Tema 2 – Funções, sequências e sucessões

Funções. Funções afins

Praticar – páginas 34 a 39

1.

1.1. As correspondências que são funções são as correspondências A e B. Nestas correspondências, a cada elemento do conjunto de partida corresponde um e um só elemento do conjunto de chegada.

1.2. Correspondência A

$D = \{1, 2, 3\}$

$D' = \{2, 3, 4\}$

Conjunto de chegada = $\{2, 3, 4\}$

Correspondência B

$D = \{1, 2, 4\}$

$D' = \{3\}$

Conjunto de chegada = $\{3, 5, 6\}$

2.

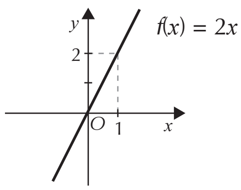
2.1. $f(-2) = 2 \times (-2) = -4$

2.2. $f(x) = 64 \Leftrightarrow 2x = 64 \Leftrightarrow x = \frac{64}{2} \Leftrightarrow x = 32$

O objeto que, por f, tem imagem 64 é o 32.

2.3.

x	$y = 2x$
0	0
1	2
2	4
–1	–2



2.4. $(f + h)(0) = f(0) + h(0) =$
$= 0 + 11 =$
$= 11$

Cálculo auxiliar

$f(0) = 2 \times 0 = 0$

3. As opções [B] e [D] não são as corretas porque não são funções de proporcionalidade direta.

A opção [A] não é a correta porque $f(3) = \frac{3}{4}$.

Logo a opção correta é a [C] ($f(3) = 4 \times 3 = 12$).

4.

4.1. $A(2, 2)$, $B(3, 4)$ e $C(0, 1)$.

4.2. A reta r é paralela à reta s, pelo que r e s têm o mesmo declive ($a_r = a_s$).

$a_r = a_s = \frac{4-2}{3-2} = 2$

A ordenada na origem da reta r é 1 (por observação do gráfico).

Então, uma equação da reta r é $y = 2x + 1$.

5. Uma reta paralela à reta $x = 12$ é da forma $x = a$, $a \in \mathbb{R}$. Como a reta passa no ponto $(-3, 14)$, então a sua equação é $x = -3$.

6.

6.1. Como as retas r e s são paralelas, têm o mesmo declive. Logo, o declive da reta s é 4.

6.2. O declive da reta s é 4 (por 6.1) e a ordenada na origem da reta s é 17. Então, uma equação da reta s é $y = 4x + 17$.

6.3. Sabe-se que 4 é o declive da reta r.

Então, $y = 4x + b$.

Como o ponto $(0, 5)$ pertence à reta r, então:

$5 = 4 \times 0 + b \Leftrightarrow 5 = 0 + b$
$\Leftrightarrow 5 = b$

Logo, uma equação da reta r é $y = 4x + 5$.

7. A reta $y = -2x + 1$ tem ordenada na origem 1. Assim, as opções [C] e [D] não são corretas. Por outro lado, a reta tem declive negativo, logo a opção correta é a [B].

8.

8.1. a) A constante de proporcionalidade é 243.

b) A constante de proporcionalidade representa, no contexto da situação, o custo de produção de cada relógio daquele modelo.

8.2. a) Custo de produção de cada relógio: 243 €

Custo de venda de cada relógio: 486 €.

18 000 € : 486 € ≈ 37

R.: O cliente poderá comprar 37 relógios.

b) O custo dos oito relógios, para o sr. José, é
8 × 486 € = 3888 €.

Como o sr. José pretende obter 5432 € de lucro bruto, terá de conseguir obter, com as vendas
5432 € + 3888 € = 9320 €.

Assim, cada relógio deve ter um preço de venda ao público de 9320 € : 8 = 1165 €.

9.

9.1. Como a reta tem declive 4, logo: $y = 4x + b$.

Por outro lado, sabe-se que a reta passa em $(2, 6)$.

$6 = 4 \times 2 + b \Leftrightarrow b = 6 - 8$
$\Leftrightarrow b = -2$

Então, uma equação da reta é $y = 4x - 2$.

9.2. Sabe-se que a reta é paralela a $y = -3x + 3$. Como retas paralelas têm o mesmo declive, então: $y = -3x + b$.

Por outro lado, sabe-se que a reta passa na origem do referencial, então:
$0 = -3 \times 0 + b \Leftrightarrow b = 0$
Logo, uma equação da reta é $y = -3x$.
9.3. Como a reta passa nos pontos (–1, 4) e (2, –5), temos:
$m = \frac{-5-4}{2-(-1)} = \frac{-9}{3} = -3$.
Então, $y = -3x + b$.
Logo, como passa em (–1, 4), temos:
$4 = -3 \times (-1) + b \Leftrightarrow 4 = 3 + b$
$\Leftrightarrow 1 = b$
Então, uma equação da reta é $y = -3x + 1$.

10.
10.1. Como o ponto (1, –6) pertence ao gráfico de f, temos:
$-6 = 6 \times 1 + (s - 5) \Leftrightarrow -6 = 6 + s - 5$
$\Leftrightarrow -6 - 6 + 5 = s$
$\Leftrightarrow -7 = s$
10.2. Como a ordenada na origem é 5, então
$s - 5 = 5 \Leftrightarrow s = 10$.

11.
11.1. $n = 100$
$P(100) = -0,1 \times 100 + 50 = 40$
R.: O bilhete custa 40 €.
11.2. $n = 250$
$P(250) = -0,1 \times 250 + 50 = -25 + 50 = 25$
Se a sala encher, cada bilhete custa 25 €, pelo que a receita arrecadada com o espetáculo é 6250 €
(25 × 250 € = 6250 €).

12. A reta passa em (1, 1). Logo:
$1 = -2 \times 1 + b \Leftrightarrow 1 = -2 + b$
$\Leftrightarrow 3 = b$
Então, $b = 3$.

13.
13.1. $f(x) = 1 - \frac{1}{5}(x + 5) =$
$= 1 - \frac{1}{5}x - \frac{1}{5} \times 5 =$
$= 1 - \frac{1}{5}x - 1 =$
$= -\frac{1}{5}x$
Então, $f(x) = -\frac{1}{5}x$ é uma função linear, pois é da forma $y = ax$, com $a \in \mathbb{R}$.

$g(x) = \frac{3}{2}x - 3\left(\frac{x}{2} - 1\right) =$
$= \frac{3}{2}x - \frac{3}{2}x + 3 =$
$= 3$
Então, $g(x) = 3$ é uma função constante, pois é da forma $y = a$, com $a \in \mathbb{R}$.
Logo, a afirmação é verdadeira.

13.2. a) Como $f(x) = -\frac{1}{5}x$ e $g(x) = 3$ (por 13.1), então:
$f(-1) = -\frac{1}{5} \times (-1) = \frac{1}{5}$
$g(-1) = 3$
Assim, $(f + g)(-1) = f(-1) + g(-1) =$
$= \frac{1}{5} + 3 = \frac{1}{5} + \frac{15}{5} = \frac{16}{5}$

b) Como $f(x) = -\frac{1}{5}x$ e $g(x) = 3$ (por 13.1), então:
$f\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{5} \times \frac{1}{2} = -\frac{1}{10}$
$g\left(\frac{1}{2}\right) = 3$
Assim, $(f \times g)\left(\frac{1}{2}\right) = f\left(\frac{1}{2}\right) \times g\left(\frac{1}{2}\right) =$
$= -\frac{1}{10} \times 3 =$
$= -\frac{3}{10}$

14.
14.1. Uma reta vertical é da forma $x = a$, com $a \in \mathbb{R}$. Assim, os pontos A e B não definem uma reta vertical pois não têm a mesma abcissa.
14.2. $m = \frac{-4-12}{2-(-6)} = \frac{-16}{8} = -2$
Então:
$y = -2x + b$
Como o ponto (2, –4) pertence à reta temos:
$-4 = -2 \times 2 \ b \Leftrightarrow -4 = -4 + b \Leftrightarrow b = 0$
Logo, o declive da reta que contém os pontos A e B é –2 e a ordenada na origem é 0.
14.3. Se AP é uma reta vertical, A e P têm a mesma abcissa (–6). Logo, como a ordenada de P é 700, temos que as coordenadas de P são (–6, 700).
14.4. Como as retas t e AB são paralelas, têm o mesmo declive.
Em 14.2 vimos que o declive da reta AB é –2.

Como a reta t passa na origem do referencial, a sua ordenada na origem é 0. Logo, uma equação da reta t é $y = -2x$.

15.
15.1. $f(x) = 2x$
15.2. $f(x) = 10$
15.3. $f(x) = x + 5$

16.
16.1. $c(n) = 60 + 30n$
16.2. 20 € + 10 × 35 € = 20 € + 350 € = 370 €.
R.: O Mário pagou 370 €.
16.3. Para que o seguro Saúde Mais compense mais do que o seguro Saúde Plus é necessário que:
$20 + 35n > 60 + 30n$.

$$\begin{aligned} 20 + 35n > 60 + 30n &\Leftrightarrow 35n - 30n > 60 - 20 \\ &\Leftrightarrow 5n > 40 \\ &\Leftrightarrow n > 8 \end{aligned}$$

Será necessário marcar, pelo menos, nove consultas num mês, para que o seguro Saúde Mais compense.

17.
17.1.
$$\begin{aligned} f(2) + 3 \times g(-1) &= 12 \times 2 + 3 \times (-6 \times (-1)) = \\ &= 24 + 3 \times 6 = \\ &= 24 + 18 = \\ &= 42 \end{aligned}$$

17.2.
$$\begin{aligned} (f + g)(x) &= f(x) + g(x) = \\ &= 12x + (-6x) = \\ &= 6x \end{aligned}$$

Assim, como $f + g$ é do tipo $y = ax$, como $a \in \mathbb{R}$, podemos concluir que $f + g$ é uma função linear e a sua forma canónica é $(f + g)(x) = 6x$.

17.3.
$$\begin{aligned} (f - g)(-3) &= f(-3) - g(-3) = \\ &= 12 \times (-3) - (-6 \times (-3)) = \\ &= -36 - (+18) = \\ &= -36 - 18 = \\ &= -54 \end{aligned}$$

17.4. $h(x) = 7$
$$\begin{aligned} (h \times f)(x) &= h(x) \times f(x) = \\ &= 7 \times 12x = \\ &= 84x \end{aligned}$$

Assim, como $h \times f$ é do tipo $y = ax$, com $a \in \mathbb{R}$, podemos concluir que $h \times f$ é uma função linear e a sua forma canónica é $(h \times f)(x) = 84x$.

17.5.
$$\begin{aligned} (f + j)(x) &= f(x) + j(x) = \\ &= 12x + (-x + 1) = \\ &= 11x + 1 \end{aligned}$$

Logo, como $f + j$ é do tipo $y = ax + b$, podemos concluir que $f + j$ é uma função afim e a sua forma canónica é $(f + j)(x) = 11x + 1$.

18.
18.1. • c representa a função f pois tem a maior ordenada na origem.
• a representa a função g pois tem ordenada na origem 0.
• Logo, b representa a função h.
18.2. Como as retas são paralelas têm o mesmo declive.
Assim, $h(x) = 2x + b$.
Como a reta passa em (2, 2):
$$\begin{aligned} 2 = 2 \times 2 + b &\Leftrightarrow 2 = 4 + b \\ &\Leftrightarrow b = -2 \end{aligned}$$
Logo, $h(x) = 2x - 2$.
18.3. $f(x) = 2x + 4$
$g(x) = 2x$
$h(x) = 2x - 2$
$$\begin{aligned} \text{Assim, } f(0) - 3 \times g(1) &= 2 \times 0 + 4 - 3 \times (2 \times 1) = \\ &= 0 + 4 - 6 = \\ &= -2 \end{aligned}$$

19. A função g é representada por uma reta com declive 1 e ordenada na origem -2.
Como $m > 0$, a função g é crescente.
Logo, a opção correta é a [A].

20.
20.1.
$$\begin{aligned} (f + g)(-1) &= f(-1) + g(-1) = \\ &= -2 + \frac{1}{2} = \\ &= -\frac{3}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (f + g)\left(\frac{1}{2}\right) &= f\left(\frac{1}{2}\right) + g\left(\frac{1}{2}\right) = \\ &= -1 + \left(-\frac{1}{4}\right) = \\ &= -\frac{5}{4} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (f + g)(3) &= f(3) + g(3) = \\ &= 5 + \left(-\frac{3}{2}\right) = \\ &= \frac{7}{2} \end{aligned}$$

Logo, $D'_{f+g} = \left\{-\frac{3}{2}, -\frac{5}{4}, \frac{7}{2}\right\}$.

20.2. $(f \times g)\left(\frac{1}{2}\right) = f\left(\frac{1}{2}\right) \times g\left(\frac{1}{2}\right) =$

$= -1 \times \left(-\frac{1}{4}\right) =$

$= \frac{1}{4}$

Logo, a opção correta é a [D].

20.3. $[f(-1)]^2 + \left|g\left(\frac{1}{2}\right)\right| = (-2)^2 + \left|-\frac{1}{4}\right| =$

$= 4 + \frac{1}{4} =$

$= \frac{17}{4}$

21.

21.1. $\frac{8}{2} = 4$

R.: O polígono regular é um quadrado.

21.2. O ponto (10, 30) não pode pertencer ao gráfico da função f, pois $\frac{30}{10} = 3$ e $3 \neq 4$.

21.3. $f(x) = 4 \times x$

21.4. $f(30) = 4 \times 30 = 120$

Significa que o perímetro de um quadrado de lado 30 é 120.

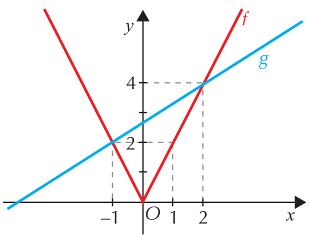
21.5. Como $f(x) = 4x$, temos $4x = 48 \Leftrightarrow x = \frac{48}{4} = 12$

R.: O objeto é 12.

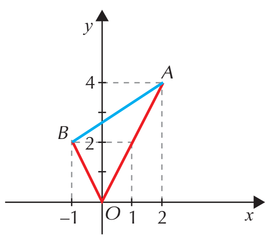
22.

22.1.

x	$y = \frac{2}{3}x + \frac{8}{3}$
2	4
–1	2



22.2.



Sabe-se que $A(2, 4)$, $B(-1, 2)$ e $O(0, 0)$.

Consideremos os pontos $C(-1, 4)$, $D(-1, 0)$ e $E(2, 0)$.

Para calcular a área do triângulo [ABO] basta calcular a área do retângulo [$DEAC$] e subtrair-lhe a área dos triângulos [OEA], [ACB] e [DOB].

$A_{[AOB]} = A_{[ACDE]} - (A_{[OEA]} + A_{[ACB]} + A_{[BDO]}) =$

$= 3 \times 4 - \left(\frac{2 \times 4}{2} + \frac{3 \times 2}{2} + \frac{1 \times 2}{2}\right) =$

$= 12 - (4 + 3 + 1) =$

$= 12 - 8 =$

$= 4$

R.: A área do triângulo [ABO] é 4 u.a.

23.

23.1. Na 2.ª modalidade:

Número de quilómetros percorridos	1	2	3	(…)
Preço a pagar (em euros)	104	108	112	(…)

$\frac{104}{1} = 104$

$\frac{108}{2} = 54$

$\frac{112}{3} \approx 37{,}3$

(…)

Na 2.ª modalidade, o preço a pagar pelo cliente não é diretamente proporcional ao número de quilómetros percorridos porque, como mostram os cálculos anteriores, a razão entre os valores correspondentes das duas grandezas, tomados pela mesma ordem, não é constante.

23.2. A opção correta é a [D].

23.3. 1.ª modalide: 30×5 € = 150 €

2.ª modalidade: 100 € + 4×30 = 100 € + 120 € =

= 220 €

Como o restaurante fica a 30 km, a 1.ª modalidade é financeiramente mais compensatória.

23.4. Seja n o número de quilómetros percorridos.

Preço a pagar na 1.ª modalidade: $5 \times n$

Preço a pagar na 2.ª modalidade: $100 + 4 \times n$

Para que a 2.ª modalidade compense:

$100 + 4n < 5n \Leftrightarrow 100 < n$

Ou seja, o número mínimo de quilómetros a partir do qual deixa de compensar financeiramente a 1.ª modalidade é 101.

24. $(f + d)(1) = f(1) + d(1) =$

$= |-1 + 2| + \frac{1 + 1}{2} =$

$= |1| + 1 =$

$= 1 + 1 =$

$= 2$

$(f+d)(2) = f(2) + d(2) =$

$= |-2+2| + \frac{2+1}{2} =$

$= |0| + \frac{3}{2} =$

$= 0 + \frac{3}{2} =$

$= \frac{3}{2}$

$(f+d)(3) = f(3) + d(3) =$

$= |-3+2| + \frac{3+1}{2} =$

$= |-1| + 2 =$

$= 1 + 2 =$

$= 3$

$(f+d)(4) = f(4) + d(4) =$

$= |-4+2| + \frac{4+1}{2} =$

$= |-2| + \frac{5}{2} =$

$= 2 + \frac{5}{2} =$

$= \frac{9}{2}$

Logo, $D'_{f+d} = \left\{\frac{3}{2}, 2, 3, \frac{9}{2}\right\}$.

Funções algébricas – páginas 42 a 47

1. Duas grandezas são diretamente proporcionais se a razão entre os valores correspondentes das duas, tomados pela mesma ordem, for constante e não nula.
Logo, a opção correta é a [A].

2. Duas grandezas são inversamente proporcionais se o produto dos valores correspondentes das duas for constante e não nulo.
Logo a opção correta é a [C].

3.

3.1. Como x e y são inversamente proporcionais o produto dos valores correspondentes é constante.

$4 \times 12 = 1 \times a \Leftrightarrow a = \frac{4 \times 12}{1}$

$\Leftrightarrow a = 48$

$4 \times 12 = b \times 24 \Leftrightarrow b = \frac{4 \times 12}{24}$

$\Leftrightarrow b = 2$

$4 \times 12 = c \times 40 \Leftrightarrow c = \frac{4 \times 12}{40}$

$\Leftrightarrow c = \frac{48}{40}$

$\Leftrightarrow c = \frac{6}{5}$

$4 \times 12 = 8 \times d \Leftrightarrow d = \frac{4 \times 12}{8}$

$\Leftrightarrow d = \frac{48}{8}$

$\Leftrightarrow d = 6$

3.2. Como x e y são diretamente proporcionais, o quociente entre os valores correspondentes das duas grandezas, tomados pela mesma ordem, é constante.

$\frac{12}{4} = \frac{a}{1} \Leftrightarrow a = \frac{12 \times 1}{4}$

$\Leftrightarrow a = \frac{12}{4}$

$\Leftrightarrow a = 3$

$\frac{12}{4} = \frac{24}{b} \Leftrightarrow b = \frac{4 \times 12}{12}$

$\Leftrightarrow b = 8$

$\frac{12}{4} = \frac{40}{c} \Leftrightarrow c = \frac{4 \times 40}{12}$

$\Leftrightarrow c = \frac{40}{3}$

$\frac{12}{4} = \frac{d}{8} \Leftrightarrow d = \frac{8 \times 12}{4}$

$\Leftrightarrow d = 24$

4. Como $2 \times 3 = 6$, então 6 é a constante de proporcionalidade.

Logo, $y = \frac{6}{x}$ e, portanto, a opção correta é a [B].

5.

5.1. As grandezas são diretamente proporcionais e a constante de proporcionalidade é $k = \frac{300}{1} = 300$.

$7 \times 300 = 2100$
R.: O automóvel percorrerá 2100 km.

5.2. 300 km ———— 1 ℓ
750 km ———— x ℓ

$x = \dfrac{750 \text{ km} \times 1 \ \ell}{300 \text{ km}} = 2{,}5 \ \ell$

R.: São necessários 2,5 ℓ de combustível.

6. 80 elementos (100 – 20 = 80) do grupo de escuteiros vão acampar.

Número de elementos	100	80
Número de dias	8	x

Trata-se de uma situação de proporcionalidade inversa. Então:

$100 \times 8 = 80 \times x \Leftrightarrow x = \dfrac{100 \times 8}{80}$

$\Leftrightarrow x = 10$

Com a mesma quantidade de comida os restantes elementos podem ficar acampados mais dois dias (10 – 8 = 2).

7. Como o caudal e o tempo são grandezas inversamente proporcionais, o produto dos valores das duas grandezas é constante. Assim:

$10 \times 15 = a \times 20 = 30 \times b$

Logo:

$10 \times 15 = a \times 20 \Leftrightarrow a = \dfrac{10 \times 15}{20}$

$\Leftrightarrow a = 7{,}5$

$10 \times 15 = 30 \times b \Leftrightarrow b = \dfrac{10 \times 15}{30}$

$\Leftrightarrow b = 5$

8.

Volume (cm³)	600	
Pressão (mmHg)	378	

8.1. Como as grandezas são inversamente proporcionais, a constante de proporcionalidade é

$600 \times 378 = 226\,800$

Assim,

$V \times P = 226\,800 \Leftrightarrow V = \dfrac{226\,800}{P}$

8.2. Se $V = 700$ cm³, então

$700 = \dfrac{226\,800}{P} \Leftrightarrow P = \dfrac{226\,800}{700}$

$\Leftrightarrow P = 324$

R.: A um volume de 700 cm³ corresponde uma pressão de 324 mmHg.

8.3. Se $P = 2268$ mmHg, então

$V = \dfrac{226\,800}{2268} \Leftrightarrow V = 100$

R.: A uma pressão de 2268 mmHg corresponde um volume de 100 cm³.

9. A opção correta é a [B].

$f(1) = -4 \times 1^2 = -4$ e $-4 \neq 4$.

Logo, o ponto de coordenadas (1, 4) não pertence ao gráfico da função.

10.

10.1. A função que tem expressão analítica da forma $y = ax^2$ é a função f pois é a única cuja representação gráfica é uma parábola de vértice na origem.

10.2. O ponto de coordenadas (1, 2) pertence ao gráfico da função.

Assim, $2 \times 1^2 \Leftrightarrow a = 2$.

A opção correta é a [B].

11. $2^4 \times 1 = 4 \times 4 = \sqrt{100} \times 1{,}6 = 2 \times 8 = 16$

As grandezas a e b são inversamente proporcionais se o produto dos valores correspondentes das duas for constante e não nulo.

A opção correta é a [A].

12. A função representada é uma função quadrática, logo é da forma $y = ax^2$. Como o ponto $A(2, 8)$ pertence ao seu gráfico, temos:

$8 = a \times 2^2 \Leftrightarrow a = \dfrac{8}{4}$

$\Leftrightarrow a = 2$

Logo, a função é definida pela expressão $y = 2x^2$.

12.1. Como o ponto $B(1, k)$ pertence ao gráfico da função, temos:

$k = 2 \times 1^2 \Leftrightarrow k = 2 \times 1$

$\Leftrightarrow k = 2$

R.: A ordenada do ponto B é 2.

12.2. Como o ponto $C(w, 4)$ pertence ao gráfico da função, temos:

$4 = 2 \times w^2 \Leftrightarrow w^2 = \dfrac{4}{2}$

$\Leftrightarrow w^2 = 2$

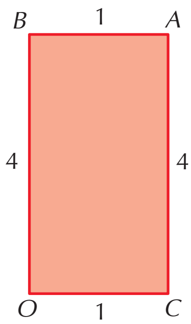
$\Leftrightarrow w = \pm\sqrt{2}$

Por observação da figura, sabe-se que C tem abcissa negativa. Logo, $w = -\sqrt{2}$.

R.: A abcissa do ponto C é $-\sqrt{2}$.

12.3. Se o gráfico é simétrico ao gráfico de f em relação ao eixo das abcissas, então $a = -2$.
Logo, a opção correta é a [D].

13.
13.1. Como o retângulo tem 10 unidades de perímetro e $\overline{OC} = 1$, temos:



Logo, a área do retângulo é $1 \times 4 = 4$ u.a.
13.2. Da alínea anterior, resulta que $A(1, 4)$.
Sabe-se que numa função de proporcionalidade inversa o produto da abcissa pela ordenada de qualquer ponto do seu gráfico é constante e igual à constante de proporcionalidade inversa.
Assim, como $1 \times 4 = 4$, temos que $g(x) = \frac{4}{x}$.

13.3. $g(2) = \frac{4}{2} = 2$
R.: A ordenada do ponto do gráfico de g que tem abcissa 2 é 2.

13.4. $g\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{4}{\frac{1}{2}} = 8$
Logo, $m = 8$.

14. Para reduzir em 20 dias o tempo de construção previsto, a escola deveria ser construída em 60 dias $(80 - 20 = 60)$.

Número de operários	60	a
Número de dias	80	60

Como as grandezas são inversamente proporcionais, o produto dos valores correspondentes das duas é constante.

Assim, $60 \times 80 = a \times 60 \Leftrightarrow a = \frac{60 \times 80}{60}$
$\Leftrightarrow a = 80$

Para construir a escola em 60 dias são necessários 80 trabalhadores, ou seja, mais 20 operários do que o inicialmente previsto.

15.
15.1. $k > 0$, pois a parábola tem a concavidade voltada para cima.
15.2. O ponto $A(-2, 2)$ pertence ao gráfico de f, definida por $y = k \times x^2$. Logo:

$$2 = k \times (-2)^2 \Leftrightarrow 2 = k \times 4$$
$$\Leftrightarrow k = \frac{1}{2}$$

15.3. Da alínea anterior, $f(x) = \frac{1}{2} \times x^2$. Assim:

$$f(4) - 2 \times f(0) = \frac{1}{2} \times 4^2 - 2 \times \frac{1}{2} \times 0^2 =$$
$$= \frac{1}{2} \times 16 - 0 =$$
$$= 8$$

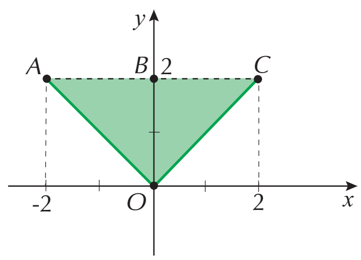
15.4. A função g é da forma $y = \frac{m}{x}$.
Sabe-se que o ponto $A(-2, 2)$ pertence ao gráfico da função g. Assim:

$$2 = \frac{m}{-2} \Leftrightarrow m = -4$$

Temos, então, que $g(x) = -\frac{4}{x}$.
Como o ponto $B(-4, y)$ pertence ao gráfico de g, temos:

$$y = \frac{-4}{-4} \Leftrightarrow y = 1$$

Então, fica provado que a ordenada do ponto B é 1.
15.5. C é a imagem de A por meio de reflexão do eixo Oy. Assim, $C(2, 2)$.
Logo:



$$A_{[AOC]} = \frac{\overline{AC} \times \overline{OD}}{2}$$

$$A_{[AOC]} = \frac{4 \times 2}{2} = 4$$

R.: A área do triângulo $[AOC]$ é 4 u.a.

16.
16.1. g é uma função de proporcionalidade direta. Logo, é da forma $y = k \times x$.

Como o ponto $B(6,\ 3)$ pertence ao gráfico de g, temos:

$3 = k \times 6 \Leftrightarrow k = \frac{3}{6}$

$\Leftrightarrow k = \frac{1}{2}$

Logo, $g(x) = \frac{1}{2} \times x$

Assim, $g(4) = \frac{1}{2} \times 4 = 2$

16.2. • f é uma função de proporcionalidade inversa.

Logo, é da forma $y = \frac{k}{x}$.

• O ponto A pertence ao gráfico de g. Logo, $A(2,\ g(2))$.

Como $g(2) = \frac{1}{2} \times 2 = 1$, então $A(2,\ 1)$.

• Como A também pertence ao gráfico de f, temos:

$1 = \frac{k}{2} \Leftrightarrow k = 2 \times 1 = 2$

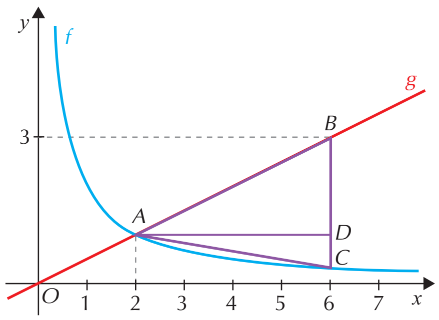
Então, $f(x) = \frac{2}{x}$.

A opção correta é a [C].

16.3. $f(6) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$.

Logo, $C\left(6,\ \frac{1}{3}\right)$.

Então:



$$A_{[ABC]} = \frac{\overline{CB} \times \overline{AD}}{2}$$

$$A_{[ABC]} = \frac{\left(3 - \frac{1}{3}\right) \times 4}{2} =$$

$$= \frac{8}{3} \times 2 =$$

$$= \frac{16}{3}$$

R.: A área do triângulo $[ABC]$ é $\frac{16}{3}$ u.a.

17.

17.1. $D_g = \mathbb{N}$

17.2.

s	1	2	c	5	10
g(s)	a	b	120º	d	36º

Como as grandezas "número de setores" e "amplitude de cada setor" são inversamente proporcionais, temos que:

$10 \times 36º = 1 \times a \Leftrightarrow a = 360º$

$10 \times 36º = 2 \times b \Leftrightarrow b = \frac{10 \times 36º}{2}$

$\Leftrightarrow b = 180º$

$10 \times 36º = c \times 120º \Leftrightarrow c = \frac{10 \times 36º}{120º}$

$\Leftrightarrow c = \frac{360º}{120º}$

$\Leftrightarrow c = 3$

$10 \times 36º = 5 \times d \Leftrightarrow d = \frac{10 \times 36º}{5}$

$\Leftrightarrow b = 72º$

Logo,

s	1	2	3	5	10
g(s)	360º	180º	120º	72º	36º

17.3. A constante é 360º e representa a amplitude do setor circular que corresponde ao círculo.

17.4. Como $k = 10 \times 36 = 360$, $g(s) = \frac{360}{s}$.

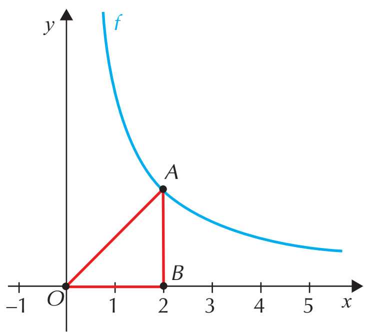
Logo, a opção correta é a [D].

18. O ponto $A(2,\ y)$ pertence ao gráfico de f.

Assim:

$y = \frac{4}{2} \Leftrightarrow y = 2$

Logo, $A(2,\ 2)$.



Como o triângulo $[AOB]$ é retângulo, podemos aplicar o teorema de Pitágoras. Assim:

$\overline{OA}^2 = 2^2 + 2^2 \Leftrightarrow \overline{OA}^2 = 8$
$\Leftrightarrow \overline{OA} = \pm\sqrt{8}$
Como $\overline{OA} > 0$, temos que $\overline{OA} = \sqrt{8}$.
$\overline{OA}$ é a medida do raio da circunferência de centro A, pelo que a área da circunferência é:
$A = \pi r^2 = \pi \times (\sqrt{8})^2 = 8\pi$.
Logo, a opção correta é a [A].

19. $f(x) = ax^2 - 2x^2 =$
$= x^2 \times (a - 2)$
Como a parábola que representa graficamente a função tem a concavidade voltada para cima, $a - 2 > 0$.
Logo, a opção correta é a [A].

20.
20.1. O ponto P tem a mesma abcissa do ponto A e a mesma ordenada do ponto C.
Logo, $P(2, y)$.
Como P pertence ao gráfico de f, temos:
$y = \frac{12}{2} \Leftrightarrow y = 6$.
Logo, a ordenada do ponto P é 6.
Consequentemente, a ordenada de C também é 6.
Logo, $C(0, 6)$.
20.2. Consideremos que o ponto Q tem coordenadas (a, b). Sabe-se que numa função de proporcionalidade inversa, o produto da abcissa pela ordenada de qualquer ponto do gráfico é constante e igual à constante de proporcionalidade inversa.
Assim, como $P(2, 6)$ pertence ao gráfico de f, a constante de proporcionalidade inversa é $2 \times 6 = 12$.
Como o triângulo $[OBQ]$ é retângulo em B, temos:
$$A_{[OBQ]} = \frac{\overline{OB} \times \overline{BQ}}{2} = \frac{a \times b}{2}$$
Como $Q(a, b)$ pertence ao gráfico de f, temos que $a \times b = 12$.
Logo, $A_{[OBQ]} = \frac{12}{2} = 6$.
R.: A área do triângulo $[OBQ]$ é 6 u.a.

21.
21.1. $a > 0$, pois a parábola que representa graficamente a função f tem a concavidade voltada para cima.
21.2. Como $\overline{AB} = 4$, a abcissa do ponto B é 2. Logo, $B(2, y)$.
Como B pertence ao gráfico de g, $y = g(2)$, ou seja,
$y = -2 \times 2^2 \Leftrightarrow y = -2 \times 4 \Leftrightarrow y = -8$
Logo, $B(2, -8)$.
21.3. • Como a área do retângulo é 96, temos que
$\overline{EB} \times \overline{AB} = 96 \Leftrightarrow \overline{EB} = \frac{96}{\overline{AB}}$, ou seja,
$\overline{EB} = \frac{96}{4} \Leftrightarrow \overline{EB} = 24$.

• Como a ordenada do ponto B é -8, podemos concluir que a ordenada do ponto E é $24 - 8 = 16$.

• Como os pontos E e B têm a mesma abcissa, pois $[EB]$ é paralelo ao eixo Oy, temos que a abcissa de E é 2. Logo, $E(2, 16)$.
• O ponto $E(2, 16)$ pertence ao gráfico da função f, assim:
$16 = a \times 2^2 \Leftrightarrow a = \frac{16}{4} \Leftrightarrow a = 4$.
Podemos então concluir que $a = 4$.

22.
22.1. A área de cada um dos triângulos é metade do produto da abcissa pela ordenada de cada um dos pontos F, C e D, respetivamente.
Como os pontos F, C e D pertencem todos ao gráfico da função f, o produto da abcissa pela ordenada de cada um deles é constante e igual à constante de proporcionalidade inversa da função.
Logo, todos os triângulos têm a mesma área e, portanto, a afirmação é verdadeira.
22.2. A área do triângulo $[ABC]$ é igual a metade do produto da abcissa pela ordenada de qualquer ponto do gráfico de f.
$\frac{x \times y}{2} = 15$
Logo, $x \times y = 30 \Leftrightarrow y = \frac{30}{x}$

Sequências e sucessões – páginas 50 a 55

1.
1.1. $a_1 = 3 \times 1 - \frac{1}{2} = 3 - \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$

$a_2 = 3 \times 2 - \frac{1}{2} = 6 - \frac{1}{2} = \frac{11}{2}$

$a_{10} = 3 \times 10 - \frac{1}{2} = 30 - \frac{1}{2} = \frac{59}{2}$

$a_{20} = 3 \times 20 - \frac{1}{2} = 60 - \frac{1}{2} = \frac{119}{2}$

Logo, a opção correta é a [B].

1.2. $a_1 - a_5 = 3 \times 1 - \frac{1}{2} - \left(3 \times 5 - \frac{1}{2}\right) =$

$= 3 - \frac{1}{2} - 15 + \frac{1}{2} =$

$= 3 - 15 =$

$= -12$

2.

2.1. 1.º termo: $4 \times 1^2 + 1 = 4 + 1 = 5$

2.º termo: $4 \times 2^2 + 1 = 4 \times 4 + 1 = 16 + 1 = 17$

Soma dos dois primeiros termos: $5 + 17 = 22$.

2.2. Termo de ordem 12:

$4 \times 12^2 + 1 = 4 \times 144 + 1 =$

$= 576 + 1 =$

$= 577$

2.3. O último termos é o termo de ordem 20.

Assim, $4 \times 20^2 + 1 = 4 \times 400 + 1 =$

$= 1600 + 1 =$

$= 1601$

3.

3.1. O quinto termo da sequência é 19.

3.2. $5 \quad 1 \xrightarrow{+6} 7 \xrightarrow{+6} 13 \xrightarrow{+6} 19 \xrightarrow{+6} 25 \xrightarrow{+6} 31 \xrightarrow{+6} 37 \xrightarrow{+6} 43$

Logo, 43 é o primeiro termo da sequência que é maior do que 40.

3.3. A opção correta é a [B].

4.

4.1. 2.º termo, 2.º termo, 4.º termo

$60 \xrightarrow{+10} 70 \xrightarrow{\times 2} 140 \xrightarrow{+10} 150 \xrightarrow{\times 2} 300$

O quarto termo é 300.

4.2. 2.º termo

$60 \xrightarrow{:2} 30 \xrightarrow{-10} 20$

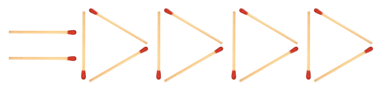
O primeiro termo da sequência é 20.

5. Cada termo, com exceção do primeiro, obtém-se do anterior adicionando 4 unidades.

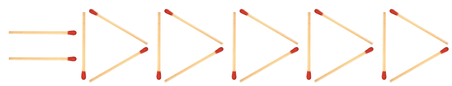
Logo, a opção correta é a [D].

6.

6.1.



4.º termo



5.º termo

6.2. O 1.º termo da sequência é composto por cinco fósforos. Cada um dos termos seguintes utiliza mais três fósforos do que o termo anterior. Assim, $3n + 2$ é uma expressão que permite gerar a sequência do número de fósforos de cada termo.

Logo, para construir o termo de ordem 40 são necessários $3 \times 40 + 2 = 120 + 2 = 122$ fósforos.

6.3. $3n + 2 = 103 \Leftrightarrow 3n = 103 - 2$

$\Leftrightarrow 3n = 101$

$\Leftrightarrow n = \frac{101}{3}$

Como $\frac{101}{3} \notin \mathbb{N}$, podemos concluir que não existe qualquer termo composto por 103 fósforos.

7.

7.1. $b_1 = \frac{5 \times 1 + 4}{2} = \frac{5 + 4}{2} = \frac{9}{2}$

$b_2 = \frac{5 \times 2 + 4}{2} = \frac{10 + 4}{2} = \frac{14}{2} = 7$

7.2. $\frac{5n + 4}{2} = \underset{(\times 2)}{\frac{127}{1}} \Leftrightarrow 5n + 4 = 254$

$\Leftrightarrow 5n = 250$

$\Leftrightarrow n = \frac{250}{5}$

$\Leftrightarrow n = 50$

R.: A sequência tem 50 termos.

8.

8.1. 1.º termo, 2.º termo, 3.º termo, 4.º termo, 5.º termo

$1 \xrightarrow{+4} 5 \xrightarrow{+4} 9 \xrightarrow{+4} 13 \xrightarrow{+4} 17$

6.º termo, 7.º termo, 8.º termo, 9.º termo, 10.º termo

$21 \xrightarrow{+4} 25 \xrightarrow{+4} 29 \xrightarrow{+4} 33 \xrightarrow{+4} 37$

Para construir o 10.º termo da sequência são necessários 37 pontos.

8.2. A expressão que representa a lei geradora da sequência de números de pontos é $4n - 3$.

Assim: $4n - 3 = 342 \Leftrightarrow 4n = 342 + 3$

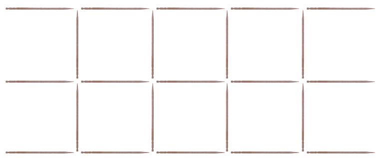
$\Leftrightarrow 4n = 345$

$\Leftrightarrow n = \dfrac{345}{4}$

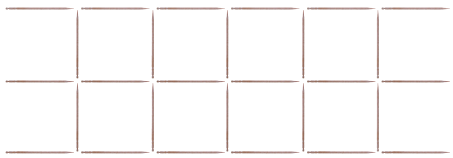
Como $\dfrac{345}{4} \notin \mathbb{N}$, podemos concluir que nenhum termo desta sequência é constituído por 342 pontos.

9.

9.1.



4.º termo



5.º termo

9.2. O termo geral da sequência do número de palitos é $5n + 3$.

Para construir o 10.º termo são necessários $5 \times 10 + 3 = 53$ palitos.

9.3. $5n + 3$

9.4. $5n + 3 = 153 \Leftrightarrow 5n = 150$

$\Leftrightarrow n = \dfrac{150}{5}$

$\Leftrightarrow n = 30$

R.: Trata-se do termo de ordem 30.

10. 500 → 625 → 781,25

$500 + 500 \times 0{,}25$ $\quad$ $625 + 625 \times 0{,}25$

Daqui a dois anos a vila terá 781 habitantes.

11.

11.1. $u_1 = 2 \times (1 - 2) + 1 = 2 \times (-1) + 1 = -2 + 1 = -1$

$u_2 = 2 \times (2 - 2) + 1 = 2 \times 0 + 1 = 1$

$u_3 = 2 \times (3 - 2) + 1 = 2 \times 1 + 1 = 2 + 1 = 3$

11.2. $u_{100} = 2 \times (100 - 2) + 1 =$

$= 2 \times 98 + 1 =$

$= 197$

11.3. $2(n - 2) + 1 = 150 \Leftrightarrow 2n - 4 + 1 = 150$

$\Leftrightarrow 2n - 4 + 1 = 150$

$\Leftrightarrow 2n = 153$

$\Leftrightarrow n = \dfrac{153}{2}$

Como $\dfrac{153}{2} \notin \mathbb{N}$ podemos concluir que 150 não é termo da sucessão.

11.4. $2(n - 2) + 1 = 149 \Leftrightarrow 2n - 4 + 1 = 149$

$\Leftrightarrow 2n = 149 + 4 - 1$

$\Leftrightarrow 2n = 152$

$\Leftrightarrow n = \dfrac{152}{2}$

$\Leftrightarrow n = 76$

Logo, 149 é o termo de ordem 76 da sucessão.

12.

12.1. 7.º termo $\xrightarrow{-5}$ 6.º termo

33 $\xleftarrow{+5}$ 38

R.: O sexto termo é 38.

12.1. é termo

48 $\xrightarrow{-5}$ 43 $\xrightarrow{-5}$ 38 $\xrightarrow{-5}$ 33 $\xrightarrow{-5}$ 28

é termo $\quad$ é termo

18 $\xrightarrow{-5}$ 13 $\xrightarrow{-5}$ 8 $\xrightarrow{-5}$ 3 $\xrightarrow{-5}$ –2

A opção correta é a [C], pois o 1.º termo é 63 e todos os termos seguintes são menores do que o primeiro.

13.

13.1. Tem um hexágono preto.

13.2. A expressão que permite calcular o número total de hexágonos é $6n + 1$.

13.3. O termo geral da sequência do número de hexágonos verdes é $6n$. Logo, o décimo sétimo termo tem 102 hexágonos verdes.

14.

14.1. Quadrados amarelos:

1.º termo	2.º termo	3.º termo		18.º termo
2	3	4	(…)	11

O termo geral da sequência do número de quadrados amarelos é $n + 1$. Logo, o termo de ordem 10 tem $10 + 1 = 11$ quadrados amarelos.

R.: O termo de ordem 10 tem 11 quadrados.

14.2. O termo geral da sequência do número de quadrados brancos é $2n - 1$. Logo, o termo de ordem 20 tem $2 \times 20 = 39$ quadrados brancos.
14.3. O termo geral da sequência do número total de quadrados é $3n$. Logo, o termo de ordem 6 tem $3 \times 6 = 18$ quadrados.
14.4. Se o termo é composto por 17 quadrados amarelos, então é o termo de ordem 16. O termo de ordem 16 tem $2 \times 16 - 1 = 31$ quadrados brancos.

14.5. $3n = 153 \Leftrightarrow n = \dfrac{153}{3}$

$\Leftrightarrow n = 51$

14.6. $2n - 1$

15.
15.1. Linha 7: 1 6 15 20 15 6 1
Linha 8: 1 7 21 35 35 21 7 1
15.2. Soma dos elementos da linha 1: $1 = 2^0$
Soma dos elementos da linha 2: $2 = 2^1$
Soma dos elementos da linha 3: $4 = 2^2$
Soma dos elementos da linha 4: $8 = 2^3$
Soma dos elementos da linha 5: $16 = 2^4$
Soma dos elementos da linha 6: $32 = 2^5$
15.3. 2^{10}

16.
16.1. O termo geral da sequência do número de bolas é $3n + 1$.
Assim, para construir o 9.º termo são necessárias $3 \times 9 + 1 = 28$ bolas.
16.2. O número de bolas brancas é igual à ordem da figura. Logo, como há 17 bolas brancas, a ordem da figura é 17.
O termo geral da sequência do número de bolas é $3n + 1$, sendo n a ordem do termo.
Logo, o 17.º termo tem $3 \times 17 + 1 = 52$ bolas, ou seja, são necessárias 52 bolas para construir o termo.
16.3. O termo geral da sequência do número de bolas é $3n + 1$, sendo n a ordem do termo.
Determinemos n tal que $3n + 1 = 151$.

$3n + 1 = 151 \Leftrightarrow 3n = 151 - 1$
$\Leftrightarrow 3n = 150$
$\Leftrightarrow n = 50$

Como o número de bolas brancas é igual à ordem da figura, o termo tem 50 bolas brancas e $151 - 50 = 101$ bolas pretas.

17.
17.1. 1.º termo: 144 cm^2
2.º termo: 72 cm^2
3.º termo: 36 cm^2
4.º termo: 18 cm^2
5.º termo: 9 cm^2
6.º termo: $\dfrac{9}{2}$ cm^2

17.2. $144 \xrightarrow{:2} 72 \xrightarrow{:2} 36 \xrightarrow{:2} 18$

Assim, a área do 4.º quadradao é 18 cm^2 e o seu lado mede $\sqrt{18}$ cm.
Logo, o termo de ordem 4 da sucessão (P_n) é $4\sqrt{18}$.

18.
18.1. Para construir o 4.º termo são necessários 42 quadrados.
Para construir o 5.º termo são necessários 56 quadrados.
18.2. 1.º termo: $3 \times 4 = 12$
2.º termo: $4 \times 5 = 20$
3.º termo: $5 \times 6 = 30$
4.º termo: $6 \times 7 = 42$
5.º termo: $7 \times 8 = 56$
6.º termo: $8 \times 9 = 72$
7.º termo: $9 \times 10 = 90$
8.º termo: $10 \times 11 = 110$
R.: O oitavo termo da sequência é constituído por 110 quadrados.
18.3. A opção correta é a [C].

19.
19.1. $1 \xrightarrow{+2} 3 \xrightarrow{+3} 6 \xrightarrow{+4} 10 \xrightarrow{+5} \mathbf{15} \xrightarrow{+6} \mathbf{21} \xrightarrow{+7} \mathbf{28} \xrightarrow{+8} \mathbf{36}, \ldots$

R.: 15, 21, 28 e 36.
19.2. Sabe-se que, por exemplo, $F_2 = 3$. Logo,

$\dfrac{2 \times (2 + 1)}{k} = 3 \Leftrightarrow \dfrac{2 \times 3}{k}$

$\Leftrightarrow k = 2$

19.3. Da alínea anterior, resulta que

$F_{17} = \dfrac{17 \times (17 + 1)}{2} = 153$

19.4. $F_{n+1} = \dfrac{(n+1)\times(n+1+1)}{2} =$

$= \dfrac{(n+1)\times(n+2)}{2} =$

$= \dfrac{n^2+2n+n+2}{2} =$

$= \dfrac{n^2+3n+2}{2}$

19.5. $F_n + F_{n+1} = \dfrac{n\times(n+1)}{2} + \dfrac{n^2+3n+2}{2} =$

$= \dfrac{n^2+n+n^2+3n+2}{2} =$

$= \dfrac{2n^2+4n+2}{2} =$

$= n^2+2n+1 =$

$= (n+1)^2$

19.6. Da alínea anterior resulta que

$F_n + F_{n+1} = (n+1)^2$

Então,

$(n+1)^2 = 3481 \Leftrightarrow n+1 = \pm\sqrt{3481}$

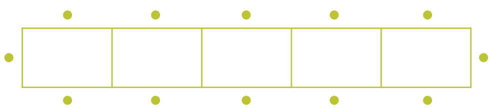
$\Leftrightarrow n+1 = \pm 59$

$\Leftrightarrow n = 58 \ \vee\ n = -60$

Como $n > 0$, $n = 58$. Logo, os termos consecutivos são os termos de ordem 58 e 59.

20.

20.1.



É possível sentar 12 clientes.

20.2. É possível sentar $2k+2$ pessoas.

20.3. Para sentar n pessoas são necessárias $\dfrac{n-2}{2}$ mesas.

21.

21.1. $T_{20} = \dfrac{1}{6}\times 20\times(20+1)\times(2\times 20+1) = 2870$

21.2. $T_{15} = \dfrac{1}{6}\times 15\times(15+1)\times(2\times 15+1) = 1240$

$T_{12} = \dfrac{1}{6}\times 12\times(12+1)\times(2\times 12+1) = 650$

$6\times(T_{15}-T_{12}) = 6\times(1240-650) =$

$= 3540$

21.3. $T_{34} = \dfrac{1}{6}\times 34\times(34+1)\times(2\times 34+1) = 13\,685$

21.4. $V_1 = T_2 - T_1 =$

$= 1^2+2^2-1^2 =$

$= 2^2 = 4$

$V_2 = T_3 - T_2 =$

$= 1^2+2^2+3^2-(1^2+2^2) =$

$= 3^2 = 9$

$V_3 = T_4 - T_3 =$

$= (1^2+2^2+3^2+4^2)-(1^2+2^2+3^2) =$

$= 4^2 =$

$= 16$

$V_4 = T_5 - T_4 =$

$= (1^2+2^2+3^2+4^2+5^2)-(1^2+2^2+3^2+4^2) =$

$= 5^2 =$

$= 25$

Logo, os quatro primeiros termos desta nova sequência são: 4, 9, 16, 25.

21.5. $V_3 - V_2 = T_4 - T_3 - (T_3 - T_2) =$

$= 1^2+2^2+3^2+4^2-(1^2+2^2+3^2)-$

$-(1^2+2^2+3^2)+1^2+2^2 =$

$= 4^2-3^2$

$V_3 - V_1 = T_4 - T_3 - (T_2 - T_1) =$

$= T_4 - T_3 - T_2 + T_1 =$

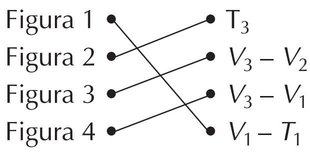
$= 1^2+2^2+3^2+4^2-1^2-2^2-3^2-1^2-2^2+1^2 =$

$= 4^2-2^2$

$V_1 - T_1 = T_2 - T_1 - T_1 =$

$= 1^2+2^2-1^2-1^2 =$

$= 2^2-1^2$



Praticar + – páginas 56 a 64

1.

1.1. $f(x) = 2(x-5) + \dfrac{x}{3} =$

$= \underset{(\times 3)}{\dfrac{2x}{1}} - 10 + \dfrac{x}{3} =$

$= \dfrac{6x}{3} - 10 + \dfrac{x}{3} =$

$= \dfrac{7x}{3} - 10$

$f(x)$ é uma função afim, pois é do tipo $y = ax + b$.

1.2. $f(x) = 2(x^2 - x) - 10(x + x^2) + 8x^2 =$

$= 2x^2 - 2x - 10x - 10x^2 + 8x^2 =$

$= -12x$

$f(x)$ é uma função linear, pois é do tipo $y = kx$.

1.3. $f(x) = 3 + \frac{2x}{3} + 3(x - 1) =$

$= 3 + \frac{2x}{3} + \underset{(\times 3)}{\frac{3x}{1}} - 3 =$

$= \frac{2x}{3} + \frac{9x}{3} =$

$= \frac{11x}{3}$

$f(x)$ é uma função linear, pois é do tipo $y = kx$.

1.4. $f(x) = \frac{2(x-5)}{3} - \left(\frac{x}{3} - 3\right) - \frac{x}{3} =$

$= \frac{2x - 10}{3} - \frac{x}{3} + 3 - \frac{x}{3} =$

$= \frac{2x}{3} - \frac{10}{3} - \frac{2x}{3} + \underset{(\times 3)}{\frac{3}{1}} =$

$= -\frac{1}{3}$

$f(x)$ é uma função constante.

2.

2.1. Como tem um desconto de 70%, o André vai pagar 30% do valor do bilhete, ou seja,
$0{,}3 \times 20$ € $= 6$ €.

2.2. A opção correta é a [B].

2.3. Seja c o preço do bilhete. Para que compense tornar-se sócio e comprar o bilhete com desconto, $40 + 0{,}3c$ terá de ser inferior ao preço do bilhete, c.

Assim, $40 + 0{,}3c < c \Leftrightarrow 0{,}3c - c < -40$

$\Leftrightarrow 0{,}7c < -40$

$\Leftrightarrow 0{,}7c > 40$

$\Leftrightarrow \frac{7}{10}c > 40$

$\Leftrightarrow 7c > 400$

$\Leftrightarrow c = \frac{400}{7}$

Como $\frac{400}{7} \approx 57$, o bilhete terá de custar no mínimo, 58 €.

3.

3.1. A correspondência é uma função, pois a cada valor da variável *tempo de aquecimento* corresponde um e um só valor da variável *temperatura*.

3.2. $D = \{0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20\}$

3.3. 43

3.4. 2

3.5. Variável dependente: Temperatura.
Variável independente: Tempo.

4. Se f é uma função afim, é da forma $f(x) = ax + b$, sendo a e b números reais.

$a = \frac{2-4}{0-2} = \frac{-2}{-2} = 1$

Logo, $f(x) = 1 \times x + b$

Como $(0, 2)$ pertence ao gráfico de f:
$2 = 1 \times 0 + b \Leftrightarrow b = 2$
Então, $f(x) = x + 2$.

5. O gráfico [B] não é o correto porque a distância da cadeira número 1 ao solo não se mantém constante com o decorrer do tempo.
O gráfico [D], também não é o correto porque a cadeira número 1 não se encontra, seja em que momento for, a uma distância nula do solo.
O gráfico [C], também não representa a relação entre t e d porque, no instante inicial, a cadeira número 1 não se encontra à distância máximo do solo.
Logo, a opção correta é a [A].

6.

6.1. $[2 \times g(0) - g(1)]^3 =$

$= \left[2 \times \left(\frac{2 \times 0}{3} - 1\right) - \left(\frac{2 \times 1}{3} - 1\right)\right]^3 =$

$= \left(2 \times (-1) - \frac{2}{3} + 1\right)^3 =$

$= \left(-1 - \frac{2}{3}\right)^3 =$

$= \left(-\frac{5}{3}\right)^3 =$

$= -\frac{125}{27}$

6.2. O inverso de $\frac{1}{7}$ é 7.

$\frac{2x}{3} - 1 = 7 \Leftrightarrow \frac{2x}{3} = 8$

$\Leftrightarrow 2x = 24$

$\Leftrightarrow x = \frac{24}{2}$

$\Leftrightarrow x = 12$

Como 12 não pertence ao domínio de g, 7 não pertence ao contradomínio de g.

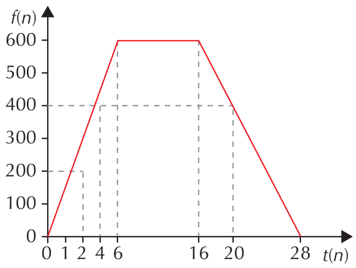
7. A opção correta é a [C].

8.
8.1. $4 \times 10 = 40$
R.: O saco tinha 40 gomas.
8.2. $40 : 5 = 8$
$10 - 8 = 2$
R.: Cada criança receberia menos duas gomas.

9. O 4.º termo é 96 pois, sendo 44 o 3.º termo, temos:
$44 + 4 = 48$
$48 \times 2 = 96$
O 1.º termo é 5 pois, sendo 18 o 2.º termo, temos:
$18 : 2 = 9$
$9 - 4 = 5$
Assim:

1.º termo	2.º termo	3.º termo	4.º termo
5	18	44	**96**

10.
10.1.



10.2. a) $f(2) = 200$ m
Às 9 h 02 min o Rui estava a 200 metros de casa.
b) $f(t) = 400 \Leftrightarrow t \in \{4, 20\}$

11. Como as grandezas x e y são inversamente proporcionais, o produto dos valores correspondentes das duas é constante.

$$a \times 10 = 20 \times 5 \Leftrightarrow a = \frac{20 \times 5}{10}$$
$$\Leftrightarrow a = 10$$

12. Como $g(6) = 8$, então $(6, 8) \in Gg$.
Como $g(-4) = -12$, então $(-4, -12) \in Gg$.
Assim, sendo $g(x) = ax + b$, temos:
$$a = \frac{-12 - 8}{-4 - 6} = \frac{-20}{-10} = 2$$
Como $(6, 8) \in Gg$, então
$8 = 2 \times 6 + b \Leftrightarrow b = -4$
Logo, $g(x) = 2x - 4$.

Então:
$$g(0) - 5 \times g(1) = 2 \times 0 - 4 - 5 \times (2 \times 1 - 4) =$$
$$= 0 - 4 - 5 \times (2 - 4) =$$
$$= -4 - 10 + 20 =$$
$$= 6$$

13.
13.1. A opção correta é a [C].
13.2. 10×50 € $= 500$ €
500 € $: 10$ € $= 50$
R.: Foram à visita 50 pessoas.

14. Por observação do gráfico, $A(x, 12)$ e $D(16, y)$.
Como os retângulos têm 12 cm^2 de área,
$x \times 12 = 12 \Leftrightarrow x = 1$
$$16 \times y = 12 \Leftrightarrow y = \frac{12}{16} = \frac{3}{4}$$
Logo, $(1, 12)$ e $D\left(16, \frac{3}{4}\right)$.

15.
15.1. Função f: $a > 0$.
Função g: $a > 0$.
Função h: $a < 0$.
15.2. Como $A(1, -2)$ pertence ao gráfico de h, temos:
$-2 = a \times 1^2 \Leftrightarrow -2 = a$
Logo, $h(x) = -2x^2$.

16.
16.1. O termo geral da sequência do número de pontos é $3n + 1$.
Assim, para construir o oitavo termo da sequência, são necessários $3 \times 8 + 1 = 24 + 1 = 25$ pontos.
16.2. O termo geral da sequência do número de triângulos é $4n - 2$.
Assim, o 10.º termo é composto por 30 triângulos ($4 \times 10 - 2 = 40 - 2 = 38$).
16.3. $4n - 2 = 37 \Leftrightarrow 4n = 39$
$$\Leftrightarrow n = \frac{39}{4}$$
Como $\frac{39}{4} \notin \mathbb{N}$, então não existe qualquer termo desta sequência composto por 37 triângulos.

17.

17.1. Como o ponto D pertence ao gráfico de f, temos que:

$2 = a \times 1^2 \Leftrightarrow a \times 1$

$\Leftrightarrow a = 2$

Logo, $f(x) = 2x^2$.

17.2. O ponto A tem ordenada nula. Como A pertence ao gráfico de g, temos que

$0 = -x + 3 \Leftrightarrow x = 3$.

Logo, as coordenadas do ponto A são $(3, 0)$ e $\overline{CA} = 3$.

Como $f(x) = 2x^2$ e o ponto $B(-2, y)$ pertence ao gráfico de f, temos que: $y = 2 \times (2)^2 = 2 \times 4 = 8$.

Logo, $B(-2, 8)$.

Assim, $A_{[ABC]} = \frac{b \times h}{2}$, ou seja,

$A_{[ABC]} = \frac{3 \times 8}{2} = 12$ u.a.

18. $a = \frac{12}{b} \Leftrightarrow a \times b = 12$

Logo, o produto das variáveis a e b é constante (12) e a opção correta é a [B].

19.

19.1. $P(n) = 98 + 2n$

19.2. $P(6) = 98 + 2 \times 6 = 98 + 12 = 110$

Significa que 6 anos após 2014, ou seja, em 2020, o bilhete de época do F.C. Porto custará 110 €.

19.3. Bilhete época em Alvalade: $68 + 4n$.

Bilhete época no estádio do Dragão: $98 + 2n$.

$68 + 4n = 98 + 2n \Leftrightarrow 4n - 2n = 98 - 68$

$\Leftrightarrow 2n = 30$

$\Leftrightarrow n = 15$

Em 2029 (2014 + 15), o preço do bilhete de época no Dragão e em Alvalade será o mesmo.

19.4. $98 + 2n = 120 \Leftrightarrow 2n = 120 - 98$

$\Leftrightarrow 2n = 22$

$\Leftrightarrow n = 11$

O bilhete de época no estádio do Dragão custará 120 € daqui a 11 anos.

A função que dá o preço, B, do bilhete de época no estádio da Luz, em função do número de anos, n, decorridos desde 2014 pode ser definida por

$B(n) = 88 + 3n$.

Daqui a 11 anos:

$B(11) = 88 + 3 \times 11 = 88 + 33 = 121$

Assim, o bilhete de época do S.L. Benfica custará 121 €, quando o do F.C. Porto custará 120 €.

20.

20.1. A constante de proporcionalidade inversa é 18 $(9 \times 2 = 18)$.

20.2. Como A e B são grandezas inversamente proporcionais, o produto dos valores correspondentes das duas é constante.

$9 \times 2 = 3 \times m \Leftrightarrow m = \frac{9 \times 2}{3}$

$\Leftrightarrow m = 6$

$9 \times 2 = 1 \times p \Leftrightarrow p = 18$

$9 \times 2 = t \times 10 \Leftrightarrow t = 1{,}8$

20.3. $A \times B = 18 \Leftrightarrow A = \frac{18}{B}$

21.

21.1. Como b é a ordenada na origem, $b = 2$.

21.2. A equação da reta t é $y = dx + b$. Como $d = b$ então, pela alínea anterior, $d = b = 2$ e uma equação da reta t é $y = 2x + 2$.

21.3. A reta r tem equação $y = ax + b$ e, como tem declive negativo $(a < e < 0)$, ou é a reta vermelha ou a reta azul.

A reta vermelha contém os pontos de coordenadas $(0, 2)$ e $(2, 0)$.

Logo, $m = \frac{0 - 2}{2 - 0} = \frac{-2}{2} = -1$.

A reta azul contém os pontos de coordenadas $(0, 2)$ e $(1, 0)$.

Logo, $m = \frac{0 - 2}{1 - 0} = -2$.

Como $a < e < 0$ temos que $a = -2$ e $e = -1$.

Logo, r é a reta azul.

Então, uma equação da reta r é $y = -2x + 2$.

22.

22.1. $A(t) = 50 \times t$

22.2. $A(8) = 50 \times 8 = 400$

Significa que, oito minutos depois de introduzir a água, o tanque do veículo tinha 400 litros de água.

22.3. $50 \times t = 6000 \Leftrightarrow t = \frac{6000}{50}$

$\Leftrightarrow t = 120$

O tanque demora 120 minutos a ficar cheio. Se começaram a enchê-lo às 8 h 30 min da manhã, o tanque ficou cheio às 10 h 30 min.

22.4. A opção [D] não é a correta, pois este gráfico corresponde à situação de um depósito cuja altura de enchimento é diretamente proporcional ao tempo decorrido.

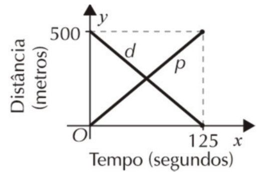
A opção [C] também não é a correta, pois se a altura regressasse ao zero o depósito não ficaria cheio. Na opção [A] o gráfico exibe uma taxa de variação de altura mais baixa no início e no fim do enchimento do que no tempo intermédio, o que é contrariado pela posição escolhida para um depósito com a forma descrita. Assim, esta opção também não é a correta.
Logo, a opção correta é a [B].

23. A opção correta é a [D].
$\left(\frac{a}{3} = 6 \Leftrightarrow a = 18\right)$.

24.
24.1. A Carolina não paga. O Filipe tem 50% de desconto e, por isso, paga 1,5 €.
O André e os pais pagam 3 € cada. Assim, os ingressos para toda a família custam
$3 € \times 3 + 1,5 € = 9 € + 1,5 € = 10,5 €$.
24.2. $2100 € : 3 € = 700$
R.: O Mário vai comprar 700 ingressos.
24.3. a) $f(x) = 3x$
b) $f(4) = 3 \times 4 = 12$
Significa que o preço a pagar por quatro ingressos de adulto é 12 €.
c) O ponto não pode pertencer ao gráfico de f porque o preço a pagar por dois ingressos de adulto é 6 € e não 8 €.
24.4. $(26 \times 3 €) \times 0,5 = 39 €$
R.: Terão de pagar 39 €.

25. Os gráficos 1 e 5 são hipérboles. Logo, são representações de funções de proporcionalidade inversa.
No gráfico 1, os pontos de abcissa positiva têm ordenada negativa.
Logo, gráfico 1: $i(x) = -\frac{3}{x}$ e gráfico 5: $h(x) = \frac{3}{x}$.
Os gráficos 2 e 6 são parábolas com a concavidade voltada para baixo, ou seja, as funções são da forma $y = ax^2$, com $a < 0$.
Sabemos que quanto maior é o valor absoluto de a, menor é a abertura da parábola.
Logo, gráfico 2: $j(x) = -3x^2$ e gráfico 6: $k(x) = -\frac{1}{2}x^2$.
Os gráficos 3 e 4 são parábolas com a concavidade voltada para cima, ou seja, as funções são da forma $y = ax^2$, com $a > 0$.
Sabemos que quanto maior é o valor absoluto de a, menor é a abertura da parábola.
Logo, gráfico 3: $g(x) = 3x^2$ e gráfico 4: $f(x) = \frac{1}{2}x^2$.

26.
26.1. $d(t) = 500 - 4t$
26.2. $d(12) = 500 - 4 \times 12 =$
$= 500 - 48 =$
$= 452$
Significa que 12 segundos depois do início da corrida o André estava a 452 metros do portão da escola.
26.3. $p(t) = 4t$
26.4. $p(10) = 40$
Significa que 10 segundos depois do início da corrida o André tinha percorrido 40 metros.
26.5. $d(t) = 0 \Leftrightarrow 500 - 4t = 0$
$\Leftrightarrow 500 = 4t$
$\Leftrightarrow t = 125$
R.: Serão necessários 125 segundos para o André chegar ao portão da escola.
26.6.



26.7. A ordenada do ponto comum aos dois gráficos representa o instante em que o André atinge metade do percurso, isto é, já percorreu tanto quanto o que ainda lhe falta percorrer.

27.
27.1. As retas t e s têm a mesma ordenada na origem.
27.2. Sabemos que o ponto A tem abcissa 1 e que pertence à reta r, de equação $y = x + 2$.
Assim, a ordenada do ponto A é $y = 1 + 2 = 3$.
Logo A tem coordenadas $(1, 3)$.
A reta t contém os pontos $A(1, 3)$ e $D(4, 0)$.
Assim, o declive da reta t é $a = \frac{0-3}{4-1} = \frac{-3}{3} = -1$.
Logo, $y = -1x + b$.
Como $D(4, 0)$, temos:
$0 = -1 \times 4 + b \Leftrightarrow b = 4$

Logo, $y = -x + 4$ é uma equação da reta t.

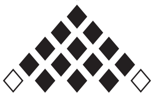
A reta s tem o mesmo declive da reta r, pois são retas paralelas, e a mesma ordenada na origem de t. Logo:

s: $y = x + 4$.

28.

28.1.

4



28.2. Todas as figuras da sequência têm dois losangos brancos. Logo, a opção correta é a [C].

28.3. A sequência do número de losangos pretos é:

$$1 \xrightarrow{+3} 4 \xrightarrow{+4} 8 \xrightarrow{+5} 13 \xrightarrow{+6} 19 \xrightarrow{+7} 26$$

Logo, a opção correta é a [C].