Proposta de Resolução da Ficha 1

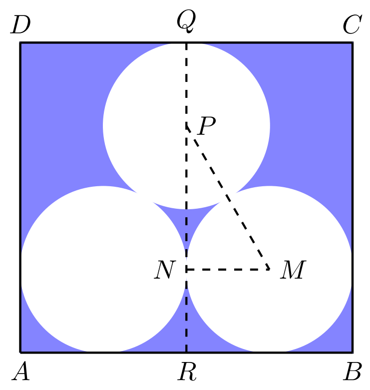
Matemática A

12.º Ano de Escolaridade | setembro de 2022

Turma: $B + C + H$

Aula de Preparação Para Exame

1. Seja r a medida do raio de cada um dos círculos



A área colorida de azul é dada por:

$A_{coloridadeazul} = A_{[ABCD]} - 3 \times A_{circulo}$

$A_{circulo} = \pi \times r^2$

Vamos determinar as dimensões do retângulo $[ABCD]$

$\overline{AB} = 2 \times 2r = 4r$

Para determinar $\overline{BC}$, comecemos por observar a figura

Foram criados os pontos M, N, P, Q e R

P e M são centros de dois círculos

N é o ponto de tangência de dois círculos

Q e R, são pontos médios dos lados $[CD]$ e $[AB]$, respetivamente

Assim,

$\overline{NR} = \overline{PQ} = \overline{NM} = r$ e $\overline{PM} = 2r$

Determinemos $\overline{PN}$, recorrendo ao teorema de Pitágoras

$\overline{PN}^2 = \overline{PM}^2 - \overline{NM}^2 \Leftrightarrow \overline{PN}^2 = (2r)^2 - r^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \overline{PN}^2 = 3r^2 \Leftrightarrow \overline{PN} = \sqrt{3r^2}$, visto que $\overline{PN} > 0$

então, $\overline{PN} = \sqrt{3r^2} = \sqrt{3}|r| = \sqrt{3}r$, visto que $r > 0$

Ora,

$\overline{BC} = \overline{RN} + \overline{NP} + \overline{PQ} = r + \sqrt{3}r + r = \sqrt{3}r + 2r$

Portanto, a área do retângulo $[ABCD]$ é dado por:

$A_{[ABCD]} = \overline{AB} \times \overline{BC} = 4r \times (\sqrt{3}r + 2r) = 4\sqrt{3}r^2 + 8r^2$

Sendo assim, tem-se que, $A_{coloridadeazul} = A_{[ABCD]} - 3 \times A_{circulo} = 4\sqrt{3}r^2 + 8r^2 - 3\pi r^2 = (8 + 4\sqrt{3} - 3\pi)r^2$

2. Fixemo-nos no triângulo equilátero $[AFL]$

   Se o raio da circunferência é a, então, a medida de comprimento dos lados do triângulo $[AFL]$ é a

   Seja M, a projeção ortogonal do ponto L sobre AF

   Então, $\overline{AM} = \frac{\overline{AF}}{2} = \frac{a}{2}$

   Aplicando o Teorema de Pitágoras ao triângulo retângulo $[ALM]$, vem,

   $\overline{AL}^2 = \overline{AM}^2 + \overline{LM}^2 \Leftrightarrow a^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + \overline{LM}^2 \Leftrightarrow a^2 = \frac{a^2}{4} + \overline{LM}^2 \Leftrightarrow \overline{LM}^2 = a^2 - \frac{a^2}{4} \Leftrightarrow \overline{LM}^2 = \frac{3a^2}{4} \Leftrightarrow$

   $\Leftrightarrow \overline{LM} = \pm\sqrt{\frac{3a^2}{4}} \Leftrightarrow \overline{LM} = \pm\frac{\sqrt{3}|a|}{\sqrt{4}} \Leftrightarrow \overline{LM} = \pm\frac{\sqrt{3}a}{2}$, visto que $a > 0$

   como $\overline{LM} > 0$, resulta, $\overline{LM} = \frac{\sqrt{3}a}{2}$

   Assim, a área do triângulo $[AFL]$ é igual a $A_{[AFL]} = \frac{\overline{AF} \times \overline{LM}}{2} = \frac{a \times \frac{\sqrt{3}a}{2}}{2} = \frac{\sqrt{3}a^2}{4}$

   Portanto, a área colorida de azul é igual a $A_{colorida \quad de \quad azul} = 10 \times A_{[AFL]} = 10 \times \frac{\sqrt{3}a^2}{4} = \frac{5\sqrt{3}a^2}{2}$ $u.a$

3. .

   3.1. Pontos da reta: $A(3;0)$ e $B\,(5;-2)$

   Declive: $m_r = \frac{-2-0}{5-3} = \frac{-2}{2} = -1$

   Assim,

   $r : y = -x + b, b \in \mathbb{R}$

   Como $A(3;0)$ é ponto da reta, vem,

   $0 = -3 + b \Leftrightarrow b = 3$

   Ou seja,

   $r : y = -x + 3$

   Logo, a equação reduzida da reta r é $y = -x + 3$

   3.2. Seja $P(x;y)$ um ponto genérico da mediatriz do segmento de reta $[AD]$

   Então,

   $\overline{AP} = \overline{DP} \Leftrightarrow \sqrt{(x-3)^2 + (y-0)^2} = \sqrt{(x-6)^2 + (y-(-2))^2}$

   Elevando ao quadrado ambos os membros da equação, resulta,

   $(x-3)^2 + (y-0)^2 = (x-6)^2 + (y-(-2))^2 \Leftrightarrow$

   $(x-3)^2 + y^2 = (x-6)^2 + (y+2)^2 \Leftrightarrow$

   $\Leftrightarrow x^2 - 6x + 9 + y^2 = x^2 - 12x + 36 + y^2 + 4y + 4 \Leftrightarrow$

   $\Leftrightarrow -6x + 9 = -12x + 36 + 4y + 4 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 4y = -6x + 12x - 36 + 9 - 4 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 4y = 6x - 31 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow y = \frac{6}{4}x - \frac{31}{4} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow y = \frac{3}{2}x - \frac{31}{4}$

Logo, a equação reduzida da reta s é $y = \frac{3}{2}x - \frac{31}{4}$

Outro processo

Seja $P(x;y)$ um ponto genérico da mediatriz do segmento de reta $[AD]$

Ponto médio de $[AD]$: $M\left(\frac{3+6}{2};\frac{0-2}{2}\right)$, ou seja, $M\left(\frac{9}{2};-1\right)$
$\overrightarrow{AD} = D - A = (6;-2) - (3;0) = (6-3;-2-0) = (3;-2)$

$\overrightarrow{MP} = P - M = (x;y) - \left(\frac{9}{2};-1\right) = \left(x - \frac{9}{2}; y - (-1)\right) = \left(x - \frac{9}{2}; y + 1\right)$

Então,

$\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{MP} = 0 \Leftrightarrow (3;-2) \cdot \left(x - \frac{9}{2}; y + 1\right) = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 3 \times \left(x - \frac{9}{2}\right) - 2 \times (y+1) = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 3x - \frac{27}{2} - 2y - 2 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2y = 3x - \frac{27}{2} - 2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2y = 3x - \frac{27}{2} - \frac{4}{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2y = 3x - \frac{31}{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow y = \frac{3}{2}x - \frac{31}{4}$

Logo, a equação reduzida da reta s é $y = \frac{3}{2}x - \frac{31}{4}$

A condição que define o semiplano superior fechado definido pela reta s, é $y \geq \frac{3}{2}x - \frac{31}{4}$

3.3. Circunferência

Centro: $C(3;-2)$
Raio: $r = 2$, visto que $A(3;0)$ é ponto da circunferência

Equação cartesiana reduzida: $(x-3)^2 + (y+2)^2 = 4$

Retas:

$r : y = -x + 3$
$s : y = \frac{3}{2}x - \frac{31}{4}$
Uma condição que define a região colorida (incluindo a fronteira), é

$(x-3)^2 + (y+2)^2 \leq 4 \wedge \left[\left(y \geq -x + 3 \wedge y \geq \frac{3}{2}x - \frac{31}{4}\right) \vee \left(y \leq -x + 3 \wedge y \leq \frac{3}{2}x - \frac{31}{4}\right)\right]$

4. .

4.1. Determinemoa equação cartesiana do plano CDG

Um vetor normal ao plano CDG é colinear com o vetor diretor da reta EH

Assim, $\overrightarrow{\alpha}(2;2;0)$ é um vetor normal ao plano CDG
Uma equação cartesiana deste plano CDG é $2x+2y+d=0, d \in \mathbb{R}$

Como o ponto $C(3;-1;4)$ é ponto deste plano, resulta,

$2\times 3+2\times(-1)+d=0 \Leftrightarrow 6-2+d=0 \Leftrightarrow d=-4$

Portanto, uma equação cartesiana do plano CDG é $2x+2y-4=0$, ou seja, $x+y-2=0$

Determinemos uma equação vetorial da reta perpendicular ao plano CDG e que passa em T

O vetor diretor desta reta é colinear com o vetor normal ao plano CDG

Assim, uma equação vetorial da reta é, $(x;y;z)=(3;1;-1)+k(1;1;0), k\in\mathbb{R}$

Um ponto genérico desta reta é $(3+k;1+k;-1), k\in\mathbb{R}$

Determinemos k de modo que este ponto pertença ao plano CDG

$3+k+1+k-2=0 \Leftrightarrow 2k+2=0 \Leftrightarrow k=-1$

Logo $T'(3-1;1-1;-1)$, ou seja, $T'(2;0;-1)$, é o ponto do plano CDG que fica mais próximo do ponto T

Resposta: (B)

4.2. Determinemos as coordenadas do ponto A

Comecemos por escrever a equação cartesiana do plano ADE

Um vetor normal ao plano ADE é colinear com o vetor $\overrightarrow{CD}$

$\overrightarrow{CD}=D-C=(1;1;2)-(3;-1;4)=(1-3;1-(-1);2-4)=(-2;2;-2)$

Portanto, $\overrightarrow{\alpha}(-2;2;-2)$ é um vetor normal al plano ADE

Uma equação cartesiana deste plano ADE é $-2x+2y-2z+d=0, d\in\mathbb{R}$

Como o ponto $D(1;1;2)$ é ponto deste plano, resulta,

$-2\times 1+2\times 1-2\times 2+d=0 \Leftrightarrow -2+2-4+d=0 \Leftrightarrow d=4$

Portanto, uma equação cartesiana do plano ADE é $-2x+2y-2z+4=0$, ou seja, $-x+y-z+2=0$

Sabe-se que $A(0;0;z)$, com $z\in\mathbb{R}$

Como o ponto A pertence ao plano ADE, vem,

$0+0-z+2=0 \Leftrightarrow -z+2=0 \Leftrightarrow z=2$

Logo, $A(0;0;2)$

O centro da superfície esférica é o ponto médio do segmento de reta $[AC]$

Seja M este ponto

Assim, $M\left(\frac{0+3}{2};\frac{0-1}{2};\frac{2+4}{2}\right)$, ou seja, $M\left(\frac{3}{2};-\frac{1}{2};3\right)$

Determinemos o raio $\overline{AM}$ da superfície esférica

$$\overline{AM}=\sqrt{\left(0-\frac{3}{2}\right)^2+\left(0+\frac{1}{2}\right)^2+(2-3)^2}=\sqrt{\frac{9}{4}+\frac{1}{4}+1}=\sqrt{\frac{7}{2}}$$

Portanto, a equação cartesiana reduzida da superfície esférica de centro no ponto M e de raio $\overline{AM}$, é

$$\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\left(y-\left(-\frac{1}{2}\right)\right)^2+(z-3)^2=\left(\sqrt{\frac{7}{2}}\right)^2\text{, ou seja, }\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\left(y+\frac{1}{2}\right)^2+(z-3)^2=\frac{7}{2}$$