Caderno 1

1. (A)
   Por uma propriedade do triângulo de Pascal, sabemos que ${}^{2017}C_{99} + {}^{2017}C_{100} = {}^{2018}C_{100}$. Logo, $x + y = {}^{2018}C_{100}$.

2. .

   2.1. .

   2.1.1. Se um dos vértices do triângulo tem de ser necessariamente o vértice V do sólido, então é necessário escolher mais dos vértices de entre os dezasseis vértices restantes do sólido. Então, podem ser desenhados ${}^{16}C_2$ triângulos como o pretendido.

   2.1.2. Comecemos por determinar todas as retas que se podem desenhar com os dezassete vértices do sólido. Ora para desenhar uma reta são necessários dois pontos. Assim podem ser desenhadas ${}^{17}C_2$ retas. A este número temos de retirar todas as retas que são paralelas ao plano xOy.
   Os polígonos $[IJKLMNPQ]$ e $[ABCDEFGH]$ são paralelos ao plano xOy, então (para cada polígono) as retas que se podem desenhar com estes vértices são paralelas ao plano xOy. Em cada polígono o número de retas que se podem desenhar é igual a ${}^{8}C_2$. Portanto, o número de retas não paralelas ao plano xOy que se podem desenhar é dado por ${}^{17}C_2 - 2 \times {}^{8}C_2 = 80$.

   2.2. .

Primeiro processo

Comecemos por determinar todos os segmentos que se podem desenhar com os dezassete vértices do sólido. O número de segmentos que se podem desenhar é dado por ${}^{17}C_2$. A este número é necessário retirar:
as arestas do sólido: 32
as diagonais das faces laterais: 8×2
as diagonais da base do sólido ${}^{8}C_2 - 8$

Então, o número de diagonais espaciais que existem no sólido é dado por
${}^{17}C_2 - 32 - 8 \times 2 - ({}^{8}C_2 - 8) = 68$

Segundo processo

O vértice V pode ligar a cada um dos vértices do polígono $[ABCDEFGH]$, formando desta forma oito diagonais espaciais.
Os vértices do polígono $[IJKLMNPQ]$ geram ${}^{8}C_2 - 8$ diagonais espaciais. Note-se que é necessário retirar oito ao número ${}^{8}C_2$, porque neste número estão incluídos os lados do polígono, que não são diagonais espaciais do sólido.
Falta agora contar as diagonais espaciais que são formadas com um vértice do polígono $[ABCDEFGH]$ e outro do polígono $[IJKLMNPQ]$. Se nos fixarmos no ponto H, verificamos que ele só se pode ligar a cinco vértices do polígono $[IJKLMNPQ]$ (é necessário retirar os pontos P, Q e I). Assim existem 8×5 diagonais espaciais construídas desta forma.
Portanto, no sólido existem $8 + {}^{8}C_2 - 8 + 8 \times 5 = 68$.

3. .

3.1. O regime mais favorável é o de capitalizações trimestrais.

3.2. Capital inicial: 15000

- capitalizações semestrais

  O capital acumulado ao fim de um ano será: $15000 \times \left(1+\frac{2.5}{100\times 2}\right)^2 \approx 15377.34$ euros
- capitalizações trimestrais

  O capital acumulado ao fim de um ano será: $15000 \times \left(1+\frac{2.5}{100\times 4}\right)^4 \approx 15378.53$ euros

4. (B)

Determinemos as coordenadas do ponto de tangência

$$f(-1)=\frac{e^{-(-1)}}{-1-1}=\frac{e}{-2}=-\frac{e}{2}$$

O ponto de tangência é $\left(-1;-\frac{e}{2}\right)$

Determinemos a função derivada da função f

$$f'(x)=\left(\frac{e^{-x}}{x-1}\right)'=\frac{(e^{-x})'\times(x-1)-e^{-x}\times(x-1)'}{(x-1)^2}=\frac{(-x)'\times e^{-x}\times(x-1)-e^{-x}\times 1}{(x-1)^2}=$$
$$=\frac{(-1)\times e^{-x}\times(x-1)-e^{-x}}{(x-1)^2}=\frac{-e^{-x}\times(x-1)-e^{-x}}{(x-1)^2}=\frac{-e^{-x}\times(x-1+1)}{(x-1)^2}=-\frac{xe^{-x}}{(x-1)^2}$$

Determinemos o declive da reta tangente

$$m_r=f'(-1)=-\frac{-1\times e^{-(-1)}}{(-1-1)^2}=\frac{e}{4}$$

então, a equação da reta tangente r é da forma $y=\frac{e}{4}x+b, b\in\mathbb{R}$

Como a reta "passa"no ponto $\left(-1;-\frac{e}{2}\right)$, resulta,

$$-\frac{e}{2}=\frac{e}{4}\times(-1)+b \Leftrightarrow -\frac{e}{2}=-\frac{e}{4}+b \Leftrightarrow b=\frac{e}{4}-\frac{e}{2}$$

Portanto, a equação reduzida da reta r é $y=\frac{e}{4}x+\frac{e}{4}-\frac{e}{2}$

5. .

5.1. Seja C a projeção do ponto B sobre o eixo Oy . Aplicando o Teorema de Pitágoras ao triângulo retângulo $[OBC]$, tem-se que
$\overline{OB}^2=\overline{OC}^2+\overline{BC}^2 \Leftrightarrow \overline{OB}^2=6^2+8^2 \Leftrightarrow \overline{OB}^2=100 \Leftrightarrow \overline{OB}=\pm\sqrt{100} \Leftrightarrow \overline{OB}=\pm 10.$
Como $\overline{OB}$ é uma medida, então $\overline{OB}>0$, portanto, $\overline{OB}=10$

Seja D a projeção do ponto B sobre o eixo Oz
Aplicando o Teorema de Pitágoras ao triângulo retângulo $[DBA]$, tem-se que
$\overline{AB}^2=\overline{AD}^2+\overline{BD}^2 \Leftrightarrow \overline{AB}^2=(z-6)^2+8^2 \Leftrightarrow \overline{AB}^2=z^2-12z+36+64 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \overline{AB}^2=z^2-12z+100 \Leftrightarrow \overline{AB}=\pm\sqrt{z^2-12z+100}.$

Como $\overline{AB}$ é uma medida, então $\overline{AB} > 0$, portanto,$\overline{AB} = \sqrt{z^2 - 12z + 100}$

Sendo assim, o perímetro do triângulo $[OAB]$ é dado por:

$f(z) = \overline{OA} + \overline{OB} + \overline{AB} = z + 10 + \sqrt{z^2 - 12z + 100}$

5.2. .

Pretende-se encontrar z, solução da equação $f(z) = 21$

Inserir na calculadora as funções
$y_1 = z + 10 + \sqrt{z^2 - 12z + 100}$ e $y_2 = 21$

Ajustar a janela de visualização: $[0; 4] \times [0; 25]$
Desenhar os gráficos e procurar as coordenadas do ponto de interseção dos dois gráficos.

O ponto de interseção dos dois gráficos é $A(2.1; 21)$

A cota do ponto A é 2.1

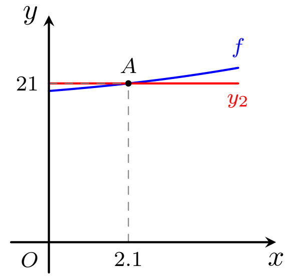

Figura 1

Caderno 2

6. (A)
As equações das assíntotas não verticais são da forma $y = mx + b, m, b \in \mathbb{R}$

Quando $x \to +\infty$

$$\lim_{x\mapsto+\infty} \frac{g(x)}{x} = \lim_{x\mapsto+\infty} \frac{\sqrt{1+x^2}}{x} = \lim_{x\mapsto+\infty} \frac{\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}}{x} = \lim_{x\mapsto+\infty} \frac{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{x} = \lim_{x\mapsto+\infty} \frac{x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{x} =$$
$$= \sqrt{\lim_{x\mapsto+\infty}\left(1+\frac{1}{x^2}\right)} = \sqrt{1} = 1$$

Logo, $m = 1$

$$\lim_{x\mapsto+\infty}[g(x)-x] = \lim_{x\mapsto+\infty}(\sqrt{1+x^2}-x) = \lim_{x\mapsto+\infty} \frac{(\sqrt{1+x^2}-x)(\sqrt{1+x^2}+x)}{\sqrt{1+x^2}+x} = \lim_{x\mapsto+\infty} \frac{|1+x^2|-x^2}{\sqrt{1+x^2}+x} =$$
$$= \lim_{x\mapsto+\infty} \frac{(1+x^2)-x^2}{\sqrt{1+x^2}+x} = \lim_{x\mapsto+\infty} \frac{1}{\sqrt{1+x^2}+x} = \frac{1}{+\infty} = 0$$

Logo, $b = 0$

Então, a reta de equação $y = x$ é assíntota não vertical ao gráfico da função, quando $x \to +\infty$

Quando $x \to -\infty$

$$\lim_{x\mapsto-\infty} \frac{g(x)}{x} = \lim_{x\mapsto+\infty} \frac{\sqrt{1+x^2}}{x} = \lim_{x\mapsto-\infty} \frac{\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}}{x} = \lim_{x\mapsto-\infty} \frac{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{x} = \lim_{x\mapsto-\infty} \frac{-x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{x} =$$
$$= -\sqrt{\lim_{x\mapsto-\infty}\left(1+\frac{1}{x^2}\right)} = -\sqrt{1} = -1$$

Logo, $m = -1$

$$\lim_{x\mapsto -\infty}[g(x)+x] = \lim_{x\mapsto -\infty}(\sqrt{1+x^2}+x) = \lim_{x\mapsto -\infty}\frac{(\sqrt{1+x^2}+x)(\sqrt{1+x^2}-x)}{\sqrt{1+x^2}-x} = \lim_{x\mapsto -\infty}\frac{|1+x^2|-x^2}{\sqrt{1+x^2}-x} =$$
$$= \lim_{x\mapsto -\infty}\frac{(1+x^2)-x^2}{\sqrt{1+x^2}-x} = \lim_{x\mapsto -\infty}\frac{1}{\sqrt{1+x^2}-x} = \frac{1}{+\infty} = 0$$

Logo, $b = 0$

Então, a reta de equação $y = -x$ é assíntota não vertical ao gráfico da função, quando $x \to -\infty$

Nota: em alternativa, poder-se-ia provar que a função é par e portanto, o gráfico é simétrico em relação ao eixo das ordenadas, fazendo com que a reta de equação $y = -x$ seja uma reflexão de eixo Oy da reta de equação $y = x$.

7. $\lim(a_n) = \lim\left(\frac{4n+1}{4n+3}\right)^{\frac{n}{2}} = \lim\left(\frac{4n\left(1+\frac{1}{4n}\right)}{4n\left(1+\frac{3}{4n}\right)}\right)^{\frac{n}{2}} = \left(\frac{\lim\left(1+\frac{1}{4n}\right)^n}{\lim\left(1+\frac{3}{4n}\right)^n}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{\lim\left(1+\frac{1}{4n}\right)^{4n}}{\lim\left(1+\frac{3}{4n}\right)^{4n}}\right)^{\frac{1}{8}} =$
$= \left(\frac{e}{e^3}\right)^{\frac{1}{8}} = (e^{-2})^{\frac{1}{8}} = e^{-\frac{1}{4}}$.
Assim,

$\lim(a_n) = \frac{1}{e^{2k-1}} \Leftrightarrow e^{-\frac{1}{4}} = \frac{1}{e^{2k-1}} \Leftrightarrow e^{-\frac{1}{4}} = e^{-2k+1} \Leftrightarrow -2k+1 = -\frac{1}{4} \Leftrightarrow -2k = -\frac{1}{4} - 1 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow -2k = -\frac{5}{4} \Leftrightarrow k = \frac{5}{8}$

8. $f(e) = 2e^{e-e} = 2e^0 = 2$.
$f'(e) = \lim_{x\to e}\frac{f(x)-f(e)}{x-e} = \lim_{x\to e}\frac{2e^{x-e}-2}{x-e} = \lim_{x\to e}\frac{2(e^{x-e}-1)}{x-e} = 2\times\lim_{x-e\to 0}\frac{e^{x-e}-1}{x-e} = 2\times 1 = 2$
Nota: Utilizou-se o limite notável $\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x} = 1$

9. .

9.1. $\frac{1}{3^{-2x+1}} - \left(\frac{1}{27}\right)^{-x} > 0 \Leftrightarrow 3^{2x-1} > 27^x \Leftrightarrow 3^{2x-1} > (3^3)^x \Leftrightarrow 3^{2x-1} > 3^{3x} \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 2x-1 > 3x \Leftrightarrow x < -1$
O conjunto Solução é $]-\infty;-1[$

9.2. $-2\times 4^{-x} + 4^x = 1 \Leftrightarrow -\frac{2}{4^x} + 4^x - 1 = 0 \Leftrightarrow \frac{(4^x)^2 - 4^x - 2}{4^x} = 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow (4^x)^2 - 4^x - 2 = 0 \wedge 4^x \neq 0 \Leftrightarrow (4^x)^2 - 4^x - 2 = 0$
Fazendo uma mudança de variável, $y = 4^x$
vem,
$y^2 - y - 2 = 0 \Leftrightarrow y = \frac{4\pm\sqrt{(-1)^2 - 4\times 1\times(-2)}}{2\times 1} \Leftrightarrow y = -1 \vee y = 2$
Então,

$4^x = -1 \vee 4^x = 2 \Leftrightarrow$ equação impossível $\vee (2^2)^x = 2^1 \Leftrightarrow 2^{2x} = 2^1 \Leftrightarrow 2x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$
O conjunto-solução é $C.S. = \left\{\frac{1}{2}\right\}$

10. Ora, $g'(x) = (6 \times e^x)' = 6 \times e^x$

Pretende-se encontrar as soluções da equação $f(x) = g'(x)$

$f(x) = g'(x) \Leftrightarrow e^{2x} + 5 = 6 \times e^x \Leftrightarrow e^{2x} - 6 \times e^x + 5 = 0 \Leftrightarrow (e^x)^2 - 6 \times e^x + 5 = 0$
Fazendo uma mudança de variável, $y = e^x$
vem,
$y^2 - 6y + 5 = 0 \Leftrightarrow y = \dfrac{6 \pm \sqrt{(-6)^2 - 4 \times 1 \times 5}}{2 \times 1} \Leftrightarrow y = 1 \vee y = 5$

Então,

$e^x = 1 \vee e^x = 5 \Leftrightarrow e^x = e^0 \vee e^x = 5 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = \ln 5$
O conjunto-solução é $\{0; \ln 5\}$

11. $h'(x) = \left(xe^{\frac{1}{x-1}}\right)' = x' \times e^{\frac{1}{x-1}} + x \times \left(e^{\frac{1}{x-1}}\right)' = 1 \times e^{\frac{1}{x-1}} + x \times e^{\frac{1}{x-1}} \times \left(\frac{1}{x-1}\right)' =$
$= e^{\frac{1}{x-1}} + xe^{\frac{1}{x-1}} \times \dfrac{1' \times (x-1) - 1 \times (x-1)'}{(x-1)^2} = e^{\frac{1}{x-1}} + xe^{\frac{1}{x-1}} \times \dfrac{0-1}{(x-1)^2} = e^{\frac{1}{x-1}} \left(1 - \dfrac{x}{(x-1)^2}\right).$

12. 12.1. Ora,
$f(x) = 2x - 1 + \dfrac{2}{1-x}$
$\therefore f(x) - (2x-1) = \dfrac{2}{1-x}$

Mas, $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{2}{1-x}\right) = \dfrac{2}{-\infty} = 0$

Então,

$\lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) - (2x-1)) = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{2}{1-x}\right) = 0$
Ou seja,
$\lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) - (2x-1)) = 0$
Portanto, a reta de equação $y = 2x - 1$ é assíntota ao gráfico da função f quando $x \to +\infty$.

Por outro lado, $D_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$
$\lim\limits_{x \to 1^+} (f(x)) = \lim\limits_{x \to 1^+} \left(2x - 1 + \dfrac{2}{1-x}\right) = 1 + \dfrac{2}{0^-} = 1 - \infty = -\infty$
Portanto, a reta de equação $x = 1$ é assíntota vertical ao gráfico da função f

Determinemos as coordenadas do ponto A

$$\begin{cases} y = 2x - 1 \\ x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2 \times 1 - 1 \\ x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 \\ x = 1 \end{cases}$$

Logo, $A(1; 1)$

12.2. $D_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$

Determinemos a função derivada de f

$f'(x) = \left[2x - 1 + \dfrac{2}{1-x}\right]' = 2 + \dfrac{2' \times (1-x) - 2 \times (1-x)'}{(1-x)^2} = 2 + \dfrac{0 - 2 \times (-1)}{(1-x)^2} =$
$= 2 + \dfrac{2}{(1-x)^2}$, com $x \neq 1$.

Determinemos a função segunda derivada de f

$$f''(x) = \left[2 + \frac{2}{(1-x)^2}\right]' = 0 + \frac{2' \times (1-x)^2 - 2 \times \left[(1-x)^2\right]'}{\left[(1-x)^2\right]^2} = \frac{0 - 2 \times 2 \times (1-x) \times (1-x)'}{(1-x)^4} =$$
$$= \frac{-4 \times (1-x) \times (-1)}{(1-x)^4} = \frac{4}{(1-x)^3}, \text{ com } x \neq 1.$$

Zeros de f''

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{4}{(1-x)^3} = 0 \twoheadrightarrow \text{equação impossível}$$

Sinal de f''

$$f''(x) < 0 \Leftrightarrow \frac{4}{(1-x)^3} < 0 \Leftrightarrow (1-x)^3 < 0 \Leftrightarrow x > 1$$
$$f''(x) > 0 \Leftrightarrow \frac{4}{(1-x)^3} > 0 \Leftrightarrow (1-x)^3 > 0 \Leftrightarrow x < 1$$

Quadro de sinal de f''

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f''(x)$	$+$	$n.d.$	$-$
$f(x)$	$\cup$	$n.d.$	$\cap$

O gráfico da função f tem a concavidade voltada para baixo em $]1; +\infty[$ e tem a concavidade voltada para cima em $]-\infty; 1[$.
Não existem pontos de inflexão do gráfico da função f.