Escola Secundária de Penafiel

5º Ficha Formativa

Duração da Ficha Formativa: 180 min | abril de 2018

Caderno 1 + Caderno 2

12.º Ano de Escolaridade | Turma K-G

Caderno 1

- **Neste Caderno é permitida a utilização de calculadora**

1. sendo $\cos(a-b) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ e $\sin(a) = -\frac{\sqrt{2}}{2} \wedge \frac{3\pi}{2} < a < 2\pi$, determina o valor exato de $\cos(b) - \sin(b)$

2. Mostra que $2\cos^2\left(\frac{x}{4}\right) = 1 + \cos\left(\frac{x}{2}\right), \forall x \in \mathbb{R}$

3. Considera a função g definida por $g(x) = \frac{\pi}{2} + 2x\sin\left(\frac{1}{x}\right)$
   Na figura 1, está representado, em referencial ortonormado, parte do gráfico da função g.

   A reta de equação $y = b$ é assíntota do gráfico de g quando $x \to +\infty$ e também quando $x \to -\infty$

   Determina o valor de b

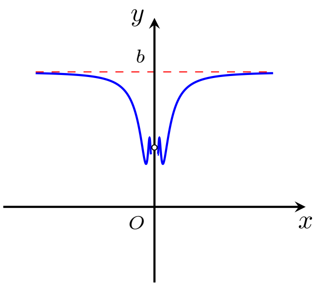

Figura 1

4. Seja g a função de domínio $\mathbb{R}^+$ definida por $g(x) = \ln(x)$
   Os gráficos das funções g e g' intersetam-se num ponto A, de abcissa b, $(b > 0)$
   Pode-se afirmar que:

   (A) $b^{-2b} = e$
   (B) $b^{b} = e$
   (C) $b^{2b} = e$
   (D) $b^{-b} = e$

5. Seja b um número real maior do que 1. Considera a função f, de domínio $\mathbb{R}^+$, definida por $f(x) = \frac{2+\ln(x)}{\ln(b)}$

   5.1. Prova que $f\left(\frac{1}{e}\right) - f\left(\frac{1}{e^3}\right) = \frac{2}{\ln(b)}$

   5.2. Usando a definição de derivada de uma função num ponto, determina $f'(1)$.

6. Considera a função g, de domínio $\mathbb{R}^-$

Sabe-se que:

- a reta de equação $y = 7x - 2$ é assíntota ao gráfico da função g

Qual é o valor de $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{e^{-\frac{1}{x^2}} - g(x)}{x}$?

(A) 7 (B) -7 (C)$-\infty$ (D) $+\infty$

7. Considera a função g, real de variável real, definida por $g(x) = -\dfrac{1}{12}x^3 + x + 3$
No referencial ortonormado da figura 2 estão representados parte do gráfico da função g, e duas retas paralelas, r e s

Sabe-se que:

- a reta r é tangente ao gráfico da função no ponto T de abcissa a, com $a < 0$
- a reta s é tangente ao gráfico da função no ponto S de abcissa b, com $b > 0$

7.1. Em relação a a e b, tem-se, necessariamente, que:

(A) $a = -4$ e $b = 4$ (B) $a = -b$ (C) $a = -2b$ (D) $a = -1$ e $b = 1$

7.2. Considera que $a = -4$ e determina, em graus e com arredondamento às centésimas, o valor de α

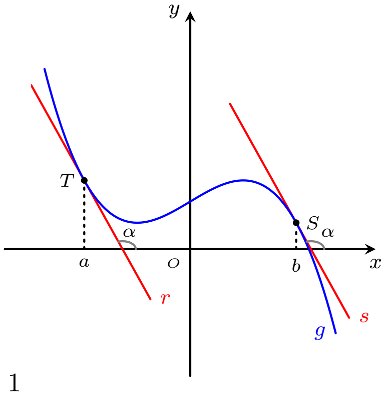

Figura 2

8. Na figura 3 está um alvo. Os quadrados representados têm medida de lado x cm, $2x$ cm e $4x$ cm
Os três quadrados têm o mesmo centro

Todos os pontos do alvo têm igual probabilidade de serem atingidos
O Rodrigo lança um dardo e acerta no alvo

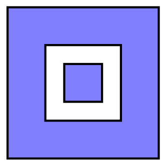

Figura 3

Numa das opções está a probabilidade de o dardo ter acertado na região colorida de azul
Em qual delas?

(A) $\dfrac{3}{8}$ (B) $\dfrac{5}{8}$ (C) $\dfrac{5}{16}$ (D) $\dfrac{13}{16}$

9. Para abrir um cofre é utilizado um código formado por uma sequência de quatro letras seguido de quatro números. Sabe-se que para a sequência das quatro letras só estão disponíveis letras iguais às letras do conjunto $X = \{A; B; C; D; E; F; G; H\}$, e que para a sequência de números não há restrições
Escolhido, ao acaso, um código do conjunto de todos os códigos que se podem fazer, nas condições indicadas, qual é a probabilidade de esse código iniciar com AA e terminar com 99? Apresenta o resultado sob a forma de fração irredutível

10. Considera as funções f e g, reais de variável real, de domínio $\mathbb{R}$, definidas, respetivamente, por
$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{-x-4}{x+3} & se \quad x < -3 \\ 3 \quad se & -3 \leq x \leq 2 \\ \dfrac{-x+1}{x-2} & se \quad x > 2 \end{cases} \quad \text{e } g(x) = -x - 2$$
Recorrendo à calculadora gráfica,determina as coordenadas dos pontos de interseção dos gráficos das duas funções
Apresenta as coordenadas arredondadas às centésimas

11. O ponto P desloca-se numa reta numérica durante um intervalo de tempo I, de tal forma que a respetiva abcissa é dada por $x(t) = 3\cos\left(\frac{\pi}{4}t + \frac{\pi}{6}\right)$, com $t \in I$

Qual é a frequência deste oscilador?

(A) $\frac{1}{5}$ (B) $\frac{1}{6}$ (C) $\frac{1}{7}$ (D) $\frac{1}{8}$

12. Seja f, a função real de variável real, de domínio $\mathbb{R}$, definida por

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\ln(2+x)+x+1}{1+x} & se \quad x > -1 \\ \dfrac{\log(e^4)}{\log(e)} - 2 & se \quad x = -1 \\ 3 + \dfrac{e^{x+k}}{x-2} & se \quad x < -1 \end{cases}, k \in \mathbb{R}$$

12.1. Averigua se existe um valor de k de modo que a função f seja contínua no ponto $x = -1$

12.2. Determina $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ e escreve a equação da assíntota ao gráfico da função f quando $x \to -\infty$

12.3. Considera agora que $k = 2$. Escreve a equação reduzida da reta tangente ao gráfico da função no ponto de abcissa -2

13. Na figura 4 está representado um paralelepípedo $[ABCDEFGH]$
Sabe-se que:

- a origem do referencial está situado no centro da base $[ABCD]$
- o ponto F tem coordenadas $(3; 2; 2)$

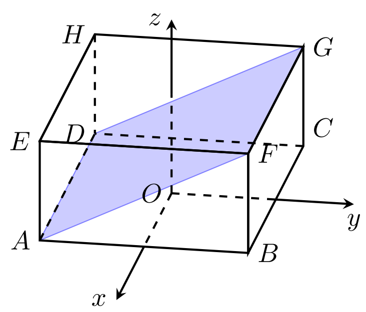

Figura 4

13.1. Escolhem-se, ao acaso, três vértices do paralelepípedo
Qual é a probabilidade de o plano definido por esses três vértices ser perpendicular ao plano yOz
Apresenta o resultado sob a forma de fração irredutível

13.2. Escreve as equações paramétricas da reta AP, sendo P o ponto médio do segmento de reta $[EG]$

13.3. Escreve uma equação cartesiana do plano ADF

13.4. Escreve uma condição que caraterize a superfície esférica de diâmetro $[BH]$

14. Sejam a, b números reais positivos tais que $a \neq 1$ e $b \neq 1$
Sabendo que $\log_a(b^3) = 2$, mostra que $\log_b\left(\frac{\sqrt[4]{a^3b}}{b}\right) = \frac{3}{8}$

15. Na figura 5 encontra-se parte da representação gráfica da função f, de domínio $\mathbb{R}^+$, e uma reta r tangente ao gráfico da função no ponto B de abcissa 2

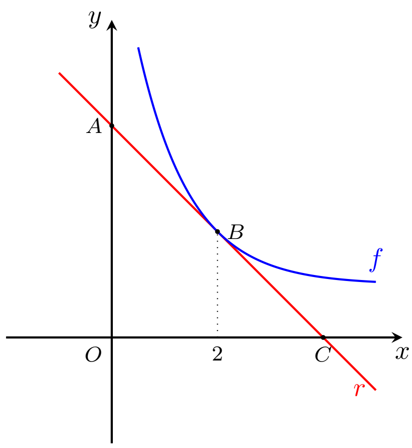

Figura 5

Sabe-se que:

- o ponto A, de coordenadas $(0, 4)$, pertence à reta r
- o ponto C é o ponto de interseção da reta r com o eixo Ox e tem abcissa 4

Qual é o valor de $\lim_{x\to2} \frac{f(x)-f(2)}{x^2-4}$?

(A) $-\frac{1}{16}$ (B) $\frac{1}{16}$ (C) $-\frac{1}{4}$ (D) $\frac{1}{4}$

Caderno 2

- **Neste Caderno não é permitida a utilização de calculadora**

16. Considera as funções f e g, definidas em $[-\pi;\pi]$, por $f(x) = 2\sin(-x)$ e $g(x) = -2\sin\left(\frac{x}{2}\right)$

Na figura 6 encontram-se os gráficos das duas funções, e um paralelogramo $[ABCD]$

Sabe-se que:

- os pontos A e C são pontos de interseção dos dois gráficos
- o ponto D tem a mesma ordenada do ponto C e pertence ao eixo Oy
- o ponto B tem a mesma ordenada do ponto A e pertence ao eixo Oy

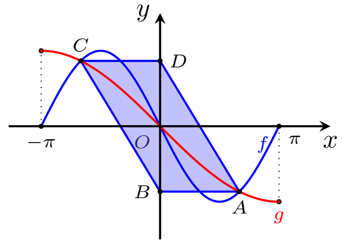

Figura 6

Mostra, analiticamente, que a área do paralelogramo $[ABCD]$ é $\frac{4\sqrt{3}\pi}{3}$ $u.a.$

17. Na figura 7 está representada a semicircunferência de centro A e raio 2 e um pentágono $[APDGH]$

Sabe-se que:

- o ponto A pertence ao segmento de reta $[EB]$
- os pontos B, C e I, pertencem à circunferência de centro no ponto A e de raio igual a 2
- o segmento de reta $[AC]$ é perpendicular ao segmento de reta $[EB]$
- $\overline{AE} = 1$; $\overline{AP} = 2$

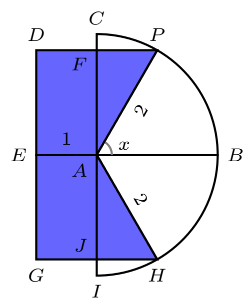

Figura 7

Admite que um ponto P se desloca ao longo do arco BC, nunca coincidindo com B nem com C, e que um ponto D acompanha o movimento do ponto P de forma que o quadrilátero $[EDPA]$ seja um trapézio retângulo
O ponto F é a interseção do segmento de reta $[PD]$ com o segmento de reta $[AC]$
Nesse movimento de P, os pontos G e H também acompanham o movimento e tem-se que o quadrilátero $[AEGH]$ é um trapézio retângulo geometricamente igual ao trapézio $[EDPA]$. Para cada posição do ponto P, seja x a amplitude do ângulo BAP e seja $S(x)$ a área do pentágono $[APDGH]$

17.1. Mostra que $S(x) = 4\sin(x) + 2\sin(2x)$, com $x \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[$

17.2. Para um dado valor de $x \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[$ sabe-se que $\tan(2\pi - x) = -\frac{12}{5}$
Determina, para esse valor de x, o valor exato da área do pentágono $[APDGH]$

17.3. Determina o(s) valor(es) de x para os quais a área colorida é máxima

18. Considera num referencial ortonormado $Oxyz$, os planos
$\alpha : -x + y - z - 2 = 0$ e $\beta : ax - 4ay + 2a^2z + 1 = 0, a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

Os planos α e β são perpendiculares se:

(A) $a = \frac{2}{5}$

(B) $a = -\frac{5}{2}$

(C) $a = -\frac{2}{5}$

(D) $a = \frac{5}{2}$

19. Considera a função f, real de variável real, definida por $f(x) = (2 - x^2)e^{2-x}$. Determina os intervalos de monotonia e os extremos da função

20. Na figura 8 está uma caixa com b bolas brancas e p bolas pretas. O Rodrigo introduziu na caixa uma bola preta. Depois, ao acaso, retirou, sucessivamente e sem reposição, duas bolas da caixa

Mostra que a expressão que dá o valor da probabilidade de as bolas retiradas da caixa serem de cores diferentes, é igual a $\dfrac{2(bp+b)}{(p+b)^2+(p+b)}$

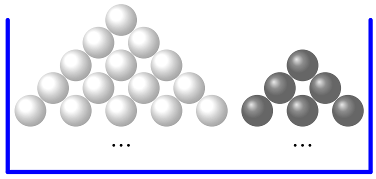

Figura 8

21. Em qual das opções está o valor de $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \dfrac{\cos(x)}{e^4 - e^{4+\cos(x)}}$?

(A) e^4
(B) e^{-4}
(C) $-e^{-4}$
(D) $-e^4$

22. De uma certa linha do triângulo de Pascal, sabe-se que a soma do segundo elemento com o penúltimo é 30
Qual é o maior elemento da linha seguinte?

23. Determina $k \in \mathbb{R}$ de modo que $\lim \left(\dfrac{4n-1}{4n+1}\right)^{2n} = \dfrac{1}{e^{3k+2}}$

24. Seja f a função, de domínio $\mathbb{R}\backslash\{0\}$, definida por $f(x) = \dfrac{\sin(-2x)}{3x}$

Considera a sucessão de números reais (x_n) tal que $x_n = \dfrac{1}{e^n}$

Qual é o valor de $\lim (f(x_n))$?

(A) -1
(B) $-\dfrac{2}{3}$
(C) 0
(D) $\dfrac{2}{3}$

25. Considera todos os números de seis algarismos que se podem formar com os algarismos de 1 a 9. Destes números, quantos têm exatamente dois algarismos iguais a 4?
Numa das opções está a expressão que dá esse número
Em qual delas?

(A) ${}^6C_4 \times 8^4$
(B) ${}^6C_4 \times 9^4$
(C) 2×8^4
(D) 2×9^4

FIM

Formulário

Geometria

Comprimento de um arco de circunferência:

αr *(α - amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r - raio)*

área de um polígono regular: *Semiperímetro* $\times$ *Apótema*

área de um setor circular:
$\frac{\alpha r^2}{2}$ *(α- amplitude, em radianos, do ângulo ao centro, r - raio)*

área lateral de um cone: $\pi r g$ *(r - raio da base, g - geratriz)*

área de uma superfície esférica: $4\pi r^2$ *(r - raio)*

Volume da pirâmide: $\frac{1}{3}\times$ *área da base* $\times$ *Altura*

Volume do cone: $\frac{1}{3}\times$ *área da base* $\times$ *Altura*

Volume da esfera: $\frac{4}{3}\pi r^3$ *(r - raio)*

Progressões

Soma dos n primeiros termos de uma progressão (u_n):

Progressão aritmética: $\frac{u_1+u_n}{2}\times n$

Progressão geométrica: $u_1 \times \frac{1-r^n}{1-r}$, $r \neq 1$

Trigonometria

$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$

$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$

Lei dos senos
$\frac{\sin \hat{A}}{a} = \frac{\sin \hat{B}}{b} = \frac{\sin \hat{C}}{c}$

Lei dos cossenos ou Teorema de Carnot

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos \hat{A}$

Complexos

$(\rho cis\theta)^n = \rho^n cis(n\theta)$ ou $(\rho e^{i\theta})^n = \rho^n e^{in\theta}$

$\sqrt[n]{\rho cis\theta} = \sqrt[n]{\rho} cis\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right)$ ou $\sqrt[n]{\rho e^{i\theta}} = \sqrt[n]{\rho} e^{\frac{\theta+2k\pi}{n}}$

$(k \in \{0, \cdots, n-1\}$ e $n \in \mathbb{N})$

Probabilidades

$\mu = p_1 x_1 + \cdots + p_n x_n$
$\sigma = \sqrt{p_1(x_1-\mu)^2 + \cdots + p_n(x_n-\mu)^2}$
Se $X \sim N(\mu, \sigma)$, então:
$P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) \approx 0.6827$
$P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) \approx 0.9545$
$P(\mu - 3\sigma < X < \mu + 3\sigma) \approx 0.9973$

Regras de derivação

$(u+v)' = u' + v'$
$(uv)' = u'v + uv'$
$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$
$(u^n)' = nu^{n-1}u' \quad (n \in \mathbb{R})$
$(\sin u)' = u' \cos u$
$(\cos u)' = -u' \sin u$
$(\tan u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$
$(e^u)' = u'e^u$
$(a^u)' = u'a^u \ln a \quad (a \in \mathbb{R}^+ \backslash \{1\})$
$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$
$(\log_a u)' = \frac{u'}{u \ln a} \quad (a \in \mathbb{R}^+ \backslash \{1\})$

Limites notáveis

$\lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e \quad (n \in \mathbb{N})$

$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

$\lim_{x\to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

$\lim_{x\to +\infty} \frac{e^x}{x^p} = +\infty \quad (p \in \mathbb{R})$