UNIVERSIDADE da MADEIRA

Centro de Competência de Ciências Exactas e da Engenharia

PROVA DE AVALIAÇÃO DE CONHECIMENTOS E COMPETÊNCIAS PARA ADMISSÃO AO ENSINO SUPERIOR

MATEMÁTICA - 13/06/2013

Atenção: | *Não é permitido o uso de* ***calculadora*** *nem de* **telemóvel**.
Esta prova tem a duração de 120m.

Nome: ______________________________________

N^o__________**Curso:**___________________________

GRUPO I (10 valores)

As questões, do ***GRUPO I****, são de escolha múltipla. Para cada uma delas, são indicadas quatro alternativas, das quais* ***só uma*** *está correta.*
Assinale, no enunciado, a resposta escolhida com um ***X****.*
Resposta correta: **2,0** valores **Resposta não assinalada**: **0** valores
Resposta incorreta: **0** valores

1. Considere a função real $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2-4}}{\log x}$. O domínio de f é:

(A) $]2, +\infty[$ _____ **(C)** $[2, +\infty[$ _____

(B) $]-\infty, -2[\cup]2, +\infty[$ _____ **(D)** $]-\infty, -2] \cup [2, +\infty[$ _____

2. Seja a sucessão de termo geral $u_n = \dfrac{2n - n^2}{n+1}$. A ordem do termo que é igual a $-\dfrac{5}{2}$ é:

(A) 2 ____ **(C)** 7 ____

(B) 5 ____ **(D)** 3 ____

3. Considere a sucessão de termo geral $w_n = \dfrac{n - n^2}{2}$. Podemos afirmar que:

(A) $w_3 < w_5$ ____ **(C)** $w_3 - w_5 = 13$ ____

(B) $w_5 = 3w_3$ ____ **(D)** $w_3 = \dfrac{w_5}{2} + 2$ ____

4. O valor de $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{n+3}{n}\right)^{-n}$ é:

(A) e^3 ____ **(C)** e^{-3} ____

(B) $+\infty$ ____ **(D)** $-\infty$ ____

5. Considere a função real $f(x) = \dfrac{1}{2}e^{1-2x}$. Podemos afirmar que:

(A) $f'\left(\dfrac{1}{2}\right) = -1$ ____ **(C)** $f'\left(\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{1}{2}$ ____

(B) $f'\left(\dfrac{1}{2}\right) = 0$ ____ **(D)** $f'\left(\dfrac{1}{2}\right) = 1$ ____

GRUPO II (10 valores)

Justifique, na folha de prova, os raciocínios utilizados na resolução das questões.

1. Calcule $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{e^{2x}-1+x^2}{x^3}\right)$

2. Sabendo que $\theta \in 4^{o}Q$ e que $\cos\theta = \dfrac{1}{2}$, calcule o valor de:

$$2\sin(\theta)\,\mathrm{tg}(\theta)+\cos^2(\theta)$$

3. Considere a função real $g(x)=\dfrac{x^2}{2-x}$.

3.1 Calcule as assímptotas de g, caso existam.

3.2 A função g tem zeros? No caso afirmativo indique-os.

3.3 Estude a monotonia de g.

3.4 Existem pontos de inflexão em g?

4. Calcule o valor (ou valores) de k de modo a que a função

$$h(x)=\begin{cases} 1-x^3 & x\geq -1 \\ \dfrac{e^{kx-1}+1}{x^2} & x<-1 \end{cases}$$ seja contínua em $x=-1$.

Questões:	1	2	3	4
Cotações:	$2,0$	$2,5$	$3,0$	$2,5$

UNIVERSIDADE da MADEIRA
Centro de Competência de Ciências Exactas e da Engenharia

PROVA DE AVALIAÇÃO DE CONHECIMENTOS E COMPETÊNCIAS PARA ADMISSÃO AO ENSINO SUPERIOR MATEMÁTICA - 13/06/2013

GRUPO I (10 valores)

1. Considere a função real $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2-4}}{\log x}$. O domínio de f é:

(A)	$]2,+\infty[$	____	**(C)**	$[2,+\infty[$	**X**
(B)	$]-\infty,-2[\cup]2,+\infty[$	____	**(D)**	$]-\infty,-2]\cup[2,+\infty[$	____

2. Seja a sucessão de termo geral $u_n = \dfrac{2n-n^2}{n+1}$. A ordem do termo que é igual a $-\dfrac{5}{2}$ é:

(A)	2	____	**(C)**	7	____
(B)	5	**X**	**(D)**	3	____

3. Considere a sucessão de termo geral $w_n = \dfrac{n-n^2}{2}$. Podemos afirmar que:

(A)	$w_3 < w_5$	____	**(C)**	$w_3 - w_5 = 13$	____
(B)	$w_5 = 3w_3$	____	**(D)**	$w_3 = \dfrac{w_5}{2} + 2$	**X**

4. O valor de $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{n+3}{n} \right)^{-n}$ é:

(A) e^3 ____ **(C)** e^{-3} **<u>X</u>**

(B) $+\infty$ ____ **(D)** $-\infty$ ____

5. Considere a função real $f(x) = \frac{1}{2} e^{1-2x}$. Podemos afirmar que:

(A) $f'\left(\frac{1}{2}\right) = -1$ **<u>X</u>** **(C)** $f'\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$ ____

(B) $f'\left(\frac{1}{2}\right) = 0$ ____ **(D)** $f'\left(\frac{1}{2}\right) = 1$ ____

GRUPO II (10 valores)

1. $\lim_{x\to 0}\left(\frac{e^{2x}-1+x^2}{x^3}\right)$

$$\begin{aligned} &\lim_{x\to 0}\left(\frac{e^{2x}-1+x^2}{x^3}\right) \underset{\frac{0}{0}}{\overset{RC}{=}} \lim_{x\to 0}\left(\frac{2e^{2x}+2x}{3x^2}\right) \\ = \quad &\frac{2e^0+0}{0} = \frac{2}{0} = \infty \end{aligned}$$

2. $\theta \in 4^oQ \;$ e $\cos\theta = \frac{1}{2}$

$$\begin{aligned} \sin^2\theta + \cos^2\theta &= 1 \rightarrow \sin^2\theta + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 1 \Leftrightarrow \sin^2\theta = 1 - \frac{1}{4} \\ &\Leftrightarrow \sin^2\theta = \frac{3}{4} \Leftrightarrow \sin\theta = \pm\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \text{como } \theta &\in 4^oQ \text{ temos } \sin\theta = -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \operatorname{tg}(\theta) &= \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{-\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = -\sqrt{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2\sin(\theta)\operatorname{tg}(\theta) + \cos^2(\theta) &= 2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(-\sqrt{3}\right) + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \\ &= 3 + \frac{1}{4} \\ &\frac{13}{4} \end{aligned}$$

3. $g(x) = \dfrac{x^2}{2-x}.$

3.1 Assímptotas de g

$$\begin{aligned}
D_g &= \mathbb{R}\backslash\{2\} \\
\lim_{x\to 2^+} g(x) &= \lim_{x\to 2^+}\left(\frac{x^2}{2-x}\right) = \frac{4}{0^-} = -\infty \\
\lim_{x\to 2^-} g(x) &= \lim_{x\to 2^-}\left(\frac{x^2}{2-x}\right) = \frac{4}{0^+} = +\infty \\
& \text{existe uma assímptota vertical: } x = 2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
m &= \lim_{x\to\pm\infty}\frac{g(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{\frac{x^2}{2-x}}{x} = \lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x^2}{2x-x^2}\right) = -1 \\
b &= \lim_{x\to\pm\infty}(g(x)-mx) = \lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x^2}{2-x}+x\right) = \lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{2x}{2-x}\right) = -2 \\
& \text{existe uma assímptota oblíqua: } y = -x-2
\end{aligned}$$

3.2 A função g tem zeros

$$\begin{aligned}
g(x) = 0 &\Leftrightarrow \frac{x^2}{2-x} = 0 \\
&\Leftrightarrow x^2 = 0 \quad \text{com } 2-x \neq 0 \\
&\Leftrightarrow x = 0
\end{aligned}$$

3.3 Monotonia de g

$$\begin{aligned}
g'(x) &= \left(\frac{x^2}{2-x}\right)' = \frac{4x-x^2}{(2-x)^2} \\
\text{zeros da } 1^a \text{ derivada} &: \ g'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{4x-x^2}{(2-x)^2} = 0 \\
&\Leftrightarrow 4x - x^2 = 0 \\
&\Leftrightarrow x(4-x) = 0 \\
&\Leftrightarrow x = 0 \vee x = 4
\end{aligned}$$

		0		2		4	
$4x-x^2$	$-$	0	$+$	■	$+$	0	$-$
$(2-x)^2$	$+$	$+$	$+$	■	$+$	$+$	$+$
$g'(x)$	$-$	0	$+$	■	$+$	0	$-$
$g(x)$	$\searrow$	min $(0,0)$	$\nearrow$	■	$\nearrow$	max $(4,-8)$	$\searrow$

3.4 Não existem pontos de inflexão em g

$$\begin{aligned} g''(x) &= \left(\frac{4x-x^2}{(2-x)^2}\right)' = \frac{8}{(2-x)^3} \\ g''(x) &\neq 0 \end{aligned}$$

		2	
$g''(x)$	$+$	■	$-$
$g(x)$	$\cup$	■	$\cap$

4. $h(x) = \begin{cases} 1-x^3 & x \geq -1 \\ \dfrac{e^{kx-1}+1}{x^2} & x < -1 \end{cases}$ seja contínua em $x=-1$

$$\begin{aligned} h(-1) &= 2 \\ \lim_{x\to(-1)^+} h(x) &= \lim_{x\to(-1)^+} \left(1-x^3\right) = 2 \\ \lim_{x\to(-1)^-} h(x) &= \lim_{x\to(-1)^-} \left(\frac{e^{kx-1}+1}{x^2}\right) = e^{-k-1}+1 \\ \lim_{x\to(-1)^+} h(x) &= \lim_{x\to(-1)^-} h(x) \Leftrightarrow 2 = e^{-k-1}+1 \\ &\Leftrightarrow e^{-k-1} = 1 \Leftrightarrow -k-1 = 0 \Leftrightarrow k=-1 \\ h(x) \text{ é contínua em } x &= -1 \text{ se } k=-1 \end{aligned}$$