1. Podemos escrever a sucessão como:

$$b_n = \begin{cases} \dfrac{1}{4n} & \text{se } n \text{ é ímpar} \\[2ex] -\dfrac{1}{4n} & \text{se } n \text{ é par} \end{cases}$$

Uma vez que 0,001 25 é positivo, usamos o ramo dos termos de ordem ímpar para construir a equação:

$$\frac{1}{4n} = 0{,}001\,25 \Leftrightarrow \frac{1}{4n} = \frac{1}{800} \Leftrightarrow n = 200$$

no entanto, 200 é um número par, logo esta igualdade não é verificada e concluímos que 0,001 25 não é termo de (b_n).

Com a ajuda da calculadora podemos também verificar rapidamente se a sucessão toma o valor indicado para alguma das ordens que constam nas opções:

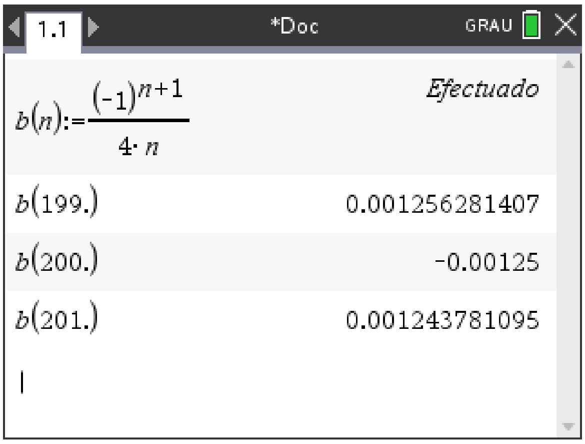


Figura 1: Usando a calculadora TI-*n***spire** *CX II-T*

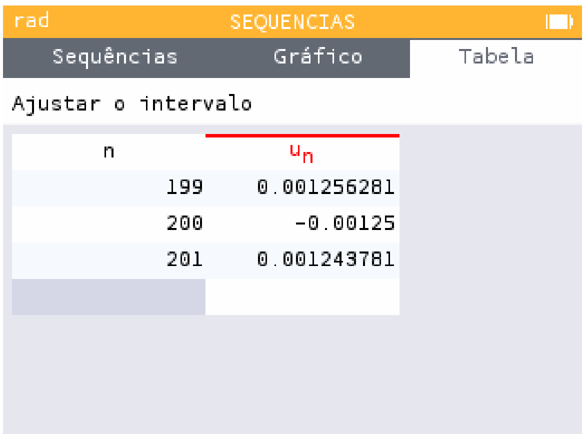


Figura 2: Usando a calculadora NUMWORKS

Opção: **(A)**

2. Uma vez que (u_n) é uma progressão aritmética,

$$u_n = u_k + r(n-k)$$

e como (v_n) é uma progressão geométrica,

$$v_n = v_k \times r^{n-k}$$

Sabemos que $u_1 = v_1 = 2$ e que a razão é igual nas duas progressões.

Também nos é dito que

$$u_3 - v_3 = \frac{5}{2}$$

Logo,

$$u_3 - v_3 = \frac{5}{2} \qquad u_3 = u_1 + r(3-1) = 2 + 2r \qquad v_3 = v_1 \times r^{3-1} = 2r^2$$

$$\Leftrightarrow 2 + 2r - 2r^2 = \frac{5}{2}$$

$$\Leftrightarrow 4r^2 - 4r + 1 = 0 \qquad r = \frac{4 \pm \sqrt{4^2 - 4\times 4\times 1}}{2\times 4} = \frac{4\pm\sqrt{0}}{8}$$

$$\Leftrightarrow \qquad r = \frac{1}{2}$$

Assim, a soma dos n primeiros termos de (v_n) é dada por:

$$S_n = 2 \times \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \frac{1}{2}} = 4\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right)$$

Como queremos a soma de todos os termos, vamos determinar este valor quando $n \to +\infty$:

$$\lim S_n = \lim\left[4\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right)\right]$$

$$= 4\left(1 - \lim\left(\frac{1}{2}\right)^n\right) \qquad \textit{Como } 0 < \tfrac{1}{2} < 1$$

$$= 4(1-0) = 4$$

3. Sendo f uma função quadrática, a sua representação gráfica traduz-se numa parábola. Se o objetivo é que esta seja tangente ao eixo das abcissas, então só poderá ter um zero e, nestas condições, $\Delta = b^2 - 4ac = 0$.

Temos então:

$$\underbrace{1}_{a}\, x^2 \underbrace{-2\cos(\alpha)}_{b}\, x + \underbrace{1-\operatorname{sen}(\alpha)}_{c} = 0$$

e queremos:

$$\left(-2\cos(\alpha)\right)^2 - 4\times 1\times\left(1-\operatorname{sen}(\alpha)\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow 4\cos^2(\alpha) + 4\operatorname{sen}(\alpha) - 4 = 0$$

$:4$

$$\Leftrightarrow \cos^2(\alpha) + \operatorname{sen}(\alpha) - 1 = 0$$

$\cos^2\alpha = 1-\operatorname{sen}^2\alpha$

$$\Leftrightarrow 1-\operatorname{sen}^2(\alpha) + \operatorname{sen}(\alpha) - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow -\operatorname{sen}^2(\alpha) + \operatorname{sen}(\alpha) = 0$$

$$\Leftrightarrow -\operatorname{sen}(\alpha)\left(\operatorname{sen}(\alpha)-1\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow -\operatorname{sen}(\alpha) = 0 \quad \vee \quad \operatorname{sen}(\alpha) - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \operatorname{sen}(\alpha) = 0 \quad \vee \quad \operatorname{sen}(\alpha) = 1$$

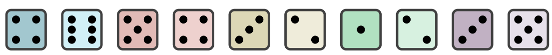
$$\Leftrightarrow \alpha = k_1\pi \quad \vee \quad \alpha = \frac{\pi}{2} + 2k_2\pi, \qquad k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$$

Como $\alpha \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, as únicas soluções obtêm-se quando $k_1 = k_2 = 0$ e são:

$$x = 0 \quad \vee \quad x = \frac{\pi}{2}$$

4.

4.1. Comecemos por imaginar o lançamento dos dez dados em que temos exatamente um dado com o número 4

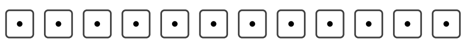


Nota-se imediatamente que esta não é uma das situações que procuramos pois não verifica a restrição à soma de pontos que nos é imposta (16 pontos).

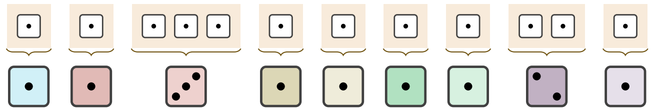
Também percebemos que o número 4, que queremos que saia apenas uma vez, pode sair em qualquer um dos 10 dados.

Para cada uma dessas posições do número 4 temos depois de considerar que há ainda nove dados pelos quais têm de ser distribuídos apenas 12 pontos.

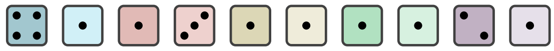
Pensemos então nesses 12 pontos como elementos separados:



Se entre estes colocarmos 8 separações, podemos "criar" nove dados cuja pontuação é a soma de cada grupo criado e que, todos juntos, totalizam 12 pontos. Por exemplo:



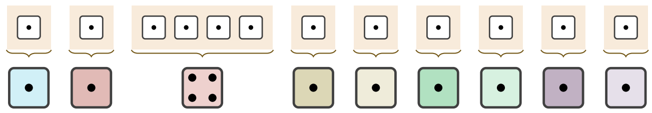
O conjunto dos dez dados ficava:



$$4+1+1+3+1+1+1+1+2+1=16$$

Temos onze espaços entre os 12 pontos individuais. Destes vamos escolher oito para colocar as oito separações e dessa forma criarmos os nove dados. Temos ${}^{11}C_8$ formas de o fazer.

Há, no entanto, separações que não nos importam, como aquela que se apresenta de seguida:



poque apresenta outro dado com o número 4. Esse conjunto pode corresponder a qualquer um dos nove dados e por isso precisamos de retirar estas possibilidades às combinações que calculámos antes.
Assim, uma resposta possível é $10\times\left({}^{11}C_8 - 9\right)$.

4.2. Com A e B acontecimentos possíveis, temos

$$P\left(A|B\right) = P(B) \quad\Leftrightarrow\quad \frac{P(A\cap B)}{P(B)} = P(B)$$

$$\Leftrightarrow\quad P(A\cap B) = \left(P(B)\right)^2 \qquad (\star)$$

Sabemos também que

$$P\left[(A\cap B)\,|\,(A\cup B)\right] = \frac{1}{5}$$

$$\Leftrightarrow \frac{P\left[(A\cap B)\cap(A\cup B)\right]}{P(A\cup B)} = \frac{1}{5}$$

Como $A\cap B \subseteq A\cup B$ então $(A\cap B)\cap(A\cup B) = A\cap B$

$$\Leftrightarrow \frac{P(A\cap B)}{P(A\cup B)} = \frac{1}{5}$$

$$\Leftrightarrow 5P(A\cap B) = 1P(A\cup B)$$

$$\Leftrightarrow 5P(A\cap B) = P(A) + P(B) - P(A\cap B)$$

$$\Leftrightarrow 6P(A\cap B) = P(A) + P(B)$$

Usando ($\star$) e o facto de $P(A) = 4P(B) - 1$, que encontramos no terceiro ponto do enunciado, sai

$$6\left(P(B)\right)^2 - 5P(B) + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow P(B) = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 4 \cdot 6 \cdot 1}}{2 \cdot 6}$$

$$\Leftrightarrow P(B) = \frac{5 \pm 1}{12}$$

$$\Leftrightarrow P(B) = \frac{1}{2} \quad \vee \quad P(B) = \frac{1}{3}$$

- Se $P(B) = \frac{1}{2}$, vem que

  $$P(A \cap B) = \frac{1}{4} \text{ e } P(A) = 1$$

  logo

  $$P(A \cup B) = 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{5}{4} > 1$$

  o que é impossível.
- Se $P(B) = \frac{1}{3}$, vem que

  $$P(A \cap B) = \frac{1}{9} \text{ e } P(A) = \frac{1}{3}$$

  logo

  $$P(A \cup B) = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{9} = \frac{5}{9}$$

  como $0 \leq \frac{5}{9} \leq 1$, este caso é possível.

Concluímos assim que $P(B) = \frac{1}{3}$.

5.

5.1. Queremos encontrar o ponto com coordenadas do tipo $(0, y, 0)$ e que pertence ao plano α.

Seja $\vec{n}(a, b, c)$ um vetor normal ao plano α.

Sabemos que o vetor $\vec{u}$ e o vetor diretor da reta r, $(-7, -10, -6)$ são paralelos ao plano, logo são perpendiculares ao vetor $\vec{n}$. Estes dois vetores também não são colineares pois as coordenadas homólogas não são diretamente proporcionais:

$$\frac{-7}{1} \neq \frac{-10}{2} \neq \frac{-6}{1}$$

Assim, podemos recorrer a estes vetores para determinarmos um possível $\vec{n}$.

$$\begin{cases} (1,2,1) \cdot (a,b,c) = 0 \\ (-7,-10,-6) \cdot (a,b,c) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + 2b + c = 0 \\ -7a - 10b - 6c = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = -2b - c \\ 14b + 7c - 10b - 6c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2b \\ c = -4b \end{cases}$$

Logo

$$\vec{n} = (2b, b, -4b)$$

e, se $b = 1$ então $\vec{n}(2, 1, -4)$.

Ficamos com

$$2x + y - 4z + d = 0$$

e, como sabemos que o ponto $A(3,5,3)$ pertence ao plano α:

$$2 \times 3 + 5 - 4 \times 3 + d = 0 \Leftrightarrow d = 1$$

Sai que:

$$\alpha : 2x + y - 4z + 1 = 0$$

Para encontrarmos a ordenada do ponto que queremos, basta anular a abcissa e a cota, ficando:

$$2 \times 0 + y - 4 \times 0 + 1 = 0 \Leftrightarrow y = -1$$

O ponto pretendido é $(0, -1, 0)$.

Opção: (C)

Com auxílio da calculadora

Com a calculadora, podemos determinar o produto externo[1] para obtermos um vetor normal ao plano:

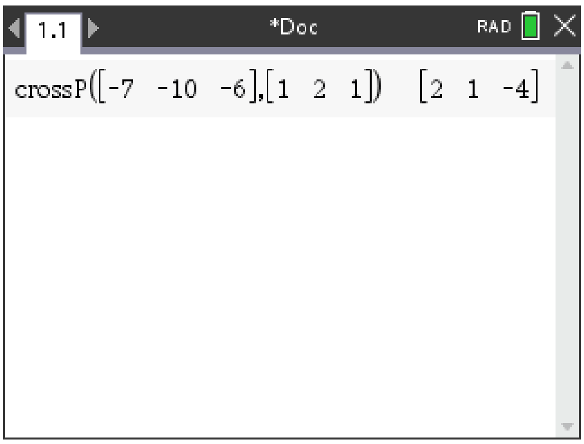


Figura 3: Usando a calculadora TI-*n***spire** *CX II-T*.
menu, 7, C, 2.

[1] Este conteúdo não está contemplado nas aprendizagens essenciais e, por isso, não pode ser usado em questões de desenvolvimento.

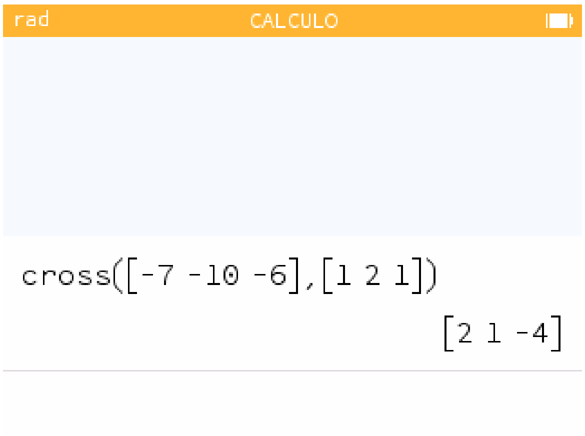


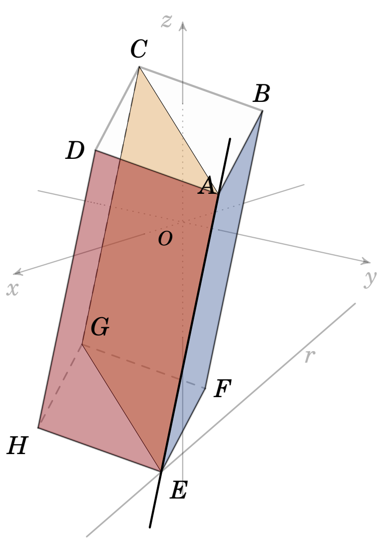
Figura 4: Usando a calculadora NUMWORKS.
Caixa de ferramentas, Matrizes e Vetores, Vetores, cross(U,V)

Embora o resultado não seja exatamente igual, o vetor que obtemos por este método é colinear com o que se determinou analiticamente.

5.2. Seja p a probabilidade pedida. Vamos determinar o valor de p recorrendo à regra de Laplace.

No que diz respeito a casos possíveis, temos apenas de calcular o número de formas que temos de escolher três pontos a partir dos oito disponíveis: ${}^{8}C_3$.

Para calcular o número de casos favoráveis, observando a figura, podemos concluir que será necessário escolher três vértices que pertençam simultaneamente à face $[ABFE]$ ou à face $[ADHE]$ ou então a $[ACGE]$.



o que corresponde a ${}^{4}C_3 \times 3$.

Logo

$$p = \frac{{}^{4}C_3 \times 3}{{}^{8}C_3} = \frac{12}{56} = \frac{3}{14}$$

5.3. A fórmula de cálculo do volume do prisma é:

$$V = A_{\text{base}} \times \text{altura}$$

A base é um quadrado visto o prisma ser quadrangular regular, então:

$$A_{[ABCD]} = \overline{AB}^2$$

$$\overline{AB} = \sqrt{\left(3-(-3)\right)^2 + (5-3)^2 + (3-6)^2} = 7$$

Logo, $A_{[ABCD]} = 49$.

A altura do prisma é $\overline{AE}$ e, para a calcular, vamos primeiro determinar as coordenadas de E tendo em conta que é o ponto que pertence à reta r e ao plano ADH.

O plano ADH tem $\overrightarrow{AB} = (-6,-2,3)$ como um vetor normal, logo a equação será do tipo:

$$-6x - 2y + 3z + d = 0$$

e, usando o ponto A, temos:

$$-6 \times 3 - 2 \times 5 + 3 \times 3 + d = 0 \Leftrightarrow d = 19$$

Então, ADH tem equação:

$$-6x - 2y + 3z + 19 = 0$$

O ponto genérico da reta r, que designaremos por P, tem coordenadas da forma:

$$(4-7k, 6-10k, -9-6k),\ k \in \mathbb{R}$$

Vamos usar as coordenadas deste ponto para substituir x, y e z na equação do plano e encontrar $k \in \mathbb{R}$ tal que:

$$-6(4-7k) - 2(6-10k) + 3(-9-6k) + 19 = 0$$

Sai que

$$-24 + 42k - 12 + 20k - 27 - 18k + 19 = 0$$

$$\Leftrightarrow 44k - 44 = 0$$

$$\Leftrightarrow k = 1$$

Em alternativa...

Podíamos procurar o ponto da reta r que verifica a condição

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AP} = 0$$

Tendo em conta que

$$\overrightarrow{AP} = P - A = (1-7k, 1-10k, -12-6k)$$

queremos $k \in \mathbb{R}$ de modo que

$$(-6,-2,3) \cdot (1-7k, 1-10k, -12-6k) = 0$$

$\Leftrightarrow -6+42k-2+10k-36-18k=0$

$\Leftrightarrow 44k-44=0$

$\Leftrightarrow k=1$

Para obtermos o ponto E e o vetor $\overrightarrow{AE}$ basta fazer $k=1$ em:

$$P\left(4-7k, 6-10k, -9-6k\right), k \in \mathbb{R}$$

e

$$\overrightarrow{AP}\left(1-7k, 1-10k, -12-6k\right)$$

respetivamente.

Sai que $E\left(-3,-4,-15\right)$ e $\overrightarrow{AE}\left(-6,-9,-18\right)$.

$$\|\overrightarrow{AE}\| = \overline{AE} = \sqrt{\left(-6\right)^2+\left(-9\right)^2+\left(-18\right)^2} = 21$$

Logo,

$$V_{[ABCDEFGH]} = 49 \times 21 = 1029\text{u.v.}$$

6.

6.1. Na expressão dada:

$$\delta = \operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{n \times R}{R+h}\right) - \operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{R}{R+h}\right)$$

fazemos

$$n = 1{,}0003$$

e

$$h = \frac{R}{320}$$

e ficamos com:

$$\delta = \operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{1{,}0003 \times R}{R+\frac{R}{320}}\right) - \operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{R}{R+\frac{R}{320}}\right)$$

$$= \operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{1{,}0003 \times \cancel{R}}{\cancel{R}\left(1+\frac{1}{320}\right)}\right) - \operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{\cancel{R}}{\cancel{R}\left(1+\frac{1}{320}\right)}\right)$$

Usando a calculadora, com o cuidado de verificarmos se os resultados devolvidos vêm em graus, temos:

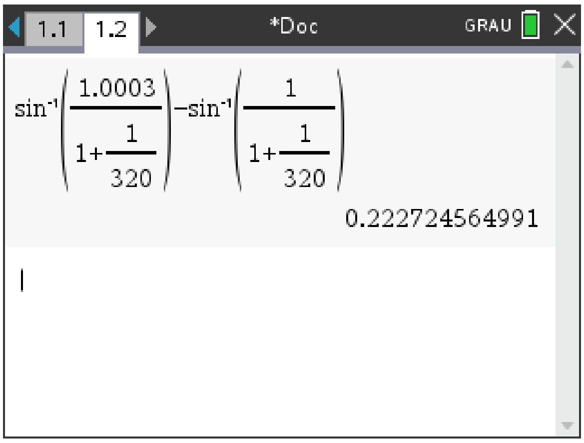


Figura 5: Usando a calculadora TI-*n***spire** *CX II-T*.

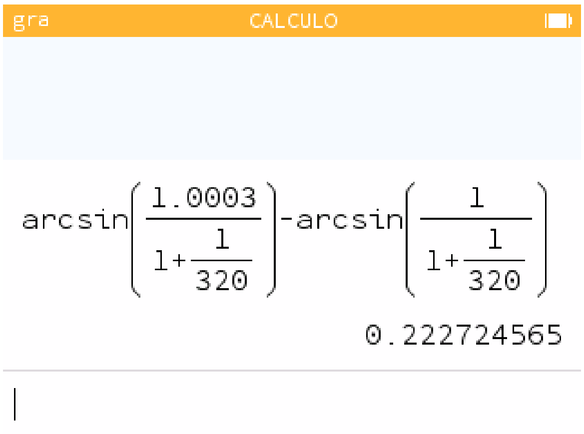


Figura 6: Usando a calculadora NUMWORKS.

Podíamos fazer também a representação de uma função

$$f1(x) = \operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{1{,}0003 \times x}{x+\frac{x}{320}}\right) - \operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{x}{x+\frac{R}{320}}\right)$$

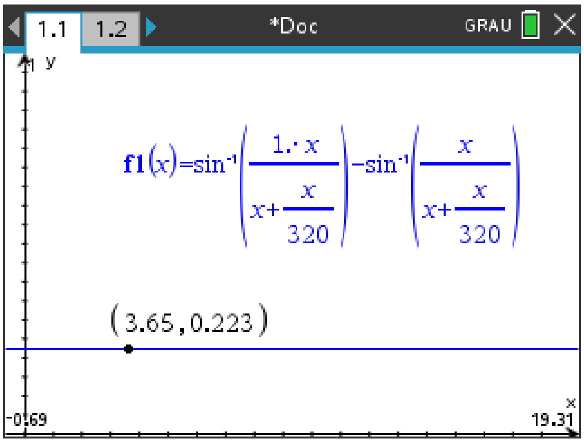


Figura 7: Usando a calculadora TI-*n***spire** *CX II-T*.

E, depois de verificarmos que é constante, escolhíamos a opção correta.

Opção: **(B)**

6.2. Nesta questão temos dois planetas. Vamos considerar que:

- TOI 700 d tem: índice de refração n_1, raio R_1 e espessura da atmosfera h_1;
- Teegarden b tem: índice de refração n_2, raio R_2 e espessura da atmosfera h_2.

Dizem-nos que:

$$n_1 = n_2 = 1{,}0003$$

$$R_1 = 1{,}12 R_2$$

e ainda que:

$$k = \frac{R_2}{h_2}, \quad k > 100$$

Podemos mudar ligeiramente a expressão da amplitude do desvio:

$$\begin{aligned}
\delta &= \operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{n \times R}{R+h}\right) - \operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{R}{R+h}\right) \\
&= \operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{n \times R}{h\left(\frac{R}{h}+1\right)}\right) - \operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{R}{h\left(\frac{R}{h}+1\right)}\right) \\
&= \operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{\frac{R}{h} n}{\frac{R}{h}+1}\right) - \operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{\frac{R}{h}}{\frac{R}{h}+1}\right)
\end{aligned}$$

E assim, para o planeta Teegarden b, temos que:

$$\delta(k) = \operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{1{,}0003 k}{k+1}\right) - \operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{k}{k+1}\right), \quad k > 100$$

No caso descrito no enunciado, temos como condição que a espessura da atmosfera de TOI 700 d é 5% inferior à de Teegarden b, logo

$$h_1 = 0{,}95 h_2$$

então

$$\frac{R_1}{h_1} = \frac{1{,}12 R_2}{0{,}95 h_2} = \frac{1{,}12}{0{,}95} k = \frac{112}{95} k$$

o que significa que o desvio para TOI 700 d é dado por $\delta\left(\frac{112}{95}k\right)$ e este valor é 109,2% do desvio $\delta(k)$.

Uma equação que traduz este facto é:

$$\delta\left(\frac{112}{95}k\right) = 1{,}092\,\delta(k),\ k > 100$$

Seguindo a sugestão apresentada, podemos obter:

$$\delta\left(\frac{112}{95}k\right) - 1{,}092\,\delta(k) = 0,\ k > 100$$

Para usar as potencialidades da calculadora podemos definir uma função f como:

$$f(x) = \operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{1{,}0003 x}{x+1}\right) - \operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{x}{x+1}\right), \quad x > 100$$

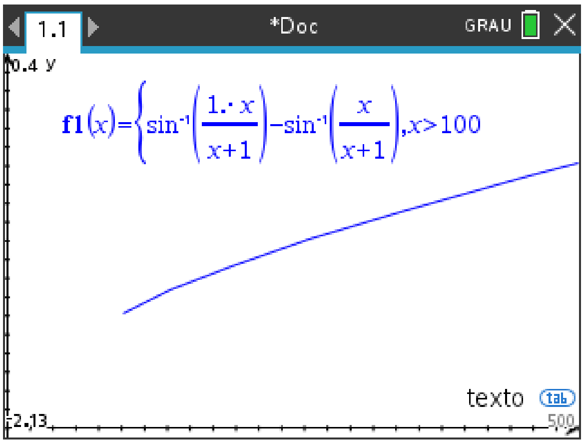


Figura 8: Usando a calculadora TI-*n***spire** *CX II-T*.

e, de seguida, definir uma outra, g, igual ao primeiro membro da equação anterior:

$$g(x) = f\left(\frac{112}{95}x\right) - 1{,}092 f(x), \quad x > 100$$

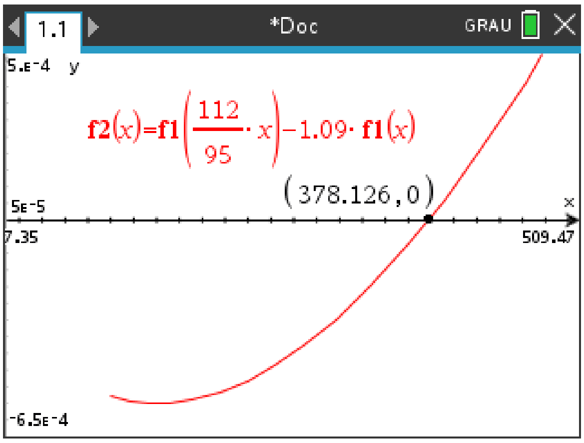
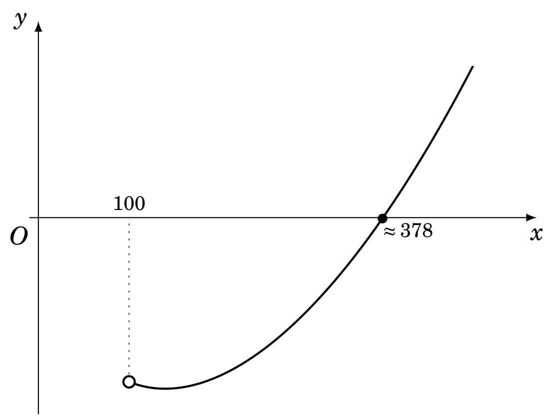


Figura 9: Usando a calculadora TI-*n***spire** *CX II-T*.



Então $k \approx 378$.

7. Comecemos por determinar o domínio onde esta inequação faz sentido e designemos esse domínio por D.

$$D=\left\{x\in\mathbb{R}: \underbrace{-x+1>0}_{①} \wedge \underbrace{e^{-x}>0}_{②} \wedge \underbrace{1-x>0}_{①}\right\}$$

① $-x+1>0 \Leftrightarrow -x+1>0 \Leftrightarrow x<1$

② Condição universal em $\mathbb{R}$

Então $D=\left]-\infty,1\right[$ e para $x\in D$, podemos fazer:

$$(x-e)\log(-x+1)^{\frac{1}{2}}\leq -x\log(1-x)$$

$$\Leftrightarrow \frac{x-e}{2}\log(1-x)+x\log(1-x)\leq 0$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{x-e}{2}+x\right)\log(1-x)\leq 0$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{3x-e}{2}\right)\log(1-x)\leq 0$$

$$\xrightarrow{\times 2}$$

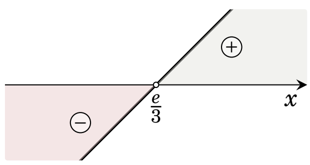
$$\Leftrightarrow \underbrace{(3x-e)\times\log(1-x)}_{P(x)}\ \boxed{\leq 0}$$

A considerar na solução.

x	$-\infty$	0		$\frac{e}{3}$		1
$3x-e$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	
$\log(1-x)$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	
$P(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	

$$y=3x-e$$

é a equação de uma reta com declive positivo:



Como $\log(x)$ é uma função crescente, podemos concluir que $\log(1-x)$ é uma função decrescente pois o seu gráfico pode ser obtido a partir do gráfico de $\log(x)$ através de uma translação e de uma reflexão de eixo vertical, sendo que esta última transformação muda a monotonia. Assim, a função vai ser positiva até ao seu zero e negativa a partir daí.

A solução é

$$x\in\left]-\infty,0\right]\cup\left[\frac{e}{3},1\right[$$

8. Mostrar que

$$\exists c\in[-a,a]: f(c)=g(c)$$

é equivalente a mostrar que

$$\exists c\in[-a,a]: f(c)-g(c)=0$$

Seja h a função definida por

$$h(x)=f(x)-g(x)$$

Como f e g são funções diferenciáveis então são contínuas em $[-a,a]$, assim, h é uma função contínua em $[-a,a]$ pois está definida como a diferença entre duas funções contínuas.

Temos também que

$$\begin{aligned} h(-a)&=f(-a)-\underbrace{g(-a)}_{0}\\ &=-f(a)-0\\ &=-f(a)\end{aligned}$$

f é ímpar, logo $f(-a)=-f(a)$

e

$$\begin{aligned} h(a)&=f(a)-g(a)\\ &=f(a)\end{aligned}$$

g é par, logo $g(a)=g(-a)=0$

sai que

$$h(-a)\times h(a)=-f(a)\times f(a)=-(f(a))^2\leq 0$$

Se $h(-a)\times h(a)=0$ então $f(a)=0$ e como $g(a)=0$ então a é solução da equação $f(x)=g(x)$.

Se $h(-a)\times h(a)<0$, pelo corolário do Teorema de Bolzano-Cauchy, podemos concluir que

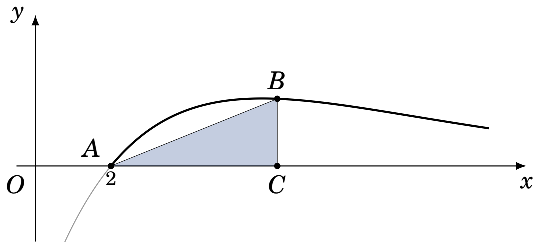
$$\exists c\in[-a,a]: h(c)=0\Leftrightarrow f(c)-g(c)=0\Leftrightarrow f(c)=g(c)$$

Em qualquer caso, $f(x)=g(x)$ tem pelo menos uma solução em $[-a,a]$.

9. Segundo os dados do enunciado, temos que:

- $A(x_A,0)$, onde x_A é um zero da função f;
- $B(x_B,f(x_B))$ com $x_B>2$;
- $C(x_B,0)$.

Podemos começar por fazer a representação da função para perceber como será o triângulo:



Determinemos os zeros de f:

$$\left(x-2\right)e^{-0{,}25x}=0$$

$$\Leftrightarrow x-2=0 \vee \underbrace{\boxed{e^{-0{,}25x}=0}}_{\text{Condição impossível}}$$

$$\Leftrightarrow x=2$$

como a função só apresenta um zero, então $x_A=2$.
Temos então, para o triângulo $[ABC]$:

- $\overline{AC}=\underbrace{\left|x_B-2\right|=x_B-2}_{\text{Como } x_B>2 \text{ então } x_B-2>0}$
- $\overline{BC}=\left|f\left(x_B\right)\right|=\left|\underbrace{\left(x_B-2\right)}_{>0}\underbrace{e^{-0{,}25x_B}}_{>0}\right|$

$$=\left(x_B-2\right)e^{-0{,}25x_B}$$

Sai que:

$$A_{[ABC]}=\frac{\left(x_B-2\right)\times\left(x_B-2\right)e^{-0{,}25x_B}}{2}$$

Seja A uma função que a cada $x>2$ faz corresponder a área do triângulo $[ABC]$, definida por:

$$A\left(x\right)=\frac{\left(x-2\right)^2e^{-0{,}25x}}{2}$$

Temos que:

$$A'\left(x\right)=\left(\frac{\left(x-2\right)^2e^{-0{,}25x}}{2}\right)'$$

$$=\frac{1}{2}\left(\left(x-2\right)^2e^{-0{,}25x}\right)'$$

$$=\frac{1}{2}\left[\left(\left(x-2\right)^2\right)'e^{-0{,}25x}+\left(x-2\right)^2\left(e^{-0{,}25x}\right)'\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left[2\left(x-2\right)e^{-0{,}25x}+\left(x-2\right)^2\left(-\frac{1}{4}e^{-0{,}25x}\right)\right]$$

$$=\frac{1}{8}\left(x-2\right)\left(-x+10\right)e^{-0{,}25x}$$

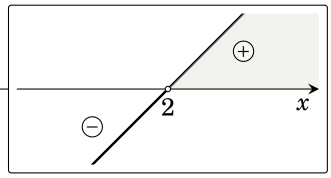
Calculamos os zeros da derivada:

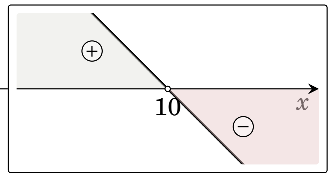
$$A'\left(x\right)=0 \quad\Leftrightarrow\quad \frac{1}{8}\left(x-2\right)\left(-x+10\right)e^{-0{,}25x}=0$$

$$\Leftrightarrow\quad x-2=0 \vee -x+10=0 \vee \underbrace{\boxed{e^{-0{,}25x}=0}}_{\substack{\text{Condição impossível}\\ \forall x\in\mathbb{R},\, e^{-0{,}25x}>0}}$$

$$\Leftrightarrow\quad x=2 \vee x=10$$

	2		10	$+\infty$
$\frac{1}{8}\left(x-2\right)$		+	+	+
$-x+10$		+	0	−
$e^{-0{,}25x}$		+	+	+
A'		+	0	−
A		↗	max. $A\left(10\right)$	↘





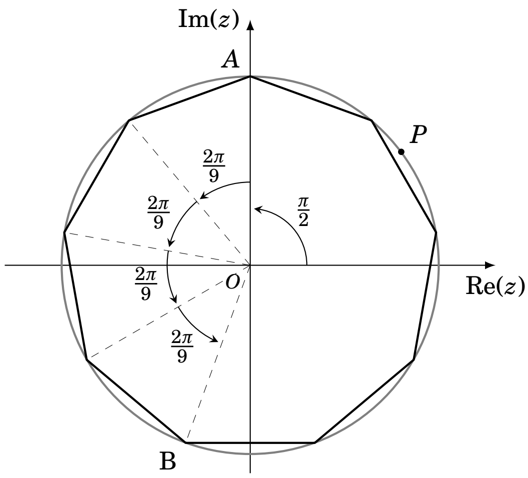
Então a área é máxima quando $x_B=10$.

10. Todas as opções têm números complexos escritos na forma trigonométrica. Os afixos A, B e P estão todos sobre a circunferência centrada na origem então são todos afixos de números complexos com o mesmo módulo.

Comecemos por isso por determinar o módulo de z:

$$|z|=\sqrt{4^2+3^2}=\sqrt{25}=5$$

Uma vez que A pertence à parte positiva do eixo imaginário sabemos que é o afixo de $5e^{i\frac{\pi}{2}}$.



Logo, B é afixo do número $5e^{i\left(\frac{\pi}{2}+\frac{8\pi}{9}\right)}=5e^{i\frac{25\pi}{18}}$.

Opção: **(A)**

11. Na equação

$$ze^{i\theta}+we^{i(-\theta)}=2\cos\theta+3\,\mathrm{sen}\,\theta$$

vamos usar a relação $e^{i\alpha}=\cos(\alpha)+i\,\mathrm{sen}(\alpha)$

$$z\left(\cos\theta+i\,\mathrm{sen}\,\theta\right)+w\left(\cos\left(-\theta\right)+i\,\mathrm{sen}\left(-\theta\right)\right)=2\cos\theta+3\,\mathrm{sen}\,\theta$$

Sabemos que a função cosseno é par e que a função seno é ímpar logo

$$\cos\left(-\theta\right)=\cos\theta \qquad \mathrm{sen}\left(-\theta\right)=-\mathrm{sen}\,\theta$$

$$z\left(\cos\theta+i\,\mathrm{sen}\,\theta\right)+w\left(\cos\left(\theta\right)-i\,\mathrm{sen}\left(\theta\right)\right)=2\cos\theta+3\,\mathrm{sen}\,\theta$$

$$\Leftrightarrow z\cos\theta+iz\,\mathrm{sen}\,\theta+w\cos\theta-iw\,\mathrm{sen}\,\theta=2\cos\theta+3\,\mathrm{sen}\,\theta$$

$$\Leftrightarrow (z+w)\cos\theta+(iz-iw)\,\mathrm{sen}\,\theta=2\cos\theta+3\,\mathrm{sen}\,\theta$$

$$\begin{cases} z+w=2 \\ iz-iw=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} w=2-z \\ iz-i\left(2-z\right)=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} w=2-z \\ 2iz=3+2i \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} w=2-z \\ z=\dfrac{3}{2i}+\dfrac{\cancel{2i}}{\cancel{2i}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} w=2-z \\ z=1+\dfrac{3}{2i}\times\dfrac{-i}{-i} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} w=2-z \\ z=1-\dfrac{3i}{2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} w=2-\left(1-\dfrac{3i}{2}\right) \\ z=1-\dfrac{3}{2}i \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} w=1+\dfrac{3}{2}i \\ z=1-\dfrac{3}{2}i \end{cases}$$

Em alternativa

Tendo em consideração a transformação:

$$e^{i\alpha}=\cos(\alpha)+i\,\mathrm{sen}(\alpha)$$

vem que

$$e^{i\theta}=\cos\theta+i\,\mathrm{sen}\,\theta$$

$$e^{i(-\theta)}=\cos\left(-\theta\right)+i\,\mathrm{sen}\left(-\theta\right)=\cos\left(\theta\right)-i\,\mathrm{sen}\left(\theta\right)$$

A função cosseno é par e a função seno é ímpar.

e daqui podemos tirar as seguintes relações:

$$e^{i\theta}+e^{i(-\theta)}=2\cos\left(\theta\right) \Leftrightarrow \frac{e^{i\theta}+e^{i(-\theta)}}{2}=\cos\theta$$

$$e^{i\theta}-e^{i(-\theta)}=2i\,\mathrm{sen}\left(\theta\right) \Leftrightarrow \frac{e^{i\theta}-e^{i(-\theta)}}{2i}=\mathrm{sen}\,\theta$$

Sendo assim

$$\begin{aligned} 2\cos\theta+3\,\mathrm{sen}\,\theta &= \cancel{2}\times\frac{e^{i\theta}+e^{i(-\theta)}}{\cancel{2}}+3\times\frac{e^{i\theta}-e^{i(-\theta)}}{2i} \\ &= e^{i\theta}+e^{i(-\theta)}+\frac{3}{2i}e^{i\theta}-\frac{3}{2i}e^{i(-\theta)} \\ &= \underbrace{\left(1+\frac{3}{2i}\right)}_{z}e^{i\theta}+\underbrace{\left(1-\frac{3}{2i}\right)}_{w}e^{i(-\theta)} \end{aligned}$$

Logo

$$z=1+\frac{3}{2i}\times\frac{-i}{-i}=1+\frac{3i}{2i^2}=1-\frac{3}{2}i$$

$$w=1-\frac{3}{2i}\times\frac{-i}{-i}=1-\frac{3i}{2i^2}=1+\frac{3}{2}i$$

12.

12.1. Sabemos que

$$\lim_{x\to 0^-} f\left(x\right)=f\left(0\right)$$

e temos

$$\lim_{x\to 0^-} f\left(x\right)=\lim_{x\to 0^-}\frac{e^{\mathrm{sen}(\pi x)}-1}{x} \quad \text{e} \quad f\left(0\right)=\ln k$$

Do limite, sai

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0^-}\frac{e^{\mathrm{sen}(\pi x)}-1}{x} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} &\lim_{x\to 0^-}\left(\frac{e^{\mathrm{sen}(\pi x)}-1}{\mathrm{sen}(\pi x)}\times\frac{\mathrm{sen}(\pi x)}{\pi x}\times\pi\right) \\ = &\lim_{x\to 0^-}\frac{e^{\mathrm{sen}(\pi x)}-1}{\mathrm{sen}(\pi x)}\times\lim_{x\to 0^-}\frac{\mathrm{sen}(\pi x)}{\pi x}\times\pi \\ = &\underbrace{\lim_{y\to 0^-}\frac{e^y-1}{y}}_{\text{Limite notável }=1}\times\underbrace{\lim_{z\to 0^-}\frac{\mathrm{sen}\,z}{z}}_{\text{Limite notável }=1}\times\pi \\ = &\ \pi \end{aligned}$$

Se $x\to 0^-$ então

$\mathrm{sen}(\pi x)\to 0^-$ *e* $\pi x\to 0^-$

Com $\mathrm{sen}(\pi x)=y$ *e* $\pi x=z$ *concluímos que*

$y\to 0^-$ *e* $z\to 0^-$

Assim

$$\ln k=\pi \Leftrightarrow k=e^{\pi}$$

Opção: **(D)**

12.2. Vamos estudar a existência de todas as assíntotas ao gráfico de f.

Antes de começar o cálculo das suas equações, podemos fazer uma representação da função na calculadora e, dessa maneira, ter uma ideia de como serão as assíntotas: verticais, horizontais ou oblíquas.

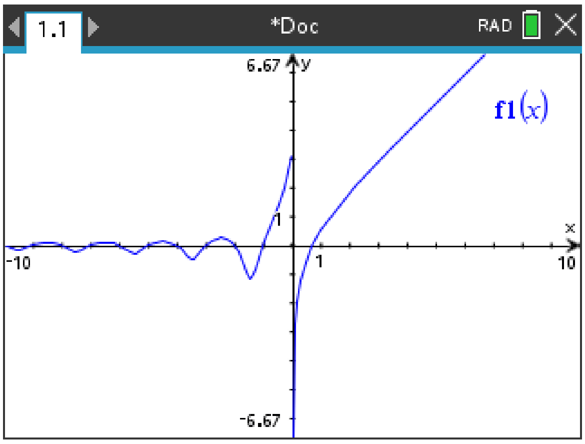


Figura 10: Usando a calculadora TI-*n***spire** *CX II-T*.

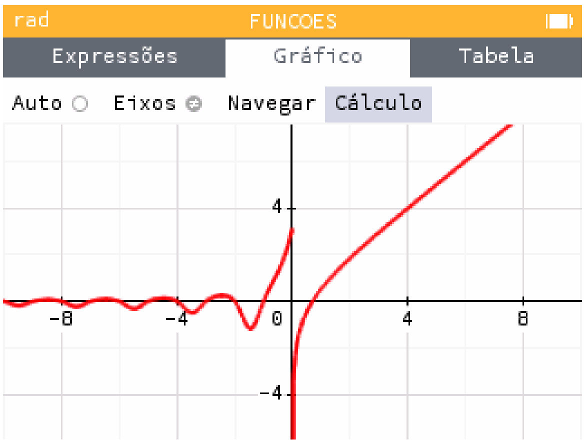


Figura 11: Usando a calculadora NUMWORKS.

Assíntotas verticais:

Para $x \to 0^-$, pela alínea anterior,

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \pi$$

Se $x \to 0^+$,

$$\lim_{x \to 0^+} \ln\left(e^x - 1\right) = \ln\left(\underbrace{e^{0^+}}_{1^+} - 1\right) = \ln 0^+ = -\infty$$

Assim, porque um destes limites é infinito, concluímos que $x = 0$ é assíntota vertical ao gráfico de f.

Para $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ a função está definida como composição de funções contínuas e, por isso, é contínua. Não há mais assíntotas verticais ao gráfico de f.

Assíntotas não verticais:

Para $x \to -\infty$ parece haver uma assíntota horizontal. Vamos calcular

$$\lim_{x \to -\infty} f(x)$$

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{e^{\operatorname{sen}(\pi x)} - 1}{x} = \lim_{x \to -\infty} \left[\left(e^{\operatorname{sen}(\pi x)} - 1\right) \times \frac{1}{x}\right]$$

Temos que:

$$\begin{array}{rcccl} -1 & \le & \operatorname{sen}(\pi x) & \le & 1 \\ \Leftrightarrow \quad e^{-1} & \le & e^{\operatorname{sen}(\pi x)} & \le & e^{1} \end{array} \quad e > 1$$

$$\Leftrightarrow e^{-1} - 1 \le e^{\operatorname{sen}(\pi x)} - 1 \le e - 1$$

$$\therefore y = e^{\operatorname{sen}(\pi x)} - 1 \text{ é limitada.}$$

E

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x} = 0$$

Então podemos concluir que

$$\lim_{x \to -\infty} \left[\left(\underbrace{e^{\operatorname{sen}(\pi x)} - 1}_{\text{limitada}}\right) \times \underbrace{\frac{1}{x}}_{\text{Tende para zero.}}\right] = 0$$

Portanto, $y = 0$ é assíntota horizontal do gráfico de f quando $x \to -\infty$.

Para $x \to +\infty$, a assíntota, a existir, parece ser oblíqua.

Vamos calcular

$$m = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x}$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln\left(e^x - 1\right)}{x} \overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=} \lim_{x \to +\infty} \frac{\ln\left(e^x\left(1 - \frac{1}{e^x}\right)\right)}{x}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{\ln e^x + \ln\left(1 + \frac{1}{e^x}\right)}{x}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{\overbrace{\ln e^x}^{x}}{x} + \lim_{x \to +\infty} \frac{\ln\left(1 + \overbrace{e^{-x}}^{e^{-\infty} = 0^+}\right)}{x}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{\cancel{x}}{\cancel{x}} + \frac{\ln 1}{+\infty}$$

$$= 1 + \frac{\ln 1}{+\infty} = 1 + 0 = 1$$

$$b = \lim_{x\to+\infty}[f(x) - mx]$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left[\ln\left(e^x - 1\right) - 1x\right] \overset{(\infty-\infty)}{=} \lim_{x\to+\infty}\left[\ln\left(e^x\left(1 - \frac{1}{e^x}\right)\right) - x\right]$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\left(\ln\left(e^x\right) + \ln\left(1 + e^{-x}\right) + x\right)$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\left(\cancel{x} + \ln\left(1 + e^{-x}\right) + \cancel{x}\right)$$

$$= \ln(1 + 0) = \ln 1 = 0$$

Logo, $y = x$ é assíntota ao gráfico de f quando $x \to +\infty$.

---

13. Queremos determinar

$$\lim_{x\to0}\frac{(f(x))^2 + 2f(x)f'(x) + (f'(x))^2}{x^2}$$

Observando o numerador da expressão, podemos reparar que é o resultado de um quadrado do binómio:

$$(f(x))^2 + 2f(x)f'(x) + \left(f'(x)\right)^2 = \left(f(x) + f'(x)\right)^2$$

Resolvendo o limite com essa substituição feita, ficamos com:

$$\lim_{x\to0}\frac{(f(x) + f'(x))^2}{x^2} = \lim_{x\to0}\left(\frac{f(x) + f'(x)}{x}\right)^2$$

$$= \left(\lim_{x\to0}\frac{f(x) + f'(x)}{x}\right)^2 \qquad (\dagger)$$

Uma vez que o declive da reta tangente ao gráfico da função no ponto de abcissa 0 é igual a -3 podemos escrever que:

$$-3 = f'(0) = \lim_{x\to0}\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \qquad (\star)$$

O ponto de tangência é comum à reta tangente e a função. Usando a equação da reta tiramos que esse ponto tem ordenada

$$-3 \times 0 + 3 = 3$$

ou seja, $f(0) = 3$, fazendo a devida substituição no limite $(\star)$ temos que:

$$\lim_{x\to0}\frac{f(x) - 3}{x} = -3$$

Voltando ao limite $(\dagger)$, vamos somar e subtrair 3 de forma a construir o limite que queremos.

$$= \left(\lim_{x\to0}\frac{f(x) - 3 + 3 + f'(x)}{x}\right)^2$$

$$= \left(\underbrace{\lim_{x\to0}\frac{f(x) - 3}{x}}_{-3} + \lim_{x\to0}\frac{f'(x) + 3}{x}\right)^2$$

$$= \left(-3 + \lim_{x\to0}\frac{f'(x) + 3}{x}\right)^2 \qquad (\ddagger)$$

Sendo a função duas vezes derivável e tendo um ponto de inflexão em $x = 0$, podemos dizer que

$$0 = f''(0) = \lim_{x\to0}\frac{f'(x) - f'(0)}{x - 0}$$

pelo que vimos antes, $f'(0) = -3$, então

$$0 = \lim_{x\to0}\frac{f'(x) - f'(0)}{x - 0} = \lim_{x\to0}\frac{f'(x) - (-3)}{x} = \lim_{x\to0}\frac{f'(x) + 3}{x}$$

Substituindo em ‡

$$\left(-3 + \underbrace{\lim_{x\to0}\frac{f'(x) + 3}{x}}_{0}\right)^2 = (-3 + 0)^2 = 9$$