Trigonometria e funções trigonométricas

Exercícios de aplicação - páginas 311 a 350

1.

$$\begin{aligned}\frac{1-\operatorname{tg}^2 x}{-1+2\cos^2 x} &= \frac{1-\frac{\operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x}}{-1+\cos^2 x+\cos^2 x} = \frac{\frac{\cos^2 x-\operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x}}{-\operatorname{sen}^2 x+\cos^2 x} \\ &= \frac{\cos^2 x-\operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x(-\operatorname{sen}^2 x+\cos^2 x)} = \frac{1}{\cos^2 x} = 1+\operatorname{tg}^2 x\end{aligned}$$

Como queríamos mostrar.

2.

$$\begin{aligned}\frac{\cos\beta}{\operatorname{tg}\beta} = \frac{9}{20} \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{\cos\beta}{\frac{\operatorname{sen}\beta}{\cos\beta}} = \frac{9}{20} \Leftrightarrow \frac{\cos^2\beta}{\operatorname{sen}\beta} = \frac{9}{20} \Leftrightarrow \frac{1-\operatorname{sen}^2\beta}{\operatorname{sen}\beta} = \frac{9}{20} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \quad 1-\operatorname{sen}^2\beta = \frac{9}{20}\operatorname{sen}\beta \Leftrightarrow 1-\operatorname{sen}^2\beta-\frac{9}{20}\operatorname{sen}\beta = 0\end{aligned}$$

Efetuando a mudança de variável $\operatorname{sen}\beta = x$ e resolvendo a equação, obtém-se

$$1-x^2-\frac{9}{20}x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{4}{5} \vee x = -\frac{5}{4}$$

Uma vez que $\operatorname{sen}\beta$ varia entre -1 e 1, não pode tomar o valor $-\frac{5}{4}$, pelo que a solução é $\frac{4}{5}$.

3. Como $B\widehat{D}C = 60°$, temos que $A\widehat{D}C = 180° - 60° = 120°$. Assim, $A\widehat{C}D = 180° - 120° - 20° = 40°$. Pela Lei dos Senos, vem que:

$$\frac{\operatorname{sen}40°}{3} = \frac{\operatorname{sen}20°}{\overline{CD}} \Leftrightarrow \overline{CD} = \frac{3\operatorname{sen}20°}{\operatorname{sen}40°}$$

Como $D\widehat{B}C = 90°$ e $B\widehat{D}C = 60°$, temos que $B\widehat{C}D = 180° - 60° - 90° = 30°$. Pela Lei dos Senos, temos que:

$$\frac{sen90°}{\overline{CD}} = \frac{\operatorname{sen}60°}{\overline{BC}} \Leftrightarrow \frac{1}{\frac{3\operatorname{sen}20°}{\operatorname{sen}40°}} = \frac{\operatorname{sen}60°}{\overline{BC}} \Leftrightarrow \overline{BC} = \frac{3\operatorname{sen}20°\operatorname{sen}60°}{\operatorname{sen}40°}$$

Assim, $\overline{BC} \approx 1,38241$ cm.
Utilizando novamente a Lei dos Senos, temos que:

$$\frac{\text{sen}90°}{\overline{CD}} = \frac{\text{sen}30°}{\overline{BD}} \Leftrightarrow \frac{1}{\frac{3\ \text{sen}20°}{\text{sen}40°}} = \frac{\text{sen}30°}{\overline{BD}} \Leftrightarrow \overline{BD} = \frac{3\ \text{sen}20°\ \text{sen}30°}{\text{sen}40°}$$

Assim, $\overline{BC} \approx 0,79813$ cm.
Estamos agora em condições de calcular a área pedida:

$$A = \frac{(3 + 0,79813) \times 1,38241}{2} \approx 2,6$$

A área do triângulo é igual a $2,6$ cm^2, aproximadamente.

4. Pela Lei dos Cossenos, temos:

$$\begin{aligned}
& \overline{AB}^2 = (2\sqrt{3} - 2)^2 + 2^2 - 2 \times (2\sqrt{3} - 2) \times 2 \times \cos 30° \Leftrightarrow \\
\Leftrightarrow\ & \overline{AB}^2 = (2\sqrt{3} - 2)^2 + 2^2 - 2 \times (2\sqrt{3} - 2) \times 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \\
\Leftrightarrow\ & \overline{AB}^2 = 8 - 4\sqrt{3} \Leftrightarrow \\
\Leftrightarrow\ & \overline{AB} = \sqrt{8 - 4\sqrt{3}}, \text{ pois } \overline{AB} > 0.
\end{aligned}$$

5.

$$\begin{aligned}
& \cos\left(-x - \frac{\pi}{2}\right) + \cos(-x) - \text{ sen}(2020\pi - x) + \cos(2019\pi + x) - \text{ tg }(-x + \pi) = \\
& = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) + \cos(x) - \text{ sen}(1010 \times 2\pi - x) + \cos((1009 \times 2 + 1)\pi + x) - \text{ tg }(-x) = \\
& = \cos\left(\frac{\pi}{2} - (-x)\right) + \cos(x) - \text{ sen}(-x) + \cos(\pi + x) + \text{ tg }(x) = \\
& = \text{ sen}(-x) + \cos x + \text{ sen}x - \cos x + \text{ tg } x = \\
& = - \text{ sen}x + \text{ sen}x + \text{ tg } x = \\
& = \text{ tg } x
\end{aligned}$$

6.
Sabemos que:

$$\cos\left(-\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \frac{2}{3} \Leftrightarrow \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \frac{2}{3} \Leftrightarrow \text{ sen}\alpha = \frac{2}{3}$$

Pelo Teorema Fundamental da Trigonometria:

$$\cos^2\alpha + \left(\frac{2}{3}\right)^2 = 1 \Leftrightarrow \cos^2\alpha = 1 - \frac{4}{9} \Leftrightarrow \cos^2\alpha = \frac{5}{9} \Leftrightarrow \cos\alpha =^* -\frac{\sqrt{5}}{3}$$

*uma vez que $\alpha \in \left]-\frac{3\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}\right[$. Então:

$$\text{tg }\alpha = \frac{\frac{2}{3}}{-\frac{\sqrt{5}}{3}} = -\frac{2}{\sqrt{5}} = -\frac{2\sqrt{5}}{5}$$

Desta forma:

$$\begin{aligned}
&\text{sen}(-\alpha-\pi) + \text{ tg }(\pi+\alpha) - \text{ sen}\left(-\alpha + \frac{3\pi}{2}\right) = \\
&= -\text{ sen}(\pi+\alpha) + \text{ tg }\alpha - \text{ sen}\left(\frac{\pi}{2} + (\pi-\alpha)\right) = \\
&= -\text{ sen}\alpha + \text{ tg }\alpha - \cos(\pi-\alpha) = \\
&= -\text{ sen}\alpha + \text{ tg }\alpha + \cos\alpha = \\
&= \frac{2}{3} - \frac{\sqrt{5}}{3} - \frac{2\sqrt{5}}{5} = \\
&= \frac{10 - 5\sqrt{5} - 6\sqrt{5}}{15} = \\
&= \frac{10 - 11\sqrt{5}}{15}
\end{aligned}$$

7.

7.1.

Como $\alpha \in \left]\pi, \frac{3\pi}{2}\right[$, temos que $\cos\alpha < 0$, $\text{sen}\alpha < 0$ e $\text{tg }\alpha > 0$, pelo que $\overline{PQ} = 1 - \cos\alpha$, $\overline{AQ} = -\text{ sen}\alpha$ e $\overline{AR} = \text{ tg }\alpha$. A área do triângulo $[PQR]$ é então dada, em função de α, por:

$$
\begin{aligned}
A(\alpha) &= \frac{(1-\cos\alpha)\times(-\operatorname{sen}\alpha+\operatorname{tg}\alpha)}{2} = \\
&= \frac{(1-\cos\alpha)\times(-\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}\times\cos\alpha+\operatorname{tg}\alpha)}{2} = \\
&= \frac{(1-\cos\alpha)\times(-\operatorname{tg}\alpha\times\cos\alpha+\operatorname{tg}\alpha)}{2} = \\
&= \frac{(1-\cos\alpha)\times(-\operatorname{tg}\alpha\times(1-\cos\alpha)}{2} = \\
&= \frac{\operatorname{tg}\alpha}{2}\times(1-\cos\alpha)^2 = \\
&= \frac{\operatorname{tg}\alpha}{2}\times(\cos\alpha-1)^2
\end{aligned}
$$

Como queríamos mostrar.

7.2.

O arco AP mede $2\pi-\alpha$. Pretendemos então resolver a equação:

$$A(\alpha)=2\pi-\alpha$$

Desta forma, $\alpha\approx 4,23$.

8.

$$-\arccos\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)+\operatorname{tg}\left(\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right)=-\frac{\pi}{3}+\operatorname{tg}\left(\frac{5\pi}{6}\right)=-\frac{\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{3}$$

Opção (A).

9.
O domínio da função arco-cosseno é $[-1,1]$, pelo que $D_f = \left[-\frac{1}{5}, \frac{1}{5}\right]$. O contradomínio da função arco-cosseno é $[0,\pi]$, pelo que $D'_f = [-\pi, 0]$.

Opção (B).

10.
10.1.

$$\begin{aligned} \cos\theta(2\cos\theta+1)=0 &\Leftrightarrow \cos\theta=0 \vee 2\cos\theta+1=0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \cos\theta=0 \vee \cos\theta=-\frac{1}{2} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \theta=\frac{\pi}{2}+k\pi \vee \theta=\frac{2\pi}{3}+2k\pi \vee \theta=\frac{4\pi}{3}+2k\pi, k\in\mathbb{Z} \end{aligned}$$

10.2.

$$\begin{aligned} \cos^2\theta-\cos\theta=0 &\Leftrightarrow \cos\theta(\cos\theta-1)=0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \cos\theta=0 \vee \cos\theta-1=0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \cos\theta=0 \vee \cos\theta=1 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \theta=\frac{\pi}{2}+k\pi \vee \theta=2k\pi, k\in\mathbb{Z} \end{aligned}$$

10.3.

$$\begin{aligned} 3\ \mathrm{tg}\ ^2\theta=1 &\Leftrightarrow \mathrm{tg}\ ^2\theta=\frac{1}{3} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \mathrm{tg}\ \theta=\pm\frac{\sqrt{3}}{3} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \theta=-\frac{\pi}{6}+k\pi \vee \theta=\frac{\pi}{6}+k\pi, k\in\mathbb{Z} \end{aligned}$$

10.4.

$$
\begin{aligned}
& \operatorname{sen}^2\theta + \frac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{sen}\theta = \frac{1}{2}\operatorname{sen}\theta + \frac{\sqrt{3}}{4} \Leftrightarrow \\
\Leftrightarrow\quad & \operatorname{sen}^2\theta + \frac{\sqrt{3}-1}{2}\operatorname{sen}\theta - \frac{\sqrt{3}}{4} = 0 \Leftrightarrow \\
\Leftrightarrow\quad & 4\operatorname{sen}^2\theta + (2\sqrt{3}-2)\operatorname{sen}\theta - \sqrt{3} = 0 \Leftrightarrow \\
\Leftrightarrow\quad & \operatorname{sen}\theta = \frac{-2\sqrt{3}+2 \pm \sqrt{\left(2\sqrt{3}-2\right)^2 - 4\times 4\times(-\sqrt{3})}}{2\times 4} \Leftrightarrow \\
\Leftrightarrow\quad & \operatorname{sen}\theta = \frac{-2\sqrt{3}+2 \pm \sqrt{12+4-8\sqrt{3}+16\sqrt{3}}}{8} \Leftrightarrow \\
\Leftrightarrow\quad & \operatorname{sen}\theta = \frac{-2\sqrt{3}+2 \pm \sqrt{16+8\sqrt{3}}}{8} \Leftrightarrow \\
\Leftrightarrow^*\quad & \operatorname{sen}\theta = \frac{-2\sqrt{3}+2 \pm (2+2\sqrt{3})}{8} \Leftrightarrow \\
\Leftrightarrow\quad & \operatorname{sen}\theta = \frac{4}{8} \vee \operatorname{sen}\theta = \frac{-4\sqrt{3}}{8} \Leftrightarrow \\
\Leftrightarrow\quad & \operatorname{sen}\theta = \frac{1}{2} \vee \operatorname{sen}\theta = -\frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \\
\Leftrightarrow\quad & \theta = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \vee \theta = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \vee \theta = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi \vee \theta = -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}
\end{aligned}
$$

*De acordo com os seguintes cálculos auxiliares:

$$
\begin{aligned}
& (a + b\sqrt{c})^2 = 16 + 8\sqrt{3} \Leftrightarrow \\
\Leftrightarrow\quad & a^2 + 2ab\sqrt{c} + cb^2 = 16 + 8\sqrt{3}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{cases} a^2 + cb^2 = 16 \\ 2ab = 8 \\ c = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -2 \\ b = -2 \\ c = 3 \end{cases} \vee \begin{cases} a = 2 \\ b = 2 \\ c = 3 \end{cases}
$$

Uma vez que $\sqrt{16+8\sqrt{3}} > 0$, temos que$\sqrt{16+8\sqrt{3}} = 2 + 2\sqrt{3}$.

11.
11.1.

$$\begin{aligned}
\operatorname{sen}^2\theta - \cos^2\theta = 0 &\Leftrightarrow \operatorname{sen}^2\theta - (1 - \operatorname{sen}^2\theta) = 0 \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow 2\operatorname{sen}^2\theta = 1 \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow \operatorname{sen}^2\theta = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow \operatorname{sen}\theta = \pm\frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow \operatorname{sen}\theta = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right) \vee \operatorname{sen}\theta = \operatorname{sen}\left(-\frac{\pi}{4}\right) \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow^* \theta = -\frac{\pi}{4} \vee \theta = \frac{\pi}{4} \vee \theta = \frac{3\pi}{4} \vee \theta = \frac{5\pi}{4} \vee \theta = \frac{7\pi}{4}
\end{aligned}$$

$*$ No domínio considerado.

11.2.

$$\begin{aligned}
-\sqrt{3} - 2\cos\theta = 0 &\Leftrightarrow \cos\theta = -\frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow \cos\theta = \cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow^* \theta = -\frac{5\pi}{6} \vee \theta = \frac{5\pi}{6} \vee \theta = \frac{7\pi}{6} \vee \theta = \frac{17\pi}{6}
\end{aligned}$$

$*$ No domínio considerado.

11.3.

$$\begin{aligned}
8\operatorname{sen}^2\theta = 6 &\Leftrightarrow \operatorname{sen}^2\theta = \frac{3}{4} \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow \operatorname{sen}\theta = -\frac{\sqrt{3}}{2} \vee \operatorname{sen}\theta = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow \operatorname{sen}\theta = \operatorname{sen}\left(-\frac{\pi}{3}\right) \vee \operatorname{sen}\theta = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3}\right) \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow^* \theta = -\frac{2\pi}{3} \vee \theta = -\frac{\pi}{3} \vee \theta = \frac{\pi}{3} \vee \theta = \frac{2\pi}{3}
\end{aligned}$$

$*$ No domínio considerado.

11.4.

$$\begin{aligned} 2\cos^2\theta - 3\cos\theta + 1 = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad \cos\theta = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 4\times 2\times 1}}{2\times 2} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \quad \cos\theta = \frac{3\pm 1}{4} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \quad \cos\theta = 1 \vee \cos\theta = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \quad \cos\theta = \cos(0) \vee \cos\theta = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow^* \quad \theta = \frac{5\pi}{3} \vee \theta = 2\pi \vee \theta = \frac{7\pi}{3} \end{aligned}$$

$*$ No domínio considerado.

12.

12.1.

$$2\ \mathrm{sen} x < \sqrt{2} \Leftrightarrow\ \mathrm{sen} x < \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Sabendo que $\mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ e que $\mathrm{sen}\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$, e atendendo também à variação do seno, podemos concluir que o conjunto-solução da inequação é $\left]0, \frac{\pi}{4}\right[\cup \left]\frac{3\pi}{4}, 2\pi\right]$.

12.2.

$$|2\cos x| < 1 \Leftrightarrow |\cos x| < \frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos x < \frac{1}{2} \wedge \cos x > -\frac{1}{2}$$

Sabendo que $\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$ e que $\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}$, e atendendo também à variação do cosseno, podemos concluir que o conjunto-solução da inequação é $\left]-\frac{2\pi}{3}, -\frac{\pi}{3}\right[\cup \left]\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right]$.

12.3.

$$\mathrm{sen} x = 0 \Leftrightarrow^* x = \pi \qquad \cos x = 0 \Leftrightarrow^* x = \frac{\pi}{2} \vee x = \frac{3\pi}{2}$$

$*$ No domínio considerado.

Tabela de sinais da expressão $\operatorname{sen}x \cos x$:

x	0		$\frac{\pi}{2}$		π		$\frac{3\pi}{2}$		2π
$\operatorname{sen}x$	n.d.	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	n.d.
$\cos x$	n.d.	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$	n.d.
$\operatorname{sen}x \cos x$	n.d.	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	n.d.

Podemos então concluir que o conjunto-solução da inequação é:

$$\left]0, \frac{\pi}{2}\right] \cup \left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right]$$

12.4.

$$\cos x + \frac{1}{2} = 0 \Leftrightarrow \cos x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow^* x = -\frac{4\pi}{3} \vee x = -\frac{2\pi}{3} \vee x = \frac{2\pi}{3}$$

$$\operatorname{sen}x - \frac{1}{2} = 0 \Leftrightarrow \operatorname{sen}x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow^* x = -\frac{11\pi}{6} \vee x = -\frac{7\pi}{6} \vee x = \frac{\pi}{6} \vee x = \frac{5\pi}{6}$$

$*$ No domínio considerado.

Tabela de sinais da expressão $\dfrac{\cos x + \frac{1}{2}}{\operatorname{sen}x - \frac{1}{2}}$:

x	-2π		$-\frac{11\pi}{6}$		$-\frac{4\pi}{3}$		$-\frac{7\pi}{6}$		$-\frac{2\pi}{3}$		$\frac{\pi}{6}$		$\frac{2\pi}{3}$		$\frac{5\pi}{6}$		π
$\cos x + \frac{1}{2}$	n.d.	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	$-$
$\operatorname{sen}x - \frac{1}{2}$	n.d.	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$
$\frac{\cos x + \frac{1}{2}}{\operatorname{sen}x - \frac{1}{2}}$	n.d.	$-$	n.d.	$+$	0	$-$	n.d.	$+$	0	$-$	n.d.	$+$	0	$-$	n.d.	$+$	$+$

Podemos então concluir que o conjunto-solução da inequação é:

$$\left]-2\pi, -\frac{11\pi}{6}\right[\cup \left[-\frac{4\pi}{3}, -\frac{7\pi}{6}\right[\cup \left[-\frac{2\pi}{3}, \frac{\pi}{6}\right[\cup \left[\frac{2\pi}{3}, \frac{5\pi}{6}\right[$$

13.

$$\begin{aligned}
\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{12}\right)+\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{8}\right)\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) &= \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)+\frac{1}{2}\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right)= \\
&= \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)-\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right)+\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}= \\
&= \frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{4}= \\
&= \frac{\sqrt{6}}{4}
\end{aligned}$$

14.

14.1.

$$\begin{aligned}
\operatorname{sen}x\cos x=\frac{1}{4} &\Leftrightarrow 2\operatorname{sen}x\cos x=\frac{1}{2}\Leftrightarrow \operatorname{sen}(2x)=\frac{1}{2}\Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow 2x=\frac{\pi}{6}+2k\pi \vee 2x=\frac{5\pi}{6}+2k\pi,\quad k\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{12}+k\pi \vee x=\frac{5\pi}{12}+k\pi,\quad k\in\mathbb{Z}
\end{aligned}$$

14.2.

$$\begin{aligned}
\cos^2 x-\operatorname{sen}^2 x=-\frac{1}{2} &\Leftrightarrow \cos(2x)=-\frac{1}{2}\Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow 2x=\frac{2\pi}{3}+2k\pi \vee 2x=-\frac{2\pi}{3}+2k\pi,\quad k\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{3}+k\pi \vee x=-\frac{\pi}{3}+k\pi,\quad k\in\mathbb{Z}
\end{aligned}$$

14.3.

$$\begin{aligned}
\operatorname{sen}x-\sqrt{3}\cos x=\sqrt{3} &\Leftrightarrow \frac{1}{2}\operatorname{sen}x-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x=\frac{\sqrt{3}}{2}\Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\operatorname{sen}x-\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3}\right)\cos x=\frac{\sqrt{3}}{2}\Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow \operatorname{sen}\left(x-\frac{\pi}{3}\right)=\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3}\right)\Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow x-\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{3}+2k\pi \vee x-\frac{\pi}{3}=\pi-\frac{\pi}{3}+2k\pi,\quad k\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow x=\frac{2\pi}{3}+2k\pi \vee x=\pi+2k\pi,\quad k\in\mathbb{Z}
\end{aligned}$$

14.4.

$$
\begin{aligned}
\cos x - \operatorname{sen} x = \frac{\sqrt{6}}{2} &\Leftrightarrow \frac{\sqrt{2}}{2}\cos x - \frac{\sqrt{2}}{2}\operatorname{sen} x = \frac{\sqrt{12}}{4} \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right)\cos x - \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\operatorname{sen} x = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3}\right) \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow \frac{\pi}{4} - x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \vee \frac{\pi}{4} - x = \pi - \frac{\pi}{3} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{12} + 2k\pi \vee x = -\frac{5\pi}{12} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}
\end{aligned}
$$

15.

15.1.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} x}{4x} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \frac{1}{4} \times \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} x}{x} = \frac{1}{4} \times 1 = \frac{1}{4}$$

15.2.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}(\pi x)}{x} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}(\pi x)}{\pi x} \times \pi =^{*} \lim_{y\to 0}\frac{\operatorname{sen} y}{y} \times \pi = 1 \times \pi = \pi$$

$*$ Considerando a mudança de variável $\pi x = y$: se $x \to 0$, então $y \to 0$.

15.3.

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^2 x}{x^2} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}^2 x}{x^2} = \left(\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} x}{x}\right)^2 = 1^2 = 1$$

15.4.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}(-x)}{x} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x\to 0}\left(-\frac{\operatorname{sen}(-x)}{-x}\right) =^{*} -\lim_{y\to 0}\frac{\operatorname{sen} y}{y} = -1$$

$*$ Considerando a mudança de variável $-x = y$: se $x \to 0$, então $y \to 0$.

15.5.

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{3}} \frac{\text{sen}\left(x-\frac{\pi}{3}\right)}{\frac{\pi}{3}-x} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x-\frac{\pi}{3}\to 0}\left(-\frac{\text{sen}\left(x-\frac{\pi}{3}\right)}{x-\frac{\pi}{3}}\right) =^{*} -\lim_{y\to 0}\frac{\text{sen} y}{y} = -1$$

* Considerando a mudança de variável $x-\dfrac{\pi}{3}=y$: se $x-\frac{\pi}{3}\to 0$, então $y\to 0$.

15.6.

$$\lim_{x\to-\infty}\left(x\ \text{sen}\left(\frac{1}{x}\right)\right) \overset{(0\times\infty)}{=} \lim_{x\to-\infty}\frac{\text{sen}\left(\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}} =^{*} \lim_{y\to 0}\frac{\text{sen} y}{y} = 1$$

* Considerando a mudança de variável $\dfrac{1}{x}=y$: se $x\to-\infty$, então $y\to 0$.

15.7.

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\text{sen}(x)}{x^2} = \lim_{x\to-\infty}\left(\text{sen}(x)\times\frac{1}{x^2}\right) = 0, \quad \text{pois:}$$

A função seno é limitada $(-1\leq\ \text{sen} x\leq 1, \forall x\in\mathbb{R})$ e $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x^2}=0$.

16.
16.1.

$$f'(x) = (2\ \text{sen} x - 3\cos x)' = 2\cos x - 3\times(-\ \text{sen} x) = 2\cos x + 3\ \text{sen} x$$

16.2.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(\text{sen}(\pi x) - \frac{1}{2}\cos(4x)\right)' = \cos(\pi x)\times\pi - \frac{1}{2}\times(-\ \text{sen}(4x))\times 4 = \\ &= \pi\cos(\pi x) + 2\ \text{sen}(4x) \end{aligned}$$

16.3.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(\text{sen}^2 x - \cos^2 x\right)' = 2\ \text{sen} x\times(\ \text{sen} x)' - 2\cos x\times(\cos x)' = \\ &= 2\ \text{sen} x\cos x - 2\cos x\times(-\ \text{sen} x) = 2\ \text{sen} x\cos x + 2\ \cos x\ \text{sen} x = \\ &= 4\ \text{sen} x\cos x = 2\ \text{sen}(2x) \end{aligned}$$

16.4.

$$
\begin{aligned}
f'(x) = \left(x^2 \text{ sen}(5x) - \text{ tg } x\right)' &= (x^2)' \times \text{ sen}(5x) + x^2 \times (\text{ sen}(5x))' - (\text{ tg } x)' = \\
&= 2x \times \text{ sen}(5x) + x^2 \times 5\cos(5x) - \frac{1}{\cos^2 x} = \\
&= 2x \text{ sen}(5x) + 5x^2 \cos(5x) - \frac{1}{\cos^2 x}
\end{aligned}
$$

16.5.

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \left((\cos x - \text{ sen}x)^3\right)' = 3(\cos x - \text{ sen}x)^2(\cos x - \text{ sen}x)' = \\
&= 3(\cos x - \text{ sen}x)^2(-\text{ sen}x - \cos x) = \\
&= -3(\cos^2 x + \text{ sen}^2 x - 2\text{ sen}x\cos x)(\text{ sen}x + \cos x) = \\
&= -3(1 - \text{ sen}(2x))(\text{ sen}x + \cos x)
\end{aligned}
$$

17.
17.1.

Determinar $N'(t)$:

$$
\begin{aligned}
N'(t) &= \left(-\frac{12}{\pi}\text{ sen}\left(\frac{\pi}{12}t + \frac{\pi}{2}\right) + t\cos\left(\frac{\pi}{12}t + \frac{\pi}{2}\right) + 10\right)' = \\
&= -\frac{12}{\pi}\cos\left(\frac{\pi}{12}t + \frac{\pi}{2}\right) \times \frac{\pi}{12} + \cos\left(\frac{\pi}{12}t + \frac{\pi}{2}\right) - t\text{ sen}\left(\frac{\pi}{12}t + \frac{\pi}{2}\right) \times \frac{\pi}{12} = \\
&= -\cos\left(\frac{\pi}{12}t + \frac{\pi}{2}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{12}t + \frac{\pi}{2}\right) - \frac{\pi t}{12}\text{ sen}\left(\frac{\pi}{12}t + \frac{\pi}{2}\right) = \\
&= -\frac{\pi t}{12}\text{ sen}\left(\frac{\pi}{12}t + \frac{\pi}{2}\right)
\end{aligned}
$$

Determinar os zeros de N':

$$
\begin{aligned}
-\frac{\pi t}{12}\text{ sen}\left(\frac{\pi}{12}t + \frac{\pi}{2}\right) = 0 &\Leftrightarrow -\frac{\pi t}{12} = 0 \vee \text{ sen}\left(\frac{\pi}{12}t + \frac{\pi}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow t = 0 \vee \frac{\pi}{12}t + \frac{\pi}{2} = k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow t = 0 \vee \frac{\pi}{12}t = -\frac{\pi}{2} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow t = 0 \vee t = -6 + 12k, \quad k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow^* t = 0 \vee t = 6 \vee t = 18
\end{aligned}
$$

$*$ No domínio considerado.

Estudar o sinal de N' e a variação de N:

t	0		6		18		24
$N'(t)$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	$-$
$N(t)$	$10-\frac{12}{\pi}$	$\searrow$	4 mín.	$\nearrow$	28 máx.	$\searrow$	$10-\frac{12}{\pi}$

Temos, então, que $M = 28$ e $m = 4$, pelo que $A = 24$ dm.

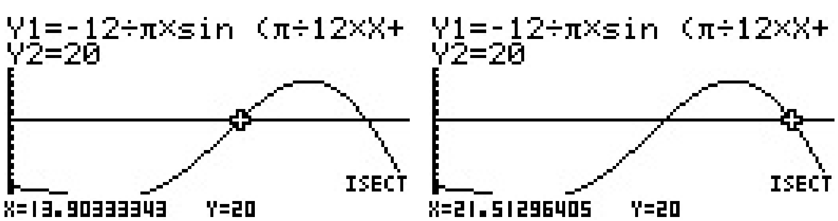
17.2.

$$\text{t.v.m.}_{[3,6]} = \frac{N(6)-N(3)}{6-3} = \frac{4-\left(10-\frac{3}{\sqrt{2}}-\frac{6\sqrt{2}}{\pi}\right)}{3} \approx -0,4$$

Entre as 3 e as 6 horas, o nível N de água no depósito do sistema de arrefecimento diminui, em média, $0,4$ dm por hora, aproximadamente.

17.3.

Na figura abaixo encontra-se a representação gráfica de N e a reta de equação $y = 20$.



Observa-se que $a \approx 13,903$ e $b \approx 21,513$. Vem que $b-a \approx 7,61$.
O nível N de água no depósito do sistema de arrefecimento da máquina é superior a 20 dm durante $7,61$ horas, aproximadamente.

18.
18.1. O declive da reta é dado por $g'\left(\frac{\pi}{2}\right)$.

$$g'(x) = \left(\frac{x}{2}+(1-\cos x)^2\right)' = \frac{1}{2}+2(1-\cos x)\,\text{sen}x$$

$$g'\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{1}{2}+2\left(1-\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)\ \mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{1}{2}+2=\frac{5}{2}$$

Assim, a equação reduzida da reta é da forma $y=\frac{5}{2}x+b$.

$$g\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\frac{\pi}{2}}{2}+\left(1-\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)^2=\frac{\pi}{4}+1$$

Como o ponto de coordenadas $\left(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{4}+1\right)$ pertence à reta, vem que:

$$\frac{\pi}{4}+1=\frac{5}{2}\times\frac{\pi}{2}+b\Leftrightarrow b=1-\pi$$

Concluímos, assim, que $y=\frac{5}{2}x+1-\pi$ é uma equação da reta tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa $\frac{\pi}{2}$.

18.2. Determinar $g''(x)$:

$$\begin{aligned} g''(x) &= \left(\frac{1}{2}+2(1-\cos x)\ \mathrm{sen}x\right)'=2(1-\cos x)'\ \mathrm{sen}x+2(1-\cos x)(\ \mathrm{sen}x)' \\ &= 2\ \mathrm{sen}x\ \mathrm{sen}x+2(1-\cos x)\cos x=2(\ \mathrm{sen}^2x-\cos^2 x)+2\ \cos x= \\ &= -2\cos(2x)+2\cos x \end{aligned}$$

Determinar os zeros de g'':

$$\begin{aligned} g''(x)=0 &\Leftrightarrow -2\cos(2x)+2\cos x=0\Leftrightarrow 2\cos(2x)=2\cos x\Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \cos(2x)=\cos x\Leftrightarrow 2x=x+2k\pi\vee 2x=-x+2k\pi,\quad k\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x=2k\pi\vee 3x=2k\pi,\quad k\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x=2k\pi\vee x=\frac{2}{3}k\pi,\quad k\in\mathbb{Z} \end{aligned}$$

Estudar o sinal de g'' e o sentido das concavidades do gráfico de g:

x	$-\frac{\pi}{2}$		0		$\frac{2\pi}{3}$		π
Sinal de g''	n.d.	$+$	0	$+$	0	$-$	n.d.
Sentido das concavidades do gráfico de g	n.d.	$\cup$	0	$\cup$	$\frac{9}{4}+\frac{\pi}{3}$ P.I.	$\cap$	n.d.

O gráfico de g tem a concavidade voltada para cima em $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}\right]$.

O gráfico de g tem a concavidade voltada para baixo em $\left[\frac{2\pi}{3}, \pi\right[$.

O ponto de coordenadas $\left(\frac{2\pi}{3}, \frac{9}{4} + \frac{\pi}{3}\right)$ é ponto de inflexão.

19.

Domínio:

$$D_f = \mathbb{R}$$

Paridade:

$$f(-x) = \operatorname{sen}(-x) + \cos(-x) = -\operatorname{sen} x + \cos x$$

Assim, como $f(-x) \neq f(x)$ e $f(-x) \neq -f(x)$, conclui-se que f não é par nem é ímpar.

Uma vez que 2π é o período positivo mínimo da função seno e da função cosseno, temos que:

$$f(x + 2\pi) = \operatorname{sen}(x + 2\pi) + \cos(x + 2\pi) = \operatorname{sen} x + \cos x = f(x)$$

Desta forma, 2π é período da função f.

Interseção com os eixos coordenados:

Zeros de f:

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow \operatorname{sen} x + \cos x = 0 \Leftrightarrow \operatorname{sen} x = -\cos x \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{4} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

A função f interseta o eixo Ox nos pontos de coordenadas

$$\left(-\frac{\pi}{4} + k\pi, 0\right), \; k \in \mathbb{Z}$$

$$f(0) = \operatorname{sen}(0) + \cos(0) = 1$$

A função f interseta o eixo Oy no ponto de coordenadas $(0, 1)$.

A função f é contínua em $\mathbb{R}$, pois é a soma de duas funções contínuas, pelo que o seu gráfico não admite assíntotas verticais. Além disso, como é uma função periódica, o seu gráfico também não admite assíntotas não verticais.

Intervalos de monotonia e extremos locais e absolutos:

$$f'(x) = (\operatorname{sen} x + \cos x)' = \cos x - \operatorname{sen} x$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \cos x - \operatorname{sen} x = 0 \Leftrightarrow \cos x = \operatorname{sen} x \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$$

Uma vez que se trata de uma função de período 2π, basta estudar a sua variação no intervalo $[0, 2\pi]$.

x	0		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{5\pi}{4}$		2π
Sinal de f'	1	$+$	0	$-$	0	$+$	1
Variação de f	1	$\nearrow$	$\sqrt{2}$ máx.	$\searrow$	$-\sqrt{2}$ mín.	$\nearrow$	1

Desta forma, f é decrescente em $\left[\frac{\pi}{4} + 2k\pi, \frac{5\pi}{4} + 2k\pi\right]$, com $k \in \mathbb{Z}$ e crescente em $\left[\frac{5\pi}{4} + 2k\pi, \frac{9\pi}{4} + 2k\pi\right]$, com $k \in \mathbb{Z}$. $\sqrt{2}$ é máximo de f em $x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ e $-\sqrt{2}$ é mínimo de f em $x = \frac{5\pi}{4} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Sentido das concavidades e pontos de inflexão do gráfico de f:

$$f''(x) = (\cos x - \operatorname{sen} x)' = -\operatorname{sen} x - \cos x$$

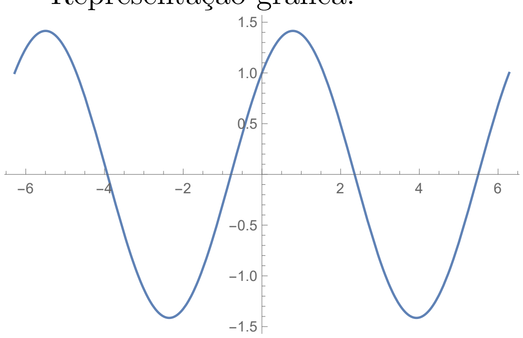
$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow -\operatorname{sen} x - \cos x = 0 \Leftrightarrow \operatorname{sen} x = -\cos x \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$$

Uma vez que se trata de uma função de período 2π, basta estudar o sentido da concavidade do seu gráfico no intervalo $[0, 2\pi]$.

x	0		$\frac{3\pi}{4}$		$\frac{7\pi}{4}$		2π
Sinal de f''	-1	$-$	0	$+$	0	$-$	-1
Variação de f	1	$\cap$	0 P.I.	$\cup$	0 P.I.	$\cap$	1

Assim, o gráfico de f tem a concavidade voltada para baixo em $\left[-\frac{\pi}{4}+2k\pi, \frac{3\pi}{4}+2k\pi\right]$, com $k \in \mathbb{Z}$ e tem a concavidade voltada para cima em $\left[\frac{3\pi}{4}+2k\pi, \frac{7\pi}{4}+2k\pi\right]$, com $k \in \mathbb{Z}$. Os pontos de coordenadas $\left(\frac{-\pi}{4}+2k\pi, 0\right)$, com $k \in \mathbb{Z}$ são pontos de inflexão do gráfico de f.

Representação gráfica:



20.

20.1.

$-1 \leq \operatorname{sen}(3x+\pi) \leq 1 \Leftrightarrow -2 \leq 2\operatorname{sen}(3x+\pi) \leq 2 \Leftrightarrow -2-\sqrt{2} \leq \operatorname{sen}(3x+\pi)-\sqrt{2} \leq 2-\sqrt{2}$

Assim, $D_f = \mathbb{R}$ e $D'_f = [-2-\sqrt{2}, 2-\sqrt{2}]$.

20.2.

$$\begin{aligned}
f\left(\frac{-5\pi}{36}\right)-f\left(\frac{-\pi}{4}\right) &= 2\ \mathrm{sen}\left(3\times\frac{-5\pi}{36}+\pi\right)-\sqrt{2}-\left(2\ \mathrm{sen}\left(3\times\frac{-\pi}{4}+\pi\right)-\sqrt{2}\right)=\\
&= 2\ \mathrm{sen}\left(\frac{7\pi}{12}\right)-2\ \mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right)=\\
&= 2\ \mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{3}\right)-2\times\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\\
&= 2\times\left(\ \mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)+\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\ \mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)-\sqrt{2}=\\
&= 2\times\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}\right)-\sqrt{2}=\\
&= \frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{6}}{2}-\sqrt{2}=\\
&= \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}
\end{aligned}$$

20.3.

$$\begin{aligned}
f\left(x+\frac{2\pi}{3}\right) &= 2\ \mathrm{sen}\left(3\times\left(x+\frac{2\pi}{3}\right)+\pi\right)-\sqrt{2}=2\ \mathrm{sen}\,(3x+\pi+2\pi)-\sqrt{2}=\\
&= 2\ \mathrm{sen}\,(3x+\pi)-\sqrt{2}=f(x)
\end{aligned}$$

Assim, $\frac{2\pi}{3}$ é período de f.

20.4.

O gráfico da função f obtém-se do gráfico da função seno através de uma contração horizontal de coeficiente $\frac{1}{3}$, seguida de uma translação associada ao vetor $\left(-\frac{\pi}{3},0\right)$, seguida de uma dilatação vertical de coeficiente 2, seguida de uma translação associada ao vetor $(0,-\sqrt{2})$.

21.

21.1.

$$\begin{aligned}
d(t) &= \frac{7\sqrt{3}}{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}t\right)+\frac{7}{2}\text{ sen}\left(\frac{\pi}{4}t\right)=7\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}t\right)+\frac{1}{2}\text{ sen}\left(\frac{\pi}{4}t\right)\right)=\\
&= 7\left(\text{ sen}\left(\frac{\pi}{3}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}t\right)+\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\text{ sen}\left(\frac{\pi}{4}t\right)\right)=\\
&= 7\text{ sen}\left(\frac{\pi}{4}t+\frac{\pi}{3}\right)=7\cos\left(\frac{\pi}{2}-\left(\frac{\pi}{4}t+\frac{\pi}{3}\right)\right)=\\
&= 7\cos\left(-\frac{\pi}{4}t+\frac{\pi}{6}\right)=7\cos\left(\frac{\pi}{4}t-\frac{\pi}{6}\right)=\\
&= 7\cos\left(\frac{\pi}{4}t-\frac{\pi}{6}+2\pi\right)=7\cos\left(\frac{\pi}{4}t+\frac{11\pi}{6}\right)
\end{aligned}$$

Como $7>0$, $\frac{\pi}{4}>0$ e $\frac{11\pi}{6}\in[0,2\pi[$, provámos que se trata de um oscilador harmónico com amplitude 7, período $\frac{2\pi}{\frac{\pi}{4}}=8$, frequência $\frac{1}{8}$ e fase $\frac{11\pi}{6}$.

21.2.

$$d'(t)=\left(7\cos\left(\frac{\pi}{4}t+\frac{11\pi}{6}\right)\right)'=-7\text{ sen}\left(\frac{\pi}{4}t+\frac{11\pi}{6}\right)\times\frac{\pi}{4}=-\frac{7\pi}{4}\text{ sen}\left(\frac{\pi}{4}t+\frac{11\pi}{6}\right)$$

$$\begin{aligned}
d'(t)=0 &\Leftrightarrow -\frac{7\pi}{4}\text{ sen}\left(\frac{\pi}{4}t+\frac{11\pi}{6}\right)=0\Leftrightarrow\\
&\Leftrightarrow \text{ sen}\left(\frac{\pi}{4}t+\frac{11\pi}{6}\right)=0\Leftrightarrow\\
&\Leftrightarrow \frac{\pi}{4}t+\frac{11\pi}{6}=k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow\\
&\Leftrightarrow \frac{\pi}{4}t=-\frac{11\pi}{6}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow\\
&\Leftrightarrow t=-\frac{22}{3}+4k,\ k\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow\\
&\Leftrightarrow^{*} t=\frac{2}{3}\vee t=\frac{14}{3}\vee t=\frac{26}{3}
\end{aligned}$$

$*$ No intervalo considerado.

Desta forma, o conjunto das abcissas do ponto P nos instantes em que a velocidade é nula é $\left\{\frac{2}{3}, \frac{14}{3}, \frac{26}{3}\right\}$.

22.

22.1.

$$\begin{aligned}
x(t) &= \frac{3}{2}\cos(\pi t) + \frac{3\sqrt{3}}{2}\ \text{sen}\,(\pi t) = 3\left(\frac{1}{2}\cos(\pi t) + \frac{\sqrt{3}}{2}\ \text{sen}\,(\pi t)\right) = \\
&= 3\left(\ \text{sen}\left(\frac{\pi}{6}\right)\cos(\pi t) + \cos\left(\frac{\pi}{6}\right)\ \text{sen}\,(\pi t)\right) = \\
&= 3\ \ \text{sen}\left(\frac{\pi}{6} + \pi t\right) = 3\cos\left(\frac{\pi}{2} - \left(\frac{\pi}{6} + \pi t\right)\right) = \\
&= 3\cos\left(\frac{\pi}{3} - \pi t\right) = 3\cos\left(\pi t - \frac{\pi}{3}\right) = \\
&= 3\cos\left(\pi t - \frac{\pi}{3} + 2\pi\right) = 3\cos\left(\pi t + \frac{5\pi}{3}\right)
\end{aligned}$$

Como $3 > 0$, $\pi > 0$ e $\frac{5\pi}{3} \in [0, 2\pi[$, então $x(t)$ é um oscilador harmónico.

22.2.

Este oscilador tem amplitude 3, período $\frac{2\pi}{\pi} = 2$, frequência $\frac{1}{2}$ e fase $\frac{5\pi}{3}$.

22.3.

$$x'(t) = \left(3\cos\left(\pi t + \frac{5\pi}{3}\right)\right)' = -3\ \text{sen}\left(\pi t + \frac{5\pi}{3}\right)\times\pi = -3\pi\ \text{sen}\left(\pi t + \frac{5\pi}{3}\right)$$

$$x''(t) = \left(-3\pi\ \text{sen}\left(\pi t + \frac{5\pi}{3}\right)\right)' = -3\pi\cos\left(\pi t + \frac{5\pi}{3}\right)\times\pi = -3\pi^2\cos\left(\pi t + \frac{5\pi}{3}\right)$$

$$
\begin{aligned}
|x''(t)| = 0 \quad & \Leftrightarrow \quad \left|-3\pi^2 \cos\left(\pi t + \frac{5\pi}{3}\right)\right| = 0 \Leftrightarrow \cos\left(\pi t + \frac{5\pi}{3}\right) = 0 \Leftrightarrow \\
& \Leftrightarrow \quad \pi t + \frac{5\pi}{3} = \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \\
& \Leftrightarrow \quad \pi t = -\frac{5\pi}{3} + \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \\
& \Leftrightarrow \quad \pi t = -\frac{7\pi}{6} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \\
& \Leftrightarrow^* \quad t = \frac{5}{6} + k,\ k \in \mathbb{N}_0
\end{aligned}
$$

$*$ Uma vez que o tempo só toma valores não negativos.

22.4.

$$x''(t) = -3\pi^2 \cos\left(\pi t + \frac{5\pi}{3}\right) = -\pi^2 x(t)$$

Pelo que $k = \pi^2$.

Exercícios propostos

Itens de seleção - páginas 352 a 355

1.

O período positivo mínimo da função cosseno é 2π, pelo que o período positivo mínimo da função f é $\frac{2\pi}{3}$.

Opção (B).

2.

$$-1 \leq \cos(\pi t) \leq 1 \Leftrightarrow 4 \leq \cos(\pi t) + 5 \leq 6$$

Opção (A).

3.

$$\begin{aligned}
&\operatorname{tg}\left(\operatorname{arcsen}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right)-\arccos\left(\operatorname{sen}\left(-\frac{4\pi}{3}\right)\right)+\operatorname{arctg}(\cos 0)=\\
&=\operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{3}\right)-\arccos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+\operatorname{arctg}(1)=\\
&=-\sqrt{3}-\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{4}=-\sqrt{3}+\frac{\pi}{12}
\end{aligned}$$

Opção (B).

4.

Da expressão que define a função, podemos concluir que a amplitude é 3, a pulsação é $\frac{\pi}{4}$ e a fase é $\frac{2\pi}{5}$.

Opção (B).

5.

Da expressão que define a função, podemos concluir que o período é $\frac{2\pi}{\frac{\pi}{2}}=4$ e, consequentemente, a frequência é $\frac{1}{4}$.

Opção (D).

6.

$$-1\leq \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{5}-x\right)\leq 1 \Leftrightarrow 0\leq \left|\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{5}-x\right)\right|\leq 1 \Leftrightarrow 1\leq 1+\left|\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{5}-x\right)\right|\leq 2$$

Opção (B).

7.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}^2\left(\frac{x}{3}\right)}{x^2}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}^2\left(\frac{x}{3}\right)}{\left(\frac{x}{3}\right)^2}\times\frac{1}{9}=^{*}\frac{1}{9}\left(\lim_{y\to 0}\frac{\operatorname{sen} y}{y}\right)^2=\frac{1}{9}\times 1^2=\frac{1}{9}$$

* Considerando a mudança de variável $\frac{x}{3}=y$: se $x\to 0$, então $y\to 0$.

Opção (D).

8.

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{\text{sen}(3x)}{x} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x\to 0^-} \frac{\text{sen}(3x)}{3x} \times 3 =^{*} \lim_{y\to 0^-} \frac{\text{sen}(y)}{y} \times 3 = 3$$

* Considerando a mudança de variável $3x = y$: se $x \to 0^-$, então $y \to 0^-$.

Para que a função seja contínua, é necessário que $f(0) = \lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$. Assim:

$$\cos 0 + \ln(k) = 3 \Leftrightarrow \ln(k) = 2 \Leftrightarrow k = \mathrm{e}^2$$

Opção (C).

9.

Temos que $D_f = \{x \in \mathbb{R}:\ \text{sen}x \geq 0\}$. Sabendo que

$$\text{sen}x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$$

e, atendendo à variação da função seno, temos que:

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} : 2k\pi \leq x \leq \pi + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$$

Opção (D).

10.

Uma vez que o período positivo mínimo da função cosseno é 2π, a função f definida por $f(x) = \cos(2x)$ tem período π.

Opção (C).

11. Temos que:

$$\frac{\text{tg } 150}{\text{tg } \alpha} = -\frac{2}{3} \Leftrightarrow \frac{-\frac{\sqrt{3}}{3}}{\text{tg } \alpha} = -\frac{2}{3} \Leftrightarrow \ \text{tg } \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Por outro lado,

$$1 + \text{ tg }^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha} \Leftrightarrow 1 + \frac{3}{4} = \frac{1}{\cos^2\alpha} \Leftrightarrow \cos^2\alpha = \frac{4}{7}$$

Pelo Teorema Fundamental da Trigonometria,

$$\text{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \Leftrightarrow \ \text{sen}^2\alpha + \frac{4}{7} = 1 \Leftrightarrow \ \text{sen}^2\alpha = \frac{3}{7}$$

Opção (B).

12.
Sabemos que as retas de equação $x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ são assíntotas ao gráfico da função tangente, sendo, por isso, também assíntotas ao gráfico da função f definida por $f(x) = \operatorname{tg} x - 2x$.

Opção (C).

13.
Seja f a função definida por $f(x) = \cos x$. Temos que $f'(x) = -\operatorname{sen} x$.

$$\lim_{h \to 0} \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} + h\right) - \cos\left(\frac{\pi}{2}\right)}{h} = f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1$$

Opção (B).

14.
Para que a função f seja contínua, é necessário que $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}^-} f(x) = \lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}^+} f(x)$.

$$\begin{aligned}\lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} f(x) &= \lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} \frac{2k\cos x}{\frac{\pi}{2} - x} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} \frac{2k\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}{\frac{\pi}{2} - x} = \\ &=^* 2k \lim_{y \to 0^+} \frac{\operatorname{sen} y}{y} = 2k\end{aligned}$$

$*$ Considerando a mudança de variável $\frac{\pi}{2} - x = y$: se $x \to \frac{\pi}{2}^-$, então $y \to 0^+$.

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}^+} f(x) = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}^+} (k^2 + \operatorname{sen}(5x)) = k^2 + 1$$

Assim, para que a função seja contínua, $2k = k^2 + 1 \Leftrightarrow k = 1$.
Opção (C).

15. Temos que:

$$\operatorname{sen} x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(x + \frac{3\pi}{2}\right)$$

Pelo que, esta expressão define um oscilador harmónico de pulsação 1. Desta forma, é solução da equação diferencial $f''(x) = -f(x)$, ou seja, da equação

$f(x) + f''(x) = 0$.

Opção (D).

16. O declive da reta t é dado por $g'(\pi)$.

Como $g'(x) = (\cos^2 x - \text{ sen}x)' = -2\cos x \text{ sen}x - \cos x$, vem que $g'(\pi) = 1$.

Assim, a equação reduzida da reta é $y = x + b$.

$$g(\pi) = \cos^2(\pi) - \text{ sen}(\pi) = 1$$

Como o ponto de coordenadas $(\pi, 1)$ pertence à reta, vem que:

$$1 = 1 \times \pi + b \Leftrightarrow b = 1 - \pi$$

Concluímos assim que $y = x + 1 - \pi$ é uma equação da reta t. Desta forma, os pontos de interseção da reta t com os eixos coordenados têm coordenadas $(0, \pi)$ e $(\pi - 1, 0)$.
Tendo em conta que $1 - \pi < 0$, a área do triângulo definido pela reta t e pelos eixos coordenados é igual a

$$\frac{(\pi - 1)(\pi - 1)}{2} = \frac{(\pi - 1)^2}{2}$$

Opção (B).

17. O domínio da função arco-cosseno é o intervalo $[-1, 1]$. Assim:

$$-1 \leq -\frac{x}{4} \leq 1 \Leftrightarrow -4 \leq -x \leq 4 \Leftrightarrow -4 \leq x \leq 4$$

Ou seja, $D_f = [-4, 4]$.
Temos também que:

$$0 \leq \text{arccos}\left(-\frac{x}{4}\right) \leq \pi \Leftrightarrow -\pi \leq \text{arccos}\left(-\frac{x}{4}\right) - \pi \leq 0$$

Ou seja, $D'_f = [-\pi, 0]$.

Opção (C).

18.
O período deste oscilador não pode ser 4, pelo que a opção (C) é falsa.

Sabemos que $f(0) = 0$, pelo que a opção (B) é falsa.

Sabemos que $f(1) < 0$, pelo que a opção (D) é falsa.

Opção (A).

19.
O termo independente de x, neste desenvolvimento, é:

$$C_2^4 (2x\cos\alpha)^2 \left(-\frac{\text{sen}\alpha}{x}\right)^2 = 6 \times 4\cos^2\alpha \ \text{sen}^2\alpha = 6 \ \text{sen}^2(2\alpha)$$

Opção (B).

20. O período da função f é $\frac{2\pi}{2} = \pi$. Assim, a função tem um maximizante e um minimizante no intervalo $[0,\pi[$ e, consequentemente, 50 maximizantes e 50 minimizantes no intervalo $[0, 50\pi[$. Como 0 é um maximizante da função, temos que, no intervalo $]0, 50\pi[$, a função tem 99 maximizantes ou minimizantes.

Opção (B).

21.

$$\begin{aligned}
\lim u_n &= \lim \ \text{tg}\left(-\frac{\pi}{2} + \ln\left(1 - \frac{1}{x}\right)\right) = \text{tg}\left(-\frac{\pi}{2} + \ln\left(1 - \frac{1}{+\infty}\right)\right) = \\
&= \text{tg}\left(-\frac{\pi}{2} + \ln\left(1 - 0^+\right)\right) = \text{tg}\left(-\frac{\pi}{2} + \ln\left(1^-\right)\right) = \\
&= \text{tg}\left(-\frac{\pi}{2} + 0^-\right) = \text{tg}\left(-\frac{\pi}{2}^-\right) = +\infty
\end{aligned}$$

Opção (B).

22. Temos que:

$$\lim(\pi - \mathrm{e}^{-n}) = \pi - 0^+ = \pi^-$$

Assim,

$$\lim u_n = \lim_{x\to\pi^-} f(x) = \lim_{x\to\pi^-} \cos x = \cos\pi = -1$$

Opção (A).

23. Como as retas r e s são paralelas, então têm o mesmo declive.
Seja f a função seno e g a função cosseno. Como as retas r e s são tangentes aos gráficos de f e g, respetivamente, no ponto de abcissa a, temos que $f'(a) = g'(a)$.

$$f'(x) = (\ \mathrm{sen} x)' = \cos x \quad \text{e} \quad g'(x) = (\cos x)' = -\ \mathrm{sen} x$$

Assim, para descobrir o valor de a é necessário que:

$$\cos a = -\ \mathrm{sen} a \Leftrightarrow a = \frac{3\pi}{4} + k\pi,\ k\in\mathbb{Z} \Leftrightarrow^{*}= \frac{3\pi}{4}$$

$*$ No intervalo considerado.

Opção (C).

24. Sabendo que $\cos\alpha = \dfrac{2}{3}$ e que $\alpha\in[0,\pi]$, temos, pelo Teorema Fundamental da Trigonometria:

$$\mathrm{sen}^2\alpha + \left(\frac{2}{3}\right)^2 = 1 \Leftrightarrow\ \mathrm{sen}^2\alpha = \frac{5}{9} \Leftrightarrow^{*}\ \mathrm{sen}\alpha = \frac{\sqrt{5}}{3}$$

$*$ No intervalo considerado.

Assim,

$$\mathrm{sen}\left(\mathrm{arccos}\left(\frac{2}{3}\right)\right) = \frac{\sqrt{5}}{3}$$

Sabendo que $\ \mathrm{tg}\ \alpha = 2$ e que $\alpha \in \left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$, temos que:

$$1 + 2^2 = \frac{1}{\cos^2\alpha} \Leftrightarrow \cos^2\alpha = \frac{1}{5} \Leftrightarrow^{*} \cos\alpha = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

$*$ No intervalo considerado.
Assim,

$$\cos\left(\mathrm{arctg}(2)\right) = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

Podemos, então, obter o valor exato da expressão indicada:

$$\text{arcsen}\left(\text{ sen}\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right)+3\text{ sen}\left(\text{arccos}\left(\frac{2}{3}\right)\right)-5\cos\left(\text{arctg}(2)\right)=$$

$$=\text{arcsen}\left(\text{ sen}\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)+3\times\frac{\sqrt{5}}{3}-5\times\frac{\sqrt{5}}{5}=\frac{\pi}{4}+\sqrt{5}-\sqrt{5}=\frac{\pi}{4}$$

Opção (A).

25. Todas as soluções desta equação diferencial podem ser escritas na forma $x(t)=A\cos(\sqrt{\alpha}t+b)$.

Opção (D).

Exercícios propostos

Itens de construção - páginas 356 a 366

1. Sejam C' e D' as projeções ortogonais de C e D sobre a reta AB. Uma vez que $A\hat{B}C=70°$ e $D\hat{A}B=45°$, sabemos que $C'\in[AB]$ e $D'\in[AB]$. Assim, o triângulo $[C'BC]$ é retângulo em C', o triângulo $[AD'D]$ é retângulo em D', $C'\hat{C}B=90°-70°=20°$, $A\hat{D}D'=90°-45°=45°$, $\overline{AB}=\overline{AD'}+\overline{D'C'}+\overline{C'B}$ e $\overline{D'C'}=\overline{DC}=6$.
Pela Lei dos Senos, aplicada no triângulo $C'BC$, temos:

$$\frac{\text{sen}90°}{8}=\frac{\text{sen}20°}{\overline{C'B}}\Leftrightarrow\overline{C'B}\approx 2,736$$

$$\frac{\text{sen}90°}{8}=\frac{\text{sen}70°}{\overline{C'C}}\Leftrightarrow\overline{C'C}\approx 7,518$$

Como $\overline{C'C}=\overline{D'D}$, pela Lei dos Senos, aplicada no triângulo $D'AD$, temos:

$$\frac{\text{sen}90°}{\overline{AD}}=\frac{\text{sen}45°}{7,518}\Leftrightarrow\overline{AD}\approx 10,632$$

$$\frac{\text{sen}45°}{\overline{AD'}}=\frac{\text{sen}45°}{7,518}\Leftrightarrow\overline{AD'}\approx 7,518$$

O perímetro do trapézio é $6+8+2,736+6+7,518+10,632 \approx 40,9$ u.c.

2.
2.1.

$$\begin{aligned}\frac{\operatorname{sen}x - 2\operatorname{sen}^3 x}{2\cos^3 x - \cos x} &= \frac{\operatorname{sen}x(1-2\operatorname{sen}^2 x)}{\cos x(2\cos^2 x - 1)} = \frac{\operatorname{sen}x}{\cos x} \times \frac{1-\operatorname{sen}^2 x - \operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x + \cos^2 x - 1} = \\ &= \operatorname{tg} x \frac{\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x} = \operatorname{tg} x\end{aligned}$$

2.2.

$$\frac{1-\cos(2x)}{2} = \frac{1-(\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x)}{2} = \frac{1-\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x}{2} = \frac{2\operatorname{sen}^2 x}{2} = \operatorname{sen}^2 x$$

2.3.

$$\begin{aligned}(1+\cos(2x)) \times \operatorname{tg} x &= (1+\cos(2x)) \times \frac{\operatorname{sen}x}{\cos x} = (1+\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x) \times \frac{\operatorname{sen}x}{\cos x} = \\ &= 2\cos^2 x \times \frac{\operatorname{sen}x}{\cos x} = 2\operatorname{sen}x\cos x = \operatorname{sen}(2x)\end{aligned}$$

3.
3.1.

$$\begin{aligned}1+\operatorname{sen}(2x) = \frac{3}{2} &\Leftrightarrow \operatorname{sen}(2x) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \vee 2x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{12} + k\pi \vee x = \frac{5\pi}{12} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\end{aligned}$$

3.2.

$$3\cos(2x) = -3 \Leftrightarrow \cos(2x) = -1 \Leftrightarrow 2x = \pi + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$$

3.3.

$$\cos(2x) = 0 \Leftrightarrow 2x = \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z}$$

3.4.

$$2\ \text{sen}x = -\sqrt{3} \Leftrightarrow\ \text{sen}x = -\frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi \vee x = -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$$

3.5.

$$\text{tg}\ ^2(x) = 1 \Leftrightarrow\ \text{tg}\ x = 1 \vee\ \text{tg}\ x = -1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z}$$

3.6.

$$\begin{aligned} \text{tg}\ \left(\frac{x}{2}\right) - \sqrt{3} = -2\ \text{tg}\ \left(\frac{x}{2}\right) \quad &\Leftrightarrow \quad \text{tg}\ \left(\frac{x}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}}{3} \Leftrightarrow \frac{x}{2} = \frac{\pi}{6} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \quad x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

3.7.

$$\begin{aligned} \sqrt{3}\ \ \text{tg}\ (5x) = 3 \quad &\Leftrightarrow \quad \text{tg}\ (5x) = \sqrt{3} \Leftrightarrow 5x = \frac{\pi}{3} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \quad x = \frac{\pi}{15} + \frac{k\pi}{5},\ k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

3.8.

$$\begin{aligned} \cos(\pi - 2x) = -\frac{1}{2} \quad &\Leftrightarrow \quad \cos(-2x) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \quad -2x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \vee -2x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \quad x = -\frac{\pi}{6} + k\pi \vee x = \frac{\pi}{6} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

3.9.

$$\begin{aligned} 8\ \ \text{sen}\left(3x + \frac{\pi}{6}\right) = -4 \quad &\Leftrightarrow \quad \text{sen}\left(3x + \frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \quad 3x + \frac{\pi}{6} = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi \vee 3x + \frac{\pi}{6} = -\frac{5\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \quad 3x = -\frac{2\pi}{6} + 2k\pi \vee 3x = -\pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \quad x = -\frac{\pi}{9} + \frac{2k\pi}{3} \vee x = -\frac{\pi}{3} + \frac{2k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

3.10.

$$\begin{aligned}\cos(3x)=-\cos(x) &\Leftrightarrow \cos(3x)=\cos(\pi-x)\Leftrightarrow\\ &\Leftrightarrow \Leftrightarrow 3x=\pi-x+2k\pi \vee 3x=-\pi+x+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow\\ &\Leftrightarrow 4x=\pi+2k\pi\vee 2x=-\pi+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow\\ &\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2}\vee x=-\frac{\pi}{2}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\end{aligned}$$

3.11.

$$\begin{aligned}\operatorname{sen}(3x)=-\operatorname{sen}(x) &\Leftrightarrow \operatorname{sen}(3x)=\operatorname{sen}(-x)\Leftrightarrow\\ &\Leftrightarrow 3x=-x+2k\pi\vee 3x=\pi-(-x)+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow\\ &\Leftrightarrow 4x=2k\pi\vee 2x=\pi+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow\\ &\Leftrightarrow x=\frac{k\pi}{2}\vee x=\frac{\pi}{2}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow\\ &\Leftrightarrow x=\frac{k\pi}{2},\ k\in\mathbb{Z}\end{aligned}$$

3.12.

$$\begin{aligned}\operatorname{tg}(3x)=-\operatorname{tg}x &\Leftrightarrow \operatorname{tg}(3x)=\operatorname{tg}(-x)\Leftrightarrow 3x=-x+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow\\ &\Leftrightarrow 4x=k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow x=\frac{k\pi}{4},\ k\in\mathbb{Z}\end{aligned}$$

4.

4.1. O período positivo mínimo de f é $\dfrac{2\pi}{0,5}=4\pi$.

4.2.

$$\begin{aligned}-1\leq \operatorname{sen}(0,5x+\pi)\leq 1 &\Leftrightarrow -2\leq 2\operatorname{sen}(0,5x+\pi)\leq 2\Leftrightarrow\\ &\Leftrightarrow 1\leq 3+2\operatorname{sen}(0,5x+\pi)\leq 5\end{aligned}$$

Pelo que $D'_f=[1,5]$.

4.3. Sabemos que $\alpha\in\left]\dfrac{\pi}{2},\dfrac{3\pi}{2}\right[$ e que $\operatorname{tg}\alpha=\frac{1}{2}$. Por outro lado,

$$1+\operatorname{tg}^2\alpha=\frac{1}{\cos^2\alpha}\Leftrightarrow 1+\frac{1}{4}=\frac{1}{\cos^2\alpha}\Leftrightarrow\cos^2\alpha=\frac{4}{5}$$

Pelo Teorema Fundamental da Trigonometria:

$$\text{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \Leftrightarrow \text{sen}^2\alpha + \frac{4}{5} = 1 \Leftrightarrow \text{sen}^2\alpha = \frac{1}{5} \Leftrightarrow \text{sen}\alpha =^{*} -\frac{\sqrt{5}}{5}$$

∗No intervalo considerado.

$$\begin{aligned} f(2\alpha) &= 3 + 2\ \text{sen}(0,5 \times 2\alpha + \pi) = 3 + 2\ \text{sen}(\alpha + \pi) = 3 - 2\ \text{sen}\alpha = \\ &= 3 + \frac{2\sqrt{5}}{5} = \frac{15 + 2\sqrt{5}}{5} \end{aligned}$$

5.
5.1.

$$\begin{aligned} \text{sen}(15°) &= \text{sen}(45° - 30°) = \text{sen}(45°)\cos(30°) - \cos(45°)\ \text{sen}(30°) = \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} \end{aligned}$$

5.2.

$$\begin{aligned} \cos\left(\frac{\pi}{12}\right) &= \cos\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) \times \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + \text{sen}\left(\frac{\pi}{3}\right) \times \text{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right) = \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} \end{aligned}$$

5.3.

$$\begin{aligned} \text{tg}\ (105°) &= \text{tg}\ (45° + 60°) = \frac{\text{sen}(45° + 60°)}{\cos(45° + 60°)} = \\ &= \frac{\text{sen}(45°)\cos(60°) + \cos(45°)\ \text{sen}(60°)}{\cos(45°)\cos(60°) - \text{sen}(45°)\ \text{sen}(60°)} = \\ &= \frac{\frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{\sqrt{2} - \sqrt{6}} = \\ &= \frac{(\sqrt{2} + \sqrt{6})^2}{2 - 6} = \frac{2 + 6 + 2\sqrt{12}}{-4} = \frac{8 + 4\sqrt{3}}{-4} = -2 - \sqrt{3} \end{aligned}$$

5.4.

$$\begin{aligned}
\text{tg}\left(\frac{5\pi}{12}\right) &= \text{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\text{sen}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{6}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{6}\right)} = \\
&= \frac{\text{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)+\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\ \text{sen}\left(\frac{\pi}{6}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)-\ \text{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right)\ \text{sen}\left(\frac{\pi}{6}\right)} = \\
&= \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{\sqrt{6}-\sqrt{2}} = \\
&= \frac{(\sqrt{2}+\sqrt{6})^2}{6-2} = \frac{2+6+2\sqrt{12}}{4} = \frac{8+4\sqrt{3}}{4} = 2+\sqrt{3}
\end{aligned}$$

6.

6.1. Seja E' a projeção ortogonal de E sobre a reta AB. Temos que $E' \in [AB]$ e, como $\overline{AE} = \overline{BE}$, temos que $\overline{AE'} = \frac{a}{2}$. Sabemos que a área a sombreado pode ser dada por:

$$a^2 - 4 \times \frac{a \times \overline{EE'}}{2}$$

Por outro lado, temos que:

$$\text{tg } x = \frac{\overline{EE'}}{\overline{AE'}} \Leftrightarrow \overline{EE'} = \text{ tg } x \times \frac{a}{2}$$

Assim, a área A pode ser dada em função de x por:

$$A(x) = a^2 - 4 \times \frac{a \times \text{ tg } x \times \frac{a}{2}}{2} = a^2(1 - \text{ tg } x)$$

6.2. Sabendo que $\text{sen}\theta = \frac{1}{3}$, pelo Teorema Fundamental da Trigonometria:

$$\left(\frac{1}{3}\right)^2 + \cos^2\theta = 1 \Leftrightarrow \cos^2 = \frac{8}{9}$$

Assim,

$$1+\text{ tg }^2\theta = \frac{1}{\cos^2\theta} \Leftrightarrow 1+\text{ tg }^2\theta = \frac{1}{\frac{8}{9}} \Leftrightarrow \text{ tg }^2\theta = \frac{1}{8} \Leftrightarrow^* \text{ tg }\theta = \frac{1}{2\sqrt{2}} = \text{ tg }\theta = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

∗No intervalo considerado.

Podemos então concluir que:

$$A(\theta) = 6^2(1 - \operatorname{tg}\theta) = 36\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{4}\right) = 36 - 9\sqrt{2}$$

7. Determinar o valor da a:

$$\begin{aligned} -1 \leq \cos\left(bx + \frac{\pi}{6}\right) \leq 1 \quad &\Leftrightarrow \quad -a \leq a\cos\left(bx + \frac{\pi}{6}\right) \leq a \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \quad -a - 1 \leq a\cos\left(bx + \frac{\pi}{6}\right) - 1 \leq a - 1 \end{aligned}$$

Logo, $a - 1 = 1 \Leftrightarrow a = 2$.

Determinar o valor de b:
Pelo gráfico, podemos verificar que o período de f é $\frac{5\pi}{3} - \frac{-7\pi}{3} = \frac{12\pi}{3} = 4\pi$.
Assim, temos que:

$$\frac{2\pi}{b} = 4\pi \Leftrightarrow b = \frac{1}{2}$$

8.
8.1.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}x}{4x} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \frac{1}{4} \times \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}x}{x} = \frac{1}{4}$$

8.2.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}(4x)}{x} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} 4 \times \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}(4x)}{4x} = 4 \times \lim_{y\to 0}\frac{\operatorname{sen}y}{y} = 4$$

∗ Considerando a mudança de variável $4x = y$: se $x \to 0$, então $y \to 0$.

8.3.

$$\lim_{x\to 0}\frac{4x}{\operatorname{sen}(x)} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} 4 \times \lim_{x\to 0}\frac{x}{\operatorname{sen}x} = 4 \times \lim_{x\to 0}\frac{1}{\frac{\operatorname{sen}x}{x}} = 4 \times \frac{1}{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}x}{x}} = 4$$

8.4.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}(4\pi + x)}{x} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}x}{x} = 1$$

8.5.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}(4x)}{-5x} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} -\frac{4}{5}\times\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}(4x)}{4x} =^{*} -\frac{4}{5}\times\lim_{y\to 0}\frac{\operatorname{sen}(y)}{y} = -\frac{4}{5}$$

$*$ Considerando a mudança de variável $4x = y$: se $x \to 0$, então $y \to 0$.

8.6.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}(4x)}{\operatorname{sen}(5x)} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x\to 0}\frac{\frac{\operatorname{sen}(4x)}{x}}{\frac{\operatorname{sen}(5x)}{x}} = \frac{\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{sen}(4x)}{x}}{\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{sen}(5x)}{x}} = \frac{4\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{sen}(4x)}{4x}}{5\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{sen}(5x)}{5x}} =$$

$$=^{*} \frac{4\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{\operatorname{sen}(y)}{y}}{5\lim\limits_{z\to 0}\dfrac{\operatorname{sen}(z)}{z}} = \frac{4}{5}$$

$*$ Considerando as mudanças de variável $4x = y$, $5x = z$: se $x \to 0$, então $y \to 0$ e $z \to 0$.

8.7.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}x}{x^5} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x\to 0}\frac{1}{x^4}\times\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}x}{x} = +\infty\times 1 = +\infty$$

8.8.

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\operatorname{sen}x}{x^4} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x^3}\times\lim_{x\to 0^+}\frac{\operatorname{sen}x}{x} = +\infty\times 1 = +\infty$$

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{\operatorname{sen}x}{x^4} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x\to 0^-}\frac{1}{x^3}\times\lim_{x\to 0^-}\frac{\operatorname{sen}x}{x} = -\infty\times 1 = -\infty$$

Conclui-se que $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{sen}x}{x^4}$ não existe.

8.9.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}^2 x}{x^2} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \left(\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}x}{x}\right)^2 = 1^2 = 1$$

8.10.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}{x}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}x}{x}=1$$

8.11.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}\, x}{x}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}x}{\cos x\times x}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x}\times\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}x}{x}=1\times 1=1$$

8.12.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}(3x)}{\operatorname{tg}\, x}&\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}(3x)\cos x}{\operatorname{sen}x}=\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}(3x)}{\operatorname{sen}x}\times\lim_{x\to 0}\cos x=\\&=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\operatorname{sen}(3x)}{x}}{\frac{\operatorname{sen}x}{x}}\times 1=\frac{3\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}(3x)}{3x}}{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}x}{x}}=^{*}\frac{3\lim\limits_{y\to 0}\frac{\operatorname{sen}(y)}{y}}{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}x}{x}}=3\end{aligned}$$

$*$ Considerando a mudança de variável $3x=y$: se $x\to 0$, então $y\to 0$.

9.

$$g'(x)=(1-\cos(3x))'=3\,\operatorname{sen}(3x)$$

$$\begin{aligned}g'(x)=\frac{3\sqrt{3}}{2}&\Leftrightarrow 3\,\operatorname{sen}(3x)=\frac{3\sqrt{3}}{2}\Leftrightarrow\operatorname{sen}(3x)=\frac{\sqrt{3}}{2}\Leftrightarrow\\&\Leftrightarrow 3x=\frac{\pi}{3}+2k\pi\vee 3x=\frac{2\pi}{3}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow\\&\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{9}+\frac{2k\pi}{3}\vee x=\frac{2\pi}{9}+\frac{2k\pi}{3},\ k\in\mathbb{Z}\end{aligned}$$

10. Sabendo que $D\widehat{E}C=65°$, temos que $A\widehat{E}B=65°$, $C\widehat{E}B=180°-65°=115°$ e $A\widehat{E}D=115°$.
Utilizando a Lei dos Cossenos podemos obter o comprimento de todos os lados do trapézio.

$$\overline{AD}^2=16^2+5^2-2\times 16\times 5\times\cos(115°)\Leftrightarrow\overline{AD}^2\approx 348{,}619\Leftrightarrow\overline{AD}\approx 18{,}671$$

$$\overline{DC}^2 = 6^2 + 5^2 - 2 \times 6 \times 5 \times \cos(65°) \Leftrightarrow \overline{DC}^2 \approx 35,643 \Leftrightarrow \overline{DC} \approx 5,970$$

$$\overline{CB}^2 = 17^2 + 6^2 - 2 \times 17 \times 6 \times \cos(115°) \Leftrightarrow \overline{CB}^2 \approx 411,614 \Leftrightarrow \overline{CB} \approx 20,289$$

$$\overline{AB}^2 = 16^2 + 17^2 - 2 \times 16 \times 17 \times \cos(65°) \Leftrightarrow \overline{AB}^2 \approx 315,096 \Leftrightarrow \overline{AB} \approx 17,751$$

O perímetro do trapézio é $18,671 + 5,970 + 20,289 + 17,751 = 62,681$, ou seja, $62,7$ u.c., aproximadamente.

11. Uma vez que $x \in \left]-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{6}\right[$, temos que $\frac{1}{2} < \cos x \leq 1$. Assim,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} < 1 - k^2 \leq 1 \quad &\Leftrightarrow \quad -\frac{1}{2} < -k^2 \leq 0 \Leftrightarrow 0 \leq k^2 < \frac{1}{2} \Leftrightarrow k^2 < \frac{1}{2} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \quad k < \frac{\sqrt{2}}{2} \wedge k > -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{aligned}$$

Logo, C.S $= \left]-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right[$.

12. Sabemos que:

$$\text{sen}\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \frac{5}{13} \Leftrightarrow \text{sen}\left(\frac{\pi}{2} - (-\alpha)\right) = \frac{5}{13} \Leftrightarrow \cos(-\alpha) = \frac{5}{13} \Leftrightarrow \cos(\alpha) = \frac{5}{13}$$

Pelo Teorema Fundamental da Trigonometria:

$$\text{sen}^2\alpha + \left(\frac{5}{13}\right)^2 = 1 \Leftrightarrow \text{sen}^2\alpha = 1 - \frac{25}{169} \Leftrightarrow \text{sen}^2\alpha = \frac{144}{169} \Leftrightarrow^* \text{sen}\alpha = -\frac{12}{13}$$

$*$No intervalo considerado.

Por outro lado,

$$\text{tg}\ (2013\pi - \beta) = \frac{4}{3} \Leftrightarrow \text{tg}\ (-\beta) = \frac{4}{3} \Leftrightarrow \text{tg}\ (\beta) = -\frac{4}{3}$$

pelo que:

$$1+\left(-\frac{4}{3}\right)^2=\frac{1}{\cos^2\beta}\Leftrightarrow\frac{25}{9}=\frac{1}{\cos^2\beta}\Leftrightarrow\cos^2\beta=\frac{9}{25}\Leftrightarrow^*\cos\beta=-\frac{3}{5}$$

∗No intervalo considerado.

Além disso, novamente pelo Teorema Fundamental da Trigonometria:

$$\text{sen}^2\beta+\left(-\frac{3}{5}\right)^2=1\Leftrightarrow\ \text{sen}^2\beta=\frac{16}{25}\Leftrightarrow^*\ \text{sen}\beta=\frac{4}{5}$$

∗No intervalo considerado.

12.1.

$$\text{sen}(2\alpha)=2\ \text{sen}\alpha\cos\alpha=2\times\left(-\frac{12}{13}\right)\times\frac{5}{13}=-\frac{120}{169}$$

12.2.

$$\begin{aligned}\text{sen}(\alpha+\beta)&=\ \text{sen}\alpha\cos\beta+\cos\alpha\ \text{sen}\beta=-\frac{12}{13}\times\left(-\frac{3}{5}\right)+\frac{5}{13}\times\frac{4}{5}=\\&=\frac{56}{65}\end{aligned}$$

12.3.

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\ \text{sen}\alpha\ \text{sen}\beta=\frac{5}{13}\times\left(-\frac{3}{5}\right)-\left(-\frac{12}{13}\right)\times\frac{4}{5}=\frac{33}{65}$$

12.4.

$$\begin{aligned}\text{tg}\ (2\alpha)&=\frac{\text{sen}(2\alpha)}{\cos(2\alpha)}=\frac{2\ \text{sen}\alpha\cos\alpha}{\cos^2\alpha-\ \text{sen}^2\alpha}=\\&=\frac{2\times\left(-\frac{12}{13}\right)\times\frac{5}{13}}{\left(\frac{5}{13}\right)^2-\left(-\frac{12}{13}\right)^2}=\frac{-\frac{120}{169}}{-\frac{119}{169}}=\frac{120}{119}\end{aligned}$$

12.5.

$$\cos\left(\frac{\pi}{4}+\beta\right)=\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\cos\beta-\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right)\operatorname{sen}\beta=\frac{\sqrt{2}}{2}\times\left(-\frac{3}{5}\right)-\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{4}{5}=-\frac{7\sqrt{2}}{10}$$

12.6.

$$\begin{aligned}\cos(3\alpha)=\cos(\alpha+2\alpha) &= \cos\alpha\cos(2\alpha)-\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}(2\alpha)=\\ &= \cos\alpha(\cos^2\alpha-\operatorname{sen}^2\alpha)-\operatorname{sen}\alpha(2\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha)=\\ &= \frac{5}{13}\left(\left(\frac{5}{13}\right)^2-\left(-\frac{12}{13}\right)^2\right)-\left(-\frac{12}{13}\right)\left(2\times\left(-\frac{12}{13}\right)\times\frac{5}{13}\right)=\\ &= \frac{5}{13}\times\left(-\frac{119}{169}\right)+\frac{12}{13}\times\left(-\frac{120}{169}\right)=-\frac{2035}{2197}\end{aligned}$$

13.

13.1.

$$\operatorname{sen}(4x)=\operatorname{sen}(2\times 2x)=2\operatorname{sen}(2x)\cos(2x)$$

13.2.

$$\begin{aligned}\operatorname{sen}(3x) &= \operatorname{sen}(x+2x)=\operatorname{sen}x\cos(2x)+\cos x\operatorname{sen}(2x)=\\ &= \operatorname{sen}x(\cos^2x-sen^2x)+\cos x(2\operatorname{sen}x\cos x)=\\ &= \operatorname{sen}x\cos^2x-\operatorname{sen}^3x+2\operatorname{sen}x\cos^2x=\\ &= 3\operatorname{sen}x(1-\operatorname{sen}^2x)-\operatorname{sen}^3x=\\ &= 3\operatorname{sen}x-4\operatorname{sen}^3x\end{aligned}$$

13.3.

$$
\begin{aligned}
& \operatorname{sen}\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\ \operatorname{sen}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)= \\
= & \left(\operatorname{sen} x \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)+\cos x\ \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)\left(\operatorname{sen} x \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)-\cos x\ \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)= \\
= & \left(\operatorname{sen} x\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)+\cos x\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right)\left(\operatorname{sen} x\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)-\cos x\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right)= \\
= & \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2\left(\operatorname{sen}^2 x-\cos^2 x\right)= \\
= & \frac{1}{2}\left(\operatorname{sen}^2 x-1+\operatorname{sen}^2 x\right)= \\
= & \operatorname{sen}^2 x-\frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

13.4.

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{\operatorname{tg}\left(x+\frac{\pi}{4}\right)} & =\frac{\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}{\operatorname{sen}\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}=\frac{\cos x\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)-\operatorname{sen} x\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}{\operatorname{sen} x\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)+\cos x\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}= \\
& =\frac{\cos x-\operatorname{sen} x}{\operatorname{sen} x+\cos x}
\end{aligned}
$$

13.5.

$$
\begin{aligned}
\frac{1+\operatorname{sen}(2x)}{\cos(2x)} & =\frac{1+2\operatorname{sen} x \cos x}{\cos^2 x-\operatorname{sen}^2 x}=\frac{\frac{1+2\operatorname{sen} x \cos x}{\cos^2 x}}{\frac{\cos^2 x-\operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x}}= \\
& =\frac{\frac{1}{\cos^2 x}+2\frac{\operatorname{sen} x \cos x}{\cos^2 x}}{1-\operatorname{tg}^2 x}=\frac{1+\operatorname{tg}^2 x+2\operatorname{tg} x}{1-\operatorname{tg}^2 x}= \\
& =\frac{(1+\operatorname{tg} x)^2}{(1+\operatorname{tg} x)(1-\operatorname{tg} x)}=\frac{1+\operatorname{tg} x}{1-\operatorname{tg} x}
\end{aligned}
$$

13.6.

$$\begin{aligned}
1+\frac{\cos(3x)}{\cos x} &= 1+\frac{\cos(x)\cos(2x)-\operatorname{sen}x\operatorname{sen}(2x)}{\cos x}=\\
&= 1+\frac{\cos(x)(\cos^2 x-\operatorname{sen}^2 x)-\operatorname{sen}x\times 2\operatorname{sen}x\cos x}{\cos x}=\\
&= 1+\cos^2 x-\operatorname{sen}^2 x-2\operatorname{sen}^2 x=\\
&= 1-\operatorname{sen}^2 x+\cos^2 x-2\operatorname{sen}^2 x=\\
&= \cos^2 x+\cos^2 x-2\operatorname{sen}^2 x=\\
&= 2(\cos^2 x-\operatorname{sen}^2 x)=\\
&= 2\cos(2x)
\end{aligned}$$

14.
14.1.

$$\begin{aligned}
\cos x=-\operatorname{sen}x &\Leftrightarrow \cos x=\operatorname{sen}(-x)\Leftrightarrow \cos x=\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)\Leftrightarrow\\
&\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{2}+x+2k\pi \vee x=-\frac{\pi}{2}-x+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow\\
&\Leftrightarrow x=-\frac{\pi}{2}-x+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow\\
&\Leftrightarrow 2x=-\frac{\pi}{2}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow\\
&\Leftrightarrow x=-\frac{\pi}{4}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}
\end{aligned}$$

14.2.

$$\begin{aligned}
\cos\left(\frac{x}{2}\right)-\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right)=0 &\Leftrightarrow \cos\left(\frac{x}{2}\right)=\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right)\Leftrightarrow\\
&\Leftrightarrow \frac{x}{2}=\frac{\pi}{4}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow\\
&\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{2}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}
\end{aligned}$$

14.3.

$$\begin{aligned}
\operatorname{sen}(2x) - \cos x = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad \operatorname{sen}(2x) = \cos(x) \Leftrightarrow \operatorname{sen}(2x) = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow \quad 2x = \frac{\pi}{2} - x + 2k\pi \vee 2x = \pi - \left(\frac{\pi}{2} - x\right) + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow \quad 3x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \vee x = \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow \quad x = \frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3} \vee x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}
\end{aligned}$$

14.4.

$$\begin{aligned}
\operatorname{sen}(2x) = \cos\left(2x - \frac{5\pi}{6}\right) \quad &\Leftrightarrow \quad \operatorname{sen}(2x) = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - 2x + \frac{5\pi}{6}\right) \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow \quad \operatorname{sen}(2x) = \operatorname{sen}\left(\frac{4\pi}{3} - 2x\right) \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow \quad 2x = \frac{4\pi}{3} - 2x + 2k\pi \vee 2x = -\frac{4\pi}{3} + 2x + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow \quad 2x = \frac{4\pi}{3} - 2x + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow \quad 4x = \frac{4\pi}{3} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow \quad x = \frac{\pi}{3} + \frac{k\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z}
\end{aligned}$$

14.5.

$$\begin{aligned}
\frac{\cos x}{1 - \operatorname{sen} x} = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad \cos x = 0 \wedge 1 - \operatorname{sen} x \neq 0 \Leftrightarrow \cos x = 0 \wedge \operatorname{sen} x \neq 1 \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow \quad x = \frac{\pi}{2} + k\pi \wedge x \neq \frac{\pi}{2} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow \quad x = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}
\end{aligned}$$

14.6.

$$\begin{aligned}
-2\cos x\ \text{sen}x = \cos x &\Leftrightarrow -2\cos x\ \text{sen}x - \cos x = 0 \Leftrightarrow -\cos x(2\ \text{sen}x + 1) = 0 \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow \cos x = 0 \vee\ \text{sen}x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi \vee x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi \vee x = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}
\end{aligned}$$

14.7.

$$\begin{aligned}
\text{sen}x + \text{sen}(2x) = 0 &\Leftrightarrow \text{sen}x + 2\ \text{sen}x\cos x = 0 \Leftrightarrow \text{sen}x(1 + 2\cos x) = 0 \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow \text{sen}x = 0 \vee \cos x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow x = k\pi \vee x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \vee x = \frac{4\pi}{3} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}
\end{aligned}$$

14.8.

$$\begin{aligned}
2\ \text{sen}x\cos x + 2 = 1 &\Leftrightarrow \text{sen}(2x) = -1 \Leftrightarrow 2x = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow x = \frac{3\pi}{4} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}
\end{aligned}$$

14.9.

$$\begin{aligned}
\text{sen}x\cos x = \frac{1}{4} &\Leftrightarrow 2\ \text{sen}x\cos x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \text{sen}(2x) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow 2x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \vee 2x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{12} + k\pi \vee x = \frac{5\pi}{12} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}
\end{aligned}$$

14.10.

$$\begin{aligned}
\cos^2 x - \text{sen}^2 x = \cos\left(\frac{\pi}{5}\right) &\Leftrightarrow \cos(2x) = \cos\left(\frac{\pi}{5}\right) \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow 2x = \frac{\pi}{5} + 2k\pi \vee 2x = -\frac{\pi}{5} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{10} + k\pi \vee x = -\frac{\pi}{10} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}
\end{aligned}$$

14.11.

$$\frac{2\sqrt{3}\ \text{tg}\ x}{1-\ \text{tg}\ ^2x}=1 \;\Leftrightarrow\; \frac{2\sqrt{3}\frac{\text{sen}x}{\cos x}}{1-\frac{\text{sen}^2x}{\cos^2 x}}=1 \Leftrightarrow \frac{\frac{2\sqrt{3}\ \text{sen}x}{\cos x}}{\frac{\cos^2 x-\ \text{sen}^2 x}{\cos^2 x}}=\frac{2\sqrt{3}\ \text{sen}x\cos x}{\cos^2 x-\ \text{sen}^2x}=1\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\; \frac{\sqrt{3}\ \text{sen}(2x)}{\cos(2x)}=1\Leftrightarrow\sqrt{3}\ \text{tg}\ (2x)=1\Leftrightarrow\ \text{tg}\ (2x)=\frac{\sqrt{3}}{3}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\; 2x=\frac{\pi}{6}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\; x=\frac{\pi}{12}+\frac{k\pi}{2},\ k\in\mathbb{Z}$$

14.12.

$$2\cos x+2\cos(2x)=0 \;\Leftrightarrow\; \cos x=-\cos(2x)\Leftrightarrow\cos x=\cos(\pi-2x)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\; x=\pi-2x+2k\pi\vee x=-\pi+2x+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\; 3x=\pi+2k\pi\vee -x=-\pi+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\; x=\frac{\pi}{3}+\frac{2k\pi}{3}\vee x=\pi-2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$$

15.

15.1.

$$\cos x=\ \text{sen}x\Leftrightarrow^* x=\frac{\pi}{4}\vee x=\frac{5\pi}{4}$$

∗No intervalo considerado.

15.2.

$$2\cos(2x)+\sqrt{3}=0 \;\Leftrightarrow\; 2\cos(2x)=-\sqrt{3}\Leftrightarrow\cos(2x)=-\frac{\sqrt{3}}{2}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\; 2x=\frac{5\pi}{6}+2k\pi\vee 2x=\frac{7\pi}{6}+2k\pi,k\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\; x=\frac{5\pi}{12}+k\pi\vee x=\frac{7\pi}{12}+k\pi,k\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow^*\; x=\frac{5\pi}{12}\vee x=\frac{7\pi}{12}\vee x=\frac{17\pi}{12}\vee x=\frac{19\pi}{12}$$

∗No intervalo considerado.

15.3.

$$
\begin{aligned}
2\ \mathrm{sen}(3x)+\sqrt{2}=0 \quad &\Leftrightarrow \quad \mathrm{sen}(3x)=-\frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow \quad 3x=-\frac{\pi}{4}+2k\pi \vee 3x=\frac{5\pi}{4}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z} \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow \quad x=-\frac{\pi}{12}+\frac{2k\pi}{3} \vee x=\frac{5\pi}{12}+\frac{2k\pi}{3},\ k\in\mathbb{Z} \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow^* \quad x=\frac{5\pi}{12} \vee x=\frac{7\pi}{12} \vee x=\frac{13\pi}{12} \vee x=\frac{5\pi}{4} \vee x=\frac{7\pi}{4} \vee x=\frac{23\pi}{12}
\end{aligned}
$$

$*$No intervalo considerado.

15.4.

$$
\begin{aligned}
& 4\ \mathrm{sen}^2 x-1=0 \Leftrightarrow \\
\Leftrightarrow \quad & \mathrm{sen}^2 x=\frac{1}{4} \Leftrightarrow\ \mathrm{sen} x=\frac{1}{2} \vee\ \mathrm{sen} x=-\frac{1}{2} \Leftrightarrow \\
\Leftrightarrow \quad & x=\frac{\pi}{6}+2k\pi \vee x=\frac{5\pi}{6}+2k\pi \vee x=-\frac{\pi}{6}+2k\pi \vee x=\frac{7\pi}{6}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z} \Leftrightarrow \\
\Leftrightarrow^* \quad & x=\frac{\pi}{6} \vee x=\frac{5\pi}{6} \vee x=\frac{7\pi}{6} \vee x=\frac{11\pi}{6}
\end{aligned}
$$

$*$No intervalo considerado.

15.5.

$$
\begin{aligned}
2\ \mathrm{sen}^2 x=1-\ \mathrm{sen} x \quad &\Leftrightarrow \quad 2\ \mathrm{sen}^2 x+\ \mathrm{sen} x-1=0 \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow \quad \mathrm{sen} x=\frac{-1\pm\sqrt{1-4\times 2\times(-1)}}{2\times 2} \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow \quad \mathrm{sen} x=-1 \vee\ \mathrm{sen} x=\frac{1}{2} \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow \quad x=\frac{3\pi}{2}+2k\pi \vee x=\frac{\pi}{6}+2k\pi \vee x=\frac{5\pi}{6}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z} \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow^* \quad x=\frac{\pi}{6} \vee x=\frac{5\pi}{6} \vee x=\frac{3\pi}{2}
\end{aligned}
$$

$*$No intervalo considerado.

15.6.

$$
\begin{aligned}
2\cos x - 5 = -\frac{2}{\cos x} \quad &\Rightarrow \quad 2\cos^2 x - 5\cos x = -2 \Leftrightarrow 2\cos^2 x - 5\cos x + 2 = 0 \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow \quad \cos x = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 4 \times 2 \times 2}}{2 \times 2} \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow \quad \cos x = \frac{5 \pm \sqrt{9}}{4} \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow \quad \cos x = 2 \vee \cos x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow \quad \cos x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow \quad x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \vee x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow^* \quad x = \frac{\pi}{3} \vee x = \frac{5\pi}{3}
\end{aligned}
$$

$*$No intervalo considerado.
Devemos também notar que em nenhuma destas soluções o cosseno se anula, pois essas não poderiam ser soluções da equação original.

15.7.

$$
\begin{aligned}
4\ \mathrm{sen} x \cos x = \sqrt{3} \quad &\Leftrightarrow \quad \mathrm{sen}(2x) = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow \quad 2x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \vee 2x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow \quad x = \frac{\pi}{6} + k\pi \vee x = \frac{\pi}{3} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow^* \quad x = \frac{\pi}{6} \vee x = \frac{\pi}{3} \vee x = \frac{7\pi}{6} \vee x = \frac{4\pi}{3}
\end{aligned}
$$

$*$No intervalo considerado.

15.8.

$$\begin{aligned}
\cos^2 x + 4\,\mathrm{sen} x \cos x + \mathrm{sen}^2 x = 1 \quad &\Leftrightarrow \quad 4\,\mathrm{sen} x \cos x + 1 = 1 \Leftrightarrow 2\,\mathrm{sen}(2x) = 0 \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow \quad \mathrm{sen}(2x) = 0 \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow \quad 2x = k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow \quad x = \frac{k\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow^* \quad x = 0 \vee x = \frac{\pi}{2} \vee x = \pi \vee x = \frac{3\pi}{2}
\end{aligned}$$

$*$No intervalo considerado.

15.9.

$$\begin{aligned}
3\ \mathrm{tg}\ ^3 x = \mathrm{tg}\ x \quad &\Leftrightarrow \quad 3\ \mathrm{tg}\ ^3 x - \mathrm{tg}\ x = 0 \Leftrightarrow \mathrm{tg}\ x(3\ \mathrm{tg}\ ^2 x - 1) = 0 \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow \quad \mathrm{tg}\ x = 0 \vee 3\ \mathrm{tg}\ ^2 x - 1 = 0 \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow \quad \mathrm{tg}\ x = 0 \vee \mathrm{tg}\ ^2 x = \frac{1}{3} \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow \quad \mathrm{tg}\ x = 0 \vee \mathrm{tg}\ x = \frac{\sqrt{3}}{3} \vee \mathrm{tg}\ x = -\frac{\sqrt{3}}{3} \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow \quad x = k\pi \vee x = \frac{\pi}{6} + k\pi \vee x = -\frac{\pi}{6} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow^* \quad x = 0 \vee x = \frac{\pi}{6} \vee x = \frac{5\pi}{6} \vee x = \pi \vee x = \frac{7\pi}{6} \vee x = \frac{11\pi}{6}
\end{aligned}$$

$*$No intervalo considerado.

15.10.

$$
\begin{aligned}
& \operatorname{sen}(2x) + \operatorname{sen}x = \frac{2\cos x + 1}{2} \\
\Leftrightarrow\quad & 2\operatorname{sen}x\cos x + \operatorname{sen}x = \frac{2\cos x + 1}{2} \Leftrightarrow \\
\Leftrightarrow\quad & \operatorname{sen}x(2\cos x + 1) = \frac{2\cos x + 1}{2} \Leftrightarrow \\
\Leftrightarrow\quad & \operatorname{sen}x(2\cos x + 1) - \frac{2\cos x + 1}{2} = 0 \Leftrightarrow \\
\Leftrightarrow\quad & \left(\operatorname{sen}x - \frac{1}{2}\right)(2\cos x + 1) = 0 \Leftrightarrow \\
\Leftrightarrow\quad & \operatorname{sen}x = \frac{1}{2} \vee \cos x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \\
\Leftrightarrow\quad & x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \vee x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \vee x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \vee x = \frac{4\pi}{3} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \\
\Leftrightarrow^{*}\quad & x = \frac{\pi}{6} \vee x = \frac{2\pi}{3} \vee x = \frac{5\pi}{6} \vee x = \frac{4\pi}{3}
\end{aligned}
$$

$*$No intervalo considerado.

16.

Sabemos que o máximo é 3 e que o mínimo é -1, pelo que a amplitude é 4 e, consequentemente, $b = 2$. Além disso, $a + b = 3$, pelo que $a = 1$. Como o período positivo mínimo é π, temos que $\pi = \frac{2\pi}{c} \Leftrightarrow c = 2$. Por fim, temos que $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 + \sqrt{3}$. Assim:

$$
\begin{aligned}
f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 + \sqrt{3} \quad & \Leftrightarrow\quad 1 + 2\operatorname{sen}\left(2 \times \frac{\pi}{2} + d\right) = 1 + \sqrt{3} \Leftrightarrow \\
& \Leftrightarrow\quad 2\operatorname{sen}(\pi + d) = \sqrt{3} \Leftrightarrow \\
& \Leftrightarrow\quad \operatorname{sen}(\pi + d) = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \\
& \Leftrightarrow\quad \pi + d = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \vee \pi + d = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \\
& \Leftrightarrow\quad d = -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi \vee d = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}
\end{aligned}
$$

Assim, podemos ter, por exemplo, $d = -\frac{\pi}{3}$.

17. Como $D'_g = [-3, 5]$, temos que a amplitude é 8, pelo que $a^2 = 4 \Leftrightarrow a = \pm 2$. Como $a \in \mathbb{R}^-$, temos que $a = -2$. Além disso:

$$a^2 + \frac{k}{3} = 5 \Leftrightarrow \frac{k}{3} = 1 \Leftrightarrow k = 3$$

Podemos também verificar que o período da função, $\frac{2\pi}{b}$, é igual a:

$$2 \times \left(\frac{3\pi}{8} - \frac{\pi}{8}\right) = \frac{\pi}{2}$$

Vem que $\frac{2\pi}{b} = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow b = 4$.

18.
18.1.

$$-1 \leq \operatorname{sen}(5x-1) \leq 1 \Leftrightarrow -2 \leq 2\operatorname{sen}(5x-1) \leq 2 \Leftrightarrow -3 \leq -1+2\operatorname{sen}(5x-1) \leq 1$$

Assim, $D'_f = [-3, 1]$.

18.2. Uma vez que o período positivo mínimo da função seno é 2π, o período positivo mínimo de f é $\frac{2\pi}{5}$.

19.
19.1.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right)}{\frac{x}{5}} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right)}{\frac{x}{2} \times \frac{2}{5}} = \frac{5}{2} \times \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right)}{\frac{x}{2}} =^* \frac{5}{2} \lim_{y\to 0} \frac{\operatorname{sen} y}{y} = \frac{5}{2}$$

* Considerando a mudança de variável $\frac{x}{2} = y$: se $x \to 0$, então $y \to 0$.

19.2.

$$\lim_{x\to \pi} \frac{\operatorname{sen} x}{x - \pi} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x\to \pi} \frac{-\operatorname{sen}(x - \pi)}{x - \pi} =^* -\lim_{y\to 0} \frac{\operatorname{sen} y}{y} = -1$$

* Considerando a mudança de variável $x - \pi = y$: se $x \to \pi$, então $y \to 0$.

19.3.

$$\lim_{x\to 0}\frac{x+\ \text{tg}\ x}{\text{sen}x}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim_{x\to 0}\left(\frac{x}{\text{sen}x}+\frac{1}{\cos x}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\frac{\text{sen}x}{x}}+\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x}=1+1=2$$

19.4.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x} &\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{x(1+\cos x)}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^2 x}{x(1+\cos x)}=\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{\text{sen}^2 x}{x(1+\cos x)}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\text{sen}x}{x}\times\frac{\text{sen}x}{1+\cos x}\right)=\\ &= 1\times 0=0\end{aligned}$$

19.5.

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\text{sen}x}{\sqrt{x}}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{\text{sen}x}{x}\sqrt{x}\right)=1\times 0=0$$

19.6.

$$\lim_{x\to 1}\frac{\text{sen}(x-1)}{2x-2}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\frac{1}{2}\lim_{x\to 1}\frac{\text{sen}(x-1)}{x-1}=*\frac{1}{2}\lim_{y\to 0}\frac{\text{sen}y}{y}=\frac{1}{2}$$

* Considerando a mudança de variável $x-1=y$: se $x\to 1$, então $y\to 0$.

19.7.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4x+4}{\text{sen}^2(x-2)} &\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x\to 2}\frac{(x-2)^2}{\text{sen}^2(x-2)}=\left(\lim_{x\to 2}\frac{x-2}{\text{sen}(x-2)}\right)^2=\\ &= \left(\lim_{x\to 2}\frac{1}{\frac{\text{sen}(x-2)}{x-2}}\right)^2=\left(\frac{1}{\lim_{y\to 0}\frac{\text{sen}y}{y}}\right)^2=1\end{aligned}$$

* Considerando a mudança de variável $x-2=y$: se $x\to 2$, então $y\to 0$.

19.8.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 3}\frac{7x-21}{\operatorname{sen}(5x-15)} &\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x\to 3}\frac{(5x-15)\times\frac{7}{5}}{\operatorname{sen}(5x-15)}=\\ &= \frac{7}{5}\lim_{x\to 3}\frac{1}{\frac{\operatorname{sen}(5x-15)}{5x-15}}=\\ &=^{*} \frac{7}{5}\times\frac{1}{\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{\operatorname{sen}(y)}{y}}=\frac{7}{5}\end{aligned}$$

* Considerando a mudança de variável $5x-15=y$: se $x\to 3$, então $y\to 0$.

19.9.

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\frac{\operatorname{sen}\left(x-\frac{\pi}{3}\right)}{\pi-3x}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\frac{\operatorname{sen}\left(x-\frac{\pi}{3}\right)}{-3\left(x-\frac{\pi}{3}\right)}=^{*}-\frac{1}{3}\lim_{y\to 0}\frac{\operatorname{sen}(y)}{y}=-\frac{1}{3}$$

* Considerando a mudança de variável $x-\dfrac{\pi}{3}=y$: se $x\to\frac{\pi}{3}$, então $y\to 0$.

19.10.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}(3x)}{\operatorname{tg}(2x)} &\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x\to 0}\frac{\frac{\operatorname{sen}(3x)}{\cos(3x)}}{\frac{\operatorname{sen}(2x)}{\cos(2x)}}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\operatorname{sen}(3x)}{x}}{\frac{\operatorname{sen}(2x)}{x}}\times\lim_{x\to 0}\frac{\cos(2x)}{\cos(3x)}=\\ &= \frac{3\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{sen}(3x)}{3x}}{2\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{sen}(2x)}{2x}}=^{*}\frac{3\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{\operatorname{sen}(y)}{y}}{2\lim\limits_{z\to 0}\dfrac{\operatorname{sen}(z)}{z}}=\frac{3}{2}\end{aligned}$$

* Considerando as mudanças de variável $3x=y$ e $2x=z$: se $x\to 0$, então $y\to 0$ e $z\to 0$.

19.11.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}(x^2)}{\operatorname{sen}^2 x}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\operatorname{sen}(x^2)}{x^2}}{\frac{\operatorname{sen}^2 x}{x^2}}=\frac{\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{sen}(x^2)}{x^2}}{\left(\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{sen}x}{x}\right)^2}=^{*}\frac{\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{\operatorname{sen}(y)}{y}}{\left(\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{sen}x}{x}\right)^2}=1$$

* Considerando a mudança de variável $x^2 = y$: se $x \to 0$, então $y \to 0$.

19.12.

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \frac{10x - \operatorname{tg}(2x)}{\operatorname{sen} x} &\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x\to 0} \frac{10x - \frac{\operatorname{sen}(2x)}{\cos(2x)}}{\operatorname{sen} x} = \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{10x - \frac{2\operatorname{sen} x \cos x}{\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x}}{\operatorname{sen} x} = \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{10x}{\operatorname{sen} x} - \lim_{x\to 0} \frac{\frac{2\operatorname{sen} x \cos x}{\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x}}{\operatorname{sen} x} = \\
&= 10 \lim_{x\to 0} \frac{1}{\frac{\operatorname{sen} x}{x}} - \lim_{x\to 0} \frac{2\cos x}{\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x} = \\
&= 10 \times 1 - 2 = 8
\end{aligned}$$

19.13.

$$\lim_{x\to +\infty} \operatorname{sen}\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right) = \operatorname{sen}\left(\frac{1}{\sqrt{+\infty}}\right) = \operatorname{sen} 0 = 0$$

19.14.

$$\lim_{x\to +\infty} 2x \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) \overset{(0\times\infty)}{=} 2 \lim_{x\to +\infty} \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}} =^{*} 2 \lim_{y\to 0} \frac{\operatorname{sen} y}{y} = 2$$

* Considerando a mudança de variável $\dfrac{1}{x} = y$: se $x \to +\infty$, então $y \to 0$.

19.15.

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{2\operatorname{sen} x}{x} = \lim_{x\to +\infty} \left(\operatorname{sen} x \times \frac{2}{x}\right) = 0,$$

pois a função seno é limitada ($-1 \leq \operatorname{sen} x \leq 1, \forall x \in \mathbb{R}$) e $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \frac{2}{x} = 0$.

19.16.

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{\cos x}{x+1} = \lim_{x\to +\infty} \left(\cos x \times \frac{1}{x+1}\right) = 0,$$

pois a função cosseno é limitada ($-1 \leq \cos x \leq 1, \forall x \in \mathbb{R}$) e $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \frac{1}{x+1} = 0$.

20.

20.1.

$$f'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{x\ \mathrm{sen}x - 0}{x - 0} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x\to 0}\ \mathrm{sen}x = 0$$

20.2.

$$g'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{\cos^2 x - 1}{x - 0} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x\to 0} \frac{-\ \mathrm{sen}^2 x}{x} = -\lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{sen}x}{x} \times \lim_{x\to 0}\ \mathrm{sen}x = -1\times 0 = 0$$

20.3.

$$\begin{aligned} h'(\pi) &= \lim_{x\to\pi} \frac{\frac{\mathrm{sen}x}{x} - 0}{x - \pi} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x\to\pi} \frac{-\ \mathrm{sen}(x-\pi)}{x(x-\pi)} = \lim_{x\to\pi} \frac{-\ \mathrm{sen}(x-\pi)}{x-\pi} \times \lim_{x\to\pi} \frac{1}{x} = \\ &=^{*} -\lim_{y\to 0} \frac{\mathrm{sen}y}{y} \times \frac{1}{\pi} = -\frac{1}{\pi} \end{aligned}$$

* Considerando a mudança de variável $x - \pi = y$: se $x \to \pi$, então $y \to 0$.

21.

21.1.

$$f'(x) = (\ \mathrm{sen}(3x))' = \cos(3x) \times 3 = 3\cos(3x)$$

21.2.

$$g'(x) = (3\ \mathrm{sen}x)' = 3\cos x$$

21.3.

$$h'(x) = (\ \mathrm{sen}x^3)' = \cos x^3 \times (x^3)' = 3x^2 \cos x^3$$

21.4.

$$i'(x) = (\ \mathrm{sen}^3 x)' = 3\ \mathrm{sen}^2 x \times (\ \mathrm{sen}x)' = 3\ \mathrm{sen}^2 x \cos x$$

21.5.

$$j'(x) = (\cos(5x^2+2))' = -\ \mathrm{sen}(5x^2+2) \times (5x^2+2)' = -10x\ \mathrm{sen}(5x^2+2)$$

21.6.

$$k'(x) = (\ \mathrm{tg}\ (2x))' = \frac{(2x)'}{\cos^2(2x)} = \frac{2}{\cos^2(2x)}$$

21.7.

$$l'(x) = (\ \mathrm{tg}\ (\sqrt{x}))' = \frac{(\sqrt{x})'}{\cos^2(\sqrt{x})} = \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{\cos^2(\sqrt{x})} = \frac{1}{2\sqrt{x}\cos^2(\sqrt{x})}$$

21.8.

$$m'(x) = \left(\sqrt{\ \mathrm{tg}\ x}\right)' = \frac{(\ \mathrm{tg}\ x)'}{2\sqrt{\ \mathrm{tg}\ x}} = \frac{\frac{1}{\cos^2 x}}{2\sqrt{\ \mathrm{tg}\ x}} = \frac{1}{2\cos^2 x\sqrt{\ \mathrm{tg}\ x}}$$

21.9.

$$\begin{aligned} n'(x) &= \left(\mathrm{tg}\left(\frac{1}{x}\right) - \cos x\right)' = \frac{\left(\frac{1}{x}\right)'}{\cos^2\left(\frac{1}{x}\right)} + \ \mathrm{sen}x = \frac{-\frac{1}{x^2}}{\cos^2\left(\frac{1}{x}\right)} + \ \mathrm{sen}x = \\ &= -\frac{1}{x^2\cos^2\left(\frac{1}{x}\right)} + \ \mathrm{sen}x \end{aligned}$$

21.10.

$$\begin{aligned} o'(x) &= (\ \mathrm{sen}^2 x + 2\cos^5(3x))' = 2\ \mathrm{sen}x(\ \mathrm{sen}x)' + 2\times 5\cos^4(3x)(\cos(3x))' = \\ &= 2\ \mathrm{sen}x\cos x + 10\cos^4(3x)\times(-\ \mathrm{sen}(3x)\times 3) = \\ &= 2\ \mathrm{sen}x\cos x - 30\cos^4(3x)\ \mathrm{sen}(3x) \end{aligned}$$

21.11.

$$p'(x) = (\ln(x^2 + \cos x))' = \frac{(x^2 + \cos x)'}{x^2 + \cos x} = \frac{2x - \operatorname{sen} x}{x^2 + \cos x}$$

21.12.

$$\begin{aligned}
q'(x) &= \left(\frac{\operatorname{sen} x + \cos x}{\operatorname{sen} x - \cos x}\right)' = \\
&= \frac{(\operatorname{sen} x + \cos x)'(\operatorname{sen} x - \cos x) - (\operatorname{sen} x + \cos x)(\operatorname{sen} x - \cos x)'}{(\operatorname{sen} x - \cos x)^2} = \\
&= \frac{(\cos x - \operatorname{sen} x)(\operatorname{sen} x - \cos x) - (\operatorname{sen} x + \cos x)(\cos x + \operatorname{sen} x)}{(\operatorname{sen} x - \cos x)^2} = \\
&= \frac{-(\cos x - \operatorname{sen} x)^2 - (\operatorname{sen} x + \cos x)^2}{\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x - 2\operatorname{sen} x \cos x} = \\
&= \frac{-\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x + 2\operatorname{sen} x \cos x - \operatorname{sen}^2 x - \cos^2 x - 2\operatorname{sen} x \cos x}{1 - \operatorname{sen}(2x)} = \\
&= \frac{-2}{1 - \operatorname{sen}(2x)}
\end{aligned}$$

22.

Para $x < 0$:

$$\left(\frac{x}{e^x}\right)' = \frac{x'e^x - x(e^x)'}{e^{2x}} = \frac{e^x - xe^x}{e^{2x}} = \frac{1-x}{e^x}$$

Para $0 < x < \frac{\pi}{4}$:

$$(\operatorname{sen} x)' = \cos x$$

Para $x > \frac{\pi}{4}$:

$$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$$

Para $x = 0$:

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{\frac{x}{e^x} - 0}{x - 0} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x \to 0^-} \frac{\frac{1}{e^x}}{1} = 1$$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\text{sen}x - 0}{x-0} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{\text{sen}x}{x} = 1$$

Assim, $f'(0) = 1$.

Para $x = \frac{\pi}{4}$:

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{4}} f(x) = \text{ sen}\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{4}{\pi}$$

Conclui-se que a função não é contínua em $x = \frac{\pi}{4}$, pelo que não é diferenciável nesse ponto.
Vem que:

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{1-x}{\text{e}^x} & \text{se} \quad x < 0 \\ \cos x & \text{se} \quad 0 \le x < \frac{\pi}{4} \\ -\dfrac{1}{x^2} & \text{se} \quad x > \frac{\pi}{4} \end{cases}$$

23.
23.1.

$$\lim_{x\to 0^-} \text{ sen}\left(\frac{1}{x}\right) = \lim_{y\to -\infty} \text{ sen}y$$

* Considerando a mudança de variável $\dfrac{1}{x} = y$: se $x \to 0^-$, então $y \to -\infty$.

Tem-se que $\lim\limits_{x\to 0^-} \text{ sen}\left(\dfrac{1}{x}\right)$ não existe, pois a função seno é periódica. Então, a função f não é contínua em $x = 0$ e, consequentemente, não admite derivada nesse ponto.

23.2.

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2 \text{ sen}\left(\frac{1}{x}\right) - 0}{x-0} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x\to 0} \left[x \text{ sen}\left(\frac{1}{x}\right)\right] = 0$$

pois a função seno é limitada ($-1 \le \text{ sen}x \le 1, \forall x \in \mathbb{R}$) e $\lim\limits_{x\to 0} x = 0$.

24.
24.1.
Uma vez que $f(0)=1$, temos que:

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{1-\operatorname{sen}(3x)-1}{x-0}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}-3\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}(3x)}{3x}=^{*}-3\lim_{y\to 0}\frac{\operatorname{sen}(y)}{y}=-3$$

* Considerando a mudança de variável $3x=y$: se $x\to 0$, então $y\to 0$.

24.2.

$$f'(x)=(1-\operatorname{sen}(3x))'=-3\cos(3x)$$

Assim,

$$\begin{aligned} f'(x)-3f(x)+3=0 &\Leftrightarrow -3\cos(3x)-3(1-\operatorname{sen}(3x))+3=0\Leftrightarrow\\ &\Leftrightarrow \cos(3x)-\operatorname{sen}(3x)=0\Leftrightarrow\\ &\Leftrightarrow \cos(3x)=\operatorname{sen}(3x)\Leftrightarrow\\ &\Leftrightarrow 3x=\frac{\pi}{4}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow\\ &\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{12}+\frac{k\pi}{3},\ k\in\mathbb{Z}\end{aligned}$$

24.3.
Para que a reta seja paralela à reta de equação $y=-3x$ tem que ter declive igual a -3.
Pretendemos então resolver a equação seguinte:

$$\begin{aligned} -3\cos(3x)=-3 &\Leftrightarrow \cos(3x)=1\Leftrightarrow 3x=2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow\\ &\Leftrightarrow x=\frac{2k\pi}{3},\ k\in\mathbb{Z}\end{aligned}$$

Pela alínea 24.1, determinamos que $f'(0)=-3$. Então, por exemplo, a reta tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa 0 é paralela à reta indicada.

$$f(0)=1-\operatorname{sen}0=1$$

O ponto $(0,1)$ pertence a essa reta, donde:

$$1=-3\times 0+b\Leftrightarrow b=1$$

A reta de equação $y=-3x+1$ é um exemplo de uma reta nas condições pretendidas.

25.
25.1. Reta tangente:

$$f'(x) = (4\ \text{sen}^3 x)' = 4 \times 3\ \text{sen}^2 x \cos x = 12\ \text{sen}^2 x \cos x$$

Seja m o declive da reta tangente.

$$m = f'\left(\frac{\pi}{6}\right) = 12 \times \frac{1}{4} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

Como $f\left(\frac{\pi}{6}\right) = 4 \times \frac{1}{8} = \frac{1}{2}$, o ponto $\left(\frac{\pi}{6}, \frac{1}{2}\right)$ pertence à reta, donde:

$$\frac{1}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{2} \times \frac{\pi}{6} + b \Leftrightarrow b = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}\pi}{4}$$

A equação reduzida da reta tangente é:

$$y = \frac{3\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}\pi}{4}$$

Reta normal:
Seja m' o declive da reta normal.

$$m' = -\frac{1}{\frac{3\sqrt{3}}{2}} = -\frac{2}{3\sqrt{3}} = -\frac{2\sqrt{3}}{9}$$

$$\frac{1}{2} = -\frac{2\sqrt{3}}{9} \times \frac{\pi}{6} + b \Leftrightarrow b = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}\pi}{27}$$

A equação reduzida da reta normal é:

$$y = -\frac{2\sqrt{3}}{9}x + \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}\pi}{27}$$

25.2. Reta tangente:

$$f'(x) = (2 + \cos(5x))' = -5\ \text{sen}(5x)$$

$$m = f'\left(\frac{\pi}{6}\right) = -5\ \text{sen}\left(\frac{5\pi}{6}\right) = -\frac{5}{2}$$

Como $f\left(\frac{\pi}{6}\right) = 2 - \frac{\sqrt{3}}{2}$, o ponto $\left(\frac{\pi}{6}, 2 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ pertence à reta, donde:

$$2 - \frac{\sqrt{3}}{2} = -\frac{5}{2} \times \frac{\pi}{6} + b \Leftrightarrow b = \frac{4 - \sqrt{3}}{2} + \frac{5\pi}{12}$$

A equação reduzida da reta tangente é:

$$y = -\frac{5}{2}x + \frac{4-\sqrt{3}}{2} + \frac{5\pi}{12}$$

Reta normal:

$$m' = -\frac{1}{-\frac{5}{2}} = \frac{2}{5}$$

$$2 - \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{2}{5} \times \frac{\pi}{6} + b \Leftrightarrow b = \frac{4-\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{15}$$

A equação reduzida da reta normal é:

$$y = \frac{2}{5}x + \frac{4-\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{15}$$

25.3. Reta tangente:

$$f'(x) = (\ln(\operatorname{sen} x))' = \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}$$

$$m = f'\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)}{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{6}\right)} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$$

Como $f\left(\frac{\pi}{6}\right) = \ln\left(\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{6}\right)\right) = \ln\left(\frac{1}{2}\right)$, o ponto $\left(\frac{\pi}{6}, \ln\left(\frac{1}{2}\right)\right)$ pertence à reta, donde

$$\ln\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{3} \times \frac{\pi}{6} + b \Leftrightarrow b = \ln\left(\frac{1}{2}\right) - \frac{\sqrt{3}\pi}{6}$$

A equação reduzida da reta tangente é:

$$y = \sqrt{3}x + \ln\left(\frac{1}{2}\right) - \frac{\sqrt{3}\pi}{6}$$

Reta normal:

$$m' = -\frac{1}{\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\ln\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{3} \times \frac{\pi}{6} + b \Leftrightarrow b = \ln\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{\sqrt{3}\pi}{18}$$

A equação reduzida da reta normal é:

$$y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x + \ln\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{\sqrt{3}\pi}{18}$$

26.
26.1.

$$\begin{aligned} -1 \leq \ \text{sen}\left(\frac{\pi}{6}(t-3)\right) \leq 1 \ &\Leftrightarrow \ -14,8 \leq 14,8 \ \text{sen}\left(\frac{\pi}{6}(t-3)\right) \leq 14,8 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \ -4,8 \leq 14,8 \ \text{sen}\left(\frac{\pi}{6}(t-3)\right) + 10 \leq 24,8 \end{aligned}$$

A temperatura máxima é $24,8\,°\text{C}$ e a temperatura mínima é $-4,8\,°\text{C}$.

26.2. Como o período positivo mínimo da função seno é 2π, o período positivo mínimo de T é $\frac{2\pi}{\frac{\pi}{6}} = 12$. Isto significa que, se num determinado momento se regista uma certa temperatura, então, passados 12 meses, registar-se-á a mesma temperatura. O tempo que decorre entre dois momentos em que se regista a temperatura máxima é 12 meses e o mesmo se poderá afirmar sobre dois momentos em que se regista a temperatura mínima.

26.3.

$$\begin{aligned} T'(t) &= \left(14,8 \ \text{sen}\left(\frac{\pi}{6}(t-3)\right) + 10\right)' = 14,8 \cos\left(\frac{\pi}{6}(t-3)\right) \times \frac{\pi}{6} = \\ &= \frac{14,8\pi}{6} \cos\left(\frac{\pi}{6}(t-3)\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T''(t) &= \left(\frac{14,8\pi}{6} \cos\left(\frac{\pi}{6}(t-3)\right)\right)' = -\frac{14,8\pi}{6} \ \text{sen}\left(\frac{\pi}{6}(t-3)\right) \times \frac{\pi}{6} = \\ &= -\frac{14,8\pi^2}{36} \ \text{sen}\left(\frac{\pi}{6}(t-3)\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T''(t) = 0 \ &\Leftrightarrow \ -\frac{14,8\pi^2}{36} \ \text{sen}\left(\frac{\pi}{6}(t-3)\right) = 0 \Leftrightarrow \ \text{sen}\left(\frac{\pi}{6}(t-3)\right) = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \ \frac{\pi}{6}(t-3) = k\pi, \ k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow t - 3 = 6k, \ k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \ t = 3 + 6k, \ k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Tabela de variação da derivada de T ao longo de um ano:

x	0		3		9		12
Sinal de T''	$\frac{14{,}8\pi^2}{36}$	$+$	0	$-$	0	$+$	$\frac{14{,}8\pi^2}{36}$
Variação de T'	0	$\nearrow$	$\frac{14{,}8\pi}{6}$ máx.	$\searrow$	$-\frac{14{,}8\pi}{6}$ mín.	$\nearrow$	0

Podemos verificar, pela tabela de variação de T', que a temperatura varia mais rapidamente em $t = 3$, ou seja, no dia 1 de abril.

27.

27.1.

$$d(0) = 4\mathrm{e}^{-0{,}2\times 0}\cos\left(\frac{\pi\times 0}{6}\right) + 9 = 4\times 1\times 1 + 9 = 13$$

No instante inicial, a bola encontra-se a 13 cm do solo.

27.2.

$$\begin{aligned}
d(t) = 9 \quad &\Leftrightarrow \quad 4\mathrm{e}^{-0{,}2t}\cos\left(\frac{\pi t}{6}\right) + 9 = 9 \Leftrightarrow \mathrm{e}^{-0{,}2t}\cos\left(\frac{\pi t}{6}\right) = 0 \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow \quad \mathrm{e}^{-0{,}2t} = 0 \vee \cos\left(\frac{\pi t}{6}\right) = 0 \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow \quad \cos\left(\frac{\pi t}{6}\right) = 0 \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow \quad \frac{\pi t}{6} = \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k\in\mathbb{Z} \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow^* \quad t = 3 + 6k,\ k\in\mathbb{N}_0
\end{aligned}$$

*No domínio considerado (o tempo é necessariamente não negativo).

A bola passa a 9 cm do solo pela primeira vez no instante 3 e volta a passar de 6 em 6 segundos.

27.3. A função T é contínua em $\mathbb{R}_0^+$, por se tratar do produto de duas funções contínuas. Em particular, é contínua em $[0, 3]$. Como $T(0) = 13$, $T(3) = 9$ e $9 < 10 < 13$, pelo teorema de Bolzano-Cauchy, podemos concluir que existe pelo menos um número real $c \in]0,3[$ tal que $T(c) = 10$, isto é, existe pelo menos um instante em que a bola está a 10 cm do solo.

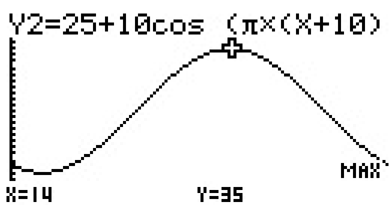
27.4.

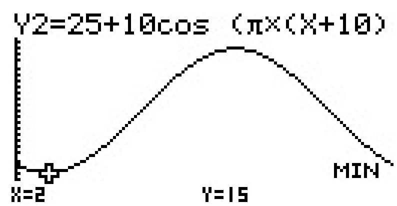
$$\lim_{x\to+\infty}\left(4\mathrm{e}^{-0{,}2t}\cos\left(\frac{\pi t}{6}\right)+9\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(4\mathrm{e}^{-0{,}2t}\right)\times\lim_{x\to+\infty}\cos\left(\frac{\pi t}{6}\right)+9 = 9, \quad \text{pois}$$

a função cosseno é limitada $(-1 \leq \cos x \leq 1, \forall x \in \mathbb{R})$ e $\lim_{x\to+\infty}\left(4\mathrm{e}^{-0{,}2t}\right) = 0$.

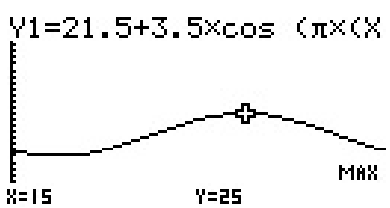
À medida que o tempo passa, a distância da bola ao solo tende a estabilizar em torno de 9 cm.

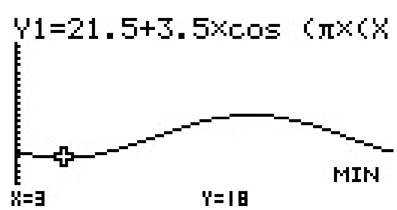
28. Os gráficos seguintes representam parte da função f. Nestes gráficos, identificamos o valor máximo e o valor mínimo da função.





Os gráficos seguintes representam parte da função d. Nestes gráficos, identificamos o valor máximo e o valor mínimo da função.





Como podemos verificar pelas representações gráficas, o máximo e o mínimo de f são 35 e 15, respetivamente. Assim, a amplitude térmica fora de casa é 20 °C. No que diz respeito à temperatura dentro de casa, podemos verificar que tem um máximo de 25 e um mínimo de 18, pelo que a amplitude térmica é de apenas 7 °C.
Relativamente ao desfasamento térmico, podemos verificar que este é de uma hora, pois a temperatura máxima fora de casa é atingida às 14 horas, enquanto que a temperatura máxima dentro de casa é atingida às 15 horas.
A razão entre a amplitude térmica dentro de casa e a amplitude térmica fora

de casa é $\frac{7}{20} = 0,35$, ou seja, a amplitude térmica dentro de casa é superior à terça parte da amplitude térmica fora de casa. Além disso, o desfasamento térmico é inferior a $1,5$ horas. Podemos então considerar que as condições de isolamento da referida habitação não são as ideais.

29.

29.1.

Uma vez que $[PQ]$ é paralelo ao eixo Oy, temos que $\overline{PQ} = 2 \operatorname{sen}\alpha$. Assim, podemos considerar que o triângulo $[PQR]$ tem base de comprimento $2 \operatorname{sen}\alpha$ e altura de comprimento $1 - \cos\alpha$ e a sua área pode ser dada pela expressão:

$$A(\alpha) = \frac{2 \operatorname{sen}\alpha \times (1 - \cos\alpha)}{2} = \frac{2 \operatorname{sen}\alpha - 2 \operatorname{sen}\alpha \cos\alpha}{2} = \operatorname{sen}\alpha - \frac{\operatorname{sen}(2\alpha)}{2}$$

Como queríamos mostrar.

29.2.

$$A'(\alpha) = \left(\operatorname{sen}\alpha - \frac{\operatorname{sen}(2\alpha)}{2}\right)' = \cos\alpha - \frac{\cos(2\alpha) \times 2}{2} = \cos\alpha - \cos(2\alpha)$$

$$\begin{aligned} A'(\alpha) = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad \cos\alpha - \cos(2\alpha) = 0 \Leftrightarrow \cos\alpha = \cos(2\alpha) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \quad \alpha = 2\alpha + 2k\pi \vee \alpha = -2\alpha + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \quad -\alpha = 2k\pi \vee 3\alpha = 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \quad \alpha = 2k\pi \vee \alpha = \frac{2k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow^* \quad \alpha = \frac{2\pi}{3} \end{aligned}$$

$\ast$ No domínio considerado.

Tabela de variação da derivada de A:

α	$\frac{\pi}{2}$		$\frac{2\pi}{3}$		π
Sinal de A'	n.d.	$+$	0	$-$	n.d.
Variação de A	n.d.	$\nearrow$	$\frac{3\sqrt{3}}{4}$ máx.	$\searrow$	n.d.

A função A é crescente em $\left]\frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}\right]$, decrescente em $\left[\frac{2\pi}{3}, \pi\right[$ e tem um máximo, $\frac{3\sqrt{3}}{4}$ em $\alpha = \frac{2\pi}{3}$.

29.3.

Para que a reta tangente seja perpendicular à reta de equação $y = 2x$, esta deve ter declive $-\frac{1}{2}$, isto é, $A'(x) = -\frac{1}{2}$, para algum $x \in \left]\frac{2\pi}{3}, \frac{5\pi}{6}\right[$.
A função A' é contínua no seu domínio, por se tratar da diferença entre duas funções contínuas. Em particular, é contínua em $\left[\frac{2\pi}{3}, \frac{5\pi}{6}\right]$.
Como $A'\left(\frac{2\pi}{3}\right) = 0$, $A'\left(\frac{5\pi}{6}\right) = -\frac{1+\sqrt{3}}{2}$ e $-\frac{1+\sqrt{3}}{2} < -\frac{1}{2} < 0$, pelo teorema de Bolzano-Cauchy, podemos concluir que existe pelo menos um número real $c \in \left]\frac{2\pi}{3}, \frac{5\pi}{6}\right[$ tal que $A'(c) = -\frac{1}{2}$, isto é, existe pelo menos um ponto do gráfico de A, de abcissa pertencente a $\left]\frac{2\pi}{3}, \frac{5\pi}{6}\right[$, tal que a reta tangente ao gráfico de A nesse ponto é perpendicuar à reta de equação $y = 2x$.

30.

30.1.

Seja D o ponto de coordenadas $(-2, 0)$. Sabemos que a circunferência interseta o eixo Oy no ponto D e que $D\widehat{O}B = \alpha - \frac{\pi}{2}$.
Uma vez que a área da circunferência é 4π e, numa dada circunferência, a área de um setor circular é diretamente proporcional à amplitude do respetivo ângulo ao centro, a área do setor circular correspondente ao ângulo DOC é igual a:

$$\frac{\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) \times 4\pi}{2\pi} = 2\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) = 2\alpha - \pi$$

Por outro lado, a área do triângulo isósceles $[AOB]$ é dada por

$$\frac{2(2\ \text{sen}\alpha) \times (-2\cos\alpha)}{2} = \frac{-8\ \text{sen}\alpha\cos\alpha}{2} = -2\ \text{sen}(2\alpha)$$

Temos, então, que a área da região a sombreado é dada por:

$$f(\alpha) = 2\alpha - \pi - 2\ \text{sen}(2\alpha)$$

30.2.

$$f'(\alpha) = (2\alpha - \pi - 2\ \text{sen}(2\alpha))' = 2 - 4\cos(2\alpha)$$

$$\begin{aligned} f'(\alpha) = 0 \quad & \Leftrightarrow \quad 2 - 4\cos(2\alpha) = 0 \Leftrightarrow \cos(2\alpha) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow \quad 2\alpha = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \vee 2\alpha = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow \quad \alpha = \frac{\pi}{6} + k\pi \vee \alpha = -\frac{\pi}{6} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow^* \quad \alpha = \frac{5\pi}{6} \end{aligned}$$

$*$No domínio considerado.

Tabela de variação de f:

α	$\frac{\pi}{2}$		$\frac{5\pi}{6}$		π
Sinal de f'	n.d.	$+$	0	$-$	n.d.
Variação de f	n.d.	$\nearrow$	$\frac{2\pi}{3} + \sqrt{3}$ máx.	$\searrow$	n.d.

A função f tem um máximo $\frac{2\pi}{3} + \sqrt{3}$ em $\alpha = \dfrac{5\pi}{6}$.

31.

31.1.

Domínio:

$$D_f = \mathbb{R}$$

Contradomínio:

$$-1 \leq \cos(3x) \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq -\cos(3x) \leq 1 \Leftrightarrow 2 \leq 3 - \cos(3x) \leq 4$$

Pelo que $D'_f = [2, 4]$.

Periodicidade:
Como a função cosseno é periódica de período positivo mínimo 2π, f é periódica de período positivo mínimo $\dfrac{2\pi}{3}$.

Paridade:

$$f(-x) = 3 - \cos(-3x) = 3 - \cos(3x) = f(x), \forall x \in D_f$$

Assim, esta função é par.

Continuidade:
A função f é contínua em $\mathbb{R}$, uma vez que é a diferença entre duas funções contínuas.

Existência de assíntotas:
Uma vez que esta função é contínua em $\mathbb{R}$, o seu gráfico não admite assíntotas verticais. Além disso, como se trata de uma função periódica, o seu gráfico também não tem assíntotas não verticais.

Extremos:

$$f'(x) = (3 - \cos(3x))' = 3\ \text{sen}(3x)$$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3\ \text{sen}(3x) = 0 \Leftrightarrow\ \text{sen}(3x) = 0 \Leftrightarrow 3x = k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = \dfrac{k\pi}{3},\ k \in \mathbb{Z}$

Tabela de variação da derivada de f no intervalo $\left[0, \frac{2\pi}{3}\right]$:

α	0		$\frac{\pi}{3}$		$\frac{2\pi}{3}$
Sinal de f'	0	$+$	0	$-$	0
Variação de f	2 mín.	$\nearrow$	4 máx.	$\searrow$	2 mín.

Uma vez que o período positivo mínimo da função f é $\dfrac{2\pi}{3}$, podemos dizer que o seu mínimo é 2 em $x = \dfrac{2k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$ e que o seu máximo é 4 em $x = \dfrac{\pi}{3} + \dfrac{2k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$.

Pontos de inflexão:

$$f''(x) = (3\ \text{sen}(3x))' = 9\cos(3x)$$

$f''(x) = 0 \Leftrightarrow 9\cos(3x) = 0 \Leftrightarrow \cos(3x) = 0 \Leftrightarrow 3x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{6} + \dfrac{k\pi}{3},\ k \in \mathbb{Z}$

Estudo do sinal de f'' e do sentido das concavidades do gráfico de f no intervalo $\left[0, \frac{2\pi}{3}\right]$:

x	0		$\frac{\pi}{6}$		$\frac{\pi}{2}$		$\frac{2\pi}{3}$
Sinal de f''	9	$+$	0	$-$	0	$+$	9
Sentido das concavidades do gráfico de f	2	$\cup$	3 P.I.	$\cap$	3 P.I.	$\cup$	2

Uma vez que o período positivo mínimo da função f é $\dfrac{2\pi}{3}$, podemos dizer que os pontos de coordenadas $\left(\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{k\pi}{3}, 3\right)$, $k \in \mathbb{Z}$ são pontos de inflexão do gráfico de f.

31.2.

Domínio:

$$D_g = \mathbb{R}$$

Contradomínio:

$$D'_g = \mathbb{R}$$

Periodicidade:
Esta função não é periódica.

Paridade:
Esta função não é par nem ímpar.

Continuidade:
A função f é contínua em $\mathbb{R}$, por se tratar da soma de duas funções contínuas.

Existência de assíntotas:
Uma vez que esta função é contínua em $\mathbb{R}$, o seu gráfico não admite assíntotas verticais.

$$m = \lim_{x\to+\infty} \frac{g(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2x + \operatorname{sen}\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)}{x} = 2 + \lim_{x\to+\infty} \frac{\operatorname{sen}\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)}{x} = 2,$$

pois a função seno é limitada ($-1 \leq \operatorname{sen} x \leq 1, \forall x \in \mathbb{R}$) e $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x} = 0$.

$$b = \lim_{x\to+\infty} (g(x) - 2x) = \lim_{x\to+\infty} \left(2x + \operatorname{sen}\left(2x+\frac{\pi}{3}\right) - 2x\right) = \lim_{x\to+\infty} \operatorname{sen}\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$$

Este limite não existe, uma vez que a função seno é periódica.
Conclui-se que a função g não admite assíntotas não verticais quando $x \to +\infty$.
Um resultado análogo se obtém quando se estuda a existência de assíntotas não verticais quando $x \to -\infty$. Desta forma, g não admite assíntotas.

Extremos:

$$g'(x) = \left(2x + \operatorname{sen}\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)\right)' = 2 + 2\cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$$

$$\begin{aligned} g'(x) = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad 2 + 2\cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = 0 \Leftrightarrow \cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = -1 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \quad 2x + \frac{\pi}{3} = \pi + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \quad 2x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \quad x = \frac{\pi}{3} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Tabela de variação da derivada de g no intervalo $[0, \pi]$:

α	0		$\frac{\pi}{3}$		π
Sinal de g'	3	$+$	0	$+$	3
Variação de g	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\nearrow$	$\frac{2\pi}{3}$	$\nearrow$	$\frac{\sqrt{3}}{2} + 2\pi$

Uma vez que o período positivo mínimo da função g' é π, a função g é crescente em $\mathbb{R}$, pelo que não admite extremos.

Pontos de inflexão:

$$g''(x) = \left(2 + 2\cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)\right)' = -4\operatorname{sen}\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$$

$$\begin{aligned} g''(x) = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad -4\operatorname{sen}\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = 0 \Leftrightarrow \operatorname{sen}\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = 0 \Leftrightarrow 2x + \frac{\pi}{3} = k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \quad 2x = -\frac{\pi}{3} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \quad x = -\frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Estudo do sinal de g'' e do sentido das concavidades do gráfico de g no intervalo $[0, \pi]$:

x	0		$\frac{\pi}{3}$		$\frac{5\pi}{6}$		π
Sinal de g''	$-2\sqrt{3}$	$-$	0	$+$	0	$-$	$-2\sqrt{3}$
Sentido das concavidades do gráfico de g	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\cap$	$\frac{2\pi}{3}$ P.I.	$\cup$	$\frac{5\pi}{3}$ P.I.	$\cap$	$\frac{\sqrt{3}}{2} + 2\pi$

Uma vez que o período positivo mínimo da função g'' é π, podemos dizer que os pontos de abcissa $-\dfrac{\pi}{6} + \dfrac{k\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$ são pontos de inflexão ao gráfico de g.

31.3.

Domínio:

$$D_h = \left\{x \in \mathbb{R} : x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$$

Contradomínio:

$$D'_h = \mathbb{R}$$

Periodicidade:
Esta função não é periódica.

Paridade:

$$h(-x) = \frac{-x}{2} + \text{ tg } (-x) = -\left(\frac{x}{2} + \text{ tg } (x)\right) = -h(x),\ \forall x \in D_h$$

Pelo que, esta função é ímpar.

Continuidade:
A função f é contínua em D_h, uma vez que é a soma de duas funções contínuas.

Existência de assíntotas:
Para qualquer valor $k \in \mathbb{Z}$, temos:

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to \left(\frac{\pi}{2}+2k\pi\right)^-} h(x) &= \lim_{x \to \left(\frac{\pi}{2}+2k\pi\right)^-} \left(\frac{x}{2} + \text{ tg } x\right) = \\
&= \lim_{x \to \left(\frac{\pi}{2}+2k\pi\right)^-} \left(\frac{\frac{\pi}{2}+k\pi}{2} + \text{ tg } \left(\frac{\pi}{2}+k\pi\right)\right) = \\
&= \frac{\frac{\pi}{2}+k\pi}{2} + \infty = +\infty
\end{aligned}$$

De forma análoga se prova que:

$$\lim_{x \to \left(\frac{3\pi}{2}+2k\pi\right)^-} h(x) = -\infty$$

Desta forma, as retas de equação $x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$ são assíntotas verticais ao gráfico de h.
O gráfico desta função não admite assíntotas não verticais.

Extremos:

$$h'(x) = \left(\frac{x}{2} + \text{ tg } (x)\right)' = \frac{1}{2} + \frac{1}{\cos^2 x}$$

A função h' é sempre positiva, pelo que a função h é sempre crescente nos intervalos onde esteja definida. Não existem por isso extremos.

Pontos de inflexão:

$$h''(x) = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\cos^2 x}\right)' = -2 \times \frac{1}{\cos^3 x} \times (-\ \text{sen}x) = \frac{\text{sen}x}{\cos^3 x}$$

$$h''(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\text{sen}x}{\cos^3 x} = 0 \Leftrightarrow^* x = k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$$

$*$No domínio considerado.

Estudo do sinal de h'' e do sentido das concavidades do gráfico de h no intervalo $[0, 2\pi]$:

x	0		$\frac{\pi}{2}$		π		$\frac{3\pi}{2}$		2π
Sinal de h''	0	$+$	n.d.	$-$	0	$+$	n.d.	$-$	0
Sentido das concavidades do gráfico de h	0 P.I.	$\cup$	n.d.	$\cap$	$\frac{\pi}{2}$ P.I.	$\cup$	n.d.	$\cap$	π P.I.

Uma vez que o período positivo mínimo da função h'' é 2π, podemos dizer que os pontos de abcissa $k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ são pontos de inflexão ao gráfico de h.

32.

32.1.

O período positivo mínimo da função cosseno é 2π, pelo que o período positivo mínimo da função f é $\frac{2\pi}{3}$.

32.2.a)

$$f'(x) = (-2\cos(3x) - 1)' = -2 \times (-\operatorname{sen}(3x)) \times 3 = 6\operatorname{sen}(3x)$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 6\operatorname{sen}(3x) = 0 \Leftrightarrow \operatorname{sen}(3x) = 0 \Leftrightarrow 3x = k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = \frac{k\pi}{3},\ k \in \mathbb{Z}$$

Podemos facilmente verificar que $f'(x) > 0$, $\forall x \in \left]0, \frac{\pi}{3}\right[$, pelo que a função é estritamente crescente em $\left[0, \frac{\pi}{3}\right]$, sendo por isso injetiva. Além disso, temos que $f(0) = -3$ e $f\left(\frac{\pi}{3}\right) = 1$ e, uma vez que a função é contínua, temos que é sobrejetiva. Como a função é injetiva e sobrejetiva, temos que é bijetiva.

32.2.b)

$$\begin{aligned} y = -2\cos(3x) - 1 \quad &\Leftrightarrow \quad y + 1 = -2\cos(3x) \Leftrightarrow \frac{-y-1}{2} = \cos(3x) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \quad 3x = \arccos\left(\frac{-y-1}{2}\right) \Leftrightarrow x = \frac{\arccos\left(\frac{-y-1}{2}\right)}{3} \end{aligned}$$

Temos então:

$$\begin{aligned} g^{-1} : [-3, 1] \quad &\to \quad \left[0, \frac{\pi}{3}\right] \\ x \quad &\mapsto \quad \frac{\arccos\left(\frac{-x-1}{2}\right)}{3} \end{aligned}$$

33.

33.1.

$$\begin{aligned}
x(t) &= -2\sqrt{3}\cos(\pi t) - 2\ \text{sen}(\pi t) = 4\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos(\pi t) - \frac{1}{2}\ \text{sen}(\pi t)\right) = \\
&= 4\left(\ \text{sen}\left(\frac{4\pi}{3}\right)\cos(\pi t) + \cos\left(\frac{4\pi}{3}\right)\ \text{sen}(\pi t)\right) = \\
&= 4\ \text{sen}\left(\frac{4\pi}{3} + \pi t\right) = \\
&= 4\cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{4\pi}{3} - \pi t\right) = \\
&= 4\cos\left(-\frac{5\pi}{6} - \pi t\right) = \\
&= 4\cos\left(\pi t + \frac{5\pi}{6}\right)
\end{aligned}$$

Uma vez que $4 > 0$, $\pi > 0$ e $\frac{5\pi}{6} \in [0, 2\pi[$, provámos que $x(t)$ é um oscilador harmónico.

33.2. A amplitude deste oscilador é 4, o período é $\frac{2\pi}{\pi} = 2$, a frequência é $\frac{1}{2}$ e a fase é $\frac{5\pi}{6}$.

33.3. Uma vez que se trata de um oscilador harmónico, sabemos que:

$$x''(t) = \pi^2 \times 4\cos\left(\pi t + \frac{5\pi}{6}\right) = 4\pi^2\cos\left(\pi t + \frac{5\pi}{6}\right)$$

$$\begin{aligned}
|x''(t)| = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad 4\pi^2\cos\left(\pi t + \frac{5\pi}{6}\right) = 0 \Leftrightarrow \cos\left(\pi t + \frac{5\pi}{6}\right) = 0 \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow \quad \pi t + \frac{5\pi}{6} = \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow \quad \pi t = -\frac{\pi}{3} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow \quad t = -\frac{1}{3} + k,\ k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow^* \quad t = \frac{2}{3} + k,\ k \in \mathbb{N}_0
\end{aligned}$$

$*$ Uma vez que o tempo é necessariamente não negativo.

33.4. Uma vez que se trata de um oscilador harmónico de pulsação π, então $k = \pi^2$.

34. Consideremos o triângulo $[CDF]$. Pela Lei dos Senos, vem que:

$$\frac{2}{\operatorname{sen}(C\widehat{D}F)} = \frac{10}{\operatorname{sen}(D\widehat{F}C)}$$

Consideremos agora o triângulo $[BDE]$. Pela Lei dos Senos, vem que:

$$\frac{2}{\operatorname{sen}(B\widehat{D}E)} = \frac{6}{\operatorname{sen}(B\widehat{E}D)}$$

Desta forma, uma vez que o ângulo CDF e o ângulo BDE são coincidentes, temos:

$$\frac{6}{\operatorname{sen}(B\widehat{E}D)} = \frac{10}{\operatorname{sen}(D\widehat{F}C)} \Leftrightarrow \frac{\operatorname{sen}(B\widehat{E}D)}{\operatorname{sen}(D\widehat{F}C)} = \frac{6}{10}$$

Por outro lado, os ângulos AEF e BED são verticalmente opostos e os ângulos DFC e AFE são suplementares, donde $\operatorname{sen}(A\widehat{E}F) = \operatorname{sen}(B\widehat{E}D)$ e $\operatorname{sen}(\widehat{D}FC) = \operatorname{sen}(A\widehat{F}E)$.
Considerando agora o triângulo $[AEF]$, pela Lei dos Senos:

$$\begin{aligned}\frac{5}{\operatorname{sen}(E\widehat{F}A)} = \frac{\overline{FA}}{\operatorname{sen}(A\widehat{E}F)} \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{5}{\operatorname{sen}(D\widehat{F}C)} = \frac{\overline{AF}}{\operatorname{sen}(B\widehat{E}D)} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \quad \overline{FA} = \frac{5\ \operatorname{sen}(B\widehat{E}D)}{\operatorname{sen}(D\widehat{F}C)} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \quad \overline{FA} = \frac{5 \times 6}{10} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \quad \overline{FA} = 3\end{aligned}$$

35. Sabemos que:

$$\operatorname{sen}\alpha - \cos\alpha = \frac{1}{3} \quad \Leftrightarrow \quad \operatorname{sen}\alpha = \cos\alpha + \frac{1}{3}$$

Pelo Teorema Fundamental da Trigonometria:

$$\begin{aligned}
\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \quad &\Leftrightarrow \quad \left(\cos\alpha + \frac{1}{3}\right)^2 + \cos^2\alpha = 1 \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow \quad 2\cos^2\alpha + \frac{2}{3}\cos\alpha - \frac{8}{9} = 0 \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow \quad \cos\alpha = \frac{-\frac{2}{3} \pm \sqrt{\frac{4}{9} - 4 \times 2 \times \left(-\frac{8}{9}\right)}}{4} \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow^* \quad \cos\alpha = \frac{-1+\sqrt{17}}{6}
\end{aligned}$$

$*$Uma vez que α é agudo.

Por outro lado:

$$\operatorname{sen}\alpha - \cos\alpha = \frac{1}{3} \Leftrightarrow \operatorname{sen}\alpha = \frac{-1+\sqrt{17}}{6} + \frac{1}{3} \Leftrightarrow \operatorname{sen}\alpha = \frac{1+\sqrt{17}}{6}$$

Desta forma:

$$\begin{aligned}
\operatorname{tg}^2\alpha - \frac{1}{\operatorname{tg}^2\alpha} &= \frac{\operatorname{sen}^2\alpha}{\cos^2\alpha} - \frac{\cos^2\alpha}{\operatorname{sen}^2\alpha} = \\
&= \left(\frac{\frac{1+\sqrt{17}}{6}}{\frac{-1+\sqrt{17}}{6}}\right)^2 - \left(\frac{\frac{-1+\sqrt{17}}{6}}{\frac{1+\sqrt{17}}{6}}\right)^2 = \\
&= \left(\frac{1+\sqrt{17}}{-1+\sqrt{17}}\right)^2 - \left(\frac{-1+\sqrt{17}}{1+\sqrt{17}}\right)^2 = \\
&= \left(\frac{18+2\sqrt{17}}{16}\right)^2 - \left(\frac{18-2\sqrt{17}}{16}\right)^2 = \\
&= \left(\frac{9+\sqrt{17}}{8}\right)^2 - \left(\frac{9-\sqrt{17}}{8}\right)^2 = \\
&= \frac{81+17+18\sqrt{17}}{64} - \frac{81+17-18\sqrt{17}}{64} = \\
&= \frac{36\sqrt{17}}{64} = \\
&= \frac{9\sqrt{17}}{16}
\end{aligned}$$

36.

36.1.

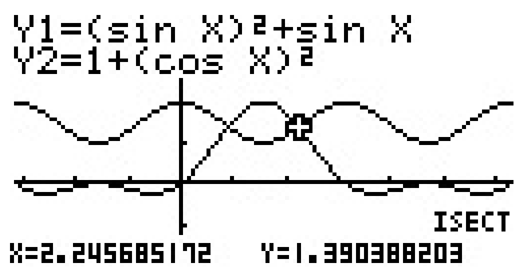
Comecemos por determinar o valor de $\operatorname{sen}\alpha$.

$$\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \Leftrightarrow \operatorname{sen}^2 + \frac{25}{36} = 1 \Leftrightarrow^* \operatorname{sen}\alpha = \frac{\sqrt{11}}{6}$$

$*$No intervalo considerado.

$$\begin{aligned}(f-g)(\alpha) &= \operatorname{sen}^2\left(\arccos\left(\frac{5}{6}\right)\right) + \operatorname{sen}\left(\arccos\left(\frac{5}{6}\right)\right) - 1 - \cos^2\left(\arccos\left(\frac{5}{6}\right)\right)\\ &= \frac{11}{36} + \frac{\sqrt{11}}{6} - 1 - \frac{25}{36} =\\ &= \frac{6\sqrt{11}-50}{36}\end{aligned}$$

36.2.



Como podemos verificar, pelos gráficos acima apresentados, as soluções inteiras da inequação $f(x) > g(x)$ são 1 e 2.

36.3.

$$
\begin{aligned}
& |f(x)-g(x)|=1 \Leftrightarrow \\
\Leftrightarrow \quad & \operatorname{sen}^2 x+\operatorname{sen} x-1-\cos^2 x=1 \vee \operatorname{sen}^2 x+\operatorname{sen} x-1-\cos^2 x=-1 \Leftrightarrow \\
\Leftrightarrow \quad & 2\operatorname{sen}^2 x+\operatorname{sen} x-3=0 \vee 2\operatorname{sen}^2 x+\operatorname{sen} x-1=0 \Leftrightarrow \\
\Leftrightarrow \quad & \operatorname{sen} x=\frac{-1 \pm \sqrt{1-4\times 2\times(-3)}}{4} \vee \operatorname{sen} x=\frac{-1 \pm \sqrt{1-4\times 2\times(-1)}}{4} \Leftrightarrow \\
\Leftrightarrow \quad & \operatorname{sen} x=\frac{-1 \pm 5}{4} \vee \operatorname{sen} x=\frac{-1 \pm 3}{4} \Leftrightarrow \\
\Leftrightarrow \quad & \operatorname{sen} x=1 \vee \operatorname{sen} x=-1 \vee \operatorname{sen} x=\frac{1}{2} \Leftrightarrow \\
\Leftrightarrow^* \quad & x=-\frac{\pi}{2} \vee x=\frac{\pi}{6} \vee x=\frac{\pi}{2} \vee x=\frac{5\pi}{6} \vee x=\frac{3\pi}{2}
\end{aligned}
$$

Os pontos que gozam da mesma propriedade são:

$P_1=\left(-\frac{\pi}{2},0\right)$, $Q_1=\left(-\frac{\pi}{2},1\right)$, $P_2=\left(\frac{\pi}{6},\frac{3}{4}\right)$, $Q_2=\left(\frac{\pi}{6},\frac{7}{4}\right)$, $P_3=\left(\frac{\pi}{2},2\right)$, $Q_3=\left(\frac{\pi}{2},1\right)$, $P_4=\left(\frac{5\pi}{6},\frac{3}{4}\right)$, $Q_4=\left(\frac{5\pi}{6},\frac{7}{4}\right)$, $P_5=\left(\frac{3\pi}{2},0\right)$ e $Q_5=\left(\frac{3\pi}{2},1\right)$.

37.

$$
\begin{aligned}
& \operatorname{sen}^6 x+\cos^6 x-2\operatorname{sen}^4 x-\cos^4 x+\operatorname{sen}^2 x= \\
= \quad & \operatorname{sen}^4 x(\operatorname{sen}^2 x-1)+\cos^4 x(\cos^2 x-1)-\operatorname{sen}^4 x+\operatorname{sen}^2 x= \\
= \quad & -\operatorname{sen}^4 x\cos^2 x-\cos^4 x\operatorname{sen}^2 x-\operatorname{sen}^4 x+\operatorname{sen}^2 x= \\
= \quad & -\operatorname{sen}^4 x(1+\cos^2 x)+\operatorname{sen}^2 x(1-\cos^4 x)= \\
= \quad & -\operatorname{sen}^4 x(1+\cos^2 x)+\operatorname{sen}^2 x(1-\cos^2 x)(1+\cos^2 x)= \\
= \quad & -\operatorname{sen}^4 x(1+\cos^2 x)+\operatorname{sen}^2 x\operatorname{sen}^2 x(1+\cos^2 x)= \\
= \quad & -\operatorname{sen}^4 x(1+\cos^2 x)+\operatorname{sen}^4 x(1+\cos^2 x)=0
\end{aligned}
$$

Como queríamos mostrar.

38.

38.1.

$$\begin{aligned}
\sqrt{3}\ \mathrm{sen}x - \cos x = 1 \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{\sqrt{3}}{2}\ \mathrm{sen}x - \frac{1}{2}\cos x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow \quad \cos\left(\frac{\pi}{6}\right)\ \mathrm{sen}x - \ \mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{6}\right)\cos x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow \quad \mathrm{sen}\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow \quad x - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \vee x - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow \quad x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \vee x = \pi + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}
\end{aligned}$$

38.2.

$$\begin{aligned}
\mathrm{sen}x - \cos x = \sqrt{2} \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{\mathrm{sen}x}{\sqrt{2}} - \frac{\cos x}{\sqrt{2}} = 1 \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow \quad \frac{\sqrt{2}}{2}\ \mathrm{sen}x - \frac{\sqrt{2}}{2}\cos x = 1 \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow \quad \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\ \mathrm{sen}x - \ \mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right)\cos x = 1 \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow \quad \mathrm{sen}\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 1 \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow \quad x - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow \quad x = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}
\end{aligned}$$

38.3.

$$\begin{aligned}
\cos x = 2\ \mathrm{sen}^2\left(\frac{x}{2}\right) &\Leftrightarrow \cos x = 2 - 2\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow^{*} \cos(2y) = 2 - 2\cos^2 y \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow \cos^2 y - \ \mathrm{sen}^2 y = 2 - 2\cos^2 y \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow 3\cos^2 y - 1 + \cos^2 y = 2 \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow 4\cos^2 y = 3 \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow \cos^2 y = \frac{3}{4} \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow \cos y = \pm\frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow^{**} \frac{x}{2} = \frac{\pi}{6} + k\pi \vee \frac{x}{2} = -\frac{\pi}{6} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \vee x = \frac{5\pi}{3} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}
\end{aligned}$$

$*$Efetuando a mudança de variável $\frac{x}{2} = y$.
$**$Voltando à variável original.

38.4.

$$\begin{aligned}
&\mathrm{sen}\left(x + \frac{\pi}{6}\right) + \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}\cos(2x) - \frac{1}{4} \Leftrightarrow \\
\Leftrightarrow\ & \frac{\sqrt{3}}{2}\ \mathrm{sen} x + \frac{1}{2}\cos x + \frac{1}{2}\cos x - \frac{\sqrt{3}}{2}\ \mathrm{sen} x = \frac{1}{2}(\cos^2 x - \ \mathrm{sen}^2 x) - \frac{1}{4} \Leftrightarrow \\
\Leftrightarrow\ & \cos x = \frac{1}{2}(\cos^2 x - 1 + \cos^2 x) - \frac{1}{4} \Leftrightarrow \\
\Leftrightarrow\ & \cos x - \cos^2 x + \frac{3}{4} = 0 \Leftrightarrow \\
\Leftrightarrow\ & \cos x = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4 \times (-1 \times \frac{3}{4})}}{-2} \Leftrightarrow \\
\Leftrightarrow\ & \cos x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \\
\Leftrightarrow\ & x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \vee x = \frac{4\pi}{3} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}
\end{aligned}$$

39.

$$\begin{aligned} \text{sen}(a-b)+\cos(a+b) &= \text{sen}a\cos b-\cos a\ \text{sen}b+\cos a\cos b-\ \text{sen}a\ \text{sen}b= \\ &= \text{sen}a(\cos b-\ \text{sen}b)+\cos a(\cos b-\ \text{sen}b)= \\ &= (\ \text{sen}a+\cos a)(\cos b-\ \text{sen}b) \end{aligned}$$

Como queríamos mostrar.

40.
40.1.
Sabemos que altura mínima é 2. Assim:

$$a-b=2\Leftrightarrow a=2+b$$

Sabemos também que a altura máxima é 22. Assim:

$$a+b=22\Leftrightarrow 2+b+b=22\Leftrightarrow 2b=20\Leftrightarrow b=10$$

Temos, então, que $b=10$ e $a=12$.

O ângulo correspondente a $t=0$ é 0, pelo que $d=0$.

Por fim, uma vez que o período de h é 30, temos que:

$$\frac{2\pi}{c}=30\Leftrightarrow c=\frac{\pi}{15}$$

40.2.

$$\begin{aligned} & \cos^2 a+\cos^2 b+\cos^2 c-2\cos a\cos b\cos c= \\ = & \cos^2 a+\cos^2 b+\cos^2(a+b)-2\cos a\cos b\cos(a+b)= \\ = & \cos^2 a+\cos^2 b+(\cos a\cos b-\ \text{sen}a\ \text{sen}b)^2-2\cos a\cos b(\cos a\cos b-\ \text{sen}a\ \text{sen}b)= \\ = & \cos^2 a+\cos^2 b+\cos^2 a\cos^2 b+\ \text{sen}^2 a\ \text{sen}^2 b-2\cos a\cos b\ \text{sen}a\ \text{sen}b- \\ & -2\cos^2 a\cos^2 b+2\cos a\cos b\ \text{sen}a\ \text{sen}b= \\ = & \cos^2 a+\cos^2 b+(1-\cos^2 a)(1-\cos^2 b)-\cos^2 a\cos^2 b= \\ = & \cos^2 a+\cos^2 b+1-\cos^2 a-\cos^2 b+\cos^2 a\cos^2 b-\cos^2 a\cos^2 b= \\ = & 1 \end{aligned}$$

Como queríamos mostrar.

41. A função é contínua, por se tratar da soma entre duas funções contínuas: a função constante $x \mapsto 1$ e a composta da função módulo com a função seno $x \mapsto |\operatorname{sen} x|$.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\pi^+} \frac{f(x)-1}{x-\pi} &= \lim_{x\to\pi^+} \frac{1+|\operatorname{sen} x|-1}{x-\pi} \overset{(\frac{0}{0})}{=} \lim_{x\to\pi^+} \frac{|\operatorname{sen} x|}{|x-\pi|} = \\ &= \left|\lim_{x\to\pi^+} \frac{\operatorname{sen} x}{x-\pi}\right| = \left|\lim_{x\to\pi^+} \frac{-\operatorname{sen}(x-\pi)}{x-\pi}\right| =^* \left|-\lim_{y\to 0^+} \frac{\operatorname{sen} y}{y}\right| = 1\end{aligned}$$

$*$ Considerando a mudança de variável $x-\pi=y$: se $x \to \pi^+$, então $y \to 0^+$.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\pi^-} \frac{f(x)-1}{x-\pi} &= \lim_{x\to\pi^-} \frac{1+|\operatorname{sen} x|-1}{x-\pi} \overset{(\frac{0}{0})}{=} \lim_{x\to\pi^-} \frac{|\operatorname{sen} x|}{-|x-\pi|} = \\ &= -\left|\lim_{x\to\pi^-} \frac{\operatorname{sen} x}{x-\pi}\right| = -\left|\lim_{x\to\pi^-} \frac{-\operatorname{sen}(x-\pi)}{x-\pi}\right| =^* -\left|-\lim_{y\to 0^-} \frac{\operatorname{sen} y}{y}\right| = -1\end{aligned}$$

Conclui-se que não existe derivada de f em $x=\pi$.

42.

42.1. Comecemos por calcular $g''(x)$:

$$\begin{aligned}g'(x) &= \left(\left(\frac{x}{2k}+1\right)\ \operatorname{sen}(kx)\right)' = \frac{1}{2k}\operatorname{sen}(kx) + \left(\frac{x}{2k}+1\right)\cos(kx)\times k = \\ &= \frac{1}{2k}\operatorname{sen}(kx) + \left(\frac{x}{2}+k\right)\cos(kx)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}g''(x) &= \left(\frac{1}{2k}\operatorname{sen}(kx) + \left(\frac{x}{2}+k\right)\cos(kx)\right)' = \\ &= \frac{1}{2}\cos(kx) + \frac{1}{2}\cos(kx) - \left(\frac{xk}{2}+k^2\right)\ \operatorname{sen}(kx) = \\ &= \cos(kx) - \left(\frac{xk}{2}+k^2\right)\ \operatorname{sen}(kx)\end{aligned}$$

Então:

$$g''(x)+k^2g(x) = \cos(kx) - \left(\frac{xk}{2}+k^2\right)\ \operatorname{sen}(kx) + k^2\left(\frac{x}{2k}+1\right)\ \operatorname{sen}(kx) = \cos(kx)$$

42.2.

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}\frac{\left(\frac{x}{2k}+1\right)\ \operatorname{sen}(kx)}{x} &\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x\to 0}\left(\frac{x}{2k}+1\right)\times\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}(kx)}{x} = \\
&= 1\times k\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}(kx)}{kx} = \\
&=^{*} k\lim_{y\to 0}\frac{\operatorname{sen}(y)}{y} = \\
&= k
\end{aligned}$$

$*$ Considerando a mudança de variável $kx=y$: se $x\to 0$, então $y\to 0$.

42.3.

$$g'(0)=\frac{1}{2k}\operatorname{sen}(0)+\left(\frac{0}{2}+k\right)\cos(0)=k$$

Assim, a equação reduzida da reta é $y=kx+b$.

$$g(0)=\left(\frac{0}{2k}+1\right)\ \operatorname{sen}(0)=0$$

Temos que o ponto $(0,0)$ pertence à reta, logo:

$$0=k\times 0+b\Leftrightarrow b=0$$

Concluímos que a reta tangente ao gráfico de g no ponto de abcissa 0 tem equação $y=kx$.

43.
43.1.

$$D_g=\{x\in\mathbb{R}:\ \operatorname{sen}(\pi x)\neq 0\}$$

$$\operatorname{sen}(\pi x)=0\Leftrightarrow \pi x=k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow x=k,\ k\in\mathbb{Z}$$

Logo, $D_g=\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$.

43.2. A função é contínua em $]0,1[$, pois é o quociente de duas funções contínuas.

Em $x = 0$:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0^+} g(x) &= \lim_{x\to 0^+} \frac{x^2 - x}{\operatorname{sen}(\pi x)} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{x(x-1)}{\operatorname{sen}(\pi x)} = \\
&= \lim_{x\to 0^+} \frac{x}{\operatorname{sen}(\pi x)} \times \lim_{x\to 0^+} (x-1) = \\
&= \frac{1}{\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{\operatorname{sen}(\pi x)}{x}} \times (-1) = \\
&= \frac{-1}{\displaystyle\pi \lim_{x\to 0^+} \frac{\operatorname{sen}(\pi x)}{\pi x}} = \\
&=^* \frac{-1}{\displaystyle\pi \lim_{y\to 0^+} \frac{\operatorname{sen}(y)}{y}} = \\
&= -\frac{1}{\pi}
\end{aligned}$$

$*$ Considerando a mudança de variável $\pi x = y$: se $x \to 0^+$, então $y \to 0^+$.

Assim, para que a função seja contínua em $x = 0$, temos que $a = -\dfrac{1}{\pi}$.

Em $x = 1$:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 1^-} g(x) &= \lim_{x\to 1^-} \frac{x^2 - x}{\operatorname{sen}(\pi x)} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x\to 1^-} \frac{x(x-1)}{\operatorname{sen}(\pi x)} = \\
&= \lim_{x\to 1^-} \frac{x-1}{-\operatorname{sen}(\pi x - \pi)} \times \lim_{x\to 1^-} x = \\
&= -\frac{1}{\pi} \lim_{x\to 1^-} \frac{\pi x - \pi}{\operatorname{sen}(\pi x - \pi)} \times 1 = \\
&= -\frac{1}{\pi} \times \frac{1}{\displaystyle\lim_{x\to 1^-} \frac{\operatorname{sen}(\pi x - \pi)}{\pi x - \pi}} = \\
&=^* -\frac{1}{\pi} \times \frac{1}{\displaystyle\lim_{y\to 0^-} \frac{\operatorname{sen}(y)}{y}} = \\
&= -\frac{1}{\pi}
\end{aligned}$$

$*$ Considerando a mudança de variável $\pi x - \pi = y$: se $x \to 1^-$, então $y \to 0^-$.

Assim, para que a função seja contínua em $x = 1$, temos que $b = -\dfrac{1}{\pi}$.

44.
44.1.
Uma vez que se trata de uma pirâmide regular então o triângulo $[ABC]$ é equilátero. Assim, temos que:

$$C\widehat{A}D = \frac{2\pi - \alpha - \frac{\pi}{3}}{2} \Leftrightarrow C\widehat{A}D = \frac{5\pi}{6} - \frac{\alpha}{2}$$

Sabemos também que a área lateral da pirâmide é o triplo da área do triângulo $[ACD]$ de base $[AC]$ e altura h.
Uma vez que $\overline{AD} = 2$, temos que:

$$\text{sen}\left(\frac{5\pi}{6} - \frac{\alpha}{2}\right) = \frac{h}{2} \Leftrightarrow h = 2\ \text{sen}\left(\frac{5\pi}{6} - \frac{\alpha}{2}\right)$$

e que:

$$\cos\left(\frac{5\pi}{6} - \frac{\alpha}{2}\right) = \frac{\frac{\overline{AC}}{2}}{2} \Leftrightarrow \overline{AC} = 4\cos\left(\frac{5\pi}{6} - \frac{\alpha}{2}\right)$$

Assim, a área do triângulo $[ACD]$ é dada, em função de α, por:

$$\begin{aligned}
&\frac{4\cos\left(\frac{5\pi}{6} - \frac{\alpha}{2}\right) \times 2\ \text{sen}\left(\frac{5\pi}{6} - \frac{\alpha}{2}\right)}{2} = \\
= \quad & 4\cos\left(\frac{5\pi}{6} - \frac{\alpha}{2}\right)\ \text{sen}\left(\frac{5\pi}{6} - \frac{\alpha}{2}\right) = \\
= \quad & 2\ \text{sen}\left(\frac{5\pi}{3} - \alpha\right) = \\
= \quad & 2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\alpha - \frac{1}{2}\ \text{sen}\alpha\right) = \\
= \quad & -\sqrt{3}\cos\alpha - \ \text{sen}\alpha
\end{aligned}$$

Podemos, então, afirmar que a área lateral da pirâmide, A, pode ser dada em função de α, por:

$$-3\sqrt{3}\cos\alpha - 3\ \text{sen}\alpha$$

44.2.

$$A(\pi) = -3\sqrt{3}\cos\pi - 3\ \text{sen}\pi = 3\sqrt{3}$$

Esta é a área lateral do tetraedro.

44.3.

$$A'(\alpha) = (-3\sqrt{3}\cos\alpha - 3\ \text{sen}\alpha)' = 3\sqrt{3}\ \text{sen}\alpha - 3\cos\alpha$$

$$\begin{aligned}
A'(\alpha) = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad 3\sqrt{3}\ \text{sen}\alpha - 3\cos\alpha = 0 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2}\ \text{sen}\alpha - \frac{1}{2}\cos\alpha = 0 \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow \quad \cos\left(\frac{\pi}{6}\right)\ \text{sen}\alpha - \ \text{sen}\left(\frac{\pi}{6}\right)\cos\alpha = 0 \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow \quad \text{sen}\left(\alpha - \frac{\pi}{6}\right) = 0 \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow \quad \alpha - \frac{\pi}{6} = k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \\
&\Leftrightarrow \quad \alpha = \frac{\pi}{6} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \\
&\Leftrightarrow^{*} \quad \alpha = \frac{7\pi}{6}
\end{aligned}$$

$*$ No intervalo considerado.

Tabela de variação de A:

α	$\frac{2\pi}{3}$		$\frac{7\pi}{6}$		$\frac{5\pi}{3}$
Sinal de A'	n.d.	$+$	0	$-$	n.d.
Variação de A	n.d.	$\nearrow$	6 máx.	$\searrow$	n.d.

Podemos, então, verificar que a função atinge o máximo 6 em $\alpha = \dfrac{7\pi}{6}$.

44.4. A função A é contínua em $\left]\dfrac{2\pi}{3}, \dfrac{5\pi}{3}\right[$, por se tratar da subtração de duas funções contínuas. Em particular, é contínua em $\left[\dfrac{5\pi}{6}, \pi\right]$. Além disso:

$$A\left(\frac{5\pi}{6}\right) = -3\sqrt{3}\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) - 3\ \text{sen}\left(\frac{5\pi}{6}\right) = -3\sqrt{3}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - 3 \times \frac{1}{2} = 3$$

e

$$A(\pi) = -3\sqrt{3}\cos\pi - 3\ \text{sen}\pi = 3\sqrt{3}$$

Como $3 < 3\sqrt{2} < 3\sqrt{3}$, pelo teorema de Bolzano-Cauchy, podemos concluir que existe pelo menos um número real $c \in \left]\frac{5\pi}{6}, \pi\right[$, tal que $A(c) = 3\sqrt{2}$, isto é, existe pelo menos um valor de α para o qual a rea lateral da pirâmide é igual a $3\sqrt{2}$.
Além disso, pela tabela de variação da alínea anterior podemos verificar que a função A é estritamente crescente no intervalo $\left[\frac{5\pi}{6}, \pi\right]$, pelo que este valor de α é único.

45.

45.1. Por um lado, temos que $\cos(\text{arccos}x) = x$. Por outro lado, sabemos que $0 \leq \text{arccos}x \leq \pi$, pelo que $\text{sen}(\text{arccos}x) \geq 0$. Assim

$$\text{sen}^2(\text{arccos}x) + x^2 = 1 \Leftrightarrow \text{sen}^2(\text{arccos}x) = 1 - x^2 \Leftrightarrow \text{sen}(\text{arccos}x) = \sqrt{1-x^2}$$

45.2. Por um lado, temos que $\text{sen}(\text{arcsen}x) = x$. Por outro lado, sabemos que $-\frac{\pi}{2} \leq \text{arcsen}x \leq \frac{\pi}{2}$, pelo que $\cos(\text{arcsen}x) \geq 0$. Assim:

$$\cos^2(\text{arcsen}x) + x^2 = 1 \Leftrightarrow \cos^2(\text{arcsen}x) = 1 - x^2 \Leftrightarrow \cos(\text{arcsen}x) = \sqrt{1-x^2}$$

45.3. Por um lado, temos que $\text{tg}\ (\text{arctg}x) = x$. Por outro lado, sabemos que $-\frac{\pi}{2} \leq \text{arctg}x \leq \frac{\pi}{2}$, pelo que $\cos(\text{arctg}x) \geq 0$. Assim:

$$1 + x^2 = \frac{1}{\cos^2 x} \Leftrightarrow \cos^2 x = \frac{1}{1+x^2} \Leftrightarrow \cos x = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

45.4. Sabemos que $-\frac{\pi}{2} \leq \text{arcsen}x \leq \frac{\pi}{2}$ e que $\text{sen}x = -\ \text{sen}(-x)$, pois a função seno é ímpar. Assim, se $\text{arcsen}x = \alpha$, então $x = \text{sen}\alpha$ e temos:

$$\text{arcsen}(-x) = \text{arcsen}(-\ \text{sen}\alpha) = \text{arcsen}(\ \text{sen}(-\alpha)) = -\alpha$$

Desta forma:

$$\text{arcsen}x + \text{arcsen}(-x) = \alpha - \alpha = 0$$

45.5. Sabemos que $0 \leq \text{arccos}x \leq \pi$. Assim, se $\text{arccos}x = \alpha$, então $x = \cos\alpha$ e temos:

$$\begin{aligned} \text{arccos}\left(\sqrt{1-x^2}\right) &= \text{arccos}\left(\sqrt{1-\cos^2\alpha}\right) = \text{arccos}(\ \text{sen}\alpha) = \\ &= \text{arccos}\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\right) = \frac{\pi}{2} - \alpha = \frac{\pi}{2} - \text{arccos}x \end{aligned}$$

Desta forma:

$$\text{arccos}\left(\sqrt{1-x^2}\right) + \text{arccos}x = \frac{\pi}{2}$$

45.6. Sabemos que $-\frac{\pi}{2} \leq \text{arctg}(x) \leq \frac{\pi}{2}$. Assim, se $\text{arctg}x = \alpha$, então $x =\ \text{tg}\ \alpha$ e temos:

$$\begin{aligned} \text{arctg}\left(\frac{1}{x}\right) &= \text{arctg}\left(\frac{1}{\text{tg}\ \alpha}\right) = \text{arctg}\left(\frac{\cos\alpha}{\text{sen}\alpha}\right) = \\ &= \text{arctg}\left(\frac{\text{sen}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)}\right) = \\ &= \text{arctg}\left(\ \text{tg}\ \left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\right) = \\ &= \frac{\pi}{2} - \alpha = \frac{\pi}{2} - \text{arctg}x \end{aligned}$$

Desta forma:

$$\text{arctg}\left(\frac{1}{x}\right) + \text{arctg}x = \frac{\pi}{2}$$

46.

46.1.

Seja $a, b \in \mathbb{R}$.

Sabemos que $-1 \leq \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \leq 1$ e que $-1 \leq \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \leq 1$. Além disso:

$$\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2 + \left(\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2 = \frac{a^2+b^2}{a^2+b^2} = 1$$

Podemos, então, considerar que existe um ângulo c tal que $\cos c = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$ e $\operatorname{sen} c = \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

$$\begin{aligned}
a\cos(\omega t) + b\,\operatorname{sen}(\omega t) &= \left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos(\omega t) + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\operatorname{sen}(\omega t)\right) \times \sqrt{a^2+b^2} = \\
&= (\cos c\cos(\omega t) + \operatorname{sen} c\,\operatorname{sen}(\omega t)) \times \sqrt{a^2+b^2} = \\
&= \cos(\omega t - c)\sqrt{a^2+b^2}
\end{aligned}$$

46.2.a)

$$\cos c = \frac{1}{\sqrt{1^2+(-1)^2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\operatorname{sen} c = \frac{-1}{\sqrt{1^2+(-1)^2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Assim, $c = \dfrac{7\pi}{4}$.

$$\cos(\pi t) - \operatorname{sen}(\pi t) = \sqrt{1-(-1)}\cos\left(\pi t - \frac{7\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\cos\left(\pi t + \frac{\pi}{4}\right)$$

46.2.b)

$$\cos c = \frac{-1}{\sqrt{1^2+(-1)^2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\operatorname{sen} c = \frac{1}{\sqrt{1^2+(-1)^2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Assim, $c = \dfrac{3\pi}{4}$.

$$-\cos(\pi t) + \operatorname{sen}(\pi t) = \sqrt{1-(-1)}\cos\left(\pi t - \frac{3\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\cos\left(\pi t + \frac{5\pi}{4}\right)$$

46.2.c)

$$\cos c = \frac{\frac{3\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{\frac{27}{4}+\frac{9}{4}}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\operatorname{sen} c = \frac{-\frac{3}{2}}{\sqrt{\frac{27}{4}+\frac{9}{4}}} = -\frac{1}{2}$$

Assim, $c = \dfrac{11\pi}{6}$.

$$\frac{3\sqrt{3}}{2}\cos(\pi t) - \frac{3}{2}\operatorname{sen}(\pi t) = \sqrt{\frac{27}{4}+\frac{9}{4}}\cos\left(\pi t - \frac{11\pi}{6}\right) = 3\cos\left(\pi t + \frac{\pi}{6}\right)$$

46.2.d)

$$\cos c = \frac{-\frac{3\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{\frac{27}{4}+\frac{9}{4}}} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\operatorname{sen} c = \frac{\frac{3}{2}}{\sqrt{\frac{27}{4}+\frac{9}{4}}} = \frac{1}{2}$$

Assim, $c = \dfrac{5\pi}{6}$.

$$-\frac{3\sqrt{3}}{2}\cos(\pi t) + \frac{3}{2}\operatorname{sen}(\pi t) = \sqrt{\frac{27}{4}+\frac{9}{4}}\cos\left(\pi t - \frac{5\pi}{6}\right) = 3\cos\left(\pi t + \frac{7\pi}{6}\right)$$

47.

47.1.

Uma vez que o ponto tem massa 3 g, pela segunda lei de Newton, temos que $F = 3x''(t)$, onde F representa a força exercida pela mola.
Por outro lado, temos que a força exercida pela mola é proporcional ao deslocamento, sendo a constante de proporcionalidade igual a -12, ou seja, $F = -12x(t)$. Podemos então afirmar que:

$$3x''(t) = -12x(t) \Leftrightarrow x''(t) = -4x(t)$$

pelo que $\alpha = 4$.

47.2.

O oscilador harmónico que é solução desta equação diferencial deve ter $\omega = \sqrt{4} = 2$.

47.3.

Como no instante inicial o ponto se encontra 3 centímetros à direita do ponto de equilíbrio, temos:

$$x(0) = 3 \Leftrightarrow A\cos(2 \times 0 + \varphi) = 3 \Leftrightarrow A\cos(\varphi) = 3 \Leftrightarrow \cos(\varphi) = \frac{3}{A}$$

Sabemos também que a velocidade nesse instante é -8 cm/s, ou seja, $x'(0) = -8$.

$$x'(t) = (A\cos(2t - \varphi))' = -2A\ \text{sen}(2t - \varphi)$$

Assim:

$$x'(0) = -8 \Leftrightarrow -2A\ \text{sen}(2 \times 0 - \varphi) = -8 \Leftrightarrow\ \text{sen}\varphi = \frac{4}{A}$$

Pelo Teorema Fundamental da Trigonometria:

$$\left(\frac{3}{A}\right)^2 + \left(\frac{4}{A}\right)^2 = 1 \Leftrightarrow \frac{9}{A^2} + \frac{16}{A^2} = 1 \Leftrightarrow^* A = 5$$

$*$Uma vez que $A > 0$.

Conclui-se que:

$$\text{sen}\varphi = \frac{4}{5} \Leftrightarrow \varphi = \text{arcsen}\left(\frac{4}{5}\right) \Leftrightarrow \varphi \approx 0,93$$