



Duração do Exame: 150 minutos + 30 minutos de tolerância | junho de 2020

12.º Ano de Escolaridade

Utiliza apenas caneta ou esferográfica de tinta azul ou preta

É permitido o uso de calculadora

Não é permitido o uso de corretor. Risca o que pretendes que não seja classificado

Para cada resposta identifica o item

Apresenta as tuas respostas de forma legível

Apresenta apenas uma resposta para cada item

A prova apresenta um formulário na página 2

As cotações dos itens encontram-se na página 8

Na resposta aos itens de seleção (escolha múltipla), seleciona a resposta correta. Escreve na folha de respostas o número do item e a letra que identifica a opção escolhida.

Na resposta aos restantes itens, apresenta o teu raciocínio de forma clara, indicando todos os cálculos que tiveres de efetuar e todas as justificações necessárias. Quando, para um resultado, não é pedida aproximação apresenta sempre o valor exato.

Geometria

Comprimento de um arco de circunferência:

αr (α - amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r - raio)

área de um polígono regular: $\text{Semiperímetro} \times \text{Apótema}$

área de um setor circular:

$\frac{\alpha r^2}{2}$ (α - amplitude, em radianos, do ângulo ao centro, r - raio)

área lateral de um cone: $\pi r g$ (r - raio da base, g - geratriz)

área de uma superfície esférica: $4\pi r^2$ (r - raio)

Volume da pirâmide: $\frac{1}{3} \times \text{área da base} \times \text{Altura}$

Volume do cone: $\frac{1}{3} \times \text{área da base} \times \text{Altura}$

Volume da esfera: $\frac{4}{3}\pi r^3$ (r - raio)

Progressões

Soma dos n primeiros termos de uma progressão (u_n) :

Progressão aritmética: $\frac{u_1 + u_n}{2} \times n$

Progressão geométrica: $u_1 \times \frac{1 - r^n}{1 - r}$, $r \neq 1$

Trigonometria

$\sin(a + b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$

$\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$

Complexos

$(|z|e^{i\theta})^n = |z|^n e^{i(n\theta)}$

$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|} e^{i\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right)}$, $k \in \{0; 1; 2; \dots; n-1\}$ e $n \in \mathbb{N}$

Regras de derivação

$(u + v)' = u' + v'$

$(uv)' = u'v + uv'$

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$

$(u^n)' = nu^{n-1}u'$ ($n \in \mathbb{R}$)

$(\sin u)' = u' \cos u$

$(\cos u)' = -u' \sin u$

$(\tan u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$

$(e^u)' = u'e^u$

$(a^u)' = u'a^u \ln a$ ($a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$)

$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$

$(\log_a u)' = \frac{u'}{u \ln a}$ ($a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$)

Limites notáveis

$\lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$ ($n \in \mathbb{N}$)

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^p} = +\infty$ ($p \in \mathbb{R}$)

1. Considera a função f , real de variável real, definida em \mathbb{R} , por $f(x) = \sin(\pi x)$

Seja g , a função real de variável real, definida em \mathbb{R} , por $g(x) = -2f(4x)$

Pode-se afirmar que a função g , no intervalo $[0; 2]$, tem

- (A) 8 zeros
(B) 9 zeros
(C) 10 zeros
(D) 3 zeros
2. O Professor de Matemática de uma turma de 12º ano, colocou aos seus alunos o seguinte problema de cálculo combinatório:
Considerem o conjunto A de todos os números de cinco algarismos que se podem formar com os algarismos de 1 a 9
Considerem, agora, o conjunto B , subconjunto de A , cujos elementos satisfazem os seguintes requisitos:
- cada número tem os algarismos todos diferentes
 - começam todos por 7 e terminam em 2
 - a soma dos cinco algarismos é ímpar

Qual é o cardinal do conjunto B ?

Duas respostas corretas ao problema proposto foram apresentadas por dois alunos da turma, Rodrigo e Carolina

Numa composição, explica-as

Resposta do Rodrigo

$$\#B = {}^3C_1 \times {}^3C_1 \times {}^4A_2 + {}^3A_3 = 114$$

Resposta da Carolina

$$\#B = {}^4C_2 \times {}^3C_2 \times 2! \times {}^3C_1 + 3! = 114$$

3. Considera, num plano munido de um referencial ortonormado xOy , uma circunferência de centro na origem e de raio r , com $r > 0$, como se observa na figura 1

Sabe-se que:

- os pontos A , B , C e D pertencem à circunferência
- os pontos A e B são simétricos em relação ao eixo Oy
- os pontos C e D são simétricos em relação ao eixo Oy
- os triângulos $[ABO]$ e $[CDO]$, são simétricos em relação ao eixo Ox
- $E(r; 0)$
- o ponto A move-se no primeiro quadrante, e os pontos B , C e D , acompanham esse movimento
- $\widehat{EOA} = x$, com $x \in \left] 0; \frac{\pi}{2} \right[$

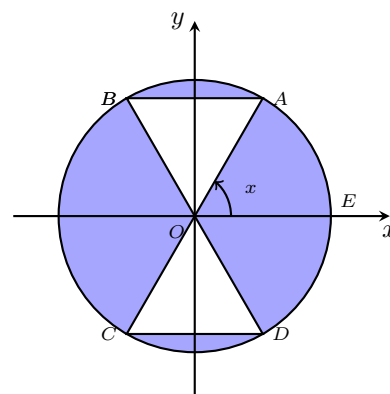


Figura 1

A área da região colorida da figura, é dada, em função de x , por:

- (A) $\pi - \sin(2x)$
(B) $r^2(\pi - \sin(2x))$
(C) $r(\pi - \sin(2x))$
(D) $r^2(\pi - \cos(2x))$

4. Sejam a e b , dois números reais, com $a > 1$ e $b > 1$

Sabe-se que $\log_a(b^2) = 4$

Mostra que, para esses valores de a e b , se tem, $\log_b\left(\sqrt{\frac{b}{a}}\right) = \frac{1}{4}$

5. Na figura 2 está representado, num plano munido de um referencial ortonormado xOy , parte do gráfico de uma função quadrática f , de domínio \mathbb{R} , e definida por $f(x) = ax^2 + bx + c$, $b, c \in \mathbb{R}$, e $a \in \mathbb{R}^+$

Seja g , a função real de variável real, definida por $g(x) = f(x) + e$

Em qual das opções seguintes pode estar representado parte do gráfico da função g' , derivada da função g ?

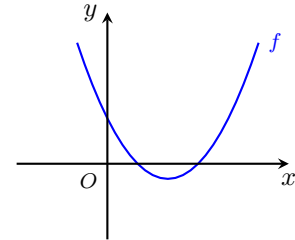


Figura 2

(A)

(B)

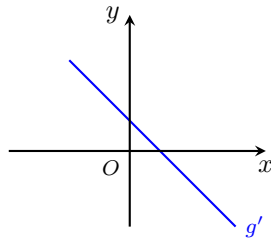


Figura 3

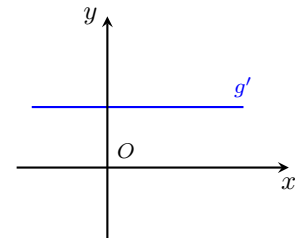


Figura 4

(C)

(D)

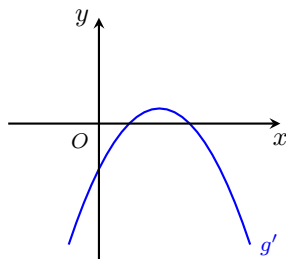


Figura 5

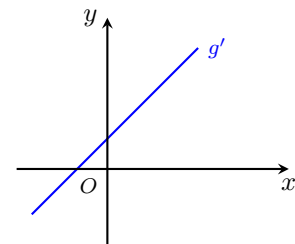


Figura 6

6. Uma caixa contém dez bolas numeradas de 1 a 10
Retiram-se da caixa duas bolas, sucessivamente e sem reposição

Qual é a probabilidade de saírem duas bolas em que o número da segunda bola não é o sucessor do número da primeira bola?

- (A) 10%
(B) 40%
(C) 80%
(D) 90%

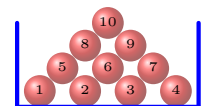


Figura 7

7. Numa caixa, identificada por X , estão seis bolas numeradas de um a seis, e numa caixa, identificada por Y , estão três bolas numeradas com o número um, quatro numeradas com o número dois e cinco numeradas com o número três

Lança-se um dado cúbico equilibrado

Se sair número par, retira-se a bola com o número quatro da caixa X e coloca-se na caixa Y , juntamente com mais onze bolas iguais a ela

Seguidamente retiram-se duas bolas da caixa Y e somam-se os números das bolas que saíram

Sejam os acontecimentos

A : sai número ímpar no lançamento do dado

B : A soma dos números das duas bolas extraídas da caixa Y é igual a cinco

Sem utilizar a fórmula de probabilidade condicionada, mostra que

$$P(B|\bar{A}) = \frac{{}^{12}C_1 \times {}^3C_1 + {}^4C_1 \times {}^5C_1}{{}^{24}C_2}$$

8. Seja f , a função real de variável real, definida por $f(x) = \ln(e^{4x} - e^{2x})$

8.1. Determina o domínio da função f

8.2. Escreve as equações das assíntotas ao gráfico da função f

9. Seja g , a função real de variável real, definida em $\mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$, por $g(x) = \frac{x}{\ln(x)}$

Seja g' , a função derivada da função g

9.1. Estuda a função g , quanto a monotonia e existência de extremos

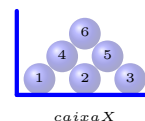
9.2. Em qual das opções está o valor de $\lim_{x \rightarrow e} \frac{g'(x)}{x - e}$?

- (A) e^{-1}
- (B) e^{-2}
- (C) $-e^{-1}$
- (D) $-e^{-2}$

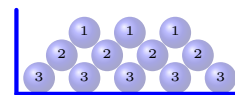
10. Numa escola com 150 Professores, 100 são do sexo feminino. A direção da escola, aquando da preparação do ano letivo, terá de escolher um grupo de Professores para desempenharem a função de Diretor de Turma

Definido o perfil do Diretor de Turma pela Direção, estima-se que, dos Professores da escola do sexo feminino, 90% têm perfil para desempenhar o cargo, e que dos Professores da escola do sexo masculino, 60% têm perfil para desempenhar o cargo

Escolhido um Professor, ao acaso, qual é a probabilidade de ser do sexo feminino, se não tem perfil para desempenhar a função de Diretor de Turma?



caixa X



caixa Y

Figura 8

11. Seja \mathbb{C} , o conjunto dos números complexos e seja z um número complexo

11.1. Em qual das opções pode estar representado o conjunto dos pontos do plano complexo, afijos do complexo z , que satisfazem a condição $1 \leq |z - 2i| \leq 3 \wedge \frac{\pi}{4} < \text{Arg}(z - 2i) < \frac{3\pi}{4}$

(A)

(B)

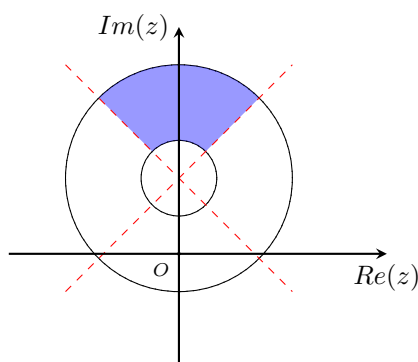


Figura 9

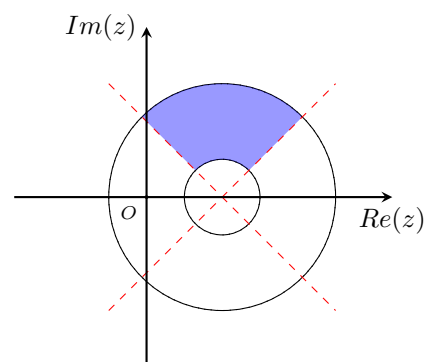


Figura 10

(C)

(D)

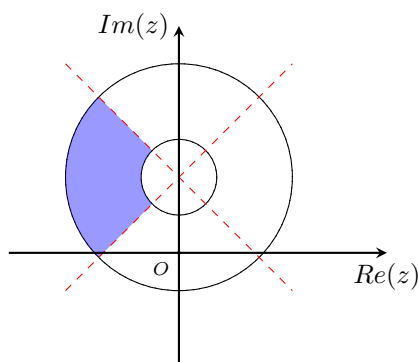


Figura 11

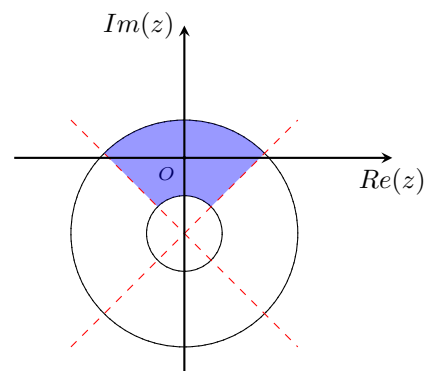


Figura 12

11.2. Admite que $z_1 = 2e^{i(\frac{\pi}{4})}$ e $z_2 = 2e^{i(\frac{13\pi}{20})}$ são duas raízes índice n , consecutivas, do número complexo z . Determina o valor de n e o número complexo z

12. Seja f , a função real e variável real, de domínio $]-\infty; -a]$, definida por $f(x) = b + \sqrt{-x - a}$ com $a > 0$ e $b > 0$, e a função g , de domínio $[a; +\infty[$, definida por $g(x) = f(-x)$. No referencial cartesiano ortonormado xOy , estão representados partes dos gráficos das funções f e g , e um trapézio isósceles $[ABCD]$, como se observa na figura 13

Sabe-se que:

- os pontos A e D pertencem ao gráfico da função g
- os pontos B e C pertencem ao gráfico da função f
- a abscissa do ponto A é a
- a abscissa do ponto D excede a abscissa do ponto A em uma unidade

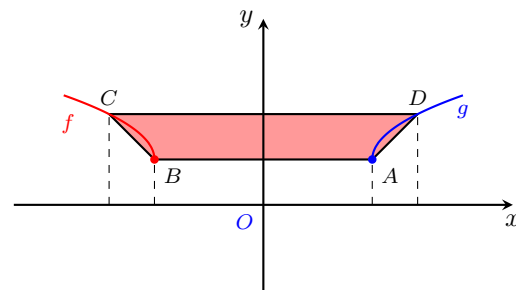


Figura 13

A área do trapézio $[ABCD]$, é dada, em função de a , por:

- (A) $2a + 2$
- (B) $a + 1$
- (C) $4a + 2$
- (D) $2a + 1$

13. Seja f , a função real de variável real, definida por $f(x) = xe^x - e^x$ na figura 14, estão representados, num plano munido de um referencial ortonormado xOy , parte do gráfico da função f , a reta r , tangente ao gráfico da função no ponto de abscissa 2, e dois pontos do gráfico, I e T

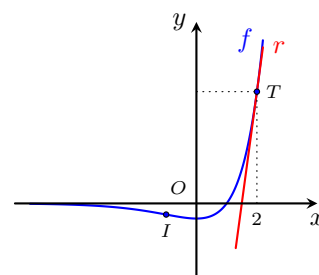


Figura 14

Sabe-se que:

- I é ponto de inflexão do gráfico da função f
- T é o ponto de interseção da reta r com o gráfico de f

13.1. Escreve a equação reduzida da reta r

13.2. Mostra, analiticamente, que o ponto I tem coordenadas $\left(-1; -\frac{2}{e}\right)$

13.3. Mostra, recorrendo ao Teorema de Bolzano, que a função g , real de variável real, definida por $g(x) = -1 + f(2x)$ admite um zero no intervalo $]0; 1[$

14. Nas festas da cidade de Paredes, junto ao parque da cidade, há um carrossel para crianças com a forma que se apresenta na figura 15
A base do carrossel é formado por um prisma octogonal regular, e o telhado é uma pirâmide octogonal, como se observa na figura 15
Na figura está um modelo do carrossel

Admite que se fixa um referencial ortonormado $Oxyz$, como o representado na figura 15

Sabe-se que:

- $a > 0$
- o ponto A pertence ao eixo Oy
- $B\left(\frac{3}{2}a; \frac{3}{2}a; 0\right)$
- $\overrightarrow{AD} = (0, 0; 4a)$
- $\overrightarrow{CD} = (0, 4a; 0)$
- $V(0; 0; 5a)$
- a reta AV tem equação vetorial $(x; y; z) = (0, -2a, 10a) + k(0, -4a, 10a), k \in \mathbb{R}$

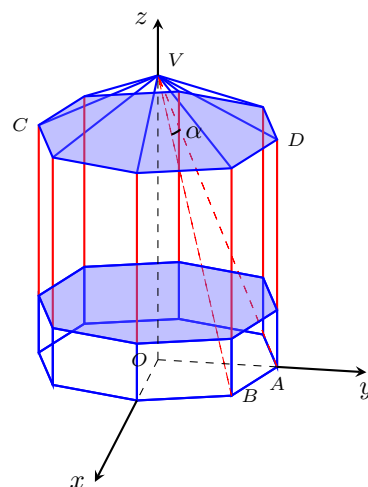


Figura 15

14.1. Sendo α a amplitude do ângulo BVA , um valor aproximado às décimas de α é:

- (A) 16.6°
- (B) 16.7°
- (C) 16.8°
- (D) 16.9°

14.2. Escreve uma equação cartesiana do plano ABC

COTAÇÕES

1.	5 pontos
2.	15 pontos
3.	5 pontos
4.	10 pontos
5.	5 pontos
6.	5 pontos
7.	15 pontos
8.		
8.1	5 pontos
8.2	15 pontos
9.		
9.1	15 pontos
9.2	5 pontos
10.	15 pontos
11.		
11.1	5 pontos
11.2	10 pontos
12.	5 pontos
13.		
13.1	10 pontos
13.2	15 pontos
13.3	10 pontos
14.		
14.1	15 pontos
14.2	15 pontos
TOTAL		<u>100 pontos</u>