Escola Secundária de Paredes

Proposta de Resolução da Ficha de Trabalho 7

Matemática A

12.º Ano de Escolaridade | Turma: J

1. Sabe-se que:

- A e B são pontos do gráfico da função f e têm ordenada $\ln(3)$
- C e D são os pontos de interseção do gráfico da função f com o eixo Ox

$f(x) = 0 \Leftrightarrow \ln(x^2-1) = 0 \wedge x^2 - 1 > 0 \Leftrightarrow x^2 - 1 = e^0 \wedge (x < -1 \vee x > 1) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2 - 1 = 1 \wedge (x < -1 \vee x > 1) \Leftrightarrow x^2 = 2 \wedge (x < -1 \vee x > 1) \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{2} \wedge (x < -1 \vee x > 1) \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{2}$

Logo, $C(-\sqrt{2}; 0)$ e $D(\sqrt{2}; 0)$

$f(x) = \ln 3 \Leftrightarrow \ln(x^2-1) = \ln 3 \wedge x^2 - 1 > 0 \Leftrightarrow x^2 - 1 = 3 \wedge (x < -1 \vee x > 1) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2 = 4 \wedge (x < -1 \vee x > 1) \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{4} \wedge (x < -1 \vee x > 1) \Leftrightarrow x = \pm 2$

Logo, $A(2; \ln 3)$ e $B(-2; \ln 3)$

Assim,

$\overline{AB} = |2 - (-2)| = 4$

$\overline{CD} = |\sqrt{2} - (-\sqrt{2})| = 2\sqrt{2}$

Portanto,

$$A_{[ABCD]} = \frac{\overline{AB} + \overline{CD}}{2} \times |Ordenada \quad de \quad A| = \frac{4 + 2\sqrt{2}}{2} \times |\ln 3| = \left(2 + \sqrt{2}\right) \times \ln 3 \ u.a.$$

2. Sabe-se que $\log_a b = m$, com $a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$, $b > 0$ e $m \in \mathbb{R}$

$$\log_{\frac{1}{a}}\left(\sqrt[3]{ab^2}\right) = \frac{\log_a\left(\sqrt[3]{ab^2}\right)}{\log_a\left(\frac{1}{a}\right)} = \frac{\log_a\left[\left(ab^2\right)^{\frac{1}{3}}\right]}{\log_a\left(a^{-1}\right)} = \frac{\frac{1}{3}\log_a\left(ab^2\right)}{-1} = -\frac{1}{3}\left(\log_a a + \log_a\left(b^2\right)\right) =$$

$$= -\frac{1}{3}\left(1 + 2\log_a b\right) = -\frac{1}{3}(1 + 2m) = -\frac{1}{3} - \frac{2}{3}m$$

Assim,

$$\log_{\frac{1}{a}}\left(\sqrt[3]{ab^2}\right) > 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{3} - \frac{2}{3}m > 0 \Leftrightarrow -1 - 2m > 0 \Leftrightarrow -2m > 1 \Leftrightarrow m < -\frac{1}{2}$$

3. Ponto B

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow 2e^x - 1 = 0 \Leftrightarrow 2e^x = 1 \Leftrightarrow e^x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \ln\left(\frac{1}{2}\right) \Leftrightarrow x = \ln\left(2^{-1}\right) = -\ln 2$$

Logo, $B(-\ln 2; 0)$

Ponto A

$f(x)=g(x) \Leftrightarrow 2e^x-1=4e^{-x}+1 \Leftrightarrow 2e^x-1-4e^{-x}-1=0 \Leftrightarrow 2e^x-4e^{-x}-2=0 \Leftrightarrow 2e^x-\frac{4}{e^x}-2=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{2(e^x)^2-4-2e^x}{e^x}=0 \Leftrightarrow \frac{2(e^x)^2-2e^x-4}{e^x}=0 \Leftrightarrow 2(e^x)^2-2e^x-4=0 \wedge e^x \neq 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2(e^x)^2-2e^x-4=0 \wedge$ Condição universal $\Leftrightarrow 2(e^x)^2-2e^x-4=0$

Fazendo a mudança de variável $y=e^x$, vem,

$2y^2-2y-4=0 \Leftrightarrow y^2-y-2=0 \Leftrightarrow y=\frac{-(-1)\pm\sqrt{(-1)^2-4\times 1\times(-2)}}{2\times 1} \Leftrightarrow y=2 \vee y=-1$

Como, $y=e^x$, vem,

$e^x=2 \vee e^x=-1 \Leftrightarrow x=\ln 2 \vee$ Equação impossível $\Leftrightarrow x=\ln 2$

Logo, $A\left(\ln 2; f(\ln 2)\right)$

Ora,

$f(\ln 2)=2e^{\ln 2}-1=2\times 2-1=4-1=3$

Portanto, $A(\ln 2;3)$

Assim,

$\overline{OB}=|-\ln 2|=\ln 2$

Portanto,

$A_{[ABO]}=\frac{\overline{OB}\times|Ordenada \quad de \quad A|}{2}=\frac{\ln 2\times|3|}{2}=\frac{3\ln 2}{2}$ $u.a.$

4. Domínio de f

$D_f=\{x\in\mathbb{R}: x+2>0 \wedge x-e>0 \wedge 1-|\ln(x-e)|\neq 0\}=\{x\in\mathbb{R}: x>-2 \wedge x>e \wedge 1-|\ln(x-e)|\neq 0\}=$

$=\left\{x\in\mathbb{R}: x>e \wedge x\neq\frac{e^2+1}{e} \wedge x\neq 2e\right\}=]e;+\infty[\setminus\left\{\frac{e^2+1}{e};2e\right\}$

Cálculos auxiliares

$1-|\ln(x-e)|=0 \Leftrightarrow |\ln(x-e)|=1 \wedge x-e>0 \Leftrightarrow (\ln(x-e)=-1 \vee \ln(x-e)=1) \wedge x>e \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left(x-e=e^{-1} \vee x-e=e\right) \wedge x>e \Leftrightarrow \left(x=e+e^{-1} \vee x=2e\right) \wedge x>e \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left(x=e+\frac{1}{e} \vee x=2e\right) \wedge x>e \Leftrightarrow \left(x=\frac{e^2+1}{e} \vee x=2e\right) \wedge x>e \Leftrightarrow x=\frac{e^2+1}{e} \vee x=2e$

5. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2+4x}{e^{x+4}-e^4}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x(x+4)}{e^x\times e^4-e^4}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x(x+4)}{e^4\times(e^x-1)}=\dfrac{1}{e^4}\times\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{e^x-1}\times\lim\limits_{x\to 0}(x+4)=$

$$=\frac{1}{e^4}\times\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x}{x}}{\frac{e^x-1}{x}}\times 4=\frac{4}{e^4}\times\frac{1}{\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}}=\frac{4}{e^4}\times\frac{1}{1}=\frac{4}{e^4}$$

Aplicou-se o limite notável $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x}=1$

6. .

6.1. Domínio da função f

$$D_f=\left\{x\in\mathbb{R}:x^2-1>0\right\}=\{x\in\mathbb{R}:x<-1\vee x>1\}=]-\infty;-1[\cup]1;+\infty[$$

Primeira derivada da função f

$$f'(x)=\left(\ln(x^2-1)\right)'=\frac{(x^2-1)'}{x^2-1}=\frac{2x}{x^2-1}$$

Segunda derivada da função f

$$f''(x)=\left(\frac{2x}{x^2-1}\right)'=\frac{(2x)'\times(x^2-1)-2x\times(x^2-1)'}{\left(x^2-1\right)^2}=\frac{2(x^2-1)-2x\times 2x}{\left(x^2-1\right)^2}=$$

$$=\frac{2x^2-2-4x^2}{\left(x^2-1\right)^2}=\frac{-2x^2-2}{\left(x^2-1\right)^2}$$

Zeros de $f''(x)$

$$f''(x)=0\Leftrightarrow\frac{-2x^2-2}{\left(x^2-1\right)^2}=0\Leftrightarrow -2x^2-2=0\wedge\left(x^2-1\right)^2\neq 0\Leftrightarrow 2x^2+2=0\wedge x\neq\pm 1\Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow$ Equação impossível $\wedge x\neq\pm 1$

Logo, não existem zeros de $f''(x)$

Sinal de $f''(x)$

$$f''(x)=\frac{-2x^2-2}{\left(x^2-1\right)^2}=-\frac{2x^2+2}{\left(x^2-1\right)^2}<0,\forall x\in]-\infty;-1[\cup]1;+\infty[$$

Portanto, o gráfico da função f tem a concavidade voltada para baixo em todo o seu domínio, não existindo pontos de inflexão

6.2. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2f(x)-x^2g(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2\left(f(x)-g(x)\right)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[x\left(f(x)-g(x)\right)\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[x\left(\ln(x^2-1)-2\ln(x)\right)\right]=$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left[x\left(\ln(x^2-1)-\ln\left(x^2\right)\right)\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[x\ln\left(\frac{x^2-1}{x^2}\right)\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[\ln\left(\frac{x^2-1}{x^2}\right)^x\right]=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left[\ln\left(\frac{x^2}{x^2}-\frac{1}{x^2}\right)^x\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[\ln\left(1-\frac{1}{x^2}\right)^x\right]=\ln\left[\lim_{x\to+\infty}\left(1-\frac{1}{x^2}\right)^x\right]=$$

$$=\ln\left[\lim_{x\to+\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)^x\times\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\right]=\ln\left(e^{-1}\times e\right)=\ln\left(e^0\right)=0$$

7. Primeira derivada da função g

$$g'(x)=\left[1+\ln^2\left(\frac{1}{x}\right)\right]'=0+2\ln\left(\frac{1}{x}\right)\times\left[\ln\left(\frac{1}{x}\right)\right]'=2\ln\left(\frac{1}{x}\right)\times\frac{\left(\frac{1}{x}\right)'}{\frac{1}{x}}=2\ln\left(\frac{1}{x}\right)\times\frac{\frac{1'\times x-1\times x'}{x^2}}{\frac{1}{x}}=$$

$$=2\ln\left(\frac{1}{x}\right)\times\frac{\frac{-1}{x^2}}{\frac{1}{x}}=-2\ln\left(\frac{1}{x}\right)\times\frac{1}{x}=-2\ln\left(x^{-1}\right)\times\frac{1}{x}=2\ln x\times\frac{1}{x}$$

7.1. Declive da reta: $m_r = g'\left(\frac{1}{e}\right) = 2\ln\left(\frac{1}{e}\right) \times \frac{1}{\frac{1}{e}} = 2\ln e^{-1} \times e = -2e$

Ponto de tangência: $T\left(\frac{1}{e}; g\left(\frac{1}{e}\right)\right)$

$g\left(\frac{1}{e}\right) = 1 + \ln^2\left(\frac{1}{\frac{1}{e}}\right) = 1 + \ln^2 e = 1 + 1 = 2$

Logo, $T\left(\frac{1}{e}; 2\right)$

Assim,

$r : y = -2ex + b, b \in \mathbb{R}$

Como a reta passa no ponto $T\left(\frac{1}{e}; 2\right)$, vem,

$2 = -2e \times \frac{1}{e} + b \Leftrightarrow b = 4$

Concluindo, a equação reduzida da reta tangente ao gráfico da função f no ponto de abcissa $\frac{1}{e}$, é $y = -2ex + 4$

7.2. Função derivada de g

$g'(x) = 2\ln x \times \frac{1}{x}$

Zeros de $g'(x)$

$g'(x) = 0 \Leftrightarrow -2\ln x \times \frac{1}{x} = 0 \Leftrightarrow 2\ln x = 0 \vee \frac{1}{x} = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left(x = e^0 \wedge x > 0\right) \vee$ Equação impossível $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = 1 \wedge x > 0 \Leftrightarrow x = 1$

Quadro de sinal da função $g'(x)$

x	0		1	$+\infty$
$2\ln x$	///	$-$	0	$+$
$\frac{1}{x^2}$	///	$+$	$+$	$+$
$g'(x)$	///	$-$	0	$+$
$g(x)$	///	$\searrow$	1	$\nearrow$

$g(1) = 1 + \ln^2\left(\frac{1}{1}\right) = 1 + \ln^2 1 = 1 + 0 = 1$

A função g é crescente em $[1; +\infty[$, é decrescente em $]0; 1]$, e atinge o valor mínimo absoluto 1, para $x = 1$

8. $5 \in D_f$

A função f é contínua em $x=5$, se existir $\lim\limits_{x \to 5} f(x)$, ou seja,

se $\lim\limits_{x \to 5^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 5^+} f(x) = f(5)$

Ora,

$$\lim_{x \to 5^-} f(x) = \lim_{x \to 5^-} \frac{5e^5 - xe^x}{x-5} =^{\left(\frac{0}{0}\right)} \lim_{y \to 0^-} \frac{5e^5 - (y+5)e^{y+5}}{y} =$$

$$= \lim_{y \to 0^-} \frac{5e^5 - ye^{y+5} - 5e^{y+5}}{y} = -\lim_{y \to 0^-} \frac{ye^{y+5}}{y} - 5\lim_{y \to 0^-} \frac{e^{y+5} - e^5}{y} = -\lim_{y \to 0^-} e^{y+5} - 5\lim_{y \to 0^-} \frac{e^y \times e^5 - e^5}{y} =$$

$$= -e^5 - 5\lim_{y \to 0^-} \frac{e^5\left(e^y - 1\right)}{y} = -e^5 - 5e^5 \lim_{y \to 0^-} \frac{e^y - 1}{y} = -e^5 - 5e^5 \times 1 = -6e^5$$

Fez-se a mudança de variável

$y = x - 5 \Leftrightarrow x = y + 5$

Se $x \mapsto 5^-$, então, $y \mapsto 0^-$

Aplicou-se o limite notável $\lim\limits_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

$$\lim_{x \to 5^+} f(x) = \lim_{x \to 5^+} \frac{6e^5 - 6e^{x^2-20}}{2x^2 - 10x} =^{\left(\frac{0}{0}\right)} 6\lim_{x \to 5^+} \frac{e^5 - e^{x^2-25} \times e^5}{2x^2 - 10x} = 6e^5 \lim_{x \to 5^+} \frac{1 - e^{x^2-25}}{2x^2 - 10x} =$$

$$= -6e^5 \lim_{x \to 5^+} \frac{e^{x^2-25} - 1}{x^2 - 25} \times \lim_{x \to 5^+} \frac{x^2 - 25}{2x^2 - 10x} = -6e^5 \lim_{y \to 0^+} \frac{e^y - 1}{y} \times \lim_{x \to 5^+} \frac{(x-5)(x+5)}{2x(x-5)} =$$

$$= -6e^5 \times 1 \times \lim_{x \to 5^+} \frac{x+5}{2x} = -6e^5 \times \frac{10}{10} = -6e^5$$

Fez-se a mudança de variável

$y = x^2 - 25$, então, $x = \sqrt{y+25}$, visto que $x > 0$

Se $x \mapsto 5^+$, então, $y \mapsto 0^+$

Aplicou-se o limite notável $\lim\limits_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

$f(5) = -6e^{1-3k}$

Ora, a função f é contínua em $x=5$, se, $\lim\limits_{x \to 5^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 5^+} f(x) = f(5)$

Então, deverá ter-se,

$$-6e^{1-3k} = -6e^5 \Leftrightarrow e^{1-3k} = e^5 \Leftrightarrow 1 - 3k = 5 \Leftrightarrow -3k = 5 - 1 \Leftrightarrow -3k = 4 \Leftrightarrow k = -\frac{4}{3}$$

Portanto, a função f é contínua em $x=5$, se $k = -\frac{4}{3}$