Escola Secundária de Francisco Franco

Matemática A – 11.º ano

Funções reais de variável real

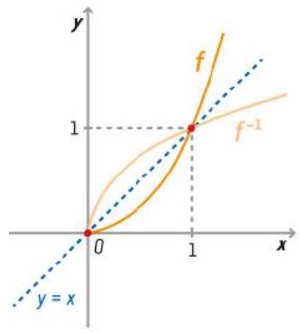
FUNÇÕES COM RADICAIS QUADRÁTICOS E COM RADICAIS CÚBICOS

1) Função definida por $y=\sqrt{x}$

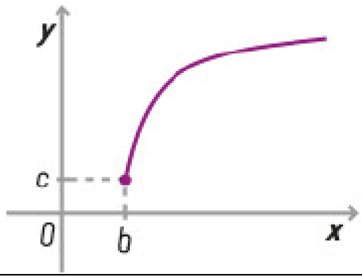
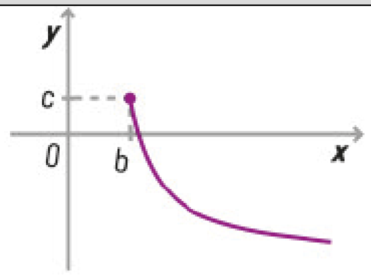
A função $\begin{array}{rl} f: \mathbb{R}_0^+ & \to \mathbb{R}_0^+ \\ x & \mapsto x^2 \end{array}$ é bijetiva, logo admite inversa, que é a função $\boxed{\begin{array}{rl} f^{-1}: \mathbb{R}_0^+ & \to \mathbb{R}_0^+ \\ x & \mapsto \sqrt{x} \end{array}}$

Observação

Os gráficos cartesianos de *f* e de f^{-1} são simétricos em relação à bissetriz dos quadrantes ímpares ($y = x$)



2) Funções com raiz quadrada

Características	Funções do tipo $y=a\sqrt{x-b}+c$, com $a,b,c\in\mathbb{R}, a\neq 0$	
	$a>0$	$a<0$
Gráfico cartesiano		
Domínio	$[b,+\infty[$	
Contradomínio	$[c,+\infty[$	$]-\infty,c]$
Extremos	Mínimo absoluto = c para $x = b$	Máximo absoluto = c para $x = b$
Monotonia	Crescente	Decrescente
Concavidade	Voltada para baixo	Voltada para cima

3) Equações com radicais quadráticos

- $\sqrt{f(x)}=g(x) \Leftrightarrow f(x)=[g(x)]^2 \wedge f(x)\geq 0 \wedge g(x)\geq 0$

Exercício resolvido 1

Dada a função $\begin{array}{rl} f: [-5,+\infty[& \to \mathbb{R}_0^+ \\ x & \mapsto \sqrt{x+5} \end{array}$

1.1. justifica que *f* admite inversa e caracteriza-a;

1.2. calcula $f^{-1}(9)$;

1.3. resolve a equação $f(x)=x-7$.

Resolução

1.1. *f* é bijetiva pois, dado $y\in\mathbb{R}_0^+$ tal que $y=f(x)$, tem-se:

$\sqrt{x+5}=y \Leftrightarrow x+5=y^2 \Leftrightarrow x=y^2-5 \to$ solução única.

Assim, *f* admite inversa, sendo $\boxed{\begin{array}{rl} f^{-1}: \mathbb{R}_0^+ & \to [-5,+\infty[\\ x & \mapsto x^2-5 \end{array}}$

Exercício proposto 1

Caracteriza as funções inversas das funções bijetivas seguintes.

$\begin{array}{rl} f: [3,+\infty[& \to \mathbb{R}_0^+ \\ x & \mapsto \sqrt{x-3} \end{array}$

$\begin{array}{rl} g: [-\frac{7}{2},+\infty[& \to \mathbb{R}_0^+ \\ x & \mapsto \sqrt{2x+7} \end{array}$

$\begin{array}{rl} h: [-1,+\infty[& \to]-\infty,4] \\ x & \mapsto 4-(x+1)^2 \end{array}$

1.2. $f^{-1}(9)=9^2-5=\boxed{76}$

Outro processo

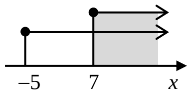
O valor de $f^{-1}(9)$ é solução da equação $f(x)=9$. Assim:

$\sqrt{x+5}=9 \Leftrightarrow x+5=9^2 \wedge x+5\geq 0 \Leftrightarrow x=76 \wedge x\geq -5 \Leftrightarrow x=76$

$\therefore f^{-1}(9)=\boxed{76}$

1.3.1. Domínio da equação: $D=\{x\in\mathbb{R}: x\geq -5 \wedge x-7\geq 0\}$

$=\{x\in\mathbb{R}: x\geq -5 \wedge x\geq 7\}=[7,+\infty[$



Nesse domínio, tem-se:

$f(x)=x-7 \Leftrightarrow (\sqrt{x+5})^2=(x-7)^2 \Leftrightarrow x+5=(x-7)^2 \Leftrightarrow x+5=x^2-14x+49$

$\Leftrightarrow 0=x^2-15x+44 \Leftrightarrow x=\dfrac{15\pm\sqrt{15^2-4\times1\times44}}{2} \Leftrightarrow \underbrace{x=4}_{\notin D} \vee x=11 \Leftrightarrow \boxed{x=11}$

Outro processo:

$\sqrt{x+5}=x-7 \Leftrightarrow x+5=(x-7)^2 \wedge x-7\geq 0 \wedge x+5\geq 0$

$\Leftrightarrow x+5=x^2-14x+49 \wedge x\geq 7 \wedge x\geq -5 \Leftrightarrow 0=x^2-15x+44 \wedge x\geq 7$

$\Leftrightarrow x=\dfrac{15\pm\sqrt{15^2-4\times1\times44}}{2} \wedge x\geq 7 \Leftrightarrow (x=4 \vee x=11) \wedge x\geq 7$

$\Leftrightarrow \boxed{x=11}$

Ainda outro processo:

$\sqrt{x+5}=x-7 \Rightarrow x+5=(x-7)^2 \Leftrightarrow x+5=x^2-14x+49 \Leftrightarrow 0=x^2-15x+44$

$\Leftrightarrow x=\dfrac{15\pm\sqrt{15^2-4\times1\times44}}{2} \Leftrightarrow x=4 \vee x=11$

Verificação das soluções: $x=4 \rightarrow \sqrt{4+5}=4-7 \Leftrightarrow 3=-3 \rightarrow$ proposição falsa.

$x=11 \rightarrow \sqrt{11+5}=11-7 \Leftrightarrow 4=4 \rightarrow$ proposição verdadeira.

$\therefore \boxed{x=11}$

Exercício resolvido 2

Resolve, em $\mathbb{R}$, as equações seguintes.

2.1. $6-\sqrt{5x+1}=0$

2.2. $\sqrt{2x}=4-3x$

Resolução

2.1. $6-\sqrt{5x+1}=0 \Leftrightarrow \sqrt{5x+1}=6 \Leftrightarrow 5x+1=36 \wedge 5x+1\geq 0 \Leftrightarrow x=7 \wedge x\geq -\frac{1}{5}$

$\Leftrightarrow \boxed{x=7}$

2.2. $\sqrt{2x}=4-3x \Leftrightarrow 2x=(4-3x)^2 \wedge 2x\geq 0 \wedge 4-3x\geq 0$

$\Leftrightarrow 2x=16-24x+9x^2 \wedge x\geq 0 \wedge x\leq \frac{4}{3} \Leftrightarrow -9x^2+26x-16=0 \wedge 0\leq x\leq \frac{4}{3}$

$\Leftrightarrow x=\dfrac{-26\pm\sqrt{26^2-4(-9)(-16)}}{2(-9)} \wedge 0\leq x\leq \frac{4}{3} \Leftrightarrow \left(x=\frac{8}{9} \vee x=2\right) \wedge 0\leq x\leq \frac{4}{3}$

$\Leftrightarrow \boxed{x=\frac{4}{3}}$

Exercício proposto 2

Resolve, em $\mathbb{R}$, as equações seguintes.

2.1. $\sqrt{4-x}=7$ **2.2.** $\sqrt{4x-9}+5=0$

2.3. $\sqrt{3-4x}-3\sqrt{3}=0$ **2.4.** $\sqrt{x}=x-2$

2.5. $\sqrt{x-2}=x-4$ **2.6.** $\sqrt{2x+1}=x$

2.7. $\sqrt{x-3}+\sqrt{x}-3=0$

2.8. $\sqrt{5-2x}=\sqrt{3x-1}-3$

2.9. $\sqrt{5x}=5-2x$

2.10. $\sqrt{5-2x}+x-3=0$

2.11. $\sqrt{8x-3}+2=2x$

2.12. $\sqrt{8-x}-\sqrt{x+5}=0$

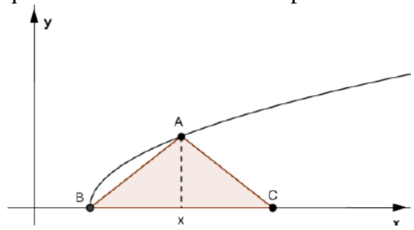
2.13. $\sqrt{x+9}-\sqrt{x-1}=6$

2.14. $\sqrt{x^2+3x}=2-x$

2.15. $\sqrt{4x^2-2x+5}-x-7=0$

Exercício proposto 3

Na figura está representada, num referencial ortonormado, parte do gráfico da função f definida por $f(x)=\sqrt{x-1}$ e que interseta o eixo Ox no ponto B.

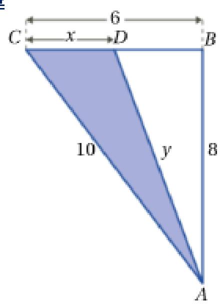


O ponto A pertence ao gráfico da função e C é um ponto do eixo Ox tal que $\overline{AC}=\overline{AB}$ e de abcissa superior à abcissa de A. Representando a abcissa do ponto A por x, exprime, em função de x, a área do triângulo [ABC] e determina para que valor de x a área do triângulo é igual a 27.

Caderno de Apoio às Metas Curriculares

Exercício proposto 4

Na figura está representado um triângulo retângulo [ABC] cujos lados medem 6, 8 e 10.



Considera que o ponto D se desloca ao longo do cateto [CB], nunca coincidindo com o ponto B.

Para cada posição do ponto D, seja x o comprimento do segmento de reta [CD].

4.1. Mostra que o perímetro, P, do triângulo [ADC] é dado, em função de x, por $P(x)=x+10+\sqrt{100-12x+x^2}$

4.2. Determine, se existir, o valor de x para os quais o perímetro do triângulo [ADC] é:

4.2.1. igual a 21;

4.2.2. igual a 15.

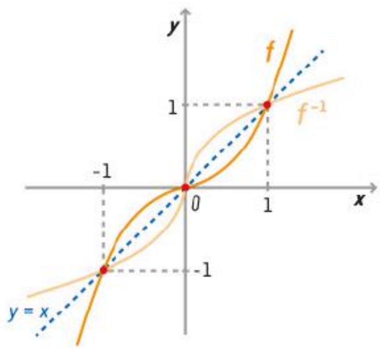
Adaptado de «Máximo 10»

4) Função definida por $y = \sqrt[3]{x}$

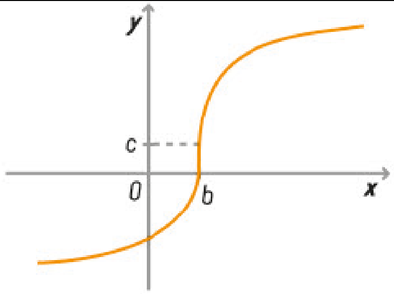
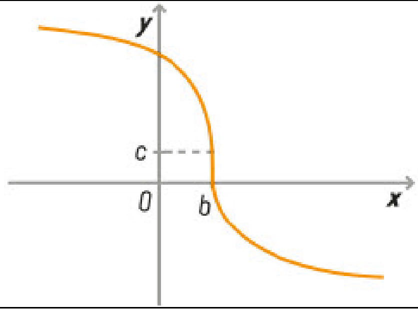
A função $\begin{array}{l} f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ \quad x \mapsto x^3 \end{array}$ é bijetiva, logo admite inversa, que é a função $\boxed{\begin{array}{l} f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ \quad x \mapsto \sqrt[3]{x} \end{array}}$

Observação

Os gráficos cartesianos de f e de f^{-1} são simétricos em relação à bissetriz dos quadrantes ímpares ($y = x$)



5) Funções com raiz cúbica

Características	Funções do tipo $y = a\sqrt[3]{x-b} + c$, com $a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0$	
	$a > 0$	$a < 0$
Gráfico cartesiano		
Domínio	$\mathbb{R}$	
Contradomínio	$\mathbb{R}$	
Extremos	Não tem	
Monotonia	Crescente	Decrescente
Concavidade	Voltada para cima em $]-\infty, b]$ e voltada para baixo em $[b, +\infty[$	Voltada para baixo em $]-\infty, b]$ e voltada para cima em $[b, +\infty[$

6) Equações com radicais cúbicos

- $\sqrt[3]{f(x)} = g(x) \Leftrightarrow f(x) = [g(x)]^3$

Exercício resolvido 3

Considera a função $\begin{array}{l} f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ \quad x \mapsto 2\sqrt[3]{x-4} + 1 \end{array}$

3.1. Caracteriza a função inversa de f.

3.2. Calcula:

3.2.1. $f^{-1}(-3)$

3.2.2. $f^{-1}(0)$

3.3. Resolve as equações seguintes.

3.3.1. $f(x) = 3$

3.3.2. $f(x) = 8$

Exercício proposto 5

Caracteriza as funções inversas das funções definidas a seguir pelas suas expressões.

$f(x) = \sqrt[3]{x+2} - 3$

$g(x) = \dfrac{\sqrt[3]{2-3x}}{4}$

$h(x) = 7x^3 + 10$

Resolução

3.1. $2\sqrt[3]{x-4}+1=y \Leftrightarrow \sqrt[3]{x-4}=\frac{y-1}{2} \Leftrightarrow x-4=\left(\frac{y-1}{2}\right)^3 \Leftrightarrow x=\left(\frac{y-1}{2}\right)^3+4$

$\therefore \boxed{\begin{array}{l} f^{-1}:\mathbb{R}\to\mathbb{R} \\ \quad x \mapsto \left(\frac{x-1}{2}\right)^3+4 \end{array}}$

3.2.1. $f^{-1}(-3)=\left(\frac{-3-1}{2}\right)^3+4=\boxed{-4}$

Outro processo

O valor de $f^{-1}(-3)$ é solução da equação $f(x)=-3$.

$2\sqrt[3]{x-4}+1=-3 \Leftrightarrow \sqrt[3]{x-4}=\frac{-3-1}{2} \Leftrightarrow x-4=(-2)^3 \Leftrightarrow x=-8+4 \Leftrightarrow x=-4$

$\therefore f^{-1}(-3)=\boxed{-4}$

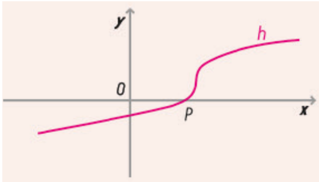
3.2.2. $f^{-1}(0)=\left(\frac{0-1}{2}\right)^3+4=\boxed{\frac{31}{8}}$

3.3.1. $2\sqrt[3]{x-4}+1=3 \Leftrightarrow \sqrt[3]{x-4}=1 \Leftrightarrow x-4=1^3 \Leftrightarrow \boxed{x=5}$

3.3.2. $2\sqrt[3]{x-4}+1=8 \Leftrightarrow \sqrt[3]{x-4}=\frac{7}{2} \Leftrightarrow x-4=\frac{343}{8} \Leftrightarrow \boxed{x=\frac{375}{8}}$

Exercício resolvido 4

Na figura ao lado está parte da função h, definida por $h(x)=\sqrt[3]{x-3}+k$, com $k\in\mathbb{R}$.

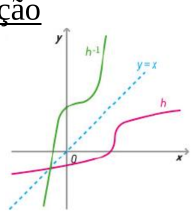


4.1. Esboça, no mesmo referencial, o gráfico da função h^{-1}.

4.2. O ponto P da figura pertence ao eixo Ox e ao gráfico de h. Sabendo que a sua abcissa é 2,657, determina uma expressão para h.

Resolução

4.1.



4.2. $h(2{,}657)=0 \Leftrightarrow \sqrt[3]{2{,}657-3}+k=0 \Leftrightarrow \sqrt[3]{-0{,}343}=-k \Leftrightarrow 0{,}7=k$

$\therefore h(x)=\sqrt[3]{x-3}+0{,}7$

Exercício resolvido 5

Resolve, em $\mathbb{R}$, as condições seguintes.

5.1. $\sqrt[3]{x}=x$

5.2. $\sqrt[3]{16x^2+40x-48}-2x=0$, sabendo que 1 é uma das soluções.

Resolução

5.1. $\sqrt[3]{x}=x \Leftrightarrow x=x^3 \Leftrightarrow x^3-x=0 \Leftrightarrow x(x^2-1)=0 \Leftrightarrow x=0 \vee x^2=1$

$\Leftrightarrow \boxed{x=-1 \vee x=0 \vee x=1}$

5.2. $\sqrt[3]{16x^2+40x-48}-2x=0 \Leftrightarrow 16x^2+40x-48=(2x)^3$

$\Leftrightarrow -8x^3+16x^2+40x-48=0 \Leftrightarrow x^3-2x^2-5x+6=0 \Leftrightarrow (x-1)(x^2-x-6)=0$

$\Leftrightarrow x=1 \vee x=\frac{1\pm\sqrt{1^2-4\times1\times(-6)}}{2} \Leftrightarrow \boxed{x=-2 \vee x=1 \vee x=3}$

	1	−2	−5	6
1		1	−1	−6
	1	−1	−6	0

Exercício proposto 6

Resolve, em $\mathbb{R}$, as condições seguintes.

6.1. $\sqrt[3]{x-8}=5$ **6.2.** $\sqrt[3]{3x+4}=1$

6.3. $\sqrt[3]{3-2x}+2=0$

6.4. $\sqrt[3]{4+2x}=2\sqrt[3]{x+5}$

6.5. $\sqrt[3]{8x+6}=2$ **6.6.** $\sqrt[3]{8-x}=4$

6.7. $3\sqrt[3]{2x+1}=-6$ **6.8.** $\frac{\sqrt[3]{x+9}}{5}=1$

6.9. $\frac{1}{2}-\sqrt[3]{x+2}=1$ **6.10.** $\sqrt[3]{x^2+6x}=x$

6.11. $\sqrt[3]{2-5x}+x=0$, sendo 2 uma solução

6.12. $\sqrt[3]{x+7}=2x$, sendo 1 uma solução

Exercício proposto 7

Qual é o domínio da função definida por

$h(x)=\frac{\sqrt[3]{2x}-\sqrt{-3x}}{4x^2-5x}$?

(A) $\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{5}{4}\right\}$

(B) $\mathbb{R}^+\setminus\left\{\frac{5}{4}\right\}$

(C) $\mathbb{R}^+$

(D) $\mathbb{R}^-$

Exercício proposto 8

De duas funções r.v.r. f e g, sabe-se que se obtém o gráfico de g a partir do de f, fazendo uma dilatação vertical de coeficiente 5, seguida de uma reflexão de eixo Ox e de uma translação de vetor $(-10,1)$.

Sabendo que $g(x)=1-5\sqrt[3]{x+2}$, qual das seguintes pode ser a expressão da função f?

(A) $f(x)=\frac{\sqrt[3]{x-8}}{5}$

(B) $f(x)=\sqrt[3]{x-8}$

(C) $f(x)=\sqrt[3]{-x-18}$

(D) $f(x)=\frac{\sqrt[3]{-x-18}}{5}$

Mais exercícios:

Soluções: 1. $f^{-1}(x)=x^2+3$; $g^{-1}(x)=(x^2-7)/2$; $h^{-1}(x)\sqrt{(4-x)}-1$ 2. {-45}; ∅; {-6}; {4}; {6}; {1+√2}; {4}; ∅; {5/4}; {2}; {7/2}; {3/2}; ∅; {4/7}; {-2,22/3}
3. 10 4. 2,1; não existe 5. $f^{-1}(x)=(x+3)^3-2$; $g^{-1}(x)=(2-64x^3)/3$; $h^{-1}(x)=\sqrt[3]{(x-10)/7}$ 6. {133}; {−1}; {11/2}; {−6}; {1/4}; {−56} ; {−9/2}; {116}; {−17/8}; {−2,0;3}; {−1−√2,2, −1+√2}; {1} 7. D 8. B

O professor: Roberto Oliveira