Cálculo I - Agrupamento 4 — Exame Final

8 de janeiro de 2020

Duração: **2h30min**

[35pts] 1. Seja f a função real de variável real tal que $f(x) = \operatorname{arctg}(e^x + 1)$.

(a) Determine o domínio e o contradomínio de f.

(b) Calcule, caso exista, $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)-\frac{\pi}{4}}{e^x}$.

(c) Justifique que f é invertível e caracterize a sua inversa, indicando o seu domínio e expressão analítica.

[30pts] 2. Seja $F\colon]-\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{3}[\to\mathbb{R}$ tal que $F(x) = \displaystyle\int_0^{\operatorname{sen} x} \frac{e^t}{t^2-1}\,dt$.

(a) Mostre que F é diferenciável e verifique que $F'(x) = -\sec(x)e^{\operatorname{sen}(x)}$, $x \in]-\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{3}[$.

(b) Estude a monotonia e a existência de extremos globais de F .

[15pts] 3. Calcule $\displaystyle\int_0^1 xe^x\,dx$.

[18pts] 4. Considere a região plana $\mathcal{R} = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\colon x\le 4 \wedge y\ge 0 \wedge y\le x \wedge y\le \frac{1}{\sqrt{x}}\right\}$.

(a) Faça um esboço gráfico da região $\mathcal{R}$.

(b) Calcule a área de $\mathcal{R}$.

[20pts] 5. Usando a mudança de variável $x = \sec t$, $t\in[0,\frac{\pi}{2}[$, determine $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x^2-1}}{x}\,dx$.

[17pts] 6. Estude a natureza do integral impróprio $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{(1+x^2)\operatorname{arctg} x}\,dx$, indicando o seu valor em caso de convergência.

[15pts] 7. Verifique se a seguinte série é convergente e, em caso afirmativo, determine a sua soma:

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\sqrt{\frac{n-1}{n}}-\sqrt{\frac{n}{n+1}}\right).$$

[20pts] 8. Estude a natureza da série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{1+\sqrt{n}}$. Em caso de convergência, diga se a série converge absolutamente.

[15pts] 9. Sabendo que a série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ é convergente analise a natureza da série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}(a_n)^n$.

[15pts] 10. Sejam $a,b\in\mathbb{R}$, com $a<b$, e g uma função diferenciável em $\mathbb{R}$ tal que

$$g(a)+2<0<g(b)-1 \quad \text{e} \quad g'(x)=0 \Leftrightarrow x=a \vee x=b\,.$$

Diga, justificando, quantos zeros tem a função g no intervalo $[a,b]$.