Funções (12.º ano)

Assíntotas

Exercícios de Provas Nacionais e Testes Intermédios - Propostas de resolução

1. Determinando a equação da assíntota horizontal do gráfico de g, quando $x \to +\infty$, temos:

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty} \big(\ln(1+e^x) - x\big) = \ln(1+e^{+\infty}) - \infty = +\infty - \infty \text{ (Indeterminação)}$$

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty} \big(\ln(1+e^x) - x\big) = \lim_{x\to+\infty} \big(\ln(1+e^x) - \ln e^x\big) = \lim_{x\to+\infty} \ln\frac{1+e^x}{e^x} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \ln\left(\frac{1}{e^x} + \frac{e^x}{e^x}\right) = \lim_{x\to+\infty} \ln\left(\frac{1}{e^x} + 1\right) = \ln\left(\frac{1}{e^{+\infty}} + 1\right) = \ln(0+1) = \ln 1 = 0$$

Logo a reta definida por $y = 0$ é uma assíntota do gráfico de g, quando $x \to +\infty$

Determinando o declive da assíntota oblíqua do gráfico de g, quando $x \to -\infty$, temos:

$$m = \lim_{x\to-\infty} \frac{g(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\ln(1+e^x) - x}{x} = \lim_{x\to-\infty} \left(\frac{\ln(1+e^x)}{x} - \frac{x}{x}\right) =$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \left(\frac{\ln(1+e^x)}{x} - 1\right) = \frac{\ln(1+e^{-\infty})}{-\infty} - 1 = \frac{\ln(1+0^+)}{-\infty} - 1 = \frac{0^+}{-\infty} - 1 = 0^- - 1 = -1$$

Calculando o valor da ordenada na origem, temos que:

$$b = \lim_{x\to{}^-\infty} \big(g(x) - mx\big) = \lim_{x\to-\infty} \big(\ln(1+e^x) - x - (-1)x\big) = \lim_{x\to-\infty} \big(\ln(1+e^x) - x + x\big) =$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \ln(1+e^x) = \ln(1+e^{-\infty}) = \ln(1+0) = \ln 1 = 0$$

Desta forma a equação reduzida da assíntota oblíqua do gráfico de g, quando $x \to -\infty$, é:

$$y = -1 \times x + 0 \Leftrightarrow y = -x$$

Exame – 2022, Ép. especial

2. Como a função é contínua em $]0,+\infty[$ (porque é o quociente de funções contínuas), a reta de equação $x=0$ é a única reta vertical que pode ser assíntota do gráfico de h, paralela ao eixo Oy. Para averiguar esta hipótese vamos calcular $\lim\limits_{x\to 0^+} h(x)$:

$$\lim_{x\to 0^+} h(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{e^x+\ln x}{e^x-1} = \frac{e^{0^+}+\ln 0^+}{e^{0^+}-1} = \frac{1^+-\infty}{1^+-1} = \frac{-\infty}{0^+} = -\infty$$

Logo a reta de equação $x=0$ é a única assíntota do gráfico de h paralela ao eixo das ordenadas.

Para averiguar a existência de assíntotas horizontais, ou seja, paralelas ao eixo Ox, como o domínio de h é $]0,+\infty[$, vamos calcular $\lim\limits_{x\to +\infty} h(x)$:

$$\lim_{x\to +\infty} h(x) = \lim_{x\to +\infty} \frac{e^x+\ln x}{e^x-1} = \frac{e^{+\infty}+\ln(+\infty)}{e^{+\infty}-1} = \frac{+\infty+\infty}{+\infty} = \frac{+\infty}{+\infty} \text{ (indeterminação)}$$

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{e^x+\ln x}{e^x-1} = \lim_{x\to +\infty} \frac{\frac{e^x+\ln x}{e^x}}{\frac{e^x-1}{e^x}} = \frac{\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\frac{e^x}{e^x}+\frac{\ln x}{e^x}\right)}{\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\frac{e^x}{e^x}-\frac{1}{e^x}\right)} = \frac{\lim\limits_{x\to +\infty}\left(1+\frac{\ln x}{e^x}\right)}{\lim\limits_{x\to +\infty}\left(1-\frac{1}{e^x}\right)} =$$

$$= \frac{\lim\limits_{x\to +\infty} 1 + \lim\limits_{x\to +\infty} \frac{\ln x}{e^x}}{\lim\limits_{x\to +\infty} 1 - \lim\limits_{x\to +\infty} \frac{1}{e^x}} = \frac{1+\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{\frac{\ln x}{x}}{\frac{e^x}{x}}}{1-\frac{1}{e^{+\infty}}} = \frac{1+\frac{\underbrace{\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{\ln x}{x}}_{\text{Lim. Notável}}}{\underbrace{\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{e^x}{x}}_{\text{Lim. Notável}}}}{1-\frac{1}{+\infty}} = \frac{1+\frac{0}{+\infty}}{1-0} = \frac{1+0}{1} = 1$$

Logo, podemos concluir que a reta de equação $y=1$ é a única assíntota horizontal, ou seja, paralela ao eixo das abcissas, do gráfico de h, quando $x\to+\infty$.

Exame – 2022, 2.ª Fase

3. Como a função g é contínua (porque resulta da diferença e do produto de funções contínuas em $]1,+\infty[$), então a reta de equação $x=1$ é a única reta vertical que pode ser assíntota do gráfico de g. Para averiguar esta hipótese vamos calcular $\lim\limits_{x\to 1^+} g(x)$:

$$\lim_{x\to 1^+} g(x) = \lim_{x\to 1^+} \big(5x - 3\ln(x-1)\big) = 5\times 1^+ - 3\ln(1^+ - 1) = 5 + 3\ln(0+) = 5 - 3\times(-\infty) = +\infty$$

Assim, como $\lim\limits_{x\to 1^+} g(x) = +\infty$, podemos concluir a reta de equação $x=1$ é a única assíntota vertical do gráfico de g.

Como o domínio da função é $]1,+\infty[$, só poderá existir uma assíntota oblíqua quando $x\to+\infty$. Desta forma, vamos averiguar a existência de uma assíntota de equação $y=mx+b$:

$$m = \lim_{x\to+\infty} \frac{g(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{5x-3\ln(x-1)}{x} = \underbrace{\frac{+\infty-\infty}{+\infty}}_{\text{Indeterminação}}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{5x}{x} - 3\times\frac{\ln(x-1)}{x}\times\frac{x-1}{x-1}\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(5 - 3\times\frac{\ln(x-1)}{(x-1)}\times\frac{x-1}{x}\right) =$$

(fazendo $y=x-1$, temos $x=y+1$; e se $x\to+\infty$, então $y\to+\infty$)

$$= \lim_{x\to+\infty} 5 - 3\underbrace{\lim_{y\to+\infty}\frac{\ln y}{y}}_{\text{Lim. Notável}} \times \lim_{y\to+\infty}\frac{y}{y+1} = 5 - 3\times 0\times \lim_{y\to+\infty}\frac{y}{y} = 5 - 3\times 0\times 1 = 5$$

$$b = \lim_{x\to+\infty}\big(g(x)-mx\big) = \lim_{x\to+\infty}\big(g(x) - 5\times x\big) = \lim_{x\to+\infty}(5x - 3\ln x - 5x) =$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\big(-3\ln x\big) = -3\lim_{x\to+\infty}\big(\ln x\big) = -3\times(+\infty) = -\infty$$

Assim, como $\lim\limits_{x\to+\infty}\big(g(x)-mx\big)$ não é um valor finito, não existe qualquer assíntota oblíqua do gráfico de g.

Exame – 2022, 1.ª Fase

4. Como o domínio da função é $\mathbb{R}$, podem existir assíntotas horizontais do gráfico de f quando $x\to-\infty$ e quando $x\to+\infty$:

- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^2-4}{x^2-5x+6} = \lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^2}{x^2} = \lim\limits_{x\to-\infty} 1 = 1$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x-1}{e^{x-2}} = \dfrac{+\infty-1}{e^{+\infty-2}} = \dfrac{+\infty}{e^{+\infty}} = \dfrac{+\infty}{+\infty}$ (Indeterminação)

  (fazendo $y=x-2$, temos $x=y+2$ e se $x\to-\infty$, então $y\to+\infty$)

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{y\to+\infty}\frac{y+2-1}{e^y} = \lim_{y\to+\infty}\frac{y+1}{e^y} = \lim_{y\to+\infty}\left(\frac{y}{e^y}+\frac{1}{e^y}\right) = \lim_{y\to+\infty}\frac{y}{e^y} + \lim_{y\to+\infty}\frac{1}{e^y} =$$

$$= \lim_{y\to+\infty}\frac{1}{\frac{e^y}{y}} + \lim_{y\to+\infty}\frac{1}{e^y} = \frac{\lim\limits_{y\to+\infty} 1}{\underbrace{\lim\limits_{y\to+\infty}\frac{e^y}{y}}_{\text{Lim. Notável}}} + \lim_{y\to+\infty}\frac{1}{e^y} = \frac{1}{+\infty} + \frac{1}{+\infty} = 0+0 = 0$$

Desta forma temos que $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 1$ e que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$, pelo que as retas de equações $y=1$ e $y=0$ são assíntotas horizontais do gráfico de f, para $x\to-\infty$ e para $x\to+\infty$, respetivamente.

Exame – 2021, Ép. especial

5. Como o domínio da função é $\mathbb{R}$, podem existir assíntotas horizontais do gráfico de f quando $x \to -\infty$ e quando $x \to +\infty$:

- $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{x-e^{-x}}{x} = \dfrac{-\infty - e^{-(-\infty)}}{-\infty} = \dfrac{-\infty - e^{+\infty}}{-\infty} = \dfrac{-\infty - \infty}{-\infty} = \dfrac{-\infty}{-\infty}$ (Indeterminação)

  (fazendo $y=-x$, temos $x=-y$ e se $x \to -\infty$, então $y \to +\infty$)

$$\lim_{x\to -\infty} f(x) = \lim_{y\to +\infty} \frac{-y-e^{-(-y)}}{-y} = \lim_{y\to +\infty} \frac{-y-e^{y}}{-y} = \lim_{y\to +\infty} \frac{y+e^{y}}{y} = \lim_{y\to +\infty} \left(\frac{y}{y} + \frac{e^y}{y}\right) =$$

$$= \lim_{y\to +\infty} \frac{y}{y} + \underbrace{\lim_{y\to +\infty} \frac{e^y}{y}}_{\text{Lim. Notável}} = 1 + (+\infty) = +\infty$$

- $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to +\infty} \left(\dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x+1} - 3\right) = \dfrac{\sqrt{(+\infty)^2+1}}{+\infty+1} - 3 = \dfrac{\sqrt{+\infty}}{+\infty} - 3 = \dfrac{+\infty}{+\infty} - 3$ (Indeterminação)

  (Como $x \to +\infty$ então $x > 0$ e assim, temos que $\sqrt{x^2} = x$)

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty} \left(\frac{\sqrt{x^2+1}}{x+1} - 3\right) = \lim_{x\to +\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x+1} - 3 = -3 + \lim_{x\to +\infty} \frac{\sqrt{x^2\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)}}{x\left(1+\dfrac{1}{x}\right)} =$$

$$= -3 + \lim_{x\to +\infty} \frac{\sqrt{x^2}\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}}{x\left(1+\dfrac{1}{x}\right)} = -3 + \lim_{x\to +\infty} \frac{x\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}}{x\left(1+\dfrac{1}{x}\right)} = -3 + \lim_{x\to +\infty} \frac{\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}}{1+\dfrac{1}{x}} =$$

$$= -3 + \frac{\sqrt{1+\dfrac{1}{(+\infty)^2}}}{1+\dfrac{1}{+\infty}} = -3 + \frac{\sqrt{1+0}}{1+0} = -3+1 = -2$$

Desta forma temos que $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = +\infty$ e que $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = -2$, pelo que não existe assíntota horizontal do gráfico de f quando $x \to -\infty$ e $y = -2$ é a única assíntota horizontal do gráfico de f, observada quando $x \to +\infty$

Exame – 2021, 2.ª Fase

6. Como o domínio da função é $\mathbb{R}^+$, começamos por determinar o declive da assíntota oblíqua do gráfico de h, quando $x \to +\infty$:

$$m = \lim_{x\to+\infty} \frac{h(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{x^3}{2x^2 - \ln x}}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x(x^2)}{x(2x^2 - \ln x)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{2x^2 - \ln x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\frac{2x^2 - \ln x}{x^2}} =$$

$$= \frac{\lim\limits_{x\to+\infty} 1}{\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\frac{2x^2}{x^2} - \frac{\ln x}{x^2}\right)} = \frac{1}{\lim\limits_{x\to+\infty} \left(2 - \frac{\ln x}{x} \times \frac{1}{x}\right)} = \frac{1}{\lim\limits_{x\to+\infty} 2 - \underbrace{\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x}}_{\text{Lim. Notável}} \times \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x}} = \frac{1}{2 - 0 \times 0} = \frac{1}{2}$$

Calculando o valor da ordenada na origem, temos que:

$$b = \lim_{x\to+\infty} \big(h(x) - mx\big) = \lim_{x\to+\infty} \Big(h(x) - \frac{1}{2}x\Big) = \lim_{x\to+\infty} \Big(h(x) - \frac{x}{2}\Big) = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{x^3}{2x^2 - \ln x} - \frac{x}{2}\right) =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{2x^3 - x(2x^2 - \ln x)}{2(2x^2 - \ln x)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2x^3 - 2x^3 + x\ln x}{4x^2 - 2\ln x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x\ln x}{4x^2 - 2\ln x} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\frac{4x^2 - 2\ln x}{x\ln x}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\frac{4x^2}{x\ln x} - \frac{2\ln x}{x\ln x}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\frac{4x}{\ln x} - \frac{2}{x}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\frac{1}{\frac{\ln x}{4x}} - \frac{2}{x}} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\frac{1}{\frac{1}{4} \times \frac{\ln x}{x}} - \frac{2}{x}} = \frac{1}{\frac{1}{\frac{1}{4} \times \underbrace{\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x}}_{\text{Lim. Notável}}} - \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2}{x}} = \frac{1}{\frac{1}{\frac{1}{4} \times 0} - \frac{2}{+\infty}} = \frac{1}{\frac{1}{0} - 0} = \frac{1}{+\infty} = 0$$

Desta forma a equação reduzida da assíntota oblíqua do gráfico de h, quando $x \to +\infty$, é:

$$y = \frac{1}{2}x + 0 \Leftrightarrow y = \frac{x}{2}$$

Exame – 2021, 1.ª Fase

7. Como o domínio da função é $]-\infty,4]$, a assíntota horizontal do gráfico de h é determinada quando $x \to -\infty$:

$$\lim_{x\to -\infty} h(x) = \lim_{x\to -\infty} \left(1 + xe^{x-1}\right) = 1 - \infty \times e^{-\infty-1} = 1 - \infty \times 0 \ \text{(Indeterminação)}$$

(fazendo $y = -x$, temos $x = -y$ e se $x \to -\infty$, então $y \to +\infty$)

$$\lim_{x\to -\infty} h(x) = \lim_{y\to +\infty} \left(1 + (-y)e^{-y-1}\right) = \lim_{y\to +\infty} \left(1 - ye^{-(y+1)}\right) = \lim_{y\to +\infty} \left(1 - \frac{y}{e^{y+1}}\right) =$$

$$= \lim_{y\to +\infty} \left(1 - \frac{y}{e^y \times e}\right) = \lim_{y\to +\infty} \left(1 - \frac{1}{e} \times \frac{y}{e^y}\right) = \lim_{y\to +\infty} \left(1 - \frac{1}{e} \times \frac{1}{\frac{e^y}{y}}\right) =$$

$$= \lim_{y\to +\infty} 1 - \lim_{y\to +\infty} \frac{1}{e} \times \frac{\lim\limits_{y\to +\infty} 1}{\underbrace{\lim\limits_{y\to +\infty} \frac{e^y}{y}}_{\text{Lim. Notável}}} = 1 - \frac{1}{e} \times \frac{1}{+\infty} 1 - \frac{1}{e} \times 0 = 1$$

Como $\lim\limits_{x\to -\infty} h(x) = 1$, a reta de equação $y = 1$ também é assíntota horizontal do gráfico de h

Exame – 2020, 2.ª Fase

8. Como a função está definida em $]-\infty,2]$, começamos por determinar o declive da assíntota oblíqua do gráfico de f, quando $x \to -\infty$:

$$m = \lim_{x\to -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to -\infty} \frac{x + \ln(e^x+1)}{x} = \lim_{x\to -\infty} \left(\frac{x}{x} + \frac{\ln(e^x+1)}{x}\right) =$$

$$= \lim_{x\to -\infty} \left(1 + \frac{\ln(e^x+1)}{x}\right) = 1 + \frac{\ln(e^{-\infty}+1)}{-\infty} = 1 + \frac{\ln(0^+ + 1)}{-\infty} = 1 + \frac{0^+}{-\infty} = 1 - 0 = 1$$

Calculando o valor da ordenada na origem, temos que:

$$b = \lim_{x\to -\infty} \left(f(x) - mx\right) = \lim_{x\to -\infty} \left(f(x) - x\right) = \lim_{x\to +\infty} \left(x + \ln(e^x+1) - x\right) = \lim_{x\to +\infty} \left(\ln(e^x+1)\right) =$$

$$= \ln(e^{-\infty}+1) = \ln(0^+ + 1) = \ln 1 = 0$$

Desta forma a equação reduzida da assíntota oblíqua do gráfico de f é:

$$y = x + 0 \ \Leftrightarrow \ y = x$$

Exame – 2020, 1.ª Fase

9. Começamos por determinar o declive da assíntota oblíqua do gráfico de g, quando $x \to +\infty$:

$$m = \lim_{x\to+\infty} \frac{g(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1-3x}{1-e^{-x}}}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1-3x}{x\,(1-e^{-x})} = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{1-3x}{x} \times \frac{1}{1-e^{-x}} \right) =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{1-3x}{x} \times \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{1-e^{-x}} = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{1}{x} - \frac{3x}{x} \right) \times \frac{1}{1-e^{-(+\infty)}} =$$

$$= \left(\frac{1}{+\infty} - 3 \right) \times \frac{1}{1-e^{-\infty}} = (0-3) \times \frac{1}{1-0} = -3 \times 1 = -3$$

Calculando o valor da ordenada na origem, temos que:

$$b = \lim_{x\to+\infty} \big(g(x) - mx\big) = \lim_{x\to+\infty} \big(g(x) - (-3)x\big) = \lim_{x\to+\infty} \big(g(x) + 3x\big) = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{1-3x}{1-e^{-x}} + 3x \right) =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{1-3x}{1-e^{-x}} + \frac{3x(1-e^{-x})}{1-e^{-x}} \right) = \lim_{x\to+\infty} \frac{1-3x+3x-3xe^{-x}}{1-e^{-x}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1-3xe^{-x}}{1-e^{-x}} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{1-3x \times \frac{1}{e^x}}{1-e^{-x}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1-\frac{3x}{e^x}}{1-e^{-x}} = \frac{\lim\limits_{x\to+\infty} \left(1-\frac{3x}{e^x}\right)}{\lim\limits_{x\to+\infty} (1-e^{-x})} = \frac{\lim\limits_{x\to+\infty} 1 - \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{3x}{e^x}}{1-e^{-(+\infty)}} =$$

$$= \frac{1 - \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{3}{\frac{e^x}{x}}}{1-e^{-\infty}} = \frac{1 - \frac{\lim\limits_{x\to+\infty} 3}{\underbrace{\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x}}_{\text{Lim. Notável}}}}{1-0} = \frac{1-\frac{3}{+\infty}}{1} = 1-0 = 1$$

Desta forma a equação reduzida da assíntota oblíqua do gráfico de g, quando $x \to +\infty$, é:

$$y = -3x + 1$$

Exame – 2019, Ép. especial

10. Como a função é contínua em $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ (porque é o quociente de funções contínuas), a reta de equação $x = 1$ é a única reta vertical que pode ser assíntota do gráfico de h. Para averiguar esta hipótese vamos calcular $\lim\limits_{x\to 1^-} h(x)$ e $\lim\limits_{x\to 1^+} h(x)$:

- $\lim\limits_{x\to 1^-} h(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{e^x}{x-1} = \dfrac{e^{1^-}}{1^- - 1} = \dfrac{e}{0^-} = -\infty$
- $\lim\limits_{x\to 1^+} h(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{e^x}{x-1} = \dfrac{e^{1^+}}{1^+ - 1} = \dfrac{e}{0^+} = +\infty$

Logo a reta de equação $x = 1$ é a única assíntota do gráfico de h paralela ao eixo das ordenadas.

Para averiguar a existência de assíntotas horizontais, vamos calcular $\lim\limits_{x\to -\infty} h(x)$ e $\lim\limits_{x\to +\infty} h(x)$:

- $\lim\limits_{x\to -\infty} h(x) = \lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{e^x}{x-1} = \dfrac{e^{-\infty}}{-\infty - 1} = \dfrac{0^+}{-\infty} = 0$
- $\lim\limits_{x\to +\infty} h(x) = \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{e^x}{x-1} = \dfrac{e^{+\infty}}{+\infty - 1} = \dfrac{+\infty}{+\infty}$ (indeterminação)

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{e^x}{x-1} = \lim_{x\to +\infty} \frac{\frac{e^x}{x}}{\frac{x-1}{x}} = \frac{\underbrace{\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{e^x}{x}}_{\text{Lim. Notável}}}{\lim\limits_{x\to +\infty} \left(\frac{x}{x} - \frac{1}{x}\right)} = \frac{+\infty}{\lim\limits_{x\to +\infty} \left(1 - \frac{1}{x}\right)} = \frac{+\infty}{1 - \frac{1}{+\infty}} = \frac{+\infty}{1-0} = +\infty$$

Logo, podemos concluir que a reta de equação $y = 0$ é assíntota horizontal do gráfico de h, quando $x \to -\infty$ e que não existe qualquer assíntota do gráfico de h, quando $x \to +\infty$, pelo que a reta $y = 0$ é a única assíntota do gráfico de h paralela ao eixo das abcissas.

Exame – 2019, 2.ª Fase

11. Como a função h tem domínio $\mathbb{R}^+$, o e o respetivo gráfico tem uma assíntota oblíqua, o seu declive m, é o valor de $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{f(x)}{x}$

Assim, calculando o valor do declive, temos:

$$m = \lim_{x\to +\infty} \frac{h(x)}{x} = \lim_{x\to +\infty} \frac{g(x) + 2x - \frac{1}{\sqrt{x}}}{x} = \lim_{x\to +\infty} \frac{\frac{e^{-x}}{x} + 2x - \frac{1}{\sqrt{x}}}{x} = \lim_{x\to +\infty} \left(\frac{\frac{e^{-x}}{x}}{x} + \frac{2x}{x} - \frac{\frac{1}{\sqrt{x}}}{x} \right) =$$

$$= \lim_{x\to +\infty} \left(\frac{e^{-x}}{x^2} + 2 - \frac{1}{x\sqrt{x}} \right) = \frac{e^{-(+\infty)}}{+\infty} + 2 - \frac{1}{+\infty \times +\infty} = \frac{0^+}{+\infty} + 2 - \frac{1}{+\infty} = 0 + 2 - 0 = 2$$

Resposta: **Opção B**

Exame – 2019, 1.ª Fase

12. Como a função h é contínua (é contínua no intervalo $\left[-\frac{\pi}{3},0\right[$ porque resulta do quociente e do produto de funções contínuas, é contínua em $x = 0$, e é contínua no intervalo $[0, +\infty[$ porque é o quociente de funções contínuas), então o gráfico de h não admite qualquer assíntota vertical.

Como o domínio da função é $\left[-\frac{\pi}{3}, +\infty\right[$, só poderá existir uma assíntota oblíqua quando $x \to +\infty$. Desta forma, vamos averiguar a existência de uma assíntota de equação $y = mx + b$:

$$m = \lim_{x\to+\infty} \frac{h(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{e^x}{x+1}}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^2+x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^2\left(1+\frac{1}{x}\right)} =$$

$$= \underbrace{\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^2}}_{\text{Lim. Notável}} \times \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{1+\frac{1}{x}} = +\infty \times \frac{1}{1+\frac{1}{+\infty}} = +\infty \times \frac{1}{1+0} = +\infty \times 1 = +\infty$$

Assim, como $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{h(x)}{x}$ não é um valor finito, não existe qualquer assíntota oblíqua do gráfico de h.

Exame – 2018, Ép. especial

13. Para averiguar a existência de assíntotas horizontais vamos calcular o limite da função quando $x \to -\infty$ e quando $x \to -\infty$:

- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \left(3 + \frac{e^x}{1-x}\right) = \lim\limits_{x\to-\infty} 3 + \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{e^x}{1-x} = 3 + \frac{e^{-\infty}}{1-(-\infty)} =$

$$= 3 + \frac{0^+}{1+\infty} = 3 + \frac{0^+}{+\infty} = 3 + 0 = 3$$

Como $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 3$, a reta de equação $y = 3$ é assíntota horizontal do gráfico de f

- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln(x^2)+2}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(\frac{\ln(x^2)}{x} + \frac{2}{x}\right) = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln(x^2)}{x} + \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2}{x} =$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{2\ln x}{x} + \frac{2}{+\infty} = \lim_{x\to+\infty} \left(2 \times \frac{\ln x}{x}\right) + 0 = \lim_{x\to+\infty} 2 \times \underbrace{\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x}}_{\text{Lim. Notável}} = 2 \times 0 = 0$$

Como $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 2$, a reta de equação $y = 0$ também é assíntota horizontal do gráfico de f

Exame – 2018, 2.ª Fase

14. Como a função é contínua em $\mathbb{R}^+$, a reta de equação $x = 0$ é a única reta vertical que pode ser assíntota do gráfico de f. Para averiguar esta hipótese vamos calcular $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)$:

$$\lim_{x\to0^+} f(x) = \lim_{x\to0^+} \frac{\ln x}{x} = \frac{\ln 0^+}{0^+} = \frac{-\infty}{0^+} = -\infty$$

Assim, como $\lim\limits_{x\to0^+} f(x) = -\infty$, podemos concluir a reta de equação $x = 0$ é a única assíntota vertical do gráfico de f, ou seja, paralela ao eixo das ordenadas.

Como o domínio da função é $\mathbb{R}^+$, para averiguar a existência de assíntotas paralelas ao eixo das abcissas, vamos calcular $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \underbrace{\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x}}_{\text{Lim. Notável}} = 0$$

Logo, podemos concluir que a reta de equação $y = 0$ é assíntota horizontal do gráfico de f, quando $x \to +\infty$, e que é a única assíntota do gráfico de f paralela ao eixo das abcissas.

Exame – 2017, 2.ª Fase

15. Como o declive da assíntota do gráfico de f é -1, e o domínio de f é $\mathbb{R}^+$, temos que:

$$m = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = -1$$

Como $y = -x$ é assíntota do gráfico de g, e o domínio de g é $\mathbb{R}^+$, temos que:

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty} (-x) = -\infty$$

E assim, temos que:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)\times g(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{f(x)}{x} \times g(x)\right) = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} \times \lim_{x\to+\infty} g(x) = -1 \times (-\infty) = +\infty$$

Resposta: **Opção A**

Exame – 2017, 1.ª Fase

16. Calculando o valor do limite, temos:

$$\lim_{x\to+\infty}\Big(f(x)-x\Big) = \lim_{x\to+\infty}\Big(\ln(e^x+x)-x\Big) = \ln(e^{+\infty}+\infty)-\infty = +\infty-\infty \quad \text{(Indeterminação)}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\Big(f(x)-x\Big) = \lim_{x\to+\infty}\left(\ln\left(e^x\times\left(1+\frac{x}{e^x}\right)\right)-x\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(\ln(e^x)+\ln\left(1+\frac{x}{e^x}\right)-x\right) =$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\left(x+\ln\left(1+\frac{x}{e^x}\right)-x\right) = \lim_{x\to+\infty}\ln\left(1+\frac{x}{e^x}\right) = \ln\left(\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{x}{e^x}\right)\right) =$$

$$= \ln\left(\lim_{x\to+\infty}1+\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{e^x}\right) = \ln\left(1+\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\frac{e^x}{x}}\right) = \ln\left(1+\frac{\lim\limits_{x\to+\infty}1}{\underbrace{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x}}_{\text{Lim. Notável}}}\right) =$$

$$= \ln\left(1+\frac{1}{+\infty}\right) = \ln(1+0) = 0$$

Assim, como $\lim\limits_{x\to+\infty}\Big(f(x)-x\Big) = 0$, podemos concluir que a reta de equação $y = x$ é uma assíntota do gráfico da função f, quando $x\to+\infty$

Exame – 2016, Ép. especial

17. Como o domínio da função é $\left]-\frac{\pi}{2},+\infty\right[$, só poderá existir uma assíntota oblíqua quando $x\to+\infty$. Assim, vamos averiguar a existência de uma assíntota de equação $y = mx+b$:

$$m = \lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x-\ln x}{x} = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x}{x}-\frac{\ln x}{x}\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(1-\frac{\ln x}{x}\right) =$$

$$= \lim_{x\to+\infty}1-\underbrace{\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}}_{\text{Lim. Notável}} = 1-0 = 1$$

$$b = \lim_{x\to+\infty}\big(f(x)-mx\big) = \lim_{x\to+\infty}\big(f(x)-1\times x\big) = \lim_{x\to+\infty}(x-\ln x-x) =$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\big(-\ln x\big) = -\lim_{x\to+\infty}\big(\ln x\big) = -(+\infty) = -\infty$$

Assim, como $\lim\limits_{x\to+\infty}\big(f(x)-mx\big)$ não é um valor finito, não existe qualquer assíntota oblíqua do gráfico de f.

Exame – 2016, 2.ª Fase

18. Simplificando a expressão dada, temos que:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)+e^x-x}{x}=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{f(x)}{x}+\frac{e^x}{x}-\frac{x}{x}\right)=\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}+\lim_{x\to-\infty}\frac{e^x}{x}-\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{x}=$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}+\frac{0^+}{-\infty}-\lim_{x\to-\infty}1=\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}+0-1=\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}-1$$

Pelo que:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)+e^x-x}{x}=1\Leftrightarrow\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}-1=1\Leftrightarrow\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=1+1\Leftrightarrow\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=2$$

Como o domínio da função é $\mathbb{R}^-$, então o declive da assíntota do gráfico de f, é: $m=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=2$

Resposta: **Opção D**

Exame – 2016, 1.ª Fase

19. Como f é uma função contínua em $]-\infty,-1[$ e em $]1,+\infty[$ (porque resulta de operações entre funções contínuas neste domínio), então as retas definidas pelas equações $x=-1$ e $x=1$ são as únicas retas verticais que podem ser assíntotas do gráfico de f.
Para averiguar se estas retas são assíntotas do gráfico de f, de acordo com o domínio da função, vamos calcular:

- $\lim\limits_{x\to-1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to-1^-}\left(\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)\right)=\ln\left(\frac{-1^--1}{-1^-+1}\right)=\ln\left(\frac{-2}{0^-}\right)=\ln(+\infty)=+\infty$
- $\lim\limits_{x\to1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to1^+}\left(\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)\right)=\ln\left(\frac{1^+-1}{1^++1}\right)=\ln\left(\frac{0^+}{2}\right)=\ln(0^+)=-\infty$

Como ambos os limites são infinitos, as duas retas são assíntotas do gráfico de f e não existem outras assíntotas verticais.

Exame – 2016, 1.ª Fase

20. Como o domínio da função é $\mathbb{R}_0^+$, a eventual existência de uma assíntota horizontal será quando $x\to+\infty$:

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(x^2e^{1-x}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(x^2\times\frac{e^1}{e^x}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(e\times\frac{x^2}{e^x}\right)=\lim_{x\to+\infty}e\times\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{e^x}=$$

$$=e\times\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\frac{e^x}{x^2}}=e\times\frac{\lim\limits_{x\to+\infty}1}{\underbrace{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^2}}_{\text{Lim. Notável}}}=e\times\frac{1}{+\infty}=e\times0=0$$

Logo, como $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$, podemos concluir que a reta de equação $y=0$ é assíntota horizontal do gráfico de f

Exame – 2015, Ép. especial

21. Averiguando a existência de uma assíntota horizontal quando $x \to -\infty$, vem

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} (1 + xe^x) = \lim_{x\to-+\infty} 1 + \lim_{x\to-\infty} (xe^x) = 1 + (-\infty \times e^{-\infty}) = 1 + \underbrace{(-\infty \times 0^+)}_{\text{Indeterminação}}$$

(fazendo $y = -x$, temos $x = -y$; e se $x \to -\infty$, então $y \to +\infty$)

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 1 + \lim_{x\to-\infty} (xe^x) = 1 + \lim_{y\to+\infty} (-ye^{-y}) = 1 + \lim_{y\to+\infty} \left(-y \times \frac{1}{e^y}\right) = 1 - \lim_{y\to+\infty} \left(\frac{y}{e^y}\right) =$$

$$= 1 - \lim_{y\to+\infty} \left(\frac{1}{\frac{e^y}{y}}\right) = 1 - \frac{1}{\underbrace{\lim_{y\to+\infty} \frac{e^y}{y}}_{\text{Lim. Notável}}} = 1 - \frac{1}{+\infty} = 1 - 0 = 1$$

Logo, como $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 1$, podemos concluir que a reta de equação $y = 1$ é assíntota horizontal do gráfico de f

Averiguando agora a existência de uma assíntota horizontal quando $x \to +\infty$, vem

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} (\ln(x-3) - \ln x) = \lim_{x\to+\infty} \left(\ln \frac{x-3}{x}\right) = \ln \left(\lim_{x\to+\infty} \frac{x-3}{x}\right) =$$

$$= \ln \left(\frac{\lim\limits_{x\to+\infty} (x-3)}{\lim\limits_{x\to+\infty} x}\right) = \ln \left(\frac{\lim\limits_{x\to+\infty} (x)}{\lim\limits_{x\to+\infty} x}\right) = \ln \left(\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{x}\right) = \ln(1) = 0$$

Logo, como $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$, podemos concluir que a reta de equação $y = 0$ também é assíntota horizontal do gráfico de f

Exame – 2015, 2.ª Fase

22. Como f é uma função contínua em $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{2}\right\}$ (porque ambos os ramos resultam de operações entre funções nos respetivos domínios em que estão definidos), então $x = \frac{1}{2}$ é a única reta vertical que pode ser assíntota do gráfico de f

Para averiguar se a reta de equação $x = \frac{1}{2}$ é assíntota do gráfico de f, vamos calcular $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}^+} f(x)$ e $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}^-} f(x)$:

- $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}^+} f(x) = \lim\limits_{x\to\frac{1}{2}^+} \big((x+1)\ln x\big) = \left(\frac{1}{2} + 1\right) \ln \frac{1}{2} = \frac{3}{2}(\ln 1 - \ln 2) = -\frac{3\ln 2}{2}$
- $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}^-} f(x) = \lim\limits_{x\to\frac{1}{2}^-} \frac{e^x - \sqrt{e}}{2x-1} = \lim\limits_{x\to\frac{1}{2}^-} \frac{e^x - \sqrt{e}}{2x-1} = \frac{e^{\frac{1}{2}} - e^{\frac{1}{2}}}{2\left(\frac{1}{2}\right) - 1} = \frac{0}{1-1} = \frac{0}{0}$ (indeterminação)

(fazendo $y = x - \frac{1}{2}$, temos $x = y + \frac{1}{2}$; e se $x \to \frac{1}{2}^-$, então $y \to 0^-$)

$$\lim_{x\to\frac{1}{2}^-} f(x) = \lim_{x\to\frac{1}{2}^-} \frac{e^x - \sqrt{e}}{2x-1} = \lim_{x\to\frac{1}{2}^-} \frac{e^x - \sqrt{e}}{2\left(x - \frac{1}{2}\right)} = \lim_{y\to 0^-} \frac{e^{y+\frac{1}{2}} - e^{\frac{1}{2}}}{2(y)} = \lim_{y\to 0^-} \frac{e^y \times e^{\frac{1}{2}} - e^{\frac{1}{2}}}{2y} = =$$

$$\lim_{y\to 0^-} \frac{e^{\frac{1}{2}}(e^y - 1)}{2y} = \lim_{y\to 0^-} \left(\frac{e^{\frac{1}{2}}}{2} \times \frac{e^y - 1}{y}\right) = \frac{e^{\frac{1}{2}}}{2} \underbrace{\lim_{y\to 0^-} \frac{e^y - 1}{y}}_{\text{Lim. Notável}} = \frac{e^{\frac{1}{2}}}{2} = \frac{\sqrt{e}}{2}$$

Assim, como $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}^+} f(x)$ e $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}^-} f(x)$, são ambos números reais, concluímos que a reta de equação $x = \frac{1}{2}$ não é assíntota vertical do gráfico de f (e que não existe qualquer outra assíntota vertical).

Exame – 2015, 1.ª Fase

23. Como $D_f =]-\infty, e[$, se existir uma assíntota horizontal, $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ é constante.
Assim, calculando o limite temos:
$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} (xe^{x-2}) = -\infty \times xe^{-\infty-2} = -\infty \times 0$ (indeterminação)
(Seja $y = -x$, temos que se $x \to -\infty$, então $y \to +\infty$)

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{y \to +\infty} (-ye^{-y-2}) = \lim_{y \to +\infty} (-y \times e^{-y} \times e^{-2}) = \lim_{y \to +\infty} \left(-y \times \frac{1}{e^y} \times e^{-2}\right) =$$

$$= \lim_{y \to +\infty} \left(-\frac{y}{e^y}\right) \times \lim_{y \to +\infty} e^{-2} = -\lim_{y \to +\infty} \frac{y}{e^y} \times e^{-2} = -e^{-2} \lim_{y \to +\infty} \frac{y}{e^y} = -e^{-2} \lim_{y \to +\infty} \left(\frac{1}{\frac{e^y}{y}}\right) =$$

$$= -e^{-2} \times \frac{1}{\underbrace{\lim\limits_{y \to +\infty} \frac{e^y}{y}}_{\text{Lim. Notável}}} = -e^{-2} \times \frac{1}{+\infty} = -e^{-2} \times 0 = 0$$

Logo, como $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$ e $D_f =]-\infty, e[$, podemos concluir que a única assíntota horizontal do gráfico de f é a reta de equação $y = 0$

Exame – 2014, Ép. especial

24. Como a reta de equação $y = 2x - 5$ é assíntota do gráfico de f e $D_f = \mathbb{R}^+$, sabemos que

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = 2$$

Assim,

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{6x-1}{f(x)} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{6x-1}{x}}{\frac{f(x)}{x}} = \frac{\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{6x-1}{x}}{\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x}} = \frac{\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{6x}{x} - \frac{1}{x}\right)}{2} = \frac{6-0}{2} = 3$$

Resposta: **Opção C**

Exame – 2014, Ép. especial

25. Como a função f resulta de operações entre funções contínuas, é contínua no seu domínio, e como o seu domínio é $]-\infty,0[$, então a única reta que pode ser assíntota vertical do gráfico de f é a reta de equação $x=0$

Para averiguar se a reta de equação $x=0$ é assíntota do gráfico de f, vamos calcular $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$:

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-}\left(x-1+\frac{\ln(-x)}{x}\right) = \lim_{x\to 0^-} x - \lim_{x\to 0^-} 1 + \lim_{x\to 0^-}\frac{\ln(-x)}{x} =$$

$$= 0-1+\frac{\ln(-0^-)}{0^-} = -1+\frac{\ln(0^+)}{0^-} = -1+\frac{-\infty}{0^-} = -1+\infty = +\infty$$

Assim, como $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = +\infty$, concluímos que a reta de equação $x=0$ é assíntota vertical do gráfico de f (e que não existe qualquer outra assíntota vertical).

Relativamente à existência de assíntotas não verticais, como o domínio de f é $]-\infty,0[$, só poderão existir quando $x\to-\infty$. Assim, vamos averiguar a existência de uma assíntota de equação $y=mx+b$:

$$m = \lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty}\frac{x-1+\frac{\ln(-x)}{x}}{x} = \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x}{x}-\frac{1}{x}+\frac{\ln(-x)}{x^2}\right) =$$

$$= 1+0+\lim_{x\to-\infty}\frac{\ln(-x)}{x^2} = 1+\lim_{x\to-\infty}\frac{\ln(-x)}{x^2} = 1-0+\frac{+\infty}{+\infty} \ \text{(Indeterminação)}$$

(fazendo $y=-x$, temos $x=-y$ e se $x\to-\infty$, então $y\to+\infty$)

$$m = 1+\lim_{x\to-\infty}\frac{\ln(-x)}{x^2} = 1+\lim_{y\to+\infty}\frac{\ln(-(-y))}{(-y)^2} = 1+\lim_{y\to+\infty}\frac{\ln(y)}{y^2} = 1+\lim_{y\to+\infty}\left(\frac{1}{y}\times\frac{\ln(y)}{y}\right) =$$

$$= 1+\lim_{y\to+\infty}\frac{1}{y}\times\underbrace{\lim_{y\to+\infty}\frac{\ln(y)}{y}}_{\text{Lim. Notável}} = 1+\frac{1}{+\infty}\times 0 = 1+0\times 0 = 1$$

$$b = \lim_{x\to-\infty}\big(f(x)-mx\big) = \lim_{x\to-\infty}\big(f(x)-1\times x\big) = \lim_{x\to-\infty}\left(x-1+\frac{\ln(-x)}{x}-x\right) = \lim_{x\to-\infty}\left(-1+\frac{\ln(-x)}{x}\right) =$$

(fazendo $y=-x$, temos $x=-y$ e se $x\to-\infty$, então $y\to+\infty$)

$$b = -1+\lim_{x\to-\infty}\frac{\ln(-x)}{x} = -1+\lim_{y\to+\infty}\frac{\ln(-(-y))}{-y} = -1-\underbrace{\lim_{y\to+\infty}\frac{\ln(y)}{y}}_{\text{Lim. Notável}} = -1-0 = -1$$

Assim temos que a reta de equação $y=x-1$ é uma assíntota do gráfico de f (e não existem outras assíntotas não verticais).

Exame – 2014, 2.ª Fase

26. Como o gráfico da função f tem uma assíntota oblíqua quando x tende para $+\infty$, de equação $y=x+b$, ou seja uma reta de declive 1, temos que

$$m = \lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = 1$$

E assim, calculando o valor de b, vem que:

$$b = \lim_{x\to+\infty}\big(f(x)-mx\big) = \lim_{x\to+\infty}\big(f(x)-1\times x\big) = \lim_{x\to+\infty}\big(\ln(2e^x-e^4)-x\big) = +\infty-\infty \ \text{(Indeterminação)}$$

$$b = \lim_{x\to+\infty}\big(\ln(2e^x-e^4)-x\big) \underset{x=\ln e^x}{=} \lim_{x\to+\infty}\big(\ln(2e^x-e^4)-\ln e^x\big) = \lim_{x\to+\infty}\left(\ln\frac{2e^x-e^4}{e^x}\right) =$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\left(\ln\left(\frac{2e^x}{e^x}-\frac{e^4}{e^x}\right)\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(\ln\left(2-\frac{e^4}{e^x}\right)\right) = \ln\left(\lim_{x\to+\infty}\left(2-\frac{e^4}{e^x}\right)\right) =$$

$$= \ln\left(2-\frac{e^4}{e^{+\infty}}\right) = \ln(2-0) = \ln 2$$

Exame – 2014, 1.ª Fase

27. Como a função, em ambos os ramos, resulta de operações e composições de funções contínuas em $\mathbb{R}^-$ e em $\mathbb{R}^+$, a função é contínua em $\mathbb{R}^-$ e em $\mathbb{R}^+$, pelo que a única reta vertical que pode ser assíntota do gráfico de f é a reta $x = 0$

Averiguando que $x = 0$ é assíntota do gráfico de f, temos:

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \left(2x + 1 + e^{-x}\right) = 2\times 0 + 1 + e^{-0} = 0 + 1 + 1 = 2$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \left(\frac{3x + \ln x}{x}\right) = \frac{3\times 0^+ + \ln 0^+}{0^+} = \frac{0 + (-\infty)}{0^+} = \frac{-\infty}{0^+} = -\infty$$

Pelo que, apesar de $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$ não ser infinito, como $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$ podemos afirmar que $x = 0$ é assíntota do gráfico de f

Para mostrar que existe uma assíntota horizontal do gráfico de f quando $x \to +\infty$, temos

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty} \frac{3x + \ln x}{x} = \lim_{x\to +\infty} \left(\frac{3x}{x} + \frac{\ln x}{x}\right) = \lim_{x\to +\infty} \left(3 + \frac{\ln x}{x}\right) =$$

$$= \lim_{x\to +\infty} 3 + \underbrace{\lim_{x\to +\infty} \frac{\ln x}{x}}_{\text{Lim. Notável}} = 3 + 0 = 3$$

Logo podemos afirmar que $y = 3$ é uma assíntota horizontal do gráfico de f quando $x \to +\infty$

Para mostrar não existe assíntota não vertical do gráfico de f quando $x \to -\infty$, ou seja uma reta de equação $y = mx + b$, vem

$$m = \lim_{x\to -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to -\infty} \frac{2x + 1 + e^{-x}}{x} = \lim_{x\to -\infty} \left(\frac{2x}{x} + \frac{1}{x} + \frac{e^{-x}}{x}\right) = \lim_{x\to -\infty} \left(2 + \frac{1}{x} + \frac{e^{-x}}{x}\right) =$$

$$= \lim_{x\to -\infty} 2 + \lim_{x\to -\infty} \frac{1}{x} + \lim_{x\to -\infty} \frac{e^{-x}}{x} = 2 + \frac{1}{-\infty} + \frac{e^{-(-\infty)}}{-\infty} = 2 + 0 + \frac{+\infty}{-\infty} (\text{ indeterminação})$$

Fazendo $y = -x$, vem que $x = -y$ e se $x \to -\infty$ então $y \to +\infty$

$$= 2 + 0 + \lim_{x\to -\infty} \frac{e^{-x}}{x} = 2 + \lim_{y\to +\infty} \frac{e^{y}}{-y} = 2 + \lim_{y\to +\infty} \left(-\frac{e^{y}}{y}\right) = 2 - \underbrace{\lim_{y\to +\infty} \frac{e^{y}}{y}}_{\text{Lim. Notável}} = 2 - (+\infty) = -\infty$$

E assim, como $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{f(x)}{x} = -\infty$ podemos concluir que não existe assíntota não vertical do gráfico de f, quando $x \to -\infty$

Teste Intermédio 12.º ano – 30.04.2014

28. Como $\lim\limits_{x\to -\infty} [f(x) + 2x] = 2$, temos que $\lim\limits_{x\to -\infty} [f(x) - (-2x)] = 2$, o que significa que a reta de equação $y = -2x + 2$ é assíntota do gráfico de f, quando $x \to -\infty$

O único gráfico que admite a reta $y = -2x + 2$ como assíntota é o da opção (A).

Resposta: **Opção A**

Exame – 2013, Ép. especial

29. Como $y=2x-1$ é assíntota do gráfico de g, e o domínio da função g é $\mathbb{R}^+$, temos que $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{g(x)}{x}=2$

Como o domínio da função h é $\mathbb{R}^+$, vamos calcular o valor de $\lim\limits_{x\to+\infty}h(x)$:

$$\lim_{x\to+\infty}h(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{1-[g(x)]^2}{x^2}=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x^2}-\frac{[g(x)]^2}{x^2}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^2}-\lim_{x\to+\infty}\frac{[g(x)]^2}{x^2}=$$

$$=\frac{1}{+\infty}-\lim_{x\to+\infty}\left[\left(\frac{g(x)}{x}\right)^2\right]=0-\left(\lim_{x\to+\infty}\frac{g(x)}{x}\right)^2=-2^2=-4$$

Como $\lim\limits_{x\to+\infty}h(x)=-4$, o gráfico de h tem uma assíntota horizontal.

Exame – 2013, Ép. especial

30. Para mostrar que o gráfico da função f admite uma assíntota oblíqua de equação $y=mx+b$, quando x tende para $-\infty$, temos:

$$m=\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{xe^{3+x}+2x}{x}=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{xe^{3+x}}{x}+\frac{2x}{x}\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(e^{3+x}+2\right)=$$

$$=\lim_{x\to-\infty}e^{3+x}+\lim_{x\to-\infty}2=e^{3+(-\infty)}+2=e^{-\infty}+2=0^++2=2$$

$$b=\lim_{x\to-\infty}\big(f(x)-mx\big)=\lim_{x\to-\infty}\left(xe^{3+x}+2x-2x\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(xe^{3+x}\right)=-\infty\times e^{3+(-\infty)}=$$

$$=-\infty\times e^{-\infty}+2=-\infty\times 0^+(\text{ indeterminação})$$

(fazendo $y=-x$, temos $x=-y$ e se $x\to-\infty$, então $y\to+\infty$)

$$b=\lim_{x\to-\infty}\left(xe^{3+x}\right)=\lim_{y\to+\infty}\left(-ye^{3-y}\right)=-\lim_{y\to+\infty}\left(ye^{3-y}\right)=-\lim_{y\to+\infty}\left(y\times\frac{e^3}{e^y}\right)=-\lim_{y\to+\infty}\left(e^3\times\frac{y}{e^y}\right)=$$

$$=-\lim_{y\to+\infty}e^3\times\lim_{y\to+\infty}\frac{y}{e^y}=-e^3\times\lim_{y\to+\infty}\frac{1}{\frac{e^y}{y}}=-e^3\times\frac{\lim\limits_{y\to+\infty}1}{\underbrace{\lim\limits_{y\to+\infty}\frac{e^y}{y}}_{\text{Lim. Notável}}}=-e^3\times\frac{1}{+\infty}=-e^3\times 0=0$$

Assim temos que a reta de equação $y=2x$ é uma assíntota do gráfico de f quando x tende para $-\infty$

Exame – 2013, 2.ª Fase

31. Como sabemos que $m=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}$, em que m é o declive de uma assíntota do gráfico de f, vem que

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x+f(x)}{3x}=1\Leftrightarrow\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\ln x}{3x}+\frac{f(x)}{3x}\right)=1\Leftrightarrow\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{3x}+\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{3x}=1\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\frac{1}{3}\underbrace{\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}}_{\text{Lim. Notável}}+\frac{1}{3}\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=1\Leftrightarrow 0+\frac{1}{3}\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=1\Leftrightarrow\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=3$$

Logo uma assíntota do gráfico de f, se existir, é uma reta de declive 3, pelo que a única equação, de entre as hipóteses apresentadas, que pode definir uma assíntota do gráfico da função f é $y=3x$

Resposta: **Opção D**

Exame – 2013, 1.ª Fase

32. Como a função, em ambos os ramos, resulta de operações e composições de funções contínuas em $\mathbb{R}^-$ e em $\mathbb{R}^+$, a função é contínua em $\mathbb{R}^-$ e em $\mathbb{R}^+$, pelo que a única reta vertical que pode ser assíntota do gráfico de f é a reta $x=0$

Averiguando se $x=0$ é assíntota do gráfico de f, temos:

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} (x\ln x) = 0^+ \times \ln(0^+) = 0^+ \times (-\infty) \text{ (indeterminação)}$$

(fazendo $y=\frac{1}{x}$, temos $x=\frac{1}{y}$ e se $x\to 0^+$, então $y\to+\infty$)

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} (x\ln x) = \lim_{y\to+\infty}\left(\frac{1}{y}\times\ln\frac{1}{y}\right) = \lim_{y\to+\infty}\left(\frac{1}{y}\times(\ln 1-\ln y)\right) =$$

$$= \lim_{y\to+\infty}\left(\frac{1}{y}\times(-\ln y)\right) = \lim_{y\to+\infty}\left(-\frac{\ln y}{y}\right) = -\underbrace{\lim_{y\to+\infty}\frac{\ln y}{y}}_{\text{Lim. Notável}} = 0$$

Temos ainda que

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-}\frac{e^x-1}{e^{4x}-1} = \frac{e^0-1}{e^0-1} = \frac{0}{0} \text{ (indeterminação)}$$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-}\frac{e^x-1}{e^{4x}-1} = \lim_{x\to 0^-}\left(\frac{e^x-1}{e^{4x}-1}\times\frac{x}{x}\right) = \lim_{x\to 0^-}\left(\frac{e^x-1}{x}\times\frac{x}{e^{4x}-1}\right) =$$

$$= \underbrace{\lim_{x\to 0^-}\frac{e^x-1}{x}}_{\text{Lim. Notável}}\times\lim_{x\to 0^-}\frac{x}{e^{4x}-1} = 1\times\lim_{x\to 0^-}\left(\frac{1}{4}\times\frac{4\times x}{e^{4x}-1}\right) = \lim_{x\to 0^-}\frac{1}{4}\times\lim_{x\to 0^-}\frac{4x}{e^{4x}-1} =$$

$$= \frac{1}{4}\times\lim_{x\to 0^-}\left(\frac{1}{\frac{e^{4x}-1}{4x}}\right) = \frac{1}{4}\times\frac{\lim\limits_{x\to 0^-} 1}{\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{e^{4x}-1}{4x}} = \frac{1}{4\times\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{e^{4x}-1}{4x}} =$$

(fazendo $y=4x$, temos que se $x\to 0^-$, então também $y\to 0^-$)

$$= \frac{1}{4\times\underbrace{\lim\limits_{y\to 0^-}\frac{e^y-1}{y}}_{\text{Lim. Notável}}} = \frac{1}{4\times 1} = \frac{1}{4}$$

E assim, como todos os limites calculados existem e têm um valor real (finito), podemos concluir que a função f não tem qualquer assíntota vertical.

Exame – 2013, 1.ª Fase

33. Para mostrar que o gráfico da função f admite uma assíntota oblíqua de equação $y = mx + b$, quando x tende para $-\infty$, temos:

$$m = \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{3x+1-xe^x}{x} = \lim_{x\to-\infty} \left(\frac{3x}{x} + \frac{1}{x} - \frac{xe^x}{x}\right) = \lim_{x\to-\infty} \left(3 + \frac{1}{x} - e^x\right) =$$

$$= \lim_{x\to-\infty} 3 + \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x} - \lim_{x\to-\infty} e^x = 3 + 0^- - 0^+ = 3$$

$$b = \lim_{x\to-\infty} \big(f(x) - mx\big) = \lim_{x\to-\infty} \big(3x+1-xe^x-3x\big) = \lim_{x\to-\infty} \big(1-xe^x\big) = 1 - \infty \times e^{-\infty} = \underbrace{-\infty \times 0^+}_{\text{Indeterminação}}$$

(fazendo $y = -x$, temos $x = -y$ e se $x \to -\infty$, então $y \to +\infty$)

$$b = \lim_{x\to-\infty} \big(1-xe^x\big) = \lim_{x\to-\infty} 1 - \lim_{x\to-\infty} \big(xe^x\big) = 1 - \lim_{x\to-\infty} \big(xe^x\big) = 1 - \lim_{y\to+\infty} \big(-ye^{-y}\big) = 1 - \lim_{y\to+\infty} \left(-y \times \frac{1}{e^y}\right) =$$

$$= 1 - \lim_{y\to+\infty} \left(-\frac{y}{e^y}\right) = 1 + \lim_{y\to+\infty} \left(\frac{y}{e^y}\right) = 1 + \lim_{y\to+\infty} \frac{1}{\frac{e^y}{y}} = 1 + \frac{\lim_{y\to+\infty} 1}{\underbrace{\lim_{y\to+\infty} \frac{e^y}{y}}_{\text{Lim. Notável}}} = 1 + \frac{1}{+\infty} = 1 + 0 = 1$$

Assim temos que a reta de equação $y = 3x + 1$ é uma assíntota do gráfico de f quando x tende para $-\infty$

Teste Intermédio 12.º ano – 24.05.2013

34. Para mostrar que o gráfico da restrição da função f ao intervalo $]-\infty, 4]$ tem uma assíntota horizontal de equação $y = k$, quando x tende para $-\infty$, temos:

$$k = \lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{3x+3}{\sqrt{x^2+9}} = \frac{3(-\infty)+3}{\sqrt{(-\infty)^2+9}} = \frac{-\infty}{+\infty} \text{ (indeterminação)}$$

$$k = \lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{3x+3}{\sqrt{x^2+9}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{3x+3}{\sqrt{x^2\left(1+\frac{9}{x^2}\right)}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x\left(3+\frac{3}{x}\right)}{\sqrt{x^2} \times \sqrt{1+\frac{9}{x^2}}} =$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{x}{|x|} \times \lim_{x\to-\infty} \frac{3+\frac{3}{x}}{\sqrt{1+\frac{9}{x^2}}} = -1 \times \frac{3+\frac{3}{-\infty}}{\sqrt{1+\frac{9}{+\infty}}} = -\frac{3+0^-}{\sqrt{1+0^+}} = -\frac{3}{1} = -3$$

Assim temos que a reta de equação $y = -3$ é a assíntota horizontal do gráfico da restrição da função f ao intervalo $]-\infty, 4]$

Teste Intermédio 12.º ano – 28.02.2013

35. Como o domínio de g é $]0, +\infty[$, a reta defina por $x = k$ é assíntota do gráfico de g, se

$$k = \lim_{x\to+\infty} g(x)$$

Assim, como a reta de equação $y = 3$ é assíntota horizontal do gráfico de f, (e o domínio de f é $]0, +\infty[$), temos que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 3$.

Logo

$$k = \lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^{-x}-3}{f(x)} = \frac{\lim_{x\to+\infty}(e^{-x}-3)}{\lim_{x\to+\infty} f(x)} = \frac{e^{-\infty}-3}{3} = \frac{0^+-3}{3} = \frac{-3}{3} = -1$$

Pelo que a reta de equação $y = -1$ é uma assíntota do gráfico de e quando x tende para $+\infty$

Resposta: **Opção D**

Exame – 2012, Ép. especial

36. Como $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = 3$ podemos afirmar que a reta horizontal definida pela equação $y = 3$ é uma assíntota do gráfico de f

Como $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = +\infty$ podemos afirmar que a reta vertical definida pela equação $x = 1$ é uma assíntota do gráfico de f

Como $y = mx + b$ é uma assíntota não vertical do gráfico de f se $\lim\limits_{x\to +\infty} (f(x) - mx) = b$, então como $\lim\limits_{x\to +\infty} (f(x) - 2x) = 1$, temos que a reta definida por $y = 2x+1$ é uma assíntota não vertical do gráfico de f

Assim, a única opção em que são indicadas duas das três assíntotas identificadas é a opção (B).

Resposta: **Opção B**

Exame – 2012, 2.ª Fase

37. Como o domínio da função f é $\mathbb{R}$, poderão existir assíntotas não verticais quando $x \to -\infty$ e quando $x \to +\infty$. Assim, vamos averiguar em primeiro lugar a existência de uma assíntota de equação $y = mx+b$, quando $x \to -\infty$:

$$m = \lim_{x\to -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to -\infty} \frac{xe^{1-x}}{x} = \lim_{x\to -\infty} (e^{1-x}) = e^{1-(-\infty)} = e^{1+\infty} = +\infty$$

Pelo que, como $m = \lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{f(x)}{x}$ não é constante, podemos afirmar que não existe uma assíntota não vertical do gráfico de f, quando $x \to -\infty$

Averiguando a existência de uma assíntota de equação $y = mx + b$, quando $x \to +\infty$, vem:

$$m = \lim_{x\to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to +\infty} \frac{x\ln(x+1) - x\ln(x) + 3x}{x} = \lim_{x\to +\infty} \big(\ln(x+1) - \ln(x) + 3\big) = +\infty - \infty \text{ (Indeterminação)}$$

$$m = \lim_{x\to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to +\infty} \big(\ln(x+1) - \ln(x) + 3\big) = \lim_{x\to +\infty} \big(\ln(x+1) - \ln(x)\big) + \lim_{x\to +\infty} 3 = \lim_{x\to +\infty} \left(\ln \frac{x+1}{x}\right) + 3 =$$

$$= \lim_{x\to +\infty} \left(\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)\right) + 3 = \ln\left(1 + \frac{1}{+\infty}\right) + 3 = \ln\left(1 + 0^+\right) + 3 = \ln(1) + 3 = 0 + 3 = 3$$

$$b = \lim_{x\to +\infty} \big(f(x) - mx\big) = \lim_{x\to +\infty} \big(f(x) - 3\times x\big) = \lim_{x\to +\infty} \big(x\ln(x+1) - x\ln(x) + 3x - 3x\big) =$$

$$= \lim_{x\to +\infty} \Big(x\big(\ln(x+1) - \ln(x)\big)\Big) = \lim_{x\to +\infty} \left(x \times \ln\frac{x+1}{x}\right) = \lim_{x\to +\infty} \left(x\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)\right) = +\infty \times 0 \text{ (Indeterminação)}$$

(fazendo $y = \frac{1}{x}$, temos $x = \frac{1}{y}$ e se $x \to +\infty$, então $y \to 0^+$)

$$b = \lim_{x\to +\infty} \left(x\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)\right) = \lim_{y\to 0^+} \left(\frac{1}{y}\ln\left(1 + \frac{1}{\frac{1}{y}}\right)\right) = \lim_{y\to 0^+} \left(\frac{1}{y}\ln(1+y)\right) =$$

$$= \lim_{y\to 0^+} \left(\frac{\ln(1+y)}{y}\right) = \underbrace{\lim_{y\to 0^+} \left(\frac{\ln(y+1)}{y}\right)}_{\text{Lim. Notável}} = 1$$

Assim temos que a reta de equação $y = 3x + 1$ é uma assíntota do gráfico de f (e não existem outras assíntotas não verticais).

Exame – 2012, 1.ª Fase

38. Como $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$ então $\lim\limits_{x\to 0^+} \left(\dfrac{1}{f}\right)(x) = \dfrac{\lim\limits_{x\to 0^+} 1}{\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)} = \dfrac{1}{-\infty} = 0^-$

Pelo que podemos rejeitar os gráficos das opções (B) e (C), que não verificam esta condição.

Como a bissetriz dos quadrantes ímpares é assíntota do gráfico de f, então $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$ e assim, temos que $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(\dfrac{1}{f}\right)(x) = \dfrac{\lim\limits_{x\to +\infty} 1}{\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)} = \dfrac{1}{+\infty} = 0^+$

Pelo que podemos rejeitar o gráfico da opções (A), que não verifica esta condição.

Desta forma o gráfico da opção (D), de entre os apresentados, é o único compatível com as condições definas.

Resposta: **Opção D**

Teste Intermédio 12.º ano – 24.05.2012

39. A assíntota horizontal, quando $x \to -\infty$, é a reta de equação $y = a$, em que $a = \lim\limits_{x\to -\infty} f(x)$ e a assíntota horizontal, quando $x \to +\infty$, é a reta de equação $y = b$, em que $b = \lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$

- Determinado a equação da assíntota do gráfico de f quando $x \to -\infty$, temos

  $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to -\infty} (k + xe^x) = k + \lim\limits_{x\to -\infty} (xe^x) = k + (-\infty) \times e^{-\infty} = k + (-\infty) \times 0$ (Indeterminação)

  (fazendo $y = -x$, temos $x = -y$ e se $x \to -\infty$, então $y \to +\infty$)

$$\lim_{x\to -\infty} f(x) = \lim_{y\to +\infty} \left(k + (-y)e^{-y}\right) = k + \lim_{y\to +\infty} \left(-y \times \frac{1}{e^y}\right) = k - \lim_{y\to +\infty} \left(\frac{y}{e^y}\right) =$$

$$= k - \lim_{y\to +\infty} \left(\frac{1}{\frac{e^y}{y}}\right) = k - \frac{\lim\limits_{y\to +\infty} 1}{\underbrace{\lim\limits_{y\to +\infty} \frac{e^y}{y}}_{\text{Lim. Notável}}} = k - \frac{1}{+\infty} = k - 0 = k$$

- Determinado a equação da assíntota do gráfico de f quando $x \to +\infty$, temos

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty} \left(\frac{2x + \ln x}{x}\right) = \lim_{x\to +\infty} \left(\frac{2x}{x} + \frac{\ln x}{x}\right) = \lim_{x\to +\infty} (2) + \underbrace{\lim_{x\to +\infty} \frac{\ln x}{x}}_{\text{Lim. Notável}} = 2 + 0 = 2$$

Assim, para que as duas assíntotas sejam coincidentes, ficando assim o gráfico de f com uma única assíntota horizontal, temos que $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$, ou seja,

$$k = 2$$

Teste Intermédio 12.º ano – 13.03.2012

40. Para averiguar a existência de assíntotas horizontais do gráfico de f temos que calcular $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ e $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

Assim temos que:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}\left(3+\frac{1-e^{x-1}}{x-1}\right) = \lim_{x\to-\infty} 3 + \lim_{x\to-\infty}\frac{1-e^{x-1}}{x-1} = 3+\frac{1-e^{-\infty-1}}{-\infty-1} = 3+\frac{1-0}{-\infty} = 3-0 = 3$$

Pelo que podemos afirmar que a reta de equação $y=3$ é assíntota do gráfico de f (quando $x\to-\infty$)

Temos ainda que:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}(-x+\ln x) = \lim_{x\to+\infty}\left(x\left(-1+\frac{\ln x}{x}\right)\right) = \lim_{x\to+\infty} x \times \lim_{x\to+\infty}\left(-1+\frac{\ln x}{x}\right) =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} x \times \left(\lim_{x\to+\infty}(-1) + \underbrace{\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}}_{\text{Lim. Notável}}\right) = +\infty\times(-1+0) = +\infty\times(-1) = -\infty$$

Pelo que podemos afirmar que o gráfico de f não tem assíntotas horizontais quando $x\to+\infty$, ou seja, $y=3$ é a única assíntota horizontal do gráfico de f

Exame – 2011, Prova especial

41.
- Como $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 1$ então a reta de equação $y=1$ é assíntota do gráfico de f
- Como $\lim\limits_{x\to-\infty}(f(x)+2x) = 0 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to-\infty}(f(x)-(-2x)) = 0$ então a reta de equação $y=-2x+0$ é assíntota do gráfico de f

Logo as assíntotas do gráfico de f são definidas por $y=1$ e $y=-2x$

Resposta: **Opção C**

Exame – 2011, Ép. especial

42. Como a função f resulta de operações entre funções contínuas, em $[0,2[$ e em $[2,+\infty[$ é contínua em $[0,2[$ e em $[2,+\infty[$, e como o seu domínio é $[0+\infty[$, então a única reta que pode ser assíntota vertical do gráfico de f é a reta de equação $x=2$

Para averiguar se a reta de equação $x=2$ é assíntota do gráfico de f, vamos calcular $\lim\limits_{x\to2^-} f(x)$:

$$\lim_{x\to2^-} f(x) = \lim_{x\to2^-}\frac{e^{2-x}-1}{x-2} = \frac{e^{2-2^-}-1}{2^- - 2} = \frac{e^0-1}{0} = \frac{0}{0} \quad \text{(Indeterminação)}$$

$$\lim_{x\to2^-} f(x) = \lim_{x\to2^-}\frac{e^{2-x}-1}{x-2} = \lim_{x\to2^-}\frac{e^{2-x}-1}{-(-x+2)} = \lim_{x\to2^-}\left(-\frac{e^{2-x}-1}{2-x}\right) = -\lim_{x\to2^-}\frac{e^{2-x}-1}{2-x}$$

(fazendo $y=2-x$, temos que se $x\to2^-$, então $y\to0^+$)

$$\lim_{x\to2^-} f(x) = -\underbrace{\lim_{y\to0^+}\frac{e^y-1}{y}}_{\text{Lim. Notável}} = -1$$

Assim, como $\lim\limits_{x\to2^-} f(x)$ é uma valor finito, concluímos que a reta de equação $x=2$ não é assíntota vertical do gráfico de f (e que não existe qualquer outra assíntota vertical).

Exame – 2011, 2.ª Fase

43. Como a reta $y = 2x - 4$ é assíntota do gráfico de g, temos que

- $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{g(x)}{x} = 2$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} (g(x) - 2x) = -4$

Da definição de assíntota temos que

$$\lim_{x \to +\infty} \big(g(x) - \big(2x - 4\big)\big) = 0 \Leftrightarrow \lim_{x \to +\infty} (g(x) - 2x + 4) = 0$$

Resposta: **Opção C**

Exame – 2011, 1.ª Fase

44. Como o domínio da função é f é $\mathbb{R}^+$, o comportamento assintótico do gráfico é verificado quando $x \to +\infty$

Assim, determinando a assíntota de equação $y = mx + b$, quando $x \to +\infty$, vem:

$$m = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{xe^{-x} + 2x}{x} = \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{xe^{-x}}{x} + \frac{2x}{x} \right) = \lim_{x \to +\infty} \left(e^{-x} + 2\right) = e^{-\infty} + 2 = 0^+ + 2 = 2$$

$$b = \lim_{x \to +\infty} \big(f(x) - mx\big) = \lim_{x \to +\infty} \big(f(x) - 2 \times x\big) = \lim_{x \to +\infty} \left(xe^{-x} + 2x - 2x\right) = \lim_{x \to +\infty} \left(xe^{-x}\right) =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \left(x \times \frac{1}{e^x} \right) = \lim_{x \to +\infty} \frac{x}{e^x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{\frac{e^x}{x}} = \frac{\lim\limits_{x \to +\infty} 1}{\underbrace{\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x}}_{\text{Lim. Notável}}} = \frac{1}{+\infty} = 0$$

Assim, temos que a reta de equação $y = 2x + 0$, ou mais simplesmente, $y = 2x$ é a assíntota oblíqua gráfico de f

Teste Intermédio 12.º ano – 26.05.2011

45. Como a reta de equação $y = -4$ é assíntota do gráfico da função h, de domínio $\mathbb{R}^+$, então temos que

$$\lim_{x \to +\infty} h(x) = -4$$

Logo, vem que

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln\left(\frac{1}{2x}\right)}{h(x)} = \frac{\lim\limits_{x \to +\infty} \ln\left(\frac{1}{2x}\right)}{\lim\limits_{x \to +\infty} h(x)} = \frac{\ln\left(\frac{1}{+\infty}\right)}{-4} = \frac{\ln(0^+)}{-4} = \frac{-\infty}{-4} = +\infty$$

Resposta: **Opção B**

Exame – 2010, Ép. especial

46. Como a reta de equação $y = 1$ é a única assíntota do gráfico da função f, de domínio $\mathbb{R}^+$, então, como é uma reta de declive igual a zero, vem que

$$m_f = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{f(x)}{x}\right) = 0$$

E assim, determinando o declive da assíntota oblíqua do gráfico da função g, quando $x \to +\infty$, (porque o domínio da função é $\mathbb{R}^+$), vem:

$$m_g = \lim_{x\to+\infty} \frac{g(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)+x}{x} = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{f(x)}{x} + \frac{x}{x}\right) = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{f(x)}{x}\right) + \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{x}{x}\right) = 0 + 1 = 1$$

E como a reta de equação $y = 1$ é assíntota do gráfico da função f, de domínio $\mathbb{R}^+$, então, vem que

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 1$$

E assim, determinando a ordenada na origem da assíntota oblíqua da função g, quando $x \to +\infty$, (porque o domínio da função é $\mathbb{R}^+$), vem:

$$b = \lim_{x\to+\infty} \big(g(x) - mx\big) = \lim_{x\to+\infty} \big(f(x) + x - 1 \times x\big) = \lim_{x\to+\infty} \big(f(x)\big) = 1$$

Logo, temos que a reta de equação $y = x + 1$ é a assíntota oblíqua gráfico de g, que como tem declive 1 é paralela à reta de equação $y = x$, ou seja a bissetriz dos quadrantes ímpares.

Exame – 2010, Ép. especial

47. Como o domínio da função f é $]0, +\infty[$, só pode existir uma assíntota não oblíqua quando $x \to +\infty$. Assim, averiguando a existência de uma assíntota de equação $y = mx + b$, quando $x \to +\infty$, vem:

$$m = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{5}x - \ln x}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{5}x}{x} - \underbrace{\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x}}_{\text{Lim. Notável}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{5} - 0 = \frac{1}{5}$$

$$b = \lim_{x\to+\infty} \big(f(x) - mx\big) = \lim_{x\to+\infty} \left(f(x) - \frac{1}{5} \times x\right) = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{1}{5}x - \ln x - \frac{1}{5}x\right) = \lim_{x\to+\infty} (-\ln x) = -\infty$$

Logo, (como o b não é um número real) não existe qualquer assíntota oblíqua do gráfico de f

Exame – 2010, 2.ª Fase

48. Como o domínio da função f é $]-\infty,1[$,e a reta de equação $x = 1$ é assíntota do gráfico da função, então, de acordo com o gráfico, temos que

$$\lim_{x\to1^-} f(x) = +\infty$$

E assim

$$\lim_{x\to1^-} \frac{3x}{f(x)} = \frac{\lim_{x\to1^-} (3x)}{\lim_{x\to1^-} f(x)} = \frac{3 \times 1^-}{+\infty} = \frac{3}{+\infty} = 0$$

Resposta: **Opção C**

Exame – 2010, 1.ª Fase

49. Como o domínio da função é f é $]-\infty, 2\pi]$, o comportamento assintótico do gráfico é verificado quando $x \to -\infty$, pelo que, pela definição de assíntota, $y = ax + b$ é uma assíntota do gráfico de f se

$$\lim_{x\to-\infty} \Big(f(x) - (ax + b)\Big) = 0$$

Calculando o valor do limite, temos

$$\lim_{x\to-\infty} \Big(f(x) - (ax + b)\Big) = \lim_{x\to-\infty} \left(ax + b + e^x - ax - b\right)\big) = \lim_{x\to-\infty} e^x = 0^+$$

Pelo que podemos concluir que a reta de equação $y = ax + b$ é uma assíntota oblíqua do gráfico de f

Exame – 2010, 1.ª Fase

50. Como a função f é contínua em $\mathbb{R}$, porque resulta de operações entre funções contínuas em $\mathbb{R}$, o gráfico de f não tem qualquer assíntota vertical.

Averiguando a existência de uma assíntota não vertical do gráfico de f, de equação $y = mx + b$, quando $x \to -\infty$, vem que:

$$m = \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{3+4x^2e^{-x}}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{3}{x} + \lim_{x\to-\infty} \frac{4x^2e^{-x}}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{3}{x} + \lim_{x\to-\infty} \left(4xe^{-x}\right) =$$

$$= \frac{3}{-\infty} + 4 \times (-\infty) \times e^{-(-\infty)} = 0 + 4 \times (-\infty) \times e^{+\infty} = 4 \times (-\infty) \times (+\infty) = -\infty$$

Pelo que não existe qualquer assíntota não vertical do gráfico de f quando $x \to -\infty$

Averiguando a existência de uma assíntota não vertical do gráfico de f, de equação $y = mx + b$, quando $x \to +\infty$, vem que:

$$m = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{3+4x^2e^{-x}}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{3}{x} + \lim_{x\to+\infty} \frac{4x^2e^{-x}}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{3}{x} + \lim_{x\to+\infty} \left(4xe^{-x}\right) =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{3}{x} + \lim_{x\to+\infty} \frac{4x}{e^x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{3}{x} + 4 \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{e^x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{3}{x} + 4 \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\frac{e^x}{x}} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{3}{x} + 4 \times \frac{1}{\underbrace{\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x}}_{\text{Lim. Notável}}} = \frac{3}{+\infty} + 4 \times \frac{1}{+\infty} = 0 + 4 \times 0 = 0$$

$$b = \lim_{x\to+\infty} \left(f(x) - mx\right) = \lim_{x\to+\infty} \left(3 + 4x^2e^{-x} - 0 \times x\right) = \lim_{x\to+\infty} \left(3 + 4 \times \frac{x^2}{e^x}\right) =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} 3 + 4 \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{x^2}{e^x}\right) = 3 + 4 \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{1}{\frac{e^x}{x^2}}\right) = 3 + 4 \times \frac{1}{\underbrace{\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^2}}_{\text{Lim. Notável}}} =$$

$$= 3 + 4 \times \frac{1}{+\infty} = 3 + 4 \times 0 = 3$$

Assim, verificámos que a reta de equação $y = 3$ é assíntota do gráfico de f, quando $x \to +\infty$, e de forma mais abrangente, que esta é a única assíntota do gráfico desta função.

Teste Intermédio 12.º ano – 19.05.2010

51. Como o domínio da função é $\mathbb{R}^+$ e a reta de equação $y = 1$ é assíntota do gráfico de f, então temos que:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 1$$

E assim, vem que:

$$\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{\ln x}{x} - f(x)\right) = \underbrace{\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{\ln x}{x}\right)}_{\text{Lim. Notável}} - \lim_{x\to+\infty} f(x) = 0 - 1 = -1$$

Resposta: **Opção A**

Teste Intermédio 12.º ano – 15.03.2010
Teste Intermédio 12.º ano – 11.03.2009

52. Como o domínio da função é $\mathbb{R}^+$ e o seu gráfico tem uma assíntota oblíqua, ou seja, uma reta de equação $y = mx + b$, então vem que:

$$m = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{xe^{-x}+x+1}{x} = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{xe^{-x}}{x} + \frac{x}{x} + \frac{1}{x}\right) = \lim_{x\to+\infty} \left(e^{-x} + 1 + \frac{1}{x}\right) =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} e^{-x} + = \lim_{x\to+\infty} 1 + = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = e^{-\infty} + 1 + \frac{1}{+\infty} = 0+1+0 = 1$$

$$b = \lim_{x\to+\infty} (f(x) - mx) = \lim_{x\to+\infty} (f(x) - x) = \lim_{x\to+\infty} \left(xe^{-x} + x + 1 - x\right) = \lim_{x\to+\infty} \left(xe^{-x} + 1\right) =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{x}{e^x} + 1\right) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{e^x} + \lim_{x\to+\infty} 1 = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{1}{\frac{e^x}{x}}\right) + 1 = \frac{1}{\underbrace{\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x}}_{\text{Lim. Notável}}} + 1 =$$

$$= \frac{1}{+\infty} + 1 = 0 + 1 = 1$$

E assim, vem que a equação reduzida da assíntota oblíqua do gráfico de f é $y = x + 1$

Teste Intermédio 12.º ano – 15.03.2010

53. Como a função g é contínua em $\mathbb{R}$, porque resulta de operações entre funções contínuas em $\mathbb{R}$, o gráfico de g não tem qualquer assíntota vertical.

Averiguando a existência de uma assíntota não vertical do gráfico de g, de equação $y = mx + b$, quando $x \to -\infty$, vem que:

$$m = \lim_{x\to-\infty} \frac{g(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\frac{e^x+3}{e^x}}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{e^x+3}{xe^x} = \lim_{x\to-\infty} \left(\frac{e^x}{xe^x} + \frac{3}{xe^x}\right) = \lim_{x\to-\infty} \left(\frac{1}{x} + \frac{3e^{-x}}{x}\right) =$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \left(\frac{1}{x}\right) + \lim_{x\to-\infty} \left(\frac{-3e^{-x}}{-x}\right) = \frac{1}{-\infty} - 3 \times \lim_{x\to-\infty} \left(\frac{e^{-x}}{-x}\right) = 0 - 3 \times \lim_{x\to-\infty} \left(\frac{e^{-x}}{-x}\right) =$$

(fazendo $y = -x$, temos que se $x \to -\infty$, então $y \to +\infty$)

$$= -3 \times \underbrace{\lim_{y\to+\infty} \left(\frac{e^y}{y}\right)}_{\text{Lim. Notável}} = -3 \times (+\infty) = -\infty$$

Logo, não o gráfico de g não tem assíntotas não verticais, quando $x \to -\infty$

Averiguando a existência de uma assíntota não vertical do gráfico de g, de equação $y = mx + b$, quando $x \to +\infty$, vem que:

$$m = \lim_{x\to+\infty} \frac{g(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{e^x+3}{e^x}}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x+3}{xe^x} = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{e^x}{xe^x} + \frac{3}{xe^x}\right) =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{1}{x}\right) + \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{3}{xe^x}\right) = \frac{1}{+\infty} + \frac{3}{+\infty \times (+\infty)} = 0 + \frac{3}{+\infty} = 0 + 0 = 0$$

$$b = \lim_{x\to+\infty} (f(x) - mx) = \lim_{x\to+\infty} (f(x) - 0 \times x) = \lim_{x\to+\infty} (f(x)) = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{e^x+3}{e^x}\right) =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{e^x}{e^x} + \frac{3}{e^x}\right) = \lim_{x\to+\infty} \left(1 + \frac{3}{e^x}\right) = \lim_{x\to+\infty} 1 + \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{3}{e^x}\right) = 1 + \frac{3}{+\infty} = 1 + 0 = 1$$

E assim, vem que o gráfico de g só tem uma assíntota e a sua equação é $y = 1$

Exame – 2009, Ép. especial

54. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x}$ é o declive da assíntota do gráfico de f, ou seja o declive da reta r

Como os pontos de coordenadas $(0,-1)$ e $(1{,}0)$, pertencem à assíntota, então o seu declive é

$$m_r = \frac{0-(-1)}{1-0} = \frac{1}{1} = 1$$

E assim, vem que:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = m_r = 1$$

Resposta: **Opção C**

Exame – 2009, 2.ª Fase

55. Como a função h resulta de operações entre funções contínuas, em $\mathbb{R}^-$ e em $\mathbb{R}^+$ é contínua em $\mathbb{R}^-$ e em $\mathbb{R}^+$, pelo que a única reta que pode ser assíntota vertical do gráfico de h é a reta de equação $x=0$

Para averiguar se a reta de equação $x=0$ é assíntota do gráfico de h, vamos calcular $\lim\limits_{x\to0^+} h(x)$ e $\lim\limits_{x\to0^-} h(x)$:

- $\lim\limits_{x\to0^+} h(x) = \lim\limits_{x\to0^+} \left(\sqrt{x^2+4}-x\right) = \sqrt{0^2+4}-0 = \sqrt{4} = 2$
- $\lim\limits_{x\to0^-} h(x) = \lim\limits_{x\to0^-} \dfrac{e^{2x}-1}{x} = \dfrac{e^0-1}{0} = \dfrac{0}{0}$ (Indeterminação)

$$\lim_{x\to0^-} h(x) = \lim_{x\to0^-} \frac{e^{2x}-1}{x} = \lim_{x\to0^-} \frac{2\left(e^{2x}-1\right)}{2\times x} = \lim_{x\to0^-} 2 \times \lim_{x\to0^-} \frac{e^{2x}-1}{2x} = 2 \times \lim_{x\to0^-} \frac{e^{2x}-1}{2x} =$$

(fazendo $y=2x$, temos que se $x\to0^-$, então $y\to0^-$)

$$= 2 \times \underbrace{\lim_{y\to0^-} \frac{e^y-1}{y}}_{\text{Lim. Notável}} = 2\times 1 = 2$$

E assim, como $\lim\limits_{x\to0^+} h(x) = \lim\limits_{x\to0^-} h(x) = 2$, então a reta de equação $x=0$ não é assíntota do gráfico de h

Para averiguar se existem assíntotas horizontais do gráfico de h, vamos calcular $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x)$ e $\lim\limits_{x\to-\infty} h(x)$:

- $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x^2+4}-x\right) = \sqrt{+\infty+4}-(+\infty) = +\infty-\infty$ (indeterminação)

$$\lim_{x\to+\infty} h(x) = \lim_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x^2+4}-x\right) = \lim_{x\to+\infty} \frac{\left(\sqrt{x^2+4}-x\right)\left(\sqrt{x^2+4}+x\right)}{\sqrt{x^2+4}+x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\left(\sqrt{x^2+4}\right)^2-x^2}{\sqrt{x^2+4}+x} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2+4-x^2}{\sqrt{x^2+4}+x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{4}{\sqrt{x^2+4}+x} = \frac{4}{\sqrt{+\infty+4}+\infty} = \frac{4}{+\infty} = 0$$

- $\lim\limits_{x\to-\infty} h(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{e^{2x}-1}{x} = \dfrac{e^{2(-\infty)}-1}{-\infty} = \dfrac{0-1}{-\infty} = 0$

Desta forma, como $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} h(x) = 0$, temos que a reta de equação $y=0$ é uma assíntota horizontal do gráfico de h (quando $x\to+\infty$ e também quando $x\to-\infty$).

Exame – 2009, 2.ª Fase

56. Como $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-2x)=0$, pela definição assíntota, temos que a reta definida pela equação $y=2x$ é assíntota do gráfico de f, quando $x\to+\infty$ e assim, como o declive da assíntota é 2, podemos afirmar que:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=2$$

Desta forma, averiguando a existência de uma assíntota não vertical do gráfico de g, de equação $y=mx+b$, quando $x\to+\infty$, vem que:

$$m=\lim_{x\to+\infty}\frac{g(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)+x^2}{x}=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{f(x)}{x}+\frac{x^2}{x}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{f(x)}{x}+x\right)=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}+\lim_{x\to+\infty}x=2+(+\infty)=+\infty$$

Logo, como o domínio de g é $\mathbb{R}^+$ e $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{g(x)}{x}$ não é um valor finito, então podemos concluir que o gráfico de g não tem assíntotas oblíquas.

Exame – 2009, 1.ª Fase

57. Como $\lim\limits_{x\to0}g(x)=-\infty$ sabemos que para valores próximos de x arbitrariamente próximos de zero, o gráfico da função está arbitrariamente próximo do semieixo negativo das ordenadas, ou seja, apenas as opções (A) e (D) são compatíveis com esta informação.

Como $\lim\limits_{x\to+\infty}(g(x)-x)=0$ então a reta de equação $y=x$ é assíntota do gráfico de g, quando $x\to+\infty$, pelo que, de entre as opções apresentadas, a única representação gráfica compatível com as informações conhecidas é a da opção (D).

Resposta: **Opção D**

Teste Intermédio 12.º ano – 11.03.2009

58. Como a função é contínua no intervalo $]-\infty,1[$ e também no intervalo $[1,+\infty[$, a reta de equação $x=1$ é a única reta vertical que pode ser assíntota do gráfico de f.
Podemos ainda observar que, como a função está definida para $x=1$, temos que $f(1)$ é um valor finito, e assim, $\lim\limits_{x\to1^+}f(x)=f(1)$, pelo que, se a reta $x=1$ é uma assíntota do gráfico de f, então o comportamento assintótico só está presente quando $x\to1^-$, pelo que, para averiguar esta hipótese vamos calcular $\lim\limits_{x\to1^-}f(x)$:

$$\lim_{x\to1^-}f(x)=\lim_{x\to1^-}\frac{3x^2-3}{x^2-2x+1}=\frac{3-3}{1-2+1}=\frac{0}{0}\ \text{(Indeterminação)}$$

$$\lim_{x\to1^-}f(x)=\lim_{x\to1^-}\frac{3(x^2-1)}{(x-1)^2}=\lim_{x\to1^-}\frac{3(x-1)(x+1)}{(x-1)(x-1)}=\lim_{x\to1^-}\frac{3(x+1)}{(x-1)}=\frac{3(1^-+1)}{(1^--1)}=\frac{3\times2}{0^-}=-\infty$$

Como $\lim\limits_{x\to1^-}f(x)=-\infty$ concluímos que a reta $x=1$ é assíntota do gráfico de f

Para averiguar à existência de assíntotas horizontais do gráfico de f, vamos calcular $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$ e $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$:

- $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{3x^2-3}{x^2-2x+1}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{3x^2}{x^2}=\lim\limits_{x\to-\infty}3=3$
- $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\ln(x)-e^{1-x}\right)=\ln(+\infty)-e^{1-\infty}=+\infty-e^{-\infty}=+\infty-0^+=+\infty$

Pelo que podemos concluir que a reta de equação $y=3$ é uma assíntota do gráfico de f (quando $x\to-\infty$) e que não existe assíntota horizontal do gráfico quando $x\to+\infty$

Teste Intermédio 12.º ano – 11.03.2009

59. Como $y = -1$ é a única assíntota do gráfico da função f, e pela observação da figura, temos que:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -1$$

E assim, vem que:

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{3}{f(x)} = \frac{\lim\limits_{x\to-\infty} 3}{\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)} = \frac{3}{-1} = -3$$

Resposta: **Opção B**

Exame – 2008, 2.ª Fase

60. Como a reta de equação $y = -x - 1$, é assíntota do gráfico de f quando x tende para $-\infty$, pela definição de assíntota, temos que:

$$\lim_{x\to-\infty} \Big(f(x) - (-x-1) \Big) = 0 \Leftrightarrow \lim_{x\to-\infty} \Big(f(x) + x + 1 \Big) = 0$$

Resposta: **Opção B**

Exame – 2008, 1.ª Fase

61. Como a reta de equação $y = \frac{1}{3}x + 2$ é assíntota do gráfico de f, e o domínio de f é $\mathbb{R}^+$, temos que o declive da assíntota é:

$$m = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \frac{1}{3}$$

E assim, averiguando a existência de uma assíntota horizontal do gráfico de h, quando $x \to +\infty$, vem que:

$$\lim_{x\to+\infty} h(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{f(x)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\frac{f(x)}{x}} = \frac{\lim\limits_{x\to+\infty} 1}{\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}} = \frac{1}{\frac{1}{3}} = 3$$

Pelo que a reta de equação $y = 3$ é uma assíntota horizontal do gráfico de h

Resposta: **Opção D**

Teste Intermédio 12.º ano – 29.04.2008

62. Como a reta de equação $x = 1$ é assíntota do gráfico da função g, e pela observação do gráfico, temos que: $\lim\limits_{x\to1^-} g(x) = +\infty$ e que $\lim\limits_{x\to1^+} g(x) = -\infty$
Como a função h é definida por $h(x) = x - 1$, temos que $\lim\limits_{x\to1} h(x) = \lim\limits_{x\to1} (x-1) = 0$

Logo:

- $\lim\limits_{x\to1^-} \frac{h(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x\to1^-} h(x)}{\lim\limits_{x\to1^-} g(x)} = \frac{0}{+\infty} = 0$
- $\lim\limits_{x\to1^+} \frac{h(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x\to1^+} h(x)}{\lim\limits_{x\to1^+} g(x)} = \frac{0}{-\infty} = 0$

E assim, como os limites laterais são iguais, temos que: $\lim\limits_{x\to1} \frac{h(x)}{g(x)} = 0$

Resposta: **Opção C**

Exame – 2007, 2.ª fase

63. Por observação do gráfico, e como o eixo Ox é assíntota do gráfico de f, temos que $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0^+$

Pelo que:
$$\lim_{x\to-\infty} g(x) = \lim_{x\to-\infty} \ln(f(x)) = \lim_{x\to-\infty} \ln\left(0^+\right) = -\infty \ (1)$$
Da mesma forma, como a reta de equação $y = 1$ é assíntota do gráfico de f, e pela observação do gráfico, podemos constatar que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 1^+$

E assim:
$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty} \ln(f(x)) = \lim_{x\to+\infty} \ln\left(1^+\right) = 0^+ \ (2)$$
Podemos ainda observar que $f(0) = k$, $k > 1$, pelo que:
$$g(0) = ln\,(f(0)) = \ln k$$
E como $k > 1$, então $\ln(k) > 0 \Leftrightarrow g(0) > 1$ (3)

Assim, podemos observar que:

- A função representada pelo gráfico da opção (A) não satisfaz a condição (1)
- A função representada pelo gráfico da opção (B) não satisfaz a condição (3)
- A função representada pelo gráfico da opção (D) não satisfaz a condição (2) nem a condição (3)

Resposta: **Opção C**

Exame – 2007, 1.ª Fase

64. Como a reta de equação $y = 2x + 3$ é assíntota do gráfico de g, e o domínio da função é $\mathbb{R}^+$, temos que:

- $m = \lim_{x\to+\infty} \frac{g(x)}{x} = 2$
- $b = \lim_{x\to+\infty} (g(x) - mx) = \lim_{x\to+\infty} (g(x) - 2x) = 3$

E assim, vem que:
$$\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{g(x)}{x} \times (g(x) - 2x)\right) = \lim_{x\to+\infty} \frac{g(x)}{x} \times \lim_{x\to+\infty} (g(x) - 2x) = 2 \times 3 = 6$$
Resposta: **Opção C**

Teste Intermédio 12.º ano – 15.03.2007

65. Pela observação do gráfico, e como:

- o domínio da função é $]-\infty,1[$ e a reta de equação $x = 1$ é assíntota do gráfico de f, temos que $\lim_{x\to1^-} f(x) = +\infty$
- o domínio da função é $]-\infty,1[$ e a reta de equação $y = 0$ é assíntota do gráfico de f, temos que $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0^+$
- a origem do referencial pertence ao gráfico da função, então $\lim_{x\to0^-} f(x) = 0^+$

Assim, sobre a função $\frac{1}{f}$ podemos afirmar que:

- $\lim_{x\to1^-} \left(\frac{1}{f}\right)(x) = \lim_{x\to1^-} \frac{1}{f(x)} = \frac{\lim_{x\to1^-} 1}{\lim_{x\to1^-} f(x)} = \frac{1}{+\infty} = 0$, pelo que podemos rejeitar a opção (A)
- $\lim_{x\to-\infty} \left(\frac{1}{f}\right)(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{f(x)} = \frac{\lim_{x\to-\infty} 1}{\lim_{x\to-\infty} f(x)} = \frac{1}{0^+} = +\infty$, pelo que podemos rejeitar a opção (C)
- $\lim_{x\to0^-} \left(\frac{1}{f}\right)(x) = \lim_{x\to0^-} \frac{1}{f(x)} = \frac{\lim_{x\to0^-} 1}{\lim_{x\to0^-} f(x)} = \frac{1}{0^+} = +\infty$, pelo que podemos rejeitar a opção (D)

Resposta: **Opção B**

Teste Intermédio 12.º ano – 15.03.2007

66. Como a função é contínua no intervalo $]0,1[$ e também no intervalo $[1,+\infty[$, as retas de equação $x=1$ e $x=0$ são as únicas retas verticais que podem ser assíntotas do gráfico de f.
Podemos ainda observar que, como a função está definida para $x=1$, temos que $f(1)$ é um valor finito, e assim, $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = f(1)$, pelo que, se a reta $x=1$ é uma assíntota do gráfico de f, então o comportamento assintótico só está presente quando $x \to 1^-$, pelo que, para averiguar estas hipóteses vamos calcular $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ e $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)$:

- $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{x}{\ln x} = \dfrac{0^+}{\ln(0^+)} = \dfrac{0^+}{-\infty} = 0^+$
- $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{x}{\ln x} = \dfrac{1}{\ln(1^-)} = \dfrac{1}{0^-} = -\infty$

E assim concluímos que a reta de equação $x=0$ não é assíntota do gráfico de f, mas a reta $x=1$ é.

Averiguando a existência de uma assíntota não vertical do gráfico de f, de equação $y=mx+b$, quando $x\to+\infty$, vem que:

$$m = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{xe^{2-x}}{x} = \lim_{x\to+\infty} e^{2-x} = e^{2-(+\infty)} = e^{-\infty} = 0$$

$$b = \lim_{x\to+\infty} (f(x)-mx) = \lim_{x\to+\infty} \left(xe^{2-x} - 0\times x\right) = \lim_{x\to+\infty} \left(xe^{2-x}\right) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x\times e^2}{e^x} = \lim_{x\to+\infty} e^2 \times \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{e^x} =$$

$$= e^2 \times \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\frac{e^x}{x}} = e^2 \times \frac{\lim\limits_{x\to+\infty} 1}{\underbrace{\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x}}_{\text{Lim. Notável}}} = e^2 \times \frac{1}{+\infty} = e^2 \times 0 = 0$$

Desta forma concluímos que a reta de equação $y=0x+0$, ou seja a reta definida por $y=0$ é uma assíntota horizontal do gráfico de f e como o domínio de f é $\mathbb{R}^+$ podemos concluir que esta é a única assíntota não vertical do gráfico de f

Exame – 2006, Ép. especial

67. Como a função é contínua no intervalo $]1,+\infty[$, a reta de equação $x=1$ é a única reta vertical que pode ser assíntota do gráfico de f. Para averiguar esta hipótese vamos calcular $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$:

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} \big(x + x\ln(x-1)\big) = \lim_{x\to 1^+} \Big(x\big(1+\ln(x-1)\big)\Big) = 1\big(1+\ln(1^+-1)\big) =$$

$$= 1 + \ln(0^+) = 1 - \infty = -\infty$$

Assim concluímos que a reta de equação $x=1$ é a única assíntota vertical do gráfico de f

Averiguando a existência de uma assíntota não vertical do gráfico de f, de equação $y=mx+b$, quando $x\to+\infty$, vem que:

$$m = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x + x\ln(x-1)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{x}{x} + \frac{x\ln(x-1)}{x}\right) = \lim_{x\to+\infty} \big(1+\ln(x-1)\big) =$$

$$= 1 + \ln(+\infty - 1) = 1 + \ln(+\infty) = 1 + \infty = +\infty$$

Logo, como o domínio de f é $]1,+\infty[$ e $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x}$ não é um valor finito, então podemos concluir que o gráfico de f não tem assíntotas oblíquas.

Exame – 2006, 2.ª fase

68. Como a função f é contínua, então a função $g(x) = xf(x)$ também é contínua, por se tratar de um produto de funções contínuas, pelo que o gráfico de g não admite qualquer assíntota vertical.

Como a reta de equação $y = x$ é assíntota do gráfico de f, quer quando $x \to +\infty$, quer quando $x \to -\infty$, temos que:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty \text{ e } \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$

E assim vem que:

- $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \frac{g(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{xf(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$
- $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{g(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{xf(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

Como nem $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \frac{g(x)}{x}$, nem $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{g(x)}{x}$ são valores finitos podemos concluir que também não existe qualquer assíntota não vertical do gráfico de g.

Exame – 2006, 1.ª fase

69. Como a função é contínua no intervalo $]0, +\infty[$, a reta de equação $x = 0$ é a única reta vertical que pode ser assíntota do gráfico de f. Para averiguar esta hipótese vamos calcular $\displaystyle\lim_{x\to0^+} f(x)$:

$$\lim_{x\to0^+} f(x) = \lim_{x\to0^+} \frac{1-\ln x}{x} = \frac{1-\ln(0^+)}{0^+} = \frac{1-(-\infty)}{0^+} = \frac{+\infty}{0^+} + \infty$$

E assim concluímos que a reta de equação $x = 0$ é a única assíntota vertical do gráfico de f

Averiguando a existência de uma assíntota horizontal do gráfico de f, quando $x \to +\infty$ (porque o domínio de f é $]0, +\infty[$), vem que:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{1-\ln x}{x} = \frac{1-(+\infty)}{+\infty} = \frac{-\infty}{+\infty} \text{ (Indeterminação)}$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{1-\ln x}{x} = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{1}{x} - \frac{\ln x}{x}\right) = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} - \underbrace{\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x}}_{\text{Lim. Notável}} = \frac{1}{+\infty} - 0 = 0 - 0 = 0$$

Pelo que se concluí que a reta de equação $y = 0$ é a única assíntota horizontal do gráfico de f

Teste Intermédio 12.º ano – 17.03.2006

70. Como a reta de equação $y = x + 2$ é assíntota do gráfico de g, então temos que:

- $m_g = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{g(x)}{x} = 1$
- $b_g = \lim\limits_{x \to +\infty} \big(g(x) - mx\big) = 2$

Assim, relativamente à assíntota não vertical da função h, vem que:

$$m_h = \lim_{x \to +\infty} \frac{h(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{x^2}{g(x)}}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2}{xg(x)} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x}{g(x)} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{\frac{g(x)}{x}} = \frac{\lim\limits_{x \to +\infty} 1}{\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{g(x)}{x}} = \frac{1}{1} = 1$$

$$b_h = \lim_{x \to +\infty} \big(h(x) - mx\big) = \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{x^2}{g(x)} - 1 \times x\right) = \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{x^2}{g(x)} - x\right) = \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{x^2}{g(x)} - \frac{xg(x)}{g(x)}\right) =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{x^2 - xg(x)}{g(x)}\right) = \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{x(x - g(x))}{g(x)}\right) = \lim_{x \to +\infty} \frac{x}{g(x)} \times \lim_{x \to +\infty} (x - g(x)) =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{\frac{g(x)}{x}} \times \lim_{x \to +\infty} \big(- (g(x) - x)\big) = \frac{1}{1} \times \left(- \lim_{x \to +\infty} \big(g(x) - x\big)\right) = 1 \times (-2) = -2$$

Desta forma concluímos que a reta de equação $y = x - 2$ é uma assíntota oblíqua do gráfico de h.

Teste Intermédio 12.º ano – 17.03.2006

71. Averiguando a existência de assíntotas verticais do gráfico de f, temos que, como a função é contínua em $\mathbb{R} \setminus \{3\}$, a única reta vertical que pode ser assíntota do gráfico de f é a reta de $x = 3$.
Como

$$\lim_{x \to 3^+} f(x) = \lim_{x \to 3^+} \frac{x - 2}{x - 3} = \frac{3^+ - 2}{3^+ - 3} = \frac{1}{0^+} = +\infty \text{ e } \lim_{x \to 3^-} f(x) = \lim_{x \to 3^-} \frac{x - 2}{x - 3} = \frac{3^- - 2}{3^- - 3} = \frac{1}{0^-} = -\infty$$

vem que a reta de equação $x = 3$ é a única assíntota vertical do gráfico de f.

Relativamente à existência de assíntotas horizontais do gráfico de f, temos que, como

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{x - 2}{x - 3} = \lim_{x \to -\infty} \frac{x}{x} = \lim_{x \to -\infty} 1 = 1 \text{ e } \lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{x - 2}{x - 3} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x}{x} = \lim_{x \to +\infty} 1 = 1$$

então a reta de equação $y = 1$ é a única assíntota horizontal do gráfico de f.

Resposta: **Opção C**

Exame – 2005, Ép. especial (cód. 435)

72. Como a função é contínua em $\mathbb{R} \setminus \{5\}$ e $\lim\limits_{x \to 5} f(x) = 3$, então não existem assíntotas verticais do gráfico de f.

Como $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 2$ então a reta de equação $y = 2$ é uma assíntota horizontal do gráfico de f.

Como $\lim\limits_{x \to -\infty} [f(x) - x] = 0$ então a reta de equação $y = x$ também é uma assíntota do gráfico de f.

Resposta: **Opção A**

Exame – 2005, 1.ª fase (cód. 435)

73. Temos que:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{g(x)+x}{x}=4 \Leftrightarrow \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{g(x)}{x}+\frac{x}{x}\right)=4 \Leftrightarrow \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{g(x)}{x}+1\right)=4 \Leftrightarrow \lim_{x\to+\infty}\frac{g(x)}{x}+\lim_{x\to+\infty}1=4 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \lim_{x\to+\infty}\frac{g(x)}{x}+1=4 \Leftrightarrow \lim_{x\to+\infty}\frac{g(x)}{x}=4-1 \Leftrightarrow \lim_{x\to+\infty}\frac{g(x)}{x}=3$$

Como o gráfico de g tem uma assíntota oblíqua, e o domínio de g é$\mathbb{R}^+$, então, o declive da assíntota é 3. Desta forma, de entre as opções apresentadas, apenas a reta de equação $y=3x$ pode ser assíntota do gráfico de g.

Resposta: **Opção B**

Exame – 2004, Ép. especial (cód. 435)

74. Como a função é contínua em $\mathbb{R}\setminus\{0\}$, a reta de equação $x=0$ é a única reta vertical que pode ser assíntota do gráfico de f. Para averiguar esta hipótese vamos calcular $\lim_{x\to 0} f(x)$:

$$\lim_{x\to 0} f(x)=\underbrace{\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}}_{\text{Lim. Notável}}=1$$

Assim, como $\lim_{x\to 0} f(x)$ é um valor finito, podemos concluir que não existem assíntotas verticais do gráfico de f, ou seja, paralelas ao eixo das ordenadas.

Para averiguar a existência de assíntotas paralelas ao eixo das abcissas, vamos calcular $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ e $\lim_{x\to+\infty} f(x)$:

- $\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{e^x-1}{x}=\frac{e^{-\infty}-1}{-\infty}=\frac{0^+-1}{-\infty}=\frac{-1}{-\infty}=0$
- $\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x-1}{x}=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{e^x}{x}-\frac{1}{x}\right)=\underbrace{\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x}}_{\text{Lim. Notável}}-\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=$

  $=+\infty-\frac{1}{+\infty}=+\infty-0=+\infty$

Logo, podemos concluir que a reta de equação $y=0$ é assíntota horizontal do gráfico de f, quando $x\to-\infty$ e que não existe qualquer assíntota do gráfico de f, quando $x\to+\infty$, pelo que a reta $y=0$ é a única assíntota do gráfico de f paralela a um dos eixos coordenados, nomeadamente o eixo das abcissas.

Exame – 2004, 2.ª Fase (cód. 435)

75. Como o gráfico de h é simétrico relativamente ao eixo Oy, e tem uma única assíntota vertical, então essa assíntota é a reta de equação $x=0$

Assim, temos que:

$$\lim_{x\to 0^-} h(x)=\lim_{x\to 0^+} h(x)=+\infty \text{ ou } \lim_{x\to 0^-} h(x)=\lim_{x\to 0^+} h(x)=-\infty$$

Ou, seja $\lim_{x\to 0} h(x)=\infty$, pelo que, $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{g}\right)(x)=\infty$, e assim, $\lim_{x\to 0} g(x)=0$

Como $\lim_{x\to 0} g(x)=0$, e, como a função g é contínua, então $\lim_{x\to 0} g(x)=g(0)$, pelo que,

$$g(0)=0$$

Resposta: **Opção A**

Exame – 2003, Prova para militares (cód. 435)

76. Por observação do gráfico de f, temos que:

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^+} f(x) = k,\ k \in \mathbb{R}^+$$

Desta forma, relativamente à função g, temos que:

- $\lim\limits_{x\to 0^-} g(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{f(x)}{x} = \dfrac{\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)}{\lim\limits_{x\to 0^-} x} = \dfrac{k}{0^-} \underset{k>0}{=} -\infty$
- $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{f(x)}{x} = \dfrac{\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)}{\lim\limits_{x\to 0^+} x} = \dfrac{k}{0^+} \underset{k>0}{=} +\infty$

Temos ainda que:

- Como a bissetriz dos quadrantes pares (reta de declive -1) é assíntota do gráfico de f, quando $x \to -\infty$, então $\lim\limits_{x\to -\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{f(x)}{x} = -1$
- Como a bissetriz dos quadrantes ímpares (reta de declive 1) é assíntota do gráfico de f, quando $x \to +\infty$, então $\lim\limits_{x\to +\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 1$

Desta forma, podemos verificar que o gráfico da opção (A) é o único que satisfaz cumulativamente as quatro condições estabelecidas.

Resposta: **Opção A**

Exame – 2003, 1.ª fase - 2.ª chamada (cód. 435)

77. Como $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{g(x)}{x} = \dfrac{1}{2}$ então a única assíntota do gráfico de g é uma reta não vertical de declive $\dfrac{1}{2}$

Desta forma verificamos que o gráfico da opção (D) é a único que satisfaz esta condição, porque o gráfico da opção (A) tem uma assíntota cujo declive é zero, o gráfico da opção (B) tem pelo menos uma assíntota vertical e o gráfico da opção (C) tem uma assíntota de declive negativo.

Resposta: **Opção D**

Exame – 2003, 1.ª fase - 1.ª chamada (cód. 435)

78. Como o domínio de h é $[0,5[\cup]5,+\infty[$ e a reta de equação $y = 3$ é assíntota do gráfico de h, então:

$$\lim_{x\to +\infty} h(x) = 3$$

Assim, temos que:

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{h(x)}{3+e^{-x}} = \frac{\lim\limits_{x\to +\infty} h(x)}{\lim\limits_{x\to +\infty} \left(3+e^{-x}\right)} = \frac{3}{3+e^{-\infty}} = \frac{3}{3+0^+} = \frac{3}{3} = 1$$

Resposta: **Opção B**

Exame – 2003, 1.ª fase - 1.ª chamada (cód. 435)

79. Averiguado a veracidade das afirmações apresentadas, temos:

- Como a reta de equação $x = 2$ é uma assíntota do gráfico de f, e o domínio de f é $[0, +\infty[$, então temos que f não é contínua em $x = 2$, ou seja não é contínua em todo o seu domínio.
- Como a reta de equação $x = 2$ é uma assíntota do gráfico de f, então $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = +\infty$ ou $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = -\infty$, pelo que $\lim\limits_{x\to 2} |f(x)| = +\infty$, o que significa que a função $|f|$ não tem um máximo absoluto.
- Como a reta de equação $x = 2$ é uma assíntota do gráfico de f, então $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = +\infty$ ou $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = -\infty$, pelo que $\lim\limits_{x\to 2} \big(-f(x)\big) = -\infty$ ou $\lim\limits_{x\to 2} \big(-f(x)\big) = +\infty$, o que significa que a reta de equação $x = 2$ também é uma assíntota vertical do gráfico de $-f$.
- Como a reta de equação $y = 1$ é uma assíntota do gráfico de f, e o domínio de f é $[0, +\infty[$, então temos que $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = 1$, o que significa que não existem assíntotas oblíquas do gráfico de f

Resposta: **Opção C**

Exame – 2002, Prova para militares (cód. 435)

80. Como a função é contínua em $\mathbb{R}$, não existem assíntotas paralelas ao eixo das ordenadas, ou seja não existe qualquer assíntota vertical do gráfico de f.

Averiguando a existência de assíntotas paralelas ao eixo das abcissas, temos que:

- $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to -\infty} \left(\frac{1}{3} + 2e^{1-x}\right) = \lim\limits_{x\to -\infty} \frac{1}{3} + \lim\limits_{x\to -\infty} \left(2e^{1-x}\right) = \frac{1}{3} + 2e^{1-(-\infty)} = \frac{1}{3} + 2e^{1+\infty} =$
$= \frac{1}{3} + \infty = +\infty$
- $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to +\infty} \left(\frac{1}{3} + 2e^{1-x}\right) = \lim\limits_{x\to +\infty} \frac{1}{3} + \lim\limits_{x\to +\infty} \left(2e^{1-x}\right) = \frac{1}{3} + 2e^{1-(+\infty)} =$
$= \frac{1}{3} + 2e^{-\infty} = \frac{1}{3} + 0^+ = \frac{1}{3}$

Assim temos que não existe qualquer assíntota horizontal quando $x \to -\infty$, e a reta de equação $y = \frac{1}{3}$ é uma assíntota horizontal do gráfico de f, quando $x \to +\infty$

Exame – 2002, 2.ª Fase (cód. 435)

81. Como a reta de equação $y = 2$ é assíntota do gráfico de h, e o domínio da função é domínio $\mathbb{R}^-$, então:

$$\lim_{x\to -\infty} h(x) = 2$$

E assim, temos que:

$$\lim_{x\to -\infty} \frac{h(x)}{e^x} = \frac{\lim\limits_{x\to -\infty} h(x)}{\lim\limits_{x\to -\infty} e^x} = \frac{2}{0^+} = +\infty$$

Resposta: **Opção A**

Exame – 2002, 1.ª fase - 2.ª chamada (cód. 435)

82. Averiguado a existência de uma assíntota horizontal do gráfico de f, quando $x \to -\infty$, temos:

$$\lim_{x\to -\infty} f(x) = \lim_{x\to -\infty} \left(0{,}1 + 0{,}2e^{0{,}3x}\right) = 0{,}1 + 0{,}2e^{0{,}3(-\infty)} = 0{,}1 + 0{,}2e^{-\infty} = 0{,}1 + 0{,}2 \times 0 = 0{,}1$$

Pelo que a reta de equação $y = 0{,}1$ é uma assíntota do gráfico de f

Resposta: **Opção B**

Exame – 2002, 1.ª fase - 1.ª chamada (cód. 435)

83. Como as funções f e g estão ambas definidas e são contínuas em $\mathbb{R}$, então (como a soma de funções contínuas também é uma função contínua) a função $f+g$ também está definida no mesmo domínio e também é contínua em $\mathbb{R}$, pelo que não existe qualquer assíntota vertical do gráfico da função $f+g$.

Averiguando a existência de uma assíntota do gráfico de $f+g$, de equação $y=mx+b$, quando $x\to -\infty$, vem que:

$$m=\lim_{x\to-\infty}\frac{(f+g)(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{e^x+x-2}{x}=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{e^x}{x}+\frac{x}{x}-\frac{2}{x}\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{e^x}{x}+1-\frac{2}{x}\right)=$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{e^x}{x}+\lim_{x\to-\infty}1-\lim_{x\to-\infty}\frac{2}{x}=\frac{e^{-\infty}}{-\infty}+1-\frac{2}{-\infty}=\frac{0^+}{-\infty}+1-0^-=0+1-0=1$$

$$b=\lim_{x\to-\infty}\big((f+g)(x)-mx\big)=\lim_{x\to-\infty}\big(e^x+x-2-1\times x\big)=\lim_{x\to-\infty}\big(e^x-2\big)=$$

$$=\lim_{x\to-\infty}e^x-\lim_{x\to-\infty}2=e^{-\infty}-2=0^+-2=-2$$

Desta forma, concluímos que a reta de equação $y=1\times x-2$, ou seja a reta r é assíntota do gráfico da função $f+g$, quando $x\to-\infty$

Averiguando a existência de outra assíntota do gráfico de $f+g$, de equação $y=mx+b$, quando $x\to+\infty$, vem que:

$$m=\lim_{x\to+\infty}\frac{(f+g)(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x+x-2}{x}=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{e^x}{x}+\frac{x}{x}-\frac{2}{x}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{e^x}{x}+1-\frac{2}{x}\right)=$$

$$=\underbrace{\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x}}_{\text{Lim. Notável}}+\lim_{x\to+\infty}1-\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{x}=+\infty+1-\frac{2}{+\infty}=+\infty+1-0^+=+\infty$$

Logo, como $\lim\limits_{x\to+\infty}\big((f+g)(x)-mx\big)$ não é um valor finito, então podemos concluir que o gráfico de $f+g$ não tem outra assíntota quando $x\to+\infty$, ou seja, que a única assíntota do gráfico de $f+g$ é a reta r.

Exame – 2001, Ép. especial (cód. 435)

84. Como a bissetriz dos quadrantes ímpares, ou seja uma reta de declive 1, é uma assíntota do gráfico de g, temos que:

$$m = \lim_{x\to+\infty} \frac{g(x)}{x} = 1$$

Assim, calculando $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x)$, vem que:

$$\lim_{x\to+\infty} h(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{g(x)}{x^2} = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{g(x)}{x} \times \frac{1}{x}\right) = \lim_{x\to+\infty} \frac{g(x)}{x} \times \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 1 \times \frac{1}{+\infty} = 1 \times 0^+ = 0$$

Ou seja, a reta de equação $y = 0$, ou seja, o eixo Ox é uma assíntota do gráfico de h.

Exame – 2001, 1.ª fase - 2.ª chamada (cód. 435)

85. Como a função está definida em $\mathbb{R}^+$ e é contínua no domínio, $x = 0$ é a única reta vertical que pode ser assíntota do gráfico de f.
Como

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \big(3x - 2\ln x\big) = 3 \times 0^+ - 2\ln(0^+) = 0 - 2 \times (-\infty) = +\infty$$

vem que a reta de equação $x = 0$ é a única assíntota vertical do gráfico de f.

Averiguando a existência de uma assíntota não vertical do gráfico de f, de equação $y = mx + b$, quando $x \to +\infty$, vem que:

$$m = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{3x - 2\ln x}{x} = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{3x}{x} - \frac{2\ln x}{x}\right) = \lim_{x\to+\infty} \left(3 - 2\frac{\ln x}{x}\right) =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} 3 - \lim_{x\to+\infty} \left(2\frac{\ln x}{x}\right) = 3 - 2 \underbrace{\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x}}_{\text{Lim. Notável}} = 3 - 2 \times 0 = 3$$

$$b = \lim_{x\to+\infty} \big(f(x) - mx\big) = \lim_{x\to+\infty} \big(3x - 2\ln x - 3x\big) = \lim_{x\to+\infty} \big(-2\ln x\big) = -2 \times \ln(+\infty) = -2 \times +\infty = -\infty$$

Logo, como o domínio de f é $\mathbb{R}^+$ e $\lim\limits_{x\to+\infty} \big(f(x) - mx\big)$ não é um valor finito, então podemos concluir que o gráfico de f não tem assíntotas oblíquas.

Exame – 2001, 1.ª fase - 1.ª chamada (cód. 435)

86. Como a função está definida para $t \geq 0$ e é contínua para estes valores, $t = 0$ é a única reta vertical que pode ser assíntota do gráfico de f.
Como

$$\lim_{t\to 0^+} f(x) = \lim_{t\to 0^+} \frac{5}{1 + 124e^{-0,3t}} = \frac{5}{1 + 124e^{-0,3\times 0}} = \frac{5}{1 + 124e^{0}} = \frac{5}{1 + 124 \times 1} = \frac{5}{125} = \frac{1}{25}$$

vem que a reta de equação $t = 0$ não é assíntota vertical do gráfico de f.

Averiguando a existência de assíntotas quando $t \to +\infty$, temos:

$$\lim_{t\to+\infty} f(x) = \lim_{t\to+\infty} \frac{5}{1 + 124e^{-0,3t}} = \frac{5}{1 + 124e^{-0,3\times(+\infty)}} = \frac{5}{1 + 124e^{-\infty}} = \frac{5}{1 + 124 \times 0} = \frac{5}{1} = 5$$

E assim podemos concluir que a única assíntota do gráfico de f é a reta de equação $y = 5$

No contexto do problema, esta conclusão significa que para valores arbitrariamente grandes de t, a função toma valores arbitrariamente próximos de 5, ou seja, com o passar do tempo o número de de habitantes de Malmequeres de Baixo que sabiam do acidente aproxima-se muito de 5 milhares.

Exame – 2001, Prova modelo (cód. 435)

87. Sendo $y = mx + b$ a equação da reta s, como $\lim\limits_{x\to+\infty} (f(x) - g(x)) = 0$, então temos que:

$$\lim_{x\to+\infty} (f(x) - (mx + b)) = 0$$

Ou seja, temos que a reta s é uma assíntota do gráfico de f

Resposta: **Opção D**

Exame – 2000, 2.ª Fase (cód. 435)

88. Como a função f é contínua em $\mathbb{R} \setminus \{1\}$, a reta de equação $x = 1$ é a única reta vertical que pode ser assíntota do gráfico de f. Averiguando se esta reta, é, de facto, uma assíntota, temos que:

- $\lim\limits_{x\to1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to1^+} \dfrac{e^x}{x-1} = \dfrac{e^1}{1^+ - 1} = \dfrac{e}{0^+} = +\infty$
- $\lim\limits_{x\to1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to1^-} \dfrac{e^x}{x-1} = \dfrac{e^1}{1^- - 1} = \dfrac{e}{0^-} = -\infty$

Logo, temos que a reta de equação $x = 1$ é a única assíntota vertical do gráfico de f

Averiguando a existência de assíntotas horizontais, temos que:

- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{e^x}{x-1} = \dfrac{e^{-\infty}}{-\infty - 1} = \dfrac{0^+}{-\infty} = 0$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x-1} = \dfrac{e^{+\infty}}{+\infty - 1} = \dfrac{+\infty}{+\infty}$ (Indeterminação)

(fazendo $y = x - 1$, temos $x = y + 1$ e se $x \to +\infty$, então $y \to +\infty$)

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x-1} = \lim_{y\to+\infty} \frac{e^{y+1}}{y} = \lim_{y\to+\infty} \frac{e^y \times e}{y} =$$

$$= \underbrace{\lim_{y\to+\infty} \frac{e^y}{y}}_{\text{Lim. Notável}} \times \lim_{y\to+\infty} e = +\infty \times e = +\infty$$

E assim temos que a função só tem uma assíntota horizontal (quando $x \to -\infty$) que é a reta de equação $y = 0$

Exame – 2000, 1.ª fase - 2.ª chamada (cód. 435)

89. Como o domínio de f é $\mathbb{R}^+$ e o eixo Ox é assíntota do gráfico de f, temos que

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0^+$$

Assim, averiguando a existência de uma assíntota horizontal do gráfico de $\dfrac{1}{f}$, vem:

$$\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{1}{f}\right)(x) = \frac{\lim\limits_{x\to+\infty} 1}{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

Como $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{1}{f}\right)(x)$ não é um valor finito e o domínio de f é $\mathbb{R}^+$, então não existe qualquer assíntota horizontal do gráfico de $\dfrac{1}{f}$

Exame – 2000, 1.ª fase - 1.ª chamada (cód. 435)

90. Como $f(0) = 1$ e f é estritamente crescente, então, para que a bissetriz dos quadrantes ímpares seja assíntota do gráfico de f, temos que:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

Como $f(0) = 1$ e f é estritamente crescente, então, para que a o eixo Ox seja assíntota do gráfico de f, temos que:

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0^+$$

Assim, como f é estritamente crescente, temos que o contradomínio de f é $]0, +\infty[$

Resposta: **Opção C**

Exame – 2000, Prova modelo (cód. 435)

91. Como $\lim_{x \to 3^-} g(x) = +\infty$, então a reta de equação $x = 3$ é uma assíntota vertical do gráfico da função g

Resposta: **Opção B**

Exame – 2000, Prova para militares (cód. 135)