Escola Secundária de Paredes

Ficha de Trabalho 13

Matemática A

12.º Ano de Escolaridade • Turma: $B + C + H$

Aula de Apoio

maio de 2023

1. Uma matrícula possível neste novo sistema de matrículas é $AA \quad 00 \quad AA$
   deste modo, o número de matrículas que se podem constituir é igual a

   $^{26}A'_2 \times ^{10}A'_2 \times ^{26}A'_2 = 26^2 \times 10^2 \times 26^2 = 45697600$

2. .

   2.1. Se os dígitos são todos diferentes, então há $^{10}A_7 = 604800$ códigos diferentes para o cofre

   2.2. Se o código termina num algarismo ímpar, então, para o algarismo das unidades há cinco possibilidades $(1, 3, 5, 7, 9)$

   Para cada uma destas possibilidades, existem $^{10}A'_6$ maneiras distintas de preencher os restantes seis dígitos do código

   Assim, existem $^{10}A'_6 \times 5 = 10^6 \times 5 = 5000000$ códigos diferentes para o cofre

   2.3. Se o código termina num algarismo par, então, para o algarismo das unidades há cinco possibilidades $(0, 2, 4, 6, 8)$

   Para cada uma destas possibilidades, existem $^{9}A_6$ maneiras distintas de preencher os restantes seis dígitos do código, visto que não pode repetir algarismos

   Assim, existem $^{9}A_6 \times 5 = 302400$ códigos diferentes para o cofre

   2.4. Se o código tem exatamente quatro algarismos iguais a 5, então há $^{7}C_4$ maneiras distintas de colocar os quatro algarismos iguais a 5
   Para cada uma destas possibilidades, existem $^{9}A'_3$ maneiras distintas de preencher os restantes três dígitos do código, visto que pode repetir algarismos, mas não o algarismo 5

   Assim, existem $^{9}A'_3 \times ^{7}C_4 = 25515$ códigos diferentes para o cofre

3. .

   3.1. Se o grupo de quatro amigos tem tantos rapazes como raparigas, então, no grupo há duas raparigas e dois rapazes

   Assim, existem $^{4}C_2 \times ^{5}C_2 = 60$ grupos distintos

3.2. Se o grupo tem pelo menos duas raparigas, então podem ocorrer as seguintes situações

- Duas raparigas + pois rapazes $\mapsto^4 C_2 \times^5 C_2 = 60$
- três raparigas + um rapaz $\mapsto^4 C_3 \times^5 C_1 = 20$
- quatro raparigas $\mapsto^4 C_4 = 1$

Assim, existem $60 + 20 + 1 = 81$ grupos distintos

3.3. Se o grupo tem no máximo três rapazes, então podem ocorrer as seguintes situações

- Três rapazes + uma rapariga $\mapsto^5 C_3 \times^4 C_1 = 40$
- Dois rapazes + duas raparigas $\mapsto^5 C_2 \times^4 C_2 = 60$
- Um rapaz + três raparigas $\mapsto^5 C_1 \times^4 C_3 = 20$

Assim, existem $40 + 60 + 20 = 120$ grupos distintos

4. .

4.1. Seja $w = 1 - i$, de afixo $A\,(1;-1)$

$|w| = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$

Seja α, um argumento de w

$\tan\alpha = \dfrac{-1}{1} \wedge \alpha \in 4^\circ$ Q

$\therefore \tan\alpha = -1 \wedge \alpha \in 4^\circ$ Q

$\therefore \alpha = -\dfrac{\pi}{4}$

Portanto, $w = \sqrt{2}e^{i\left(-\frac{\pi}{4}\right)}$
Por outro lado,

$\overline{-z_2} = \overline{2e^{i\left(\pi+\frac{\pi}{4}\right)}} = \overline{2e^{i\frac{5\pi}{4}}} = 2e^{i\left(-\frac{5\pi}{4}\right)} = 2e^{i\frac{3\pi}{4}}$

$(z_1)^2 = \left(2e^{i\frac{3\pi}{4}}\right)^2 = 4e^{i\frac{6\pi}{4}} = 4e^{i\frac{3\pi}{2}} = 4e^{i\left(-\frac{\pi}{2}\right)}$

Assim,

$\dfrac{\overline{-z_2}(1-i)}{(z_1)^2} = \dfrac{2e^{i\frac{3\pi}{4}} \times \sqrt{2}e^{i\left(-\frac{\pi}{4}\right)}}{4e^{i\left(-\frac{\pi}{2}\right)}} = \dfrac{2\sqrt{2}e^{i\left(\frac{3\pi}{4}-\frac{\pi}{4}\right)}}{4e^{i\left(-\frac{\pi}{2}\right)}} = \dfrac{2\sqrt{2}e^{i\frac{2\pi}{4}}}{4e^{i\left(-\frac{\pi}{2}\right)}} = \dfrac{2\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{2}}}{4e^{i\left(-\frac{\pi}{2}\right)}} = \dfrac{2\sqrt{2}}{4}e^{i\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\right)} =$
$= \dfrac{\sqrt{2}}{2}e^{i\pi} \mapsto$ na forma trigonométrica

Mas, $\dfrac{\sqrt{2}}{2}e^{i\pi} = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} \mapsto$ na forma algébrica

4.2. Ora, $(z_2)^n = \left(2e^{i\frac{\pi}{4}}\right)^n = 2^n e^{i\frac{n\pi}{4}}$

Assim,

$(z_2)^n$ é um imaginário puro, se, e só se, $\frac{n\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

Ou seja, se $n = 2 + 4k, k \in \mathbb{Z}$

Atribuindo valores a k, vem,

$k = 0 \mapsto n = 2$

$k = 1 \mapsto n = 2 + 4 = 6$

$k = 2 \mapsto n = 2 + 8 = 10$

Portanto, o menor número natural n, de modo que $(z_2)^n$ seja um imaginário puro, é 2

4.3. Sabe-se que z_1 e z_2 são duas raízes índice n, consecutivas, de um número complexo z, então, os argumentos de z_1 e z_2 estão em progressão aritmética de razão $\frac{2\pi}{n}$

Portanto,

$\frac{3\pi}{4} = \frac{\pi}{4} + \frac{2\pi}{n} \Leftrightarrow \frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{4} = \frac{2\pi}{n} \Leftrightarrow \frac{2\pi}{4} = \frac{2\pi}{n} \Leftrightarrow \frac{\pi}{2} = \frac{2\pi}{n} \Leftrightarrow n = 4$

Assim,

$z = \left(2e^{i\frac{\pi}{4}}\right)^4 = 2^4 e^{i\frac{4\pi}{4}} = 16e^{i\pi} = -16$

Portanto, $n = 4$ e $z = -16$

z_1 e z_2 são duas raízes índice 4, consecutivas, de $z = -16$

5. .

5.1. $z^4 + iz = 0 \Leftrightarrow z(z^3 + i) = 0 \Leftrightarrow z = 0 \vee z^3 + i = 0 \Leftrightarrow z = 0 \vee z^3 = -i \Leftrightarrow z = 0 \vee z = \sqrt[3]{-i} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow z = 0 \vee z = \sqrt[3]{e^{i\left(-\frac{\pi}{2}\right)}} \Leftrightarrow z = 0 \vee z = e^{i\left(\frac{-\frac{\pi}{2}+k2\pi}{3}\right)}, k \in \{0; 1; 2\} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow z = 0 \vee z = e^{i\left(-\frac{\pi}{6}+k\frac{2\pi}{3}\right)}, k \in \{0; 1; 2\}$

Atribuindo valores a k, vem,

$k = 0 \mapsto z_0 = e^{i\left(-\frac{\pi}{6}\right)}$

$k = 1 \mapsto z_1 = e^{i\left(-\frac{\pi}{6}+\frac{2\pi}{3}\right)} = e^{i\frac{3\pi}{6}} = e^{i\frac{\pi}{2}}$

$k = 2 \mapsto z_2 = e^{i\left(-\frac{\pi}{6}+\frac{4\pi}{3}\right)} = e^{i\frac{7\pi}{6}} = e^{i\left(-\frac{5\pi}{6}\right)}$

$C.S. = \left\{0; e^{i\left(-\frac{\pi}{6}\right)}; e^{i\frac{\pi}{2}}; e^{i\left(-\frac{5\pi}{6}\right)}\right\}$

5.2. Ora

$|z-2-2i| \geq |z+2+2i| \Leftrightarrow |z-(2+2i)| \geq |z-(-2-2i)| \mapsto$ No plano complexo, representa o semiplano inferior fechado, definido pela a mediatriz do segmento de reta $[P_1; P_2]$ e por P_2, sendo $P_1(2;2)$ e $P_2(-2;-2)$, afixos dos números complexos $z_1 = 2+2i$ e $z_2 = -2-2i$, respetivamente

$|z-i| \leq 2 \Leftrightarrow |z-(0+i)| \leq 2 \mapsto$ No plano complexo, representa o círculo de cento $P_3(0;1)$, e de raio 2, sendo $P_3(0;1)$, afixo do número complexo $z_3 = i$

No plano complexo

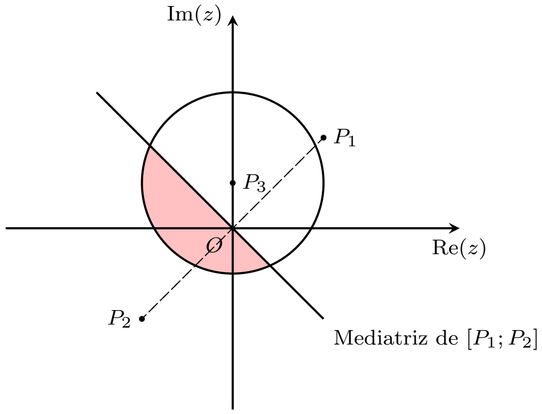

Figura 1

Resposta: A região colorida, incluindo a fronteira, é o conjunto de pontos pretendido

6. .

6.1. Como a circunferência tem raio 2, então tem-se que:

$A(2\cos(\alpha); 0)$

$B(2\cos(\alpha); 2\sin(\alpha))$

$C(0; 2\sin(\alpha))$

$D(2; 0)$

Como $\alpha \in \left]\frac{\pi}{2}; \pi\right[$, então, $\cos(\alpha) < 0$ e $\sin(\alpha) > 0$

Assim,

$\overline{BC} = -2\cos(\alpha)$

$\overline{AD} = 2 - 2\cos(\alpha)$

$\overline{OC} = 2\sin(\alpha)$

A área do trapézio é dada, em função de α, por

$$A_{[ABCD]} = \frac{\overline{AD} + \overline{BC}}{2} \times \overline{OC} = \frac{2 - 2\cos(\alpha) - 2\cos(\alpha)}{2} \times 2\sin(\alpha) =$$
$$= \frac{2 - 4\cos(\alpha)}{2} \times 2\sin(\alpha) = 2\sin(\alpha)(1 - 2\cos(\alpha)) = A(\alpha), \text{ com } \alpha \in \left]\frac{\pi}{2}; \pi\right[$$

6.2. $\tan(\alpha) = -\frac{\sqrt{5}}{2}$
então de

$$1 + \tan^2(\alpha) = \frac{1}{\cos^2(\alpha)}$$

resulta que

$$1 + \left(-\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2 = \frac{1}{\cos^2(\alpha)} \Leftrightarrow 1 + \frac{5}{4} = \frac{1}{\cos^2(\alpha)} \Leftrightarrow \frac{9}{4} = \frac{1}{\cos^2(\alpha)} \Leftrightarrow \cos^2(\alpha) = \frac{4}{9} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cos(\alpha) = \pm\sqrt{\frac{4}{9}}, \wedge \alpha \in \left]\tfrac{\pi}{2}; \pi\right[,$$

logo $\cos(\alpha) = -\frac{2}{3}$

de $\tan(\alpha) = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}$ resulta que $\sin(\alpha) = \tan(\alpha) \times \cos(\alpha) = -\frac{\sqrt{5}}{2} \times \left(-\frac{2}{3}\right) = \frac{\sqrt{5}}{3}$

e sendo assim,

$$A(\alpha) = 2 \times \frac{\sqrt{5}}{3} \times \left[1 - 2 \times \left(-\frac{2}{3}\right)\right] = \frac{2\sqrt{5}}{3} \times \left(1 + \frac{4}{3}\right) = \frac{2\sqrt{5}}{3} + \frac{8\sqrt{5}}{9} = \frac{14\sqrt{5}}{9}$$

6.3. $A(\alpha) = -8\sin(\alpha)\cos(\alpha) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 2\sin(\alpha)(1 - 2\cos(\alpha)) = -8\sin(\alpha)\cos(\alpha) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2\sin(\alpha) - 4\sin(\alpha)\cos(\alpha)) = -8\sin(\alpha)\cos(\alpha) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2\sin(\alpha) - 4\sin(\alpha)\cos(\alpha)) + 8\sin(\alpha)\cos(\alpha) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2\sin(\alpha) + 4\sin(\alpha)\cos(\alpha)) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2\sin(\alpha)(1 + 2\cos(\alpha)) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sin(\alpha) = 0 \vee 1 + 2\cos(\alpha) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sin(\alpha) = \sin(0) \vee \cos(\alpha) = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sin(\alpha) = \sin(0) \vee \cos(\alpha) = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \alpha = k\pi \vee \alpha = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \vee \alpha = -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi; k \in \mathbb{Z}$$

Atribuindo valores a k

$$k = 0 \twoheadrightarrow \alpha = 0 \vee \alpha = \frac{2\pi}{3} \vee \alpha = -\frac{2\pi}{3}$$

$$k = 1 \twoheadrightarrow \alpha = \pi \vee \alpha = \frac{8\pi}{3} \vee \alpha = \frac{4\pi}{3}$$

Atendendo a que $\alpha \in \left]\frac{\pi}{2}; \pi\right[$, vem que $\alpha = \frac{2\pi}{3} rad$

7. .

7.1. Dado que o domínio de f é $[0, +\infty[$, estudemos a existência de assintota horizontal do gráfico de f quando $x \to +\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}(xe^{1-x}+2) = \lim_{x\to+\infty}(e \times xe^{-x}+2) = \lim_{x\to+\infty}\left(e \times \frac{x}{e^x}+2\right)$$

$$= e \times \frac{1}{\underbrace{\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x}}_{\text{limite notável}}} + 2 = e \times \frac{1}{+\infty} + 2 = 2$$

Aplicou-se o limite notável $\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x} = +\infty$

Assim, o valor de b é 2

7.2. Seja f' a função derivada de f

$$f'(x) = \left(xe^{1-x}+2\right)' = x'e^{1-x} + x\left(e^{1-x}\right)' = e^{1-x} - xe^{1-x} = e^{1-x}(1-x)$$

Zeros da derivada de f

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow e^{1-x}(1-x) = 0 \Leftrightarrow \underbrace{e^{1-x}=0}_{\text{equação impossível}} \vee 1-x=0 \Leftrightarrow x=1$$

x	0		1	$+\infty$
e^{1-x}	+	+	+	+
$1-x$	+	+	0	$-$
f'	+	+	0	$-$
f	2	$\nearrow$	3	$\searrow$

$f(0) = 0 + 2 = 2$

$f(1) = 1 + 2 = 3$

A função f é crescente em $[0; 1]$ e é decrescente em $[1; +\infty[$

A função f atinge o valor máximo (absoluto) 3, para $x = 1$, e atinge o valor mínimo (absoluto) 2, para $x = 0$

8. $2 \in D_g$ e é ponto aderente a D_g

g é contínua em $x = 2$ sse existir $\lim_{x\to 2} g(x)$

Ou seja, se $\lim_{x\to 2^-} g(x) = \lim_{x\to 2^+} g(x) = g(2)$

$g(2) = b + 2$

$$\lim_{x\to 2^-} g(x) = \lim_{x\to 2^-}\frac{x-2}{\sqrt{2-x}} = \lim_{x\to 2^-}\frac{(x-2)\sqrt{2-x}}{\sqrt{2-x}\sqrt{1-x}} = \lim_{x\to 2^-}\frac{(x-2)\sqrt{2-x}}{|2-x|} = \lim_{x\to 2^-}\frac{(x-2)\sqrt{2-x}}{2-x} =$$

$$= \lim_{x\to 2^-}\left(-\sqrt{2-x}\right) = 0$$

$$\lim_{x\to 2^+} g(x) = \lim_{x\to 2^+}\frac{x^2-2x+a\ln(x-1)}{x-2} = \lim_{x\to 2^+}\frac{x^2-2x}{x-2} + a \times \lim_{x\to 2^+}\frac{\ln(x-1)}{x-2} =$$

$$= \lim_{x\to 2^+}\frac{x(x-2)}{x-2} + a \times \lim_{y\to 0^+}\frac{y}{e^y-1} = \lim_{x\to 2^+} x + a \times \frac{1}{\underbrace{\lim_{y\to 0^+}\frac{e^y-1}{y}}_{\text{limite notável}}} = 2 + a \times 1 = 2 + a$$

Fez-se a mudança de variável $y = \ln(x-1) \Leftrightarrow x = e^y + 1$

Se $x \to 2^+$ então $y \to 0^+$

Aplicou-se o limite notável $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1$

Desta forma, $\lim\limits_{x\to 2^+} g(x) = \lim\limits_{x\to 2^-} g(x) = g(2) \Leftrightarrow 2 + a = 0 \wedge b + 2 = 0 \Leftrightarrow a = -2 \wedge b = -2$

9. $\lim(x_n) = \lim \dfrac{1}{n+1} = 0^+$

   Assim, tem-se

   $$\lim\left(f(x_n)\right) = \lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\tan(-x)}{5x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{-\tan x}{5x} = -\lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{\sin x}{\cos x}}{5x} = -\frac{1}{5} \underbrace{\lim_{x\to 0^+} \frac{\sin x}{x}}_{\text{limite notável}} \times \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{\cos x} =$$

   $$= -\frac{1}{5} \times 1 \times 1 = -\frac{1}{5}$$

   Aplicou-se o limite notável $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$

   Resposta: (B)