Prova de Matemática A

Ensino Secundário | maio de 2023

12.º Ano de Escolaridade

Duração da Prova: 120 minutos | Tolerância: 30 minutos **8 páginas**

VERSÃO 1

Utilize apenas caneta ou esferográfica de tinta azul ou preta.

É permitido o uso de régua, compasso, esquadro, transferidor e calculadora gráfica.

Não é permitido o uso de corretor. Risque aquilo que pretende que não seja classificado.

Para cada resposta, identifique o grupo e o item.

Apresente as suas respostas de forma legível.

Apresente apenas uma resposta para cada item.

A prova inclui um formulário.

As cotações dos itens encontram-se no final do enunciado da prova.

Na resposta aos itens de escolha múltipla, selecione a opção correta.

Escreva, na folha de respostas, o número do item e a letra que identifica a opção escolhida.

Na resposta aos restantes itens, apresente **todos os cálculos** que tiver de efetuar e **todas as justificações** necessárias.

Quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, apresente sempre o **valor exato**.

Formulário

Comprimento de um arco de circunferência

αr (α − amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r − raio)

Áreas de figuras planas

Losango: $\frac{\text{Diagonal maior} \times \text{Diagonal menor}}{2}$

Trapézio: $\frac{\text{Base maior} + \text{base menor}}{2} \times \text{Altura}$

Polígono regular: Semiperímetro $\times$ Apótema

Setor circular: $\frac{\alpha r^2}{2}$ (α − amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r − raio)

Áreas de superfície

Área lateral de um cone: $\pi\, r\, g$ (r − raio da base; g − geratriz)

Área de uma superfície esférica: $4\,\pi\, r^2$ (r − raio)

Volumes

Pirâmide: $\frac{1}{3} \times$ Área da base $\times$ Altura

Cone: $\frac{1}{3} \times$ Área da base $\times$ Altura

Esfera: $\frac{4}{3}\,\pi\, r^3$ (r − raio)

Progressões

Soma dos n primeiros termos de uma progressão (u_n)

Progressão aritmética: $\frac{u_1+u_n}{2} \times n$

Progressão geométrica: $u_1 \times \frac{1-r^n}{1-r}$

Complexos

$\left(r\, e^{i\theta}\right)^n = r^n\, e^{in\theta}$

As raízes índice n de $z = re^{i\theta}$ são dadas por:

$\sqrt[n]{r}\; e^{i\left(\frac{\theta+2k\pi}{n}\right)}$ ($k \in \{0, \ldots, n-1\}$ e $n \in \mathbb{N}$)

Trigonometria

$\sin(a+b) = \sin a\, \cos b + \sin b\, \cos a$

$\cos(a+b) = \cos a\, \cos b - \sin a\, \sin b$

Regras de derivação

$(u+v)' = u' + v'$

$(u.v)' = u'.v + u.v'$

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'.v - u.v'}{v^2}$

$(u^n)' = n\,.u^{n-1}.u'\ (n \in \mathbb{R})$

$(\operatorname{sen} u)' = u'.\cos u$

$(\cos u)' = -u'.\sin u$

$(\operatorname{tg} u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$

$(e^u)' = u'.e^u$

$(a^u)' = u'.a^u.\ln a\ (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$

$(\log_a u)' = \frac{u'}{u\,.\ln a}\ (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

Limites notáveis

$\lim \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e\ (n \in \mathbb{N})$

$\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

$\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

$\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

$\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{e^x}{x^p} = +\infty\ (p \in \mathbb{R})$

1. Na **Figura 1** está representado, num referencial o.n. $Oxyz$, o cubo $[OABCDEFG]$.

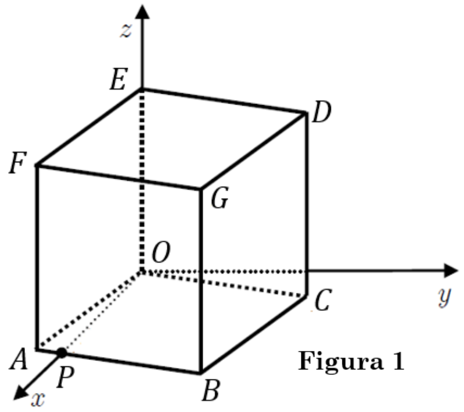


Figura 1

Sabe-se que:

- a base $[OABC]$ está contida no plano xOy
- o ponto P pertence ao eixo Ox e à aresta $[AB]$
- o ponto C tem coordenadas $(1, 4, 0)$
- o vetor $\overrightarrow{PC}$ tem coordenadas $\left(-\frac{10}{3}, 4, 0\right)$

1.1. Qual das equações seguintes, define o plano perpendicular à reta AB e que contém o ponto $Q(-4{,}1{,}2)$?

(A) $x + 4y = 0$ **(B)** $x - 4y + 4 = 0$

(C) $x + 4y + 2 = 0$ **(D)** $x - 4y + 4z = 0$

1.2. Determine a amplitude do ângulo POD.

Apresente a amplitude arredondada à décima de grau.

2. Seja f uma função real, ímpar e diferenciável em $\mathbb{R}$ e tal que:

$$\lim_{x \to -3} \frac{2f(x) + 2f(3)}{x^2 + 3x} = \frac{1}{6}$$

Qual o valor de $f'(-3)$?

(A) -4 **(B)** $-\frac{1}{4}$ **(C)** $\frac{1}{4}$ **(D)** 4

CD5183

3. Na **Figura 2**, está representada a circunferência trigonométrica e o retângulo $[OABC]$.

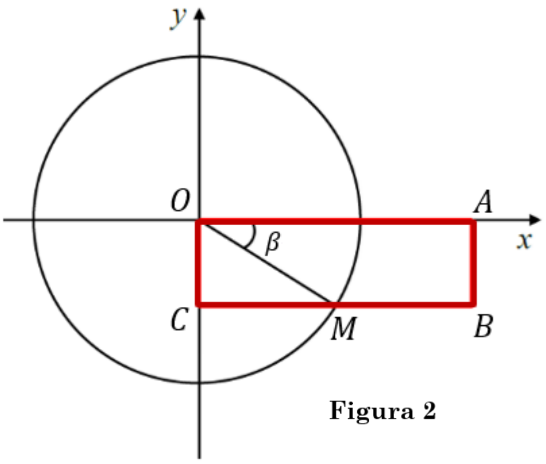


Figura 2

Considere um ponto M que se desloca ao longo da circunferência, no quarto quadrante.

O ponto A desloca-se ao longo do eixo Ox, de tal modo que M é sempre o ponto médio do segmento $[CB]$.

Seja β a amplitude, em radianos, do ângulo orientado AOM.

Mostre que a **área** do quadrilátero $[OABM]$, é dada, em função de β, por:

$$-\frac{3}{4}\sin(2\beta)$$

4. Considere os vetores $\vec{u}(\sin(2x)\,,\cos(2x))$ e $\vec{v}(2\cos(2x)\,,4\sin(2x))$, $x \in \mathbb{R}$.

Seja g uma função real, definida em $\mathbb{R}$, por:

$$g(x) = 3\sin(4x)$$

Sem recorrer à calculadora, a não ser para eventuais cálculos numéricos, resolva os três itens seguintes:

4.1. Mostre que $g(x) = \vec{u} \cdot \vec{v}$ e determine, em $\left]-\frac{3\pi}{8}, \frac{\pi}{6}\right[$, o conjunto solução da equação $g(x) = \frac{3}{2}$.

4.2. Seja t a reta tangente ao gráfico de g, no ponto P de abcissa $\frac{\pi}{12}$

Escreva uma equação vetorial da reta r, perpendicular à reta t, e que contém o ponto P

4.3. Mostre, recorrendo ao $Teorema\ de\ Bolzano - Cauchy$, que os gráficos de g e de g' se intersetam, em pelo menos, um ponto de abcissa compreendida entre 0 e $\frac{\pi}{6}$

5. Considere as seguintes igualdades:

$$A = \lim_{x \to 0} \frac{\sin(kx)}{5x} \qquad \text{e} \qquad B = \lim \left(1 + \frac{\ln 3}{n}\right)^{2n} \quad , \quad \text{onde } k \in \mathbb{R}$$

Sabendo que $A = B$, o valor de k é:

(A) 40 **(B)** $5 \ln 3$ **(C)** $10 \ln 3$ **(D)** 45

6. Considere a função h, definida por:

$$h(x) = \ln(e^{4x} - 2) - 2x$$

6.1. Determine, caso exista(m), o(s) zero(s) de h.

6.2. O gráfico da função h admite uma assíntota oblíqua, quando $x \to +\infty$

Determine a equação reduzida dessa assíntota.

6.3. O gráfico de h' tem um ponto P cuja ordenada é cubo da abcissa.

Determine, com aproximação às décimas, o valor da medida da distância do ponto P à origem do referencial.

Sabe-se que a utilização das **capacidades gráficas da sua calculadora** lhe permite, neste caso, determinar valores aproximados das coordenadas do ponto P, mas não se pede para justificar este facto.

Na sua resposta deve:

- equacionar o problema
- reproduzir o gráfico da função ou os gráficos das funções que tiver necessidade de visualizar na calculadora, devidamente identificado(s), incluindo o referencial
- indicar as coordenadas do ponto P, com aproximação às **milésimas**
- indicar o valor da medida da distância do ponto P à origem do referencial, com aproximação às **décimas**

7. Considere a função g, de domínio $\mathbb{R}^+$, definida por:

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{8\sqrt{x+3}-16}{x-1}, & 0 < x < 1 \\[2ex] 2 \quad , & x = 1 \\[2ex] \dfrac{4x-4x^2}{1-e^{2x-2}}, & x > 1 \end{cases}$$

Averigue, **sem recorrer à calculadora**, se a função g é contínua em $x = 1$.

8. Seja f uma função derivável em $D =]-\infty, -4[\cup]2, +\infty[$ e tal que

$$\forall x \in D,\ \ f'(x) > 0$$

Qual das afirmações seguintes é **necessariamente** verdadeira?

(A) f é crescente em D

(B) f não tem extremos relativos em D

(C) a reta de equação $y = -2x$ é tangente ao gráfico de f num ponto de abcissa $a \in D$

(D) o gráfico de f tem duas retas tangentes horizontais

9. Seja (u_n) a sucessão definida por:

$$u_n = \log 2 + \log 4 + \log 8 + \cdots + \log 2^{n-1} + \log 2^n$$

Mostre que:

$$u_n = \frac{n^2+n}{2} \times \log 2$$

Responda a um e um só dos grupos A ou B

Se responder a mais do que um destes grupos deve indicar qual deles pretende que seja classificado. Se não der esta indicação será classificado o grupo a que responder em primeiro lugar.

Grupo A

10. Seja $(E, \mathcal{P}(E), P)$ um espaço de probabilidades e $A\ e\ B \in \mathcal{P}(E)$ acontecimentos possíveis, tais que:

- $P(A \cap \bar{B}) = 0{,}25$
- $P(\overline{A \cup B}) = k$
- $P(B|A) = 0{,}4$

Determine o valor de $P(A) + P(B)$ em função de k.

11. De uma linha do *Triângulo de Pascal* sabe-se que tem m elementos $(m > 1)$.

Escolhem-se, ao acaso, dois elementos.

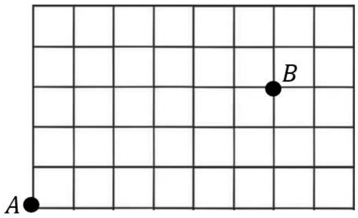
Sabe-se que a probabilidade do produto dos dois elementos ser $m - 1$, é igual a $\frac{1}{75}$

Determine o valor de m .

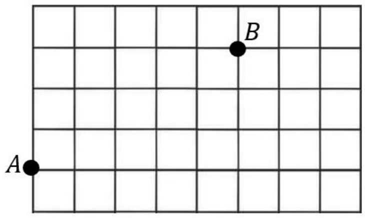
12. Sabe-se que o número de caminhos possíveis de A para B (deslocando-se apenas da esquerda para a direita e de baixo para cima) é 165.

Em qual das seguintes figuras está representada uma grelha que ilustre esta situação?

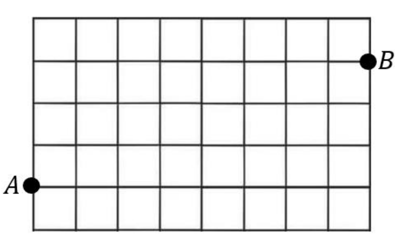
(A)



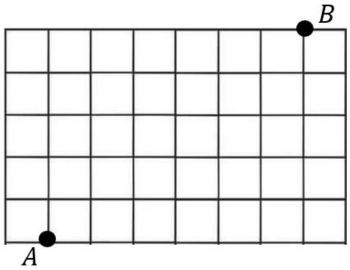
(B)



(C)



(D)



Grupo B

10. Seja $\mathbb{C}$ o conjunto dos números complexos.

Considere os números $z_1 = 1 - 2i$ e $z_2 = a + bi,\ a, b \in \mathbb{R}$

10.1. Determine os valores reais de a e b de modo que $z_1 \times z_2$ seja um número real e $1 + \frac{z_2}{z_1}$ seja um imaginário puro.

10.2. Seja $w = z_1 - 3$.

Calcule as raízes quadradas de w, apresentando-as na forma trigonométrica.

11. Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, considere os números:

$$z = e^{i\theta} \quad \text{e} \quad w = 2\sin^2\theta \times e^{i\theta}$$

Qual das seguintes expressões representa o número $w - z$?

(A) $\sin(2\theta)\, e^{i(-\theta)}$

(B) $\cos(2\theta)\, e^{i(-\theta)}$

(C) $\cos(2\theta)\, e^{i(\theta+\pi)}$

(D) $\sin(2\theta)\, e^{i(\theta+\pi)}$

<table>
<tr><th colspan="12">Item</th></tr>
<tr><th colspan="12">Cotação (em pontos)</th></tr>
<tr><th>1.1.</th><th>1.2.</th><th>2</th><th>3</th><th>4.1.</th><th>4.2.</th><th>4.3.</th><th>5</th><th>6.1.</th><th>6.2.</th><th rowspan="5">TOTAL</th><th rowspan="5">200 pontos</th></tr>
<tr><td>10</td><td>14</td><td>10</td><td>12</td><td>14</td><td>12</td><td>12</td><td>10</td><td>12</td><td>12</td></tr>
<tr><th rowspan="2">6.3.</th><th rowspan="2">7</th><th rowspan="2">8</th><th rowspan="2">9</th><th colspan="3">GRUPO A</th><th colspan="3">GRUPO B</th></tr>
<tr><th>10</th><th>11</th><th>12</th><th>10.1.</th><th>10.2.</th><th>11</th></tr>
<tr><td>12</td><td>14</td><td>10</td><td>12</td><td>12</td><td>12</td><td>10</td><td>12</td><td>12</td><td>10</td></tr>
</table>

Prova de Matemática A

Ensino Secundário | maio de 2023

12.º Ano de Escolaridade

Duração da Prova: 120 minutos | Tolerância: 30 minutos **8 páginas**

VERSÃO 2

Utilize apenas caneta ou esferográfica de tinta azul ou preta.

É permitido o uso de régua, compasso, esquadro, transferidor e calculadora gráfica.

Não é permitido o uso de corretor. Risque aquilo que pretende que não seja classificado.

Para cada resposta, identifique o grupo e o item.

Apresente as suas respostas de forma legível.

Apresente apenas uma resposta para cada item.

A prova inclui um formulário.

As cotações dos itens encontram-se no final do enunciado da prova.

Na resposta aos itens de escolha múltipla, selecione a opção correta.

Escreva, na folha de respostas, o número do item e a letra que identifica a opção escolhida.

Na resposta aos restantes itens, apresente **todos os cálculos** que tiver de efetuar e **todas as justificações** necessárias.

Quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, apresente sempre o **valor exato**.

Formulário

Comprimento de um arco de circunferência

αr (α – amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r – raio)

Áreas de figuras planas

Losango: $\frac{\text{Diagonal maior} \times \text{Diagonal menor}}{2}$

Trapézio: $\frac{\text{Base maior} + \text{base menor}}{2} \times \text{Altura}$

Polígono regular: Semiperímetro $\times$ Apótema

Setor circular: $\frac{\alpha r^2}{2}$ (α – amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r – raio)

Áreas de superfície

Área lateral de um cone: $\pi\, r\, g$ (r – raio da base; g – geratriz)

Área de uma superfície esférica: $4\,\pi\, r^2$ (r – raio)

Volumes

Pirâmide: $\frac{1}{3} \times$ Área da base $\times$ Altura

Cone: $\frac{1}{3} \times$ Área da base $\times$ Altura

Esfera: $\frac{4}{3}\,\pi\, r^3$ (r – raio)

Progressões

Soma dos n primeiros termos de uma progressão (u_n)

Progressão aritmética: $\frac{u_1+u_n}{2} \times n$

Progressão geométrica: $u_1 \times \frac{1-r^n}{1-r}$

Complexos

$\left(r\, e^{i\theta}\right)^n = r^n\, e^{in\theta}$

As raízes índice n de $z = re^{i\theta}$ são dadas por:

$\sqrt[n]{r}\, e^{i\left(\frac{\theta+2k\pi}{n}\right)}$ ($k \in \{0, \dots, n-1\}$ e $n \in \mathbb{N}$)

Trigonometria

$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$

$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$

Regras de derivação

$(u+v)' = u' + v'$

$(u.v)' = u'.v + u.v'$

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'.v - u.v'}{v^2}$

$(u^n)' = n\,.u^{n-1}.u'\ (n \in \mathbb{R})$

$(\operatorname{sen} u)' = u'.\cos u$

$(\cos u)' = -u'.\sin u$

$(\operatorname{tg} u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$

$(e^u)' = u'.e^u$

$(a^u)' = u'.a^u.\ln a\ (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$

$(\log_a u)' = \frac{u'}{u\,.\ln a}\ (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

Limites notáveis

$\lim \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e\ (n \in \mathbb{N})$

$\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

$\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

$\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

$\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{e^x}{x^p} = +\infty\ (p \in \mathbb{R})$

1. Na **Figura 1** está representado, num referencial o.n. $Oxyz$, o cubo $[OABCDEFG]$.

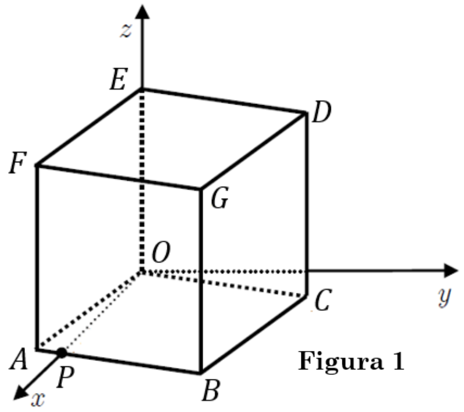


Figura 1

Sabe-se que:

- a base $[OABC]$ está contida no plano xOy
- o ponto P pertence ao eixo Ox e à aresta $[AB]$
- o ponto C tem coordenadas $(1, 4, 0)$
- o vetor $\overrightarrow{PC}$ tem coordenadas $\left(-\frac{10}{3}, 4, 0\right)$

1.1. Qual das equações seguintes, define o plano perpendicular à reta AB e que contém o ponto $Q(-4,1,2)$?

(A) $x + 4y + 2 = 0$ **(B)** $x - 4y + 4z = 0$

(C) $x + 4y = 0$ **(D)** $x - 4y + 4 = 0$

1.2. Determine a amplitude do ângulo POD.

Apresente a amplitude arredondada à décima de grau.

2. Seja f uma função real, ímpar e diferenciável em $\mathbb{R}$ e tal que:

$$\lim_{x\to -3} \frac{2f(x) + 2f(3)}{x^2 + 3x} = \frac{1}{6}$$

Qual o valor de $f'(-3)$?

(A) 4 **(B)** $\frac{1}{4}$ **(C)** $-\frac{1}{4}$ **(D)** -4

3. Na **Figura 2**, está representada a circunferência trigonométrica e o retângulo $[OABC]$.

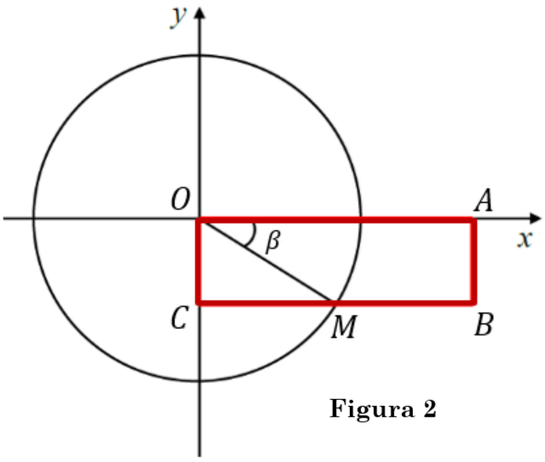


Figura 2

Considere um ponto M que se desloca ao longo da circunferência, no quarto quadrante.

O ponto A desloca-se ao longo do eixo Ox, de tal modo que M é sempre o ponto médio do segmento $[CB]$.

Seja β a amplitude, em radianos, do ângulo orientado AOM.

Mostre que a **área** do quadrilátero $[OABM]$, é dado, em função de β, por:

$$-\frac{3}{4}\sin(2\beta)$$

4. Considere os vetores $\vec{u}(\sin(2x)\,,\cos(2x))$ e $\vec{v}(2\cos(2x)\,,4\sin(2x))$, $x \in \mathbb{R}$.

Seja g uma função real, definida em $\mathbb{R}$, por:

$$g(x) = 3\sin(4x)$$

Sem recorrer à calculadora, a não ser para eventuais cálculos numéricos, resolva os três itens seguintes:

4.1. Mostre que $g(x) = \vec{u} \cdot \vec{v}$ e determine, em $\left]-\frac{3\pi}{8}, \frac{\pi}{6}\right[$, o conjunto solução da equação $g(x) = \frac{3}{2}$.

4.2. Seja t a reta tangente ao gráfico de g, no ponto P de abcissa $\frac{\pi}{12}$

Escreva uma equação vetorial da reta r, perpendicular à reta t, e que contém o ponto P

4.3. Mostre, recorrendo ao *Teorema de Bolzano − Cauchy*, que os gráficos de g e de g' se intersetam, em pelo menos, um ponto de abcissa compreendida entre 0 e $\frac{\pi}{6}$

5. Considere as seguintes igualdades:

$$A = \lim_{x \to 0} \frac{\sin(kx)}{5x} \qquad \text{e} \qquad B = \lim \left(1 + \frac{\ln 3}{n}\right)^{2n} \quad , \quad \text{onde } k \in \mathbb{R}$$

Sabendo que $A = B$, o valor de k é:

(A) 40 **(B)** 45 **(C)** $10 \ln 3$ **(D)** $5 \ln 3$

6. Considere a função h, definida por:

$$h(x) = \ln(e^{4x} - 2) - 2x$$

6.1. Determine, caso exista(m), o(s) zero(s) de h.

6.2. O gráfico da função h admite uma assíntota oblíqua, quando $x \to +\infty$

Determine a equação reduzida dessa assíntota.

6.3. O gráfico de h' tem um ponto P cuja ordenada é cubo da abcissa.

Determine, com aproximação às décimas, o valor da medida da distância do ponto P à origem do referencial.

Sabe-se que a utilização das **capacidades gráficas da sua calculadora** lhe permite, neste caso, determinar valores aproximados das coordenadas do ponto P, mas não se pede para justificar este facto.

Na sua resposta deve:

- equacionar o problema
- reproduzir o gráfico da função ou os gráficos das funções que tiver necessidade de visualizar na calculadora, devidamente identificado(s), incluindo o referencial
- indicar as coordenadas do ponto P, com aproximação às **milésimas**
- indicar o valor da medida da distância do ponto P à origem do referencial, com aproximação às **décimas**

7. Considere a função g, de domínio $\mathbb{R}^+$, definida por:

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{8\sqrt{x+3}-16}{x-1}, & 0 < x < 1 \\ 2 \quad , & x = 1 \\ \dfrac{4x-4x^2}{1-e^{2x-2}}, & x > 1 \end{cases}$$

Averigue, **sem recorrer à calculadora**, se a função g é contínua em $x = 1$.

8. Seja f uma função derivável em $D =]-\infty, -4[\cup]2, +\infty[$ e tal que

$$\forall x \in D,\ \ f'(x) > 0$$

Qual das afirmações seguintes é **necessariamente** verdadeira?

(A) f não tem extremos relativos em D

(B) f é crescente em D

(C) o gráfico de f tem duas retas tangentes horizontais

(D) a reta de equação $y = -2x$ é tangente ao gráfico de f num ponto de abcissa $a \in D$

9. Seja (u_n) a sucessão definida por:

$$u_n = \log 2 + \log 4 + \log 8 + \cdots + \log 2^{n-1} + \log 2^n$$

Mostre que:

$$u_n = \frac{n^2+n}{2} \times \log 2$$

Responda a um e um só dos grupos A ou B

Se responder a mais do que um destes grupos deve indicar qual deles pretende que seja classificado. Se não der esta indicação será classificado o grupo a que responder em primeiro lugar.

Grupo A

10. Seja $(E, \mathcal{P}(E), P)$ um espaço de probabilidades e $A\ e\ B\ \in \mathcal{P}(E)$ acontecimentos possíveis, tais que:

- $P(A \cap \bar{B}) = 0{,}25$
- $P(\overline{A \cup B}) = k$
- $P(B|A) = 0{,}4$

Determine o valor de $P(A) + P(B)$ em função de k.

11. De uma linha do $Triângulo\ de\ Pascal$ sabe-se que tem m elementos $(m > 1)$.

Escolhem-se, ao acaso, dois elementos.

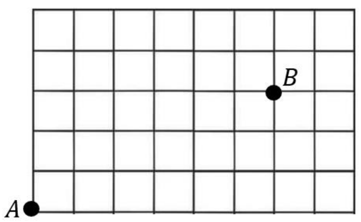
Sabe-se que a probabilidade do produto dos dois elementos ser $m - 1$, é igual a $\frac{1}{75}$

Determine o valor de m .

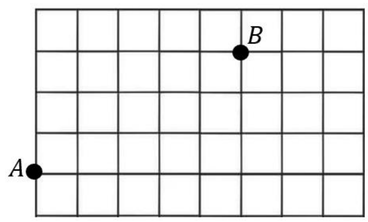
12. Sabe-se que o número de caminhos possíveis de A para B (deslocando-se apenas da esquerda para a direita e de baixo para cima) é 165.

Em qual das seguintes figuras está representada uma grelha que ilustre esta situação?

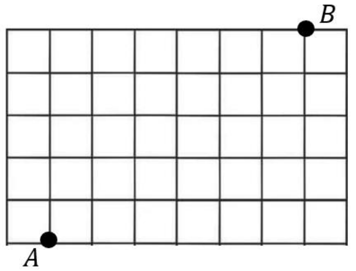
(A)



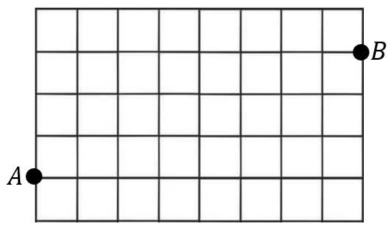
(B)



(C)



(D)



Grupo B

10. Seja $\mathbb{C}$ o conjunto dos números complexos.

Considere os números $z_1 = 1 - 2i$ e $z_2 = a + bi,\ a, b \in \mathbb{R}$

10.1. Determine os valores reais de a e b de modo que $z_1 \times z_2$ seja um número real e $1 + \frac{z_2}{z_1}$ seja um imaginário puro.

10.2. Seja $w = z_1 - 3$.

Calcule as raízes quadradas de w, apresentando-as na forma trigonométrica.

11. Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, considere os números:

$$z = e^{i\theta} \quad \text{e} \quad w = 2\sin^2\theta \times e^{i\theta}$$

Qual das seguintes expressões representa o número $w - z$?

(A) $\sin(2\theta)\, e^{i(-\theta)}$

(B) $\cos(2\theta)\, e^{i(-\theta)}$

(C) $\sin(2\theta)\, e^{i(\theta+\pi)}$

(D) $\cos(2\theta)\, e^{i(\theta+\pi)}$

<table>
<tr><th colspan="12">Item</th></tr>
<tr><th colspan="12">Cotação (em pontos)</th></tr>
<tr><th>1.1.</th><th>1.2.</th><th>2</th><th>3</th><th>4.1.</th><th>4.2.</th><th>4.3.</th><th>5</th><th>6.1.</th><th>6.2.</th><th rowspan="5">TOTAL</th><th rowspan="5">200 pontos</th></tr>
<tr><td>10</td><td>14</td><td>10</td><td>12</td><td>14</td><td>12</td><td>12</td><td>10</td><td>12</td><td>12</td></tr>
<tr><th rowspan="2">6.3.</th><th rowspan="2">7</th><th rowspan="2">8</th><th rowspan="2">9</th><th colspan="3">GRUPO A</th><th colspan="3">GRUPO B</th></tr>
<tr><th>10</th><th>11</th><th>12</th><th>10.1.</th><th>10.2.</th><th>11</th></tr>
<tr><td>12</td><td>14</td><td>10</td><td>12</td><td>12</td><td>12</td><td>10</td><td>12</td><td>12</td><td>10</td></tr>
</table>