



SPM@TESTES

Teste de Matemática 11.º ano

2022

11.º ano de Escolaridade

Duração da Prova: 90 minutos. | Tolerância: 30 minutos.

(seis páginas)

VERSÃO 1

Para cada resposta, identifique o grupo e o item.

Apresente as suas respostas de forma legível.

As cotações dos itens encontram-se no final do enunciado da prova.

Na resposta aos itens de **escolha múltipla**, selecione a opção correta. Escreva, na folha de respostas, o número do item e a letra que identifica a opção escolhida.

Na resposta aos restantes, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias.



1. Na Figura 1 está representada, num referencial o.n. xOy , a circunferência trigonométrica.

Sabe-se que:

- a reta r é definida pela equação $x = 1$;
- o ponto C pertence à circunferência;
- o ponto B é a interseção da semirreta \vec{OC} com a reta r ;
- α é a amplitude, em radianos, do ângulo COD , com $\alpha \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$;
- os pontos A e D são, respetivamente, as projeções ortogonais de B e C sobre o eixo Oy .

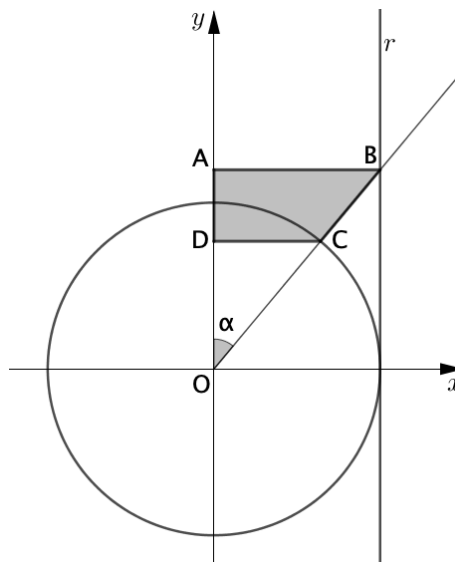


Figura 1

- 1.1. Mostre que a área do trapézio $[ABCD]$, representado a sombreado, é dada em função

de α por $A(\alpha) = \frac{\cos^2 \alpha}{2 \tan \alpha}$

- 1.2. Suponha que β é tal que $0 < \beta < \frac{\pi}{2}$ e $\sin\left(-\frac{\pi}{2} + \beta\right) = -\frac{1}{3}$

Determine o valor exato de $A(\beta)$.

2. Na Figura 2 está parte da representação gráfica da função f , de domínio \mathbb{R} , definida por:

$$f(x) = \cos x + \cos(2x)$$

Na restrição ao domínio de f considerada na Figura 2, o gráfico de f , intersesta o eixo Ox precisamente nos três pontos A, B e C assinalados na figura.

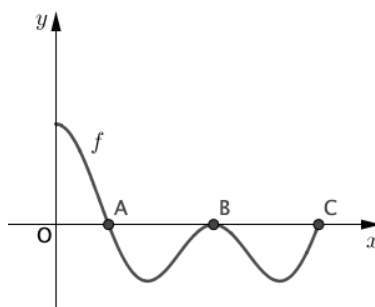


Figura 2

- 2.1. Determine, recorrendo a processos exclusivamente analíticos, as abcissas dos pontos A, B e C .

- 2.2. Para qualquer valor real de x , $f(\pi + x) - f(\pi - x)$ é igual a:

- (A) $\cos(2x)$ (B) $-\cos(2x)$ (C) $2 \cos x$ (D) 0

3. Na Figura 3, estão representados, num referencial o.n. xOy :

- o ponto C pertencente ao semieixo positivo Ox ;
- a circunferência de centro no ponto C e que passa no ponto T , de coordenadas $(2, -1)$;
- a reta t , definida pela equação $x + y - 1 = 0$ e tangente à circunferência no ponto T .

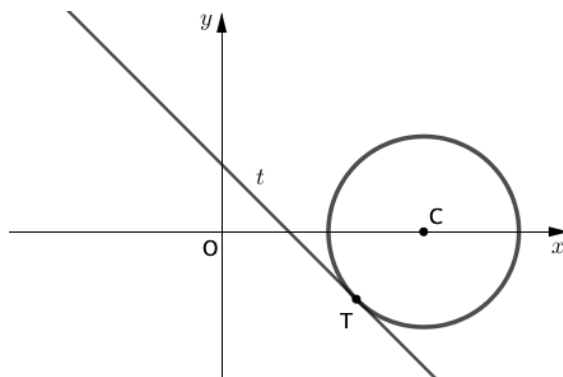


Figura 3

Determine a equação reduzida da circunferência representada na figura.

4. Considere, num referencial o.n. $Oxyz$:

- a superfície esférica de equação $(x + 1)^2 + y^2 + z^2 = 9$;
- o ponto A de coordenadas $(1, 2, 1)$ pertencente a essa superfície esférica.

Seja B o ponto de interseção da superfície esférica com o semieixo negativo das abcissas.

Determine uma equação cartesiana do plano AOB .

5. Considere, num referencial o.n. xOy os vetores \vec{u} e \vec{v} tais que:

- $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| = \|\vec{v}\| = \sqrt{10}$
- \vec{u} é um vetor diretor da reta r de declive positivo e que passa na origem do referencial;
- \vec{v} é um vetor paralelo ao eixo Ox .

A equação reduzida da reta r é:

(A) $y = x$

(B) $y = 2x$

(C) $y = 3x$

(D) $y = 4x$

6. Acerca de uma sucessão (u_n) , sabe-se que $-3 \leq u_n \leq 5$ e que $u_n - u_{n+1} < 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$

Então a sucessão (v_n) definida por $v_n = -\frac{2}{3}u_n$ é

- (A) monótona crescente e não é limitada.
- (B) monótona decrescente e 2 é um dos minorantes da sucessão.
- (C) monótona decrescente e 6 é um dos majorantes da sucessão.
- (D) monótona crescente e $-\frac{10}{3}$ é um dos minorantes da sucessão.

7. Sabe-se que:

- a sucessão (u_n) é estritamente crescente e tem todos os termos negativos;
- a sucessão (v_n) é uma progressão aritmética de razão positiva.

Considere a sucessão de termo geral $w_n = \frac{v_n}{u_n}$.

Prove que $\lim w_n = -\infty$

8. A Júlia comprou um automóvel a prestações, tendo pagado na primeira prestação, a 2 de janeiro de 2020, 120€. Depois, comprometeu-se a entregar mensalmente, uma quantia cujo montante se obtém efetuando um acréscimo de 2% à quantia paga no mês anterior, ou seja, por exemplo, em fevereiro de 2020, pagou 122,40€. Sabendo que a última prestação será paga a 2 de dezembro de 2023, indica, **justificando**, qual das expressões seguintes permitirá obter a quantia total que a Júlia pagará pelo automóvel.

$$(I) P = \frac{6000}{49} (1 - 0,02^{48}) \quad (II) P = -6000 (1 - 1,02^{48}) \quad (III) P = 120 \times 1,02^{47}$$

9. No referencial o.n. xOy da Figura 4 estão representadas graficamente a função f e a respetiva inversa, função g .

Sabe-se que:

- a função f é definida por $f(x) = x^3 - 1$
- o ponto P , de coordenadas (a, b) , pertence ao gráfico de f ;
- o ponto Q pertence ao gráfico da função g e tem abcissa b .

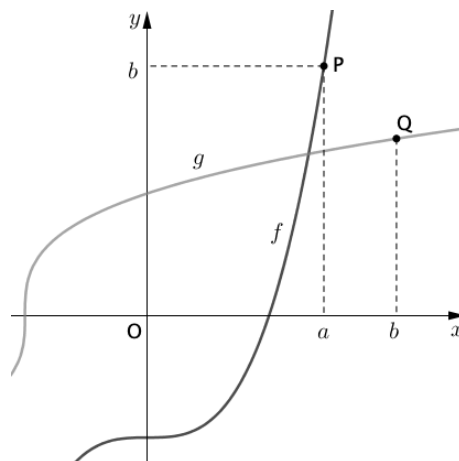


Figura 4

A ordenada do ponto Q é igual a:

- (A) $\sqrt[3]{b} + 1$ (B) $b^3 - 1$ (C) $\sqrt[3]{b+1}$ (D) $\sqrt[3]{b} - 1$
10. Considere a função real de variável real definida por $f(x) = \frac{4x+1}{x-2}$
- 10.1. Escreva $f(x)$ na forma $a + \frac{b}{x-c}$, com a, b e c números reais e identifique as assíntotas ao gráfico da função f .

10.2. Resolva a inequação $f(x) \leq \frac{1}{x}$

10.3. Determine o valor de $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)}{\frac{x+3}{x^2-5x+6}}$

11. No referencial o.n. xOy da Figura 5 estão representadas duas funções polinomiais, g e h , cujos gráficos se interseitam no ponto do eixo Ox de abcissa 2 e no ponto do eixo Oy de ordenada 4. Sabe-se ainda que a função g é quadrática e a função h é afim.

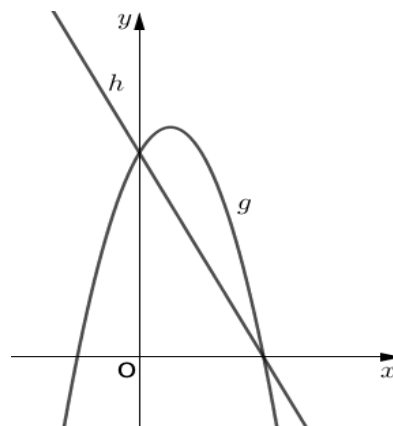


Figura 5

Qual é o valor de $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{h(x)}$?

- (A) 0 (B) $-\infty$ (C) $+\infty$ (D) -2

12. No referencial o.n. xOy da Figura 6 está representada a função f definida, no seu domínio, por $f(x) = 2\sqrt{x+1} - 4$.

Sabe-se que:

- o ponto A pertence ao gráfico da função f ;
- o ponto B tem coordenadas $(0,4)$;
- o ponto C pertence ao eixo Ox ;
- a reta AB é paralela ao eixo Ox .

A área do triângulo $[ABC]$ é igual a:

- (A) 60 (B) 30 (C) 15 (D) 14

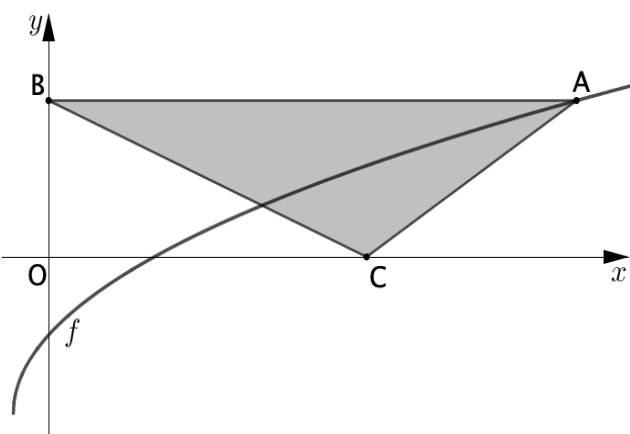


Figura 6

FIM

Questão	1.1	1.2	2.1	2.2	3	4	5	6	7	8	9	10.1	10.2	10.3	11	12	Total
Cotação	16	14	16	8	16	16	8	8	14	16	8	14	16	14	8	8	200



SPM@TESTES

Teste de Matemática 11.º ano

2022

11.º ano de Escolaridade

Duração da Prova: 90 minutos. | Tolerância: 30 minutos.

(seis páginas)

VERSÃO 2

Para cada resposta, identifique o grupo e o item.

Apresente as suas respostas de forma legível.

As cotações dos itens encontram-se no final do enunciado da prova.

Na resposta aos itens de **escolha múltipla**, selecione a opção correta. Escreva, na folha de respostas, o número do item e a letra que identifica a opção escolhida.

Na resposta aos restantes, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias.



1. Na Figura 1 está representada, num referencial o.n. xOy , a circunferência trigonométrica.

Sabe-se que:

- a reta r é definida pela equação $x = 1$;
- o ponto C pertence à circunferência;
- o ponto B é a interseção da semirreta \vec{OC} com a reta r ;
- α é a amplitude, em radianos, do ângulo COD , com $\alpha \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$;
- os pontos A e D são, respetivamente, as projeções ortogonais de B e C sobre o eixo Oy .

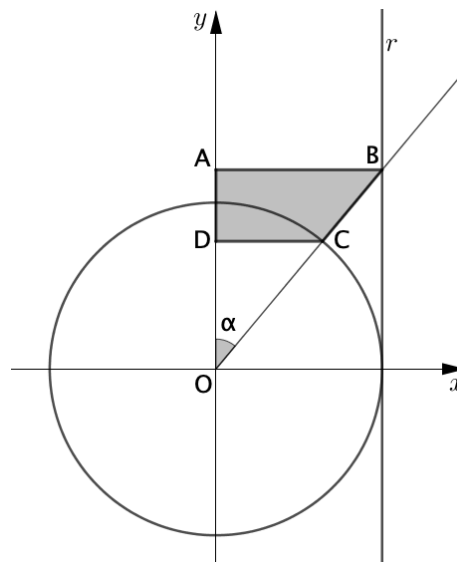


Figura 1

- 1.1. Mostre que a área do trapézio $[ABCD]$, representada a sombreado, é dada em função

de α por $A(\alpha) = \frac{\cos^2 \alpha}{2 \tan \alpha}$

- 1.2. Suponha que β é tal que $0 < \beta < \frac{\pi}{2}$ e $\sin\left(-\frac{\pi}{2} + \beta\right) = -\frac{1}{3}$

Determine o valor exato de $A(\beta)$.

2. Na Figura 2 está parte da representação gráfica da função f , de domínio \mathbb{R} , definida por:

$$f(x) = \cos x + \cos(2x)$$

Na restrição ao domínio de f considerada na Figura 2, o gráfico de f , intersesta o eixo Ox precisamente nos três pontos A, B e C assinalados na figura.

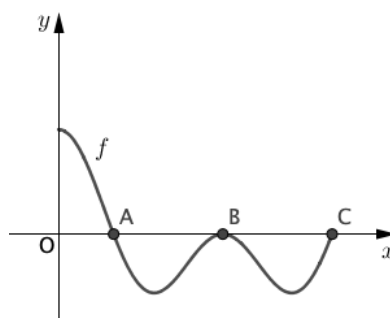


Figura 2

- 2.1. Determine, recorrendo a processos exclusivamente analíticos, as abcissas dos pontos A, B e C .

- 2.2. Para qualquer valor real de x , $f(-x) - f(\pi - x)$ é igual a:

- (A) $\cos(2x)$ (B) $-\cos(2x)$ (C) $2 \cos x$ (D) 0

3. Na Figura 3, estão representadas, num referencial o.n. xOy :

- o ponto C pertencente ao semieixo positivo Ox ;
- a circunferência de centro no ponto C e que passa no ponto T , de coordenadas $(2, -1)$;
- a reta t , definida pela equação $x + y - 1 = 0$ e tangente à circunferência no ponto T .

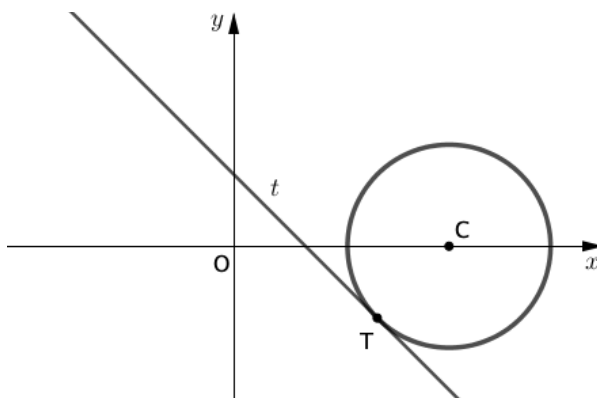


Figura 3

Determine a equação reduzida da circunferência representada na figura.

4. Considere, num referencial o.n. $Oxyz$:

- a superfície esférica de equação $(x + 1)^2 + y^2 + z^2 = 9$;
- o ponto A de coordenadas $(1, 2, 1)$ pertencente a essa superfície esférica.

Seja B o ponto de interseção da superfície esférica com o semieixo negativo das abcissas.

Determine uma equação cartesiana do plano AOB .

5. Considere, num referencial o.n. xOy os vetores \vec{u} e \vec{v} tais que:

- $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| = \|\vec{v}\| = \sqrt{5}$;
- \vec{u} é um vetor diretor da reta r de declive positivo e que passa na origem do referencial ;
- \vec{v} é um vetor paralelo ao eixo Ox .

A equação reduzida da reta r é:

(A) $y = x$

(B) $y = 2x$

(C) $y = 3x$

(D) $y = 4x$

6. Acerca de uma sucessão (u_n) , sabe-se que $-3 \leq u_n \leq 5$ e que $u_n - u_{n+1} > 0, \forall n \in \mathbb{N}$

Então a sucessão (v_n) definida por $v_n = -\frac{2}{3}u_n$ é

- (A) monótona crescente e não é limitada.
- (B) monótona decrescente e 2 é um dos minorantes da sucessão.
- (C) monótona decrescente e 6 é um dos majorantes da sucessão.
- (D) monótona crescente e $-\frac{10}{3}$ é um dos minorantes da sucessão.

7. Sabe-se que:

- a sucessão (u_n) é estritamente crescente e tem todos os termos negativos;
- a sucessão (v_n) é uma progressão aritmética de razão positiva.

Considere a sucessão de termo geral $w_n = \frac{v_n}{u_n}$.

Prove que $\lim w_n = -\infty$

8. A Júlia comprou um automóvel a prestações, tendo pagado na primeira prestação, a 2 de janeiro de 2020, 120€. Depois, comprometeu-se a entregar mensalmente, uma quantia cujo montante se obtém efetuando um acréscimo de 2% à quantia paga no mês anterior, ou seja, por exemplo, em fevereiro de 2020, pagou 122,40€. Sabendo que a última prestação será paga a 2 de dezembro de 2023, indica, **justificando**, qual das expressões seguintes permitirá obter a quantia total que a Júlia pagará pelo automóvel.

$$(I) P = 120 \times 1,02^{47} \quad (II) P = \frac{6000}{49} (1 - 0,02^{48}) \quad (III) P = -6000 (1 - 1,02^{48})$$

9. No referencial $o.n. xOy$ da Figura 4 estão representadas graficamente a função f e a respetiva inversa, função g . Sabe-se que:

- a função g é definida por $g(x) = \sqrt[3]{x+1}$
- o ponto P de coordenadas (a, b) pertence ao gráfico de f ;
- o ponto Q pertence ao gráfico da função g e tem abcissa b .

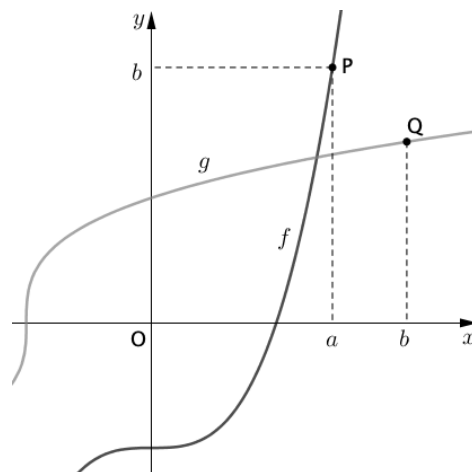


Figura 4

A ordenada do ponto P é igual a:

- (A) $(a+1)^3$ (B) $a^3 - 1$ (C) $\sqrt[3]{a+1}$ (D) $\sqrt[3]{a} - 1$
10. Considere a função real de variável real definida por $f(x) = \frac{4x+1}{x-2}$

10.1. Escreva $f(x)$ na forma $a + \frac{b}{x-c}$, com a, b e c números reais e identifique as assíntotas ao gráfico da função f .

10.2. Resolva a inequação $f(x) \leq \frac{1}{x}$

10.3. Determine o valor de $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)}{\frac{x+3}{x^2-5x+6}}$

11. No referencial $o.n. xOy$ da Figura 5 estão representadas duas funções polinomiais g e h cujos gráficos se intersectam no ponto do eixo Ox de abcissa 2 e no ponto do eixo Oy de ordenada 4. Sabe-se ainda que a função g é quadrática e a função h é afim.

Qual é o valor de $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{g(x)}{h(x)}$?

- (A) 0 (B) $-\infty$ (C) $+\infty$ (D) -2

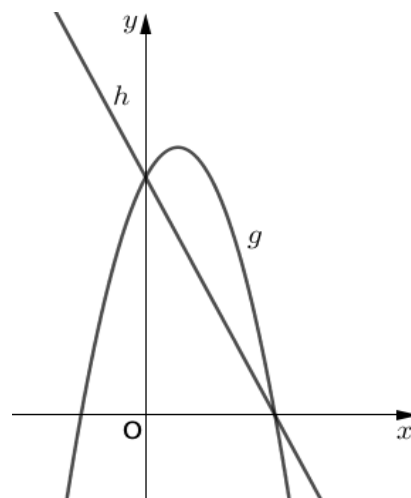


Figura 5

12. No referencial o.n. xOy da Figura 6 está representada a função f definida, no seu domínio, por $f(x) = 2\sqrt{x+1} - 3$.

Sabe-se que:

- o ponto A pertence ao gráfico da função f ;
- o ponto B tem coordenadas $(0,3)$;
- o ponto C pertence ao eixo Ox ;
- a reta AB é paralela a Ox .

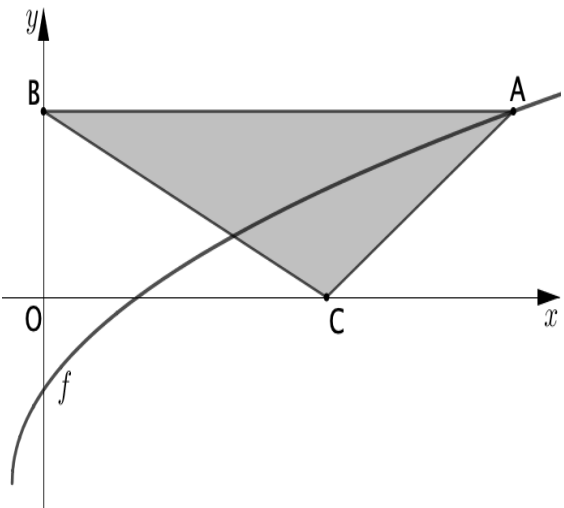


Figura 6

A área do triângulo $[ABC]$ é igual a:

- (A) 24 (B) 16 (C) 14 (D) 12

FIM

Questão	1.1	1.2	2.1	2.2	3	4	5	6	7	8	9	10.1	10.2	10.3	11	12	Total
Cotação	16	14	16	8	16	16	8	8	14	16	8	14	16	14	8	8	200