3.3.:

$r: \frac{x-2}{3} = \frac{4-z}{4} \wedge y=2$ então $\vec{r} = (3;0;-4)$

=> outra maneira de determinar o vetor diretor

$$r: \begin{cases} \frac{x-2}{3} = \frac{4-z}{4} \\ y=2 \end{cases}$$

$$\text{Se } z=4 \rightsquigarrow \begin{cases} \frac{x-2}{3} = 0 \\ y=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=2 \end{cases} \quad \therefore A=(2;2;4), \in r$$

$$\text{Se } z=8 \rightsquigarrow \begin{cases} \frac{x-2}{3} = \frac{4-8}{4} \\ y=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x-2}{3} = -1 \\ y=2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-2=-3 \\ y=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-1 \\ y=2 \end{cases} \quad \therefore B=(-1;2;8), \in r$$

$\boxed{I}$ $T \in Oy \Rightarrow T=(0;y_T;0)$ e $y_T = y_B = 2$ $\quad (B=(2;2;2))$

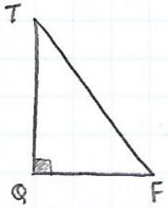
$\boxed{II}$ $Q \in r$

$$r: \begin{cases} \frac{x-2}{3\,(\times 4)} = \frac{4-z}{4\,(\times 3)} \\ y=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x-8 = 12-3z \\ \_\_\_\_ \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4x = 20-3z \\ \_\_\_\_ \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 - \frac{3}{4}z \\ y=2 \end{cases}$$

$\therefore Q \in r \Rightarrow Q = \left(5 - \frac{3}{4}z \,;\, 2 \,;\, z\right)$

$\boxed{\text{III}}$ $[QTF]$ seja retângulo em $Q \Rightarrow \overrightarrow{QT} \cdot \overrightarrow{QF} = 0$



Tem-se que $F=(2;0;4)$, portanto:

$$\overrightarrow{QF} = F - Q = (2;0;4) - \left(5 - \frac{3}{4}z ; 2 ; z\right) =$$

$$= \left(-3 + \frac{3}{4}z ; -2 ; 4 - z\right)$$

$$\overrightarrow{QT} = T - Q = (0;2;0) - \left(5 - \frac{3}{4}z ; 2 ; z\right) =$$

$$= \left(-5 + \frac{3}{4}z ; 0 ; -z\right)$$

ENTÃO:

$$\overrightarrow{QF} \cdot \overrightarrow{QT} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(-3 + \frac{3}{4}z ; -2 ; 4 - z\right) \cdot \left(-5 + \frac{3}{4}z ; 0 ; -z\right) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(-3 + \frac{3}{4}z\right)\left(-5 + \frac{3}{4}z\right) + (-2) \times 0 + (4 - z)(-z) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 15 - \frac{9}{4}z - \frac{15}{4}z + \frac{9}{16}z^2 + 0 - 4z + z^2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \underset{(\times 16)}{z^2} + \frac{9}{16}z^2 - \frac{9}{4}z - \frac{15}{4}z - 4z + 15 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{25}{16}z^2 - 10z + 15 = 0 \Leftrightarrow$$

F.R. $\Leftrightarrow z = \frac{12}{5} \vee z = 4$

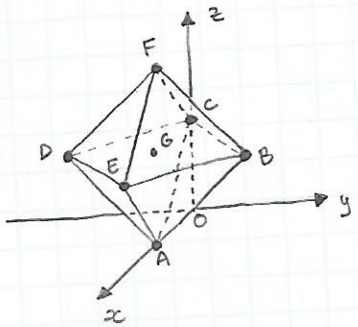
$\therefore$ Se $z = 4 \hookrightarrow Q = \left(5 - \frac{3}{4} \times 4 ; 2 ; 4\right) = (2;2;4)$

$\therefore$ Se $z = \frac{12}{5} \hookrightarrow Q = \left(5 - \frac{3}{4} \times \frac{12}{5} ; 2 ; \frac{12}{5}\right) = \left(\frac{16}{5} ; 2 ; \frac{12}{5}\right)$

3.4.:

Número de Casos Possíveis : ${}^{7}C_3$

Número de Casos Favoráveis: $2 \times ({}^{5}C_3 - 2)$



• Escolher três pontos entre B, C, D, E e G. -> ${}^{5}C_3$

MAS, se escolher-mos B, G e D e E, G e C, não formamos plano.

Neste caso, temos:

$${}^{5}C_3 - 2.$$

• Escolher três pontos entre A, B, F, D e G -> ${}^{5}C_3$

MAS, se escolher-mos B, G e D e A, G e F, não formamos plano.

Neste caso temos:

$${}^{5}C_3 - 2.$$

Logo, $p = \dfrac{2 \times ({}^{5}C_3 - 2)}{{}^{7}C_3} = \dfrac{16}{35}$ //

4.1.:

$$t = B(\ln(m) + A) \quad , t \geq 0$$

$t = 1{,}5 \longrightarrow m = 1{,}66$ mg

$t = 2 \longrightarrow m = 1{,}66 - 0{,}1 = 1{,}56$ mg

ENTÃO:

$$\begin{cases} 1{,}5 = B(\ln(1{,}66) + A) \\ 2 = B(\ln(1{,}56) + A) \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1{,}5 = B\ln(1{,}66) + AB \\ 2 = B\ln(1{,}56) + AB \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} AB = 1{,}5 - B\ln(1{,}66) \\ AB = 2 - B\ln(1{,}56) \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2 - B\ln(1{,}56) = 1{,}5 - B\ln(1{,}66) \\ \text{———} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} B\ln(1{,}66) - B\ln(1{,}56) = 1{,}5 - 2 \\ \text{———} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} B(\ln(1{,}66) - \ln(1{,}56)) = -0{,}5 \\ \text{———} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} B = \dfrac{-0{,}5}{\ln\left(\frac{1{,}66}{1{,}56}\right)} \\ \text{———} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B \approx -8{,}05 \\ -8{,}05A = 2 - (-8{,}05)\ln(1{,}56) \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \text{———} \\ A = \dfrac{2 + 8{,}05\ln(1{,}56)}{-8{,}05} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{———} \\ B \approx -0{,}69 \end{cases}$$

4.2.:

$\boxed{I}$ $t = B(\ln(m) + A) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{t}{B} = \ln(m) + A \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \ln(m) = \frac{t}{B} - A \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow m = e^{\frac{t}{B} - A}$ //

$\boxed{II}$ $\frac{m(x+t)}{m(t)} = 0{,}8 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{e^{\frac{x+t}{B} - A}}{e^{\frac{t}{B} - A}} = 0{,}8 \Leftrightarrow e^{\frac{x+t}{B} - A - \left(\frac{t}{B} - A\right)} = 0{,}8 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow e^{\frac{x}{B} + \cancel{\frac{t}{B}} - \cancel{A} - \cancel{\frac{t}{B}} + \cancel{A}} = 0{,}8 \Leftrightarrow e^{\frac{x}{B}} = 0{,}8 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{x}{B} = \ln(0{,}8) \Leftrightarrow x = B \ln(0{,}8) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = -8{,}05 (\ln 0{,}8) \Leftrightarrow x \approx 1{,}8$ //

↳ 1 ano e 10 meses

$B \approx -8{,}05$

Tem-se que $0{,}8 \times 12 \approx 10$ //

A cada ano e 10 meses, a massa da substância radioativa reduz-se 10%.

5.1.:

$$g'(x) = x^n \ln(x) - 1 \ , \ n \in \mathbb{N}$$

$$\lim_{x \to 2} \frac{x-2}{g(2)-g(x)} = \lim_{x \to 2} \frac{x-2}{-(g(x)-g(2))} =$$

$$= -\lim_{x \to 2} \frac{x-2}{g(x)-g(2)} = -\lim_{x \to 2} \frac{1}{\frac{g(x)-g(2)}{x-2}} =$$

$$= -\frac{1}{\lim_{x \to 2} \frac{g(x)-g(2)}{x-2}} = -\frac{1}{g'(2)} =$$

$$= -\frac{1}{2^n \ln(2) - 1} \ //$$

LOGO, $\cancel{-}\frac{1}{2^n \ln(2) - 1} = \cancel{-}\frac{1}{\ln(256) - 1}$ (=)

$(=)\ 2^n \ln(2) - \cancel{1} = \ln(256) - \cancel{1}$ (=)

$(=)\ 2^n \ln(2) = \ln(2^8)$ (=)

$(=)\ 2^n \cancel{\ln}(2) = 8 \cancel{\ln}(2)$ (=)

$(=)\ 2^n = 8$ (=)

$(=)\ 2^n = 2^3$ (=)

$(=)\ n = 3 \ //$

- $g'(2)$ -> declive da reta tangente ao gráfico de g no ponto de abcissa 2.

- $-\frac{1}{g'(2)}$ -> declive de qualquer reta perpendicular à reta tangente ao gráfico de g no ponto de abcissa 2.

∴ Se $n=3$, o declive de qualquer reta perpendicular à reta tangente ao gráfico de g no ponto de abcissa 2 é $-\frac{1}{\ln(256)-1}$.

5.2.:

$$g''(x) = \left(g'(x)\right)' = \left(x^n \ln(x) - 1\right)' =$$

$$= \left(x^n \ln(x)\right)' - 1' = (x^n)' \ln(x) + x^n \left(\ln(x)\right)' - 0 =$$

$$= n x^{n-1} \times \ln(x) + x^n \times \frac{1}{x} =$$

$$= n x^{n-1} \times \ln(x) + x^{n-1} =$$

$$= x^{n-1} \left(n \ln(x) + 1\right) //$$

• $\forall x \in \mathbb{R}^+, x^{n-1} > 0$, logo o sinal de $g''(x)$ depende apenas do sinal de $n\ln(x) + 1$.

$$g''(x) = 0 \Leftrightarrow x^{n-1}(n \ln(x) + 1) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^{n-1} = 0 \ \vee \ n \ln(x) + 1 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{x = 0}_{\text{Impossível em } \mathbb{R}^+} \ \vee \ \ln(x) = -\frac{1}{n} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \underbrace{e^{-\frac{1}{n}}}_{>0, \forall n \in \mathbb{N}} \Leftrightarrow x = \frac{1}{e^{\frac{1}{n}}} \Leftrightarrow x = \frac{1}{\sqrt[n]{e}} //$$

x	0		$\frac{1}{\sqrt[n]{e}}$	$+\infty$
$g''(x)$	n.d.	$-$	0	$+$
$g(x)$	n.d.	$\cap$	p.i.	$\cup$

Para cada $n \in \mathbb{N}$, o gráfico de g tem a concavidade voltada para cima em $\left[\frac{1}{\sqrt[n]{e}} ; +\infty\right[$ e tem a concavidade voltada para baixo em $\left]0 ; \frac{1}{\sqrt[n]{e}}\right]$. Tem p.i. em $x = \frac{1}{\sqrt[n]{e}}$.

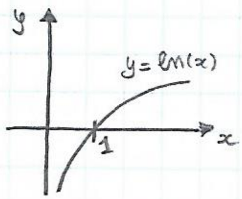
5.3.:

Se $n=2$, $g'(x) = x^2 \ln(x) - 1$

Pretende-se mostrar que $\exists\, c \in \left]\frac{1}{k} ; k\right[: g'(c) = 0$.

- g' é contínua em $\mathbb{R}^+$, pois é o produto e a diferença entre funções contínuas no seu domínio (polinomiais, logarítmicas). Logo, g' é contida em $\left[\frac{1}{k} ; k\right], \subset \mathbb{R}^+, \forall\, k > 3$.

- $$g'\left(\frac{1}{k}\right) = \left(\frac{1}{k}\right)^2 \times \ln\left(\frac{1}{k}\right) - 1 = \underbrace{\overbrace{\frac{1}{k^2}}^{>0} \times \overbrace{\ln\left(\frac{1}{k}\right)}^{<0}}_{<0} - 1 < 0$$



$$0 < \frac{1}{k} \leq \frac{1}{3} \Rightarrow \ln\left(\frac{1}{k}\right) < 0$$

- $g'(k) = k^2 \times \ln(k) - 1 \geq 9 \times 1 - 1 = 8$

$\rightarrow k \geq 3 \Leftrightarrow \ln(k) \geq \underbrace{\ln(3)}_{\simeq 1,1} \geq 1$

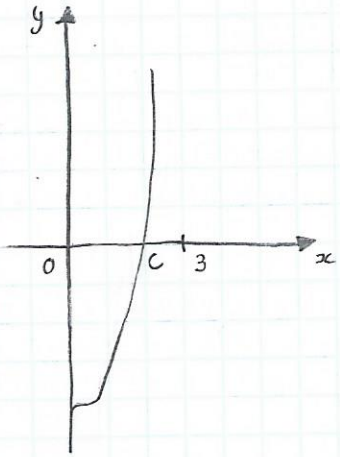
$\Downarrow$

$\rightarrow k^2 \geq 3^2 \geq 9$

$\therefore g\left(\frac{1}{k}\right)$ e $g(k)$ têm sinais contrários. Logo, pelo corolário do Teorema de Bolzano, $\exists\, c \in \left]\frac{1}{k} ; k\right[: g'(c) = 0$, ficando provado o pretendido.

Definir $y_1 = g'(x)$ na janela $[0;3]$ c $\left[\frac{1}{3};3\right]$ se $k=3$

$[0;3] \times [-2;2]$



$\therefore g'(x)=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = c$, com

$c \approx 1,53$ //

6.1.:

$$f(x) \begin{cases} \dfrac{\ln(x)}{e^{2x-1}-e} & \text{se } x > 1 \\ \cos(x) + \text{sen}^2(x) & \text{se } -\pi \leq x \leq 1 \end{cases}$$

ASSÍNTOTAS VERTICAIS:

- $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} (\cos(x) + \text{sen}^2(x)) =$

$= \cos(1) + \text{sen}^2(1) \approx 1 \in \mathbb{R}$ //

$$\bullet \lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} \left(\frac{\ln(x)}{e^{2x-1} - e} \right) \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}$$

Se $x \to 1^+$ então $x - 1 \to 0^+$

Seja $y = x - 1 \Leftrightarrow x = y + 1$, com $y \to 0^+$.

$$= \lim_{y \to 0^+} \frac{\ln(y+1)}{e^{2y+1} - e} =$$

$2(y+1) - 1 =$
$= 2y + 2 - 1 =$
$= 2y + 1$ //

$$= \lim_{y \to 0^+} \frac{\ln(y+1)}{e(e^{2y} - 1)} =$$

$$= \frac{1}{e} \lim_{y \to 0^+} \frac{\frac{\ln(y+1)}{y}}{\frac{e^{2y} - 1}{2y} \times 2} =$$

$$= \frac{1}{e} \frac{\underbrace{\lim_{y \to 0^+} \frac{\ln(y+1)}{y}}_{\text{Limite Notável}}}{2 \times \underbrace{\lim_{y \to 0^+} \frac{e^{2y} - 1}{2y}}_{\text{Limite Notável } y \to 0^+ \Leftrightarrow 2y \to 0^+}} =$$

$$= \frac{1}{e} \times \frac{1}{2 \times 1} = \frac{1}{2e} \in \mathbb{R} \text{ //}$$

$\therefore x = 1$ não é A.V. do gráfico de f.

Como f é contínua em $[-\pi ; +\infty[\setminus \{1\}$, o seu gráfico não tem mais A.V..

ASSÍNTOTA HORIZONTAL:

• Como o D_f é limitado inferiormente, então se o gráfico de f tiver A.H. será quando $x \to +\infty$.

• $$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{\ln(x)}{e^{2x-1} - e} \right) =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{\ln(x)}{x}}{\frac{e^{2x-1} - e}{x}} = \frac{\left.\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln(x)}{x} \right\} \text{Limite Notável}}{\lim_{x \to +\infty} \frac{e^{2x-1} - e}{x}} =$$

$$= \frac{0}{\lim_{x \to +\infty} \frac{e^{2x} \times e^{-1} - e}{x}} = \frac{0}{\lim_{x \to +\infty} \frac{e^{2x} \times e^{-1}}{x} - \lim_{x \to +\infty} \frac{e}{x}} =$$

$$= \frac{0}{2 \times e^{-1} \times \underbrace{\lim_{x \to +\infty} \frac{e^{2x}}{2x}}_{\substack{\text{se } x \to +\infty \Rightarrow 2x \to +\infty \\ \text{Limite Notável}}} - \frac{e}{+\infty}} =$$

$$= \frac{0}{2e^{-1} \times (+\infty) - 0} = +\infty \,//$$

$\therefore$ A.H. : $y = 0$, $x \to +\infty$ //

• $$\lim_{x \to +\infty} \frac{a^x}{x^p} = +\infty \,, \; a > 1$$

• $$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^{2x}}{x} = \underbrace{\lim_{x \to +\infty} \frac{(e^2)^x}{x}}_{\text{L. Notável}} = \underset{\substack{\downarrow \\ a = e^2 > 1}}{+\infty}$$

6.2.:

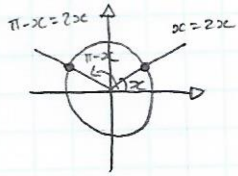
Para $x \in [-\pi ; 1[$, $f(x) = \cos(x) + sen^2(x)$

$$f'(x) = (\cos(x) + sen^2(x))' =$$

$$= -sen(x) + 2\,sen(x) \times (sen(x))' =$$

$$= -sen(x) + \underbrace{2\,sen(x)\cos(x)}_{sen(2x)} =$$

$$= sen(2x) - sen(x)$$



$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow sen(2x) - sen(x) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow sen(2x) = sen(x) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2x = x + 2k\pi \vee 2x = \pi - x + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = 2k\pi \vee 3x = \pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = 2k\pi \vee x = \frac{\pi}{3} + \frac{2k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$$

$k = 0 \hookrightarrow x = 0$ ✓ $\vee$ $x = \frac{\pi}{3}$ X

$k = 1 \hookrightarrow x = 2\pi$ X $\vee$ ——

$k = -1 \hookrightarrow x = -2\pi$ X $\vee$ $x = -\frac{\pi}{3}$ ✓

$k = -2 \hookrightarrow$ —— $\vee$ $x = -\pi$ ✓

$\therefore$ zeros de f': $\{-\pi ; -\frac{\pi}{3} ; 0\}$

x	$-\pi$		$-\frac{\pi}{3}$		0		1
$f'(x)$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	mín.	↗	Máx.	↘	mín.	↗	

Para $x \in [-\pi ; 1[$, f é crescente em $\left[-\pi ; -\frac{\pi}{3}\right]$ e em $[0 ; 1[$; f é decrescente em $\left[-\frac{\pi}{3} ; 0\right]$; f tem máximo relativo em $x = -\frac{\pi}{3}$ e tem mínimo relativo em $x = -\pi$ e $x = 0$.