Escola Secundária de Penafiel

Ficha de Trabalho nº 7
Proposta de resolução

Preparação para exame

12.º Ano de Escolaridade | Turma G-K

SUCESSÕES DE NÚMEROS REAIS

1. .

1.1. $n \geq 1, \forall n \in \mathbb{N}$
$\therefore \frac{1}{n} \leq 1, \forall n \in \mathbb{N}$
Por outro lado, a sucessão de termo geral $\frac{1}{n}$ tem os termos todos positivos, assim,
$0 < \frac{1}{n} \leq 1, \forall n \in \mathbb{N}$
$\therefore -1 \leq -\frac{1}{n} < 0, \forall n \in \mathbb{N}$
$\therefore -2 \leq -\frac{2}{n} < 0, \forall n \in \mathbb{N}$
$\therefore -2+1 \leq 1-\frac{2}{n} < 0+1, \forall n \in \mathbb{N}$
$\therefore -1 \leq u_n < 1, \forall n \in \mathbb{N}$
Logo, a sucessão (u_n) é limitada
-1 é um minorante e 1 é um majorante do conjunto dos termos da sucessão (u_n)

1.2. A sucessão (u_n) é convergente para 1 se $\forall \delta > 0, \exists p \in \mathbb{N} : n \geq p \Rightarrow |u_n - 1| < \delta$
Seja $\delta > 0$
$|u_n - 1| < \delta \Leftrightarrow |1 - \frac{2}{n} - 1| < \delta \Leftrightarrow |-\frac{2}{n}| < \delta \Leftrightarrow \frac{2}{n} < \delta \Leftrightarrow \frac{n}{2} > \frac{1}{\delta} \Leftrightarrow n > \frac{2}{\delta}$

Assim, basta tomar para p o menor número natural que satisfaz a condição $p > \frac{2}{\delta}$
Logo, $\lim(u_n) = 1$

2. .

2.1. Pelo algoritmo de divisão de polinómios, resulta que $a_n = \frac{2n+3}{n+1} = 2 + \frac{1}{n+1}$

$n \geq 1, \forall n \in \mathbb{N}$
$\therefore n+1 \geq 2, \forall n \in \mathbb{N}$
$\therefore \frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{2}, \forall n \in \mathbb{N}$
Por outro lado, a sucessão de termo geral $\frac{1}{n+1}$ tem os termos todos positivos, assim,
$0 < \frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{2}, \forall n \in \mathbb{N}$
$\therefore 2 < 2 + \frac{1}{n+1} \leq 2 + \frac{1}{2}, \forall n \in \mathbb{N}$
$\therefore 2 < a_n \leq \frac{5}{2}, \forall n \in \mathbb{N}$

2.2. Como, $2 < a_n \leq \frac{5}{2}, \forall n \in \mathbb{N}$, o conjunto dos termos da sucessão (a_n) é majorado e minorado, logo, a sucessão é limitada.
A afirmação é verdadeira

2.3. $a_n = 2 + \dfrac{1}{n+1} > 2, \forall n \in \mathbb{N}$
Então, $(a_n)^n > 2^n, \forall n \in \mathbb{N}$
Como, $\lim(2^n) = +\infty$,
então, pelo teorema de comparação, também $\lim\,(a_n)^n = +\infty$.

2.4. $\lim(b_n) = +\infty$ se $\forall L > 0, \exists p \in \mathbb{N} : n \geq p \Rightarrow b_n > L$
Seja $L > 0$
$b_n > L \Leftrightarrow 2n + 1 > L \Leftrightarrow 2n > L - 1 \Leftrightarrow n > \dfrac{L-1}{2}$
Assim, basta tomar para p o menor número natural que satisfaz a condição $p > \dfrac{L-1}{2}$
Logo, $\lim(b_n) = +\infty$

2.5. Como, $\lim(b_n) = +\infty$, e como, $c_n \geq b_n, \forall n > 55$,
então, pelo teorema de comparação, também $\lim(c_n) = +\infty$.

3. .

3.1. Pelo algoritmo de divisão de polinómios, resulta que $\dfrac{2n+3}{4n+2} = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2n+1}$

$n \geq 1, \forall n \in \mathbb{N}$
$\therefore 2n \geq 2, \forall n \in \mathbb{N}$
$\therefore 2n + 1 \geq 3, \forall n \in \mathbb{N}$
$\therefore \dfrac{1}{2n+1} \leq \dfrac{1}{3}, \forall n \in \mathbb{N}$
Por outro lado, a sucessão de termo geral $\dfrac{1}{2n+1}$ tem os termos todos positivos, assim,
$0 < \dfrac{1}{2n+1} \leq \dfrac{1}{3}, \forall n \in \mathbb{N}$
$\therefore \dfrac{1}{2} < \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2n+1} \leq \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3}, \forall n \in \mathbb{N}$
$\therefore \dfrac{1}{2} < \dfrac{2n+3}{4n+2} \leq \dfrac{5}{6}, \forall n \in \mathbb{N}$
$\therefore \left(\dfrac{1}{2}\right)^n < \left(\dfrac{2n+3}{4n+2}\right)^n \leq \left(\dfrac{5}{6}\right)^n, \forall n \in \mathbb{N}$
Como, $\lim\left(\dfrac{1}{2}\right)^n = 0$ e $\lim\left(\dfrac{5}{6}\right)^n = 0$, então, pelo teorema das sucessões enquadradas, também $\lim\left(\dfrac{2n+3}{4n+2}\right)^n = 0$

3.2. $-1 \leq \cos(4n) \leq 1, \forall n \in \mathbb{N}$
$\therefore -3 \leq 3\cos(4n) \leq 3, \forall n \in \mathbb{N}$
$\therefore -3 + 1 \leq 3\cos(4n) + 1 \leq 3 + 1, \forall n \in \mathbb{N}$
$\therefore -2 \leq 3\cos(4n) + 1 \leq 4, \forall n \in \mathbb{N}$
$\therefore -\dfrac{2}{2n^2+4} \leq \dfrac{3\cos(4n)+1}{2n^2+4} \leq \dfrac{4}{2n^2+4}, \forall n \in \mathbb{N}$
Como, $\lim\left(-\dfrac{2}{2n^2+4}\right) = 0$ e $\lim\left(\dfrac{4}{2n^2+4}\right) = 0$, então, pelo teorema das sucessões enquadradas, também $\lim\left(\dfrac{3\cos(4n)+1}{2n^2+4}\right) = 0$

3.3. Ora, $\sqrt[n]{8^n} \leq \sqrt[n]{5^n + 6^n + 7^n + 8^n} \leq \sqrt[n]{8^n + 8^n + 8^n + 8^n}, \forall n \in \mathbb{N}$
$\therefore 8 \leq \sqrt[n]{5^n + 6^n + 7^n + 8^n} \leq \sqrt[n]{4 \times 8^n}, \forall n \in \mathbb{N}$
$\therefore 8 \leq \sqrt[n]{5^n + 6^n + 7^n + 8^n} \leq 8\sqrt[n]{4}, \forall n \in \mathbb{N}$
$\therefore 8 \leq \sqrt[n]{5^n + 6^n + 7^n + 8^n} \leq 8 \times 4^{\frac{1}{n}}, \forall n \in \mathbb{N}$

Como, $\lim\,(8) = 8$ e $\lim\left(8 \times 4^{\frac{1}{n}}\right) = 8 \times 4^{\lim \frac{1}{n}} = 8 \times 1 = 8$, então, pelo teorema das sucessões enquadradas, também $\lim \sqrt[n]{5^n + 6^n + 7^n + 8^n} = 8$

3.4. $\displaystyle\sum_{p=1}^{2n} \frac{6n+1}{\sqrt{4n^4+p}} = \frac{6n+1}{\sqrt{4n^4+1}} + \frac{6n+1}{\sqrt{4n^4+2}} + \ldots + \frac{6n+1}{\sqrt{4n^4+2n}}$

Esta soma tem $2n$ parcelas

Ora,

a menor parcela é $\dfrac{6n+1}{\sqrt{4n^4+2n}}$

e a maior parcela é $\dfrac{6n+1}{\sqrt{4n^4+1}}$

Assim, resulta que,

$$\frac{6n+1}{\sqrt{4n^4+2n}} + \frac{6n+1}{\sqrt{4n^4+2n}} + \ldots + \frac{6n+1}{\sqrt{4n^4+2n}} \leq \sum_{p=1}^{2n} \frac{6n+1}{\sqrt{4n^4+p}} \leq \frac{6n+1}{\sqrt{4n^4+1}} + \frac{6n+1}{\sqrt{4n^4+1}} + \ldots + \frac{6n+1}{\sqrt{4n^4+1}}$$

Ou seja,

$$2n \times \frac{6n+1}{\sqrt{4n^4+2n}} \leq \sum_{p=1}^{2n} \frac{6n+1}{\sqrt{4n^4+p}} \leq 2n \times \frac{6n+1}{\sqrt{4n^4+1}}$$

Como, $\lim\left(2n \times \dfrac{6n+1}{\sqrt{4n^4+2n}}\right) = \lim\left(\dfrac{12n^2+2n}{\sqrt{4n^4+2n}}\right) = \lim\left(\dfrac{n^2\left(12+\frac{2}{n}\right)}{\sqrt{n^4\left(4+\frac{2}{n^3}\right)}}\right) =$

$$= \lim\left(\frac{n^2\left(12n+\frac{2}{n}\right)}{n^2\sqrt{\left(4+\frac{2}{n^3}\right)}}\right) = \lim\left(\frac{12+\frac{2}{n}}{\sqrt{4+\frac{2}{n^3}}}\right) = \left(\frac{\lim\left(12+\frac{2}{n}\right)}{\sqrt{\lim\left(4+\frac{2}{n^3}\right)}}\right) = \frac{12}{\sqrt{4}} = 6$$

e $\lim\left(2n \times \dfrac{6n+1}{\sqrt{4n^4+1}}\right) = \lim\left(\dfrac{12n^2+2n}{\sqrt{4n^4+1}}\right) = \lim\left(\dfrac{n^2\left(12+\frac{2}{n}\right)}{\sqrt{n^4\left(4+\frac{1}{n^4}\right)}}\right) =$

$$= \lim\left(\frac{n^2\left(12n+\frac{2}{n}\right)}{n^2\sqrt{\left(4+\frac{1}{n^4}\right)}}\right) = \lim\left(\frac{12+\frac{2}{n}}{\sqrt{4+\frac{1}{n^4}}}\right) = \left(\frac{\lim\left(12+\frac{2}{n}\right)}{\sqrt{\lim\left(4+\frac{1}{n^4}\right)}}\right) = \frac{12}{\sqrt{4}} = 6$$

então, pelo teorema das sucessões enquadradas, também $\displaystyle\lim \sum_{p=1}^{2n} \frac{6n+1}{\sqrt{4n^4+p}} = 6$

FUNÇÕES REAIS DE VARIÁVEL REAL - TAXA MÉDIA DE VARIAÇÃO - TAXA DE VARIAÇÃO - DERIVADA

4. .

4.1. $g(1) = 2 \times 1^2 - 4 \times 1 = -2$
$g(2) = 2 \times 2^2 - 4 \times 2 = 0$

Assim, $t.m.v_{[1;2]} = \dfrac{g(2)-g(1)}{2-1} = \dfrac{0-(-2)}{1} = 2$

4.2. $g(0) = 2 \times 0^2 - 4 \times 0 = 0$
$g(-2) = 2 \times (-2)^2 - 4 \times (-2) = 16$

Assim, $t.m.v_{[-2;0]} = \dfrac{g(0)-g(-2)}{0-(-2)} = \dfrac{0-16}{2} = -8$

4.3. O valor encontrado no item anterior representa o declive da reta secante ao gráfico nos pontos $(-2; g(-2))$ e $(0; g(0))$

5. .

5.1. $f'(x) = (2x^3 - 4x^2 - 5x + 4)' = 6x^2 - 8x - 5$

5.2. $f'(x) = \left(\frac{1-x}{1+x}\right)' = \frac{(1-x)' \times (1+x) - (1-x) \times (1+x)'}{(1+x)^2} = \frac{(-1) \times (1+x) - (1-x) \times 1}{(1+x)^2} =$
$= \frac{-1-x-1+x}{(1+x)^2} = -\frac{2}{(1+x)^2}$, com $x \neq 0$

5.3. $f'(x) = \left(\frac{x^3-1}{1+2x}\right)' = \frac{(x^3-1)' \times (1+2x) - (x^3-1) \times (1+2x)'}{(1+2x)^2} = \frac{(3x^2) \times (1+2x) - (x^3-1) \times 2}{(1+2x)^2} =$
$= \frac{3x^2+6x^3-2x^3+2}{(1+2x)^2} = \frac{4x^3+3x^2+2}{(1+2x)^2}$, com $x \neq -\frac{1}{2}$

6. .

6.1. $f'(x) = \left(\frac{-x^2+x-1}{2x}\right)' =$
$= \frac{(-x^2+x-1)' \times 2x - (-x^2+x-1) \times (2x)'}{(2x)^2} = \frac{(-2x+1) \times 2x - (-x^2+x-1) \times 2}{4x^2} =$
$= \frac{-4x^2+2x+2x^2-2x+2}{4x^2} = \frac{-2x^2+2}{4x^2}$, com $x \neq 0$
$f'(-1) = \frac{-2 \times (-1)^2 + 2}{4 \times (-1)^2} = \frac{0}{4} = 0$, é o declive da reta tangente
Ora, $f(-1) = \frac{-(-1)^2 + (-1) - 1}{2 \times (-1)} = \frac{3}{2}$
Então, a equação da reta tangente é $y = \frac{3}{2}$

6.2. $f'(x) = \frac{-2x^2+2}{4x^2}$, com $x \neq 0$
Determinemos os zeros da função derivada
$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{-2x^2+2}{4x^2} = 0 \Leftrightarrow -2x^2+2 = 0 \wedge 2x \neq 0 \Leftrightarrow x^2 = 1 \wedge x \neq 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x = \pm 1 \wedge x \neq 0 \Leftrightarrow x = -1 \vee x = 1$

Sinal da função derivada

Numerador:
$-2x^2+2 > 0 \Leftrightarrow -1 < x < 1$
$-2x^2+2 < 0 \Leftrightarrow x < -1 \vee x > 1$

$f(1) = \frac{-1^2+1-1}{2 \times 1} = -\frac{1}{2}$
$f(-1) = \frac{-(-1)^2+(-1)-1}{2 \times (-1)} = \frac{3}{2}$

Quadro de variação da função

x	$-\infty$	-1		0		1	$+\infty$
$-2x^2+2$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$
$4x^2$	$+$	$+$	$+$	0	$+$	$+$	$+$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	$n.d.$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\searrow$	$\frac{3}{2}$	$\nearrow$	$n.d.$	$\nearrow$	$-\frac{1}{2}$	$\searrow$

A função f é estritamente decrescente em $]-\infty;-1[$ e em $]1;+\infty[$, e é estritamente crescente em $]-1;0[$ e em $]0;1[$. Atinge o valor máximo relativo $-\frac{1}{2}$ para $x=1$ e o valor mínimo relativo $\frac{3}{2}$ para $x=-1$

7. Como, $\lim_{h\mapsto 0}\frac{f(-1+h)-f(-1)}{h}=2$, então, $f'(-1)=2$,
Portanto, o declive da reta tangente pedida é igual a 2
Assim, a equação da reta tangente é da forma
$y=2x+b,\ b\in\mathbb{R}$
Como o ponto de tangência é $T(-1;2)$
resulta que,
$2=2\times(-1)+b \Leftrightarrow 2=-2+b \Leftrightarrow b=4$
Portanto, a equação da reta tangente é $y=2x+4$

TRIGONOMETRIA

8. .

8.1. A área do círculo é dada por $A_{circulo}=\pi\times 4^2=16\pi u.a.$
Seja A' a projeção ortogonal do ponto A sobre o eixo Ox.
Então, tem-se que:
$\cos(x)=\frac{\overline{OA'}}{\overline{OA}} \Leftrightarrow \cos(x)=\frac{\overline{OA'}}{4} \Leftrightarrow \overline{OA'}=4\cos(x)$

Assim, a área do triângulo $[OAB]$ é dada por $A_{[OAB]}=\frac{\overline{OB}\times\overline{OA'}}{2}=8\cos(x)$
Portanto, $A_{regiaosombreada}=A_{circulo}-4\times A_{[OAB]}=(16\pi-32\cos(x))u.a$
Logo, $A(x)=16\pi-32\cos(x)$

8.2. $tg(\pi-\alpha)=-\frac{2}{3} \Leftrightarrow -tg(\alpha)=-\frac{2}{3} \Leftrightarrow tg(\alpha)=\frac{2}{3}$

Determinemos o valor de $\cos(\alpha)$
De $1+tg^2(\alpha)=\frac{1}{\cos^2(\alpha)}$, vem

$1+\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{1}{\cos^2(\alpha)} \Leftrightarrow 1+\frac{4}{9}=\frac{1}{\cos^2(\alpha)} \Leftrightarrow \frac{13}{9}=\frac{1}{\cos^2(\alpha)} \Leftrightarrow \cos^2(\alpha)=\frac{9}{13} \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \cos(\alpha)=\pm\sqrt{\frac{9}{13}} \Leftrightarrow \cos(\alpha)=\pm\frac{3\sqrt{13}}{13}$, como $\alpha\in\left]0;\frac{\pi}{2}\right[$, vem, $\cos(\alpha)=\frac{3\sqrt{13}}{13}$
Assim, $A(\alpha)=16\pi-32\times\frac{3\sqrt{13}}{13}=\left(16\pi-\frac{96\sqrt{13}}{13}\right)u.a.$

8.3. $A(x)=16\pi-16\sqrt{3} \Leftrightarrow 16\pi-32\cos(x)=16\pi-16\sqrt{3} \Leftrightarrow \cos(x)=\frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \cos(x)=\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) \Leftrightarrow x=\pm\frac{\pi}{6}+2k\pi, k\in\mathbb{Z}$
como $\alpha\in\left]0;\frac{\pi}{2}\right[$, vem, $x=\frac{\pi}{6}$
Sendo assim, $C.S.=\left\{\frac{\pi}{6}\right\}$

8.4. .

A equação que traduz o problema é $A(x) = 8\pi$, ou seja, $16\pi - 32\cos(x) = 8\pi$

O que é equivalente a resolver a equação $\cos(x) = \dfrac{\pi}{4}$

Abrir o menu Graph.

Inserir as funções $y_1 = \cos(x)$ e $y_2 = \dfrac{\pi}{4}$.

Ajustar a janela de visualização: $\left]0; \dfrac{\pi}{2}\right[\times]0; 2[$

Desenhar os gráficos das duas funções, identificando-os.

Procurar a abcissa do ponto de interseção dos dois gráficos.

Assinalar o ponto de interseção e indicar as respetivas coordenadas, arredondando às décimas a sua abcissa.

A solução do problema é $x = 0.7rad$.

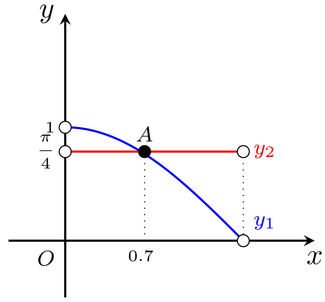

Figura 1

9. .

9.1. $\sin(x) - \sin(x)\cos(x) = 0 \Leftrightarrow \sin(x)(1 - \cos(x)) = 0 \Leftrightarrow \sin(x) = 0 \vee 1 - \cos(x) = 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \sin(x) = 0 \vee \cos(x) = 1 \Leftrightarrow \sin(x) = \sin(0) \vee \cos(x) = \cos(0) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x = k\pi \vee x = 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$

9.2. $\sin^4(x) - \cos^4(x) = 0 \Leftrightarrow (\sin^2(x) - \cos^2(x))(\sin^2(x) + \cos^2(x)) = 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \sin^2(x) - \cos^2(x) = 0 \Leftrightarrow (\sin(x) - \cos(x))(\sin(x) + \cos(x)) = 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \sin(x) - \cos(x) = 0 \vee \sin(x) + \cos(x) = 0 \Leftrightarrow \sin(x) = \cos(x) \vee \sin(x) = -\cos(x) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \sin(x) = \sin\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right) \vee \sin(x) = \sin\left(\dfrac{3\pi}{2} - x\right) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{2} - x + 2k\pi \vee x = \pi - \dfrac{\pi}{2} + x + 2k\pi \vee x = \dfrac{3\pi}{2} - x + 2k\pi \vee x = \pi - \dfrac{3\pi}{2} + x + 2k\pi, k \in$
$\mathbb{Z} \Leftrightarrow 2x = \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi \vee 2x = \dfrac{3\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi \vee x = \dfrac{3\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

10. .

10.1. $f(-x) = \sqrt{2} - 2\cos\left(\dfrac{2 \times (-x)}{3}\right) = \sqrt{2} - 2\cos\left(-\dfrac{2x}{3}\right) = \sqrt{2} - 2\cos\left(\dfrac{2x}{3}\right) =$
$= f(x), \forall x, -x \in D_f$

Logo, a função f é par.

O gráfico da função f é simétrico em relação ao eixo das ordenadas.

10.2. Seja τ, o período positivo mínimo da função f.

$f(x+\tau) = f(x) \Leftrightarrow \sqrt{2} - 2\cos\left(\dfrac{2 \times (x+\tau)}{3}\right) = \sqrt{2} - 2\cos\left(\dfrac{2x}{3}\right) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \cos\left(\dfrac{2x + 2\tau}{3}\right) = \cos\left(\dfrac{2x}{3}\right) \Leftrightarrow \cos\left(\dfrac{2x}{3} + \dfrac{2\tau}{3}\right) = \cos\left(\dfrac{2x}{3}\right)$

Atendendo a que o período positivo mínimo da função cosseno é $2\pi rad$, vem,

$\dfrac{2\tau}{3} = 2\pi \Leftrightarrow 2\tau = 6\pi \Leftrightarrow \tau = 3\pi$

Logo, a função f admite $3\pi rad$ como período positivo mínimo

10.3. $-1 \leq \cos\left(\dfrac{2x}{3}\right) \leq 1, \forall x \in \mathbb{R}$

$\therefore 2 \geq -2\cos\left(\dfrac{2x}{3}\right) \geq -2, \forall x \in \mathbb{R}$

$\therefore -2 \leq -2\cos\left(\dfrac{2x}{3}\right) \leq 2, \forall x \in \mathbb{R}$

$\therefore \sqrt{2} - 2 \leq \sqrt{2} - 2\cos\left(\dfrac{2x}{3}\right) \leq \sqrt{2} + 2, \forall x \in \mathbb{R}$

$\therefore -2 + \sqrt{2} \leq f(x) \leq 2 + \sqrt{2}+, \forall x \in D_f$

Logo, $D'_f = [-2 + \sqrt{2}; 2 + \sqrt{2}]$

PROBABILIDADES E CÁLCULO COMBINATÓRIO

11. Para calcular a probabilidade pedida recorro à regra de Laplace, que consiste em dividir o número de casos favoráveis ao acontecimento pelo número de casos possíveis, quando estes são equiprováveis.
Para calcular o número de casos possíveis:
Tenho doze bolas no saco e pretendo agrupá-las três a três (uma vez que se retiram três bolas do saco). O número de maneiras de o fazer é dado por ${}^{12}C_3$.
Para calcular o número de casos favoráveis tenho de ter em atenção que vão sair três bolas e pretende-se que a soma dos números seja cinco. Ora, para que isso aconteça têm de ocorrer os seguintes casos:
Hipótese A: saírem duas bolas com o número 2 e uma bola com o número 1;
Hipótese B: saírem duas bolas com o número 1 e uma bola com o número 3.
Hipótese A:
Tenho cinco bolas com o número 2 e pretendo escolher duas. O número de maneiras de as agrupar duas a duas é dado por ${}^5C_3$. Tenho três bolas com o número 1 e pretendo escolher uma. O número de maneiras de as agrupar uma a uma é ${}^3C_1 = 3$. Então o número de maneiras que tenho de escolher duas bolas com o número 2 e uma bola com o número 1 é dado por ${}^5C_3 \times 3$.
Hipótese B:
Tenho três bolas com o número 1 e pretendo escolher duas. O número de maneiras de as agrupar duas a duas é dado por ${}^3C_2$.
Tenho quatro bolas com o número 3 e pretendo escolher uma. O número de maneiras de as agrupar uma a uma é ${}^4C_1 = 4$. Então o número de maneiras que tenho de escolher duas bolas com o número 1 e uma bola com o número 3 é dado por ${}^3C_2 \times 4$.
Em resumo, atendendo às duas hipóteses, tem-se que o número de casos favoráveis é dado por ${}^3C_2 \times 4 +^5 C_2 \times 3$.
A probabilidade pedida é dada por $P = \dfrac{{}^3C_2 \times 4 +^5 C_2 \times 3}{{}^{12}C_3}$.

12. Seja n, o número da linha do triângulo de Pascal.
Então, tem-se que ${}^nC_0 +^n C_1 +^n C_2 +^n C_3 = 20876$ e ${}^nC_3 = 19600$
Então, tem-se que,
$1 +^n C_1 +^n C_2 + 19600 = 20876 \Leftrightarrow^n C_1 +^n C_2 = 1275$

Como o terceiro elemento da linha seguinte é ${}^{n+1}C_2$. Por uma das propriedades do triângulo de Pascal, sabe-se que ${}^{n+1}C_2 =^n C_1 +^n C_2$
ou seja, o terceiro elemento da linha seguinte é 1275

Nota: Outro processo de resolução passaria por determinar o número da linha.

13. .

13.1. Sabe-se que em cada linha do triângulo de Pascal a soma dos seus elementos é uma potência de base 2, ou seja, na linha zero a soma é 2^0, na linha um a soma é 2^1,..., na linha de ordem n a soma é 2^n.
Então a soma pedida é dada por $S_n = 2^0 + 2^1 + \cdots + 2^n$. São $n+1$ parcelas.
Trata-se de uma soma de uma progressão geométrica de razão 2, logo,
$S_n = 2^0 \times \dfrac{1-2^{n+1}}{1-2} = 2^{n+1} - 1, n \in \mathbb{N}_0$ Como sabemos que a soma é igual a 16383, então, resulta que,
$2^{n+1} - 1 = 16383 \Leftrightarrow 2^{n+1} = 16384 \Leftrightarrow 2^{n+1} = 2^{14} \Leftrightarrow n = 13$. Foram adicionadas da linha zero à linha 13 do triângulo de Pascal, ou seja, foram adicionadas 14 linhas.

13.2. A linha seguinte tem o número 14, e o penúltimo elemento dessa linha é igual ao segundo, ou seja, é ${}^{14}C_1 = 14$.

14. .

14.1. $\left(\sqrt[8]{x^2} - \dfrac{1}{\sqrt{y}}\right)^{12} =$

$= \sum\limits_{p=0}^{12} \left[{}^{12}C_p \times \left(\sqrt[8]{x^2}\right)^{12-p} \times \left(-\dfrac{1}{\sqrt{y}}\right)^p\right] =$

$= \sum\limits_{p=0}^{12} \left[{}^{12}C_p \times (-1)^p \times \left(x^{\frac{1}{4}}\right)^{12-p} \times \left(y^{-\frac{1}{2}}\right)^p\right] =$

$= \sum\limits_{p=0}^{12} \left[{}^{12}C_p \times (-1)^p \times x^{\frac{12-p}{4}} \times y^{-\frac{p}{2}}\right] =$

$\dfrac{12-p}{4} = 3 \Leftrightarrow 12 - p = 12 \Leftrightarrow p = 0$

logo, o termo de grau três na incógnita x é ${}^{12}C_0 \times (-1)^0 \times x^3 \times y^0 = x^3$

14.2. Como o desenvolvimento tem treze termos, então o termo médio é ${}^{12}C_6 \times (-1)^6 \times x^{\frac{12-6}{4}} \times y^{-\frac{6}{2}}$, ou seja, $924x^{\frac{3}{2}}y^3 = 924\sqrt{x^3}y^3$

15. $\left(\dfrac{x^9}{y^2} - \dfrac{\sqrt[6]{y}}{x}\right)^n =$

$= \sum\limits_{p=0}^{n} \left[{}^{n}C_p \times \left(\dfrac{x^9}{y^2}\right)^{n-p} \times \left(-\dfrac{\sqrt[6]{y}}{x}\right)^p\right] =$

$= \sum\limits_{p=0}^{n} \left[{}^{n}C_p \times (-1)^p \times \left(x^9\right)^{n-p} \times \left(y^{-2}\right)^{n-p} \times \left(y^{\frac{1}{6}}\right)^p \times \left(x^{-1}\right)^p\right] =$

$= \sum\limits_{p=0}^{n} \left[{}^{n}C_p \times (-1)^p \times x^{9n-10p} \times y^{\frac{13p-12n}{6}}\right]$

Como um dos termos tem parte literal igual a $15x^{-5}y^{\frac{1}{3}}$, resulta que

$$9n - 10p = -5 \wedge \frac{13p-12n}{6} = \frac{1}{3} \wedge^n C_p \times (-1)^p = 15 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 9n - 10p = -5 \wedge 13p - 12n = 2 \wedge^n C_p \times (-1)^p = 15 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow p = \frac{9n+5}{10} \wedge 13p - 12n = 2 \wedge^n C_p \times (-1)^p = 15 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow p = \frac{9n+5}{10} \wedge 13 \times \frac{9n+5}{10} - 12n = 2 \wedge^n C_p \times (-1)^p = 15 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow p = \frac{9n+5}{10} \wedge \frac{117n+65}{10} - 12n = 2 \wedge^n C_p \times (-1)^p = 15 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow p=\frac{9n+5}{10} \wedge 117n+65-120n=2 \wedge^{n} C_p \times (-1)^p = 15 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow p=\frac{9n+5}{10} \wedge n=15 \wedge^{n} C_p \times (-1)^p = 15 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow p=\frac{9\times 15+5}{10} \wedge n=15 \wedge^{n} C_p \times (-1)^p = 15 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow p=14 \wedge n=15 \wedge^{n} C_p \times (-1)^p = 15 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow p=14 \wedge n=15 \wedge^{15} C_{14} \times (-1)^{14} = 15 (verdadeiro)$$

Logo, $n=15$