Resolução do Exame Modelo IX de Matemática A

Duração do Exame: 150 **minutos** + 30 **minutos de tolerância** | **junho de 2020**

12.º Ano de Escolaridade

1. Em primeiro lugar é necessário escolher as quatro bolas de entre as seis que vão ser colocadas nas casas do tabuleiro. Essa escolha pode ser feita de $^6C_4$ maneiras distintas
   Escolhidas as bolas que vão ser colocadas no tabuleiro, existem $^{16}A_4$ maneiras distintas de colocar as quatro bolas nas dezasseis casas do tabuleiro (a colocação tem de ser ordenada)
   Portanto, há $^6C_4 \times ^{16} A_4 = 655200$ maneiras distintas de colocar as quatro bolas no tabuleiro

   Resposta: (D)

2. Na caixa há $n+4$ bolas

   se a probabilidade de a primeira bola ser azul e a segunda ser vermelha é igual a $\dfrac{10}{69}$

   então, tem-se que,

   $$\frac{4}{n+4} \times \frac{n}{n+3} = \frac{10}{69}$$

   Desta igualdade resulta que,

   $$\frac{4n}{n^2+7n+12} - \frac{10}{69} = 0 \Leftrightarrow \frac{276n - 10n^2 - 70n - 120}{69(n^2+7n+12)} = 0 \Leftrightarrow \frac{206n - 10n^2 - 120}{69(n^2+7n+12)} = 0 \Leftrightarrow$$

   $$\Leftrightarrow -10n^2 + 206n - 120 = 0 \wedge n^2 + 7n + 12 \neq 0 \Leftrightarrow \left(n = 20 \vee n = \frac{3}{5}\right) \wedge n \neq -4 \wedge n \neq -3 \Leftrightarrow n = 20 \vee n = \frac{3}{5}$$

   Como n é um número natural, então $n = 20$, isto é, na caixa há 20 bolas vermelhas

   Logo, o número total de bolas que estão na caixa é 24

   Cálculos auxiliares

   $$-10n^2 + 206n - 120 = 0 \Leftrightarrow 5n^2 - 103n + 60 = 0 \Leftrightarrow n = \frac{103 \pm \sqrt{(-103)^2 - 4 \times 5 \times 60}}{2 \times 5} \Leftrightarrow n = 20 \vee n = \frac{3}{5}$$

   $$69(n^2 + 7n + 12) = 0 \Leftrightarrow n^2 + 7n + 12 = 0 \Leftrightarrow n = \frac{-7 \pm \sqrt{7^2 - 4 \times 1 \times 12}}{2 \times 1} \Leftrightarrow n = -3 \vee n = -4$$

3. .

   Ponto $B(0; y)$

   sendo $y = f(0) = 1 + 2e^{0-2} = 1 + \dfrac{2}{e^2}$

   Logo, $B\left(0, 1 + \dfrac{2}{e^2}\right)$

   Ponto $D(x; -3)$, sendo x tal que $g(x) = -3$

   $g(x) = -3 \Leftrightarrow -1 - 2e^{x-2} = -3 \Leftrightarrow e^{x-2} = 1 \Leftrightarrow x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 2$

Logo, $D(2;-3)$

Como os gráficos das funções f e g são simétricos em relação ao eixo Ox, tem-se,

$C\left(0,-1-\dfrac{2}{e^2}\right)$

$A(2;3)$

Assim,

Base maior do trapézio: $\overline{AD}=|3-(-3)|=|3+3|=6$

Base menor do trapézio: $\overline{BC}=\left|1+\dfrac{2}{e^2}-\left(-1-\dfrac{2}{e^2}\right)\right|=\left|1+\dfrac{2}{e^2}+1+\dfrac{2}{e^2}\right|=\left|2+\dfrac{4}{e^2}\right|=2+\dfrac{4}{e^2}$

Logo, a área A do trapézio $[ABCD]$ é

$$A_{[ABCD]}=\frac{\overline{AD}+\overline{BC}}{2}\times|abcissa\quad ponto\quad A|=\frac{6+2+\frac{4}{e^2}}{2}\times 2=8+\frac{4}{e^2}=\frac{4+8e^2}{e^2}$$

4. Calculemos $\lim\left(\dfrac{n+2}{n+6}\right)^{\frac{n}{2}}$

$$\lim\left(\frac{n+2}{n+6}\right)^{\frac{n}{2}}=\left[\lim\left(\frac{n\left(1+\frac{2}{n}\right)}{n\left(1+\frac{6}{n}\right)}\right)^{n}\right]^{\frac{1}{2}}=\left[\frac{\lim\left(1+\frac{2}{n}\right)^{n}}{\lim\left(1+\frac{6}{n}\right)^{n}}\right]^{\frac{1}{2}}=\left(\frac{e^2}{e^6}\right)^{\frac{1}{2}}=\left(e^{-4}\right)^{\frac{1}{2}}=e^{-2}$$

Nota:

$$\lim\left(1+\frac{2}{n}\right)^{n}=\lim\left(1+\frac{1}{\frac{n}{2}}\right)^{\frac{n}{2}\times 2}=\left[\lim\left(1+\frac{1}{\frac{n}{2}}\right)^{\frac{n}{2}}\right]^{2}=e^2\text{, visto que, se } n\to+\infty\text{, então, }\frac{n}{2}\to+\infty$$

$$\lim\left(1+\frac{6}{n}\right)^{n}=\lim\left(1+\frac{1}{\frac{n}{6}}\right)^{\frac{n}{6}\times 6}=\left[\lim\left(1+\frac{1}{\frac{n}{6}}\right)^{\frac{n}{6}}\right]^{6}=e^6\text{, visto que, se } n\to+\infty\text{, então, }\frac{n}{6}\to+\infty$$

Então,

$$\lim\left(\frac{n+2}{n+6}\right)^{\frac{n}{2}}=e^{\ln(k)-3}\Leftrightarrow e^{\ln(k)-3}=e^{-2}\Leftrightarrow \ln(k)-3=-2\wedge k>0\Leftrightarrow \ln(k)=1\wedge k>0\Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow k=e\wedge k>0\Leftrightarrow k=e$

Utilizou-se o limite notável $\lim\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n}=e$

Resposta: (C)

5. .

5.1. Como a circunferência tem raio 1, então

$A(\cos(x);\sin(x))$, com $\cos(x)>0$ e $\sin(x)>0$

Sendo T, a projeção ortogonal do ponto A sobre o eixo Oy, tem-se que $T(0;\sin(x))$

Sendo S, a projeção ortogonal do ponto A sobre o eixo Ox, tem-se que $S(\cos(x);0)$

Assim,

$\overline{AB} = 2\cos(x)$

$\overline{OT} = \overline{AS} = \sin(x)$

$\overline{AD} = 2\sin(x)$

$\overline{OS} = \cos(x)$

Portanto, a área da região colorida é

$$A_{regiaocolorida} = 2 \times A_{[ABO]} + 4 \times A_{[AEO]} = 2 \times \frac{\overline{AB} \times \overline{OT}}{2} + 4 \times \frac{\overline{OE} \times \overline{AS}}{2} =$$

$$= \overline{AB} \times \overline{OT} + 2\overline{OE} \times \overline{AS} = 2\cos(x) \times \sin(x) + 2 \times 1 \times \sin(x) = 2\sin(x) + \sin(2x)$$

Logo, $A(x) = 2\sin(x) + \sin(2x)$, com $x \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[$

5.2. Determinemos a função derivada de A em $\left]0; \frac{\pi}{2}\right[$

$A'(x) = (2\sin(x) + \sin(2x))' = 2\cos(x) + 2\cos(2x)$

Procuremos os zeros de $A'(x)$

$A'(x) = 0 \Leftrightarrow 2\cos(x) + 2\cos(2x) = 0 \Leftrightarrow \cos(2x) = -\cos(x) \Leftrightarrow \cos(2x) = \cos(\pi - x) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2x = \pi - x + k2\pi \vee 2x = -\pi + x + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 3x = \pi + k2\pi \vee x = -\pi + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3} + k\frac{2\pi}{3} \vee x = -\pi + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$

Atribuindo valores a k, vem,

$k = 0 \hookrightarrow x = \frac{\pi}{3} \vee x = -\pi$

$k = 1 \hookrightarrow x = \pi \vee x = \pi$

$k = -1 \hookrightarrow x = -\frac{\pi}{3} \vee x = -3\pi$

Como $x \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[$, tem-se que $x = \frac{\pi}{3}$
Elaborando um quadro de sinais para a função derivada

x	0		$\frac{\pi}{3}$		$\frac{\pi}{2}$
$A'(x)$	\\\\\\\\	$+$	0	$-$	\\\\\\\\
$A(x)$	\\\\\\\\	$\nearrow$	$\frac{3\sqrt{3}}{2}$	$\searrow$	\\\\\\\\

$A\left(\frac{\pi}{3}\right) = 2\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) + \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \sqrt{3} + \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$

A função A é estritamente crescente em $\left]0; \frac{\pi}{3}\right]$, e é estritamente decrescente em $\left[\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{2}\right[$

Atinge o valor máximo $\frac{3\sqrt{3}}{2}$, para $x = \frac{\pi}{3}$

Resposta: a área colorida é máxima para $x = \frac{\pi}{3}$

6. .

6.1. Determinemos as coordenadas do ponto A

Sabe-se que $A(x;0;0)$, com $x \in \mathbb{R}$

Ora, A é ponto do plano ADE

Assim,

$x+0-4=0 \Leftrightarrow x=4$

Logo, $A(4;0,0)$

Determinemos as coordenadas do ponto E

Ora, $E = A + \overrightarrow{DH} = (4;0;0)+(0;6;0) = (4;6;0)$

Determinemos as coordenadas do ponto I, vértice da pirâmide

Sabe-se que $I(0;y;0)$, com $y \in \mathbb{R}$

Ora, I é ponto do plano EFI

Assim,

$3\times 0 + 4\times y - 3\times 0 - 36 = 0 \Leftrightarrow 4y = 36 \Leftrightarrow y = \frac{36}{4} \Leftrightarrow y = 9$

Logo, $I(0;9;0)$

Superfície esférica

Centro: $I(0;9;0)$
Raio:$\overline{EI} = \sqrt{(4-0)^2+(6-9)^2+(0-0)^2} = \sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5$

Logo, a equação reduzida da superfície esférica pedida é $(x-0)^2+(y-9)^2+(z-0)^2 = 5^2$

Ou seja, $x^2+(y-9)^2+z^2 = 25$

As equações dos planos tangentes pedidos são $z=-5$ e $z=5$

6.2. .

Ora, $E(4;6;0)$

Um vetor diretor da reta EF, poderá ser um vetor normal ao plano ADE

Seja $\overrightarrow{\alpha}$ esse vetor diretor da reta

então, $\overrightarrow{\alpha} = (1;0;1)$

Portanto, uma equação vetorial da reta EF é $(x;y;z) = (4;6;0)+k(1;0;1), k \in \mathbb{R}$

6.3. O plano ABE é perpendicular ao plano ADE

Assim, um vetor normal ao plano ABE terá de ser perpendicular a um vetor normal ao plano ADE

Seja $\overrightarrow{\beta}$, um vetor normal ao plano ABE

Ora, $A(4;0;0)$ e $D(0;0;4)$

$\overrightarrow{AD} = D - A = (-4;0;4)$

Logo, $\overrightarrow{\beta}$ pode ser $(-4;0;4)$

Assim, uma equação cartesiana do plano ABE é da forma $-4x + 0y + 4z + d = 0$, com $d \in \mathbb{R}$, ou seja, $-x + z + d = 0$, com $d \in \mathbb{R}$

Como A pertence a este plano, vem, $-4 + 0 + d = 0 \Leftrightarrow d = 4$

Logo, $-x + z + 4 = 0$ é uma equação cartesiana do plano ABE

7. Seja $z = |z|e^{i\theta}$, com $\theta \in \mathbb{R}$

   Assim,

   $w = \frac{-iz}{2} = -\frac{1}{2}i|z|e^{i\theta} = \frac{1}{2}e^{i\left(-\frac{\pi}{2}\right)}|z|e^{i\theta} = \frac{1}{2}|z|e^{i\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right)}$
   Portanto, o afixo do complexo w obtém-se do afixo do complexo z por uma rotação de centro na origem e ângulo de amplitude $-\frac{\pi}{2}$, seguida de uma homotetia de razão $\frac{1}{2}$
   Conclui-se assim que o afixo de w só poderá ser A

   Resposta: (A)

8. $z^3 + 2iz^2 + z = 0 \Leftrightarrow z(z^2 + 2iz + 1) = 0 \Leftrightarrow z = 0 \vee z^2 + 2iz + 1 = 0 \Leftrightarrow z = 0 \vee z = (-1-\sqrt{2})i \vee z = (-1+\sqrt{2})i$

   Cálculos auxiliares

   $z^2 + 2iz + 1 = 0 \Leftrightarrow z = \frac{-2i \pm \sqrt{(2i)^2 - 4 \times 1 \times 1}}{2 \times 1} \Leftrightarrow z = \frac{-2i \pm \sqrt{-4-4}}{2} \Leftrightarrow z = \frac{-2i \pm \sqrt{-8}}{2} \Leftrightarrow$

   $\Leftrightarrow z = \frac{-2i \pm 2\sqrt{2}i}{2} \Leftrightarrow z = (-1-\sqrt{2})i \vee z = (-1+\sqrt{2})i$

   Obs.:

   $X = \sqrt{-8} = \sqrt{8e^{i\pi}} = 2\sqrt{2}e^{i\left(\frac{\pi + k2\pi}{2}\right)}$

   $k = 0 \mapsto X_0 = 2\sqrt{2}e^{i\left(\frac{\pi}{2}\right)} = 2\sqrt{2}i$

   $k = 1 \mapsto X_1 = 2\sqrt{2}e^{i\left(\frac{3\pi}{2}\right)} = -2\sqrt{2}i$

   Seja w a soma das soluções da equação

   $w = 0 + (-1-\sqrt{2})i + (-1+\sqrt{2})i = (-1-\sqrt{2}-1+\sqrt{2})i = -2i = 2e^{i\left(-\frac{\pi}{2}\right)}$

9. Seja (P_n) a sucessão dos comprimentos dos n arcos

Ora,

$$P_1 = \frac{2\pi \times r}{4} = \pi r \times \frac{1}{2}$$

$$P_2 = \frac{2\pi \times \frac{r}{2}}{4} = \frac{\pi r}{4} = \pi r \times \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

$$P_3 = \frac{2\pi \times \frac{r}{4}}{4} = \frac{\pi r}{8} = \pi r \times \left(\frac{1}{2}\right)^3$$

$$P_4 = \frac{2\pi \times \frac{r}{8}}{4} = \frac{\pi r}{16} = \pi r \times \left(\frac{1}{2}\right)^4$$

Mantendo-se a regularidade, tem, $P_n = \pi r \times \left(\frac{1}{2}\right)^n$

Os comprimentos dos arcos estão em progressão geométrica de razão $\frac{1}{2}$

Assim,

$$S_n = P_1 + P_2 + P_3 + \cdots + P_n = \pi r \times \frac{1}{2} \times \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \frac{1}{2}} = \pi r \times \frac{1}{2} \times \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{\frac{1}{2}} = \pi r \times \left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right]$$

Portanto, $S = \lim S_n = \lim \left[\pi r \times \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right)\right] = \pi r \times (1 - 0) = \pi r$

Resposta: (B)

10. .

$$\frac{P(A \cap B) + P(\overline{A} \cap \overline{B}) + P(A) + P(B) - 1}{2} = \frac{P(A \cap B) + P(\overline{A \cup B}) + P(A) + P(B) - 1}{2} =$$

$$= \frac{P(A \cap B) + 1 - P(A \cup B) + P(A) + P(B) - 1}{2} =$$

$$= \frac{P(A \cap B) - [P(A) + P(B) - P(A \cap B)] + P(A) + P(B)}{2} =$$

$$= \frac{P(A \cap B) - P(A) - P(B) + P(A \cap B) + P(A) + P(B)}{2} =$$

$$= \frac{2P(A \cap B)}{2} = P(A \cap B)$$

$$= P(\overline{\overline{A} \cup \overline{B}})$$

$$= 1 - P(\overline{A} \cup \overline{B})$$

11. .

Número de casos possíveis: ${}^9A_3$, visto que para o algarismos das centenas temos nove escolhas, fixado esse algarismos, para o algarismo das dezenas temos oito escolhas, e para o algarismo das unidades temos sete escolhas

Número de casos favoráveis:

Para que o produto dos três algarismos seja par é preciso que pelo menos um dos três algarismos que constituem o número seja par

Três casos podem ocorrer:

- um algarismo é par e os outros dois são ímpares(e distintos)
- dois algarismos são pares(e distintos) e um algarismo é ímpar
- três algarismos são pares (e distintos)

1º. Caso:

Neste caso, temos de escolher um número par, e isso pode ser feito de ${}^4C_1$ maneiras distintas , e temos de escolher a posição que este algarismo vai ocupar nos três lugares disponíveis, o que pode ser feito de ${}^3C_1$ maneiras distintas
Escolhido o algarismo par e fixada a sua posição, há ${}^5A_2$ maneiras distintas de escolher ordenadamente os dois algarismos ímpares de entre os cinco disponíveis (1, 3, 5, 7 e 9), para ocuparem as outras duas posições

Então há ${}^4C_1 \times {}^3C_1 \times {}^5A_2 = 240$ números distintos neste caso

2º. Caso:

Neste caso, temos de escolher dois números pares, e isso pode ser feito de ${}^4C_2$ maneiras distintas , e temos de escolher a posição que estes dois algarismos vão ocupar nos três lugares disponíveis, o que pode ser feito de ${}^3C_2$ maneiras distintas. Escolhido e fixados os dois algarismos pares, eles podem permutar de posição entre si de 2! maneiras distintas
Escolhidos os algarismos pares e fixadas as suas posições, há ${}^5C_1$ maneiras distintas de escolher o algarismo ímpar de entre os cinco disponíveis (1, 3, 5, 7 e 9), para ocupar a terceira posição

Então há ${}^4C_2 \times {}^3C_2 \times 2! \times {}^5C_1 = 180$ números distintos neste caso

3º. Caso:

Temos quatro algarismos pares disponíveis (2, 4, 6 e 8). Então, temos de escolher ordenadamente três algarismos pares de entre os quatro que existem, para ocuparem três posições, e o número de maneiras distintas de o fazer é ${}^4A_3 = 24$

Concluindo, podemos constituir ${}^4C_1 \times {}^3C_1 \times {}^5A_2 + {}^4C_2 \times {}^3C_2 \times 2! \times {}^5C_1 + {}^4A_3 = 444$ números nas condições dadas

Este é o número de casos favoráveis

Assim, $P = \dfrac{{}^4C_1 \times {}^3C_1 \times {}^5A_2 + {}^4C_2 \times {}^3C_2 \times 2! \times {}^5C_1 + {}^4A_3}{{}^9A_3} = \dfrac{444}{504} = \dfrac{37}{42}$

Em alternativa, poderíamos fazer o seguinte:

A probabilidade pedida é $P = 1-$ probabilidade de saírem três números ímpares

Ou seja, $P = 1 - \dfrac{{}^5A_3}{{}^9A_3} = \dfrac{{}^9A_3 - {}^5A_3}{{}^9A_3} = \dfrac{444}{504} = \dfrac{37}{42}$

12. .

12.1. $0 \in D_f$

A função f é contínua em $x=0$, se existir $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$, ou seja,

se $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = f(0)$

Ora,

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{x^3}{x^2e^x - x^2} = \lim_{x\to 0^-} \frac{x^3}{x^2(e^x-1)} =$$
$$= \lim_{x\to 0^-} \frac{x}{e^x-1} = \frac{1}{\lim\limits_{x\to 0^-} \frac{e^x-1}{x}} = \frac{1}{1} = 1$$
$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{e^{3x}-e^{2x}}{\ln(x+1)} =$$
$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{e^{2x}(e^x-1)}{\ln(x+1)} = \lim_{x\to 0^+} e^{2x} \times \frac{\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{e^x-1}{x}}{\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\ln(x+1)}{x}} =$$
$$= 1 \times \frac{1}{\lim\limits_{y\to 0^+} \frac{y}{e^y-1}} = \frac{1}{\frac{1}{\lim\limits_{y\to 0^+} \frac{e^y-1}{y}}} = \frac{1}{\frac{1}{1}} = 1$$

Nota: Fez-se a mudança de variável

$y = \ln(x+1) \Leftrightarrow e^y = x+1 \Leftrightarrow x = e^y - 1$

Se $x \to 0^+$, então, $y \to 0^+$

Nota:

Aplicou-se o **limite notável** $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x} = 1$

$f(0) = \log_a(b^2)$

Assim, se $\log_a(b^2) = 1 \Leftrightarrow a = b^2$, a função f é contínua em $x=0$

12.2. .

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty} \frac{e^{3x}-e^{2x}}{\ln(x+1)} =^{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)} \lim_{x\to +\infty} \frac{e^{3x}\left(1-e^{-x}\right)}{\ln(x+1)} =$$
$$= \lim_{x\to +\infty} \frac{e^{3x}}{x^3} \times \lim_{x\to +\infty} \frac{x^3}{\ln(x+1)} \times \lim_{x\to +\infty} (1-e^{-x}) =$$
$$= \left(\lim_{x\to +\infty} \frac{e^x}{x}\right)^3 \times \frac{\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{x^3}{x+1}}{\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{\ln(x+1)}{x+1}} \times (1-0) = +\infty \times \frac{\lim\limits_{x\to +\infty} (x^2)}{\lim\limits_{y\to +\infty} \frac{\ln(y)}{y}} \times 1 = +\infty \times \frac{+\infty}{0^+} = +\infty$$

Nota: Fez-se a mudança de variável

$y = x+1$

Se $x \to +\infty$, então, $y \to +\infty$

Aplicaram-se os seguintes **limites notáveis**

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{x^p}=+\infty,\ p\in\mathbb{R}$

Logo, o gráfico da função f não admite assíntota horizontal quando $x\to+\infty$

13. .

13.1. Determinemos a função derivada de g

$$g'(x)=\left(\frac{x^2-1}{e^{-x}}\right)'=\frac{2x\times e^{-x}+(x^2-1)\times e^{-x}}{e^{-2x}}=\frac{2xe^{-x}+(x^2-1)e^{-x}}{e^{-2x}}=\frac{e^{-x}(x^2+2x-1)}{e^{-2x}}=$$
$$=\frac{x^2+2x-1}{e^{-x}}$$

Seja m, o declive da reta t

Então,

$$g'(-1)=\frac{(-1)^2+2\times(-1)-1}{e^1}=-\frac{2}{e}$$

Resposta: (B)

13.2. Determinemos a função segunda derivada de g

$$g''(x)=\left(\frac{x^2+2x-1}{e^{-x}}\right)'=\frac{(2x+2)\times e^{-x}+(x^2+2x-1)\times e^{-x}}{e^{-2x}}=\frac{(x^2+4x+1)e^{-x}}{e^{-2x}}=$$
$$=\frac{x^2+4x+1}{e^{-x}}$$

Procuremos os zeros de $g''(x)$

$$g''(x)=0\Leftrightarrow\frac{x^2+4x+1}{e^{-x}}=0\Leftrightarrow x^2+4x+1=0\wedge e^{-x}\neq0\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x=\frac{-4\pm\sqrt{4^2-4\times1\times1}}{2\times1}\Leftrightarrow x=-2-\sqrt{3}\vee x=-2+\sqrt{3}$$

Quadro de sinal de g''

x	$-\infty$	$-2-\sqrt{3}$		$-2+\sqrt{3}$	$+\infty$
x^2+4x+1	$+$	0	$-$	0	$+$
e^{-x}	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$g''(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$g(x)$	$\smile$	$\frac{6+4\sqrt{3}}{e^{2+\sqrt{3}}}$	$\frown$	$\frac{6-4\sqrt{3}}{e^{2-\sqrt{3}}}$	$\smile$

$$g(-2-\sqrt{3})=\frac{(-2-\sqrt{3})^2-1}{e^{2+\sqrt{3}}}=\frac{6+4\sqrt{3}}{e^{2+\sqrt{3}}}$$
$$g(-2+\sqrt{3})=\frac{(-2+\sqrt{3})^2-1}{e^{2-\sqrt{3}}}=\frac{6-4\sqrt{3}}{e^{2-\sqrt{3}}}$$

O gráfico da função g tem a concavidade voltada para baixo em $]-2-\sqrt{3};-2+\sqrt{3}[$ e tem a concavidade voltada para cima em $]-\infty;-2-\sqrt{3}[$, e em $]-2+\sqrt{3};+\infty[$

O gráfico da função tem dois pontos de inflexão, de coordenadas $I\left(-2-\sqrt{3};\dfrac{6+4\sqrt{3}}{e^{2+\sqrt{3}}}\right)$ e $J\left(-2+\sqrt{3};\dfrac{6-4\sqrt{3}}{e^{2-\sqrt{3}}}\right)$