Folha 11 - Funções Exponenciais

Definição de potência de base positiva e expoente real

- Expoente racional

As potências de expoente racional de base real e positiva gozam das seguintes propriedades:

I. $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$; II. $a^x \cdot b^x = (a \cdot b)^x$; III. $\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y} (x > y)$; IV. $\frac{a^x}{b^x} = \left(\frac{a}{b}\right)^x$;
V. $(a^x)^y = a^{x \cdot y}$; VI. $a^0 = 1$; VII. $a^{-p} = \frac{1}{a^p}$; VIII. $a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p}$.

Exemplos

$16^{\frac{5}{4}} = \sqrt[4]{16^5} = \sqrt[4]{(2^4)^5} = \sqrt[4]{2^{5\times 4}} = \sqrt[4]{(2^5)^4} = 2^5 = 32.$

$4^{-2} = \frac{1}{4^2} = 0.0625.$

$27^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{27^{\frac{2}{3}}} = \frac{1}{\sqrt[3]{27^2}} = \frac{1}{\sqrt[3]{(3^3)^2}} = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}.$

- Expoente irracional

A potência a^x em que o expoente x é um número irracional define-se como sendo o limite comum de duas sucessões: uma crescente com todos os termos inferiores ao valor da potência e outra decrescente com todos os termos superiores ao valor da potência.

Consideremos o exemplo

$$7^{\sqrt{3}} = 7^{1.7320508\ldots}.$$

A partir da dízima infinita $\sqrt{3} = 1.7320508\ldots$, constroem-se duas sucessões de termos racionais com valores aproximados de $\sqrt{3}$, uma por defeito e outra por excesso. Ambas convergentes para $\sqrt{3}$, uma crescente e outra decrescente.

A potência $7^{\sqrt{3}}$ é o limite comum das sucessões de termos gerais 7^{u_n} e 7^{v_n}.

Com esta definição ainda se mantêm as propriedades formais anteriormente descritas.

Exemplos

$25^{\sqrt{2}} \times 3^{\sqrt{8}} = (5^2)^{\sqrt{2}} \times 3^{2\sqrt{2}} = 5^{2\sqrt{2}} \times 3^{2\sqrt{2}} = 15^{2\sqrt{2}}.$

$\left(10^{\sqrt{3}}\right)^{-\sqrt{12}} = 10^{-\sqrt{3}\times\sqrt{12}} = 10^{-\sqrt{36}} = 10^{-6} = \frac{1}{10^6} = 0.000001.$

Estudo da função exponencial

1. Definição

Relembradas as sucessivas generalizações do conceito de potência, estamos em condições de estudar a função exponencial assim definida:

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto a^x \qquad \text{com } a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}.$$

Nota: Para $a = 1$ obtém-se uma função constante de contradomínio $\{1\}$, tome-se então $a \neq 1$.

2. **Propriedades**

Domínio: $\mathbb{R}$

Contradomínio: $\mathbb{R}^+$

Zeros: a função não tem zeros.
$a^x > 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

Injetividade: a função é injetiva:
$a^{x_1} = a^{x_2} \Longrightarrow x_1 = x_2, \quad \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}$.

No estudo da monotonia de f consideremos dois casos:

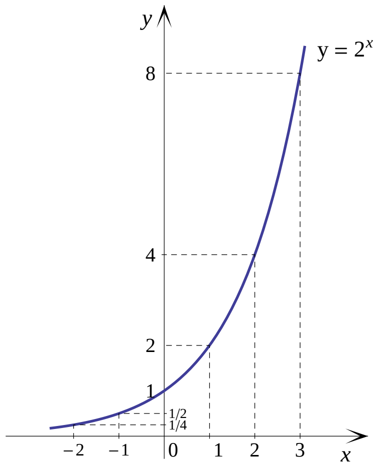
1. $\boxed{a > 1}$ A função é crescente, pois

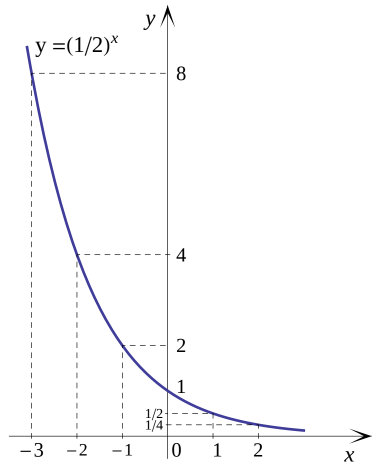
$$x_2 > x_1 \Longrightarrow a^{x_2} > a^{x_1}, \quad \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}.$$

2. $\boxed{0 < a < 1}$ A função é decrescente,

$$x_2 > x_1 \Longrightarrow a^{x_2} < a^{x_1}, \quad \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}.$$

Exemplo 1 *Esboçar o gráfico das funções definidas por* $y = 2^x$, *e* $\quad y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$, $\; x \in \mathbb{R}$ *e observar as propriedades acima apresentadas.*





- **Função exponencial de base** e

Um caso particular das funções exponenciais é a função exponencial de base e.

Como vimos (folha 1), $\lim_n \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$, o *número de Neper*. O seu valor aproximado pode determinar-se calculando os sucessivos termos da sucessão

$$\boxed{\lim_n \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e \simeq 2.71828.}$$

Exemplo 2 *Consideremos a função real, de variável real,* $\quad f(x) = 1 - 2^{3-x}$. *Determinemos*

(a) *o domínio e o contradomínio de* f*;*

(b) *os zeros de* f*;*

(c) *o intervalo de números reais em que* f *toma valores positivos.*

(a) *Temos* $D_f = \mathbb{R}$. *Para determinar o contradomínio, já sabemos que* 2^{3-x} *toma sempre valores positivos. Então, sucessivamente,*

$$2^{3-x} > 0 \Longleftrightarrow -2^{3-x} < 0 \Longleftrightarrow 1 - 2^{3-x} < 1.$$

Logo, $D'_f =]-\infty, 1[$.

(b) Os zeros de f são as soluções da equação $1-2^{3-x}=0$.

$$1-2^{3-x}=0 \Longleftrightarrow 2^{3-x}=1 \Longleftrightarrow 2^{3-x}=2^0 \Longleftrightarrow 3-x=0 \Longleftrightarrow x=3.$$

A função admite o zero $x=3$.

(c) $$1-2^{3-x}>0 \Longleftrightarrow -2^{3-x}>-1 \Longleftrightarrow 2^{3-x}<1 \Longleftrightarrow 2^{3-x}<2^0.$$

Como a função é crescente, temos

$$2^{3-x}<2^0 \Longleftrightarrow 3-x<0 \Longleftrightarrow -x<-3 \Longleftrightarrow x>3.$$

A função toma valores positivos para $x \in]3,+\infty[$.

Exercícios Propostos

Exercício 1 Considere a função real, de variável real, definida por

$$f(x)=1-3^x.$$

a) Determine o domínio e o contradomínio de f.

b) Resolva, em $\mathbb{R}$, cada uma das seguintes condições:
i) $f(x)=0$; ii) $f(x)=-26$; iii) $f(x)<-8$.

Exercício 2 Resolva, em $\mathbb{R}$, cada uma das seguintes condições:

a) $x^2 \cdot 2^x - \frac{1}{4} \cdot 2^x = 0$;

b) $3^{2-x} \leq 27^{-x}$;

c) $10^{x^2-3x} > 0.01$;