

Funções (12.º ano)

Exponenciais e logaritmos - Resolução gráfica de equações

Exercícios de Provas Nacionais e Testes Intermédios



1. Na figura seguinte, está representado um cabo suspenso pelas suas extremidades em dois postes iguais, distanciados 10 metros entre si. Os postes estão instalados perpendicularmente ao solo, num terreno plano e horizontal. O ponto do cabo mais próximo do solo é equidistante dos dois postes.

Seja h a função, de domínio $[0,10]$, definida por $h(x) = 6,3(e^{\frac{x-5}{12,6}} + e^{\frac{5-x}{12,6}}) - 7,6$.

Admita que $h(x)$ é a altura, relativamente ao solo, em metros, de um ponto do cabo situado a x metros do poste da esquerda.

Para um ponto do cabo situado a d metros do poste da esquerda, verifica-se que, diminuindo 50% essa distância, a altura, relativamente ao solo, diminui 30 centímetros.

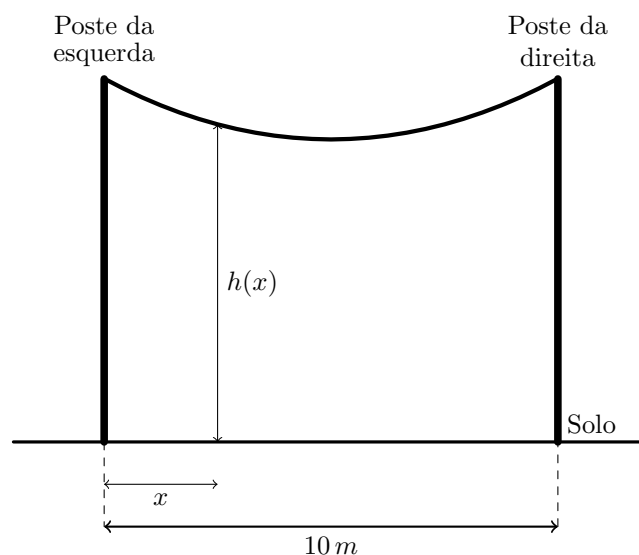
Determine, recorrendo à calculadora, o valor de d , sabendo-se que este valor existe e é único.

Apresente o resultado arredondado às décimas de metro.

Não justifique a validade do resultado obtido na calculadora.

Na sua resposta:

- apresente uma equação que lhe permita resolver o problema;
- reproduza, num referencial, o(s) gráfico(s) da(s) função(ões) visualizado(s) na calculadora que lhe permite(m) resolver a equação e apresente a(s) coordenada(s) do(s) ponto(s) relevante(s) arredondada(s) às centésimas.



2. Para conhecer a variação do número de bactérias de uma determinada estirpe, colocou-se num tubo de ensaio fechado, com alguns nutrientes, um certo número de bactérias dessa estirpe.

Admita que, nessas condições, o número, N , em milhares, de bactérias vivas existentes no tubo, t horas após a sua colocação nesse tubo, é dado por

$$N(t) = N_0 e^{1,08t - 0,3t^2}$$

em que N_0 representa a dimensão, em milhares, da população inicial.

Considere $N_0 = 1,63$

Num certo instante, t_1 , havia, no tubo de ensaio, mais meio milhar de bactérias vivas do que uma hora antes desse instante.

Determine, recorrendo à calculadora, o valor de t_1 , sabendo que este valor existe e é único.

Apresente o resultado em horas e minutos (minutos arredondados às unidades).

Não justifique a validade do resultado obtido na calculadora.

Na sua resposta:

- apresente uma equação que lhe permita resolver o problema;
- reproduza, num referencial, o(s) gráfico(s) da(s) função(ões) visualizado(s) na calculadora que lhe permite(m) resolver a equação, e apresente as coordenadas do(s) ponto(s) relevante(s) arredondadas às milésimas.

Exame – 2021, Ép. especial



3. Num laboratório cuja temperatura ambiente é constante, aqueceu-se uma substância até atingir uma certa temperatura, superior à temperatura ambiente, e, a seguir, deixou-se arrefecer essa substância durante uma hora.

Admita que a temperatura dessa substância, em graus Celsius, t minutos após o início do arrefecimento, é dada por

$$T(t) = 20 + 100e^{-kt}, \quad 0 \leq t \leq 60$$

em que k é uma constante real positiva.

Considere $k = 0,04$

Sabe-se que, durante os primeiros t_2 minutos, a taxa média de variação da função T foi igual a $-2,4$

Determine, recorrendo às capacidades gráficas da calculadora, o valor de t_2 , sabendo que esse valor existe e é único.

Apresente o resultado em minutos e segundos (segundos arredondados às unidades).

Não justifique a validade do resultado obtido na calculadora.

Na sua resposta:

- apresente uma equação que lhe permita resolver o problema;
- reproduza, num referencial, o(s) gráfico(s) da(s) função(ões) visualizado(s) na calculadora que lhe permite(m) resolver a equação, e apresente a(s) abcissa(s) do(s) ponto(s) relevante(s) arredondada(s) às milésimas.

Se, nos cálculos intermédios, proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, três casas decimais.

Exame – 2021, 2.^a Fase



4. Os satélites artificiais são utilizados para diversos fins e a altitude a que são colocados depende do fim a que se destinam.

Admita que a Terra é uma esfera.

A figura ao lado apresenta um esquema em que se pode observar a superfície terrestre coberta por um satélite, quando este se encontra numa certa posição.

Nesta figura,

- R é o raio, em quilómetros, da Terra;
- h é a altitude, em quilómetros, do satélite ($h > 0$)
- r é o raio, em quilómetros, da base da calote esférica cuja superfície é coberta pelo satélite ($0 < r < R$)
- as grandezas h e r podem relacionar-se por meio da igualdade

$$r = \frac{R}{h + R} \sqrt{h^2 + 2hR}$$

Sabe-se que, para cada posição do satélite, a percentagem da área da superfície terrestre coberta pelo satélite é dada por $50 \left(1 - \sqrt{1 - \left(\frac{r}{R} \right)^2} \right)$

Considere que o raio da Terra é 6400 km. Determine, recorrendo às capacidades gráficas da calculadora, a percentagem da área da superfície terrestre coberta por um satélite se a altitude deste for igual ao raio da base da respetiva calote esférica.

Apresente o resultado arredondado às unidades.

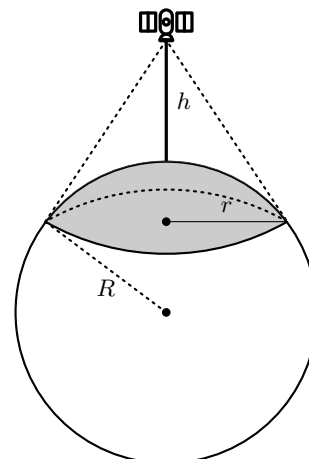
Não justifique a validade do resultado obtido na calculadora.

Na sua resposta:

- apresente uma equação que lhe permita resolver o problema;
- reproduza, num referencial, o(s) gráfico(s) da(s) função(ões) visualizado(s) na calculadora que lhe permite(m) resolver a equação e apresente as coordenadas do(s) ponto(s) relevante(s) arredondadas às centésimas;
- apresente o valor pedido arredondado às unidades.

Se, nos cálculos intermédios, proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, duas casas decimais.

Exame – 2020, 2.^a fase



5. Na figura ao lado, estão representadas, em referencial o.n. xOy ,

- parte do gráfico da função f , de domínio \mathbb{R} , definida por $f(x) = e^x$
- parte do gráfico da função g , de domínio \mathbb{R}^+ , definida por $g(x) = \frac{\ln x}{x}$

Considere que um ponto A se desloca no primeiro quadrante sobre o gráfico da função g . Para cada posição do ponto A , seja B o ponto do gráfico da função f cuja abcissa é igual a do ponto A

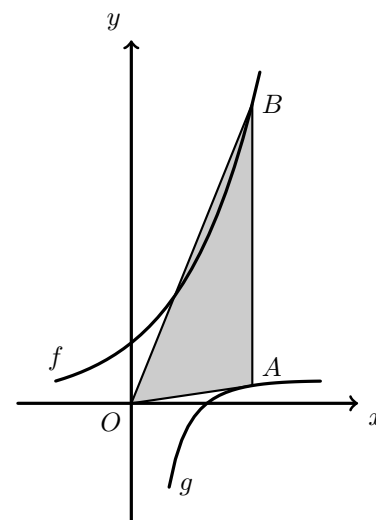
Seja a ($a > 1$) a abcissa comum dos pontos A e B

Determine, recorrendo às capacidades gráficas da calculadora, o valor de a para o qual a área do triângulo $[OAB]$ é igual a 5, sabendo-se que esse valor existe e é único.

Não justifique a validade do resultado obtido na calculadora.

Na sua resposta:

- apresente uma equação que lhe permita resolver o problema;
- reproduza, num referencial, o(s) gráfico(s) da(s) função(ões) visualizado(s) na calculadora que lhe permite(m) resolver a equação;
- apresente o valor de a arredondado às décimas.



Exame – 2019, Ép. especial

6. O nível, N , de um som, medido em decibéis, é função da sua intensidade, I , medida em microwatt por metro quadrado $\mu W/m^2$, de acordo com a igualdade

$$N = 60 + 10 \log_{10} I, \text{ com } I > 0$$

Relativamente ao som de um certo despertador, sabe-se que, aumentando a sua intensidade em $150 \mu W/m^2$, o seu nível passa a ser 1,4% do quadrado do nível inicial.

Determine, recorrendo à calculadora gráfica, o valor da intensidade inicial do som desse despertador, sabendo-se que pertence ao intervalo $[20, 80]$ e que, neste intervalo, esse valor é único.

Não justifique a validade do resultado obtido na calculadora.

Na sua resposta:

- apresente uma equação que lhe permita resolver o problema;
- reproduza o(s) gráfico(s) da(s) função(ões) visualizado(s) na calculadora que lhe permite(m) obter o valor pedido;
- apresente esse valor em $\mu W/m^2$, arredondado às unidades.

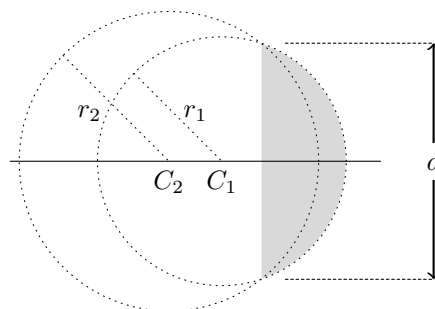
Exame – 2019, 2.ª Fase



7. Uma lente de contacto é um meio transparente limitado por duas faces, sendo cada uma delas parte de uma superfície esférica. Na figura ao lado, pode observar-se uma lente de contacto.



Na figura ao lado, está representado um corte longitudinal de duas superfícies esféricas, uma de centro C_1 e raio r_1 e outra de centro C_2 e raio r_2 , com $r_2 > r_1$, que servem de base à construção de uma lente de contacto, representada a sombreado na figura.



Seja $x = \overline{C_1 C_2}$

Sabe-se que o diâmetro, d , da lente é dado por

$$\frac{\sqrt{[(r_1 + r_2)^2 - x^2][x^2 - (r_1 - r_2)^2]}}{x}, \text{ com } r_2 - r_1 < x < \sqrt{r_2^2 - r_1^2}$$

Uma lente de contacto foi obtida a partir de duas superfícies esféricas com 7 mm e 8 mm de raio, respetivamente.

O diâmetro dessa lente excede em 9 mm a distância, x , entre os centros das duas superfícies esféricas.

Determine, recorrendo às capacidades gráficas da calculadora, o valor de x , sabendo-se que esse valor é único no intervalo $]r_2 - r_1, \sqrt{r_2^2 - r_1^2}[$

Não justifique a validade do resultado obtido na calculadora.

Na sua resposta:

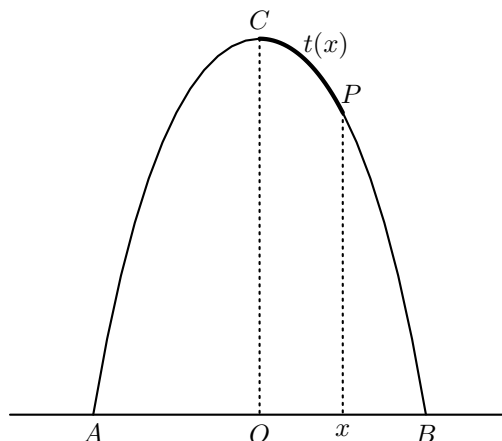
- apresente uma equação que lhe permita resolver o problema;
- reproduza, num referencial, o(s) gráfico(s) da(s) função(ões) visualizado(s) na calculadora que lhe permite(m) resolver a equação;
- apresente o valor pedido em milímetros, arredondado às décimas.

Exame – 2019, 1.^a Fase



8. Na cidade de Saint Louis, nos Estados Unidos, existe um monumento em forma de arco conhecido como Portal do Oeste. No ponto mais elevado desse arco, encontra-se um miradouro ao qual se acede por um ascensor.

A figura seguinte, à esquerda, é uma fotografia dessa estrutura, e a figura da direita representa um esquema do arco.



Relativamente à figura da direita, sabe-se que:

- os pontos A e B representam a intersecção do arco com o solo;
- o ponto O é o ponto médio de $[AB]$
- o ponto C representa o miradouro, e a reta OC é um eixo de simetria do arco.

Considere a reta AB como um eixo orientado da esquerda para a direita, com origem no ponto O e em que uma unidade corresponde a um metro.

Admita que o ascensor se está a deslocar no arco CB , do miradouro C para o ponto B

Para cada ponto P , de abcissa x , situado no arco CB , o tempo que o ascensor demora a percorrer o arco CP é dado, em minutos, por

$$t(x) = 0,34 (e^{0,0257x} - e^{-0,0257x}), \text{ com } x \in [0,96]$$

Num certo instante, o ascensor encontra-se num ponto F (não coincidente com o ponto C), a uma certa distância da reta OC . Passado algum tempo, o ascensor encontra-se num ponto G

A figura ao lado ilustra a situação.

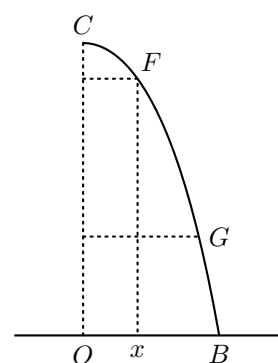
Sabe-se que:

- a distância do ponto G à reta OC é igual ao triplo da distância do ponto F à mesma reta;
- o tempo que o ascensor demora a percorrer o arco que vai de F até G é igual ao triplo do tempo que demora a percorrer o arco que vai de C até F

Determine, recorrendo à calculadora gráfica, a distância, x , em metros, do ponto F à reta OC

Na sua resposta:

- equacione o problema;
- reproduza, num referencial, o(s) gráfico(s) da(s) função(ões) visualizado(s) na calculadora que lhe permite(m) resolver a equação;
- apresente o valor da distância pedida arredondado às décimas.



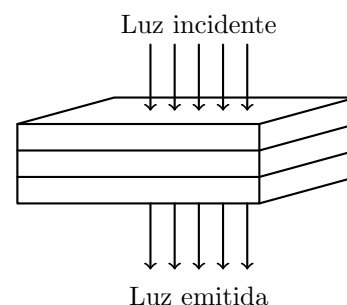
9. Um feixe de luz incide perpendicularmente sobre um conjunto de três placas sobrepostas, homogêneas e iguais, feitas de um material transparente. A figura seguinte ilustra a situação.

Admita que a potência, L , da luz transmitida, após atravessar o conjunto de placas, é dada por

$$L = I(1 - R)^6 e^{-3\lambda}$$

em que:

- I é a potência da luz incidente;
- R é o coeficiente de reflexão do material ($0 < R < 1$)
- λ é o coeficiente de absorção do material, por centímetro ($\lambda > 0$)



Relativamente ao material de que as placas são feitas, sabe-se que o coeficiente de reflexão, R , e o coeficiente de absorção, λ , têm o mesmo valor numérico.

Sabe-se ainda que a potência da luz transmitida é igual a metade da potência da luz incidente.

Determine, recorrendo à calculadora gráfica, o valor comum dos coeficientes de absorção e de reflexão do material, sabendo-se que esse valor existe e é único.

Não justifique a validade do resultado obtido na calculadora.

Na sua resposta:

- equacione o problema;
- reproduza, num referencial, o(s) gráfico(s) da(s) função(ões) visualizado(s) na calculadora que lhe permite(m) resolver a equação;
- apresente o valor pedido arredondado às milésimas.

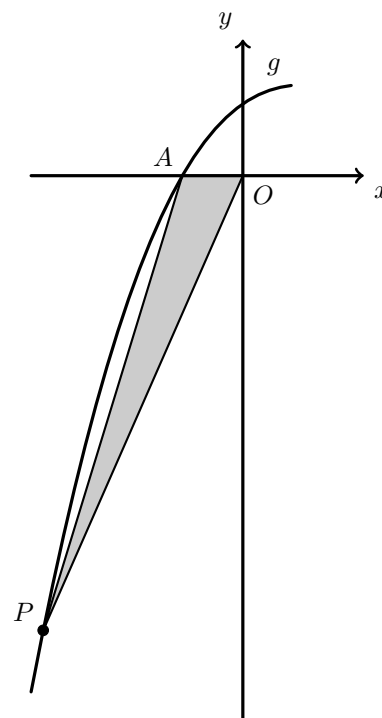
Exame – 2018, 1.^a Fase



10. Seja g a função, de domínio \mathbb{R} , definida por

$$g(x) = \begin{cases} \frac{1-x^2}{1-e^{x-1}} & \text{se } x < 1 \\ 2 & \text{se } x = 1 \\ 3 + \frac{\sin(x-1)}{1-x} & \text{se } x > 1 \end{cases}$$

Na figura ao lado, estão representados, num referencial o.n. xOy , parte do gráfico da função g e um triângulo OAP



Sabe-se que:

- o ponto A é o ponto de abscissa negativa que é a intersecção do gráfico da função g com o eixo das abscissas;
- o ponto P é um ponto do gráfico da função g , de abscissa e ordenada negativas;
- a área do triângulo $[OAP]$ é igual a 5

Determine, recorrendo à calculadora gráfica, a abscissa do ponto P . Apresente o valor obtido arredondado às décimas.

Na sua resposta:

- determine analiticamente a abscissa do ponto A
- equacione o problema;
- reproduza, num referencial, o(s) gráfico(s) da(s) função(ões) visualizado(s) na calculadora que lhe permite(m) resolver a equação.

Exame – 2017, 1.^a Fase

11. Seja f a função, de domínio \mathbb{R}_0^+ , definida por $f(x) = x^2 e^{1-x}$

Considere, num referencial o.n. xOy , três pontos, A , B e C , tais que:

- os pontos A e B pertencem ao gráfico da função f
- a abscissa do ponto B é maior do que a abscissa do ponto A
- os pontos A e B têm a mesma ordenada, a qual é igual a 1,2
- o ponto C pertence ao eixo Ox e tem abscissa igual à do ponto B

Determine, recorrendo à calculadora gráfica, a área do quadrilátero $[OABC]$, sendo O a origem do referencial. Na sua resposta:

- reproduza, num referencial, o gráfico da função f no intervalo $[0,5]$
- apresente o desenho do quadrilátero $[OABC]$
- indique as abscissas dos pontos A e B arredondadas às milésimas;
- apresente a área do quadrilátero arredondada às centésimas.

Exame – 2015, Ép. especial



12. Considere a função g , de domínio \mathbb{R}^+ , definida por $g(x) = \frac{1 + \ln x}{x^2}$

Considere, num referencial o.n. xOy , a representação gráfica da função g , os pontos A e B , e a reta r de equação $y = mx$, com $m < 0$

Sabe-se que:

- os pontos A e B pertencem ao gráfico da função g
- a abscissa do ponto A é o zero da função g
- o ponto B é o ponto de interseção da reta r com o gráfico da função g
- a área do triângulo $[OAB]$ é igual a 1

Determine a abscissa do ponto B , recorrendo à calculadora gráfica.

Na sua resposta, deve:

- equacionar o problema;
- reproduzir, num referencial, o gráfico da função ou os gráficos das funções visualizados, devidamente identificados;
- indicar a abscissa do ponto A e a abscissa do ponto B com arredondamento às centésimas.

Exame – 2014, Ép. especial

13. Considere, num referencial o.n. xOy , a representação gráfica da função f , de domínio $[0,10]$, definida por $f(x) = -e^{\frac{x}{2}} + x^2 + 8$, e dois pontos A e B

Sabe-se que:

- o ponto A é o ponto de intersecção do gráfico da função f com o eixo das ordenadas;
- o ponto B pertence ao gráfico da função f e tem abscissa positiva;
- a reta AB tem declive -2

Determine a abscissa do ponto B , recorrendo à calculadora gráfica.

Na sua resposta, deve:

- equacionar o problema;
- reproduzir, num referencial, o gráfico da função ou os gráficos das funções que tiver necessidade de visualizar na calculadora, devidamente identificados;
- indicar o valor da abscissa do ponto B com arredondamento às centésimas.

Exame – 2014, 2.ª Fase

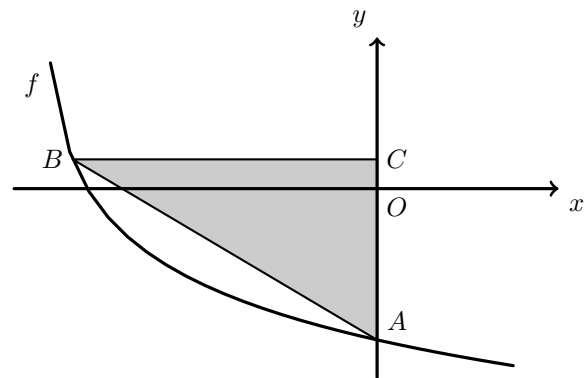


14. Considere a função f , de domínio $] -e^2, +\infty[$, definida por $f(x) = -\ln(x + e^2)$

Na figura ao lado, estão representados, num referencial o.n. xOy , parte do gráfico da função f e o triângulo $[ABC]$

Sabe-se que:

- o ponto A tem coordenadas $(0, -2)$
- o ponto B pertence ao gráfico da função f e tem abscissa negativa;
- o ponto C pertence ao eixo Oy e tem ordenada igual à do ponto B
- a área do triângulo $[ABC]$ é igual a 8



Determine a abscissa do ponto B , recorrendo à calculadora gráfica.

Na sua resposta, deve:

- escrever uma expressão da área do triângulo $[ABC]$ em função da abscissa do ponto B
- equacionar o problema;
- reproduzir, num referencial, o gráfico da função ou os gráficos das funções visualizados, devidamente identificados;
- indicar a abscissa do ponto B com arredondamento às centésimas.

Exame – 2014, 1.ª Fase

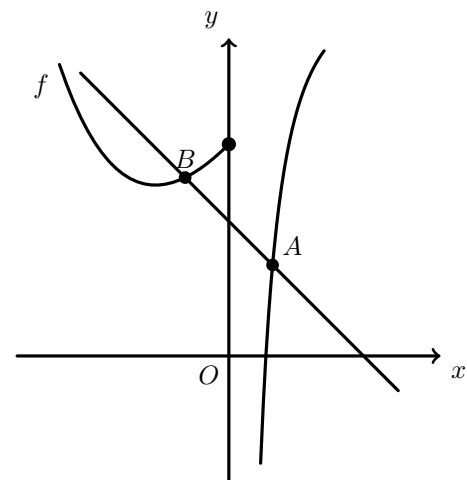
15. Seja f a função, de domínio \mathbb{R} , definida por

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 1 + e^{-x} & \text{se } x \leq 0 \\ \frac{3x + \ln x}{x} & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

Na figura ao lado, estão representados, num referencial o.n. xOy , parte do gráfico da função f , os pontos A e B , ambos pertencentes ao gráfico de f , e a reta AB

Sabe-se que:

- a reta AB é paralela à bissetriz dos quadrantes pares;
- os pontos A e B têm abscissas simétricas;
- a abscissa do ponto A pertence ao intervalo $]0,1[$



Seja a a abscissa do ponto A

Determine o valor de a , recorrendo à calculadora gráfica.

Na sua resposta, deve:

- equacionar o problema;
- reproduzir, num referencial, o gráfico da função ou os gráficos das funções que visualizar na calculadora, devidamente identificado(s);
- indicar o valor de a , com arredondamento às milésimas.

Teste Intermédio 12.º ano – 30.04.2014



16. Considere, num referencial o.n. xOy , a representação gráfica da função f , de domínio $[-1, 2]$ definida por $f(x) = -x - 3^{1+\ln(x^2+1)}$, o ponto A de coordenadas $(2, 0)$ e um ponto P que se desloca ao longo do gráfico da função f

Existe uma posição do ponto P para a qual a área do triângulo $[AOP]$ é mínima.

Determine a área desse triângulo, recorrendo à calculadora gráfica.

Na sua resposta, deve:

- reproduzir o gráfico da função ou os gráficos das funções que tiver necessidade de visualizar na calculadora, devidamente identificado(s), incluindo o referencial;
- indicar o valor da área do triângulo $[AOP]$ com arredondamento às centésimas.

Exame – 2013, 2.ª Fase

17. Considere a função f , de domínio $\mathbb{R} \setminus 0$, definida por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{e^{x-1}}{e^{4x-1}} & \text{se } x < 0 \\ x \ln x & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

Resolva, recorrendo à calculadora gráfica.

Considere, num referencial o.n. xOy , a representação gráfica da função g , de domínio \mathbb{R}^+ , definida por $g(x) = f(x) - x + \ln^2 x$

Sabe-se que:

- A é o ponto de coordenadas $(2, 0)$
- B é o ponto de coordenadas $(5, 0)$
- P é um ponto que se desloca ao longo do gráfico da função g

Para cada posição do ponto P , considere o triângulo $[ABP]$

Determine as abcissas dos pontos P para os quais a área do triângulo $[ABP]$ é 1

Na sua resposta, deve:

- equacionar o problema;
- reproduzir o gráfico da função ou os gráficos das funções que tiver necessidade de visualizar na calculadora, devidamente identificado(s), incluindo o referencial;
- indicar as abcissas dos pontos P com arredondamento às centésimas.

Exame – 2013, 1.ª Fase



18. Seja f a função, de domínio \mathbb{R} , definida por $f(x) = \begin{cases} \frac{3x+3}{\sqrt{x^2+9}} & \text{se } x \leq 4 \\ \frac{\ln(3x-11)}{x-4} & \text{se } x > 4 \end{cases}$

Considere, num referencial o.n. xOy , o triângulo $[OPQ]$ tal que:

- o ponto P é o ponto de intersecção do gráfico da função f com o eixo das ordenadas;
- o ponto Q é o ponto do gráfico da função f que tem abcissa positiva e ordenada igual à ordenada do ponto P

Determine um valor aproximado da área do triângulo $[OPQ]$, recorrendo à calculadora gráfica.

Na sua resposta, deve:

- reproduzir, num referencial, o gráfico da função f para $x \in [0,10]$
- desenhar o triângulo $[OPQ]$
- indicar a abcissa do ponto Q arredondada às milésimas;
- apresentar a área do triângulo $[OPQ]$ arredondada às centésimas.

Nota – Sempre que, nos cálculos intermédios, proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, três casas decimais.

Teste Intermédio 12.º ano – 28.02.2013

19. Considere, num referencial o. n. xOy , o gráfico da função f , de domínio \mathbb{R}^+ , definida por

$$f(x) = e^{0,1x} + \ln(3x+1)$$

Seja P um ponto do gráfico de f

A distância do ponto P à origem é igual a 2

Determine a abcissa do ponto P , recorrendo à calculadora gráfica.

Na sua resposta, deve:

- equacionar o problema;
- reproduzir o gráfico da função ou os gráficos das funções que tiver necessidade de visualizar na calculadora, devidamente identificado(s), incluindo o referencial;
- indicar a abcissa do ponto P com arredondamento às centésimas.

Exame – 2012, Ép. especial

20. Considere a função f , de domínio $[-7,0]$, definida por

$$f(x) = e^x + \ln(x^2) + 3$$

Sejam A e B os pontos de intersecção do gráfico de f com a bissetriz dos quadrantes pares, e seja d a distância entre os pontos A e B

Determine d , recorrendo à calculadora gráfica.

Na sua resposta, deve:

- reproduzir o gráfico da função ou os gráficos das funções que tiver necessidade de visualizar na calculadora, devidamente identificado(s), incluindo o referencial;
- assinalar os pontos A e B
- indicar as coordenadas dos pontos A e B com arredondamento às centésimas;
- apresentar o valor de d com arredondamento às centésimas.

Exame – 2012, 2.ª Fase



21. Considere a função f , de domínio \mathbb{R} , e a função g , de domínio $]0, +\infty[$, definidas por

$$f(x) = e^{x-2} - \frac{4e^{-x} + 4}{e^2} \quad \text{e} \quad g = -\ln(x) + 4$$

Considere ainda, num referencial o. n. xOy , os gráficos das funções f e g e o triângulo $[OAB]$. Sabe-se que:

- O é a origem do referencial;
- A e B são pontos do gráfico de f
- a abscissa do ponto A é o zero da função f
- o ponto B é o ponto de intersecção do gráfico da função f com o gráfico da função g

Determine a área do triângulo $[OAB]$, recorrendo à calculadora gráfica. Na sua resposta, deve:

- reproduzir os gráficos das funções f e g , devidamente identificados, incluindo o referencial;
- assinalar os pontos A e B
- indicar a abscissa do ponto A e as coordenadas do ponto B com arredondamento às centésimas;
- apresentar o valor da área pedida com arredondamento às décimas.

Exame – 2012, 1.ª Fase

22. Na figura ao lado, está representada, num referencial o. n. xOy , parte do gráfico da função f , de domínio $] -\infty, 6[$, definida por $f(x) = 2 + 15 \ln\left(3 - \frac{1}{2}x\right)$

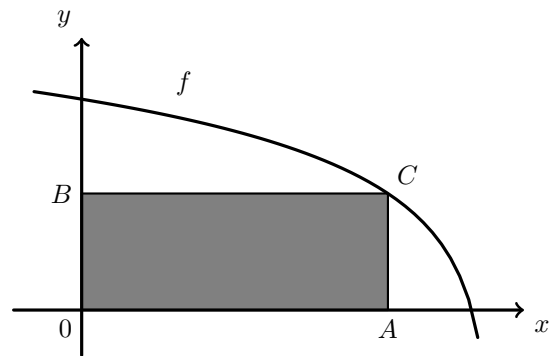
Considere que um ponto C se desloca ao longo do gráfico de f , e que C tem coordenadas positivas.

Para cada posição do ponto C , considere o retângulo $[OACB]$, em que o ponto A pertence ao eixo das abscissas e o ponto B pertence ao eixo das ordenadas.

Determine, recorrendo à calculadora gráfica, a abscissa do ponto A para a qual a área do retângulo $[OACB]$ é máxima.

Na sua resposta, deve:

- escrever a expressão que dá a área do retângulo $[OACB]$ em função da abscissa do ponto A ;
- reproduzir o gráfico da função ou os gráficos das funções que tiver necessidade de visualizar na calculadora, devidamente identificado(s), incluindo o referencial;
- indicar a abscissa do ponto A com arredondamento às centésimas.



Exame – 2011, Prova especial



23. Considere a função f , de domínio \mathbb{R} , definida por $f(x) = \begin{cases} \frac{3}{x-1} & \text{se } x < 1 \\ \frac{2 + \ln x}{x} & \text{se } x \geq 1 \end{cases}$

Existem dois pontos no gráfico de f cujas ordenadas são o cubo das abscissas.

Determine as coordenadas desses pontos recorrendo à calculadora gráfica.

Na sua resposta deve:

- equacionar o problema;
- reproduzir o gráfico da função ou os gráficos das funções que tiver necessidade de visualizar na calculadora, devidamente identificado(s), incluindo o referencial;
- assinalar esses pontos;
- indicar as coordenadas desses pontos com arredondamento às centésimas.

Exame – 2011, 1.^a fase

24. Considere a função f , de domínio $]0, +\infty[$, definida por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{e^x - 3x}{x} & \text{se } 0 < x \leq 2 \\ \frac{1}{5}x - \ln x & \text{se } x > 2 \end{cases}$$

Determine a área do triângulo $[ABC]$, recorrendo às capacidades gráficas da sua calculadora.

Sabe-se que:

- A , B e C são pontos do gráfico da função f
- A e B são os pontos cujas abscissas são as soluções, no intervalo $]0, 2]$, da equação $f(x) = f(15)$
- C é o ponto cuja ordenada é o mínimo da função f , no intervalo $]0, 2]$, e cuja abscissa pertence ao intervalo $]0, 2]$

Na sua resposta, deve:

- reproduzir o gráfico da função, ou os gráficos das funções, que tiver necessidade de visualizar na calculadora, devidamente identificado(s), incluindo o referencial;
- indicar as coordenadas dos pontos A , B e C , com arredondamento às centésimas;
- apresentar o resultado pedido, com arredondamento às décimas.

Exame – 2010, 2.^a Fase

25. Seja f a função, de domínio \mathbb{R}^+ , definida por $f(x) = \begin{cases} \frac{x-2}{x-\sqrt{2x}} & \text{se } 0 < x < 2 \\ xe^{-x} + x + 1 & \text{se } x \geq 2 \end{cases}$

Seja g a função, de domínio \mathbb{R}^+ , definida por $g(x) = 3 + \ln(x)$. A equação $f(x) = g(x)$ tem exatamente duas soluções.

Determine essas soluções, **utilizando as capacidades gráficas da sua calculadora**.

Apresente as soluções arredondadas às centésimas.

Apresente os gráficos que obteve na calculadora e assinale os pontos relevantes.

Teste Intermédio 12.º ano – 15.03.2010



26. Considere a função g , de domínio \mathbb{R}^+ , definida por $g(x) = e^{2x} + \ln x$.
 O gráfico de g contém um único ponto A com abscissa pertencente ao intervalo $]0, 2]$ e cuja ordenada é igual ao dobro da abscissa.
 Traduza esta situação por meio de uma equação.
 Resolva a equação, **recorrendo às capacidades gráficas da sua calculadora**.
 Indique as coordenadas do ponto A , com aproximação às décimas.
 Reproduza, na folha de respostas, o gráfico, ou os gráficos, visualizado(s) na calculadora, devidamente identificado(s), incluindo o referencial.
 Assinale o ponto A em que se baseou para dar a sua resposta.

Exame – 2009, 1.ª Fase

27. Considere a função g , de domínio $\left[-\frac{1}{2}, +\infty\right]$, definida por

$$g(x) = \begin{cases} 2x + \ln(1 + x - x^2) & \text{se } -\frac{1}{2} \leq x < 1 \\ 2 & \text{se } x = 1 \\ \frac{x-1}{\sqrt{x}-1} & \text{se } x > 1 \end{cases}$$

Recorrendo às capacidades gráficas da sua calculadora, determine o valor de x pertencente ao intervalo $\left[-\frac{1}{2}, 1\right]$ tal que $g(x) = -2 + g(4)$.

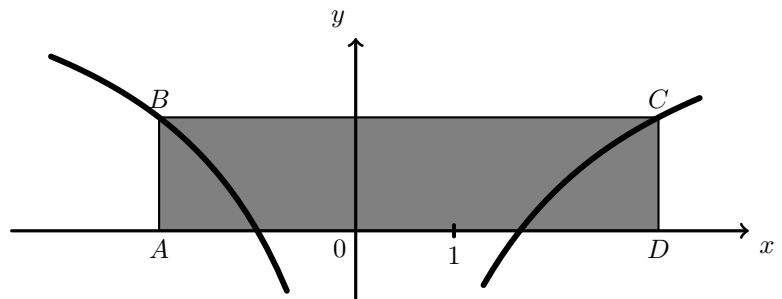
Indique o valor pedido arredondado às décimas e apresente o(s) gráfico(s) visualizado(s) na calculadora.

Teste Intermédio 12.º ano – 27.05.2009

28. Seja f a função de domínio \mathbb{R} definida por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3x^2 - 3}{x^2 - 2x + 1} & \text{se } x < 1 \\ \ln(x) - e^{1-x} & \text{se } x \geq 1 \end{cases}$$

Na figura ao lado está representada, em referencial o.n. xOy , parte do gráfico da função f



O retângulo $[ABCD]$ tem dois vértices no eixo Ox , estando os outros dois no gráfico de f . O ponto A tem abscissa -2 .

Determine a área do retângulo $[ABCD]$.

Nota: Na resolução deste problema vai necessitar de determinar a abscissa do ponto C .

Para tal, utilize as capacidades gráficas da sua calculadora.

Reproduza na sua folha de prova a parte do gráfico de f que visualizou, bem como a reta BC . Assinale também o ponto C e apresente a sua abscissa arredondada às centésimas.

Apresente a área pedida igualmente arredondada às centésimas.

Teste Intermédio 12.º ano – 11.03.2009



29. Considere a função f , de domínio $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, definida por $f(x) = \frac{e^x}{x}$.

No intervalo $]0, 5]$, a reta de equação $y = 6$ intersesta o gráfico da função f nos pontos A e B .

Determine a distância de A a B , com aproximação às décimas, **recorrendo às capacidades gráficas da sua calculadora**.

Apresente o gráfico, ou os gráficos, em que se baseou para dar a sua resposta, assinalando os pontos A e B e indicando as suas coordenadas com aproximação às décimas.

Exame – 2008, Ép. especial

30. Considere a função f , de domínio $\left]-\frac{1}{2}, +\infty\right[$, definida por $f(x) = \frac{\ln(2x+1)}{2x+1}$, e a função g , de domínio \mathbb{R} , definida por $g(x) = x - 2$ (\ln designa logaritmo de base e).

Indique as soluções inteiras da inequação $f(x) > g(x)$, **recorrendo às capacidades gráficas da sua calculadora**.

Para resolver esta inequação, percorra os seguintes passos:

- visualize as curvas representativas dos gráficos das duas funções;
- reproduza, na sua folha de respostas, o referencial e as curvas visualizadas na calculadora;
- assinale, ainda, os pontos A e B , de intersecção dos gráficos das duas funções, indicando as suas coordenadas, com aproximação às décimas.

Exame – 2008, 2.ª Fase

31. Considere, num referencial ortonormado xOy , os gráficos das funções f e g , de domínio $[0, 3]$, definidas por $f(x) = \ln(x+2)$ e $g(x) = e - e^{x-1}$ (\ln designa logaritmo de base e).

Determine a **área de um triângulo** $[OAB]$, com aproximação às décimas, **recorrendo às capacidades gráficas da sua calculadora**.

Para construir o triângulo $[OAB]$, percorra os seguintes passos:

- visualize as curvas representativas dos gráficos das duas funções, **no domínio indicado**;
- reproduza, na sua folha de respostas, o referencial e as curvas visualizadas na calculadora;
- assinale, ainda:
 - a origem O do referencial;
 - o ponto A de intersecção do gráfico das duas funções, indicando as suas coordenadas, com aproximação às décimas;
 - o ponto B de intersecção do gráfico da função g com o eixo Ox .

Exame – 2008, 1.ª Fase



32. Admita que uma certa população de seres vivos evolui de acordo com a seguinte **lei**: o número de indivíduos da população, t dias após um certo instante inicial, é dado aproximadamente por

$$P(t) = ae^{kt} \quad (t \in \mathbb{R}_+^0)$$

em que

- a é o número de indivíduos da população no instante inicial ($a > 0$)
- k é uma constante real

Admita que, às zero horas do dia 1 do corrente mês, se iniciou, em laboratório, uma cultura de bactérias, em pequena escala, na qual se juntaram 500 indivíduos de uma estirpe A e 500 indivíduos de uma estirpe B .

Sabe-se que

- no caso da estirpe A , o valor da constante k_A , com quatro casas decimais, é $k_A = -0,6931$
- no caso da estirpe B , o valor da constante k_B , com quatro casas decimais, é $k_B = 0,1155$

Nunca foram introduzidos mais indivíduos destas duas estirpes nesta cultura.

Quer a estirpe A , quer a estirpe B , evoluíram de acordo com a acima lei referida.

Durante a primeira semana, houve um momento em que o **número total** de indivíduos destas duas estirpes, existentes na cultura, atingiu o valor mínimo.

Utilizando os valores de k_a e de k_b e recorrendo às capacidades gráficas da sua calculadora, determine o **dia e a hora** em que tal aconteceu (hora arredondada às unidades).

Apresente, na sua resposta:

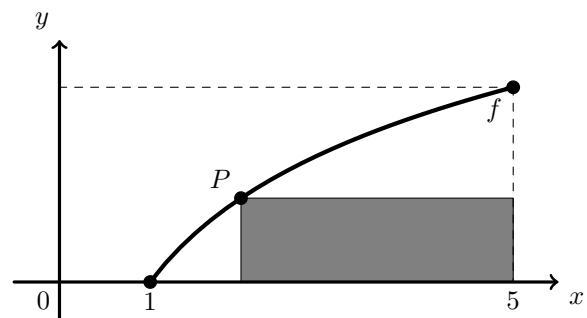
- a expressão da função que dá o número total de indivíduos destas duas estirpes, existentes na cultura, em função do tempo;
- o gráfico dessa função, para $t \in [0,7]$, no qual deve estar devidamente assinalado o ponto necessário à resolução do problema;
- a coordenada relevante desse ponto, arredondada às milésimas.

Teste Intermédio 12.º ano – 17.01.2008

33. Seja f a função, de domínio $[1,5]$, definida por $f(x) = \ln x$ (ln designa logaritmo na base e)

Na figura ao lado está representado, em referencial ortonormado xOy , o gráfico da função f .

Considere que um ponto P se desloca ao longo do gráfico de f . Para cada posição do ponto P , considere o retângulo em que um dos lados está contido no eixo Ox , outro na reta de equação $x = 5$ e os outros dois nas retas vertical e horizontal que passam pelo ponto P .



Exprima a área do retângulo em função da abscissa de P , e, recorrendo à calculadora gráfica, determine a abscissa de P (aproximada às centésimas) para a qual a área do retângulo é máxima. Apresente os elementos recolhidos na utilização da calculadora:

- o gráfico obtido;
- o ponto de ordenada máxima e respetivas coordenadas.

Exame – 2007, 1.ª Fase



34. Considere, num referencial o. n. xoy ,

- a curva C , que representa graficamente a função f , de domínio $[0,1]$, definida por $f(x) = e^x + 3x$
- a reta r , de equação $y = 5$

Recorrendo às capacidades gráficas da sua calculadora, visualize a curva C e a reta r , na janela $[0,1] \times [0,7]$ (janela em que $x \in [0,1]$ e $y \in [0,7]$).

Reproduza, na sua folha de teste, o referencial, a curva C e a reta r , visualizados na calculadora.

Assinale ainda os pontos O , P e Q , em que:

- O é a origem do referencial;
- P é o ponto de coordenadas $(0,e)$;
- Q é o ponto de interseção da curva C com a reta r ; relativamente a este ponto, indique, com duas casas decimais, a sua abcissa, que deve determinar com recurso à calculadora.

Desenhe o triângulo $[OPQ]$ e **determine a sua área**. Apresente o resultado final arredondado às décimas. Se, em cálculos intermédios, proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, duas casas decimais.

Teste Intermédio 12.º ano – 15.03.2007

35. Um estudo de mercado, encomendado por uma empresa de venda de produtos alimentares, concluiu que a quantidade de azeite *Azeitona do Campo*, vendida num mês por essa empresa, depende do lucro obtido, de acordo com a função

$$L(x) = (x - 3)e^{14-x}$$

sendo x o preço de venda ao público, em euros, de 1 litro desse azeite e $L(x)$ o lucro mensal da empresa (em euros), resultante da venda do azeite.

Utilize a calculadora para resolver **graficamente** o seguinte problema:

Entre que valores deve variar o preço de um litro de azeite de venda ao público para que o lucro mensal seja superior a dezasseis mil e quinhentos euros?

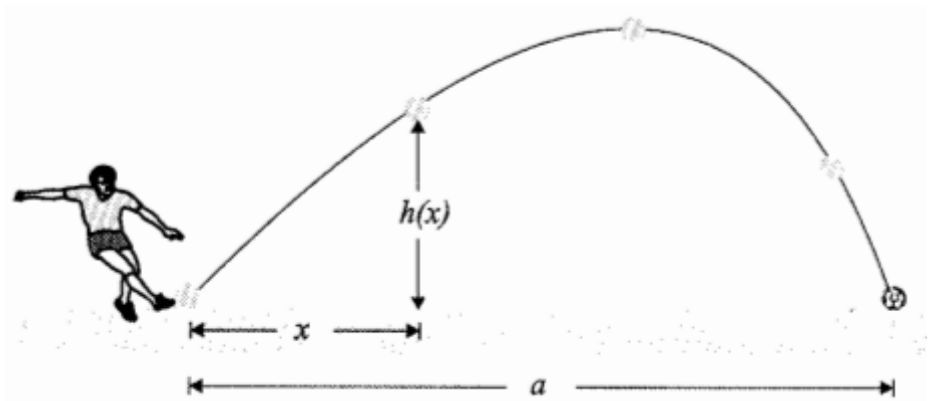
Apresente os valores em euros, arredondados aos centimos (de euro).

Apresente na sua resposta os elementos recolhidos na utilização da calculadora: gráficos e coordenadas relevantes de alguns pontos.

Teste Intermédio 12.º ano – 17.03.2006



36. Na figura ao lado está representada a trajetória de uma bola de futebol, depois de ter sido pontapeada por um jogador de da seleção portuguesa, durante um treino de preparação para o EURO-2004.



Designou-se por a a distância, em metros, entre o ponto onde a bola foi pontapeada e o ponto onde ela caiu.

Considere a função h definida em $[0, a]$ por:

$$h(x) = 2x + 10 \ln(1 - 0,1x) \quad (\ln \text{ designa logaritmo de base } e)$$

Admita que $h(x)$ é a distância, em metros, da bola ao solo, no momento em que a sua projeção no solo se encontra a x metros do local onde foi pontapeada.

Recorrendo à calculadora, determine o valor de a , arredondado às centésimas.

Explique como procedeu, apresentando todos os elementos recolhidos na utilização da calculadora.

Exame – 2005, 2.ª Fase (cód. 435)

37. No início de 1972, havia quatrocentos lobos num determinado parque natural.

As medidas de proteção a lobos fizeram com que o referido número aumentasse continuamente. Os recursos do parque permitem que o número de lobos cresça até bastante perto de um milhar, mas não permitem que esse valor seja ultrapassado.

Nestas condições, apenas uma das expressões seguintes pode definir a função P que dá o número aproximado de lobos existentes no parque natural, t anos após o início de 1972.

(A) $\frac{1000}{1 + e^{-0,5t}}$ (B) $\frac{1000}{1 + 1,5e^{-0,5t}}$ (C) $\frac{1200}{1 + 2e^{-t}}$ (D) $1000 - \frac{600(t^3 + 1)}{e^t}$

Qual é a expressão correta? Numa pequena composição, com cerca de dez linhas, explique as razões que o levariam a rejeitar as outras três opções (**apresente três razões diferentes, uma por cada opção rejeitada**).

Nota: poder-lhe-à ser útil recorrer às capacidades gráficas da sua calculadora. **Se o fizer, deve reproduzir o(s) gráfico(s) obtido(s).**

Exame – 2005, 2.ª Fase (cód. 435)

38. Considere a função f , de domínio \mathbb{R}^+ , definida por $f(x) = \frac{e^x - 1}{x}$

O conjunto solução da inequação $f(x) \leq 3 + \ln x$ é um intervalo fechado $[a, b]$ (\ln designa logaritmo de base e).

Recorrendo à sua calculadora, determine, **graficamente**, valores para a e b , arredondados às centésimas.

Nota: apresente, na sua resposta, os elementos recolhidos na utilização da calculadora, nomeadamente, o **gráfico** ou **gráficos** obtido(s), bem como coordenadas relevantes de alguns pontos.

Exame – 2004, 2.ª Fase (cód. 435)



39. Considere as funções $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ e $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definidas por:

$$f(x) = \ln x \quad (\ln \text{ designa logaritmo de base } e)$$

$$g(x) = x^2 - 3$$

Utilizando as capacidades gráficas da sua calculadora, investigue se todo o número x do intervalo $[0,1; 1,8]$ é solução da inequação $f(x) > g(x)$. Indique a conclusão a que chegou e explique como procedeu. Deverá incluir na sua explicação os gráficos obtidos na sua calculadora.

Exame – 2002, Prova para militares (cód. 435)

40. Doses terapêuticas iguais de um certo antibiótico são administradas, pela primeira vez, a duas pessoas: a Ana e o Carlos.

Admita que, durante as doze primeiras horas após a tomada simultânea do medicamento pela Ana e pelo Carlos, as concentrações de antibiótico, medidas em miligramas por litro de sangue, são dadas, respetivamente, por

$$A(t) = 4t^3 e^{-t} \quad \text{e} \quad C(t) = 2t^3 e^{-0,7t}$$

A variável t designa o tempo, medido em **horas**, que decorre desde o instante em que o medicamento é tomado ($t \in [0,12]$).

Considere as seguintes questões:

1. Quando a concentração ultrapassa 7,5 miligramas por litro de sangue, o medicamento pode ter efeitos secundários indesejáveis. Esta situação ocorrerá, neste caso, com alguma destas duas pessoas? Caso afirmativo, com quem? E em quantos miligramas por litro o referido limiar será ultrapassado?
2. Depois de atingir o nível máximo, a concentração começa a diminuir. Quando fica inferior a 1 miligrama por litro de sangue, é necessário tomar nova dose do medicamento. Quem deve tomá-la em primeiro lugar, a Ana ou o Carlos? E quanto tempo antes do outro?

Utilize as capacidades gráficas da sua calculadora para investigar estas duas questões.

Numa pequena composição, com cerca de dez linhas, explicita as conclusões a que chegou, justificando-as devidamente. Apresente, na sua resposta, os elementos recolhidos na utilização da calculadora: gráficos e coordenadas de alguns pontos (coordenadas arredondadas às décimas).

Exame – 2002, 1.ª fase - 1.ª chamada (cód. 435)

41. Na figura ao lado estão representadas, em referencial o. n. xOy

- uma curva C , gráfico da função f , de domínio \mathbb{R} , definida por $f(x) = e^x$
- uma reta r , gráfico da função g , de domínio \mathbb{R} , definida por $g(x) = x - 2$
- uma reta s paralela ao eixo Oy

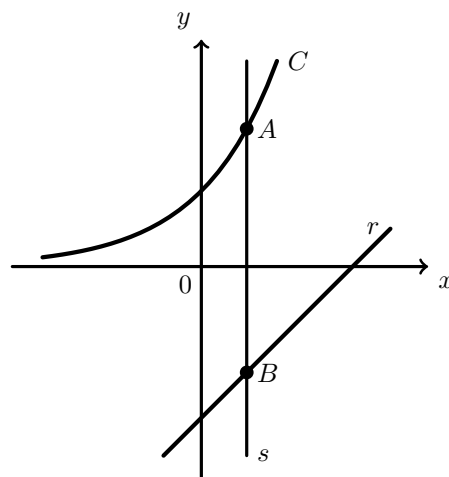
Sejam A e B os pontos de interseção da reta s com a curva C e com a reta r , respetivamente.

Imagine que a reta s se desloca, mantendo-se sempre paralela ao eixo Oy .

Os pontos A e B acompanham, naturalmente, o deslocamento da reta s .

Seja x a abcissa do ponto A .

Recorrendo à calculadora, determine $x \in [0,2]$ tal que $\overline{AB} = 5$. Apresente o resultado aproximado às décimas. Explique como procedeu (na sua explicação, deve incluir o gráfico, ou gráficos, que considerou para resolver esta questão).



Exame – 2001, Ép. especial (cód. 435)



42. Considere a função f , de domínio \mathbb{R}^+ , definida por $f(x) = 3x - 2 \ln x$ (\ln designa o logaritmo de base e). O gráfico de f contém um único ponto cuja ordenada é o quadrado da abcissa. Recorrendo à calculadora, determine um valor aproximado para a abcissa desse ponto (apresente o resultado arredondado às décimas). Explique como procedeu (na sua explicação, deve incluir o gráfico, ou gráficos, que considerou para resolver esta questão).

Exame – 2001, 1.ª fase - 1.ª chamada (cód. 435)

43. Um laboratório farmacêutico lançou no mercado um novo analgésico: o *AntiDor*. A concentração deste medicamento, em decigramas por litro de sangue, t horas após ter sido administrado a uma pessoa, é dado por

$$c(t) = t^2 e^{-0,6t} \quad (t \geq 0)$$

O mesmo laboratório realizou uma campanha de promoção deste medicamento, baseado no *slogan*:

« ***AntiDor - Ação rápida e prolongada!*** »

Numa breve composição, comente o *slogan*, tendo em conta que:

- para a maioria das dores, o *AntiDor* só produz efeito se a sua concentração for superior a 1 decigrama por litro de sangue;
- de acordo com uma associação de defesa do consumidor, um bom analgésico deve começar a produzir efeito, no máximo, meia hora após ter sido tomado, e a sua ação deve permanecer durante, pelo menos, cinco horas (após ter começado a produzir efeito).

Nota: na resolução deste item, deve utilizar as capacidades gráficas da sua calculadora e enriquecer a sua composição com o traçado de um ou mais gráficos.

Exame – 2000, Prova modelo (cód. 435)

44. Um paraquedista salta de um helicóptero. Ao fim de algum tempo, o paraquedas abre. Admita que a distância (em metros) a que o paraquedista se encontra do solo, t segundos **após a abertura do paraquedas**, é dada por

$$d(t) = 840 - 6t + 25e^{-1,7t}$$

Utilize a calculadora para determinar, com aproximação ao segundo, quanto tempo, após a abertura do paraquedas, demora o paraquedista a atingir o solo. Explique como procedeu.

Exame – 1998, Prova para militares (cód. 135)

