Proposta de Teste n.º 4

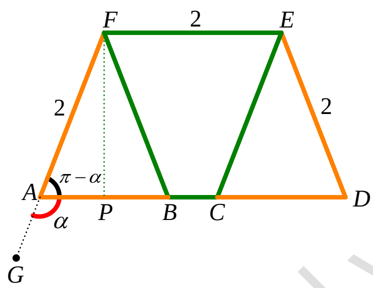
Matemática A – 11.º Ano – Março de 2015

Algumas Resoluções

"Conhece a Matemática e dominarás o Mundo."
Galileu Galilei

1.2.

a) Considere-se a figura:



Tem-se que $F\hat{A}B = \pi - \alpha$, que $\overline{AP} = \overline{PB}$, pois $[ABF]$ é um triângulo isósceles e que $AD = 2 + 2\overline{AP}$, pois $[ABEF]$ é um trapézio isósceles.

- $\underbrace{\cos(\pi-\alpha)}_{-\cos\alpha} = \dfrac{\overline{AP}}{2} \Leftrightarrow \overline{AP} = -2\cos\alpha$

- $\underbrace{\operatorname{sen}(\pi-\alpha)}_{\operatorname{sen}\alpha} = \dfrac{\overline{FP}}{2} \Leftrightarrow \overline{FP} = 2\operatorname{sen}\alpha$

Assim:

$$A_{[ADEF]} = \frac{\overline{AD}+\overline{EF}}{2} \times \overline{FP} = \frac{2+2\overline{AP}+2}{2} \times 2\operatorname{sen}\alpha = \frac{4+2(-2\cos\alpha)}{\cancel{2}} \times \cancel{2}\operatorname{sen}\alpha = (4-4\cos\alpha)\times\operatorname{sen}\alpha =$$

$$= 4\operatorname{sen}\alpha - 4\cos\alpha\operatorname{sen}\alpha$$

$$A_{[ABF]} = \frac{\overline{AB}\times\overline{FP}}{2} = \frac{\cancel{2}\times\overline{AP}\times\overline{FP}}{\cancel{2}} = -2\cos\alpha\times 2\operatorname{sen}\alpha = -4\cos\alpha\operatorname{sen}\alpha$$

Portanto, $A_{[BCEF]} = A_{[ADEF]} - 2A_{[ABF]} = 4\operatorname{sen}\alpha - 4\cos\alpha\operatorname{sen}\alpha - 2(-4\cos\alpha\operatorname{sen}\alpha) =$

$$= 4\operatorname{sen}\alpha - 4\cos\alpha\operatorname{sen}\alpha + 8\cos\alpha\operatorname{sen}\alpha = 4\operatorname{sen}\alpha + 4\cos\alpha\operatorname{sen}\alpha = f(\alpha)$$

José Carlos da Silva Pereira

4.1.

- $D_f = \{x \in \mathbb{R} : x^2 - x - 2 \neq 0\} \underset{*}{=} \mathbb{R} \setminus \{-1, 2\}$

$^{*}x^2 - x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{1 \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \times 1 \times (-2)}}{2 \times 1} \Leftrightarrow x = -1 \ \vee \ x = 2$

Logo, os zeros da função f são -1 e 2, portanto $x^2 - x - 2 = (x+1)(x-2)$

- Por outro lado -1 é zero de $x^3 + 1$ porque $(-1)^3 + 1 = -1 + 1 = 0$. Usando a regra de Ruffini para decompor $x^3 + 1$, vem:

	1	0	0	1
-1		-1	1	-1
	1	-1	1	0

Logo, $x^3 + 1 = (x+1)(x^2 - x + 1)$

Para fazer o resto da decomposição, temos de determinar os zeros de $x^2 - x + 1$, se existirem:

$$x^2 - x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \times 1 \times 1}}{2 \times 1} \Leftrightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{-3}}{2}$$

A equação é impossível. Logo, $x^2 - x + 1$ não tem zeros reais e portanto não se pode decompor mais.

Assim, $f(x) = \dfrac{x^3 + 1}{x^2 - x + 2} = \dfrac{\cancel{(x+1)}(x^2 - x + 1)}{\cancel{(x+1)}(x-2)} = \dfrac{x^2 - x + 1}{x - 2}$ (aqui conclui-se que o gráfico de f tem um “buraco” no ponto de abcissa -1)

Fazendo a divisão inteira:

$$\begin{array}{rrrrr|l}
\cancel{x^2} & - & x & + & 1 & x-2 \\ \hline
\cancel{-x^2} & + & 2x & & & x+1 \\ \hline
 & & \cancel{x} & + & 1 & \\
 & & \cancel{-x} & + & 2 & \\ \hline
 & & & & 3 &
\end{array}$$

José Carlos da Silva Pereira

Portanto, $f(x) = x + 1 + \dfrac{3}{x-2}$.

Assim, a recta de equação $x = 2$ é assimptota vertical do gráfico de f e a recta de equação $y = x + 1$ é assimptota oblíqua do gráfico de f.

4.2. $f(x) = 2 - 2g(x+1) = 2 - 2\left(4 - \dfrac{3}{x+1-2}\right) = 2 - 2\left(4 - \dfrac{3}{x-1}\right) = 2 - 8 + \dfrac{3}{x-1} = -6 + \dfrac{3}{x-1}$.

Assim, a recta de equação $x = 1$ é assimptota vertical do gráfico de g e a recta de equação $y = -6$ é assimptota oblíqua do gráfico de g.

José Carlos da Silva Pereira