Escola Secundária de Penafiel

Exame Modelo I
Proposta de resolução

12.º Ano de Escolaridade | Turma G-K

CADERNO 1

1. .

1.1. P2001/2002

Estamos perante de uma experiência aleatória Binomial
Sabe-se que:

- a experiência repete-se oito vezes
- a probabilidade de sucesso é $\frac{1}{2}$ $\twoheadrightarrow$ (probabilidade de sair face euro num lançamento de uma moeda)
- a probabilidade de insucesso é $\frac{1}{2}$ $\twoheadrightarrow$ (probabilidade de não sair face euro num lançamento de uma moeda)

Pretende-se a probabilidade do acontecimento "A face euro sai exatamente cinco vezes"
Assim, tem-se que $P = {}^8C_5 \left(\frac{1}{2}\right)^5 \times \left(\frac{1}{2}\right)^3 = {}^8C_5 \left(\frac{1}{2}\right)^8$

Resposta:(A)

1.2. PMC2015

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1 \Leftrightarrow \frac{y^2}{16} = 1 - \frac{x^2}{25} \Leftrightarrow y^2 = 16 - \frac{16x^2}{25} \Leftrightarrow y^2 = \frac{16(25-x^2)}{25} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow y = \pm\sqrt{\frac{16(25-x^2)}{25}} \Leftrightarrow y = \pm\frac{4}{5}\sqrt{25-x^2}$$

Como o ponto P tem abcissa e ordenada positivas, tem-se que $P\left(x; \frac{4}{5}\sqrt{25-x^2}\right)$

Assim, a área do retângulo é dada por $A(x) = 2x \times 2y = 2x \times 2 \times \frac{4}{5}\sqrt{25-x^2} = \frac{16x}{5}\sqrt{25-x^2}$

Resposta:(A)

2. $g(2x) - f(x) > 0 \Leftrightarrow 2^{-\frac{2x}{2}+1} - 2^{x+1} > 0 \Leftrightarrow 2^{-x+1} > 2^{x+1} \Leftrightarrow -x+1 > x+1 \Leftrightarrow 0 > 2x \Leftrightarrow x < 0$
Logo, $C.S. = \mathbb{R}^-$

Resposta:(C)

3. $P(A \mid B) + P(\overline{A} \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} + \frac{P(\overline{A} \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A \cap B) + P(\overline{A} \cap B)}{P(B)} =$
$= \frac{P(A \cap B) + P(B) - P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(B)}{P(B)} = 1$

Resposta:(D)

4. De $P(\overline{A} \mid B) = \frac{1}{3}$, vem que

$$P(\overline{A} \mid B) = \frac{1}{3} \Leftrightarrow \frac{P(\overline{A} \cap B)}{P(B)} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow \frac{P(B) - P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow \frac{P(B) - \frac{1}{5}}{P(B)} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow P(B) - \frac{1}{5} = \frac{1}{3}P(B) \Leftrightarrow 3P(B) - \frac{3}{5} = P(B) \Leftrightarrow 3P(B) - P(B) = \frac{3}{5} \Leftrightarrow 2P(B) = \frac{3}{5} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow P(B) = \frac{3}{10}$$

De $P(A \cup B) = \frac{3}{5}$, vem,

$$P(A \cup B) = \frac{3}{5} \Leftrightarrow P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{3}{5} \Leftrightarrow P(A) + \frac{3}{10} - \frac{1}{5} = \frac{3}{5} \Leftrightarrow P(A) = \frac{3}{5} - \frac{3}{10} + \frac{1}{5} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow P(A) = \frac{1}{2}$$

Portanto, $P(B \mid \overline{A}) = \dfrac{P(B \cap \overline{A})}{P(\overline{A})} = \dfrac{P(B) - P(A \cap B))}{P(\overline{A})} = \dfrac{\frac{3}{10} - \frac{1}{5}}{\frac{1}{2}} = \dfrac{\frac{1}{10}}{\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{5}$

5. .

5.1. Para definir um plano são necessários três pontos não colineares. Como no sólido não há três pontos (vértices) colineares, tem-se que o número de casos possíveis é dado por ${}^8C_3$, pois dos oito vértices do sólido tenho de escolher três. Quanto ao número de casos favoráveis: Pretende-se que o plano seja paralelo ao plano yOz, ora, então teremos de escolher três pontos (vértices) entre os quatro da face $[ABFE]$ ou escolher três pontos (vértices) entre os quatro da face $[CDHG]$, e essa escolha pode ser feita de ${}^4C_3 \times 2$ maneiras distintas
Assim, a probabilidade pedida é igual a $P = \dfrac{{}^4C_3 \times 2}{{}^8C_3} = \dfrac{8}{56} = \dfrac{1}{7}$

5.2. Um vetor normal ao plano EFG é $\overrightarrow{\alpha} = (1; 0; 3)$
Como a reta pedida é perpendicular ao plano EFG, então um seu vetor diretor poderá ser $\overrightarrow{\alpha} = (1; 0; 3)$
Portanto, uma equação vetorial da reta perpendicular ao plano EFG e que contém o ponto D, é dada por $(x; y; z) = (-3, -3; 0) + k(1; 0; 3), k \in \mathbb{R}$

5.3. $\overrightarrow{AH} = H - A = (-3, -3; 5) - (3; -3; 0) = (-6; 0; 5)$ poderá ser um vetor normal ao plano mediador pedido
Determinemos o ponto M, ponto médio do segmento de reta $[AH]$
$M\left(\dfrac{-3+3}{2}; \dfrac{-3-3}{2}; \dfrac{5+0}{2}\right)$, ou seja, $M\left(0; -3; \dfrac{5}{2}\right)$

A equação do plano mediador é da forma $-6x + 0y + 5z + d = 0, d \in \mathbb{R}$
Como o plano contém o ponto M, vem,
$-6 \times 0 + 5 \times \dfrac{5}{2} + d = 0 \Leftrightarrow d = -\dfrac{25}{2}$

Logo, a equação do plano mediado pedida é $-6x + 5z - \dfrac{25}{2} = 0$, ou ainda, $-12x + 10z - 25 = 0$

6. Sabe-se que $\lim\limits_{x \to -2^-} g(x) = -\infty$, logo a reta s tem equação $x = -2$
Sabe-se que $\lim\limits_{x \to -\infty} \left[g(x) - \dfrac{1}{4}x + \dfrac{3}{4}\right] = 0$, ou seja que $\lim\limits_{x \to -\infty} \left[g(x) - \left(\dfrac{1}{4}x - \dfrac{3}{4}\right)\right] = 0$, logo a reta r tem equação $y = \dfrac{1}{4}x - \dfrac{3}{4}$

Determinemos o ponto I

$$\begin{cases} x=-2 \\ y=\frac{1}{4}x-\frac{3}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-2 \\ y=\frac{1}{4}\times(-2)-\frac{3}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-2 \\ y=-\frac{2}{4}-\frac{3}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-2 \\ y=-\frac{5}{4} \end{cases}$$

Logo, $I\left(-2;-\frac{5}{4}\right)$

Resposta:(A)

7. .

7.1. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^{x+1}-1}{2e^x-1} =^{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}= \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\frac{e^{x+1}-1}{e^x}}{\frac{2e^x-1}{e^x}} = \frac{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^{x+1}}{e^x} - \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{e^x}}{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2e^x}{e^x} - \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{e^x}} =$

$= \frac{\lim\limits_{x\to+\infty}(e) - \frac{1}{e^{+\infty}}}{\lim\limits_{x\to+\infty}(2) - \frac{1}{e^{+\infty}}} = \frac{e-\frac{1}{+\infty}}{2-\frac{1}{+\infty}} = \frac{e-0}{2-0} = \frac{e}{2}$

Logo, a reta de equação $y=\frac{e}{2}$ é assíntota ao gráfico da função, quando $x\to+\infty$

7.2. A função g é contínua em todo o seu domínio, por se tratar de quociente de funções contínuas, logo, em particular, é contínua em $[1;2]$

Por outro lado,

$g(1) = -\frac{4}{e}+f(1) = -\frac{4}{e}+\frac{e^{1+1}-1}{2e-1} = -\frac{4}{e}+\frac{e^2-1}{2e-1} < 0$

$g(2) = -\frac{4}{e^2}+f(2) = -\frac{4}{e^2}+\frac{e^{2+1}-1}{2e^2-1} = -\frac{4}{e^2}+\frac{e^3-1}{2e^2-1} > 0$

Como $g(1)$ e $g(2)$ têm sinais contrários, ou seja, tem-se que $g(1)\times g(2)<0$, e a função g é contínua em $[1;2]$, então, pelo corolário do teorema de Bolzano-Cauchy, a função g tem pelo menos um zero em $]1;2[$, isto é, $\exists c\in]1;2[: g(c)=0$

8. .

8.1. Pretende-se determinar as soluções da equação $p(t)=5$, no intervalo de tempo $[0;8]$

$p(t)=5 \Leftrightarrow 5+5e^{-0.2t}\cos\left(\frac{\pi t}{3}\right)=5 \Leftrightarrow 5e^{-0.2t}\cos\left(\frac{\pi t}{3}\right)=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 5e^{-0.2t}=0 \vee \cos\left(\frac{\pi t}{3}\right)=0 \Leftrightarrow$ equação impossível $\vee \cos\left(\frac{\pi t}{3}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{\pi t}{3}=\frac{\pi}{2}+k\pi, k\in\mathbb{Z} \Leftrightarrow \pi t=\frac{3\pi}{2}+3k\pi, k\in\mathbb{Z} \Leftrightarrow t=\frac{3}{2}+3k, k\in\mathbb{Z}$

Atribuindo valores a k, vem,

$k=0 \twoheadrightarrow t=\frac{3}{2}\in[0;8]$

$k=1 \twoheadrightarrow t=\frac{3}{2}+3=\frac{9}{2}\in[0;8]$

$k=2 \twoheadrightarrow t=\frac{3}{2}+6=\frac{15}{2}\in[0;8]$

$k=3 \twoheadrightarrow t=\frac{3}{2}+9=\frac{21}{2}\notin[0;8]$

Concluindo, $t\in\left\{\frac{3}{2};\frac{9}{2};\frac{15}{2}\right\}$

8.2. $\lim_{t\to+\infty} p(t) = \lim_{t\to+\infty}\left[5+5e^{-0.2t}\cos\left(\frac{\pi t}{3}\right)\right] = 5 + \lim_{t\to+\infty}\left[5e^{-0.2t}\cos\left(\frac{\pi t}{3}\right)\right]$

Ora, $\lim_{t\to+\infty}\left[5e^{-0.2t}\right] = 5\times e^{-\infty} = \frac{5}{e^{+\infty}} = \frac{5}{+\infty} = 0$

E a função $f(t) = \cos\left(\frac{\pi t}{3}\right)$ é limitada

Então, tem-se que $\lim_{t\to+\infty}\left[5e^{-0.2t}\cos\left(\frac{\pi t}{3}\right)\right] = 0$

Assim

$$\lim_{t\to+\infty} p(t) = \lim_{t\to+\infty}\left[5+5e^{-0.2t}\cos\left(\frac{\pi t}{3}\right)\right] = 5 + \lim_{t\to+\infty}\left[5e^{-0.2t}\cos\left(\frac{\pi t}{3}\right)\right] = 5+0=5$$

Com o passar do tempo o corpo tende a estabilizar a sua posição a cinco decímetros do solo

CADERNO 2

9. .

9.1. P2001/2002

Seja X a variável aleatória
Como o valor médio é 60, tem-se que

$P(50 < X < 60) = P(60 < X < 70)$

Pelo que

$P(X < 70) > P(X > 55)$
$P(X < 70) > P(X < 55)$
$P(X < 70) > P(X > 70)$

Resposta:(A)

9.2. PMC2015

$f(x) = \frac{5\pi}{12} \Leftrightarrow -\frac{\pi}{4} + \arccos\left(-\frac{x}{2}\right) = \frac{5\pi}{12} \Leftrightarrow \arccos\left(-\frac{x}{2}\right) = \frac{5\pi}{12} + \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \arccos\left(-\frac{x}{2}\right) = \frac{8\pi}{12} \Leftrightarrow \arccos\left(-\frac{x}{2}\right) = \frac{2\pi}{3} \Leftrightarrow -\frac{x}{2} = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow -\frac{x}{2} = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow x = 1$

Resposta:(A)

10. .

10.1. $w_1 = -2\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + 2\sqrt{2}i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = -2\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2} + 2\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}i = -2+2i$

Então,

$|z+w_1| = 2 \wedge -\frac{\pi}{2} \leq Arg(z) \leq -\frac{\pi}{4} \Leftrightarrow |z+(-2+2i)| = 2 \wedge -\frac{\pi}{2} \leq Arg(z) \leq -\frac{\pi}{4} \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow |z-(2-2i)| = 2 \wedge -\frac{\pi}{2} \leq Arg(z) \leq -\frac{\pi}{4}$

Consideremos $A(2;-2)$, afixo do complexo $z_1 = 2-2i$

Representação no plano complexo

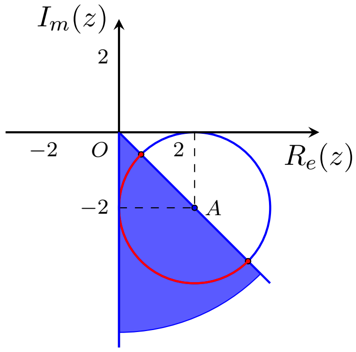

Figura 1

No plano complexo, esta condição define uma linha de comprimento $\pi \times 2 = 2\pi$ $u.c.$

10.2. $w_2 = \cos(\theta+\pi) + i\sin(\theta+\pi) = e^{i(\theta+\pi)}$
Então, $w_2^3 = \left[e^{i(\theta+\pi)}\right]^3 = e^{i(3\theta+3\pi)} = \cos(3\theta+3\pi) + i\sin(3\theta+3\pi) = -\cos(3\theta) - i\sin(3\theta)$

$$|w_2^3+1| = |-\cos(3\theta)-i\sin(3\theta)+1| = |1-\cos(3\theta)-i\sin(3\theta)| = \sqrt{(1-\cos(3\theta))^2+(\sin(3\theta))^2} =$$
$$= \sqrt{1-2\cos(3\theta)+\cos^2(3\theta)+\sin^2(3\theta)} = \sqrt{2-2\cos(3\theta)} = \sqrt{2(1-\cos(3\theta))} =$$
$$= \sqrt{2\times 2\sin^2\left(\frac{3\theta}{2}\right)} = 2\left|\sin\left(\frac{3\theta}{2}\right)\right|$$

Cálculos auxiliares:

$$1-\cos(2\alpha) = 1-(\cos^2(\alpha)-\sin^2(\alpha)) = 1-(1-\sin^2(\alpha)-\sin^2(\alpha)) = 1-1+2\sin^2(\alpha) = 2\sin^2(\alpha)$$

11. Determinar a função derivada de g
Se $x>0$, então $g(x) = x\ln(x)$
$$g'(x) = [x\ln(x)]' = x'\times\ln(x) + x\times(\ln(x))' = 1\times\ln(x) + x\times\frac{1}{x} = \ln(x)+1$$

Se $x=0$
$$g'(0) = \lim_{x\to 0^+}\frac{g(x)-g(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^+}\frac{x\ln(x)-0}{x} = \lim_{x\to 0^+}(\ln(x)) = -\infty$$
Ou seja, a função g não é diferenciável no ponto $x=0$

Portanto, $g'(x) = \ln(x)+1$, se $x>0$

Estudo da monotonia da função g

Zeros de g'
$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \ln(x)+1 = 0 \wedge x>0 \Leftrightarrow \ln(x) = -1 \wedge x>0 \Leftrightarrow x = e^{-1}\wedge x>0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{e}\wedge x>0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x = \frac{1}{e}$$
Sinal de g'
$$g'(x) > 0 \Leftrightarrow \ln(x)+1 > 0 \wedge x>0 \Leftrightarrow \ln(x) > -1 \wedge x>0 \Leftrightarrow x > e^{-1}\wedge x>0 \Leftrightarrow x > \frac{1}{e}\wedge x>0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x > \frac{1}{e}$$

$g'(x) < 0 \Leftrightarrow \ln(x) + 1 < 0 \wedge x > 0 \Leftrightarrow \ln(x) < -1 \wedge x > 0 \Leftrightarrow x < e^{-1} \wedge x > 0 \Leftrightarrow x < \frac{1}{e} \wedge x > 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x < \frac{1}{e}$

Quadro de sinal de g' e de variação de g

x	0		$\frac{1}{e}$	$+\infty$
$g'(x)$	$\backslash\backslash\backslash$	$-$	0	$+$
$g(x)$	0	$\searrow$	$-\frac{1}{e}$	$\nearrow$

$g\left(\frac{1}{e}\right) = \frac{1}{e}\ln\left(\frac{1}{e}\right) = \frac{1}{e}\ln\left(e^{-1}\right) = -\frac{1}{e}$

Estudar as concavidades do gráfico de g

$g''(x) = (\ln(x) + 1)' = \frac{1}{x}$, com $x > 0$

Logo, $g''(x) > 0, \forall x > 0$
Portanto o gráfico da função g tem a concavidade voltada para cima em todo o seu domínio

Resposta:(B)

Outro processo:

Em alternativa, poder-se-ia resolver da seguinte forma

Determinar a função derivada de g
Se $x > 0$, então $g(x) = x\ln(x)$
$g'(x) = [x\ln(x)]' = x' \times \ln(x) + x \times (\ln(x))' = 1 \times \ln(x) + x \times \frac{1}{x} = \ln(x) + 1$

Se $x = 0$
$g'(0) = \lim_{x\to 0^+} \frac{g(x) - g(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x\ln(x) - 0}{x} = \lim_{x\to 0^+} (\ln(x)) = -\infty$
Ou seja, a função g não é diferenciável no ponto $x = 0$

Portanto, $g'(x) = \ln(x) + 1$, se $x > 0$

Daqui se exclui as opções (C) e (D), pois em ambos os gráficos existe um "ponto anguloso"de abcissa $\frac{1}{e}$, não sendo diferenciável a função em $x = \frac{1}{e}$

Restam as opções (A) e (B)

Ora, como $\lim_{x\to +\infty} g(x) = \lim_{x\to +\infty} (x\ln(x)) = +\infty$
Conclui-se que a resposta só poderá ser a opção (B)

12. Se no saco estão onze bolas numeradas e se, se retiram duas de uma só vez, então o número de casos possíveis é dado por ${}^{11}C_2$
Quanto ao número de casos favoráveis: pretende-se que as duas bolas retiradas tenham o mesmo número, então, atendendo à simetria do triângulo de pascal, e ao facto de haver onze bolas, tem-se que há apenas cinco pares de números iguais, pelo que o número de casos favoráveis é igual a 5

Portanto, a probabilidade pedida é dada por $P = \dfrac{5}{{}^{11}C_2}$

Resposta:(B)

13. $\log_a(b^3) = 2 \Leftrightarrow 3\log_a(b) = 2 \Leftrightarrow \log_a(b) = \dfrac{2}{3}$

$$\frac{\log_b(a^2)}{\log_a(\sqrt{b})} = \frac{2\log_b(a)}{\log_a\left(b^{\frac{1}{2}}\right)} = \frac{2\log_b(a)}{\frac{1}{2}\log_a(b)} = \frac{4\log_b(a)}{\log_a(b)} = \frac{4\times\dfrac{\log_a(a)}{\log_a(b)}}{\dfrac{2}{3}} = \frac{4\times\dfrac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{2}}}{\dfrac{2}{3}} = 4\times\frac{9}{4} = 9$$

Resposta:(A)

14. .

14.1. $\displaystyle\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-}\frac{x}{e^{2x}-e^x} \stackrel{(\frac{\infty}{\infty})}{=} \lim_{x\to 0^-}\frac{1}{\dfrac{e^{2x}-e^x}{x}} = \frac{1}{\displaystyle\lim_{x\to 0^-}\frac{e^{2x}-1+1-e^x}{x}} =$

$\displaystyle = \frac{1}{2\times\displaystyle\lim_{2x\to 0^-}\frac{e^{2x}-1}{2x} - \lim_{x\to 0^-}\frac{e^x-1}{x}} = \frac{1}{2\times 1 - 1} = 1$

Utilizou-se o limite notável $\displaystyle\lim_{x\to 0^-}\frac{e^x-1}{x} = 1$

Conclui-se, assim, que o valor de b é 1

14.2. $\displaystyle\lim a_n = \lim\left(\frac{2n+3}{n+1}\right)^n = \lim\left[\frac{2n\left(1+\dfrac{3}{2n}\right)}{n\left(1+\dfrac{1}{n}\right)}\right]^n = \lim(2^n)\times\frac{\lim\left(1+\dfrac{\frac{3}{2}}{n}\right)^n}{\lim\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n} =$

$\displaystyle = +\infty\times\frac{e^{\frac{3}{2}}}{e} = +\infty$

Assim, $\displaystyle\lim f(a_n) = \lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\left[(x+1)\ln\left(\frac{x+2}{x}\right)\right] = \lim_{x\to+\infty}\left[\ln\left(\left(\frac{x+2}{x}\right)^{x+1}\right)\right] =$

$\displaystyle = \ln\left[\lim_{x\to+\infty}\left(\left(\frac{x+2}{x}\right)^{x+1}\right)\right] = \ln\left[\lim_{x\to+\infty}\left(\left(1+\frac{2}{x}\right)^x\left(1+\frac{2}{x}\right)\right)\right] =$

$\displaystyle = \ln\left[\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^x \times \lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)\right] = \ln(e^2\times 1) = \ln(e^2) = 2$

Logo, $b = 2$ e a reta r tem equação $y = 2$

15. .

15.1. A função h é contínua em $x = 0$, se existir $\displaystyle\lim_{x\to 0} h(x)$, ou seja, se $\displaystyle\lim_{x\to 0^-} h(x) = h(0)$ e $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} h(x) = h(0)$

Ora,

$$\lim_{x\to 0^+} h(x) = \lim_{x\to 0^+}\frac{2x}{1-e^{4x}} = -\lim_{x\to 0^+}\frac{2}{\dfrac{e^{4x}-1}{x}} = -\frac{2}{4\times\displaystyle\lim_{4x\to 0^+}\frac{e^{4x}-1}{4x}} = -\frac{1}{2}\times\frac{1}{1} = -\frac{1}{2}$$

Utilizou-se o limite notável $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x} = 1$

$$\lim_{x\to 0^-} h(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{\sin(-2x)(\cos^2(x)-\sin^2(x))}{4x} = -\lim_{x\to 0^-} \frac{\sin(2x)\cos(2x)}{4x} =$$
$$= -\frac{1}{2} \times \lim_{x\to 0^-} \frac{\sin(4x)}{4x} = -\frac{1}{2} \times \lim_{4x\to 0^-} \frac{\sin(4x)}{4x} = -\frac{1}{2} \times 1 = -\frac{1}{2}$$

Utilizou-se o limite notável $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$

$h(0) = -\frac{k\ln\left(\sqrt{e}\right)}{2}$

Para que a função h seja contínua em $x=0$ deverá ter-se

$$-\frac{k\ln\left(\sqrt{e}\right)}{2} = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow k\ln\left(e^{\frac{1}{2}}\right) = 1 \Leftrightarrow k \times \frac{1}{2}\ln(e) = 1 \Leftrightarrow k \times \frac{1}{2} \times 1 = 1 \Leftrightarrow k = 2$$

15.2. seja $x > 0$,

$$h'(x) = \left(\frac{2x}{1-e^{4x}}\right)' = \frac{(2x)' \times \left(1-e^{4x}\right) - 2x \times \left(1-e^{4x}\right)'}{(1-e^{4x})^2} = \frac{2 \times \left(1-e^{4x}\right) - 2x \times \left(0-4e^{4x}\right)}{(1-e^{4x})^2} =$$
$$= \frac{2-2e^{4x}+8xe^{4x}}{(1-e^{4x})^2} = \frac{e^{4x}(8x-2)+2}{(1-e^{4x})^2}, \text{ com } x > 0$$

$$h'(x) = \frac{2}{(1-e^{4x})^2} \Leftrightarrow \frac{e^{4x}(8x-2)+2}{(1-e^{4x})^2} = \frac{2}{(1-e^{4x})^2} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \frac{e^{4x}(8x-2)}{(1-e^{4x})^2} + \frac{2}{(1-e^{4x})^2} = \frac{2}{(1-e^{4x})^2} \Leftrightarrow \frac{e^{4x}(8x-2)}{(1-e^{4x})^2} = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow e^{4x}(8x-2) = 0 \wedge \left(1-e^{4x}\right)^2 \neq 0 \Leftrightarrow (e^{4x} = 0 \vee 8x-2=0) \wedge 1-e^{4x} \neq 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (\text{equação impossível } \vee 8x = 2) \wedge x \neq 0 \Leftrightarrow x = \frac{2}{8} \wedge x \neq 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{4}$$

$C.S. = \left\{\frac{1}{4}\right\}$

15.3. O declive da reta tangente é igual a $h'\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{e^{4\times\frac{1}{4}}\left(8\times\frac{1}{4}-2\right)+2}{\left(1-e^{4\times\frac{1}{4}}\right)^2} = \frac{2}{(1-e)^2}$

A equação da reta tangente t é da forma $t: y = \frac{2}{(1-e)^2}x + b, b \in \mathbb{R}$

Ora, $h\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{2\times\frac{1}{4}}{1-e^{4\times\frac{1}{4}}} = \frac{\frac{1}{2}}{1-e} = \frac{1}{2(1-e)}$

Assim, o ponto de tangência tem coordenadas $\left(\frac{1}{4}; \frac{1}{2(1-e)}\right)$

Substituindo as coordenadas deste ponto na equação de t, vem

$$\frac{1}{2(1-e)} = \frac{2}{(1-e)^2} \times \frac{1}{4} + b \Leftrightarrow b = \frac{1}{2(1-e)} - \frac{1}{2(1-e)^2} \Leftrightarrow b = \frac{1-e}{2(1-e)^2} - \frac{1}{2(1-e)^2} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow b = \frac{1-e-1}{2(1-e)^2} \Leftrightarrow b = -\frac{e}{2(1-e)^2}$$

Portanto, a equação da reta t é $t: y = \frac{2}{(1-e)^2}x - \frac{e}{2(1-e)^2}$