Escola Secundária de Penafiel

Exame Modelo I de Matemática A

Duração do Exame: 150 **minutos +** 30 **minutos de tolerância** | **junho de 2018**

Caderno 1 (75 minutos + 15min) + Caderno 2 (75 minutos + 15min)

12.º Ano de Escolaridade | Turma - G - K

Caderno 1

- **Duração:** 75 **minutos +** 15 **minutos de tolerância**
- **É permitido o uso de calculadora gráfica**

Indica de forma legível a versão da prova. A prova é constituída por dois cadernos (Caderno 1 e Caderno 2). Utiliza apenas caneta ou esferográfica de tinta azul ou preta. Só é permitido o uso de calculadora no Caderno 1. Não é permitido o uso de corretor. Risca o que pretendes que não seja classificado. Para cada resposta identifica o item. Apresenta as tuas respostas de forma legível. Apresenta apenas uma resposta para cada item. A prova apresenta um formulário no Caderno 1. As cotações dos itens de cada Caderno encontram-se no final de cada Caderno.

Na resposta aos itens de seleção (escolha múltipla), seleciona a resposta correta. Escreve na folha de respostas o número do item e a letra que identifica a opção escolhida.

Na resposta aos restantes itens, apresenta o teu raciocínio de forma clara, indicando todos os cálculos que tiveres de efetuar e todas as justificações necessárias. Quando, para um resultado, não é pedida aproximação apresenta sempre o valor exato.

Formulário

Geometria

Comprimento de um arco de circunferência:

αr *(α - amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r - raio)*

área de um polígono regular: *Semiperímetro* $\times$ *Apótema*

área de um setor circular:

$\frac{\alpha r^2}{2}$ *(α- amplitude, em radianos, do ângulo ao centro, r - raio)*

área lateral de um cone: $\pi r g$ *(r - raio da base, g - geratriz)*

área de uma superfície esférica: $4\pi r^2$ *(r - raio)*

Volume da pirâmide: $\frac{1}{3}\times$ *área da base* $\times$ *Altura*

Volume do cone: $\frac{1}{3}\times$ *área da base* $\times$ *Altura*

Volume da esfera: $\frac{4}{3}\pi r^3$ *(r - raio)*

Progressões

Soma dos n primeiros termos de uma progressão (u_n):

Progressão aritmética: $\frac{u_1 + u_n}{2} \times n$

Progressão geométrica: $u_1 \times \frac{1 - r^n}{1 - r}$, $r \neq 1$

Trigonometria

$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$

$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$

Lei dos senos

$\frac{\sin \hat{A}}{a} = \frac{\sin \hat{B}}{b} = \frac{\sin \hat{C}}{c}$

Lei dos cossenos ou Teorema de Carnot

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \hat{A}$

Complexos

$(|z| cis\theta)^n = |z|^n cis(n\theta)$ ou $(|z|e^{i\theta})^n = |z|^n e^{i(n\theta)}$

$\sqrt[n]{|z| cis\theta} = \sqrt[n]{|z|} cis\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right)$ ou

$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|} e^{i\left(\frac{\theta+2k\pi}{n}\right)}$, $k \in \{0; 1; 2; ...; n-1\}$ e $n \in \mathbb{N}$

Probabilidades

$\mu = p_1 x_1 + \cdots + p_n x_n$

$\sigma = \sqrt{p_1(x_1-\mu)^2 + \cdots + p_n(x_n-\mu)^2}$

Se $X \sim N(\mu, \sigma)$, então:

$P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) \approx 0.6827$

$P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) \approx 0.9545$

$P(\mu - 3\sigma < X < \mu + 3\sigma) \approx 0.9973$

Regras de derivação

$(u+v)' = u' + v'$

$(uv)' = u'v + uv'$

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$

$(u^n)' = nu^{n-1}u' \quad (n \in \mathbb{R})$

$(\sin u)' = u' \cos u$

$(\cos u)' = -u' \sin u$

$(\tan u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$

$(e^u)' = u'e^u$

$(a^u)' = u'a^u \ln a \quad (a \in \mathbb{R}^+ \backslash \{1\})$

$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$

$(\log_a u)' = \frac{u'}{u \ln a} \quad (a \in \mathbb{R}^+ \backslash \{1\})$

Limites notáveis

$\lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e \quad (n \in \mathbb{N})$

$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^p} = +\infty \quad (p \in \mathbb{R})$

1. .

1.1	1.2
P2001/2002	PMC2015

1.1. Uma moeda equilibrada é lançada oito vezes
A probabilidade do acontecimento "A face euro sai exatamente cinco vezes"é:
(A) ${}^8C_5\left(\frac{1}{2}\right)^8$ (B) ${}^8C_5\left(\frac{1}{2}\right)^5$ (C) ${}^8C_3\left(\frac{1}{2}\right)^3$ (D) ${}^8C_3\left(\frac{1}{2}\right)^5$

1.2. No referencial ortonormado xOy, da figura 1, está representada uma elipse de equação $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$, e um retângulo $[PQRS]$ inscrito na elipse

Sabe-se que:

- P é um ponto da elipse do primeiro quadrante
- $(x;y)$ são as coordenadas do ponto P

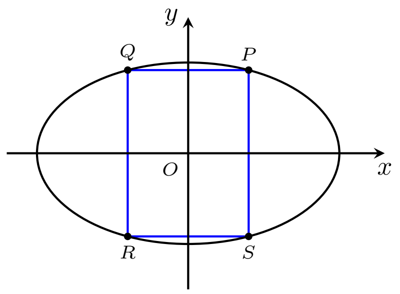

Figura 1

Em qual das opções está a expressão que dá a área $(A(x))$ do retângulo, em função da abcissa x do ponto P?

(A) $A(x)=\frac{16x}{5}\sqrt{25-x^2}$
(B) $A(x)=\frac{16x}{5}\sqrt{25+x^2}$
(C) $A(x)=\frac{4x}{5}\sqrt{25-x^2}$
(D) $A(x)=\frac{2x}{5}\sqrt{25-x^2}$

2. Considera as funções f e g, de domínio $\mathbb{R}$, definidas, respetivamente, por $f(x)=2^{x+1}$ e $g(x)=2^{-\frac{x}{2}+1}$.

   Qual é o conjunto-solução da inequação $g(2x)-f(x)>0$?
   (A) $\mathbb{R}$ (B) $\mathbb{R}^+$ (C) $\mathbb{R}^-$ (D) $\mathbb{R}_0^+$

3. Seja $(E,P(E),P)$ um espaço de probabilidade
   Sejam A e B dois acontecimentos de $P(E)$, sendo B um acontecimento possível

   Pode-se afirmar que:
   (A) $P(A\mid B)+P(\overline{A}\mid B)=0.5$
   (B) $P(A\mid B)+P(\overline{A}\mid B)=0.6$
   (C) $P(A\mid B)+P(\overline{A}\mid B)=0.8$
   (D) $P(A\mid B)+P(\overline{A}\mid B)=1$

4. Seja $(E, P(E), P)$ um espaço de probabilidade
Sejam A e B dois acontecimentos possíveis de $P(E)$

Sabe-se que:

- $P(A \cap B) = \frac{1}{5}$
- $P(A \cup B) = \frac{3}{5}$
- $P(\overline{A} \mid B) = \frac{1}{3}$

Determina $P(B \mid \overline{A})$

5. No referencial ortonormado $Oxyz$, da figura 2 está representado um sólido $[ABCDEFGH]$

Sabe-se que:

- a origem O do referencial situa-se no centro da face $[ABCD]$
- $[ABCD]$ é um quadrado de lado 6, contido no plano xOy
- as faces $[ABFE]$ e $[CDHG]$ são paralelas ao plano yOz
- $B(3; 3; 0)$, $E(3; -3; 3)$ e $G(-3; 3; 5)$
- uma equação do plano EFG é $x + 3z - 12 = 0$

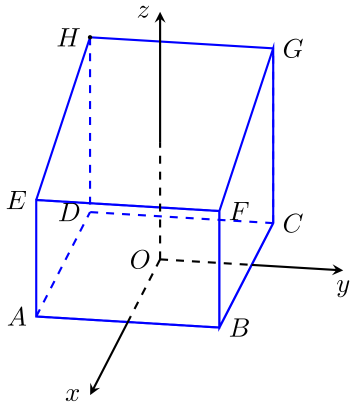

Figura 2

5.1. Vão ser escolhidos três dos oito vértices do sólido. Qual é a probabilidade de definirem um plano paralelo ao plano yOz? Apresenta o resultado sob a forma de fração irredutível

5.2. Determina uma equação vetorial da reta perpendicular ao plano EFG e que contém o ponto D

5.3. Escreve a equação do plano mediador do segmento de reta $[AH]$

6. Considera a função g, real de variável real, definida em $]-\infty; -2[$
Na figura 3 estão representados, em referencial o.n. xOy, parte do gráfico da função g e de duas retas r e s

Sabe-se que:

- as retas s e r, são, respetivamente, a assíntota vertical e a assíntota não vertical ao gráfico da função g, e que I é o seu ponto de interseção
- $\lim\limits_{x \to -2^-} g(x) = -\infty$
- $\lim\limits_{x \to -\infty} \left[g(x) - \frac{1}{4}x + \frac{3}{4} \right] = 0$

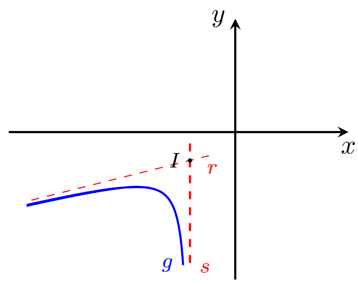

Figura 3

As coordenadas do ponto I são:

(A) $\left(-2; -\frac{5}{4}\right)$

(B) $\left(-2; -\frac{1}{4}\right)$

(C) $\left(-1; -\frac{5}{4}\right)$

(D) $\left(-1; -\frac{1}{4}\right)$

7. Considera a função f, real de variável real, definida no seu domínio, por $f(x) = \dfrac{e^{x+1} - 1}{2e^x - 1}$

7.1. Mostra que a reta de equação $y = \dfrac{e}{2}$ é assíntota ao gráfico da função, quando $x \to +\infty$

7.2. Considera a função g, real de variável real, definida no seu domínio, por $g(x) = -\dfrac{4}{e^x} + f(x)$
Mostra que a função g tem pelo menos um zero em $]1; 2[$

8. Um corpo está suspenso numa mola e oscila verticalmente
Admite que a distância, em decímetros, do corpo ao solo, t segundos após um certo instante t_0, é dada por $p(t) = 5 + 5e^{-0.2t} \cos\left(\dfrac{\pi t}{3}\right)$, com $t \in [0; +\infty[$

Na figura 4 está representado, em referencial ortonormado xOy, parte do gráfico da função p

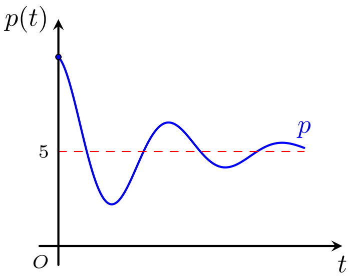

Figura 4

8.1. Determina os instantes em que o corpo se encontra a 5 decímetros do solo, durante os primeiros oito segundos

8.2. Determina $\lim\limits_{t \to +\infty} p(t)$ e interpreta o valor encontrado, em termos do movimento do corpo

FIM DO CADERNO 1

COTAÇÕES

1.			
		....	5 pontos
2.			
		....	5 pontos
3.			
		....	5 pontos
4.			
		....	10 pontos
5.			
	5.1	....	10 pontos
	5.2	....	10 pontos
	5.3	....	10 pontos
6.			
		....	5 pontos
7.			
	7.1	....	10 pontos
	7.2	....	10 pontos
8.			
	8.1	....	10 pontos
	8.2	....	10 pontos
		TOTAL	**100 pontos**

PÁGINA EM BRANCO

Caderno 2

- **Duração:** 75 **minutos** + 15 **minutos de tolerância**
- **Neste Caderno não é permitida a utilização de calculadora**

9. .

9.1	9.2
P2001/2002	PMC2015

9.1. Admite que, numa certa escola, a variável "Massa corporal dos alunos do sexo masculino da escola"segue uma distribuição aproximadamente normal, de valor médio 60 kg

Escolhe-se, ao acaso, um aluno do sexo masculino dessa escola

Relativamente a esse rapaz, qual dos acontecimentos seguintes é o mais provável?

(A) a sua massa corporal é inferior a 70 kg
(B) a sua massa corporal é superior a 70 kg
(C) a sua massa corporal é superior a 55 kg
(D) a sua massa corporal é inferior a 55 kg

9.2. Na figura 5 está representada a função f , definida por $f(x) = -\frac{\pi}{4} + \arccos\left(-\frac{x}{2}\right)$.

Sabe-se que:

- A é o ponto de interseção do gráfico de f com o eixo das ordenadas;
- B é o ponto do gráfico de f com ordenada $\frac{5\pi}{12}$.

A abcissa do ponto B é:

(A) 1

(B) 2

(C) $\frac{1}{2}$

(D) $\frac{1}{4}$

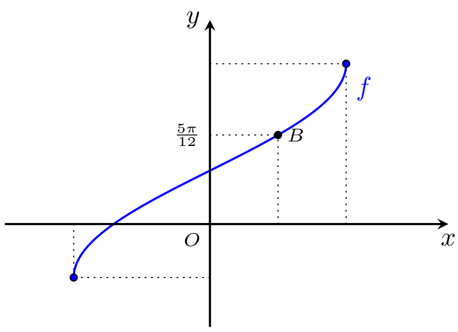

Figura 5

10. Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, considera os números complexos,
$w_1 = -2\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + 2\sqrt{2}i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)$ e $w_2 = \cos(\theta+\pi) + i\sin(\theta+\pi)$, com $\theta \in \mathbb{R}$

10.1. Considera a condição

$$|z + w_1| = 2 \wedge -\frac{\pi}{2} \leq Arg(z) \leq -\frac{\pi}{4}$$

No plano complexo, esta condição define uma linha

Determina o comprimento dessa linha

10.2. Mostra que $|w_2^3 + 1| = 2\left|\sin\left(\frac{3\theta}{2}\right)\right|$

11. Seja g, uma função real de variável real, definida em $\mathbb{R}_0^+$, por $g(x) = \begin{cases} x\ln(x) & se \quad x > 0 \\ 0 & se \quad x = 0 \end{cases}$

Em qual das opções poderá estar o gráfico da função g?

(A)

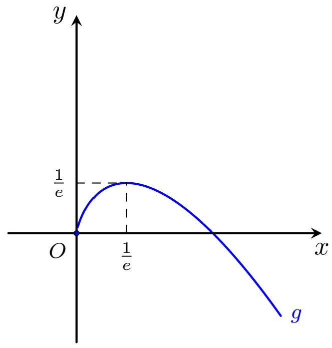

Figura 6

(B)

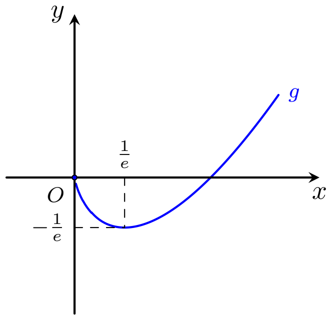

Figura 7

(C)

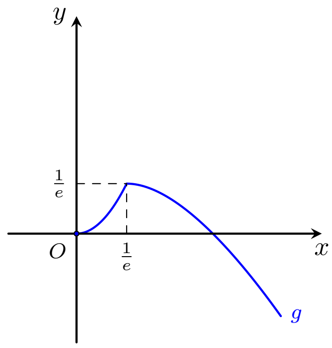

Figura 8

(D)

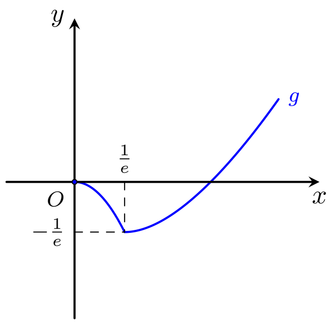

Figura 9

12. Todos os elementos de uma certa linha do Triângulo de Pascal foram escritos em onze bolas, um por bola
Considera a experiência que consiste em retirar, de uma só vez, duas bolas do saco e registar os números
Qual é a probabilidade de os números das duas bolas extraídas serem iguais?
Numa das opções está a expressão que dá o valor dessa probabilidade
Em qual delas?

(A) $P = \dfrac{10}{{}^{10}C_2}$

(B) $P = \dfrac{5}{{}^{11}C_2}$

(C) $P = \dfrac{5}{{}^{10}C_2}$

(D) $P = \dfrac{10}{{}^{11}C_2}$

13. Considera dois números reais superiores a um, a e b, com $a \neq b$
Sabe-se que $\log_a(b^3) = 2$
Em qual das opções está o valor de $\dfrac{\log_b(a^2)}{\log_a(\sqrt{b})}$?

(A) 9

(B) 8

(C) 7

(D) 6

14. Na figura 10, está representado, num referencial ortonormado xOy, parte do gráfico da função f, definida por

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{x}{e^{2x}-e^{x}} & se \quad x<0 \\ 0 & se \quad x=0 \\ (x+1)\ln\left(\dfrac{x+2}{x}\right) & se \quad x>0 \end{cases}$$

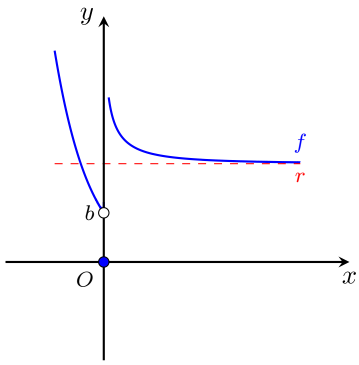

Figura 10

Sabe-se que:

- o eixo das ordenadas é assíntota vertical ao gráfico da função f
- a reta r é assíntota horizontal ao gráfico da função f
- $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=b$

14.1. Determina o valor de b

14.2. Considera a sucessão (a_n), definida por $a_n=\left(\dfrac{2n+3}{n+1}\right)^n$

Determina $\lim f(a_n)$ e escreve a equação da reta r

15. Considera a função h, real de variável real, definida por

$$h(x)=\begin{cases} \dfrac{\sin(-2x)(\cos^2(x)-\sin^2(x))}{4x} & se \quad x<0 \\ -\dfrac{k\ln\left(\sqrt{e}\right)}{2} & se \quad x=0 \\ \dfrac{2x}{1-e^{4x}} & se \quad x>0 \end{cases} \quad \text{, com } k\in\mathbb{R}$$

15.1. Averigua se existe k, para o qual a função h é contínua em $x=0$, e em caso afirmativo, indica-o

15.2. Mostra que, se $x>0$, $h'(x)=\dfrac{e^{4x}(8x-2)+2}{(1-e^{4x})^2}$, e resolve a equação $h'(x)=\dfrac{2}{(1-e^{4x})^2}$

15.3. Escreve a equação reduzida da reta t, tangente ao gráfico de h no ponto de abcissa $\dfrac{1}{4}$

FIM DO CADERNO 2

COTAÇÕES

9.			
		....	5 pontos
10.			
	10.1	....	10 pontos
	10.2	....	10 pontos
11.			
		....	5 pontos
12.			
		....	5 pontos
13.			
		....	5 pontos
14.			
	14.1	....	10 pontos
	14.2	....	10 pontos
15.			
	15.1	....	15 pontos
	15.2	....	15 pontos
	15.3	....	10 pontos
		TOTAL	**100 pontos**

PÁGINA EM BRANCO