TESTE N.º 5 – Proposta de resolução

1. Opção (A)

Consideremos os seguintes acontecimentos:

F: “Ser do sexo feminino.”

V: “Estar inscrito no exame de Matemática A.”

Sabe-se que:

- $P(F) = \frac{1}{2}P(M)$
- $P(F|M) = \frac{1}{3}$
- $P(\overline{M}|\overline{F}) = \frac{3}{7}$

Então:

$$P(F|M) = \frac{1}{3} \Leftrightarrow \frac{P(F \cap M)}{P(M)} = \frac{1}{3}$$

$$\Leftrightarrow P(F \cap M) = \frac{1}{3}P(M)$$

$$P(\overline{M}|\overline{F}) = \frac{3}{7} \Leftrightarrow \frac{P(\overline{M} \cap \overline{F})}{P(\overline{F})} = \frac{3}{7} \Leftrightarrow P(\overline{M} \cap \overline{F}) = \frac{3}{7}P(\overline{F})$$

$$\Leftrightarrow P(\overline{M} \cap \overline{F}) = \frac{3}{7}\left(1 - \frac{1}{2}P(M)\right)$$

$$\Leftrightarrow P(\overline{M} \cap \overline{F}) = \frac{3}{7} - \frac{3}{14}P(M)$$

$$\Leftrightarrow P\left(\overline{M \cup F}\right) = \frac{3}{7} - \frac{3}{14}P(M)$$

$$\Leftrightarrow 1 - P(M \cup F) = \frac{3}{7} - \frac{3}{14}P(M)$$

$$\Leftrightarrow 1 - P(M) - P(F) + P(M \cap F) + \frac{3}{14}P(M) = \frac{3}{7}$$

$$\Leftrightarrow 1 - P(M) - \frac{1}{2}P(M) + \frac{1}{3}P(M) + \frac{3}{14}P(M) = \frac{3}{7}$$

$$\Leftrightarrow -\frac{20}{21}P(M) = -\frac{4}{7}$$

$$\Leftrightarrow P(M) = \frac{3}{5}$$

$$P(F \cap M) = \frac{1}{3} \times \frac{3}{5} = \frac{1}{5}$$

$$P(\overline{F} \cap M) = P(M) - P(F \cap M) = \frac{3}{5} - \frac{1}{5} = \frac{2}{5}$$

Logo, a probabilidade de o aluno escolhido ser rapaz e estar inscrito no exame de Matemática A é $\frac{2}{5}$, ou seja, 40%.

2.

2.1. Opção (D)

Número de casos possíveis: ${}^{9}C_4$

Número de casos favoráveis: $\underbrace{{}^{4}C_4}_{\text{saírem 4 números pares}} + \underbrace{{}^{4}C_2 \times {}^{5}C_2}_{\text{saírem 2 números pares e 2 números ímpares}} + \underbrace{{}^{5}C_4}_{\text{saírem 4 números ímpares}}$

A probabilidade pedida é igual a:

$$\frac{{}^{4}C_4 + {}^{4}C_2 \times {}^{5}C_2 + {}^{5}C_4}{{}^{9}C_4} = \frac{11}{21}$$

2.2. Número de casos possíveis: 9!

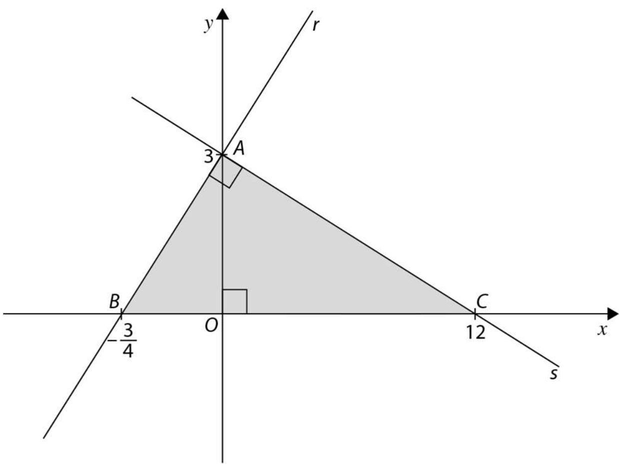
Número de casos favoráveis: $\underset{5}{\underline{\bar{P}}} \times \underset{4}{\underline{P}} \times \underset{4}{\underline{\bar{P}}} \times \underset{3}{\underline{P}} \times \underset{3}{\underline{\bar{P}}} \times \underset{2}{\underline{P}} \times \underset{2}{\underline{\bar{P}}} \times \underset{1}{\underline{P}} \times \underset{1}{\underline{\bar{P}}}$

A probabilidade pedida é igual a:

$$\frac{5! \times 4!}{9!} = \frac{1}{126}$$

3.

3.1. $A(0, g(0)) = (0, 0 + 2\cos 0 + \cos^2 0) = (0, 3)$



$r: y = mx + b$ onde $m = g'(0)$

$g'(x) = (4x + 2\cos x + \cos^2 x)' =$

$= 4 + 2 \times (\cos x)' + 2\cos x \times (\cos x)' =$

$= 4 - 2 \times \operatorname{sen} x - 2\cos x \operatorname{sen} x$

$g'(0) = 4 - 2\operatorname{sen} 0 - 2\cos 0 \operatorname{sen} 0 = 4$

$r: y = 4x + b$

Como $A \in r$, vem que $b = 3$. Assim, $r: y = 4x + 3$.

$s: y = -\frac{1}{4}x + 3$, pois $m_s = -\frac{1}{m_r}$.

B é o ponto de interseção da reta r com o eixo Ox, logo:

$0 = 4x + 3 \Leftrightarrow x = -\frac{3}{4}$ $\qquad B\left(-\frac{3}{4}, 0\right)$

C é o ponto de interseção da reta s com o eixo Ox, logo:

$0 = -\frac{1}{4}x + 3 \Leftrightarrow x = 12$ $\qquad C(12, 0)$

Assim:

$$A_{[ABC]} = \frac{\overline{BC} \times \overline{OA}}{2} = \frac{\left(12 + \frac{3}{4}\right) \times 3}{2} = \frac{153}{8}$$

3.2. Seja g a função, de domínio $]-\pi, \pi[$, definida por $g(x) = 4x + 2\cos x + \cos^2 x$.

Tem-se que:

$g'(x) = 4 - 2\text{sen}x - 2\cos x\,\text{sen}x = 4 - 2\text{sen}x - \text{sen}(2x)$

$g''(x) = -2\cos x - 2\cos(2x)$

$$\begin{aligned} g''(x) = 0 &\Leftrightarrow -2\cos x - 2\cos(2x) = 0 \\ &\Leftrightarrow -\cos x = \cos(2x) \\ &\Leftrightarrow \cos(\pi + x) = \cos(2x) \\ &\Leftrightarrow \pi + x = 2x + 2k\pi \quad \vee \quad \pi + x = -2x + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \\ &\Leftrightarrow x = \pi + 2k \qquad \vee \quad x = -\frac{\pi}{3} + \frac{2k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Como $x \in]-\pi, \pi[$, vem que $x = -\frac{\pi}{3}$ e $x = \frac{\pi}{3}$.

x	$-\pi$		$-\frac{\pi}{3}$		$\frac{\pi}{3}$		π
Sinal de g''	n.d.	+	0	−	0	+	n.d.
Sentido das concavidades do gráfico de g	n.d.	∪	P.I.	∩	P.I.	∪	n.d.

O gráfico de g tem a concavidade voltada para cima em $\left]-\pi, -\frac{\pi}{3}\right]$ e em $\left[\frac{\pi}{3}, \pi\right[$ e a concavidade voltada para baixo em $\left[-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right]$; tem dois pontos de inflexão de abcissas $x = -\frac{\pi}{3}$ e $x = \frac{\pi}{3}$.

4. Seja f a função, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $f(x) = \text{sen}\,x \times \cos x$.

$$\begin{aligned} f'(x) &= (\text{sen}\,x)' \times \cos x + \text{sen}\,x \times (\cos x)' = \cos x \times \cos x - \text{sen}\,x \times \text{sen}\,x = \\ &= \cos^2 x - \text{sen}^2 x = \cos(2x) \end{aligned}$$

$f''(x) = (\cos(2x))' = -2\,\text{sen}(2x)$

$$\begin{aligned} f(x) + 4 \times f'(x) = -f''(x) &\Leftrightarrow \underbrace{f(x) + 4 \times f'(x) + f''(x)}_{g(x)} = 0 \\ &\Leftrightarrow \underbrace{\text{sen}x \times \cos x + 4\cos(2x) - 2\,\text{sen}(2x)}_{g(x)} = 0 \end{aligned}$$

Seja g a função, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $g(x) = \text{sen}\,x \times \cos x + 4\cos(2x) - 2\,\text{sen}(2x)$.

- g é continua por se tratar da soma de funções contínuas. Em particular, g é continua em $\left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}\right]$.
- $$\begin{aligned} g\left(\frac{\pi}{6}\right) &= \text{sen}\left(\frac{\pi}{6}\right)\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + 4\cos\left(2\left(\frac{\pi}{6}\right)\right) - 2\,\text{sen}\left(2\left(\frac{\pi}{6}\right)\right) = \\ &= \text{sen}\left(\frac{\pi}{6}\right)\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + 4\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) - 2\,\text{sen}\left(\frac{\pi}{3}\right) = \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} + 4 \times \frac{1}{2} - 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \end{aligned}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{4} + 2 - \sqrt{3} =$$

$$= \frac{8-3\sqrt{3}}{4} =$$

$$= \frac{8-\sqrt{27}}{4}$$

$g\left(\frac{\pi}{6}\right) > 0$, pois $\sqrt{64} > \sqrt{27}$, isto é, $8 > \sqrt{27}$.

$$g\left(\frac{\pi}{4}\right) = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + 4\cos\left(2\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) - 2\operatorname{sen}\left(2\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) =$$

$$= \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + 4\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) - 2\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} + 4 \times 0 - 2 \times 1 =$$

$$= \frac{1}{2} - 2 =$$

$$= -\frac{3}{2}\ (< 0)$$

$$g\left(\frac{\pi}{4}\right) < 0 < g\left(\frac{\pi}{6}\right)$$

Logo, pelo teorema de Bolzano-Cauchy, concluímos que:

$$\exists c \in \left]\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}\right[: g(c) = 0$$

isto é:

$$\exists c \in \left]\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}\right[: f(c) + 4 \times f'(c) + f''(c) = 0$$

$$\exists c \in \left]\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}\right[: f(c) + 4 \times f'(c) = -f''(c)$$

Logo, a equação $f(x) + 4 \times f'(x) = -f''(x)$ é possível no intervalo $\left]\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}\right[$.

5.

5.1. Opção (B)

$$\text{t. m. v.}_{[a,2a]} = \frac{f(2a)-f(a)}{2a-a} = \frac{(2a)^2\ln(2a)+e^2-(a^2\ln a+e^2)}{a} =$$

$$= \frac{4\,a^2\ln(2a)+e^2-a^2\ln a-e^2}{a} = \frac{4\,a^2\ln(2a)-a^2\ln a}{a} =$$

$$= 4a\ln(2a) - a\ln a = a(4\ln(2a) - \ln a) = a(\ln(2a)^4 - \ln a) =$$

$$= a\ln\left(\frac{(2a)^4}{a}\right) =$$

$$= a\ln\left(\frac{16\,a^4}{a}\right) = a\ln(16\,a^3)$$

5.2. f é contínua em $x = -2$ se e só se existir $\lim_{x \to -2} f(x)$, isto é:

$$\lim_{x \to -2^-} f(x) = \lim_{x \to -2^+} f(x) = f(-2)$$

- $\lim_{x \to -2^-} f(x) = \lim_{x \to -2^-} \frac{e^x - e^{-2}}{x^2+3x+2} =$

  $= \lim_{x \to -2^-} \frac{e^{-2}(e^{x+2}-1)}{(x+2)(x+1)} =$

  $= e^{-2} \times \lim_{x \to -2^-} \frac{e^{x+2}-1}{x+2} \times \lim_{x \to -2^-} \frac{1}{x+1} =$

  Considerando a mudança de variável $y = x + 2$;

  $x \to -2^- \Rightarrow y \to 0^-$:

  $= e^{-2} \times \lim_{y \to 0^-} \frac{e^y - 1}{y} \times \frac{1}{-2+1} =$

  $= e^{-2} \times 1 \times (-1) =$

  $= -e^{-2}$

Cálculo auxiliar

$x^2 + 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \times 1 \times 2}}{2 \times 1}$

$\Leftrightarrow x = -2 \vee x = -1$

- $\lim_{x \to -2^+} f(x) = f(-2) = \log k$

  Assim, $\log k = -e^{-2} \Leftrightarrow k = 10^{-e^{-2}}$

  Ou seja, existe um valor real k tal que a função f é contínua em $x = -2$: $k = 10^{-e^{-2}}$.

5.3. Em $]0, +\infty[$:

$f'(x) = (x^2 \ln x + e^2)' = (x^2)' \times \ln x + x^2 \times (\ln x)' + 0 =$

$= 2x \ln x + x^2 \times \frac{1}{x} = 2x \ln x + x =$

$= x\,(2\ln x + 1)$

$f'(x) = 0$

$x\,(2\ln x + 1) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee 2\ln x + 1 = 0$

$\Leftrightarrow x = 0 \vee \ln x = -\frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow \underbrace{x = 0}_{\notin]0,+\infty[} \vee x = e^{-\frac{1}{2}}$

x	0		$e^{-\frac{1}{2}}$	$+\infty$
x	n. d.	$+$	$+$	$+$
$2\ln x + 1$	n. d.	$-$	0	$+$
Sinal de f'	n. d.	$-$	0	$+$
Variação de f	n. d.	↘	mín. $f\left(e^{-\frac{1}{2}}\right)$	↗

Cálculo auxiliar

$f\left(e^{-\frac{1}{2}}\right)=\left(e^{-\frac{1}{2}}\right)^2\ln\left(e^{-\frac{1}{2}}\right)+e^2=e^{-1}\times\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{e^{-1}}{2}+e^2=e^2-\frac{1}{2e}$

$e^2-\frac{1}{2e}$ é mínimo relativo em $x=e^{-\frac{1}{2}}$.

f é estritamente decrescente em $\left]0,e^{-\frac{1}{2}}\right]$ e é estritamente crescente em $\left[e^{-\frac{1}{2}},+\infty\right[$.

6. Opção (C)

$$\lim u_n=\lim\left(\frac{n+1}{n+2}\right)^{kn}=\lim\left[\frac{n\left(1+\frac{1}{n}\right)}{n\left(1+\frac{2}{n}\right)}\right]^{kn}=\lim\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{kn}}{\left(1+\frac{2}{n}\right)^{kn}}=$$

$$=\lim\frac{\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right]^k}{\left[\left(1+\frac{2}{n}\right)^n\right]^k}=$$

$$=\frac{e^k}{e^{2k}}=$$

$$=e^{-k}$$

Como e^{-k} é solução da equação $e^{-\ln\left(\frac{e}{x}\right)}=\frac{1}{e^2}$, então:

$$e^{-\ln\left(\frac{e}{e^{-k}}\right)}=\frac{1}{e^2}\Leftrightarrow e^{\ln\left(\frac{e^{-k}}{e}\right)}=e^{-2}\Leftrightarrow e^{-k-1}=e^{-2}$$

$$\Leftrightarrow -k-1=-2$$

$$\Leftrightarrow k=1$$

7. $D=\{x\in\mathrm{IR}: 3e^x-2>0\}=\left]\ln\left(\frac{2}{3}\right),+\infty\right[$

Cálculo auxiliar

$3e^x-2>0\Leftrightarrow 3e^x>2\Leftrightarrow e^x>\frac{2}{3}\Leftrightarrow x>\ln\left(\frac{2}{3}\right)$

Em $\left]\ln\left(\frac{2}{3}\right),+\infty\right[$:

$$2x\geq\ln(3e^x-2)\Leftrightarrow\ln\left(e^{2x}\right)\geq\ln(3e^x-2)\Leftrightarrow e^{2x}\geq 3e^x-2$$

$$\Leftrightarrow e^{2x}-3e^x+2\geq 0$$

Consideremos a mudança de variável $e^x=y$:

$y^2-3y+2\geq 0\Leftrightarrow y\leq 1\ \vee\ y\geq 2$

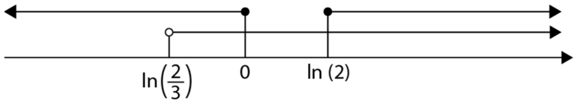
Cálculo auxiliar

$$y^2 - 3y + 2 = 0 \Leftrightarrow y = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 4 \times 2}}{2} \Leftrightarrow y = \frac{3 \pm 1}{2}$$

$$\Leftrightarrow y = 2 \ \vee \ y = 1$$

Substituindo y por e^x, vem:

$e^x \leq 1 \ \vee \ e^x \geq 2 \Leftrightarrow x \leq 0 \ \vee \ x \geq \ln(2)$



C.S. $= \left]\ln\left(\frac{2}{3}\right), 0\right] \cup [\ln(2), +\infty[$

8. Opção (C)

Seja $y = mx + b$ a equação da assíntota não vertical ao gráfico de f quando $x \to +\infty$.

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x) + \ln(x)}{2x} = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{2} \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x) + \ln(x)}{x} = 1$$

$$\Leftrightarrow \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} + \underbrace{\lim_{x \to +\infty} \frac{ln(x)}{x}}_{\text{limite notável}} = 2$$

$$\Leftrightarrow \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} + 0 = 2$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x}}_{m} = 2$$

$$\lim_{x \to +\infty} \left(2x - f(x) - \frac{x^2}{e^x}\right) = -1 \Leftrightarrow -\lim_{x \to +\infty} \left(f(x) - 2x + \frac{x^2}{e^x}\right) = -1$$

$$\Leftrightarrow \lim_{x \to +\infty} (f(x) - 2x) + \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2}{e^x} = 1$$

$$\Leftrightarrow \lim_{x \to +\infty} (f(x) - 2x) + \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{\frac{e^x}{x^2}} = 1$$

$$\Leftrightarrow \lim_{x \to +\infty} (f(x) - 2x) + \frac{1}{\underbrace{\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^2}}_{\text{limite notável}}} = 1$$

$$\Leftrightarrow \lim_{x \to +\infty} (f(x) - 2x) + \frac{1}{+\infty} = 1$$

$$\Leftrightarrow \lim_{x \to +\infty} (f(x) - 2x) + 0 = 1$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{\lim_{x \to +\infty} (f(x) - 2x)}_{b} = 1$$

9.

9.1. $\overline{z_2} = z_2 \times z_1 \Leftrightarrow \overline{\sqrt{2}e^{i\alpha}} = \sqrt{2}e^{i\alpha} \times e^{i\frac{4\pi}{3}}$

$\Leftrightarrow \sqrt{2}e^{i(-\alpha)} = \sqrt{2}e^{i\left(\alpha+\frac{4\pi}{3}\right)}$

$\Leftrightarrow -\alpha = \alpha + \frac{4\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$

$\Leftrightarrow -2\alpha = \frac{4\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$

$\Leftrightarrow \alpha = -\frac{2\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

Cálculo auxiliar

$z_1 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i = e^{i\frac{4\pi}{3}}$

$|z_1| = \sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = 1$

Seja θ um argumento de z_1:

$\text{tg}\,\theta = \frac{-\frac{\sqrt{3}}{2}}{-\frac{1}{2}} = \sqrt{3} \land \theta \in 3.^{\text{o}}\text{ Q, logo } \theta = \frac{4\pi}{3}$ (por exemplo)

9.2. Opção (D)

$$z_2 + z_3 = \sqrt{2}e^{i\alpha} + \underbrace{2\sqrt{2}e^{i(\alpha+\pi)}}_{\text{simétrico de } 2\sqrt{2}e^{i\alpha}} = \sqrt{2}e^{i\alpha} + \left(-2\sqrt{2}e^{i\alpha}\right) =$$

$$= -\sqrt{2}e^{i\alpha} =$$

$$= \sqrt{2}e^{i(\alpha+\pi)}$$

Como $\alpha \in \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right[$, então $\alpha + \pi \in \left]\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right[$, isto é, o afixo de $z_2 + z_3$ pertence ao 4.º quadrante.