Preparação para exame

12.º Ano de Escolaridade | Turma G-K

FUNÇÃO EXPONENCIAL / FUNÇÃO LOGARÍTMICA

1. .

1.1. $g'(x)=\left[\left(\frac{1}{x}\right)^x\right]'=(x^{-x})'=\left(e^{\ln\left(x^{-x}\right)}\right)'=\left(e^{-x\ln(x)}\right)'=(-x\ln(x))'e^{-x\ln(x)}=$

$=-(x'\ln(x)+x\times(\ln(x))')\left(\frac{1}{x}\right)^x=-(\ln(x)+x\times\frac{1}{x})\left(\frac{1}{x}\right)^x=-(\ln(x)+1)\left(\frac{1}{x}\right)^x=$

$=-\left(\frac{1}{x}\right)^x(\ln(x)+1)$

1.2. $m=g'(e)=-\left(\frac{1}{e}\right)^e(\ln(e)+1)=-\frac{2}{e^e}$, declive da reta tangente

$g(e)=\left(\frac{1}{e}\right)^e=\frac{1}{e^e}$

A equação da reta tangente é da forma $y=-\frac{2}{e^e}x+b$, com $b\in\mathbb{R}$

Assim, vem,

$\frac{1}{e^e}=-\frac{2}{e^e}\times e+b\Leftrightarrow\frac{1}{e^e}=-\frac{2e}{e^e}+b\Leftrightarrow b=\frac{1}{e^e}+\frac{2e}{e^e}\Leftrightarrow b=\frac{1+2e}{e^e}$

Logo, A equação da reta tangente é $y=-\frac{2}{e^e}x+\frac{1+2e}{e^e}$

1.3. $\lim\limits_{x\to 0^+}g(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\left[\left(\frac{1}{x}\right)^x\right]=\lim\limits_{x\to 0^+}\left(x^{-x}\right)=\lim\limits_{x\to 0^+}\left(e^{\ln\left(x^{-x}\right)}\right)=\lim\limits_{x\to 0^+}\left(e^{x\ln\left(x^{-1}\right)}\right)=$

$=\lim\limits_{x\to 0^+}\left(e^{x\ln\left(\frac{1}{x}\right)}\right)=\lim\limits_{y\to+\infty}\left(e^{\frac{1}{y}\ln(y)}\right)=e^{\lim\limits_{y\to+\infty}\frac{\ln(y)}{y}}=e^0=1$

Fez-se a mudança de variável

$y=\frac{1}{x}\Leftrightarrow x=\frac{1}{y}$

Se $x\to 0^+$ então, $y\to+\infty$

Utilizou-se o limite notável $\lim\limits_{y\to+\infty}\frac{\ln(y)}{y}=0$

2. 2.1. $f'(x) = \left(\frac{x}{2}e^x + 3\right)' = \left(\frac{x}{2}e^x\right)' + 0 = \left(\frac{x}{2}\right)' \times e^x + (e^x)' \times \frac{x}{2} = \frac{1}{2} \times e^x + e^x \times \frac{x}{2} = \frac{1}{2}(1+x)e^x$

$f''(x) = \left[\frac{1}{2}(1+x)e^x\right]' = \frac{1}{2} \times [(1+x)e^x]' = \frac{1}{2} \times [(1+x)' \times e^x + (1+x) \times (e^x)'] =$
$= \frac{1}{2} \times [1 \times e^x + (1+x) \times e^x] = \frac{1}{2} \times [e^x + (1+x) \times e^x] = \frac{1}{2}(2+x)e^x$

$f'''(x) = \left[\frac{1}{2}(2+x)e^x\right]' = \frac{1}{2} \times [(2+x)e^x]' = \frac{1}{2} \times [(2+x)' \times e^x + (2+x) \times (e^x)'] =$
$= \frac{1}{2} \times [1 \times e^x + (2+x) \times e^x] = \frac{1}{2} \times [e^x + (2+x) \times e^x] = \frac{1}{2}(3+x)e^x$

$\vdots$

2.2. Do item anterior, pode conjeturar-se que $f^{(n)}(x) = \frac{1}{2}(n+x)e^x$

Demonstração por indução matemática

Seja $P(n) : f^{(n)}(x) = \frac{1}{2}(n+x)e^x$

(i) $P(1)$ é verdadeira(?)

$n = 1 \twoheadrightarrow f'(x) = \frac{1}{2}(1+x)e^x$
$\therefore \frac{1}{2}(1+x)e^x = \frac{1}{2}(1+x)e^x (verdadeiro)$

Logo, $P(1)$ é verdadeira

(ii) $P(n)$ é hereditária

Hipótese de indução: $P(n)$ é verdadeira, isto é, $f^{(n)}(x) = \frac{1}{2}(n+x)e^x$

Tese de indução: $P(n+1)$ é verdadeira(?), isto é, $f^{(n+1)}(x) = \frac{1}{2}(n+1+x)e^x$

Demonstração

$f^{(n+1)}(x) = \left[f^{(n)}(x)\right]' = \left[\frac{1}{2}(n+x)e^x\right]' = \frac{1}{2} \times [(n+x)e^x]' = \frac{1}{2} \times [(n+x)' \times e^x + (n+x) \times (e^x)'] =$
$= \frac{1}{2} \times [1 \times e^x + (n+x) \times e^x] = \frac{1}{2} \times [e^x + (n+x) \times e^x] = \frac{1}{2}(n+1+x)e^x$

Logo, $P(n)$ é hereditária, ou seja, $P(n) \Rightarrow P(n+1)$

Conclusão: Como $P(1)$ é verdadeira e $P(n)$ é hereditária, ou seja, $P(n) \Rightarrow P(n+1)$, $P(n)$ é verdadeira para todo o número natural(ou seja, é universal)

3. Função f

$\twoheadrightarrow$ Domínio da função: $D_f = \mathbb{R}$

$\twoheadrightarrow$ Zeros da função

$f(x) = 0 \Leftrightarrow x^2e^x = 0 \Leftrightarrow x^2 = 0 \vee e^x = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee$ equação impossível $\Leftrightarrow x = 0$

$\twoheadrightarrow$ Interseção com os eixos

Com o eixo Ox: $(0;0)$

Com o eixo Oy: $(0;0)$

$\twoheadrightarrow$ Sinal

$f(x) = x^2e^x \geq 0, \forall x \in D_f$
$\twoheadrightarrow$ Paridade

$f(-x) = (-x)^2e^{-x} = x^2e^{-x} = \dfrac{x^2}{e^x}$
Verifica-se que:

$f(-x) \neq f(x)$, logo a função f não é par
$f(-x) \neq -f(x)$, logo a função f não é ímpar

Ou seja, a função f não é par nem ímpar

$\twoheadrightarrow$ Assíntotas ao gráfico

Assíntotas verticais ao gráfico

Como o domínio da função f é $\mathbb{R}$ e a função é contínua em todo o seu domínio, então, não existem assíntotas verticais ao gráfico de f

Assíntotas não verticais ao gráfico

Quando $x \to -\infty$

Ora, $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}(x^2e^x) = \lim_{y\to+\infty}((-y)^2e^{-y}) = \lim_{y\to+\infty}\frac{y^2}{e^y} = \frac{1}{\displaystyle\lim_{y\to+\infty}\frac{e^y}{y^2}} = \frac{1}{+\infty} = 0$

Fez-se a mudança de variável

$y = -x \Leftrightarrow x = -y$

Se $x \to -\infty$, então $y \to +\infty$

Utilizou-se o limite notável $\displaystyle\lim_{y\to+\infty}\frac{e^y}{y^2} = +\infty$

Então, o gráfico de f tem uma assíntota horizontal quando $x \to -\infty$

Quando $x \to +\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2e^x}{x} = \lim_{x\to+\infty}(xe^x) = +\infty$$

Logo, não existem assíntotas não verticais quando $x \to +\infty$

$\twoheadrightarrow$ Sentido de variação e extremos da função

Determinemos a função derivada de f

$f'(x) = (x^2e^x)' = (x^2)'e^x + x^2(e^x)' = 2xe^x + x^2e^x = e^x(x^2+2x)$
$f'(x) = 0 \Leftrightarrow e^x(x^2+2x) = 0 \Leftrightarrow e^x = 0 \vee x^2+2x = 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow$ equação impossível $\vee x(x+2) = 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x = 0 \vee x+2 = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = -2$

Quadro de sinal de f'

x	$-\infty$	-2		0	$+\infty$
e^x	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
x^2+2x	$+$	0	$-$	0	$+$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	$\frac{4}{e^2}$	$\searrow$	0	$\nearrow$

$f(-2) = (-2)^2e^{-2} = \frac{4}{e^2}$
$f(0) = 0^2e^0 = 0$

A função f é estritamente crescente em $]-\infty;-2[$ e em $]0;+\infty[$ e é estritamente decrescente em $]-2;0[$. Atinge um mínimo absoluto igual a zero, para $x=0$ e atinge um máximo relativo $\frac{4}{e^2}$, para $x=-2$. Não tem máximo absoluto

$\twoheadrightarrow$ Sentido das concavidades do gráfico da função

Determinemos a função segunda derivada de f

$f''(x) = (e^x(x^2+2x))' = (x^2+2x)'e^x + (x^2+2x)(e^x)' = (2x+2)e^x + (x^2+2x)e^x = e^x(x^2+4x+2)$
$f''(x) = 0 \Leftrightarrow e^x(x^2+4x+2) = 0 \Leftrightarrow e^x = 0 \vee x^2+4x+2 = 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow$ equação impossível $\vee x = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4\times 1\times 2}}{2\times 1} \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x = -2-\sqrt{2} \vee x = -2+\sqrt{2}$
Quadro de sinal de f''

x	$-\infty$	$-2-\sqrt{2}$		$-2+\sqrt{2}$	$+\infty$
e^x	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
x^2+4x+2	$+$	0	$-$	0	$+$
$f''(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\cup$	$\frac{6+4\sqrt{2}}{e^{2+\sqrt{2}}}$	$\cap$	$\frac{6-4\sqrt{2}}{e^{2-\sqrt{2}}}$	$\cup$

$f(-2-\sqrt{2}) = (-2-\sqrt{2})^2 e^{-2-\sqrt{2}} = \dfrac{6+4\sqrt{2}}{e^{2+\sqrt{2}}}$
$f(-2-+\sqrt{2}) = (-2+\sqrt{2})^2 e^{-2+\sqrt{2}} = \dfrac{6-4\sqrt{2}}{e^{2-\sqrt{2}}}$

O gráfico da função $f$tem a concavidade voltada para cima em $]-\infty;-2-\sqrt{2}[$ e em $]-2+\sqrt{2};+\infty[$ e tem a concavidade voltada para baixo em $]-2-\sqrt{2};-2+\sqrt{2}[$. Os pontos $\left(-2-\sqrt{2};\dfrac{6+4\sqrt{2}}{e^{2+\sqrt{2}}}\right)$ e $\left(-2+\sqrt{2};\dfrac{6-4\sqrt{2}}{e^{2-\sqrt{2}}}\right)$, são pontos de inflexão do gráfico da função

↠ Contradomínio da função: $D'_f = [0;+\infty[$

↠ Esboço do gráfico da função

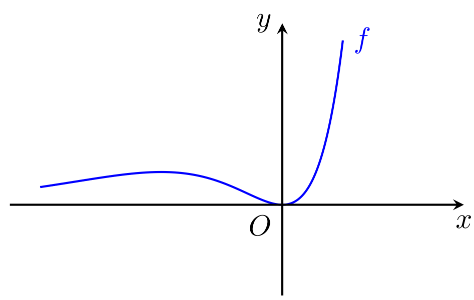

Figura 1

Função g

↠ Domínio da função: $D_g = \{x \in \mathbb{R} : \dfrac{x+1}{x-1} > 0 \wedge x-1 \neq 0\} =]-\infty;-1[\cup]1;+\infty[$

x	$-\infty$	-1		1	$+\infty$
$x+1$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$x-1$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$\dfrac{x+1}{x-1}$	$+$	0	$-$	$n.d$	$+$

↠ Zeros da função

$g(x) = 0 \Leftrightarrow \ln\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right) = 0 \wedge (x<-1 \vee x>1) \Leftrightarrow \dfrac{x+1}{x-1} = 1 \wedge (x<-1 \vee x>1) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \dfrac{x+1}{x-1} - 1 = 0 \wedge (x<-1 \vee x>1) \Leftrightarrow \dfrac{2}{x-1} = 0 \wedge (x<-1 \vee x>1) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow$ Equação impossível $\wedge (x<-1 \vee x>1) \Leftrightarrow$ Equação impossível
Não existem zeros para a função

↠ Interseção com os eixos

O gráfico não interseta o eixo Ox, pelo que foi visto no tópico anterior. E também não interseta o eixo Oy, dado que Domínio da função: $D_g = \{x \in \mathbb{R} : \dfrac{x+1}{x-1} > 0 \wedge x-1 \neq 0\} =]-\infty;-1[\cup]1;+\infty[$

$\twoheadrightarrow$ Sinal da função

$$g(x) > 0 \Leftrightarrow \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) > 0 \wedge (x < -1 \vee x > 1) \Leftrightarrow \frac{x+1}{x-1} > 1 \wedge (x < -1 \vee x > 1) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \frac{x+1}{x-1} - 1 > 0 \wedge (x < -1 \vee x > 1) \Leftrightarrow \frac{2}{x-1} > 0 \wedge (x < -1 \vee x > 1) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x - 1 > 0 \wedge (x < -1 \vee x > 1) \Leftrightarrow x > 1 \wedge (x < -1 \vee x > 1) \Leftrightarrow x > 1$$

$$g(x) < 0 \Leftrightarrow \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) < 0 \wedge (x < -1 \vee x > 1) \Leftrightarrow \frac{x+1}{x-1} < 1 \wedge (x < -1 \vee x > 1) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \frac{x+1}{x-1} - 1 < 0 \wedge (x < -1 \vee x > 1) \Leftrightarrow \frac{2}{x-1} < 0 \wedge (x < -1 \vee x > 1) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x - 1 < 0 \wedge (x < -1 \vee x > 1) \Leftrightarrow x < 1 \wedge (x < -1 \vee x > 1) \Leftrightarrow x < -1$$

Resumindo:
A função toma sinal positivo em $]1; +\infty[$ e toma sinal negativo em $]-\infty; -1[$

$\twoheadrightarrow$ Assíntotas ao gráfico da função

Assíntotas verticais

$$\lim_{x \to 1^+} g(x) = \lim_{x \to 1^+} \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) = \ln\left(\lim_{x \to 1^+} \frac{x+1}{x-1}\right) = \ln\left(\frac{2}{0^+}\right) = +\infty$$

Logo, a reta de equação $x = 1$ é assíntota vertical ao gráfico da função

$$\lim_{x \to -1^-} g(x) = \lim_{x \to -1^-} \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) = \ln\left(\lim_{x \to -1^-} \frac{x+1}{x-1}\right) = \ln\left(\frac{0^-}{-2}\right) = \ln(0^+) = -\infty$$

Logo, a reta de equação $x = -1$ é assíntota vertical ao gráfico da função

Não existem mais assíntotas verticais ao gráfico, dado que a função é contínua em todo o seu domínio

Assíntotas não verticais

$$\lim_{x \to +\infty} g(x) = \lim_{x \to +\infty} \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) = \ln\left(\lim_{x \to +\infty} \frac{x+1}{x-1}\right) = \ln(1) = 0$$

Logo, a reta de equação $y = 0$ é assíntota horizontal ao gráfico da função quando $x \to +\infty$

$$\lim_{x \to -\infty} g(x) = \lim_{x \to -\infty} \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) = \ln\left(\lim_{x \to -\infty} \frac{x+1}{x-1}\right) = \ln(1) = 0$$

Logo, a reta de equação $y = 0$ é assíntota horizontal ao gráfico da função quando $x \to -\infty$

↠ Monotonia e extremos da função

Determinemos a função derivada de g

$$g'(x)=\left[\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)\right]'=\frac{\left(\frac{x+1}{x-1}\right)'}{\frac{x+1}{x-1}}=\frac{\frac{-2}{(x-1)^2}}{\frac{x+1}{x-1}}=-\frac{2(x-1)}{(x+1)(x-1)^2}=$$
$$=-\frac{2}{(x+1)(x-1)}=-\frac{2}{x^2-1}=\frac{2}{1-x^2}$$

Cálculo auxiliar

$$\left(\frac{x+1}{x-1}\right)'=\frac{(x+1)'(x-1)-(x+1)(x-1)'}{(x-1)^2}=\frac{1\times(x-1)-(x+1)\times 1}{(x-1)^2}=\frac{x-1-x-1}{(x-1)^2}=$$
$$=-\frac{2}{(x-1)^2}$$

Zeros de $f'(x)$

$g'(x)=0 \Leftrightarrow \dfrac{2}{1-x^2}=0$ Equação impossível

Quadro de sinal de $g'(x)$

x	$-\infty$	-1		1	$+\infty$
$g'(x)$	$-$	$\backslash\backslash\backslash$	$\backslash\backslash\backslash$	$\backslash\backslash\backslash$	$-$
$g(x)$	$\searrow$	$\backslash\backslash\backslash$	$\backslash\backslash\backslash$	$\backslash\backslash\backslash$	$\searrow$

A função é estritamente decrescente em $]-\infty;-1[$ e em $]1;+\infty[$
Não existem extremos da função

↠ Concavidades e pontos de inflexão do gráfico da função

Determinemos a função segunda derivada de g

$$g''(x)=\left(\frac{2}{1-x^2}\right)'=\frac{2'\times(1-x^2)-2\times(1-x^2)'}{(1-x^2)^2}=\frac{0\times(1-x^2)-2\times(-2x)}{(1-x^2)^2}=\frac{4x}{(1-x^2)^2}$$

Zeros de $g''(x)$

$$g''(x)=0 \Leftrightarrow \frac{4x}{(1-x^2)^2}=0\wedge(x<-1\vee x>1)\Leftrightarrow 4x=0\wedge(x<-1\vee x>1)\Leftrightarrow$$
$\Leftrightarrow x=0\wedge(x<-1\vee x>1)$ condição impossível

Quadro de sinal de $g''(x)$

x	$-\infty$	-1		0		1	$+\infty$
$4x$	$-$	$\backslash\backslash\backslash$	$\backslash\backslash\backslash$	$\backslash\backslash\backslash$	$\backslash\backslash\backslash$	$\backslash\backslash\backslash$	$+$
$(1-x^2)^2$	$+$	$\backslash\backslash\backslash$	$\backslash\backslash\backslash$	$\backslash\backslash\backslash$	$\backslash\backslash\backslash$	$\backslash\backslash\backslash$	$+$
$g''(x)$	$-$	$\backslash\backslash\backslash$	$\backslash\backslash\backslash$	$\backslash\backslash\backslash$	$\backslash\backslash\backslash$	$\backslash\backslash\backslash$	$+$
$g(x)$	$\cap$	$\backslash\backslash\backslash$	$\backslash\backslash\backslash$	$\backslash\backslash\backslash$	$\backslash\backslash\backslash$	$\backslash\backslash\backslash$	$\cup$

O gráfico da função tem a concavidade voltada para cima em $]1,+\infty[$ e tem a concavidade voltada para baixo em $]-\infty;-1[$
Não existem pontos de inflexão

$\twoheadrightarrow$ Contradomínio da função: $D'_g =]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[$

$\twoheadrightarrow$ Esboço do gráfico da função

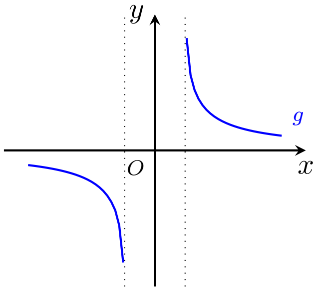

Figura 2