SPM@TESTES

Teste de Matemática 11.º ano

2023

CRITÉRIOS GERAIS DE CLASSIFICAÇÃO

A prova é formada por itens de escolha múltipla e de resposta restrita. Os critérios de classificação dos itens de resposta restrita estão organizados por etapas, atribuindo-se, a cada uma delas, uma pontuação.

Caso os alunos adotem um processo não previsto nos critérios específicos, cabe ao professor corretor adaptar a distribuição da cotação atribuída.

Deve ser atribuída a classificação de zero pontos nas seguintes situações:

- Caso um aluno apresente apenas o resultado final de um item, ou de uma etapa, quando é pedida a apresentação de cálculos ou justificações;

- Caso o aluno utilize de forma inequívoca a calculadora, uma vez que tal não é solicitado nesta prova.

Nas seguintes situações deve descontar-se um ponto às cotações estabelecidas para a etapa respetiva:

- Ocorrência de um erro de cálculo;

- Apresentação de uma resposta com o formato que não esteja de acordo com o que foi solicitado;

- Apresentação de expressões com erros do ponto de vista formal.

Caso ocorram erros que revelem desconhecimento de conceitos, de regras ou de propriedades ou o aluno apresente uma resolução incompleta de uma etapa, deve descontar-se até metade da cotação dessa etapa.

CRITÉRIOS ESPECÍFICOS DE CLASSIFICAÇÃO

Questão	1.1	1.2	2.	3.1	3.2	4.	5.1	5.2	6.	7.	8.	9.1	9.2	9.3	10.	Grupo A		Grupo B	
																11.1	11.2	11.1	11.2
Cotação	16	12	8	12	16	8	16	12	8	16	8	16	12	8	8	12	12	12	12

Item		Descrição	Cotação
1.		______________________________	28
	1.1.		16
		Processo 1 • Indicar as coordenadas do ponto A, em função de α ………… 2 pontos • Indicar as coordenadas do ponto B, em função de α ………… 2 pontos • Escrever $\overline{BC}$, em função de α ………………………………… 3 pontos • Obter a altura do triângulo $[ABC]$, em função de α ………… 3 pontos • Obter a expressão pretendida ………………………………… 6 pontos **Processo 2** • Indicar as coordenadas do ponto A, em função de α ………… 2 pontos • Indicar as coordenadas do ponto B, em função de α ………… 2 pontos • Escrever $\overline{BC}$, em função de α ………………………………… 3 pontos • Obter a área do triângulo $[OBC]$, em função de α ………… 3 pontos • Obter a área do triângulo $[AOC]$, em função de α ………… 3 pontos • Obter a expressão pretendida ………………………………… 3 pontos	
	1.2.		12
		Processo 1 • Determinar a inclinação da reta AC $\left(\frac{5\pi}{6}\right)$ ……………………… 3 pontos • Justificar que o triângulo $[AOC]$ é isósceles ……………………… 3 pontos • Concluir que $\alpha = \frac{2\pi}{3}$ ……………………………………………… 3 pontos • Determinar as coordenadas do ponto $A\left(-2, 2\sqrt{3}\right)$ ………… 3 pontos **Processo 2** • Determinar a equação da reta AC $\left(y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x + \frac{4\sqrt{3}}{3}\right)$ ………. 4 pontos • Determinar a interseção da reta AC com a circunferência…… 3 pontos • Obter a abcissa do ponto A $(x_A = -2)$ ……………………………… 2 pontos • Determinar as coordenadas do ponto $A\left(-2, 2\sqrt{3}\right)$ …………… 3 pontos	
2.		**Versão 1 – (B); Versão 2 – (C)** ______________________	8
3.		______________________________	28
	3.1.		12
		• Referir a noção de função periódica de período π ……………… 2 pontos • Determinar $f(x + \pi)$ ……………………………………………… 8 pontos	

		• Concluir que $f(x+\pi)=f(x), \forall x \in \mathbb{R}$.................................. 1 ponto • Concluir que f é uma função periódica de período π .... 1 ponto	
	3.2.		**16**
		• Resolver a equação $f(x)=\sin^2 x$ .... 12 pontos • Escrever $\sin x \cos x - \sin^2 x = 0$ .... 1 ponto • Escrever $\sin x\,(\cos x - \sin x) = 0$ .... 1 ponto • Escrever $\sin x = 0 \vee \cos x - \sin x = 0$ .... 1 ponto • Escrever $\sin x = 0 \vee \cos x = \sin x$ .... 1 ponto • Obter $x = k\pi \vee x = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ (ou equivalente) . 8 pontos • Concluir que os valores de $x \in [-\pi\,,\pi[$ que satisfazem a equação são $-\pi, -\frac{3\pi}{4}, 0$ e $\frac{\pi}{4}$ .... 4 pontos	
4.		**Versão 1 – (A); Versão 2 – (C)**	**8**
5.			
	5.1		**16**
		Designemos por s a reta que passa no ponto A e é perpendicular ao plano α. • Escrever $s: (x,y,z) = (2,-1,8) + k(2,-1,1), k \in \mathbb{R}$ .... 4 pontos • Escrever as coordenadas de um ponto genérico da reta s, em função de k.. 1 ponto • Obter uma equação na variável k, substituindo x, y e z na equação do plano α pelas coordenadas de um ponto genérico da reta s e obter o valor de k (-2) .... 5 pontos • Obter as coordenadas do ponto de interseção da reta s com o plano α $\left((-2,1,6)\right)$.. 3 pontos • Determinar o raio da superfície esférica $\left(2\sqrt{6}\right)$ .... 3 pontos	
	5.2		**12**
		Seja $\vec{r}(3m, m, m-6)$ um vetor diretor da reta r e $\vec{n}(2,-1,1)$ um vetor normal ao plano α. • Concluir que como a reta r está contida no plano α então $\vec{r} \perp \vec{n} \Leftrightarrow \vec{r}\cdot\vec{n} = 0$ e qualquer ponto da reta r pertence ao plano α .... 2 pontos • Determinar $\vec{r}\cdot\vec{n} = 0$ e obter $m = 1$ .... 5 pontos • Substituir o ponto $(n,-1,-4m)$ no plano α e obter $n = 2$ .. 5 pontos	
6.		**Versão 1 – (B); Versão 2 – (D)** ________________________________	**8**
7.		____	**16**
		A classificação é atribuída de acordo com as seguintes etapas: • Exprimir a_2 e a_3 em função da razão r da progressão geométrica ....3 pontos • Exprimir b_4 e b_8 em função da razão s da progressão aritmética .... 3 pontos	

		• Escrever o sistema de equações que traduz o problema $\begin{cases} r = 1 + s \\ 3r^2 = 3 + 7s \end{cases}$ ou equivalente .... 2 pontos • Resolver o sistema .... 6 pontos • Responder razão da progressão geométrica $= \frac{4}{3}$ e razão da progressão aritmética $= \frac{1}{3}$ .... 2 pontos	
8.		**Versão 1 – (D); Versão 2 (A)** ________________________________	**8**
9.			**36**
	9.1		**16**
		• Escrever e resolver a equação $f(x) = 0$ .... 4 pontos • Indicar as coordenadas do ponto $B\left(\frac{4}{3}, 0\right)$ .... 1 ponto • Escrever e resolver a equação $f(x) = g(x)$ .... 6 pontos • Indicar as coordenadas do ponto $A(4,4)$ .... 2 pontos • Calcular a área do triângulo $[OBA]$ $\left(\frac{8}{3}\right)$ .... 3 pontos	
	9.2	• Definir o domínio da função h por uma condição .... 2 pontos • Resolver a condição $-f(x) \geq 0$ no domínio de h .... 8 pontos • Escrever o domínio na forma de intervalo $\left(\left[\frac{4}{3}, 2\right[\right)$ .... 2 pontos	**12**
	9.3	**Versão 1 – (C); Versão 2 – (D)**	**8**
10.		**Versão 1 – (B); Versão 2 – (C)**	**8**
		GRUPO A	
11.			**24**
	11.1	• Escrever $\lim(a_n \times c_n) = \lim \frac{4n^3-2n^2}{\sqrt{4n^2-1}}$ .... 1 ponto • Reconhecer a existência de uma indeterminação .... 2 pontos • Levantar a indeterminação por um dos dois processos possíveis ○ **Processo 1** ____ • Escrever $\lim \frac{4n^3-2n^2}{\sqrt{4n^2-1}} = \lim \frac{\sqrt{(4n^3-2n^2)^2}}{\sqrt{4n^2-1}}$ .... 2 pontos • Escrever $\lim \frac{\sqrt{(4n^3-2n^2)^2}}{\sqrt{4n^2-1}} = \lim \sqrt{\frac{16n^6-16n^5+4n^4}{4n^2-1}}$ .....2 pontos • Escrever $\lim \sqrt{\frac{16n^6-16n^5+4n^4}{4n^2-1}} = \sqrt{\lim \frac{16n^6}{4n^2}}$ ....2 pontos • Escrever $\sqrt{\lim \frac{16n^6}{4n^2}} = \sqrt{\lim(4n^4)} = \sqrt{+\infty} = +\infty$ ..1 ponto ○ **Processo 2** ____ • Escrever $\lim \frac{4n^3-2n^2}{\sqrt{4n^2-1}} = \lim \frac{n^2(4n-2)}{\sqrt{n^2(4-\frac{1}{n^2})}}$ .... 2 pontos	**12**

		• Escrever $\lim \frac{n^2(4n-2)}{\sqrt{n^2(4-\frac{1}{n^2})}} = \lim \frac{n^2(4n-2)}{n\sqrt{4-\frac{1}{n^2}}}$ .... 2 pontos • Escrever $\lim \frac{n^2(4n-2)}{n\sqrt{4-\frac{1}{n^2}}} = \lim \frac{n(4n-2)}{\sqrt{4-\frac{1}{n^2}}}$........................ 1 ponto • Escrever $\lim \frac{n(4n-2)}{\sqrt{4-\frac{1}{n^2}}} = \frac{+\infty}{2}$...................................... 2 pontos • Obter o valor $\lim(a_n \times c_n) = +\infty$ .... 2 pontos	
	11.2	• Escrever $\lim(a_n) = \lim(4n^3) = +\infty$ ....2 pontos • Escrever $\lim(b_n) = \lim\ (2n) \times \lim(-2n^2)$ .... 2 pontos • Concluir que $\lim(b_n) = -\infty$ .... 1 ponto • Indicar o valor lógico da afirmação $\lim a_n \neq \lim b_n$ .... 1 ponto • Indicar que $\lim \frac{a_n}{b_n} = \lim \frac{4n^3}{-4n^3}$...2 pontos • Concluir que $\lim \frac{a_n}{b_n} = -\ 1$ .... 1 ponto • Concluir que $\lim \frac{b_n}{a_n} = -1$ .... 2 pontos • Indicar o valor lógico da afirmação: $\lim a_n \neq \lim b_n$ mas $\lim \frac{a_n}{b_n} = \lim \frac{b_n}{a_n}$ (verdadeiro).......... 1 ponto	**12**
		GRUPO B	
11.			
	11.1	• Escrever $\lim\limits_{x\to 2} \left(\frac{x}{f(x)} - \frac{1}{h(x)}\right) = \lim\limits_{x\to 2} \left(\frac{x}{2x^2-8} - \frac{1}{x^2-4}\right)$ .... 1 ponto • Reconhecer a existência de uma indeterminação .... 2 pontos • Escrever $\lim\limits_{x\to 2} \left(\frac{x}{2x^2-8} - \frac{1}{x^2-4}\right) = \lim\limits_{x\to 2} \left(\frac{x-2}{2x^2-8}\right)$ .... 3 pontos • Escrever $\lim\limits_{x\to 2} \frac{x-2}{2x^2-8} = \lim\limits_{x\to 2} \frac{x-2}{2(x-2)(x+2)}$ .... 3 pontos • Escrever $\lim\limits_{x\to 2} \frac{x-2}{2(x-2)(x+2)} = \lim\limits_{x\to 2} \frac{1}{2(x+2)} = \frac{1}{8}$ .... 3 pontos	12
	11.2	**Processo 1** • Escrever $\lim\limits_{x\to -\infty} \frac{h(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to -\infty} \frac{x^2-4}{\sqrt{4x^2-1}}$ e reconhecer a existência de uma indeterminação .... 1 ponto • Escrever $\lim\limits_{x\to -\infty} \frac{x^2-4}{\sqrt{4x^2-1}} = \lim\limits_{x\to -\infty} \frac{x(x-\frac{4}{x})}{\sqrt{x^2(4-\frac{1}{x^2})}} = \lim\limits_{x\to -\infty} \frac{x(x-\frac{4}{x})}{-x\sqrt{(4-\frac{1}{x^2})}}$ .... 3 pontos • Escrever $\lim\limits_{x\to -\infty} \frac{x(x-\frac{4}{x})}{-x\sqrt{4-\frac{1}{x^2}}} = \lim\limits_{x\to -\infty} \frac{x-\frac{4}{x}}{-\sqrt{4-\frac{1}{x^2}}} = \frac{-\infty}{-2} = +\infty$ .... 2 pontos • Escrever $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{h(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to +\infty} \frac{x^2-4}{\sqrt{4x^2-1}}$ e reconhecer a existência de uma indeterminação .... 1 ponto • Escrever	12

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-4}{\sqrt{4x^2-1}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x(x-\frac{4}{x})}{\sqrt{x^2(4-\frac{1}{x^2})}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x(x-\frac{4}{x})}{x\sqrt{(4-\frac{1}{x^2})}}$$ .... 2 pontos

- Escrever

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x(x-\frac{4}{x})}{x\sqrt{(4-\frac{1}{x^2})}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{(x-\frac{4}{x})}{\sqrt{(4-\frac{1}{x^2})}}=\frac{+\infty}{2}=+\infty$$ .... 2 pontos

- Indicar o valor lógico da afirmação (falso) .... 1 ponto

Processo 2

- Escrever $\lim_{x\to-\infty}\frac{h(x)}{g(x)}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2-4}{\sqrt{4x^2-1}}$ e reconhecer a existência de uma indeterminação .... 1 ponto
- Escrever

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2-4}{\sqrt{4x^2-1}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{(x^2-4)^2}}{\sqrt{4x^2-1}}=\lim_{x\to-\infty}\sqrt{\frac{(x^2-4)^2}{4x^2-1}}$$ .... 3 pontos

- Escrever

$$\lim_{x\to-\infty}\sqrt{\frac{(x^2-4)^2}{4x^2-1}}=\lim_{x\to-\infty}\sqrt{\frac{x^4-8x^2+16}{4x^2-1}}=\sqrt{\lim_{x\to-\infty}\frac{x^4-8x^2+16}{4x^2-1}}$$ .... 2 pontos

- Escrever

$$\sqrt{\lim_{x\to-\infty}\frac{x^4-8x^2+16}{4x^2-1}}=\sqrt{\lim_{x\to-\infty}\frac{x^4}{4x^2}}=\sqrt{\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2}{4}}=+\infty$$ .... 2 pontos

- Escrever $\lim_{x\to+\infty}\frac{h(x)}{g(x)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-4}{\sqrt{4x^2-1}}$ e reconhecer a existência de uma indeterminação .... 1 ponto
- Escrever e concluir

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-4}{\sqrt{4x^2-1}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{(x^2-4)^2}}{\sqrt{4x^2-1}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{(x^2-4)^2}}{\sqrt{4x^2-1}}=+\infty$$ ..2 pontos

- Indicar o valor lógico da afirmação (falso) .... 1 ponto

Nota: Se o aluno começar por calcular o limite quando x tende para $+\infty$, adapta-se a distribuição da cotação.