Matemática- 2023

Teste 2- Tópicos de resolução

Universidade do Minho
DMA

Exercício 1 a) $u_{n+1} - u_n = \dfrac{2(n+1)+5}{n+2} - \dfrac{2n+5}{n+1}$

$$= \frac{2n+7}{n+2} - \frac{2n+5}{n+1}$$

$$= \frac{2n^2+2n+7n+7-2n^2-4n-5n-10}{(n+1)(n+2)}$$

$$= \frac{-3}{(n+1)(n+2)}$$

Assim, $u_{n+1} - u_n < 0, \forall n \in \mathbb{N}$, pelo que se conclui que $(u_n)_n$ é monótona, estritamente decrescente.

b) $\lim u_n = \lim \dfrac{2n+5}{n+1} = \lim \dfrac{n(2+\frac{5}{n})}{n(1+\frac{1}{n})} = \lim \dfrac{(2+\frac{5}{n})}{(1+\frac{1}{n})} = \dfrac{2}{1} = 2$

Então $(u_n)_n$ é uma sucessão convergente pois tende para um número real.

Toda a sucessão convergente é limitada.

$(u_n)_n$ é uma sucessão limitada.

Exercício 2 a) $\lim\limits_n \dfrac{(\sqrt{n^2+1}-n)(\sqrt{n^2+1}+n)}{\sqrt{n^2+1}+n} = \lim\limits_n \dfrac{n^2+1-n^2}{\sqrt{n^2+1}+n}$

$$= \frac{1}{+\infty} = 0$$

b) $\lim\limits_n \left(\left(1+\dfrac{2}{n}\right)^n\right)^2 = (e^2)^2 = e^4$

Exercício 3 Sabendo que as coordenadas do vértice são da forma $V(-\frac{b}{2a}, f(-\frac{b}{2a}))$, vem

$-\frac{b}{2a} = -\frac{2}{2\times 1} = -1$;

$f(-\frac{b}{2a}) = f(-1) = (-1)^2 + 2\times(-1) = 1 - 2 = -1$

logo $V(-1,-1)$

como $a > 0$ a parábola é voltada para cima, logo $D'_g = [-1, +\infty[$.

Exercício 4

a) Se $x-1$ for fator do polinómio, então 1 será raiz do polinómio.

Aplicando a Regra de Ruffini, vem

$$\begin{array}{r|rrrr} & 2 & -3 & -2 & 3 \\ 1 & & 2 & -1 & -3 \\ \hline & 2 & -1 & -3 & |0 \end{array}$$

Assim, da divisão de $p(x) = 2x^3 - 3x^2 - 2x + 3$ por $x-1$, obteve-se como quociente $Q(x) = 2x^2 - x - 3$ e como resto $R = 0$.
Então, $2x^3 - 3x^2 - 2x + 3 = (x-1)(2x^2 - x - 3)$ c.q.d.

b) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{2x^3-3x^2-2x+3}{2x-2}\right) = \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)(2x^2-x-3)}{2(x-1)} = \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x^2-x-3)}{2} = \dfrac{2-1-3}{2}$

$= -1$

c) Usando a fatorização da alínea a) , comecemos por determinar os zeros de $Q(x)$.

$$2x^2 - x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{+1 \pm \sqrt{1^2 - 4\times 2\times(-3)}}{2\times 2} \Leftrightarrow x = \frac{1\pm\sqrt{25}}{4} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x = \frac{1-5}{4} \vee x = \frac{1+5}{4} \Leftrightarrow x = -1 \vee x = \tfrac{3}{2}$$

Então

x	$-\infty$	-1		1		$\frac{3}{2}$	$+\infty$
$2x^2-x-3$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$x-1$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$-x+1$	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$
$\frac{p(x)}{-x+1}$	$-$	0	$+$	$s.s.$	$+$	0	$-$

$$S = [-1, 1[\cup \left]1, \frac{3}{2}\right]$$

Exercício 5 $\quad D_f = \{x \in \mathbb{R} : x-2 \geq 0 \wedge x-3 \neq 0\} = \{x\in\mathbb{R} : x \geq 2 \wedge x \neq 3\}$
$= [2, +\infty[\setminus \{3\}$

Exercício 6 $\quad y' = \left[\left(x^5-2x\right)^4\right]' = 4(x^5-2x)^3(x^5-2x)' =$
$= 4(x^5-2x)^3(5x^4-2) = (20x^4-8)(x^5-2x)^3$

Exercício 7 $\quad f'(x) = -2x - 1$

$m = f'(2) = -2 \times 2 - 1 = -5.$

$P(2, f(2))$

$f(2) = -4 - 2 + 1 = -5$

$P(2, -5)$

Consideremos a equação da reta na forma $y = mx + b$.

Determinação da ordenada na origem:

$-5 = -5 \times 2 + b \Leftrightarrow -5 = -10 + b \Leftrightarrow b = 10 - 5 \Leftrightarrow b = 5.$

A equação reduzida da reta tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa 2 é $y = -5x + 5$.

Exercício 8 $\quad$ a) $D_g = \{x \in \mathbb{R} : x + 1 > 0\} = \{x \in \mathbb{R} : x > -1\} =]-1, +\infty[$

$D'_g = \mathbb{R}$

b) $D'_{g^{-1}} = D_g =]-1, +\infty[$

$D_{g^{-1}} = D'_g = \mathbb{R}$

$y = \log_3(x + 1) - 2 \Leftrightarrow y + 2 = \log_3(x + 1) \Leftrightarrow 3^{y+2} = x + 1 \Leftrightarrow 3^{y+2} - 1 = x$

$$\begin{array}{rccc} g^{-1}: & \mathbb{R} & \to &]-1, +\infty[\\ & x & \mapsto & 3^{x+2} - 1 \end{array}$$

c) $\log_3(x + 1) - 2 = 0 \wedge x \in D_g \Leftrightarrow \log_3(x + 1) = 2 \wedge x \in D_g \Leftrightarrow x + 1 = 3^2 \wedge x \in D_g \Leftrightarrow$
$x = 8 \wedge x \in D_g$

$S = \{8\}$

Exercício 9 $\quad$ a) $D = \{x \in \mathbb{R} : 2x - 4 > 0 \wedge x - 3 > 0\} = \{x \in \mathbb{R} : x > 2 \wedge x > 3\} =]3, +\infty[$

$\ln(2x - 4) = \ln(x - 3) \wedge x \in D \Leftrightarrow 2x - 4 = x - 3 \wedge x \in D \Leftrightarrow 2x - x = 1 \wedge x \in D \Leftrightarrow$
$x = 1 \wedge x \in D$

$S = \emptyset$

b) $5^{x^2-5} = \frac{1}{5} \Leftrightarrow 5^{x^2-5} = 5^{-1} \Leftrightarrow x^2 - 5 = -1 \Leftrightarrow x^2 = 4 \Leftrightarrow x = 2 \vee x = -2$

$S = \{-2, 2\}$