\frac{\pi}{6}\right) > g(\pi)$ então $g'\left(\frac{\pi}{6}\right)$ é o máximo absoluto e o valor máximo do declive das retas tangentes ao gráfigo de g, ou seja, o declive da reta r é:

$$m_r = g'\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

Exame – 2018, 2.ª Fase

17.

17.1. Resolvendo a equação $g(x) = 0$ vem:

- considerando $x < 0$

$$g(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{e^{2x}-1}{4x} = 0 \Leftrightarrow e^{2x} - 1 = 0 \wedge 4x \neq 0 \Leftrightarrow e^{2x} = 1 \wedge x \neq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2x = \ln 1 \wedge x \neq 0 \Leftrightarrow 2x = 0 \wedge x \neq 0 \Leftrightarrow \underbrace{x = 0 \wedge x \neq 0}_{\text{Cond. Imp.}}$$

Ou seja, se $x < 0$ então $g(x) = 0$ é uma equação impossível (não tem soluções).

- considerando $0 \leq x \leq \pi$

$$g(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2 - \operatorname{sen}(2x)} = 0 \Leftrightarrow \underbrace{1 = 0}_{\text{Cond. Imp.}} \wedge 2 - \operatorname{sen}(2x) \neq 0$$

Logo, se $0 \leq x \leq \pi$ então $g(x) = 0$ também é uma equação impossível (não tem soluções).

Assim podemos concluir que a função g não tem zeros.

Resposta: **Opção A**

17.2. Para averiguar se a função g é contínua em $x = 0$, temos que verificar se $g(0) = \lim\limits_{x \to 0^-} g(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} g(x)$

- $g(0) = \dfrac{1}{2 - \operatorname{sen}(2 \times 0)} = \dfrac{1}{2 - \operatorname{sen} 0} = \dfrac{1}{2 - 0} = \dfrac{1}{2}$
- $\lim\limits_{x \to 0^+} g(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} \left(\dfrac{1}{2 - \operatorname{sen}(2x)}\right) = \dfrac{1}{2 - \operatorname{sen}(2 \times 0)} = \dfrac{1}{2 - \operatorname{sen} 0} = \dfrac{1}{2 - 0} = \dfrac{1}{2}$
- $\lim\limits_{x \to 0^-} g(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} \left(\dfrac{e^{2x}-1}{4x}\right) = \dfrac{e^{2\times 0}-1}{4 \times 0} = \dfrac{e^0 - 1}{0} = \dfrac{1-1}{0} = \dfrac{0}{0}$ (Indeterminação)

(fazendo $y = 2x$, temos que $4x = 2y$ e se $x \to 0^-$, então $y \to 0^-$)

$$= \lim_{y \to 0^-} \left(\frac{e^y - 1}{2y}\right) = \lim_{y \to 0^-} \left(\frac{1}{2} \times \frac{e^y - 1}{y}\right) = \lim_{y \to 0^-} \frac{1}{2} \times \underbrace{\lim_{y \to 0^-} \frac{e^y - 1}{y}}_{\text{Lim. Notável}} = \frac{1}{2} \times 1 = \frac{1}{2}$$

Como $g(0) = \lim\limits_{x \to 0^+} g(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} g(x)$, então a função g é contínua em $x = 0$

17.3. Começamos por determinar a expressão da derivada da função g, no intervalo $]0,\pi]$:

$$g'(x) = \left(\frac{1}{2-\text{ sen}\,(2x)}\right)' = \frac{(1)'\times(2-\text{ sen}\,(2x)) - 1\times(2-\text{ sen}\,(2x))'}{(2-\text{ sen}\,(2x))^2} =$$

$$= \frac{0\times(2-\text{ sen}\,(2x)) - \big((2)' - (\text{ sen}\,(2x))'\big)}{(2-\text{ sen}\,(2x))^2} = \frac{0-(0-(2x)'\cos(2x))}{(2-\text{ sen}\,(2x))^2} =$$

$$= \frac{-(-2\cos(2x))}{(2-\text{ sen}\,(2x))^2} = \frac{2\cos(2x)}{(2-\text{ sen}\,(2x))^2}$$

Calculando os zeros da derivada, para $x\in]0,\pi]$, vem:

$$\frac{2\cos(2x)}{(2-\text{ sen}\,(2x))^2} = 0 \Leftrightarrow 2\cos(2x) = 0 \wedge \underbrace{(2-\text{ sen}\,(2x))^2 \neq 0}_{\text{Condição universal}} \Leftrightarrow \cos(2x) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k\in\mathbb{Z} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}, k\in\mathbb{Z}$$

Assim, temos que:

- para $k=-1$, $x = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4} - \frac{2\pi}{4} = -\frac{\pi}{4}$ $\left(-\frac{\pi}{4}\notin]0,\pi]\right)$
- para $k=0$, $x = \frac{\pi}{4} - 0 = \frac{\pi}{4}$ $\left(\frac{\pi}{4}\in]0,\pi]\right)$
- para $k=1$, $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4} + \frac{2\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$ $\left(\frac{3\pi}{4}\in]0,\pi]\right)$
- para $k=2$, $x = \frac{\pi}{4} + \frac{2\pi}{2} = \frac{\pi}{4} + \frac{4\pi}{4} = \frac{5\pi}{4}$ $\left(\frac{5\pi}{4}\notin]0,\pi]\right)$

Assim, temos que $g'(x)$ tem dois zeros em $]0,\pi]$ e estudando a variação do sinal da derivada e relacionando com a monotonia da função, vem:

x	0		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{3\pi}{4}$		π
$2\cos(2x)$	n.d.	+	0	−	0	+	+
$(2-\text{ sen}\,(2x))^2$	n.d.	+	+	+	+	+	+
g'	n.d.	+	0	−	0	+	+
g	n.d.	↗	Máx	↘	min	↗	Máx

Assim, podemos concluir que a função g, no intervalo $]0,\pi]$:

- é crescente no intervalo $\left]0,\frac{\pi}{4}\right]$ e no intervalo $\left[\frac{3\pi}{4},\pi\right]$;
- é decrescente no intervalo $\left[\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4}\right]$;
- tem um mínimo relativo para $x=\frac{3\pi}{4}$, cujo valor é:

$$g\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \frac{1}{2-\text{ sen}\left(2\times\frac{3\pi}{4}\right)} = \frac{1}{2-\text{ sen}\,\frac{6\pi}{4}} = \frac{1}{2-\text{ sen}\,\frac{3\pi}{2}} = \frac{1}{2-(-1)} = \frac{1}{3}$$

- tem dois máximos relativos, para $x=\frac{\pi}{4}$ e para $x=\pi$, cujos valores são respetivamente:

$$g\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2-\text{ sen}\left(2\times\frac{\pi}{4}\right)} = \frac{1}{2-\text{ sen}\,\frac{2\pi}{4}} = \frac{1}{2-\text{ sen}\,\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2-1} = \frac{1}{1} = 1$$

$$g(\pi) = \frac{1}{2-\text{ sen}\,(2\times\pi)} = \frac{1}{2-\text{ sen}\,(2\pi)} = \frac{1}{2-0} = \frac{1}{2}$$

Exame – 2018, 1.ª Fase

18. Sendo $D_f =]0,\pi[$, e a função f é contínua (porque é o quociente de funções contínuas), então como $1 \in D_f$ e $\frac{\pi}{2} \in D_f$, logo $x = 1$ e $x = \frac{\pi}{2}$ não são assíntotas verticais do gráfico de f

Averiguando se $x = 0$ e $x = \pi$ são assíntotas verticais do gráfico de f, temos:

- $$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \left(\frac{x}{\operatorname{sen} x}\right) = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{\frac{\operatorname{sen} x}{x}} = \frac{\lim\limits_{x\to 0^+} 1}{\underbrace{\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\operatorname{sen} x}{x}}_{\text{Lim. Notável}}} = \frac{1}{1} = 1$$

  Logo, a reta definida pela equação $x = 0$ não é uma assíntota vertical do gráfico de f

- $$\lim_{x\to \pi^-} f(x) = \lim_{x\to \pi^-} \left(\frac{x}{\operatorname{sen} x}\right) = \frac{\pi}{\operatorname{sen} \pi^-} = \frac{\pi}{0^+} = +\infty$$

  Logo, a reta definida pela equação $x = \pi$ é uma assíntota vertical do gráfico de f

Resposta: **Opção B**

Exame – 2018, 1ª Fase

19.

19.1. Para averiguar se a função f é contínua à esquerda no ponto de abcissa 1, temos que verificar se $f(1) = \lim\limits_{x\to 1^-} f(x)$ e para averiguar se a função é contínua à direita no mesmo ponto , temos que verificar se $f(1) = \lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$

- $f(1) = 2$
- $$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} \frac{2x-2}{\operatorname{sen}(x-1)} = \frac{2(1^-)-2}{\operatorname{sen}(1^- - 1)} = \frac{2-2}{\operatorname{sen} 0} = \frac{0}{0} \text{ (Indeterminação)}$$

  $$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} \frac{2x-2}{\operatorname{sen}(x-1)} = \lim_{x\to 1^-} \frac{2(x-1)}{\operatorname{sen}(x-1)} = \lim_{x\to 1^-} \frac{2}{\frac{\operatorname{sen}(x-1)}{x-1}} = \frac{\lim\limits_{x\to 1^-} 2}{\lim\limits_{x\to 1^-} \frac{\operatorname{sen}(x-1)}{x-1}} =$$

  (fazendo $y = x - 1$, se $x \to 1^-$, então $y \to 0^-$)

  $$= \frac{2}{\underbrace{\lim\limits_{y\to 0^-} \frac{\operatorname{sen} y}{y}}_{\text{Lim. Notável}}} = \frac{2}{1} = 2$$

- $$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} \left(e^{-2x+4} + \ln(x-1)\right) = e^{-2(1^+)+4} + \ln((1^+)-1) = e^2 + \ln(0^+) = e^2 + (-\infty) = -\infty$$

A afirmação é verdadeira porque como $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = f(1)$, a função é contínua à esquerda do ponto de abcissa 1, e como $f(1) \neq \lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$ a função não é contínua à direita do mesmo ponto.

19.2. Para calcular o declive da reta tangente, começamos por determinar a expressão da derivada da função, para $x < 1$:

$$f'(x) = \left(\frac{2x-2}{\operatorname{sen}(x-1)}\right)' = \frac{(2x-2)'\operatorname{sen}(x-1) - (2x-2)(\operatorname{sen}(x-1))'}{(\operatorname{sen}(x-1))^2} =$$

$$= \frac{2\operatorname{sen}(x-1) - (2x-2)(x-1)'\cos(x-1)}{\operatorname{sen}^2(x-1)} = \frac{2\operatorname{sen}(x-1) - (2x-2)\cos(x-1)}{\operatorname{sen}^2(x-1)}$$

Assim, temos que o declive da reta tangente no ponto de abcissa $1 - \frac{\pi}{2}$ é:

$$m = f'\left(1 - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{2\operatorname{sen}(1 - \frac{\pi}{2} - 1) - (2\left(1 - \frac{\pi}{2}\right) - 2)\cos\left(1 - \frac{\pi}{2} - 1\right)}{\operatorname{sen}^2\left(1 - \frac{\pi}{2} - 1\right)} =$$

$$= \frac{2\operatorname{sen}(-\frac{\pi}{2}) - (2 - \frac{2\pi}{2} - 2)\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)}{\operatorname{sen}^2\left(-\frac{\pi}{2}\right)} = \frac{2(-1) - (-\frac{2\pi}{2}) \times 0}{(-1)^2} = \frac{-2-0}{1} = -2$$

Logo a equação da reta tangente é da forma $y = -2x + b$

Como $f\left(1 - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{2\left(1 - \frac{\pi}{2}\right) - 2}{\operatorname{sen}(1 - \frac{\pi}{2} - 1)} = \frac{2 - \pi - 2}{\operatorname{sen}(-\frac{\pi}{2})} = \frac{-\pi}{-1} = \pi$, sabemos que o ponto $P\left(1 - \frac{\pi}{2}, \pi\right)$ pertence ao gráfico da função e também à reta tangente.

Assim, substituindo as coordenadas do ponto de tangência na equação da reta, podemos calcular o valor de b:

$$\pi = -2\left(1 - \frac{\pi}{2}\right) + b \Leftrightarrow \pi = -2 + \pi + b \Leftrightarrow \pi - \pi + 2 = b \Leftrightarrow 2 = b$$

Assim, a equação da reta tangente é:

$$y = -2x + 2$$

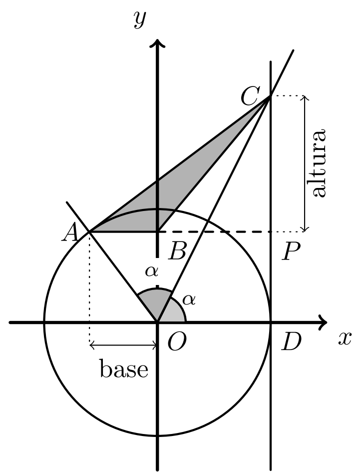
Exame – 2017, Ép. especial

20. Como se trata de um círculo trigonométrico, o ponto A tem coordenadas $\big(\cos(2\alpha), \operatorname{sen}(2\alpha)\big)$, porque o segmento $[OA]$, define com o semieixo positivo Ox um ângulo de $\alpha + \alpha = 2\alpha$

Considerando o ponto P como o ponto da reta CD com ordenada igual à do ponto A, temos que:

- a base do triângulo é: $\overline{AB} = -\cos(2\alpha)$
- a altura do triângulo é: $\overline{PC} = \overline{CD} - \overline{PD} = \operatorname{tg}\alpha - \operatorname{sen}(2\alpha)$

Assim, calculando a área do triângulo vem:



$$A_{[ABC]} = \frac{\overline{AB} \times \overline{PC}}{2} = \frac{-\cos(2\alpha) \times \big(\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{sen}(2\alpha)\big)}{2} =$$

$$= \frac{-\cos(2\alpha) \times \left(\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha} - 2\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha\right)}{2} =$$

$$= \frac{-\cos(2\alpha) \times \left(\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha} - \frac{2\operatorname{sen}\alpha\cos^2\alpha}{\cos\alpha}\right)}{2} =$$

$$= \frac{-\cos(2\alpha) \times \left(\frac{\operatorname{sen}\alpha\left(1 - 2\cos^2\alpha\right)}{\cos\alpha}\right)}{2} = \frac{-\cos(2\alpha) \times \operatorname{tg}\alpha\left(1 - 2\cos^2\alpha\right)}{2} =$$

$$= \frac{\cos(2\alpha) \times \operatorname{tg}\alpha\Big(-\big(1 - 2\cos^2\alpha\big)\Big)}{2} = \frac{\cos(2\alpha) \times \operatorname{tg}\alpha\left(2\cos^2\alpha - 1\right)}{2} =$$

$$= \frac{\cos(2\alpha) \times \operatorname{tg}\alpha\left(2\cos^2\alpha - \left(\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha\right)\right)}{2} = \frac{\cos(2\alpha) \times \operatorname{tg}\alpha\left(\cos^2\alpha - \operatorname{sen}^2\alpha\right)}{2} =$$

$$= \frac{\cos(2\alpha) \times \operatorname{tg}\alpha\big(\cos(2\alpha)\big)}{2} = \frac{\operatorname{tg}\alpha\cos^2(2\alpha)}{2}$$

Exame – 2017, Ép. especial

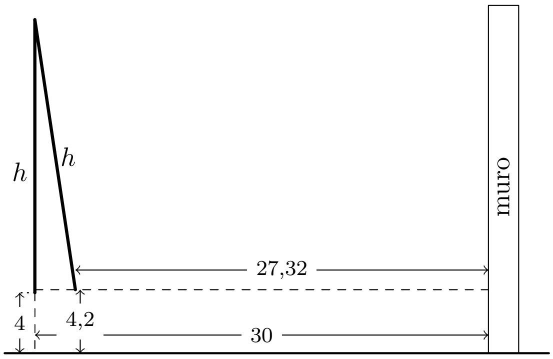
21. No instante inicial as hastes estão na vertical e a distância ao chão é de 4 dm, e, no mesmo instante a distância ao muro é dada por:

$$d(0) = 30 + 0 \times \text{ sen}\, \pi \times 0) = 30 + 0 = 30\,\text{dm}$$

Passados treze segundos e meio a distância ao chão é de 4,2 dm e a distância ao muro é dada por:

$$d(13{,}5) = 30 + 12e^{12-13{,}5}\,\text{sen}\,(\pi \times 13{,}5) =$$

$$= 30 + 12e^{-1{,}5}\,\text{sen}\,(\pi \times 13{,}5) \approx 27{,}32\,\text{dm}$$

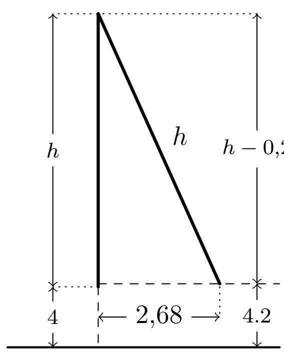


Assim, podemos considerar um triângulo retângulo, cuja hipotenusa tem o comprimento da haste (h), o cateto maior mede $h + 4 - 4{,}2 = h - 0{,}2$ e o cateto menor mede $d(0) - d(13{,}5) \approx 30 - 27{,}32 \approx 2{,}68$

E assim, recorrendo ao teorema de Pitágoras, um valor aproximado do comprimento da haste é dado por:

$$h^2 = (h - 0{,}2)^2 + 2{,}68^2 \;\Leftrightarrow\; h^2 = h^2 - 0{,}4h + 0{,}2^2 + 2{,}68^2 \;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\; 0{,}4h = 0{,}2^2 + 2{,}68^2 \;\Leftrightarrow\; h = \frac{0{,}2^2 + 2{,}68^2}{0{,}4}$$



Como $\dfrac{0{,}2^2 + 2{,}68^2}{0{,}4} \approx 18$, o valor do comprimento da haste, arredondado às unidades, é 18 dm

Exame – 2017, 2.ª Fase

22. Calculando o desenvolvimento do quadrado da soma, temos:

$$\left(2x\,\text{sen}\,\alpha + \frac{\cos\alpha}{x}\right)^2 = (2x\,\text{sen}\,\alpha)^2 + 2(2x\,\text{sen}\,\alpha)\left(\frac{\cos\alpha}{x}\right) + \left(\frac{\cos\alpha}{x}\right)^2 =$$

$$= 4x^2\,\text{sen}^2\,\alpha + \frac{4x\,\text{sen}\,\alpha\cos\alpha}{x} + \frac{\cos^2\alpha}{x^2} = 4x^2\,\text{sen}^2\,\alpha + 4\,\text{sen}\,\alpha\cos\alpha + \frac{\cos^2\alpha}{x^2}$$

Assim, nos três termos do desenvolvimento o termo independente é $4\,\text{sen}\,\alpha\cos\alpha$, pelo que, como sabemos que o termo independente é igual a 1, calculando os valores de α pertencentes ao intervalo $]\pi,2\pi[$, vem:

$$4\,\text{sen}\,\alpha\cos\alpha = 1 \;\Leftrightarrow\; 2\times 2\,\text{sen}\,\alpha\cos\alpha = 1 \;\Leftrightarrow\; 2\times\text{sen}\,(2\alpha) = 1 \;\Leftrightarrow\; \text{sen}\,(2\alpha) = \frac{1}{2} \;\Leftrightarrow\; \text{sen}\,(2\alpha) = \text{sen}\,\frac{\pi}{6} \;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\; 2\alpha = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \;\vee\; 2\alpha = \pi - \frac{\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\; \alpha = \frac{\pi}{12} + k\pi \;\vee\; \alpha = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{12} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

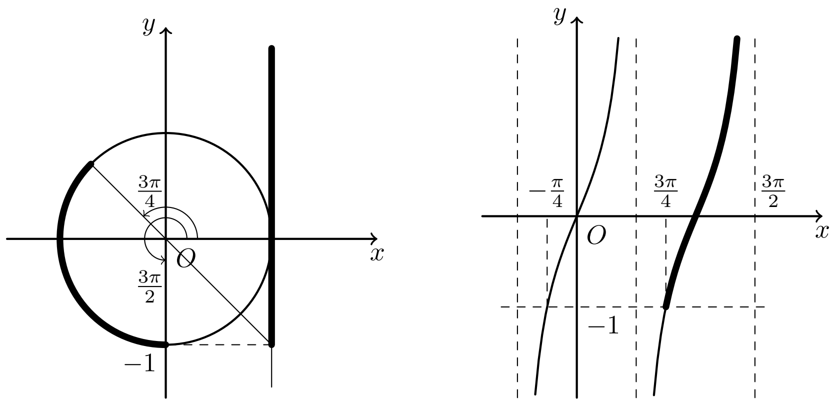
Como se pretende identificar os valores de $\alpha \in]\pi,2\pi[$, atribuindo valores inteiros a k para identificar as soluções no intervalo definido, temos:

- $k = 0 \;\rightarrow\; \alpha = \dfrac{\pi}{12} \vee \alpha = \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{\pi}{12} = \dfrac{5\pi}{12} \quad \left(\dfrac{\pi}{12} \notin]\pi,2\pi[\quad \text{e} \quad \dfrac{5\pi}{12} \notin]\pi,2\pi[\right)$
- $k = 1 \;\rightarrow\; \alpha = \dfrac{\pi}{12} + \pi = \dfrac{13\pi}{12} \vee \alpha = \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{\pi}{12} + \pi = \dfrac{17\pi}{12}$
- $k = 2 \;\rightarrow\; \alpha = \dfrac{\pi}{12} + 2\pi = \dfrac{25\pi}{12} \vee \alpha = \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{\pi}{12} + 2\pi = \dfrac{29\pi}{12} \quad \left(\dfrac{25\pi}{12} \notin]\pi,2\pi[\quad \text{e} \quad \dfrac{29\pi}{12} \notin]\pi,2\pi[\right)$

Assim, os valores de α nas condições do enunciado são $\dfrac{13\pi}{12}$ e $\dfrac{17\pi}{12}$

Exame – 2017, 2.ª Fase

23. Identificando no círculo trigonométrico os valores da tangente do intervalo $[-1, +\infty[$, e as amplitudes dos arcos correspondentes, (como na figura seguinte, à esquerda) temos, de entre os conjuntos apresentados, o único conjunto de valores cuja tangente pertence ao intervalo é $\left]\frac{3\pi}{4}, \frac{3\pi}{2}\right[$



Na figura anterior, à direita podemos ver uma representação gráfica da função $\text{tg}(x)$ com a restrição ao domínio $\left]\frac{3\pi}{4}, \frac{3\pi}{2}\right[$ assinalada, para verificar que o respetivo contradomínio é $[-1, +\infty[$

Resposta: **Opção B**

Exame – 2017, 1.ª Fase

24.

24.1. Para averiguar se a função g é contínua em $x=1$, temos que verificar se $g(1)=\lim\limits_{x\to 1^-} g(x)=\lim\limits_{x\to 1^+} g(x)$

- $g(1)=2$
- $\lim\limits_{x\to 1^-} g(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{1-x^2}{1-e^{x-1}}=\dfrac{1-(1^-)^2}{1-e^{1-1^-}}=\dfrac{1-1}{1-e^0}=\dfrac{0}{0}$ (Indeterminação)

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{1-x^2}{1-e^{x-1}}=\lim_{x\to 1^-}\frac{-(x^2-1)}{-(e^{x-1}-1)}=\lim_{x\to 1^-}\frac{(x-1)(x+1)}{e^{x-1}-1}=\lim_{x\to 1^-}\left(\frac{x-1}{e^{x-1}-1}\times(x+1)\right)=$$

(fazendo $y=x-1$ temos que se $x\to 1^-$, então $y\to 0^-$)

$$=\lim_{y\to 0^-}\frac{y}{e^y-1}\times\lim_{x\to 1^-}(x+1)=\lim_{y\to 0^-}\frac{1}{\frac{e^y-1}{y}}\times(1^-+1)=\frac{1}{\underbrace{\lim_{y\to 0^-}\left(\frac{e^y-1}{y}\right)}_{\text{Lim. Notável}}}\times 2=\frac{1}{1}\times 2=2$$

- $\lim\limits_{x\to 1^+} g(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}\left(3+\dfrac{\operatorname{sen}(x-1)}{1-x}\right)=3+\dfrac{\operatorname{sen}(1-1)}{1-1}=3-\dfrac{0}{0}$ (Indeterminação)

$$\lim_{x\to 1^+}\left(3+\frac{\operatorname{sen}(x-1)}{1-x}\right)=\lim_{x\to 1^+}3+\lim_{x\to 1^+}\frac{\operatorname{sen}(x-1)}{-(x-1)}=3-\lim_{x\to 1^+}\frac{\operatorname{sen}(x-1)}{x-1}=$$

(fazendo $y=x-1$, temos que se $x\to 1^-$, então $y\to 0^-$)

$$=3-\underbrace{\lim_{y\to 0^+}\frac{\operatorname{sen} y}{y}}_{\text{Lim. Notável}}=3-1=2$$

Como $g(1)=\lim\limits_{x\to 1^-} g(x)=\lim\limits_{x\to 1^+} g(x)$, então a função g é contínua em $x=1$

24.2. Resolvendo a equação $g(x)=3$, no intervalo $[4,5]$, ou seja, para $x>1$, vem:

$$3+\frac{\operatorname{sen}(x-1)}{1-x}=3\ \Leftrightarrow\ \frac{\operatorname{sen}(x-1)}{1-x}=3-3\ \underset{x\neq 1}{\Leftrightarrow}\ \operatorname{sen}(x-1)=0\times(1-x)\ \Leftrightarrow\ \operatorname{sen}(x-1)=0\ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\ \operatorname{sen}(x-1)=\operatorname{sen}0\ \Leftrightarrow\ x-1=0+k\pi, k\in\mathbb{Z}\ \Leftrightarrow\ x=1+k\pi, k\in\mathbb{Z}$$

Assim, como $\pi\notin[4,5]$; $1+\pi\in[4,5]$ e $1+2\pi\notin[4,5]$ a única solução da equação $g(x)=3$, no intervalo $[4,5]$ é $1+\pi$

Exame – 2017, 1.ª Fase

25. Como a função f é contínua em $\mathbb{R}$, em particular é contínua em $x = -1$, pelo que:

$$f(-1) = \lim_{x \to -1} f(x)$$

Assim, temos que:

- $f(-1) = k + 2$
- $\lim\limits_{x \to -1} f(x) = \lim\limits_{x \to -1} \frac{\operatorname{sen}(3x+3)}{4x+4} = \frac{\operatorname{sen}(3(-1)+3)}{4(-1)+4} = \frac{\operatorname{sen}(0)}{0} = \frac{0}{0}$ (Indeterminação)

(fazendo $y = x + 1$, se $x \to -1$, então $y \to 0$, e $3y \to 0$)

$$= \lim_{x \to -1} \frac{\operatorname{sen}\big(3(x+1)\big)}{4(x+1)} = \lim_{y \to 0} \frac{\operatorname{sen}(3y)}{4y} = \lim_{y \to 0} \left(\frac{1}{4} \times \frac{\operatorname{sen}(3y)}{y} \right) = \lim_{y \to 0} \left(\frac{3}{4} \times \frac{\operatorname{sen}(3y)}{3y} \right) =$$

$$= \lim_{y \to 0} \frac{3}{4} \times \underbrace{\lim_{3y \to 0} \frac{\operatorname{sen}(3y)}{3y}}_{\text{Lim. Notável}} = \frac{3}{4} \times 1 = \frac{3}{4}$$

Como a função é contínua em $x = -1$, podemos determinar o valor de k:

$$f(-1) = \lim_{x \to -1} f(x) \Leftrightarrow k + 2 = \frac{3}{4} \Leftrightarrow k = \frac{3}{4} - 2 \Leftrightarrow k = \frac{3}{4} - \frac{8}{4} \Leftrightarrow k = -\frac{5}{4}$$

Resposta: **Opção B**

Exame – 2016, Ép. especial

26. Para estudar o sentido das concavidades do gráfico e a existência de pontos de inflexão no intervalo $\left]-\frac{3\pi}{2},0\right[$, vamos determinar a expressão da segunda derivada, pelo que começamos por determinar f' em $\left]-\frac{3\pi}{2},0\right[$:

$$f'(x) = \left(\frac{1}{4}x^2 + \cos x\right)' = \left(\frac{1}{4}x^2\right)' + (\cos x)' = \frac{1}{4}(x^2)' + (-\operatorname{sen} x) = \frac{1}{4} \times 2x - \operatorname{sen} x = \frac{1}{2}x - \operatorname{sen} x$$

Assim, determinando f'' em $\left]-\frac{3\pi}{2},0\right[$, temos que:

$$f''(x) = (f'(x))' = \left(\frac{1}{2}x - \operatorname{sen} x\right)' = \left(\frac{1}{2}x\right)' - (\operatorname{sen} x)' = \frac{1}{2} - \cos x$$

Como os pontos de inflexão são zeros da segunda derivada, vamos determiná-los:

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2} - \cos x = 0 \Leftrightarrow \cos x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos x = \cos\frac{\pi}{3} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \vee x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Para $k = 0$, vem $x = \frac{\pi}{3} \vee x = -\frac{\pi}{3}$, e como $x \in \left]-\frac{3\pi}{2},0\right[$, podemos verificar que a única solução da equação é $x = -\frac{\pi}{3}$

Assim, estudando o sinal da segunda derivada para relacionar com o sentido das concavidades, vem:

x	$-\frac{3\pi}{2}$		$-\frac{\pi}{3}$		0
f''	n.d.	$+$	0	$-$	n.d.
f	n.d.	$\smile$	Pt. I.	$\frown$	n.d.

Logo, podemos concluir que o gráfico de f:

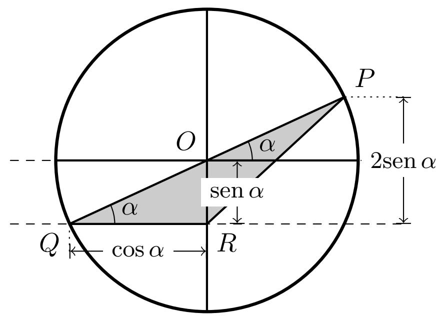
- tem a concavidade voltada para baixo no intervalo $\left[-\frac{\pi}{3},0\right[$
- tem a concavidade voltada para cima no intervalo $\left]-\frac{3\pi}{2},-\frac{\pi}{3}\right]$
- tem um ponto de inflexão cuja abcissa é $-\frac{\pi}{3}$

Exame – 2016, Ép. especial

27. Observando que os ângulos AOP e RQO têm a mesma amplitude (porque são ângulos de lados paralelos), relativamente ao triângulo $[PQR]$, vem que:

- $\overline{QR} = \cos\alpha$
- $\overline{OR} = \operatorname{sen}\alpha$
- a altura do triângulo, relativa ao lado $[QR]$ é

$$h = 2 \times \overline{OR} = 2\operatorname{sen}\alpha$$



Desta forma, a área do triângulo é:

$$A_{[PQR]} = \frac{\overline{QR} \times h}{2} = \frac{\cos\alpha \times 2\operatorname{sen}\alpha}{2} = \frac{2\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha}{2} = \frac{\operatorname{sen}(2\alpha)}{2}$$

Resposta: **Opção D**

Exame – 2016, 2.ª Fase

28. Começamos por determinar a expressão da derivada da função f, para $x \in \left]-\frac{\pi}{2},0\right[$:

$$f'(x) = \left(\frac{2+\operatorname{sen} x}{\cos x}\right)' = \frac{(2+\operatorname{sen} x)'\cos x - (2+\operatorname{sen} x)(\cos x)'}{(\cos x)^2} =$$
$$= \frac{(0+\cos x)\cos x - (2+\operatorname{sen} x)(-\operatorname{sen} x)}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + 2\operatorname{sen} x + \operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x} =$$
$$= \frac{\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x + 2\operatorname{sen} x}{\cos^2 x} = \frac{1+2\operatorname{sen} x}{\cos^2 x}$$

Calculando os zeros da derivada, para $x \in \left]-\frac{\pi}{2},0\right[$, vem:

$$\frac{1+2\operatorname{sen} x}{\cos^2 x} = 0 \Leftrightarrow 1+2\operatorname{sen} x = 0 \wedge \underbrace{\cos^2 x \neq 0}_{(1)} \Leftrightarrow 2\operatorname{sen} x = -1 \Leftrightarrow \operatorname{sen} x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \operatorname{sen} x = \operatorname{sen}\left(-\frac{\pi}{6}\right) \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi \vee x = \pi - \left(-\frac{\pi}{6}\right) + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Para $k=0$, vem $x = -\frac{\pi}{6} \vee x = \pi + \frac{\pi}{6}$, e como $x \in \left]-\frac{\pi}{2},0\right[$ podemos verificar que a única solução da equação é $x = -\frac{\pi}{6}$

(1) Como $\cos x > 0, \forall x \in \left]-\frac{\pi}{2},0\right[$, então $\cos^2 x \neq 0, \forall x \in \left]-\frac{\pi}{2},0\right[$

Estudando a variação do sinal da derivada e relacionando com a monotonia da função, vem:

x	$-\frac{\pi}{2}$		$-\frac{\pi}{6}$		0
$1+2\operatorname{sen} x$		$-$	0	$+$	
$\cos^2 x$		$+$	$+$	$+$	
f'	n.d.	$-$	0	$+$	n.d.
f	n.d.	↘	min	↗	n.d.

Assim, podemos concluir que a função f:

- é decrescente no intervalo $\left]-\frac{\pi}{2},-\frac{\pi}{6}\right]$;
- é crescente no intervalo $\left[-\frac{\pi}{6},0\right[$;
- tem um mínimo relativo para $x = -\frac{\pi}{6}$

Exame – 2016, 2.ª Fase

29. Identificando as medidas relevantes para o cálculo da área do trapézio, temos que:

- a base menor é a ordenada o ponto P, ou seja, $\overline{OP} = 1$
- como R é um ponto do quarto quadrante, então temos que $\cos\alpha > 0$, pelo que a altura do trapézio $[OPQR]$ é: $\overline{PQ} = \cos\alpha$
- como R é um ponto do quarto quadrante, então temos que $\operatorname{sen}\alpha < 0$, pelo que a base maior do trapézio $[OPQR]$ é: $\overline{QR} = 1 + (-\operatorname{sen}\alpha) = 1 - \operatorname{sen}\alpha$

Desta forma, a área do trapézio é:

$$A_{[OPQR]} = \frac{\overline{OP}+\overline{QR}}{2} \times \overline{PQ} = \frac{1+1-\operatorname{sen}\alpha}{2} \times \cos\alpha = \frac{2-\operatorname{sen}\alpha}{2} \times \cos\alpha =$$
$$= \frac{2\cos\alpha - \operatorname{sen}\alpha\cos\alpha}{2} = \cos\alpha - \frac{\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha}{2}$$

Resposta: **Opção D**

Exame – 2016, 1.ª Fase

30. Começamos por determinar a expressão da derivada da função h, para calcular os extremos da função:

$$h'(t) = \left(20 + \frac{1}{2\pi}\cos(2\pi t) + t\,\text{sen}\,(2\pi t)\right)' = (20)' + \left(\frac{1}{2\pi}\cos(2\pi t)\right)' + \big(t\,\text{sen}\,(2\pi t)\big)' =$$

$$= 0 + \frac{1}{2\pi}\big(\cos(2\pi t)\big)' + (t)'\,\text{sen}\,(2\pi t) + t\big(\text{sen}\,(2\pi t)\big)' =$$

$$= \frac{1}{2\pi}(-(2\pi t)')\,\text{sen}\,(2\pi t) + 1 \times \text{sen}\,(2\pi t) + t(2\pi t)'\cos(2\pi t) =$$

$$= \frac{1}{2\pi}(-2\pi)\,\text{sen}\,(2\pi t) + \text{sen}\,(2\pi t) + t(2\pi)\cos(2\pi t) =$$

$$= -\,\text{sen}\,(2\pi t) + \text{sen}\,(2\pi t) + t(2\pi)\cos(2\pi t) =$$

$$= 2\pi t\cos(2\pi t)$$

Calculando os zeros da derivada, no domínio da função ([0,1]), vem:

$$2\pi t\cos(2\pi t) = 0 \Leftrightarrow 2\pi t = 0 \lor \cos(2\pi t) = 0 \Leftrightarrow t = 0 \lor \cos(2\pi t) = \cos\frac{\pi}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow t = 0 \lor 2\pi t = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow t = 0 \lor t = \frac{\pi}{2 \times 2\pi} + \frac{k\pi}{2\pi}, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow t = 0 \lor t = \frac{1}{4} + \frac{k}{2}, k \in \mathbb{Z}$$

Atribuindo valores a k, calculamos os valores de t compatíveis com o domínio da função:

- Se $k = 0$, então $t = \frac{1}{4}$
- Se $k = 1$, então $t = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{1}{4} + \frac{2}{4} = \frac{3}{4}$

Pelo que o conjunto dos zeros da função é $\left\{0, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right\}$, e assim estudando a variação do sinal da derivada e relacionando com a monotonia da função, vem:

t	0		$\frac{1}{4}$		$\frac{3}{4}$		1
h'	0	+	0	−	0	+	+
h	min	↗	Máx	↘	min	↗	Máx

Assim, calculando o valor dos mínimos relativos e máximos relativos, temos que:

- $h(0) = 20 + \frac{1}{2\pi}\cos(2\pi \times 0) + 0 \times \text{sen}\,(2\pi \times 0) = 20 + \frac{1}{2\pi}\cos(0) + 0 = 20 + \frac{1}{2\pi}$
- $h\left(\frac{1}{4}\right) = 20 + \frac{1}{2\pi}\cos\left(2\pi \times \left(\frac{1}{4}\right)\right) + \frac{1}{4} \times \text{sen}\left(2\pi \times \left(\frac{1}{4}\right)\right) =$
  $= 20 + \frac{1}{2\pi}\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + \frac{1}{4}\,\text{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) = 20 + \frac{1}{2\pi} \times 0 + \frac{1}{4} \times 1 = 20 + \frac{1}{4}$
- $h\left(\frac{3}{4}\right) = 20 + \frac{1}{2\pi}\cos\left(2\pi \times \left(\frac{3}{4}\right)\right) + \frac{3}{4} \times \text{sen}\left(2\pi \times \left(\frac{3}{4}\right)\right) =$
  $= 20 + \frac{1}{2\pi}\cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) + \frac{3}{4}\,\text{sen}\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 20 + \frac{1}{2\pi} \times 0 + \frac{3}{4} \times (-1) = 20 - \frac{3}{4}$
- $h(1) = 20 + \frac{1}{2\pi}\cos(2\pi \times 1) + 1 \times \text{sen}\,(2\pi \times 1) = 20 + \frac{1}{2\pi} \times 1 + 0 = 20 + \frac{1}{2\pi}$

Como $h\left(\frac{3}{4}\right) < h(0)$, temos que o mínimo absoluto é $m = h\left(\frac{3}{4}\right) = 20 - \frac{3}{4} = \frac{77}{4}$

Como $h\left(\frac{1}{4}\right) > h(1)$, temos que o máximo absoluto é $M = h\left(\frac{1}{4}\right) = 20 + \frac{1}{4} = \frac{81}{4}$

E assim, o valor da amplitude de oscilação é:

$$A = M - n = \frac{81}{4} - \frac{77}{4} = \frac{4}{4} = 1$$

Exame – 2016, 1.ª Fase

31. como a reta r é tangente ao gráfico da função f no ponto de abcissa $\frac{2\pi}{3}$, o declive da reta r é o valor da função derivada no ponto de abcissa $\frac{2\pi}{3}$ $\left(m_r = f'\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right)$

Assim, temos

$$f'(x) = \big(a \operatorname{sen} x\big)' = (a)'(\operatorname{sen} x) + a\big(\operatorname{sen} x\big)' = 0 + a\cos x = a\cos x$$

pelo que

$$m_r = f'\left(\frac{2\pi}{3}\right) = a\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) = a\left(-\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\right) = a\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{a}{2}$$

Como o declive de uma reta é a tangente da inclinação, temos também que

$$m_r = \operatorname{tg}\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

E assim, igualando as duas expressões para o declive da reta r, podemos calcular o valor de a:

$$-\frac{a}{2} = \frac{\sqrt{3}}{3} \Leftrightarrow a = -\frac{2\sqrt{3}}{3}$$

Exame – 2015, Ép. especial

32. Determinando a expressão da primeira derivada, f', vem:

$$f'(x) = \big(f(x)\big)' = \big(3\operatorname{sen}^2(x)\big)' = \big(3\operatorname{sen}(x)\operatorname{sen}(x)\big)' = 3\big(\operatorname{sen}(x)\operatorname{sen}(x)\big)' =$$

$$= 3\Big(\big(\operatorname{sen}(x)\big)'\operatorname{sen}(x) + \operatorname{sen}(x)\big(\operatorname{sen}(x)\big)'\Big) = 3\times 2\big(\operatorname{sen}(x)\big)'\operatorname{sen}(x) = 3\times 2\big(\cos(x)\operatorname{sen}(x)\big) =$$

$$= 3\times \underbrace{2\operatorname{sen}(x)\cos(x)}_{\operatorname{sen}(2x)} = 3\operatorname{sen}(2x)$$

Determinando a expressão da segunda derivada, f'', temos que:

$$f''(x) = \big(f'(x)\big)' = \big(3\operatorname{sen}(2x)\big)' = 3\big((2x)'\cos(2x)\big) = 3\big(2\cos(2x)\big) = 6\cos(2x)$$

Resposta: **Opção C**

Exame – 2015, 2.ª Fase

33.

33.1. Como no instante em que se iniciou a contagem do tempo, o ponto P coincidia com o ponto A, a distância inicial ($t = 0$), em metros, do ponto A ao ponto O é dada por $d(0)$

Assim, os instantes em que o ponto P passou pelo ponto A, nos primeiros três segundos do movimento, são as soluções da equação $d(t) = d(0)$, com $t \in]0,3]$

$$d(t) = d(0) \Leftrightarrow 1 + \frac{1}{2}\operatorname{sen}\left(\pi t + \frac{\pi}{6}\right) = 1 + \frac{1}{2}\operatorname{sen}\left(\pi \times 0 + \frac{\pi}{6}\right) \Leftrightarrow \frac{1}{2}\operatorname{sen}\left(\pi t + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{6}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \operatorname{sen}\left(\pi t + \frac{\pi}{6}\right) = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{6}\right) \Leftrightarrow \pi t + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \vee \pi t + \frac{\pi}{6} = \pi - \frac{\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \pi t = 2k\pi \vee \pi t = \pi - 2 \times \frac{\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow t = 2k \vee \pi t = \pi - \frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow t = 2k \vee \pi t = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow t = 2k \vee t = \frac{2}{3} + 2k, k \in \mathbb{Z}$$

Como $t \in]0,3]$, atribuindo valores inteiros a k para identificar as soluções no intervalo definido, temos

- $k = 0 \rightarrow t = 0 \vee t = \frac{2}{3}$ $(0 \notin]0,3])$
- $k = 1 \rightarrow t = 2 \vee t = \frac{2}{3} + 2 \Leftrightarrow t = 2 \vee t = \frac{8}{3}$
- $k = 2 \rightarrow t = 4 \vee t = \frac{2}{3} + 4 \Leftrightarrow t = 4 \vee t = \frac{14}{3}$ $(4 \notin]0,3] \wedge \frac{14}{3} \notin]0,3])$

Assim temos, durante os primeiros três segundos do movimento, o ponto P passou pelo ponto A por três vezes, nos instantes $t_1 = \frac{2}{3}$ s, $t_2 = 2$ s e $t_3 = \frac{8}{3}$ s.

33.2.

Como a função d resulta de operações sucessivas de funções contínuas em $[0, +\infty[$, é uma função contínua, e, por isso, também é contínua em $[3, 4]$.

Como $0{,}75 < 1{,}1 < 1{,}25$, ou seja, $d(3) < 1{,}1 < d(4)$, então, podemos concluir, pelo Teorema de Bolzano, que existe $t_0 \in]3, 4[$ tal que $d(t_0) = 1{,}1$, ou seja, que houve, pelo menos, um instante, entre os três segundos e os quatro segundos após o início da contagem do tempo, em que a distância do ponto P ao ponto O foi igual a 1,1 metros.

C.A.

$$d(3) = 1 + \frac{1}{2}\operatorname{sen}\left(3\pi + \frac{\pi}{6}\right) = 1 + \frac{1}{2}\operatorname{sen}\left(\pi + \frac{\pi}{6}\right) =$$
$$= 1 + \frac{1}{2} \times \left(-\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{6}\right)\right) = 1 + \frac{1}{2} \times \left(-\frac{1}{2}\right) =$$
$$= 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4} = 0{,}75$$

$$d(4) = 1 + \frac{1}{2}\operatorname{sen}\left(4\pi + \frac{\pi}{6}\right) = 1 + \frac{1}{2}\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{6}\right) =$$
$$= 1 + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = 1 + \frac{1}{4} = \frac{5}{4} = 1{,}25$$

Exame – 2015, 2.ª Fase

34. Como na figura está representado o círculo trigonométrico, temos que:

$$\overline{OC} = 1\,\alpha\,,\ \overline{AB} = \operatorname{sen}\alpha\,,\ \overline{OB} = \cos\alpha \text{ e } \operatorname{tg}\alpha = \overline{CD}$$

Temos que a área do quadrilátero $[ABCD]$ pode ser obtida pela diferença das áreas dos triângulos $[OCD]$ e $[OAB]$,

$$A_{[ABCD]} = A_{[OAB]} - A_{[OCD]} = \frac{\overline{OC} \times \overline{CD}}{2} - \frac{\overline{OB} \times \overline{AB}}{2}$$

Assim, vem que:

$$A_{[ABCD]} = \frac{1 \times \operatorname{tg}\alpha}{2} - \frac{\cos\alpha \times \operatorname{sen}\alpha}{2} = \frac{\operatorname{tg}\alpha}{2} - \frac{\overbrace{2 \times \operatorname{sen}\alpha \times \cos\alpha}^{\operatorname{sen}(2\alpha)}}{2 \times 2} = \frac{\operatorname{tg}\alpha}{2} - \frac{\operatorname{sen}(2\alpha)}{4}$$

Resposta: **Opção B**

Exame – 2015, 1.ª Fase

35. Temos que:

- como a reta r é tangente ao gráfico da função f no ponto de abcissa a, o declive da reta r é o valor da função derivada no ponto de abcissa a $(m_r = f'(a))$
  Assim, temos

$$f'(x) = \big(1 - \cos(3x)\big)' = (1)' - \big(\cos(3x)\big)' = 0 - \big(-(3x)'\text{sen}\,(3x)\big) = 3\,\text{sen}\,(3x)$$

  pelo que $m_r = f'(a) = 3\,\text{sen}\,(3a)$

- como a reta s é tangente ao gráfico da função g no ponto de abcissa $a + \frac{\pi}{6}$, o declive da reta s é o valor da função derivada no ponto de abcissa $a + \frac{\pi}{6}$ $\left(m_s = g'\left(a + \frac{\pi}{6}\right)\right)$ Assim, temos

$$g'(x) = \big(\text{sen}\,(3x)\big)' = \big((3x)'\cos(3x)\big) = 3\cos(3x)$$

  pelo que

$$m_s = g'\left(a + \frac{\pi}{6}\right) = 3\cos\left(3\left(a + \frac{\pi}{6}\right)\right) = 3\cos\left(3a + \frac{3\pi}{6}\right) = 3\underbrace{\cos\left(3a + \frac{\pi}{2}\right)}_{-\text{sen}\,(3a)} = -3\,\text{sen}\,(3a)$$

- como as retas r e s são perpendiculares, o declive de uma delas é o simétrico do inverso do declive da outra $(m_r = -\frac{1}{m_s})$

$$m_r = -\frac{1}{m_s} \Leftrightarrow 3\,\text{sen}\,(3a) = -\frac{1}{-3\,\text{sen}\,(3a)} \Leftrightarrow -3\,\text{sen}\,(3a) \times 3\,\text{sen}\,(3a) = -1 \Leftrightarrow -9\,\text{sen}^2\,(3a) = -1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 9\,\text{sen}^2\,(3a) = 1 \Leftrightarrow \text{sen}^2\,(3a) = \frac{1}{9} \Leftrightarrow \text{sen}\,(3a) = \pm\sqrt{\frac{1}{9}} \Leftrightarrow \text{sen}\,(3a) = \pm\frac{1}{3}$$

- como a é número real pertencente ao intervalo $\left]\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right[$, ou seja $\frac{\pi}{3} < a < \frac{\pi}{2}$ então

$$3 \times \frac{\pi}{3} < 3a < 3 \times \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \pi < 3a < \frac{3\pi}{2}$$

  ou seja, $3a$ é a amplitude de um ângulo do 3º quadrante, pelo que $\text{sen}\,(3a) < 0$, logo

$$\text{sen}\,(3a) = -\frac{1}{3},\ q.e.d$$

Exame – 2015, 1.ª Fase

36. Para que a função seja contínua em $x = 2$, temos que garantir que $f(2) = \lim_{x\to 2} f(x)$

Temos que

- $f(2) = 2e^{2-2} = 2e^0 = 2 \times 1 = 2$
- $\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-} \left(xe^{x-2}\right) = 2e^{2^- -2} = 2e^{0^-} = 2 \times 1 = 2$
- $\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+} \left(\frac{\text{sen}\,(2-x)}{x^2+x-6} + k\right) = \lim_{x\to 2^+} \left(\frac{\text{sen}\,(2-x)}{x^2+x-6}\right) + \lim_{x\to 2^+} k = \lim_{x\to 2^+} \left(\frac{\text{sen}\,(2-x)}{x^2+x-6}\right) + \lim_{x\to 2^+} k =$

$= \frac{\text{sen}\,(2-2^-)}{(2^-)^2+2^- -6} + k = \frac{0}{0} + k$ (indeterminação) (fazendo $y = x-2$, temos $x = y+2$ e $-y = 2-x$; e se $x \to 2^+$, então $y \to 0^+$)

$= \lim_{y\to 0^+} \left(\frac{\text{sen}\,(-y)}{(y+2)^2+y+2-6}\right) + k = \lim_{y\to 0^+} \left(\frac{\text{sen}\,(-y)}{y^2+4y+4+y-4}\right) + k = \lim_{y\to 0^+} \left(\frac{\text{sen}\,(-y)}{y^2+5y}\right) + k =$

$= \lim_{y\to 0^+} \left(\frac{-\text{sen}\,y}{y(y+5)}\right) + k = \lim_{y\to 0^+} \left(\frac{\text{sen}\,y}{y} \times \frac{-1}{y+5}\right) + k = \underbrace{\lim_{y\to 0^+} \frac{\text{sen}\,y}{y}}_{\text{Lim. Notável}} \times \lim_{y\to 0^+} \frac{-1}{y+5} + k =$

$= 1 \times \frac{-1}{0^+ + 5} + k = -\frac{1}{5} + k$

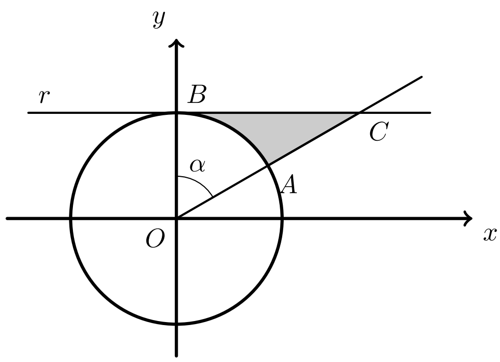
Como se pretende que a função seja contínua em $x = 2$, e verificámos que $f(2) = \lim_{x\to 2^-} f(x)$, podemos determinar o valor de k garantindo que $f(2) = \lim_{x\to 2^+} f(x)$

$$f(2) = \lim_{x\to 2^+} f(x) \Leftrightarrow 2 = -\frac{1}{5} + k \Leftrightarrow 2 + \frac{1}{5} = k \Leftrightarrow \frac{10}{5} + \frac{1}{5} = k \Leftrightarrow \frac{11}{5} = k$$

Exame – 2014, Ép. especial

37. O triângulo $[OBC]$ é retângulo em B, $\overline{OB} = 1$, e $[BC]$ é o cateto oposto ao ângulo α, temos que:

$$\text{tg}\,\alpha = \frac{\overline{BC}}{\overline{OB}} \Leftrightarrow \text{tg}\,\alpha = \frac{\overline{BC}}{1} \Leftrightarrow \text{tg}\,\alpha = \overline{BC}$$



Logo,

$$A_{[OBC]} = \frac{\overline{OB} \times \overline{BC}}{2} = \frac{1 \times \text{tg}\,\alpha}{2} = \frac{\text{tg}\,\alpha}{2}$$

A área do setor circular de centro O, raio 1 e amplitude α (delimitado pelo arco AB) é

$$A = \frac{\alpha \times 1^2}{2} = \frac{\alpha}{2}$$

Como a área da zona sombreada (A_S) pode ser calculada como a diferença entre as áreas do triângulo $[OBC]$ e o setor circular de centro O e delimitado pelo arco AB, temos que

$$A_S = A_{[OBC]} - A = \frac{\text{tg}\,\alpha}{2} - \frac{\alpha}{2} = \frac{\text{tg}\,\alpha - \alpha}{2}$$

Resposta: **Opção B**

Exame – 2014, Ép. especial

38. Como a função é contínua no intervalo fechado, temos que $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-} f(x)$

Temos que $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = k-3$

E calculando $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-} f(x)$, vem

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} f(x) = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} \frac{\cos x}{x-\frac{\pi}{2}} = \left(\begin{array}{c}\text{Se } y = x-\frac{\pi}{2}\text{, então } x = y+\frac{\pi}{2} \\ x\to\frac{\pi}{2}^- \Rightarrow y\to 0^-\end{array}\right)$$

$$= \lim_{y\to 0^-} \frac{\cos\left(y+\frac{\pi}{2}\right)}{y} = \quad \left(\cos\left(y+\tfrac{\pi}{2}\right) = -\operatorname{sen} y\right)$$

$$= \lim_{y\to 0^-} \frac{-\operatorname{sen} y}{y} = -\underbrace{\lim_{y\to 0^-}\frac{\operatorname{sen} y}{y}}_{\text{Lim. Notável}} = -1$$

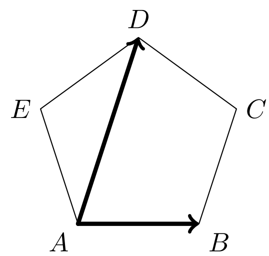
Assim, temos que

$$k-3=-1 \;\Leftrightarrow\; k=-1+3 \;\Leftrightarrow\; k=2$$

Resposta: **Opção C**

Exame – 2014, 2.ª Fase

39. Como a soma dos ângulos externos de um polígono é 2π, o ângulo externo em A tem de amplitude $\frac{2\pi}{5}$ e assim, podemos calcular a amplitude do ângulo BAE:



$$B\hat{A}E = \pi - \frac{2\pi}{5} = \frac{5\pi}{5} - \frac{2\pi}{5} = \frac{3\pi}{5}$$

Como $E\hat{A}D = E\hat{D}A$ (porque se opõem a lados iguais), $E\hat{A}D + E\hat{D}A + A\hat{E}D = \pi$ (porque são os ângulos internos de um triângulo) e $A\hat{E}D = B\hat{A}E$, temos que

$$E\hat{A}D + E\hat{A}D + \frac{3\pi}{5} = \pi \;\Leftrightarrow\; 2E\hat{A}D = \pi - \frac{3\pi}{5} \;\Leftrightarrow\; 2E\hat{A}D = \frac{2\pi}{5} \;\Leftrightarrow\; E\hat{A}D = \frac{2\pi}{2\times 5} \;\Leftrightarrow\; E\hat{A}D = \frac{\pi}{5}$$

Como $B\hat{A}E = B\hat{A}D + E\hat{A}D \;\Leftrightarrow\; B\hat{A}D = B\hat{A}E - E\hat{A}D$ vem que

$$B\hat{A}D = \frac{3\pi}{5} - \frac{\pi}{5} = \frac{2\pi}{5}$$

Assim, vem que,

$$\frac{\overrightarrow{AB}\,.\,\overrightarrow{AD}}{\left\|\overrightarrow{AD}\right\|} = \frac{\left\|\overrightarrow{AB}\right\| \times \left\|\overrightarrow{AD}\right\| \times \cos\left(\overrightarrow{AB}\,\hat{}\,\overrightarrow{AD}\right)}{\left\|\overrightarrow{AD}\right\|} = \left\|\overrightarrow{AB}\right\| \times \cos\left(B\hat{A}D\right) \underset{\overline{AB}=1}{=} \cos\left(B\hat{A}D\right) = \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$$

Como $\cos(2\alpha) = \cos^2\alpha - \operatorname{sen}^2\alpha$ e $\operatorname{sen}^2(\alpha) + \cos^2\alpha = 1 \;\Leftrightarrow\; \cos^2\alpha = 1 - \operatorname{sen}^2\alpha$ vem que

$$\frac{\overrightarrow{AB}\,.\,\overrightarrow{AD}}{\left\|\overrightarrow{AD}\right\|} = \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) = \cos^2\left(\frac{\pi}{5}\right) - \operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi}{5}\right) = 1 - \operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi}{5}\right) - \operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi}{5}\right) = 1 - 2\operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi}{5}\right)$$

Exame – 2014, 2.ª Fase

40. Como o lado $[PR]$ do triângulo $[PQR]$ é um diâmetro da circunferência e o vértice Q pertence à mesma circunferência, podemos garantir que o triângulo $[PQR]$ é retângulo, sendo $[PR]$ a hipotenusa.
Como a circunferência tem raio 2, vem que $\overline{PR} = 2 \times 2 = 4$, e assim, recorrendo à definição de seno e cosseno temos:

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{\overline{QR}}{\overline{PR}} \Leftrightarrow \operatorname{sen}\alpha = \frac{\overline{QR}}{4} \Leftrightarrow \overline{QR} = 4\operatorname{sen}\alpha$$

$$\cos\alpha = \frac{\overline{PQ}}{\overline{PR}} \Leftrightarrow \cos\alpha = \frac{\overline{PQ}}{4} \Leftrightarrow \overline{PQ} = 4\cos\alpha$$

Como os lados $[QR]$ e $[PQ]$ são perpendiculares, temos que:

$$A_{[PQR]} = \frac{\overline{QR} \times \overline{PQ}}{2} = \frac{4\operatorname{sen}\alpha \times 4\cos\alpha}{2} = 8\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha$$

Como o triângulo $[PSR]$ é congruente com o triângulo $[PQR]$ (ambos têm 1 ângulo reto e dois lados iguais), vem que:

$$A(\alpha) = A_{[PQRS]} = A_{[PQR]} + A_{[PSR]} = 2 \times A_{[PQR]} = 2 \times 8\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha = 16\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha$$

Como $\operatorname{tg}\theta = 2\sqrt{2}$ e $\operatorname{tg}^2\theta + 1 = \frac{1}{\cos^2\theta}$, temos que:

$$\left(2\sqrt{2}\right)^2 + 1 = \frac{1}{\cos^2\theta} \Leftrightarrow 4 \times 2 + 1 = \frac{1}{\cos^2\theta} \Leftrightarrow 9 = \frac{1}{\cos^2\theta} \Leftrightarrow \cos^2\theta = \frac{1}{9} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cos\theta = \pm\sqrt{\frac{1}{9}} \Leftrightarrow \cos\theta = \pm\frac{1}{3} \underset{\theta\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right[}{\Leftrightarrow} \cos\theta = \frac{1}{3}$$

E, pela fórmula fundamental da trigonometria, vem:

$$\operatorname{sen}^2\theta + \frac{1}{9} = 1 \Leftrightarrow \operatorname{sen}^2\theta = 1 - \frac{1}{9} \Leftrightarrow \operatorname{sen}^2\theta = \frac{8}{9} \Leftrightarrow \operatorname{sen}\theta = \pm\sqrt{\frac{8}{9}} \Leftrightarrow \operatorname{sen}\theta = \pm\frac{2\sqrt{2}}{3} \underset{\theta\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right[}{\Leftrightarrow} \operatorname{sen}\theta = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

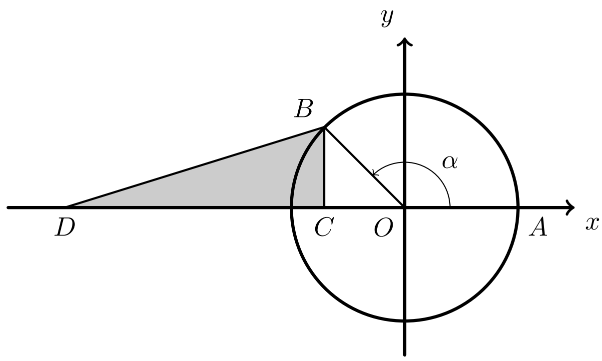
Finalmente, recorrendo à fórmula de $A(\alpha)$, deduzida antes, temos que:

$$A(\theta) = 16 \times \frac{2\sqrt{2}}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{32\sqrt{2}}{9}$$

Exame – 2014, 2.ª Fase

41. Como

- $\overline{BC} = \operatorname{sen}\alpha$
- $\overline{OC} = \cos\alpha$



Temos que $\overline{DC} = \overline{OD} - \overline{OC} = 3 - |\cos\alpha|$

Como $\alpha \in \left]\frac{\pi}{2},\pi\right[$, logo $\cos\alpha < 0$, pelo que $|\cos\alpha| = -\cos\alpha$

Assim,$\overline{DC} = 3 - |\cos\alpha| = 3 - (-\cos\alpha) = 3 + \cos\alpha$

Desta forma, temos que:

$$A_{[BCD]} = \frac{\overline{DC} \times \overline{BC}}{2} = \frac{\operatorname{sen}\alpha(3+\cos\alpha)}{2} = \frac{1}{2}(3+\cos\alpha)\operatorname{sen}\alpha$$

Resposta: **Opção C**

Exame – 2014, 1.ª Fase

42.

42.1. Como $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \dfrac{f(x)-f\left(\frac{\pi}{2}\right)}{x-\frac{\pi}{2}} = f'\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = \dfrac{\pi}{2} - \operatorname{sen}\left(2\times\dfrac{\pi}{2}\right) = \dfrac{\pi}{2} - \operatorname{sen}(\pi) = \dfrac{\pi}{2} - 0 = \dfrac{\pi}{2}$

temos que:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{f(x)-f\left(\frac{\pi}{2}\right)}{2x-\pi} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{f(x)-f\left(\frac{\pi}{2}\right)}{2\left(x-\frac{\pi}{2}\right)} = \frac{1}{2}\times\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{f(x)-f\left(\frac{\pi}{2}\right)}{x-\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2}\times\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4}$$

42.2. Começando por determinar f'' temos:

$$f''(x) = \big(f'(x)\big) = \big(x - \operatorname{sen}(2x)\big)' = (x)' - \big(\operatorname{sen}(2x)\big)' = 1 - (2x)'\cos(2x) = 1 - 2\cos(2x)$$

Para determinar o sentido das concavidades, vamos estudar o sinal de f'':

$$f''(x) = 0 \;\Leftrightarrow\; 1 - 2\cos(2x) = 0 \;\Leftrightarrow\; 1 = 2\cos(2x) \;\Leftrightarrow\; \frac{1}{2} = \cos(2x) \;\Leftrightarrow\; \cos(2x) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) \;\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\; 2x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \,\vee\, 2x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi\,, k\in\mathbb{Z} \;\Leftrightarrow\; x = \frac{\pi}{6} + k\pi \,\vee\, x = -\frac{\pi}{6} + k\pi\,, k\in\mathbb{Z}$$

Logo, as únicas soluções da equação $f''(x) = 0$ que pertencem ao intervalo $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{4}\right[$, são $x = \frac{\pi}{6}$ e $x = -\frac{\pi}{6}$ (obtidas com $k = 0$).

Assim, estudando a variação de sinal de f'' e relacionando com o sentido das concavidades do gráfico de f, vem:

x	$-\frac{\pi}{2}$		$-\frac{\pi}{6}$		$\frac{\pi}{6}$		$\frac{\pi}{4}$
f''	n.d.	+	0	−	0	+	n.d.
f	n.d.	$\smile$	Pt. I.	$\frown$	Pt. I.	$\smile$	n.d.

Logo, podemos concluir que o gráfico de f:

- tem a concavidade voltada para cima no intervalo $\left]-\frac{\pi}{2},-\frac{\pi}{6}\right]$ e no intervalo $\left[\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{4}\right[$
- tem a concavidade voltada para baixo no intervalo $\left[-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{6}\right]$
- tem dois pontos de inflexão de abcissas, cujas abcissas são $-\frac{\pi}{6}$ e $\frac{\pi}{6}$

Exame – 2014, 1.ª Fase

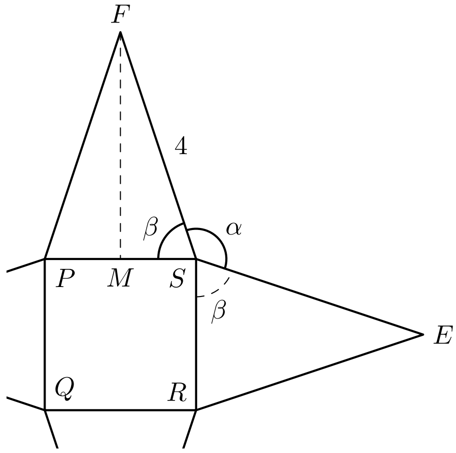
43. Como $\cos(a+b) = \cos a\cos b - \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b$, então $\cos(2a) = \cos(a+a) = \cos^2 a - \operatorname{sen}^2 a$

Assim, para cada valor de $x\in\mathbb{R}$, $g(x) = \cos^2\left(\dfrac{x}{12}\right) - \operatorname{sen}^2\left(\dfrac{x}{12}\right) = \cos\left(2\times\dfrac{x}{12}\right) = \cos\left(\dfrac{x}{6}\right)$

Resposta: **Opção D**

Teste Intermédio 12.º ano – 30.04.2014

44. Considerando β como o ângulo FSP e sendo M o ponto médio do lado $[SP]$, como o triângulo $[SMF]$ é retângulo, recorrendo à definição de seno e cosseno temos:



$$\operatorname{sen}\beta = \frac{\overline{FM}}{\overline{FS}} \Leftrightarrow \operatorname{sen}\beta = \frac{\overline{FM}}{4} \Leftrightarrow \overline{FM} = 4\operatorname{sen}\beta$$

$$\cos\beta = \frac{\overline{SM}}{\overline{FS}} \Leftrightarrow \cos\beta = \frac{\overline{SM}}{4} \Leftrightarrow \overline{SM} = 4\cos\beta$$

Como M é o ponto médio de $[SP]$, temos que

$$\overline{SP} = 2 \times \overline{SM} = 2 \times 4\cos\beta = 8\cos\beta$$

Assim, a área do triângulo $[PSF]$ pode ser calculada como:

$$A_{[PSF]} = \frac{\overline{SP} \times \overline{FM}}{2} = \frac{8\cos\beta \times 4\operatorname{sen}\beta}{2} = \frac{32\operatorname{sen}\beta\cos\beta}{2} = 16\operatorname{sen}\beta\cos\beta = 8 \times 2\operatorname{sen}\beta\cos\beta = 8\operatorname{sen}(2\beta)$$

(porque $\operatorname{sen}(a+b) = \operatorname{sen} a \cos b + \cos a \operatorname{sen} b$,
então $\operatorname{sen}(2a) = \operatorname{sen}(a+a) = 2\operatorname{sen} a \cos a$)

Como o ângulo RSP é um ângulo reto, podemos relacionar o ângulo α com o ângulo β:

$$\frac{\pi}{2} + \beta + \alpha + \beta = 2\pi \Leftrightarrow 2\beta + \alpha = 2\pi - \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow 2\beta + \alpha = \frac{3\pi}{2} \Leftrightarrow 2\beta = \frac{3\pi}{2} - \alpha$$

Logo a área do triângulo $[PSF]$ é

$$A_{[PSF]} = 8\operatorname{sen}(2\beta) = 8\operatorname{sen}\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) = 8(-\cos\alpha) = -8\cos\alpha$$

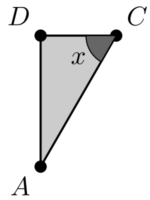
Assim, temos que a área lateral é:

$$A_L = 4 \times A_{[PSF]} = 4 \times (-8\cos\alpha) = -32\cos\alpha$$

Teste Intermédio 12.º ano – 30.04.2014

45.

45.1. Vamos considerar $\overline{DA}$ a medida da altura do triângulo e $\overline{EC}$ a medida da base. Sabemos que $\overline{CA} = 1$, porque é a medida do raio da circunferência.



Como $[CA]$ é a hipotenusa do triângulo e $[DA]$ o cateto oposto ao ângulo x, usando o seno do ângulo temos que:

$$\operatorname{sen} x = \frac{\overline{DA}}{\overline{CA}} \Leftrightarrow \operatorname{sen} x = \frac{\overline{DA}}{1} \Leftrightarrow \overline{DA} = \operatorname{sen} x$$

Por outro lado, como $[DC]$ é o cateto adjacente, usando a definição de cosseno, temos:

$$\cos x = \frac{\overline{DC}}{\overline{CA}} \Leftrightarrow \cos x = \frac{\overline{DC}}{1} \Leftrightarrow \overline{DC} = \cos x$$

Como $\overline{ED} = 6$ temos que:

$$\overline{EC} = \overline{ED} + \overline{DC} \Leftrightarrow \overline{EC} = 6 + \cos x$$

Logo, calculando a área do triângulo, obtemos:

$$A_{[AEC]} = \frac{\overline{EC} \times \overline{DA}}{2} = \frac{(6+\cos x)(\operatorname{sen} x)}{2} = \frac{6 \operatorname{sen} x + \operatorname{sen} x \cos x}{2} = 3 \operatorname{sen} x + \frac{\operatorname{sen} x \cos x}{2}$$

Como $\operatorname{sen}(2x) = 2 \operatorname{sen} x \cos x$, podemos escrever:

$$A_{[AEC]} = 3 \operatorname{sen} x + \frac{\operatorname{sen} x \cos x}{2} = 3 \operatorname{sen} x + \frac{\frac{2 \operatorname{sen} x \cos x}{2}}{2} = 3 \operatorname{sen} x + \frac{\operatorname{sen}(2x)}{4} = 3 \operatorname{sen} x + \frac{1}{4} \operatorname{sen}(2x)$$

45.2. Como a função f resulta de operações sucessivas de funções contínuas em $\mathbb{R}$, é uma função contínua, e, por isso, também é contínua em $\left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}\right]$.

Como $1{,}72 < 2 < 2{,}37$, ou seja, $f\left(\frac{\pi}{6}\right) < 2 < f\left(\frac{\pi}{4}\right)$, então, podemos concluir, pelo Teorema de Bolzano, que existe $c \in \left]\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}\right[$ tal que $f(c) = 2$, ou seja, que a equação $f(x) = 2$ tem, pelo menos, uma solução em $\left]\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}\right[$.

C.A.

$$f\left(\frac{\pi}{6}\right) = 3 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{6}\right) + \frac{1}{4} \operatorname{sen}\left(2 \times \frac{\pi}{6}\right) = $$
$$= 3 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{6}\right) + \frac{1}{4} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3}\right) = $$
$$\approx 1{,}72$$

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 3 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right) + \frac{1}{4} \operatorname{sen}\left(2 \times \frac{\pi}{4}\right) = $$
$$= 3 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right) + \frac{1}{4} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) = $$
$$\approx 2{,}37$$

Exame – 2013, Ép. especial

46. Para averiguar se a função f é contínua em $x=1$, temos que verificar se $f(1) = \lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$

- $f(1) = 1\times e^{3+1} + 2\times 1 = e^4+2$
- $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} \left(xe^{3+x}+2x\right) = 1\times e^{3+1}+2\times 1 = e^4+2$
- $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} \left(\dfrac{1-\sqrt{x}+\operatorname{sen}(x-1)}{1-x}\right) = \dfrac{1-\sqrt{1^+}+\operatorname{sen}(1^+-1)}{1-1^+} = \dfrac{0^-+\operatorname{sen}(0^+)}{0^-} = \dfrac{0}{0}$ (ind.)

$$= \lim_{x\to 1^+}\left(\frac{1-\sqrt{x}}{1-x}+\frac{\operatorname{sen}(x-1)}{1-x}\right) = \lim_{x\to 1^+}\left(\frac{1-\sqrt{x}}{1-x}\right)+\lim_{x\to 1^+}\left(\frac{\operatorname{sen}(x-1)}{1-x}\right) =$$

$$= \lim_{x\to 1^+}\left(\frac{(1-\sqrt{x})(1+\sqrt{x})}{(1-x)(1+\sqrt{x})}\right)+\lim_{x\to 1^+}\left(\frac{\operatorname{sen}(x-1)}{-(x-1)}\right) =$$

$$= \lim_{x\to 1^+}\left(\frac{1^2-(\sqrt{x})^2}{(1-x)(1+\sqrt{x})}\right)-\lim_{x\to 1^+}\left(\frac{\operatorname{sen}(x-1)}{x-1}\right) =$$

(fazendo $y=x-1$, temos que se $x\to 1^+$, então $y\to 0^+$)

$$= \lim_{x\to 1^+}\left(\frac{1-x}{(1-x)(1+\sqrt{x})}\right)-\underbrace{\lim_{y\to 0^+}\left(\frac{\operatorname{sen} y}{y}\right)}_{\text{Lim. Notável}} = \lim_{x\to 1^+}\left(\frac{1}{1+\sqrt{x}}\right)-1 =$$

$$= \frac{1}{1+\sqrt{1^+}}-1 = \frac{1}{2}-1 = -\frac{1}{2}$$

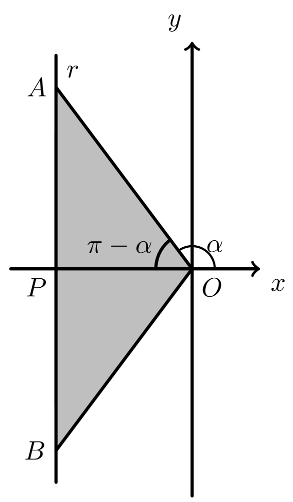
Como $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) \neq \lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$, não existe $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$; logo a função f não é contínua em $x=1$

Exame – 2013, 2.ª Fase

47.

47.1. Começamos por definir o ponto $P(-3{,}0)$ e o ângulo AOP, cuja amplitude é $\pi-\alpha$.

Assim, como sabemos que que $\overline{OP}=3$, podemos usar a definição de cosseno podemos calcular $\overline{OA}$:



$$\cos(\pi-\alpha) = \frac{\overline{OP}}{\overline{OA}} \Leftrightarrow \cos(\pi-\alpha) = \frac{3}{\overline{OA}} \Leftrightarrow \overline{OA} = \frac{3}{\cos(\pi-\alpha)}$$

Como $\cos(\pi-\alpha) = -\cos\alpha$, temos que:

$$\overline{OA} = \frac{3}{\cos(\pi-\alpha)} \Leftrightarrow \overline{OA} = \frac{3}{-\cos\alpha} \Leftrightarrow \overline{OA} = -\frac{3}{\cos\alpha}$$

Depois, calculamos $\overline{AP}$ recorrendo à definição de tangente:

$$\operatorname{tg}(\pi-\alpha) = \frac{\overline{AP}}{\overline{OP}} \Leftrightarrow \operatorname{tg}(\pi-\alpha) = \frac{\overline{AP}}{3} \Leftrightarrow \overline{AP} = 3\operatorname{tg}(\pi-\alpha)$$

Como $\operatorname{tg}(\pi-\alpha) = -\operatorname{tg}\alpha$, temos que:

$$\overline{AP} = 3\operatorname{tg}(\pi-\alpha) \Leftrightarrow \overline{AP} = -3\operatorname{tg}\alpha$$

Como $\overline{AB} = 2\times\overline{AP}$ e $\overline{OB} = \overline{OA}$, calculado a expressão do perímetro vem:

$$P_{[OAB]} = \overline{AB}+\overline{OA}+\overline{OB} = 2\times\overline{AP}+2\times\overline{OA} = 2\times(-3\operatorname{tg}\alpha)+2\times\left(-\frac{3}{\cos\alpha}\right) = -6\operatorname{tg}\alpha-\frac{6}{\cos\alpha}$$

Logo, para cada $x\in\left]\dfrac{\pi}{2},\pi\right[$, o perímetro do triângulo é $P(x) = -6\operatorname{tg}x-\dfrac{6}{\cos x}$

47.2. Como o declive da reta tangente num ponto é dado pela valor da derivada nesse ponto, vamos calcular a derivada da função P:

$$P'(x) = \left(-6\operatorname{tg} x - \frac{6}{\cos x}\right)' = (-6\operatorname{tg} x)' - \left(\frac{6}{\cos x}\right)' = -6\,(\operatorname{tg} x)' - \frac{(6)'(\cos x) - 6(\cos x)')}{(\cos x)^2} =$$

$$= -6\left(\frac{1}{(\cos x)^2}\right) - \frac{0 - 6(-\operatorname{sen} x))}{(\cos x)^2} = \frac{-6}{\cos^2 x} - \frac{6\operatorname{sen} x}{\cos^2 x} = \frac{-6 - 6\operatorname{sen} x}{\cos^2 x}$$

Assim, o declive da reta tangente ao gráfico da função P no ponto de abcissa $\frac{5\pi}{6}$, é

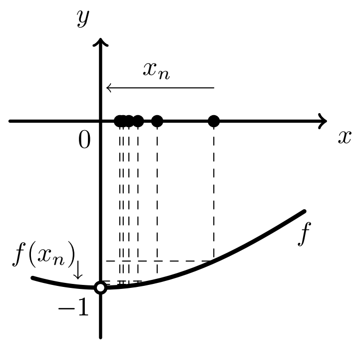
$$m = P'\left(\frac{5\pi}{6}\right) = \frac{-6 - 6\operatorname{sen}\left(\frac{5\pi}{6}\right)}{\cos^2\left(\frac{5\pi}{6}\right)} = \frac{-6 - 6\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{6}\right)}{\left(-\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)^2} = \frac{-6 - 6\left(\frac{1}{2}\right)}{\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \frac{-6-3}{\frac{3}{4}} = \frac{-9}{\frac{3}{4}} = -12$$

Exame – 2013, 2.ª Fase

48. Como $\lim \frac{1}{n} = 0^+$, então $\lim f(x_n) = \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$, e assim, como $\operatorname{sen}(-x) = -\operatorname{sen} x$:

$$\lim f(x_n) = \lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\operatorname{sen}(-x)}{x} = \lim_{x\to 0^+} -\frac{\operatorname{sen} x}{x} =$$

$$= -\underbrace{\lim_{x\to 0^+} \frac{\operatorname{sen} x}{x}}_{\text{Lim. Notável}} = -1$$



Graficamente, na figura ao lado, estão representados alguns termos de (x_n) como objetos, e alguns termos da sucessão das imagens $f(x_n)$, que se aproximam progressivamente de -1, quando o valor de n aumenta.

Resposta: **Opção A**

Exame – 2013, 1.ª Fase

49. Como sabemos que a reta tangente no ponto de abcissa a é paralela à reta $y = \frac{x}{2} + 1$, sabemos que o declive, e logo também o valor derivada é $m = g'(a) = \frac{1}{2}$.

Logo o valor de a é a solução da equação $g'(x) = \frac{1}{2}$, : $x \in \left]-\frac{\pi}{2},0\right[$

Assim, começamos por determinar a expressão de g':

$$g'(x) = (\operatorname{sen}(2x) - \cos x)' = (\operatorname{sen}(2x))' - (\cos x)' = (2x)'\cos(2x) - (-\operatorname{sen} x) = 2\cos(2x) + \operatorname{sen} x$$

Como $\cos(2x) = \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x$ e $\cos^2 x = 1 - \operatorname{sen}^2 x$,vem:

$$g'(x) = 2\cos(2x) + \operatorname{sen} x = 2\left(\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x\right) + \operatorname{sen} x = 2\left(1 - \operatorname{sen}^2 x - \operatorname{sen}^2 x\right) + \operatorname{sen} x =$$
$$= 2\left(1 - 2\operatorname{sen}^2 x\right) + \operatorname{sen} x = 2 - 4\operatorname{sen}^2 x + \operatorname{sen} x = -4\operatorname{sen}^2 x + \operatorname{sen} x + 2$$

Logo, resolvendo a equação $g'(a) = \frac{1}{2}$ temos:

$$-4\operatorname{sen}^2 a + \operatorname{sen} a + 2 = \frac{1}{2} \Leftrightarrow -8\operatorname{sen}^2 a + 2\operatorname{sen} a + 4 = 1 \Leftrightarrow -8\operatorname{sen}^2 a + 2\operatorname{sen} a + 3 = 0$$

Considerando $y = \operatorname{sen} a$, e resolvendo a equação de grau 2, temos que:

$$-8\operatorname{sen}^2 a + 2\operatorname{sen} a + 3 = 0 \Leftrightarrow -8y^2 + 2y + 3 = 0 \Leftrightarrow y = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4(-8)(3)}}{2(-8)} \Leftrightarrow y = \frac{3}{4} \vee y = -\frac{1}{2}$$

Escrevendo em função de a, vem: $\operatorname{sen} a = \frac{3}{4} \vee \operatorname{sen} a = -\frac{1}{2}$

Como $x \in \left]-\frac{\pi}{2},0\right[$, $-1 < \operatorname{sen} x < 0$, logo a equação $\operatorname{sen} a = \frac{3}{4}$ é impossível.

$$\operatorname{sen} a = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \operatorname{sen} a = \operatorname{sen}\left(-\frac{\pi}{6}\right) \Leftrightarrow a = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi \vee a = \pi - \left(-\frac{\pi}{6}\right) + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow a = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi \vee a = \pi + \frac{\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow a = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi \vee a = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Concretizando valores de k podemos verificamos que $a = -\frac{\pi}{6}$ é a única solução da equação que pertence ao domínio da função - $\left]-\frac{\pi}{2},0\right[$, pelo que a reta tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa $a = -\frac{\pi}{6}$ tem declive $\frac{1}{2}$

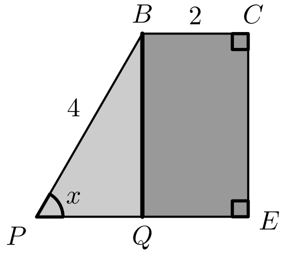
Exame – 2013, 1.ª Fase

50.

50.1. A área do trapézio $[PBCE]$ pode ser calculada como a soma das áreas do retângulo $[BCEQ]$ e do triângulo $[PBQ]$.

Recorrendo à definição de seno, podemos determinar o comprimento $\overline{BQ}$:

$$\operatorname{sen} x = \frac{\overline{BQ}}{4} \Leftrightarrow \overline{BQ} = 4\operatorname{sen} x$$



De forma análoga, usando a definição de cosseno, podemos determinar $\overline{PQ}$:

$$\cos x = \frac{\overline{PQ}}{4} \Leftrightarrow \overline{PQ} = 4\cos x$$

Assim, temos que:

$$A_{[PBCE]} = A_{[BCEQ]} + A_{[PBQ]} = \overline{BC} \times \overline{BQ} + \frac{\overline{PQ} \times \overline{BQ}}{2} = 2 \times 4\operatorname{sen} x + \frac{4\operatorname{sen} x \times 4\cos x}{2} =$$
$$= 8\operatorname{sen} x + 8\operatorname{sen} x\cos x = 8\operatorname{sen} x + 4 \times 2\operatorname{sen} x\cos x = 8\operatorname{sen} x + 4\operatorname{sen}(2x)$$

Logo, para cada valor de $x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, a área do trapézio é dada por $S(x) = 8\operatorname{sen} x + 4\operatorname{sen}(2x)$

50.2. Vamos recorrer à derivada da função S para estudar a monotonia.

$S'(x) = (8\,\text{sen}\,x + 4\,\text{sen}\,(2x))' = (8\,\text{sen}\,x)' + (4\,\text{sen}\,(2x))' = 8\cos x + 4\times(2x)'\cos(2x) = 8\cos x + 8\cos(2x)$

Determinando os zeros da derivada, vem:

$$S'(x) = 0 \Leftrightarrow 8\cos x + 8\cos(2x) = 0 \Leftrightarrow \cos x + \cos(2x) = 0 \Leftrightarrow \cos x = -\cos(2x) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cos x = \cos(\pi - 2x) \Leftrightarrow x = \pi - 2x + 2k\pi \vee x = -(\pi - 2x) + 2k\pi\,, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3x = \pi + 2k\pi \vee x = -\pi + 2x + 2k\pi\,, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3} + \frac{2}{3}k\pi \vee x = \pi - 2k\pi\,, k \in \mathbb{Z}$$

Como o domínio da função S é $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, a única solução da equação $S'(x) = 0$ é $x = \frac{\pi}{3}$

Estudando a variação do sinal e S' e a correspondente monotonia de S, vem:

x	0		$\frac{\pi}{3}$		$\frac{\pi}{2}$
S'	n.d.	+	0	$-$	n.d.
S	n.d.	$\nearrow$	Máx	$\searrow$	n.d.

Assim podemos concluir que:

- a função S é crescente em $\left]0, \frac{\pi}{3}\right]$
- a função S é decrescente em $\left[\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right[$
- a função S tem um máximo absoluto para $x = \frac{\pi}{3}$

Teste Intermédio 12.º ano – 24.05.2013

51.

$$f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{f(x) - f\left(\frac{\pi}{2}\right)}{x - \frac{\pi}{2}} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{x + \cos x - \frac{\pi}{2} - \cos\left(\frac{\pi}{2}\right)}{x - \frac{\pi}{2}} =$$

$$= \lim_{y\to 0} \frac{y + \frac{\pi}{2} + \cos\left(y + \frac{\pi}{2}\right) - \frac{\pi}{2} - 0}{y} = \lim_{y\to 0} \frac{y + \cos\left(y + \frac{\pi}{2}\right)}{y} =$$

$$= \lim_{y\to 0} \frac{y}{y} + \lim_{y\to 0} \frac{\cos\left(y + \frac{\pi}{2}\right)}{y} = 1 + \lim_{y\to 0} \frac{-\text{sen}\,y}{y} = 1 - \underbrace{\lim_{y\to 0} \frac{\text{sen}\,y}{y}}_{\text{Lim. Notável}} =$$

$$= 1 - 1 = 0$$

Seja $y = x - \frac{\pi}{2}$

logo $x = y + \frac{\pi}{2}$

Se $x \to \frac{\pi}{2}$
então, $y \to 0$

$\cos\left(y + \frac{\pi}{2}\right) = -\text{sen}\,y$

Teste Intermédio 12.º ano – 24.05.2013

52.

52.1. A função g é contínua em $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ porque resulta de operações sucessivas entre funções contínuas. Para que a função g seja contínua em $\mathbb{R}$, tem que ser contínua em $x=0$, ou seja, tem que verificar a condição $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = f(0)$

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0}\frac{-x+\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right)}{x} = \lim_{x\to 0} -\frac{x}{x} + \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right)}{x} = -1 + \lim_{y\to 0}\frac{\operatorname{sen} y}{2y} =$$

$$= -1 + \frac{1}{2}\underbrace{\lim_{y\to 0}\frac{\operatorname{sen} y}{y}}_{\text{Lim. Notável}} = -1+\frac{1}{2}(1) = -\frac{1}{2}$$

Seja $y = \frac{x}{2}$

logo $x = 2y$

Se $x \to 0$
então $y \to 0$

Como $f(0) = e^k - 1$, para que a função seja contínua, tem que se verificar:

$$e^k - 1 = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow e^k = 1 - \frac{1}{2} \Leftrightarrow e^k = \frac{1}{2} \Leftrightarrow k = \ln\left(\frac{1}{2}\right) \Leftrightarrow k = \ln 1 - \ln 2 \Leftrightarrow k = -\ln 2$$

52.2. Para resolver a equação, começamos por determinar a expressão analítica de f':

$$f'(x) = \left(-x+\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right)\right)' = (-x)' + \left(\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right)\right)' = -1 + \left(\frac{x}{2}\right)'\cos\left(\frac{x}{2}\right) = -1+\frac{1}{2}\cos\left(\frac{x}{2}\right)$$

Logo,

$$2f'(x) = (f(x)+x)^2 - 1 \Leftrightarrow 2\left(-1+\frac{1}{2}\cos\left(\frac{x}{2}\right)\right) = \left(-x+\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right)+x\right)^2 - 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -2+\cos\left(\frac{x}{2}\right) = \operatorname{sen}^2\left(\frac{x}{2}\right) - 1 \Leftrightarrow -2+\cos\left(\frac{x}{2}\right) = -\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) \Leftrightarrow$$

(fórmula fundamental)

$$\Leftrightarrow \cos^2\left(\frac{x}{2}\right) + \cos\left(\frac{x}{2}\right) - 2 = 0 \Leftrightarrow y^2+y-2=0 \Leftrightarrow$$

Se $y = \cos\left(\frac{x}{2}\right)$

$$\Leftrightarrow y = \frac{-1\pm\sqrt{1^2-4(1)(-2)}}{2(1)} \Leftrightarrow y=1 \lor y=-2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cos\left(\frac{x}{2}\right) = 1 \lor \cos\left(\frac{x}{2}\right) = -2$$

Como $\cos\left(\frac{x}{2}\right) = -2$ é uma equação impossível, temos:

$$\cos\left(\frac{x}{2}\right) = 1 \Leftrightarrow \frac{x}{2} = 2k\pi\,, k\in\mathbb{Z} \Leftrightarrow x = 4k\pi\,, k\in\mathbb{Z}$$

Logo, o conjunto das soluções da equação (em $]-2\pi,5\pi[$), é $\{0,4\}$

Exame – 2012, Ép. especial

53. Como a função f é contínua em $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, porque resulta de operações sucessivas entre funções contínuas, só podem existir assíntotas verticais quando $x \to 0^-$ ou quando $x \to 0^+$.
Calculando os limites temos:

- $$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{1-e^{4x}}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{-\left(e^{4x}-1\right)}{\frac{1}{4}\times 4x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{-4\left(e^{4x}-1\right)}{4x} = -4 \lim_{x\to 0^+} \frac{e^{4x}-1}{4x} = -4$$

  (fazendo $y = 4x$, se $x \to 0^+$, então $y \to 0^+$)

  $$= -4 \underbrace{\lim_{y\to 0^+} \frac{e^y - 1}{y}}_{\text{Lim. Notável}} = -4 \times 1 = -4$$

- $$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{\operatorname{sen} x}{1-\sqrt{1-x^3}} = \lim_{x\to 0^-} \frac{(\operatorname{sen} x)(1+\sqrt{1-x^3})}{(1-\sqrt{1-x^3})(1+\sqrt{1-x^3})} = \lim_{x\to 0^-} \frac{(\operatorname{sen} x)(1+\sqrt{1-x^3})}{1^2-(\sqrt{1-x^3})^2} =$$

  $$= \lim_{x\to 0^-} \frac{(\operatorname{sen} x)(1+\sqrt{1-x^3})}{1-(1-x^3)} = \lim_{x\to 0^-} \frac{(\operatorname{sen} x)(1+\sqrt{1-x^3})}{1-1+x^3} = \lim_{x\to 0^-} \frac{(\operatorname{sen} x)(1+\sqrt{1-x^3})}{x^3} =$$

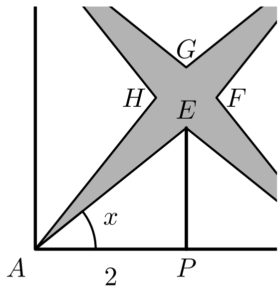
  $$= \underbrace{\lim_{x\to 0^-} \frac{\operatorname{sen} x}{x}}_{\text{Lim. Notável}} \times \lim_{x\to 0^-} \frac{1+\sqrt{1-x^3}}{x^2} = 1 \times \frac{1+\sqrt{1}}{(0^-)^2} = \frac{2}{0^+} = +\infty$$

Assim podemos concluir que $x = 0$ é a única assíntota vertical do gráfico de f (quando $x \to 0^-$).

Exame – 2012, 2.ª Fase

54.

54.1. Definindo o ponto P, como o ponto médio do lado $[AB]$, a área da região sombreada pode ser calculada como a diferença entre a área do quadrado e a soma das áreas de 8 triângulos retângulos (o triângulo $[AEP]$ e os restantes 7 semelhantes a este):



$$A_{[AEBFCGDH]} = A_{[ABCD]} - 8 \times A_{[AEP]}$$

Como P é o ponto médio de $[AB]$, temos que $\overline{AP} = 2$, podemos determinar $\overline{EP}$, recorrendo à definição de tangente de um ângulo:

$$\operatorname{tg} x = \frac{\overline{EP}}{\overline{AP}} \Leftrightarrow \operatorname{tg} x = \frac{\overline{EP}}{2} \Leftrightarrow \overline{EP} = 2 \operatorname{tg} x$$

Assim, calculando a área da região sombreada, vem:

$$A_{[AEBFCGDH]} = A_{[ABCD]} - 8 \times A_{[AEP]} = \overline{AB}^2 - 8 \times \frac{\overline{AP} \times \overline{EP}}{2} = 4^2 - 8 \times \frac{2 \times 2 \operatorname{tg} x}{2} =$$

$$= 16 - 8 \times 2 \operatorname{tg} x = 16 - 16 \operatorname{tg} x = 16(1 - \operatorname{tg} x)$$

Logo, para cada valor de $x \in \left]0, \frac{\pi}{4}\right[$, a área da região sombreada é dada por $a(x) = 16(1 - \operatorname{tg} x)$

54.2. Como a função a resulta de operações sucessivas de funções contínuas em $\left]0, \frac{\pi}{4}\right[$, é uma função contínua, e, por isso, também é contínua em $\left[\frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{5}\right]$.

Como $4{,}38 < 5 < 11{,}71$, ou seja, $a\left(\frac{\pi}{5}\right) < 5 < a\left(\frac{\pi}{12}\right)$, então, podemos concluir, pelo Teorema de Bolzano, que existe $\alpha \in \left]\frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{5}\right[$, tal que $a(\alpha) = 5$, ou seja, que existe um ângulo α com amplitude compreendida entre $\frac{\pi}{12}$ rad e $\frac{\pi}{5}$ rad, que define uma região sombreada com área 5.

C.A.

$$a\left(\frac{\pi}{12}\right) = 16\left(1 - \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{12}\right)\right) \approx 11{,}71$$

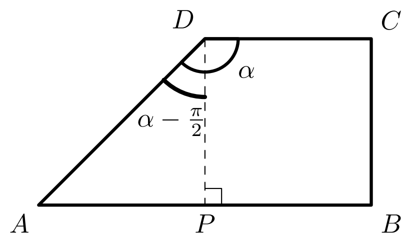
$$a\left(\frac{\pi}{5}\right) = 16\left(1 - \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{5}\right)\right) \approx 4{,}38$$

Exame – 2012, 2.ª Fase

55.

55.1. Considerando um ponto P, sobre o lado $[AB]$ do trapézio, tal que o segmento $[DP]$ seja perpendicular ao lado $[AB]$, consideramos o ângulo ADP com amplitude $\frac{\pi}{2} - \alpha$

Como $\overline{DP} = 1$, recorrendo à definição de cosseno, temos:



$$\cos\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{\overline{DP}}{\overline{DA}} \Leftrightarrow \overline{DA} = \frac{1}{\cos\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right)}$$

e como $\cos\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) = \operatorname{sen}\alpha$, temos que: $\overline{DA} = \frac{1}{\operatorname{sen}\alpha}$

Da definição de tangente de um ângulo, e como $\operatorname{tg}\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) = -\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}$ temos:

$$\operatorname{tg}\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{\overline{AP}}{\overline{DP}} \Leftrightarrow \operatorname{tg}\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{\overline{AP}}{1} \Leftrightarrow \overline{AP} = -\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}$$

Logo, o perímetro do trapézio é:

$$P_{[ABCD]} = \overline{PB} + \overline{BC} + \overline{CD} + \overline{DA} + \overline{AP} = 1 + 1 + 1 + \frac{1}{\operatorname{sen}\alpha} + \left(-\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}\right) =$$

$$= 3 + \frac{1}{\operatorname{sen}\alpha} - \frac{1}{\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}} = 3 + \frac{1}{\operatorname{sen}\alpha} - \frac{\cos\alpha}{\operatorname{sen}\alpha} = 3 + \frac{1 - \cos\alpha}{\operatorname{sen}\alpha}$$

Ou seja, para cada valor de $\alpha \in \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right[$, o perímetro do trapézio $[ABCD]$ é $P(\alpha) = 3 + \frac{1 - \cos\alpha}{\operatorname{sen}\alpha}$

55.2. Começando por determinar a expressão da derivada, temos:

$$P'(\alpha) = \left(3 + \frac{1-\cos\alpha}{\operatorname{sen}\alpha}\right)' = (3)' + \left(\frac{1-\cos\alpha}{\operatorname{sen}\alpha}\right)' = 0 + \frac{(1-\cos\alpha)'(\operatorname{sen}\alpha) - (1-\cos\alpha)(\operatorname{sen}\alpha)'}{(\operatorname{sen}\alpha)^2} =$$

$$= \frac{0-(-\operatorname{sen}\alpha)(\operatorname{sen}\alpha) - (1-\cos\alpha)(\cos\alpha)}{\operatorname{sen}^2\alpha} = \frac{\operatorname{sen}^2\alpha - (\cos\alpha - \cos^2\alpha)}{\operatorname{sen}^2\alpha} =$$

$$= \frac{\operatorname{sen}^2\alpha - \cos\alpha + \cos^2\alpha}{\operatorname{sen}^2\alpha} = \frac{\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha - \cos\alpha}{\operatorname{sen}^2\alpha} = \frac{1-\cos\alpha}{\operatorname{sen}^2\alpha}$$

Como $\operatorname{tg}^2\theta + 1 = \frac{1}{\cos^2\theta}$ e $\operatorname{tg}\theta = -\sqrt{8}$, vem:

$$(-\sqrt{8})^2 + 1 = \frac{1}{\cos^2\theta} \Leftrightarrow 8+1 = \frac{1}{\cos^2\theta} \Leftrightarrow \cos^2\theta = \frac{1}{9} \Leftrightarrow \cos\theta = \pm\sqrt{\frac{1}{9}} \Leftrightarrow \cos\theta = \pm\frac{1}{3}$$

Como $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$, $\cos\theta < 0$, logo $\cos\theta = -\frac{1}{3}$

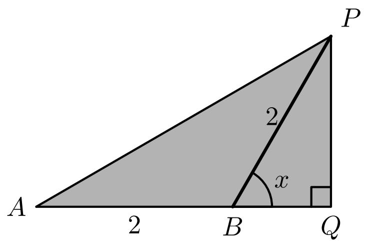
E também: $\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1 \Leftrightarrow \operatorname{sen}^2\theta = 1 - \left(-\frac{1}{3}\right)^2 \Leftrightarrow \operatorname{sen}^2\theta = 1 - \frac{1}{9} \Leftrightarrow \operatorname{sen}^2\theta = \frac{8}{9}$

Assim, $P'(\theta) = \dfrac{1-\left(-\frac{1}{3}\right)}{\frac{8}{9}} = \dfrac{1+\frac{1}{3}}{\frac{8}{9}} = \dfrac{\frac{4}{3}}{\frac{8}{9}} = \dfrac{4\times 9}{3\times 8} = \dfrac{3}{2}$

Exame – 2012, 1.ª Fase

56.

56.1. Usando a definição de seno, temos:



$$\operatorname{sen} x = \frac{\overline{PQ}}{\overline{BP}} \Leftrightarrow \operatorname{sen} x = \frac{\overline{PQ}}{2} \Leftrightarrow \overline{PQ} = 2\operatorname{sen} x$$

e usando a definição de cosseno, vem:

$$\cos x = \frac{\overline{BQ}}{\overline{BP}} \Leftrightarrow \cos x = \frac{\overline{BQ}}{2} \Leftrightarrow \overline{BQ} = 2\cos x$$

Calculando a área do triângulo vem:

$$A_{[APQ]} = \frac{(\overline{AB} + \overline{BQ}) \times \overline{PQ}}{2} = \frac{(2+2\cos x)(2\operatorname{sen} x)}{2} = \frac{4\operatorname{sen} x + 4\operatorname{sen} x\cos x}{2} = 2\operatorname{sen} x + 2\operatorname{sen} x\cos x =$$

$$= 2\operatorname{sen} x + \operatorname{sen}(2x)$$

Logo, para cada valor de $x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, a área do triângulo $[APQ]$ é $A(x) = 2\operatorname{sen} x + \operatorname{sen}(2x)$

56.2. Para estudar a existência de um máximo, começamos por determinar a expressão da derivada:

$$A'(x) = (2\operatorname{sen} x + \operatorname{sen}(2x))' = (2\operatorname{sen} x)' + (\operatorname{sen}(2x))' = 2\cos x + (2x)'\cos(2x) = 2\cos x + 2\cos(2x)$$

Depois calculamos os zeros, para estudar o sinal:

$$A'(x) = 0 \;\Leftrightarrow\; 2\cos x + 2\cos(2x) = 0 \;\Leftrightarrow\; 2\cos x = -2\cos(2x) \;\Leftrightarrow\; \cos x = -\cos(2x) \;\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\; \cos x = \cos(\pi - 2x)$$

Como, em $\mathbb{R}$,
$$\cos x = \cos(\pi - 2x) \;\Leftrightarrow\; x = \pi - 2x + 2k\pi \;\vee\; x = -(\pi - 2x) + 2k\pi\,,\; k \in \mathbb{Z} \;\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\; 3x = \pi + 2k\pi \;\vee\; x = -\pi + 2x + 2k\pi\,,\; k \in \mathbb{Z} \;\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\; x = \frac{\pi}{3} + \frac{2k\pi}{2} \;\vee\; x = \pi - 2k\pi\,,\; k \in \mathbb{Z}$$

Concretizando valores inteiros de k, verificamos que, $x = \frac{\pi}{3}$ é a única solução em $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, ou seja, a única solução da equação $A'(x) = 0$

Assim, estudando a variação de sinal de A' e relacionando com a monotonia da função A, vem:

x	0		$\frac{\pi}{3}$		$\frac{\pi}{2}$
A'	n.d.	+	0	$-$	n.d.
A	n.d.	$\nearrow$	Máx	$\searrow$	n.d.

Logo $x = \frac{\pi}{3}$ é o maximizante que corresponde ao máximo absoluto da função A, ou seja existe um valor de $x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, para o qual o valor da área do triângulo é máxima.

Teste Intermédio 12.º ano – 24.05.2012

57. Como se pretende determinar os extremos da função, vamos recorrer aos zeros da derivada, e por isso, começamos por derivar a função:

$$g'(x) = (x - 2\cos x)' = (x)' - (2\cos x)' = 1 - 2(-\operatorname{sen} x) = 1 + 2\operatorname{sen} x$$

Depois determinamos os zeros da derivada, ou seja as abcissas dos pontos C e D:

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow 1 + 2\operatorname{sen} x = 0 \Leftrightarrow \operatorname{sen} x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \operatorname{sen} x = \operatorname{sen}\left(-\frac{\pi}{6}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi \ \vee \ x = \pi - \left(-\frac{\pi}{6}\right) + 2k\pi \,, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi \ \vee \ x = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi \,, k \in \mathbb{Z}$$

Atribuindo valores inteiros a k, podemos encontrar os valores de x que pertencem ao domínio da função:

$$x = -\frac{\pi}{6}\ (k = 0) \ \text{ e } \ x = -\frac{5\pi}{6}\left(k = -1, x = \frac{7\pi}{6} - 2\pi\right)$$

Assim, estudando a variação de sinal de g' e relacionando com a monotonia da função g, vem:

x	$-\pi$		$-\frac{5\pi}{6}$		$-\frac{\pi}{6}$		$\frac{\pi}{2}$
g'	n.d.	+	0	−	0	+	n.d.
g	n.d.	$\nearrow$	Máx	$\searrow$	min	$\nearrow$	n.d.

Assim, temos que a abcissa do ponto C é $x_C = -\frac{5\pi}{6}$, e a ordenada é

$$g\left(-\frac{5\pi}{6}\right) = -\frac{5\pi}{6} - 2\cos\left(-\frac{5\pi}{6}\right) = -\frac{5\pi}{6} - 2\cos\frac{5\pi}{6} = -\frac{5\pi}{6} - 2\left(-\cos\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{5\pi}{6} - 2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \sqrt{3} - \frac{5\pi}{6}$$

Ou seja, o ponto C tem coordenadas $C\left(-\frac{5\pi}{6}, \sqrt{3} - \frac{5\pi}{6}\right)$

De forma análoga, temos que a abcissa do ponto D é $x_D = -\frac{\pi}{6}$, e a ordenada é

$$g\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{\pi}{6} - 2\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{\pi}{6} - 2\cos\frac{\pi}{6} = -\frac{\pi}{6} - 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{\pi}{6} - \sqrt{3}$$

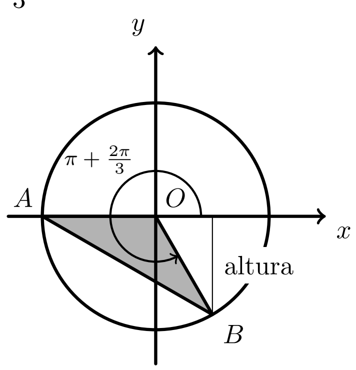
Ou seja, o ponto D tem coordenadas $D\left(-\frac{\pi}{6}, -\frac{\pi}{6} - \sqrt{3}\right)$

Exame – 2011, Prova especial

58. Como se trata de um círculo trigonométrico, o ponto B tem coordenadas $B\left(\cos\frac{5\pi}{3}, \operatorname{sen}\frac{5\pi}{3}\right)$, porque o segmento $[OB]$, define com o semieixo postivo Ox um ângulo de $\pi + \frac{2\pi}{3} = \frac{5\pi}{3}$ radianos.

Podemos considerar como a medida da base do triângulo $\overline{OA} = 1$ e o valor absoluto da ordenada de B como a medida da altura:

$$|y_B| = \left|\operatorname{sen}\frac{5\pi}{3}\right| = \left|-\operatorname{sen}\frac{\pi}{3}\right| = \left|-\frac{\sqrt{3}}{2}\right| = \frac{\sqrt{3}}{2}$$



Assim, calculando a área do triângulo vem:

$$A_{[OAB]} = \frac{\overline{OA} \times |y_B|}{2} = \frac{1 \times \frac{\sqrt{3}}{2}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4}$$

Resposta: **Opção A**

Exame – 2011, Ép. especial

59. $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} x}{f(x)-\pi}=\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} x}{\pi-4\operatorname{sen}(5x)-\pi}=\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} x}{-4\operatorname{sen}(5x)}=-\frac{1}{4}\lim_{x\to 0}\left(\frac{\operatorname{sen} x}{x}\times\frac{x}{\operatorname{sen}(5x)}\right)=$

$$=-\frac{1}{4}\underbrace{\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} x}{x}}_{\text{Lim. Notável}}\times\lim_{x\to 0}\frac{x}{\operatorname{sen}(5x)}=-\frac{1}{4}\times 1\times\lim_{x\to 0}\frac{1}{\frac{\operatorname{sen}(5x)}{x}}=-\frac{1}{4}\times\frac{1}{\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}(5x)}{x}}=$$

(fazendo $y=5x$ temos que $x=\frac{y}{5}$, e se $x\to 0$, então $y\to 0$)

$$=-\frac{1}{4}\times\frac{1}{\displaystyle\lim_{y\to 0}\frac{\operatorname{sen}(y)}{\frac{y}{5}}}=-\frac{1}{4}\times\frac{1}{\displaystyle\lim_{y\to 0}\frac{5\operatorname{sen}(y)}{y}}=-\frac{1}{4}\times\frac{1}{\displaystyle\lim_{y\to 0}\frac{5\operatorname{sen}(y)}{y}}=-\frac{1}{4}\times\frac{1}{5\underbrace{\displaystyle\lim_{y\to 0}\frac{\operatorname{sen}(y)}{y}}_{\text{Lim. Notável}}}=$$

$$=-\frac{1}{4}\times\frac{1}{5\times 1}=-\frac{1}{20}$$

Exame – 2011, Ép. especial

60. Como a função g é contínua, é contínua em $x=0$, ou seja, verifica a condição: $g(0)=\lim_{x\to 0^-}g(x)=\lim_{x\to 0^+}g(x)$
Assim, temos que:

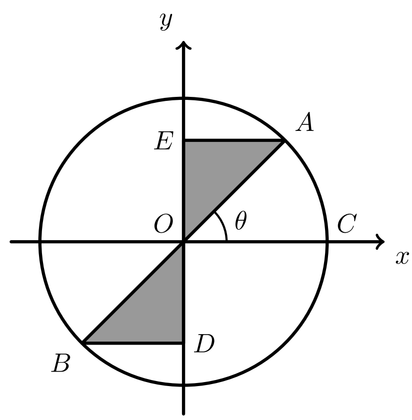
- $g(0)=\ln(k-0)=\ln k$
- $\displaystyle\lim_{x\to 0^-}g(x)=\lim_{x\to 0^-}(\ln(k-x))=\ln k$
- $\displaystyle\lim_{x\to 0^+}g(x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{\operatorname{sen} x}{3x}=\frac{1}{3}\underbrace{\lim_{x\to 0^+}\frac{\operatorname{sen} x}{x}}_{\text{Lim. Notável}}=\frac{1}{3}\times 1=\frac{1}{3}$

Logo, temos que: $\displaystyle\lim_{x\to 0^-}g(x)=\lim_{x\to 0^+}g(x)\ \Leftrightarrow\ \ln k=\frac{1}{3}\ \Leftrightarrow\ k=e^{\frac{1}{3}}\ \Leftrightarrow\ k=\sqrt[3]{3}$

Resposta: **Opção A**

Exame – 2011, 2.ª fase

61. Como $\overline{OA}=1$, usando as definições de seno e cosseno temos:



$$\operatorname{sen}\theta=\frac{\overline{OE}}{\overline{OA}}\ \Leftrightarrow\ \operatorname{sen}\theta=\frac{\overline{OE}}{1}\ \Leftrightarrow\ \overline{OE}=\operatorname{sen}\theta$$

$$\cos\theta=\frac{\overline{EA}}{\overline{OA}}\ \Leftrightarrow\ \cos\theta=\frac{\overline{EA}}{1}\ \Leftrightarrow\ \overline{EA}=\cos\theta$$

E assim, o perímetro da região sombreada é:

$$P_{[ABDE]}=\overline{AO}+\overline{OB}+\overline{BD}+\overline{DO}+\overline{OE}+\overline{EA}$$

Como $\overline{AO}=\overline{OB}$; $\overline{BD}=\overline{EA}$ e $\overline{DO}=\overline{OE}$, temos:

$$P_{[ABDE]}=2\overline{AO}+2\overline{EA}+2\overline{OE}=2\times 1+2\cos\theta+2\operatorname{sen}\theta=2(1+\cos\theta+\operatorname{sen}\theta)$$

Resposta: **Opção C**

Exame – 2011, 2.ª Fase

62. Começamos por determinar $f'(x)$:

$$f'(x) = (a\cos(nx) + b\,\text{sen}\,(nx))' = (a\cos(nx))' + (b\,\text{sen}\,(nx))' = a(nx)'(-\,\text{sen}\,(nx)) + (b(nx)'\cos(nx) = $$
$$= -an\,\text{sen}\,(nx) + bn\cos(nx)$$

Determinamos em seguida $f''(x)$:

$$f''(x) = (f'(x))' = (-an\,\text{sen}\,(nx) + bn\cos(nx))' = (-an\,\text{sen}\,(nx))' + (bn\cos(nx))' =$$
$$= -an(nx)'\cos(nx) + bn(nx)'(-\,\text{sen}\,(nx)) = -an^2\cos(nx) - bn^2\,\text{sen}\,(nx) =$$
$$= -n^2\left(a\cos(nx) + b\,\text{sen}\,(nx)\right) =$$
$$= -n^2\left(f(x)\right)$$

Assim temos que: $\quad f''(x) + n^2 f(x) = -n^2 f(x) + n^2 f(x) = 0\ ,\ \ q.e.d.$

Exame – 2011, 2.ª Fase

63.

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2}\,\text{sen}^2\left(\frac{x}{2}\right)\right) = \lim_{x\to 0}\frac{\text{sen}^2\left(\frac{x}{2}\right)}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{\text{sen}^2\left(\frac{x}{2}\right)}{x^2} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{\text{sen}\left(\frac{x}{2}\right)}{x}\right)^2 = \left(\lim_{x\to 0}\frac{\text{sen}\left(\frac{x}{2}\right)}{x}\right)^2 =$$

(fazendo $y = \frac{x}{2}$ temos que $x = 2y$, e se $x \to 0$, então $y \to 0$)

$$= \left(\lim_{x\to 0}\frac{\text{sen}\,y}{2y}\right)^2 = \left(\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{2}\times\frac{\text{sen}\,y}{y}\right)\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\underbrace{\lim_{x\to 0}\frac{\text{sen}\,y}{y}}_{\text{Lim. Notável}}\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\times 1\right)^2 = \frac{1}{4}$$

Resposta: **Opção C**

Exame – 2011, 1.ª Fase

64.

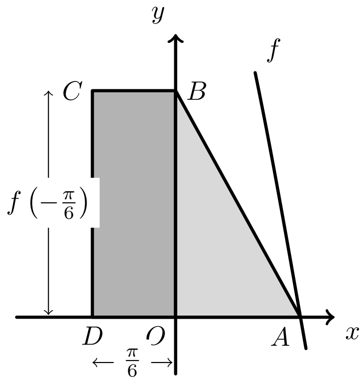
64.1. Podemos calcular a área do trapézio como a soma das áreas do retângulo $[ODCB]$ e do triângulo $[OAB]$.

A base do retângulo é dada pela distância do ponto D à origem:

$$\overline{OD} = |x_D| = \left|-\frac{\pi}{6}\right| = \frac{\pi}{6}$$

e a altura é a ordenada do ponto C:

$$\overline{DC} = f\left(-\frac{\pi}{6}\right) = 4\cos\left(2\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right) = 4\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) = 4\cos\frac{\pi}{3} = 4\times\frac{1}{2} = 2$$



A altura do triângulo também é ordenada do ponto C, $\overline{OB} = \overline{DC}$ e a base é a menor é a abcissa do ponto $\overline{OA}$, ou seja, a solução positiva da equação $f(x) = 0$.

Assim, resolvendo a equação vem:

$$f(x) = 0 \ \Leftrightarrow\ 4\cos(2x) = 0 \ \Leftrightarrow\ 2x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi\,, k\in\mathbb{Z} \ \Leftrightarrow\ x = \frac{\pi}{4} + k\pi\,, k\in\mathbb{Z}$$

Logo, para $k = 0$, a menor solução positiva da equação é $x = \frac{\pi}{4}$

Assim, calculando a área do trapézio, vem:

$$A_{[ABCD]} = A_{[ODCB]} + A_{[OAB]} = \overline{OD}\times\overline{DC} + \frac{\overline{OA}\times\overline{OB}}{2} = \frac{\pi}{6}\times 2 + \frac{\frac{\pi}{4}\times 2}{2} = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4} = \frac{4\pi}{12} + \frac{3\pi}{12} = \frac{7\pi}{12}$$

64.2. Determinando a expressão da primeira derivada de f, vem:

$$f'(x) = (4\cos(2x))' = 4(2x)'(-\operatorname{sen}(2x)) = 4 \times 2 \times (-\operatorname{sen}(2x)) = -8\operatorname{sen}(2x)$$

Depois, determinando a expressão da segunda derivada, vem:

$$f''(x) = (f'(x))' = (-8\operatorname{sen}(2x))' = -8(2x)'\cos(2x) = -16\cos(2x)$$

Assim, temos que, para qualquer número real x,

$$f(x)+f'(x)+f''(x) = \Big(4\cos(2x)\Big)+\Big(-8\operatorname{sen}(2x)\Big)+\Big(-16\cos(2x)\Big) = 4\cos(2x)-16\cos(2x)-8\operatorname{sen}(2x) =$$

$$= -12\cos(2x) - 8\operatorname{sen}(2x) = -4 \times 3\cos(2x) - 4 \times 2\operatorname{sen}(2x) = -4\Big(3\cos(2x) + 2\operatorname{sen}(2x)\Big)\ ,\ \ q.e.d.$$

Exame – 2011, 1.ª Fase

65. Para que a função f seja contínua em $x = 1$, a condiçao $f(1) = \lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$ tem que se verificar.
Assim, temos que:

- $f(1) = 1 \times e^{-1} + 2 \times 1 = e^{-1} + 2 = \dfrac{1}{e} + 2$
- $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} \big(xe^{-x} + 2x\big) = 1 \times e^{-1} + 2 \times 1 = e^{-1} + 2 = \dfrac{1}{e} + 2$
- $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} \left(2 + \dfrac{\operatorname{sen}(x-1)}{ex-e}\right) = \lim\limits_{x\to 1^-} 2 + \lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{\operatorname{sen}(x-1)}{e(x-1)} = 2 + \dfrac{1}{e} \lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{\operatorname{sen}(x-1)}{(x-1)} =$

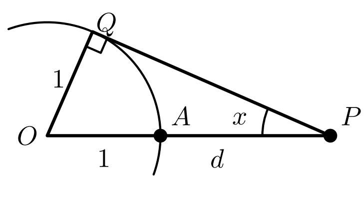
(fazendo $y = x - 1$, se $x \to 1^-$ então $y \to 0^-$)

$$= 2 + \frac{1}{e} \underbrace{\lim_{y\to 0^-} \frac{\operatorname{sen} y}{y}}_{\text{Lim. Notável}} = 2 + \frac{1}{e} \times 1 = 2 + \frac{1}{e}$$

Logo, como $f(1) = \lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$, a função f é contínua em $x = 1$.

Teste Intermédio 12.º ano – 26.05.2011

66.



66.1. Como $\overline{OQ} = 1$ (medida do cateto oposto ao ângulo x) e $\overline{OP} = 1+d$ (medida da hipotenusa do triângulo retângulo), usando a definição de seno de um ângulo, temos que:

$$\operatorname{sen} x = \frac{\overline{OQ}}{\overline{OP}} \Leftrightarrow \operatorname{sen} x = \frac{1}{1+d} \Leftrightarrow 1 + d = \frac{1}{\operatorname{sen} x} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow d = \frac{1}{\operatorname{sen} x} - 1 \Leftrightarrow d = \frac{1}{\operatorname{sen} x} - \frac{\operatorname{sen} x}{\operatorname{sen} x} \Leftrightarrow d = \frac{1 - \operatorname{sen} x}{\operatorname{sen} x}$$

Logo, para cada valor de $x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, temos que $d = f(x)$.

66.2. Para estudar a monotonia da função, começamos por determinar a expressão da derivada:

$$f'(x) = \left(\frac{1 - \operatorname{sen} x}{\operatorname{sen} x}\right)' = \frac{(1 - \operatorname{sen} x)'(\operatorname{sen} x) - (1 - \operatorname{sen} x)(\operatorname{sen} x)'}{\operatorname{sen}^2 x} =$$

$$= \frac{\big((1)' - (\operatorname{sen} x)'\big)(\operatorname{sen} x) - (1 - \operatorname{sen} x)(\cos x)}{\operatorname{sen}^2 x} = \frac{\big(0 - (\cos x)\big)(\operatorname{sen} x) - (\cos x - \operatorname{sen} x \cos x)}{\operatorname{sen}^2 x} =$$

$$= \frac{-\operatorname{sen} x \cos x - \cos x + \operatorname{sen} x \cos x}{\operatorname{sen}^2 x} = \frac{-\cos x}{\operatorname{sen}^2 x}$$

Assim, para $x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, temos que:

- $\cos x > 0$, logo $-\cos x < 0$
- $\operatorname{sen}^2 x > 0$
- $\dfrac{-\cos x}{\operatorname{sen}^2 x} < 0$

Ou seja, como $f'(x) < 0$, para $x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, a função f é estritamente decrescente no domínio, pelo que a um aumento do valor de x corresponde uma diminuição do valor de d, ou seja, **a afirmação é verdadeira**.

Teste Intermédio 12.º ano – 26.05.2011

67.

67.1. As três horas da tarde desse dia correspondem a $t = 15$.
Assim, a profundidade correspondente é dada por:

$$P(15) = 2\cos\left(\frac{\pi}{6} \times 15\right) + 8 = 2\cos\left(\frac{3 \times 5 \times \pi}{3 \times 2}\right) + 8 = 2\cos\left(\frac{5\pi}{2}\right) + 8 = 2\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + 8 = 2 \times 0 + 8 = 8$$

Ou seja, às 15 horas, a profundidade da água na marina era de 8 metros.

67.2. Determinando a expressão da derivada, temos:

$$P'(t) = \left(2\cos\left(\frac{\pi}{6}t\right)+8\right)' = \left(2\cos\left(\frac{\pi}{6}t\right)\right)' + (8)' = 2\left(\frac{\pi}{6}t\right)'\left(-\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{6}t\right)\right) + 0 = \frac{2\pi}{6}\left(-\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{6}t\right)\right) =$$

$$= -\frac{\pi}{3}\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{6}t\right)$$

Calculando os zeros da derivada, vem:

$$P'(t) = 0 \Leftrightarrow -\frac{\pi}{3}\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{6}t\right) = 0 \Leftrightarrow \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{6}t\right) = 0 \Leftrightarrow \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{6}t\right) = \operatorname{sen} 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\pi}{6}t = 0 + 2k\pi \ \vee \ \frac{\pi}{6}t = \pi - 0 + 2k\pi \ , \ k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow t = \frac{6(2k\pi)}{\pi} \ \vee \ t = \frac{6(\pi + 2k\pi)}{\pi} \ , \ k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow t = 12k \ \vee \ t = 6 + 12k \ , \ k \in \mathbb{Z}$$

Como $t \in [0{,}24]$, atribuindo valores a k ($k = 0$, $k = 1$ e $k = 2$), obtemos o conjunto dos zeros da função derivada: $\{0{,}6{,}12{,}18{,}24\}$

Desta forma, estudando a variação de sinal de P' e relacionando com a monotonia da função P, vem:

x	0		6		12		18		24
P'	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0
P	Máx	$\searrow$	min	$\nearrow$	Máx	$\searrow$	min	$\nearrow$	Máx

Logo, a profundidade mínima, que ocorreu às 6 horas e depois novamente às 18 horas, pode ser calculada como:

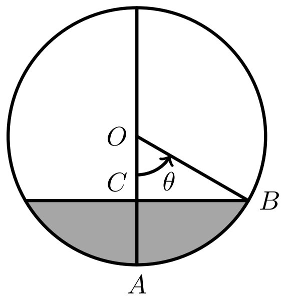
$$P(6) = 2\cos\left(\frac{\pi}{6}\times 6\right) + 8 = 2\cos(\pi) + 8 = 2(-1) + 8 = -2 + 8 = 6$$

Ou seja a profundidade mínima na marina, nesse dia, foi de 6 metros.

Exame – 2010, Ép. especial

68.

68.1. Analisando as figuras podemos dividir o cálculo da altura em dois casos:
No primeiro caso, $\left(\theta \in \left]0,\frac{\pi}{2}\right]\right)$, $h = 3 - \overline{OC}$



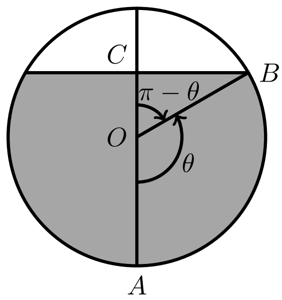
Como $\overline{OB} = 3$, recorrendo à definição de cosseno de um ângulo, temos:

$$\cos\theta = \frac{\overline{OC}}{3} \quad \Leftrightarrow \quad \overline{OC} = 3\cos\theta$$

e assim,

$$h = 3 - \overline{OC} = 3 - 3\cos\theta$$

No segundo caso, $\left(\theta \in \left]\frac{\pi}{2},\pi\right[\right)$, $h = 3 + \overline{OC}$



Como $\overline{OB} = 3$, recorrendo à definição de cosseno de um ângulo, temos:

$$\cos(\pi - \theta) = \frac{\overline{OC}}{3} \quad \Leftrightarrow \quad \overline{OC} = 3\cos(\pi - \theta) \quad \Leftrightarrow \quad \overline{OC} = 3(-\cos\theta) \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \overline{OC} = -3\cos\theta$$

e assim,

$$h = 3 + \overline{OC} = 3 + (-3\cos\theta) = 3 - 3\cos\theta$$

Ou seja em ambos os casos, isto é, para qualquer $\theta \in]0,\pi[$, a altura h pode ser calculada como que $h(\theta) = 3 - 3\cos(\theta)$.

68.2. Como $h(\theta) = 3 - 3\cos(\theta)$, temos que:

$$h(\theta) = 3 \quad \Leftrightarrow \quad 3 - 3\cos(\theta) = 3 \quad \Leftrightarrow \quad -3\cos(\theta) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \cos(\theta) = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \cos(\theta) = \cos\frac{\pi}{2} \quad \Leftrightarrow \quad \theta = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Como $\theta \in]0,\pi[$, $\theta = \frac{\pi}{2}$ é a única solução da equação.

Calcular θ tal que $h(\theta) = 3$, significa determinar o ângulo associado a uma quantidade de combustível no depósito com 3 metros de altura.
Assim a solução calculada significa que, quando o combustível no depósito tiver uma altura de 3 metros, o ângulo θ será um ângulo reto $\left(\frac{\pi}{2}\ rad.\right)$.

Exame – 2010, 2.ª Fase

69. Para que a função f seja contínua em $x=0$, tem que se verificar $f(0) = \lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$

- $f(0) = a(0) + b + e^0 = 0 + b + 1 = b + 1$
- $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} (ax + b + e^x) = a(0) + b + e^0 = 0 + b + 1 = b + 1$
- $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} \left(\dfrac{x - \operatorname{sen}(2x)}{x}\right) = \dfrac{0 - \operatorname{sen} 0}{0} = \dfrac{0}{0}$ (indeterminação)

$$= \lim_{x\to 0^+} \left(\frac{x}{x} - \frac{\operatorname{sen}(2x)}{x}\right) = \lim_{x\to 0^+} \left(1 - \frac{2\times \operatorname{sen}(2x)}{2\times x}\right) = 1 - \lim_{x\to 0^+} \left(2 \times \frac{\operatorname{sen}(2x)}{2x}\right) =$$

$$= 1 - 2\lim_{x\to 0^+} \frac{\operatorname{sen}(2x)}{2x} \underset{(1)}{=} 1 - 2\underbrace{\lim_{y\to 0^+} \frac{\operatorname{sen} y}{y}}_{\text{Lim. Notável}} = 1 - 2\times 1 = 1 - 2 = -1$$

(1) (fazendo $y = 2x$, se $x \to 0^+$ então $y \to 0^+$)

Assim, podemos determinar o valor de b:

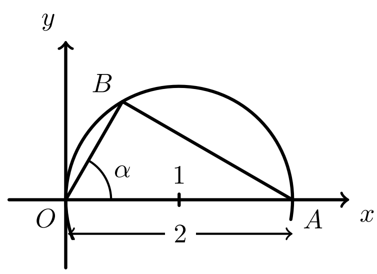
$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^+} f(x) \ \Leftrightarrow \ b - 1 = -1 \ \Leftrightarrow \ b = -2$$

Exame – 2010, 1.ª Fase

70.

70.1. Como o triângulo está inscrito numa semicircunferência é um triângulo retângulo. Sabemos que a hipotenusa coincide com o diâmetro e tem comprimento 2 ($\overline{OA} = 2$).

Assim, recorrendo à definição de seno temos:



$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{\overline{AB}}{\overline{OA}} \Leftrightarrow \operatorname{sen}\alpha = \frac{\overline{AB}}{2} \Leftrightarrow \overline{AB} = 2\operatorname{sen}\alpha$$

Analogamente, pela definição de cosseno, vem:

$$\cos\alpha = \frac{\overline{OB}}{\overline{OA}} \Leftrightarrow \cos\alpha = \frac{\overline{OB}}{2} \Leftrightarrow \overline{OB} = 2\cos\alpha$$

Logo, o perímetro do triângulo é:

$$P_{[OAB]} = \overline{OA} + \overline{AB} + \overline{OB} = 2 + 2\operatorname{sen}\alpha + 2\cos\alpha = 2(1 + \cos\alpha + \operatorname{sen}\alpha)$$

Ou seja, para cada valor de $\alpha \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, o perímetro do triângulo $[OAB]$ é dado, em função de α, por

$$f(\alpha) = 2(1 + \cos\alpha + \operatorname{sen}\alpha)$$

70.2. Determinando a expressão da derivada da função, vem:

$$f'(\alpha) = \big(2(1+\cos\alpha+\operatorname{sen}\alpha)\big)' = 2\big((1)'+(\cos\alpha)'+(\operatorname{sen}\alpha)'\big) = 2(0-\operatorname{sen}\alpha+\cos\alpha) = 2(\cos\alpha-\operatorname{sen}\alpha)$$

Assim: $f'(\alpha) = 0 \;\Leftrightarrow\; 2(\cos\alpha - \operatorname{sen}\alpha) = 0 \;\Leftrightarrow\; \cos\alpha - \operatorname{sen}\alpha = 0 \;\Leftrightarrow\; \cos\alpha = \operatorname{sen}\alpha$

Logo, como $\alpha \in \left]0,\frac{\pi}{2}\right[$, sabemos que $\alpha = \frac{\pi}{4}$ é a única solução da equação $f'(\alpha) = 0$, pelo que podemos estudar a variação do sinal de f' para relacionar com a monotonia de f:

x	0		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{2}$
f'	n.d.	$+$	0	$-$	n.d.
f	n.d.	$\nearrow$	Máx	$\searrow$	n.d.

Logo, o maximizante de f, ou seja, o valor de α para o qual o perímetro do triângulo é máximo, é $\frac{\pi}{4}$

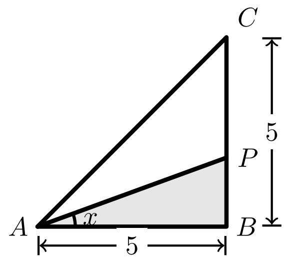
Exame – 2010, 1.ª Fase

71.

71.1. Relativamente ao triângulo retângulo $[ABP]$, do qual conhecemos a medida do cateto adjacente ao ângulo x, usando a definição de cosseno e de tangente do ângulo x, temos:

$$\cos x = \frac{\overline{AB}}{\overline{AP}} \Leftrightarrow \cos x = \frac{5}{\overline{AP}} \Leftrightarrow \overline{AP} = \frac{5}{\cos x}$$

$$\operatorname{tg} x = \frac{\overline{BP}}{\overline{AB}} \Leftrightarrow \operatorname{tg} x = \frac{\overline{BP}}{5} \Leftrightarrow \overline{BP} = 5\operatorname{tg} x$$



Temos ainda que

$$\overline{BP} + \overline{PC} = 5 \;\Leftrightarrow\; \overline{PC} = 5 - \overline{BP} \;\Leftrightarrow\; \overline{PC} = 5 - 5\operatorname{tg} x$$

Recorrendo ao teorema de Pitágoras, podemos calcular a medida do segmento $[AC]$:

$$\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 \;\Leftrightarrow\; \overline{AC}^2 = 5^2 + 5^2 \;\Leftrightarrow\; \overline{AC}^2 = 25 + 25 \;\Leftrightarrow\; \overline{AC} = \sqrt{50}$$

Assim, calculando o perímetro do triângulo $[APC]$ vem:

$$P_{[APC]} = \overline{AP} + \overline{PC} + \overline{AC} = \frac{5}{\cos x} + 5 - 5\operatorname{tg} x + \sqrt{50} = \frac{5}{\cos x} - 5\operatorname{tg} x + \sqrt{50} + 5$$

Pelo que, para cada valor de $x \in \left]0,\frac{\pi}{4}\right[$, o perímetro do triângulo $[APC]$ é dado pela função f

71.2. Como o declive da reta tangente em cada ponto é dado pelo valor da derivada, vamos determinar a expressão da derivada:

$$f'(x) = \left(\frac{5}{\cos x} - 5\operatorname{tg} x + \sqrt{50} + 5\right)' = \left(\frac{5}{\cos x}\right)' - (5\operatorname{tg} x)' + (\sqrt{50})' + (5)' =$$

$$= \frac{(5)'(\cos x) - 5(\cos x)'}{\cos^2 x} - 5 \times \frac{1}{\cos^2 x} + 0 + 0 = \frac{0 - 5(-\operatorname{sen} x)}{\cos^2 x} - \frac{5}{\cos^2 x} =$$

$$= \frac{5\operatorname{sen} x}{\cos^2 x} - \frac{5}{\cos^2 x} = \frac{5\operatorname{sen} x - 5}{\cos^2 x}$$

Assim, no ponto de abcissa $\frac{\pi}{6}$, o declive da reta tangente é:

$$m_r = f'\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{5\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{6}\right) - 5}{\cos^2\left(\frac{\pi}{6}\right)} = \frac{5\left(\frac{1}{2}\right) - 5}{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \frac{\frac{5}{2} - \frac{10}{2}}{\frac{3}{4}} = \frac{-\frac{5}{2}}{\frac{3}{4}} = -\frac{20}{6} = -\frac{10}{3}$$

Ou seja, a reta r tem declive $-\frac{10}{3}$

Teste Intermédio 12.º ano – 19.05.2010

72. Calculando a derivada da função f temos:

$$f'(x) = \big(\operatorname{sen}(2x)\big)' = (2x)'\cos(2x) = 2\cos(2x)$$

Calculando o declive da reta tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa $\frac{\pi}{8}$ vem:

$$f'\left(\frac{\pi}{8}\right) = 2\cos\left(2 \times \frac{\pi}{8}\right) = 2\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$$

Resposta: **Opção A**

Exame – 2009, Ép. especial

73. Começamos por determinar a expressão da derivada da função:

$$f'(x) = \left(e^x . \cos x\right)' = (e^x)' \cos x + e^x (\cos x)' = e^x \cos x + e^x(-\operatorname{sen} x) = e^x(\cos x - \operatorname{sen} x)$$

Determinando os zeros da derivada, vem:

$$f'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad e^x(\cos x - \operatorname{sen} x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \underbrace{e^x = 0}_{\text{Eq Imp},e^x>0} \ \vee \cos x - \operatorname{sen} x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \cos x = \operatorname{sen} x$$

No domínio da função, o intervalo $[0,\pi[$, a única solução da equação é $x = \dfrac{\pi}{4}$.
Estudando a variação do sinal da derivada e relacionando com a monotonia da função, vem:

x	0		$\frac{\pi}{4}$		π
f'	+	+	0	−	n.d
f	min	$\nearrow$	Máx	$\searrow$	n.d.

Assim, podemos concluir que a função f:

- é crescente no intervalo $\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$;
- é decrescente no intervalo $\left[\frac{\pi}{4},\pi\right[$;
- tem um mínimo, cujo minimizante é $(x = 0)$ e um máximo, cujo é maximizante $\left(x = \frac{\pi}{4}\right)$

Assim o mínimo relativo da função é $f(0) = e^0 \times \cos(0) = 1 \times 1 = 1$ e o máximo é

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = e^{\frac{\pi}{4}} \times \cos(\frac{\pi}{4}) = e^{\frac{\pi}{4}} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}}}{2}$$

Exame – 2009, Ép. especial

74. Como o declive da reta tangente em cada ponto é dado pelo valor da derivada, vamos determinar a expressão da derivada:

$$f'(x) = (\operatorname{sen}(2x)\cos x)' = \left(\operatorname{sen}(2x)\right)' \cos x + \operatorname{sen}(2x)(\cos x)' = (2x)' \cos(2x)\cos x + \operatorname{sen}(2x)(-\operatorname{sen} x) =$$

$$= 2\cos(2x)\cos x - \operatorname{sen}(2x)\operatorname{sen} x$$

Assim, o declive da reta tangente no ponto de abcissa 0, pode ser calculado como:

$$m = f'(0) = 2\cos(2(0))\cos 0 - \operatorname{sen}(2(0))\operatorname{sen} 0 = 2 \times 1 \times 1 - 0 \times 0 = 2$$

Como $f(0) = \operatorname{sen}(2(0))\cos 0 = 0 \times 1 = 0$, sabemos que o ponto $P(0,0)$ pertence ao gráfico de f e também à reta tangente neste ponto.
Como a reta tangente interseta o eixo das ordenada no ponto $(0,0)$, o valor da ordenda na origem é zero, logo a equação reduzida é

$$y = 2x + 0 \quad \Leftrightarrow \quad y = 2x$$

Exame – 2009, 2.ª Fase

75. Como a função é contínua, é contínua no seu domínio, em particular é contínua em $x = 0$, logo verifica-se a condição: $f(0) = \lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$

- $f(0) = \log_2(k + 0) = \log_2 k$
- $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} \big(\log_2(k + x)\big) = \log_2(k + 0^+) = \log_2 k$
- $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{\operatorname{sen}(2x)}{x} = \dfrac{\operatorname{sen}(2\times 0)}{0} = \dfrac{0}{0}$ (indeterminação)

$$= \lim_{x\to 0^-} \frac{2\times \operatorname{sen}(2x)}{2\times x} = 2\lim_{x\to 0^-} \frac{\operatorname{sen}(2x)}{2x} \underset{(1)}{=} 2 \underbrace{\lim_{y\to 0^-} \frac{\operatorname{sen} y}{y}}_{\text{Limite Notável}} = 2\times 1 = 2$$

(1) fazendo $y = 2x$, se $x \to 0^-$, então $y \to 0^-$

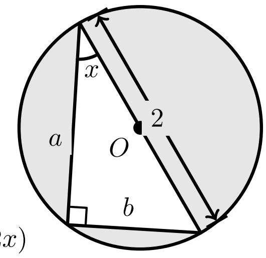
Logo, como $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$, temos que:

$$\log_2 k = 2 \;\Leftrightarrow\; k = 2^2 \;\Leftrightarrow\; k = 4$$

Resposta: **Opção D**

Exame – 2009, 1.ª Fase

76. Como a medida da hipotenusa do triângulo é 2 (porque é um diâmetro de uma circunferência de raio 1), podemos recorrer à definição de seno e cosseno, para determinar a medida da base (b) e da altura (a):



$$\operatorname{sen} x = \frac{b}{2} \Leftrightarrow b = 2\operatorname{sen} x \qquad \text{e} \qquad \cos x = \frac{a}{2} \Leftrightarrow a = 2\cos x$$

Logo a área sombreada é a diferença da área do círculo e da área do triângulo:

$$A = A_\circ - A_\Delta = \pi r^2 - \frac{b\times a}{2} = \pi(1)^2 - \frac{2\operatorname{sen} x\times 2\cos x}{2} = \pi - 2\operatorname{sen} x\cos x = \pi - \operatorname{sen}(2x)$$

Resposta: **Opção A**

Exame – 2009, 1.ª Fase

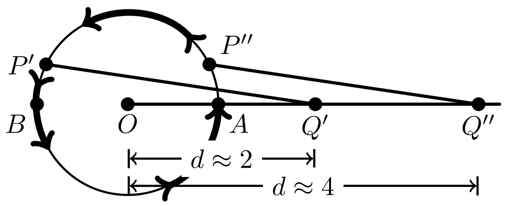
77.
- O gráfico da função a **tem uma** única assíntota - a reta vertical $x = 0$
- O gráfico da função b **tem uma** única assíntota - a reta horizontal $y = 0$
- O gráfico da função c **não tem** assíntotas
- O gráfico da função d **tem um número infinito** de assíntotas - as retas verticais $x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi\,, k\in\mathbb{Z}$

Resposta: **Opção D**

Teste Intermédio 12.º ano – 27.05.2009

78.

78.1. Quando o ponto P inicia o movimento (e quando termina), ou seja, quando a sua posição coincide com a posição do ponto A, temos $\overline{OQ} = 4$, que é o valor máximo de d, para $x = 0 \vee x = 2\pi$.

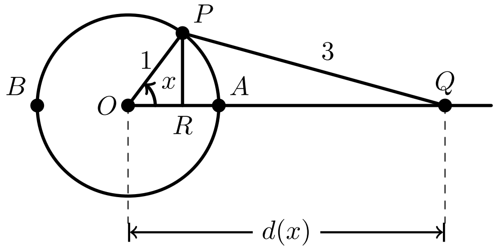


Da mesma forma, quando $x = \pi$, ou seja, quando a posição do ponto P coincide com a posição do ponto B, temos $\overline{OQ} = 2$, que é o valor mínimo.

Logo, $d(0) = 4$ e $d(\pi) = 2$, pelo que $d(0) = 2 \times 2 = 2d(\pi)$, ou seja, **a afirmação I é verdadeira**.

Como a função atinge o valr mínimo para $x = \pi$, ou seja $\overline{OQ} = 2$, e depois, esta distância vai progressivamente aumentar até que $\overline{OQ} = 2$, quando $x = 2\pi$, temos que a função $d(x)$ é crescente no intervalo $]\pi,2\pi[$, ou seja $d'(x) > 0$ se $x \in]\pi,2\pi[$, pelo que, **a afirmação II é falsa**.

78.2. Como o triângulo $[ORP]$ é retângulo, e sabemos que a hipotenusa tem comprimento 1, usando a definição de seno e de cosseno vem:



$$\operatorname{sen} x = \frac{\overline{PR}}{\overline{OP}} \Leftrightarrow \operatorname{sen} x = \frac{\overline{PR}}{1} \Leftrightarrow \overline{PR} = \operatorname{sen} x$$

$$\cos x = \frac{\overline{OR}}{\overline{OP}} \Leftrightarrow \cos x = \frac{\overline{OR}}{1} \Leftrightarrow \overline{OR} = \cos x$$

Como o triângulo $[PRQ]$ também é retângulo, e conhecemos a medida de dois lados, podemos usar o Teorema de Pitágoras:

$$\overline{PQ}^2 = \overline{PR}^2 + \overline{RQ}^2 \Leftrightarrow 3^2 = (\operatorname{sen} x)^2 + \overline{RQ}^2 \Leftrightarrow 9 - \operatorname{sen}^2 x = \overline{RQ}^2 \Leftrightarrow \overline{RQ} = \sqrt{9 - \operatorname{sen}^2 x}$$

Logo, $\overline{OQ} = \overline{OR} + \overline{RQ} \Leftrightarrow \overline{OQ} = \cos x + \sqrt{9 - \operatorname{sen}^2 x}$, pelo que, para cada valor de $x \in \left]0,\frac{\pi}{2}\right[$,

$$d(x) = \cos x + \sqrt{9 - \operatorname{sen}^2 x}$$

Teste Intermédio 12.º ano – 27.05.2009

79. Sabemos que, no 4º quadrante - ou seja no intervalo $\left[-\frac{\pi}{2},0\right]$ - o cosseno de um ângulo é positivo e que cresce de 0 para 1, ou seja $\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 0$ e $\cos(0) = 1$

No primeiro quadrante - em particular no intervalo $\left[0,\frac{\pi}{3}\right]$ - o cosseno também é positivo, e decrescente, pelo que não atinge valores superiores a 1.

Logo, como a função f tem domínio $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{3}\right]$, contradomínio de f é $[0,1]$

Resposta: **Opção B**

Exame – 2008, Ép. especial

80. Como $\text{sen}\,(a+b) = \text{sen}\,a\cos b + \cos a\,\text{sen}\,b$, então $\text{sen}\,(2a) = \text{sen}\,(a+a) = 2\,\text{sen}\,a\cos a$, e assim temos que

$$f(x) = 2\,\text{sen}\,(x).\cos(x) + 2 \quad\Leftrightarrow\quad f(x) = \text{sen}\,(2x) + 2$$

A ordenada do ponto de interseção da reta $y=1$ com o gráfico de f é 1 e a abcissa é a solução da equação $f(x)=1$ que pertence ao intervalo $[0,\pi]$. Assim, resolvendo a equação temos:

$$f(x) = 1 \quad\Leftrightarrow\quad \text{sen}\,(2x) + 2 = 1 \quad\Leftrightarrow\quad \text{sen}\,(2x) = -1 \quad\Leftrightarrow\quad \text{sen}\,(2x) = \text{sen}\,\frac{3\pi}{2} \quad\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\quad 2x = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi \;\vee\; 2x = \pi - \frac{3\pi}{2} + 2k\pi\; k\in\mathbb{Z} \quad\Leftrightarrow\quad x = \frac{3\pi}{4} + \frac{2k\pi}{2} \;\vee\; 2x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi\; k\in\mathbb{Z} \quad\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\quad x = \frac{3\pi}{4} + k\pi \;\vee\; x = -\frac{\pi}{4} + k\pi\; k\in\mathbb{Z}$$

Assim atribuindo valores a k ($k=0$ para o primeiro caso ou $k=1$ no segundo caso) obtemos a única solução da equação que pertence ao intervalo $[0,\pi]$, ou seja, $x = \frac{3\pi}{4}$

Logo as coordenadas do ponto de interseção são: $\left(\frac{3\pi}{4},1\right)$

Exame – 2008, Ép. especial

81.

81.1. Recorrendo à definição de derivada da função no ponto de abcissa 0, vem:

$$g'(0) = \lim_{x\to 0}\frac{g(x)-g(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0}\frac{2+\text{sen}\,(4x) - \big(2+\text{sen}\,(4\times 0)\big)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{2+\text{sen}\,(4x)-2}{x} =$$
$$= \lim_{x\to 0}\frac{\text{sen}\,(4x)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{4\times\text{sen}\,(4x)}{4\times x} = 4\lim_{x\to 0}\frac{\text{sen}\,(4x)}{4x} \underset{(1)}{=} 4\underbrace{\lim_{y\to 0}\frac{\text{sen}\,y}{y}}_{\text{Limite Notável}} = 4\times 1 = 4$$

(1) fazendo $y=4x$, se $x\to 0$, então $y\to 0$

81.2. Para estudar a monotonia da função, começamos por determinar a expressão da derivada:

$$g'(x) = \big(2 + \text{sen}\,(4x)\big)' = (2)' + \big(\text{sen}\,(4x)\big)' = 0 + (4x)'\,\cos(4x) = 4\cos(4x)$$

Para estudar o sinal da derivada, calculamos os zeros:

$$g'(x) = 0 \;\Leftrightarrow\; 4\cos(4x) = 0 \;\Leftrightarrow\; \cos(4x) = 0 \;\Leftrightarrow\; 4x = \frac{\pi}{2} + k\pi\,, k \in \mathbb{Z} \;\Leftrightarrow\; x = \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{4}\,, k \in \mathbb{Z}$$

Atribuindo valores a k ($k = 0$ e $k = 1$) encontramos as duas soluções da equação que pertencem ao intervalo $\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$, ou seja $x = \frac{\pi}{8}$ e $x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{8} + \frac{2\pi}{8} = \frac{3\pi}{8}$

Estudando a variação do sinal de g' para relacionar com a monotonia de g, no intervalo $\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$, vem:

x	0		$\frac{\pi}{8}$		$\frac{3\pi}{8}$		$\frac{\pi}{2}$
g'		$+$	0	$-$	0	$+$	
g		$\nearrow$	Máx	$\searrow$	min	$\nearrow$	

Assim, no intervalo $\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$, temos que:

- o valor do máximo de g é $\;g\left(\frac{\pi}{8}\right) = 2 + \text{sen}\left(4 \times \frac{\pi}{8}\right) = 2 + \text{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2 + 1 = 3$
- o valor do mínimo de g é $\;g\left(\frac{3\pi}{8}\right) = 2 + \text{sen}\left(4 \times \frac{3\pi}{8}\right) = 2 + \text{sen}\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 2 + (-1) = 1$
- g é crescente no intervalo $\left]0,\frac{\pi}{8}\right]$ e também no intervalo $\left[\frac{3\pi}{8},\frac{\pi}{2}\right[$
- g é decrescente no intervalo $\left[\frac{\pi}{8},\frac{3\pi}{8}\right]$

Exame – 2008, 2.ª Fase

82. Como $D_f = [-\pi, +\infty[$, só pode existir uma assíntota horizontal quando $x \to +\infty$:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \left(e^{-4x+1}\right) = e^{-4(+\infty)+1} = e^{-\infty} = 0$$

Logo verifica-se que a reta de equação $y = 0$ é a única assíntota horizontal do gráfico de f

Como a função é contínua em $]-\pi,0[$ e em $]0,+\infty[$, por resultar de operações sucessivas entre funções contínuas, então as retas definidas por $x = -\pi$ e por $x = 0$ são as duas únicas retas verticais que podem ser assíntotas do gráfico de f:

$$\lim_{x\to-\pi^+} f(x) = \lim_{x\to-\pi^+} \frac{3\,\text{sen}\,(x)}{x^2} = \frac{3\,\text{sen}\,(-\pi)}{-\pi^2} = \frac{0}{-\pi^2} = 0$$

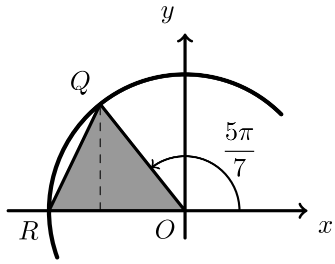
Ou seja, a reta de equação $x = -\pi$ não é uma assíntota do gráfico de f

$$\lim_{x\to0^-} f(x) = \lim_{x\to0^-} \frac{3\,\text{sen}\,(x)}{x^2} = \lim_{x\to0^-} \left(\frac{3}{x} \times \frac{\text{sen}\,(x)}{x}\right) = \lim_{x\to0^-} \frac{3}{x} \times \underbrace{\lim_{x\to0^-} \frac{\text{sen}\,(x)}{x}}_{\text{Limite Notável}} = \frac{3}{0^-} \times 1 = -\infty \times 1 = -\infty$$

Assim, a reta de equação $x = 0$, é a única assíntota vertical do gráfico de f

Exame – 2008, 1.ª Fase

83. Como o ponto Q está sobre um círculo trigonométrico, temos as coordenadas do ponto Q são $\left(\cos\frac{5\pi}{7}, \operatorname{sen}\frac{5\pi}{7}\right)$



Considerando o lado $[OR]$ como a base, a medida da altura é y_Q (a ordenada do ponto Q). E assim a área do triângulo pode ser calculada como:

$$A_{[OQR]} = \frac{\overline{OR} \times y_Q}{2} = \frac{1 \times \operatorname{sen}\frac{5\pi}{7}}{2} \approx 0{,}39$$

Resposta: **Opção A**

Teste Intermédio 12.º ano – 29.04.2008

84. Determinando a expressão da derivada e igualando a zero, temos:

$$f'(x) = (3 - 2\cos x)' = (3)' - (2\cos x)' = 0 - 2(-\operatorname{sen} x) = 2\operatorname{sen} x$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2\operatorname{sen} x = 0 \Leftrightarrow \operatorname{sen} x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi\,,\ k \in \mathbb{Z}$$

No intervalo $[0{,}2\pi]$ as três soluções são $x = 0$, $x = \pi$ e $x = 2\pi$

Estudando a variação do sinal de f' para relacionar com a monotonia de f, no intervalo $[0{,}2\pi]$, vem:

x	0		π		2π
f'	0	+	0	−	0
f	min	↗	Máx	↘	min

Logo, o valor x de para o qual $f(x)$ é máximo, é π

Resposta: **Opção C**

Exame – 2007, 2.ª fase

85. Partindo da área do círculo menor temos:

$$\begin{array}{ll|l}
a = \pi r^2 & \Leftrightarrow\ A\sqrt{\cos\theta} = \pi r^2 \ \Leftrightarrow & \text{(porque } a = A\sqrt{\cos\theta}\text{)} \\
& \Leftrightarrow\ \pi R^2\sqrt{\cos\theta} = \pi r^2 \ \Leftrightarrow & \text{(porque } A = \pi R^2\text{)} \\
& \Leftrightarrow\ R^2\sqrt{\cos\theta} = r^2 \ \Leftrightarrow & \text{(dividindo ambos os membros por } \pi\text{)} \\
& \Leftrightarrow\ \left(\sqrt[4]{2}r\right)^2\sqrt{\cos\theta} = r^2 \ \Leftrightarrow & \text{(porque } R = \sqrt[4]{2}r\text{)} \\
& \Leftrightarrow\ \sqrt{2}r^2\sqrt{\cos\theta} = r^2 \ \Leftrightarrow & \\
& \Leftrightarrow\ \sqrt{2} \times \sqrt{\cos\theta} = 1 \ \Leftrightarrow & \text{(dividindo ambos os membros por } r^2\text{)} \\
& \Leftrightarrow\ \sqrt{\cos\theta} = \frac{1}{\sqrt{2}} \ \Rightarrow & \text{(calculando o quadrado de ambos os membros)} \\
& \Rightarrow\ \cos\theta = \frac{1}{2} \ \Leftrightarrow & \\
& \Leftrightarrow\ \cos\theta = \cos\frac{\pi}{3} \ \Leftrightarrow & \\
& \Leftrightarrow\ \theta = \pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi\,,\ k \in \mathbb{Z} &
\end{array}$$

Logo $\theta = \frac{\pi}{3}$, porque $\theta \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$.

Exame – 2007, 2.ª fase

86.

86.1. Como a função h resulta de operações sucessivas de funções contínuas em $\mathbb{R}$, é uma função contínua, e, por isso, também é contínua em $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$.

Como $-0{,}63 < 0 < 1{,}77$, ou seja, $h(0) < 0 < h\left(\frac{\pi}{2}\right)$, então, podemos concluir, pelo Teorema de Bolzano, que existe $a \in \left]0,\frac{\pi}{2}\right[$ tal que $h(a) = 0$, ou seja, que a função h tem, pelo menos, um zero em $\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$.

C.A.

$f'(x) = \left(e^{x-1}\right)' = (x-1)'e^{x-1} = 1 \times e^{x-1} = e^{x-1}$

$g'(x) = (\operatorname{sen} x)' = \cos x$

$h(0) = f'(0) - g'(0) = e^{0-1} - \cos(0) =$
$= e^{-1} - 1 \approx -0.63$

$h\left(\frac{\pi}{2}\right) = f'\left(\frac{\pi}{2}\right) - g'\left(\frac{\pi}{2}\right) = e^{\frac{\pi}{2}-1} + \cos\frac{\pi}{2} =$
$= e^{\frac{\pi}{2}-1} + 0 \approx 1{,}77$

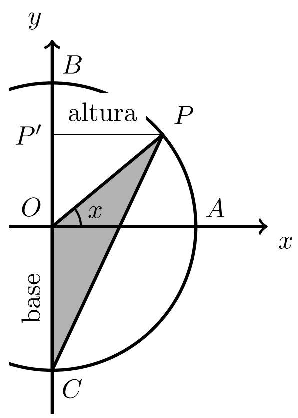
86.2. Como ficou provado no item anterior, existe $a \in \left]0,\frac{\pi}{2}\right[$ tal que $h(a) = 0$, logo

$$h(a) = 0 \;\Leftrightarrow\; f'(a) - g'(a) = 0 \;\Leftrightarrow\; f'(a) = g'(a)$$

Ou seja, existe $a \in \left]0,\frac{\pi}{2}\right[$ tal que as derivadas de f e g nos pontos de abcissa a são iguais, ou seja, os declives das retas tangentes aos gráficos das funções f e g nos pontos de abcissa a são iguais, o que significa que essas retas são paralelas.

Exame – 2007, 1.ª fase

87. Considerando o lado $[OC]$ como a base do triângulo ($\overline{OC} = 1$), a altura será o segmento que contém o ponto P e a sua projeção ortogonal (P') sobre a reta OC.



Como $\overline{OP} = 1$, recorrendo à definição de cosseno, vem:

$$\cos x = \frac{\overline{PP'}}{\overline{OP}} \;\Leftrightarrow\; \cos x = \frac{\overline{PP'}}{1} \;\Leftrightarrow\; \overline{PP'} = \cos x$$

Assim a área do triângulo $[OPC]$ é:

$$A_{[OPC]} = \frac{\overline{OC} \times \overline{PP'}}{2} = \frac{1 \times \cos x}{2} = \frac{\cos x}{2}$$

Resposta: **Opção B**

Exame – 2006, Ép. especial

88.

88.1. Como o período de uma função trigonométrica pode ser calculado como a diferença das abcissas de dois máximizantes consecutivos, começamos por determinar a derivada da função:

$$f'(x) = \big(A + B\cos(Cx)\big)' = (A)' + B\big(\cos(Cx)\big)' = 0 + B(Cx)'(-\operatorname{sen}(Cx)) = -BC\operatorname{sen}(Cx)$$

Calculando os zeros da derivada temos:

$$f'(x) = 0 \;\Leftrightarrow\; -BC\operatorname{sen}(Cx) = 0 \;\Leftrightarrow\; \operatorname{sen}(Cx) = 0 \;\Leftrightarrow\; Cx = k\pi, k \in \mathbb{Z} \;\Leftrightarrow\; x = \frac{k\pi}{C}, k \in \mathbb{Z}$$

Assim, como todos os zeros de f' estão associados a uma mudança de sinal, para cada valor de k verificamos a existência de um maximizante, ou de um minimizante.
Como os maximizantes e os minimizantes ocorrem alternadamente, se um valor de k gera um maximizante, $k+1$ gera um minimizante e $k+2$ gera outro maximizante.
Logo, para k e $k+2$ temos dois maximizantes (ou minimizantes) consecutivos, pelo que o período da função pode ser calculado como:

$$\frac{(k+2)\pi}{C} - \frac{k\pi}{C} = \frac{(k+2)\pi - k\pi}{C} = \frac{k\pi + 2\pi - k\pi}{C} = \frac{2\pi}{C}$$

88.2. Como o período da função é a diferença entre dois maximizantes consecutivos, e a distância do ancoradouro ao fundo do rio ocorre a cada maré alta, o período desta função é $12 - 0 = 12$.
Por outro lado, como o período desta função é $\frac{2\pi}{C}$ temos que:

$$\frac{2\pi}{C} = 12 \;\Leftrightarrow\; \frac{2\pi}{12} = C \;\Leftrightarrow\; \frac{\pi}{6} = C$$

Assim temos que a função a função é do tipo $f(x) = A + B\cos\left(\frac{\pi}{6} \times x\right)$
Como a distância ao fundo do rio era máxima às zero horas, e a distância máxima foi de 17 metros, temos que

$$f(0) = 17 \;\Leftrightarrow\; A+B\cos\left(\frac{\pi}{6} \times 0\right) = 17 \;\Leftrightarrow\; A+B\cos(0) = 17 \;\Leftrightarrow\; A+B\times 1 = 17 \;\Leftrightarrow\; A+B = 17$$

Por outro lado, como a distância era mínima às 6 horas, e o mínimo da função é 11, temos:

$$f(6) = 11 \;\Leftrightarrow\; A+B\cos\left(\frac{\pi}{6} \times 6\right) = 11 \;\Leftrightarrow\; A+B\cos(\pi) = 11 \;\Leftrightarrow\; A+B\times(-1) = 11 \;\Leftrightarrow\; A-B = 11$$

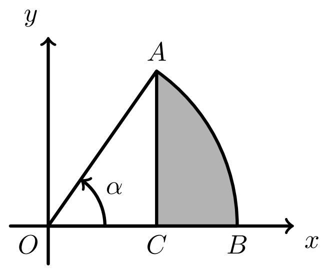
Logo, temos que

$$\begin{cases} A + B = 17 \\ \\ A - B = 11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 11 + B + B = 17 \\ \\ A = 11 + B \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2B = 17 - 11 \\ \\ A = 11 + B \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B = \dfrac{6}{2} \\ \\ A = 11 + 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B = 3 \\ \\ A = 14 \end{cases}$$

Pelo que, os valores dos parâmetros adequados ao modelo são $A = 14$, $B = 3$ e $C = \frac{\pi}{6}$.

Exame – 2006, Ép. especial

89. Como o arco BA é um arco de uma circunferência de raio 1, e com amplitude α, tem de comprimento α.
Como $\overline{OA} = 1$, e recorrendo às definições de seno e cosseno, vem:



$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{\overline{AC}}{\overline{OA}} \Leftrightarrow \operatorname{sen}\alpha = \frac{\overline{AC}}{1} \Leftrightarrow \overline{AC} = \operatorname{sen}\alpha$$

$$\cos\alpha = \frac{\overline{OC}}{\overline{OA}} \Leftrightarrow \cos\alpha = \frac{\overline{OC}}{1} \Leftrightarrow \overline{OC} = \cos\alpha$$

Logo, $\overline{OB} = \overline{OC} + \overline{CB} \Leftrightarrow 1 = \cos\alpha + \overline{CB} \Leftrightarrow \overline{CB} = 1 - \cos\alpha$

Assim, o perímetro da região sombreada é:

$$P = \alpha + \overline{AC} + \overline{CB} = \alpha + \operatorname{sen}\alpha + 1 - \cos\alpha = 1 + \alpha + \operatorname{sen}\alpha - \cos\alpha$$

Resposta: **Opção D**

Exame – 2006, 2.ª Fase

90.

90.1. Como o *periélio* é o ponto da órbita da Terra mais próximo do Sol, é nesse ponto que a distância é mínima. Nesse ponto o ângulo x tem amplitude zero radianos, logo a distância mínima, em milhões de quilómetros arredondados às décimas, é:

$$d(0) = 149{,}6(1 - 0{,}0167\cos 0) = 149{,}6(1 - 0{,}0167 \times 1) \approx 147{,}1$$

Analogamente, o ponto da órbita da Terra oposto ao *periélio* será o mais afastado do Sol, e é nesse ponto que a distância é máxima. Nesse ponto o ângulo x tem amplitude π radianos, logo a distância máxima, em milhões de quilómetros arredondados às décimas, é:

$$d(\pi) = 149{,}6(1 - 0{,}0167\cos\pi) = 149{,}6\big(1 - 0{,}0167 \times (-1)\big) \approx 152{,}1$$

90.2. Se $x = \pi$, da relação $\frac{2\pi t}{T} = x - 0{,}0167\operatorname{sen}x$ resulta:

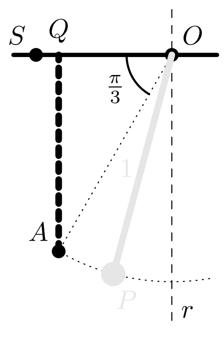
$$\frac{2\pi t}{T} = \pi - 0{,}0167\operatorname{sen}\pi \Leftrightarrow \frac{2\pi t}{T} = \pi - 0{,}0167 \times 0 \Leftrightarrow \frac{2\pi t}{T} = \pi \Leftrightarrow t = \frac{\pi \times T}{2\pi} \Leftrightarrow t = \frac{T}{2}$$

No contexto da situação descrita, quando o ângulo x tem uma amplitude de π radianos, o tempo (t) que decorreu da passagem da Terra pelo *periélio* é metade do tempo (T) que a Terra demora a descrever uma órbita completa.

Exame – 2006, 2.ª Fase

91.

91.1. No instante inicial ($t = 0$) a amplitude do ângulo SOP é dada por:



$$\alpha(0) = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6}\cos\left(\sqrt{9{,}8} \times 0\right) = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6}\cos 0 = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6} = \frac{3\pi}{6} - \frac{\pi}{6} = \frac{2\pi}{6} = \frac{\pi}{3}$$

Assim, considerando o ponto Q, como a projeção ortogonal do ponto A sobre a reta OS, temos que a amplitude do ângulo QOA é $\frac{\pi}{3}$ radianos, e a distância do centro da esfera à reta OS é $\overline{QA}$. Logo:

$$\operatorname{sen}\frac{\pi}{3} = \frac{\overline{QA}}{\overline{OA}} \Leftrightarrow \operatorname{sen}\frac{\pi}{3} = \frac{\overline{QA}}{1} \Leftrightarrow \overline{QA} = \operatorname{sen}\frac{\pi}{3} \Leftrightarrow \overline{QA} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

91.2. Quando o ponto P passa na reta r temos $\alpha = \dfrac{\pi}{2}$. Logo valor de t que corresponde ao instante em que o ponto P passa na reta r, pela primeira vez, é a menor solução positiva da equação $\alpha(t) = \dfrac{\pi}{2}$.
Resolvendo a equação vem:

$$\alpha(t) = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6}\cos\left(\sqrt{9{,}8}\,t\right) = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow -\frac{\pi}{6}\cos\left(\sqrt{9{,}8}\,t\right) = 0 \Leftrightarrow \cos\left(\sqrt{9{,}8}\,t\right) = 0 \Leftrightarrow$$

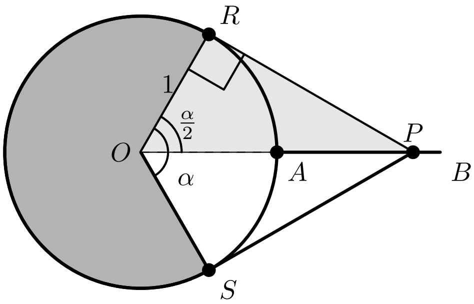
$$\Leftrightarrow \sqrt{9{,}8}\,t = \frac{\pi}{2} + k\pi\,,\ k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow t = \frac{\frac{\pi}{2} + k\pi}{\sqrt{9{,}8}}\,,\ k \in \mathbb{Z}$$

Logo, a menor solução positiva da equação corresponde a $k = 0$, ou seja, $t = \dfrac{\frac{\pi}{2}}{\sqrt{9{,}8}} \approx 0{,}5$
Ou seja, o ponto P passa na reta r, pela primeira vez, aproximadamente, meio segundo depois do instante inicial.

Exame – 2006, 1.ª Fase

92.

92.1. Como a reta PR é tangente à circunferência no ponto R, é perpendicular ao raio $[OR]$, ou seja o ângulo ORP é reto, e por isso o triângulo $[ORP]$ é retângulo.
Como o ângulo POR tem amplitude $\dfrac{\alpha}{2}$ radianos e $\overline{OR} = 1$, recorrendo à definição de tangente, temos:



$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{\overline{RP}}{\overline{OR}} \Leftrightarrow \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{\overline{RP}}{1} \Leftrightarrow \overline{RP} = \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$$

Logo, considerando $[OR]$ como a base do triângulo $[ORP]$ e $[RP]$ como a altura, vem:

$$A_{[ORP]} = \frac{\overline{OR} \times \overline{RP}}{2} = \frac{1 \times \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{2} = \frac{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{2}$$

Como os pontos R e S são simétricos relativamente à reta AB, temos que:

$$A_{[ORPS]} = A_{[ORP]} + A_{[OPS]} = 2 \times A_{[ORP]} = 2 \times \frac{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{2} = \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$$

Ou seja, para cada valor de $\alpha \in]0,\pi[$, a área do quadrilátero $[ORPS]$ é dada por $f(\alpha)$

92.2.

$$\lim_{\alpha\to\pi^-} f(\alpha) = \lim_{\alpha\to\pi^-} \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \operatorname{tg}\frac{\pi}{2}^- = +\infty$$

Quando o ângulo α se aproxima arbitrariamente de π, as retas tangentes PR e PS, intersectam a reta AB num ponto arbitrariamente afastado de A, o que significa que as áreas dos triângulos $[ORP]$ e $[OPS]$, e consequentemente a área do quadrilátero $[ORPS]$, são arbitrariamente grandes.

Exame – 2005, Ép. especial (cód. 435)

93.

93.1. O declive de uma reta tangente é dado pelo valor da derivada na abcissa do ponto de tangência.

Como $f'(x) = (\operatorname{sen} x)' = \cos x$, temos:

$m_r = f'(a) = \cos a \quad$ e $\quad m_s = f'(b) = \cos b$

Como $a + b = 2\pi \Leftrightarrow a = 2\pi - b$, temos que:

$$m_r = f'(a) = \cos a = \cos(2\pi - b) = \cos(-b) = \cos(b) = f'(b) = m_s$$

Logo, as retas r e s têm declives iguais, ou seja, são paralelas.

93.2. Como o domínio da função g é $]0,\pi[\cup]\pi,2\pi[$, o gráfico de g não tem qualquer assíntota não vertical.

Como a função g resulta do quociente de duas funções contínuas, é contínua no seu domínio, isto é, as retas $x = 0$, $x = \pi$ e $x = 3$ são as três únicas retas que podem ser assíntotas verticais do gráfico de g.

- $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{x}{f(x)} = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{x}{\operatorname{sen} x} = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1}{\frac{\operatorname{sen} x}{x}} = \underbrace{\dfrac{1}{\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\operatorname{sen} x}{x}}}_{\text{(limite notável)}} = \dfrac{1}{1} = 1$

  Logo, a reta $x = 0$ **não é** uma assíntota vertical do gráfico de g

- $\lim\limits_{x\to \pi^-} g(x) = \lim\limits_{x\to \pi^-} \dfrac{x}{f(x)} = \lim\limits_{x\to \pi^-} \dfrac{x}{\operatorname{sen} x} = \dfrac{\pi^-}{\operatorname{sen}(\pi^-)} = \dfrac{\pi^-}{0^+} = +\infty$

  Logo, a reta $x = \pi$ **é** uma assíntota vertical do gráfico de g

- $\lim\limits_{x\to 2\pi^-} g(x) = \lim\limits_{x\to 2\pi^-} \dfrac{x}{f(x)} = \lim\limits_{x\to 2\pi^-} \dfrac{x}{\operatorname{sen} x} = \dfrac{2\pi^-}{\operatorname{sen}(2\pi^-)} = \dfrac{2\pi^-}{0^-} = -\infty$

  Logo, a reta $x = 2\pi$ **é** uma assíntota vertical do gráfico de g

Assim, o gráfico de g tem exatamente duas assíntotas: as retas verticais $x = \pi$ e $x = 2\pi$

Exame – 2005, 2.ª Fase (cód. 435)

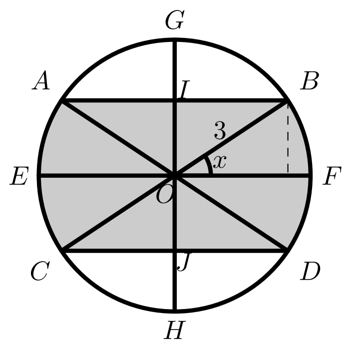
94. Recorrendo à definição de derivada no ponto de abcissa π, temos que:

$$f'(\pi) = \lim_{x\to\pi} \frac{f(x) - f(\pi)}{x - \pi} = \lim_{x\to\pi} \frac{\cos x - \cos\pi}{x - \pi} = \lim_{x\to\pi} \frac{\cos x - (-1)}{x - \pi} = \lim_{x\to\pi} \frac{\cos x + 1}{x - \pi}$$

Resposta: **Opção A**

Exame – 2005, 1.ª fase (cód. 435)

95. Como $\overline{OB} = 3$, recorrendo à definição de seno e cosseno temos:



$$\operatorname{sen} x = \frac{\overline{OI}}{\overline{OB}} \Leftrightarrow \operatorname{sen} x = \frac{\overline{OI}}{3} \Leftrightarrow \overline{OI} = 3\operatorname{sen} x$$

$$\cos x = \frac{\overline{BI}}{\overline{OB}} \Leftrightarrow \cos x = \frac{\overline{BI}}{3} \Leftrightarrow \overline{BI} = 3\cos x$$

Recorrendo à decomposição sugerida na figura temos que a área da zona sombreada pode ser obtida através da soma das áreas de 4 triângulos congruentes e de 4 setores circulares de raio 3 e amplitude x:

$$A = 4 \times A_{[OIB]} + 4 \times A_{setor FB} = 4 \times \frac{\overline{OI} \times \overline{BI}}{2} + 4 \times \frac{x \times \overline{OB}^2}{2} = 4 \times \frac{3\operatorname{sen} x \times 3\cos x}{2} + 4 \times \frac{x \times 3^2}{2} =$$

$$= 2 \times 9\operatorname{sen} x.\cos x + 2 \times x \times 9 = 18x + 18\operatorname{sen} x.\cos x = 18(x + \operatorname{sen} x.\cos x)$$

Logo, para cada valor de $x \in \left[0,\frac{\pi}{2}\right]$, a área da região sombreada é dada pela função A.

Exame – 2005, 1.ª Fase (cód. 435)

96.

96.1. Substituíndo os valores de λ e ϕ na fórmula, vem:

$$\cos(7{,}5\,t) \approx -\frac{\operatorname{tg} 38}{\operatorname{tg} 66{,}5} \;\Leftrightarrow\; \cos(7{,}5\,t) \approx -0{,}3397 \;\Leftrightarrow\; 7{,}5\,t \approx \cos^{-1}(-0{,}3397) \;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\; 7{,}5\,t \approx 109{,}8594 \;\Leftrightarrow\; t \approx \frac{109{,}8594}{7{,}5} \;\Leftrightarrow\; t \approx 14{,}6479$$

Logo, convertendo 0,6479 horas em minutos vem $0{,}6479 \times 60 \approx 38{,}8750 \approx 39$

Ou seja, em Beja, no Solstício de Junho, o tempo que decorre entre o nascer e o pôr do Sol é de 14 horas e 39 minutos.

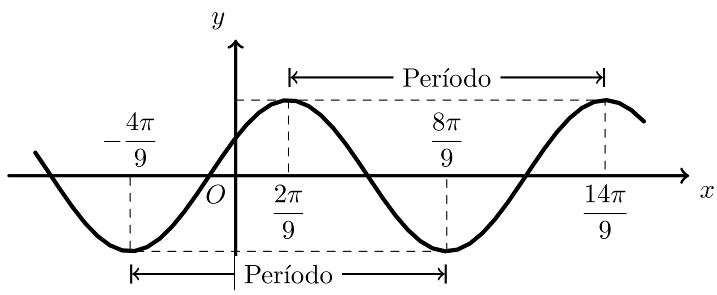
96.2. Como ϕ é a latitude do círculo polar ártico, para locais situados mais a norte, $\lambda > \phi$, e logo $\operatorname{tg} \lambda > \operatorname{tg} \phi$ (porque $\lambda \in]66{,}5°,90°[$ e $\phi \approx 66{,}5$).
Assim, para locais situados a norte do circulo polar ártico, $\frac{\operatorname{tg} \lambda}{\operatorname{tg} \phi} > 1 \;\Leftrightarrow\; -\frac{\operatorname{tg} \lambda}{\operatorname{tg} \phi} < -1$
Logo a substituição dos valores na fórmula $\cos(7{,}5\,t) \approx -\frac{\operatorname{tg} \lambda}{\operatorname{tg} \phi}$ resultaria numa equação impossível, porque $\cos(x) \geq -1$

Exame – 2004, Ép. especial (cód. 435)

97. O período (P) da função pode ser calculado, por exemplo, como a distância entre dois maximizantes consecutivos.

$$P = \frac{14\pi}{9} - \frac{2\pi}{9} = \frac{12\pi}{9} = \frac{4\pi}{3}$$

Resposta: **Opção D**



Exame – 2004, 2.ª Fase (cód. 435)

98.

98.1. Os instantes em que as duas bolas estiveram a igual distância da base do recipiente, durante os primeiros cinco segundos, são as soluções da equação $b(t) = p(t)$ que pertencem ao intervalo $[0{,}5]$. Assim, resolvendo a equação, vem:

$$b(t) = p(t) \;\Leftrightarrow\; 10 + e^{-0{,}1t}\operatorname{sen}(\pi t) = 10 - 1{,}37e^{-0{,}1t}\operatorname{sen}(\pi t) \;\Leftrightarrow\; e^{-0{,}1t}\operatorname{sen}(\pi t) = -1{,}37e^{-0{,}1t}\operatorname{sen}(\pi t) \;\Leftrightarrow$$

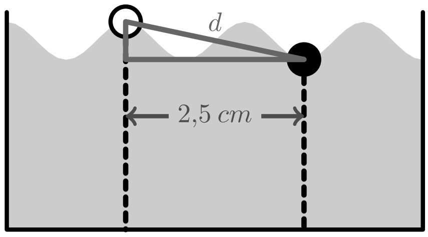
$$\Leftrightarrow\; e^{-0{,}1t}\operatorname{sen}(\pi t) + 1{,}37e^{-0{,}1t}\operatorname{sen}(\pi t) = 0 \;\Leftrightarrow\; \operatorname{sen}(\pi t)\left(e^{-0{,}1t} + 1{,}37e^{-0{,}1t}\right) = 0 \;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\; \operatorname{sen}(\pi t) = 0 \vee \underbrace{e^{-0{,}1t}(1 + 1{,}37) = 0}_{\text{(equação impossível)}} \;\Leftrightarrow\; \operatorname{sen}(\pi t) = 0 \;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\; \pi t = k\pi\,,\, k \in \mathbb{Z} \;\Leftrightarrow\; t = k\,,\, k \in \mathbb{Z}$$

Logo as soluções da equação no intervalo $[0{,}5]$ são $x = 0$ (para $k = 0$), $x = 1$ (para $k = 1$), $x = 2$ (para $k = 2$), $x = 3$ (para $k = 3$), $x = 4$ (para $k = 4$) e $x = 5$ (para $k = 5$), ou seja, neste intervalo a equação tem 6 soluções, o que significa que nos primeiros 5 segundos, as duas bolas estiveram a igual distância da base do recipiente por **seis vezes**.

98.2. A distância d entre os centros das bolas, é o comprimento da hipotenusa de um tirângulo retângulo em que o cateto maior tem comprimento 2,5 cm e o cateto menor tem comprimento $|b\left(\frac{1}{2}\right) - p\left(\frac{1}{2}\right)|$



Assim, determinando a diferença das distâncias das duas bolas à base do recipiente, passado meio segundo, temos:

$$b\left(\frac{1}{2}\right) = 10 + e^{-0,1\times\frac{1}{2}} \operatorname{sen}\left(\pi \times \frac{1}{2}\right) = 10 + e^{-0.05} \times 1 \approx 10{,}95$$

$$p\left(\frac{1}{2}\right) = 10 - 1{,}37e^{-0,1\times\frac{1}{2}} \operatorname{sen}\left(\pi\frac{1}{2}\right) = 10 - 1{,}37e^{-0.05} \times 1 \approx 8{,}70$$

Como $b\left(\frac{1}{2}\right) - p\left(\frac{1}{2}\right) \approx 10{,}95 - 8{,}70 \approx 2{,}25$, recorrendo ao Teorema de Pitágoras, vem:

$$d^2 = 2{,}25^2 + 2{,}5^2 \Leftrightarrow d^2 = 11.3125 \Leftrightarrow d = \sqrt{11.3125} \Rightarrow d \approx 3{,}4$$

Logo a distância, arredondada às décimas, entre os centros das duas bolas, passado meio segundo é de 3,4 cm

Exame – 2004, 2.ª Fase (cód. 435)

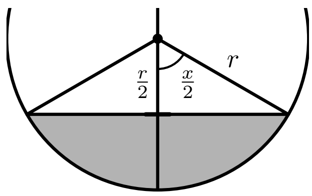
99.

99.1. Se o depósito ficar completamente cheio, $x = 2\pi$, logo podemos calcular a capacidade total do depósito, calculando a imagem de 2π:

$$V(2\pi) = 80\big(2\pi - \operatorname{sen}(2\pi)\big) = 80(2\pi - 0) \approx 502{,}655 \approx 503$$

Ou seja, o depósito tem uma capacidade de 503 m^3, aproximadamente.

99.2. Como $\frac{1}{4}$ da altura máxima, corresponde a metade do raio; considerando o ângulo de amplitude $\frac{x}{2}$ e recorrendo à definição de cosseno, vem



$$\cos\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{\frac{r}{2}}{r} \Leftrightarrow \cos\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{r}{2r} \Leftrightarrow \cos\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cos\left(\frac{x}{2}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) \Leftrightarrow \frac{x}{2} = \pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = \pm\frac{2\pi}{3} + 4k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Como $x \in [0{,}2\pi]$, a única solução da equação é $x = \frac{2\pi}{3}$.
Assim, o volume associado é:

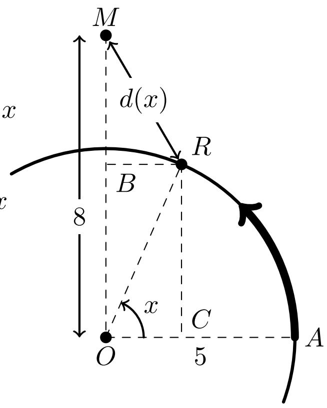
$$V\left(\frac{2\pi}{3}\right) = 80\left(\frac{2\pi}{3} - \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right) = 80\left(\frac{2\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \approx 98{,}2696 \approx 98$$

Ou seja, quando nível de combustível está a $\frac{1}{4}$ da altura máxima, o volume é de 98 m^3, aproximadamente.

Exame – 2004, 1.ª Fase (cód. 435)

100.

100.1. Como $\overline{OR} = 5$, recorrendo à definição de seno e cosseno, e notando que $\overline{CR} = \overline{OB}$ e ainda que $\overline{OC} = \overline{BR}$, temos:



$$\operatorname{sen} x = \frac{\overline{CR}}{\overline{OR}} \Leftrightarrow \operatorname{sen} x = \frac{\overline{CR}}{5} \Leftrightarrow \overline{CR} = 5\operatorname{sen} x \Leftrightarrow \overline{OB} = 5\operatorname{sen} x$$

$$\cos x = \frac{\overline{OC}}{\overline{OR}} \Leftrightarrow \cos x = \frac{\overline{OC}}{5} \Leftrightarrow \overline{OC} = 5\cos x \Leftrightarrow \overline{BR} = 5\cos x$$

Temos ainda que:

$$\overline{OB} + \overline{BM} = 8 \Leftrightarrow \overline{BM} = 8 \Leftrightarrow \overline{BM} = 8 - \overline{OB} \Leftrightarrow \overline{BM} = 8 - 5\operatorname{sen} x$$

Logo, usando o Teorema de Pitágoras, vem:

$$\overline{RM}^2 = \overline{BM}^2 + \overline{BR}^2 \Leftrightarrow \overline{RM}^2 = (8 - 5\operatorname{sen} x)^2 + (5\cos x)^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \overline{RM}^2 = 64 - 80\operatorname{sen} x + 25\operatorname{sen}^2 x + 25\cos^2 x \Leftrightarrow \overline{RM}^2 = 64 - 80\operatorname{sen} x + 25\big(\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x\big) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \overline{RM}^2 = 64 - 80\operatorname{sen} x + 25(1) \Leftrightarrow \overline{RM}^2 = 64 + 25 - 80\operatorname{sen} x \Leftrightarrow \overline{RM}^2 = 89 - 80\operatorname{sen} x$$

Logo, para cada valor de x, $d(x) = \overline{RM} = \sqrt{89 - 80\operatorname{sen} x}$

100.2.

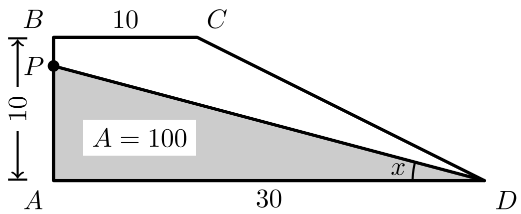
$$d\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sqrt{89 - 80\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}} = \sqrt{89 - 80 \times 1} = \sqrt{9} = 3$$

Ou seja, quando o ângulo x tem amplitude $\frac{\pi}{2}$ radianos, a distância entre a Rita e a mãe, é de 3 metros, o que se pode comprovar na figura, porque quando o ângulo x tem amplitude $\frac{\pi}{2}$ radianos, a posição da Rita está sobre o segmento de reta $[MO]$, e por isso

$$\overline{RM} = \overline{OM} - \overline{OR} \Leftrightarrow \overline{RM} = 8 - 5 \Leftrightarrow \overline{RM} = 3$$

Exame – 2003, Prova para militares (cód. 435)

101. Calculando a área do trapézio, temos:



$$A_{[ABCD]} = \frac{\overline{AD} + \overline{BC}}{2} \times \overline{AB} = \frac{30 + 10}{2} \times 10 = 20 \times 10 = 200$$

Logo, dividir o trapézio em duas figuras com a mesma área, significa que o triângulo $[APD]$ terá área 100.

Usando a definição de tangente vem:

$$\operatorname{tg} x = \frac{\overline{PA}}{\overline{AD}} \Leftrightarrow \operatorname{tg} x = \frac{\overline{PA}}{30} \Leftrightarrow \overline{PA} = 30\operatorname{tg} x$$

Logo a área do triângulo $[APD]$, é: $A_{[APD]} = \dfrac{\overline{AD} \times \overline{PA}}{2} = \dfrac{30 \times 30\operatorname{tg} x}{2} = \dfrac{30^2\operatorname{tg} x}{2}$

Ou seja, $A_{[APD]} = 100 \Leftrightarrow \dfrac{30^2\operatorname{tg} x}{2} = 100$

Resposta: **Opção B**

Exame – 2003, 2.ª Fase (cód. 435)

102.

102.1.

$$f'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0} \frac{x+\operatorname{sen} x - (0+\operatorname{sen} 0)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{x+\operatorname{sen} x - 0}{x} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\left(\frac{x}{x}+\frac{\operatorname{sen} x}{x}\right) = \lim_{x\to 0}\left(1+\frac{\operatorname{sen} x}{x}\right) = 1 + \underbrace{\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} x}{x}}_{\text{(limite notável)}} = 1+1 = 2$$

102.2. Para estudar o sentido das concavidades e a existência de pontos de inflexão, começamos por determinar a expressão da primeira derivada e depois da segunda derivada:

$$f'(x) = (x+\operatorname{sen} x)' = (x)' + (\operatorname{sen} x)' = 1+\cos x$$

$$f''(x) = \left(f'(x)\right)' = (1+\cos x)' = (1)' + (\cos x)' = 0 + (-\operatorname{sen} x) = -\operatorname{sen} x$$

Determinando os zeros da segunda derivada, vem:

$$f''(x) = 0 \;\Leftrightarrow\; -\operatorname{sen} x = 0 \;\Leftrightarrow\; \operatorname{sen} x = 0 \;\Leftrightarrow\; x = k\pi \,,\, k \in \mathbb{Z}$$

Logo as duas soluções da equação que pertencem ao domínio da função $\left(\left[-\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right]\right)$ são $x=0$ e $x=\pi$, e assim, estudando a variação de sinal de f'' e relacionando com o sentido das concavidades do gráfico de f, vem:

x	$-\frac{\pi}{2}$		0		π		$\frac{3\pi}{2}$
f''		$+$	0	$-$	0	$+$	
f		$\smile$	Pt. I.	$\frown$	Pt. I.	$\smile$	

Logo o gráfico de f tem:

- a concavidade voltada para cima no intervalo $\left[-\frac{\pi}{2},0\right[$ e no intervalo $\left]\pi,\frac{3\pi}{2}\right]$
- a concavidade voltada para baixo no intervalo $]0,\pi[$
- dois pontos de inflexão de abcissas $x=0$ e $x=\pi$

102.3.

$$f(x) = x+\cos x \;\Leftrightarrow\; x+\operatorname{sen} x = x+\cos x \;\Leftrightarrow\; \operatorname{sen} x = \cos x \;\Leftrightarrow\; \operatorname{sen} x = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}-x\right) \;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\; x = \frac{\pi}{2}-x+2k\pi \;\vee\; x = \pi-\frac{\pi}{2}-x+2k\pi \;\; k\in\mathbb{Z} \;\Leftrightarrow\; 2x = \frac{\pi}{2}+2k\pi \;\vee\; 2x = \frac{\pi}{2}+2k\pi \;\; k\in\mathbb{Z} \;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\; x = \frac{\pi}{4}+k\pi \;\; k\in\mathbb{Z}$$

Logo os dois valores de $x \in \left[-\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right]$ que verificam a condição dada, são $x=\frac{\pi}{4}$ e $x=\frac{5\pi}{4}$

Exame – 2003, 2.ª Fase (cód. 435)

103.

103.1. Como $a=2$ e $b=-5$, temos que $f(x) = 2-5\operatorname{sen}^2 x$

- Como $\operatorname{tg}^2 x + 1 = \frac{1}{\cos^2 x}$ e $\operatorname{tg}\theta = \frac{1}{2}$, vem:

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 1 = \frac{1}{\cos^2\theta} \;\Leftrightarrow\; \frac{1}{4}+1 = \frac{1}{\cos^2\theta} \;\Leftrightarrow\; \frac{5}{4} = \frac{1}{\cos^2\theta} \;\Leftrightarrow\; \cos^2\theta = \frac{1}{\frac{5}{4}} \;\Leftrightarrow\; \cos^2\theta = \frac{4}{5}$$

- Como $\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$ e $\cos^2\theta = \frac{4}{5}$, vem:

$$\operatorname{sen}^2\theta + \frac{4}{5} = 1 \;\Leftrightarrow\; \operatorname{sen}^2\theta = 1-\frac{4}{5} \;\Leftrightarrow\; \operatorname{sen}^2\theta = \frac{5}{5}-\frac{4}{5} \;\Leftrightarrow\; \operatorname{sen}^2\theta = \frac{1}{5}$$

Logo, $f(\theta) = 2-5\operatorname{sen}^2\theta = 2-5\left(\frac{1}{5}\right) = 2-1 = 1$

103.2. Como $x = 0$ é um maximizante e 1 é o máximo, temos que:

$$f(0) = 1 \;\Leftrightarrow\; a + b\,\text{sen}^2\,(0) = 1 \;\Leftrightarrow\; a + b \times 0 = 1 \;\Leftrightarrow\; a = 1$$

Como 0 e π são dois maximizantes consecutivos, $x = \dfrac{\pi}{2}$ é um minimizante, -3 é o mínimo e $a = 1$, temos que:

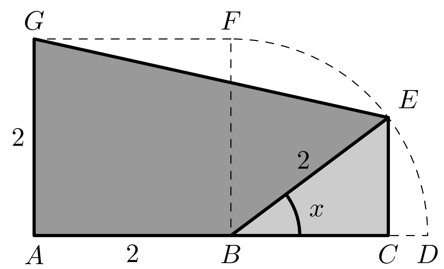
$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = -3 \;\Leftrightarrow\; 1 + b\,\text{sen}^2\left(\frac{\pi}{2}\right) = -3 \;\Leftrightarrow\; 1 + b \times (1)^2 = -3 \;\Leftrightarrow\; b = -3 - 1 \;\Leftrightarrow\; b = -4$$

Logo $a = 1$ e $b = -4$

Exame – 2003, 1.ª fase - 2.ª chamada (cód. 435)

104.

104.1. Considerando o triângulo $[BCE]$,e recorrendo à definição de seno e cosseno, temos:



$$\text{sen}\,x = \frac{\overline{CE}}{\overline{BE}} \;\Leftrightarrow\; \text{sen}\,x = \frac{\overline{CE}}{2} \;\Leftrightarrow\; \overline{CE} = 2\,\text{sen}\,x$$

$$\cos x = \frac{\overline{BC}}{\overline{BE}} \;\Leftrightarrow\; \cos x = \frac{\overline{BC}}{2} \;\Leftrightarrow\; \overline{BC} = 2\cos x$$

Logo, considerando a área da zona sombreada como a diferença das áreas do o trapézio $[ACEG]$ e do triângulo $[BCE]$, temos:

$$A_{[ABEG]} = A_{[ACEG]} - A_{[BCE]} = \frac{\overline{AG} + \overline{CE}}{2} \times \overline{AC} - \frac{\overline{BC} \times \overline{CE}}{2} = \frac{2 + 2\,\text{sen}\,x}{2} \times \left(2 + \overline{BC}\right) - \frac{2\cos x \times 2\,\text{sen}\,x}{2} =$$

$$= (1 + \text{sen}\,x) \times (2 + 2\cos x) - \frac{4\,\text{sen}\,x\cos x}{2} = 2 + 2\cos x + 2\,\text{sen}\,x + 2\,\text{sen}\,x\cos x - 2\,\text{sen}\,x\cos x =$$

$$= 2 + 2\,\text{sen}\,x + 2\cos x = 2(1 + \text{sen}\,x + \cos x)$$

Logo, para cada valor de $x \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$, a área do polígono $[ABEG]$ é dada por $A(x) = 2(1 + \text{sen}\,x + \cos x)$

104.2.
- $A(0) = 2\big(1 + \text{sen}\,(0) + \cos(0)\big) = 2(1 + 0 + 1) = 2 \times 2 = 4$
  O que também pode ser observado na figura, porque se $x = 0$, o ponto E coincide com o ponto D, e por isso a área sombreada também pode ser calculada como a área do triângulo $[AGD]$:

$$A_{[AGD]} = \frac{\overline{AG} \times \overline{AD}}{2} = \frac{4 \times 2}{2} = 4$$

- $A\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2\left(2\big(1 + \text{sen}\,\left(\frac{\pi}{2}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) = 2(1 + 1 + 0) = 2 \times 2 = 4$
  O que também pode ser observado na figura, porque se $x = \frac{\pi}{2}$, o ponto E coincide com o ponto F, e por isso a área sombreada também pode ser calculada como a área do quadrado $[ABFG]$:

$$A_{[ABFG]} = \overline{AB} \times \overline{AG} = 2 \times 2 = 4$$

Exame – 2003, 1.ª fase - 1.ª chamada (cód. 435)

105.

105.1. Como a área da superfície terrestre é dada por $A_{Esfera} = 4\pi r^2$, logo $\frac{1}{4}A_{Esfera} = \frac{4\pi r^2}{4} = \pi r^2$
Assim, pretendemos determinar o valor de θ tal que:

$$f(\theta) = \pi r^2 \Leftrightarrow 2\pi r^2(1 - \operatorname{sen}\theta) = \pi r^2 \Leftrightarrow 1 - \operatorname{sen}\theta = \frac{\pi r^2}{2\pi r^2} \Leftrightarrow 1 - \operatorname{sen}\theta = \frac{1}{2} \Leftrightarrow$$

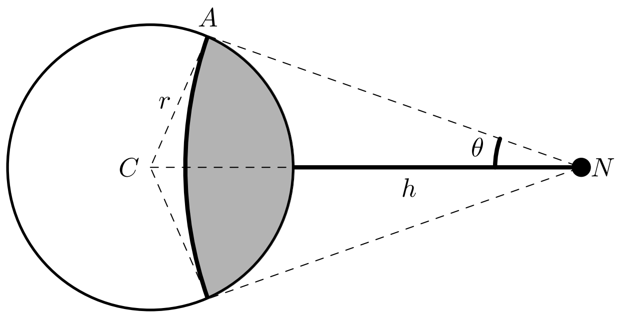
$$\Leftrightarrow -\operatorname{sen}\theta = \frac{1}{2} - 1 \Leftrightarrow -\operatorname{sen}\theta = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \operatorname{sen}\theta = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \operatorname{sen}\theta = \operatorname{sen}\frac{\pi}{6} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \theta = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \vee \theta = \pi - \frac{\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Como $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, a única solução da equação é $\theta = \frac{\pi}{6}$
Ou seja, para que a superfície visível da nave seja um quarto da superfície terrestre, o ângulo θ deve ter amplitude de $\frac{\pi}{6}$ radianos.

105.2. Considerando o triângulo $[CAN]$, e a definição de seno, vem:

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{\overline{CA}}{\overline{CN}} \Leftrightarrow \operatorname{sen}\theta = \frac{r}{r+h}$$



Logo, determinando a área visível a partir da nave, em função de h, vem:

$$g(h) = f(\theta) = 2\pi r^2(1 - \operatorname{sen}\theta) = 2\pi r^2\left(1 - \frac{r}{r+h}\right) = 2\pi r^2\left(\frac{r+h}{r+h} - \frac{r}{r+h}\right) = 2\pi r^2\left(\frac{h}{r+h}\right) = \frac{2\pi r^2 h}{r+h}$$

105.3.

$$\lim_{h\to+\infty} g(h) = \lim_{h\to+\infty} \frac{2\pi r^2 h}{r+h} = 2\pi r^2 \lim_{h\to+\infty} \frac{h}{r+h} = 2\pi r^2 \frac{\lim\limits_{h\to+\infty} h}{\lim\limits_{h\to+\infty} (r+h)} = 2\pi r^2 \frac{\lim\limits_{h\to+\infty} h}{\lim\limits_{h\to+\infty} h} = 2\pi r^2 \times 1 = 2\pi r^2$$

Logo, quando a distância da nave à Terra é arbitrariamente grande, a área da superfície terreste visível da nave, aproxima-se de $2\pi r^2$, ou seja, de metade da área total da superfície da Terra.

Exame – 2002, Prova para militares (cód. 435)

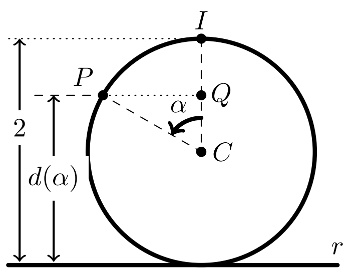
106. Considerando o ponto I como a posição inicial do ponto P, e o ponto Q como a projeção ortogonal do ponto P sobre a reta IC, pela definição de cosseno vem:

$$\cos\alpha = \frac{\overline{CQ}}{\overline{CP}} \Leftrightarrow \cos\alpha = \frac{\overline{CQ}}{1} \Leftrightarrow \overline{CQ} = \cos\alpha$$

Como $\overline{CQ} + \overline{QI} = 1 \Leftrightarrow \overline{QI} = 1 - \overline{CQ} \Leftrightarrow \overline{QI} = 1 - \cos\alpha$, temos que:

$$d(\alpha) = 2 - \overline{QI} \Leftrightarrow d(\alpha) = 2 - (1 - \cos\alpha) \Leftrightarrow$$

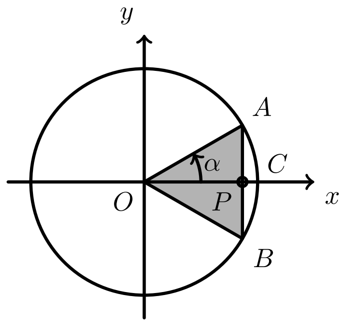
$$\Leftrightarrow d(\alpha) = 2 - 1 + \cos\alpha \Leftrightarrow d(\alpha) = 1 + \cos\alpha$$



Resposta: **Opção A**

Exame – 2002, 2.ª fase (cód. 435)

107. Considerando o ponto P como intersecção da reta AB com o eixo Ox e usando a definição de seno e cosseno temos que:



$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{\overline{AP}}{\overline{OA}} \Leftrightarrow \operatorname{sen}\alpha = \frac{\overline{AP}}{1} \Leftrightarrow \overline{AP} = \operatorname{sen}\alpha$$

$$\cos\alpha = \frac{\overline{OP}}{\overline{OA}} \Leftrightarrow \cos\alpha = \frac{\overline{OP}}{1} \Leftrightarrow \overline{OP} = \cos\alpha$$

Assim, considerando $[AB]$ como a base e $[OP]$ como a altura, a área do triângulo $[OAB]$ é:

$$A_{[OAB]} = \frac{\overline{AB} \times \overline{OP}}{2} = \frac{2 \times \overline{AP} \times \overline{OP}}{2} = \overline{AP} \times \overline{OP} = \operatorname{sen}\alpha \,.\, \cos\alpha$$

Resposta: **Opção A**

Exame – 2002, 1.ª fase - 2.ª chamada (cód. 435)

108.

108.1. Como $\lim\limits_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x}$ é a definição de derivada no ponto de abcissa 0, temos que:

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x} = f'(0) = 0 + 2\cos(0) = 2 \times 1 = 2$$

108.2. Para estudar o sentido das concavidades, começamos por determinar a expressão da segunda derivada:

$$f''(x) = \left(f'(x)\right)' = (x + 2\cos x)' = (x)' + (2\cos x)' = 1 + 2(\cos x)' = 1 + 2(-\operatorname{sen} x) = 1 - 2\operatorname{sen} x$$

Determinando os zeros da segunda derivada vem:

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow 1 - 2\operatorname{sen} x = 0 \Leftrightarrow -2\operatorname{sen} x = -1 \Leftrightarrow \operatorname{sen} x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \operatorname{sen} x = \operatorname{sen}\frac{\pi}{6} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \vee x = \pi - \frac{\pi}{6} + 2k\pi \,, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \vee x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \,, k \in \mathbb{Z}$$

Como o domínio de f (e portanto também de f'') é $[-\pi,\pi]$, as únicas soluções da equação, ou seja os únicos zeros da derivada, são: $x = \frac{\pi}{6}$ e $x = \frac{5\pi}{6}$, e assim, estudando a variação de sinal de f'' para o relacionar com o sentido das concavidades do gráfico de f, vem:

x	$-\pi$		$\frac{\pi}{6}$		$\frac{5\pi}{6}$		π
f''		+	0	−	0	+	
f		$\smile$	Pt. I.	$\frown$	Pt. I.	$\smile$	

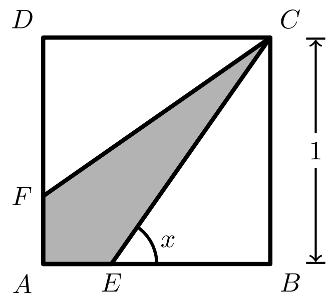
Logo o gráfico de f tem:

- a concavidade voltada para cima no intervalo $\left[-\pi,\frac{\pi}{6}\right]$ e no intervalo $\left[\frac{5\pi}{6},\pi\right]$
- a concavidade voltada para baixo no intervalo $\left[\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6}\right]$
- 2 pontos de inflexão de abcissas $x = \frac{\pi}{6}$ e $x = \frac{5\pi}{6}$

Exame – 2002, 1.ª fase - 2.ª chamada (cód. 435)

109.

109.1. Usando as definições de seno e tangente, vem:



$$\operatorname{sen} x = \frac{\overline{BC}}{\overline{EC}} \Leftrightarrow \operatorname{sen} x = \frac{1}{\overline{EC}} \Leftrightarrow \overline{EC} = \frac{1}{\operatorname{sen} x}$$

$$\operatorname{tg} x = \frac{\overline{BC}}{\overline{EB}} \Leftrightarrow \operatorname{tg} x = \frac{1}{\overline{EB}} \Leftrightarrow \overline{EB} = \frac{1}{\operatorname{tg} x}$$

Sabemos ainda que

$$\overline{AE} + \overline{EB} = 1 \Leftrightarrow \overline{AE} = 1 - \overline{EB} \Leftrightarrow \overline{AE} = 1 - \frac{1}{\operatorname{tg} x}$$

Assim, como $\overline{FC} = \overline{EC}$ e $\overline{AF} = \overline{AE}$, calculando o perímetro do quadrilátero $[CEAF]$, vem:

$$P_{[CEAF]} = 2 \times \overline{AE} + 2 \times \overline{EC} = 2 \times \left(1 - \frac{1}{\operatorname{tg} x}\right) + 2 \times \frac{1}{\operatorname{sen} x} = 2 - \frac{2}{\operatorname{tg} x} + \frac{2}{\operatorname{sen} x}$$

Ou seja, para cada valor de $x \in \left]\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right[$ o perímetro do quadrilátero é dado pela função f

109.2.

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} f(x) = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} \left(2 - \frac{2}{\operatorname{tg} x} + \frac{2}{\operatorname{sen} x}\right) = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} 2 - \lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} \frac{2}{\operatorname{tg} x} + \lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} \frac{2}{\operatorname{sen} x} = 2 - \frac{2}{+\infty} + \frac{2}{1} = 2 - 0 + 2 = 4$$

Ou seja, quando o ângulo x toma valores arbitrariamente próximos de $\frac{\pi}{2}$, o perímetro do quadrilátero é 4, porque, como se pode ver na figura, quando $x \to \frac{\pi}{2}^-$, a posição do ponto E é praticamente coincidente com o ponto B, ou seja o quadrilátero $[CEAF]$, praticamente coincide com o quadrado $[ABCD]$, que tem perímetro 4.

109.3.

$$f'(x) = \left(f(x)\right)' = \left(2 - \frac{2}{\operatorname{tg} x} + \frac{2}{\operatorname{sen} x}\right)' = (2)' - \left(\frac{2}{\operatorname{tg} x}\right)' + \left(\frac{2}{\operatorname{sen} x}\right)' = 0 - \frac{-2(\operatorname{tg} x)'}{\operatorname{tg}^2 x} + \frac{-2(\operatorname{sen} x)'}{\operatorname{sen}^2 x} =$$

$$= \frac{2 \times \frac{1}{\cos^2 x}}{\frac{\operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x}} - \frac{2\cos x}{\operatorname{sen}^2 x} = \frac{2 \times 1}{\operatorname{sen}^2 x} - \frac{2\cos x}{\operatorname{sen}^2 x} = \frac{2 - 2\cos x}{\operatorname{sen}^2 x}$$

No domínio da função f (e de $f'(x)$), ou seja no intervalo $\left]\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right[$, temos que:

- $\cos x < 1 \Leftrightarrow 2\cos x < 2 \Leftrightarrow -2\cos x > -2 \Leftrightarrow 2 - 2\cos x > -2 + 2 \Leftrightarrow 2 - 2\cos x > 0$
- $\operatorname{sen} x > 0 \Leftrightarrow \operatorname{sen}^2 x > 0$
- Logo, o quociente $\frac{2 - 2\cos x}{\operatorname{sen}^2 x} > 0$, ou seja a $f'(x) > 0$

Assim, podemos concluir que a função f é estritamente crescente.

Exame – 2002, 1.ª fase - 1.ª chamada (cód. 435)

110.
- a expressão $f(x) = x^2$ **não pode ser** porque $f(0) = 0$, ou seja esta função tem um zero
- a expressão $f(x) = e^x$ **não pode ser** porque não é par, por exemplo $f(1) \neq f(-1)$
- a expressão $f(x) = \cos x$ **não pode ser** porque tem um número infinto de zeros: se $x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$, temos que $f(x) = 0$

A função $f(x) = \pi$ é uma função constante, não nula, por isso não tem zeros e $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \pi = f(-x)$, ou seja, é uma função par, porque objetos simétricos têm a mesma imagem.

Resposta: **Opção D**

Exame – 2001, Prova para militares (cód. 435)

111.

111.1. Para estudar a existência de assíntotas não verticais, vamos averiguar a existência de um valor finito para o declive da assíntota, como o domínio é R^+:

$$m = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x + \operatorname{sen}\frac{\pi}{x}}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{x} + \lim_{x\to+\infty} \frac{\operatorname{sen}\frac{\pi}{x}}{x} = 1 + \frac{\operatorname{sen}\frac{\pi}{+\infty}}{+\infty} =$$

$$= 1 + \frac{\operatorname{sen}(0^+)}{+\infty} = 1 + \frac{0^+}{+\infty} = 1 + 0^+ = 1$$

Averiguando a existência de um valor finito para a aordenada da origem da assíntota, vem:

$$b = \lim_{x\to+\infty} \big(f(x) - mx\big) = \lim_{x\to+\infty} \left(x + \operatorname{sen}\frac{\pi}{x} - x\right) = \lim_{x\to+\infty} \left(\operatorname{sen}\frac{\pi}{x}\right) = \operatorname{sen}\frac{\pi}{+\infty} = \operatorname{sen}(0^+) = 0$$

Logo a reta de equação $y = 1 \times x + 0$, ou seja $y = x$ é a única assíntota não vertical do gráfico de f

111.2. Para determinar o declive da reta tangente ao gráfico, começamos por determinar a expressão da derivada da função:

$$f'(x) = \big(f(x)\big)' = \left(x + \operatorname{sen}\frac{\pi}{x}\right)' = (x)' + \left(\operatorname{sen}\frac{\pi}{x}\right)' = 1 + \left(\frac{0 - (x)'\pi}{x^2}\right)\cos\frac{\pi}{x} = 1 - \frac{\pi}{x^2}\cos\frac{\pi}{x}$$

Logo o valor do declive da reta tangente ao gráfico de f, no ponto de abcissa 2, pode ser calculado como:

$$m_r = f'(2) = 1 - \frac{\pi}{2^2}\cos\frac{\pi}{2} = 1 - \frac{\pi}{4}\cos 0 = 1 - \frac{\pi}{4} \times 0 = 1 - 0 = 1$$

Para determinar as coordenadas do ponto de abcissa 2, que pertence ao gráfico da função e à reta tangente, simultaneamente, calculamos:

$$f(2) = 2 + \operatorname{sen}\frac{\pi}{2} = 2 + 1 = 3$$

Logo a reta tangente é da forma $y = 1 \times x + b$ e contém o ponto P, de coordenadas $P(2{,}3)$, pelo que:

$$y_P = x_P + b \ \Leftrightarrow\ 3 = 2 + b \ \Leftrightarrow\ 3 - 2 = b \ \Leftrightarrow\ b = 1$$

Ou seja, a equação da reta tangente ao gráfico de f, no ponto de abcissa 2 é $y = x + 1$

111.3. Os zeros da função são as soluções da equação $f(x) = 0$, resolvendo a equação vem:

$$f(x) = 0 \ \Leftrightarrow\ x + \operatorname{sen}\frac{\pi}{x} = 0 \ \Leftrightarrow\ x = -\operatorname{sen}\frac{\pi}{x}$$

Como $\operatorname{sen}\frac{\pi}{x} \geq -1$,$\forall x \in \mathbb{R}$, temos que:

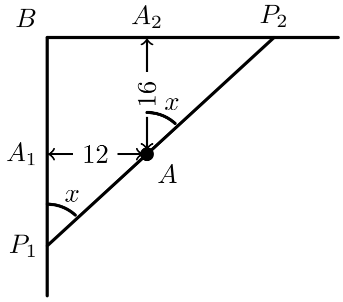
$$\operatorname{sen}\frac{\pi}{x} \geq -1 \ \Leftrightarrow\ -\operatorname{sen}\frac{\pi}{x} \leq 1$$

Assim, para valores de $x \in]1, +\infty[$, ou seja, para $x > 1$, a equação $x = -\operatorname{sen}\frac{\pi}{x}$ não tem soluções, o que significa que a função não tem zeros no intervalo $]1, +\infty[$

Exame – 2001, Prova para militares (cód. 435)

112.

112.1. Considerando A_1 e A_2 as projeções ortogonais do ponto sobre as retas BP_1 e BP_2, respetivamente, temos que o ângulo A_2AP_2 também tem amplitude x, pelo que recorrendo às definições de seno e cosseno temos:



$$\operatorname{sen} x = \frac{\overline{AA_1}}{\overline{AP_1}} \Leftrightarrow \operatorname{sen} x = \frac{12}{\overline{AP_1}} \Leftrightarrow \overline{AP_1} = \frac{12}{\operatorname{sen} x}$$

$$\cos x = \frac{\overline{AA_2}}{\overline{AP_2}} \Leftrightarrow \cos x = \frac{16}{\overline{AP_2}} \Leftrightarrow \overline{AP_2} = \frac{16}{\cos x}$$

Calculando o comprimento da ponte (c), em função de x, vem:

$$c(x) = \overline{AP_2} + \overline{AP_1} = \frac{16}{\cos x} + \frac{12}{\operatorname{sen} x} = \frac{16 \operatorname{sen} x}{\cos x . \operatorname{sen} x} + \frac{12 \cos x}{\operatorname{sen} x . \cos x} = \frac{16 \operatorname{sen} x + 12 \cos x}{\operatorname{sen} x . \cos x}$$

112.2. Se $\overline{BP_1} = \overline{BP_2}$, o triângulo $[P_1BP]$ é um triângulo retângulo isósceles, ou seja os ângulos agudos são iguais, e por isso, têm amplitude $\frac{\pi}{4}$ radianos.
Assim, calculando o comprimento da ponte, vem:

$$c\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{16 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right) + 12 \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)}{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right) . \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)} = \frac{16 \times \frac{\sqrt{2}}{2} + 12 \times \frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{28 \times \frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{2}{4}} = 28\sqrt{2} \approx 39{,}6$$

Ou, seja, se o vértice a ponte for construída entre dois pontos equidistantes do vértice B, terá um comprimento aproximado de 39,6 metros.

Exame – 2001, Ép. especial (cód. 435)

113.

113.1. Como o domínio da função é $]-\pi,\pi[$, e f resulta de operações sucessivas entre funções contínuas, também é contínua, logo as retas $x = -\pi$ e $x = \pi$ são as únicas retas que podem assíntotas do gráfico de f.

- $\lim\limits_{x \to -\pi^-} f(x) = \lim\limits_{x \to -\pi^-} \frac{\cos x}{1 + \cos x} = \frac{\cos(-\pi)}{1 + \cos(-\pi)} = \frac{-1^+}{1 + (-1^+)} = \frac{-1}{0^+} = -\infty$

  Logo, a reta $x = -\pi$ é efetivamente uma assíntota vertical do gráfico de f

- $\lim\limits_{x \to \pi^+} f(x) = \lim\limits_{x \to \pi^+} \frac{\cos x}{1 + \cos x} = \frac{\cos \pi}{1 + \cos \pi} = \frac{-1^+}{1 + (-1^+)} = \frac{-1}{0^+} = -\infty$

  Assim, a reta $x = \pi$ também é uma assíntota vertical do gráfico de f

113.2. Para estudar a existência de extremos da função, começamos por determinar a expressão da derivada:

$$f'(x) = \left(\frac{\cos x}{1+\cos x}\right)' = \frac{(\cos x)'(1+\cos x) - (\cos x)(1+\cos x)'}{(1+\cos x)^2} =$$

$$= \frac{-\operatorname{sen} x(1+\cos x) - (\cos x)(0 - \operatorname{sen} x)}{(1+\cos x)^2} = \frac{-\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} x.\cos x + \operatorname{sen} x.\cos x}{(1+\cos x)^2} = \frac{-\operatorname{sen} x}{(1+\cos x)^2}$$

Para provar a existência de um maximizante, vamos determinar os zeros da derivada:

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{-\operatorname{sen} x}{(1+\cos x)^2} = 0 \Leftrightarrow -\operatorname{sen} x = 0 \wedge \underbrace{(1+\cos x)^2 \neq 0}_{(\text{PV, } \cos x \neq -1,\, \forall x \in]-\pi,\pi[)} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \operatorname{sen} x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi \,, k \in \mathbb{Z}$$

Ou seja, no domínio da função (o intervalo $]-\pi,\pi[$), a única solução da equação $f'(x) = 0$, é $x = 0$, pelo que podemos estudar a variação do sinal de f' para relacionar com a monotonia de f:

x	$-\pi$		0		π
f'	n.d.	$+$	0	$-$	n.d.
f	n.d.	$\nearrow$	Máx	$\searrow$	n.d.

Assim:

$$f(0) = \frac{\cos 0}{1+\cos 0} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$$

Logo, a função f só tem um máximo, cujo valor é $\frac{1}{2}$

113.3. A medida da base maior do trapézio ($\overline{OP} = x_P$), como P pertence ao semi-eixo-positivo Ox, é a solução positiva da equação:

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{\cos x}{1+\cos x} = 0 \Leftrightarrow \cos x = 0 \wedge \underbrace{1+\cos x \neq 0}_{(\text{PV, } \cos x \neq -1,\, \forall x \in]-\pi,\pi[)} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \,, k \in \mathbb{Z}$$

Logo, a única solução positiva do intervalo $]-\pi,\pi[$, é $\frac{\pi}{2}$, ou seja, $\overline{OP} = x_P = \dfrac{\pi}{2}$

A medida da base menor do trapézio ($\overline{RQ} = x_Q$), como Q está sobre a reta de equação $y = \frac{1}{3}$, é a solução positiva da equação:

$$f(x) = \frac{1}{3} \Leftrightarrow \frac{\cos x}{1+\cos x} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow 3\cos x = 1+\cos x \wedge \underbrace{1+\cos x \neq 0}_{(\text{PV, } \cos x \neq -1,\, \forall x \in]-\pi,\pi[)} \Leftrightarrow$$

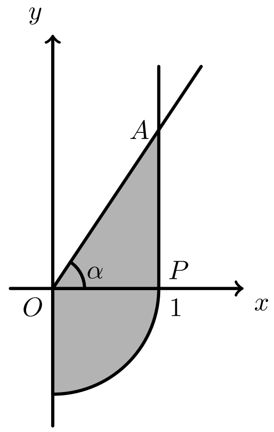
$$\Leftrightarrow 3\cos x - \cos x = 1 \Leftrightarrow 2\cos x = 1 \Leftrightarrow \cos x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos x = \cos\frac{\pi}{3} \Leftrightarrow x = \pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi \,, k \in \mathbb{Z}$$

Logo, a única solução positiva do intervalo $]-\pi,\pi[$, é $\frac{\pi}{3}$, ou seja, $\overline{QR} = x_Q = \dfrac{\pi}{3}$

Assim, calculando a área do trapézio, vem:

$$A_{[OPQR]} = \frac{\overline{RQ} + \overline{OP}}{2} \times \overline{OR} = \frac{\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{2}}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{\frac{2\pi}{6} + \frac{3\pi}{6}}{6} = \frac{5\pi}{36}$$

Exame – 2001, 2.ª fase (cód. 435)



114. Designando o ponto (1,0) por P e recorrendo à definição de tangente, temos que:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\overline{AP}}{\overline{OP}} \Leftrightarrow \operatorname{tg}\alpha = \frac{\overline{AP}}{1} \Leftrightarrow \overline{AP} = \operatorname{tg}\alpha$$

Logo, podemos calcular a área da região sombreada, como a soma do quarto de círculo de raio 1, com a área do triângulo $[OPA]$:

$$A = \frac{A_\circ}{4} + A_{[OPA]} = \frac{\pi\times 1^2}{4} + \frac{\overline{OP}\times\overline{AP}}{2} = \frac{\pi}{4} + \frac{1\times \operatorname{tg}\alpha}{2} = \frac{\pi}{4} + \frac{\operatorname{tg}\alpha}{2}$$

Resposta: **Opção A**

Exame – 2001, 1.ª fase - 2.ª chamada (cód. 435)

115.

115.1. Como A e B são pontos cujas ordenadas são extremos da função, começamos por determinar a expressão da derivada, e calcular os zeros:

$$f'(x) = (x + 2\cos x)' = (x)' + 2(\cos x)' = 1 + 2(-\operatorname{sen} x) = 1 - 2\operatorname{sen} x$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 1 - 2\operatorname{sen} x = 0 \Leftrightarrow -2\operatorname{sen} x = -1 \Leftrightarrow \operatorname{sen} x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \operatorname{sen} x = \operatorname{sen}\frac{\pi}{6} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \vee x = \pi - \frac{\pi}{6} + 2k\pi, k\in\mathbb{Z} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \vee x = -\frac{5\pi}{6} + 2k\pi, k\in\mathbb{Z}$$

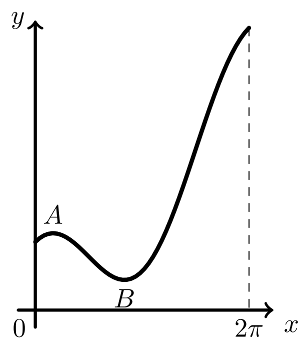
Logo, as únicas soluções da equação do intervalo $[0,2\pi]$, ou seja as duas únicas soluções da equação são $x = \frac{\pi}{6}$ e $x = \frac{5\pi}{6}$, pelo que podemos provar que são maximizantes ou minimizantes, pelo estudo do sinal da derivada para relacionar com a monotonia da função:

x	0		$\frac{\pi}{6}$		$\frac{5\pi}{6}$		2π
f'		+	0	−	0	+	
f		↗	Máx	↘	min	↗	

Logo, como a ordenada do ponto A é um máximo, e a ordenada do ponto B é um mínimo, vem:

- $x_A = \frac{\pi}{6}$
- $y_A = f\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\pi}{6} + 2\cos\frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{6} + 2\times\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{6} + \frac{2\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{6} + \frac{6\sqrt{3}}{6} = \frac{\pi + 6\sqrt{3}}{6}$
- $x_B = \frac{5\pi}{6}$
- $y_B = f\left(\frac{5\pi}{6}\right) = \frac{5\pi}{6} + 2\cos\frac{5\pi}{6} = \frac{5\pi}{6} + 2\left(-\cos\frac{\pi}{6}\right) = \frac{5\pi}{6} - 2\times\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{5\pi}{6} - \frac{6\sqrt{3}}{6} = \frac{5\pi - 6\sqrt{3}}{6}$

115.2. Pela observação do gráfico, verificamos que o contradomínio de f é o conjunto dos valores compreendidos entre a ordenada do ponto B e a imagem de 2π.



Assim,

$$f(2\pi) = 2\pi + 2\cos(2\pi) = 2\pi + 2(1) = 2\pi + 2$$

Ou seja:

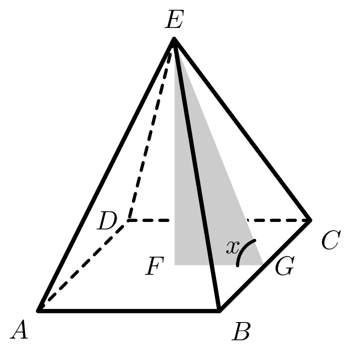
$$D'_f = \left[\frac{5\pi - 6\sqrt{3}}{6}, 2\pi + 2\right]$$

Exame – 2001, 1.ª fase - 2.ª chamada (cód. 435)

116.

116.1. Para determinar a área de uma das faces laterais, começamos determinar a altura do triângulo ($\overline{EG}$).

Recorrendo à definição de cosseno, como $\overline{FG} = \frac{\overline{AB}}{2} = \frac{2}{2} = 1$, vem:



$$\cos x = \frac{\overline{FG}}{\overline{EG}} \Leftrightarrow \cos x = \frac{1}{\overline{EG}} \Leftrightarrow \overline{EG} = \frac{1}{\cos x}$$

Assim, calculando a área do triângulo $[BCE]$, temos:

$$A_{[BCE]} = \frac{\overline{BC} \times \overline{EG}}{2} = \frac{2 \times \frac{1}{\cos x}}{2} = \frac{1}{\cos x}$$

Logo, para calcular a área total, vem:

$$A_T = 4 \times A_{[BCE]} + A_[ABCD] = 4 \times \frac{1}{\cos x} + 2 \times 2 = \frac{4}{\cos x} + 4 = \frac{4}{\cos x} + \frac{4\cos x}{\cos x} = \frac{4\cos x + 4}{\cos x}$$

Ou seja, para cada valor de $x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, a área da pirâmide é dada por $A(x)$

116.2.

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} A(x) = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} \frac{4\cos x + 4}{\cos x} = \frac{4\cos\left(\frac{\pi}{2}^-\right) + 4}{\cos\left(\frac{\pi}{2}^-\right)} = \frac{4 \times 0^+ + 4}{0^+} = \frac{4}{0^+} = +\infty$$

Ou seja, quando o ângulo x toma valores arbitrariamente próximos de $\frac{\pi}{2}$ radianos, a área da pirâmide assume valores arbitrariamente grandes, o que pode ser justificado pelo facto da altura da pirâmide ser arbitrariamente grande.

Exame – 2001, 1.ª fase - 1.ª chamada (cód. 435)

117.

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\ln x}{\operatorname{sen} x} = \lim_{x \to 0^+} \left(\frac{\ln x}{x} \times \frac{x}{\operatorname{sen} x} \right) = \lim_{x \to 0^+} \frac{\ln x}{x} \times \lim_{x \to 0^+} \frac{x}{\operatorname{sen} x} = \frac{\lim\limits_{x \to 0^+} (\ln x)}{\lim\limits_{x \to 0^+} x} \times \lim_{x \to 0^+} \frac{1}{\frac{\operatorname{sen} x}{x}} =$$

$$= \frac{\ln(0^+)}{0^+} \times \frac{1}{\underbrace{\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{\operatorname{sen} x}{x}}_{\text{(limite notável)}}} = \frac{-\infty}{0^+} \times \frac{1}{1} = -\infty \times 1 = -\infty$$

Resposta: **Opção A**

Exame – 2001, Prova modelo (cód. 435)

118.

118.1. Para que a função seja contínua no ponto de abcissa 0, tem que se verificar a condição:

$$h(0) = \lim_{x\to 0^-} h(x) = \lim_{x\to 0^+} h(x)$$

- $h(0) = \dfrac{1}{2}$
- $\displaystyle\lim_{x\to 0^-} h(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{x+1}{x} = \lim_{x\to 0^-}\left(\frac{x}{x}+\frac{1}{x}\right) = \lim_{x\to 0^-}\left(1+\frac{1}{x}\right) = 1+\frac{1}{0^-} = 1-\infty = -\infty$
- $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} h(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\operatorname{sen} x}{2x} = \frac{1}{2}\underbrace{\lim_{x\to 0^+}\frac{\operatorname{sen} x}{x}}_{\text{(limite notável)}} = \frac{1}{2}\times 1 = \frac{1}{2}$

Assim, como $\lim\limits_{x\to 0^-} h(x) \neq \lim\limits_{x\to 0^+} h(x)$, não existe $\lim\limits_{x\to 0} h(x)$, e por isso, a função h **não é contínua no ponto** de abcissa 0.

Mas, como $\lim\limits_{x\to 0^+} h(x) = h(0)$, a função h **é contínua à direita do ponto** de abcissa 0.

118.2. As abcissas dos pontos de interseção das duas funções, no intervalo $[-1{,}1000\pi]$, são as soluções da equação $h(x) = j(x)$, que pertencem a esse intervalo.

- Assim, para $x \in [-1{,}0[$, temos:

$$h(x) = j(x) \;\Leftrightarrow\; \frac{x+1}{x} = \frac{1}{3x} \;\Leftrightarrow\; 3x^2+3x = x \wedge x \neq 0 \;\Leftrightarrow\; 3x^2+2x = 0 \wedge x\neq 0 \;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\; x(3x+2) = 0 \wedge x \neq 0 \;\Leftrightarrow\; \big(x=0 \vee 3x+2=0\big) \wedge x\neq 0 \;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\; \left(x=0 \vee x=-\frac{2}{3}\right) \wedge x \neq 0 \;\Leftrightarrow\; x = -\frac{2}{3}$$

  Ou seja, no intervalo $]-1{,}0[$, os gráficos das funções h e j intersetam-se uma vez.
- Para $x=0$, como a função j não está definida, não há interseção dos dois gráficos.
- Para $x \in]0{,}1000\pi]$, vem:

$$h(x) = j(x) \;\Leftrightarrow\; \frac{\operatorname{sen} x}{2x} = \frac{1}{3x} \;\Leftrightarrow\; \operatorname{sen} x = \frac{2x}{3x} \wedge x\neq 0 \;\Leftrightarrow\; \operatorname{sen} x = \frac{2}{3} \wedge x \neq 0$$

  Como a equação $\operatorname{sen} x = \dfrac{2}{3}$ tem duas soluções no intervalo $]0{,}2\pi[$ e é periódica (de período 2π) terá 1000 soluções no intervalo $]0{,}1000\pi]$, porque este intervalo contém 500 intervalos do tipo $]0+2k\pi{,}2\pi+2k\pi\times k[, k\in\{0{,}2{,}3{,}\ldots,498,499\}$, e existem duas soluções em cada intervalo.

Assim, os gráficos de j e de h intersetam-se em 1001 pontos no intervalo $[0{,}1000\pi]$ (1 ponto de interseção com abcissa negativa e 1000 com abcissas positivas).

Exame – 2001, Prova modelo (cód. 435)

119. Como o valor do declive da reta tangente pode ser calculado pelo valor da derivada, começamos por determinar a expressão da derivada:

$$h'(x) = (\operatorname{sen} x)' = \cos x$$

Como $-1 \leq \cos x \leq 1$, o declive da reta tangente está compreendido entre -1 e 1. Logo, as opções (A), (B) e (C) não podem ser retas tangentes ao gráfico de h, pois os declives das retas são maiores que 1, nas opções (A) e (C); ou menores que -1, no caso da opção (B).
Na opção (D), ao contrário das anteriores, o valor do declive é compatível com a condição imposta $(-1 \leq 1 \leq 1)$.

Resposta: **Opção D**

Exame – 2000, 2.ª fase (cód. 435)

120.

120.1. Como a função f resulta de operações sucessivas de funções contínuas em $\mathbb{R}$, é uma função contínua, e, por isso, também é contínua em $[0,\pi]$.

Como $-1 < 0 < 2\pi + 1$, ou seja, $f(0) < 0 < f(\pi)$, então, podemos concluir, pelo Teorema de Bolzano, que existe $c \in]0,\pi[$ tal que $f(c) = 0$, ou seja, que a função f tem, pelo menos, um zero no intervalo $]0,\pi[$.

C.A.

$f(0) = 2 \times 0 - \cos 0 = 0 - 1 = -1$

$f(\pi) = 2 \times \pi - \cos(\pi) = 2\pi - (-1) =$
$= 2\pi + 1$

120.2. Determinando a expressão da derivada, vem:

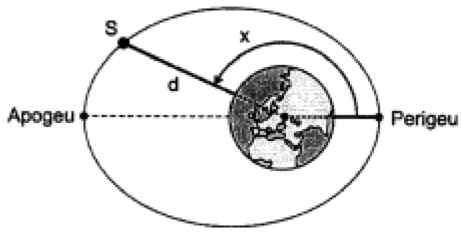
$$f'(x) = (2x - \cos x)' = (2x)' - (\cos x)' = 2 - (-\operatorname{sen} x) = 2 + \operatorname{sen} x$$

Como $\operatorname{sen} x \geq -1 ,\forall x \in \mathbb{R}$, então $2 + \operatorname{sen} x \geq -1 + 2 ,\forall x \in \mathbb{R}$, ou seja $f'(x) \geq 1 ,\forall x \in \mathbb{R}$.
Como a derivada de f é estritamente positiva, a função f é estritamente crescente, e funções estritamente crescentes têm no máximo, um zero, pelo que o zero cuja existência é garantida pela enunciado do item anterior, é o único zero da função.

Exame – 2000, 2.ª fase (cód. 435)

121. Quando o satélite se encontra no *apogeu*, o ângulo x tem amplitude 180°. Assim, a distância do satélite ao centro Terra é:

$$d = \frac{7\,820}{1 + 0{,}07\cos 180} = \frac{7\,820}{1 + 0{,}07(-1)} = \frac{7\,820}{0{,}93} \approx 8\,408{,}6$$



Como se pretende saber a distância à superfície da Terra (d_{Sup}), devemos subtrair o raio da terra:

$$d_{Sup} = d - 6378 = 8\,408{,}6 - 6\,378 = 2\,030{,}6 \approx 2\,031$$

Logo, a distância do satélite à superfície da Terra, arredondada às unidades é de 2 031 km

Exame – 2000, 1.ª fase - 2.ª chamada (cód. 435)

122. Se $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$ então a reta $y = 0$ é uma assíntota do gráfico de f; analogamente se $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 1$ então a reta $y = 1$ é uma assíntota do gráfico de f
Como a função $g(x) = \operatorname{sen} x$ não tem qualquer assíntota, as afirmações das opções (A) e (C) são falsas.

Como $\operatorname{sen} x \leq 1 ,\forall x \in \mathbb{R}$, então a afirmação $\lim\limits_{x\to+\infty} \operatorname{sen} x = +\infty$ (opção (B)) é falsa.

A função $g(x) = \operatorname{sen} x$ é periódica e não se aproxima de nenhum valor específico para valores arbitrariamente grandes de x, pelo que não existe $\lim\limits_{x\to+\infty} \operatorname{sen} x$

Resposta: **Opção D**

Exame – 2000, 1.ª fase - 1.ª chamada (cód. 435)

123. O dia 24 de março é o 84º dia do ano $(31 + 29 + 24 = 84)$.
Assim o tempo decorrido entre o nascer e por do Sol, no dia 24 de março, é

$$f(84) = 12{,}2 + 2{,}64 \operatorname{sen} \frac{\pi(84-81)}{183} \approx 12{,}336$$

Logo a hora do por Sol, pode ser calculada como a soma da hora a que nasceu (6,5) com a duração do dia (12,336):

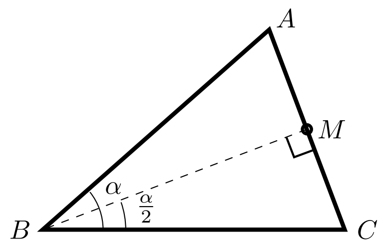
$$6{,}5 + 12{,}336 = 18{,}836$$

Calculando 0,836 horas em minutos, temos $0{,}836 \times 60 = 50{,}16$, pelo que o por do Sol no dia 24 de março ocorreu às 18 horas e 50 minutos.

Exame – 2000, 1.ª fase - 1.ª chamada (cód. 435)

124.

124.1. Considerando o ponto M, como o ponto médio do lado AC, definimos dois triângulos retângulos. Assim, recorrendo à definição de seno e cosseno, vem:



$$\operatorname{sen} \frac{\alpha}{2} = \frac{\overline{CM}}{\overline{BC}} \Leftrightarrow \overline{CM} = \overline{BC} \times \operatorname{sen} \frac{\alpha}{2}$$

$$\cos \frac{\alpha}{2} = \frac{\overline{BM}}{\overline{BC}} \Leftrightarrow \overline{BM} = \overline{BC} \times \cos \frac{\alpha}{2}$$

Logo, como $\overline{AC} = 2 \times \overline{CM} = 2\overline{BC} \times \operatorname{sen} \frac{\alpha}{2}$, para cada valor de $\alpha \in]0,\pi[$ a área do triângulo $[ABC]$ é:

$$A_{[ABC]} = \frac{\overline{AC} \times \overline{BM}}{2} = \frac{2 \times \overline{BC} \times \operatorname{sen} \frac{\alpha}{2} \times \overline{BC} \times \cos \frac{\alpha}{2}}{2} = \frac{\overline{BC}^2}{2} \times 2 \operatorname{sen} \frac{\alpha}{2} . \cos \frac{\alpha}{2} =$$

$$= \frac{\overline{BC}^2}{2} \times \operatorname{sen} \left(2 \times \frac{\alpha}{2}\right) = \frac{\overline{BC}^2}{2} \times \operatorname{sen} \alpha$$

124.2.
- Um polígono regular de n lados, inscrito numa circunferência de lado 1, pode ser decomposto em n triângulos isósceles, iguais, em que os lados iguais têm comprimento 1 ($\overline{BC} = 1$).
- Como a soma dos ângulos ao centro de todos os n triângulos é 2π, o ângulo α é o resultado da divisão do ângulo giro por n, ou seja $\alpha = \frac{2\pi}{n}$
- Como a área do polígono regular é dada pela soma das áreas dos n triângulos, e como têm todos a mesma área, por serem iguais, multiplicamos a área do triângulo por n.

Logo, multiplicando por n a expressão anterior e substituindo $\overline{BC}$ e α, a expressão da área do polígono é:

$$A_n = n \times \frac{1^2}{2} \times \operatorname{sen} \left(\frac{2\pi}{n}\right) = \frac{n}{2} \operatorname{sen} \left(\frac{2\pi}{n}\right)$$

124.3.

$$\lim_{n\to+\infty} A_n = \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{n}{2} \operatorname{sen} \left(\frac{2\pi}{n}\right)\right) = \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{\frac{2}{n}} \times \operatorname{sen} \left(\frac{2\pi}{n}\right)\right) = \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{\operatorname{sen} \left(\frac{2\pi}{n}\right)}{\frac{2}{n}}\right) =$$

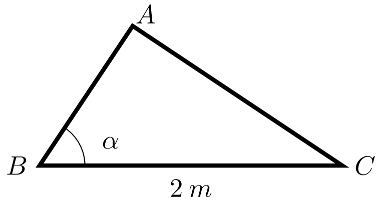
$$= \lim_{n\to+\infty} \left(\pi \times \frac{\operatorname{sen} \left(\frac{2\pi}{n}\right)}{\pi \times \frac{2}{n}}\right) = \pi \times \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{\operatorname{sen} \left(\frac{2\pi}{n}\right)}{\frac{2\pi}{n}}\right) = \pi \times \lim_{x\to 0^+} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = \pi \times 1 = \pi$$

(Se $x = \frac{2\pi}{n}$, $n \to +\infty \Rightarrow x \to 0^+$) (limite notável)

Ou seja, quando o polígono regular tem um número arbitrariamente grande de lados, a sua área é arbitrariamente próxima de π. O que pode ser observado geometricamente, porque a área dos polígonos regulares inscritos numa circunferência aproxima-se da área da circunferência com o aumento do número de lados e a circunferência de raio 1 tem área igual a π ($A_\circ = \pi \times 1^2 = \pi$).

Exame – 2000, Prova modelo (cód. 435)

125. Recorrendo às definições de seno e cosseno temos:



$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{\overline{AC}}{\overline{BC}} \Leftrightarrow \operatorname{sen}\alpha = \frac{\overline{AC}}{2} \Leftrightarrow \overline{AC} = 2\operatorname{sen}\alpha$$

$$\cos\alpha = \frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} \Leftrightarrow \cos\alpha = \frac{\overline{AB}}{2} \Leftrightarrow \overline{AB} = 2\cos\alpha$$

E assim, considerando o lado $[AB]$ como a base e o lado $[AC]$ como a altura, a área do triângulo $[ABC]$ é:

$$A_{[ABC]} = \frac{\overline{AB} \times \overline{AC}}{2} = \frac{2\cos\alpha \times 2\operatorname{sen}\alpha}{2} = \frac{4\operatorname{sen}\alpha.\cos\alpha}{2} = 2\operatorname{sen}\alpha.\cos\alpha$$

Resposta: **Opção A**

Exame – 2000, Prova para militares (cód. 135)

126. Como $\operatorname{tg} x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$, a função g não está definida para valores de x tais que $\cos x = 0$.

Como $\cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi\,,\, k \in \mathbb{Z}$,

- as opções (B) e (C) não podem ser o domínio de g, porque $\frac{\pi}{2} \in \left]\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4}\right[$ e também $\frac{\pi}{2} \in]0,\pi[$
- a opção (D) também não pode ser porque $\frac{3\pi}{2} \in]\pi,2\pi[$ e $\cos\frac{3\pi}{2} = 0$

Finalmente temos que $\forall x \in \left]-\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{3}\right[, \cos x \neq 0$

Resposta: **Opção A**

Exame – 1999, Prova para militares (cód. 135)

127.

127.1. Como $f(0) = \operatorname{sen}(0) - \frac{1}{2}\operatorname{sen}(2 \times 0) = 0 - \frac{1}{2}\operatorname{sen}(0) = 0$, temos que:

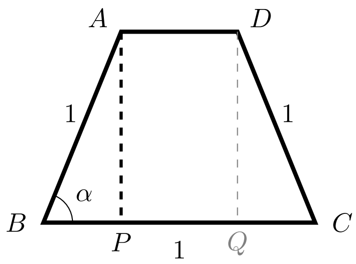
$$f'(0) = \lim_{x\to 0}\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}(x) - \frac{1}{2}\operatorname{sen}(2x) - 0}{x} = \underbrace{\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}(x)}{x}}_{\text{(limite notável)}} - \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}\operatorname{sen}(2x)}{x} =$$

$$= 1 - \frac{1}{2} \times \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}(2x)}{x} = 1 - \frac{1}{2} \times \lim_{x\to 0}\frac{2\operatorname{sen}(2x)}{2x} = 1 - \frac{1}{2} \times 2\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}(2x)}{2x} = 1 - \lim_{y\to 0}\frac{\operatorname{sen} y}{y} = 1 - 1 = 0$$

(Se $y = 2x$, $x \to 0 \Rightarrow y \to 0$) (limite notável)

127.2.

127.2.1. Considerando as projeções ortogonais dos vértices A e D sobre o lado $[BC]$, respetivamente os pontos P e Q, e recorrendo às definições de seno e cosseno, vem:



$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{\overline{AP}}{\overline{AB}} \Leftrightarrow \operatorname{sen}\alpha = \frac{\overline{AP}}{1} \Leftrightarrow \overline{AP} = \operatorname{sen}\alpha$$

$$\cos\alpha = \frac{\overline{BP}}{\overline{AB}} \Leftrightarrow \cos\alpha = \frac{\overline{BP}}{1} \Leftrightarrow \overline{BP} = \cos\alpha$$

Logo, como $\overline{AD} = 1 - \overline{BP} - \overline{QC} = 1 - 2\overline{BP} = 1 - 2\cos\alpha$, a área do trapézio $[ABCD]$ é:

$$A_{[ABCD]} = \frac{\overline{BC} + \overline{AD}}{2} \times \overline{AP} = \frac{1 + 1 - 2\cos\alpha}{2} \times \operatorname{sen}\alpha = \frac{2 - 2\cos\alpha}{2} \times \operatorname{sen}\alpha = (1 - \cos\alpha)\operatorname{sen}\alpha =$$

$$= \operatorname{sen}\alpha - \operatorname{sen}\alpha\cos\alpha = \operatorname{sen}\alpha - \frac{1}{2} \times 2\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha = \operatorname{sen}\alpha - \frac{1}{2}\operatorname{sen}(2\alpha)$$

Logo, para cada valor de $\alpha \in \left]\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right]$ a área do trapézio é dada por $f(\alpha)$

127.2.2.

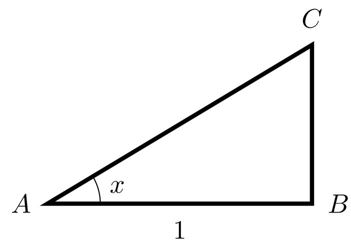
$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \operatorname{sen}\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\operatorname{sen}\left(2 \times \frac{\pi}{2}\right) = 0 - \frac{1}{2}\operatorname{sen}\pi = -(-1) = 1$$

Se $\alpha = \frac{\pi}{2}$, o ângulo ABC é reto, tal como o ângulo BCD, e como os lados $[AB]$, $[BC]$ e $[CD]$ são congruentes, o quadrilátero é um quadrado de lado 1, pelo que a sua área também é 1, de acordo com o cálculo anterior: $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$

Exame – 1999, Prova modelo (cód. 135)

128.

128.1. Usando as definições de cosseno e de tangente, temos:



$$\cos x = \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} \Leftrightarrow \cos x = \frac{1}{\overline{AC}} \Leftrightarrow \overline{AC} = \frac{1}{\cos x}$$

$$\operatorname{tg} x = \frac{\overline{BC}}{\overline{AB}} \Leftrightarrow \operatorname{tg} x = \frac{\overline{BC}}{1} \Leftrightarrow \overline{BC} = \operatorname{tg} x$$

Logo, o perímetro do triângulo é:

$$P_{[ABC]} = \overline{AB} + \overline{BC} + \overline{AC} = 1 + \operatorname{tg} x + \frac{1}{\cos x} = \frac{\cos x}{\cos x} + \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} + \frac{1}{\cos x} = \frac{1 + \operatorname{sen} x + \cos x}{\cos x}$$

Logo, para cada valor de $x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, o perímetro do triângulo é dado por $f(x)$.

128.2. Como $\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right) = -\operatorname{sen}\alpha$, temos que: $\operatorname{sen}\alpha = -\left(-\frac{3}{5}\right) = \frac{3}{5}$

E, pela fórmula fundamental ($\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$), temos que:

$$\left(\frac{3}{5}\right)^2 + \cos^2\alpha = 1 \;\Leftrightarrow\; \cos^2\alpha = 1 - \frac{9}{25} \;\Leftrightarrow\; \cos^2\alpha = \frac{25}{25} - \frac{9}{25} \;\Leftrightarrow\; \cos^2\alpha = \frac{16}{25} \;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\; \cos\alpha = \pm\sqrt{\frac{16}{25}} \;\Leftrightarrow\; \cos\alpha = \pm\frac{4}{5}$$

Como $\alpha \in \left]0,\frac{\pi}{2}\right[$ sabemos que $\cos\alpha > 0$, logo $\cos\alpha = \frac{4}{5}$

Desta forma, temos que:

$$f(\alpha) = \frac{1+\operatorname{sen}\alpha+\cos\alpha}{\cos\alpha} = \frac{1+\frac{3}{5}+\frac{4}{5}}{\frac{4}{5}} = \frac{\frac{5}{5}+\frac{3}{5}+\frac{4}{5}}{\frac{4}{5}} = \frac{5+3+4}{4} = \frac{12}{4} = 3$$

128.3. Começamos por determinar a expressão da derivada:

$$f'(x) = \left(\frac{1+\operatorname{sen}x+\cos x}{\cos x}\right)' = \frac{\left(1+\operatorname{sen}x+\cos x\right)'\cos x - \left(1+\operatorname{sen}x+\cos x\right)(\cos x)'}{\cos^2 x} =$$

$$= \frac{\left(0+\cos x+(-\operatorname{sen}x)\right)\cos x - \left(1+\operatorname{sen}x+\cos x\right)(-\operatorname{sen}x)}{\cos^2 x} =$$

$$= \frac{\cos^2 x - \operatorname{sen}x\cos x - \left(-\operatorname{sen}x - \operatorname{sen}^2 x - \operatorname{sen}x\cos x\right)}{\cos^2 x} =$$

$$= \frac{\cos^2 x - \operatorname{sen}x\cos x + \operatorname{sen}x + \operatorname{sen}^2 x + \operatorname{sen}x\cos x}{\cos^2 x} = \frac{\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x + \operatorname{sen}x}{\cos^2 x} = \frac{1+\operatorname{sen}x}{\cos^2 x}$$

Logo, como $x \in \left]0,\frac{\pi}{2}\right[$, temos que $\operatorname{sen}x > 0$ e $\cos x > 0$, pelo que f' é um quociente de dois valores positivos, logo $f'(x) > 0, \forall x \in \left]0,\frac{\pi}{2}\right[$

Como a derivada é sempre positiva, a função é estritamente crescente, ou seja, no triângulo $[ABC]$ a amplitudes maiores do ângulo x, correspondem áreas maiores.

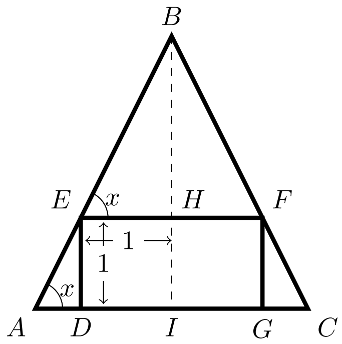
Exame – 1998, Prova para militares (cód. 135)

129.

129.1. Como $\overline{DE} = 1$ e $\overline{EH} = \frac{\overline{DG}}{2} = 1$, e recorrendo à definição de tangente, vem:

$$\operatorname{tg} x = \frac{\overline{DE}}{\overline{AD}} \Leftrightarrow \operatorname{tg} x = \frac{1}{\overline{AD}} \Leftrightarrow \overline{AD} = \frac{1}{\operatorname{tg} x}$$

$$\operatorname{tg} x = \frac{\overline{BH}}{\overline{EH}} \Leftrightarrow \operatorname{tg} x = \frac{\overline{BH}}{1} \Leftrightarrow \overline{BH} = \operatorname{tg} x$$



Assim, temos que:

$$\overline{AC} = \overline{AD} + \overline{DG} + \overline{GC} = 2\overline{AD} + 2 = 2\left(\frac{1}{\operatorname{tg} x}\right) + 2 = \frac{2}{\operatorname{tg} x} + 2$$

$$\overline{BI} = \overline{BH} + \overline{HI} = \operatorname{tg} x + 1$$

Logo a área do triângulo $[ABC]$ é:

$$A_{[ABC]} = \frac{\overline{AC} \times \overline{BI}}{2} = \frac{\left(\frac{2}{\operatorname{tg} x} + 2\right) \times (\operatorname{tg} x + 1)}{2} = \frac{\frac{2\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} x} + \frac{2}{\operatorname{tg} x} + 2\operatorname{tg} x + 2}{2} =$$

$$= \frac{2\left(\frac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} x} + \frac{1}{\operatorname{tg} x} + \operatorname{tg} x + 1\right)}{2} = 1 + \frac{1}{\operatorname{tg} x} + \operatorname{tg} x + 1 = 2 + \operatorname{tg} x + \frac{1}{\operatorname{tg} x}$$

Logo, para cada valor de $x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, a área do triângulo $[ABC]$ é dada, por $f(x)$

129.2.

$$f'(x) = \left(2 + \operatorname{tg} x + \frac{1}{\operatorname{tg} x}\right)' = (2)' + (\operatorname{tg} x)' + \left(\frac{1}{\operatorname{tg} x}\right)' = 0 + \frac{1}{\cos^2 x} + \frac{(1)' \times \operatorname{tg} x - 1 \times (\operatorname{tg} x)'}{\operatorname{tg}^2 x} =$$

$$= \frac{1}{\cos^2 x} + \frac{0 - 1 \times \frac{1}{\cos^2 x}}{\operatorname{tg}^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} + \frac{-\frac{1}{\cos^2 x}}{\frac{\operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x}} = \frac{1}{\cos^2 x} - \frac{\cos^2 x}{\operatorname{sen}^2 x . \cos^2 x} =$$

$$= \frac{\operatorname{sen}^2 x}{\operatorname{sen}^2 x . \cos^2 x} - \frac{\cos^2 x}{\operatorname{sen}^2 x . \cos^2 x} = \frac{\operatorname{sen}^2 x - \cos^2 x}{\operatorname{sen}^2 x . \cos^2 x} = \frac{-\left(\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x\right)}{\operatorname{sen}^2 x . \cos^2 x} = -\frac{\cos(2x)}{\operatorname{sen}^2 x . \cos^2 x}$$

129.3. Para determinar o valor mínimo, começamos por calcular os zeros da derivada:

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow -\frac{\cos(2x)}{\operatorname{sen}^2 x . \cos^2 x} = 0 \Leftrightarrow -\cos(2x) = 0 \land \underbrace{\operatorname{sen}^2 x . \cos^2 x \neq 0}_{(\text{PV, } x \in]0, \frac{\pi}{2}[)} \Leftrightarrow \cos(2x) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cos(2x) = \cos\frac{\pi}{2} \Leftrightarrow 2x = \pm\frac{\pi}{2} + 2k\pi \,, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = \pm\frac{\pi}{4} + k\pi \,, k \in \mathbb{Z}$$

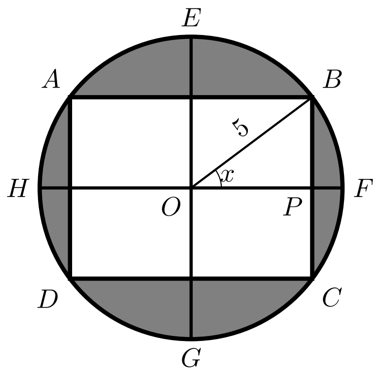
Como $x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, $x = \frac{\pi}{4}$ é a única solução da equação, ou seja o único zero da derivada, pelo que estudando a variação do sinal da derivada para relacionar com a monotonia da função, vem:

x	0		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{2}$
f'	n.d.	$-$	0	$+$	n.d.
f	n.d.	$\searrow$	min	$\nearrow$	n.d.

Pelo que podemos concluir que $x = \frac{\pi}{4}$ é o minimizante de f, ou seja é o valor de x para o qual a área do triângulo $[ABC]$ é mínima.

Exame – 1998, 2.ª fase (cód. 135)

130. Considerando o ponto P como a projeção ortogonal do vértice B sobre a reta HF, e recorrendo às definições de seno e cosseno, vem:



$$\operatorname{sen} x = \frac{\overline{BP}}{\overline{OB}} \Leftrightarrow \operatorname{sen} x = \frac{\overline{BP}}{5} \Leftrightarrow \overline{BP} = 5\operatorname{sen} x$$

$$\cos x = \frac{\overline{OP}}{\overline{OB}} \Leftrightarrow \cos x = \frac{\overline{OP}}{5} \Leftrightarrow \overline{OP} = 5\cos x$$

Sabemos ainda que

- $\overline{AB} = 2\overline{OP} = 2 \times 5\cos x = 10\cos x$
- $\overline{BC} = 2\overline{BP} = 2 \times 5\operatorname{sen} x = 10\operatorname{sen} x$

Logo a área relvada (sombreada) é dada pela diferença da área da circunferência e do retângulo $[ABCD]$:

$$A = A_\circ - A_{[ABCD]} = \pi(\overline{OB})^2 - \overline{AB} \times \overline{BC} = \pi(5)^2 - 10\cos x \times 10\operatorname{sen} x =$$

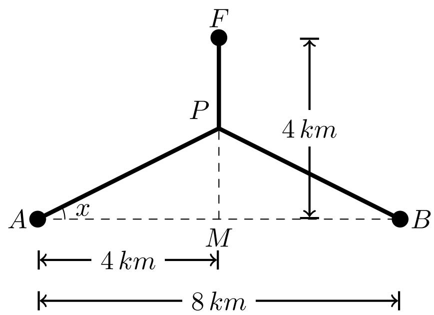
$$= 25\pi - 100\operatorname{sen} x.\cos x = 25\pi - 50 \times 2\operatorname{sen} x.\cos x = 25\pi - 50\operatorname{sen}(2x)$$

Logo, para cada valor de $x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ a área da zona relvada, em m^2, é dada por $g(x)$

Exame – 1998, 1.ª fase - 2.ª chamada (cód. 135)

131.

131.1. Como $\overline{AM} = \frac{\overline{AB}}{2} = \frac{8}{2} = 4$, e recorrendo à definição de cosseno e tangente, vem:



$$\cos x = \frac{\overline{AM}}{\overline{PA}} \Leftrightarrow \cos x = \frac{4}{\overline{PA}} \Leftrightarrow \overline{PA} = \frac{4}{\cos x}$$

$$\operatorname{tg} x = \frac{\overline{PM}}{\overline{AM}} \Leftrightarrow \operatorname{tg} x = \frac{\overline{PM}}{4} \Leftrightarrow \overline{PM} = 4\operatorname{tg} x$$

Como $\overline{FM} = \overline{FP} + \overline{PM}$ e $\overline{FM} = 4$, temos que:

$$\overline{FP} + \overline{PM} = 4 \Leftrightarrow \overline{FP} = 4 - \overline{PM} \Leftrightarrow \overline{FP} = 4 - 4\operatorname{tg} x$$

Assim, como $\overline{PA} = \overline{PB}$, temos que o comprimento total, C, é:

$$C = \overline{PA} + \overline{PB} + \overline{FP} = 2\overline{PA} + \overline{FP} = 2\left(\frac{4}{\cos x}\right) + 4 - 4\operatorname{tg} x = \frac{8}{\cos x} + 4 - 4 \times \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} =$$

$$= 4 + \frac{8}{\cos x} - \frac{4\operatorname{sen} x}{\cos x} = 4 + \frac{8 - 4\operatorname{sen} x}{\cos x}$$

Logo, para cada $x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$, o comprimento total da canalização é dado por $g(x)$

131.2.

$$g(0) = 4 + \frac{8 - 4\operatorname{sen} 0}{\cos 0} = 4 + \frac{8 - 4 \times 0}{1} = 4 + 8 = 12$$

Se o ângulo x tiver amplitude de 0 (zero) radianos, o comprimento da canalização é 12 km, o que pode ser observado na figura, porque com este valor do ângulo x, o comprimento é dado por $\overline{AB} + \overline{FM} = 8 + 4 = 12$, tendo a canalização a forma de um "T"invertido ($\perp$).

131.3. Para determinar o valor de x para o qual o comprimento da canalização é mínimo, começamos por determinar a expressão da derivada:

$$f'(x) = \left(4+\frac{8-4\operatorname{sen}x}{\cos x}\right)' = (4)'+\left(\frac{8-4\operatorname{sen}x}{\cos x}\right)' = 0+\frac{(8-4\operatorname{sen}x)'(\cos x)-(8-4\operatorname{sen}x)(\cos x)'}{\cos^2 x} =$$

$$= \frac{(0-4\cos x)(\cos x)-(8-4\operatorname{sen}x)(-\operatorname{sen}x)}{\cos^2 x} = \frac{-4\cos^2 x-(-8\operatorname{sen}x+4\operatorname{sen}^2 x)}{\cos^2 x} =$$

$$= \frac{-4\cos^2 x+8\operatorname{sen}x-4\operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x} = \frac{-4\left(\operatorname{sen}^2 x+\cos^2 x\right)+8\operatorname{sen}x}{\cos^2 x} = \frac{-4+8\operatorname{sen}x}{\cos^2 x}$$

Depois, calculando os zeros da derivada, vem:

$$f'(x)=0 \;\Leftrightarrow\; \frac{-4+8\operatorname{sen}x}{\cos^2 x}=0 \;\Leftrightarrow\; -4+8\operatorname{sen}x=0 \wedge \underbrace{\cos^2 x\neq 0}_{(\text{PV, } x\in\left]0,\frac{\pi}{4}\right[)} \;\Leftrightarrow\; 8\operatorname{sen}x=4 \;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\; \operatorname{sen}x=\frac{4}{8} \;\Leftrightarrow\; \operatorname{sen}x=\frac{1}{2} \;\Leftrightarrow\; \operatorname{sen}x=\operatorname{sen}\frac{\pi}{6} \;\Leftrightarrow\; x=\frac{\pi}{6}+2k\pi \vee x=\pi-\frac{\pi}{6}+2k\pi\,,k\in\mathbb{Z}$$

Como $x\in\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$, a única solução da equação é $x=\frac{\pi}{6}$, ou seja este é o único zero da derivada, pelo que podemos, agora, estudar a variação do sinal de f' para relacionar com a monotonia de f:

x	0		$\frac{\pi}{6}$		$\frac{\pi}{4}$
f'	−	−	0	+	+
f	Máx.	$\searrow$	min	$\nearrow$	Máx.

Pelo que podemos concluir que $x=\frac{\pi}{6}$ é o minimizante de f, ou seja é o valor de x para o qual o comprimento da canalização é mínimo.

Exame – 1988, 1.ª fase - 1.ª chamada (cód. 135)

132.

132.1.

$$g(x)=0 \;\Leftrightarrow\; \operatorname{sen}x+\operatorname{sen}(2x)=0 \;\Leftrightarrow\; \operatorname{sen}(2x)=-\operatorname{sen}x \;\Leftrightarrow\; \operatorname{sen}(2x)=\operatorname{sen}(-x) \;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\; 2x=-x+2k\pi \vee 2x=\pi-(-x)+2k\pi\,,k\in\mathbb{Z} \;\Leftrightarrow\; 3x=2k\pi \vee 2x=\pi+x+2k\pi\,,k\in\mathbb{Z} \;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\; x=\frac{2k\pi}{3} \vee x=\pi+2k\pi\,,k\in\mathbb{Z}$$

Como $x\in[0,\pi]$, os zeros da função obtêm-se para $k=0$ ou $k=1$, ou seja, o conjuntos dos zeros de g é $\left\{0,\frac{2\pi}{3},\pi\right\}$

132.2. Como o domínio de h é o conjunto $[0,\pi] \setminus \frac{\pi}{2}$ não existem assíntotas não verticais do gráfico de h; e as retas verticais de equações $x = 0$, $x = \frac{\pi}{2}$ e $x = \pi$ são as únicas retas que podem ser assíntotas do gráfico de h. Verificando cada uma das três hipóteses, vem:

- $\lim\limits_{x \to 0^+} h(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{g(x)}{\cos x} = \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{\operatorname{sen} x + \operatorname{sen}(2x)}{\cos x} = \dfrac{\operatorname{sen}(0^+) + \operatorname{sen}(2 \times 0^+)}{\cos 0^+} = \dfrac{0^+ + 0^+}{1} = 0$

  Logo, a reta $x = 0$ **não é assíntota** do gráfico de h

- $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}^-} h(x) = \lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}^-} \dfrac{g(x)}{\cos x} = \lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}^-} \dfrac{\operatorname{sen} x + \operatorname{sen}(2x)}{\cos x} = \dfrac{\operatorname{sen}\left(\dfrac{\pi}{2}^-\right) + \operatorname{sen}\left(2 \times \frac{\pi}{2}^-\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2}^-\right)} = \dfrac{1 + \operatorname{sen}(\pi^-)}{0^+} =$

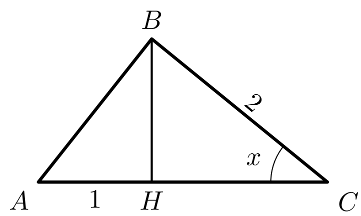
  $= \dfrac{1 + 0^+}{0^+} = \dfrac{1}{0^+} = +\infty$

  Pelo que, a reta $x = \dfrac{\pi}{2}$ **é uma assíntota** do gráfico de h

- $\lim\limits_{x \to \pi^-} h(x) = \lim\limits_{x \to \pi^-} \dfrac{g(x)}{\cos x} = \lim\limits_{x \to \pi^-} \dfrac{\operatorname{sen} x + \operatorname{sen}(2x)}{\cos x} = \dfrac{\operatorname{sen}(\pi^-) + \operatorname{sen}(2 \times \pi^-)}{\cos \pi^-} = \dfrac{0^+ + 0^-}{1} = 0$

  Logo, a reta $x = \pi$ **não é assíntota** do gráfico de h

132.3. Recorrendo às definições de seno e cosseno vem:



$$\operatorname{sen} x = \frac{\overline{BH}}{\overline{BC}} \Leftrightarrow \operatorname{sen} x = \frac{\overline{BH}}{2} \Leftrightarrow \overline{BH} = 2 \operatorname{sen} x$$

$$\cos x = \frac{\overline{CH}}{\overline{BC}} \Leftrightarrow \cos x = \frac{\overline{CH}}{2} \Leftrightarrow \overline{CH} = 2 \cos x$$

Como $\overline{AH} = 1$ e $\overline{AC} = \overline{AH} + \overline{CH}$, temos que:

$$\overline{AC} = \overline{AH} + \overline{CH} \Leftrightarrow \overline{AC} = 1 + \overline{CH} \Leftrightarrow \overline{AC} = 1 + 2\cos x$$

Logo a área do triângulo $[ABC]$ é:

$$A_{[ABC]} = \frac{\overline{AC} \times \overline{BH}}{2} = \frac{(1 + 2\cos x) \times 2 \operatorname{sen} x}{2} = \frac{2 \operatorname{sen} x + 4 \operatorname{sen} x \cos x}{2} = \operatorname{sen} x + 2 \operatorname{sen} x \cos x =$$

$$= \operatorname{sen} x + \operatorname{sen}(2x)$$

Ou seja, para cada valor de $x \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$, a área do triângulo $[ABC]$ é dada por $g(x)$

Exame – 1998, Prova modelo (cód. 135)