Escola Secundária de Paredes

Proposta de Resolução da Ficha de Trabalho 2

Matemática A

12.º Ano de Escolaridade | Turma: J

1. .

1.1. ⋇ Seja $a \in A$: Qualquer **vizinhança** de centro no ponto a interseta o conjunto A em algum elemento do conjunto A (quanto mais não seja, interseta no próprio ponto a)
Isto é o mesmo que dizer que existe uma sucessão de valores do conjunto A convergente para a

Então, **qualquer ponto nestas condições** é ponto aderente do conjunto A

⋇ Quanto ao número $a = 3$: Verifica-se, também, que qualquer vizinhança centrada em 3 interseta o conjunto A em algum ponto de A, pelo que, também 3 é ponto aderente de A
Isto é o mesmo que dizer que existe uma sucessão de valores do conjunto A convergente para 3

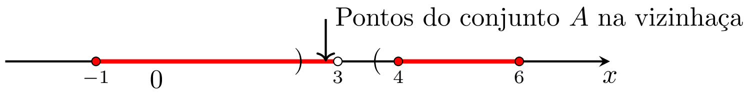

Figura 1

Assim, a aderência do conjunto A é $\overline{A} = [-1; 3] \cup [4; 6]$

1.2. ⋇ Seja $a \in B$: Qualquer **vizinhança** de centro no ponto a interseta o conjunto B em algum elemento do conjunto B (quanto mais não seja, interseta no próprio ponto a)
Isto é o mesmo que dizer que existe uma sucessão de valores do conjunto B convergente para a

Então, **qualquer ponto nestas condições** é ponto aderente do conjunto B

⋇ Quanto ao número $a = 0$: Verifica-se, também, que qualquer vizinhança centrada em 0 interseta o conjunto B em algum ponto de B. Isto é o mesmo que dizer que existe uma sucessão de valores do conjunto B convergente para 0

Pelo que, também 0 é ponto aderente de B

⋇ Quanto ao número $a = 4$: Verifica-se, também, que qualquer vizinhança centrada em 4 interseta o conjunto B em algum ponto de B. Isto é o mesmo que dizer que existe uma sucessão de valores do conjunto B convergente para 4

Pelo que, também 4 é ponto aderente de B

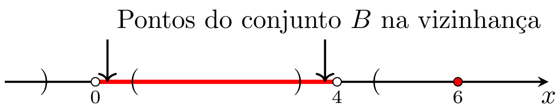

Figura 2

Assim, a aderência do conjunto B é $\overline{B} = [0; 4] \cup \{6\}$

2. .

   2.1. .

      2.1.1. $\lim_{x \to 1^-} f(x) = 3^+$

      2.1.2. $\lim_{x \to 1^+} f(x) = 3^+$

      2.1.3. $\lim_{x \to -3^-} f(x) = 1^+$

      2.1.4. $\lim_{x \to -3^+} f(x) = 1^+$

   2.2. Como, $1 \in D_f$, e $\lim_{x \to 1^-} f(x) \neq f(1)$ e $\lim_{x \to 1^+} f(x) \neq f(1)$, então, não existe $\lim_{x \to 1} f(x)$

   O valor lógico da afirmação é verdadeiro

   2.3. Como, $-3 \in D_f$, e $\lim_{x \to -3^-} f(x) = \lim_{x \to -3^+} f(x) = f(-3)$, então, existe $\lim_{x \to -3} f(x)$

   O valor lógico da afirmação é verdadeiro

3. .

   3.1. Sabe-se que , $2 \in D_g$

   Assim, existe $\lim_{x \to 2} g(x)$, se, $\lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2^+} f(x) = f(2)$

   Ora, como,

   $\lim_{x \to 2^-} f(x) = 3$

   $\lim_{x \to 2^+} f(x) = -3$

   Então, não existe $\lim_{x \to 2} g(x)$

   3.2. Sabe-se que , $2 \notin D_g$

   Assim, existe $\lim_{x \to 2} g(x)$, se, $\lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2^+} f(x)$

   Ora, como,

   $\lim_{x \to 2^-} f(x) = 2$

   $\lim_{x \to 2^+} f(x) = 2$

   Então, existe $\lim_{x \to 2} g(x) = 2$

4. .

   4.1. Seja, (x_n), uma sucessão de valores pertencente ao domínio de f, e tal que $\lim(x_n) = 0$

   Assim,

   $$\lim f(x_n) = \lim \frac{2x_n + 1}{x_n - 3} = \frac{2\lim(x_n) + 1}{\lim(x_n) - 3} = \frac{0 + 1}{0 - 3} = -\frac{1}{3}$$

   Portanto,

   $$\lim_{x \to 0} f(x) = -\frac{1}{3}$$

   4.2. Seja, (x_n), uma sucessão de valores pertencente ao domínio de f, e tal que $\lim(x_n) = 3^+$

   Assim,

   $$\lim f(x_n) = \lim \frac{2x_n + 1}{x_n - 3} = \frac{2\lim(x_n) + 1}{\lim(x_n) - 3} = \frac{6 + 1}{3^+ - 3} = \frac{7}{0^+} = +\infty$$

Portanto,

$$\lim_{x\to 3^+} f(x) = +\infty$$

4.3. Seja, (x_n), uma sucessão de valores pertencente ao domínio de f, e tal que $\lim(x_n) = -1$

Assim,

$$\lim f(x_n) = \lim \frac{2x_n+1}{x_n-3} = \frac{2\lim(x_n)+1}{\lim(x_n)-3} = \frac{-2+1}{-1-3} = \frac{-1}{-4} = \frac{1}{4}$$

Portanto,

$$\lim_{x\to -1} f(x) = \frac{1}{4}$$

4.4. Seja, (x_n), uma sucessão de valores pertencente ao domínio de f, e tal que $\lim(x_n) = 3^-$

Assim,

$$\lim f(x_n) = \lim \frac{2x_n+1}{x_n-3} = \frac{2\lim(x_n)+1}{\lim(x_n)-3} = \frac{6+1}{3^- - 3} = \frac{7}{0^-} = -\infty$$

Portanto,

$$\lim_{x\to 3^-} f(x) = -\infty$$

5. .

5.1. Seja, f, a função racional, definida por $f(x) = \dfrac{1}{x-2}$

Seja, (x_n), uma sucessão de valores pertencente ao domínio de f, e tal que $\lim(x_n) = +\infty$

Assim,

$$\lim f(x_n) = \lim \frac{1}{x_n-2} = \frac{1}{\lim(x_n)-2} = \frac{1}{+\infty} = 0$$

Portanto, $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = 0$

Ou seja,

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{1}{x-2} = 0$$

5.2. Seja, f, a função racional, definida por $f(x) = \dfrac{2}{x^2+1}$

Seja, (x_n), uma sucessão de valores pertencente ao domínio de f, e tal que $\lim(x_n) = +\infty$

Assim,

$$\lim f(x_n) = \lim \frac{2}{(x_n)^2-2} = \frac{2}{(\lim(x_n))^2-2} = \frac{2}{+\infty} = 0$$

Portanto, $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = 0$

Ou seja,

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{2}{x^2+1} = 0$$

5.3. Seja, f, a função racional, definida por $f(x) = \left(-2 - \dfrac{3}{1-x}\right)$

Seja, (x_n), uma sucessão de valores pertencente ao domínio de f, e tal que $\lim(x_n) = +\infty$

Assim,

$\lim f(x_n) = \lim \left(-2 - \dfrac{3}{1-x_n}\right) = -2 - \dfrac{3}{1-\lim(x_n)} = -2 - \dfrac{3}{-\infty} = -2 - 0 = -2$

Portanto, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -2$

Ou seja,

$\lim\limits_{x\to+\infty} \left(-2 - \dfrac{3}{1-x}\right) = -2$

5.4. Seja, f, a função racional, definida por $f(x) = \dfrac{3}{1+3x}$

Seja, (x_n), uma sucessão de valores pertencente ao domínio de f, e tal que $\lim(x_n) = -\infty$

Assim,

$\lim f(x_n) = \lim \dfrac{3}{1+3x_n} = \dfrac{3}{1+3\lim(x_n)} = \dfrac{3}{-\infty} = 0$

Portanto, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$

Ou seja,

$\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{3}{1+3x} = 0$

5.5. Seja, f, a função racional, definida por $f(x) = \dfrac{1}{x^2-4}$

Seja, (x_n), uma sucessão de valores pertencente ao domínio de f, e tal que $\lim(x_n) = -\infty$

Assim,

$\lim f(x_n) = \lim \dfrac{1}{(x_n)^2-4} = \dfrac{1}{(\lim(x_n))^2-4} = \dfrac{1}{+\infty} = 0$

Portanto, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$

Ou seja,

$\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{x^2-4} = 0$

5.6. Seja, f, a função racional, definida por $f(x) = \left(4 + \dfrac{5}{3+2x}\right)$

Seja, (x_n), uma sucessão de valores pertencente ao domínio de f, e tal que $\lim(x_n) = -\infty$

Assim,

$\lim f(x_n) = \lim \left(4 + \dfrac{5}{3+2x_n}\right) = 4 + \dfrac{5}{3+2\lim(x_n)} = 4 + \dfrac{5}{-\infty} = 4 + 0 = 4$

Portanto, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 4$

Ou seja,

$\lim\limits_{x\to-\infty} \left(4 + \dfrac{5}{3+2x}\right) = 4$

6. .

6.1. .

- $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \left(-2 + \frac{2}{x}\right) = -2 + \frac{2}{+\infty} = -2 + 0 = -2$
- $\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} \left(-2 + \frac{2}{x}\right) = -2 + \frac{2}{0^+} = -2 + \infty = +\infty$
- $\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} \left(-2 + \frac{2}{x}\right) = -2 + \frac{2}{0^-} = -2 - \infty = -\infty$

6.2. .

- $\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \left(2 + \frac{2}{x-1}\right) = 2 + \frac{2}{-\infty} = 2 + 0 = 2$
- $\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} \left(2 + \frac{2}{x-1}\right) = 2 + \frac{2}{0^+} = 2 + \infty = +\infty$
- $\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} \left(2 + \frac{2}{x-1}\right) = 2 + \frac{2}{0^-} = 2 - \infty = -\infty$

6.3. .

- $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \left(-1 - \frac{2}{x+2}\right) = -1 - \frac{2}{+\infty} = -1 - 0 = -1$
- $\lim_{x \to -2^+} f(x) = \lim_{x \to -2^+} \left(-1 - \frac{2}{x+2}\right) = -1 - \frac{2}{0^+} = -1 - \infty = -\infty$
- $\lim_{x \to -2^-} f(x) = \lim_{x \to -2^-} \left(-1 - \frac{2}{x+2}\right) = -1 - \frac{2}{0^-} = -1 + \infty = +\infty$

6.4. .

- $\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \left(3 - \frac{2}{x+1}\right) = 3 - \frac{2}{-\infty} = 3 - 0 = 3$
- $\lim_{x \to -1^+} f(x) = \lim_{x \to -1^+} \left(3 - \frac{2}{x+1}\right) = 3 - \frac{2}{0^+} = 3 - \infty = -\infty$
- $\lim_{x \to -1^-} f(x) = \lim_{x \to -1^-} \left(3 - \frac{2}{x+1}\right) = 3 - \frac{2}{0^-} = 3 + \infty = +\infty$