Exercícios de aplicação **(págs. 93 a 103)**

1. Sejam:

A – conjunto dos alunos que estudam Espanhol.

B – conjunto dos alunos que estudam Francês.

C – conjunto dos alunos que estudam Inglês.

Número de alunos que estudam apenas Espanhol e Francês: 24 – 10 = 14

Número de alunos que estudam apenas Francês e Inglês: 28 – 10 = 18

Número de alunos que estudam apenas Espanhol e Inglês: 26 – 10 = 16

Número de alunos que estudam apenas Espanhol: 105 – 14 – 10 – 16 = 65

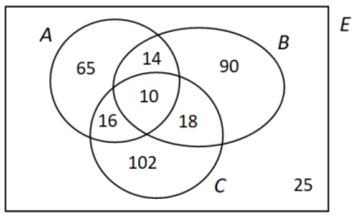
Número de alunos que estudam apenas Francês: 132 – 14 – 10 – 18 = 90

Número de alunos que estudam apenas Inglês: 146 – 16 – 10 – 18 = 102

Número de alunos que não estudam Espanhol, nem Francês, nem Inglês:

340 – 65 – 14 – 90 – 16 – 10 – 18 – 102 = 25

Assim, temos:



1.1. P(“estudar apenas Espanhol”) = $\frac{65}{340} = \frac{13}{68}$

1.2. P(“estudar apenas Francês ou Inglês”) = $\frac{14+90+16+10+18+102}{340} = \frac{250}{340} = \frac{25}{34}$

1.3. P(“não estudar Espanhol, nem Francês, nem Inglês”) = $\frac{25}{340} = \frac{5}{68}$

2. Número de casos possíveis: $52 \times 51 = 2652$

2.1. *A* – sair ás

$\underline{A}\ \underline{\overline{A}}$ ou $\underline{\overline{A}}\ \underline{A}$

$4 \times 48 \ + \ 48 \times 4 \ = 384$ (número de casos favoráveis)

P(“sair um e um só ás”) = $\frac{4 \times 48 + 48 \times 4}{2652} = \frac{384}{2652} = \frac{32}{221}$

2.2. *D* – sair dama

$\underline{D}\ \underline{D}$

$4 \times 3 = 12$ (número de casos favoráveis)

P(“saírem duas damas”) = $\frac{4 \times 3}{2652} = \frac{12}{2652} = \frac{1}{221}$

2.3. *F* – sair figura

$\underline{\overline{F}}\ \underline{\overline{F}}$

$40 \times 39 = 1640$ (número de casos favoráveis)

P("não sair nenhuma figura") = $\frac{40 \times 39}{2652} = \frac{1560}{2652} = \frac{10}{17}$

2.4. *F* – sair figura

$\underline{F}\ \underline{\overline{F}}$ ou $\underline{\overline{F}}\ \underline{F}$ ou $\underline{\overline{F}}\ \underline{\overline{F}}$

$12 \times 40 + 40 \times 12 + 40 \times 39 = 2520$ (número de casos favoráveis)

P("não sair nenhuma figura") = $\frac{12 \times 40 + 40 \times 12 + 40 \times 39}{2652} = \frac{2520}{2652} = \frac{210}{221}$

3. Número de casos possíveis: $52 \times 52 = 2704$

3.1. *A* – sair ás

$\underline{A}\ \underline{\overline{A}}$ ou $\underline{\overline{A}}\ \underline{A}$

$4 \times 48 + 48 \times 4 = 384$ (número de casos favoráveis)

P("sair um e um só ás") = $\frac{4 \times 48 + 48 \times 4}{2704} = \frac{384}{2704} = \frac{24}{169}$

3.2. *D* – sair dama

$\underline{D}\ \underline{D}$

$4 \times 4 = 16$ (número de casos favoráveis)

P("saírem duas damas") = $\frac{4 \times 4}{2704} = \frac{16}{2704} = \frac{1}{169}$

3.3. *F* – sair figura

$\underline{\overline{F}}\ \underline{\overline{F}}$

$40 \times 40 = 1600$ (número de casos favoráveis)

P("não sair nenhuma figura") = $\frac{40 \times 40}{2704} =$

$= \frac{1600}{2704} =$

$= \frac{100}{169}$

3.4. *F* – sair figura

$\underline{F}\ \underline{\overline{F}}$ ou $\underline{\overline{F}}\ \underline{F}$ ou $\underline{\overline{F}}\ \underline{\overline{F}}$

$12 \times 40 + 40 \times 12 + 40 \times 40 = 2560$ (número de casos favoráveis)

P("não sair nenhuma figura") = $\frac{12 \times 40 + 40 \times 12 + 40 \times 40}{2704} =$

$= \frac{2560}{2704} =$

$= \frac{160}{169}$

4.

4.1. $P(A \cup B) + P(\bar{A}) + P(\bar{B}) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) + P(\bar{A}) + P(\bar{B}) =$

$= P(A) + P(\bar{A}) + P(B) + P(\bar{B}) - P(A \cap B) =$

$= 1 + 1 - P(A \cap B) =$

$= 1 - P(\overline{A \cap B}) =$

$= 1 - P(\bar{A} \cup \bar{B})$

4.2. $P(A \mid B) \leq 1 + \frac{P(A)}{P(B)} \Leftrightarrow \frac{P(A \cap B)}{P(B)} - \frac{P(A)}{P(B)} \leq 1$

$\Leftrightarrow P(A \cap B) - P(A) \leq P(B)$

$\Leftrightarrow P(B) \leq P(B)$

5.

5.1. Sabemos que:

$P(\bar{A} \cap \bar{B})$ = 0,4 $\Leftrightarrow P(\overline{A \cup B})$ = 0,4

$\Leftrightarrow$ 1 – $P(A \cup B)$ = 0,4

$\Leftrightarrow P(A \cup B)$ = 1 – 0,4

$\Leftrightarrow P(A \cup B)$ = 0,6

Como $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$, vem que:

0,6 = $P(A)$ + 0,5 – $P(A \cap B) \Leftrightarrow P(A) - P(A \cap B)$ = 0,6 – 0,5

$\Leftrightarrow P(A) - P(A \cap B)$ = 0,1

5.2. Sabemos que:

$$P(A \cap B) = \frac{0{,}16}{P(\bar{A} \cup \bar{B})} \Leftrightarrow P(A \cap B) = \frac{0{,}16}{P(\overline{A \cap B})}$$

$$\Leftrightarrow P(A \cap B)[1 - P(A \cap B)] = 0{,}16$$

Como $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$, vem que:

$$P(A \cap B) = P(A) + 0{,}7 - \frac{9}{4}P(A) \Leftrightarrow P(A \cap B) = 0{,}7 - \frac{5}{4}P(A)$$

Assim:

$$P(A \cap B)[1 - P(A \cap B)] = 0{,}16 \Leftrightarrow \left(0{,}7 - \tfrac{5}{4}P(A)\right)\left[1 - \left(0{,}7 - \tfrac{5}{4}P(A)\right)\right] = 0{,}16$$

$$\Leftrightarrow \left(0{,}7 - \frac{5}{4}P(A)\right)\left(0{,}3 + \frac{5}{4}P(A)\right) = 0{,}16$$

$$\Leftrightarrow \left(\tfrac{7}{10} - \tfrac{5}{4}P(A)\right)\left(\tfrac{3}{10} + \tfrac{5}{4}P(A)\right) = \tfrac{16}{100}$$

$$\Leftrightarrow \tfrac{21}{100} + \tfrac{35}{40}P(A) - \tfrac{15}{40}P(A) - \tfrac{25}{16}[P(A)]^2 = \tfrac{16}{100}$$

$$\Leftrightarrow -\tfrac{25}{16}[P(A)]^2 + \tfrac{20}{40}P(A) + \tfrac{5}{100} = 0$$

$$\Leftrightarrow -\frac{25}{16}[P(A)]^2 + \frac{1}{2}P(A) + \frac{1}{20} = 0$$

$$\Leftrightarrow -125[P(A)]^2 + 40P(A) + 4 = 0$$

Cálculo auxiliar

Seja $x = P(A)$. Temos:

$$-125x^2 + 40x + 4 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-40 \pm \sqrt{40^2 - 4\times(-125)\times 4}}{2\times(-125)} \Leftrightarrow x = \frac{-40 \pm \sqrt{1600+2000}}{-250}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-40 \pm \sqrt{3600}}{-250}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-40 \pm 60}{-250}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{20}{-250} \vee x = \frac{-100}{-250}$$

$$\Leftrightarrow x = -0{,}08 \vee x = 0{,}4$$

Como $0 \leq P(A) \leq 1$, podemos concluir que $P(A) = 0{,}4$.

6.

6.1. $P(B) \times P(A|B) + \left(1 - P(\bar{A}|\bar{B})\right)\left(1 - P(B)\right) = P(B) \times \frac{P(A \cap B)}{P(B)} + \left(1 - \frac{P(\bar{A}\cap\bar{B})}{P(\bar{B})}\right) \times P(\bar{B}) =$

$$= P(A \cap B) + P(\bar{B}) - P(\overline{A \cup B}) =$$

$$= P(A \cap B) + 1 - P(B) - (1 - P(A \cup B)) =$$

$$= P(A \cap B) + 1 - P(B) - (1 - P(A \cup B)) =$$

$$= P(A \cap B) + 1 - P(B) - 1 + P(A \cup B) =$$

$$= P(A \cap B) - P(B) + P(A) + P(B) - P(A \cap B) =$$

$$= P(A)$$

6.2. Sejam:

A: "O convidado é natural da cidade do Porto".

B: "O convidado é do sexo masculino".

Tem-se que:

- $P(B) = 0{,}6$
- $P(A|B) = 0{,}3$
- $P(\bar{A}|\bar{B}) = \frac{1}{5} = 0{,}2$

Substituindo na igualdade 6.1:

$$0{,}6 \times 0{,}3 + (1 - 0{,}2)(1 - 0{,}6) = P(A) \Leftrightarrow 0{,}18 + 0{,}8 \times 0{,}4 = P(A)$$

$$\Leftrightarrow P(A) = 0{,}18 + 0{,}32$$

$$\Leftrightarrow P(A) = 0{,}5$$

Logo, a probabilidade de ter sido escolhida uma pessoa natural da cidade do Porto é 50%.

7. Sejam:

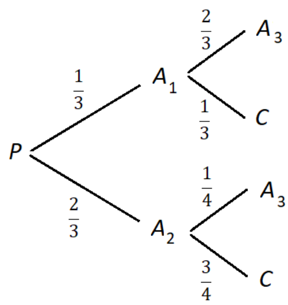
A_1: "Os montanhistas passaram a noite no abrigo A_1".

A_2: "Os montanhistas passaram a noite no abrigo A_2".

A_3: "Os montanhistas passaram a noite no abrigo A_3".

C: "Os montanhistas subiram diretamente ao cume".

Utilizando um diagrama em árvore, temos:



7.1. $P(A_3)=\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}+\frac{2}{3}\times\frac{1}{4}=$

$=\frac{2}{9}+\frac{1}{6}=$

$=\frac{7}{18}$

7.2. $P(A_2|C)=\frac{P(A_2\cap C)}{P(C)}=$

$=\frac{\frac{2}{3}\times\frac{3}{4}}{\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}+\frac{2}{3}\times\frac{1}{4}}=$

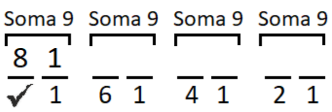
$=\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{9}+\frac{1}{2}}=$

$=\frac{1}{2}\div\frac{11}{18}=$

$=\frac{9}{11}$

8.

8.1.



A face simétrica à face numerada com o número 8 tem de ficar numerada com o número 1.

As restantes seis faces formam três pares, em que uma das faces do par é numerada aleatoriamente e a outra face do par é numerada com o único número cuja soma com o anterior é 9. Assim, existem 6 × 4 × 2 = 48 maneiras de numerar as restantes sete faces do octaedro.

8.2. O número de casos possíveis é o número de maneiras de escolher três vértices distintos, de entre os seis vértices do octaedro regular, ou seja, ${}^{6}C_3$.

Para que os três vértices escolhidos definam um plano perpendicular ao plano xOz, são três dos quatro vértices pertencentes ao plano ABC ou três dos quatro vértices pertencentes ao plano EBF. Assim, o número de casos favoráveis é ${}^{4}C_3 + {}^{4}C_3$.

De acordo com a regra de Laplace, a probabilidade de um acontecimento é dada pelo quociente entre o número de casos favoráveis e o número de casos possíveis, quando estes são equiprováveis e em número finito. Logo, a probabilidade pedida é $P = \frac{{}^{4}C_3 + {}^{4}C_3}{{}^{6}C_3} = \frac{2 \times {}^{4}C_3}{{}^{6}C_3}$.

9.

9.1. 1 – *P*(nenhum dos gémeos ser escolhido) $= 1 - \frac{{}^{15}C_3 \times {}^{11}C_3}{{}^{16}C_3 \times {}^{12}C_3} =$

$$= 1 - \frac{455 \times 165}{560 \times 220} =$$

$$= 1 - \frac{75\,075}{123\,200} =$$

$$= \frac{48\,125}{123\,200} =$$

$$= \frac{25}{64}$$

9.2. $\underline{\ 9\ }\ \underline{\ 1\ }\ \underline{\quad}\ \underline{\quad}\ \underline{\quad}\ \underline{\quad}\ \underline{\quad}\ \underline{\quad}\ \underline{\quad}$

${}^{7}C_2 \times 9^5 = 1\,240\,029$

Exercícios propostos (págs. 104 a 120)

Itens de seleção (págs. 104 a 108)

1. Se A e B são acontecimentos contrários, $P(A \cap B) = \emptyset$ e $P(A \cup B) = E$.

Como $P(A \cap B) = \emptyset$, A e B são acontecimentos incompatíveis.

Opção (C)

2. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Assim:

$$\frac{7}{12} = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - P(A \cap B) \Leftrightarrow P(A \cap B) = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{7}{12}$$

$$\Leftrightarrow P(A \cap B) = \frac{4+3-7}{12}$$

$$\Leftrightarrow P(A \cap B) = 0$$

Logo, A e B são incompatíveis.

Opção (B)

3. Número de casos possíveis: 7 + 3 = 10

Número de casos favoráveis: 7

Logo, $P = \frac{7}{10}$.

Opção (A)

4. Organizando a informação numa tabela, temos:

	Masculino	**Feminino**	**Total**
Com açúcar	15	35	50
Sem açúcar	5	25	30
Total	20	60	80

Assim, $P = \frac{35}{80} = \frac{7}{16}$.

Opção (A)

5. A probabilidade de o 1º semáforo não estar vermelho é 1 – 0,3 = 0,7.

A probabilidade de o 2º semáforo não estar vermelho é 1 – 0,4 = 0,6.

Assim, a probabilidade pedida é $P = 0{,}7 \times 0{,}6 = 0{,}42$.

Opção (D)

6. Número de casos possíveis: ${}^{40}C_6$

O número de maneiras de escolher exatamente duas cartas de ouros e a dama de copas é: ${}^{10}C_2 \times {}^{1}C_1 \times {}^{29}C_3$

Logo, a probabilidade pedida é $P = \frac{{}^{10}C_2 \times {}^{1}C_1 \times {}^{29}C_3}{{}^{40}C_6} = \frac{{}^{10}C_2 \times {}^{29}C_3}{{}^{40}C_6}$.

Opção (D)

7. Número de casos possíveis: ${}^{5}C_1 \times {}^{5}C_1 = 5 \times 5 = 25$

Número de casos favoráveis: 5

Logo, $P = \frac{5}{25} = \frac{1}{5}$.

Opção (A)

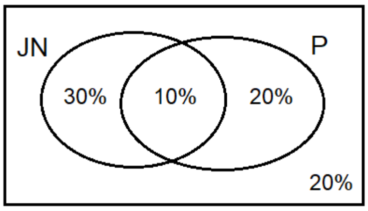
8. Número de casos possíveis: ${}^{6}C_2$

Número de casos favoráveis: 12 (arestas do octaedro)

Logo, $P = \frac{12}{{}^{6}C_2} = \frac{12}{15} = \frac{4}{5}$.

Opção (B)

9.



30% + 10% + 20% = 60%

Assim, a probabilidade de comprar pelo menos um dos jornais é 60% = 0,6 = $\frac{3}{5}$.

Opção (C)

10. Seja *X*: "as calças são de criança" e *B*: "as calças são do modelo B".

O número total de calças é 600 (125 + 40 + 150 + 60 + 145 + 80 = 600) e o número de calças do modelo B é 210 (150 + 60 = 210). Assim, $P(X \mid B) = \frac{P(X \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{60}{600}}{\frac{210}{600}} = \frac{60}{210} = \frac{2}{7}$.

Opção (B)

11. Sabemos que $P(C \cup D) = P(C) + P(D) - P(C \cap D)$.

$P(C \cup D) = 0{,}2 + 0{,}6 - P(C \cap D) \Leftrightarrow P(C \cup D) = 0{,}8 - P(C \cap D)$

Como $0 \leq P(C \cap D) \leq 0{,}2$, temos $0 \geq -P(C \cap D) \geq -0{,}2 \Leftrightarrow 0{,}8 \geq 0{,}8 - P(C \cap D) \geq 0{,}6$.

Logo, $0{,}6 \leq P(C \cup D) \leq 0{,}8$.

Opção (C)

12. $P(\bar{B}) = 1 - P(B)$

Como $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$, temos:

$0{,}6 = 2P(B) + P(B) - 0{,}2 \Leftrightarrow 3P(B) = 0{,}6 + 0{,}2 \Leftrightarrow 3P(B) = 0{,}8$

$\Leftrightarrow 3P(B) = \frac{8}{10}$

$\Leftrightarrow P(B) = \frac{8}{30}$

$\Leftrightarrow P(B) = \frac{4}{15}$

Assim, $P(\bar{B}) = 1 - \frac{4}{15} = \frac{11}{15}$.

Opção (C)

13. $P(\bar{A} \mid B)$ é a probabilidade de não sair ficha triangular, sabendo que saiu ficha com um número menor do que 6. Como saiu um número menor do que 6, há duas fichas quadradas (números 2 e 4) e três fichas triangulares (números 1, 3 e 5). Assim, a probabilidade de não sair ficha triangular é $\frac{2}{5}$.

Opção (B)

14. $P(\bar{A} \cap (A \cup B) = P\big((\bar{A} \cap A) \cup (\bar{A} \cap B)\big) =$

$= P(\emptyset \cup (\bar{A} \cap B)) =$

$= P(\bar{A} \cap B) =$

$= P(B) - P(A \cap B)$

Como $B \subset A$, $P(A \cap B) = P(B)$.

Logo, $P(B) - P(A \cap B) = P(B) - P(B) = 0$.

Opção (C)

15. Organizando a informação numa tabela, temos:

+	1	2	3	4
1	2	3	<u>4</u>	5
2	3	<u>4</u>	5	6
3	<u>4</u>	5	6	7
4	5	6	7	<u>8</u>
5	6	7	<u>8</u>	9
6	7	<u>8</u>	9	10

Assim, $P(A|\,B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{3}{24}}{\frac{6}{24}} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.

Opção (B)

16. Sabemos que $P(\text{rapaz}) = \frac{1}{2}P(\text{rapariga})$.

Como $P(\text{rapaz}) + P(\text{rapariga}) = 1$, temos:

$\frac{1}{2}P(\text{rapariga}) + P(\text{rapariga}) = 1 \Leftrightarrow \frac{3}{2}P(\text{rapariga}) = 1 \Leftrightarrow P(\text{rapariga}) = \frac{2}{3}$

Assim, $P(\text{rapaz}) = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$ e $P(\text{dois rapazes}) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{9}$.

Opção (A)

17. Sabemos que:

- $P(\bar{A}) = \frac{3}{4} \Leftrightarrow 1 - P(A) = \frac{3}{4} \Leftrightarrow P(A) = 1 - \frac{3}{4}$

  $\Leftrightarrow P(A) = \frac{1}{4}$

- $P(\bar{A} \cup \bar{B}) = \frac{5}{6} \Leftrightarrow P(\overline{A \cap B}) = \frac{5}{6} \Leftrightarrow 1 - P(A \cap B) = \frac{5}{6}$

  $\Leftrightarrow P(A \cap B) = 1 - \frac{5}{6}$

  $\Leftrightarrow P(A \cap B) = \frac{1}{6}$

- A e B são acontecimentos independentes, ou seja, $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$.

  Assim:

  $\frac{1}{6} = \frac{1}{4} \times P(B) \Leftrightarrow \frac{1}{6} = \frac{1}{4} \times P(B)$

  $\Leftrightarrow P(B) = \frac{4}{6}$

  $\Leftrightarrow P(B) = \frac{2}{3}$

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \Leftrightarrow P(A \cup B) = \frac{1}{4} + \frac{2}{3} - \frac{1}{6}$

$\Leftrightarrow P(A \cup B) = \frac{3+8-2}{12}$

$\Leftrightarrow P(A \cup B) = \frac{9}{12}$

$\Leftrightarrow P(A \cup B) = \frac{3}{4}$

Opção (C)

18. Número de passageiros que não validaram o bilhete: $\frac{1}{8} \times 200 = \frac{200}{8} = 25$

Número de casos possíveis: ${}^{200}C_8$

Número de casos favoráveis: ${}^{25}C_1 \times {}^{175}C_7$

Logo, $P = \frac{{}^{25}C_1 \times {}^{175}C_7}{{}^{200}C_8}$.

Opção (B)

19. Número de casos possíveis: $10^4 = 10\,000$

Número de casos favoráveis: $9 \times 4 = 40$

Logo, $P = \frac{36}{10\,000} = 0{,}0036$.

Opção (A)

20. Número de casos possíveis: ${}^{6}C_2$

Número de casos favoráveis: 12 (número de arestas do octaedro)

Logo, $P = \frac{12}{15} = \frac{4}{5}$.

Opção (C)

21. Número de casos possíveis: ${}^{8}C_2$

Número de casos favoráveis: ${}^{8}C_2$ (quaisquer dois vértices escolhidos pertencem a faces opostas)

Logo, $P = \frac{{}^{8}C_2}{{}^{8}C_2} = 1$.

Opção (B)

22. A superfície esférica de equação $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ tem centro (0, 0, 0) e raio 2.

Assim, os pontos de interseção da circunferência com os eixos coordenados são (–2, 0, 0), (2, 0, 0), (0, –2, 0), (0, 2, 0), (0, 0, –2) e (0, 0, 2).

O número de casos possíveis é ${}^6C_3$.

Um plano paralelo à reta definida por $x = -1 \wedge z = -1$ é um plano definido por três dos quatro pontos pertencentes a xOy ou por três dos quatro pontos pertencentes a yOz.

Assim, o número de casos favoráveis é ${}^4C_3 + {}^4C_3$.

Logo, $P = \frac{{}^4C_3 + {}^4C_3}{{}^6C_3} = \frac{4+4}{20} = \frac{8}{20} = \frac{2}{5}$.

Opção (B)

23. Número de casos possíveis: ${}^6C_3$

Um plano perpendicular ao plano de equação $z = 5$ é o plano *ABD* ou o plano *AEC*.

Assim, o número de casos favoráveis é ${}^4C_3 + {}^4C_3$. Logo, $P = \frac{{}^4C_3 + {}^4C_3}{{}^6C_3} = \frac{4+4}{20} = \frac{8}{20} = \frac{2}{5}$.

Opção (C)

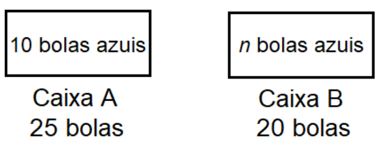
24. Como o penúltimo elemento da linha é 41, temos *n* = 41. Esta linha tem 42 elementos.

Assim, o número de casos possíveis é ${}^{42}C_2$ e o número de casos favoráveis é 21 (42 : 2 = 21).

Logo, $P = \frac{21}{{}^{42}C_2}$.

Opção (D)

25.



P(pelo menos uma bola não é azul) = 0,7 ⇔ 1 – *P*(saírem duas bolas azuis) = 0,7

⇔ *P*(saírem duas bolas azuis) = 1 – 0,7

⇔ *P*(saírem duas bolas azuis) = 0,3

Assim:

$$\frac{10}{25} \times \frac{n}{20} = 0{,}3 \Leftrightarrow \frac{10n}{500} = \frac{3}{10}$$

$$\Leftrightarrow \frac{n}{50} = \frac{3}{10}$$

$$\Leftrightarrow n = \frac{150}{10}$$

$$\Leftrightarrow n = 15$$

Opção (C)

26. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$\frac{19}{24} = P(A) + P(B) - \frac{1}{8} \Leftrightarrow P(A) + P(B) = \frac{19}{24} + \frac{1}{8}$

$\Leftrightarrow P(A) + P(B) = \frac{22}{24}$

$\Leftrightarrow P(A) + P(B) = \frac{11}{12}$

Como *A* e *B* são acontecimentos independentes, então $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$.

Assim:

- $P(A) \times P(B) = \frac{1}{8}$
- $P(A) = \frac{11}{12} - P(B)$

Então:

$\left[\frac{11}{12} - P(B)\right] \times P(B) = \frac{1}{8} \Leftrightarrow \frac{11}{12} \times P(B) - [P(B)]^2 = \frac{1}{8}$

$\Leftrightarrow 22P(B) - 24[P(B)]^2 = 3$

$\Leftrightarrow 24[P(B)]^2 - 22P(B) + 3 = 0$

Cálculo auxiliar

Seja $x = P(B)$. Temos:

$24x^2 - 22x + 3 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{22 \pm \sqrt{(-22)^2 - 4 \times 24 \times 3}}{2 \times 24}$

$\Leftrightarrow x = \frac{22 \pm \sqrt{484 - 288}}{48}$

$\Leftrightarrow x = \frac{22 \pm \sqrt{196}}{48}$

$\Leftrightarrow x = \frac{22 \pm 14}{48}$

$\Leftrightarrow x = \frac{8}{48} \vee x = \frac{36}{48}$

$\Leftrightarrow x = \frac{1}{6} \vee x = \frac{3}{4}$

$\Leftrightarrow P(B) = \frac{1}{6} \quad \vee \; P(B) = \frac{3}{4}$

Como $P(B) \geq P(A \cap B)$, então $P(B) = \frac{1}{6}$. Assim, $P(A) = \frac{11}{12} - \frac{1}{6} = \frac{9}{12} = \frac{3}{4}$.

Opção (B)

27. Seja A um acontecimento impossível e B um acontecimento qualquer.

Se *A* e *B* são acontecimentos independentes, então$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$.

Como A é um acontecimento impossível, então $P(A) = 0$.

Assim, qualquer que seja o acontecimento B, $P(A) \times P(B) = 0$.

Por outro lado, sendo A um acontecimento impossível, $A \cap B = \emptyset$ e, por isso, $P(A \cap B) = 0$.

Podemos, então, concluir que o acontecimento impossível é independente de qualquer outro.

Opção (D)

LeYa EDUCAÇÃO Daniela Raposo e Luzia Gomes

28. Número de casos possíveis: ${}^{10}C_2$

Para que os dois vértices escolhidos definam uma reta perpendicular ao eixo Oz, são dois vértices pertencentes ao plano ABC ou dois vértices pertencentes ao plano GHI.

Assim, o número de casos favoráveis é ${}^{5}C_2 + {}^{5}C_2$.

Logo, $P = \frac{{}^{5}C_2 + {}^{5}C_2}{{}^{10}C_2} = \frac{10+10}{45} = \frac{20}{45} = \frac{4}{9}$.

Opção (A)

29. A superfície esférica de equação $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ tem centro (0, 0, 0) e raio 1.

Assim, os pontos de interseção da circunferência com os eixos coordenados são (–1, 0, 0), (1, 0, 0), (0, –1, 0), (0, 1, 0), (0, 0, –1) e (0, 0, 1).

O número de casos possíveis é ${}^{6}C_3$.

Escolhendo três destes pontos, há oito maneiras de eles definirem triângulos equiláteros.

Assim, a probabilidade de o triângulo definido pelos três pontos não ser equilátero é:

$1 - \frac{8}{{}^{6}C_3} = 1 - \frac{8}{20} = \frac{12}{20} = \frac{3}{5}$

Opção (D)

Itens de construção **(págs. 109 a 120)**

1. $P(\bar{A}) = \frac{5}{8} \Leftrightarrow 1 - P(A) = \frac{5}{8} \Leftrightarrow P(A) = 1 - \frac{5}{8}$

$$\Leftrightarrow P(A) = \frac{3}{8}$$

1.1. Sabe-se que $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

Assim:

$$\frac{7}{8} = \frac{3}{8} + P(B) - \frac{1}{4} \Leftrightarrow P(B) = \frac{7}{8} - \frac{3}{8} + \frac{1}{4}$$

$$\Leftrightarrow P(B) = \frac{7-3+2}{8}$$

$$\Leftrightarrow P(B) = \frac{6}{8}$$

$$\Leftrightarrow P(B) = \frac{3}{4}$$

1.2. Sabe-se que $P(A \cap \bar{B}) = P(A) - P(A \cap B)$.

Assim, $P(A \cap \bar{B}) = \frac{3}{8} - \frac{1}{4} = \frac{3-2}{8} = \frac{1}{8}$.

1.3. $P(\bar{B}|A) = \frac{P(\bar{B} \cap A)}{P(A)}$

Assim, $P(\bar{B}|A) = \frac{\frac{1}{8}}{\frac{3}{8}} = \frac{1}{3}$.

LeYa EDUCAÇÃO Daniela Raposo e Luzia Gomes

2. $P(\bar{A}) = 0{,}6 \Leftrightarrow 1 - P(A) = 0{,}6$

$\Leftrightarrow P(A) = 1 - 0{,}6$

$\Leftrightarrow P(A) = 0{,}4$

$P(\overline{A \cup B}) = 0{,}4 \Leftrightarrow 1 - P(A \cup B) = 0{,}4$

$\Leftrightarrow P(A \cup B) = 1 - 0{,}4$

$\Leftrightarrow P(A \cup B) = 0{,}6$

2.1.

a) Sabe-se que $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

Assim:

$0{,}6 = 0{,}4 + 0{,}3 - P(A \cap B) \Leftrightarrow P(A \cap B) = 0{,}4 + 0{,}3 - 0{,}6$

$\Leftrightarrow P(A \cap B) = 0{,}1$

b) $P(B|A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)}$

Assim, $P(B|A) = \frac{0{,}1}{0{,}4} = 0{,}25$.

c) Sabe-se que $P(A \cap \bar{B}) = P(A) - P(A \cap B)$.

Assim, $P(A \cap \bar{B}) = 0{,}4 - 0{,}1 = 0{,}3$.

2.2. Dois acontecimentos A e B são independentes se $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$.

$P(A \cap B) = 0{,}1$

$P(A) \times P(B) = 0{,}4 \times 0{,}3 = 0{,}12$

Assim, $P(A \cap B) \neq P(A) \times P(B)$ e, por isso, os acontecimentos A e B não são independentes.

2.3. Dois acontecimentos A e B são incompatíveis se $A \cap B = \emptyset$, ou seja, se $P(A \cap B) = 0$.

Sabe-se que $P(\bar{A} \cap \bar{B}) = P(\overline{A \cup B}) = 0{,}4$.

Assim, $P(\bar{A} \cap \bar{B}) \neq 0$ e, por isso, $\bar{A}$ e $\bar{B}$ não são incompatíveis.

3.

3.1. $P(A \backslash B) - P(B \backslash A) = P(B) - P(A \cap B) - [P(A) - P(A \cap B)] =$

$= P(B) - P(A \cap B) - P(A) + P(A \cap B) =$

$= P(B) - P(A)$

3.2. $P(A \cap B) - P(\bar{A} \cap \bar{B}) = P(A \cap B) - P(\overline{A \cup B}) =$

$= P(A \cap B) - [1 - P(A \cup B)] =$

$= P(A \cap B) - 1 + P(A \cup B) =$

$= P(A \cap B) - 1 + P(A) + P(B) - P(A \cap B) =$

$= P(A) - 1 + P(B) =$

$= P(A) - [1 - P(B)] =$

$= P(A) - P(\bar{B})$

3.3. $P(\bar{A} \cup \bar{B}) + P(B) = P(\overline{A \cap B}) + P(B) =$

$= 1 - P(A \cap B) + P(B) =$

$= 1 - [P(A) + P(B) - P(A \cup B)] + P(B) =$

$= 1 - P(A) - P(B) + P(A \cup B) + P(B) =$

$= P(\bar{A}) + P(A \cup B)$

3.4. $2P(\bar{A}) - P(B) - P(\bar{A} \cup \bar{B}) = 2[1 - P(A)] - P(B) - P(\overline{A \cap B}) =$

$= 2 - 2P(A) - P(B) - [1 - P(A \cap B)] =$

$= 2 - 2P(A) - P(B) - 1 + P(A \cap B) =$

$= 1 - P(A) - P(A) - P(B) + P(A \cap B) =$

$= P(\bar{A}) - [P(A) + P(B) - P(A \cap B)] =$

$= P(\bar{A}) - P(A \cup B)$

3.5. $P\left(\overline{\bar{A} \cap \bar{B}}\right) - P(A) = P\left(\overline{\overline{A \cup B}}\right) - P(A) =$

$= P(A \cup B) - P(A) =$

$= P(A) + P(B) - P(A \cap B) - P(A) =$

$= P(B) - P(A \cap B) =$

$= P(B \backslash A)$

3.6. $P(A) - P(\bar{B}) + P(\bar{A}) \times P(\bar{B}) = P(A) - [1 - P(B)] + [1 - P(A)] \times [1 - P(B)] =$

$= P(A) - 1 + P(B) + 1 - P(B) - P(A) + P(A) \times P(B) =$

$= P(A) \times P(B)$

3.7. $P(B) - P(\bar{A}) + P(\bar{A} \cap \bar{B}) = P(B) - [1 - P(A)] + P(\overline{A \cup B}) =$

$= P(B) - 1 + P(A) + 1 - P(A \cup B) =$

$= P(B) + P(A) - [P(A) + P(B) - P(A \cap B)] =$

$= P(B) + P(A) - P(A) - P(B) + P(A \cap B) =$

$= P(A \cap B) =$

$= P\left(\overline{\overline{A \cap B}}\right) =$

$= P\left(\overline{\bar{A} \cup \bar{B}}\right)$

4. $P(A) = \frac{9}{16}$ e $P(B) = \frac{8}{15}$

4.1. $P(B|A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} = \frac{\frac{9}{16} \times \frac{8}{15}}{\frac{9}{16}} = \frac{8}{15}$

4.2. $P(\bar{B}|A) = \frac{P(\bar{B} \cap A)}{P(A)} = \frac{\frac{9}{16} \times \frac{7}{15}}{\frac{9}{16}} = \frac{7}{15}$

4.3. $P(B|\bar{A}) = \frac{P(B \cap \bar{A})}{P(\bar{A})} = \frac{\frac{7}{16} \times \frac{9}{15}}{\frac{7}{16}} = \frac{9}{15} = \frac{3}{5}$

4.4. $P(\bar{B}|\bar{A}) = \frac{P(\bar{B} \cap \bar{A})}{P(\bar{A})} = \frac{\frac{7}{16} \times \frac{6}{15}}{\frac{7}{16}} = \frac{6}{15} = \frac{2}{5}$

4.5. $P(B) = \frac{9}{16} \times \frac{8}{15} + \frac{7}{16} \times \frac{9}{15} = \frac{9}{30} + \frac{63}{240} =$

$= \frac{3}{10} + \frac{21}{80} =$

$= \frac{24+21}{80} =$

$= \frac{45}{80} =$

$= \frac{9}{16}$

5. Seja *A*: "a máquina 1 avaria" e *B*: "a máquina 2 avaria".

Sabemos que $P(A) = 0{,}003$, $P(B) = 0{,}005$ e $P(B|A) = 0{,}4$.

5.1. $P(B|A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)}$

Assim:

$0{,}4 = \frac{P(A \cap B)}{0{,}003} \Leftrightarrow P(A \cap B) = 0{,}4 \times 0{,}003 \Leftrightarrow P(A \cap B) = 0{,}0012$

5.2. $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} =$

$= \frac{0{,}0012}{0{,}005} =$

$= 0{,}24$

6.

6.1. Número de casos possíveis: ${}^{30}C_{10}$

Número de casos favoráveis: ${}^{25}C_{10}$

Logo, $P = \frac{{}^{25}C_{10}}{{}^{30}C_{10}} = \frac{3\,268\,760}{30\,045\,015} = \frac{2584}{23\,751}$.

6.2. Número de casos possíveis: ${}^{30}C_{10}$

Número de casos favoráveis: ${}^{5}C_{5} \times {}^{25}C_{5}$

Logo, $P = \frac{{}^{5}C_{5} \times {}^{25}C_{5}}{{}^{30}C_{10}} = \frac{{}^{25}C_{5}}{{}^{30}C_{10}} = \frac{53\,130}{30\,045\,015} = \frac{2}{1131}$.

6.3. Número de casos possíveis: ${}^{30}C_{10}$

Número de casos favoráveis: ${}^{5}C_{1} \times {}^{25}C_{9}$

Logo, $P = \frac{{}^{5}C_{1} \times {}^{25}C_{9}}{{}^{30}C_{10}} = \frac{5 \times {}^{25}C_{9}}{{}^{30}C_{10}} = \frac{10\,214\,875}{30\,045\,015} = \frac{8075}{23\,751}$.

6.4. $P = 1 - P$(não ter economistas)

$P = 1 - \frac{2584}{23\,751} = \frac{21\,167}{23\,751}$

7. Número de casos possíveis: ${}^{5}C_3$

Número de casos favoráveis (número de maneiras de obter as notas de 5, 50 e 500 euros): 1

Logo, $P = \frac{1}{{}^{5}C_3} = \frac{1}{10}$.

8.

8.1.

a) ${}^{14}C_9 \times {}^{6}C_0 = 2002 \times 1 = 2002$

b) ${}^{14}C_7 \times {}^{6}C_2 + {}^{14}C_8 \times {}^{6}C_1 + {}^{14}C_9 = 3432 \times 15 + 3003 \times 6 + 2002 =$

$= 51\,480 + 18\,018 + 2002 =$

$= 71\,500$

8.2. Número de casos possíveis: ${}^{20}C_9$

Número de casos favoráveis: $1 \times 1 \times {}^{18}C_7 = {}^{18}C_7$

Logo, $P = \frac{{}^{18}C_7}{{}^{20}C_9} = \frac{31\,824}{167\,960} = \frac{18}{95}$.

8.3. Número de casos possíveis: 10!

Número de casos favoráveis: $5 \times 2! \times 8!$

Logo, $P = \frac{5 \times 2! \times 8!}{10!} = \frac{5 \times 2 \times 8!}{10 \times 9 \times 8!} = \frac{1}{9}$.

9.

9.1.

a) $P = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}$

b) Número de casos possíveis: $10 \times 10 = 100$

Número de casos favoráveis: 12

- há 2×2 maneiras de sair duas vezes o setor com o zero;
- se não sair o setor com o zero, há 8×1 maneiras de obter soma zero.

Logo, $P = \frac{12}{100} = \frac{3}{25}$.

9.2. Se P(obter setor marcado com 100) = x, então P(obter outros setores) = $2x$.

Temos, então:

$9 \times 2x + x = 1 \Leftrightarrow 18x + x = 1$

$\Leftrightarrow 19x = 1$

$\Leftrightarrow x = \frac{1}{19}$

Assim, P(obter setor marcado com 100) = $\frac{1}{19}$ e P(obter outros setores) = $\frac{2}{19}$.

Logo, P(obter pontuação positiva) = $\frac{1}{19} + 3 \times \frac{2}{19} = \frac{7}{19}$.

10. Sejam os acontecimentos *A*: "sair face com algarismo par" e *B*: "sair face com algarismo primo".

Sabemos que *A* = {2, 4, 6}, *B* = {2, 3, 5} e $A \cap B$ = {2}.

Dois acontecimentos *A* e *B* são incompatíveis se $A \cap B = \{ \ \}$.

Como $A \cap B$ = {2}, $A \cap B \neq \{ \ \}$ e, por isso, os acontecimentos *A* e *B* não são incompatíveis.

Dois acontecimentos são independentes se $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$.

Como $P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$, $P(B) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ e $P(A \cap B) = \frac{1}{6}$, temos $P(A) \times P(B) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$.

Concluímos, então, que $P(A \cap B) \neq P(A) \times P(B)$ e, por isso, *A* e *B* não são independentes.

Assim, nenhum dos dois irmãos tem razão.

11. Na série de jogos A B A, o Vasco ganha o torneio em duas situações:

1. ganha – ganha – termina o torneio

2. perde – ganha – ganha

Na situação 1, o Vasco ganha a A e depois ganha a B. Assim, $P = \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{2}{9}$.

Na situação 2, o Vasco perde com A, ganha a B e ganha a A. Assim, $P = \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{4}{27}$.

Logo, a probabilidade de o Vasco ganhar a série de jogos A B A é:

$P = \frac{2}{9} + \frac{4}{27} = \frac{6}{27} + \frac{4}{27} = \frac{10}{27}$

Na série de jogos B A B, o Vasco ganha o torneio em duas situações:

1. ganha – ganha – termina o torneio

2. perde – ganha – ganha

Na situação 1, o Vasco ganha a B e depois ganha a A. Assim, $P = \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{2}{9}$.

Na situação 2, o Vasco perde com B, ganha a A e ganha a B. Assim, $P = \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{2}{27}$.

Logo, a probabilidade de o Vasco ganhar a série de jogos B A B é:

$P = \frac{2}{9} + \frac{4}{27} = \frac{6}{27} + \frac{2}{27} = \frac{8}{27}$

Podemos, então, concluir que a série A B A é mais favorável, pois a probabilidade de ganhar é $\frac{10}{27}$, enquanto que a probabilidade de ganhar a série B A B é $\frac{8}{27}$.

12. Sabemos que $P(A|B) = P(B|A)$.

Assim:

$\frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} \Leftrightarrow P(B) = P(A)$

Logo, $P(A) = P(B) = \frac{1}{3}$.

Por outro lado, como A e B são independentes, $P(A \cap B) = P(A) \times P(B) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{9}$.

12.1. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{9} =$

$= \frac{3+3-1}{9} =$

$= \frac{5}{9}$

12.2. $P(\bar{B} \cap A) = P(A) - P(A \cap B) = \frac{1}{3} - \frac{1}{9} =$

$= \frac{3-1}{9} =$

$= \frac{2}{9}$

13.

13.1. $1 - P(A) \times P(B|\, A) = 1 - P(A) \times \frac{P(A \cap B)}{P(A)} =$

$= 1 - P(A \cap B) =$

$= P(\overline{A \cap B}) =$

$= P(\bar{A} \cup \bar{B})$

13.2. $P(\bar{A}) - P(B) + P(A|B) \times P(B) = 1 - P(A) - P(B) + \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \times P(B) =$

$= 1 - P(A) - P(B) + P(A \cap B) =$

$= 1 - [P(A) + P(B) - P(A \cap B)] =$

$= 1 - P(A \cup B) =$

$= P(\overline{A \cup B}) =$

$= P(\bar{A} \cap \bar{B})$

13.3. $P[(\bar{A} \cap B)|B] = \frac{P((\bar{A} \cap B) \cap B)}{P(B)} =$

$= \frac{P(\bar{A} \cap B \cap B)}{P(B)} =$

$= \frac{P(\bar{A} \cap B)}{P(B)} =$

$= \frac{P(B) - P(A \cap B)}{P(B)} =$

$= 1 - \frac{P(A \cap B)}{P(B)} =$

$= 1 - P(A|B)$

13.4. $P[(\overline{A \cap \bar{B}})|A] - P(B|A) = \frac{P((\bar{A} \cup B) \cap A)}{P(A)} - \frac{P(B \cap A)}{P(A)} =$

$= \frac{P[(\bar{A} \cap A) \cup (B \cap A]}{P(A)} - \frac{P(B \cap A)}{P(A)} =$

$= \frac{P(\emptyset \cup (B \cap A))}{P(A)} - \frac{P(B \cap A)}{P(A)} =$

$= \frac{P(B \cap A)}{P(A)} - \frac{P(B \cap A)}{P(A)} =$

$= 0$

13.5. $P(A|B)+P(B|A)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}+\frac{P(B\cap A)}{P(A)}=$

$$=\frac{P(A)\times P(A\cap B)+P(B)\times P(A\cap B)}{P(A)\times P(B)}=$$

$$=\frac{P(A\cap B)\times[P(A)+P(B)]}{P(A)\times P(B)}=$$

$$=P(A\cap B)\times\frac{P(A)+P(B)}{P(A)\times P(B)}$$

13.6. $P(\bar{A})+P(B)\times[P(A|B)-1]=1-P(A)+\ P(B)\times\left[\frac{P(A\cap B)}{P(B)}-1\right]=$

$$=1-P(A)+\ P(B)\times\frac{P(A\cap B)-P(B)}{P(B)}=$$

$$=1-P(A)+P(A\cap B)-P(B)=$$

$$=1-[P(A)+P(B)-P(A\cap B)]=$$

$$=1-P(A\cup B)=$$

$$=P(\overline{A\cup B})=$$

$$=P(\bar{A}\cap\bar{B})$$

14.

14.1. $P(B|A)=\frac{P(B\cap A)}{P(A)}=$

$$=\frac{P(A)+P(B)-P(A\cup B)}{P(A)}\leq$$

$$\leq\frac{P(A)+P(B)}{P(A)}=$$

$$=1+\frac{P(B)}{P(A)}=$$

$$=1+\frac{1-P(\bar{B})}{1-P(\bar{A})}$$

14.2. $1-P(B|A)\times P(A)\geq P(\bar{B}\cap A)\Leftrightarrow 1-\frac{P(A\cap B)}{P(A)}\times P(A)\geq P(B)-P(A\cap B)$

$$\Leftrightarrow 1-P(A\cap B)\geq P(B)-P(A\cap B)$$

$\Leftrightarrow 1\ \geq P(B)$, que é uma condição universal.

15. $P(B|A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}$

Sabemos que $P(B)=2P(A)$ e que $P(A\cup B)=3P(A\cap B)$.

Assim, como $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$, temos:

$$3P(A\cap B)=P(A)+2P(A)-P(A\cap B)\Leftrightarrow 4P(A\cap B)=3P(A)$$

$$\Leftrightarrow P(A\cap B)=\frac{3}{4}P(A)$$

Logo, $P(B|A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{\frac{3}{4}P(A)}{P(A)}=\frac{3}{4}$.

16. Sabemos que $P(A \cup \bar{B}) = 0{,}85$. Então:

$$1 - P(A \cup \bar{B}) = 1 - 0{,}85 \Leftrightarrow P\left(\overline{A \cup \bar{B}}\right) = 0{,}15$$
$$\Leftrightarrow P(\bar{A} \cap B) = 0{,}15$$
$$\Leftrightarrow P(B) - P(A \cap B) = 0{,}15$$
$$\Leftrightarrow 0{,}6 - P(A \cap B) = 0{,}15$$
$$\Leftrightarrow P(A \cap B) = 0{,}6 - 0{,}15$$
$$\Leftrightarrow P(A \cap B) = 0{,}45$$

Para que A e B sejam independentes, $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$. Assim:

$$0{,}45 = P(A) \times 0{,}6 \Leftrightarrow P(A) = \frac{0{,}45}{0{,}6}$$
$$\Leftrightarrow P(A) = 0{,}75$$

17. Como A e $\bar{A}$ são independentes, temos:

$$P(A \cap \bar{A}) = P(A) \times P(\bar{A}) \Leftrightarrow P(A) + P(\bar{A}) - P(A \cup \bar{A}) = P(A) \times P(\bar{A})$$
$$\Leftrightarrow P(A) + 1 - P(A) - P(E) = P(A) \times P(\bar{A})$$
$$\Leftrightarrow 1 - P(E) = P(A) \times P(\bar{A})$$
$$\Leftrightarrow 1 - 1 = P(A) \times P(\bar{A})$$
$$\Leftrightarrow P(A) \times P(\bar{A}) = 0$$
$$\Leftrightarrow P(A) = 0 \vee P(\bar{A}) = 0$$
$$\Leftrightarrow P(A) = 0 \vee 1 - P(A) = 0$$
$$\Leftrightarrow P(A) = 0 \vee P(A) = 1$$
$$\Leftrightarrow A = \emptyset \vee A = E$$

18. $1 + P(A) \times P(\bar{B}) < P(A) + P(\bar{A} \cup \bar{B}) \Leftrightarrow 1 + P(A) \times [1 - P(B)] < P(A) + P(\overline{A \cap B})$

$$\Leftrightarrow 1 + P(A) - P(A) \times P(B) < P(A) + 1 - P(A \cap B)$$
$$\Leftrightarrow -P(A) \times P(B) < -P(A \cap B)$$
$$\Leftrightarrow P(A \cap B) < P(A) \times P(B)$$
$$\Leftrightarrow \frac{P(A \cap B)}{P(B)} < P(A)$$
$$\Leftrightarrow P(A|B) < P(A)$$
$$\Leftrightarrow P(A) > P(A|B)$$

19.

19.1. $P(\bar{A}) + P(A \cup B) = 1 - P(A) + P(A \cup B) = 1 - P(A) + P(A) + P(B) - P(A \cap B) =$

$$= 1 + P(B) - P(A \cap B) =$$
$$= P(B) + 1 - P(A \cap B) =$$
$$= P(B) + P(\overline{A \cap B}) =$$
$$= P(B) + P(\bar{A} \cup \bar{B})$$

LeYa EDUCAÇÃO Daniela Raposo e Luzia Gomes

19.2. Sejam os acontecimentos *A*: “o aluno faz o exame de Física e Química” e *B*: “o aluno faz o exame de Biologia e Geologia”.

Sabemos que $P(A) = 70\%$, $P(B) = 75\%$ e $P(A \cup B) = 85\%$.

Pela alínea anterior, $P(\bar{A}) + P(A \cup B) = P(B) + P(\bar{A} \cup \bar{B})$.

Assim:

$$\begin{aligned} P(\bar{A} \cup \bar{B}) &= P(\bar{A}) + P(A \cup B) - P(B) = \\ &= 30\% + 85\% - 75\% = \\ &= 40\% \end{aligned}$$

20.

20.1. $P(A|\bar{B}) = \frac{P(A \cap \bar{B})}{P(\bar{B})} =$

$$\begin{aligned} &= \frac{P(A) + P(\bar{B}) - P(A \cup \bar{B})}{P(\bar{B})} = \\ &= 1 + \frac{P(A) - P(A \cup \bar{B})}{P(\bar{B})} = \\ &= 1 + \frac{1 - P(\bar{A}) - P(A \cup \bar{B})}{P(\bar{B})} = \\ &= 1 + \frac{1 - P(A \cup \bar{B}) - P(\bar{A})}{P(\bar{B})} = \\ &= 1 + \frac{P(\overline{A \cup \bar{B}}) - P(\bar{A})}{P(\bar{B})} = \\ &= 1 + \frac{P(\bar{A} \cap B) - P(\bar{A})}{P(\bar{B})} = \end{aligned}$$

20.2. Sejam os acontecimentos *A*: “não voltar a candidatar-se ao ensino superior no próximo ano” e *B*: “escolher o curso de Gestão como primeira opção”.

Sabemos que $P(\bar{A}) = 0{,}65 = \frac{13}{20}$, $P(\bar{B}) = 0{,}6 = \frac{3}{5}$ e $P(A|\bar{B}) = \frac{1}{12}$.

Pela alínea anterior, $P(A|\bar{B}) = 1 + \frac{P(\bar{A} \cap B) - P(\bar{A})}{P(\bar{B})}$.

Assim:

$$\begin{aligned} \frac{1}{12} = 1 + \frac{P(\bar{A} \cap B) - \frac{13}{20}}{\frac{3}{5}} &\Leftrightarrow \frac{1}{12} = 1 + \frac{5}{3}P(\bar{A} \cap B) - \frac{5}{3} \times \frac{13}{20} \\ &\Leftrightarrow \frac{5}{3}P(\bar{A} \cap B) = \frac{1}{6} \\ &\Leftrightarrow P(\bar{A} \cap B) = \frac{1}{6} \times \frac{3}{5} \\ &\Leftrightarrow P(\bar{A} \cap B) = \frac{1}{10} \end{aligned}$$

Logo, a probabilidade pedida é igual a $\frac{1}{10} = 0{,}1$.

LeYa EDUCAÇÃO Daniela Raposo e Luzia Gomes

21. No contexto da situação descrita, $P(B|\bar{A})$ é a probabilidade de sair ficha com vogal na segunda extração, sabendo que não saiu ficha azul na primeira extração. Sabemos que ocorreu $\bar{A}$, ou seja, não saiu ficha azul na primeira extração das fichas. Assim, na primeira extração saiu uma ficha vermelha, com uma vogal. Após a primeira extração, ficaram no saco 25 fichas, das quais quatro têm vogais. Assim, o número de casos possíveis é 25 e o número de casos favoráveis é 4. De acordo com a regra de Laplace, a probabilidade de um acontecimento é dada pelo quociente entre o número de casos favoráveis e o número de casos possíveis, quando estes são equiprováveis e em número finito. Logo, a probabilidade pedida é $\frac{4}{25}$.

22. Sabemos que $P(B|A) = \frac{2}{5}$, ou seja, a probabilidade de o segundo berlinde extraído ser azul, sabendo que o primeiro berlinde extraído foi verde é $\frac{2}{5}$.

Seja x o número total de berlindes. Como o saco tem seis berlindes azuis, no momento da segunda extração, temos:

$\frac{2}{5} = \frac{6}{x-1} \Leftrightarrow \frac{2}{5} = \frac{6}{x-1} \Leftrightarrow 2x - 2 = 30 \Leftrightarrow 2x = 32 \Leftrightarrow x = 16$

Podemos, então, concluir que o número de berlindes verdes no saco era $n = 16 - 6 = 10$.

23. Sejam os acontecimentos T: "o aluno pertence à tuna" e I: "o aluno toca um instrumento".

Sabemos que $P(T) = \frac{1}{4}$ e $P(I) = \frac{1}{2}$.

23.1.

a) $P(T \cap I) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$

b) $P(\bar{T} \cap \bar{I}) = P(\overline{T \cup I}) = 1 - P(T \cup I) =$

$= 1 - [P(T) + P(I) - P(T \cap I)] =$

$= 1 - \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2} - \frac{1}{6}\right) =$

$= 1 - \frac{7}{12} =$

$= \frac{5}{12}$

23.2. $P(\bar{T}|I) = \frac{P(\bar{T} \cap I)}{P(I)} = \frac{P(I) - P(T \cap I)}{P(I)} =$

$= \frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{6}}{\frac{1}{2}} =$

$= \frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}} =$

$= \frac{2}{3}$

23.3. Os acontecimentos T e I são independentes se $P(T \cap I) = P(T) \times P(I)$.

Sabemos que $P(T \cap I) = \frac{1}{6}$.

$P(T) \times P(I) = \frac{1}{4} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$

Assim, $P(T \cap I) \neq P(T) \times P(I)$ e, por isso, os acontecimentos "tocar um instrumento" e "pertencer à tuna" não são independentes.

24. Considera os acontecimentos *C*: "chover" e *V*: "vencer".

Sabemos que $P(\bar{C}) = \frac{3}{10}$, $P(V|\bar{C}) = \frac{3}{8}$ e $P(V|C) = \frac{3}{11}$.

24.1. $P(V) = P(V \cap C) + P(V \cap \bar{C})$

$$P(V|C) = \frac{3}{11} \Leftrightarrow \frac{P(V \cap C)}{P(C)} = \frac{3}{11} \Leftrightarrow P(V \cap C) = \frac{3}{11} \times \left(1 - \frac{3}{10}\right)$$

$$\Leftrightarrow P(V \cap C) = \frac{3}{11} \times \frac{7}{10}$$

$$\Leftrightarrow P(V \cap C) = \frac{21}{110}$$

$$P(V|\bar{C}) = \frac{3}{8} \Leftrightarrow \frac{P(V \cap \bar{C})}{P(\bar{C})} = \frac{3}{8} \Leftrightarrow P(V \cap \bar{C}) = \frac{3}{8} \times \frac{3}{10}$$

$$\Leftrightarrow P(V \cap \bar{C}) = \frac{9}{80}$$

Assim, $P(V) = \frac{21}{110} + \frac{9}{80} = \frac{168}{880} + \frac{99}{880} = \frac{267}{880}$.

24.2. $P(C|V) = \frac{P(C \cap V)}{P(V)} = \frac{\frac{21}{110}}{\frac{267}{880}} = \frac{21 \times 880}{267 \times 110} = \frac{56}{89}$

25. Sabemos que:

Tanque 1	**Tanque 2**	**Tanque 3**
7 trutas 3 robalos	5 trutas 2 robalos	4 trutas 4 robalos
10 peixes	7 peixes	8 peixes

25.1.

a) $P = \frac{1}{3} \times \frac{7}{10} = \frac{7}{30}$

b) $P = \frac{1}{3} \times \frac{7}{10} + \frac{1}{3} \times \frac{5}{7} + \frac{1}{3} \times \frac{4}{8} =$

$= \frac{7}{30} + \frac{5}{21} + \frac{1}{6} =$

$= \frac{49+50+35}{210} =$

$= \frac{134}{210} =$

$= \frac{67}{105}$

25.2. Sejam os acontecimentos *A*: "o peixe retirado é uma truta" e *T*1: "o peixe é retirado do tanque 1".

$$P(A|T1)=\frac{P(A\cap T1)}{P(T1)}=\frac{\frac{1}{3}\times\frac{7}{10}}{\frac{67}{105}}=$$

$$=\frac{\frac{7}{30}}{\frac{67}{105}}=$$

$$=\frac{147}{402}=$$

$$=\frac{49}{134}$$

26. Sejam os acontecimentos C: "o cliente pediu chá" e T: "o cliente pediu uma fatia de tarte".

Sabemos que $P(C)\ =\ 0{,}7$, $P(C\cap T)=0{,}5$ e $P(\bar{C}\cap\bar{T})=0{,}15$.

26.1. $P(\bar{C}\cap\bar{T})=0{,}15\ \Leftrightarrow P(\overline{C\cup T})=0{,}15$

$\Leftrightarrow 1-P(C\cup T)=0{,}15$

$\Leftrightarrow P(C\cup T)=1-0{,}15$

$\Leftrightarrow P(C\cup T)=0{,}85$

Como $P(C\cup T)=P(C)+P(T)-P(C\cap T)$, temos:

$0{,}85=0{,}7+P(T)-0{,}5\Leftrightarrow P(T)=0{,}85-0{,}7+0{,}5\Leftrightarrow P(T)=0{,}65$

Assim:

$P(T\cap\bar{C})=P(T)-P(T\cap C)=0{,}65-0{,}5=0{,}15$

26.2. $P(C|T)=\frac{P(C\cap T)}{P(T)}=\frac{0{,}5}{0{,}65}\approx 0{,}77=77\%$

26.3. No contexto da situação descrita, $P\big(C|(A\cap B)\big)$ é a probabilidade de o recheio da tarte conter apenas frutos vermelhos, sabendo que saiu um papel com morango e um papel com amora.

Se saiu um papel com morango e um papel com amora, basta que saia um papel com framboesa para que o recheio da tarte contenha apenas frutos vermelhos.

Como os papéis são extraídos sem reposição e na terceira extração, existem cinco papéis no saco, logo a probabilidade de sair framboesa é $\frac{1}{5}$.

27.

27.1. $P=\frac{1}{6}\times\left(1-\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{6}\times\frac{3}{4}=\frac{3}{24}=\frac{1}{8}$

27.2. $P=1-P($não sair face três nos dois dados $=1-\frac{5}{6}\times\frac{3}{4}=$

$$=1-\frac{15}{24}=$$

$$=\frac{9}{24}=$$

$$=\frac{3}{8}$$

Daniela Raposo e Luzia Gomes

27.3. Sejam os acontecimentos A: "sair face 3 no dado equilibrado" e B: "sair face 3 no dado viciado".

Sabemos que $P(A)=\frac{1}{6}$, $P(B)=\frac{1}{4}$ e A e B são acontecimentos independentes, ou seja, $P(A\cap B)=P(A)\times P(B)=\frac{1}{24}$.

Organizando a informação numa tabela, temos:

	B	$\bar{B}$	**Total**
A	$\frac{1}{24}$	$\frac{3}{24}$	$\frac{1}{6}$
$\bar{A}$	$\frac{5}{24}$		$\frac{5}{6}$
Total	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$	1

A probabilidade pedida é igual a $\frac{\frac{5}{24}+\frac{3}{24}}{\frac{5}{24}+\frac{1}{24}+\frac{3}{24}}=\frac{\frac{8}{24}}{\frac{9}{24}}=\frac{8}{9}$.

28. Como A e B são acontecimentos independentes, $P(A\cap B)=P(A)\times P(B)$.

28.1. $P(A\cap\bar{B})=P(A)-P(A\cap B)=$

$=P(A)-P(A)\times P(B)=$ (pois A e B são acontecimentos independentes)

$=P(A)\times[1-P(B)]=$

$=P(A)\times P(\bar{B})$

Logo, A e $\bar{B}$ são acontecimentos independentes.

28.2. $P(\bar{A}\cap B)=P(B)-P(A\cap B)=$

$=P(B)-P(A)\times P(B)=$ (pois A e B são acontecimentos independentes)

$=P(B)\times[1-P(A)]=$

$=P(B)\times P(\bar{A})$

Logo, $\bar{A}$ e B são acontecimentos independentes.

28.3. $P(\bar{A}\cap\bar{B})=P(\overline{A\cup B})=$

$=1-P(A\cup B)=$

$=1-[P(A)+P(B)-P(A\cap B)]=$

$=1-P(A)-P(B)+P(A\cap B)=$

$=1-P(A)-P(B)+P(A)\times P(B)=$ (pois A e B são acontecimentos independentes)

$=P(\bar{A})-P(B)\times[1-P(A)]=$

$=P(\bar{A})-P(B)\times P(\bar{A})=$

$=P(\bar{A})\times[1-P(B)]=$

$=P(\bar{A})\times P(\bar{B})$

Logo, $\bar{A}$ e $\bar{B}$ são acontecimentos independentes.

29.

29.1. $^{9}C_6 \times {}^{7}C_4 \times {}^{4}C_2 + {}^{9}C_6 \times {}^{7}C_5 \times {}^{4}C_1 = 84 \times 35 \times 6 + 84 \times 21 \times 4 =$

$= 17\,640 + 7056 =$

$= 24\,696$

29.2. $P = \frac{5! \times 3! \times 4! \times 3!}{12!} =$

$= \frac{5! \times 6 \times 24 \times 6}{12 \times 11 \times 10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5!} =$

$= \frac{1}{4620}$

30. Sejam os acontecimentos *F*: "a pessoa escolhida é fumador" e *C*: "a pessoa escolhida contraiu cancro".

Sabemos que:

- $P(F) = 0{,}35$
- $P(C \cap F) = 0{,}35 \times 0{,}4 = 0{,}14$
- $P(C \cap \overline{F}) = 0{,}65 \times 0{,}004 = 0{,}0026$

30.1. Organizando a informação numa tabela, temos:

	F	$\overline{F}$	**Total**
C	0,14	0,0026	0,1426
$\overline{C}$	0,21	0,6474	0,8574
Total	0,35	0,65	1

$P(F|C) = \frac{P(F \cap C)}{P(C)} = \frac{0{,}14}{0{,}1426} =$

$= \frac{1400}{1426} =$

$= \frac{700}{713}$

30.2. Sabemos que $\#F = 0{,}35 \times 200 = 70$.

Assim, $P = \frac{^{70}C_{10} \times {}^{130}C_{30}}{^{200}C_{40}} \approx 0{,}05$.

31.

31.1.

a) $\underline{E}\ \underline{M}\ \underbrace{\_\ \_\ \_\ \_\ \_}_{5!}$ ou $\underbrace{\_\ \_\ \_\ \_\ \_}_{5!}\ \underline{E}\ \underline{M}$

5! + 5! = 120 + 120 = 240

b)

$$\underbrace{\overbrace{\underline{E\ M}}^{2!}\ \ \overbrace{\underline{F_1F_2F_3}}^{3!}\ \ \_\_\ \ \_\_}_{4!}$$

$2! \times 3! \times 4! = 2 \times 6 \times 24 = 288$

31.2.

a) $P = \frac{2}{7!} = \frac{2}{5040} = \frac{1}{2520}$

b)

$$\underbrace{\underline{E\ F_1\ M}}_{2!}\ \ \underbrace{\_\_\ \ \_\_\ \ \_\_\ \ \_\_}_{4!}$$

$P = \frac{5 \times 2! \times 4!}{7!} = \frac{240}{5040} = \frac{1}{21}$

32.

32.1. ${}^{13}C_8 = 1287$

32.2.

a) $P = \frac{{}^{12}C_7}{{}^{13}C_8} = \frac{792}{1287} = \frac{8}{13}$

b) $P = 1 - P(\text{nenhum dos dois fazer parte do grupo}) = 1 - \frac{{}^{11}C_8}{{}^{13}C_8} =$

$= 1 - \frac{165}{1287} =$

$= \frac{1122}{1287} =$

$= \frac{34}{39}$

32.3. $P = \frac{7 \times 2 \times 6!}{8!} = \frac{14 \times 6!}{8 \times 7 \times 6!} = \frac{14}{56} = \frac{1}{4}$

32.4. $P = 1 - P(\text{de se sentarem um em frente ao outro}) = 1 - \frac{4 \times 2! \times 6!}{8!} =$

$= 1 - \frac{8 \times 6!}{8 \times 7 \times 6!} =$

$= 1 - \frac{1}{7} =$

$= \frac{6}{7}$

33.

33.1. Números naturais menores do que 2000 com um algarismo: 9

Números naturais menores do que 2000 com dois algarismos: 9×9

Números naturais menores do que 2000 com três algarismos: $9 \times 9 \times 8$

Números naturais menores do que 2000 com quatro algarismos: $1 \times 9 \times 8 \times 7$

Assim, temos 9 + 81 + 648 + 504 = 1242.

33.2. Números pares menores do que 2000 com um algarismo: 4

Números pares menores do que 2000 com dois algarismos: $9 \times 1 + 8 \times 4 = 41$

Números pares menores do que 2000 com três algarismos: $9 \times 8 \times 1 + 8 \times 8 \times 4 = 328$

Números pares menores do que 2000 com quatro algarismos:

$1 \times 8 \times 7 \times 1 + 1 \times 8 \times 7 \times 4 = 280$

Assim, temos $4 + 41 + 328 + 280 = 653$.

$P = \frac{653}{1242} \approx 0{,}53$

33.3. $1 - P(\text{nenhum número maior do que 999}) = 1 - \frac{{}^{738}C_4}{{}^{1242}C_4} = 1 - 0{,}1243 \approx 0{,}88$

34.

34.1. $3! \times 3! \times 2! = 72$

$P = \frac{72}{6!} = \frac{72}{720} = \frac{1}{10}$

34.2. ${}^{n}C_2 = 105 \Leftrightarrow \frac{n!}{2!(n-2)!} = 105 \Leftrightarrow \frac{n\times(n-1)\times(n-2)!}{2\times(n-2)!} = 105$

$$\Leftrightarrow \frac{n\times(n-1)}{2} = 105$$

$$\Leftrightarrow n \times (n-1) = 210$$

$$\Leftrightarrow n^2 - n - 210 = 0$$

$$\Leftrightarrow n = \frac{1 \pm \sqrt{1-4\times1\times(-210)}}{2}$$

$$\Leftrightarrow n = \frac{1 \pm \sqrt{841}}{2}$$

$$\Leftrightarrow n = \frac{1-29}{2} \lor n = \frac{1+29}{2}$$

$$\Leftrightarrow n = \frac{-28}{2} \lor n = \frac{30}{2}$$

$$\Leftrightarrow n = -14 \lor n = 15$$

Como n é um número natural, $n = 15$.

35.

35.1. Número de casos favoráveis: 6×2 (cada uma das seis faces tem duas diagonais)

Número de casos possíveis: ${}^{6}C_1 \times {}^{6}C_1$

Assim, $P = \frac{6 \times 2}{{}^{6}C_1 \times {}^{6}C_1} = \frac{12}{6 \times 6} = \frac{12}{36} = \frac{1}{3}$.

35.2. A face [*ABCDEF*] tem $n + 6$ pontos. Fixando o ponto *A*, temos $n + 5$ pontos. Assim:

$$\frac{{}^{n+5}C_2}{{}^{n+6}C_3} = \frac{\frac{(n+5)!}{2!(n+3!)}}{\frac{(n+6)!}{3!(n+3!)}} = \frac{6(n+5)!}{2(n+6)!} = \frac{6(n+5)!}{2(n+6)(n+5)!} = \frac{3}{n+6}$$

Como $\frac{3}{n+6} = \frac{1}{4}$, temos $n + 6 = 12 \Leftrightarrow n = 6$.

36.

36.1. Número de casos favoráveis: $3! \times {}^{11}A_4$

Número de casos possíveis: ${}^{7}C_3 \times 3! \times {}^{11}A_4$

Assim, $P = \frac{3! \times {}^{11}A_4}{{}^{7}C_3 \times 3! \times {}^{11}A_4} = \frac{47\,520}{1\,663\,200} = \frac{1}{35}$.

36.2. Número de casos favoráveis: $14 \times {}^{4}C_3$

Número de casos possíveis: ${}^{14}C_3$

Assim, $P = \frac{14 \times {}^{4}C_3}{{}^{14}C_3} = \frac{56}{364} = \frac{2}{13}$.

36.3. Número de casos favoráveis: $3 \times {}^{4}C_3$ (para que os vértices definam um plano que produza uma secção que seja um quadrado, têm de pertencer aos planos *AMF*, *AMC* ou *FCE*).

Número de casos possíveis: ${}^{6}C_3$

Assim, $P = \frac{3 \times {}^{4}C_3}{{}^{6}C_3} = \frac{3 \times 4}{20} = \frac{3}{5}$.

36.4. Número de casos favoráveis: $3^6 \times {}^{8}C_2 \times {}^{6}C_3 \times 3^3$

Número de casos possíveis: 5^{14}

Assim, $P = \frac{3^6 \times {}^{8}C_2 \times {}^{6}C_3 \times 3^3}{5^{14}} \approx 0{,}0018$.

37.

37.1.

a) ${}^{5}A_4 \times {}^{7}A_7 = 120 \times 5040 = 604\,800$

b) $6 \times 11! = 239\,500\,800$

37.2. Número de casos favoráveis: ${}^{14}C_4 \times {}^{14}A_{10}$

Número de casos possíveis: 15^{14}

$P = \frac{{}^{14}C_4 \times {}^{14}A_{10}}{15^{14}} \approx 0{,}000\,12$

37.3. O número de segmentos de reta que unem dois vértices do sólido é ${}^{12}C_2$. Como o sólido tem 24 arestas e 12 diagonais faciais, o número de diagonais espaciais é:

${}^{12}C_2 - 24 - 12 = 66 - 24 - 12 = 30$

38.

38.1. Número de casos favoráveis: 1

Número de casos possíveis: ${}^{6}C_2$

Assim, $P = \frac{1}{{}^{6}C_2} = \frac{1}{15}$.

38.2. $X = \{A, B, F, D\}$ e $Y = \{A, B, C\}$

Temos, então, $P(X) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$ e $P(Y) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.

Como $X \cap Y = \{A, B\}$, temos que $P(X \cap Y) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$.

$P(X) \times P(Y) = \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{3}$

Assim, $P(X \cap Y) = P(X) \times P(Y)$ e, por isso, os acontecimentos X e Y são independentes.

38.3. $\left({}^{3}A_1 \times {}^{4}A_1\right)^3 + {}^{3}A_3 \times 4! = (3 \times 4)^3 + 6 \times 24 = 12^3 + 144 = 1728 + 144 = 1872$

39.

39.1. Se $k = 0$, $(x, y, z) = (1, 3, 4)$.

Se $k = -1$, $(x, y, z) = (1, 3, 4) + (-2, 0, 1) = (-1, 3, 3)$ – neste ponto, $x < 0$.

Se $k = 1$, $(x, y, z) = (1, 3, 4) + (2, 0, -1) = (3, 3, 3)$.

Se $k = 2$, $(x, y, z) = (1, 3, 4) + (4, 0, -2) = (5, 3, 2)$.

Se $k = 3$, $(x, y, z) = (1, 3, 4) + (6, 0, -3) = (7, 3, 1)$ – neste ponto, $x > 6$.

Para cada ponto, temos $P = \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{216}$.

Logo, a probabilidade pedida é $3 \times \frac{1}{216} = \frac{3}{216} = \frac{1}{72}$.

39.2. A reta que passa no ponto $A(2, 3, -1)$ e tem a direção do vetor $\vec{v}(0, 0, 1)$ é a reta de equação $(x, y, z) = (2, 3, -1) + k(0, 0, 1), k \in \mathbb{R}$.

Utilizando o mesmo raciocínio da alínea anterior, temos seis pontos pertencentes à reta.

Logo, a probabilidade pedida é $6 \times \frac{1}{216} = \frac{6}{216} = \frac{1}{36}$.

39.3. $x + y + z - 9 = 0 \Leftrightarrow x + y + z = 9$

Assim, procuramos os pontos cuja soma das coordenadas é igual a 9. Nesta experiência, existem 25 pontos nestas condições. Logo, a probabilidade pedida é $25 \times \frac{1}{216} = \frac{25}{216}$.

39.4. A reta r tem equação $(x, y, z) = (1, 4, 5) + k(0, -1, 1), k \in \mathbb{R}$ e a reta s tem equação $(x, y, z) = (1, 4, 5) + k(1, -2, 1), k \in \mathbb{R}$.

Procuramos a equação do plano α definido pelas duas retas:

$$\begin{cases} (x, y, z)(0, -1, 1) = 0 \\ (x, y, z)(1, -2, 1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -y + z = 0 \\ x - 2y + z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = z \\ x - 2z + z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = z \\ x = z \end{cases}$$

$(z, z, z) = z(1, 1, 1)$

Assim, a equação do plano α é do tipo $x + y + z + d = 0$.

Como o ponto de coordenadas $(1, 4, 5)$ pertence ao plano, temos:

$1 + 4 + 5 + d = 0 \Leftrightarrow d = -10$

Logo, α: $x + y + z = 10$. Nesta experiência, existem 27 pontos que pertencem ao plano.

Logo, a probabilidade pedida é $27 \times \frac{1}{216} = \frac{27}{216} = \frac{1}{8}$.

40. $P(A|B) = P(A|\bar{B}) \Leftrightarrow \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A \cap \bar{B})}{P(\bar{B})}$

$\Leftrightarrow \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A) - P(A \cap B)}{1 - P(B)}$

$\Leftrightarrow P(A \cap B) \times [1 - P(B)] = P(B) \times [P(A) - P(A \cap B)]$

$\Leftrightarrow P(A \cap B) - P(A \cap B) \times P(B) = P(B) \times P(A) - P(B) \times P(A \cap B)$

$\Leftrightarrow P(A \cap B) = P(B) \times P(A)$

Como $P(A \cap B) = P(B) \times P(A)$, concluímos que os acontecimentos A e B são independentes.

41.

41.1. $P = \frac{4}{24} \times \frac{8}{23} + \frac{4}{24} \times \frac{12}{23} = \frac{1}{6} \times \frac{8}{23} + \frac{1}{6} \times \frac{12}{23} =$

$= \frac{8+12}{138} =$

$= \frac{20}{138} =$

$= \frac{10}{69}$

41.2. $P = \frac{3}{23} \times \frac{2}{22} = \frac{6}{506} = \frac{3}{253}$

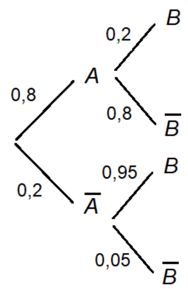
41.3. $P = \frac{1}{6} \times \frac{20}{23} \times 2 + \frac{3}{138} = \frac{40}{138} + \frac{3}{138} = \frac{43}{138}$

42. Sejam os acontecimentos *A*: "o Sr. Dalton responde a verdade" e *B*: "o detetor de mentiras diagnostica mentira". Sabemos que $P(A) = 0{,}8$, $P(B|A) = 0{,}2$ e $P(B|\bar{A}) = 0{,}95$.

$P(\bar{A}|B) = \frac{P(\bar{A} \cap B)}{P(B)} = \frac{0{,}2 \times 0{,}95}{0{,}8 \times 0{,}2 + 0{,}2 \times 0{,}95} =$

$= \frac{19}{35}$

$\approx 54\%$



43.

Caixa A	Caixa B
4 bolas pretas *n* - 4 bolas brancas	*n* - 4 bolas pretas 4 bolas brancas

43.1. *P*(bola retirada da caixa B ser branca) =

= *P*(bola retirada da caixa A ser preta) + *P*(bola retirada da caixa A ser branca) =

$= \frac{4}{n} \times \frac{4}{n+1} + \frac{n-4}{n} \times \frac{5}{n+1} =$

$= \frac{16}{n(n+1)} + \frac{5n-20}{n(n+1)} =$

$= \frac{5n-4}{n(n+1)}$

43.2. $P = \dfrac{\frac{16}{n(n+1)}}{\frac{5n-4}{n(n+1)}} = \dfrac{16}{5n-4}$

44. $P = \{2, 3, 5, 7, 11\}$ e $\bar{P} = \{1, 4, 6, 8, 9, 10, 12\}$

$P(P) = \frac{5}{12}$ e $P(\bar{P}) = \frac{7}{12}$

44.1. $P(4P) = \left(\frac{5}{12}\right)^4 = 0{,}030$

44.2. $P(4P \text{ ou } 4\bar{P}) = \left(\frac{5}{12}\right)^4 + \left(\frac{7}{12}\right)^4 = 0{,}030 + 0{,}116 = 0{,}146$

44.3. Se existirem três movimentos no mesmo sentido, o quarto movimento finaliza o jogo ou regride para a segunda casa a contar da casa de partida. Assim, o quinto movimento não se faz ou avança para a terceira casa. Podemos, então, concluir que *P* = 0.

44.4. Seja *A*: "são necessários mais de seis movimentos para acabar o jogo".

$P(A) = 1 - P(\bar{A})$

D D D D

$\frac{5}{12} \times \frac{5}{12} \times \frac{5}{12} \times \frac{5}{12}$

E E E E

$\frac{5}{12} \times \frac{5}{12} \times \frac{5}{12} \times \frac{5}{12}$

D D D D E D D

$\frac{5}{12} \times \frac{5}{12} \times \frac{5}{12} \times \frac{5}{12} \times \frac{7}{12} \times \frac{5}{12} \times \frac{5}{12} \times 4$

E E E E D E E

$\frac{7}{12} \times \frac{7}{12} \times \frac{7}{12} \times \frac{7}{12} \times \frac{5}{12} \times \frac{7}{12} \times \frac{7}{12} \times 4$

Assim, $P(A) = 1 - \left(\frac{5}{12}\right)^4 - \left(\frac{5}{12}\right)^5 \times \frac{7}{12} \times 4 - \left(\frac{7}{12}\right)^4 - \left(\frac{7}{12}\right)^5 \times \frac{5}{12} \times 4 = 0{,}712.$

45.

45.1. No contexto da situação descrita, $P(B|\bar{A})$ é a probabilidade de as bolas retiradas da caixa serem da mesma cor, sabendo que a carta retirada do baralho não é de copas. Dado que a carta retirada do baralho não é de copas, adiciona-se à caixa uma bola de cor verde, pelo que a caixa fica com cinco bolas brancas e quatro bolas verdes, num total de nove bolas. Retiramos, então, duas bolas dessas nove e queremos determinar a probabilidade de elas serem da mesma cor, ou seja, serem as duas bolas brancas ou serem as duas bolas verdes, casos que se excluem mutuamente.

Existem ${}^9C_2$ maneiras diferentes de tirar simultaneamente duas bolas de entre as nove. Por isso, o número de casos possíveis é ${}^9C_2$. Existem ${}^5C_2$ maneiras diferentes de tirar simultaneamente duas bolas brancas e ${}^4C_2$ maneiras diferentes de tirar simultaneamente duas bolas verdes. Por isso, o número de casos favoráveis é ${}^5C_2 + {}^4C_2$.

Assim, a probabilidade pedida é $\dfrac{{}^5C_2 + {}^4C_2}{{}^9C_2} = \dfrac{4}{9}$.

45.2. $P(\text{copas}) = \dfrac{\frac{1}{4}\times\frac{6}{9}\times\frac{5}{8}}{\frac{1}{4}\times\frac{6}{9}\times\frac{5}{8}+\frac{3}{4}\times\frac{3}{9}\times\frac{3}{8}} = \dfrac{\frac{30}{288}}{\frac{90}{288}} =$

$= \dfrac{30}{90} =$

$= \dfrac{1}{3}$

46.

46.1.

a) $P = \frac{6}{^{12}C_2} = \frac{6}{66} = \frac{1}{11}$

b) $P = \frac{^{6}C_2 + {^{6}C_2}}{^{12}C_2} = \frac{15+15}{66} = \frac{30}{66} = \frac{5}{11}$

c) $P = \frac{^{6}C_2 \times 2}{^{12}C_2} = \frac{15\times 2}{66} = \frac{30}{66} = \frac{5}{11}$

46.2. $^{4}A_2 + {^{6}A_6} = 12 \times 720 = 8640$

46.3. $^{8}C_2 \times {^{8}C_1} \times {^{7}A_6} = 28 \times 8 \times 5040 = 1\,128\,960$

47. De acordo com a regra de Laplace, a probabilidade de um acontecimento é igual ao quociente entre o número de casos favoráveis a esse acontecimento e o número de casos possíveis, quando estes são todos equiprováveis.

Vejamos o número de casos possíveis:

Pretendemos colocar as vinte e oito peças em quatro filas horizontais, cada uma com sete peças, e o número total de maneiras de o fazer é igual ao número de configurações visuais distintas que se podem obter com a colocação das peças.

$^{28}C_8$ é o número de modos distintos de escolher quais as posições que vão tomar as oito peças azuis. Por cada um destes modos, existe apenas um modo de colocar as vinte peças vermelhas nas vinte posições restantes $\left(^{20}C_{20}\right)$.

O número de casos possíveis é, então, $^{28}C_8 \times {^{20}C_{20}} = 3\,108\,105$.

Vejamos agora o número de casos favoráveis:

Pretende-se preencher uma fila horizontal toda com peças azuis, o que pode ser feito apenas de quatro modos. Depois de escolhida a fila horizontal e de preenchida com peças azuis (o que pode ser feito apenas de quatro modos distintos, já que o que interessa contabilizar são configurações visuais distintas), sobra-nos uma peça azul e vinte vermelhas para colocar nas vinte e uma posições restantes. Assim, a peça azul pode ser colocada de vinte e um modos distintos $\left(^{21}C_1\right)$ e, por cada um destes modos, só existe um modo de colocar as vinte peças vermelhas nas vinte posições restantes $\left(^{20}C_{20}\right)$. Assim, o número de casos favoráveis é $4 \times {^{21}C_1} \times {^{20}C_{20}} = 84$.

Daqui se conclui que a probabilidade pedida é $\frac{84}{3\,108\,105} = \frac{4}{148\,005}$.