Preparação para exame

12.º Ano de Escolaridade | Turma G-K

PROBABILIDADES E CÁLCULO COMBINATÓRIO

1. $\frac{2}{5}\times 20 = 8$, é o número de bolas com numeração ímpar. Portanto, na caixa há oito bolas com numeração ímpar e doze com numeração par.
   Como se retiram, de uma só vez, oito bolas da caixa, o número de casos possíveis é dado por $^{20}C_8$, que consiste em escolher oito bolas de entre as vinte que há na caixa.
   Quanto ao número de casos favoráveis: Pretende-se que saiam pelo menos seis bolas com numeração par, assim há três casos a considerar:

   - saem seis bolas com número par e duas com número ímpar. O número de maneiras de tal ocorrer é dado por $^{12}C_6 \times ^8 C_2$;
   - saem sete bolas com número par e uma com número ímpar. O número de maneiras de tal ocorrer é dado por $^{12}C_7 \times ^8 C_1$;
   - saem oito bolas com número par e nenhuma com número ímpar. O número de maneiras de tal ocorrer é dado por $^{12}C_8$.

   Então, o número de casos favoráveis é dado por $^{12}C_6 \times ^8 C_2 + ^{12} C_7 \times ^8 C_1 + ^{12} C_8$.

   A probabilidade pedida, de acordo com a lei de Laplace, que nos diz que a probabilidade de um acontecimento é igual ao quociente entre o número de casos favoráveis ao acontecimento e o número de casos possíveis, quando os acontecimentos elementares são equiprováveis, é igual a $P(pedida) = \frac{^{12}C_6 \times ^8 C_2 + ^{12} C_7 \times ^8 C_1 + ^{12} C_8}{^{20}C_8}$.

2. Seja n o número da linha do triângulo de Pascal.
   Como a soma dos dois últimos elementos é igual a 51, então, $1+n=51$, ou seja, $n=50$.
   Assim, na linha anterior (49), há 50 elementos.
   Como se vão retirar duas bolas da caixa, de uma só vez, o número de casos possíveis é igual a $^{50}C_2$.
   Quanto ao número de casos favoráveis:
   Pela simetria do triângulo de Pascal, existem 25 pares de elementos iguais. Portanto, o número de casos favoráveis é igual a 25.
   Assim, a probabilidade pedida é igual a $P = \frac{25}{^{50}C_2} = \frac{1}{49}$.

3. $$\left(-\frac{\sqrt[6]{x}}{3}+\frac{3}{\sqrt[4]{x^2}}\right)^{12} =$$
   $$= \sum_{p=0}^{12}\left[^{12}C_p \times \left(-\frac{\sqrt[6]{x}}{3}\right)^{12-p} \times \left(\frac{3}{\sqrt[4]{x^2}}\right)^{p}\right] =$$
   $$= \sum_{p=0}^{12}\left[^{12}C_p \times 3^{p-12} \times \left(x^{\frac{1}{6}}\right)^{12-p} \times (-1)^{12-p} \times 3^p \times \left(x^{-\frac{1}{2}}\right)^{p}\right] =$$
   $$= \sum_{p=0}^{12}\left[^{12}C_p \times (-1)^{12-p} \times 3^{2p-12} \times x^{\frac{12-p}{6}} \times x^{-\frac{p}{2}}\right] =$$
   $$= \sum_{p=0}^{12}\left[^{12}C_p \times (-1)^{12-p} \times 3^{2p-12} \times x^{\frac{12-p}{6}-\frac{p}{2}}\right] =$$

$= \sum_{p=0}^{12} \left[{}^{12}C_p \times (-1)^{12-p} \times 3^{2p-12} \times x^{\frac{12-4p}{6}} \right]$

O termo médio será: ${}^{12}C_6 \times (-1)^{12-6} \times 3^{12-12} \times x^{\frac{12-24}{6}} = 924x^{-2}$

4. o número de casos possíveis é dado por ${}^9C_4$, que consiste em escolher quatro bolas de entre as nove que há na caixa.
   Quanto ao número de casos favoráveis: Pretende-se que saiam no máximo duas bolas brancas, assim há dois casos a considerar:

   - saem duas bolas brancas e duas bolas pretas. O número de maneiras de tal ocorrer é dado por ${}^6C_2 \times^3 C_2$;
   - saem uma bola branca e três bolas pretas. O número de maneiras de tal ocorrer é dado por ${}^6C_1 \times^3 C_3$;

   Nota: Não pode ocorrer o caso de saírem zero bolas brancas, pois não há quatro bolas pretas.

   Então, o número de casos favoráveis é dado por ${}^6C_2 \times^3 C_2 +^6 C_1 \times^3 C_3$.

   Assim, a probabilidade pedida é $P(pedida) = \frac{{}^6C_2 \times^3 C_2 +^6 C_1 \times^3 C_3}{{}^9C_4} = \frac{51}{126} = \frac{17}{42}$.

5. $P[(A \cup C)|B] = \frac{P[(A \cup C) \cap B]}{P(B)} = \frac{P[(A \cap B) \cup (C \cap B)]}{P(B)} = \frac{P(A \cap B) + P(C \cap B) - P(A \cap B \cap C)}{P(B)} =$
   $= \frac{P(A \cap B)}{P(B)} + \frac{P(C \cap B)}{P(B)} - \frac{P[(A \cap C) \cap B]}{P(B)} = P(A|B) + P(C|B) - P[(A \cap C)|B]$

TRIGONOMETRIA

6. .

   6.1. Como se trata do círculo trigonométrico, então temos que:
   $\sin(\alpha) = \frac{\overline{AB}}{\overline{OA}} \Leftrightarrow \sin(\alpha) = \frac{\overline{AB}}{1} \Leftrightarrow \overline{AB} = \sin(\alpha)$
   $\cos(\alpha) = \frac{\overline{OB}}{\overline{OA}} \Leftrightarrow \cos(\alpha) = \frac{\overline{OB}}{1} \Leftrightarrow \overline{OB} = \cos(\alpha)$

   Nota: Em alternativa, poderíamos constatar que $A(\cos(\alpha); \sin(\alpha))$, com, $\cos(\alpha) > 0$ e $\sin(\alpha) > 0$.
   e assim,
   $\overline{AB} = \sin(\alpha)$
   $\overline{OB} = \cos(\alpha)$

   então, $\overline{BC} = 1 - \cos(\alpha)$
   $tg(\alpha) = \overline{CD}$

   $A_{[ABCD]} = \frac{\overline{AB} + \overline{CD}}{2} \times \overline{BC} = \frac{\sin(\alpha) + tg(\alpha)}{2} \times (1 - \cos(\alpha)) =$
   $= \frac{\sin(\alpha) + tg(\alpha) - \sin(\alpha)\cos(\alpha) - tg(\alpha)\cos(\alpha)}{2} =$
   $= \frac{\sin(\alpha) + tg(\alpha) - \sin(\alpha)\cos(\alpha) - \sin(\alpha)}{2} = \frac{tg(\alpha) - \sin(\alpha)\cos(\alpha)}{2}$

   6.2. $\sin\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) = -\frac{3}{5} \Leftrightarrow -\cos(\alpha) = -\frac{3}{5} \Leftrightarrow \cos(\alpha) = \frac{3}{5}$
   Determinemos $\sin(\alpha)$
   $\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1 \Leftrightarrow \sin^2(\alpha) + \left(\frac{3}{5}\right)^2 = 1 \Leftrightarrow \sin^2(\alpha) = 1 - \frac{9}{25} \Leftrightarrow \sin^2(\alpha) = \frac{16}{25} \Leftrightarrow$
   $\Leftrightarrow \sin(\alpha) = \pm\frac{4}{5}$
   como $\alpha \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, então, $\sin(\alpha) = \frac{4}{5}$

Por outro lado, tem-se que $tg(\alpha) = \dfrac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)} = \dfrac{\frac{4}{5}}{\frac{3}{5}} = \dfrac{4}{3}$

então, $A_{[ABCD]} = \dfrac{\frac{4}{3} - \frac{4}{5} \times \frac{3}{5}}{2} = \dfrac{\frac{4}{3} - \frac{12}{25}}{2} = \dfrac{32}{75}$

6.3. $A(\alpha) = \dfrac{1 - \sin\alpha\cos\alpha}{2} \Leftrightarrow \dfrac{tg(\alpha) - \sin(\alpha)\cos(\alpha)}{2} = \dfrac{1 - \sin\alpha\cos\alpha}{2} \Leftrightarrow tg(\alpha) = 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow tg(\alpha) = tg\left(\dfrac{\pi}{4}\right) \Leftrightarrow \alpha = \dfrac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$

como $\alpha \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, então, $\alpha = \dfrac{\pi}{4}$

FUNÇÕES REAIS DE VARIÁVEL REAL

7. A função g é contínua em $[2; 3]$, pois é uma função racional.

$g(2) = 1 - \dfrac{4 \times 2 - 6}{2 + 1} = \dfrac{1}{3} > 0$

$g(3) = 1 - \dfrac{4 \times 3 - 6}{3 + 1} = -\dfrac{1}{2} < 0$

Como $g(2)$ e $g(3)$ têm sinais contrários, ou seja, verifica-se que $g(2) \times g(3) < 0$, e como g é contínua no intervalo $[2; 3]$, o Corolário do Teorema de Bolzano permite garantir a existência de pelo menos um zero da função, g no intervalo $]2; 3[$. Isto é, $\exists c \in]2; 3[: g(c) = 0$

8. Pretende-se encontrar uma solução da equação $h(x) = x - 1$

Seja $g(x) = h(x) - x + 1$

Ora g é uma função contínua em $[4; 5]$, pois é diferença de funções contínuas. Note-se que, por hipótese, h é uma função contínua em $[4; 5]$.

Por outro lado

$g(4) = 3 + \dfrac{\sqrt{2 \times 4 - 6}}{4} - 4 + 1 = \dfrac{\sqrt{2}}{4}.$

$g(5) = 3 + \dfrac{\sqrt{2 \times 5 - 6}}{5} - 5 + 1 = -\dfrac{3}{5}.$

Como $g(4)$ e $g(5)$ têm sinais contrários, ou seja, verifica-se que $g(4) \times g(4) < 0$, e como g é contínua no intervalo $[4; 4]$, o Corolário do Teorema de Bolzano permite garantir a existência de pelo menos um zero da função, g no intervalo $]4; 5[$.

Isto é, $\exists c \in]4; 5[: g(c) = 0$

Como $g(c) = 0 \Leftrightarrow h(c) - c + 1 = 0 \Leftrightarrow h(c) = c - 1$,tem-se que, $\exists c \in]4; 5[: h(c) = c - 1$

Portanto, o gráfico da função h interseta a reta de equação $y = x - 1$ num ponto cuja abcissa pertence ao intervalo $]4; 5[$.

9. $f'(x) = \left(\dfrac{1 + x}{1 - x}\right)' = \dfrac{(1 + x)' \times (1 - x) - (1 + x) \times (1 - x)'}{(1 - x)^2} = \dfrac{1 \times (1 - x) - (1 + x) \times (-1)}{(1 - x)^2} =$

$= \dfrac{1 - x + 1 + x}{(1 - x)^2} = \dfrac{2}{(1 - x)^2}$, com $x \neq 1$

Zeros da função derivada

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \dfrac{2}{(1 - x)^2} = 0 \twoheadrightarrow$ equação impossível

Sinal da função derivada

$$f'(x) = \frac{2}{(1+x)^2} > 0, \forall x \neq 1$$

Logo a função f é estritamente crescente em todo o seu domínio.
Não existem extremos da função