Escola Secundária de Paredes

Proposta de Resolução do 1º Teste de Avaliação - Versão 1

Matemática A

12.º Ano de Escolaridade | outubro de 2022

Turma: 12ºH

1. $\lim\limits_{x\to -3^-} \dfrac{-2x-6}{(x+3)^2} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim\limits_{x\to -3^-} \dfrac{-2(x+3)}{(x+3)^2} = \lim\limits_{x\to -3^-} \dfrac{-2}{x+3} = \dfrac{-2}{0^-} = +\infty$

   Resposta: (B)

2. $D_f = \left\{x \in \mathbb{R} : x^2+2x+1 \neq 0\right\} = \{x \in \mathbb{R} : x \neq -1\} = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$

   Cálculo auxiliar

   $x^2+2x+1=0 \Leftrightarrow (x+1)^2=0 \Leftrightarrow x+1=0 \Leftrightarrow x=-1$

   Por outro lado, sabe-se que -1 é zero do polinómio x^3+x^2+x+1

   Então,

   $x^3+x^2+x+1 = (x+1)Q(x)$

   Pela regra de Ruffini, vem,

   $$\begin{array}{r|rrr|r} & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & & -1 & 0 & -1 \\ \hline & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}$$

   Assim,

   $Q(x) = x^2+1$

   Logo,

   $x^3+x^2+x+1 = (x+1)(x^2+1)$

   Assim,

   $f(x) = \dfrac{x^3+x^2+x+1}{x^2+2x+1} = \dfrac{(x+1)(x^2+1)}{(x+1)^2} = \dfrac{x^2+1}{x+1}$, com $x \neq -1$

3. .

3.1. .

3.1.1. $4 \in D_f$

Para existir $\lim\limits_{x \to 4} f(x)$, deve ter-se $\lim\limits_{x \to 4^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 4^+} f(x) = f(4)$

Ora,

- $\lim\limits_{x \to 4^-} f(x) = -1$
- $\lim\limits_{x \to 4^+} f(x) = -1$
- $f(4) = 3$

Como, $\lim\limits_{x \to 4^-} f(x) \neq f(4)$ e $\lim\limits_{x \to 4^+} f(x) \neq f(4)$, então, não existe $\lim\limits_{x \to 4} f(x)$

3.1.2. $2 \notin D_f$ e é ponto aderente de D_f

Para existir $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$, deve ter-se $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^+} f(x)$

Ora,

- $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = -1$
- $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = -1$

Como, $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^+} f(x)$, então, existe $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$, e o seu valor é -1

3.2. Ora,

$a_n = -2 - \dfrac{2}{n+2} < -2, \forall n \in \mathbb{N}$

$\lim a_n = \lim \left(-2 - \dfrac{2}{n+2} \right) = -2^-$

Assim, $\lim f(a_n) = 3$

Resposta: (A)

4. $D_g = \{x \in \mathbb{R} : f(x) \geq 0\} = \{x \in \mathbb{R} : x \leq 0 \vee x \geq 2\} =]-\infty; 0] \cup [2; +\infty[$

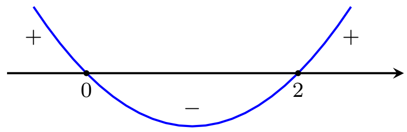
Cálculo auxiliar

$f(x) \geq 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x \geq 0$

- $x^2 - 2x = 0 \Leftrightarrow x(x-2) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 2$

- **Sinal:**

  Como se trata de uma função quadrática, estuda-se o sinal pela representação gráfica da parábola

  Assim,

  $x^2 - 2x > 0 \Leftrightarrow x < 0 \vee x > 2$

  $x^2 - 2x < 0 \Leftrightarrow 0 < x < 2$

Resposta: (A)

5. .

5.1. Para toda a sucessão (a_n), tal que $a_n \in D_f$ e $\lim a_n = -2$, tem-se,

$$\lim f(a_n) = \lim \frac{2a_n}{(a_n)^2 + 4a_n} = \frac{2 \times \lim a_n}{(\lim a_n)^2 + 4 \times \lim a_n} = \frac{2 \times (-2)}{(-2)^2 + 4 \times (-2)} = \frac{-4}{-4} = 1$$

Assim,

$$\lim_{x \to -2} f(x) = 1$$

5.2. $f(x) \leq \frac{1}{x} \Leftrightarrow \frac{2x}{x^2 + 4x} \leq \frac{1}{x} \Leftrightarrow \frac{2x}{x(x+4)} - \frac{1}{x} \leq 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \frac{2x}{x(x+4)} - \frac{x+4}{x(x+4)} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{2x - (x+4)}{x(x+4)} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{x-4}{x(x+4)} \leq 0$$

$\twoheadrightarrow$ **Numerador:**

Zeros: $x - 4 = 0 \Leftrightarrow x = 4$

Sinal:

$x - 4 > 0 \Leftrightarrow x > 4$

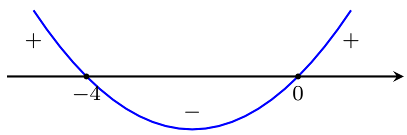
$x - 4 < 0 \Leftrightarrow x < 4$

$\twoheadrightarrow$ **Denominador**

Zeros: $x(x+4) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x + 4 = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = -4$

Sinal:

Como se trata de uma função quadrática, estuda-se o sinal pela representação gráfica da parábola



Assim,

$x(x+4) > 0 \Leftrightarrow x < -4 \vee x > 0$

$x(x+4) < 0 \Leftrightarrow -4 < x < 0$

Quadro de sinais

x	$-\infty$	-4		0		4	$+\infty$
$x-4$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$x(x+4)$	$+$	0	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$\frac{x-4}{x(x+4)}$	$-$	$n.d.$	$+$	$n.d.$	$-$	0	$+$

Assim,

$$\frac{x-4}{x(x+4)} \leq 0 \Leftrightarrow x < -4 \vee 0 < x \leq 4$$

Portanto,

$C.S. = \left]-\infty; -4\right[\cup \left]0; 4\right]$

5.3. $D_g = \left\{x \in \mathbb{R} : 4x+5 \geq 0 \wedge \sqrt{4x+5} - 3 \neq 0\right\} = \left\{x \in \mathbb{R} : x \geq -\frac{5}{4} \wedge x \neq 1\right\} = \left[-\frac{5}{4}; 1\right[\cup \left]1; +\infty\right[$

Cálculo auxiliar

- $4x + 5 \geq 0 \Leftrightarrow 4x \geq -5 \Leftrightarrow x \geq -\frac{5}{4}$
- $\sqrt{4x+5} - 3 = 0 \wedge 4x+5 \geq 0 \Leftrightarrow \sqrt{4x+5} = 3 \wedge x \geq -\frac{5}{4}$

  $\Rightarrow \left(\sqrt{4x+5}\right)^2 = 3^2 \wedge x \geq -\frac{5}{4} \Leftrightarrow 4x+5 = 9 \wedge x \geq -\frac{5}{4} \Leftrightarrow$

  $\Leftrightarrow 4x = 9 - 5 \wedge x \geq -\frac{5}{4} \Leftrightarrow 4x = 4 \wedge x \geq -\frac{5}{4} \Leftrightarrow x = 1 \wedge x \geq -\frac{5}{4}$

  $\Leftrightarrow x = 1$

  Verificação:

  $x = 1 \mapsto \sqrt{4 \times 1 + 5} - 3 = 0$

  $\therefore \sqrt{9} - 3 = 0 = 0$

  $\therefore 3 - 3 = 0$

  $\therefore 0 = 0$ (Verdadeiro)

  Logo, 1 é solução da equação dada

6. .

6.1. $D_h = \{x \in \mathbb{R} : g(x) \neq 0\} = \{x \in \mathbb{R} : x \neq -2 \wedge x \neq 0 \wedge x \neq 3\} = \mathbb{R} \setminus \{-2; 0; 3\}$

6.2. Elaborando um quadro de sinal, vem,

x	$-\infty$	-2		0		3	$+\infty$
$f(x)$	$+$	$+$	$+$	0	$-$	0	$+$
$g(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$
$\frac{g(x)}{f(x)}$	$+$	0	$-$	$n.d.$	$-$	$n.d.$	$-$

Assim,

$$\frac{g(x)}{f(x)} \leq 0 \Leftrightarrow -2 \leq x < 0 \vee 0 < x < 3 \vee x > 3$$

Portanto,

$C.S. = \left[-2; 0\right[\cup \left]0; 3\right[\cup \left]3; +\infty\right[$

7. $\lim\limits_{x \to 1} \left[\frac{1}{x^3-1} \times \left(2x^2+3x-5\right)\right] =^{(0\times\infty)} \lim\limits_{x \to 1} \frac{2x^2+3x-5}{x^3-1} =^{\left(\frac{0}{0}\right)} \lim\limits_{x \to 1} \frac{(x-1)(2x+5)}{(x-1)(x^2+x+1)} =$

$= \lim\limits_{x \to 1} \frac{2x+5}{x^2+x+1} = \frac{7}{3}$

Cálculo auxiliar

Sabe-se que 1 é zero do polinómio $2x^2 + 3x - 5$

Então,

$2x^2 + 3x - 5 = (x - 1)Q(x)$

Pela regra de Ruffini, vem,

$$\begin{array}{c|cc|c} & 2 & 3 & -5 \\ 1 & & 2 & 5 \\ \hline & 2 & 5 & 0 \end{array}$$

Assim,

$Q(x) = 2x + 5$

Logo,

$2x^2 + 3x - 5 = (x - 1)(2x + 5)$

Sabe-se que 1 é zero do polinómio $x^3 - 1$

Então,

$x^3 - 1 = (x - 1)Q(x)$

Pela regra de Ruffini, vem,

$$\begin{array}{c|ccc|c} & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & & 1 & 1 & 1 \\ \hline & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}$$

Assim,

$Q(x) = x^2 + x + 1$

Logo,

$x^3 - 1 = (x - 1)(x^2 + x + 1)$

Resposta: (B)

8. $3 \in D_f$

A função f é contínua em $x = 3$, se existir $\lim\limits_{x \to 3} f(x)$, ou seja,

se $\lim\limits_{x \to 3^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 3^+} f(x) = f(3)$

Ora,

- $\lim\limits_{x \to 3^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 3^-} \dfrac{3x^2 - 6x - 9}{x^2 - 7x + 12} =^{\left(\frac{0}{0}\right)} \lim\limits_{x \to 3^-} \dfrac{(x-3)(3x+3)}{(x-3)(x-4)} = \lim\limits_{x \to 3^-} \dfrac{3x+3}{x-4} = -12$

Cálculo auxiliar

Sabe-se que 3 é zero do polinómio $3x^2-6x-9$

Então,

$3x^2-6x-9=(x-3)Q(x)$

Pela regra de Ruffini, vem,

$$\begin{array}{c|cc|c} & 3 & -6 & -9 \\ 3 & & 9 & 9 \\ \hline & 3 & 3 & 0 \end{array}$$

Assim,

$Q(x)=3x+3$

Logo,

$3x^2-6x-9=(x-3)(3x+3)$

Sabe-se que 3 é zero do polinómio $x^2-7x+12$

Então,

$x^2-7x+12=(x-3)Q(x)$

Pela regra de Ruffini, vem,

$$\begin{array}{c|cc|c} & 1 & -7 & 12 \\ 3 & & 3 & -12 \\ \hline & 1 & -4 & 0 \end{array}$$

Assim,

$Q(x)=x-4$

Logo,

$x^2-7x+12=(x-3)(x-4)$

- $\lim\limits_{x\to 3^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 3^+}\frac{\sqrt{x+6}-3}{x-3}=^{\left(\frac{0}{0}\right)}\lim\limits_{x\to 3^+}\frac{\left(\sqrt{x+6}-3\right)\left(\sqrt{x+6}+3\right)}{(x-3)\left(\sqrt{x+6}+3\right)}=\lim\limits_{x\to 3^+}\frac{\left(\sqrt{x+6}\right)^2-3^2}{(x-3)\left(\sqrt{x+6}+3\right)}=$
$=\lim\limits_{x\to 3^+}\frac{x+6-9}{(x-3)\left(\sqrt{x+6}+3\right)}=\lim\limits_{x\to 3^+}\frac{x-3}{(x-3)\left(\sqrt{x+6}+3\right)}=$
$=\lim\limits_{x\to 3^+}\frac{1}{\sqrt{x+6}+3}=\frac{1}{6}$
- $f(3)=-2k+3$

Como $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x)\neq\lim\limits_{x\to 3^+} f(x)$, então, não existe $\lim\limits_{x\to 3} f(x)$

Ou seja, não existe k, para o qual a função f é contínua em $x=3$

9. $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2+5}+3x}{x+2}=^{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2\left(1+\frac{5}{x^2}\right)}+3x}{x+2}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{|x|\sqrt{1+\frac{5}{x^2}}+3x}{x+2}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{-x\sqrt{1+\frac{5}{x^2}}+3x}{x+2}=$
$=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x\left(-\sqrt{1+\frac{5}{x^2}}+3\right)}{x\left(1+\frac{2}{x}\right)}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{-\sqrt{1+\frac{5}{x^2}}+3}{1+\frac{2}{x}}=\frac{-\sqrt{1+\frac{5}{+\infty}}+3}{1+\frac{2}{-\infty}}=\frac{-\sqrt{1+0}+3}{1-0}=2$