Escola Secundária de Francisco Franco

Matemática A – 12.º ano

Funções reais de variável real

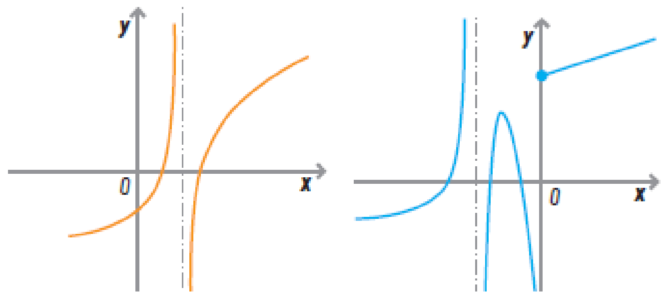
ASSÍNTOTAS AO GRÁFICO DE UMA FUNÇÃO

Considera, num referencial cartesiano, uma função real de variável real f e os números reais a e m.

1) **Assíntotas verticais**

Diz-se que a reta de equação $\boxed{x=a}$ é uma **assíntota vertical ao gráfico de f** quando pelo menos um dos limites laterais de f no ponto a for infinito.

Exemplos:

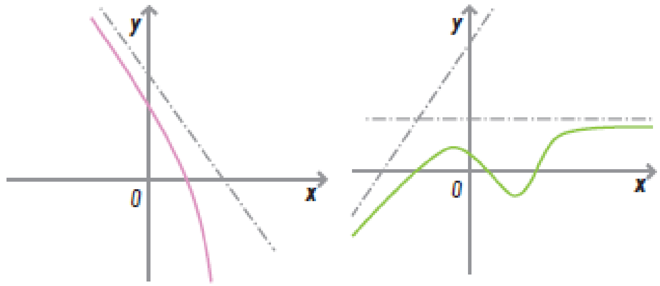


2) **Assíntotas não verticais**

Diz-se que a reta de equação $\boxed{y=mx+b}$ é uma **assíntota não vertical ao gráfico de f**:

- em $+\infty$ se $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-(mx+b)\right]=0$;
- em $-\infty$ se $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[f(x)-(mx+b)\right]=0$.

Exemplos:



Propriedade

Dados um referencial cartesiano e uma função real de variável real f, $y=mx+b$ é a assíntota ao gráfico de f se e somente se:

- $\boxed{m=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}}$ e $\boxed{b=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-mx\right]}$ (se se tratar da assíntota em $+\infty$);
- $\boxed{m=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}}$ e $\boxed{b=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[f(x)-mx\right]}$ (se se tratar da assíntota em $-\infty$);

Nota:
Se $m \neq 0$, trata-se de uma **assíntota oblíqua**;
Se $m = 0$, trata-se de uma **assíntota horizontal**.
O gráfico de uma função admite, no máximo, duas assíntotas não verticais.

Exercício resolvido 1

Considera a função f, de domínio $\mathbb{R}\setminus\{-2,3\}$, definida por

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{2x+4} & \text{se } x<3\\[2mm] \dfrac{9-x^2}{2x-6} & \text{se } x>3\end{cases}.$$

Estuda a função f quanto à existência de assíntotas do seu gráfico.

Resolução

Assíntotas verticais ($x = k$):

f é contínua em $\mathbb{R}\setminus\{-2,3\}$ pelo que, a existir AV, só para $x = -2$ ou $x = 3$;

$\lim\limits_{x\to-2} f(x)=\lim\limits_{x\to-2}\frac{x}{2x+4}=\frac{-2}{0}=\pm\infty \rightarrow \boxed{x=-2}$ é a equação de uma AV ao gráfico de f

$\lim\limits_{x\to3^-} f(x)=\lim\limits_{x\to3}\frac{x}{2x+4}=\frac{3}{10}\neq\infty$

$\lim\limits_{x\to3^+} f(x)=\lim\limits_{x\to3}\frac{9-x^2}{2x-6}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim\limits_{x\to3}\frac{(3-x)(3+x)}{2(x-3)}=\lim\limits_{x\to3}\frac{\cancel{(3-x)}(3+x)}{-2\cancel{(3-x)}}=\frac{3+3}{-2}\neq\infty$

$\therefore$ $x = 3$ não é a equação de uma AV ao gráfico de f

Assíntotas não verticais ($y = mx+ b$):

Em $-\infty$: $m_1=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\frac{x}{2x+4}}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\cancel{x}}{\cancel{x}(2x+4)}=\frac{1}{-\infty}=0$

Exercício proposto 1

Estuda cada função seguinte quanto à existência de assíntotas do seu gráfico.

1.1. $a(x)=\frac{2x+5}{x+1}$ **1.2.** $b(x)=\frac{2-3x}{5x-6}$

1.3. $c(x)=-3+\frac{2}{3-2x}$ **1.4.** $d(x)=\frac{12x^2-2x^3}{x^2-5x-6}$

1.5. $e(x)=\frac{2+3x^3}{x^2+6}$ **1.6.** $f(x)=\frac{5x^2+x+1}{x-4}$

1.7. $g(x)=\sqrt{9x^2+2}$

1.8. $h(x)=\sqrt{8x^2}-x$ **1.9.** $i(x)=\frac{\sqrt{16x^2-8x}}{1-3x}$

1.10. $j(x)=\begin{cases}\dfrac{5x^3+2}{x^2+3} & \text{se } x\leq0\\[2mm] \dfrac{\sqrt{2x^2+1}}{x+2} & \text{se } x>0\end{cases}$

1.11. $k(x)=\begin{cases}\dfrac{2x+\cos x}{3x-\operatorname{sen} x} & \text{se } x\leq-\pi\\[2mm] \operatorname{tg}\dfrac{x}{2} & \text{se } -\pi<x<\pi\end{cases}$

1.12. $l(x)=\begin{cases}\dfrac{x^3-1}{x^2+3} & \text{se } x<-1\\[2mm] \dfrac{\sqrt{2x+6}}{x-4} & \text{se } x\geq-1\end{cases}$

$\therefore b_1 = \lim_{x\to-\infty}[f(x)-0x] = \lim_{x\to-\infty}\frac{x}{2x+4}$

$= \lim_{x\to-\infty}\frac{\cancel{x}}{2\cancel{x}} = \frac{1}{2}$

$\therefore \boxed{y=\frac{1}{2}}$ é a equação da AH ao gráfico de f (em $-\infty$)

NOTA

Desde que faça sentido:

- $\lim_{x\to\pm\infty}(a_0x^n + a_1x^{n-1} + ... + a_{n-1}x + a_n) = \lim_{x\to\pm\infty}(a_0x^n)$
- $\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{a_0x^n + a_1x^{n-1} + ... + a_{n-1}x + a_n}{b_0x^m + b_1x^{m-1} + ... + b_{m-1}x + b_m}\right) = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{a_0x^n}{b_0x^m}$

Em $+\infty$: $m_2 = \lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{9-x^2}{2x-6}}{x} = \lim_{x\to-\infty}\frac{9-x^2}{2x^2-6x} = \lim_{x\to-\infty}\frac{-\cancel{x^2}}{2\cancel{x^2}} = -\frac{1}{2}$

$\therefore b_2 = \lim_{x\to+\infty}[f(x)-(-\frac{1}{2})x] = \lim_{x\to+\infty}(\frac{9-x^2}{2x-6}+\underset{(x-3)}{\frac{x}{2}}) = \lim_{x\to+\infty}\frac{9\cancel{-x^2}\cancel{+x^2}-3x}{2x-6}$

$= \lim_{x\to+\infty}\frac{-3\cancel{x}}{2\cancel{x}} = -\frac{3}{2}$, logo $\boxed{y=-\frac{1}{2}x-\frac{3}{2}}$ é a equação da AO ao gráfico de f (em $+\infty$)

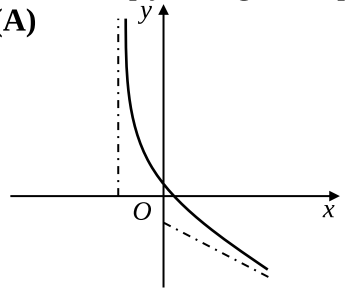
Exercício resolvido 2

Seja h uma função de domínio $]m,+\infty[$, $m\in\mathbb{R}$. Sabe-se que:

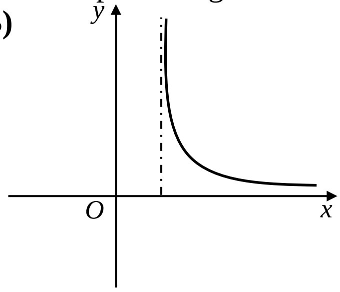
- $x=m$ é a equação da assíntota vertical do gráfico de h ;
- $\lim_{x\to+\infty}\frac{h(x)}{x}=m$.

Qual das opções seguintes pode representar parte do gráfico de h ?

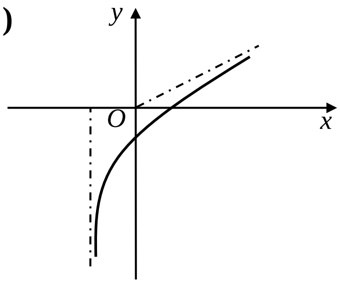
(A)



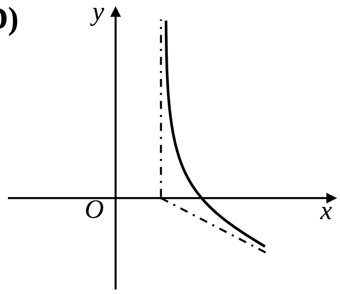
(B)



(C)



(D)

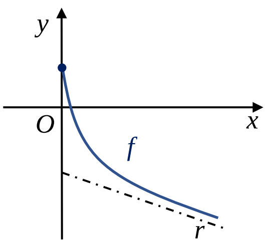


Resolução

O gráfico de h tem 2 assíntotas, uma vertical ($x = m$) e outra oblíqua ($y = mx + b$). Se $m > 0$, a AV está no 1.º/4.º Q e o declive da AO é positivo; se $m < 0$, a AV está no 2.º/3.º Q e o declive da AO é negativo. Assim, a opção correta é a $\boxed{\text{A}}$

Exercício resolvido 3

Na figura ao lado está representada parte do gráfico de f no domínio $[0,+\infty[$, juntamente com a reta r, assíntota ao gráfico de f, definida por $y=-\frac{1}{3}x-3$. Seja g a função, definida em $[0,+\infty[$, por $g(x)=\frac{x}{f(x)}$. O gráfico de g tem uma assíntota horizontal. Determina a sua equação.



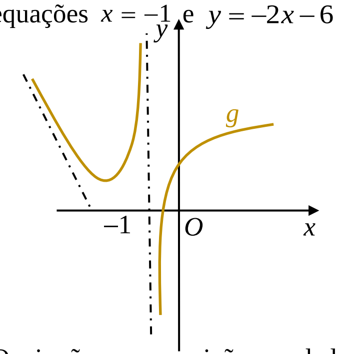
Resolução

Só pode existir AH ao gráfico de g em $+\infty$.

$\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty}\frac{x}{f(x)} = \frac{1}{\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}} = \frac{1}{-\frac{1}{3}} = -3 \rightarrow \boxed{y=-3}$

Exercício proposto 2

O gráfico da função g, de domínio $\mathbb{R}\backslash\{-1\}$, parcialmente representado a seguir, admite apenas duas assíntotas, de equações $x=-1$ e $y=-2x-6$.



Quais são as proposições verdadeiras?

(i) $\lim_{x\to-1^-} g(x) = +\infty$

(ii) $\lim_{x\to-1^+} g(x) = -\infty$

(iii) $\lim_{x\to+\infty}\frac{g(x)}{x} = 2$

(iv) $\lim_{x\to-\infty}\frac{g(x)}{x} = -2$

(v) $\lim_{x\to+\infty}[g(x)+2x+6]=0$

(vi) $\lim_{x\to-\infty}[g(x)+2x+6]=0$

Exercício proposto 3

Para um certo número positivo k, o gráfico da função g, de domínio $\mathbb{R}$, tem uma única assíntota não vertical, onde:

$$g(x)=\begin{cases}\frac{\sqrt{kx^2+1}}{2x-8} & \text{se } x\le 2\\ \frac{\text{sen}(3x)-3x}{\text{sen}(4x)+4x} & \text{se } x>2\end{cases}$$

Sabendo que essa assíntota é horizontal, determina k.

Exercício proposto 4

De uma função f, de domínio $\mathbb{R}^+$, sabe-se que $\lim_{x\to+\infty}[f(x)-3x]=0$. Seja h a função, de domínio $\mathbb{R}^+$, definida por $h(x)=\frac{2x+\cos(\pi x)}{f(x)}$. Prova que a reta de equação $y=\frac{2}{3}$ é uma assíntota ao gráfico de h.

Exercício proposto 5

Sejam f e g duas funções, de domínio $\mathbb{R}^+$, tais que:

- $f(x)=x(2+\text{sen}\,x)$;
- a reta de equação $y=5$ é assíntota ao gráfico de g.

Prova que o eixo Ox é uma assíntota ao gráfico da função $\frac{g}{f}$.

Soluções: 1. x=-1 e y=2; x=6/5 e y=-3/5; x=3/2 e y=-3; x=-1 e y=-2x+2; y=3x; x=4 e y=5x+21; y=±3x; y=√8x-√2/8 e y=-√8x+√2/8; y=±4/3; y=√2 e y=5x; x=±π e y=2/3; x=-1, x=4 e y=0   2. i, ii, iv e vi   3. 9/4

O professor: Roberto Oliveira