3º. Teste de Matemática A

Versão 1

Duração do teste: 85 min | 31.01.2018

Caderno 1 (45 minutos) + Caderno 2 (40 minutos)

12.º Ano de Escolaridade | Turma G

Caderno 1: 45 minutos É permitido o uso de calculadora gráfica

Indica de forma legível a versão da prova. A prova é constituída por dois cadernos (Caderno 1 e Caderno 2). Utiliza apenas caneta ou esferográfica de tinta azul ou preta. Só é permitido o uso de calculadora no Caderno 1. Não é permitido o uso de corretor. Risca o que pretendes que não seja classificado. Para cada resposta identifica o item. Apresenta as tuas respostas de forma legível. Apresenta apenas uma resposta para cada item. A prova apresenta um formulário no Caderno 1. As cotações dos itens de cada Caderno encontram-se no final de cada Caderno.

Na resposta aos itens de seleção (escolha múltipla), seleciona a resposta correta. Escreve na folha de respostas o número do item e a letra que identifica a opção escolhida.

Na resposta aos restantes itens, apresenta o teu raciocínio de forma clara, indicando todos os cálculos que tiveres de efetuar e todas as justificações necessárias. Quando, para um resultado, não é pedida aproximação apresenta sempre o valor exato.

Formulário

Geometria

Comprimento de um arco de circunferência:

αr *(α - amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r - raio)*

área de um polígono regular: *Semiperímetro* $\times$ *Apótema*

área de um setor circular:

$\frac{\alpha r^2}{2}$ *(α- amplitude, em radianos, do ângulo ao centro, r - raio)*

área lateral de um cone: $\pi r g$ *(r - raio da base, g - geratriz)*

área de uma superfície esférica: $4\pi r^2$ *(r - raio)*

Volume da pirâmide: $\frac{1}{3}\times$ *área da base* $\times$ *Altura*

Volume do cone: $\frac{1}{3}\times$ *área da base* $\times$ *Altura*

Volume da esfera: $\frac{4}{3}\pi r^3$ *(r - raio)*

Progressões

Soma dos n primeiros termos de uma progressão (u_n):

Progressão aritmética: $\frac{u_1+u_n}{2}\times n$

Progressão geométrica: $u_1\times\frac{1-r^n}{1-r}$, $r\neq 1$

Trigonometria

$\sin(a+b)=\sin a\cos b+\sin b\cos a$

$\cos(a+b)=\cos a\cos b-\sin a\sin b$

Lei dos senos

$\frac{\sin\hat{A}}{a}=\frac{\sin\hat{B}}{b}=\frac{\sin\hat{C}}{c}$

Lei dos cossenos ou Teorema de Carnot

$a^2=b^2+c^2-2bc\cos\hat{A}$

Complexos

$(\rho cis\theta)^n=\rho^n cis(n\theta)$ ou $(\rho e^{i\theta})^n=\rho^n e^{in\theta}$

$\sqrt[n]{\rho cis\theta}=\sqrt[n]{\rho}cis\left(\frac{\theta+2k\pi}{n}\right)$ ou $\sqrt[n]{\rho e^{i\theta}}=\sqrt[n]{\rho}e^{\frac{\theta+2k\pi}{n}}$

$(k\in\{0,\cdots,n-1\}$ e $n\in\mathbb{N})$

Probabilidades

$\mu=p_1x_1+\cdots+p_nx_n$

$\sigma=\sqrt{p_1(x_1-\mu)^2+\cdots+p_n(x_n-\mu)^2}$

Se $X\sim N(\mu,\sigma)$, então:

$P(\mu-\sigma<X<\mu+\sigma)\approx 0.6827$

$P(\mu-2\sigma<X<\mu+2\sigma)\approx 0.9545$

$P(\mu-3\sigma<X<\mu+3\sigma)\approx 0.9973$

Regras de derivação

$(u+v)'=u'+v'$

$(uv)'=u'v+uv'$

$\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-uv'}{v^2}$

$(u^n)'=nu^{n-1}u' \quad (n\in\mathbb{R})$

$(\sin u)'=u'\cos u$

$(\cos u)'=-u'\sin u$

$(\tan u)'=\frac{u'}{\cos^2 u}$

$(e^u)'=u'e^u$

$(a^u)'=u'a^u\ln a \quad (a\in\mathbb{R}^+\backslash\{1\})$

$(\ln u)'=\frac{u'}{u}$

$(\log_a u)'=\frac{u'}{u\ln a} \quad (a\in\mathbb{R}^+\backslash\{1\})$

Limites notáveis

$\lim\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e \quad (n\in\mathbb{N})$

$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$

$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1$

$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0$

$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^p}=+\infty \quad (p\in\mathbb{R})$

1. Foram depositados 25000 euros numa conta poupança. A taxa de juro é de 4.5% ao ano, na modalidade de juros compostos.

   Qual é o capital acumulado, em euros, ao fim de um ano, se as capitalizações forem semestrais?

   (A) 26150.70 €
   (B) 26125 €
   (C) 36250 €
   (D) 26137.66 €

2. No referencial ortonormado $Oxyz$, da figura 1 está representado um cubo $[ABCDEFGH]$ e e uma pirâmide $[PQRST]$, quadrangular regular.

   Sabe-se que:

   - a origem O do referencial situa-se no centro do cubo;
   - o ponto T é o centro da face $[ABCD]$ do cubo;
   - P, Q, R, S são pontos médios das arestas $[EF], [FG], [GH], [HE]$, do cubo, respetivamente;

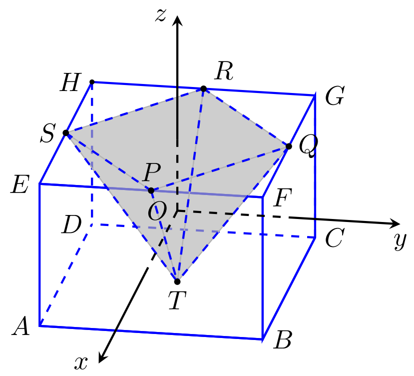

Figura 1

   2.1. Considera todos os conjuntos que são constituídos por quatro dos treze pontos assinalados no sólido. Quantos destes conjuntos são constituídos apenas por vértices do cubo ou vértices da pirâmide?

   2.2. Quantas retas distintas se podem definir com os treze pontos?

3. Sejam a e b dois números naturais.

   Seja $\quad 1 \quad a \quad 55 \quad b\cdots \quad$ parte de uma linha do triângulo de Pascal.

   O valor de b é:

   (A) 165
   (B) 210
   (C) 330
   (D) 120

4. Considera a função f, real de variável real, definida por $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x+e^x}{2} & se \quad x \leq 0 \\ \dfrac{1-e^x}{-2x} & se \quad x > 0 \end{cases}$

   4.1. Estuda a continuidade da função f no ponto $x = 0$.

   4.2. Resolve a equação $x + e^x = x + 2e^{-x} - 1$.

5. Na figura 2 estão representados, num plano munido de um referencial ortonormado, os gráficos das funções f, de domínio $[-2;2]$ e g, de domínio $[-1;1]$, definidas, respetivamente, por $f(x) = -x^2 + 4$ e $g(x) = -x^4 + x^2 + 5$.

Sabe-se A é ponto do gráfico de g e tem abcissa 1.

Considera a função d que associa a cada x a distância entre o ponto A e o ponto P do gráfico de f de abcissa x.

5.1. Prova que para todo o x, $d(x) = \sqrt{x^4 + 3x^2 - 2x + 2}$.

5.2. Recorrendo às potencialidades da calculadora gráfica, determina as abcissas dos pontos do gráfico de f que distam duas unidades do ponto A. Apresenta os valores arredondados às centésimas.

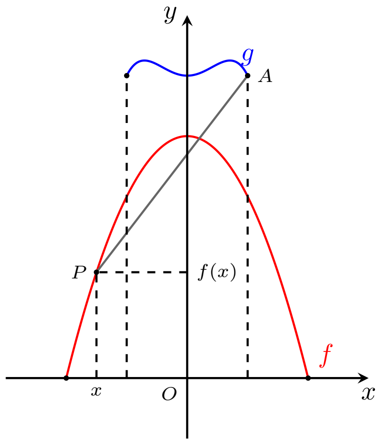

Figura 2

6. Considera a função h, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $h(x) = e^{3x} + k$, com $k \in \mathbb{R}$.
Indica o valor de $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{h(x) - h(1)}{3x - 3}$

(A) $3e$

(B) e^3

(C) $-e^3$

(D) $\dfrac{e}{3}$

FIM DO CADERNO 1

COTAÇÕES

1.		
	....	8 pontos
2.		
2.1	....	10 pontos
2.2	....	10 pontos
3.		
	....	8 pontos
4.		
4.1	....	20 pontos
4.2	....	20 pontos
5.		
5.1	....	10 pontos
5.2	....	10 pontos
6.		
	....	8 pontos
TOTAL	....	**104 pontos**

Caderno 2

- Duração: 40 minutos
- **Neste Caderno não é permitida a utilização de calculadora**

7. Considera as sucessões (u_n) e (v_n), de termos gerais, respetivamente, $u_n = \left(1+\dfrac{4k+3}{n}\right)^{2n}$ e $v_n = \dfrac{e^6 n+4}{n+2}$ com $k \in \mathbb{R}$.

   Sabe-se que $\lim u_n = \lim v_n$

   Mostra que $k = 0$

8. Em qual das opções está o valor de $\displaystyle\lim_{x\to -3} \frac{1-e^{x+3}}{6+2x}$?

   (A) $-\dfrac{1}{2}$

   (B) $\dfrac{1}{2}$

   (C) 2

   (D) -2

9. Na figura 3, está representado, num referencial ortonormado xOy, parte do gráfico de uma função racional f, definida por $f(x) = \dfrac{2x-2}{x-2}$ e o triângulo retângulo $[ABC]$.

   Relativamente à figura 3 sabe-se que:

   - $C(0;1)$ é ponto do gráfico da função f;
   - a reta de equação $y = 2$ é assíntota ao gráfico da função f;
   - a reta de equação $x = 2$ é assíntota ao gráfico da função f;
   - o ponto B percorre o gráfico da função f, e a sua abcissa, x, é sempre superior a 2. O ponto A situa-se na reta de equação $y = 1$, e acompanha o movimento do ponto B;
   - os pontos A e B têm a mesma abcissa.

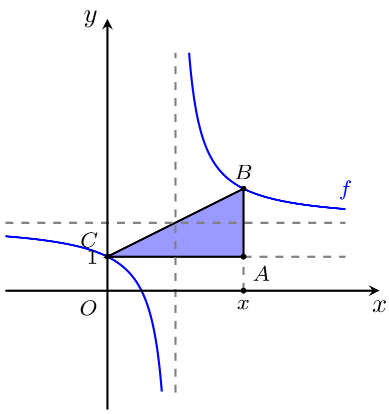

Figura 3

   9.1. Mostra que a área do triângulo $[ABC]$ é dada, em função de x, por $A(x) = \dfrac{x^2}{2x-4}$, com $x > 2$.

   9.2. Escreve a equação reduzida da assíntota não vertical ao gráfico da função $A(x)$ encontrada no item anterior.

   9.3. Considera a função g, real, de variável real, definida por $g(x) = \dfrac{x^2}{2x-4}$.

   Sabe-se que $g'(x) = \dfrac{2x^2-8x}{(2x-4)^2}$, com $x \neq 2$, é a função derivada da função g.

   Estuda a função g quanto ao sentido das concavidades e pontos de inflexão do seu gráfico.

10. Considera as funções f e g, de domínio $\mathbb{R}$, definidas, respetivamente, por $f(x) = 2^{x+1}$ e $g(x) = 2^{-x+1}$.

Qual é o conjunto-solução da inequação $g(x) - f(x) > 0$?

(A) $\mathbb{R}$

(B) $\mathbb{R}^+$

(C) $\mathbb{R}^-$

(D) $\mathbb{R}_0^+$

11. Na figura 4 está representado, num referencial *o.n.* xOy, parte do gráfico da função f, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $f(x) = e^{-ax} + \dfrac{1}{a}$, com $a \in \mathbb{R}^+$.

Na figura está também representada a reta r, que é tangente ao gráfico de f no ponto em que este interseta o eixo Oy.

A reta r interseta o eixo Ox no ponto de abcissa 2.

Qual é o valor de a?

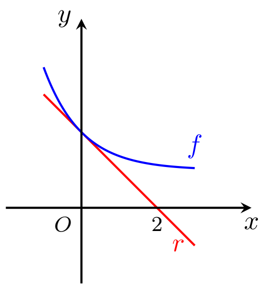

Figura 4

FIM DO CADERNO 2

COTAÇÕES

7.		
	....	15 pontos
8.		
	....	8 pontos
9.		
	9.1	15 pontos
	9.2	15 pontos
	9.3	15 pontos
10.		
	....	8 pontos
11.		
	....	20 pontos
	TOTAL	**96 pontos**