LR MAT EXPLICAÇÕES

ANO: 10º ANO **DATA:** JUN

TEMA: RADICAIS. GEOMETRIA. FUNÇÕES.

TIPO: FICHA DE REVISÕES GLOBAL

1. Considera as funções a, b, c e d, bijetiva, definidas em $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$. Sabe-se que $a(2) = 5$, $b(2) = -3$, $c(1) = -3$ e $d(-3) = 2$. Determine:

a) $a^{-1}(5)$

b) $(d \circ c)(1)$

c) $(b^{-1} \circ d^{-1})(2)$

2. Considere as funções f e g definidas de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ por $f(x) = 5 - 6x$ e $g(x) = 5 - 3x^2$.

a) Mostre que f é uma função bijetiva.

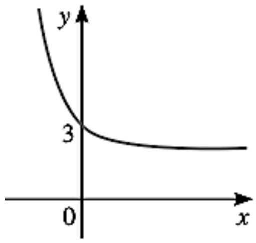
b) Justifique que g não é injetiva nem sobrejetiva.

c) Existe algum valor de x, tal que $f(x) = g(x)$? Se sim, qual ou quais?

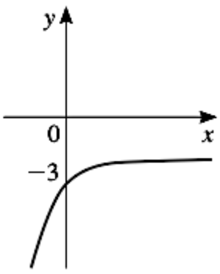
d) Determine uma expressão analítica da função f^{-1}.

3. Na figura ao lado está uma representação gráfica de uma função f, real de variável real, bijetiva.

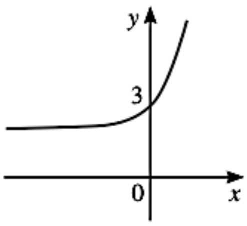
Em qual das figuras seguintes pode estar a representação gráfica da função f^{-1} (função inversa de f)?



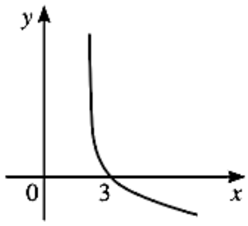
(A)



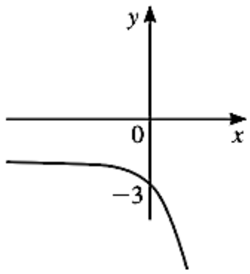
(B)



(C)



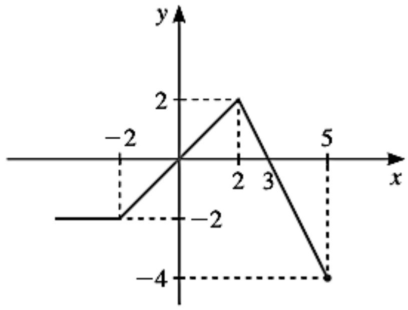
(D)



4. Indica o domínio das seguintes funções:

$$f(x) = \frac{3x}{x^2 - 1}; \quad g(x) = -5x + \sqrt{4 - x^2}; \quad h(x) = 2x + 1$$

5. A figura representa parte do gráfico de uma função f.



5.1 Indica:

a) o domínio e o contradomínio de f.

b) os zeros de f.

c) um intervalo onde f seja decrescente.

d) o conjunto solução da condição $f(x) \leq 0$.

5.2 Construa uma tabela de variação de f e indique, caso existam, os extremos de f.

5.3 Indique, justificando, o valor lógico da seguinte proposição: "f é uma função limitada".

5.4 Indique o domínio e o contradomínio das funções definidas por:

a) $g(x) = f(x-1)$

b) $h(x) = -2f(x)$

6. Considere a família de funções afins definida por: $g(x) = (a-2)x + 3 \ (a \in \mathbb{R})$.

6.1 Determine os valores de a, de modo que g seja decrescente.

6.2 Considere $a = -1$ e prova que g não é par nem ímpar.

7. Uma empresa de telecomunicações anuncia o seguinte plano de preços para as chamadas telefónicas feitas a partir de um telefone registado na empresa:

- 12 cêntimos pelo primeiro minuto de conversação (se a chamada durar menos de um minuto, o preço a pagar também é de 12 cêntimos);
- 0,1 cêntimos por segundo a partir do primeiro minuto.

Por exemplo, se uma chamada durar um minuto e meio, o preço a pagar é 15 cêntimos (12 cêntimos pelo primeiro minuto, mais 0,1 cêntimos por cada um dos 30 segundos seguintes). Indique qual das expressões seguintes dá o preço a pagar, em cêntimos, por uma chamada feita a partir de um telefone registado nessa empresa, em função do tempo t de duração da chamada, medido em segundos.

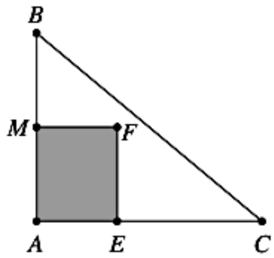
(A) $\begin{cases} 12t & \text{se } t \leqslant 60 \\ 12 + 0{,}1(t-60) & \text{se } t > 60 \end{cases}$

(B) $\begin{cases} 12 & \text{se } t \leqslant 60 \\ 12 + 0{,}1t & \text{se } t > 60 \end{cases}$

(C) $\begin{cases} 12 & \text{se } t \leqslant 60 \\ 12 + 0{,}1(t-60) & \text{se } t > 60 \end{cases}$

(D) $\begin{cases} 12 & \text{se } t \leqslant 60 \\ 12 + 0{,}1t & \text{se } t > 60 \end{cases}$

8. Na figura está representado um triângulo [ABC], retângulo em A e de hipotenusa 10 cm, e um quadrado [AEFM], em que M é o ponto médio de [AB].



Se $x = \overline{AB}$, então, a área do triângulo não ocupada é dada por:

(A) $\dfrac{x\sqrt{100-x^2}-x^2}{2}$ **(C)** $\dfrac{2x\sqrt{100-x^2}-x^2}{4}$

(B) $x\sqrt{100-x^2}-x^2$ **(D)** $\dfrac{x\sqrt{100-x^2}}{2}$

9. Sem recorrer, à calculadora, exceto para eventuais cálculos numéricos, resolva, em ℝ, as seguintes inequações:

a) $(2x-1)^2 \leq (x+2)^2$

b) $(x-1)(1-2x) \geq 0$

c) $|x-4| = \frac{1}{3}$

d) $|2x-1| - 7 = -10$

e) $|4-3x| < 5$

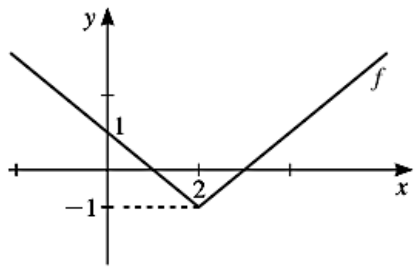
f) $3|-x+3| \geq 9$

10. Considera a função h, real de variável real: $h(x) = \begin{cases} x^2+1 & se \quad x \geq 0 \\ x^2-9 & se \quad x < 0 \end{cases}$

10.1 Determine o conjunto dos zeros de h.

10.2 Representa graficamente a função h.

11. Na figura está representada parte do gráfico de uma função f, real de variável real, de domínio ℝ.



O gráfico de f é a união de duas semirretas, tem eixo de simetria de equação $x = 2$, $f(0) = 1$ e $f(2) = -1$.

11.1 Determine uma expressão analítica de f.

11.2 Sem recorrer à calculadora determine:

a) os valores de x para os quais $f(x) \geq 1$.

b) os zeros e o contradomínio da função g, definida por $g(x) = -f(x) - 1$.

12. Resolva, em ℝ, as seguintes condições:

a) $\sqrt{6-x} = -x$

b) $\sqrt{2x-1} = \sqrt{x+4}$

c) $\sqrt[3]{2x-3} = -1$

d) $\sqrt{x+2} = \sqrt{3x-5} - 1$

e) $\sqrt{7-x} \geq 4$

13. Determine o conjunto solução da condição $x(x-1)^2(x-2) \leq 0$.

14. Estude a paridade das seguintes funções, reais de variável real, definidas por:

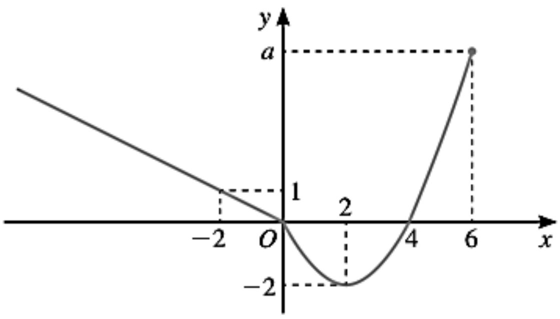
a) $f(x) = -x^2 + 3x^4$ b) $g(x) = |3x| + 2$ c) $i(x) = -2\sqrt[3]{x}$ d) $l(x) = x^2 + x^3$

15. Considere as funções f e g, reais de variável real, definidas por $f(x) = x^2 - 4$ e $g(x) = x$.

a) Caracterize a função $g \circ f$.

b) Determine o conjunto solução da equação $g \circ f(x) = x + 2$.

16. Na figura, está representada parte do gráfico de uma função f, de domínio $]-\infty, 6]$, constituído por um arco de parábola e uma semirreta. A semirreta tem origem no ponto (0,0) e passa em (-2,1). Os pontos de coordenadas (0,0) e (4,0) pertencem ao arco de parábola e o vértice tem coordenadas (2,-2).



a) Defina analiticamente a função.

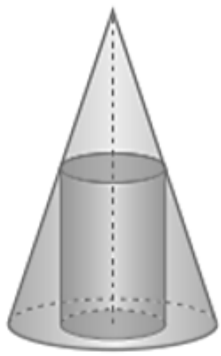
b) Represente graficamente a função definida por $p(x) = |f(x-2)|$.

c) Indique o conjunto solução da condição $f(x) > 0$.

d) Indique uma restrição de f injetiva.

17. Na figura está representado um cilindro reto inscrito num cone igualmente reto.

Sabe-se que:



- a base do cilindro está contida na base do cone;
- o eixo do cilindro está contido no eixo do cone;
- as geratrizes do cone são tangentes à circunferência que limita a base superior do cilindro;
- o cone tem 12 cm de altura e 4 cm de raio da base;
- o cilindro tem x cm de altura,

17.1 Mostre que o volume do cilindro, em função de x e em centímetros cúbicos, é dado por:

$$V(x) = \pi\left(\frac{x^3}{9} - \frac{8x^2}{3} + 16x\right)$$

17.2 Sabendo que o cilindro tem $50\ cm^3$ de volume, determine recorrendo à calculadora gráfica, o raio da base e a altura.

18. Seja f uma função bijetiva e ímpar tal que $f(5) = -3$ e seja g a função real de variável real definida por $g(x) = \sqrt[3]{2x-3}$. Qual é o valor de $(f^{-1} \circ g)(15)$?

(A) 3 **(B)** -3 **(C)** 5 **(D)** -5

19. Qual das condições seguintes define, em referencial o.n. Oxyz, uma reta paralela ao eixo Oz?

(A) $(x,y,z) = (7,0,0) + k(1,0,0), k \in \mathbb{R}$
(B) $(x,y,z) = (1,1,0) + k(7,0,0), k \in \mathbb{R}$
(C) $(x,y,z) = (1,1,0) + k(0,0,7), k \in \mathbb{R}$
(D) $(x,y,z) = (0,0,7) + k(1,1,0), k \in \mathbb{R}$

20. Considera a função, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $f(x) = \begin{cases} x^2+2 & se \quad x \leq 0 \\ x^3-1 & se \quad x > 0 \end{cases}$

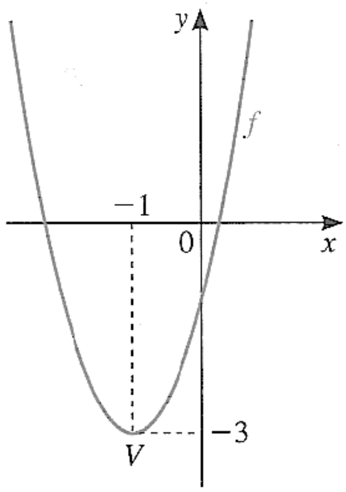
Indica o valor de $f\left(5^{-\frac{1}{3}}\right) \times f(0)$.

(A) $-\frac{8}{5}$ **(B)** $-\frac{1}{5}$ **(C)** $\sqrt[3]{25}+2$ **(D)** $-\sqrt[3]{25}-1$

21. São dados o número real $a < 0$ e a função, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $g(x) = \sqrt[3]{x-a}$.
Quanto ao gráfico de g, pode-se concluir que:

(A) Tem a concavidade voltada para baixo em $]-\infty, 0]$ e tem a concavidade voltada para cima em $[0, +\infty[$.
(B) Tem a concavidade voltada para cima em $]-\infty, 0]$ e tem a concavidade voltada para baixo em $[0, +\infty[$.
(C) Tem a concavidade voltada para baixo em $]-\infty, a]$ e tem a concavidade voltada para cima em $[a, +\infty[$.
(D) Tem a concavidade voltada para cima em $]-\infty, a]$ e tem a concavidade voltada para baixo em $[a, +\infty[$.

22. Na figura está representada, num referencial xOy, parte da parábola que é o gráfico de uma função f.



Sabe-se que:

- a parábola interseta o eixo Oy no ponto de coordenadas $(0, -1)$;
- o ponto V tem de coordenadas $(-1, -3)$.

22.1 Indique os intervalos de monotonia.

22.2 Mostre que: $f(x) = 2x^2 + 4x - 1$.

22.3 Relativamente à função f, indique:

22.3.1 uma equação do eixo de simetria;

22.3.2 o extremo absoluto;

22.3.3 o número de soluções da equação $f(x) = -5$;

22.3.4 os zeros.

22.4 Seja g a função de domínio $\mathbb{R}$, definida por $g(x) = -f(2x) + 1$. Determine o contradomínio de g.

22.5 Considera as seguintes proposições:

p: $\exists x_1, x_2 \in D_f, f(x_1) = f(x_2) \wedge x_1 \neq x_2$

q: Se P, Q e R são pontos do gráfico da função f tal que $x_P < x_Q < x_R$, então $m_{PQ} > m_{QR}$.

r: Para $\forall x \in]0,1[, f(x) \geq 0$.

Indica o valor lógico de $(p \wedge \sim q) \vee r$. Justifica a tua resposta.

23. Considera as funções reais definidas por $f(x) = \sqrt{5x-4}$ e $g(x) = 6 - 3x$.

23.1 Indica o domínio de cada uma das funções.

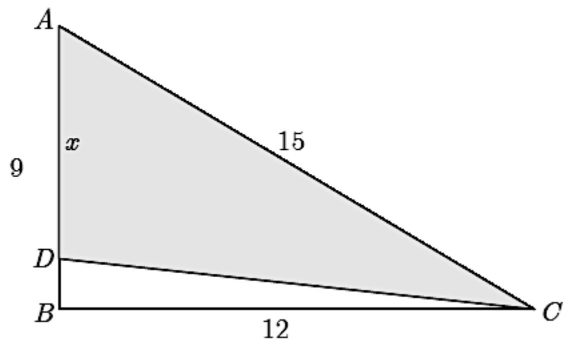
23.2 Caracteriza a função $f \circ g$.

23.3 Justifica a existência da função f^{-1} e caracterize-a.

23.4 Usando exclusivamente métodos analíticos, determine o conjunto-solução da condição $f(x) - \frac{x+4}{2} = 0$.

24. Na figura está representado o triângulo $[ABC]$, retângulo em B. Sabe-se que:

- $\overline{AB} = 9$;
- $\overline{AC} = 15$;
- $\overline{BC} = 12$.



Considera um ponto D que se desloca ao longo do cateto $[AB]$, nunca coincidindo com o vértice B.

Sejam $x = \overline{AD}$ e $P(x)$ o perímetro do triângulo $[ADC]$ seja superior ou igual a 34.

Começa por mostrar que $P(x) = x + 15 + \sqrt{x^2 - 18x + 225}$.