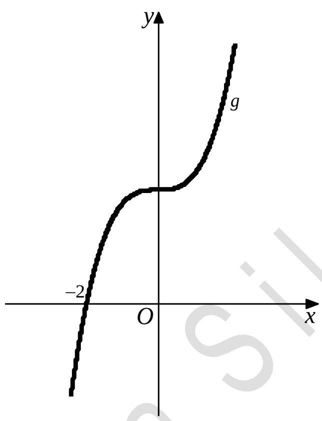
PROPOSTA DE TESTE N.º 5

MATEMÁTICA A – 11.º ANO – MAIO DE 2015

"Conhece a Matemática e dominarás o Mundo."
Galileu Galilei

GRUPO I – ITENS DE ESCOLHA MÚLTIPLA

1. Na figura está representado, num referencial o.n. xOy, parte do gráfico de uma função g, polinomial de grau 3, com um único zero. Seja h a função definida por $h(x)=\sqrt{x^2+x+14}+2x$.



Qual é o valor de $\left(h\circ g^{-1}\right)(0)$? (g^{-1} designa a função inversa de g)

A 0 **B** 1 **C** 2 **D** 3

2. Considere as funções f e g definidas respectivamente por $f(x)=\dfrac{1}{x^3-9x}$ e $g(x)=\sqrt{6-3x}-3$.

Qual é o domínio da função $\dfrac{f}{g}$?

A $\mathbb{R}\setminus\{-3,-1,0,3\}$ **B** $]-\infty,2]\setminus\{-3,0\}$ **C** $[2,+\infty[\setminus\{3\}$ **D** $]-\infty,2]\setminus\{-3,-1,0\}$

3. Seja g uma função injectiva tal que as rectas de equação $x=3$ e $y=-2$ são as únicas assimptotas do seu gráfico.

Considere a função h, definida por $h(x)=g(x-1)+2$. Quais são as equações das assimptotas do gráfico da função h^{-1}, função inversa de h?

A $x=0$ e $y=2$ **B** $x=0$ e $y=4$ **C** $x=4$ e $y=0$ **D** $x=-2$ e $y=3$

4. Considere uma função f, de domínio $\mathbb{R}$, tal que a sua derivada, também de domínio $\mathbb{R}$, é definida por:

$$f'(x) = -x^3 - 3x^2 + 4$$

Sabe-se que $f'(-2) = 0$. Qual das seguintes afirmações é verdadeira?

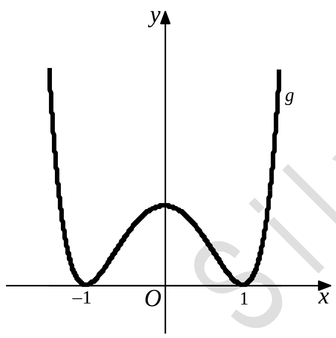
A $f(-2)$ é um extremo relativo de f.

B No intervalo $[-2,1]$ f é decrescente.

C No intervalo $]-\infty,-2]$ f é crescente.

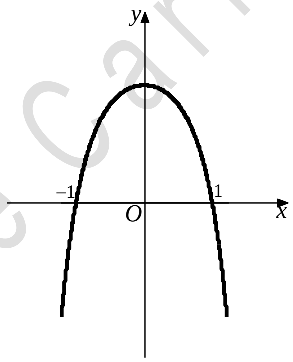
D $f(1)$ é um mínimo relativo de f.

5. Na figura está representado, num referencial o.n. xOy, parte do gráfico de uma função g de domínio $\mathbb{R}$.

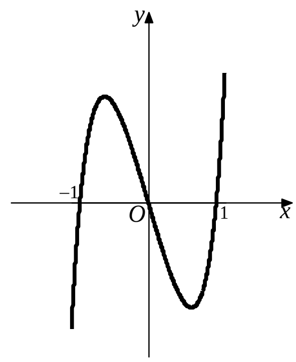


Seja h a função definida por $h(x) = -g(x) + 4$. Em qual das seguintes opções pode estar representado parte do gráfico da função h', função derivada de h?

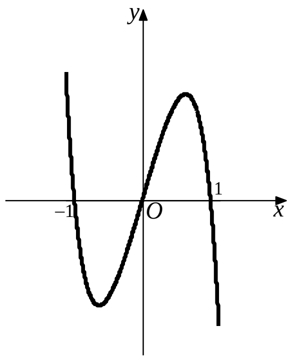
A



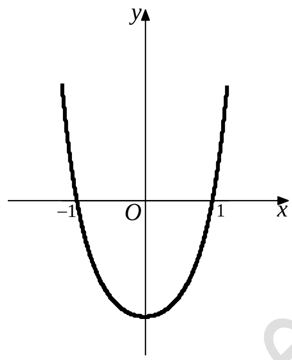
B



C



D

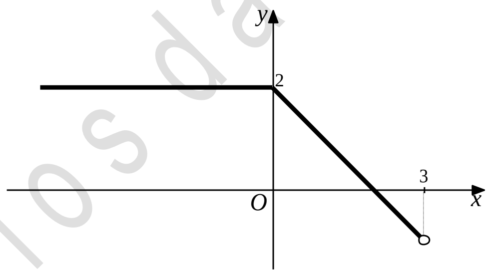


GRUPO II – ITENS DE RESPOSTA ABERTA

1. Considere a função f de domínio $\mathbb{R}\setminus\{3\}$ e a função g de domínio $\mathbb{R}\setminus\{-1,2\}$, definidas respectivamente por:

$$f(x)=\frac{2x-4}{3-x} \quad \text{e} \quad g(x)=\frac{3x^2-27}{x^2-x-2}$$

Seja h, a função de domínio $]-\infty,3[$, cujo gráfico está parcialmente representado na figura:



1.1. Seja f^{-1} a função inversa de f . Sem determinar a expressão analítica de f^{-1} , determine:

a) x, de modo que $f^{-1}(x)=5$.

b) $f^{-1}(4)$

1.2. Caracterize a função f^{-1} .

1.3. Determine o domínio da função $h\circ g$.

1.4. Determine o conjunto solução da equação $(f\circ h)(x)=0$.

1.5. Caracterize a função $f\times g$, simplificando o mais possível a sua expressão analítica.

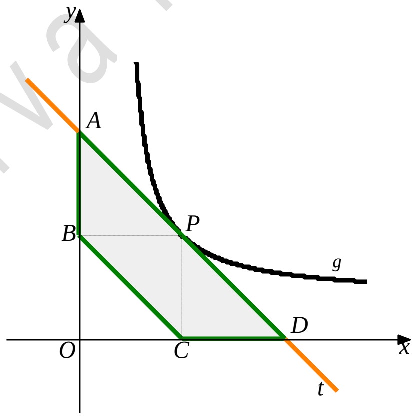
2. Considere a função g, de domínio $\mathbb{R}\setminus\{a\}$, definida por $g(x)=\dfrac{ax+5}{x-a}$, com $a>1$.

2.1. Sabendo que $g'(1)=-9$, mostre que $a=2$.

Sugestão: comece por mostrar que $g(x)=a+\dfrac{a^2+5}{x-a}$.

2.2. Usando a definição de derivada num ponto, mostre que $g'(-7)=-\dfrac{1}{9}$.

2.3. Na figura estão representados, num referencial o.n. xOy, parte do gráfico da função g, uma recta t, paralela à bissectriz dos quadrantes pares e tangente ao gráfico de g no ponto P de abcissa positiva e o trapézio isósceles $[ABCD]$.



Sabe-se que:

- a recta t intersecta o eixo Oy no ponto A e o eixo Ox no ponto D
- o ponto B pertence ao eixo Oy e tem a mesma ordenada que o ponto P
- o ponto C pertence ao eixo Ox e tem a mesma abcissa que o ponto P

Qual é a área do trapézio $[ABCD]$?

2.4. Considere a função h, de domínio $\mathbb{R}\setminus\{2\}$ definida por $h(x)=4x+g(x)$.

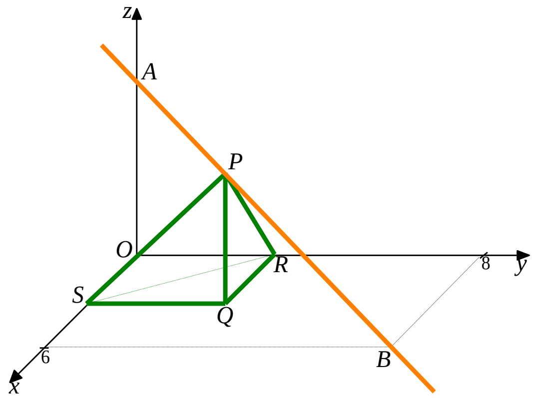
Estude a função h quanto à monotonia e quanto à existência de extremos relativos.

3. Seja f uma função de domínio $\mathbb{R}$ e a um número real positivo tal que:

- $t.v.m._{[a,2a]}(f)=a$
- $t.v.m._{[2a,4a]}(f)=2a$
- $t.v.m._{[a,4a]}(f)=4$

Qual é o valor de a?

4. Na figura estão representadas, num referencial o.n. $Oxyz$, a recta AB e a pirâmide triangular $[PQRS]$.



Sabe-se que:

- as coordenadas do ponto A são $(0,0,4)$ e as do ponto B são $(6,8,0)$
- a face $[QRS]$ está contida no plano xOy
- o ponto P pertence à recta AB
- o ponto S pertence ao eixo Ox e a aresta $[QS]$ é paralela ao eixo Oy
- o ponto R pertence ao eixo Oy e a aresta $[QR]$ é paralela ao eixo Ox
- a aresta $[PQ]$ é paralela ao eixo Oz

4.1. Mostre que uma condição que define a recta AB é $\frac{x}{6}=\frac{y}{8}=\frac{4-z}{4}$

4.2. Seja a a abcissa do ponto P.

Mostre que o volume da pirâmide $[PQRS]$ é dada em função de a por $V(a)=\frac{8}{9}a^2-\frac{4}{27}a^3$, com $a\in\,]0,6[$.

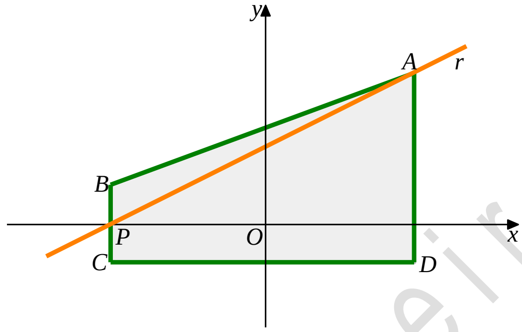
Sugestão: tenha em atenção que $\frac{x}{6}=\frac{y}{8}=\frac{4-z}{4} \Leftrightarrow \frac{x}{6}=\frac{y}{8} \ \wedge\ \frac{x}{6}=\frac{4-z}{4}$

4.3. Determine o volume máximo da pirâmide $[PQRS]$.

5. Na figura estão representados, num referencial o.n. xOy, o trapézio rectângulo $[ABCD]$ e a recta r de equação $2y-x=4$.

Sabe-se que:

- a recta r intersecta o eixo Ox no ponto P
- os pontos C e D têm ordenada -1 e B tem ordenada 1
- os pontos B e C têm a mesma abcissa que P



O ponto A desloca-se sobre a recta r no primeiro e segundo quadrantes, nunca coincidindo com o ponto P. O ponto D acompanha o seu movimento de modo que o segmento de recta $[AD]$ é sempre paralelo ao eixo Oy.

Seja h a função que faz corresponder à abcissa x do ponto A, o perímetro do trapézio $[ABCD]$.

5.1. Justifique o domínio da função h é $]-4,+\infty[$ e mostre que $h(x)=\frac{1}{2}\left(3x+18+\sqrt{5x^2+36x+68}\right)$.

5.2. Determine as coordenadas do ponto A de modo que o perímetro do trapézio $[ABCD]$ seja 34.

Solucionário

Grupo I – Itens de escolha múltipla

1. A **2.** D **3.** B **4.** C **5.** C

Grupo II – Itens de resposta aberta

1.1. **a)** $x=-3$

1.1. **b)** $\frac{8}{3}$

1.2. $D_{f^{-1}}=\mathbb{R}\setminus\{-2\}$; $f^{-1}(x)=\frac{3x+4}{x+2}$

1.3. $D_{h\circ g}=]-\infty,-1[\cup]2,7[$

1.4. $]-\infty,0]$

1.5. $D_{f\times g}=\mathbb{R}\setminus\{-1,2,3\}$; $(f\times g)(x)=-\frac{6x+18}{x+1}$

2.3. $A_{[ABCD]}=\frac{75}{2}$

2.4. A função f é decrescente em $\left[\frac{1}{2},2\right[$ e em $\left]2,\frac{7}{2}\right]$, é crescente em $\left]-\infty,\frac{1}{2}\right]$ e em $\left[\frac{7}{2},+\infty\right[$.

A função f tem máximo relativo em $x=\frac{1}{2}$ e tem mínimo relativo em $x=\frac{7}{2}$.

3. $x=\frac{12}{5}$

4.3. O volume da pirâmide é máximo se $a=4$. O volume máximo é $V(4)=\frac{128}{27}$.

5.2. $A(8,6)$