www.sinalmaismat.com
facebook.com/sinalmaismat
instagram.com/sinalmaismat

Prova Modelo de Exame Final Nacional

Prova 1 | Ensino Secundário | 2021

12º Ano de Escolaridade

Nuno Miguel Guerreiro

Duração da Prova: 150 minutos. | Tolerância: 30 minutos

A prova inclui 11 itens, identificados a sombreado azul, cujas respostas contribuem obrigatoriamente para a classificação final. Dos restantes 7 items da prova, apenas os 4 melhores contarão para a nota final.

É permitido o uso da régua, compasso, esquadro, transferidor e calculadora gráfica.

Utilize apenas caneta ou esferográfica de tinta azul ou preta.

Não é permitido o uso do corretor. Risque aquilo que pretende que não seja classificado.

Apresente apenas uma resposta para cada item.

As cotações dos itens encontram-se na margem de cada página.

Na resposta aos itens de escolha múltipla, selecione a opção correta. Escreva, na folha de respostas, o número do item e a letra que identifica a opção escolhida.

Na resposta aos restantes itens, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias. Quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, apresente sempre o valor exato.

Todos os itens desta prova são originais do autor – referência ao autor no margem da prova. Prova realizada em junho de 2021 . Última atualização às 00:00 de 5 de Julho de 2021.

Formulário

Geometria

Comprimento de um arco de circunferência:

αr (α – amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r – raio)

Área de um polígono regular: *Semiperímetro* $\times$ *Apótema*

Área de um sector circular:

$\frac{\alpha r^2}{2}$ (α – amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r – raio)

Área lateral de um cone: $\pi r g$ (r – raio da base; g – geratriz)

Área de uma superfície esférica: $4\pi r^2$ (r – raio)

Volume de uma pirâmide: $\frac{1}{3} \times$ *Área da base* $\times$ *Altura*

Volume de um cone: $\frac{1}{3} \times$ *Área da base* $\times$ *Altura*

Volume de uma esfera: $\frac{4}{3}\pi r^3$ (r – raio)

Progressões

Soma dos n primeiros termos de uma progressão (u_n):

Progressão aritmética: $\frac{u_1 + u_n}{2} \times n$

Progressão geométrica: $u_1 \times \frac{1 - r^n}{1 - r}$

Trigonometria

$\operatorname{sen}(a + b) = \operatorname{sen} a \ \cos b + \operatorname{sen} b \ \cos a$

$\cos(a + b) = \cos a \ \cos b - \operatorname{sen} a \ \operatorname{sen} b$

Complexos

$(\rho\, e^{i\theta})^n = \rho^n\, e^{in\theta}$

$\sqrt[n]{\rho\, e^{i\theta}} = \sqrt[n]{\rho}\; e^{i\frac{\theta + 2k\pi}{n}} \quad (k \in \{0, \ldots, n-1\} \ \text{ e } \ n \in \mathbb{N})$

Regras de derivação

$(u + v)' = u' + v'$

$(u\,v)' = u'\,v + u\,v'$

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'\,v - u\,v'}{v^2}$

$(u^n)' = n\,u^{n-1}\,u' \quad (n \in \mathbb{R})$

$(\operatorname{sen} u)' = u' \cos u$

$(\cos u)' = -u' \operatorname{sen} u$

$(\operatorname{tg} u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$

$(e^u)' = u'\, e^u$

$(a^u)' = u'\, a^u \ln a \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$

$(\log_a u)' = \frac{u'}{u \ln a} \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

Limites notáveis

$\lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e \quad (n \in \mathbb{N})$

$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$

$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

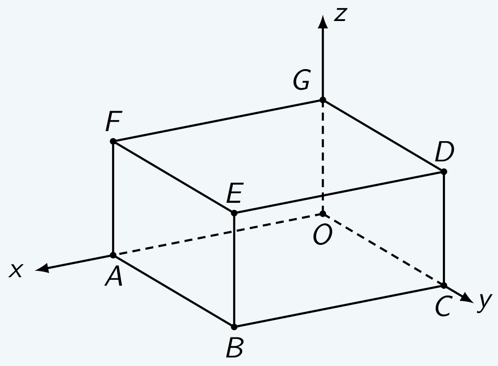
$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^p} = +\infty \quad (p \in \mathbb{R})$

Cotações

1. Considere, num referencial o.n $Oxyz$, o prisma quadrangular $[OABCDEFG]$ representado na Figura ao lado.

Sabe-se que:

- a superfície esférica $\mathcal{S}$ que passa em todos os vértices do prisma é definida por $(x-2)^2+(y-2)^2+(z-1)^2=9$;
- a área da base do prisma é 16.



1.1. Seja α a amplitude do ângulo OGB. **(12)**

Qual é o valor de $\cos\alpha$?

(A) $\frac{1}{3}$ **(B)** $\frac{\sqrt{2}}{4}$ **(C)** $\frac{2\sqrt{2}}{3}$ **(D)** $2\sqrt{2}$

1.2. Determine a equação do plano tangente à superfície esférica $\mathcal{S}$ no ponto C. **(14)**

2. Considere a progressão geométrica decrescente (u_n) de termos positivos. **(14)**

Sabe-se que $2u_3+2u_1=5u_2$ e que $u_3+u_4+\cdots+u_{10}=510$.

Determine uma expressão do termo de geral de (u_n).

Apresente essa expressão na forma $a\times b^n$, em que a e b são números reais.

3. Seja (v_n) uma sucessão de termos negativos. **(12)**

Considere as seguintes afirmações:

I) se (v_n) é decrescente, então (v_n) é necessariamente limitada;

II) se (v_n) é crescente, então (v_n) é convergente.

Qual das afirmações seguintes é verdadeira?

(A) **I)** e **II)** são ambas verdadeiras.

(B) **I)** é verdadeira e **II)** é falsa.

(C) **I)** é falsa e **II)** é verdadeira.

(D) **I)** e **II)** são ambas falsas.

(14) **4.** Um grupo de 6 amigos, entre os quais estão o Alexandre e o Bruno, foram passar férias à Escócia.

O hotel onde ficaram tem dois elevadores no átrio principal. Cada elevador pode transportar 5 hóspedes de cada vez.

O grupo quis distribuir-se pelos dois elevadores, atendendo a que o Bruno e o Alexandre queriam ir juntos no elevador.

Determine o número de maneiras em que os amigos puderam distribuir-se pelos elevadores.

(14) **5.** O Miguel vai resolver um exame constituído por duas partes: uma parte de escolha múltipla e outra de resposta aberta.

A parte de escolha múltipla é constituída por 10 questões com 4 possíveis opções cada. Dessas quatro opções, apenas uma está correta.

Acerca da chave correta, o professor informou que:

- a opção A é a opção correta em quatro perguntas consecutivas;
- a chave correta é constituída por quatro opções A, duas opções B, duas opções C e duas opções D.

O Miguel vai escrever, ao acaso, uma chave que respeite as condições enunciadas pelo professor.

Qual é a probabilidade da sua chave ser a chave correta?

Apresente o resultado na forma de fração irredutível.

(12) **6.** Num dado mês, o Afonso pretendeu explorar os géneros musicais de R&B e Jazz. Na sua descoberta, ouviu música de 90 artistas diferentes, 60 dos quais são oriundos de Nova Iorque.

Entre os artistas de Jazz, 80% são oriundos de Nova Iorque. O Afonso também reparou que nenhum artista de R&B é descendente de Nova Iorque.

Quantos artistas de Jazz ouviu o Afonso durante esse mês?

(A) 70 **(B)** 75 **(C)** 80 **(D)** 85

(14) **7.** Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, considere os números complexos $z_1 = -1 + 2i$ e $z_2 = 3i^{43}$.

Para um dado $\beta \in]-\pi, 0[$, seja w o número complexo

$$w = \frac{(z_1 - \overline{z_2})^6}{\cos\beta - i\,\text{sen}\,\beta}$$

Determine o valor de β tal que $\text{Re}(w) + \text{Im}(w) = 0$.

8. Na Figura 2, está representado, no plano complexo, o paralelogramo $[OACB]$. **(12)**

Sabe-se que:

- o ponto A é o afixo do número complexo z_A (de argumento θ), e o ponto B é o afixo do número complexo z_B;
- o segmento $[AB]$ é um lado de um pentágono regular centrado na origem.

Para um certo valor $\theta \in]0,\pi[$, o ponto C pertence ao eixo imaginário.

Qual é esse valor de θ ?

(A) $\frac{\pi}{10}$ **(B)** $\frac{3\pi}{10}$ **(C)** $\frac{3\pi}{5}$ **(D)** $\frac{4\pi}{5}$

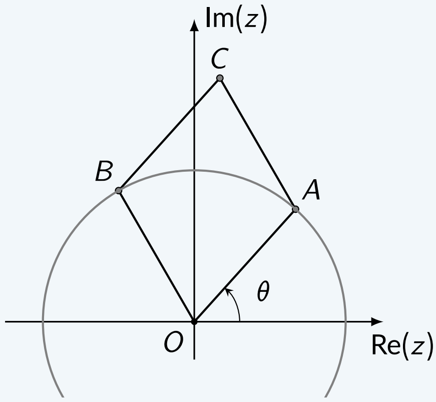


Figura 2

9. Resolva a inequação $\frac{\log_2(4^x - 3) - 1}{x} \leq 1$. **(14)**

Apresente o conjunto-solução usando a notação de intervalos de números reais.

10. Um químico tóxico atacou as plantas que viviam numa estufa.

Admita que x dias após o instante em que a presença desse químico foi detetada, o número de plantas infetadas é dado aproximadamente por

$$n(x) = \frac{450}{1 + 2^{3-0,1x}}, \; x \in [0,120]$$

(considere que $x = 0$ corresponde ao instante em que o químico foi detetado)

10.1. Mostre que nos primeiros doze dias da infeção existiu um instante em que o número de plantas infetadas era o dobro do número de plantas infetadas quando o químico foi detetado. **(14)**

Sempre que proceder a cálculos intermédios, conserve, no mínimo, duas casas decimais.

10.2. Em dois instantes $t_1, t_2 \in]0,120[$ $(t_2 > t_1)$ dias após o instante em que o químico foi detetado, verificou-se que o aumento médio de infeções desde a deteção do químico até cada um desses instantes era de 4 plantas por dia. **(14)**

Utilizando a calculadora gráfica, determine esses instantes t_1 e t_2.

Na sua resposta deve:

- equacionar o problema;
- reproduzir, num referencial, o(s) gráfico(s) da(s) função(ões) visualizada(s) na calculadora que lhe permite(m) resolver a equação;
- apresentar os valores de t_1 e t_2, com arredondamento (caso necessário) às unidades.

(14) **11.** Seja f uma função, de domínio $\mathbb{R}^- \cup]1, +\infty[$, definida por $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{e^x} - 1}{x} & \text{se } x < 0 \\ \dfrac{\sqrt{x+3} - 2}{(x-1)^2} & \text{se } x > 1 \end{cases}$

Estude a função f quanto à existência de assíntotas verticais do seu gráfico.

(14) **12.** Na Figura 3 (não necessariamente à escala), está representada, num referencial o.n xOy, uma circunferência de centro O.

Sabe-se que:

- os pontos B e C pertencem à circunferência, e os pontos A e C pertencem à reta de equação $x = 1$;
- α é a amplitude, em radianos, do ângulo COA $\left(\alpha \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[\right)$;
- o ponto B tem abcissa $\frac{3}{4}$, e o segmento $[OB]$ pertence à bissetriz do ângulo COA.

Determine o valor de $\overline{OA}$.

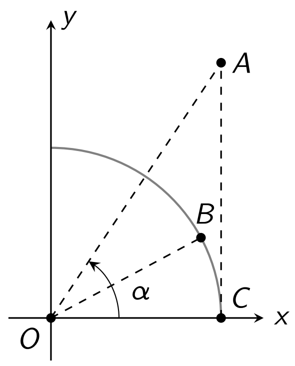


Figura 3

13. Seja g', de domínio $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, a primeira derivada de uma função g, de domínio $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, definida por

$$g'(x) = (x+1)\operatorname{sen} x + (1-x)\cos x$$

Sabe-se ainda que o gráfico de g passa pela origem do referencial.

(12) **13.1.** Qual é o valor de $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x}{g(x)}$?

(A) 0 **(B)** $\frac{1}{2}$ **(C)** 1 **(D)** $+\infty$

(14) **13.2.** Estude a função g quanto ao sentido das concavidades do seu gráfico e quanto à existência de pontos de inflexão.

Na sua resposta deve apresentar:

- o(s) intervalo(s) em que o gráfico de g tem concavidade voltada para baixo;
- o(s) intervalo(s) em que o gráfico de g tem concavidade voltada para cima;
- a(s) abcissa(s) do(s) ponto(s) de inflexão do gráfico de g.

14. Sejam a e b duas constantes reais. **(14)**

Considere a função h, de domínio $\mathbb{R}^+$, definida por $h(x) = e^{ax} + b \ln x$.

A reta tangente ao gráfico de h no ponto de abcissa 1 é perpendicular à reta de equação $y = -\frac{1}{2}x - 5$ e interseta a mesma no ponto de ordenada -4.

Determine o valor de $a - b$.

Apresente o valor na forma $\ln k$, $k \in \mathbb{R}^+$.

15. Determine o valor de $\lim\limits_{x \to +\infty} \left[x \operatorname{sen} \left(e^{-x} \right) \right]$. **(14)**

FIM