Escola Secundária de Francisco Franco

Matemática A – 12.º ano

Funções reais de variável real

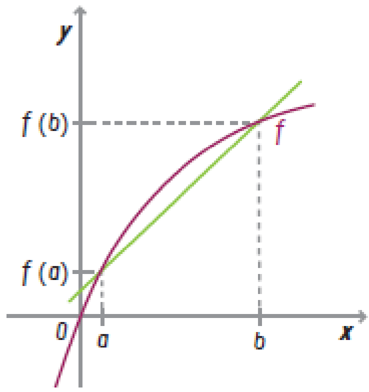
DERIVADAS DE FUNÇÕES

Taxa média de variação de uma função

Dados uma função real de variável real f e dois pontos a e b (distintos) do respetivo domínio, chama-se **taxa média de variação de f entre a e b** ao número:

$$\boxed{t.m.v._{[a,b]}(f)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}}$$

NOTA: ao número $f(b) - f(a)$, dá-se o nome de **variação** (ou **acréscimo**) **de f entre a e b**.



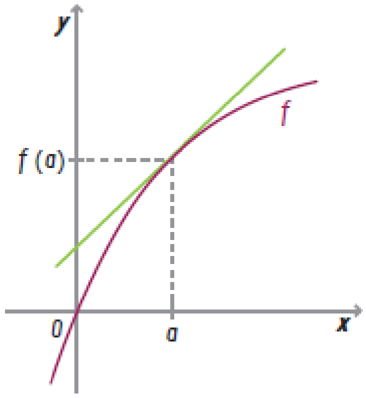
Interpretação geométrica da $t.m.v._{[a,b]}(f)$: é o declive da reta secante ao gráfico de f nos pontos a e b.

Derivada de uma função num ponto

Dados uma função real de variável real f e um ponto a do respetivo domínio, chama-se **taxa instantânea de variação de f no ponto a** (ou **derivada de f no ponto a**) ao número, se existir e for finito:

$$\boxed{f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}} \quad \text{ou} \quad \boxed{f'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}}$$

Neste caso, **f é diferenciável** (ou derivável) **em a**.



Interpretação geométrica de $f'(a)$: é o declive da reta tangente ao gráfico de f no ponto a e $y=f'(a)(x-a)+f(a)$ é a equação da reta tangente ao gráfico de f em a.

Exercício resolvido 1

Numa certa empresa, o custo de se produzirem x peças é dado, em euros, pela função definida por $C(x)=0{,}1x^2+30x+5000$. Calcula e interpreta:

1.1. a taxa média de variação em [0,100];

1.2. a taxa de variação em $x = 30$.

Resolução

1.1. $\frac{C(100)-C(0)}{100-0}=\frac{9000-5000}{100}=\boxed{40}$ → à medida que a empresa aumenta de 0 para 100 o n.º de peças que produz, o custo aumenta, em média, 40 € por peça.

1.2. $C'(30)=\lim\limits_{x\to 30}\frac{C(x)-C(30)}{x-30}=\lim\limits_{x\to 30}\frac{0{,}1x^2+30x+5000-5990}{x-30}=\lim\limits_{x\to 30}\frac{0{,}1x^2+30x-990}{x-30}\overset{\frac{0}{0}}{=}$

	0,1	30	–990
30		3	990
	0,1	33	0

$=\lim\limits_{x\to 30}\frac{\cancel{(x-30)}(0{,}1x+33)}{\cancel{x-30}}=0{,}1\times 30+33=\boxed{36}$

Assim, no instante em que a empresa produz 30 peças, o custo aumenta 36 € por peça.

Exercício resolvido 2

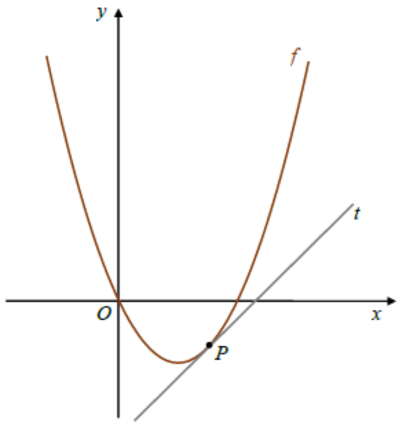
Considera a função f, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $f(x)=x^2-3x$.

2.1. Calcula a taxa média de variação de f em [–2,1].

2.2. Determina a equação reduzida da reta tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa –2.

Exercício proposto 1

Considera, no referencial o.n. da figura a seguir, parte do gráfico da função quadrática definida por $f(x)=x^2-2x$.



1.1. Calcula a taxa média de variação de f entre: **a)** –1 e 1; **b)** 2 e 5.

1.2. Determina, usando a definição:

a) $f'(4)$; **b)** $f'\left(-\frac{1}{2}\right)$.

1.3. Escreve a equação reduzida da reta t, tangente ao gráfico de f no ponto P de abcissa $\frac{3}{2}$.

Resolução

1.1. $\frac{f(1)-f(-2)}{1-(-2)}=\frac{-2-10}{3}=\boxed{-4}$

1.2. $y=mx+b$, onde $m=f'(-2)=\lim\limits_{x\to -2}\frac{f(x)-f(-2)}{x-(-2)}=\lim\limits_{x\to -2}\frac{x^2-3x-10}{x+2}\overset{\frac{0}{0}}{=}$

$=\lim\limits_{x\to -2}\frac{\cancel{(x+2)}(x-5)}{\cancel{x+2}}=-2-5=-7\to y=-7x+b$

	1	−3	−10
−2		−2	10
	1	−5	0

Dado que o ponto (–2,10) pertence ao gráfico de *f*, logo:

$10=-7(-2)+b\Leftrightarrow -4=b\to$ a equação pedida é $\boxed{y=-7x-4}$

Exercício resolvido 3

Considera a função *g*, de domínio $\mathbb{R}\setminus\{0\}$, definida por $g(x)=\frac{5}{x}$.

Escreve uma equação da reta tangente ao gráfico de *g* no ponto $\frac{5}{2}$.

Resolução

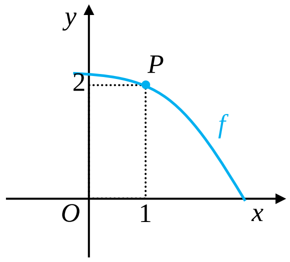
$y=mx+b$, onde

$m=g'\left(\frac{5}{2}\right)=\lim\limits_{x\to\frac{5}{2}}\frac{g(x)-g\left(\frac{5}{2}\right)}{x-\frac{5}{2}}=\lim\limits_{x\to\frac{5}{2}}\frac{\frac{5}{x}-2}{x-\frac{5}{2}}=\lim\limits_{x\to\frac{5}{2}}\frac{\frac{5-2x}{x}}{x-\frac{5}{2}}=\lim\limits_{x\to\frac{5}{2}}\frac{5-2x}{x\left(\frac{2x-5}{2}\right)}$

$=\lim\limits_{x\to\frac{5}{2}}\frac{2\cancel{(5-2x)}}{-x\cancel{(5-2x)}}=\frac{2}{-\frac{5}{2}}=-\frac{4}{5}\to$ um vetor diretor da reta é (5,–4) e, como o ponto $\left(\frac{5}{2},2\right)$ lhe pertence, uma equação pode ser a vetorial: $\boxed{(x,y)=\left(\frac{5}{2},2\right)+k(5,-4),k\in\mathbb{R}}$

Exercício resolvido 4

Considera a função *f*, decrescente em $\mathbb{R}$, parcialmente representada no referencial o.n. *xOy* do lado. Tal como sugere a figura, o ponto *P*(1,2) pertence ao gráfico de *f*. Considera ainda:



• a sucessão de termo geral $a_n=\frac{4-6n-3n^2}{8-3n^2}$

• a função, de domínio $\mathbb{R}\setminus\{0,1\}$, definida por

$g(x)=\frac{f(x)-2}{x^2-x}$.

Indica, justificando, em qual das alternativas pode estar o valor de $\lim g(a_n)$.

(A) $-\frac{5}{9}$ **(B)** 0 **(C)** $\frac{3}{8}$ **(D)** $+\infty$

Resolução

$\lim a_n=\lim\frac{-3n^2}{-3n^2}=1$

$\therefore \lim g(a_n)=\lim\limits_{x\to 1}g(x)=\lim\limits_{x\to 1}\frac{f(x)-2}{x^2-x}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}\times\lim\limits_{x\to 1}\frac{1}{x}=\underbrace{f'(1)}_{<0}\times 1<0\to\boxed{A}$

Exercício resolvido 5

É dada a função *h*, de domínio $[0,+\infty[$, definida por $h(x)=\sqrt{ax}$, $a\geq 0$.

Indica uma expressão simplificada para a função h'.

Resolução

Seja *k* um elemento qualquer de D_h;

$h'(k)=\lim\limits_{x\to k}\frac{h(x)-h(k)}{x-k}=\lim\limits_{x\to k}\frac{\sqrt{ax}-\sqrt{ak}}{x-k}=\lim\limits_{x\to k}\left(\frac{\sqrt{ax}-\sqrt{ak}}{x-k}\times\frac{\sqrt{ax}+\sqrt{ak}}{\sqrt{ax}+\sqrt{ak}}\right)$

$=\lim\limits_{x\to k}\frac{(\sqrt{ax})^2-(\sqrt{ak})^2}{(x-k)(\sqrt{ax}+\sqrt{ak})}=\lim\limits_{x\to k}\frac{ax-ak}{(x-k)(\sqrt{ax}+\sqrt{ak})}=\lim\limits_{x\to k}\frac{a\cancel{(x-k)}}{\cancel{(x-k)}(\sqrt{ax}+\sqrt{ak})}$

Exercício proposto 2

Escreve a equação reduzida da reta tangente ao gráfico de *f* no ponto de abscissa *a*, sendo:

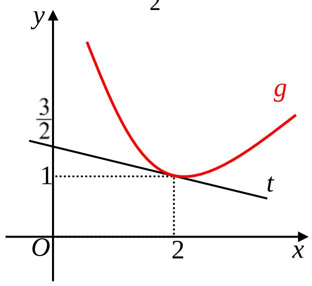
2.1. $f(x)=2-\frac{2}{x}$ e $a=\frac{1}{2}$;

2.2. $f(x)=\frac{3}{x+2}$ e $a=-4$;

2.3. $f(x)=-\frac{5}{2x+3}$ e $a=3$.

Exercício proposto 3

Considera, no referencial o.n. *xOy* a seguir, parte do gráfico da função *g*, diferenciável em $\mathbb{R}$ e a reta *t*, tangente ao gráfico de *g* no ponto de coordenadas (2,1) e que interseta o eixo *Oy* no ponto de ordenada $\frac{3}{2}$.



Determina $g'(2)$.

Exercício proposto 4

Os lucros de uma pequena empresa foram dados, *t* semanas após o início de 2020, em dezenas de euros, pela função *l* definida por $l(t)=-t^2-0,5t+3000$, sendo $0\leq t\leq 52$.

4.1. Calcula e interpreta $l(3)-l(0)$.

4.2. Calcula a taxa média de variação no intervalo [20,30]. Interpreta-a no contexto do problema.

Exercício proposto 5

Em junho de 2019, realizou-se, no ilhéu de Vila Franca do Campo (São Miguel, Açores) uma das etapas do Mundial de Cliff Diving da Red Bull. Cada atleta saltou, para a água, de uma plataforma que se encontrava a 27 metros de altura. Admite que a distância, em metros, percorrida por um atleta, *t* segundos após um salto, foi dada aproximadamente por $d(t)=5t^2$.

5.1. Quanto tempo demorou o atleta a chegar à água? Apresenta resultado em segundos, arredondado às centésimas.

5.2. Calcula e interpreta a velocidade média do saltador entre 0,5 e 2 segundos após o salto.

5.3. Sendo $h\neq 0$, mostra que a velocidade média da função *d* em [1,1+*h*] é igual a $10+5h$.

5.4. Prova, usando a definição de derivada, que $d'(t)=10t$, $\forall t\in D_d$.

5.5. Qual foi a velocidade do atleta no instante *t* = 1?

5.6. Determina, em quilómetros por hora e arredondada às unidades, a velocidade do atleta quando chegou à água.

$= \frac{a}{\sqrt{ak}+\sqrt{ak}} = \frac{a}{2\sqrt{ak}} \to h'(x) = \boxed{\frac{a}{2\sqrt{ax}}}$	

Diferenciabilidade e continuidade

Dada uma função real de variável real *f*, diz-se que a função f', que a cada $x \in D_{f'}$ faz corresponder $f'(x)$, é a **função derivada de *f*** (ou **derivada de *f***), onde $D_{f'} = \{x \in D_f : f \text{ é diferenciável em } x\}$.

f é **diferenciável num conjunto *A*** se for diferenciável em todos os pontos de *A*.

Propriedade

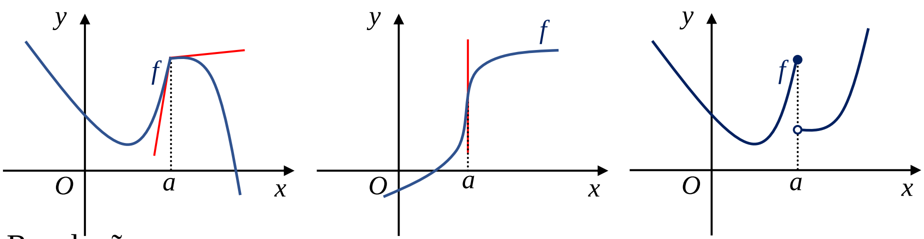
Se uma função real de variável real *f* é diferenciável num ponto *a* do seu domínio, então *f* é contínua em *a*.

Algumas regras de derivação

$k'=0$	$x'=1$	$(kx)'=k$	$\left(x^2\right)'=2x$	$\left(x^3\right)'=3x^2$
$\left(x^n\right)'=nx^{n-1} \quad (n\in\mathbb{R})$	$(u+v)'=u'+v'$	$(uv)'=u'v+uv'$	$(ku)'=ku'$	$\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-uv'}{v^2}$
$\left(u^n\right)'=nu^{n-1}u' \quad (n\in\mathbb{R})$	Derivada da composta: $(u\circ v)'(x)=u'(x)v'(u(x))$			

Exercício resolvido 6

Justifica que *f* não é diferenciável no ponto de abcissa *a* em cada caso.



Resolução

No 1.º gráfico, apesar de *f* ser contínua em *a*, ela não é diferenciável nesse ponto (pois as semitangentes em *a* admitem declives diferentes).
No 2.º gráfico, apesar de *f* ser contínua em *a*, ela não é diferenciável nesse ponto porque a reta tangente em *a* é vertical (pelo que a derivada é infinita).
No 3.º gráfico, *f* não é diferenciável em *a* porque não é contínua em *a*.

Exercício resolvido 7

Considera a função *f* definida por $f(x)=2-x+5x^2-x^3$. Determina:

7.1. $f'(1)$;

7.2. a equação reduzida da reta tangente ao gráfico de *f* no ponto 1.

Resolução

7.1. $f'(x)=0-1+2\times 5x-3x^2=-1+10x-3x^2 \Rightarrow f'(1)=-1+10\times 1-3\times 1^2=\boxed{6}$

7.2. $y=mx+b$, onde $m=f'(1)=6 \to y=6x+b$

Dado que o ponto (1,5) pertence ao gráfico de *f*, logo: $5=6\times 1+b \Leftrightarrow -1=b$

$\therefore$ a equação pedida é $\boxed{y=6x-1}$

Exercício resolvido 8

Dada a função *g* definida por $g(x)=\frac{3x+4}{x+2}$, escreve a equação vetorial e a reduzida da reta tangente ao gráfico de *g* na origem do referencial.

Resolução

Exercício proposto 6

Escreve a equação reduzida da reta tangente ao gráfico de *g* no ponto −3, sendo $g(x)=\frac{2x+5}{1-3x}$.

Exercício proposto 7

7.1. Usando a definição e as regras de derivação, determina:

a) $f'(-3)$, sendo $f(x)=x^3-8x-1$;

b) $f'(1)$, sendo $f(x)=3-x^2-2x^4$;

c) $f'(0)$, sendo $f(x)=\frac{5x-3}{x+1}$;

d) $f'(-2)$, sendo $f(x)=\frac{2x-10}{3-2x}$;

e) $f'(-1)$, sendo $f(x)=\frac{x^2+5}{4x+2}$;

f) $f'(2)$, sendo $f(x)=\frac{x^2+3x-10}{2x+2}$.

7.2. Escreve a equação reduzida da reta tangente ao gráfico de cada função anterior no ponto respetivo.

Exercício proposto 8

Uma bola foi lançada, verticalmente, do cimo de um prédio. Sabe-se que a altura da bola, em metros e em relação ao solo, foi dada pela função *h* definida por $h(t)=-3t^2+12t+15$. Calcula, em metros por segundo:

8.1. a velocidade média da bola nos primeiros 2 segundos;

8.2. a velocidade instantânea da bola 3 segundos após o lançamento.

Exercício proposto 9

$$g'(x)=\frac{(3x+4)'(x+2)-(3x+4)(x+2)'}{(x+2)^2}=\frac{3(x+2)-(3x+4)1}{(x+2)^2}=\frac{\cancel{3x}+6\cancel{-3x}-4}{(x+2)^2}=\frac{2}{(x+2)^2}$$

$\therefore g'(0)=\frac{2}{(0+2)^2}=\frac{1}{2}=$ declive da reta, pelo que um vetor diretor da reta é (2,1) e, como o ponto (0,2) pertence à reta e ao gráfico de g, uma equação vetorial pode ser $\boxed{(x,y)=(0,2)+k(2,1),k\in\mathbb{R}}$

Equação reduzida: $y=\frac{1}{2}x+b$, onde b = 2, logo a equação reduzida é $\boxed{y=\frac{1}{2}x+2}$

Exercício resolvido 9

Escreva uma expressão simplificada para a derivada de $(5x^2-x)^3$.

Resolução

$$[(5x^2-x)^3]'=3(5x^2-x)^{3-1}(5x^2-x)'=3(5x^2-x)^2(10x-1)=\boxed{(30x-3)(5x^2-x)^2}$$

Exercício resolvido 10

Considera a função polinomial definida por $f(x)=3x^2+2$ e seja r a reta tangente ao gráfico de f no ponto a e α a sua inclinação. Sabendo que $\cos\alpha=-\frac{2}{3}$, determina a.

Resolução

$$f'(x)=6x\Rightarrow f'(a)=6a=tg\alpha$$

$$tg^2\alpha+1=\frac{1}{\cos^2\alpha}\Leftrightarrow tg^2\alpha+1=\frac{1}{\frac{4}{9}}\Leftrightarrow tg^2\alpha=\frac{9}{4}-1\underset{\substack{\cos\alpha<0\\180°<\alpha<0°}}{\Leftrightarrow} tg\alpha=-\sqrt{\frac{5}{4}}=-\frac{\sqrt{5}}{2}$$

$$\therefore 6a=-\frac{\sqrt{5}}{2}\Leftrightarrow a=\boxed{-\frac{\sqrt{5}}{12}}$$

Um ponto P move-se numa reta de tal forma que, em cada instante t (em segundos), a distância d (em cm) à origem O é dada pela seguinte expressão:

$$d(t)=kt^2-19t+60,\ \ k>0.$$

9.1. No instante inicial, qual foi a distância do ponto P à origem?

9.2. Supõe que k = 1.

a) Determina a velocidade média do ponto P nos três primeiros segundos e nos três segundos a seguir.

b) Determina as velocidades de P nos instantes t = 2 e t = 4.

c) Indica em que instante a velocidade foi nula.

9.3. Determina k de modo que a velocidade de P no instante t = 5 seja –8 cm/s.

Adaptado do Caderno de Apoio para as Metas Curriculares, 11.º ano

Exercício proposto 10

De uma função f, diferenciável em $\mathbb{R}$, sabe-se que $f'(x)=x^2-1$. Determina $f(0)$, se $f(0)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{5x}$.

Exercício proposto 11

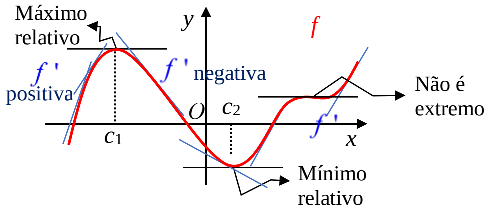
Considera a função polinomial definida por $f(x)=3x^2+2$ e seja r a reta tangente ao gráfico de f no ponto a e α a sua inclinação. Sabendo que $\operatorname{sen}\alpha=\frac{1}{5}$, determina a.

Sinal da derivada e monotonia

Dada uma função real de variável real f, contínua em $[a,b]$ e diferenciável em $]a,b[$, se $\forall x\in]a,b[$:

- $f'(x)>0$, então f é **estritamente crescente** em $]a,b[$.
- $f'(x)<0$, então f é **estritamente decrescente** em $]a,b[$.
- $f'(x)\geq 0$, então f é **crescente em sentido lato** em $]a,b[$.
- $f'(x)\leq 0$, então f é **decrescente em sentido lato** em $]a,b[$.
- $f'(x)=0$, então f é **constante** em $]a,b[$.

Nota: Dado um número c pertencente a $]a,b[$:
- se $f'(c)=0$ e f' mudar de positiva para negativa em c, então $f(c)$ é um **máximo relativo** ou **máximo local** (sendo c um **maximizante**);
- se $f'(c)=0$ e f' mudar de negativa para positiva em c, então $f(c)$ é um **mínimo relativo** ou **mínimo local** (sendo c um **minimizante**).



Exercício resolvido 11

Determina os intervalos de monotonia de cada uma das seguintes funções e identifica as abcissas dos extremos relativos e absolutos, caso existam.

11.1. $f(x)=12x-x^3$, em $\mathbb{R}$; **11.2.** $g(x)=\frac{128}{x}-x^2$, em $\mathbb{R}\backslash\{0\}$

Resolução

11.1. $f'(x)=12-3x^2$; $f'(x)=0\Leftrightarrow 12-3x^2=0\Leftrightarrow x^2=4\Leftrightarrow x=\pm 2$

Exercício proposto 12

Determina os intervalos de monotonia de cada uma das seguintes funções e identifica as abcissas dos extremos relativos e absolutos, caso existam.

12.1. $f(x)=3x^3-4x+5$, em $\mathbb{R}$

12.2. $g(x)=-x^3+3x^2+2$, em $\mathbb{R}$

12.3. $h(x)=x^4-50x^2-100$, em $\mathbb{R}$

x	$-\infty$	-2		2	$+\infty$
Sinal de $f\,'$	$-$	0	$+$	0	$-$
f	↘	Min	↗	Max	↘

$f\,'(-3)<0$
$f\,'(0)>0$
$f\,'(3)<0$

$\therefore$ a função f:
- é decrescente em $]-\infty,-2]$ e em $[2,+\infty[$;
- é crescente em $[-2,2]$;
- tem um mínimo relativo para $\boxed{x=-2}$ e um máximo relativo para $\boxed{x=2}$.

11.2. $g\,'(x)=\frac{0\times x-128x'}{x^2}-2x=-\frac{128}{x^2}-2x$

$g\,'(x)=0 \Leftrightarrow -\frac{128}{x^2}=2x \Leftrightarrow -\frac{128}{2}=x^3 \Leftrightarrow \sqrt[3]{-64}=x \Leftrightarrow x=-4$

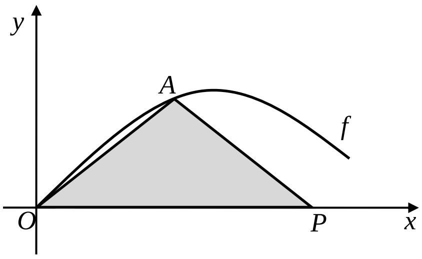
x	$-\infty$	-4		0	$+\infty$
Sinal de $g\,'$	$+$	0	$-$	s.s.	$-$
g	↗	Max	↘	s.s.	↘

$g\,'(-5)>0$
$g\,'(-1)<0$
$g\,'(1)<0$
s.s. – sem significado

$\therefore$ a função g :
- é crescente em $]-\infty,-4]$;
- é decrescente em $[-4,0[$ e em $]0,+\infty[$;
- tem um máximo para $\boxed{x=-4}$.

Exercício resolvido 12

No referencial o.n. xOy da figura estão representados:
- parte do gráfico da função f, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $f(x)=x-\frac{x^2}{6}$;
- um triângulo **isósceles** $[OAP]$ $(\overline{OA}=\overline{PA})$, em que:
  - O é a origem do referencial;
  - P é um ponto do eixo das abcissas;
  - A é um ponto do gráfico de f.



Considera que o ponto A se desloca ao longo do gráfico de f e o ponto P acompanha o movimento do ponto A, deslocando-se ao longo do eixo das abcissas, de tal modo que $\overline{OA}$ permanece sempre igual a $\overline{PA}$.
Seja g a função, de domínio $]0,12[$, que faz corresponder, à abcissa x do ponto P, a área do triângulo $[OAP]$.

12.1. Mostra que, para cada $x \in\ ]0,12[$, se tem $g(x)=\frac{x^2}{4}-\frac{x^3}{48}$.

12.2. Recorrendo a métodos exclusivamente analíticos, estuda a função g quanto à monotonia e conclui qual é o valor de x para o qual é máxima a área do triângulo $[OAP]$.

Resolução

12.1. A base do triângulo é igual a x e a sua altura é igual à ordenada de A. Como a abcissa de A é $\frac{x}{2}$, logo a sua ordenada é $f\left(\frac{x}{2}\right)=\frac{x}{2}-\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^2}{6}=\frac{x}{2}-\frac{x^2}{24}$

$\therefore g(x)=\frac{\text{base}\times\text{altura}}{2}=\frac{x\left(\frac{x}{2}-\frac{x^2}{24}\right)}{2}=\frac{x^2}{4}-\frac{x^3}{48}$ $\boxed{\text{QED}}$

12.2. $g\,'(x)=\frac{1}{4}\times 2x-\frac{1}{48}\times 3x^2=\frac{x}{2}-\frac{x^2}{16}$ → parábola com a concavidade voltada para baixo

$g\,'(x)=0 \Leftrightarrow x\left(\frac{1}{2}-\frac{x}{16}\right)=0 \Leftrightarrow x=0 \vee \frac{x}{16}=\frac{1}{2} \Leftrightarrow x=0 \vee x=8$

x	0	8	12
$g\,'$	$+$	0	$-$
g	↗	Máx	↘

$\therefore$ a área é máxima para $x=\boxed{8}$

Exercício resolvido 13 (um problema de otimização)

12.4. $i(x)=\frac{3x+1}{4-x}$, em $\mathbb{R}\backslash\{4\}$

12.5. $j(x)=\frac{5x-3}{2x+1}$, em $\mathbb{R}\backslash\left\{-\frac{1}{2}\right\}$

12.6. $k(x)=\frac{4x^2-8x+4}{x+1}$, em $\mathbb{R}\backslash\{-1\}$

12.7. $l(x)=\frac{1-x}{x^2+3x}$, em $\mathbb{R}\backslash\{-3,0\}$

12.8. $m(x)=x^3\left(x^2-20x+\frac{320}{3}\right)$, em $\mathbb{R}$

12.9. $n(x)=\left(x-x^2\right)^3$, em $\mathbb{R}$

12.10. $o(x)=\sqrt{x^2+5x}$, em $]-\infty,-5]\cup[0,+\infty[$

12.11. $p(x)=\sqrt{3-2x-x^2}$, em $[-3,1]$

Exercício proposto 13

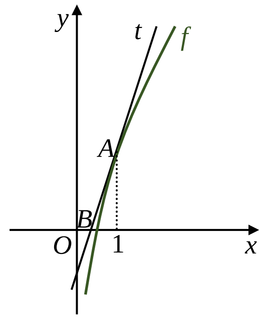
Seja g uma função, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $g(x)=ax^3$, $a\neq 0$. Seja $y=2x$ a equação de uma reta que passa no ponto de abcissa -2 e é perpendicular à reta tangente ao gráfico de g nesse ponto. Determina o valor de a.

Exercício proposto 14

Considera a função, de domínio $\mathbb{R}\backslash\{0\}$, definida por $f(x)=5-\frac{3}{x}$.

14.1. Indica as equações das assíntotas do gráfico da função f.

14.2. Considera o referencial o.n. xOy ao lado em que estão representados parte do gráfico de f, a reta t, tangente ao gráfico de f no ponto A, de abcissa 1 e o ponto B, de interseção da reta t com o eixo Ox. Usando métodos analíticos, determina a abcissa de B.



Exercício proposto 15

O binário de um automóvel é a energia produzida pelo seu motor em cada rotação da cambota e serve para provocar o movimento das rodas do veículo. Admite que o binário de um modelo do *Peugeot 406* é dado, em *Newtons metro*, em função do número de rotações por minuto x (em milhares, da cambota do motor) por

$b(x)=-\frac{16}{9}x^3+\frac{88}{9}x^2+\frac{320}{9}x,\quad x\in[0,8]$

15.1. Quando o número de rotações por minuto passa de 1000 para 4500, o binário aumenta. Determina o valor desse aumento, apresentando o resultado em *Newtons metro* arredondados às unidades.

Num laboratório, foi colocado um purificador de ar. Num determinado dia, o purificador foi ligado às zero horas e desligado algum tempo depois. Ao longo desse dia, o nível de poluição do ar **diminuiu**, enquanto o purificador esteve ligado. Uma vez o purificador desligado, o nível de poluição do ar **começou de imediato a aumentar**. Admita que o nível de poluição do ar no laboratório, medido em mg/l de ar, às t horas desse dia, pode ser dado por $P(t) = 0{,}1t + \frac{1}{t+1}$, $t \in [0, 24]$.

13.1. Qual é o nível de poluição à uma hora e trinta minutos da tarde? Apresenta o resultado na unidade considerada, arredondado às décimas.
13.2. Às três horas o nível de poluição estava a aumentar ou a diminuir?
13.3. Sem recorrer à calculadora, resolve o seguinte problema:
Quanto tempo esteve o purificador de ar ligado?
Apresenta o resultado em horas e minutos (minutos arredondados às unidades).
13.4. Utiliza as capacidades gráficas da tua calculadora para investigar a seguinte questão:
Durante quanto tempo, arredondado às décimas, o nível de poluição foi inferior a 1,5 mg/l ?
Apresenta, na tua resposta, os elementos recolhidos na utilização da calculadora: gráficos e coordenada(s) de ponto(s) (coordenadas arredondadas às centésimas).

Adaptado do exame nacional do 12.º ano de 2003 (1.ª chamada)

Resolução

13.1. $P(13{,}5) \approx \boxed{1{,}4}$ mg/l

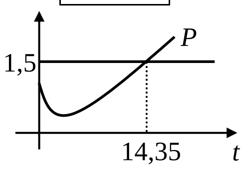
13.2. $P'(t) = 0{,}1 + \frac{0\times(t+1) - 1(t+1)'}{(t+1)^2} = 0{,}1 - \frac{1}{(t+1)^2} \Rightarrow P'(3) = 0{,}0375 > 0$ pelo que o nível de poluição estava a aumentar 0,0375 mg/l por hora.

13.3. Enquanto o purificador esteve ligado, o nível de poluição foi baixando (e voltou a subir quando desligaram o purificador). Assim, é necessário calcular o mínimo da função: $P'(t) = 0 \Leftrightarrow 0{,}1 = \frac{1}{(t+1)^2} \Leftrightarrow (t+1)^2 = \frac{1}{0{,}1} \underset{t\geq 0}{\Leftrightarrow} t+1 = \sqrt{10} \Leftrightarrow t = \sqrt{10} - 1$

t	0	$\sqrt{10}-1$	24
P'	−	0	+
P	↘	Min	↗

$\therefore$ o purificador de ar esteve ligado durante $\sqrt{10}-1$ horas (≈ 2,162 horas). Como 0,162h = 0,162 × 60 min ≈ 10 min, logo o purificador esteve ligado durante $\boxed{\text{2h 10 min}}$

13.4. Ao lado estão os gráficos de P e de $y = 1{,}5$ em $[0,24] \times [0,2]$.
$\therefore$ o nível de poluição foi inferior a 1,5 mg/l durante $\boxed{\text{14,4 horas}}$ (aproximadamente).



15.2. Usando processos analíticos, determina o número de rotações por minuto da cambota que maximiza o binário deste modelo do *Peugeot 406*.

Exercício proposto 16

Um cientista observa, durante 50 segundos, uma águia a sair do seu ninho e a fazer um voo em busca de alimento. Desde que a águia saiu do ninho, a sua altitude é dada, em metros e após t segundos, pela função A definida por:

$$A(t) = 0{,}02t^3 - 0{,}36t^2 - 15{,}18t + 521$$

16.1. Houve um instante em que a altitude da águia diminuiu à velocidade de 14,4 m/s e outro onde a altitude da águia aumentou à velocidade de 11,7 m/s. Determina esses instantes.
16.2. Usando processos analíticos, calcula a altitude mínima atingida pela águia.
16.3. Durante quanto tempo esteve a águia a voar a uma altitude superior a 400 metros? Recorre à tua calculadora para responder à questão, não esquecendo de apresentares o(s) gráfico(s) utilizados e coordenadas relevantes de pontos. Nos cálculos intermédios, conserva, pelo menos, duas casas decimais.

Exercício proposto 17

Numa certa escola, eclodiu uma epidemia de gripe que está a afetar muitos alunos. Admite que o número de alunos com gripe, t dias após as zero horas de segunda-feira da próxima semana, é dado aproximadamente por

$$f(t) = 185 - 20t - \frac{500}{t+4{,}5}, \text{ para } t \in [0,6]$$

Como, por exemplo, $f(1{,}5) \approx 72$, pode concluir-se que aproximadamente 72 alunos dessa escola estarão com gripe às 12 horas de terça-feira da próxima semana.
17.1. Calcula (arredondado às unidades) e interpreta a taxa média de variação da função f no intervalo [2;3,5].
17.2. Houve um instante em que houve uma diminuição de 15 alunos com gripe por dia. Determina esse instante, indicando o dia da próxima semana, e a que horas desse dia.
17.3. Estuda a função f quanto à monotonia e conclui em que dia da próxima semana, e a que horas desse dia, será máximo o número de alunos com gripe.

Adaptado do Teste Intermédio do 12.º ano, abril de 2014

Exercício proposto 18 (outro problema de otimização)

18.1. Uma determinada empresa transporta um tipo de caixas em forma de paralelepípedo com largura x, comprimento y e altura z, que satisfazem as seguintes condições: $x + y = 3\text{m}$ e $x + z = 4\text{m}$.
Seja $f(x)$ a função que representa o volume, em m^3, de uma caixa de largura igual a x metros. Determina, em cm arredondado às unidades, as dimensões da caixa de modo que seja máximo o seu volume.

Sugestão: começa por mostrar que $f(x) = x^3 - 7x^2 + 12x$.

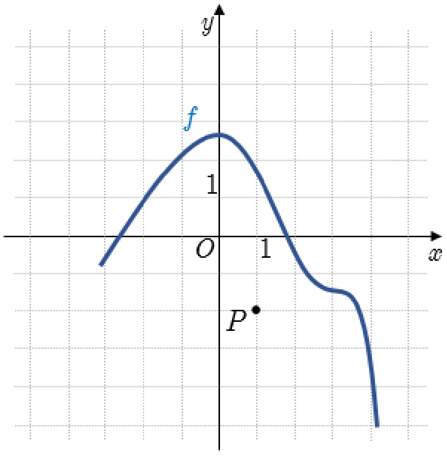
18.2. A empresa transporta ainda um outro tipo de caixas, também em forma de paralelepípedo, mas tal que $x+y=x+z=3\text{m}$. Sendo $g(x)$ a função que representa o volume, em m^3, da caixa de largura igual a x metros, determina as dimensões da caixa de modo que seja máximo o seu volume.

Adaptado da Prova de avaliação de 2020 (rede sul e ilhas), curso das vias profissionalizantes

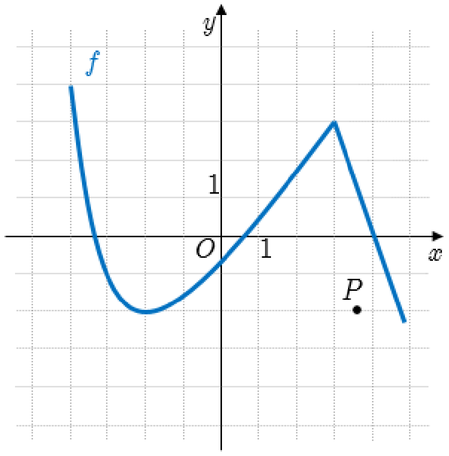
Exercício proposto 19

Em cada figura de cada alínea seguinte, está representada, num referencial o.n. *xOy*, parte do gráfico de uma função *f*. Sabendo que o ponto *P* indicado pertence a f', primeira derivada de *f*, faça um esboço, no mesmo referencial, de um gráfico para f'.

19.1.



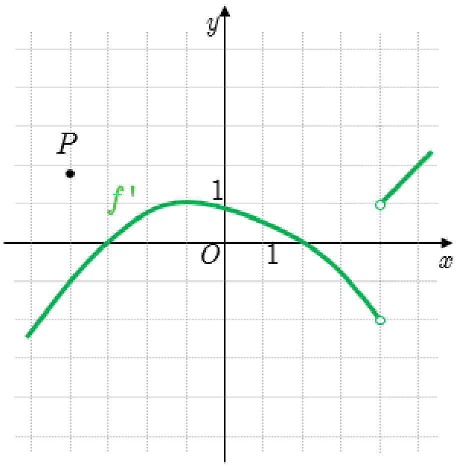
19.2.



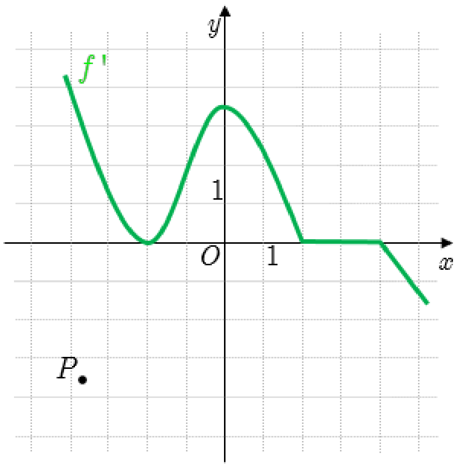
Exercício proposto 20

Em cada figura de cada alínea seguinte, está representada, num referencial o.n. *xOy*, parte do gráfico de uma função f', primeira derivada de uma função *f*. Sabendo que o ponto *P* indicado pertence a *f*, faça um esboço, no mesmo referencial, de um gráfico para *f*.

20.1.



20.2.



Soluções: 1. -2; 5; 6; -3; y=x-9/4   2. y=8x-6; y=-3x/4-9/2; y=-10x/9-5   3. -1/4   4. -10,5; -50,5   5. 2,32; 12,5; 10m/s; 84   6. y=17x/100+41/100
7. y=19x+53; y=-10x+10; y=8x-3; y=-2/7 x-18/7; y=-5x-8; y=7x/6-7/3   8. 6; -6   9. 60; -16 e -10; -15 e -11; 9,5; 1,1   10. -1/5   11. ±√6/72
12. -2/3 e 2/3; 0 e 2; -5, 0 e 5; –; –; -3 e 1; -1 e 3; –; 1/2; -5 e 0; -3, -1 e 1   13. -1/24   14. x=0 e y=5; 1/3   15. 152; 5000   16. 13 e 28; 224,76; 22,42
17. -10; 12h 6.ª f; 12h 2.ª f   18. 113x187x287; 1x2x2

O professor: Roberto Oliveira