3º Teste de Avaliação

Matemática A

12.º Ano de Escolaridade | Turma: J

Duração do Teste de Avaliação: 80 minutos + 10 minutos de tolerância | maio de 2021

Versão 1

Nome ________________________________ **Nº.** ______

Instruções gerais

- Não é permitido o uso de corretor
- É permitido o uso de calculadora
- O teste apresenta um formulário na página 4
- As figuras não estão desenhadas à escala
- Escreve as tuas respostas de forma legível
- Para responderes aos itens de escolha múltipla, assinala de forma inequívoca, a opção escolhida, escrevendo a letra correspondente. **Não apresentes cálculos nem justificações** neste tipo de itens

1. *(10 pontos)* Em qual das opções está o número real k, de modo que $\lim \left(\frac{4n-2}{4n+3}\right)^n = e^{3k+2}$

   (A) $\frac{7}{12}$

   (B) $\frac{13}{12}$

   (C) $-\frac{7}{12}$

   (D) $-\frac{13}{12}$

2. Considera em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, $w_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i$, $w_2 = 2e^{i\left(-\frac{\pi}{2}\right)}$ e $w_3 = 2i$, três números complexos

   2.1. *(20 pontos)* Determina os números reais x e y, de modo que $\overline{-x-yi} \times i^{45} = |w_1| + \overline{w_2}^3$

   2.2. *(20 pontos)* Resolve a equação $z^4 - z^3 + 2z - 2 + 2i = w_3$, sabendo que $P(z) = z^4 - z^3 + 2z - 2$ é divisível por $z - 1$

   Nota: Apresenta as soluções na forma trigonométrica

3. *(20 pontos)* Resolve a condição $\ln^2(x) - 5\ln(x) + 4 \geq 0$

4. *(20 pontos)* Sabe-se que $\log_b a = \frac{1}{4}$, com $b \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$ e $a > 0$

   Mostra que $\log_a\left(\sqrt[3]{a^2b^2}\right) = \frac{10}{3}$

5. *(10 pontos)* Partindo de $\sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b)$, mostra que $\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$

6. *(10 pontos)* Seja $\mathbb{C}$, o conjunto dos números complexos

Sejam $z_1 = \cos(x) + i\sin(x)$ e $z_2 = \cos(y) + i\sin(y)$, dois números complexos unitários

Em qual das opções está a expressão de $\overline{z_1} \times \overline{z_2}$

(A) $\sin(x+y) + i\cos(x+y)$
(B) $\cos(-x-y) + i\sin(-x-y)$
(C) $\sin(-x-y) + i\cos(-x-y)$
(D) $\cos(x+y) + i\sin(x+y)$

7. *(10 pontos)* Sejam f e g, duas funções reais de variável real, definidas nos respetivos domínios, por $f(x) = \log_5(x+3)$ e $g(x) = 5^x$, respetivamente

No referencial ortonormado xOy da figura 1, estão representados partes dos gráficos das funções f e g, e um triângulo $[ABO]$

- o ponto B é o ponto de interseção do gráfico de g com o eixo das ordenadas
- o ponto A é o ponto do gráfico de f
- o ponto A tem a mesma ordenada do ponto B

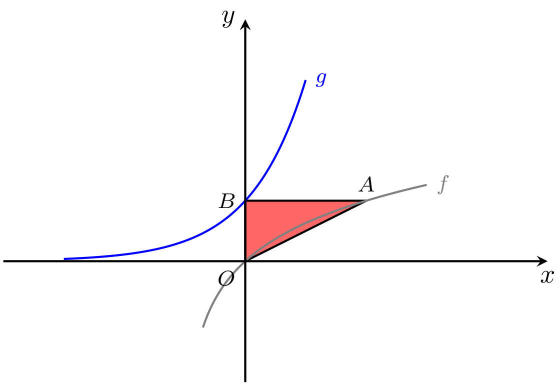

Figura 1

Em qual das opções está o valor da área do triângulo $[ABO]$?

(A) 1
(B) 2
(C) $\frac{3}{2}$
(D) $\frac{5}{2}$

8. Seja f, a função real de variável real, definida, em $\mathbb{R}^+$, por $f(x) = 2x\ln(4x)$

8.1. *(10 pontos)* Em qual das opções está o valor do declive da reta tangente ao gráfico de f, no ponto de abcissa $\frac{e}{4}$?

(A) 2
(B) 4
(C) 6
(D) 8

8.2. *(10 pontos)* Determina $\lim_{x \to 0^+} f(x)$?

9. Considera a circunferência trigonométrica representada num plano munido de um referencial ortonormado xOy, como se observa na figura 2

Sabe-se que:

- $C(1;0)$
- os pontos A e B pertencem à circunferência
- os pontos A e B são simétricos em relação ao eixo Oy
- o ponto A move-se no terceiro quadrante, e o ponto B acompanha esse movimento
- $C\hat{O}A = x$, com $x \in \left]\pi; \frac{3\pi}{2}\right[$

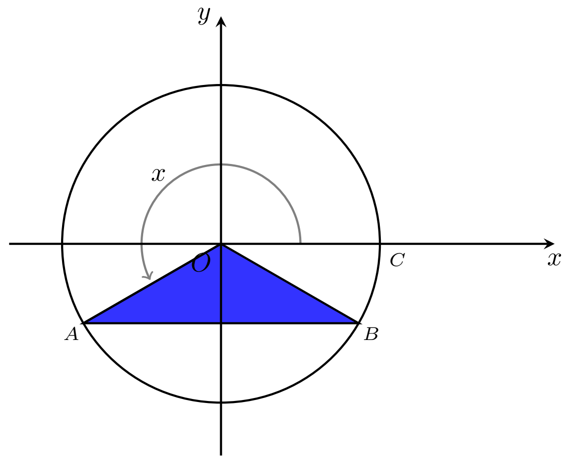

Figura 2

9.1. *(20 pontos)* Mostra que a área do triângulo $[ABO]$, é dada, em função de x, por

$$A(x) = \frac{1}{2}\sin(2x), \text{ com } x \in \left]\pi; \frac{3\pi}{2}\right[$$

9.2. *(20 pontos)* Determina, analiticamente, o valor exato de x, para o qual o triângulo $[ABO]$ tem área máxima

10. *(20 pontos)* Seja f, a função real de variável real, definida por,

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{k\sin(2x)}{x^2 - 2x} & se \quad x < 0 \\ 2e^{-2} & se \quad x = 0 \\ \dfrac{x^2 + 2x}{e^{x+2} - e^2} & se \quad x > 0 \end{cases}, \; k \in \mathbb{R}^-$$

Averigua, analiticamente, se existe algum $k \in \mathbb{R}^-$, para o qual a função f é contínua no ponto $x = 0$

Formulário

Geometria

Comprimento de um arco de circunferência:

αr *(α - amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r - raio)*

área de um polígono regular: *Semiperímetro* $\times$ *Apótema*

área de um setor circular:

$\frac{\alpha r^2}{2}$ *(α- amplitude, em radianos, do ângulo ao centro, r - raio)*

área lateral de um cone: $\pi r g$ *(r - raio da base, g - geratriz)*

área de uma superfície esférica: $4\pi r^2$ *(r - raio)*

Volume da pirâmide: $\frac{1}{3}\times$ *área da base* $\times$ *Altura*

Volume do cone: $\frac{1}{3}\times$ *área da base* $\times$ *Altura*

Volume da esfera: $\frac{4}{3}\pi r^3$ *(r - raio)*

Progressões

Soma dos n primeiros termos de uma progressão (u_n):

Progressão aritmética: $\frac{u_1 + u_n}{2} \times n$

Progressão geométrica: $u_1 \times \frac{1 - r^n}{1 - r}$, $r \neq 1$

Trigonometria

$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$

$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$

Complexos

$(|z|e^{i\theta})^n = |z|^n e^{i(n\theta)}$

$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|}e^{i\left(\frac{\theta+2k\pi}{n}\right)}$, $k \in \{0; 1; 2; ...; n-1\}$ e $n \in \mathbb{N}$

Regras de derivação

$(u+v)' = u' + v'$

$(uv)' = u'v + uv'$

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$

$(u^n)' = nu^{n-1}u' \quad (n \in \mathbb{R})$

$(\sin u)' = u' \cos u$

$(\cos u)' = -u' \sin u$

$(\tan u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$

$(e^u)' = u'e^u$

$(a^u)' = u'a^u \ln a \quad (a \in \mathbb{R}^+ \backslash \{1\})$

$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$

$(\log_a u)' = \frac{u'}{u \ln a} \quad (a \in \mathbb{R}^+ \backslash \{1\})$

Limites notáveis

$\lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e \quad (n \in \mathbb{N})$

$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^p} = +\infty \quad (p \in \mathbb{R})$