OmegaMat

Exame Modelo IX de Matemática A

Duração do Exame: 150 **minutos** + 30 **minutos de tolerância** | **junho de 2020**

12.º Ano de Escolaridade

Utiliza apenas caneta ou esferográfica de tinta azul ou preta

É permitido o uso de calculadora

Não é permitido o uso de corretor. Risca o que pretendes que não seja classificado

Para cada resposta identifica o item

Apresenta as tuas respostas de forma legível

Apresenta apenas uma resposta para cada item

A prova apresenta um formulário na página 2

As cotações dos itens encontram-se na página 6

Na resposta aos itens de seleção (escolha múltipla), seleciona a resposta correta. Escreve na folha de respostas o número do item e a letra que identifica a opção escolhida.

Na resposta aos restantes itens, apresenta o teu raciocínio de forma clara, indicando todos os cálculos que tiveres de efetuar e todas as justificações necessárias. Quando, para um resultado, não é pedida aproximação apresenta sempre o valor exato.

NOTA

⁕ Itens cujas respostas contribuem obrigatoriamente para a classificação final:

6.1, 6.2, 6.3 e 9

Estes itens estão assinalados no enunciado a cor azul e em itálico

⁕ Dos restantes 14 itens da prova, apenas contribuem para a classificação final os 8 itens cujas respostas obtenham melhor pontuação

Formulário

Geometria

Comprimento de um arco de circunferência:

αr *(α - amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r - raio)*

área de um polígono regular: *Semiperímetro* $\times$ *Apótema*

área de um setor circular:

$\frac{\alpha r^2}{2}$ *(α- amplitude, em radianos, do ângulo ao centro, r - raio)*

área lateral de um cone: $\pi r g$ *(r - raio da base, g - geratriz)*

área de uma superfície esférica: $4\pi r^2$ *(r - raio)*

Volume da pirâmide: $\frac{1}{3}\times$ *área da base* $\times$ *Altura*

Volume do cone: $\frac{1}{3}\times$ *área da base* $\times$ *Altura*

Volume da esfera: $\frac{4}{3}\pi r^3$ *(r - raio)*

Progressões

Soma dos n primeiros termos de uma progressão (u_n):

Progressão aritmética: $\frac{u_1 + u_n}{2} \times n$

Progressão geométrica: $u_1 \times \frac{1 - r^n}{1 - r}$, $r \neq 1$

Trigonometria

$\sin(a + b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$

$\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$

Complexos

$(|z|e^{i\theta})^n = |z|^n e^{i(n\theta)}$

$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|} e^{i\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right)}$, $k \in \{0; 1; 2; ...; n-1\}$ e $n \in \mathbb{N}$

Regras de derivação

$(u + v)' = u' + v'$

$(uv)' = u'v + uv'$

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$

$(u^n)' = nu^{n-1}u' \quad (n \in \mathbb{R})$

$(\sin u)' = u' \cos u$

$(\cos u)' = -u' \sin u$

$(\tan u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$

$(e^u)' = u'e^u$

$(a^u)' = u'a^u \ln a \quad (a \in \mathbb{R}^+ \backslash \{1\})$

$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$

$(\log_a u)' = \frac{u'}{u \ln a} \quad (a \in \mathbb{R}^+ \backslash \{1\})$

Limites notáveis

$\lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e \quad (n \in \mathbb{N})$

$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^p} = +\infty \quad (p \in \mathbb{R})$

1. Considera um tabuleiro com dezasseis casas (quadrado dividido em dezasseis quadrados)
   O Rodrigo tem seis bolas numeradas de 1 a 6 numa caixa
   Ele pretende colocar nesse tabuleiro quatro das seis bolas numeradas de 1 a 6, uma, e só uma, em cada casa
   Quantas configurações distintas pode o Rodrigo fazer no tabuleiro?

   (A) 43680

   (B) 1820

   (C) 27300

   (D) 655200

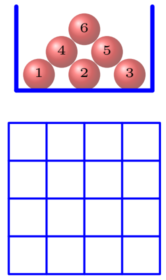

Figura 1

2. Numa caixa estão quatro bolas azuis e n bolas vermelhas
   Considera a experiência que consiste em retirar, sucessivamente e sem reposição, duas bolas da caixa

   Sabe-se que a probabilidade de a primeira bola ser azul e a segunda ser vermelha é igual a $\frac{10}{69}$
   Quantas bolas estão na caixa?

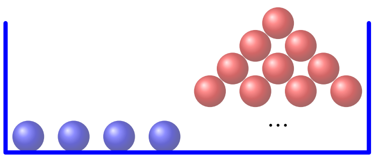

Figura 2

3. Sejam f e g, as funções reais de variável real, definidas, em $\mathbb{R}$, por $f(x) = 1 + 2e^{x-2}$, $g(x) = -f(x)$

   Na figura 3, estão representados, num plano munido de um referencial ortonormado xOy, partes dos gráficos das funções f e g, e um trapézio isósceles $[ABCD]$

   Sabe-se que:

   - os pontos A e B pertencem ao gráfico de f
   - os pontos C e D pertencem ao gráfico de g
   - a ordenada do ponto D é -3
   - os pontos A e D têm a mesma abcissa
   - B é o ponto de interseção do gráfico de f com o eixo Oy
   - C é o ponto de interseção do gráfico de g com o eixo Oy

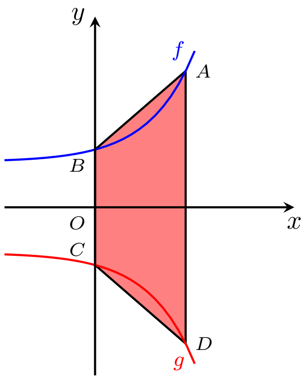

Figura 3

   3.1. Mostra que a área A do trapézio $[ABCD]$ é $A_{[ABCD]} = \dfrac{4+8e^2}{e^2}$

4. Em qual das opções está o valor de $k \in \mathbb{R}^+$, tal que $\lim \left(\dfrac{n+2}{n+6}\right)^{\frac{n}{2}} = e^{\ln(k)-3}$?

   (A) 1

   (B) $2e$

   (C) e

   (D) $3e$

5. Considera, num plano munido de um referencial ortonormado xOy, a circunferência trigonométrica, como se observa na figura 4

Sabe-se que:

- os pontos A, B, C, D, E e F, pertencem à circunferência
- os pontos A e B são simétricos em relação ao eixo Oy
- os pontos C e D são simétricos em relação ao eixo Oy
- os triângulos $[ABO]$ e $[CDO]$, são simétricos em relação ao eixo Ox
- $E(1;0)$ e $F(-1;0)$
- o ponto A move-se no primeiro quadrante, e os pontos B, C e D, acompanham esse movimento
- $E\hat{O}A = x$, com $x \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[$

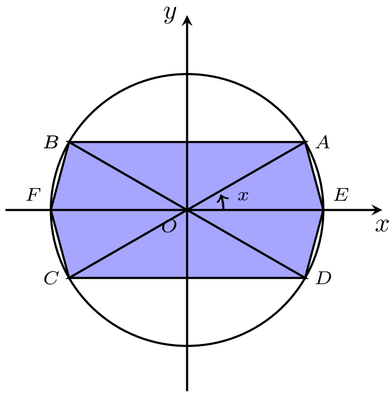

Figura 4

5.1. Mostra que a área A, da região colorida da figura, é dada, em função de x, por

$$A(x) = 2\sin(x) + \sin(2x)$$

5.2. Determina, analiticamente, o valor de x, para o qual a área da região colorida é máxima

6. Na figura 5 está representado, em referencial o.n. $Oxyz$, um sólido, que pode se decomposto num prisma $[ABCDEFGH]$, quadrangular regular reto e numa pirâmide $[EFGHI]$, quadrangular regular reta

Sabe-se que:

- *a face $[ABCD]$ está contida no plano xOz*
- *a base da pirâmide coincide com a face $[EFGH]$ do prisma*
- *a origem do referencial é o centro da face $[ABCD]$*
- *os pontos A e C pertencem ao eixo Ox*
- *os pontos B e D pertencem ao eixo Oz*
- *o plano ADE tem equação cartesiana $x + z - 4 = 0$*
- *o plano EFI tem equação cartesiana $3x + 4y - 3z - 36 = 0$*
- $\overrightarrow{HD} = (0, -6, 0)$

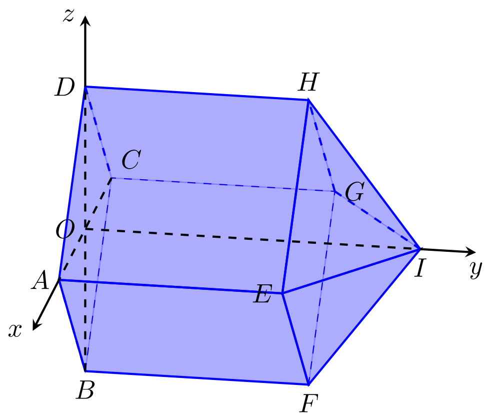

Figura 5

6.1. *Determina uma equação reduzida da superfície esférica de centro em I e que contém os pontos E, F, G e H, e escreve as equações dos planos paralelos ao plano xOy e tangentes a esta superfície esférica*

6.2. *Escreve uma equação vetorial da reta EF*

6.3. *Escreve uma equação cartesiana do plano ABE*
Escreve a equação na forma $ax + by + cz + d = 0$, com $a, b, c, d \in \mathbb{R}$

7. Considera um número complexo z, não nulo, cujo afixo é B
Na figura 6 está representado o plano de Argand - Gauss e nele alguns afixos de números complexos, sendo um deles o afixo de z

Qual dos afixos representados poderá ser o afixo do número complexo $w = \frac{-iz}{2}$?

(A) A

(B) E

(C) C

(D) D

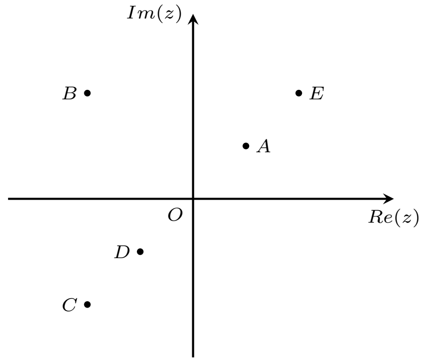

Figura 6

8. Seja $\mathbb{C}$, o conjunto dos números complexos e seja z um número complexo
Mostra que a soma das soluções da equação $z^3 + 2iz^2 + z = 0$ é $2e^{i\left(-\frac{\pi}{2}\right)}$

9. Na figura 7 está representado um quadrado $[ABCD]$ de lado r, com $r > 0$
Desenharam-se arcos de circunferência, todos centrados no vértice A, sendo a medida do raio de cada arco, depois do primeiro, igual a metade do raio do arco anterior

Considera a sucessão de todos esses arcos

Sendo S, a soma de todos os comprimentos dos n arcos da sucessão, pode-se afirmar que:

(A) $S = \pi$

(B) $S = \pi r$

(C) $S = 2\pi r$

(D) $S = 4\pi r$

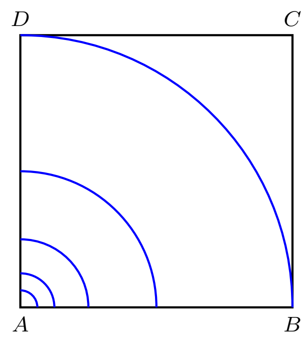

Figura 7

10. Seja $(E, P(E), P)$ um espaço de probabilidade, P uma probabilidade em $P(E)$ e sejam A e B, dois acontecimentos, com $P(A) > 0$ e $P(B) > 0$

Mostra que $\frac{P(A \cap B) + P(\overline{A} \cap \overline{B}) + P(A) + P(B) - 1}{2} = 1 - P(\overline{A} \cup \overline{B})$

11. Num saco estão nove cartões numerados de 1 a 9. Considera a experiência aleatória que consiste em retirar, sucessivamente e sem reposição, três cartões do saco
Com esses três cartões retirados forma-se um número de três algarismos (o número do primeiro cartão a sair do saco representa o algarismo das centenas, o número do segundo cartão representa o algarismo das dezenas e o número do terceiro cartão representa o algarismo das unidades)

De todos os números de três algarismos que se podem constituir, qual é a probabilidade de ser formado um número em que o produto dos três algarismos é par?

12. Seja f, a função real de variável real, definida por, $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^3}{x^2e^x - x^2} & se \quad x < 0 \\ \log_a(b^2) & se \quad x = 0 \\ \dfrac{e^{3x} - e^{2x}}{\ln(x+1)} & se \quad x > 0 \end{cases}$,

com $a, b \in \mathbb{R}^+$ e $a > 1$

12.1. Averigua se existe uma relação entre a e b, para a qual a função f é contínua no ponto $x = 0$

12.2. Averigua, analiticamente, se o gráfico da função f admite assíntota horizontal quando $x \to +\infty$

13. Seja g, a função real de variável real, definida em $\mathbb{R}$, por $g(x) = \dfrac{x^2 - 1}{e^{-x}}$

Na figura 8, está representado, em referencial ortonormado xOy, parte do gráfico da função g, e uma reta t, tangente ao gráfico de g no ponto de abcissa -1

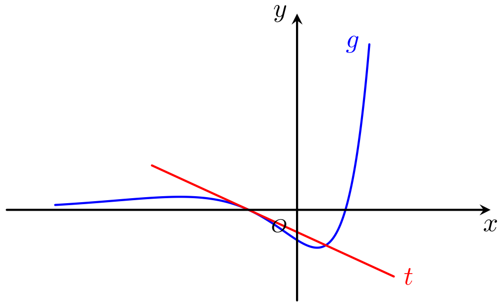

Figura 8

13.1. Em qual das opções está o declive da reta tangente t?

(A) $\dfrac{2}{e}$

(B) $-\dfrac{2}{e}$

(C) $2e$

(D) $-2e$

13.2. Estuda a função g quanto ao sentido das concavidades e pontos de inflexão do seu gráfico

COTAÇÕES

As pontuações obtidas nas respostas a estes 4 itens da prova contribuem obrigatoriamente para a classificação final

Itens	6.1	6.2	6.3	9	Subtotal
Cotação (Pontos)	20	16	16	20	72

Destes 14 itens da prova, contribuem para a classificação final da prova os 8 itens cujas respostas obtenham melhor pontuação

Itens	1	2	3	4	5.1	5.2	7	8	10	11	12.1	12.2	13.1	13.2	Subtotal
Cotação (Pontos)	8×16 Pontos														128