Compilação de Exercícios do Tema Combinatória e Probabilidades das Provas Modelo n.º 1, n.º 2 e n.º 3

Matemática A – 12.º Ano

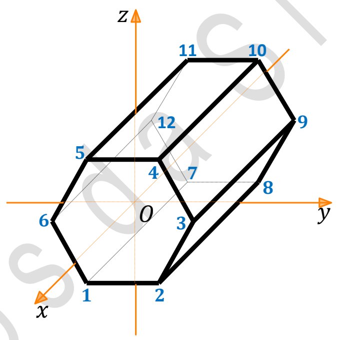
Grupo I – Itens de Escolha Múltipla

1. Considere num referencial o.n. $Oxyz$ os pontos de coordenadas $(1,1,3)$, $(0,-1,4)$, $(1,1,0)$, $(1,-2,0)$, $(0,1,0)$, $(1,1,-4)$, $(1,-2,-1)$, $(1,-1,0)$ e $(1,2,-3)$.

Escolhendo, simultaneamente e ao acaso, dois destes pontos, qual é a probabilidade de definirem uma recta paralela ao eixo Oz?

A $\frac{1}{18}$ **B** $\frac{1}{12}$ **C** $\frac{1}{9}$ **D** $\frac{1}{6}$

2. Na figura está representado em referencial o.n. $Oxyz$ um prisma hexagonal regular. Os vértices do prisma estão numerados de 1 a 12 e as bases são paralelas ao plano yOz.



Lança-se três vezes um dado dodecaédrico, equilibrado, com as faces numeradas de 1 a 12. Em cada lançamento selecciona-se o vértice correspondente ao número saído.

Note que no final da experiência podemos ter um, dois ou três vértices seleccionados. O mesmo número pode sair duas ou três vezes.

Qual é a probabilidade de se seleccionarem três vértices que definam um plano perpendicular ao eixo Ox?

A $\frac{1}{11}$ **B** $\frac{5}{36}$ **C** $\frac{2}{11}$ **D** $\frac{5}{72}$

3. Uma empresa tem 1501 trabalhadores divididos em três turnos, o $1.°$ turno tem 500 trabalhadores, o $2.°$ tem também 500 trabalhadores e o $3.°$ tem 501 trabalhadores. O director da empresa pretende escolher alguns trabalhadores de um mesmo turno para representarem a empresa num evento. Para tal ou escolhe 100 trabalhadores do $1.°$ turno, ou 101 trabalhadores do $2.°$, ou 102 trabalhadores do $3.°$. De quantas maneiras o pode fazer?

A ${}^{501}C_{101}$ **B** ${}^{502}C_{101}$ **C** ${}^{501}C_{102}$ **D** ${}^{502}C_{102}$

José Carlos da Silva Pereira

4. Seja S o espaço de resultados associados a uma certa experiência aleatória. Sejam A, B e C três acontecimentos possíveis ($A \subset S$, $B \subset S$ e $C \subset S$). Sabe-se que, A, B e C são independentes e são independentes dois a dois, que $P(A \cup B) = 2P(C)$ e que $P(A) = P(B) = a$, com $0 < a < 1$. Qual é o valor de $P\left(C \middle| (A \cup B)\right)$?

A $a - a^2$ **B** $a - 0{,}5a^2$ **C** $2a - a^2$ **D** $0{,}5a - 0{,}5a^2$

Nota: Diz-se que os acontecimentos A_1, A_2,..., A_n são independentes se $P(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n) = P(A_1) \times P(A_2) \times \ldots \times P(A_n)$. Diz-se que os acontecimentos A_1, A_2,..., A_n são independentes dois a dois se $P\left(A_i \cap A_j\right) = P(A_i) \times P\left(A_j\right)$, $\forall i, j = 1,2, \ldots, n$, com $i \neq j$.

5. Considere um dado tetraédrico viciado, com as faces numeradas de 1 a 4. As probabilidades dos acontecimentos elementares estão apresentadas na tabela:

Acontecimentos Elementares	1	2	3	4
Probabilidades	$\frac{n}{^nC_2}$	$\frac{n-1}{^nC_2}$	$\frac{n-2}{^nC_2}$	$\frac{n-4}{^nC_2}$

$n \in \mathbb{N}$

Lançam-se este dado quatro vezes e considere-se a face que fica voltada para baixo. Qual é a probabilidade, arredondada às centésimas, de sair a face numerada com 2, no máximo duas vezes?

A $0{,}93$ **B** $0{,}67$ **C** $0{,}25$ **D** $0{,}09$

6. Num certo dia entraram numa loja de telemóveis n pessoas ($n \in \mathbb{N}$) todas proprietárias de um único telemóvel. Qual é a probabilidade do último algarismo do número do telemóvel de cada uma destas pessoas ser igual?

A $\frac{1}{10^{n-1}}$ **B** $\frac{10}{n!}$ **C** $\frac{9!}{10^{n-1}}$ **D** $\frac{10!}{n!}$

7. Seja S o espaço de resultados associados a uma certa experiência aleatória. Sejam A e B dois acontecimentos possíveis ($A \subset S$ e $B \subset S$). Sabe-se que $P(A) = 0{,}3$ e que $P(B|\bar{A}) = 0{,}2$. Qual pode ser o valor de $P(B)$?

A $0{,}1$ **B** $0{,}3$ **C** $0{,}5$ **D** $0{,}7$

8. A quantidade de água, em mL, presente nas garrafas de água que uma empresa produz é uma variável aleatória com distribuição normal. Todas as garrafas de água passam pelo controle de qualidade e só são aprovadas se o seu volume estiver a menos de dois desvios padrões da média. Num lote de doze garrafas, qual é a probabilidade, arredondada às milésimas, de exactamente três serem rejeitadas?

A $0{,}013$ **B** $0{,}014$ **C** $0{,}226$ **D** $0{,}227$

José Carlos da Silva Pereira

9. Considere um conjunto de doze bolas, seis azuis, indistinguíveis, duas pretas, indistinguíveis e quatro encarnadas, numeradas de 1 a 4.

De quantas maneiras distintas se podem colocar as doze bolas numa só fila, de modo que as azuis ocupem posições consecutivas?

A $\frac{7!}{2!}$ **B** $\frac{7!\times 6!}{2!}$ **C** $\frac{12!}{2!\times 6!}$ **D** $7!\times 6!$

10. A distribuição de probabilidades de uma variável aleatória X é dada pela tabela:

x_i	0	1	2
$P(X=x_i)$	$\frac{^{2012}C_{298}+{}^{2012}C_{300}}{^{2014}C_{300}}$	$\frac{a}{^{2014}C_{300}}$	$\frac{^{2012}C_{1713}}{^{2014}C_{300}}$

(a designa um número real positivo)

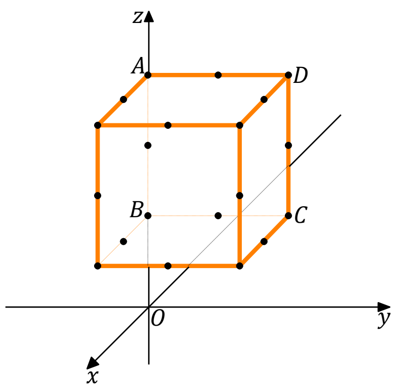
Qual é o valor de a?

A $^{2012}C_{298}$ **B** $^{2012}C_{299}$ **C** $^{2013}C_{298}$ **D** $^{2013}C_{299}$

11. Na figura está representado num referencial o.n. $Oxyz$ um cubo no qual se assinalaram 20 pontos, os vértices e pontos médios das suas arestas. Quatro dos vértices do cubo estão identificados com as letras A, B, C e D.

Sabe-se que a aresta $[AB]$ está contida no eixo Oz e a face $[ABCD]$ contida no plano yOz.

Escolhem-se, simultaneamente e ao acaso, dois dos pontos assinalados.



Qual é a probabilidade de definirem uma recta perpendicular ao eixo Oy?

A $\frac{8}{95}$ **B** $\frac{12}{95}$ **C** $\frac{16}{95}$ **D** $\frac{31}{95}$

GRUPO II – ITENS DE RESPOSTA ABERTA

1. Seja S o espaço de resultados associado a uma experiência aleatória e sejam A e B dois acontecimentos possíveis ($A\subset S$ e $B\subset S$).

1.1. Mostre que $P(A|\bar{B})\times\left(\frac{1}{P(B)}-1\right)-\frac{P(A)}{P(B)}=P(\bar{A}|B)-1$.

José Carlos da Silva Pereira

1.2. Uma caixa contém bolas pretas e encarnadas numeradas com números naturais.

Sabe-se que:

- O número de bolas pretas é o dobro do número de bolas numeradas com um número par.
- Entre as bolas numeradas com um número ímpar, 70% são pretas.
- Entre as bolas numeradas com um número par, dois quintos são encarnadas.

Escolhendo ao acaso uma bola da caixa, qual é a probabilidade de ser preta? Apresente o resultado na forma de fracção irredutível.

Sugestão: Pode utilizar a igualdade enunciada em 2.1. Nesse caso, deverá começar por caracterizar claramente os acontecimentos A e B, no contexto da situação apresentada.

2. A Marta pretende arrumar numa só fila alguns livros, seis de Divulgação Científica, três romances e n dicionários, com $n \in \mathbb{N}$.

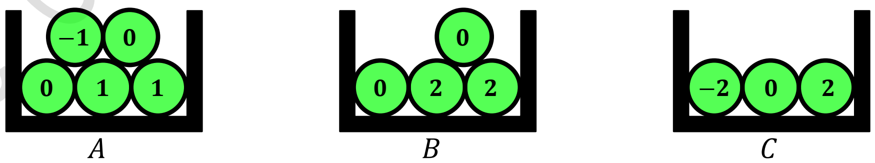
Arrumando os livros ao acaso, qual é a probabilidade de os dicionários ficarem em lugares consecutivos? Duas respostas a este problema são:

$$\frac{10!\times n!}{(n+9)!} \quad \text{e} \quad \frac{10}{{}^{n+9}C_n}$$

Numa pequena composição, explique porquê. A composição deve incluir:

- uma referência à regra de Laplace.
- uma explicação do número de casos possíveis para cada uma das respostas.
- uma explicação do número de casos favoráveis para cada uma das respostas.

3. Considere três caixas, A, B e C que contêm bolas numeradas com a composição indicada na figura.



3.1. Considere a experiência aleatória que consiste em retirar, simultaneamente e ao acaso, duas bolas da caixa A e duas bolas da caixa C e calcular o produto dos números das quatro bolas extraídas.

Repete-se esta experiência quinze mil vezes e somam-se todos os produtos obtidos. De que valor é de esperar que essa soma esteja próxima?

Sugestão: Comece por construir a tabela de distribuição de probabilidade da variável aleatória X: «produto dos números inscritos nas quatro bolas retiradas».

José Carlos da Silva Pereira

3.2. Considere agora a experiência aleatória que consiste em retirar ao acaso três bolas da caixa A e duas bolas da caixa B e colocá-las na caixa C. Em seguida retiram-se, simultaneamente e ao acaso, quatro bolas da caixa C. Considere os acontecimentos:

X: «os números das três bolas retiradas da caixa A têm o mesmo valor absoluto»

Y: «os números das duas bolas retiradas da caixa B são iguais»

Z: «o produto dos números das quatro bolas retiradas da caixa C é positivo»

Qual é o valor de $P\left(Z \middle| (X \cap \bar{Y})\right)$?

Uma resposta a esta questão é $\frac{1+{}^4C_2}{{}^8C_4}$. Sem utilizar a fórmula da probabilidade condicionada explique esta resposta, começando por interpretar o significado de $P\left(Z \middle| (X \cap \bar{Y})\right)$ no contexto da situação descrita. A composição deve incluir:

- uma referência à regra de Laplace.
- uma explicação do número de casos possíveis.
- uma explicação do número de casos favoráveis.

4. Seja S o espaço de resultados associados a uma certa experiência aleatória. Sejam A e B dois acontecimentos possíveis ($A \subset S$ e $B \subset S$). Mostre que:

$$P(\bar{A} \cup B) - P(A|\bar{B}) \times P(B) = P(\bar{A}) \text{ se e só se } A \text{ e } B \text{ forem independentes.}$$

5. Seja S o espaço de resultados associados a uma certa experiência aleatória. Sejam A e B dois acontecimentos possíveis ($A \subset S$ e $B \subset S$).

5.1. Mostre que $\frac{\left(1-P(\bar{A}|\bar{B})\right)\times\left(1-P(B)\right)}{P(A\cap B)} = \frac{P(\bar{B}|A)}{P(B|A)}$.

5.2. Num grupo de amigos sabe-se que:

- o número de amigos que gosta de música pop é o triplo do número de amigos que gosta de música rock;
- 10% gosta de ambos os tipos de música (pop e rock);
- dois em cada três dos amigos que gostam de música rock, também gostam de música pop;

Escolhendo ao acaso um dos amigos, qual é a probabilidade de não gostar de música rock, sabendo que não gosta de música pop? Apresente o resultado na forma de fracção irredutível.

Sugestão: Pode utilizar a igualdade enunciada em 3.1. Nesse caso, deverá começar por caracterizar claramente os acontecimentos A e B, no contexto da situação apresentada.

José Carlos da Silva Pereira

Solucionário

Grupo I – Itens de escolha múltipla

1. C **2.** B **3.** D **4.** B **5.** A **6.** A **7.** B **8.** B **9.** A **10.** B **11.** D

Grupo II – Itens de resposta aberta

1.2. $\frac{2}{3}$

3.1

x_i	-4	0	4
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{30}$	$\frac{9}{10}$	$\frac{1}{15}$

$\mu = \frac{2}{15}$; soma esperada: $\frac{2}{15} \times 15000 = 2000$.

5.2 $\frac{10}{11}$

José Carlos da Silva Pereira