Escola Secundária de Francisco Franco

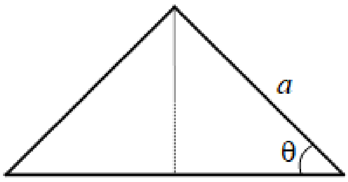
Matemática A (Aprendizagens Essenciais) – 12.º ano

Exercícios saídos em exames nacionais e em testes intermédios (desde 1996)

Tema IV: TRIGONOMETRIA E FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS

(Mais exercícios de trigonometria saídos em exames – nível de 11.º ano – em https://sites.google.com/view/roliveira/inicio/ano11a)

1. Numa fábrica de cerâmica produzem-se tijoleiras triangulares. Cada peça é um triângulo isósceles de lado *a*, constante, como mostra a figura.

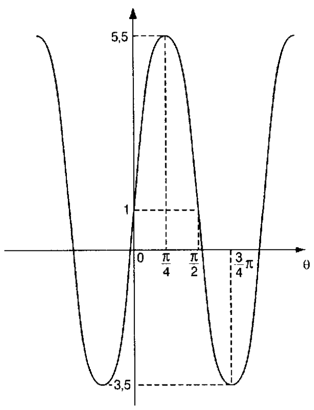


a) Mostre que a área de cada peça é dada em função de θ, por: $A(\theta) = a^2/2 \text{ sen } (2\theta)$, $(0 < \theta < \pi/2 \,;\, a > 0)$

b) Para que valor de θ a área de cada peça é máxima?

c) Justifique que, se o lado *a* de uma peça de tijoleira for menor que √2, a área da peça será inferior a 1, qualquer que seja o valor do ângulo θ.

d) Seja L= $\lim\limits_{\theta \to 0^+} \dfrac{A(\frac{\pi}{2}+\theta)}{\theta}$. Justifique que não existe logaritmo de L, qualquer que seja a positivo e seja qual for a base do logaritmo.



e) Seja f: $\theta \to a^2/2 \text{ sen } 2\theta$, $(\theta \in \mathbb{R}$, a constante). Sabendo que a figura do lado esquerdo representa parte do gráfico de k+f (com k constante), determine os valores de k e de *a*.

Exame Nacional 1996 (1.ª chamada)

2. Seja s a função definida em ℝ por

$$s(x) = \begin{cases} sen\,x \; se \; x < \pi \\ x - \pi \; se \; x \geq \pi \end{cases}$$

. Indique qual das afirmações seguintes é verdadeira:

(A) s é descontínua em x=π

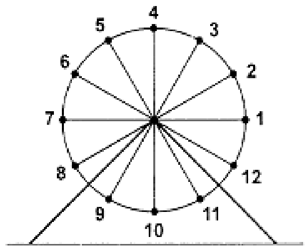
(B) s tem um mínimo relativo para x=π

(C) s tem um máximo relativo para x=π

(D) s tem derivada em x=π

Prova modelo 1997

3. Depois de 12 jovens estarem sentados nas respectivas cadeiras, uma roda gigante começa a girar. Um dos rapazes, o Manuel, ficou sentado na cadeira n.º 1. No instante em que a roda gigante começa a girar, a cadeira 1 está na posição indicada na figura ao lado. Admita que a distância, em metros, da cadeira 1 ao solo, t segundos após a roda gigante ter começado a girar, é dada por $d(t) = 7 + 5sen\left(\dfrac{\pi t}{30}\right)$.



a) Determine a distância a que a cadeira n.º 1 se encontra do solo no instante em que a roda gigante começa a girar.

b) Esboce o gráfico da função d para $t \in [0,75]$. Assinale as coordenadas dos pontos correspondentes aos extremos da função. Da análise do gráfico, indique quanto tempo demora o Manuel a dar uma volta completa.

c) Resolva a equação d(t)=9,5 para $t \in [0,75]$. Indique, justificando, quanto tempo demora o Manuel a encontrar-se pela 1.ª vez a uma distância de 9,5 metros do solo, depois da roda gigante ter começado a girar.

d) Indique, justificando, qual é o comprimento do raio da roda gigante.

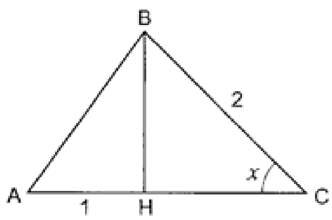
Exame Nacional 1997 (2.ª chamada)

4. Considere a função g definida em [0,π] por g(x)=sen x + sen(2x).

a) Determine os zeros da função g.

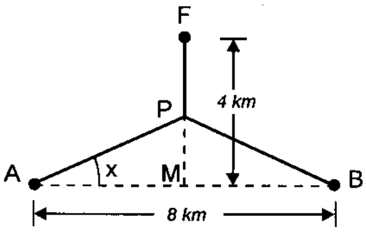
b) Estude, quanto à existência de assímptotas, a função h definida em [0,π]\{π/2} por h(x)=g(x)/cosx

c) Mostre que, para qualquer $x \in]0,\pi/2[$, g(x) é a área de um triângulo [ABC], em que x é amplitude do ângulo BCA; $\overline{BC}=2$; [BH] é a altura relativa ao vértice B; $\overline{AH}=1$.



Prova modelo 1998

5. Duas povoações, A e B, distanciadas 8 km uma da outra, estão a igual distância de uma fonte de abastecimento de água, localizada em F. Pretende-se construir uma canalização ligando a fonte às duas povoações, como se indica na figura abaixo. A canalização é formada por 3 canos: um que vai da fonte F até um ponto P e 2 que partem de P, um para A e outro para B. O ponto P está a igual distância de A e de B. Tem-se ainda que: o ponto M, ponto médio de [AB], dista 4 km de F; x é a amplitude do ângulo PAM ($x \in \left[0,\frac{\pi}{4}\right]$).



a) Tomando para unidade o km, mostre que o comprimento total da canalização é dado por $g(x)=4+\frac{8-4senx}{\cos x}$ (sugestão: comece por mostrar que $\overline{PA}=\frac{4}{\cos x}$ e que $\overline{FP}=4-4tgx$)

b) Calcule g(0) e interprete o resultado obtido, referindo a forma da canalização e consequente comprimento.

c) Determine o valor de x para o qual o comprimento total da canalização é mínimo.

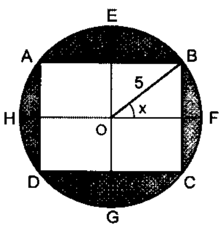
Exame nacional de 1998 (1.ª chamada)

6. Considere a função f definida por $f(x)=sen(x^2)$. Indique qual das expressões seguintes define f ´ :

(A) $2x\cos(x^2)$ (B) $\cos(x^2)$
(C) $2x\cos(2x)$ (D) $-\cos(x^2)$

Exame nacional de 1998 (2.ª chamada)

7. A figura abaixo representa um canteiro de forma circular com 5 m de raio. O canteiro tem uma zona rectangular, que se destina à plantação de flores, e uma zona relvada, assinalada a sombreado na figura. Os vértices A, B, C e D do rectângulo pertencem à circunferência que limita o canteiro. Na figura estão também assinalados: 2 diâmetros de circunferência, [EG] e [HF], que contém os pontos médios dos lados do rectângulo; o centro O da circunferência; o ângulo BOF, de amplitude x ($x \in \left]0,\frac{\pi}{2}\right[$).

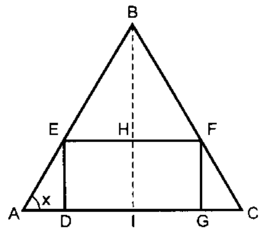


a) Mostre que a área (em m^2) da zona relvada é dada, em função de x, por $g(x)=25\pi-50sen(2x)$.

b) Recorrendo ao Teorema de Bolzano, mostre que existe um valor de x compreendido entre $\pi/6$ e $\pi/4$ para a qual a área da zona relvada é 30 m^2.

Exame Nacional 1998 (2.ª chamada)

8. Na figura, o triângulo [ABC] é isósceles ($\overline{AB}=\overline{BC}$); [DEFG] é um rectângulo, $\overline{DG}=2$ e $\overline{DE}=1$; x designa a amplitude do ângulo BAC.



a) Mostre que a área do triângulo [ABC], é dada em função de x, por f(x)= 2 + tgx + $\frac{1}{tgx}$ ($x \in \left]0,\frac{\pi}{2}\right[$)

(Nota: pode ser-lhe útil reparar que $B\hat{E}F = B\hat{A}C$)

b) Mostre que $f'(x)=-\frac{\cos(2x)}{sen^2 x\cos^2 x}$

c) Determine o valor de x para a qual a área do triângulo [ABC] é mínima.

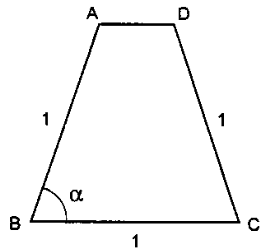
Exame nacional de 1998 (2.ª fase)

9. Considere a função f: ℝ→ℝ, definida por

f(x)=senx – ½ sen(2x)

a) Recorrendo à definição de derivada de uma função num ponto, determine f ´(0).

b) [ABCD] é um trapézio isósceles; os lados [AD] e [BC] são paralelos. Tem-se que $\overline{AB}=\overline{BC}=\overline{CD}$=1; $\overline{AD}\leq 1$.



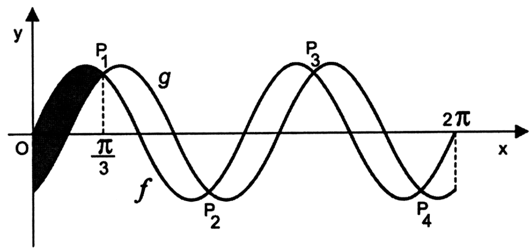
Seja α a amplitude do ângulo ABC ($\alpha \in \left]\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{2}\right]$).

b₁)Mostre que, para cada $\alpha \in \left]\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{2}\right]$, a área do trapézio é igual a f(α).

b₂)Determine f(π/2) e interprete geometricamente o resultado obtido, caracterizando o quadrilátero que se obtém para α = π/2.

Prova modelo 1999

10. Na figura estão as representações gráficas de 2 funções, f e g, de domínio [0,2π], definidas por f(x)=sen(2x) e g(x)=cos(2x-5π/6). P_1, P_2, P_3 e P_4 são os pontos de intersecção dos gráficos de f e de g. A abcissa de P_1 é π/3.



a) Mostre que são perpendiculares as rectas tangentes aos gráficos de f e de g no ponto P_1.

b) Determine as coordenadas de P_2.

Exame Nacional 1999 (2.ª chamada)

11. Qual das afirmações seguintes é verdadeira?

(A) $\lim\limits_{x\to+\infty}$ sen x=0 (B) $\lim\limits_{x\to+\infty}$ sen x=+∞

(C) $\lim\limits_{x\to+\infty}$ sen x=1 (D) Não existe $\lim\limits_{x\to+\infty}$ sen x

Exame Nacional 2000 (1.ª chamada)

12. Considere a função h definida em ℝ por h(x)=*sen*x.

Qual das seguintes equações pode definir uma recta tangente ao gráfico de h?

(A) y=2x+π (B) y=-2

(C) y=√2 x-9 (D) y=x

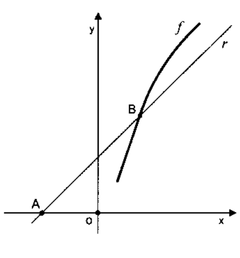
Exame nacional de 2000 (2.ª fase)

13. Considere a função f, de domínio ℝ, definida por f(x)=2x-cos x

a) Recorrendo ao Teorema de Bolzano, mostre que a função f tem, pelo menos, 1 zero, no intervalo]0,π[.

b) Seja f ' a função derivada de f. Mostre que f '(x)>0, ∀x∈ℝ, e justifique que o zero de f, cuja existência é garantida pelo enunciado da alínea anterior, é o único zero desta função.

c) Na figura abaixo estão representadas: parte do gráfico da função f; parte de uma recta r, cuja inclinação é 45^0, que contém o ponto A(-3,0) e que intersecta o gráfico da função f no ponto B. Recorrendo à sua calculadora, determine a área do triângulo [AOB], onde O designa a origem do referencial. Apresente o resultado arredondado às unidades.



Exame nacional de 2000 (2.ª fase)

14. Considere a função h, de domínio ℝ, definida por

$$h(x)=\begin{cases}\frac{x+1}{x} & se\ x<0\\ \frac{1}{2} & se\ x=0\\ \frac{sen\,x}{2x} & se\ x>0\end{cases}.$$

a) Utilizando métodos exclusivamente analíticos, resolva as 2 alíneas seguintes:

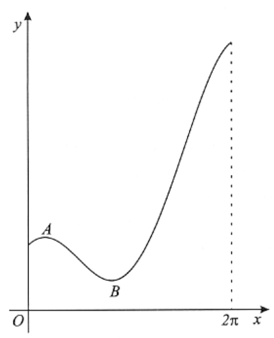
a_1) Estude a função h quanto à continuidade no ponto 0.

a_2) Considere a função j, de domínio ℝ\{0}, definida por j(x)= $\frac{1}{3x}$. Mostre que, no intervalo [-1,1000π], os gráficos de j e de h se intersectam em 1001 pontos.

b) Dos 1001 pontos referidos na alínea anterior, seja A o que tem menor abcissa positiva. Determine as coordenadas desse ponto (apresente os valores na forma de dízima, com aproximação às décimas).

Prova modelo 2001

15. Na figura está representado o gráfico da função f, de domínio [0,2π], definida por f(x)=x+2cosx. A e B são pontos do gráfico cujas ordenadas são extremos relativos de f.



a) Sem recorrer à calculadora, resolva as 2 alíneas seguintes.

a_1) Mostre que a ordenada do ponto A é $\frac{\pi+6\sqrt{3}}{6}$ e que a do ponto B é $\frac{5\pi-6\sqrt{3}}{6}$.

a_2) Qual é o contradomínio de f?

b) Considere a recta tangente ao gráfico de f no ponto A. Esta recta intersecta o gráfico num outro ponto C. Recorrendo à calculadora, determine um valor aproximado para a abcissa do ponto C (apresente o resultado arredondado às décimas). Explique como procedeu (na sua explicação, deve incluir o gráfico, ou gráficos, que considerou para resolver esta questão).

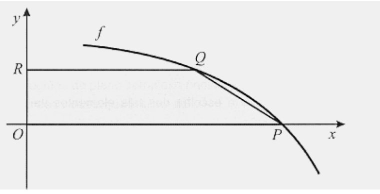
Exame Nacional 2001 (2.ª chamada)

16. Considere a função f, de domínio]-π,π[, definida por f(x)= $\frac{\cos x}{1+\cos x}$. Sem recorrer à calculadora, resolva as 3 alíneas seguintes.

a) Estude a função quanto à existência de assimptotas do seu gráfico.

b) Mostre que a função f tem um máximo e determine-o.

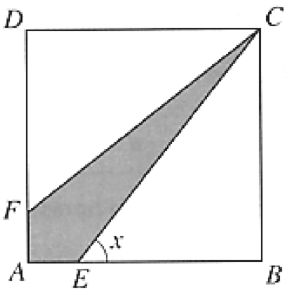
c) Na figura está representada, em referencial o.n. xOy, uma parte do gráfico da função f. Na mesma figura está também representado um trapézio [OPQR]. O ponto O é a origem do referencial, e os pontos P e R pertencem aos eixos Ox e Oy, respectivamente. Os pontos P e Q pertencem ao gráfico de f. Sabendo que o ponto R tem ordenada 1/3, determine a área do trapézio.



Exame nacional de 2001 (2.ª fase)

17. Na figura está representado um quadrado [ABCD], de lado 1.

O ponto E desloca-se sobre o lado [AB], e o ponto F desloca-se sobre o lado [AD], de tal forma que se tem sempre $\overline{AE}=\overline{AF}$. Para cada posição do ponto E, seja x a amplitude do ângulo BEC (x∈]π/4,π/2[). Recorrendo a métodos exclusivamente analíticos, resolva as 3 alíneas seguintes:



a) Mostre que o perímetro do quadrilátero [CEAF] é dado, em função de x, por $f(x)=2-\frac{2}{tgx}+\frac{2}{senx}$.

b) Calcule $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-} f(x)$ e interprete geometricamente o valor obtido.

c) Mostre que $f\,'(x)=\frac{2-2\cos x}{sen^2 x}$ e estude a função quanto à monotonia.

Exame nacional de 2002 (1.ª chamada)

18. De uma função f, de domínio [-π,π], sabe-se que a sua derivada f ´ está definida igualmente no intervalo [-π,π] e é dada por f ´(x)=x+2cos x

a) Utilizando métodos exclusivamente analíticos, resolva as 2 alíneas seguintes:

a1) Determine o valor de $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}$.

a2) Estude a função f quanto às concavidades do seu gráfico e determine as abcissas dos pontos de inflexão.

b) O gráfico de f contém um único ponto onde a recta tangente é paralela ao eixo Ox. Recorrendo à sua calculadora, determine um valor arredondado às centésimas para a abcissa desse ponto. Explique como procedeu.

Exame Nacional 2002 (2.ª chamada)

19. Considere a função f, de domínio [-π/2,3π/2], definida por f(x)=x+sen x. Sem recorrer à calculadora, resolva as 3 alíneas seguintes.

a) Utilizando a definição de derivada de uma função num ponto, calcule f ´(0).

b) Estude a função f quanto ao sentido das concavidades do seu gráfico e quanto à existência de pontos de inflexão.

c) Determine os valores de *x*, pertencentes ao intervalo [-π/2,3π/2], tais que f(x)=x + cos x.

Exame nacional de 2003 (2.ª fase)

20. A Rita está a participar num concurso de lançamentos de papagaios de papel. No regulamento do concurso, estão as condições de apuramento para a final, que se reproduzem a seguir.

Após um certo instante, indicado pelo júri:
- o papagaio não pode permanecer no ar mais do que um minuto;
- o papagaio tem de permanecer, pelo menos durante 12 segundos seguidos, a uma altura superior a 10 metros;
- o papagaio tem de ultrapassar os 20 metros de altura.

Admita que a distância, em metros, do papagaio da Rita ao solo, t segundos após o instante indicado pelo júri, é dado por $d(t)=9{,}5+7sen(t^2/200)+5\cos(t/4)$ (os argumentos das funções seno e co-seno estão expressos em radianos).

Note-se que, a partir do instante em que o papagaio atinge o solo, a distância deixa de ser dada por esta expressão, uma vez que passa a ser (naturalmente) igual a zero.

Deverá a Rita ser apurada para a final? Utilize a calculadora para investigar esta questão. Numa pequena composição, com cerca de 10 linhas, explicite as conclusões a que chegou, justificando-as devidamente. Inclua, na sua resposta, os elementos recolhidos na utilização da calculadora: gráficos e coordenadas de alguns pontos (coordenadas arredondadas às décimas).

Exame nacional de 2003 (2.ª fase)

21. Considere a função *f*, de domínio ℝ, definida por *f*(x) = cos x. Qual das expressões seguintes dá a derivada de *f*, no ponto π?

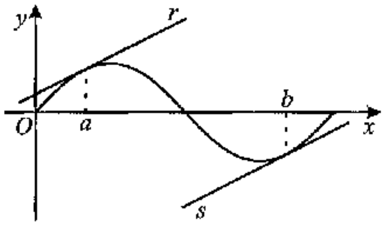
(A) $\lim\limits_{x\to\pi}\frac{\cos x+1}{x-\pi}$ (B) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x-\pi}{x}$

(C) $\lim\limits_{x\to\pi}\frac{\cos x}{x-\pi}$ (D) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x}{x+\pi}$

Exame nacional de 2005 (1.ª fase)

22. Seja *f* a função, de domínio [0,2π], definida por *f*(x)=sen x

a) Na figura estão representados: o gráfico da função *f*; duas rectas, *r* e *s*, tangentes ao gráfico de *f*, nos pontos de abcissa *a* e *b*, respectivamente.

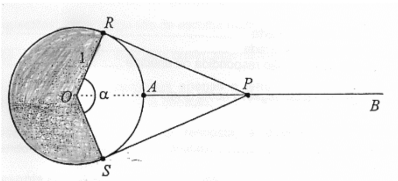


Prove que, se $a+b=2\pi$, então as rectas *r* e *s* são paralelas.

b) Sem recorrer à calculadora, estude, quanto à existência de assimptotas do seu gráfico, a função *g*, de domínio $]0,2\pi[\backslash\{\pi\}$, definida por $g(x)=\frac{x}{f(x)}$

Exame nacional de 2005 (2.ª fase)

23. Na figura estão representadas uma semi-recta $\dot{A}B$ e uma circunferência de centro O e raio 1 (os pontos O, A e B são colineares; o ponto A pertence à circunferência).



Considere que um ponto P se desloca ao longo da semi-recta $\dot{A}B$, nunca coincidindo com o ponto A.

Os pontos R e S acompanham o movimento do ponto P, de tal forma que as rectas PR e PS são sempre tangentes à circunferência, nos pontos R e S, respectivamente. Seja α a amplitude, em radianos, do ângulo SOR ($\alpha\in]0,\pi[$).

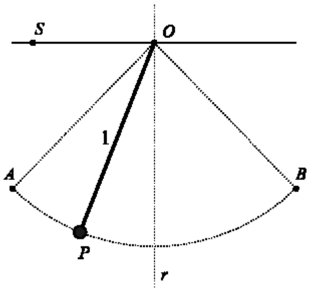
a) Mostre que a área do quadrilátero [ORPS] é dada, em função de α, por $f(\alpha)=\operatorname{tg}\left(\frac{\alpha}{2}\right)$

b) Calcule $\lim\limits_{\alpha\to\pi^-} f(\alpha)$ e interprete geometricamente o resultado obtido.

c) Recorra à calculadora para determinar graficamente a solução que lhe permite resolver o seguinte problema: Qual é o valor de α para o qual a área do quadrilátero [ORPS] é igual à área da região sombreada? Apresente todos os elementos recolhidos na utilização da calculadora, nomeadamente o gráfico, ou gráficos, obtido(s), bem como coordenadas relevantes, de algum, ou de alguns, ponto(s). Apresente o valor pedido na forma de dízima, arredondado às décimas.

Exame nacional de 2005 (fase especial)

24. Na figura está representada uma esfera suspensa de um fio com 1 metro de comprimento, fixo no ponto O.



O centro da esfera oscila entre os pontos A e B, que são simétricos relativamente à recta vertical *r*. A recta *r* passa pelo ponto O e é perpendicular à recta OS. No instante inicial, o centro da esfera coincide com o ponto A. Admita que, *t* segundos após esse instante inicial, o centro da esfera está num ponto P tal que a amplitude, em radianos, do ângulo SOP é dada (aproximadamente) por $\alpha(t)=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{6}\cos(\sqrt{9{,}8}\,t)$

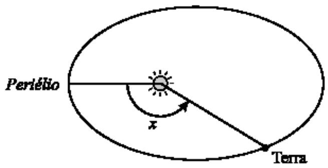
Nas duas alíneas seguintes, não utilize a calculadora, a não ser para efectuar eventuais cálculos numéricos.

a) Determine a distância do centro da esfera à recta OS, no instante inicial.

b) Determine o instante em que o centro da esfera passa pela primeira vez na recta *r*. Apresente o resultado em segundos, arredondado às décimas.

Exame nacional de 2006 (1.ª fase)

25. Como sabe, a Terra descreve uma órbita elíptica em torno do Sol. Na figura está representado um esquema dessa órbita.



Está assinalado *periélio*, o ponto da órbita da Terra mais próximo do Sol. Na figura está assinalado um ângulo de amplitude *x* radianos ($x\in[0,2\pi[$). Este ângulo tem o seu vértice no Sol, o seu lado origem passa no *periélio* e o seu lado extremidade passa na Terra. A distância d, em milhões de quilómetros, da Terra ao Sol, é (aproximadamente) dada, em função de *x*, por

$d = 149{,}6(1-0{,}0167\cos x)$

a) Sem recorrer à calculadora, a não ser para efectuar eventuais cálculos numéricos, determine a distância máxima e a distância mínima da Terra ao Sol. Apresente os valores pedidos em milhões de quilómetros, arredondados às décimas.

b) Sabe-se que *x* verifica a relação

$\frac{2\pi t}{T}=x-0{,}0167\operatorname{sen}x$, em que

- *t* é o tempo, em dias, que decorre desde a passagem da Terra pelo *periélio* até ao instante em que atinge a posição correspondente ao ângulo *x*;
- *T* é o tempo que a Terra demora a descrever uma órbita completa (365,24 dias).

b1) Mostre que, para $x = \pi$, se tem $t = \frac{T}{2}$. Interprete este resultado no contexto da situação descrita.

b2) Sabe-se que a última passagem da Terra pelo *periélio* ocorreu a uma certa hora do dia 4 de Janeiro. Determine a distância a que a Terra se encontrava do Sol, à mesma hora do dia 14 de Fevereiro. Apresente o resultado em milhões de quilómetros, arredondado às décimas. Nos valores intermédios, utilize, no mínimo, quatro casas decimais.

Nota: a resolução desta questão envolve uma equação que deve ser resolvida graficamente, com recurso à calculadora; apresente todos os elementos recolhidos na utilização da calculadora, nomeadamente o gráfico, ou gráficos, obtido(s), bem como coordenadas relevantes de algum, ou de alguns, ponto(s).

Exame nacional de 2006 (2.ª fase)

26. Considere a expressão f(x)=A+Bcos(Cx). Sempre que se atribuem valores reais positivos a A, B e C, obtemos uma função de domínio $\mathbb{R}$.

a) Prove que $\frac{2\pi}{C}$ é período de qualquer função definida por uma expressão do tipo indicado.

b) Num certo rio, existe um ancoradouro para atracagem de barcos. A distância do ancoradouro ao fundo do rio varia com a maré. Admita que, num certo dia, a distância do ancoradouro ao fundo do rio, x horas depois das zero horas desse dia, pode ser modelada por uma função do tipo f(x)=A+Bcos(Cx), com $x \in [0,24[$.Admita ainda que, no intervalo de tempo $[0,24[$:

• a distância máxima do ancoradouro ao fundo do rio é de 17 metros, e a mínima é de 11 metros;

• ocorrem apenas duas marés altas, uma às 0 horas e outra às 12 horas;

• ocorrem apenas duas marés baixas, uma às 6 horas e outra às 18 horas.

Justifique que, no modelo f(x)=A+Bcos(Cx), se tem $C = \frac{\pi}{6}$ (tenha em conta a alínea a) e o facto de que não existe nenhum período positivo inferior a $\frac{2\pi}{C}$). Em seguida, determine os valores de A e B (positivos) adequados ao modelo.

Exame nacional de 2006 (fase especial)

27. Considere a função g, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $g(x) = 2 + sen(4x)$. Resolva, usando métodos analíticos, os dois itens seguintes.

Nota: A calculadora pode ser utilizada em eventuais cálculos intermédios; sempre que proceder a arredondamentos, use duas casas decimais.

a) Determine $g'(0)$, recorrendo à definição de derivada de uma função num ponto.

b) Estude a monotonia da função g, no intervalo $]0,\frac{\pi}{2}[$, indicando o valor dos extremos relativos, caso existam, e os intervalos de monotonia.

Exame Nacional 2008 (2.ª fase)

28. Seja a função f, de domínio $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{3}]$, definida por $f(x) = \cos(x)$. Qual é o contradomínio de f ?

(A) [−1,0] (B) [0, 1] (C) $[0,\frac{1}{2}]$ (D) $[0,\frac{\sqrt{3}}{2}]$

Exame Nacional 2008 (época especial)

29. Seja a função f, de domínio [0, π], definida por $f(x) = 2sen(x)\cdot\cos(x) + 2$. O gráfico da função f intersecta a recta y = 1 num só ponto. Determine, recorrendo exclusivamente a métodos analíticos, as coordenadas desse ponto.

Exame Nacional 2008 (época especial)

30. Na figura 3 estão representados: • uma circunferência de centro O e raio 1; • dois pontos, A e B, sobre a circunferência, tais que $[AB]$ é um diâmetro; • uma semi-recta $\dot{O}A$; • um segmento de recta $[PQ]$. Considere que:

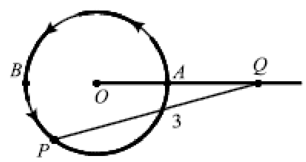


Figura 3

• o ponto P, partindo de A, se desloca sobre a circunferência, dando uma volta completa, no sentido indicado pelas setas da figura 3

• o ponto Q se desloca sobre a semi-recta $\dot{O}A$, acompanhando o movimento do ponto P, de tal forma que se tem sempre $\overline{PQ} = 3$

Para cada posição do ponto P, seja x a amplitude, em radianos, do ângulo orientado que tem por lado origem a semi-recta $\dot{O}A$ e por lado extremidade a semi-recta $\dot{O}P$ (ver figura 4). Seja d a função que, a cada valor de x pertencente a [0,2π], associa a distância, $d(x)$, do ponto Q ao ponto O.

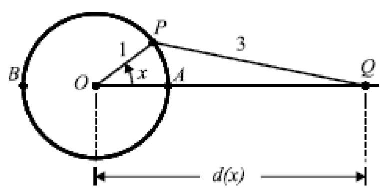


Figura 4

a) Considere as seguintes afirmações sobre a função d e sobre a sua derivada, d' (a função d tem derivada finita em todos os pontos do seu domínio).

I. $d(0) = 2d(\pi)$

II. $\forall x \in [0,2\pi], d'(x) < 0$

Elabore uma pequena <u>composição</u> na qual indique, justificando, se cada uma das afirmações é verdadeira, ou falsa.
<u>Nota</u>: neste item, não defina analiticamente a função *d*; a sua composição deve apoiar-se na forma como esta função foi apresentada (para cada valor de *x*, tem-se que *d*(*x*) é a distância do ponto *Q* ao ponto *O*).

b) Defina analiticamente a função *d* no intervalo $]0,\frac{\pi}{2}[$ (isto é, determine uma expressão que dê o valor de *d*(*x*), para cada *x* pertencente a este intervalo).
<u>Sugestão</u>: trace a altura do triângulo [*OPQ*] relativa ao vértice *P*, designe por *R* o ponto de intersecção desta altura com a semi-recta $\dot{O}A$, e tenha em conta que $\overline{OQ} = \overline{OR} + \overline{RQ}$.

3.º teste intermédio 2009

31. Na figura 1, está representado um triângulo inscrito numa circunferência de centro O e raio igual a 1. Um dos lados do triângulo é um diâmetro da circunferência. Qual das expressões seguintes representa, em função de *x*, a área da parte sombreada?

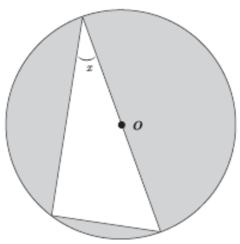


Fig. 1

(A) $\pi - sen(2x)$ (B) $\frac{\pi}{2} - sen(2x)$

(C) $\pi - 2sen(2x)$ (D) $\pi - \frac{sen(2x)}{4}$

Exame Nacional 2009 (1.ª fase)

32. Seja *f* a função, de domínio $[0, \frac{\pi}{2}]$, definida por $f(x) = sen(2x)\cos x$.

a) Determine, <u>recorrendo a métodos exclusivamente analíticos</u>, a equação reduzida da recta tangente ao gráfico de *f*, no ponto de abcissa 0.

b) No domínio indicado, determine, <u>recorrendo às capacidades gráficas da sua calculadora</u>, um valor, aproximado às décimas, da área do triângulo [ABC], em que:
• A é o ponto do gráfico da função *f* cuja ordenada é máxima;
• B e C são os pontos de intersecção do gráfico da função *f* com a recta de equação *y* = 0,3. Reproduza, na folha de respostas, o gráfico, ou gráficos, visualizado(s) na calculadora, devidamente identificado(s), incluindo o referencial. Desenhe o triângulo [ABC], assinalando os pontos que representam os seus vértices.

<u>Nota</u>: Nas coordenadas dos vértices em que é necessário fazer arredondamentos, utilize duas casas decimais.

Exame Nacional 2009 (2.ª fase)

33. Seja a função *f*, de domínio ℝ, definida por $f(x) = sen(2x)$. Qual é o declive da recta tangente ao gráfico de *f* no ponto de abcissa ?

(A) $\sqrt{2}$ (B) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (C) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (D) $\frac{1}{2}$

Exame Nacional 2009 (época especial)

34. Na figura 2, está representado um triângulo rectângulo [ABC], cujos catetos, [AB] e [BC], medem 5 unidades. Considere que um ponto P se desloca sobre o cateto [BC], nunca coincidindo com B nem com C. Para cada posição do ponto P, seja *x* a amplitude, em radianos, do ângulo BAP ($x \in]0,\frac{\pi}{4}[$). Seja *f* a função que, a cada valor de *x*, faz corresponder o <u>perímetro</u> do triângulo [APC]. Resolva os itens a) e b), <u>usando exclusivamente métodos analíticos</u>.

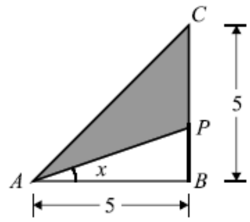


Figura 2

a) Mostre que $f(x) = \frac{5}{\cos x} - 5tgx + \sqrt{50} + 5$

b) Seja *r* a recta tangente ao gráfico da função *f* no ponto de abcissa $\frac{\pi}{6}$. Determine o declive da recta *r*

c) Existe um valor de *x* para o qual o <u>perímetro</u> do triângulo [APC] é igual a 16. Determine esse valor, arredondado às centésimas, <u>recorrendo às capacidades gráficas da calculadora</u>.
Apresente o(s) gráfico(s) visualizado(s) na calculadora e assinale o ponto relevante para a resolução do problema.

3.º teste intermédio 2010

35. Na Figura 4, estão representados, num referencial o.n. xOy, uma circunferência e o triângulo [OAB]. Sabe-se que:
• a circunferência tem diâmetro [OA];
• o ponto A tem coordenadas (2, 0);
• o vértice O do triângulo [OAB] coincide com a origem do referencial;
• o ponto B desloca-se ao longo da semicircunferência superior.

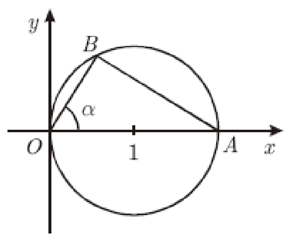


Figura 4

Para cada posição do ponto B, seja α a amplitude do ângulo AOB, com $\alpha \in]0, \frac{\pi}{2}[$. Resolva os dois itens seguintes, recorrendo a métodos exclusivamente analíticos.

a) Mostre que o perímetro do triângulo [OAB] é dado, em função de α, por $f(\alpha) = 2(1 + \cos\alpha + sen\alpha)$

b) Determine o valor de α para o qual o perímetro do triângulo [OAB] é máximo.

Exame Nacional 2010 (1.ª fase)

36. Um depósito de combustível tem a forma de uma esfera.
A Figura 6 e a Figura 7 representam dois cortes do mesmo depósito, com alturas de combustível distintas. Os cortes são feitos por um plano vertical que passa pelo centro da esfera.

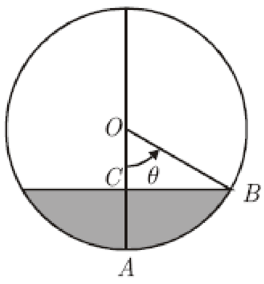


Figura 6

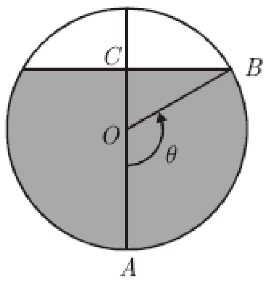


Figura 7

Sabe-se que:
• o ponto O é o centro da esfera;
• a esfera tem 6 metros de diâmetro;
• a amplitude θ, em radianos, do arco AB é igual à amplitude do ângulo ao centro AOB correspondente.

A altura $\overline{AC}$, em metros, do combustível existente no depósito é dada, em função de θ , por *h*, de domínio [0,π].
Resolva os itens seguintes, recorrendo a métodos exclusivamente analíticos.

a) Mostre que $h(\theta) = 3 - 3\cos\theta$, para qualquer $\theta \in]0, \pi[$

b) Resolva a condição $h(\theta) = 3$, $\theta \in]0, \pi[$. Interprete o resultado obtido no contexto da situação apresentada.

Exame Nacional 2010 (2.ª fase)

37. Admita que, numa certa marina, a profundidade da água, em metros, *t* horas após as zero horas de um certo dia, é dada por $P(t) = 2\cos(\frac{\pi}{6}t) + 8$, em que $t \in [0, 24]$.
Resolva os dois itens seguintes, recorrendo a métodos exclusivamente analíticos.

a) Determine a profundidade da água da marina às três horas da tarde, desse dia.

b) Determine, recorrendo ao estudo da função derivada, a profundidade mínima, em metros, da água da marina, nesse dia.

Exame Nacional 2010 (época especial)

38. Qual é o valor de $\lim_{x \to 0}\left(\frac{1}{x^2} sen^2(\frac{x}{2})\right)$?

(A) 4 (B) 0 (C) $\frac{1}{4}$ (D) $\frac{1}{2}$

Exame Nacional 2011 (1.ª fase)

39. Na Figura 5, está representada, num referencial o. n. xOy, parte do gráfico da função *f* , de domínio ℝ, definida por $f(x) = 4\cos(2x)$. Sabe-se que:

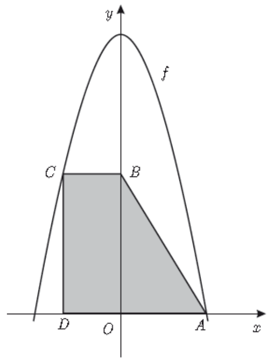


Figura 5

• os vértices A e D do trapézio [ABCD] pertencem ao eixo Ox
• o vértice B do trapézio [ABCD] pertence ao eixo Oy
• o vértice D do trapézio [ABCD] tem abcissa $-\frac{\pi}{6}$
• os pontos A e C pertencem ao gráfico de *f*
• a recta CD é paralela ao eixo Oy

Resolva os dois itens seguintes recorrendo a métodos exclusivamente analíticos.

a) Determine o valor exacto da área do trapézio [ABCD]

b) Seja f' a primeira derivada da função *f*, e seja f'' a segunda derivada da função *f*. Mostre que
$f(x) + f'(x) + f''(x) = -4(3\cos(2x) + 2sen(2x))$,
para qualquer número real *x*

Exame Nacional 2011 (1.ª fase)

40. Para *a*, *b* e *n*, números reais positivos, considere a função *f*, de domínio ℝ, definida por $f(x) = a\cos(nx) + bsen(nx)$. Seja f'' a segunda derivada da função *f*. Mostre que $f''(x) + n^2 f(x) = 0$, para qualquer número real *x*

Exame Nacional 2011 (2.ª fase)

41. Relativamente à Figura 2, sabe-se que:

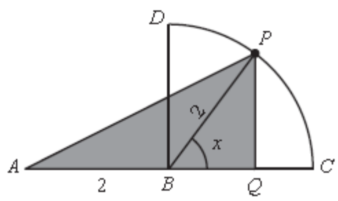


Figura 2

• o segmento de reta [AC] tem comprimento 4
• o ponto B é o ponto médio de [AC]
• o segmento de reta [BD] é perpendicular a [AC]

• o arco de circunferência CD tem centro em B

Admita que um ponto P se desloca ao longo do arco CD, nunca coincidindo com C nem com D, e que um ponto Q se desloca ao longo do segmento de reta [BC] de tal forma que [PQ] é sempre perpendicular a [BC]. Para cada posição do ponto P, seja *x* a amplitude, em radianos, do ângulo CBP e seja *A*(*x*) a área do triângulo [APQ]. Resolva os dois itens seguintes, recorrendo a métodos exclusivamente analíticos.

a) Mostre que $A(x) = 2 \text{ sen } x + \text{sen } (2x)$ ($x \in]0, \frac{\pi}{2}[$)

b) Mostre que existe um valor de *x* para o qual a área do triângulo [APQ] é máxima.

2.º teste intermédio 2012

42. Na Figura 5, está representado um trapézio retângulo [ABCD]

Sabe-se que:

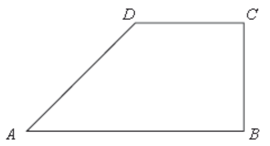


Figura 5

• $\overline{BC} = 1$
• $\overline{CD} = 1$
• α é a amplitude, em radianos, do ângulo ADC
• $\alpha \in]\frac{\pi}{2}, \pi[$

Resolva os itens seguintes, recorrendo a métodos exclusivamente analíticos.

a) Mostre que o perímetro do trapézio [ABCD] é dado, em função de α, por $P(\alpha) = 3 + \frac{1-\cos\alpha}{sen\alpha}$

b) Para um certo número real θ, tem-se que $tg\theta = -\sqrt{8}$, com $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$. Determine o valor exato de $P'(\theta)$.

Comece por mostrar que $P'(\alpha) = \frac{1-\cos\alpha}{sen^2\alpha}$

Exame Nacional 2012 (1.ª fase)

43. Na Figura 4, está representado o quadrado [ABCD]. Sabe-se que:

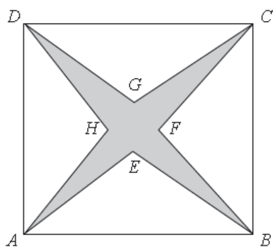


Figura 4

• $\overline{AB} = 4$
• $\overline{AE} = \overline{AH} = \overline{BE} = \overline{BF} = \overline{CF} = \overline{CG} = \overline{DG} = \overline{DH}$
• *x* é a amplitude, em radianos, do ângulo EAB
• $x \in]0, \frac{\pi}{4}[$

a) Mostre que a área da região sombreada é dada, em função de *x*, por *a*(*x*) = 16(1 – tg *x*)

b) Mostre que existe um valor de *x* compreendido entre $\frac{\pi}{12}$ e $\frac{\pi}{5}$ para o qual a área da região sombreada é 5. Se utilizar a calculadora em eventuais cálculos numéricos, sempre que proceder a arredondamentos, use duas casas decimais.

Exame Nacional 2012 (2.ª fase)

44. Relativamente à Figura 1, sabe-se que:

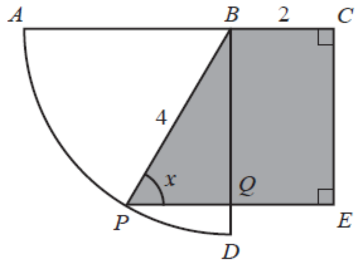


Figura 1

• o ponto B pertence ao segmento de reta [AC]
• os pontos A e D pertencem à circunferência que tem centro no ponto B e raio igual a 4
• o segmento de reta [BD] é perpendicular ao segmento de reta [AC]
• $\overline{BC} = 2$

Admita que um ponto P se desloca ao longo do arco AD, nunca coincidindo com A nem com D, e que um ponto E acompanha o movimento do ponto P de forma que o quadrilátero [PBCE] seja um trapézio retângulo. O ponto Q é a intersecção do segmento de reta [PE] com o segmento de reta [BD]. Para cada posição do ponto P, seja x a amplitude do ângulo EPB e seja S(x) a área do trapézio [PBCE]

a) Mostre que S(x) = 8sen x + 4sen(2x) ($x \in]0, \frac{\pi}{2}[$)

b) Estude a função S quanto à monotonia e quanto à existência de extremos relativos, recorrendo a métodos analíticos, sem utilizar a calculadora. Na sua resposta, deve apresentar:
• o(s) intervalo(s) em que a função é crescente;
• o(s) intervalo(s) em que a função é decrescente;
• os valores de x para os quais a função tem extremos relativos, caso existam.

2.º teste intermédio 2013

45. Seja f a função, de domínio ℝ\{0}, definida por $f(x) = \frac{sen(-x)}{x}$. Considere a sucessão de números reais (x_n) tal que $x_n = \frac{1}{n}$. Qual é o valor de lim f (x_n)?

(A) –1 (B) 0 (C) 1 (D) +∞

Exame Nacional 2013 (1.ª fase)

46. Considere a função g, de domínio $]-\frac{\pi}{2}, 0[$, definida por g(x) = sen(2x) − cos x. Seja *a* um número real do domínio de g. A reta tangente ao gráfico da função g no ponto de abcissa *a* é paralela à reta de equação $y = \frac{x}{2} + 1$. Determine o valor de *a*, recorrendo a métodos analíticos, sem utilizar a calculadora.

Exame Nacional 2013 (1.ª fase)

47. Na Figura 4, estão representados, num referencial o.n. xOy, o triângulo [OAB] e a reta r. Sabe-se que:

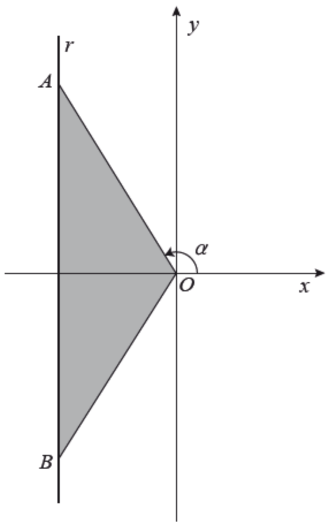


Figura 4

• a reta r é definida por $x = -3$
• o ponto A pertence à reta r e tem ordenada positiva;
• o ponto B é o simétrico do ponto A em relação ao eixo Ox
• α é a amplitude, em radianos, do ângulo cujo lado origem é o semieixo positivo Ox e cujo lado extremidade é a semirreta $\dot{O}A$
• a função P, de domínio $]\frac{\pi}{2},\pi[$, é definida por

$P(x) = -6tgx - \frac{6}{\cos x}$

a) Mostre que o perímetro do triângulo [OAB] é dado, em função de α, por P(α)

b) Determine o declive da reta tangente ao gráfico da função P no ponto de abcissa $\frac{5\pi}{6}$, sem utilizar a calculadora.

Exame Nacional 2013 (2.ª fase)

48. Na Figura 2, estão representados a circunferência de centro no ponto C e de raio 1, a semirreta $\dot{C}B$, a reta AD e o triângulo [ACE].

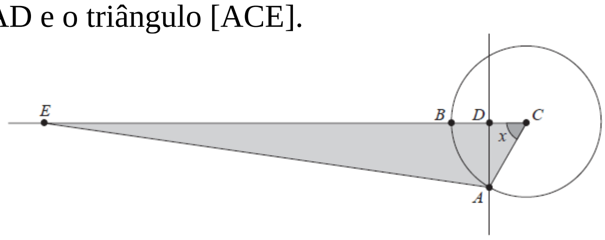


Figura 2

Sabe-se que:
• os pontos A e B pertencem à circunferência;
• os pontos D e E pertencem à semirreta $\dot{C}B$
• a reta AD é perpendicular à semirreta $\dot{C}B$
• o ponto A desloca-se sobre a circunferência, e os pontos D e E acompanham esse movimento de modo que $\overline{DE} = 6$
• x é a amplitude, em radianos, do ângulo ACB
• $x \in]0,\frac{\pi}{2}[$

a) Mostre que a área do triângulo [ACE] é dada, em função de x, por $f(x) = 3senx + \frac{1}{4}sen(2x)$

b) Mostre, sem resolver a equação, que f(x) = 2 tem, pelo menos, uma solução em $]\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{4}[$

Exame Nacional 2013 (época especial)

49. Seja g a função, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $g(x) = \cos^2(\frac{x}{12}) - sen^2(\frac{x}{12})$. Qual das expressões seguintes também define a função g ?

(A) $\operatorname{sen}\left(\frac{x}{24}\right)$ **(B)** $\cos\left(\frac{x}{24}\right)$

(C) $\operatorname{sen}\left(\frac{x}{6}\right)$ **(D)** $\cos\left(\frac{x}{6}\right)$

2.º teste intermédio 2014

50. Na Figura 4, está representada uma planificação de uma pirâmide quadrangular regular cujas arestas laterais medem 4.

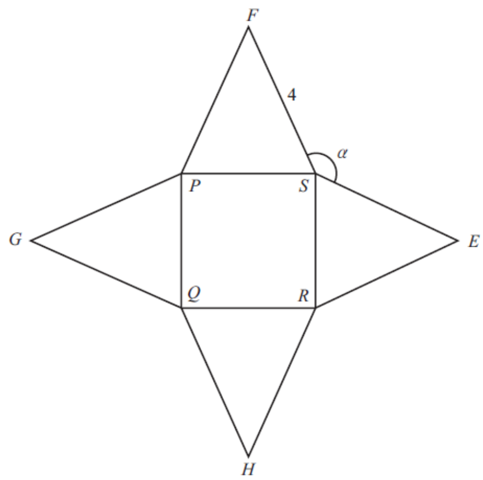


Figura 4

Seja α a amplitude, em radianos, do ângulo FSE ($\alpha \in]\frac{\pi}{2},\pi[$). A aresta da base da pirâmide e, consequentemente, a área de cada uma das faces laterais variam em função de α. Mostre que a área lateral da pirâmide é dada, em função de α, por $-32\cos\alpha$

Sugestão – Comece por exprimir a área de uma face lateral em função da amplitude do ângulo FSP, que poderá designar por β

2.º teste intermédio 2014

51. Na Figura 1, está representada, num referencial o.n. xOy, uma circunferência de centro O e raio 1.

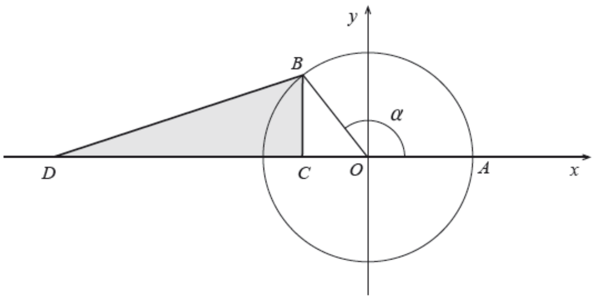


Figura 1

Sabe-se que:
- os pontos A e B pertencem à circunferência;
- o ponto A tem coordenadas (1, 0)
- os pontos B e C têm a mesma abcissa;
- o ponto C tem ordenada zero;
- o ponto D tem coordenadas (−3, 0)
- α é a amplitude, em radianos, do ângulo AOB, com $\alpha \in]\frac{\pi}{2}, \pi[$. Qual das expressões seguintes representa, em função de α, a área do triângulo [BCD] ?

(A) $\frac{1}{2}(-3-\operatorname{sen}\alpha)\cos\alpha$ **(B)** $\frac{1}{2}(-3+\operatorname{sen}\alpha)\cos\alpha$

(C) $\frac{1}{2}(3+\cos\alpha)\operatorname{sen}\alpha$ **(D)** $\frac{1}{2}(3-\cos\alpha)\operatorname{sen}\alpha$

Exame Nacional 2014 (1.ª fase)

52. Seja f uma função cuja derivada $f\,'$, de domínio $\mathbb{R}$, é dada por $f\,'(x) = x - sen(2x)$

a) Determine o valor de $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{f(x)-f(\frac{\pi}{2})}{2x-\pi}$

b) Estude o gráfico da função f , quanto ao sentido das concavidades e quanto à existência de pontos de inflexão em $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}[$, recorrendo a métodos analíticos, sem utilizar a calculadora. Na sua resposta, deve indicar o(s) intervalo(s) onde o gráfico da função f tem concavidade voltada para cima, o(s) intervalo(s) onde o gráfico da função f tem concavidade voltada para baixo e, caso existam, as abcissas dos pontos de inflexão do gráfico da função f

Exame Nacional 2014 (1.ª fase)

53. Considere, para um certo número real k, a função f, contínua em $[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}]$, definida por

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\cos x}{x - \dfrac{\pi}{2}} & \text{se } \dfrac{\pi}{4} \le x < \dfrac{\pi}{2} \\ k - 3 & \text{se } x = \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$$

Qual é o valor de k ?

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 4

Exame Nacional 2014 (2.ª fase)

54. Na Figura 4, está representado um pentágono regular [ABCDE]. Sabe-se que $\overline{AB} = 1$. Mostre que

$$\frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}}{\|\overrightarrow{AD}\|} = 1 - 2\operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi}{5}\right)$$

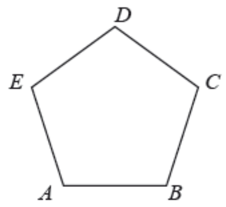


Figura 4

Exame Nacional 2014 (2.ª fase)

55. Na Figura 5, estão representados uma circunferência de centro O e raio 2 e os pontos P, Q, R e S.

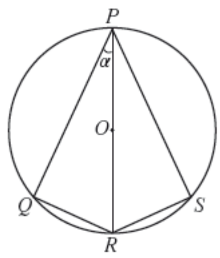


Figura 5

Sabe-se que:
- os pontos P, Q, R e S pertencem à circunferência;
- [PR] é um diâmetro da circunferência;
- $\overline{PQ} = \overline{PS}$
- α é a amplitude, em radianos, do ângulo QPR
- $\alpha \in]0, \frac{\pi}{2}[$
- A(α) é a área do quadrilátero [PQRS], em função de α

Para um certo número real θ, com $\theta \in]0, \frac{\pi}{2}[$, tem-se que $tg\theta = 2\sqrt{2}$. Determine o valor exato de A(θ), recorrendo a métodos analíticos, sem utilizar a calculadora. Comece por mostrar que A(α) = 16senα cos α

Exame Nacional 2014 (2.ª fase)

56. Na Figura 1, estão representadas, num referencial o.n. xOy, a circunferência de centro O e a reta r.

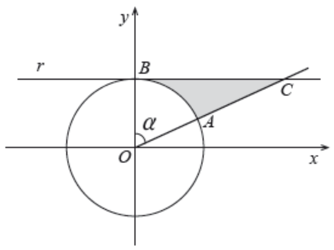


Figura 1

Sabe-se que:
- os pontos A e B pertencem à circunferência;
- o ponto B tem coordenadas (0, 1)
- a reta r é tangente à circunferência no ponto B
- o ponto C é o ponto de intersecção da reta r com a semirreta $\dot{O}A$

• α é a amplitude, em radianos, do ângulo AOB, com $\alpha \in]0, \frac{\pi}{2}[$

Qual das expressões seguintes representa, em função de α, a área da região a sombreado?

(A) $\frac{\text{sen}\,\alpha - \alpha}{2}$ **(B)** $\frac{\text{tg}\,\alpha - \alpha}{2}$

(C) $\frac{\text{tg}\,\alpha}{2}$ **(D)** $\frac{\alpha}{2}$

Exame Nacional 2014 (época especial)

57. Na Figura 1, está representado o círculo trigonométrico.

Sabe-se que:

• o ponto A pertence ao primeiro quadrante e à circunferência;

• o ponto B pertence ao eixo Ox

• o ponto C tem coordenadas (1, 0)

• o ponto D pertence à semirreta $\dot{O}A$

• os segmentos de reta [AB] e [DC] são paralelos ao eixo Oy

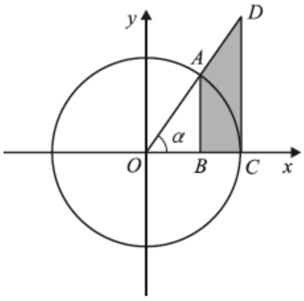


Figura 1

Seja α a amplitude do ângulo COD $\left(\alpha \in]0, \frac{\pi}{2}[\right)$

Qual das expressões seguintes dá a área do quadrilátero [ABCD], representado a sombreado, em função de α?

(A) $\frac{\text{tg}\,\alpha}{2} - \frac{\text{sen}\,(2\alpha)}{2}$ **(B)** $\frac{\text{tg}\,\alpha}{2} - \frac{\text{sen}\,(2\alpha)}{4}$

(C) $\text{tg}\,\alpha - \frac{\text{sen}\,(2\alpha)}{4}$ **(D)** $\text{tg}\,\alpha - \frac{\text{sen}\,(2\alpha)}{2}$

Exame Nacional 2015 (1.ª fase)

58. Sejam f e g as funções, de domínio R, definidas, respetivamente, por f(x) = 1 – cos(3x) e g(x) = sen(3x).

Seja *a* um número real pertencente ao intervalo $]\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}[$. Considere as retas r e s tais que:

• a reta r é tangente ao gráfico da função f no ponto de abcissa *a*

• a reta s é tangente ao gráfico da função g no ponto de abcissa a $a + \frac{\pi}{6}$

Sabe-se que as retas r e s são perpendiculares.

Mostre que $sen(3a) = -\frac{1}{3}$

Exame Nacional 2015 (1.ª fase)

59. Seja f a função, de domínio R, definida por f (x) =3sen^2 (x). Qual das expressões seguintes define a função f ´´, segunda derivada de f ?

(A) 6sen(2x) cos(x) (B) 6sen(x) cos(2x)

(C) 6 cos(2x) (D) 6sen(2x)

Exame Nacional 2015 (2.ª fase)

60. Um cubo encontra-se em movimento oscilatório provocado pela força elástica exercida por uma mola. A Figura 2 esquematiza esta situação. Nesta figura, os pontos O e A são pontos fixos. O ponto P representa o centro do cubo e desloca-se sobre a semirreta $\dot{O}A$.

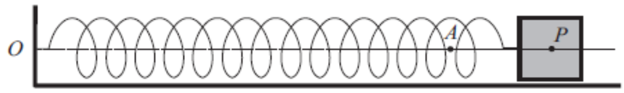


Figura 2

Admita que não existe qualquer resistência ao movimento. Sabe-se que a distância, em metros, do ponto P ao ponto O é dada por $d(t) = 1 + \frac{1}{2} sen(\pi t + \frac{\pi}{6})$.

A variável t designa o tempo, medido em segundos, que decorre desde o instante em que foi iniciada a contagem do tempo (t ∈[0, +∞[). Resolva os itens a) e b) sem recorrer à calculadora.

a) No instante em que se iniciou a contagem do tempo, o ponto P coincidia com o ponto A. Durante os primeiros três segundos do movimento, o ponto P passou pelo ponto A mais do que uma vez. Determine os instantes, diferentes do inicial, em que tal aconteceu. Apresente os valores exatos das soluções, em segundos.

b) Justifique, recorrendo ao teorema de Bolzano, que houve, pelo menos, um instante, entre os três segundos e os quatro segundos após o início da contagem do tempo, em que a distância do ponto P ao ponto O foi igual a 1,1 metros.

Exame Nacional 2015 (2.ª fase)

61. Seja *a* um número real. Considere a função f , de domínio ℝ, definida por f (x) = *a* sen x. Seja r a reta tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa $\frac{2\pi}{3}$. Sabe-se que a inclinação da reta r é igual a $\frac{\pi}{6}$ radianos. Determine o valor de *a*

Exame Nacional 2015 (época especial)

62. Na Figura 1, estão representados o círculo trigonométrico e um trapézio retângulo [OPQR]. Sabe-se que:

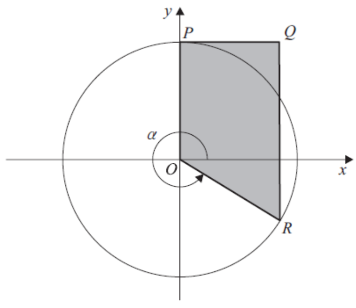


Figura 1

• o ponto P tem coordenadas (0,1)
• o ponto R pertence ao quarto quadrante e à circunferência.

Seja α a amplitude de um ângulo orientado cujo lado origem é o semieixo positivo Ox e cujo lado extremidade é a semirreta $\dot{O}R$. Qual das expressões seguintes dá a área do trapézio [OPQR], em função de α?

(A) $\frac{\cos\alpha}{2}+\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha$ **(B)** $\frac{\cos\alpha}{2}-\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha$

(C) $\cos\alpha+\frac{\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha}{2}$ **(D)** $\cos\alpha-\frac{\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha}{2}$

Exame Nacional 2016 (1.ª fase)

63. Num dia de vento, são observadas oscilações no tabuleiro de uma ponte suspensa, construída sobre um vale. Mediu-se a oscilação do tabuleiro da ponte durante um minuto. Admita que, durante esse minuto, a distância de um ponto P do tabuleiro a um ponto fixo do vale é dada, em metros, por

$$h(t)=20+\frac{1}{2\pi}\cos(2\pi t)+t\operatorname{sen}(2\pi t)$$

(t é medido em minutos e pertence a [0,1])

a) Sejam M e m, respetivamente, o máximo e o mínimo absolutos da função h no intervalo [0,1]. A amplitude A da oscilação do tabuleiro da ponte, neste intervalo, é dada por A=M−m. Determine o valor de A, recorrendo a métodos analíticos e utilizando a calculadora apenas para efetuar eventuais cálculos numéricos. Apresente o resultado em metros.

b) Em [0,1], o conjunto solução da inequação h(t)<19,5 é um intervalo da forma]a,b[. Determine o valor de b−a arredondado às centésimas, recorrendo à calculadora gráfica, e interprete o resultado obtido no contexto da situação descrita.

Na sua resposta:

– reproduza o gráfico da função h visualizado na calculadora (sugere-se que, na janela de visualização, considere y∈[19,21];

–apresente o valor de a e o valor de b arredondados às milésimas;

–apresente o valor de b−a arredondado às centésimas;

– interprete o valor obtido no contexto da situação descrita.

Exame Nacional 2016 (1.ª fase)

64. Na Figura 1, está representada uma circunferência de centro no ponto O e raio 1. Sabe-se que:

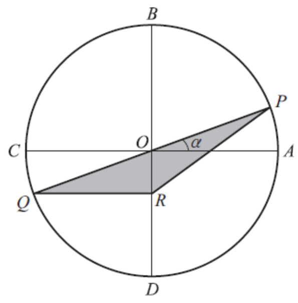


Figura 1

• os diâmetros [AC] e [BD] são perpendiculares;
• o ponto P pertence ao arco AB
• [PQ] é um diâmetro da circunferência;
• o ponto R pertence a [OD] e é tal que [QR] é paralelo a [AC]

Seja α a amplitude, em radianos, do ângulo AOP $\left(\alpha\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right[\right)$

Qual das seguintes expressões dá a área do triângulo [PQR], representado a sombreado, em função de α?

(A) $\frac{\cos(2\alpha)}{4}$ **(B)** $\frac{\operatorname{sen}(2\alpha)}{4}$

(C) $\frac{\cos(2\alpha)}{2}$ **(D)** $\frac{\operatorname{sen}(2\alpha)}{2}$

Exame Nacional 2016 (2.ª fase)

65. Para um certo número real k, é contínua em ℝ a função f definida por

$$f(x)=\begin{cases}\frac{\operatorname{sen}(3x+3)}{4x+4} & \text{se } x\neq -1\\ k+2 & \text{se } x=-1\end{cases}$$

Qual é o valor de k?

(A) $-\frac{5}{3}$ **(B)** $-\frac{5}{4}$ **(C)** $\frac{5}{4}$ **(D)** $\frac{5}{3}$

Exame Nacional 2016 (época especial)

66. Seja f a função, de domínio A e contradomínio]−1, +∞[, definida por f(x) = tg x. Qual dos conjuntos seguintes pode ser o conjunto A ?

(A) $\left]-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right[$ **(B)** $\left]\frac{3\pi}{4},\frac{3\pi}{2}\right[$

(C) $\left]\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{4}\right[$ **(D)** $\left]\frac{5\pi}{4},\frac{3\pi}{2}\right[$

Exame Nacional 2017 (1.ª fase)

67. Considere o desenvolvimento de $\left(2x\operatorname{sen}\alpha+\frac{\cos\alpha}{x}\right)^2$, em que α ∈ℝ e x≠0 . Determine

os valores de α, pertencentes ao intervalo]π,2π[, para os quais o termo independente de x, neste desenvolvimento, é igual a 1. Resolva este item recorrendo a métodos analíticos, sem utilizar a calculadora.

Exame Nacional 2017 (2.ª fase)

68. Na Figura 4, está representada, num referencial o.n. xOy, a circunferência de centro na origem e raio 1.
Sabe-se que:

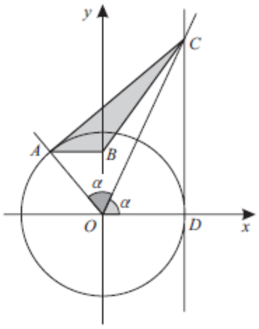


Figura 4

• o ponto A está no segundo quadrante e pertence à circunferência;
• o ponto D tem coordenadas (1, 0)
• o ponto C pertence ao primeiro quadrante e tem abcissa igual à do ponto D
• o ponto B pertence ao eixo Oy e é tal que o segmento de reta [AB] é paralelo ao eixo Ox
• os ângulos AOC e COD são geometricamente iguais e cada um deles tem amplitude α $\left(\alpha \in \left]\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right[\right)$

Mostre que a área do triângulo [ABC], representado a sombreado, é dada por

$$\frac{\operatorname{tg}\alpha \cos^2(2\alpha)}{2}$$

Exame Nacional 2017 (época especial)

69. Considere a função f definida em]0,π[por $f(x)=\dfrac{x}{\operatorname{sen} x}$. Qual das equações seguintes define uma assíntota do gráfico da função f ?

(A) x= 0 (B) x=π (C) x=1 (D) $x=\frac{\pi}{2}$

Exame Nacional 2018 (1.ª fase)

70. A primeira derivada de uma função f, de domínio $\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$, é dada por f ’(x) = 3x − tg x. Sabe-se que o gráfico de f tem um único ponto de inflexão. Qual é a abcissa desse ponto, arredondada às centésimas?
(A) 0,84 (B) 0,88 (C) 0,92 (D) 0,96

Exame Nacional 2018 (2.ª fase)

71. O planeta Mercúrio descreve uma órbita elíptica em torno do Sol. Na Figura 2, está representado um esquema de uma parte dessa órbita.

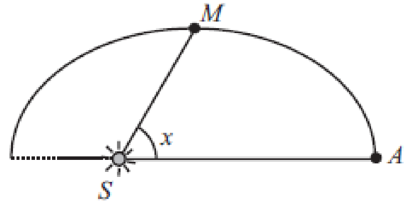


Figura 2

Relativamente a esta figura, tem-se que:
• o ponto S representa o Sol;
• o ponto M representa o planeta Mercúrio;
• o ponto A representa o afélio, que é o ponto da órbita mais afastado do Sol;
• x é a amplitude do ângulo ASM, compreendida entre 0 e 180 graus.

Admita que a distância, d, em milhões de quilómetros, do planeta Mercúrio ao Sol é dada, em função de x, por

$$d=\frac{555}{10-2{,}06\cos x}$$

Seja α a amplitude do ângulo ASM, num certo instante (α está compreendido entre 0 e 20 graus). Nesse instante, o planeta Mercúrio encontra-se a uma certa distância do Sol. Passado algum tempo, a amplitude do ângulo ASM é três vezes maior e a distância do planeta Mercúrio ao Sol diminuiu 3%. Determine, recorrendo às capacidades gráficas da calculadora, o valor de α, sabendo-se que esse valor existe e é único. Não justifique a validade do resultado obtido na calculadora.
Na sua resposta:
— equacione o problema;
— reproduza, num referencial, o(s) gráfico(s) da(s) função(ões) visualizado(s) na calculadora que lhe permite(m) resolver a equação;
— apresente o valor de α em graus, arredondado às unidades.

Exame Nacional 2018 (2.ª fase)

72. Seja g a função, de domínio [0,π], definida por g(x) = 2sen x + sen^2 x. Seja r a reta tangente ao gráfico da função g que tem declive máximo. Determine o declive da reta r. Apresente a sua resposta na forma $\frac{a\sqrt{b}}{c}$, com a, b e c números naturais.

Exame Nacional 2018 (2.ª fase)

73. Considere a função f, definida em $\left[-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\right]$ por f(x) = cos x. Qual dos seguintes conjuntos é o contradomínio da função f ?

(A) $\left[\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right]$ (B) $\left[\frac{\sqrt{3}}{2}, 1\right]$

(C) $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$ (D) $\left[0, \frac{1}{2}\right]$

Exame Nacional 2018 (época especial)

74. Qual é a solução da equação 2cos x + 1 = 0 no intervalo [−π,0]?

(A) $-\frac{5\pi}{6}$ (B) $-\frac{2\pi}{3}$ (C) $-\frac{\pi}{3}$ (D) $-\frac{\pi}{6}$

Exame Nacional 2019 (1.ª fase)

75. Seja g a função definida em]0,π[por
$$g(x)=\frac{1}{4}\cos(2x)-\cos x$$
a) Estude a função g quanto ao sentido das concavidades do seu gráfico e quanto à existência de pontos de inflexão. Na sua resposta, apresente:
— o(s) intervalo(s) em que o gráfico de g tem concavidade voltada para baixo;
— o(s) intervalo(s) em que o gráfico de g tem concavidade voltada para cima;
— as coordenadas do(s) ponto(s) de inflexão do gráfico de g, caso este(s) exista(m).

b) Seja f a função, de domínio $\left]-\frac{\pi}{2},0\right[$, definida por $f(x)=g(-x)+g\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$. Qual das expressões seguintes também pode definir a função f?
(A) sen x + cos x
(B) −sen x − cos x
(C) sen x − cos x
(D) −sen x + cos x

Exame Nacional 2019 (2.ª fase)

76. Considere a função f, definida em]0,π[por
$$f(x)=\frac{\operatorname{sen} x}{2+\cos x}.$$
a) Determine $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(\pi-x)}{x}$
b) Estude a função f quanto à monotonia e determine, caso existam, os extremos relativos.

Exame Nacional 2019 (época especial)

77. A Figura 3 é uma fotografia da torre da Igreja de São Pedro, situada em Zurique, na Suíça. Nessa torre, encontra-se um dos maiores relógios da Europa. Na Figura 4, está representado um esquema desse relógio. No esquema, o segmento de reta [EF] representa o ponteiro das horas.

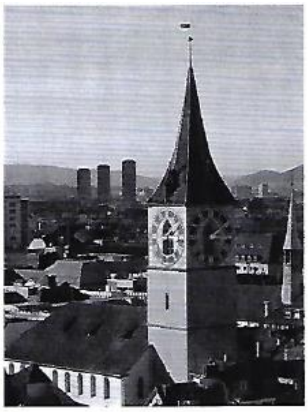


Figura 3

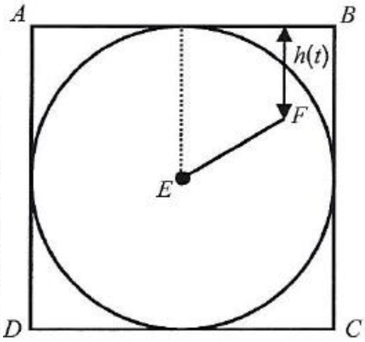


Figura 4

Relativamente à Figura 4, sabe-se ainda que:
• o círculo de centro E está inscrito no quadrado [ABCD]
• $\overline{EF}=3{,}5\text{ m}$ e $\overline{AB}=9\text{ m}$

Seja h a função que dá a distância, em metros, da extremidade do ponteiro das horas à reta AB, t horas após as zero horas. Determine, em função de t, uma expressão analítica da função h.

Exame Nacional 2019 (época especial)

78. O mecanismo de manivela-biela é composto por uma manivela de comprimento fixo, que efetua um movimento de rotação (sempre no mesmo sentido), e por uma biela, também de comprimento fixo, que transforma esse movimento de rotação no movimento alternado de translação de um pistão. Na Figura 3, está representado esse mecanismo.

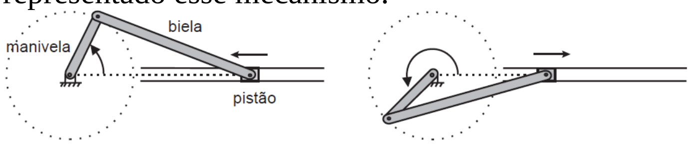


Figura 3

Na Figura 4, está representado um esquema do mecanismo descrito.

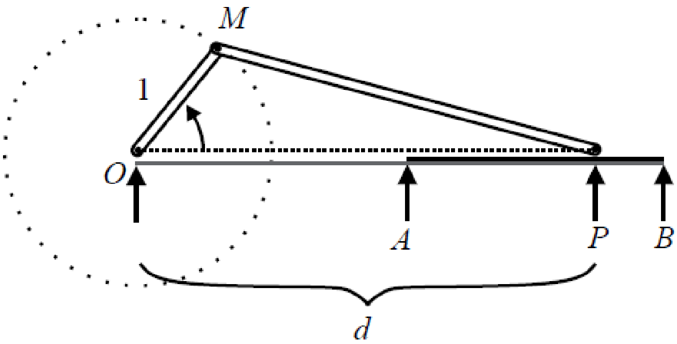


Figura 4

Relativamente a esta figura, sabe-se que:
• o ponto P representa o pistão;
• o segmento de reta [OM] representa a manivela, que tem 1 cm de comprimento;
• o segmento de reta [MP] representa a biela;

• os pontos A e B são os pontos em que a distância do pistão ao centro de rotação da manivela, O, é mínima e máxima, respetivamente;
• os pontos O, A, P e B são colineares.

Sabe-se que o movimento de rotação da manivela se inicia quando o pistão se encontra na posição B e que a manivela descreve voltas completas a uma frequência angular constante. Admita que a função que dá, em centímetros, a distância do pistão ao ponto O, em função do tempo, t, em segundos, contado a partir do instante em que é iniciado o movimento, é dada por

$$d(t) = \cos t + \sqrt{9 - \operatorname{sen}^2 t} \quad , \quad t \geq 0$$

(o argumento das funções seno e cosseno está expresso em radianos)

a) Qual é, em centímetros, o comprimento da biela neste mecanismo?

(A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 5

b) Durante os primeiros cinco segundos, após o início do movimento, registou-se, num certo instante t_0 , a distância do pistão ao ponto O. Sabe-se que, dois segundos após esse instante, a distância do pistão ao ponto O diminuiu 25%. Determine, recorrendo às capacidades gráficas da calculadora, a distância, em centímetros, arredondada às décimas, do pistão ao ponto O no instante t_0, sabendo-se que este valor existe e é único. Não justifique a validade do resultado obtido na calculadora. Na sua resposta:

— apresente uma equação que lhe permita resolver o problema;

— reproduza, num referencial, o(s) gráfico(s) da(s) função(ões) visualizado(s) na calculadora que lhe permite(m) resolver a equação e apresente as coordenadas do(s) ponto(s) relevante(s) arredondadas às centésimas;

— apresente o valor pedido em centímetros, arredondado às décimas. Se, nos cálculos intermédios, proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, duas casas decimais.

Exame Nacional 2020 (1.ª fase)

79. Na Figura 5, estão representados, num referencial o.n. xOy, a circunferência trigonométrica, a reta r de equação x = 1, e um ponto A, de ordenada *a* (*a*>1), pertencente à reta r.

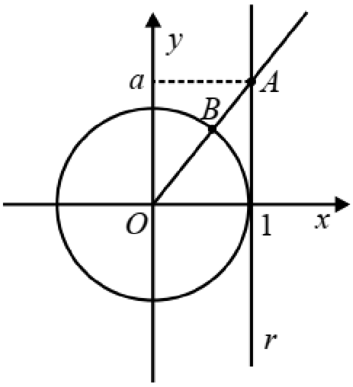


Figura 5

Está também representada a semirreta $\dot{O}A$, que intersecta a circunferência trigonométrica no ponto B. Qual das expressões seguintes dá, em função de *a*, a abcissa do ponto B?

(A) $\dfrac{1}{\sqrt{a^2+1}}$ **(B)** $\sqrt{a^2+1}$

(C) $\dfrac{1}{\sqrt{a^2-1}}$ **(D)** $\sqrt{a^2-1}$

Exame Nacional 2020 (1.ª fase)

80. Considere a função h, de domínio $\mathbb{R}$, definida por

$$h(x) = \frac{5}{4 + 3\cos(2x)}$$

.

a) Qual é a taxa média de variação da função h entre $\frac{\pi}{6}$ e $\frac{7\pi}{6}$?

(A) 1 **(B)** $\frac{1}{2}$ **(C)** 0 **(D)** $-\frac{1}{2}$

b) Determine, sem recorrer à calculadora, as abcissas dos pontos do gráfico da função h, pertencentes ao intervalo $]-\pi, \pi[$, cuja ordenada é 2.

Exame Nacional 2020 (época especial)

81. Na Figura 2, estão representados, num referencial o.n. xOy, a circunferência de centro em O e raio 3 e o triângulo [ABC]. Sabe-se que:

• o segmento de reta [AB] é um diâmetro da circunferência;
• α é a inclinação da reta AB $\left(\alpha \in \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right[\right)$

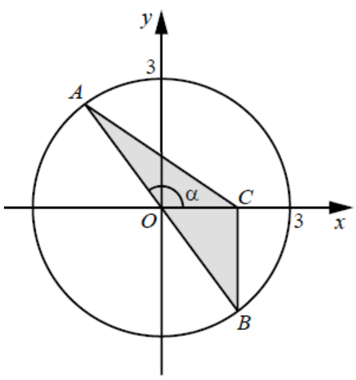


Figura 2

• o ponto C pertence ao semieixo positivo Ox
• a reta BC é paralela ao eixo Oy

Mostre que a área do triângulo [ABC] é dada pela expressão $-9\,\text{sen}\alpha\,\cos\alpha$.

Exame Nacional 2021 (1.ª fase)

82. Resolva este item sem recorrer à calculadora. Seja g a função, de domínio $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$, definida por $g(x) = x\cos x + \text{sen}\, x$. Mostre, recorrendo ao teorema de Bolzano-Cauchy, que existe pelo menos um ponto pertencente ao gráfico da função g tal que a reta tangente ao gráfico da função nesse ponto tem declive $-1/2$.

Exame Nacional 2021 (1.ª fase)

83. Considere, para um certo número real positivo k, as funções f e g, de domínio $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, definidas por $f(x) = k\,\text{sen}(2x)$ e $g(x) = k\cos x$. Sejam, num referencial ortonormado do plano, A, B e C os pontos de intersecção dos gráficos de f e g, sendo A o ponto de menor abcissa e C o ponto de maior abcissa. Sabe-se que o triângulo [ABC] é retângulo em B. Determine, sem recorrer à calculadora, o valor de k.

Exame Nacional 2021 (1.ª fase)

84.

Sabe-se que $\text{sen}\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) = -\frac{1}{5}$ e que $\alpha \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$

Determine, sem recorrer à calculadora, o valor de $\text{tg}(\pi - \alpha) + 2\cos\left(-\frac{7\pi}{2} + \alpha\right)$

Apresente o resultado na forma $\frac{a\sqrt{b}}{c}$, $a \in \mathbb{Z}$, $b \in \mathbb{N}$ e $c \in \mathbb{N}$

Exame Nacional 2021 (2.ª fase)

85. Seja h a função, de domínio $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$, definida por $h(x) = \text{sen}\, x + \cos^2 x$. Estude, sem recorrer à calculadora, a função h quanto à monotonia e quanto à existência de extremos relativos, e determine, caso existam, esses extremos. Na sua resposta, apresente o(s) intervalo(s) de monotonia.

Exame Nacional 2021 (2.ª fase)

86. Na Figura 3, está representada a circunferência trigonométrica.

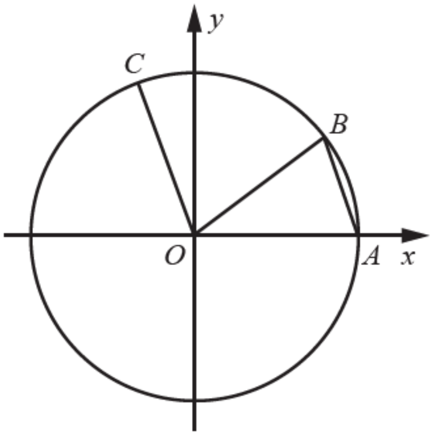


Figura 3

Sabe-se que:

- os pontos A, B e C pertencem à circunferência;
- o ponto A pertence ao semieixo positivo Ox e o ponto B pertence ao primeiro quadrante;
- a amplitude do ângulo BOC é igual ao dobro da amplitude do ângulo AOB
- a área do triângulo [AOB] é igual a k $\left(0 < k < \frac{1}{2}\right)$

Mostre que a ordenada do ponto C é dada, em função de k, por $6k - 32k^3$

Exame Nacional 2021 (2.ª fase)

87. Na Figura 2, está representado, num referencial o.n. xOy, o arco de circunferência AB, contido no primeiro quadrante do plano cartesiano, cujo centro é a origem do referencial e cujo raio é igual a r (r>0).

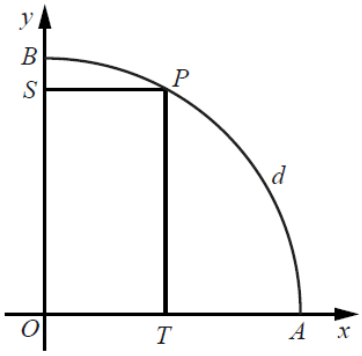


Figura 2

O ponto A pertence ao eixo Ox e o ponto B pertence ao eixo Oy. Seja P um ponto do arco AB, distinto de A e de B, e seja d o comprimento do arco AP. O ponto S pertence ao eixo das ordenadas e tem ordenada igual à do ponto P. O ponto T pertence ao eixo das abcissas e tem abcissa igual à do ponto P. Mostre que uma expressão que dá o valor de $\overline{BS} + \overline{TA}$, em função de d e de r, é

$$r\left(2 - \text{sen}\left(\frac{d}{r}\right) - \cos\left(\frac{d}{r}\right)\right)$$

Exame Nacional 2021 (época especial)

88. Na Figura 6, está representado o triângulo [ABC].

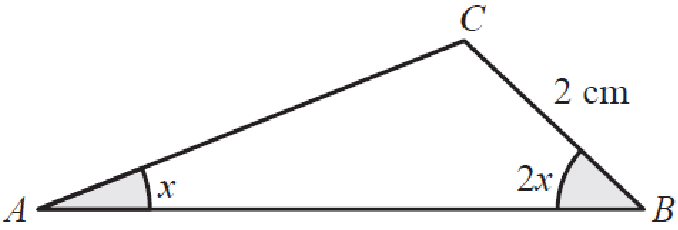


Figura 6

Seja $x \in \left]0, \frac{\pi}{4}\right[$: a amplitude, em radianos, do ângulo BAC. Sabe-se que:

- $C\hat{B}A = 2x$;
- $\overline{BC} = 2$ cm .

Mostre que o comprimento de [AB], em centímetros, é dado, para cada valor de x, pela expressão

$8\cos^2 x - 2$

Exame Nacional 2022 (1.ª fase)

89. Na Figura 2, está representado um triângulo, [ABC], inscrito numa semicircunferência de diâmetro $\overline{AC} = 4$.

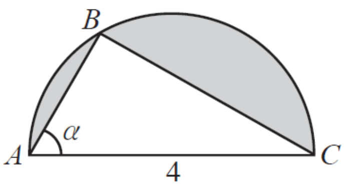


Figura 2

Seja α a amplitude do ângulo CAB. Mostre que a área da região sombreada na figura é dada, em função de α, por

$2\pi - 4\,\text{sen}\,(2\alpha)$

Exame Nacional 2022 (época especial)

90. Na Figura 3, estão representados, em referencial o.n. Oxy, uma circunferência de centro na origem e os pontos A , P e Q , que pertencem à circunferência.

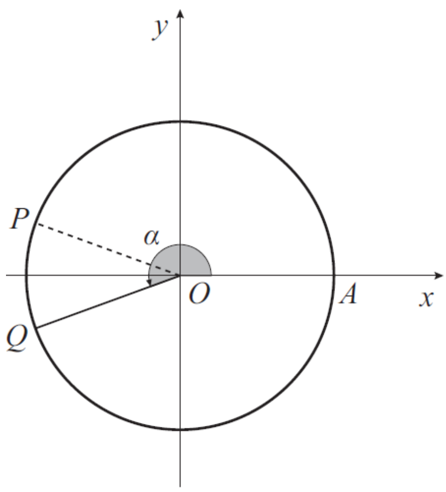


Figura 3

Sabe-se que:

• o ponto A tem coordenadas (2,0) ;

• o ângulo orientado AOQ tem amplitude $\alpha \in \left]\pi, \frac{3\pi}{2}\right[$;

• os pontos P e Q têm a mesma abcissa;

• $\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OQ} = 3$.

Determine o valor de cos(2α).

Exame Nacional 2023 (1.ª fase)

91. Seja f a função, de domínio [0,π], definida por f(x)= sen(2x)+x, e seja r a reta de equação y=-x+2.

a) Qual das expressões seguintes pode definir a função derivada de f ?

(A) $2-2\cos^2 x$ (B) $2-2\text{sen}^2 x$ (C) $3-4\cos^2 x$ (D) $3-4\text{sen}^2 x$

b) Resolva este item sem recorrer à calculadora, exceto em eventuais cálculos numéricos. Mostre, recorrendo ao teorema de Bolzano-Cauchy, que o gráfico da função f intersecta a reta r em, pelo menos, um ponto de abcissa pertencente ao intervalo $\left]\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\right[$.

Exame Nacional 2023 (1.ª fase)

92. Qual é o valor de $\lim_{x \to 0} \frac{\text{sen}\,(2x)}{x}$?

(A) 0 (B) 1/2 (C) 1 (D) 2

Exame Nacional 2023 (2.ª fase)

93. Na Figura 6, estão representados, em referencial o.n. Oxy , uma semicircunferência de raio 2 , e centro na origem do referencial, e o triângulo isósceles [ABC]. Sabe-se que:

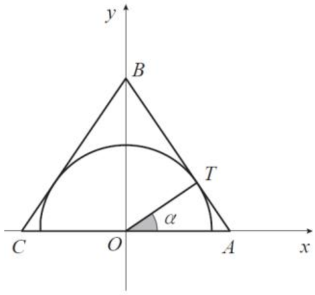


Figura 6

• o vértice A pertence ao semieixo positivo Ox ;

• o vértice B pertence ao semieixo positivo Oy ;

• o vértice C pertence ao semieixo negativo Ox ;

• $\overline{AB} = \overline{BC}$;

• o lado [AB] é tangente à semicircunferência no ponto T ;

• $A\hat{O}T = \alpha$, $\alpha \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$.

Prove que a área do triângulo [ABC] é dada, em função de α, por $\frac{8}{\text{sen}\,(2\alpha)}$.

Exame Nacional 2023 (2.ª fase)

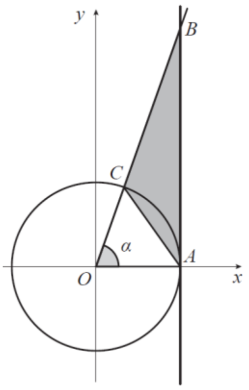


Figura 4

94. Na Figura 4, estão representados, em referencial o.n. Oxy, a circunferência trigonométrica, o triângulo [ABC] e a reta de equação x = 1 . Sabe-se que:
- o ponto A tem coordenadas (1,0);
- o ponto B pertence à reta de equação x = 1 ;
- C é o ponto de intersecção da semirreta $\dot{O}B$ com a circunferência trigonométrica;
- $A\hat{O}B = \alpha$, $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ e $\cos\alpha = \frac{1}{3}$.

Determine a área do triângulo [ABC].

Exame Nacional 2023 (época especial)

95. Na Figura 5, estão representados, em referencial o.n. Oxy :
- uma circunferência, de centro na origem;
- o ponto A , ponto de intersecção da circunferência com o semieixo positivo Ox ;
- a reta r , de equação reduzida y= x - 6 .

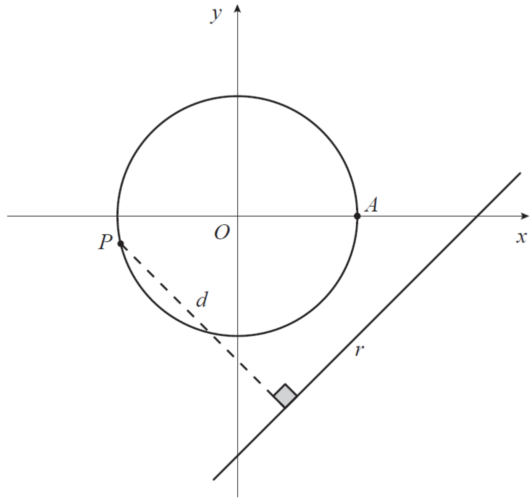


Figura 5

Considere que um ponto, P , partindo de A , se desloca sobre a circunferência, no sentido positivo, durante 7 segundos, percorrendo mais do que uma volta. Nesse percurso, a distância, d , do ponto P à reta r , t segundos após o início do deslocamento, é dada por

$$d(t) = \frac{3\sqrt{2}}{2}(2 + \operatorname{sen} t - \cos t) \text{ , com } t \in [0, 7]$$

Sabe-se que as distâncias máxima e mínima do ponto P à reta r são, respetivamente, $3\sqrt{2}+3$ e $3\sqrt{2}-3$.
Durante o percurso, existem dois instantes em que a distância do ponto P à reta r é igual ao diâmetro da circunferência. Determine, recorrendo à calculadora gráfica, esses instantes. Apresente os resultados em segundos, arredondados às décimas. Não justifique a validade dos resultados obtidos. Na sua resposta:

– apresente uma equação que lhe permita resolver o problema;

– represente, num referencial, o(s) gráfico(s) da(s) função(ões) visualizado(s) na calculadora e assinale os pontos relevantes, que lhe permitem resolver a equação.

Exame Nacional 2023 (época especial)

Soluções:

1. π/4; 1 e ±3 2. B 3. 7m; 1’; {5,25,65} e 5’’; 5m 4. {0,2π/3,π}; x=π/2 5. 12 km; π/6 6. A 8. π/4
9. 0; 1 (quadrado) 10. (5π/6,-√3/2) 11. D 12. D 13. 8 14. não cont.; (0,7;0,5) 15. [(5π-6√3)/6,2π+2]; 3,8
16. x=±π; ½; 5π/36 17. 4; crescente 18. 2; π/6 e 5π/6; -1,03 19. 2; 0 e π; π/4 e 5π/4 20. sim 21. A
22. x=π e x=2π 23. +∞; 2,2 24. √3/2; 0,5 25. 152,1 e 147,1; 147,7 26. 14 e 3 27. 4; 1 e 3 28. B
29. (3π/4,1) 30. I Verd.; $d(x)=\cos x+\sqrt{9-\operatorname{sen}^2 x}$ 31. A 32. y=2x; 0,2 33. A 34. –10/3; 0,24 35. π/4 36. π/2
37. 8; 6 38. C 39. 7π/12 40. π/3 41. π/3 42. 3/2 44. π/3 45. A 46. -π/6 47. -12 49. D 51. C
52. π/4; -π/6 e π/6 53. C 55. 32√2/9 56. B 57. B 59. C 60. 2, 2/3 e 8/3 61. –2√3/3 62. D 63. 1; 0,27
64. D 65. B 66. D 67. 13π/12 e 17π/12 69. B 70. D 71. 10 72. 3√3/2 73. C 74. B 75. (2π/3,3/8); B
76. 1; √3/3 77. 4,5–3,5cos(πt/6) 78. B; 2,8 79. A 80. C; -2π/3, -π/3, π/3 e 2π/3 83. √(8/27)π
84. –14√6/5 85. 1 e 5/4 90. ¾ 91. D 92. D 94. 2√2/3 95. 1,4 e 3,3

O professor: Roberto Oliveira