

Funções (12.º ano) Teorema de Bolzano

Exercícios de Provas Nacionais e Testes Intermédios



1. Para um certo número real k , seja g a função, de domínio \mathbb{R} , definida por

$$g(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - x}{k - kx} & \text{se } x < 1 \\ x^2 - 10 + 8 \ln x & \text{se } x \geq 1 \end{cases}$$

Mostre, recorrendo a métodos exclusivamente analíticos, que a função g tem, pelo menos, um zero no intervalo $]\sqrt{e}, e[$

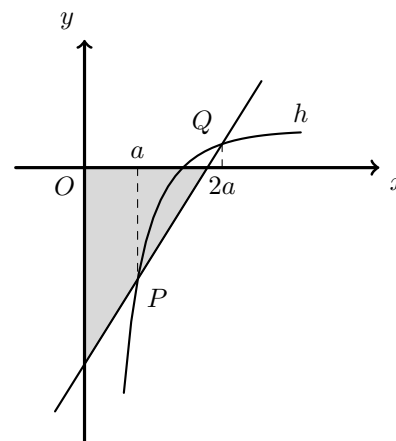
Exame – 2020, Ép. especial

2. Na figura ao lado, está representada, num referencial o.n. xOy , parte do gráfico da função h , de domínio \mathbb{R}^+ , definida por $h(x) = \frac{\ln x}{x}$

Para cada número real a pertencente ao intervalo $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$, sejam P e Q os pontos do gráfico da função h de abscissas a e $2a$, respetivamente.

Tal como a figura sugere, a reta PQ define, com os eixos coordenados, um triângulo retângulo.

Mostre que existe, pelo menos, um número real a pertencente ao intervalo $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$ para o qual esse triângulo é isósceles.



Sugestão: comece por identificar o valor do declive da reta PQ para o qual o triângulo é isósceles.

Exame – 2018, 1.ª Fase

3. Seja g uma função contínua, de domínio \mathbb{R} , tal que:

- para todo o número real x , $(g \circ g)(x) = x$
- para um certo número real a , tem-se $g(a) > a + 1$

Mostre que a equação $g(x) = x + 1$ é possível no intervalo $]a, g(a)[$

Exame – 2016, 2.ª Fase

4. Seja f a função, de domínio \mathbb{R} , definida por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{e^x - \sqrt{e}}{2x - 1} & \text{se } x < \frac{1}{2} \\ (x + 1) \ln x & \text{se } x \geq \frac{1}{2} \end{cases}$$

Mostre que a equação $f(x) = 3$ é possível em $]1, e[$ e, utilizando a calculadora gráfica, determine a única solução desta equação, neste intervalo, arredondada às centésimas.

Na sua resposta:

- recorra ao teorema de Bolzano para provar que a equação $f(x) = 3$ tem, pelo menos, uma solução no intervalo $]1, e[$
- reproduza, num referencial, o(s) gráfico(s) da(s) função(ões) que visualizar na calculadora, devidamente identificado(s);
- apresente a solução pedida.

Exame – 2015, 1.^a Fase

5. Considere a função f , de domínio $] - \infty, 0[$ definida por $f(x) = x - 1 + \frac{\ln(-x)}{x}$

Mostre que a condição $f(x) = -e$ tem, pelo menos, uma solução em $] - e, -1[$, recorrendo a métodos analíticos, sem utilizar a calculadora.

Exame – 2014, 2.^a Fase

6. Considere, para um certo número real k , a função f , de domínio \mathbb{R} , definida por $f(x) = ke^x + x$

O teorema de Bolzano garante que a função f tem, pelo menos, um zero no intervalo $]0, 1[$

A qual dos intervalos seguintes pode pertencer k ?

(A) $] -e, -\frac{1}{e}[$ (B) $] -\frac{1}{e}, 0[$ (C) $] 0, \frac{1}{e}[$ (D) $] \frac{1}{e}, 1[$

Exame – 2014, 1.^a Fase

7. Seja f uma função de domínio $[-e, 1]$

Sabe-se que:

- f é contínua no seu domínio;
- $f(-e) = 1$
- $f(1) = e$

Qual das afirmações seguintes é necessariamente verdadeira?

- (A) A equação $f(x) - 1 = 0$ tem pelo menos uma solução em $] - e, 1[$
- (B) A equação $f(x) = e$ tem pelo menos uma solução em $] - e, 1[$
- (C) A equação $f(x) = 0$ tem pelo menos uma solução em $] - e, 1[$
- (D) A equação $f(x) = \frac{e}{2}$ tem pelo menos uma solução em $] - e, 1[$

Exame – 2013, 2.^a Fase



8. Considere, para um certo número real a positivo, uma função f , contínua, de domínio $[-a, a]$
 Sabe-se que $f(-a) = f(a)$ e $f(a) > f(0)$
 Mostre que a condição $f(x) = f(x+a)$ tem, pelo menos, uma solução em $] -a, 0[$

Exame – 2013, 1.ª Fase

9. Seja a um número real tal que $a > e$ (e – número de Neper ou número de Euler)
 Seja g a função, de domínio \mathbb{R}^+ , definida por $g(x) = ax + \ln x$
 Mostre que a função g tem, pelo menos, um zero no intervalo $\left] \frac{1}{a}, \frac{1}{e} \right[$

Teste Intermédio 12.º ano – 24.05.2013

10. Admita que a concentração de um produto químico na água, em gramas por litro, t minutos após a sua colocação na água, é dada, aproximadamente, por

$$C(t) = 0,5t^2 \times e^{-0,1t}, \text{ com } t \geq 0$$

Recorrendo a métodos exclusivamente analíticos, mostre que, durante os primeiros 15 minutos após a colocação desse produto químico na água, houve, pelo menos, um instante em que a concentração do produto foi 13 gramas por litro.

Se utilizar a calculadora em eventuais cálculos numéricos, sempre que proceder a arredondamentos, use três casas decimais.

Exame – 2012, Ép. especial

11. Seja f uma função de domínio \mathbb{R} , definida por $f(x) = e^x - 3$
 Em qual dos intervalos seguintes o teorema de Bolzano permite afirmar que a equação $f(x) = -x - \frac{3}{2}$ tem, pelo menos, uma solução?

(A) $\left] 0, \frac{1}{5} \right[$ (B) $\left] \frac{1}{5}, \frac{1}{4} \right[$ (C) $\left] \frac{1}{4}, \frac{1}{3} \right[$ (D) $\left] \frac{1}{3}, 1 \right[$

Exame – 2012, 1.ª Fase

12. Relativamente a duas funções, f e g , sabe-se que:

- têm domínio $[2, 3]$
- são funções contínuas
- $f(2) - g(2) > 0$ e $f(3) - g(3) < 0$

Qual das afirmações seguintes é necessariamente verdadeira?

- (A) Os gráficos de f e g intersectam-se em pelo menos um ponto.
 (B) A função $f - g$ é crescente.
 (C) Os gráficos de f e g não se intersectam.
 (D) A função $f - g$ é decrescente.

Teste Intermédio 12.º ano – 24.05.2012

13. Seja f a função, de domínio \mathbb{R}^+ , definida por $f(x) = 2 + \log_3 x$
 Seja g a função, de domínio \mathbb{R}^+ , definida por $g(x) = x + f(x)$
 Mostre, **sem recorrer à calculadora**, que $\exists c \in]1, 3[: g(c) = 5$

Teste Intermédio 12.º ano – 13.03.2012



14. Considere a função f , de domínio $[0, +\infty[$, definida por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{e^{2-x} - 1}{x - 2} & \text{se } 0 \leq x < 2 \\ \frac{x + 1}{\ln(x + 1)} & \text{se } x \geq 2 \end{cases}$$

Mostre, sem resolver a equação e recorrendo a métodos exclusivamente analíticos, que $f(x) = -3$ tem, pelo menos, uma solução em $\left]0, \frac{1}{2}\right[$

Exame – 2011, 2.ª Fase

15. Seja f uma função de domínio $[0, +\infty[$, definida por

$$f(x) = \begin{cases} 2^x - 9 & \text{se } 0 \leq x < 5 \\ \frac{1 - e^x}{x} & \text{se } x \geq 5 \end{cases}$$

Em qual dos intervalos seguintes o teorema de Bolzano permite garantir a existência de, pelo menos, um zero da função f ?

- (A) $]0, 1[$ (B) $]1, 4[$ (C) $]4, 6[$ (D) $]6, 7[$

Exame – 2011, 1.ª Fase

16. Seja f uma função, de domínio \mathbb{R} , contínua no intervalo $[-1, 4]$
Tem-se $f(-1) = 3$ e $f(4) = 9$

Em qual das opções seguintes está definida uma função g , de domínio \mathbb{R} , para a qual o teorema de Bolzano garante a existência de pelo menos um zero no intervalo $] -1, 4[$?

- (A) $g(x) = 2x + f(x)$ (B) $g(x) = 2x - f(x)$ (C) $g(x) = x^2 + f(x)$ (D) $g(x) = x^2 - f(x)$

Teste Intermédio 12.º ano – 26.05.2011

17. Considere a função f , de domínio \mathbb{R} , definida por $f(x) = -x + e^{2x^3 - 1}$
Recorrendo a métodos exclusivamente analíticos, mostre que $f(x) = 1,5$ tem, pelo menos, uma solução em $] -2, -1[$
Se utilizar a calculadora em eventuais cálculos numéricos, sempre que proceder a arredondamentos, use três casas decimais.

Exame – 2010, 2.ª Fase

18. Seja g a função, de domínio $[0, +\infty[$, definida por

$$g(x) = \begin{cases} 3^x - \sqrt{x} & \text{se } 0 \leq x < 2 \\ x - 5 + \log_2(x - 1) & \text{se } x \geq 2 \end{cases}$$

Em qual dos intervalos seguintes o Teorema de Bolzano permite garantir a existência de pelo menos um zero da função g ?

- (A) $]0, 1[$ (B) $]1, 3[$ (C) $]3, 5[$ (D) $]5, 9[$

Teste Intermédio 12.º ano – 15.03.2010



19. Considere a função g , de domínio \mathbb{R}^+ , definida por $g(x) = e^{2x} + \ln x$
 Mostre, **recorrendo a métodos exclusivamente analíticos**, que a função g tem, pelo menos, um zero no intervalo $]0,1; 0,3[$
Nota: A calculadora pode ser utilizada em eventuais cálculos numéricos.

Exame – 2009, 1.ª Fase

20. De uma função f de domínio $[1,2]$ sabe-se que:

- f é contínua em todo o seu domínio
- $\forall x \in [1,2], f(x) < 0$
- $f(1) = 3f(2)$

Seja a função g de domínio $[1,2]$ definida por $g(x) = 2f(x) - f(1)$
 Prove que a função g tem pelo menos um zero.

Teste Intermédio 12.º ano – 11.03.2009

21. A massa de uma substância radioativa diminui com a passagem do tempo. Supõe-se que, para uma amostra de uma determinada substância, a massa, em gramas, ao fim de t horas de observação, é dada pelo modelo matemático $M(t) = 15 \times e^{-0,02t}$, $t \geq 0$.

Resolva, **usando métodos analíticos**, o item que se segue.

Utilize o **Teorema de Bolzano** para justificar que houve, pelo menos, um instante, entre as 2 horas e 30 minutos e as 4 horas após o início da observação, em que a massa da amostra da substância radioativa atingiu os 14 gramas.

Nota: A calculadora pode ser utilizada em eventuais cálculos intermédios; sempre que proceder a arredondamentos, use três casas decimais.

Exame – 2008, 2.ª Fase

22. Seja h a função de domínio $] -1, +\infty[$, definida por $h(x) = 4 - x + \ln(x+1)$ (\ln designa logaritmo de base e).

Justifique, aplicando o **Teorema de Bolzano**, que a função h tem, pelo menos, um zero no intervalo $]5,6[$.

Nota: A calculadora pode ser utilizada em eventuais cálculos intermédios; sempre que proceder a arredondamentos, use duas casas decimais.

Exame – 2008, 1.ª fase

23. Seja f uma função de domínio \mathbb{R} , contínua no intervalo $[-2,2]$

Tem-se $f(-2) = 1$ e $f(2) = 3$

Indique qual das expressões seguintes define uma função g , de domínio \mathbb{R} , para a qual o Teorema de Bolzano garante a existência de pelo menos um zero no intervalo $] -2,2[$

- (A) $g(x) = x + f(x)$ (B) $g(x) = x - f(x)$ (C) $g(x) = x^2 + f(x)$ (D) $g(x) = x^2 - f(x)$

Teste Intermédio 12.º ano – 29.05.2008

24. Considere, num referencial o. n. xoy ,

- a curva C , que representa graficamente a função f , de domínio $[0,1]$, definida por $f(x) = e^x + 3x$
- a reta r , de equação $y = 5$

Sem recorrer à calculadora, justifique que a reta r intersecta a curva C em pelo menos um ponto.

Teste Intermédio 12.º ano – 15.03.2007



25. Seja a função f , de domínio \mathbb{R}^+ , definida por $f(x) = \begin{cases} \frac{x}{\ln x} & \text{se } 0 < x < 1 \\ xe^{2-x} & \text{se } x \geq 1 \end{cases}$

Sem recorrer à calculadora, mostre que $\exists x \in]4,5[: f(x) + f(e^{-1}) = 0$

Exame – 2006, Ép. especial

26. Seja $f : [0,2] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua tal que $f(0) = f(2) = 0$ e $f(1) > 0$
 Prove que existe pelo menos um número real c no intervalo $]0,1[$ tal que $f(c) = f(c+1)$
 Sugestão: considere a função $g : [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $g(x) = f(x) - f(x+1)$

Exame – 2006, 2.ª fase

27. De uma certa função f , contínua em \mathbb{R} , sabe-se que $f(3) = 8$ e $f(7) = 1$.
 Qual das afirmações seguintes é necessariamente verdadeira?

- (A) $1 \leq f(6) \leq 8$ (B) A função f não tem zeros em $[3,7]$
 (C) $f(4) > f(5)$ (D) 2 pertence ao contradomínio de f

Exame – 2005, 2.ª fase

28. Considere a função f , de domínio \mathbb{R} , definida por $f(x) = 1 + 3x^2e^{-x}$
Sem recorrer à calculadora, (a não ser para efetuar eventuais cálculos numéricos), mostre que, no intervalo $] -1,0[$, existe pelo menos um objecto cuja imagem, por meio de f , é 4.

Exame – 2004, 1.ª Fase

29. Seja f uma função contínua, de domínio $[0,5]$ e contradomínio $[3,4]$.
 Seja g a função, de domínio $[0,5]$, definida por $g(x) = f(x) - x$.
 Prove que a função g tem, pelo menos, um zero.

Exame – 2002, 1.ª fase - 2.ª chamada

30. De uma função g , contínua em \mathbb{R} , sabe-se que:

- 1 é zero de g ;
- $g(3) > 3$

Prove que a equação $g(x) = \frac{g(3)}{2}$ tem, pelo menos, uma solução no intervalo $]1,3[$.

Exame – 2001, 2.ª fase

31. De uma função f , contínua no intervalo $[1,3]$, sabe-se que $f(1) = 7$ e $f(3) = 4$.

Qual das afirmações seguintes é **necessariamente** verdadeira?

- (A) A função f tem pelo menos um zero no intervalo $[1,3]$
 (B) A função f não tem zeros em $[1,3]$
 (C) A equação $f(x) = 5$ tem pelo menos uma solução no intervalo $[1,3]$
 (D) A equação $f(x) = 5$ não tem solução no intervalo $[1,3]$

Exame – 2001, 1.ª fase - 1.ª chamada



32. Foi administrado um medicamento a um doente às 9 horas da manhã de um certo dia. A concentração desse medicamento, em miligrama por mililitro de sangue, t **horas** após ter sido administrado, é dada por

$$C(t) = 2te^{-0.3t}$$

Utilize o Teorema de Bolzano para mostrar que houve um instante, entre as 9 h 30 min e as 10 h, em que a concentração do medicamento foi de 1 mg/ml.

Exame – 1999, Prova modelo (prog. antigo)

33. Seja g a função definida em \mathbb{R} por $g(x) = x^5 - x + 1$. O Teorema de Bolzano permite-nos afirmar que a equação $g(x) = 8$ tem pelo menos uma solução no intervalo

(A) $] -1,0[$ (B) $]0,1[$ (C) $]1,2[$ (D) $]2,3[$

Exame – 1997, 1.^a fase - 1.^a chamada (prog. antigo)

