12.º Ano de Escolaridade | Turma G

Caderno 1

1. Capital inicial: 25000

   O capital acumulado ao fim de um ano será: $25000 \times \left(1 + \frac{4.5}{100 \times 2}\right)^2 \approx 26137.66$ euros

   RESPOSTA:
   Versão 1: D
   Versão 2: C

2. 2.1. $^8C_4 +^5 C_4 = 75$
   Existem 75 conjuntos constituídos, apenas por vértices do cubo ou apenas por vértices da pirâmide.

   2.2. $^{13}C_2 - 2 \times 6 = 66$
   Podem ser definidas 66 retas.

3. $^nC_2 = 55 \Leftrightarrow \frac{n!}{2! \times (n-2)!} = 55 \Leftrightarrow \frac{n(n-1)(n-2)!}{(n-2)!} = 110 \Leftrightarrow n^2 - n = 110 \Leftrightarrow$
   $\Leftrightarrow n^2 - n - 110 = 0 \Leftrightarrow n = \frac{1 \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \times 1 \times (-110)}}{2 \times 1} \Leftrightarrow n = -10 \vee n = 11$
   Como, $n \geq 2$, vem, $n = 11$.
   Assim, $b =^{11} C_3 = 165$

   RESPOSTA:
   Versão 1: A
   Versão 2: C

4. 4.1. 0 é ponto aderente de D_f e pertence a D_f.
   A função f é contínua em $x = 0$ se existir $\lim\limits_{x \mapsto 0} f(x)$

   $\lim\limits_{x \mapsto 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \mapsto 0^-} \frac{x + e^x}{2} = \frac{0 + e^0}{2} = \frac{1}{2}$
   $\lim\limits_{x \mapsto 0^+} f(x) == \lim\limits_{x \mapsto 0^+} \frac{1 - e^x}{-2x} = \lim\limits_{x \mapsto 0^+} \frac{-(e^x - 1)}{-2x} = \frac{1}{2} \lim\limits_{x \mapsto 0^+} \frac{e^x - 1}{x} = \frac{1}{2}$
   $f(0) = \frac{0 + e^0}{2} = \frac{1}{2}$
   Como, $\lim\limits_{x \mapsto 0^-} f(x) = f(0)$ e $\lim\limits_{x \mapsto 0^+} = f(0)$, então existe $\lim\limits_{x \mapsto 0} f(x)$.
   Portanto, a função f é contínua em $x = 0$.

   4.2. $x + e^x = x + 2e^{-x} - 1 \Leftrightarrow e^x - 2e^{-x} + 1 = 0 \Leftrightarrow e^x - \frac{2}{e^x} + 1 = 0 \Leftrightarrow \frac{(e^x)^2 + e^x - 2}{e^x} = 0 \Leftrightarrow$
   $\Leftrightarrow (e^x)^2 + e^x - 2 = 0 \wedge e^x \neq 0 \Leftrightarrow (e^x)^2 + e^x - 2 = 0$

   Fazendo, $y = e^x$, vem,

   $y^2 + y - 2 = 0 \Leftrightarrow y = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \times 1 \times (-2)}}{2 \times 1} \Leftrightarrow y = -2 \vee y = 1$

Assim, tem-se que

$e^x = -2 \vee e^x = 1 \Leftrightarrow$ equação impossível $\vee e^x = 1 \Leftrightarrow e^x = e^0 \Leftrightarrow x = 0$
$C.S. = \{0\}$

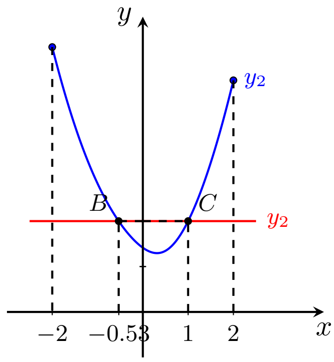
5. .

5.1. $g(1) = -1^4 + 1^2 + 5 = 5$, logo, $A(1;5)$

O ponto P, que percorre a curva do gráfico da função f tem coordenadas: $P = (x; f(x))$
Ora, $d(x) = d(A;P) = \overline{AP} = \sqrt{(x-1)^2 + (f(x)-5)^2} = \sqrt{x^2 - 2x + 1 + (4 - x^2 - 5)^2} =$
$= \sqrt{x^2 - 2x + 1 + x^4 + 2x^2 + 1} = \sqrt{x^4 + 3x^2 - 2x + 2}$, *c.q.d.*

5.2. As abcissas dos pontos do gráfico de f que distam duas unidades do ponto A, são as soluções da equação $d(x) = 2$.

Pretende-se encontrar as soluções da equação $d(x) = 2$
Inserir as funções:
$y_1 = \sqrt{x^4 + 3x^2 - 2x + 2}$
e $y_2 = 2$
Ajustar a janela de visualização:
$x_{min} : -3$
$x_{max} : 3$
$y_{min} : -1$
$y_{max} : 6$



$B(-0.53; 2)$ e $C(1; 2)$

As abcissas dos pontos do gráfico de f que distam duas unidades do ponto A, são: $x_1 \approx -0.53$;$x_2 = 1$.

6. $h'(x) = \left(e^{3x} + k\right)' = 3e^{3x}$
$h'(1) = 3e^{3\times 1} = 3e^3$

$$\lim_{x\to 1} \frac{h(x) - h(1)}{3x - 3} = \lim_{x\to 1} \frac{h(x) - h(1)}{3(x-1)} = \frac{1}{3} \times \lim_{x\to 1} \frac{h(x) - h(1)}{x - 1} = \frac{1}{3} \times h'(1) = \frac{1}{3} \times 3e^3 = e^3$$

RESPOSTA:
Versão 1: B
Versão 2: D

Caderno 2

7. $\lim u_n = \lim \left(1 + \frac{4k+3}{n}\right)^{2n} = \lim \left[\left(1 + \frac{4k+3}{n}\right)^n\right]^2 = \left[\lim \left(1 + \frac{4k+3}{n}\right)^n\right]^2 = (e^{4k+3})^2 =$
$= e^{8k+6}$

$$\lim v_n = \lim \frac{e^6 n + 4}{n + 2} = \lim \frac{e^6 n \left(1 + \frac{4}{e^6 n}\right)}{n\left(1 + \frac{2}{n}\right)} = e^6 \times \frac{\lim \left(1 + \frac{4}{e^6 n}\right)}{\lim \left(1 + \frac{2}{n}\right)} = e^6 \times \frac{1+0}{1+0} = e^6 \times 1 = e^6$$

Assim, $\lim u_n = \lim v_n \Leftrightarrow e^{8k+6} = e^6 \Leftrightarrow 8k + 6 = 6 \Leftrightarrow k = 0$

8. $\lim\limits_{x\to -3} \dfrac{1-e^{x+3}}{6+2x} = \lim\limits_{x\to -3} \dfrac{e^{x+3}-1}{2(x+3)} = \dfrac{1}{2} \times \lim\limits_{x+3\to 0} \dfrac{e^{x+3}-1}{x+3} = \dfrac{1}{2} \times 1 = \dfrac{1}{2}$

Utilizou-se o limite notável $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x-1}{x} = 1$

RESPOSTA:
Versão 1: B
Versão 2: A

9. .

9.1. Seja $A(x)$ a área do triângulo
$A(x) = \dfrac{x \times |f(x)-1|}{2}$. Como $f(x) > 1$, tem-se que

$$A(x) = \frac{x \times (f(x)-1)}{2} = \frac{x \times \left(\frac{2x-2}{x-2} - 1\right)}{2} = \frac{x \times \left(\frac{2x-2-x+2}{x-2}\right)}{2} =$$
$$= \frac{x \times \left(\frac{x}{x-2}\right)}{2} = \frac{\frac{x^2}{x-2}}{2} = \frac{x^2}{2x-4}, \text{ com } x > 2$$

9.2. $$\lim_{x\to +\infty} \frac{A(x)}{x} = \lim_{x\to +\infty} \frac{\frac{x^2}{2x-4}}{x} = \lim_{x\to +\infty} \frac{x^2}{2x^2-4x} = \lim_{x\to +\infty} \frac{x^2}{2x^2\left(1-\frac{4x}{2x^2}\right)} = \lim_{x\to +\infty} \frac{1}{2\left(1-\frac{2}{x}\right)} =$$
$$= \frac{1}{2\lim\limits_{x\to +\infty}\left(1-\frac{2}{x}\right)} = \frac{1}{2\times(1-0)} = \frac{1}{2}$$

Logo, $m = \dfrac{1}{2}$

$$\lim_{x\to +\infty}\left(A(x) - \frac{1}{2}x\right) = \lim_{x\to +\infty}\left(\frac{x^2}{2x-4} - \frac{1}{2}x\right) = \lim_{x\to +\infty} \frac{2x^2-2x^2+4x}{4x-8} = \lim_{x\to +\infty} \frac{4x}{4x-8} =$$
$$\lim_{x\to +\infty} \frac{x}{x-2} = \lim_{x\to +\infty} \frac{x}{x\left(1-\frac{2}{x}\right)} = \lim_{x\to +\infty} \frac{1}{1-\frac{2}{x}} = \frac{1}{1-0} = 1$$

Logo, $b = 1$
Assim, $y = \dfrac{1}{2}x + 1$ é a equação reduzida da assíntota oblíqua ao gráfico de A, quando $x \to +\infty$

9.3. $g'(x) = \dfrac{2x^2-8x}{(2x-4)^2}$, com $x \neq 2$
Determinemos a função segunda derivada de g

$$g''(x) = \left(\frac{2x^2-8x}{(2x-4)^2}\right)' = \frac{(2x^2-8x)' \times (2x-4)^2 - (2x^2-8x) \times \left[(2x-4)^2\right]'}{\left[(2x-4)^2\right]^2} =$$
$$= \frac{(4x-8)(2x-4)^2 - (2x^2-8x) \times 2 \times (2x-4) \times [(2x-4)]'}{(2x-4)^4} =$$
$$= \frac{(4x-8)(2x-4)^2 - (2x^2-8x) \times 2 \times (2x-4) \times 2}{(2x-4)^4} =$$
$$= \frac{(4x-8)(2x-4)^2 - 4(2x^2-8x)(2x-4)}{(2x-4)^4} =$$
$$= \frac{(2x-4)[(4x-8)(2x-4) - 4(2x^2-8x)]}{(2x-4)^4} =$$
$$= \frac{(4x-8)(2x-4) - 4(2x^2-8x)}{(2x-4)^3} =$$

$$= \frac{8x^2 - 16x - 16x + 32 - 8x^2 + 32x}{(2x-4)^3} =$$
$$= \frac{32}{(2x-4)^3} =, \text{ com } x \neq 2$$

Zeros de g''

$$g''(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{32}{(2x-4)^3} = 0 \twoheadrightarrow \text{equação impossível}$$

Sinal de g''

$$g''(x) < 0 \Leftrightarrow \frac{32}{(2x-4)^3} < 0 \Leftrightarrow (2x-4)^3 < 0 \Leftrightarrow 2x < 4 \Leftrightarrow x < 2$$
$$g''(x) > 0 \Leftrightarrow \frac{32}{(2x-4)^3} > 0 \Leftrightarrow (2x-4)^3 > 0 \Leftrightarrow 2x > 4 \Leftrightarrow x > 2$$

Quadro de sinal de g''

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$g''(x)$	$-$	$n.d.$	$+$
$g(x)$	$\cap$	$n.d.$	$\cup$

O gráfico da função g tem a concavidade voltada para cima em $]2;+\infty[$ e tem a concavidade voltada para baixo em $]-\infty;2[$.
Não existem pontos de inflexão do gráfico da função A.

10. $g(x) - f(x) > 0 \Leftrightarrow 2^{-x+1} - 2^{x+1} > 0 \Leftrightarrow 2^{-x+1} > 2^{x+1} \Leftrightarrow -x+1 > x+1 \Leftrightarrow -x-x > -1+1 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow -2x > 0 \Leftrightarrow x < 0$
$C.S. = \mathbb{R}^-$

RESPOSTA:
Versão 1: C
Versão 2: B

11. $f(0) = e^{-a\times 0} + \frac{1}{a} = e^0 + \frac{1}{a} = 1 + \frac{1}{a}$

Então o ponto de tangência tem coordenadas $\left(0; 1+\frac{1}{a}\right)$

O declive da reta tangente r é dado por $m_r = \dfrac{1+\frac{1}{a} - 0}{0-2} = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2a}$

Por outro lado, tem-se que $m_r = f'(0)$

Ora,

$$f'(x) = \left(e^{-ax} + \frac{1}{a}\right)' = -ae^{-ax}$$

Assim, $f'(0) == -ae^{-a\times 0} = -ae^0 = -a \times 1 = -a$

Logo, tem-se,

$$m_r = f'(0) \Leftrightarrow -\frac{1}{2} - \frac{1}{2a} = -a \Leftrightarrow -a-1 = -2a^2, \text{ visto que } a \in \mathbb{R}^+$$
$$2a^2 - a - 1 = 0 \Leftrightarrow a = \frac{1 \pm \sqrt{(-1)^2 - 4\times 2\times(-1)}}{2\times 2} \Leftrightarrow a = -\frac{1}{2} \vee a = 1$$

Como por hipótese $a \in \mathbb{R}^+$, vem, $a = 1$