Funções (12.º ano)

Limites e continuidade

Exercícios de Provas Nacionais e Testes Intermédios - Propostas de resolução

1. Para averiguar se a função f é contínua em $x = 0$, temos que verificar se $f(0) = \lim\limits_{x \to 0} f(x)$

   - $f(0) = \dfrac{3}{5}$
   - $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{3x}{e^{5x} - 1} = \dfrac{3(0)}{e^{5(0)} - 1} = \dfrac{0}{e^0 - 1} = \dfrac{0}{0}$ (Indeterminação)

   $$\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} \frac{3x}{e^{5x} - 1} = \lim_{x \to 0} \frac{1}{\frac{e^{5x} - 1}{3x}} = \lim_{x \to 0} \frac{1}{\frac{(e^{5x} - 1) \times \frac{5}{3}}{3x \times \frac{5}{3}}} = \lim_{x \to 0} \frac{1}{\frac{(e^{5x} - 1) \times \frac{5}{3}}{5x}} =$$

   (considerando $y = 5x$, temos que se $x \to 0$, então $y \to 0$)

   $$= \lim_{y \to 0} \frac{1}{\frac{(e^{y} - 1) \times \frac{5}{3}}{y}} = \frac{\lim\limits_{y \to 0} 1}{\lim\limits_{y \to 0} \frac{(e^{y} - 1) \times \frac{5}{3}}{y}} = \frac{1}{\underbrace{\lim\limits_{y \to 0} \frac{e^y - 1}{y}}_{\text{Lim. Notável}} \times \lim\limits_{y \to 0} \frac{5}{3}} = \frac{1}{1 \times \frac{5}{3}} = \frac{3}{5}$$

   Como $f(0) = \lim\limits_{x \to 0} f(x)$, então a função f é contínua em $x = 0$.

   Exame – 2022, Ép. especial

2. Com o decorrer do tempo, ou seja, quando $t \to +\infty$, o número de bactérias vivas existentes no tubo é dado por:

   $$\lim_{t \to +\infty} N(t) = \lim_{t \to +\infty} \left(N_0 e^{1,08t - 0,3t^2} \right) = \lim_{t \to +\infty} N_0 \times \lim_{t \to +\infty} e^{1,08t - 0,3t^2} = N_0 \times e^{-\infty} = N_0 \times 0 = 0$$

   Resposta: **Opção D**

   Exame – 2021, Ép. especial

3. Determinando os limites laterais, temos:

   - $\lim\limits_{x\to 0^-} g(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} \left(\frac{x^3-x}{x^2-x}+k\right) = \frac{0}{0}+k$ (Indeterminação)

     $$\lim_{x\to 0^-} g(x) = \lim_{x\to 0^-} \left(\frac{x^3-x}{x^2-x}+k\right) = \lim_{x\to 0^-} \left(\frac{x(x^2-1)}{x(x-1)}+k\right) = \lim_{x\to 0^-} \left(\frac{x^2-1}{x-1}+k\right) = \frac{0-1}{0-1}+k = 1+k$$

   - $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} (2+x\ln x) = 2+0\times(-\infty)$ (Indeterminação)

     (considerando $y=\frac{1}{x}$, temos $x=\frac{1}{y}$ e se $x\to 0^+$, então $y\to +\infty$)

     $$\lim_{x\to 0^+} g(x) = \lim_{y\to +\infty} \left(2+\frac{1}{y}\ln\frac{1}{y}\right) = \lim_{y\to +\infty} \left(2+\frac{\ln\frac{1}{y}}{y}\right) = \lim_{y\to +\infty} \left(2+\frac{\ln 1-\ln y}{y}\right) =$$

     $$= \lim_{y\to +\infty} \left(2+\frac{0-\ln y}{y}\right) = \lim_{y\to +\infty} \left(2-\frac{\ln y}{y}\right) = \lim_{y\to +\infty} 2 - \underbrace{\lim_{y\to +\infty}\frac{\ln y}{y}}_{\text{Lim. Notável}} = 2-0=2$$

   Como $0\notin D_g$, e existe $\lim\limits_{x\to 0} g(x)$, então os limites laterais são iguais, o que permite determinar o valor de k:

   $$\lim_{x\to 0^-} g(x) = \lim_{x\to 0^+} g(x) \Leftrightarrow 1+k=2 \Leftrightarrow k=2-1 \Leftrightarrow k=1$$

   Exame – 2021, 2.ª Fase

4. Para averiguar se a função f é contínua em $x=1$, temos que verificar se $f(1)=\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$

   - $f(1) = -1^2(1+2\ln 1) = -(1+2\times 0) = -1$
   - $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} \left(-x^2(1+2\ln x)\right) = -(1^-)^2(1+2\ln 1^-) = -1$
   - $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} \frac{5-5e^{x-1}}{x^2+3x-4} = \frac{5-5e^{1^+-1}}{(1^+)^2+3(1^+)-4} = \frac{5-5\times 1}{1+3-4} = \frac{0}{0}$ (Indeterminação)

     (como $x^2+3x-4=0 \Leftrightarrow x=1 \lor x=-4$ então $x^2+3x-4=(x-1)(x+4)$)

     $$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} \frac{5-5e^{x-1}}{x^2+3x-4} = \lim_{x\to 1^+} \frac{5(1-e^{x-1})}{(x-1)(x+4)} = \lim_{x\to 1^+} \frac{-5(e^{x-1}-1)}{(x-1)(x+4)} =$$

     (considerando $y=x-1$, temos $x=y+1$ e se $x\to 1^+$, então $y\to 0^+$)

     $$= \lim_{y\to 0^+} \frac{-5(e^y-1)}{y(y+1+4)} = \lim_{y\to 0^+} \left(\frac{(e^y-1)}{y}\times\frac{-5}{y+5}\right) = \underbrace{\lim_{y\to 0^+}\left(\frac{e^y-1}{y}\right)}_{\text{Lim. Notável}} \times \lim_{y\to 0^+}\frac{-5}{y+5} = 1\times\frac{-5}{5} = -1$$

   Como $f(1)=\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$, então a função f é contínua em $x=1$

   Exame – 2021, 1.ª Fase

5. Como a função é contínua em $\mathbb{R}$, também é contínua em $x = 1$, pelo que

$$g(1) = \lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^+} g(x)$$

Como $\lim_{x\to 1^+} g(x) = g(1) = 1^2 - 10 + 8\ln 1 = 1 - 10 + 8\times 0 = -9 + 0 = -9$, calculando $\lim_{x\to 1^-} g(x)$, temos:

$$\lim_{x\to 1^-} g(x) = \lim_{x\to 1^+} \frac{x^2 - x}{k - kx} = \frac{1^2 - 1}{k - k\times 1} = \frac{0}{k-k} = \frac{0}{0} \text{ (Indeterminação)}$$

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{x^2 - x}{k - kx} = \lim_{x\to 1^-} \frac{x(x-1)}{k(1-x)} = \lim_{x\to 1^-} \frac{-x(-(x-1))}{k(1-x)} = \lim_{x\to 1^-} \frac{-x(1-x)}{k(1-x)} = \lim_{x\to 1^-} \frac{-x}{k} = -\frac{1}{k}$$

Assim, como $f(1) = -9$, e f é contínua, temos que:

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = f(1) \Leftrightarrow -9 = -\frac{1}{k} \Leftrightarrow k = \frac{1}{9}$$

Resposta: **Opção D**

Exame – 2020, Ép. especial

6. Como a função é contínua em $\mathbb{R}$, também é contínua em $x = 1$, pelo que

$$f(1) = \lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^+} f(x)$$

Como $\lim_{x\to 1^-} f(x) = f(1) = k$, calculando $\lim_{x\to 1^+} f(x)$, temos:

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} \frac{x-1}{x^2+x-2} = \frac{1-1}{1+1-2} = \frac{0}{0} \text{ (Indeterminação)}$$

Verificando que $x^2 + x - 2 = (x+2)(x-1)$, usando, por exemplo, a fórmula resolvente, temos:

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{x-1}{x^2+x-2} = \lim_{x\to 1^+} \frac{x-1}{(x+2)(x-1)} = \lim_{x\to 1^+} \frac{1}{x+2} = \frac{1}{1+2} = \frac{1}{3}$$

Assim, como $f(1) = k$, e f é contínua, temos que $f(1) = \lim_{x\to 1^+} f(x) \Leftrightarrow k = \frac{1}{3}$

Resposta: **Opção C**

Exame – 2019, Ép. especial

7. Como a função é contínua em $\mathbb{R}$, também é contínua em $x = 1$, pelo que

$$f(1) = \lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^+} f(x)$$

Temos que $f(1) = \log_3 k$

E calculando $\lim_{x\to 1^+} f(x)$ e $\lim_{x\to 1^-} f(x)$, vem:

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x-1} = \frac{1^2-1}{1-1} = \frac{0}{0} \text{ (Indeterminação)}$$

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} = \lim_{x\to 1}(x+1) = 1+1 = 2$$

Como $f(1) = \lim_{x\to 1} f(x)$, podemos calcular o valor de k:

$$\log_3 k = 2 \Leftrightarrow k = 3^2 \Leftrightarrow k = 9$$

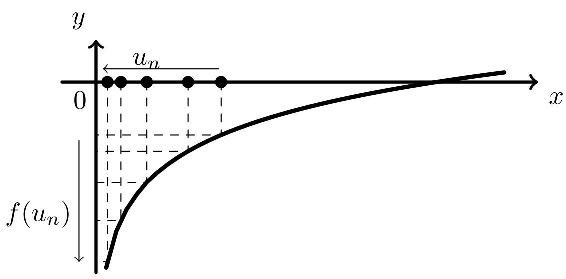
Resposta: **Opção D**

Exame – 2019, 2.ª Fase

8. Como $\lim u_n = \lim \frac{n}{e^n} = \lim \frac{1}{\frac{e^n}{n}} = \frac{\lim 1}{\underbrace{\lim \frac{e^n}{n}}_{\text{Lim. Notável}}} = \frac{1}{+\infty} = 0^+$, então:

$$\lim f(u_n) = \lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} (\ln x) = \ln(0^+) = -\infty$$

Graficamente, na figura ao lado, estão representados alguns termos de (u_n) como objetos, e alguns termos da sucessão das imagens $f(u_n)$, que tendem para $-\infty$, quando o valor de n aumenta.



Resposta: **Opção A**

Exame – 2016, 2.ª Fase

9. Calculando o valor do limite, em função de n, vem que:

$$\lim_{x\to 0}\frac{600x}{1-e^{-nx}} = \frac{600(0)}{1-e^{-n(0)}} = \frac{0}{1-e^0} = \frac{0}{1-1} = \frac{0}{0} \text{ (Indeterminação)}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{600x}{1-e^{-nx}} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{-n}{-n}\times\frac{600x}{1-e^{-nx}}\right) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{600}{-n}\times\frac{-nx}{1-e^{-nx}}\right) =$$

(fazendo $y=-nx$, temos que se $x\to 0$, então $y\to 0$)

$$= \lim_{y\to 0}\left(\frac{600}{-n}\times\frac{y}{1-e^{y}}\right) = \lim_{y\to 0}\left(\frac{600}{-n}\times\frac{y}{-(e^{y}-1)}\right) = \lim_{y\to 0}\left(\frac{600}{n}\times\frac{y}{e^{y}-1}\right) =$$

$$= \lim_{y\to 0}\frac{600}{n}\times = \frac{600}{n}\times\lim_{y\to 0}\frac{1}{\frac{e^y-1}{y}} = \frac{600}{n}\times\frac{\lim\limits_{y\to 0}1}{\underbrace{\lim\limits_{y\to 0}\frac{e^y-1}{y}}_{\text{Lim. Notável}}} = \frac{600}{n}\times\frac{1}{1} = \frac{600}{n}$$

Desta forma, se $x\to 0$, o que corresponde a uma taxa de juro arbitrariamente próxima de zero, então a prestação mensal será arbitrariamente próxima de $\frac{600}{n}$ o que corresponde a pagar o montante do empréstimo (600 euros) em n parcelas iguais, durante n meses.

Exame – 2016, 2.ª Fase

10. Calculando o valor do limite, temos que:

$$\lim_{x\to a}\frac{ae^{x-a}-a}{x^2-a^2} = \frac{ae^{a-a}-a}{a^2-a^2} = \frac{a\times e^0-a}{a-a} = \frac{a\times 1-a}{a-a} = \frac{0}{0} \text{ (Indeterminação)}$$

$$\lim_{x\to a}\frac{ae^{x-a}-a}{x^2-a^2} = \lim_{x\to a}\frac{a\left(e^{x-a}-1\right)}{(x-a)(x+a)} = \lim_{x\to a}\left(\frac{a}{x+a}\times\frac{e^{x-a}-1}{x-a}\right) = \lim_{x\to a}\frac{a}{x+a}\times\lim_{x\to a}\frac{e^{x-a}-1}{x-a} =$$

(fazendo $y=x-a$, temos que se $x\to a$, então $y\to 0$)

$$= \frac{a}{a+a}\times\underbrace{\lim_{y\to 0}\left(\frac{e^y-1}{y}\right)}_{\text{Lim. Notável}} = \frac{a}{2a}\times 1 = \frac{1}{2}\times 1 = \frac{1}{2}$$

Resposta: **Opção B**

Exame – 2016, 1.ª Fase

11. Como a função é contínua em $\mathbb{R}$, também é contínua em $x=0$, pelo que

$$f(0)=\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^+} f(x)$$

Temos que $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=f(0)=2+e^{0+k}=2+e^k$

E calculando $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$, vem

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{2x+\ln(x+1)}{x}=\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{2x}{x}+\frac{\ln(x+1)}{x}\right)=\lim_{x\to 0^+}\left(2+\frac{\ln(x+1)}{x}\right)=$$

$$=\lim_{x\to 0^+} 2+\underbrace{\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln(x+1)}{x}}_{\text{Lim. Notável}}=2+1=3$$

Assim, como $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=f(0)$, vem que

$$2+e^k=3 \Leftrightarrow e^k=3-2 \Leftrightarrow e^k=1 \Leftrightarrow k=\ln 1 \Leftrightarrow k=0$$

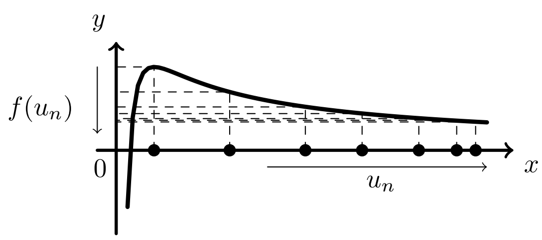
Resposta: **Opção A**

Exame – 2015, 2.ª Fase

12. Como $\lim u_n=\lim\left(n^2\right)=(+\infty)^2=+\infty$, então

$$\lim f\left(u_n\right)=\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x}+\frac{\ln x}{x}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}+\underbrace{\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}}_{\text{Lim. Notável}}=\frac{1}{+\infty}+0=0+0=0$$

Graficamente, na figura ao lado, estão representados alguns termos de (u_n) como objetos, e alguns termos da sucessão das imagens $f(u_n)$, que tendem para zero, quando o valor de n aumenta.



Resposta: **Opção A**

Exame – 2015, 1.ª fase

13. Para averiguar se a função f é contínua em $x = 4$, temos que verificar se $f(4) = \lim\limits_{x\to 4^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 4^+} f(x)$

- $f(4) = \ln(2e^4 - e^4) = \ln(e^4) = 4\ln e = 4 \times 1 = 4$
- $\lim\limits_{x\to 4^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 4^+} \left(\ln(2e^x - e^4)\right) = \ln(2e^4 - e^4) = 4$
- $\lim\limits_{x\to 4^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 4^-} \left(\dfrac{e^{x-4} - 3x + 11}{4 - x}\right) = \dfrac{e^{4-4} - 3(4) + 11}{4 - 4} = \dfrac{e^1 - 12 + 11}{4 - 4} = \dfrac{0}{0}$ (Indeterminação)

$$\lim_{x\to 4^-} f(x) = \lim_{x\to 4^-} \left(\frac{e^{x-4} - 3x + 11}{4 - x}\right) = \lim_{x\to 4^-} \left(\frac{e^{x-4} - 3x + 11}{-(-4 + x)}\right) = \lim_{x\to 4^-} \left(\frac{e^{x-4} - 3x + 11}{-(x - 4)}\right) =$$

(fazendo $y = x - 4$, temos $x = y + 4$ e se $x \to 4^-$, então $y \to 0^-$)

$$= \lim_{y\to 0^-} \left(\frac{e^y - 3(y + 4) + 11}{-y}\right) = \lim_{y\to 0^-} \left(\frac{e^y - 3y - 12 + 11}{-y}\right) = \lim_{y\to 0^-} \left(\frac{e^y - 3y - 1}{-y}\right) =$$

$$= \lim_{y\to 0^-} \left(\frac{e^y - 1}{-y} + \frac{-3y}{-y}\right) = \lim_{y\to 0^-} \left(\frac{e^y - 1}{-y}\right) + \lim_{y\to 0^-} \left(\frac{-3y}{-y}\right) = -\underbrace{\lim_{y\to 0^-} \left(\frac{e^y - 1}{y}\right)}_{\text{Lim. Notável}} + \lim_{y\to 0^-} 3 = -1 + 3 = 2$$

Como $\lim\limits_{x\to 4^-} f(x) \neq \lim\limits_{x\to 4^+} f(x)$, não existe $\lim\limits_{x\to 4} f(x)$, pelo que a função f não é contínua em $x = 4$

Exame – 2014, 1.ª Fase

14. Sabemos que $f(0) = \ln k$

Calculando $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$ temos:

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{3x}{1 - e^{2x}} = \lim_{x\to 0^-} \frac{\frac{2 \times 3x}{2}}{-(e^{2x} - 1)} = \lim_{x\to 0^-} \left(-\frac{3}{2} \times \frac{2x}{e^{2x} - 1}\right) =$$

$$= -\frac{3}{2} \times \lim_{x\to 0^-} \frac{2x}{e^{2x} - 1} = -\frac{3}{2} \times \lim_{x\to 0^-} \frac{1}{\frac{e^{2x} - 1}{2x}} = -\frac{3}{2} \times \frac{1}{\lim\limits_{x\to 0^-} \frac{e^{2x} - 1}{2x}} =$$

(se $y = 2x$, como $x \to 0^-$ então $y \to 0^-$)

$$= -\frac{3}{2} \times \frac{1}{\underbrace{\lim\limits_{y\to 0^-} \frac{e^y - 1}{y}}_{\text{Lim. Notável}}} = -\frac{3}{2} \times \frac{1}{1} = -\frac{3}{2}$$

Assim, para que $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = f(0)$, temos que:

$$-\frac{3}{2} = \ln k \quad \Leftrightarrow \quad k = e^{-\frac{3}{2}}$$

Exame – 2013, Ép. especial

15. Como a função é contínua, é contínua no seu domínio, logo também é contínua em $x = 0$, pelo que

$$f(0) = \lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^+} f(x)$$

Temos que $\lim_{x \to 0^-} f(x) = f(0) = \ln(k - 0) = \ln k$

E calculando $\lim_{x \to 0^+} f(x)$, vem

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} \left(2e^x + \frac{1}{\ln x} \right) = \lim_{x \to 0^+} (2e^x) + \lim_{x \to 0^+} \left(\frac{1}{\ln x} \right) = 2e^{0^+} + \frac{1}{-\infty} = 2 \times 1 + 0 = 2$$

Assim, como $f(0) = \lim_{x \to 0^+} f(x)$, vem que

$$\ln k = 2 \Leftrightarrow k = e^2$$

Resposta: **Opção B**

Teste Intermédio 12.º ano – 24.05.2013

16. Como a função $f \times g$ é contínua no ponto de abcissa 1, temos que

$$(f \times g)(1) = \lim_{x \to 1^-} (f \times g)(x) = \lim_{x \to 1^+} (f \times g)(x)$$

- $(f \times g)(1) = f(1) \times g(1) = \ln 1 \times g(1) = 0 \times g(1) = 0$
- $\lim_{x \to 1^+} (f \times g)(x) = \lim_{x \to 1^+} \Big(f(x) \times g(x) \Big) = \lim_{x \to 1^+} f(x) \times \lim_{x \to 1^+} g(x) = \ln 1^+ \times \lim_{x \to 1^+} g(x) = 0 \times \lim_{x \to 1^+} g(x)$

  Como em nenhuma das opções $\lim_{x \to 1^+} g(x) = \pm\infty$, vem que

  $\lim_{x \to 1^+} (f \times g)(x) = 0 \times \lim_{x \to 1^+} g(x) = 0$
- $\lim_{x \to 1^-} (f \times g)(x) = \lim_{x \to 1^-} \Big(f(x) \times g(x) \Big) = \lim_{x \to 1^-} f(x) \times \lim_{x \to 1^-} g(x)$

  Calculando $\lim_{x \to 1^-} f(x)$ vem

  $\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} \left(\frac{e^{x-1} - 1}{x - 1} \right) = \frac{e^0 - 1}{1^- - 1} = \frac{0}{0}$ (Indeterminação)

  (se $y = x - 1$, como $x \to 1^-$ então $y \to 0^-$)

  $$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} \left(\frac{e^{x-1} - 1}{x - 1} \right) = \underbrace{\lim_{y \to 0^-} \left(\frac{e^y - 1}{y} \right)}_{\text{Lim. Notável}} = 1$$

  Assim vem que
  $\lim_{x \to 1^-} (f \times g)(x) = \lim_{x \to 1^-} \Big(f(x) \times g(x) \Big) = \lim_{x \to 1^-} f(x) \times \lim_{x \to 1^-} g(x) = 1 \times \lim_{x \to 1^-} g(x) = \lim_{x \to 1^-} g(x)$

Como $(f \times g)(1) = \lim_{x \to 1^-} (f \times g)(x) = \lim_{x \to 1^+} (f \times g)(x)$, então $\lim_{x \to 1^-} g(x) = 0$ e a única opção que verifica esta condição é a opção (A).

Resposta: **Opção A**

Teste Intermédio 12.º ano – 28.02.2013

17. Temos que $\lim\limits_{x\to 4} f(x)$ existe, se

$$\lim_{x\to 4^-} f(x) = \lim_{x\to 4^+} f(x)$$

Calculando os limites laterais, temos:

- $\lim\limits_{x\to 4^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 4^-} \dfrac{3x+3}{\sqrt{x^2+9}} = \dfrac{3(4^-)+3}{\sqrt{(4^-)^2+9}} = \dfrac{12+3}{\sqrt{16+9}} = \dfrac{15}{\sqrt{25}} = \dfrac{15}{5} = 3$
- $\lim\limits_{x\to 4^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 4^+} \dfrac{\ln(3x-11)}{x-4} = \dfrac{\ln(3(4^+)-11)}{4^+-4} = \dfrac{\ln 1}{0^+} = \dfrac{0}{0}$ (Indeterminação)

(se $y = x-4$ então $y+4 = x$, como $x \to 4^+$ então $y \to 4^+$)

$$\lim_{x\to 4^+} f(x) = \lim_{x\to 4^+} \frac{\ln(3x-11)}{x-4} = \lim_{y\to 0^+} \frac{\ln(3(y+4)-11)}{y} = \lim_{y\to 0^+} \frac{\ln(3y+12-11)}{y} = \lim_{y\to 0^+} \frac{\ln(3y+1)}{y} =$$

$$= \lim_{y\to 0^+} \left(\frac{\ln(3y+1)}{y} \times \frac{3}{3}\right) = \lim_{y\to 0^+} \left(\frac{\ln(3y+1)}{3y} \times 3\right) = \underbrace{\lim_{y\to 0^+} \frac{\ln(3y+1)}{3y}}_{\text{Lim. Notável}} \times \lim_{y\to 0^+} 3 = 1 \times 3 = 3$$

Assim temos que $\lim\limits_{x\to 4^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 4^+} f(x)$, pelo que existe $\lim\limits_{x\to 4} f(x)$

Teste Intermédio 12.º ano – 28.02.2013

18. Temos que $f(0) = 1 - e^{k+1}$

Calculando $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$, vem

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{1-e^{4x}}{x} = \frac{1-e^{4(0^+)}}{0^+} = \frac{1-1}{0} = \frac{0}{0} \text{ (Indeterminação)}$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{1-e^{4x}}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{-(-1+e^{4x})}{x} = \lim_{x\to 0^+} \left(\frac{4}{4} \times \frac{-(e^{4x}-1)}{x}\right) =$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \left(-4 \times \frac{(e^{4x}-1)}{4x}\right) = \lim_{x\to 0^+} (-4) \times \underbrace{\lim_{x\to 0^+} \frac{(e^{4x}-1)}{4x}}_{\text{Lim. Notável}} = -4 \times 1 = -4$$

Como se pretende que $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = f(0)$, vem

$$-4 = 1 - e^{k+1} \Leftrightarrow e^{k+1} = 1+4 \Leftrightarrow e^{k+1} = 5 \Leftrightarrow k+1 = \ln 5 \Leftrightarrow k = -1 + \ln 5$$

Exame – 2012, 2.ª Fase

19. Como a função é contínua em $\mathbb{R}$, também é contínua em $x=a$, pelo que

$$f(a) = \lim_{x \to a^-} f(x) = \lim_{x \to a^+} f(x)$$

Pela observação do gráfico da função g, temos que

$$f(a) = g(a) = \lim_{x \to a^+} f(x) = \lim_{x \to a^+} g(x) = 2$$

E calculando $\lim\limits_{x \to a^-} f(x)$, vem

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = \lim_{x \to a^-} \log_3 \left(-x - \frac{1}{3}\right) = \log_3 \left(-a - \frac{1}{3}\right)$$

Como $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = f(a)$, temos que

$$\log_3 \left(-a - \frac{1}{3}\right) = 2 \Leftrightarrow -a - \frac{1}{3} = 3^2 \Leftrightarrow -a = 9 + \frac{1}{3} \Leftrightarrow -a = \frac{27}{3} + \frac{1}{3} \Leftrightarrow -a = \frac{28}{3} \Leftrightarrow a = -\frac{28}{3}$$

Resposta: **Opção A**

Exame – 2012, 1.ª Fase

20. Para averiguar se a função f é contínua em $x=2$, temos que verificar se $f(2) = \lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^+} f(x)$

- $f(2) = 3e^2 + \ln(2-1) = 3e^2 + \ln(1) = 3e^2 + 0 = 3e^2$
- $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^+} (3e^x + \ln(x-1)) = 3e^2 + \ln(2-1) = 3e^2$
- $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^-} \dfrac{xe^x - 2e^2}{x-2} = \dfrac{2e^2 - 2e^2}{2-2} = \dfrac{0}{0}$ (Indeterminação)

(fazendo $y = x-2$, temos $x = y+2$ e se $x \to 2^-$, então $y \to 0^-$)

$$\lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2^-} \left(\frac{xe^x - 2e^2}{x-2}\right) = \lim_{y \to 0^-} \left(\frac{(y+2)e^{y+2} - 2e^2}{y}\right) = \lim_{y \to 0^-} \left(\frac{(y+2)e^y \times e^2 - 2e^2}{y}\right) =$$

$$= \lim_{y \to 0^-} \left(\frac{ye^y \times e^2 + 2e^y \times e^2 - 2e^2}{y}\right) = \lim_{y \to 0^-} \left(\frac{ye^y \times e^2 + 2e^2(e^y - 1)}{y}\right) =$$

$$= \lim_{y \to 0^-} \left(\frac{ye^y \times e^2}{y}\right) + \lim_{y \to 0^-} \left(\frac{2e^2(e^y - 1)}{y}\right) = \lim_{y \to 0^-} \left(e^y \times e^2\right) + \lim_{y \to 0^-} \left(2e^2 \times \frac{e^y - 1}{y}\right) =$$

$$= e^0 \times e^2 + 2e^2 \times \underbrace{\lim_{y \to 0^-} \left(\frac{e^y - 1}{y}\right)}_{\text{Lim. Notável}} = 1 \times e^2 + 2e^2 \times 1 = e^2 + 2e^2 = 3e^2$$

Como $f(2) = \lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^-} f(x)$, então a função f é contínua em $x=2$

Teste Intermédio 12.º ano – 24.05.2012

21. Como a função g é contínua para $x=0$, então $g(0)=\lim_{x\to 0^-} g(x)=\lim_{x\to 0^+} g(x)$

- Como $\lim_{x\to 0^-} g(x)=\lim_{x\to 0^-}\frac{e^{2x}-1}{x}=\lim_{x\to 0^-}\left(\frac{2}{2}\times\frac{e^{2x}-1}{x}\right)=2\times\underbrace{\lim_{x\to 0^-}\frac{e^{2x}-1}{2x}}_{\text{Lim. Notável}}=2\times 1=2$

  Então, como $g(0)=\alpha$, vem que
  $$g(0)=\lim_{x\to 0^-} g(x)\ \Leftrightarrow\ \alpha=2$$

- Como $\lim_{x\to 0^+} g(x)=\lim_{x\to 0^+}\left(\beta-\frac{\ln(x+1)}{x}\right)=\lim_{x\to 0^+}\beta-\underbrace{\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln(x+1)}{x}}_{\text{Lim. Notável}}=\beta-1$

  Então, como $g(0)=\alpha=2$ e , vem que
  $$g(0)=\lim_{x\to 0^+} g(x)\ \Leftrightarrow\ 2=\beta-1\ \Leftrightarrow\ 2+1=\beta\ \Leftrightarrow\ 3=\beta$$

Resposta: **Opção B**

Teste Intermédio 12.º ano – 13.03.2012

22. Sabendo que f é contínua em $x=1$, temos que $\lim_{x\to 1} f(x)=f(1)$, e mais especificamente que $\lim_{x\to 1^-} f(x)=f(1)$

Como $f(1)=-1+\ln 1=-1+0=-1$, vamos calcular $\lim_{x\to 1^-} f(x)$ para determinar o valor de k :

$$\lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^-}\left(k+\frac{1-e^{x-1}}{x-1}\right)=\lim_{x\to 1^-} k+\lim_{x\to 1^-}\frac{1-e^{x-1}}{x-1}=k+\lim_{x\to 1^-}\frac{-(e^{x-1}-1)}{x-1}=$$
$$=k-\lim_{x\to 1^-}\frac{e^{x-1}-1}{x-1}\underset{(1)}{=}k-\underbrace{\lim_{y\to 0^-}\frac{e^{y}-1}{y}}_{\text{Lim. Notável}}=k-1$$

(1) Se $y=x-1$, então como $x\to 1^-$, logo $y\to 0^-$

Assim, como f é contínua em $x=1$ temos que $f(1)=k-1$, ou seja
$$-1=k-1\ \Leftrightarrow\ k=0$$

Exame – 2011, Prova especial

23. Sabendo que f é contínua em $x=-1$, temos que $\lim_{x\to -1} f(x)=f(-1)$

Calculando $\lim_{x\to -1} f(x)$ vem:
$$\lim_{x\to -1} f(x)=\lim_{x\to -1}\left(\frac{x+1}{1-e^{x+1}}+1\right)=\frac{-1+1}{1-e^{-1+1}}+1=\frac{0}{0}+1\ \text{(Indeterminação)}$$

(fazendo $y=x+1$, temos que se $x\to -1$, então $y\to 0$)

$$\lim_{x\to -1} f(x)=\lim_{x\to -1^+}\left(\frac{x+1}{1-e^{x+1}}\right)+\lim_{x\to -1} 1=\lim_{y\to 0}\left(\frac{y}{1-e^{y}}\right)+1=\lim_{y\to 0}\left(\frac{1}{\frac{1-e^{y}}{y}}\right)+1=$$
$$=\frac{\lim_{y\to 0} 1}{\lim_{y\to 0}\frac{-(-1+e^{y})}{y}}+1=\frac{1}{-\underbrace{\lim_{y\to 0}\frac{e^{y}-1}{y}}_{\text{Lim. Notável}}}+1=\frac{1}{-1}+1=-1+1=0$$

Assim, como $\lim_{x\to -1} f(x)=f(-1)$ e $f(-1)=a+2$, podemos determinar o valor de a:
$$\lim_{x\to -1} f(x)=f(-1)\ \Leftrightarrow\ a+2=0\ \Leftrightarrow\ a=-2$$

Exame – 2011, Ép. especial

24. Para averiguar se a função h é contínua em $x=0$, temos que verificar se $h(0)=\lim\limits_{x\to 0^-} h(x)=\lim\limits_{x\to 0^+} h(x)$

- $h(0)=3\ln(0^2+1)=3\ln(1)=3\times 0=0$
- $\lim\limits_{x\to 0^-} h(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\left(3\ln(x^2+1)\right)=3\ln\left((0^-)^2+1\right)=3\ln(0+1)=3\ln(1)=3\times 0=0$
- $\lim\limits_{x\to 0^+} h(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{e^{2x}-e^x}{x}=\frac{e^0-e^0}{0}=\frac{0}{0}$ (Indeterminação)

$$\lim_{x\to 0^+} h(x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{e^{2x}-e^x}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{e^{x+x}-e^x}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{e^x\times e^x-e^x}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{e^x(e^x-1)}{x}=$$
$$=\lim_{x\to 0^+} e^x\times\underbrace{\lim_{x\to 0^+}\frac{e^x-1}{x}}_{\text{Lim. Notável}}=e^0\times 1=1\times 1=1$$

Como $\lim\limits_{x\to 0^+} h(x)\neq\lim\limits_{x\to 0^-} h(x)$, então a função h não é contínua em $x=0$

Exame – 2010, Ép. especial

25. Como $\lim\limits_{x\to+\infty}(h(x)-2x)=0$, temos que

$$\lim_{x\to+\infty}(h(x)-2x)=0\Leftrightarrow\lim_{x\to+\infty}h(x)-\lim_{x\to+\infty}(2x)=0\Leftrightarrow\lim_{x\to+\infty}h(x)=\lim_{x\to+\infty}(2x)\Leftrightarrow\lim_{x\to+\infty}(h(x))=+\infty$$

Como a função h é par, temos que, para qualquer $x\in\mathbb{R}$, $f(-x)=f(x)$ e assim,

$$\lim_{x\to-\infty}h(x)=\lim_{x\to+\infty}h(x)=+\infty$$

Resposta: **Opção A**

Exame – 2010, 2.ª Fase

26. Calculando $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{ax}-1}{ax^2+a^2x}$, vem:

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{ax}-1}{ax^2+a^2x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{ax}-1}{ax(x+a)}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{e^{ax}-1}{ax}\times\frac{1}{x+a}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{e^{ax}-1}{ax}\times\lim_{x\to 0}\frac{1}{x+a}=$$

(fazendo $y=ax$, temos que se $x\to 0$, então $y\to 0$)

$$=\underbrace{\lim_{y\to 0}\frac{e^y-1}{y}}_{\text{Lim. Notável}}\times\lim_{x\to 0}\frac{1}{x+a}=1\times\frac{1}{0+a}=\frac{1}{a}$$

Resposta: **Opção A**

Teste Intermédio 12.º ano – 19.05.2010

27. Para averiguar se a função f é contínua em $x=2$, temos que verificar se $f(2)=\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)$

- $f(2)=2\times e^{-2}+2+1=\frac{2}{e^2}+3$
- $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+}(xe^{-x}+x+1)=2\times e^{-2}+2+1=\frac{2}{e^2}+3$
- $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^-}\frac{x-2}{x-\sqrt{2x}}=\frac{2-2}{2-\sqrt{4}}=\frac{0}{0}$ (Indeterminação)

$$\lim_{x\to 2^-} f(x)=\lim_{x\to 2^-}\frac{(x-2)\left(x+\sqrt{2x}\right)}{\left(x-\sqrt{2x}\right)\left(x+\sqrt{2x}\right)}=\lim_{x\to 2^-}\frac{(x-2)\left(x+\sqrt{2x}\right)}{x^2-\left(\sqrt{2x}\right)^2}=\lim_{x\to 2^-}\frac{(x-2)\left(x+\sqrt{2x}\right)}{x^2-2x}=$$
$$=\lim_{x\to 2^-}\frac{(x-2)\left(x+\sqrt{2x}\right)}{x(x-2)}=\lim_{x\to 2^-}\frac{x+\sqrt{2x}}{x}=\frac{2+\sqrt{2\times 2}}{2}=\frac{2+2}{2}=2$$

Como $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)\neq\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)$, então a função f não é contínua em $x=2$

Teste Intermédio 12.º ano – 15.03.2010

28. Como a função h, é definida em $\mathbb{R}^+$ por operações sucessivas de funções contínuas neste intervalo, então f é contínua para $x > 0$
De forma análoga, temos que h é contínua para $x < 0$, porque é definida, neste intervalo, por operações sucessivas de funções contínuas em $\mathbb{R}^-$

Assim, resta averiguar se a função h é contínua para $x = 0$, ou seja, temos que verificar se

$$h(0) = \lim_{x\to 0^+} h(x) = \lim_{x\to 0^-} h(x)$$

- $h(0) = 2$
- $\lim\limits_{x\to 0^+} h(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} \left(\sqrt{x^2+4} - x\right) = \sqrt{0^2+4} - 0 = \sqrt{4} = 2$
- $\lim\limits_{x\to 0^-} h(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{e^{2x}-1}{x} = \dfrac{e^0-1}{0} = \dfrac{0}{0}$ (Indeterminação)

$$\lim_{x\to 0^-} h(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{e^{2x}-1}{x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{2\left(e^{2x}-1\right)}{2\times x} = \lim_{x\to 0^-} 2 \times \lim_{x\to 0^-} \frac{e^{2x}-1}{2x} = 2 \times \lim_{x\to 0^-} \frac{e^{2x}-1}{2x} =$$

(fazendo $y = 2x$, temos que se $x \to 0^-$, então $y \to 0^-$)

$$= 2 \times \underbrace{\lim_{y\to 0^-} \frac{e^y-1}{y}}_{\text{Lim. Notável}} = 2 \times 1 = 2$$

Como $h(0) = \lim\limits_{x\to 0^+} h(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} h(x)$, a função h é contínua em $x = 0$, e como é contínua em $\mathbb{R}^-$ e em $\mathbb{R}^+$, temos que é contínua em $\mathbb{R}$

Exame – 2009, 2.ª Fase

29. Calculando $\lim\limits_{t\to +\infty} C(t)$ temos que:

$$\lim_{t\to +\infty} C(t) = \lim_{t\to +\infty} \left(2te^{-0,3t}\right) = 2(+\infty) \times e^{-0,3(+\infty)} = +\infty \times e^{-\infty} = +\infty \times 0^+ \text{ (Indeterminação)}$$

$$\lim_{t\to +\infty} C(t) = \lim_{t\to +\infty} \frac{2t}{e^{0,3t}} = \lim_{t\to +\infty} \frac{0,3\times 2t}{0,3\times e^{0,3t}} = \lim_{t\to +\infty} \left(\frac{2}{0,3} \times \frac{0,3t}{e^{0,3t}}\right) = \lim_{t\to +\infty} \frac{2}{0,3} \times \lim_{t\to +\infty} \frac{0,3t}{e^{0,3t}} =$$

(fazendo $y = 0{,}3t$, temos que se $t \to +\infty$, então $y \to +\infty$)

$$= \frac{2}{0,3} \times \lim_{y\to +\infty} \frac{y}{e^y} = \frac{2}{0,3} \times \lim_{y\to +\infty} \frac{1}{\frac{e^y}{y}} = \frac{2}{0,3} \times \frac{1}{\underbrace{\lim\limits_{y\to +\infty} \frac{e^y}{y}}_{\text{Lim. Notável}}} = \frac{2}{0,3} \times \frac{1}{+\infty} = \frac{2}{0,3} \times 0^+ = 0$$

Como $C(t)$ é a concentração do medicamento no sangue e t é o tempo decorrido após o medicamento ter sido ministrado, então $\lim\limits_{t\to +\infty} C(t) = 0$ significa, que a um período de tempo arbitrariamente grande ($t \to +\infty$), corresponde uma concentração de 0 mg/l de medicamento no sangue do Fernando, ou seja, com o passar do tempo, o medicamento tende a desaparecer do sangue do Fernando.

Exame – 2009, 1.ª Fase

30. Para averiguar se a função g é contínua em $x = 1$, temos que verificar se $g(1) = \lim_{x\to 1^+} g(x) = \lim_{x\to 1^-} g(x)$

- $g(1) = 2$
- $\lim_{x\to 1^-} g(x) = \lim_{x\to 1^-} \left(2x + \ln(1 + x - x^2)\right) = 2(1) + \ln\left(1 + 1 - 1^2\right) = 2 + \ln(1) = 2 + 0 = 2$
- $\lim_{x\to 1^+} g(x) = \lim_{x\to 1^+} \frac{x-1}{\sqrt{x}-1} = \frac{1-1}{\sqrt{1}-1} = \frac{0}{0}$ (Indeterminação)

$$\lim_{x\to 1^+} g(x) = \lim_{x\to 1^+} \frac{(x-1)\left(\sqrt{x}+1\right)}{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}+1\right)} = \lim_{x\to 1^+} \frac{(x-1)\left(\sqrt{x}+1\right)}{\left(\sqrt{x}\right)^2 - 1^2} = \lim_{x\to 1^+} \frac{(x-1)\left(\sqrt{x}+1\right)}{x-1} =$$

$$= \lim_{x\to 1^+} \left(\sqrt{x}+1\right) = \sqrt{1}+1 = 1+1 = 2$$

Como $g(1) = \lim_{x\to 1^+} g(x) = \lim_{x\to 1^-} g(x)$, então, podemos concluir que a função g é contínua em $x = 1$

Teste Intermédio 12.º ano – 27.05.2009

31. Como a função é contínua em $\mathbb{R}$, também é contínua em $x = a$, pelo que

$$g(a) = \lim_{x\to a^-} g(x) = \lim_{x\to a^+} g(x)$$

Como

$$g(a) = \lim_{x\to a^+} g(x) = \lim_{x\to a^+} \left(x^2 - x - 3\right) = a^2 - a + 3$$

e como

$$\lim_{x\to a^-} g(x) = \lim_{x\to a^-} \left(x^2 - 2x\right) = a^2 - 2a$$

Então, como a função é contínua, vem que:

$$\lim_{x\to a^+} g(x) = \lim_{x\to a^-} g(x) \Leftrightarrow a^2 - a + 3 = a^2 - 2a \Leftrightarrow -a + 3 = -2a \Leftrightarrow 2a - a = -3 \Leftrightarrow a = -3$$

Resposta: **Opção A**

Teste Intermédio 12.º ano – 11.03.2009

32. Como

$$T(0) = 25 + 48e^{-0,05\times 0} = 25 + 48e^0 = 25 + 48 \times 1 = 73$$

Então sabemos que zero minutos após o início do arrefecimento, ou seja, quando se interrompeu o processo de aquecimento, a temperatura da água era de 73 graus Celsius.

Como

$$\lim_{x\to +\infty} T(t) = \lim_{x\to +\infty} \left(25 + 48e^{-0,05\times t}\right) = \lim_{x\to +\infty} (25) + \lim_{x\to +\infty} \left(48e^{-0,05\times t}\right) =$$

$$= 25 + 48 \lim_{x\to +\infty} e^{-0,05\times t} = 25 + 48 \times e^{-0,05\times +\infty} = 25 + 48 \times e^{-\infty} = 25 + 48 \times 0^+ = 25$$

Então sabemos que um aumento arbitrariamente grande do tempo corresponde a uma temperatura de 25 graus Celsius, ou seja, com o passar do tempo a água vai arrefecer até aos 25 graus.

Exame – 2008, Ép. especial

33. Calculando $N(0)$ temos que:

$$N(0) = \frac{2000}{1+199e^{-0,01\times 0}} = \frac{2000}{1+199e^{0}} = \frac{2000}{1+199\times 1} = \frac{2000}{200} = 10$$

Como $N(0) = 10$, então o número de sócios da associação, zero dias após a constituição era de 10, ou seja, a associação foi constituída com 10 sócios.

Calculando $\lim\limits_{x\to+\infty} N(t)$ temos que:

$$\lim_{x\to+\infty} N(t) = \lim_{x\to+\infty} \frac{2000}{1+199e^{-0,01t}} = \frac{2000}{1+199e^{-0,01\times(+\infty)}} = \frac{2000}{1+199e^{-\infty}} = \frac{2000}{1+199\times 0^{+}} = 2000$$

Como $\lim\limits_{x\to+\infty} N(t) = 2000$ então, a um aumento arbitrário do valor de t corresponde um valor de N aproximadamente de 2000, ou seja, com o passar do tempo o número de sócios da associação aproxima-se indefinidamente de 2000.

Exame – 2008, 1.ª Fase

34. Para mostrar que a função f é contínua em $x=0$, temos que mostrar que $f(0) = \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$

- $f(0) = 2 - 0 + \ln(1 + 3\times 0) = 2 + \ln 1 = 2 + 0 = 2$
- $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} (2 - x + \ln(1+3x)) = 2 - 0^+ + \ln(1+3\times 0^+) = 2 + \ln 1 = 2 + 0 = 2$
- $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{e^x - 1 + x}{x} = \dfrac{e^{0^-} - 1 + 0^-}{0^-} = \dfrac{1-1}{0^-} = \dfrac{0}{0}$ (Indeterminação)

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \left(\frac{e^x-1}{x} + \frac{x}{x}\right) = \lim_{x\to 0^-} \left(\frac{e^x-1}{x} + 1\right) = \underbrace{\lim_{x\to 0^-} \frac{e^x-1}{x}}_{\text{Lim. Notável}} + \lim_{x\to 0^-} 1 = 1 + 1 = 2$$

Como $f(0) = \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$, então, podemos concluir que a função f é contínua em $x = 0$

Teste Intermédio 12.º ano – 29.04.2008

35. Pela observação do gráfico podemos verificar que $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x) < 0$ e que $\lim\limits_{x\to 3^+} f(x) > 0$, pelo que podemos garantir que $\lim\limits_{x\to 3^-} \dfrac{1}{f(x)} < 0$ e que $\lim\limits_{x\to 3^+} \dfrac{1}{f(x)} > 0$
Assim temos que:

$$\lim_{x\to 3^-} \frac{1}{f(x)} \neq \lim_{x\to 3^+} \frac{1}{f(x)}$$

Ou seja, que não existe $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{1}{f(x)}$

Resposta: **Opção D**

Exame – 2007, 2.ª fase

36. Calculando o valor do limite, temos:

$$\lim_{x\to 2^+} \frac{1}{4-x^2} = \frac{\lim\limits_{x\to 2^+} 1}{\lim\limits_{x\to 2^+} (4-x^2)} = \frac{1}{4-(2^+)^2} = \frac{1}{4-4^+} = \frac{1}{0^-} = -\infty$$

Resposta: **Opção D**

Exame – 2007, 1.ª fase

37. Para averiguar se a função f é contínua em $x = 0$, temos que verificar se $f(0) = \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$

- $f(0) = 2$
- $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} \frac{x^2+2x}{x^3+x} = \lim\limits_{x\to 0^-} \frac{x(x+2)}{x(x^2+1)} = \lim\limits_{x\to 0^-} \left(\frac{x}{x} \times \frac{x+2}{x^2+1}\right) = 1 \times \frac{0^-+2}{(0^-)^2+1} = \frac{2}{1} = 2$
- $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{3x^2 - x\ln(x+1)}{x^2} = \frac{3\times(0^+)^2 - 0^+ \times \ln(0^+ + 1)}{(0^+)^2} = \frac{0}{0}$ (Indeterminação)

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \left(\frac{3x^2}{x^2} - \frac{x\ln(x+1)}{x^2}\right) = \lim_{x\to 0^+} \left(3 - \frac{\ln(x+1)}{x}\right) = \lim_{x\to 0^+} 3 - \underbrace{\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(x+1)}{x}}_{\text{Lim. Notável}} = 3-1 = 2$$

Como $f(0) = \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$, então, podemos concluir que a função f é contínua em $x = 0$

Teste Intermédio 12.º ano – 15.03.2007

38. Para estudar a continuidade da função g no ponto de abcissa zero, temos que comparar os valores de $g(0)$, de $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x)$ e de $\lim\limits_{x\to 0^-} g(x)$

- $g(0) = 2$
- $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{2x+1}{x} = \frac{2\times 0^+ + 1}{0^+} = \frac{1}{0^+} = +\infty$
- $\lim\limits_{x\to 0^-} g(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} \frac{e^x-1}{2x} = \frac{e^{0^-}-1}{2\times 0^-} = \frac{1-1}{0} = \frac{0}{0}$ (Indeterminação)

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \left(\frac{1}{2} \times \frac{e^x-1}{x}\right) = \lim_{x\to 0^-} \frac{1}{2} \times \underbrace{\lim_{x\to 0^-} \frac{e^x-1}{x}}_{\text{Lim. Notável}} = \frac{1}{2} \times 1 = \frac{1}{2}$$

Como $g(0) \neq \lim\limits_{x\to 0^-} g(x)$, então a função g é descontínua à direita de zero e como $g(0) \neq \lim\limits_{x\to 0^+} g(x)$, então a função g também é descontínua à esquerda de zero.

Resposta: **Opção D**

Exame – 2006, Ép. especial

39. Pela observação dos gráficos, podemos verificar que:

- $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = k, \;\; k \in]2, +\infty[$
- $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = -\infty$

E assim, temos que:

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)}{\lim\limits_{x\to 1^+} g(x)} = \frac{k}{-\infty} = 0$$

Resposta: **Opção A**

Exame – 2006, 2.ª Fase

40. Como nos primeiros cinco minutos a água esteve a aquecer ao lume, a função que modela a variação da temperatura em função do tempo, é crescente para $t \in]0{,}5[$. Como o gráfico da função a é parte de uma reta de declive negativo, para $t \in]0{,}5[$, esta não é a função que modela a situação descrita, porque descreve uma diminuição dos valores da temperatura nos primeiros cinco minutos.

De acordo com a função b, temos que:

- $b(5) = 12(5 + 21) = 12 \times 6 = 72$
- $\lim\limits_{t \to 5^+} c(t) = \lim\limits_{t \to 5^+} \left(24 + 70e^{-0{,}04(t-5)}\right) = 24 + 70 \times e^{-0{,}04\times(5-5)} = 24 + 60 \times e^0 = 24 + 70 \times 1 = 94$

Ou seja, como a temperatura varia de forma contínua, e a função b não é contínua para $t = 5$, então, esta função não modela a situação descrita, porque:

$$b(5) \neq \lim_{t \to 5^+} b(t)$$

De acordo com a função c, temos que:

- $c(0) = 14(0 + 1) = 14 \times 1 = 14$
- $\lim\limits_{t \to +\infty} c(t) = \lim\limits_{t \to +\infty} \left(24 + 60e^{-0{,}04(t-5)}\right) = 24 + 60 \times e^{-0{,}04\times(+\infty-5)} = 24 + 60 \times e^{-\infty} = 24 + 0^+ = 24$

O que significa que, de acordo com este modelo, a temperatura da água tende, com o passar do tempo, $(\lim\limits_{t \to +\infty} c(t))$ não tende a igualar a temperatura ambiente, que é igual à temperatura da água, no instante em que começou a ser aquecida $(c(0))$. Ou seja, a função c não modela a situação descrita, porque:

$$c(0) \neq \lim_{t \to +\infty} c(t)$$

Assim, temos que a função que pode modelar a relação entre a temperatura da água e o tempo t, é a função d

Teste Intermédio 12.º ano – 17.03.2006

41. Sabendo que f é contínua, em particular é contínua em $x = 0$, pelo que $f(0) = \lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$

Fazendo os cálculos, vem que:

- $f(0) = k + \operatorname{sen} 0 = k + 0 = k$
- $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} (k + \operatorname{sen} x) = k + \operatorname{sen} 0^- = k + 0^- = k$
- $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{3x + \ln(1 + x)}{x} = \dfrac{3 \times 0^+ + \ln(1 + 0^+)}{0^+} = \dfrac{0 + \ln 1}{0} = \dfrac{0}{0}$ (Indeterminação)

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} \left(\frac{3x}{x} + \frac{\ln(1 + x)}{x}\right) = \lim_{x \to 0^+} \left(3 + \frac{\ln(x + 1)}{x}\right) = \lim_{x \to 0^+} 3 + \underbrace{\lim_{x \to 0^+} \frac{\ln(x + 1)}{x}}_{\text{Lim. Notável}} = 3 + 1 = 4$$

Assim, como $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = 4$ e a função é contínua, temos que $f(0) = \lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$, ou seja:

$$k = 4$$

Resposta: **Opção D**

Exame – 2005, Ép. especial

42. Como $N < M$, então $N - M < 0$, e assim temos que:

$$\lim_{t\to+\infty} P(t) = \lim_{t\to+\infty}\left(5{,}2\times 10^7\times e^{(N-M)t}\right) = \lim_{t\to+\infty}\left(5{,}2\times 10^7\right)\times \lim_{t\to+\infty} e^{(N-M)t} =$$

$$= 5{,}2\times 10^7\times e^{(N-M)\times(+\infty)} = 5{,}2\times 10^7\times e^{-\infty} = 5{,}2\times 10^7\times 0^+ = 0$$

Assim temos que, se $N < M$ então $\lim\limits_{t\to+\infty} P(t) = 0$, o que, no contexto do problema, significa que se a taxa de natalidade for menor que a taxa de mortalidade, para valores arbitrariamente grandes do tempo a população das aves tende para zero, ou seja, se nascem menos aves do que as que morrem, com o passar do tempo a população das aves tende a extinguir-se.

Exame – 2005, 1.ª Fase

43. Como a função f é contínua no intervalo $]-\infty,0[$, porque resulta de operações entre funções contínuas neste intervalo, e o denominador não se anula para os valores de x deste intervalo; e também é contínua no intervalo $]0,+\infty[$, porque também resulta de operações entre funções contínuas neste intervalo, e o denominador não se anula para os valores de x deste intervalo; resta averiguar a continuidade para $x = 0$

Para averiguar se a função f é contínua em $x = 0$, temos que verificar se $f(0) = \lim\limits_{x\to0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to0^-} f(x)$

- $f(0) = \dfrac{3\times0+2}{2\times0+2} = \dfrac{2}{2} = 1$
- $\lim\limits_{x\to0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{3x+2}{2x+2} = \dfrac{\lim\limits_{x\to0^+}(3x+2)}{\lim\limits_{x\to0^+}(2x+2)} = \dfrac{3\times0^++2}{2\times0^++2} = \dfrac{2}{2} = 1$
- $\lim\limits_{x\to0^-} f(x) = \underbrace{\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{e^x-1}{x}}_{\text{Lim. Notável}} = 1$

Como $f(0) = \lim\limits_{x\to0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to0^-} f(x)$, então, podemos concluir que a função f é contínua em $x = 0$. Como f também é contínua em $\mathbb{R}^-$ e em $\mathbb{R}^-$, então ≪*a função f é contínua em $\mathbb{R}$.*≫.

Exame – 2004, Ép. especial

44. Sabendo que g é contínua, em particular é contínua em $x = 0$, pelo que $g(0) = \lim\limits_{x\to0^-} g(x) = \lim\limits_{x\to0^+} g(x)$

Fazendo os cálculos, vem que:

- $g(0) = k + \cos 0 = k + 1$
- $\lim\limits_{x\to0^-} g(x) = \lim\limits_{x\to0^-}(k+\cos x) = k + \cos 0^- = k + 1$
- $\lim\limits_{x\to0^+} g(x) = \lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\ln(1+x)}{x} = \dfrac{\ln(1+0^+)}{0^+} = \dfrac{\ln 1}{0} = \dfrac{0}{0}$ (Indeterminação)

$$\lim_{x\to0^+} g(x) = \underbrace{\lim_{x\to0^+}\frac{\ln(x+1)}{x}}_{\text{Lim. Notável}} = 1$$

Assim, como $\lim\limits_{x\to0^+} g(x) = 1$ e a função é contínua, temos que: $g(0) = \lim\limits_{x\to0^+} g(x)$, pelo que podemos calcular o valor de k:

$$g(0) = \lim_{x\to0^+} g(x) \;\Leftrightarrow\; k+1 = 1 \;\Leftrightarrow\; k = 0$$

Resposta: **Opção B**

Exame – 2004, 1.ª Fase

45. Como a função f é par e a reta de equação $y=0$ é assintota do seu gráfico, então, como a observação do gráfico sugere, temos que: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0^+$ E assim, vem que:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{f(x)}=\frac{\lim\limits_{x\to+\infty} 1}{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)}=\frac{1}{0^+}=+\infty$$

Resposta: **Opção C**

Exame – 2004, 1.ª Fase

46. Aplicando as propriedades dos logaritmos e calculando o valor do limite, temos:

$$\lim_{x\to+\infty}(f(x)-\ln x)=\lim_{x\to+\infty}\left(\ln\left(x+\frac{1}{x}\right)-\ln x\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\ln\left(\frac{x+\frac{1}{x}}{x}\right)\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\ln\left(\frac{x}{x}+\frac{1}{x^2}\right)\right)=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left(\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)\right)=\ln\left(1+\frac{1}{+\infty}\right)=\ln(1+0^+)=\ln(1)=0$$

Exame – 2003, Prova para militares

47. Calculando o valor do limite, temos que:

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\log_2 x}{e^x-1}=\frac{\log_2 0^+}{e^{0^+}-1}=\frac{-\infty}{1^+-1}=\frac{-\infty}{0^+}=-\infty$$

Resposta: **Opção C**

Exame – 2003, 1.ª fase - 2.ª chamada

48. Sabendo que f é contínua, em particular é contínua em $t=60$, pelo que $f(60)=\lim\limits_{x\to 60^-} f(t)=\lim\limits_{x\to 60^+} f(t)$, e mais especificamente $f(60)=\lim\limits_{x\to 60^-} f(t)$

Fazendo os cálculos, vem que:

- $f(60)=6+A\times 2^{-0,05(60-60)}=6+A\times 2^{-0,05\times 0}=6+A\times 2^0=6+A\times 1=6+A$
- $\lim\limits_{t\to 60^-} f(t)=\lim\limits_{t\to 60^-}\left(20+80\times 2^{-0,05t}\right)=20+80\times 2^{-0,05\times 60}=20+80\times 2^{-3}=$

$$=20+80\times\frac{1}{2^3}=20+\frac{80}{8}=20+10=30$$

Assim, como $\lim\limits_{x\to 60^-} f(t)=f(60)$, podemos provar que $A=24$:

$$f(60)=\lim_{x\to 60^-} f(t)\ \Leftrightarrow\ 6+A=30\ \Leftrightarrow\ A=30-6\ \Leftrightarrow\ A=24$$

Exame – 2001, Prova para militares

49. Sabendo que f é contínua, em particular é contínua em $x=0$, pelo que $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=f(0)$

Fazendo os cálculos, vem que:

- $f(0)=0$
- $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=0$
- $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}(\ln(x+k))=\ln(0+k)=\ln k$

Assim, como $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\ln k$ e como a função é contínua, ou seja $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=f(0)$, podemos calcular o valor de k:

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=f(0)\ \Leftrightarrow\ \ln k=0\ \Leftrightarrow\ k=e^0\ \Leftrightarrow\ k=1$$

Resposta: **Opção C**

Exame – 2001, 2.ª Fase

50. Para estudar a continuidade da função h no ponto de abcissa zero, temos que comparar os valores de $h(0)$, de $\lim\limits_{x\to 0^+} h(x)$ e de $\lim\limits_{x\to 0^-} h(x)$

- $h(0) = 2$
- $\lim\limits_{x\to 0^-} h(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} (1 + e^x) = 1 + e^{0^+} = 1 + 1 = 2$
- $\lim\limits_{x\to 0^+} h(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} (3x + 2) = 3 \times 0^+ + 2 = 0 + 2 = 2$

Como $h(0) = \lim\limits_{x\to 0^-} h(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} h(x)$, então a função h é contínua no ponto de abcissa zero.

Resposta: **Opção A**

Exame – 2001, 1.ª fase - 2.ª chamada

51. Pela observação do gráfico, podemos verificar que a função f é contínua à esquerda do ponto de abcissa 4, e descontínua à direita, ou seja:

$$\lim_{x\to 4^-} f(x) = f(4) \text{ e } \lim_{x\to 4^+} f(x) \neq f(4)$$

Resposta: **Opção B**

Exame – 2000, 1.ª fase - 2.ª chamada

52. Pela observação do gráfico, podemos verificar que:

- $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x) = 0^+$
- $\lim\limits_{x\to 3^-} g(x) = k, k \in \mathbb{R}^+$

E assim, calculando o valor do limite, temos que:

$$\lim_{x\to 3^-} \frac{g(x)}{f(x)} = \frac{\lim\limits_{x\to 3^-} g(x)}{\lim\limits_{x\to 3^-} f(x)} = \frac{k}{0^+} \underset{k>0}{=} +\infty$$

Resposta: **Opção D**

Exame – 1999, 1.ª fase - 2.ª chamada (prog. antigo)