CADERNO 1

1. .

1.1. P2001/2002

$P(\overline{A}\cap\overline{B})=0.1 \Leftrightarrow P(\overline{A\cup B})=0.1 \Leftrightarrow 1-P(A\cup B)=0.1 \Leftrightarrow P(A\cup B)=0.9$
$P(A\cup B)=0.9 \Leftrightarrow P(A)+P(B)-P(A\cap B)=0.9 \Leftrightarrow P(A\cap B)=0.6+0.5-0.9 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow P(A\cap B)=0.2$
$P(\overline{A}|\overline{B})=\dfrac{P(\overline{A}\cap\overline{B})}{P\overline{B})}=\dfrac{0.1}{0.5}=0.2$

$P(A)\times P(B)=0.6\times 0.5=0.3$

$P(A\cap B)\neq P(A)\times P(B)$
Resposta:(A)

1.2. PMC2015

$f'(x)=\dfrac{1}{x}$

Se a reta t tangente ao gráfico no ponto C é paralela à reta AB, então, deverá ter-se $f'(c)=\dfrac{f(2e)-f(e)}{2e-e}$

Ora,
$f'(c)=\dfrac{f(2e)-f(e)}{2e-e} \Leftrightarrow \dfrac{1}{c}=\dfrac{\ln(2e)-\ln(e)}{e} \Leftrightarrow \dfrac{1}{c}=\dfrac{\ln(2)+\ln(e)-\ln(e)}{e} \Leftrightarrow \dfrac{1}{c}=\dfrac{\ln(2)}{e} \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow c=\dfrac{e}{\ln(2)}$

Resposta:(B)

2. $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=\dfrac{3\times 2^{1-(n+1)}}{3\times 2^{1-n}}=\dfrac{2^{-n}}{2^{1-n}}=2^{-n-(1-n)}=2^{-1}=\dfrac{1}{2}$ (constante), $\forall n\in\mathbb{N}$
Logo, (a_n) é uma progressão geométrica de razão $\dfrac{1}{2}$

Resposta:(A)

3. .

Por uma propriedade do triângulo de Pascal, sabemos que ${}^{2017}C_{500}+^{2017}C_{501}=^{2018}C_{501}$

Logo, $x+y=^{2018}C_{501}$
Resposta:(B)

4. $\left(-\frac{1}{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^{16}=$

$=\sum_{p=0}^{16}\left[{}^{16}C_p\times\left(-\frac{1}{x}\right)^{16-p}\times\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^{p}\right]=$

$=\sum_{p=0}^{16}\left[{}^{16}C_p\times(-1)^{16-p}\times\left(x^{-1}\right)^{16-p}\times\left(x^{-\frac{1}{2}}\right)^{p}\right]=$

$=\sum_{p=0}^{16}\left[{}^{16}C_p\times(-1)^{16-P}\times x^{-16+p}\times x^{-\frac{p}{2}}\right]=$

$=\sum_{p=0}^{16}\left[{}^{16}C_p\times(-1)^{16-P}\times x^{-16+\frac{p}{2}}\right]$

Procuremos p de modo que $-16+\frac{p}{2}=-4$

$-16+\frac{p}{2}=-4\Leftrightarrow -32+p=-8\Leftrightarrow p=24$

Então, não existe o termo, uma vez que p tinha de ser inferior ou igual a dezasseis e superior ou igual a zero.

5. $\exists c\in]-2,0[: f(x)=-x \iff \exists c\in]-2,0[: f(x)+x=0$

Seja $g(x)=ke^{-x}-2+x$

A função g é contínua no seu domínio, então também é contínua no intervalo $[-2,0]$ por se tratar da soma de duas funções contínuas

Para que o Teorema de Bolzano garanta a existência de, pelo menos, um zero da função g no intervalo $]-2,0[$, deverá ter-se $g(-2)\times g(0)<0$

$g(-2)=ke^{2}-2-2=ke^{2}-4$

$g(0)=ke^{0}-2+0=k-2$

Assim, de $g(-2)\times g(0)<0$, resulta $(k-2)(ke^{2}-4)<0$

k	$-\infty$		$\frac{4}{e^2}$		2		$+\infty$
$k-2$		$-$	$-$	$-$	0	$+$	
ke^2-4		$-$	0	$+$	$+$	$+$	
$(k-2)(ke^2-4)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Assim, resulta $(k-2)(ke^{2}-4)<0$, ou seja, $k\in\left]\frac{4}{e^{2}},2\right[$

Resposta: (D)

6. .

6.1. Consideremos a seguinte legenda:

C: a carta é de copas

$\overline{C}$: a carta não é de copas

Então, como a extração é sucessiva e sem reposição, tem-se os casos:

$\overline{C}\ C$ ou $C\ \overline{C}$ ou $\overline{C}\ \overline{C}$

Assim, a probabilidade pedida é dada por: $\frac{13\times 39}{52\times 51}+\frac{39\times 13}{52\times 51}+\frac{39\times 38}{52\times 51}=\frac{16}{17}$

Outro Processo:

P(obter pelo menos um carta que não é de copas)=1- P(obter duas cartas de copas)

$=1-\frac{13\times 12}{52\times 51}=\frac{16}{17}$

6.2. O número de casos possíveis é igual a ${}^{52}C_{13}$, dado que cada jogador recebe treze cartas
Quanto ao número de casos favoráveis:
pretende-se que nas treze cartas que se recebe haja exatamente seis cartas de ouros, então o número de maneiras de tal ocorrer é dado por ${}^{13}C_6 \times {}^{39}C_7$
Então, a probabilidade pedida é igual a $P = \dfrac{{}^{13}C_6 \times {}^{39}C_7}{{}^{52}C_{13}} \approx 4.2\%$

7. .

7.1. $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x^2e^{x+2}+2x-e}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x^2e^{x+2}}{x} + 2 - \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{e}{x} =$
$= \lim\limits_{x\to-\infty} \left(xe^{x+2}\right) + 2 - \dfrac{e}{-\infty} = \lim\limits_{y\to+\infty} \left[(-y)e^{-y+2}\right] + 2 - 0 = -\lim\limits_{y\to+\infty} \dfrac{e^2y}{e^y} + 2 =$
$= -\dfrac{e^2}{\lim\limits_{y\to+\infty} \dfrac{e^y}{y}} + 2 = -\dfrac{e^2}{+\infty} + 2 = 0 + 2 = 2$
Logo $m = 2$

Fez-se a mudança de variável
$y = -x \Leftrightarrow x = -y$
Se $x \to -\infty$, então, $y \to +\infty$

Utilizou-se o limite notável $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x^p} = +\infty, (p \in \mathbb{R})$

$\lim\limits_{x\to-\infty} (f(x) - 2x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \left(x^2e^{x+2} + 2x - e - 2x\right) = \lim\limits_{x\to-\infty} \left(x^2e^{x+2} - e\right) =$
$= \lim\limits_{y\to+\infty} \left[(-y)^2e^{-y+2}\right] - e = \lim\limits_{y\to+\infty} \dfrac{e^2y^2}{e^y} - e = \dfrac{e^2}{\lim\limits_{y\to+\infty} \dfrac{e^y}{y^2}} - e = \dfrac{e^2}{+\infty} - e = 0 - e = -e$
Logo $b = -e$

Fez-se a mudança de variável
$y = -x \Leftrightarrow x = -y$
Se $x \to -\infty$, então, $y \to +\infty$

Utilizou-se o limite notável $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x^p} = +\infty, (p \in \mathbb{R})$

Portanto, a equação reduzida da reta r é $y = 2x - e$

7.2. Sabe-se que a função primeira derivada de f, é definida em $\mathbb{R}$ por $f'(x) = (x^2+2x)e^{x+2} + 2$

Determinemos a função segunda derivada de f

$f''(x) = \left[(x^2+2x)e^{x+2} + 2\right]' = (x^2+2x)' \times e^{x+2} + (x^2+2x) \times \left(e^{x+2}\right)' + 0 =$
$= (2x+2) \times e^{x+2} + (x^2+2x) \times e^{x+2} = (x^2+4x+2)e^{x+2}$, com $x \in \mathbb{R}$

Calculemos os zeros de f''

$f''(x) = 0 \Leftrightarrow (x^2+4x+2)e^{x+2} = 0 \Leftrightarrow x^2+4x+2 = 0 \vee e^{x+2} = 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x = \dfrac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4\times1\times2}}{2\times1} \vee$ equação impossível $\Leftrightarrow x = \dfrac{-4 \pm \sqrt{8}}{2} \Leftrightarrow x = \dfrac{-4 \pm 2\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x = -2 \pm \sqrt{2}$
Sinal de f''

$e^{x+2} > 0, \forall x \in \mathbb{R}$
$x^2 + 4x + 2 < 0 \Leftrightarrow -2 - \sqrt{2} < x < -2 + \sqrt{2}$
$x^2 + 4x + 2 > 0 \Leftrightarrow x < -2 - \sqrt{2} \vee x > -2 + \sqrt{2}$

Quadro de sinal de f'' e do sentido das concavidades do gráfico de f

x	$-\infty$	$-2-\sqrt{2}$		$-2+\sqrt{2}$	$+\infty$
e^{x+2}	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
x^2+4x+2	$+$	0	$-$	0	$+$
f''	$+$	0	$-$	$+$	$+$
f	$\smile$	$f(-2-\sqrt{2})$	$\frown$	$f(-2+\sqrt{2})$	$\smile$

$f(-2-\sqrt{2}) = (-2-\sqrt{2})^2 \times e^{-2-\sqrt{2}+2} + 2(-2-\sqrt{2}) - e = (4+2\sqrt{2}+2)e^{-\sqrt{2}} - 4 - 2\sqrt{2} - e =$
$= (6+2\sqrt{2})e^{-\sqrt{2}} - 2\sqrt{2} - 4 - e$

$f(-2+\sqrt{2}) = (-2+\sqrt{2})^2 \times e^{-2+\sqrt{2}+2} + 2(-2+\sqrt{2}) - e = (4-2\sqrt{2}+2)e^{\sqrt{2}} - 4 + 2\sqrt{2} - e =$
$= (6-2\sqrt{2})e^{\sqrt{2}} + 2\sqrt{2} - 4 - e$

O gráfico da função f tem a concavidade voltada para cima em $]-\infty; -2-\sqrt{2}[$ e em $]-2+\sqrt{2}; +\infty[$, e tem a concavidade voltada para baixo em $]-2-\sqrt{2}; -2+\sqrt{2}[$. Os pontos de inflexão do seu gráfico têm coordenadas $\left(-2-\sqrt{2}; f(-2-\sqrt{2})\right)$ e $\left(-2+\sqrt{2}; f(-2+\sqrt{2})\right)$

8. Seja $z = x + yi, x, y \in \mathbb{R}$

A semirreta $\dot{O}A$ tem equação $y = \tan\left(\frac{\pi}{3}\right)x$, com $x \geq 0$, ou seja, $y = \sqrt{3}x$, com $x \geq 0$
A semirreta $\dot{O}B$ tem equação $y = \tan\left(\frac{2\pi}{3}\right)x$, com $x \leq 0$, ou seja, $y = -\sqrt{3}x$, com $x \leq 0$

A condição $I_m(z-3) \leq R_e(\sqrt{3}-2i) \Leftrightarrow I_m(x+yi-3) \leq \sqrt{3} \Leftrightarrow I_m(x-3+yi) \leq \sqrt{3} \Leftrightarrow y \leq \sqrt{3}$

Assim, vem que,

$y = \sqrt{3}x \wedge y = \sqrt{3} \Leftrightarrow y = \sqrt{3}x \wedge \sqrt{3}x = \sqrt{3} \Leftrightarrow y = \sqrt{3}x \wedge x = 1 \Leftrightarrow y = \sqrt{3} \wedge x = 1$
Portanto, $A(1; \sqrt{3})$

A condição $I_m(z-3) \leq R_e(\sqrt{3}-2i) \Leftrightarrow I_m(x+yi-3) \leq \sqrt{3} \Leftrightarrow I_m(x-3+yi) \leq \sqrt{3} \Leftrightarrow y \leq \sqrt{3}$

Assim, vem que,

$y = -\sqrt{3}x \wedge y = \sqrt{3} \Leftrightarrow y = -\sqrt{3}x \wedge -\sqrt{3}x = \sqrt{3} \Leftrightarrow y = -\sqrt{3}x \wedge x = -1 \Leftrightarrow y = \sqrt{3} \wedge x = -1$
Portanto, $B(-1; \sqrt{3})$

Portanto, a área do triângulo é igual a
$A_{[OAB]} = \frac{\overline{AB} \times |ordenada \quad de \quad A|}{2} = \frac{|1-(-1)| \times |\sqrt{3}|}{2} = \frac{2\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}\ u.a.$
Resposta: (C)

CADERNO 2

9. .

9.1. P2001/2002

Os valores que a variável aleatória pode tomar são: $2; 4; 6$

$P(X = 4)$

Se o menor dos números é 4 então podem ocorrer os seguintes casos:
sair uma a bola com o número 4, e duas com o número 6. O número de maneiras de tal ocorrer é igual a ${}^2C_1 \times {}^3C_2 = 6$
saírem duas bolas com o número 4, e uma com o número 6. O número de maneiras de tal ocorrer é igual a ${}^2C_2 \times {}^3C_1 = 3$

Então, $P(X = 4) = \dfrac{{}^2C_1 \times {}^3C_2 + {}^2C_2 \times {}^3C_1}{{}^6C_3} = \dfrac{9}{20}$

Resposta:(D)

9.2. PMC2015

Sendo, a a medida do semieixo maior, b a medida do semieixo menor, e c a medida da semidistância focal,

Tem-se que,

$a^2 = 100 \Leftrightarrow a = \pm 10$, com $a > 0$, logo, $a = 10$

$b^2 = 64 \Leftrightarrow b = \pm 8$, com $b > 0$, logo, $b = 8$

Assim, de $a^2 = b^2 + c^2$, resulta,

$100 = 64 + c^2 \Leftrightarrow c^2 = 100 - 64 \Leftrightarrow c^2 = 36 \Leftrightarrow c = \pm 6$, com $c > 0$, logo, $c = 6$

Portanto, os focos da elipse são: $F_1(6; 0)$ e $F_2(-6; 0)$
Resposta:(B)

10. $f(x) = \log\left(\dfrac{10^x \times x^2}{10^3}\right) = \log\left(10^x \times x^2\right) - \log(10^3) = \log\left(10^x\right) + \log\left(x^2\right) - 3 = x + \log\left(x^2\right) - 3$

11. .

11.1. Se a reta r é perpendicular ao plano α, então, um seu vetor diretor poderá ser um vetor normal ao plano
Ora, um vetor normal ao plano α é $\overrightarrow{\alpha} = (2; -1; 0)$
Assim, um vetor diretor da reta r é $\overrightarrow{r} = (2; -1; 0)$

Determinemos as coordenadas do ponto médio do segmento de reta $[CF]$
Ora, sabemos que o volume do cubo $[ABCDEFGH]$ é igual a 64, assim, a medida da sua aresta é $\sqrt[3]{64} = 4$
Então, $C(-2; 2; -4)$ e $F(2; 2; 0)$

Logo, $M\left(\frac{-2+2}{2};\frac{2+2}{2};\frac{-4+0}{2}\right)$, ou seja, $M(0;2;-2)$
Uma equação vetorial da reta r é $(x;y;z)=(0;2;-2)+k(2;-1;0), k\in\mathbb{R}$

11.2. Ora, $B(2;2;-4)$ e $H(-2;-2;0)$

Determinemos o vetor $\overrightarrow{BH}$
$\overrightarrow{BH}=H-B=(-2;-2;0)-(2;2;-4)=(-2-2;-2-2;0+4)=(-4;-4;4)$
este vetor é normal ao plano pretendido
A equação do plano é da forma $-4x-4y+4z+d=0, d\in\mathbb{R}$

Como o plano contém o ponto B, vem
$-4\times 2-4\times 2+4\times(-4)+d=0\Leftrightarrow d=32$

Logo, a equação do plano tangente à superfície esférica de diâmetro $[BH]$, no ponto B é $-4x-4y+4z+32=0$, ou seja, $-x-y+z+8=0$

Outro Processo:

Seja $P(x;y;z)$ um ponto do plano tangente pretendido

Então,

$\overrightarrow{BH}=(-4;-4;4)$
$\overrightarrow{BP}=P-B=(x;y;z)-(2;2;-4)=(x-2;y-2;z+4)$

Assim, vem,

$\overrightarrow{BH}\cdot\overrightarrow{BP}=0\Leftrightarrow(-4;-4;4)\cdot(x-2;y-2;z+4)=0\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow -4(x-2)-4(y-2)+4(z+4)=0\Leftrightarrow -4x+8-4y+8+4z+16=0\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow -x-y+z+8=0$

12. $4\sin(x)\cos(x)-8\sin^3(x)\cos(x)=4\sin(x)\cos(x)-8\sin(x)\cos(x)\sin^2(x)=$
$=2\sin(2x)-4\sin(2x)\sin^2(x)=2\sin(2x)(1-2\sin^2(x))=2\sin(2x)(\sin^2(x)+\cos^2(x)-2\sin^2(x))=$
$=2\sin(2x)(\cos^2(x)-\sin^2(x))=2\sin(2x)\cos(2x)=\sin(2\times 2x)=\sin(4x)$

Resposta: (C)

13. .

13.1. $w_2=2\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)=2\times(0+i)=2i$

$$\frac{\overline{w_1}+i^{57}\times(1-3i)\times w_2}{\overline{2+2i}}=\frac{\overline{1+i}+i^{4\times 14+1}\times(1-3i)\times 2i}{2-2i}=\frac{1-i+i\times(1-3i)\times 2i}{2-2i}=$$
$$=\frac{1-i+2i^2\times(1-3i)}{2-2i}=\frac{1-i-2\times(1-3i)}{2-2i}=\frac{1-i-2+6i}{2-2i}=\frac{-1+5i}{2-2i}=$$
$$=\frac{(-1+5i)(2+2i)}{(2-2i)(2-2i)}=\frac{-2-2i+10i+10i^2}{2^2+2^2}=\frac{-2+8i-10}{8}=\frac{-12+8i}{8}=-\frac{3}{2}+i$$

13.2. Passemos $w_1=1+i$ à forma trigonométrica
$w_1=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$
Seja $\alpha=Arg(w_1)$
Então,
$\tan(\alpha)=\frac{1}{1}$, com $\alpha\in 1^{\text{o}}$ Q
$\therefore \tan(\alpha)=1$, com $\alpha\in 1^{\text{o}}$ Q

Logo, $\alpha = \dfrac{\pi}{4}$
Portanto, $w_1 = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$
Assim, $iw_1 = e^{i\frac{\pi}{2}} \times \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}} = \sqrt{2}e^{i\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}\right)} = \sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}$

Seja $z = |z|e^{i\theta}$, com $\theta \in \mathbb{R}$

$|z| \times z^4 - iw_1 = 0 \Leftrightarrow |z| \times z^4 = iw_1 \Leftrightarrow |z| \times \left(|z|e^{i\theta}\right)^4 = \sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}} \Leftrightarrow |z| \times |z|^4 e^{i(4\theta)} = \sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}} \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow |z|^5 e^{i(4\theta)} = \sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}} \Leftrightarrow |z|^5 = \sqrt{2} \wedge 4\theta = \dfrac{3\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow |z| = \sqrt[5]{\sqrt{2}} \wedge \theta = \dfrac{3\pi}{16} + \dfrac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow |z| = \sqrt[10]{2} \wedge \theta = \dfrac{3\pi}{16} + \dfrac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$
Atribuindo valores a k, vem,

$k = 0 \rightarrow z_0 = \sqrt[10]{2}e^{i\frac{3\pi}{16}}$
$k = 1 \rightarrow z_1 = \sqrt[10]{2}e^{i\left(\frac{3\pi}{16}+\frac{\pi}{2}\right)} = \sqrt[10]{2}e^{i\frac{11\pi}{16}}$
$k = 2 \rightarrow z_2 = \sqrt[10]{2}e^{i\left(\frac{3\pi}{16}+\frac{2\pi}{2}\right)} = \sqrt[10]{2}e^{i\frac{19\pi}{16}} = \sqrt[10]{2}e^{i\left(-\frac{13\pi}{16}\right)}$
$k = 3 \rightarrow z_3 = \sqrt[10]{2}e^{i\left(\frac{3\pi}{16}+\frac{3\pi}{2}\right)} = \sqrt[10]{2}e^{i\frac{27\pi}{16}} = \sqrt[10]{2}e^{i\left(-\frac{5\pi}{16}\right)}$
$k = 4 \rightarrow z_4 = \sqrt[10]{2}e^{i\left(\frac{3\pi}{16}+\frac{4\pi}{2}\right)} = \sqrt[10]{2}e^{i\left(\frac{3\pi}{16}+2\pi\right)} = \sqrt[10]{2}e^{i\frac{3\pi}{16}} = z_0$

A partir de $k = 4$, as soluções começam a repetir as soluções z_0, z_1, z_2 e z_3

O conjunto solução da equação é,

$C.S. = \left\{ \sqrt[10]{2}e^{i\frac{3\pi}{16}};\ \sqrt[10]{2}e^{i\frac{11\pi}{16}};\ \sqrt[10]{2}e^{i\left(-\frac{13\pi}{16}\right)};\ \sqrt[10]{2}e^{i\left(-\frac{5\pi}{16}\right)} \right\}$

13.3. Sabemos que $w_1 = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$ e $w_2 = 2e^{i\frac{\pi}{2}}$

$$\left(\frac{w_1}{w_2}\right)^n = \left(\frac{\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}}{2e^{i\frac{\pi}{2}}}\right)^n = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}e^{i\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{2}\right)}\right)^n = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}e^{i\left(-\frac{\pi}{4}\right)}\right)^n = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n \times e^{i\left(-\frac{n\pi}{4}\right)}$$

Para que $\left(\dfrac{w_1}{w_2}\right)^n$ seja um imaginário puro com parte imaginária negativa, deverá ter-se,

$-\dfrac{n\pi}{4} = -\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$
$\therefore \dfrac{n\pi}{4} = \dfrac{\pi}{2} - 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$
$\therefore n = 2 - 8k, k \in \mathbb{Z}$

Atribuindo valores a k, vem,

$k = 0 \rightarrow n = 2 \in \mathbb{N}$
$k = 1 \rightarrow n = -6 \notin \mathbb{N}$
$k = -1 \rightarrow n = 10 \in \mathbb{N}$
$k = -2 \rightarrow n = 18 \in \mathbb{N}$
$\vdots$

Logo, O menor valor de $n \in \mathbb{N}$, para o qual $\left(\dfrac{w_1}{w_2}\right)^n$ é um imaginário puro com parte imaginária negativa, é 2

Resposta: (A)

14. De $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(g(x)-\frac{e}{2}x+e\right)=0$, resulta, $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[g(x)-\left(\frac{e}{2}x-e\right)\right]=0$

Portanto, a reta de equação $y=\frac{e}{2}x-e$ é assíntota ao gráfico de g, quando $x\to+\infty$

Logo, $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{g(x)}{x}=\frac{e}{2}$

Assim,

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{g(x)-\ln(x)}{x-e^{-x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{g(x)}{x}-\frac{\ln(x)}{x}}{\frac{x}{x}-\frac{e^{-x}}{x}}=\frac{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{g(x)}{x}-\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln(x)}{x}}{1-\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{xe^{x}}}=\frac{\frac{e}{2}-0}{1-\frac{1}{+\infty}}=$$

$$=\frac{\frac{e}{2}}{1-0}=\frac{e}{2}$$

15. $\pi\in D_h$ e é ponto aderente de D_h

A função h é contínua em $x=\pi$, se existir $\lim\limits_{x\to\pi}h(x)$, ou seja, se $\lim\limits_{x\to\pi^-}h(x)=h\left(\pi\right)$ e $\lim\limits_{x\to\pi^+}h(x)=h\left(\pi\right)$

Ora,

$$\lim_{x\to\pi^-}h(x)=\lim_{x\to pi^-}\left(\frac{1}{e}+\frac{e^{x-\pi}-1}{2x-2\pi}\right)=\lim_{x\to pi^-}\left(\frac{1}{e}+\frac{e^{x-\pi}-1}{2(x-\pi)}\right)=\frac{1}{e}+\frac{1}{2}\times\lim_{x-\pi\to0^-}\frac{e^{x-\pi}-1}{x-\pi}=$$

$$=\frac{1}{e}+\frac{1}{2}\times1=\frac{1}{e}+\frac{1}{2}=\frac{2+e}{2e}$$

Utilizou-se o limite notável $\lim\limits_{x\to0}\frac{e^{x}-1}{x}=1$

$$\lim_{x\to\pi^+}h(x)=\lim_{x\to\pi^+}\left(-\frac{\pi-x}{e\sin(x-\pi)}+\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{e}\times\lim_{x\to\pi^+}\frac{x-\pi}{\sin(x-\pi)}+\frac{1}{2}=$$

$$=\frac{1}{e}\times\frac{1}{\lim\limits_{x-\pi\to0^+}\frac{\sin(x-\pi)}{x-\pi}}+\frac{1}{2}=\frac{1}{e}\times\frac{1}{1}+\frac{1}{2}=\frac{1}{e}+\frac{1}{2}=\frac{2+e}{2e}$$

Utilizou-se o limite notável $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin(x)}{x}=1$

$$h\left(\pi\right)=\log\left(10^{\frac{1}{e}+\frac{1}{2}}\right)=\frac{1}{e}+\frac{1}{2}=\frac{2+e}{2e}$$

Como, $\lim\limits_{x\to\pi^-}h(x)=h\left(\pi\right)$ e $\lim\limits_{x\to\pi^+}h(x)=h\left(\pi\right)$, então, existe $\lim\limits_{x\to\pi}h(x)$

Logo, a função h é contínua em $x=\pi$