Resolução da Ficha de Trabalho nº 8 – Matemática A – 10º Ano – do professor Carlos da Silva Pereira

Funções reais de variável real: Função Composta, Inversa, Monotonia, Concavidades, Paridade e Transformações

1.

1.1. $G_f = \{(-2,4),(-1,1),(0,0),(1,1),(2,4)\}$. f não é injetiva porque, por exemplo, $-2 \neq 2 \wedge f(-2) = f(2)$.

f não é sobrejetiva porque, por exemplo, 3 é elemento do conjunto de chegada e não é elemento do contradomínio de f .

1.2. g é sobrejetiva porque o seu contradomínio coincide com o conjunto de chegada, g é injetiva porque objetos diferentes têm imagens diferentes. Logo g é bijetiva, como tal admite inversa.

$g^{-1}:\{a,b,c\} \to \{a,b,c\}$ tal que $g^{-1}(a)=c$, $g^{-1}(b)=a$ e $g^{-1}(c)=b$

1.3. h é sobrejetiva porque o seu contradomínio coincide com o conjunto de chegada, repare-se que $\forall y \in \mathbb{R}, \exists x \in \mathbb{R}: y = h(x)$, isto porque $y = 2x+4 \Leftrightarrow x = \dfrac{y-4}{2}$. h é injetiva porque $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R},\ f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$, repare-se que $f(x_1) = f(x_2) \Leftrightarrow 2x_1 + 4 = 2x_2 + 4 \Leftrightarrow 2x_1 = 2x_2 \Leftrightarrow x_1 = x_2$. Logo h é bijetiva, como tal admite inversa.

$D_{h^{-1}} = D'_h = \mathbb{R}$, então $h^{-1}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, vejamos agora a expressão analítica de h^{-1} .

$y = 2x - 4 \Leftrightarrow x = \dfrac{y-4}{2}$, pelo que $h^{-1}(x) = \dfrac{x-4}{2} = \dfrac{1}{2}x - 2$

1.4. a) $(f \circ h)(-3) = f(h(-3)) \underset{h(-3)=2(-3)+4=-6+4=-2}{=} f(-2) = 4$

b) $g^{-1}(b) = a$ (vide 1.2.)

c) $(h^{-1} \circ f)(2) = h^{-1}(f(2)) = h^{-1}(4) = \dfrac{1}{2} \times 4 - 2 = 0$

d) $(g \circ g^{-1})(c) = g(g^{-1}(c)) = g(b) = c$

outro processo: $g \circ g^{-1} = Id_A$ sendo $A = \{a,b,c\}$, pelo que $(g \circ g^{-1})(c) = Id(c) = c$

e) O que se pretende é determinar o valor de x para o qual $h(x) = 10$

$h(x) = 10 \Leftrightarrow 2x + 4 = 10 \Leftrightarrow x = 3$, pelo que $h^{-1}(10) = 3$

1.5. $D_{f \circ h} = \{x \in \mathbb{R} : x \in D_h \wedge h(x) \in D_f\} = \{x \in \mathbb{R}:\ 2x+4 = \pm 2 \vee 2x+4 = \pm 1 \vee 2x+4 = 0\} \underset{\downarrow}{=} \left\{-3, -\dfrac{5}{2}, -2, -\dfrac{3}{2}, -1\right\}$

$$2x+4=-2 \Leftrightarrow 2x=-6 \Leftrightarrow x=-3\ ;\ 2x+4=2 \Leftrightarrow 2x=-2 \Leftrightarrow x=-1$$

$$2x+4=-1 \Leftrightarrow 2x=-5 \Leftrightarrow x=-\frac{5}{2}\ ;\ 2x+4=1 \Leftrightarrow 2x=-3 \Leftrightarrow x=-\frac{3}{2}$$

$$2x+4=0 \Leftrightarrow 2x=-4 \Leftrightarrow x=-2$$

$h(-3) = 2(-3)+4 = -6+4 = -2$; $(f \circ h)(-3) = f(h(-3)) = f(-2) = 4$

$h\left(-\frac{5}{2}\right)=2\left(-\frac{5}{2}\right)+4=-5+4=-1$; $\left(f\,o\,h\right)\left(-\frac{5}{2}\right)=f\left(h\left(-\frac{5}{2}\right)\right)=f\left(-1\right)=1$

$h(-2)=2\left(-2\right)+4=-4+4=0$; $\left(f\,o\,h\right)\left(-2\right)=f\left(h\left(-2\right)\right)=f\left(0\right)=0$

$h\left(-\frac{3}{2}\right)=2\left(-\frac{3}{2}\right)+4=-3+4=1$; $\left(f\,o\,h\right)\left(-\frac{3}{2}\right)=f\left(h\left(-\frac{3}{2}\right)\right)=f\left(1\right)=1$

$h(-1)=2\left(-1\right)+4=-2+4=2$; $\left(f\,o\,h\right)\left(-1\right)=f\left(h\left(-1\right)\right)=f\left(2\right)=4$

x	-3	$-\frac{5}{2}$	-2	$-\frac{3}{2}$	-1
$\left(f\,o\,h\right)(x)$	4	1	0	1	4

1.6. $A=\{0,1,2\}$; $B=\{0,1,4\}$, por exemplo.

2. $f(2)=5$, pelo que $f^{-1}(5)=2$

O declive da reta que é o gráfico de g é $\frac{1+5}{4-0}=\frac{6}{4}=\frac{3}{2}$ e a ordenada na origem é -5 , logo $g(x)=\frac{3}{2}x-5$

$\left(g\,o\,f^{-1}\right)(5)=g\left(f^{-1}(5)\right)=g\left(2\right)=\frac{3}{2}\times 2-5=3-5=-2$ Opção $\boxed{\text{A}}$

3.

3.1. $D'_g=\{-1,0,2,6\}$. g não é injetiva porque, por exemplo, $1\neq 4\wedge g(1)=g(4)$.

g não é sobrejetiva porque, por exemplo, 5 é elemento do conjunto de chegada e não é elemento do contradomínio de g .

3.2. f é sobrejetiva porque o seu contradomínio coincide com o conjunto de chegada, f é injetiva porque objetos diferentes têm imagens diferentes. Logo f é bijetiva, como tal admite inversa.

3.3. $D_{f\,o\,g}=\left\{x\in\mathbb{R}: x\in D_g \wedge g(x)\in D_f\right\}=\{1,4,6,8\}$

$0\in D_g$; $g(0)=-1\notin D_f$ $1\in D_g$; $g(1)=0\in D_f$

$4\in D_g$; $g(4)=0\in D_f$ $5\in D_g$; $g(5)=2\notin D_f$

$6\in D_g$; $g(6)=6\in D_f$ $8\in D_g$; $g(8)=6\in D_f$

$\left(f\,o\,g\right)\left(1\right)=f\left(g\left(1\right)\right)=f\left(0\right)=3$; $\left(f\,o\,g\right)\left(4\right)=f\left(g\left(4\right)\right)=f\left(0\right)=3$

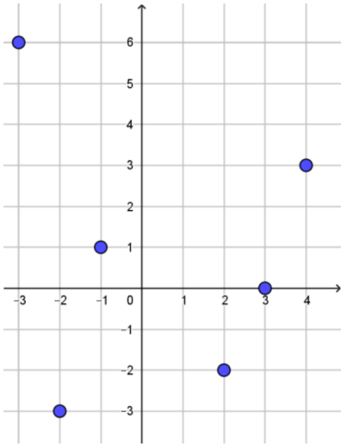
$\left(f\,o\,g\right)\left(6\right)=f\left(g\left(6\right)\right)=f\left(6\right)=-3$; $\left(f\,o\,g\right)\left(8\right)=f\left(g\left(8\right)\right)=f\left(6\right)=-3$

x	1	4	6	8
$\left(f\,o\,h\right)(x)$	3	3	-3	-3

3.4. a) $f^{-1}(3)=0$ b) $\left(f\,o\,f\right)\left(6\right)=f\left(f\left(6\right)\right)=f\left(-3\right)=-2$

c) $\left(g \circ f^{-1}\right)(-1)=g\left(f^{-1}(-1)\right)=g(1)=0$ d) $(f \circ g \circ f)(3)=f(g(f(3)))=f(g(4))=f(0)=3$

3.5.



3.6. a) $(g \circ f)(x)=0 \Leftrightarrow g(f(x))=0 \Leftrightarrow \underbrace{f(x)=1}_{\text{impossível}} \vee f(x)=4 \Leftrightarrow x=3$

b) $f(2x)<0 \Leftrightarrow 2x=-3 \vee 2x=1 \vee 2x=6 \Leftrightarrow x=-\dfrac{3}{2} \vee x=\dfrac{1}{2} \vee x=3$

c) $(f \circ f)(x) \geq 0 \Leftrightarrow f(f(x)) \geq 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow f(x)=-2 \vee \underbrace{f(x)=0}_{\text{impossível}} \vee f(x)=3 \Leftrightarrow x=-3 \vee x=0$

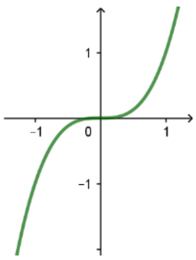
4. $(3,-2)$ pertence ao gráfico de $g \underset{j(x)=g(x-1)}{\Rightarrow}$ $(4,-2)$ pertence ao gráfico de $j \underset{h(x)=j(x)+2}{\Rightarrow}$ $(4,0)$ pertence ao gráfico de $h \Rightarrow h(4)=0 \Rightarrow h^{-1}(0)=4 \Rightarrow (0,4)$ pertence ao gráfico de h^{-1} Opção $\boxed{B}$

5.

5.1. $(g \circ g)(-2)=g(g(-2))=g(0)=4$ Opção $\boxed{D}$

5.2. $\left(h \circ g^{-1}\right)(0)=h\left(g^{-1}(0)\right)=h(-2)=\sqrt{2-(-2)}+1=3$ Opção $\boxed{C}$

5.3.



$g(x)-4$

Opção $\boxed{C}$

5.4.

$(0,4) \rightarrow (-1,4) \rightarrow (-1,2)$

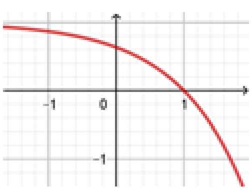
$g(x) \rightarrow g(x+1) \rightarrow g(x+1)-2$

$a=1\,;\, b=2$

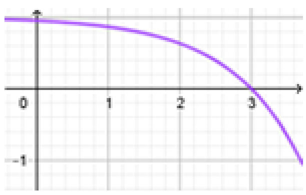
Opção $\boxed{B}$

6. $(-3,-5)$ pertence ao gráfico de $g \underset{j(x)=g(x-1)}{\Rightarrow}$ $(-2,-5)$ pertence ao gráfico de $j \underset{r(x)=|j(x)|}{\Rightarrow}$ $(-2,5)$ pertence ao gráfico de $r \underset{l(x)=3r(x)}{\Rightarrow}$ $(-2,15)$ pertence ao gráfico de $l \underset{m(x)=-l(x)}{\Rightarrow}$ $(-2,-15)$ pertence ao gráfico de $m \underset{h(x)=m(x)+2}{\Rightarrow}$ $(-2,-13)$ pertence ao gráfico de h Opção $\boxed{A}$

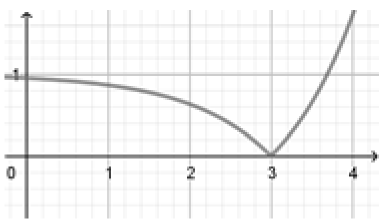
7.



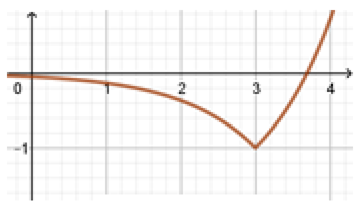
$g(x)$



$g(x-2)$



$|g(x-2)|$



$|g(x-2)|-1$

Opção $\boxed{B}$

8.

8.1. $f(x)=x^3-x=x\left(x^2-1\right)=x\left(x-1\right)\left(x+1\right)\to f$ tem três zeros: $0,1$ e -1

$f(-x)=\left(-x\right)^3-\left(-x\right)=-x^3+x=-\left(x^3-x\right)=-f(x)\ ,\ \forall x\in\mathbb{R}\to f$ é ímpar Opção $\boxed{\text{B}}$

A opção A está excluída porque a função que tem aquela expressão analítica é par $g(-x)=\left(-x\right)^4-\left(-x\right)^2=x^4-x^2=g(x),\forall x\in\mathbb{R}$.

A opção C está excluída porque a função que tem aquela expressão analítica não é par nem ímpar

$g(-x)=\left(-x\right)^6-\left(-x\right)^3=x^6+x^3\ ;\ \exists x\in\mathbb{R}: g(-x)\neq g(x)$ e $\exists x\in\mathbb{R}: g(-x)\neq -g(x)$

A opção D está excluída porque a função que tem aquela expressão analítica tem apenas um zero com multiplicidade 5.

8.2. $h(-x)=-x\left(f(-x)-x\,g(-x)\right)=-x\left(-f(x)-x\,g(x)\right)=x\left(f(x)+x\,g(x)\right)=h(x),\forall x\in\mathbb{R}$

8.3. Sendo 3 um zero de f , -3 também é zero de f . Como f tem apenas mais um zero ele terá que ser o 0 .

a) $\left(-3,0\right)$ pertence ao gráfico de $f\Rightarrow\left(-5,0\right)$ pertence ao gráfico de i ; $\left(0,0\right)$ pertence ao gráfico de $f\Rightarrow\left(-2,0\right)$ pertence ao gráfico de i ; $\left(3,0\right)$ pertence ao gráfico de $f\Rightarrow\left(1,0\right)$ pertence ao gráfico de i ; o conjunto dos zeros de i são $\left\{-5,-2,1\right\}$

b) $\left(-3,0\right)$ pertence ao gráfico de $f \underset{g(x)=f(-x)}{\Rightarrow} \left(3,0\right)$ pertence ao gráfico de $g \underset{j(x)=g\left(\frac{x}{4}\right)}{\Rightarrow} \left(12,0\right)$ pertence ao gráfico de j ; $\left(0,0\right)$ pertence ao gráfico de $f \underset{g(x)=f(-x)}{\Rightarrow} \left(0,0\right)$ pertence ao gráfico de $g \underset{j(x)=g\left(\frac{x}{4}\right)}{\Rightarrow} \left(0,0\right)$ pertence ao gráfico de j ; $\left(3,0\right)$ pertence ao gráfico de $f \underset{g(x)=f(-x)}{\Rightarrow} \left(-3,0\right)$ pertence ao gráfico de $g \underset{j(x)=g\left(\frac{x}{4}\right)}{\Rightarrow} \left(-12,0\right)$ pertence ao gráfico de j ; o conjunto dos zeros de j são $\left\{-12,0,12\right\}$

c) $\left(0,0\right)$ pertence ao gráfico de $f\Rightarrow\left(0,0\right)$ pertence ao gráfico de m ; $\left(3,0\right)$ pertence ao gráfico de $f\Rightarrow\left(3,0\right)$ pertence ao gráfico de m e $\left(-3,0\right)$ pertence ao gráfico de m ; o conjunto dos zeros de m são $\left\{-3,0,3\right\}$

8.4. $D'_f=\left]-4,4\right[\underset{g(x)=f(x-3)}{\Rightarrow} D'_g=\left]-4,4\right[\underset{h(x)=\left|g(x)\right|}{\Rightarrow} D'_h=\left[0,4\right[\underset{i(x)=\frac{2}{3}h(x)}{\Rightarrow} D'_i=\left[0,\frac{8}{3}\right[\underset{t(x)=i(x)+2}{\Rightarrow} D'_t=\left[2,\frac{14}{3}\right[$

9.

9.1. $h(x)\times \underbrace{h(6)}_{<0}\leq 0\Leftrightarrow h(x)\geq 0\Leftrightarrow x\in\left[-6,-3\right]\cup\left]1,5\right]$

9.2. h é estritamente crescente para $x\in\left]-\infty,-\frac{9}{2}\right]$, é estritamente decrescente para $x\in\left[-\frac{9}{2},-2\right]$ e também para $x\in\left]1,+\infty\right[$. Para $x\in\left[-2,1\right[$ a função é constante.

h não tem extremos absolutos, tem um máximo relativo $\frac{9}{8}$ com maximizante $-\frac{9}{2}$. -2 é simultaneamente máximo relativo e mínimo relativo com maximizantes todos os valores do intervalo $]-2,1[$ e com minimizantes todos os valores do intervalo $[-2,1[$.

9.3. a) Verdade. h é contínua em $\mathbb{R}\setminus\{1\}$

b) Falso, $-6\neq-3\wedge f(-6)=f(3)=0$

c) Verdade, por exemplo $-\frac{1}{2}\in]-1,0[$ e $(h\circ h)\left(-\frac{1}{2}\right)=h\left(h\left(-\frac{1}{2}\right)\right)=h(-2)=-2$

9.4. $h(x)=k$ tem exatamente duas soluções quando $k\in]-\infty,-2[\cup\left\{\frac{9}{8}\right\}$

9.5. $D_h=\mathbb{R}\setminus\{1\}\underset{i(x)=h\left(\frac{x}{3}\right)}{\Rightarrow}D_i=\mathbb{R}\setminus\{3\}\underset{j(x)=3i(x)}{\Rightarrow}D_j=\mathbb{R}\setminus\{3\}\underset{l(x)=-j(x)}{\Rightarrow}D_l=\mathbb{R}\setminus\{3\}\underset{g(x)=2+l(x)}{\Rightarrow}D_g=\mathbb{R}\setminus\{3\}$

$D'_h=]-\infty,3[\underset{i(x)=h\left(\frac{x}{3}\right)}{\Rightarrow}D'_i=]-\infty,3[\underset{j(x)=3i(x)}{\Rightarrow}D'_j=]-\infty,9[\underset{l(x)=-j(x)}{\Rightarrow}D'_l=]-9,+\infty[\underset{g(x)=2+l(x)}{\Rightarrow}D'_g=]-7,+\infty[$

9.6. a) Designemos por $A(1,3)$ e $B(5,0)$. O declive da reta AB é $\frac{3-0}{1-5}=-\frac{3}{4}$

$AB:\ y=-\frac{3}{4}x+b$, como $0=-\frac{3}{4}\times5+b\Leftrightarrow b=\frac{15}{4}$ vem que $y=-\frac{3}{4}x+\frac{15}{4}$

Logo $g(x)=-\frac{3}{4}x+\frac{15}{4}=-\frac{3x-15}{4}$

b) g é sobrejetiva porque $\forall y\in]-\infty,3[,\ \exists x\in]1,+\infty[:\ y=g(x)$, repare-se que

$y<3\Leftrightarrow-\frac{3x-15}{4}<3\Leftrightarrow-3x+15<12\Leftrightarrow-3x<-3\Leftrightarrow x>1$

g é injetiva porque $\forall a,b\in]-\infty,3[,\ g(a)=g(b)\Rightarrow a=b$, repare-se que

$g(a)=g(b)\Leftrightarrow-\frac{3a-15}{4}=-\frac{3b-15}{4}\Leftrightarrow3a-15=3b-15\Leftrightarrow3a=3b\Leftrightarrow a=b$

Logo g é bijetiva, pelo que admite inversa.

c) $g^{-1}(2)$ é o objeto cuja imagem, por meio de g é 2.

$g(x)=2\Leftrightarrow-\frac{3x-15}{4}=2\Leftrightarrow3x-15=-8\Leftrightarrow3x=7\Leftrightarrow x=\frac{7}{3}$, logo $g^{-1}(2)=\frac{7}{3}$

d) $y=-\frac{3x-15}{4}\Leftrightarrow-3x+15=4y\Leftrightarrow3x=15-4y\Leftrightarrow x=\frac{-4y+15}{3}$

$g^{-1}:]-\infty,3[\to]1,+\infty[\quad;\quad g^{-1}(x)=-\frac{4}{3}x+5$

e) $D_{g\,o\,f} = \left\{ x \in \mathbb{R} : \underbrace{x \in D_f}_{\mathbb{R}} \wedge \underbrace{f(x) \in D_g}_{]1,+\infty[} \right\} = \left\{ x \in \mathbb{R} : x^5 - x^3 + 1 > 1 \right\} = \left\{ x \in \mathbb{R} : x^5 - x^3 > 0 \right\} =$

$= \left\{ x \in \mathbb{R} : x^3 \left(x^2 - 1 \right) > 0 \right\} = \left\{ x \in \mathbb{R} : x^3 \left(x - 1 \right)\left(x + 1 \right) > 0 \right\} = \left\{ x \in \mathbb{R} : \underbrace{x^2}_{\geq 0} x \left(x - 1 \right)\left(x + 1 \right) > 0 \right\} =$

$= \left\{ x \in \mathbb{R} : x\left(x - 1 \right)\left(x + 1 \right) > 0 \right\} \underset{\downarrow}{=}]-1, 0[\cup]1, +\infty[$

x	$-\infty$	-1		0		1	$+\infty$
x	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$x-1$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$x+1$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
Prod	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

10.

10.1. Seja $f(0) = a$. Sendo f ímpar, $\forall x \in \mathbb{R},\ f(-x) = -f(x) \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R},\ f(-x) + f(x) = 0$. Logo, como o simétrico de zero é o próprio zero, vem $a + a = 0 \Leftrightarrow 2a = 0 \Leftrightarrow a = 0$

10.2. $\forall x \in \mathbb{R},\ g(-x) = (-x)^3 f(-x) = -x^3 \left(-f(x) \right) = x^3 f(x) = g(x)$

10.3. Como g é par a sua tabela de variação de sinal é:

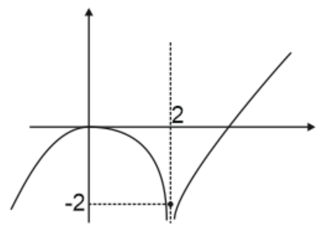
$-\infty$	-3		-1		0		1		3	$+\infty$
$-$	0	$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$	0	$-$

$g(x) + |g(x)| = 0 \Leftrightarrow |g(x)| = -g(x) \Leftrightarrow x \in]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[$ porque em qualquer destes intervalos $g(x) \leq 0 \Leftrightarrow -g(x) \geq 0$ e $|-g(x)| = -g(x) \Leftrightarrow |g(x)| = -g(x)$

11.

11.1. Se g não for contínua para $x = 2$, a função pode não ter mínimo para $x = 2$ e portanto -2 não ser mínimo de g. Opção $\boxed{\text{C}}$

Exemplo:



11.2. Se a função g for contínua os seus extremos são o 0 e o -2. Os extremos da função $g(2x)$ continuam a ser o 0 e o -2. Os extremos da função $j(x) = 3g(2x)$ passam a ser o 0 e o -6. Os extremos da função $l(x) = -j(x)$ passam a ser o 0 e o 6.

Os extremos da função $f(x) = 1 + l(x)$ passam a ser o 1 e o 7. Opção $\boxed{\text{A}}$

12. A reta que passa nos pontos $(-2, 3)$ e $(4, 9)$ tem declive $\dfrac{9-3}{4+2} = 1$. $y = x + b$, $3 = -2 + b \Leftrightarrow b = 5$

A equação reduzida da reta é $y = x + 5$. Como o gráfico de f tem a concavidade voltada para cima no intervalo $[-2, 4]$, nesse intervalo o gráfico da função está abaixo da reta, logo $f(x) \leq x + 5 \Leftrightarrow f(x) - x - 5 \leq 0$

Opção $\boxed{\text{B}}$

13.

13.1. $h(x)=\left(k^3-3k+1\right)x-\left(k^2-2\right)x+3=\left(k^3-k^2-3k+1+2\right)x+3=\left(k^3-k^2-3k+3\right)x+3$

Para a função ser estritamente crescente

$k^3-k^2-3k+3>0 \underset{\downarrow}{\Leftrightarrow} (k-1)\left(k^2-3\right)>0 \Leftrightarrow (k-1)\left(k-\sqrt{3}\right)\left(k+\sqrt{3}\right)>0 \underset{\downarrow}{\Leftrightarrow} k\in \left]-\sqrt{3},1\right[\cup\left]\sqrt{3},+\infty\right[$

	1	-1	-3	3
1		1	0	-3
	1	0	-3	0

k	$-\infty$	$-\sqrt{3}$		1		$\sqrt{3}$	$+\infty$
$k-1$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$k-\sqrt{3}$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$k+\sqrt{3}$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
Prod	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

13.2. Para uma função afim ser ímpar, a imagem de zero teria de ser zero, que não é o caso, $h(0)=3$

13.3. Para uma função afim ser par, o coeficiente de x terá de ser zero.

$$k^3-k^2-3k+3=0 \underset{\text{(vide13.1.)}}{\Leftrightarrow} (k-1)\left(k-\sqrt{3}\right)\left(k+\sqrt{3}\right)=0 \Leftrightarrow k-1=0 \vee k-\sqrt{3}=0 \vee k+\sqrt{3}=0$$

$\Leftrightarrow k=1 \vee k=\sqrt{3} \vee k=-\sqrt{3}$ logo a proposição é verdadeira.

13.4. $h(x)=\left(2^3-2^2-6+3\right)x+3=x+3$; $f(x)=(x+3+a)x^n$

$$\forall x\in\mathbb{R},\ \ f(-x)=-f(x) \Leftrightarrow (-x+3+a)(-x)^n=-(x+3+a)x^n \underset{n\,\text{par}}{\Leftrightarrow} (-x+3+a)x^n=(-x-3-a)x^n \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -x+3+a=-x-3-a \Leftrightarrow 2a=-6 \Leftrightarrow a=-3$$

14. O gráfico da função d está representado na Opção $\boxed{\text{C}}$ uma vez que a meio do percurso a distância é nula, quando o ponto se desloca sobre os arcos a distância é igual ao raio da circunferência que é 2 e o tempo gasto a percorrer cada um dos arcos terá que ser igual ao tempo gasto para ir da distância zero à distância 2.

A opção A é rejeitada porque a distância nunca pode ser superior a 2. A opção B é rejeitada porque quando o ponto se desloca sobre os arcos a distância é constante. A opção D é rejeitada porque o tempo gasto a percorrer cada um dos arcos terá que ser igual ao tempo gasto para ir da distância zero à distância 2.

15.

15.1. g é sobrejetiva porque o seu contradomínio coincide com o conjunto de chegada, repare-se que $\forall y\in\mathbb{R},\ \exists x\in\mathbb{R}:\ y=g(x)$, isto porque $y=mx+b \underset{m\neq 0}{\Leftrightarrow} x=\dfrac{y-b}{m}$. g é injetiva porque $\forall x_1,x_2\in\mathbb{R},\ g(x_1)=g(x_2)\Rightarrow x_1=x_2$, repare-se que $g(x_1)=g(x_2)\Leftrightarrow mx_1+b=mx_2+b\Leftrightarrow mx_1=mx_2\Leftrightarrow x_1=x_2$. Logo g é bijetiva.

15.2. $g^{-1}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ e $g^{-1}(x)=\dfrac{1}{m}x-\dfrac{b}{m}$ Para a função coincidir com a sua inversa

$$m=\frac{1}{m} \wedge b=-\frac{b}{m} \Leftrightarrow m^2=1 \wedge b+\frac{b}{m}=0 \Leftrightarrow (m=1\vee m=-1)\wedge bm+b=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (m=1\vee m=-1)\wedge b(m+1)=0 \Leftrightarrow (m=1\vee m=-1)\wedge(b=0\vee m=-1) \Leftrightarrow (m=1\wedge b=0)\vee m=-1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow m=1\vee m=-1$$

15.3. Se $m=-1$, vem que $-\frac{b}{-1}=3 \Leftrightarrow b=3$. Se $m=1$, vem que $-\frac{b}{1}=3 \Leftrightarrow b=-3$ o que é impossível uma vez que para a função coincidir com a sua inversa, se $m=1$ obriga a que $b=0$. Logo $m=-1$ e $b=3$

15.4. $g(x)=2x$; $h(x)=-(2x)^2=-4x^2$

a) $\frac{g(x_2)-g(x_1)}{x_2-x_1}=\frac{2x_2-2x_1}{x_2-x_1}=2$. Como $\forall x_1,x_2\in\mathbb{R},\ \frac{g(x_2)-g(x_1)}{x_2-x_1}>0$ vem que, $\forall x_1,x_2\in\mathbb{R}$, se

$x_2>x_1$ o denominador da fração é positivo, e como a fração é positiva, o numerador também tem que ser positivo, logo $g(x_2)-g(x_1)>0 \Leftrightarrow g(x_2)>g(x_1)$, isto é g é estritamente crescente em $\mathbb{R}$

b) $-1\neq 1 \wedge h(-1)=h(1)=-4$, por exemplo.

c) Dados três pontos do gráfico de h , $A(a,-4a^2),\ B(b,-4b^2)$ e $C(c,-4c^2)$ com $a<b<c$

O declive da reta AB é $\frac{-4b^2+4a^2}{b-a}=-4\frac{(a-b)(a+b)}{a-b}=-4(a+b)=-4a-4b$

O declive da reta BC é $\frac{-4c^2+4b^2}{c-b}=-4\frac{(b-c)(b+c)}{b-c}=-4(b+c)=-4b-4c$

Então o declive da reta AB é superior ao declive da reta BC porque

$-4a-4b>-4b-4c \Leftrightarrow -4a>-4c \Leftrightarrow a<c$ que é verdade. Como tal o gráfico da função h tem a concavidade voltada para baixo em todo o seu domínio.

16.

16.1. $(g\,o\,h)(-8)=g(h(-8))=g(0)=1$ Opção $\boxed{\text{B}}$

16.2. $h(x)=a\,g(b\,x)$. Uma vez que o ponto $(0,1)$ se transforma em $(0,3)$ concluímos que $a=3$.

Uma vez que as concavidades trocaram concluímos que b é negativo. Uma vez que o ponto $(1,0)$ se transforma em $(-2,0)$ concluímos que $b=-\frac{1}{2}$. Opção $\boxed{\text{A}}$

17.

17.1 $(f\,o\,f)(-2)+(g\,o\,h)(19)=f(f(-2))+g(h(19))=f(6)+g(\sqrt{36})=-6+g(6)=-6-2=-8$

Opção $\boxed{\text{B}}$

17.2. $D_{h\,o\,f}=\{x\in\mathbb{R}: x\in D_f \ \wedge\ f(x)\in D_h\} \underset{\downarrow}{=} \{x\in\mathbb{R}:\ f(x)\geq 1\} \underset{\downarrow}{=} \left\{x\in\mathbb{R}:\ -\frac{3}{2}x+3\geq 1\right\}=$

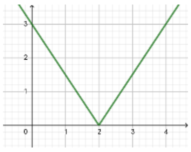
$Dh=\{x\in\mathbb{R}: 2x-2\geq 0\}=[1,+\infty[$ $\qquad =\left\{x\in\mathbb{R}:\ -\frac{3}{2}x\geq -2\right\}=\left\{x\in\mathbb{R}: x\leq\frac{4}{3}\right\}=\left]-\infty,\frac{4}{3}\right]$

A reta que passa nos pontos $(-2,6)$ e $(6,-6)$ tem declive $\frac{-6-6}{6+2}=-\frac{12}{8}=-\frac{3}{2}$. $y=-\frac{3}{2}x+b$,

$-6=-\frac{3}{2}\times 6+b \Leftrightarrow b=3$. A expressão analítica da função f é $f(x)=-\frac{3}{2}x+3$ Opção $\boxed{\text{C}}$

17.3. $y=-\frac{3}{2}x+3 \Leftrightarrow 2y=-3x+6 \Leftrightarrow 3x=-2y+6 \Leftrightarrow x=-\frac{2}{3}y+2$, pelo que $g(x)=-\frac{2}{3}x+2$ Opção $\boxed{\text{B}}$

17.4. O gráfico da função t é



A função tem um mínimo absoluto em $x=2$ Opção $\boxed{\text{D}}$

18.

18.1. Opção $\boxed{\text{C}}$

18.2. Opção $\boxed{\text{C}}$

18.3. $(f\circ h)(-a)>0 \Leftrightarrow f\left(\underbrace{h(-a)}_{<0}\right)>0$ verdade $\qquad (h\circ g)(c)>0 \Leftrightarrow h\left(\underbrace{g(c)}_{=0}\right)>0$ verdade

$(g\circ h)(a)<0 \Leftrightarrow g\left(\underbrace{h(a)}_{>0}\right)<0$ pode ser verdade

$(g\circ f)(b)<0 \Leftrightarrow g\left(\underbrace{f(b)}_{=0}\right)<0$ falso porque $g(0)>0$ Opção $\boxed{\text{D}}$

19.

19.1. A concavidade do gráfico está voltada para cima $k>0$ Opção $\boxed{\text{A}}$

19.2. $f(-1)=k$ logo $A(-1,k)$; $f(3)=9k$ logo $B(3,9k)$. O declive da reta AB é $\frac{9k-k}{3+1}=\frac{8k}{4}=2k$

$2k=14 \Leftrightarrow k=7$ Opção $\boxed{\text{C}}$

20.

20.1. $f^{-1}(0)-f(6)=-4-4\neq 0$; $\qquad (f\circ f)(6)=f\left(f(6)\right)=f(4)=2=2f(0)$

$\left(g\circ f^{-1}\right)(0)=g\left(f^{-1}(0)\right)=g(-4)=16+4=20\neq 0$

$\left|f^{-1}(-1)\right|=|-2|=2$ e $-g(-1)=-(1+1)=-2$ Opção $\boxed{\text{B}}$

20.2. $(f\circ g)(x)=4 \Leftrightarrow f\left(g(x)\right)=4 \Leftrightarrow g(x)=6 \Leftrightarrow x^2-x=6 \Leftrightarrow x^2-x-6=0 \Leftrightarrow x=\frac{1\pm\sqrt{1-4\times(-6)}}{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x=\frac{1\pm 5}{2} \Leftrightarrow x=3 \vee x=-2$

21.

21.1.

x	-5		-1		3		5		7
$f(x)$	n.d.	$\nearrow$	3	$\rightarrow$	1	$\searrow$	-1	$\nearrow$	1

21.2. $D'_f =]-5,3] \underset{j(x)=f(x)-1}{\Rightarrow} D'_j =]-6,2] \underset{l(x)=2j(x)}{\Rightarrow} D'_l =]-12,4] \underset{g(x)=|l(x)|}{\Rightarrow} D'_g = [0,12[$

21.3. a) Os zeros de f são: $-\frac{5}{2}, 4$ e 6. Seja $j(x) = f\left(\frac{2}{3}x\right)$, os zeros de j são: $-\frac{5}{2}\times\frac{3}{2} = -\frac{15}{4}$, $4\times\frac{3}{2} = 6$ e

$6\times\frac{3}{2} = 9$. Os zeros de h são os mesmos zeros de j que são $-\frac{15}{4}, 6$ e 9

b) A função f tem máximo absoluto 3 com maximizante -1, não tem mínimo absoluto.

Máximos relativos de f: 3 com maximizante -1, 1 com maximizantes pertencentes a $]-1,3] \cup \{7\}$

Minimos relativos de f: -1 com minimizante 5, 1 com minimizantes pertencentes a $]-1,3[$

Seja $j(x) = f\left(\frac{2}{3}x\right)$

A função j tem máximo absoluto 3 com maximizante $-1\times\frac{3}{2} = -\frac{3}{2}$, não tem mínimo absoluto.

Máximos relativos de j: 3 com maximizante $-\frac{3}{2}$, 1 com maximizantes pertencentes a $\left]-\frac{3}{2},\frac{9}{2}\right] \cup \left\{\frac{21}{2}\right\}$

Mínimos relativos de j: -1 com minimizante $\frac{15}{2}$, 1 com minimizantes pertencentes a $\left]-\frac{3}{2},\frac{9}{2}\right[$

Seja $l(x) = 2j(x)$

A função l tem máximo absoluto 6 com maximizante $-\frac{3}{2}$, não tem mínimo absoluto.

Máximos relativos de l: 6 com maximizante $-\frac{3}{2}$, 2 com maximizantes pertencentes a $\left]-\frac{3}{2},\frac{9}{2}\right] \cup \left\{\frac{21}{2}\right\}$

Mínimos relativos de l: -2 com minimizante $\frac{15}{2}$, 2 com minimizantes pertencentes a $\left]-\frac{3}{2},\frac{9}{2}\right[$

Seja $h(x) = -l(x)$

A função h tem mínimo absoluto -6 com minimizante $-\frac{3}{2}$, não tem máximo absoluto.

Mínimos relativos de h: -6 com minimizante $-\frac{3}{2}$, -2 com minimizantes pertencentes a $\left]-\frac{3}{2},\frac{9}{2}\right] \cup \left\{\frac{21}{2}\right\}$

Máximos relativos de h: 2 com maximizante $\frac{15}{2}$, -2 com maximizantes pertencentes a $\left]-\frac{3}{2},\frac{9}{2}\right[$

21.4. $f\left(\frac{6}{2}\right)+1 = f(3)+1 = 1+1 = 2$; $\quad f(6-1)+3 = f(5)+3 = -1+3 = 2$

$f\left(-\frac{6}{6}\right)-2 = f(-1)-2 = 3-2 = 1 \neq 2$ o ponto $(6,2)$ não pertence ao gráfico $\qquad$ Opção $\boxed{C}$

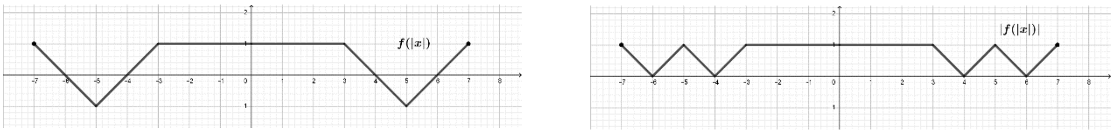
21.5. $(t \circ f)(x) = -1 \Leftrightarrow t(f(x)) = -1 \Leftrightarrow 2f(x) - 3 = -1 \Leftrightarrow f(x) = 1 \Leftrightarrow x \in]-1,3] \cup \{-2,7\}$

21.6. Designemos a função $f|_{]-5,-1]}$ por m. A reta que passa nos pontos $(-5,-5)$ e $(-1,3)$ tem declive $\frac{3+5}{-1+5} = \frac{8}{4} = 2$. $y = 2x + b$, $3 = 2\times(-1) + b \Leftrightarrow b = 5$. A expressão analítica da função m é $m(x) = 2x + 5$

$$y = 2x+5 \Leftrightarrow 2x = y-5 \Leftrightarrow x = \frac{y-5}{2} \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}y - \frac{5}{2}$$

Logo $j :]-5,3] \rightarrow]-5,-1]$ e $j(x) = \frac{1}{2}x - \frac{5}{2}$

21.7.



Opção $\boxed{\text{B}}$

A função i nunca é negativa, rejeita-se assim a opção A. A função i é par, rejeita-se assim a opção C. A função i é continua, rejeita-se assim a opção D.