Escola Secundária de Paredes

# Proposta de Resolução da Ficha de Trabalho 5

**Matemática A**

**12.º Ano de Escolaridade** | Turma: $B+C+H$

1. .

1.1. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{\sin(x-2)} =^{\left(\frac{0}{0}\right)} \lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x-2)(x+2)}{\sin(x-2)} = \lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x-2}{\sin(x-2)}\times\lim\limits_{x\to 2}(x+2) = \dfrac{1}{\lim\limits_{x-2\to 0}\dfrac{\sin(x-2)}{x-2}}\times 4 =$

$= \dfrac{1}{1}\times 4 = 4$

Aplicou-se o limite notável $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x} = 1$

1.2. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{1-e^{x+1}}{\sin\left(\frac{x+1}{2}\right)\cos\left(\frac{x+1}{2}\right)} =^{\left(\frac{0}{0}\right)} \lim\limits_{x\to -1}\dfrac{-\left(e^{x+1}-1\right)}{\frac{1}{2}\times 2\sin\left(\frac{x+1}{2}\right)\cos\left(\frac{x+1}{2}\right)} = -2\times\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{e^{x+1}-1}{\sin\left(2\times\frac{x+1}{2}\right)} =$

$= -2\times\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{e^{x+1}-1}{\sin(x+1)} = -2\times\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\frac{e^{x+1}-1}{x+1}}{\frac{\sin(x+1)}{x+1}} = -2\times\dfrac{\lim\limits_{x+1\to 0}\frac{e^{x+1}-1}{x+1}}{\lim\limits_{x+1\to 0}\frac{\sin(x+1)}{x+1}} = -2\times\dfrac{1}{1} = -2$

Aplicou-se o limite notável $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x} = 1$

Aplicou-se o limite notável $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x} = 1$

1.3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\ln(x+1)} =^{\left(\frac{0}{0}\right)} \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{x}}{\frac{\ln(x+1)}{x}} = \dfrac{\lim\limits_{y\to 0}\frac{\sin y}{2y}}{\lim\limits_{z\to 0}\frac{z}{e^z-1}} = \dfrac{\frac{1}{2}\lim\limits_{y\to 0}\frac{\sin y}{y}}{\frac{1}{\lim\limits_{z\to 0}\frac{e^z-1}{z}}} = \dfrac{\frac{1}{2}\times 1}{\frac{1}{1}} = \dfrac{1}{2}$

Fizeram-se as seguintes mudanças de variável

- $y = \dfrac{x}{2} \Leftrightarrow x = 2y$

  Se $x\to 0$, então, $y\to 0$

- $z = \ln(x+1) \Leftrightarrow x+1 = e^z \Leftrightarrow x = e^z - 1$

  Se $x\to 0$, então, $z\to 0$

Aplicou-se o limite notável $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x} = 1$

Aplicou-se o limite notável $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x} = 1$

1.4. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)\left[\cos^2\left(\frac{x}{4}\right)-\sin^2\left(\frac{x}{4}\right)\right]}{2x} =^{\left(\frac{0}{0}\right)} \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(2\times\frac{x}{4}\right)}{2x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right)}{2x} =$

$= \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\frac{1}{2}\times 2\sin\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right)}{2x} = \dfrac{1}{2}\times \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin\left(2\times\frac{x}{2}\right)}{2x} = \dfrac{1}{2}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{2x} = \dfrac{1}{4}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x} = \dfrac{1}{4}\times 1 = \dfrac{1}{4}$

Aplicou-se o limite notável $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x} = 1$

2. $0 \in D_f$ e é ponto aderente a $D_f$

A função $f$ é contínua em $x=0$, se existir $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$, ou seja,

se $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = f(0)$

Ora,

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{-16\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)}{x^3-2x^2} =^{\left(\frac{0}{0}\right)} -16\times \lim_{x\to 0^-}\frac{\left[\sin\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right)\right]^2}{x^2(x-2)} =$$

$$= -16\times \lim_{x\to 0^-}\frac{\frac{1}{4}\times\left[2\sin\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right)\right]^2}{x^2}\times \lim_{x\to 0^-}\frac{1}{x-2} = -\frac{16}{4}\times \lim_{x\to 0^-}\frac{\left[\sin\left(2\times\frac{x}{2}\right)\right]^2}{x^2}\times\left(-\frac{1}{2}\right) =$$

$$= \frac{4}{2}\times \lim_{x\to 0^-}\frac{[\sin x]^2}{x^2} = 2\times\left[\lim_{x\to 0^-}\frac{\sin x}{x}\right]^2 = 2\times 1^2 = 2$$

Aplicou-se o limite notável $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x} = 1$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+}\frac{2x-2x^2}{e^x-1} =^{\left(\frac{0}{0}\right)} \lim_{x\to 0^+}\frac{x(2-2x)}{e^x-1} = \lim_{x\to 0^+}\frac{x}{e^x-1}\times\lim_{x\to 0^+}(2-2x) =$$

$$= \frac{1}{\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{e^x-1}{x}}\times 2 = \frac{1}{1}\times 2 = 2$$

Aplicou-se o limite notável $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x} = 1$

$f(0) = 2k+2$

Ora, a função $f$ é contínua em $x=0$, se, $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = f(0)$

Então, deverá ter-se,

$2k+2=2 \Leftrightarrow 2k = 2-2 \Leftrightarrow 2k=0 \Leftrightarrow k=0$

Portanto, a função $f$ é contínua em $x=0$, se $k=0$

3. .

$1 \in D_g$ e é ponto aderente a $D_g$

A função $g$ é contínua em $x=1$, se existir $\lim\limits_{x\to 1} g(x)$, ou seja,

se $\lim\limits_{x\to 1^-} g(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} g(x) = g(1)$

Ora,

$$\lim_{x\to 1^-} g(x) = \lim_{x\to 1^-}\frac{e^{x-1}-1}{2x-2} =^{\left(\frac{0}{0}\right)} \lim_{x\to 1^-}\frac{e^{x-1}-1}{2(x-1)} = \frac{1}{2}\times\lim_{x\to 1^-}\frac{e^{x-1}-1}{x-1} = \frac{1}{2}\times\lim_{x-1\to 0^-}\frac{e^{x-1}-1}{x-1} = \frac{1}{2}\times 1 = \frac{1}{2}$$

Aplicou-se o limite notável $\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

$$\lim_{x\to 1^+} g(x) = \lim_{x\to 1^+} \frac{1-\cos(x-1)}{(x-1)^2} =^{\left(\frac{0}{0}\right)} \lim_{x\to 1^+} \frac{[1-\cos(x-1)][1+\cos(x-1)]}{(x-1)^2[1+\cos(x-1)]} = \lim_{x\to 1^+} \frac{1-\cos^2(x-1)}{(x-1)^2[1+\cos(x-1)]} =$$
$$= \lim_{x\to 1^+} \frac{\sin^2(x-1)}{(x-1)^2[1+\cos(x-1)]} = \lim_{x\to 1^+} \frac{\sin^2(x-1)}{(x-1)^2} \times \lim_{x\to 1^+} \frac{1}{1+\cos(x-1)} = \left[\lim_{x-1\to 0^+} \frac{\sin(x-1)}{x-1}\right]^2 \times \frac{1}{2} =$$
$$= 1^2 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

Aplicou-se o limite notável $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

$g(1) = \ln(k^2)$

Ora, a função $g$ é contínua em $x = 1$, se, $\lim_{x\to 1^-} g(x) = \lim_{x\to 1^+} g(x) = g(1)$

Então, deverá ter-se,

$$\ln(k^2) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow k^2 = e^{\frac{1}{2}} \Leftrightarrow k^2 = \sqrt{e} \Leftrightarrow k = \pm\sqrt{\sqrt{e}} \Leftrightarrow k = \pm\sqrt[4]{e}$$

Portanto, a função $g$ é contínua em $x = 1$, se $k = \pm\sqrt[4]{e}$

4. .

$-2 \in D_h$ e é ponto aderente a $D_h$

A função $h$ é contínua em $x = -2$, se existir $\lim_{x\to -2} h(x)$, ou seja,

se $\lim_{x\to -2^-} h(x) = \lim_{x\to -2^+} h(x) = h(-2)$

Ora,

$$\lim_{x\to -2^-} h(x) = \lim_{x\to -2^-} \frac{4-x^2}{e-e^{x+3}} =^{\left(\frac{0}{0}\right)} \lim_{x\to 1^-} \frac{x^2-4}{e^{x+3}-e} = \lim_{x\to -2^-} \frac{(x+2)(x-2)}{e\times(e^{x+2}-1)} =$$
$$= \frac{1}{e} \times \lim_{x\to -2^-} \frac{x+2}{e^{x+2}-1} \times \lim_{x\to -2^-} (x-2) = \frac{1}{e} \times \frac{1}{\lim_{x+2\to 0^-} \frac{e^{x+2}-1}{x+2}} \times (-4) = -\frac{4}{e} \times \frac{1}{1} = -\frac{4}{e}$$

Aplicou-se o limite notável $\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

$$\lim_{x\to -2^+} h(x) = \lim_{x\to -2^+} \frac{4\sin(x+2)}{-ex-2e} =^{\left(\frac{0}{0}\right)} \lim_{x\to -2^+} \frac{4\sin(x+2)}{-e(x+2)} =$$
$$= -\frac{4}{e} \times \lim_{x+2\to 0^+} \frac{\sin(x+2)}{x+2} = -\frac{4}{e} \times 1 = -\frac{4}{e}$$

Aplicou-se o limite notável $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

$h(-2) = -4e^{3k+1}$

Ora, a função $h$ é contínua em $x = -2$, se, $\lim_{x\to -2^-} h(x) = \lim_{x\to -2^+} h(x) = h(-2)$

Então, deverá ter-se,

$$-4e^{3k+1} = -\frac{4}{e} \Leftrightarrow e^{3k+1} = \frac{1}{e} \Leftrightarrow e^{3k+1} = e^{-1} \Leftrightarrow 3k+1 = -1 \Leftrightarrow 3k = -1-1 \Leftrightarrow 3k = -2 \Leftrightarrow k = -\frac{2}{3}$$

Portanto, a função $h$ é contínua em $x = -2$, se $k = -\frac{2}{3}$