

Exame final nacional de Matemática A (2018, 2.ª fase)

Proposta de resolução



Caderno 1

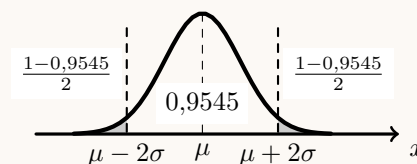
1.

1.1. Como $P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) \approx 0,9545$ e $P(X < \mu - 2\sigma) = P(X > \mu + 2\sigma)$, temos que:

$$P(X < \mu - 2\sigma) \approx \frac{1 - 0,9545}{2}$$

E assim, vem que:

$$P(X > \mu - 2\sigma) = 1 - P(X < \mu - 2\sigma) \approx 1 - \frac{1 - 0,9545}{2} \approx 0,977$$



Resposta: **Opção C**

1.2. Como a soma dos ângulos internos de um triângulo é 180° , vem que:

$$\hat{ACB} = 180 - \hat{ABC} - \hat{BAC} = 180 - 81 - 57 = 42^\circ$$

E assim, calculando o valor de \overline{AB} recorrendo à Lei dos senos, e arredondando o resultado às centésimas, temos que:

$$\frac{\sin \hat{ABC}}{\overline{AC}} = \frac{\sin \hat{ACB}}{\overline{AB}} \Leftrightarrow \frac{\sin 81^\circ}{5} = \frac{\sin 42^\circ}{\overline{AB}} \Leftrightarrow \overline{AB} = \frac{5 \times \sin 42^\circ}{\sin 81^\circ} \Rightarrow \overline{AB} \approx 3,39$$

Resposta: **Opção C**

2. Considerando a experiência aleatória que consiste em escolher, ao acaso, um atleta do clube, e os acontecimentos:

B : «O atleta praticar basquetebol»

F : «O atleta praticar futebol»

Temos que $P(B) = \frac{1}{5}$; $P(F) = \frac{2}{5}$ e $P(\overline{B}|\overline{F}) = \frac{3}{4}$

Assim, organizando os dados numa tabela obtemos:

- $P(\overline{F}) = 1 - P(F) = 1 - \frac{2}{5} = \frac{3}{5}$
- $P(\overline{B} \cap \overline{F}) = P(\overline{F}) \times P(\overline{B}|\overline{F}) = \frac{3}{5} \times \frac{3}{4} = \frac{9}{20}$
- $P(\overline{B} \cap F) = P(\overline{B}) - P(\overline{B} \cap \overline{F}) = \frac{4}{5} - \frac{9}{20} = \frac{16-9}{20} = \frac{7}{20}$
- $P(B \cap F) = P(F) - P(\overline{B} \cap F) = \frac{2}{5} - \frac{7}{20} = \frac{1}{20}$

	F	\overline{F}	
B	$\frac{1}{20}$		
\overline{B}	$\frac{7}{20}$	$\frac{9}{20}$	$\frac{4}{5}$
	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{5}$	1

Desta forma, como $P(B \cap F) > 0$, temos que, existe pelo menos, um atleta do clube que pratica as duas modalidades desportivas.

3.

- 3.1. Como existem 5 vogais, existem 5 hipóteses para o primeiro dígito do código.

Para os restantes 3 dígitos do código existem 9 algarismos disponíveis, e como os algarismos devem ser todos diferentes, para as restantes 3 dígitos existem 9A_3 escolhas diferentes.

Assim, nas condições do enunciado existem $5 \times {}^9A_3 = 2520$ números.

Resposta: **Opção D**

- 3.2. Como existem 14 caracteres diferentes e nos códigos possíveis são constituídos por 4 caracteres, eventualmente repetidos, então o número de códigos diferentes que é possível formar, ou seja o número de casos possíveis, é ${}^{14}A'_4 = 14^4$

Para que um código seja constituído por quatro algarismos diferentes cujo produto seja um número ímpar, deve ser constituído só por algarismos ímpares, pelo que existem 5 algarismos (1, 3, 5, 7 e 9), que podem ser colocados em 4 posições, cuja ordem é relevante e sem repetição. Isto é, existem 5A_4 casos favoráveis.

Assim, recorrendo à Regra de Laplace, calculando a probabilidade de selecionar um código nas condições do enunciado e arredondando o resultado às milésimas, temos:

$$p = \frac{{}^5A_4}{{}^{14}A'_4} = \frac{5 \times 4}{14^4} \approx 0,003$$



4.

- 4.1. Como o ponto P tem abscissa 1 ($x_P = 1$), e ordenada 3 ($y_P = 3$), substituindo estas coordenadas na equação da superfície esférica, calculamos a cota (z_P):

$$(x_P - 1)^2 + (y_P - 2)^2 + (z_P + 1)^2 = 10 \Leftrightarrow (1 - 1)^2 + (3 - 2)^2 + (z_P + 1)^2 = 10 \Leftrightarrow 0^2 + 1^2 + (z_P + 1)^2 = 10 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (z_P + 1)^2 = 10 - 1 \Leftrightarrow z_P + 1 = \pm\sqrt{9} \Leftrightarrow z_P = -1 \pm 3 \Leftrightarrow z_P = -4 \vee z_P = 2$$

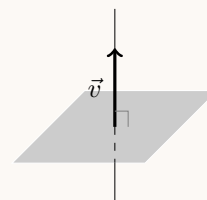
Como a cota do ponto P é negativa, as coordenadas do ponto P são $(1, 3, -4)$

Como o plano é perpendicular à reta r , vetor diretor da reta ($\vec{v} = (4, 1, -2)$) é um vetor normal do plano, e assim a equação do plano é da forma:

$$4x + y - 2z + d = 0$$

E como o ponto P pertence ao plano, podemos determinar o valor do parâmetro d , substituindo as coordenadas, na equação anterior:

$$4(1) + 3 - 2(-4) + d = 0 \Leftrightarrow 4 + 3 + 8 + d = 0 \Leftrightarrow 15 + d = 0 \Leftrightarrow d = -15$$



E assim, uma equação do plano que passa no ponto P e é perpendicular à reta r , é:

$$4x + y - 2z - 15 = 0$$

- 4.2. Como a superfície esférica tem de equação

$$(x - 1)^2 + (y - 2)^2 + (z + 1)^2 = 10 \Leftrightarrow (x - 1)^2 + (y - 2)^2 + (z - (-1))^2 = 10$$

As coordenadas do centro são $C(1, 2, -1)$, pelo que as coordenadas do ponto A são $(1, 2, 1)$

Assim temos que, como O é a origem do referencial $\vec{OA} = (1, 2, 1)$ e $\vec{OC} = (1, 2, -1)$, pelo que:

- $\|\vec{OA}\| = \sqrt{1^2 + 2^2 + 1^2} = \sqrt{1 + 4 + 1} = \sqrt{6}$
- $\|\vec{OC}\| = \sqrt{1^2 + 2^2 + (-1)^2} = \sqrt{1 + 4 + 1} = \sqrt{6}$

E assim, recorrendo à fórmula do produto escalar vem:

$$\cos(\vec{OA}, \vec{OC}) = \frac{\vec{OA} \cdot \vec{OC}}{\|\vec{OA}\| \times \|\vec{OC}\|} = \frac{(1, 2, 1) \cdot (1, 2, -1)}{\sqrt{6} \times \sqrt{6}} = \frac{1 + 4 - 1}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

Logo, a amplitude do ângulo AOC , em graus, arredondado às unidades, é:

$$A\hat{O}C = \cos^{-1}\left(\frac{2}{3}\right) \approx 48^\circ$$



5. No primeiro instante considerado a amplitude do ângulo ASM é α , e a distância de Mercúrio ao Sol é $d(\alpha) = \frac{555}{10 - 2,06 \cos \alpha}$

Relativamente ao segundo instante considerado, a amplitude do ângulo ASM é três vezes maior, ou seja, 3α , e a distância respetiva é $d(3\alpha) = \frac{555}{10 - 2,06 \cos 3\alpha}$

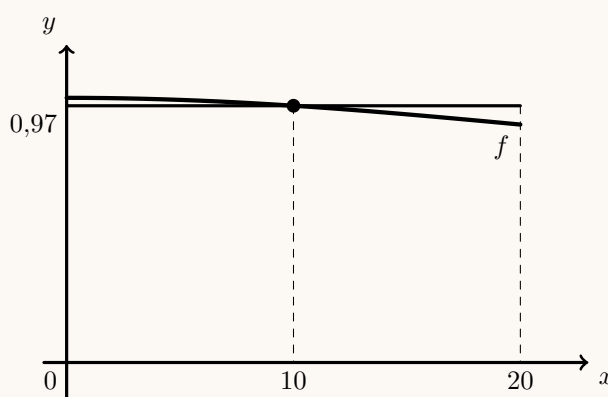
Ainda relativamente ao segundo instante considerado, como a distância do planeta Mercúrio ao Sol diminuiu 3%, é igual a 97% da distância anterior, ou seja:

$$d(3\alpha) = 0,97 \times d(\alpha) \Leftrightarrow \frac{555}{10 - 2,06 \cos(3\alpha)} = 0,97 \times \frac{555}{10 - 2,06 \cos \alpha} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{10 - 2,06 \cos \alpha}{10 - 2,06 \cos(3\alpha)} = 0,97 \times \frac{555}{555} \Leftrightarrow \frac{10 - 2,06 \cos \alpha}{10 - 2,06 \cos(3\alpha)} = 0,97$$

Visualizando na calculadora gráfica o gráfico da função $f(x) = \frac{10 - 2,06 \cos x}{10 - 2,06 \cos(3x)}$, e a reta horizontal de equação $y = 0,97$, para $0 < x < 20$ (porque α está compreendido entre 0 e 20 graus), reproduzido na figura ao lado, e usando a função da calculadora para determinar valores aproximados das coordenadas do ponto de interseção de dois gráficos, obtemos o valor aproximado (às unidades) da abcissa do ponto de interseção, ou seja:

$$\alpha \approx 10^\circ$$

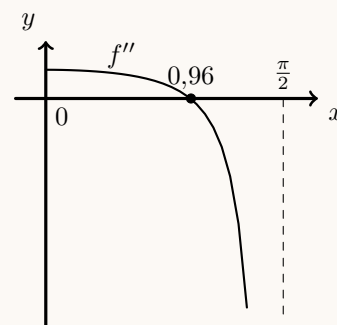


6. Como a abcissa do ponto de inflexão é o zero da segunda derivada da função, começamos por determinar a expressão da segunda derivada:

$$f''(x) = (f'(x))' = (3x - \operatorname{tg} x)' = (3x)' - (\operatorname{tg} x)' = 3 - \frac{(x)'}{\cos^2 x} = 3 - \frac{1}{\cos^2 x}$$

Representando na calculadora gráfica o gráfico da função f'' , para valores de $x \in]0, \frac{\pi}{2}[$, (reproduzido na figura ao lado) e usando a função da calculadora para determinar valores aproximados dos zeros de uma função determinamos o valor (aproximado às centésimas) do zero da função f''

Assim, temos que a abcissa do ponto de inflexão do gráfico da função f , aproximado às centésimas, é 0,96



Resposta: **Opção D**



7. Como o terceiro termo da progressão aritmética é 4, designado a razão por r , temos que:

- $u_3 = 4 \Leftrightarrow u_1 + (3 - 1) \times r = 4 \Leftrightarrow u_1 + 2r = 4 \Leftrightarrow u_1 = 4 - 2r$
- $u_{12} = u_1 + (12 - 1) \times r = u_1 + 11r$
- a soma dos 12 primeiros termos é:

$$S_{12} = \frac{u_1 + u_{12}}{2} \times 12 = \frac{u_1 + u_1 + 11r}{2} \times 12 = (4 - 2r + 4 - 2r + 11r) \times \frac{12}{2} = (8 + 7r) \times 6$$

Como a soma dos doze primeiros termos é 174, temos que:

$$S_{12} = 174 \Leftrightarrow (8 + 7r) \times 6 = 174 \Leftrightarrow 8 + 7r = \frac{174}{6} \Leftrightarrow 7r = 29 - 8 \Leftrightarrow r = \frac{21}{7} \Leftrightarrow r = 3$$

Assim, vem que:

- $u_1 = 4 - 2 \times 3 = 4 - 6 = -2$
- $u_n = u_1 + (n - 1) \times r = -2 + 3(n - 1)$

E assim, resolvendo a equação $u_n = 5371$, vem:

$$u_n = 5371 \Leftrightarrow -2 + 3(n - 1) = 5371 \Leftrightarrow 3n - 3 = 5371 + 2 \Leftrightarrow 3n = 5373 + 3 \Leftrightarrow n = \frac{5376}{3} \Leftrightarrow n = 1792$$

Como a solução da equação é um número natural, então 5371 é o termo de ordem 1792 da sucessão (u_n) , ou seja, $u_{1792} = 5371$

8. Como a circunferência tem raio 1, e o ponto C pertence ao semieixo real negativo, designado por w o número complexo cujo afixo é o ponto C , temos que $w = -1$

Como z e w são ambos raízes de índice 5 do mesmo número complexo, temos que:

$$z^5 = w^5 = (-1)^5 = -1$$

Resposta: **Opção A**

Caderno 2

9.

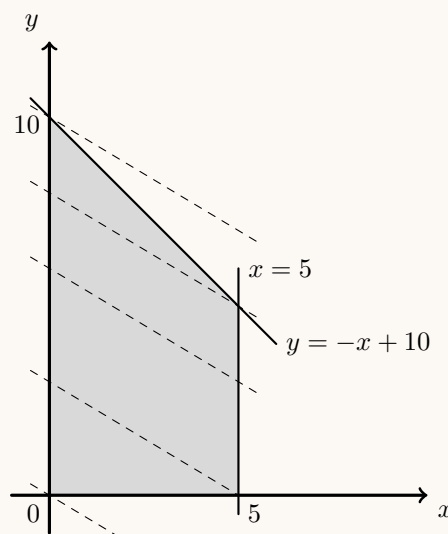
9.1. Representando a região admissível, de acordo com as restrições apresentadas, reproduzida na figura ao lado, e retas com o declive igual à reta definida pela função objetivo:

$$L = 3x + 5y \Leftrightarrow 5y = -3x + L \Leftrightarrow y = -\frac{3}{5}x + \frac{L}{5}$$

Podemos verificar que o máximo é obtido no vértice de coordenadas $(0,10)$. Assim, substituindo as coordenadas deste ponto na função objetivo, temos:

$$L = 3(0) + 5(10) = 0 + 50 = 50$$

Resposta: **Opção B**



9.2. Como a $\overline{F_1 F_2} = 12$, ou seja a distância entre os focos é $2c = 12$, então a distância dos focos ao centro da elipse é:

$$c = \frac{\overline{F_1 F_2}}{2} = \frac{12}{2} = 6$$

Como a soma das distâncias aos focos de qualquer ponto da elipse é igual ao comprimento do eixo maior ($2a$), temos que:

$$2a = \overline{PF_1} + \overline{PF_2} \Leftrightarrow 2a = 20 \Leftrightarrow a = \frac{20}{2} \Leftrightarrow a = 10$$

Assim podemos calcular o comprimento do semi-eixo menor (b), sabendo que $a^2 = b^2 + c^2$:

$$a^2 = b^2 + c^2 \Leftrightarrow 10^2 = b^2 + 6^2 \Leftrightarrow 100 = b^2 + 36 \Leftrightarrow 100 - 36 = b^2 \Leftrightarrow 64 = b^2$$

Assim, temos que a equação da elipse centrada na origem e com os focos sobre o eixo Ox é dada por:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ ou seja, nas condições do enunciado, } \frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{64} = 1$$

Resposta: **Opção B**

10. Simplificando a expressão de z , como $i^{15} = i^{4 \times 3 + 3} = i^3 = -i$, temos que:

$$\begin{aligned} z &= \frac{(2-i)^2 + 1 + i}{1-2i} + 3i^{15} = \frac{4 - 2 \times 2i + i^2 + 1 + i}{1-2i} + 3(-i) = \frac{4 - 4i - 1 + 1 + i}{1-2i} - 3i = \\ &= \frac{4 - 3i}{1-2i} - 3i = \frac{(4-3i)(1+2i)}{(1-2i)(1+2i)} - 3i = \frac{4 + 8i - 3i - 6i^2}{1 + 2i - 2i - 4i^2} - 3i = \frac{4 + 5i - 6(-1)}{1 - 4(-1)} - 3i = \\ &= \frac{4 + 5i + 6}{1 + 4} - 3i = \frac{10 + 5i}{5} - 3i = 2 + i - 3i = 2 - 2i \end{aligned}$$

Assim, vem que $\bar{z} = 2 + 2i$, pelo que:

$$-\frac{1}{2} \times \bar{z} = -\frac{1}{2} \times (2 + 2i) = -1 - i$$

Escrevendo $-\frac{1}{2} \times \bar{z}$ na forma trigonométrica ($\rho e^{i\theta}$) temos:

- $\rho = |z| = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$
- $\operatorname{tg} \theta = \frac{-1}{-1} = 1$; como $\sin \theta < 0$ e $\cos \theta < 0$, θ é um ângulo do 3º quadrante, logo $\theta = \pi + \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{4}$

Assim $-\frac{1}{2} \times \bar{z} = \sqrt{2} e^{i(\frac{5\pi}{4})}$



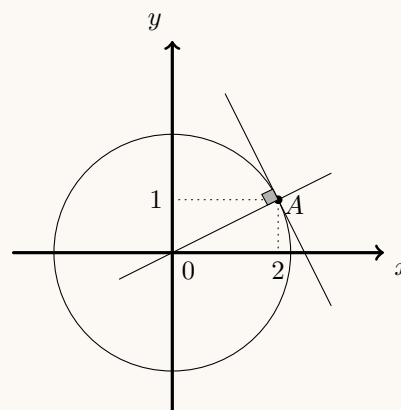
11. Como a tangente é perpendicular ao raio, a reta r é perpendicular à reta OA , ou seja, declive da reta r é o simétrico do declive da reta OA

Calculando o declive da reta OA , temos:

$$m_{OA} = \frac{y_A - y_O}{x_A - x_O} = \frac{1 - 0}{2 - 0} = \frac{1}{2}$$

Assim, o declive da reta r , é:

$$m_r = -\frac{1}{m_{OA}} = -\frac{1}{\frac{1}{2}} = -2$$



Logo a equação da reta r é da forma $y = -2x + b$ pelo que, substituindo as coordenadas do ponto A na equação da reta, podemos calcular o valor de b , ou seja, da ordenada na origem:

$$1 = -2 \times 2 + b \Leftrightarrow 1 = -4 + b \Leftrightarrow 1 + 4 = b \Leftrightarrow 5 = b$$

Resposta: **Opção B**

12.

- 12.1. Para averiguar a existência de pontos que pertençam simultaneamente aos planos α , β e γ , ou seja, que pertençam à interseção dos três planos, resolvemos o sistema seguinte:

$$\begin{cases} y = -x \\ y = z \\ 2x + 3y - z - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -y \\ z = y \\ 2(-y) + 3y - y - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -y \\ z = y \\ -2y + 2y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -y \\ z = y \\ 0y = 1 \end{cases}$$

Como a equação $0y = 1$ é impossível, o sistema é impossível, ou seja, não existem pontos que pertençam aos três planos, ou seja, a interseção dos três planos é o conjunto vazio.

Resposta: **Opção D**

- 12.2. Calculando o valor do limite, vem que:

$$\begin{aligned} \lim \left(\frac{n+5}{n+1} \right)^{\frac{n}{2}} &= \lim \left(\frac{n \left(1 + \frac{5}{n} \right)}{n \left(1 + \frac{1}{n} \right)} \right)^{\frac{n}{2}} = \left(\lim \left(\frac{1 + \frac{5}{n}}{1 + \frac{1}{n}} \right)^n \right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{\lim \left(1 + \frac{5}{n} \right)^n}{\lim \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n} \right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{e^5}{e^1} \right)^{\frac{1}{2}} = \\ &= (e^{5-1})^{\frac{1}{2}} = (e^4)^{\frac{1}{2}} = e^{4 \times \frac{1}{2}} = e^2 \end{aligned}$$

Resposta: **Opção D**



13. Resolvendo a inequação, como $3 = \log_2 8$, temos que:

$$\begin{aligned}\log_2(x+1) \leq 3 - \log_2(8-x) &\Leftrightarrow \log_2(x+1) + \log_2(8-x) \leq 3 \Leftrightarrow \log_2((x+1) \times (8-x)) \leq \log_2 8 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (x+1)(8-x) \leq 8 \Leftrightarrow 8x - x^2 + 8 - x \leq 8 \Leftrightarrow 7x - x^2 \leq 8 - 8 \Leftrightarrow 7x - x^2 \leq 0 \Leftrightarrow x(7-x) \leq 0\end{aligned}$$

Mas como a expressão $\log_2(x+1) \leq 3 - \log_2(8-x)$ só está definida se:

$$x+1 > 0 \wedge 8-x > 0 \Leftrightarrow x > -1 \wedge 8 > x \Leftrightarrow x > -1 \wedge x < 8$$

E como $x(7-x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee 7-x = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee 7 = x$, podemos estudar o sinal de $x(7-x)$, para os valores de x definidos, recorrendo a uma tabela:

x	-1		0		7		8
x	n.d.	-	0	+	+	+	n.d.
$7-x$	n.d.	+	+	+	0	-	n.d.
$x(7-x)$	n.d.	-	0	+	0	-	n.d.

Pelo que o conjunto dos números reais que são soluções da inequação é: $] -1, 0] \cup [7, 8[$

14.

14.1. Recorrendo à definição de derivada num ponto, temos que:

$$\begin{aligned}f'(0) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 + \frac{e^x}{1-x} - \left(3 + \frac{e^0}{1-0}\right)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 + \frac{e^x}{1-x} - 3 - \frac{1}{1}}{x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{e^x}{1-x} - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{e^x}{1-x} - \frac{1-x}{1-x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{e^x - (1-x)}{1-x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - (1-x)}{x(1-x)} = \frac{0}{0} \text{ (Indeterminação)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - (1-x)}{x(1-x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 + x}{x(1-x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{e^x - 1}{x(1-x)} + \frac{x}{x(1-x)} \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{e^x - 1}{x} \times \frac{1}{1-x} + \frac{1}{1-x} \right) = \underbrace{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x}}_{\text{Lim. Notável}} \times \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{1-x} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{1-x} = \\ &= 1 \times \frac{1}{1-0} + \frac{1}{1-0} = 1 \times 1 + 1 = 2\end{aligned}$$



14.2. Para averiguar a existência de assíntotas horizontais vamos calcular o limite da função quando $x \rightarrow -\infty$ e quando $x \rightarrow +\infty$:

$$\begin{aligned} \bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(3 + \frac{e^x}{1-x} \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} 3 + \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x}{1-x} = 3 + \frac{e^{-\infty}}{1-(-\infty)} = \\ &= 3 + \frac{0^+}{1+\infty} = 3 + \frac{0^+}{+\infty} = 3 + 0 = 3 \end{aligned}$$

Como $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 3$, a reta de equação $y = 3$ é assíntota horizontal do gráfico de f

$$\begin{aligned} \bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x^2) + 2}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\ln(x^2)}{x} + \frac{2}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x^2)}{x} + \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 \ln x}{x} + \frac{2}{+\infty} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(2 \times \frac{\ln x}{x} \right) + 0 = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2 \times \underbrace{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x}}_{\text{Lim. Notável}} = 2 \times 0 = 0 \end{aligned}$$

Como $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$, a reta de equação $y = 0$ também é assíntota horizontal do gráfico de f

14.3. Considerando a função h , podemos observar que:

$$h(1) = 1 + 1 \Leftrightarrow h(1) = 2 \Leftrightarrow h^{-1}(2) = 1$$

E assim, vem que:

$$(f \circ h^{-1})(2) = f(h^{-1}(2)) = f(1) = \frac{\ln(1^2) + 2}{1} = \frac{0 + 2}{1} = 2$$

Resposta: **Opção C**



15. Como o declive da reta tangente ao gráfico de g em cada ponto é dado pela função derivada, começamos por determinar a expressão de g' :

$$\begin{aligned} g'(x) &= (2 \sin x + \sin^2 x)' = (2 \sin x)' + (\sin^2 x)' = 2 \cos x + (\sin x \times \sin x)' = \\ &= 2 \cos x + (\sin x)' \times \sin x + \sin x \times (\sin x)' = 2 \cos x + \cos x \times \sin x + \sin x \times \cos x = \\ &= 2 \cos x + 2 \times \sin x \times \cos x = 2 \cos x + \sin(2x) \end{aligned}$$

Como o máximo de uma função corresponde a um zero da função derivada, vamos determinar a expressão da função derivada da função g' , ou seja g'' , para determinar o declive máximo:

$$\begin{aligned} g''(x) &= (g'(x))' = (2 \cos x + \sin(2x))' = (2 \cos x)' + (\sin(2x))' = 2 \times (-\sin x) + (2x)' \times \cos(2x) = \\ &= -2 \sin x + 2x \cos(2x) \end{aligned}$$

Calculando os zeros da derivada, no domínio da função $([0, \pi])$, vem:

$$\begin{aligned} -2 \sin x + 2 \cos(2x) &= 0 \Leftrightarrow 2 \cos(2x) = 2 \sin x \Leftrightarrow \cos(2x) = \sin x \Leftrightarrow \sin x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \\ \Leftrightarrow \cos(2x) &= \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \Leftrightarrow 2x = \frac{\pi}{2} - x + 2k\pi \vee 2x = -\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 2x + x &= \frac{\pi}{2} + 2k\pi \vee 2x = -\frac{\pi}{2} + x + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow 3x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \vee 2x - x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow x &= \frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3} \vee x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Como se pretende identificar os valores de $x \in [0, \pi]$, atribuindo valores inteiros a k para identificar as soluções no intervalo definido, temos:

- $k = 0 \rightarrow x = \frac{\pi}{6} \vee x = -\frac{\pi}{2} \quad \left(-\frac{\pi}{2} \notin [0, \pi]\right)$
- $k = 1 \rightarrow x = \frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{3} = \frac{\pi}{6} + \frac{4\pi}{6} = \frac{5\pi}{6} \vee x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi = -\frac{\pi}{2} + \frac{4\pi}{2} = \frac{3\pi}{2} \quad \left(\frac{3\pi}{2} \notin [0, \pi]\right)$
- $k = 2 \rightarrow x = \frac{\pi}{6} + \frac{4\pi}{3} = \frac{\pi}{6} + \frac{8\pi}{6} = \frac{9\pi}{6} = \frac{3\pi}{2} \vee x = -\frac{\pi}{2} + 4\pi \quad \left(\frac{3\pi}{2} \notin [0, \pi] \quad \text{e} \quad 4\pi - \frac{\pi}{2} \notin [0, \pi]\right)$

Assim, as soluções da equação $g''(x) = 0$, que pertencem ao domínio da função, são $\frac{\pi}{6}$ e $\frac{5\pi}{6}$, pelo que Estudando a variação do sinal da derivada de g' , e relacionando com a monotonia do declive, vem:

x	0		$\frac{\pi}{6}$		$\frac{5\pi}{6}$		π
g''	+	+	0	-	0	+	+
g'	min	\nearrow	Máx	\searrow	min	\nearrow	Máx

Assim temos que os valores máximos do declive são:

- $g'\left(\frac{\pi}{6}\right) = 2 \cos \frac{\pi}{6} + \sin\left(2 \times \frac{\pi}{6}\right) = 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} + \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{2\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$
- $g'(\pi) = 2 \cos \pi + \sin(2\pi) = 2 \times (-1) + 0 = -2$

Como $g'\left(\frac{\pi}{6}\right) > g'(\pi)$ então $g'\left(\frac{\pi}{6}\right)$ é o máximo absoluto e o valor máximo do declive das retas tangentes ao gráfico de g , ou seja, o declive da reta r é:

$$m_r = g'\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

