Compilação n.º 1 – Matemática A – 11.º Ano

Produto Escalar e Geometria Analítica

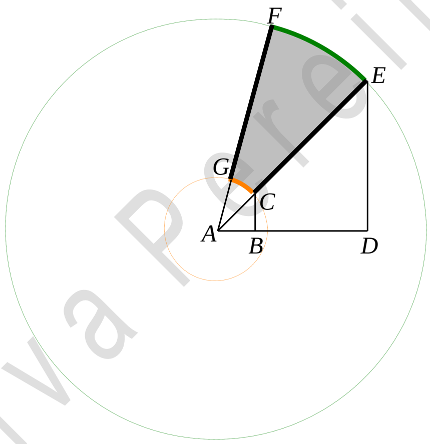
(Compilação de todos os exercícios disponibilizados no site)

"Entre dois espíritos iguais, postos nas mesmas condições, aquele que sabe Geometria é superior ao outro e adquire um vigor especial."
Blaise Pascal

1. Na figura está representada uma coroa circular com uma parte sombreada.

Sabe-se que:

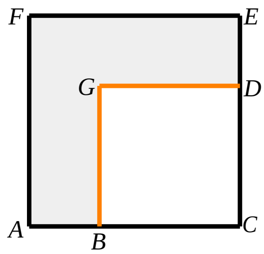
- a coroa circular está centrada no ponto A;
- os triângulos $[ABC]$ e $[ADE]$ são rectângulos e isósceles;
- $\overline{AC} = \sqrt{2}$ e $\overline{AD} = 4$
- a área da região sombreada é $\dfrac{5\pi}{2}$



Qual é o valor do produto escalar $\overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{EC}$?

A $-\dfrac{3}{2}$ **B** $-3\sqrt{3}$ **C** $-4\sqrt{3}$ **D** $4\sqrt{3}$

2. Na figura estão representados os quadrados $[ACEF]$ e $[BCDG]$. Sabe-se que o Ponto D pertence ao lado $[CE]$ de tal modo que $\overline{CD} = 2\overline{DE}$.



Seja a o valor da área do polígono $[ABGDEF]$ e b o valor da área do trapézio $[DEFG]$. Qual das seguintes afirmações é verdadeira?

A $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{FC} = a$ **B** $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{FC} = b$ **C** $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{FC} < a$ **D** $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{FC} > a$

3. Sejam $\vec{u}$ e $\vec{v}$ dois vectores não colineares tais que $\|\vec{u}-\vec{v}\| > \|\vec{u}+\vec{v}\|$. O ângulo formado pelos vectores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ é:

A obtuso. **B** recto. **C** agudo. **D** raso.

4. Considere as rectas r e s definidas por:

$$r:(x,y,z)=(2-2k,k,1+k),\ k\in\mathbb{R} \qquad \text{e} \qquad (x,y,z)=(-2,2,3)+k(2,0,-2),\ k\in\mathbb{R}$$

Qual é a amplitude do ângulo formado pelas rectas r e s?

A 30^{o} **B** 45^{o} **C** 60^{o} **D** 150^{o}

Exercício Extra: Mostre que as rectas r e s definem um plano e escreva uma equação que o defina.

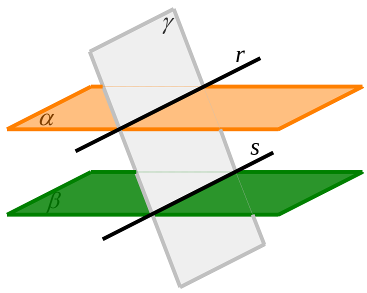
5. Sejam $\vec{u}$ e $\vec{v}$ dois vectores não nulos tais que $\|\vec{u}+\vec{v}\|=\sqrt{10}$, $\|\vec{u}\|=k$, $\|\vec{v}\|=2k-1$ e $\vec{u}\perp\vec{v}$, com $k\in\mathbb{R}$. Então pode afirmar-se que:

A $k=-1 \ \vee k=\frac{9}{5}$ **B** $k=\frac{9}{5}$ **C** $k=\frac{9}{4}$ **D** $k=2$

6. Na figura estão representados três planos, α, β e γ, definidos respectivamente por, $a^2x+y+z=ax$, $2x+y=-2-z$ e $x+a(y+z)=0$, com $a\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

Sabe-se que:

- os planos α e β são estritamente paralelos;
- o plano γ intersecta os planos α e β sobre duas rectas paralelas, r e s (α e γ intersectam-se sobre r e β e γ intersectam-se sobre s);
- γ não é perpendicular nem a α e nem a β.

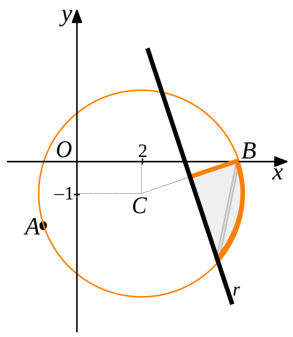


Qual é o valor de a?

A -1 **B** 1 **C** 2 **D** 3

Exercício Extra: Escreva as equações cartesianas da recta s.

7. Na figura estão representadas, num referencial o.n. xOy, uma circunferência centrada no ponto $C(2,-1)$ que contém os pontos $A(-1,-2)$ e B e a recta r, mediatriz do segmento de recta $[CB]$. O ponto B também pertence ao eixo Ox.



7.1. Mostre que as coordenadas do ponto B são $(5,0)$ e verifique que $[AB]$ é um diâmetro da circunferência.

7.2. Escreva a equação reduzida da recta r e indique a sua inclinação. (Apresente o resultado em graus, arredondado às decimas)

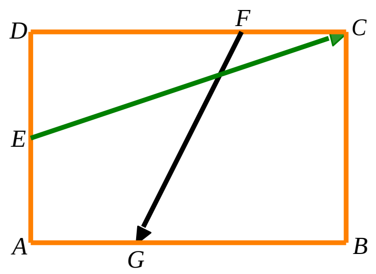
7.3. Sejam P um ponto pertencente à recta r e D o ponto de coordenadas $(-2,4)$. Determine as coordenadas de P de modo que as rectas DP e BC sejam paralelas.

7.4. Escreva uma condição que defina a região sombreada da figura, incluindo a fronteira, e mostre que a sua área é igual a $5\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{4}\right)$.

8. Na figura está representado um rectângulo $[ABCD]$.

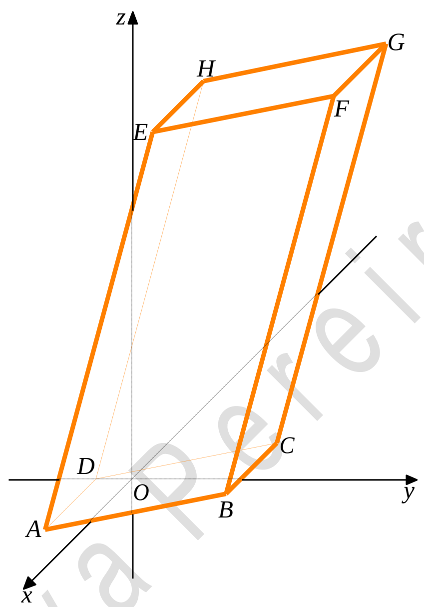
Sabe-se que:

- E é o ponto médio do lado $[AD]$;
- $\overline{AD}=\frac{2}{3}\overline{CD}$
- $\overline{CD}=3\overline{CF}$
- $\overline{AG}=\overline{CF}$



Mostre que $\overrightarrow{EC}\cdot\overrightarrow{FG}=-5\overline{CF}^2$.

9. Na figura está representado num referencial o.n. $Oxyz$ ou prisma quadrangular recto $[ABCDEFGH]$.



Sabe-se que:

- a face $[DCGH]$ é um paralelogramo e está contida no plano yOz;
- as faces $[ABCD]$ e $[EFGH]$ são rectângulos e são paralelas;
- uma equação do plano ABC é $y-5z=-1$;
- uma equação vectorial da recta BH é:

$$(x,y,z)=(8,6,-9)+k(-4,-2,10),\ k\in\mathbb{R}$$

- uma condição que define a recta AG é:

$$(x,y,z)=(0,7,12)+k(-4,8,12),\ k\in\mathbb{R}$$

9.1. Mostre que uma equação do plano DBF é $13x-11y+3z=11$.

9.2. Usando o produto escalar, escreva uma equação da superfície esférica de diâmetro $[AH]$. (Apresenta a equação na forma $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=r^2$, com $a,b,c,r\in\mathbb{R}$)

9.3. Determine o volume do prisma $[ABCDEFGH]$.

Sugestão: Comece por determinar uma condição que defina a recta perpendicular ao plano ABC que contém o ponto G.

9.4. Seja $P(x,y,z)$ um ponto do espaço e considere a condição definida por $\left(\overrightarrow{AP}-\overrightarrow{AB}\right)\cdot\left(\overrightarrow{EG}+\overrightarrow{FB}\right)=0$.

a) Usando exclusivamente cálculo vectorial, identifique, justificando, o lugar geométrico dos pontos P do espaço que satisfazem a condição dada.

b) Escreva uma equação cartesiana do lugar geométrico dos pontos P do espaço que satisfazem a condição dada.

10. Num referencial o.n. xOy considere os pontos $A(-2,-3)$, $B(1,6)$ e $C(4,2)$ e a recta r definida por $2x+3y=5$.

10.1. Escreva a equação reduzida da recta que contém a altura do triângulo $[ABC]$ em relação ao vértice C. Indique a sua inclinação. Apresente o resultado em graus, arredondado às décimas.

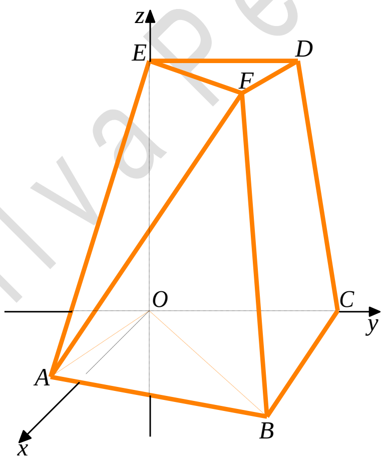
10.2. Seja P um ponto pertencente à recta r. Determine as suas coordenadas de modo que a recta AP seja perpendicular à recta OB.

10.3. Sejam Q o ponto médio do segmento de recta $[AB]$, R o ponto médio do segmento de recta $[AC]$ e $P(x,y)$ um ponto do plano.

Mostre a condição $\left(\overrightarrow{AQ}-\overrightarrow{RQ}\right)\cdot\left(\overrightarrow{RB}+\overrightarrow{BP}\right)=0$ define a mediatriz do segmento de recta $[AC]$ e escreva a sua equação reduzida.

10.4. Considere a recta s definida por $(x,y)=(1+2k,-k),\quad k\in\mathbb{R}$ e seja α a amplitude do ângulo formado pelas rectas r e s. Qual é o valor de $\operatorname{tg}\alpha+13\operatorname{sen}^2\alpha$.

11. Na figura está representado num referencial o.n. $Oxyz$ o sólido $[ABCDEF]$.



Sabe-se que:

- uma equação do plano ABF é $6x+2y+z=34$
- uma equação do plano BCF é $8x+32y+5z=192$
- uma equação vectorial da recta AF é:

$$(x,y,z)=(6-3k,5k-1,8k),\quad k\in\mathbb{R}$$

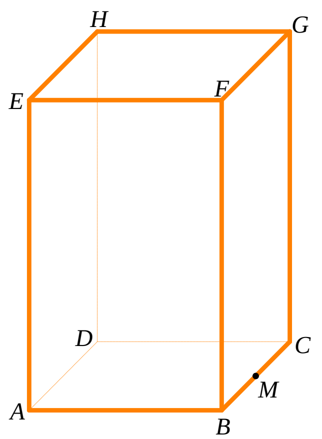
- o ponto A pertence ao plano xOy e o ponto C ao eixo Oy

11.1. Escreva uma equação vectorial da recta BF.

11.2. Sem determinar as coordenadas do ponto F, mostre que $56x+48y-9z=288$ é uma equação do plano ACF.

11.3. Sem usar a recta AF, determine as coordenadas do ponto F.

12. Na figura está representado um prisma quadrangular regular $[ABCDEFGH]$.



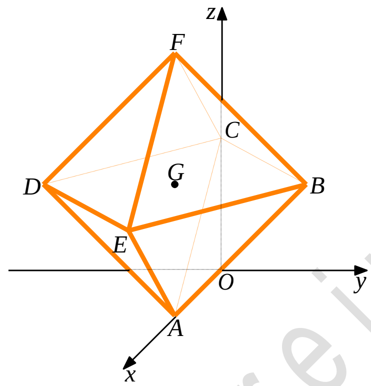
Sabe-se:

- M é o ponto médio da aresta $[BC]$
- $\overline{AE}=a$

Seja v o volume do prisma.

Mostre que $\overrightarrow{EM}\cdot\overrightarrow{DM}=\dfrac{3v}{4a}$

13. Na figura está representado, num referencial o.n. $Oxyz$, um octaedro.



Sabe-se que:

- o quadrado $[ACFE]$ está contido no plano xOz;
- o ponto A pertence ao eixo Ox;
- o ponto C pertence ao eixo Oz;
- o ponto G é o centro do octaedro;
- os vértices do octaedro pertencem à superfície esférica de equação $x^2+y^2+z^2-4x-4z+4=0$

Seja r a recta definida pela condição $(x,y,z)=(2,2,4)+k(3,0,-4)$, $k\in\mathbb{R}$

13.1. Escreva uma equação do plano ABE.

13.2. Determine as coordenadas do ponto de intersecção do plano ABE com a recta r. Caso não tenha feito a alínea anterior, considere que ABE: $x+y-z=2$.

13.3. Sejam T um ponto pertencente ao eixo Oy com a mesma ordenada de B e Q um ponto que se desloca sobre a recta r. Quais são as coordenadas de Q de modo que o triângulo $[TQF]$ seja rectângulo em Q?

13.4. Para um certo valor de $\alpha\in\left]\pi,\frac{3\pi}{2}\right[$ o ponto P de coordenadas $(2\cos^2\alpha,\operatorname{sen}\alpha,2\operatorname{sen}\alpha)$ pertence ao plano ABE. Determine o valor de α e indique os valores numéricos das coordenadas do ponto P.

Extra: Considere os seis vértices do octaedro e o seu centro. Escolhendo, simultaneamente e ao acaso, três dos sete pontos, qual é a probabilidade de definirem um plano paralelo ao eixo Oy?

14. Considere num referencial o.n. $Oxyz$ a superfície esférica de diâmetro $[AB]$, com $A(-1,0,3)$ e $B(1,3,-2)$.

14.1. Usando o produto escalar escreva uma equação da superfície esférica de diâmetro $[AB]$, apresentando-a na forma $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=r^2$, onde (a,b,c) são as coordenadas do centro e r a medida do seu raio.

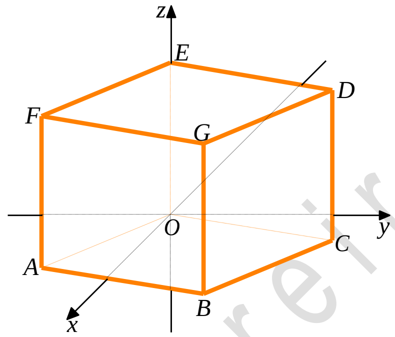
14.2. Seja β o plano tangente à superfície esférica de diâmetro $[AB]$ no ponto B. Mostre que uma equação do plano β é $2x+3y-5z=21$.

14.3. O plano β intersecta o eixo Oy no ponto C. Escreve uma equação cartesiana do plano ABC.

14.4. Considere o vector $\vec{u}$, definido por $\vec{u}=\overrightarrow{OB}+(k^2,-5-k,1)$, com $k\in\mathbb{R}$. Quais são os valores de k de modo que os vectores $\overrightarrow{AB}$ e $\vec{u}$ formem um ângulo obtuso?

15. Na figura está representado, num referencial o.n. $Oxyz$, o prisma $[ABCDEFGH]$ em que as bases são paralelogramos.

Sabe-se que:



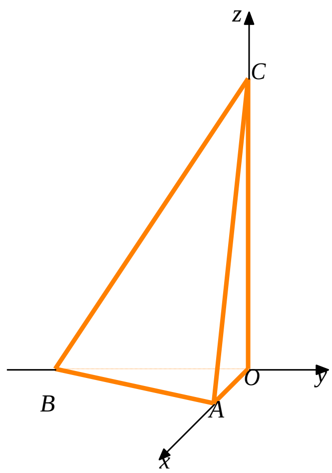
- a base $[OABC]$ está contida no plano xOy;
- a aresta $[OE]$ está contida no eixo Oz;
- o ponto A tem ordenada -2
- uma equação do plano ABG é $5x-2y=24$
- uma equação da recta CG é $(x,y,z)=(-2,7,-4)+k(4,-2,4), \quad k\in\mathbb{R}$

15.1. Escreva uma equação cartesiana do plano ACG.

15.2. Considere um prisma, semelhante ao prisma $[ABCDEFGH]$, em que a medida da sua altura é três meios de $\overline{BG}$. Qual é o seu volume?

16. Na figura está representada, num referencial o.n. $Oxyz$, a pirâmide $[AOBC]$.

Sabe-se que:



- o ponto A pertence ao semi-eixo positivo Ox;
- o ponto B pertence ao semi-eixo negativo Oy;
- o ponto C pertence ao semi-eixo positivo Oz;
- $\overline{OB}=2\overline{OA}$ e $\overline{OC}=3\overline{OA}$.

Resolva os dois itens seguintes recorrendo exclusivamente a processos analíticos.

16.1. Escreva uma equação do plano paralelo ao plano ABC que contém o ponto D de coordenadas $(0,1,-2)$.

Sugestão: designe por k a abcissa do ponto A.

16.2. Seja α a amplitude do ângulo BAC. Qual é o valor de $\operatorname{tg}^2(\pi-\alpha)+10\operatorname{sen}(-2\alpha)$?

17. Considere, num referencial o.n. $Oxyz$, a recta r definida pela condição $(x,y,z)=(2,0,0)+k\left(a^2,0,-4\right)$, $k\in\mathbb{R}$ e o plano α definido por $ax=-2z$, com $a\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

A recta r é perpendicular ao plano α.

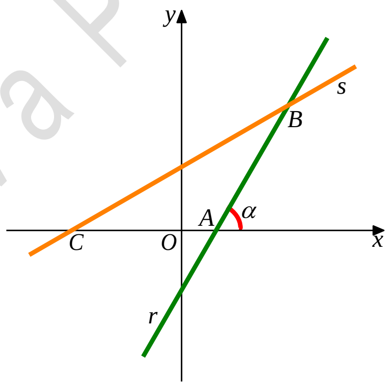
Qual é o valor de a?

A -2 **B** -1 **C** 2 **D** 3

18. Na figura, estão representadas, num referencial o.n. xOy, as rectas r e s.

Sabe-se que:

- a recta r intersecta o eixo Ox no ponto A e a sua abcissa é 1
- a recta s intersecta o eixo Ox no ponto C
- a rectas r e s intersectam-se no ponto B
- α é a inclinação da recta r e $\cos^2\alpha-\operatorname{sen}^2\alpha=-\frac{1}{2}$, com $\alpha\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$
- o triângulo $[ABC]$ é isósceles e $\overline{AB}=4$



Qual é a equação reduzida da recta s?

A $y=\frac{\sqrt{3}}{3}x+\sqrt{3}$ **B** $y=\sqrt{3}x-\sqrt{3}$ **C** $y=\frac{\sqrt{3}}{3}x+3$ **D** $y=\sqrt{3}x+\sqrt{3}$

19. Considere, num referencial o.n. xOy, o ponto $A(-1,0,1)$ e a recta r definida por $(x,y,z)=(0,1,0)+k(2,2,1)$, $k\in\mathbb{R}$.

19.1. Seja β um plano paralelo à recta r, definido por $4x-ay-a^2z=0$, com $a\in\mathbb{R}$.

Determine a.

19.2. Escreva uma equação do plano que contém a recta r e o ponto A. Comece por mostrar que o ponto A não pertence à recta r.

19.3. Seja α a amplitude do ângulo formado pela recta r e pelo eixo Oy.

Qual é o valor de $\left(\operatorname{sen}\alpha-\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}\right)^2$?

20. Considere, num referencial o.n. $Oxyz$, o plano α definido por $4ax + a^2y + a^2z = 0$, com $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Sabe-se que o ponto P de coordenadas $(1,1,1)$ pertence ao plano α.

Qual das seguintes condições define a recta perpendicular ao plano α que contém o ponto P ?

A $(x,y,z) = (1,1,1) + k(1,1,1)$, $k \in \mathbb{R}$

B $(x,y,z) = (1,1,0) + k(-2,1,1)$, $k \in \mathbb{R}$

C $(x,y,z) = \left(0,\frac{3}{2},\frac{3}{2}\right) + k(-2,1,1)$, $k \in \mathbb{R}$

D $(x,y,z) = (-2,1,1) + k(1,1,1)$, $k \in \mathbb{R}$

Solucionário

1. B

2. C

3. A

4. A

Exercício Extra: $x+y+z=3$

5. B

6. C

Exercício Extra: $x=-\frac{4}{3} \ \wedge \ y=-z+\frac{2}{3}$

7.2 $y=-3x+10$; $\approx 108,4^{\text{o}}$

7.3. $P\left(\frac{8}{5},\frac{26}{5}\right)$

7.4. $(x-2)^2+(y+1)^2 \leq 10 \ \wedge \ y \geq -3x+10 \ \wedge \ y \leq \frac{1}{3}x-\frac{5}{3}$

9.2. $(x-2)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2+\left(z-\frac{11}{2}\right)^2=\frac{73}{2}$

9.3. $V_{[ABCDEFGH]}=208$

9.4. **a)** Plano perpendicular a $\overrightarrow{EC}$ que contém o ponto B.

9.4. **b)** $2x-y+5z=9$

10.1. $y=-\frac{1}{3}x+\frac{10}{3}$; $\approx 161,6^{\text{o}}$

10.2. $P(10,-5)$

10.3. $y=-\frac{6}{5}x+\frac{7}{10}$

10.4. $\frac{13}{40}$

11.1. Por exemplo: $(x,y,z)=(0,1,32)+k(1,1,-8)$, $k \in \mathbb{R}$

11.3. $F(3,4,8)$

13.1. $x+y-z=2$

13.2. $\left(\frac{20}{7},2,\frac{20}{7}\right)$

13.3. $Q(2,2,4)$ ou $Q\left(\frac{16}{5},2,\frac{12}{5}\right)$

13.4. $\alpha=\frac{7\pi}{6}$; $\left(\frac{3}{2},-\frac{1}{2},-1\right)$

Extra: $\frac{16}{35}$

14.1. $x^2+\left(y-\frac{3}{2}\right)^2+\left(z-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{19}{2}$

14.3. $26x+y+11z=7$

14.4. $k \in \left]\frac{1}{2},1\right[$

15.1. $7x+2y-6z=24$

15.2. 324

16.1. $6x-3y+2z=-7$

16.2. $\frac{231}{5}$

17. A

18. A

19.1. $a=-4 \ \vee \ a=2$

19.2. $-x+y=1$

19.3. $\frac{1}{45}$

20. C