Escola Secundária de Paredes

Proposta de Resolução da Ficha 3

Matemática A

12.º Ano de Escolaridade | outubro de 2022

Turma: $B + C + H$

Aula de Preparação Para Exame

1. .

1.1. Pontos da reta: $B(0;3)$ e $C(-2;1)$

Declive: $m_r = \dfrac{1-3}{-2-0} = \dfrac{-2}{-2} = 1$

Assim,

$r : y = x + b, b \in \mathbb{R}$

Como $B(0;3)$ é ponto da reta, vem, $b = 3$

Ou seja,

$r : y = x + 3$

Logo, a equação reduzida da reta r é $y = x + 3$

1.2. Seja $P(x;y)$ um ponto genérico da mediatriz do segmento de reta $[BD]$

Então,

$\overline{BP} = \overline{DP} \Leftrightarrow \sqrt{(x-0)^2 + (y-3)^2} = \sqrt{(x-(-2))^2 + (y-0)^2}$

Elevando ao quadrado ambos os membros da equação, resulta,

$(x-0)^2 + (y-3)^2 = (x+2)^2 + (y-0)^2 \Leftrightarrow$

$x^2 + (y-3)^2 = (x+2)^2 + y^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2 + y^2 - 6y + 9 = x^2 + 4x + 4 + y^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -6y + 9 = 4x + 4 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -6y = 4x + 4 - 9 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -6y = 4x - 5 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow y = \dfrac{4}{-6}x - \dfrac{5}{-6} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow y = -\dfrac{2}{3}x + \dfrac{5}{6}$

Logo, a equação reduzida da reta s é $y = -\dfrac{2}{3}x + \dfrac{5}{6}$ e a condição que define o semiplano superior fechado definido pela reta s, é $y \geq -\dfrac{2}{3}x + \dfrac{5}{6}$

1.3. Ora,

$\overline{CD} = 1$

$\overline{OD} = 2$

$\overline{OB} = 3$

$\overline{BC} = \sqrt{(-2-0)^2 + (1-3)^2} = \sqrt{4+4} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

Assim,

$P_{[BCDO]} = \overline{CD} + \overline{OD} + \overline{OB} + \overline{BC} = 1 + 2 + 3 + 2\sqrt{2} = (6 + 2\sqrt{2})\ u.c.$

Resposta: (B)

1.4. Circunferência

Centro: $C(-2; 3)$
Raio: $r = 2$, visto que $B(0; 3)$ é ponto da circunferência

Equação cartesiana reduzida: $(x+2)^2 + (y-3)^2 = 4$

Retas:

$r : y = x + 3$
$s : y = -\dfrac{2}{3}x + \dfrac{5}{6}$
Uma condição que define a região colorida (incluindo a fronteira), é

$(x+2)^2 + (y-3)^2 \leq 4 \wedge y \leq x + 3 \wedge y \leq -\dfrac{2}{3}x + \dfrac{5}{6}$

2. .

2.1. Determinemos a equação cartesiana do plano ABE

Um vetor normal ao plano ABE é colinear com o vetor $\overrightarrow{FG}$

Assim, $\overrightarrow{FG} = G - F = (-2; 6; -3) - (-2; 4; 1) = (-2-(-2); 6-4; -3-1) = (0; 2; -4)$ é um vetor normal ao plano ABE
Uma equação cartesiana deste plano ABE é $2y - 4z + d = 0, d \in \mathbb{R}$

Como o ponto $F(-2; 4; 1)$ é ponto deste plano, resulta,

$2 \times 4 - 4 \times 1 + d = 0 \Leftrightarrow 8 - 4 + d = 0 \Leftrightarrow d = -4$

Portanto, uma equação cartesiana do plano ABE é $2y - 4z - 4 = 0$, ou seja, $y - 2z - 2 = 0$

Determinemos as coordenadas do ponto E

Sabe-se que $E(0; y; 0)$, com $y \in \mathbb{R}$

Como o ponto E pertence ao plano ABE, vem,

$y - 0 - 2 = 0 \Leftrightarrow y - 2 = 0 \Leftrightarrow y = 2$
Logo, $E(0; 2; 0)$

Resposta: (B)

2.2. Determinemos as coordenadas do ponto C

O ponto C é o ponto de interseção da reta CF com o plano ABC

Sabe-se que $(x; y; z) = (-2; 4; 1) + k(-5; -6; 2), k \in \mathbb{R}$,

é uma equação vetorial da reta CF

Então um ponto genérico desta reta é $(-2 - 5k; 4 - 6k; 1 + 2k), k \in \mathbb{R}$

Assim, substituindo estas coordenadas na equação do plano ABC, resulta,

$5 \times (-2 - 5k) + 4 \times (4 - 6k) + 2 \times (1 + 2k) - 53 = 0 \Leftrightarrow -10 - 25k + 16 - 24k + 2 + 4k - 53 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -45k - 45 = 0 \Leftrightarrow -k - 1 = 0 \Leftrightarrow k = -1$

Logo, $C(-2 - 5 \times (-1); 4 - 6 \times (-1); 1 + 2 \times (-1))$, ou seja, $C(3; 10; -1)$

O centro da superfície esférica é o ponto médio do segmento de reta $[CF]$

Seja M este ponto

Assim, $M\left(\frac{3 + (-2)}{2}; \frac{10 + 4}{2}; \frac{-1 + 1}{2}\right)$, ou seja, $M\left(\frac{1}{2}; 7; 0\right)$

Determinemos o raio $\overline{CM}$ da superfície esférica

$\overline{CM} = \sqrt{\left(3 - \frac{1}{2}\right)^2 + (10 - 7)^2 + (-1 - 0)^2} = \sqrt{\frac{25}{4} + 9 + 1} = \sqrt{\frac{65}{4}} = \frac{\sqrt{65}}{2}$

Portanto, a equação cartesiana reduzida da superfície esférica de centro no ponto M e de raio $\overline{CM}$, é

$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + (y - 7)^2 + (z - 0)^2 = \left(\frac{\sqrt{65}}{2}\right)^2$, ou seja, $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + (y - 7)^2 + z^2 = \frac{65}{4}$

3. .

3.1. Determinemos as coordenadas do ponto B

Sabe-se que $B(x; 0; 0)$, com $x \in \mathbb{R}$

Como o ponto B pertence ao plano ABE, vem,

$-5x + 2 \times 0 - 3 \times 0 + 20 = 0 \Leftrightarrow -5x + 0 - 0 + 20 = 0 \Leftrightarrow -5x + 20 = 0 \Leftrightarrow 5x = 20 \Leftrightarrow x = \frac{20}{5} \Leftrightarrow x = 4$

Logo, $B(4; 0; 0)$

O vetor diretor desta reta é $\overrightarrow{AB}$

$\overrightarrow{AB} = B - A = (4; 0; 0) - (2; -2; 2) = (4 - 2; 0 - (-2); 0 - 2) = (2; 2; -2)$

Assim, uma equação vetorial da reta AB é, $(x; y; z) = (4; 0; 0) + k(2; 2; -2), k \in \mathbb{R}$

Analisando as opções, verificamos que só podem ser resposta as opções (A) e (D)

O vetor diretor da reta da opção (A) é colinear com o vetor $\overrightarrow{AB}(2; 2; -2)$

Com efeito, $(-4; -4; 4) = -2 \times (2; 2; -2)$

Portanto, uma equação vetorial da reta AB é, $(x;y;z)=(4;0;0)+k(-4;-4;4), k\in\mathbb{R}$

Obs.:

Vejamos se o ponto $(1;1;1)$ da opção (D) é ponto da reta AB

$(1;1;1)=(4;0;0)+k(2;2;-2) \Leftrightarrow 1=4+2k \wedge 1=0+2k \wedge 1=0-2k \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 1-4=2k \wedge 1=2k \wedge 1=-2k \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -3=2k \wedge 1=2k \wedge 1=-2k \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow k=-\dfrac{3}{2} \wedge k=\dfrac{1}{2} \wedge k=-\dfrac{1}{2}$

Logo, $(1;1;1)$ não é ponto da reta AB

Resposta:(A)

3.2. Determinemos as coordenadas do ponto E

Seja E' a projeção ortogonal do ponto E sobre o plano ABC

Assim, E' é o ponto médio do segmento de reta $[AC]$

Logo, $E'\left(\dfrac{2+7}{2};\dfrac{-2+0}{2};\dfrac{2+3}{2}\right)$, ou seja, $E'\left(\dfrac{9}{2};-1;\dfrac{5}{2}\right)$

Determinemos uma equação vetorial da reta perpendicular ao plano ABC e que passa em E'

O vetor diretor desta reta é colinear com o vetor normal ao plano ABC

Assim, uma equação vetorial da reta é, $(x;y;z)=\left(\dfrac{9}{2};-1;\dfrac{5}{2}\right)+k(-1;2;1), k\in\mathbb{R}$

Um ponto genérico desta reta é $\left(\dfrac{9}{2}-k;-1+2k;\dfrac{5}{2}+k\right), k\in\mathbb{R}$

Determinemos k de modo que este ponto pertença ao plano ABE

$-5\times\left(\dfrac{9}{2}-k\right)+2\times(-1+2k)-3\times\left(\dfrac{5}{2}+k\right)+20=0 \Leftrightarrow -\dfrac{45}{2}+5k-2+4k-\dfrac{15}{2}-3k+20=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -12+6k=0 \Leftrightarrow 6k=12 \Leftrightarrow k=\dfrac{12}{6} \Leftrightarrow k=2$

Logo $E\left(\dfrac{9}{2}-2;-1+2\times 2;\dfrac{5}{2}+2\right)$, ou seja, $E\left(\dfrac{5}{2};3;\dfrac{9}{2}\right)$

$\overline{EE'}$, medida de comprimento da altura da pirâmide

$\overline{EE'}=\sqrt{\left(\dfrac{5}{2}-\dfrac{9}{2}\right)^2+(3-(-1))^2+\left(\dfrac{9}{2}-\dfrac{5}{2}\right)^2}=\sqrt{4+16+4}=\sqrt{24}=2\sqrt{6}$

$\overline{AB}=\sqrt{(2-4)^2+(-2-0)^2+(2-0)^2}=\sqrt{4+4+4}=\sqrt{12}=2\sqrt{3}$

$\overline{BC}=\sqrt{(7-4)^2+(0-0)^2+(3-0)^2}=\sqrt{9+0+9}=\sqrt{18}=3\sqrt{2}$

Portanto, o volume da pirâmide é,

$V_{[ABCDE]}=\dfrac{\overline{AB}\times\overline{BC}\times\overline{EE'}}{3}=\dfrac{2\sqrt{3}\times 3\sqrt{2}\times 2\sqrt{6}}{3}=\dfrac{12\times 6}{3}=24\ u.v.$