Matemática - 2022
2º Teste – Tópicos de resolução

Exercício 1

a) $\lim_n u_n = \lim_n \left(\frac{2n}{3n+5}\right) = \lim_n \left[\frac{2n}{n\left(3+\frac{5}{n}\right)}\right] = \lim_n \left(\frac{2}{3+\frac{5}{n}}\right) = \frac{2}{3+0} = \frac{2}{3} \in \mathbb{R}$

$\therefore$ $(u_n)_n$ é convergente.

b) $(u_n)_n$ é convergente (atendendo à alínea anterior).

$\therefore$ $(u_n)_n$ é limitada porque toda a sucessão convergente é limitada.

Exercício 2

a) $\lim_n \left(\sqrt{n+3} - \sqrt{n}\right) = \lim_n \frac{(\sqrt{n+3}-\sqrt{n})(\sqrt{n+3}+\sqrt{n})}{\sqrt{n+3}+\sqrt{n}} =$

$= \lim_n \frac{\left(\sqrt{n+3}\right)^2-\left(\sqrt{n}\right)^2}{\sqrt{n+3}+\sqrt{n}} \lim_n \frac{n+3-n}{\sqrt{n+3}+\sqrt{n}} = \lim_n \frac{3}{\sqrt{n+3}+\sqrt{n}} = \frac{3}{+\infty} = 0$

b) $\lim_n \left(1+\frac{5}{n+1}\right)^{\frac{n+1}{5}} = \lim_n \left[\left(1+\frac{5}{n+1}\right)^{n+1}\right]^{\frac{1}{5}} = (e^5)^{\frac{1}{5}} = e$

Exercício 3

a) Abcissa do vértice: $-\frac{b}{2a} = -\frac{4}{2\times(-1)} = 2.$
Ordenada do vértice: $f(2) = -2^2 + 4 \times 2 + 3 = 7.$
$\therefore$ Coordenadas do vértice: $V(2, 7)$.

b) A parábola representativa do gráfico de f tem a concavidade "voltada para baixo"(porque o coeficiente do termo em x^2 do polinómio que define a função é $-1 < 0$) e a ordenada do seu vértice é 7.
$\therefore$ $D'_f =]-\infty, 7]$.

c) f não tem mínimo absoluto e o seu máximo absoluto é 7.

Exercício 4

$\frac{x^2+2}{-x^2+2x} > 0 \Leftrightarrow x \in]0,2[$ $\qquad\qquad$ $C.S. =]0,2[.$

<u>Cálculos auxiliares:</u>

$x^2 + 2 = 0 \Leftrightarrow x^2 = -2 \Leftrightarrow x \in \emptyset$
$-x^2 + 2x = 0 \Leftrightarrow x(-x+2) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee -x + 2 = 0$
$\Leftrightarrow x = 0 \vee -x = -2 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 2$

x	$-\infty$	0		2	$+\infty$
x^2+2	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$-x^2+2x$	$-$	0	$+$	0	$-$
$\frac{x^2+2}{-x^2+2x}$	$-$	S.S.	$+$	S.S.	$-$

Exercício 5

a)

$$\begin{array}{c|ccc|c} & 1 & -1 & -4 & 4 \\ 1 & & 1 & 0 & -4 \\ \hline & 1 & 0 & -4 & 0 \end{array}$$

$\therefore p(x) = (x-1)(x^2-4), \forall x \in \mathbb{R}.$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty}(x^3 - x^2 - 4x + 4) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left[x^3\left(1 - \frac{1}{x} - \frac{4}{x^2} + \frac{4}{x^3}\right)\right] =$

$= +\infty(1 - 0 - 0 + 0) = +\infty$

Exercício 6

$$y' = \frac{(x^3+1)' \times x - (x^3+1) \times (x)'}{x^2} = \frac{3x^2 \times x - (x^3+1) \times 1}{x^2} =$$

$$= \frac{3x^3 - x^3 - 1}{x^2} = \frac{2x^3 - 1}{x^2}$$

Exercício 7

$$f'(x) = -\frac{2x}{2} + 5 + 0 = -x + 5$$

$f'(2) = -2 + 5 = 3$ → Declive da reta tangente.

$f(2) = -\frac{2^2}{2} + 5 \times 2 - 10 = -2$

$(2, -2)$ → Coordenadas do ponto de tangência.

$y = 3x + b$

$-2 = 3 \times 2 + b \Leftrightarrow b = -8$

$\therefore y = 3x - 8.$

Exercício 8

a) $D_g = \mathbb{R}$

$3^{2x+3} > 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow -3^{2x+3} < 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow 5 - 3^{2x+3} < 5, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow g(x) < 5, \forall x \in \mathbb{R}$

$\therefore D'_g =]-\infty, 5[.$

b) $5 - 3^{2x+3} = y \Leftrightarrow -3^{2x+3} = y - 5 \Leftrightarrow 3^{2x+3} = -y + 5 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 2x + 3 = \log_3(-y + 5) \Leftrightarrow 2x = \log_3(-y + 5) - 3 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x = \dfrac{\log_3(-y + 5) - 3}{2}$

$$g^{-1}(x) = \frac{\log_3(-x + 5) - 3}{2}$$

$D_{g^{-1}} = D'_g =]-\infty, 5[$
$D'_{g^{-1}} = D'_g = \mathbb{R}$

$\therefore g^{-1}:]-\infty, 5[\longrightarrow \mathbb{R}$
$x \longrightarrow \frac{\log_3(-x+5)-3}{2}$

c) $g(x) = -4 \Leftrightarrow 5 - 3^{2x+3} = -4 \Leftrightarrow -3^{2x+3} = -9 \Leftrightarrow 3^{2x+3} = 9 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 3^{2x+3} = 3^2 \Leftrightarrow 2x + 3 = 2 \Leftrightarrow 2x = -1 \Leftrightarrow x = -\dfrac{1}{2}$
$\therefore C.S. = \left\{-\frac{1}{2}\right\}.$

Exercício 9

a) $D = \{x \in \mathbb{R}: -x + 5 > 0 \wedge -2x > 0\} =]-\infty, 0[$

<u>Cálculos auxiliares:</u>

$-x + 5 > 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow -x > -5 \Leftrightarrow x < 5$
$-2x > 0 \Leftrightarrow x < 0$

$ln(-x + 5) = ln(-2x) \Leftrightarrow -x + 5 = -2x \wedge x \in]-\infty, 0[\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x = -5 \wedge x \in]-\infty, 0[\Leftrightarrow x = -5$

$\therefore C.S. = \{-5\}.$

b) $(x + 3) \cdot 3^x - 3^x = 0 \Leftrightarrow 3^x \cdot (x + 3 - 1) = 0 \Leftrightarrow 3^x = 0 \vee x + 2 = 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x \in \emptyset \vee x = -2 \Leftrightarrow x = -2$
$\therefore C.S. = \{-2\}.$