Geometria (10.º ano)

Circunferências, círculos, superfícies esféricas e esferas

Exercícios de Provas Nacionais e Testes Intermédios - Propostas de resolução

1. Como a superfície esférica tem centro no ponto R e contém o ponto Q, o comprimento do raio é:

$$r = \overline{RQ} = \sqrt{(-5-(-2))^2 + (5-1)^2 + (-3-1)^2} = \sqrt{(-5+2)^2 + 4^2 + (-4)^2} =$$

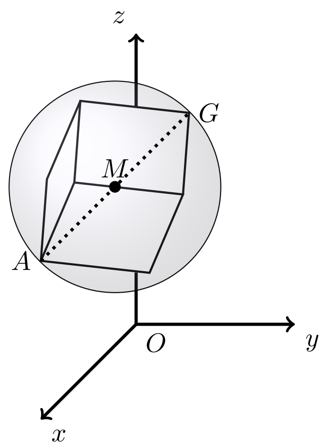
$$= \sqrt{(-3)^2 + 16 + 16} = \sqrt{9+32} = \sqrt{41}$$

Como as coordenadas do centro são $(-5{,}5,-3)$, a equação da superfície esférica é:

$$(x-(-5))^2 + (y-5)^2 + (z-(-3))^2 = \left(\sqrt{41}\right)^2 \Leftrightarrow (x+5)^2 + (y-5)^2 + (z+3)^2 = 41$$

Resposta: **Opção C**

Exame – 2021, 2.ª Fase



2. Como a superfície esférica de contém os oito vértices do cubo, o respetivo centro está a igual distância de todos os vértices, em particular dos vértices A e G, pelo que o centro é o ponto médio do segmento $[AG]$, e as suas coordenadas podem ser obtidas a partir das coordenadas dos extremos do segmento de reta:

$$\left(\frac{5+7}{2},\frac{3+1}{2},\frac{6+4}{2}\right) = \left(\frac{12}{2},\frac{4}{2},\frac{10}{2}\right) = (6{,}2{,}5)$$

Como $[AG]$ é um diâmetro da superfície esférica, e o raio é metade do diâmetro, temos que:

$$r = \frac{\overline{AG}}{2} = \frac{\sqrt{(5-7)^2+(3-1)^2+(6-4)^2}}{2} = \frac{\sqrt{(-2)^2+2^2+2^2}}{2} = \frac{\sqrt{4+4+4}}{2} = \frac{\sqrt{12}}{2}$$

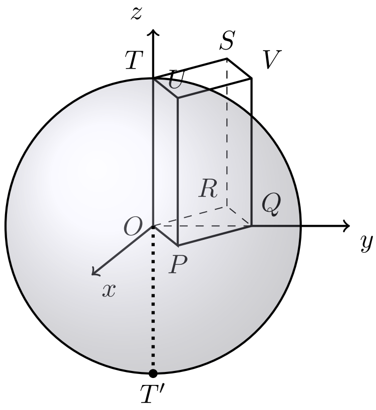
E assim, a equação da superfície esférica é:

$$(x-6)^2+(y-2)^2+(z-5)^2 = \left(\frac{\sqrt{12}}{2}\right)^2 \Leftrightarrow (x-6)^2+(y-2)^2+(z-5)^2 = \frac{12}{4} \Leftrightarrow (x-6)^2+(y-2)^2+(z-5)^2 = 3$$

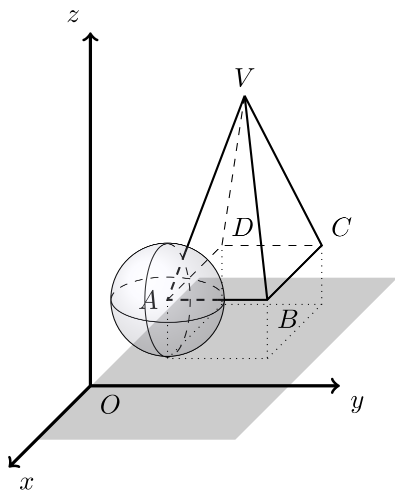
Exame – 2020, 2.ª Fase

3. Como o ponto T pertence ao eixo Oz tem abcissa e ordenada nulas e como pertence ao plano $z = 3$, as suas coordenadas são $(0,0,3)$
   Assim, o ponto T' simétrico do ponto T relativamente à origem do referencial tem de coordenadas $(0,0,-3)$
   Assim temos que o centro da superfície esférica é o ponto médio do diâmetro $[TT']$, ou seja, a origem do referencial (como se pretende ilustrar na figura ao lado), e o raio é a distância do ponto T ao centro, ou seja 3, pelo que a equação da superfície esférica é:

$$(x-0)^2+(y-0)^2+(z-0)^2=3^2 \Leftrightarrow x^2+y^2+z^2=9$$



Exame – 2017, 1.ª Fase



4. Como o ponto A tem cota 1, está à distância 1 do plano xOy, pelo que o raio da superfície esférica de centro no ponto A e que é tangente ao plano xOy tem raio 1.

   Assim, a equação da superfície esférica é:

$$(x-(-1))^2+(y-1)^2+(z-1)^2=1^2 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (x+1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=1$$

Exame – 2016, 1.ª Fase

5. O raio r, da superfície esférica da qual o segmento de reta $[AB]$ é um diâmetro, é igual a metade da distância entre os pontos A e B. Calculado a distância e depois o raio, temos

$$\overline{AB}=\sqrt{(4-0)^2+(0-0)^2+(0-2)^2}=\sqrt{16+0+4}=\sqrt{20}=\sqrt{4\times 5}=\sqrt{2^2\times 5}=2\sqrt{5}$$

$$r=\frac{\overline{AB}}{2}=\frac{2\sqrt{5}}{2}=\sqrt{5}$$

   O centro da superfície esférica é ponto médio do diâmetro, ou seja

$$M_{[AB]}=\left(\frac{4+0}{2},\frac{0+0}{2},\frac{0+2}{2}\right)=(2,0,1)$$

   pelo que, uma equação cartesiana da superfície esférica da qual o segmento de reta $[AB]$ é um diâmetro, é

$$(x-2)^2+(y-0)^2+(z-1)^2=\left(\sqrt{5}\right)^2 \Leftrightarrow (x-2)^2+y^2+(z-1)^2=5$$

Exame – 2015, 1.ª Fase

6. Como a superfície esférica tem centro no ponto A e contém o ponto B, temos que o seu raio ,r, é dado por:

$$r = \overline{AB} = \sqrt{(11-8)^2 + (-1-5)^2 + (2-0)^2} = \sqrt{3^2 + (-6)^2 + 2^2} = \sqrt{9+36+4} = \sqrt{49} = 7$$

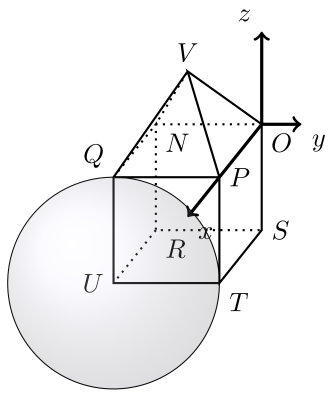
Assim, a equação da superfície esférica é:

$$(x-11)^2 + (y-(-1))^2 + (z-2)^2 = 7^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x-11)^2 + (y+1)^2 + (z-2)^2 = 49$$

Teste Intermédio 10.º ano – 06.05.2011

7. Como a superfície esférica de centro em U e passa no ponto T, então o raio da superfície esférica é igual à medida da aresta do cubo, ou seja 4, pelo que a equação da superfície esférica é:

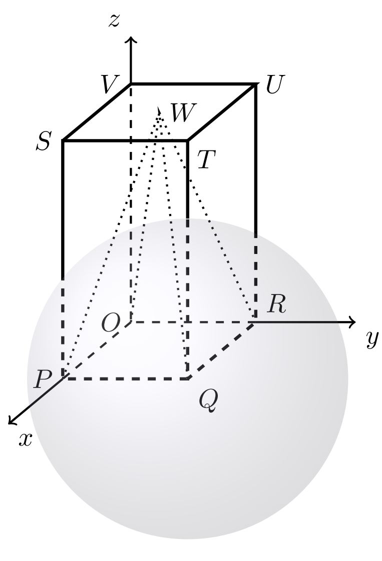


$$(x-4)^2 + (y-(-4))^2 + (z-(-4))^2 = 4^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x-4)^2 + (y+4)^2 + (z+4)^2 = 16$$

Teste Intermédio 11.º ano – 27.01.2011

8. Como o ponto P tem coordenadas (5,0,0) e o quadrado $[OPQR]$ está contida no plano xOy, então o ponto Q tem a abcissa e ordenada iguais à abcissa do ponto P e cota nula, ou seja:



$$Q(x_P, y_P, 0) = Q(5,5,0)$$

Assim, o raio da superfície esférica de centro no ponto Q e que passa no ponto O é:

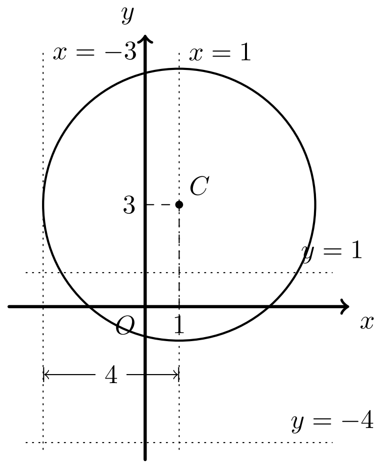
$$r = \overline{QO} = \sqrt{(5-0)^2 + (5-0)^2 + (0-0)^2} = \sqrt{25+25+0} = \sqrt{50}$$

Desta forma uma condição que define a superfície esférica de centro no ponto Q e que passa no ponto O, é:

$$(x-5)^2 + (y-5)^2 + (z-0)^2 = \left(\sqrt{50}\right)^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x-5)^2 + (y-5)^2 + z^2 = 50$$

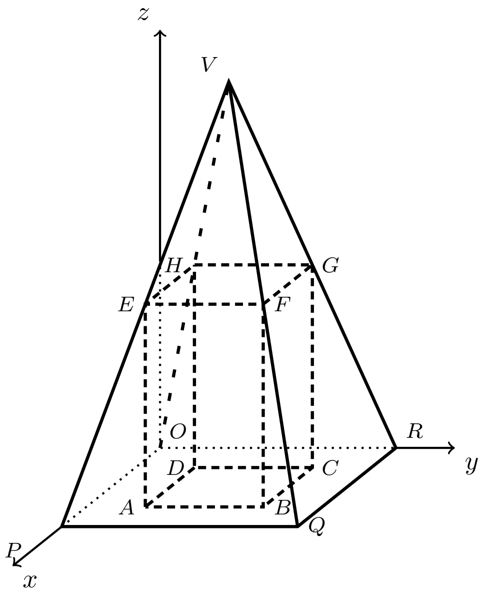
Teste Intermédio 10.º ano – 05.05.2010



9. Como a circunferência tem centro no ponto (1,3) e raio 4, de entre as equações apresentadas, a única que define uma recta tangente à circunferência é $x = -3$, porque a distância desta reta ao centro da circunferência é igual ao raio, e as restantes intersetam a circunferência ou a respetiva distância ao centro é superior ao raio.

   Resposta: **Opção A**

Teste Intermédio 10.º ano – 29.01.2010



10. Como o vértice P pertence aos eixos coordenados Ox, tem ordenada e cota nula, e como pertence à superfícies esférica, podemos determinar a sua abcissa, substituindo os valores da ordenada $y = 0$ e da cota $z = 0$ na equação que define a superfície esférica:

$$x^2 + 0^2 + 0^2 - 2x - 2(0) - 8(0) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x(x-2) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 2$$

Assim, temos que as coordenadas do ponto P são (2,0,0), porque a outra solução corresponde à abcissa do outro ponto da superfície esférica que pertence ao eixo Ox, ou seja, o vértice O da pirâmide, pelo que a medida da aresta da base é 2.

Modificando a equação da superfície esférica, podemos identificar as coordenadas do centro, ou seja do ponto V, cuja cota é altura da pirâmide:

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y - 8z = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x + y^2 - 2y + z^2 - 8z = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 2 \times 1 \times x + 1^2 + y^2 - 2 \times 1 \times y + 1^2 + z^2 - 2 \times 4 \times z + 4^2 = 1^2 + 1^2 + 4^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-4)^2 = 1 + 1 + 16 \Leftrightarrow (x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-4)^2 = 18$$

Assim, o volume da pirâmide é:

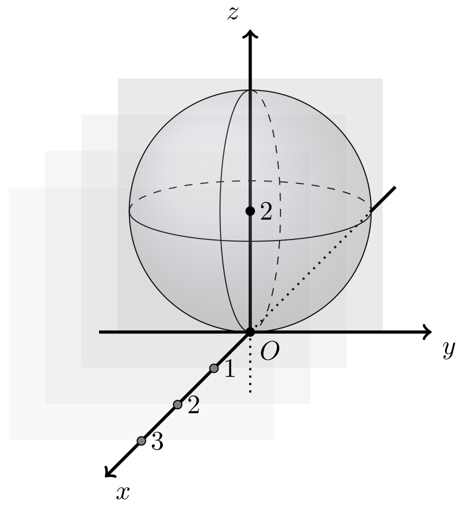
$$V_{[VOPQR]} = \frac{1}{3} \times A_{[OPQR]} \times z_V = \frac{1}{3} \times 2^2 \times 4 = \frac{4 \times 4}{4} = \frac{16}{3}$$

Teste Intermédio 10.º ano – 29.01.2010

11. Pela observação da condição que defina a esfera $\left(x^2+y^2+(z-2)^2 \leq 4 \right)$, podemos verificar que tem centro no ponto $C(0,0,2)$, ou seja sobre o eixo Oz.

    Assim, de entre os planos definidos pelas condições apresentadas, o único que que divide a esfera em dois sólidos com o mesmo volume, ou seja, o único que contém o centro da esfera, é o plano $x=0$.

    Resposta: **Opção A**

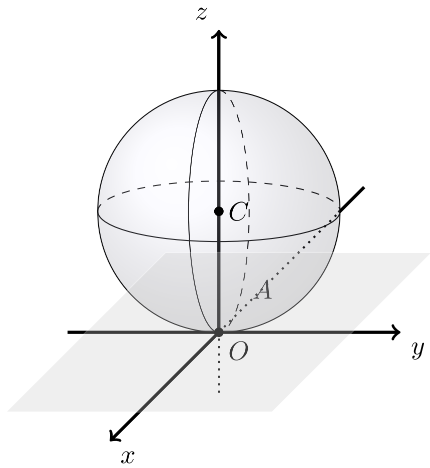


Teste Intermédio 10.º ano – 28.01.2009

12. Pela observação da equação da superfície esférica $\left(x^2+y^2+(z-2)^2 = 4 \right)$, podemos verificar que:
    - tem centro no ponto $C(0,0,2)$
    - o comprimento r do raio é $r=\sqrt{4}=2$

    Assim podemos identificar que o centro da superfície esférica está a 2 unidades de distância do plano xOy, e que esta distância é igual ao raio, pelo que a superfície esférica é tangente ao plano xOy na origem do referencial, (como se pretende representar na figura ao lado), ou seja, a intersecção da superfície com o plano xOy é um ponto.

    Resposta: **Opção B**



Teste Intermédio 11.º ano – 29.01.2009

13. Como o cubo tem arestas paralelas aos eixos e de comprimento 2, pela observação da figura podemos verificar que as coordenadas do ponto T são $(2,0,-2)$

    Como o ponto C é o ponto médio da aresta $[QR]$ do cubo, as suas coordenadas são $(1,2,0)$

    Assim, o raio da superfície esférica é:

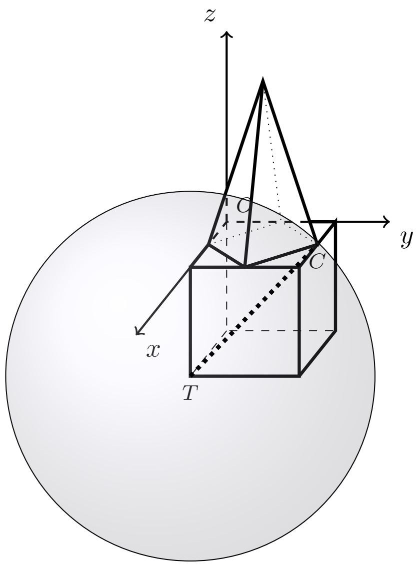
    $$r=\overline{TC}=\sqrt{(2-1)^2+(0-2)^2+(-2-0)^2)}=$$

    $$=\sqrt{1^2+(-2)^2+(-2)^2}=\sqrt{1+4+4}=\sqrt{9}=3$$

    E assim, uma equação da superfície esférica que tem centro no ponto T e que contém o ponto C, ou seja de raio $\overline{TC}$, é:

    $$(x-2)^2+(y-0)^2+(z-(-2))^2=3^2 \Leftrightarrow$$

    $$\Leftrightarrow (x-2)^2+y^2+(z+2)^2=9$$

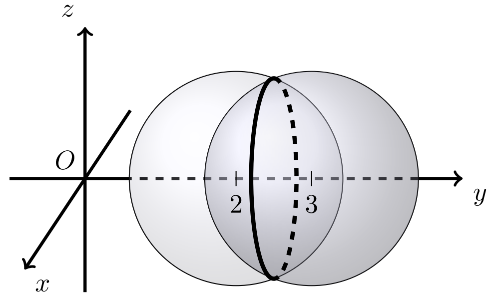


Teste Intermédio 10.º ano – 28.01.2009

14. Pela observação das equações, podemos verificar que:

    - o centro de uma das circunferências tem coordenadas (0,2,0)
    - o centro da outra circunferência tem coordenadas (0,3,0)
    - o raio de ambas é $\sqrt{2}$

    Assim podemos verificar que as distâncias entre os centros das circunferências é de 1 unidade e que o raio de ambas é superior a esta distância ($\sqrt{2} > 1$) pelo que as duas circunferências se intersectam segundo uma circunferência, (como se pretende representar na figura ao lado).



    Resposta: **Opção B**

Exame – 2001, Prova de reserva (cód. 135)

15. Como o ponto G pertence ao eixo Oy tem abcissa e cota nulas ($x_G = 0$ e $z_G = 0$) e como pertence à superfície esféricas, as suas coordenadas devem verificar a equação, pelo que, substituindo os valores da abcissa e da cota, podemos calcular o valor da ordenada:

$$(x_G-1)^2+(y_G-1)^2+(z_G-1)^2=11 \Leftrightarrow (0-1)^2+y_G^2-2y_G+1+(0-1)^2=11 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1+y_G^2-2y_G+1+1-11=0 \Leftrightarrow y_G^2-2y_G-8=0 \Leftrightarrow y_G=\frac{-(-2)\pm\sqrt{(-2)^2-4(1)(-8)}}{2\times 1} \Leftrightarrow$$

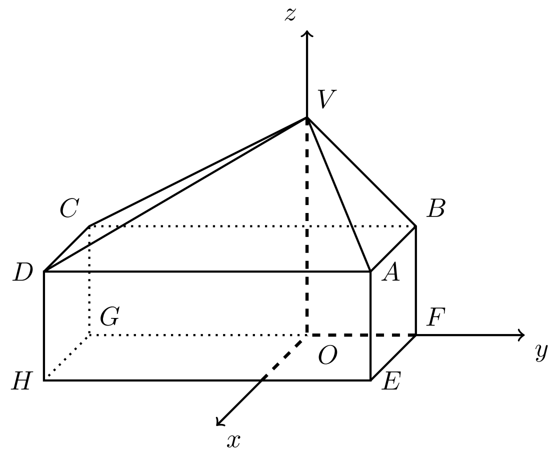
$$\Leftrightarrow y_G=\frac{2\pm\sqrt{4+32}}{2} \Leftrightarrow y_G=\frac{2\pm\sqrt{36}}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y_G=\frac{2\pm 6}{2} \Leftrightarrow x=4 \lor x=-2$$

    Como o ponto G tem ordenada negativa, temos que as coordenadas do ponto G são $(0,-2,0)$

    Como o ponto H tem abcissa igual ao ponto A, e ordenada e cota iguais ao ponto G, vem que:

$$H(x_A,y_G,z_G),\ \text{ou seja, } H(1,-2,0)$$



Exame – 2001, Prova de reserva (cód. 135)

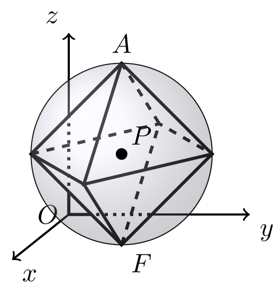
16. Como o vértice F pertence ao plano xOy, o vértice B pertence ao plano xOz e o vértice E pertence ao plano yOz, então o segmento $[AF]$ é paralelo ao eixo Oz

    Desta forma temos que:

    - o centro da superfície esférica é o ponto médio de $[AF]$, ou seja, $M(1,1,1)$
    - o raio da superfície esférica é metade de $\overline{AF}$, ou seja, $r=\frac{\overline{AF}}{2}=\frac{2}{2}=1$

    Assim, uma equação da superfície esférica que contém os seis vértices do octaedro é:

$$(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=1^2 \Leftrightarrow (x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=1$$

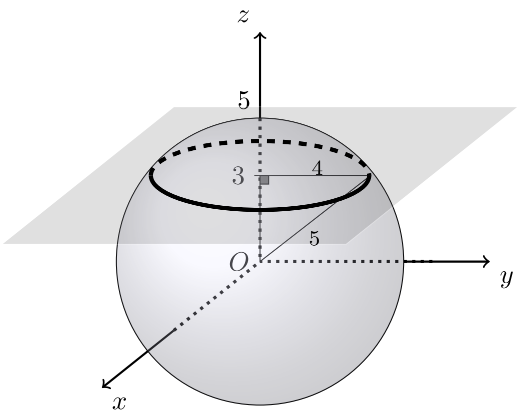


Exame – 2001, 2.ª fase (cód. 135)

17. Como interseção da superfície esférica com o plano de equação $z = 3$ é uma circunferência de perímetro 8π, podemos determinar a medida do raio (r_c) desta circunferência:

$$P = 8\pi \Leftrightarrow 2\pi r_c = 8\pi \Leftrightarrow r_c = \frac{8\pi}{2\pi} \Leftrightarrow r_c = 4$$

Desta forma, observando que o raio da circunferência é perpendicular ao eixo Oz, que o centro da circunferência é a origem do referencial, podemos verificar que existe um triângulo retângulo cujos catetos medem 3 e 4 unidades e cuja hipotenusa é o raio da circunferência (como se pretende ilustrar na figura ao lado).



Assim, recorrendo ao teorema de Pitágoras, podemos determinar a medida (r) do raio da superfície esférica:

$$r^2 = 3^2 + 4^2 \Leftrightarrow r^2 = 9 + 16 \Leftrightarrow r^2 = 25 \underset{r>0}{\Rightarrow} r = \sqrt{25}$$

Desta forma podemos concluir que a superfície esférica tem centro no ponto de coordenadas (0,0,0) e raio 5, pelo que a equação que a define é:

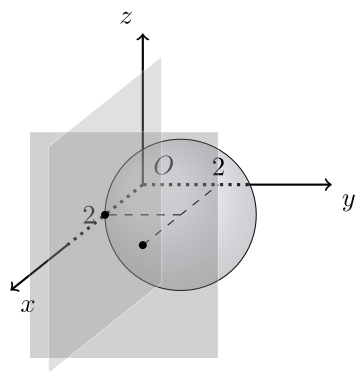
$$(x-0)^2 + (y-0)^2 + (z-0)^2 = 5^2 \Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 = 25$$

Resposta: **Opção C**

Exame – 2001, 1.ª fase - 2.ª chamada (cód. 135)

18. Analisando as alternativas apresentadas, verificamos que:

- podemos excluir as opções (C) e (D) porque as coordenadas dos centros das duas superfícies esféricas são (0,0,2) e (2,0,0), respetivamente, e desta forma podemos verificar que nas duas alternativas, o centro pertence ao plano $y = 0$, pelo que a superfície esférica não é tangente a este plano;
- relativamente à opção (B) as coordenadas do centro da superfície esférica é (2,2,0) e o raio é 4 ($4^2 = 16$), e assim verificamos que o centro da superfície esférica não está a 4 unidades de distância dos planos $x = 4$ e $y = 0$, pelo que não é tangente a nenhum destes planos.



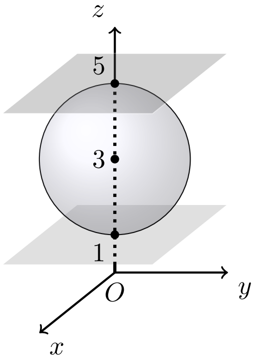
Relativamente à opção (A), as coordenadas do centro da superfície esférica é (2,2,0) e o raio é 2 ($2^2 = 4$), e assim verificamos que o centro da superfície esférica está a 2 unidades de distância dos planos $x = 4$ e $y = 0$, pelo que é tangente aos dois planos nos pontos de coordenadas (4,2,0) e (2,0,0), (como se pretende ilustrar na figura anterior).

Resposta: **Opção A**

Exame – 2001, 1.ª fase - 1ª chamada (cód. 135)

19. Analisando as alternativas apresentadas, verificamos que:

   - podemos excluir as opções (B) e (D) porque as coordenadas do centro das duas superfícies esféricas são (0,0,4), e desta forma podemos verificar que nestas duas alternativas, o centro está a uma unidade de distância do plano $z = 5$ e a 3 unidades de distância do plano $z = 1$, pelo que a superfície esférica não é tangente aos dois planos;
   - relativamente à opção (A) as coordenadas do centro da superfície esférica são (0,0,3) e o raio é 5 ($5^2 = 25$), e assim verificamos que como o centro da superfície esférica está a 2 unidades de distância dos planos $z = 1$ e $z = 5$, interseta os planos identificados e é tangente aos planos $z = -2$ e $z = 8$.



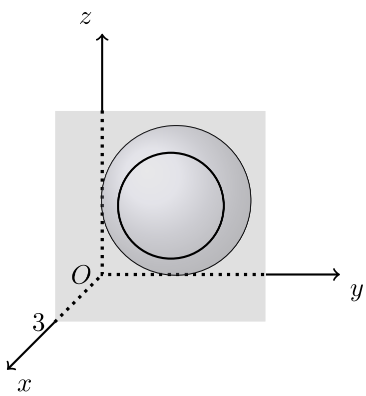
Relativamente à opção (C), as coordenadas do centro da superfície esférica são (0,0,3) e o raio é 2 ($2^2 = 4$), e assim verificamos que como o centro da superfície esférica está a 2 unidades de distância dos planos $z = 1$ e $z = 5$, pelo que é tangente aos planos identificados nos pontos de coordenadas (0,0,1) e (0,0,5), (como se pretende ilustrar na figura anterior).

Resposta: **Opção C**

Exame – 2001, Prova Modelo (cód. 135)
Exame – 2000, 2.ª Fase (cód. 135)

20. A partir da equação da superfície esférica, podemos observar que o centro é o ponto C de coordenadas (2,2,2) e o raio é $\sqrt{2} \approx 1{,}41$, e desta forma, relativamente a cada uma das alternativas apresentadas, podemos verificar que:

   - a interseção com os planos de equação $x = -1$, $x = 0$ e $x = 4$ é o conjunto vazio porque a diferença entre a abcissa do centro e as abcissas dos pontos de cada um dos planos é maior que o raio da circunferência;
   - relativamente ao plano de equação $x = 3$, a distância do centro da superfície esférica ao plano é $|x_C - 3| = |2 - 3| = 1$, ou seja, esta distância é menor que o raio da superfície esférica, pelo que a interseção é uma circunferência (como se pretende ilustrar na figura ao lado).



Resposta: **Opção C**

Exame – 2000, Prova 2 para Militares (cód. 135)
Exame – 2000, Prova de reserva (cód. 135)

21. Analisando as alternativas apresentadas, verificamos que as coordenadas do centro das quatro superfícies esféricas são (2,0,0), pelo que a distância do centro ao plano yOz é 2, ou seja, a única superfície esférica (de entes as alternativas apresentadas) é a que tem raio 2, ou seja:

$$(x-2)^2 + y^2 + z^2 = 2^2 \Leftrightarrow (x-2)^2 + y^2 + z^2 = 4$$

Resposta: **Opção C**

Exame – 2000, Época Especial (setembro) (cód. 135)
Exame – 1999, Prova de reserva (cód. 135) (adaptado)

22. Como o vértice E do poliedro tem coordenadas (2,2,2), e a altura de cada uma das pirâmides é igual ao comprimento da aresta do cubo, os pontos P e Q são simétricos relativamente ao ponto R, o centro geométrico do cubo, ou seja, a superfície esférica de diâmetro $[PQ]$, tem centro no ponto R de coordenadas (1,1,1)

Sabemos também que o raio da superfície esférica de diâmetro $[PQ]$ é 3, correspondendo à soma de metade da aresta do cubo (1 unidade que é distância entre o dentro e a base de qualquer uma das pirâmides) e a aresta do cubo (2 unidades que é a altura das duas pirâmides).

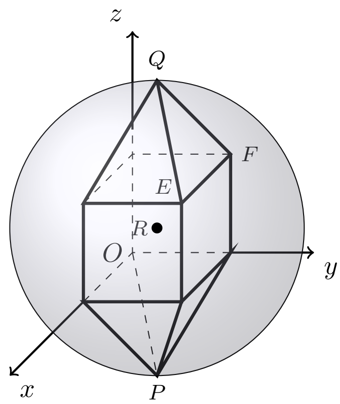
Assim, a equação da superfície esférica é:

$$(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=3^2$$

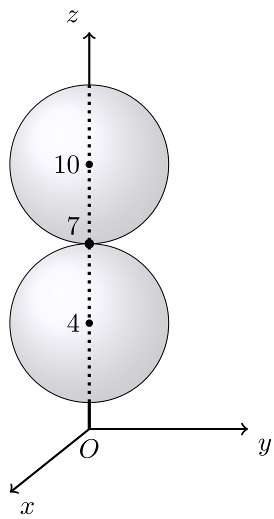
Como o ponto F tem a mesma cota e ordenada do ponto E e pertence ao plano yOz, as suas coordenadas são (0,2,2), pelo que podemos verificar que este ponto não pertence à superfície esférica, porque não verifica a respetiva equação:

$$(0-1)^2+(2-1)^2+(2-1)^2<3^2 \Leftrightarrow 1+1+1<9 \Leftrightarrow 3<9$$

Em conclusão, sendo R o centro da superfície esférica de diâmetro $[PQ]$, o ponto F não pertence à superfície esférica, porque $\overline{RF}<\overline{RP}$ (como se pretende ilustrar na figura ao lado).



Exame – 2000, 1.ª fase - 1.ª chamada (cód. 135)



23. Pela observação das equações, podemos verificar que:
- o centro de uma das superfície esférica tem coordenadas (0,0,10)
- o centro da outra superfície esférica tem coordenadas (0,0,4)
- o raio de ambas é $\sqrt{9}=3$

Assim podemos verificar que as distâncias entre os centros das superfícies esféricas é de 6 unidades $(10-4=6)$ e que a soma dos raios é igual a esta distância pelo que as duas superfícies esféricas são tangentes entre si, ou seja, intersetam-se no ponto de coordenadas (0,0,7) (como se pretende representar na figura ao lado).

Resposta: **Opção A**

Exame – 1999, Prova para Militares (cód. 135)

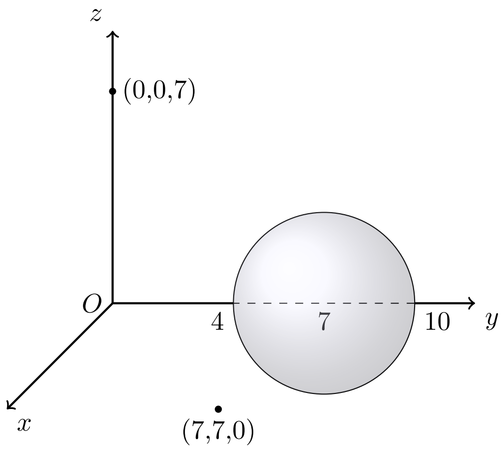
24. Como o raio da esfera é 3 ($3^2 = 9$) e o centro é o ponto de coordenadas (0,7,0), podemos analisar cada uma das afirmações e obter as conclusões que se ilustram na figura seguinte:

- O ponto de coordenadas (0,4,0) é o ponto da esfera mais próximo do eixo Ox, pelo que a esfera não interseta este eixo
- O centro da esfera é um ponto do eixo Oy que pertence à esfera (assim como os pontos com ordenada compreendida entre 3 e 10, abcissa e ordenada nulas)
- Substituindo as coordenadas do ponto (7,7,0) na condição que define a espera, é possível verificar que o ponto não pertence à esfera:

  $7^2+(7-7)^2+0^2 \leq 9 \Leftrightarrow 49+0+0 \leq 9$(Proposição falsa)

- Substituindo as coordenadas do ponto (0,0,7) na condição que define a espera, é possível verificar que o ponto não pertence à esfera:

  $0^2+(0-7)^2+7^2 \leq 9 \Leftrightarrow 0+49+49 \leq 9$ (Proposição falsa)



Resposta: **Opção B**

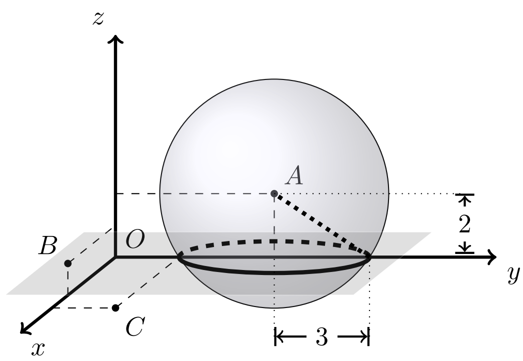
Exame – 1999, Época Especial (cód. 135)

25. Como o centro da superfície esférica tem é o ponto A, a distância do centro ao plano xOy é 2

Como se pretende que o raio da circunferência seja 3, calculando o raio (r) da superfície esférica como a medida da hipotenusa de um triângulo retângulo cujos catetos medem respetivamente 3 e 2:

$$r^2 = 3^2 + 2^2 \Leftrightarrow r^2 = 9 + 4 \underset{r>0}{\Rightarrow} r = \sqrt{13}$$

Assim, a equação da superfície esférica de centro no ponto A e raio r, é:



$$(x-0)^2 + (y-5)^2 + (z-2)^2 = \left(\sqrt{13}\right)^2 \Leftrightarrow x^2 + (y-5)^2 + (z-2)^2 = 13$$

Exame – 1999, 2.ª fase (cód. 135)

26. Como o volume do cubo é 27, a medida (a) da aresta é:

$$a = \sqrt[3]{27} = 3$$

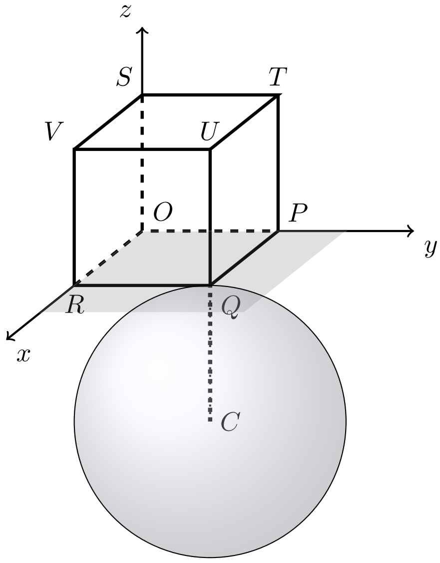
E assim temos que as coordenadas do ponto U são: (3,3,3)

Como o centro da superfície esférica é o simétrico do ponto U, em relação ao plano xOy, tem abcissa e ordenada iguais às do ponto U e cota simétrica, ou seja o centro da superfície esférica é o ponto $C(3,3,-3)$

Como o ponto Q pertence ao plano xOy, e está sobre a reta UC tem cota nula e é o ponto médio do segmento do segmento de reta $[UC]$, pelo que o raio da superfície esférica, é:

$$\overline{CQ} = \overline{QU} = 3$$

E assim, a equação da superfície esférica de centro no ponto C e raio $\overline{CQ}$, é:



$$(x-3)^2 + (y-3)^2 + (z-(-3))^2 = 3^2 \Leftrightarrow (x-3)^2 + (y-3)^2 + (z+3)^2 = 9$$

Exame – 1999, 1.ª fase - 2.ª chamada (cód. 135)

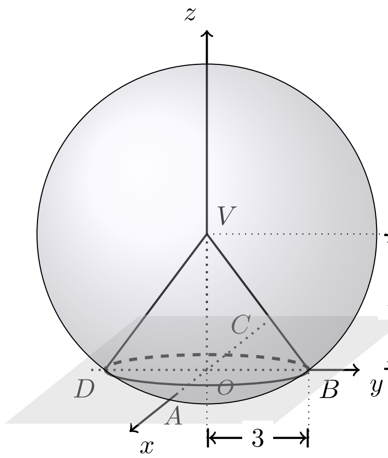
27. Como o comprimento do raio da base é 3 e a altura do cone é 4, podemos determinar o raio da esfera através do teorema de Pitágoras:

$$r^2 = 3^2 + 4^2 \Leftrightarrow r^2 = 9 + 16 \Leftrightarrow r^2 = 25 \underset{r>0}{\Rightarrow} r = 5$$

Como a altura do cone é 4, o vértice V pertence ao semieixo positivo Oz e a base do cone está contida no plano xOy, então as coordenadas do ponto V, ou seja, o centro da esfera são (0,0,4)

Desta forma, uma condição que define a esfera cujo centro é o ponto V e cuja intersecção com o plano xOy é a base do cone, é:

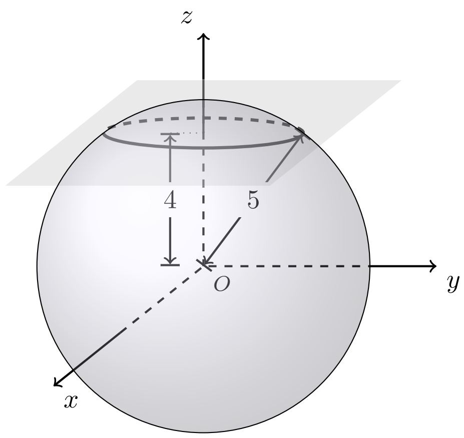
$$(x-0)^2 + (y-0)^2 + (z-4)^2 = 5^2 \Leftrightarrow x^2 + y^2 + (z-4)^2 = 25$$



Exame – 1999, 1.ª fase - 1.ª chamada (cód. 135)

28. Como o centro da esfera é a origem do referencial, a distância do centro da esfera ao plano de equação $z = 4$ é de 4 unidades.

    Como o raio da esfera é 5 ($5^2 = 25$), a interseção da esfera com o plano é um círculo, cujo raio r pode ser calculado como a medida de um cateto de um triângulo retângulo em que a hipotenusa é o raio da esfera e o restante cateto é a distância do plano ao centro da esfera:



$$r^2 + 4^2 = 5^2 \Leftrightarrow r^2 = 25 - 16 \Leftrightarrow r^2 = 9 \underset{r>0}{\Rightarrow} r = 3$$

Assim, a área da secção, ou seja, do círculo de raio 3, é:

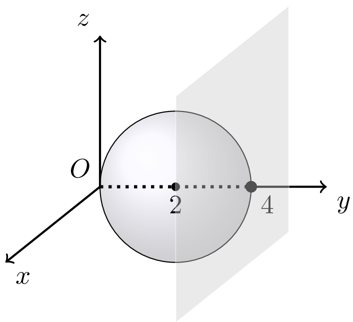
$$A_\circ = \pi r^2 = \pi \times 3^2 = 9\pi$$

Resposta: **Opção D**

Exame – 1999, Prova Modelo (cód. 135)

29. Pela observação das equações, podemos verificar que:
    - o centro da superfície esférica E tem coordenadas (0,2,0)
    - o raio de E é $\sqrt{4} = 2$

    Assim podemos verificar que a distância entre o centro da superfície esférica E e o plano α é de 2 unidades ($4 - 2 = 2$) e que o raio de E é igual a esta distância pelo que a superfície esférica E é tangente ao plano α, ou seja, intersetam-se no ponto de coordenadas (0,4,0) (como se pretende representar na figura ao lado).



Resposta: **Opção A**

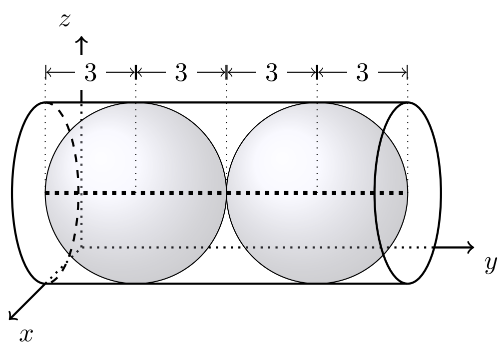
Exame – 1998, Prova de reserva (cód. 135)

30. Como o centro da base que está contida no plano xOz tem coordenadas (3,0,3), e a outra base é paralela e está contida no plano de equação $y = 12$, então as coordenadas do centro da outra base são (3,12,3)

    Desta forma, podemos verificar que os centros das bases, das esferas e os pontos de tangência estão todos sobre a reta definida por $x = 3 \wedge z = 3$ e as ordenadas estão a 3 unidades de distância, ou seja, distanciadas pelo raio das esferas.

    Desta forma o centro da esfera mais afastada do plano xOz tem de coordenadas $(3,3+3+3,3)$, ou seja, (3,9,3)

    Assim, temos que uma equação da superfície esférica é:



$$(x-3)^2 + (y-9)^2 + (z-3)^2 = 3^3$$

E o ponto de coordenadas (1,8,1) pertence à superfície esférica porque obtemos uma proposição verdadeira na substituição das suas coordenadas na equação que define a superfície esférica:

$$(1-3)^2 + (8-9)^2 + (1-3)^2 = 3^3 \Leftrightarrow (-2)^2 + (-1)^2 + (-2)^2 = 3^3 \Leftrightarrow 4+1+4 = 9 \Leftrightarrow 9 = 9$$

Exame – 1998, 1.ª fase - 2.ª chamada (cód. 135)

31. Como a abcissa do ponto R é 2 e $[OR]$ é uma aresta do cubo, temos que a medida das arestas do cubo é 2
    Assim, como $[ON]$, $[OP]$ e $[OS]$ são arestas do cubo, têm comprimento 2 e assim, temos que as coordenadas do ponto U são (2,2,2), pelo que o raio (r) da superfície esférica que contém os oito vértices do cubo, é metade da distância entre os vértices U e O), e pode ser calculado por:

$$r = \frac{\overline{UO}}{2} = \frac{\sqrt{(2-0)^2+(2-0)^2+(2-0)^2}}{2} = \frac{\sqrt{4+4+4}}{2} = \frac{\sqrt{12}}{2} = \frac{\sqrt{4\times 3}}{2} = \frac{\sqrt{4}\times\sqrt{3}}{2} = \frac{2\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$$

    E assim, observando que o centro da superfície esférica que contém os oito vértices do cubo, é o ponto médio de dois vértice opostos (por exemplo U e O, temos que as coordenadas do centro são:

$$\left(\frac{2-0}{2},\frac{2-0}{2},\frac{2-0}{2}\right) = \left(\frac{2}{2},\frac{2}{2},\frac{2}{2}\right) = (1{,}1{,}1)$$

    E assim, uma equação da superfície esférica que contém os oito vértices do cubo, é:

$$(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2 = \left(\sqrt{3}\right)^2 \Leftrightarrow (x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2 = 3$$

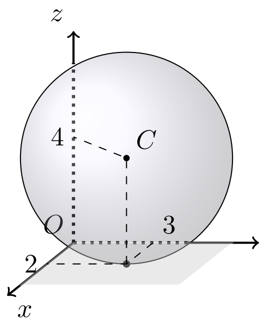
Exame – 1998, Prova Modelo (cód. 135)

32. Como a esfera é tangente ao plano xOy, ou seja ao plano de equação $z = 0$, então o raio é igual ao valor absoluto da cota do centro, ou seja, a esfera tem raio 4 (como se pretende ilustrar na figura ao lado).

    Como as coordenadas do centro da esfera são (2,3,4), então a condição que a define é:

$$(x-2)^2+(y-3)^2+(z-4)^2 \leq 4^2$$

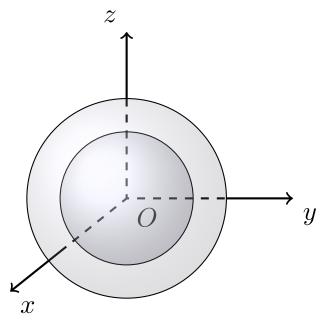
    Resposta: **Opção D**



Exame – 1997, Prova para militares (cód. 135)

33. Como o centro de ambas as superfícies esféricas é comum (a origem do referencial) e o raio é diferente (respetivamente 2 e 3), as duas superfícies esféricas não se intersetam (como se pretende ilustrar na figura ao lado), pelo que a interseção é o conjunto vazio.

    Resposta: **Opção D**



Exame – 1997, 2.ª fase (cód. 135)