Folha 14 - Derivadas de funções reais de variável real

1. Derivada de uma função num ponto

Quando existe, define-se *derivada da função f no ponto de abcissa x_0* como

$$\boxed{f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.} \quad \text{ou} \quad \boxed{f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}} \quad \text{para } h = x - x_0.$$

Muitas vezes por simplificação de linguagem diz-se *derivada da função f no ponto x_0* em vez de derivada de f no ponto de abcissa x_0.

Exemplo 1 *Calculemos, a partir da definição, a derivada da função definida por* $f(x) = x^3 - x$ *no ponto de abcissa* $x_0 = 1$. *Temos*

$$f'(1) = \lim_{x \to 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{x^3 - x - 0}{x - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{x(x-1)(x+1)}{x - 1} = \lim_{x \to 1} x(x+1) = 2.$$

Exemplo 2 *Calculemos* $f'(0)$, *sendo* $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *definida por* $f(x) = \sqrt[3]{x}$.

Temos

$$f'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{\sqrt[3]{x} - 0}{x} = \lim_{x \to 0} \sqrt[3]{\frac{1}{x^2}} = +\infty.$$

$$\text{Se} \quad \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = +\infty \quad \text{ou} \quad \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = -\infty,$$

dizemos que f tem derivada infinita no ponto x_0 e que é, respetivamente, $+\infty$ ou $-\infty$.

Se uma função tem derivada finita num ponto dizemos que é *diferenciável* ou *derivável* nesse ponto.

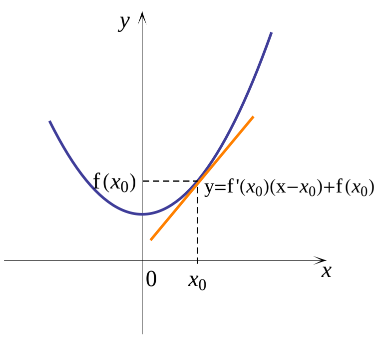
2. Interpretação geométrica do conceito de derivada

O declive da reta secante ao gráfico de f nos pontos de abcissas x_0 e $x_0 + h$ é dado por $\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$. À medida que h tende para zero, a reta secante tende para uma posição limite que é exatamente a reta tangente à curva no ponto de abcissa x_0. O declive m da tangente é o limite dos declives das secantes quando h tende para zero, ou seja,

$$m = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = f'(x_0).$$

Logo, geometricamente, a derivada de uma função num ponto de abcissa x_0 é igual ao declive da reta tangente ao gráfico da função nesse ponto. Temos, então, que a equação da reta tangente ao gráfico da função f no ponto $(x_0, f(x_0))$ é dada por

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0).$$



Exemplo 3 *Vamos calcular, a partir da definição, a derivada da função* $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *definida por* $f(x) = x^2 + 2x + 1$ *no ponto* $P = (-3, 4)$ *e escrever a equação da reta tangente ao gráfico de f no ponto P.*

Temos $m = f'(-3) = -4$ *porque*

$$\lim_{x\to -3}\frac{f(x)-f(-3)}{x-(-3)} = \lim_{x\to -3}\frac{x^2+2x+1-4}{x+3} = \lim_{x\to -3}\frac{(x-1)(x+3)}{x+3} = \lim_{x\to -3}(x-1) = -4.$$

Então, uma equação da reta tangente será

$$y-4 = -4\big(x-(-3)\big) \iff y = -4x-8.$$

3. Derivadas laterais

Diz-se que

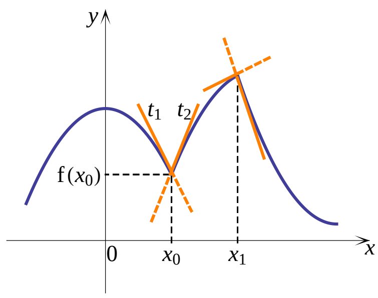
- f *é diferenciável à esquerda de* x_0 se existe $\lim_{x\to x_0^-}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ ou $\lim_{h\to 0^-}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$, a que se chama *derivada lateral à esquerda de* x_0 e se representa por $f'(x_0^-)$;

- f *é diferenciável à direita de* x_0 se existe $\lim_{x\to x_0^+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ ou $\lim_{h\to 0^+}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$, a que se chama *derivada lateral à direita de* x_0 e se representa por $f'(x_0^+)$.

Conclui-se que existe a derivada da função f num ponto x_0 se e só se existirem e forem iguais as derivadas laterais no ponto x_0. Nesse caso, $f'(x_0)$ é igual ao valor comum das derivadas laterais:

$$f'(x_0^-) = a \quad \text{e} \quad f'(x_0^+) = a \quad \text{se e só se} \quad f'(x_0) = a, \quad \text{sendo} \quad a \quad \text{finito ou infinito.}$$

Se as derivadas laterais no ponto x_0 existirem e forem diferentes, então não existe $f'(x_0)$.



A função representada graficamente na figura não é diferenciável em x_0 e x_1. No ponto de abcissa x_0 a curva descrita não tem uma reta tangente mas duas semitangentes, a semirreta t_1 e a semirreta t_2. Estas semirretas não estão no prolongamento uma da outra. O declive da semirreta t_1 é igual à *derivada de* f *à esquerda de* x_0 e o declive da semirreta t_2 é igual à *derivada de* f *à direita de* x_0.

Exemplo 4 *Vamos averiguar se existe* $g'(2)$, *sendo* g *a função definida em* $\mathbb{R}$ *por*

$$g(x) = \begin{cases} x^2-2 & \text{se } x \le 2 \\ 3x-4 & \text{se } x > 2. \end{cases}$$

$$g'(2^+) = \lim_{x\to 2^+}\frac{f(x)-f(2)}{x-2} = \lim_{x\to 2^+}\frac{3x-4-2}{x-2} = \lim_{x\to 2^+}\frac{3x-6}{x-2} = \lim_{x\to 2^+}\frac{3(x-2)}{x-2} = \lim_{x\to 2^+} 3 = 3$$

$$g'(2^-) = \lim_{x\to 2^-}\frac{f(x)-f(2)}{x-2} = \lim_{x\to 2^-}\frac{x^2-2-2}{x-2} = \lim_{x\to 2^-}\frac{(x-2)(x+2)}{x-2} = \lim_{x\to 2^-}(x+2) = 4.$$

Como as derivadas laterais são diferentes, conclui-se que não existe derivada de g *no ponto de abcissa* 2.

Mas a existência de derivada de uma função num ponto pode depender apenas da existência de uma das derivadas laterais.

Exemplo 5 *Seja f a função de domínio $\mathbb{R}_0^+$, definida por*

$$f(x) = \sqrt{x}.$$

Vamos averiguar se existe $f'(0)$.

Como a função não está definida à esquerda de zero, não faz sentido falar em derivada à esquerda e então

$$f'(0) = f'(0^+) = \lim_{x \to 0^+} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{0}}{x - 0} = \lim_{x \to 0^+} \frac{\sqrt{x}}{x} = \lim_{x \to 0^+} \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty.$$

4. Função derivada e regras de derivação

A função derivada ou simplesmente derivada de uma função f é uma outra função, representada por f', cujo domínio é o conjunto de todos os pontos em que f tem derivada finita e que a cada ponto do seu domínio faz corresponder a derivada da função nesse ponto.

Exemplo 6 *Consideremos a função definida em $\mathbb{R}$ por* $g(x) = x^2$.

Calculemos $g'(x_0)$, sendo x_0 um número real qualquer.

Temos, então, para $x_0 \in \mathbb{R}$,

$$g'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{x^2 - x_0^2}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{(x - x_0)(x + x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} (x + x_0) = 2x_0.$$

Podemos agora caracterizar a função g', função derivada de g.

$$\begin{array}{rcl} g' : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & g'(x) = 2x. \end{array}$$

- **Derivada de uma função afim**

  Consideremos a função real de variável real definida por $f(x) = ax + b, \quad a, b \in \mathbb{R},$ a que chamamos *função afim*. Prova-se que a derivada desta função é a função constante igual a a.

  $$\boxed{(ax + b)' = a, \qquad \forall x \in \mathbb{R}.}$$

  Se $a = 0$,

  $$f(x) = b \text{ (constante)} \qquad \text{e} \qquad f'(x) = 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

  Se $a = 0$ e $b = 1$,

  $$f(x) = x \qquad \text{e} \qquad f'(x) = 1, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

  Ou seja, a derivada da função constante é igual a zero e a derivada da função identidade é igual a 1.

  Exemplo 7 *Determinemos a função derivada de cada uma das funções definidas por*

  $$r(x) = 3x + 5, \qquad s(x) = 3 - \frac{1}{3}x \qquad e \qquad t(x) = -5.$$

  Temos $r'(x) = 3, \qquad s'(x) = -\frac{1}{3} \qquad e \qquad t'(x) = 0.$

- **Derivada de uma soma**

  Se as funções f e g são deriváveis num ponto x_0 (têm derivada finita), então $f+g$ é derivável em x_0 e (como se pode demonstrar) $(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$.

  Então, se f e g são deriváveis em $]a,b[$, $f+g$ é derivável em $]a,b[$ e

$$\boxed{(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x), \quad \forall x \in]a,b[.}$$

  De um modo geral, dado um número n finito de funções deriváveis em $]a,b[$, $f_1, f_2, \ldots, f_n$, a derivada da soma das funções é igual à soma das derivadas de cada uma das funções em $]a,b[$.

  Exemplo 8 *Obtenha a derivada de* $g(x) = (1+x) + (3x+1)$.

  $g'(x) = (1+x)' + (3x+1)' = 1 + 3 = 4$.

- **Derivada de um produto**

  Se as funções f e g são deriváveis num ponto x_0, então $f \cdot g$ é derivável em x_0 e (como se pode demonstrar) $(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0) \cdot g(x_0) + g'(x_0) \cdot f(x_0)$.

  Sendo assim, se f e g são funções deriváveis num intervalo $]a,b[$, $f \cdot g$ é também derivável em $]a,b[$ e

$$\boxed{(f \cdot g)'(x) = f'(x) \cdot g(x) + g'(x) \cdot f(x), \quad \forall x \in]a,b[.}$$

  Se considerarmos uma das funções constantes, digamos $g(x) = c$ (constante), obtemos o produto de uma função f por uma constante e resulta $(c \cdot f)'(x) = c \cdot f'(x), \quad \forall x \in]a,b[$, uma vez que $g'(x) = 0$.

  De um modo geral, dado um número finito n de funções deriváveis em $]a,b[$, $f_1, f_2, \ldots, f_n$, a derivada do produto das funções é igual à soma dos n produtos que se obtêm mutiplicando a derivada de cada uma das funçoes pelas restantes.

  Exemplo 9 *Obtenha a derivada de* $r(x) = (x-1) \cdot (x-3)$.

  $r'(x) = (x-1)' \cdot (x-3) + (x-1) \cdot (x-3)' = 1 \cdot (x-3) + (x-1) \cdot 1 = 2x - 4$.

- **Derivada de uma potência de expoente natural**

  Se $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ e f é uma função derivável em $]a,b[$, então f^n é derivável em $]a,b[$ e

$$\boxed{(f^n)'(x) = nf^{n-1}(x)f'(x), \quad \forall x \in]a,b[.}$$

  Com efeito, trata-se do caso particular da derivada do produto de n vezes a função f.

  Podemos provar que este resultado se estende ao caso em que $n \in \mathbb{R}$.

  Exemplo 10 *A derivada da função definida em* $\mathbb{R}$ *por* $f(x) = (2x+1)^5$ *é*
  $f'(x) = 5 \cdot (2x+1)^4 \cdot (2x+1)' = 10 \cdot (2x+1)^4$.

  Exemplo 11 $\left(\sqrt{x-3}\right)' = \dfrac{1}{2}(x-3)^{\frac{1}{2}-1}(x-3)' = \dfrac{1}{2\sqrt{x-3}}$

Exemplo 12 $\left(\sqrt[3]{x^2+1}\right)' = \frac{1}{3}(x^2+1)^{\frac{1}{3}-1}(x^2+1)' = \frac{(x^2+1)'}{3\sqrt[3]{(x^2+1)^2}} = \frac{2x}{3\sqrt[3]{(x^2+1)^2}}.$

- **Derivada de um quociente**

  Se as funções f e g são deriváveis num ponto x_0 e se $g(x_0) \neq 0$, então $\frac{f}{g}$ é derivável em x_0 e $\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)\cdot g(x_0) - g'(x_0)\cdot f(x_0)}{[g(x_0)]^2}.$

  Então, se f e g são deriváveis em $]a,b[$ e se $g(x) \neq 0$, $\forall x \in]a,b[$, $\frac{f}{g}$ é derivável em $]a,b[$ e

$$\boxed{\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)\cdot g(x) - g'(x)\cdot f(x)}{[g(x)]^2}, \quad \forall x \in]a,b[.}$$

Exemplo 13

$$\begin{aligned}\left(\frac{x^2+3}{x^2+1}\right)' &= \frac{(x^2+3)'\cdot(x^2+1) - (x^2+1)'\cdot(x^2+3)}{(x^2+1)^2} = \\ &= \frac{2x\cdot(x^2+1) - 2x\cdot(x^2+3)}{(x^2+1)^2} = \frac{-4x}{(x^2+1)^2}\end{aligned}$$

5. Derivadas sucessivas

Se determinarmos a função derivada da função f', obtemos a derivada da derivada de f, ou seja, a segunda derivada de f. Representa-se por f''. Do mesmo modo se define derivada de ordem n que se representa por $f^{(n)}$. Trata-se da n-ésima derivada de f que se determina derivando a função $f^{(n-1)}$.

Exemplo 14 *As quatro primeiras derivadas da função definida em* $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ *por* $f(x) = \frac{1}{x}$ *são*

$$f'(x) = \frac{0\cdot x - 1}{x^2} = -\frac{1}{x^2}, \qquad f''(x) = -\frac{0\cdot x^2 - 2x}{x^4} = \frac{2}{x^3}$$

$$f'''(x) = \frac{0\cdot x^3 - 3x^2\cdot 2}{x^6} = -\frac{6x^2}{x^6} = -\frac{6}{x^4} \quad \text{e} \quad f^{(iv)}(x) = -\frac{0\cdot x^4 - 4x^3\cdot 6}{x^8} = \frac{24x^3}{x^8} = \frac{24}{x^5}.$$

Exemplo 15 *Vamos calcular as sucessivas derivadas da função real definida por*
$p(x) = 2x^4 - 5x^2 + 1.$

$$p'(x) = 8x^3 - 10x \quad p''(x) = 24x^2 - 10 \quad p'''(x) = 48x \quad p^{(iv)}(x) = 48 \quad p^{(n)}(x) = 0, \quad n \geq 5.$$

6. Derivada, monotonia e extremos de uma função

Dada uma função f, o estudo do sinal de f' permite conhecer os intervalos de monotonia e os extremos de f.

Assim, dado um intervalo $]a,b[\subseteq D_f$,

- Se $f'(x) > 0, \forall x \in]a,b[$, então f é estritamente crescente em $]a,b[$;
- Se $f'(x) < 0, \forall x \in]a,b[$, então f é estritamente decrescente em $]a,b[$;
- Se $f'(x) = 0, \forall x \in]a,b[$, então f é constante em $]a,b[$.

Verifica-se ainda que, se para um dado $x_0 \in D_f$, se verificar simultaneamente que

- f é contínua em x_0,
- $f'(x_0) = 0$ e,
- f' muda de sinal em x_0 (isto é, numa vizinhança de x_0, o sinal de f' é diferente à esquerda e à direita de x_0);

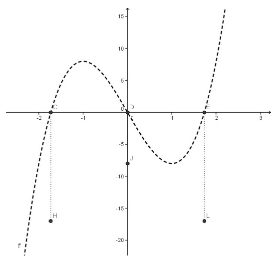
Então, $f(x_0)$ é um extremo relativo de f e x_0 é um extremante de f.

Quando uma função tem pontos de descontinuidade é ainda necessário estudá-los caso a caso, atendendo à definição de extremos.

Exemplo 16 *A função real de variável real definida por $g(x) = x^4 - 6x^2 - 8$ é contínua em $\mathbb{R}$.*

$$g'(x) = 4x^3 - 12x$$

Os zeros de g' são $\pm\sqrt{3}$ e 0 e $g(-\sqrt{3}) = g(\sqrt{3}) = -17$ e $g(0) = -8$



x	$-\infty$	$-\sqrt{3}$		*0*		$\sqrt{3}$	$+\infty$
x	$-$		$-$	*0*	$+$		$+$
$4x^2 - 12$	$+$	*0*	$-$		$-$	*0*	$+$
g'	$-$	*0*	$+$	*0*	$-$	*0*	$+$
g	$\searrow$	*-17*	$\nearrow$	*-8*	$\searrow$	*-17*	$\nearrow$

g é estritamente crescente em $]-\sqrt{3}, 0[$ e em $]\sqrt{3}, +\infty[$;

g é estritamente decrescente em $]-\infty, -\sqrt{3}[$ e em $]0, \sqrt{3}[$.

7. Segunda Derivada, concavidades e pontos de inflexão

Dada uma função f, o estudo do sinal de f'' permite conhecer os intervalos em que não se altera a curvatura (**sentido da concavidade**) e os pontos de inflexão do gráfico de f.

Assim, dado um intervalo $]a, b[\subseteq D_f$, Se $f''(x) > 0, \forall x \in]a, b[$, então a concavidade do gráfico de f é "voltada para cima"em $]a, b[$; Se $f''(x) < 0, \forall x \in]a, b[$, então a concavidade do gráfico de f é "voltada para baixo"em $]a, b[$;

Verifica-se ainda que, se para um dado $x_0 \in D_f$, se verificar simultaneamente que

- f é contínua em x_0,
- $f''(x_0) = 0$ e,
- f'' muda de sinal em x_0 (isto é, numa vizinhança de x_0, o sinal de f'' é diferente à esquerda e à direita de x_0);

Então, $P(x_0, f(x_0))$ é um ponto de inflexão do gráfico de f.

Quando uma função tem pontos de descontinuidade é ainda necessário estudá-los caso a caso, atendendo à definição de pontos de inflexão.

Exemplo 17 *Retomando a função do exemplo anterior, definida por* $g(x) = x^4 - 6x^2 - 8$.

$g'(x) = 4x^3 - 12x \qquad g''(x) = 12x^2 - 12$

Se existirem, os pontos de inflexão do gráfico de g *têm por abcissa zeros de* g''.

$g''(x) = 0 \iff 12x^2 - 12 = 0 \iff x = -1 \vee x = 1$

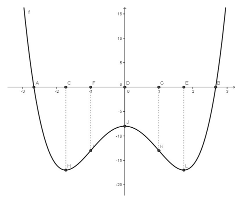
$g(-1) = g(1) = 13$

x	$-\infty$	-1		1	$+\infty$
g''	$+$	0	$-$	0	$+$
g	$\cup$	-13	$\cap$	-13	$\cup$

Assim, os pontos $(-1, -13)$ *e* $(1, -13)$ *são pontos de inflexão do gráfico de* g.

Nos intervalos $]-\infty, -1[$ *e* $]1, +\infty[$, *o gráfico de* g *tem a concavidade voltada para cima. No intervalo* $]-1, 1[$, *o gráfico de* g *tem a concavidade voltada para baixo.*

Se associarmos a estas informações outros dados como os pontos de interseção com os eixos coordenados, o facto de se tratar de uma função par (entre outros), estaremos capazes de construir um esboço do gráfico da função:



Função	Derivada	Exemplo
a (constante)	0	$y = -2 \qquad y' = 0$
$ax + b \qquad (a, b \in \mathbb{R})$	a	$y = -3x + 2 \qquad y' = -3$
$ax^p \qquad (a, b \in \mathbb{R})$	apx^{p-1}	$y = 5x^4 \qquad y' = 20x^3$
$\text{sen}\, f$	$f' \cos f$	$y = \text{sen}(x^2) \quad y' = 2x \cos(x^2)$
$\cos f$	$-f' \,\text{sen}\, f$	$y = \cos(x^2) \quad y' = -2x \,\text{sen}(x^2)$
$\text{tg}\, f$	$\dfrac{f'}{\cos^2 f}$	$y = \text{tg}(3x) \quad y' = \dfrac{3}{\cos^2(3x)}$
e^f	$f'e^f$	$y = e^{-\frac{x}{5}} \quad y' = -\frac{1}{5}e^{-\frac{x}{5}}$
$a^f \qquad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$	$f'a^f \ln a$	$y = 3^{2x} \qquad y' = 2 \cdot 3^{2x} \cdot \ln 3$
$\ln f$	$\dfrac{f'}{f}$	$y = \ln(x^2) \qquad y' = \dfrac{2x}{x^2} = \dfrac{2}{x}$
$\log_a f \qquad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$	$\dfrac{f'}{f \ln a}$	$y = \log_3(2x) \qquad y' = \dfrac{2}{2x \ln 3} = \dfrac{1}{x \ln 3}$

Tabela 1: *Quadro resumo das derivadas de funções*

Exercícios Propostos

Exercício 1 Considere a função f definida em $\mathbb{R}$ por $f(x) = \begin{cases} 2x^2 - 3 & \text{se } x \leq 1 \\ 4x - 5 & \text{se } x > 1 \end{cases}$ e averigue se existe $f'(1)$.

Exercício 2 Calcule y', sendo:

a) $y = 3x^2 + 2x + 1$; b) $y = x^{100} \cdot (1 + 4x)$; c) $y = (x^4 - x^2 + 5)^{10}$; d) $y = \dfrac{x^2 + 1}{x - 3}$;

e) $y = \sqrt[3]{x}$; f) $y = \dfrac{1}{x^2}$; g) $y = e^{2x} - x$; h) $y = \ln(x + 2)$;

j) $y = \sqrt{x^2 + 1}$; j) $y = x \ln(x^2 + x + 1)$; k) $y = \dfrac{e^x}{x + 1}$; l) $y = \operatorname{sen} x + 3 \cos x^2$;

Exercício 3 Mostre que a tangente ao gráfico da função definida por $h(x) = x^3 - 3x + 3$ no ponto de abcissa 1 é uma reta horizontal.

Exercício 4 Considere a função $f(x) = 1 - e^x$.

a) Determine as coordenadas do ponto de intersecção do gráfico da função com o eixo Ox.
b) Determine uma equação da reta tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa 1.

Exercício 5 Determine, para cada uma das funções que se seguem, os intervalos de monotonia e os extremos relativos:

a) $f(x) = x^2 - 6x + 9$
b) $f(x) = x^3 - 9x^2 + 3$;
c) $g(x) = \frac{2}{x-1}$;
d) $h(x) = x + \frac{4}{x}$;
e) $i(x) = e^x(x - 1)$.