Escola Secundária de Penafiel

Ficha de Trabalho nº 17
Proposta de resolução

Preparação para exame

12.º Ano de Escolaridade | Turma G-K

FUNÇÕES REAIS DE VARIÁVEL REAL /FUNÇÃO EXPONENCIAL / FUNÇÃO LOGARÍTMICA

1. Calculemos as coordenadas do ponto R

   $R(0; A(0))$
   $A(0) = 0^3 - 3 \times 0^2 + 4 = 4$, logo, $R(0;4)$, e portanto, $\overline{OR} = 4$
   $\overline{OP} = a$
   $\overline{PQ} = A(a) = a^3 - 3a^2 + 4$

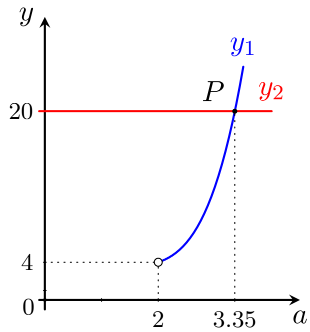
   Então a área do trapézio $[OPQR]$ será:

   $f(a) = \frac{\overline{OR}+\overline{PQ}}{2} \times \overline{OP} = \frac{4+a^3-3a^2+4}{2} \times a = \frac{a^4-3a^3+8a}{2} = \frac{1}{2}a^4 - \frac{3}{2}a^3 + 4a$, com $a > 2$.

   Desenhar os gráficos

   Inserir as funções $y_1 = \frac{1}{2}a^4 - \frac{3}{2}a^3 + 4a$ e $y_2 = 20$
   Ajustar a janela de visualização:
   $a_{min} : -1$
   $a_{max} : 4$
   $y_{min} : 0$
   $y_{max} : 25$

   Conclui-se, portanto, que $a \approx 3.35$



2. $\overline{BD} = x$; $\overline{AD} = 4 - x$
   Aplicando o Teorema de Pitágoras ao triângulo retângulo $[ABC]$, tem-se
   $\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 \Leftrightarrow \overline{BC}^2 = 4^2 + 3^2 \Leftrightarrow \overline{BC}^2 = 25 \Leftrightarrow \overline{BC} = \pm 5$. Como $\overline{BC}$ é uma medida, então $\overline{BC} = 5$
   Aplicando o Teorema de Pitágoras ao triângulo retângulo $[ACD]$, tem-se
   $\overline{CD}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{AD}^2 \Leftrightarrow \overline{CD}^2 = 3^2 + (4-x)^2 \Leftrightarrow \overline{CD}^2 = 9 + 16 - 8x + x^2 \Leftrightarrow \overline{CD} = \pm\sqrt{x^2 - 8x + 25}$.
   Como $\overline{CD}$ é uma medida, então $\overline{CD} = \sqrt{x^2 - 8x + 25}$
   Então, $P_{[BCD]} = \overline{BC} + \overline{BD} + \overline{CD} = 5 + x + \sqrt{x^2 - 8x + 25}$

3. Se a sucessão $f(a_n)$ tende para 4, então a sucessão (a_n) terá de tender para 2 por valores superiores a 2. Das opções que há, apenas a sucessão $a_n = 2 + \frac{1}{e^n}$ satisfaz estas condições, dado que $\lim a_n = \lim\left(2 + \frac{1}{e^n}\right) = 2^+$

4. $\lim\left(1 + \frac{2}{5n}\right)^{2n-3} = e^{k+1} \Leftrightarrow \lim\left(1 + \frac{2}{5n}\right)^{2n} \times \lim\left(1 + \frac{2}{5n}\right)^{-3} = e^{k+1} \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \left[\lim\left(1 + \frac{\frac{2}{5}}{n}\right)^{n}\right]^2 \times 1 = e^{k+1} \Leftrightarrow \left(e^{\frac{2}{5}}\right)^2 = e^{k+1} \Leftrightarrow e^{\frac{4}{5}} = e^{k+1} \Leftrightarrow k+1 = \frac{4}{5} \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow k = \frac{4}{5} - 1 \Leftrightarrow k = -\frac{1}{5}$

5. Seja $A(x; e+1)$
Então, $f(x) = e+1 \Leftrightarrow \ln(x) + e = e+1 \wedge x > 0 \Leftrightarrow \ln(x) = 1 \wedge x > 0 \Leftrightarrow x = e \wedge x > 0 \Leftrightarrow x = e$

6. .

6.1. $h^{-1}(-1) = x$ tal que $h(x) = -1$
$h(x) = -1 \Leftrightarrow \ln\left(\frac{x+e}{e}\right) - 1 = -1 \wedge \frac{x+e}{e} > 0 \Leftrightarrow \ln\left(\frac{x+e}{e}\right) = 0 \wedge x + e > 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \frac{x+e}{e} = 1 \wedge x > -e \Leftrightarrow x + e = e \wedge x > -e \Leftrightarrow x = 0 \wedge x > -e \Leftrightarrow x = 0$
Logo, $h^{-1}(-1) = 0$

6.2. $f(x) = 3 - 4e^{-x} \Leftrightarrow e^x - 2e^{-x} = 3 - 4e^{-x} \Leftrightarrow e^x - 2e^{-x} - 3 + 4e^{-x} = 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow e^x + 2e^{-x} - 3 = 0 \Leftrightarrow e^x + \frac{2}{e^x} - 3 = 0 \Leftrightarrow \frac{(e^x)^2 - 3e^x + 2}{e^x} = 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow (e^x)^2 - 3e^x + 2 = 0 \wedge e^x \neq 0 \Leftrightarrow (e^x)^2 - 3e^x + 2 = 0$
Fazendo uma mudança de variável, $y = e^x$, vem
$y^2 - 3y + 2 = 0 \Leftrightarrow y = \frac{3 \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \times 1 \times 2}}{2 \times 1} \Leftrightarrow y = \frac{3 \pm 1}{2} \Leftrightarrow y = 1 \vee y = 2$
Assim,
$e^x = 1 \vee e^x = 2 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = \ln(2)$
O conjunto solução é $C.S. = \{0; \ln(2)\}$

6.3. Determinemos as coordenadas dos pontos A, B e C
Ponto A
$g(0) = e^{-0} + e = e + 1$, logo, $A(0; e+1)$

Ponto B
$f(0) = e^0 - 2e^{-0}1 - 2 = -1$, logo, $B(0; -1)$

Ponto C

Para determinar as coordenadas do ponto C teremos de resolver a equação $f(x) = g(x)$ com recurso às potencialidades da calculadora gráfica.

Inserir as funções:
$y_1 = e^x - 2e^{-x}$
$y_2 = e^{-x} + e$

Ajustar a janela de visualização:
$a_{min} : -1$
$a_{max} : 3$
$y_{min} : -1$
$y_{max} : 5$

Desenhar os gráficos e procurar as coordenadas do ponto de interseção

Obtêm-se, $x_c \approx 1.27$ e $y_c \approx 3.00$

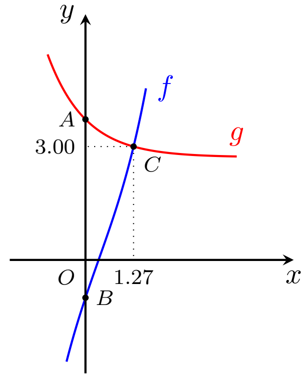


Figura 1

A área do triângulo será dada por
$$A_{[ABC]} = \frac{\overline{AB} \times |abcissadopontoC|}{2} \approx \frac{(e+2) \times 1.27}{2}$$
$A_{[ABC]} \approx 3.00\ u.a.$

7. $0 \in D_f$ e é ponto aderente de D_f

$$\lim_{x \mapsto 0^-} f(x) = \lim_{x \mapsto 0^-} \frac{ex}{e - e^{2kx+1}} =^{\left(\frac{0}{0}\right)} -\frac{1}{\lim\limits_{x \mapsto 0^-} \frac{e\left(e^{2kx}-1\right)}{ex}}$$

Fazendo, $y = 2kx$, vem, $x = \dfrac{y}{2k}$

se $x \to 0^-$, então, $y \to 0^-$

Assim,
$$\lim_{x \mapsto 0^-} \frac{ex}{e - e^{2kx+1}} = -\frac{1}{\lim\limits_{x \mapsto 0^-} \frac{e\left(e^{2kx}-1\right)}{ex}} = -\frac{1}{\lim\limits_{y \mapsto 0^-} \frac{e^y - 1}{\frac{y}{2k}}} = -\frac{1}{2k} \times \frac{1}{\lim\limits_{y \mapsto 0^-} \frac{e^y-1}{y}} = -\frac{1}{2k}$$

Nota: Utilizou-se o limite notável $\lim\limits_{x \mapsto 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1$

$$\lim_{x \mapsto 0^+} f(x) = \lim_{x \mapsto 0^+} \frac{\sqrt{x+4} - 2}{x} =^{\left(\frac{0}{0}\right)} \lim_{x \mapsto 0^+} \frac{(\sqrt{x+4}-2)(\sqrt{x+4}+2)}{x(\sqrt{x+4}+2)} = \lim_{x \mapsto 0^+} \frac{|x+4| - 4}{x(\sqrt{x+4}+2)} =$$
$$= \lim_{x \mapsto 0^+} \frac{x+4-4}{x(\sqrt{x+4}+2)} = \lim_{x \mapsto 0^+} \frac{x}{x(\sqrt{x+4}+2)} = \lim_{x \mapsto 0^+} \frac{1}{\sqrt{x+4}+2} = \frac{1}{4}$$

$$f(0) = e^{-\ln(4)} = e^{\ln\left(\frac{1}{4}\right)} = \frac{1}{4}$$

A função f é contínua em $x = 0$ se existir $\lim\limits_{x \mapsto 0} f(x)$, ou seja, se
$\lim\limits_{x \mapsto 0^-} f(x) = f(0) \wedge \lim\limits_{x \mapsto 0^+} f(x) = f(0)$

Portanto,
$-\dfrac{1}{2k} = \dfrac{1}{4} \Leftrightarrow 2k = -4 \Leftrightarrow k = -2.$

O valor de k existe e o seu valor é -2

8. $\log_c(\sqrt[3]{a^2c}) = \log_c((a^2c)^{\frac{1}{3}}) = \dfrac{1}{3} \times \log_c(a^2c) = \dfrac{1}{3} \times (\log_c(a^2) + \log_c(c)) = \dfrac{1}{3} \times (2\log_c(a) + 1) =$
$= \dfrac{1}{3} \times (2 \times 2 + 1) = \dfrac{5}{3}.$

9. .

9.1. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\dfrac{\sqrt{e^{-x}}+x}{x+\sqrt{x}}+\dfrac{\sqrt{x^2}}{x}\right]=^{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\dfrac{\dfrac{\sqrt{e^{-x}}}{x}+1}{1+\dfrac{\sqrt{x}}{x}}+\dfrac{|x|}{x}\right]=$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\dfrac{\sqrt{\dfrac{e^{-x}}{x^2}}+1}{1+\sqrt{\dfrac{x}{x^2}}}+\dfrac{x}{x}\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\dfrac{\sqrt{\dfrac{1}{x^2e^x}}+1}{1+\sqrt{\dfrac{1}{x}}}+1\right]=$

$=\dfrac{\sqrt{\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x^2e^x}}+1}{1+\sqrt{\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}}}+1=\dfrac{\sqrt{\dfrac{1}{+\infty}}+1}{1+\sqrt{\dfrac{1}{+\infty}}}+1=\dfrac{0+1}{1+0}+1=2$

9.2. $\lim\limits_{x\to4}\left[(x^2-16)\times\dfrac{2}{x^3-7x^2+8x+16}\right]=^{(0\times\infty)}\lim\limits_{x\to4}\left[\dfrac{2(x^2-16)}{x^3-7x^2+8x+16}\right]=^{\left(\frac{0}{0}\right)}$

$=\lim\limits_{x\to4}\left[\dfrac{2(x-4)(x+4)}{(x-4)(x^2-3x-4)}\right]=\lim\limits_{x\to4}\left[\dfrac{2(x+4)}{(x-4)(x+1)}\right]$

É necessário calcular os limites laterais.

$\lim\limits_{x\to4^+}\left[\dfrac{2(x+4)}{(x-4)(x+1)}\right]=\dfrac{16}{0^+}=+\infty$

$\lim\limits_{x\to4^-}\left[\dfrac{2(x+4)}{(x-4)(x+1)}\right]=\dfrac{16}{0^-}=-\infty$

Logo, não existe $\lim\limits_{x\to4}\left[\dfrac{2(x+4)}{(x-4)(x+1)}\right]$

e portanto, não existe $\lim\limits_{x\to4}\left[(x^2-16)\times\dfrac{2}{x^3-7x^2+8x+16}\right]$

Nota: recorreu-se à regra de Ruffini para decompor o polinómio $x^3-7x^2+8x+16$

10. .

10.1. $t=0\mapsto f(0)=30+45e^{-0.6\times0}=30+45e^0=30+45=75$

No preciso momento em que o café é colocado na chávena a sua temperatura é de $75°C$

10.2. Pretende-se determinar t tal que $f(t)=35$

$f(t)=35\Leftrightarrow 30+45e^{-0.6t}=35\Leftrightarrow 45e^{-0.6t}=5\Leftrightarrow e^{-0.6t}=\dfrac{1}{9}\Leftrightarrow -0.6t=\ln\left(\dfrac{1}{9}\right)\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow t=\dfrac{\ln\left(\dfrac{1}{9}\right)}{-0.6}\Leftrightarrow t\approx3.66$

O Rodrigo vai ter de esperar, aproximadamente, 3.66 minutos para tomar o café à temperatura desejada.

11. $F(0)=A\times e^{-B\times0}=A\times e^0=A\twoheadrightarrow$ valor inicial

Pretende-se encontrar t tal que $F(t)=\dfrac{F(0)}{2}$

$F(t)=\dfrac{F(0)}{2}\Leftrightarrow A\times e^{-Bt}=\dfrac{A}{2}\Leftrightarrow e^{-Bt}=\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow -Bt=\ln\left(\dfrac{1}{2}\right)\Leftrightarrow t=\dfrac{-\ln(2)}{-B}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow t=\dfrac{\ln(2)}{B}$ c.q.d.

12. $\log_b(a^4b)=6\Leftrightarrow\log_b(a^4)+\log_b(b)=6\Leftrightarrow4\log_b(a)+1=6\Leftrightarrow4\log_b(a)=6-1\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow4\log_b(a)=5\Leftrightarrow\log_b(a)=\dfrac{5}{4}$

Assim, $\log_a(b) = \dfrac{\log_b(b)}{\log_b(a)} = \dfrac{1}{\frac{5}{4}} = \dfrac{4}{5}$

13. $\log_a(\sqrt{b}) + \log_b(a^2) = \log_a\left(b^{\frac{1}{2}}\right) + 2\log_b(a) = \dfrac{1}{2}\log_a(b) + 2\log_b(a) = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{\log_b(b)}{\log_b(a)} + 2\log_b(a) =$
$= \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{\log_b\left(b^{10}\right)} + 2\log_b\left(b^{10}\right) = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{10} + 2 \times 10 = \dfrac{1}{20} + 20 = \dfrac{1+400}{20} = \dfrac{401}{20}$

14. Sabe-se que o ponto P pertence ao gráfico de f, então,

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{64} \Leftrightarrow e^{a^2\ln\left(\frac{1}{2}\right)} = \frac{1}{64} \Leftrightarrow e^{\ln\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{a^2}\right)} = \frac{1}{64} \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^{a^2} = \frac{1}{64} \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^{a^2} = \left(\frac{1}{2}\right)^8 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow a^2 = 8 \Leftrightarrow a = -\sqrt{8} \vee a = \sqrt{8} \Leftrightarrow a = -2\sqrt{2} \vee a = 2\sqrt{2}.$$

15. .

15.1. **Assintotas verticais** ao gráfico de f

O domínio de f é $D_f =]-\infty; -1[$

$$\lim_{x\mapsto -1^-} f(x) = \lim_{x\mapsto -1^-}\left(2x + 1 + \frac{\ln(-x-1)}{2x}\right) = -2 + 1 + \frac{\ln(0^+)}{-2} = -1 + \infty = +\infty$$

Logo, a reta de equação $x = -1$ é assintota vertical ao gráfico de f

Não existem mais assíntotas verticais ao gráfico da função porque a função f é contínua em todo o seu domínio.

Assintotas não verticais ao gráfico de f

A **assintota não vertical** ao gráfico de f é da forma $y = mx + b$, com $m, b \in \mathbb{R}$

$$\lim_{x\mapsto -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\mapsto -\infty} \frac{2x + 1 + \frac{\ln(-x-1)}{2x}}{x} = \lim_{x\mapsto -\infty} \frac{2x}{x} + \lim_{x\mapsto -\infty} \frac{1}{x} + \lim_{x\mapsto -\infty} \frac{\frac{\ln(-x-1)}{2x}}{x} =$$
$$= \lim_{x\mapsto -\infty}(2) + \frac{1}{-\infty} + \lim_{x\mapsto -\infty} \frac{\ln(-x-1)}{2x^2} = 2 + 0 + \lim_{x\mapsto -\infty} \frac{\ln(-x-1)}{x} \times \lim_{x\mapsto -\infty} \frac{1}{2x} =$$
$$= 2 + \lim_{y\mapsto +\infty} \frac{\ln(y)}{-y-1} \times \frac{1}{-\infty} = 2 + \lim_{y\mapsto +\infty} \frac{\ln(y)}{y} \times \lim_{y\mapsto +\infty} \frac{y}{-y-1} \times 0 =$$
$$= 2 + 0 \times \lim_{y\mapsto +\infty} \frac{y}{y\left(-1 - \frac{1}{y}\right)} \times 0 = 2 + 0 \times \lim_{y\mapsto +\infty} \frac{1}{-1 - \frac{1}{y}} = 2 + 0 \times \frac{1}{-1-0} = 2 + 0 = 2$$

Nota: Fez-se mudança de variável: $y = -x - 1 \Leftrightarrow x = -y - 1$
Se $x \mapsto -\infty$, então, $y \mapsto +\infty$
Utilizou-se o limite notável $\lim\limits_{y\mapsto +\infty} \dfrac{\ln(y)}{y} = 0$

Logo, $m = 2$

$$\lim_{x\mapsto -\infty} [f(x) - 2x] = \lim_{x\mapsto -\infty}\left[2x + 1 + \frac{\ln(-x-1)}{2x} - 2x\right] = \lim_{x\mapsto -\infty}\left[1 + \frac{\ln(-x-1)}{2x}\right] =$$
$$= 1 + \lim_{x\mapsto -\infty} \frac{\ln(-x-1)}{2x} = 1 + \frac{1}{2} \times \lim_{x\mapsto -\infty} \frac{\ln(-x-1)}{x} = 1 + \frac{1}{2} \times \lim_{x\mapsto -\infty} \frac{\ln(-x-1)}{x} =$$
$$= 1 + \frac{1}{2} \times \lim_{y\mapsto +\infty} \frac{\ln(y)}{-y-1} = 1 + \frac{1}{2} \times \lim_{y\mapsto +\infty} \frac{\ln(y)}{y} \times \lim_{y\mapsto +\infty} \frac{y}{-y-1} =$$

$$= 1 + \frac{1}{2} \times 0 \times \lim_{y \mapsto +\infty} \frac{y}{y\left(-1 - \frac{1}{y}\right)} =$$

$$= 1 + \frac{1}{2} \times 0 \times \lim_{y \mapsto +\infty} \frac{1}{-1 - \frac{1}{y}} = 1 + \frac{1}{2} \times 0 \times \frac{1}{-1-0} = 1 + \frac{1}{2} \times 0 = 1$$

Nota: Fez-se mudança de variável: $y = -x - 1 \Leftrightarrow x = -y - 1$

Se $x \mapsto -\infty$, então, $y \mapsto +\infty$

Utilizou-se o limite notável $\lim\limits_{y \mapsto +\infty} \frac{\ln(y)}{y} = 0$

Logo, $b = 1$

Assim, a reta de equação $y = 2x + 1$ é assíntota oblíqua ao gráfico da função f, quando $x \mapsto +\infty$

15.2. A função f é contínua em todo o seu domínio ($]-\infty; -1[$), por se tratar de quociente e soma de funções contínuas, então, em particular, é contínua em $[-e-1; -2]$

Por outro lado,

$$f(-e-1) = 2\times(-e-1)+1+\frac{\ln(-(-e-1)-1)}{2\times(-e-1)} = -2e-1+\frac{\ln(e)}{-2e-2} = -2e-1+\frac{1}{-2e-2} =$$
$$= \frac{1-(-2e-1)(-2e-2)}{-2e-2} = \frac{1-4e^2-4e-2e-2}{-2e-2} = \frac{-4e^2-6e-1}{-2e-2} = -\frac{4e^2+6e+1}{2e+2}$$
$$\approx -6.3021$$

$$f(-2) = 2\times(-2)+1+\frac{\ln(-(-2)-1)}{2\times(-2)} = -3 + \frac{\ln(1)}{-4} = -3+0 = -3$$

Como a função f é contínua em $[-e-1; -2]$ e $f(-e-1) < -2e < f(-2)$, então, pelo teorema de Bolzano-Cauchy, $\exists c \in]-e-1; -2[: f(c) = -2e$

Portanto, a equação $f(x) = -2e$ tem, pelo menos, uma solução em $]-e-1; -2[$

16. $$\lim_{x \mapsto +\infty} \frac{x}{f(x)+e^{-x}+2x} = -2 \Leftrightarrow \lim_{x \mapsto +\infty} \frac{1}{\frac{f(x)+e^{-x}+2x}{x}} = -2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\lim\limits_{x \mapsto +\infty} \frac{f(x)+e^{-x}+2x}{x}} = -2 \Leftrightarrow \frac{1}{\lim\limits_{x \mapsto +\infty} \frac{f(x)}{x} + \lim\limits_{x \mapsto +\infty} \frac{e^{-x}}{x} + \lim\limits_{x \mapsto +\infty} \frac{2x}{x}} = -2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\lim\limits_{x \mapsto +\infty} \frac{f(x)}{x} + \lim\limits_{x \mapsto +\infty} \frac{1}{e^x x} + \lim\limits_{x \mapsto +\infty} (2)} = -2 \Leftrightarrow \frac{1}{\lim\limits_{x \mapsto +\infty} \frac{f(x)}{x} + \frac{1}{+\infty} + 2} = -2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\lim\limits_{x \mapsto +\infty} \frac{f(x)}{x} + 0 + 2} = -2 \Leftrightarrow \frac{1}{\lim\limits_{x \mapsto +\infty} \frac{f(x)}{x} + 2} = -2 \Leftrightarrow \lim_{x \mapsto +\infty} \frac{f(x)}{x} + 2 = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \lim_{x \mapsto +\infty} \frac{f(x)}{x} = -\frac{1}{2} - 2 \Leftrightarrow \lim_{x \mapsto +\infty} \frac{f(x)}{x} = -\frac{5}{2}$$

Logo, o declive dessa assíntota é $-\frac{5}{2}$

SUCESSÕES DE NÚMEROS REAIS

17. Seja $P(n) : 1 \times 1! + 2 \times 2! + 3 \times 3! + \ldots + n \times n! = (n+1)! - 1, \forall n \in \mathbb{N}$

    (i) $P(1)$ é verdadeira(?)

    $n = 1 \twoheadrightarrow 1 \times 1! = (1+1)! - 1$
    $\therefore 1 = 2 - 1$
    $\therefore 1 = 1(verdadeiro)$

    Logo, $P(1)$ é verdadeira

    (ii) $P(n)$ é hereditária(?)

    Hipótese de indução: $P(n)$ é verdadeira, isto é, $1 \times 1! + 2 \times 2! + 3 \times 3! + \ldots + n \times n! = (n+1)! - 1$
    Tese de indução: $P(n+1)$ é verdadeira, isto é,
    $1 \times 1! + 2 \times 2! + 3 \times 3! + \ldots + (n+1) \times (n+1)! = (n+2)! - 1$

    Demonstração

    $1 \times 1! + 2 \times 2! + 3 \times 3! + \ldots + (n+1) \times (n+1)! =$
    $= 1 \times 1! + 2 \times 2! + 3 \times 3! + \ldots + n \times n! + (n+1) \times (n+1)! =$
    $= (n+1)! - 1 + (n+1) \times (n+1)! = (n+1)!(1+n+1) - 1 = (n+1)!(n+2) - 1 = (n+2)! - 1$

    Logo, $P(n)$ é hereditária, ou seja, $P(n) \Rightarrow P(n+1)$

    Conclusão: Como $P(1)$ é verdadeira e $P(n)$ é hereditária, ou seja, $P(n) \Rightarrow P(n+1)$, $P(n)$ é verdadeira para todo o número natural(ou seja, é universal)

18. sabemos que (a_n) é progressão aritmética de razão r, então, tem-se que $a_{n+1} - a_n = r, \forall n \in \mathbb{N}$

    Assim,

    $$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{k^{a_{n+1}}}{k^{a_n}} = k^{a_{n+1} - a_n} = k^r (constante), \forall n \in \mathbb{N}$$

    Logo, (b_n) define uma progressão geométrica de razão k^r, sendo k diferente de zero e um.

19. Sabe-se que (a_n) é progressão geométrica de termos positivos e de razão r, então, tem-se que, $\frac{a_{n+1}}{a_n} = r, \forall n \in \mathbb{N}$

    Portanto,

    $$b_{n+1} - b_n = \log_a(a_{n+1}) - \log_a(a_n) = \log_a\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right) = \log_a(r)\ (constante), \forall n \in \mathbb{N}$$

    Logo, (b_n) define uma progressão aritmética de razão $\log_a(r)$, sendo $a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$