Escola Secundária de Paredes

# Ficha de Trabalho 6

**Matemática A**

**12.º Ano de Escolaridade** • Turma: $B + C + H$

Aula de Preparação Para Exame

janeiro de 2023

Tema: Sucessões

## Progressões Aritméticas e Geométricas

A saber...

- Uma sucessão $(u_n)$ é uma progressão aritmética se definida por recorrência é tal que $u_1 = a \wedge u_{n+1} = u_n + r$, sendo $a$ o valor do primeiro termo e $r$ a razão, com $a, r \in \mathbb{R}$.
  1. a sucessão $(u_n)$ é uma progressão aritmética se $u_{n+1} - u_n = r, \forall n \in \mathbb{N}$, com $r \in \mathbb{R}$
  2. a constante $r$ chama-se razão da progressão aritmética
  3. o termo geral da progressão aritmética é $u_n = u_1 + (n-1) \times r, \forall n \in \mathbb{N}$
  4. a soma dos $n$ primeiros termos consecutivos da progressão aritmética é dada por $S_n = \frac{u_1 + u_n}{2} \times n$
- Uma sucessão $(u_n)$ é uma progressão geométrica se definida por recorrência é tal que $u_1 = a \wedge u_{n+1} = u_n \times r$, sendo $a$ o valor do primeiro termo, com $r \in \mathbb{R}$ e $u_1 \neq 0$ e $r \neq 0$
  1. a sucessão $(u_n)$ é uma progressão geométrica se $\frac{u_{n+1}}{u_n} = r, \forall n \in \mathbb{N}$, com $r \in \mathbb{R}$ e $u_1 \neq 0$ e $r \neq 0$
  2. a constante $r$ chama-se razão da progressão geométrica
  3. o termo geral da progressão geométrica é $u_n = u_1 \times r^{n-1}, \forall n \in \mathbb{N}$
  4. a soma dos $n$ primeiros termos consecutivos da progressão geométrica é dada por $S_n = u_1 \times \frac{1 - r^n}{1 - r}$, com $r \neq 1$

---

1. Considera a sucessão $(u_n)$ definida por $u_n = \frac{n+2}{3}$
   - 1.1. Mostra que a sucessão $(u_n)$ é uma progressão aritmética e indica a sua razão
   - 1.2. Determina a soma dos primeiros cem termos da progressão aritmética $(u_n)$
   - 1.3. Calcula $S = u_{35} + u_{36} + u_{37} + ... + u_{125}$
   - 1.4. Sendo $S_n = u_1 + u_2 + u_3 + ... + u_n$ a soma dos primeiros $n$ termos consecutivos da progressão aritmética $(u_n)$, mostra que: $S_n = \frac{n^2 + 5n}{6}$
2. Considera a sucessão $(v_n)$ definida por $v_1 = -2 \wedge v_{n+1} = v_n + 2$, $n \in \mathbb{N}$
   - 2.1. Calcula os quatro primeiros termos da sucessão $(v_n)$
   - 2.2. Mostra que a sucessão $(v_n)$ é uma progressão aritmética e indica a sua razão
   - 2.3. Sem calcular a expressão do termo geral, determina o termo $v_{500}$
   - 2.4. Determina o termo geral da progressão aritmética $(v_n)$
   - 2.5. Determina a soma dos primeiros mil termos da progressão aritmética $(v_n)$
   - 2.6. Calcula $S = v_{50} + v_{51} + v_{52} + ... + v_{571}$.
   - 2.7. Sabe-se que $S_n = 9700$, sendo $S_n = v_1 + v_2 + v_3 + ... + v_n$ a soma dos primeiros $n$ termos consecutivos da progressão aritmética. Determina o valor de $n$
   - 2.8. Sendo $S_n = v_1 + v_2 + v_3 + ... + v_n$ a soma dos primeiros $n$ termos consecutivos da progressão aritmética $(v_n)$, mostra que: $S_n = n^2 - 3n$

3. De uma progressão aritmética $(a_n)$ sabe-se que $a_{100} = 199$ e $a_{500} = 999$ Determina o primeiro termo e a razão e escreve a expressão do termo geral da progressão aritmética

4. Considera a sucessão $(u_n)$ definida por $u_n = \frac{1}{5} \times 2^{n+3}$

   4.1. Mostra que a sucessão $(u_n)$ é uma progressão geométrica e indica a sua razão

   4.2. Determina a soma dos primeiros dez termos da progressão geométrica $(a_n)$

   4.3. Calcula $S = u_4 + u_5 + u_6 + ... + u_{10}$

   4.4. Sendo $S_n = u_1 + u_2 + u_3 + ... + u_n$ a soma dos primeiros $n$ termos consecutivos da progressão geométrica $(u_n)$, mostra que: $S_n = \frac{2^{n+4} - 16}{5}$

5. Considera a sucessão $(v_n)$ definida por $v_1 = \frac{1}{2} \wedge v_{n+1} = \frac{v_n}{4}$, $n \in \mathbb{N}$

   5.1. Calcula os quatro primeiros termos da sucessão $(v_n)$

   5.2. Mostra que a sucessão $(v_n)$ é uma progressão geométrica e indica a sua razão

   5.3. Sem calcular a expressão do termo geral, determina o termo $v_{10}$

   5.4. Determina o termo geral da progressão geométrica $(v_n)$

   5.5. Determina a soma dos primeiros vinte termos da progressão geométrica $(v_n)$

   5.6. Sendo $S_n = v_1+v_2+v_3+...+v_n$ a soma dos primeiros $n$ termos consecutivos da progressão geométrica $(v_n)$, mostra que: $S_n = \frac{2 - 2^{1-2n}}{3}$

6. De uma progressão geométrica $(b_n)$ sabe-se que $b_{10} = \frac{1}{512}$ e $b_{13} = \frac{1}{4096}$ Determina o primeiro termo e a razão e escreve a expressão do termo geral da progressão geométrica

7. De uma progressão geométrica $(u_n)$, sabe-se que a razão é positiva e que $u_8 = \frac{3}{128}$ e $u_{12} = \frac{3}{2048}$

   Determina a soma dos dez primeiros termos consecutivos da progressão, isto é, $S_{10} = u_1+u_2+u_3+\ldots+u_{10}$

8. Sabe-se que $(a_n)$ é uma progressão aritmética de razão 3. Justifica que a sucessão $(b_n)$ definida por $b_n = 2^{-3a_n}$, $n \in \mathbb{N}$ é uma progressão geométrica e indica a razão

9. Prova que se $(a_n)$ é progressão aritmética de razão $r$ então $b_n = k^{a_n}$ define uma progressão geométrica de razão $k^r$, sendo $k$ diferente de zero e um

10. Prova que o produto de duas progressões geométricas é ainda uma progressão geométrica de razão igual ao produto das respetivas razões

11. Prova que as sucessões definidas por um termo geral do tipo $v_n = a \times b^{cn+d}$, $n \in \mathbb{N}$, $a, b, c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $d \in \mathbb{R}$, são progressões geométricas de razão $b^c$