TESTE DE MATEMÁTICA – MOCK TESTE 2021

12.º ano de Escolaridade (cinco páginas)

Caderno 1: É permitido o uso de calculadora.

Este teste é constituído por **dois** cadernos:

- **Caderno 1** – com recurso à calculadora
- **Caderno 2** – sem recurso à calculadora

Indica de forma legível a versão da prova.
Utiliza apenas caneta ou esferográfica de tinta azul ou preta.
É permitido o uso de régua, compasso, esquadro, transferidor e calculadora gráfica.
Não é permitido o uso de corretor. Risca aquilo que pretendes que não seja classificado.
Para cada resposta, identifica o grupo e o item.
Apresenta as suas respostas de forma legível.
Apresenta apenas uma resposta para cada item.
A prova inclui um formulário. As cotações dos itens encontram-se no final do enunciado da prova.

Na resposta aos itens de escolha múltipla, seleciona a opção correta. Escreve, na folha de respostas, o número do item e a letra que identifica a opção escolhida.

Na resposta aos restantes itens, apresenta todos os cálculos que tiveres de efetuar e todas as justificações necessárias. Quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, apresente sempre o **valor exato**.

Formulário

Comprimento de um arco de circunferência

αr (α – amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r – raio)

Áreas de figuras planas

Losango: $\frac{\text{Diagonal maior} \times \text{Diagonal menor}}{2}$

Trapézio: $\frac{\text{Base maior} + \text{base menor}}{2} \times \text{Altura}$

Polígono regular: Semiperímetro $\times$ Apótema

Setor circular: $\frac{\alpha r^2}{2}$ (α – amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r – raio)

Áreas de superfície

Área lateral de um cone: $\pi\, r\, g$ (r – raio da base; g – geratriz)

Área de uma superfície esférica: $4\,\pi\, r^2$ (r – raio)

Volumes

Pirâmide: $\frac{1}{3} \times \text{Área da base} \times \text{Altura}$

Cone: $\frac{1}{3} \times \text{Área da base} \times \text{Altura}$

Esfera: $\frac{4}{3}\,\pi\, r^3$ (r – raio)

Progressões

Soma dos n primeiros termos de uma progressão (u_n)

Progressão aritmética: $\frac{u_1+u_n}{2} \times n$

Progressão geométrica: $u_1 \times \frac{1-r^n}{1-r}$

Trigonometria

$\text{sen}(a+b) = \text{sen}\, a\, \cos b + \text{sen}\, b\, \cos a$

$\cos(a+b) = \cos a\, \cos b - \text{sen}\, a\, \text{sen}\, b$

$\frac{\text{sen}\, A}{a} = \frac{\text{sen}\, B}{b} = \frac{\text{sen}\, C}{c}$

$a^2 = b^2 + c^2 - 2\, b\, c \cos A$

Complexos

$(\rho \text{ cis } \theta)^n = \rho^n \text{ cis } (n\theta)$ ou $\left(r\, e^{i\theta}\right)^n = r^n\, e^{in\theta}$

$\sqrt[n]{\rho\, cis\, \theta} = \sqrt[n]{\rho} \text{ cis} \left(\frac{\theta+2k\pi}{n}\right)$ ou $\sqrt[n]{r\, e^{i\theta}} = \sqrt[n]{r}\, e^{i\left(\frac{\theta}{n}+\frac{2k\pi}{n}\right)}$

($k \in \{0, \dots, n-1\}$ e $n \in \mathbb{N}$)

Probabilidades

$\mu = p_1 x_1 + \dots + p_n x_n$

$\sigma = \sqrt{p_1(x_1-\mu)^2 + \dots + p_n(x_n-\mu)^2}$

Se X é $N(\mu, \sigma)$, então:

$P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) \approx 0{,}6827$

$P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) \approx 0{,}9545$

$P(\mu - 3\sigma < X < \mu + 3\sigma) \approx 0{,}9973$

Regras de derivação

$(u+v)' = u' + v'$

$(u.v)' = u'.v + u.v'$

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'.v - u.v'}{v^2}$

$(u^n)' = n\,.u^{n-1}.u' \,(n \in \mathbb{R})$

$(\text{sen}\, u)' = u'.\cos u$

$(\cos u)' = -u'.\text{sen}\, u$

$(\text{tg}\, u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$

$(e^u)' = u'.e^u$

$(a^u)' = u'.a^u.\ln a \;(a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$

$(\log_a u)' = \frac{u'}{u\,.\ln a} \;(a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

Limites notáveis

$\lim \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e \;(n \in \mathbb{N})$

$\lim_{x\to 0} \frac{\text{sen}\, x}{x} = 1$

$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

$\lim_{x\to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

$\lim_{x\to +\infty} \frac{e^x}{x^p} = +\infty \;(p \in \mathbb{R})$

1. Os cartões de um bingo são construídos distribuindo-se alguns dos inteiros de 1 a 75, sem repetição, numa tabela de cinco linhas por cinco colunas.

A primeira, segunda, terceira, quarta e quinta colunas são formadas por cinco inteiros, nos intervalos [1,15], [16,30], [31,45], [46,60] e [61,75], respetivamente. Não será considerada a ordem em cada coluna. Por exemplo, os cartões seguintes são considerados **iguais**.

1	16	35	55	64
3	17	45	59	70
4	20	31	46	61
8	21	40	49	72
10	23	44	57	75

1	16	35	55	64
10	20	45	46	61
4	23	44	59	75
8	21	40	49	72
3	17	31	57	70

O total de cartões que se podem construir desta forma é:

(A) 5×3003 **(B)** $5 \times 25!$ **(C)** $5! \times 25$ **(D)** 3003^5

2. Num referencial o.n. $Oxyz$, considera os pontos $P(-3,-1,1)$ e $Q(7,4,-4)$, e o ponto R tal que $3\overrightarrow{PR} = 2\overrightarrow{RQ}$.

Uma equação do plano que passa por R e é perpendicular à reta PQ é:

(A) $2x + y - z = 6$ **(B)** $2x + y - z = 4$

(C) $10x + 5y - 5z = 4$ **(D)** $2x + y - z = 10$

3. Uma comissão de alunos finalistas, decidiu ir até à agência de viagens *EstudanTur*, especializada em viagens para alunos finalistas do 12ºano.

A comissão sugeriu as Ilhas Canárias como um bom destino, e ficaram a saber que a agência de viagens recorre a três hotéis (Hotel A, Hotel B e o Hotel C), para alojar os seus clientes nessas mesmas ilhas. Habitualmente, 30% dos clientes selecionam o hotel A, 45% o hotel B e os restantes o hotel C. Sabe-se ainda que 52% dos quartos do hotel A, 64% do hotel B e 40% do hotel C, são virados para o mar.

Um cliente, presente na agência, ouviu a conversa da comissão com o dono da agência e disse que também já tinha feito essa viagem no ano anterior e que tinha ficado num quarto com vista para o mar.

Qual a probabilidade desse cliente ter estado alojado no hotel A?

Apresenta o resultado na forma de dízima, arredondado às milésimas.

4. Seja f a função real de variável real definida por:

$$f(x) = x \ln\left(3 - \frac{1}{x}\right)$$

Sem recorreres à calculadora, a não ser para eventuais cálculos numéricos, resolve os itens seguintes:

4.1. Mostra que o domínio de f é $]-\infty, 0[\cup \left]\frac{1}{3}, +\infty\right[$.

4.2. Estuda a função f quanto à existência de assintotas oblíquas ao seu gráfico.

4.3. Mostra que existe pelo menos um ponto do gráfico de f cuja ordenada é o simétrico do quadrado da sua abcissa, no intervalo $]-2, -1[$.

5. Considera, num referencial o.n. xOy, a representação gráfica da função g, de domínio $[0, 5]$, definida em por $g(x) = \ln(e^x + 2) - 4x^3 e^{x-x^2}$.

Sabe-se que:

- A é ponto de coordenadas $(1, 0)$
- B é ponto de coordenadas $(4, 0)$
- P é um ponto que se desloca ao longo do gráfico da função g

Para cada posição do ponto P, considera o triângulo $[ABP]$.

Recorrendo às capacidades gráficas da tua calculadora determina as abcissas de, pelo menos, três pontos P para os quais a área do triangulo $[ABP]$ é $\frac{7}{2}$.

Não se pede para justificar a validade dos resultados observados na calculadora.

Na tua resposta deves:

- equacionar o problema
- reproduzir o gráfico da função ou os gráficos das funções que tiveres necessidade de visualizar na calculadora, devidamente identificado(s), incluindo o referencial
- indicar as abcissas dos pontos P com arredondamento às centésimas

6. Considera uma sucessão de cubos cujas arestas têm medidas em progressão geométrica de razão $k > 1$, sendo 2 a medida da primeira.

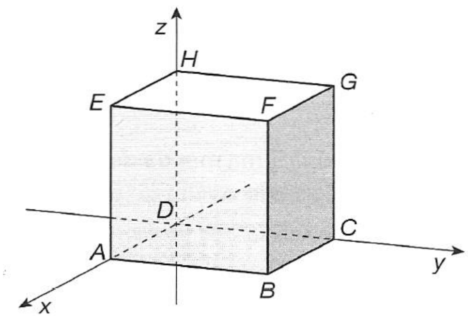
Seja (v_n) a sucessão dos respetivos volumes.

Então $u_n = \log v_n$ define uma progressão aritmética cujos primeiro termo e razão são, respetivamente:

(A) $u_1 = 3\log 2$ e $r = 3\log k$ **(B)** $u_1 = 8$ e $r = 3(n-1)\log k$

(C) $u_1 = \log 8$ e $r = 6\log k$ **(D)** $u_1 = 2^3$ e $r = \log k^3$

7. Na figura ao lado está representado, num referencial o.n. $Oxyz$, um cubo $[ABCDEFGH]$.



Os vértices A, C e H pertencem aos semieixos positivos Ox, Oy e Oz, respetivamente, e o vértice D coincide com a origem do referencial.

Considera que o vértice da F tem coordenadas $(4, 4, 4)$.

7.1. Determina o ponto de interseção da reta r definida vetorialmente por $(x, y, z) = (1, -1, -5) + \lambda(2, 3, 1), \lambda \in \mathbb{R}$, com o plano AFG.

Sugestão: Começa por determinar uma equação cartesiana do plano AFG.

7.2. Seja P o ponto de ordenada 1 do segmento de reta $[EF]$.

Seja α a amplitude do ângulo DPC.

Determina o valor de $\sin^2 \alpha$.

7.3. Escolhem-se, ao acaso, dois vértices do cubo.

Qual a probabilidade de ambos terem cota não nula, mas só um ter abcissa não nula?

Apresenta o resultado na forma de fração irredutível.

Fim do Caderno 1

SOCIEDADE PORTUGUESA DE MATEMÁTICA

TESTE DE MATEMÁTICA – MOCK TESTE 2021

12.º ano de Escolaridade (quatro páginas)

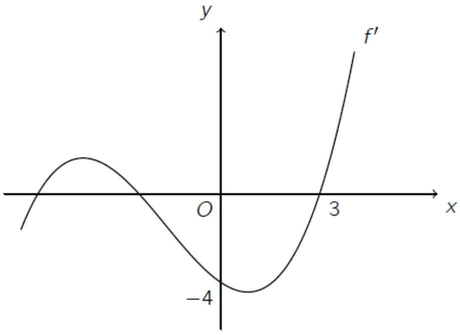
Caderno 2: Não é permitido o uso de calculadora.

8. A elipse de centro na origem do referencial, cujo eixo maior mede 6 e que tem um foco no ponto $\left(-\sqrt{5}, 0\right)$ interseta a reta de equação $x = 1$ em dois pontos, A e B. Então $\overline{AB}$ é igual a:

(A) $\frac{2\sqrt{2}}{3}$ **(B)** $3\sqrt{3}$ **(C)** $\frac{4\sqrt{2}}{3}$ **(D)** $\frac{8\sqrt{2}}{3}$

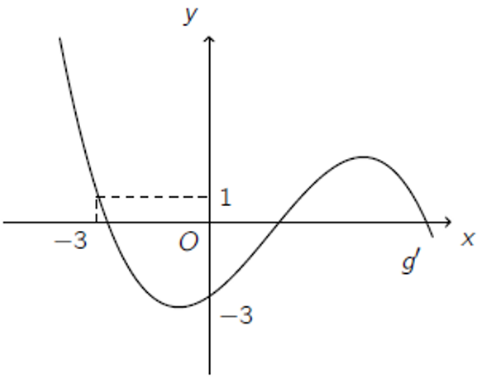
9. Na figura, está representada, num referencial o.n. xOy, parte do gráfico da função f', primeira derivada de f, contínua em todo o seu domínio.

Considera a função g, contínua em todo o seu domínio, definida por $g(x) = -f(-x) + x$.

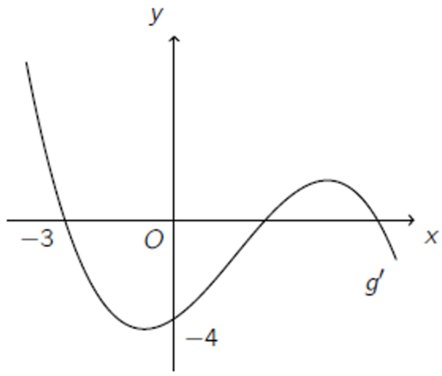


Qual dos seguintes gráficos pode ser parte do gráfico de g', primeira derivada de g?

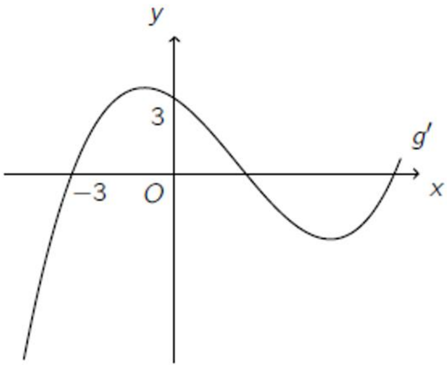
(A)



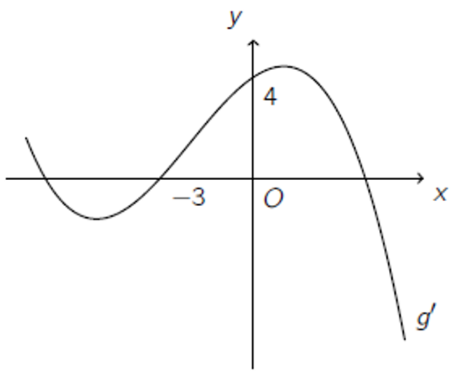
(B)



(C)



(D)



10. Calcula o valor de $\tan\left(arcsin\left(\frac{1}{3}\right)\right)$.

11. De uma função f, de domínio $\mathbb{R}$, sabe-se que a sua segunda derivada é dada por:

$$f''(x) = e^{2x}(5-x^2)(2x^2+1)(x-2)^2.$$

Quantos pontos de inflexão tem o gráfico de f?

(A) 1 **(B)** 2 **(C)** 3 **(D)** 4

12. O valor de $5^{2+\log_5(w+1)}$ é:

(A) $25w + 25$ **(B)** $5^2 + w + 1$

(C) $25\log_5(w+1)$ **(D)** $25 + \log_5(w+1)$

13.

13.1. Mostra, usando o princípio de indução matemática, que

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j(j+1)} = \frac{n}{n+1} \quad , \forall n \in \mathbb{N}$$

13.2. Utiliza o resultado da alínea anterior para determinar o limite da sucessão de termo geral

$$u_n = \left(\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j(j+1)}\right)^{2n}$$

14. De uma função f, de domínio $\mathbb{R}$, sabe-se que:

- a sua **derivada**, f', é dada por $f'(x) = 4e^{2x}\,(x-1)^2$
- $f'(1) - f\left(\frac{1}{2}\right) = 0$

14.1. Escreve a equação reduzida da reta tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa $\frac{1}{2}$.

14.2. Mostra que $f''(x) = 8e^{2x}\,(x^2 - x)$ e estuda f quanto ao sentido das concavidades do seu gráfico.

15. Para um certo valor de k, com $k \in \mathbb{N}$, tem-se que ${}^{2019}C_{132} = k + {}^{2017}C_{131}$.

Qual o valor de k?

(A) ${}^{2017}C_{132}$

(B) ${}^{2017}C_{131} + {}^{2019}C_{132}$

(C) ${}^{2017}C_{130} + {}^{2018}C_{132}$

(D) ${}^{2018}C_{132}$

16. Resolve, em $\mathbb{R}$, a seguinte equação:

$$\ln(e^x + 2) = 2x$$

Fim do Caderno 2