Números Complexos (12.º ano)

Potências e raízes

Exercícios de Provas Nacionais e Testes Intermédios

1. Resolva este item sem recorrer à calculadora.

   Considere, em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, o número complexo $z = \dfrac{4}{1-i} + 4i^{18}$.

   O número complexo z é uma das raízes cúbicas de um número complexo w .

   Determine as restantes raízes cúbicas de w e apresente-as na forma trigonométrica.

   Exame – 2022, 2.ª fase

2. Resolva este item sem recorrer à calculadora.

   Considere, em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, a equação $z^3 = \left(\dfrac{-\sqrt{3}+i}{\sqrt{2}i}\right)^6$.

   Determine o número complexo que é solução da equação e cujo afixo, no plano complexo, pertence ao terceiro quadrante.

   Apresente o resultado na forma $a + bi$, com $a,b \in \mathbb{R}$.

   Exame – 2022, 1.ª fase

3. Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, considere $z_1 = 2e^{i\frac{\pi}{4}}$ e $z_2 = 2e^{i\frac{3\pi}{28}}$

   Seja w o número complexo tal que $w = \dfrac{z_1}{z_2}$

   Sabe-se que, no plano complexo, o afixo do número complexo w é um dos vértices de um polígono regular com centro na origem do referencial e com outro vértice sobre o semieixo real positivo.

   Qual é o número mínimo de vértices desse polígono?

   (A) 7 **(B)** 14 **(C)** 21 **(D)** 28

   Exame – 2021, 1.ª fase

4. Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, considere o número complexo $z_1 = -1 - i$

Determine, sem recorrer à calculadora, os números reais a e b, de forma que z_1 seja solução da equação $\frac{a}{z^2} + bz^4 = -2 + i$

Exame – 2020, Ép. especial

5. Seja $\mathbb{C}$ o conjunto dos números complexos.

Seja k um número real. Sabe-se que $k + i$ é uma das raízes quadradas do número complexo $3 - 4i$

Qual é o valor de k ?

(A) 2 **(B)** 1 **(C)** -1 **(D)** -2

Exame – 2020, 2.ª fase

6. Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, considere $z = \frac{5 + (1+i)^4}{2 + 2i^{15}} - \frac{i}{2}$

Determine o menor número natural n para o qual z^n é um número real negativo.

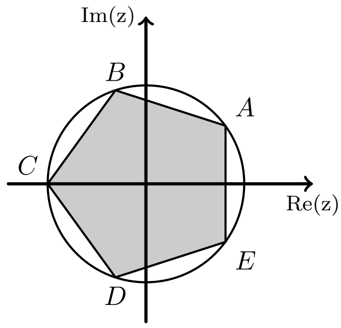
Exame – 2019, Ép. especial

7. Na figura ao lado, está representado, no plano complexo, um pentágono regular $[ABCDE]$ inscrito numa circunferência de centro na origem e raio 1

Sabe-se que o ponto C pertence ao semieixo real negativo.
Seja z o número complexo cujo afixo (imagem geométrica) é o ponto A

Qual é o valor de z^5 ?

(A) -1 **(B)** 1 **(C)** i **(D)** $-i$



Exame – 2018, 2.ª fase

8. Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, considere $w = 1 + \frac{2\sqrt{3} - \sqrt{3}\,i^5}{1 + 2i}$
Sabe-se que w é uma raiz quarta de um certo complexo z

Determine a raiz quarta de z cujo afixo (imagem geométrica) pertence ao primeiro quadrante.

Apresente o resultado na forma trigonométrica, com argumento pertencente ao intervalo $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$

Exame – 2018, 1.ª Fase

9. Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, seja $z = \frac{2i}{1-i} + 2i^{23}$

Determine, sem recorrer à calculadora, os números complexos w tais que $w^3 = \overline{z}$
Apresente os valores pedidos na forma trigonométrica.

Exame – 2016, Ép. especial

10. Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, seja $z = 3 + 4i$
Sabe-se que z é uma das raízes de índice 6 de um certo número complexo w
Considere, no plano complexo, o polígono cujos vértices são as imagens geométricas das raízes de índice 6 desse número complexo w

Qual é o perímetro do polígono?

(A) 42 **(B)** 36 **(C)** 30 **(D)** 24

Exame – 2016, 2.ª Fase

11. Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, seja $z_1 = (1+i)^6$ e $z_2 = \dfrac{8i}{e^{i\left(-\frac{6\pi}{5}\right)}}$

Sabe-se que as imagens geométricas dos complexos z_1 e z_2 e são vértices consecutivos de um polígono regular de n lados, com centro na origem do referencial.

Determine, sem recorrer à calculadora, o valor de n

Exame – 2015, Ép. especial

12. Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, seja $z_1 = \dfrac{-1+i}{\sqrt{2}e^{i\left(\frac{\pi}{12}\right)}}$

Determine os números complexos z que são solução da equação $z^4 = \overline{z_1}$, sem utilizar a calculadora.
Apresente esses números na forma trigonométrica.

Exame – 2015, 2.ª Fase

13. Na figura ao lado, está representado, no plano complexo, um polígono regular $[ABCDEF]$

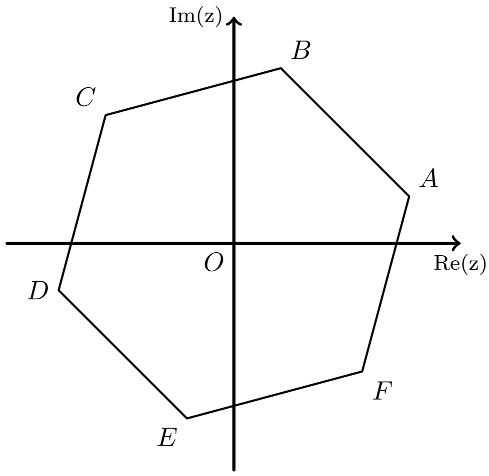
Os vértices desse polígono são as imagens geométricas das n raízes de índice n de um número complexo z

O vértice C tem coordenadas $(-2\sqrt{2}, 2\sqrt{2})$

Qual dos números complexos seguintes tem por imagem geométrica o vértice E?

(A) $2\sqrt{2}e^{i\left(\frac{13}{12}\pi\right)}$ **(B)** $4e^{i\left(\frac{13}{12}\pi\right)}$

(C) $2\sqrt{2}e^{i\left(\frac{17}{12}\pi\right)}$ **(D)** $4e^{i\left(\frac{17}{12}\pi\right)}$



Exame – 2014, 1.ª Fase

14. Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, considere $z_2 = \sqrt{2}e^{i\left(\frac{\pi}{12}\right)}$
As imagens geométricas de z_2 e do seu conjugado, $\overline{z_2}$, são vértices consecutivos de um polígono regular.
Os vértices desse polígono são as imagens geométricas das raízes de índice n de um certo número complexo w
Determine w na forma algébrica, sem utilizar a calculadora.
Comece por calcular n

Exame – 2013, Ép. especial

15. Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, considere $z_1 = \sqrt{2} + 2e^{i\left(\frac{3\pi}{4}\right)}$ e $z_2 = 1 + i$
Sabe-se que $\frac{z_1}{z_2}$ é uma raiz quarta de um certo número complexo w
Determine w na forma algébrica, sem utilizar a calculadora.

Exame – 2013, 1.ª Fase

16. Seja $\mathbb{C}$ o conjunto dos números complexos.
Considere o número complexo $z = 8\sqrt{3} - 8i$
Determine, sem recorrer à calculadora, as raízes de índice 4 de z
Apresente as raízes na forma trigonométrica.

Exame – 2012, Ép. especial

17. Na figura ao lado, está representado, no plano complexo, um polígono regular $[ABCDEFGHI]$

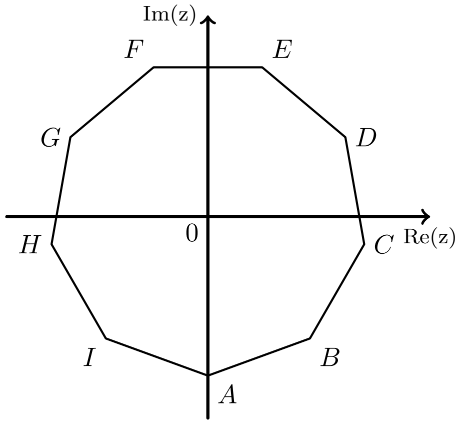
Os vértices desse polígono são as imagens geométricas das raízes de índice n de um número complexo z

O vértice A tem coordenadas $(0, -3)$

Qual dos números complexos seguintes tem por imagem geométrica o vértice F?

(A) $3e^{i\left(\frac{7\pi}{18}\right)}$ **(B)** $3e^{i\left(\frac{11\pi}{18}\right)}$

(C) $3e^{i\left(\frac{2\pi}{3}\right)}$ **(D)** $3e^{i\left(\frac{5\pi}{9}\right)}$



Exame – 2012, 2.ª Fase

18. Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, considere $z = 8e^{i\left(\frac{\pi}{6}\right)}$
Qual dos números complexos seguintes é uma das raízes de índice seis de z?

(A) $\sqrt{2}e^{i\left(\frac{25\pi}{36}\right)}$ **(B)** $\sqrt{2}e^{i\left(\frac{-\pi}{36}\right)}$ **(C)** $2\sqrt{2}e^{i\left(\frac{25\pi}{36}\right)}$ **(D)** $2\sqrt{2}e^{i\left(\frac{-\pi}{36}\right)}$

Exame – 2011, Prova especial

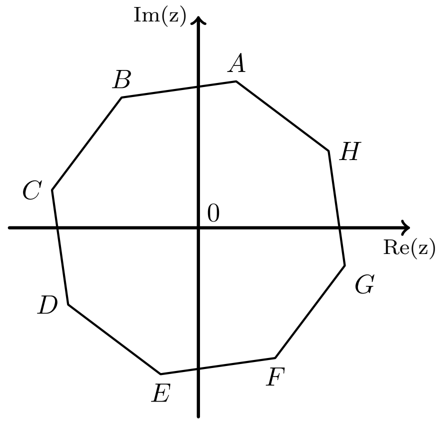
19. Considere, em $\mathbb{C}$, um número complexo w

No plano complexo, a imagem geométrica de w é o vértice A do octógono $[ABCDEFGH]$, representado na figura ao lado.
Os vértices desse polígono são as imagens geométricas das raízes de índice 8 de um certo número complexo.

Qual dos números complexos seguintes tem como imagem geométrica o vértice C do octógono $[ABCDEFGH]$?

(A) $-w$ **(B)** $w + 1$

(C) $i \times w$ **(D)** $i^3 \times w$

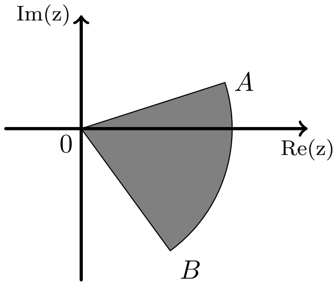


Exame – 2011, Ép. especial

20. Seja $\mathbb{C}$ o conjunto dos números complexos.
Considere $z_1 = 2 + \sqrt{3}i + i^{4n+2014}$, $n \in \mathbb{N}$
Sabe-se que z_1 é uma das raízes cúbicas de um certo complexo z
Determine z, sem recorrer à calculadora.
Apresente o resultado na forma algébrica.

Exame – 2011, Ép. especial

21. Na figura ao lado, está representado, no plano complexo, a sombreado, um setor circular.



Sabe-se que:

- o ponto A está situado no 1º quadrante;
- o ponto B está situado no 4º quadrante;
- $[AB]$ é um dos lados do polígono regular cujos vértices são as imagens geométricas das raízes de índice 5 do complexo $32e^{i\left(\frac{\pi}{2}\right)}$
- o arco AB está contido na circunferência de centro na origem e raio igual a $\overline{OA}$

Qual dos números seguintes é o valor da área do setor circular AOB?

(A) $\frac{\pi}{5}$ **(B)** $\frac{4\pi}{5}$ **(C)** $\frac{2\pi}{5}$ **(D)** $\frac{8\pi}{5}$

Exame – 2011, 1.ª Fase

22. Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, considere o número complexo

$$z = \frac{(-1-i)^8}{\left(e^{i\left(\frac{\pi}{8}\right)}\right)^2} \times e^{i\left(\frac{5\pi}{2}\right)}$$

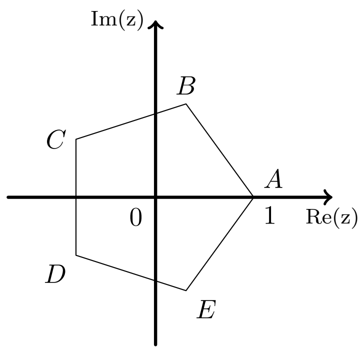
22.1. Verifique, recorrendo a métodos exclusivamente analíticos, que $z = 16e^{i\left(\frac{\pi}{4}\right)}$

22.2. Determine a área do polígono cujos vértices, no plano complexo, são as imagens geométricas das raízes quartas de z

Exame – 2010, Ép. especial

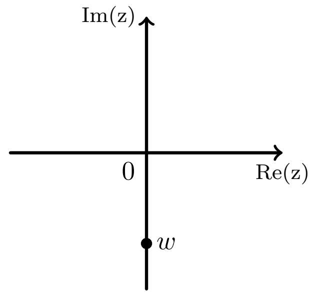
23. A figura ao lado representa um pentágono $[ABCDE]$ no plano complexo.
Os vértices do pentágono são as imagens geométricas das raízes de índice n de um número complexo w
O vértice A tem coordenadas $(1, 0)$
Qual dos números complexos seguintes tem por imagem geométrica o vértice D do pentágono?

(A) $5e^{i\left(\frac{6\pi}{5}\right)}$ **(B)** $e^{i\left(\frac{6\pi}{5}\right)}$ **(C)** $e^{i\left(-\frac{\pi}{5}\right)}$ **(D)** $e^{i\left(\frac{\pi}{5}\right)}$



Exame – 2010, 2.ª fase

24. Seja w o número complexo cuja imagem geométrica está representada na figura ao lado.
A qual das rectas seguintes pertence a imagem geométrica de w^6?



(A) Eixo real

(B) Eixo imaginário

(C) Bissetriz dos quadrantes ímpares

(D) Bissetriz dos quadrantes pares

Exame – 2010, 2.ª fase

25. Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, considere $z = \sqrt{2}e^{i\left(\frac{\pi}{4}\right)}$

Determine, recorrendo a métodos exclusivamente analíticos, o número complexo $w = \dfrac{z^4 + 4i}{i}$

Apresente o resultado na forma trigonométrica.

Exame – 2010, 2.ª Fase

26. Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, considere e $z_1 = e^{i\left(\frac{\pi}{7}\right)}$ e $z_2 = 2 + i$

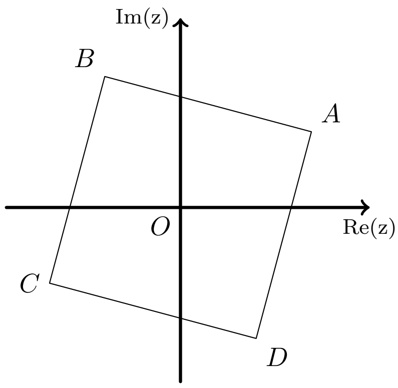
Determine o número complexo $w = \dfrac{3 - i \times (z_1)^7}{\overline{z_2}}$, recorrendo a métodos exclusivamente analíticos.

(i designa a unidade imaginária, e $\overline{z_2}$ designa o conjugado de z_2)
Apresente o resultado na forma trigonométrica.

Exame – 2010, 1.ª Fase

27. Considere, em $\mathbb{C}$, o número complexo $w = 2e^{i\left(\frac{\pi}{6}\right)}$.

No plano complexo, a imagem geométrica de w é um dos vértices do quadrado $[ABCD]$, com centro na origem O, representado na figura ao lado.



Qual dos números complexos seguintes tem como imagem geométrica o vértice D do quadrado?

(A) $2e^{i\left(\frac{3\pi}{2}\right)}$ **(B)** $2e^{i\left(\frac{7\pi}{4}\right)}$ **(C)** $2e^{i\left(\frac{11\pi}{6}\right)}$ **(D)** $2e^{i\left(\frac{5\pi}{3}\right)}$

Exame – 2009, Ép. especial

28. No conjunto dos números complexos, seja $z = \dfrac{\left(e^{i\left(\frac{\pi}{7}\right)}\right)^7 + (2+i)^3}{4e^{i\left(\frac{3\pi}{2}\right)}}$.

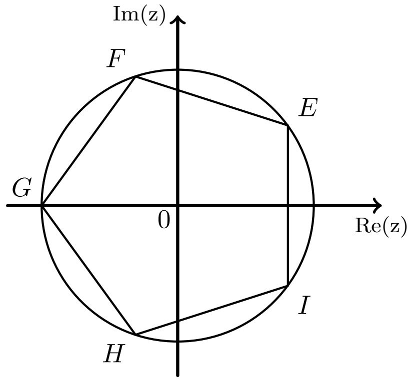
Determine z na forma algébrica, **sem recorrer à calculadora**.

Exame – 2009, 2.ª Fase

29. Na figura ao lado está representado, no plano complexo, o polígono $[EFGHI]$, inscrito numa circunferência de centro na origem do referencial e raio igual a 2. Os vértices desse polígono são as imagens geométricas das raízes de índice 5 de um certo número complexo; um dos vértices pertence ao eixo real.

Qual é o vértice do polígono $[EFGHI]$ que é a imagem geométrica de $2e^{i\left(-\frac{3\pi}{5}\right)}$?

(A) E **(B)** F **(C)** H **(D)** I



Exame – 2008, Ép. especial

30. Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, considere $z_1 = 1 - i$ (i designa a unidade imaginária).
Considere z_1 uma das raízes quartas de um certo número complexo z.
Determine uma outra raiz quarta de z, cuja imagem geométrica é um ponto pertencente ao 3.º quadrante.
Apresente o resultado na forma trigonométrica.

Exame – 2008, 2.ª Fase

31. Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, considere $z_1 = 1 - \sqrt{3}i$ e $z_2 = 8e^{i\times 0}$ (i designa a unidade imaginária).
Mostre, **sem recorrer à calculadora**, que $(-z_1)$ é uma raiz cúbica de z_2.

Exame – 2008, 1.ª Fase

32. Qual das opções seguintes apresenta duas raízes quadradas de um mesmo número complexo?

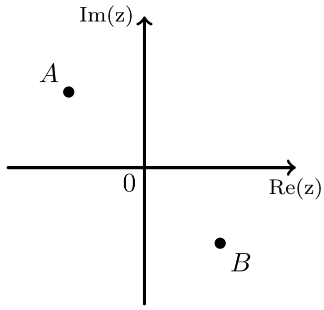
(A) 1 e i **(B)** -1 e i **(C)** $1-i$ e $1+i$ **(D)** $1-i$ e $-1+i$

Exame – 2007, 1.ª Fase

33. Os pontos A e B, representados na figura ao lado, são as imagens geométricas, no plano complexo, das raízes quadradas de um certo número complexo z.

Qual dos números complexos seguintes pode ser z?

(A) 1 **(B)** i **(C)** -1 **(D)** $-i$



Exame – 2006, 1.ª Fase

34. Seja $\mathbb{C}$ o conjunto dos números complexos; i designa a unidade imaginária.

Sem recorrer à calculadora, determine $\dfrac{4+2i\left(e^{i\left(\frac{\pi}{6}\right)}\right)^6}{3+i}$

apresentando o resultado final na forma trigonométrica.

Exame – 2006, 1.ª Fase

35. Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, considere $z_1 = e^{i\left(\frac{\pi}{6}\right)}$

Sem utilizar a calculadora, determine o valor de $\dfrac{\left[i \times (z_1)^6 - 1\right]^2}{i}$

Apresentando o resultado na forma algébrica.

Exame – 2005, Ép. especial

36. Em qual das opções seguintes estão duas raízes cúbicas de um mesmo número complexo?

(A) $e^{i\left(\frac{\pi}{6}\right)}$ e $e^{i\left(\frac{5\pi}{6}\right)}$ **(B)** $e^{i\left(\frac{\pi}{3}\right)}$ e $e^{i\left(\frac{2\pi}{3}\right)}$ **(C)** $e^{i\left(\frac{\pi}{4}\right)}$ e $e^{i\left(\frac{3\pi}{4}\right)}$ **(D)** $e^{i\left(\frac{\pi}{2}\right)}$ e $e^{i\left(\frac{3\pi}{2}\right)}$

Exame – 2005, 2.ª fase

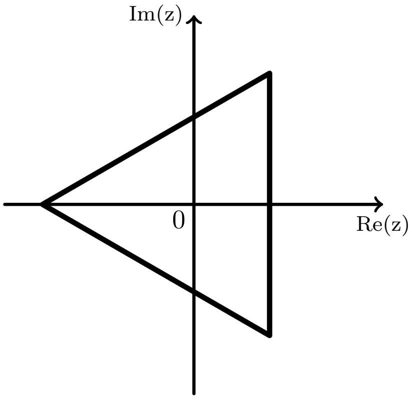
37. Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, considere $z_1 = 2e^{i\left(\frac{\pi}{4}\right)}$ e $z_2 = 2i$.
Sejam P_1 e P_2 as imagens geométricas, no plano complexo, de z_1 e z_2, respetivamente.
Sabe-se que o segmento de reta $[P_1P_2]$ é um dos lados do polígono cujos vértices são as imagens geométricas das raízes de índice n de um certo número complexo w.
Qual é o valor de n?

(A) 4 **(B)** 6 **(C)** 8 **(D)** 10

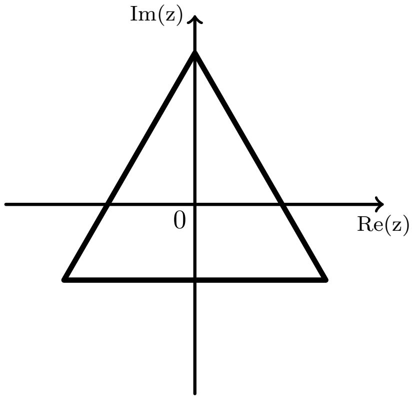
Exame – 2005, 1.ª Fase

38. Um número complexo w tem a sua imagem geométrica na parte positiva do eixo imaginário.
As imagens geométricas das raízes cúbicas de w são os vértices de um dos triângulos abaixo representados.
Qual é esse triângulo?

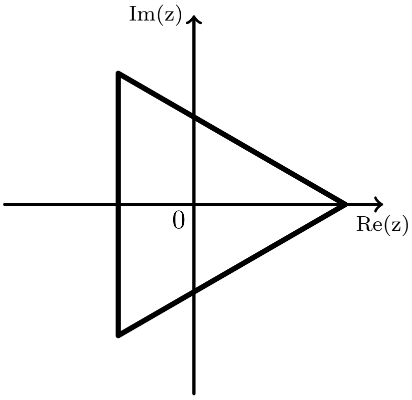
(A)



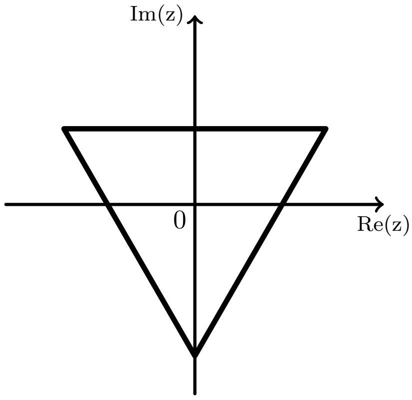
(B)



(C)



(D)



Exame – 2004, Ép. especial

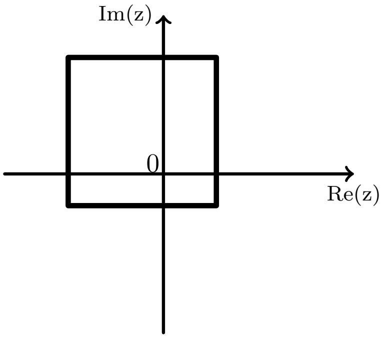
39. De dois números complexos, z_1 e z_2, sabe-se que um argumento de z_1 é $\frac{\pi}{4}$ e que o módulo de z_2 é $3\sqrt{2}$.

Sem recorrer à calculadora, determine $\frac{z_2 \times \overline{z_2}}{9} + \left(\frac{z_1}{|z_1|}\right)^8$

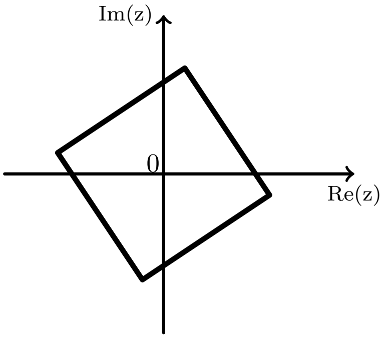
Exame – 2004, Ép. especial

40. Os quatro vértices de um dos quadriláteros seguintes são as imagens geométricas, no plano complexo, das raízes quartas de um certo número complexo w.
Qual poderá ser esse quadrilátero?

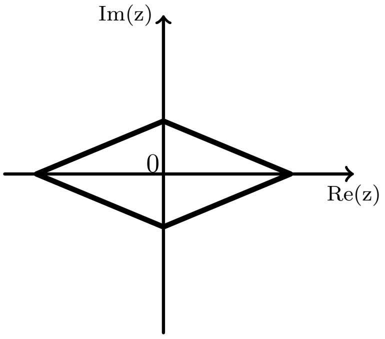
(A)



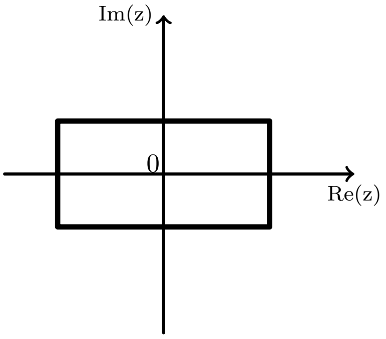
(B)



(C)



(D)



Exame – 2004, 2.ª Fase

41. Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, considere $w = 1 + 2i$ Sabendo que w é uma raiz quarta de um certo número complexo z, determine, **sem recorrer à calculadora**, as restantes raízes quartas de z.

Exame – 2003, Prova para militares

42.
- $\mathbb{C}$ é conjunto dos números complexos
- i designa a unidade imaginária

Sem recorrer à calculadora, calcule, na forma trigonométrica, as raízes quartas do número complexo $1 + \sqrt{3}i$, simplificando o mais possível as expressões obtidas.

Exame – 2003, 2.ª Fase

43. $\mathbb{C}$ é o conjunto dos números complexos; i designa a unidade imaginária.

43.1. **Sem recorrer à calculadora**, determine $\dfrac{\left(\sqrt{3}-2i\right)^2 + \left(2e^{i\left(\frac{\pi}{9}\right)}\right)^3}{e^{i\left(\frac{3\pi}{2}\right)}}$ apresentando o resultado na forma algébrica.

43.2. Seja α um número real.
Sejam z_1 e z_2 dois números complexos tais que:
- $z_1 = e^{i\alpha}$
- $z_2 = e^{i(\alpha+\pi)}$

Mostre que z_1 e z_2 não podem ser ambos raízes cúbicas de um mesmo número complexo.

Exame – 2003, 1.ª fase - 2.ª chamada

44. Seja w um número complexo diferente de zero, cuja imagem geométrica pertence à bissetriz dos quadrantes ímpares.
A imagem geométrica de w^4 pertence a uma das retas a seguir indicadas.
A qual delas?

(A) Eixo real

(B) Eixo imaginário

(C) Bissetriz dos quadrantes pares

(D) Bissetriz dos quadrantes ímpares

Exame – 2003, 1.ª fase - 1.ª chamada

45. Seja w um número complexo cuja representação geométrica pertence à parte negativa do eixo real.
As representações geométricas das raízes quadradas de w pertencem a uma das retas abaixo indicadas.
A qual delas?

(A) Eixo real

(B) Eixo imaginário

(C) Bissetriz dos quadrantes pares

(D) Bissetriz dos quadrantes ímpares

Exame – 2002, Prova para militares

46. De dois números complexos z_1 e z_2 sabe-se que:

- um argumento de z_1 é $\dfrac{\pi}{3}$
- o módulo de z_2 é 4

z_1 e z_2 são duas das raízes quartas de um certo número complexo z.
Sabendo que, no plano complexo, a imagem geométrica de z_2 pertence ao segundo quadrante, determine z_2 na forma algébrica.

Exame – 2002, 1.ª fase - 2.ª chamada

47. Em $\mathbb{C}$, considere os números complexos: $z_1 = 1 + i$ e $z_2 = \sqrt{2}e^{i\left(\frac{3\pi}{4}\right)}$

Verifique que z_1 e z_2 são raízes quartas de um mesmo número complexo.
Determine esse número, apresentando-o na forma algébrica.

Exame – 2002, 1.ª fase - 1.ª chamada

48. Qual dos seguintes números complexos tem a sua imagem geométrica no interior do círculo de centro na origem e de raio 1?

(A) $\left(\dfrac{1}{2}e^{i\left(\frac{\pi}{7}\right)}\right)^3$ **(B)** $\left(2e^{i\left(\frac{\pi}{7}\right)}\right)^3$ **(C)** $1 + i$ **(D)** $2i$

Exame – 2001, Prova para militares

49. Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, considere:

$$z_1 = \rho e^{i\left(\frac{\pi}{3}\right)} \qquad \rho \in (\mathbb{R}^+)$$

Determine, na forma trigonométrica, as raízes quadradas de $\dfrac{z_1}{|z_1|}$

Exame – 2001, Prova para militares

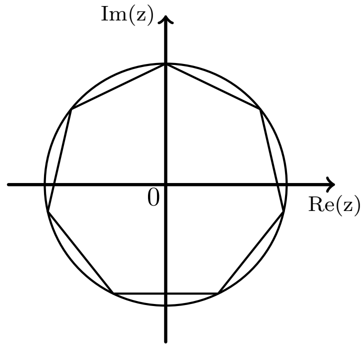
50. Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, considere

$$w = 2 + i \qquad (i \text{ designa a unidade imaginária}).$$

Determine $(w-2)^{11}(1+3i)^2$ na forma algébrica.

Exame – 2001, 2.ª fase

51. Na figura ao lado está representado, no plano complexo,um heptágono regular inscrito numa circunferência de centro na origem e raio 1. Um dos vértices do heptágono pertence ao eixo imaginário.



Os vértices do heptágono são, para um certo número natural n, as imagens geométricas das raízes de índice n de um número complexo z.

Qual é o valor de z ?

(A) $1+i$ **(B)** $1-i$ **(C)** i **(D)** $-i$

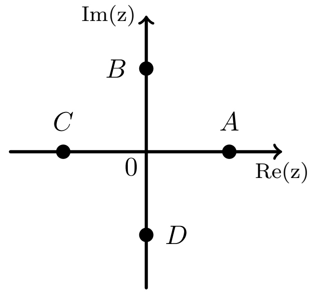
Exame – 2001, 1.ª fase - 2.ª chamada

52. Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, seja $z_1 = 2e^{i\left(\frac{\pi}{3}\right)}$

Sem recorrer à calculadora, verifique $\dfrac{z_1^3+2}{i}$ é um imaginário puro.

Exame – 2001, 1.ª fase - 1.ª chamada

53. Seja $z = yi$, com $y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, um número complexo ($i$ designa a unidade imaginária).



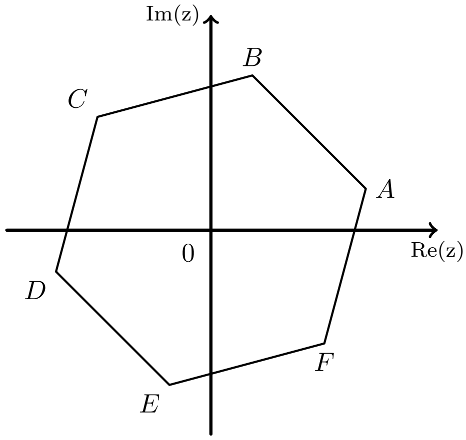
Qual dos quatro pontos representados na figura ao lado (A, B, C ou D) pode ser a imagem geométrica de z^4 ?

(A) O ponto A **(B)** O ponto B

(C) O ponto C **(D)** O ponto D

Exame – 2001, Prova modelo

54. Na figura ao lado está representado um hexágono cujos vértices são as imagens geométricas, no plano complexo, das raízes de índice 6 de um certo número complexo.



O vértice C é a imagem geométrica do número complexo $\sqrt{2}e^{i\left(\frac{3\pi}{4}\right)}$

Qual dos seguintes números complexos tem por imagem geométrica o vértice D ?

(A) $\sqrt{2}e^{i\left(\frac{7\pi}{6}\right)}$ **(B)** $\sqrt{2}e^{i\left(\frac{13\pi}{12}\right)}$

(C) $\sqrt[6]{2}e^{i\left(\frac{7\pi}{6}\right)}$ **(D)** $\sqrt[6]{2}e^{i\left(\frac{13\pi}{12}\right)}$

Exame – 2000, 1.ª fase - 1.ª chamada