Tópicos de Matemática II

2º Teste

19 · 05 · 2016

Universidade do Minho
DMA

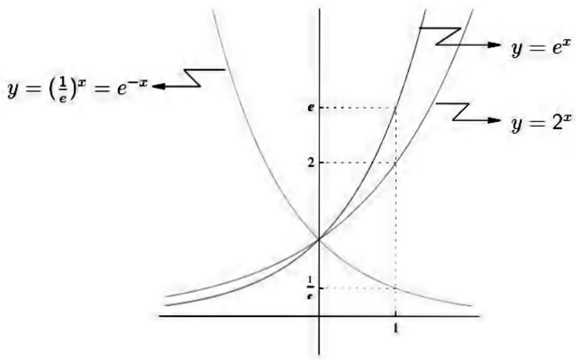
Duração: 90 minutos

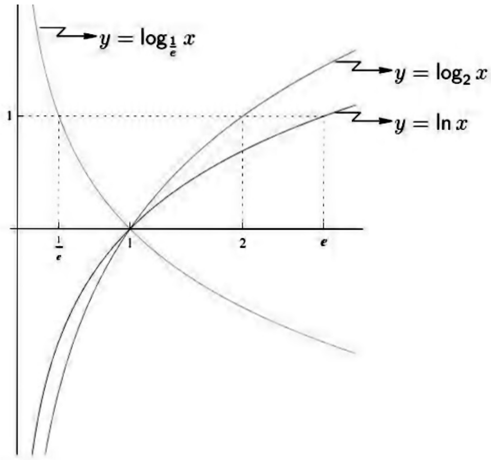
Nome:

N.º de identificação civil: **Turma:**

Formulário

Gráficos de funções exponenciais e logarítmicas





Regras de derivação

$(a)' = 0 \qquad (a \in \mathbb{R})$

$(x)' = 1$

$(ax+b)' = a \qquad (a, b \in \mathbb{R})$

$(ax^p)' = apx^{p-1} \quad (a \in \mathbb{R}, p \in \mathbb{Z}\backslash\{0\})$

$(f+g)' = f' + g'$

$(fg)' = f'g + f\,g'$

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - f\,g'}{g^2}$$

$(f^n)' = n\,f^{n-1}f' \qquad (n \in \mathbb{R})$

$$\left(\sqrt[n]{f}\right)' = \frac{f'}{n\sqrt[n]{f^{n-1}}} \qquad (n \in \mathbb{N})$$

$(\text{sen } f)' = f' \cos f$

$(\cos f)' = -f' \text{ sen } f$

$$(\text{tg } f)' = \frac{f'}{\cos^2 f}$$

$(e^f)' = f'e^f$

$(a^f)' = f'a^f \ln a \qquad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

$$(\ln f)' = \frac{f'}{f}$$

$$(\log_a f)' = \frac{f'}{f \ln a} \qquad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$$

Justifique convenientemente todas as suas respostas.

Cotações:

1. a) 15 b) 15 **2.** 15 **3.** a) 15 b) 15 **4.** a) 10 b) 10 c) 10

5. a) 15 b) 15 **6.** 15 **7.** 10 **8.** a) 15 b) 15 **9.** 10

Exercício 1 Considere a função polinomial definida em $\mathbb{R}$ por $p(x) = x^4 - 3x^3 + x^2 + 4$.

a) Mostre, usando a regra de Ruffini, que $p(x) = (x-2)^2(x^2+x+1)$, para qualquer $x \in \mathbb{R}$.

b) Determine, sob a forma de intervalo ou união de intervalos, o conjunto de números reais que verificam a condição $p(x) > 0$.

Exercício 2 Considere a função real, de variável real, definida por $f(x) = 7 + 2e^{-3x}$. Caracterize a função inversa de f.

Exercício 3 Determine, caso existam, os seguintes limites:

a) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^4-1}{x-1}$.

b) $\lim\limits_{x\to 9} \dfrac{\sqrt{x}-3}{x-9}$.

Exercício 4 Resolva, em $\mathbb{R}$, as seguintes condições:

a) $3^{-x-4} = 27^{3x+5}$.

b) $\log(2x) \leq \log 7$.

c) $\ln(3-x) \geq -1$.

Exercício 5 Seja h a função definida em $\mathbb{R} \setminus \{-5\}$ por: $h(x) = \begin{cases} \frac{2x^2+6x-20}{25-x^2} & \text{se } x \leq 0 \\ \frac{2}{x+1} & \text{se } x > 0. \end{cases}$

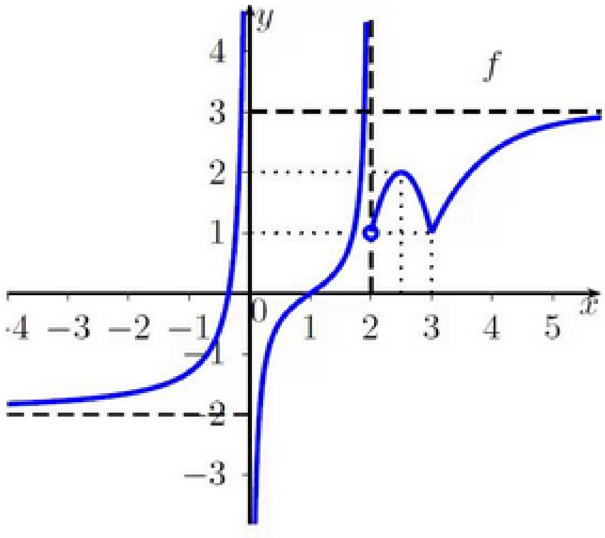
Calcule analiticamente, se existirem, os seguintes limites:

a) $\lim\limits_{x \to -\infty} h(x)$.

b) $\lim\limits_{x \to 0^-} h(x)$ e $\lim\limits_{x \to 0^+} h(x)$. Diga se existe $\lim\limits_{x \to 0} h(x)$. Justificando.

Exercício 6 Resolva em $\mathbb{R}$ a seguinte equação fracionária $\frac{x^2-5x+6}{2x^2-7x+3} = 0$.

Exercício 7 Na figura está representada parte de um gráfico de uma função f de domínio $\mathbb{R}\setminus\{0,2\}$.



Indique:

a) $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$

b) $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$

c) $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)$

d) $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)$.

Exercício 8 Calcule y', sendo:

a) $y = (3x^2 - x)^2$

b) $y = \dfrac{x-1}{x^2+1}$

Exercício 9 Seja $n \in \mathbb{Q}^+ \setminus \{1\}$. Mostre que:

$\log_n(\log_n \sqrt[n]{n}) = -1$.