## Folha 10 - Funções Racionais

Chama-se **função racional** numa variável $x$ a toda a função

$$\begin{aligned} f\colon D \subseteq \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto y = \tfrac{P(x)}{Q(x)} \end{aligned}$$

em que $P(x)$ e $Q(x)$ são polinómios em $x$ e $Q(x)$ é não nulo.

### Domínio

Quando não é dada indicação noutro sentido, o domínio $D_f$ de uma função racional é o subconjunto dos números reais para os quais tem sentido a expressão que define a função, isto é, $D_f = \{x \in \mathbb{R} : Q(x) \neq 0\}$.

**Exemplo 1** *Considere-se a função definida por* $h(x) = \frac{x^2+3x-4}{x^2-1}$. *Determinemos para que valores esta expressão tem significado.*

$D_h = \{x \in \mathbb{R} : x^2 - 1 \neq 0\} = \mathbb{R}\backslash\{-1, 1\}$

### Zeros

Os zeros de $f$ são as raízes de $P(x)$ que não são raízes de $Q(x)$.

**Exemplo 2** *Retomando o exemplo anterior, escreve-se:*

$\frac{x^2+3x-4}{x^2-1} = 0 \Leftrightarrow x^2+3x-4 = 0 \wedge x^2-1 \neq 0 \Leftrightarrow (x = 1 \vee x = -4) \wedge (x \neq 1 \wedge x \neq -1) \Leftrightarrow x = -4$

*-4 é o único zero de* $h$.

### Estudo do sinal

Para a resolução de inequações fracionárias é conveniente a construção de um quadro similar ao dado no exemplo 4, com os ajustes convenientes.

**Exemplo 3** *Se pretendermos apurar em que subconjunto do domínio as imagens de* $h$ *são não negativas, queremos resolver a inequação* $h(x) \geq 0$. *A fatorização dos polinómios do numerador e do denominador torna-se então muito útil, designadamente quando permite a simplificação da expressão que define a função.*

*Ora, em* $\mathbb{R}\backslash\{-1, 1\}$,

$$h(x) = \frac{x^2+3x-4}{x^2-1} = \frac{(x-1)(x+4)}{(x-1)(x+1)} = \frac{x+4}{x+1}$$

| $x$ | $-\infty$ | $-4$ | | $-1$ | | $1$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x+4$ | $-$ | $0$ | $+$ | $+$ | $+$ | $+$ | $+$ |
| $x+1$ | $-$ | $-$ | $-$ | $0$ | $+$ | $+$ | $+$ |
| | | | | | | | |
| $h(x)$ | $+$ | $0$ | $-$ | $s.s.$ | $+$ | $s.s.$ | $+$ |

$$S = ]-\infty, -4] \cup ]-1, 1[ \cup ]1, +\infty[$$

Outras características das funções racionais serão abordadas em folhas seguintes.

# Exercícios Propostos

**Exercício 1** Resolva, em $\mathbb{R}$, cada uma das seguintes equações fracionárias:

a) $\frac{2}{x-3} = 0$;

b) $\frac{2}{x-3} = 5$;

c) $\frac{1}{x+1} - 1 = \frac{1}{x}$;

d) $\frac{1}{x^2-1} = \frac{2}{x+1}$;

**Exercício 2** Determine, sob a forma de intervalo ou união de intervalos, o conjunto de números reais que verificam a condição: $\dfrac{x^2 - 49}{x^2 + 6x - 7} \leq 0$ .

**Exercício 3** Resolva, em $\mathbb{R}$, cada uma das seguintes inequações:

a) $\dfrac{x+1}{5-x} > 2$;

b) $\dfrac{1}{x+1} - 1 \leq \dfrac{1}{x}$;

c) $-\dfrac{1}{x^2-1} \leq \dfrac{2}{x+1}$;

d) $\dfrac{x^2+1}{x^2-4x} \geq 0$.

**Exercício 4** Considere as funções definidas por $g(x) = \frac{x^2+x-2}{x^2-1}$ e $h(x) = \frac{x}{x-3}$, nos subconjuntos dos números reais para os quais estas expressões têm sentido.

a) Simplifique a expressão algébrica de $g$ e indique o domínio de $g$.

b) Resolva a equação $\frac{x^2+x-2}{x^2-1} = \frac{x}{x-3}$ e indique a(s) abcissa(s) do(s) ponto(s) de interseção dos gráficos das duas funções.