Prova Modelo de Exame Final Nacional

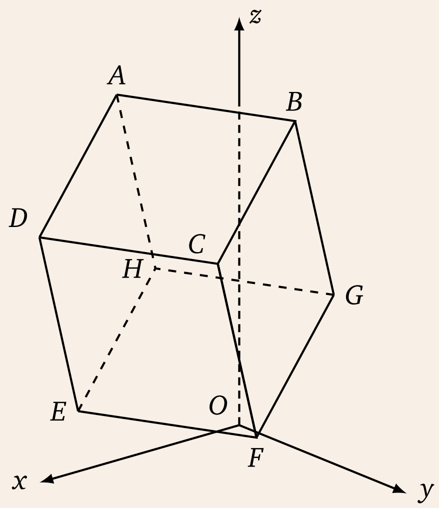
Prova 2 – Matemática A – 2021

Sinal + *Nuno Miguel Guerreiro*

Duração da Prova: 150 minutos. | Tolerância: 30 minutos

A prova inclui 11 itens, identificados a sombreado e com uma ⋆, cujas respostas contribuem obrigatoriamente para a classificação final. Dos restantes 7 items da prova, apenas os 4 melhores contarão para a nota final.

1. Na Figura abaixo, está representado, num referencial o.n. $Oxyz$, o prisma regular $[ABCDEFGH]$.



Sabe-se que:

- O é a origem do referencial;
- o ponto H tem coordenadas $\left(0,-\frac{3}{2},\frac{3}{2}\right)$;
- o vetor $\overrightarrow{AC}$ tem coordenadas $(1,3,-1)$.

⋆ 1.1. Qual é o valor de $2\overrightarrow{AC}\cdot\left(\overrightarrow{FA}+\overrightarrow{AH}\right)$?

⋆ 1.2. Determine uma equação cartesiana do plano mediador do segmento $[HF]$.

2. Considere uma sucessão (u_n) definida por:

$$u_n=\begin{cases} n^2 & \text{se } n<50 \\ \operatorname{sen} n & \text{se } n\geq 50 \end{cases}$$

Qual das afirmações é necessariamente verdadeira?

(A) (u_n) é monótona

(B) (u_n) é convergente

(C) (u_n) é limitada

(D) (u_n) é um infinitamente grande

⋆ 3. Seja (v_n) a sucessão de termo geral $v_n=\left(-\frac{1}{2}\right)^{4n+1}$.

Mostre que (v_n) é uma progressão geométrica e estude a sua monotonia.

⋆ 4. Seja E um conjunto finito, P uma probabilidade em $\mathscr{P}(E)$ e $A,B\in\mathscr{P}(E)$.

Sabe-se que:

- $P\left(A|(\overline{A}\cup B)\right)=\frac{1}{2}$
- $P(A)=\frac{3}{5}$

Determine o valor de $P(B|A)$.

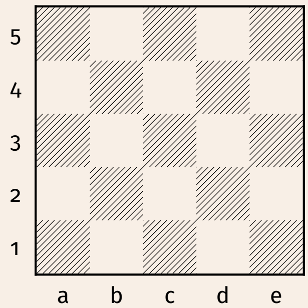
5. Considere a linha do Triângulo de Pascal cujos elementos são da forma ${}^{449}C_p$.

Escolhe-se, ao acaso, um elemento dessa linha.

Qual é a probabilidade desse elemento ser maior que ${}^{448}C_{49} + {}^{448}C_{400}$?

(A) $\dfrac{347}{449}$ **(B)** $\dfrac{58}{75}$ **(C)** $\dfrac{349}{449}$ **(D)** $\dfrac{7}{9}$

★ 6. Na Figura ao lado está representado um tabuleiro com vinte e cinco casas.



Pretende-se colocar neste tabuleiro cinco peças brancas e dez peças pretas de forma a que cada peça ocupe uma e uma só casa.

As peças pretas são numeradas de 1 a 10, e as peças brancas não têm qualquer numeração.

Escreva uma expressão que permita determinar o número de maneiras em que se podem dispor as peças, de forma a que exista pelo menos uma coluna preenchida inteiramente com peças brancas.

7. Considere em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, o número complexo z tal que o afixo do seu conjugado, $\overline{z}$, se situa no 2º quadrante.

A que quadrante pertence o afixo de $\dfrac{z}{3}$?

(A) Primeiro **(B)** Segundo **(C)** Terceiro **(D)** Quarto

★ 8. Considere em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, o número complexo dado por $w = \dfrac{5(\sqrt{3}-i)^5}{(2+3i)^2-12i}$.

Resolva a equação $\dfrac{z^4}{w} = i^7$.

Apresente as soluções na forma trigonométrica.

9. Na Figura ao lado, está representado o gráfico de uma função f, de domínio $[-2,4]$.

Tal como a figura sugere todos os objetos inteiros têm imagens inteiras.

Seja h a função definida por $h(x) = \dfrac{2}{\sqrt{x+2}}$.

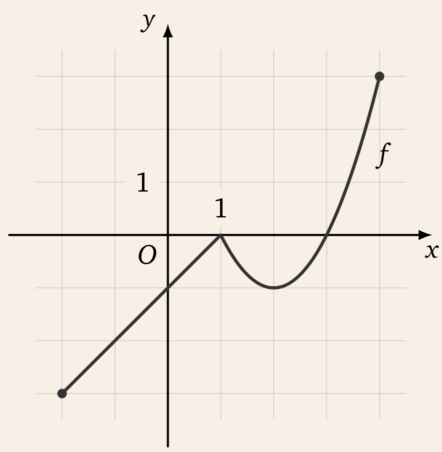
Qual é o domínio da função $h \circ f$?

(A) $]-1,2[\, \cup\,]2,4]$

(B) $[-1,4]$

(C) $]-1,4]$

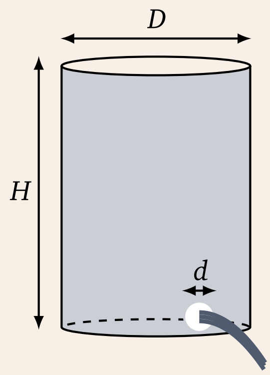
(D) $[-1,2[\, \cup\,]2,4]$



10. Uma conhecida experiência de Mecânica dos Fluidos é a de esvaziar um tanque cilíndrico através de um orifício circular situado ao nível da base do tanque.

A Figura ao lado apresenta um esquema em que se pode ver o escoamento através de um orifício de diâmetro d da água de um tanque cheio, de forma cilíndrica com diâmetro D e altura H. Todas estas distâncias são medidas em metros.

Sabe-se que o tempo total, em segundos, de esvaziamento do tanque é dado, aproximadamente, por $t = \left(\frac{D}{d}\right)^2 \sqrt{\frac{2H}{9.81}}$.



★ 10.1. Considere um tanque tal que o raio do orifício é igual a $\frac{1}{75}$ do raio do tanque cilíndrico.

Determine a altura do tanque sabendo que este se esvaziou inteiramente em 1 hora.

Apresente o resultado em metros, com arredondamento às unidades.

★ 10.2. Considere dois tanques A e B de igual diâmetro D, tal que $D > 0{,}5$.

Os dois tanques foram projetados com diferentes especificações:

- o diâmetro do tanque A é igual à sua altura e é 0,5 metros maior que o diâmetro do seu orifício;
- a altura do tanque B é 0,4 metros, e o diâmetro do orifício do tanque B mede 0,1 metros.

Sabe-se que o tempo total de esvaziamento do tanque A é o dobro do tempo total de esvaziamento do tanque B.

Utilizando a calculadora gráfica, determine o diâmetro dos tanques A e B.

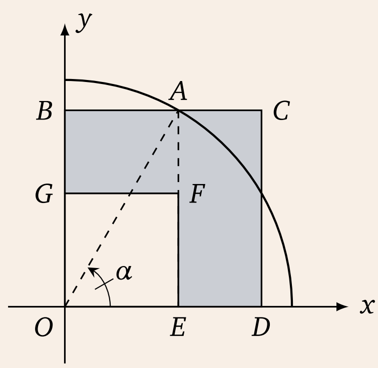
Na sua resposta deve:

- equacionar o problema;
- reproduzir, num referencial, o(s) gráfico(s) da(s) função(ões) visualizada(s) na calculadora que lhe permite(m) resolver a equação;
- apresentar o valor de D, com arredondamento às centésimas.

11. Na figura ao lado, estão representados, num referencial o.n xOy, uma circunferência de centro O e raio 2, e dois quadrados $[OBCD]$ e $[OEFG]$.

Sabe-se que:

- o ponto A pertence à circunferência;
- a reta BC contém o ponto A e é paralela ao eixo Ox;
- a reta GF é paralela ao eixo Ox;
- a reta AE contém o ponto F e é paralela ao eixo Oy;
- $\alpha \in \left]\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right[$ é a amplitude, em radianos, do ângulo orientado DOA.



Qual das seguintes expressões representa, em função de α, a área da região a sombreado ?

(A) $4\cos(2\alpha)$ **(B)** $-4\cos(2\alpha)$

(C) $2\,\text{sen}(2\alpha)$ **(D)** $-2\sin(2\alpha)$

12. Seja g uma função cuja primeira derivada g', de domínio $]1,+\infty[$, é dada por $g'(x)=\dfrac{\ln x}{x-1}$.

Sabe-se ainda que 3 é zero do gráfico de g.

Qual das opções é necessariamente verdadeira?

(A) A função g admite um e um só zero, e o valor de $g(2)$ é negativo.

(B) A função g pode admitir mais que um zero, e o valor de $g(2)$ é negativo.

(C) A função g admite um e um só zero, e o valor de $g(2)$ é positivo.

(D) A função g pode admitir mais que um zero, e o valor de $g(2)$ é positivo.

13. Considere a função f, de domínio $\left]-\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{2}\right[$, definida por $f(x)=\dfrac{1}{1+\operatorname{tg} x}$.

⋆ **13.1.** Sejam A e B os pontos do gráfico de f de abcissas 0 e $\dfrac{\pi}{4}$, respetivamente.

Determine a equação da reta perpendicular à reta AB e que passa na origem do referencial.

⋆ **13.2.** Estude a função f quanto ao sentido das concavidades do seu gráfico e quanto à existência de pontos de inflexão.

Na sua resposta deve apresentar:

- o(s) intervalo(s) em que o gráfico de f tem concavidade voltada para baixo;
- o(s) intervalo(s) em que o gráfico de f tem concavidade voltada para cima;
- as coordenadas do(s) ponto(s) de inflexão do gráfico de f.

⋆ **14.** Seja g uma função par de domínio $\mathbb{R}$ tal que $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)+4x]+3=0$.

Qual das seguintes equações define a assíntota ao gráfico de g quando $x\to-\infty$?

(A) $y=-4x-3$ **(B)** $y=-4x+3$ **(C)** $y=4x-3$ **(D)** $y=4x+3$

⋆ **15.** Determine o valor de lim $\lim\limits_{x\to-\infty}[x\ln(e^x+1)]$.

FIM

Todos os itens desta prova são originais do autor. Prova realizada em junho de 2021 . Última atualização às 13:25 de 12 de Julho de 2021.