Escola Secundária de Paredes

Proposta de Resolução da Ficha Formativa

Matemática A

12.º Ano de Escolaridade | abril de 2021

Turma: 12ºJ

1. .

1.1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{f(x)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{2\sin\left(\frac{x}{4}\right)\cos\left(\frac{x}{4}\right)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sin\left(2\times\frac{x}{4}\right)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}=\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{2y}{\sin(y)}=$

$=2\times\dfrac{1}{\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{\sin(y)}{y}}=2\times\dfrac{1}{1}=2$

Fez-se a mudança de variável

$y=\dfrac{x}{2}\Leftrightarrow x=2y$

Se $x\to 0$, então, $y\to 0$

Aplicou-se o limite notável: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(x)}{x}=1$

Resposta: (A)

1.2. Ora,

$f(x)=2\sin\left(\frac{x}{4}\right)\cos\left(\frac{x}{4}\right)=\sin\left(2\times\frac{x}{4}\right)=\sin\left(\frac{x}{2}\right)$

Ponto de tangência: $T\left(\frac{\pi}{2};f\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)$

$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\sin\left(\dfrac{\frac{\pi}{2}}{2}\right)=\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

Logo, $T\left(\frac{\pi}{2};\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

Primeira derivada de f

$f'(x)=\left[\sin\left(\frac{x}{2}\right)\right]'=\left(\frac{x}{2}\right)'\times\cos\left(\frac{x}{2}\right)=\frac{1}{2}\cos\left(\frac{x}{2}\right)$

Declive da reta:

$m=f'\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{1}{2}\cos\left(\dfrac{\frac{\pi}{2}}{2}\right)=\frac{1}{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{2}}{4}$

Assim,

$t:y=\dfrac{\sqrt{2}}{4}x+b,\ b\in\mathbb{R}$

Como $T\left(\frac{\pi}{2};\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ é ponto da reta, vem,

$\dfrac{\sqrt{2}}{2}=\dfrac{\sqrt{2}}{4}\times\dfrac{\pi}{2}+b\Leftrightarrow b=\dfrac{\sqrt{2}}{2}-\dfrac{\sqrt{2}}{8}\pi$

Portanto, $t:y=\dfrac{\sqrt{2}}{4}x+\dfrac{\sqrt{2}}{2}-\dfrac{\sqrt{2}}{8}\pi$

2. $4 \in D_g$

A função g é contínua em $x = 4$, se existir $\lim\limits_{x\to 4} g(x)$, ou seja,

se $\lim\limits_{x\to 4^-} g(x) = \lim\limits_{x\to 4^+} g(x) = g(4)$

Ora,

$$\lim_{x\to 4^-} g(x) = \lim_{x\to 4^-} \frac{x-4}{e^{x-3}-e} =^{\left(\frac{0}{0}\right)} \lim_{x\to 4^-} \frac{x-4}{e\left(e^{x-4}-1\right)} = \frac{1}{e} \times \lim_{y\to 0^-} \frac{y}{e^y-1}$$
$$= \frac{1}{e} \times \frac{1}{\lim\limits_{y\to 0^-} \frac{e^y-1}{y}} = \frac{1}{e} \times \frac{1}{1} = \frac{1}{e}$$

Cálculos auxiliares

Fez-se a mudança de variável

$y = x - 4 \Leftrightarrow x = y + 4$

Aplicou-se o limite notável: $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x} = 1$

$$\lim_{x\to 4^+} g(x) = \lim_{x\to 4^+} \frac{4\sin(x-4)\cos(x-4)}{ex^2-4ex} =^{\left(\frac{0}{0}\right)} \lim_{x\to 4^+} \frac{2\sin(2x-8)}{ex\,(x-4)} = \frac{2}{e} \times \lim_{x\to 4^+} \frac{\sin(2x-8)}{x(x-4)} =$$
$$= \frac{2}{e} \times \lim_{y\to 0^+} \frac{\sin(2y)}{(y+4)y} = \frac{2}{e} \times \lim_{y\to 0^+} \frac{\sin(2y)}{y} \times \lim_{y\to 0^+} \frac{1}{y+4}$$
$$= \frac{2}{e} \times 2 \times \lim_{2y\to 0^+} \frac{\sin(2y)}{2y} \times \frac{1}{4} = \frac{4}{e} \times 1 \times \frac{1}{4} = \frac{1}{e}$$

Cálculos auxiliares

Fez-se a mudança de variável

$y = x - 4 \Leftrightarrow x = y + 4$

Aplicou-se o limite notável: $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$

Se $x \mapsto 4^+$, então, $y \mapsto 0^+$

$g(4) = e^{k+1}$

Ora, a função g é contínua em $x = 4$, se, $\lim\limits_{x\to 4^-} g(x) = \lim\limits_{x\to 4^+} g(x) = g(4)$

Então, deverá ter-se,

$e^{k+1} = \frac{1}{e} \Leftrightarrow e^{k+1} = e^{-1} \Leftrightarrow k + 1 = -1 \Leftrightarrow k = -2$

Portanto, a função g é contínua em $x = 4$, se $k = -2$

3. .

3.1. Domínio de f : $D_f = \left\{x \in \mathbb{R} : x^2 > 0\right\} = \{x \in \mathbb{R} : x \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

Primeira derivada de f

$$f'(x) = \left[2x - 1 + \ln(x^2)\right]' = 2 + \frac{\left(x^2\right)'}{x^2} = 2 + \frac{2x}{x^2} = 2 + \frac{2}{x} = \frac{2x+2}{x}$$

Zeros de $f'(x)$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{2x+2}{x} = 0 \Leftrightarrow 2x + 2 = 0 \wedge x \neq 0 \Leftrightarrow x = -1$$

Sinal de $f'(x)$

Numerador:

$2x + 2 > 0 \Leftrightarrow 2x > -2 \Leftrightarrow x > -1$

$2x + 2 < 0 \Leftrightarrow 2x < -2 \Leftrightarrow x < -1$

Quadro de sinais de $f'(x)$

x	$-\infty$	-1		0	$+\infty$
$2x+2$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
x	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	$n.d.$	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	-3	$\searrow$	$n.d.$	$\nearrow$

$f(-1) = 2 \times (-1) - 1 + \ln((-1)^2) = -3 + \ln(1) = -3 + 0 = -3$

A função f é crescente em $]-\infty; -1]$ e em $]0; +\infty[$

A função f é decrescente em $[-1; 0[$

3.2. A função f atinge o máximo relativo igual a -3, para $x = -1$

A abcissa do ponto A assinalado no gráfico de f é -1

Resposta: (A)

3.3. $g(x) \leq -2 \Leftrightarrow e^x - \frac{3}{e^x} \leq -2 \Leftrightarrow e^x - \frac{3}{e^x} + 2 \leq 0 \Leftrightarrow \frac{(e^x)^2 - 3 + 2e^x}{e^x} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{(e^x)^2 + 2e^x - 3}{e^x} \leq 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (e^x)^2 + 2e^x - 3 \leq 0$, visto que $e^x > 0, \forall x \in \mathbb{R}$

Fzendo a mudança de variável $y = e^x$, vem,

$y^2 + 2y - 3 \leq 0$

$\Leftrightarrow y \geq -3 \wedge y \leq 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow e^x \geq -3 \wedge e^x \leq 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ Condição universal $\wedge x \leq 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x \leq 0$

$C.S. = \mathbb{R}_0^-$

Cálculos auxiliares

$y^2 + 2y - 3 = 0 \Leftrightarrow y = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \times 1 \times (-3)}}{2 \times 1}$

$\Leftrightarrow y = \frac{-2 \pm \sqrt{16}}{2}$

$\Leftrightarrow y = -3 \vee y = 1$

4. Determinar as coordenadas do ponto A

$A(0; g(0))$

$g(0) = 2 + 3^0 = 2 + 1 = 3$

Logo, $A(0; 3)$

Determinar as coordenadas do ponto B

$B(x; 1)$

$f(x)=1 \Leftrightarrow \log_a(x-a)=1 \wedge x-a>0 \Leftrightarrow x-a=a \wedge x>a \Leftrightarrow x=2a \wedge x>a \Leftrightarrow x=2a$

Logo, $B(2a;1)$

Assim,

$\overline{OA}=3$

A medida de comprimento da altura do triângulo $[ABO]$ é $2a$

Portanto,

$$A_{[ABO]}=\frac{\overline{OA}\times 2a}{2}=\frac{3\times 2a}{2}=3a$$

Resposta: (B)

5. $-2\sin^3(x)+2\sin^2(x)\cos(x)+\sin(x)=\sin(x)\left(-2\sin^2(x)+2\sin(x)\cos(x)+1\right)=$

   $=\sin(x)\left(-2\sin^2(x)+2\sin(x)\cos(x)+\sin^2(x)+\cos^2(x)\right)=$

   $=\sin(x)\left(2\sin(x)\cos(x)+\cos^2(x)-\sin^2(x)\right)=$

   $=\sin(x)(\sin(2x)+\cos(2x))$

   Assim,

   $-2\sin^3(x)+2\sin^2(x)\cos(x)+\sin(x)=0 \Leftrightarrow \sin(x)(\sin(2x)+\cos(2x))=0 \Leftrightarrow$

   $\Leftrightarrow \sin(x)=0 \vee \sin(2x)+\cos(2x)=0 \Leftrightarrow \sin(x)=\sin(0) \vee \cos(2x)=-\sin(2x) \Leftrightarrow$

   $\Leftrightarrow \sin(x)=\sin(0) \vee \cos(2x)=\cos\left(\frac{\pi}{2}+2x\right) \Leftrightarrow$

   $\Leftrightarrow x=0+k2\pi \vee 2x=\frac{\pi}{2}+2x+k2\pi \vee 2x=-\frac{\pi}{2}-2x+k2\pi, k\in\mathbb{Z} \Leftrightarrow$

   $\Leftrightarrow x=k2\pi \vee 2x-2x=\frac{\pi}{2}+k2\pi \vee 2x+2x=-\frac{\pi}{2}+k2\pi, k\in\mathbb{Z} \Leftrightarrow$

   $\Leftrightarrow x=k2\pi \vee$ Equação impossível $\vee 4x=-\frac{\pi}{2}+k2\pi, k\in\mathbb{Z} \Leftrightarrow$

   $\Leftrightarrow x=k2\pi \vee x=-\frac{\pi}{8}+k\frac{\pi}{2}, k\in\mathbb{Z}$

6. Sabe-se que $\overline{AC}=4$
   No triângulo retângulo $[ABC]$

   $\sin(a)=\frac{\overline{BC}}{\overline{AC}} \Leftrightarrow \sin(a)=\frac{\overline{BC}}{4} \Leftrightarrow \overline{BC}=4\sin(a)$

   $\cos(a)=\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} \Leftrightarrow \cos(a)=\frac{\overline{AB}}{4} \Leftrightarrow \overline{AB}=4\cos(a)$

   Assim,

   $$A_{[ABC]}=\frac{\overline{BC}\times\overline{AB}}{2}=\frac{4\sin(a)\times 4\cos(a)}{2}=\frac{16\sin(a)\cos(a)}{2}=8\sin(a)\cos(a)=4\sin(2a)$$

No triângulo retângulo $[ACD]$

$\sin(b) = \dfrac{\overline{AD}}{\overline{AC}} \Leftrightarrow \sin(b) = \dfrac{\overline{AD}}{4} \Leftrightarrow \overline{AD} = 4\sin(b)$

$\cos(b) = \dfrac{\overline{CD}}{\overline{AC}} \Leftrightarrow \cos(b) = \dfrac{\overline{CD}}{4} \Leftrightarrow \overline{CD} = 4\cos(b)$

Assim,

$$A_{[ACD]} = \frac{\overline{AD} \times \overline{CD}}{2} = \frac{4\sin(b) \times 4\cos(b)}{2} = \frac{16\sin(b)\cos(b)}{2} = 8\sin(b)\cos(b) = 4\sin(2b)$$

Portanto, a expressão que dá a área do quadrilátero $[ABCD]$, em função de a e de b, é

$A_{[ABCD]} = 4\left(\sin(2a) + \sin(2b)\right)$

7. .

7.1. Ora,

$z_1^3 = \left(\sqrt[3]{2}e^{i\frac{\pi}{3}}\right)^3 = \left(\sqrt[3]{2}\right)^3 e^{i\frac{3\times\pi}{3}} = 2e^{i\pi} = -2$

$39 = 9 \times 4 + 3$

$i^{39} = i^{9\times 4+3} = i^3 = -i$

Assim,

$$\frac{\overline{a-2bi}}{i^{39}} = z_1^3 - 2\overline{z_2} \Leftrightarrow \frac{a+2bi}{-i} = -2 - 2\times(1+i) \Leftrightarrow \frac{(a+2bi)\times i}{-i\times i} = -2-2-2i \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \frac{ai+2bi^2}{-i^2} = -4-2i \Leftrightarrow \frac{ai-2b}{1} = -4-2i \Leftrightarrow -2b+ai = -4-2i \Leftrightarrow -2b = -4 \wedge a = -2 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow b = 2 \wedge a = -2$$

Resposta: $a = -2 \wedge b = 2$

7.2. Ora,

$z_2 = 1 - i \mapsto P(1;-1)$

$|z_2| = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$

Seja, $\theta = Arg(z_2)$

$\tan(\theta) = \dfrac{-1}{1} \wedge \theta \in 4^{\text{o}}\text{Q}$

$\tan(\theta) = -1 \wedge \theta \in 4^{\text{o}}\text{Q}$

Logo, $\theta = -\dfrac{\pi}{4}$

Portanto,

$z_2 = \sqrt{2}e^{i\left(-\frac{\pi}{4}\right)}$
$\overline{z_2} = \sqrt{2}e^{i\left(\frac{\pi}{4}\right)}$
$\overline{z_2}^2 = \left(\sqrt{2}e^{i\left(\frac{\pi}{4}\right)}\right)^2 = \left(\sqrt{2}\right)^2 e^{i\frac{2\times\pi}{4}} = 2e^{i\frac{\pi}{2}}$

Assim,

$z^4 - \overline{z_2}^2 = 0 \Leftrightarrow z^4 = \overline{z_2}^2 \Leftrightarrow z^4 = 2e^{i\frac{\pi}{2}} \Leftrightarrow z = \sqrt[4]{2e^{i\frac{\pi}{2}}} \Leftrightarrow z = \sqrt[4]{2}e^{i\left(\frac{\frac{\pi}{2}+k2\pi}{4}\right)}$, com $k \in \{0;1;2;3\} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow z = \sqrt[4]{2}e^{i\left(\frac{\pi}{8}+k\frac{\pi}{2}\right)}$, com $k \in \{0;1;2;3\}$

Atribuindo valores a k, vem,

$k = 0 \mapsto w_0 = \sqrt[4]{2}e^{i\frac{\pi}{8}}$

$k = 1 \mapsto w_1 = \sqrt[4]{2}e^{i\left(\frac{\pi}{8}+\frac{\pi}{2}\right)} = \sqrt[4]{2}e^{i\left(\frac{5\pi}{8}\right)}$

$k = 2 \mapsto w_2 = \sqrt[4]{2}e^{i\left(\frac{\pi}{8}+\frac{2\pi}{2}\right)} = \sqrt[4]{2}e^{i\left(\frac{9\pi}{8}\right)} = \sqrt[4]{2}e^{i\left(-\frac{7\pi}{8}\right)}$

$k = 3 \mapsto w_2 = \sqrt[4]{2}e^{i\left(\frac{\pi}{8}+\frac{3\pi}{2}\right)} = \sqrt[4]{2}e^{i\left(\frac{13\pi}{8}\right)} = \sqrt[4]{2}e^{i\left(-\frac{3\pi}{8}\right)}$

$C.S. = \left\{\sqrt[4]{2}e^{i\frac{\pi}{8}}; \sqrt[4]{2}e^{i\left(\frac{5\pi}{8}\right)}; \sqrt[4]{2}e^{i\left(-\frac{7\pi}{8}\right)}; \sqrt[4]{2}e^{i\left(-\frac{3\pi}{8}\right)}\right\}$

Geometricamente, os afixos das soluções da equação são vértices de um quadrado inscrito numa circunferência de centro na origem do plano D´Argand e de raio $\sqrt[4]{2}$

8. .

$z_1 = \cos(x) + i\sin(x) = e^{ix}$
$z_2 = \cos(y) + i\sin(y) = e^{iy}$

Então,

Assim,
$\frac{z_1}{z_2} = \frac{e^{i(x)}}{e^{i(y)}} = e^{i(x-y)} = \cos(x-y) + i\sin(x-y)$

Outro processo

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\cos(x)+i\sin(x)}{\cos(y)+i\sin(y)} = \frac{(\cos(x)+i\sin(x))\,(\cos(y)-i\sin(y))}{(\cos(y)+i\sin(y))\,(\cos(y)-i\sin(y))} =$$
$$= \frac{\cos(x)\cos(y) - i\cos(x)\sin(y) + i\sin(x)\cos(y) - i^2\sin(x)\sin(y)}{(\cos(y))^2 - (i\sin(y))^2} =$$
$$= \frac{\cos(x)\cos(y) + \sin(x)\sin(y) + i\,(\sin(x)\cos(y) - \cos(x)\sin(y))}{\cos^2(y)+\sin^2(y)} =$$
$$= \frac{\cos(x-y) + i\sin(x-y)}{1} =$$
$$= \cos(x-y) + i\sin(x-y)$$