Escola Secundária de Francisco Franco
Matemática A – 12.º ano

Funções reais de variável real

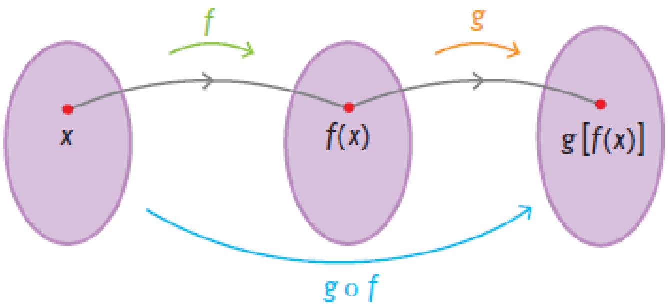
FUNÇÃO COMPOSTA

Dadas as funções $f: D_f \to A$ e $g: D_g \to B$, designa-se por **Função composta de g com f** a função

$gof: D_{gof} \to B$ tal que, $\forall x \in D_{gof}$, $(gof)(x) = g(f(x))$,

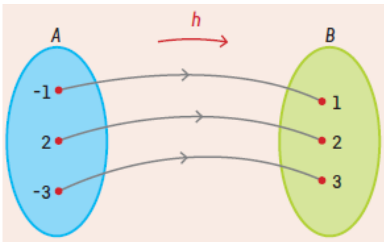
com $D_{gof} = \{x \in D_f : f(x) \in D_g\}$

gof é designado também por **g composta com f**, **g após f** ou **g seguida de f**.



Exercício resolvido 1

Considera as funções $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $g(x) = 8 - 2x^2$ e h, definida pelo diagrama de setas ao lado.



1.1. Calcula, se existir:

1.1.1. $(g \circ h)(-1)$;

1.1.2. $(g \circ h)(2)$;

1.1.3. $(h \circ g)(0)$; **1.1.4.** $(h \circ g)(-\sqrt{3})$;

1.1.5. $(g \circ g)(0)$; **1.1.6.** $(h \circ h)(-3)$.

1.2. Determina o domínio das funções $g \circ h$ e $h \circ g$.

Resolução

1.1.1. $(g \circ h)(-1) = g(h(-1)) = g(1) = \boxed{6}$

1.1.2. $(g \circ h)(2) = g(h(2)) = g(2) = \boxed{0}$

1.1.3. $(h \circ g)(0) = h(g(0)) = h(8) \to$ não existe pois $8 \notin D_h$

1.1.4. $(h \circ g)(-\sqrt{3}) = h(g(-\sqrt{3})) = h(2) = \boxed{2}$

1.1.5. $(g \circ g)(0) = g(g(0)) = g(8) = \boxed{-120}$

1.1.6. $(h \circ h)(-3) = h(h(-3)) = h(3) \to$ não existe pois $3 \notin D_h$

1.2. $h(x) = |x|$, logo:

$$D_{g \circ h} = \{x \in D_h : h(x) \in D_g\} = \{x \in D_h : |x| \in D_g\} = \boxed{\mathbb{R}}$$

$$D_{h \circ g} = \{x \in D_g : g(x) \in D_h\} = \{x \in D_g : 8 - 2x^2 \in D_h\} = ?$$

$$\therefore 8 - 2x^2 = -3 \vee 8 - 2x^2 = -1 \vee 8 - 2x^2 = 2 \Leftrightarrow x^2 = \frac{11}{2} \vee x^2 = \frac{9}{2} \vee x^2 = 3$$

$$\Leftrightarrow x = \pm\sqrt{\frac{11}{2}} \vee x = \pm\sqrt{\frac{9}{2}} \vee x = \pm\sqrt{3} \Leftrightarrow x = \pm\frac{\sqrt{22}}{2} \vee x = \pm\frac{3\sqrt{2}}{2} \vee x = \pm\sqrt{3}$$

$$\therefore D_{h \circ g} = \boxed{\left\{-\frac{\sqrt{22}}{2}, -\frac{3\sqrt{2}}{2}, -\sqrt{3}, \sqrt{3}, \frac{3\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{22}}{2}\right\}}$$

Exercício resolvido 2

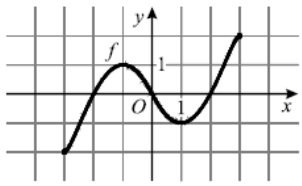
São dadas as funções f e g, de domínios, respetivamente, $\mathbb{R}$ e $]-\infty, 3[$, definidas por $f(x) = \text{sen}(\pi x)$ e $g(x) = \log_2(3 - x)$.

2.1. Calcula, se existirem, $(f \circ g)(-13)$ e $(g \circ f)\left(\frac{1}{2}\right)$.

2.2. Determina $a \in [0, 2]$ sabendo que $(g \circ f)(a) = \log_2 5 - 1$.

Exercício proposto 1

Seja f a função cujo gráfico está representado na figura.



Seja g a função de domínio $\mathbb{R}$ definida por $g(x) = -2x + 1$.

Calcula, se existir:

1.1. $(f \circ g)(2)$;

1.2. os zeros de $f \circ g$;

1.3. a de modo que $(g \circ f)(a) = 3$.

Adaptado do 2.º Teste intermédio de 2009 (11.º ano)

Exercício proposto 2

Seja h a função, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $h(x) = x + 1$. Seja g a função, de domínio $\mathbb{R}\backslash\{0\}$, definida por $g(x) = \frac{1}{x}$.

2.1. Para um certo número real a, tem-se $(g \circ h)(a) = \frac{1}{9}$. Determina a.

2.2. Caracteriza as funções $h \circ g$, $g \circ h$, $h \circ h$ e $g \circ g$.

Adaptado do 2.º Teste intermédio de 2011 (11.º ano)

Exercício proposto 3

Considera a função f, de domínio $\mathbb{R}\backslash\{2\}$, definida pela expressão $f(x) = \frac{6-x}{x-2}$.

3.1. Calcula, se existirem, $(f \circ f)(1)$ e $(f \circ f)\left(\frac{10}{3}\right)$.

3.2. Caracteriza a função $f \circ f$.

3.3. Seja g a função, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $g(x) = x^3$.

Resolução

2.1. $(f\circ g)(-13) = f(\log_2 16) = f(\log_2 2^4) = f(4\times 1) = sen(4\pi) = \boxed{0}$

$(g\circ f)(\frac{1}{2}) = g(sen\,\frac{\pi}{2}) = g(1) = \log_2 2 = \boxed{1}$

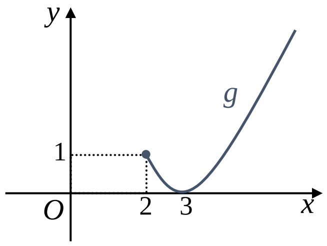
2.2. $(g\circ f)(a) = \log_2 5 - 1 \Leftrightarrow g(sen(a\pi)) = \log_2 5 - \log_2 2$

$\Leftrightarrow \log_2(3 - sen(a\pi)) = \log_2(\frac{5}{2}) \Leftrightarrow 3 - sen(a\pi) = \frac{5}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{2} = sen(a\pi)$

$\underset{\substack{a\in[0,2]\\ a\pi\in[0,2\pi]}}{\Leftrightarrow} a\cancel{\pi} = \frac{\cancel{\pi}}{6} \vee a\cancel{\pi} = \cancel{\pi} - \frac{\cancel{\pi}}{6} \Leftrightarrow \boxed{a = \frac{1}{6} \vee a = \frac{5}{6}}$

Exercício resolvido 3

Considera a função *f*, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $f(x) = e^{-3x}$ e a função *g*, de domínio $[2,+\infty[$ e definida pelo gráfico ao lado.



3.1. Resolve a equação $(f\circ g)(x) = 1$.

3.2. Mostra que o domínio da função $g\circ f$ é $\left]-\infty, -\ln\sqrt[3]{2}\right]$.

3.3. Supondo que $g(x) = (x-3)^2$, caracteriza a função $g\circ f$.

Resolução

3.1. $(f\circ g)(x) = 1 \Leftrightarrow f(g(x)) = 1 \Leftrightarrow e^{-3g(x)} = 1 \Leftrightarrow -3g(x) = 0 \Leftrightarrow g(x) = 0 \Leftrightarrow \boxed{x = 3}$

3.2. $D_{g\circ f} = \{x\in D_f : f(x)\in D_g\} = \{x\in D_f : e^{-3x}\geq 2\} = ?$

$e^{-3x}\geq 2 \Leftrightarrow -3x \geq \ln 2 \Leftrightarrow x \leq -\frac{1}{3}\ln 2 \Leftrightarrow x\leq -\ln 2^{\frac{1}{3}} \Leftrightarrow x \leq -\ln\sqrt[3]{2}$

$\therefore D_{g\circ f} =]-\infty, -\ln\sqrt[3]{2}]$ $\boxed{\text{QED}}$

3.3. $(g\circ f)(x) = g(f(x)) = g(e^{-3x}) = (e^{-3x} - 3)^2$

$\therefore$ temos a seguinte caracterização:

$$\boxed{\begin{aligned} g\circ f :]-\infty, -\ln\sqrt[3]{2}] &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto (e^{-3x} - 3)^2 \end{aligned}}$$

Soluções: 1. -2; -1/2, 1/2 e 3/2; 1 e 2,5

2.1. 8 2.2. D=$\mathbb{R}\setminus\{0\}$ e (hog)(x)=1/x+1; D=$\mathbb{R}\setminus\{-1\}$ e (goh)(x)=1/(x+1); D=$\mathbb{R}$ e (hoh)(x)=x+2; D=$\mathbb{R}\setminus\{0\}$ e (gog)(x)=x

3.1. -11/7; não ex. 3.2. D=$\mathbb{R}\setminus\{2,10/3\}$ e (fof)(x)=(7x-18)/(10-3x)

3.3. D=$\mathbb{R}\setminus\{2\}$ e (gof)(x)=$[(6-x)/(x-2)]^3$; -1,63 e 1,53

4.1. não ex.; -4; ln2; não ex.; 4.2. {1/*e*,*e*}; {1};]e^{-2},e^2[; {0}; ∅;]-1;-0,6]∪[0,6;1[4.3. [e^{-3},e^2];]-1,1[

5.1. -1/2; não ex. 5.2. ±2

3.3.1. Caracteriza a função $g\circ f$.

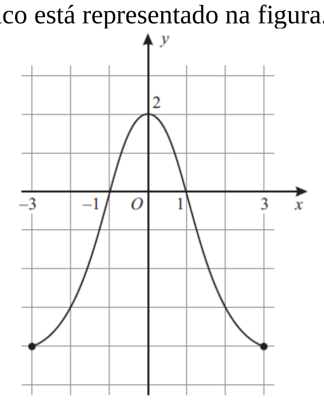
3.3.2. A equação $(f\circ g)(x) = x$ tem exatamente duas soluções. Determine, recorrendo à calculadora gráfica, essas soluções. Apresente as soluções arredondadas às centésimas. Na sua resposta, deve:

- reproduzir, num referencial, o gráfico da função ou os gráficos das funções que tiver necessidade de visualizar, devidamente identificado(s);
- assinalar os pontos relevantes para responder à questão colocada.

Adaptado do Teste intermédio de 2013 (11.º ano)

Exercício proposto 4

Seja *f* a função, de domínio $[-3,3]$, cujo gráfico está representado na figura.



Tal como a figura sugere, todos os objetos inteiros têm imagens inteiras. Seja *g* a função, de domínio $\mathbb{R}^+$, definida por $g(x) = \ln x$.

4.1. Calcula, se existir:

4.1.1. $(g\circ f)(2)$ **4.1.2.** $(f\circ g)(e^{-3})$

4.1.3. $(g\circ f)(0)$ **4.1.4.** $(f\circ g)(0)$

4.2. Determina o conjunto solução de cada condição seguinte.

4.2.1. $(f\circ g)(x) = 0$

4.2.2. $(f\circ g)(x) = 2$

4.2.3. $(f\circ g)(x) > -3$

4.2.4. $(g\circ f)(x) = \ln 2$

4.2.5. $(g\circ f)(x) = 1$

4.2.6. $(g\circ f)(x) \leq 0$

4.3. Determina o domínio das funções $f\circ g$ e $g\circ f$.

Adaptado do exame nacional de Matemática A (época especial de 2016)

Exercício proposto 5

Considera as funções *f* e *g*, de domínios $\mathbb{R}$ e $\mathbb{R}\setminus\{0\}$, definidas por $f(x) = \cos(2x)$ e $g(x) = \frac{\pi}{x}$.

5.1. Calcula, se existirem, $(f\circ g)(-3)$ e os zeros de $g\circ f$.

5.2. Determina $a\in[-3,3]$ tal que $(f\circ g)(a) = -1$.

O professor: Roberto Oliveira