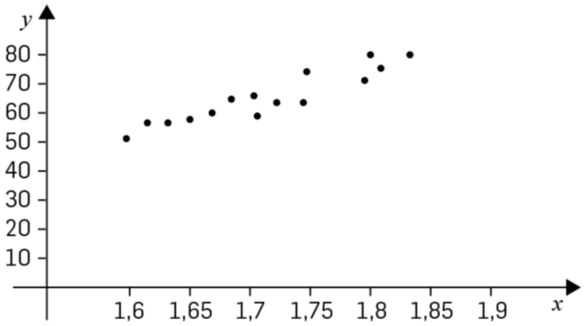
Exercícios de aplicação (págs. 53 a 58)

1.

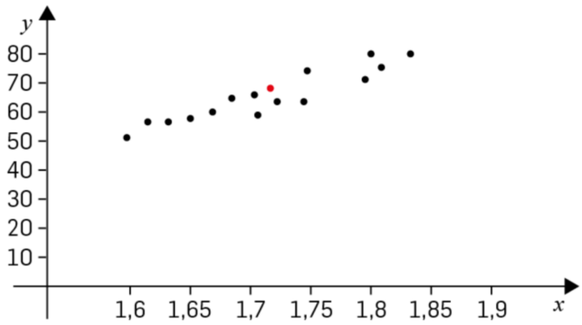
1.1.



1.2. Esta representação sugere a existência de correlação linear positiva.

1.3. $\bar{x} \approx 1{,}729$ e $\bar{y} \approx 67{,}533$

1.4.



1.5. $y = 101{,}524x - 108{,}035$

2. $(x, y) = [(3, 8);\ (4, 7);\ (5, 11);\ (6, 13);\ (7, 11)]$

$$\bar{x} = \frac{3+4+5+6+7}{5} = \frac{25}{5} = 5$$

$$\bar{y} = \frac{8+7+11+13+11}{5} = \frac{50}{5} = 10$$

$$\sum_{i=1}^{5} x_i y_i = 3 \times 8 + 4 \times 7 + 5 \times 11 + 6 \times 13 + 7 \times 11 =$$

$$= 24 + 28 + 55 + 78 + 77 =$$

$$= 262$$

$$\sum_{i=1}^{5} x_i^2 = 9 + 16 + 25 + 36 + 49 = 135$$

$$SS_x = \sum_{i=1}^{5} (x_i - \bar{x})^2 = (3-5)^2 + (4-5)^2 + (5-5)^2 + (6-5)^2 + (7-5)^2 =$$

$$= 4 + 1 + 0 + 1 + 4 =$$

$$= 10$$

$$a=\frac{\sum_{i=1}^{5}x_iy_i-5\bar{x}\bar{y}}{SS_x}=\frac{262-5\times5\times10}{10}=\frac{262-250}{10}=$$

$$=\frac{12}{10}=$$

$$=\frac{6}{5}$$

$$b=\bar{y}-a\bar{x}=10-\frac{6}{5}\times5=10-6=4$$

$$y=\frac{6}{5}x+4$$

3.

3.1. $\bar{x}=\frac{18+20+23+26+28+30+30+32+33+33}{10}=\frac{273}{10}=27{,}3$

$$\bar{y}=\frac{160+160+165+166+166+168+170+168+170+172}{10}=\frac{1665}{10}=166{,}5$$

$$\sum_{i=1}^{10}x_iy_i=2880+3200+3795+4316+4648+5040+5100+5376+5610+5676=$$

$$=45\,641$$

$$\sum_{i=1}^{10}x_i^2=18^2+20^2+23^2+26^2+28^2+30^2+30^2+32^2+33^2+33^2=$$

$$=324+400+529+676+784+900+900+1024+1089+1089=$$

$$=7715$$

$$\sum_{i=1}^{10}y_i^2=160^2+160^2+165^2+166^2+166^2+168^2+170^2+168^2+170^2+172^2=$$

$$=277\,369$$

$$SS_x=\sum_{i=1}^{10}(x_i-\bar{x})^2=\sum_{i=1}^{10}x_i^2-10\bar{x}^2=$$

$$=7715-10\times27{,}3^2=$$

$$=7715-7452{,}9=$$

$$=262{,}1$$

$$SS_y=\sum_{i=1}^{10}(y_i-\bar{y})^2=\sum_{i=1}^{10}y_i^2-10\bar{y}^2=$$

$$=277\,369-10\times166{,}5^2=$$

$$=277\,369-277\,222{,}5=$$

$$=146{,}5$$

Daniela Raposo e Luzia Gomes

$$r = \frac{\sum_{i=1}^{10}(x_i-\bar{x})^2\,(y_i-\bar{y})^2}{\sqrt{SS_x\,SS_y}} = \frac{\sum_{i=1}^{10} x_i y_i - 10\bar{x}\bar{y}}{\sqrt{SS_x\,SS_y}} =$$

$$= \frac{45\,641 - 10\times 27{,}3\times 166{,}5}{\sqrt{262{,}1\times 146{,}5}} =$$

$$= \frac{45\,641 - 45\,454{,}5}{\sqrt{38\,397{,}65}} =$$

$$= \frac{186{,}5}{\sqrt{262{,}1\times 146{,}5}} \approx$$

$$\approx 0{,}95$$

Como o valor de r é positivo e muito próximo de 1, estamos perante uma associação linear positiva forte.

3.2.

$$a = \frac{\sum_{i=1}^{10} x_i y_i - 10\bar{x}\bar{y}}{SS_x} = \frac{45\,641 - 10\times 27{,}3\times 166{,}5}{262{,}1} = \frac{186{,}5}{262{,}5} = 0{,}71$$

$$b = \bar{y} - a\bar{x} = 166{,}5 - 0{,}71\times 27{,}3 = 147{,}12$$

$$y = 0{,}71x + 147{,}12$$

Exercícios propostos (págs. 60 a 64)

Itens de seleção (págs. 60 e 61)

1. $\{1, 1, 1, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 3, 4, 4, 5\}$

A moda é 3.

A mediana é 3.

$\bar{x} = \frac{3+6+12+8+5}{13} = \frac{34}{13}$

Opção (C)

2. $d_1 = x_1 - \bar{x}$

$d_1 = 12 - 13{,}5 = -1{,}5$

$d_2 = 1{,}1$

$d_3 = x_3 - \bar{x}$

Como $\sum d_i = 0$, temos:

$d_1 + d_2 + d_3 = 0 \Leftrightarrow -1{,}5 + 1{,}1 + d_3 = 0 \Leftrightarrow d_3 = 0{,}4$

Opção (B)

LeYa EDUCAÇÃO Daniela Raposo e Luzia Gomes

3. Por observação das nuvens de pontos, podemos referir que no gráfico (I) há fracos indícios de associação linear positiva. No gráfico (II) há associação linear negativa forte e no gráfico (III) existe associação linear negativa.

Assim, ao gráfico (I) corresponde $r = 0{,}25$, ao gráfico (II) corresponde $r = -0{,}9$ e ao gráfico (III) corresponde $r = -1$.

Opção (B)

4. Se todos os valores da distribuição forem multiplicados por 2, a média e o desvio-padrão duplicam.

Assim, temos $\bar{x} = 3$ e $s = 0{,}4$.

Opção (B)

5. A opção (A) não é a correta, uma vez que $s_A < s_B$.

A opção (B) não é a correta, uma vez que $s_B = s_C$.

A opção (C) é a correta, uma vez que $s_C > s_A$.

A opção (D) não é a correta, uma vez que aumentar um valor a todos os alunos não altera o desvio-padrão.

Opção (C)

6. O valor pedido corresponde ao 1º quartil.

Logo, $0{,}25 \times 1500 = 375$.

Opção (A)

7. $\bar{y} = 5 \times \bar{x} - 2 = 5 \times 3 - 2 = 13$

$s_y = 5 \times s_x = 5 \times 1{,}5 = 7{,}5$

Opção (B)

8. A afirmação (I) é falsa, uma vez que o diagrama (I) apresenta indícios de associação linear positiva e o diagrama (II) apresenta indícios de associação linear negativa.

As afirmações (II) e (III) são verdadeiras.

Opção (D)

9.

$$a=\frac{\sum_{i=1}^{10} x_i y_i-10\bar{x}\bar{y}}{SS_x}$$

$$SS_x=\sum_{i=1}^{10}(x_i-\bar{x})^2 \Leftrightarrow 75=\sum_{i=1}^{10}(x_i-\bar{x})^2$$

$$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{10}(x_i-\bar{x})^2=\sqrt{75}$$

$$r=\frac{\sum_{i=1}^{10}(x_i-\bar{x})^2-10\bar{x}\bar{y}}{\sqrt{SS_x\cdot SS_y}} \Leftrightarrow -0{,}78=\frac{\sqrt{75}-10\bar{x}\bar{y}}{\sqrt{75\times 144}}$$

$$\Leftrightarrow -81{,}06=\sqrt{75}-10\bar{x}\bar{y}$$

$$\Leftrightarrow 10\bar{x}\bar{y}=89{,}72$$

Cálculo auxiliar

$$s_y=\sqrt{\frac{SS_y}{n-1}} \Leftrightarrow 4=\sqrt{\frac{SS_y}{9}}$$

$$\Leftrightarrow 16=\frac{SS_y}{9}$$

$$\Leftrightarrow SS_y=144$$

$$a=\frac{\sum_{i=1}^{10} x_i y_i-10\bar{x}\bar{y}}{SS_x}=\frac{\sqrt{75}-89{,}72}{75}=-\frac{81{,}0597}{75}=-1{,}1$$

Opção (A)

10.

$$\sum_{i=1}^{4} x_i=4\times 15{,}25=61$$

$$\frac{61+2x}{6}=15{,}5 \Leftrightarrow 61+2x=93$$

$$\Leftrightarrow 2x=93-61$$

$$\Leftrightarrow 2x=32$$

$$\Leftrightarrow x=16$$

Opção (C)

11. Como $4=\bar{x}+3s_x$, a proporção de elementos da amostra inferiores a 4 é $\frac{1}{3^2}\approx 11{,}11\%$.

Assim, existem no máximo aproximadamente $11{,}11\%$ dos dados inferiores a 4.

Opção (C)

LeYa EDUCAÇÃO Daniela Raposo e Luzia Gomes

12. Sendo $r: y = ax + b$ a reta dos mínimos quadrados, o ponto de coordenadas $(\bar{x}, \bar{y})$ pertence à reta. Assim, $4 = 6a + b$. Por outro lado, como o desvio vertical do ponto $P(3; 6{,}5)$ é 0,5, temos:

$e_i = y_i - ax_i - b \Leftrightarrow 0{,}5 = 6{,}5 - 3a - b \Leftrightarrow 3a + b = 6$

Então:

$$\begin{cases} 6a + b = 4 \\ 3a + b = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 4 - 6a \\ 3a + 4 - 6a = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \\ -3a = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \\ a = -\frac{2}{3} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b = 4 - 6 \times \left(-\frac{2}{3}\right) \\ a = -\frac{2}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 8 \\ a = -\frac{2}{3} \end{cases}$$

Logo, $y = -\frac{2}{3}x + 8$.

Opção (A)

13. Como o desvio vertical do ponto $P_1(2, 7)$ é $0{,}2$ e o desvio vertical do ponto $P_2(5, 9)$ é 0, temos:

$$\begin{cases} 0{,}2 = 7 - 2a - b \\ 0 = 9 - 5a - b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -2a + 6{,}8 \\ b = 9 - 5a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 9 - 5a = -2a + 6{,}8 \\ \underline{\qquad\quad} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3a = 2{,}2 \\ \underline{\qquad} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{2{,}2}{3} \\ \underline{\qquad} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{11}{15} \\ \underline{\qquad} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overline{\qquad} \\ b = 9 - 5 \times \frac{11}{15} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \overline{\qquad} \\ b = 9 - \frac{55}{15} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overline{\qquad} \\ b = 9 - \frac{11}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overline{\qquad} \\ b = 9 - \frac{11}{3} \end{cases}$$

Assim, a equação reduzida da reta dos mínimos quadrados é $y = \frac{11}{15}x + \frac{16}{3}$.

Logo, o desvio vertical do ponto $P_{11}(8; 10{,}5)$ é:

$$\begin{aligned} e_{11} = 10{,}5 - 8 \times \tfrac{11}{15} - \tfrac{16}{3} &\Leftrightarrow e_{11} = 10{,}5 - \tfrac{88}{15} - \tfrac{80}{15} \\ &\Leftrightarrow e_{11} = 10{,}5 - \tfrac{168}{15} \\ &\Leftrightarrow e_{11} = \tfrac{105}{10} - \tfrac{56}{5} \\ &\Leftrightarrow e_{11} = \tfrac{105-112}{10} \\ &\Leftrightarrow e_{11} = \tfrac{-7}{10} \\ &\Leftrightarrow e_{11} = -0{,}7 \end{aligned}$$

Opção (C)

Itens de construção **(págs. 62 a 64)**

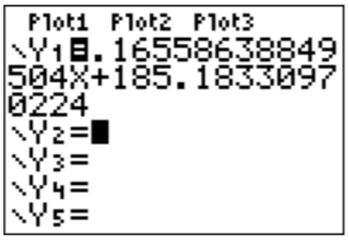
1.

1.1. Introduzindo os valores nas listas da calculadora, obtém-se $r = 0{,}9$. Como o valor de r é positivo e muito próximo de 1, estamos perante uma associação linear positiva forte.

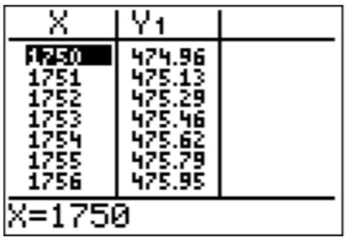
1.2.

a) A partir dos dados inseridos nas listas da calculadora, obtém-se $a \approx 0{,}1656$ e $b \approx 185{,}1833$.

b) Utilizando a reta de regressão obtida com os valores da alínea anterior, temos:



Consultando a tabela correspondente, verificamos que, para $x = 1750$, temos $y = 474{,}96$.



Assim, podemos estimar que o valor das despesas mensais com a alimentação de um agregado familiar cujo rendimento mensal é 1750 €, é 475 €.

2.

2.1. $\bar{x} = \frac{40 \times 12 + 42 \times 13 + 46 \times 14 + 22 \times 15 + 20 \times 16 + 23 \times 17 + 15 \times 18}{208} =$

$= \frac{2981}{208} \approx 14{,}33$

$SS_x = (12 - 14{,}33)^2 \times 40 + (13 - 14{,}33)^2 \times 42 + (14 - 14{,}33)^2 \times 46 + (15 - 14{,}33)^2 \times 22 + (16 - 14{,}33)^2 \times 20 + (17 - 14{,}33)^2 \times 23 + (18 - 14{,}33)^2 \times 15 =$

$= 728{,}1112$

$s_x^2 = \frac{SS_x}{207} = \frac{728{,}1112}{207}$

$s_x = \sqrt{\frac{728{,}1112}{207}} \approx 1{,}88$

2.2. $]\bar{x} - s, \bar{x} + s[\, = \,]14{,}33 - 1{,}5; 14{,}33 + 1{,}5[\, = \,]12{,}83; 15{,}83[$

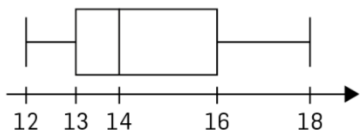
Assim:

$\frac{42+46+22+20}{208} = \frac{130}{208} = 62{,}5\%$

2.3. $P_{25} = \frac{x_{(52)} + x_{(53)}}{2} = 13$

$P_{50} = \frac{x_{(104)} + x_{(105)}}{2} = 14$

$P_{75} = \frac{x_{(156)} + x_{(157)}}{2} = 16$



3.

3.1.

Peso (em kg)	Número de crianças	Frequência relativa	Frequência relativa acumulada (%)
$[5, 10[$	40	$\frac{40}{140}$	$\frac{40}{140} \approx 29\%$
$[10, 15[$	22	$\frac{22}{140}$	$\frac{62}{140} \approx 44\%$
$[15, 20[$	36	$\frac{36}{140}$	$\frac{98}{140} = 70\%$
$[10, 25[$	30	$\frac{30}{140}$	$\frac{128}{140} \approx 91\%$
$[25, 30[$	12	$\frac{12}{140}$	$\frac{140}{140} = 100\%$

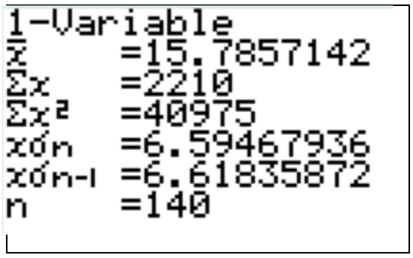
3.2. Classe modal: $[5, 10[$

Classe mediana (classe a que pertence o Q_2): $[15, 20[$

Classe a que pertence o Q_1: $[5, 10[$

Classe a que pertence o Q_3: $[20, 25[$

3.3. Introduzindo os valores nas listas da calculadora, obtém-se:



Assim, $\bar{x} = 15{,}8$ e $s = 6{,}6$.

4.

4.1.

5	6	7	7	8	9	11	12
12	13	15	16	17	18	18	19
20	21	22	23	29	32	35	36
37	41	44	44	45	49	62	65

$P_{25} = \frac{12+12}{2} = 12$

$P_{50} = \frac{19+20}{2} = 19{,}5$

$P_{75} = \frac{36+37}{2} = 36{,}5$

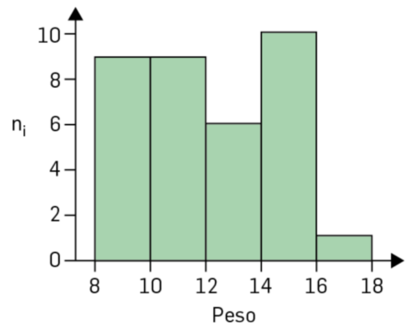
4.2. Como 30% dos percursos corresponde a P_{70} e $\frac{70 \times 32}{100} = 22{,}4$, temos $P_{70} = x_{23}$.

Logo, o percurso com menor duração dos 30% de maior duração é $x_{24} = 36$.

5.

5.1. Agrupando os dados em classes de amplitude 2, obtemos:

Classes	n_i
$[8, 10[$	9
$[10, 12[$	9
$[12, 14[$	6
$[14, 16[$	10
$[16, 18[$	1
	35



5.2. Tem-se $n = 35, h = 2$.

- $P_{10} = 8{,}8$

  $\frac{10\times35}{100} = 3{,}5$ e 9 > 3,5

  $$9(y-8) = \frac{10 \times 2 \times 35}{100} \Leftrightarrow y = \frac{79}{9}$$

  $y \approx 8{,}8$

- $P_{15} = 9{,}2$

  $\frac{15\times35}{100} = 5{,}25$ e 9 > 5,25

  $$9(y-8) = \frac{15 \times 2 \times 35}{100} \Leftrightarrow y = \frac{55}{6}$$

  $y \approx 9{,}2$

- $P_{50} = 11{,}9$

  $\frac{50\times35}{100} = 17{,}5$ e 9 < 17,5 e 18 > 17,5

  $$9 \times 2 + 9(y-10) = \frac{50 \times 2 \times 35}{100} \Leftrightarrow y = \frac{107}{9}$$

  $y \approx 11{,}9$

- $P_{75} = 14{,}5$

  $\frac{75\times35}{100} = 26{,}25$ e 9 + 9 + 6 < 26,25 e 9 + 9 + 6 + 6 > 26,25

Daniela Raposo e Luzia Gomes

$$9 \times 2 + 9 \times 2 + 6 \times 2 + 10(y - 14) = \frac{75 \times 2 \times 35}{100} \Leftrightarrow y = \frac{289}{20}$$

$y \approx 14{,}5$

- $P_{85} = 15{,}2$

  $\frac{85 \times 35}{100} = 29{,}75$ e $9 + 9 + 6 < 29{,}75$ e $9 + 9 + 6 + 10 > 29{,}75$

$$9 \times 2 + 9 \times 2 + 6 \times 2 + 10(y - 14) = \frac{85 \times 2 \times 35}{100} \Leftrightarrow y = \frac{303}{20}$$

  $y \approx 15{,}2$

5.3. Sabemos que $P_k = 11{,}4 = x_{15}$.

Assim, temos:

$\frac{k \times 35}{100} = 15 \Leftrightarrow 35k = 1500 \Leftrightarrow k = \frac{1500}{35}$

$\Leftrightarrow k = 42$

5.4. Como $P_{75} = x_{27}$, concluímos que há 26 crianças com peso inferior ao percentil 75.

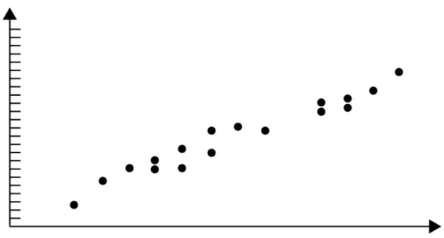
5.5. Como 20% dos pesos mais baixos corresponde a P_{20}, temos $\frac{20 \times 35}{100} = 7$ e $P_{20} = \frac{x_7 + x_8}{2}$.

Logo, o peso mais elevado dos 20% mais baixos é $x_7 = 9{,}6$.

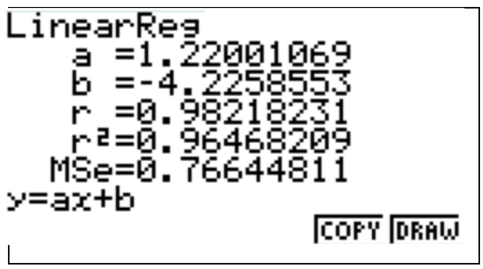
5.6. Se compararmos os percentis obtidos na alínea 5.2. com os estabelecidos pela OMS, podemos verificar que P_{10} e P_{15} estão abaixo dos valores estabelecidos, enquanto que P_{50} e P_{85} estão acima. Podemos, então, dizer que nesta amostra existem mais valores nos extremos do que o estabelecido pela OMS.

6.

6.1.



Utilizando a calculadora, obtemos:



Logo, $y = 1{,}22x - 4{,}23$ e $r = 0{,}98$.

6.2. Se $x = 15$, temos:

$y = 1{,}22 \times 15 - 4{,}23 \Leftrightarrow y = 18{,}3 - 4{,}23 \Leftrightarrow y \approx 14{,}1$

R.: 14,1 valores.

LeYa EDUCAÇÃO Daniela Raposo e Luzia Gomes

7. $s_y^2 = \frac{SS_y}{n-1} =$

$$= \frac{\sum_{i=1}^{10}(y_i - \bar{y})^2}{n-1} =$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^{10}(kx_i - k\bar{x})^2}{n-1} =$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^{10}k^2(x_i - \bar{x})^2}{n-1} =$$

$$= \frac{k^2\sum_{i=1}^{10}(x_i - \bar{x})^2}{n-1} =$$

$$= k^2 \frac{SS_x}{n-1} =$$

$$= k^2 s_x^2$$

8. Sabemos que $\bar{y} = 2{,}625$.

Assim:

$$\frac{2+3+y_3+3}{4} = 2{,}625 \Leftrightarrow \frac{8+y_3}{4} = 2{,}625 \Leftrightarrow 8 + y_3 = 10{,}5$$

$$\Leftrightarrow y_3 = 10{,}5 - 8$$

$$\Leftrightarrow y_3 = 2{,}5$$

Sabemos que $-0{,}25 = 2{,}625 - 0{,}25\bar{x}$. Assim:

$$-0{,}25 = 2{,}625 - 0{,}25\bar{x} \Leftrightarrow 0{,}25\bar{x} = 2{,}625 + 0{,}25 \Leftrightarrow \bar{x} = \frac{2{,}875}{0{,}25} \Leftrightarrow \bar{x} = 11{,}5$$

$$\bar{x} = 11{,}5 \Leftrightarrow \frac{10+11+x_3+13}{4} = 11{,}5 \Leftrightarrow x_3 = 12$$

Logo, $(x_3, y_3) = (12; 2{,}5)$.

9.

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) = \sum_{i=1}^{n}(x_i y_i - x_i\bar{y} - \bar{x}y_i + \bar{x}\,\bar{y}) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} x_i y_i - n\bar{x}\,\bar{y} - n\bar{x}\,\bar{y} + n\bar{x}\,\bar{y} =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} x_i y_i - n\bar{x}\,\bar{y}$$