Proposta de Resolução da Ficha de Trabalho 4

Matemática A

12.º Ano de Escolaridade | Turma: J

1. .

(I)

⊵ f **é contínua em** 2 se **existir** $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$

Ora,

$\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = 1$

$\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = -2$

$f(2) = 3$

Verificamos que:

$\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) \neq \lim\limits_{x\to 2^+} f(x)$

Logo, não existe $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$

Portanto, a função f não é contínua em $x = 2$

Obs.: Para a função ser contínua em $x = 2$, deveria ter-se: $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = f(2)$

(II)

⊵ g **é contínua em** 2 se **existir** $\lim\limits_{x\to 2} g(x)$

Ora,

$\lim\limits_{x\to 2^-} g(x) = 3$

$\lim\limits_{x\to 2^+} g(x) = 5$

$g(2) = 3$

Verificamos que:

$\lim\limits_{x\to 2^-} g(x) \neq \lim\limits_{x\to 2^+} g(x)$

Logo, não existe $\lim\limits_{x\to 2} g(x)$

Portanto, a função g não é contínua em $x = 2$

Obs.: Para a função ser contínua em $x = 2$, deveria ter-se: $\lim\limits_{x\to 2^-} g(x) = \lim\limits_{x\to 2^+} g(x) = g(2)$

(III)

$\trianglerighteq$ h **é contínua em** 2 se **existir** $\lim\limits_{x\to 2} h(x)$

Ora,

$\lim\limits_{x\to 2^-} h(x) = -2$

$\lim\limits_{x\to 2^+} h(x) = -2$

$h(2) = 2$

Verificamos que:

$\lim\limits_{x\to 2^-} h(x) \neq h(2)$ e $\lim\limits_{x\to 2^+} h(x) \neq h(2)$

Logo, não existe $\lim\limits_{x\to 2} h(x)$

Portanto, a função h não é contínua em $x = 2$

Obs.: Para a função ser contínua em $x = 2$, deveria ter-se: $\lim\limits_{x\to 2^-} h(x) = \lim\limits_{x\to 2^+} h(x) = h(2)$

(IV)

$\trianglerighteq$ i **é contínua em** 2 se **existir** $\lim\limits_{x\to 2} i(x)$

Ora,

$\lim\limits_{x\to 2^-} i(x) = 4$

$\lim\limits_{x\to 2^+} i(x) = 4$

$i(2) = 4$

Verificamos que:

$\lim\limits_{x\to 2^-} i(x) = \lim\limits_{x\to 2^+} i(x) = i(2)$

Logo, existe $\lim\limits_{x\to 2} i(x)$

Portanto, a função i é contínua em $x = 2$

2. $1 \in D_f$

   A função f é contínua em $x = 1$, se existir $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$, ou seja,

   se $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = f(1)$

   Ora,

   $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{x^2-1}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{(x-1)(x+1)}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1^-} (x+1) = 2$

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} \frac{(x-1)^2}{x^2-x} = \lim_{x\to 1^+} \frac{(x-1)^2}{x(x-1)} = \lim_{x\to 1^+} \frac{x-1}{x} = 0$$

$f(1) = 2$

Ora, $\lim_{x\to 1^-} f(x) \neq \lim_{x\to 1^+} f(x)$

Logo, não existe $\lim_{x\to 1} f(x)$

Logo, a função f não é contínua em $x = 1$

3. $-3 \in D_g$

   A função g é contínua em $x = -3$, se existir $\lim_{x\to -3} g(x)$, ou seja,

   se $\lim_{x\to -3^-} g(x) = \lim_{x\to -3^+} g(x) = g(-3)$

   Ora,

$$\lim_{x\to -3^-} g(x) = \lim_{x\to -3^-} \frac{x^2+x-6}{30x+90} = \lim_{x\to -3^-} \frac{(x+3)(x-2)}{30(x+3)} = \lim_{x\to -3^-} \frac{x-2}{30} = -\frac{1}{6}$$

   Cálculos auxiliares

$$x^2+x-6=0 \Leftrightarrow x = \frac{-1\pm\sqrt{1^2-4\times 1\times(-6)}}{2\times 1} \Leftrightarrow x = \frac{-1\pm\sqrt{25}}{2} \Leftrightarrow x = \frac{-1\pm 5}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-1-5}{2} \vee x = \frac{-1+5}{2} \Leftrightarrow x = \frac{-6}{2} \vee x = \frac{4}{2} \Leftrightarrow x = -3 \vee x = 2$$

$$\lim_{x\to -3^+} g(x) = \lim_{x\to -3^+} \frac{\sqrt{x+4}-1}{x^2+3x} = \lim_{x\to -3^+} \frac{(\sqrt{x+4}-1)(\sqrt{x+4}+1)}{x(x+3)(\sqrt{x+4}+1)} = \lim_{x\to -3^+} \frac{(\sqrt{x+4})^2-1^2}{x(x+3)(\sqrt{x+4}+1)} =$$

$$= \lim_{x\to -3^+} \frac{|x+4|-1}{x(x+3)(\sqrt{x+4}+1)} = \lim_{x\to -3^+} \frac{x+4-1}{x(x+3)(\sqrt{x+4}+1)} = \lim_{x\to -3^+} \frac{x+3}{x(x+3)(\sqrt{x+4}+1)} =$$

$$= \lim_{x\to -3^+} \frac{1}{x(\sqrt{x+4}+1)} = \frac{1}{-3(\sqrt{-3+4}+1)} = \frac{1}{-3\times 2} = -\frac{1}{6}$$

$$g(-3) = -\frac{1}{6}$$

   Ora, $\lim_{x\to -3^-} g(x) = \lim_{x\to -3^+} g(x) = g(-3)$

   Logo, existe $\lim_{x\to -3} g(x)$

   Portanto, a função g é contínua em $x = -3$

4. $-2 \in D_h$

   A função h é contínua em $x = -2$, se existir $\lim_{x\to -2} h(x)$, ou seja,

   se $\lim_{x\to -2^-} h(x) = \lim_{x\to -2^+} h(x) = h(-2)$

   Ora,

$$\lim_{x\to -2^-} h(x) = \lim_{x\to -2^-} \frac{x+2}{2x^2+4x} = \lim_{x\to -2^-} \frac{x+2}{2x(x+2)} = \lim_{x\to -2^-} \frac{1}{2x} = -\frac{1}{4}$$

$$\lim_{x\to -2^+} h(x) = \lim_{x\to -2^+} \frac{\sqrt{x+6}-2}{x^2+3x+2} = \lim_{x\to -2^+} \frac{(\sqrt{x+6}-2)(\sqrt{x+6}+2)}{(x+1)(x+2)(\sqrt{x+6}+2)} = \lim_{x\to -2^+} \frac{(\sqrt{x+6})^2-2^2}{(x+1)(x+2)(\sqrt{x+6}+2)} =$$

$$= \lim_{x\to -2^+} \frac{|x+6|-4}{(x+1)(x+2)(\sqrt{x+6}+2)} = \lim_{x\to -2^+} \frac{x+6-4}{(x+1)(x+2)(\sqrt{x+6}+2)} = \lim_{x\to -2^+} \frac{x+2}{(x+1)(x+2)(\sqrt{x+6}+2)} =$$

$$= \lim_{x\to -2^+} \frac{1}{(x+1)(\sqrt{x+6}+2)} = \frac{1}{-1(\sqrt{-2+6}+2)} = \frac{1}{-1\times 4} = -\frac{1}{4}$$

Cálculos auxiliares

$$x^2+3x+2=0 \Leftrightarrow x = \frac{-3\pm\sqrt{3^2-4\times1\times2}}{2\times1} \Leftrightarrow x = \frac{-3\pm\sqrt{1}}{2} \Leftrightarrow x = \frac{-3\pm1}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-3-1}{2} \vee x = \frac{-3+1}{2} \Leftrightarrow x = \frac{-4}{2} \vee x = \frac{-2}{2} \Leftrightarrow x=-2 \vee x=-1$$

$h(-2) = 2k+1$

Ora, A função h é contínua em $x=-2$, se, $\lim_{x\to -2^-} h(x) = \lim_{x\to -2^+} h(x) = h(-2)$

Então, deverá ter-se,

$$2k+1 = -\frac{1}{4} \Leftrightarrow 8k+4=-1 \Leftrightarrow 8k=-1-4 \Leftrightarrow 8k=-5 \Leftrightarrow k=-\frac{5}{8}$$

Portanto, a função h é contínua em $x=-2$, se $k=-\frac{5}{8}$

5. $-5 \in D_h$

   A função i é contínua em $x=-5$, se existir $\lim_{x\to -5} i(x)$, ou seja,

   se $\lim_{x\to -5^-} i(x) = \lim_{x\to -5^+} i(x) = i(-5)$

   Ora,

$$\lim_{x\to -5^-} i(x) = \lim_{x\to -5^-} \frac{x^2+10x+25}{x^2+5x} = \lim_{x\to -5^-} \frac{(x+5)^2}{x(x+5)} = \lim_{x\to -5^-} \frac{x+5}{x} = 0$$

$$\lim_{x\to -5^+} i(x) = \lim_{x\to -5^+} \left[\frac{x^2-25}{x^2+12x+35}+5\right] = \lim_{x\to -5^+} \frac{(x-5)(x+5)}{(x+5)(x+7)}+5 = \lim_{x\to -5^+} \frac{x-5}{x+7}+5 = \frac{-10}{2}+5 = 0$$

Cálculos auxiliares

$$x^2+12x+35=0 \Leftrightarrow x = \frac{-12\pm\sqrt{12^2-4\times1\times35}}{2\times1} \Leftrightarrow x = \frac{-12\pm\sqrt{4}}{2} \Leftrightarrow x = \frac{-12\pm2}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-12-2}{2} \vee x = \frac{-12+2}{2} \Leftrightarrow x = \frac{-14}{2} \vee x = \frac{-10}{2} \Leftrightarrow x=-7 \vee x=-5$$

$i(-5) = k-3$

Ora, A função i é contínua em $x=-5$, se, $\lim_{x\to -5^-} i(x) = \lim_{x\to -5^+} i(x) = i(-5)$

Então, deverá ter-se,

$k-3=0 \Leftrightarrow k=3$

Portanto, a função i é contínua em $x=-5$, se $k=3$