Proposta de Teste n.º 3

Matemática A – 11.º Ano – Fevereiro de 2015

"Conhece a Matemática e dominarás o Mundo."
Galileu Galilei

Grupo I – Itens de Escolha Múltipla

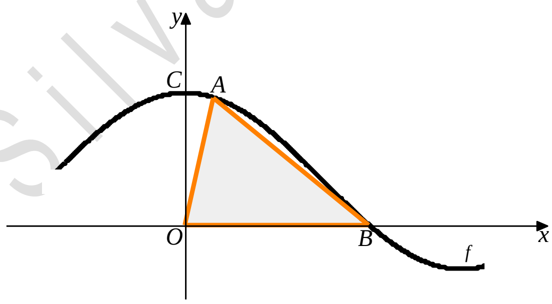
1. Sejam $a \in \mathbb{R}^+$ e $x \in \mathbb{R}$ tais que $\operatorname{sen} x = a$ e $\operatorname{tg} x = 3a$. Qual é o valor de $\operatorname{sen}^2 x + \cos x$?

A 1 **B** $\frac{2\sqrt{2}+1}{3}$ **C** $\frac{11}{9}$ **D** $\frac{2\sqrt{2}+3}{9}$

2. Na figura está representado, em referencial o.n. xOy, parte do gráfico da função *f*, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $f(x) = 1 + 2\cos(2x)$, e um triângulo $[OBA]$.

Sabe-se que:

- o gráfico *f* intersecta o eixo Ox no ponto B e o eixo Oy no ponto C;
- o ponto A desloca-se sobre o gráfico de f no primeiro quadrante nunca coincidindo com B nem com C.



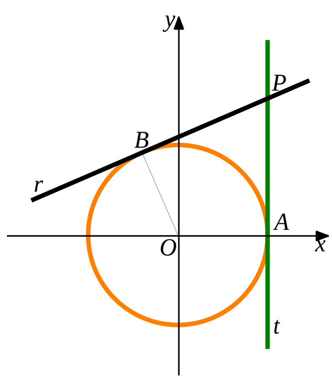
Qual é a abcissa do ponto A de modo que a área do triângulo $[OBA]$ seja igual a $\frac{\pi}{6}$.

A $\frac{\pi}{4}$ **B** $\frac{\pi}{6}$ **C** $\frac{\pi}{8}$ **D** $\frac{\pi}{12}$

3. Na figura está representado, em referencial o.n. xOy, a circunferência de equação $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{4} = 1$, a recta r tangente à circunferência no ponto B e a recta t tangente à circunferência no ponto A.

Sabe-se que:

- o ponto A pertence ao eixo Ox;
- o ponto B pertence à circunferência e tem coordenadas (a, b);
- o ponto P é o ponto de intersecção das rectas r e t.



Qual é a ordenada do ponto P?

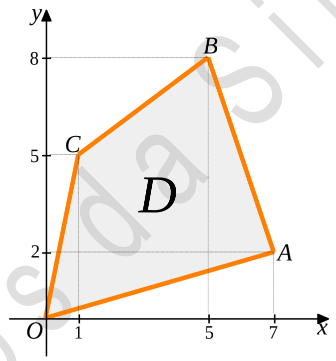
A $\frac{1-2a}{b}$ **B** $\frac{2-2a}{b}$ **C** $\frac{4-2a}{b}$ **D** $\frac{2a-4}{b}$

4. Considere num referencial o.n. $Oxyz$ a recta r definida pela condição $\frac{x-1}{a}=\frac{y-2}{b}=\frac{z}{a}$ e o plano α definido pela equação $ax-\frac{6y}{b}+z=1$, com a e b números reais não nulos e distintos.

Quais são os valores de a e b de modo que a recta r esteja contida no plano α?

A $a=-3$ e $b=-3$ **B** $a=2$ e $b=12$ **C** $a=-3$ e $b=-6$ **D** $a=2$ e $b=4$

5. A região admissível D, representada na figura, é a região admissível de um problema de Programação Linear cuja função objectivo é $z=k^2x+ky$, com $k>0$. Pretende-se maximizar esta função objectivo.



Tal como a figura sugere, os pontos O, $A(7,2)$, $B(5,8)$ e $C(1,5)$ são os vértices da região admissível.

Quais são os valores que k pode tomar de modo que a única solução óptima do problema seja $x=5$ e $y=8$, ou seja, as coordenadas do ponto B?

A $k>3$ **B** $0<k\leq 3$ **C** $k\geq 3$ **D** $0<k<3$

Grupo II – Itens de Resposta Aberta

1. A temperatura T, em graus celsius, de uma casa varia em função do tempo t, em horas, de acordo com a expressão:

$$T(t)=23,4+1,6\,\text{sen}\left(\frac{\pi t}{5}\right)$$

Considere que $t=0$ corresponde às 12h do dia 1 de Fevereiro de 2015.

Resolva os itens seguintes recorrendo exclusivamente a processos analíticos.

1.1. Durante o dia 1 de Fevereiro de 2015 a casa atingiu os $24{,}2$ºC em alguns instantes. Que instantes foram esses? Apresente os resultados em horas e minutos.

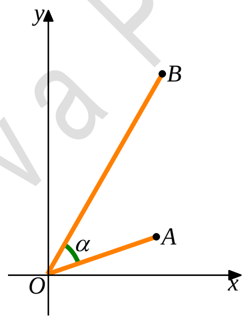
1.2. Qual é a amplitude térmica da casa (diferença entre a temperatura máxima e mínima)? Indique os instantes, durante o dia 1 de Fevereiro de 2015, em que a temperatura da casa atingiu o valor mínimo. Apresente os resultados em horas e minutos.

1.3. Mostre que para todo o $t \in \mathbb{R}$ se tem $T(t+10) = T(t)$. Interprete o resultado no contexto do problema.

2. Na figura estão representados, em referencial o.n. xOy, os segmentos de recta $[OA]$ e $[OB]$, tal que $\overline{OB} = 2\overline{OA}$.

Sabe-se:

- $\overline{OB} = a$
- α é a amplitude em radianos do ângulo AOB
- $\operatorname{tg} \alpha = \dfrac{\sqrt{7}}{3}$



2.1. Mostre que $\left\| \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} \right\|^2 = \dfrac{a^2}{2}$

2.2. Considere agora que a inclinação da recta OB é $\dfrac{\pi}{3}$ e que $a = 4$.

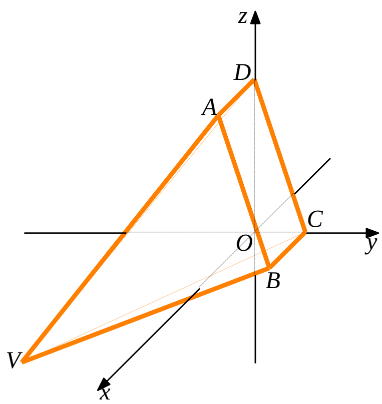
a) Escreva a equação reduzida da recta que contém o ponto B e é perpendicular a OB.

b) A recta OB é a mediatriz do segmento de recta $[PQ]$, com $Q\left(\sqrt{3}, -9\right)$. Quais são as coordenadas do ponto P?

3. Na figura está representada em referencial o.n. $Oxyz$ a pirâmide $[ABCDV]$. A base $[ABCD]$ é um rectângulo.

Sabe-se que:

- o ponto A pertence ao plano xOz e o ponto B ao plano xOy;
- o ponto C pertence ao eixo Oy e o ponto D ao eixo Oz;
- $\overrightarrow{AV} = (2, -7, -9)$ e $\overrightarrow{CV} = (6, -9, -3)$



3.1. Mostre que as coordenadas do ponto A são $(4,0,6)$, que as coordenadas do ponto C são $(0,2,0)$ e que as coordenadas do ponto V são $(6,-7,-3)$.

3.2. Escreva uma equação que defina o plano ACV.

3.3. Mostre que uma condição que define a recta DB é $\frac{x}{4}=\frac{y}{2}=\frac{6-z}{6}$.

3.4. Admita que uma equação que define o plano que contém a base da pirâmide é $3y+z=6$.

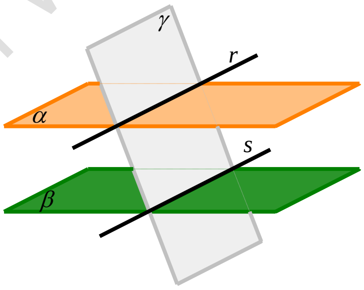
Determine o volume da pirâmide $[ABCDV]$.

Sugestão: Comece por determinar uma equação da recta que contém o ponto V e é perpendicular à base da pirâmide e em seguida determine a determine o ponto de intersecção dessa recta com o plano que contém a base da pirâmide.

4. Na figura estão representados três planos, α, β e γ.

Sabe-se que:

- os planos α e β são estritamente paralelos;
- o plano γ intersecta os planos α e β sobre duas rectas paralelas, r e s (α e γ intersectam-se sobre r e β e γ intersectam-se sobre s);
- γ não é perpendicular nem a α e nem a β.



4.1. Qual dos seguintes sistemas pode traduzir a situação representada na figura?

A $\begin{cases} 2x+y-z=3 \\ x+2z=0 \\ 4x+2y-2z=1 \end{cases}$

B $\begin{cases} x+y-z=0 \\ x+y=2 \\ 3x+3y-3z=1 \end{cases}$

C $\begin{cases} 2x+y-3z=1 \\ x-y+z=0 \\ -4x+6z=-2+2y \end{cases}$

D $\begin{cases} x+3y-3z=1 \\ x-y+z=0 \\ x+y+z=5 \end{cases}$

Numa pequena composição indique a opção correcta e explique as razões que o levam a rejeitar as restantes opções. Apresente três razões, uma por cada opção rejeitada.

4.2. Admita que o plano α é definido por $2x+y-4z=3$ e que o plano γ é definido por $x-y+z=0$. Escreva as equações cartesianas da recta r.

5. Uma fábrica pretende adquirir três tipos de matérias-primas, A, B e C, para continuar a laborar. Para tal necessita de pelo menos trinta toneladas da matéria-prima A, nove da matéria-prima B e quinze da matéria-prima C. O fornecedor desta fábrica propõem dois tipos de lotes, I e II, com a seguinte constituição:

- Lote do tipo I: quatro toneladas da matéria-prima A, uma da matéria-prima B e uma da matéria-prima C;
- Lote do tipo II: três toneladas da matéria-prima A, uma da matéria-prima B e quatro da matéria-prima C;

O custo de um lote do tipo I é de 800 euros e o custo do lote do tipo II é de 1200 euros.

Quantos lotes de cada tipo deve adquirir a fábrica de modo a minimizar os custos? Qual é o valor mínimo que tem de gastar?

SOLUCIONÁRIO

GRUPO I – ITENS DE ESCOLHA MÚLTIPLA

1. C **2.** A **3.** C **4.** B **5.** D

GRUPO II – ITENS DE RESPOSTA ABERTA

1.1. 2h50min; 6h10min; 12h50min; 16h10min; 22h50min

1.2. Amplitude térmica: $25-21{,}8=3{,}2^{\text{o}}$ C; 9h30min; 19h30min

1.3. A temperatura da casa repete-se de dez em dez horas. A função T admite 10 como período.

2.2. a) $y=-\frac{\sqrt{3}}{3}x+\frac{8\sqrt{3}}{3}$

2.2. b) $P\left(-5\sqrt{3},-3\right)$

3.2. $5x+4y-2z=8$

3.4. $V_{[ABCDV]}=80$

4.1. B

4.2. Por exemplo $x-1=\frac{y-1}{2}=z$

5. A empresa deve adquirir sete lotes do tipo I e dois do tipo II gastando no mínimo de 8000 euros.