MathSuccess
Explicações de Matemática

Modelos Exponenciais

Matemática A | 12.º Ano

"Conhece a Matemática e dominarás o Mundo."
Galileu Galilei

1. Um novo vírus propagou-se numa cidade com oitocentos mil de habitantes.

Nesta cidade, o número de infectados I_1, em milhares, t semanas após o vírus ter sido detectado é dado, aproximadamente, por:

$$I_1(t) = \frac{4}{1 + Ae^{Bt}} \text{, com } A, B \in \mathbb{R}$$

No início do surto foram infectadas 250 pessoas. Passadas três semanas e meia, o número de infectados já tinha aumentado para 1607.

1.1. Mostre que $A = 15$ e que o valor de B, arredondado às centésimas, é $-0,66$.

1.2. Durante quanto tempo o número de infectados foi inferior a 2800 pessoas.

Apresente o resultado em semanas e dias, com os dias arredondados às unidades.

1.3. Para que valor tende a percentagem de habitantes infectados nesta cidade?

1.4. Ao fim de quanto tempo a velocidade de crescimento do número de infectados começa a diminuir?

Apresente o resultado em semanas e dias, com os dias arredondados às unidades.

1.5. No mesmo momento, numa outra cidade de dimensão semelhante, foi também identificado um surto deste vírus. Nesta segunda cidade, o número de infectados I_2, em milhares, t semanas após o vírus ter sido detectado, é dado, aproximadamente, por:

$$I_2(t) = \frac{5e^{0,33t}}{e^{0,33t} + 5}$$

a) Após o início dos dois surtos, existem dois instantes em que o número de infectados nas duas cidades foi o mesmo.

Determine esses instantes.

Apresente os resultados em semanas e dias, com os dias arredondados às unidades.

b) Em qual das duas cidades o número de infectados foi maior?

c) Durante quanto tempo a diferença entre o número de infectados nas duas cidades foi inferior a 300 ?

Utilize as capacidades gráficas da sua calculadora para responder a esta questão.

Na sua resposta deve:

- apresentar a condição que permite resolver o problema;
- resolver graficamente essa equação, reproduzindo o(s) gráfico(s) que considerar necessário(s) para a resolução do problema, devidamente identificado(s);
- indicar o valor pedido, em semanas e dias, com os dias arredondados às unidades.

2. Foram introduzidas duas espécies de insectos, A e B, num dado habitat. O número de indivíduos da espécie A e da espécie B, em milhares, é dado, em função do tempo t, em dias, respectivamente por:

$$A(t)=\frac{3}{1+ae^{-bt}} \qquad \text{e} \qquad B(t)=6e^{-0,4t}$$

sendo a e b constantes reais positivas. Sabe-se que inicialmente foram introduzidos 600 indivíduos da espécie A e que passadas dois dias e meio esse número já era de 1214.

2.1. Mostre que $a=4$ e determine o valor de b, arredondado às décimas.

2.2. Admita que $b=0,4$.

a) Determine ao fim de quanto tempo após a introdução, o número de indivíduos de cada espécie foi igual?

Apresente o resultado em dias e horas, horas arredondadas às unidades.

b) Em relação à espécie A, mostre que $t=2,5\left(\ln(4A)-\ln(3-A)\right)$.

2.3. Relativamente à espécie B:

a) mostre que $\dfrac{B(t+3,25)}{B(t)}$ é constante e interprete o resultado no contexto do problema.

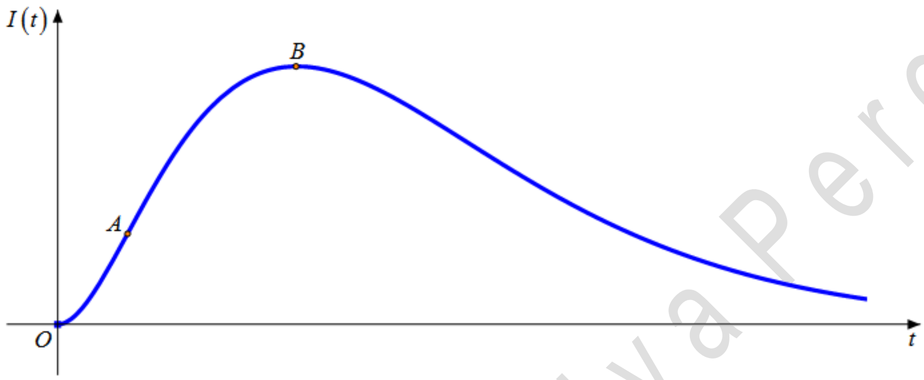
b) determine x de modo que $B(t+x)=0,5B(t)$ e interprete o resultado no contexto do problema.

Apresente o resultado em dias e horas, horas arredondadas às unidades.

3. Uma epidemia de um novo vírus atingiu um país. Os especialistas estimaram que o número de infectados activos, em milhares, t semanas após o início da epidemia, é dado, aproximadamente, por:

$$I(t)=t^2\,e^{-0,25t}\text{, com } t\geq 0$$

3.1. Na figura está representado parte do gráfico da função I e os pontos A e B.



Sabe-se que:

- a abcissa do ponto A corresponde ao instante em que a velocidade de crescimento do número de infectados activos começou a diminuir;

- a abcissa do ponto B corresponde ao instante o número de infectados activos atingiu o seu máximo.

Recorrendo a processos exclusivamente analíticos, determine quanto tempo demorou a ser atingido o máximo de infectados activos, após a sua velocidade de crescimento ter começado a diminuir.

Apresente o resultado em semana e dias, com os dias arredondados às unidades.

3.2. Nas primeiras cinco semanas, existiram exactamente dois instantes após o início do surto tais que quando o tempo que decorre até esses instantes quadruplicou, o número de infectados activos tinha aumentado 1800 .

Recorrendo às capacidades gráficas da calculadora, determine o tempo que decorreu entre estes dois instantes.

Na sua resposta deve:

- equacionar o problema;

- reproduzir o(s) gráfico(s) que considerar necessário(s) para a resolução do problema bem como a(s) coordenada(s) de algum (ou alguns) ponto(s) relevante(s);

- apresentar o pedido, em semanas e dias, com dias arredondados às unidades.

4. Numa experiência científica foi utilizada uma cultura de bactérias. O número de bactérias nessa cultura, em milhares, t horas após o início da experiência é dado, aproximadamente, por:

$$f(t)=\frac{3}{1+10e^{-0,8t}}\text{, com } t\geq 0$$

Recorrendo às capacidades gráficas da calculadora, determine o instante correspondente à abcissa do ponto de inflexão do gráfico de f e interprete o resultado no contexto da situação descrita.

Na sua resposta deve:

- equacionar o problema
- reproduzir o(s) gráfico(s) que considerar necessário(s) para a resolução do problema bem como a(s) coordenada(s) de algum (ou alguns) ponto(s) relevante(s)
- apresentar o instante pedido em horas e minutos, minutos arredondados às unidades
- interpretar o resultado no contexto da situação descrita

No caso de fazer algum arredondamento intermédio utilize, no mínimo, três casas decimais.

FIM

Solucionário

1.2. Durante cinco semanas e três dias, aproximadamente.

1.3. $0,5\%$

1.4. Ao fim de quatro semanas e um dia, aproximadamente.

1.5. **a)** $t=\frac{100\ln 5}{33}$ e $t=\frac{100\ln 15}{33}$, que correspondem a quatros semanas e seis dias, e oito semanas e um dia, aproximadamente.

1.5. **b)** Na segunda cidade

1.6. **c)** $|I_1(t)-I_2(t)|<0,3\Leftrightarrow a<t<b$, com $a\approx 3,64$ e $b\approx 9,99$. Durante $b-a\approx 6,35$ semanas, que corresponde a seis semanas e dois dias, aproximadamente.

2.1. $b\approx 0,4$

2.2. **a)** Três dias e onze horas, aproximadamente.

2.2. **a)** $\approx 0,27$; o número de indivíduos da espécie B reduz-se, aproximadamente, 73% a cada três dias e seis horas.

2.3. **b)** $x=2,5\ln 2\approx 1,733$; o número de indivíduos da espécie B reduz-se para metade a cada dia e dezoito horas, aproximadamente.

3.1. Aproximadamente, cinco semanas e cinco dias.

3.2. Aproximadamente, duas semanas e seis dias.

4. $t\approx 2,878$, que corresponde a, aproximadamente duas horas e 53 minutos. Passadas, aproximadamente, duas horas e 53 minutos, a taxa de crescimento do número de bactérias começa a diminuir.