Teste de Matemática A

2020 / 2021

Teste N.º 3

Matemática A

12.º Ano de Escolaridade

Nome do aluno: ____ N.º: __ Turma: ___

Utilize apenas caneta ou esferográfica de tinta azul ou preta.

Não é permitido o uso de corretor. Risque aquilo que pretende que não seja classificado.

É permitido o uso de calculadora.

Apresente apenas uma resposta para cada item.

As cotações dos itens encontram-se no final do enunciado.

Na resposta aos itens de escolha múltipla, selecione a opção correta. Escreva na folha de respostas o número do item e a letra que identifica a opção escolhida.

Na resposta aos restantes itens, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias. Quando para um resultado não é pedida a aproximação, apresente sempre o valor exato.

Formulário

Comprimento de um arco de circunferência

αr (α – amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r – raio)

Área de um polígono regular: Semiperímetro $\times$ Apótema

Área de um setor circular:

$\frac{\alpha r^2}{2}$ (α – amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r – raio)

Área lateral de um cone: $\pi\, r\, g$ (r – raio da base; g – geratriz)

Área de uma superfície esférica: $4\,\pi\, r^2$ (r – raio)

Volume de uma pirâmide: $\frac{1}{3} \times$ Área da base $\times$ Altura

Volume de um cone: $\frac{1}{3} \times$ Área da base $\times$ Altura

Volume de uma esfera: $\frac{4}{3}\,\pi\, r^3$ (r – raio)

Progressões

Soma dos n primeiros termos de uma progressão (u_n)

Progressão aritmética: $\frac{u_1+u_n}{2} \times n$

Progressão geométrica: $u_1 \times \frac{1-r^n}{1-r}$

Trigonometria

$\operatorname{sen}(a+b) = \operatorname{sen} a \, \cos b + \operatorname{sen} b \, \cos a$

$\cos(a+b) = \cos a \, \cos b - \operatorname{sen} a \, \operatorname{sen} b$

Complexos

$\left(re^{i\theta}\right)^n = r^n\, e^{in\theta}$

$\sqrt[n]{r\, e^{i\theta}} = \sqrt[n]{r}\, e^{i\left(\frac{\theta}{n}+\frac{2k\pi}{n}\right)}$ $(k \in \{0, \dots, n-1\}$ e $n \in \mathbb{N})$

Regras de derivação

$(u+v)' = u' + v'$

$(u.v)' = u'.v + u.v'$

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'.v - u.v'}{v^2}$

$(u^n)' = n\,.u^{n-1}.u' \; (n \in \mathbb{R})$

$(\operatorname{sen} u)' = u'.\cos u$

$(\cos u)' = -u'.\operatorname{sen} u$

$(\operatorname{tg} u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$

$(e^u)' = u'.e^u$

$(a^u)' = u'.a^u.\ln a \; (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$

$(\log_a u)' = \frac{u'}{u\,.\ln a} \; (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

Limites notáveis

$\lim \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e \; (n \in \mathbb{N})$

$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$

$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

$\lim_{x\to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

$\lim_{x\to +\infty} \frac{e^x}{x^p} = +\infty \; (p \in \mathbb{R})$

1. Um baralho de cartas completo é constituído por 52 cartas, repartidas em 4 naipes (Espadas, Copas, Ouros e Paus). Em cada naipe há 13 cartas: um Ás, três figuras (Rei, Dama e Valete) e mais 9 cartas (do Dois ao Dez).

Retiraram-se cinco cartas do baralho, que são colocadas lado a lado, em cima de uma mesa, segundo a ordem pela qual vão sendo retiradas.

1.1. Determine a probabilidade de, dessas cinco cartas retiradas, exatamente quatro serem do naipe de copas.

Apresente o resultado sob a forma de dízima com aproximação às centésimas.

1.2. Quantas sequências se podem formar com as cinco cartas retiradas, caso a primeira carta e a última carta sejam ases e as restantes sejam figuras?

(A) 158 400 **(B)** 158 840 **(C)** 13 200 **(D)** 1320

2. Dos alunos de uma turma de 12.º ano, sabe-se que:

- um terço dos alunos é do sexo masculino;
- $\frac{1}{4}$ dos alunos é do sexo masculino e vai para uma estância de esqui nas férias de Natal;
- três em cada sete alunos que vão para uma estância de esqui nas férias de Natal são rapazes.

2.1. Escolheu-se, ao acaso, um aluno dessa turma.

Determine a probabilidade de o aluno escolhido ser uma rapariga e não ir para uma estância de esqui nas férias de Natal. Apresente o resultado na forma de fração irredutível.

2.2. A diretora de turma vai selecionar, ao acaso, dois alunos para representar a turma e discursar no jantar de Natal.

Sabe-se que a probabilidade de se escolher um rapaz e uma rapariga é $\frac{32}{69}$.

Determine o número de alunos do sexo feminino dessa turma.

Para resolver este problema, percorra as seguintes etapas:

- equacione o problema;
- resolva a equação, sem utilizar calculadora, a não ser para eventuais cálculos numéricos.

3. De uma determinada linha do triângulo de Pascal, sabe-se que a soma de todos os elementos dessa linha é igual a 4096.

Escolheram-se, ao acaso, dois elementos dessa linha. A probabilidade de a diferença entre os números escolhidos ser igual a zero é:

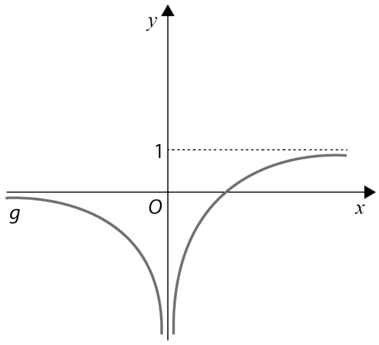
(A) $\frac{1}{11}$ **(B)** $\frac{2}{11}$ **(C)** $\frac{1}{13}$ **(D)** $\frac{2}{13}$

4. Seja f a função, de domínio $]-\infty, 1[$, definida por $f(x) = \sqrt{1-x} - x$.

4.1. Recorrendo a processos exclusivamente analíticos, mostre que o gráfico da função f tem a concavidade voltada para baixo em todo o seu domínio.

4.2. Na figura encontra-se a representação gráfica da função g, de domínio $\mathbb{R}\backslash\{0\}$. As retas de equação $x = 0$, $y = 0$ e $y = 1$ são assíntotas ao gráfico de g.

Qual das seguintes afirmações é falsa?



(A) $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$

(B) $\lim_{x\to 0} \frac{g(x)}{f(x)} = -\infty$

(C) $\lim_{x\to -\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = +\infty$

(D) $\lim_{x\to -\infty} \frac{g(x)}{f(x)} = 0$

4.3. Considere agora a função h definida por $h(x) = \frac{f(x)}{x}$.

Sem recorrer à calculadora, estude a função h quanto à existência de assíntotas ao seu gráfico e, caso exista(m), escreva a(s) sua(s) equação(ões).

5. Seja f a função, de domínio $\mathbb{R}$, definida por:

$$f(x) = \begin{cases} \cos^2 x - \operatorname{sen} x & \text{se} \quad x \geq 0 \\ \frac{\cos^4 x - 1}{2x} + 2k & \text{se} \quad x < 0 \end{cases}$$

5.1. Em qual das opções seguintes se encontra um valor real de k para o qual a função f é contínua?

(A) 0 **(B)** $\frac{1}{2}$ **(C)** 1 **(D)** 2

5.2. Sem recorrer à calculadora, estude a função f quanto à monotonia, no intervalo $\left]0, \frac{3\pi}{2}\right]$, e determine, caso existam, os extremos relativos.

Na sua resposta, apresente o(s) intervalo(s) de monotonia.

5.3. Seja t a reta tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa π.

Seja p a reta perpendicular à reta t e que interseta o eixo das abcissas no mesmo ponto que a reta t.

Qual é a equação reduzida da reta p?

(A) $y = x + 1 - \pi$ **(B)** $y = x + \pi - 1$ **(C)** $y = -x + 1 - \pi$ **(D)** $y = -x + \pi - 1$

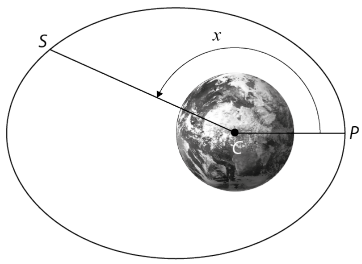
6. Seja f a função, de domínio $[-1, +\infty[$, definida por $f(x) = \sqrt{x+1} - 1$.

Para cada número real a, pertencente ao intervalo $\left]\frac{1}{4}, 1\right[$, sejam A e B os pontos do gráfico de f de abcissas a e $2a$, respetivamente.

Mostre que existe, pelo menos, um número real a pertencente ao intervalo $\left]\frac{1}{4}, 1\right[$ para o qual a reta AB é paralela à reta definida por $y = ax$. Se utilizar a calculadora, em eventuais cálculos numéricos, sempre que proceder a arredondamentos, use três casas decimais.

7. Um satélite S tem uma órbita elíptica em torno da Terra, tal como se ilustra na figura abaixo.

Relativamente a esta figura, tem-se que:



- o ponto *S* representa o satélte;
- o ponto *C* representa o centro da Terra;
- o ponto *P* representa o Perigeu, que é o ponto da órbita mais próximo do centro da Terra;
- x é a amplitude do ângulo PCS, compreendida entre 0 e 360 graus.

A distância d, em milhares de quilómetros, do satélite ao centro da Terra, em função da amplitude x do ângulo PCS, é dada por:

$$d(x) = \frac{8,63}{1 + 0{,}09 \cos x}$$

Seja α a amplitude do ângulo PCS, num certo instante (está compreendido entre 0 e 120 graus). Nesse instante, o satélite encontra-se a uma certa distância do centro da Terra. Passado algum tempo, a amplitude do ângulo PCS é três vezes maior e a distância do satélite ao centro da Terra diminuiu 10%

Determine, recorrendo às capacidades gráficas da calculadora, o valor de α, sabendo que esse valor existe e é único.

Na sua resposta:

- equacione o problema;
- reproduza, num referencia, o(s) gráfico(s) da(s) função(ões) visualizado(s) na calculadora que lhe permite(m) resolver a equação;
- apresente o valor de α em graus, arredondado às décimas.

FIM

COTAÇÕES

Item													
Cotação (em pontos)													
1.1.	**1.2.**	**2.1.**	**2.2.**	**3.**	**4.1.**	**4.2.**	**4.3.**	**5.1.**	**5.2.**	**5.3.**	**6.**	**7.**	**Total**
8	20	20	20	8	20	8	20	8	20	8	20	20	**200**