Escola
Secundária de
Paredes

Ficha de Trabalho 11

Matemática A

12.º Ano de Escolaridade • Turma: $B + C + H$

Aula de Apoio

março de 2023

1. .

1.1. Ora,

$$\left|-\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i\right| = \sqrt{\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{2}{4}+\frac{2}{4}} = \sqrt{\frac{4}{4}} = 1$$

Seja $z = x + yi, x, y \in \mathbb{R}$

Assim,

$$i\overline{z} - \left|-\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i\right| z = \overline{\overline{z}} + i \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow i\overline{x+yi} - (x+yi) = \overline{\overline{x+yi}} + i \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow i\,(x-yi) - x - yi = x + yi + i \Leftrightarrow xi - yi^2 - x - yi = x + yi + i \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow xi + y - x - yi = x + yi + i \Leftrightarrow y - x + (x-y)\,i = x + (y+1)\,i \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y - x = x \wedge x - y = y + 1 \Leftrightarrow y = 2x \wedge x - y = y + 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y = 2x \wedge x - 2x = 2x + 1 \Leftrightarrow y = 2x \wedge x - 2x - 2x = 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y = 2x \wedge -3x = 1 \Leftrightarrow y = 2x \wedge x = -\frac{1}{3} \Leftrightarrow y = -\frac{2}{3} \wedge x = -\frac{1}{3} \Leftrightarrow$$

Logo, $z = -\frac{1}{3} - \frac{2}{3}i$

$C.S. = \left\{-\frac{1}{3} - \frac{2}{3}i\right\}$

1.2. $z^5 + 3z^3 + 2z = 0 \Leftrightarrow z\left(z^4 + 3z^2 + 2\right) = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow z = 0 \vee z^4 + 3z^2 + 2 = 0 \Leftrightarrow z = 0 \vee \left(z^2\right)^2 + 3z^2 + 2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow z = 0 \vee z^4 + 3z^2 + 2 = 0 \Leftrightarrow z = 0 \vee z^2 = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \times 1 \times 2}}{2 \times 1} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow z = 0 \vee z^2 = -2 \vee z^2 = -1 \Leftrightarrow z = 0 \vee z = \pm\sqrt{-2} \vee z = \pm\sqrt{-1} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow z = 0 \vee z = \pm\sqrt{2i^2} \vee z = \pm\sqrt{i^2} \Leftrightarrow z = 0 \vee z = \pm\sqrt{2}i \vee z = \pm i$$

$C.S. = \left\{0; -i; i; -\sqrt{2}i; \sqrt{2}i\right\}$

2. Ora,

$73 = 4 \times 18 + 1$

Logo, $i^{73} = i^{4\times 18+1} = i$

Portanto,

$z_1 = -1 + i$

2.1. .

- Número complexo $z_1 = -1 + i$, de afixo $P_1\left(-1;1\right)$

  $|z_1| = \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$

  Seja α, um argumento de z_1

  $\tan\alpha = \dfrac{1}{-1} \wedge \alpha \in 2^\circ$ Q

  $\therefore \tan\alpha = -1 \wedge \alpha \in 2^\circ$ Q

  $\therefore \alpha = \dfrac{3\pi}{4}$

  Portanto, $z_1 = \sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}$
- Número complexo $z_2 = 4 + 4i$, de afixo $P_2\left(4;4\right)$

  $|z_1| = \sqrt{4^2 + 4^2} = \sqrt{16+16} = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$

  Seja α, um argumento de z_2

  $\tan\alpha = \dfrac{4}{4} \wedge \alpha \in 1^\circ$ Q

  $\therefore \tan\alpha = 1 \wedge \alpha \in 1^\circ$ Q

  $\therefore \alpha = \dfrac{\pi}{4}$

  Portanto, $z_2 = 4\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$

2.2. .

- Número complexo $-z_2$

  $-z_2 = -(4+4i) = -4 - 4i \mapsto$ Forma algébrica

  $-z_2 = -4\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}} = 4\sqrt{2}e^{i\left(\pi+\frac{\pi}{4}\right)} = 4\sqrt{2}e^{i\left(\frac{5\pi}{4}\right)} = 4\sqrt{2}e^{i\left(-\frac{3\pi}{4}\right)} \mapsto$ Forma trigonométrica

  Nota:

  $\dfrac{5\pi}{4}$ é o argumento mínimo positivo

  $-\dfrac{3\pi}{4}$ é o argumento principal

- Número complexo $\overline{z_2}$

  $\overline{z_2} = \overline{4+4i} = 4 - 4i \mapsto$ Forma algébrica

  $\overline{z_2} = \overline{4\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}} = 4\sqrt{2}e^{i\left(-\frac{\pi}{4}\right)} \mapsto$ Forma trigonométrica

3. $e^{3\ln k} = e^{\ln\left(k^3\right)} = k^3$

   Resposta: (A)

4. Calculemos a imagem de e pela função f

   $f(e) = 1 + \ln(5e) = 1 + \ln 5 + \ln e = 1 + \ln 5 + 1 = 2 + \ln 5 +$

   Portanto, o ponto de coordenadas $(e; 2 + \ln 5)$ é ponto do gráfico da função f

   Resposta: (C)

5. $\cos x - \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = 0 \Leftrightarrow$

   $\Leftrightarrow \cos x = \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) \Leftrightarrow$

   $\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + x + k2\pi \vee x = -\frac{\pi}{2} - x + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$

   $\Leftrightarrow x - x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \vee x + x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$

   $\Leftrightarrow 0x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \vee 2x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$

   $\Leftrightarrow$ Equação impossível $\vee x = -\frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

   $\Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

6. Domínio da função g

   $D_g = \left\{x \in \mathbb{R} : 2x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \wedge 1 - \tan(2x) \neq 0\right\} = \left\{x \in \mathbb{R} : x \neq \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2} \wedge x \neq \frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\right\} =$

   $= \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\right\}$

   Cálculo auxiliar

   $2x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \wedge 1 - \tan(2x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \wedge \tan(2x) = 1 \Leftrightarrow$

   $\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \wedge \tan(2x) = \tan\frac{\pi}{4} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2} \wedge x = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$

   $\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2} \wedge x = \frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$

   Resposta: (A)

7. .

7.1. $\lim_{x\to+\infty} \frac{h(x)}{x^2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln\left(e^x - 1\right)}{x^2} =^{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)} \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln\left(e^x\left(1 - \frac{1}{e^x}\right)\right)}{x^2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln\left(e^x\right) + \ln\left(1 - \frac{1}{e^x}\right)}{x^2} =$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{x + \ln\left(1 - \frac{1}{e^x}\right)}{x^2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{x^2} + \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln\left(1 - \frac{1}{e^x}\right)}{x^2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} + \frac{\ln 1}{+\infty} = 0 + \frac{0}{+\infty} = 0$$

7.2. Domínio da função h

$D_h = \{x \in \mathbb{R} : e^x - 1 > 0\} =]0; +\infty[$

Cálculo auxiliar

$e^x - 1 > 0 \Leftrightarrow e^x > 1 \Leftrightarrow x > 0$

- Assíntotas verticais ao gráfico de h

  $\lim\limits_{x \to 0^+} h(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} [\ln(e^x - 1)] = \ln 0^+ = -\infty$

  Logo, a reta de equação $x = 0$ é assíntota vertical ao gráfico da função h

  Como a função h é contínua em todo o seu domínio, não existem mais assíntotas verticais ao gráfico da função

- Assíntotas não verticais ao gráfico de h

  Seja $t : y = mx + b, m, b \in \mathbb{R}$, a equação reduzida da possível assíntota

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{h(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\ln(e^x - 1)}{x} =^{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)} \lim_{x \to +\infty} \frac{\ln\left(e^x\left(1 - \frac{1}{e^x}\right)\right)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\ln(e^x) + \ln\left(1 - \frac{1}{e^x}\right)}{x} =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{x + \ln\left(1 - \frac{1}{e^x}\right)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x}{x} + \lim_{x \to +\infty} \frac{\ln\left(1 - \frac{1}{e^x}\right)}{x} = \lim_{x \to +\infty} (1) + \frac{\ln 1}{+\infty} = 1 + \frac{0}{+\infty} = 1$$

  Logo $m = 1$

$$\lim_{x \to +\infty} (h(x) - x) = \lim_{x \to +\infty} [\ln(e^x - 1) - x] =^{(\infty - \infty)} \lim_{x \to +\infty} \left[\ln\left(e^x\left(1 - \frac{1}{e^x}\right)\right) - x\right] =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \left[\ln(e^x) + \ln\left(1 - \frac{1}{e^x}\right) - x\right] = \lim_{x \to +\infty} \left[x + \ln\left(1 - \frac{1}{e^x}\right) - x\right] =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \left[\ln\left(1 - \frac{1}{e^x}\right)\right] = 0$$

  Logo $b = 0$

  Portanto, a reta de equação $y = x$ é assíntota não vertical ao gráfico da função h, quando $x \to +\infty$

7.3. Calculemos a função primeira derivada de h

$$h'(x) = [\ln(e^x - 1)]' = \frac{(e^x - 1)'}{e^x - 1} = \frac{e^x}{e^x - 1}$$

Zeros de $h'(x)$

$$h'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{e^x}{e^x - 1} = 0 \Leftrightarrow e^x = 0 \wedge e^x - 1 \neq 0 \wedge x > 0$$

$\Leftrightarrow$ Equação impossível $\wedge x \neq 0 \wedge x > 0$

Logo, a função $h'(x)$ não tem zeros

Sinal de $h'(x)$

$e^x > 0, \forall x \in \mathbb{R}$

$e^x - 1 > 0, \forall x \in \mathbb{R}^+$

Assim,

$h'(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}^+$

x	0	$+\infty$
e^x	////	$+$
$e^x - 1$	////	$+$
$h'(x)$	////	$+$
$h(x)$	////	$\nearrow$

A função h é crescente em todo o seu domínio

Não existem extremos

7.4. Calculemos a função segunda derivada de h

$$h''(x) = \left[\frac{e^x}{e^x - 1}\right]' = \frac{(e^x)' \times (e^x - 1) - e^x \times (e^x - 1)'}{(e^x - 1)^2} = \frac{e^x (e^x - 1) - e^x \times e^x}{(e^x - 1)^2} =$$
$$= \frac{(e^x)^2 - e^x - (e^x)^2}{(e^x - 1)^2} = -\frac{e^x}{(e^x - 1)^2}$$

Zeros de $h'(x)$

$$h''(x) = 0 \Leftrightarrow -\frac{e^x}{(e^x - 1)^2} = 0 \Leftrightarrow e^x = 0 \wedge (e^x - 1)^2 \neq 0 \wedge x > 0$$

$\Leftrightarrow$ Equação impossível $\wedge x \neq 0 \wedge x > 0$

Logo, a função $h''(x)$ não tem zeros

Sinal de $h''(x)$

$-e^x < 0, \forall x \in \mathbb{R}$

$e^x - 1 > 0, \forall x \in \mathbb{R}^+$

Assim,

$h''(x) < 0, \forall x \in \mathbb{R}^+$

x	0	$+\infty$
$-e^x$	////	$-$
$e^x - 1$	////	$+$
$h''(x)$	////	$-$
$h(x)$	////	$\frown$

O gráfico da função h tem a concavidade voltada para baixo em todo o seu domínio

Não existem pontos de inflexão do gráfico da função h

8. $\ln(2x)e^{2x} - e^{2x} = 2\ln(2x) - \ln\left(e^2\right) \Leftrightarrow e^{2x}\left(\ln(2x) - 1\right) = 2\ln(2x) - 2 \wedge 2x > 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \ln(2x)e^{2x} - e^{2x} = 2\ln(2x) - 2 \wedge x > 0 \Leftrightarrow e^{2x}\left(\ln(2x) - 1\right) = 2\left(\ln(2x) - 1\right) \wedge x > 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow e^{2x}\left(\ln(2x) - 1\right) - 2\left(\ln(2x) - 1\right) = 0 \wedge x > 0 \Leftrightarrow \left(\ln(2x) - 1\right)\left(e^{2x} - 2\right) = 0 \wedge x > 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left(\ln(2x) - 1 = 0 \vee e^{2x} - 2 = 0\right) \wedge x > 0 \Leftrightarrow \left(\ln(2x) = 1 \vee e^{2x} = 2\right) \wedge x > 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (2x = e \vee 2x = \ln 2) \wedge x > 0 \Leftrightarrow \left(x = \frac{e}{2} \vee x = \frac{1}{2}\ln 2\right) \wedge x > 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left(x = \frac{e}{2} \vee x = \ln\left(2^{\frac{1}{2}}\right)\right) \wedge x > 0 \Leftrightarrow x = \frac{e}{2} \vee x = \ln\left(\sqrt{2}\right)$

$C.S. = \left\{\ln\left(\sqrt{2}\right); \frac{e}{2}\right\}$

9. $e^x - 3 < -2e^{-x} \Leftrightarrow e^x - 3 < -\frac{2}{e^x} \Leftrightarrow e^x - 3 + \frac{2}{e^x} < 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{\left(e^x\right)^2 - 3e^x + 2}{e^x} < 0 \Leftrightarrow \left(e^x\right)^2 - 3e^x + 2 < 0$, visto que $e^x > 0, \forall x \in \mathbb{R}$

Fazendo $y = e^x$, vem,

$y^2 - 3y + 2 < 0 \Leftrightarrow y > 1 \wedge y < 2$

Como $y = e^x$, vem,

$e^x > 1 \wedge e^x < 2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x > 0 \wedge x < \ln 2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 0 < x < \ln 2$

$C.S. =]0; \ln 2[$

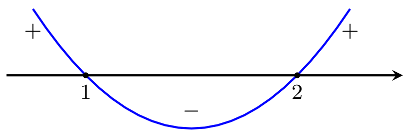
Cálculos auxiliares

Zeros de $y^2 - 3y - 2$

$y^2 - 3y + 2 = 0 \Leftrightarrow y = \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \times 1 \times 2}}{2 \times 1} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow y = 1 \vee y = 2$

Sinal de $y^2 - 3y + 2$



10. $\lim \frac{(-1)^n}{n^2 + 1} = \lim \left[(-1)^n \times \frac{1}{n^2 + 1}\right] = 0$, visto que,

$a_n = (-1)^n$ é uma sucessão limitada e $b_n = \frac{1}{n^2 + 1}$ é uma sucessão convergente para zero

Resposta: (A)

11. Estudemos a monotonia da sucessão (u_n)

- Se $n \leq 3$

  $u_{n+1} - u_n = n + 1 + 7 - (n + 7) = n + 8 - n - 7 = 1 > 0, \forall n \leq 3$

  Logo, $u_1 < u_2 < u_3$

  Para $n \leq 3$, a sucessão (u_n) é crescente

- Se $n > 3$

  $u_{n+1} - u_n = \frac{10(n+1) + 1}{n + 1} - \frac{10n + 1}{n} = \frac{10n + 11}{n + 1} - \frac{10n + 1}{n} = \frac{10n^2 + 11n - 10n^2 - 10n - n - 1}{n\,(n + 1)} = -\frac{1}{n\,(n + 1)} < 0, \forall n > 3$

Logo,

Para $n > 3$, a sucessão (u_n) é decrescente

Concluindo, a sucessão (u_n) não é monótona

12. .

12.1. Pretende-se saber se $\exists_{n\in\mathbb{N}} : v_n = \frac{3}{512}$

Ora,

$$v_n = \frac{3}{512} \Leftrightarrow \frac{3}{2} \times \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} = \frac{3}{512} \Leftrightarrow \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} = \frac{3}{512} \div \frac{3}{2} \Leftrightarrow \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} = \frac{1}{256} \Leftrightarrow \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} = \left(\frac{1}{4}\right)^{4} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow n - 1 = 4 \Leftrightarrow n = 4 + 1 \Leftrightarrow n = 5 \in \mathbb{N}$$

Logo, $\frac{3}{512}$ é termo da sucessão (v_n). É o quinto termo da sucessão (v_n)

12.2. $\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{\frac{3}{2} \times \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1-1}}{\frac{3}{2} \times \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}} = \frac{\left(\frac{1}{4}\right)^{n}}{\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}} = \left(\frac{1}{4}\right)^{n-(n-1)} = \left(\frac{1}{4}\right)^{n-n+1} = \frac{1}{4}$ (constante), $\forall_{n\in\mathbb{N}}$

Logo, a sucessão (v_n) é uma progressão geométrica, e a sua razão é $\frac{1}{4}$

12.3. Ora, $v_1 = \frac{3}{2} \times \left(\frac{1}{4}\right)^{1-1} = \frac{3}{2} \times \left(\frac{1}{4}\right)^{0} = \frac{3}{2} \times 1 = \frac{3}{2}$

Assim,

$$v_n : \begin{cases} v_1 = \frac{3}{2} \\ v_{n+1} = \frac{1}{4} v_n, \forall_{n\in\mathbb{N}} \end{cases}$$

12.4. $v_{n+1} - v_n = \frac{3}{2} \times \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1-1} - \frac{3}{2} \times \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} = \frac{3}{2} \times \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} \times \frac{1}{4} - \frac{3}{2} \times \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} =$

$$= \frac{3}{2} \times \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} \times \left(\frac{1}{4} - 1\right) = \frac{3}{2} \times \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} \times \left(-\frac{3}{4}\right) = -\frac{9}{8} \times \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} < 0, \forall_{n\in\mathbb{N}}$$

Logo, a sucessão (v_n) é estritamente decrescente

12.5. Ora, $v_{17} = \frac{3}{2} \times \left(\frac{1}{4}\right)^{16}$, a razão $= \frac{1}{4}$, e o número de parcelas da soma é $25 - 17 + 1 = 9$

Assim,

$$S = v_{17} + v_{18} + v_{19} + \cdots + v_{25} = \frac{3}{2} \times \left(\frac{1}{4}\right)^{16} \times \frac{1 - \left(\frac{1}{4}\right)^{9}}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{3}{2} \times \left(\frac{1}{4}\right)^{16} \times \frac{1 - \left(\frac{1}{4}\right)^{9}}{\frac{3}{4}} =$$

$$= \frac{3}{2} \times \frac{4}{3} \times \left(\frac{1}{4}\right)^{16} \times \left[1 - \left(\frac{1}{4}\right)^{9}\right] = 2 \times \frac{1}{4^{16}} \times \left(1 - \frac{1}{4^9}\right) = 2 \times \frac{1}{4^{16}} \times \frac{4^9 - 1}{4^9} = 2 \times \frac{4^9 - 1}{4^{25}} = \frac{524286}{4^{25}}$$