Folha 8 - Funções Quadráticas

Chama-se função quadrática numa variável x a toda a função $\begin{array}{l} f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto y = ax^2 + bx + c \end{array}$ em que a, b e c são número reais e $a \neq 0$, ou seja, a uma função que pode ser definida por um polinómio de grau 2 na variável x.

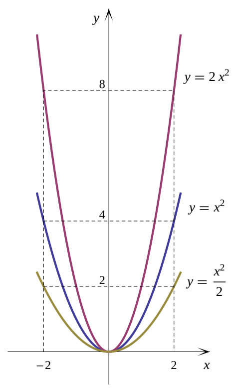
Zeros : $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$.

Sendo $\Delta = b^2 - 4ac$ (chamado binómio discriminante), tem-se:

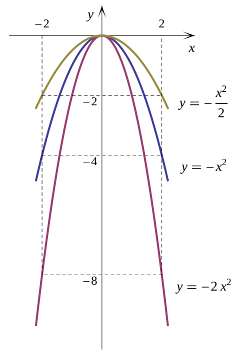
- se $\Delta > 0$, existem dois zeros reais, $x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ e $x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$;
- se $\Delta = 0$, existe um zero real (duplo) $x = \frac{-b}{2a}$;
- se $\Delta < 0$, não existem zeros reais.

Gráfico :

Funções do tipo $y = ax^2$, $a \neq 0$



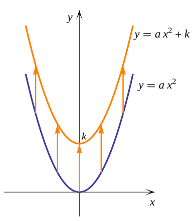
$\boxed{a > 0}$



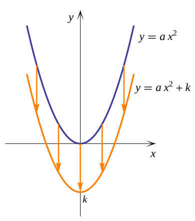
$\boxed{a < 0}$

Os gráficos desta família de funções são *parábolas* com vértice em $(0, 0)$, eixo de simetria coincidente com o eixo dos yy, concavidade no sentido positivo do eixo dos yy (voltada para cima) se $a > 0$ e concavidade no sentido negativo do eixo dos yy (voltada para baixo) se $a < 0$.

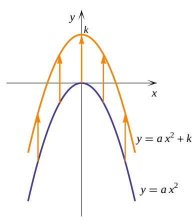
Funções do tipo $y = ax^2 + k$, $a \neq 0$, $k \in \mathbb{R}$.



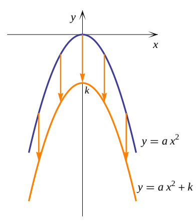
$a > 0 \wedge k > 0$



$a > 0 \wedge k < 0$



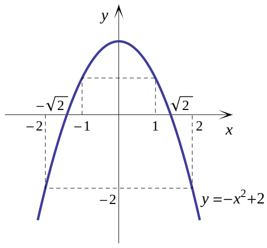
$a < 0 \wedge k > 0$



$a < 0 \wedge k < 0$

Os gráficos desta família de funções obtêm-se a partir dos gráficos de $y = ax^2$ adicionando k à ordenada de cada um dos seus pontos, o que equivale a aplicar a cada curva uma translação definida pelo vetor $\vec{u} = (0, k)$. O vértice da nova parábola é o ponto $(0, k)$ que se obtém somando à origem o vetor $\vec{u}$, $(0, 0) + (0, k) = (0, k)$, e o eixo de simetria é o eixo dos yy.

Exemplo 1 *Função definida, em $\mathbb{R}$, por $y = -x^2 + 2$.*



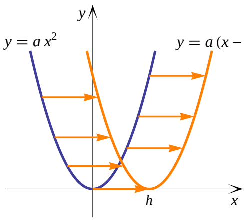
A concavidade da parábola está voltada para baixo visto o coeficiente de x^2 ser negativo, o seu vértice é o ponto $(0, 2)$ e o eixo de simetria o eixo dos yy. Existem dois zeros reais,

$$-x^2 + 2 = 0 \iff x = -\sqrt{2} \quad \vee \quad x = \sqrt{2},$$

e da observação da representação gráfica constata-se que:

- *é positiva se $x \in \left]-\sqrt{2}, \sqrt{2}\right[$ e negativa se $x \in \left]-\infty, -\sqrt{2}\right[\cup \left]\sqrt{2}, +\infty\right[$;*
- *é crescente em $]-\infty, 0]$ e decrescente em $[0, +\infty[$;*
- *é não injetiva;*
- *$D'_f =]-\infty, 2]$, donde não é sobrejetiva.*

Funções do tipo $y = a(x-h)^2$, $a \neq 0$, $h \in \mathbb{R}$.



$h > 0$

Os gráficos desta família de funções obtêm-se a partir dos gráficos de $y = ax^2$ adicionando h à abcissa de cada um dos seus pontos, o que equivale a aplicar a cada curva uma translação definida pelo vetor $\vec{v} = (h, 0)$. O vértice da nova parábola é o ponto $(h, 0)$ e o eixo de simetria é a reta vertical que passa no vértice, reta de equação $x = h$.

Exemplo 2 $y = 2(x-3)^2$
O vértice da parábola é o ponto $(3, 0)$ e o eixo de simetria é a reta de equação $x = 3$.

Funções do tipo $y = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$.
O polinómio ax^2+bx+c pode transformar-se, por equivalência, numa expressão do tipo $a(x-h)^2+k$. Com efeito, sendo $a \neq 0$, pode pôr-se a em evidência nos dois primeiros termos e tem-se

$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c &= a\left(x^2 + \frac{b}{a}x\right) + c \\ &= a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2}\right) - \frac{b^2}{4a} + c \\ &= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a}. \end{aligned}$$

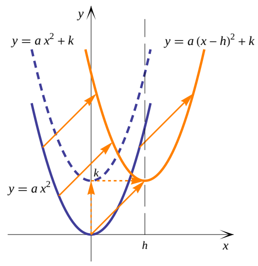
Assim, fazendo

$$h = -\frac{b}{2a} \quad \text{e} \quad k = -\frac{b^2 - 4ac}{4a} = -\frac{\Delta}{4a}$$

vem

$$ax^2 + bx + c = a(x - h)^2 + k.$$

Como consequência, o gráfico de $y = ax^2 + bx + c$ pode obter-se a partir do gráfico de $y = ax^2$, aplicando a este uma translação associada ao vetor $\vec{w} = \vec{u} + \vec{v} = (h, k)$.



O gráfico da função é então uma parábola cujo vértice é o ponto (h, k) e o eixo de simetria é a reta de equação $x = h$.

Exemplo 3 *Relativamente à função definida em* $\mathbb{R}$ *por*

$$y = 4x^2 - 8x + 6.$$

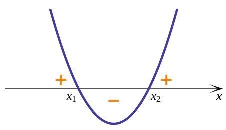
ou

$$y = 4(x^2 - 2x) + 6 = 4(x-1)^2 - 4 + 6 = 4(x-1)^2 + 2,$$

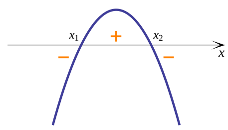
conclui-se que o gráfico é uma parábola de vértice no ponto $(1, 2)$*, de eixo* $x = 1$ *e com a concavidade voltada para cima.*

Sinal $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$, com:

- $\boxed{\Delta > 0}$

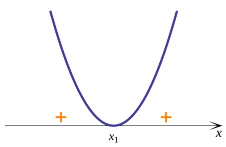


$a > 0$

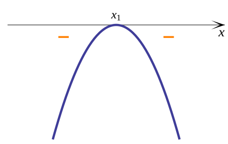


$a < 0$

- $\boxed{\Delta = 0}$ A função tem um único zero (duplo) x_1. Para todos os valores de $x \neq x_1$ a função toma o sinal de a.

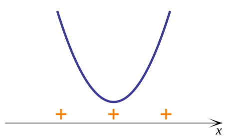


$a > 0$

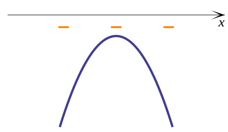


$a < 0$

- $\boxed{\Delta < 0}$ A função não tem zeros e o seu gráfico toma sempre o sinal de a.



$a > 0$



$a < 0$

Exemplo 4 *Para* $f(x) = -3x^2 + 4x + 1, \quad x \in \mathbb{R}$,

$\Delta = 16 - 4 \times (-3) \times 1 = 28$.

Como $\Delta > 0$, *a função admite dois zeros,*

$$-3x^2 + 4x + 1 = 0 \Longleftrightarrow x = \frac{-2 \pm \sqrt{28}}{2 \times (-3)}$$
$$\Longleftrightarrow x = \frac{2 - \sqrt{7}}{3} \quad \vee\, x = \frac{2 + \sqrt{7}}{3}.$$

Como $a < 0$ *a função é positiva no intervalo* $\left]\frac{2-\sqrt{7}}{3}, \frac{2+\sqrt{7}}{3}\right[$ *e negativa fora deste intervalo.*

Exercícios Propostos

Exercício 1 Considere a função quadrática definida por $f(x) = x^2 - 2x - 3, \quad x \in \mathbb{R}$.

a) Escreva a expressão $x^2 - 2x - 3$ na forma $(x - h)^2 + k$.

b) Calcule os zeros de f.

c) Represente graficamente f.

d) Indique os valores de x que têm imagem negativa.

Exercício 2 Considere a função real de variável real definida por

$$f(x) = -(x + 2)^2 - 1, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

a) Determine as coordenadas do vértice da parábola representativa do gráfico da função e escreva uma equação do seu eixo de simetria.

b) Indique dois objetos diferentes que tenham a mesma imagem por f.

c) Qual o sentido da concavidade da parábola? Justifique.

d) Represente graficamente f.

e) Indique o seu contradomínio.

Exercício 3 Resolva em $\mathbb{R}$ cada uma das condições:

a) $9x^2 + 12x + 4 \leq 0$;

b) $-x^2 + 9 < 0$;

c) $-x^2 - 5x \geq 6$;

d) $x^2 + x - 2 > 0$;

e) $4x^2 + x + 1 < 0$.

Exercício 4 Determine o domínio das funções definidas por:

a) $f(x) = \sqrt{2x^2 - 4x}$

b) $g(x) = \frac{x}{\sqrt{(x-1)(x-2)}}$

Exercício 5 Represente graficamente as funções definidas em $\mathbb{R}$ por:

a) $f(x) = \begin{cases} 2x - x^2 & \text{se} \quad x \leq 2 \\ x & \text{se} \quad x > 2 \end{cases}$

b) $g(x) = |x^2 - 4|$