ESCOLA SECUNDÁRIA DE PENAFIEL

Exame Modelo IV de Matemática A

Duração do Exame: 150 **minutos** + 30 **minutos de tolerância** | **junho de 2018**

Caderno 1 (75 minutos + 15min) + Caderno 2 (75 minutos + 15min)

12.º Ano de Escolaridade | Turma - G - K

Caderno 1

- **Duração:** 75 **minutos** + 15 **minutos de tolerância**
- **É permitido o uso de calculadora gráfica**

Indica de forma legível a versão da prova. A prova é constituída por dois cadernos (Caderno 1 e Caderno 2). Utiliza apenas caneta ou esferográfica de tinta azul ou preta. Só é permitido o uso de calculadora no Caderno 1. Não é permitido o uso de corretor. Risca o que pretendes que não seja classificado. Para cada resposta identifica o item. Apresenta as tuas respostas de forma legível. Apresenta apenas uma resposta para cada item. A prova apresenta um formulário no Caderno 1. As cotações dos itens de cada Caderno encontram-se no final de cada Caderno.

Na resposta aos itens de seleção (escolha múltipla), seleciona a resposta correta. Escreve na folha de respostas o número do item e a letra que identifica a opção escolhida.

Na resposta aos restantes itens, apresenta o teu raciocínio de forma clara, indicando todos os cálculos que tiveres de efetuar e todas as justificações necessárias. Quando, para um resultado, não é pedida aproximação apresenta sempre o valor exato.

Formulário

Geometria

Comprimento de um arco de circunferência:

αr *(α - amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r - raio)*

área de um polígono regular: *Semiperímetro* $\times$ *Apótema*

área de um setor circular:

$\frac{\alpha r^2}{2}$ *(α- amplitude, em radianos, do ângulo ao centro, r - raio)*

área lateral de um cone: $\pi r g$ *(r - raio da base, g - geratriz)*

área de uma superfície esférica: $4\pi r^2$ *(r - raio)*

Volume da pirâmide: $\frac{1}{3}\times$ *área da base* $\times$ *Altura*

Volume do cone: $\frac{1}{3}\times$ *área da base* $\times$ *Altura*

Volume da esfera: $\frac{4}{3}\pi r^3$ *(r - raio)*

Progressões

Soma dos n primeiros termos de uma progressão (u_n):

Progressão aritmética: $\frac{u_1 + u_n}{2} \times n$

Progressão geométrica: $u_1 \times \frac{1 - r^n}{1 - r}$, $r \neq 1$

Trigonometria

$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$

$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$

Lei dos senos

$\frac{\sin \hat{A}}{a} = \frac{\sin \hat{B}}{b} = \frac{\sin \hat{C}}{c}$

Lei dos cossenos ou Teorema de Carnot

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \hat{A}$

Complexos

$(|z| cis\theta)^n = |z|^n cis(n\theta)$ ou $(|z|e^{i\theta})^n = |z|^n e^{i(n\theta)}$

$\sqrt[n]{|z| cis\theta} = \sqrt[n]{|z|} cis\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right)$ ou

$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|} e^{i\left(\frac{\theta+2k\pi}{n}\right)}$, $k \in \{0; 1; 2; ...; n-1\}$ e $n \in \mathbb{N}$

Probabilidades

$\mu = p_1 x_1 + \cdots + p_n x_n$

$\sigma = \sqrt{p_1(x_1 - \mu)^2 + \cdots + p_n(x_n - \mu)^2}$

Se $X \sim N(\mu, \sigma)$, então:

$P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) \approx 0.6827$

$P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) \approx 0.9545$

$P(\mu - 3\sigma < X < \mu + 3\sigma) \approx 0.9973$

Regras de derivação

$(u+v)' = u' + v'$

$(uv)' = u'v + uv'$

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$

$(u^n)' = nu^{n-1}u' \quad (n \in \mathbb{R})$

$(\sin u)' = u' \cos u$

$(\cos u)' = -u' \sin u$

$(\tan u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$

$(e^u)' = u'e^u$

$(a^u)' = u'a^u \ln a \quad (a \in \mathbb{R}^+ \backslash \{1\})$

$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$

$(\log_a u)' = \frac{u'}{u \ln a} \quad (a \in \mathbb{R}^+ \backslash \{1\})$

Limites notáveis

$\lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e \quad (n \in \mathbb{N})$

$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^p} = +\infty \quad (p \in \mathbb{R})$

1. .

1.1	1.2
P2001/2002	PMC2015

1.1. Seja $(E, P(E), P)$ um espaço de probabilidade
Sejam A e B dois acontecimentos possíveis de $P(E)$
Sabe-se que: $P(A) = 0.6$, $P(\overline{A} \cap \overline{B}) = 0.1$ e $P(\overline{B}) = 0.5$

A afirmação falsa é:

(A) A e B são acontecimentos independentes
(B) $P(\overline{A}|\overline{B}) = 0.2$
(C) $P(A \cap B) = 0.2$
(D) $P(A \cup B) = 0.9$

1.2. Considera a função f, de domínio $\mathbb{R}^+$, definida por $f(x) = \ln(x)$ e contínua em todo o seu domínio
Na figura 1 está, em referencial o.n. xOy, parte do gráfico de f, uma reta secante ao gráfico nos pontos A e B, de abcissas e e $2e$, respetivamente, e uma reta t, tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa c, com $c \in]e; 2e[$

Pelo Teorema de Lagrange, existe pelo menos um valor c em $]e; 2e[$, para o qual a reta t tangente ao gráfico nesse ponto é paralela à reta AB

Em qual das opções está o valor de c?

(A) $\dfrac{2}{\ln(2)}$

(B) $\dfrac{e}{\ln(2)}$

(C) $\dfrac{\ln(2)}{e}$

(D) $\dfrac{\ln(2)}{2}$

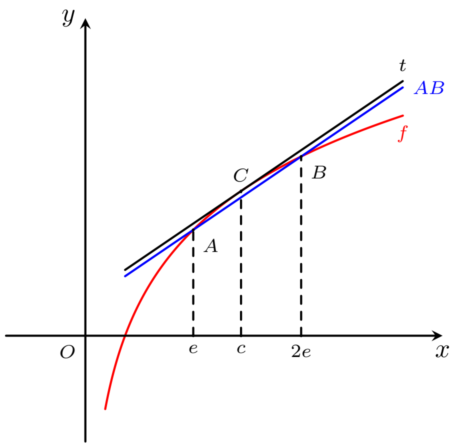

Figura 1

2. Considera a sucessão (a_n) de termo geral $a_n = 3 \times 2^{1-n}$

Comenta a seguinte afirmação:

"A sucessão (a_n) é uma progressão geométrica de razão $\dfrac{1}{2}$"

3. Supondo que ${}^{2017}C_{500} = x$ e ${}^{2017}C_{501} = y$, então, pode-se afirmar que:

(A) ${}^{2018}C_{500} = x + y$
(B) ${}^{2018}C_{501} = x + y$
(C) ${}^{2018}C_{501} = x \times y$
(D) ${}^{2018}C_{500} = x \times y$

4. Considera a expressão $\left(-\frac{1}{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^{16}$, com $x>0$.

Averigua se existe algum termo do desenvolvimento da forma ax^{-4}, com $a \in \mathbb{R}$. Caso exista, determina-o.

5. Considera, para um certo número real k, a função f, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $f(x)=ke^{-x}-2$
Para certos valores de k, o Teorema de Bolzano garante que a função f interseta a bissetriz dos quadrantes pares num ponto de abcissa pertencente ao intervalo $]-2,0[$
A qual dos intervalos seguintes pode pertencer k?

(A) $\left]2;e^2\right[$

(B) $\left]0;\frac{4}{e^2}\right[$

(C) $\left]-2;-\frac{4}{e^2}\right[$

(D) $\left]\frac{4}{e^2},2\right[$

6. Um baralho de cartas completo é constituído por 52 cartas, distribuídas por quatro naipes (espadas, paus, copas e ouros)

6.1. De um baralho de cartas completo extraem-se sucessivamente e sem reposição, duas cartas
Qual é a probabilidade de pelo menos uma das cartas extraídas não ser de copas?

6.2. Num certo jogo de cartas, utiliza-se um baralho completo e dão-se treze cartas a cada jogador
Imagina que estás a participar nesse jogo
Qual é a probabilidade de, nas treze cartas que vais receber, haver exatamente seis cartas do naipe de ouros?
Apresenta o resultado em percentagem e arredondado às décimas

7. Seja a função f, real de variável real, definida em $\mathbb{R}$, por $f(x)=x^2e^{x+2}+2x-e$
No referencial o.n. xOy, da figura 2, está representado parte do gráfico da função f e uma reta r, que é assíntota ao gráfico de f, quando $x \to -\infty$

7.1. Escreve a equação reduzida da reta r

7.2. Sabe-se que a função primeira derivada de f, é definida em $\mathbb{R}$, por $f'(x)=(x^2+2x)e^{x+2}+2$
Estuda a função f quanto ao sentido das concavidades e pontos de inflexão do seu gráfico

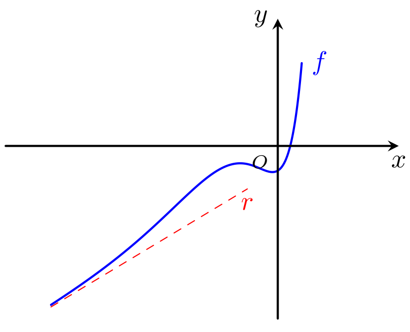

Figura 2

8. Seja $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos
A condição $\frac{\pi}{3} \leq Arg(z) \leq \frac{2\pi}{3} \wedge I_m(z-3) \leq R_e(\sqrt{3}-2i)$, define, no plano complexo, um triângulo $[OAB]$, como o representado na figura 3

Em qual das opções está o valor da área do triângulo $[OAB]$

(A) $\sqrt{2}$

(B) $2\sqrt{3}$

(C) $\sqrt{3}$

(D) $4\sqrt{3}$

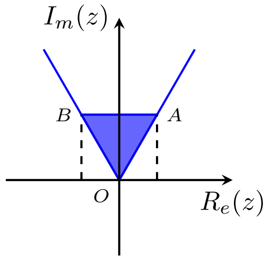

Figura 3

FIM DO CADERNO 1

COTAÇÕES

1.			
	....	5 pontos	
2.			
	....	10 pontos	
3.			
	....	5 pontos	
4.			
	....	10 pontos	
5.			
	....	5 pontos	
6.			
6.1	....	15 pontos	
6.2	....	15 pontos	
7.			
7.1	....	15 pontos	
7.2	....	15 pontos	
8.			
	....	5 pontos	
		TOTAL	**100 pontos**

PÁGINA EM BRANCO

Caderno 2

- **Duração: 75 minutos + 15 minutos de tolerância**
- **Neste Caderno não é permitida a utilização de calculadora**

9. .

9.1	9.2
P2001/2002	PMC2015

9.1. Numa caixa estão seis bolas numeradas, três com o número 6, duas com o número 4 e uma com o número 2. Considera a experiência aleatória que consiste em retirar, ao acaso, e de uma só vez, três bolas da caixa.
Seja X a variável aleatória: «menor dos números retirados».

Em qual das opções está o valor de $P(X = 4)$?

(A) $\frac{5}{20}$

(B) $\frac{6}{20}$

(C) $\frac{7}{20}$

(D) $\frac{9}{20}$

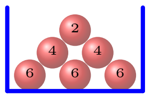

Figura 4

9.2. Considera a elipse, definida pela equação $\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{64} = 1$, e representada no referencial o.n. xOy, da figura 5

Em qual das opções estão as coordenadas dos focos da elipse?

(A) $F_1(7; 0)$ e $F_2(-7; 0)$

(B) $F_1(6; 0)$ e $F_2(-6; 0)$

(C) $F_1(4; 0)$ e $F_2(-4; 0)$

(D) $F_1(9; 0)$ e $F_2(-9; 0)$

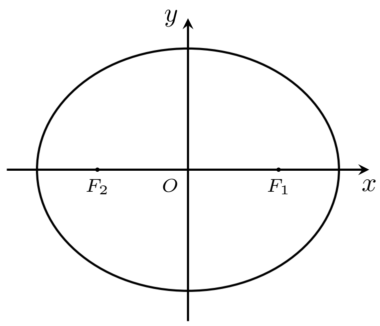

Figura 5

10. Seja f, a função de domínio $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, definida por $f(x) = \log\left(\frac{10^x \times x^2}{10^3}\right)$
Mostra que $f(x) = x + \log(x^2) - 3, \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

11. No referencial ortonormado $Oxyz$, da figura 6 está representado um cubo $[ABCDEFGH]$ de volume 64 $u.v.$

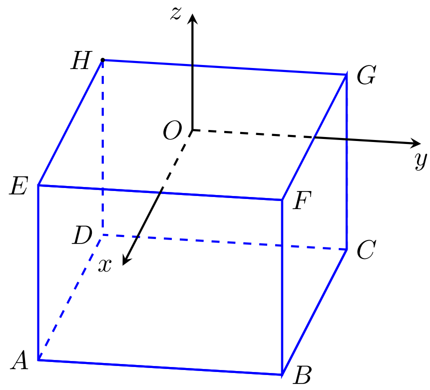

Figura 6

Sabe-se que:

- a origem O do referencial situa-se no centro da face $[EFGH]$
- a face $[EFGH]$ está contida no plano xOy
- as faces $[ABFE]$ e $[CDHG]$ são paralelas ao plano yOz

Considera, ainda, o plano α de equação $2x - y + 3 = 0$

11.1. Escreve uma equação vetorial da reta r, perpendicular ao plano α, e que contém o ponto médio do segmento de reta $[CF]$

11.2. Escreve a equação do plano tangente à superfície esférica de diâmetro $[BH]$, no ponto B

12. Numa das opções está uma expressão equivalente a $4\sin(x)\cos(x) - 8\sin^3(x)\cos(x)$

Em qual delas?

(A) $\sin(2x)$
(B) $\cos(2x)$
(C) $\sin(4x)$
(D) $\cos(4x)$

13. Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, considera os números complexos, $w_1 = 1 + i$ e $w_2 = 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)$

13.1. Escreve $\dfrac{\overline{w_1} + i^{57} \times (1-3i) \times w_2}{\overline{2+2i}}$ na forma $a + bi, a, b \in \mathbb{R}$

13.2. Resolve, em $\mathbb{C}$, a equação $|z| \times z^4 - iw_1 = 0$

13.3. Em qual das opções está o menor valor de $n \in \mathbb{N}$, para o qual $\left(\dfrac{w_1}{w_2}\right)^n$ é um imaginário puro com parte imaginária negativa?

(A) 2
(B) 4
(C) 10
(D) 18

14. Seja g, uma função contínua, de domínio $\mathbb{R}^+$

Sabe-se que:

- $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(g(x) - \frac{e}{2}x + e\right) = 0$

Mostra que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{g(x) - \ln(x)}{x - e^{-x}} = \dfrac{e}{2}$

15. Considera a função h, de domínio $[-\pi; 2\pi]$, definida por

$$h(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{e} + \dfrac{e^{x-\pi} - 1}{2x - 2\pi} & se \quad -\pi < x < \pi \\ \log\left(10^{\frac{1}{e}+\frac{1}{2}}\right) & se \quad x = \pi \\ -\dfrac{\pi - x}{e\sin(x-\pi)} + \dfrac{1}{2} & se \quad \pi < x \leq 2\pi \end{cases}$$

Averigua se a função h é contínua no ponto $x = \pi$

FIM DO CADERNO 2

COTAÇÕES

9.			
		....	5 pontos
10.			
		....	5 pontos
11.			
	11.1	....	15 pontos
	11.2	....	15 pontos
12.			
		....	5 pontos
13.			
	13.1	....	15 pontos
	13.2	....	15 pontos
	13.3	....	10 pontos
14.			
		....	5 pontos
15.			
		....	10 pontos

TOTAL .... 100 pontos

PÁGINA EM BRANCO

PÁGINA EM BRANCO