Escola Secundária de Paredes

Proposta de Resolução do TPC 3

Matemática A

12.º Ano de Escolaridade | Turma: J

1. .

1.1. Determinemos o ponto de tangência $T(-2; f(-2))$ da reta tangente t

$x = -2 \mapsto f(-2) = (-2+1)^2 e^{-\frac{-2}{2}} = (-1)^2 e = e$

Logo, $T(-2; e)$

Determinemos o declive da reta

$$f'(x) = \left[(x+1)^2 e^{-\frac{x}{2}}\right]' = \left[(x+1)^2\right]' e^{-\frac{x}{2}} + (x+1)^2 \left(e^{-\frac{x}{2}}\right)' =$$

$$= 2(x+1) \times 1 \times e^{-\frac{x}{2}} + (x+1)^2 \times \left(-\frac{1}{2}\right) e^{-\frac{x}{2}} = 2(x+1)e^{-\frac{x}{2}} - \frac{1}{2}(x+1)^2 e^{-\frac{x}{2}} =$$

$$= (x+1)e^{-\frac{x}{2}} \left[2 - \frac{1}{2}(x+1)\right] = (x+1)e^{-\frac{x}{2}} \left(2 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\right) = (x+1)e^{-\frac{x}{2}} \left(\frac{3}{2} - \frac{1}{2}x\right)$$

Assim,

Declive: $m = f'(-2) = (-2+1)e^{-\frac{-2}{2}} \left(\frac{3}{2} - \frac{1}{2} \times (-2)\right) = -\frac{5}{2}e$

Portanto,

$t: y = -\frac{5}{2}ex + b$, com $b \in \mathbb{R}$

Como $T(-2; e)$ pertence à reta, resulta,

$e = -\frac{5}{2}e \times (-2) + b \Leftrightarrow e - 5e = b \Leftrightarrow b = -4e$

Concluindo, a reta tangente t tem equação reduzida $y = -\frac{5}{2}ex - 4e$

1.2. Já sabemos que $f'(x) = (x+1)e^{-\frac{x}{2}} \left(\frac{3}{2} - \frac{1}{2}x\right)$

Determinemos os zeros de $f'(x)$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow (x+1)e^{-\frac{x}{2}} \left(\frac{3}{2} - \frac{1}{2}x\right) = 0 \Leftrightarrow x+1 = 0 \vee \frac{3}{2} - \frac{1}{2}x = 0 \vee e^{-\frac{x}{2}} = 0 \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow x = -1 \vee 3 - x = 0 \vee$ equação impossível $\Leftrightarrow x = -1 \vee x = 3$

Quadro de sinal de $f'(x)$

x	$-\infty$	-1		3	$+\infty$
$x+1$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$e^{-\frac{x}{2}}$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$\frac{3}{2} - \frac{1}{2}x$	$+$	$+$	$+$	0	$-$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$16e^{-\frac{3}{2}}$	$\searrow$

Cálculos auxiliares

$f(-1) = (-1+1)^2 e^{-\frac{1}{2}} = 0$

$f\left(3\right) = \left(3+1\right)^2 e^{-\frac{3}{2}} = 16e^{-\frac{3}{2}}$

A função f é decrescente em $]-\infty;-1]$ e em $[3;+\infty[$

A função f é crescente em $[-1;3]$

Extremos:

Mínimo relativo: 0, para $x=-1$

Máximo relativo: $16e^{-\frac{3}{2}}$, para $x=3$

1.3. .

Pontos de interseção dos dois gráficos

Teremos de resolver a equação $f(x) = f'(x)$

$f(x) = f'(x) \Leftrightarrow (x+1)^2 e^{-\frac{x}{2}} = (x+1)e^{-\frac{x}{2}}\left(\frac{3}{2} - \frac{1}{2}x\right) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x+1)^2 e^{-\frac{x}{2}} - (x+1)e^{-\frac{x}{2}}\left(\frac{3}{2} - \frac{1}{2}x\right) = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x+1)e^{-\frac{x}{2}}\left(x+1-\frac{3}{2}+\frac{1}{2}x\right) = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x+1)e^{-\frac{x}{2}}\left(\frac{3}{2}x - \frac{1}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x+1 = 0 \vee \frac{3}{2}x - \frac{1}{2} = 0 \vee e^{-\frac{x}{2}} = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = -1 \vee 3x-1 = 0 = 0 \vee$ Equação impossível $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = -1 \vee x = \frac{1}{3}$

$f(-1) = (-1+1)^2 e^{-\frac{1}{2}} = 0$, logo, $C(-1;0)$

$f\left(\frac{1}{3}\right) = \left(\frac{1}{3}+1\right)^2 e^{-\frac{\frac{1}{3}}{2}} = \frac{16}{9}e^{-\frac{1}{6}}$

Logo, $A\left(\frac{1}{3}; \frac{16}{9}e^{-\frac{1}{6}}\right)$

Portanto, a área do triângulo $[ABC]$, é igual a,

$$A_{[ABC]} = \frac{\overline{BC} \times |Ordenada \quad de \quad A|}{2} = \frac{|3-(-1)| \times \left|\frac{16}{9}e^{-\frac{1}{6}}\right|}{2} = \frac{4 \times \frac{16}{9}e^{-\frac{1}{6}}}{2} = \frac{32}{9}e^{-\frac{1}{6}} \ u.a.$$