Proposta de Teste n.º 1

Matemática A – 11.º Ano – Outubro de 2014

"Conhece a Matemática e dominarás o Mundo."
Galileu Galilei

Grupo I – Itens de Escolha Múltipla

1. Sejam r e θ, respectivamente, o raio e a amplitude de um sector circular de perímetro $4r$. Qual das afirmações é verdadeira?

A $\cos\theta \approx -0,654$ **B** $\operatorname{sen}\theta \approx -0,759$ **C** $\cos\theta \approx 0,416$ **D** $\operatorname{sen}\theta \approx 0,909$

2. Um ângulo amplitude $-\frac{125\pi}{6}$, tem como lado extremidade o mesmo lado que o ângulo cuja amplitude, em radianos, é:

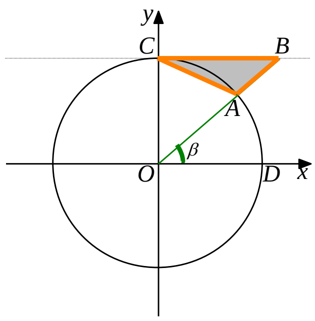
A $\frac{7\pi}{6}$ **B** $\frac{5\pi}{6}$ **C** $\frac{\pi}{6}$ **D** $-\frac{7\pi}{6}$

3. Considere um ângulo de amplitude α tal que $\alpha \in \left]0,\frac{\pi}{2}\right[$. Qual das seguintes afirmações é falsa?

A $\operatorname{sen}(-\alpha)+\cos(\pi-\alpha)<0$ **B** $\operatorname{sen}(\pi+\alpha)\times\cos(\pi-\alpha)>0$

C $\operatorname{sen}\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)-\operatorname{tg}(\pi+\alpha)>0$ **D** $\cos\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)\times\operatorname{tg}(\pi-\alpha)<0$

4. Na figura está representado o círculo trigonométrico e o triângulo $[ABC]$.



Sabe-se que:

- os pontos A e C pertencem à circunferência e o ponto C pertence também ao eixo Oy;
- A recta BC é paralela ao eixo Ox.

Seja β a amplitude do ângulo DOB, $\beta \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$

Qual das seguintes expressões dá o perímetro do triângulo $[ABC]$, em função de β?

A $\frac{1}{\operatorname{tg}\beta} + \frac{1}{\operatorname{sen}\beta} - 1 + \sqrt{2 - 2\cos\beta}$

B $\frac{1}{\operatorname{tg}\beta} + \frac{1}{\operatorname{sen}\beta} - 1 + \sqrt{2 - 2\operatorname{sen}\beta}$

C $\frac{1}{\operatorname{tg}\beta} - \frac{1}{\operatorname{sen}\beta} + 1 + \sqrt{2 - 2\operatorname{sen}\beta}$

D $\frac{1}{\operatorname{tg}\beta} - \frac{1}{\operatorname{sen}\beta} + 1 + \sqrt{2 - 2\cos\beta}$

5. Sejam $x \in \left]\pi, 2\pi\right[\setminus \left\{\frac{3\pi}{2}\right\}$ e a um número real positivo, tal que $\cos x = a$. A expressão $\frac{\cos x - \cos^3 x}{\operatorname{sen} x - \operatorname{sen}^3 x}$ é igual a:

A $\sqrt{\frac{(1-a)(1+a)}{a^2}}$

B $-\sqrt{\frac{(a-1)(a+1)}{a^2}}$

C $-\sqrt{\frac{(1-a)(1+a)}{a^2}}$

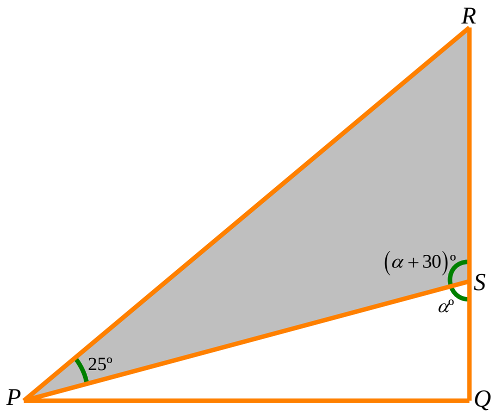
D $\sqrt{\frac{(a-1)(a+1)}{a^2}}$

GRUPO II – ITENS DE RESPOSTA ABERTA

1. Na figura estão representados os triângulos $[PQR]$, rectângulo em Q, e $[PQS]$, inscrito em $[PQR]$.

Sabe-se que:

- $\overline{RS} = 4,5$
- $S\hat{P}R = 25^\circ$
- $P\hat{S}Q = \alpha^\circ$ e $P\hat{S}R = (\alpha + 30)^\circ$



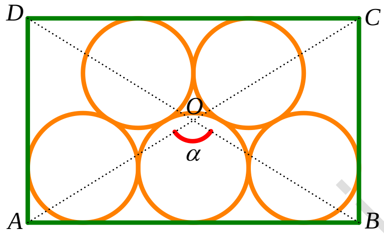
Qual é o valor de $\overline{PQ}$?

Apresente o resultado arredondado às centésimas. No caso de efectuar arredondamentos nos cálculos intermédios, utilize pelo menos três casas decimais.

2. Na figura está representado o rectângulo $[ABCD]$ e cinco circunferências no seu interior. Como a figura sugere, as circunferências têm o mesmo raio e algumas são tangentes entre si e tangentes aos lados do rectângulo. O ponto O é o centro do rectângulo $[ABCD]$. Seja α a amplitude, em graus, do ângulo AOB.

Qual é o valor de α?

Apresente o resultado arredondado às unidades.



3. Considere as seguintes afirmações:

I. $\exists x \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]: \quad \operatorname{sen} x \cos x \geq 0$

II. Se $\alpha \in \left]-\pi, -\frac{\pi}{2}\right[\quad \wedge \quad \operatorname{sen}\alpha \operatorname{sen}\beta < 0 \quad \wedge \quad \frac{\operatorname{tg}\alpha}{\cos\beta} < 0$ então β pertence ao 1.º quadrante.

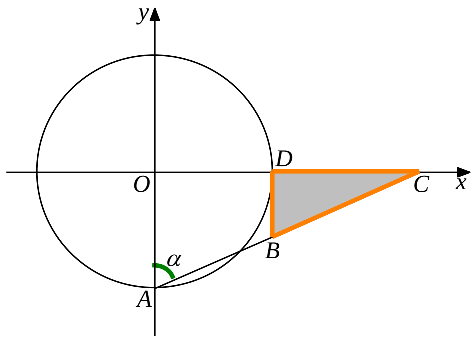
III. $\left(\cos\alpha - \frac{1}{\cos\alpha}\right)^2 = \operatorname{tg}^2\alpha \operatorname{sen}^2\alpha$, com $\alpha \in \mathbb{R}$ e $\cos\alpha \neq 0$

Indique, justificando, se cada uma das afirmações é verdadeira ou falsa.

4. Na figura está representada, num referencial o.n. xOy, a circunferência de equação $x^2 + y^2 = 4$ e o triângulo $[BCD]$.

Sabe-se que:

- o ponto C pertence ao eixo Ox;
- o ponto D pertence à circunferência;
- o segmento de recta $[BD]$ é paralelo ao eixo Oy.



Seja α a amplitude do ângulo CAO, $\alpha \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right[$.

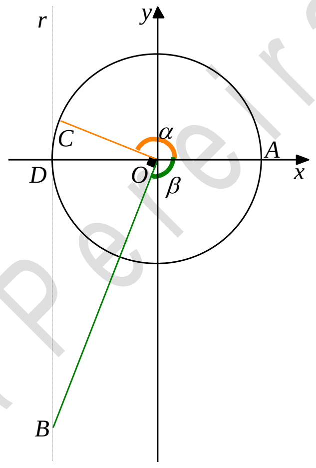
4.1. Mostre que a área do triângulo $[BCD]$ é dada, em função de α, por $A(\alpha) = \frac{2}{\operatorname{sen}\alpha \cos\alpha} - 4$.

4.2. Determine $A\left(\frac{\pi}{4}\right)$ e interprete o resultado no contexto do problema.

4.3. Sabendo que $(\operatorname{sen}\alpha+\cos\alpha)^2=\frac{49}{25}$, determine $A(\alpha)$.

4.4. Para um certo valor de α, sabe-se que $\operatorname{tg}\alpha=3$. Determine $A(\alpha)$.

5. Na figura está representado o círculo trigonométrico num referencial o.n. xOy.



Sabe-se que:

- os pontos A e D pertencem ao eixo Ox e à circunferência;
- a recta r é tangente à circunferência no ponto D;
- o ponto C pertence à circunferência e o ponto D à recta r.
- $B\hat{O}C=\frac{\pi}{2}$ e $\overline{OB}=4$

Sejam α e β as amplitudes, em radianos dos ângulos AOC e o AOB, respectivamente.

5.1. Quais são as coordenadas do ponto C?

5.2. Mostre que $\frac{5\operatorname{tg}(\alpha-\pi)}{\operatorname{tg}\beta}+\operatorname{sen}\beta\operatorname{sen}\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)-\frac{\cos(3\pi-\beta)\operatorname{sen}\alpha}{\operatorname{sen}\left(\frac{23\pi}{6}\right)}=-\frac{55}{48}$.

Solucionário

Grupo I – Itens de escolha múltipla

1. D **2.** A **3.** C **4.** B **5.** C

Grupo II – Itens de resposta aberta

1. $\overline{PQ}\approx 7{,}88$

2. $\alpha\approx 116^{\circ}$

3. **I.** Verdadeira **II.** Falsa **III.** Verdadeira

4.2. $A\left(\frac{\pi}{4}\right)=0$; Quando $\alpha=\frac{\pi}{4}$ o triângulo $[BCD]$ reduz-se a um ponto (B, C e D, coincidem), cuja área é 0.

4.3. $\frac{1}{6}$ **4.4.** $\frac{8}{3}$

5. $\left(-\frac{\sqrt{15}}{4},\frac{1}{4}\right)$