Pergunta 1

Sejo (a_n) uma progressão geométrica monótona, tal que $a_2 = 36$ e $a_4 = 81$. Então

$$\begin{aligned} a_4 = a_2 \times r^{4-2} &\Leftrightarrow 81 = 36 \times r^2 \\ &\Leftrightarrow r^2 = \frac{9}{4} \\ &\Leftrightarrow r = \pm\frac{3}{2} \end{aligned}$$

Como (a_n) é monotona, então $r > 0$, logo $r = \frac{3}{2}$.

Donde

$$\begin{aligned} a_n &= a_2 \times \left(\frac{3}{2}\right)^{n-2} \\ &= 36 \times \left(\frac{3}{2}\right)^{n} \times \left(\frac{3}{2}\right)^{-2} \\ &= 16 \times \left(\frac{3}{2}\right)^{n} \end{aligned}$$

Opção (C)

Pergunta 2

Como (a_n) e uma progressão aritmética tal que $a_3 = 18$ e $a_{10} = 39$ vem que:

$$\begin{aligned} a_{10} = a_3 + (10-3) \times r &\Leftrightarrow 39 = 18 + 7r \\ &\Leftrightarrow 21 = 7r \\ &\Leftrightarrow r = 3 \end{aligned}$$

Donde

$$\begin{aligned} a_n &= a_3 + (n-3) \times 3 \\ &= 18 + (n-3) \times 3 \\ &= 3n + 9 \end{aligned}$$

Pelo que

$$\begin{aligned} a_5 + \cdots + a_{13} &= \frac{a_5 + a_{13}}{2} \times 9 \\ &= \frac{24 + 48}{2} \times 9 \\ &= 324 \end{aligned}$$

Pretende-se que

$$\begin{aligned} b_{36} = a_5 + \cdots + a_{13} &\Leftrightarrow \frac{12k - 36}{k + 36} = 324 \\ &\Leftrightarrow \frac{12k - 36}{k + 36} - 324 = 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{12k - 36 - 324(k + 36)}{k + 36} = 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{-312k - 11700}{k + 36} = 0 \\ &\Leftrightarrow -312k - 11700 = 0 \wedge k + 36 \neq 0 \\ &\Leftrightarrow k = -\frac{75}{2} \end{aligned}$$

Pergunta 3

1	2	3	4	5	6
		7	8	9	10

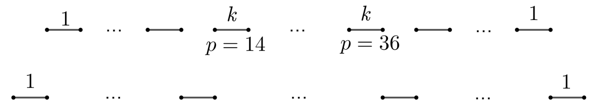
Uma resposta possível é:

$$^3C_1 \times ^2C_1 \times ^{10}C_6 \times 6! \times ^2C_1 \times 4! = 43\ 545\ 600$$

- $^3C_1$ representa o número de possibilidades de escolher a linha que fica livre.
- $^2C_1$ representa o número de possibilidades de escolher a linha que fica ocupada com exatamente 6 cartões.
- $^{10}C_6 \times 6!$ representa o número de possibilidades de escolher, entre os 10 cartões numerados, 6 para ocupar a linha, permutando-os pelas 6 posições.
- $^2C_1 \times 4!$ representa o número de possibilidades de escolher uma das duas laterais da grelha e permutar os 4 cartões restantes, mantendo-os juntos e encostados.

Opção (B)

Pergunta 4



$$^{n}C_{14} = ^{n}C_{36} \Leftrightarrow 36 = n - 14 \Leftrightarrow n = 50$$

Logo, a linha seguinte, daterminada para $n = 51$ tem 52 elementos, dos quais $2 \times 14 = 28$ são inferiores a k.

Donde

Número de casos possíveis: $^{52}C_5$

Número de casos favoráveis: $^{52}C_5 - ^{24}C_5 - ^{24}C_4 \times ^{28}C_1$

Pelo que

$$P(x) = \frac{^{52}C_5 - ^{24}C_5 - ^{24}C_4 \times ^{28}C_1}{^{52}C_5}$$
$$\simeq 86,92\%$$

Pergunta 5

Considere-se os acontecimentos:

A - «*eletricidade recebida pela cidade A-do-Alentejo*»

S - «*eletricidade que passa pela subestação*»

Sabe-se que:

- $P(S) = \dfrac{3}{5}$
- $P\left(A \cap \overline{S}\right) = 12\% = 0,12$

$$P\left(A \cap \overline{S}\right) = 0,12 \Leftrightarrow P(A) - P(A \cap S) = 0,12$$
$$\Leftrightarrow P(A) = 0,12 + P(A \cap S)$$

$$\begin{aligned} P\left(\overline{A}\right) &= 1 - P(A) \\ &= 1 - (0,12 + P(A \cap S)) \\ &= 0,88 - P(A \cap S) \end{aligned}$$

Dado que se pretende satisfazer a condição

$$P\left(\overline{S} \mid A\right) = P\left(S \mid \overline{A}\right)$$

Então:

$$\begin{aligned} & P\left(\overline{S} \mid A\right) = P\left(S \mid \overline{A}\right) \\ \Leftrightarrow & \frac{P\left(\overline{S} \cap A\right)}{P(A)} = \frac{P\left(S \cap \overline{A}\right)}{P\left(\overline{A}\right)} \\ \Leftrightarrow & 0,12 P\left(\overline{A}\right) = P(A) \times (P(S) - P(A \cap S)) \\ \Leftrightarrow & 0,12\,(0,88 - P(A \cap S)) = \\ & \qquad P(A) \times (0,6 - P(A \cap S)) \\ \Leftrightarrow & 0,1056 - 0,12P(A \cap S) = \\ & \qquad (0,12 + P(A \cap S))\,(0,6 - P(A \cap S)) \\ \Leftrightarrow & 0,1056 - 0,12P(A \cap S) = 0,072 - 0,12P(A \cap S) \\ & \qquad + 0,6P(A \cap S) - [P(A \cap S)]^2 \\ \Leftrightarrow & [P(A \cap S)]^2 - 0,6P(A \cap S) + 0,0336 = 0 \\ \Leftrightarrow & P(A \cap S) = \frac{-(-0,6) \pm \sqrt{(-0,6)^2 - 4 \times 1 \times 0,0336}}{2 \times 1} \end{aligned}$$

Logo

$P(A \cap S) \simeq 0,0625$ ou $P(A \cap S) \simeq 0,5375$

e portanto

$$P(A \mid S) = \frac{P(A \cap S)}{P(S)} \simeq 0,1 \text{ ou } P(A \mid S) \simeq 0,9$$

Como $P(A \mid S) > 0,5$, conclui-se que $P(A \mid S) \simeq 0,9$.

Pergunta 6.1

Opção (A)

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y + 2z = 8$$
$$\Leftrightarrow (x-1)^2 + (y-1)^2 + (z+1)^2 = 11$$

Centro $(1,1,-1)$ e raio $r = \sqrt{11}$

Esta opção é rejeitada, pois o centro da superfície esférica não pertence ao interior do cubo.

Opção (B)

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y - 2z = 8$$
$$\Leftrightarrow (x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 11$$

Centro $(1,1,1)$ e raio $r=\sqrt{11}$

Tem-se que

$$\begin{aligned}\overline{C'I} =& \sqrt{(2-1)^2+(2-1)^2+(2-1)^2}\\ =& \sqrt{3} < \sqrt{11}\end{aligned}$$

Esta opção é rejeitada, dado que a superfície esférica não contém o ponto I.

<u>Opção (C)</u>

$$\begin{aligned}& x^2+y^2+z^2+2x+2y-6z=8\\ \Leftrightarrow & (x+1)^2+(y+1)^2+(z-3)^2=19\end{aligned}$$

Centro $(-1,-1,3)$ e raio $r=\sqrt{19}$

<u>Opção (D)</u>

$$\begin{aligned}& x^2+y^2+z^2+4x+4y-10z=8\\ \Leftrightarrow & (x+2)^2+(y+2)^2+(z-5)^2=41\end{aligned}$$

Centro $(-2,-2,5)$ e raio $r=\sqrt{41}$

Esta opção é rejeitada, pois o centro da superfície esférica não pertence ao interior do cubo.

Opção (C)

Pergunta 6.2

Como $Q \in BCG$ então $y_Q = 2$.

Logo $Q\left(x_Q, 2, z_Q\right)$

Por outro lado, $E(2,-2,4)$ e $J(-2,2,2)$, donde Q', projeção ortogonal do ponto Q no plano EHI tem de coordenadas

$$\begin{aligned}Q' &= \left(\frac{2+(-2)}{2}, \frac{-2+2}{2}, \frac{4+2}{2}\right)\\ &= (0,0,3)\end{aligned}$$

Tem-se que

- $\overrightarrow{EH} = (-4,0,0)$
- $\overrightarrow{EI} = I - E$
  $= (2,2,2)-(2,-2,4)$
  $= (0,4,-2)$

Considere-se um vetor, $\vec{n}(a,b,c)$ tal que:

$$\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{EH}=0\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{EI}=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}(a,b,c)\cdot(-4,0,0)=0\\ (a,b,c)\cdot(0,4,-2)=0\end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases}-4a=0\\ 4b-2c=0\end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases}a=0\\ c=2b\end{cases}$$

donde $\vec{n}(0,b,2b),\ b\in\mathbb{R}\backslash\{0\}$. Tomando $b=1$, vem que o vetor $\vec{n}(0,1,2)$ é um vetor normal ao plano EHI.

A reta

$$r:(x,y,z)=(0,0,3)+k(0,1,2), k\in\mathbb{R}$$

é perpendicular ao plano EHI e contém o ponto Q. Donde, substituindo, vem

$$(x_Q,2,z_Q)=(0,0,3)+k(0,1,2)$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases}x_Q=0+o\times k\\ 2=0+k\\ z_Q=3+2k\end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases}x_Q=0\\ k=2\\ z_Q=7\end{cases}$$

Concluindo-se que $Q(0,2,7)$

O vetor

$$\begin{aligned}\overrightarrow{IQ} &= Q-I\\ &= (0,2,7)-(2,2,2)\\ &= (-2,0,5)\end{aligned}$$

Pelo que, a equação da reta IQ é

$$IQ:(x,y,z)=(2,2,2)+\lambda(-2,0,5), \lambda\in\mathbb{R}$$

Intersetando com a reta $y = 2 \wedge z = 4$ vem

$$\begin{cases} x = 2 - 2\lambda \\ y = 2 \\ z = 2 + 5\lambda \\ y = 2 \\ z = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dots \\ \dots \\ 4 = 2 + 5\lambda \\ \dots \\ \dots \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{6}{5} \\ \dots \\ \lambda = \frac{2}{5} \dots \\ \dots \\ \dots \end{cases}$$

pelo que, as coordenadas do ponto P são $\left(\frac{6}{5}, 2, 4\right)$.

Ora, a equação da reta perpendicular ao plano EHI e que contém o ponto P é

$$s : (x, y, z) = \left(\frac{6}{5}, 2, 4\right) + \mu(0, 1, 2), \mu \in \mathbb{R}$$

e a equação do plano HEI é

$$\begin{aligned} HEI : & 0 \times (x - 2) + 1 \times (y - 2) + 2(z - 2) = 0 \\ \Leftrightarrow & y + 2z - 6 = 0 \end{aligned}$$

Donde, a interseção da reta s com o plano HEI é:

$$\begin{cases} x = \frac{6}{5} \\ y = 2t\mu \\ z = 4 + 2\mu \\ y + 2z - 6 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dots \\ \dots \\ \dots \\ 2 + \mu + 2(4 + 2\mu) - 6 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dots \\ \dots \\ \dots \\ 5\mu = -4 \end{cases}$$

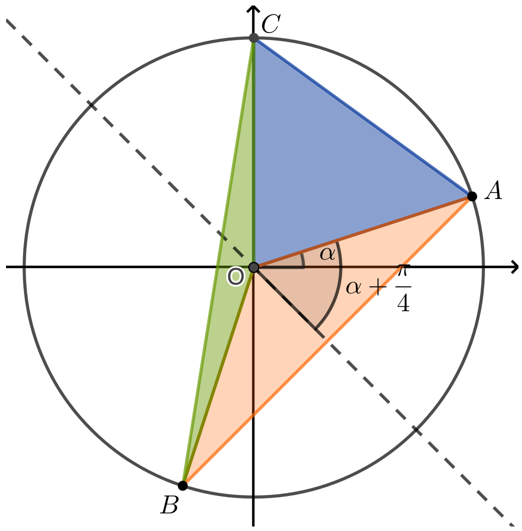
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{6}{5} \\ y = \frac{6}{5} \\ z = \frac{12}{5} \\ \mu = -\frac{4}{5} \end{cases}$$

ou seja, as coordenadas da projeção ortogonal de P sobre o plano que contém a base da pirâmide são $P'\left(\frac{6}{5}, \frac{6}{5}, \frac{12}{5}\right)$.

Pergunta 7

Considere-se a circunferência de centro na origem e raio 2 e $\alpha \in \left]0, \frac{\pi}{4}\right[$. Tem-se então que:

- $A(2\cos\alpha, 2\sin\alpha)$
- $B(-2\sin\alpha, -2\cos\alpha)$
- $C(0, 2)$



Assim,

$$A_{[ABC]} = A_{[BOC]} + A_{[AOC]} + A_{[AOB]}$$

<u>Área do triângulo $[BOC]$</u>

$$\begin{aligned} A_{[BOC]} &= \frac{2 \times 2\sin\alpha}{2} \\ &= 2\sin\alpha \end{aligned}$$

<u>Área do triângulo $[AOC]$</u>

$$\begin{aligned} A_{[AOC]} &= \frac{2 \times 2\cos\alpha}{2} \\ &= 2\cos\alpha \end{aligned}$$

<u>Área do triângulo $[AOB]$</u>

Tem-se que

$$\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\overline{O'A}}{2} \Leftrightarrow \overline{O'A} = 2\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right)$$

e que

$$\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\overline{OO'}}{2}\Leftrightarrow\overline{OO'}=2\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)$$

logo,

$$\overline{AB}=2\times 2\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)=4\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)$$

Pelo que,

$$\begin{aligned}A_{[AOB]}&=\frac{2\times 2\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)\times 2\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)}{2}\\&=2\sin\left(2\alpha+\frac{\pi}{2}\right)\\&=2\cos(2\alpha)\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}A(\alpha)=&2\sin\alpha+2\cos\alpha+2\cos(2\alpha)\\=&2\sqrt{2}\left(\sin\alpha\times\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\times\cos\alpha\right)\\&+2\cos(2\alpha)\\=&2\sqrt{2}\left(\sin\alpha\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)+\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\cos\alpha\right)\\&+2\cos(2\alpha)\\=&2\sqrt{2}\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)+2\cos(2\alpha)\end{aligned}$$

Pergunta 8.1

Tem-se que

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 3^-}f(x)&=\lim_{x\to 3^-}e^{[\ln(3-x)-\ln(\sqrt{3}-\sqrt{x})]}\\&=\lim_{x\to 3^-}e^{\ln\left(\frac{3-x}{\sqrt{3}-\sqrt{x}}\right)}\\&=\lim_{x\to 3^-}\frac{3-x}{\sqrt{3}-\sqrt{x}}\\&=\lim_{x\to 3^-}\left(\frac{3-x}{\sqrt{3}-\sqrt{x}}\times\frac{\sqrt{3}+\sqrt{x}}{\sqrt{3}+\sqrt{x}}\right)\\&=\lim_{x\to 3^-}\frac{(3-x)\left(\sqrt{3}+\sqrt{x}\right)}{3-x}\\&=\lim_{x\to 3^-}\left(\sqrt{3}+\sqrt{x}\right)\\&=\sqrt{3}+\sqrt{3}\\&=2\sqrt{3}\end{aligned}$$

e que

$$\begin{aligned}&\lim_{x\to 3^+}f(x)\\&=\lim_{x\to 3^+}\frac{e^{3-x}-x+2}{2x^2-18}\\&=\lim_{x\to 3^+}\frac{e^{3-x}-1+1-x+2}{2\left(x^2-9\right)}\\&=\lim_{x\to 3^+}\left[\frac{e^{3-x}-1}{x-3}\times\frac{1}{2(x+3)}+\frac{3-x}{2(x-3)(x+3)}\right]\\&=-\underbrace{\lim_{3-x\to 0^-}\frac{e^{3-x}-1}{3-x}}_{\text{Se } x\to 3^+ \text{ então } 3-x\to 0^-}\times\lim_{x\to 3^+}\frac{1}{2(x+3)}\\&\qquad+\lim_{x\to 3^+}\frac{-(x-3)}{2(x-3)(x+3)}\\&=-1\times\frac{1}{2\times(3+3)}+\frac{-1}{2(3+3)}\\&=-\frac{1}{6}\end{aligned}$$

Para f ser contínua em $x=3$. ter-se-ia de verificar:

$$\lim_{x\to 3^-}f(x)=f(3)=\lim_{x\to 3^+}f(x)$$

ou seja

$$2\sqrt{3}=k=-1/6$$

o que é impossível.

Logo, não existe nenhum valor k, para o qual a função f é contínua em $x=3$.

Pergunta 8.2

Tem-se que

$$\begin{aligned}&\lim_{x\to 1}\frac{2x(f(x)-f(1))}{x^2-1}\\&=\lim_{x\to 1}\left(\frac{2x}{x+1}\times\frac{f(x)-f(1)}{x-1}\right)\\&=\lim_{x\to 1}\frac{2x}{x+1}\times\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}\\&=\frac{2\times 1}{1+1}\times f'(1)\\&=f'(1)\\&\overset{(*)}{=}\frac{1}{2}\end{aligned}$$

Se $x \in]0,3[$

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \left[e^{\ln(3-x)-\ln\left(\sqrt{3}-\sqrt{x}\right)}\right]' \\
&= \left[e^{\ln\left(\dfrac{3-x}{\sqrt{3}-\sqrt{x}}\right)}\right]' \\
&= \left[\frac{3-x}{\sqrt{3}-\sqrt{x}}\right]' \\
&= \frac{(3-x)'\left(\sqrt{3}-\sqrt{x}\right)-(3-x)\left(\sqrt{3}-\sqrt{x}\right)'}{\left(\sqrt{3}-\sqrt{x}\right)^2} \\
&= \frac{-\left(\sqrt{3}-\sqrt{x}\right)+(3-x)\dfrac{1}{2\sqrt{x}}}{\left(\sqrt{3}-\sqrt{x}\right)^2}
\end{aligned}
$$

donde se obtém

$$
\begin{aligned}
f'(1) &= \frac{-\left(\sqrt{3}-1\right)+(3-1)\times\dfrac{1}{2\sqrt{1}}}{\left(\sqrt{3}-1\right)^2} \\
&= \frac{-\left(\sqrt{3}-1\right)+1}{\left(\sqrt{3}-1\right)^2} \\
&= \frac{2-\sqrt{3}}{3-2\sqrt{3}+1} \\
&= \frac{2-\sqrt{3}}{2(2-\sqrt{3})} \\
&= \frac{1}{2} \qquad (*)
\end{aligned}
$$

Pergunta 9.1

Pretende-se a reta tangente ao gráfico de f, no ponto de ordenada nula.

$$
\begin{aligned}
f(x) = 0 &\Leftrightarrow x^2 \ln x = 0 \wedge x \in \mathbb{R}^+ \\
&\Leftrightarrow \left(x^2 = 0 \vee \ln x = 0\right) \wedge x \in \mathbb{R}^+ \\
&\Leftrightarrow (x = 0 \vee x = 1) \wedge x \in \mathbb{R}^+ \\
&\Leftrightarrow x = 1
\end{aligned}
$$

Logo o ponto de tangência tem de coordenadas $(1,0)$.

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \left(x^2 \ln x\right)' \\
&= 2x\ln x + x^2 \times \frac{1}{x} \\
&= 2x \ln x + x
\end{aligned}
$$

Logo, o declive da reta tangente é dado por:

$$f'(1) = 2 \times 1 \times \ln(1) + 1 = 1$$

Pelo que se conclui que a equação da reta tangente é:

$$
\begin{aligned}
t &: (y-0) = 1(x-1) \\
&\Leftrightarrow y = x - 1
\end{aligned}
$$

Opção (B)

Pergunta 9.2

Pela alinea anterior $f'(x) = 2x\ln x + x$. Donde:

$$
\begin{aligned}
f'(x) = 0 &\Leftrightarrow 2x \ln x + x = 0 \wedge x \in \mathbb{R}^+ \\
&\Leftrightarrow x(2\ln x + 1) = 0 \wedge x \in \mathbb{R}^+ \\
&\Leftrightarrow \left(x = 0 \vee \ln x = -\frac{1}{2}\right) \wedge x \in \mathbb{R}^+ \\
&\Leftrightarrow x = e^{-\frac{1}{2}}
\end{aligned}
$$

	0		$e^{-\frac{1}{2}}$	$+\infty$
f'	$n.d.$	$-$	0	$+$
f	$n.d.$	$\searrow$	Min	$\nearrow$

$$f\left(e^{-\frac{1}{2}}\right) = \left(e^{-\frac{1}{2}}\right)^2 \ln e^{-\frac{1}{2}} = -\frac{1}{2e}$$

A função f' é decrescente em $\left]0, e^{-\frac{1}{2}}\right]$ e crescente em $\left[e^{-\frac{1}{2}}, +\infty\right[$ e por isso, o ponto de coordenadas $\left(\frac{1}{\sqrt{e}}, -\frac{1}{2e}\right)$ tem ordenada mínima.

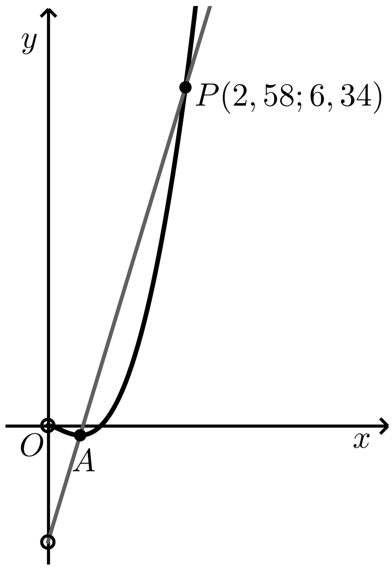
Seja $P(x,y)$, o ponto do gráfico de f, tal que $x > 1$.

Então

$$
\begin{aligned}
\overrightarrow{AO} &= O - A \\
&= (0,0) - \left(\frac{1}{\sqrt{e}}, -\frac{1}{2e}\right) \\
&= \left(-\frac{1}{\sqrt{e}}, \frac{1}{2e}\right) \\
\overrightarrow{AP} &= P - A \\
&= (x,y) - \left(\frac{1}{\sqrt{e}}, -\frac{1}{2e}\right) \\
&= \left(x - \frac{1}{\sqrt{e}}, y + \frac{1}{2e}\right)
\end{aligned}
$$

Donde, para o triângulo $[OAP]$ ser retângulo em A, tem de se verificar a condição:

$$\begin{aligned}
&\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{AB} = 0\\
\Leftrightarrow &\left(x - \frac{1}{\sqrt{e}}, y + \frac{1}{2e}\right) \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{e}}, \frac{1}{2e}\right) = 0\\
\Leftrightarrow &-\frac{1}{\sqrt{e}}x + \frac{1}{e} + \frac{1}{2e}y + \frac{1}{4e^2} = 0\\
\Leftrightarrow &\frac{1}{2e}y = \frac{1}{\sqrt{e}}x - \frac{4e+1}{4e^2}\\
\Leftrightarrow &y = \frac{2e}{\sqrt{e}}x - \frac{4e+1}{2e}
\end{aligned}$$



Concluindo-se assim, que as coordenadas do ponto P, com aproximação às centésimas é $P(2,58;6,33)$.

Pergunta 10

Sejam $z_1 = 2e^{i\left(\frac{\pi}{3}\right)}$ e z_2 números eomplexos, tais que, z_1 e z_2 são vértices consecutivos de um polígono regular de n lados. Logo $z_2 = |z_2|\, e^{i\left(\frac{\pi}{3}+\frac{2\pi}{n}\right)}$

$$\begin{aligned}
w &= \frac{z_2}{z_1}\\
&= \frac{|z_2|\, e^{i\left(\frac{\pi}{3}+\frac{2\pi}{n}\right)}}{2e^{i\left(\frac{\pi}{3}\right)}}\\
&= \frac{|z_2|}{2} e^{i\left(\frac{2\pi}{n}\right)}
\end{aligned}$$

Como w é um imaginário puro, então

$$\begin{aligned}
\frac{2\pi}{n} &= \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\\
\Leftrightarrow \frac{2\pi}{n} &= \frac{\pi + 2k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\\
\Leftrightarrow n &= \frac{4}{1+2k}, k \in \mathbb{Z}
\end{aligned}$$

Como $n \geq 3$, tomando $k = 0$, conclui-se que $n = 4$.

Opção (B)

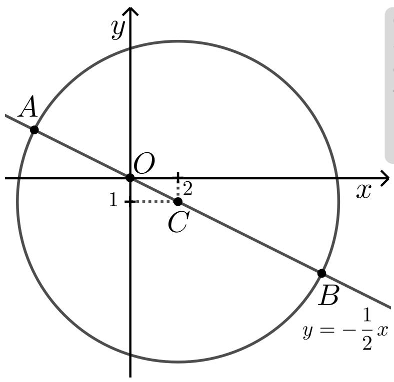
Pergunta 11

Considere-se, no plano complexo, a circunferência definida por:

$$|z - 2 + i| = 3\sqrt{5} \Leftrightarrow |z - (2 - i)| = 3\sqrt{5}$$

Logo, os afixos pertencem à circunferência de equação:

$$(x-2)^2 + (y+1)^2 = 45$$



OBS:
Sendo P um ponto qualquer da circunferência, pela desigualdade triangular, conclui-se que:

$$r - \overline{OC} \leq \overline{OP} \leq r + \overline{OC}$$

Considere-se a reta r que passa no centro da circunferência $C(2,-1)$ e na origem O. Logo

$$r : y = mx$$

Como $(2,-1) \in r$, vem que $-1 = m \times 2 \Leftrightarrow m = -\frac{1}{2}$

logo

$$r : y = -\frac{1}{2}x$$

Determinando os pontos de interseção da reta r com a circunferência:

$$\begin{cases} (x-2)^2 + (y+1)^2 = 45\\ y = -\frac{1}{2}x \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x-2)^2 + \left(-\frac{1}{2}x + 1\right)^2 = 45\\ y = -\frac{1}{2}x \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2-4x+4+\frac{1}{4}x^2-x+1=45 \\ y=-\dfrac{1}{2}x \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2-4x-32=0 \\ y=-\dfrac{1}{2}x \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=-4 \\ y=2 \end{cases} \vee \begin{cases} x=8 \\ y=-4 \end{cases}$$

Logo, os pontos $A(-4,2)$ e $B(3,-4)$ são os afixos dos números complexos $z_A=-4+2i$ e $z_B=8-4i$ respetivamente, de menor e de maior módulo

Pergunta 12

Assíntotas Verticais

Em $]-\infty,0[$ a função f resulta da composição e de operações sucessivas envolvendo funções contínuas neste intervalo, sendo por isso, contínua em $]-\infty,0[$.

Logo, neste intervalo, o gráfico de f não admite assíntotas verticais ao seu gráfico.

Em $]0,+\infty[$ a função f resulta de operações sucessivas envolvendo funções contínuas neste intervalo, sendo por isso, contínua em $]0,+\infty[$.

Logo, neste intervalo, o gráfico de f não admite assíntotas verticais ao seu gráfico.

Dado que 0 é ponto aderente ao domínio de f, então:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to0^-} f(x) &= \lim_{x\to0^-}\left(x-xe^{\frac{2}{x}}\right)\\ &=0-0\times0\\ &=0\end{aligned}$$

como $x\to0^-$ então $\dfrac{2}{x}\to-\infty$ e por isso $e^{\frac{2}{x}}\to0^-$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to0^+} f(x) &= \lim_{x\to0^+}\frac{1-\cos x}{x^2}\\ &=\lim_{x\to0^+}\left[\frac{(1-\cos x)}{x^2}\times\frac{1+\cos x}{1+\cos x}\right]\\ &=\lim_{x\to0^+}\frac{1-\cos^2 x}{x^2(1+\cos x)}\\ &=\lim_{x\to0^+}\frac{\sin^2 x}{x^2(1+\cos x)}\\ &=\underbrace{\left[\lim_{x\to0^+}\frac{\sin x}{x}\right]^2}_{\text{Limite Notável}}\times\lim_{x\to0^+}\frac{1}{1+\cos x}\\ &=1^2\times\frac{1}{2}\\ &=\frac{1}{2}\end{aligned}$$

Logo, a reta de equação $x=0$ não é assíntota vertical ao gráfico de f.

Desta forma, conclui-se que não existem assíntotas verticais ao gráfico de f.

Assíntotas Horizontais

$$\begin{aligned}\lim_{x\to-\infty} f(x) &= \lim_{x\to-\infty}\left(x-xe^{\frac{2}{x}}\right)\\ &=\lim_{x\to-\infty}\left[-x\left(e^{\frac{2}{x}}-1\right)\right]\\ &=\lim_{t\to0^-}\left[\frac{-2}{t}\left(e^t-1\right)\right]\\ &=-2\times\lim_{t\to0^-}\frac{e^t-1}{t}\\ &=-2\times1\\ &=-2\end{aligned}$$

Mudança de Variável
Seja $t=\dfrac{2}{x}$
Se $x\to-\infty$ então $t\to0^-$

Logo, a reta de equação $y=-2$ é assíntota horizontal ao gráfico de f em $-\infty$.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty} f(x) &= \lim_{x\to+\infty}\frac{1-\cos x}{x^2}\\ &=\lim_{x\to+\infty}\left[(1-\cos x)\times\frac{1}{x^2}\right]\\ &=0\end{aligned}$$

dado que, $\forall x\in\mathbb{R}^+, 0\leqslant 1-\cos x\leqslant 2$ sendo por isso uma função limitada e $\dfrac{1}{x^2}\to0$.

Logo, a reta de equação $y=0$ é assíntota horizontal ao gráfico de f em $+\infty$.

Pergunta 13

Seja fuma função, de domínio $\left]0, \frac{\pi}{2}\right]$, cuja derivada, também tem domínio $\left]0, \frac{\pi}{2}\right]$ é definida por:

$$f'(x) = \frac{\cos x}{2 - \sin x}$$

Então

$$\begin{aligned} f''(x) &= \left[\frac{\cos x}{2 - \sin x}\right]' \\ &= \frac{(\cos x)'(2 - \sin x) - \cos x(2 - \sin x)'}{(2 - \sin x)^2} \\ &= \frac{-\sin x(2 - \sin x) + \cos x \times \cos x}{(2 - \sin x)^2} \\ &= \frac{1 - 2\sin x}{(2 - \sin x)^2} \end{aligned}$$

Donde

$$\begin{aligned} & f''(x) = 0 \wedge x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right] \\ \Leftrightarrow & \frac{1 - 2\sin x}{(2 - \sin x)^2} = 0 \wedge x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right] \\ \Leftrightarrow & 1 - 2\sin x = 0 \wedge x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right] \\ \Leftrightarrow & \sin x = \frac{1}{2} \wedge x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right] \\ \Leftrightarrow & x = \frac{\pi}{6} \end{aligned}$$

	0		$\frac{\pi}{6}$		$\frac{\pi}{2}$
f''	$n.d.$	$+$	0	$-$	-1
f	$n.d.$	$\smile$	$P.I.$	$\frown$	$f\left(\frac{\pi}{2}\right)$

Pelo que se conclui que o gráfico de f tem a concavidade voltada pora cima em $\left]0, \frac{\pi}{6}\right]$ e tem a concavidade voltada para baixo em $\left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right]$.

O gráfico de f tem um ponto de inflexão de abcissa $x = \frac{\pi}{6}$.

Pergunta 14

Considere-se a equação.

$$2\ln^2(2x+3) - \ln(2) = 3 + \ln\left(x + \frac{3}{2}\right)$$

Tem-se que:

$$\begin{aligned} D_E &= \left\{x \in \mathbb{R} : 2x + 3 > 0 \wedge x + \frac{3}{2} > 0\right\} \\ &= \left]-\frac{3}{2}, +\infty\right[\end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned} & 2\ln^2(2x+3) - \ln(2) = 3 + \ln\left(x + \frac{3}{2}\right) \wedge x \in D_E \\ \Leftrightarrow & 2\ln^2(2x+3) = 3 + \ln\left(x + \frac{3}{2}\right) + \ln(2) \wedge x \in D_E \\ \Leftrightarrow & 2\ln^2(2x+3) = 3 + \ln(2x+3) \wedge x \in DE \\ \Leftrightarrow & 2\ln(2x+3) - \ln(2x+3) - 3 = 0 \quad \wedge x \in D_E \\ \Leftrightarrow & \ln(2x+3) = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \times 2 \times (-3)}}{2 \times 2} \\ \Leftrightarrow & \left(\ln(2x+3) = -1 \vee \ln(2x+3) = \frac{3}{2}\right) \wedge x \in D_E \\ \Leftrightarrow & \left(2x + 3 = e^{-1} \vee 2x + 3 = e^{\frac{3}{2}}\right) \wedge x \in D_E \\ \Leftrightarrow & x = \frac{-3e+1}{2e} \vee x = \frac{e^{\frac{3}{2}} - 3}{2} \end{aligned}$$

Pergunta 15

Seja f uma função duas vezes diferenciável em $\mathbb{R}$ e $a \in \mathbb{R}^-$ tal que:

- $f(1) = 1$ e $f'(1) = 0$
- $f'' > 0, \forall x \in \mathbb{R}$

A função f é duas vezes diferenciável em $\mathbb{R}$ e por isso é contínua em $\mathbb{R}$.

Como $f'' > 0, \forall x \in \mathbb{R}$ então a função f' é crescente em $\mathbb{R}$.

Consequentemente, como f' é crescente em $\mathbb{R}$ e $f'(1) = 0$, concluí-se que $f'(x) < 0, \forall x < 1$ e $f'(x) > 0, \forall x > 1$.

Concluíndo-se que f é decrescente em $]-\infty, 1]$ e é crescente em $[0, +\infty[$, sendo $f(1) = 1$ o mínimo absoluto de f em $x = 1$.

Considere-se a função g, definida por:

$$g(x) = f(x) - f(x+1)$$

OBS:

$$\begin{aligned} & f(x) = f(x+1) \\ \Leftrightarrow & f(x) - f(x+1) = 0 \\ \Leftrightarrow & g(x) = 0 \end{aligned}$$

A função g resulta da composição e de operações sucessivas envolvendo funções contínuas em $\mathbb{R}$ e por isso, em particular, é contínua em $[a, f(a)]$.

Tem-se que

$$\begin{aligned} & g(a) \times g\left(f(a)\right) \\ = & \left(\underbrace{f(a) - f(a+1)}_{>0}\right)\left(\underbrace{f\left(f(a)\right) - f\left(f(a)+1\right)}_{<0}\right) \\ & {<0} \end{aligned}$$

- Como $a < 0$ então $a < a+1 < 1$.

  Dado que a função f é decrescente em $]-\infty, 1[$ conclui-se que

  $$f(a) > f(a+1) \Leftrightarrow f(a) - f(a+1) > 0$$

- Como $f(1) = 1$ é o mínimo absoluto da função f, então $f(a) > 1$, e por isso

  $$1 < f(a) < f(a) + 1$$

  Dado que a função f é crescente em $]1, +\infty[$ então

  $$\begin{aligned} & f\left(f(a)\right) < f\left(f(a)+1\right) \\ \Leftrightarrow & f\left(f(a)\right) - f\left(f(a)+1\right) < 0 \end{aligned}$$

Logo, pelo Corolário do Teorema do Bolzano- Cauchy conclui-se que:

$$\begin{aligned} & \exists x_0 \in]a, f(a)[: g\left(x_0\right) = 0 \\ \Leftrightarrow & \exists x_0 \in]a, f(a)[: f\left(x_0\right) - f\left(x_0 + 1\right) = 0 \\ \Leftrightarrow & \exists x_0 \in]a, f(a)[: f\left(x_0\right) = f\left(x_0 + 1\right) \end{aligned}$$

Dado que

$$\begin{aligned} g'(x) = & \left[f(x) - f(x+1)\right]' \\ = & f'(x) - f'(x+1) \times (x+1)' \\ = & f'(x) - f'(x+1) \end{aligned}$$

e que f' é monótona crescente e por isso injetiva, então $g'(x) \neq 0, \forall x \in \mathbb{R}$, pelo que, g é monótona em $\mathbb{R}$, e por isso, em particular, em $]a, f(a)[$. Concluíndo-se assim, que a solução da equação $f\left(x\right) = f\left(x+1\right)$, no intervalo $]a, f(a)[$ é única.