Exercícios de aplicação **(págs. 244 a 285)**

1. Seja C o capital acumulado.

1.1. $C = 2500\left(1+\frac{0,5}{100}\right) = 2500 \times 1,005 = 2512,50$ euros

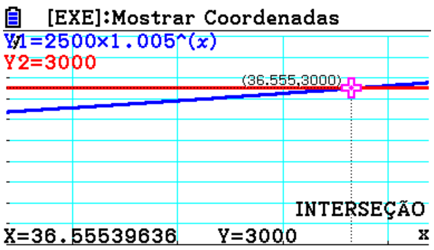
1.2. $C = 2500\left(1+\frac{0,5}{100}\right)^5 \approx 2563,13$ euros

1.3. $\frac{C_{n+1}}{C_n} = \frac{2500\left(1+\frac{0,5}{100}\right)^{n+1}}{2500\left(1+\frac{0,5}{100}\right)^n} = \frac{\left(1+\frac{0,5}{100}\right)^n \times \left(1+\frac{0,5}{100}\right)}{\left(1+\frac{0,5}{100}\right)^n} = 1,005$

Logo, a sucessão de capitais acumulados em cada um dos anos, a partir do primeiro, é uma progressão geométrica de razão 1,005.

1.4. $C_n = 2500\left(1+\frac{0,5}{100}\right)^n = 2500 \times 1,005^n$

1.5. Ao fim de 37 anos.



1.6. $2500\left(1+\frac{0,4}{100\times 12}\right)^5 \approx 2504,17$ euros

Ao optarmos por esta segunda modalidade, o capital acumulado será inferior ao da opção inicial.

2.

2.1. $9^{x^2+x} - 27^{-2x-2} = 0 \Leftrightarrow 9^{x^2+x} = 27^{-2x-2}$

$\Leftrightarrow (3^2)^{x^2+x} = (3^3)^{-2x-2}$

$\Leftrightarrow 3^{2x^2+2x} = 3^{-6x-6}$

$\Leftrightarrow 2x^2 + 2x = -6x - 6$

$\Leftrightarrow 2x^2 + 2x + 6x + 6 = 0$

$\Leftrightarrow 2x^2 + 8x + 6 = 0$

$\Leftrightarrow x = \frac{-8 \pm \sqrt{64-48}}{4}$

$\Leftrightarrow x = \frac{-8 \pm 4}{4}$

$\Leftrightarrow x = -1 \ \vee \ x = -3$

Assim, $\text{C.S.} = \{-3, -1\}$.

2.2. $2^{2x-1} - 2^{x-1} = 1 \Leftrightarrow 2^{2x} \times 2^{-1} - 2^x \times 2^{-1} - 1 = 0$

$\Leftrightarrow \frac{1}{2}(2^x)^2 - \frac{1}{2} \times 2^x - 1 = 0$

Aplicando a fórmula resolvente, obtemos:

$$\Leftrightarrow 2^x = 2 \ \vee \ \underbrace{2^x = -1}_{\text{Equação impossível}}$$

$$\Leftrightarrow x = 1$$

Assim, $\text{C.S.} = \{1\}$.

2.3. $5^{x+1} + 5^{1-x} - 1 = 25 \Leftrightarrow 5^{x+1} + 5^{1-x} - 26 = 0$

$$\Leftrightarrow 5^x \times 5 + 5 \times 5^{-x} - 26 = 0$$

$$\Leftrightarrow 5 \times (5^x)^2 - 26 \times 5^x + 5 = 0$$

Aplicando a fórmula resolvente, obtemos:

$$\Leftrightarrow 5^x = 5 \ \vee \ 5^x = 5^{-1}$$

$$\Leftrightarrow x = 1 \ \vee \ x = -1$$

Assim, $\text{C.S.} = \{-1, 1\}$.

3.

3.1. $D = \mathbb{R}\backslash\{0\}$

$3^{\frac{1}{x}} > 9 \Leftrightarrow 3^{\frac{1}{x}} > 3^2 \Leftrightarrow \frac{1}{x} > 2$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{x} - 2 > 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1-2x}{x} > 0$$

x	$-\infty$	0		$\frac{1}{2}$	$+\infty$
$-2x+1$	$+$	$+$	$+$	0	$-$
x	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$\frac{-2x+1}{x}$	$-$	n. d.	$+$	0	$-$

Logo, $x \in \left]0, \frac{1}{2}\right[$.

3.2. $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$

$\frac{6^x - 2^x}{3^x - 3} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{3^x \times 2^x - 2^x}{3^x - 3} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{2^x(3^x - 1)}{3^x - 3} \geq 0$

x	$-\infty$	0		1	$+\infty$
$2^x(3^x-1)$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$3^x - 3$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$\frac{2^x(3^x-1)}{3^x-3}$	$+$	0	$-$	n. d.	$+$

$\text{C.S.} =]-\infty, 0] \cup]1, +\infty[$

Daniela Raposo e Luzia Gomes

3.3. $-9^x + 4 \times 3^x \geq 3 \Leftrightarrow -9^x + 4 \times 3^x - 3 \geq 0 \Leftrightarrow -(3^2)^x + 4 \times 3^x - 3 \geq 0$

$\Leftrightarrow -(3^x)^2 + 4 \times 3^x - 3 \geq 0$

$\Leftrightarrow 3^x \geq 1 \ \wedge \ 3^x \leq 3$

$\Leftrightarrow 3^x \geq 3^0 \ \wedge \ 3^x \leq 3$

$\Leftrightarrow x \geq 0 \ \wedge \ x \leq 1$

$\text{C. S.} = [0,1]$

3.4. $2^{x-1} + 2^{2-x} - 3 > 0 \Leftrightarrow 2^x \times 2^{-1} + 2^2 \times 2^{-x} - 3 > 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2} \times 2^x + 4 \times 2^{-x} - 3 > 0$

$\Leftrightarrow \frac{1}{2} \times (2^x)^2 - 3 \times 2^x + 4 > 0$

$\Leftrightarrow 2^x < 2 \ \vee \ 2^x > 4$

$\Leftrightarrow x < 1 \ \vee \ x > 2$

$\text{C. S.} =]-\infty, 1[\cup]2, +\infty[$

4. A função f é contínua em IR, por se tratar do quociente entre duas funções contínuas (uma função afim e uma função que resulta da soma de uma função exponencial com uma função constante). Em particular, f é contínua em $[0,2]$.

$f(0) = \dfrac{0-1}{e^0+1} = -\dfrac{1}{2}$ $\qquad f(2) = \dfrac{2-1}{e^2+1} = \dfrac{1}{e^2+1}$

Portanto, $f(0) < 0 < f(2)$.

Assim, pelo teorema de Bolzano-Cauchy, concluímos que $\exists\, c \in]0,2[: f(c) = 0$, ou seja, a função f tem pelo menos um zero pertencente a $]0,2[$.

5.

5.1. $D = \{x \in \mathbb{R}: x - 4 > 0\} = \{x \in \mathbb{R}: x > 4\} =]4, +\infty[$

$\log_3(x-4) - 1 = 0 \Leftrightarrow \log_3(x-4) = 1$

$\Leftrightarrow x - 4 = 3$

$\Leftrightarrow x = 7$

$\text{C. S.} = \{7\}$

5.2. $D = \{x \in \mathbb{R}: x - 1 > 0 \ \wedge \ x + 2 > 0\} = \{x \in \mathbb{R}: x > 1 \ \wedge \ x > -2\} =]1, +\infty[$

$1 - \log(x-1) = \log(x+2) \Leftrightarrow 1 = \log(x-1) + \log(x+2)$

$\Leftrightarrow 1 = \log[(x-1)(x+2)]$

$\Leftrightarrow 10 = (x-1)(x+2)$

$\Leftrightarrow 10 = x^2 + 2x - x - 2$

$\Leftrightarrow x^2 + x - 12 = 0$

$\Leftrightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+48}}{2}$

$\Leftrightarrow x = \frac{-1 \pm 7}{2}$

$$\Leftrightarrow x = \frac{6}{2} \quad \vee \quad x = -\frac{8}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = 3 \;\vee\; x = -4$$

$\{-4,3\} \cap]1,+\infty[= \{3\}$

$\text{C.S.} = \{3\}$

5.3. $D = \{x \in \mathbb{R}: x^2 - x > 0 \;\wedge\; x > 0\} =]-\infty, 0[\cup]1,+\infty[\cap]0,+\infty[=]1,+\infty[$

$x^2 - x = 0 \Leftrightarrow x(x-1) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \;\vee\; x = 1$

$$\log_9(x^2 - x) - \log_3(x) = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{\log_3(x^2 - x)}{\log_3 9} - \log_3(x) = -\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\log_3(x^2 - x)}{2} - \log_3(x) = -\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\log_3(x^2 - x) - 2\log_3(x)}{2} = -\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \log_3(x^2 - x) - 2\log_3(x) = -1$$

$$\Leftrightarrow \log_3(x^2 - x) - \log_3(x^2) = -1$$

$$\Leftrightarrow \log_3\left(\frac{x^2-x}{x^2}\right) = -1$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2-x}{x^2} = 3^{-1}$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2-x}{x^2} = \frac{1}{3}$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2-x}{x^2} - \frac{1}{3} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{3x^2-3x-x^2}{3x^2} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{2x^2-3x}{3x^2} = 0$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 - 3x = 0 \;\wedge\; x \neq 0$$

$$\Leftrightarrow x(2x-3) = 0 \;\wedge\; x \neq 0$$

$$\Leftrightarrow \left(x = 0 \;\vee\; x = \frac{3}{2}\right) \;\wedge\; x \neq 0$$

$\text{C.S.} = \left\{\frac{3}{2}\right\}$

5.4. $D = \{x \in \mathbb{R}: x^2 > 0\ \} = x \in \text{IR} \setminus \{0\}$

$\ln(x^2) = 2\ln(5) \Leftrightarrow \ln(x^2) = \ln(5^2) \Leftrightarrow x^2 = 25$

$$\Leftrightarrow x = -5 \;\vee\; x = 5$$

$\text{C.S.} = \{-5,5\}$

6.

6.1. $D = \{x \in \mathbb{R}: 3x > 0\} = \{x \in \mathbb{R}: x > 0\} =]0,+\infty[$

$\log(3x) < \log(12) \Leftrightarrow 3x < 12 \Leftrightarrow x < 4$

$\text{C.S.} =]0,4[$

6.2. $D=\{x\in\mathbb{R}: 1-x>0\}=\{x\in\mathbb{R}: x<1\}=\left]-\infty,1\right[$

$\ln(1-x)\geq -2 \Leftrightarrow \ln(1-x)\geq \ln(e^{-2}) \Leftrightarrow 1-x\geq e^{-2}$

$\Leftrightarrow -x\geq e^{-2}-1 \Leftrightarrow x\leq 1-\frac{1}{e^2}$

$\text{C.S.}=\left]-\infty, 1-\frac{1}{e^2}\right]$

6.3. $D=\{x\in\mathbb{R}: x-1>0\}=\{x\in\mathbb{R}: x>1\}=\left]1,+\infty\right[$

$\log_{0,1}(x-1)<10 \Leftrightarrow x-1>0{,}1^{10} \Leftrightarrow x>\frac{1}{10^{10}}+1$

$\text{C.S.}=\left]\frac{1}{10^{10}}+1,+\infty\right[$

6.4. $D=\{x\in\mathbb{R}: 3-x>0\ \wedge\ x+4>0\ \}=\{x\in\mathbb{R}: x<3\wedge x>-4\}=\left]-4,3\right[$

$\log_3(3-x)\leq 9-\log_3(4+x) \Leftrightarrow \log_3(3-x)\leq \log_3(3^9)-\log_3(4+x)$

$\Leftrightarrow \log_3(3-x)\leq \log_3\left(\frac{3^9}{4+x}\right)$

$\Leftrightarrow 3-x\leq \frac{3^9}{4+x}$

$\Leftrightarrow 3-x-\frac{3^9}{4+x}\leq 0$

$\Leftrightarrow \frac{(3-x)(4+x)-19\,683}{4+x}\leq 0$

$\Leftrightarrow \frac{12+3x-4x-x^2-19\,683}{4+x}\leq 0$

$\Leftrightarrow \frac{-x^2-x-19\,671}{4+x}\leq 0$

x	-4		3
$-x^2-x-19\,671$	n. d.	$-$	n. d.
$4+x$	n. d.	$+$	n. d.
$\frac{-x^2-x-19671}{4+x}$	n. d.	$-$	n. d.

$\text{C.S.}=\left]-4,3\right[$

6.5. $D=\{x\in\mathbb{R}: -x^2+x>0\ \wedge\ x>0\ \}=\left]0,1\right[\cap\left]0,+\infty\right[=\left]0,1\right[$

$\log_2(-x^2+x)-\log_2(x)>-1 \Leftrightarrow \log_2\left(\frac{-x^2+x}{x}\right)>-1$

$\Leftrightarrow \frac{-x^2+x}{x}>2^{-1}$

$\Leftrightarrow \frac{-x^2+x}{x}-\frac{1}{2}>0$

$\Leftrightarrow \frac{-2x^2+2x-x}{2x}>0$

$\Leftrightarrow \frac{-2x^2+x}{2x}>0$

x	0		$\frac{1}{2}$		1
$-2x^2+x$	n. d.	$+$	0	$-$	n. d.
$2x$	n. d.	$+$	$+$	$+$	n. d.
$\frac{-2x^2+x}{2x}$	n. d.	$+$	0	$-$	n. d.

$\text{C.S.} = \left]0, \frac{1}{2}\right[$

7.

7.1. $D_f = \text{IR} = D'_{f^{-1}}$ e $D'_f =]-2, +\infty[= D_{f^{-1}}$

$$y = 3^{-x} - 2 \Leftrightarrow y + 2 = 3^{-x} \Leftrightarrow \log_3(y+2) = -x$$
$$\Leftrightarrow -\log_3(y+2) = x$$
$$\Leftrightarrow \log_3\left(\frac{1}{y+2}\right) = x$$

$$f^{-1}:]-2, +\infty[\longrightarrow \text{IR}$$
$$x \mapsto \log_3\left(\frac{1}{x+2}\right)$$

7.2. $D_g =]2, +\infty[= D'_{g^{-1}}$ e $D'_g = \text{IR} = D_{g^{-1}}$

$$y = \log(3x-6) - 1 \Leftrightarrow y + 1 = \log(3x-6) \Leftrightarrow 10^{y+1} = 3x - 6$$
$$\Leftrightarrow 10^{y+1} + 6 = 3x$$
$$\Leftrightarrow \frac{10^{y+1}+6}{3} = x$$
$$\Leftrightarrow x = \frac{10^{y+1}}{3} + 2$$
$$\Leftrightarrow x = \frac{10^{y+1}+6}{3}$$

$$g^{-1}: \text{IR} \longrightarrow]2, +\infty[$$
$$x \mapsto \frac{10^{x+1}+6}{3}$$

7.3. $D_h = \text{IR} = D'_{h^{-1}}$ e $D'_h =]-\infty, -1[= D_{h^{-1}}$

$$y = -2e^x - 1 \Leftrightarrow y + 1 = -2e^x \Leftrightarrow -y - 1 = 2e^x$$
$$\Leftrightarrow \frac{-y-1}{2} = e^x$$
$$\Leftrightarrow \ln\left(\frac{-y-1}{2}\right) = x$$

$$h^{-1}:]-\infty, -1[\longrightarrow \text{IR}$$
$$x \mapsto \ln\left(\frac{-x-1}{2}\right)$$

8. $\frac{f(t+2)}{f(t)} = 1{,}22 \Leftrightarrow \frac{\frac{200}{1+2^{-0{,}5(t+2)}}}{\frac{200}{1+2^{-0{,}5t}}} = 1{,}22$

$\Leftrightarrow \frac{200\left(1+2^{-0{,}5t}\right)}{200\left(1+2^{-0{,}5(t+2)}\right)} = 1{,}22$

$\Leftrightarrow \frac{\left(1+2^{-0{,}5t}\right)}{\left(1+2^{-0{,}5(t+2)}\right)} = 1{,}22$

$\Leftrightarrow 1 + 2^{-0{,}5t} = 1{,}22\left(1 + 2^{-0{,}5(t+2)}\right)$

$\Leftrightarrow 1 + 2^{-0{,}5t} = 1{,}22 + 1{,}22 \times 2^{-0{,}5t-1}$

$\Leftrightarrow 1 + 2^{-0{,}5t} = 1{,}22 + 1{,}22 \times 2^{-0{,}5t} \times 2^{-1}$

$\Leftrightarrow 1 + 2^{-0{,}5t} = 1{,}22 + 0{,}61 \times 2^{-0{,}5t}$

$\Leftrightarrow 2^{-0{,}5t} - 0{,}61 \times 2^{-0{,}5t} = 1{,}22 - 1$

$\Leftrightarrow (1 - 0{,}61) \times 2^{-0{,}5t} = 0{,}22$

$\Leftrightarrow 2^{-0{,}5t} = \frac{0{,}22}{0.39}$

$\Leftrightarrow -0{,}5t = \log_2\left(\frac{22}{39}\right)$

$\Leftrightarrow t = \frac{\log_2\left(\frac{22}{39}\right)}{-0{,}5}$

$\Leftrightarrow t \approx 1{,}652$

Cálculo auxiliar
$0{,}652 \times 12 \approx 8$

Um ano e oito meses, aproximadamente.

9.

9.1. $a'(x) = (e^{-2x})' = -2e^{-2x}$

9.2. $b'(x) = \left(e^{\frac{1}{x}}\right)' = -\frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}$

9.3. $c'(x) = (3^x)' = \ln(3) \times 3^x$

9.4. $d'(x) = \left(5^{x^2}\right)' = \ln(5) \times 2x \times 5^{x^2}$

9.5. $e'(x) = \left(5^{\ln(x)}\right)' = \ln(5) \times 5^{\ln(x)} \times \frac{1}{x}$

9.6. $f'(x) = \left(e^x(-x^3 + 3x - 1)\right)' = e^x(-x^3 + 3x - 1) + e^x \times (-3x^2 + 3) =$

$= e^x(-x^3 - 3x^2 + 3x + 2)$

9.7. $g'(x) = \left(\frac{e^x}{\ln(x)}\right)' = \frac{e^x \times \ln(x) - e^x \times \frac{1}{x}}{\ln^2(x)} = \frac{e^x\left(\ln(x) - \frac{1}{x}\right)}{\ln^2(x)}$

9.8. $h'(x) = \left(-\frac{2^x}{x^2}\right)' = -\frac{2^x \times \ln 2 \times x^2 - 2^x \times 2x}{x^4} = -\frac{2^x\left(\ln 2 \times x^2 - 2x\right)}{x^4} =$

$= \frac{2^x\left(2 - x\ln(2)\right)}{x^3}$

9.9. $i'(x) = (\ln(x^2 + 3x))' = \frac{2x+3}{x^2+3x}$

LeYa EDUCAÇÃO Daniela Raposo e Luzia Gomes

10. Determinar $f'(x)$ para $x > 0$: $f'(x) = e^x$

Determinar $f'(x)$ para $x < 0$: $f'(x) = 3x^2 + 2x$

Determinar $f'(x)$ para $x = 0$:

$f'(0^+) = \lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} \lim_{x\to 0^+} \frac{e^x-1-0}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{e^x-1}{x} = 1$

$f'(0^-) = \lim_{x\to 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} \lim_{x\to 0^-} \frac{x^3+x^2-0}{x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{x(x^2+x)}{x} = \lim_{x\to 0^-}(x^2+x) = 0$

Como $f'(0^+) \neq f'(0^-)$, então f não é diferenciável em $x = 0$.

$$f': \mathrm{IR} \setminus \{0\} \to \mathrm{IR}$$
$$x \mapsto \begin{cases} e^x & \text{se } x > 0 \\ 3x^2 + 2x & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

11. $D = \{x \in \mathbb{R}: 2x - 1 > 0\} = \left\{x \in \mathbb{R}: x > \frac{1}{2}\right\} = \left]\frac{1}{2}, +\infty\right[$

$f(x) = 2 - x + \ln(2x - 1)$

$f'(x) = -1 + \frac{2}{2x-1}$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow -1 + \frac{2}{2x-1} = 0 \Leftrightarrow \frac{-(2x-1)+2}{2x-1} = 0$

$\Leftrightarrow \frac{-2x+1+2}{2x-1} = 0$

$\Leftrightarrow -2x + 3 = 0 \ \wedge \ 2x - 1 \neq 0$

$\Leftrightarrow x = \frac{3}{2} \ \wedge \ x \neq \frac{1}{2}$

x	$\frac{1}{2}$		$\frac{3}{2}$	$+\infty$
Sinal de f'	n. d.	$+$	0	$-$
Variação de f	n. d.	$\nearrow$	Máx. $\frac{1}{2} + \ln(2)$	$\searrow$

Cálculo auxiliar

$f\left(\frac{3}{2}\right) = 2 - \frac{3}{2} + \ln\left(2 \times \frac{3}{2} - 1\right) = 2 - \frac{3}{2} + \ln(2) = \frac{1}{2} + \ln(2)$

Logo, $D'_f = \left]-\infty, \frac{1}{2} + \ln(2)\right]$.

12.

12.1. $C(t) = 2 \Leftrightarrow 12(e^{-t} - e^{-2t}) = 2 \Leftrightarrow e^{-t} - e^{-2t} = \frac{1}{6}$

$\Leftrightarrow -(e^{-t})^2 + e^{-t} - \frac{1}{6} = 0$

Aplicando a fórmula resolvente, obtemos:

$\Leftrightarrow e^{-t} = \frac{3+\sqrt{3}}{6} \quad \vee \quad e^{-t} = \frac{3-\sqrt{3}}{6}$

$$\Leftrightarrow -t = \ln\left(\frac{3+\sqrt{3}}{6}\right) \ \vee \ -t = \ln\left(\frac{3-\sqrt{3}}{6}\right)$$

$$\Leftrightarrow t = -\ln\left(\frac{3+\sqrt{3}}{6}\right) \ \vee \ t = -\ln\left(\frac{3-\sqrt{3}}{6}\right)$$

$$-\ln\left(\frac{3+\sqrt{3}}{6}\right) - \ln\left(\frac{3-\sqrt{3}}{6}\right) = -\left(\ln\left(\frac{3+\sqrt{3}}{6}\right) + \ln\left(\frac{3-\sqrt{3}}{6}\right)\right) =$$

$$= -\left(\ln\left(\frac{(3+\sqrt{3})(3-\sqrt{3})}{6\times 6}\right)\right) =$$

$$= -\ln\left(\frac{9-3}{6\times 6}\right) =$$

$$= -\ln\left(\frac{6}{6\times 6}\right) =$$

$$= -\ln\left(\frac{1}{6}\right) =$$

$$= -\ln(6^{-1}) =$$

$$= -\big(-\ln(6)\big) =$$

$$= \ln(6) \qquad \text{c. q. m.}$$

12.2. $\lim_{t\to+\infty} 12(e^{-t} - e^{-2t}) = 12(e^{-\infty} - e^{-\infty}) = 12 \times 0 = 0$

Com o passar do tempo, a concentração de medicamento no sangue do paciente tende para zero.

12.3. $C'(t) = 12(-e^{-t} + 2e^{-2t})$

$$C'(t) = 0 \Leftrightarrow 12(-e^{-t} + 2e^{-2t}) = 0$$

$$\Leftrightarrow 2e^{-2t} - e^{-t} = 0$$

$$\Leftrightarrow e^{-t}(2e^{-t} - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow e^{-t} = 0 \ \vee \ 2e^{-t} - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow -t = \ln\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow t = -\ln\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow t = -\big(\ln(1) - \ln(2)\big)$$

$$\Leftrightarrow t = \ln(2)$$

t	0		$\ln(2)$	$+\infty$
Sinal de C'	n. d.	$+$	0	$-$
Variação de C	n. d.	$\nearrow$	Máx.	$\searrow$

Cálculo auxiliar

$60 \times \ln(2) \approx 42$

Às 10 horas e 42 minutos, aproximadamente, a concentração de medicamento no sangue do paciente foi máxima.

13. $f''(x) = \frac{2}{3} + \frac{\frac{1}{3}(3-e^x)^{-\frac{2}{3}} \times (-e^x)}{(3-e^x)^{\frac{1}{3}}} = \frac{2}{3} + \frac{-\frac{1}{3}e^x}{(3-e^x)^{\frac{1}{3}}(3-e^x)^{\frac{2}{3}}} =$

$= \frac{2}{3} + \frac{-\frac{1}{3}e^x}{3-e^x} = \frac{2(3-e^x)-e^x}{3(3-e^x)} =$

$= \frac{6-2e^x-e^x}{3(3-e^x)} =$

$= \frac{6-3e^x}{3(3-e^x)} =$

$= \frac{3(2-e^x)}{3(3-e^x)} =$

$= \frac{e^x-2}{e^x-3}$ c.q.m.

$f''(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{e^x-2}{e^x-3} = 0 \Leftrightarrow e^x - 2 = 0 \ \wedge \ e^x - 3 \neq 0 \Leftrightarrow x = \ln(2) \ \wedge \ x \neq \ln(3)$

x	$-\infty$	$\ln(2)$		$\ln(3)$
Sinal de f''	$+$	0	$-$	n. d.
Sentido das concavidades do gráfico de f	$\cup$	P. I.	$\cap$	n. d.

O gráfico da função f tem a concavidade voltada para cima em $]-\infty, \ln(2)]$ e tem a concavidade voltada para baixo em $[\ln(2), \ln(3)[$. O gráfico da função tem um ponto de inflexão de abcissa $\ln(2)$.

14.

14.1. $R'(t) = \frac{\frac{1}{t+1} \times (t+1) - \ln(t+1)}{(t+1)^2} =$

$= \frac{1-\ln(t+1)}{(t+1)^2}$

$\frac{1-\ln(t+1)}{(t+1)^2} = 0 \Leftrightarrow 1 - \ln(t+1) = 0 \ \wedge \ (t+1)^2 \neq 0$

$\Leftrightarrow 1 = \ln(t+1) \ \wedge \ t \neq -1$

$\Leftrightarrow t + 1 = e \ \wedge \ t \neq -1$

$\Leftrightarrow t = e - 1$

t	0		$e-1$		5
Sinal de R'	$R'(0)$	$+$	0	$-$	$R'(5)$
Variação de R	$R(0)$	↗	Máx.	↘	$R(5)$

$e - 1 \approx 2$ anos (0 c.d.)

Uma criança atinge a capacidade máxima de aprendizagem por volta dos dois anos.

14.2. $R''(t)=\frac{-\frac{1}{t+1}\times(t+1)^2-[(1-\ln(t+1))\times 2(t+1)]}{(t+1)^4}=\frac{-(t+1)-(1-\ln(t+1))\times 2(t+1)}{(t+1)^4}=$

$$=\frac{(t+1)[-1-2(1-\ln(t+1))]}{(t+1)^4}=$$

$$=\frac{-1-2+2\ln(t+1)}{(t+1)^3}=$$

$$=\frac{-3+2\ln(t+1)}{(t+1)^3}$$

$\frac{-3+2\ln(t+1)}{(t+1)^3}=0 \Leftrightarrow -3+2\ln(t+1)=0 \ \wedge \ t\neq -1$

$\Leftrightarrow \ln(t+1)=\frac{3}{2} \ \wedge \ t\neq -1$

$\Leftrightarrow t+1=e^{\frac{3}{2}} \ \wedge \ t\neq -1$

$\Leftrightarrow t=e^{1,5}-1 \ \wedge \ t\neq -1$

$\Leftrightarrow t\approx 3{,}48$

t	0		$e^{1,5}-1$		5
Sinal de R''	$R''(0)$	$-$	0	$+$	$R''(5)$
Variação de R'	Máx. 1	$\searrow$	Mín. $-0{,}025$	$\nearrow$	Máx. $-0{,}022$

A capacidade de aprendizagem está a aumentar mais rapidamente logo após o nascimento.

15. $f(x)=x^2(1-\ln(x))$

$D_f=\mathrm{IR}^+$

Zeros: $f(x)=0 \Leftrightarrow x^2(1-\ln(x))=0$

$\Leftrightarrow x^2=0 \ \vee \ 1-\ln(x)=0$

$\Leftrightarrow x=0 \ \vee \ \ln(x)=1$

$\Leftrightarrow x=0 \ \vee \ x=e$

Atendendo ao domínio, $x=e$ é o único zero da função.

Continuidade: f é contínua por resultar de operações entre funções contínuas.

$f'(x)=2x\big(1-\ln(x)\big)+x^2\times\left(-\frac{1}{x}\right)=2x\big(1-\ln(x)\big)-x$

$f'(x)=0 \Leftrightarrow 2x\big(1-\ln(x)\big)-x=0 \Leftrightarrow x\big(2\big(1-\ln(x)\big)-1\big)=0$

$\Leftrightarrow x=0 \ \vee \ 2\big(1-\ln(x)\big)-1=0$

$\Leftrightarrow x=0 \ \vee \ 1-\ln(x)=\frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow x=0 \ \vee \ -\ln(x)=-\frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow x=0 \ \vee \ \ln(x)=\frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow x=0 \ \vee \ x=e^{\frac{1}{2}}$

x	0		$\sqrt{e}$	$+\infty$
Sinal de f'	n. d.	$+$	0	$-$
Variação de f	n. d.	$\nearrow$	Máx. $\frac{e}{2}$	$\searrow$

Cálculo auxiliar

$f(\sqrt{e}) = \frac{e}{2}$

f é crescente em $]0, \sqrt{e}]$ e é decrescente em $[\sqrt{e}, +\infty[$; $\frac{e}{2}$ é máximo absoluto para $x = \sqrt{e}$.

$$f''(x) = 2(1 - \ln(x)) + 2x\left(-\frac{1}{x}\right) - 1 = 2(1 - \ln(x)) - 2 - 1 =$$

$$= 2(1 - \ln(x)) - 3$$

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow 2(1 - \ln(x)) - 3 = 0 \Leftrightarrow 2 - 2\ln(x) - 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow -2\ln(x) = 1 \Leftrightarrow \ln(x) = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \frac{1}{e^{\frac{1}{2}}}$$

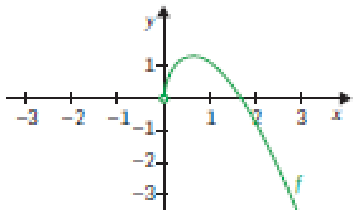
$$\Leftrightarrow x = \frac{1}{\sqrt{e}} \Leftrightarrow x = \frac{\sqrt{e}}{e}$$

x	0		$\frac{\sqrt{e}}{e}$	$+\infty$
Sinal de f''	n. d.	$+$	0	$-$
Variação de f	n. d.	$\cup$	P. I.	$\cap$

Cálculo auxiliar

$f\left(\frac{\sqrt{e}}{e}\right) = \frac{3}{2e}$

O gráfico de f tem a concavidade voltada para cima em $\left]0, \frac{\sqrt{e}}{e}\right]$ e tem a concavidade voltada para baixo em $\left[\frac{\sqrt{e}}{e}, +\infty\right[$; o ponto de coordenadas $\left(\frac{\sqrt{e}}{e}, \frac{3}{2e}\right)$ é ponto de inflexão do gráfico de f.



16.

16.1. $\lim_{x\to 0} \frac{1-e^x}{2x} = \lim_{x\to 0} \frac{-(e^x-1)}{2x} = -\frac{1}{2} \lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x} = -\frac{1}{2}$

16.2. $\lim_{x\to 0} \frac{3e^x-3}{5x} = \frac{3}{5} \lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x} = \frac{3}{5}$

16.3. $\lim_{x\to 0} \frac{e^{3x}-1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{3(e^{3x}-1)}{3x} = 3 \lim_{3x\to 0} \frac{e^{3x}-1}{3x} = 3$

16.4. $\lim_{x\to 2}\frac{e^x-e^2}{x-2}=\lim_{y\to 0}\frac{e^{y+2}-e^2}{y+2-2}=\lim_{y\to 0}\frac{e^{y+2}-e^2}{y}=$

Considerando a mudança de variável $x-2=y\Leftrightarrow x=y+2$: se $x\to 2$, então $y\to 0$.

$$=\lim_{y\to 0}\frac{e^y\times e^2-e^2}{y}=$$

$$=\lim_{y\to 0}\frac{e^2(e^y-1)}{y}$$

$$=e^2\lim_{y\to 0}\frac{e^y-1}{y}=\ e^2$$

16.5. $\lim_{x\to 0}\frac{(e^x)^5-1}{15x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{5x}-1}{3\times 5x}=\frac{1}{3}\lim_{5x\to 0}\frac{e^{5x}-1}{5x}=\frac{1}{3}$

16.6. $\lim_{x\to 1}\frac{e^x-e}{ex-e}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{e^x-e}{e(x-1)}=\frac{1}{e}\lim\limits_{x\to 1}\frac{e^x-e}{x-1}$

Seja f a função de domínio $\mathbb{R}$ definida por $f(x)=e^x$. Sabemos que $f(1)=e$ e que $f'(x)=e^x$ e, consequentemente, $f'=e$. Então:

$\frac{1}{e}\lim\limits_{x\to 1}\frac{e^x-e}{x-1}=\frac{1}{e}\lim\limits_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\frac{1}{e}\times f'(1)=\frac{1}{e}\times e=1$

16.7. $\lim_{x\to 1}\frac{xe^x-e}{3x-3}=\lim_{x\to 1}\frac{xe^x-e}{3(x-1)}=\frac{1}{3}\times\lim_{x\to 1}\frac{xe^x-e}{x-1}=\frac{1}{3}\times\lim\limits_{y\to 0}\frac{(y+1)e^{y+1}-e}{y}=$

Considerando a mudança de variável $x-1=y\Leftrightarrow x=y+1$: se $x\to 1$, então $y\to 0$.

$$=\frac{1}{3}\times\lim_{y\to 0}\frac{ye^{y+1}+e^{y+1}-e}{y}=$$

$$=\frac{1}{3}\times\left(\lim_{y\to 0}\frac{ye^{y+1}}{y}+\lim_{y\to 0}\frac{e^{y+1}-e}{y}\right)=$$

$$=\frac{1}{3}\times\left(\lim_{y\to 0}e^{y+1}+\lim_{y\to 0}\frac{e(e^y-1)}{y}\right)=$$

$$=\frac{1}{3}\times\left(e+e\underbrace{\lim_{y\to 0}\frac{e^y-1}{y}}_{\text{limite notável}}\right)=$$

$$=\frac{1}{3}(e+e)=$$

$$=\frac{2}{3}e$$

16.8. $\lim_{x\to 0}\frac{2^x-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{\ln(2^x)}-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(2)\times\left(e^{x\ln(2)}-1\right)}{x\ln(2)}=\ln(2)\times\lim_{x\ln 2\to 0}\frac{e^{x\ln(2)}-1}{x\ln(2)}=\ln(2)$

16.9. $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(x+1)}{2x}=\lim_{y\to 0}\frac{y}{2(e^y-1)}=\frac{1}{2}\lim_{y\to 0}\frac{y}{e^y-1}=\frac{1}{2}\lim_{y\to 0}\frac{\frac{y}{y}}{\frac{e^y-1}{y}}=\frac{1}{2}\times\frac{1}{\lim_{y\to 0}\frac{e^y-1}{y}}=\frac{1}{2}$

16.10. $\lim_{x\to 2}\frac{\ln(x+1)}{x-2}=\lim_{y\to 0}\frac{y}{e^y+1-2}=\lim_{y\to 0}\frac{y}{e^y-1}=$

Considerando a mudança de variável $\ln(x-1)=y\Leftrightarrow x=e^y+1$: se $x\to 2$, então $y\to 0$.

$$=\lim_{y\to 0}\frac{\frac{y}{y}}{\frac{e^y-1}{y}}=\frac{1}{\lim_{y\to 0}\frac{e^y-1}{y}}=1$$

16.11. $\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^2-e^x}{-x^{10}}=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2x^2}{-x^{10}}-\frac{e^x}{-x^{10}}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(-\frac{2}{x^8}+\frac{e^x}{x^{10}}\right)=0+(+\infty)=+\infty$

16.12. $\lim_{x\to-\infty}(xe^{x}) = \lim_{y\to+\infty}(-ye^{-y}) = -\lim_{y\to+\infty}\frac{y}{e^{y}} = -\frac{1}{\lim_{y\to+\infty}\frac{e^{y}}{y}} = -\frac{1}{+\infty} = 0$

16.13. $\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{x}-3^{x}}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{e^{x}\left(1-\frac{3^{x}}{e^{x}}\right)}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{e^{x}}{x}\times\lim_{x\to+\infty}\left[1-\left(\frac{3}{e}\right)^{x}\right] = +\infty\times(-\infty) = -\infty$

16.14. $\lim_{x\to+\infty}[\ln(e^{x}-2x)-x] = \lim_{x\to+\infty}\left[\ln\left(e^{x}(1-\frac{2x}{e^{x}}\right)-x\right] =$

$$= \lim_{x\to+\infty}\left[\ln(e^{x})+\ln\left(1-\frac{2x}{e^{x}}\right)-x\right] =$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\left[x+\ln\left(1-\frac{2x}{e^{x}}\right)-x\right] =$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\left[\ln\left(1-\frac{2x}{e^{x}}\right)\right] =$$

$$= \ln\left(1-\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\frac{2x}{x}}{\frac{e^{x}}{x}}\right)\right) =$$

$$= \ln\left(\frac{2}{\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{x}}{x}}\right) =$$

$$= \ln\left(1-\frac{2}{+\infty}\right) =$$

$$= \ln(1) = 0$$

16.15. $\lim_{x\to+\infty}\frac{5^{x}}{x^{5}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{e^{\ln(5^{x})}}{x^{5}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{e^{x\ln(5)}}{x^{5}} =$

Considerando a mudança de variável $y = x\ln(5) \Leftrightarrow x = \frac{y}{\ln(5)}$: se $x\to+\infty$, então $y\to+\infty$.

$$= \lim_{y\to+\infty}\frac{e^{y}}{\left(\frac{y}{\ln(5)}\right)^{5}} = \lim_{y\to+\infty}\frac{e^{y}}{\frac{y^{5}}{(\ln(5))^{5}}} =$$

$$= (\ln(5))^{5}\times\lim_{y\to+\infty}\frac{e^{y}}{y^{5}} = +\infty$$

16.16. $\lim_{x\to+\infty}\frac{\log_5(x)}{x^{5}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{\ln(x)}{\ln 5}}{x^{5}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(x)}{\ln 5\times x^{5}} = \frac{1}{\ln 5}\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^{5}} = \frac{1}{\ln 5}\times 0 = 0$

16.17. $\lim_{x\to+\infty}\frac{-3x^{3}-1+\ln(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{-3x^{3}}{x} - \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x} + \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(x)}{x} = -\infty - 0 + 0 = -\infty$

17. $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^{2}}{x+2}\right)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to+\infty} e^{\ln\left(\left(\frac{x^{2}}{x+2}\right)^{\frac{1}{x}}\right)} = \lim_{x\to+\infty} e^{\frac{1}{x}\ln\left(\frac{x^{2}}{x+2}\right)} = \lim_{x\to+\infty} e^{\frac{1}{x}(\ln(x^{2})-\ln(x+2))} =$

$$= \lim_{x\to+\infty} e^{\frac{\ln(x^{2})-\ln(x+2)}{x}} =$$

$$= e^{\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(x^{2})-\ln(x+2)}{x}} =$$

$$= e^{\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(x^{2})}{x} - \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(x+2)}{x}} =$$

$$= e^{\lim_{x\to+\infty}\frac{2\ln(x)}{x} - \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(x+2)}{x}} =$$

$$= e^{2\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(x)}{x} - \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(x+2)}{x}} =$$

Considerando a mudança de variável $x+2=y \Leftrightarrow x=y-2$: se $x\to+\infty$, então $y\to+\infty$.

$$= e^{2\times 0-\lim_{y\to+\infty}\frac{\ln(y)}{y-2}} =$$

$$= e^{-\lim_{y\to+\infty}\frac{\frac{\ln(y)}{y}}{1-\frac{2}{y}}} =$$

$$= e^{-\frac{\lim_{y\to+\infty}\frac{\ln(y)}{y}}{\lim_{y\to+\infty}\left(1-\frac{2}{y}\right)}} =$$

$$= e^{-\frac{0}{1}} =$$

$$= e^{0} =$$

$$= 1$$

18. Para que a função h seja contínua em $x=2$, tem que existir $\lim\limits_{x\to 2} h(x)$. Para que $\lim\limits_{x\to 2} h(x)$ exista, temos que ter $\lim\limits_{x\to 2^+} h(x) = \lim\limits_{x\to 2^-} h(x) = h(2)$.

- $\lim_{x\to 2^-}\frac{x^2-4}{x-2} = \lim\limits_{x\to 2^-}\frac{(x-2)(x+2)}{x-2} = \lim\limits_{x\to 2^-}(x+2) = 4$
- $\lim\limits_{x\to 2^+}\frac{e^{x+k}+\ln(x-1)}{x} = \lim\limits_{x\to 2^+}\frac{e^{x+k}}{x} + \lim\limits_{x\to 2^+}\frac{\ln(x-1)}{x} = \frac{e^{2+k}}{2} + \frac{\ln(2-1)}{2} = \frac{e^{2+k}}{2} + 0 = \frac{e^{2+k}}{2}$
- $h(0) = \frac{e^{2+k}}{2}$

Assim, h é contínua em $x=2$ se e só se:

$$\frac{e^{2+k}}{2} = 4 \Leftrightarrow e^{2+k} = 8 \Leftrightarrow 2+k = \ln(8) \Leftrightarrow k = \ln(8)-2$$

19.

- Para $x>0$, a função é contínua, por se tratar da diferença entre duas funções contínuas (uma que é a composta da função raiz quadrada com uma função polinomial e outra que é uma função afim).
- Para $x<0$, a função é contínua, por se tratar do quociente entre duas funções contínuas (uma que é a diferença entre a composta de uma função exponencial com uma função afim e uma função constante e outra que é uma função afim, que não se anula no intervalo considerado).
- Para $x=0$:

  $$\lim_{x\to 0^+}\left(\sqrt{x^2+9}-x\right) = \sqrt{0+9}-0 = 3$$

  $$\lim_{x\to 0^-}\frac{e^{3x}-1}{x} = \lim_{x\to 0^-}\frac{3(e^{3x}-1)}{3x} = 3\lim_{3x\to 0^-}\frac{e^{3x}-1}{3x} = 3$$

  $h(0)=3$

Como $\lim\limits_{x\to 0^+} h(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} h(x) = h(0)$, a função h é contínua no ponto de abcissa 0.

Concluímos, assim, que a função h é contínua em IR.

20. $\lim_{x\to 0^+} \frac{e^x+2}{e^x-1} = \frac{e^0+2}{e^{0^+}-1} = \frac{3}{0^+} = +\infty$

$\lim_{x\to 0^-} \frac{e^x+2}{e^x-1} = \frac{e^0+2}{e^{0^-}-1} = \frac{3}{0^-} = -\infty$

Assim, $x=0$ é assíntota vertical ao gráfico de f.

$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x+2}{e^x-1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\cancel{e^x}\left(1+\frac{2}{e^x}\right)}{\cancel{e^x}\left(1-\frac{1}{e^x}\right)} = \frac{1+\frac{2}{+\infty}}{1-\frac{1}{+\infty}} = 1$

Assim, $y=1$ é assíntota horizontal ao gráfico de f, quando $x\to+\infty$.

$\lim_{x\to-\infty} \frac{e^x+2}{e^x-1} = \frac{e^{-\infty}+2}{e^{-\infty}-1} = \frac{2}{-1} = -2$

Assim, $y=-2$ é assíntota horizontal ao gráfico de f, quando $x\to-\infty$.

21. $m = \lim_{x\to+\infty} \frac{g(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x\ln(x-1) - x\ln(x) + 2x}{x} =$

$= \lim_{x\to+\infty}[\ln(x-1) - \ln(x) + 2] =$

$= \lim\limits_{x\to+\infty}\left[\ln\left(\frac{x-1}{x}\right) + 2\right] =$

$= \lim\limits_{x\to+\infty}\left[\ln\left(\frac{x\left(1-\frac{1}{x}\right)}{x}\right) + 2\right] =$

$= \lim\limits_{x\to+\infty}\left[\ln\left(1-\frac{1}{x}\right) + 2\right] =$

$= 2$

$b = \lim\limits_{x\to+\infty}[x\ln(x-1) - x\ln(x) + 2x - 2x] =$

$= \lim\limits_{x\to+\infty}[x\ln(x-1) - x\ln(x)] =$

$= \lim_{x\to+\infty}\left[x\ln\left(\frac{x-1}{x}\right)\right] =$

Considerando a mudança de variável $\ln\left(\frac{x-1}{x}\right) = y \Leftrightarrow \frac{x-1}{x} = e^y \Leftrightarrow x-1 = xe^y \Leftrightarrow x - xe^y = 1$

$\Leftrightarrow x(1-e^y) = 1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{1-e^y}$: se $x\to+\infty$, então $y\to$

$= \lim_{y\to 0} \frac{1}{1-e^y} \times y =$

$= \lim_{y\to 0} \frac{y}{1-e^y} =$

$= \lim\limits_{y\to 0} \frac{-y}{e^y-1} =$

$= -\lim_{y\to 0} \frac{1}{\frac{e^y-1}{y}} =$

$= -\frac{1}{\underbrace{\lim_{y\to 0}\frac{e^y-1}{y}}_{\text{limite notável}}} =$

$= -1$

$y = 2x-1$ é assíntota oblíqua ao gráfico de g quando $x\to+\infty$.

$$m = \lim_{x\to-\infty} \frac{g(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{xe^{4x} - 2x}{x} =$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{x(e^{4x}-2)}{x} =$$

$$= \lim_{x\to-\infty} (e^{4x} - 2) =$$

$$= e^{-\infty} - 2 =$$

$$= 0 - 2 =$$

$$= -2$$

$$b = \lim_{x\to-\infty} (xe^{4+x} - 2x - (-2)x) = \lim_{x\to-\infty} (xe^{4+x} - 2x + 2x) = \lim_{x\to-\infty} (xe^{4+x})$$

$$\lim_{x\to-\infty} (xe^{4+x}) = \lim_{y\to 0^+} \big(-4 + \ln(y)\big)y =$$

Considerando a mudança de variável $e^{4+x} = y \Leftrightarrow 4 + x = \ln(y) \Leftrightarrow x = -4 + \ln(y)$: se $x \to -\infty$, então $y \to 0^+$.

$$= \lim_{y\to 0^+} \big(-4y + y\ln(y)\big) =$$

$$= \lim_{y\to 0^+} (-4y) + \lim_{y\to 0^+} \big(y\ln(y)\big)$$

$$\lim_{y\to 0^+} \big(y\ln(y)\big) = \lim_{z\to+\infty} \frac{1}{z}\ln(z^{-1}) = -\lim_{z\to+\infty} \underbrace{\frac{\ln(z)}{z}}_{\text{limite notável}} = 0$$

Considerando a mudança de variável $z = \frac{1}{y} \Leftrightarrow zy = 1 \Leftrightarrow y = \frac{1}{z}$: se $y \to 0^+$, então $z \to +\infty$.

$y = -2x$ é assíntota oblíqua do gráfico de g quando $x \to -\infty$.

22. Sabemos que $\lim_{x\to+\infty}(f(x) - x) = 2$, logo $y = x + 2$ é assíntota oblíqua ao gráfico de f.

Vamos determinar a assíntota oblíqua ao gráfico de g.

$$m = \lim_{x\to+\infty} \frac{g(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{\ln(x)}{x} + f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \left[\frac{\ln(x)}{x^2} + \frac{f(x)}{x}\right] =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x^2} + \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} \times \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x} + 1 =$$

$$= 0 \times 0 + 1 =$$

$$= 1$$

$$b = \lim_{x\to+\infty} \left[\frac{\ln(x)}{x} + f(x) - x\right] =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x} + \lim_{x\to+\infty} [f(x) - x] =$$

$$= 0 + 2 =$$

$$= 2$$

Assim, a reta de equação $y = x + 2$ é a única assíntota oblíqua ao gráfico de g.

23.

23.1. $\lim\limits_{x\to -1^-} \frac{1-e^{x+1}}{x^2-1} = \lim_{x\to -1^-} \frac{-(e^{x+1}-1)}{(x-1)(x+1)} = -\lim_{x\to -1^-} \frac{1}{x-1} \times \lim_{x\to -1^-} \frac{e^{x+1}-1}{x+1} =$

$$= -\frac{1}{-1-1} \lim_{x\to -1^-} \frac{e^{x+1}-1}{x+1} =$$

Considerando a mudança de variável $x+1=y \Leftrightarrow x=y-1$: se $x \to -1^-$, então $y \to 0$.

$$= \frac{1}{2}\lim_{y\to 0} \frac{e^y-1}{y} =$$

$$= \frac{1}{2} \times 1 =$$

$$= \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to -\infty} \frac{1-e^{x+1}}{x^2-1} = \frac{1-e^{-\infty+1}}{(-\infty)^2-1} = \frac{1-0}{+\infty} = \frac{1}{+\infty} = 0$$

A reta de equação $y=0$ é assíntota horizontal ao gráfico de g.

23.2. Para $x > -1$, $g(x) = x + \ln(1+x^2)$

$$g'(x) = 1 + \frac{2x}{1+x^2}$$

$$g''(x) = \frac{2\times(1+x^2) - 2x \times 2x}{(1+x^2)^2} = \frac{2+2x^2-4}{(1+x^2)^2} =$$

$$= \frac{2-2x^2}{(1+x^2)^2}$$

$$g''(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{2-2x^2}{(1+x^2)^2} = 0$$

$$\Leftrightarrow 2-2x^2 = 0$$

$\Leftrightarrow x = 1$, uma vez que estamos a estudar g em $]-1,+\infty[$.

x	-1		1	$+\infty$
g''		$+$	0	$-$
g		$\cup$	P.I.	$\cap$

O gráfico de g tem a concavidade voltada para cima em $]-1,1]$ e tem a concavidade voltada para baixo em $[1,+\infty[$.

$g(1) = 1 + \ln(1+1^2) = 1 + \ln(2)$

O ponto de coordenadas $(1, 1+\ln(2))$ é ponto de inflexão do gráfico de g.

24. Modelo matemático relativo ao decaimento radioativo: $m(t) = m_0 e^{-kt},\ k \in \mathrm{IR}^+$

$m(11{,}7) = 20 \Leftrightarrow 30e^{-11{,}7k} = 20 \Leftrightarrow e^{-11{,}7k} = \frac{2}{3}$

$$\Leftrightarrow -11{,}7k = \ln\left(\frac{2}{3}\right)$$

$$\Leftrightarrow k = \frac{\ln\left(\frac{2}{3}\right)}{-11{,}7}$$

$$\Leftrightarrow k \approx 0{,}035$$

Daniela Raposo e Luzia Gomes

$$m(t) = 15 \Leftrightarrow 30e^{-0{,}035t} = 15 \Leftrightarrow e^{-0{,}035t} = \frac{1}{2}$$
$$\Leftrightarrow -0{,}035t = \ln\left(\frac{1}{2}\right)$$
$$\Leftrightarrow t = \frac{\ln\left(\frac{1}{2}\right)}{-0{,}035}$$
$$\Leftrightarrow t \approx 7{,}4 \text{ dias}$$

25.

25.1. Como a taxa de variação $P'(t)$, da população $P(t)$, existente ao fim de t anos, é diretamente proporcional a $P(t)$, sendo a constante de proporcionalidade igual a $-0{,}0013$, então $P'(t) = -0{,}0013P(t)$. Além disso, sabemos que toda e qualquer solução desta equação é do tipo $P(t) = ce^{-0{,}0013t}$, onde $c = P(0) = P_0$. Logo, $P(t) = P_0e^{-0{,}0013t}$.

25.2. $P(t) = 0{,}6P_0 \Leftrightarrow P_0e^{-0{,}0013t} = 0{,}6P_0 \Leftrightarrow e^{-0{,}0013t} = 0{,}6$
$$\Leftrightarrow -0{,}0013t = \ln(0{,}6)$$
$$\Leftrightarrow t = \frac{\ln(0{,}6)}{-0{,}0013}$$
$$\Leftrightarrow t \approx 393 \text{ anos}$$

Ao fim de 393 anos, aproximadamente.

Exercícios propostos **(págs. 286 a 308)**

Itens de seleção **(págs. 286 a 289)**

1. $200 \times 2^{0{,}4t} = 204\,800 \Leftrightarrow 2^{0{,}4t} = \frac{204\,800}{200} \Leftrightarrow 2^{0{,}4t} = 1024$
$$\Leftrightarrow 0{,}4t = \log_2(1024)$$
$$\Leftrightarrow t = \frac{10}{0{,}4}$$
$$\Leftrightarrow t = 25$$

Opção (C)

2. $2\ln(e^6) = 2 \times 6\ln(e) = 2 \times 6 = 12$

Opção (C)

3. $\ln(x) = -10 \Leftrightarrow x = e^{-10} \;\wedge\; x > 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{e^{10}} \;\wedge\; x > 0 \Leftrightarrow x = \left(\frac{1}{e}\right)^{10}$

$$\text{C.S.} = \left\{\left(\frac{1}{e}\right)^{10}\right\}$$

Opção (D)

4. $g(x) = e \Leftrightarrow g(x) - e = 0 \Leftrightarrow 2^x + \log(x) - e = 0$

Seja $h(x) = 2^x + \log(x) - e$.

$h(1) = 2 + \log(1) - e = 2 - e < 0$

$h(2) = 2^2 + \log(2) - e = 4 + \log(2) - e > 0$

Como h é contínua em todo o seu domínio (por se tratar da adição e da diferença de funções contínuas), em particular, é contínua no intervalo $[1,2]$ e, como $h(1) < 0 < h(2)$, então, pelo teorema de Bolzano-Cauchy, $\exists\, c \in]1,2[: h(c) = 0$.

Provar a existência de pelo menos um zero da função *h*, no referido intervalo, é o mesmo que provar que a equação do enunciado tem pelo menos uma solução no intervalo $]1, 2[$, conforme solicitado.

Opção (A)

5. $e^{-\ln(k)-1} = e^{\ln(k^{-1})} \times e^{-1} = k^{-1} \times \frac{1}{e} = \frac{1}{ke}$

Opção (D)

6. $g(-4) = -\frac{3}{2} \Leftrightarrow f(-4+k) = -\frac{3}{2} \Leftrightarrow 2^{-4+k} - 2 = -\frac{3}{2}$

$\Leftrightarrow 2^{-4+k} = -\frac{3}{2} + 2$

$\Leftrightarrow 2^{-4+k} = \frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow 2^{-4+k} = 2^{-1}$

$\Leftrightarrow -4 + k = -1$

$\Leftrightarrow k = -1 + 4$

$\Leftrightarrow k = 3$

Opção (A)

7. $f(x) = \log_4\left(16\sqrt[3]{x}\right) = \log_4(16) + \log_4\left(x^{\frac{1}{3}}\right) = 2 + \frac{1}{3}\log_4(x) = 2 + \frac{\log_4(x)}{3} = \frac{6+\log_4(x)}{3}$

Opção (C)

8. $\log(u) = -\log(v) \Leftrightarrow \log(u) = \log(v^{-1}) \Leftrightarrow u = v^{-1} \ \wedge\ u, v \in \mathrm{IR}^+$

$u = \frac{1}{v} \ \wedge\ u, v \in \mathrm{IR}^+ \Leftrightarrow u \times v = 1 \ \wedge\ u, v \in \mathrm{IR}^+$

Opção (B)

9. $3y = \log_2(x) \Leftrightarrow 2^{3y} = x \Leftrightarrow (2^3)^y = x \Leftrightarrow x = 8^y$

Opção (B)

LeYa EDUCAÇÃO Daniela Raposo e Luzia Gomes

10. $\log\left(\sqrt{\frac{a^3\sqrt{a}}{\sqrt[3]{a}\sqrt[4]{a}}}\right) = \log\left(\sqrt{\frac{a^3 a^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{3}}a^{\frac{1}{4}}}}\right) = \log\left(\sqrt{\frac{a^{\frac{7}{2}}}{a^{\frac{7}{12}}}}\right) =$

$= \log\left(\sqrt{a^{\frac{7}{2}-\frac{7}{12}}}\right) = \log\left(\sqrt{a^{\frac{35}{12}}}\right) =$

$= \log(a)^{\frac{35}{24}} = \frac{35}{24}\log(a) = \frac{35}{24}m$

Opção (D)

11. $\ln(x) = y\ln(3) \Leftrightarrow \ln(x) = \ln(3^y) \Leftrightarrow x = 3^y \Leftrightarrow \log_3(x) = y$

Opção (A)

12. $D = \{x \in \mathrm{IR}: x^2 > 0 \ \wedge \ x > 0\} = \mathrm{IR}^+$

Opção (C)

13. $D_f = \{x \in \mathrm{IR}: x - 2 > 0 \ \wedge \ e^{x-5} - 1 \neq 0\} =]2, +\infty[\setminus \{5\}$

Cálculo auxiliar

$e^{x-5} - 1 = 0 \Leftrightarrow e^{x-5} = 1 \Leftrightarrow e^{x-5} = e^0$

$\Leftrightarrow x - 5 = 0$

$\Leftrightarrow x = 5$

Opção (C)

14. $4^x = 5^x \Leftrightarrow x = 0$

$\mathrm{C.S.} = \{0\}$

Opção (B)

15. $\log_{\sqrt{x}}(3) = 1 \Leftrightarrow 3 = \sqrt{x} \ \wedge \ x > 0 \Rightarrow x = 9$

$\mathrm{C.S.} = \{9\}$

Opção (B)

16. $P(1) = 3^{4\times 1} = 3^4 = 81$

Opção (B)

17. Se $\lim f(x_n) = -\infty$, então $x_n \to 1^-$.

$\lim\left[\ln\left[\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right]\right] = 1^-$

Opção (A)

18. $\lim\left[1+\frac{(-1)^n}{n}\right]=1$

$\lim\left(1+\frac{2}{n}\right)^n=e^2$

$\lim\left(\frac{1}{n}\right)=0$

$\lim\left(\frac{n^2-n+2}{n}\right)=\lim\frac{n\left(n-1+\frac{2}{n}\right)}{n}=+\infty$

$f(e^2)=\ln(e^2)+1=2+1=3$

Opção (B)

19. $f(a)=e^a+5$

$\lim\limits_{x\to a^-}f(x)=e^a+5$

$\lim\limits_{x\to a^+}(\ln(x)+e^x)=\ln(a)+e^a$

$\ln(a)+e^a=e^a+5\Leftrightarrow\ln(a)=5$

$\Leftrightarrow a=e^5$

Opção (B)

20. $\lim_{x\longrightarrow+\infty}\left(3^{\frac{1}{x}}\right)=3^{\frac{1}{+\infty}}=3^{0^+}=1$

$\lim\limits_{x\to 0^+}\left(3^{\frac{1}{x}}\right)=3^{\frac{1}{0^+}}=3^{+\infty}=+\infty$

$\lim_{x\to 0^-}\left(3^{\frac{1}{x}}\right)=3^{\frac{1}{0^-}}=3^{-\infty}=0$

Opção (D)

21. $\lim_{x\to-\infty}\frac{-3e^x+3}{x}=\frac{-3\times e^{-\infty}+3}{-\infty}=\frac{-3\times 0+3}{-\infty}=\frac{3}{-\infty}=0$

$\lim_{x\to 0^-}\frac{-3e^x+3}{x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{-3(e^x-1)}{x}=-3\underbrace{\lim_{x\to 0^-}\frac{e^x-1}{x}}_{\text{limite notável}}=-3$

$\lim_{x\to 0^+}\frac{[\ln(2x+1)]^2-ln(2x+1)^3}{2x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{[\ln(2x+1)]^2-3\ln(2x+1)}{2x}=$

$=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\ln(2x+1)[\ln(2x+1)-3]}{2x}=$

$=\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln(2x+1)}{2x}\times\lim_{x\to 0^+}[\ln(2x+1)-3]=$

$=\lim\limits_{y\to 0}\frac{y}{2\times\frac{e^y-1}{2}}\times(-3)=$

$=\frac{1}{\underbrace{\lim_{y\to 0}\frac{e^y-1}{y}}_{\text{limite notável}}}\times(-3)=$

$=-3$

Opção (B)

22. $\lim_{x\to0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to0^-}\frac{(x^2+kx+1)e^x-1}{x}=$

$=\lim\limits_{x\to0^-}\frac{x^2e^x+kxe^x+e^x-1}{x}=$

$=\lim_{x\to0^-}\frac{x^2e^x}{x}+\lim_{x\to0^-}\frac{kxe^x}{x}+\underbrace{\lim_{x\to0^-}\frac{e^x-1}{x}}_{\text{limite notável}}=$

$=\lim\limits_{x\to0^-}(xe^x)+\lim_{x\to0^-}(ke^x)+1=$

$=k+1$

$\lim_{x\to0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to0^+}\frac{\ln(kx+e)-1}{x}=$

Considerando a mudança de variável $y=\ln(kx+e)-1\Leftrightarrow y+1=\ln(kx+e)$

$\Leftrightarrow e^{y+1}=kx+e\Leftrightarrow\frac{e^{y+1}-e}{k}=x$: se $x\to0^+$, então $y\to0^+$.

$=\lim_{y\to0^+}\frac{y}{\frac{e^{y+1}-e}{k}}=$

$=\lim_{y\to0^+}\frac{ky}{e^{y+1}-e}=$

$=k\lim_{y\to0^+}\frac{y}{e^{y+1}-e}=$

$=k\lim_{y\to0^+}\frac{y}{e(e^y-1)}=$

$=\frac{k}{e}\lim_{y\to0^+}\frac{y}{e^y-1}=$

$=\frac{k}{e}\times\frac{1}{\lim_{y\to0^+}\frac{e^y-1}{y}}=$

$=\frac{k}{e}$

$k+1=\frac{k}{e}\Leftrightarrow k-\frac{k}{e}=-1\Leftrightarrow k\left(1-\frac{1}{e}\right)=-1$

$\Leftrightarrow k=\frac{-1}{1-\frac{1}{e}}$

$\Leftrightarrow k=\frac{-1}{\frac{e-1}{e}}$

$\Leftrightarrow k=\frac{-e}{e-1}$

$\Leftrightarrow k=\frac{e}{1-e}$

Opção (A)

23. $m_t=\text{tg}(135°)\Leftrightarrow m_t=-1$

$g'(x)=\frac{-1}{-x}=\frac{1}{x}$

$g'(a)=\frac{1}{a}$

$g'^{(a)}=-1\Leftrightarrow\frac{1}{a}=-1\Leftrightarrow a=-1$

Opção (A)

24. $i'(x)=\frac{e^x\times x-e^x}{x^2}=\frac{e^x(x-1)}{x^2}$

$i'(x)=0\Leftrightarrow\frac{e^x(x-1)}{x^2}=0$

$\Leftrightarrow e^x(x-1)=0\ \wedge\ x^2\neq 0$

$\Leftrightarrow\ \underbrace{e^x=0}_{\text{equação impossível}}\ \vee\ x-1=0\ \wedge\ x\neq 0$

$\Leftrightarrow x=1$

$i(1)=\frac{e}{1}=e\qquad (1,e)$

Logo, a reta de equação $y=e$ é tangente ao gráfico de i.

Opção (D)

25. $\left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right)^2-\left(\frac{e^x-e^{-x}}{2}\right)^2=\frac{e^{2x}+2e^xe^{-x}+e^{-2x}-(e^{2x}-2e^xe^{-x}+e^{-2x})}{4}=$

$=\frac{e^{2x}+2e^xe^{-x}+e^{-2x}-e^{2x}+2-e^{-2x}}{4}=$

$=\frac{4}{4}=$

$=1$

Opção (B)

26. $a^{\frac{\log_b(c)}{\log_b(a)}}=a^{\log_a(c)}=c$

Opção (A)

27. $D_f=\left\{x\in\mathbb{R}:\frac{x-2}{x-3}>0\ \wedge\ x-3\neq 0\right\}$

x	$-\infty$	2		3	$+\infty$
$x-2$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$x-3$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$\frac{x-2}{x-3}$	$+$	0	$-$	n.d.	$+$

$D_f=]-\infty,2[\,\cup\,]3,+\infty[$

Opção (B)

28. $g(a)=\ln[(e\times a^3)^5]=\ln(e^5\times a^{15})=$

$=\ln(e^5)+\ln(a^{15})=$

$=5+15\ln(a)=$

$=5+15k=$

$=15k+5$, uma vez que $\ln(a)=k$.

Opção (A)

29. $D_f = \mathrm{IR} \setminus \{-5{,}5\}$

$f(x) = \log(x-5)^2 + \log(x+5)^2 - \log(25) =$

$= \log\left[\frac{(x-5)^2 \times (x+5)^2}{25}\right]$

$$\log\left[\frac{(x-5)^2 \times (x+5)^2}{25}\right] = 0 \Leftrightarrow \frac{(x-5)^2 \times (x+5)^2}{25} = 10^0$$

$\Leftrightarrow (x-5)^2 \times (x+5)^2 = 25$

$\Leftrightarrow (x-5)^2 \times (x+5)^2 - 25 = 0$

$\Leftrightarrow [(x-5)(x+5)]^2 - 5^2 = 0$

$\Leftrightarrow (x-5)(x+5) - 5 = 0 \ \vee \ (x-5)(x+5) + 5 = 0$

$\Leftrightarrow x^2 - 25 - 5 = 0 \vee x^2 - 25 + 5 = 0$

$\Leftrightarrow x^2 - 30 = 0 \vee x^2 - 20 = 0$

$\Leftrightarrow x = \pm\sqrt{30} \vee x = \pm\sqrt{20}$

Opção (D)

30. $\log_b\left(\frac{a^4}{\sqrt[4]{b}}\right) = \log_b(a^4) - \log_b\left(b^{\frac{1}{4}}\right) =$

$= 4\log_b(a) - \frac{1}{4}\log_b(b) =$

$= 4 \times \frac{\log_a(a)}{\log_a(b)} - \frac{1}{4} =$

$= 4 \times \frac{1}{3} - \frac{1}{4} =$

$= \frac{13}{12}$

Opção (A)

31. $e^{2x} = a \Leftrightarrow 2x = \ln(a)$

$\Leftrightarrow x = \frac{\ln(a)}{2}$

$\Leftrightarrow x = \frac{1}{2}\ln(a)$

$\Leftrightarrow x = \ln\left(a^{\frac{1}{2}}\right)$

$\Leftrightarrow x = \ln(\sqrt{a})$

$f(\ln(\sqrt{a})) = e^{2\ln(\sqrt{a})} =$

$= e^{\ln(a)} =$

$= a$

Assim, o gráfico da função f interseta a reta de equação $y = a$ no ponto de coordenadas $(\ln(\sqrt{a}), a)$.

Opção (C)

32. $g(x) = \log_2(x)$

$g'(x) = \frac{1}{x\ln(2)}$

$f\,'(2) = \ln(2)$

$g'(4) = \frac{1}{4\ln(2)}$

$g(4) = \log_2(4) = 2$

$$(fog)'(4) = g'(4) \times f'(g(4)) = \frac{1}{4\ln(2)} \times f'(2) =$$

$$= \frac{\ln(2)}{4\ln(2)} =$$

$$= \frac{\ln(2)}{\ln(2^4)} =$$

$$= \frac{\ln(2)}{\ln(16)}$$

Opção (A)

33. $D_h = \mathrm{IR}^+$

$h'(x) = f'(x) + \frac{1}{x}$

Como f é uma função quadrática, então f'é uma função afim.

$h''(x) = f''(x) - \frac{1}{x^2}$

Como f'é uma função afim, então é uma função constante. Além disso, o gráfico de f tem a concavidade voltada para cima em IR, logo $f''(x) > 0, \forall x \in \mathrm{IR}$.

Assim, o gráfico de h'' obtém-se do gráfico da função cuja expressão analítica é $y = -\frac{1}{x^2}$ através de uma translação de vetor (0, k), com $k \in \mathrm{IR}^+$.

Opção (C)

Itens de construção **(págs. 290 a 308)**

1.

1.1. $(27)^{\frac{2}{3}} = (3^3)^{\frac{2}{3}} = 3^2 = 9$

1.2. $\left(\frac{1}{9}\right)^{\frac{3}{2}} = \left(\frac{1}{3^2}\right)^{\frac{3}{2}} = \frac{1}{(3^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{3^3} = \frac{1}{27}$

1.3. $8^{\frac{2}{3}} + 16^{\frac{3}{4}} = (2^3)^{\frac{2}{3}} + (2^4)^{\frac{3}{4}} = 2^2 + 2^3 = 4 + 8 = 12$

1.4. $3^3 \times 3^{-2} = 3$

1.5. $4^{\frac{2}{3}} \times 2^{\frac{2}{3}} = (4 \times 2)^{\frac{2}{3}} = 8^{\frac{2}{3}} = (2^3)^{\frac{2}{3}} = 2^2 = 4$

1.6. $(3^2)^{\frac{5}{2}} = 3^5 = 243$

1.7. $\left(e^2 \times e^{\frac{3}{2}}\right)^{\frac{4}{3}} = \left(e^{2+\frac{3}{2}}\right)^{\frac{4}{3}} = \left(e^{\frac{7}{2}}\right)^{\frac{4}{3}} = e^{\frac{14}{3}}$

1.8. $\left(\frac{\pi^2}{\sqrt{\pi}}\right)^{\frac{4}{3}} = \left(\frac{\pi^2}{\pi^{\frac{1}{2}}}\right)^{\frac{4}{3}} = \left(\pi^{2-\frac{1}{2}}\right)^{\frac{4}{3}} = \left(\pi^{\frac{3}{2}}\right)^{\frac{4}{3}} = \pi^2$

1.9. $\left(\frac{27}{64}\right)^{\frac{2}{3}} \times \left(\frac{64}{25}\right)^{\frac{3}{2}} = \frac{(3^3)^{\frac{2}{3}}}{(2^6)^{\frac{2}{3}}} \times \frac{(2^6)^{\frac{3}{2}}}{(5^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{3^2}{2^4} \times \frac{2^9}{5^3} = \frac{288}{125}$

1.10. $\left(\frac{16}{81}\right)^{\frac{1}{4}} \times \left(\frac{125}{8}\right)^{-\frac{2}{3}} = \left(\frac{2^4}{3^4}\right)^{\frac{1}{4}} \times \left(\frac{8}{125}\right)^{\frac{2}{3}} = \frac{2}{3} \times \frac{(2^3)^{\frac{2}{3}}}{(5^3)^{\frac{2}{3}}} = \frac{2}{3} \times \frac{2^2}{5^2} = \frac{8}{75}$

2.

2.1. $\left(x^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{3}{2}} = x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x}$

2.2. $\left(x^{\frac{2}{3}}\right)^{-\frac{3}{4}} = x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{x}}$

2.3. $\left(x^{-\frac{7}{8}}\right)^{-\frac{8}{7}} = x$

2.4. $\left(x^{\frac{5}{6}}\right)^{-\frac{6}{5}} = x^{-1} = \frac{1}{x}$

2.5. $(27x^6)^{\frac{2}{3}} = 27^{\frac{2}{3}} \times (x^6)^{\frac{2}{3}} = (3^3)^{\frac{2}{3}} \times x^{6\times\frac{2}{3}} = 3^2 \times x^4 = 9x^4$

2.6. $(8x^2y^3)^{\frac{1}{3}} = 8^{\frac{1}{3}} \times x^{2\times\frac{1}{3}} \times y^{3\times\frac{1}{3}} = (2^3)^{\frac{1}{3}} \times x^{\frac{2}{3}} \times y = 2\sqrt[3]{x^2}y$

2.7. $\left(\frac{x^2y^3}{x^0}\right)^{\frac{1}{6}} = (x^2)^{\frac{1}{6}} \times (y^3)^{\frac{1}{6}} = x^{\frac{1}{3}} \times y^{\frac{1}{2}} = \sqrt[3]{x}\sqrt{y}$

2.8. $(z^{2012})^{\frac{1}{1006}} \times (x^{10} + y^{20})^0 = z^{\frac{2012}{1006}} \times 1 = z^2$

3.

3.1. $\log_2(12) + \log_2(20) - \log_2(15) = \log_2(12 \times 20) - \log_2(15) =$

$= \log_2(240) - \log_2(15) =$

$= \log_2\left(\frac{240}{15}\right) =$

$= \log_2(16) =$

$= 4$

3.2. $\log_5(12) - \log_5(15) - 2\log_5(2) = \log_5\left(\frac{12}{15}\right) - \log_5(2^2) =$

$= \log_5\left(\frac{4}{5}\right) - \log_5 4 =$

$= \log_5\left(\frac{1}{5}\right) =$

$= -1$

3.3. $\log_5\left(\frac{25}{2}\right)+\frac{1}{2}\log_5(4)=\log_5\left(\frac{25}{2}\right)+\log_5\left(4^{\frac{1}{2}}\right)=$

$=\log_5\left(\frac{25}{2}\right)+\log_5(2)=$

$=\log_5(25)=$

$=2$

3.4. $\log_3\left(\frac{2}{27}\right)+\log_3\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\log_3\left(\frac{2}{27}\times\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=$

$=\log_3\left(\frac{\sqrt{3}}{27}\right)=$

$=\log_3\left(\frac{3^{\frac{1}{2}}}{3^3}\right)=$

$=\log_3(3^{-\frac{5}{2}})=$

$=-\frac{5}{2}$

3.5. $\log_2\frac{16^{31}\times256^2\times\sqrt{128}}{4^{70}\times\sqrt[4]{8}}=\log_2\left(\frac{(2^4)^{31}\times(2^8)^2\times2\sqrt[3]{2}}{(2^2)^{70}\times\sqrt[4]{2^3}}\right)=$

$=\log_2\left(\frac{2^{143}\times\sqrt{2}}{2^{140}\times2^{\frac{3}{4}}}\right)=$

$=\log_2\left(2^3\times\frac{2^{\frac{1}{2}}}{2^{\frac{3}{4}}}\right)=$

$=\log_2\left(2^3\times2^{-\frac{1}{4}}\right)=$

$=\log_2\left(2^{\frac{11}{4}}\right)=$

$=\frac{11}{4}$

3.6. $\log(\sqrt{10}+3)+\log(\sqrt{10}-3)=\log\left((\sqrt{10}+3)(\sqrt{10}-3)\right)=$

$=\log(10-9)=$

$=\log(1)=$

$=0$

4.

4.1. $3^x-3=0\Leftrightarrow3^x=3\Leftrightarrow x=1$

$x\in\{1\}$

4.2. $3^x-3>0\Leftrightarrow3^x>3\Leftrightarrow x>1$

$x\in\left]1,+\infty\right[$

4.3. $3^x-3<0\Leftrightarrow3^x<3\Leftrightarrow x<1$

$x\in\left]-\infty,1\right[$

5.

5.1. $\log_5(x+6)=0 \ \wedge \ x>-6 \Leftrightarrow x+6=5^0 \wedge x>-6$

$\Leftrightarrow x=-5 \ \wedge \ x>-6$

$x \in \{-5\}$

5.2. $\log_5(x+6)>0 \ \wedge \ x>-6 \Leftrightarrow \log_5(x+6)>\log_5 1 \ \wedge \ x>-6$

$\Leftrightarrow x+6>1 \wedge x>-6$

$\Leftrightarrow x>-5 \wedge x>-6$

$\text{C.S.}=\left]-5,+\infty\right[$

5.3. $\log_5(x+6)<0 \wedge x>-6 \Leftrightarrow \log_5(x+6)<\log_5 1 \wedge x>-6$

$\Leftrightarrow x+6<1 \wedge x>-6$

$\Leftrightarrow x<-5 \wedge x>-6$

$\text{C.S.}=\left]-6,-5\right[$

6.

6.1. $3^{1+\log_3(x)}=3^{\log_3(3)+\log_3(x)}=3^{\log_3(3x)}=3x$

6.2. $4^{3\log_4(x)}=4^{\log_4(x^3)}=x^3$

6.3. $5^{6\log_5(x)-2\log_5(x)}=5^{\log_5(x^6)-\log_5(x^2)}=5^{\log_5\left(\frac{x^6}{x^2}\right)}=x^4$

7.

7.1. $3^{5x-1}=3^{2-x} \Leftrightarrow 5x-1=2-x \Leftrightarrow 6x=3 \Leftrightarrow x=\frac{1}{2}$

$\text{C.S.}=\left\{\frac{1}{2}\right\}$

7.2. $2^x=64 \Leftrightarrow 2^x=2^6 \Leftrightarrow x=6$

$\text{C.S.}=\{6\}$

7.3. $8^x=\frac{1}{32} \Leftrightarrow 2^{3x}=2^{-5} \Leftrightarrow 3x=-5 \Leftrightarrow x=-\frac{5}{3}$

$\text{C.S.}=\left\{-\frac{5}{3}\right\}$

7.4. $\left(\sqrt{5}\right)^x=\sqrt[4]{125} \Leftrightarrow \left(5^{\frac{1}{2}}\right)^x=(5^3)^{\frac{1}{4}}$

$\Leftrightarrow 5^{\frac{1}{2}x}=5^{\frac{3}{4}}$

$\Leftrightarrow \frac{1}{2}x=\frac{3}{4}$

$\Leftrightarrow x=\frac{6}{4}$

$\Leftrightarrow x=\frac{3}{2}$

$\text{C.S.}=\left\{\frac{3}{2}\right\}$

8.

8.1. $2^{3x-1} \leq 32 \Leftrightarrow 2^{3x-1} \leq 2^5 \Leftrightarrow 3x-1 \leq 5$

$\Leftrightarrow 3x \leq 6$

$\Leftrightarrow x \leq 2$

$\text{C.S.} =]-\infty, 2]$

8.2. $e^{-0,1x+3} \geq 1 \Leftrightarrow -0,1x+3 \geq 0 \Leftrightarrow -0,1x \geq -3$

$\Leftrightarrow 0,1x \leq 3$

$\Leftrightarrow x \leq \frac{3}{0,1}$

$\Leftrightarrow x \leq 30$

$\text{C.S.} =]-\infty, 30]$

8.3. $7^{3x+4} < 49^{2x-3} \Leftrightarrow 7^{3x+4} < (7^2)^{2x-3} \Leftrightarrow 7^{3x+4} < 7^{4x-6}$

$\Leftrightarrow 3x+4 < 4x-6$

$\Leftrightarrow -x < -10$

$\Leftrightarrow x > 10$

$\text{C.S.} =]10, +\infty[$

8.4. $5^{2x^2+3x-2} > 1 \Leftrightarrow 5^{2x^2+3x-2} > 5^0 \Leftrightarrow 2x^2+3x-2 > 0$

Cálculo auxiliar

$2x^2+3x-2 = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \times 2 \times (-2)}}{2 \times 2} \Leftrightarrow x = -2 \vee x = \dfrac{1}{2}$

$\text{C.S.} =]-\infty, -2[\cup \left]\frac{1}{2}, +\infty\right[$

9.

9.1. $D = \{x \in \mathbb{R}: x+1 > 0\} =]-1, +\infty[$

$\log(x+1) = 1 \Leftrightarrow x+1 = 0 \quad \wedge \quad x \in D$

$\Leftrightarrow x = 9 \quad \wedge \quad x \in D$

$\text{C.S.} = \{9\}$

9.2. $\log_a\left(\frac{625}{16}\right) = \log_a a^4 \Leftrightarrow \frac{625}{16} = a^4 \Leftrightarrow a = \pm\sqrt[4]{\frac{625}{16}} \quad \wedge \quad a > 0$

$\Leftrightarrow a = \frac{5}{2}$

$\text{C.S.} = \left\{\frac{5}{2}\right\}$

9.3. $D = \{x \in \mathbb{R}: x > 0\} =]0, +\infty[$

$\ln(x) - \ln(4) = 1 \Leftrightarrow \ln(x) = \ln(e) + \ln(4) \quad \wedge \quad x \in D$

$\Leftrightarrow \ln(x) = \ln(4e) \quad \wedge \quad x \in D$

$\text{C.S.} = \{4e\}$

9.4. $D = \{x \in \mathbb{R}: x > 0\} =]0, +\infty[$

$$3\log_3(2) + \log_3(x) = -1 \Leftrightarrow \log_3(8) + \log_3(x) = \log_3(3^{-1}) \ \land \ x \in D$$

$$\Leftrightarrow \log_3(8x) = \log_3\left(\frac{1}{3}\right) \ \land \ x \in D$$

$$\Leftrightarrow 8x = \frac{1}{3} \land \ x \in D$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{1}{24} \land \ x \in D$$

$\text{C. S.} = \left\{\frac{1}{24}\right\}$

9.5. $D = \{x \in \mathbb{R}: x > 0 \ \land \ 2 - x > 0\} =]0,2[$

$$\ln(x) + \ln(2 - x) = \ln(5) \Leftrightarrow \ln(2x - x^2) = \ln(5) \ \land \ x \in D$$

$$\Leftrightarrow 2x - x^2 = 5 \ \land \ x \in D$$

$$\Leftrightarrow -x^2 + 2x - 5 = 0 \ \land \ x \in D$$

$$\Leftrightarrow x = \underbrace{\frac{-2 \pm \sqrt{4-20}}{-2}}_{\text{condição impossível em } \mathbb{R}} \ \land \ x \in D$$

$\text{C. S.} = \{\emptyset\}$

9.6. $D = \{x \in \mathbb{R}: 2x > 0 \ \land \ -3x + 5 > 0\} = \left]0, \frac{5}{3}\right[$

> **Cálculo auxiliar**
>
> $2x > 0 \ \land \ -3x + 5 > 0 \Leftrightarrow x > 0 \ \land \ -3x > -5$
>
> $\Leftrightarrow x > 0 \ \land \ 3x < 5$
>
> $\Leftrightarrow x > 0 \ \land \ x < \frac{5}{3}$

$$\log_5(2x) = \log_5(-3x + 5) \Leftrightarrow 2x = -3x + 5 \ \land \ x \in D$$

$$\Leftrightarrow 5x = 5 \ \land \ x \in D$$

$$\Leftrightarrow x = 1 \ \land \ x \in D$$

$\text{C. S.} = \{1\}$

9.7. $D = \{x \in \mathbb{R}: x^2 - 4 > 0 \ \land 2 - x > 0\} = (\,]-\infty, -2[\cup]2, +\infty[\,) \cap \ ]-\infty, 2[=$

$$=]-\infty, -2[$$

> **Cálculo auxiliar**
>
> $x^2 - 4 > 0 \ \land \ 2 - x > 0 \Leftrightarrow x^2 > 4 \ \land \ x < 2$
>
> $\Leftrightarrow x < -2 \ \land \ x > 2 \ \land \ x < 2$

$$\log_4(x^2 - 4) = \log_4(2 - x) \Leftrightarrow x^2 - 4 = 2 - x \ \land \ x \in D$$

$$\Leftrightarrow x^2 + x - 6 = 0 \ \land \ x \in D$$

$$\Leftrightarrow x = 2 \lor x = -3 \ \land \ x \in D$$

$\text{C. S.} = \{-3\}$

9.8. $D = \{x \in \mathbb{R}: x > 0\} =]0, +\infty[$

$$5 = \log_4(x) \Leftrightarrow x = 4^5 \land \ x \in D \Leftrightarrow x = 1024 \land \ x \in D$$

$\text{C. S.} = \{1024\}$

9.9. $D = \{x \in \mathbb{R}: x > 0\} =]0, +\infty[$

$\log_2(x) = 16 \Leftrightarrow x = 2^{16} \wedge x \in D \Leftrightarrow x = 65\,536 \wedge x \in D$

$\text{C.S.} = \{65\,536\}$

9.10. $D = \{x \in \mathbb{R}: x > 0 \wedge x \neq 1\} =]0, +\infty[\backslash\{1\}$

$\log_x(16) = 2 \Leftrightarrow x^2 = 16 \wedge x \in D \Leftrightarrow (x = 4 \vee x = -4 \wedge x \in D$

$\text{C.S.} = \{4\}$

9.11. $D = \mathbb{R}^+$

$\ln(2x) = \ln(x + 10) \Leftrightarrow 2x = x + 10 \wedge x \in D \Leftrightarrow x = 10 \wedge x \in D$

$\text{C.S.} = \{10\}$

9.12. $D = \{x \in \mathbb{R}: 1 - x > 0 \wedge x^2 - 4x + 3 > 0\} =]-\infty, 1[\cap (\,]-\infty, 1[\cup]3, +\infty[\,) =]-\infty, 1[$

Cálculo auxiliar

$1 - x > 0 \wedge \Leftrightarrow x < 1$

$x \in]-\infty, 1[$

$x^2 - 4x + 3 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 12}}{2}$

$\Leftrightarrow x = \frac{4 \pm 2}{2}$

$\Leftrightarrow x = 3 \vee x = 1$

$x^2 - 4x + 3 > 0 \Leftrightarrow x \in]-\infty, 1[\cup]3, +\infty[$

$\log(1 - x) = \log(x^2 - 4x + 3) \Leftrightarrow 1 - x = x^2 - 4x + 3 \wedge x \in D$

$\Leftrightarrow x^2 - 3x + 2 = 0 \wedge x \in D$

$\Leftrightarrow x = 1 \vee x = 2 \wedge x \in D$

$\text{C.S.} = \emptyset$

10.

10.1. $D = \{x \in \mathbb{R}: x > 0\} =]0, +\infty[$

$\ln(x) < 3 \Leftrightarrow x < e^3 \wedge x \in D$

C.S. $=]0, e^3[$

10.2. $D = \{x \in \mathbb{R}: x + 3 > 0\} =]-3, +\infty[$

$\ln(x + 3) < 0 \Leftrightarrow x + 3 < 1 \wedge x \in D \Leftrightarrow x < -2 \wedge x \in D$

C.S. $=]-3, -2[$

11.

11.1. $H(100) = 2^{21-0,2\times 100} = 2$ horas

11.2. $H(d) = 8 \Leftrightarrow 2^{21-0,2d} = 8 \Leftrightarrow 2^{21-0,2d} = 2^3$

$\Leftrightarrow 21 - 0,2d = 3$

$\Leftrightarrow d = 90$ decibéis

12.

12.1. $H(0) = \frac{3}{2} + \log_3(0+1) = 1{,}5$ metros

12.2. $H(t) = 3{,}5 \ \wedge \ t > 0$

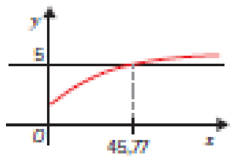
$\frac{3}{2} + \log_3(t+1) = 3{,}5 \Leftrightarrow \log_3(t+1) = 2$

$\Leftrightarrow t + 1 = 3^2$

$\Leftrightarrow t + 1 = 9$

$\Leftrightarrow t = 8$ anos

12.3. 46 anos



13.

13.1. Para $x < 1, f$ é contínua, pois resulta de operações entre funções contínuas;

Para $x > 1, f$ é contínua, pois resulta de operações entre funções contínuas;

Para $x = 1$:

- $\lim_{x \to 1^-}[\ln(2-x) + x] = \ln(2-1) + 1 = \ln(1) + 1 = 1$
- $\lim_{x \to 1^+}(e^{1-x}) = e^{1-1} = e^0 = 1$
- $f(1) = e^{1-1} = e^0 = 1$

Como $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = f(1), f$ é contínua para $x = 1$.

Logo, f é contínua em todo o seu domínio.

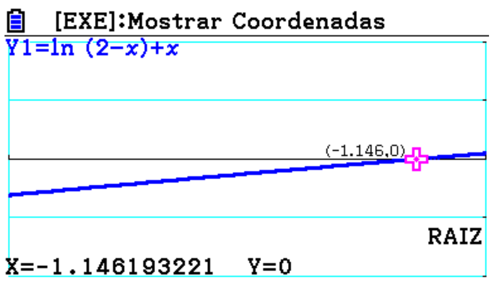
13.2. Na alínea anterior, vimos que f é contínua em todo o seu domínio. Em particular, f é contínua em $[-2, -1]$.

$f(-2) = \ln\big(2 - (-2)\big) + (-2) = \ln(4) - 2 < 0$

$f(-1) = \ln\big(2 - (-1)\big) + (-1) = \ln(3) - 1 > 0$

Como f é contínua em $[-2, -1]$ e, como $f(-2) < 0 < f(-1)$, então, pelo teorema de Bolzano-Cauchy, $\exists c \in \,]-2, -1[: f(c) = 0$.

13.3. $x = -1{,}15$



Daniela Raposo e Luzia Gomes

13.4. Como f é contínua em todo o seu domínio, não existem assíntotas verticais ao seu gráfico.

$\lim_{x\longrightarrow -\infty}[\ln(2-x)+x] = -\infty$ $\lim\limits_{x\longrightarrow +\infty}(e^{1-x}) = e^{1-(+\infty)} = e^{-\infty} = 0$

Logo, $y=0$ é assíntota horizontal ao gráfico de f quando $x \longrightarrow +\infty$.

14. $g'(x) = -2x + a + \frac{b}{x+1}$

$$\begin{cases} g'(0)=0 \\ g'\left(\frac{3}{2}\right)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2\times 0 + a + \frac{b}{0+1} = 0 \\ -2\times\frac{3}{2} + a + \frac{b}{\frac{3}{2}+1} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b=0 \\ -3+a+\frac{2}{5}b=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a=-b \\ -3-b+\frac{2}{5}b=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overline{} \\ -\frac{3}{5}b=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overline{} \\ b=\frac{3}{-\frac{3}{5}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=5 \\ b=-5 \end{cases}$$

15.

15.1. $M(0) = 30$ $M(30) = 30e^{-0{,}01\times 30}$

$M(30) - M(0) = 30 - 30e^{-0{,}3} \approx 8$ gramas

15.2. $M'(t) = 30\times(-0{,}01)\times e^{-0{,}01t} = -0{,}3e^{-0{,}01t}$

Como $M'(t) < 0, \forall t \geq 0, M$ é uma função estritamente decrescente em todo o seu domínio.

Como $\lim_{t\to+\infty}(30e^{-0{,}01t}) = 0$, então $y=0$ é assíntota horizontal ao gráfico de M.

Logo, a quantidade de sal presente no recipiente tende a ser completamente dissolvida.

16.

16.1. C é uma função contínua em todo o seu domínio, por resultar de operações entre funções contínuas. Em particular, C é contínua em $[0{,}5;1]$.

$C(0{,}5) = 3\times 0{,}5\times e^{-0{,}2\times 0{,}5} \approx 1{,}357$

$C(1) = 3\times 1\times e^{-0{,}2\times 1} \approx 2{,}456$

Como C é contínua em $[0{,}5;1]$ e, como $C(0{,}5) < 2 < C(1)$, então, pelo teorema de Bolzano-Cauchy, $\exists c \in \,]0{,}5;1[: f(c) = 2$.

16.2. $C'(t) = 3\times e^{-0{,}2t} + 3t\times(-0{,}2)\times e^{-0{,}2t} = 3e^{-0{,}2t}(1-0{,}2t)$

$C'(t) = 0 \Leftrightarrow 3e^{-0{,}2t}(1-0{,}2t) = 0 \Leftrightarrow \underbrace{3e^{-0{,}2t} = 0}_{\text{equação impossível}} \vee 1-0{,}2t=0 \Leftrightarrow t=5$ horas

t	0		5	$+\infty$
Sinal de C'	+	+	0	–
Variação de C	mín.	–	Máx.	+

$t=0$ corresponde às 6 horas da manhã.

$t=5$ corresponde às 11 horas da manhã.

Logo, a concentração de analgésico foi máxima às 11 horas da manhã.

17.

17.1. $E(0) = 27$ eucaliptos

$E(10) = 27 \times 1{,}3^{\frac{10}{2}} \approx 100$ eucaliptos

17.2. $E(t) = 81 \Leftrightarrow 27 \times 1{,}3^{\frac{t}{2}} = 81 \Leftrightarrow 1{,}3^{\frac{t}{2}} = 3 \Leftrightarrow \frac{t}{2} = \log_{1,3}(3) \Leftrightarrow t \approx 8{,}375$

São necessários 8 anos e 4 meses e meio, aproximadamente.

17.3. $E'(t) = 27 \times 1{,}3^{\frac{t}{2}} \times \frac{1}{2} = \frac{27}{2} \times \ln(1{,}3) = \frac{27\ln(1{,}3)}{2} \times 1{,}3^{\frac{t}{2}}$

$E'(1) = \frac{27\ln(1{,}3)}{2} \times 1{,}3^{\frac{1}{2}} = 4$ eucaliptos/ano

$E'(10) = \frac{27\ln(1{,}3)}{2} \times 1{,}3^{5} = 13$ eucaliptos/ano

Significa que, um ano depois do início da contagem, o número de eucaliptos está a aumentar à taxa de 4 eucaliptos por ano, enquanto que, 10 anos após o início da contagem, o crescimento é mais rápido , visto o número de eucaliptos estar a aumentar à taxa de 13 eucaliptos por ano.

18.

18.1. $64^{\log_2(x)} = (2^6)^{\log_2(x)} = 2^{\log_2(x^6)} = x^6$

18.2. $\log_3(9^x) = \log_3(3^2)^x = \log_3(3^{2x}) = 2x$

18.3. $10^{3\log(x^2)-5\log(x)} = 10^{\log(x^6)-\log(x^5)} = 10^{\log(x)} = x$

19.

19.1. $D_f = D'_{f^{-1}} = \mathbb{R}$

$f(x) = y \Leftrightarrow 3^{x+1} = y \Leftrightarrow x + 1 = \log_3(y) \Leftrightarrow x = -1 + \log_3(y)$

Logo, $f^{-1}(x) = -1 + \log_3(x)$.

$D_{f^{-1}} = \{x \in \mathbb{R}: x > 0\} = \mathbb{R}^+$

$$f^{-1}: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto -1 + \log_3(x)$$

19.2. $D_g = D'_{g^{-1}} = \{x \in \mathbb{R}: x + 4 > 0\} =]-4, +\infty[$

$g(x) = y \Leftrightarrow 2 + \log(x+4) = y \Leftrightarrow \log(x+4) = y - 2$

$\Leftrightarrow x + 4 = 10^{y-2}$

$\Leftrightarrow x = -4 + 10^{y-2}$

Logo, $g^{-1}(x) = -4 + 10^{x-2}$.

$D_{g^{-1}} = \mathbb{R}$

$$g^{-1}: \mathbb{R} \to]-4, +\infty[$$
$$x \mapsto -4 + 10^{x-2}$$

19.3. $D_h = D'_{h^{-1}} = \mathbb{R}$

$h(x) = y \Leftrightarrow 1 - 6 \times 4^{2x+3} = y \Leftrightarrow 6 \times 4^{2x+3} = 1 - y \Leftrightarrow 4^{2x+3} = \frac{1-y}{6}$

$\Leftrightarrow 2x + 3 = \log_4\left(\frac{1-y}{6}\right)$

$\Leftrightarrow x = \frac{-3+\log_4\left(\frac{1-y}{6}\right)}{2}$

Logo, $h^{-1}(x) = \frac{-3+\log_4\left(\frac{1-x}{6}\right)}{2}$.

$D_{h^{-1}} = \left\{x \in \mathbb{R}: \frac{1-x}{6} > 0\right\} =]-\infty, 1[$

$$h^{-1}:]-\infty, 1[\to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto \frac{-3+\log_4\left(\frac{1-x}{6}\right)}{2}$$

19.4. $D_i = D'_{i^{-1}} = \{x \in \mathbb{R}: x - 2 > 0\} =]2, +\infty[$

$i(x) = y \Leftrightarrow 6 + 3\log_5(x-2) = y \Leftrightarrow \log_5(x-2) = \frac{y-6}{3} \Leftrightarrow x - 2 = 5^{\frac{y-6}{3}} \Leftrightarrow x = 2 + 5^{\frac{y-6}{3}}$

Logo, $i^{-1}(x) = 2 + 5^{\frac{x-6}{3}}$.

$D_{i^{-1}} = \mathbb{R}$

$$i^{-1}: \mathbb{R} \to]2, +\infty[$$
$$x \mapsto 2 + 5^{\frac{x-6}{3}}$$

20. $27 - 5^{7-2x} > 2 \ \wedge \ 27 - 5^{7-2x} < 22 \Leftrightarrow -5^{7-2x} > -25 \ \wedge \ -5^{7-2x} < -5$

$\Leftrightarrow 5^{7-2x} < 25 \ \wedge \ 5^{7-2x} > 5$

$\Leftrightarrow 5^{7-2x} < 5^2 \ \wedge \ 5^{7-2x} > 5$

$\Leftrightarrow 7 - 2x < 2 \ \wedge \ 7 - 2x > 1$

$\Leftrightarrow -2x < -5 \ \wedge \ -2x > -6$

$\Leftrightarrow x > \frac{5}{2} \ \wedge \ x < 3$

$\text{C.S.} = \left]\frac{5}{2}, 3\right[$

21.

21.1. $2^{x+5} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow 2^{x+5} = 2^{-\frac{1}{2}} \Leftrightarrow x + 5 = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow x = -5 - \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = -\frac{11}{2}$

$\text{C.S.} = \left\{-\frac{11}{2}\right\}$

21.2. $25^{x^2-2x} = 5^{x^2-3} \Leftrightarrow 5^{2x^2-4x} = 5^{x^2-3} \Leftrightarrow 2x^2 - 4x = x^2 - 3$

$\Leftrightarrow x^2 - 4x + 3 = 0$

$\Leftrightarrow x = \frac{4 \pm \sqrt{16-12}}{2}$

$\Leftrightarrow x = 1 \ \vee \ x = 3$

$\text{C.S.} = \{1, 3\}$

21.3. $4 \times 5^{3x+1} = 20 \times 25^{x+4} \Leftrightarrow 5^{3x+1} = 5 \times 5^{2x+8}$

$\Leftrightarrow 5^{3x+1} = 5^{2x+9}$

$\Leftrightarrow 3x + 1 = 2x + 9$

$\Leftrightarrow x = 8$

$\text{C. S.} = \{8\}$

21.4. $x^3 \times 3^x = 3^{x+3} \Leftrightarrow x^3 \times 3^x - 3^x \times 3^3 = 0$

$\Leftrightarrow 3^x(x^3 - 3^3) = 0$

$\Leftrightarrow \underbrace{3^x = 0}_{\text{condição impossível}} \lor x^3 - 3^3 = 0$

$\Leftrightarrow x^3 = 3^3$

$\Leftrightarrow x = 3$

$\text{C. S.} = \{3\}$

21.5. $2x \times 5^x = 5^{x-1} \Leftrightarrow 2x \times 5^x - 5^x \times 5^{-1} = 0$

$\Leftrightarrow 5^x(2x - 5^{-1}) = 0$

$\Leftrightarrow \underbrace{5^x = 0}_{\text{condição impossível}} \lor 2x - \frac{1}{5} = 0$

$\Leftrightarrow 2x = \frac{1}{5}$

$\Leftrightarrow x = \frac{1}{10}$

$\text{C. S.} = \left\{\frac{1}{10}\right\}$

21.6. $-3^{2x-1} + 28 \times 3^{x-2} = 1 \Leftrightarrow -3^{2x} \times 3^{-1} + 28 \times 3^x \times 3^{-2} - 1 = 0$

$\Leftrightarrow -3^{2x} \times 3 + 28 \times 3^x - 9 = 0$

$\Leftrightarrow 3^x = \frac{-28 \pm \sqrt{28^2 - 4 \times 3 \times 9}}{-6} = 0$

$\Leftrightarrow 3^x = \frac{28 \pm 26}{6}$

$\Leftrightarrow 3^x = 9 \lor 3^x = \frac{1}{3}$

$\Leftrightarrow x = 2 \lor x = -1$

$\text{C. S.} = \{-1, 2\}$

21.7. $\frac{3^x(x^2-x)+4}{3^{x+1}+2} = 2 \Leftrightarrow 3^x(x^2 - x) + 4 = 2 \times 3^{x+1} + 4$

$\Leftrightarrow 3^x(x^2 - x) - 6 \times 3^x = 0$

$\Leftrightarrow 3^x(x^2 - x - 6) = 0$

$\Leftrightarrow \underbrace{3^x = 0}_{\text{condição impossível}} \lor x^2 - x - 6 = 0$

$\Leftrightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{1+24}}{2}$

$\Leftrightarrow x = -2 \lor x = 3$

$\text{C. S.} = \{-2, 3\}$

21.8. $\frac{50}{25^{x^2}+25} = \frac{2}{1+125^{x^2+x}} \Leftrightarrow 50 \times \left(1+125^{x^2+x}\right) = 2 \times \left(25^{x^2}+25\right)$

$\Leftrightarrow 50 + 50 \times 125^{x^2+x} = 2 \times 25^{x^2} + 50$

$\Leftrightarrow 2 \times 25 \times 5^{3x^2+3x} = 2 \times 5^{2x^2}$

$\Leftrightarrow 5^2 \times 5^{3x^2+3x} = 5^{2x^2}$

$\Leftrightarrow 5^{3x^2+3x+2} = 5^{2x^2}$

$\Leftrightarrow 3x^2 + 3x + 2 = 2x^2$

$\Leftrightarrow x^2 + 3x + 2 = 0$

$\Leftrightarrow x = \frac{-3\pm\sqrt{9-8}}{2}$

$\Leftrightarrow x = -2 \ \vee \ x = -1$

$\text{C.S.} = \{-2, -1\}$

21.9. $2^x - 2^{1-x} - 1 = 0 \Leftrightarrow 2^x - \frac{2}{2^x} - 1 = 0 \Leftrightarrow 2^{2x} - 2 - 2^x = 0$

$\Leftrightarrow 2^{2x} - 2^x - 2 = 0$

$\Leftrightarrow 2^x = \frac{1\pm\sqrt{1+8}}{2}$

$\Leftrightarrow \underbrace{2^x = -1}_{\text{condição impossível}} \quad \vee \quad 2^x = 2$

$\Leftrightarrow x = 1$

$\text{C.S.} = \{1\}$

21.10. $3^x + 1 = 10 \times 3^{2-x} \Leftrightarrow 3^x + 1 - 10 \times \frac{9}{3^x} = 0 \Leftrightarrow 3^{2x} + 3^x - 90 = 0$

$\Leftrightarrow 3^x = \frac{-1\pm\sqrt{1+360}}{2}$

$\Leftrightarrow 3^x = \frac{-1\pm 19}{2}$

$\Leftrightarrow \underbrace{3^x = -10}_{\text{condição impossível}} \ \vee \ 3^x = 9$

$\Leftrightarrow x = 2$

$\text{C.S.} = \{2\}$

22.

22.1. $e^{2x} - 10 = 0 \Leftrightarrow e^{2x} = 10 \Leftrightarrow 2x = \ln(10) \Leftrightarrow x = \frac{\ln(10)}{2}$

$\text{C.S.} = \left\{\frac{\ln(10)}{2}\right\}$

22.2. $(e^x + 1)(e^x - 2) = 0 \Leftrightarrow e^x + 1 = 0 \ \vee \ e^x - 2 = 0$

$\Leftrightarrow \underbrace{e^x = -1}_{\text{equação impossível}} \ \vee \ e^x = 2$

$\Leftrightarrow x = \ln(2)$

$\text{C.S.} = \{\ln(2)\}$

22.3. $(e^x)^2 - 4e^x + 3 = 0 \Leftrightarrow e^x = \frac{-(-4)\pm\sqrt{(-4)^2-4\times1\times3}}{2\times1} \Leftrightarrow e^x = 1 \ \vee \ e^x = 3$

$\Leftrightarrow x = \ln(1) \ \vee \ x = \ln(3)$

$\Leftrightarrow x = 0 \ \vee \ x = \ln(3)$

$\text{C.S.} = \{0, \ln(3)\}$

22.4. $e^x - 3 + 2e^{-x} = 0 \Leftrightarrow (e^x)^2 - 3e^x + 2 = 0$

$\Leftrightarrow e^x = 1 \ \vee \ e^x = 2$

$\Leftrightarrow x = \ln(1) \ \vee \ x = \ln(2)$

$\Leftrightarrow x = 0 \ \vee \ x = \ln(2)$

$\text{C.S.} = \{0, \ln(2)\}$

22.5. $e^2 \times e^{x-2} = 4 \times e^{-x} + 4 \Leftrightarrow e^x - 4 - 4e^{-x} = 0$

$\Leftrightarrow (e^x)^2 - 4e^x - 4 = 0$

$\Leftrightarrow e^x = 2 + 2\sqrt{2} \vee e^x = 2 - 2\sqrt{2}$

$\Leftrightarrow x = \ln\left(2 + 2\sqrt{2}\right)$

$\text{C.S.} = \left\{\ln\left(2 + 2\sqrt{2}\right)\right\}$

22.6. $2e^x - 10 + 12e^{-x} = 0 \Leftrightarrow 2(e^x)^2 - 10e^x + 12 = 0$

$\Leftrightarrow e^x = 3 \vee e^x = 2$

$\Leftrightarrow x = \ln(3) \vee x = \ln(2)$

$\text{C.S.} = \{\ln(2), \ln(3)\}$

23.

23.1. $\left(\frac{1}{3}\right)^{x-1} < 9^{2-x} \Leftrightarrow 3^{-x+1} < 3^{4-2x} \Leftrightarrow -x + 1 < 4 - 2x \Leftrightarrow x < 3$

$\text{C.S.} =]-\infty, 3[$

23.2. $(0{,}1)^{x-x^2} \leq 0{,}01 \Leftrightarrow 10^{-x+x^2} \leq 10^{-2} \Leftrightarrow -x + x^2 \leq -2 \Leftrightarrow x^2 - x + 2 \leq 0$

Cálculo auxiliar

$x^2 - x + 2 = 0 \Leftrightarrow \underbrace{x = \frac{1 \pm \sqrt{1-8}}{2}}_{\text{condição impossível em } \mathbb{R}}$

$\text{C.S.} = \emptyset$

23.3. $3^{x^2} > 9 \Leftrightarrow 3^{x^2} > 3^2 \Leftrightarrow x^2 > 2 \Leftrightarrow x^2 - 2 > 0$

Cálculo auxiliar

$x^2 - 2 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 2 \Leftrightarrow x = -\sqrt{2} \ \vee \ x = \sqrt{2}$

$\text{C.S.} = \left]-\infty, -\sqrt{2}\right[\cup \left]\sqrt{2}, +\infty\right[$

23.4. $5^{-x^2} \leq 125 \Leftrightarrow 5^{-x^2} \leq 5^3 \Leftrightarrow -x^2 \leq 3 \Leftrightarrow -x^2 - 3 \leq 0$

$\text{C.S.} = \mathbb{R}$

23.5. $3^x \geq 2^x \Leftrightarrow \left(\frac{3}{2}\right)^x \geq 1 \Leftrightarrow \left(\frac{3}{2}\right)^x \geq \left(\frac{3}{2}\right)^0 \Leftrightarrow x \geq 0$

$\text{C.S.} = \mathbb{R}_0^+$

23.6. $6^x \geq 7^x \Leftrightarrow \left(\frac{6}{7}\right)^x \geq 1 \Leftrightarrow \left(\frac{6}{7}\right)^x \geq \left(\frac{6}{7}\right)^0 \Leftrightarrow x \leq 0$

$\text{C.S.} = \mathbb{R}_0^-$

23.7. $(5 - x^2)\underbrace{\pi^x \leq 0}_{>0, \forall x \in \mathbb{R}} \Leftrightarrow 5 - x^2 \leq 0$

Cálculo auxiliar
$5 - x^2 = 0 \Leftrightarrow x = -\sqrt{5} \ \lor \ x = \sqrt{5}$

$\text{C.S.} = \left]-\infty, -\sqrt{5}\right] \cup \left[\sqrt{5}, +\infty\right[$

23.8. $5^{x+1} < x^2 \times 5^x \Leftrightarrow 5^x \times 5 - x^2 \times 5^x < 0 \Leftrightarrow \underbrace{5^x}_{>0, \forall x \in \mathbb{R}}(5 - x^2) < 0 \Leftrightarrow 5 - x^2 \leq 0$

Cálculo auxiliar
$5 - x^2 = 0 \Leftrightarrow x = -\sqrt{5} \ \lor \ x = \sqrt{5}$

$\text{C.S.} = \left]-\infty, -\sqrt{5}\right[\cup \left]\sqrt{5}, +\infty\right[$

23.9. $x^2 \times 3^x < 3^{x+3} \Leftrightarrow x^2 \times 3^x - 3^x \times 3^3 < 0 \Leftrightarrow \underbrace{3^x}_{>0, \forall x \in \mathbb{R}}(x^2 - 27) < 0 \Leftrightarrow x^2 - 27 < 0$

Cálculo auxiliar
$x^2 - 27 = 0 \Leftrightarrow x = -\sqrt{27} \ \lor \ x = \sqrt{27}$
$\Leftrightarrow x = -3\sqrt{3} \ \lor \ x = 3\sqrt{3}$

$\text{C.S.} = \left]-3\sqrt{3}, 3\sqrt{3}\right[$

23.10. $e^{\frac{4-x^2}{x^2+1}} > 1 \Leftrightarrow e^{\frac{4-x^2}{x^2+1}} > e^0 \Leftrightarrow \frac{4-x^2}{x^2+1} > 0 \Leftrightarrow 4 - x^2 > 0$ (já que $x^2 + 1 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$)

Cálculo auxiliar
$4 - x^2 = 0 \Leftrightarrow x = -2 \ \lor \ x = 2$

$\text{C.S.} =]-2,2[$

23.11. $4^x < \sqrt[3]{2^{3x+6}} \Leftrightarrow 2^{2x} \leq 2^{x+2} \Leftrightarrow 2x \leq x + 2 \Leftrightarrow x \leq 2$

$\text{C.S.} =]-\infty, 2]$

23.12. $4^x + 2 \leq 9 \times 2^{x-1} \Leftrightarrow 2^{2x} + 2 - \frac{9}{2} \times 2^x \leq 0 \Leftrightarrow 2 \times 2^{2x} - 9 \times 2^x + 4 \leq 0$

$\Leftrightarrow 2y^2 - 9y + 4 \leq 0 \ \land \ y = 2^x$

$\Leftrightarrow y \geq \frac{1}{2} \ \land \ y \leq 4 \ \land \ y = 2^x$

$\Leftrightarrow 2^x \geq \frac{1}{2} \ \land \ 2^x \leq 4$

$\Leftrightarrow x \geq -1 \ \land \ x \leq 2$

Cálculo auxiliar
$2y^2 - 9y + 4 = 0 \Leftrightarrow y = \frac{9 \pm \sqrt{81-32}}{4} \Leftrightarrow y = 4 \ \lor \ y = \frac{1}{2}$

$\text{C.S.} = [-1,2]$

23.13. $3^x \leq 27^{\frac{1}{x}} \Leftrightarrow 3^x \leq 3^{\frac{3}{x}} \Leftrightarrow x \leq \frac{3}{x} \Leftrightarrow x - \frac{3}{x} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{x^2-3}{x} \leq 0$

Cálculo auxiliar
$x^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 3 \Leftrightarrow x = -\sqrt{3} \ \vee \ x = \sqrt{3}$

x	$-\infty$	$-\sqrt{3}$		0		$\sqrt{3}$	$+\infty$
x^2-3	+	0	−	−	−	0	+
x	−	−	−	0	+	+	+
$\frac{x^2-3}{x}$	−	0	+	n.d.	−	0	+

$\text{C.S.} = \left]-\infty, -\sqrt{3}\right] \cup \left]0, \sqrt{3}\right]$

23.14. $81 \times 3^{2x-3} \leq \frac{9^x}{x} \Leftrightarrow 3^4 \times 3^{2x-3} - \frac{3^{2x}}{x} \leq 0 \Leftrightarrow 3^{2x+1} - \frac{3^{2x}}{x} \leq 0$

$$\Leftrightarrow \underbrace{3^{2x}}_{>0, \forall x \in \mathbb{R}} \left(3 - \frac{1}{x}\right) \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{3x-1}{x} \leq 0$$

x	$-\infty$	0		$\frac{1}{3}$	$+\infty$
$3x-1$	−	−	−	0	+
x	−	0	+	+	+
$\frac{3x-1}{x}$	+	n.d.	−	0	+

$\text{C.S.} = \left]0, \frac{1}{3}\right]$

24.

24.1. $1 - 2e^x > 0 \Leftrightarrow -2e^x > -1 \Leftrightarrow e^x < \frac{1}{2} \Leftrightarrow x < \ln\left(\frac{1}{2}\right) \Leftrightarrow x < -\ln(2)$

$\text{C.S.} = \left]-\infty, -\ln(2)\right[$

24.2. $(4x-5)(e^x-2) \leq 0$

Cálculos auxiliares	
$4x - 5 = 0 \Leftrightarrow 4x = 5 \Leftrightarrow x = \frac{5}{4}$	$e^x - 2 = 0 \Leftrightarrow e^x = 2 \Leftrightarrow x = \ln(2)$

x	$-\infty$	ln(2)		$\frac{5}{4}$	$+\infty$
$4x-5$	−	−	−	0	+
e^x-2	−	0	+	+	+
$(4x-5)(e^x-2)$	+	0	−	0	+

$\text{C.S.} = \left[\ln(2), \frac{5}{4}\right]$

24.3. $e^{2x}-5e^{x}+6>0 \Leftrightarrow y^2-5y+6>0 \ \wedge \ y=e^x$

> **Cálculo auxiliar**
> Seja $y=e^x$.
> $y^2-5y+6=0 \Leftrightarrow y=\frac{5\pm\sqrt{25-24}}{2} \Leftrightarrow y=3 \ \vee \ y=2$

$\Leftrightarrow (y<2 \ \vee y>3) \ \wedge \ y=e^x$

$\Leftrightarrow e^x<2 \ \vee \ e^x>3$

$\Leftrightarrow x<\ln(2) \vee \ x>\ln(3)$

$\text{C.S.}=\left]-\infty,\ln(2)\right[\cup\left]\ln(3),+\infty\right[$

24.4. $e^x+e^{-x}>2 \Leftrightarrow \ e^x+\frac{1}{e^x}-2>0 \Leftrightarrow e^{2x}+1-2e^x>0$

$\Leftrightarrow y^2-2y+1>0 \wedge \ y=e^x$

$\Leftrightarrow (y-1)^2>0 \wedge \ y=e^x$

$\Leftrightarrow (y-1>0 \ \vee \ y-1<0) \wedge \ y=e^x$

$\Leftrightarrow (y>1 \ \vee \ y<1) \wedge \ y=e^x$

$\Leftrightarrow e^x>1 \ \vee e^x<1$

$\Leftrightarrow x>0 \ \vee x<0$

$\text{C.S.}=\mathbb{R}\backslash\{0\}$

25.

25.1. $D=\mathbb{R}^+$

$3^{-2+\log_3(x)}=\log_2(\sqrt{2}) \Leftrightarrow 3^{-2+\log_3(x)}=\frac{1}{2} \Leftrightarrow -2+\log_3(x)=\log_3\left(\frac{1}{2}\right)$

$\Leftrightarrow \log_3(x)=\log_3\left(\frac{1}{2}\right)+2$

$\Leftrightarrow \log_3(x)=\log_3\left(\frac{1}{2}\right)+\log_3(9)$

$\Leftrightarrow \log_3(x)=\log_3\left(\frac{9}{2}\right)$

$\Leftrightarrow x=\frac{9}{2}$

$\text{C.S.}=\left\{\frac{9}{2}\right\}$

25.2. $D=\mathbb{R}\backslash\{0\}$

$10^{1+\log(x^2)}=\log(20)+\log(25)-\log(5) \Leftrightarrow 10^{1+\log(x^2)}=\log(500)-\log(5)$

$\Leftrightarrow 10^{1+\log(x^2)}=\log(100)$

$\Leftrightarrow 10^{1+\log(x^2)}=2$

$\Leftrightarrow 1+\log(x^2)=\log(2)$

$\Leftrightarrow \log(x^2)=\log(2)-1$

$\Leftrightarrow \log(x^2)=\log(2)-\log(10)$

$$\Leftrightarrow \log(x^2) = \log\left(\frac{1}{5}\right)$$

$$\Leftrightarrow x^2 = \frac{1}{5}$$

$$\Leftrightarrow x = \pm\sqrt{\frac{1}{5}}$$

$$\Leftrightarrow x = \pm\frac{\sqrt{5}}{5}$$

$\text{C. S.} = \left\{-\frac{\sqrt{5}}{5}, \frac{\sqrt{5}}{5}\right\}$

25.3. $D = \mathbb{R}^+$

$$2^{1+\log_2(3x)} = \log_2(2^{36}) \Leftrightarrow 2^{1+\log_2(3x)} = 36$$

$$\Leftrightarrow 1 + \log_2(3x) = \log_2(36)$$

$$\Leftrightarrow \log_2(3x) = \log_2(36) - 1$$

$$\Leftrightarrow \log_2(3x) = \log_2(36) - \log_2(2)$$

$$\Leftrightarrow \log_2(3x) = \log_2(18)$$

$$\Leftrightarrow 3x = 18$$

$$\Leftrightarrow x = 6$$

$\text{C. S.} = \{6\}$

25.4. $D = \mathbb{R}^+$

$$4^{4\log_4(x)-\log_4(x^2)} = 5 \Leftrightarrow 4^{\log_4(x^4)-\log_4(x^2)} = 5 \Leftrightarrow 4^{\log_4(x^2)} = 5$$

$$\Leftrightarrow x^2 = 5$$

$\Rightarrow x = \sqrt{5}$, uma vez que $D = \mathbb{R}^+$.

$\text{C. S.} = \{\sqrt{5}\}$

26.

26.1. $D = \{x \in \mathbb{R}: x^2 - 1 > 0 \ \wedge \ x - 1 > 0\} = (\,]-\infty, -1[\, \cup \,]1, +\infty[\,) \cap \,]1, +\infty[\, = \,]1, +\infty[$

Cálculo auxiliar
$x^2 - 1 > 0 \ \wedge \ x - 1 > 0 \Leftrightarrow (x < -1 \ \vee \ x > 1) \wedge x > 1$

$$\ln(x^2 - 1) - \ln(x - 1) = 0 \Leftrightarrow \ln(x^2 - 1) = \ln(x - 1) \Leftrightarrow x^2 - 1 = x - 1 \ \wedge \ x \in D$$

$$\Leftrightarrow x^2 - x = 0 \ \wedge \ x \in D$$

$$\Leftrightarrow x(x - 1) = 0 \ \wedge \ x \in D$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \ \vee \ x = 1 \ \wedge \ x \in D$$

$\text{C. S.} = \{ \quad \}$

26.2. $D = \{x \in \mathbb{R}: x^2 > 0\} = \mathbb{R}\backslash\{0\}$

$$\log(x^2) = 2\log(5) \Leftrightarrow \log(x^2) = \log(5^2) \Leftrightarrow x^2 = 5^2 \ \wedge \ x \in D$$

$$\Leftrightarrow x = \pm 5 \ \wedge \ x \in D$$

$\text{C. S.} = \{-5, 5\}$

26.3. $D=\{x\in\mathbb{R}: x>0\}=\mathbb{R}^+$

$(\ln(x))^2-2\ln(x)-3=0$

Aplicando a fórmula resolvente (e não efetuando qualquer mudança de variável), obtemos:

$\ln(x)=\frac{-(-2)\pm\sqrt{(-2)^2-4\times1\times(-3)}}{2\times1}\Leftrightarrow \ln(x)=-1 \ \vee\ \ln(x)=3\Leftrightarrow x=e^{-1}\ \vee\ x=e^3$

$\text{C. S.}=\left\{\frac{1}{e},e^3\right\}$

26.4. $D=\mathbb{R}^+$

$4(\ln(x))^2-3\ln(x)=7\Leftrightarrow 4(\ln(x))^2-3\ln(x)-7=0$

Utilizando o mesmo processo da alínea anterior, concluímos que:

$$\Leftrightarrow \ln(x)=\frac{7}{4}\ \vee\ \ln(x)=-1$$

$$\Leftrightarrow x=e^{\frac{7}{4}}\ \vee\ x=e^{-1}$$

$\text{C. S.}=\left\{\frac{1}{e},e^{\frac{7}{4}}\right\}$

26.5. $D=\{x\in\mathbb{R}: x^2-4>0\ \ \wedge x+22>0\ \ \wedge x+2>0\}=$

$=(\,]-\infty,-2[\,\cup\,]2,+\infty[\,)\cap(\,]-22,+\infty[\,)\cap(\,]-2,+\infty[\,)=\,]2,+\infty[$

Cálculo auxiliar
$x^2-4>0\ \wedge\ x+22>0\ \wedge\ x+2>0\Leftrightarrow(x>-2\ \ \vee\ x<2)\ \ \wedge\ x<-22\ \ \wedge\ x>-2$

$\log(x^2-4)+\log(x+22)=3\log(x+2)$

$\Leftrightarrow \log[(x^2-4)(x+22)]=\log(x+2)^3$

$\Leftrightarrow (x^2-4)(x+22)=(x+2)^3\wedge x\in D$

$\Leftrightarrow (x-2)(x+2)(x+22)-(x+2)^3=0\ \wedge\ x\in D$

$\Leftrightarrow (x+2)[(x-2)(x+22)-(x+2)^2]=0\ \wedge\ x\in D$

$\Leftrightarrow (x+2)[x^2+22x-2x-44-(x^2+4x+4)]=0\ \wedge\ x\in D$

$\Leftrightarrow (x+2)(x^2+22x-2x-44-x^2-4x-4)=0\ \wedge\ x\in D$

$\Leftrightarrow (x+2)(16x-48)=0\ \wedge\ x\in D$

$\Leftrightarrow x=-2\vee x=3\ \wedge\ x\in D$

$\Leftrightarrow x=3$

$\text{C. S.}=\{3\}$

26.6. $D=\{x\in\mathbb{R}: x^2+2>0\ \ \wedge\ 2x-1>0\}=\left]\frac{1}{2},+\infty\right[$

$\log_3(x^2+2)-\log_3(2x-1)=1\Leftrightarrow \log_3\left(\frac{x^2+2}{2x-1}\right)=\log_3(3)$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2+2}{2x-1}=3\ \wedge\ x\in D$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2+2}{2x-1}-3=0\ \wedge\ x\in D$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2+2-3(2x-1)}{2x-1}=0\ \wedge\ x\in D$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2+2-6x+3}{2x-1} = 0 \ \wedge \ x \in D$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2-6x+5}{2x-1} = 0 \ \wedge \ x \in D$$

$$\Leftrightarrow (\ x^2 - 6x + 5 = 0 \wedge 2x - 1 \neq 0) \ \wedge \ x \in D$$

$$\Leftrightarrow x = 1 \vee x = 5$$

$\text{C. S.} = \{1, 5\}$

26.7. $D = \{x \in \mathbb{R}: x^5 > 0 \ \wedge \ x > 0\} = \mathbb{R}^+$

$$\log_3(x^5) - x\log_3(x) = 0 \Leftrightarrow 5\log_3(x) - x\log_3(x) = 0$$

$$\Leftrightarrow (\log_3(x))(5 - x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \log_3(x) = 0 \ \vee \ 5 - x = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 1 \vee x = 5$$

$\text{C. S.} = \{1,5\}$

26.8. $D = \{x \in \mathbb{R}: 3x + 5 > 0\} = \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{5}{3}\right\}$

$$3 + \log_7(3x + 5)^2 = 5 \Leftrightarrow \log_7(3x + 5)^2 = 2 \Leftrightarrow (3x + 5)^2 = 7^2$$

$$\Leftrightarrow 3x + 5 = 7 \ \vee \ 3x + 5 = -7$$

$$\Leftrightarrow 3x = 2 \ \vee \ 3x = -12$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{2}{3} \ \vee \ x = -4$$

$\text{C. S.} = \left\{-4, \frac{2}{3}\right\}$

26.9. $D = \{x \in \mathbb{R}: x^2 - 4x > 0 \ \wedge \ 10 + 4\log_2(x^2 - 4x) \neq 0\} =$

$= \{x \in \mathbb{R}: x < 0 \ \vee \ x > 4\} \ \wedge \ x \notin \{-0{,}044; 4{,}044\}$

$= (\,]-\infty, 0[\cup]4, +\infty[\,) \setminus \{-0{,}044; 4{,}044\}$

$$\frac{10}{10+4\log_2(x^2-4x)} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow 10 + 4\log_2(x^2 - 4x) = 30 \Leftrightarrow \log_2(x^2 - 4x) = 5$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 4x = 2^5$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 4x - 32 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = -4 \vee x = 8$$

$\text{C. S.} = \{-4, 8\}$

26.10. $D = \{x \in \mathbb{R}: x > 0\} = \mathbb{R}^+$

$$\log_2(x) + 3\log_4(x) = 5 \Leftrightarrow \log_2(x) + 3 \times \frac{\log_2(x)}{\log_2(4)} = 5 \Leftrightarrow \log_2(x) + \frac{3}{2}\log_2(x) = \log_2(32)$$

$$\Leftrightarrow \log_2(x) + \log_2\left(x^{\frac{3}{2}}\right) = \log_2(32)$$

$$\Leftrightarrow x \times x^{\frac{3}{2}} = 32$$

$$\Leftrightarrow x^{\frac{5}{2}} = 32$$

$$\Leftrightarrow \left(x^{\frac{1}{2}}\right)^5 = 2^5$$

$\Leftrightarrow x^{\frac{1}{2}} = 2$

$\Leftrightarrow \sqrt{x} = 2$

$\Leftrightarrow x = 4$

$\text{C.S.} = \{4\}$

26.11. $D = \{x \in \mathbb{R}: 2x + 1 > 0 \ \wedge x^2 > 0\} = \left]-\frac{1}{2}, +\infty\right[\cap \ \mathbb{R}\backslash\{0\} = \left]-\frac{1}{2}, +\infty\right[\backslash\{0\}$

Cálculo auxiliar
$2x + 1 > 0 \ \wedge \ x^2 > 0 \ \Leftrightarrow x > \frac{1}{2} \ \wedge \ x > 0$

$2\ln(2x + 1) = \ln(x^2) \Leftrightarrow \ln(2x + 1)^2 = \ln(x^2)$

$\Leftrightarrow (2x + 1)^2 = x^2 \wedge x \in D$

$\Leftrightarrow 4x^2 + 4x + 1 = x^2 \wedge x \in D$

$\Leftrightarrow 3x^2 + 4x + 1 = 0 \wedge x \in D$

$\Leftrightarrow x = -\frac{1}{3} \vee x = -1 \wedge x \in D$

$\Leftrightarrow x = -\frac{1}{3}$

$\text{C.S.} = \left\{-\frac{1}{3}\right\}$

26.12. $D = \left\{x \in \mathbb{R}: (x + 3)(x - 8) > 0 \ \ \wedge \ \frac{x+3}{x-8} > 0 \ \ \wedge x - 8 \neq 0\right\} =]-\infty, -3[\cup]8, +\infty[$

$\log\big((x + 3)(x - 8)\big) + \log\left(\frac{x+3}{x-8}\right) = 2 \Leftrightarrow \log\left[(x + 3)(x - 8) \times \frac{(x+3)}{(x-8)}\right] = 2$

$\Leftrightarrow \log[(x + 3)^2] = \log(100)$

$\Leftrightarrow (x + 3)^2 = 100 \wedge x \in D$

$\Leftrightarrow (x + 3 = 10 \ \vee \ x + 3 = -10) \ \wedge \ x \in D$

$\Leftrightarrow (x = 7 \ \vee \ x = -13) \wedge \ x \in D$

$\text{C.S.} = \{-13\}$

26.13. $D = \{x \in \mathbb{R}: (x + 1)^2 > 0 \ \ \wedge \ (x + 9)^2 > 0\} = \mathbb{R} \setminus \{-9, -1\}$

$\log((x + 1)^2) + \log((x + 9)^2) = 2\log(9)$

$\Leftrightarrow \log[(x + 1)^2 \times (x + 9)^2] = \log(81)$

$\Leftrightarrow [(x + 1)(x + 9)]^2 = 9^2 \wedge x \in D$

$\Leftrightarrow [(x + 1)(x + 9)]^2 - 9^2 = 0 \wedge x \in D$

$\Leftrightarrow [(x + 1)(x + 9) - 9][(x + 1)(x + 9) + 9] = 0 \wedge x \in D$

$\Leftrightarrow (x^2 + 9x + x + 9 - 9)(x^2 + 9x + x + 9 + 9) = 0 \wedge x \in D$

$\Leftrightarrow (x^2 + 10x)(x^2 + 10x + 18) = 0 \wedge x \in D$

$\Leftrightarrow x(x + 10)\left(x - \left(-5 + \sqrt{7}\right)\right)\left(x - \left(-5 - \sqrt{7}\right)\right) = 0 \wedge x \in D$x

$\Leftrightarrow x = 0 \vee x = -10 \vee x = -5 + \sqrt{7} \vee x = -5 - \sqrt{7} \wedge x \in D$

$\text{C.S.} = \left\{-10, -5 - \sqrt{7}, -5 + \sqrt{7}, 0\right\}$

26.14. $D = \{x \in \mathbb{R}: x-1>0 \ \wedge \ \sqrt{10x-4} \geq 0 \ \wedge \ x+2>0\} =]1,+\infty[$

$\log_{25}(x-1) = \log_5(\sqrt{10x-4}) - \log_5(x+2)$

$\Leftrightarrow \frac{\log_5(x-1)}{\log_5 25} = \log_5\left(\frac{\sqrt{10x-4}}{x+2}\right)$

$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\log_5(x-1) = \log_5\left(\frac{\sqrt{10x-4}}{x+2}\right)$

$\Leftrightarrow \log_5(\sqrt{x-1}) = \log_5\left(\frac{\sqrt{10x-4}}{x+2}\right)$

$\Leftrightarrow \sqrt{x-1} = \frac{\sqrt{10x-4}}{x+2} \ \wedge \ x \in D$

$\Rightarrow x-1 = \frac{10x-4}{(x+2)^2} \ \wedge \ x \in D$

$\Leftrightarrow \frac{(x-1)(x+2)^2-10x+4}{(x+2)^2} = 0 \ \wedge \ x \in D$

$\Leftrightarrow \frac{(x-1)(x^2+4x+4)-10x+4}{(x+2)^2} = 0 \ \wedge \ x \in D$

$\Leftrightarrow \frac{x^3+4x^2+4x-x^2-4x-4-10x+4}{(x+2)^2} = 0 \ \wedge \ x \in D$

$\Leftrightarrow \frac{x^3+3x^2-10x}{(x+2)^2} = 0 \ \wedge \ x \in D$

$\Leftrightarrow (x(x^2+3x-10) = 0 \wedge x \neq -2\,) \wedge x \in D$

$\Leftrightarrow (x = 0 \vee x = 2 \vee x = -5) \wedge x \in D$

$\text{C.S.} = \{2\}$

27.

27.1. $D = \{x \in \mathbb{R}: 3x-1>0 \ \wedge \ 2x+3>0\} = \left]\frac{1}{3},+\infty\right[\cap \left]-\frac{3}{2},+\infty\right[= \left]\frac{1}{3},+\infty\right[$

$\forall x \in \left]\frac{1}{3},+\infty\right[, \log_{\frac{1}{2}}(3x-1) \geq \log_{\frac{1}{2}}(2x+3) \Leftrightarrow 3x-1 \geq 2x+3 \Leftrightarrow x \leq 4$

$\text{C.S.} = \left]\frac{1}{3},+\infty\right[\cap]-\infty,4] = \left]\frac{1}{3},4\right]$

27.2. $D = \{x \in \mathbb{R}: x>0 \ \wedge \ x^2>0\} = \mathbb{R}^+$

$(\ln(x))^2 - \ln(x^2) > 0 \Leftrightarrow (\ln(x))^2 - 2\ln(x) > 0 \ \wedge \ x \in D \Leftrightarrow \ln(x)\,(\ln(x)-2) > 0 \ \wedge \ x \in D$

x	0		1		e^2	$+\infty$
$\ln(x)$	n.d.	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$\ln(x)-2$	n.d.	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$\ln(x)\,(\ln(x)-2)$	n.d.	$+$	0	$-$	0	$+$

Cálculo auxiliar
$\ln(x) - 2 = 0 \Leftrightarrow \ln(x) = 2 \Leftrightarrow x = e^2$

$\text{C.S.} =]0,1[\cup]e^2,+\infty[$

27.3. $D = \{x \in \mathbb{R}: x+5>0\} =]-5,+\infty[$

$\forall x \in]-5,+\infty[, \log_{\frac{1}{2}}(x+5) > 0 \Leftrightarrow \log_{\frac{1}{2}}(x+5) > \log_{\frac{1}{2}} 1 > \Leftrightarrow x+5<1 \Leftrightarrow x<-4$

$\text{C.S.} =]-5,+\infty[\cap]-\infty,-4[=]-5,-4[$

27.4. $D = \{x \in \mathbb{R}: 3x^2 - x > 0 \wedge \ x+1>0\} = \left(]-\infty,0[\cup \left]\frac{1}{3},+\infty\right[\right) \cap]-1,+\infty[=$

$=]-1{,}0[\cup \left]\frac{1}{3},+\infty\right[$

Cálculo auxiliar

$3x^2 - x = 0 \Leftrightarrow x(3x-1) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \ \vee \ x = \frac{1}{3}$

$\forall x \in]-1{,}0[\cup \left]\frac{1}{3},+\infty\right[, \ln(3x^2-x) \leq \ln(x+1) \Leftrightarrow 3x^2 - x \leq x+1 \Leftrightarrow 3x^2 - 2x - 1 \leq 0$

Cálculo auxiliar

$3x^2 - 2x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{2\pm\sqrt{4+12}}{6} \Leftrightarrow x = 1 \ \vee \ x = -\frac{1}{3}$

$\text{C.S.} = \left(]-1{,}0[\cup \left]\frac{1}{3},+\infty\right[\right) \cap \left[-\frac{1}{3},1\right] = \left[-\frac{1}{3},0\right[\cup \left]\frac{1}{3},1\right]$

27.5. $D = \{x \in \mathbb{R}: x>0 \ \wedge \ 3^x - 27 \neq 0\} = \mathbb{R}^+ \backslash \{3\}$

Cálculo auxiliar

$3^x - 27 = 0 \Leftrightarrow 3^x = 3^3 \Leftrightarrow x = 3$

x	0		3		e^2	$+\infty$
$\ln(x)-2$	n.d.	$-$	$-$	$-$	0	+
$3^x - 27$	$-$	$-$	0	+	+	+
$\frac{\ln(x)-2}{3^x-27}$	n.d.	+	n.d.	$-$	0	+

$\text{C.S.} =]0{,}3[\cup [e^2,+\infty[$

27.6. $D = \left\{x \in \mathbb{R}: x^2 - x - \frac{3}{4} > 0\right\} = \left]-\infty,-\frac{1}{2}\right[\cup \left]\frac{3}{2},+\infty\right[$

Cálculo auxiliar

$x^2 - x - \frac{3}{4} = 0 \Leftrightarrow 4x^2 - 4x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{4\pm\sqrt{16-4\times4\times(-3)}}{8}$

$\Leftrightarrow x = \frac{4\pm8}{8}$

$\Leftrightarrow x = \frac{3}{2} \ \vee \ x = -\frac{1}{2}$

$$\log_{0,5}\left(x^2 - x - \frac{3}{4}\right) > 2 - \log_2(5) \Leftrightarrow \frac{\log_2\left(x^2 - x - \frac{3}{4}\right)}{\log_2(5)} > 2 - \log_2(5) \ \wedge \ x \in D$$

$$\Leftrightarrow -\log_2\left(x^2 - x - \frac{3}{4}\right) > 2 - \log_2(5) \ \wedge \ x \in D$$

$$\Leftrightarrow \log_2\left(x^2 - x - \frac{3}{4}\right) < -2 - \log_2(5) \ \wedge \ x \in D$$

$$\Leftrightarrow \log_2\left(x^2 - x - \frac{3}{4}\right) + 2 < \log_2(5) \ \wedge \ x \in D$$

$$\Leftrightarrow \log_2\left(x^2 - x - \frac{3}{4}\right) + \log_2(4) < \log_2(5) \ \wedge \ x \in D$$

$$\Leftrightarrow \log_2(4x^2 - 4x - 3) < \log_2(5) \ \wedge \ x \in D$$

$$\Leftrightarrow 4x^2 - 4x - 3 < 5 \wedge \ x \in D$$

$$\Leftrightarrow 4x^2 - 4x - 8 < 0 \wedge \ x \in D$$

Cálculo auxiliar

$4x^2 - 4x - 8 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 4 \times 4 \times (-8)}}{8} \Leftrightarrow x = \frac{4 \pm 12}{8}$

$\Leftrightarrow x = 2 \ \vee \ x = -1$

$4x^2 - 4x - 8 < 0 \Leftrightarrow x \in]-1,2[$

$$\Leftrightarrow -1 < x < 2 \ \wedge \ x \in D$$

$\text{C.S.} = \left]-1, -\frac{1}{2}\right[\cup \left]\frac{3}{2}, 2\right[$

27.7. $D = \mathbb{R}^+$

$|2 + \log_2(x)| \geq 3 \Leftrightarrow (2 + \log_2(x) \geq 3 \ \vee \ 2 + \log_2(x) \leq -3) \wedge \ x \in D$

$\Leftrightarrow (\log_2(x) \geq 1 \ \vee \ \log_2(x) \leq -5) \wedge \ x \in D$

$\Leftrightarrow (x \geq 2 \ \vee \ x \leq 2^{-5}) \wedge \ x \in D$

$\text{C.S.} = \left]0, \frac{1}{32}\right] \cup [2, +\infty[$

27.8. $D = \mathbb{R}^+$

$-3(\log_3(x))^2 - 5\log_3(x) + 2 \geq 0 \Leftrightarrow -3y^2 - 5y + 2 \geq 0 \ \wedge \ y = \log_3(x) \wedge \ x \in D$

Cálculo auxiliar

$-3y^2 - 5y + 2 = 0 \Leftrightarrow y = \frac{5 \pm \sqrt{25 + 24}}{-6} \Leftrightarrow y = \frac{5 \pm 7}{-6}$

$\Leftrightarrow y = \frac{1}{3} \ \vee \ y = -2$

$4{-}3y^2 - 5y + 2 \geq 0 \Leftrightarrow x \in \left[-2, \frac{1}{3}\right]$

$$\Leftrightarrow \left(y \geq -2 \ \wedge \ y \leq \frac{1}{3}\right) \wedge \ y = \log_3(x) \wedge \ x \in D$$

$$\Leftrightarrow \log_3(x) \geq -2 \ \wedge \ \log_3(x) \leq \frac{1}{3} \wedge \ x \in D$$

$$\Leftrightarrow x \geq 3^{-2} \ \wedge \ x \leq 3^{\frac{1}{3}} \wedge \ x \in D$$

$$\Leftrightarrow x \geq \frac{1}{9} \ \wedge \ x \leq \sqrt[3]{3} \wedge \ x \in D$$

$\text{C.S.} = \left[\frac{1}{9}, \sqrt[3]{3}\right]$

Daniela Raposo e Luzia Gomes

28.

28.1.

a) Aplicando a Regra de Ruffini, obtemos:

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & -1 & -14 & 24 \\ 2 & & 2 & 2 & -24 \\ \hline & 1 & 1 & -12 & \boxed{0} \end{array}$$

$x^2 + x - 12 = 0 \Leftrightarrow x = -4 \ \vee \ x = 3$

Assim, $P(x) = (x-2)(x-3)(x+4)$.

b) $P(x) = 0 \Leftrightarrow (x-2)(x-3)(x+4) = 0 \Leftrightarrow x = 2 \ \vee \ x = 3 \vee x = -4$

$\text{C.S.} = \{-4, 2, 3\}$

28.2.

a) $D = \left]\frac{12}{7}, +\infty\right[$

$$\begin{aligned} 2\ln(x) + \ln(x-1) = \ln(14x-24) &\Leftrightarrow \ln(x^2) + \ln(x-1) = \ln(14x-24) \\ &\Leftrightarrow \ln(x^3 - x^2) = \ln(14x-24) \\ &\Leftrightarrow x^3 - x^2 = 14x - 24 \wedge x \in D \\ &\Leftrightarrow x^3 - x^2 - 14x + 24 = 0 \wedge x \in D \\ &\Leftrightarrow x = 2 \vee x = 3 \end{aligned}$$

$\text{C.S.} = \{2, 3\}$

b) $e^{2x} - e^x + 24e^{-x} - 14 = 0 \Leftrightarrow (e^x)^2 - e^x + 24e^{-x} - 14 = 0$

$$\Leftrightarrow (e^x)^3 - (e^x)^2 - 14e^x + 24 = 0$$

Através do trabalho desenvolvido em 28.1., concluímos que:

$$\Leftrightarrow e^x = 2 \ \vee \ e^x = 3 \ \vee \ \underbrace{e^x = -4}_{\text{equação impossível}}$$

$$\Leftrightarrow x = \ln(2) \vee x = \ln(3)$$

$\text{C.S.} = \{\ln(2), \ln(3)\}$

29.

29.1. $h: \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{3}\right\} \longrightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto 8^x - 2$$

29.2. Eixo das abcissas:

$$\begin{aligned} 0 = \frac{8^{2x} - 4 \times 8^x + 4}{8^x - 2} \Leftrightarrow 8^{2x} - 4 \times 8^x + 4 = 0 \ \wedge \ 8^x - 2 \neq 0 &\Leftrightarrow (8^x)^2 - 4 \times 8^x + 4 = 0 \ \wedge \ x \neq \frac{1}{3} \\ &\Leftrightarrow 8^x = 2 \ \wedge \ x \neq \frac{1}{3} \\ &\Leftrightarrow x = \frac{1}{3} \ \wedge \ x \neq \frac{1}{3} \end{aligned}$$

Não há interseção com o eixo das abcissas.

Eixo das ordenadas:

$h(0)=\frac{8^0-4\times 8^0+4}{8^0-2}=-1$

O ponto de interseção com o eixo das ordenadas é o ponto $(0,-1)$.

29.3. $8^{2x}-4\times 8^x+4>4(8^x-2)\Leftrightarrow 8^{2x}-4\times 8^x+4>4\times 8^x-8$

$\Leftrightarrow 8^{2x}-8\times 8^x+12>0$

$\Leftrightarrow (8^x)^2-8\times 8^x+12>0$

$\Leftrightarrow 8^x<2 \ \vee \ 8^x>6$

$\Leftrightarrow x<\log_8(2) \ \vee \ x>\log_8(6)$

$\Leftrightarrow x<\frac{1}{3} \ \vee \ x>\log_8(6)$

Cálculo auxiliar

$(8^x)^2-8\times 8^x+12=0\Leftrightarrow 8^x=\frac{-(-8)\pm\sqrt{(-8)^2-4\times 1\times 12}}{2\times 1}\Leftrightarrow 8^x=2 \ \vee \ 8^x=6$

$\text{C.S.}=\left]-\infty,\frac{1}{3}\right[\cup\left]\log_8(6),+\infty\right[$

30.

30.1. $f(0)=-5\ln(0^2+1)+5=-5\ln(1)+5=5$

O ponto de interseção do gráfico da função f com o eixo Oy é o ponto (0,5).

30.2. $f(-x)=-5\ln[(-x)^2+1]+5=-5\ln(x^2+1)+5=f(x),\forall x\in D$

Como $\forall x\in D, f(-x)=f(x)$, f é uma função par, ou seja, o gráfico de f é simétrico relativamente ao eixo Oy.

30.3. $P(x,-5\ln(x^2+1)+5)$

$f(x)=0\Leftrightarrow -5\ln(x^2+1)+5=0\Leftrightarrow \ln(x^2+1)=1$

$\Leftrightarrow x^2+1=e^1$

$\Leftrightarrow x^2=e-1$

$\Leftrightarrow x=\pm\sqrt{e-1}$

$A(x)=\frac{2x+2\sqrt{e-1}}{2}\times|-5\ln(x^2+1)+5| = (x+\sqrt{e-1})\times(5\ln(x^2+1)-5)$

$g:\left]\sqrt{e-1},+\infty\right[\longrightarrow\mathbb{R}^+$

$x\longmapsto(x+\sqrt{e-1})\times(5\ln(x^2+1)-5)$

31.

31.1.$P(0)=2000e^0=2000$

31.2. $P(7)=2000e^{0{,}25\times 7}\approx 11\,509$

31.3. $P(t)=4000\Leftrightarrow 2000e^{0{,}25t}=4000\Leftrightarrow e^{0{,}25t}=2$

$\Leftrightarrow 0{,}25t=\ln(2)$

$\Leftrightarrow t=\frac{\ln(2)}{0{,}25}$

$t \approx 2{,}7726$ dias

O número de indivíduos desta colónia de leveduras atinge os 4 milhares ao fim de 2 dias e 19 horas.

31.4. $\frac{P(t+1)}{P(t)} = \frac{2000e^{0,25(t+1)}}{2000e^{0,25t}} = \frac{e^{0,25t+0,25}}{e^{0,25t}} = \frac{e^{0,25t}\times e^{0,25}}{e^{0,25t}} = e^{0,25} \approx 1{,}28$

A cada dia que passa, a população aumenta a uma taxa de, aproximadamente, 28%.

32.

32.1. Ao fim um ano:

$500 \times \left(1 + \frac{4}{100}\right)^1 = 520$ euros

Ao fim de dois anos:

$500 \times \left(1 + \frac{4}{100}\right)^2 = 540{,}8$ euros

32.2. $f(x) = 500 \times \left(1 + \frac{4}{100}\right)^x \Leftrightarrow f(x) = 500 \times 1{,}04^x$

$D_f = \mathbb{R}_0^+$

32.3. 146 dias correspondem a $\frac{146}{365} = 0{,}4$ anos.

$f(5{,}4) = 500 \times 1{,}04^{5,4} \approx 617{,}95$ euros

32.4. $f(x) = 2000 \Leftrightarrow 500 \times 1{,}04^x = 2000$

$\Leftrightarrow 1{,}04^x = 4$

$\Leftrightarrow \log_{1,04}(4)$

Logo, $x \approx 35{,}346$ anos.

$0{,}346 \times 365 = 126{,}29$

Demora 35 anos e 126 dias para acumular 2000 euros.

32.5. $\frac{f(x+1)}{f(x)} = \frac{500\times 1,04^{x+1}}{500\times 1,04^x} = 1{,}04^{x+1-x} = 1{,}04$

O capital acumulado cresce à taxa de 4% ao ano.

32.6. $\frac{f(18)}{f(0)} = \frac{500\times 1,04^{18}}{500} = 1{,}04^{18} \approx 2{,}03$

$f(18) = 2{,}03 \times f(0) \Leftrightarrow f(18) = f(0) + 1{,}03f(0)$

O capital cresceu 103%, aproximadamente.

32.7. $f(x) = 500e^{bx} \Leftrightarrow 500 \times 1{,}04^x = 500 \times e^{bx}$

$\Leftrightarrow 1{,}04^x = \left(e^b\right)^x$

$\Leftrightarrow 1{,}04 = e^b$

$\Leftrightarrow b = \ln(1{,}04)$

Logo, $b \approx 0{,}039$. Então, $f(x) = 500 \times e^{0,039x}$.

33.

33.1. $R(0) = 1 \Leftrightarrow \frac{k}{1+50e^{-0,1\times 0}} = 1 \Leftrightarrow \frac{k}{1+50} = 1 \Leftrightarrow k = 51$

33.2. $R(t) > 10 \Leftrightarrow \frac{51}{1+50e^{-0,1t}} > 10 \Leftrightarrow 51 > 10(1+50e^{-0,1t})$

$$\Leftrightarrow 5,1 > 1 + 50e^{-0,1t}$$

$$\Leftrightarrow 4,1 > 50e^{-0,1t}$$

$$\Leftrightarrow \frac{4,1}{50} > e^{-0,1t}$$

$$\Leftrightarrow -0,1t < \ln\left(\frac{4,1}{50}\right)$$

$$\Leftrightarrow t > -10\ln\left(\frac{4,1}{50}\right)$$

$-10\ln\left(\frac{4,1}{50}\right) = 25,0104$

Ao fim de 26 dias.

33.3. $\lim_{t\to+\infty} \frac{51}{1+50e^{-0,1\times t}} = 51$

Com o decorrer do tempo, o número de rãs no lago tende para 51 000.

34.

34.1. $\lim_{x\to 1} \frac{5^x-2^x}{x^2+2x+3} = \frac{5-2}{1+2+3} = \frac{1}{2}$

34.2. $\lim\limits_{x\to 0}[3^x(5x-2)+8] = 3^0(0-2)+8 = 6$

34.3. $\lim\limits_{x\to 3} 2^{x^2-5} = 2^{9-5} = 16$

34.4. $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x+x}{3} = \frac{+\infty}{3} = +\infty$

34.5. $\lim_{x\to-\infty} \frac{e^x+5}{x} = \frac{5}{-\infty} = 0$

34.6. $\lim_{x\to-\infty} \frac{20}{10^x+5} = \frac{20}{5} = 4$

34.7. $\lim_{x\to-\infty} \frac{2}{5^{-x}+1} = \frac{2}{+\infty} = 0$

34.8. $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{7^x-15} = \frac{1}{+\infty} = 0$

34.9. $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{8^{-x}-3} = \frac{1}{-3} = -\frac{1}{3}$

34.10. $\lim\limits_{x\to+\infty}[(3-4x)\times 2^x] = -\infty \times (+\infty) = -\infty$

34.11. $\lim_{x\to-\infty} \frac{6+3^x}{4^x-2} = \frac{6}{-2} = -3$

34.12. $\lim\limits_{x\to+\infty} 2^{x^2-3x+5} = \lim\limits_{x\to+\infty} 2^{x^2\left(1-\frac{3}{x}+\frac{5}{x^2}\right)} = 2^{+\infty} = +\infty$

34.13. $\lim\limits_{x\to-\infty} 3^{-x^2+x+2} = \lim\limits_{x\to-\infty} 3^{-x^2\left(1-\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}\right)} = 3^{-\infty} = 0$

34.14. $\lim_{x\to 1} \frac{4^x-4}{2^x-2} = \lim_{x\to 1} \frac{(2^x-2)(2^x+2)}{2^x-2} = \lim\limits_{x\to 1}(2^x+2) = 4$

35.

35.1. $\lim_{x\to+\infty} \frac{2\times5^x}{3\times10^x+1} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2}{3\times2^x+\frac{1}{5^x}} = \frac{2}{+\infty+0} = 0$

35.2. $\lim\limits_{x\to+\infty}(7^x-3^x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(7^x\left(1-\left(\frac{3}{7}\right)^x\right)\right) = +\infty(1-0) = +\infty$

35.3. $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{3^x-2^x}{5^x} = \lim\limits_{x\to-\infty}\frac{3^x\left(1-\left(\frac{2}{3}\right)^x\right)}{5^x} = \lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{3}{5}\right)^x \times \lim\limits_{x\to-\infty}\left[\left(1-\left(\frac{2}{5}\right)^x\right)\right] = +\infty\times(-\infty) = -\infty$

35.4. $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{3^x+2^x}{5^x} = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{3}{5}\right)^x + \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{2}{5}\right)^x = 0+0 = 0$

35.5. $\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^{2013}} = +\infty$

35.6. $\lim_{x\to-\infty}\frac{e^x}{x^{2013}} = \frac{0}{-\infty} = 0$

35.7. $\lim_{x\to+\infty}\frac{x^{2013}}{e^x} = \frac{1}{+\infty} = 0$

35.8. $\lim_{x\to+\infty}\frac{3x^5-2^x}{x^5} = 3 - \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2^x}{x^5} = 3-(+\infty) = -\infty$

35.9. $\lim_{x\to+\infty}\frac{3^x-2^x}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{3^x\left(1-\left(\frac{2}{3}\right)^x\right)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{3^x}{x}\times\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-\left(\frac{2}{3}\right)^x\right) = +\infty\times(1-0) = +\infty$

35.10. $\lim_{x\to+\infty}\frac{3^x-5^x}{x^2} = \lim_{x\to+\infty}\frac{5^x\left(\left(\frac{3}{5}\right)^x-1\right)}{x^2} = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{5^x}{x^2}\times\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\left(\frac{3}{5}\right)^x-1\right) = +\infty\times(0-1) = -\infty$

35.11. $\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x+x+10}{x^2} = \lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^2} + \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x} + \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{10}{x^2} = +\infty+0+0 = +\infty$

35.12. $\lim_{x\to-\infty}\frac{e^x+x+10}{x^2} = \lim_{x\to-\infty}\frac{e^x+10}{x^2} + \lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{x} = \frac{0+10}{-\infty} + \frac{1}{-\infty} = 0+0 = 0$

35.13. $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x x^4 =$

Considerando a mudança de variável $y=-x$: se $x\to-\infty$, então $y\to+\infty$.

$= \lim\limits_{y\to+\infty}(e^{-y}(-y)^4) =$

$= \lim\limits_{y\to+\infty}\frac{y^4}{e^y} =$

$= \frac{1}{+\infty} =$

$= 0$

35.14. $\lim\limits_{x\to-\infty} x\times e^{\frac{1}{x}} =$

Considerando a mudança de variável $y=\frac{1}{x}$: se $x\to0^+$, então $y\to+\infty$.

$= \lim\limits_{y\to+\infty}\left(\frac{1}{y}e^y\right) =$

$= \lim\limits_{y\to+\infty}\frac{e^y}{y} =$

$= +\infty$

36.

36.1. $\lim_{x\to 0}\frac{1-e^{5x}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{-5(e^{5x}-1)}{5x}=-5\lim_{x\to 0}\frac{e^{5x}-1}{5x}=$

Considerando a mudança de variável $y=5x$: se $x\to 0$, então $y\to 0$.

$$=-5\underbrace{\lim_{y\to 0}\frac{e^{y}-1}{y}}_{\text{limite notável}}=$$

$$=-5\times 1=$$

$$=-5$$

36.2. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{4\times e^{x}-1}{3x}=\lim_{x\to 0}\frac{4(e^{x}-1)}{3x}=\frac{4}{3}\times\underbrace{\lim_{x\to 0}\frac{e^{x}-1}{x}}_{\text{limite notável}}=\frac{4}{3}$

36.3. $\lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}-1}{5x}=\frac{1}{5}\lim_{x\to 0}\frac{2(e^{2x}-1)}{2x}=\frac{2}{5}\lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}-1}{2x}=$

Considerando a mudança de variável $y=2x$: se $x\to 0$, então $y\to 0$.

$$=\frac{2}{5}\underbrace{\lim_{y\to 0}\frac{e^{y}-1}{y}}_{\text{limite notável}}=$$

$$=\frac{2}{5}$$

36.4. $\lim_{x\to 0}\frac{2x}{1-e^{4x}}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{2x}{4x}}{\frac{-(e^{4x}-1)}{4x}}=\frac{\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{2}\right)}{-\lim_{x\to 0}\left(\frac{e^{4x}-1}{4x}\right)}=$

Considerando a mudança de variável $y=4x$: se $x\to 0$, então $y\to 0$.

$$=\frac{\frac{1}{2}}{\underbrace{-\lim_{y\to 0}\left(\frac{e^{y}-1}{y}\right)}_{\text{limite notável}}}=$$

$$=\frac{\frac{1}{2}}{-1}=$$

$$=-\frac{1}{2}$$

36.5. $\lim\limits_{x\to -2}\frac{e^{x+2}-1}{x^2-4}=\lim_{x\to -2}\frac{e^{x+2}-1}{(x-2)(x+2)}=\lim_{x\to -2}\frac{e^{x+2}-1}{x+2}\times\lim_{x\to -2}\frac{1}{x-2}=$

Considerando a mudança de variável $y=x+2\Leftrightarrow x=y-2$: se $x\to -2$, então $y\to 0$.

$$=\underbrace{\lim_{y\to 0}\left(\frac{e^{y}-1}{y}\right)}_{\text{limite notável}}\times\left(-\frac{1}{4}\right)=$$

$$=-\frac{1}{4}$$

36.6. $\lim_{x\to 0}\frac{e^{x}-1}{e^{5x}-1}=\frac{\lim_{x\to 0}\frac{e^{x}-1}{x}}{\lim_{x\to 0}\frac{e^{5x}-1}{x}}=\frac{1}{\lim_{x\to 0}\frac{5(e^{5x}-1)}{5x}}=$

Considerando a mudança de variável $y=5x$: se $x\to 0$, então $y\to 0$.

$$=\frac{1}{5\underbrace{\lim_{y\to 0}\frac{e^{y}-1}{y}}_{\text{limite notável}}}=$$

$$=\frac{1}{5}$$

36.7. $\lim_{x\to 0}\frac{e^{x+5}-e^5}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^5(e^x-1)}{x}=e^5\times\underbrace{\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}}_{\text{limite notável}}=e^5$

36.8. $\lim_{x\to 1}\frac{e^x-e}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{e(e^{x-1}-1)}{x-1}=$

Considerando a mudança de variável $y=x-1\Leftrightarrow x=y+1$: se $x\to 1$, então $y\to 0$.

$$=e\times\underbrace{\lim_{y\to 0}\frac{e^y-1}{y}}_{\text{limite notável}}=$$

$$=e$$

36.9. $\lim_{x\to 2}\frac{e^x-e^2}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{e^2(e^{x-2}-1)}{x-2}=$

Considerando a mudança de variável $y=x-2\Leftrightarrow x=y+2$: se $x\to 1$, então $y\to 0$.

$$=e^2\times\underbrace{\lim_{y\to 0}\frac{e^y-1}{y}}_{\text{limite notável}}=$$

$$=e^2$$

36.10. $\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{-x}(e^{2x}-1)}{2x}=\lim_{x\to 0}e^{-x}\times\underbrace{\lim_{2x\to 0}\frac{e^{2x}-1}{2x}}_{\text{limite notável}}=e^0\times 1=1$

36.11. $\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{\ln(a^x)}-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{(e^{x\ln(a)}-1)\times\ln(a)}{x\times\ln(a)}=$

$$=\ln(a)\times\underbrace{\lim_{x\ln(a)\to 0}\frac{e^{x\ln(a)}-1}{x\ln(a)}}_{\text{limite notável}}$$

$$=\ln(a)$$

36.12. $\lim_{x\to-\infty}\left[x\left(e^{\frac{1}{x}}-1\right)\right]=\lim_{x\to-\infty}\frac{e^{\frac{1}{x}}-1}{\frac{1}{x}}=$

Considerando a mudança de variável $y=\frac{1}{x}\Leftrightarrow x=\frac{1}{y}$: se $x\to-\infty$, então $y\to 0$.

$$=\underbrace{\lim_{y\to 0}\frac{e^y-1}{y}}_{\text{limite notável}}=$$

$$=1$$

37.

37.1. $\lim_{x\to 8}(2-3\log_2(x))=2-3\log_2(8)=2-3\times 3=-7$

37.2. $\lim_{x\to 1}\frac{1+\ln(x)}{x+2}=\frac{1+0}{1+2}=\frac{1}{3}$

37.3. $\lim_{x\to 0^+}(\log_3(x))^2=(-\infty)^2=+\infty$

37.4. $\lim_{x\to 0^+}[(x-1)\ln(x)]=-1\times(-\infty)=+\infty$

37.5. . $\lim_{x\to 0^+}\frac{\log(x)}{x^2-x}=\frac{-\infty}{0^-}=+\infty$

37.6. $\lim_{x\to+\infty}[(1-x)\ln(x)]=-\infty\times(+\infty)=-\infty$

37.7. $\lim_{x\to 1}\log_2(3x+1)=\log_2(4)=2$

37.8. $\lim\limits_{x\to -3^+} \ln(9-x^2) = \ln(0^+) = -\infty$

37.9. $\lim\limits_{x\to -\infty} \log(1-e^x) = \log(1) = 0$

37.10. $\lim\limits_{x\to -\infty} \ln(5^x - 7^x) = \lim\limits_{x\to -\infty} \left(5^x\left(1-\left(\frac{7}{5}\right)^x\right)\right) = \ln(0^+) = -\infty$

37.11. $\lim\limits_{x\to +\infty} (\ln(3x-1) - \ln(2x+4)) = \lim\limits_{x\to +\infty} \ln\left(\frac{3x-1}{2x+4}\right) = \ln\left(\frac{3}{2}\right)$

37.12. $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{x\ln(x+1) - x\ln(x) + 4}{x} = \lim\limits_{x\to +\infty} \ln\left(\frac{x+1}{x}\right) + \lim\limits_{x\to +\infty} \frac{4}{x} = \ln(1) + 0 = 0$

37.13. $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{x\ln(x+1) - x\ln(x^2+3) + 4}{x} = \lim\limits_{x\to +\infty} \ln\left(\frac{x+1}{x^2+3}\right) + \lim\limits_{x\to +\infty} \frac{4}{x} = \lim\limits_{x\to +\infty} \ln\left(\frac{1+\frac{1}{x}}{x+\frac{3}{x}}\right) + 0 = \ln(0^+) = -\infty$

37.14. $\lim\limits_{x\to 0^+} \log(1-\log_2(x)) = \log\big(1-(-\infty)\big) = +\infty$

37.15. $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{2-\ln(x)}{3\ln(x)+1} = \lim\limits_{x\to +\infty} \frac{\frac{2}{\ln(x)}-1}{3+\frac{1}{\ln(x)}} = -\frac{1}{3}$

37.16. $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{6+\log_4(x)}{\log_2(x)} = \lim\limits_{x\to +\infty} \frac{6+\frac{\log_2(x)}{\log_2(4)}}{\log_2(x)} = \lim\limits_{x\to +\infty} \left(\frac{6}{\log_2(x)} + \frac{1}{2}\right) = 0 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

38.

38.1. $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{5x-1+\ln(x)}{-x} = -5 + \lim\limits_{x\to +\infty} \frac{1}{x} - \lim\limits_{x\to +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = -5+0+0 = -5$

38.2. $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{x\ln(x)}{x^2+4x+3} = \lim\limits_{x\to +\infty} \frac{\frac{\ln(x)}{x}}{1+\frac{4}{x}+\frac{3}{x^2}} = \frac{0}{1+0+0} = 0$

38.3. $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{\ln(x^3)}{2x} = \lim\limits_{x\to +\infty} \frac{3\ln(x)}{2x} = \frac{3}{2}\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = \frac{3}{2} \times 0 = 0$

38.4. $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{\ln(4x^3)}{5x} = \lim\limits_{x\to +\infty} \frac{\ln(4)+\ln(x^3)}{5x} = \lim\limits_{x\to +\infty} \frac{\ln(4)}{5x} + \lim\limits_{x\to +\infty} \frac{3\ln(x)}{5x} = 0 + \frac{3}{5}\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(x)}{x} = \frac{3}{5} \times 0 = 0$

38.5. $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{\ln(x)}{e^x} = \lim\limits_{x\to +\infty} \frac{\ln(x)}{x} \times \lim\limits_{x\to +\infty} \frac{\mathrm{x}}{e^x} = 0 \times \frac{1}{+\infty} = 0 \times 0 = 0$

38.6. $\lim_{x\to -\infty} \frac{\ln(5-x)}{2-x} =$

Considerando a mudança de variável $y = 5-x \Leftrightarrow x = 5+y$: se $x \to -\infty$, então $y \to +\infty$.

$$= \lim_{y\to +\infty} \frac{\ln(5+y)}{2+y} =$$

$$= \lim_{y\to +\infty} \frac{\ln(5+y)+3}{2+y+3} =$$

$$= \lim_{y\to +\infty} \left[\frac{\ln(y+5)}{y+5} + \frac{3}{y+5}\right] =$$

$$= \lim_{y\to +\infty} \frac{\ln(y+5)}{y+5} + \lim_{y\to +\infty} \frac{3}{y+5} =$$

Considerando a mudança de variável $z = y+5 \Leftrightarrow y = z-5$: se $y \to +\infty$, então $z \to +\infty$.

$$= \underbrace{\lim_{z\to +\infty} \frac{\ln(z)}{z}}_{\text{limite notável}} + \lim_{y\to +\infty} \frac{3}{y+5} =$$

$$= 0$$

38.7. $\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln\left(\frac{1}{x}\right) =$

Considerando a mudança de variável $y=\frac{1}{x}$: se $x\to 0^+$, então $y\to +\infty$.

$$= \lim_{y\to+\infty}\left(\frac{1}{y}\ln(y)\right) =$$
$$= \lim_{y\to+\infty}\frac{\ln(y)}{y} =$$
$$= 0$$

38.8. $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(x\ln(x)\right) =$

Considerando a mudança de variável $y=\frac{1}{x}$: se $x\to 0^+$, então $y\to +\infty$.

$$= \lim_{y\to+\infty}\left(\frac{1}{y}\ln\left(\frac{1}{y}\right)\right) =$$
$$= \lim_{y\to+\infty}\frac{\ln\left(y^{-1}\right)}{y} =$$
$$= \lim_{y\to+\infty}\frac{-\ln(y)}{y} =$$
$$= -\lim_{y\to+\infty}\frac{\ln(y)}{y} =$$
$$= 0$$

39.

39.1. $\lim_{x\to 1}\frac{\ln(x+1)}{3x} = \frac{1}{3}\lim_{x\to 1}\frac{\ln(x+1)}{x} =$

Considerando a mudança de variável $y=\ln(x+1) \Leftrightarrow x+1=e^y \Leftrightarrow x=e^y-1$: se $x\to 1$, então $y\to 0$.

$$= \frac{1}{3}\underbrace{\lim_{y\to 0}\frac{e^y-1}{y}}_{\text{limite notável}} =$$
$$= \frac{1}{3}$$

39.2. $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(x+1)^2}{3x} = \lim_{x\to 0}\frac{2\ln(x+1)}{3x} =$

$$= \frac{2}{3}\lim_{x\to 0}\frac{\ln(x+1)}{x} =$$

Considerando a mudança de variável $y=\ln(x+1) \Leftrightarrow x+1=e^y \Leftrightarrow x=e^y-1$: se $x\to 0$, então $y\to 0$.

$$= \frac{2}{3}\times\lim_{y\to 0}\frac{y}{e^y-1} =$$
$$= \frac{2}{3}\times\frac{1}{\lim_{y\to 0}\frac{e^y-1}{y}} =$$
$$= \frac{2}{3}$$

39.3. $\lim_{x\to -4}\frac{\ln(x+5)}{x+4}=$

Considerando a mudança de variável $y=\ln(x+5)\Leftrightarrow x+5=e^y \Leftrightarrow x=e^y-5$: se $x\to -4$, então $y\to 0$.

$$=\lim_{y\to 0}\frac{y}{e^y-5+4}=$$
$$=\lim_{y\to 0}\frac{y}{e^y-1}=$$
$$=\frac{1}{\underbrace{\lim_{y\to 0}\frac{e^y-1}{y}}_{\text{limite notável}}}=$$
$$=1$$

39.4. $\lim_{x\to 0}\frac{2x}{\ln(8x+1)}=$

Considerando a mudança de variável $y=\ln(8x+1)\Leftrightarrow 8x+1=e^y \Leftrightarrow 8x=e^y-1$

$\Leftrightarrow 4\times 2x=e^y-1\Leftrightarrow 2x=\frac{e^y-1}{4}$: se $x\to 0$, então $y\to 0$.

$$=\lim_{y\to 0}\frac{\frac{e^y-1}{4}}{y}=$$
$$=\frac{1}{4}\lim_{y\to 0}\frac{e^y-1}{y}=$$
$$=\frac{1}{4}$$

39.5. $\lim_{x\to 1}\frac{\ln(x)}{x-1}=$

Considerando a mudança de variável $y=\ln(x)\Leftrightarrow x=e^y$: se $x\to 0$, então $y\to 0$.

$$=\lim_{y\to 0}\frac{y}{e^y-1}=$$
$$=\frac{1}{\underbrace{\lim_{y\to 0}\frac{e^y-1}{y}}_{\text{limite notável}}}=$$
$$=1$$

39.6. $\lim\limits_{x\to -1}\frac{\ln(x+2)}{x^2-1}=\lim_{x\to -1}\frac{\ln(x+2)}{(x-1)(x+1)}=$

Considerando a mudança de variável $y=\ln(x+2)\Leftrightarrow x+2=e^y \Leftrightarrow x=e^y-2$: se $x\to -1$, então $y\to 0$.

$$=\lim_{y\to 0}\frac{y}{(e^y-2-1)(e^y-2+1)}=$$
$$=\lim_{y\to 0}\frac{y}{(e^y-3)(e^y-1)}=$$
$$=\lim_{y\to 0}\frac{1}{e^y-3}\times\lim_{y\to 0}\frac{y}{e^y-1}$$
$$=\frac{1}{-2}\times\frac{1}{\underbrace{\lim_{y\to 0}\frac{e^y-1}{y}}_{\text{limite notável}}}=$$
$$=-\frac{1}{2}$$

39.7. $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(\sqrt{x+1})}{3x}=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(x+1)^{\frac{1}{2}}}{3x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}\ln(x+1)}{3x}=\frac{1}{6}\lim_{x\to 0}\frac{\ln(x+1)}{x}=$

Considerando a mudança de variável $y=\ln(x+1)\Leftrightarrow x+1=e^y\Leftrightarrow x=e^y-1$: se $x\to 0$, então $y\to 0$.

$$=\frac{1}{6}\lim_{y\to 0}\frac{y}{e^y-1}=$$

$$=\frac{1}{6}\times\frac{1}{\underbrace{\lim_{y\to 0}\frac{e^y-1}{y}}_{\text{limite notável}}}=$$

$$=\frac{1}{6}$$

39.8. $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1-x)}{x}=$

Considerando a mudança de variável $y=\ln(1-x)\Leftrightarrow 1-x=e^y\Leftrightarrow -x=e^y-1$ $\Leftrightarrow x=1-e^y$: se $x\to 0$, então $y\to 0$.

$$=\lim_{y\to 0}\frac{y}{1-e^y}=$$

$$=\lim_{y\to 0}\frac{y}{-(e^y-1)}=$$

$$=-\frac{1}{\underbrace{\lim_{y\to 0}\frac{e^y-1}{y}}_{\text{limite notável}}}=$$

$$=-1$$

39.9. $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1-x^2)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\ln[(1-x)(1+x)]}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1-x)+\ln(1+x)}{x}=$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1-x)}{x}+\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=$$

Considerando as mudanças de variável $y=\ln(1-x)\Leftrightarrow 1-x=e^y\Leftrightarrow -x=e^y-1$ $\Leftrightarrow x=-(e^y-1)$ e $y=\ln(1+x)\Leftrightarrow 1+x=e^y\Leftrightarrow x=e^y-1$: se $x\to 0$, então $y\to 0$.

$$=\lim_{y\to 0}\frac{y}{-(e^y-1)}+\lim_{y\to 0}\frac{y}{e^y-1}=$$

$$=-\frac{1}{\lim_{y\to 0}\frac{e^y-1}{y}}+\frac{1}{\lim_{y\to 0}\frac{e^y-1}{y}}=$$

$$=-1+1=$$

$$=0$$

39.10. $\lim_{x\to 0}\frac{[\ln(x+1)]^2-\ln(x+1)^2}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{[\ln(x+1)]^2-2\ln(x+1)}{x}=$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{[\ln(x+1)][\ln(x+1)-2]}{x}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(x+1)}{x}\times\lim_{x\to 0}[\ln(x+1)-2]=$$

Considerando a mudança de variável $y=\ln(x+1)\Leftrightarrow x+1=e^y\Leftrightarrow x=e^y-1$: se $x\to 0$, então $y\to 0$.

$$=\lim_{y\to 0}\frac{y}{e^y-1}\times\lim_{x\to 0}[\ln(x+1)-2]=$$

$$= \frac{1}{\underbrace{\lim_{y\to 0}\frac{e^y-1}{y}}_{\text{limite notável}}} \times \lim_{x\to 0}[\ln(x+1)-2] =$$

$$= 1 \times (-2) =$$

$$= -2$$

39.11. $\lim_{x\to 0}\frac{\log_a(x+1)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{\ln(x+1)}{\ln(a)}}{x} = \lim_{x\to 0}\left[\frac{\ln(x+1)}{x}\times\frac{1}{\ln(a)}\right] =$

Considerando a mudança de variável $y = \ln(x+1) \Leftrightarrow x+1 = e^y \Leftrightarrow x = e^y - 1$: se $x \to 0$, então $y \to 0$.

$$= \frac{1}{\ln(a)} \times \lim_{y\to 0}\frac{y}{e^y-1} =$$

$$= \frac{1}{\ln(a)} \times \frac{1}{\underbrace{\lim_{y\to 0}\frac{e^y-1}{y}}_{\text{limite notável}}} =$$

$$= \frac{1}{\ln(a)}$$

39.12. $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(x+1)}{e^x-1} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{\ln(x+1)}{x}}{\frac{e^x-1}{x}} =$

Considerando a mudança de variável $y = \ln(x+1) \Leftrightarrow x+1 = e^y \Leftrightarrow x = e^y - 1$: se $x \to 0$, então $y \to 0$.

$$= \frac{\lim_{y\to 0}\frac{y}{e^y-1}}{\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}} =$$

$$= \frac{\frac{1}{\lim_{y\to 0}\frac{e^y-1}{y}}}{\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}} =$$

$$= \frac{1}{1} =$$

$$= 1$$

40.

40.1. $\lim_{x\to 0^-}\frac{e^{3x}-1}{x} = \lim_{x\to 0^-}\frac{3(e^{3x}-1)}{3x} = 3\underbrace{\lim_{3x\to 0^-}\frac{e^{3x}-1}{3x}}_{\text{limite notável}} = 3$

$\lim_{x\to 0^+}[\ln(x+1)+3] = 3$

$f(0) = \ln(0+1)+3 = 3$

Como $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = f(0)$, então f é contínua no ponto de abcissa $x = 0$.

40.2. $\lim_{x\to 0^-}(3^x) = 3^0 = 1$

$g(0) = 3$

Como $\lim\limits_{x\to 0^-} g(x) \neq g(0)$, então g não é contínua no ponto de abcissa $x = 0$.

41. Para $x < 1$, g é contínua em todos os pontos do domínio, por se tratar do quociente entre duas funções contínuas.

Para $x > 1$, g é contínua em todos os pontos do domínio, por se tratar do quociente entre duas funções contínuas.

Para $x = 1$:

- $\lim_{x\to 1^-} \frac{1-e^x}{-4x} = \frac{1-e}{-4} = \frac{e-1}{4}$
- $\lim_{x\to 1^+} \frac{\sqrt{x+3}-2}{x-1} = \lim_{x\to 1^+} \frac{(\sqrt{x+3}-2)(\sqrt{x+3}+2)}{(x-1)(\sqrt{x+3}+2)} =$

$$= \lim_{x\to 1^+} \frac{x+3-4}{(x-1)(\sqrt{x+3}+2)} =$$

$$= \lim_{x\to 1^+} \frac{x-1}{(x-1)(\sqrt{x+3}+2)} =$$

$$= \frac{1}{4}$$

Como $\lim\limits_{x\to 1^-} g(x) \neq \lim\limits_{x\to 1^+} g(x)$, então g não é contínua no ponto de abcissa $x = 1$.

Assim, g é contínua em todos os pontos do seu domínio, $\mathbb{R}\backslash\{0,1\}$.

42.

42.1. $D_f = \mathbb{R}\backslash\{0\}$

Para $x < 0$, f é contínua por ser o resultado de operações entre funções contínuas.

Para $x > 0$, f é contínua por ser o resultado de operações entre funções contínuas.

Assim, f é contínua no seu domínio.

42.2.

$$\begin{cases} \dfrac{1-e^{-x}}{2x} & \text{se } x < 0 \\ \dfrac{1}{2} & \text{se } x = 0 \\ \dfrac{\ln(x+1)}{2x} & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

43. Seja h a função definida por $h(x) = e^x - x^3$.

$h(1) = e^1 - 1^3 = e - 1 > 0$

$h(2) = e^2 - 2^3 < 0$

Como h é contínua em todo o seu domínio (por se tratar da diferença entre duas funções contínuas), em particular é contínua no intervalo, e, como $h(2) < 0 < h(1)$, então, pelo teorema de Bolzano-Cauchy, $\exists\ c \in]1,2[: h(c) = 0$. Provar a existência de pelo menos um zero da função h no referido intervalo é o mesmo que provar que a equação do enunciado tem pelo menos uma solução no intervalo $]1, 2[$, conforme solicitado.

44.

44.1. $D_f = \mathrm{IR}\backslash\{0\}$

$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x+2x}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x} + \lim_{x\to+\infty}\frac{2x}{x} = +\infty + 2 = +\infty$

$\lim_{x\to-\infty}\frac{e^x+2x}{x} = \lim_{x\to-\infty}\frac{e^x}{x} + \lim_{x\to-\infty}\frac{2x}{x} = \frac{0}{-\infty} + 2 = 2$

Logo, $y = 2$ é assíntota horizontal ao gráfico da função quando $x \to -\infty$.

$\lim_{x\to0^+}\frac{e^x+2x}{x} = \lim_{x\to0^+}\frac{e^x}{x} + \lim_{x\to0^+}\frac{2x}{x} = \frac{1}{0^+} + 2 = +\infty$

$\lim_{x\to0^-}\frac{e^x+2x}{x} = \frac{1}{0^-} = -\infty$

Logo, $x = 0$ é assíntota vertical ao gráfico da função.

Não existem mais assíntotas verticais ao gráfico da função, uma vez que a função é contínua em $\mathrm{IR}\backslash\{0\}$.

44.2. $D_g = \mathrm{IR}\backslash\{1\}$

$\lim_{x\to1^+}\frac{ex}{1-x} = \frac{e}{0^-} = -\infty$

$\lim_{x\to1^-}\frac{ex}{1-x} = \frac{e}{0^+} = +\infty$

Logo, $x = 1$ é assíntota vertical ao gráfico da função.

Não existem mais assíntotas verticais ao gráfico da função, uma vez que a função é contínua em $\mathrm{IR}\backslash\{1\}$.

$\lim_{x\to+\infty}\frac{ex}{1-x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{ex}{x(\frac{1}{x}-1)} = \frac{e}{\frac{1}{+\infty}-1} = -e$

$\lim_{x\to-\infty}\frac{ex}{1-x} = \lim_{x\to-\infty}\frac{ex}{x(\frac{1}{x}-1)} = \frac{e}{\frac{1}{-\infty}-1} = -e$

Logo, $y = -e$ é assíntota horizontal ao gráfico da função quando $x \to -\infty$ e quando $x \to +\infty$.

44.3. $D_h = \mathrm{IR}\backslash\{5\}$

$\lim_{x\to5^-}\frac{2}{2^x-32} = \frac{2}{0^-} = -\infty$

$\lim_{x\to5^+}\frac{2}{2^x-32} = \frac{2}{0^+} = +\infty$

Logo, $x = 5$ é assíntota vertical ao gráfico da função.

Não existem mais assíntotas verticais ao gráfico da função, uma vez que a função é contínua em $\mathrm{IR}\backslash\{5\}$.

$\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{2^x-32} = \frac{2}{+\infty} = 0$

Logo, $y = 0$ é assíntota horizontal ao gráfico da função quando $x \to +\infty$.

$\lim_{x\to-\infty}\frac{2}{2^x-32} = \frac{2}{-32} = -\frac{1}{16}$

Logo, $y = -\frac{1}{16}$ é assíntota horizontal ao gráfico da função quando $x \to -\infty$.

44.4. $D_i = \text{IR}^+$

$$\lim_{x\to+\infty}[2-3\ln(x)] = 2-3\ln(+\infty) = -\infty$$

$$\lim_{x\to0^+}[2-3\ln(x)] = 2-3\ln(0^+) = 2-3\times(-\infty) = +\infty$$

Logo, $x=0$ é assíntota vertical ao gráfico da função.

Não existem mais assíntotas verticais ao gráfico da função, uma vez que a função é contínua em IR^+.

44.5. $D_j = \text{IR}$ e a função é contínua em todo o seu domínio. Assim, o gráfico da função não tem assíntotas verticais.

$$\lim_{x\to+\infty} x\times e^{-x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x}{e^x} = \frac{1}{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x}} = \frac{1}{+\infty} = 0$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{e^x} = \frac{-\infty}{0^+} = -\infty$$

Logo, $y=0$ é assíntota horizontal ao gráfico da função quando $x\to+\infty$.

45.

45.1. $D_f = \text{IR}$ e a função é contínua em todo o seu domínio. Assim, o gráfico da função não tem assíntotas verticais.

$$m = \lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{e^{-\frac{x}{2}}+x-1}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{e^{-\frac{x}{2}}}{x} + \lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x} - \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x} = 0+1-0 = 1$$

$$b = \lim_{x\to+\infty}\left(e^{-\frac{x}{2}}+x-1-x\right) = -1$$

Logo, $y=x-1$ é assíntota oblíqua ao gráfico da função quando $x\to+\infty$.

$$m = \lim_{x\to-\infty}\frac{e^{-\frac{x}{2}}+x-1}{x} = \lim_{x\to-\infty}\frac{e^{-\frac{x}{2}}}{x} + \lim_{x\to-\infty}\frac{x}{x} - \lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x} = -\infty+1-0 = -\infty$$

45.2. $D_g = \text{IR}^+$

$$\lim_{x\to0^+}\left(e^x+\ln(x)\right) = e^{0^+}+\ln(0^+) = 1+(-\infty) = -\infty$$

Logo, $x=0$ é assíntota vertical ao gráfico da função.

Não existem mais assíntotas verticais ao gráfico da função, uma vez que a função é contínua em IR^+.

$$m = \lim_{x\to+\infty}\frac{e^x+\ln(x)}{x} = \underbrace{\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x}}_{\text{limite notável}} + \underbrace{\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(x)}{x}}_{\text{limite notável}} = +\infty+0 = +\infty$$

45.3. $D_h = \text{IR}^+\backslash\{e\}$

$$\lim_{x\to0^+}\frac{2}{1-\ln(x)} = \frac{2}{1-\ln(0^+)} = \frac{2}{1-(-\infty)} = \frac{2}{+\infty} = 0$$

$$\lim_{x\to e^+}\frac{2}{1-\ln(x)} = \frac{2}{1-\ln(e^+)} = \frac{2}{0^-} = -\infty$$

$$\lim_{x\to e^-}\frac{2}{1-\ln(x)} = \frac{2}{1-\ln(e^-)} = \frac{2}{0^+} = +\infty$$

Logo, $x=e$ é assíntota vertical ao gráfico da função.

Não existem mais assíntotas verticais ao gráfico da função, uma vez que a função é contínua em $\mathrm{IR}^+\backslash\{e\}$.

$\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{1-\ln(x)}=\frac{2}{1-(+\infty)}=\frac{2}{-\infty}=0$

Logo, $y=0$ é assíntota horizontal ao gráfico da função quando $x\to+\infty$.

45.4. $D_i=\mathrm{IR}^+\backslash\{1\}$

$\lim_{x\to1^-}\left(x-\frac{x}{\ln(x)}\right)=1-\frac{1}{0^-}=+\infty$

$\lim_{x\to1^+}\left(x-\frac{x}{\ln(x)}\right)=1-\frac{1}{0^+}=-\infty$

$\lim_{x\to0^+}\left(x-\frac{x}{\ln(x)}\right)=0-\frac{0}{\ln(0^+)}=0-\frac{0}{-\infty}=0$

Logo, $x=1$ é assíntota vertical ao gráfico da função.

Não existem mais assíntotas verticais ao gráfico da função, uma vez que a função é contínua em $\mathrm{IR}^+\backslash\{1\}$.

46.

46.1.

- $\lim_{x\to1^-}\frac{e^{2x-2}-1}{x-1}=$

  Considerando a mudança de variável $y=x-1\Leftrightarrow -x=-1-y\Leftrightarrow x=1+y$: se $x\to1^-$, então $y\to0$.

  $$=\lim_{y\to0^-}\frac{e^{2y}-1}{y}=$$

  $$=2\lim_{2y\to0^-}\frac{e^{2y}-1}{2y}=$$

  $$=2$$

- $f(1)=2$

- $\lim_{x\to1^+}\frac{x-1}{\sqrt{x}-1}=\lim_{x\to1^+}\frac{(x-1)(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}=\lim_{x\to1^+}\frac{(x-1)(\sqrt{x}+1)}{x-1}=\lim_{x\to1^+}\left(\sqrt{x}+1\right)=2$

  A função é contínua em $x=1$.

46.2. $\lim_{x\to-\infty}\frac{e^{2x-2}-1}{x-1}=\frac{e^{-\infty}-1}{-\infty}=\frac{0-1}{-\infty}=0$

Logo, $y=0$ é assíntota horizontal ao gráfico da função quando $x\to-\infty$.

47.

47.1. Para $0<x<1$, f é contínua por se tratar do quociente entre funções contínuas.

Para $x>1$, f é contínua por ser o resultado de operações entre funções contínuas.

Para $x=1$:

$f(1)=1\times e^{2-1}=1\times e=e$

$\lim_{x\to 1^-} \frac{4x}{\ln(x)} = \frac{4\times 1}{\ln(1^-)} = \frac{4}{0^-} = -\infty$

Para $x = 1$, f não é contínua, uma vez que $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) \neq f(1)$.

Logo, f é contínua em $\mathbb{R}^+\backslash\{1\}$

47.2. $\lim_{x\to+\infty}(xe^{2-x}) = \lim_{x\to+\infty}(xe^{2}e^{-x}) = e^2 \lim_{x\to+\infty}\frac{x}{e^x} =$

$= e^2 \times \frac{1}{\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x}} =$

$= e^2 \times \frac{1}{+\infty} =$

$= e^2 \times 0 =$

$= 0$

Logo, $y = 0$ é assíntota horizontal ao gráfico da função quando $x \to +\infty$.

$x = 1$ é assíntota vertical ao gráfico da função.

$\lim_{x\to 0^+} \frac{4x}{\ln(x)} = \frac{4\times 0}{\ln(0^+)} = \frac{0}{-\infty} = 0$

Não existem mais assíntotas verticais.

48.

48.1. Para $x < 0$, f é contínua por resultar de operações entre funções contínuas.

Para $0 < x < e$, f é contínua por resultar de operações entre funções contínuas.

48.2. $\lim_{x\to 0^+} \frac{3}{1-\ln(x)} = \frac{3}{1-\ln(0^+)} = \frac{3}{1-(-\infty)} = \frac{3}{+\infty} = 0$

$\lim_{x\to 0^-}\left(e^{-\frac{1}{x}} + 4x\right) = +\infty$

Logo, $x = 0$ é assíntota vertical ao gráfico da função.

$\lim_{x\to e^-} \frac{3}{1-\ln(x)} = \frac{3}{1-\ln(e^-)} = \frac{3}{0^+} = +\infty$

Logo, $x = e$ é assíntota vertical ao gráfico da função.

$m = \lim_{x\to-\infty}\frac{e^{-\frac{1}{x}}+4x}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty}\frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x} + \lim\limits_{x\to-\infty}\frac{4x}{x} = \frac{e^0}{-\infty} + 4 = 4$

$b = \lim_{x\to-\infty}\left(e^{-\frac{1}{x}} + 4x - 4x\right) = e^{-\frac{1}{-\infty}} = e^0 = 1$

Logo, $y = 4x + 1$ é assíntota oblíqua ao gráfico da função quando $x \to -\infty$.

48.3. Seja h a função definida por $h(x) = e^{-\frac{1}{x}} + 4x + 5$.

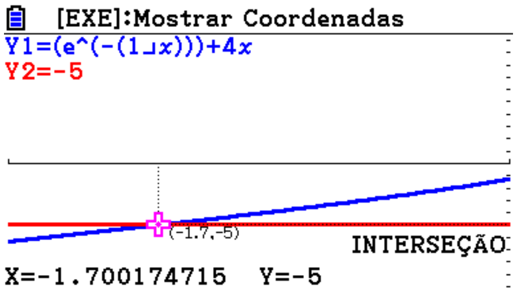
$h(-2) \approx -1{,}35$

$h(-1) \approx 3{,}718$

Como h é contínua em todo o seu domínio (por se tratar da adição de funções contínuas), em particular é contínua no intervalo $[-2,-1]$ e, como $h(-2) < 0 < h(-1)$, então, pelo teorema de Bolzano-Cauchy, $\exists\ c \in\ ]-2,-1[: h(c) = 0$.

Provar a existência de pelo menos um zero da função h, no referido intervalo, é o mesmo que provar que a equação do enunciado tem pelo menos uma solução no intervalo $]-2,-1[$, conforme solicitado.

48.4. $x \approx -1{,}7$



49.

49.1. $f'(1) = \lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1}\frac{x^2+4x-5}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+5)}{(x-1)} = \lim\limits_{x\to 1}(x+5) = 6$

49.2. $g'(0) = \lim\limits_{x\to 0}\frac{g(x)-g(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0}\frac{e^x-x-1}{x-0} = \underbrace{\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}}_{\text{limite notável}} - \lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{x} = 1-1 = 0$

49.3. $h'(0) = \lim\limits_{x\to 0}\frac{h(x)-h(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0}\frac{\ln(x+1)+x-0}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\ln(x+1)}{x} + \lim_{x\to 0}\frac{x}{x} =$

$$= \lim_{y\to 0}\frac{y}{e^y-1} + 1 =$$

$$= \frac{1}{\underbrace{\lim_{y\to 0}\frac{e^y-1}{y}}_{\text{limite notável}}} + 1 =$$

$$= \frac{1}{1} + 1 =$$

$$= 2$$

50.

50.1. $f'(x) = (e^{2x})' = 2e^{2x}$

$$f': \mathrm{IR} \longrightarrow \mathrm{IR}$$
$$x \mapsto 2e^{2x}$$

50.2. $g'(x) = \left(e^x(x+3)\right)' = e^x(x+3) + e^x = e^x(x+4)$

$$g': \mathrm{IR} \longrightarrow \mathrm{IR}$$
$$x \mapsto e^x(x+4)$$

50.3. $h'(x) = \left(\frac{e^{2x}+e^x-1}{e^x+3}\right)' = \frac{(2e^{2x}+e^x)(e^x+3)-(e^{2x}+e^x-1)e^x}{(e^x+3)^2} = \frac{2e^{3x}+6e^{2x}+e^{2x}+3e^x-e^{3x}-e^{2x}+e^x}{(e^x+3)^2} =$

$$= \frac{e^{3x}+6e^{2x}+4e^x}{(e^x+3)^2}$$

$$h': \mathrm{IR} \longrightarrow \mathrm{IR}$$
$$x \mapsto \frac{e^{3x}+6e^{2x}+4e^x}{(e^x+3)^2}$$

50.4. $i'(x) = \left(\sqrt{e^x + x^2}\right)' = \frac{1}{2}(e^x + x^2)^{-\frac{1}{2}} \times (e^x + 2x) = \frac{e^x+2x}{2\sqrt{e^x+x^2}}$

$$i': \mathrm{IR} \longrightarrow \mathrm{IR}$$
$$x \mapsto \frac{e^x+2x}{2\sqrt{e^x+x^2}}$$

50.5. $j'(x) = (e^x \ln(x))' = e^x \times \ln(x) + e^x \times \frac{1}{x} = e^x \left[\ln(x) + \frac{1}{x}\right]$

$$j': \mathrm{IR}^+ \longrightarrow \mathrm{IR}$$
$$x \mapsto e^x \left(\ln(x) + \frac{1}{x}\right)$$

50.6. $k'^{(x)} = \left(\frac{1}{e^x}\right)' = \frac{0\times e^x - 1\times e^x}{(e^x)^2} = \frac{-e^x}{e^x \times e^x} = -\frac{1}{e^x}$

$$k': \mathrm{IR} \longrightarrow \mathrm{IR}$$
$$x \mapsto -\frac{1}{e^x}$$

50.7. $l'(x) = \left(e^{\frac{1}{x}}\right)' = -\frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}} = -\frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2} = -\frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}}$

$$l': \mathrm{IR}\backslash\{0\} \longrightarrow \mathrm{IR}$$
$$x \mapsto -\frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}}$$

50.8. $m'(x) = \left(\frac{1}{x} + \ln(x)\right)' = -\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} = \frac{-x+x^2}{x^3} = \frac{-1+x}{x^2}$

$$m': \mathrm{IR}^+ \longrightarrow \mathrm{IR}$$
$$x \mapsto \frac{x-1}{x^2}$$

50.9. $n'(x) = (x\ln(x))' = \ln(x) + x \times \frac{1}{x} = \ln(x) + 1$

$$n': \mathrm{IR}^+ \longrightarrow \mathrm{IR}$$
$$x \mapsto \ln(x) + 1$$

50.10. $o'(x) = \left(\frac{x}{\ln(x)}\right)' = \frac{1\times\ln(x) - x\times\frac{1}{x}}{\left(\ln(x)\right)^2} = \frac{\ln(x)-1}{\left(\ln(x)\right)^2}$

$$o': \mathrm{IR}^+\backslash\{1\} \longrightarrow \mathrm{IR}$$
$$x \mapsto \frac{\ln(x)-1}{\left(\ln(x)\right)^2}$$

50.11. $p'(x) = \left(\sqrt{\ln(x)}\right)' = \frac{1}{2}(\ln(x))^{-\frac{1}{2}} \times \frac{1}{x} = \frac{1}{2x\sqrt{\ln(x)}}$

$$p':]1, +\infty[\longrightarrow \mathrm{IR}$$
$$x \mapsto \frac{1}{2x\sqrt{\ln(x)}}$$

50.12. $q'(x) = (\ln(\ln(x)))' = \frac{\frac{1}{x}}{\ln(x)} = \frac{1}{x\ln(x)}$

$$q':]1, +\infty[\longrightarrow \mathrm{IR}$$
$$x \mapsto \frac{1}{x\ln(x)}$$

51.

51.1. $f'(x) = (10^x)' = 1 \times 10^x \times \ln(10) = \ln(10) \times 10^x$

$$\begin{aligned} f'&: \mathrm{IR} \longrightarrow \mathrm{IR} \\ &x \mapsto \ln(10) \times 10^x \end{aligned}$$

51.2. $g'(x) = \left(2^{x^3}\right)' = 3x^2 \times 2^{x^3} \times \ln(2)$

$$\begin{aligned} g'&: \mathrm{IR} \longrightarrow \mathrm{IR} \\ &x \mapsto 3x^2 \times 2^{x^3} \times \ln(2) \end{aligned}$$

51.3. $h'(x) = \left(3^{\ln(x)}\right)' = \frac{1}{x} \times 3^{\ln(x)} \times \ln(3) = \frac{3^{\ln(x)}\ln(3)}{x}$

$$\begin{aligned} h'&: \mathrm{IR}^+ \longrightarrow \mathrm{IR} \\ &x \mapsto \frac{3^{\ln(x)}\ln(3)}{x} \end{aligned}$$

51.4. $i'(x) = (\log(5x+1))' = \frac{5}{\ln(10)(5x+1)}$

$$\begin{aligned} i'&: \left]-\frac{1}{5}, +\infty\right[\longrightarrow \mathrm{IR} \\ &x \mapsto \frac{5}{\ln(10)(5x+1)} \end{aligned}$$

51.5. $j'(x) = \left(\log_2\left(\frac{1}{x}\right)\right)' = \frac{-\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x}\times\ln(2)} = -\frac{1}{x\ln(2)}$

$$\begin{aligned} j'&: \mathrm{IR}^+ \longrightarrow \mathrm{IR} \\ &x \mapsto -\frac{1}{x\ln(2)} \end{aligned}$$

51.6. $k'(x) = \left(\frac{1}{\log_2(x)}\right)' = \frac{0\times\log_2(x) - 1\times\frac{1}{x ln(2)}}{[\log_2(x)]^2} = \frac{-1}{x\ln(2)[\log_2(x)]^2}$

$$\begin{aligned} k'&: \mathrm{IR}^+\backslash\{1\} \longrightarrow \mathrm{IR} \\ &x \mapsto \frac{-1}{x\ln(2)[\log_2(x)]^2} \end{aligned}$$

51.7. $l'(x) = \left(\ln(\sqrt{1-x^2})\right)' = \frac{\frac{1}{2}(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}\times(-2x)}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-x^2}} = -\frac{x}{1-x^2}$

$$\begin{aligned} l'&:]-1,1[\longrightarrow \mathrm{IR} \\ &x \mapsto -\frac{x}{1-x^2} \end{aligned}$$

51.8. $m'(x) = \left(\log\left(\frac{1}{x+1}\right)\right)' = \frac{\frac{-1}{(x+1)^2}}{\frac{\ln(10)}{x+1}} = \frac{-1}{(x+1)\ln(10)}$

$$\begin{aligned} m'&:]-1,1[\longrightarrow \mathrm{IR} \\ &x \mapsto -\frac{x}{1-x^2} \end{aligned}$$

51.9. $n'(x) = \left(\pi^{\ln(x)}\right)' = \frac{1}{x} \times \pi^{\ln(x)} \times \ln(\pi)$

$$\begin{aligned} n'&: \mathrm{IR}^+ \longrightarrow \mathrm{IR} \\ &x \mapsto \frac{1}{x} \times \pi^{\ln(x)} \times \ln(\pi) \end{aligned}$$

52.

52.1. $\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{e^{-x}-1}{x} = -\lim_{x\to 0^+} \frac{e^{-x}-1}{-x} =$

Considerando a mudança de variável $y = -x \Leftrightarrow x = -y$: se $x \to 1^-$, então $y \to 0^-$.

$$= -\lim_{y\to 0^-} \frac{e^y - 1}{y} =$$

$$= -1$$

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^-} \frac{x+1-1}{x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{x}{x} = 1$$

A função não admite derivada em $x = 0$.

52.2. $\lim_{x\to 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^-} \frac{xe^{-\frac{1}{x^2}}-0}{x} = \lim_{x\to 0^-} \left(e^{-\frac{1}{x^2}}\right) = 0$

$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^-} \frac{xe^{-\frac{1}{x^2}}-0}{x} = \lim_{x\to 0^-} \left(e^{-\frac{1}{x^2}}\right) = 0$

A função admite derivada em $x = 0$.

52.3. $\lim_{x\to 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^-} \left(\frac{\frac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}}-0}{x}\right) = \lim_{x\to 0^-} \frac{x}{x\left(1+e^{\frac{1}{x}}\right)} = \lim_{x\to 0^-} \left(\frac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}\right) = \frac{1}{1+e^{-\infty}} = 1$

$\lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}}-0}{x-0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x}{x(1+e^{\frac{1}{x}})} = \lim_{x\to 0^+} \left(\frac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}\right) = 0$

A função não admite derivada em $x = 0$.

53. $f(0) = 0 \Leftrightarrow a + b + c = 0$

$f'(x) = (ae^{2x} + be^x + c)' = 2ae^{2x} + be^x$

$f'\left(\ln\left(\frac{3}{4}\right)\right) = 0 \Leftrightarrow 2ae^{2\ln\left(\frac{3}{4}\right)} + be^{\ln\left(\frac{3}{4}\right)} = 0 \Leftrightarrow 2ae^{\ln\left(\frac{9}{16}\right)} + b \times \frac{3}{4} = 0$

$\Leftrightarrow 2a \times \frac{9}{16} + \frac{3}{4}b = 0$

$\Leftrightarrow \frac{9}{8}a + \frac{3}{4}b = 0$

$\Leftrightarrow 9a + 6b = 0$

$\Leftrightarrow 3a + 2b = 0$

$\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = 1 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to -\infty} (ae^{2x} + be^x + c) = 1 \Leftrightarrow a \times 0 + b \times 0 + c = 1 \Leftrightarrow c = 1$

Então:

$$\begin{cases} a + b + 1 = 0 \\ 3a + 2b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -b - 1 \\ -3b - 3 + 2b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = -3 \end{cases}$$

54.

54.1. $f'(x) = (xe^{x-1})' = 1 \times e^{x-1} + x \times e^{x-1} = e^{x-1}(1 + x)$

$f'(1) = e^0 \times 2 = 2$

$f(1) = 1 \times e^{1-1} = 1$

O ponto de coordenadas (1,1) pertence, simultaneamente, ao gráfico de f e à reta tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa 1.

Reta tangente:

$y = 2x + b$

$1 = 2 \times 1 + b \Leftrightarrow b = -1$

$\therefore y = 2x - 1$

Reta normal:

$y = -\frac{1}{2}x + b$

$1 = -\frac{1}{2} \times 1 + b \Leftrightarrow 1 + \frac{1}{2} = b \Leftrightarrow b = \frac{3}{2}$

$\therefore y = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$

54.2. $f'(x) = \frac{2x}{1+x^2}$

$f'(2) = \frac{4}{5}$

$f(2) = \ln(1 + 2^2) = \ln(5)$

O ponto de coordenadas $(2, \ln(5))$ pertence, simultaneamente, ao gráfico de f e à reta tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa 2.

Reta tangente:

$y = \frac{4}{5}x + b$

$\ln(5) = \frac{4}{5} \times 2 + b \Leftrightarrow b = \ln(5) - \frac{8}{5}$

$\therefore y = \frac{4}{5}x + \ln(5) - \frac{8}{5}$

Reta normal:

$y = -\frac{5}{4}x + b$

$\ln(5) = -\frac{5}{4} \times 2 + b \Leftrightarrow \ln(5) = -\frac{5}{2} + b \Leftrightarrow b = \ln(5) + \frac{5}{2}$

$\therefore y = -\frac{5}{4}x + \ln(5) + \frac{5}{2}$

55. $6x - 2y = 7 \Leftrightarrow -2y = -6x + 7$

$\Leftrightarrow y = 3x - \frac{7}{2}$

$f'(x) = 3 \Leftrightarrow (x - e^{-x})' = 3$

$\Leftrightarrow 1 + e^{-x} = 3$

$\Leftrightarrow e^{-x} = 2$

$\Leftrightarrow -x = \ln(2)$

$\Leftrightarrow x = -\ln(2)$

$f(-\ln(2)) = -\ln(2) - e^{-(-\ln(2))} = -\ln(2) - 2$

$-\ln(2)-2=3\times(-\ln(2))+b \Leftrightarrow b=-\ln(2)-2+3\ln(2)$

$\Leftrightarrow b=-2+2\ln(2)$

$\Leftrightarrow b=-2+\ln(4)$

Assim, a equação da reta tangente ao gráfico de f e paralela à reta de equação $6x-2y=7$ é $y=3x-2+\ln(4)$.

56.

56.1. $D_f=\mathrm{IR}\backslash\{0\}$

$f'(x)=\frac{e^x\times x-e^x}{x^2}=\frac{e^x(x-1)}{x^2}$

$f'(x)=0$

$\Leftrightarrow e^x(x-1)=0 \quad \wedge \quad x\neq 0$

$\Leftrightarrow x=1$

x	$-\infty$	0		1	$+\infty$
Sinal de f'	$-$	n.d.	$-$	0	+
Variação de f	↘	n.d.	↘	e mín.	↗

Cálculo auxiliar

$f(1)=\frac{e^1}{1}=e$

f é estritamente decrescente em $]-\infty,0[$ e em $]0,1]$ e é estritamente crescente em $[1,+\infty[$.

f tem um mínimo relativo igual a e para $x=1$.

56.2. $D_g=\mathrm{IR}^+$

$g'(x)=1\times\ln(x)+x\times\frac{1}{x}=\ln(x)+1$

$g'(x)=0\Leftrightarrow \ln(x)+1=0\Leftrightarrow \ln(x)=-1$

$\Leftrightarrow x=e^{-1}$

$\Leftrightarrow x=\frac{1}{e}$

x	0		$\frac{1}{e}$	$+\infty$
Sinal de g'	n.d.	$-$	0	+
Variação de g	n.d.	↘	mín.	↗

Cálculo auxiliar

$g\left(\frac{1}{e}\right)=\frac{1}{e}\times\ln(e^{-1})=-\frac{1}{e}$

g é estritamente decrescente em $\left]0,\frac{1}{e}\right]$ e é estritamente crescente em $\left[\frac{1}{e},+\infty\right[$.

g tem um mínimo relativo (absoluto) igual a $-\frac{1}{e}$ para $x=\frac{1}{e}$.

57.

57.1. $f(x) \leq 0 \Leftrightarrow -[\ln(x)]^2 + 2\ln(x) \leq 0$

Considerando a mudança de variável $y = \ln(x) \Leftrightarrow x = e^y$, tem-se:

$\Leftrightarrow -y^2 + 2y \leq 0$

Cálculo auxiliar $y^2 + 2y = 0 \Leftrightarrow y(-y+2) = 0 \Leftrightarrow y = 0 \ \vee -y + 2 = 0 \Leftrightarrow y = 0 \ \vee \ y = 2$

$\Leftrightarrow y \leq 0 \quad \vee \quad y \geq 2$

$\Leftrightarrow \ln(x) \leq 0 \quad \vee \quad \ln(x) \geq 2$

$\Leftrightarrow x \leq e^0 \quad \vee \quad x \geq e^2$

$\Leftrightarrow x \leq 1 \quad \vee \quad x \geq e^2$

C.S. $=]0,1] \cup [e^2, +\infty[$

57.2. $f'(x) = -2\ln(x) \times \frac{1}{x} + 2 \times \frac{1}{x} = \frac{-2\ln(x)+2}{x}$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{-2\ln(x)+2}{x} = 0 \Leftrightarrow -2\ln(x) + 2 = 0 \ \wedge \ x \neq 0$

$\Leftrightarrow \ln(x) = 1 \ \wedge \ x \neq 0$

$\Leftrightarrow x = e \ \wedge \ x \neq 0$

x	0		e	$+\infty$
Sinal de f'	n.d.	$+$	0	$-$
Variação de f	n.d.	$\nearrow$	1	$\searrow$

Cálculo auxiliar $f(e) = -[\ln(e)]^2 + 2\ln(e) = -1 + 2 = 1$

Como 1 é máximo absoluto, $f(x) \leq 1, \forall x \in \mathrm{IR}^+$.

57.3. Vimos que $f'(x) = \frac{-2\ln(x)+2}{x} = \frac{2(1-\ln(x))}{x}$.

$f''(x) = \frac{\left(-2\times\frac{1}{x}\right)x - (-2\ln(x)+2)\times 1}{x^2} = \frac{-2+2\ln(x)-2}{x^2} = \frac{2\ln(x)-4}{x^2}$

$f''(x) = 0 \Leftrightarrow 2\ln(x) - 4 = 0 \ \wedge \ x \neq 0 \Leftrightarrow \ln(x) = 2 \ \wedge \ x \neq 0 \Leftrightarrow x = e^2 \ \wedge \ x \neq 0$

x	0		e^2	$+\infty$
Sinal de f''	n.d.	$-$	0	$+$
Sentido das concavidades do gráfico de f	n.d.	$\cap$	P.I.	$\cup$

Cálculo auxiliar $f(e^2) = -[\ln(e^2)]^2 + 2\ln(e^2) = -\left(2\ln(e)\right)^2 + 4\ln(e) = -4 + 4 = 0$

O gráfico de f tem a concavidade voltada para baixo em $]0, e^2]$ e tem a concavidade voltada para cima em $[e^2, +\infty[$.

O ponto de coordenadas $(e^2, 0)$ é ponto de inflexão do gráfico de f.

58.

58.1. $D_f = \{x \in \mathbb{R}: e^x - 1 > 0\} = \mathbb{R}^+$

Cálculo auxiliar
$e^x - 1 > 0 \Leftrightarrow e^x > 1 \Leftrightarrow x > 0$

$D_g = \{x \in \mathbb{R}: x > 0 \ \ \wedge x \neq 0\} = \mathbb{R}^+$

$D_h = \left\{x \in \mathbb{R}: \frac{x+1}{x} > 0 \ \ \wedge x \neq 0\right\} =]-\infty, -1[\cup]0, +\infty[$

Cálculo auxiliar

x	$-\infty$	-1		0	$+\infty$
$x+1$	$-$	0	+	+	+
x	$-$	$-$	$-$	0	+
$\frac{x+1}{x}$	+	0	$-$	n.d.	+

58.2. $f(x) = 0 \Leftrightarrow \ln(e^x - 1) = 0 \Leftrightarrow e^x - 1 = 1 \ \wedge \ x \in D_f$

$\Leftrightarrow e^x = 2 \ \wedge \ x \in D_f \Leftrightarrow x = \ln(2)$

$g(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{\ln(x)}{x} = 0 \ \wedge \ x \in D_g \Leftrightarrow \ln(x) = 0 \ \wedge \ x \in D_g \Leftrightarrow x = 1$

58.3. A função f é contínua em $\mathbb{R}^+$, logo o único candidato a assíntota vertical ao seu gráfico é a reta de equação $x = 0$.

$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \ln(e^x - 1) = \ln(0^+) = -\infty$

A reta de equação $x = 0$ é assíntota vertical ao gráfico de f.

$$m = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(e^x - 1)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln\left(e^x\left(1 - \frac{1}{e^x}\right)\right)}{x} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(e^x) + \ln\left(1 - \frac{1}{e^x}\right)}{x} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{x + \ln\left(1 - \frac{1}{e^x}\right)}{x} =$$

$$= 1 + \frac{\ln(1)}{+\infty} =$$

$$= 1$$

$$b = \lim_{x\to+\infty} (f(x) - x) = \lim_{x\to+\infty} (\ln(e^x - 1) - x) =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \left(\ln\left(e^x\left(1 - \frac{1}{e^x}\right)\right) - x\right) =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \left(\ln\left((e^x) + \ln\left(1 - \frac{1}{e^x}\right)\right) - x\right) =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \ln\left(1 - \frac{1}{e^x}\right) =$$

$$= \ln(1) =$$

$$= 0$$

A reta de equação $y = x$ é assíntota oblíqua ao gráfico de f quando $x \to +\infty$. Dado o domínio de f ser $\mathbb{R}^+$, não faz sentido averiguar a existência de assíntota não vertical ao seu gráfico quando $x \to -\infty$.

A função g é contínua em $\mathbb{R}^+$, logo o único candidato a assíntota vertical ao seu gráfico é a reta de equação $x = 0$.

$$\lim_{x\to 0^+} g(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(x)}{x} = \frac{\ln(0^+)}{0^+} = -\infty$$

A reta de equação $x = 0$ é assíntota vertical ao gráfico de g.

$$m = \lim_{x\to +\infty} \frac{g(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{\ln(x)}{x}}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x} \times \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0 \times 0 = 0$$

A reta de equação $y = 0$ é assíntota horizontal ao gráfico de g quando $x \to +\infty$.

Dado o domínio de g ser $\mathbb{R}^+$, não faz sentido averiguar a existência de assíntota não vertical ao seu gráfico quando $x \to -\infty$.

A função h é contínua em $]-\infty, -1[\, \cup\,]0, +\infty[$, logo os únicos candidatos a assíntotas verticais ao seu gráfico são as retas de equação $x = -1$ e $x = 0$.

$$\lim_{x\to -1^-} h(x) = \lim_{x\to -1^-} \left(\frac{1}{x} - \ln\left(\frac{x+1}{x}\right)\right) = \lim_{x\to -1^-} \frac{1}{x} - \lim_{x\to -1^-} \ln\left(\frac{x+1}{x}\right) =$$

$$= -1 - \lim_{x\to -1^-} \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) =$$

$$= -1 - \ln(0^+) =$$

$$= +\infty$$

A reta de equação $x = -1$ é assíntota vertical ao gráfico de h.

$$\lim_{x\to 0^+} h(x) = \lim_{x\to 0^+} \left(\frac{1}{x} - \ln\left(\frac{x+1}{x}\right)\right) = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} - \lim_{x\to 0^+} \ln\left(\frac{x+1}{x}\right) =$$

$$= +\infty - \lim_{x\to 0^+} \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) =$$

$$= +\infty - \lim_{x\to 0^+} \ln(0^+) =$$

$$= +\infty$$

A reta de equação $x = 0$ é assíntota vertical ao gráfico de h.

$$m = \lim_{x\to -\infty} \frac{h(x)}{x} = \lim_{x\to -\infty} \frac{\frac{1}{x} - \ln\left(\frac{x+1}{x}\right)}{x} =$$

$$= \lim_{x\to -\infty} \frac{\frac{1}{x} - \ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{x} =$$

$$= \lim_{x\to -\infty} \frac{1}{x^2} - \lim_{x\to -\infty} \frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{x} =$$

$$= 0 - \frac{\ln(1)}{-\infty} =$$

$$= 0$$

$$b=\lim_{x\to-\infty}h(x)=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{x}-\ln\left(\frac{x+1}{x}\right)\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{x}\right)-\lim_{x\to-\infty}\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)=$$
$$=0-\ln(1)=$$
$$=0$$

A reta de equação $y=0$ é assíntota horizontal ao gráfico de h quando $x\to-\infty$.

$$m=\lim_{x\to+\infty}\frac{h(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}-\ln\left(\frac{x+1}{x}\right)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}-\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{x}=$$
$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^2}-\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{x}=$$
$$=0-\frac{\ln(1)}{+\infty}=$$
$$=0$$

$$b=\lim_{x\to+\infty}h(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x}-\ln\left(\frac{x+1}{x}\right)\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x}\right)-\lim_{x\to+\infty}\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)=$$
$$=0-\ln(1)=$$
$$=0$$

A reta de equação $y=0$ é assíntota horizontal ao gráfico de h quando $x\to+\infty$.

58.4. $f'(x)=(\ln(e^x-1))'=\frac{(e^x-1)'}{e^x-1}=\frac{e^x}{e^x-1}$

$f'(x)>0, \forall x\in D_f$

A função f é estritamente crescente em $\mathbb{R}^+$ e não tem extremos.

$$g'(x)=\left(\frac{\ln(x)}{x}\right)'=\frac{(\ln(x))'x-\ln(x)(x)'}{x^2}=\frac{\frac{1}{x}\times x-\ln(x)}{x^2}=\frac{1-\ln(x)}{x^2}$$

$$g'(x)=0\Leftrightarrow\frac{1-\ln(x)}{x^2}=0\Leftrightarrow 1-\ln(x)=0\quad\wedge\ x^2\neq 0$$
$$\Leftrightarrow\ln(x)=1\quad\wedge\ x\neq 0$$
$$\Leftrightarrow x=e$$

x	0		e	$+\infty$
Sinal de g'	n.d.	$+$	0	$-$
Variação de g	n.d.		Máx.	

Cálculo auxiliar

$g(e)=\frac{\ln(e)}{e}=\frac{1}{e}$

A função g é estritamente crescente em $]0,e]$ e é estritamente decrescente em $[e,+\infty[$; tem máximo absoluto $\frac{1}{e}$ para $x=e$.

$$h'(x)=\left(\frac{1}{x}-\ln\left(\frac{x+1}{x}\right)\right)'=\left(\frac{1}{x}\right)'-\frac{\left(\frac{x+1}{x}\right)'}{\frac{x+1}{x}}=-\frac{1}{x^2}-\frac{\frac{x-x-1}{x^2}}{\frac{x+1}{x}}=$$
$$=-\frac{1}{x^2}+\frac{x}{x^2(x+1)}=\frac{-x-1+x}{x^2(x+1)}=\frac{-1}{x^2(x+1)}$$

x	$-\infty$	-1	0	$+\infty$
Sinal de h'	$+$	n.d.	n.d.	$-$
Variação de h	$\nearrow$	n.d.	n.d.	$\searrow$

A função h é estritamente crescente em $]-\infty,-1[$ e é estritamente crescente em $]0,+\infty$ [; não tem extremos.

58.5. $f''(x)=\left(\frac{e^x}{e^x-1}\right)''=\frac{e^x(e^x-1)-e^x\times e^x}{(e^x-1)^2}=\frac{e^x(e^x-1-e^x)}{(e^x-1)^2}=\frac{-e^x}{(e^x-1)^2}$

$f''(x)<0, \forall x\in D_f$

O gráfico de f tem a concavidade voltada para baixo em $\mathbb{R}^+$, não tem pontos de inflexão.

$g''(x)=\left(\frac{1-\ln(x)}{x^2}\right)'=\frac{-\frac{1}{x}\times x^2-(1-\ln(x))\times 2x}{x^4}=\frac{-x-2x(1-\ln(x))}{x^4}=\frac{-3+2\ln(x)}{x^3}$

$g''(x)=0 \Leftrightarrow \frac{-3+2\ln(x)}{x^3}=0 \Leftrightarrow -3+2\ln(x)=0 \ \wedge \ x^3 \neq 0$

$\Leftrightarrow \ln(x)=\frac{3}{2} \ \wedge \ x \neq 0$

$\Leftrightarrow x=e^{\frac{3}{2}}$

x	0		$e^{\frac{3}{2}}$	$+\infty$
Sinal de g''	n.d.	$-$	0	$+$
Sentido das concavidades do gráfico de g	n.d.	$\cap$	P.I.	$\cup$

Cálculo auxiliar

$g\left(e^{\frac{3}{2}}\right)=\frac{\ln\left(e^{\frac{3}{2}}\right)}{e^{\frac{3}{2}}}=\frac{3}{2e^{\frac{3}{2}}}$

O gráfico de g tem a concavidade voltada para baixo em $\left]0,e^{\frac{3}{2}}\right]$ e tem a concavidade voltada para cima em $\left[e^{\frac{3}{2}},+\infty\right[$; tem um ponto de inflexão de coordenadas $\left(e^{\frac{3}{2}},\frac{3}{2e^{\frac{3}{2}}}\right)$.

$h''(x)=\left(\frac{-1}{x^2(x+1)}\right)''=\frac{(x^2)'(x+1)+x^2}{x^4(x+1)^2}=\frac{2x^2+2x+x^2}{x^4(x+1)^2}=$

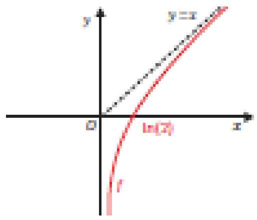
$=\frac{3x^2+2x}{x^4(x+1)^2}=$

$=\frac{3x+2}{x^3(x+1)^2}$

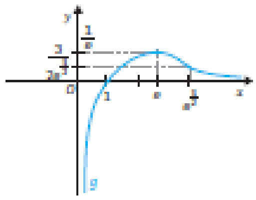
x	$-\infty$	-1	0	$+\infty$
Sinal de h''	$+$	n.d.	n.d.	$+$
Sentido das concavidades do gráfico de h	$\cup$	n.d.	n.d.	$\cup$

O gráfico de h tem a concavidade voltada para cima e todo o seu domínio.

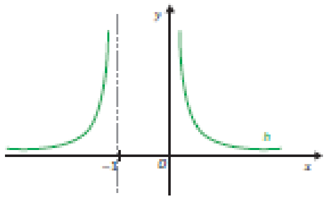
58.6.



$D'_f = \mathbb{R}$



$D'_g = \left]-\infty, \frac{1}{e}\right]$



$D'_h = \mathbb{R}^+$

59. $f(x) = \ln^2(x + 2\ln(x)$

$f'(x) = \frac{2\ln(x)}{x} + \frac{2}{x} = \frac{2\ln(x)+2}{x}$

$f''(x) = \frac{-2\ln(x)}{x^2}$

$f'''(x) = \frac{4\ln(x)-2}{x^3}$

$$f'(x) + xf''(x) + x^2f'''(x) = \frac{2\ln(x)+2}{x} + x \times \frac{-2\ln(x)}{x^2} + x^2 \times \frac{4\ln(x)-2}{x^3} =$$

$$= \frac{2\ln(x)+2-2\ln(x)+4\ln(x)-2}{x} =$$

$$= \frac{4\ln(x)}{x} \qquad \text{c. q. m.}$$

60.

60.1. $f(x) = xe^x$

Domínio: IR

Zeros : $xe^x = 0 \Leftrightarrow x = 0 \ \vee \ \underbrace{e^x = 0}_{\text{equação impossível}}$

$\Leftrightarrow x = 0$

$(0,0)$ é a interseção do gráfico de f com os eixos coordenados.

Continuidade: f é contínua em todo o seu domínio.

Paridade:

$f(-x) = -xe^{-x}$

$-f(x) = -xe^x$

Como $f(x) \neq f(-x)$ e $f(-x) \neq -f(x)$, f não é par nem ímpar.

Monotonia e extremos:

$f'(x) = e^x + x \times e^x = e^x(1 + x)$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow e^x(1+x) = 0 \Leftrightarrow \underbrace{e^x = 0}_{\text{equação impossível}} \quad \vee \ 1 + x = 0$

$\Leftrightarrow x = -1$

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
Sinal de f'		$-$	0	$+$	
Variação de f		$\searrow$	mín.	$\nearrow$	

Cálculo auxiliar

$f(-1) = -1 \times e^{-1} = -\frac{1}{e}$

f é estritamente decrescente em $]-\infty, -1]$ e é estritamente crescente em $[-1, +\infty[$; tem um mínimo relativo (absoluto) igual a $-\frac{1}{e}$ para $x = -1$.

Concavidades e pontos de inflexão:

$f''(x) = e^x(1+x) + e^x = e^x(x+2)$

$f''(x) = 0 \Leftrightarrow e^x(x+2) = 0 \Leftrightarrow \underbrace{e^x = 0}_{\text{equação impossível}} \quad \vee \ x + 2 = 0$

$\Leftrightarrow x = -2$

x	$-\infty$		-2		$+\infty$
Sinal de f''		$-$	0	$+$	
Sentido das concavidades do gráfico de f		$\cap$	P. I.	$\cup$	

Cálculo auxiliar

$f(-2) = -2 \times e^{-2} = -\frac{2}{e^2}$

O gráfico de f tem a concavidade voltada para baixo em $]-\infty, -2[$ e tem a concavidade voltada para cima em $]-2, +\infty[$. O ponto de coordenadas $\left(-2, -\frac{2}{e^2}\right)$ é ponto de inflexão do gráfico de f.

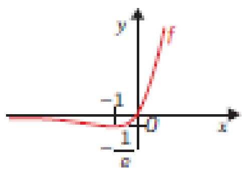
Assíntotas: o gráfico de f não tem assíntotas verticais, uma vez que f é contínua em IR (domínio de f).

$\lim\limits_{x \to +\infty} (xe^x) = +\infty \times e^{+\infty} = +\infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} (xe^x) = -\infty \times e^{-\infty} = -\infty \times 0 = 0$

$y = 0$ é assíntota horizontal ao gráfico de f quando $x \to -\infty$.

Representação gráfica:



Contradomínio: $D'_f = \left[-\frac{1}{e}, +\infty\right[$

60.2. $f(x) = x^2e^{-2x}$

Domínio: $\mathbb{R}$

Zeros: $x^2e^{-2x} = 0 \Leftrightarrow x^2 = 0 \ \vee \ e^{-2x} = 0 \Leftrightarrow x = 0 \ \vee \ \underbrace{e^{-2x} = 0}_{\text{equação impossível}} \Leftrightarrow x = 0$

0 é o único zero de f.

$(0,0)$ é o ponto de interseção do gráfico de f com o eixo Oy.

Continuidade: f é contínua em todo o seu domínio.

Paridade:

$f(-x) = (-x)^2e^{2x} = x^2e^{2x}$

$-f(x) = -x^2e^{-2x}$

Como $f(x) \neq f(-x)$ e $f(-x) \neq -f(x)$, f não é par nem ímpar.

Monotonia e extremos:

$f'(x) = 2xe^{-2x} + x^2 \times (-2)e^{-2x} = 2xe^{-2x}(1-x)$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2xe^{-2x}(1-x) = 0$

$\Leftrightarrow 2x = 0 \ \vee \ \underbrace{e^{-2x} = 0}_{\text{equação impossível}} \ \vee \ 1 - x = 0$

$\Leftrightarrow x = 0 \ \vee \ x = 1$

x	$-\infty$	0		1	$+\infty$
$2x$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
e^{-2x}	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$1-x$	$+$	$+$	$+$	0	$-$
Sinal de f'	$-$	0	$+$	0	$-$
Variação de f	$\searrow$	mín.	$\nearrow$	Máx.	$\searrow$

Cálculos auxiliares
$f(0) = 0$
$f(1) = 1^2 \times e^{-2\times1} = e^{-2}$

f é estritamente decrescente em $]-\infty, 0]$ e em $[1, +\infty[$ e é estritamente crescente em $[0,1]$; tem um mínimo relativo igual a 0 para $x = 0$ e tem um máximo relativo igual a e^{-2} para $x = 1$.

Concavidades e pontos de inflexão:

$f'(x) = 2xe^{-2x}(1-x) = 2xe^{-2x} - 2x^2e^{-2x}$

$f''(x) = 2e^{-2x} + 2x \times (-2)e^{-2x} - [4xe^{-2x} + 2x^2 \times (-2)e^{-2x}] =$

$= 2e^{-2x} - 4xe^{-2x} - 4xe^{-2x} + 4x^2e^{-2x} =$

$= 2e^{-2x}(1 - 2x - 2x + 2x^2) =$

$= 2e^{-2x}(2x^2 - 4x + 1)$

$f''(x) = 0 \Leftrightarrow 2e^{-2x}(2x^2 - 4x + 1) \Leftrightarrow 2e^{-2x} = 0 \ \vee \ 2x^2 - 4x + 1 = 0$

$$\Leftrightarrow \underbrace{e^{-2x}=0}_{\text{equação impossível}} \quad \vee \quad x=\frac{4\pm\sqrt{16-8}}{4}$$

$$\Leftrightarrow x=\frac{4\pm 2\sqrt{2}}{4}$$

$$\Leftrightarrow x=\frac{2\pm\sqrt{2}}{2}$$

$$\Leftrightarrow x=1\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$$

x	$-\infty$	$1-\frac{\sqrt{2}}{2}$		$1+\frac{\sqrt{2}}{2}$	$+\infty$
$2e^{-2x}$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$2x^2-4x+1$	$+$	0	$-$	0	$+$
Sinal de f''	$+$	0	$-$	0	$+$
Sentido das concavidades do gráfico de f	$\cup$	P. I.	$\cap$	P. I.	$\cup$

Cálculos auxiliares

$f\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 e^{-2\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}=\left(1-\sqrt{2}+\frac{1}{2}\right)e^{-2+\sqrt{2}}=\left(\frac{3}{2}-\sqrt{2}\right)e^{-2+\sqrt{2}}$

$f\left(1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\left(1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 e^{-2\left(1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}=\left(1+\sqrt{2}+\frac{1}{2}\right)e^{-2-\sqrt{2}}=\left(\frac{3}{2}+\sqrt{2}\right)e^{-2-\sqrt{2}}$

O gráfico de f tem a concavidade voltada para cima em $\left]-\infty,1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right]$ e em $\left[1+\frac{\sqrt{2}}{2},+\infty\right[$ e tem a concavidade voltada para baixo em $\left[1-\frac{\sqrt{2}}{2},1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right]$. Os pontos de coordenadas $\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2};\left(\frac{3}{2}-\sqrt{2}\right)e^{-2+\sqrt{2}}\right)$ e $\left(1+\frac{\sqrt{2}}{2};\left(\frac{3}{2}+\sqrt{2}\right)e^{-2-\sqrt{2}}\right)$ são pontos de inflexão do gráfico de f.

Assíntotas: o gráfico de f não tem assíntotas verticais, uma vez que f é contínua em IR (domínio de f).

Assíntotas não verticais

$x\to+\infty$

$$m=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\left(xe^{-2x}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{e^{2x}}=$$

$$=\frac{1}{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^{2x}}{x}}=\frac{1}{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{e^x}{x}\times e^x\right)}=$$

$$=\frac{1}{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x}\times\lim\limits_{x\to+\infty}e^x}=\frac{1}{+\infty\times(+\infty)}=\frac{1}{+\infty}=0$$

$$b=\lim_{x\to+\infty}\left(f(x)-0x\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(x^2e^{-2x}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{e^{2x}}=$$

$$=\frac{1}{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^{2x}}{x^2}}=\frac{1}{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{e^x}{x}\right)^2}=\frac{1}{\left(\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x}\right)^2}=\frac{1}{(+\infty)^2}=\frac{1}{+\infty}=0$$

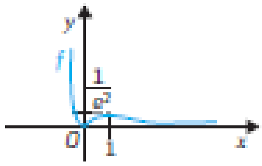
A reta de equação $y = 0$ é assíntota horizontal ao gráfico de f quando $x \to +\infty$.

$x \to -\infty$

$$m = \lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to -\infty} (xe^{-2x}) = -\infty \times (+\infty) = -\infty$$

Como o vlor obtido não é um número real, concluímos que f não admite assíntota não vertical quando $x \to -\infty$.

Representação gráfica:



Contradomínio: $D'_f = \mathbb{R}_0^+$

60.3. $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$

Domínio: $\mathrm{IR}\backslash\{0\}$

Zeros: não tem

Continuidade: f é contínua em todo o seu domínio.

Paridade:

$f(-x) = e^{-\frac{1}{x}}$

$-f(x) = -e^{\frac{1}{x}}$

Como $f(x) \neq f(-x)$ e $f(-x) \neq -f(x)$, f não é par nem ímpar.

Monotonia e extremos:

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}}$$

Como $f'(x) < 0, \forall x \in \mathrm{IR}\backslash\{0\}, f$ é estritamente decrescente em $]-\infty, 0[$ e em $]0, +\infty[$.

$$f''(x) = \frac{2}{x^3} \times e^{\frac{1}{x}} + \left(-\frac{1}{x^2}\right) \times \left(-\frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}}\right) =$$

$$= \frac{2}{x^3} \times e^{\frac{1}{x}} + \frac{1}{x^4} \times e^{\frac{1}{x}} =$$

$$= e^{\frac{1}{x}} \left(\frac{2}{x^3} + \frac{1}{x^4}\right)$$

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow e^{\frac{1}{x}} \left(\frac{2}{x^3} + \frac{1}{x^4}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{x^3} + \frac{1}{x^4} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{2x+1}{x^4} = 0$$

$$\Leftrightarrow 2x + 1 = 0 \ \wedge \ x \neq 0$$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{1}{2} \wedge \ x \neq 0$$

x	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$		0	$+\infty$
Sinal de f''	$-$	0	$+$	n. d.	$+$
Sentido das concavidades do gráfico de f	$\cap$	P. I.	$\cup$	n. d.	$\cup$

Cálculo auxiliar

$f\left(-\frac{1}{2}\right) = e^{\frac{1}{-\frac{1}{2}}} = e^{-2} = \frac{1}{e^2}$

O gráfico de f tem a concavidade voltada para cima em $\left[-\frac{1}{2}, 0\right[$ e em $]0, +\infty[$ e tem a concavidade voltada para baixo em $\left]-\infty, -\frac{1}{2}\right]$; o ponto de coordenadas $\left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{e^2}\right)$ é ponto de inflexão do gráfico de f.

Assíntotas:

$\lim_{x\to 0^+}\left(e^{\frac{1}{x}}\right) = e^{\frac{1}{0^+}} = +\infty$

$x = 0$ é assíntota vertical ao gráfico de f.

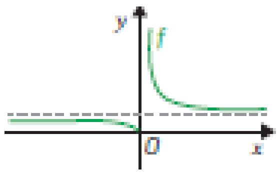
$\lim_{x\to +\infty}\left(e^{\frac{1}{x}}\right) = e^0 = 1$

$\lim_{x\to -\infty}\left(e^{\frac{1}{x}}\right) = e^{\frac{1}{-\infty}} = e^0 = 1$

$y = 1$ é assíntota horizontal ao gráfico de f quando $x \to -\infty$.

$y = 1$ é assíntota horizontal ao gráfico de f quando $x \to +\infty$.

Representação gráfica:



Contradomínio: $D'_f = \mathbb{R}^+\{1\}$

60.4. $f(x) = xe^{-x}$

Domínio: IR

Zeros: $xe^{-x} = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee \underbrace{e^{-x} = 0}_{\text{equação impossível}} \Leftrightarrow x = 0$

$(0,0)$ é a interseção do gráfico de f com os eixos coordenados.

Continuidade: f é contínua em todo o seu domínio.

Paridade:

$f(-x) = -xe^{x}$

$-f(x) = -xe^{-x}$

Como $f(x) \neq f(-x)$ e $f(-x) \neq -f(x)$, f não é par nem ímpar.

Monotonia e extremos:

$f'(x) = e^{-x} + x \times (-e^{-x}) = e^{-x}(1-x)$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow e^{-x}(1-x) = 0 \Leftrightarrow \underbrace{e^{-x} = 0}_{\text{equação impossível}} \vee 1 - x = 0 \Leftrightarrow x = 1$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
Sinal de f'	$+$	0	$-$
Variação de f	$\nearrow$	Máx.	$\searrow$

Cálculo auxiliar

$f(1) = 1 \times e^{-1} = \frac{1}{e}$

f é estritamente crescente em $]-\infty, 1]$ e estritamente decrescente em $[1, +\infty[$; tem um máximo absoluto igual a $\frac{1}{e}$ para $x = 1$.

Concavidades e pontos de inflexão:

$f''(x) = e^{-x}(1-x)' = -e^{-x}(1-x) - e^{-x} =$

$= e^{-x}(-1 + x - 1) =$

$= e^{-x}(x-2)$

$f''(x) = 0 \Leftrightarrow e^{-x}(x-2) = 0 \Leftrightarrow \underbrace{e^{-x} = 0}_{\text{equação impossível}} \vee x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 2$

x	$-\infty$	2	$+\infty$
Sinal de f''	$-$	0	$+$
Sentido das concavidades do gráfico de f	$\cap$	P. I.	$\cup$

Cálculo auxiliar

$f(2) = 2 \times e^{-2} = \frac{2}{e^2}$

O gráfico de f tem a concavidade voltada para baixo em $]-\infty, 2]$ e tem a concavidade voltada para cima em $[2, +\infty[$O ponto de coordenadas $\left(2, \frac{2}{e^2}\right)$ é ponto de inflexão do gráfico de f.

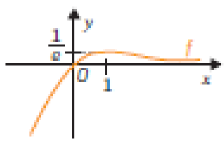
Assíntotas:

$\lim_{x\to+\infty}(xe^{-x}) = 0$

$\lim_{x\to-\infty}(xe^{x}) = -\infty$

$y = 0$ é assíntota horizontal ao gráfico de f quando $x \to +\infty$.

Representação gráfica:



Contradomínio: $D'_f = \left]-\infty, \frac{1}{e}\right]$

60.5. $f(x) = (1 - \ln(x))^2$

Domínio: IR^+

Zeros: $f(x) = 0 \Leftrightarrow (1 - \ln(x))^2 = 0$

$\Leftrightarrow 1 - \ln(x) = 0$

$\Leftrightarrow -\ln(x) = -1$

$\Leftrightarrow \ln(x) = 1$

$\Leftrightarrow x = e$

$(0, e)$ é a interseção do gráfico de f com os eixos coordenados.

Continuidade: f é contínua em todo o seu domínio.

Paridade:

$f(-x) = (1 - \ln(-x))^2$

$-f(x) = -(1 - \ln(x))^2$

Como $f(x) \neq f(-x)$ e $f(-x) \neq -f(x)$, f não é par nem ímpar.

Monotonia e extremos:

$$f'(x) = 2(1 - \ln(x)) \times \left(-\frac{1}{x}\right) = \frac{-2(1 - \ln(x))}{x}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{-2(1 - \ln(x))}{x} = 0$$

$\Leftrightarrow -2(1 - \ln(x)) = 0 \ \wedge \ x \neq 0$

$\Leftrightarrow 1 - \ln(x) = 0 \ \wedge \ x \neq 0$

$\Leftrightarrow \ln(x) = 1 \wedge x \neq 0 \Leftrightarrow x = e$

x	0		e	$+\infty$
Sinal de f'	n. d.	$-$	0	$+$
Variação de f	n.d.	↘	mín.	↗

Cálculo auxiliar
$f(e) = [1 - \ln(e)]^2 = 0$

f é estritamente decrescente em $]0, e]$ e é estritamente crescente em $[e, +\infty[$; tem um mínimo absoluto igual a 0 para $x = e$.

Concavidades e pontos de inflexão:

$$f''(x) = \frac{-2\times\left(-\frac{1}{x}\right)\times x - (-2(1-\ln(x))}{x^2} = \frac{2-(-2+2lnx)}{x^2} = \frac{4-2\ln(x)}{x^2}$$

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{4-2\ln(x)}{x^2} = 0$$

$\Leftrightarrow 4 - 2\ln(x) = 0 \ \wedge \ x > 0$

$\Leftrightarrow \ln(x) = 2 \wedge x > 0$

$\Leftrightarrow x = e^2$

x	0		e^2	$+\infty$
Sinal de f''	n.d.	$+$	0	$-$
Sentido das concavidades do gráfico de f	n.d.	$\cup$	P.I.	$\cap$

Cálculo auxiliar
$f(e^2) = [1 - \ln(e^2)]^2 = 1$

O gráfico de f tem a concavidade voltada para cima em $]0, e^2]$ e tem a concavidade voltada para baixo em $[e^2, +\infty[$. O ponto de coordenadas $(e^2, 1)$ é ponto de inflexão do gráfico de f.

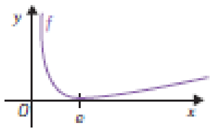
Assíntotas:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} (1 - \ln(x))^2 = \big(1 - (+\infty)\big)^2 = +\infty$$

$$\lim_{x\to 0^+} (1 - \ln(x))^2 = (1 - \ln(0^+))^2 = \big(1 - (-\infty)\big)^2 = +\infty$$

$x = 0$ é assíntota vertical ao gráfico de f.

Representação gráfica:



Contradomínio: $D'_f = \mathbb{R}_0^+$

60.6. $f(x) = x^2(3 - 2\ln(x))$

Domínio: $D = \mathrm{IR}^+$

Zeros: $f(x) = 0 \Leftrightarrow x^2(3 - 2\ln(x)) = 0 \Leftrightarrow x^2 = 0 \ \vee \ 3 - 2\ln(x) = 0$

$$\Leftrightarrow x = 0 \ \vee \ \ln(x) = \frac{3}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \ \vee \ x = e^{\frac{3}{2}}$$

$\left(0, e^{\frac{3}{2}}\right)$ é a interseção do gráfico de f com os eixos coordenados.

Continuidade: f é contínua em todo o seu domínio.

Paridade:

$f(-x) = (-x)^2(3 - 2\ln(-x)) = x^2(3 - 2\ln(-x)) = 3x^2 - 2x^2\ln(-x)$

$-f(x) = -x^2(3 - 2\ln(x)) = -3x^2 + 2x^2\ln(x)$

Como $f(x) \neq f(-x)$ e $f(-x) \neq -f(x)$, f não é par nem ímpar.

Monotonia e Extremos:

$$f'(x) = 2x(3 - 2\ln(x)) + x^2 \times \left(-2 \times \frac{1}{x}\right) = 2x(3 - 2\ln(x)) - 2x =$$

$$= 2x(3 - 2\ln(x) - 1) =$$

$$= 2x(2 - 2\ln(x))$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x(2 - 2\ln(x)) = 0 \Leftrightarrow 2x = 0 \ \vee \ 2 - 2\ln(x) = 0$$
$$\Leftrightarrow x = 0 \ \vee \ \ln(x) = 1$$
$$\Leftrightarrow x = 0 \ \vee \ x = e$$

x	0		e	$+\infty$
Sinal de f'	n.d.	$+$	0	$-$
Variação de f	n.d.	$\nearrow$	Máx.	$\searrow$

Cálculo auxiliar
$f(e) = e^2(3 - 2\ln(e)) = e^2$

f é crescente em $]0, e]$ e é decrescente em $[e, +\infty[$; tem um máximo absoluto igual a e^2 para $x = e$.

Concavidades e pontos de inflexão:

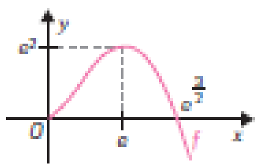
$$f''(x) = 2(2 - 2\ln(x)) + 2x\left(-2 \times \frac{1}{x}\right) = 4 - 4\ln(x) - 4 = -4\ln(x)$$

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow -4\ln(x) = 0 \Leftrightarrow \ln(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

x	0		1	$+\infty$
Sinal de f''	n.d.	$+$	0	$-$
Sentido das concavidades do gráfico de f	n.d.	$\cup$	P.I.	$\cap$

Cálculo auxiliar
$f(1) = 3$

O gráfico de f tem a concavidade voltada para cima em $]0,1]$ e a concavidade voltada para baixo em $[1, +\infty[$. O ponto de coordenadas $(1, 3)$ é ponto de inflexão do gráfico de f.



Contradomínio: $D'_f =]-\infty, e^2]$

60.7. $f(x) = \begin{cases} \frac{\ln(1-x)-1}{x-1} & \text{se} \quad x \leq 0 \\ xe^{\frac{1}{x}} & \text{se} \quad x > 0 \end{cases}$

Domínio: IR

Zeros: Para $x \leq 0$:

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{\ln(1-x) - 1}{x - 1} = 0 \Leftrightarrow \ln(1-x) - 1 = 0 \ \wedge \ x - 1 \neq 0$$
$$\Leftrightarrow \ln(1-x) = 1 \ \wedge x \neq 1$$
$$\Leftrightarrow 1 - x = e \ \wedge \ x \neq 1$$
$$\Leftrightarrow x = 1 - e$$

Para $x > 0$:

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow xe^{\frac{1}{x}} = 0 \Leftrightarrow x = 0 \ \vee \ e^{\frac{1}{x}} = 0$$
$$\Leftrightarrow x = 0 \ \vee \ \frac{1}{x} = 1$$
$$\Leftrightarrow x = 0 \ \vee \ x = 1$$

$(0,1)$ e $(1 - e, 0)$ são os pontos de interseção do gráfico de f com os eixos coordenados.

Continuidade: f é contínua em $\mathbb{R}\backslash\{0\}$.

Paridade: f não é par nem ímpar.

Monotonia e extremos:

Para $x < 0$:

$$f'(x) = \frac{\frac{-1}{1-x}\times(x-1)-[\ln(1-x)-1]}{(x-1)^2} = \frac{1-[\ln(1-x)-1]}{(x-1)^2} = \frac{2-\ln(1-x)}{(x-1)^2}$$

Para $x > 0$:

$$f'(x) = 1 \times e^{\frac{1}{x}} + x \times \left(-\frac{1}{x^2} \times e^{\frac{1}{x}}\right) = e^{\frac{1}{x}} - \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x} = e^{\frac{1}{x}}\left(1 - \frac{1}{x}\right)$$

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{2 - \ln(1-x)}{(x-1)^2} & \text{se } x < 0 \\ e^{\frac{1}{x}}\left(1 - \dfrac{1}{x}\right) & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

$$\frac{2-\ln(1-x)}{(x-1)^2} = 0 \Leftrightarrow 2 - \ln(1-x) = 0 \ \Leftrightarrow \ln(1-x)$$
$$\Leftrightarrow 1 - x = e^2$$
$$\Leftrightarrow -x = e^2 - 1$$
$$\Leftrightarrow x = 1 - e^2$$

$$e^{\frac{1}{x}}\left(1 - \frac{1}{x}\right) = 0 \Leftrightarrow e^{\frac{1}{x}} = 0 \ \vee \ 1 - \frac{1}{x} = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

x	$-\infty$	$1-e^2$		0		1	$+\infty$
Sinal de f'	$-$	0	$+$	n.d.	$-$	0	$+$
Variação de f	$\searrow$	mín.	$\nearrow$	1	$\searrow$	Máx.	$\nearrow$

f é decrescente em $]-\infty, 1 - e^2]$ e em $]0, 1]$ e é crescente em $[1 - e^2, 0]$ e em $[1, +\infty[$; tem um mínimo absoluto igual a $-\frac{1}{e^2}$ para $x = 1 - e^2$ e um mínimo relativo igual a e para $x = 1$.

Concavidades e pontos de inflexão:

Para $x < 0$:

$$f''(x) = \frac{-\left(\frac{-1}{1-x}\right)(x-1)^2-(2-\ln(1-x))\times 2(x-1)}{(x-1)^4} = \frac{\frac{1}{1-x}(x-1)^2-2(2-\ln(1-x))(x-1)}{(x-1)^4} =$$
$$= \frac{-(x-1)-2(2-\ln(1-x))(x-1)}{(x-1)^4} =$$
$$= \frac{-1-2(2-\ln(1-x))}{(x-1)^3}$$

Para $x > 0$:

$$f''(x) = -\frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}\left(1-\frac{1}{x}\right) + e^{\frac{1}{x}} \times \frac{1}{x^2} = \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}\left(-\left(1-\frac{1}{x}\right)+1\right) =$$

$$= \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}\left(-1+\frac{1}{x}+1\right) =$$

$$= \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^3}$$

$$f''(x) = \begin{cases} \frac{-1-2(2-\ln(1-x))}{(x-1)^3} & \text{se } x < 0 \\ \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^3} & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow -1-2(2-\ln(1-x)) = 0 \ \wedge \ x \neq 1$$

$$\Leftrightarrow 2-\ln(1-x) = -\frac{1}{2} \ \wedge \ x \neq 1$$

$$\Leftrightarrow \ln(1-x) = \frac{5}{2} \ \wedge \ x \neq 1$$

$$\Leftrightarrow 1-x = e^{\frac{5}{2}} \ \wedge \ x \neq 1$$

$$\Leftrightarrow -x = e^{\frac{5}{2}}-1 \ \wedge \ x \neq 1$$

$$\Leftrightarrow x = 1-e^{\frac{5}{2}}$$

x	$-\infty$	$1-e^{\frac{5}{2}}$		0	$+\infty$
Sinal de f''	$-$	0	$+$	n.d.	$+$
Sentido das concavidades do gráfico de f	$\cap$	P.I.	$\cup$	1	$\cup$

Cálculo auxiliar

$$f\left(1-e^{\frac{5}{2}}\right) = \frac{\ln\left[1-\left(1-e^{\frac{5}{2}}\right)\right]-1}{1-e^{\frac{5}{2}}-1} = \frac{\ln\left(e^{\frac{5}{2}}\right)-1}{-e^{\frac{5}{2}}} = \frac{\frac{5}{2}-1}{-e^{\frac{5}{2}}} = \frac{\frac{3}{2}}{-e^{\frac{5}{2}}} = -\frac{3}{2e^{\frac{5}{2}}}$$

O gráfico de f tem a concavidade voltada para baixo em $\left]-\infty, 1-e^{\frac{5}{2}}\right]$ e tem a concavidade voltada para cima em $\left[1-e^{\frac{5}{2}}, 0\right[$ e em $]0,+\infty[$. O ponto de coordenadas $\left(1-e^{\frac{5}{2}}, -\frac{3}{2e^{\frac{5}{2}}}\right)$ é ponto de inflexão do gráfico de f.

Assíntotas:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\ln(1-x)-1}{x-1} =$$

Considerando a mudança de variável $1-x = y \Leftrightarrow -x = y-1 \Leftrightarrow x = 1-y$: se $x \to -\infty$, então $y \to +\infty$.

$$= \lim_{y\to+\infty}\frac{\ln(y)-1}{1-y-1} =$$

$$= \lim_{y\to+\infty}\frac{\ln(y)-1}{-y} =$$

$$= -\lim_{y\to+\infty}\frac{\ln(y)-1}{y} =$$

$$= -\lim_{y\to+\infty}\left(\frac{\ln(y)}{y}-\frac{1}{y}\right) =$$

$$= -\lim_{y\to+\infty}\frac{\ln(y)}{y} + \lim_{y\to+\infty}\frac{1}{y} =$$

$$= 0$$

$y = 0$ é assíntota horizontal ao gráfico de *f* quando $x \to -\infty$.

$$m = \lim_{x\to+\infty}\frac{xe^{\frac{1}{x}}}{x} = e^{\frac{1}{+\infty}} = e^{0^+} = 1$$

$$b = \lim_{x\to+\infty}\left(xe^{\frac{1}{x}} - x\right) = \lim_{x\to+\infty} x\left(e^{\frac{1}{x}} - 1\right) =$$

Considerando a mudança de variável $y = \frac{1}{x} \Leftrightarrow xy = 1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{y}$: se $x \to +\infty$, então $y \to 0$.

$$= \lim_{y\to 0}\frac{1}{y}\left(e^y - 1\right) =$$

$$= \lim_{y\to 0}\frac{e^y-1}{y} =$$

$$= 1$$

$y = x + 1$ é assíntota oblíqua ao gráfico de *f* quando $x \to +\infty$.

$$\lim_{x\to 0^+}\left(xe^{\frac{1}{x}}\right) =$$

Considerando a mudança de variável $y = \frac{1}{x} \Leftrightarrow xy = 1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{y}$: se $x \to 0^+$, então $y \to +\infty$.

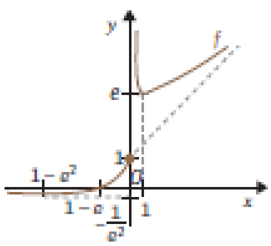
$$= \lim_{y\to+\infty}\frac{1}{y}\times e^y =$$

$$= \underbrace{\lim_{y\to+\infty}\frac{e^y}{y}}_{\text{limite notável}} =$$

$$= +\infty$$

$x = 0$ é assíntota vertical ao gráfico de *f*.

Representação gráfica:



Contradomínio: $D'_f = \left[-\frac{1}{e^2}, 1\right] \cup [e, +\infty[$

61.

61.1. $P(t) = 1 \Leftrightarrow \frac{1,5}{1+10e^{-0,2t}} = 1 \Leftrightarrow 1,5 = 1 + 10e^{-0,2t}$

$$\Leftrightarrow 0,05 = e^{-0,2t}$$

$$\Leftrightarrow \ln(0{,}05) = -0{,}2t$$

$$\Leftrightarrow t = \frac{\ln(0{,}05)}{-0{,}2}$$

$$\Leftrightarrow t \approx 14{,}97866$$

Cálculo auxiliar
$0{,}97866 \times 12 \approx 11{,}74392$

A população de tigres irá atingir um milhar de exemplares em dezembro de 2027.

61.2. $P'(t) = \frac{-1{,}5\times 10\times(-0{,}2)\times e^{-0{,}2t}}{(1+10e^{-0{,}2t})^2} = \frac{3e^{-0{,}2t}}{(1+10e^{-0{,}2t})^2} > 0, \forall t \geq 0$

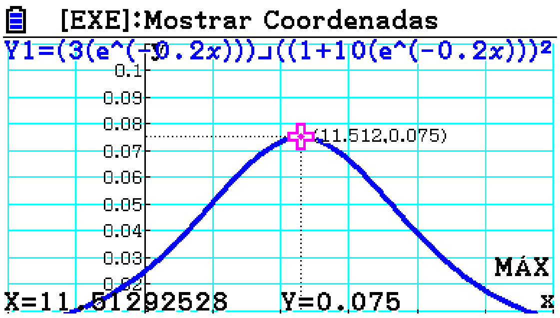
Como $P'(t) > 0, \forall t \geq 0$, P é uma função estritamente crescente.

61.3. $\lim_{t\to+\infty} \frac{1{,}5}{1+10e^{-0{,}2t}} = \frac{1{,}5}{1+10e^{-\infty}} = \frac{1{,}5}{1+10\times 0} = 1{,}5$

$y = 1{,}5$ é assíntota horizontal ao gráfico de P quando $t \to +\infty$.

Com o decorrer do tempo, o número de tigres tende para 1500.

61.4.



O aumento instantâneo máximo atingido pela população de tigres foi de 75 tigres por ano.

62.

62.1. $\lim_{t\to 5^-} 55(1-e^{kt}) = 55(1-e^{5k})$

$\lim_{t\to 5^+}(6+27e^{-1{,}7(t-5)}) = 6+27e^0 = 33$

$f(5) = 33$

$55(1-e^{5k}) = 33 \Leftrightarrow 1-e^{5k} = \frac{33}{55} \Leftrightarrow 1-e^{5k} = \frac{3}{5}$

$$\Leftrightarrow -e^{5k} = \frac{3}{5} - 1$$

$$\Leftrightarrow -e^{5k} = -\frac{2}{5}$$

$$\Leftrightarrow e^{5k} = \frac{2}{5}$$

$$\Leftrightarrow 5k = \ln\left(\frac{2}{5}\right)$$

$$\Leftrightarrow k = \frac{\ln\left(\frac{2}{5}\right)}{5}$$

$$\Leftrightarrow k \approx -0{,}183$$

62.2. $v'(t) = 27 \times (-1{,}7)e^{-1{,}7t+8{,}5} = -45{,}9e^{-1{,}7t+8{,}5}$

t	5	$+\infty$
Sinal de v'	$-$	$-$
Variação de v	$v(5) = 33$	$\searrow$

$\lim\limits_{t\to+\infty}\left(6 + 27e^{-1{,}7(t-5)}\right) = 6 + 27e^{-\infty} = 6$

$\lim\limits_{t\to+\infty} v'(t) = \lim\limits_{t\to+\infty}\left(-45{,}9e^{-1{,}7t+8{,}5}\right) = -45{,}9e^{-\infty} = -45{,}9 \times 0 = 0$

Para $t \geq 5$, v é estritamente decrescente, uma vez que $v'(t) \leq 0, \forall t \geq 5$, ou seja, após a abertura do paraquedas, e com o decorrer do tempo, a velocidade diminui e tende para 6 m/s.

62.3. Tem-se $v(5) = 33, v(9) \approx 6{,}03$ e $v(60) \approx 6$.

$$t.m.v._{[5,9]} = \frac{v(9) - v(5)}{9 - 5} = \frac{6 + 27e^{-1{,}7\times 4} - 6 - 27e^{-1{,}7\times 0}}{4} =$$

$$= \frac{27e^{-6{,}8} - 27}{4} \approx -6{,}742$$

$$t.m.v._{[9,13]} = \frac{v(13) - v(9)}{13 - 9} = \frac{6 + 27e^{-1{,}7\times 8} - 6 - 27e^{-1{,}7\times 4}}{4} =$$

$$= \frac{27e^{-13{,}6} - 27e^{-6{,}8}}{4} \approx -0{,}008$$

Tendo em conta estes resultados e a alínea anterior, é razoável concluir que a afirmaçõ é verdadeira.

63.

63.1. $I'(x) = a \times (-b) \times e^{-bx} = -abe^{-bx}$

$I'(x) < 0, \forall x \geq 0,$ uma vez que a e b são constantes positivas. Logo, I é estritamente decrescente, $\forall x \geq 0$.

$\lim_{x\to+\infty}\left(ae^{-bx}\right) = ae^{-\infty} = a \times 0 = 0$

$y = 0$ é assíntota horizontal ao gráfico de I quando $x \to +\infty$.

$\lim_{x\to 0^+}\left(ae^{-bx}\right) = ae^{-b\times 0} = a \times e^0 = a$

Não existem assíntotas verticais.

63.2. $\frac{I'(x)}{I(x)} = \frac{-abe^{-bx}}{ae^{-bx}} = -b$

Assim, $I'(x) = -bI(x)$.

63.3. $I(x) = \frac{I(0)}{2} \Leftrightarrow I(x) = \frac{a}{2} \Leftrightarrow ae^{-bx} = \frac{1}{2}a$

$\Leftrightarrow e^{-bx} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow -bx = \ln\left(\frac{1}{2}\right)$

$\Leftrightarrow -bx = \ln(1) - \ln(2) \Leftrightarrow -bx = -\ln(2)$

$\Leftrightarrow bx = \ln(2) \Leftrightarrow x = \frac{\ln(2)}{b}$ c.q.m.

63.4. $\begin{cases} I(0)=10 \\ I(2)=9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} ae^{-b\times 0}=10 \\ ae^{-b\times 2}=9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=10 \\ e^{-2b}=\frac{9}{10} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=10 \\ -2b=\ln\left(\frac{9}{10}\right) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=10 \\ b=\frac{\ln\left(\frac{9}{10}\right)}{-2} \end{cases}$

$a=10$ e $b=\frac{\ln\left(\frac{9}{10}\right)}{-2}=\ln\left(\frac{\sqrt{10}}{3}\right)$

64.

64.1. $P(0)=10\,000(7+15e^{-0{,}05\times 0}+0\times e^{-0{,}05\times 0})=220\,000$ bactérias.

64.2. $P'(t)=10\,000(0{,}25e^{-0{,}05t}-0{,}05te^{-0{,}05t})$

$P'(t)=0 \Leftrightarrow 10\,000(0{,}25e^{-0{,}05t}-0{,}05te^{-0{,}05t})=0 \Leftrightarrow 0{,}25e^{-0{,}05t}-0{,}05te^{-0{,}05t}=0$

$\Leftrightarrow e^{-0{,}05t}(0{,}25-0{,}05t)=0$

$\Leftrightarrow e^{-0{,}05t}=0 \vee 0{,}25-0{,}05t=0$

$\Leftrightarrow t=\frac{-0{,}25}{-0{,}05}$

$\Leftrightarrow t=5$ horas

t	0		5	$+\infty$
Sinal de P'	0,25	+	0	−
Variação de P	220 000	↗	Máx.	↘

$P(5)\approx 225\,760$ bactérias

O valor máximo é 225 760 bactérias e é atingido em $t=5$.

64.3. $\lim_{t\to+\infty} P(t)=\lim_{t\to+\infty}\left[10\,000(7+15e^{-0{,}05\times(+\infty)}+(+\infty)\times e^{-0{,}05\times(+\infty)}\right]=70\,000$

A população tende para 70 000 bactérias.

65. $f'(x)=-e^{-x+1}$

Assim, a equação da reta *QR* é da forma $y=(-e^{-x_0+1})x+b$.

$f(x_0)=-e^{-x_0+1}\times x_0+b$

Substituindo na equação da reta: $e^{-x_0+1}+e^{-x_0+1}\times x_0=b \Leftrightarrow e^{-x_0+1}(1+x_0)=b$

Logo, *QR*: $y=-e^{-x_0+1}x+e^{-x_0+1}(1+x_0)$.

Portanto, $Q(0,e^{-x_0+1}(1+x_0))$.

Coordenadas de *P*:

$0=-e^{-x_0+1}x+e^{-x_0+1}(1+x_0) \Leftrightarrow x=\frac{e^{-x_0+1}(1+x_0)}{e^{-x_0+1}} \Leftrightarrow x=1+x_0$

Deste modo, $P(1+x_0,0)$.

Então, $A(x_0)=\frac{(1+x_0)^2e^{-x_0+1}}{2}$.

$A'(x)=\frac{1}{2}(2(1+x_0)e^{-x_0+1}-(1+x_0)^2e^{-x_0+1})=\frac{1}{2}(1+x_0)e^{-x_0+1}(2-1-x_0)=$

$=\frac{1}{2}(1-x_0)^2e^{-x_0+1}$

$$A'(x) = 0 \ \wedge \ x_0 > 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}(1 - x_0)^2 e^{-x_0+1} = 0 \ \wedge \ x_0 > 0$$
$$\Leftrightarrow (1 - x_0)^2 = 0 \ \wedge \ x_0 > 0$$
$$\Leftrightarrow x_0 = 1$$

O triângulo $[OQR]$ tem área máxima quando a abcissa de P é igual a 1.

66.

66.1. $g: [0, +\infty[\longrightarrow \mathrm{IR}$

$$x \mapsto 40 \times 1{,}002^x$$

$g(0) = 40 \times 1{,}002^0 = 40$ aves

66.2. $\frac{g(x+30)}{g(x)} = \frac{40 \times 1{,}002^{x+30}}{40 \times 1{,}002^x} =$

$$= \frac{40 \times 1{,}002^x \times 1{,}002^{30}}{40 \times 1{,}002^x} =$$
$$= 1{,}002^{30} \approx 1{,}06$$

$0{,}06 \times 100 = 6\%$ por mês

66.3. $\frac{g(x+t)}{g(x)} = 2 \Leftrightarrow \frac{40 \times 1{,}002^{x+t}}{40 \times 1{,}002^x} = 2 \Leftrightarrow \frac{1{,}002^x \times 1{,}002^t}{1{,}002^x} = 2$

$$\Leftrightarrow 1{,}002^t = 2$$
$$\Leftrightarrow t = \log_{1{,}002}(2)$$
$$\Leftrightarrow t \approx 347 \text{ dias}$$

67.

67.1. $-16^{x+1} + 20 \times 4^{2x+1} = 4 \Leftrightarrow -4^{2x+2} + 20 \times 4^{2x+1} = 4$

$$\Leftrightarrow 4^{2x}(-4^2 + 20 \times 4) = 4$$
$$\Leftrightarrow 4^{2x} \times 64 = 4$$
$$\Leftrightarrow 4^{2x} = \frac{1}{16}$$
$$\Leftrightarrow 4^{2x} = 4^{-2}$$
$$\Leftrightarrow 2x = -2$$
$$\Leftrightarrow x = -1$$

$\mathrm{C.S.} = \{-1\}$

67.2. $\frac{8^x(x^2-3x)+16}{8^x-8} = -2 \Leftrightarrow \frac{8^x(x^2-3x)+16}{8^x-8} + 2 = 0$

$$\Leftrightarrow \frac{8^x(x^2-3x)+16+2\times 8^x-16}{8^x-8} = 0$$
$$\Leftrightarrow \frac{8^x(x^2-3x+2)}{8^x-8} = 0$$
$$\Leftrightarrow 8^x(x^2 - 3x + 2) = 0 \ \wedge \ 8^x - 8 \neq 0$$

LeYa EDUCAÇÃO Daniela Raposo e Luzia Gomes

$$\Leftrightarrow \left(\underbrace{8^x = 0}_{\text{condição impossível}} \vee x^2 - 3x + 2 = 0\right) \wedge 8^x \neq 8$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{3 \pm \sqrt{9-8}}{2} \wedge x \neq 1$$

$$\Leftrightarrow (x = 2 \vee x = 1) \wedge x \neq 1$$

$\text{C.S.} = \{2\}$

67.3. $4^x + 6^x = 2 \times 9^x \Leftrightarrow 6^x\left(\left(\frac{4}{6}\right)^x + 1 - 2\left(\frac{9}{6}\right)^x\right) = 0$

$$\Leftrightarrow \underbrace{6^x = 0}_{\text{condição impossível}} \vee \left(\frac{2}{3}\right)^x + 1 - 2\left(\frac{2}{3}\right)^{-x} = 0$$

$$\Leftrightarrow y + 1 - \frac{2}{y} = 0 \wedge y = \left(\frac{2}{3}\right)^x$$

$$\Leftrightarrow y^2 + y - 2 = 0 \wedge y = \left(\frac{2}{3}\right)^x$$

$$\Leftrightarrow y = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{2} \wedge y = \left(\frac{2}{3}\right)^x$$

$$\Leftrightarrow (y = -2 \vee y = 1) \wedge y = \left(\frac{2}{3}\right)^x$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{\left(\frac{2}{3}\right)^x = -2}_{\text{condição impossível}} \vee \left(\frac{2}{3}\right)^x = 1$$

$$\Leftrightarrow x = 0$$

$\text{C.S.} = \{0\}$

67.4. $\frac{3^x + 3^{-x}}{3^x - 3^{-x}} = 2 \Leftrightarrow \frac{3^x + \frac{1}{3^x}}{3^x - \frac{1}{3^x}} = 2$

$$\Leftrightarrow \frac{3^{2x}+1}{3^{2x}-1} - 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{3^{2x}+1-2\times 3^{2x}+2}{3^{2x}-1} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{-3^{2x}+3}{3^{2x}-1} = 0$$

$$\Leftrightarrow -3^{2x} + 3 = 0 \wedge 3^{2x} - 1 \neq 0$$

$$\Leftrightarrow 3^{2x} = 3 \wedge 3^{2x} \neq 1$$

$$\Leftrightarrow 2x = 1 \wedge 2x \neq 0$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{1}{2} \wedge x \neq 0$$

$\text{C.S.} = \left\{\frac{1}{2}\right\}$

68. $-2^{2x+1} + 4 \leq -31 \times 2^{x-1} \Leftrightarrow -2 \times 2^{2x} + 4 + \frac{31}{2} \times 2^x \leq 0$

$$\Leftrightarrow -2y^2 + \frac{31}{2}y + 4 \leq 0 \wedge y = 2^x$$

$$\Leftrightarrow -4y^2 + 31y + 8 \leq 0 \wedge y = 2^x$$

Cálculo auxiliar

$-4y^2 + 31y + 8 = 0 \Leftrightarrow y = \frac{-31 \pm \sqrt{31^2 + 16 \times 8}}{-8} \Leftrightarrow y = \frac{31 \pm 33}{8} \Leftrightarrow y = 8 \vee y = -\frac{1}{4}$

$$\Leftrightarrow \left(y \leq -\frac{1}{4} \ \vee \ y \geq 8\right) \ \wedge \ y = 2^x$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{2^x \leq -\frac{1}{4}}_{\text{condição impossível}} \ \vee \ 2^x \geq 8$$

$$\Leftrightarrow 2^x \geq 2^3$$

$$\Leftrightarrow x \geq 3$$

$\text{C.S.} = [3\,,+\infty[$

69. $D = \left\{x \in \mathbb{R}: x^7 > 0 \ \wedge \ x^{\log(x^7)} > 0 \ \wedge \ x^5 > 0\right\} = \mathbb{R}^+$

$$\frac{1}{7}\log\left(x^{\log(x^7)}\right) - \log(x^5) + 4 = 0 \Leftrightarrow \log\left(x^{\log(x^7)}\right)^{\frac{1}{7}} - 5\log(x) + 4 = 0 \ \wedge \ x \in D$$

$$\Leftrightarrow \log\left(x^{\frac{1}{7}\log(x^7)}\right) - 5\log(x) + 4 = 0 \ \wedge \ x \in D$$

$$\Leftrightarrow \log\left(x^{\log(x)}\right) - 5\log(x) + 4 = 0 \ \wedge \ x \in D$$

$$\Leftrightarrow \log(x) \times \log(x) - 5\log(x) + 4 = 0 \ \wedge \ x \in D$$

$$\Leftrightarrow (\log(x))^2 - 5\log(x) + 4 = 0 \ \wedge \ x \in D$$

$$\Leftrightarrow \log(x) = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 16}}{2} \ \wedge \ x \in D$$

$$\Leftrightarrow \log(x) = \frac{5 \pm 3}{2} \ \wedge \ x \in D$$

$$\Leftrightarrow (\log(x) = 1 \ \vee \ \log(x) = 4) \ \wedge \ x \in D$$

$$\Leftrightarrow (x = 10 \ \vee \ x = 10\,000) \ \wedge \ x \in D$$

$\text{C.S.} = \{10\,,10\,000\}$

70.

70.1. $D = \{x \in \mathbb{R}: 3x > 0 \ \wedge \ x + 6 > 0\} = \mathbb{R}^+$

$$x^3\ln(3x) + x^3\log_{\frac{1}{e}}(x+6) \leq 0 \Leftrightarrow \underbrace{x^3}_{>0,\forall x \in D}\left(\ln(3x) + \log_{\frac{1}{e}}(x+6)\right) \leq 0 \ \wedge \ x \in D$$

$$\Leftrightarrow \ln(3x) + \frac{\ln(x+6)}{\ln\left(\frac{1}{e}\right)} \leq 0 \ \wedge \ x \in D$$

$$\Leftrightarrow \ln(3x) - \ln(x+6) \leq 0 \ \wedge \ x \in D$$

$$\Leftrightarrow \ln\left(\frac{3x}{x+6}\right) \leq 0 \ \wedge \ x \in D$$

$$\Leftrightarrow \frac{3x}{x+6} \leq 1 \ \wedge \ x \in D$$

$$\Leftrightarrow \frac{3x}{x+6} - 1 \leq 0 \ \wedge \ x \in D$$

$$\Leftrightarrow \frac{2x-6}{x+6} \leq 0 \ \wedge \ x \in D$$

$$\Leftrightarrow 2x - 6 \leq 0 \ \wedge \ x \in D \quad (x + 6 > 0, \forall x \in D)$$

$$\Leftrightarrow x \leq 3 \ \wedge \ x \in D$$

C. S. $= \ ]0\,,3]$

70.2. $D = \left\{x \in \mathbb{R}: 2x > 0 \ \wedge \ \frac{1-x}{x} > 0\right\} =]0\,,1[$

Cálculo auxiliar

x	$-\infty$	0		1	$+\infty$
$1 - x$	$+$	$+$	$+$	0	$-$
x	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$\frac{1-x}{x}$	$-$	n. d.	$+$	0	$-$

Em $]0\,,1[$:

$$-\log_3(2x) < 2 + \log_3\left(\frac{1-x}{x}\right) \Leftrightarrow -2 < \log_3\left(\frac{1-x}{x}\right) + \log_3(2x)$$

$$\Leftrightarrow -2 < \log_3\left(\frac{1-x}{x} \times 2x\right)$$

$$\Leftrightarrow -2 < \log_3(2 - 2x)$$

$$\Leftrightarrow 2 - 2x > 3^{-2}$$

$$\Leftrightarrow 2 - 2x > \frac{1}{9}$$

$$\Leftrightarrow 2 - \frac{1}{9} > 2x$$

$$\Leftrightarrow \frac{17}{9} > 2x$$

$$\Leftrightarrow \frac{17}{18} > x$$

C. S. $= \left]0\,,\frac{17}{18}\right[$

70.3. $D = \{x \in \mathbb{R}: x^2 - 4 > 0\} =]-\infty\,,-2[\, \cup \,]2\,,+\infty[$

Cálculo auxiliar

$x^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow x = -2 \vee x = 2$

$$x \log_3(x^2 - 4) > x \Leftrightarrow x\,(\log_3(x^2 - 4) - 1) > 0 \ \wedge \ x \in D$$

Cálculo auxiliar

$\log_3(x^2 - 4) - 1 = 0 \Leftrightarrow \log_3(x^2 - 4) = 1 \Leftrightarrow x^2 - 4 = 3 \Leftrightarrow x^2 = 7 \Leftrightarrow x = \sqrt{7} \vee x = -\sqrt{7}$

x	$-\infty$	$-\sqrt{7}$		-2	2		$\sqrt{7}$	$+\infty$
x	$-$	$-$	$-$	$-$	$+$	$+$	$+$	$+$
$\log_3(x^2 - 4) - 1$	$+$	0	$-$	n. d.	n. d.	$-$	0	$+$
$x\,(\log_3(x^2 - 4) - 1)$	$-$	0	$+$	n. d.	n. d.	$-$	0	$+$

C. S. $= \ ]-\sqrt{7}\,,-2[\, \cup \,]\sqrt{7}\,,+\infty[$

70.4. $D = \{x \in \mathbb{R}: x-1>0 \wedge 3x-4>0\} = \left]\frac{4}{3}, +\infty\right[$

Cálculo auxiliar

- $\log_2(x-1) = 0 \Leftrightarrow x-1=1 \Leftrightarrow x=2$
- $\log_2(3x-4) = 0 \Leftrightarrow 3x-4=1 \Leftrightarrow x=\frac{5}{3}$

x	$\frac{4}{3}$		$\frac{5}{3}$		2	$+\infty$
$-\log_2(x-1)$	$+$	$+$	$+$	$+$	0	$-$
$\log_2(3x-4)$	n. d.	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$-\log_2(x-1)\times\log_2(3x-4)$	n. d.	$-$	0	$+$	0	$-$

$\text{C.S.} = \left]\frac{5}{3}, 2\right[$

71. $k \in \mathbb{R}^+$

$$\Delta > 0 \Leftrightarrow (-4)^2 - 4\times 1\times \log_2(k) > 0 \Leftrightarrow 16 - 4\log_2(k) > 0$$
$$\Leftrightarrow -4\log_2(k) > -16$$
$$\Leftrightarrow \log_2(k) < 4$$
$$\Leftrightarrow k < 2^4$$
$$\Leftrightarrow k < 16$$

Logo, $k \in]0, 16[$.

72. $\log_2\left(\sqrt{a+4}+\sqrt{a-4}\right) = b \Leftrightarrow \sqrt{a+4}+\sqrt{a-4} = 2^b$

$$\Leftrightarrow (a+4)-(a-4) = 2^b\left(\sqrt{a+4}-\sqrt{a-4}\right)$$
$$\Leftrightarrow a+4-a+4 = 2^b\left(\sqrt{a+4}-\sqrt{a-4}\right)$$
$$\Leftrightarrow 8 = 2^b\left(\sqrt{a+4}-\sqrt{a-4}\right)$$
$$\Leftrightarrow \sqrt{a+4}-\sqrt{a-4} = \frac{8}{2^b}$$
$$\Leftrightarrow \sqrt{a+4}-\sqrt{a-4} = 2^{3-b}$$

Assim, $\log_2\left(\sqrt{a+4}-\sqrt{a-4}\right) = \log_2\left(2^{3-b}\right) = 3-b$.

73.

73.1. $P(t) = 0 \Leftrightarrow \frac{100}{3}\left(2^{2(1-t)}-1\right) = 0 \Leftrightarrow 2^{2(1-t)}-1 = 0$

$$\Leftrightarrow 2^{2(1-t)} = 1$$
$$\Leftrightarrow 2(1-t) = \log_2(1)$$
$$\Leftrightarrow 2(1-t) = 0$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{2=0}_{\text{equação impossível}} \quad \vee \; 1-t=0$$

$$\Leftrightarrow t=1$$

A reação termina ao fim de 1 minuto.

73.2. $P(t)=30$

$$\frac{100}{3}\left(2^{2(1-t)}-1\right)=30 \Leftrightarrow 2^{2(1-t)}-1=\frac{90}{100} \Leftrightarrow 2^{2-2t}=\frac{9}{10}+1$$

$$\Leftrightarrow 2^{2-2t}=\frac{19}{10}$$

$$\Leftrightarrow 2-2t=\log_2(\tfrac{19}{10})$$

$$\Leftrightarrow -2t=-2+\log_2\left(\frac{19}{10}\right)$$

$$\Leftrightarrow t=1-\frac{1}{2}\log_2\left(\frac{19}{10}\right)$$

$$\Leftrightarrow t=1+\frac{1}{2}\log_2\sqrt{\frac{10}{19}}$$

$$\Leftrightarrow t\approx 0{,}537$$

$0{,}537\times 60\approx 32$ segundos

73.3. $P(t)=\frac{100}{3}\left(2^{2(1-t)}-1\right) \Leftrightarrow 3P(t)=100\left(2^{2(1-t)}-1\right)$

$$\Leftrightarrow \frac{3P(t)}{100}=2^{2(1-t)}-1$$

$$\Leftrightarrow \frac{3P(t)}{100}+1=2^{2(1-t)}$$

$$\Leftrightarrow \log_2\left(\frac{3P(t)}{100}+1\right)=2-2t$$

$$\Leftrightarrow \log_2\left(\frac{3P(t)}{100}+1\right)-2=-2t$$

$$\Leftrightarrow \frac{\log_2\left(\frac{3P(t)}{100}+1\right)-2}{-2}=t$$

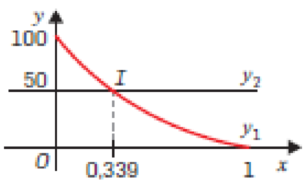
Assim:

$$P^{-1}(t)\colon \mathrm{IR}_0^+ \longrightarrow \mathrm{IR}$$
$$t \mapsto \frac{\log_2\left(\frac{3t}{100}+1\right)-2}{-2}$$

73.4. $y_1=\frac{100}{3}\left(2^{2(1-t)}-1\right)$

$y_2=50$

$I(0{,}339;50)$



$0{,}339\times 60\approx 20$ segundos

74. 1.º passo

$$\text{Log}(E) = 5{,}24 + 1{,}44 \times 8{,}6 \Leftrightarrow \log(E) = 17{,}624$$
$$\Leftrightarrow E = 10^{17{,}624}$$
$$\Leftrightarrow E \approx 4{,}207 \times 10^{17}$$

2.º passo

$$4 \times 4{,}207 \times 10^{17} = 1{,}6828 \times 10^{18}$$

3.º passo

$$\log(1{,}6828 \times 10^{18}) = 5{,}24 + 1{,}44M \Leftrightarrow \frac{\log(1{,}6828 \times 10^{18}) - 5{,}24}{1{,}44} = M \Leftrightarrow M \approx 9{,}0$$

75.

75.1. $N(9{,}25) = 17{,}3 \Leftrightarrow \frac{20}{1+e^{-9{,}25k}} = 17{,}3 \Leftrightarrow 1 + e^{-9{,}25k} = \frac{20}{17{,}3}$

$$\Leftrightarrow e^{-9{,}25k} = \frac{20}{17{,}3} - 1$$
$$\Leftrightarrow -9{,}25k = \ln\left(\frac{20}{17{,}3} - 1\right)$$
$$\Leftrightarrow k = \frac{\ln\left(\frac{20}{17{,}3} - 1\right)}{-9{,}25}$$
$$\Leftrightarrow k \approx 0{,}2$$

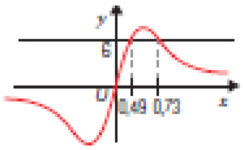
75.2. $\frac{N(t+3)}{N(t)} = 1{,}32 \Leftrightarrow \frac{\frac{20}{1+e^{-0{,}3(t+3)}}}{\frac{20}{1+e^{-0{,}3t}}} = 1{,}32$

$$\Leftrightarrow \frac{1+e^{-0{,}3t}}{1+e^{-0{,}3t-0{,}9}} = 1{,}32$$
$$\Leftrightarrow 1 + e^{-0{,}3t} = 1{,}32(1 + e^{-0{,}3t-0{,}9})$$
$$\Leftrightarrow 1 + e^{-0{,}3t} = 1{,}32 + 1{,}32e^{-0{,}3t-0{,}9}$$
$$\Leftrightarrow 1 + e^{-0{,}3t} = 1{,}32 + 1{,}32e^{-0{,}3t}e^{-0{,}9}$$
$$\Leftrightarrow 1 + e^{-0{,}3t} = 1{,}32 + 0{,}53667e^{-0{,}3t}$$
$$\Leftrightarrow e^{-0{,}3t} - 0{,}53667e^{-0{,}3t} = 1{,}32 - 1$$
$$\Leftrightarrow 0{,}46333e^{-0{,}3t} = 0{,}32$$
$$\Leftrightarrow e^{-0{,}3t} = \frac{0{,}32}{0{,}46333}$$
$$\Leftrightarrow e^{-0{,}3t} = 0{,}69065$$
$$\Leftrightarrow -0{,}3t = \ln(0{,}69065)$$
$$\Leftrightarrow t = \frac{\ln(0{,}69065)}{-0{,}3}$$
$$\Leftrightarrow t \approx 1{,}23374$$

Cálculo auxiliar
$0{,}23374 \times 24 \approx 6$ horas

Decorreram 1 dia e 6 horas, aproximadamente.

75.3.



$k \approx 0{,}49$ ou $k \approx 0{,}73$

76.

76.1. $\frac{C(x+1)}{C(x)} = \frac{150\,000\left(\frac{27}{25}\right)^{x+1}}{150\,000\left(\frac{27}{25}\right)^{x}} = \frac{27}{25} = 1{,}08$

8% ao ano.

76.2. $C(x) = 300\,000 \Leftrightarrow 150\,000\left(\frac{27}{25}\right)^{x} = 300\,000 \Leftrightarrow \left(\frac{27}{25}\right)^{x} = 2$

$\Leftrightarrow x = \log_{\left(\frac{27}{25}\right)}(2)$

$\Leftrightarrow x \approx 9$

O Pedro terá de esperar 9 anos, aproximadamente.

77.

77.1.

$$C: \mathrm{IR}_0^+ \longrightarrow \mathrm{IR}$$
$$x \longmapsto 45\,000e^{-0{,}223x}$$

77.2. $C(x) = 9000 \Leftrightarrow 45000e^{-0{,}223x} = 9000$

$\Leftrightarrow e^{-0{,}223x} = \frac{1}{5}$

$\Leftrightarrow -0{,}223x = \ln\left(\frac{1}{5}\right)$

$\Leftrightarrow x = \frac{\ln\left(\frac{1}{5}\right)}{-0{,}223}$

$\Leftrightarrow x \approx 7{,}217$

Cálculo auxiliar
$0{,}217 \times 365 \approx 79$dias

7 anos e 79 dias, aproximadamente.

77.3. $C(x) = 45\,000e^{-0{,}223x}$

Valor ao fim de um mês: $C\left(\frac{1}{12}\right) = 45\,000e^{-0{,}223\times\frac{1}{12}} \approx 44\,171{,}47225$

Valor ao fim de dois meses: $C\left(\frac{2}{12}\right) = C\left(\frac{1}{6}\right) = 45\,000e^{-0{,}223\times\frac{1}{6}} \approx 43\,358{,}19912$

$\frac{43\,358{,}19912}{44\,171{,}47225} \approx 0{,}9816(4\text{ c.d.})$

Generalizando:

$C(x) = 45\,000e^{-0,223x}$

$C\left(x+\frac{1}{12}\right) = 45\,000e^{-0,223\left(x+\frac{1}{12}\right)} = 45\,000e^{-0,223x-\frac{0,223}{12}}$

$\frac{C\left(x+\frac{1}{12}\right)}{C(x)} = \frac{45\,000e^{-0,223x-\frac{0,223}{12}}}{45\,000e^{-0,223x}} =$

$= \frac{45\,000e^{-0,223x}e^{-\frac{0,223}{12}}}{45\,000e^{-0,223x}} =$

$= e^{-\frac{0,223}{12}} \approx 0,9816(4\text{ c.d.})$

$(1-0,9816)\times 100 \approx 1,8\%$

78.

78.1. Seja $f(x) = xe^x$.

Então, $f'(x) = x'e^x + x(e^x)' = e^x + xe^x = e^x(x+1)$.

$\lim\limits_{x\to 2}\frac{xe^x-2e^2}{x-2} = f'(2) = e^2(2+1) = 3e^2$

78.2. Seja $f(x) = xe^x$.

Então, $f'(x) = x'e^x + x(e^x)' = e^x + xe^x = e^x(x+1)$.

$\lim\limits_{x\to 3}\frac{xe^x-3e^3}{x-3} = f'(3) = e^3(3+1) = 4e^3$

78.3. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{\ln(x^2+2x+4)-\ln(x+4)} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{\ln\left(\frac{x^2+2x+4}{x+4}\right)} =$

$= \lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{\ln\left(\frac{x^2+x}{x+4}+1\right)} =$

$= \lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{\frac{\ln\left(\frac{x^2+x}{x+4}+1\right)}{x}} =$

$= \lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{\frac{\ln\left(\frac{x^2+x}{x+4}+1\right)}{\frac{x^2+x}{x+4}}\times\frac{x+1}{x+4}} =$

$= \frac{1}{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln\left(\frac{x^2+x}{x+4}+1\right)}{\frac{x^2+x}{x+4}}\times\lim\limits_{x\to 0}\frac{x+1}{x+4}} =$

Considerando a mudança de variável $y = \frac{x^2+x}{x+4}$: se $x \to 0$, então $y \to 0$.

$= \lim\limits_{y\to 0}\frac{y}{\ln(y+1)}\times\lim\limits_{x\to 0}\frac{x+4}{x+1} =$

Considerando a mudança de variável $z = \ln(y+1) \Leftrightarrow y+1 = e^z \Leftrightarrow y = e^z-1$: se $y \to 0$, então $z \to 0$.

$= \lim\limits_{z\to 0}\frac{e^z-1}{z}\times\lim\limits_{x\to 0}\frac{x+4}{x+1} =$

$= 1\times 4 =$

$= 4$

78.4. $\lim\limits_{x \to \ln(3)} \frac{-e^{2x}+9}{x-\ln(3)} =$

Considerando a mudança de variável $x - \ln(3) = y \Leftrightarrow x = \ln(3) + y$: se $x \to \ln(3)$, então $y \to 0$.

$$= \lim_{y \to 0} \frac{-e^{2(\ln(3)+y)}+9}{y} =$$

$$= \lim_{y \to 0} \frac{-e^{2\ln(3)+2y}+9}{y} =$$

$$= \lim_{y \to 0} \frac{-e^{\ln(3^2)+2y}+9}{y} =$$

$$= \lim_{y \to 0} \frac{-e^{\ln(9)} \times e^{2y}+9}{y} =$$

$$= \lim_{y \to 0} \frac{-9e^{2y}+9}{y} =$$

$$= \lim_{y \to 0} \frac{-9(e^{2y}-1)}{y} =$$

$$= -9 \times \lim_{y \to 0} \left(\frac{e^{2y}-1}{2y} \times 2\right) =$$

$$= -18 \times \underbrace{\lim_{2y \to 0} \frac{e^{2y}-1}{2y}}_{\text{limite notável}} =$$

$$= -18 \times 1 =$$

$$= -18$$

79. $f(0) = b + 2a$

$\lim\limits_{x \to 0^-} \left[a + \frac{\ln(1-2x)}{x}\right] = a + \lim_{x \to 0^-} \frac{\ln(1-2x)}{x} =$

Considerando a mudança de variável $\ln(1-2x) = y \Leftrightarrow 1 - 2x = e^y \Leftrightarrow -2x = e^y - 1$ $\Leftrightarrow x = \frac{e^y-1}{-2}$: se $x \to 0^+$, então $y \to 0^-$.

$$= a + \lim_{y \to 0^-} \frac{y}{\frac{e^y-1}{-2}} =$$

$$= a + \lim_{y \to 0^-} \frac{-2y}{e^y-1} =$$

$$= a - 2\lim_{y \to 0^-} \frac{y}{e^y-1} =$$

$$= a - 2 \times \frac{1}{\underbrace{\lim_{y \to 0^-} \frac{e^y-1}{y}}_{\text{limite notável}}} =$$

$$= a - 2$$

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{1-e^x}{ax} = \frac{1}{a} \lim_{x \to 0^+} \frac{1-e^x}{x} = \frac{1}{a} \lim_{x \to 0^+} \frac{-(e^x-1)}{x} =$$

$$= -\frac{1}{a} \underbrace{\lim_{x \to 0^+} \frac{e^x-1}{x}}_{\text{limite notável}}$$

$$= -\frac{1}{a}$$

$\begin{cases} a-2=b+2a \\ -\frac{1}{a}=b+2a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a-2=-\frac{1}{a} \\ \_\_\_\_\_\_\_\_ \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a-2+\frac{1}{a}=0 \\ \_\_\_\_\_\_\_\_ \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2-2a+1=0 \\ \_\_\_\_\_\_\_\_ \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=-3 \end{cases}$

Logo, $a=1$ e $b=-3$.

80. $m=\lim_{x\to+\infty}\frac{h(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{x^2}{g(x)}}{x}=$

$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{x\times g(x)}=$

$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{g(x)}=$

$=\frac{1}{\lim_{x\to+\infty}\frac{g(x)}{x}}=$

$=\frac{1}{e}$

Assim, $y=\frac{1}{e}x$ é assíntota ao gráfico de h.

81. A reta de equação $y=2$ é uma assíntota ao gráfico de g, uma vez que $\lim_{x\to+\infty}[g(x)-2]=0$.

Assim, podemos eliminar a opção (III).

A função derivada g' e a função f têm o mesmo sinal, pois $e^{-x}>0,\ \forall x\in\mathrm{IR}$. Portanto, a derivada é positiva apenas no intervalo $]2,+\infty[$. Logo, g é crescente em $]2,+\infty[$, o que nos faz eliminar a opção (II).

-1 é zero da função f. Assim, $g'(-1)=f(-1)\times e^{-1}=0\times e^{-1}=0$. Como o declive da reta tangente ao gráfico é igual a 0, a reta tangente é horizontal, o que nos permite eliminar a opção (I).

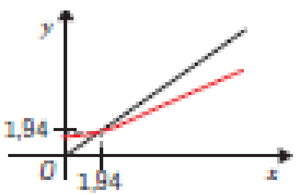
Assim, a opção correta é a (IV).

82. $f(x)=xe^{-x}+(x+1)\ln(x+1)$

$f'(x)=e^{-x}-xe^{-x}+\ln(x+1)+(x+1)\frac{1}{x+1}=$

$=e^{-x}(1-x)+\ln(x+1)+1$

$e^{-x}(1-x)+\ln(x+1)+1=x$



$P(1{,}94;1{,}94)$

A área do triângulo é aproximadamente igual a 1,88 unidades de área.

83. (I) Comecemos por provar que $P(1)$ é verdadeira:

$P(1): \forall n \in \text{IN}, f'(x) = e^x(x+1)$

$f'(x) = 1 \times e^x + x \times e^x = e^x(1+x) = e^x(x+1)$

(II) Provemos que, para todo o $n \in \text{IN}, P(n) \Longrightarrow P(n+1)$, isto é, se $P(n)$ é verdadeira, então $P(n+1)$ também é verdadeira.

Hipótese de indução: $\forall n \in \text{IN}, f^{(n)}(x) = e^x(x+n)$

Tese de indução: $\forall n \in \text{IN}, f^{(n+1)}(x) = e^x(x+n+1)$

Demonstração:

$$f^{(n+1)}(x) = \left[f^{(n)}(x)\right]' \underbrace{=}_{\text{hipótese de indução}} [e^x(x+n)]' = e^x(x+n) + e^x \times 1 =$$

$$= e^x(x+n+1)$$

Demonstrámos, assim, a hereditariedade da condição $P(n)$.

Por (I) e por (II), provámos que $\forall n \in \text{IN}, f^{(n)}(x) = e^x(x+n)$.

84. (I) Comecemos por provar que $P(1)$ é verdadeira:

$P(1): \forall n \in \text{IN}, g'(x) = e^x(x+1)$

$g'(x) = \frac{(-1)^{1-1} \times (1-1)!}{x \ln(a)} = \frac{1}{x \ln(a)}$

(II) Provemos que, para todo o $n \in \text{IN}, P(n) \Longrightarrow P(n+1)$, isto é, se $P(n)$ é verdadeira, então $P(n+1)$ também é verdadeira.

Hipótese de indução: $P(n): \forall n \in \text{IN}, g^{(n)}(x) = \frac{(-1)^{n-1} \times (n-1)!}{x^n \times \ln(a)}$

Tese de indução: $P(n+1): \forall n \in \text{IN}, g^{(n+1)}(x) = \frac{(-1)^n \times n!}{x^{n+1} \times \ln(a)}$

Demonstração:

$$g^{(n+1)}(x) = \left(g^{(n)}(x)\right)' \underbrace{=}_{\text{hipótese de indução}} \left(\frac{(-1)^{n-1} \times (n-1)!}{x^n \times \ln(a)}\right)' =$$

$$= \left(\frac{(-1)^{n-1} \times (n-1)!}{\ln(a)} \times x^{-n}\right)' =$$

$$= \frac{(-1)^{n-1} \times (n-1)!}{\ln(a)} \times (-n) \times x^{-n-1} =$$

$$= \frac{(-1)^{n-1} \times (n-1)!}{\ln(a)} \times (-1)n \times x^{-n-1} =$$

$$= \frac{(-1)^n \times n!}{\ln(a)} \times \frac{1}{x^{n+1}} =$$

$$= \frac{(-1)^n \times n!}{x^{n+1} \times \ln(a)}$$

Demonstrámos, assim, a hereditariedade da condição $P(n)$.

Por (I) e por (II), provámos que $\forall n \in \text{IN}, g^{(n)}(x) = \frac{(-1)^{n-1} \times (n-1)!}{x^n \times \ln(a)}$.

85. $f(x) = 5(e^{1-0,1x} + e^{0,1x-1})$

85.1. $f(0) = 5(e^{1-0} + e^{-1}) = 5\left(e + \frac{1}{e}\right) \approx 15,431$

$f(30) = 5(e^{1-0,1\times 30} + e^{0,1\times 30-1}) \approx 37,622$

$f(30) - f(0) = 37,622 - 15,431 \approx 22,2$

Aproximadamente 22,2 metros.

85.2. $f'(x) = 5 \times (e^{1-0,1x} \times (-0,1) + e^{0,1x-1} \times 0,1) =$

$= 5 \times (0,1 \times e^{0,1x-1} - 0,1e^{1-0,1x}) =$

$= 0,5(e^{0,1x-1} - e^{1-0,1x})$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 0,5(e^{0,1x-1} - e^{1-0,1x}) = 0 \Leftrightarrow e^{0,1x-1} = e^{1-0,1x}$

$\Leftrightarrow 0,1x - 1 = 1 - 0,1x$

$\Leftrightarrow 0,1x + 0,1x = 1 + 1$

$\Leftrightarrow 0,2x = 2$

$\Leftrightarrow x = \frac{2}{0,2}$

$\Leftrightarrow x = 10$

$f(10) = 5(e^{1-0,1\times 10} + e^{0,1\times 10-1}) = 5(e^{1-1} + e^{1-1}) =$

$= 5(e^0 + e^0)$

$= 5 \times 2 =$

$= 10$

A distância é 10 metros

85.3. $f(x) = 15 \Leftrightarrow 5(e^{1-0,1x} + e^{0,1x-1}) = 15 \Leftrightarrow e^{1-0,1x} + e^{0,1x-1} = 3$

$\Leftrightarrow e \times e^{-0,1x} + e^{0,1x}e^{-1} - 3 = 0$

$\frac{1}{e}(e^{0,1x})^2 - 3e^{0,1x} + e = 0 \Leftrightarrow e^{0,1x} = \frac{-(-3)\pm\sqrt{(-3)^2 - 4\times\frac{1}{e}\times e}}{2\times\frac{1}{e}}$

$\Leftrightarrow e^{0,1x} \approx 7,117 \ \vee \ e^{0,1x} \approx 1,038$

$\Leftrightarrow 0,1x = \ln(7,117) \ \vee \ 0,1x = \ln(1,038)$

$\Leftrightarrow x = \frac{\ln(7,117)}{0,1} \ \vee \ x = \frac{\ln(1,038)}{0,1}$

$\Leftrightarrow x \approx 19,625 \ \vee \ x \approx 0,373$

Aproximadamente, 0,4 e 19,6 metros.

86.

86.1. $C'(t) = \frac{k}{a-b}\left(e^{-bt} \times (-b) - e^{-at} \times (-a)\right) = \frac{k}{a-b}\left(-be^{-bt} + ae^{-at}\right)$

$C'(t) = 0 \Leftrightarrow \frac{k}{a-b}\left(-be^{-bt} + ae^{-at}\right) = 0 \Leftrightarrow ae^{-at} - be^{-bt} = 0$

$\Leftrightarrow ae^{-at}\boldsymbol{e^{at}} - be^{-bt}\boldsymbol{e^{at}} = 0$

$\Leftrightarrow ae^{0} - be^{at}e^{-bt} = 0$

$$\Leftrightarrow a - be^{at}e^{-bt} = 0$$

$$\Leftrightarrow -be^{at}e^{-bt} = -a$$

$$\Leftrightarrow e^{at}e^{-bt} = \frac{-a}{-b}$$

$$\Leftrightarrow e^{at-bt} = \frac{a}{b}$$

$$\Leftrightarrow at - bt = \ln\left(\frac{a}{b}\right)$$

$$\Leftrightarrow (a-b)t = \ln\left(\frac{a}{b}\right)$$

$$\Leftrightarrow t = \frac{\ln\left(\frac{a}{b}\right)}{a-b} \quad \text{c. q. m.}$$

86.2. $\lim_{t\to+\infty}\left(\frac{k}{a-b}\left(e^{-bt} - e^{-at}\right)\right) = \frac{k}{a-b}\left(e^{-\infty} - e^{-\infty}\right) = 0$

Com o decorrer do tempo, a concentração da substância injetada tende para 0.

87.

87.1. $W(0) = 2600(1 - 0{,}51e^{0})^3 \approx 306$

Uma elefanta recém-nascida pesa, aproximadamente, 306 quilogramas.

Taxa de crescimento: em primeiro lugar, é necessário determinar a função derivada de W.

$$W'(t) = 2600 \times 3(1 - 0{,}51e^{-0{,}075x})^2 \times 0{,}03825e^{-0{,}075x} =$$

$$= 7800(1 - 0{,}51e^{-0{,}075x})^2 \times 0{,}03825e^{-0{,}075x} =$$

$$= 298{,}35(1 - 0{,}51e^{-0{,}075x})^2 e^{-0{,}075x}$$

$W'(0) \approx 72$

Aos zero anos, a massa aumenta a uma taxa de aproximadamente 72 kg/ano.

87.2. $W(t) = 1800 \Leftrightarrow 2600(1 - 0{,}51e^{-0{,}075t})^3 = 180 \Leftrightarrow (1 - 0{,}51e^{-0{,}075t})^3 = \frac{9}{13}$

$$\Leftrightarrow 1 - 0{,}51e^{-0{,}075t} = \sqrt[3]{\frac{9}{13}}$$

$$\Leftrightarrow -0{,}51e^{-0{,}075t} = \sqrt[3]{\frac{9}{13}} - 1$$

$$\Leftrightarrow e^{-0{,}075t} = \frac{\sqrt[3]{\frac{9}{13}} - 1}{-0{,}51}$$

$$\Leftrightarrow -0{,}075t = \ln\left(\frac{\sqrt[3]{\frac{9}{13}} - 1}{-0{,}51}\right)$$

$$\Leftrightarrow t = \frac{\ln\left(\frac{\sqrt[3]{\frac{9}{13}} - 1}{-0{,}51}\right)}{-0{,}075}$$

$$\Leftrightarrow t \approx 20$$

A elefanta tem aproximadamente 20 anos

Taxa de crescimento:

$W\,'(20) \approx 52$

Aos 20 anos, a massa aumenta a uma taxa de, aproximadamente, 52 kg/ano.

87.3. $\lim_{t\to+\infty} W(t) = \lim_{t\to+\infty}(2600(1-0{,}51e^{-0{,}075t})^3) = 2600(1-0{,}51e^{-\infty})^3 = 2600$

Com o decorrer do tempo, a massa, em quilogramas, de uma elefanta africana tende para 2600 quilogramas.

87.4. Em primeiro lugar, temos de determinar $W\,''$.

$$W''(t) = 2\times 298{,}35(1-0{,}51e^{-0{,}075t})\times 0{,}03825e^{-0{,}075t}\times e^{-0{,}075t} +$$

$$+\,298{,}35(1-0{,}51e^{-0{,}075t})^2\times(-0{,}075)e^{-0{,}075t} =$$

$$= 22{,}823775e^{-0{,}15t}(1-0{,}51e^{-0{,}075t}) - 22{,}37625e^{-0{,}075t}(1-0{,}51e^{-0{,}075t})^2$$

$W\,(t) = 0$

$\Leftrightarrow 22{,}823775e^{-0{,}15t}(1-0{,}51e^{-0{,}075t}) - 22{,}37625e^{-0{,}075t}(1-0{,}51e^{-0{,}075t})^2 = 0$

Com recurso à calculadora gráfica, verificamos que $t \approx 5{,}67$.

Portanto, a taxa de crescimento é máxima entre os 5 e os 6 anos de idade.