Duração do Exame: 150 minutos + 30 minutos de tolerância | setembro de 2020

12.º Ano de Escolaridade

1. Comecemos por calcular $\lim(a_n)$

$$\lim(a_n) = \lim\left[1 - \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n\right] = 1 - \lim\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n = 1 - \lim\left[\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 + \frac{1}{n}\right)\right]^n = 1 - \lim\left(1 + \frac{-1}{n}\right)^n \times \lim\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 1 - e^{-1} \times e = 1 - e^0 = 1 - 1 = 0$$

Sabemos que:

$$a_1 = 1$$

$$a_n \le 1, \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\lim(a_n) = 0^+$$

Assim,

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} \frac{e^{x+1} - e}{x} = \begin{pmatrix} \frac{0}{0} \end{pmatrix} \lim_{x \to 0^+} \frac{e^x e - e}{x} = \lim_{x \to 0^+} \frac{e(e^x - 1)}{x} = e \times \lim_{x \to 0^+} \frac{e^x - 1}{x} = e \times 1 = e$$

Nota: Utilizou-se o limite notável $\lim_{x\to 0^+} \frac{e^x-1}{x} = 1$

Resposta: (B)

2. .

2.1. Suponhamos que o trio é constituído por três ases

Fazendo um esquema

$$\underline{A_1}$$
 $\underline{A_2}$ $\underline{A_3}$ \cdots

Para esta situação temos 4C_3 maneiras distintas de escolher os três ases

Para cada uma destas maneiras, temos 48 escolhas para a quarta carta (visto que às 52 cartas do baralho temos de retirar os três ases que saíram e também o outro às que falta - Esta carta não pode ser um às)

Então ${}^4C_3 \times 48$ é o número de combinações possíveis para se formar um trio de ases

Raciocinando da mesma maneira para os restantes tipos de trios, tem-se que o número de combinações de cartas que o Rodrigo pode ter recebido é ${}^4C_3 \times 48 \times 13 = 2496$

Resposta: (C)

2.2. A Marta recebeu quatro cartas

Então, o número de casos possíveis é $^{52}C_4$

Quanto ao número de casos favoráveis:

Pretendemos que saiam, um às, dois reis e uma dama

Como no baralho há quatro ases, quatro reis e quatro damas, então, temos ${}^4C_1 \times {}^4C_2 \times {}^4C_1$ maneiras distintas de receber as cartas pretendidas

Portanto, a probabilidade pedida é
$$P=\frac{^4C_1\times^4C_2\times^4C_1}{^{52}C_4}=\frac{96}{270725}$$

3. Sabemos que, $P(B \mid \overline{A})$, representa a probabilidade saírem da caixa B duas bolas vermelhas, dado que a bola retirada da caixa A é azul

Ora, se da caixa A saiu uma bola azul e esta bola foi colocada na caixa B, então a caixa B passou a ter n+10 bolas, sendo n vermelhas e 10 azuis

Assim, como a seguir se retiram, de uma só vez, duas bolas da caixa, e se pretende que sejam vermelhas, então, essa probabilidade é dada por $\frac{{}^nC_2}{{}^{n+10}C_2}$

Mas, por hipótese, sabe-se que $P(B\mid \overline{A}) = \frac{1}{8}$

Logo,

$$\begin{split} P(B \mid \overline{A}) &= \frac{1}{8} \Leftrightarrow \frac{{}^{n}C_{2}}{{}^{n+10}C_{2}} = \frac{1}{8} \Leftrightarrow \frac{\frac{n!}{2!(n-2)!}}{\frac{(n+10)!}{2!(n+8)!}} = \frac{1}{8} \Leftrightarrow \frac{2!n!(n+8)!}{2!(n+10)!(n-2)!} = \frac{1}{8} \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow \frac{n(n-1)(n-2)!(n+8)!}{(n+10)(n+9)(n+8)!(n-2)!} = \frac{1}{8} \Leftrightarrow \frac{n(n-1)}{(n+10)(n+9)} - \frac{1}{8} = 0 \Leftrightarrow \frac{8n^{2}-8n-n^{2}-19n-90}{8(n+10)(n+9)} = 0 \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow \frac{7n^{2}-27n-90}{8(n+10)(n+9)} = 0 \Leftrightarrow 7n^{2}-27n-90 = 0 \wedge 8(n+10)(n+9) \neq 0 \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow n = \frac{27\pm\sqrt{(-27)^{2}-4\times7\times(-90)}}{2\times7} \wedge n \neq -10 \wedge n \neq -9 \Leftrightarrow (n=6 \vee n=-\frac{15}{7}) \wedge n \neq -10 \wedge n \neq -9 \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow n = 6 \vee n = -\frac{15}{7} \end{split}$$

Como, $n \in \mathbb{N}$, então n = 6

Resposta: (D)

4. .

4.1. Teremos de resolver a equação g(x) = f(x), no intervalo $]0; 2\pi[$

Ora,

$$g(x) = f(x) \Leftrightarrow e^{\sin(2x)} = e^{\sin(x)} \Leftrightarrow \sin(2x) = \sin(x) \Leftrightarrow 2x = x + k2\pi \lor 2x = \pi - x + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \Leftrightarrow x = k2\pi \lor 3x = \pi + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \Leftrightarrow x = k2\pi \lor x = \frac{\pi}{3} + \frac{k2\pi}{3}, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \Leftrightarrow x = k2\pi \lor x = \frac{\pi}{3} + \frac{k2\pi}{3}, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = k2\pi \lor x = \frac{\pi}{3} + \frac{k2\pi}{3}, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = k2\pi \lor x = \frac{\pi}{3} + \frac{k2\pi}{3}, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = k2\pi \lor x = \frac{\pi}{3} + \frac{k2\pi}{3}, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = k2\pi \lor x = \frac{\pi}{3} + \frac{k2\pi}{3}, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = k2\pi \lor x = \frac{\pi}{3} + \frac{k2\pi}{3}, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = k2\pi \lor x = \frac{\pi}{3} + \frac{k2\pi}{3}, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = k2\pi \lor x = \frac{\pi}{3} + \frac{k2\pi}{3}, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = k2\pi \lor x = \frac{\pi}{3} + \frac{k2\pi}{3}, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = k2\pi \lor x = \frac{\pi}{3} + \frac{k2\pi}{3}, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = k2\pi \lor x = \frac{\pi}{3} + \frac{k2\pi}{3}, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = k2\pi \lor x = \frac{\pi}{3} + \frac{k2\pi}{3}, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = k2\pi \lor x = \frac{\pi}{3} + \frac{k2\pi}{3}, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = k2\pi \lor x = \frac{\pi}{3} + \frac{k2\pi}{3}, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = k2\pi \lor x = \frac{\pi}{3} + \frac{k2\pi}{3}, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = k2\pi \lor x = \frac{\pi}{3} + \frac{k2\pi}{3}, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = k2\pi \lor x = \frac{\pi}{3} + \frac{k2\pi}{3}, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = k2\pi \lor x = \frac{\pi}{3} + \frac{k2\pi}{3}, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = k2\pi \lor x = \frac{\pi}{3} + \frac{k2\pi}{3}, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = k2\pi \lor x = \frac{\pi}{3} + \frac{k2\pi}{3}, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = k2\pi \lor x = \frac{\pi}{3} + \frac{k2\pi}{3}, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = k2\pi \lor x = \frac{\pi}{3} + \frac{k2\pi}{3}, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = k2\pi \lor x = \frac{\pi}{3} + \frac{k2\pi}{3}, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = k2\pi \lor x = \frac{\pi}{3} + \frac{k2\pi}{3}, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = k2\pi \lor x = \frac{\pi}{3} + \frac{k2\pi}{3}, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{3}$$

Atribuindo valores a k, vem,

$$k = 0 \mapsto x = 0 \lor x = \frac{\pi}{3}$$

$$k = 1 \mapsto x = 2\pi \lor x = \frac{\pi}{3} + \frac{2\pi}{3}$$

$$\therefore x = 2\pi \lor x = \frac{\pi}{}$$

$$k = 2 \mapsto x = 4\pi \lor x = \frac{\pi}{3} + \frac{4\pi}{3}$$

$$\therefore x = 4\pi \lor x = \frac{5\pi}{3}$$

$$k = 3 \mapsto x = 6\pi \lor x = \frac{\pi}{3} + \frac{6\pi}{3}$$

$$\therefore x = 6\pi \lor x = \frac{7\pi}{3}$$

$$k = -1 \mapsto x = -2\pi \lor x = \frac{\pi}{3} - \frac{2\pi}{3}$$

$$\therefore x = -2\pi \lor x = -\frac{\pi}{3}$$

Concluímos, assim, que as soluções da equação, no intervalo $]0;2\pi[$, são:

$$\frac{\pi}{3}$$
; $\pi \in \frac{5\pi}{3}$

Portanto,

A abcissa (a) do ponto $A \notin \frac{\pi}{3}$

A abcissa (b) do ponto $B \in \pi$

A abcissa (c) do ponto $C \notin \frac{5\pi}{3}$

4.2. Determinemos as funções, f' e g', derivadas de f e de g, respetivamente

$$f'(x) = \cos(x)e^{\sin(x)} e^{\sin(x)} = 2\cos(2x)e^{\sin(2x)}$$

Assim,

$$f'(a) \times g'(a) = \cos(a)e^{\sin(a)} \times 2\cos(2a)e^{\sin(2a)} = 2\cos(a)\cos(2a)e^{\sin(a)+\sin(2a)}$$

Pretende-se resolver a equação $f'(a) \times g'(a) = -1$

Inserir as funções:

$$y_1 = 2\cos(a)\cos(2a)e^{\sin(a)+\sin(2a)}$$

$$y_2 = -1$$

Ajustar a janela de visualização: $[0; 2\pi] \times [-4; 4]$

Desenhar os gráficos das duas funções

Procurar as abcissas dos pontos de interseção dos dois gráficos

$$A(0.85; -1); B(1.42; -1); C(2.77; -1); D(3.71; -1)$$

Obtém-se: $a\approx 0.85\ rad,\ a\approx 1.42\ rad,\ a\approx 2.77\ rad$ e $a\approx 3.71\ rad$

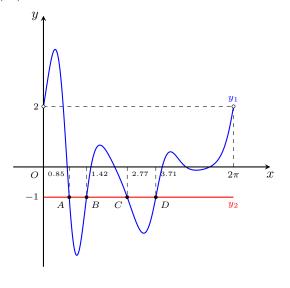


Figura 1

5. Ora,
$$u_n = \frac{2n+1}{n+2} = \frac{2n+4-3}{n+2} = \frac{2(n+2)-3}{n+2} = \frac{2(n+2)}{n+2} - \frac{3}{n+2} = 2 - \frac{3}{n+2}$$

$$n > 1, \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\therefore n+2 \geq 3, \forall_{n \in \mathbb{N}}$$

$$\begin{aligned} & n \geq 1, \forall n \in \mathbb{N} \\ & \therefore n + 2 \geq 3, \forall_{n \in \mathbb{N}} \\ & \therefore \frac{1}{n + 2} \leq \frac{1}{3}, \forall_{n \in \mathbb{N}} \end{aligned}$$

Por outro lado, a sucessão de termo geral $\frac{1}{n+2}$ tem os termos todos positivos, assim,

$$0 < \frac{1}{n+2} \le \frac{1}{3}, \forall_{n \in \mathbb{N}}$$

$$\therefore 0 > -\frac{1}{n+2} \ge -\frac{1}{3}, \forall_{n \in \mathbb{N}}$$

$$\therefore -\frac{1}{3} \le -\frac{1}{n+2} < 0, \forall_{n \in \mathbb{N}}$$

$$\therefore -1 \le -\frac{3}{n+2} < 0, \forall_{n \in \mathbb{N}}$$

$$n+2$$

$$\therefore 2-1 \le 2 - \frac{3}{n+2} < 0+2, \forall_{n \in \mathbb{N}}$$

$$\therefore 1 \le 2 - \frac{3}{n+2} < 2, \forall_{n \in \mathbb{N}}$$

$$\therefore 1 \le u_n < 2, \forall_{n \in \mathbb{N}} \text{ c.q.d.}$$

$$\therefore 1 \le 2 - \frac{3}{n+2} < 2, \forall_{n \in \mathbb{N}}$$

$$\therefore 1 \leq u_n < 2, \forall_{n \in \mathbb{N}} \text{ c.q.d.}$$

Como o conjunto dos termos da sucessão (u_n) admite majorante (2) e minorante (1), a sucessão é limitada 6. .

6.1. Como a circunferência tem raio 1, então

$$B(\cos(x);\sin(x))$$
, com, $\cos(x) < 0$ e $\sin(x) > 0$

Sendo T, a projeção ortogonal do ponto A sobre o eixo Oy, tem-se que $T(0; \sin(x))$

Assim,

$$\overline{AB} = 2|\cos(x)| = -2\cos(x)$$
, visto que, $\cos(x) < 0$

$$\overline{AD} = 2|\sin(x)| = 2\sin(x)$$
, visto que, $\sin(x) > 0$

$$\overline{FT} = 1 - |\sin(x)| = 1 - \sin(x)$$
, visto que, $\sin(x) > 0$

Portanto, a área da região colorida é

$$A_{regiaocolorida} = \pi \times 1^2 - 2 \times A_{[ABF]} - A_{[ABCD]} = \pi - 2 \times \frac{\overline{AB} \times \overline{FT}}{2} - \overline{AB} \times \overline{CD} =$$

$$= \pi - \overline{AB} \times \overline{FT} - \overline{AB} \times \overline{CD} = \pi - (-2\cos(x)) \times (1 - \sin(x)) - (-2\cos(x)) \times 2\sin(x) =$$

$$= \pi + 2\cos(x) - 2\cos(x) \times \sin(x) + 4\cos(x) \times \sin(x) =$$

$$= \pi + 2\cos(x) + 2\cos(x) \times \sin(x) =$$

$$= \pi + 2\cos(x) + \sin(2x)$$

Logo, a área A, da região colorida da figura, é dada, em função de x, por

$$A(x) = \pi + 2\cos(x) + \sin(2x)$$

$$\lim_{x \to \pi^{-}} A(x) = \lim_{x \to \pi^{-}} (\pi + 2\cos(x) + \sin(2x)) =$$
$$= \pi + 2\cos(\pi) + \sin(\pi) = \pi - 2$$

Este valor representa a área de uma região colorida, quando x está muito próximo de π

Geometricamente, quando $x\to\pi^-$, a região colorida tende para o que se observa na figura ao lado O polígono [EFGH] é um quadrado de lado $\sqrt{2}$

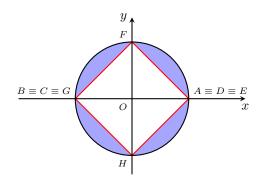


Figura 2

7. A condição $\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{BP}=0$ define uma superfície esférica de diâmetro [AB]

$$\overrightarrow{AP} = P - A = (x - a; y - 0; z - 0) = (x - a; y; z)$$

$$\overrightarrow{BP} = P - B = (x - 0; y - a; z - 0) = (x; y - a; z)$$

Assim,

$$\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{BP} = 0 \Leftrightarrow (x-a;y;z) \cdot (x;y-a;z) = 0 \Leftrightarrow x(x-a) + y(y-a) + z^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 - ax + y^2 - ay + z^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 - ax + y^2 - ay + z^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 - ax + y^2 - ay + z^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 - ax + y^2 - ay + z^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 - ax + y^2 - ay + z^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 - ax + y^2 - ay + z^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 - ax + y^2 - ay + z^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 - ax + y^2 - ay + z^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 - ax + y^2 - ay + z^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 - ax + y^2 - ay + z^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 - ax + y^2 - ay + z^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 - ax + y^2 - ay + z^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 - ax + y^2 - ay + z^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 - ax + y^2 - ay + z^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 - ax + y^2 - ay + z^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 - ax + y^2 - ay + z^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 - ax + y^2 - ay + z^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 - ax + y^2 - ay + z^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 - ax + y^2 - ay + z^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 - ax + y^2 - ay + z^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 - ax + y^2 - ay + z^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 - ax + y^2 - ay + z^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 - ax + y^2 - ay + z^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 - ax + y^2 - ay + z^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 - ax + y^2 - ay + z^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 - ax + y^2 - ay + z^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 - ax + y^2 - ay + z^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 - ax + y^2 - ay + z^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 - ax + y^2 - ay + z^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 - ax + y^2 - ay + z^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 - ax + y^2 - ay + z^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 - ax + y^2 - ay + z^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 - ax + y^2 - ay + z^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 - ax + y^2 - ay + z^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 - ax + y^2 - ay + z^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 - ax + y^2 - ay + z^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 - ax + y^2 - ay + z^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 - ax + y^2 - ay + z^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 - ax + y^2 - ay + z^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 - ax + y^2 - ay + z^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 - ax + y^2 - ay + z^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 - ax + y^2 - ax + y^2 - ay + z^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 - ax + y^2 - ax + y^2 - ay + z^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 - ax + y^2 - ax + y^2 - ay + z^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 - ax + y^2 - ax +$$

$$\Leftrightarrow \left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{a}{2}\right)^2 + z^2 = \frac{a^2}{4} + \frac{a^2}{4}$$

$$\Leftrightarrow \left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{a}{2}\right)^2 + z^2 = \frac{a^2}{2}$$

Outro processo

Centro da superfície esférica: $M\left(\frac{a+0}{2};\frac{0+a}{2};\frac{0+0}{2}\right)$, ou seja, $M\left(\frac{a}{2};\frac{a}{2};0\right)$

$$\textbf{Raio da superfície esférica: } r = \frac{\overline{AB}}{2} = \frac{\sqrt{(a-0)^2 + (0-a)^2 + (0-0)^2}}{2} = \frac{\sqrt{2}a^2}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}|a| = \frac{\sqrt{2}}{2}a$$

Assim, uma equação da superfície esférica é,

$$\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{a}{2}\right)^2 + z^2 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}a\right)^2$$

Ou seja,

$$\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{a}{2}\right)^2 + z^2 = \frac{a^2}{2}$$

Resposta: (C)

8.1. Determinemos o declive da reta r

$$m_r = \frac{1-0}{0-1} = -1$$

Logo,

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = -1$$

Assim,

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{2x}{f(x)} = 2 \times \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{\frac{f(x)}{x}} = 2 \times \frac{1}{\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x}} = 2 \times \frac{1}{-1} = -2$$

Resposta: (A)

8.2. Determinemos a função derivada de g

$$g'(x) = (2\ln(x) - x^2)' = 2 \times \frac{1}{x} - 2x = \frac{2 - 2x^2}{x}$$

Procuremos os zeros de g'

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{2 - 2x^2}{x} = 0 \land x > 0 \Leftrightarrow 2 - 2x^2 = 0 \land \land x > 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 = 1 \land x > 0 \Leftrightarrow x = \pm 1 \land x > 0 \Leftrightarrow x = 1$$

Quadro de sinal de g'

x	0		1	$+\infty$
$2 - 2x^2$		+	0	
x		+	+	+
g'(x)		+	0	_
g(x)		7	0	X

$$q(1) = 2 \times \ln(1) - 1^2 = 0 - 1 = -1$$

A função g é estritamente crescente em]0;1] e é estritamente decrescente em $[1;+\infty[$

Atinge o valor máximo absoluto -1, para x = 1

9. .

9.1. Sabemos que $z = e^{i\left(\frac{\pi}{4}\right)}$

Assim,

$$w = z^{-2} \times \overline{z} \times (-z) = \left(\frac{1}{z}\right)^2 \times \overline{z} \times (-z) = \left(e^{i\left(-\frac{\pi}{4}\right)}\right)^2 \times e^{i\left(-\frac{\pi}{4}\right)} \times e^{i\left(\pi + \frac{\pi}{4}\right)} = e^{i\left(-\frac{2\pi}{4}\right)} \times e^{i\left(\pi + \frac{\pi}{4}\right)} = e^{i\left(-\frac{\pi}{4}\right)} \times e^{i\left(\pi + \frac{\pi}{4}\right)} = e^{i\left(\pi + \frac{\pi}{4$$

Ora,
$$w^n = i^n$$

Para que w^n seja um número real, n tem de ser par

Assim, o menor valor de n para o qual w^n é um número real é 2

Resposta: (C)

9.2. Comecemos por resolver a equação $z^4 - 16 = 0$

$$z^4 - 16 = 0 \Leftrightarrow z^4 = 16 \Leftrightarrow z = \sqrt[4]{16} \Leftrightarrow z = \sqrt[4]{16}e^{i(0)} \Leftrightarrow z = \sqrt[4]{16}e^{i\left(\frac{0+k2\pi}{4}\right)}, \ k \in \{0;1;2;3\}$$
$$\Leftrightarrow z = 2e^{i\left(\frac{k\pi}{2}\right)}, \ k \in \{0;1;2;3\}$$

Atribuindo valores a k, vem,

$$k = 0 \mapsto z = 2e^{i(0)} = 2$$

$$k = 1 \mapsto z = 2e^{i\left(\frac{\pi}{2}\right)} = 2i$$

$$k = 2 \mapsto z = 2e^{i\left(\frac{2\pi}{2}\right)} = 2e^{i(\pi)} = -2$$

$$k = 3 \mapsto z = 2e^{i\left(\frac{3\pi}{2}\right)} = -2i$$

Os afixos das soluções desta equação são vértices de um quadrado inscrito numa circunferência de raio 2 e centrada na origem

Sejam, A(2;0), B(0;2), C(-2;0) e D(0;-2), esses afixos

Ora,

$$\overline{AB}=\sqrt{(2-0)^2+(0-2)^2}=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$$
 Assim, a área do polígono é $A_{[ABCD]}=\overline{AB}^2=(2\sqrt{2})^2=8~u.a.$

Resposta: (C)

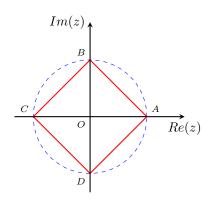


Figura 3

10. .

10.1. $0 \in D_f$

A função f é contínua em x=0, se existir $\lim_{x\to 0}f(x),$ ou seja,

se
$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^+} f(x) = f(0)$$

Ora,

$$\bullet \lim_{x \to 0^{-}} f(x) = \lim_{x \to 0^{-}} \left(\frac{xe^{x+1}}{2\sin(x)} \right) = \begin{pmatrix} \frac{1}{0} \\ \frac{1}{0} \end{pmatrix} \left(\frac{\lim_{x \to 0^{-}} e^{x+1}}{2\lim_{x \to 0^{-}} \frac{\sin(x)}{x}} \right) = \frac{e}{2 \times 1} = \frac{e}{2}$$

$$\bullet \lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} \left(\frac{e^{x+1} - e}{\sqrt{x^3 + 4x^2}} \right) = ^{\left(\frac{0}{0}\right)} \frac{\lim_{x \to 0^+} \frac{e^{x+1} - e}{x}}{\lim_{x \to 0^+} \frac{\sqrt{x^3 + 4x^2}}{x}} =$$

$$= \frac{e \times \lim_{x \to 0^{+}} \frac{e^{x} - 1}{x}}{\lim_{x \to 0^{+}} \sqrt{\frac{x^{3} + 4x^{2}}{x^{2}}}} = e \times \frac{1}{\lim_{x \to 0^{+}} \sqrt{x + 4}} = e \times \frac{1}{2} = \frac{e}{2}$$

•
$$f(0) = e^k$$

Nota:

Aplicaram-se os limites notáveis:
$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

Assim, se $e^k = \frac{e}{2} \Leftrightarrow \frac{e^k}{e} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow e^{k-1} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow k-1 = \ln\left(\frac{1}{2}\right) \Leftrightarrow k = 1 - \ln(2)$, a função f é contínua em x = 0

10.2. .

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{e^{x+1} - e}{\sqrt{x^3 + 4x^2}} \right) = \begin{pmatrix} \infty \\ \infty \end{pmatrix} \frac{\lim_{x \to +\infty} \frac{e^{x+1} - e}{x^2}}{\lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{x^3 + 4x^2}}{x^2}} =$$

$$= \frac{e \times \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x - 1}{x^2}}{\lim_{x \to +\infty} \sqrt{\frac{x^3 + 4x^2}{x^4}}} = e \times \frac{\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^2} - \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x^2}}{\lim_{x \to +\infty} \sqrt{\frac{1}{x} + \frac{4}{x^2}}} =$$

$$= e \times \frac{+\infty - 0}{\sqrt{0 + 0}} = +\infty$$
Nota:
$$\lim_{x \to +\infty} \sqrt{\frac{x^3 + 4x^2}{x^4}} = e \times \frac{\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^2} - \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x^2}}{\lim_{x \to +\infty} \sqrt{\frac{1}{x} + \frac{4}{x^2}}} = \lim_{x \to 0} \frac{e^x}{x^p} = +\infty \quad (p \in \mathbb{R})$$

Logo, o gráfico da função f não admite assíntota horizontal quando $x \to +\infty$

11. Um vetor diretor da reta $r \in \overrightarrow{u}(-2; \sqrt{3})$

Assim, o declive da reta é
$$m_r = \frac{\sqrt{3}}{-2} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Seja α a inclinação da reta r

Então,

$$\alpha = \tan^{-1}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + 180^{\circ} \approx 139.1^{\circ}$$

Quanto à equação reduzida da reta

O declive da reta é
$$m_r = \frac{\sqrt{3}}{-2} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Então,

$$r: y = -\frac{\sqrt{3}}{2}x + b, b \in \mathbb{R}$$

Como A(1; -2) é ponto da reta, vem,

$$-2 = -\frac{\sqrt{3}}{2} \times 1 + b \Leftrightarrow 2b = -4 + \sqrt{3} \Leftrightarrow b = \frac{-4 + \sqrt{3}}{2}$$

Portanto,

A equação reduzida da reta
$$r$$
 é $y=-\frac{\sqrt{3}}{2}x+\frac{-4+\sqrt{3}}{2}$

12. Determinemos a função derivada da função g

$$g'(x) = (2x + e^{-x})' = 2 - e^{-x}$$

O declive da reta tangente é,

$$m_t = q'(-2) = 2 - e^2$$

A ordenada do ponto de tangência A, é,

$$q(-2) = -4 + e^2$$

Então,

$$t: y = (2 - e^2)x + b, b \in \mathbb{R}$$

Como $A(-2; -4 + e^2)$ é ponto da reta, vem,

$$-4 + e^2 = (2 - e^2) \times (-2) + b \Leftrightarrow b = -4 + e^2 + 4 - 2e^2 \Leftrightarrow b = -e^2$$

Portanto,

A equação reduzida da reta t é $y=(2-e^2)x-e^2$

Resposta: (B)