Caderno 1

1. .

1.1. O domínio da função é $D_f = \{x \in \mathbb{R} : -1 \leq -\frac{x}{2} \leq 1\} = \{x \in \mathbb{R} : -2 \leq x \leq 2\} = [-2; 2]$
Logo, $a = -2$ e $b = 2$

Contradomínio

$-\frac{\pi}{2} \leq \arcsin\left(-\frac{x}{2}\right) \leq \frac{\pi}{2}, \forall x \in [-2; 2]$
$\therefore -\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} \leq \frac{\pi}{4} + \arcsin\left(-\frac{x}{2}\right) \leq \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4}, \forall x \in\in [-2; 2]$
$\therefore -\frac{\pi}{4} \leq \frac{\pi}{4} + \arcsin\left(-\frac{x}{2}\right) \leq \frac{3\pi}{4}, \forall x \in [-2; 2]$
$\therefore -\frac{\pi}{4} \leq f(x) \leq \frac{3\pi}{4}, \forall x \in [-2; 2]$
Logo, $D'_f = \left[-\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}\right]$
Portanto, $c = -\frac{\pi}{4}$ e $d = \frac{3\pi}{4}$

1.2. **Ponto** A
$f(0) = \frac{\pi}{4} + \arcsin\left(-\frac{0}{2}\right) = \frac{\pi}{4} + \arcsin(0) = \frac{\pi}{4} + 0 = \frac{\pi}{4}$
Logo, $A\left(0; \frac{\pi}{4}\right)$

Ponto B

$f(x) = \frac{5\pi}{12} \Leftrightarrow \frac{\pi}{4} + \arcsin\left(-\frac{x}{2}\right) = \frac{5\pi}{12} \Leftrightarrow \arcsin\left(-\frac{x}{2}\right) = \frac{5\pi}{12} - \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow \arcsin\left(-\frac{x}{2}\right) = \frac{2\pi}{12} \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \arcsin\left(-\frac{x}{2}\right) = \frac{\pi}{6} \Leftrightarrow -\frac{x}{2} = \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) \wedge x \in [-2; 2] \Leftrightarrow -\frac{x}{2} = \frac{1}{2} \wedge x \in [-2; 2] \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x = -1 \wedge x \in [-2; 2] \Leftrightarrow x = -1$
Logo, $B\left(-1; \frac{5\pi}{12}\right)$

1.3. Pretende-se $\cos(x + f(0))$

Ora, $f(0) = \frac{\pi}{4}$
Então,
$\cos(x+f(0)) = \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \cos(x)\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) - \sin(x)\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \cos(x) \times \frac{\sqrt{2}}{2} - \sin(x) \times \frac{\sqrt{2}}{2}$

Por outro lado, sabe-se que $\tan(x) = \frac{4}{3}$, com $x \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[$

Assim, de $1 + \tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$, vem
$1 + \left(\frac{4}{3}\right)^2 = \frac{1}{\cos^2(x)} \Leftrightarrow 1 + \frac{16}{9} = \frac{1}{\cos^2(x)} \Leftrightarrow \frac{25}{9} = \frac{1}{\cos^2(x)} \Leftrightarrow \cos^2(x) = \frac{9}{25} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \cos(x) = \pm\frac{3}{5}$, como $x \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[$, tem-se que $\cos(x) = \frac{3}{5}$

De $\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$, vem,

$\frac{4}{3} = \frac{\sin(x)}{\frac{3}{5}} \Leftrightarrow \sin(x) = \frac{4}{3} \times \frac{3}{5} \Leftrightarrow \sin(x) = \frac{4}{5}$

Portanto,

$$\cos(x + f(0)) = \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \cos(x)\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) - \sin(x)\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) =$$
$$= \cos(x) \times \frac{\sqrt{2}}{2} - \sin(x) \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{3}{5} \times \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{4}{5} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{3\sqrt{2}}{10} - \frac{4\sqrt{2}}{10} = -\frac{\sqrt{2}}{10}$$

1.4. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{f(-3x) - \frac{\pi}{4}}{2x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\frac{\pi}{4} + \arcsin\left(-\frac{-3x}{2}\right) - \frac{\pi}{4}}{2x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\arcsin\left(\frac{3x}{2}\right)}{2x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{y}{2 \times \frac{2}{3}\sin(y)} =$

$= \frac{3}{4} \times \frac{1}{\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin(y)}{y}} = \frac{3}{4} \times \frac{1}{1} = \frac{3}{4}$

Fez-se a mudança de variável

$y = \arcsin\left(\frac{3x}{2}\right) \Leftrightarrow \frac{3x}{2} = \sin(y) \Leftrightarrow 3x = 2\sin(y) \Leftrightarrow x = \frac{2}{3}\sin(y)$

Se $x \to 0$, então, $y \to 0$

Utilizou-se o limite notável: $\lim\limits_{y\to 0} \frac{\sin(y)}{y} = 1$

2. $\lim \frac{(n+1)! - n!}{n!(n+2)} = \lim \frac{(n+1)n! - n!}{n!(n+2)} = \lim \frac{(n+1-1)n!}{n!(n+2)} = \lim \frac{n}{n+2} = \lim \frac{\frac{n}{n}}{\frac{n}{n} + \frac{2}{n}} =$

$= \lim \frac{1}{1 + \frac{2}{n}} = \frac{1}{1+0} = 1$

3. Seja $P(n) : \sum\limits_{i=1}^{n}(1 + 2i) = n^2 + 2n$

(i) $P(1)$ é verdadeira(?)

$n = 1 \twoheadrightarrow \sum\limits_{i=1}^{1}(1 + 2i) = 1^2 + 2 \times 1$

$\therefore 3 = 3(verdadeiro)$

Logo, $P(1)$ é verdadeira

(ii) $P(n)$ é hereditária

Hipótese de indução: $P(n)$ é verdadeira, isto é, $\sum\limits_{i=1}^{n}(1 + 2i) = n^2 + 2n$

Tese de indução: $P(n+1)$ é verdadeira(?), isto é, $\sum\limits_{i=1}^{n+1}(1 + 2i) = (n+1)^2 + 2(n+1)$

Demonstração

$$\sum_{i=1}^{n+1}(1 + 2i) = \sum_{i=1}^{n}(1 + 2i) + \sum_{i=n+1}^{n+1}(1 + 2i) = n^2 + 2n + 1 + 2(n+1) = (n+1)^2 + 2(n+1)$$

Logo, $P(n)$ é hereditária, ou seja, $P(n) \Rightarrow P(n+1)$

Conclusão: Como $P(1)$ é verdadeira e $P(n)$ é hereditária, ou seja, $P(n) \Rightarrow P(n+1)$, $P(n)$ é verdadeira para todo o número natural(ou seja, é universal)

4. De

$$1 = 2 - 1$$
$$1 + \frac{1}{2} = 2 - \frac{1}{2}$$
$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = 2 - \frac{1}{4}$$
$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = 2 - \frac{1}{8}$$
$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} = 2 - \frac{1}{16}$$

Conjetura-se que
$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}} = 2 - \frac{1}{2^{n-1}}$$

Demonstração por indução matemática

Seja $P(n) : 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}} = 2 - \frac{1}{2^{n-1}}$

(i) $P(1)$ é verdadeira(?)

$n = 1 \twoheadrightarrow 1 = 2 - \frac{1}{2^{1-1}}$
$\therefore 1 = 1(verdadeiro)$
Logo, $P(1)$ é verdadeira

(ii) $P(n)$ é hereditária

Hipótese de indução: $P(n)$ é verdadeira, isto é, $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}} = 2 - \frac{1}{2^{n-1}}$

Tese de indução: $P(n+1)$ é verdadeira(?), isto é, $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}} + \frac{1}{2^n} = 2 - \frac{1}{2^n}$

Demonstração

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}} + \frac{1}{2^n} = 2 - \frac{1}{2^{n-1}} + \frac{1}{2^n} = 2 - \frac{2}{2^n} + \frac{1}{2^n} = 2 - \frac{1}{2^n}$$

Logo, $P(n)$ é hereditária, ou seja, $P(n) \Rightarrow P(n+1)$

Conclusão: Como $P(1)$ é verdadeira e $P(n)$ é hereditária, ou seja, $P(n) \Rightarrow P(n+1)$, $P(n)$ é verdadeira para todo o número natural(ou seja, é universal)

5. .

5.1. Seja $P(n)$: (v_n) é estritamente crescente
Ou seja, $P(n) : v_{n+1} > v_n$
(i) $P(1)$ é verdadeira(?)

$n = 1 \twoheadrightarrow v_2 > v_1$
$\therefore 3 + \frac{1}{2}v_1 > 4$
$\therefore 3 + \frac{1}{2} \times 4 > 4$
$\therefore 3 + 2 > 4$
$\therefore 5 > 4 (verdadeiro)$
Logo, $P(1)$ é verdadeira

(ii) $P(n)$ é hereditária

Hipótese de indução: $P(n)$ é verdadeira, isto é, $v_{n+1} > v_n$

Tese de indução: $P(n+1)$ é verdadeira(?), isto é, $v_{n+2} > v_{n+1}$

Demonstração

Sabemos que $v_{n+1} = 3 + \frac{1}{2}v_n$ e $v_{n+2} = 3 + \frac{1}{2}v_{n+1}$

Assim, como por hipótese se tem
$v_{n+1} > v_n$
$\therefore \frac{1}{2}v_{n+1} > \frac{1}{2}v_n$
$\therefore 3 + \frac{1}{2}v_{n+1} > 3 + \frac{1}{2}v_n$
$\therefore v_{n+2} > v_{n+1}$

Logo, $P(n)$ é hereditária, ou seja, $P(n) \Rightarrow P(n+1)$

Conclusão: Como $P(1)$ é verdadeira e $P(n)$ é hereditária, ou seja, $P(n) \Rightarrow P(n+1)$, $P(n)$ é verdadeira para todo o número natural(ou seja, é universal)

5.2. Seja $P(n) : v_n < 6$

(i) $P(1)$ é verdadeira(?)

$n = 1 \twoheadrightarrow v_1 < 6$
$\therefore 4 < 6 (verdadeiro)$
Logo, $P(1)$ é verdadeira

(ii) $P(n)$ é hereditária

Hipótese de indução: $P(n)$ é verdadeira, isto é, $v_n < 6$

Tese de indução: $P(n+1)$ é verdadeira(?), isto é, $v_{n+1} < 6$

Demonstração

Sabemos que $v_{n+1} = 3 + \frac{1}{2}v_n$

Assim, como por hipótese se tem
$v_n < 6$
$\therefore \frac{1}{2}v_n < \frac{1}{2} \times 6$
$\therefore \frac{1}{2}v_n < 3$
$\therefore 3 + \frac{1}{2}v_n < 3 + 3$
$\therefore v_{n+1} < 6$

Logo, $P(n)$ é hereditária, ou seja, $P(n) \Rightarrow P(n+1)$

Conclusão: Como $P(1)$ é verdadeira e $P(n)$ é hereditária, ou seja, $P(n) \Rightarrow P(n+1)$, $P(n)$ é verdadeira para todo o número natural(ou seja, é universal)

6. Seja $P(n) : z_n = 2 - \frac{1}{2^{n-1}}$

(i) $P(1)$ é verdadeira(?)

$n = 1 \twoheadrightarrow z_1 = 2 - \frac{1}{2^{1-1}}$
$\therefore 1 = 2 - \frac{1}{2^0}$
$\therefore 1 = 2 - 1$
$\therefore 1 = 1(verdadeiro)$
Logo, $P(1)$ é verdadeira

(ii) $P(n)$ é hereditária

Hipótese de indução: $P(n)$ é verdadeira, isto é, $z_n = 2 - \frac{1}{2^{n-1}}$

Tese de indução: $P(n+1)$ é verdadeira(?), isto é, $z_{n+1} = 2 - \frac{1}{2^n}$

Demonstração

$$z_{n+1} = 1 + \frac{1}{2}z_n = 1 + \frac{1}{2} \times \left(2 - \frac{1}{2^{n-1}}\right) = 1 + 1 - \frac{1}{2} \times \frac{1}{2^{n-1}} = 2 - \frac{1}{2^{1+n-1}} = 2 - \frac{1}{2^n}$$

Logo, $P(n)$ é hereditária, ou seja, $P(n) \Rightarrow P(n+1)$

Conclusão: Como $P(1)$ é verdadeira e $P(n)$ é hereditária, ou seja, $P(n) \Rightarrow P(n+1)$, $P(n)$ é verdadeira para todo o número natural(ou seja, é universal)

7. .

7.1. Seja $P(n) : \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i(i+2)} = \frac{3}{4} - \frac{2n+3}{2(n+1)(n+2)}$

(i) $P(1)$ é verdadeira(?)

$n=1 \twoheadrightarrow \sum_{i=1}^{1} \frac{1}{i(i+2)} = \frac{3}{4} - \frac{2+3}{2(1+1)(1+2)}$
$\therefore \frac{1}{1(1+2)} = \frac{3}{4} - \frac{5}{12}$
$\therefore \frac{1}{3} = \frac{9-5}{12}$
$\therefore \frac{1}{3} = \frac{4}{12}$
$\therefore \frac{1}{3} = \frac{1}{3} (verdadeiro)$
Logo, $P(1)$ é verdadeira

(ii) $P(n)$ é hereditária

Hipótese de indução: $P(n)$ é verdadeira, isto é, $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i(i+2)} = \frac{3}{4} - \frac{2n+3}{2(n+1)(n+2)}$

Tese de indução: $P(n+1)$ é verdadeira(?), isto é, $\sum_{i=1}^{n+1} \frac{1}{i(i+2)} = \frac{3}{4} - \frac{2(n+1)+3}{2(n+2)(n+3)}$

Ou seja, $\sum_{i=1}^{n+1} \frac{1}{i(i+2)} = \frac{3}{4} - \frac{2n+5}{2(n+2)(n+3)}$

Demonstração

$$\sum_{i=1}^{n+1} \frac{1}{i(i+2)} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i(i+2)} + \sum_{i=n+1}^{n+1} \frac{1}{i(i+2)} = \frac{3}{4} - \frac{2n+3}{2(n+1)(n+2)} + \frac{1}{(n+1)(n+3)} =$$
$$= \frac{3}{4} - \frac{(2n+3)(n+3)}{2(n+1)(n+2)(n+3)} + \frac{2(n+2)}{2(n+1)(n+2)(n+3)} = \frac{3}{4} + \frac{-(2n+3)(n+3)+2(n+2)}{2(n+1)(n+2)(n+3)} =$$
$$= \frac{3}{4} + \frac{-2n^2-6n-3n-9+2n+4}{2(n+1)(n+2)(n+3)} = \frac{3}{4} + \frac{-2n^2-7n-5}{2(n+1)(n+2)(n+3)} = \frac{3}{4} - \frac{2n^2+7n+5}{2(n+1)(n+2)(n+3)} =$$
$$= \frac{3}{4} - \frac{(n+1)(2n+5)}{2(n+1)(n+2)(n+3)} = \frac{3}{4} - \frac{2n+5}{2(n+2)(n+3)}$$

Cálculo auxiliar
$2n^2+7n+5=0 \Leftrightarrow n = \frac{-7 \pm \sqrt{7^2 - 4 \times 2 \times 5}}{2 \times 2} \Leftrightarrow n = \frac{-7 \pm \sqrt{9}}{4} \Leftrightarrow n = \frac{-7 \pm 3}{4} \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow n = \frac{-7-3}{4} \vee n = \frac{-7+3}{4} \Leftrightarrow n = -\frac{5}{2} \vee n = -1$
Logo, $2n^2+7n+5 = 2(n-(-1))\left(n - \left(-\frac{5}{2}\right)\right) = (n+1)(2n+5)$

Logo, $P(n)$ é hereditária, ou seja, $P(n) \Rightarrow P(n+1)$

Conclusão: Como $P(1)$ é verdadeira e $P(n)$ é hereditária, ou seja, $P(n) \Rightarrow P(n+1)$, $P(n)$ é verdadeira para todo o número natural(ou seja, é universal)

7.2. $\lim(u_n) = \lim \left[\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i(i+2)} + \left(\frac{n^6-2}{n^6}\right)^{n^3} \right] = \lim \left[\frac{3}{4} - \frac{2n+3}{2(n+1)(n+2)} + \left(1 - \frac{2}{n^6}\right)^{n^3} \right] =$

$$= \frac{3}{4} - \lim \frac{2n+3}{2(n+1)(n+2)} + \lim \left(1 - \frac{2}{(n^3)^2}\right)^{n^3} =$$
$$= \frac{3}{4} - \lim \frac{2n+3}{2n^2+6n+4} + \lim \left(1 - \frac{\left(\sqrt{2}\right)^2}{(n^3)^2}\right)^{n^3} =$$
$$= \frac{3}{4} - \lim \frac{2n\left(1+\frac{3}{2n}\right)}{2n^2\left(1+\frac{6n}{2n^2}+\frac{4}{2n^2}\right)} + \lim \left(1 - \left(\frac{\sqrt{2}}{n^3}\right)^2\right)^{n^3} =$$

$$= \frac{3}{4} - \lim \frac{1}{n} \times \lim \frac{1+\dfrac{3}{2n}}{1+\dfrac{3}{n}+\dfrac{2}{n^2}} + \lim \left(1+\frac{-\sqrt{2}}{n^3}\right)^{n^3} \times \lim \left(1+\frac{\sqrt{2}}{n^3}\right)^{n^3} =$$
$$= \frac{3}{4} - 0 \times \lim \frac{1+0}{1+0+0} + e^{-\sqrt{2}} \times e^{\sqrt{2}} = \frac{3}{4} + e^0 = \frac{3}{4} + 1 = \frac{7}{4}$$

8. $\lim \frac{{}^nC_k}{n^k} = \lim \frac{\dfrac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{k!}}{n^k} = \frac{1}{k!} \times \lim \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{n^k} =$
$= \frac{1}{k!} \times \lim \frac{n}{n} \times \lim \frac{n-1}{n} \times \lim \frac{n-2}{n} \times \cdots \times \lim \frac{n-k+1}{n} =$
$= \frac{1}{k!} \times \lim(1) \times \lim \left(1-\frac{1}{n}\right) \times \lim \left(1-\frac{2}{n}\right) \times \cdots \times \lim \left(1-\frac{k-1}{n}\right) =$
$= \frac{1}{k!} \times 1 \times (1-0) \times (1-0) \times \cdots \times \lim(1-0) = \frac{1}{k!}$

9. $u_n = {}^{n+k}C_k = \frac{{}^{n+k}A_k}{k!} = \frac{(n+k)(n+k-1)(n+k-2)\cdots(n+k-k+2)(n+k-k+1)}{k!} =$
$= \frac{(n+k)(n+k-1)(n+k-2)\cdots(n+2)(n+1)}{k!}$

$u_{n+1} = {}^{n+1+k}C_k = \frac{{}^{n+1+k}A_k}{k!} =$
$= \frac{(n+1+k)(n+1+k-1)(n+1+k-2)\cdots(n+1+k-k+2)(n+1+k-k+1)}{k!} =$
$= \frac{(n+1+k)(n+k)(n+k-1)(n+k-2)\cdots(n+3)(n+2)}{k!}$

Assim,

$$\lim \left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)^{2n} = \lim \left(\frac{\dfrac{(n+1+k)(n+k)(n+k-1)(n+k-2)\cdots(n+3)(n+2)}{k!}}{\dfrac{(n+k)(n+k-1)(n+k-2)\cdots(n+2)(n+1)}{k!}}\right)^{2n} =$$
$$= \lim \left(\frac{(n+1+k)(n+k)(n+k-1)(n+k-2)\cdots(n+3)(n+2)}{(n+k)(n+k-1)(n+k-2)\cdots(n+2)(n+1)}\right)^{2n} =$$
$$= \lim \left(\frac{n+1+k}{n+1}\right)^{2n} = \lim \left(\frac{n\left(1+\dfrac{1+k}{n}\right)}{n\left(1+\dfrac{1}{n}\right)}\right)^{2n} = \frac{\lim\left(1+\dfrac{1+k}{n}\right)^{2n}}{\lim\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{2n}} =$$
$$= \frac{\lim\left(1+\dfrac{2+2k}{2n}\right)^{2n}}{\lim\left(1+\dfrac{2}{2n}\right)^{2n}} = \frac{e^{2+2k}}{e^2} = e^{2+2k-2} = e^{2k}$$

10. $\lim \left[(1+n^2)^{\frac{n^2}{2}} n^{-n^2}\right] = \lim \left[(1+n^2)^{\frac{n^2}{2}} \times \frac{1}{n^{n^2}}\right] = \lim \left[(1+n^2)^{\frac{n^2}{2}} \times \frac{1}{(n^2)^{\frac{n^2}{2}}}\right] = \lim \left(\frac{1+n^2}{n^2}\right)^{\frac{n^2}{2}} =$
$= \left[\lim \left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{n^2}\right]^{\frac{1}{2}} = e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e}$

11. $u_n = \frac{n!}{n^n}$
então, $u_{n+1} = \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}$

Assim, vem,

$$\lim \frac{u_{n+1}}{u_n} \times k = \frac{2}{e^2} \Leftrightarrow \lim \frac{\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{n!}{n^n}} \times k = \frac{2}{e^2} \Leftrightarrow \lim \frac{(n+1)!n^n}{n!(n+1)^{n+1}} \times k = \frac{2}{e^2} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \lim \frac{(n+1)n!n^n}{n!(n+1)^n(n+1)} \times k = \frac{2}{e^2} \Leftrightarrow \lim \frac{n^n}{(n+1)^n} \times k = \frac{2}{e^2} \Leftrightarrow \lim \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \times k = \frac{2}{e^2} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \frac{1}{\lim \left(\frac{n+1}{n}\right)^n} \times k = \frac{2}{e^2} \Leftrightarrow \frac{1}{\lim \left(1+\frac{1}{n}\right)^n} \times k = \frac{2}{e^2} \Leftrightarrow \frac{1}{e} \times k = \frac{2}{e^2} \Leftrightarrow k = \frac{2e}{e^2} \Leftrightarrow k = \frac{2}{e}$$

12. $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) - \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

13. $\cos(x) - \sin(x) = \cos\left(2 \times \frac{x}{2}\right) - \sin\left(2 \times \frac{x}{2}\right) = \cos^2\left(\frac{x}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{x}{2}\right) - 2\sin\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right) =$
$= \left(-\frac{3}{5}\right)^2 - \left(\frac{4}{5}\right)^2 - 2 \times \frac{4}{5} \times \left(-\frac{3}{5}\right) = \frac{9}{25} - \frac{16}{25} + \frac{24}{25} = \frac{17}{25}$

Cálculo auxiliar

Sabe-se que $\sin\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{4}{5} \wedge \pi < x < \frac{3\pi}{2}$

De $\sin^2\left(\frac{x}{2}\right) + \cos^2\left(\frac{x}{2}\right) = 1$, vem,

$\left(\frac{4}{5}\right)^2 + \cos^2\left(\frac{x}{2}\right) = 1 \Leftrightarrow \frac{16}{25} + \cos^2\left(\frac{x}{2}\right) = 1 \Leftrightarrow \cos^2\left(\frac{x}{2}\right) = 1 - \frac{16}{25} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \cos^2\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{9}{25} \Leftrightarrow \cos\left(\frac{x}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{9}{25}} \Leftrightarrow \cos\left(\frac{x}{2}\right) = \pm\frac{3}{5}$

Como, $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$, então $\frac{\pi}{2} < \frac{x}{2} < \frac{3\pi}{4}$, portanto, $\cos\left(\frac{x}{2}\right) = -\frac{3}{5}$

14. $\cos\left(\frac{x}{2}\right) = \cos\left(2 \times \frac{x}{4}\right)$
$\therefore \cos\left(\frac{x}{2}\right) = \cos^2\left(\frac{x}{4}\right) - \sin^2\left(\frac{x}{4}\right)$
$\therefore \cos\left(\frac{x}{2}\right) = \left[1 - \sin^2\left(\frac{x}{4}\right)\right] - \sin^2\left(\frac{x}{4}\right)$
$\therefore \cos\left(\frac{x}{2}\right) = 1 - \sin^2\left(\frac{x}{4}\right) - \sin^2\left(\frac{x}{4}\right)$
$\therefore \cos\left(\frac{x}{2}\right) = 1 - 2\sin^2\left(\frac{x}{4}\right)$
$\therefore 1 - \cos\left(\frac{x}{2}\right) = 2\sin^2\left(\frac{x}{4}\right)$c.q.d.

15. $\sin(4x) = \sin(2 \times 2x) = 2\sin(2x)\cos(2x) = 2 \times 2\sin(x)\cos(x) \times (\cos^2(x) - \sin^2(x)) =$
$= 4\sin(x)\cos(x) \times (\cos^2(x) - \sin^2(x)) = 4\sin(x)\cos^3(x) - 4\cos(x)\sin^3(x)$

16. .

16.1. $\sin(x)\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{8}\right)\cos(x) = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \sin\left(x + \frac{\pi}{8}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \sin\left(x + \frac{\pi}{8}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x + \frac{\pi}{8} = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \vee x + \frac{\pi}{8} = \pi - \frac{\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{8} + 2k\pi \vee x = \pi - \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{8} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{8} + 2k\pi \vee x = \frac{5\pi}{8} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$

16.2. $\cos(2x)+3\cos(x)+2=0 \Leftrightarrow \cos^2(x)-\sin^2(x)+3\cos(x)+2=0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \cos^2(x)-(1-\cos^2(x))+3\cos(x)+2=0 \Leftrightarrow \cos^2(x)-1+\cos^2(x)+3\cos(x)+2=0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 2\cos^2(x)+3\cos(x)+1=0 \Leftrightarrow \cos(x)=\dfrac{-3\pm\sqrt{3^2-4\times 2\times 1}}{2\times 2} \Leftrightarrow \cos(x)=\dfrac{-3\pm\sqrt{1}}{4} \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \cos(x)=\dfrac{-3-1}{4} \vee \cos(x)=\dfrac{-3+1}{4} \Leftrightarrow \cos(x)=-1 \vee \cos(x)=-\dfrac{1}{2} \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \cos(x)=\cos(\pi) \vee \cos(x)=\cos\left(\dfrac{2\pi}{3}\right) \Leftrightarrow x=\pi+2k\pi \vee x=\pm\dfrac{2\pi}{3}+2k\pi, k\in\mathbb{Z}$

16.3. $\sin(x)+2\sin\left(\dfrac{x}{2}\right)=0 \Leftrightarrow \sin\left(2\times\dfrac{x}{2}\right)+2\sin\left(\dfrac{x}{2}\right)=0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 2\sin\left(\dfrac{x}{2}\right)\cos\left(\dfrac{x}{2}\right)+2\sin\left(\dfrac{x}{2}\right)=0 \Leftrightarrow 2\sin\left(\dfrac{x}{2}\right)\left[\cos\left(\dfrac{x}{2}\right)+1\right]=0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 2\sin\left(\dfrac{x}{2}\right)=0 \vee \cos\left(\dfrac{x}{2}\right)+1=0 \Leftrightarrow \sin\left(\dfrac{x}{2}\right)=0 \vee \cos\left(\dfrac{x}{2}\right)=-1 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \sin\left(\dfrac{x}{2}\right)=\sin(0) \vee \cos\left(\dfrac{x}{2}\right)=\cos(\pi) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \dfrac{x}{2}=0+k\pi \vee \dfrac{x}{2}=\pi+2k\pi, k\in\mathbb{Z} \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x=2k\pi \vee x=2\pi+4k\pi, k\in\mathbb{Z}$

16.4. $-\sqrt{3}\sin(x)+\cos(x)=0 \Leftrightarrow -\dfrac{\sqrt{3}}{2}\times\sin(x)+\dfrac{1}{2}\times\cos(x)=0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow -\cos\left(\dfrac{\pi}{6}\right)\times\sin(x)+\sin\left(\dfrac{\pi}{6}\right)\times\cos(x)=0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \sin\left(\dfrac{\pi}{6}\right)\times\cos(x)-\cos\left(\dfrac{\pi}{6}\right)\times\sin(x)=0 \Leftrightarrow \sin\left(\dfrac{\pi}{6}-x\right)=0 \Leftrightarrow \sin\left(\dfrac{\pi}{6}-x\right)=\sin(0) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \dfrac{\pi}{6}-x=0+k\pi, k\in\mathbb{Z} \Leftrightarrow -x=-\dfrac{\pi}{6}+k\pi, k\in\mathbb{Z} \Leftrightarrow x=\dfrac{\pi}{6}-k\pi, k\in\mathbb{Z}$

16.5. $\sin(x)+\cos(x)=1 \Leftrightarrow \dfrac{\sqrt{2}}{2}\times\sin(x)+\dfrac{\sqrt{2}}{2}\times\cos(x)=\dfrac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \sin\left(\dfrac{\pi}{4}\right)\times\sin(x)+\cos\left(\dfrac{\pi}{4}\right)\times\cos(x)=\dfrac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \cos\left(\dfrac{\pi}{4}-x\right)=\cos\left(\dfrac{\pi}{4}\right) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \dfrac{\pi}{4}-x=\dfrac{\pi}{4}+2k\pi \vee \dfrac{\pi}{4}-x=-\dfrac{\pi}{4}+2k\pi, k\in\mathbb{Z} \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow -x=2k\pi \vee -x=-\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{\pi}{4}+2k\pi, k\in\mathbb{Z} \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x=-2k\pi \vee x=\dfrac{\pi}{2}-2k\pi, k\in\mathbb{Z} \Leftrightarrow$

17. $\sin(a+b)\sin(a-b)=[\sin(a)\cos(b)+\cos(a)\sin(b)]\times[\sin(a)\cos(b)-\cos(a)\sin(b)]=$
$=\sin^2(a)\cos^2(b)-\cos^2(a)\sin^2(b)=\sin^2(a)(1-\sin^2(b))-(1-\sin^2(a))\sin^2(b)=$
$=\sin^2(a)-\sin^2(a)\sin^2(b)-\sin^2(b)+\sin^2(a)\sin^2(b)=\sin^2(a)-\sin^2(b)$

18. Se a, b, c são as amplitudes dos ângulos internos de um triângulo $[ABC]$, então, tem-se que $a+b+c=\pi$, e portanto,
$b+c=\pi-a$

Assim,

$$\cos^2\left(\frac{a}{2}\right)+\cos^2\left(\frac{b+c}{2}\right)=\cos^2\left(\frac{a}{2}\right)+\cos^2\left(\frac{\pi-a}{2}\right)=\cos^2\left(\frac{a}{2}\right)+\cos^2\left(\frac{\pi}{2}-\frac{a}{2}\right)=$$
$$=\cos^2\left(\frac{a}{2}\right)+\left[\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{a}{2}\right)\right]^2=\cos^2\left(\frac{a}{2}\right)+\left[\sin\left(\frac{a}{2}\right)\right]^2=\cos^2\left(\frac{a}{2}\right)+\sin^2\left(\frac{a}{2}\right)=1$$

19. Se $\overline{PF_1}+\overline{PF_2}=8$, então também $\overline{BF_1}+\overline{BF_2}=8$, e portanto $\overline{BF_2}=4$.
Resposta:(D)

20. .

20.1. A função g é contínua em $\mathbb{R}^+$, por se tratar do produto de funções contínuas(função polinomial e função logarítmica), assim, em particular, a função é contínua em $[6;7]$

Por outro lado, tem-se,

$$g(6) = 6^2\left(\ln(6) - \frac{3}{2}\right) \approx 10.50$$
$$g(7) = 7^2\left(\ln(7) - \frac{3}{2}\right) \approx 21.85$$

Como $g(6) < 15 < g(7)$ e a função g é contínua em $[6;7]$, então, pelo teorema de Bolzano-Cauchy, $\exists c \in]6;7[: g(c) = 15$

Logo a equação $g(x) = 15$ tem pelo menos uma solução em $]6;7[$

20.2. Determinemos a expressão da função derivada de g

$$g'(x) = \left[x^2\left(\ln(x) - \frac{3}{2}\right)\right]' = (x^2)' \times \left(\ln(x) - \frac{3}{2}\right) + x^2\left(\ln(x) - \frac{3}{2}\right)' =$$
$$= 2x\left(\ln(x) - \frac{3}{2}\right) + x^2\left(\frac{1}{x} - 0\right) = 2x\ln(x) - 3x + x = 2x\ln(x) - 2x$$

Determinemos os zeros de g'

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x\ln(x) - 2x = 0 \wedge x > 0 \Leftrightarrow 2x(\ln(x) - 1) = 0 \wedge x > 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (2x = 0 \vee \ln(x) - 1 = 0) \wedge x > 0 \Leftrightarrow (x = 0 \vee \ln(x) = 1) \wedge x > 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (x = 0 \vee x = e) \wedge x > 0 \Leftrightarrow x = e$$

sinal de g'

$$\ln(x) - 1 > 0 \Leftrightarrow \ln(x) > 1 \wedge x > 0 \Leftrightarrow x > e \wedge x > 0 \Leftrightarrow x > e$$
$$\ln(x) - 1 < 0 \Leftrightarrow \ln(x) < 1 \wedge x > 0 \Leftrightarrow x < e \wedge x > 0 \Leftrightarrow 0 < x < e$$

Quadro de sinal de g' e de variação de g

x	0		e	$+\infty$
$2x$	\\\	$+$	$+$	$+$
$\ln(x) - 1$	\\\	$-$	0	$+$
$g'(x)$	\\\	$-$	0	$+$
$g(x)$	\\\	$\searrow$	$-\frac{e^2}{2}$	$\nearrow$

$$g(e) = e^2 \times \left(\ln(e) - \frac{3}{2}\right) = e^2 \times \left(1 - \frac{3}{2}\right) = e^2 \times \left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{e^2}{2}$$

A função é estritamente decrescente em $]0;e[$ e é estritamente crescente em $]e;+\infty[$

A função atinge o valor mínimo relativo $-\dfrac{e^2}{2}$ para $x = e$

20.3. A assíntota não vertical é da forma $y = mx + b$, com $m, b \in \mathbb{R}$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{h(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{g(x)}{x^3}}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{g(x)}{x^4} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2\left(\ln(x) - \frac{3}{2}\right)}{x^4} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x) - \frac{3}{2}}{x^2} =$$
$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x^2} - \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{3}{2}}{x^2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} \times \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x} - 0 = 0 \times 0 = 0$$

Logo, $m = 0$

$$\lim_{x\to+\infty}(h(x)-0x) = \lim_{x\to+\infty}(h(x)) = \lim_{x\to+\infty}\frac{g(x)}{x^3} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x^2\left(\ln(x)-\frac{3}{2}\right)}{x^3} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(x)-\frac{3}{2}}{x} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(x)}{x} - \lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{3}{2}}{x} = 0 - 0 = 0$$

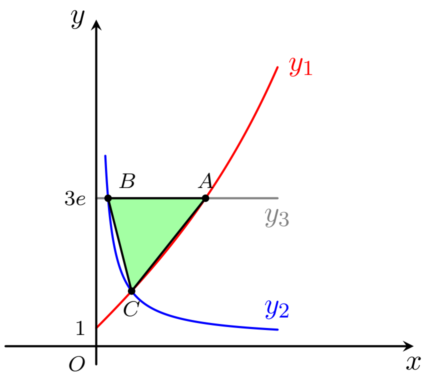
Logo, $b = 0$

A reta de equação $y = 0$ é assíntota horizontal ao gráfico da função g, quando $x \to +\infty$

21. Inserira na calculadora as funções
$y_1 = e^x + 4x$
$y_2 = \dfrac{1}{\ln(x+1)}$
$y_3 = 3e$

Ajustar a janela de visualização: $[0;2] \times [0;12]$

Desenhar num referencial ortonormado os gráficos das três funções



Determinemos as coordenadas dos três pontos A, B e C
$A(1.20, 8.15)$, $B(0.13, 8.15)$ e $C(0.39, 3.04)$

A área do triângulo $[ABC]$ é igual a $A_{[ABC]} = \dfrac{\overline{AB} \times |ordenadadeB - ordenadadeC|}{2} =$
$= \dfrac{|1.20 - 0.13| \times |8.15 - 3.04|}{2} \approx 2.7\ u.a.$

22. $h(x) = \ln(x^m)$
Determinemos a função derivada de h
$h'(x) = [\ln(x^m)]' = \dfrac{(x^m)'}{x^m} = \dfrac{mx^{m-1}}{x^m} = mx^{m-1-m} = mx^{-1} = \dfrac{m}{x}$

Assim,
$h'(x) = h(x) \Leftrightarrow \dfrac{m}{x} = \ln(x^m) \Leftrightarrow m = x\ln(x^m) \Leftrightarrow m = xm\ln(x) \Leftrightarrow 1 = x\ln(x)$

23. $1 \in D_f$ e é ponto aderente de D_f
A função f é contínua em $x = 1$ se existir $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$, isto é, se $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = f(1)$

Ora,
$\lim\limits_{x\to 1} f(x) = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{9-9x}{e^{x-1}-1} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{-9(x-1)}{e^{x-1}-1} = -9 \times \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x-1}{e^{x-1}-1} = -9 \times \dfrac{1}{\lim\limits_{x-1\to 0} \dfrac{e^{x-1}-1}{x-1}} =$
$= -9 \times \dfrac{1}{1} = -9$
Aplicou-se o limite notável $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x-1}{x} = 1$
$f(1) = -\dfrac{1}{b^2}$

Assim, f é contínua em $x = 1$ se $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = f(1) \Leftrightarrow -9 = -\dfrac{1}{b^2} \Leftrightarrow 9 = \dfrac{1}{b^2} \Leftrightarrow b^2 = \dfrac{1}{9} \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow b = \pm\sqrt{\dfrac{1}{9}} \Leftrightarrow b = \pm\dfrac{1}{3}$

24. O número de casos possíveis é igual a $10! = 3628800$, uma vez que todos os frascos são distintos
Quanto ao número de casos favoráveis:
Pretende-se que os frascos fiquem agrupados por marca, assim, podemos imaginar que os frascos da marca A formam um bloco, os da marca B formam outro bloco e os de marca C também formam um bloco
Então, como os frascos vão ser colocados em fila, podemos permutar os três blocos, e o número de maneiras distintas de o fazer é dado por 3!. Para cada uma destas maneiras, dentro de cada bloco, os frascos de perfume podem permutar entre si, ou seja, os frascos da marca A permutam de 3! maneiras distintas, os frascos da marca B permutam de 3! maneiras distintas e os de marca C permutam de 4! maneiras distintas
Portanto, o número de casos favoráveis é igual a $3! \times 3! \times 3! \times 4! = 5184$

Assim, a probabilidade pedida é igual a $P(pedida) = \dfrac{3! \times 3! \times 3! \times 4!}{10!} = \dfrac{5184}{3628800} = \dfrac{1}{700}$

25. $P(\overline{Y}|\overline{X})$ representa a probabilidade de a bola retirada da caixa B ser branca, dado que as bolas retiradas da caixa A são de cores diferentes.
Se da caixa A foram retiradas duas bolas de cores diferentes e posteriormente colocadas na caixa B, então, na caixa B ficaram doze bolas, sendo oito brancas e quatro pretas.
Como se vai retirar uma bola da caixa B, então o número de casos possíveis é igual a 12 (há doze bolas na caixa). Quanto ao número de casos favoráveis: Como se pretende calcular a probabilidade dessa bola retirada da caixa B ser de cor branca, e há na caixa oito bolas brancas, então o número de casos favoráveis é igual a 8.
A probabilidade é, então, pela Lei de Laplace (que consiste em dividir o número de casos favoráveis ao acontecimento pelo número de casos possíveis, quando estes são equiprováveis), igual a $P = \dfrac{8}{12} = \dfrac{2}{3}$.

26. De uma certa linha do triângulo de Pascal, sabe-se que o produto do segundo elemento com o penúltimo é 225
Seja n o número da linha
Então, tem-se que $n \times n = 30$, ou seja, $n^2 = 225 \Leftrightarrow n = \pm\sqrt{225} \Leftrightarrow n = \pm 15$
Como $n \in \mathbb{N}$, tem-se que $n = 15$
Assim, a linha anterior tem 15 elementos, pelo que o maior elemento é ${}^{14}C_7 = 3432$

Resposta: (C)

27. Sabe-se que $\lim\limits_{x\to+\infty}[g(x)-2x+1]=0$, ou seja, $\lim\limits_{x\to+\infty}[g(x)-(2x-1)]=0$
Portanto, a reta de equação $y=2x-1$ é assíntota ao gráfico da função g, quando $x\to+\infty$, então,
$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{g(x)}{x}=2$

Assim,
$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2\ln(x)+g(x)}{2x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2\ln(x)}{2x}+\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{g(x)}{2x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(x)}{x}+\dfrac{1}{2}\times\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{g(x)}{x}$
$=0+\dfrac{1}{2}\times 2=1$

Resposta: (A)

28. $\log_b\left(\dfrac{b^5}{\sqrt{k}}\right)=\log_b\left(b^5\right)-\log_b\left(\sqrt{k}\right)=5-\log_b\left(k^{\frac{1}{2}}\right)=5-\dfrac{1}{2}\log_b(k)$
Resposta: (C)

29. $f(x)<g(x)\Leftrightarrow 7^x<\left(\dfrac{1}{7}\right)^x\Leftrightarrow 7^x<7^{-x}\Leftrightarrow x<-x\Leftrightarrow 2x<0\Leftrightarrow x<0$
$C.S.=\mathbb{R}^-$
Resposta: (B)

30. .

30.1. $0\in D_f$ e é ponto aderente de D_f
A função f é contínua em $x=0$ se existir $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$, isto é, se $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=f(0)$

Ora,
$\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}(e^x-x-6)=e^0-0-6=1-6=-5$
$\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\dfrac{1}{1-\ln(x)}-5\right)=\dfrac{1}{1-\ln(0^+)}-5=\dfrac{1}{1-(-\infty)}-5=\dfrac{1}{+\infty}-5=$
$=0-5=-5$

$f(0)=-5$

Como, $\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=f(0)$ e $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=f(0)$ então, $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=f(0)$, logo existe $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$, pelo que a função é contínua em $x=0$

30.2. Assíntotas ao gráfico paralelas ao eixo das ordenadas (assíntotas verticais)
$D_f=]-\infty;e[$ e f é contínua
$\lim\limits_{x\to e^-}f(x)=\lim\limits_{x\to e^-}\left(\dfrac{1}{1-\ln(x)}-5\right)=\dfrac{1}{1-\ln(e^-)}-5=\dfrac{1}{0^+}-5=+\infty-5=+\infty$
Logo, a reta de equação $x=e$ é assíntota paralela ao eixo das ordenadas (assíntota vertical) ao gráfico da função

Como a função é contínua em todo o seu domínio, não existem mais assíntotas ao gráfico paralelas ao eixo das ordenadas
Assíntotas ao gráfico paralelas ao eixo das abcissas (assíntotas horizontais)

$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}(e^x-x-6)=e^{-\infty}-(-\infty)-6=0+\infty=+\infty$

Logo, não existem Assíntotas ao gráfico paralelas ao eixo das abcissas (assíntotas horizontais)

30.3. A função g é contínua em $[-4;-3]$ por ser soma de duas funções contínuas, a função f e uma função constante
Por outro lado,
$g(-4) = f(-4) + 2 = e^{-4} - (-4) - 6 + 2 = e^{-4} > 0$
$g(-3) = f(-3) + 2 = e^{-3} - (-3) - 6 + 2 = e^{-4} - 1 < 0$

Como, $g(-4)$ e $g(-3)$ têm sinais contrários, isto é, $g(-4) \times g(-3) < 0$, e a função é contínua em $[-4;-3]$, então, pelo corolário do teorema de Bolzano-Cauchy, $\exists c \in]-4, -3[: g(c) = 0$ ou seja, a função g tem pelo menos um zero em $]-4;-3[$

31. .

31.1. Determinemos a expressão derivada da função f

$$f'(x) = \left(x - 1 + e^{-\frac{x}{2}}\right)' = 1 - 0 + \left(-\frac{x}{2}\right)' \times e^{-\frac{x}{2}} = 1 - \frac{1}{2}e^{-\frac{x}{2}}$$

Zeros de f'
$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 1 - \frac{1}{2}e^{-\frac{x}{2}} = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}e^{-\frac{x}{2}} = 1 \Leftrightarrow e^{-\frac{x}{2}} = 2 \Leftrightarrow -\frac{x}{2} = \ln(2) \Leftrightarrow x = -2\ln(2) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x = -\ln(4)$

Sinal de f'
$f'(x) > 0 \Leftrightarrow 1 - \frac{1}{2}e^{-\frac{x}{2}} > 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}e^{-\frac{x}{2}} < 1 \Leftrightarrow e^{-\frac{x}{2}} < 2 \Leftrightarrow -\frac{x}{2} < \ln(2) \Leftrightarrow x > -2\ln(2) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x > -\ln(4)$
$f'(x) < 0 \Leftrightarrow 1 - \frac{1}{2}e^{-\frac{x}{2}} < 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}e^{-\frac{x}{2}} > 1 \Leftrightarrow e^{-\frac{x}{2}} > 2 \Leftrightarrow -\frac{x}{2} > \ln(2) \Leftrightarrow x < -2\ln(2) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x < -\ln(4)$

Quadro de sinal de f' e de variação de f

x	$-\infty$	$-\ln(4)$	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	$1 - \ln(4)$	$\nearrow$

$f(-\ln(4)) = -\ln(4) - 1 + e^{-\frac{-\ln(4)}{2}} = -\ln(4) - 1 + e^{\frac{\ln(4)}{2}} = -\ln(4) - 1 + e^{\ln\left(4^{\frac{1}{2}}\right)} =$
$= -\ln(4) - 1 + e^{\ln(2)} = -\ln(4) - 1 + 2 = 1 - \ln(4)$

A função é estritamente decrescente em $]-\infty; -\ln(4)[$, é estritamente crescente em $]-\ln(4); +\infty[$, e atinge o valor mínimo absoluto $1 - \ln(4)$, para $x = -\ln(4)$

31.2. $f'(x) = 1 - \frac{1}{2}e^{-\frac{x}{2}}$
O declive da reta tangente é $m = f'(0) = 1 - \frac{1}{2} \times e^{-\frac{0}{2}} = 1 - \frac{1}{2} \times e^0 = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

$f(0) = 0 - 1 + e^{-\frac{0}{2}} = -1 + e^0 = 0$
O ponto de tangente é a origem do referêncial
Então a $y = \frac{1}{2}x$ é a equação reduzida da reta tangente ao gráfico da função no ponto de abcissa zero

31.3. $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x - 1 + e^{-\frac{x}{2}}}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x}{x} - \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x} + \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^{-\frac{x}{2}}}{x} =$
$= \lim\limits_{x\to+\infty}(1) - \frac{1}{+\infty} + \frac{e^{-\infty}}{+\infty} = 1 + \frac{0^+}{+\infty} = 1 + 0 = 1$

Logo, $m = 1$

$$\lim_{x\to+\infty}(f(x)-x)=\lim_{x\to+\infty}\left(x-1+e^{-\frac{x}{2}}-x\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(-1+e^{-\frac{x}{2}}\right)=-1+e^{-\infty}=$$
$$=-1+0=-1$$

Logo, $b=-1$

Assim, a reta de equação $y=x-1$ é assíntota oblíqua ao gráfico da função, quando $x\to+\infty$

31.4. Sabemos que $f'(x)=1-\frac{1}{2}e^{-\frac{x}{2}}$

Calculemos $f''(x)$

$$f''(x)=\left(1-\frac{1}{2}e^{-\frac{x}{2}}\right)'=0-\frac{1}{2}\left(e^{-\frac{x}{2}}\right)'=-\frac{1}{2}\times\left(-\frac{x}{2}\right)'\times e^{-\frac{x}{2}}=-\frac{1}{2}\times\left(-\frac{1}{2}\right)\times e^{-\frac{x}{2}}=\frac{1}{4}e^{-\frac{x}{2}}$$

Então,

$$2f''(x)+f'(x)=2\times\frac{1}{4}e^{-\frac{x}{2}}+1-\frac{1}{2}e^{-\frac{x}{2}}=\frac{1}{2}e^{-\frac{x}{2}}+1-\frac{1}{2}e^{-\frac{x}{2}}=1, \text{ c.q.d.}$$

32. O domínio da função g é
$D_g=\{x\in\mathbb{R}:2e^{-x}+e^x-3>0\}$

Cálculo auxiliar

$$2e^{-x}+e^x-3>0\Leftrightarrow\frac{2}{e^x}+e^x-3>0\Leftrightarrow\frac{2+(e^x)^2-3e^x}{e^x}>0\Leftrightarrow\frac{(e^x)^2-3e^x+2}{e^x}>0\Leftrightarrow$$
$\Leftrightarrow (e^x)^2-3e^x+2>0$, dado que $e^x>0,\forall x\in\mathbb{R}$

Fazendo a mudança de variável $y=e^x$

Vem,

$y^2-3y+2>0$

Calculando os zeros de y^2-3y+2, tem-se,

$$y^2-3y+2=0\Leftrightarrow y=\frac{-(-3)\pm\sqrt{(-3)^2-4\times1\times2}}{2\times1}\Leftrightarrow y=\frac{3\pm1}{2}\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow y=\frac{3-1}{2}\vee y=\frac{3+1}{2}\Leftrightarrow y=1\vee y=2$$

Assim,

$y^2-3y+2>0\Leftrightarrow y<1\vee y>2$

e voltando à variável x, resulta,

$$(e^x)^2-3e^x+2>0\Leftrightarrow e^x<1\vee e^x>2\Leftrightarrow x<0\vee x>\ln(2)$$

Então, $D_g=\{x\in\mathbb{R}:2e^{-x}+e^x-3>0\}=\{x\in\mathbb{R}:x<0\vee x>\ln(2)\}=]-\infty;0[\cup]\ln(2);+\infty[$

33. .

33.1. Reta s

$$\lim_{x\to-1^+}g(x)=\lim_{x\to-1^+}\frac{\ln(x+1)}{x}=\frac{\ln(0^+)}{-1}=\frac{-\infty}{-1}=+\infty$$

Logo, $s:x=-1$ (é assíntota vertical ao gráfico da função)

Reta r

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{g(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x+1+\frac{2x}{e^x}}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x}+\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}+\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{2x}{e^x}}{x}=$$
$$=\lim_{x\to+\infty}(1)+\frac{1}{+\infty}+\lim_{x\to+\infty}\frac{2x}{xe^x}=1+0+\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{e^x}=1+\frac{2}{e^{+\infty}}=1+\frac{2}{+\infty}=1+0=1$$

Logo, $m=1$

$$\lim_{x\to+\infty}(g(x)-x)=\lim_{x\to+\infty}\left(x+1+\frac{2x}{e^x}-x\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{2x}{e^x}\right)=1+\frac{2}{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x}}=$$
$$=1+\frac{2}{+\infty}=1+0=1$$

Logo, $b=1$

Assim, a reta de equação $y=x+1$ é assíntota oblíqua ao gráfico da função, quando $x\to+\infty$

33.2. Em $]-1;0[$, a função g contínua, por se tratar de quociente de funções contínuas
Em $]0;+\infty[$, a função g contínua, por se tratar de soma de funções contínuas

Falta agora estudar a continuidade da função em $x=0$

Ora, $0\in D_g$ e é ponto aderente de D_g
Assim,
A função g é contínua em $x=0$ se existir $\lim\limits_{x\to0}g(x)$, isto é, se $\lim\limits_{x\to0}g(x)=g(0)$

$$\lim_{x\to0^-}g(x)=\lim_{x\to0^-}\frac{\ln(x+1)}{x}=\lim_{y\to0^-}\frac{y}{e^y-1}=\frac{1}{\lim\limits_{y\to0^-}\frac{e^y-1}{y}}=\frac{1}{1}=1$$

Fez-se a mudança de variável
$y=\ln(x+1)\Leftrightarrow e^y=x+1\Leftrightarrow e^y-1=x$
Se $x\to0^-$, então, $y\to0^-$

Utilizou-se o limite notável $\lim\limits_{y\to0^-}\dfrac{e^y-1}{y}=1$

$$\lim_{x\to0^+}g(x)=\lim_{x\to0^+}\left(x+1+\frac{2x}{e^x}\right)=0+1+\frac{0}{e^0}=1+\frac{0}{1}=1+0=1$$

$g(0)=1$

Então, $\lim\limits_{x\to0^-}g(x)=g(0)$ e $\lim\limits_{x\to0^+}g(x)=g(0)$, portanto, existe $\lim\limits_{x\to0}g(x)$, isto é, $\lim\limits_{x\to0}g(x)=g(0)$, logo, a função é contínua em $x=0$

Resumindo, a função g é contínua em todo o seu domínio

33.3. Determinemos a expressão da função derivada de g em $]0;+\infty[$

$$g'(x)=\left(x+1+\frac{2x}{e^x}\right)'=1+0+\frac{(2x)'\times e^x-2x\times(e^x)'}{(e^x)^2}=1+\frac{2e^x-2xe^x}{(e^x)^2}=$$
$$=1+\frac{2e^x(1-x)}{(e^x)^2}=1+\frac{2-2x}{e^x}$$

Determinemos o declive da reta tangente

$$g'(1)=1+\frac{2-2\times1}{e}=1+\frac{0}{e}=1$$
$$g(1)=1+1+\frac{2\times1}{e^1}=2+\frac{2}{e}=\frac{2e+2}{e}$$

O ponto de tangência tem coordenadas $\left(1; \frac{2e+2}{e}\right)$
Assim,
$y = x + b$, com $b \in \mathbb{R}$
Donde, se tem,
$\frac{2e+2}{e} = 1 + b \Leftrightarrow b = \frac{2e+2}{e} - 1 \Leftrightarrow b = \frac{2e+2-e}{e} \Leftrightarrow b = \frac{e+2}{e}$
Logo, $y = x + \frac{e+2}{e}$ é a equação reduzida da reta tangente ao gráfico da função no ponto de abcissa 1

33.4. Determinemos a expressão da função segunda derivada de g em $]0; +\infty[$

$$g''(x) = \left(1 + \frac{2-2x}{e^x}\right)' = 0 + \frac{(2-2x)' \times e^x - (2-2x) \times (e^x)'}{(e^x)^2} = \frac{-2e^x - (2-2x)e^x}{(e^x)^2} =$$
$$= \frac{e^x(-2-2+2x)}{(e^x)^2} = \frac{2x-4}{e^x}$$

Determinemos os zeros de g''
$g''(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{2x-4}{e^x} = 0 \Leftrightarrow 2x - 4 = 0 \wedge e^x \neq 0 \Leftrightarrow x = 2$

Quadro de sinal de g'' e das concavidades do gráfico de g

x	0		2	$+\infty$
$2x-4$	\\\	$-$	0	$+$
e^x	\\\	$+$	$+$	$+$
$g''(x)$	\\\	$-$	0	$+$
$g(x)$	\\\	$\cap$	$\frac{3e^2+4}{e^2}$	$\cup$

$g(2) = 2 + 1 + \frac{2 \times 2}{e^2} = 3 + \frac{4}{e^2} = \frac{3e^2+4}{e^2}$

Conclui-se, assim, que o ponto de coordenadas $\left(2; \frac{3e^2+4}{e^2}\right)$ é ponto de inflexão do gráfico da função g

34. .

34.1. Sabe-se que a área da base $[ABCD]$ é 16, então a medida da resta da base da pirâmide é igual a 4

Assim, como A é o ponto de coordenadas $(5, 1, -2)$, tem-se que,
$D(1, 1, -2)$
$C(1, 5, -2)$
$B(5, 5, -2)$

Portanto, $V(3, 3, z)$
Ora, o volume da pirâmide $[ABCDV]$ é 32, então, sendo h a medida da sua altura, tem-se que,
$\frac{16 \times h}{3} = 32 \Leftrightarrow 16h = 96 \Leftrightarrow h = \frac{96}{16} \Leftrightarrow h = 6$

Como a base $[ABCD]$ da pirâmide está contida no plano $z = -2$, tem-se que a cota do ponto V é 4
logo, $V(3, 3, 4)$

34.2. Um vetor normal ao plano mediador do segmento de reta $[AV]$ poderá ser $\overrightarrow{AV}$
Ora,
$\overrightarrow{AV} = V - A = (3,3,4) - (5,1,-2) = (3-5, 3-1, 4-(-2)) = (-2,2,6)$
A equação do plano mediador é da forma $-2x+2y+6z+d=0$, com $d \in \mathbb{R}$

O plano mediador contém o ponto médio do segmento de reta $[AV]$, que é $M\left(\frac{3+5}{2}; \frac{3+1}{2}; \frac{4-2}{2}\right)$, ou seja, $M(4;2;1)$

Assim, vem,

$-2\times 4 + 2\times 2 + 6\times 1 + d = 0 \Leftrightarrow d = -2$

Logo, uma equação do plano mediador é $-2x+2y+6z-2=0$, ou $-x+y+3z-1=0$

34.3. O número de casos possíveis é igual a $5^5 = 3125$, dado que temos cinco faces para serem coloridas com cinco cores
Quanto ao número de casos favoráveis:
Pretende-se que apenas duas faces sejam coloridas com a mesma cor, assim, teremos primeiro de escolher essas duas faces que vão ser coloridas com a mesma cor. O número de maneiras de fazer essa escolha é dado por ${}^5C_2$. Para cada uma destas escolhas, colorimos essas duas faces de cinco maneiras distintas, ou seja, as duas faces podem ser coloridas de ${}^5C_2 \times 5$ maneiras distintas
Coloridas as duas faces, as restantes faces podem ser coloridas de ${}^4A_3$
Resumindo, as cinco faces podem ser coloridas de ${}^5C_2 \times 5 \times {}^4A_3 = 1200$ maneiras distintas
Este é o número de casos favoráveis

Portanto, a probabilidade pedida é igual a $P(pedida) = \frac{{}^5C_2 \times 5 \times {}^4A_3}{5^5} = \frac{1200}{3125} = 0.384$

35. $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{g(x)-\ln(-x)}{3x} = 2 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{g(x)}{3x} - \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{\ln(-x)}{3x} = 2 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \frac{1}{3} \times \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{g(x)}{x} - \lim\limits_{y\to+\infty} \frac{\ln(y)}{-3y} = 2 \Leftrightarrow \frac{1}{3} \times \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{g(x)}{x} + \frac{1}{3} \lim\limits_{y\to+\infty} \frac{\ln(y)}{y} = 2 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \frac{1}{3} \times \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{g(x)}{x} + \frac{1}{3} \times 0 = 2 \Leftrightarrow \frac{1}{3} \times \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{g(x)}{x} = 2 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{g(x)}{x} = 2\times 3 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{g(x)}{x} = 6$

Fez-se a mudança de variável
$y = -x \Leftrightarrow x = -y$
Se $x \to -\infty$, então, $y \to +\infty$ Utilizou-se o limite notável $\lim\limits_{y\to+\infty} \frac{\ln(y)}{y} = 0$

Então, 6 é o declive da assíntota oblíqua ao gráfico da função quando $x \to -\infty$
Assim, a reta de equação $y = 6x$ pode definir uma assintota do gráfico da função g

Resposta: (A)

36. $f(x) = e^{a\sin(x)}$
O declive da reta tangente ao gráfico no ponto de abcissa $\frac{\pi}{6}$ é igual a $f'\left(\frac{\pi}{6}\right)$

Determinemos a função derivada de f

$f'(x) = \left[e^{a\sin(x)}\right]' = (a\sin(x))' \times e^{a\sin(x)} = a\cos(x)e^{a\sin(x)}$
$m = f'\left(\frac{\pi}{6}\right) = a\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)e^{a\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)} = \frac{\sqrt{3}a}{2}e^{\frac{a}{2}}$

Sabe-se que o declive da reta s é igual a $\sqrt{3}a$
Então,

$$\frac{\sqrt{3}a}{2}e^{\frac{a}{2}}=\sqrt{3}a \Leftrightarrow \frac{a}{2}e^{\frac{a}{2}}=a \Leftrightarrow \frac{a}{2}e^{\frac{a}{2}}-a=0 \Leftrightarrow a\left(\frac{e^{\frac{a}{2}}}{2}-1\right)=0 \Leftrightarrow a=0 \vee \frac{e^{\frac{a}{2}}}{2}-1=0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow a=0 \vee e^{\frac{a}{2}}=2 \Leftrightarrow a=0 \vee \frac{a}{2}=\ln(2) \Leftrightarrow a=0 \vee a=2\ln(2) \Leftrightarrow a=0 \vee a=\ln\left(2^2\right) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow a=0 \vee a=\ln(4)$$

Como por hipótese, $a>0$, vem que $a=\ln(4)$

37. $$\lim_{x\to -1}\frac{2x^2+2x}{-f(x)+f(-1)}=\lim_{x\to -1}\frac{2x(x+1)}{-f(x)+f(-1)}=\lim_{x\to -1}(2x)\times\lim_{x\to -1}\frac{x+1}{-(f(x)-f(-1))}=$$
$$=-(-2)\times\lim_{x\to -1}\frac{x+1}{f(x)-f(-1)}=2\times\frac{1}{\lim\limits_{x\to -1}\frac{f(x)-f(-1)}{x-(-1)}}=\frac{2}{f'(-1)}=\frac{2}{1}=2$$

Cálculo auxiliar

$f'(-1)=$ declive da reta tangente ao gráfico no ponto de abcissa -1

Ora, $m_r=\dfrac{e+1-0}{0-(-e-1)}=\dfrac{e+1}{e+1}=1$
Como a reta tangente é paralela à reta r, tem-se que $f'(-1)=m_r=1$

Resposta: (B)

38. $f(1)=\dfrac{1}{e^{-\frac{1}{1}}}=\dfrac{1}{e^{-1}}=e$

$$f'(1)=\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{\frac{x}{e^{-\frac{1}{x}}}-e}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{xe^{\frac{1}{x}}-e}{x-1}=\lim_{y\to 0}\frac{(y+1)e^{\frac{1}{y+1}}-e}{y}=$$
$$=\lim_{y\to 0}\frac{ye^{\frac{1}{y+1}}}{y}+\lim_{y\to 0}\frac{e^{\frac{1}{y+1}}-e}{y}=\lim_{y\to 0}e^{\frac{1}{y+1}}+\lim_{y\to 0}\frac{e\left(e^{\frac{1}{y+1}-1}-1\right)}{y}=e+e\times\lim_{y\to 0}\frac{e^{\frac{1}{y+1}-1}-1}{y}=$$
$$=e+e\times\lim_{\frac{-y}{y+1}\to 0}\frac{e^{\frac{-y}{y+1}}-1}{\frac{-y}{y+1}}\times\lim_{y\to 0}\frac{\frac{-y}{y+1}}{y}=e+e\times 1\times\lim_{y\to 0}\frac{-y}{y(y+1)}=e+e\times 1\times\lim_{y\to 0}\frac{-1}{y+1}=$$
$$=e+e\times 1\times(-1)=0$$

Fez-se a mudança de variável
$y=x-1 \Leftrightarrow x=y+1$
Se $x\to 1$, então, $y\to 0$ Utilizou-se o limite notável $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x}=1$

39. .

39.1. $$(3x-2)^{11}=\sum_{p=0}^{11}\left[{}^{11}C_p\times(3x)^{11-p}\times(-2)^p\right]=$$
$$=\sum_{p=0}^{11}\left[{}^{11}C_p\times 3^{11-p}\times x^{11-p}\times(-1)^p\times(2)^p\right]=$$
$$=\sum_{p=0}^{11}\left[{}^{11}C_p\times(-1)^p\times 3^{11-p}\times 2^p\times x^{11-p}\right]=$$

Procuremos p de modo que $11-p=8$
$11-p=8 \Leftrightarrow p=3$

Então, existe termo da forma ax^8 no desenvolvimento.

Termo:$^{11}C_3 \times (-1)^3 \times 3^{11-3} \times 2^3 \times x^8 = -8660520x^8$

39.2. Procuremos p de modo que $11 - p = 0$
$11 - p = 0 \Leftrightarrow p = 11$

Termo:$^{11}C_{11} \times (-1)^{11} \times 3^{11-11} \times 2^{11} \times x^{11-11} = -2048$

40. A elipse tem equação $\dfrac{x^2}{16} + \dfrac{y^2}{9} = 1$, então, tem-se que

$a^2 = 16$ e $b^2 = 9$, sendo, a a medida do semieixo maior e b a medida do semieixo menor da elipse

Seja, c a medida do semieixo focal
Então, tem-se que
$a^2 = b^2 + c^2$
Donde,
$16 = 9 + c^2 \Leftrightarrow c^2 = 16 - 9 \Leftrightarrow c^2 = 7 \Leftrightarrow c = \pm\sqrt{7}$
como $c > 0$, vem que, $c = \sqrt{7}$

Portanto, a semidistância focal é $\sqrt{7}$

Resposta:(A)

41. Seja $x = \arcsin\left(\dfrac{1}{5}\right)$, ou seja, $\sin(x) = \dfrac{1}{5}$, com $x \in \left[-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right]$

Pretende-se, $\cos\left(\arcsin\left(\dfrac{1}{5}\right)\right) = \cos(x)$

Ora, de $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$, vem,

$$\left(\frac{1}{5}\right)^2 + \cos^2(x) = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{25} + \cos^2(x) = 1 \Leftrightarrow \cos^2(x) = 1 - \frac{1}{25} \Leftrightarrow \cos^2(x) = \frac{24}{25} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \cos(x) = \pm\sqrt{\frac{24}{25}} \Leftrightarrow \cos(x) = \pm\frac{2\sqrt{6}}{5}$$

Como, $x \in \left[-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right]$ e $\sin(x) > 0$, tem-se que $x \in 1^{\text{o}}$ Q, Logo $\cos(x) = \dfrac{2\sqrt{6}}{5}$, portanto, $\cos\left(\arcsin\left(\dfrac{1}{5}\right)\right) = \cos(x) = \dfrac{2\sqrt{6}}{5}$

42. .

42.1. Seja A' a projeção do ponto P sobre o eixo Ox e seja S a projeção do ponto A sobre o eixo Oy

Então,

$$\sin(x) = \frac{\overline{AA'}}{\overline{OA}} \Leftrightarrow \sin(x) = \frac{\overline{AA'}}{2} \Leftrightarrow \overline{AA'} = 2\sin(x)$$
$$\cos(x) = \frac{\overline{OA'}}{\overline{OA}} \Leftrightarrow \cos(x) = \frac{\overline{OA'}}{2} \Leftrightarrow \overline{OA'} = 2\cos(x)$$

Ora,
$\overline{AB} = 2\overline{OA'} = 4\cos(x)$

$\overline{CS} = \overline{OC} + \overline{OS} = 2 + \overline{AA'} = 2 + 2\sin(x)$

Assim, a área do triângulo $[ABC]$, é dada por

$A_{[ABC]} = A(x) = \dfrac{\overline{AB} \times \overline{CS}}{2} = \dfrac{4\cos(x)(2+2\sin(x))}{2} = \dfrac{8\cos(x)+8\sin(x)\cos(x)}{2} =$
$= \dfrac{8\cos(x)}{2} + \dfrac{8\sin(x)\cos(x)}{2} = 4\cos(x) + 4\sin(x)\cos(x) = 4\cos(x) + 2\times 2\sin(x)\cos(x) =$
$= 4\cos(x) + 2\sin(2x)$

42.2. Determinemos a função derivada de A

$A'(x) = (4\cos(x) + 2\sin(2x))' = -4\sin(x) + 2\times 2\cos(2x) = -4\sin(x) + 4\cos(2x)$

Determinemos os zeros de A'

$A'(x) = 0 \Leftrightarrow -4\sin(x) + 4\cos(2x) = 0 \Leftrightarrow -4\sin(x) = -4\cos(2x) \Leftrightarrow \sin(x) = \cos(2x) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \sin(x) = \sin\left(\dfrac{\pi}{2} - 2x\right) \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{2} - 2x + 2k\pi \vee x = \pi - \left(\dfrac{\pi}{2} - 2x\right) + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x + 2x = \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi \vee x - 2x = \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 3x = \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi \vee -x = \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{6} + \dfrac{2}{3}k\pi \vee x = -\dfrac{\pi}{2} - 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$

Atribuindo valores a k, vem,

$k = 0 \twoheadrightarrow x = \dfrac{\pi}{6} \vee x = -\dfrac{\pi}{2}$
$k = 1 \twoheadrightarrow x = \dfrac{\pi}{6} + \dfrac{2}{3}\pi \vee x = -\dfrac{\pi}{2} - 2\pi$
$\therefore x = \dfrac{5\pi}{6} \vee x = -\dfrac{5\pi}{2}$
$k = -1 \twoheadrightarrow x = \dfrac{\pi}{6} - \dfrac{2}{3}\pi \vee x = -\dfrac{\pi}{2} + 2\pi$
$\therefore x = -\dfrac{\pi}{2} \vee x = \dfrac{3\pi}{2}$

Como, $x \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right[$, tem-se que, $x = \dfrac{\pi}{6}$

Elaborando um quadro de sinal de A' e de variação de A, vem,

x	0		$\frac{\pi}{6}$		$\frac{\pi}{2}$
$A(x)$	$+$	$+$	0	$-$	$\setminus\setminus\setminus$
$A'(x)$	4	$\nearrow$	$3\sqrt{3}$	$\searrow$	$\setminus\setminus\setminus$

$A(0) = 4\cos(0) + 2\sin(2\times 0) = 4 + 2\sin(0) = 4 + 0 = 4$

$A\left(\dfrac{\pi}{6}\right) = 4\cos\left(\dfrac{\pi}{6}\right) + 2\sin\left(2\times\dfrac{\pi}{6}\right) = 4\times\dfrac{\sqrt{3}}{2} + 2\sin\left(\dfrac{\pi}{3}\right) = 2\sqrt{3} + 2\times\dfrac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3} + \sqrt{3} = 3\sqrt{3}$

O triângulo tem área máxima igual a $3\sqrt{3}$ $u.a.$, para $x = \dfrac{\pi}{6} rad$

42.3. Sabe-se que $\tan x = \dfrac{4}{3}$

De $1 + \tan^2(x) = \dfrac{1}{\cos^2(x)}$, vem,

$1 + \left(\dfrac{4}{3}\right)^2 = \dfrac{1}{\cos^2(x)} \Leftrightarrow 1 + \dfrac{16}{9} = \dfrac{1}{\cos^2(x)} \Leftrightarrow \dfrac{25}{9} = \dfrac{1}{\cos^2(x)} \Leftrightarrow \cos^2(x) = \dfrac{9}{25} \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \cos(x) = \pm\sqrt{\dfrac{9}{25}} \Leftrightarrow \cos(x) = \pm\dfrac{3}{5}$, como $x \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right[$, vem que $\cos(x) = \dfrac{3}{5}$

De $\tan(x) = \dfrac{\sin(x)}{\cos(x)}$, vem que,

$\dfrac{4}{3} = \dfrac{\sin(x)}{\dfrac{3}{5}} \Leftrightarrow \sin(x) = \dfrac{4}{3} \times \dfrac{3}{5} \Leftrightarrow \sin(x) = \dfrac{4}{5}$

Sabemos que

$A_{[ABC]} = A(x) = 4\cos(x) + 4\sin(x)\cos(x)$

Portanto, a área do triângulo é igual a

$A_{[ABC]} = 4 \times \dfrac{3}{5} + 4 \times \dfrac{4}{5} \times \dfrac{3}{5} = \dfrac{12}{5} + \dfrac{48}{25} = \dfrac{12 \times 5 + 48}{25} = \dfrac{108}{25}$ $u.a.$

43. $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{2g(x) - 2g(2)}{x-2} = 2 \times \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{g(x) - g(2)}{x-2} = 2 \times g'(2) = 2 \times \left(-\dfrac{1}{4}\sqrt{e}\right) = -\dfrac{\sqrt{e}}{2}$

Cálculo auxiliar

$g'(x) = \left(e^{\frac{1}{x}} + k\right)' = \left(e^{\frac{1}{x}}\right)' + k' = \left(\dfrac{1}{x}\right)' \times e^{\frac{1}{x}} + 0 = \dfrac{1' \times x - 1 \times x'}{x^2} \times e^{\frac{1}{x}} = -\dfrac{1}{x^2} \times e^{\frac{1}{x}}$

Então, $g'(2) = -\dfrac{1}{2^2} \times e^{\frac{1}{2}} = -\dfrac{1}{4}\sqrt{e}$

Resposta: (C)

44. .

44.1. Determinemos a função derivada de f

$f'(x) = \left(xe^{1-2x} - 1\right)' = x' \times e^{1-2x} + x \times \left(e^{1-2x}\right)' - 0 = 1 \times e^{1-2x} + x \times (1-2x)' \times e^{1-2x} =$
$= e^{1-2x} - 2xe^{1-2x} = (1-2x)e^{1-2x}$

Determinemos os zeros de f'

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow (1-2x)e^{1-2x} = 0 \Leftrightarrow 1 - 2x = 0 \vee e^{1-2x} = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{2} \vee$ equação impossível
$\Leftrightarrow x = \dfrac{1}{2}$

Quadro de sinal de f' e de variação de f

x	$-\infty$	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
$1-2x$	$+$	0	$-$
e^{1-2x}	$+$	$+$	$+$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\nearrow$	$-\frac{1}{2}$	$\searrow$

$f\left(\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{1}{2} \times e^{1-2\times\frac{1}{2}} - 1 = \dfrac{1}{2} \times e^0 - 1 = \dfrac{1}{2} \times 1 - 1 = \dfrac{1}{2} - 1 = -\dfrac{1}{2}$

A função é estritamente crescente em $\left]-\infty; \dfrac{1}{2}\right[$ e é estritamente decrescente em $\left]\dfrac{1}{2}; +\infty\right[$

Atinge o valor máximo absoluto $-\dfrac{1}{2}$, para $x = \dfrac{1}{2}$

44.2. $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(xe^{1-2x} - 1\right) = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{x}{e^{2x-1}}\right) - 1 = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{x}{e^{2x} \times e^{-1}}\right) - 1 =$
$= \lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{x \times e}{e^{2x}}\right) - 1 = \dfrac{e}{\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^{2x}}{x}} - 1 = \dfrac{e}{2 \times \lim\limits_{2x \to +\infty} \dfrac{e^{2x}}{2x}} - 1 = \dfrac{e}{+\infty} - 1 = 0 - 1 = -1$

Utilizou-se o limite notável $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$

O gráfico da função f tem uma assíntota horizontal de equação $y = -1$, quando $x \to +\infty$, logo, $b = -1$

45. $\lim_{x\to 1}\dfrac{1-x}{f(x)-f(1)}=\dfrac{1}{1-e}\Leftrightarrow -\lim_{x\to 1}\dfrac{x-1}{f(x)-f(1)}=\dfrac{1}{1-e}\Leftrightarrow -\dfrac{1}{\lim_{x\to 1}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}}=\dfrac{1}{1-e}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -\dfrac{1}{f'(1)}=\dfrac{1}{1-e}\Leftrightarrow -\dfrac{1}{e-e^a}=\dfrac{1}{1-e}\Leftrightarrow \dfrac{1}{e-e^a}=\dfrac{1}{e-1}\Leftrightarrow e-e^a=e-1\Leftrightarrow e^a=1\Leftrightarrow a=0$

Cálculo auxiliar

$f'(x)=(e^x-e^ax)'=e^x-e^a$
Assim,
$f'(1)=e^1-e^a=e-e^a$

46. Seja $P(n):u_n=\dfrac{n+1}{2n}$

(i) $P(2)$ é verdadeira(?)

$n=2\twoheadrightarrow u_2=\dfrac{2+1}{2\times 2}$
$\therefore 1-\dfrac{1}{2^2}=\dfrac{3}{4}$
$\therefore \dfrac{3}{4}=\dfrac{3}{4}(verdadeiro)$
Logo, $P(2)$ é verdadeira

(ii) $P(n)$ é hereditária

Hipótese de indução: $P(n)$ é verdadeira, isto é, $u_n=\dfrac{n+1}{2n}$

Tese de indução: $P(n+1)$ é verdadeira(?), isto é, $u_{n+1}=\dfrac{n+1+1}{2(n+1)}$
ou seja, $u_{n+1}=\dfrac{n+2}{2(n+1)}$

Demonstração

$$u_{n+1}=\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\left(1-\frac{1}{4^2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{n^2}\right)\left(1-\frac{1}{(n+1)^2}\right)=\frac{n+1}{2n}\times\left(1-\frac{1}{(n+1)^2}\right)=$$
$$=\frac{n+1}{2n}-\frac{n+1}{2n}\times\frac{1}{(n+1)^2}=\frac{n+1}{2n}-\frac{1}{2n(n+1)}=\frac{(n+1)(n+1)-1}{2n(n+1)}=\frac{n^2+2n+1-1}{2n(n+1)}=$$
$$=\frac{n^2+2n}{2n(n+1)}=\frac{n(n+2)}{2n(n+1)}=\frac{n+2}{2(n+1)}$$

Logo, $P(n)$ é hereditária, ou seja, $P(n)\Rightarrow P(n+1)$

Conclusão: Como $P(2)$ é verdadeira e $P(n)$ é hereditária, ou seja, $P(n)\Rightarrow P(n+1)$, $P(n)$ é verdadeira para todo o número natural(ou seja, é universal)

47. $f(x)=2\sin(2x-\pi)=-2\sin(2x)$
$-1\leq\sin(2x)\leq 1,\forall x\in\mathbb{R}$
$\therefore 2\geq -2\sin(2x)\geq -2,\forall x\in\mathbb{R}$
$\therefore -2\leq f(x)\leq 2,\forall x\in D_f$

Logo, $D'_f=[-2;2]$

2 é o valor máximo da função, então, a ordenada do ponto A é 2
-2 é o valor mínimo da função, então, a ordenada do ponto C é -2

Determinemos os zeros da função

$f(x) = 0 \Leftrightarrow -2\sin(2x) = 0 \Leftrightarrow \sin(2x) = 0 \Leftrightarrow \sin(2x) = \sin(0) \Leftrightarrow 2x = 0 + k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x = \frac{1}{2}k\pi, k \in \mathbb{Z}$

Atribuindo valores a k, vem,

$k = 0 \twoheadrightarrow x = 0$
$k = 1 \twoheadrightarrow x = \frac{\pi}{2}$
$k = 2 \twoheadrightarrow x = \pi$
Então a abcissa do ponto B é π

A área do paralelogramo é igual a $A_{[OABC]} = 2\times A_{[OAB]} = 2\times\frac{\overline{OB}\times|ordenadadeA|}{2} = \pi\times 2 = 2\pi$ $u.a.$

Resposta: B

48. .

48.1. A circunferência tem raio 2, e $\alpha \in \left]\frac{\pi}{2};\pi\right[$
Assim, $\cos(\alpha) < 0 \wedge \sin(\alpha) > 0$

$C(2\cos(\alpha); 2\sin(\alpha))$
$B(0; 2\sin(\alpha))$

Portanto,
$\overline{OA} = 2$
$\overline{OB} = 2\sin(\alpha)$
$\overline{BC} = -2\cos(\alpha)$

Então, a área do pentágono é igual a

$A_{[ABCDE]} = 2\times A_{trapezio} = 2\times\frac{(\overline{OA}+\overline{BC})+\overline{BC}}{2}\times\overline{OB} = 2\times\frac{2-2\cos(\alpha)+(-2\cos(\alpha))}{2}\times$
$2\sin(\alpha) =$
$= [2-2\cos(\alpha)-2\cos(\alpha)]\times 2\sin(\alpha) = [2-4\cos(\alpha)]\times 2\sin(\alpha) =$
$= 4\sin(\alpha) - 8\sin(\alpha)\cos(\alpha) = 4\sin\alpha - 4\sin(2\alpha)$

48.2. Sabe-se que $\tan\alpha = -\frac{\sqrt{5}}{2}$
De $1 + \tan^2(\alpha) = \frac{1}{\cos^2(\alpha)}$, vem,

$1 + \left(-\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2 = \frac{1}{\cos^2(\alpha)} \Leftrightarrow 1 + \frac{5}{4} = \frac{1}{\cos^2(\alpha)} \Leftrightarrow \frac{9}{4} = \frac{1}{\cos^2(\alpha)} \Leftrightarrow \cos^2(\alpha) = \frac{4}{9} \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \cos(\alpha) = \pm\sqrt{\frac{4}{9}} \Leftrightarrow \cos(\alpha) = \pm\frac{2}{3}$, como $\alpha \in \left]\frac{\pi}{2};\pi\right[$, vem que $\cos(\alpha) = -\frac{2}{3}$

De $\tan(\alpha) = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}$, vem que,

$$-\frac{\sqrt{5}}{2}=\frac{\sin(\alpha)}{-\frac{2}{3}} \Leftrightarrow \sin(x)=-\frac{\sqrt{5}}{2}\times\left(-\frac{2}{3}\right) \Leftrightarrow \sin(\alpha)=\frac{\sqrt{5}}{3}$$

Sabemos que

$A_{[ABCDE]}=A(\alpha)=4\sin(\alpha)-4\sin(2\alpha)=4\sin(\alpha)-8\sin(\alpha)\cos(\alpha)$

Portanto, a área do pentágono é igual a

$$A_{[ABCDE]}=4\times\frac{\sqrt{5}}{3}-8\times\frac{\sqrt{5}}{3}\times\left(-\frac{2}{3}\right)=\frac{4\sqrt{5}}{3}+\frac{16\sqrt{5}}{9}=$$
$$=\frac{12\sqrt{5}+16\sqrt{5}}{9}=\frac{28\sqrt{5}}{9}\ u.a.$$

48.3. $A(\alpha)=-8\sin(2\alpha) \Leftrightarrow 4\sin(\alpha)-4\sin(2\alpha)=-8\sin(2\alpha) \Leftrightarrow 4\sin\alpha=-4\sin(2\alpha) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \sin(\alpha)=\sin(-2\alpha) \Leftrightarrow \alpha=-2\alpha+2k\pi \vee \alpha=\pi-(-2\alpha)+2k\pi, k\in\mathbb{Z} \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \alpha+2\alpha=2k\pi \vee \alpha-2\alpha=\pi+2k\pi, k\in\mathbb{Z} \Leftrightarrow 3\alpha=2k\pi \vee -\alpha=\pi+2k\pi, k\in\mathbb{Z} \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \alpha=\frac{2k\pi}{3} \vee \alpha=-\pi-2k\pi, k\in\mathbb{Z}$

Atribuindo valores a k, vem,

$k=0 \twoheadrightarrow \alpha=0 \vee \alpha=-\pi$
$k=1 \twoheadrightarrow \alpha=\frac{2\pi}{3} \vee \alpha=-\pi-2\pi$
$\therefore \alpha=\frac{2\pi}{3} \vee \alpha=-3\pi$
$k=-1 \twoheadrightarrow \alpha=-\frac{2\pi}{3} \vee \alpha=-\pi+2\pi$
$\therefore \alpha=-\frac{2\pi}{3} \vee \alpha=\pi$

Como $\alpha\in\left]\frac{\pi}{2};\pi\right[$, então, $\alpha=\frac{2\pi}{3}$

49. O domínio da função $(g\circ f)(x)$ é igual a
$D_{g\circ f}=\{x\in\mathbb{R}: x\in D_f \wedge f(x)\in D_g\}=\{x\in\mathbb{R}: x\in\mathbb{R}\wedge f(x)\in]-\infty;0[\}=$
$=\{x\in\mathbb{R}: f(x)<0\}=\{x\in\mathbb{R}: x<-2\}=]-\infty;-2[$