Tópicos de Matemática II - 2017 2018
1º Teste – Tópicos de resolução

Exercício 1

a)

$$u_{n+1}-u_n = \frac{2(n+1)-3}{3(n+1)} - \frac{2n-3}{3n} = \frac{2n-1}{3n+3} - \frac{2n-3}{3n} = \frac{6n^2-3n-6n^2+9n-6n+9}{3n(3n+3)} = \frac{9}{3n(3n+3)} > 0, \forall n \in IN$$

Logo, $(u_n)_n$ é monótona (estritamente) crescente.

b) $\lim_n u_n = \lim_n \left(\frac{2}{3}-\frac{1}{n}\right) = \frac{2}{3}-0 = \frac{2}{3}$.

$(u_n)_n$ é convergente pois tende para um número real. Se é convergente é necessariamente limitada.

Exercício 2

a) $a_1 = -1; a_2 = \frac{1}{2}; a_3 = -\frac{1}{3}$

b) $a_n = \begin{cases} \frac{1}{n} & se \quad n \ é \ par \\ -\frac{1}{n} & se \quad n \quad é \ ímpar \end{cases}$

- $\lim_n \frac{1}{n} = \frac{1}{(+\infty)} = 0$
- $\lim_n -\frac{1}{n} = \frac{-1}{(+\infty)} = 0$

Logo, a sucessão $(a_n)_n$ é convergente (para zero).

Exercício 3

a) $\lim_n \frac{\sqrt{n^2\left(1+\frac{1}{n^2}\right)}}{n} = \lim_n \frac{n\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}}{n} = \lim_n \sqrt{1+\frac{1}{n^2}} = \sqrt{1+0} = 1$

b) $\lim_n \frac{\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \lim_n \frac{n+1-n}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \lim_n \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \frac{1}{(+\infty)} = 0$

c) $\lim_n \left(1+\frac{5}{2n}\right)^{2n+1} = \lim_n \left(1+\frac{5}{2n}\right)^{2n} \times \lim_n \left(1+\frac{5}{2n}\right) = e^5 \times 1 = e^5$

Exercício 4

a) $D_f = \{x \in IR : x \geq 0 \wedge x - 6 \neq 0\} = [0, +\infty[\setminus \{6\}$

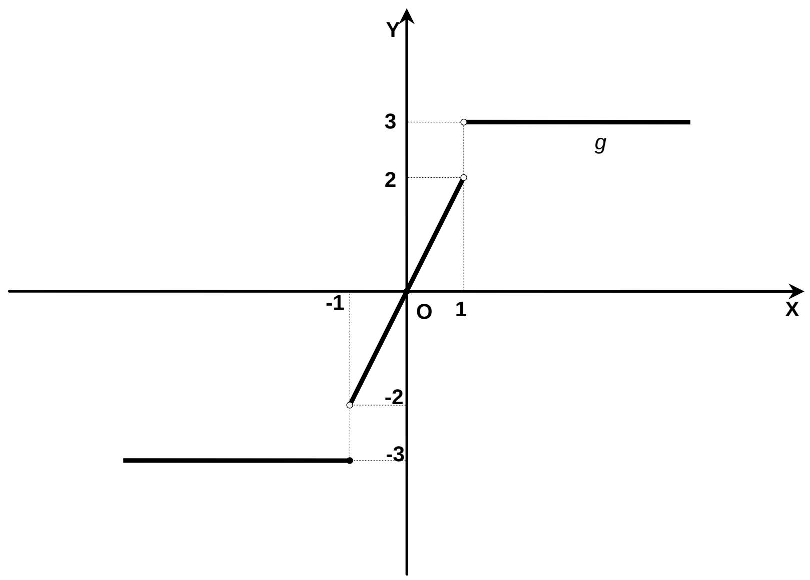
b) $f(8) = \frac{\sqrt{8}}{2} = \frac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$. Logo, o ponto de coordenadas $(8, \sqrt{2})$ pertence ao gráfico de f .

Exercício 5

$f(-1) = 2 \Leftrightarrow (m-3)(-1)^2 - 2(-1) + 1 = 2 \Leftrightarrow m - 3 + 2 + 1 = 2 \Leftrightarrow m = 2$

Exercício 6

a)



b) A função não é injetiva, pois existem objetos diferentes com a mesma imagem; por exemplo

$g(2) = g(3) = 3$.

c) A afirmação é falsa. Para ser ímpar a função teria que verificar, desde logo, que para qualquer $x \in D_g$ também $-x \in D_g$. Ora tal não acontece, pois $-1 \in D_g$ mas $1 \notin D_g$.

Exercício 7

a) Abcissa do vértice: $-\frac{b}{2a} = -\frac{-4}{2(-2)} = -1$; Ordenada do vértice: $f(-1) = -2 + 4 + 1 = 3$.

Logo, o vértice da parábola tem coordenadas $(-1, 3)$

b) A parábola representativa do gráfico de f tem concavidade "voltada para baixo" e a ordenada do seu vértice é 3; logo: $D'_f =]-\infty, 3]$.

c) O máximo absoluto é 3 e não existe mínimo absoluto.