

Exercício 1

Seja $(u_n)_n$ uma sucessão definida por: $u_n = \frac{1-3n}{n+1}$

a)

Verifique se $-\frac{14}{5}$ é um dos termos de $(u_n)_n$

$$\frac{1-3n}{n+1} = -\frac{14}{5}$$

$$n = 19$$

$$u_{19} = -\frac{14}{5}$$

b)

Estude $(u_n)_n$ quanto à monotonia

$(u_{n+1}) - (u_n) < 0$ é monótona decrescente

$(u_{n+1}) - (u_n) > 0$ é monótona crescente

$$\left[\frac{n+1}{n+1} \right] \left[\frac{-3n-2}{n+2} \right] - \left[\frac{1-3n}{n+1} \right] \left[\frac{n+2}{n+2} \right]$$

$$\frac{-3n^2 - 3n - 2n - 2}{(n+1)(n+2)} - \frac{n+2 - 3n^2 - 6n}{(n+1)(n+2)}$$

$$\frac{-3n^2 - 3n - 2n - 2 - n - 2 + 3n^2 + 6n}{(n+1)(n+2)}$$

$$\frac{-4}{(n+1)(n+2)} < 0, \forall n \in \mathbb{N}$$

u_n é monótona decrescente

c)

$(u_n)_n$ é uma sucessão convergente? E limitada? Justifique.

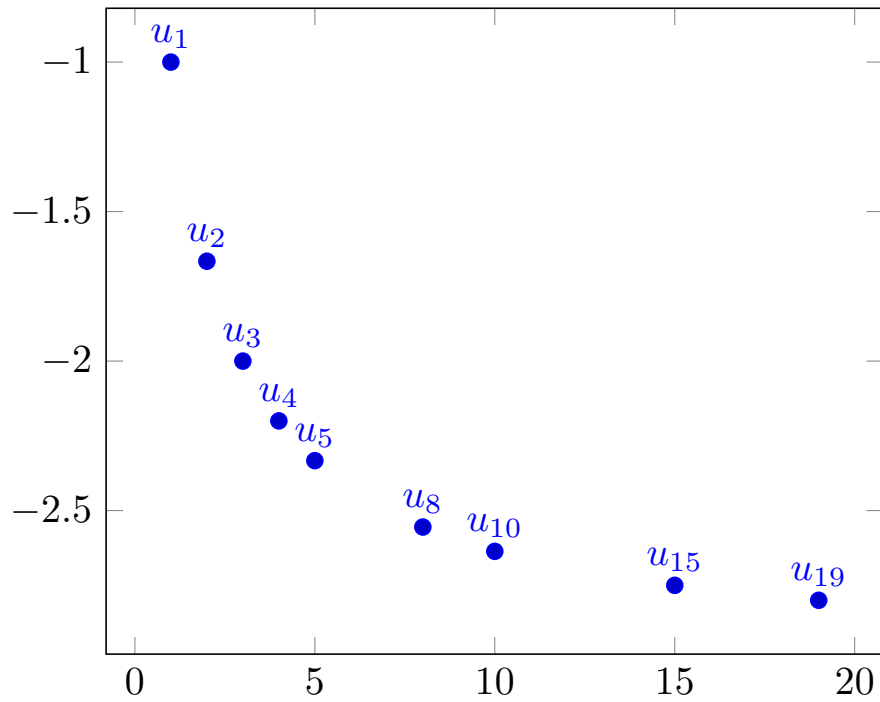
$$\lim_n \frac{1-3n}{n+1} = \lim_n \frac{\mathcal{K}\left(\frac{1}{n} - 3\right)}{\mathcal{K}\left(1 + \frac{1}{n}\right)} = \frac{\overset{0}{\nearrow} \frac{1}{n} - 3}{1 + \underset{\nearrow 0}{\frac{1}{n}}} = -3$$

$(u_n)_n$ é convergente pois tende para um número real. Toda a sucessão convergente é limitada. Como $(u_n)_n$ é decrescente sabemos que:

$$\frac{1-3n}{n+1} = -3 + \frac{4}{n+1}$$

$$\frac{4}{n+1} > 0, \text{ então qualquer termo será sempre superior a } -3$$

$$-3 < u_n < -1, \forall n \in \mathbb{N}$$

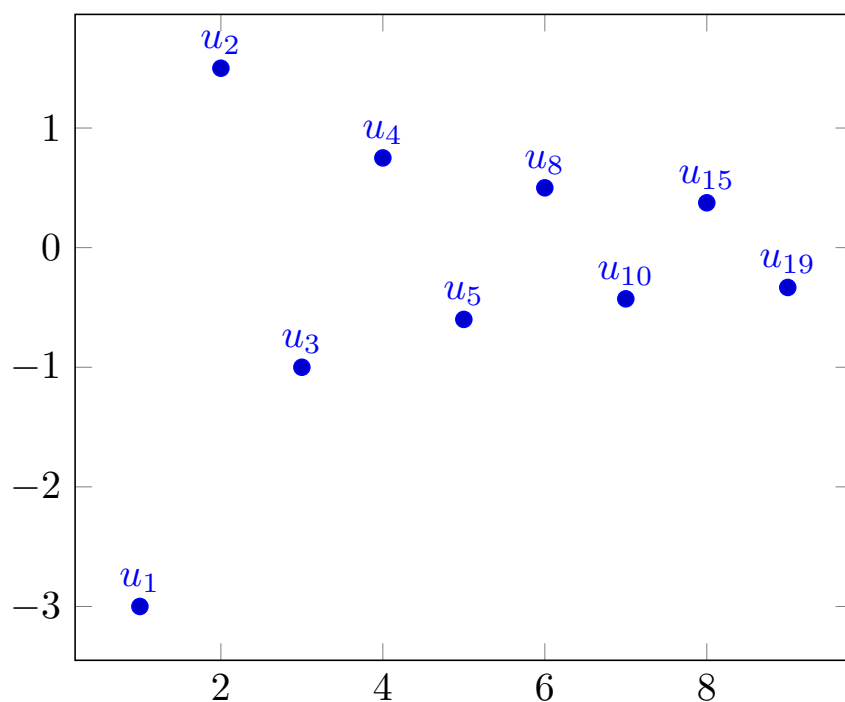


Exercício 2

Dê um exemplo concreto de uma sucessão $(a_n)_n$, que verifique em simultâneo as seguintes afirmações:

- $(a_n)_n$ é uma sucessão limitada e não monótona
- $\lim_n (3a_n) = 0$
Justifique a sua resposta.

$$a_n = \frac{3(-1)^n}{n}$$



Exercício 3

a)

$$\begin{aligned} \lim_n \left(\frac{-7n^3 - 5n^2 + n}{3\sqrt{n^2 + 1}} \right) &\stackrel{\infty}{=} \\ \lim_n \left(\frac{n \left(-7 - \frac{5}{n} + \frac{1}{n^2} \right)}{3n\sqrt{1 + \frac{1}{n^2}}} \right) &\stackrel{0}{=} \\ = \frac{+\infty(-7)}{3} &= -\infty \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} \lim_n (\sqrt{2n-3} - \sqrt{2n+5}) &\stackrel{\infty-\infty}{=} \\ \lim_n \left(\frac{(\sqrt{2n-3} - \sqrt{2n+5})(\sqrt{2n-3} + \sqrt{2n+5})}{(\sqrt{2n-3} + \sqrt{2n+5})} \right) & \\ \lim_n \frac{-8}{\sqrt{2n-3} + \sqrt{2n+5}} &= \frac{-8}{+\infty} = 0 \end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned} \lim_n \left(\frac{n-2}{n+1} \right)^{n+3} &\stackrel{1^\infty}{=} \\ \lim_n \left(\frac{\mathcal{N}\left(1 - \frac{2}{n}\right)}{\mathcal{N}\left(1 + \frac{1}{n}\right)} \right)^n \cdot \lim_n \left(\frac{\mathcal{N}\left(1 - \frac{2}{n}\right)}{\mathcal{N}\left(1 + \frac{1}{n}\right)} \right)^3 \\ \frac{\lim_n \left(1 - \frac{2}{n} \right)^n}{\lim_n \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n} \cdot \lim_n \left(\frac{1 - \frac{2}{n}}{1 + \frac{1}{n}} \right)^3 &= \frac{e^{-2}}{e} \cdot 1^3 = e^{-3} \end{aligned}$$

d)

$$\begin{aligned} \lim_n (n^2 - (-2)^n n) &= +\infty \\ \begin{cases} \text{Para } n \text{ par: } \lim_n (n^2 - n) \stackrel{\infty - \infty}{=} \lim_n \left(n^2 \left(1 - \frac{1}{n} \right) \right) = +\infty \\ \text{Para } n \text{ ímpar: } \lim_n (n^2 + n) = +\infty \end{cases} \end{aligned}$$

Exercício 4

a)

Considere a função real de variável real definida por $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2x+4}}$

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} : 2x + 4 > 0\} =] - 2, +\infty[$$

b)

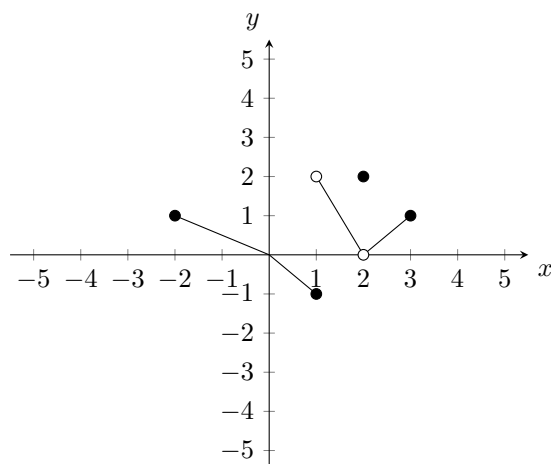
Averigue se o ponto de coordenadas $(16, \frac{1}{6})$ pertence ao gráfico de f .

$$f(16) = \frac{1}{\sqrt{2(16)+4}} = \frac{1}{6} = \frac{1}{6}$$

Logo $(16, \frac{1}{6})$ pertence a f

Exercício 5

Na figura está representada graficamente a função g .



a)

Indique:

i) o domínio e o contradomínio de g ;

$$D_g = [-2, 3]$$

$$D'_g = [-1, 2]$$

ii) os zeros de g , se existirem;

g só tem um zero que é $x = 0$

iii) um intervalo em que g seja simultaneamente positiva e decrescente;

$$[-2, 0[\text{ e }]1, 2[.$$

iv) os extremos (máximo e mínimo) absolutos de g , se existirem.

Máximo absoluto 2 e mínimo absoluto -1 .

b)

Indique o número de soluções da condição $|g(x)| = 1$.

Existem 4 soluções: $-2, 3, 1$ e entre 1 e 2.

Exercício 6

Considere a função quadrática f , de domínio \mathbb{R} , definida por $f(x) = -x^2 + 4x + 5$.

a)

Escreva a expressão $-x^2 + 4x + 5$ na forma $a(x - h)^2 + k$.

$$f(x) = -(x - 2)^2 + 9$$

b)

Escreva uma equação do eixo de simetria da parábola representativa do gráfico da função.

$$x = 2$$

c)

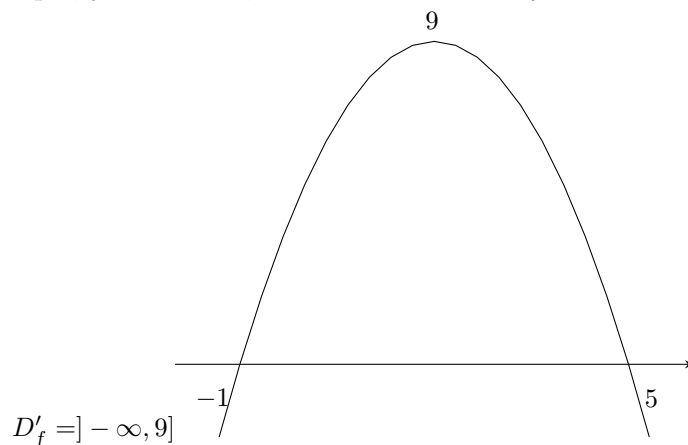
Indique dois objetos diferentes que tenham a mesma imagem por f .

$$x = -1$$

$$x = 5$$

d)

Indique, justificando, o contradomínio de f .

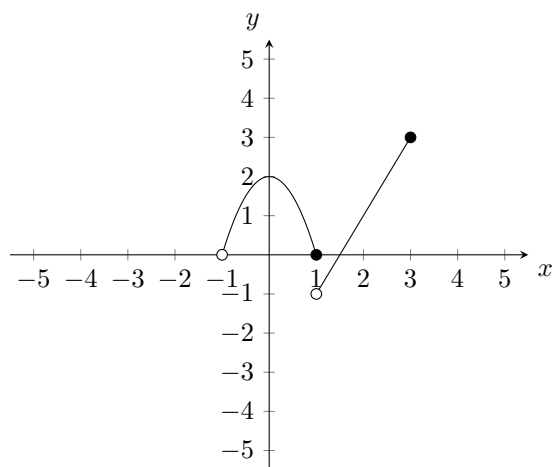


Exercício 7

Considere a função h real de domínio $] - 1, 3]$ definida por:

$$h(x) = \begin{cases} -2x^2 + 2, & \text{se } -1 < x \leq 1 \\ 2x - 3, & \text{se } 1 < x \leq 3 \end{cases}$$

Represente graficamente a função h . (Nota: apresente todos os cálculos que efetuar.)



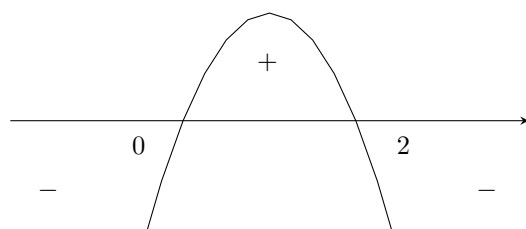
$$D_f = [-1, 3]$$

$$D'_f = [-1, 3]$$

Exercício 8

a)

$$2x - x^2 \geq 0$$



$$\text{C.S.} = [0, 2]$$

b)

$$2x^3 + 3x^2 \leq 2x$$

$$(x) (2x^2 + 3x - 2) \leq 0$$

x	$-\infty$	-2		0		$\frac{1}{2}$	$+\infty$
x	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$2x^2 + 3x - 2$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$x(2x^2 + 3x - 2)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
Decrecente			Decrecente				

$$CS] -\infty, -2] \cup [0, \frac{1}{2}]$$

c)

$$(x - 2)(x^2 + 3)(4 - x) > 0$$

x	$-\infty$	2		4	$+\infty$
$x - 2$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$x^2 + 3$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$4 - x$	$+$	$+$	$+$	0	$-$
$(x - 2)(x^2 + 3)(4 - x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
Crescente					

$$C.S =]2, 4[$$