Recursos para Matemática

Grupo do Facebook

Prova Modelo de Exame Nacional

Matemática A

Prova 635 | Ensino Secundário | Julho 2021

Grupo
Recursos Para Matemática

Duração da Prova: 150 minutos. | Tolerância: 30 minutos. 8 Páginas

- Utilize apenas caneta ou esferográfica de tinta azul ou preta.
- Não é permitido o uso de corretor. Risque aquilo que pretende que não seja classificado.
- É permitido o uso de régua, compasso, esquadro e transferidor.
- Apresente apenas uma resposta para cada item.
- As cotações dos itens encontram-se no final da prova.

- A prova inclui um formulário.
- Nas respostas aos itens de escolha múltipla, selecione a opção correta. Escreva, na folha de respostas, o número do item e a letra que identifica a opção escolhida.
- Nas respostas aos restantes itens, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias. Quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, apresente sempre o valor exato.

- Itens cujas respostas contribuem obrigatoriamente para a classificação final:

1.1., 1.2., 3., 4., 6., 8., 10.1., 10.2., 13.1., 13.2. e 15.

Estes itens estão assinalados no enunciado através de uma moldura que os rodeia.

- Dos restantes 7 itens da prova, apenas contribuem para a classificação final os 4 itens cujas respostas obtenham melhor pontuação.

Formulário

Geometria

Comprimento de um arco de circunferência:

αr (α - amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r - raio)

Área de um polígono regular: *Semiperímetro* $\times$ *Apótema*

Área de um sector circular:

$\frac{\alpha r^2}{2}$ (α - amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r - raio)

Área lateral de um cone: $\pi r g$ (r- raio da base; g - geratriz)

Área de uma superfície esférica: $4\pi r^2$ (r- raio)

Volume de uma pirâmide: $\frac{1}{3} \times$ *Área da base* $\times$ *Altura*

Volume de um cone: $\frac{1}{3} \times$ *Área da base* $\times$ *Altura*

Volume de uma esfera: $\frac{4}{3}\pi r^3$ (r- raio)

Progressões

Soma dos n primeiros termos de uma progressão (u_n):

Progressão aritmética: $\frac{u_1 + u_n}{2} \times n$

Progressão geométrica: $u_1 \times \frac{1 - r^n}{1 - r}$

Trigonometria

$\operatorname{sen}(a+b) = \operatorname{sen} a \cos b + \operatorname{sen} b \cos a$

$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b$

Complexos

$\left(\rho e^{i\theta}\right)^n = \rho^n e^{in\theta}$

$\sqrt[n]{\rho e^{i\theta}} = \sqrt[n]{\rho}\, e^{i\frac{\theta + 2k\pi}{n}} \quad \left(k \in \{0, \ldots, n-1\} \text{ e } n \in \mathbb{N}\right)$

Regras de derivação

$(u+v)' = u' + v'$

$(uv)' = u'v + uv'$

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$

$(u^n)' = n u^{n-1} u' \ (n \in \mathbb{R})$

$(\operatorname{sen} u)' = u' \cos u$

$(\cos u)' = -u' \operatorname{sen} u$

$(\operatorname{tg} u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$

$(e^u)' = u' e^u$

$(a^u)' = u' a^u \ln a \quad \left(a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}\right)$

$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$

$(\log_a u)' = \frac{u'}{u \ln a} \quad \left(a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}\right)$

Limites notáveis

$\lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e \quad (n \in \mathbb{N})$

$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$

$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^p} = +\infty \quad (p \in \mathbb{R})$

Manuel Gonçalves

1. De duas sucessões (u_n) e (v_n) sabe-se que:

- (u_n) é uma progressão aritmética;
- a soma de todos os termos de (u_n) entre o quarto e o décimo terceiro, incluindo-os, é -55;
- $u_9 = -7$;
- (v_n) é uma progressão geométrica estritamente crescente;
- u_8 e u_{12} são os dois primeiros termos de (v_n).

1.1. Qual das seguintes afirmações é necessariamente verdadeira?

(A) (u_n) é uma sucessão monótona crescente.

(B) Se $n > 11$ então a soma dos primeiros n termos consecutivos de (u_n) é inferior a 0.

(C) A soma dos primeiros vinte termos de (u_n) é igual a -230.

(D) $u_{15} = -28$.

1.2. Determina k sabendo que o termo geral de (v_n) é dado pela expressão $v_n = -2^{k-2n}$.

Paulo Naves Pedro

2. Considere um cubo e um octaedro seu dual, representados na figura 1.

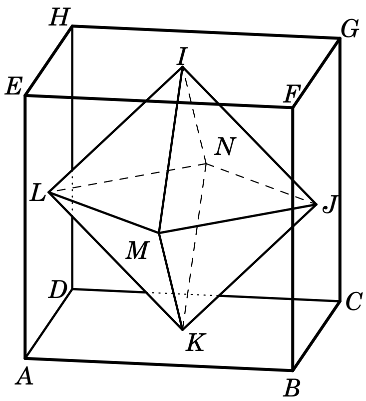

Figura 1

Escolhendo ao acaso um conjunto de três vértices do cubo e um conjunto de três vértices do octaedro, qual é a probabilidade desses dois conjuntos definirem planos paralelos ou coincidentes?

José Carlos Pereira

3. Considera todos os números de seis algarismos distintos que se podem formar com os algarismos de 0 a 9.

Quantos destes números têm os algarismos colocados por ordem crescente ou decrescente?

(A) 210 **(B)** 294 **(C)** 420 **(D)** 462

José Carlos Pereira

4. Seja E o espaço amostral associado a uma certa experiência aleatória e sejam A e B dois acontecimentos $(A \subset E$ e $B \subset E)$ tais que:

- $P\left(A \middle| \left(B \cup \overline{A}\right)\right) = \frac{1}{3}$
- $P(A) = \frac{3}{4}$

Qual é o valor de $P\left(B \middle| A\right)$?

José Carlos Pereira

5. Qual é o valor de $\lim\left(2n\left(\ln\left(n^2+3n+2\right)-\ln\left(n^2+2n\right)\right)\right)$?

Carlos Frias

6. Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, considere a equação $z^2-8z+25=0$.

Na figura 2 encontra-se representado, no plano complexo, um quadrado $[OABC]$.
Sabe-se que:

- O é a origem do referencial;
- O vértice A do quadrado é a imagem geométrica de uma das soluções da equação dada;
- O vértice B é a imagem geométrica de um complexo w.

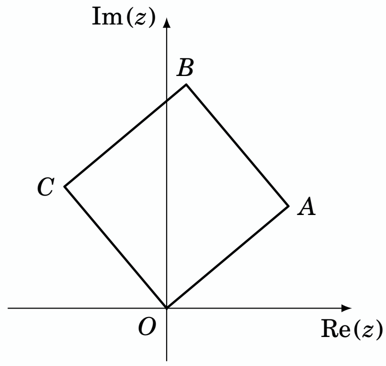

Figura 2

Qual dos seguintes é o valor de w?

(A) $2+6i$ **(B)** $2+7i$ **(C)** $1+7i$ **(D)** $1+6i$

João Ferreira

7. Seja $\mathbb{C}$ o conjunto dos números complexos. Considere:

$$z_1=\frac{\left(1+\sqrt{3}i\right)^5}{-8e^{i\pi}i^{2015}} \qquad \text{e} \qquad z_2=4\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)+4i\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)$$

No plano complexo, sejam O a origem do referencial e A e B as imagens geométricas de z_1 e z_2, respetivamente.

Sabe-se que o segmento de reta $[AB]$ é um dos lados do polígono cujos vértices são as imagens geométricas das raízes de índice n de um certo número complexo.

Qual é o valor de n?

Carlos Frias

8. No referencial o.n. xOy da figura 3 estão representadas uma reta r e uma circunferência.

Tal como a figura sugere:

- a reta r passa pela origem do referencial e tem a inclinação $\frac{\pi}{6}$rad;
- a reta r é tangente à circunferência no ponto A de ordenada $2\sqrt{3}$;
- a circunferência é centrada num ponto C pertencente ao eixo das abcissas.

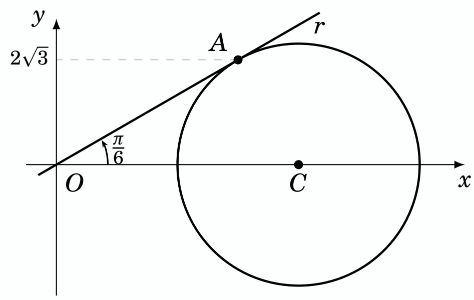

Figura 3

Qual das equações seguintes define a circunferência?

(A) $(x-9)^2+y^2=14$ **(B)** $(x-8)^2+y^2=14$ **(C)** $(x-9)^2+y^2=16$ **(D)** $(x-8)^2+y^2=16$

José Gomes

9. Determine, em $\mathbb{R}$, o conjunto solução da inequação:

$$\ln\left(5e^{2x}-1\right) \leq x + \ln\left(1-e^{x}\right)$$

Carlos Frias

10. Na figura 4 encontra-se representado, em referencial o.n. $Oxyz$, um triângulo $[ABC]$.

Sabe-se que:

- O é a origem dos referencial;
- o ponto A pertence ao eixo das cotas;
- B e C são os pontos de interseção do plano de equação

$$2x+3y-6=0$$

  com os eixos Oy e Ox, respetivamente.
- o volume da pirâmide $[OABC]$ é igual a 4.

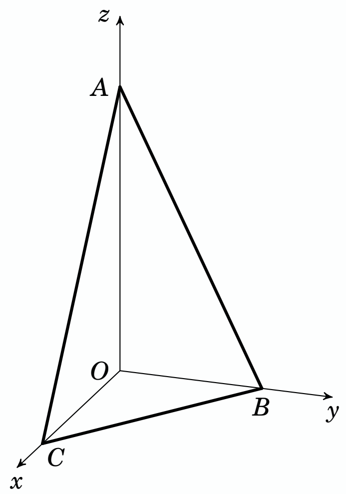

Figura 4

Resolva os itens seguintes por processos analíticos.

10.1. Mostre que o plano ABC é definido por $4x+6y+3z-12=0$.

10.2. Considere a superfície esférica centrada no ponto P de coordenadas $(-1,-8,1)$ e que é tangente ao plano ABC.

Defina essa superfície esférica por uma condição.

Paulo Conde

11. Considere a função f, de domínio $\mathbb{R}$, definida por:

$$f(x)=\begin{cases} 2e^{x}\cos(x)+1 & , x \leq 0 \\ \dfrac{\ln(2x+1)}{x} & , x>0 \end{cases}$$

Mostre que o gráfico de f tem duas assíntotas, ambas horizontais.

Valter Carlos

12. Considere as funções f e g, definidas, respetivamente, em $]-3,+\infty[$ e $\mathbb{R}$, por:

$$f(x)=2\ln(x+3)+x+1 \qquad \text{e} \qquad g(x)=x^{2}-2e^{x+1}$$

Seja a a abcissa do ponto de inflexão do gráfico de g.

Escreva a equação reduzida da reta tangente ao gráfico de f, no ponto de abcissa a.

Apresente a ordenada na origem na forma $\ln k$, com $k \in \mathbb{R}^{+}$

José Carlos Pereira

13. Considere a função f, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $f(x)=\dfrac{\cos(x)}{4-\operatorname{sen}(x)}$.

13.1. Seja $\beta\in\mathbb{R}$ tal que $\operatorname{tg}(\beta)=2$. Qual é o valor de $f(2\beta)$?

(A) $-\dfrac{3}{16}$ **(B)** $-\dfrac{3}{8}$ **(C)** $-\dfrac{3}{2}$ **(D)** -3

13.2. O gráfico da função f tem um ponto de abcissa pertencente ao intervalo $[0,\pi]$ tal que quando se adiciona 2 à abcissa a sua ordenada dobra.

Utilizando as capacidades gráficas da sua calculadora, determine as coordenadas desse ponto.

Na sua resposta:

- apresente uma equação que lhe permita resolver o problema;
- reproduza, num referencial, o(s) gráfico(s) da(s) função(ões) visualizado(s) na calculadora que lhe permite(m) resolver a equação e apresente as coordenadas do(s) ponto(s) relevante(s) arredondadas às centésimas;
- apresente as coordenadas do ponto, arredondadas às centésimas.

Mário Oliveira

14. Considere a função g definida em $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ por $g(x)=\dfrac{\ln\left(x^2\right)}{x}$.

Estude a função g quanto à monotonia e à existência de extremos relativos.

José Gomes

15. Considere f e g duas funções de domínio $\mathbb{R}$ e f' a primeira derivada da função f, contínua em $\mathbb{R}$.

Sejam a e b dois números reais tais que:

- $b>a$
- $g(a)=b$
- $(g\circ g)(a)=a$

Sabe-se que: $\forall x\in\mathbb{R}, f'(x)\times\left[(g\circ g)(x)-g(x)\right]+f(x)>(f\circ g)(x)$.

Mostre que existe pelo menos uma reta tangente ao gráfico da função f com declive igual a $\dfrac{t.m.v._{(f,[a;b])}}{t.m.v._{(g,[a;b])}}$.

As pontuações obtidas nas respostas a estes 11 itens da prova contribuem obrigatoriamente para a classificação final.	**1.1.**	**1.2.**	**3.**	**4.**	**6.**	**8.**	**10.1.**	**10.2.**	**13.1.**	**13.2.**	**15.**	**Subtotal**
Cotação (em pontos)	12	14	12	14	12	12	14	14	12	14	14	144
Destes 7 itens, contribuem para a classificação final da prova os 4 itens cujas respostas obtenham melhor pontuação.	**2.**	**5.**	**7**	**9.**	**11.**	**12.**	**14.**					**Subtotal**
Cotação (em pontos)	4×14 pontos											56
Total												200

Coordenação
José Carlos Pereira

Paginação
Antero Neves