Caderno 1

1. $\lim\left(1+\frac{2}{n+3}\right)^{\frac{n}{2}}=\frac{1}{e^{k^2-2k}} \Leftrightarrow \lim\left[\left(1+\frac{2}{n+3}\right)^{n+3-3}\right]^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{e^{k^2-2k}} \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \left[\lim\left(1+\frac{2}{n+3}\right)^{n+3}\times\lim\left(1+\frac{2}{n+3}\right)^{-3}\right]^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{e^{k^2-2k}} \Leftrightarrow (e^2\times 1)^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{e^{k^2-2k}} \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow e=\frac{1}{e^{k^2-2k}} \Leftrightarrow e=e^{-k^2+2k} \Leftrightarrow k^2-2k=-1 \Leftrightarrow k^2-2k+1=0 \Leftrightarrow (k-1)^2=0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow k-1=0 \Leftrightarrow k=1$

   Resposta: B

2. Consideremos os acontecimentos

   A: O aluno gosta de Matemática

   B: O aluno gosta de Física e Química

   Dos dados, sabemos que

   $P(\overline{A})=\frac{5}{12}$
   $P(B)=\frac{1}{2}$
   $P(\overline{B})=\frac{1}{2}$
   $P(\overline{A}\setminus B)=\frac{1}{6}$

   2.1. De $P(\overline{A})=\frac{5}{12}$, resulta, $1-P(A)=\frac{5}{12} \Leftrightarrow P(A)=1-\frac{5}{12} \Leftrightarrow P(A)=\frac{7}{12}$

   De $P(\overline{A}\setminus B)=\frac{1}{6}$, resulta,

   $P(\overline{A}\setminus B)=\frac{1}{6} \Leftrightarrow \frac{P(\overline{A}\cap B)}{P(B)}=\frac{1}{6} \Leftrightarrow \frac{P(B)-P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{1}{6} \Leftrightarrow P(B)-P(A\cap B)=\frac{1}{6}\times P(B) \Leftrightarrow P(A\cap B)=P(B)-\frac{1}{6}\times P(B) \Leftrightarrow P(A\cap B)=\frac{1}{2}-\frac{1}{6}\times\frac{1}{2} \Leftrightarrow$
   $\Leftrightarrow P(A\cap B)=\frac{6}{12}-\frac{1}{12} \Leftrightarrow P(A\cap B)=\frac{5}{12}$

   Pretende-se $P(A\cup B)$

   $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=\frac{7}{12}+\frac{1}{2}-\frac{5}{12}=\frac{1}{6}+\frac{1}{2}=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$

2.2. Pretende-se $P(B \setminus \overline{A})$

$$P(B \setminus \overline{A}) = \frac{P(B \cap \overline{A})}{P(\overline{A})} = \frac{P(B) - P(A \cap B)}{P(\overline{A})} = \frac{\frac{1}{2} - \frac{5}{12}}{\frac{5}{12}} = \frac{\frac{1}{12}}{\frac{5}{12}} = \frac{1}{5}$$

3. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{2kx}{-e^{x+1} + e} = \dfrac{\sqrt{e}}{2} \Leftrightarrow 2k \times \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x}{-e(e^x - 1)} = \dfrac{\sqrt{e}}{2} \Leftrightarrow -\dfrac{2k}{e} \times \dfrac{1}{\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1}{x}} = \dfrac{\sqrt{e}}{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -\dfrac{2k}{e} \times \dfrac{1}{1} = \dfrac{\sqrt{e}}{2} \Leftrightarrow -\dfrac{2k}{e} = \dfrac{\sqrt{e}}{2} \Leftrightarrow k = -\dfrac{e\sqrt{e}}{4}$

Resposta: B

4. (i) Para construir um triângulo tem-se de escolher um ponto (vértice) na reta s e dois pontos (vértices) na reta r, e o número total de triângulos assim construídos é dado por ${}^3C_1 \times {}^4C_2$; ou tem-se de escolher dois pontos (vértices) na reta s e um ponto (vértice) na reta r, e o número total de triângulos assim construídos é dado por ${}^3C_2 \times {}^4C_1$
Concluindo, tem-se que o número triângulos que é possível construir com os sete pontos é dado por ${}^3C_1 \times {}^4C_2 + {}^3C_2 \times {}^4C_1 = 30$

Outra forma de contar o número de triângulos é a seguinte: formam-se todos os grupos de três pontos escolhidos de entre os sete disponíveis. O número desses grupos é dado por ${}^7C_3$. Depois é necessário contar todos os grupos de três pontos gerados pelos pontos que estão sobre a reta s, que é dado por ${}^3C_3$, e todos os grupos de três pontos gerados pelos pontos que estão sobre a reta r, que é dado por ${}^4C_3$. Como é evidente, cada um destes grupos de pontos não permitem construir um triângulo, e portanto, ser necessário retirar ao número de triângulos inicialmente pensado ${}^7C_3$. Concluindo, tem-se que o número triângulos que é possível construir com os sete pontos é dado por ${}^7C_3 - {}^3C_3 - {}^4C_3 = 30$.

5. De $\log_a(b^2) = \dfrac{2}{3}$, resulta que $2\log_a(b) = \dfrac{2}{3} \Leftrightarrow \log_a(b) = \dfrac{1}{3}$
Assim,
$\log_b\left(\dfrac{1}{\sqrt[4]{b^3a}}\right) = \log_b(1) - \log_b\left(\sqrt[4]{b^3a}\right) = 0 - \log_b\left((b^3a)^{\frac{1}{4}}\right) = -\dfrac{1}{4} \times \log_b\left(b^3a\right) =$

$= -\dfrac{1}{4} \times \left[\log_b\left(b^3\right) + \log_b(a)\right] = -\dfrac{1}{4} \times \left(3 + \dfrac{\log_a(a)}{\log_a(b)}\right) = -\dfrac{1}{4} \times \left(3 + \dfrac{1}{\frac{1}{3}}\right) = -\dfrac{1}{4} \times 6 = -\dfrac{6}{4} = -\dfrac{3}{2}$

6. A e D são os pontos de interseção do gráfico de f com o eixo Ox
Determinemos estes pontos

$f(x) = 0 \Leftrightarrow \log_3(x^2 - 1) - 1 = 0 \wedge (x < -1 \vee x > 1) \Leftrightarrow \log_3(x^2 - 1) = 1 \wedge (x < -1 \vee x > 1) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x^2 - 1 = 3 \wedge (x < -1 \vee x > 1) \Leftrightarrow x^2 = 4 \wedge (x < -1 \vee x > 1) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow (x = -2 \vee x = 2) \wedge (x < -1 \vee x > 1) \Leftrightarrow x = -2 \vee x = 2$
Assim, $A(-2; f(-2))$ e $D(2; f(2))$
Portanto, $\overline{AD} = |2 - (-2)| = 4$

B e C têm ordenada igual a -1

$f(x) = -1 \Leftrightarrow \log_3(x^2 - 1) - 1 = -1 \wedge (x < -1 \vee x > 1) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \log_3(x^2 - 1) = 0 \wedge (x < -1 \vee x > 1) \Leftrightarrow x^2 - 1 = 1 \wedge (x < -1 \vee x > 1) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x^2 = 2 \wedge (x < -1 \vee x > 1) \Leftrightarrow (x = -\sqrt{2} \vee x = \sqrt{2}) \wedge (x < -1 \vee x > 1) \Leftrightarrow x = -\sqrt{2} \vee x = \sqrt{2}$
Assim, $B(-\sqrt{2}; -1)$ e $c(\sqrt{2}; -1)$
Portanto, $\overline{BC} = |\sqrt{2} - (-\sqrt{2})| = 2\sqrt{2}$

Logo, $A_{trapezio} = \dfrac{\overline{AD}+\overline{BC}}{2} \times |ordenadadeB| = \dfrac{4+2\sqrt{2}}{2} \times 1 = 2+\sqrt{2}\ u.a.$

7. Determinemos a função derivada de h

$h'(x) = \left(\ln(x^2-1)-1\right)' = \dfrac{(x^2-1)'}{x^2-1} - 0 = \dfrac{2x}{x^2-1}$

Então, o declive da reta t_2 é igual a $m_{t_2} = h'(-\sqrt{2}) = \dfrac{2\times(-\sqrt{2})}{(-\sqrt{2})^2-1} = -2\sqrt{2}$, e o declive da reta t_1 é igual a $m_{t_1} = h'(\sqrt{2}) = \dfrac{2\times\sqrt{2}}{(\sqrt{2})^2-1} = 2\sqrt{2}$

A ordenada do ponto P é $h(-\sqrt{2}) = \ln((-\sqrt{2})^2-1)-1 = \ln(1)-1 = -1$
A ordenada do ponto Q é $h(\sqrt{2}) = \ln((\sqrt{2})^2-1)-1 = \ln(1)-1 = -1$

Assim, a reta t_1 é da forma $y = 2\sqrt{2}x+b$, como a reta passa no ponto Q, vem,

$-1 = 2\sqrt{2}\times\sqrt{2}+b \Leftrightarrow -1 = 4+b \Leftrightarrow b=-5$
Logo, $t_1 : y = 2\sqrt{2}x-5$

e

a reta t_2 é da forma $y = -2\sqrt{2}x+b$, como a reta passa no ponto P, vem,

$-1 = -2\sqrt{2}\times(-\sqrt{2})+b \Leftrightarrow -1 = 4+b \Leftrightarrow b=-5$
Logo, $t_2 : y = -2\sqrt{2}x-5$

As duas retas têm a mesma ordenada na origem, pelo que se intersetam no ponto $(0;-5)$

8. 8.1. $t=0 \twoheadrightarrow f(0) = 50\times(e^{-0.3\times 2}-e^{-2\times 2}) = 50\times(e^{-0.6}-e^{-4}) \approx 26.5mg/l$
A quantidade de medicamento existente no organismo ao fim de 2 horas é de, aproximadamente, $26.5mg/l$.

8.2. .

Pretende-se resolver a condição $f(t) > 5$
Inserir as funções $y_1 = 50(e^{-0.3t}-e^{-2t})$ e $y_2 = 5$
Desenhar os gráficos das duas funções e procurar os pontos de interseção

$7.68 - 0.06 = 7.62$
Durante, aproximadamente, 7.6 horas, é garantida a quantidade mínima de medicamento no organismo.

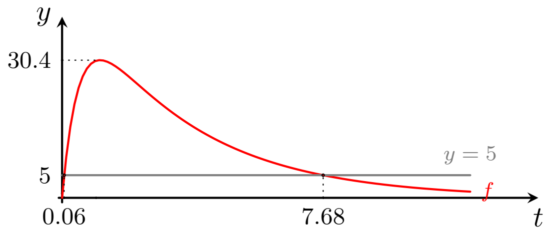

Figura 1

Caderno 2

9. Determinemos a função derivada de g

$$g'(x) = (e^{-x^2+1} + x^2 - 1)' = (-x^2+1)' \times e^{-x^2+1} + 2x - 0 = -2x \times e^{-x^2+1} + 2x = 2x(1 - e^{-x^2+1})$$

Determinemos os zeros de g'

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x(1 - e^{-x^2+1}) = 0 \Leftrightarrow 2x = 0 \vee 1 - e^{-x^2+1} = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee e^{-x^2+1} = 1 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x = 0 \vee e^{-x^2+1} = e^0 \Leftrightarrow x = 0 \vee -x^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x^2 = 1 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = -1 \vee x = 1$$

sinal de g'

$$g'(x) > 0 \Leftrightarrow 1 - e^{-x^2+1} > 0 \Leftrightarrow -e^{-x^2+1} > -1 \Leftrightarrow e^{-x^2+1} < 1 \Leftrightarrow e^{-x^2+1} < e^0 \Leftrightarrow -x^2 + 1 < 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x < -1 \vee x > 1$$

Quadro de sinal de g' e de variação de g

x	$-\infty$	-1		0		1	$+\infty$
$2x$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$1 - e^{-x^2+1}$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$g'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$g(x)$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$e-1$	$\searrow$	1	$\nearrow$

$g(0) = e^{-0^2+1} + 0^2 - 1 = e - 1$
$g(-1) = e^{-(-1)^2+1} + (-1)^2 - 1 = 1$
$g(1) = e^{-1^2+1} + 1^2 - 1 = 1$

A função g é estritamente decrescente em $]-\infty; -1[$ e em $]0; 1[$, é estritamente crescente em $]-1; 0[$ e em $]1; +\infty[$, e atinge o valor mínimo absoluto 1 para $x = -1$ ou para $x = 1$, e um máximo relativo $e - 1$, para $x = 0$
Assim, $A(-1; 1)$, $b(0; e-1)$ e $C(1, 1)$

10. Sabe-se que $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{f(x)}{x} = -3$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{e^{-\ln\left(\frac{1}{x^2}\right)} - f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{e^{\ln(x^2)} - f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2 - f(x)}{x} =$$
$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2}{x} - \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} (x) - (-3) = -\infty + 3 = -\infty$$

Resposta: A

11. $f'(x) = \left(e^{mx+b}\right)' = (mx+b)' \times e^{mx+b} = m \times e^{mx+b} = me^{mx+b}$

$f(-x) = e^{m(-x)+b} = e^{-mx+b}$

Assim, $f'(x) \times \dfrac{f(-x)}{m} = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow me^{mx+b} \times \dfrac{e^{-mx+b}}{m} = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow e^{mx+b} \times e^{-mx+b} = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow$
$$\Leftrightarrow e^{mx+b-mx+b} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow e^{2b} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2b = \ln\left(\frac{1}{2}\right) \Leftrightarrow 2b = -\frac{1}{2}\ln(2) \Leftrightarrow b = -\ln\left(2^{\frac{1}{2}}\right) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow b = -\ln(\sqrt{2})$$

Resposta: C

12. .

12.1. $-1 \in D_f$ e é ponto aderente de D_f

A função f é contínua em $x=-1$ se e só se, existir $\lim\limits_{x\to -1} f(x)$

$$\lim_{x\to -1^-} f(x) = \lim_{x\to -1^-}\left[\frac{e^{2x+2}-e^{x+1}}{x+1}+\frac{1-e}{e}\right] = \lim_{x\to -1^-}\frac{e^{2x+2}-e^{x+1}}{x+1} + \lim_{x\to -1^-}\frac{1-e}{e} =$$
$$= \lim_{x\to -1^-}\frac{e^{2(x+1)}-e^{x+1}}{x+1} + \frac{1-e}{e} = \lim_{x\to -1^-}\frac{e^{x+1}(e^{x+1}-1)}{x+1} + \frac{1-e}{e} =$$
$$= \lim_{x\to -1^-}(e^{x+1}) \times \lim_{x+1\to 0^-}\frac{e^{x+1}-1}{x+1} + \frac{1-e}{e} = e^{-1+1}\times 1 + \frac{1-e}{e} = 1+\frac{1}{e}-1 = \frac{1}{e}$$

Aplicou-se o limite notável $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x} = 1$

$$\lim_{x\to -1^+} f(x) = \lim_{x\to -1^+}\left[\frac{\ln(x+2)}{x+1}-1+\frac{1}{e}\right] = \lim_{x\to -1^+}\frac{\ln(x+2)}{x+1} + \lim_{x\to -1^+}\left(-1+\frac{1}{e}\right) =$$
$$= \lim_{y\to -0^+}\frac{y}{e^y-1} - 1 + \frac{1}{e} = \frac{1}{\lim\limits_{y\to -0^+}\dfrac{e^y-1}{y}} - 1 + \frac{1}{e} = \frac{1}{1} - 1 + \frac{1}{e} = \frac{1}{e}$$

Fez-se
$y=\ln(x+2) \Leftrightarrow x = e^y-2$
Se $x\to -1^+$, então, $x\to -0^+$

Aplicou-se o limite notável $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x} = 1$

$f(-1) = \ln\left(e^{\frac{1}{e}}\right) = \dfrac{1}{e}$

Como, $\lim\limits_{x\to -1^-} f(x) = f(-1)$ e $\lim\limits_{x\to -1^+} f(x) = f(-1)$, então, existe $\lim\limits_{x\to -1} f(x)$

Portanto, a função é contínua em $x=-1$

12.2. $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to +\infty}\left[\dfrac{\ln(x+2)}{x+1}-1+\dfrac{1}{e}\right] = \lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\ln(x+2)}{x+1} + \lim\limits_{x\to +\infty}\left(-1+\dfrac{1}{e}\right) =$

$$\lim_{y\to +\infty}\frac{\ln(y)}{y-2+1} - 1 + \frac{1}{e} = \lim_{y\to +\infty}\frac{\ln(y)}{y-1} - 1 + \frac{1}{e} = \lim_{y\to +\infty}\frac{\ln(y)}{y} \times \lim_{y\to +\infty}\frac{y}{y-1} - 1 + \frac{1}{e} =$$
$$= 0 \times \frac{1}{\lim\limits_{y\to +\infty}\dfrac{y-1}{y}} - 1 + \frac{1}{e} = 0 \times \frac{1}{\lim\limits_{y\to +\infty}\left(1-\dfrac{1}{y}\right)} - 1 + \frac{1}{e} = 0 \times \frac{1}{1-0} - 1 + \frac{1}{e} = -1 + \frac{1}{e}$$

Fez-se
$y = x+2 \Leftrightarrow x = y-2$
Se $x\to +\infty$, então, $y\to +\infty$

Aplicou-se o limite notável $\lim\limits_{y\to +\infty}\dfrac{\ln(y)}{y} = 0$

Logo, a reta de equação $y = -1+\dfrac{1}{e}$ é assíntota paralela ao eixo das abcissas, quando $x\to +\infty$

13. $\log_7(x+2) \geq \log_7(6-2x) - \log_7(x) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \log_7(x+2) \geq \log_7\left(\dfrac{6-2x}{x}\right) \wedge x+2>0 \wedge 6-2x>0 \wedge x>0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x+2 \geq \dfrac{6-2x}{x} \wedge x>-2 \wedge x<3 \wedge x>0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x+2-\dfrac{6-2x}{x} \geq 0 \wedge 0<x<3 \Leftrightarrow \dfrac{x^2+2x-6+2x}{x} \geq 0 \wedge 0<x<3 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \dfrac{x^2+4x-6}{x} \geq 0 \wedge 0<x<3$

Cálculos auxiliares

$$x^2+4x-6=0 \Leftrightarrow x=\frac{-4 \pm \sqrt{4^2-4\times 1\times(-6)}}{2\times 1} \Leftrightarrow x=-2-\sqrt{10} \vee x=-2+\sqrt{10}$$

Quadro de sinal (**atendendo ao domínio da inequação**)

x	0		$-2+\sqrt{10}$		3
x^2+4x-6	\\\	$-$	0	$+$	\\\
x	\\\	$+$	$+$	$+$	\\\
$\dfrac{x^2+4x-6}{x}$	\\\	$-$	0	$+$	\\\

Assim,

$$\frac{x^2+4x-6}{x} \geq 0 \wedge 0<x<3 \Leftrightarrow -2+\sqrt{10}<x<3$$

Então, $C.S. =]-2+\sqrt{10};3[$