



Matemática A

12.º Ano de Escolaridade | B + C + H

1. .

1.1. $u_{n+1} - u_n = \frac{n+1+2}{3} - \frac{n+2}{3} = \frac{n+3}{3} - \frac{n+2}{3} = \frac{n+3-n-2}{3} = \frac{1}{3}(\text{constante}), \forall n \in \mathbb{N}$

Logo, a sucessão (u_n) é uma progressão aritmética de razão $\frac{1}{3}$

1.2. $u_1 = \frac{1+2}{3} = 1$ e $u_{100} = \frac{100+2}{3} = \frac{102}{3} = 34$

Assim, $S_{100} = \frac{1+34}{2} \times 100 = 35 \times 50 = 1750$

1.3. $u_{34} = \frac{34+2}{3} = 12$ e $u_{125} = \frac{125+2}{3} = \frac{127}{3}$

$$\begin{aligned} S &= u_{35} + u_{36} + u_{37} + \dots + u_{125} = S_{125} - S_{34} = \frac{1 + \frac{127}{3}}{2} \times 125 - \frac{1+12}{2} \times 34 = \\ &= \frac{\frac{130}{3}}{2} \times 125 - \frac{13}{2} \times 34 = \frac{8125}{3} - 221 = \frac{7462}{3} \end{aligned}$$

Outro processo

$$u_{35} = \frac{35+2}{3} = \frac{37}{3} \text{ e } u_{125} = \frac{125+2}{3} = \frac{127}{3}$$

$$S = u_{35} + u_{36} + u_{37} + \dots + u_{125} = \frac{\frac{37}{3} + \frac{127}{3}}{2} \times (125 - 35 + 1) = \frac{82}{3} \times 91 = \frac{7462}{3}$$

1.4. . $S_n = u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n = \frac{1 + \frac{n+2}{3}}{2} \times n = \frac{\frac{n+5}{3}}{2} \times n = \frac{n^2 + 5n}{6}$

2. .

2.1. $v_1 = -2$

$$v_2 = v_1 + 2 = -2 + 2 = 0$$

$$v_3 = v_2 + 2 = 0 + 2 = 2$$

$$v_4 = v_3 + 2 = 2 + 2 = 4$$

2.2. $v_{n+1} - v_n = 2$ (constante), $\forall n \in \mathbb{N}$

Logo, a sucessão (v_n) é uma progressão aritmética de razão 2

2.3. $v_{500} = v_1 + 499 \times 2 = -2 + 998 = 996$

2.4. $v_n = -2 + (n-1) \times 2 = -2 + 2n - 2 = 2n - 4, n \in \mathbb{N}$

2.5. $v_1 = -2$ e $v_{1000} = 2 \times 1000 - 4 = 1996$

$$S_{1000} = \frac{-2 + 1996}{2} \times 1000 = \frac{1994}{2} \times 1000 = 997000$$

2.6. $v_{50} = 2 \times 50 - 4 = 96$ e $v_{571} = 2 \times 571 - 4 = 1138$

$$S = \frac{96 + 1138}{2} \times (571 - 50 + 1) = \frac{1234}{2} \times 522 = 322074$$

$$2.7. S_n = v_1 + v_2 + v_3 + \dots + v_n = \frac{-2 + 2n - 4}{2} \times n = \frac{2n - 6}{2} \times n = n^2 - 3n$$

$$S_n = 9700 \Leftrightarrow n^2 - 3n = 9700 \Leftrightarrow n^2 - 3n - 9700 = 0 \Leftrightarrow n = \frac{3 \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \times 1 \times (-9700)}}{2 \times 1} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow n = -97 \vee n = 100$$

Como, $n \in \mathbb{N}$, tem-se que $n = 100$

2.8. .

$$S_n = v_1 + v_2 + v_3 + \dots + v_n = \frac{-2 + 2n - 4}{2} \times n = \frac{2n - 6}{2} \times n = n^2 - 3n$$

3. Seja, r a razão da progressão aritmética.

$$a_{500} = a_{100} + 400 \times r \Leftrightarrow 999 = 199 + 400r \Leftrightarrow 999 - 199 = 400r \Leftrightarrow 800 = 400r \Leftrightarrow r = \frac{800}{400} \Leftrightarrow r = 2$$

O primeiro termo é tal que , $a_{500} = a_1 + 499 \times 2 \Leftrightarrow 999 = a_1 + 998 \Leftrightarrow a_1 = 999 - 998 \Leftrightarrow a_1 = 1$

Assim,

$$a_n = 1 + (n - 1) \times 2 = 1 + 2n - 2 = 2n - 1$$

4. .

$$4.1. \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\frac{1}{5} \times 2^{n+1+3}}{\frac{1}{5} \times 2^{n+3}} = \frac{2^{n+4}}{2^{n+3}} = 2^{n+4-(n+3)} = 2^{n+4-n-3} = 2 \text{ (constante), } \forall n \in \mathbb{N}.$$

Logo, a sucessão (u_n) é uma progressão geométrica de razão 2

$$4.2. u_1 = \frac{1}{5} \times 2^{1+3} = \frac{1}{5} \times 2^4 = \frac{1}{5} \times 16 = \frac{16}{5}$$

$$S_{10} = \frac{16}{5} \times \frac{1 - 2^{10}}{1 - 2} = \frac{16}{5} \times \frac{1 - 1024}{-1} = \frac{16 \times 1023}{5} = \frac{16368}{5}$$

$$4.3. u_4 = \frac{1}{5} \times 2^{4+3} = \frac{1}{5} \times 2^7 = \frac{1}{5} \times 128 = \frac{128}{5}$$

$$S = u_4 + u_5 + u_6 + \dots + u_{10} = \frac{128}{5} \times \frac{1 - 2^{10-4+1}}{1 - 2} = \frac{128}{5} \times \frac{1 - 128}{-1} = \frac{128 \times 127}{5} = \frac{16256}{5}$$

$$4.4. . S_n = \frac{16}{5} \times \frac{1 - 2^n}{1 - 2} = \frac{2^4}{5} \times \frac{1 - 2^n}{-1} = \frac{2^4 \times (2^n - 1)}{5} = \frac{2^{n+4} - 16}{5}$$

5. .

$$5.1. v_1 = \frac{1}{2}$$

$$v_2 = \frac{v_1}{4} = \frac{\frac{1}{2}}{4} = \frac{1}{8}$$

$$v_3 = \frac{v_2}{4} = \frac{\frac{1}{8}}{4} = \frac{1}{32}$$

$$v_4 = \frac{v_3}{4} = \frac{\frac{1}{32}}{4} = \frac{1}{128}$$

$$5.2. \frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{\frac{v_n}{4}}{v_n} = \frac{1}{4} \text{ (constante), } \forall n \in \mathbb{N}$$

Logo, a sucessão (v_n) é uma progressão geométrica de razão $\frac{1}{4}$

$$5.3. v_{10} = v_1 \times r^9 = \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{4}\right)^9 = \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{2^{18}}\right) = \frac{1}{2^{19}} = \frac{1}{524288}$$

$$5.4. v_n = v_1 \times r^{n-1} = \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} = \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{2^{2n-2}}\right) = \frac{1}{2^{2n-1}} = 2^{-2n+1}$$

$$5.5. S_{20} = \frac{1}{2} \times \frac{1 - \left(\frac{1}{4}\right)^{20}}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{1}{2} \times \frac{1 - 2^{-40}}{\frac{3}{4}} = \frac{2 \times (1 - 2^{-40})}{3} = \frac{2 - 2^{-39}}{3}$$

5.6. .

$$S_n = \frac{1}{2} \times \frac{1 - \left(\frac{1}{4}\right)^n}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{1}{2} \times \frac{1 - 2^{-2n}}{\frac{3}{4}} = \frac{2 \times (1 - 2^{-2n})}{3} = \frac{2 - 2^{1-2n}}{3}$$

5.7. A soma de todos os termos da progressão geométrica é

$$S = \lim S_n = \lim \frac{2 - 2^{1-2n}}{3} = \frac{2 - 2^{-\infty}}{3} = \frac{2 - 0}{3} = \frac{2}{3}$$

6. Seja, r a razão da progressão geométrica.

$$b_{13} = b_{10} \times r^3 \Leftrightarrow r^3 = \frac{b_{13}}{b_{10}} \Leftrightarrow r^3 = \frac{\frac{1}{512}}{\frac{4096}{1}} \Leftrightarrow r^3 = \frac{512}{4096} \Leftrightarrow r^3 = \frac{1}{8} \Leftrightarrow r = \sqrt[3]{\frac{1}{8}} = \frac{1}{2}$$

$$b_{10} = b_1 \times r^9 \Leftrightarrow \frac{1}{512} = b_1 \times \left(\frac{1}{2}\right)^9 \Leftrightarrow b_1 = \frac{\frac{1}{512}}{\frac{1}{512}} \Leftrightarrow b_1 = 1$$

$$\text{Então, o termo geral é } b_n = 1 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = 2^{1-n}$$

7. Seja, r a razão da progressão geométrica.

$$u_{12} = u_8 \times r^4 \Leftrightarrow r^4 = \frac{u_{12}}{u_8} \Leftrightarrow r^4 = \frac{\frac{3}{128}}{\frac{2048}{3}} \Leftrightarrow r^4 = \frac{128}{2048} \Leftrightarrow r^4 = \frac{1}{16} \Leftrightarrow r = \pm \sqrt[4]{\frac{1}{16}} \Leftrightarrow r = \pm \frac{1}{2}$$

Como por hipótese a razão é positiva, então, $r = \frac{1}{2}$

$$u_8 = u_1 \times r^7 \Leftrightarrow \frac{3}{128} = u_1 \times \left(\frac{1}{2}\right)^7 \Leftrightarrow u_1 = \frac{\frac{3}{128}}{\frac{1}{128}} \Leftrightarrow u_1 = 3$$

Então,

$$S_{10} = u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_{10} = 3 \times \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{10}}{1 - \frac{1}{2}} = 3 \times \frac{1 - \frac{1}{1024}}{\frac{1}{2}} = 6 \times \frac{1023}{1024} = \frac{3069}{512}$$

8. Sabemos que (a_n) é uma progressão aritmética de razão 3, então, tem-se que

$$a_{n+1} - a_n = 3, \forall n \in \mathbb{N}$$

Assim,

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{2^{-3a_{n+1}}}{2^{-3a_n}} = 2^{-3a_{n+1}+3a_n} = 2^{-3(a_{n+1}-a_n)} = 2^{-3 \times 3} = 2^{-9} = \frac{1}{2^9} = \frac{1}{512} (\text{constante}), \forall n \in \mathbb{N}$$

Logo, (b_n) é uma progressão geométrica de razão $\frac{1}{512}$

9. sabemos que (a_n) é progressão aritmética de razão r , então, tem-se que $a_{n+1} - a_n = r, \forall n \in \mathbb{N}$

Assim,

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{k^{a_{n+1}}}{k^{a_n}} = k^{a_{n+1}-a_n} = k^r (\text{constante}), \forall n \in \mathbb{N}$$

Logo, (b_n) define uma progressão geométrica de razão k^r , sendo k diferente de zero e um.

10. Seja (a_n) uma progressão geométrica de razão r_1 e (b_n) uma progressão geométrica de razão r_2

Assim, tem-se que,

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = r_1, \forall n \in \mathbb{N} \text{ e } \frac{b_{n+1}}{b_n} = r_2, \forall n \in \mathbb{N}$$

Consideremos (c_n) a sucessão definida por $c_n = a_n \times b_n, \forall n \in \mathbb{N}$

Então,

$$\frac{c_{n+1}}{c_n} = \frac{a_{n+1} \times b_{n+1}}{a_n \times b_n} = \frac{a_{n+1}}{a_n} \times \frac{b_{n+1}}{b_n} = r_1 \times r_2(\text{constante}), \forall n \in \mathbb{N}$$

Portanto, o produto de duas progressões geométricas é ainda uma progressão geométrica de razão igual ao produto das respetivas razões

$$11. \frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{a \times b^{c(n+1)+d}}{a \times b^{cn+d}} = \frac{b^{cn+c+d}}{b^{cn+d}} = b^{cn+c+d-cn-d} = b^c(\text{constante}), \forall n \in \mathbb{N}$$

Portanto, as sucessões definidas por um termo geral do tipo $v_n = a \times b^{cn+d}, n \in \mathbb{N}, a, b, c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, d \in \mathbb{R}$, são progressões geométricas de razão b^c