UNIVERSIDADE da MADEIRA

Faculdade de Ciências Exatas e da Engenharia

PROVA DE AVALIAÇÃO DE CONHECIMENTOS E COMPETÊNCIAS PARA ADMISSÃO AO ENSINO SUPERIOR PARA MAIORES DE 23 ANOS

Matemática - 07/07/2021

Atenção: | ***Justifique*** *os raciocínios utilizados na resolução das questões.*
Não é permitido *o uso de* ***calculadora*** *nem de* ***telemóvel****.*
A prova tem a duração de ***120 minutos****.*

Questão	1.(a)	1.(b)	1.(c)	2	3.(a)	3.(b)	4.(a)	4.(b)	4.(c)	5.(a)	5.(b)	5.(c)
Cotação	1.0	1.0	2.0	1.5	2.0	1.0	2.5	2.5	1.5	2.0	1.5	1.5

1. Considere a reta r definida por $3y - 5x = 1$ e o ponto $a = \left(\frac{5}{3}, -\frac{2}{3}\right)$. Determine
   (a) os parâmetros b e c tais que a reta s definida por $6y + bx = c$ é paralela a r e passa pelo ponto a.
   (b) a reta t, perpendicular a r, que passa pelo ponto a.
   (c) a distância entre o ponto a e o ponto de interseção das retas t e r.

2. Determine $\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right) + \cos\left(\frac{8\pi}{3}\right)$.

3. Considere um número real a e a sucessão $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ cujo termo geral é definido por
$$u_n = \frac{a^n}{3^{n-1} + 3^n}.$$
   Diga para que valores de a a sucessão $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é
   (a) convergente.
   (b) divergente e limitada.

4. Considere a função definida para $x \in \mathbb{R}$ por $f(x) = \frac{1}{(3 + x^2)^2}$.
   (a) Estude os intervalos de monotonia e a existência de extremos de f.
   (b) Estude o sentido da concavidade do gráfico da função f e determine, caso existam, os seus pontos de inflexão.
   (c) Esboce o gráfico e identifique o contradomínio da função f.

5. Numa caixa há 5 bolas, 3 amarelas e 2 brancas, indistinguíveis ao tato. Cada bola amarela vale 0 pontos e cada bola branca vale 1 ponto. Tiramos ao acaso duas bolas da caixa (sem reposição) e somamos os pontos.
   (a) Que valores pode a soma tomar e com que probabilidades se pode obter esses mesmos valores.
   (b) Sabendo que a primeira bola extraída foi branca, qual a probabilidade de a soma ser 2?
   (c) Sabendo que a soma é 2, qual a probabilidade de a primeira bola extraída ter sido branca?

UNIVERSIDADE da MADEIRA

Faculdade de Ciências Exatas e da Engenharia

Uma possível resolução da

PROVA DE AVALIAÇÃO DE CONHECIMENTOS E COMPETÊNCIAS PARA ADMISSÃO AO ENSINO SUPERIOR PARA MAIORES DE 23 ANOS

Matemática - 07/07/2021

Atenção: ***Justifique*** *os raciocínios utilizados na resolução das questões.*
Não é permitido *o uso de* ***calculadora*** *nem de* ***telemóvel****.*
A prova tem a duração de ***120 minutos****.*

Questão	1.(a)	1.(b)	1.(b)	2	3.(a)	3.(b)	4.(a)	4.(b)	4.(c)	5.(a)	5.(b)	5.(c)
Cotação	1.0	1.0	2.0	1.5	2.0	1.0	2.5	2.5	1.5	2.0	1.5	1.5

1. Considere a reta r definida por $3y-5x=1$ e o ponto $a=\left(\frac{5}{3},-\frac{2}{3}\right)$. Determine

   (a) os parâmetros b e c tais que a reta s definida por $6y+bx=c$ é paralela a r e passa pelo ponto a.
   De
   $$3y-5x=1 \Leftrightarrow y=\frac{5}{3}x+\frac{1}{3}$$
   e
   $$6y+bx=c \Leftrightarrow y=-\frac{b}{6}x+\frac{c}{6},$$
   resulta, para que as retas r e s sejam paralelas, que
   $$\frac{5}{3}=-\frac{b}{6} \Leftrightarrow b=-6\times\frac{5}{3}=-10.$$
   Assim, a equação reduzida da reta s é dada por
   $$y=\frac{5}{3}x+\frac{c}{6}.$$
   Para que a reta s passe no ponto a temos de ter
   $$\begin{aligned}-\frac{2}{3} &= \frac{5}{3}\frac{5}{3}+\frac{c}{6}\\ \Leftrightarrow \frac{c}{6} &= -\frac{2}{3}-\frac{25}{9}=-\frac{6}{9}-\frac{25}{9}=-\frac{31}{9}\\ \Leftrightarrow c &= -6\times\frac{31}{9}=-\frac{62}{3}.\end{aligned}$$
   Concluímos assim que $b=-10$ e $c=-\frac{62}{3}$.

   (b) a reta t, perpendicular a r, que passa pelo ponto a.
   O declive de uma reta perpendicular a uma reta r com equação reduzida $y=mx+b$ é dado por $-\frac{1}{m}$. Assim a reta t terá como equação reduzida $y=-\frac{3}{5}x+b$, onde b é a

ordenada do ponto no qual a reta cruza o eixo Oy. Como a reta t passa pelo ponto a temos

$$-\frac{2}{3} = -\frac{3}{5}\frac{5}{3} + b \Leftrightarrow -\frac{2}{3} = -1 + b \Leftrightarrow b = 1 - \frac{2}{3} \Leftrightarrow b = \frac{1}{3}.$$

Resulta assim que a reta t tem equação reduzida $y = -\frac{3}{5}x + \frac{1}{3}$.

(c) a distância entre o ponto a e o ponto de interseção das retas t e r.

Para encontrar o ponto (x, y) de interseção das retas r e t necessitamos de encontrar a solução do seguinte sistema de equações:

$$\begin{cases} y = \frac{5}{3}x + \frac{1}{3} \\ \\ y = -\frac{3}{5}x + \frac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} - \\ \\ \frac{5}{3}x + \frac{1}{3} = -\frac{3}{5}x + \frac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} - \\ \\ x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{1}{3} \\ \\ x = 0 \end{cases}.$$

O ponto de interseção das retas r e t é o ponto $\left(0, \frac{1}{3}\right)$.

A distância deste ponto ao ponto a é

$$\begin{aligned} d\left(\left(0, \frac{1}{3}\right), \left(\frac{5}{3}, -\frac{2}{3}\right)\right) &= \sqrt{\left(0 - \frac{5}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3} + \frac{2}{3}\right)^2} \\ &= \sqrt{\left(-\frac{5}{3}\right)^2 + 1^2} = \sqrt{\frac{25}{9} + 1} \\ &= \sqrt{\frac{34}{9}} = \frac{\sqrt{34}}{3}. \end{aligned}$$

2. Determine $\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right) + \cos\left(\frac{8\pi}{3}\right)$.

Temos que

$$\begin{aligned} \sin\left(\frac{3\pi}{4}\right) + \cos\left(\frac{8\pi}{3}\right) &= \sin\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(2\pi + \frac{2\pi}{3}\right) \\ &= \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} + \cos\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} - \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{2} - 1}{2}. \end{aligned}$$

3. Considere um número real a e a sucessão $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ cujo termo geral é definido por

$$u_n = \frac{a^n}{3^{n-1} + 3^n}.$$

Diga para que valores de a a sucessão $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é

(a) convergente.

De

$$\begin{aligned} u_n &= \frac{a^n}{3^{n-1} + 3^n} = \left(\frac{a}{3}\right)^n \frac{1}{3^{-1} + 1} \\ &= \left(\frac{a}{3}\right)^n \frac{1}{\frac{1}{3} + 1} = \left(\frac{a}{3}\right)^n \frac{1}{\frac{1}{3} + \frac{3}{3}} \\ &= \left(\frac{a}{3}\right)^n \frac{1}{\frac{4}{3}} = \left(\frac{a}{3}\right)^n \frac{3}{4} \end{aligned}$$

resulta que a sucessão $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é convergente se, e só se, $\left(\frac{a}{3}\right)^n$ for convergente, *i.e.*, se

$$-1 < \frac{a}{3} \leq 1 \Leftrightarrow -3 < a \leq 3 \Leftrightarrow a \in (-3, 3]\,.$$

Concluímos assim que a sucessão $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é convergente quando $a \in (-3, 3]$.

(b) divergente e limitada.
A sucessão $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é divergente e limitada se, e só se,

$$\frac{a}{3} = -1 \Leftrightarrow a = -3.$$

Quando $a = -3$, temos $u_n = (-1)^n \frac{3}{4}$, que é uma sucessão divergente (pois quando n é par, $u_n = \frac{3}{4}$, e quando n é ímpar, $u_n = -\frac{3}{4}$) e limitada (pois $-\frac{3}{4} \leq u_n \leq \frac{3}{4}$).

4. Considere a função definida para $x \in \mathbb{R}$ por $f(x) = \dfrac{1}{(3+x^2)^2}$.

(a) Estude os intervalos de monotonia e a existência de extremos de f.
A derivada da função f para x real é dada por

$$f'(x) = \left(\frac{1}{(3+x^2)^2}\right)' = \left((3+x^2)^{-2}\right)' = -2\left(3+x^2\right)^{-3} 2x = -\frac{4x}{(3+x^2)^3}.$$

De $(3+x^2)^3 > 0$, para qualquer valor x real, resulta que

$$f'(x) < 0 \Leftrightarrow -\frac{4x}{(3+x^2)^3} < 0 \Leftrightarrow -4x < 0 \Leftrightarrow x > 0.$$

De igual forma se conclui que

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow x < 0$$

e que

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0.$$

Apresentando os resultados anteriores num quadro de estudo do sinal de f', considerando que $f(0) = \frac{1}{(3+0^2)^2} = \frac{1}{9}$, obtemos:

		0	
f'	+	0	−
f	↗	$\frac{1}{9}$	↘

Conclui-se assim que f é crescente no intervalo $]-\infty, 0[$, é decrescente no intervalo $]0, +\infty[$ e tem um único extremo, um máximo absoluto, em $x = 0$, que vale $\frac{1}{9}$.

(b) Estude o sentido da concavidade do gráfico da função f e determine, caso existam, os seus pontos de inflexão.

A segunda derivada da função f para x real é dada por

$$\begin{aligned} f''(x) &= \left(-\frac{4x}{(3+x^2)^3}\right)' = -4\left(\frac{x}{(3+x^2)^3}\right)' \\ &= -4\frac{1 \times (3+x^2)^3 - x \times 3\left(3+x^2\right)^2 2x}{(3+x^2)^6} \\ &= -4\left(3+x^2\right)^2 \frac{(3+x^2) - 6x^2}{(3+x^2)^6} \\ &= -4\frac{3-5x^2}{(3+x^2)^4}. \end{aligned}$$

Resulta assim que, dado que $(3+x^2)^4 > 0$, para qualquer valor x real,

$$\begin{aligned} f''(x) < 0 \quad &\Leftrightarrow \quad -4\frac{3-5x^2}{(3+x^2)^4} < 0 \\ &\Leftrightarrow \quad -4\left(3-5x^2\right) < 0 \\ &\Leftrightarrow \quad 3-5x^2 > 0 \\ &\Leftrightarrow \quad 3 > 5x^2 \\ &\Leftrightarrow \quad x^2 < \frac{3}{5} \Leftrightarrow |x| < \sqrt{\frac{3}{5}} \Leftrightarrow -\sqrt{\frac{3}{5}} < x < \sqrt{\frac{3}{5}}. \end{aligned}$$

De forma análoga se conclui que

$$f''(x) < 0 \Leftrightarrow |x| > \sqrt{\frac{3}{5}} \Leftrightarrow x < -\sqrt{\frac{3}{5}} \vee x > \sqrt{\frac{3}{5}}$$

e que

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow |x| = \sqrt{\frac{3}{5}} \Leftrightarrow x = -\sqrt{\frac{3}{5}} \vee x = \sqrt{\frac{3}{5}}.$$

Apresentando os resultados anteriores num quadro de estudo do sinal de f'', considerando que

$$f\left(-\sqrt{\frac{3}{5}}\right) = f\left(\sqrt{\frac{3}{5}}\right) = \frac{1}{\left(3+\left(\sqrt{\frac{3}{5}}\right)^2\right)^2} = \frac{1}{\left(3+\frac{3}{5}\right)^2} = \frac{1}{\left(\frac{15+3}{5}\right)^2} = \frac{25}{18^2},$$

obtemos:

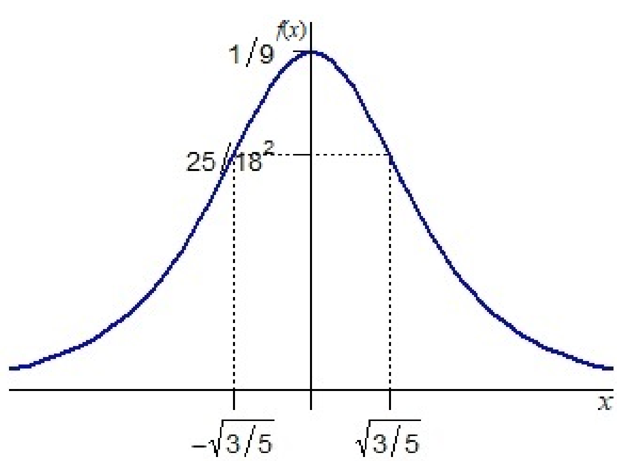
		$-\sqrt{\frac{3}{5}}$		$\sqrt{\frac{3}{5}}$	
f''	$+$	0	$-$	0	$+$
f	$\smile$	$\frac{25}{18^2}$	$\frown$	$\frac{25}{18^2}$	$\smile$

Concluímos assim que no conjunto $\left]-\infty, -\sqrt{\frac{3}{5}}\right[\cup \left]\sqrt{\frac{3}{5}}, +\infty\right[$ o gráfico da função f tem concavidade voltada para cima e no intervalo $\left]-\sqrt{\frac{3}{5}}, \sqrt{\frac{3}{5}}\right[$ o gráfico da função f tem concavidade voltada para baixo. Consequentemente, o gráfico de f tem dois pontos de inflexão: $\left(-\sqrt{\frac{3}{5}}, \frac{25}{18^2}\right)$ e $\left(\sqrt{\frac{3}{5}}, \frac{25}{18^2}\right)$.

(c) Esboce o gráfico e identifique o contradomínio da função f.
Considerando os resultados das alíneas anteriores e considerando que

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{(3+x^2)^2} = 0,$$

o gráfico de f é dado por



O contradomínio de f, que é o conjunto dos pontos y tais que $y = f(x)$, para algum x pertencente ao domínio de f, é o intervalo $]0, 1/9]$.

5. Numa caixa há 5 bolas, 3 amarelas e 2 brancas, indistinguíveis ao tato. Cada bola amarela vale 0 pontos e cada bola branca vale 1 ponto. Tiramos ao acaso duas bolas da caixa (sem reposição) e somamos os pontos.

   (a) Que valores pode a soma tomar e com que probabilidades pode tomar esses mesmos valores.
   Quando a segunda bola é retirada, a caixa já não tem 3 bolas amarelas e 2 brancas. Dependendo da primeira bola retirada, pode ter 2 bolas amarelas e 2 bolas brancas (se foi primeiro retirada uma bola amarela) ou 3 bolas amarelas e 1 bola branca (se foi primeiro retirada uma bola branca). O seguinte quadro descreve todas as possibilidades de extração de duas bolas:

1.ª extração (pontos)	Prob.	2.ª extração (pontos)	Prob.	Soma (pontos)	Prob.
0	$\frac{3}{5}$	0	$\frac{2}{4}$	0	$\frac{3}{5}\frac{2}{4} = \frac{3}{5}\frac{1}{2} = \frac{3}{10}$
0	$\frac{3}{5}$	1	$\frac{2}{4}$	1	$\frac{3}{5}\frac{2}{4} = \frac{3}{10}$
1	$\frac{2}{5}$	0	$\frac{3}{4}$	1	$\frac{2}{5}\frac{3}{4} = \frac{1}{5}\frac{3}{2} = \frac{3}{10}$
1	$\frac{2}{5}$	1	$\frac{1}{4}$	2	$\frac{2}{5}\frac{1}{4} = \frac{1}{5}\frac{1}{2} = \frac{1}{10}$

   Conclui-se assim que a somas dos pontos pode tomar os valores 0, 1 e 2, com probabilidades $\frac{3}{10}$, $\frac{3}{10} + \frac{3}{10} = \frac{6}{10}$ e $\frac{1}{10}$, respetivamente. Resumindo:

Valor da soma (x)	0	1	2
Probabilidade de soma ser x	$\frac{3}{10}$	$\frac{6}{10}$	$\frac{1}{10}$

   .

   (b) Sabendo que a primeira bola extraída foi branca, qual a probabilidade de a soma ser 2?
   Se a primeira bola foi branca, sabemos que na segunda extração a caixa tem 3 bolas amarelas e 1 bola branca. Assim a soma dos pontos pode ser 1, com probabilidade $\frac{3}{4}$ (a probabilidade de a segunda extração resultar numa bola amarela, que corresponde a 0 pontos) ou 2, com probabilidade $\frac{1}{4}$. Resumindo, a probabilidade de a soma ser 2, sabendo que na primeira extração saiu bola branca, é $\frac{1}{4}$.

   (c) Sabendo que a soma das bolas é 2, qual a probabilidade de a primeira bola ter sido branca?
   Se a soma das bolas é 2, necessariamente terão sido extraídas duas bolas brancas, pelo que a probabilidade de a primeira bola extraída ter sido branca é um.