CADERNO 1

1. .

1.1. P2001/2002

Sabemos que $p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5 = 1$
Assim,
$\frac{1}{5} + \frac{1}{5} + k + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = 1 \Leftrightarrow \frac{2}{5} + k + \frac{1}{2} = 1 \Leftrightarrow k = 1 - \frac{2}{5} - \frac{1}{2} \Leftrightarrow k = \frac{10-4-5}{10} = \frac{1}{10}$
Resposta:(D)

1.2. PMC2015

Sabemos que o período positivo mínimo de $x(t)$ é $\tau = \frac{2\pi}{\frac{\pi}{8}} = 16$
Portanto, a frequência deste oscilador harmónico é $f = \frac{1}{\tau} = \frac{1}{16}$
Resposta:(B)

2. $P(\overline{Y} \mid \overline{X})$ representa a probabilidade das duas bolas retiradas da caixa B terem a mesma cor, dado que da caixa A foram extraídas duas bolas de cores diferentes
Ora, se da caixa A foram retiradas duas bolas de cores diferentes e, posteriormente, colocadas na caixa B, então na caixa B ficaram seis bolas pretas e oito bolas brancas.
Como a seguir se retiram, sucessivamente, e sem reposição, duas bolas da caixa B tem-se que a probabilidade de sairem duas bolas da mesma cor é igual a
$P = \frac{6 \times 5}{14 \times 13} + \frac{8 \times 7}{14 \times 13} = \frac{30 + 56}{182} = \frac{86}{182} = \frac{43}{91}$
Resposta:(A)

3. .

3.1. O número de conjuntos é igual a ${}^8C_5 +^6 C_5 = 62$

3.2. Temos cinco números ímpares e quatro números pares
O número de maneiras distintas de numerar uma pirâmide com números ímpares e a outra com números pares, de modo que não haja faces com números iguais, é igual a $({}^5A_4 \times^4 A_4) \times 2 = 5760$

3.3. Sabe-se que a área da superfície do cubo é 96 $u.a.$, então, se a for a medida da aresta do cubo, tem-se que $6a^2 = 96 \Leftrightarrow a^2 = 16 \Leftrightarrow a = \pm\sqrt{16} \Leftrightarrow a = \pm 4$, como $a > 0$, vem que $a = 4$
Um vetor normal ao plano α pretendido poderá ser um vetor diretor da reta SU, ou seja, poderá ser $\overrightarrow{\alpha} = (0; -4; -4)$
Assim, a equação do plano é da forma $0x - 4y - 4z + d = 0$, com $d \in \mathbb{R}$
Como o plano contém o ponto $Q(0; 2; 0)$, resulta,
$-4 \times 2 - 4 \times 0 + d = 0 \Leftrightarrow d = 8$
Portanto, uma equação do plano pedido é $-4y - 4z + 8 = 0$, ou ainda, $-y - z + 2 = 0$

4. $\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^8=\sum\limits_{k=0}^{8}\left[{}^8C_kx^{8-k}\left(\dfrac{1}{x}\right)^k\right]=\sum\limits_{k=0}^{8}\left[{}^8C_kx^{8-k}x^{-k}\right]=\sum\limits_{k=0}^{8}\left[{}^8C_kx^{8-2k}\right]$

   Vejamos se existe um termo da forma ax^2
   $8-2k=2\Leftrightarrow 6=2k\Leftrightarrow k=3\in\mathbb{N}$

   Logo, $a={}^8C_3=56$

5. .

   5.1. $A(3\cos(x);3\sin(x))$, com $\cos(x)<0$ e $\sin(x)>0$

   Assim,

   $\overline{AB}=-3\cos(x)$
   $\overline{OB}=3\sin(x)$
   $\overline{OC}=-3\cos(x)$

   Portanto, a área do paralelogramo $[ABCO]$, é dada, em função de x, por
   $f(x)=\overline{OC}\times\overline{OB}=-3\cos(x)\times 3\sin(x)=-9\sin(x)\cos(x)=-\dfrac{9}{2}\sin(2x)$, com $x\in\left]\dfrac{\pi}{2};\pi\right[$

   5.2. De $1+\tan^2(x)=\dfrac{1}{\cos^2(x)}$, vem

   $1+\left(-\dfrac{\sqrt{7}}{5}\right)^2=\dfrac{1}{\cos^2(x)}\Leftrightarrow 1+\dfrac{7}{25}=\dfrac{1}{\cos^2(x)}\Leftrightarrow\dfrac{25+7}{25}=\dfrac{1}{\cos^2(x)}\Leftrightarrow\dfrac{32}{25}=\dfrac{1}{\cos^2(x)}\Leftrightarrow$
   $\Leftrightarrow\cos^2(x)=\dfrac{25}{32}\Leftrightarrow\cos(x)=\pm\sqrt{\dfrac{25}{32}}\Leftrightarrow\cos(x)=\pm\dfrac{5\sqrt{32}}{32}\Leftrightarrow\cos(x)=\pm\dfrac{20\sqrt{2}}{32}\Leftrightarrow$
   $\Leftrightarrow\cos(x)=\pm\dfrac{5\sqrt{2}}{8}$, como $x\in\left]\dfrac{\pi}{2};\pi\right[$, vem, $\cos(x)=-\dfrac{5\sqrt{2}}{8}$
   De $\tan(x)=\dfrac{\sin(x)}{\cos(x)}$, vem, $-\dfrac{\sqrt{7}}{5}=\dfrac{\sin(x)}{-\dfrac{5\sqrt{2}}{8}}\Leftrightarrow\sin(x)=\dfrac{\sqrt{7}}{5}\times\dfrac{5\sqrt{2}}{8}\Leftrightarrow\sin(x)=\dfrac{\sqrt{14}}{8}$
   Portanto, o valor exato da área do paralelogramo $[ABCO]$, para esse valor de x, é igual a
   $A=-9\times\dfrac{\sqrt{14}}{8}\times\left(-\dfrac{5\sqrt{2}}{8}\right)=\dfrac{45\sqrt{28}}{64}=\dfrac{45\times 2\sqrt{7}}{64}=\dfrac{45\sqrt{7}}{32}$

   5.3. Determinemos a função derivada de f
   $f'(x)=\left(-\dfrac{9}{2}\sin(2x)\right)=-\dfrac{9}{2}\times 2\times\cos(2x)=-9\cos(2x)$
   Zeros de f'
   $f'(x)=0\Leftrightarrow -9\cos(2x)=0\Leftrightarrow\cos(2x)=0\Leftrightarrow\cos(2x)=\cos\left(\dfrac{\pi}{2}\right)\Leftrightarrow 2x=\dfrac{\pi}{2}+k\pi,k\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow$
   $\Leftrightarrow x=\dfrac{\pi}{4}+k\dfrac{\pi}{2},k\in\mathbb{Z}$

   Atribuindo valores a k, vem,

   $k=0\rightarrow x=\dfrac{\pi}{4}\notin\left]\dfrac{\pi}{2};\pi\right[$
   $k=1\rightarrow x=\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\pi}{2}=\dfrac{3\pi}{4}\in\left]\dfrac{\pi}{2};\pi\right[$
   $k=0\rightarrow x=\dfrac{\pi}{4}+2\times\dfrac{\pi}{2}=\dfrac{5\pi}{4}\notin\left]\dfrac{\pi}{2};\pi\right[$

   Logo, $x=\dfrac{3\pi}{4}$

Quadro de sinal de f' e de variação de f

x	$\frac{\pi}{2}$		$\frac{3\pi}{4}$		π
$f'(x)$	\\\	$+$	0	$-$	\\\
$f(x)$	\\\	$\nearrow$	$\frac{9}{2}$	$\searrow$	\\\

$f\left(\frac{3\pi}{4}\right) = -\frac{9}{2} \times \sin\left(2 \times \frac{3\pi}{4}\right) = -\frac{9}{2} \times \sin\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -\frac{9}{2} \times (-1) = \frac{9}{2}$

A área do paralelogramo $[ABCO]$ é máxima $\left(\frac{9}{2} u.a.\right)$, se $x = \frac{3\pi}{4}$ rad

6. $g(-1) = \sqrt{(-1)^2 + 3} = 2$, logo, $A(-1;2)$

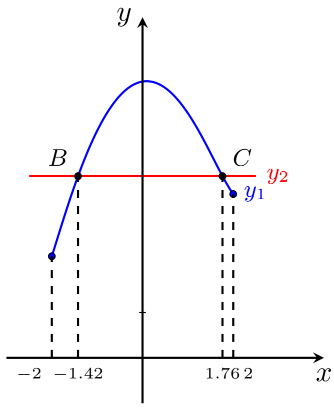
   O ponto P, que percorre a curva do gráfico da função f tem coordenadas: $P(x; f(x))$
   Ora, $d(x) = d(A;P) = \overline{AP} = \sqrt{(x+1)^2 + (f(x)-2)^2} = \sqrt{x^2 + 2x + 1 + (x^2 - 4 - 2)^2} =$
   $= \sqrt{x^2 + 2x + 1 + x^4 - 12x^2 + 36} = \sqrt{x^4 - 11x^2 + 2x + 37}$

   As abcissas dos pontos do gráfico de f que distam quatro unidades do ponto A, são as soluções da equação $d(x) = 4$.

   Pretende-se encontrar as soluções da equação $d(x) = 4$
   Inserir as funções:
   $y_1 = \sqrt{x^4 - 11x^2 + 2x + 37}$
   e $y_2 = 4$
   Ajustar a janela de visualização:
   $x_{min} : -2$
   $x_{max} : 2$
   $y_{min} : -1$
   $y_{max} : 8$

   $B(-1.42; 4)$ e $C(1.76; 4)$

   As abcissas dos pontos do gráfico de f que distam quatro unidades do ponto A, são:
   $x_1 \approx -1.42$;$x_2 \approx 1.76$.



7. $|z + z_2| = |z - iz_2| \wedge |z + z_1| \leq 2 \Leftrightarrow |z + 2i| = |z - i(2i)| \wedge |z + 2 + 2i| \leq 2 \Leftrightarrow$
   $\Leftrightarrow |z - (0 - 2i)| = |z - (-2 + 0i)| \wedge |z - (-2 - 2i)| \leq 2$

   Sejam,
   $w_1 = -2i$, de afixo $A(0; -2)$
   $w_2 = -2$, de afixo $B(-2; 0)$
   $w_3 = -2 - 2i$, de afixo $C(-2; -2)$

Representação no plano complexo

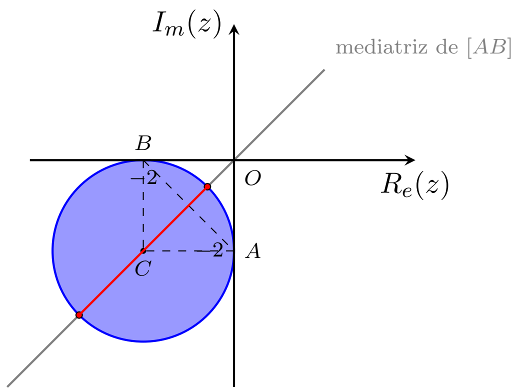


Figura 1

Resposta: (B)

Caderno 2

8. .

8.1. P2001/2002

Sabe-se que $P(6 < X < 10) = 0.4$, logo, $P(2 < X < 6) = 0.4$,

Portanto, $P(X < 2) = \dfrac{1 - 0.8}{2} = 0.1$

Ou então,

Sabe-se que $P(6 < X < 10) = 0.4$, logo, $P(X > 10) = 0.5 - 0.4 = 0.1$

E como $P(X < 2) = P(X > 10)$, tem-se que, $P(X < 2) = 0.1$

Resposta: (A)

8.2. PMC2015

Domínio de f

$D_f = \left\{x \in \mathbb{R} : -1 \leq \dfrac{x}{2} \leq 1\right\} = \{x \in \mathbb{R} : -2 \leq x \leq 2\} = [-2; 2]$

Logo, $a = -2$ e $b = 2$

Contradomínio de f

$-\dfrac{\pi}{2} \leq \arcsin\left(\dfrac{x}{2}\right) \leq \dfrac{\pi}{2}, \forall x \in [-2; 2]$

$\therefore -\dfrac{\pi}{2} + \dfrac{\pi}{4} \leq \dfrac{\pi}{4} + \arcsin\left(\dfrac{x}{2}\right) \leq \dfrac{\pi}{2} + \dfrac{\pi}{4}, \forall x \in [-2; 2]$

$\therefore -\dfrac{\pi}{4} \leq f(x) \leq \dfrac{3\pi}{4}, \forall x \in D_f$

Logo, $D'_f = \left[-\dfrac{\pi}{4}; \dfrac{3\pi}{4}\right]$

Portanto, $c = -\dfrac{\pi}{4}$ e $d = \dfrac{3\pi}{4}$

Resposta: (A)

9. .

9.1. $z_1 = -1 + 3i^{91} = -1 + 3i^{4\times 22+3} = -1 + 3i^3 = -1 - 3i$

$z_2 = \sqrt{2}\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) + \sqrt{2}i\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \sqrt{2} \times \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2}i = -1 + i$

Assim,

$\frac{z_1 + z_2}{\overline{2+2i}} = \frac{-1-3i-1+i}{2-2i} = \frac{-2-2i}{2-2i} = \frac{(-2-2i)(2+2i)}{(2-2i)(2+2i)} = \frac{-4-4i-4i-4i^2}{2^2+2^2} =$

$= \frac{-4-4i-4i+4}{8} = \frac{-8i}{8} = -i$

Logo, o complexo $\frac{z_1 + z_2}{\overline{2+2i}}$ é um imaginário puro

Na forma trigonométrica, escreve-se, $\frac{z_1 + z_2}{\overline{2+2i}} = e^{i\left(-\frac{\pi}{2}\right)}$

9.2. $z^4 - \overline{z_2}z = 0 \Leftrightarrow z(z^3 - \overline{z_2}) = 0 \Leftrightarrow z = 0 \vee z^3 - \overline{z_2} = 0 \Leftrightarrow z = 0 \vee z^3 = \overline{z_2} \Leftrightarrow z = 0 \vee z = \sqrt[3]{\overline{z_2}}$

Determinemos as raízes cúbicas de $\overline{z_2}$

$z_2 = \sqrt{2}\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) + i\sqrt{2}\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right] = \sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}$

Então, $\overline{z_2} = \sqrt{2}e^{i\left(-\frac{3\pi}{4}\right)}$

Assim, de $z = \sqrt[3]{\overline{z_2}}$, vem,

$z = \sqrt[3]{\overline{z_2}} \Leftrightarrow z = \sqrt[3]{\sqrt{2}e^{i\left(-\frac{3\pi}{4}\right)}} \Leftrightarrow z = \sqrt[3]{\sqrt{2}}e^{i\left(\frac{-\frac{3\pi}{4}+2k\pi}{3}\right)}, k \in \{0;1;2\} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow z = \sqrt[6]{2}e^{i\left(-\frac{\pi}{4}+\frac{2k\pi}{3}\right)}, k \in \{0;1;2\}$

Atribuindo valores a k, vem,

$k = 0 \to w_0 = \sqrt[6]{2}e^{i\left(-\frac{\pi}{4}\right)}$

$k = 1 \to w_0 = \sqrt[6]{2}e^{i\left(-\frac{\pi}{4}+\frac{2\pi}{3}\right)} = \sqrt[6]{2}e^{i\left(-\frac{3\pi}{12}+\frac{8\pi}{12}\right)} = \sqrt[6]{2}e^{i\frac{5\pi}{12}}$

$k = 2 \to w_0 = \sqrt[6]{2}e^{i\left(-\frac{\pi}{4}+\frac{4\pi}{3}\right)} = \sqrt[6]{2}e^{i\left(-\frac{3\pi}{12}+\frac{16\pi}{12}\right)} = \sqrt[6]{2}e^{i\frac{13\pi}{12}} = \sqrt[6]{2}e^{i\left(-\frac{11\pi}{12}\right)}$

O Conjunto solução é, $C.S. = \left\{\sqrt[6]{2}e^{i\left(-\frac{\pi}{4}\right)}; \sqrt[6]{2}e^{i\frac{5\pi}{12}}; \sqrt[6]{2}e^{i\left(-\frac{11\pi}{12}\right)}\right\}$

10. Seja n o número da linha do Triângulo de Pascal

Então,

$^nC_2 = 15 \Leftrightarrow \frac{n!}{2!(n-2)!} = 15 \Leftrightarrow \frac{n(n-1)(n-2)!}{2(n-2)!} = 15 \Leftrightarrow \frac{n(n-1)}{2} = 15 \Leftrightarrow n^2 - n = 30 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow n^2 - n - 30 = 0 \Leftrightarrow n = \frac{1 \pm \sqrt{(-1)^2 - 4\times 1\times(-30)}}{2\times 1} \Leftrightarrow n = \frac{1\pm\sqrt{121}}{2} \Leftrightarrow n = \frac{1\pm 11}{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow n = \frac{1-11}{2} \vee n = \frac{1+11}{2} \Leftrightarrow n = -5 \vee n = 6$

Como $n \in \mathbb{N}$, tem-se que $n = 6$

Portanto, $b =^6 C_3 = \frac{6!}{3!(6-3)!} = \frac{6\times 5\times 4\times 3!}{2\times 3\times 3!} = 20$

Resposta: (B)

11. Determinemos a função derivada de f

$f'(x) = \left[e^{-x+2} + 1\right]' = -e^{-x+2}$

Logo, $m_r = f'(2) = -e^{-2+2} = -e^0 = -1$

Portanto, a inclinação α da reta r, é igual a $\alpha = -45° + 180° = 135°$

Resposta: (D)

12. .

12.1. $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{xe^x + x^2e^x}{g(x) - g(-1)} = -\dfrac{8}{9e} \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to -1} \dfrac{xe^x(1+x)}{g(x)-g(-1)} = -\dfrac{8}{9e} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to -1}(xe^x) \times \lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x+1}{g(x)-g(-1)} = -\dfrac{8}{9e} \Leftrightarrow -e^{-1} \times \dfrac{1}{\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{g(x)-g(-1)}{x-(-1)}} = -\dfrac{8}{9e} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -\dfrac{1}{e} \times \dfrac{1}{g'(-1)} = -\dfrac{8}{9e} \Leftrightarrow \dfrac{1}{g'(-1)} = \dfrac{8}{9e} \times e \Leftrightarrow \dfrac{1}{g'(-1)} = \dfrac{8}{9} \Leftrightarrow g'(-1) = \dfrac{9}{8}$

Logo, $g'(-1) = \dfrac{9}{8}$ e o declive da reta t é $\dfrac{9}{8}$

12.2. De $\lim\limits_{x\to +\infty} \left[g(x) + \dfrac{1}{4}x - \dfrac{3}{4}\right] = 0$, resulta que,

$\lim\limits_{x\to +\infty} \left[g(x) - \left(-\dfrac{1}{4}x + \dfrac{3}{4}\right)\right] = 0$

E portanto, a reta de equação $y = -\dfrac{1}{4}x + \dfrac{3}{4}$ é assíntota ao gráfico da função g, quando $x \to +\infty$

Logo, $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{g(x)}{x} = -\dfrac{1}{4}$

Assim,

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{x^2\ln(x) - x^2g(x)}{x^3} = \lim_{x\to +\infty} \frac{x^2\ln(x)}{x^3} - \lim_{x\to +\infty} \frac{x^2g(x)}{x^3} = \lim_{x\to +\infty} \frac{\ln(x)}{x} - \lim_{x\to +\infty} \frac{g(x)}{x} =$$
$$= 0 - \left(-\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{4}$$

13. Sabe-se que $\log_a(ab) = 4$, então, vem que

$\log_a(ab) = 4 \Leftrightarrow \log_a(a) + \log_a(b) = 4 \Leftrightarrow 1 + \log_a(b) = 4 \Leftrightarrow \log_a(b) = 4 - 1 \Leftrightarrow \log_a(b) = 3$

Assim,

$$\log_b\left(\frac{\sqrt[3]{b^3a}}{a^2}\right) = \log_b\left(\sqrt[3]{b^3a}\right) - \log_b\left(a^2\right) = \log_b\left((b^3a)^{\frac{1}{3}}\right) - 2\log_b(a) =$$
$$= \frac{1}{3} \times \log_b\left((b^3a)\right) - 2 \times \frac{\log_a(a)}{\log_a(b)} = \frac{1}{3} \times \left[\log_b\left(b^3\right) + \log_b(a)\right] - 2 \times \frac{\log_a(a)}{\log_a(b)} =$$
$$= \frac{1}{3} \times \left[3 + \frac{\log_a(a)}{\log_a(b)}\right] - 2 \times \frac{1}{3} = \frac{1}{3} \times \left(3 + \frac{1}{3}\right) - \frac{2}{3} = \frac{1}{3} \times \frac{10}{3} - \frac{2}{3} = \frac{10}{9} - \frac{2}{3} = \frac{10-6}{9} = \frac{4}{9}$$

14. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{xh(x) - x}{xe^{x+2} - xe^2} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x(h(x)-1)}{x\left(e^{x+2} - e^2\right)} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{h(x)-1}{x} \times \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{e^{x+2} - e^2} =$

$= \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{h(x) - h(0)}{x - 0} \times \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{e^2\left(e^x - 1\right)} = h'(0) \times \dfrac{1}{e^2} \times \dfrac{1}{\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - 1}{x}} = -2 \times \dfrac{1}{e^2} \times \dfrac{1}{1} = -\dfrac{2}{e^2}$

Utilizou-se o limite notável $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1$

15. .

15.1. Calculemos o limite da função f, quando $x \longrightarrow -\infty$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}\left(2+\frac{x}{e^{x^2}+e^x}\right) = 2+\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{e^{x^2}+e^x} = 2+\frac{1}{\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{e^{x^2}+e^x}{x}} =$$

$$= 2+\frac{1}{\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{e^{x^2}}{x}+\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{e^x}{x}} = 2+\frac{1}{\lim\limits_{y\to+\infty}\frac{e^{y^2}}{-y}+\lim\limits_{y\to+\infty}\frac{e^{-y}}{-y}} =$$

$$= 2+\frac{1}{-\lim\limits_{y^2\to+\infty}\frac{e^{y^2}}{y^2}\times\lim\limits_{y\to+\infty}y-\lim\limits_{y\to+\infty}\frac{1}{ye^y}} = 2+\frac{1}{-\infty-0} = 2$$

Nota: Fez-se a mudança de variável:
$y=-x \Leftrightarrow x=-y$
Se $x \longrightarrow -\infty$, então, $y \longrightarrow +\infty$

Logo, a reta de equação $y=2$, é assíntota ao gráfico de f, quando $x\to-\infty$

15.2. Se $x>0$, $f(x) = -\dfrac{2\sin(-x)\cos(x)}{x} = \dfrac{2\sin(x)\cos(x)}{x} = \dfrac{\sin(2x)}{x}$
Calculemos a função derivada de f neste ramo

$$f'(x) = \left(\frac{\sin(2x)}{x}\right)' = \frac{(\sin(2x))'\times x-\sin(2x)\times x\prime}{x^2} = \frac{2\cos(2x)\times x-\sin(2x)\times 1}{x^2} =$$
$$= \frac{2x\cos(2x)-\sin(2x)}{x^2}$$

assim, $m_t = f'(\pi) = \dfrac{2\times\pi\cos(2\pi)-\sin(2\pi)}{\pi^2} = \dfrac{2\pi\times 1-0}{\pi^2} = \dfrac{2\pi}{\pi^2} = \dfrac{2}{\pi}$, é o declive da reta tangente t

$f(\pi) = \dfrac{\sin(2\pi)}{\pi} = 0$, logo, o ponto de tangência é $T(\pi;0)$

A equação da reta t é da forma $t: y = \dfrac{2}{\pi}x+b, b\in\mathbb{R}$

Como a reta passa no ponto T, vem,

$$0 = \frac{2}{\pi}\times\pi+b \Leftrightarrow b=-2$$

Portanto, a equação reduzida da reta t, tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa π, é $y=\dfrac{2}{\pi}x-2$

15.3. $0\in D_f$ e é ponto aderente de D_f
A função f é contínua em $x=0$, se existir $\lim\limits_{x\to0}f(x)$, ou seja, se $\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=f(0)$ e $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=f(0)$

Ora,

$$\lim_{x\to0^+}f(x) = \lim_{x\to0^+}\frac{\sin(2x)}{x} = \lim_{2x\to0^+}\frac{\sin(2x)}{2x}\times 2 = 1\times 2 = 2$$

Utilizou-se o limite notável $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin(x)}{x}=1$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \left(2 + \frac{x}{e^{x^2}+e^x}\right) = 2 + \lim_{x\to 0^+} \frac{x}{e^{x^2}+e^x} = 2 + \frac{0}{e^0+e^0} = 2+0 = 2$$

$f(0) = \ln\left(e^2\right) = 2$

Como, $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = f(0)$ e $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = f(0)$, então, existe $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$

Logo, a função f é contínua no ponto $x = 0$

16. $\lim v_n = \lim \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n = \lim \left[\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{1}{n}\right)\right]^n = \lim\left(1 + \frac{-1}{n}\right)^n \times \lim\left(1+\frac{1}{n}\right)^n =$
$= e^{-1} \times e = e^0 = 1^-$, visto que a sucessão (v_n) é monótona crescente

Assim, $\lim(u_n) = 1 - \lim(v_n) = 0^+$

Portanto,
$\lim g(u_n) = \lim\limits_{x\to 0^+} g(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{e^{x^2}-e^x}{x} = \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{e^{x^2}-1+1-e^x}{x} = \lim\limits_{x\to 0^+}\frac{e^{x^2}-1}{x} - \lim\limits_{x\to 0^+}\frac{e^x-1}{x} =$
$= \lim\limits_{x^2\to 0^+} \frac{e^{x^2}-1}{x^2} \times \lim\limits_{x^2\to 0^+} (x) - 1 = 1 \times 0 - 1 = -1$

Outro processo

$\lim g(u_n) = \lim\limits_{x\to 0^+} g(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{e^{x^2}-e^x}{x} = \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{e^x\left(e^{x^2-x}-1\right)}{x} = \lim\limits_{x\to 0^+}(e^x) \times \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{e^{x^2-x}-1}{x} =$
$= 1 \times \lim\limits_{x^2-x\to 0^+} \frac{e^{x^2-x}-1}{x^2-x} \times \lim\limits_{x\to 0^+}(x-1) = 1 \times (0-1) = -1$