



## FICHA DE TRABALHO N.º 6 – MATEMÁTICA A – 10.º ANO

## GEOMETRIA ANALÍTICA NO ESPAÇO

“Conhece a Matemática e dominarás o Mundo.”  
Galileu Galilei

## GRUPO I – ITENS DE ESCOLHA MÚLTIPLA

1. Num referencial o.n.  $Oxyz$  o ponto  $Q(a^2 - 4, a^2 - 2a, a + 2)$ , com  $a \in \mathbb{R}$ , pertence ao eixo  $Oz$ .

Qual é o valor de  $a$ ?

**A**  $-2$

**B**  $1$

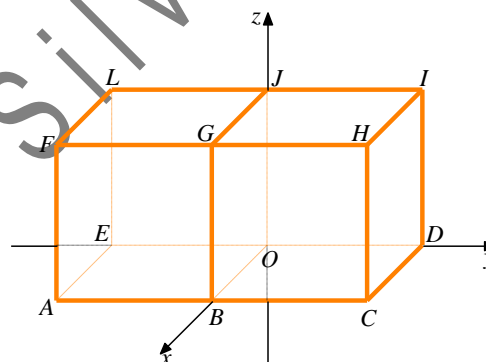
**C**  $2$

**D**  $4$

2. Na figura estão representados num referencial o.n.  $Oxyz$  os cubos  $[ABOEFGLJ]$  e  $[BCDOGHIL]$ .

Sabe-se que:

- o ponto  $B$  pertence ao eixo  $Ox$
- os pontos  $D$  e  $E$  pertencem ao eixo  $Oy$
- o ponto  $J$  pertence ao eixo  $Oz$
- $\overline{OB} = a$



2.1. Qual das seguintes é uma equação do plano mediador do segmento de recta  $[AI]$ ?

**A**  $x - y - 2z = 0$

**B**  $x + 2y - z = 0$

**C**  $x + y - 2z = 0$

**D**  $x - 2y - z = 0$

2.2. Considere  $d(C, L) = 3\sqrt{6}$ . Escreva uma a condição que defina:

a) a recta  $FL$ .

b) o plano  $FGB$ .

c) o segmento de recta  $[BC]$

d) da semi-recta  $\overrightarrow{CH}$

e) da semi-recta  $\overrightarrow{JI}$

f) do quadrado  $[BOJG]$

g) da face  $[ACHF]$

h) do sólido  $[ACDEFHIL]$

3. Num referencial o.n.  $Oxyz$ , considere os pontos  $A(a,b,c)$  e  $B(-c,b,-a)$ , com  $a,b,c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  e  $a \neq -c$ . Qual dos seguintes pontos pertence ao plano mediador de  $[AB]$ ?

**A**  $(1,-1,0)$

**B**  $(0,1,-1)$

**C**  $(1,0,-1)$

**D**  $(1,0,1)$

4. Num referencial o.n.  $Oxyz$ , considere os pontos  $A(-2,2,4)$ ,  $B(-1,0,4)$  e  $C(0,0,4)$ :

4.1. O plano  $ABC$  é:

**A** paralelo ao plano  $yOz$ .

**B** perpendicular ao eixo  $Oz$ .

**C** paralelo ao plano  $xOz$ .

**D** perpendicular ao eixo  $Ox$ .

4.2. Qual das seguintes é uma condição que define a recta  $BC$ ?

**A**  $y=0 \wedge z=4$

**B**  $x=-1 \wedge y=0$

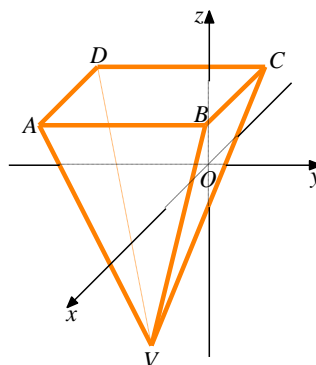
**C**  $x=0 \wedge z=4$

**D**  $y=2 \wedge z=4$

5. Na figura está representada num referencial o.n.  $Oxyz$  a pirâmide quadrangular regular  $[ABCDV]$ .

Sabe-se que:

- $A(3,-3,2)$
- $C(-1,1,2)$
- o volume da pirâmide é 32



5.1. Qual das equações define o plano paralelo a  $ABC$  que contém o ponto  $V$ ?

**A**  $z=-6$

**B**  $x=1$

**C**  $z=-4$

**D**  $y=-1$

5.2. Qual dos seguintes pontos pertence ao plano mediador do segmento de recta  $[BD]$ ?

**A**  $(3,0,3)$

**B**  $(1,1,2)$

**C**  $(2,-1,-2)$

**D**  $(-5,5,0)$

5.3. Qual é o conjunto de pontos definido pelo seguinte sistema de equações cartesianas  $y = -3 \wedge z = 2$ ?

**A** recta  $BC$

**B** recta  $AD$

**C** segmento de recta  $DC$

**D** recta  $AV$

5.4. Qual é a condição que define o segmento de recta que é a altura da pirâmide?

**A**  $x = 3 \wedge y = 1 \wedge -4 \leq z \leq 2$

**B**  $x = 1 \wedge y = -1 \wedge -6 \leq z \leq 0$

**C**  $x = 3 \wedge y = 1 \wedge -6 \leq z \leq 0$

**D**  $x = 1 \wedge y = -1 \wedge -4 \leq z \leq 2$

5.5. Qual é o ponto de intersecção do plano mediador de  $[BV]$  com o eixo  $Oy$ ?

**A**  $(0, -1, 0)$

**B**  $\left(0, -\frac{1}{2}, 0\right)$

**C**  $\left(0, \frac{1}{2}, 0\right)$

**D**  $(0, 1, 0)$

5.6. Qual é a condição que define a secção definida na pirâmide pelo corte segundo o plano de equação  $z + 1 = 0$ ?

**A**  $0 \leq x \leq 2 \wedge -2 \leq y \leq 0 \wedge z = -1$

**B**  $-2 \leq x \leq 0 \wedge 0 \leq y \leq 2 \wedge z = -1$

**C**  $-2 \leq x \leq 0 \wedge 0 \leq y \leq 2 \wedge z = -1$

**D**  $0 \leq x \leq 2 \wedge -2 \leq y \leq 0 \wedge z = 1$

6. Num referencial o.n.  $Oxyz$ , considere o ponto  $Q$ , simétrico do ponto  $P(-2, 3, 4)$  em relação ao eixo  $Oz$ .

Uma condição que define a recta perpendicular ao plano  $xOz$  que contém o ponto  $Q$  é:

**A**  $x = -2 \wedge y = 3$

**B**  $x = 2 \wedge z = 4$

**C**  $x = 2 \wedge y = -3$

**D**  $x = -2 \wedge z = 4$

7. Num referencial o.n.  $Oxyz$ , qual das seguintes equações define uma superfície esférica tangente ao plano  $yOz$ .

**A**  $(x-3)^2 + y^2 + (z+1)^2 = 9$

**B**  $(x-3)^2 + y^2 + (z+1)^2 = 4$

**C**  $x^2 + (y-2)^2 + z^2 = 4$

**D**  $x^2 + (y-2)^2 + z^2 = 9$

8. Considere num referencial o.n.  $Oxyz$ , a esfera definida por  $(x+1)^2 + y^2 + (z-2)^2 \leq 3$ . Qual é o perímetro da secção definida na esfera pelo corte segundo o plano  $z=3$ ?

**A**  $2\pi$

**B**  $3\pi$

**C**  $2\sqrt{3}\pi$

**D**  $2\sqrt{2}\pi$

9. Considere num referencial o.n.  $Oxyz$ , a superfície esférica definida por  $x^2 + y^2 + z^2 + 4y - 8z + 4 = 0$ .

As equações dos planos tangentes à superfície esférica e paralelos ao plano  $xOz$  podem ser:

**A**  $y = -6$  e  $y = 2$

**B**  $x = -4$  e  $x = 4$

**C**  $z = 0$  e  $z = 8$

**D**  $y = -4$  e  $y = 0$

10. Considere num referencial o.n.  $Oxyz$ , a esfera definida por  $(x-2)^2 + (y+1)^2 + (z-2)^2 \leq 10$ . A intersecção da esfera com o plano  $\alpha$  de equação  $x=a$ , com  $a \in \mathbb{R}$ , é um círculo de área  $6\pi$ .

Qual pode ser o valor de  $a$ ?

**A** 3

**B** 4

**C** 5

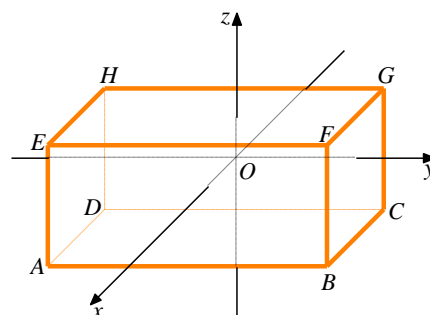
**D** 6

### GRUPO II – ITENS DE RESPOSTA ABERTA

11. Na figura está representado num referencial o.n.  $Oxyz$  o paralelepípedo  $[ABCDEFGH]$ , com as faces paralelas aos planos coordenados.

Sabe-se que:

- os pontos  $E$  e  $H$  são simétricos em relação ao plano  $yOz$
- $E(2, -4, 1)$
- o ponto  $B$  pertence à recta definida por  $y=3 \wedge z=-2$



11.1. Usando as letras da figura, identifique o conjunto de pontos definido pelas seguintes condições:

a)  $3z + 3(x-1) = 3x$

b)  $x = -2 \wedge y = 3$

c)  $x = 2 \wedge z = -2 \wedge -4 \leq y \leq 3$

11.2. Defina por uma condição em  $\mathbb{R}^3$ :

- |   |   |
|---|---|
| a) O plano $ABF$ .  | b) A recta que contém a aresta $[HG]$ .           |
| c) A face $[DCGH]$ .  | d) A semi-recta $\dot{AD}$ .                      |
| e) o plano mediador do segmento de recta $[AE]$   | f) o plano mediador do segmento de recta $[AG]$ . |
| g) da recta paralela a $AE$ que contém o ponto $Q$ , simétrico de $D$ em relação ao eixo $Ox$ . |   |

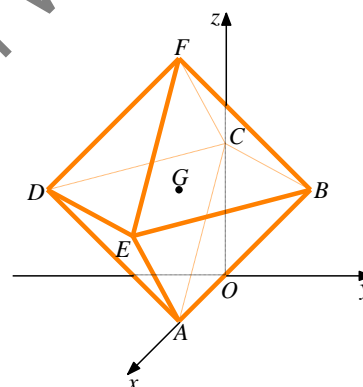
11.3. Seja  $Q$  o ponto simétrico de  $C$  em relação ao plano de equação  $y = -2$ .

Determine as coordenadas do ponto  $P$ , pertencente à recta  $FB$ , tais que  $d(P, Q) = 6\sqrt{5}$ .

12. Na figura está representado, num referencial o.n.  $Oxyz$ , o octaedro  $[ABCDEFG]$  tais que  $G$  é o seu centro.

Sabe-se que:

- o quadrado  $[ACFE]$  está contido no plano  $xOz$
- o ponto  $A$  pertence ao eixo  $Ox$  e o ponto  $C$  ao eixo  $Oz$
- os vértices do octaedro pertencem à superfície esférica de equação  $x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 4z + 4 = 0$



12.1. Determine as coordenadas dos vértices do octaedro.

12.2. Defina por uma condição em  $\mathbb{R}^3$ :

- |   |                                  |
|---|----------------------------------|
| a) O plano $ABF$ .                                      | b) o segmento de recta $[EG]$ .  |
| c) a recta paralela ao eixo $Oz$ que contém o ponto $B$ | d) a semi-recta $\dot{BD}$ .     |
| e) o plano perpendicular a $Oy$ que contém o ponto $D$  | f) a esfera de diâmetro $[OG]$ . |

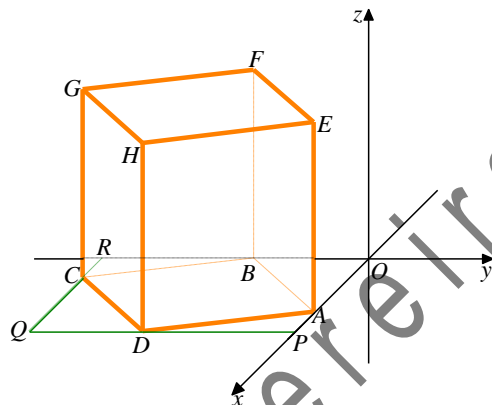
12.3. O plano mediador do segmento de recta  $[OE]$  intersecta a recta paralela a  $Ox$  que contém  $D$  num ponto  $P$ . Determine as suas coordenadas.

\*12.4. O plano de equação  $x = a$ , com  $a \in \mathbb{R}$  divide o octaedro em dois sólidos tais que um tem o dobro do volume do outro. Mostre que  $a = \frac{2\sqrt[3]{18}}{3} \vee a = 4 - \frac{2\sqrt[3]{18}}{3}$ .

13. Na figura está representado num referencial o.n.  $Oxyz$  o cubo  $[ABCDEFGH]$ .

Sabe-se que:

- a base  $[ABCD]$  está contida no plano  $xOy$ ;
- o ponto  $A$  pertence ao eixo  $Ox$  e o ponto  $B$  ao eixo  $Oy$ ;
- $\overline{OA} > \overline{OB}$
- $[PORQ]$  é um quadrado contido no plano  $xOy$ ;
- o ponto  $P$  pertence ao eixo  $Ox$  e o ponto  $R$  ao eixo  $Oy$ ;
- a superfície esférica definida pela equação  $x^2 + y^2 + z^2 - 7x + 7y - 5z + 12 = 0$  está centrada no centro do cubo e contém os seus vértices.



13.1. Determine as coordenadas do centro do cubo.

13.2. Determine as coordenadas dos vértices do cubo.

13.3. Defina por uma condição em  $\mathbb{R}^3$ :

- a) o plano  $EFG$ .
- b) a aresta  $[DH]$ .
- c) o plano paralelo a  $xOz$  que contém o ponto  $C$ .
- d) a recta paralela a  $Oy$  que contém o centro do cubo.
- e) o quadrado  $[PORS]$ .
- f) o plano  $EBC$ . Apresente a equação do plano na forma  $ax + by + cz = d$ , com  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ .

**Sugestão:** repare que  $EBC$  é o plano mediador de um segmento de recta cujos extremos são vértices do cubo.

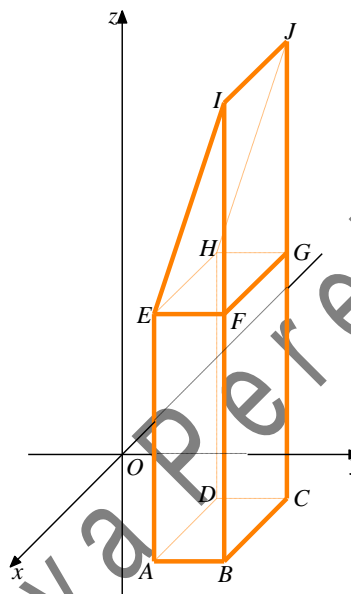
13.4. Considere a pirâmide quadrangular regular  $[EFGHV]$  em que a base é o quadrado  $[EFGH]$ . Sabe-se que o volume dessa pirâmide é igual ao volume do cubo e que  $V$  tem cota negativa.

Escreva uma condição que defina a superfície esférica de centro em  $V$  e que contém os vértices do quadrado  $[EFGH]$ .

14. Na figura está representado num referencial o.n.  $Oxyz$  um sólido constituído por um prisma rectangular  $[ABCDEFGH]$  e um prisma triangular recto  $[EFGHIJ]$ .

Sabe-se que:

- a face  $[ABCD]$  é paralela ao plano  $xOy$ ;
- a face  $[ADHE]$  é paralela ao plano  $xOz$ ;
- $D(-2,1,-2)$  e  $F(3,3,5)$
- a face  $[EFGH]$  é comum ao prisma rectangular e ao prisma triangular recto;
- o volume do sólido é 100.



14.1. Mostre que as coordenadas dos pontos  $I$  e  $J$  são  $(3,3,11)$  e  $(-2,3,11)$ , respectivamente.

14.2. Defina por uma condição em  $\mathbb{R}^3$ :

- a) o plano  $EFI$ .
- b) a recta  $AD$ .
- c) a aresta  $[GC]$ .
- d) a face  $[BCJI]$ .
- e) a semi-recta  $\vec{FG}$ .
- f) o plano perpendicular a  $Ox$  que contém o simétrico de  $J$  em relação ao eixo  $Oz$ .

14.3. Identifique a secção definida na superfície esférica  $x^2 + (y-2)^2 + (z+3)^2 = 10$  pelo corte segundo o plano  $ABC$ .

Determine o seu perímetro.

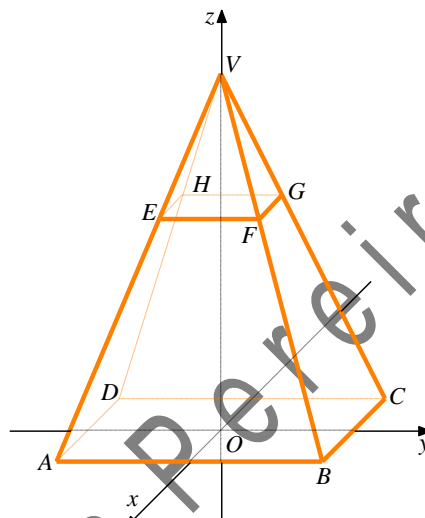
14.4 O plano de equação  $y = b$ , com  $b \in \mathbb{R}$  divide o sólido em dois sólidos de igual volume.

Qual é o valor de  $b$ ? Apresente o resultado arredondado às centésimas.

15. Na figura está representada num referencial o.n.  $Oxyz$ , uma pirâmide rectangular  $[ABCDV]$ .

Sabe-se que:

- a base  $[ABCD]$  está contida no plano  $xOy$ , centrada na origem e tem os lados paralelos aos eixos coordenados;
- o rectângulo  $[EFGH]$  é a secção definida na pirâmide segundo o corte por um plano paralelo ao plano  $xOy$ ;
- o volume da pirâmide  $[ABCDV]$  é 64;
- a altura da pirâmide  $[EFGHV]$  é 3;
- as coordenadas do ponto  $A$  são  $(2, -3, 0)$  e o ponto  $V$  pertence a  $Oz$ .



15.1. Determine as coordenadas do ponto  $V$ .

15.2. Mostre que as coordenadas do ponto  $F$  são  $\left(\frac{3}{4}, \frac{9}{8}, 5\right)$ .

15.3. Defina por uma condição em  $\mathbb{R}^3$ :

- a recta  $FG$
- o plano perpendicular a  $Oy$  que contém a aresta  $[AD]$ .
- a aresta  $[DC]$ .
- o rectângulo  $[EFGH]$ .
- O plano paralelo a  $yOz$  que contém o ponto médio do segmento de recta  $[AE]$ .

15.4. Mostre que uma equação do plano mediador de  $[CV]$  é  $4x - 6y + 16z = 51$  e determine as coordenadas do ponto de intersecção de esse plano com o eixo  $Oy$ .

15.5. Seja  $Q$  um ponto pertencente à recta  $AB$ . Determine as coordenadas de  $Q$  tal que  $\overline{QP} = 3\sqrt{6}$ , onde,  $P(1, 1, 2)$ .



**16.** Num referencial o.n.  $Oxyz$  considere o que o ponto  $A$ , de coordenadas  $(a, b, c)$ , com  $a, b, c \in \mathbb{R}$ , pertence à superfície esférica centrada na origem e raio  $2\sqrt{2}$ .

**16.1.** Mostre que o ponto  $B$ , de coordenadas  $(2b+3, b-2c, -3a)$ , pertence à superfície esférica de centrada no ponto  $(3, b, -a)$  e raio  $4\sqrt{2}$ .

**16.2.** Suponha que  $a$ ,  $b$  e  $c$  são números inteiros consecutivos, com  $a < b < c$  e seja  $\mathcal{E}$  a esfera de raio 3 centrada em  $A$  tais que o ponto  $C$ , de coordenadas  $(2, 0, 5)$ , pertence à superfície esférica que a limita.

**a)** Mostre que uma condição que define a esfera  $\mathcal{E}$  é  $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y - 6z + 5 \leq 0$ .

**b)** Identifica a secção definida na esfera  $\mathcal{E}$  pelo corte segundo o plano de equação  $2x+1=0$ . Determine a sua área.

**c)** Seja  $P$  um ponto pertencente à recta definida pela condição  $x=0 \wedge z=1$ .

Entre que valores deve variar a ordenada do ponto  $P$  de modo que este pertença ao interior da esfera  $\mathcal{E}$ ?

#### SOLUCIONÁRIO

##### GRUPO I – ITENS DE ESCOLHA MÚLTIPLA

- |  |           |  |                 |
|--|-----------|--|-----------------|
| 1. C   | 2.1. D    | 2.2. a) $y = -3 \wedge z = 3$  | 2.2. b) $x = 3$ |
| 2.2. c) $x = 3 \wedge z = 0 \wedge 0 \leq y \leq 3$            |           | 2.2. d) $x = 3 \wedge y = 3 \wedge z \leq 3$                             |                 |
| 2.2. e) $x = 0 \wedge z = 3 \wedge y \geq 0$                   |           | 2.2. f) $y = 0 \wedge 0 \leq x \leq 3 \wedge 0 \leq z \leq 3$            |                 |
| 2.2. g) $x = 3 \wedge -3 \leq y \leq 3 \wedge 0 \leq z \leq 3$ |           | 2.2. h) $0 \leq x \leq 3 \wedge -3 \leq y \leq 3 \wedge 0 \leq z \leq 3$ |                 |
| 3. C   | 4.1. a) B | 4.2. b) A  |                 |
| 5.1. C   | 5.2. D    | 5.3. B   | 5.4. D          |
| 5.5. A   | 5.6. A    | 6. B   | 7. A            |
| 8. D   | 9. A      | 10. B  |                 |

##### GRUPO II – ITENS DE RESPOSTA ABERTA

- |   |                                      |   |
|---|--------------------------------------|---|
| 11.1. a) Plano $EFG$  | 11.1. b) Recta $CG$                  | 11.1. c) Segmento de recta $[AB]$                                 |
| 11.2. a) $x = 2$  | 11.2. b) $x = -2 \wedge z = 1$       | 11.2. c) $x = -2 \wedge -4 \leq y \leq 3 \wedge -2 \leq z \leq 1$ |
| 11.2. d) $y = -4 \wedge z = -2 \wedge x \geq -2$                                | 11.2. e) $z = -\frac{1}{2}$          | 11.2. f) $4x - 7y - 3z = 5$                                       |
| 11.2. g) $x = -2 \wedge y = 4$  | 11.3. $P(2, 3, -10)$ ou $P(2, 3, 6)$ |   |
| 12.1. $A(2, 0, 0); B(2, 2, 2); C(0, 0, 2); D(2, -2, 2); E(4, 0, 2); F(2, 0, 4)$ |                                      |   |

- 12.2. a)  $x=2$                       12.2. b)  $y=0 \wedge z=2 \wedge 2 \leq x \leq 4$                       12.2. c)  $x=2 \wedge y=2$
- 12.2. d)  $x=2 \wedge z=2 \wedge y \leq 2$                       12.2. e)  $y=-2$
- 12.2. f)  $(x-1)^2 + y^2 + (z-1)^2 \leq 2$                       12.3.  $P\left(\frac{3}{2}, -2, 2\right)$
- 13.1.  $\left(\frac{7}{2}, -\frac{7}{2}, \frac{5}{2}\right)$
- 13.2.  $A(4,0,0); B(0,-3,0); C(3,-7,0); D(7,-4,0); E(4,0,5); F(0,-3,5); G(3,-7,5); D(7,-4,5)$
- 13.3. a)  $z=5$                       13.3. b)  $x=7 \wedge y=-4 \wedge 0 \leq z \leq 5$                       13.3. c)  $y=-7$
- 13.3. d)  $x=\frac{7}{2} \wedge z=\frac{5}{2}$                       13.3. e)  $z=0 \wedge 0 \leq x \leq 7 \wedge -7 \leq y \leq 0$                       13.3. f)  $-4x-3y+5z=9$
- 13.4.  $\left(x-\frac{7}{2}\right)^2 + \left(y+\frac{7}{2}\right)^2 + (z+10)^2 \leq \frac{475}{2}$
- 14.2. a)  $x=3$                       14.2. b)  $y=1 \wedge z=-2$                       11.2. c)  $x=-2 \wedge y=3 \wedge -2 \leq z \leq 5$
- 14.2. d)  $y=3 \wedge -2 \leq x \leq 3 \wedge -2 \leq z \leq 11$                       14.2. e)  $y=3 \wedge z=5 \wedge x \geq -2$
- 14.2. f)  $x=2$
- 14.3. Circunferência contida no plano  $ABC$ , centrada no ponto de coordenadas  $(0,2,-2)$  e raio 3. Perímetro  $= 6\pi$ .
- 14.4.  $b \approx 2,15$
- 15.1.  $V(0,0,8)$                       15.3. a)  $y=\frac{9}{8} \wedge z=5$                       15.3. a)  $y=-3$
- 15.3. c)  $x=-2 \wedge z=0 \wedge -3 \leq y \leq 3$                       15.3. d)  $z=5 \wedge -\frac{3}{4} \leq x \leq \frac{3}{4} \wedge -\frac{9}{8} \leq y \leq \frac{9}{8}$
- 15.3. e)  $x=\frac{11}{8}$                       15.4.  $\left(0, -\frac{17}{2}, 0\right)$                       15.5.  $Q(2,-6,0)$  ou  $Q(2,8,0)$
- 16.2. b) Círculo contido no plano de equação  $2x+1=0$ , centrado no ponto de coordenadas  $\left(-\frac{1}{2}, 2, 3\right)$  e raio  $\frac{3\sqrt{3}}{4}$ . Área  $= \frac{27\pi}{4}$ .
- 16.2. c)  $y_p \in ]0,4[$