Probabilidades (12.º ano)

Cálculo combinatório - Problemas de contagem

Exercícios de Provas Nacionais e Testes Intermédios - Propostas de resolução

1. Se a Fernanda oferecer 3 dos 5 livros e 3 das 7 canetas a um dos netos, como a ordem de seleção não é relevante e o beneficiário deste conjunto pode ser qualquer um dos dois netos o número de formas diferentes de fazer a repartição é:

$$2 \times ^5 C_3 \times ^7 C_3$$

Se a alternativa for oferecer 4 dos 5 livros e 2 das 7 canetas a um dos netos, como a ordem de seleção continua a não ser relevante e o beneficiário deste conjunto também pode ser qualquer um dos dois netos o número de formas diferentes de fazer a repartição é:

$$2 \times ^5 C_4 \times ^7 C_2$$

Como as qualquer uma destas alternativas pode acontecer em alternativa, temos que o número de modos diferentes pode a Fernanda repartir os doze objetos pelos seus dois netos é:

$$2 \times ^5 C_3 \times ^7 C_3 + 2 \times ^5 C_4 \times ^7 C_2 = 910$$

Exame – 2021, Ép. especial

2. Como os pontos pertencem a duas retas, os 5 pontos da reta r são colineares, pelo que nenhum conjunto de 3 destes pontos define um triângulo, assim como acontece para os n pontos da reta s.

Desta forma, para definir um triângulo com 3 destes pontos é necessário selecionar 2 pontos da reta r e 1 ponto da reta r ($^5C_2 \times ^n C_1$ triângulos distintos deste tipo), ou em alternativa, selecionar 1 ponto da reta r e 2 pontos da reta r ($^5C_1 \times ^n C_2$ triângulos distintos deste tipo).

Como é possível definir exatamente 175 triângulos, temos que:

$$^5C_2 \times ^n C_1 + ^5 C_1 \times ^n C_2 = 175$$

Resolvendo a equação anterior, determinamos o valor de n:

$$^5C_2 \times ^n C_1 + ^5 C_1 \times ^n C_2 = 175 \Leftrightarrow \frac{5!}{2!3!} \times n + \frac{n!}{2!(n-2)!} \times 5 = 175 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{5 \times 4 \times 3!}{2!3!} \times n + \frac{n \times (n-1) \times (n-2)!}{2!(n-2)!} \times 5 = 175 \Leftrightarrow \frac{5 \times 4 \times n}{2!} + \frac{n \times (n-1) \times 5}{2!} = 175 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{20n}{2} + \frac{(n^2-n) \times 5}{2} = 175 \Leftrightarrow 20n + 5n^2 - 5n = 350 \Leftrightarrow 5n^2 + 15n - 350 = 0 \Leftrightarrow n = 7 \vee n = -10$$

Como n é o número de ponto marcados sobre a reta s, então $n \in \mathbb{N}$, ou seja, $n = 7$

Exame – 2021, 2.ª Fase

3. Como os dois condutores são dois dos três dirigentes,existem ${}^3A_2$ formas diferentes de selecionar os condutores (a ordem é relevante, porque as viaturas são diferentes).

   Como no automóvel, vão dois jogadores de cada sexo, não existe qualquer lugar disponível para o treinador ou para o dirigente que não vai conduzir, pelo que o número de formas diferentes de selecionar os restantes ocupantes do automóvel consiste em contar o número de formas de selecionar 2 dos 5 jogadores do sexo masculino e 2 das 5 jogadoras do sexo feminino, ou seja, ${}^5C_2 \times {}^5 C_2$

   Assim, temos a contagem do número de condutores e grupos de ocupantes de cada uma das viaturas, pelo que resta ainda ordenar os 4 ocupantes do automóvel e 8 ocupantes da carrinha (à exceção dos condutores) pelos lugares disponíveis em cada viatura, ou seja $P_4 = {}^4A_4 = 4!$ para os lugares do automóvel e $P_8 = {}^8A_8 = 8!$ para os lugares da viatura.

   Assim, a uma expressão que dê o número de maneiras diferentes de distribuir os catorze elementos da comitiva pelos catorze lugares disponíveis, é:

$${}^3A_2 \times {}^5 C_2 \times {}^5 C_2 \times \times 4! \times 8!$$

Exame – 2021, 1.ª Fase

4. Como apenas os 4 hóspedes dinamarqueses podem conduzir as 4 motos diferentes, a forma de os distribuir, um por cada moto é: ${}^4A_4 = P_4 = 4!$

   Como devemos distribuir os restantes 3 hóspedes suecos pelos 4 lugares disponíveis, o número de formas diferentes de o fazer é ${}^4A_3$ (porque se deve considerar a ordem relevante, uma vez que as motas são diferentes), ou seja, o número total de formas distintas de distribuir os sete hóspedes pelas quatro motos, nas condições definidas, é:

$$4! \times {}^4 A_3 = 576$$

   Resposta: **Opção D**

Exame – 2020, Ép. especial

5. Como os números devem ser naturais, superiores a 9999 e inferiores a 22 000, então todos têm 5 algarismos, usando apenas os algarismos 0, 1, 2 ou 3.

   O algarismo das dezenas de milhar tem que ser 1 ou 2 (não pode começar por zero e deve ser inferior a 30 000).

   Se o algarismo das dezenas de milhar for 1, então os restantes 4 podem ser escolhidos de entre as 4 alternativas, sem restrições, com repetição e considerando relevante a ordem, ou seja, de ${}^4A'_4 = 4^4 = 256$ formas diferentes.

   Se o algarismo das dezenas de milhar for 2, então o algarismo dos milhares tem que ser 0 ou 1 (2 opções), para que o número seja inferior a 22 000 e os restantes 3 podem ser escolhidos de entre as 4 alternativas, sem restrições, com repetição e considerando relevante a ordem, ou seja, existem $2 \times {}^4 A'_3 = 2 \times 4^3 = 2 \times 128$ números diferentes nestas condições.

   Assim, a quantidade de números naturais superiores a 9999 e inferiores a 22 000 escritos usando apenas os algarismos 0, 1, 2 e 3 é:

$${}^4A'_4 + 2 \times {}^4 A'_3 = 256 + 128 = 384$$

   Resposta: **Opção C**

Exame – 2020, 2.ª Fase

6. Como cada uma das 5 caixas com número par deve ter, pelo menos, uma bola azul e existem 8 bolas azuis, restam $8-5=3$ bolas azuis para colocar como uma segunda bola.

   Como cada uma das 5 caixas com número ímpar deve ter, pelo menos, uma bola branca e existem 7 bolas brancas, restam $7-5=2$ bolas brancas para colocar como uma segunda bola.

   Desta forma podemos selecionar quaisquer duas das 10 caixas para colocar as duas bolas brancas, a que correspondem ${}^{10}C_2$ escolhas diferentes; e depois, por cada uma destas escolhas, devemos escolher 3 das restantes 8 caixas (porque nenhuma pode conter mais do que duas bolas), para colocar as 3 bolas azuis restantes, a que correspondem ${}^{8}C_3$

   Assim, o número de maneiras diferentes em podem ficar colocadas as bolas nas dez caixas, nas condições indicadas, é:

   $${}^{10}C_2 \times {}^{8}C_3 = 2520$$

   Resposta: **Opção B**

Exame – 2020, 1.ª Fase

7. Nas condições indicadas pretende-se colocar os cartões numa fila que pode ser dividida em duas partes - a primeira com três posições e a segunda com seis posições.

   Como na primeira parte da fila existem três posições onde podem ser colocados quatro cartões (2, 3, 5, e 7), e a ordem dos cartões é relevante, o número de formas diferentes de ocupar os três primeiros lugares da fila é ${}^{4}A_3$

   Para a segunda parte da fila, com seis posições, existem 6 números disponíveis para os ocupar (o número primo que não foi colocado antes e todos os restantes), pelo que o número de disposições dos lugares é ${}^{6}A_6 = P_6 = 6!$

   Assim, o número de maneiras diferentes em possível colocar os cartões, de modo que os números inscritos nos três primeiros cartões sejam primos, é:

   $${}^{4}A_3 \times {}^{6}A_6 = 17\,280$$

Exame – 2019, Ép. especial

8. Como o delegado de turma tem de fazer parte da comissão e esta deve incluir rapazes e raparigas, os restantes dois membros devem ser duas raparigas ou um rapaz e uma rapariga.

   Como a turma tem 15 raparigas, selecionando duas delas, temos que existem ${}^{15}C_2 = 105$ comissões formadas pelo delegado e por mais duas raparigas.

   Selecionando uma das 15 raparigas, e um dos $26-15-1=10$ rapazes (correspondendo a retirar dos 26 alunos, as 15 raparigas e o delegado que deve integrar a comissão obrigatoriamente), temos que existem $15 \times 10 = 150$ comissões formadas pelo delegado e por um rapaz e uma rapariga.

   Assim, o número de comissões diferentes, que incluam rapazes e raparigas, se podem formar, sabendo-se que o delegado de turma tem de fazer parte da comissão é:

   $${}^{15}C_2 + 15 \times 10 = 105 + 150 = 255$$

   Resposta: **Opção D**

Exame – 2019, 2.ª Fase

9. Para que os números sejam ímpares e maiores do que seis milhões, têm que, cumulativamente, ter o primeiro algarismo maior ou igual a 6 e o último algarismo ímpar.

   Como só existe um algarismo 7, os números ímpares que se podem formar maiores que sete milhões, devem terminar em 5, pelo que usando o 7 para o algarismo dos milhões e um dos 5 para o algarismo das unidades, restam escolher a posição do outro algarismo 5, de entre as 5 posições disponíveis, sendo que as restantes posições serão ocupadas por algarismos 6. Assim, nestas condições o número de números ímpares que se podem formar maiores que sete milhões é: ${}^5C_1 = 5$

   Caso o algarismo dos milhões seja um 6, podemos considerar a hipótese do algarismo das unidades ser o 7, e neste caso, a contagem do número de hipóteses corresponde a escolher 2 das 5 posições restantes onde devem figurar os algarismos 5, ou seja, ${}^5C_2 = 10$

   Ainda no caso do algarismo dos milhões ser um 6, devemos considerar a hipótese do algarismo das unidades ser 5, e nesse caso será necessário escolher uma posição para o 5 restante, de entre as 5 posições restantes e outra para o 7, de entre as 4 restantes, ou seja, ${}^5C_1 \times {}^4C_1 = 20$

   Assim, o número de números ímpares e maiores do que seis milhões, de acordo com as restrições do enunciado, é:
   $${}^5C_1 + {}^5C_2 + {}^5C_1 \times {}^4C_1 = 5 + 10 + 20 = 35$$

   Exame – 2019, 1.ª Fase

10. Se pretendemos formar conjuntos com, pelo menos, três pessoas de entre um conjunto alargado de cinco pessoas, devemos considerar todos os conjuntos de três pessoas, com todos os conjuntos de quatro pessoas e ainda o único conjunto de cinco pessoas, ou seja:

    $${}^5C_3 + {}^5C_4 + {}^5C_5 = 10 + 5 + 1 = 16$$

    Resposta: **Opção D**

    Exame – 2018, Ép. especial

11. Como existem 5 vogais, existem 5 hipóteses para o primeiro dígito do código.
    Para os restantes 3 dígitos do código existem 9 algarismos disponíveis, e como os algarismos devem ser todos diferentes, para as restantes 3 dígitos existem ${}^9A_3$ escolhas diferentes.

    Assim, nas condições do enunciado existem $5 \times {}^9A_3 = 2520$ números.

    Resposta: **Opção D**

    Exame – 2018, 2.ª Fase

12. Como existem 4 alunos de Espanhol, que devem ficar juntos na fotografia, existem $P_4 = {}^4A_4 = 4!$ formas de dispor os 4 alunos em 4 posições adjacentes.
    Da mesma forma, como existem 8 alunos de Inglês, existem $P_8 = {}^8A_8 = 8!$ formas diferentes de os dispor em 8 posições adjacentes.
    Como se pretende que os alunos da mesma disciplina fiquem juntos, independentemente da ordenação das disciplinas, existem 2 formas de colocar os dois grupos (o grupo de Espanhol na direita, ou na esquerda), e assim o número total de maneiras que se podem dispor os 12 alunos nas condições descritas, é:

    $$4! \times 8! \times 2 = 1\,935\,360$$

    Resposta: **Opção D**

    Exame – 2018, 1.ª Fase

13. Como o número a formar deve ser maior que 20 000, então para o algarismo das dezenas de milhar existem apenas 3 escolhas possíveis (2, 3 e 4).
Para os restantes 4 posições do número existem 4 algarismos disponíveis (0 e 1 e os dois algarismos que não figuram na posição das dezenas de milhar), e como os algarismos devem ser todos diferentes, para as restantes 4 posições existem $P_4 = {}^4A_4 = 4!$ escolhas diferentes.

Assim, nas condições do enunciado existem $3 \times 4! = 72$ números.

Resposta: **Opção C**

Exame – 2017, Ép. especial

14. Temos que os algarismos pares, ficando juntos podem ocupar 4 grupos de duas posições adjacentes e trocando entre si, podem figurar no número de 2×4 formas distintas.
Os algarismos ímpares devem ocupar as 3 posições restantes, podendo trocar entre si, o que corresponde a ${}^3A_3 = P_3 = 3!$ disposições diferentes.
Assim, considerando todas as disposições diferentes dos algarismos, temos que o total de números naturais nas condições do enunciado é: $2 \times 4 \times 3! = 8 \times 6 = 48$

Resposta: **Opção B**

Exame – 2017, 2.ª Fase

15. Os números naturais de quatro algarismos que se podem formar com os algarismos de 1 a 9 e que são múltiplos de 5, são constituídos por 3 algarismos ou posições, em que as três primeiras podem ser ocupada por 9 algarismos (todos exceto o zero), e a última apenas por 1 (o algarismo 5).
Assim, o número de múltiplos de 5 nas condições do enunciado é

$$9 \times 9 \times 9 \times 1 = 9^3 \times 1 = 9^3 = 729$$

Resposta: **Opção A**

Exame – 2017, 1.ª Fase

16. Considerando uma única fica horizontal, existem 4 posições que devem ser ocupadas por 4 elementos (fichas com número par) diferentes e por isso cuja ordem de colocação é relevante, ou seja, são ${}^4A_4 = P_4 = 4!$ as formas de colocar os números pares numa única fila horizontal.
Como existem 4 filas horizontais, o número de formas que existem para dispor as fichas com números pares no tabuleiro, ocupando uma única fila horizontal é $4 \times 4!$

Após a colocação das fichas com um número par, restam $16 - 4 = 12$ posições disponíveis no tabuleiro que podem ser ocupadas por uma fichas com um número ímpar (que são diferentes e por isso é relevante a ordem de colocação), ou seja, existem ${}^{12}A_5$ formas de dispor as fichas com os números ímpares.

Assim o número de maneiras diferentes é possível dispor as nove fichas, de tal forma que as que têm número par ocupem uma única fila horizontal é:

$$4 \times 4! \times {}^{12}A_5 = 9\,123\,840$$

Exame – 2016, 2.ª Fase

17. Para que o número seja ímpar o algarismo das unidades deve ser 1 (porque é o único número das bolas que é ímpar). Assim, dos 9 algarismos do números, apenas 8 podem ser ocupados pelas bolas com os números 2 e 4.

Selecionando 4 das 8 posições (disponíveis) do número para serem ocupadas por bolas com o número 2, temos ${}^8C_4$ hipóteses, e selecionando 1 das 4 posições disponíveis (excluindo a posição das unidades e as posições ocupadas pelas bolas com os números 4), temos ${}^4C_1 = 4$ hipóteses diferentes.
As restantes posições serão ocupadas pelas bolas com os números 1, pelo que a quantidade de números ímpares que é possível obter, é:

$$^8C_4 \times 4 = 280$$

Exame – 2016, 1.ª Fase

18. Calculando o número de grupos ordenados de três rapazes, temos ${}^3A_3 = P_3 = 3!$ hipóteses para dispor os três rapazes juntos.
E por cada grupo de rapazes, existem ${}^7A_7 = P_7 = 7!$ ordenações possíveis dos nove jovens, correspondendo à disposição das 6 raparigas e do grupo de rapazes, considerando a ordenação relevante.
Assim, o número de maneiras de dispor os nove jovens, com os três rapazes juntos é

$$3! \times 7! = 30\,240$$

Resposta: **Opção B**

Exame – 2015, Ép. especial

19. Escolhendo os lugares das extremidades para os dois rapazes, existem 2 hipóteses correspondentes a uma troca entre os rapazes.
Existem ainda ${}^4A_4 = P_4 = 4!$ hipóteses para sentar as 4 raparigas nos 4 bancos, ou seja, 4 elementos organizados em 4 posições em que a ordem é relevante.
Assim, o número de maneiras de sentar os 6 amigos é

$$2 \times 4! = 48$$

Resposta: **Opção C**

Exame – 2015, 1.ª Fase

20. Para que os números de cinco algarismos sejam ímpares e tenham 4 algarismo pares, todos os números devem ser pares à exceção do último. Assim, existem 4 hipóteses para selecionar o primeiro algarismo, das dezenas de milhar (nomeadamente 2, 4, 6, e 8, ficando garantido que o número é superior a 20 000), 5 hipóteses para a escolha do segundo algarismo (os anteriores e o zero), tal como para os terceiro e quarto algarismos; e também 5 hipóteses para o quinto algarismo, o das unidades (nomeadamente 1, 3, 5, 7 e 9, ficando garantido que o número é ímpar).
Assim a quantidade de números ímpares com cinco algarismos que têm quatro algarismos pares e são superiores a 20 000 é

$$4 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 = 4 \times 5^4$$

Resposta: **Opção D**

Exame – 2014, Ép. especial

21. Se o número tem 10 posições (algarismos), das quais 6 serão ocupadas por algarismo 2, o número de conjuntos diferentes de 6 posições para os algarismos 2 é ${}^{10}C_6$ (por não interessar a ordem, uma vez que as posições serão ocupadas por elementos iguais).

Por cada um destes conjuntos, podemos colocar nas restantes 4 posições (algarismos) 8 elementos (os algarismos de 3 a 9 e mais o algarismo 1), eventualmente repetidos.
Assim, considerando a ordem como relevante (por poderem ser algarismos diferentes), temos ${}^8A'_4 = 8^4$ grupos diferentes.

Logo o total de números diferentes que existem, nas condições definidas, é ${}^{10}C_6 \times 8^4$

Resposta: **Opção A**

Exame – 2014, 1.ª Fase

22. Para que as bolas 3 e 4 fiquem lado a lado, existem duas hipóteses, a bola 3 à direita, ou então à esquerda (3 4 ou 4 3).

    Considerando este par como um elemento (e garantindo desta forma que estas bolas ficam juntas), podemos considerar que temos 4 elementos - este par e as restantes 3 bolas - que podem ser colocados em 4 posições, sendo a ordem relevante, ou seja, temos ${}^4A_4 = P_4 = 4!$ formas diferentes de dispor estes 4 elementos.

    Assim, o número de maneiras diferentes em que se podem colocar, lado a lado, as cinco bolas, de modo que as bolas com os números 3 e 4 fiquem ao lado uma da outra, é:

$$2 \times 4! = 48$$

Teste Intermédio 12.º ano – 29.11.2013

23. Designado as faces concorrentes no vértice A como as faces de cima e as restantes como as faces de baixo, temos que, O número de maneiras em que, pelo menos três das faces de cima ficam numeradas com números ímpares, pode ser calculado como a **soma** de maneiras diferentes relativas a duas situações distintas:

    - aquelas em que todas (as 4) as faces de cima ficam numeradas com números ímpares, e
    - aquelas em que 3 das 4 faces de cima ficam numeradas com números ímpares.

    Calculando o número de maneiras possíveis para cada destas duas situações temos:

    Se todas as 4 faces de cima devem ter números ímpares (e uma delas já está numerada com o número 1), então devemos considerar todas as sequências de 3 números ímpares que podemos obter com os 3 números ímpares restantes (3, 5 e 7) - considerando a ordem relevante e não permitindo repetições - ou seja, temos ${}^3A_3 = P_3 = 3!$ formas de organizar os números ímpares nas faces de cima.
    Como os 4 números pares (2, 4, 6 e 8) podem ser colocados em faces diferentes, devemos considerar todas as sequências de 4 elementos que se podem obter com os 4 números pares, ou seja, temos ${}^4A_4 = P_4 = 4!$ formas de organizar os números pares nas faces de baixo.
    Assim, existem ${}^3A_3 \times {}^4A_4 = P_3 \times P_4 = 3! \times 4!$ formas de numerar as restantes faces do octaedro, garantindo que as faces de cima ficam numeradas com números ímpares.

    Relativamente à situação de uma das faces de cima, ser numerada com um número par, e as restantes com números ímpares, devemos selecionar um dos 4 números pares disponíveis, e escolher uma das 3 faces disponíveis para o colocar, o que pode ser feito de 4×3 formas possíveis.
    Depois, ainda para as restantes duas faces de cima, devemos considerar as sequências de 2 números que podemos obter, a partir dos 3 números ímpares ainda disponíveis, ou seja ${}^3A_2$ formas diferentes de numerar as restantes faces de cima.
    Depois, ainda devemos considerar as ${}^4A_4 = 4!$ formas diferentes de organizar os restantes 4 números nas 4 faces de baixo.
    Assim, existem $4 \times 3 \times {}^3A_2 \times 4!$ formas diferentes de numerar as faces, garantindo que nas faces de cima existem exatamente 3 números ímpares.

    Assim, o número de total de formas diferentes que podemos numerar as faces do octaedro, garantindo que, pelo menos, 3 das faces de cima ficam numeradas com números ímpares é

$$3! \times 4! + 4 \times 3 \times {}^3A_2 \times 4! = 1\,872$$

Teste Intermédio 12.º ano – 29.11.2013

24. Para que a comissão seja mista, deve ter pelo menos um rapaz, e como deve ter mais raparigas que rapazes, então o número de comissões diferentes que se podem formar pode ser calculado como a **soma** de comissões diferentes relativas a composições de dois tipos:

- 3 raparigas e 2 rapazes
  Como a ordem não é relevante podemos escolher 3 raparigas do conjunto das 15, de ${}^{15}C_3$ formas diferentes e podemos escolher os 2 rapazes de ${}^{7}C_2$ formas diferentes, logo existem ${}^{15}C_3 \times {}^{7}C_2$ comissões deste tipo
- 4 raparigas e 1 rapaz
  As comissões deste tipo são ${}^{15}C_4 \times 7$ que correspondem a escolher 4 das 15 raparigas e 1 dos 7 rapazes, sem considerar a ordem relevante.

Assim, o número de comissões diferentes que se podem formar, de acordo com as condições impostas, é:

$$^{15}C_3 \times ^7 C_2 + ^{15}C_4 \times 7$$

Resposta: **Opção B**

Exame – 2013, Ép. especial

25. A escolha pode ser feita selecionando, 9 dos 16 quadrados para colocar os discos brancos (não considerando a ordem relevante porque os discos são iguais). Ou seja, ${}^{16}C_9$ são as diferentes formas de dispor os discos brancos no tabuleiro.

Depois, selecionamos 3 quadrados, de entre os 7 que permanecem sem qualquer disco. Ou seja ${}^{7}C_3$ são as diferentes formas de dispor os discos pretos no tabuleiro, depois de termos colocado os 9 discos brancos.

Assim, o número de formas diferentes de colocar os 12 discos no tabuleiro, de acordo com as condições definidas é

$$^{16}C_9 \times \, ^7C_3$$

Resposta: **Opção B**

Exame – 2013, 2.ª Fase

26. A Resposta (I) $({}^{20}C_{16} \times 16! \times ^8 A_4)$ pode ser interpretada como:
Selecionando, de entre os 20 jornalistas 16 para ocupar as duas filas da frente, temos ${}^{20}C_{16}$ grupos diferentes de 16 jornalistas.
Como em cada um destes grupos, existem 16! maneiras diferentes de os sentar, correspondentes a todas as trocas de lugar entre eles que podem ser feitas, multiplicamos os dois números.
E, por cada uma das situações diferentes antes consideradas, existem ainda ${}^{8}A_4$ hipóteses a considerar, decorrentes de selecionar 4 cadeiras, ou posições, de entre as 8 existentes na terceira fila (considerando a ordem relevante) para fazer a atribuição de cada uma delas a um dos 4 jornalistas que se senta nesta fila. Como consideramos a ordem relevante, ficam já consideradas as trocas possíveis entre eles.

A Resposta (II) $({}^{20}A_8 \times ^{12} A_8 \times ^8 A_4)$ pode ser interpretada como:
Existem ${}^{20}A_8$ formas de ocupar a primeira fila, selecionam-se 8 de entre os 20 jornalistas (considera-se a ordem relevante para considerar as trocas possíveis entre cada grupo de 8 selecionados).
Por cada uma das hipóteses anteriores, existem ${}^{12}A_8$ formas de ocupar a segunda fila, correspondentes a selecionar 8 de entre os 12 jornalistas que não ocuparam a primeira fila, podendo estes 8 fazer todas as trocas entre si.
Finalmente, por cada uma das ${}^{20}A_8 \times ^{12} A_8$ formas de ocupar as duas primeira filas, existem ainda ${}^{8}A_4$ hipóteses a considerar, decorrentes de selecionar 4 cadeiras, ou posições, de entre as 8 existentes na terceira fila (considerando a ordem relevante) para fazer a atribuição de cada uma delas a um dos 4 jornalistas que se senta nesta fila. Como consideramos a ordem relevante, ficam já consideradas as trocas possíveis entre eles.

Exame – 2013, 2.ª Fase

27. Como a comissão deve ter exatamente 2 mulheres, num total de 3 pessoas, será constituída por um único homem.
Logo, como existem 6 homens no grupo, existem 6 formas distintas de escolher o homem que integra a comissão.
Por cada uma das 6 escolhas anteriores, existem ${}^3C_2$ formas de escolher 2 de entre as 3 mulheres que existem no grupo (não se considera a ordem relevante, porque não existe referência a diferentes estatutos na comissão).
Assim, existem $6 \times^3 C_2$ formas de escolher os elementos da comissão, de acordo com a restrição imposta.

Resposta: **Opção B**

Exame – 2013, 1.ª Fase

28. Para que os números resultantes da troca dos algarismos de 12 345 sejam maiores que 40 000, o primeiro algarismo deve ser 4 ou 5.
Para que o algarismo seja ímpar, deve terminar em 1,3 ou 5.
Assim, o número total resulta da **soma** de duas contagens parciais:

- Números ímpares cujo primeiro algarismo é 4:
Selecionando o algarismo 4 para a primeira posição (1) e um dos 3 algarismos ímpares para a última posição (3), restam 3 algarismos que podem ser ordenados nas 3 posições intermédias (3!), resultando num conjunto de $1 \times 3! \times 3 = 18$ números diferentes
- Números ímpares cujo primeiro algarismo é 5:
Selecionando o algarismo 5 para a primeira posição (1) e um dos 2 algarismos ímpares restantes para a última posição (2), restam 3 algarismos que podem ser ordenados nas 3 posições intermédias (3!), resultando num conjunto de $1 \times 3! \times 2 = 12$ números diferentes

Assim, podemos formar $18 + 12 = 30$ números diferentes, de acordo com as condições do enunciado.

Resposta: **Opção B**

Teste Intermédio 12.º ano – 24.05.2013

29. Como se pretende que o Carlos seja o elemento da família Andrade a participar no jogo, resta escolher um dos outros dois irmãos do Carlos, ou seja só existem 2 hipóteses de escolher os irmãos Andrade.
Por cada uma das 2 hipóteses para os irmãos Andrade, podemos escolher grupos de 2, de entre os 4 irmãos da família Martins, ou seja, ${}^4C_2 = 6$ grupos possíveis.

Logo, existem $2 \times 6 = 12$ formas de escolher os dois pares de irmãos, observando a restrição do enunciado.

Resposta: **Opção B**

Teste Intermédio 12.º ano – 28.02.2013

30. Como o primeiro e último algarismo são iguais, o segundo e o penúltimo também, o mesmo acontecendo com o terceiro e o antepenúltimo, apenas consideramos as escolhas para os 3 primeiros algarismos, sendo os restantes, a repetição das escolhas já feitas, por ordem inversa.

Assim, para o primeiro algarismo existem 9 hipóteses de escolha (excluímos o algarismo zero). Para o segundo e o terceiro podemos considerar 10 hipóteses para cada um, porque podem ocorrer repetições de algarismos e o zero pode ocorrer em todas as posições à exceção da primeira.

Assim o um número total de capicuas diferentes (com 6 algarismos) é

$$9 \times 10 \times 10 = 900$$

Resposta: **Opção B**

Exame – 2012, Ép. especial

31. Para calcular o número de códigos diferentes, de acordo com as restrições impostas, podemos começar por escolher a posição do ≪2≫, e assim existem 7 posições possíveis.
Por cada uma das 7 escolhas anteriores, escolhemos outras duas posições (de entre as 6 disponíveis para posicionar os ≪5≫, logo existem ${}^6C_2$ escolhas diferentes.
Como as restantes posições são todas ocupadas por ≪a≫, a colocação dos ≪a≫ corresponde a uma única hipótese de posicionamento. Assim temos que o número total de hipóteses possíveis é

$$7 \times {}^6C_2 \times 1 = 105$$

Resposta: **Opção A**

Exame – 2012, 2.ª Fase

32. A resposta (I) (${}^{500}C_{30} - {}^{498}C_{28}$) pode ser interpretada como:
O número total de grupos de 30 funcionários que se podem escolher são ${}^{500}C_{30}$. Naturalmente em alguns destes estão presentes as duas irmãs.
Se ao número total destes grupos subtrairmos o número de grupos em que as duas irmãs estão presentes, ou seja, os grupos de 30 elementos que incluem as duas irmãs e mais 28 de entre os restantes 498 funcionários (${}^{498}C_{28}$), restam apenas os grupos onde está apenas uma das irmãs ou então nenhuma delas, o que significa que pelo menos uma delas não integrará o grupo de funcionários escolhidos.

A resposta (II) ($2 \times {}^{498}C_{29} + {}^{498}C_{30}$) pode ser interpretada como:
Os grupos de 30 funcionários, que respeitam a condição defina, podem ser de dois tipos:

- Apenas uma das irmãs pertence ao grupo.
Existem $2 \times {}^{498}C_{29}$ grupos deste tipo, pois resultam de incluir 1 das 2 irmãs e mais 29 funcionários, escolhidos de entre os restantes 498.
- Nenhuma das irmãs pertence ao grupo. Existem ${}^{498}C_{30}$ grupos deste tipo, pois resultam da escolha de 30 funcionários do grupo de 498 funcionários que não incluí as irmãs.

Assim, $2 \times {}^{498}C_{29} + {}^{498}C_{30}$ representa o número de grupos que incluí apenas uma das irmãs, adicionado ao número de grupos que não incluí nenhuma das irmãs.

Exame – 2012, 2.ª Fase

33. Selecionando 7 dos 12 compartimentos para colocar os copos brancos, que por serem iguais, a ordem da seleção não é relevante, temos ${}^{12}C_7$ formas de arrumar os copos brancos.
Por cada arrumação diferente dos copos brancos, devemos considerar ${}^5A_3$ hipóteses diferentes para colocar os copos de outras cores, que correspondem a selecionar 3 dos 5 compartimentos (ainda) vazios, e em que a ordem da seleção é relevante por se destinarem a copos de cor diferente.
Assim o número de arrumações diferentes é ${}^{12}C_7 \times {}^5A_3$

Resposta: **Opção C**

Exame – 2012, 1.ª Fase

34. Os 10 rapazes irão ocupar 10 posições, podendo cada um deles ocupar cada uma das 10 posições. Como qualquer troca de posições representa uma foram diferente de se sentarem, a ordem é relevante. Assim, existem ${}^{10}A_{10} = P_{10} = 10!$ formas diferentes de sentar os rapazes na fila da frente.
Como a delegada e a subdelegada, ocupam duas posições específicas e podem trocar entre si, existem apenas 2 formas diferentes de colocar estas duas raparigas.
As restantes 12 raparigas, ocupam as 12 posições centrais na fila de trás, pelo que existem ${}^{12}A_{12} = P_{12} = 12!$ formas diferentes de dispor estas 12 raparigas.

Assim, uma expressão que dá o número de maneiras diferentes de, nestas condições, os 24 jovens pousarem para a fotografia é

$$10! \times 2 \times 12!$$

Teste Intermédio 12.º ano – 13.03.2012

35. Se considerarmos o bloco das três cartas como um elemento único, temos um conjunto de 11 elementos (o bloco das 3 figuras e as restantes 10 cartas) para serem dispostos em 11 posições, ou seja, ${}^{11}A_{11} = P_{11} = 11!$ disposições diferentes.
Por cada uma das disposições anteriores, temos que considerar, adicionalmente, as trocas possíveis das 3 figuras no bloco das 3 cartas, ou seja, ${}^{3}A_{3} = P_{3} = 3!$ trocas possíveis.

Assim, o número de sequências diferentes que é possível construir, de modo que as três figuras fiquem juntas é

$$11! \times 3! = 239\,500\,800$$

Exame – 2011, Ép. especial

36. A resposta correta é a **Resposta II**.
Relativamente a esta resposta, o número de formas diferentes de escolher os 3 funcionários, de forma que pelo menos 2 dos funcionários escolhidos estejam a favor do novo horário de trabalho, é calculado como a soma dos números de casos de duas situações distintas:
- 2 dos 3 funcionários escolhidos são favoráveis à alteração, ou seja, escolher 1 funcionário de entre os 6 que não estão no grupo dos que são favoráveis, e por cada uma das 6 escolhas possíveis, escolher um conjunto de 2 de entre os 9 trabalhadores que são favoráveis ($6 \times {}^{9}C_2$);
- escolher 3 trabalhadores que sejam favoráveis à alteração, ou seja, escolher um grupo de 3, do conjunto de 9 trabalhadores que são favoráveis (${}^{9}C_3$).

Outra forma de fazer este cálculo, consiste em subtrair ao total dos conjuntos de 3 trabalhadores que podemos fazer com os 15 funcionários (${}^{15}C_3$), o número de grupos onde nenhum trabalhador é favorável à alteração, ou apenas 1 é favorável à alteração.
Observando a Resposta I, podemos identificar este raciocínio, embora tenham sido subtraídos apenas os conjuntos em que nenhum trabalhador é favorável (${}^{6}C_3$, que consiste em calcular o número de conjuntos de 3 que podemos fazer com os 6 trabalhadores que não estão no grupo dos que são favoráveis). Assim, para que o cálculo fique correto, deve ser ainda subtraído o número ${}^{6}C_2 \times 9$, ou seja, o número de conjuntos em que são escolhidos 2 de entre os 6 trabalhadores que não estão no grupo dos que são favoráveis e um terceiro trabalhador do grupo dos 9 apoiantes da alteração.
Desta forma, alterando a Resposta I para: ${}^{15}C_3 - {}^{6}C_3 - {}^{6}C_2 \times 9$, obtemos outra resposta correta.

Exame – 2011, 2.ª Fase

37. Como o código tem 4 algarismos e sabemos que 2 deles são ≪7≫ e os restantes 2 são diferentes de ≪7≫, podemos começar por calcular o número de situações diferentes em que os algarismos 7 podem ser dispostos (${}^{4}C_2$, que corresponde a selecionar 2 das 4 posições do código, sem considerar a ordem, porque estas posições serão ambas ocupadas por algarismos iguais - o algarismo ≪7≫).
Depois, por cada uma destas escolhas, existem 9 hipóteses (todos os algarismos à exceção do ≪7≫) para ocupar a primeira posição não ocupada, e outras 9 para a segunda posição não ocupada, pelo que o número total de códigos pode ser calculado como

$${}^{4}C_2 \times 9 \times 9 = 486$$

Resposta: **Opção A**

Exame – 2011, 1.ª Fase

38. Selecionando 2 das 4 cartas de espadas, temos ${}^{4}A_2$ formas de colocar as cartas nas extremidades (consideramos a ordem relevante, porque uma das cartas selecionadas fica no início da sequência e a outra no fim).
Depois de termos colocado as 2 cartas nas posições dos extremos, sobram 5 cartas (as 2 de espadas restantes e as 3 de copas) para serem dispostas em 5 posições, que podem ser colocadas de ${}^{5}A_5 = P_5 = 5!$ formas diferentes.
Assim, existem ${}^{4}A_2 \times 5! = 1440$ sequências diferentes.

Teste Intermédio 12.º ano – 19.01.2011

39. O grupo dos 3 livros de Matemática pode ser arrumado de ${}^3A_3 = P_3 = 3!$ formas diferentes.
Como a prateleira tem duas pontas, o grupo dos três livros pode ser colocado de 2 formas.
Os restantes 5 livros podem ser arrumados de ${}^5A_5 = P_5 = 5!$ formas diferentes.
Logo, o número de arrumações diferentes é

$$3! \times 2 \times 5! = 1440$$

Resposta: **Opção D**

Exame – 2010, Ép. especial

40. Se ao total do número de grupos diferentes de 5 alunos que se podem formar com os 27 alunos (${}^{27}C_5$, não se considera relevante a ordem por não haver diferenciação dentro do grupo), subtrairmos os grupos que são formados apenas por rapazes (${}^{17}C_5$) e também os que são formados apenas por raparigas (${}^{10}C_5$, como existem 17 rapazes na turma, o número de raparigas é $27 - 17 = 10$), o resultado é o número de grupos em que existe pelo menos um aluno de cada sexo, ou seja

$${}^{27}C_5 - {}^{17}C_5 - {}^{10}C_5 = 74\,290$$

Exame – 2010, Ép. especial

41. Como os números têm cinco algarismos, e três deles são o algarismo ≪5≫ podemos calcular o número de formas diferentes de dispor os 3 algarismos ≪5≫ nas 5 posições do número (${}^5C_3$, não se considera relevante a ordem, por serem algarismos iguais).
Assim, por cada disposição dos algarismos ≪5≫ existem 4 hipóteses (≪6≫, ≪7≫, ≪8≫ e o ≪9≫) para ocupar a primeira posição livre do algarismo, e ainda outras 4 para a segunda posição livre do algarismo.
Logo, a quantidade de números deste tipo que tem exatamente 3 algarismos ≪5≫ é

$${}^5C_3 \times 4 \times 4 = {}^5C_3 \times 4^2$$

Resposta: **Opção B**

Exame – 2010, 2.ª Fase

42. Como a quinta parte dos alunos tem computador portátil e existem 150 alunos, temos que o número de alunos com computador portátil é $\frac{1}{5} \times 150 = 30$.
Assim, o número de conjuntos de 4 alunos formados a partir destes 30, é ${}^{30}C_4$.
A cada um destes grupos de 4 alunos podem juntar-se ${}^{120}C_2$ pares de alunos sem computador portátil (existem $150 - 30 = 120$ alunos sem computador portátil).
Assim, o número de comissões diferentes que se pode formar com, exatamente, quatro dos alunos que têm computador portátil é

$${}^{30}C_4 \times {}^{120}C_2 = 195\,671\,700$$

Exame – 2010, 1.ª Fase

43. Num número natural de 3 algarismos, o algarismo das centenas não pode ser ocupada pelo algarismo zero.
Assim, para o algarismo das centenas temos 7 hipóteses (todos exceto o 2, o 5 e o zero).
Para o algarismo das dezenas temos igualmente 7 hipóteses (todos exceto o 2, o 5 e o que foi usado para o algarismo das centenas, mas incluindo o zero).
Para o algarismo das unidades restam 6 hipóteses (todos exceto o 2, o 5, e os dois usados anteriormente).
Logo, a quantidade de números naturais de três algarismos diferentes se podem escrever, não utilizando o algarismo 2 nem o algarismo 5, é:

$$7 \times 7 \times 6 = 294$$

Resposta: **Opção D**

Teste Intermédio 12.º ano – 19.05.2010

44. A resposta correta é a **Resposta do André**.
Podemos calcular o número de comissões diferentes com dois alunos do mesmo sexo, se, ao total de comissões diferentes que se podem formar com os 25 alunos (${}^{25}C_2$), subtrairmos aquelas que são compostas por alunos de sexos diferentes, ou seja, selecionando 1 dos 15 rapazes e 1 das 10 raparigas (${}^{15}C_1 \times {}^{10}C_1 = 5 \times 10$). Ou seja ${}^{25}C_2 - 15 \times 10$ comissões diferentes de 2 alunos do mesmo sexo.
A resposta da Rita evidência a hipótese de calcular o número de comissões formadas por 2 dos 15 rapazes (${}^{15}C_2$) e em separado o número de comissões formadas apenas por raparigas (${}^{10}C_2$). Contudo estes dois números devem ser somados, porque as comissões podem ser formadas por dois rapazes OU por duas raparigas.
Assim alterando a resposta da Rita de ${}^{15}C_2 \times {}^{10}C_2$ para ${}^{15}C_2 + {}^{10}C_2$, obtemos outra resposta correta para o problema.

Teste Intermédio 12.º ano – 15.03.2010

45. Como se pretende que os números sejam pares, temos 2 hipóteses para ocupar o algarismo das unidades (2 ou 4).
Após considerar as duas hipóteses para o algarismo das unidades restam 4 algarismos (1, 3, 5 e o algarismo par que não ocupa a posição das unidades) para ocupar 4 posições, ou seja ${}^{4}A_4 = P_4 = 4!$.
Assim, a quantidade de números pares de cinco algarismos diferentes que se podem escrever com os algarismos dados é

$$2 \times 4! = 48$$

Resposta: **Opção B**

Teste Intermédio 12.º ano – 04.12.2009

46. Como uma das faces pentagonais já tem 3 vogais atribuídas, bem como as respetivas posições, nessa face só existem 2 hipóteses para colocar as restantes duas vogais.
Na outra face pentagonal, existem 4 vértices disponíveis, e $23-5-1 = 17$ letras disponíveis (todas excepto as vogais e a consoante B), e como a ordem é relevante para a identificação de cada vértice, existem ${}^{17}A_4$ hipóteses de colocação das consoantes.
Assim, o número de maneiras diferentes de designar os restantes 6 vértices é

$$2 \times {}^{17}A_4 = 114\,240$$

Teste Intermédio 12.º ano – 04.12.2009

47. Como se pretende que a eleição seja feita de modo a que os eleitos sejam de sexos diferentes, devemos selecionar 1 dos 8 rapazes e 1 das 12 raparigas e ainda multiplicar por 2 para considerar a hipótese de eles alternarem nos dois cargos.
Assim, o número de escolhas diferentes que podem ser feitas é

$$8 \times 12 \times 2 = 192$$

Resposta: **Opção C**

Exame – 2009, Ép. especial

48. Como se pretende que os números sejam pares, para o algarismo das unidades temos apenas 2 hipóteses (o ≪6≫ e o ≪8≫).
Como se pretende que das restantes 3 posições, duas sejam ocupadas por algarismos ≪5≫ temos ${}^{3}C_2$ hipóteses de escolher 2 das 3 posições para os algarismos ≪5≫.
Para a posição restante existem ainda 4 hipóteses (todos os elementos do conjunto A, à exceção do ≪5≫).
Assim, a quantidade de números números que se podem formar, nestas condições, é

$$2 \times {}^{3}C_2 \times 4 = 24$$

Exame – 2009, Ép. especial

49. Sendo ases a primeira e a última cartas da sequência, existem ${}^4A_2$ formas de arranjar os extremos da sequência (selecionamos 2 dos 4 ases existentes, que por serem diferentes, deve ser considerada relevante a ordem de colocação).
Considerando as 3 posições centrais, da sequência, ocupadas por figuras, existem ${}^{12}A_3$ configurações diferentes (que correspondem a selecionar 3 das 12 figuras existentes, e considerar relevante a ordem, por serem todas diferentes).
Logo o número total de sequências que se podem formar em que a primeira carta e a última carta são ases, e as restantes são figuras é

$${}^4A_2 \times {}^{12}A_3 = 15\,840$$

Exame – 2009, 2.ª Fase

50. Como os algarismos que compõem o número estão definidos, os números que satisfazem estas condições diferem entre si apenas na posição de colocação dos algarismos.
Assim, selecionando 3 das 7 posições para serem ocupadas pelo algarismo «1» (sem considerar relevante a ordem porque estas posições serão ocupadas por algarismos iguais), temos ${}^7C_3$ colocações possíveis dos algarismos «1».
Por cada uma das colocações anteriores, devemos ainda selecionar 2 das 4 posições disponíveis $(7-3=4)$ para colocar o algarismos «4», ou seja ${}^4C_2$ escolhas.
As 2 posições ainda disponíveis $(7-3-2=2)$ serão ocupadas pelo algarismo «5», o que corresponde a ${}^2C_2 = 1$ escolha possível.
Assim a quantidade de números diferentes que satisfazem as condições definidas é

$${}^7C_3 \times {}^4C_2 \times {}^2C_2 = 210$$

Exame – 2009, 1.ª Fase

51. Como existem 3 raparigas, existem 3 formas diferentes de ocupar a posição do meio que respeitam a condição definida.
Para além da posição do meio, existem mais 4 posições que serão ocupadas por 4 elementos diferentes, ou seja, devemos considerar relevante a ordem pela qual cada posição é atribuída a cada pessoa, pelo que, existem ${}^4A_4 = P_4 = 4!$ formas de sentar as restantes pessoas pelas posições do banco, que não a posição do meio.
Assim o número de maneiras diferentes que as 5 pessoas se podem sentar no banco, ficando uma rapariga no lugar do meio, é

$$3 \times 4! = 72$$

Resposta: **Opção B**

Teste Intermédio 12.º ano – 11.03.2009

52. Considerando a hipótese de pintar o círculo com 4 cores, existem ${}^5A_4$ hipóteses diferentes, que correspondem a selecionar 4 das 5 cores disponíveis, uma para cada setor, sendo a ordem relevante porque os setores são diferentes.
Adicionalmente, devemos considerar a hipótese de pintar o círculo com 2 cores, existem $5C_2$ formas diferentes de selecionar 2 das 5 cores. E por cada seleção existem 2 formas diferentes de pintar o círculo, porque setores adjacentes não podem ser pintados da mesma cor. Ou seja $5C_2 \times 2$ formas diferentes de pintar o círculo com 2 cores.
Assim, o número de formas diferentes que o círculo pode ser pintado é ${}^5A_4 + {}^5C_2 \times 2 = 140$

Resposta: **Opção A**

Teste Intermédio 12.º ano – 10.12.2008

53.

53.1. Selecionando 3 de entre os 8 vértices, podemos formar ${}^8C_3$ conjuntos, e, por cada um destes conjuntos, podemos ainda formar ${}^6C_2$ conjuntos de 2 vértices, escolhidos, de entre os 6 do octaedro.
Assim número total de conjuntos de cinco vértices que são constituídos por três vértices do cubo e dois vértices do octaedro é

$${}^8C_3 \times {}^6C_2 = 840$$

53.2. Para que os 5 vértices sejam do mesmo poliedro, podem ser escolhidos de entre os 8 vértices do cubo, ou em alternativa, de entre os 6 vértices do octaedro. Assim, o número de conjuntos de cinco vértices do mesmo poliedro é a soma das hipóteses relativas aos dois tipos de escolha anteriores, ou seja:

$$^{8}C_5 + {}^{6}C_5 = 62$$

Teste Intermédio 12.º ano – 10.12.2008

54. Para formar um número ímpar, de quatro algarismos diferentes, o algarismos das unidades só pode ser 1, 3 ou 5, ou seja temos 3 hipóteses.
Por cada uma destas hipóteses existem ${}^{3}A_3 = P_3 = 3!$ hipóteses de colocar os restantes 3 algarismos nas restantes 3 posições, ou seja, a quantidade de números que existem, nas condições do enunciado, é

$$3 \times 3! = 18$$

Resposta: **Opção C**

Exame – 2008, Ép. especial

55. O número de hipóteses em que nas extremidades ficam sentados rapazes é dado por ${}^{3}A_2$, que corresponde a selecionar 2 dos 3 rapazes, considerando a ordem relevante para distinguir a extremidade da esquerda e da direita.
Depois, por cada uma das hipóteses anteriores, existem 4 pessoas para ocupar as 4 posições centrais, o que corresponde a ${}^{4}A_4 = P_4 = 4!$ hipóteses para ocupar os lugares centrais.
Assim, o número de maneiras diferentes que os seis amigos se podem sentar, ficando um rapaz em cada uma das extremidades, é

$$^{3}A_2 \times 4! = 144$$

Exame – 2008, Ép. especial

56. Como a Ana e o Miguel não querem fazer parte da comissão em simultâneo, uma forma de calcular o número de comissões diferentes que se podem formar é calcular o número de todas as comissões (formadas por 3 raparigas quaisquer e dois rapazes quaisquer) e subtrair o número de comissões que integram simultaneamente a Ana e o Miguel.

Como não existem diferenças entre os elementos da comissão, a ordenação dos elementos que a constituem não é relevante, e como existem 12 raparigas, e em cada comissão estão 3, o número de conjuntos de raparigas numa comissão arbitrária é ${}^{12}C_3$. Da mesma forma, como existem 10 rapazes, o número de conjuntos de 2 rapazes que podem integrar uma comissão é ${}^{10}C_2$, pelo que o número de comissões diferentes que se podem formar é ${}^{12}C_3 \times {}^{10}C_2$.
Se considerarmos o número de comissões em que estão incluídos a Ana e o Miguel, simultaneamente resulta de considerar o número de conjuntos de 2 raparigas, selecionada de entre as 11 (todas exceto a Ana), ${}^{11}C_2$; e selecionar 1 dos 9 rapazes (todos exceto o Miguel), ${}^{9}C_1 = 9$. Logo o número de comissões com estes dois colegas na sua composição é ${}^{11}C_2 \times 9$.
Assim, se subtrairmos os dois valores, obtemos o número de comissões que não são integradas pelos dois em simultâneo

$$^{12}C_3 \times {}^{10}C_2 - {}^{11}C_2 \times 9$$

Exame – 2008, 1.ª Fase

57. Como se pretende que o código tenha exatamente 3 algarismos 5 (cuja soma é 15), para que a soma seja 17, os restantes 2 algarismos só poderiam ser $1 - 1$, ou $0 - 2$, como os restantes dois devem ser diferentes, sabemos que os algarismos do código são $5 - 5 - 5 - 0 - 2$
Selecionado 3 das 5 posições para colocar os algarismos 5, temos ${}^5C_3$ hipóteses, porque, como os algarismos são iguais, a ordem é irrelevante. E por cada posicionamento destes, existem ainda duas hipóteses alternativas que resultam de tocar o 0 e 2 nas duas posições restantes.
Assim, o número de códigos diferentes que existem e satisfazendo as condições impostas é

$$ {}^5C_3 \times 2 = 20 $$

Resposta: **Opção A**

Teste Intermédio 12.º ano – 17.01.2008

58. Como apenas 2 dos amigos têm carta de condução, existem duas hipóteses para a ocupação dos lugares do condutor.
Escolhidos os 2 condutores, restam $12 - 2 = 10$ amigos, pelo que o número de grupos de 4 amigos que se podem sentar no automóvel é ${}^{10}C_4$ (se escolhêssemos a carrinha, o resultado era igual, porque seriam grupos de 6 amigos, e ${}^{10}C_4 = {}^{10}C_6$).
Depois de escolhidos os condutores e os ocupantes de um veículo, os restantes são os ocupantes do veículo restante, pelo que o número de maneiras diferentes podem ficar constituídos os dois grupos de amigos é

$$ 2 \times {}^{10}C_4 = 420 $$

Teste Intermédio 12.º ano – 17.01.2008

59. Para que o produto de três números seja ímpar, nenhum dos três pode ser par, visto que o produto de qualquer número por um número par, resulta num produto par.
Se, à totalidade de números de 3 algarismos diferentes (formados com os 9 algarismos apresentados), subtrairmos aqueles que são formados exclusivamente por números ímpares, vamos obter a quantidade de números que têm pelo menos um algarismos ímpar na sua composição.
Existem ${}^9A_3$ números de 3 algarismos diferentes formados com os 9 algarismos apresentados (consideramos a ordem relevante, porque a troca de posições para os mesmos algarismos geram números diferentes).
Aos ${}^9A_3$ números vamos subtrair aqueles que são formados exclusivamente por números ímpares, ou seja, ${}^5A_3$, que corresponde a escolher 3 dos 5 algarismos ímpares (1, 3, 5, 7 e 9), considerando a ordem relevante porque as trocas de posição para os mesmos algarismos geram números diferentes.
Assim, a quantidade de números de 3 algarismos, cujo produto dos seus algarismos é um número par é

$$ {}^9A_3 - {}^5A_3 $$

Exame – 2007, 1.ª Fase

60. De acordo com as restrições impostas, existem 3 alternativas para pintar a primeira tira.
Como as cores das tiras centrais são diferentes das cores das tiras das extremidades, existem 2 hipóteses para pintar a segunda tira.
Como as cores de tiras adjacentes têm que ser diferentes e as tiras centrais só podem ser de duas cores, só existem uma cor para a terceira tira.
Da mesma forma forma, existe uma única alternativa para pintar a quarta tira.
Para a última tira podemos usar qualquer uma das 3 cores disponíveis para as tiras das extremidades.
Assim, o número de bandeiras diferentes se podem fazer é

$$ 3 \times 2 \times 1 \times 1 \times 3 = 18 $$

Resposta: **Opção B**

Teste Intermédio 12.º ano – 07.12.2006

61. Sabendo que apenas os rapazes podem conduzir, existem 2 hipóteses para ocupar o lugar do condutor, pelo que o número de formas distintas é a soma de duas parcelas.
Se for o Paulo a conduzir, o outro lugar da frente tem que ser ocupado pela Inês, e os 3 lugares de trás podem ser ocupados por qualquer um dos restantes três amigos, ou seja, existem ${}^3A_3 = P_3 = 3!$ formas diferentes de ocuparem os 5 lugares.
Se o Paulo não conduzir, existem 2 hipóteses para ocupar o lugar do passageiro, à frente (porque nem o Paulo, nem a Inês podem ocupá-lo) e 4 hipóteses para a ocupação do banco traseiro, que correspondem a 2 hipóteses para sentar os namorados (o Paulo à direita ou à esquerda) e a rapariga restante à direita ou à esquerda do casal de namorados.
Assim, de acordo com as restrições impostas, o número de formas distintas que os amigos podem ocupar os 5 lugares no automóvel é
$$3! + 2 \times 4 = 6 + 8 = 14$$
Resposta: **Opção B**

Teste Intermédio 12.º ano – 07.12.2006

62. Como se pretende que a sequência seja iniciada por uma figura, temos 3 hipóteses para a escolha da primeira carta.
Para cada hipótese de início da sequência, existem 12 cartas (as restantes duas figuras do naipe de paus e as restantes 10 cartas do naipe de paus) para ocupar as 12 posições da sequência, ou seja, ${}^{12}A_{12} = P_{12} = 12!$ hipóteses.
Assim, o número de sequências diferentes de cartas do naipe de paus, iniciadas com uma figura, que é possível construir é
$$3 \times 12! = 1\,437\,004\,800$$

Teste Intermédio 12.º ano – 07.12.2006

63. O algarismo dos milhares dos números naturais compreendidos entre 1 000 e 3 000 só pode ser 1 ou 2, pelo que existem 2 hipóteses para o algarismo das unidades.
Como os algarismos devem ser todos diferentes, devem ser escolhidos 3 algarismos de entre os 9 que são diferentes do selecionado para o algarismo dos milhares, ou seja, ${}^9A_3$ escolhas diferentes, visto ser relevante a ordenação destes 3 algarismos, por gerarem números diferentes.
Assim, a quantidade de números naturais, escritos com algarismos todos diferentes, compreendidos entre os números 1 000 e 3 000 é
$$2 \times {}^9A_3 = 1008$$
Resposta: **Opção D**

Exame – 2006, Ép. especial

64. Como ficam dois rapazes de pé, calculamos quantos grupos de rapazes podem ficar de pé, selecionando 2 de entre os 4 rapazes, sem considerar relevante a ordem ${}^4C_2$
Depois, por cada grupo de rapazes que fica de pé, calculamos o número de formas diferentes de ocupar 6 posições (lugares), com 6 elementos (4 raparigas e 2 rapazes que vão sentados), onde a ordem é considerada relevante, por gerarem configurações diferentes na ocupação dos lugares sentados, ou seja ${}^6A_6 = P_6 = 6!$
Assim, supondo que ficam dois rapazes em pé, o número de maneiras diferentes que podem ficar ocupados os 6 lugares disponíveis é
$${}^4C_2 \times 6! = 4\,320$$
Resposta: **Opção D**

Exame – 2006, 2.ª Fase

65. Como a coluna tem seis faces laterais, como as faces opostas devem ser pintadas da mesma cor, a escolha da cor para 3 faces determina que as restantes 3 tenham as mesmas cores.
Como uma dessas 3 faces já está pintada de verde, faces adjacentes não podem ter a mesma cor, restam 3 faces (a base superior e 2 das faces laterais) que podem ser pintadas com 1 das 5 cores disponíveis (não considerando para esta escolha a cor verde).
Assim existem 5 elementos (cores) que podem ser arranjados em 3 posições(a base superior e duas faces laterais adjacentes não pintadas de verde), pelo que o número de maneiras diferentes que podem ficar pintadas as restantes cinco faces, de cordo com as condições impostas é

$$^5A_3 = 5 \times 4 \times 3 = 60$$

Exame – 2006, 1.ª Fase

66. Como só se pretende garantir que cada para de namorados fiquem juntos, em cada par, o rapaz pode ficar à direita ou à esquerda da rapariga, ou seja, para cada para existem 2 disposições possíveis, pelo que existem $2 \times 2 \times 2 = 2^2$ disposições possíveis no conjunto dos 3 pares.
Como os 3 pares ainda podem ocupar posições diferentes na fila, podemos considerar que existem 3 posições na fila para serem ocupadas por 3 elementos (pares), e em que a ordem da disposição é relevante, pelo que as disposições possíveis dos 3 pares são $^3A_3 = P_3 = 3!$
Assim, o número de maneiras que as 6 pessoas se podem dispor, lado a lado, de modo que cada par de namorados fique junto na fotografia é

$$2^3 \times 3! = 48$$

Resposta: **Opção D**

Teste Intermédio 12.º ano – 07.12.2005

67. Como a primeira carta é o Ás de espadas, existe 1 hipótese para ocupar a primeira posição.
Como as 3 cartas seguintes são as figuras de espadas, e existem 3 figuras, a ordenação pressupõe a relevância da ordem, pelo que existem $^3A_3 = P_3 = 3!$ hipóteses para colocar as figuras.
Como as restantes duas cartas podem ser qualquer uma das restantes 9, e a ordem é relevante, existem $^9A_2$ hipóteses de colocação das restantes duas cartas.
Assim, o número de sequências diferentes pode a Joana fazer é

$$1 \times 3! \times {}^9A_2 = 432$$

Resposta: **Opção B**

Teste Intermédio 12.º ano – 07.12.2005

68.

68.1. Os elementos do conjunto C que são múltiplos de 5, são constituídos por 3 algarismos ou posições, em que a primeira pode ser ocupada por 9 algarismos (todos exceto o zero), a segunda pode ser ocupada por qualquer um dos 10 algarismos, e a terceira apenas por 2 algarismos (o zero e o 5).
Assim, o número de múltiplos de 5 que pertencem ao conjunto C é

$$9 \times 10 \times 2 = 180$$

68.2. Para um elemento do conjunto C que tenha os algarismos todos diferentes, existem 9 hipóteses para a posição das centenas (todos os algarismos exceto o zero); também existem 9 hipóteses para a posição das dezenas (incluindo o zero, mas excluindo o algarismo usado na posição das centenas); e finalmente 8 hipóteses para a posição das unidades (todos os algarismos exceto os dois já utilizados), ou seja, um total de

$$9 \times 9 \times 8 = 648$$

Teste Intermédio 12.º ano – 07.12.2005

69. Como o Filipe está indeciso, existem 7 escolhas possíveis $(3+4)$.
Por cada escolha do Filipe, cada um dos restantes 5 amigos pode escolher de entre 3 hipóteses, ou seja $3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 3^5$ escolhas possíveis.
Assim, o número de escolhas diferentes que podem ser feitas é

$$7 \times 3^5 = 1701$$

Exame – 2005, Ép. especial (cód. 435)

70.

70.1. Como os discos devem ser um de cada país, existem 6 hipóteses para a escolha do disco português, 4 alternativas para o disco espanhóis, 3 escolhas diferentes para o disco francês e o disco francês é único, pelo que será escolhido com certeza.
Assim o número de conjuntos diferentes de quatro discos compostos por um disco de cada país é

$$6 \times 4 \times 3 \times 1 = 72$$

70.2. Como se pretende que os discos sejam todos do mesmo país, e o conjunto tem 4 discos discos, apenas se podem fazer conjuntos de discos portugueses ou espanhóis (porque dos outros países existem menos do que 4 discos).
Assim, podem ser feitos ${}^6C_4$ conjuntos de discos portugueses (6 discos disponíveis para 4 posições no conjunto, sem considerar relevante a ordenação por se tratar de um conjunto) ou então, de forma análoga, ${}^4C_4$ conjuntos de discos espanhóis.
Assim, o número de conjuntos com quatro discos todos do mesmo país é

$${}^6C_4 + {}^4C_4 = 15 + 1 = 16$$

Exame – 2005, 2.ª Fase (cód. 435)

71. O número de diagonais de um prisma regular pode ser calculado como a soma do número de diagonais das duas bases do prisma com o número de diagonais das faces laterais.
Como cada base do prisma tem n lados, tem também n vértices. Logo existem, em cada base, ${}^nC_2$ pares de vértices distintos, que definem segmentos de reta. Desses, n são os lados do polígono (da base), pelo que ${}^nC_2 - n$ são os restantes segmentos de reta, ou seja as diagonais de cada base. Como são duas bases, $2\left({}^nC_2 - n\right)$ é o número de diagonais das duas base.
Como as bases do prisma têm n lados, o prisma tem n faces laterais, e todas são retangulares, existem 2 diagonais em cada face lateral, pelo que existem $2 \times n$ diagonais nas faces laterais (2 em cada uma das n faces laterais).
Desta forma, o número total de diagonais de todas as faces do prisma (incluindo as bases) é

$$2\left({}^nC_2 - n\right) + 2n$$

Exame – 2005, 1.ª Fase (cód. 435)

72. Como se pretende que os algarismos sejam ímpares, e o número deve ser maior que 60 000, só existem 2 hipóteses para a escolha do algarismo das dezenas de milhar (o sete ou o nove).
Como os algarismos devem ser diferentes, para as restantes 4 posições, existem 4 elementos disponíveis, que são todos os algarismos ímpares ainda não utilizados (o um, o três, o cinco e o ímpar maior que 6 que não tiver sido escolhido para a posição das dezenas de milhar), pelo que existem ${}^4A_4 = P_4 = 4!$, uma vez que a ordem é relevante e não pode existir repetição.
Assim, a quantidade de números de cinco algarismos ímpares e diferentes, maiores que 60 000 é

$$2 \times 4! = 48$$

Resposta: **Opção A**

Exame – 2004, Ép. especial (cód. 435)

73. Se existem 7 empates e a Ana é a vencedora do torneio, a Ana pode ganhar as 3 partidas que não ficam empatados, ou, ganhar 2 e o Bruno ganhar 1.
Se a Ana ganhar as 3 partidas, existem ${}^{10}C_3$ registos possíveis, correspondentes a selecionar 3 das 10 partidas para registar as vitórias da Ana (considerando todas as vitórias iguais entre si).
Da mesma forma, se a Ana vencer 2 partidas, e o Bruno 1, devemos selecionar 2 das 10 partidas para registar as vitórias da Ana e 1 das 8 restantes para registar a vitória do Bruno, ou seja, ${}^{10}C_2 \times {}^{8}C_1$
Assim, a número de registos diferentes que podem ser feitos com 7 empates e em que a Ana tem mais vitórias é a soma das duas contagens anteriores, ou seja,

$${}^{10}C_3 + {}^{10}C_2 \times {}^{8}C_1 = 480$$

Resposta: **Opção D**

Exame – 2004, Ép. especial (cód. 435)

74. Como o banco tem 7 lugares, e os rapazes não podem ficar sentados nas extremidades, nem juntos, a disposição dos lugares entre géneros fica definida, podendo apenas os 3 rapazes trocar entre si nas 3 posições que lhes estão reservadas (${}^{3}A_3 = P_3 = 3!$) e as 4 raparigas trocar entre si nas 4 posições que lhes estão reservadas (${}^{4}A_4 = P_4 = 4!$).
Assim, o número de maneiras distintas podem ficar sentados os 3 rapazes e as 4 raparigas num banco de sete lugares, se se sentarem alternadamente por sexo, é

$$3! \times 4! = 144$$

Resposta: **Opção C**

Exame – 2004, 2.ª Fase (cód. 435)

75. Como o primeiro e o último local a visitar estão previamente definidos, a sequência resume-se definir a ordem dos 3 locais restantes, ou seja, agrupar 3 elementos em 3 posições, considerando relevante a ordem, ou seja, ${}^{3}A_3 = P_3 = 3! = 3 \times 2 \times 1 = 6$
Considerando um raciocínio complementar podemos pensar que para o primeiro local a visitar existe 1 opção, para o segundo 3 opções, para o terceiro apenas 2 opções (porque os locais não se podem repetir, para o quarto existe apenas uma opção e para o quinto também uma opção, pelo que o número de sequência diferentes é $1 \times 3 \times 2 \times 1 \times 1 = 3 \times 2 = 6$

Resposta: **Opção A**

Exame – 2004, 1.ª Fase (cód. 435)

76. Considerando o grupo dos rapazes juntos, existem 4 elementos para 4 posições adjacentes, ou seja ${}^{4}A_4 = P_4 = 4!$ formas de sentar os rapazes juntos.
Considerando depois que as 5 raparigas e o conjunto dos rapazes podem trocar entre si, existem 6 elementos (5 raparigas e o conjunto dos rapazes, que permanecem num "bloco" único, em posições adjacentes) para colocar em 6 posições, considerando a ordem relevante, ou seja, ${}^{6}A_6 = P_6 = 6!$ disposições diferentes.
Assim, o número de maneiras distintas que podem ficar sentados quatro rapazes e cinco raparigas, num banco de nove lugares, de tal modo que os rapazes fiquem todos juntos é

$$4! \times 6! = 17280$$

Resposta: **Opção B**

Exame – 2003, Prova para militares (cód. 435)

77. Como queremos colocar pelo menos 1 bola em cada caixa, restam 2 bolas para colocar adicionalmente nas caixas.
Podemos colocar as duas bolas numa única caixa, e como as caixas são distintas, esta configuração (3+1+1+1) pode assumir 4 alternativas distintas - uma por cada caixa.
Adicionalmente, podemos considerar que duas caixas terão 3 bolas e as outras duas terão 1 bola, ou seja, devemos escolher 2 das 4 caixas para colocar uma bola adicional, e assim, esta configuração (2+2+1+1) pode assumir ${}^4C_2$ alternativas distintas.
Logo, o número de maneiras diferentes que podem as bolas ficar colocadas nas caixas é

$$4 + {}^4C_2 = 4 + 6 = 10$$

Resposta: **Opção C**

Exame – 2003, Prova para militares (cód. 435)

78.

78.1. Como as duas cartas do meio sejam o Ás e o Rei (não necessariamente por esta ordem), existem 2 hipóteses para colocar as duas cartas do meio - trocando entre si o Ás e o Rei.
Por cada uma das colocações das cartas do meio, existem 4 cartas para colocar em 4 posições (2 à esquerda e 2 à direita), cuja ordem é relevante, ou seja ${}^4A_4 = P_4 = 4!$
Assim, o número de disposições diferentes com o Ás e o Rei nas posições do meio, é

$$2 \times 4! = 2 \times 24 = 48$$

78.2. Podemos optar por calcular o número total de disposições que se podem fazer e subtrair o número de distribuições em que o Rei fica ao lado da Dama.
O número de total de distribuições que podem ser feitas, com 6 cartas para 6 posições, em que a ordem é relevante, é ${}^6A_6 = P_6 = 6!$
Para calcular o número de distribuições em que o Rei "bloco"que ocupa um posição, e assim temos 5 elementos (o "bloco"e as restantes 4 cartas) para 5 posições (porque o "bloco"irá ocupar duas posições), ou seja ${}^5A_5 = P_5 = 5!$ alternativas. Temos ainda que considerar que o Rei e a Dama podem trocar de posições dentro do "bloco", pelo que existem 2 configurações dentro do "bloco". E assim o número de disposições em que o Rei e a Dama surgem juntos é $5! \times 2$
Assim, o número de disposições diferentes que podem ser feitas, de modo que o Rei não fique ao lado da Dama, é

$$6! - 5! \times 2 = 480$$

Exame – 2003, 2.ª Fase (cód. 435)

79.

79.1. Como existem 7 sabores para colocar em 10 compartimentos, podemos associar um compartimento a cada sabor, sendo a ordem relevante e não podendo ocorrer repetição, o número de maneiras distintas se podem colocar os sete sabores no recipiente é ${}^{10}A_7 = 604\,800$

79.2. Como se pretende que os 5 sabores de fruta ocupem os 5 compartimentos da frente, existem 5 elementos para 5 posições, sendo a ordem de colocação relevante, pelo que, existem ${}^5A_5 = P_5 = 5!$ formas de colocar os 5 sabores de fruta.
Associando um dos 5 compartimentos da fila de trás a cada um dos 2 sabores restantes, considerando relevante a ordem, temos ${}^5A_2 = 20$ colocações possíveis.
Assim, o número de maneiras distintas para colocar os sete sabores no recipiente, de tal forma que os cinco de fruta preencham a fila da frente é

$$5! \times {}^5A_2 = 2400$$

Exame – 2003, 1.ª Fase – 1.ª chamada (cód. 435)

80. Uma vez feita a escolha dos discos para oferecer ao Miguel, os restantes serão oferecidos ao Paulo, pelo que não existem escolhas adicionais a considerar.
Como o Ricardo deve ficar com exatamente 2 dos 3 discos de música clássica, e deve receber um total de 5 discos, os restantes serão 3 de entre os 7 de de Jazz. Como a ordenação dos discos não é relevante, o número de formas que a Joana pode oferecer os discos aos irmãos, de acordo com as restrições definidas é

$$^{3}C_2 \times {}^{7}C_3$$

Resposta: **Opção A**

Exame – 2002, Prova para militares (cód. 435)

81. Como se pretende que os primeiros livros, do lado esquerdo sejam de Astronomia, existem 2 formas de os colocar (correspondentes a trocá-los entre si).
Relativamente aos restantes 4 livros (elementos) existem 4 espaços (posições) em que podem ser arrumados (os 4 espaços da direita), como a ordem é relevante, temos $^{4}A_4 = P_4 = 4!$ arrumações possíveis.
Assim, o número de maneiras diferentes de arrumar os 6 livros, de tal forma que os dois primeiros livros, do lado esquerdo, sejam os de Astronomia é

$$2 \times 4! = 2 \times 24 = 48$$

Resposta: **Opção C**

Exame – 2002, 2.ª Fase (cód. 435)

82. A contagem dos números de 4 algarismos diferentes cuja soma dos algarismos é par, pode ser obtida pela soma das contagens de números de dois tipos diferentes:

- Números formados por 2 algarismos ímpares e dois algarismos pares.
Como o 9 é um dos algarismos que formam o número e tem uma posição definida (a posição dos milhares), e os algarismos são diferentes, restam 3 posições para a posição dos 4 algarismos pares restantes (1, 3, 5 e 7), pelo que 3×4 é o número de formas diferentes de escolher o outro algarismo ímpar; por cada uma destas colocações, devemos ainda escolher 2 de entre os 4 algarismos pares possíveis (2, 4, 6 e 8) considerando relevante a ordem e impedindo a repetição, ou seja $^{4}A_2$, pelo que $3 \times 4 \times {}^{4}A_2$ é a contagem de números de 4 algarismos que começam por 9 e têm outro algarismo ímpar diferente de 9, e 2 algarismos pares diferentes
- Números formados por 4 ímpares.
Como o 9 está presente e existem outros 4 algarismos ímpares (1, 3, 5 e 7) para colocar em 3 posições, sem repetições, $^{4}A_3$ é a contagem de números de 4 algarismos ímpares diferentes.

Não consideramos a hipótese de o número ser formado apenas por algarismos pares, porque o 9 é um dos algarismos que formam o número.
Assim, uma reposta ao problema é:

$$3 \times 4 \times {}^{4}A_2 + {}^{4}A_3$$

Exame – 2002, 1.ª Fase – 2.ª chamada (cód. 435)

83. Como a terça parte, das 120 raparigas de Vale do Rei, tem cabelo louro, são $\frac{120}{3} = 40$ raparigas louras e $120 - 40 = 80$ raparigas cujo cabelo não é louro.
Como na comissão não existe evidência de que existam cargos distintos e deve ter 2 raparigas louras, podem integrar $^{40}C_2$ pares de raparigas louras, e as restantes 3 raparigas devem ser escolhidas de entre o universo das raparigas que não são louras, pelo que existem $^{80}C_3$ trios de raparigas não louras.
Assim o número de comissões diferentes que se podem formar com exatamente duas raparigas louras (e 3 raparigas não louras) é

$$^{40}C_2 \times {}^{80}C_3 = 64\,084\,800$$

Exame – 2002, 1.ª Fase – 1.ª chamada (cód. 435)

84. Uma alternativa para fazer a contagem do números que se podem formar com os algarismos do número 41 123, é escolher 2 das 5 posições para fazer a colocação dos algarismos 1, que por serem iguais tornar irrelevante a ordem, ou seja ${}^5C_2$ e depois colocar os restantes 3 algarismos (2, 3 e 4) nas outras 3 posições, agora considerando relevante a ordem, por serem algarismos diferentes, ou seja ${}^3A_3 = P_3 = 3!$, pelo que, resulta num total de ${}^5C_2 \times 3!$ números diferentes.
Outra alternativa é começar por fazer a colocação dos 3 algarismos diferentes (2, 3 e 4) nas 5 posições do número, ou seja ${}^5A_3$, como as restantes 2 posições serão ocupadas pelo algarismo 1, a colocação destes algarismos não resulta em alternativas diferentes, ou seja, existem ${}^5A_3 \times 1 \times 1 = {}^5A_3$ números diferentes.

Exame – 2001, Prova para militares (cód. 435)

85. Escolhendo um comissão de 5 pessoas, com elementos de ambos os sexos, mas mais raparigas do que rapazes, existem comissões com dois tipos de constituição:

- 4 raparigas e 1 rapaz
  Neste caso, sem considerar a ordem relevante são escolhidas 4 das 12 raparigas (${}^{12}C_4$) e 1 dos 7 rapazes (${}^7C_1$), num total de ${}^{12}C_4 \times {}^7C_1$ comissões deste tipo.
- 3 raparigas e 2 rapazes
  Neste caso, sem considerar a ordem relevante são escolhidas 3 das 12 raparigas (${}^{12}C_3$) e 2 dos 7 rapazes (${}^7C_2$), num total de ${}^{12}C_3 \times {}^7C_2$ comissões deste tipo.

Como as comissões podem ser de um ou de outro tipo, o número de comissões diferentes que se podem formar é a soma das contagens de cada tipo de comissão, ou seja,

$$ {}^{12}C_4 \times {}^7C_1 + {}^{12}C_3 \times {}^7C_2 $$

Resposta: **Opção D**

Exame – 2001, Ép. especial (cód. 435)

86. Os números só com algarismos ímpares que se podem atribuir são todos da operadora A ou C (porque na operadora B, o 2 está sempre presente).
Como os números têm 9 algarismos, mas os 2 primeiros estão fixados, devemos considerar todos os agrupamentos dos 5 algarismos ímpares (1, 3, 5, 7 e 9) pelas 7 posições seguintes ao prefixo do operador. Observando que a ordem é relevante e que repetições de algarismos são possíveis, temos que cada uma das operadoras A e C pode atribuir ${}^5A'_7 = 5^7$ números só com algarismos ímpares.
Como são duas operadoras, o total de números que podem ser atribuídos é

$$ 2 \times 5^7 = 156\,250 $$

Resposta: **Opção C**

Exame – 2001, 2.ª Fase (cód. 435)

87.

87.1. Escolhendo 2 dos 24 alunos para integrar a comissão com o delegado, temos ${}^{24}C_2$ escolhas possíveis. Depois, resta distribuir os cargos da comissão pelas 3 pessoas escolhidas, ou seja, ${}^3A_3 = P_3 = 3!$ distribuições possíveis.
Assim, o número de comissões distintas podem ser formadas, nas condições definidas, é

$$ {}^{24}C_2 \times 3! = 1656 $$

87.2. Podemos calcular o número de comissões mistas, como a diferença entre o número total de comissões que se podem formar com os 25 alunos (${}^{25}A_3$) e as comissões formadas apenas por rapazes (${}^{15}A_3$) ou apenas por raparigas (${}^{10}A_3$) - a ordem de selecção é relevante porque as 3 pessoas devem ocupar funções diferentes. Logo, o número de comissões mistas distintas podem ser formadas é

$$ {}^{25}A_3 - \left({}^{15}A_3 + {}^{10}A_3\right) = 10\,350 $$

*** Outra resolução: ***

As comissões de mistas de 3 alunos são todas as comissões com 2 rapazes e 1 rapariga, ou então todas as comissões com 1 rapaz e 2 raparigas.
Escolhendo 2 de entre os 15 rapazes e 1 de entre as 10 raparigas, temos ${}^{15}C_2 \times {}^{10}C_1$ conjuntos de 3 pessoas, que ainda se podem distribuir pelos 3 cargos de ${}^{3}A_3 = P_3 = 3!$ formas diferentes, ou seja ${}^{15}C_2 \times {}^{10}C_1 \times 3!$ comissões com 2 rapazes e 1 rapariga.
Analogamente, escolhendo 1 rapaz e 2 raparigas, e distribuindo os 3 cargos pelas 3 pessoas, temos ${}^{15}C_1 \times {}^{10}C_2 \times 3!$
Logo, o número de comissões mistas distintas podem ser formadas é a soma das contagens dos dois tipos de comissões, ou seja,

$$ {}^{15}C_2 \times {}^{10}C_1 \times 3! + {}^{15}C_1 \times {}^{10}C_2 \times 3! = {}^{15}C_2 \times 10 \times 3! + 15 \times {}^{10}C_2 \times 3! = 10\,350 $$

Exame – 2001, 2.ª Fase (cód. 435)

88. Para se inscrever em, pelo menos, duas disciplinas de literatura (LC) contemporânea, pode fazer a inscrição em 2 ou 3 disciplinas LC.
Se se inscrever em 2 disciplinas LC, o estudante deverá escolher 2 de entre as 3 disciplinas LC (${}^{3}C_2$) e 4 das restantes 7 disciplinas (${}^{7}C_4$), totalizando as 6 inscrições, (2 LC+4), num total de ${}^{3}C_2 \times {}^{7}C_4$ escolhas possíveis.
Se se inscrever em 3 disciplinas LC, o estudante deverá escolher as 3 disciplinas LC (${}^{3}C_3 = 1$) e 3 das restantes 7 disciplinas (${}^{7}C_3$), totalizando as 6 inscrições, (3 LC+3), num total de $1 \times {}^{7}C_3$ escolhas possíveis.
Assim, o total de escolhas diferentes que o aluno pode fazer é a soma das contagens das duas situações anteriores, ou seja,

$$ {}^{3}C_2 \times {}^{7}C_4 + 1 \times {}^{7}C_3 = {}^{3}C_2 \times {}^{7}C_4 + {}^{7}C_3 $$

Resposta: **Opção D**

Exame – 2001, 1.ª Fase – 2.ª chamada (cód. 435)

89. Como se pretende que o primeiro algarismo da *capicua* seja ímpar, existem 5 hipóteses para a escolha do primeiro algarismo (1, 3, 5, 7 ou 9).
Para a escolha do segundo algarismo, existem 10 hipóteses, pois não existem restrições para a escolha deste algarismo, bem como para a escolha do terceiro algarismo.
Como nas *capicuas* de cinco algarismos, o quarto algarismo é igual ao segundo e o quinto é igual ao primeiro, a escolha destes dois algarismos não resultam em hipóteses alternativas, pelo que o número de *capicuas* com cinco algarismos, em que o primeiro algarismo é ímpar, é

$$ 5 \times 10 \times 10 \times 1 \times 1 = 500 $$

Resposta: **Opção C**

Exame – 2001, 1.ª Fase – 1.ª chamada (cód. 435)

90. Como temos 3 alimentos, devemos selecionar 3 das 5 prateleiras, considerando a ordem relevante, porque como os alimentos são diferentes, a seleção das prateleiras deve ser ordenda.
Assim, o número de maneiras diferentes se podem guardar os três produtos no frigorífico, sabendo que devem ficar em prateleiras distintas é ${}^{5}A_3$

Resposta: **Opção B**

Exame – 2000, Ép. especial (cód. 135)

91. Para ocupar a posição do condutor temos 2 hipóteses, e para o lugar do passageiro da frente temos 3 hipóteses.
Depois de escolhidos os jovens que viajam nos lugares da frente, restam 3 jovens para ocuparem 3 lugares, considerando a ordem relevante, ou seja ${}^3A_3 = P_3 = 3!$ hipóteses.
Assim, o número de maneiras que os jovens podem ocupar os cinco lugares, de acordo com as condições do enunciado é:

$$2 \times 3 \times 3! = 2 \times 3 \times 6 = 36$$

Resposta: **Opção A**

Exame – 2000, 2.ª Fase (cód. 435)

92. Como se pretende que os números tenham exatamente um algarismo 4, e os números têm 6 algarismos, o 4 pode ocupar qualquer uma das 6 posições do número.
Para além do 4, o número terá que ter mais 5 dos 8 algarismos restantes (1, 2, 3, 5, 6, 7, 8 ou 9), considerando a ordem relevante e eventuais repetições, ou seja, por cada posição do 4 existem ${}^8A'_5 = 8^5$ números possíveis, ou seja, um total de 6×8^5 números possíveis.

Resposta: **Opção C**

Exame – 2000, 1.ª Fase – 2.ª chamada (cód. 435)

93. Uma forma de fazer a contagem é selecionar os 7 compartimentos onde serão colocados os iogurtes, não considerando a ordem relevante, por não ficar definido o compartimento de cada iogurte, ou seja, ${}^{12}C_7$ conjuntos diferentes de posições a ocupar. Por cada um destes conjuntos de 7 compartimentos, devemos depois selecionar 3 (destes 7) para colocar os iogurtes de fruta, considerando a ordem relevante, por serem diferentes, ou seja, ${}^7A_3$, ficando os restantes 4 compartimentos ocupados pelos iogurtes naturais, que por serem iguais não geram situações diferentes. Assim temos ${}^{12}C_7 \times {}^7A_3$ arrumações possíveis.
Em alternativa, podemos começar por selecionar, de entre as 12 posições, 4 onde serão colocados os iogurtes naturais (sem considerar relevante a ordem por serem iguais), ou seja, ${}^{12}C_4$. Depois, por cada uma destas escolhas, devemos contar o número de sequências de 3 posições, selecionadas das restantes 8, para fazer a colocação dos iogurtes de fruta, considerando a ordem relevante por serem diferentes, isto é ${}^8A_3$. Logo, existem ${}^{12}C_4 \times {}^8A_3$ formas diferentes de arrumar os iogurtes.

Exame – 2000, 1.ª Fase – 2.ª chamada
Exame – 2000, 1.ª Fase – 2.ª chamada (cód. 135)

94.

94.1. Como existem 10 elementos (números) para colocar em 10 posições (faces), e a ordem de colocação é relevante, o número de colocações diferentes é

$${}^{10}A_{10} = P_{10} = 10! = 3\,628\,800$$

94.2. Relativamente à pirâmide em que já estão colocados 2 números ímpares, é necessário escolher 2 de entre os 4 números ímpares disponíveis (5, 7, 9 e 11), considerando a ordem relevante, ou seja, existem ${}^4A_2$ formas diferentes de preencher uma das pirâmides só com números ímpares.
Na outra pirâmide devemos colocar 4 dos 6 números pares disponíveis, considerando a ordem relevante, ou seja, existem ${}^6A_4$ formas diferentes de preencher a outra pirâmide só com números pares.
Depois devemos colocar os 4 números que não foram ainda colocados nas 4 faces quadradas, o que pode ser feito de ${}^4A_4 = P_4 = 4!$ formas diferentes.
Assim, o número de maneiras diferentes que podemos numerar as outras dez faces, de forma a que, nas faces de uma das pirâmides fiquem só números ímpares e, nas faces da outra pirâmide, fiquem só números pares é

$${}^4A_2 \times {}^6A_4 \times 4! = 103\,680$$

Exame – 2000, 1.ª Fase – 1.ª chamada (cód. 435)

95. Como cada uma das faces triângulares pode ser colorida com uma de 4 cores, existem 3 elementos (cores) para colocar em 4 posições (faces), podendo haver repetição, pelo que o número de situações possíveis é ${}^3A'_4 = 3^4$.
De forma análoga, sabemos que as 5 faces retangulares pode ser coloridas com 2 cores, pelo que existem ${}^2A'_5 = 2^5$ formas de o fazer.
Assim, o número de maneiras diferentes que podemos colorir o sólido, supondo que as quatro faces triangulares só podem ser coloridas de amarelo, de branco ou de castanho, e que as cinco faces retangulares só podem ser coloridas de preto ou de vermelho é

$$3^4 \times 2^5 = 2592$$

Exame – 1999, Prova para militares (cód. 135)

96. Como 2 das raparigas ficam sentadas nos extremos dos bancos, podemos selecionar 1 das 5 posições restantes para sentar a terceira rapariga.
Após a definição dos lugares em que se sentam as raparigas, como elas podem trocar entre si, existem 3 lugares para serem ocupados por 3 raparigas diferentes, ou seja, sendo relevante a ordem, pelo que existem ${}^3A_3 = P_3 = 3!$ formas de sentar as raparigas.
Procedendo de forma análoga para os rapazes, existem ${}^4A_4 = P_4 = 4!$ formas de sentar os 4 rapazes nos 4 lugares restantes.
4 rapazes, num banco de 7 lugares, sabendo que em cada um dos extremos fica uma rapariga é

$$5 \times 3! \times 4! = 720$$

Resposta: **Opção C**

Exame – 1999, 2.ª Fase (cód. 135)

97. Para a posição de guarda-redes, o treinador pode escolher de entre 2 alternativas. Por cada uma destas alternativas, pode escolher 2 dos 4 defesas, não considerando a ordem relevante, ou seja, ${}^4C_2$ hipóteses.
Finalmente pode ainda escolher 2 de entre os 4 avançados convocados, ou seja ${}^4C_2$ alternativas para estas posições.
Assim, o número de equipas diferentes que o treinador pode constituir é de

$$2 \times {}^4C_2 \times {}^4C_2 = 72$$

Exame – 1999, 2.ª Fase (cód. 135)

98. Como a Joana está a escolher os livros para os transportar, e não a ordem de leitura, ou outra ordenação, consideramos que a ordem não é relevante, e assim temos que pode escolher 2 de entre os 3 de José Saramago que tem na estante, ou seja, ${}^3C_2$ hipóteses de escolha.
Por cada uma das escolhas anteriores, deve ainda escolher 1 de entre os 4 livros de Sophia Mello Breyner Andresen.
E, ainda dos 5 livros de Carl Sagan, deve escolher 3, ou seja ${}^5C_3$ hipóteses.
Assim, o número total de escolhas que pode fazer é

$${}^3C_2 \times 4 \times {}^5C_3 = 120$$

Exame – 1999, 1.ª Fase – 1.ª chamada (cód. 135)

99. Em cada fila existem 8 posições, das quais devemos selecionar 2 para colocar os cavalos. Como os cavalos são da mesma cor, a ordem de seleção não é relevante, e assim, existem ${}^8C_2$ hipóteses para colocar os cavalos em cada fila.
Logo, como existem 8 filas horizontais, o número de maneiras diferentes em que podemos colocar os dois cavalos no tabuleiro, respeitando a condição indicada, é

$$8 \times {}^8C_2$$

Resposta: **Opção A**

Prova Modelo – 1999 (cód. 135)

100. Como os números de telefone têm 7 dígitos, mas sabemos que os 3 primeiros são sempre os mesmos, só os 4 últimos dígitos podem ser diferentes, escolhidos de entre os 10 dígitos que existem, eventualmente repetidos, sendo a ordem relevante, ou seja, o número total de números de telefone podem existir nessa região é de

$$^{10}A'_4 = 10^4$$

Resposta: **Opção B**

Exame – 1998, Prova para militares (cód. 135)

101. Em cada partida são agrupados 2 dos 10 jogadores.
Como, cada jogador só jogou uma partida com cada um dos restantes, a ordem de seleção não é relevante, pelo que o número de partidas disputadas foi $^{10}C_2$

Resposta: **Opção A**

Exame – 1998, 2.ª Fase (cód. 135)

102. Para calcular o número de códigos diferentes com um e um só algarismo zero, podemos escolher a posição, de entre as 4 possíveis, em que o zero irá figurar.
Para as restantes 3 posições existem 9 algarismos que podem ser utilizados, sendo a ordem relevante e eventuais repetições devem ser consideradas, ou seja, $^{9}A'_3 = 9^3$ hipóteses.
Assim o número de códigos que existem, nas condições definidas, é

$$4 \times 9^3 = 2\,916$$

Exame – 1998, 1.ª Fase – 2.ª chamada (cód. 135)

103. Como não existem referências a posições diferentes dentro da comissão, podemos considerar que a ordenação na comissão é irrelevante.
Relativamente às raparigas, devem ser selecionadas 4 de entre as 15, pelo que existem $^{15}C_4$ grupos de raparigas que podem integrar a comissão.
Por cada grupo de raparigas, e como o delegado está necessariamente na comissão, resta escolher 2 de entre os 11 rapazes (todos à excepção do delegado), ou seja, $^{11}C_2$
Assim, o número de comissões diferentes se podem constituir é

$$^{15}C_4 \times {}^{11}C_2 = 75\,075$$

Exame – 1998, 1.ª Fase – 1.ª chamada (cód. 135)

104. A primeira escolha do jovem deve resultar de 5 alternativas, correspondentes às 5 pontes que ligam a margem da Habitação até à ilha. Depois, por cada hipótese anterior, dispõe de 3 alternativas, correspondentes às 3 pontes que ligam a ilha à margem da Escola.
Quando volta, como não deve usar a mesma ponte duas vezes, restam 2 pontes entre a margem da Escola e a ilha, e, finalmente 4 pontes entre a ilha e a margem da Habitação.
Assim, o número de caminhos diferentes pode o jovem seguir, num percurso, de ida e volta, sem passar duas vezes pela mesma ponte é

$$5 \times 3 \times 2 \times 4 = 5 \times 4 \times 3 \times 2$$

Resposta: **Opção B**

Prova modelo – 1998 (cód. 135)

105. Como todas as casas do tabuleiro serão ocupadas, basta selecionar 4 das 9 posições para colocar as peças brancas, sem considerar relevante a ordem porque as peças brancas são iguais, ou seja, ${}^9C_4 = 126$ (alternativamente poderíamos ter optado por selecionar 5 casas para serem ocupadas pelas peças pretas ${}^9C_5 = 126$)

Prova modelo – 1998 (cód. 135)

106. Para colorir a tira da esquerda existem 5 alternativas.
Para a segunda tira (a contar da esquerda) existem 4 hipóteses (descontando a cor usada antes).
Para a terceira tira voltam a existir 4 cores, porque podemos voltar a usar a cor da tira usada inicialmente.
Finalmente para a tira da direita voltam a estar disponíveis 4 cores, pelo que o número de bandeiras diferentes se podem fazer nestas condições é

$$5 \times 4 \times 4 \times 4 = 5 \times 4^3$$

Resposta: **Opção A**

Exame – 1997, Prova para militares (cód. 135)

107. Para escolher um grupo de 5 rapazes de entre os 12 da turma, existem ${}^{12}C_5$ alternativas (não se considera a ordenação, porque apenas está em causa a seleção das pessoas e não, por exemplo, a atribuição de lugares sentados).
De forma análoga, existem ${}^8C_5$ grupos de 5 raparigas.
Assim o número de grupos diferentes que se podem formar, é

$$^{12}C_5 \times {}^8C_5$$

Resposta: **Opção A**

Exame – 1997, 1.ª Fase – 2.ª chamada (cód. 135)

108. Como se pretendem contar números pares, de cinco algarismos com 4 algarismos ímpares, os primeiros 4 algarismos do número devem ser ímpares e o último par (ou zero).
Assim, para os primeiros 4 algarismos do número temos 5 elementos (algarismos ímpares) para dispor em sequências ordenadas de 4 posições, com eventual repetição, ou seja, ${}^5A'_4 = 5^4$
Para o algarismo das unidades existem 5 elementos (algarismos pares) para uma única posição.
Desta forma, nestas condições, o número de alternativas diferentes é:

$$5^4 \times 5 = 5^5$$

Resposta: **Opção B**

Exame – 1997, 1.ª Fase – 1.ª chamada (cód. 135)