

Trigonometria e funções trigonométricas

Exercícios de aplicação - páginas 283 a 313

1.

$$\begin{aligned}\frac{1 - \operatorname{tg}^2 x}{-1 + 2 \cos^2 x} &= \frac{1 - \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}}{-1 + \cos^2 x + \cos^2 x} = \frac{\frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\cos^2 x}}{-\sin^2 x + \cos^2 x} \\ &= \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\cos^2 x(-\sin^2 x + \cos^2 x)} = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \operatorname{tg}^2 x\end{aligned}$$

Como queríamos mostrar.

2.

$$\begin{aligned}\frac{\cos \beta}{\operatorname{tg} \beta} = \frac{9}{20} &\Leftrightarrow \frac{\cos \beta}{\frac{\sin \beta}{\cos \beta}} = \frac{9}{20} \Leftrightarrow \frac{\cos^2 \beta}{\sin \beta} = \frac{9}{20} \Leftrightarrow \frac{1 - \sin^2 \beta}{\sin \beta} = \frac{9}{20} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 1 - \sin^2 \beta = \frac{9}{20} \sin \beta \Leftrightarrow 1 - \sin^2 \beta - \frac{9}{20} \sin \beta = 0\end{aligned}$$

Efetuada a mudança de variável $\sin \beta = x$ e resolvendo a equação, obtém-se

$$1 - x^2 - \frac{9}{20}x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{4}{5} \vee x = -\frac{5}{4}$$

Uma vez que $\sin \beta$ varia entre -1 e 1 , não pode tomar o valor $-\frac{5}{4}$, pelo que a solução é $\frac{4}{5}$.

3. Como $\widehat{BDC} = 60^\circ$, temos que $\widehat{ADC} = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$. Assim, $\widehat{ACD} = 180^\circ - 120^\circ - 20^\circ = 40^\circ$. Pela Lei dos Senos, vem que:

$$\frac{\sin 40^\circ}{3} = \frac{\sin 20^\circ}{\overline{CD}} \Leftrightarrow \overline{CD} = \frac{3 \sin 20^\circ}{\sin 40^\circ}$$

Como $\widehat{DBC} = 90^\circ$ e $\widehat{BDC} = 60^\circ$, temos que $\widehat{BCD} = 180^\circ - 60^\circ - 90^\circ = 30^\circ$. Pela Lei dos Senos, temos que:

$$\frac{\sin 90^\circ}{\overline{CD}} = \frac{\sin 60^\circ}{\overline{BC}} \Leftrightarrow \frac{1}{\frac{3 \sin 20^\circ}{\sin 40^\circ}} = \frac{\sin 60^\circ}{\overline{BC}} \Leftrightarrow \overline{BC} = \frac{3 \sin 20^\circ \sin 60^\circ}{\sin 40^\circ}$$

Assim, $\overline{BC} \approx 1,38241$ cm.

Utilizando novamente a Lei dos Senos, temos que:

$$\frac{\sin 90^\circ}{\overline{CD}} = \frac{\sin 30^\circ}{\overline{BD}} \Leftrightarrow \frac{1}{\frac{3 \sin 20^\circ}{\sin 40^\circ}} = \frac{\sin 30^\circ}{\overline{BD}} \Leftrightarrow \overline{BD} = \frac{3 \sin 20^\circ \sin 30^\circ}{\sin 40^\circ}$$

Assim, $\overline{BC} \approx 0,79813$ cm.

Estamos agora em condições de calcular a área pedida:

$$A = \frac{(3 + 0,79813) \times 1,38241}{2} \approx 2,6$$

A área do triângulo é igual a $2,6 \text{ cm}^2$, aproximadamente.

4. Pela Lei dos Cossenos, temos:

$$\begin{aligned} \overline{AB}^2 &= (2\sqrt{3} - 2)^2 + 2^2 - 2 \times (2\sqrt{3} - 2) \times 2 \times \cos 30^\circ \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \overline{AB}^2 &= (2\sqrt{3} - 2)^2 + 2^2 - 2 \times (2\sqrt{3} - 2) \times 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \overline{AB}^2 &= 8 - 4\sqrt{3} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \overline{AB} &= \sqrt{8 - 4\sqrt{3}}, \text{ pois } \overline{AB} > 0. \end{aligned}$$

5.

$$\begin{aligned} &\cos\left(-x - \frac{\pi}{2}\right) + \cos(-x) - \sin(2020\pi - x) + \cos(2019\pi + x) - \operatorname{tg}(-x + \pi) = \\ &= \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) + \cos(x) - \sin(1010 \times 2\pi - x) + \cos((1009 \times 2 + 1)\pi + x) - \operatorname{tg}(-x) = \\ &= \cos\left(\frac{\pi}{2} - (-x)\right) + \cos(x) - \sin(-x) + \cos(\pi + x) + \operatorname{tg}(x) = \\ &= \sin(-x) + \cos x + \sin x - \cos x + \operatorname{tg} x = \\ &= -\sin x + \sin x + \operatorname{tg} x = \\ &= \operatorname{tg} x \end{aligned}$$

6.

Sabemos que:

$$\cos\left(-\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \frac{2}{3} \Leftrightarrow \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \frac{2}{3} \Leftrightarrow \sin \alpha = \frac{2}{3}$$

Pelo Teorema Fundamental da Trigonometria:

$$\cos^2 \alpha + \left(\frac{2}{3}\right)^2 = 1 \Leftrightarrow \cos^2 \alpha = 1 - \frac{4}{9} \Leftrightarrow \cos^2 \alpha = \frac{5}{9} \Leftrightarrow \cos \alpha =^* -\frac{\sqrt{5}}{3}$$

*uma vez que $\alpha \in \left]-\frac{3\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}\right[$. Então:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\frac{2}{3}}{-\frac{\sqrt{5}}{3}} = -\frac{2}{\sqrt{5}} = -\frac{2\sqrt{5}}{5}$$

Desta forma:

$$\begin{aligned} & \operatorname{sen}(-\alpha - \pi) + \operatorname{tg}(\pi + \alpha) - \operatorname{sen}\left(-\alpha + \frac{3\pi}{2}\right) = \\ &= -\operatorname{sen}(\pi + \alpha) + \operatorname{tg} \alpha - \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} + (\pi - \alpha)\right) = \\ &= -\operatorname{sen} \alpha + \operatorname{tg} \alpha - \cos(\pi - \alpha) = \\ &= -\operatorname{sen} \alpha + \operatorname{tg} \alpha + \cos \alpha = \\ &= \frac{2}{3} - \frac{\sqrt{5}}{3} - \frac{2\sqrt{5}}{5} = \\ &= \frac{10 - 5\sqrt{5} - 6\sqrt{5}}{15} = \\ &= \frac{10 - 11\sqrt{5}}{15} \end{aligned}$$

7.

7.1.

Como $\alpha \in \left]\pi, \frac{3\pi}{2}\right[$, temos que $\cos \alpha < 0$, $\operatorname{sen} \alpha < 0$ e $\operatorname{tg} \alpha > 0$, pelo que $\overline{PQ} = 1 - \cos \alpha$, $\overline{AQ} = -\operatorname{sen} \alpha$ e $\overline{AR} = \operatorname{tg} \alpha$.

A área do triângulo $[PQR]$ é então dada, em função de α , por:

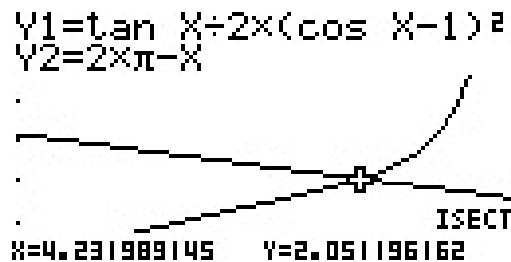
$$\begin{aligned} A(\alpha) &= \frac{(1 - \cos \alpha) \times (-\operatorname{sen} \alpha + \operatorname{tg} \alpha)}{2} = \\ &= \frac{(1 - \cos \alpha) \times \left(-\frac{\operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha} \times \cos \alpha + \operatorname{tg} \alpha\right)}{2} = \\ &= \frac{(1 - \cos \alpha) \times (-\operatorname{tg} \alpha \times \cos \alpha + \operatorname{tg} \alpha)}{2} = \\ &= \frac{(1 - \cos \alpha) \times (-\operatorname{tg} \alpha \times (1 - \cos \alpha))}{2} = \\ &= \frac{\operatorname{tg} \alpha}{2} \times (1 - \cos \alpha)^2 = \\ &= \frac{\operatorname{tg} \alpha}{2} \times (\cos \alpha - 1)^2 \end{aligned}$$

Como queríamos mostrar.

7.2.

O arco AP mede $2\pi - \alpha$. Pretendemos então resolver a equação:

$$A(\alpha) = 2\pi - \alpha$$



Desta forma, $\alpha \approx 4,23$.

8.

8.1.

$$\begin{aligned} \cos \theta (2 \cos \theta + 1) = 0 &\Leftrightarrow \cos \theta = 0 \vee 2 \cos \theta + 1 = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \cos \theta = 0 \vee \cos \theta = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \theta = \frac{\pi}{2} + k\pi \vee \theta = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \vee \theta = \frac{4\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

8.2.

$$\begin{aligned}\cos^2 \theta - \cos \theta = 0 &\Leftrightarrow \cos \theta (\cos \theta - 1) = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \cos \theta = 0 \vee \cos \theta - 1 = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \cos \theta = 0 \vee \cos \theta = 1 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \theta = \frac{\pi}{2} + k\pi \vee \theta = 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\end{aligned}$$

8.3.

$$\begin{aligned}3 \operatorname{tg}^2 \theta = 1 &\Leftrightarrow \operatorname{tg}^2 \theta = \frac{1}{3} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \operatorname{tg} \theta = \pm \frac{\sqrt{3}}{3} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \theta = -\frac{\pi}{6} + k\pi \vee \theta = \frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\end{aligned}$$

8.4.

$$\begin{aligned}
 & \sin^2 \theta + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \theta = \frac{1}{2} \sin \theta + \frac{\sqrt{3}}{4} \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow & \sin^2 \theta + \frac{\sqrt{3}-1}{2} \sin \theta - \frac{\sqrt{3}}{4} = 0 \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow & 4 \sin^2 \theta + (2\sqrt{3}-2) \sin \theta - \sqrt{3} = 0 \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow & \sin \theta = \frac{-2\sqrt{3}+2 \pm \sqrt{(2\sqrt{3}-2)^2 - 4 \times 4 \times (-\sqrt{3})}}{2 \times 4} \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow & \sin \theta = \frac{-2\sqrt{3}+2 \pm \sqrt{12+4-8\sqrt{3}+16\sqrt{3}}}{8} \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow & \sin \theta = \frac{-2\sqrt{3}+2 \pm \sqrt{16+8\sqrt{3}}}{8} \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow^* & \sin \theta = \frac{-2\sqrt{3}+2 \pm (2+2\sqrt{3})}{8} \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow & \sin \theta = \frac{4}{8} \vee \sin \theta = \frac{-4\sqrt{3}}{8} \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow & \sin \theta = \frac{1}{2} \vee \sin \theta = -\frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow & \theta = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \vee \theta = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \vee \theta = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi \vee \theta = -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}
 \end{aligned}$$

*De acordo com os seguintes cálculos auxiliares:

$$\begin{aligned}
 & (a+b\sqrt{c})^2 = 16+8\sqrt{3} \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow & a^2+2ab\sqrt{c}+cb^2 = 16+8\sqrt{3}
 \end{aligned}$$

$$\begin{cases} a^2+cb^2=16 \\ 2ab=8 \\ c=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-2 \\ b=-2 \\ c=3 \end{cases} \vee \begin{cases} a=2 \\ b=2 \\ c=3 \end{cases}$$

Uma vez que $\sqrt{16+8\sqrt{3}} > 0$, temos que $\sqrt{16+8\sqrt{3}} = 2+2\sqrt{3}$.

9.

9.1.

$$\begin{aligned}\sin^2 \theta - \cos^2 \theta = 0 &\Leftrightarrow \sin^2 \theta - (1 - \sin^2 \theta) = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 2 \sin^2 \theta = 1 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \sin^2 \theta = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \sin \theta = \pm \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \sin \theta = \sin \left(\frac{\pi}{4} \right) \vee \sin \theta = \sin \left(-\frac{\pi}{4} \right) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow^* \theta = -\frac{\pi}{4} \vee \theta = \frac{\pi}{4} \vee \theta = \frac{3\pi}{4} \vee \theta = \frac{5\pi}{4} \vee \theta = \frac{7\pi}{4}\end{aligned}$$

* No domínio considerado.

9.2.

$$\begin{aligned}-\sqrt{3} - 2 \cos \theta = 0 &\Leftrightarrow \cos \theta = -\frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \cos \theta = \cos \left(\frac{5\pi}{6} \right) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow^* \theta = -\frac{5\pi}{6} \vee \theta = \frac{5\pi}{6} \vee \theta = \frac{7\pi}{6} \vee \theta = \frac{11\pi}{6}\end{aligned}$$

* No domínio considerado.

9.3.

$$\begin{aligned}8 \sin^2 \theta = 6 &\Leftrightarrow \sin^2 \theta = \frac{3}{4} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \sin \theta = -\frac{\sqrt{3}}{2} \vee \sin \theta = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \sin \theta = \sin \left(-\frac{\pi}{3} \right) \vee \sin \theta = \sin \left(\frac{\pi}{3} \right) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow^* \theta = -\frac{2\pi}{3} \vee \theta = -\frac{\pi}{3} \vee \theta = \frac{\pi}{3} \vee \theta = \frac{2\pi}{3}\end{aligned}$$

* No domínio considerado.

9.4.

$$\begin{aligned}
 2 \cos^2 \theta - 3 \cos \theta + 1 = 0 &\Leftrightarrow \cos \theta = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 4 \times 2 \times 1}}{2 \times 2} \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow \cos \theta = \frac{3 \pm 1}{4} \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow \cos \theta = 1 \vee \cos \theta = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow \cos \theta = \cos(0) \vee \cos \theta = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow^* \theta = \frac{5\pi}{3} \vee \theta = 2\pi \vee \theta = \frac{7\pi}{3}
 \end{aligned}$$

* No domínio considerado.

10.

10.1.

$$2 \operatorname{sen} x < \sqrt{2} \Leftrightarrow \operatorname{sen} x < \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Sabendo que $\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ e que $\operatorname{sen}\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$, e atendendo também à variação do seno, podemos concluir que o conjunto-solução da inequação é $\left]0, \frac{\pi}{4}\right[\cup \left[\frac{3\pi}{4}, 2\pi\right]$.

10.2.

$$|2 \cos x| < 1 \Leftrightarrow |\cos x| < \frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos x < \frac{1}{2} \wedge \cos x > -\frac{1}{2}$$

Sabendo que $\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$ e que $\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}$, e atendendo também à variação do cosseno, podemos concluir que o conjunto-solução da inequação é $\left]-\frac{2\pi}{3}, -\frac{\pi}{3}\right[\cup \left[\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right]$.

10.3.

$$\operatorname{sen} x = 0 \Leftrightarrow^* x = \pi \quad \cos x = 0 \Leftrightarrow^* x = \frac{\pi}{2} \vee x = \frac{3\pi}{2}$$

* No domínio considerado.

Tabela de sinais da expressão $\operatorname{sen} x \cos x$:

| x | 0 | | $\frac{\pi}{2}$ | | π | | $\frac{3\pi}{2}$ | | 2π |
|-------------------------------|------|---|-----------------|---|-------|---|------------------|---|--------|
| $\operatorname{sen} x$ | n.d. | + | + | + | 0 | − | − | − | n.d. |
| $\cos x$ | n.d. | + | 0 | − | − | − | 0 | + | n.d. |
| $\operatorname{sen} x \cos x$ | n.d. | + | 0 | − | 0 | + | 0 | − | n.d. |

Podemos então concluir que o conjunto-solução da inequação é:

$$\left] 0, \frac{\pi}{2} \right] \cup \left[\pi, \frac{3\pi}{2} \right]$$

10.4.

$$\cos x + \frac{1}{2} = 0 \Leftrightarrow \cos x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow^* x = -\frac{4\pi}{3} \vee x = -\frac{2\pi}{3} \vee x = \frac{2\pi}{3}$$

$$\operatorname{sen} x - \frac{1}{2} = 0 \Leftrightarrow \operatorname{sen} x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow^* x = -\frac{11\pi}{6} \vee x = -\frac{7\pi}{6} \vee x = \frac{\pi}{6} \vee x = \frac{5\pi}{6}$$

* No domínio considerado.

Tabela de sinais da expressão $\frac{\cos x + \frac{1}{2}}{\operatorname{sen} x - \frac{1}{2}}$:

| x | -2π | | $-\frac{11\pi}{6}$ | | $-\frac{4\pi}{3}$ | | $-\frac{7\pi}{6}$ | | $-\frac{2\pi}{3}$ | | $\frac{\pi}{6}$ | | $\frac{2\pi}{3}$ | | $\frac{5\pi}{6}$ | | π |
|---|---------|---|--------------------|---|-------------------|---|-------------------|---|-------------------|---|-----------------|---|------------------|---|------------------|---|-------|
| $\cos x + \frac{1}{2}$ | n.d. | + | + | + | 0 | − | − | − | 0 | + | + | + | 0 | − | − | − | − |
| $\operatorname{sen} x - \frac{1}{2}$ | n.d. | − | 0 | + | + | + | 0 | − | − | − | 0 | + | + | + | 0 | − | − |
| $\frac{\cos x + \frac{1}{2}}{\operatorname{sen} x - \frac{1}{2}}$ | n.d. | − | n.d. | + | 0 | − | n.d. | + | 0 | − | n.d. | + | 0 | − | n.d. | + | + |

Podemos então concluir que o conjunto-solução da inequação é:

$$\left] -2\pi, -\frac{11\pi}{6} \right[\cup \left[-\frac{4\pi}{3}, -\frac{7\pi}{6} \right[\cup \left[-\frac{2\pi}{3}, \frac{\pi}{6} \right[\cup \left[\frac{2\pi}{3}, \frac{5\pi}{6} \right[$$

11.

$$\begin{aligned}
 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{12}\right) + \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{8}\right) \cos\left(\frac{\pi}{8}\right) &= \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) + \frac{1}{2} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right) = \\
 &= \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3}\right) \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) - \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right) + \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \\
 &= \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{4} = \\
 &= \frac{\sqrt{6}}{4}
 \end{aligned}$$

12.

12.1.

$$\begin{aligned}
 \operatorname{sen} x \cos x = \frac{1}{4} &\Leftrightarrow 2 \operatorname{sen} x \cos x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \operatorname{sen}(2x) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow 2x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \vee 2x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{12} + k\pi \vee x = \frac{5\pi}{12} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}
 \end{aligned}$$

12.2.

$$\begin{aligned}
 \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x = -\frac{1}{2} &\Leftrightarrow \cos(2x) = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow 2x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \vee 2x = -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3} + k\pi \vee x = -\frac{\pi}{3} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}
 \end{aligned}$$

12.3.

$$\begin{aligned}
 \operatorname{sen} x - \sqrt{3} \cos x = \sqrt{3} &\Leftrightarrow \frac{1}{2} \operatorname{sen} x - \frac{\sqrt{3}}{2} \cos x = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) \operatorname{sen} x - \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3}\right) \cos x = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow \operatorname{sen}\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3}\right) \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow x - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \vee x - \frac{\pi}{3} = \pi - \frac{\pi}{3} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \vee x = \pi + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}
 \end{aligned}$$

12.4.

$$\begin{aligned}
 \cos x - \operatorname{sen} x = \frac{\sqrt{6}}{2} &\Leftrightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} \cos x - \frac{\sqrt{2}}{2} \operatorname{sen} x = \frac{\sqrt{12}}{4} \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow \operatorname{sen} \left(\frac{\pi}{4} \right) \cos x - \cos \left(\frac{\pi}{4} \right) \operatorname{sen} x = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow \operatorname{sen} \left(\frac{\pi}{4} - x \right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow \operatorname{sen} \left(\frac{\pi}{4} - x \right) = \operatorname{sen} \left(\frac{\pi}{3} \right) \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow \frac{\pi}{4} - x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \vee \frac{\pi}{4} - x = \pi - \frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{12} + 2k\pi \vee x = -\frac{5\pi}{12} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}
 \end{aligned}$$

13.

13.1.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} x}{4x} \stackrel{\left(\frac{0}{0} \right)}{=} \frac{1}{4} \times \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = \frac{1}{4} \times 1 = \frac{1}{4}$$

13.2.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen}(\pi x)}{x} \stackrel{\left(\frac{0}{0} \right)}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen}(\pi x)}{\pi x} \times \pi \stackrel{*}{=} \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} y}{y} \times \pi = 1 \times \pi = \pi$$

* Considerando a mudança de variável $\pi x = y$: se $x \rightarrow 0$, então $y \rightarrow 0$.

13.3.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2 x}{x^2} \stackrel{\left(\frac{0}{0} \right)}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen}^2 x}{x^2} = \left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} \right)^2 = 1^2 = 1$$

13.4.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen}(-x)}{x} \stackrel{\left(\frac{0}{0} \right)}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \left(-\frac{\operatorname{sen}(-x)}{-x} \right) \stackrel{*}{=} - \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} y}{y} = -1$$

* Considerando a mudança de variável $-x = y$: se $x \rightarrow 0$, então $y \rightarrow 0$.

13.5.

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right)}{\frac{\pi}{3} - x} \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x - \frac{\pi}{3} \rightarrow 0} \left(-\frac{\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right)}{x - \frac{\pi}{3}} \right) =^* -\lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin y}{y} = -1$$

* Considerando a mudança de variável $x - \frac{\pi}{3} = y$: se $x - \frac{\pi}{3} \rightarrow 0$, então $y \rightarrow 0$.

13.6.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(x \sin\left(\frac{1}{x}\right) \right) \stackrel{(0 \times \infty)}{=} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}} =^* \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin y}{y} = 1$$

* Considerando a mudança de variável $\frac{1}{x} = y$: se $x \rightarrow -\infty$, então $y \rightarrow 0$.

13.7.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sin(x)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\sin(x) \times \frac{1}{x^2} \right) = 0, \quad \text{pois:}$$

A função seno é limitada ($-1 \leq \sin x \leq 1, \forall x \in \mathbb{R}$) e $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^2} = 0$.

14.

14.1.

$$f'(x) = (2 \sin x - 3 \cos x)' = 2 \cos x - 3 \times (-\sin x) = 2 \cos x + 3 \sin x$$

14.2.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(\sin(\pi x) - \frac{1}{2} \cos(4x) \right)' = \cos(\pi x) \times \pi - \frac{1}{2} \times (-\sin(4x)) \times 4 = \\ &= \pi \cos(\pi x) + 2 \sin(4x) \end{aligned}$$

14.3.

$$\begin{aligned} f'(x) &= (\sin^2 x - \cos^2 x)' = 2 \sin x \times (\sin x)' - 2 \cos x \times (\cos x)' = \\ &= 2 \sin x \cos x - 2 \cos x \times (-\sin x) = 2 \sin x \cos x + 2 \cos x \sin x = \\ &= 4 \sin x \cos x = 2 \sin(2x) \end{aligned}$$

14.4.

$$\begin{aligned} f'(x) = (x^2 \operatorname{sen}(5x) - \operatorname{tg} x)' &= (x^2)' \times \operatorname{sen}(5x) + x^2 \times (\operatorname{sen}(5x))' - (\operatorname{tg} x)' = \\ &= 2x \times \operatorname{sen}(5x) + x^2 \times 5 \cos(5x) - \frac{1}{\cos^2 x} = \\ &= 2x \operatorname{sen}(5x) + 5x^2 \cos(5x) - \frac{1}{\cos^2 x} \end{aligned}$$

14.5.

$$\begin{aligned} f'(x) &= ((\cos x - \operatorname{sen} x)^3)' = 3(\cos x - \operatorname{sen} x)^2(\cos x - \operatorname{sen} x)' = \\ &= 3(\cos x - \operatorname{sen} x)^2(-\operatorname{sen} x - \cos x) = \\ &= -3(\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x - 2 \operatorname{sen} x \cos x)(\operatorname{sen} x + \cos x) = \\ &= -3(1 - \operatorname{sen}(2x))(\operatorname{sen} x + \cos x) \end{aligned}$$

15.

15.1.

Determinar $N'(t)$:

$$\begin{aligned} N'(t) &= \left(-\frac{12}{\pi} \operatorname{sen} \left(\frac{\pi}{12}t + \frac{\pi}{2} \right) + t \cos \left(\frac{\pi}{12}t + \frac{\pi}{2} \right) + 10 \right)' = \\ &= -\frac{12}{\pi} \cos \left(\frac{\pi}{12}t + \frac{\pi}{2} \right) \times \frac{\pi}{12} + \cos \left(\frac{\pi}{12}t + \frac{\pi}{2} \right) - t \operatorname{sen} \left(\frac{\pi}{12}t + \frac{\pi}{2} \right) \times \frac{\pi}{12} = \\ &= -\cos \left(\frac{\pi}{12}t + \frac{\pi}{2} \right) + \cos \left(\frac{\pi}{12}t + \frac{\pi}{2} \right) - \frac{\pi t}{12} \operatorname{sen} \left(\frac{\pi}{12}t + \frac{\pi}{2} \right) = \\ &= -\frac{\pi t}{12} \operatorname{sen} \left(\frac{\pi}{12}t + \frac{\pi}{2} \right) \end{aligned}$$

Determinar os zeros de N' :

$$\begin{aligned} -\frac{\pi t}{12} \operatorname{sen} \left(\frac{\pi}{12}t + \frac{\pi}{2} \right) = 0 &\Leftrightarrow -\frac{\pi t}{12} = 0 \vee \operatorname{sen} \left(\frac{\pi}{12}t + \frac{\pi}{2} \right) = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow t = 0 \vee \frac{\pi}{12}t + \frac{\pi}{2} = k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow t = 0 \vee \frac{\pi}{12}t = -\frac{\pi}{2} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow t = 0 \vee t = -6 + 12k, \quad k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow^* t = 0 \vee t = 6 \vee t = 18 \end{aligned}$$

* No domínio considerado.

Estudar o sinal de N' e a variação de N :

| | | | | | | | |
|---------|-----------------------|------------|-----------|------------|------------|------------|-----------------------|
| t | 0 | | 6 | | 18 | | 24 |
| $N'(t)$ | 0 | − | 0 | + | 0 | − | − |
| $N(t)$ | $10 - \frac{12}{\pi}$ | \searrow | 4 mín. | \nearrow | 28 Máx. | \searrow | $10 - \frac{12}{\pi}$ |

Temos, então, que $M = 28$ e $m = 4$, pelo que $A = 24$ dm.

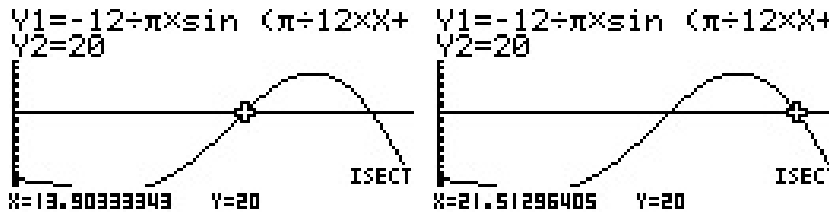
15.2.

$$\text{t.v.m.}_{[3,6]} = \frac{N(6) - N(3)}{6 - 3} = \frac{4 - \left(10 - \frac{3}{\sqrt{2}} - \frac{6\sqrt{2}}{\pi}\right)}{3} \approx -0,4$$

Entre as 3 e as 6 horas, o nível N de água no depósito do sistema de arrefecimento diminui, em média, 0,4 dm por hora, aproximadamente.

15.3.

Na figura abaixo encontra-se a representação gráfica de N e a reta de equação $y = 20$.



Observa-se que $a \approx 13,903$ e $b \approx 21,513$. Vem que $b - a \approx 7,61$. O nível N de água no depósito do sistema de arrefecimento da máquina é superior a 20 dm durante 7,61 horas, aproximadamente.

16.

16.1. O declive da reta é dado por $g'(\frac{\pi}{2})$.

$$g'(x) = \left(\frac{x}{2} + (1 - \cos x)^2\right)' = \frac{1}{2} + 2(1 - \cos x) \sin x$$

$$g' \left(\frac{\pi}{2} \right) = \frac{1}{2} + 2 \left(1 - \cos \left(\frac{\pi}{2} \right) \right) \operatorname{sen} \left(\frac{\pi}{2} \right) = \frac{1}{2} + 2 = \frac{5}{2}$$

Assim, a equação reduzida da reta é da forma $y = \frac{5}{2}x + b$.

$$g \left(\frac{\pi}{2} \right) = \frac{\pi}{2} + \left(1 - \cos \left(\frac{\pi}{2} \right) \right)^2 = \frac{\pi}{4} + 1$$

Como o ponto de coordenadas $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4} + 1 \right)$ pertence à reta, vem que:

$$\frac{\pi}{4} + 1 = \frac{5}{2} \times \frac{\pi}{2} + b \Leftrightarrow b = 1 - \pi$$

Concluimos, assim, que $y = \frac{5}{2}x + 1 - \pi$ é uma equação da reta tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa $\frac{\pi}{2}$.

16.2. Determinar $g''(x)$:

$$\begin{aligned} g''(x) &= \left(\frac{1}{2} + 2(1 - \cos x) \operatorname{sen} x \right)' = 2(1 - \cos x)' \operatorname{sen} x + 2(1 - \cos x)(\operatorname{sen} x)' \\ &= 2 \operatorname{sen} x \operatorname{sen} x + 2(1 - \cos x) \cos x = 2(\operatorname{sen}^2 x - \cos^2 x) + 2 \cos x = \\ &= -2 \cos(2x) + 2 \cos x \end{aligned}$$

Determinar os zeros de g'' :

$$\begin{aligned} g''(x) = 0 &\Leftrightarrow -2 \cos(2x) + 2 \cos x = 0 \Leftrightarrow 2 \cos(2x) = 2 \cos x \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \cos(2x) = \cos x \Leftrightarrow 2x = x + 2k\pi \vee 2x = -x + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x = 2k\pi \vee 3x = 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x = 2k\pi \vee x = \frac{2}{3}k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Estudar o sinal de g'' e o sentido das concavidades do gráfico de g :

| x | $-\frac{\pi}{2}$ | | 0 | | $\frac{2\pi}{3}$ | | π |
|--|------------------|--------|---|--------|---------------------------------------|--------|-------|
| Sinal de g'' | n.d. | + | 0 | + | 0 | - | n.d. |
| Sentido das concavidades do gráfico de g | n.d. | \cup | 0 | \cup | $\frac{9}{4} + \frac{\pi}{3}$ P.I. | \cap | n.d. |

O gráfico de g tem a concavidade voltada para cima em $]-\frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}]$.

O gráfico de g tem a concavidade voltada para baixo em $[\frac{2\pi}{3}, \pi[$.

O ponto de coordenadas $(\frac{2\pi}{3}, \frac{9}{4} + \frac{\pi}{3})$ é ponto de inflexão.

17.

Domínio:

$$D_f = \mathbb{R}$$

Paridade:

$$f(-x) = \sin(-x) + \cos(-x) = -\sin x + \cos x$$

Assim, como $f(-x) \neq f(x)$ e $f(-x) \neq -f(x)$, conclui-se que f não é par nem é ímpar.

Uma vez que 2π é o período positivo mínimo da função seno e da função cosseno, temos que:

$$f(x + 2\pi) = \sin(x + 2\pi) + \cos(x + 2\pi) = \sin x + \cos x = f(x)$$

Desta forma, 2π é período da função f .

Interseção com os eixos coordenados:

Zeros de f :

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow \sin x + \cos x = 0 \Leftrightarrow \sin x = -\cos x \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{4} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

A função f intersesta o eixo Ox nos pontos de coordenadas

$$\left(-\frac{\pi}{4} + k\pi, 0\right), \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$f(0) = \sin(0) + \cos(0) = 1$$

A função f intersesta o eixo Oy no ponto de coordenadas $(0, 1)$.

A função f é contínua em \mathbb{R} , pois é a soma de duas funções contínuas, pelo que o seu gráfico não admite assíntotas verticais. Além disso, como é uma função periódica, o seu gráfico também não admite assíntotas não verticais.

Intervalos de monotonia e extremos locais e absolutos:

$$f'(x) = (\sin x + \cos x)' = \cos x - \sin x$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \cos x - \sin x = 0 \Leftrightarrow \cos x = \sin x \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Uma vez que se trata de uma função de período 2π , basta estudar a sua variação no intervalo $[0, 2\pi]$.

| x | 0 | | $\frac{\pi}{4}$ | | $\frac{5\pi}{4}$ | | 2π |
|-----------------|---|------------|--------------------|------------|---------------------|------------|--------|
| Sinal de f' | 1 | + | 0 | - | 0 | + | 1 |
| Variação de f | 1 | \nearrow | $\sqrt{2}$ Máx. | \searrow | $-\sqrt{2}$ mín. | \nearrow | 1 |

Desta forma, f é decrescente em $\left[\frac{\pi}{4} + 2k\pi, \frac{5\pi}{4} + 2k\pi\right]$, com $k \in \mathbb{Z}$ e crescente em $\left[\frac{5\pi}{4} + 2k\pi, \frac{9\pi}{4} + 2k\pi\right]$, com $k \in \mathbb{Z}$. $\sqrt{2}$ é máximo de f em $x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$ e $-\sqrt{2}$ é mínimo de f em $x = \frac{5\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Sentido das concavidades e pontos de inflexão do gráfico de f :

$$f''(x) = (\cos x - \sin x)' = -\sin x - \cos x$$

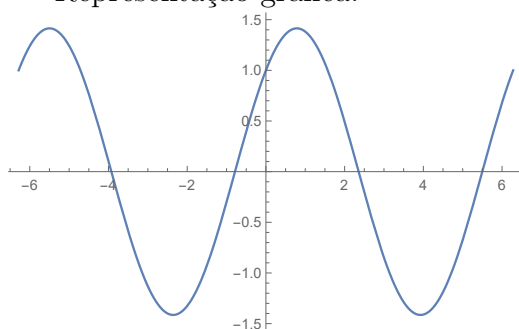
$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow -\sin x - \cos x = 0 \Leftrightarrow \sin x = -\cos x \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Uma vez que se trata de uma função de período 2π , basta estudar o sentido da concavidade do seu gráfico no intervalo $[0, 2\pi]$.

| | | | | | | | |
|-----------------|----|--------|------------------|--------|------------------|--------|--------|
| x | 0 | | $\frac{3\pi}{4}$ | | $\frac{7\pi}{4}$ | | 2π |
| Sinal de f'' | -1 | - | 0 | + | 0 | - | -1 |
| Variação de f | 1 | \cap | 0 P.I. | \cup | 0 P.I. | \cap | 1 |

Assim, o gráfico de f tem a concavidade voltada para baixo em $\left[-\frac{\pi}{4} + 2k\pi, \frac{3\pi}{4} + 2k\pi\right]$, com $k \in \mathbb{Z}$ e tem a concavidade voltada para cima em $\left[\frac{3\pi}{4} + 2k\pi, \frac{7\pi}{4} + 2k\pi\right]$, com $k \in \mathbb{Z}$. Os pontos de coordenadas $\left(-\frac{\pi}{4} + 2k\pi, 0\right)$, com $k \in \mathbb{Z}$ são pontos de inflexão do gráfico de f .

Representação gráfica:



18.

18.1.

$$-1 \leq \sin(3x+\pi) \leq 1 \Leftrightarrow -2 \leq 2 \sin(3x+\pi) \leq 2 \Leftrightarrow -2-\sqrt{2} \leq \sin(3x+\pi)-\sqrt{2} \leq 2-\sqrt{2}$$

Assim, $D_f = \mathbb{R}$ e $D'_f = [-2 - \sqrt{2}, 2 - \sqrt{2}]$.

18.2.

$$\begin{aligned}
 f\left(\frac{-5\pi}{36}\right) - f\left(\frac{-\pi}{4}\right) &= 2 \operatorname{sen}\left(3 \times \frac{-5\pi}{36} + \pi\right) - \sqrt{2} - \left(2 \operatorname{sen}\left(3 \times \frac{-\pi}{4} + \pi\right) - \sqrt{2}\right) = \\
 &= 2 \operatorname{sen}\left(\frac{7\pi}{12}\right) - 2 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right) = \\
 &= 2 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3}\right) - 2 \times \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \\
 &= 2 \times \left(\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right) \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3}\right)\right) - \sqrt{2} = \\
 &= 2 \times \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2}\right) - \sqrt{2} = \\
 &= \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{6}}{2} - \sqrt{2} = \\
 &= \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{2}
 \end{aligned}$$

18.3.

$$\begin{aligned}
 f\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) &= 2 \operatorname{sen}\left(3 \times \left(x + \frac{2\pi}{3}\right) + \pi\right) - \sqrt{2} = 2 \operatorname{sen}(3x + \pi + 2\pi) - \sqrt{2} = \\
 &= 2 \operatorname{sen}(3x + \pi) - \sqrt{2} = f(x)
 \end{aligned}$$

Assim, $\frac{2\pi}{3}$ é período de f .

18.4.

O gráfico da função f obtém-se do gráfico da função seno através de uma contração horizontal de coeficiente $\frac{1}{3}$, seguida de uma translação associada ao vetor $\left(-\frac{\pi}{3}, 0\right)$, seguida de uma dilatação vertical de coeficiente 2, seguida de uma translação associada ao vetor $(0, -\sqrt{2})$.

Exercícios propostos

Itens de seleção - páginas 314 a 316

1.

O período positivo mínimo da função cosseno é 2π , pelo que o período positivo mínimo da função f é $\frac{2\pi}{3}$.

Opção (B).

2.

$$-1 \leq \cos(\pi t) \leq 1 \Leftrightarrow 4 \leq \cos(\pi t) + 5 \leq 6$$

Opção (A).

3.

$$-1 \leq \sin\left(\frac{\pi}{5} - x\right) \leq 1 \Leftrightarrow 0 \leq \left| \sin\left(\frac{\pi}{5} - x\right) \right| \leq 1 \Leftrightarrow 1 \leq 1 + \left| \sin\left(\frac{\pi}{5} - x\right) \right| \leq 2$$

Opção (B).

4.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2\left(\frac{x}{3}\right)}{x^2} \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2\left(\frac{x}{3}\right)}{\left(\frac{x}{3}\right)^2} \times \frac{1}{9} \stackrel{*}{=} \frac{1}{9} \left(\lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin y}{y} \right)^2 = \frac{1}{9} \times 1^2 = \frac{1}{9}$$

* Considerando a mudança de variável $\frac{x}{3} = y$: se $x \rightarrow 0$, então $y \rightarrow 0$.

Opção (D).

5.

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sin(3x)}{x} \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sin(3x)}{3x} \times 3 \stackrel{*}{=} \lim_{y \rightarrow 0^-} \frac{\sin(y)}{y} \times 3 = 3$$

* Considerando a mudança de variável $3x = y$: se $x \rightarrow 0^-$, então $y \rightarrow 0^-$.

Para que a função seja contínua, é necessário que $f(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$. Assim:

$$\cos 0 + \ln(k) = 3 \Leftrightarrow \ln(k) = 2 \Leftrightarrow k = e^2$$

Opção (C).

6.

Temos que $D_f = \{x \in \mathbb{R} : \sin x \geq 0\}$. Sabendo que

$$\sin x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

e, atendendo à variação da função seno, temos que:

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} : 2k\pi \leq x \leq \pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$$

Opção (D).

7.

Uma vez que o período positivo mínimo da função cosseno é 2π , a função f definida por $f(x) = \cos(2x)$ tem período π .

Opção (C).

8. Temos que:

$$\frac{\operatorname{tg} 150}{\operatorname{tg} \alpha} = -\frac{2}{3} \Leftrightarrow \frac{-\frac{\sqrt{3}}{3}}{\operatorname{tg} \alpha} = -\frac{2}{3} \Leftrightarrow \operatorname{tg} \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Por outro lado:

$$1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \Leftrightarrow 1 + \frac{3}{4} = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \Leftrightarrow \cos^2 \alpha = \frac{4}{7}$$

Pelo Teorema Fundamental da Trigonometria,

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \Leftrightarrow \sin^2 \alpha + \frac{4}{7} = 1 \Leftrightarrow \sin^2 \alpha = \frac{3}{7}$$

Opção (B).

9.

Sabemos que as retas de equação $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ são assíntotas ao gráfico da função tangente, sendo, por isso, também assíntotas ao gráfico da função f definida por $f(x) = \operatorname{tg} x - 2x$.

Opção (C).

10.

Seja f a função definida por $f(x) = \cos x$. Temos que $f'(x) = -\operatorname{sen} x$.

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} + h\right) - \cos\left(\frac{\pi}{2}\right)}{h} = f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1$$

Opção (B).

11.

Para que a função f seja contínua, é necessário que $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} f(x)$.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \frac{2k \cos x}{\frac{\pi}{2} - x} \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \frac{2k \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}{\frac{\pi}{2} - x} = \\ &=^* 2k \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{\operatorname{sen} y}{y} = 2k \end{aligned}$$

* Considerando a mudança de variável $\frac{\pi}{2} - x = y$: se $x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-$, então $y \rightarrow 0^+$.

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} (k^2 + \operatorname{sen}(5x)) = k^2 + 1$$

Assim, para que a função seja contínua, $2k = k^2 + 1 \Leftrightarrow k = 1$.

Opção (C).

12. Temos que:

$$\operatorname{sen} x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(x + \frac{3\pi}{2}\right)$$

Pelo que, esta expressão define um oscilador harmónico de pulsação 1. Desta forma, é solução da equação diferencial $f''(x) = -f(x)$, ou seja, da equação $f(x) + f''(x) = 0$.

Opção (D).

13. O declive da reta t é dado por $g'(\pi)$.

Como $g'(x) = (\cos^2 x - \sin x)' = -2 \cos x \sin x - \cos x$, vem que $g'(\pi) = 1$.

Assim, a equação reduzida da reta é $y = x + b$.

$$g(\pi) = \cos^2(\pi) - \sin(\pi) = 1$$

Como o ponto de coordenadas $(\pi, 1)$ pertence à reta, vem que:

$$1 = 1 \times \pi + b \Leftrightarrow b = 1 - \pi$$

Concluimos assim que $y = x + 1 - \pi$ é uma equação da reta t . Desta forma, os pontos de interseção da reta t com os eixos coordenados têm coordenadas $(0, \pi)$ e $(\pi - 1, 0)$.

Tendo em conta que $1 - \pi < 0$, a área do triângulo definido pela reta t e pelos eixos coordenados é igual a

$$\frac{(\pi - 1)(\pi - 1)}{2} = \frac{(\pi - 1)^2}{2}$$

Opção (B).

14.

O período deste oscilador não pode ser 4, pelo que a opção (C) é falsa.

Sabemos que $f(0) = 0$, pelo que a opção (B) é falsa.

Sabemos que $f(1) < 0$, pelo que a opção (D) é falsa.

Opção (A).

15.

O termo independente de x , neste desenvolvimento, é:

$$C_2^4(2x \cos \alpha)^2 \left(-\frac{\sin \alpha}{x}\right)^2 = 6 \times 4 \cos^2 \alpha \sin^2 \alpha = 6 \sin^2(2\alpha)$$

Opção (B).

16. O período da função f é $\frac{2\pi}{2} = \pi$. Assim, a função tem um maximizante e um minimizante no intervalo $[0, \pi[$ e, conseqüentemente, 50 maximizantes e 50 minimizantes no intervalo $[0, 50\pi[$. Como 0 é um maximizante da função, temos que, no intervalo $]0, 50\pi[$, a função tem 99 maximizantes ou minimizantes.

Opção (B).

17.

$$\begin{aligned} \lim u_n &= \lim \operatorname{tg} \left(-\frac{\pi}{2} + \ln \left(1 - \frac{1}{x} \right) \right) = \operatorname{tg} \left(-\frac{\pi}{2} + \ln \left(1 - \frac{1}{+\infty} \right) \right) = \\ &= \operatorname{tg} \left(-\frac{\pi}{2} + \ln (1 - 0^+) \right) = \operatorname{tg} \left(-\frac{\pi}{2} + \ln (1^-) \right) = \\ &= \operatorname{tg} \left(-\frac{\pi}{2} + 0^- \right) = \operatorname{tg} \left(-\frac{\pi}{2} \right) = +\infty \end{aligned}$$

Opção (B).

18. Temos que:

$$\lim(\pi - e^{-n}) = \pi - 0^+ = \pi^-$$

Assim,

$$\lim u_n = \lim_{x \rightarrow \pi^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pi^-} \cos x = \cos \pi = -1$$

Opção (A).

19. Como as retas r e s são paralelas, então têm o mesmo declive. Seja f a função seno e g a função cosseno. Como as retas r e s são tangentes

aos gráficos de f e g , respetivamente, no ponto de abcissa a , temos que $f'(a) = g'(a)$.

$$f'(x) = (\operatorname{sen} x)' = \cos x \quad \text{e} \quad g'(x) = (\cos x)' = -\operatorname{sen} x$$

Assim, para descobrir o valor de a é necessário que:

$$\cos a = -\operatorname{sen} a \Leftrightarrow a = \frac{3\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow^* = \frac{3\pi}{4}$$

* No intervalo considerado.

Opção (C).

Exercícios propostos

Itens de construção - páginas 317 a 326

1. Sejam C' e D' as projeções ortogonais de C e D sobre a reta AB . Uma vez que $\widehat{ABC} = 70^\circ$ e $\widehat{DAB} = 45^\circ$, sabemos que $C' \in [AB]$ e $D' \in [AB]$. Assim, o triângulo $[C'BC]$ é retângulo em C' , o triângulo $[AD'D]$ é retângulo em D' , $\widehat{C'CB} = 90^\circ - 70^\circ = 20^\circ$, $\widehat{ADD'} = 90^\circ - 45^\circ = 45^\circ$, $\overline{AB} = \overline{AD'} + \overline{D'C'} + \overline{C'B}$ e $\overline{D'C'} = \overline{DC} = 6$.

Pela Lei dos Senos, aplicada no triângulo $C'BC$, temos:

$$\frac{\text{sen}90^\circ}{8} = \frac{\text{sen}20^\circ}{\overline{C'B}} \Leftrightarrow \overline{C'B} \approx 2,736$$

$$\frac{\text{sen}90^\circ}{8} = \frac{\text{sen}70^\circ}{\overline{C'C}} \Leftrightarrow \overline{C'C} \approx 7,518$$

Como $\overline{C'C} = \overline{D'D}$, pela Lei dos Senos, aplicada no triângulo $D'AD$, temos:

$$\frac{\text{sen}90^\circ}{\overline{AD}} = \frac{\text{sen}45^\circ}{7,518} \Leftrightarrow \overline{AD} \approx 10,632$$

$$\frac{\text{sen}45^\circ}{\overline{AD'}} = \frac{\text{sen}45^\circ}{7,518} \Leftrightarrow \overline{AD'} \approx 7,518$$

O perímetro do trapézio é $6 + 8 + 2,736 + 6 + 7,518 + 10,632 \approx 40,9$ u.c.

2.

2.1.

$$\begin{aligned} \frac{\text{sen}x - 2 \text{sen}^3x}{2 \cos^3x - \cos x} &= \frac{\text{sen}x(1 - 2 \text{sen}^2x)}{\cos x(2 \cos^2x - 1)} = \frac{\text{sen}x}{\cos x} \times \frac{1 - \text{sen}^2x - \text{sen}^2x}{\cos^2x + \cos^2x - 1} = \\ &= \text{tg} x \frac{\cos^2x - \text{sen}^2x}{\cos^2x - \text{sen}^2x} = \text{tg} x \end{aligned}$$

2.2.

$$\frac{1 - \cos(2x)}{2} = \frac{1 - (\cos^2x - \text{sen}^2x)}{2} = \frac{1 - \cos^2x + \text{sen}^2x}{2} = \frac{2 \text{sen}^2x}{2} = \text{sen}^2x$$

2.3.

$$\begin{aligned}(1 + \cos(2x)) \times \operatorname{tg} x &= (1 + \cos(2x)) \times \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} = (1 + \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x) \times \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} = \\ &= 2 \cos^2 x \times \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} = 2 \operatorname{sen} x \cos x = \operatorname{sen}(2x)\end{aligned}$$

3.

3.1.

$$\begin{aligned}1 + \operatorname{sen}(2x) = \frac{3}{2} &\Leftrightarrow \operatorname{sen}(2x) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \vee 2x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{12} + k\pi \vee x = \frac{5\pi}{12} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\end{aligned}$$

3.2.

$$3 \cos(2x) = -3 \Leftrightarrow \cos(2x) = -1 \Leftrightarrow 2x = \pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

3.3.

$$\cos(2x) = 0 \Leftrightarrow 2x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$$

3.4.

$$2 \operatorname{sen} x = -\sqrt{3} \Leftrightarrow \operatorname{sen} x = -\frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi \vee x = -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

3.5.

$$\operatorname{tg}^2(x) = 1 \Leftrightarrow \operatorname{tg} x = 1 \vee \operatorname{tg} x = -1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$$

3.6.

$$\begin{aligned}\operatorname{tg} \left(\frac{x}{2} \right) - \sqrt{3} = -2 \operatorname{tg} \left(\frac{x}{2} \right) &\Leftrightarrow \operatorname{tg} \left(\frac{x}{2} \right) = \frac{\sqrt{3}}{3} \Leftrightarrow \frac{x}{2} = \frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\end{aligned}$$

3.7.

$$\begin{aligned}\sqrt{3} \operatorname{tg}(5x) = 3 &\Leftrightarrow \operatorname{tg}(5x) = \sqrt{3} \Leftrightarrow 5x = \frac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{15} + \frac{k\pi}{5}, k \in \mathbb{Z}\end{aligned}$$

3.8.

$$\begin{aligned}\cos(\pi - 2x) = -\frac{1}{2} &\Leftrightarrow \cos(-2x) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow -2x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \vee -2x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{6} + k\pi \vee x = \frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\end{aligned}$$

3.9.

$$\begin{aligned}8 \operatorname{sen}\left(3x + \frac{\pi}{6}\right) = -4 &\Leftrightarrow \operatorname{sen}\left(3x + \frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 3x + \frac{\pi}{6} = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi \vee 3x + \frac{\pi}{6} = -\frac{5\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 3x = -\frac{2\pi}{6} + 2k\pi \vee 3x = -\pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{9} + \frac{2k\pi}{3} \vee x = -\frac{\pi}{3} + \frac{2k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}\end{aligned}$$

3.10.

$$\begin{aligned}\cos(3x) = -\cos(x) &\Leftrightarrow \cos(3x) = \cos(\pi - x) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 3x = \pi - x + 2k\pi \vee 3x = -\pi + x + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 4x = \pi + 2k\pi \vee 2x = -\pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2} \vee x = -\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\end{aligned}$$

3.11.

$$\begin{aligned}\operatorname{sen}(3x) = -\operatorname{sen}(x) &\Leftrightarrow \operatorname{sen}(3x) = \operatorname{sen}(-x) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 3x = -x + 2k\pi \vee 3x = \pi - (-x) + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 4x = 2k\pi \vee 2x = \pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x = \frac{k\pi}{2} \vee x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x = \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\end{aligned}$$

3.12.

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}(3x) = -\operatorname{tg} x &\Leftrightarrow \operatorname{tg}(3x) = \operatorname{tg}(-x) \Leftrightarrow 3x = -x + k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 4x = k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = \frac{k\pi}{4}, k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

4.

4.1. O período positivo mínimo de f é $\frac{2\pi}{0,5} = 4\pi$.

4.2.

$$\begin{aligned} -1 \leq \operatorname{sen}(0,5x + \pi) \leq 1 &\Leftrightarrow -2 \leq 2 \operatorname{sen}(0,5x + \pi) \leq 2 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 1 \leq 3 + 2 \operatorname{sen}(0,5x + \pi) \leq 5 \end{aligned}$$

Pelo que $D'_f = [1, 5]$.

4.3. Sabemos que $\alpha \in \left] \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \right[$ e que $\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{2}$. Por outro lado,

$$1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \Leftrightarrow 1 + \frac{1}{4} = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \Leftrightarrow \cos^2 \alpha = \frac{4}{5}$$

Pelo Teorema Fundamental da Trigonometria:

$$\operatorname{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \Leftrightarrow \operatorname{sen}^2 \alpha + \frac{4}{5} = 1 \Leftrightarrow \operatorname{sen}^2 \alpha = \frac{1}{5} \Leftrightarrow \operatorname{sen} \alpha = * -\frac{\sqrt{5}}{5}$$

*No intervalo considerado.

$$\begin{aligned} f(2\alpha) &= 3 + 2 \operatorname{sen}(0,5 \times 2\alpha + \pi) = 3 + 2 \operatorname{sen}(\alpha + \pi) = 3 - 2 \operatorname{sen} \alpha = \\ &= 3 + \frac{2\sqrt{5}}{5} = \frac{15 + 2\sqrt{5}}{5} \end{aligned}$$

5.

5.1.

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}(15^\circ) &= \operatorname{sen}(45^\circ - 30^\circ) = \operatorname{sen}(45^\circ) \cos(30^\circ) - \cos(45^\circ) \operatorname{sen}(30^\circ) = \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} \end{aligned}$$

5.2.

$$\begin{aligned}\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) &= \cos\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) \times \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) \times \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}\end{aligned}$$

5.3.

$$\begin{aligned}\operatorname{tg}(105^\circ) &= \operatorname{tg}(45^\circ + 60^\circ) = \frac{\sin(45^\circ + 60^\circ)}{\cos(45^\circ + 60^\circ)} = \\ &= \frac{\sin(45^\circ) \cos(60^\circ) + \cos(45^\circ) \sin(60^\circ)}{\cos(45^\circ) \cos(60^\circ) - \sin(45^\circ) \sin(60^\circ)} = \\ &= \frac{\frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{\sqrt{2} - \sqrt{6}} = \\ &= \frac{(\sqrt{2} + \sqrt{6})^2}{2 - 6} = \frac{2 + 6 + 2\sqrt{12}}{-4} = \frac{8 + 4\sqrt{3}}{-4} = -2 - \sqrt{3}\end{aligned}$$

5.4.

$$\begin{aligned}\operatorname{tg}\left(\frac{5\pi}{12}\right) &= \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{6}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{6}\right)} = \\ &= \frac{\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \sin\left(\frac{\pi}{6}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \sin\left(\frac{\pi}{6}\right)} = \\ &= \frac{\frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{\sqrt{6} - \sqrt{2}} = \\ &= \frac{(\sqrt{2} + \sqrt{6})^2}{6 - 2} = \frac{2 + 6 + 2\sqrt{12}}{4} = \frac{8 + 4\sqrt{3}}{4} = 2 + \sqrt{3}\end{aligned}$$

6.

6.1. Seja E' a projeção ortogonal de E sobre a reta AB . Temos que $E' \in [AB]$ e, como $\overline{AE} = \overline{BE}$, temos que $\overline{AE'} = \frac{a}{2}$. Sabemos que a área a sombreado pode ser dada por:

$$a^2 - 4 \times \frac{a \times \overline{EE'}}{2}$$

Por outro lado, temos que:

$$\operatorname{tg} x = \frac{\overline{EE'}}{\overline{AE'}} \Leftrightarrow \overline{EE'} = \operatorname{tg} x \times \frac{a}{2}$$

Assim, a área A pode ser dada em função de x por:

$$A(x) = a^2 - 4 \times \frac{a \times \operatorname{tg} x \times \frac{a}{2}}{2} = a^2(1 - \operatorname{tg} x)$$

6.2. Sabendo que $\operatorname{sen} \theta = \frac{1}{3}$, pelo Teorema Fundamental da Trigonometria:

$$\left(\frac{1}{3}\right)^2 + \cos^2 \theta = 1 \Leftrightarrow \cos^2 \theta = \frac{8}{9}$$

Assim,

$$1 + \operatorname{tg}^2 \theta = \frac{1}{\cos^2 \theta} \Leftrightarrow 1 + \operatorname{tg}^2 \theta = \frac{1}{\frac{8}{9}} \Leftrightarrow \operatorname{tg}^2 \theta = \frac{1}{8} \Leftrightarrow^* \operatorname{tg} \theta = \frac{1}{2\sqrt{2}} = \operatorname{tg} \theta = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

*No intervalo considerado.

Podemos então concluir que:

$$A(\theta) = 6^2(1 - \operatorname{tg} \theta) = 36 \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{4}\right) = 36 - 9\sqrt{2}$$

7. Determinar o valor da a :

$$\begin{aligned} -1 \leq \cos \left(bx + \frac{\pi}{6}\right) \leq 1 &\Leftrightarrow -a \leq a \cos \left(bx + \frac{\pi}{6}\right) \leq a \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow -a - 1 \leq a \cos \left(bx + \frac{\pi}{6}\right) - 1 \leq a - 1 \end{aligned}$$

Logo, $a - 1 = 1 \Leftrightarrow a = 2$.

Determinar o valor de b :

Pelo gráfico, podemos verificar que o período de f é $\frac{5\pi}{3} - \frac{-7\pi}{3} = \frac{12\pi}{3} = 4\pi$.

Assim, temos que:

$$\frac{2\pi}{b} = 4\pi \Leftrightarrow b = \frac{1}{2}$$

8.

8.1.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} x}{4x} \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \frac{1}{4} \times \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = \frac{1}{4}$$

8.2.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen}(4x)}{x} \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} 4 \times \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen}(4x)}{4x} = 4 \times \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\text{sen}y}{y} = 4$$

* Considerando a mudança de variável $4x = y$: se $x \rightarrow 0$, então $y \rightarrow 0$.

8.3.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x}{\text{sen}(x)} \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} 4 \times \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\text{sen}x} = 4 \times \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{\text{sen}x}{x}} = 4 \times \frac{1}{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen}x}{x}} = 4$$

8.4.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen}(4\pi + x)}{x} \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen}x}{x} = 1$$

8.5.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen}(4x)}{-5x} \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} -\frac{4}{5} \times \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen}(4x)}{4x} =^* -\frac{4}{5} \times \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\text{sen}(y)}{y} = -\frac{4}{5}$$

* Considerando a mudança de variável $4x = y$: se $x \rightarrow 0$, então $y \rightarrow 0$.

8.6.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen}(4x)}{\text{sen}(5x)} &\stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\text{sen}(4x)}{x}}{\frac{\text{sen}(5x)}{x}} = \frac{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen}(4x)}{x}}{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen}(5x)}{x}} = \frac{4 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen}(4x)}{4x}}{5 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen}(5x)}{5x}} = \\ &=^* \frac{4 \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\text{sen}(y)}{y}}{5 \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\text{sen}(z)}{z}} = \frac{4}{5} \end{aligned}$$

* Considerando as mudanças de variável $4x = y$, $5x = z$: se $x \rightarrow 0$, então $y \rightarrow 0$ e $z \rightarrow 0$.

8.7.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen}x}{x^5} \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^4} \times \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen}x}{x} = +\infty \times 1 = +\infty$$

8.8.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\operatorname{sen} x}{x^4} \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^3} \times \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = +\infty \times 1 = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\operatorname{sen} x}{x^4} \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x^3} \times \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = -\infty \times 1 = -\infty$$

Conclui-se que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x^4}$ não existe.

8.9.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen}^2 x}{x^2} \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} \right)^2 = 1^2 = 1$$

8.10.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}{x} \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$$

8.11.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x \times x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos x} \times \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1 \times 1 = 1$$

8.12.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen}(3x)}{\operatorname{tg} x} &\stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen}(3x) \cos x}{\operatorname{sen} x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen}(3x)}{\operatorname{sen} x} \times \lim_{x \rightarrow 0} \cos x = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\operatorname{sen}(3x)}{x}}{\frac{\operatorname{sen} x}{x}} \times 1 = \frac{3 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen}(3x)}{3x}}{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x}} \stackrel{*}{=} \frac{3 \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen}(y)}{y}}{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x}} = 3 \end{aligned}$$

* Considerando a mudança de variável $3x = y$: se $x \rightarrow 0$, então $y \rightarrow 0$.

9.

$$g'(x) = (1 - \cos(3x))' = 3 \operatorname{sen}(3x)$$

$$\begin{aligned} g'(x) = \frac{3\sqrt{3}}{2} &\Leftrightarrow 3 \sin(3x) = \frac{3\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \sin(3x) = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 3x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \vee 3x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{9} + \frac{2k\pi}{3} \vee x = \frac{2\pi}{9} + \frac{2k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

10. Sabendo que $\widehat{DEC} = 65^\circ$, temos que $\widehat{AEB} = 65^\circ$, $\widehat{CEB} = 180^\circ - 65^\circ = 115^\circ$ e $\widehat{AED} = 115^\circ$.

Utilizando a Lei dos Cossenos podemos obter o comprimento de todos os lados do trapézio.

$$\overline{AD}^2 = 16^2 + 5^2 - 2 \times 16 \times 5 \times \cos(115^\circ) \Leftrightarrow \overline{AD}^2 \approx 348,619 \Leftrightarrow \overline{AD} \approx 18,671$$

$$\overline{DC}^2 = 6^2 + 5^2 - 2 \times 6 \times 5 \times \cos(65^\circ) \Leftrightarrow \overline{DC}^2 \approx 35,643 \Leftrightarrow \overline{DC} \approx 5,970$$

$$\overline{CB}^2 = 17^2 + 6^2 - 2 \times 17 \times 6 \times \cos(115^\circ) \Leftrightarrow \overline{CB}^2 \approx 411,614 \Leftrightarrow \overline{CB} \approx 20,289$$

$$\overline{AB}^2 = 16^2 + 17^2 - 2 \times 16 \times 17 \times \cos(65^\circ) \Leftrightarrow \overline{AB}^2 \approx 315,096 \Leftrightarrow \overline{AB} \approx 17,751$$

O perímetro do trapézio é $18,671 + 5,970 + 20,289 + 17,751 = 62,681$, ou seja, 62,7 u.c., aproximadamente.

11. Uma vez que $x \in \left] -\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{6} \right[$, temos que $\frac{1}{2} < \cos x \leq 1$. Assim,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} < 1 - k^2 \leq 1 &\Leftrightarrow -\frac{1}{2} < -k^2 \leq 0 \Leftrightarrow 0 \leq k^2 < \frac{1}{2} \Leftrightarrow k^2 < \frac{1}{2} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow k < \frac{\sqrt{2}}{2} \wedge k > -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{aligned}$$

$$\text{Logo, C.S.} = \left] -\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right[.$$

12. Sabemos que:

$$\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \frac{5}{13} \Leftrightarrow \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - (-\alpha)\right) = \frac{5}{13} \Leftrightarrow \cos(-\alpha) = \frac{5}{13} \Leftrightarrow \cos(\alpha) = \frac{5}{13}$$

Pelo Teorema Fundamental da Trigonometria:

$$\operatorname{sen}^2 \alpha + \left(\frac{5}{13}\right)^2 = 1 \Leftrightarrow \operatorname{sen}^2 \alpha = 1 - \frac{25}{169} \Leftrightarrow \operatorname{sen}^2 \alpha = \frac{144}{169} \Leftrightarrow^* \operatorname{sen} \alpha = -\frac{12}{13}$$

*No intervalo considerado.

Por outro lado,

$$\operatorname{tg}(2021\pi - \beta) = \frac{4}{3} \Leftrightarrow \operatorname{tg}(-\beta) = \frac{4}{3} \Leftrightarrow \operatorname{tg}(\beta) = -\frac{4}{3}$$

pelo que:

$$1 + \left(-\frac{4}{3}\right)^2 = \frac{1}{\cos^2 \beta} \Leftrightarrow \frac{25}{9} = \frac{1}{\cos^2 \beta} \Leftrightarrow \cos^2 \beta = \frac{9}{25} \Leftrightarrow^* \cos \beta = -\frac{3}{5}$$

*No intervalo considerado.

Além disso, novamente pelo Teorema Fundamental da Trigonometria:

$$\operatorname{sen}^2 \beta + \left(-\frac{3}{5}\right)^2 = 1 \Leftrightarrow \operatorname{sen}^2 \beta = \frac{16}{25} \Leftrightarrow^* \operatorname{sen} \beta = \frac{4}{5}$$

*No intervalo considerado.

12.1.

$$\operatorname{sen}(2\alpha) = 2 \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha = 2 \times \left(-\frac{12}{13}\right) \times \frac{5}{13} = -\frac{120}{169}$$

12.2.

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}(\alpha + \beta) &= \operatorname{sen} \alpha \cos \beta + \cos \alpha \operatorname{sen} \beta = -\frac{12}{13} \times \left(-\frac{3}{5}\right) + \frac{5}{13} \times \frac{4}{5} = \\ &= \frac{56}{65} \end{aligned}$$

12.3.

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta = \frac{5}{13} \times \left(-\frac{3}{5}\right) - \left(-\frac{12}{13}\right) \times \frac{4}{5} = \frac{33}{65}$$

12.4.

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}(2\alpha) &= \frac{\operatorname{sen}(2\alpha)}{\cos(2\alpha)} = \frac{2 \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha}{\cos^2 \alpha - \operatorname{sen}^2 \alpha} = \\ &= \frac{2 \times \left(-\frac{12}{13}\right) \times \frac{5}{13}}{\left(\frac{5}{13}\right)^2 - \left(-\frac{12}{13}\right)^2} = \frac{-\frac{120}{169}}{-\frac{119}{169}} = \frac{120}{119} \end{aligned}$$

12.5.

$$\cos\left(\frac{\pi}{4} + \beta\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \cos \beta - \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right) \operatorname{sen} \beta = \frac{\sqrt{2}}{2} \times \left(-\frac{3}{5}\right) - \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{4}{5} = -\frac{7\sqrt{2}}{10}$$

12.6.

$$\begin{aligned} \cos(3\alpha) = \cos(\alpha + 2\alpha) &= \cos \alpha \cos(2\alpha) - \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen}(2\alpha) = \\ &= \cos \alpha (\cos^2 \alpha - \operatorname{sen}^2 \alpha) - \operatorname{sen} \alpha (2 \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha) = \\ &= \frac{5}{13} \left(\left(\frac{5}{13}\right)^2 - \left(-\frac{12}{13}\right)^2 \right) - \left(-\frac{12}{13}\right) \left(2 \times \left(-\frac{12}{13}\right) \times \frac{5}{13} \right) = \\ &= \frac{5}{13} \times \left(-\frac{119}{169}\right) + \frac{12}{13} \times \left(-\frac{120}{169}\right) = -\frac{2035}{2197} \end{aligned}$$

13.

13.1.

$$\operatorname{sen}(4x) = \operatorname{sen}(2 \times 2x) = 2 \operatorname{sen}(2x) \cos(2x)$$

13.2.

$$\begin{aligned}
 \operatorname{sen}(3x) &= \operatorname{sen}(x + 2x) = \operatorname{sen}x \cos(2x) + \cos x \operatorname{sen}(2x) = \\
 &= \operatorname{sen}x(\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x) + \cos x(2 \operatorname{sen}x \cos x) = \\
 &= \operatorname{sen}x \cos^2 x - \operatorname{sen}^3 x + 2 \operatorname{sen}x \cos^2 x = \\
 &= 3 \operatorname{sen}x(1 - \operatorname{sen}^2 x) - \operatorname{sen}^3 x = \\
 &= 3 \operatorname{sen}x - 4 \operatorname{sen}^3 x
 \end{aligned}$$

13.3.

$$\begin{aligned}
 &\operatorname{sen}\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \operatorname{sen}\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \\
 &= \left(\operatorname{sen}x \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + \cos x \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) \left(\operatorname{sen}x \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) - \cos x \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) = \\
 &= \left(\operatorname{sen}x \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \cos x \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right) \left(\operatorname{sen}x \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) - \cos x \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right) = \\
 &= \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 (\operatorname{sen}^2 x - \cos^2 x) = \\
 &= \frac{1}{2}(\operatorname{sen}^2 x - 1 + \operatorname{sen}^2 x) = \\
 &= \operatorname{sen}^2 x - \frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

13.4.

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{\operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{4}\right)} &= \frac{\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)}{\operatorname{sen}\left(x + \frac{\pi}{4}\right)} = \frac{\cos x \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) - \operatorname{sen}x \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}{\operatorname{sen}x \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \cos x \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)} = \\
 &= \frac{\cos x - \operatorname{sen}x}{\operatorname{sen}x + \cos x}
 \end{aligned}$$

13.5.

$$\begin{aligned} \frac{1 + \operatorname{sen}(2x)}{\cos(2x)} &= \frac{1 + 2 \operatorname{sen} x \cos x}{\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x} = \frac{\frac{1+2 \operatorname{sen} x \cos x}{\cos^2 x}}{\frac{\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x}} = \\ &= \frac{\frac{1}{\cos^2 x} + 2 \frac{\operatorname{sen} x \cos x}{\cos^2 x}}{1 - \operatorname{tg}^2 x} = \frac{1 + \operatorname{tg}^2 x + 2 \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x} = \\ &= \frac{(1 + \operatorname{tg} x)^2}{(1 + \operatorname{tg} x)(1 - \operatorname{tg} x)} = \frac{1 + \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg} x} \end{aligned}$$

13.6.

$$\begin{aligned} 1 + \frac{\cos(3x)}{\cos x} &= 1 + \frac{\cos(x) \cos(2x) - \operatorname{sen} x \operatorname{sen}(2x)}{\cos x} = \\ &= 1 + \frac{\cos(x)(\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x) - \operatorname{sen} x \times 2 \operatorname{sen} x \cos x}{\cos x} = \\ &= 1 + \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x - 2 \operatorname{sen}^2 x = \\ &= 1 - \operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x - 2 \operatorname{sen}^2 x = \\ &= \cos^2 x + \cos^2 x - 2 \operatorname{sen}^2 x = \\ &= 2(\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x) = \\ &= 2 \cos(2x) \end{aligned}$$

14.

14.1.

$$\begin{aligned} \cos x = -\operatorname{sen} x &\Leftrightarrow \cos x = \operatorname{sen}(-x) \Leftrightarrow \cos x = \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + x + 2k\pi \vee x = -\frac{\pi}{2} - x + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{2} - x + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 2x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

14.2.

$$\begin{aligned}\cos\left(\frac{x}{2}\right) - \operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right) = 0 &\Leftrightarrow \cos\left(\frac{x}{2}\right) = \operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \frac{x}{2} = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\end{aligned}$$

14.3.

$$\begin{aligned}\operatorname{sen}(2x) - \cos x = 0 &\Leftrightarrow \operatorname{sen}(2x) = \cos(x) \Leftrightarrow \operatorname{sen}(2x) = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 2x = \frac{\pi}{2} - x + 2k\pi \vee 2x = \pi - \left(\frac{\pi}{2} - x\right) + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 3x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \vee x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3} \vee x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\end{aligned}$$

14.4.

$$\begin{aligned}\operatorname{sen}(2x) = \cos\left(2x - \frac{5\pi}{6}\right) &\Leftrightarrow \operatorname{sen}(2x) = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - 2x + \frac{5\pi}{6}\right) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \operatorname{sen}(2x) = \operatorname{sen}\left(\frac{4\pi}{3} - 2x\right) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 2x = \frac{4\pi}{3} - 2x + 2k\pi \vee 2x = -\frac{4\pi}{3} + 2x + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 2x = \frac{4\pi}{3} - 2x + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 4x = \frac{4\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\end{aligned}$$

14.5.

$$\begin{aligned}\frac{\cos x}{1 - \operatorname{sen} x} = 0 &\Leftrightarrow \cos x = 0 \wedge 1 - \operatorname{sen} x \neq 0 \Leftrightarrow \cos x = 0 \wedge \operatorname{sen} x \neq 1 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi \wedge x \neq \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\end{aligned}$$

14.6.

$$\begin{aligned}-2 \cos x \operatorname{sen} x = \cos x &\Leftrightarrow -2 \cos x \operatorname{sen} x - \cos x = 0 \Leftrightarrow -\cos x(2 \operatorname{sen} x + 1) = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \cos x = 0 \vee \operatorname{sen} x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi \vee x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi \vee x = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\end{aligned}$$

14.7.

$$\begin{aligned}\operatorname{sen} x + \operatorname{sen}(2x) = 0 &\Leftrightarrow \operatorname{sen} x + 2 \operatorname{sen} x \cos x = 0 \Leftrightarrow \operatorname{sen} x(1 + 2 \cos x) = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \operatorname{sen} x = 0 \vee \cos x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x = k\pi \vee x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \vee x = \frac{4\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\end{aligned}$$

14.8.

$$\begin{aligned}2 \operatorname{sen} x \cos x + 2 = 1 &\Leftrightarrow \operatorname{sen}(2x) = -1 \Leftrightarrow 2x = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x = \frac{3\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\end{aligned}$$

14.9.

$$\begin{aligned}\operatorname{sen} x \cos x = \frac{1}{4} &\Leftrightarrow 2 \operatorname{sen} x \cos x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \operatorname{sen}(2x) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 2x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \vee 2x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{12} + k\pi \vee x = \frac{5\pi}{12} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\end{aligned}$$

14.10.

$$\begin{aligned}\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x = \cos\left(\frac{\pi}{5}\right) &\Leftrightarrow \cos(2x) = \cos\left(\frac{\pi}{5}\right) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 2x = \frac{\pi}{5} + 2k\pi \vee 2x = -\frac{\pi}{5} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{10} + k\pi \vee x = -\frac{\pi}{10} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\end{aligned}$$

14.11.

$$\begin{aligned}
 \frac{2\sqrt{3} \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x} = 1 &\Leftrightarrow \frac{2\sqrt{3} \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}}{1 - \frac{\operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x}} = 1 \Leftrightarrow \frac{\frac{2\sqrt{3} \operatorname{sen} x}{\cos x}}{\frac{\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x}} = \frac{2\sqrt{3} \operatorname{sen} x \cos x}{\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x} = 1 \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow \frac{\sqrt{3} \operatorname{sen}(2x)}{\cos(2x)} = 1 \Leftrightarrow \sqrt{3} \operatorname{tg}(2x) = 1 \Leftrightarrow \operatorname{tg}(2x) = \frac{\sqrt{3}}{3} \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow 2x = \frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}
 \end{aligned}$$

14.12.

$$\begin{aligned}
 2 \cos x + 2 \cos(2x) = 0 &\Leftrightarrow \cos x = -\cos(2x) \Leftrightarrow \cos x = \cos(\pi - 2x) \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow x = \pi - 2x + 2k\pi \vee x = -\pi + 2x + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow 3x = \pi + 2k\pi \vee -x = -\pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3} + \frac{2k\pi}{3} \vee x = \pi - 2k\pi, k \in \mathbb{Z}
 \end{aligned}$$

15.

15.1.

$$\cos x = \operatorname{sen} x \Leftrightarrow^* x = \frac{\pi}{4} \vee x = \frac{5\pi}{4}$$

*No intervalo considerado.

15.2.

$$\begin{aligned}
 2 \cos(2x) + \sqrt{3} = 0 &\Leftrightarrow 2 \cos(2x) = -\sqrt{3} \Leftrightarrow \cos(2x) = -\frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow 2x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \vee 2x = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow x = \frac{5\pi}{12} + k\pi \vee x = \frac{7\pi}{12} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow^* x = \frac{5\pi}{12} \vee x = \frac{7\pi}{12} \vee x = \frac{17\pi}{12} \vee x = \frac{19\pi}{12}
 \end{aligned}$$

*No intervalo considerado.

15.3.

$$\begin{aligned}
 2 \operatorname{sen}(3x) + \sqrt{2} = 0 &\Leftrightarrow \operatorname{sen}(3x) = -\frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow 3x = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi \vee 3x = \frac{5\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{12} + \frac{2k\pi}{3} \vee x = \frac{5\pi}{12} + \frac{2k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow^* x = \frac{5\pi}{12} \vee x = \frac{7\pi}{12} \vee x = \frac{13\pi}{12} \vee x = \frac{5\pi}{4} \vee x = \frac{7\pi}{4} \vee x = \frac{23\pi}{12}
 \end{aligned}$$

*No intervalo considerado.

15.4.

$$\begin{aligned}
 4 \operatorname{sen}^2 x - 1 = 0 &\Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow \operatorname{sen}^2 x = \frac{1}{4} &\Leftrightarrow \operatorname{sen} x = \frac{1}{2} \vee \operatorname{sen} x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \vee x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \vee x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi \vee x = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} &\Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow^* x = \frac{\pi}{6} \vee x = \frac{5\pi}{6} \vee x = \frac{7\pi}{6} \vee x = \frac{11\pi}{6}
 \end{aligned}$$

*No intervalo considerado.

15.5.

$$\begin{aligned}
 2 \operatorname{sen}^2 x = 1 - \operatorname{sen} x &\Leftrightarrow 2 \operatorname{sen}^2 x + \operatorname{sen} x - 1 = 0 \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow \operatorname{sen} x = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4 \times 2 \times (-1)}}{2 \times 2} \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow \operatorname{sen} x = -1 \vee \operatorname{sen} x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow x = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi \vee x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \vee x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow^* x = \frac{\pi}{6} \vee x = \frac{5\pi}{6} \vee x = \frac{3\pi}{2}
 \end{aligned}$$

*No intervalo considerado.

15.6.

$$\begin{aligned}
 2 \cos x - 5 &= -\frac{2}{\cos x} \Rightarrow 2 \cos^2 x - 5 \cos x = -2 \Leftrightarrow 2 \cos^2 x - 5 \cos x + 2 = 0 \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow \cos x = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 4 \times 2 \times 2}}{2 \times 2} \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow \cos x = \frac{5 \pm \sqrt{9}}{4} \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow \cos x = 2 \vee \cos x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow \cos x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \vee x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow^* x = \frac{\pi}{3} \vee x = \frac{5\pi}{3}
 \end{aligned}$$

*No intervalo considerado.

Devemos também notar que em nenhuma destas soluções o cosseno se anula, pois essas não poderiam ser soluções da equação original.

15.7.

$$\begin{aligned}
 4 \sin x \cos x &= \sqrt{3} \Leftrightarrow \sin(2x) = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow 2x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \vee 2x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} + k\pi \vee x = \frac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow^* x = \frac{\pi}{6} \vee x = \frac{\pi}{3} \vee x = \frac{7\pi}{6} \vee x = \frac{4\pi}{3}
 \end{aligned}$$

*No intervalo considerado.

15.8.

$$\begin{aligned}\cos^2 x + 4 \operatorname{sen} x \cos x + \operatorname{sen}^2 x = 1 &\Leftrightarrow 4 \operatorname{sen} x \cos x + 1 = 1 \Leftrightarrow 2 \operatorname{sen}(2x) = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \operatorname{sen}(2x) = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 2x = k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x = \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow^* x = 0 \vee x = \frac{\pi}{2} \vee x = \pi \vee x = \frac{3\pi}{2}\end{aligned}$$

*No intervalo considerado.

15.9.

$$\begin{aligned}3 \operatorname{tg}^3 x = \operatorname{tg} x &\Leftrightarrow 3 \operatorname{tg}^3 x - \operatorname{tg} x = 0 \Leftrightarrow \operatorname{tg} x(3 \operatorname{tg}^2 x - 1) = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \operatorname{tg} x = 0 \vee 3 \operatorname{tg}^2 x - 1 = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \operatorname{tg} x = 0 \vee \operatorname{tg}^2 x = \frac{1}{3} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \operatorname{tg} x = 0 \vee \operatorname{tg} x = \frac{\sqrt{3}}{3} \vee \operatorname{tg} x = -\frac{\sqrt{3}}{3} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x = k\pi \vee x = \frac{\pi}{6} + k\pi \vee x = -\frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow^* x = 0 \vee x = \frac{\pi}{6} \vee x = \frac{5\pi}{6} \vee x = \pi \vee x = \frac{7\pi}{6} \vee x = \frac{11\pi}{6}\end{aligned}$$

*No intervalo considerado.

15.10.

$$\begin{aligned}
& \operatorname{sen}(2x) + \operatorname{sen} x = \frac{2 \cos x + 1}{2} \\
\Leftrightarrow & 2 \operatorname{sen} x \cos x + \operatorname{sen} x = \frac{2 \cos x + 1}{2} \Leftrightarrow \\
\Leftrightarrow & \operatorname{sen} x (2 \cos x + 1) = \frac{2 \cos x + 1}{2} \Leftrightarrow \\
\Leftrightarrow & \operatorname{sen} x (2 \cos x + 1) - \frac{2 \cos x + 1}{2} = 0 \Leftrightarrow \\
\Leftrightarrow & \left(\operatorname{sen} x - \frac{1}{2} \right) (2 \cos x + 1) = 0 \Leftrightarrow \\
\Leftrightarrow & \operatorname{sen} x = \frac{1}{2} \vee \cos x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \\
\Leftrightarrow & x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \vee x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \vee x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \vee x = \frac{4\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \\
\Leftrightarrow^* & x = \frac{\pi}{6} \vee x = \frac{2\pi}{3} \vee x = \frac{5\pi}{6} \vee x = \frac{4\pi}{3}
\end{aligned}$$

*No intervalo considerado.

16.

Sabemos que o máximo é 3 e que o mínimo é -1 , pelo que a amplitude é 4 e, consequentemente, $b = 2$. Além disso, $a + b = 3$, pelo que $a = 1$. Como o período positivo mínimo é π , temos que $\pi = \frac{2\pi}{c} \Leftrightarrow c = 2$. Por fim, temos que $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 + \sqrt{3}$. Assim:

$$\begin{aligned}
f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 + \sqrt{3} & \Leftrightarrow 1 + 2 \operatorname{sen}\left(2 \times \frac{\pi}{2} + d\right) = 1 + \sqrt{3} \Leftrightarrow \\
& \Leftrightarrow 2 \operatorname{sen}(\pi + d) = \sqrt{3} \Leftrightarrow \\
& \Leftrightarrow \operatorname{sen}(\pi + d) = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \\
& \Leftrightarrow \pi + d = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \vee \pi + d = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \\
& \Leftrightarrow d = -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi \vee d = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}
\end{aligned}$$

Assim, podemos ter, por exemplo, $d = -\frac{\pi}{3}$.

17. Como $D'_g = [-3, 5]$, temos que a amplitude é 8, pelo que $a^2 = 4 \Leftrightarrow a = \pm 2$. Como $a \in \mathbb{R}^-$, temos que $a = -2$. Além disso:

$$a^2 + \frac{k}{3} = 5 \Leftrightarrow \frac{k}{3} = 1 \Leftrightarrow k = 3$$

Podemos também verificar que o período da função, $\frac{2\pi}{b}$, é igual a:

$$2 \times \left(\frac{3\pi}{8} - \frac{\pi}{8} \right) = \frac{\pi}{2}$$

Vem que $\frac{2\pi}{b} = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow b = 4$.

18.

18.1.

$$-1 \leq \sin(5x-1) \leq 1 \Leftrightarrow -2 \leq 2 \sin(5x-1) \leq 2 \Leftrightarrow -3 \leq -1+2 \sin(5x-1) \leq 1$$

Assim, $D'_f = [-3, 1]$.

18.2. Uma vez que o período positivo mínimo da função seno é 2π , o período positivo mínimo de f é $\frac{2\pi}{5}$.

19.

19.1.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\frac{x}{5}} \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\frac{x}{2} \times \frac{2}{5}} = \frac{5}{2} \times \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\frac{x}{2}} \stackrel{*}{=} \frac{5}{2} \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin y}{y} = \frac{5}{2}$$

* Considerando a mudança de variável $\frac{x}{2} = y$: se $x \rightarrow 0$, então $y \rightarrow 0$.

19.2.

$$\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin x}{x - \pi} \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{-\sin(x - \pi)}{x - \pi} \stackrel{*}{=} - \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin y}{y} = -1$$

* Considerando a mudança de variável $x - \pi = y$: se $x \rightarrow \pi$, então $y \rightarrow 0$.

19.3.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + \operatorname{tg} x}{\operatorname{sen} x} \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x}{\operatorname{sen} x} + \frac{1}{\cos x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{\operatorname{sen} x}{x}} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos x} = 1 + 1 = 2$$

19.4.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x} &\stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos x)(1 + \cos x)}{x(1 + \cos x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2 x}{x(1 + \cos x)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen}^2 x}{x(1 + \cos x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\operatorname{sen} x}{x} \times \frac{\operatorname{sen} x}{1 + \cos x} \right) = \\ &= 1 \times 0 = 0 \end{aligned}$$

19.5.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\operatorname{sen} x}{\sqrt{x}} \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{\operatorname{sen} x}{x} \sqrt{x} \right) = 1 \times 0 = 0$$

19.6.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\operatorname{sen}(x-1)}{2x-2} \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\operatorname{sen}(x-1)}{x-1} = \frac{1}{2} \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} y}{y} = \frac{1}{2}$$

* Considerando a mudança de variável $x - 1 = y$: se $x \rightarrow 1$, então $y \rightarrow 0$.

19.7.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4x + 4}{\operatorname{sen}^2(x-2)} &\stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)^2}{\operatorname{sen}^2(x-2)} = \left(\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{\operatorname{sen}(x-2)} \right)^2 = \\ &= \left(\lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{\frac{\operatorname{sen}(x-2)}{x-2}} \right)^2 = \left(\frac{1}{\lim_{y \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} y}{y}} \right)^2 = 1 \end{aligned}$$

* Considerando a mudança de variável $x - 2 = y$: se $x \rightarrow 2$, então $y \rightarrow 0$.

19.8.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 3} \frac{7x - 21}{\operatorname{sen}(5x - 15)} &\stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(5x - 15) \times \frac{7}{5}}{\operatorname{sen}(5x - 15)} = \\ &= \frac{7}{5} \lim_{x \rightarrow 3} \frac{1}{\frac{\operatorname{sen}(5x - 15)}{5x - 15}} = \\ &=^* \frac{7}{5} \times \frac{1}{\lim_{y \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen}(y)}{y}} = \frac{7}{5} \end{aligned}$$

* Considerando a mudança de variável $5x - 15 = y$: se $x \rightarrow 3$, então $y \rightarrow 0$.

19.9.

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{\operatorname{sen}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)}{\pi - 3x} \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{\operatorname{sen}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)}{-3\left(x - \frac{\pi}{3}\right)} =^* -\frac{1}{3} \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen}(y)}{y} = -\frac{1}{3}$$

* Considerando a mudança de variável $x - \frac{\pi}{3} = y$: se $x \rightarrow \frac{\pi}{3}$, então $y \rightarrow 0$.

19.10.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg}(3x)}{\operatorname{tg}(2x)} &\stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\operatorname{sen}(3x)}{\cos(3x)}}{\frac{\operatorname{sen}(2x)}{\cos(2x)}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\operatorname{sen}(3x)}{x}}{\frac{\operatorname{sen}(2x)}{x}} \times \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(2x)}{\cos(3x)} = \\ &= \frac{3 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen}(3x)}{3x}}{2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen}(2x)}{2x}} =^* \frac{3 \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen}(y)}{y}}{2 \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen}(z)}{z}} = \frac{3}{2} \end{aligned}$$

* Considerando as mudanças de variável $3x = y$ e $2x = z$: se $x \rightarrow 0$, então $y \rightarrow 0$ e $z \rightarrow 0$.

19.11.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen}(x^2)}{\operatorname{sen}^2 x} \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\operatorname{sen}(x^2)}{x^2}}{\frac{\operatorname{sen}^2 x}{x^2}} = \frac{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen}(x^2)}{x^2}}{\left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x}\right)^2} =^* \frac{\lim_{y \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen}(y)}{y}}{\left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x}\right)^2} = 1$$

* Considerando a mudança de variável $x^2 = y$: se $x \rightarrow 0$, então $y \rightarrow 0$.

19.12.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{10x - \operatorname{tg}(2x)}{\operatorname{sen} x} &\stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{10x - \frac{\operatorname{sen}(2x)}{\cos(2x)}}{\operatorname{sen} x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{10x - \frac{2 \operatorname{sen} x \cos x}{\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x}}{\operatorname{sen} x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{10x}{\operatorname{sen} x} - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{2 \operatorname{sen} x \cos x}{\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x}}{\operatorname{sen} x} = \\ &= 10 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{\operatorname{sen} x}{x}} - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \cos x}{\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x} = \\ &= 10 \times 1 - 2 = 8 \end{aligned}$$

19.13.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \operatorname{sen} \left(\frac{1}{\sqrt{x}} \right) = \operatorname{sen} \left(\frac{1}{\sqrt{+\infty}} \right) = \operatorname{sen} 0 = 0$$

19.14.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} 2x \operatorname{sen} \left(\frac{1}{x} \right) \stackrel{(0 \times \infty)}{=} 2 \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\operatorname{sen} \left(\frac{1}{x} \right)}{\frac{1}{x}} \stackrel{*}{=} 2 \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} y}{y} = 2$$

* Considerando a mudança de variável $\frac{1}{x} = y$: se $x \rightarrow +\infty$, então $y \rightarrow 0$.

19.15.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 \operatorname{sen} x}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\operatorname{sen} x \times \frac{2}{x} \right) = 0,$$

pois a função seno é limitada ($-1 \leq \operatorname{sen} x \leq 1, \forall x \in \mathbb{R}$) e $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{x} = 0$.

19.16.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cos x}{x+1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\cos x \times \frac{1}{x+1} \right) = 0,$$

pois a função cosseno é limitada ($-1 \leq \cos x \leq 1, \forall x \in \mathbb{R}$) e $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x+1} = 0$.

20.

20.1.

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \operatorname{sen} x - 0}{x - 0} \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \operatorname{sen} x = 0$$

20.2.

$$g'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos^2 x - 1}{x - 0} \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\operatorname{sen}^2 x}{x} = - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} \times \lim_{x \rightarrow 0} \operatorname{sen} x = -1 \times 0 = 0$$

20.3.

$$\begin{aligned} h'(\pi) &= \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\frac{\operatorname{sen} x}{x} - 0}{x - \pi} \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{-\operatorname{sen}(x - \pi)}{x(x - \pi)} = \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{-\operatorname{sen}(x - \pi)}{x - \pi} \times \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{1}{x} = \\ &=^* - \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} y}{y} \times \frac{1}{\pi} = -\frac{1}{\pi} \end{aligned}$$

* Considerando a mudança de variável $x - \pi = y$: se $x \rightarrow \pi$, então $y \rightarrow 0$.

21.

21.1.

$$f'(x) = (\operatorname{sen}(3x))' = \cos(3x) \times 3 = 3 \cos(3x)$$

21.2.

$$g'(x) = (3 \operatorname{sen} x)' = 3 \cos x$$

21.3.

$$h'(x) = (\operatorname{sen} x^3)' = \cos x^3 \times (x^3)' = 3x^2 \cos x^3$$

21.4.

$$i'(x) = (\operatorname{sen}^3 x)' = 3 \operatorname{sen}^2 x \times (\operatorname{sen} x)' = 3 \operatorname{sen}^2 x \cos x$$

21.5.

$$j'(x) = (\cos(5x^2 + 2))' = -\operatorname{sen}(5x^2 + 2) \times (5x^2 + 2)' = -10x \operatorname{sen}(5x^2 + 2)$$

21.6.

$$k'(x) = (\operatorname{tg}(2x))' = \frac{(2x)'}{\cos^2(2x)} = \frac{2}{\cos^2(2x)}$$

21.7.

$$l'(x) = (\operatorname{tg}(\sqrt{x}))' = \frac{(\sqrt{x})'}{\cos^2(\sqrt{x})} = \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{\cos^2(\sqrt{x})} = \frac{1}{2\sqrt{x} \cos^2(\sqrt{x})}$$

21.8.

$$m'(x) = (\sqrt{\operatorname{tg} x})' = \frac{(\operatorname{tg} x)'}{2\sqrt{\operatorname{tg} x}} = \frac{\frac{1}{\cos^2 x}}{2\sqrt{\operatorname{tg} x}} = \frac{1}{2\cos^2 x \sqrt{\operatorname{tg} x}}$$

21.9.

$$\begin{aligned} n'(x) &= \left(\operatorname{tg} \left(\frac{1}{x} \right) - \cos x \right)' = \frac{\left(\frac{1}{x} \right)'}{\cos^2 \left(\frac{1}{x} \right)} + \operatorname{sen} x = \frac{-\frac{1}{x^2}}{\cos^2 \left(\frac{1}{x} \right)} + \operatorname{sen} x = \\ &= -\frac{1}{x^2 \cos^2 \left(\frac{1}{x} \right)} + \operatorname{sen} x \end{aligned}$$

21.10.

$$\begin{aligned} o'(x) &= (\operatorname{sen}^2 x + 2 \cos^5(3x))' = 2 \operatorname{sen} x (\operatorname{sen} x)' + 2 \times 5 \cos^4(3x) (\cos(3x))' = \\ &= 2 \operatorname{sen} x \cos x + 10 \cos^4(3x) \times (-\operatorname{sen}(3x) \times 3) = \\ &= 2 \operatorname{sen} x \cos x - 30 \cos^4(3x) \operatorname{sen}(3x) \end{aligned}$$

21.11.

$$p'(x) = (\ln(x^2 + \cos x))' = \frac{(x^2 + \cos x)'}{x^2 + \cos x} = \frac{2x - \operatorname{sen} x}{x^2 + \cos x}$$

21.12.

$$\begin{aligned} q'(x) &= \left(\frac{\operatorname{sen} x + \cos x}{\operatorname{sen} x - \cos x} \right)' = \\ &= \frac{(\operatorname{sen} x + \cos x)'(\operatorname{sen} x - \cos x) - (\operatorname{sen} x + \cos x)(\operatorname{sen} x - \cos x)'}{(\operatorname{sen} x - \cos x)^2} = \\ &= \frac{(\cos x - \operatorname{sen} x)(\operatorname{sen} x - \cos x) - (\operatorname{sen} x + \cos x)(\cos x + \operatorname{sen} x)}{(\operatorname{sen} x - \cos x)^2} = \\ &= \frac{-(\cos x - \operatorname{sen} x)^2 - (\operatorname{sen} x + \cos x)^2}{\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x - 2 \operatorname{sen} x \cos x} = \\ &= \frac{-\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x + 2 \operatorname{sen} x \cos x - \operatorname{sen}^2 x - \cos^2 x - 2 \operatorname{sen} x \cos x}{1 - \operatorname{sen}(2x)} = \\ &= \frac{-2}{1 - \operatorname{sen}(2x)} \end{aligned}$$

22.

Para $x < 0$:

$$\left(\frac{x}{e^x} \right)' = \frac{x'e^x - x(e^x)'}{e^{2x}} = \frac{e^x - xe^x}{e^{2x}} = \frac{1 - x}{e^x}$$

Para $0 < x < \frac{\pi}{4}$:

$$(\operatorname{sen} x)' = \cos x$$

Para $x > \frac{\pi}{4}$:

$$\left(\frac{1}{x} \right)' = -\frac{1}{x^2}$$

Para $x = 0$:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\frac{x}{e^x} - 0}{x - 0} \stackrel{\left(\frac{0}{0} \right)}{=} \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\frac{1}{e^x}}{1} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\operatorname{sen} x - 0}{x - 0} \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$$

Assim, $f'(0) = 1$.

Para $x = \frac{\pi}{4}$:

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} f(x) = \operatorname{sen} \left(\frac{\pi}{4} \right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$f \left(\frac{\pi}{4} \right) = \frac{4}{\pi}$$

Conclui-se que a função não é contínua em $x = \frac{\pi}{4}$, pelo que não é diferenciável nesse ponto.

Vem que:

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{1-x}{e^x} & \text{se } x < 0 \\ \cos x & \text{se } 0 \leq x < \frac{\pi}{4} \\ -\frac{1}{x^2} & \text{se } x > \frac{\pi}{4} \end{cases}$$

23.

23.1.

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \operatorname{sen} \left(\frac{1}{x} \right) = \lim_{y \rightarrow -\infty} \operatorname{sen} y$$

* Considerando a mudança de variável $\frac{1}{x} = y$: se $x \rightarrow 0^-$, então $y \rightarrow -\infty$.

Tem-se que $\lim_{x \rightarrow 0^-} \operatorname{sen} \left(\frac{1}{x} \right)$ não existe, pois a função seno é periódica. Então, a função f não é contínua em $x = 0$ e, consequentemente, não admite derivada nesse ponto.

23.2.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \operatorname{sen} \left(\frac{1}{x} \right) - 0}{x - 0} \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \left[x \operatorname{sen} \left(\frac{1}{x} \right) \right] = 0$$

pois a função seno é limitada ($-1 \leq \operatorname{sen} x \leq 1, \forall x \in \mathbb{R}$) e $\lim_{x \rightarrow 0} x = 0$.

24.

24.1.

Uma vez que $f(0) = 1$, temos que:

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sin(3x) - 1}{x - 0} \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} -3 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(3x)}{3x} \stackrel{*}{=} -3 \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin(y)}{y} = -3$$

* Considerando a mudança de variável $3x = y$: se $x \rightarrow 0$, então $y \rightarrow 0$.

24.2.

$$f'(x) = (1 - \sin(3x))' = -3 \cos(3x)$$

Assim,

$$\begin{aligned} f'(x) - 3f(x) + 3 = 0 &\Leftrightarrow -3 \cos(3x) - 3(1 - \sin(3x)) + 3 = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \cos(3x) - \sin(3x) = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \cos(3x) = \sin(3x) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 3x = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

24.3.

Para que a reta seja paralela à reta de equação $y = -3x$ tem que ter declive igual a -3 .

Pretendemos então resolver a equação seguinte:

$$\begin{aligned} -3 \cos(3x) = -3 &\Leftrightarrow \cos(3x) = 1 \Leftrightarrow 3x = 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x = \frac{2k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Pela alínea 24.1, determinamos que $f'(0) = -3$. Então, por exemplo, a reta tangente ao gráfico de f no ponto de abscissa 0 é paralela à reta indicada.

$$f(0) = 1 - \sin 0 = 1$$

O ponto $(0, 1)$ pertence a essa reta, donde:

$$1 = -3 \times 0 + b \Leftrightarrow b = 1$$

A reta de equação $y = -3x + 1$ é um exemplo de uma reta nas condições pretendidas.

25.

25.1. Reta tangente:

$$f'(x) = (4 \operatorname{sen}^3 x)' = 4 \times 3 \operatorname{sen}^2 x \cos x = 12 \operatorname{sen}^2 x \cos x$$

Seja m o declive da reta tangente.

$$m = f' \left(\frac{\pi}{6} \right) = 12 \times \frac{1}{4} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

Como $f \left(\frac{\pi}{6} \right) = 4 \times \frac{1}{8} = \frac{1}{2}$, o ponto $\left(\frac{\pi}{6}, \frac{1}{2} \right)$ pertence à reta, donde:

$$\frac{1}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{2} \times \frac{\pi}{6} + b \Leftrightarrow b = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}\pi}{4}$$

A equação reduzida da reta tangente é:

$$y = \frac{3\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}\pi}{4}$$

Reta normal:

Seja m' o declive da reta normal.

$$m' = -\frac{1}{\frac{3\sqrt{3}}{2}} = -\frac{2}{3\sqrt{3}} = -\frac{2\sqrt{3}}{9}$$

$$\frac{1}{2} = -\frac{2\sqrt{3}}{9} \times \frac{\pi}{6} + b \Leftrightarrow b = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}\pi}{27}$$

A equação reduzida da reta normal é:

$$y = -\frac{2\sqrt{3}}{9}x + \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}\pi}{27}$$

25.2. Reta tangente:

$$f'(x) = (2 + \cos(5x))' = -5 \operatorname{sen}(5x)$$

$$m = f' \left(\frac{\pi}{6} \right) = -5 \operatorname{sen} \left(\frac{5\pi}{6} \right) = -\frac{5}{2}$$

Como $f \left(\frac{\pi}{6} \right) = 2 - \frac{\sqrt{3}}{2}$, o ponto $\left(\frac{\pi}{6}, 2 - \frac{\sqrt{3}}{2} \right)$ pertence à reta, donde:

$$2 - \frac{\sqrt{3}}{2} = -\frac{5}{2} \times \frac{\pi}{6} + b \Leftrightarrow b = \frac{4 - \sqrt{3}}{2} + \frac{5\pi}{12}$$

A equação reduzida da reta tangente é:

$$y = -\frac{5}{2}x + \frac{4 - \sqrt{3}}{2} + \frac{5\pi}{12}$$

Reta normal:

$$m' = -\frac{1}{-\frac{5}{2}} = \frac{2}{5}$$

$$2 - \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{2}{5} \times \frac{\pi}{6} + b \Leftrightarrow b = \frac{4 - \sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{15}$$

A equação reduzida da reta normal é:

$$y = \frac{2}{5}x + \frac{4 - \sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{15}$$

25.3. Reta tangente:

$$f'(x) = (\ln(\operatorname{sen} x))' = \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}$$

$$m = f'\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)}{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{6}\right)} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$$

Como $f\left(\frac{\pi}{6}\right) = \ln\left(\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{6}\right)\right) = \ln\left(\frac{1}{2}\right)$, o ponto $\left(\frac{\pi}{6}, \ln\left(\frac{1}{2}\right)\right)$ pertence à reta, donde

$$\ln\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{3} \times \frac{\pi}{6} + b \Leftrightarrow b = \ln\left(\frac{1}{2}\right) - \frac{\sqrt{3}\pi}{6}$$

A equação reduzida da reta tangente é:

$$y = \sqrt{3}x + \ln\left(\frac{1}{2}\right) - \frac{\sqrt{3}\pi}{6}$$

Reta normal:

$$m' = -\frac{1}{\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\ln\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{3} \times \frac{\pi}{6} + b \Leftrightarrow b = \ln\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{\sqrt{3}\pi}{18}$$

A equação reduzida da reta normal é:

$$y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x + \ln\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{\sqrt{3}\pi}{18}$$

26.

26.1.

$$\begin{aligned} -1 \leq \sin\left(\frac{\pi}{6}(t-3)\right) \leq 1 &\Leftrightarrow -14,8 \leq 14,8 \sin\left(\frac{\pi}{6}(t-3)\right) \leq 14,8 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow -4,8 \leq 14,8 \sin\left(\frac{\pi}{6}(t-3)\right) + 10 \leq 24,8 \end{aligned}$$

A temperatura máxima é $24,8^\circ\text{C}$ e a temperatura mínima é $-4,8^\circ\text{C}$.

26.2. Como o período positivo mínimo da função seno é 2π , o período positivo mínimo de T é $\frac{2\pi}{\frac{\pi}{6}} = 12$. Isto significa que, se num determinado momento se regista uma certa temperatura, então, passados 12 meses, registar-se-á a mesma temperatura. O tempo que decorre entre dois momentos em que se regista a temperatura máxima é 12 meses e o mesmo se poderá afirmar sobre dois momentos em que se regista a temperatura mínima.

26.3.

$$\begin{aligned} T'(t) &= \left(14,8 \sin\left(\frac{\pi}{6}(t-3)\right) + 10\right)' = 14,8 \cos\left(\frac{\pi}{6}(t-3)\right) \times \frac{\pi}{6} = \\ &= \frac{14,8\pi}{6} \cos\left(\frac{\pi}{6}(t-3)\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T''(t) &= \left(\frac{14,8\pi}{6} \cos\left(\frac{\pi}{6}(t-3)\right)\right)' = -\frac{14,8\pi}{6} \sin\left(\frac{\pi}{6}(t-3)\right) \times \frac{\pi}{6} = \\ &= -\frac{14,8\pi^2}{36} \sin\left(\frac{\pi}{6}(t-3)\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T''(t) = 0 &\Leftrightarrow -\frac{14,8\pi^2}{36} \sin\left(\frac{\pi}{6}(t-3)\right) = 0 \Leftrightarrow \sin\left(\frac{\pi}{6}(t-3)\right) = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \frac{\pi}{6}(t-3) = k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow t-3 = 6k, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow t = 3 + 6k, k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Tabela de variação da derivada de T ao longo de um ano:

| | | | | | | | |
|------------------|------------------------|------------|-----------------------------|------------|------------------------------|------------|------------------------|
| x | 0 | | 3 | | 9 | | 12 |
| Sinal de T'' | $\frac{14,8\pi^2}{36}$ | + | 0 | - | 0 | + | $\frac{14,8\pi^2}{36}$ |
| Variação de T' | 0 | \nearrow | $\frac{14,8\pi}{6}$ máx. | \searrow | $-\frac{14,8\pi}{6}$ mín. | \nearrow | 0 |

Podemos verificar, pela tabela de variação de T' , que a temperatura varia mais rapidamente em $t = 3$, ou seja, no dia 1 de abril.

27.

27.1.

$$d(0) = 4e^{-0,2 \times 0} \cos\left(\frac{\pi \times 0}{6}\right) + 9 = 4 \times 1 \times 1 + 9 = 13$$

No instante inicial, a bola encontra-se a 13 cm do solo.

27.2.

$$\begin{aligned} d(t) = 9 &\Leftrightarrow 4e^{-0,2t} \cos\left(\frac{\pi t}{6}\right) + 9 = 9 \Leftrightarrow e^{-0,2t} \cos\left(\frac{\pi t}{6}\right) = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow e^{-0,2t} = 0 \vee \cos\left(\frac{\pi t}{6}\right) = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \cos\left(\frac{\pi t}{6}\right) = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \frac{\pi t}{6} = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow^* t = 3 + 6k, k \in \mathbb{N}_0 \end{aligned}$$

*No domínio considerado (o tempo é necessariamente não negativo).

A bola passa a 9 cm do solo pela primeira vez no instante 3 e volta a passar de 6 em 6 segundos.

27.3. A função T é contínua em \mathbb{R}_0^+ , por se tratar do produto de duas funções contínuas. Em particular, é contínua em $[0, 3]$. Como $T(0) = 13$, $T(3) = 9$ e $9 < 10 < 13$, pelo teorema de Bolzano-Cauchy, podemos concluir

que existe pelo menos um número real $c \in]0, 3[$ tal que $T(c) = 10$, isto é, existe pelo menos um instante em que a bola está a 10 cm do solo.

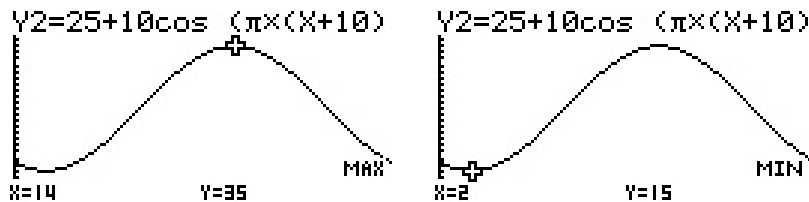
27.4.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(4e^{-0,2t} \cos \left(\frac{\pi t}{6} \right) + 9 \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (4e^{-0,2t}) \times \lim_{x \rightarrow +\infty} \cos \left(\frac{\pi t}{6} \right) + 9 = 9, \quad \text{pois}$$

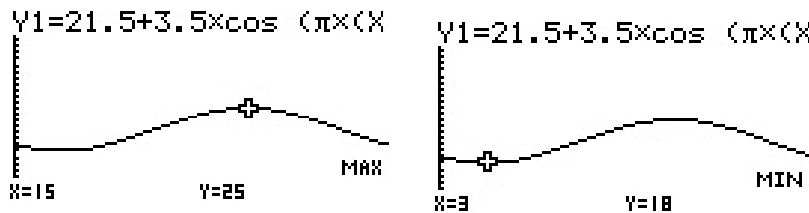
a função cosseno é limitada ($-1 \leq \cos x \leq 1, \forall x \in \mathbb{R}$) e $\lim_{x \rightarrow +\infty} (4e^{-0,2t}) = 0$.

À medida que o tempo passa, a distância da bola ao solo tende a estabilizar em torno de 9 cm.

28. Os gráficos seguintes representam parte da função f . Nestes gráficos, identificamos o valor máximo e o valor mínimo da função.



Os gráficos seguintes representam parte da função d . Nestes gráficos, identificamos o valor máximo e o valor mínimo da função.



Como podemos verificar pelas representações gráficas, o máximo e o mínimo de f são 35 e 15, respetivamente. Assim, a amplitude térmica fora de casa é 20°C . No que diz respeito à temperatura dentro de casa, podemos verificar que tem um máximo de 25 e um mínimo de 18, pelo que a amplitude térmica é de apenas 7°C .

Relativamente ao desfasamento térmico, podemos verificar que este é de uma hora, pois a temperatura máxima fora de casa é atingida às 14 horas, enquanto que a temperatura máxima dentro de casa é atingida às 15 horas.

A razão entre a amplitude térmica dentro de casa e a amplitude térmica fora

de casa é $\frac{7}{20} = 0,35$, ou seja, a amplitude térmica dentro de casa é superior à terça parte da amplitude térmica fora de casa. Além disso, o desfasamento térmico é inferior a 1,5 horas. Podemos então considerar que as condições de isolamento da referida habitação não são as ideais.

29.

29.1.

Uma vez que $[PQ]$ é paralelo ao eixo Oy , temos que $\overline{PQ} = 2 \operatorname{sen} \alpha$. Assim, podemos considerar que o triângulo $[PQR]$ tem base de comprimento $2 \operatorname{sen} \alpha$ e altura de comprimento $1 - \cos \alpha$ e a sua área pode ser dada pela expressão:

$$A(\alpha) = \frac{2 \operatorname{sen} \alpha \times (1 - \cos \alpha)}{2} = \frac{2 \operatorname{sen} \alpha - 2 \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha}{2} = \operatorname{sen} \alpha - \frac{\operatorname{sen}(2\alpha)}{2}$$

Como queríamos mostrar.

29.2.

$$A'(\alpha) = \left(\operatorname{sen} \alpha - \frac{\operatorname{sen}(2\alpha)}{2} \right)' = \cos \alpha - \frac{\cos(2\alpha) \times 2}{2} = \cos \alpha - \cos(2\alpha)$$

$$\begin{aligned} A'(\alpha) = 0 &\Leftrightarrow \cos \alpha - \cos(2\alpha) = 0 \Leftrightarrow \cos \alpha = \cos(2\alpha) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \alpha = 2\alpha + 2k\pi \vee \alpha = -2\alpha + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow -\alpha = 2k\pi \vee 3\alpha = 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \alpha = 2k\pi \vee \alpha = \frac{2k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow^* \alpha = \frac{2\pi}{3} \end{aligned}$$

* No domínio considerado.

Tabela de variação da derivada de A :

| α | $\frac{\pi}{2}$ | | $\frac{2\pi}{3}$ | | π |
|-----------------|-----------------|------------|-------------------------------|------------|-------|
| Sinal de A' | n.d. | + | 0 | - | n.d. |
| Variação de A | n.d. | \nearrow | $\frac{3\sqrt{3}}{4}$ máx. | \searrow | n.d. |

A função A é crescente em $\left] \frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3} \right]$, decrescente em $\left[\frac{2\pi}{3}, \pi \right[$ e tem um máximo, $\frac{3\sqrt{3}}{4}$ em $\alpha = \frac{2\pi}{3}$.

29.3.

Para que a reta tangente seja perpendicular à reta de equação $y = 2x$, esta deve ter declive $-\frac{1}{2}$, isto é, $A'(x) = -\frac{1}{2}$, para algum $x \in \left] \frac{2\pi}{3}, \frac{5\pi}{6} \right[$.

A função A' é contínua no seu domínio, por se tratar da diferença entre duas funções contínuas. Em particular, é contínua em $\left[\frac{2\pi}{3}, \frac{5\pi}{6} \right]$.

Como $A'\left(\frac{2\pi}{3}\right) = 0$, $A'\left(\frac{5\pi}{6}\right) = -\frac{1+\sqrt{3}}{2}$ e $-\frac{1+\sqrt{3}}{2} < -\frac{1}{2} < 0$, pelo teorema de Bolzano-Cauchy, podemos concluir que existe pelo menos um número real $c \in \left] \frac{2\pi}{3}, \frac{5\pi}{6} \right[$ tal que $A'(c) = -\frac{1}{2}$, isto é, existe pelo menos um ponto do gráfico de A , de abcissa pertencente a $\left] \frac{2\pi}{3}, \frac{5\pi}{6} \right[$, tal que a reta tangente ao gráfico de A nesse ponto é perpendicular à reta de equação $y = 2x$.

30.

30.1.

Seja D o ponto de coordenadas $(-2, 0)$. Sabemos que a circunferência intersecta o eixo Oy no ponto D e que $\widehat{DOB} = \alpha - \frac{\pi}{2}$.

Uma vez que a área da circunferência é 4π e, numa dada circunferência, a área de um setor circular é diretamente proporcional à amplitude do respetivo ângulo ao centro, a área do setor circular correspondente ao ângulo DOC é igual a:

$$\frac{\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) \times 4\pi}{2\pi} = 2\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) = 2\alpha - \pi$$

Por outro lado, a área do triângulo isósceles $[AOB]$ é dada por

$$\frac{2(2 \operatorname{sen} \alpha) \times (-2 \cos \alpha)}{2} = \frac{-8 \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha}{2} = -2 \operatorname{sen}(2\alpha)$$

Temos, então, que a área da região a sombreado é dada por:

$$f(\alpha) = 2\alpha - \pi - 2 \operatorname{sen}(2\alpha)$$

30.2.

$$f'(\alpha) = (2\alpha - \pi - 2 \sin(2\alpha))' = 2 - 4 \cos(2\alpha)$$

$$\begin{aligned} f'(\alpha) = 0 &\Leftrightarrow 2 - 4 \cos(2\alpha) = 0 \Leftrightarrow \cos(2\alpha) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 2\alpha = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \vee 2\alpha = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \alpha = \frac{\pi}{6} + k\pi \vee \alpha = -\frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow^* \alpha = \frac{5\pi}{6} \end{aligned}$$

*No domínio considerado.

Tabela de variação de f :

| α | $\frac{\pi}{2}$ | | $\frac{5\pi}{6}$ | | π |
|-----------------|-----------------|------------|-------------------------------------|------------|-------|
| Sinal de f' | n.d. | + | 0 | - | n.d. |
| Variação de f | n.d. | \nearrow | $\frac{2\pi}{3} + \sqrt{3}$ máx. | \searrow | n.d. |

A função f tem um máximo $\frac{2\pi}{3} + \sqrt{3}$ em $\alpha = \frac{5\pi}{6}$.

31.

31.1.

Domínio:

$$D_f = \mathbb{R}$$

Contradomínio:

$$-1 \leq \cos(3x) \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq -\cos(3x) \leq 1 \Leftrightarrow 2 \leq 3 - \cos(3x) \leq 4$$

Pelo que $D'_f = [2, 4]$.

Periodicidade:

Como a função cosseno é periódica de período positivo mínimo 2π , f é periódica de período positivo mínimo $\frac{2\pi}{3}$.

Paridade:

$$f(-x) = 3 - \cos(-3x) = 3 - \cos(3x) = f(x), \forall x \in D_f$$

Assim, esta função é par.

Continuidade:

A função f é contínua em \mathbb{R} , uma vez que é a diferença entre duas funções contínuas.

Existência de assíntotas:

Uma vez que esta função é contínua em \mathbb{R} , o seu gráfico não admite assíntotas verticais. Além disso, como se trata de uma função periódica, o seu gráfico também não tem assíntotas não verticais.

Extremos:

$$f'(x) = (3 - \cos(3x))' = 3 \sin(3x)$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3 \sin(3x) = 0 \Leftrightarrow \sin(3x) = 0 \Leftrightarrow 3x = k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = \frac{k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$$

Tabela de variação da derivada de f no intervalo $[0, \frac{2\pi}{3}]$:

| | | | | | |
|-----------------|-----------|------------|-----------------|------------|------------------|
| α | 0 | | $\frac{\pi}{3}$ | | $\frac{2\pi}{3}$ |
| Sinal de f' | 0 | + | 0 | - | 0 |
| Variação de f | 2 mín. | \nearrow | 4 máx. | \searrow | 2 mín. |

Uma vez que o período positivo mínimo da função f é $\frac{2\pi}{3}$, podemos dizer que o seu mínimo é 2 em $x = \frac{2k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$ e que o seu máximo é 4 em $x = \frac{\pi}{3} + \frac{2k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$.

Pontos de inflexão:

$$f''(x) = (3 \sin(3x))' = 9 \cos(3x)$$

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow 9 \cos(3x) = 0 \Leftrightarrow \cos(3x) = 0 \Leftrightarrow 3x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$$

Estudo do sinal de f'' e do sentido das concavidades do gráfico de f no intervalo $\left[0, \frac{2\pi}{3}\right]$:

| | | | | | | | |
|--|---|---|-----------------|---|-----------------|---|------------------|
| x | 0 | | $\frac{\pi}{6}$ | | $\frac{\pi}{2}$ | | $\frac{2\pi}{3}$ |
| Sinal de f'' | 9 | + | 0 | − | 0 | + | 9 |
| Sentido das concavidades do gráfico de f | 2 | ∪ | 3 P.I. | ∩ | 3 P.I. | ∪ | 2 |

Uma vez que o período positivo mínimo da função f é $\frac{2\pi}{3}$, podemos dizer que os pontos de coordenadas $\left(\frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{3}, 3\right)$, $k \in \mathbb{Z}$ são pontos de inflexão do gráfico de f .

31.2.

Domínio:

$$D_g = \mathbb{R}$$

Contradomínio:

$$D'_g = \mathbb{R}$$

Periodicidade:

Esta função não é periódica.

Paridade:

Esta função não é par nem ímpar.

Continuidade:

A função f é contínua em \mathbb{R} , por se tratar da soma de duas funções contínuas.

Existência de assíntotas:

Uma vez que esta função é contínua em \mathbb{R} , o seu gráfico não admite assíntotas verticais.

$$m = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x + \sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)}{x} = 2 + \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)}{x} = 2,$$

pois a função seno é limitada ($-1 \leq \sin x \leq 1, \forall x \in \mathbb{R}$) e $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$.

$$b = \lim_{x \rightarrow +\infty} (g(x) - 2x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(2x + \sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) - 2x\right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$$

Este limite não existe, uma vez que a função seno é periódica.
Conclui-se que a função g não admite assíntotas não verticais quando $x \rightarrow +\infty$.

Um resultado análogo se obtém quando se estuda a existência de assíntotas não verticais quando $x \rightarrow -\infty$. Desta forma, g não admite assíntotas.

Extremos:

$$g'(x) = \left(2x + \sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)\right)' = 2 + 2\cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$$

$$\begin{aligned} g'(x) = 0 &\Leftrightarrow 2 + 2\cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = 0 \Leftrightarrow \cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = -1 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 2x + \frac{\pi}{3} = \pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 2x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Tabela de variação da derivada de g no intervalo $[0, \pi]$:

| | | | | | |
|-----------------|----------------------|------------|------------------|------------|-----------------------------|
| α | 0 | | $\frac{\pi}{3}$ | | π |
| Sinal de g' | 3 | + | 0 | + | 3 |
| Variação de g | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | \nearrow | $\frac{2\pi}{3}$ | \nearrow | $\frac{\sqrt{3}}{2} + 2\pi$ |

Uma vez que o período positivo mínimo da função g' é π , a função g é crescente em \mathbb{R} , pelo que não admite extremos.

Pontos de inflexão:

$$g''(x) = \left(2 + 2\cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)\right)' = -4\sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$$

$$\begin{aligned} g''(x) = 0 &\Leftrightarrow -4\sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = 0 \Leftrightarrow \sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = 0 \Leftrightarrow 2x + \frac{\pi}{3} = k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 2x = -\frac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Estudo do sinal de g'' e do sentido das concavidades do gráfico de g no intervalo $[0, \pi]$:

| | | | | | | | |
|--|----------------------|--------|--------------------------|--------|--------------------------|--------|-----------------------------|
| x | 0 | | $\frac{\pi}{3}$ | | $\frac{5\pi}{6}$ | | π |
| Sinal de g'' | $-2\sqrt{3}$ | $-$ | 0 | $+$ | 0 | $-$ | $-2\sqrt{3}$ |
| Sentido das concavidades do gráfico de g | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | \cap | $\frac{2\pi}{3}$ P.I. | \cup | $\frac{5\pi}{3}$ P.I. | \cap | $\frac{\sqrt{3}}{2} + 2\pi$ |

Uma vez que o período positivo mínimo da função g'' é π , podemos dizer que os pontos de abcissa $-\frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$ são pontos de inflexão ao gráfico de g .

31.3.

Domínio:

$$D_h = \left\{ x \in \mathbb{R} : x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$$

Contradomínio:

$$D'_h = \mathbb{R}$$

Periodicidade:

Esta função não é periódica.

Paridade:

$$h(-x) = \frac{-x}{2} + \operatorname{tg}(-x) = -\left(\frac{x}{2} + \operatorname{tg}(x)\right) = -h(x), \forall x \in D_h$$

Pelo que, esta função é ímpar.

Continuidade:

A função f é contínua em D_h , uma vez que é a soma de duas funções contínuas.

Existência de assíntotas:

Para qualquer valor $k \in \mathbb{Z}$, temos:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{2} + 2k\pi)^-} h(x) &= \lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{2} + 2k\pi)^-} \left(\frac{x}{2} + \operatorname{tg} x \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{2} + 2k\pi)^-} \left(\frac{\frac{\pi}{2} + k\pi}{2} + \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{2} + k\pi \right) \right) = \\ &= \frac{\frac{\pi}{2} + k\pi}{2} + \infty = +\infty \end{aligned}$$

De forma análoga se prova que:

$$\lim_{x \rightarrow (\frac{3\pi}{2} + 2k\pi)^-} h(x) = -\infty$$

Desta forma, as retas de equação $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ são assíntotas verticais ao gráfico de h .

O gráfico desta função não admite assíntotas não verticais.

Extremos:

$$h'(x) = \left(\frac{x}{2} + \operatorname{tg}(x) \right)' = \frac{1}{2} + \frac{1}{\cos^2 x}$$

A função h' é sempre positiva, pelo que a função h é sempre crescente nos intervalos onde esteja definida. Não existem por isso extremos.

Pontos de inflexão:

$$h''(x) = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\cos^2 x} \right)' = -2 \times \frac{1}{\cos^3 x} \times (-\operatorname{sen} x) = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos^3 x}$$

$$h''(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{\operatorname{sen} x}{\cos^3 x} = 0 \Leftrightarrow^* x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

*No domínio considerado.

Estudo do sinal de h'' e do sentido das concavidades do gráfico de h no intervalo $[0, 2\pi]$:

| | | | | | | | | | |
|--|-----------|---|-----------------|---|-------------------------|---|------------------|---|---------------|
| x | 0 | | $\frac{\pi}{2}$ | | π | | $\frac{3\pi}{2}$ | | 2π |
| Sinal de h'' | 0 | + | n.d. | − | 0 | + | n.d. | − | 0 |
| Sentido das concavidades do gráfico de h | 0 P.I. | ∪ | n.d. | ∩ | $\frac{\pi}{2}$ P.I. | ∪ | n.d. | ∩ | π P.I. |

Uma vez que o período positivo mínimo da função h'' é 2π , podemos dizer que os pontos de abcissa $k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ são pontos de inflexão ao gráfico de h .

32. Consideremos o triângulo $[CDF]$. Pela Lei dos Senos, vem que:

$$\frac{2}{\text{sen}(\widehat{CDF})} = \frac{10}{\text{sen}(\widehat{DFC})}$$

Consideremos agora o triângulo $[BDE]$. Pela Lei dos Senos, vem que:

$$\frac{2}{\text{sen}(\widehat{BDE})} = \frac{6}{\text{sen}(\widehat{BED})}$$

Desta forma, uma vez que o ângulo CDF e o ângulo BDE são coincidentes, temos:

$$\frac{6}{\text{sen}(\widehat{BED})} = \frac{10}{\text{sen}(\widehat{DFC})} \Leftrightarrow \frac{\text{sen}(\widehat{BED})}{\text{sen}(\widehat{DFC})} = \frac{6}{10}$$

Por outro lado, os ângulos AEF e BED são verticalmente opostos e os ângulos DFC e AFE são suplementares, donde $\text{sen}(\widehat{AEF}) = \text{sen}(\widehat{BED})$ e $\text{sen}(\widehat{DFC}) = \text{sen}(\widehat{AFE})$.

Considerando agora o triângulo $[AEF]$, pela Lei dos Senos:

$$\begin{aligned} \frac{5}{\text{sen}(\widehat{EFA})} &= \frac{\overline{FA}}{\text{sen}(\widehat{AEF})} \Leftrightarrow \frac{5}{\text{sen}(\widehat{DFC})} = \frac{\overline{AF}}{\text{sen}(\widehat{BED})} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \overline{FA} = \frac{5 \text{sen}(\widehat{BED})}{\text{sen}(\widehat{DFC})} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \overline{FA} = \frac{5 \times 6}{10} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \overline{FA} = 3 \end{aligned}$$

33. Sabemos que:

$$\operatorname{sen} \alpha - \cos \alpha = \frac{1}{3} \Leftrightarrow \operatorname{sen} \alpha = \cos \alpha + \frac{1}{3}$$

Pelo Teorema Fundamental da Trigonometria:

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 &\Leftrightarrow \left(\cos \alpha + \frac{1}{3} \right)^2 + \cos^2 \alpha = 1 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 2 \cos^2 \alpha + \frac{2}{3} \cos \alpha - \frac{8}{9} = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \cos \alpha = \frac{-\frac{2}{3} \pm \sqrt{\frac{4}{9} - 4 \times 2 \times \left(-\frac{8}{9}\right)}}{4} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow^* \cos \alpha = \frac{-1 + \sqrt{17}}{6} \end{aligned}$$

*Uma vez que α é agudo.

Por outro lado:

$$\operatorname{sen} \alpha - \cos \alpha = \frac{1}{3} \Leftrightarrow \operatorname{sen} \alpha = \frac{-1 + \sqrt{17}}{6} + \frac{1}{3} \Leftrightarrow \operatorname{sen} \alpha = \frac{1 + \sqrt{17}}{6}$$

Desta forma:

$$\begin{aligned}
 \operatorname{tg}^2 \alpha - \frac{1}{\operatorname{tg}^2 \alpha} &= \frac{\operatorname{sen}^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} - \frac{\cos^2 \alpha}{\operatorname{sen}^2 \alpha} = \\
 &= \left(\frac{\frac{1+\sqrt{17}}{6}}{\frac{-1+\sqrt{17}}{6}} \right)^2 - \left(\frac{\frac{-1+\sqrt{17}}{6}}{\frac{1+\sqrt{17}}{6}} \right)^2 = \\
 &= \left(\frac{1+\sqrt{17}}{-1+\sqrt{17}} \right)^2 - \left(\frac{-1+\sqrt{17}}{1+\sqrt{17}} \right)^2 = \\
 &= \left(\frac{18+2\sqrt{17}}{16} \right)^2 - \left(\frac{18-2\sqrt{17}}{16} \right)^2 = \\
 &= \left(\frac{9+\sqrt{17}}{8} \right)^2 - \left(\frac{9-\sqrt{17}}{8} \right)^2 = \\
 &= \frac{81+17+18\sqrt{17}}{64} - \frac{81+17-18\sqrt{17}}{64} = \\
 &= \frac{36\sqrt{17}}{64} = \\
 &= \frac{9\sqrt{17}}{16}
 \end{aligned}$$

34.

34.1.

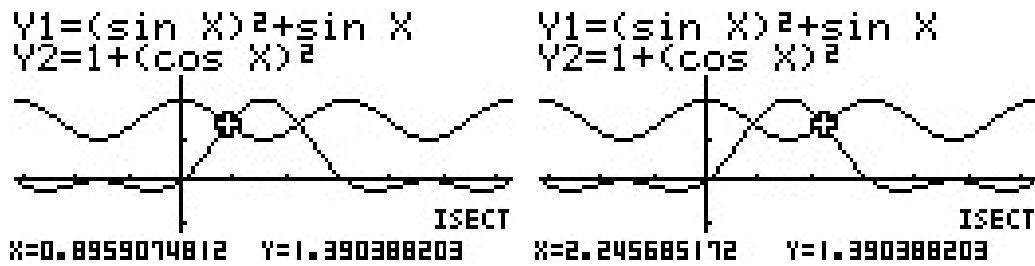
Comecemos por determinar o valor de $\operatorname{sen} \alpha$.

$$\operatorname{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \Leftrightarrow \operatorname{sen}^2 + \frac{25}{36} = 1 \Leftrightarrow^* \operatorname{sen} \alpha = \frac{\sqrt{11}}{6}$$

*No intervalo considerado.

$$\begin{aligned}
 (f - g)(\alpha) &= \operatorname{sen}^2 \left(\arccos \left(\frac{5}{6} \right) \right) + \operatorname{sen} \left(\arccos \left(\frac{5}{6} \right) \right) - 1 - \cos^2 \left(\arccos \left(\frac{5}{6} \right) \right) \\
 &= \frac{11}{36} + \frac{\sqrt{11}}{6} - 1 - \frac{25}{36} = \\
 &= \frac{6\sqrt{11} - 50}{36}
 \end{aligned}$$

34.2.



Como podemos verificar, pelos gráficos acima apresentados, as soluções inteiras da inequação $f(x) > g(x)$ são 1 e 2.

34.3.

$$\begin{aligned}
 & |f(x) - g(x)| = 1 \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow & \sin^2 x + \sin x - 1 - \cos^2 x = 1 \vee \sin^2 x + \sin x - 1 - \cos^2 x = -1 \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow & 2 \sin^2 x + \sin x - 3 = 0 \vee 2 \sin^2 x + \sin x - 1 = 0 \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow & \sin x = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4 \times 2 \times (-3)}}{4} \vee \sin x = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4 \times 2 \times (-1)}}{4} \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow & \sin x = \frac{-1 \pm 5}{4} \vee \sin x = \frac{-1 \pm 3}{4} \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow & \sin x = 1 \vee \sin x = -1 \vee \sin x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow^* & x = -\frac{\pi}{2} \vee x = \frac{\pi}{6} \vee x = \frac{\pi}{2} \vee x = \frac{5\pi}{6} \vee x = \frac{3\pi}{2}
 \end{aligned}$$

Os pontos que gozam da mesma propriedade são:

$$\begin{aligned}
 & P_1 = \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right), Q_1 = \left(-\frac{\pi}{2}, 1\right), P_2 = \left(\frac{\pi}{6}, \frac{3}{4}\right), Q_2 = \left(\frac{\pi}{6}, \frac{7}{4}\right), \\
 & P_3 = \left(\frac{\pi}{2}, 2\right), Q_3 = \left(\frac{\pi}{2}, 1\right), P_4 = \left(\frac{5\pi}{6}, \frac{3}{4}\right), Q_4 = \left(\frac{5\pi}{6}, \frac{7}{4}\right), P_5 = \left(\frac{3\pi}{2}, 0\right) \text{ e} \\
 & Q_5 = \left(\frac{3\pi}{2}, 1\right).
 \end{aligned}$$

35.

$$\begin{aligned}
 & \operatorname{sen}^6 x + \cos^6 x - 2 \operatorname{sen}^4 x - \cos^4 x + \operatorname{sen}^2 x = \\
 = & \operatorname{sen}^4 x (\operatorname{sen}^2 x - 1) + \cos^4 x (\cos^2 x - 1) - \operatorname{sen}^4 x + \operatorname{sen}^2 x = \\
 = & -\operatorname{sen}^4 x \cos^2 x - \cos^4 x \operatorname{sen}^2 x - \operatorname{sen}^4 x + \operatorname{sen}^2 x = \\
 = & -\operatorname{sen}^4 x (1 + \cos^2 x) + \operatorname{sen}^2 x (1 - \cos^4 x) = \\
 = & -\operatorname{sen}^4 x (1 + \cos^2 x) + \operatorname{sen}^2 x (1 - \cos^2 x)(1 + \cos^2 x) = \\
 = & -\operatorname{sen}^4 x (1 + \cos^2 x) + \operatorname{sen}^2 x \operatorname{sen}^2 x (1 + \cos^2 x) = \\
 = & -\operatorname{sen}^4 x (1 + \cos^2 x) + \operatorname{sen}^4 x (1 + \cos^2 x) = 0
 \end{aligned}$$

Como queríamos mostrar.

36.

36.1.

$$\begin{aligned}
 \sqrt{3} \operatorname{sen} x - \cos x = 1 & \Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} \operatorname{sen} x - \frac{1}{2} \cos x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \\
 & \Leftrightarrow \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) \operatorname{sen} x - \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{6}\right) \cos x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \\
 & \Leftrightarrow \operatorname{sen}\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \\
 & \Leftrightarrow x - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \vee x - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \\
 & \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \vee x = \pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}
 \end{aligned}$$

36.2.

$$\begin{aligned}
 \operatorname{sen} x - \cos x = \sqrt{2} &\Leftrightarrow \frac{\operatorname{sen} x}{\sqrt{2}} - \frac{\cos x}{\sqrt{2}} = 1 \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} \operatorname{sen} x - \frac{\sqrt{2}}{2} \cos x = 1 \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \operatorname{sen} x - \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right) \cos x = 1 \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow \operatorname{sen}\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 1 \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow x - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow x = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}
 \end{aligned}$$

36.3.

$$\begin{aligned}
 \cos x = 2 \operatorname{sen}^2\left(\frac{x}{2}\right) &\Leftrightarrow \cos x = 2 - 2 \cos^2\left(\frac{x}{2}\right) \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow^* \cos(2y) = 2 - 2 \cos^2 y \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow \cos^2 y - \operatorname{sen}^2 y = 2 - 2 \cos^2 y \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow 3 \cos^2 y - 1 + \cos^2 y = 2 \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow 4 \cos^2 y = 3 \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow \cos^2 y = \frac{3}{4} \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow \cos y = \pm \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow^{**} \frac{x}{2} = \frac{\pi}{6} + k\pi \vee \frac{x}{2} = -\frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \vee x = \frac{5\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}
 \end{aligned}$$

*Efetuando a mudança de variável $\frac{x}{2} = y$.

**Voltando à variável original.

36.4.

$$\begin{aligned}
 & \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) + \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}\cos(2x) - \frac{1}{4} \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow & \frac{\sqrt{3}}{2}\sin x + \frac{1}{2}\cos x + \frac{1}{2}\cos x - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin x = \frac{1}{2}(\cos^2 x - \sin^2 x) - \frac{1}{4} \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow & \cos x = \frac{1}{2}(\cos^2 x - 1 + \cos^2 x) - \frac{1}{4} \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow & \cos x - \cos^2 x + \frac{3}{4} = 0 \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow & \cos x = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4 \times (-1 \times \frac{3}{4})}}{-2} \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow & \cos x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow & x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \vee x = \frac{4\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}
 \end{aligned}$$

37.

$$\begin{aligned}
 \sin(a - b) + \cos(a + b) &= \sin a \cos b - \cos a \sin b + \cos a \cos b - \sin a \sin b = \\
 &= \sin a(\cos b - \sin b) + \cos a(\cos b - \sin b) = \\
 &= (\sin a + \cos a)(\cos b - \sin b)
 \end{aligned}$$

Como queríamos mostrar.

38.

38.1.

Sabemos que altura mínima é 2. Assim:

$$a - b = 2 \Leftrightarrow a = 2 + b$$

Sabemos também que a altura máxima é 22. Assim:

$$a + b = 22 \Leftrightarrow 2 + b + b = 22 \Leftrightarrow 2b = 20 \Leftrightarrow b = 10$$

Temos, então, que $b = 10$ e $a = 12$.

O ângulo correspondente a $t = 0$ é 0, pelo que $d = 0$.

Por fim, uma vez que o período de h é 30, temos que:

$$\frac{2\pi}{c} = 30 \Leftrightarrow c = \frac{\pi}{15}$$

38.2.

$$\begin{aligned} & \cos^2 a + \cos^2 b + \cos^2 c - 2 \cos a \cos b \cos c = \\ &= \cos^2 a + \cos^2 b + \cos^2(a+b) - 2 \cos a \cos b \cos(a+b) = \\ &= \cos^2 a + \cos^2 b + (\cos a \cos b - \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b)^2 - 2 \cos a \cos b (\cos a \cos b - \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b) = \\ &= \cos^2 a + \cos^2 b + \cos^2 a \cos^2 b + \operatorname{sen}^2 a \operatorname{sen}^2 b - 2 \cos a \cos b \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b - \\ &\quad - 2 \cos^2 a \cos^2 b + 2 \cos a \cos b \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b = \\ &= \cos^2 a + \cos^2 b + (1 - \cos^2 a)(1 - \cos^2 b) - \cos^2 a \cos^2 b = \\ &= \cos^2 a + \cos^2 b + 1 - \cos^2 a - \cos^2 b + \cos^2 a \cos^2 b - \cos^2 a \cos^2 b = \\ &= 1 \end{aligned}$$

Como queríamos mostrar.

39. A função é contínua, por se tratar da soma entre duas funções contínuas: a função constante $x \mapsto 1$ e a composta da função módulo com a função seno $x \mapsto |\operatorname{sen} x|$.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \pi^+} \frac{f(x) - 1}{x - \pi} &= \lim_{x \rightarrow \pi^+} \frac{1 + |\operatorname{sen} x| - 1}{x - \pi} \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x \rightarrow \pi^+} \frac{|\operatorname{sen} x|}{|x - \pi|} = \\ &= \left| \lim_{x \rightarrow \pi^+} \frac{\operatorname{sen} x}{x - \pi} \right| = \left| \lim_{x \rightarrow \pi^+} \frac{-\operatorname{sen}(x - \pi)}{x - \pi} \right| \stackrel{*}{=} \left| - \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{\operatorname{sen} y}{y} \right| = 1 \end{aligned}$$

* Considerando a mudança de variável $x - \pi = y$: se $x \rightarrow \pi^+$, então $y \rightarrow 0^+$.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \pi^-} \frac{f(x) - 1}{x - \pi} &= \lim_{x \rightarrow \pi^-} \frac{1 + |\operatorname{sen} x| - 1}{x - \pi} \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x \rightarrow \pi^-} \frac{|\operatorname{sen} x|}{-|x - \pi|} = \\ &= - \left| \lim_{x \rightarrow \pi^-} \frac{\operatorname{sen} x}{x - \pi} \right| = - \left| \lim_{x \rightarrow \pi^-} \frac{-\operatorname{sen}(x - \pi)}{x - \pi} \right| \stackrel{*}{=} - \left| - \lim_{y \rightarrow 0^-} \frac{\operatorname{sen} y}{y} \right| = -1 \end{aligned}$$

Conclui-se que não existe derivada de f em $x = \pi$.

40.

40.1. Começemos por calcular $g''(x)$:

$$\begin{aligned} g'(x) &= \left(\left(\frac{x}{2k} + 1 \right) \operatorname{sen}(kx) \right)' = \frac{1}{2k} \operatorname{sen}(kx) + \left(\frac{x}{2k} + 1 \right) \cos(kx) \times k = \\ &= \frac{1}{2k} \operatorname{sen}(kx) + \left(\frac{x}{2} + k \right) \cos(kx) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g''(x) &= \left(\frac{1}{2k} \operatorname{sen}(kx) + \left(\frac{x}{2} + k \right) \cos(kx) \right)' = \\ &= \frac{1}{2} \cos(kx) + \frac{1}{2} \cos(kx) - \left(\frac{xk}{2} + k^2 \right) \operatorname{sen}(kx) = \\ &= \cos(kx) - \left(\frac{xk}{2} + k^2 \right) \operatorname{sen}(kx) \end{aligned}$$

Então:

$$g''(x) + k^2 g(x) = \cos(kx) - \left(\frac{xk}{2} + k^2 \right) \operatorname{sen}(kx) + k^2 \left(\frac{x}{2k} + 1 \right) \operatorname{sen}(kx) = \cos(kx)$$

40.2.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left(\frac{x}{2k} + 1 \right) \operatorname{sen}(kx)}{x} &\stackrel{\left(\frac{0}{0} \right)}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x}{2k} + 1 \right) \times \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen}(kx)}{x} = \\ &= 1 \times k \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen}(kx)}{kx} = \\ &=^* k \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen}(y)}{y} = \\ &= k \end{aligned}$$

* Considerando a mudança de variável $kx = y$: se $x \rightarrow 0$, então $y \rightarrow 0$.

40.3.

$$g'(0) = \frac{1}{2k} \operatorname{sen}(0) + \left(\frac{0}{2} + k \right) \cos(0) = k$$

Assim, a equação reduzida da reta é $y = kx + b$.

$$g(0) = \left(\frac{0}{2k} + 1 \right) \operatorname{sen}(0) = 0$$

Temos que o ponto $(0, 0)$ pertence à reta, logo:

$$0 = k \times 0 + b \Leftrightarrow b = 0$$

Concluimos que a reta tangente ao gráfico de g no ponto de abcissa 0 tem equação $y = kx$.

41.

41.1.

$$D_g = \{x \in \mathbb{R} : \sin(\pi x) \neq 0\}$$

$$\sin(\pi x) = 0 \Leftrightarrow \pi x = k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = k, k \in \mathbb{Z}$$

Logo, $D_g = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$.

41.2. A função é contínua em $]0, 1[$, pois é o quociente de duas funções contínuas.

Em $x = 0$:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2 - x}{\sin(\pi x)} \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x(x-1)}{\sin(\pi x)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{\sin(\pi x)} \times \lim_{x \rightarrow 0^+} (x-1) = \\ &= \frac{1}{\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin(\pi x)}{x}} \times (-1) = \\ &= \frac{-1}{\pi \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin(\pi x)}{\pi x}} = \\ &=^* \frac{-1}{\pi \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{\sin(y)}{y}} = \\ &= -\frac{1}{\pi} \end{aligned}$$

* Considerando a mudança de variável $\pi x = y$: se $x \rightarrow 0^+$, então $y \rightarrow 0^+$.

Assim, para que a função seja contínua em $x = 0$, temos que $a = -\frac{1}{\pi}$.

Em $x = 1$:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 1^-} g(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2 - x}{\sin(\pi x)} \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x(x-1)}{\sin(\pi x)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x-1}{-\sin(\pi x - \pi)} \times \lim_{x \rightarrow 1^-} x = \\ &= -\frac{1}{\pi} \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\pi x - \pi}{\sin(\pi x - \pi)} \times 1 = \\ &= -\frac{1}{\pi} \times \frac{1}{\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\sin(\pi x - \pi)}{\pi x - \pi}} = \\ &=^* -\frac{1}{\pi} \times \frac{1}{\lim_{y \rightarrow 0^-} \frac{\sin(y)}{y}} = \\ &= -\frac{1}{\pi}\end{aligned}$$

* Considerando a mudança de variável $\pi x - \pi = y$: se $x \rightarrow 1^-$, então $y \rightarrow 0^-$.

Assim, para que a função seja contínua em $x = 1$, temos que $b = -\frac{1}{\pi}$.

42.

42.1.

Uma vez que se trata de uma pirâmide regular então o triângulo $[ABC]$ é equilátero. Assim, temos que:

$$\widehat{CAD} = \frac{2\pi - \alpha - \frac{\pi}{3}}{2} \Leftrightarrow \widehat{CAD} = \frac{5\pi}{6} - \frac{\alpha}{2}$$

Sabemos também que a área lateral da pirâmide é o triplo da área do triângulo $[ACD]$ de base $[AC]$ e altura h .

Uma vez que $\overline{AD} = 2$, temos que:

$$\sin\left(\frac{5\pi}{6} - \frac{\alpha}{2}\right) = \frac{h}{2} \Leftrightarrow h = 2 \sin\left(\frac{5\pi}{6} - \frac{\alpha}{2}\right)$$

e que:

$$\cos\left(\frac{5\pi}{6} - \frac{\alpha}{2}\right) = \frac{\overline{AC}}{2} \Leftrightarrow \overline{AC} = 4 \cos\left(\frac{5\pi}{6} - \frac{\alpha}{2}\right)$$

Assim, a área do triângulo $[ACD]$ é dada, em função de α , por:

$$\begin{aligned} & \frac{4 \cos\left(\frac{5\pi}{6} - \frac{\alpha}{2}\right) \times 2 \sin\left(\frac{5\pi}{6} - \frac{\alpha}{2}\right)}{2} = \\ &= 4 \cos\left(\frac{5\pi}{6} - \frac{\alpha}{2}\right) \sin\left(\frac{5\pi}{6} - \frac{\alpha}{2}\right) = \\ &= 2 \sin\left(\frac{5\pi}{3} - \alpha\right) = \\ &= 2 \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} \cos \alpha - \frac{1}{2} \operatorname{sen} \alpha \right) = \\ &= -\sqrt{3} \cos \alpha - \operatorname{sen} \alpha \end{aligned}$$

Podemos, então, afirmar que a área lateral da pirâmide, A , pode ser dada em função de α , por:

$$-3\sqrt{3} \cos \alpha - 3 \operatorname{sen} \alpha$$

42.2.

$$A(\pi) = -3\sqrt{3} \cos \pi - 3 \operatorname{sen} \pi = 3\sqrt{3}$$

Esta é a área lateral do tetraedro.

42.3.

$$A'(\alpha) = (-3\sqrt{3} \cos \alpha - 3 \operatorname{sen} \alpha)' = 3\sqrt{3} \operatorname{sen} \alpha - 3 \cos \alpha$$

$$\begin{aligned} A'(\alpha) = 0 & \Leftrightarrow 3\sqrt{3} \operatorname{sen} \alpha - 3 \cos \alpha = 0 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} \operatorname{sen} \alpha - \frac{1}{2} \cos \alpha = 0 \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) \operatorname{sen} \alpha - \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{6}\right) \cos \alpha = 0 \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow \operatorname{sen}\left(\alpha - \frac{\pi}{6}\right) = 0 \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow \alpha - \frac{\pi}{6} = k\pi, k \in \mathbb{Z} \\ & \Leftrightarrow \alpha = \frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \\ & \Leftrightarrow^* \alpha = \frac{7\pi}{6} \end{aligned}$$

* No intervalo considerado.

Tabela de variação de A :

| α | $\frac{2\pi}{3}$ | | $\frac{7\pi}{6}$ | | $\frac{5\pi}{3}$ |
|-----------------|------------------|------------|------------------|------------|------------------|
| Sinal de A' | n.d. | + | 0 | − | n.d. |
| Variação de A | n.d. | \nearrow | 6 Máx. | \searrow | n.d. |

Podemos, então, verificar que a função atinge o máximo 6 em $\alpha = \frac{7\pi}{6}$.

42.4. A função A é contínua em $\left] \frac{2\pi}{3}, \frac{5\pi}{3} \right[$, por se tratar da subtração de duas funções contínuas. Em particular, é contínua em $\left[\frac{5\pi}{6}, \pi \right]$. Além disso:

$$A\left(\frac{5\pi}{6}\right) = -3\sqrt{3} \cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) - 3 \sin\left(\frac{5\pi}{6}\right) = -3\sqrt{3} \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - 3 \times \frac{1}{2} = 3$$

e

$$A(\pi) = -3\sqrt{3} \cos \pi - 3 \sin \pi = 3\sqrt{3}$$

Como $3 < 3\sqrt{2} < 3\sqrt{3}$, pelo teorema de Bolzano-Cauchy, podemos concluir que existe pelo menos um número real $c \in \left] \frac{5\pi}{6}, \pi \right[$, tal que $A(c) = 3\sqrt{2}$, isto é, existe pelo menos um valor de α para o qual a área lateral da pirâmide é igual a $3\sqrt{2}$.

Além disso, pela tabela de variação da alínea anterior, podemos verificar que a função A é estritamente crescente no intervalo $\left[\frac{5\pi}{6}, \pi \right]$, pelo que este valor de α é único.