FEUP
Exame Especial para Acesso ao Ensino Superior
Prova de Matemática

9 de Junho de 2014

O tempo para a realização desta prova é de **2 horas**.
Apresente o seu raciocínio de forma clara, indicando todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias.
Não é permitido o uso de máquina de calcular.
Cotação das perguntas:
questão 1: 3,5 valores; questão 2: 4,5 valores; questões 3, 4, 5 e 6: 3 valores cada;

1. Considere a sucessão de termo geral $a_n = \dfrac{2n-3}{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$.

   (a) Verifique que existem números reais b e c tais que $a_n = b + \dfrac{c}{n+1}$.

   (b) Calcule $\lim_{n\to\infty} a_n$.

   (c) Analise a sucessão quanto à monotonia.

   (d) Verifique se a sucessão é limitada.

2. Considere a função real de variável real definida por $f(x) = 1 + e^{-\frac{x^2}{2}+1}$.

   (a) Indique o domínio de f e determine os pontos, casos existam, onde o gráfico de f intersecta os eixos coordenados.

   (b) Faça um esboço do gráfico de f, começando por determinar:

      i. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$;

      ii. intervalos de monotonia e máximos e mínimos locais, caso existam;

      iii. sentido da concavidade e pontos de inflexão, caso existam;

      iv. se a função é par ou ímpar, ou não está em nenhum destes casos.

   (c) Indique o contradomínio de f.

3. (a) Determine o valor da expressão $\cos\left(-\dfrac{9\pi}{2}\right) - 3\tan(3\pi) + \sin\left(-\dfrac{5\pi}{2}\right)$.

   (b) Resolva a equação $\sin(4x) = \cos(2x)$. Indique de seguida as soluções que estão no intervalo $[0, \frac{\pi}{2}]$.

4. Considere os números complexos $z_1 = 2 - 2i$ e $z_2 = -1 - 3i$.

   (a) Determine o valor do módulo e argumento de z_1.

   (b) Identifique a parte real e a parte imaginária do número $\dfrac{\overline{z_1} - z_2}{z_1}$. *($\overline{z_1}$ representa o conjugado de z_1)*

   (c) Faça um esboço no plano complexo do conjunto $A = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_1| \leq 2 \ \wedge \ \operatorname{Re} z \geq 1 \}$.

5. Considere um referencial ortonormado fixado no plano.

   (a) Identifique o lugar geométrico dos pontos que satisfazem a equação $3x + 2y - 1 = 0$ e faça um esboço do mesmo.

   (b) Considere a família de circunferências definida por $x^2 - 2kx + y^2 + k^2 - 1 = 0$, $k \in \mathbb{R}$.

      i. Escreva a equação na forma $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$, onde r e (a, b) são, respectivamente, o raio e as coordenadas do centro de cada circunferência.

      ii. Indique uma propriedade comum a todas as circunferências desta família e faça um esboço de duas delas.

6. Pretende-se arrumar numa prateleira ~~8~~ 12 livros diferentes, das quais 4 são de Matemática, 3 são de Física e 5 são de Português. De quantas formas diferentes podem ser dispostos os livros, se:

   (a) forem arrumados ao acaso.

   (b) os livros da mesma disciplina devem ficar juntos.

   (c) os livros da mesma disciplina devem ficar juntos e os de Matemática devem ficar junto dos de Física.

   (Simplifique as expressões mas não efetue os cálculos)

Formulário

Limites notáveis

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = e^x,\ \forall x\in\mathbb{R}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x} = 1$$

Trigonometria

$$\sin(a+b) = \sin a\cos b + \cos a\sin b$$

$$\cos(a+b) = \cos a\cos b - \sin a\sin b$$

	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$
sin	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
cos	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$

Regras de derivação

$$(e^u)' = u'e^u$$

$$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$$

$$(u+v)' = u'+v'$$

$$(uv)' = u'v+uv'$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v-uv'}{v^2}$$

$$(u^n)' = nu^{n-1}u'$$

Complexos

$$(\rho\, cis\,\theta)^n = \rho^n\, cis\,(n\theta)$$

$$\sqrt[n]{\rho\, cis\,\theta} = \sqrt[n]{\rho}\, cis\,\frac{\theta+2k\pi}{n},\ k\in\{0,1,...,n-1\}$$