Matemática

Exame

11 · 05 · 2023

23 + curso

Universidade do Minho
DMA

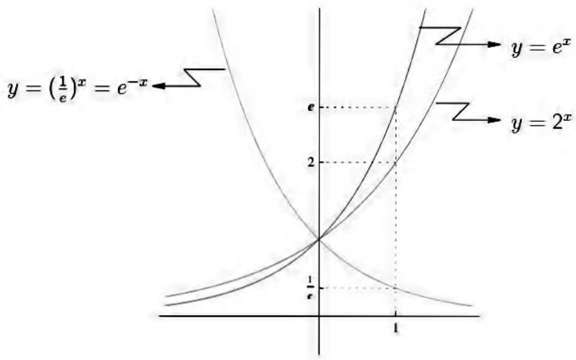
Duração: 120 minutos

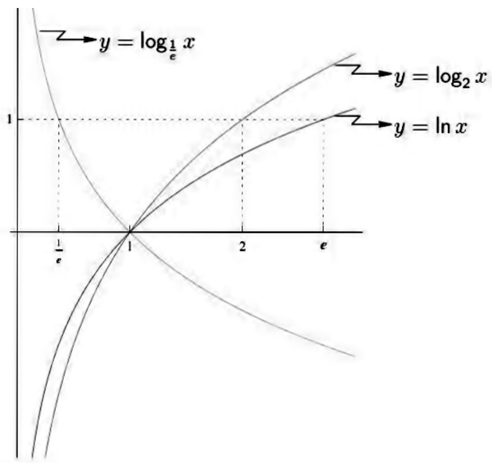
Nome: **Turma:**

Formulário

	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$
sin	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
cos	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
tan	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

Gráficos de funções exponenciais e logarítmicas





Regras de derivação

$(a)' = 0 \qquad (a \in \mathbb{R})$

$(x)' = 1$

$(ax+b)' = a \qquad (a, b \in \mathbb{R})$

$(ax^p)' = apx^{p-1} \quad (a \in \mathbb{R}, p \in \mathbb{Z} \setminus \{0\})$

$(f+g)' = f' + g'$

$(fg)' = f'g + f\,g'$

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - f\,g'}{g^2}$$

$(f^n)' = n\,f^{n-1}f' \qquad (n \in \mathbb{R})$

$$\left(\sqrt[n]{f}\right)' = \frac{f'}{n\sqrt[n]{f^{n-1}}} \qquad (n \in \mathbb{N})$$

$(e^f)' = f'e^f$

$(a^f)' = f'a^f \ln a \qquad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

$$(\ln f)' = \frac{f'}{f}$$

$$(\log_a f)' = \frac{f'}{f \ln a} \qquad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$$

Justifique convenientemente todas as suas respostas.

Exercício 1 Simplifique:

a) $2\sqrt{2}(2-\sqrt{2})+(-2+\sqrt{2})^2$;

b) $(2+a)^2+(a-2)(a+2)-a(4+a)$.

Exercício 2 Resolva, em $\mathbb{R}$, as seguintes condições:

a) $(x^2+5)(x-1)=0$;

b) $|x-5|=2$.

Exercício 3 Considere o ponto $A = (-1, 5)$, o ponto $B = (4, -2)$ e o vetor $\overrightarrow{u} = (3, -1)$. Determine:

a) $\|\overrightarrow{AB}\|$.

b) as coordenadas do ponto $D = A - \frac{1}{2}\overrightarrow{u}$.

c) o valor real de a de forma que os vetores $\overrightarrow{t} = (a, 4)$ e $\overrightarrow{u}$ sejam colineares.

Exercício 4 Considere, em $\mathbb{R}^2$, a circunferência $\mathcal{C}$ definida pela equação $x^2 + y^2 - 6y - 27 = 0$. Calcule as coordenadas do centro da circunferência e o respetivo raio.

Exercício 5 Considere a reta r definida por r: $y = -\frac{1}{2}x + 5$ e o ponto $P(-2, 1)$.

a) Indique as coordenadas de um ponto que pertença à reta r .

b) Determine uma equação da reta que passa em $P(-2, 1)$ e é perpendicular à reta r.

Exercício 6 Resolva, em $\mathbb{R}$, as seguintes condições:

a) $(x + 1)5^x = 5^x$;

b) $\sqrt{2} \cos \theta + 1 = 0$.

Exercício 7 Resolva, em $\mathbb{R}$, a seguinte equação: $\dfrac{x}{x^2+x}=0$.

Exercício 8 Seja $(u_n)_n$ a sucessão definida por: $u_n = 5 - n$.

Estude $(u_n)_n$ quanto à monotonia.

Exercício 9 Determine, caso existam, os seguintes limites:

a) $\lim\limits_{n} \dfrac{-5n^2+2n}{n+5}$;

b) $\lim\limits_{n} \left(\dfrac{n-1}{n}\right)^{3n}$.

Exercício 10 Considere a função real de variável real definida por $f(x) = \sqrt{x^2 - x}$.

a) Determine o domínio de f.

b) Mostre que a reta tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa 2 tem declive $\frac{3\sqrt{2}}{4}$.

Exercício 11 Considere a função real, de variável real, definida por $h(x) = 2 - 5^{x+1}$.

a) Determine o domínio e o contradomínio da função h.

b) Resolva, em $\mathbb{R}$, a inequação $h(x) \geq -3$.

Cotação:
1.a) 10 **1.b)** 10 **2.**a) 10 **2.**b) 10 **3.**a) 10 **3.**b) 10 **3.**c) 10 **4.** 10 **5.a)** 10
5.b) 10 **6.**a) 10 **6.**b) 10 **7.**10 **8.**10 **9.**a) 10 **9.**b) 10 **10.**a) 10 **10.**b) 10
11.a) 10 **11.**b) 10

FIM DA PROVA