Resolução

Matemática A – 12º ano • Prova Modelo de Exame 2 • 2020

1. Como ${}^{n}C_{n-5} = {}^{n}C_5$ e ${}^{n}C_4 + {}^{n}C_5 = {}^{n+1}C_5$, vem que ${}^{n}C_4 + {}^{n}C_{n-5} + {}^{n+1}C_6 = {}^{n+1}C_5 + {}^{n+1}C_6 = {}^{n+2}C_6$. Uma vez que ${}^{n+2}C_6$ é o termo central de uma linha do Triângulo de Pascal, tem-se que $n + 2 = 12 \Leftrightarrow n = 10$.

O desenvolvimento $\left(ax^2 + \frac{1}{ax}\right)^{10}$ é tal que cada um dos seus termos é dado por:

$${}^{10}C_k \left(ax^2\right)^{10-k} \left(\frac{1}{ax}\right)^k = {}^{10}C_k\, a^{10-k} \left(x^2\right)^{10-k} a^{-k} x^{-k} = \left({}^{10}C_k\, a^{10-2k}\right) x^{2(10-k)-k} = \left({}^{10}C_k\, a^{10-2k}\right) x^{20-3k}$$

O termo de grau 2 obtém-se para $20 - 3k = 2 \Leftrightarrow k = 6$, e o coeficiente desse termo é dado por ${}^{10}C_6\, a^{10-2\times 6} = \frac{{}^{10}C_6}{a^2}$. Uma vez que, pelo enunciado, sabe-se que o termo de grau 2 tem coeficiente $\frac{70}{3}$, vem:

$$\frac{{}^{10}C_6}{a^2} = \frac{70}{3} \Leftrightarrow a = \pm\sqrt{\frac{3 \times {}^{10}C_6}{70}} \overset{a\in\mathbb{R}^+}{\Leftrightarrow} a = 3$$

Resposta: (C)

2.

2.1. O ponto A é o ponto da reta AB que pertence ao eixo Ox, pelo que as suas coordenadas são da forma $(x_A,0,0)$. As coordenadas genéricas de um ponto da reta AB podem ser escritas como $(x,y,z) = (-2-k,6+k,0)$, $k \in \mathbb{R}$. Ao ponto A corresponde o valor de k tal que $6 + k = 0 \wedge 0 = 0 \Leftrightarrow k = -6$, vindo que a abcissa do ponto A é $-2-(-6) = 4$. Conclui-se que o ponto A é o ponto de coordenadas $(4,0,0)$.

Como o ponto P é o ponto de interseção da reta AB com o plano β, as suas coordenadas respeitam as coordenadas genéricas da reta AB e a equação geral do plano β, logo obtém-se:

$3(-2-k) + 4(6+k) + 0 = 15 \Leftrightarrow -6 - 3k + 24 + 4k = 15 \Leftrightarrow k = -3 \Leftrightarrow k = -1$

concluindo-se que o ponto P é o ponto de coordenadas $(-2-(-3),6-3,0) = (1,3,0)$.

Designando por θ a amplitude do ângulo AOP, pode-se escrever $\cos\theta = \dfrac{\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OP}}{\left\|\overrightarrow{OA}\right\| \times \left\|\overrightarrow{OP}\right\|}$, tal que:

- $\overrightarrow{OA} = A - O = A = (4,0,0)$, vindo que $\left\|\overrightarrow{OA}\right\| = 4$
- $\overrightarrow{OP} = P - O = P = (1,3,0)$, vindo que $\left\|\overrightarrow{OP}\right\| = \sqrt{(1^2 + 3^2 + 0^2} = \sqrt{10}$
- $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OP} = (4,0,0)\cdot(1,3,0) = 4$

$\therefore \cos\theta = \frac{4}{4\sqrt{10}} = \frac{1}{\sqrt{10}}$, pelo que a âmplitude do ângulo AOP, com arredondamento às unidades é, $\theta = \cos^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{10}}\right) \approx 72^o$.

2.2. O plano EFG é paralelo ao plano ABC e contém o ponto H, pelo que comecemos por determinar um vetor normal ao plano ABC.

A reta AB está contida no plano ABC, assim como, a título de exemplo, a reta AC. Sabe-se que a reta AB tem a direção do vetor $(-1,1,0)$ e a reta AC tem a direção do vetor $\overrightarrow{AC} = C - A = (1,1,1) - (4,0,0) = (-3,1,1)$. Designando por $\vec{n}$ um vetor normal ao plano ABC, tal que $\vec{n} = (a,b,c)$, pode-se escrever:

$$\begin{cases} \vec{n}\cdot\overrightarrow{AB} = 0 \\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{AC} = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} (a,b,c)\cdot(-1,1,0) = 0 \\ (a,b,c)\cdot(-3,1,1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -a + b = 0 \\ -3a + b + c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = b \\ c = 2b \end{cases}$$

pelo que um vetor normal ao plano ABC é o vetor $\vec{n}(b,b,2b)$, $b \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$. Por exemplo, para $b = 1$, obtém-se $\vec{n}(1,1,2)$.

Note que como EFG é paralelo ao plano ABC, a direção do vetor normal ao plano EFG é a mesma da de $\vec{n}$. Desta forma, uma equação geral do plano EFG é da forma $x + y + 2z + d = 0$. Uma vez que H está contido em EFG, tem-se $5 + 1 + 2 \times 2 + d = 0 \Leftrightarrow d = -10$, de onde se conclui que o plano EFG é definido pela equação $x + y + 2z = 10$.

3. Note-se que o número de casos possíveis corresponde ao total de números de sete algarismos que se podem formar. Logo, o número de casos possíveis é 9×10^6 (o algarismo 0 não pode ser o primeiro algarismo).

Como os números que são elementos de A contém um 2, um 3 e um 4, comecemos por dispor esses três números nas sete possíveis posições: ${}^7C_3$. Como os números terão de estar dispostos por ordem crescente ou decrescente, existem $2 \times {}^7C_3$ formas de dispor esses três números nas condições do enunciado. Uma vez que nenhum dos algarismos dos números pertencentes a A é igual a 0, e não existem quaisquer números repetidos, os restantes 4 algarimos podem ser escolhidos de ${}^6A_4$ formas diferentes. Logo, o número de casos favoráveis é $2 \times {}^7C_3 \times {}^6A_4$.

Pela Regra de Laplace obtém-se que a probabilidade pedida é $p = \dfrac{{}^7C_3 \times {}^6A_4}{9 \times 10^6} = \dfrac{7}{2500}$.

Resposta: (A)

4.

4.1. Seja A o acontecimento "o livro escolhido é do 12° ano", e B o acontecimento "o livro escolhido é um manual". Do enunciado, vem que: $P(A) = 3P(\overline{A})$, $P(B|A) = \dfrac{2}{5}$ e $P(\overline{A}|\overline{B}) = 30\% = \dfrac{3}{10}$.

Pretende-se determinar $P(B)$.

Começando por notar que $P(A) = 3P(\overline{A}) \Leftrightarrow 1 - P(\overline{A}) = 3P(\overline{A}) \Leftrightarrow P(\overline{A}) = \dfrac{1}{4} \Leftrightarrow P(A) = \dfrac{3}{4}$, tem-se:

$$\begin{aligned}
P(B) &= P(A \cap B) + P(\overline{A} \cap B) = P(B|A) \times P(A) + P(\overline{A}) - P(\overline{A} \cap \overline{B}) \\
&= P(B|A) \times P(A) + P(\overline{A}) - P(\overline{A}|\overline{B}) \times P(\overline{B}) \\
&= \frac{2}{5} \times \frac{3}{4} + \frac{1}{4} - \frac{3}{10}(1 - P(B)) = \frac{3}{10} + \frac{1}{4} - \frac{3}{10} + \frac{3}{10}P(B) \\
&= \frac{1}{4} + \frac{3}{10}P(B)
\end{aligned}$$

de onde vem $P(B) = \dfrac{1}{4} + \dfrac{3}{10}P(B) \Leftrightarrow P(B) = \dfrac{1/4}{7/10} = \dfrac{5}{14}$.

4.2. Dos 140 livros da estante do Professor, sabe-se que $140 \times \dfrac{3}{4} = 105$ desses são do 12° ano, e $140 - 105 = 35$ livros são do 10° ou 11° ano. Entre esses, sabe-se que dois em cada cinco são manuais, pelo que existem 42 manuais do 12° ano e $105 - 42 = 63$ livros de exercícios do 12° ano.

Como pelo menos 9 dos 10 livros doados deverão ser do 12° ano e exatamente 5 desses mesmos deverão ser manuais do 12° ano, existem duas possibilidades de escolher os livros:

- são doados 9 livros do 12° ano e 1 livro de um outro ano, sabendo que 5 desses 9 livros do 12° ano deverão ser manuais: ${}^{42}C_5 \times {}^{63}C_4 \times {}^{35}C_1$;
- são doados 10 livros do 12° ano, sabendo que 5 desses 10 livros do 12° ano deverão ser manuais: ${}^{42}C_5 \times {}^{63}C_5$;

Desta forma, a escolha dos livros pode ser feita de ${}^{42}C_5 \times {}^{63}C_4 \times {}^{35}C_1 + {}^{42}C_5 \times {}^{63}C_5 = {}^{42}C_5 \times \left({}^{63}C_4 \times 35 + {}^{63}C_5\right)$.

5. Designe-se a reta tangente ao gráfico de f no ponto P, ponto do gráfico de f de abcissa a, por s. A reta s tem declive $m_s = f'(a)$. Uma vez que a reta r é perpendicular à reta s, tem-se que o seu declive, m_r, é tal que $m_r = -\dfrac{1}{m_s}$.

Tem-se que:

$$f'(x) = \left(5 - x^2e^{0,01x} + \ln x\right)' = (5)' - \left[(x^2)'\left(e^{0,01x}\right) + x^2\left(e^{0,01x}\right)'\right] + (\ln x)' = -2xe^{0,01x} - 0,01x^2e^{0,01x} + \frac{1}{x}$$

Sabe-se ainda que $[OQ]$ é um lado de um quadrado cuja medida da área é 2 u.a. Logo, pode-se escrever $\overline{OQ}^2 = 2 \overset{\overline{OQ}>0}{\Leftrightarrow} \overline{OQ} = \sqrt{2}$. Desta forma, como o ponto Q pertence ao eixo Ox, sabe-se que $Q\left(-\sqrt{2},0\right)$ ou $Q\left(\sqrt{2},0\right)$. Esse ponto Q é também a interseção da reta r com o eixo Ox.

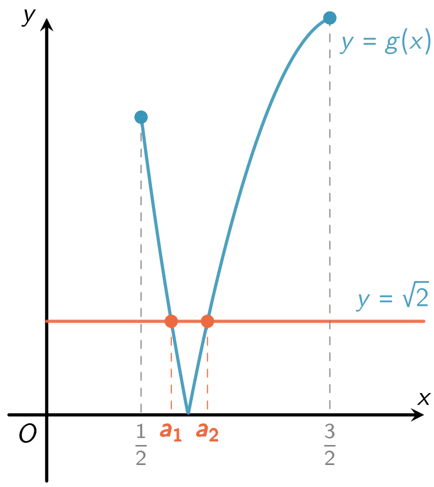
A equação da reta r é $y = m_r x + b$, tal que $y = -\frac{1}{m_s}x + b \Leftrightarrow y = -\frac{1}{f'(a)}x + b$.

Como passa em $(a, f(a))$, tem-se:

$f(a) = -\frac{a}{f'(a)} + b \Leftrightarrow b = f(a) + \frac{a}{f'(a)}$, pelo que a reta r é definida pela equação $y = -\frac{1}{f'(a)}x + f(a) + \frac{a}{f'(a)}$.

Como a reta r contém o ponto Q têm-se duas hipóteses:

- Se $Q\left(-\sqrt{2}, 0\right)$, tem-se $\frac{\sqrt{2}}{f'(a)} + f(a) + \frac{a}{f'(a)} = 0 \overset{f'(a)\neq 0}{\Leftrightarrow} f'(a)\cdot f(a) + a = -\sqrt{2}$;
- Se $Q\left(\sqrt{2}, 0\right)$, tem-se $-\frac{\sqrt{2}}{f'(a)} + f(a) + \frac{a}{f'(a)} = 0 \overset{f'(a)\neq 0}{\Leftrightarrow} f'(a)\cdot f(a) + a = \sqrt{2}$;
- Equivalentemente às duas condições acima, pode-se optar por resolver $\left|f'(a)\cdot f(a) + a\right| = \sqrt{2}$.



Na figura acima está representado o gráfico de $g(x) = \left|f'(x)\cdot f(x) + x\right|$ em $\left[\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right]$. Recorrendo às capacidades gráficas da calculadora poderão determinar-se as soluções da equação $g(x) = \sqrt{2}$. Conclui-se então que existem dois pontos que são solução da equação acima. As abcissas desses mesmos são os possíveis valores de a: $a \approx 0{,}66$ e $a \approx 0{,}85$ (representados na figura como a_1 e a_2, respetivamente).

6. Uma vez que $v_{n+1} - \frac{2}{3}v_n = 0 \Leftrightarrow \frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{2}{3}, \forall n \in \mathbb{N}$, tem-se que (v_n) é uma progressão geométrica de razão $r = \frac{2}{3}$.

Tem-se ainda:

$$v_2 \times v_3 = \frac{9}{2} \Leftrightarrow v_2 \times (v_2 \times r) = \frac{9}{2} \Leftrightarrow (v_2)^2 \times \frac{2}{3} = \frac{9}{2} \Leftrightarrow v_2 = \pm\sqrt{\frac{9/2}{2/3}} \overset{(1)}{\Leftrightarrow} v_2 = \sqrt{\frac{27}{4}} \Leftrightarrow v_2 = \frac{3\sqrt{3}}{2} \Rightarrow v_1 = \frac{v_2}{r} = \frac{\frac{3\sqrt{3}}{2}}{2/3} = \frac{9\sqrt{3}}{4}.$$

em que se usou o facto de (v_n) ser uma sucessão de termos positivos em (1).

O termo geral de (v_n) é $v_n = v_1 \times r^{n-1} = \frac{9\sqrt{3}}{4}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$.

De forma a que $\frac{8\sqrt{3}}{27}$ seja um termo de (v_n) é necessário que exista um $k \in \mathbb{N}$ tal que $v_k = \frac{8\sqrt{3}}{27}$. Ora:

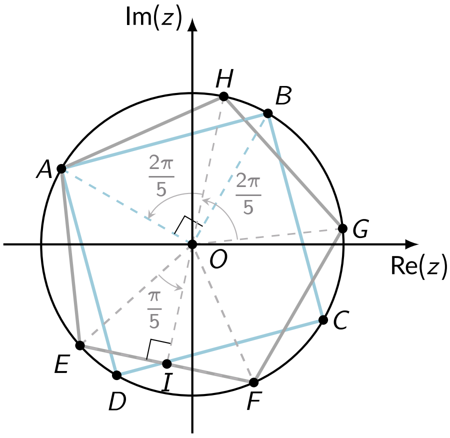
$$v_k = \frac{8\sqrt{3}}{27} \Leftrightarrow \frac{9\cancel{\sqrt{3}}}{4}\left(\frac{2}{3}\right)^{k-1} = \frac{8\cancel{\sqrt{3}}}{27} \Leftrightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^{k-1} = \frac{8\times 4}{27\times 9} \Leftrightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^{k-1} = \frac{2^5}{3^5} \Leftrightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^{k-1} = \left(\frac{2}{3}\right)^5 \Leftrightarrow k-1 = 5 \Leftrightarrow k = 6$$

pelo que se conclui que $\frac{8\sqrt{3}}{27}$ é o termo de ordem 6 de (v_n).

7. Tem-se que $|w| = \sqrt{\left(-2\sqrt{3}\right)^2 + 2^2} = \sqrt{12+4} = \sqrt{16} = 4$, e $\operatorname{Arg}(-2\sqrt{3} + 2i) = \operatorname{tg}^{-1}\left(\frac{2}{-2\sqrt{3}}\right) = \left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) \overset{(1)}{=} \frac{5\pi}{6}$, em que se usou o facto do afixo de w pertencer ao 3º quadrante em (1).

Com auxílio da figura abaixo vão ser analisadas cada uma das afirmações:

- Note-se que o triângulo $[ABO]$ é retângulo em O, logo $\overline{OA}^2 + \overline{OB}^2 = \overline{AB}^2$. Como $|w| = \overline{OA} = \overline{OB}$, tem-se que $\overline{AB}^2 = 4^2 + 4^2 = 32$. Visto que a área do quadrado $[ABCD]$ é dada por $\overline{AB}^2$, conclui-se que a área é 32 u.a. A afirmação **(A)** é **verdadeira**.
- A e G são afixos de duas raízes quintas de um mesmo número complexo. Como $G\hat{O}A = G\hat{O}H + H\hat{O}A = \frac{2\pi}{5} + \frac{2\pi}{5} = \frac{4\pi}{5}$, pode-se escrever que G é o afixo do número complexo w_G, tal que $|w_G| = |w| = 4$ e $\operatorname{Arg}(w_G) = \operatorname{Arg}(w) - \frac{4\pi}{5} = \frac{5\pi}{6} - \frac{4\pi}{5} = \frac{\pi}{30}$. Logo, $w_G = 4e^{i\left(\frac{\pi}{30}\right)}$. A afirmação **(B)** é **verdadeira**.



- Tem-se que $z^5 - z^4 = 0 \Leftrightarrow z\left(z^4 - 1\right) = 0 \Leftrightarrow z = 0 \vee z^4 = 1$. Toda e qualquer raíz quarta de 1 tem módulo 1. Como $|w| = 4$, tem-se que $\sqrt[4]{|w|} = \sqrt[4]{4} \neq 1$, logo w não é solução da equação $z^5 - z^4 = 0$. A afirmação **(C)** é **falsa**.

- Note-se que o perímetro de $[AHGFE]$ é dado por $5 \times \overline{EF} = 5 \times \left(2\overline{EI}\right) = 10\,\overline{EI}$. Como o triângulo $[EOI]$ é retângulo em I e $\overline{EO} = |w| = 4$, pode-se escrever $\operatorname{sen}\frac{\pi}{5} = \frac{\overline{EI}}{\overline{EO}} = \frac{\overline{EI}}{4}$, de onde vem $\overline{EI} = 4\operatorname{sen}\frac{\pi}{5}$. Desta forma, o perímetro de $[AHGFE]$ é $40\operatorname{sen}\frac{\pi}{5} \approx 23{,}5$ u.a. A afirmação **(D)** é **verdadeira**.

Resposta: (C)

8. Como $i^{17} = i^{16} \times i = 1 \times i = i$, e $(w_1)^2 = \left(1 + \sqrt{3}i\right) = (1 + \sqrt{3}i)(1 + \sqrt{3}i) = 1 + 2\sqrt{3}i + \left(\sqrt{3}i\right)^2 = 1 + 2\sqrt{3}i - 3 = -2 + 2\sqrt{3}i$, tem-se:

$$w = \frac{(w_1)^2}{1+i} - w_2 = \frac{-2 + 2\sqrt{3}i}{1+i} - (i + \sqrt{3}) = \frac{\left(-2 + 2\sqrt{3}i\right)(1-i)}{(1+i)(1-i)} - \sqrt{3} - i = \frac{-2 + 2i + 2\sqrt{3}i - 2\sqrt{3}i^2}{1^2 - i^2} - \sqrt{3} - i$$

$$= \frac{-2 + 2\sqrt{3} + 2i + 2\sqrt{3}i}{2} - \sqrt{3} - i = -1 + \sqrt{3} + i + \sqrt{3}i - \sqrt{3} - i = -1 + \sqrt{3}i$$

tal que $|w| = \sqrt{(-1)^2 + \left(\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{1+3} = \sqrt{4} = 2$ e $\operatorname{Arg}(w) = \operatorname{tg}^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{-1}\right) = \operatorname{tg}^{-1}\left(-\sqrt{3}\right) \overset{(1)}{=} \frac{2\pi}{3}$, em que se usou o facto do afixo de w pertencer ao 2º quadrante em (1).

Considerando um número complexo $z = a + bi$, tem-se que $\operatorname{Re}(z + i) = \operatorname{Re}(a + bi + i) = \operatorname{Re}(a + (b+1)i) = a = \operatorname{Re}(z)$, e ainda que $\operatorname{Im}(\overline{z} + i) = \operatorname{Im}(a - bi + i) = \operatorname{Im}(a + (1-b)i) = 1 - b = 1 - \operatorname{Im}(z)$.

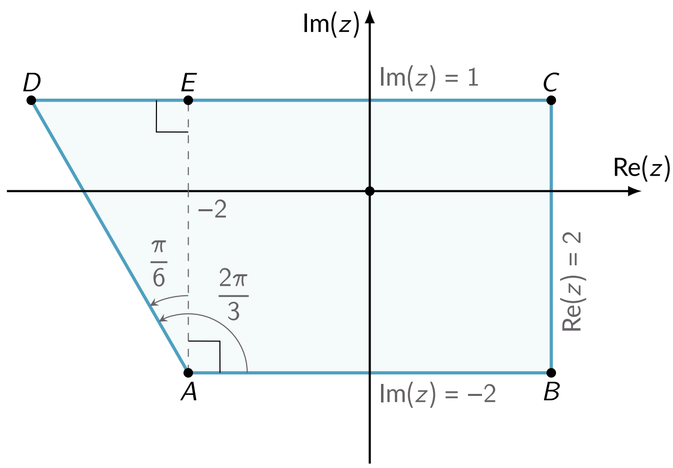
Desta forma, pode-se escrever:

$\operatorname{Re}(z + i) \leq 2 \wedge \operatorname{Im}(\overline{z} + i) \geq 0 \Leftrightarrow \operatorname{Re}(z) \leq 2 \wedge 1 - \operatorname{Im}(z) \geq 0 \Leftrightarrow \operatorname{Re}(z) \leq 2 \wedge \operatorname{Im}(z) \leq 1$.

E portanto:

$0 \leq \operatorname{Arg}(z + 2 + 2i) \leq \operatorname{Arg}(w) \wedge \operatorname{Re}(z + i) \leq 2 \wedge \operatorname{Im}(\overline{z} + i) \geq 0 \Leftrightarrow 0 \leq \operatorname{Arg}(z + 2 + 2i) \leq \frac{2\pi}{3} \wedge \operatorname{Re}(z) \leq 2 \wedge \operatorname{Im}(z) \leq 1$.

O quadrilátero representado por esta condição está esboçado na figura abaixo, na qual A é afixo de $-2 - 2i$.



Como $B\hat{A}D = B\hat{A}E + E\hat{A}D \Leftrightarrow \frac{2\pi}{3} = \frac{\pi}{2} + E\hat{A}D \Leftrightarrow E\hat{A}D = \frac{\pi}{6}$, vem que $\operatorname{sen}\frac{\pi}{6} = \frac{\overline{ED}}{\overline{EA}} \Leftrightarrow \overline{ED} = 3 \times \frac{\sqrt{3}}{3} = \sqrt{3}$.

A área do quadrilátero $[ABCD]$ é dada por: $\left(\frac{\overline{AB} + \overline{CD}}{2}\right) \times \overline{CB} = \left(\frac{4 + 4 + \sqrt{3}}{2}\right) \times 3 = \frac{24 + 3\sqrt{3}}{2}$.

9.

9.1. Tem-se que $\lim u_n = \lim \frac{n^2-n}{n-1} = \lim \frac{n^2}{n} = \lim n = +\infty$, pelo que $\lim(-u_n) = -\infty$.

Desta forma, conclui-se que:

$$\lim g(-u_n) = \lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{x^2+x+4}}{x+1} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x}+\frac{4}{x^2}\right)}}{x+1} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{x^2}}{x+1} \times \lim_{x\to-\infty} \sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{4}{x^2}}$$

$$\overset{(1)}{=} \lim_{x\to-\infty} \frac{-x}{x+1} \times \sqrt{1+\frac{1}{+\infty}+\frac{4}{+\infty}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{-x}{x} \times \sqrt{1+0+0} = -1\times 1 = -1$$

em que se usou o facto de $\sqrt{x^2} = |x| = -x, \forall x < 0$ em (1).

Resposta: (B)

9.2. Para $x \geq -1$ tem-se $g(x) = 8^x - 13\times 4^x = 2^{3x} - 13\times 2^{2x}$. Tem-se então:

$$g(x) + 9\times 2^{x+2} \geq 0 \Leftrightarrow 2^{3x} - 13\times 2^{2x} + 9\times 2^{x+2} \geq 0 \Leftrightarrow 2^x\left(2^{2x} - 13\times 2^x + 9\times 2^2\right) \geq 0 \overset{(1)}{\Leftrightarrow} 2^{2x} - 13\times 2^x + 36 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \left(2^x\right)^2 - 13\times 2^x + 36 \geq 0$$

em que se usou o facto de $2^x > 0, \forall x \geq -1$ em (1).

Note-se que:

$$\left(2^x\right)^2 - 13\times 2^x + 36 = 0 \Leftrightarrow 2^x = \frac{-(-13)\pm\sqrt{(-13)^2-4\times 1\times 36}}{2\times 1} \Leftrightarrow 2^x = \frac{13\pm\sqrt{25}}{2} \Leftrightarrow 2^x = \frac{13\pm 5}{2}$$

$$\Leftrightarrow 2^x = 4 \vee 2^x = 9 \Leftrightarrow x = \log_2 4 \vee x = \log_2 9 \Leftrightarrow x = 2 \vee x = \log_2 9$$

Concluindo-se que $g(x) + 9\times 2^{x+2} \geq 0 \Leftrightarrow \left(2^x-4\right)\left(2^x-9\right) \geq 0$.

Através de uma tabela de sinal, obtém-se:

x	-1		2		$\log_2 9$	$+\infty$
$2^x - 4$	−	−	0	+	+	+
$2^x - 9$	−	−	−	−	0	+
$\left(2^x-4\right)\left(2^x-9\right)$	+	+	0	−	0	+

Logo, o conjunto-solução da inequação $g(x) + 9\times 2^{x+2} \geq 0$ é $[-1, 2] \cup [\log_2 9, +\infty[$.

10. O ponto $A(x_A, y_A)$ pertence à circunferência e ao eixo Oy, logo $x_A = 0$, e portanto:

$(0-1)^2 + (y_A-2)^2 = 5 \Leftrightarrow (y_A-2)^2 = 4 \Leftrightarrow y_A - 2 = \pm 2 \Leftrightarrow y_A = 0 \vee y_A = 4$, e como $y_A > 0$, tem-se que $A(0,4)$.

A reta s tem inclinação $\frac{\pi}{4}$, pelo que o seu declive é $m_s = \operatorname{tg}\frac{\pi}{4} = 1$. Como passa em A, a sua ordenada na origem é 4, a equação reduzida que define a reta é $y = x + 4$.

A reta r é tangente à circunferência no ponto de coordenadas $(3,1)$, logo tomando $P(x,y)$ como um ponto da reta r, tem-se $\overrightarrow{BP}\cdot\overrightarrow{BC} = 0$, em que C é o centro da circunferência de coordenadas $(1,2)$.

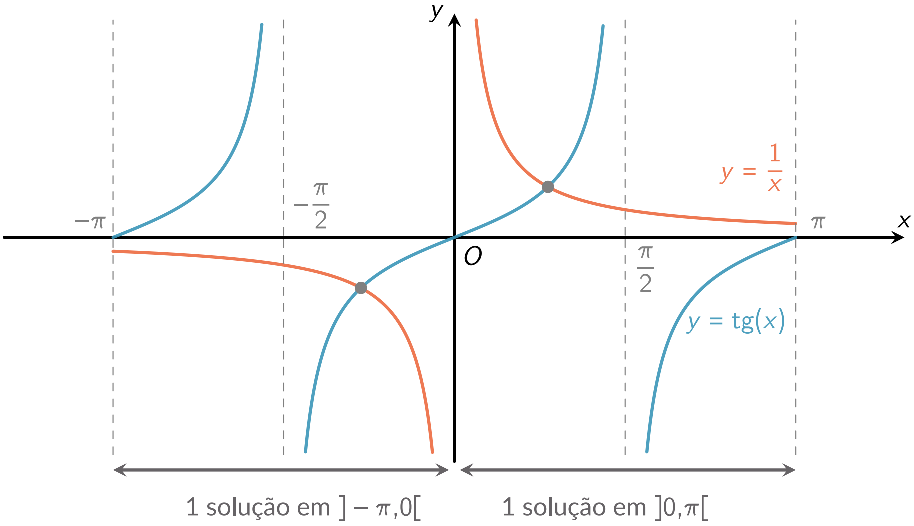
Como $\overrightarrow{BP} = P - B = (x,y) - (3,1) = (x-3, y-1)$, e $\overrightarrow{BC} = C - B = (1,2) - (3,1) = (-2,1)$, tem-se:

$\overrightarrow{BP}\cdot\overrightarrow{BC} = 0 \Leftrightarrow (x-3, y-1)\cdot(-2,1) = 0 \Leftrightarrow -2(x-3) + y - 1 = 0 \Leftrightarrow y = 2x - 5$.

O ponto de interseção das retas r e s é tal que $x + 4 = 2x - 5 \Leftrightarrow x = 9$, e a sua ordenada é $9 + 4 = 13$. Logo, as coordenadas de T são $(9,13)$.

Resposta: (D)

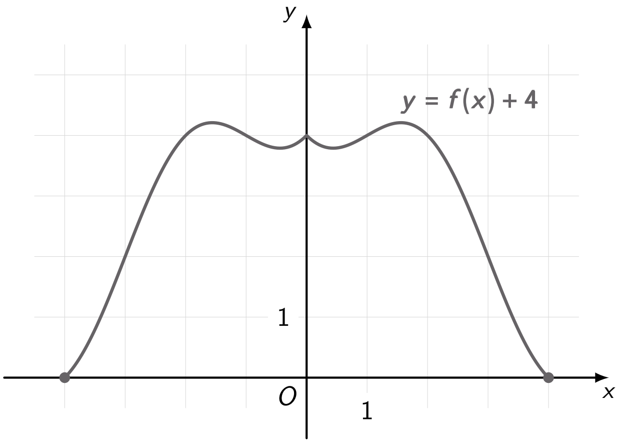
11. Repare que $x\,\mathrm{tg}\,x = 1 \Leftrightarrow \mathrm{tg}\,x = \frac{1}{x}$, pelo que em cada intervalo da forma $]k\pi, \pi + k\pi[$, $k \in \mathbb{Z}$ (ver figura abaixo), a equação tem exatamente uma solução. Logo, em $]-20\pi, 20\pi[$, a equação tem 40 soluções.



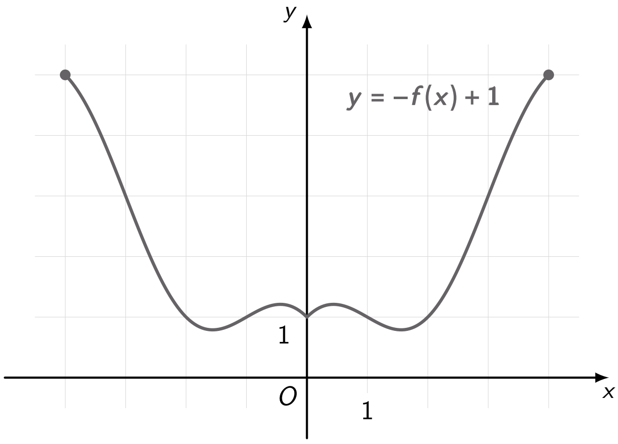
Resposta: (C)

12. A função f tem cinco zeros e é tal que o seu máximo absoluto tem valor menor que 1 e o seu mínimo valor é -4.

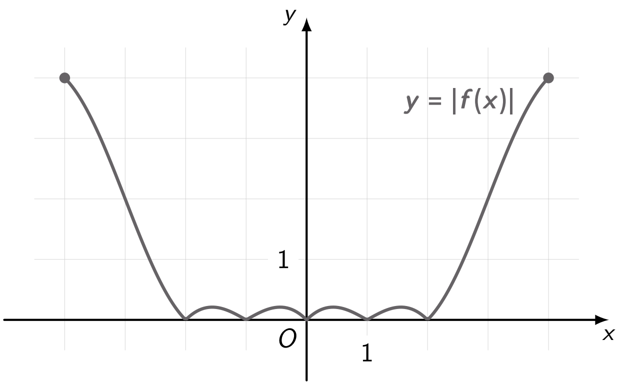
Uma vez que a função h definida por $h(x) = \ln(g(x))$ está definida em $[-4,4]$, tem-se que $g(x) > 0$, $\forall x \in [-4,4]$.



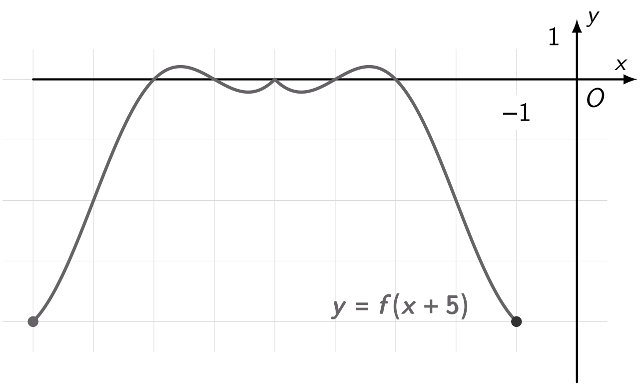
Esboço de $y = f(x) + 4$



Esboço de $y = -f(x) + 1$



Esboço de $y = |f(x)|$



Esboço de $y = f(x + 5)$

Por observação dos gráficos acima conclui-se que, entre as opções dadas, apenas $g(x) = -f(x) + 1$ é uma expressão analítica válida de forma a que a função h tenha domínio $[-4,4]$.

Resposta: (B)

13.

13.1. Averiguemos a continuidade da função f no ponto de abcissa 0. De forma a que f seja contínua nesse ponto deve verificar-se $\lim\limits_{x\to0^-} f(x) = f(0) = \lim\limits_{x\to0^+} f(x)$.

Note-se que $\lim\limits_{x\to0^-} f(x) = f(0) = \operatorname{sen}^3(0) - \cos(0) = 0 - 1 = -1$, e que:

$\lim\limits_{x\to0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to0^+} \dfrac{x^2 \ln x}{e^{2x}-1} = \lim\limits_{x\to0^+} \dfrac{x}{e^{2x}-1} \times \lim\limits_{x\to0^+} (x \ln x)$, de tal forma que:

- $\lim\limits_{x\to0^+} \dfrac{x}{e^{2x}-1} = \dfrac{1}{2} \lim\limits_{x\to0^+} \dfrac{2x}{e^{2x}-1} \overset{(1)}{=} \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{\lim\limits_{2x\to0^+} \dfrac{e^{2x}-1}{2x}} \overset{(2)}{=} \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{1} = \dfrac{1}{2}$, em que se usou o facto de $x \to 0^+ \Rightarrow 2x \to 0^+$ em (1), e o limite notável $\lim\limits_{u\to0} \dfrac{e^u - 1}{u} = 1$ em (2).
- $\lim\limits_{x\to0^+} (x \ln x) \overset{(3)}{=} \lim\limits_{y\to+\infty} \left(\dfrac{1}{y} \ln\left(\dfrac{1}{y}\right)\right) \overset{(4)}{=} -\lim\limits_{y\to+\infty} \dfrac{\ln y}{y} \overset{(5)}{=} 0$, em que se usou a mudança de variável $y = \dfrac{1}{x}$ de tal forma que $x \to 0^+ \Rightarrow y \to +\infty$ em (3), a propriedade dos logaritmos $\ln\left(\dfrac{1}{y}\right) = \ln\left(y^{-1}\right) = -\ln y$ em (4), e o limite notável $\lim\limits_{u\to+\infty} \dfrac{\ln u}{u} = 0$ em (5).

Concluindo-se que $\lim\limits_{x\to0^+} f(x) = \dfrac{1}{2} \times 0 = 0$, logo como $-1 \neq 0$, conclui-se que f não é contínua em $x = 0$ e, consequentemente, não é contínua no seu domínio.

13.2. A função f não é contínua em $x = 0$ pelo que não estão asseguradas as condições necessárias para aplicação do Teorema de Bolzano em $\left]-\dfrac{\pi}{2}, e\right[$. Conclui-se então que a afirmação **I)** é falsa.

Considerando $\cos x = \cos^2\left(\dfrac{x}{2}\right) - \operatorname{sen}^2\left(\dfrac{x}{2}\right)$, vem que $1 - \cos x = \operatorname{sen}^2\left(\dfrac{x}{2}\right) + \cos^2\left(\dfrac{x}{2}\right) - \left[\cos^2\left(\dfrac{x}{2}\right) - \operatorname{sen}^2\left(\dfrac{x}{2}\right)\right] = 2\operatorname{sen}^2\left(\dfrac{x}{2}\right)$:

$$\lim_{x\to0^-} \frac{f(x)+1}{x^3} = \lim_{x\to0^-} \frac{\operatorname{sen}^3 x - \cos x + 1}{x^3} = \lim_{x\to0^-} \frac{\operatorname{sen}^3 x}{x^3} + \lim_{x\to0^-} \frac{1-\cos x}{x^3} = \left(\lim_{x\to0^-} \frac{\operatorname{sen} x}{x}\right)^3 + \lim_{x\to0^-} \frac{2\operatorname{sen}^2\left(\frac{x}{2}\right)}{x^3}$$

$$\overset{(1)}{=} 1^3 + 2 \times \left(\frac{1}{2} \lim_{\frac{x}{2}\to0^-} \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right)}{\frac{x}{2}}\right) \times \left(\frac{1}{2} \lim_{\frac{x}{2}\to0^-} \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right)}{\frac{x}{2}}\right) \times \lim_{x\to0^-} \frac{1}{x} \overset{(2)}{=} 1 + 2 \times \frac{1}{2} \times 1 \times \frac{1}{2} \times 1 \times \frac{1}{0^-} = 1 + (-\infty) = -\infty$$

em que se usou o limite notável $\lim\limits_{u\to0} \dfrac{\operatorname{sen} u}{u} = 1$, e o facto de $x \to 0^+ \Rightarrow \dfrac{x}{2} \to 0^+$ em (1), e novamente o mesmo limite notável em (2). Conclui-se então que a afirmação **II)** é falsa.

A função f admite uma assíntota horizontal ao gráfico de f se e só se o valor de $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ for finito. Tem-se:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2 \ln x}{e^{2x}-1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{x^2 \ln x}{x^3}}{\frac{e^{2x}-1}{x^3}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} \times \frac{1}{\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^{2x}}{x^3} - \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x^3}} \overset{(3)}{=} 0 \times \frac{1}{\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^3} \times \lim\limits_{x\to+\infty} e^x - \frac{1}{+\infty}}$$

$$\overset{(4)}{=} 0 \times \frac{1}{+\infty \times (+\infty) - 0} = 0 \times \frac{1}{+\infty} = 0 \times 0 = 0$$

em que se usou o limite notável $\lim\limits_{u\to+\infty} \dfrac{\ln u}{u} = 0$ em (3), e o limite notável $\lim\limits_{u\to+\infty} \dfrac{e^u}{u^p} = +\infty$, $p \in \mathbb{R}$ em (4). Conclui-se que $y = 0$ é assíntota horizontal ao gráfico de f, e a afirmação **III)** é verdadeira.

Resposta: (C)

13.3. Em $\left[-\dfrac{3\pi}{2}, -\dfrac{\pi}{2}\right]$, $f(x) = \operatorname{sen}^3 x - \cos x$, logo a expressão analítica de g' é $g'(x) = \operatorname{sen}^3 x - \cos x + \dfrac{1}{4}\cos x = \operatorname{sen}^3 x - \dfrac{3}{4}\cos x$.
A segunda derivada de g, g'', é dada por:

$$g''(x) = \left(\operatorname{sen}^3 x - \frac{3}{4}\cos x\right)' = \left(\operatorname{sen}^3 x\right)' - \left(\frac{3}{4}\cos x\right)' = 3\operatorname{sen}^2 x \cos x - \left(-\frac{3}{4}\operatorname{sen} x\right) = \operatorname{sen} x \left(3 \operatorname{sen} x \cos x + \frac{3}{4}\right)$$

$$= \operatorname{sen} x \left(\frac{3}{2}\operatorname{sen}(2x) + \frac{3}{4}\right)$$

pelo que, em $\mathbb{R}$, os zeros de g'' são:

$$g''(x)=0 \Leftrightarrow \operatorname{sen} x\left(\frac{3}{2}\operatorname{sen}(2x)+\frac{3}{4}\right)=0 \Leftrightarrow \operatorname{sen} x=0 \vee \frac{3}{2}\operatorname{sen}(2x)+\frac{3}{4}=0 \Leftrightarrow \operatorname{sen} x=0 \vee \operatorname{sen}(2x)=-\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow x=\pi k \vee 2x=-\frac{\pi}{6}+2\pi k \vee 2x=-\frac{5\pi}{6}+2\pi k \Leftrightarrow x=\pi k \vee x=-\frac{\pi}{12}+\pi k \vee x=-\frac{5\pi}{12}+\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$$

Ora, averiguem-se as soluções da equação acima em $\left[-\frac{3\pi}{2},-\frac{\pi}{2}\right]$:

- para $k=-2$, tem-se $x=-2\pi \vee x=-\frac{\pi}{12}-2\pi=-\frac{25\pi}{12} \vee x=-\frac{5\pi}{12}-2\pi=-\frac{29\pi}{12}$ → nenhuma destas soluções pertence ao intervalo $\left[-\frac{3\pi}{2},-\frac{\pi}{2}\right]$;
- para $k=-1$, tem-se $x=-\pi \vee x=-\frac{\pi}{12}-\pi=-\frac{13\pi}{12} \vee x=-\frac{5\pi}{12}-\pi=-\frac{17\pi}{12}$ → todas estas soluções pertencem ao intervalo $\left[-\frac{3\pi}{2},-\frac{\pi}{2}\right]$;
- para $k=0$, tem-se $x=0 \vee x=-\frac{\pi}{12} \vee x=-\frac{5\pi}{12}$ → nenhuma destas soluções pertence ao intervalo $\left[-\frac{3\pi}{2},-\frac{\pi}{2}\right]$.

Estudando o sinal de g'' através de uma tabela de sinal obtém-se:

x	$-\frac{3\pi}{2}$		$-\frac{17\pi}{12}$		$-\frac{13\pi}{12}$		$-\pi$		$-\frac{\pi}{2}$
$g''(x)$	+	+	0	−	0	+	0	−	−
$g(x)$		∪	p.i	∩	p.i	∪	p.i	∩	

Conclui-se então que:

- o gráfico de g tem concavidade voltada para cima em $\left[-\frac{3\pi}{2},-\frac{17\pi}{12}\right]$ e em $\left[-\frac{13\pi}{12},-\pi\right]$;
- o gráfico de g tem concavidade voltada para baixo em $\left[-\frac{17\pi}{12},-\frac{13\pi}{12}\right]$ e em $\left[-\pi,-\frac{\pi}{2}\right]$;
- o gráfico de g admite três pontos de inflexão nos pontos de abcissa $x=-\frac{17\pi}{12}$, $x=-\frac{13\pi}{12}$ e $x=-\pi$.

FIM