Números Complexos (12.º ano)

Equações e problemas

Exercícios de Provas Nacionais e Testes Intermédios

1. Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, considere os números complexos z_1 e z_2 , dados por:
   - $z_1 = (1+i)^2 \times (2+i) + i^7$
   - $z_2 = \operatorname{sen}\theta + i\cos\theta$, com $\theta \in [0,2\pi[$

   Determine, sem recorrer à calculadora, o valor de θ tal que $z_1 \times z_2 = 3 + 2i$.

   Exame – 2022, Ép. especial

2. Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, sejam $z_1 = \frac{1}{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$ e $z_2 = 2i$

   Determine, sem recorrer à calculadora, os números complexos z que são solução da equação

   $$iz^2 + {z_1}^2 \times \left(\overline{z_2}\right)^3 - 2 = 0$$

   Apresente esses números na forma trigonométrica.

   Exame – 2021, Ép. especial

3. Resolva este item sem recorrer à calculadora.

   Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, a condição $(1+2i)z + (1-2i)\bar{z} + 10 = 0$ define, no plano complexo, uma reta.

   Considere todos os números complexos cujos afixos pertencem a esta reta.

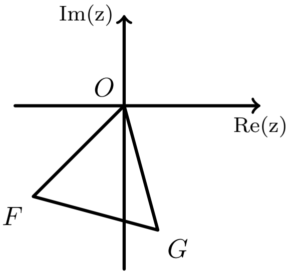
   Determine qual deles tem menor módulo.

   Apresente esse número complexo na forma $a + bi$, com $a,b \in \mathbb{R}$

   Exame – 2021, 2.ª Fase

4. Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, considere o número complexo $z_1 = -1 - i$

Na figura ao lado está representado, no plano complexo, o triângulo equilátero $[OFG]$



Sabe-se que o ponto F é a imagem geométrica do número complexo z_1 e que o ponto G é a imagem geométrica do número complexo $z_1 \times z_2$ e pertence ao quarto quadrante.

A que é igual o número complexo z_2 ?

(A) $\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$ **(B)** $\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ **(C)** $1 + \sqrt{2}i$ **(D)** $1 + \sqrt{3}i$

Exame – 2020, Ép. especial

5. Seja $\mathbb{C}$ o conjunto dos números complexos.

Resolva este item sem recorrer à calculadora.

Seja $z_1 = \frac{2}{1-i} + \frac{4}{i^5}$ e seja z_2 um número complexo tal que $|z_2| = \sqrt{5}$

Sabe-se que, no plano complexo, o afixo de $z_1 \times z_2$ tem coordenadas positivas e iguais.

Determine z_2 Apresente a resposta na forma $a + bi$, com $a,b \in \mathbb{R}$

Exame – 2020, 2.ª Fase

6. Seja $\mathbb{C}$ o conjunto dos números complexos.

Resolva este item sem recorrer à calculadora. Considere, em $\mathbb{C}$, a equação $z^2 = \overline{z}$

Sabe-se que, no plano complexo, os afixos dos números complexos não nulos que são soluções desta equação são os vértices de um polígono regular.

Determine o perímetro desse polígono.

Exame – 2020, 1.ª Fase

7. Para um certo número real x, pertencente ao intervalo $\left]0, \frac{\pi}{12}\right[$, o número complexo $z = (\cos x + i \operatorname{sen} x)^{10}$ verifica a condição $\operatorname{Im}(z) = \frac{1}{3}\operatorname{Re}(z)$

Qual é o valor de x arredondado às centésimas?

(A) 0,02 **(B)** 0,03 **(C)** 0,12 **(D)** 0,13

Exame – 2018, 1.ª Fase

8. Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, sejam

$$z_1 = \frac{1-3i^{19}}{1+i} \quad \text{e} \quad z_2 = -3ke^{i\left(\frac{3\pi}{2}\right)}, \text{com } k \in \mathbb{R}^+$$

Sabe-se que, no plano complexo, a distância entre a imagem geométrica de z_1 e a imagem geométrica de z_2 é igual a $\sqrt{5}$

Qual é o valor de k ?

Resolva este item sem recorrer à calculadora.

Exame – 2017, 1.ª Fase

9. Seja ρ um número real positivo, e seja θ um número real pertencente ao intervalo $]0,\pi[$
Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, considere $z = \dfrac{-1+i}{\left(\rho e^{i\theta}\right)^2}$ e $w = -\sqrt{2}i$

Sabe-se que $z = w$

Determine o valor de ρ e o valor de θ

Exame – 2016, 2.ª Fase

10. Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, considere

$$z_1 = \frac{8e^{i\theta}}{-1+\sqrt{3}i} \text{ e } z_2 = e^{i(2\theta)}$$

Determine o valor de θ pertencente ao intervalo $]0,\pi[$ de modo que $\overline{z_1} \times z_2$ seja um número real.

Exame – 2016, 1.ª Fase

11. Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, considere $z = \dfrac{-2+2i^{19}}{\sqrt{2}e^{i\theta}}$

Determine os valores de θ pertencentes ao intervalo $]0,2\pi[$, para os quais z é um número imaginário puro.
Na resolução deste item, não utilize a calculadora.

Exame – 2015, 1.ª Fase

12. Seja $\mathbb{C}$ o conjunto dos números complexos.
Resolva os dois itens seguintes sem utilizar a calculadora.

12.1. Considere $z_1 = \dfrac{1-i}{2i} - i^{-1}$ e $z_2 = e^{i\left(-\frac{\pi}{4}\right)}$
Averigue se a imagem geométrica do complexo $(z_1)^4 \times \overline{z_2}$ pertence à bissetriz dos quadrantes ímpares.

12.2. Considere o número complexo $w = \operatorname{sen}(2\alpha) + 2i\cos^2\alpha$ com $\alpha \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$
Escreva w na forma trigonométrica.

Exame – 2014, Ép. especial

13. Seja $\mathbb{C}$ o conjunto dos números complexos.

13.1. Considere $z = 2e^{i\left(\frac{\pi}{6}\right)}$ e $w = \dfrac{(z-i)^4}{1+zi}$

No plano complexo, seja O a origem do referencial.
Seja A a imagem geométrica do número complexo $\overline{z}$ e seja B a imagem geométrica do número complexo w
Determine a área do triângulo $[AOB]$, sem utilizar a calculadora.

13.2. Seja $\alpha \in]0,\pi[$
Resolva, em $\mathbb{C}$, a equação $z^2 - 2\cos\alpha z + 1 = 0$
Apresente as soluções, em função de α, na forma trigonométrica.

Exame – 2014, 2.ª Fase

14. Seja $\mathbb{C}$ o conjunto dos números complexos.

14.1. Considere $z_1 = \dfrac{\left(-1+\sqrt{3}i\right)^3}{1-i}$ e $z_2 = e^{i\alpha}$, com $\alpha \in [0,\pi[$
Determine os valores de α, de modo que $z_1 \times (z_2)^2$ seja um número imaginário puro, sem utilizar a calculadora.

14.2. Seja z um número complexo tal que $|1+z|^2 + |1-z|^2 \leq 10$
Mostre que $|z| \leq 2$

Exame – 2014, 1.ª Fase

15. Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, considere $z_1 = \dfrac{1+\sqrt{3}i}{1+2ie^{i\left(\frac{5\pi}{6}\right)}}$
Seja $z = e^{i\theta}$, com θ pertencente a $[0,2\pi[$
Determine θ de modo que $\dfrac{z}{z_1}$ seja um número real negativo, sem utilizar a calculadora.

Exame – 2013, Ép. especial

16. Seja $\mathbb{C}$ o conjunto dos números complexos.
Considere $z_1 = \dfrac{1+\sqrt{3}i}{2} + i^{22}$ e $z_2 = \dfrac{-2}{iz_1}$
Determine, sem utilizar a calculadora, o menor número natural n tal que $(z_2)^n$ é um número real negativo.

Exame – 2013, 2.ª Fase

17. Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, considere $z_2 = 1+i$
Seja $z_3 = e^{i\alpha}$
Determine o valor de α pertencente ao intervalo $]-2\pi,-\pi[$ sabendo que $z_3 + \overline{z_2}$ é um número real.

Exame – 2013, 1.ª Fase

18. Seja $\mathbb{C}$ o conjunto dos números complexos; i designa a unidade imaginária.
Mostre, sem recorrer à calculadora, que o número $2e^{i\left(\frac{\pi}{10}\right)}$ é solução da equação $z^6 \times \overline{z} = 128i$
$\overline{z}$ designa o conjugado de z

Teste Intermédio 12.º ano – 24.05.2013

19. Seja $\mathbb{C}$ o conjunto dos números complexos.
Seja w um número complexo não nulo.
Mostre, sem recorrer à calculadora, que, se o conjugado de w é igual a metade do inverso de w, então a imagem geométrica de w pertence à circunferência de centro na origem e de raio $\frac{\sqrt{2}}{2}$

Exame – 2012, Ép. especial

20. Seja $\mathbb{C}$ o conjunto dos números complexos.
Seja $\alpha \in \left]\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right[$
Sejam z_1 e z_2 dois números complexos tais que $z_1 = e^{i\alpha}$ e $z_2 = e^{i\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right)}$
Mostre, analiticamente, que a imagem geométrica de $z_1 + z_2$, no plano complexo, pertence ao 2.º quadrante.

Exame – 2012, 2.ª Fase

21. Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, considere $z_1 = (-2+i)^3$ e $z_2 = \frac{1+28i}{2+i}$

21.1. Resolva a equação $z^3 + z_1 = z_2$, sem recorrer à calculadora.
Apresente as soluções da equação na forma trigonométrica.

21.2. Seja w um número complexo não nulo.
Mostre que, se w e $\frac{1}{w}$ são raízes de índice n de um mesmo número complexo z, então $z = 1$ ou $z = -1$

Exame – 2012, 1.ª Fase

22. Seja $\mathbb{C}$ o conjunto dos números complexos; i designa a unidade imaginária.
Para um certo número inteiro k, a expressão $\frac{\left(\sqrt{2}i\right)^3 \times e^{i\left(\frac{\pi}{4}\right)}}{k+i}$ designa um número real.
Determine esse número k

Teste Intermédio 12.º ano – 24.05.2012

23. Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, resolva os dois itens seguintes sem recorrer à calculadora.

23.1. Seja w o número complexo com coeficiente da parte imaginária positivo que é solução da equação $z^2 + z + 1 = 0$
Determine $\frac{1}{w}$
Apresente o resultado na forma trigonométrica.

23.2. Seja z um número complexo.
Mostre que $(\overline{z} + i) \times (z - i) = |z - i|^2$, para qualquer número complexo z
($\overline{z}$ designa o conjugado de z)

Exame – 2011, Prova especial

24. Seja $\mathbb{C}$ o conjunto dos números complexos.
Resolva os dois itens seguintes sem recorrer à calculadora.

24.1. Considere $z_1 = 1 + 2i$ e $w = \frac{z_1 \times i^{4n+3} - b}{\sqrt{2}e^{i\left(\frac{5\pi}{4}\right)}}$, com $b \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}$
Determine o valor de b para o qual w é um número real.

24.2. Seja z um número complexo tal que $|z| = 1$.
Mostre que $|1 + z|^2 + |1 - z|^2 = 4$

Exame – 2011, 2.ª Fase

25. Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, considere

$$z_1 = 1,\ z_2 = 5i \text{ e } z_3 = e^{i\left(\frac{n\pi}{40}\right)},\ n \in \mathbb{N}$$

Resolva os dois itens seguintes sem recorrer à calculadora.

25.1. O complexo z_1 é raíz do polinómio $z^3 - z^2 + 16z - 16$
Determine, em $\mathbb{C}$, as restantes raízes do polinómio.
Apresente as raízes obtidas na forma trigonométrica.

25.2. Determine o menor valor de n natural para o qual a imagem geométrica de $z_2 \times z_3$, no plano complexo, está no terceiro quadrante e pertence à bissetriz dos quadrantes ímpares.

Exame – 2011, 1.ª Fase

26. Seja $\mathbb{C}$ o conjunto dos números complexos.
Considere a equação $z^3 - z^2 + 4z - 4 = 0$
Esta equação tem três soluções em $\mathbb{C}$, sendo uma delas o número real 1
As imagens geométricas, no plano complexo, dessas três soluções são vértices de um triângulo.
Determine o perímetro desse triângulo.
Resolva este item **sem recorrer à calculadora**.

Teste Intermédio 12.º ano – 26.05.2011

27. Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, considere e $z_1 = e^{i\left(\frac{\pi}{7}\right)}$ e $z_2 = 2 + i$
Mostre que $|z_1 + z_2|^2 = 6 + 4\cos\left(\frac{\pi}{7}\right) + 2\,\text{sen}\left(\frac{\pi}{7}\right)$, recorrendo a métodos exclusivamente analíticos.

Exame – 2010, 1.ª Fase

28. Determine o valor de θ, pertencente ao intervalo $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, de modo que a imagem geométrica do número complexo $\left(2e^{i\theta}\right)^2 \times \left(1 + \sqrt{3}i\right)$ pertença à bissetriz do 3.º quadrante .

Exame – 2009, Ép. especial

29. Seja k um número real, e $z_1 = (k - i)(3 - 2i)$ um número complexo.
Qual é o valor de k, para que z_1 seja um número imaginário puro?

(A) $-\frac{3}{2}$ **(B)** $-\frac{2}{3}$ **(C)** $\frac{2}{3}$ **(D)** $\frac{3}{2}$

Exame – 2009, 2.ª Fase

30. Considere, em $\mathbb{C}$, um número complexo w, cuja imagem geométrica no plano complexo é um ponto A, situado no 1.º quadrante. Sejam os pontos B e C, respectivamente, as imagens geométricas de $\overline{w}$ (conjugado de w) e de $(-w)$.
Sabe-se que $\overline{BC} = 8$ e que $|w| = 5$.
Determine a área do triângulo $[ABC]$.

Exame – 2009, 2.ª Fase

31. Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, considere $z_2 = e^{i\left(\frac{5}{6}\pi\right)}$.
Determine o menor valor de $n \in \mathbb{N}$, tal que $(-iz_2)^n = -1$.

Exame – 2009, 1.ª Fase

32. Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, sejam os números $z_2 = 8e^{i\left(-\frac{\pi}{4}\right)}$ (i designa a unidade imaginária).
Considere o número complexo $z = \overline{z_2}$.
No plano complexo, sejam A e B as imagens geométricas de z e de z_2, respetivamente.
Determine a área do triângulo $[AOB]$, em que O é a origem do referencial.

Exame – 2008, Ép. especial

33. Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, considere $z_1 = 1 - \sqrt{3}i$ (i designa a unidade imaginária).
No plano complexo, sejam A e B as imagens geométricas de z_1 e de $z_2 = z_1.i^{46}$, respetivamente.
Determine o comprimento do segmento $[AB]$.

Exame – 2008, 1.ª Fase

34. Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, sejam:

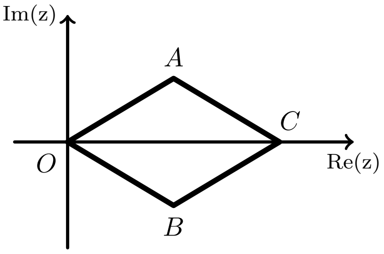
$$z_1 = 3 + yi \qquad \text{e} \qquad z_2 = 4iz_1$$

(i é a unidade imaginária e y designa um número real).
Sabendo que $\operatorname{Im}(z_1) = \operatorname{Im}(z_2)$, determine z_2.
Apresente o resultado na forma algébrica.

Exame – 2007, 2.ª fase

35. Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, considere $z = e^{i\alpha}$ $\left(\alpha \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[\right)$

35.1. Na figura ao lado está representado, no plano complexo, o paralelogramo $[AOBC]$
A e B são as imagens geométricas de z e $\overline{z}$, respetivamente.
C é a imagem geométrica de um número complexo w.
Justifique que $w = 2\cos\alpha$



35.2. Determine o valor de $\alpha \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ para o qual $\frac{z^3}{i}$ é um número real.

Exame – 2007, 1.ª fase

36. Seja $\mathbb{C}$ 0 conjunto dos números complexos; i designa a unidade imaginária.

Considere a equação $iz^3 - \sqrt{3} - i = 0$
Uma das soluções desta equação tem a sua imagem geométrica no terceiro quadrante do plano complexo.
Sem recorrer à calculadora, determine essa solução, escrevendo-a na forma trigonométrica.

Exame – 2006, Ép. especial

37. Seja $\mathbb{C}$ o conjunto dos números complexos; i designa a unidade imaginária.
Seja z um número complexo cuja imagem geométrica, no plano complexo, é um ponto A situado no primeiro quadrante.
Seja B a imagem geométrica de $\overline{z}$, conjugado de z.
Seja O a origem do referencial.
Sabe-se que o triângulo $[AOB]$ é equilátero e tem perímetro 6.
Represente o triângulo $[AOB]$ e determine z na forma algébrica.

Exame – 2006, 2.ª fase

38. Seja $\mathbb{C}$ o conjunto dos números complexos; i designa a unidade imaginária.
Considere $z_1 = e^{i\alpha}$ e $z_2 = e^{i\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)}$
Mostre que a imagem geométrica, no plano complexo, de $z_1 + z_2$ pertence à bissetriz dos quadrantes ímpares.

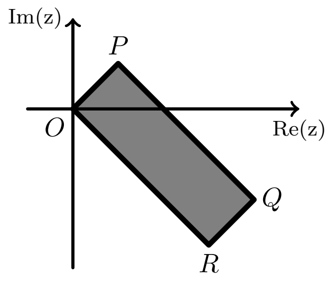
Exame – 2005, 1.ª fase

39. De dois números complexos, z_1 e z_2, sabe-se que um argumento de z_1 é $\frac{\pi}{4}$ e que o módulo de z_2 é $3\sqrt{2}$.

Na figura ao lado está representado, no plano complexo, um retângulo .
Sabe-se que:

- o ponto O é a origem do referencial
- o ponto P é a imagem geométrica de z_1
- o ponto R é a imagem geométrica de z_2
- o retângulo $[OPQR]$ tem área 6

Determine os números complexos z_1 e z_2. Apresente os resultados na forma algébrica.



Exame – 2004, Ép. especial

40. Seja z um número complexo, cuja imagem geométrica pertence ao primeiro quadrante (eixos não incluídos).
Justifique que a imagem geométrica de z^3 não pode pertencer ao quarto quadrante.

Exame – 2004, 1.ª fase

41.
- $\mathbb{C}$ é conjunto dos números complexos
- i designa a unidade imaginária

Seja z um número complexo cuja imagem geométrica, no plano complexo, é um ponto A situado no segundo quadrante e pertencente à reta definida pela equação $\text{Re}\,(z) = -2$.
Seja B a imagem geométrica de $\overline{z}$, conjugado de z.
Seja O a origem do referencial. **Represente**, no plano complexo, um triângulo $[AOB]$, de acordo com as condições enunciadas.
Sabendo que a área do triângulo $[AOB]$ é 8, **determine** z, na forma algébrica.

Exame – 2003, 2.ª Fase

42. Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, seja
$z_1 = 1 - i$ (i designa a unidade imaginária).
Determine, na forma trigonométrica, os valores, não nulos, de z para os quais $z^2 = \overline{z} \times z_1$

Exame – 2002, Prova para militares

43. Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, considere

$z_1 = 1 + i$ (i designa a unidade imaginária).

43.1. Determine os números reais b e c, para os quais z_1 é raíz do polinómio $x^2 + bx + c$

43.2. Seja $z_2 = e^{i\alpha}$.
Calcule o valor de α, pertencente ao intervalo de $[0,2\pi]$, para o qual $z_1 \times \overline{z_2}$ é um número real negativo ($\overline{z_2}$ designa o conjugado de z_2).

Exame – 2002, 2.ª Fase

44. Em $\mathbb{C}$, considere os números complexos: $z_1 = 1 + i$ e $z_2 = \sqrt{2}e^{i\left(\frac{3\pi}{4}\right)}$

Considere, no plano complexo, os pontos A, B e O em que:
- A é a imagem geométrica de z_1
- B é a imagem geométrica de z_2
- O é a origem do referencial.

Determine o perímetro do triângulo $[ABO]$.

Exame – 2002, 1.ª fase - 1.ª chamada

45. Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, considere:

$z_1 = \rho e^{i\left(\frac{\pi}{3}\right)}$ $(\rho \in \mathbb{R}^+)$

$z_2 = 2i \times z_1$

Sejam A e B as imagens geométricas, no plano complexo, de z_1 e de z_2, respetivamente. Seja O a origem do referencial.
Sabendo que a área do triângulo $[AOB]$ é igual a 16, determine, na forma algébrica, o número complexo z_1

Exame – 2001, Prova para militares

46. Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, seja

$z_1 = 1 + i$ (i designa a unidade imaginária).

Prove que, qualquer que seja o número natural n, a imagem geométrica de z_1^{4n+1} pertence à bissetriz dos quadrantes ímpares.

Exame – 2001, Ép. especial

47. Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, seja

$z_1 = 4i$ (i designa a unidade imaginária).

47.1. No plano complexo, a imagem geométrica de z_1 é um dos quatro vértices de um losango de perímetro 20, centrado na origem do referencial. Determine os números complexos cujas imagens geométricas são os restantes vértices do losango.

47.2. Sem recorrer à calculadora, resolva a equação $\left(\sqrt{2}e^{i\left(\frac{\pi}{4}\right)}\right)^2 . z = 2 + z_1$
Apresente o resultado na forma algébrica.

Exame – 2001, 1.ª fase - 2.ª chamada

48. Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, considere

$z_1 = 7 + 24i$ (i designa a unidade imaginária).

48.1. Um certo ponto P é a imagem geométrica, no plano complexo, de uma das raízes quadradas de z_1. Sabendo que o ponto P tem abcissa 4, determine a sua ordenada.

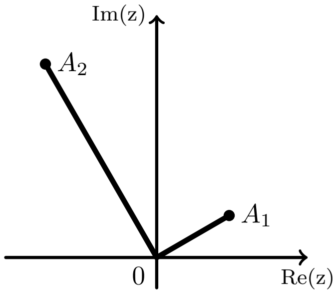
48.2. Seja $z_2 = e^{i\alpha}$ com $\alpha \in \left]\frac{3\pi}{4}, \pi\right[$

Indique, justificando, em que quadrante se situa a imagem geométrica de $z_1 \times z_2$

Exame – 2001, Prova modelo

49. Seja $\mathbb{C}$ o conjunto dos números complexos, e sejam z_1 e z_2 dois elementos de $\mathbb{C}$.
Sabe-se que:

- z_1 tem argumento $\frac{\pi}{6}$
- $z_2 = z_1^4$
- A_1 e A_2 são as imagens geométricas de z_1 e z_2, respetivamente.



49.1. Justifique que o ângulo A_1OA_2 é reto (O designa a origem do referencial).

49.2. Considere no plano complexo a circunferência C, definida pela condição $|z| = |z_1|$. Sabendo que o perímetro de C é 4π, represente na **forma algébrica**, o número complexo z_1

Exame – 2000, 2.ª fase

50. Seja $\mathbb{C}$ o conjunto dos números complexos; i designa a unidade imaginária.

50.1. Considere o polinómio $x^3 - 3x^2 + 6x - 4$
Determine analiticamente as suas raízes em $\mathbb{C}$, sabendo que uma delas é 1.
Apresente-as na forma algébrica, simplificando-as o mais possível.

50.2. Seja z um número complexo de módulo 2 e $\overline{z}$ o seu conjugado.
No plano complexo, considere os pontos A e B tais que A é a imagem geométrica de z, e B é a imagem geométrica de $\overline{z}$.
Sabe-se que:

- o ponto A está situado no primeiro quadrante
- o ângulo AOB é reto (O designa a origem do referencial)

Determine $\frac{z}{i}$, apresentando o resultado na forma algébrica.

Exame – 2000, Prova modelo