Escola Secundária de Paredes

Proposta de Resolução da Ficha de Trabalho 9

Matemática A

12.º Ano de Escolaridade • Turma: $B + C + H$

Aula de Apoio

março de 2023

1. .

1.1. $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{\tan(x+1)}{x^2+3x+2} =^{\left(\frac{0}{0}\right)} \lim\limits_{x \to -1} \dfrac{\frac{\sin(x+1)}{\cos(x+1)}}{(x+1)(x+2)} = \lim\limits_{x \to -1} \dfrac{\sin(x+1)}{\cos(x+1)\,(x+1)(x+2)} =$

$= \lim\limits_{x+1 \to 0} \dfrac{\sin(x+1)}{x+1} \times \lim\limits_{x \to -1} \dfrac{1}{\cos(x+1)\,(x+2)} = 1 \times \dfrac{1}{1} = 1$

Cálculos auxiliar

Zeros de x^2+3x+2

$x^2+3x+2 = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \times 1 \times 2}}{2 \times 1} \Leftrightarrow x = -2 \vee x = -1$

Aplicou-se o limite notável $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$

1.2. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{e^{2x-2}-1}{\sin(x-1)} =^{\left(\frac{0}{0}\right)} \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\frac{e^{2x-2}-1}{x-1}}{\frac{\sin(x-1)}{x-1}} = \dfrac{\lim\limits_{x \to 1} \frac{e^{2x-2}-1}{x-1}}{\lim\limits_{x-1 \to 0} \frac{\sin(x-1)}{x-1}} = \dfrac{\lim\limits_{y \to 0} \frac{e^y-1}{\frac{y}{2}}}{1} = 2\lim\limits_{y \to 0} \dfrac{e^y-1}{y} = 2 \times 1 = 2$

Fez-se a mudança de variável

$y = 2x-2 \Leftrightarrow x = \dfrac{y+2}{2}$

Se $x \to 1$, então $y \to 0$

Aplicaram-se os limites notáveis: $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x-1}{x} = 1$ e $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin(x)}{x} = 1$

2. .

2.1. O ponto A tem coordenadas $(\cos(x); \sin(x))$, com $\cos(x) > 0$ e $\sin(x) > 0$

O ponto C tem coordenadas $(\cos(x); 0)$, com $\cos(x) > 0$

O ponto B tem coordenadas $(0; 1)$

Assim,

$\overline{AC} = |\sin(x)| = \sin(x)$

$\overline{OC} = |\cos(x)| = \cos(x)$

$\overline{OB} = 1$

Medida de comprimento da altura do trapézio: $\overline{OC} = \cos(x)$

Assim, a área do trapézio $[ABOC]$, é dada, em função de x, por

$$A(x) = \frac{\overline{OB} + \overline{AC}}{2} \times \overline{OC} = \frac{1 + \sin(x)}{2} \times \cos(x) = \frac{\cos(x) + \sin(x)\cos(x)}{2} =$$
$$= \frac{\cos(x)}{2} + \frac{\sin(x)\cos(x)}{2} = \frac{1}{2}\cos(x) + \frac{2\sin(x)\cos(x)}{4}$$
$$= \frac{1}{2}\cos(x) + \frac{1}{4}\sin(2x), \text{ com } x \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[$$

2.2. Para certo $\alpha \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[$, sabe-se que $\sin(\pi + \alpha) = -\frac{\sqrt{5}}{3}$

Então, $\sin(\pi + \alpha) = -\frac{\sqrt{5}}{3} \Leftrightarrow -\sin(\alpha) = -\frac{\sqrt{5}}{3} \Leftrightarrow \sin(\alpha) = \frac{\sqrt{5}}{3}$

Ora, de $\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1$, vem,

$$\left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right)^2 + \cos^2(\alpha) = 1 \Leftrightarrow \frac{5}{9} + \cos^2(\alpha) = 1 \Leftrightarrow \cos^2(\alpha) = 1 - \frac{5}{9} \Leftrightarrow \cos^2(\alpha) = \frac{4}{9} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \cos(\alpha) = \pm\sqrt{\frac{4}{9}} \Leftrightarrow \cos(\alpha) = \pm\frac{2}{3}, \text{ e como } \cos(\alpha) > 0, \text{ vem, } \cos(\alpha) = \frac{2}{3}$$

Assim, a área do trapézio é igual a

$$A(\alpha) = \frac{1}{2}\cos(\alpha) + \frac{1}{4}\sin(2\alpha) = \frac{1}{2}\cos(\alpha) + \frac{1}{2}\sin(\alpha)\cos(\alpha) =$$
$$= \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} + \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{5}}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{1}{3} + \frac{\sqrt{5}}{9} = \frac{3 + \sqrt{5}}{9} \ u.a.$$

2.3. Determinemos a função derivada de $A(x)$

$$A'(x) = \left[\frac{1}{2}\cos(x) + \frac{1}{4}\sin(2x)\right]' = -\frac{1}{2}\sin(x) + \frac{1}{2}\cos(2x)$$

Zeros de $A'(x)$

$$A'(x) = 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{2}\sin(x) + \frac{1}{2}\cos(2x) = 0 \Leftrightarrow -\sin(x) + \cos(2x) = 0 \Leftrightarrow \cos(2x) = \sin(x) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \cos(2x) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \Leftrightarrow 2x = \frac{\pi}{2} - x + k2\pi \vee 2x = -\frac{\pi}{2} + x + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 3x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \vee x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} + k\frac{2\pi}{3} \vee x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Atribuindo valores a k, vem,

$$k = 0 \mapsto x = \frac{\pi}{6} \vee x = -\frac{\pi}{2}$$

$$k = 1 \mapsto x = \frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{3} \vee x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi$$

$$\therefore x = \frac{5\pi}{6} \vee x = \frac{3\pi}{2}$$

$$k = -1 \mapsto x = \frac{\pi}{6} - \frac{2\pi}{3} \vee x = -\frac{\pi}{2} - 2\pi$$

$$\therefore x = -\frac{\pi}{2} \vee x = -\frac{5\pi}{2}$$

Como $x \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[$, tem-se que $x = \frac{\pi}{6}$

Quadro de sinal de $A'(x)$

x	0		$\frac{\pi}{6}$		$\frac{\pi}{2}$
$A'(x)$	$n.d.$	$+$	0	$-$	$n.d.$
$A(x)$	$n.d.$	$\nearrow$	$\frac{3\sqrt{3}}{8}$	$\searrow$	$n.d.$

$$A\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{2}\times\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)+\frac{1}{4}\times\sin\left(\frac{2\pi}{6}\right)=\frac{1}{2}\times\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)+\frac{1}{4}\times\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{4}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{4}+\frac{\sqrt{3}}{8}=\frac{2\sqrt{3}}{8}+\frac{\sqrt{3}}{8}=\frac{3\sqrt{3}}{8}$$

A área do trapézio $[ABOC]$ é máxima, se $x=\frac{\pi}{6}$ rad

3. $0\in D_f$ e é ponto aderente a D_f

A função f é contínua em $x=0$, se existir $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$, ou seja,

se $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=f(0)$

Ora,

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-}\frac{1-\cos^2\left(\frac{x}{4}\right)+\sin^2\left(\frac{x}{4}\right)}{\frac{x^2}{4}}=^{\left(\frac{0}{0}\right)}\lim_{x\to 0^-}\frac{1-\left[\cos^2\left(\frac{x}{4}\right)-\sin^2\left(\frac{x}{4}\right)\right]}{\frac{x^2}{4}}=$$

$$=\lim_{x\to 0^-}\frac{1-\cos\left(\frac{x}{2}\right)}{\frac{x^2}{4}}=\lim_{x\to 0^-}\frac{\left[1-\cos\left(\frac{x}{2}\right)\right]\left[1+\cos\left(\frac{x}{2}\right)\right]}{\frac{x^2}{4}\left[1+\cos\left(\frac{x}{2}\right)\right]}=$$

$$=\lim_{x\to 0^-}\frac{1-\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)}{\frac{x^2}{4}\left[1+\cos\left(\frac{x}{2}\right)\right]}=\lim_{x\to 0^-}\frac{\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{\left(\frac{x}{2}\right)^2\left[1+\cos\left(\frac{x}{2}\right)\right]}$$

$$=\left[\lim_{\frac{x}{2}\to 0^-}\frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\frac{x}{2}}\right]^2\times\lim_{x\to 0^-}\frac{1}{1+\cos\left(\frac{x}{2}\right)}=1^2\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

Segundo processo

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-}\frac{1-\cos^2\left(\frac{x}{4}\right)+\sin^2\left(\frac{x}{4}\right)}{\frac{x^2}{4}}=^{\left(\frac{0}{0}\right)}\lim_{x\to 0^-}\frac{\sin^2\left(\frac{x}{4}\right)+\sin^2\left(\frac{x}{4}\right)}{\frac{x^2}{4}}=$$

$$=4\times\lim_{x\to 0^-}\frac{2\sin^2\left(\frac{x}{4}\right)}{x^2}=8\times\lim_{x\to 0^-}\frac{\sin\left(\frac{x}{4}\right)}{x}\lim_{x\to 0^-}\frac{\sin\left(\frac{x}{4}\right)}{x}=$$

$$=8\times\lim_{x\to 0^-}\frac{\sin\left(\frac{x}{4}\right)}{4\times\frac{x}{4}}\lim_{x\to 0^-}\frac{\sin\left(\frac{x}{4}\right)}{4\times\frac{x}{4}}$$

$$=\frac{8}{16}\times\lim_{\frac{x}{4}\to 0^-}\frac{\sin\left(\frac{x}{4}\right)}{\frac{x}{4}}\lim_{\frac{x}{4}\to 0^-}\frac{\sin\left(\frac{x}{4}\right)}{\frac{x}{4}}=\frac{1}{2}\times\frac{1}{1}=\frac{1}{2}$$

Aplicou-se o limite notável $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$

$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} \frac{x^2+3x}{-6+6e^x} \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x \to 0^+} \frac{x(x+3)}{6(e^x-1)} = \lim_{x \to 0^+} \frac{x}{e^x-1} \times \lim_{x \to 0^+} \frac{x+3}{6} =$

$= \frac{1}{\lim_{x \to 0^+} \frac{e^x-1}{x}} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{1} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

Aplicou-se o limite notável $\lim_{x \to 0} \frac{e^x-1}{x} = 1$

$f(0) = e^{1-k}$

Ora, a função f é contínua em $x = 0$, se, $\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^+} f(x) = f(0)$

Então, deverá ter-se,

$e^{1-k} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 1-k = \ln\left(\frac{1}{2}\right) \Leftrightarrow 1-k = -\ln 2 \Leftrightarrow -k = -1-\ln 2 \Leftrightarrow k = 1+\ln 2$

Portanto, a função f é contínua em $x = 0$, se $k = 1+\ln 2$

4. $\sqrt{2}\cos(x) - \sqrt{2}\sin(x) = \sqrt{3} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{2}}{2}\cos(x) - \frac{\sqrt{2}}{2}\sin(x) = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\cos(x) - \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\sin(x) = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x+\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{6}+k2\pi \vee x+\frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{6}+k2\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{4}+k2\pi \vee x = -\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{4}+k2\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = \frac{2\pi}{12}-\frac{3\pi}{12}+k2\pi \vee x = -\frac{2\pi}{12}-\frac{3\pi}{12}+k2\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{12}+k2\pi \vee x = -\frac{5\pi}{12}+k2\pi, k \in \mathbb{Z}$

Portanto, $C.S. = \left\{-\frac{\pi}{12}+k2\pi; -\frac{5\pi}{12}+k2\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$

5. .

5.1. $h(x) = \cos\left(2x+\frac{3\pi}{4}\right)\cos\left(x+\frac{3\pi}{4}\right) - \sin\left(2x+\frac{3\pi}{4}\right)\sin\left(x+\frac{3\pi}{4}\right) = \cos\left(2x+\frac{3\pi}{4}+x+\frac{3\pi}{4}\right) =$

$= \cos\left(3x+\frac{3\pi}{2}\right) = \sin(3x)$

5.2. $\lim_{x \to 0} \frac{h(x)}{1-e^x} = \lim_{x \to 0} \frac{\sin(3x)}{1-e^x} \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x \to 0} \frac{\sin(3x)}{-(e^x-1)} = -\lim_{x \to 0} \frac{\frac{\sin(3x)}{x}}{\frac{e^x-1}{x}} =$

$= -\frac{3 \times \lim_{3x \to 0} \frac{\sin(3x)}{3x}}{\lim_{x \to 0} \frac{e^x-1}{x}} = -\frac{3 \times 1}{1} = -3$

Nota: Aplicaram-se os limites notáveis: $\lim_{x \to 0} \frac{e^x-1}{x} = 1$ e $\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$

5.3. Determinemos a função derivada de h

$h'(x) = [\sin(3x)]' = (3x)'\cos(3x) = 3\cos(3x)$

O declive da reta tangente t é $m_t = h'\left(\frac{2\pi}{9}\right) = 3\cos\left(\frac{6\pi}{9}\right) = 3\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -3 \times \frac{1}{2} = -\frac{3}{2}$

Assim,

$t : y = -\frac{3}{2}x + b, b \in \mathbb{R}$

Por outro lado,

$$h\left(\frac{2\pi}{9}\right)=\sin\left(\frac{6\pi}{9}\right)=\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Portanto, o ponto de tangência é $A\left(\frac{2\pi}{9};\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

Assim,

$$\frac{\sqrt{3}}{2}=-\frac{3}{2}\times\frac{2\pi}{9}+b\Leftrightarrow\frac{\sqrt{3}}{2}=-\frac{\pi}{3}+b\Leftrightarrow b=\frac{3\sqrt{3}}{6}+\frac{2\pi}{6}\Leftrightarrow b=\frac{3\sqrt{3}+2\pi}{6}$$

Concluindo, a equação reduzida da reta tangente ao gráfico da função h no ponto de abcissa $\frac{2\pi}{9}$, é, $t:y=-\frac{3}{2}x+\frac{3\sqrt{3}+2\pi}{6}$

6. Domínio da função f: $D_f=\left]-\frac{3}{2};+\infty\right[$

Determinemos a função derivada da função f

$$f'(x)=[\ln(2x+3)-2x]'=\frac{(2x+3)'}{2x+3}-2=\frac{2}{2x+3}-2=\frac{2-4x-6}{2x+3}=\frac{-4x-4}{2x+3}$$

Zeros de $f'(x)$

$$f'(x)=0\Leftrightarrow\frac{-4x-4}{2x+3}=0\Leftrightarrow -4x-4=0\wedge 2x+3\neq 0\Leftrightarrow -4x=4\wedge x\neq-\frac{3}{2}\Leftrightarrow x=-1\wedge x\neq-\frac{3}{2}\Leftrightarrow x=-1$$

Sinal de $f'(x)$

- **Numerador**
  $-4x-4>0\Leftrightarrow -4x>4\Leftrightarrow x<-1$

  $-4x-4<0\Leftrightarrow -4x<4\Leftrightarrow x>-1$

- **Numerador**
  $2x+3>0\Leftrightarrow 2x>-3\Leftrightarrow x>-\frac{3}{2}$

  $2x+3<0\Leftrightarrow 2x<-3\Leftrightarrow x<-\frac{3}{2}$

Quadro de sinal de $f'(x)$

x	$-\frac{3}{2}$		-1	$+\infty$
$-4x-4$	$+$	$+$	0	$-$
$2x+3$	0	$+$	$+$	$+$
$f'(x)$	$n.d.$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$n.d.$	$\nearrow$	2	$\searrow$

$f(-1)=\ln(-2+3)+2=\ln 1+2=0+2=2$

A função f é crescente em $\left]-\frac{3}{2};-1\right]$, e é decrescente em $[-1;+\infty[$

A função f atinge o valor máximo (absoluto) 2, para $x=-1$

7. Determinemos a função segunda derivada da função g

$g''(x) = \left[(3x+1)e^{2x}\right]' = (3x+1)' \times e^{2x} + (3x+1) \times \left(e^{2x}\right)' = 3e^{2x} + (3x+1) \times 2e^{2x} = 3e^{2x} + (6x+2) \times 2e^{2x} =$

$= (6x+5)e^{2x}$

Zeros de $g''(x)$

$g''(x) = 0 \Leftrightarrow (6x+5)e^{2x} = 0 \Leftrightarrow 6x+5 = 0 \vee e^{2x} = 0 \Leftrightarrow 6x = -5 \vee$ Equação impossível $\Leftrightarrow x = -\dfrac{5}{6}$

Sinal de $g'(x)$

- $e^{2x} > 0, \forall x \in \mathbb{R}$
- $6x+5$

  $6x+5 > 0 \Leftrightarrow 6x > -5 \Leftrightarrow x > -\dfrac{5}{6}$

  $6x+5 < 0 \Leftrightarrow 6x < -5 \Leftrightarrow x < -\dfrac{5}{6}$

Quadro de sinal de $g''(x)$

x	$-\infty$	$-\dfrac{5}{6}$	$+\infty$
e^{2x}	$+$	$+$	$+$
$6x+5$	$-$	0	$+$
$g''(x)$	$-$	0	$+$
$g(x)$	$\frown$	$g\left(-\dfrac{5}{6}\right)$	$\smile$

O gráfico da função g tem a concavidade voltada para baixo em $\left]-\infty; -\dfrac{5}{6}\right]$, e a concavidade voltada para cima em $\left[-\dfrac{5}{6}; +\infty\right[$

$I\left(-\dfrac{5}{6}; g\left(-\dfrac{5}{6}\right)\right)$ é o ponto de inflexão do gráfico da função g

8. .

   8.1. O declive da reta t é igual a -4

   Ou seja, $m_t = -4$

   Por outro lado, $m_t = g'(a)$

   Determinemos $g'(x)$

   $g'(x) = \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)' = 0 + \left(\dfrac{1}{x}\right)' = -\dfrac{1}{x^2}$

   Assim, resulta,

   $g'(a) = m_t \Leftrightarrow -\dfrac{1}{a^2} = -4 \Leftrightarrow \dfrac{1}{a^2} - 4 = 0 \Leftrightarrow \dfrac{1-4a^2}{a^2} = 0 \Leftrightarrow 1 - 4a^2 = 0 \wedge a^2 \neq 0 \Leftrightarrow a^2 = \dfrac{1}{4} \wedge a \neq 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow a = \pm\frac{1}{2} \wedge a \neq 0 \Leftrightarrow a = \pm\frac{1}{2}$

Como a abcissa do ponto A é negativa, tem-se que $a = -\frac{1}{2}$

Assim,

$A\left(-\frac{1}{2}; g\left(-\frac{1}{2}\right)\right)$

Como, $g\left(-\frac{1}{2}\right) = 1 + \frac{1}{-\frac{1}{2}} = 1 - 2 = -1$, vem,

$A\left(-\frac{1}{2}; -1\right)$

8.2. A reta t tem equação reduzida $y = -4x + b, b \in \mathbb{R}$

Como $A\left(-\frac{1}{2}; -1\right)$ é ponto da reta t, resulta,

$-1 = -4 \times \left(-\frac{1}{2}\right) + b \Leftrightarrow -1 = 2 + b \Leftrightarrow b = -3$

Portanto, $t : y = -4x - 3$