#### EXAME NACIONAL DO ENSINO SECUNDÁRIO

Decreto-Lei n.º 74/2004, de 26 de Março

### Prova Escrita de Matemática A

12.º Ano de Escolaridade		
Prova 635/2.ª Fase		11 Páginas
Duração da Prova: 150 minutos. Tolerância: 30 minutos.		
2011		
COTAÇÕES		
GRUPO I		
(8 × 5 pontos)	40 pontos	
		40 pontos
GRUPO II		
1.	15 pontos	
1.2.	15 pontos	
2.		
2.1.	20 pontos 15 pontos	
	To portioo	
3. 1	10 pontos	
3.2.	15 pontos	
4	15 pontos	
5.		
5.1	15 pontos	
5.2	10 pontos	
5.3.	15 pontos	
6	15 pontos	
-		160 pontos

TOTAL ...... 200 pontos

# A classificação da prova deve respeitar integralmente os critérios gerais e os critérios específicos a seguir apresentados.

### CRITÉRIOS GERAIS DE CLASSIFICAÇÃO

A classificação a atribuir a cada resposta resulta da aplicação dos critérios gerais e dos critérios específicos de classificação apresentados para cada item e é expressa por um número inteiro, previsto na grelha de classificação.

As respostas ilegíveis ou que não possam ser claramente identificadas são classificadas com zero pontos. No entanto, em caso de omissão ou de engano na identificação de uma resposta, esta pode ser classificada se for possível identificar inequivocamente o item a que diz respeito.

Se o examinando responder a um mesmo item mais do que uma vez, não eliminando inequivocamente a(s) resposta(s) que não deseja que seja(m) classificada(s), deve ser considerada apenas a resposta que surgir em primeiro lugar.

A ausência de indicação inequívoca da versão da prova (Versão 1 ou Versão 2) implica a classificação com zero pontos das respostas aos itens de selecção (escolha múltipla).

Nos itens de selecção (escolha múltipla), a cotação total do item é atribuída às respostas que apresentem de forma inequívoca a única opção correcta.

São classificadas com zero pontos as respostas em que seja assinalada:

- uma opção incorrecta;
- mais do que uma opção.

Não há lugar a classificações intermédias.

Os critérios de classificação dos itens de construção apresentam-se organizados por etapas e/ou por níveis de desempenho. A cada nível de desempenho e a cada etapa corresponde uma dada pontuação. No caso de, ponderados todos os dados contidos nos descritores, permanecerem dúvidas quanto ao nível a atribuir, deve optar-se pelo nível mais elevado de entre os dois tidos em consideração.

Nos itens de construção com cotação igual ou superior a quinze pontos e que impliquem a produção de um texto, a classificação a atribuir traduz a avaliação simultânea das competências específicas da disciplina e das competências de comunicação escrita em língua portuguesa. A avaliação das competências de comunicação escrita em língua portuguesa contribui para valorizar a classificação atribuída ao desempenho no domínio das competências específicas da disciplina. Esta valorização é cerca de 10% da cotação do item e faz-se de acordo com os níveis de desempenho descritos no quadro seguinte.

Níveis	Descritores					
3	Composição bem estruturada, sem erros de sintaxe, de pontuação e/ou de ortografia, ou com erros esporádicos, cuja gravidade não implique perda de inteligibilidade e/ou de sentido.					
2	Composição razoavelmente estruturada, com alguns erros de sintaxe, de pontuação e/ou de ortografia, cuja gravidade não implique perda de inteligibilidade e/ou de sentido.					
1	Composição sem estruturação aparente, com erros graves de sintaxe, de pontuação e/ou de ortografia, cuja gravidade implique perda frequente de inteligibilidade e/ou de sentido.					

No caso de a resposta não atingir o nível 1 de desempenho no domínio específico da disciplina, a classificação a atribuir é zero pontos. Neste caso, não é classificado o desempenho no domínio da comunicação escrita em língua portuguesa.

Havendo escolas em que os examinandos já contactam com as novas regras ortográficas, uma vez que o Acordo Ortográfico de 1990 já foi ratificado e dado que qualquer cidadão, nesta fase de transição, pode optar pela ortografia prevista quer no Acordo de 1945, quer no de 1990, são consideradas correctas, na classificação das provas, as grafias que seguirem o que se encontra previsto em qualquer um destes normativos.

Nos itens de construção, as respostas que apresentem pontos de vista diferentes dos mencionados nos critérios específicos de classificação devem ser classificadas segundo procedimentos análogos aos previstos nos descritores apresentados, desde que o conteúdo dessas respostas seja considerado cientificamente válido e adequado ao solicitado.

No quadro seguinte, apresentam-se os critérios de classificação a aplicar em situações não descritas anteriormente.

Situação	Classificação
Classificação da resposta a um item cujo critério se apresenta organizado por etapas.	A pontuação indicada para cada etapa é a pontuação máxima que lhe é atribuível.
	A classificação da resposta resulta da soma das pontuações das diferentes etapas, à qual se subtrai ou subtraem, eventualmente, um ou dois pontos, de acordo com o previsto nas situações 14 e/ou 19.
2. Pontuação de uma etapa dividida em passos.	A pontuação indicada para cada passo é a pontuação máxima que lhe é atribuível.
	A pontuação da etapa resulta da soma das pontuações dos diferentes passos.
3. Classificação da resposta a um item ou pontuação de uma etapa cujo critério se apresenta organizado por	A resposta é enquadrada numa das descrições apresentadas.
níveis de desempenho.	À classificação/pontuação correspondente subtraem-se, eventualmente, um, dois ou três pontos, de acordo com o previsto nas situações 9, 10 e/ou 19.
4. Utilização de processos de resolução que não estão previstos no critério específico de classificação.	É aceite e classificado qualquer processo de resolução cientificamente correcto.
	O critério específico deve ser adaptado ao processo de resolução apresentado, mediante distribuição da cotação do item pelas etapas* percorridas pelo examinando. Esta adaptação do critério deve ser utilizada em todos os processos de resolução análogos.
5. Apresentação apenas do resultado final, embora a resolução do item exija cálculos e/ou justificações.	A resposta é classificada com zero pontos.
6. Utilização de processos de resolução que não respeitam as instruções dadas [exemplo: «usando métodos analíticos»].	A etapa em que a instrução não é respeitada é pontuada com zero pontos, bem como todas as etapas subsequentes que dela dependam, salvo se houver indicação em contrário, no critério específico de classificação.
7. Ausência de apresentação dos cálculos e/ou das justificações necessárias à resolução de uma etapa*.	A etapa é pontuada com zero pontos, bem como todas as etapas subsequentes que dela dependam, salvo se houver indicação em contrário, no critério específico de classificação.
8. Ausência de apresentação explícita de uma dada etapa.	Se a resolução apresentada permitir perceber inequivocamente que a etapa foi percorrida, a mesma é pontuada com a cotação total para ela prevista.

Situação	Classificação
Transposição incorrecta de dados do enunciado.	Se o grau de dificuldade da resolução da etapa não diminuir, é subtraído um ponto à pontuação da etapa.
	Se o grau de dificuldade da resolução da etapa diminuir, a pontuação máxima a atribuir a essa etapa deve ser a parte inteira de metade da cotação prevista.
10. Ocorrência de um erro ocasional num cálculo.	É subtraído um ponto à pontuação da etapa em que o erro ocorre.
11. Ocorrência de um erro que revela desconhecimento de conceitos, de regras ou de propriedades.	A pontuação máxima a atribuir nessa etapa deve ser a parte inteira de metade da cotação prevista.
12. Ocorrência de um erro na resolução de uma etapa.	A etapa é pontuada de acordo com o erro cometido.
	As etapas subsequentes são pontuadas de acordo com os efeitos do erro cometido:
	<ul> <li>se o grau de dificuldade das etapas subsequentes não diminuir, estas são pontuadas de acordo com os critérios específicos de classificação;</li> </ul>
	<ul> <li>se o grau de dificuldade das etapas subsequentes diminuir, a pontuação máxima a atribuir a cada uma delas deve ser a parte inteira de metade da cotação prevista.</li> </ul>
13. Resolução incompleta de uma etapa.	Se à resolução da etapa faltar apenas o passo final, é subtraído um ponto à pontuação da etapa; caso contrário, a pontuação máxima a atribuir deve ser a parte inteira de metade da cotação prevista.
<ol> <li>Apresentação de cálculos intermédios com um número de casas decimais diferente do solicitado e/ou apresentação de um arredondamento incorrecto.</li> </ol>	É subtraído um ponto à classificação da resposta, salvo se houver indicação em contrário no critério específico de classificação.
15. Apresentação do resultado final que não respeita a forma solicitada [exemplos: é pedido o resultado na forma de fracção, e a resposta apresenta-se na forma de dízima; é pedido o resultado em centímetros, e a resposta apresenta-se em metros].	É subtraído um ponto à pontuação da etapa correspondente à apresentação do resultado final.
16. Omissão da unidade de medida na apresentação do resultado final [exemplo: «15» em vez de «15 metros»].	A etapa relativa à apresentação do resultado final é pontuada com a cotação para ela prevista.
17. Apresentação do resultado final com aproximação, quando deveria ter sido apresentado o valor exacto.	É subtraído um ponto à pontuação da etapa correspondente à apresentação do resultado final.
18. Apresentação do resultado final com um número de casas decimais diferente do solicitado e/ou apresentação do resultado final incorrectamente arredondado.	É subtraído um ponto à pontuação da etapa correspondente à apresentação do resultado final.
19. Utilização de simbologias ou de expressões inequivo-	É subtraído um ponto à classificação da resposta, excepto:
camente incorrectas do ponto de vista formal.	<ul> <li>se as incorrecções ocorrerem apenas em etapas já pontuadas com zero pontos;</li> </ul>
	<ul> <li>nos casos de uso do símbolo de igualdade onde, em rigor, deveria ter sido usado o símbolo de igualdade aproximada.</li> </ul>

<sup>\*</sup> Em situações em que o critério é aplicável tanto a **etapas** como a **passos**, utiliza-se apenas o termo «etapas» por razões de simplificação da apresentação.

## CRITÉRIOS ESPECÍFICOS DE CLASSIFICAÇÃO

#### **GRUPO I**

<b>1. a 8.</b>	ontos
----------------	-------

As respostas correctas são as seguintes.

Itens	1	2	3	4	5	6	7	8
Versão 1	В	D	В	D	Α	С	В	ပ
Versão 2	С	Α	С	Α	В	D	В	В

#### **GRUPO II**

É de aceitar qualquer processo de resolução cientificamente correcto, ainda que não esteja previsto nestes critérios específicos, nem no Programa (ver n.º 4 dos critérios gerais).

1.1.			15 pontos
	Substituir $z_1$ por $1+2i$	1 ponto	
	Concluir que $i^{4{ m n}+3}=-i$ (ou equivalente)		
	Escrever $\sqrt{2}\operatorname{cis}\left(\frac{5\pi}{4}\right)$ na forma algébrica	2 pontos	
	Obter $\frac{2-b-i}{-1-i}$ (ou equivalente)	2 pontos	
	Indicar a multiplicação de ambos os termos da fracção pelo conjugado do denominador	1 ponto	
	Efectuar a multiplicação do numerador	2 pontos	
	Efectuar a multiplicação do denominador	1 ponto	
	Referir que $w$ é um número real se $3-b=0$ (ou equivalente)	3 pontos	
	Concluir que $b=3$	1 ponto	
1.2.			15 pontos
	Este item pode ser resolvido por, pelo menos, três processos.		
	1.º Processo		
	Considerar $z = a + bi$		
	Substituir $z$ por $a+bi$ na expressão $ 1+z ^2+ 1-z ^2$	1 ponto	
	Obter $(1+a)^2 + b^2 + (1-a)^2 + b^2$	4 pontos	
	Desenvolver $(1+a)^2$	2 pontos	
	Desenvolver $(1-a)^2$	2 pontos	

Obter $2 + 2(a^2 + b^2)$ (ou equivalente)	2 pontos
Referir que $\ a^2 + b^2 = 1$ (ou equivalente)	3 pontos
Concluir o pretendido	1 ponto
2.º Processo	
Considerar $z = \rho \operatorname{cis} \theta$	
Referir que $z=\operatorname{cis}\theta$ se $ z =1$	1 ponto
Substituir $z$ por $\operatorname{cis} \theta$ na expressão $ 1+z ^2+ 1-z ^2$	1 ponto
Escrever $ 1 + \cos \theta + i \sin \theta ^2 +  1 - \cos \theta - i \sin \theta ^2$	1 ponto
Obter $(1 + \cos \theta)^2 + \sin^2 \theta + (1 - \cos \theta)^2 + \sin^2 \theta$	4 pontos
Desenvolver $(1+\cos\theta)^2$	2 pontos
Desenvolver $(1-\cos\theta)^2$	2 pontos
Obter $1 + \cos^2\theta + \sin^2\theta + 1 + \cos^2\theta + \sin^2\theta$	2 pontos
Referir que $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$	1 ponto
Concluir o pretendido	1 ponto
3.º Processo	
Considerar $z$ $\bar{z} = \mid z \mid^2$	
Escrever $ 1+z ^2 = (1+z)(\overline{1+z})$	2 pontos
Escrever $ 1-z ^2 = (1-z)(\overline{1-z})$	2 pontos
Escrever $\overline{1+z}=\overline{1}+\overline{z}$	1 ponto
Escrever $\overline{1-z} = \overline{1} - \overline{z}$	1 ponto
Concluir que $\bar{1}=1$	1 ponto
Escrever $(1+z)(1+\bar{z}) = 1+z+\bar{z}+ z ^2$	3 pontos
Escrever $(1-z)(1-\bar{z}) = 1 - z - \bar{z} +  z ^2$	3 pontos
Substituir $ z $ por 1	1 ponto
Concluir o pretendido	1 ponto

2.1. 20 pontos

No que se segue, vamos designar por A o acontecimento «o funcionário é licenciado» e por B o acontecimento «o funcionário tem idade inferior a 40 anos».

Podem ser admitidas outras designações para os acontecimentos.

Este item pode ser resolvido por, pelo menos, dois processos.

#### 1.º Processo

11 1000000	
Escrever $P(A) = 0.6$	1 ponto
Escrever $P(B \mid A) = 0.8$	2 pontos
Escrever $P(B \mid \overline{A}) = 0.1$	2 pontos
Identificar o pedido com $P(A \mid \overline{B})$	2 pontos
Escrever $P(A \mid \overline{B}) = \frac{P(A \cap \overline{B})}{P(\overline{B})}$ (ou equivalente) (ver nota 1)	1 ponto
Calcular $P(\overline{A})$	1 ponto
Calcular $P(A \cap \overline{B})$	4 pontos
Calcular $P(\overline{B} \mid A)$	
Calcular $P(\overline{B} \mid A) \times P(A)$	
Calcular $P(\overline{B})$	5 pontos
Calcular $P(\overline{A} \cap \overline{B})$ 4 pontos	
Calcular $P(\overline{B} \overline{A})$ 2	
Calcular $P(\overline{B} \mid \overline{A}) \times P(\overline{A})$	
Obter $P(\overline{B})$	
Obter $P(A \mid \overline{B})$ (ver nota 2)	2 nontos
, , , , , , , , , , , , , , , , , , , ,	z pontos
2.º Processo	2 pontos
	1 ponto
<b>2.º Processo</b> Escrever $P(A) = 0.6$	
2.º Processo	1 ponto
<b>2.º Processo</b> Escrever $P(A) = 0.6$	1 ponto 2 pontos
2.º Processo	1 ponto 2 pontos 2 pontos
2.º Processo	1 ponto 2 pontos 2 pontos 2 pontos
2.º Processo	1 ponto 2 pontos 2 pontos 2 pontos 1 ponto
2.º Processo	1 ponto 2 pontos 2 pontos 2 pontos 1 ponto 1 ponto
2.° Processo	1 ponto 2 pontos 2 pontos 2 pontos 1 ponto 1 ponto
2.º Processo	1 ponto 2 pontos 2 pontos 2 pontos 1 ponto 1 ponto
$ \begin{array}{llllllllllllllllllllllllllllllllllll$	1 ponto 2 pontos 2 pontos 2 pontos 1 ponto 1 ponto 4 pontos
$ \begin{array}{llllllllllllllllllllllllllllllllllll$	1 ponto 2 pontos 2 pontos 2 pontos 1 ponto 1 ponto 4 pontos
	1 ponto 2 pontos 2 pontos 2 pontos 1 ponto 1 ponto 4 pontos

- **1.** Se o examinando não escrever  $P(A \mid \overline{B}) = \frac{P(A \cap \overline{B})}{P(\overline{B})}$  e obtiver o valor de  $P(A \mid \overline{B})$ , esta etapa deve ser considerada como cumprida.
- **2.** Se o examinando obtiver o valor de  $P(A \mid \overline{B})$  apresentando uma tabela ou um diagrama em árvore, as etapas anteriores devem ser pontuadas segundo procedimentos análogos aos apresentados.

2.2	15	pont	tos
-----	----	------	-----

A composição deve contemplar os pontos seguintes:

- A) identificação da resposta correcta;
- B) explicação do raciocínio que conduz à resposta correcta;
- C) proposta de alteração na expressão da resposta incorrecta, de modo a torná-la correcta;
- D) explicação, no contexto do problema, da razão da alteração proposta.

Na tabela seguinte, indica-se como deve ser classificada a resposta a este item, de acordo com os níveis de desempenho no domínio da comunicação escrita em língua portuguesa e os níveis de desempenho no domínio específico da disciplina.

Descritores do nível de desempenho no domínio da comunicação escrita em língua portuguesa		Níveis*			
Descritores do nível de desempenho no domínio específico da disciplina		1	2	3	
	5	A composição contempla correctamente os quatro pontos, OU apenas os pontos B, C e D.	13	14	15
	4	A composição contempla correctamente apenas os pontos A, B e C, OU apenas os pontos A, C e D, OU apenas os pontos B e C, OU apenas os pontos C e D.	10	11	12
Níveis	3	A composição contempla correctamente apenas os pontos A e B, OU apenas o ponto B.	7	8	9
	2	A composição contempla correctamente apenas os pontos A e C, OU apenas o ponto C.	6	6	6
	1	A composição contempla correctamente apenas o ponto A.	3	3	3

<sup>\*</sup> Descritores apresentados nos Critérios Gerais de Classificação.

3.1.				10 pontos
	Identificar que o aumento é dado por $N_A(7)-N_A(0)$		2 pontos	
	Calcular $N_A(0)$		3 pontos	
	Calcular $N_A(7)$		3 pontos	
	Calcular $N_A(7)$ – $N_A(0)$		2 pontos	
3.2.				15 pontos
	Equacionar o problema $(N_A(t) = N_B(t))$		2 pontos	
	Resolver a equação $N_A(t)=N_B(t)$		11 pontos	
	Obter $200  e^{-0.4  t} - 35  e^{-0.2 t} - 1 = 0$ (ou equivalente)	3 pontos		
	Concluir que $e^{-0.2t} = 0.2  \lor  e^{-0.2t} = -0.025$ (ou equivalente)	3 pontos		
	Reconhecer que $e^{-0.2t} = -0.025$ é uma equação impossível	2 pontos		
	Obter $-0.2 t = \ln(0.2)$ (ou equivalente)	2 pontos		
	Obter o valor de $t$	1 ponto		
	Concluir o pretendido		2 pontos	

Reproduzir o gráfico da função ou os gráficos das funções visualizados na calculadora (ver notas 2, 3, 4 e 5) 6 pontos Determinar a abcissa do ponto pedido ...... 4 pontos Notas: **1.** Se o examinando apenas identificar 8 como o declive da recta tangente ao gráfico de f no ponto B, a pontuação a atribuir, nesta etapa, é 3 pontos. 2. Se o examinando não apresentar o referencial, a pontuação a atribuir, nesta etapa, deve ser desvalorizada em 1 ponto. 3. Se o examinando apresentar um gráfico que não respeite o domínio de f, a pontuação a atribuir, nesta etapa, deve ser desvalorizada em 1 ponto. 4. Se o examinando determinar f' analiticamente, a pontuação a atribuir, nesta etapa, deve ser distribuída do seguinte modo: Determinar  $(e^{2x} + \cos x - 2x^2)'$  .......(1 + 1 + 1)..... 3 pontos Apresentar o(s) gráfico(s) (ver nota 6) **5.** Se o examinando resolver graficamente a equação f(x) = 8 em vez de f'(x) = 8, a pontuação máxima a atribuir, nesta etapa, é 3 pontos. **6.** Se o examinando obtiver uma expressão incorrecta da derivada de f, considera-se que o gráfico está correcto se estiver de acordo com a expressão obtida. Estudar a existência de assimptotas verticais do gráfico de f (**ver nota 1**). Escrever  $\lim_{x \to 2^-} \frac{e^{2-x}-1}{x-2}$  1 ponto Levantar a indeterminação ...... 6 pontos Escrever  $\lim_{x \to 2^-} \left( \frac{e^{2-x} - 1}{-(2-x)} \right) = \lim_{y \to 0} \frac{e^y - 1}{-y}$  (ver nota 2) ...... 3 Referir o limite notável  $\lim_{y\to 0} \frac{e^y-1}{y} = 1$  (ou equivalente) .. 1 

#### Notas:

- 1. Se o examinando calcular, para além dos limites indicados,  $\lim_{x\to 0^-} f(x)$ , a classificação a atribuir a esta resposta deve ser desvalorizada em 2 pontos. Se da aplicação desta nota resultar uma classificação negativa deve ser classificada com zero pontos.
- **2.** Se o examinando referir que  $x \to 2^-$  é equivalente a  $x 2 \to 0^-$  ou  $2 x \to 0^+$ , esta etapa deve ser considerada como cumprida.
- 3. Se o examinando não calcular  $\lim_{x\to 2^+} f(x)$ , mas referir que f é contínua à direita em x=2, a pontuação a atribuir, nesta etapa, não deve ser desvalorizada.
- 5.2. 10 pontos

Este item pode ser resolvido por, pelo menos, dois processos.

#### 1.º Processo

#### 2.º Processo

Se o examinando considerar g(x) = f(x) + 3

#### Notas:

- **1.** Se o examinando não referir que a função é contínua em  $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ , a pontuação a atribuir, nesta etapa, é zero pontos.
- **2.** Se o examinando referir que a função é contínua em  $\left]0, \frac{1}{2}\right[$ , a pontuação a atribuir, nesta etapa, é zero pontos.
- 3. Se o examinando não referir que a conclusão resulta do teorema de Bolzano, a pontuação a atribuir, nesta etapa, deve ser desvalorizada em 1 ponto.

5.3. 15 pontos Determinar f'(x) se x > 2Escrever  $f'(x) = \frac{(x+1)' \ln(x+1) - (x+1) \left[\ln(x+1)\right]'}{\left[\ln(x+1)\right]^2}$ (ou equivalente)..... 2 pontos Determinar  $\left[\ln\left(x+1\right)\right]'$  ..... 2 pontos Obter f'(x) se x > 2 ..... 2 pontos Estudar f quanto à monotonia (**ver nota**) ..... 9 pontos Concluir que e-1 não pertence a  $[2, +\infty[$  (ou equivalente) ..... 3 pontos Referir que o intervalo considerado é um intervalo aberto ...... 2 pontos Concluir que f' não se anula em  $[2, +\infty[$  ...... 2 pontos Concluir que f é crescente em  $]2, +\infty[$  ...... 2 pontos Nota - Se o examinando recorrer a um quadro, a pontuação a atribuir, nesta etapa, deve ser distribuída do seguinte modo: Concluir que e-1 não pertence a  $[2, +\infty[$  (ou equivalente) ....... 3 pontos Preencher a primeira linha do quadro (relativa à variável x, de acordo com o domínio da função) ..... 1 ponto Indicar o sinal de  $f^\prime$ 2 pontos Relacionar o sinal de f' com a monotonia de f1 ponto Concluir que f é crescente em  $[2, +\infty[$ ...... 2 pontos 6. ..... 15 pontos Determinar f' 7 pontos Determinar  $(a \cos(n x))'$ 3 pontos Determinar  $(b \operatorname{sen}(n x))'$ Escrever f' ..... Escrever f" ..... 3 pontos Calcular  $n^2 f(x)$  (ver nota) 3 pontos Concluir o pretendido .....

**Nota** – Se o examinando escrever  $f''(x) = -n^2(a\cos(nx) + b\sin(nx))$ , a pontuação a atribuir, nesta etapa, não deve ser desvalorizada.