Teste de Matemática 12.º ANO 2023

CRITÉRIOS GERAIS DE CLASSIFICAÇÃO

A prova é formada por itens de escolha múltipla e de resposta restrita. Os critérios de classificação dos itens de resposta restrita estão organizados por etapas, atribuindo-se, a cada uma delas, uma pontuação.

Caso os alunos adotem um processo não previsto nos critérios específicos, cabe ao professor corretor adaptar a distribuição da cotação atribuída.

Deve ser atribuída a classificação de zero quando um aluno apresente apenas o resultado final de um item, ou de uma etapa, quando é pedida a apresentação de cálculos ou justificações;

Nas seguintes situações deve descontar-se um ponto às cotações estabelecidas para a etapa respetiva:

- Ocorrência de um erro de cálculo;

- Apresentação de uma resposta com o formato que não esteja de acordo com o que foi solicitado;

- Apresentação de expressões com erros do ponto de vista formal.

Caso ocorram erros que revelem desconhecimento de conceitos, de regras ou de propriedades ou o aluno apresente uma resolução incompleta de uma etapa, deve descontar-se até metade da cotação dessa etapa.

CRITÉRIOS ESPECÍFICOS DE CLASSIFICAÇÃO

														Grupo A			Grupo B			
Item	1.1	1.2	2	3	4.1	4.2	4.3	5	6.1	6.2	6.3	7	8	9	10	11	12	10.1	10.2	11	Total
Cotação	10	14	10	12	14	12	12	10	12	12	14	12	10	12	12	12	10	12	12	10	200

QUESTÃO		DESCRIÇÃO		COTAÇÃO	
1.					**24**
	1.1.	**Versão 1** (A) **Versão 2** (C)		**10**	
	1.2	• Determinar as coordenadas do ponto $P\left(\frac{13}{3}, 0{,}0\right)$ • Determinar as coordenadas do ponto D $(1, 4, \sqrt{17})$ • Determinar $\overrightarrow{OP}$ • Determinar $\overrightarrow{OD}$ • Determinar $\left\lVert\overrightarrow{OP}\right\rVert$ e $\left\lVert\overrightarrow{OD}\right\rVert$ • Calcular $P\hat{O}D$ $(80{,}1°)$	**3** **3** **1** **1** **2** **4**	**14**	
2.		**Versão 1** (B) **Versão 2** (C)			**10**
3.					**12**
		• Identificar $\overline{CB} = 2\cos\beta$ ou $\overline{OA} = 2\cos\beta$ • Identificar $\overline{AB} = -\sin\beta$ ou $\overline{OC} = -\sin\beta$ • Identificar $\overline{CM} = \cos\beta$ ou $\overline{MB} = \cos\beta$ **1.º Processo** • Escrever $A_{[OABM]} = \frac{2\cos\beta + \cos\beta}{2} \times (-\sin\beta)$ ou equivalente • Simplificar a expressão • Usar a fórmula da duplicação do seno • Concluir que $A_{[OABM]} = -\frac{3}{4}\sin(2\beta)$ **2.º Processo** • Escrever $A_{[OABC]} = 2\cos\beta \times (-\sin\beta)$ ou equivalente • Escrever $A_{[OMC]} = \frac{\cos\beta \times (-\sin\beta)}{2}$ ou equivalente • Fazer a diferença das duas áreas • Simplificar a expressão • Usar a fórmula da duplicação do seno • Concluir que $A = -\frac{3}{4}\sin(2\beta)$		**1** **1** **1** **2** **2** **3** **2** **1** **1** **1** **1** **3** **2**	
4.					**38**
	4.1	• Escrever $\vec{u}.\vec{v} = (\sin(2x);\ \cos(2x)).(2\cos(2x); 4\sin(2x))$ • Escrever $\vec{u}.\vec{v} = 2.\sin(2x).\cos(2x) + 4.\cos(2x).\sin(2x)$ • Escrever $\vec{u}.\vec{v} = \sin(4x) + 2\sin(4x)$ • Concluir que $\vec{u}.\vec{v} = 3\sin(4x)$ • Escrever $3\sin(4x) = \frac{3}{2}$	**1** **1** **3** **1** **1**	**14**	

		• Simplificar a expressão escrevendo $\sin(4x) = \sin\left(\frac{\pi}{6}\right)$ ou equivalente • Resolver a equação em $\mathbb{R}$ • Determinar as soluções no intervalo pedido • Concluir que as soluções são $\frac{-7\pi}{24}$ e $\frac{\pi}{24}$	**2** **3** **1** **1**		
	4.2.	• Determinar $g'(x)$ • Calcular $m_r = g'\left(\frac{\pi}{12}\right) = 6$ • Determinar as coordenadas do ponto $P\left(\frac{\pi}{12}; \frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$ • Compreender que a reta pedida tem declive igual a $-\frac{1}{6}$ e escrever a equação pedida $(x, y) = \left(\frac{\pi}{12}; \frac{3\sqrt{3}}{2}\right) + k(-6, 1), \quad k \in \mathbb{R}$, por exemplo	**3** **3** **2** **4**	**12**	
	4.3.	• Escrever $g(x) = g'(x) \Leftrightarrow g(x) - g'(x) = 0$ ou equivalente • Identificar $g(x) - g'(x)$ como uma outra função, digamos h • Provar que h é contínua em $\left[0; \frac{\pi}{6}\right]$ • Calcular $h(0)$ e $h(\frac{\pi}{6})$ e concluir que $h(0) \times h(\frac{\pi}{6}) < 0$ • Concluir através do Teorema de Bolzano-Cauchy que $\exists c \in \left]0; \frac{\pi}{6}\right[: h(c) = 0$ • Concluir o pretendido $\exists c \in \left]0; \frac{\pi}{6}\right[: g(c) = g'(c)$	**1** **1** **4** **4** **1** **1**	**12**	
5.		**Versão 1** **(D)** — **Versão 2** **(B)**			**10**
6.					**38**
	6.1	• Determinar o domínio de h $\left(D_h = \left]\frac{\ln 2}{4}; +\infty\right[\right)$ **1.º Processo** • Escrever $h(x) = 0 \Leftrightarrow \ln(e^{4x} - 2) - 2x = 0$ • Escrever $\ln(e^{4x} - 2) - 2x = 0 \Leftrightarrow \ln(e^{4x} - 2) - \ln(e^{2x}) = 0$ • Escrever $\ln(e^{4x} - 2) - \ln(2x) = 0 \Leftrightarrow \ln(e^{4x} - 2) = \ln(e^{2x})$ • Escrever $e^{4x} - 2 = e^{2x}$ ou equivalente • Escrever $y = e^{2x}$ e resolver a equação de 2.º grau $y^2 - y - 2 = 0$ $(y = 2 \vee y = -1)$ • Resolver $e^{2x} = 2 \vee e^{2x} = -1$, indicando que $e^{2x} = -1$ é impossível pois $e^{2x} > 0, \ \forall x \in \mathbb{R}$ • Verificar que a única solução $\left(\frac{\ln 2}{2}\right)$ pertence ao domínio e concluir que o único zero de h é $\frac{\ln 2}{2}$	**2** **1** **2** **1** **1** **2** **2** **1**	**12**	

		2.º Processo			
		• Escrever $h(x)=0 \Leftrightarrow \ln\left(e^{4x}-2\right)-2x=0$	**1**		
		• Escrever $\ln(e^{4x}-2)-2x=0 \Leftrightarrow \ln(e^{4x}-2)-\ln(e^{2x})=0$	**1**		
		• Escrever $\ln\left(\frac{e^{4x}-2}{e^{2x}}\right)=0 \Leftrightarrow \frac{e^{4x}-2}{e^{2x}}=1$	**2**		
		• Escrever $\frac{e^{4x}-2}{e^{2x}}=1 \Leftrightarrow e^{4x}-2=e^{2x}$ ou equivalente, pois $e^{2x}>0,\ \forall x \in \mathbb{R}$	**2**		
		• Escrever $y=e^{2x}$ e resolver a equação de 2.º grau $y^2-y-2=0$ $(y=2\ \vee y=-1)$	**1**		
		• Resolver $e^{2x}=2\ \vee\ e^{2x}=-1$, indicando que $e^{2x}=-1$ é impossível pois $e^{2x}>0,\ \forall x \in \mathbb{R}$	**1**		
		• Verificar que a única solução $\left(\frac{\ln 2}{2}\right)$ pertence ao domínio e concluir que o único zero de h é $\frac{\ln 2}{2}$	**2**		
		3.º Processo			
		• Escrever $h(x)=0 \Leftrightarrow \ln\left(e^{4x}-2\right)-2x=0$	**1**		
		• Escrever $\ln(e^{4x}-2)-2x=0 \Leftrightarrow \ln(e^{4x}-2)-\ln(e^{2x})=0$	**1**		
		• Escrever $\ln\left(\frac{e^{4x}-2}{e^{2x}}\right)=0 \Leftrightarrow \frac{e^{4x}-2}{e^{2x}}=1$	**1**		
		• Escrever $\frac{e^{4x}-2}{e^{2x}}=1 \Leftrightarrow \frac{e^{4x}-2}{e^{2x}}-1=0 \Leftrightarrow \frac{e^{4x}-2-e^{2x}}{e^{2x}}=0$ ou equivalente	**2**		
		• Escrever $e^{4x}-2-e^{2x}=0 \wedge e^{2x}\neq 0$ (Condição universal pois $e^{2x}>0,\ \forall x \in \mathbb{R}$	**1**		
		• Escrever $y=e^{2x}$ e resolver a equação de 2.º grau $y^2-y-2=0$ $(y=2\ \vee y=-1)$	**1**		
		• Resolver $e^{2x}=2\ \vee\ e^{2x}=-1$, indicando que $e^{2x}=-1$ é impossível pois $e^{2x}>0,\ \forall x \in \mathbb{R}$	**1**		
		• Verificar que a única solução $\left(\frac{\ln 2}{2}\right)$ pertence ao domínio e concluir que o único zero de h é $\frac{\ln 2}{2}$	**2**		
	6.2.			**12**	
		• Escrever $m=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{h(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(e^{4x}-2\right)-2x}{x}$	**1**		
		• Escrever $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(e^{4x}-2\right)-2x}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(e^{4x}-2\right)}{x}-\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2x}{x}$	**1**		
		• Escrever $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(e^{4x}-2\right)}{x}-\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2x}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(e^{4x}\left(1-\frac{2}{e^{4x}}\right)\right)}{x}-2$	**2**		
		• Escrever $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(e^{4x}\left(1-\frac{2}{e^{4x}}\right)\right)}{x}-2=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(e^{4x}\right)+\ln\left(1-\frac{2}{e^{4x}}\right)}{x}-2$	**2**		
		• Concluir que $m=4+0-2=2$	**1**		
		• Escrever $b=\lim\limits_{x\to+\infty}[h(x)-2x]=\lim\limits_{x\to+\infty}\ln[(e^{4x}-2)-4x]$	**1**		
		• Escrever $\lim\limits_{x\to+\infty}[\ln(e^{4x}-2)-4x]=\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\left(\frac{e^{4x}-2}{e^{4x}}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\left(1-\frac{2}{e^{4x}}\right)$	**2**		
		• Concluir que $b=\ln 1=0$	**1**		
		• Escrever que a assíntota oblíqua ao gráfico de h é dada pela reta de equação $y=2x$	**1**		

	6.3.	• Determinar $h'(x)$ $\left(h'(x) = \frac{4e^{4x}}{e^{4x}-2} - 2\right)$	3	12	
		• Escrever a equação $h'(x) = x^3 \Leftrightarrow \frac{4e^{4x}}{e^{4x}-2} - 2 = x^3$ ou equivalente	3		
		• Desenhar o gráfico das duas funções e determinar a sua interseção **NOTA:** Se o domínio não estiver explícito no gráfico, esta etapa terá no máximo 2 pontos	3		
		• Escrever as coordenadas do ponto P com aproximação às milésimas $[P\ (1{,}270; 2{,}050)]$	1		
		• Calcular a distância de P à origem do referencial $(2{,}4)$	2		
7.					14
		• Escrever $\lim\limits_{x\to 1^-} g(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} \frac{8(\sqrt{x+3}-2)}{x-1}$ ou equivalente		1	
		• Escrever $\lim\limits_{x\to 1^-} \frac{8(\sqrt{x+3}-2)}{x-1} = 8 \lim\limits_{x\to 1^-} \frac{(\sqrt{x+3}-2)(\sqrt{x+3}+2)}{(x-1)\,(\sqrt{x+3}+2)}$ ou equivalente		2	
		• Escrever $8 \lim\limits_{x\to 1^-} \frac{(\sqrt{x+3}-2)(\sqrt{x+3}+2)}{(x-1)\,(\sqrt{x+3}+2)} = 8 \lim\limits_{x\to 1^-} \frac{1}{(\sqrt{x+3}+2)}$ ou equivalente		1	
		• Concluir que $\lim\limits_{x\to 1^-} g(x) = 2$		1	
		• Escrever $\lim\limits_{x\to 1^+} g(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} \frac{4x\,(1-x)}{1-e^{2(x-1)}}$ ou equivalente		1	
		• Escrever $\lim\limits_{x\to 1^+} \frac{4x\,(1-x)}{1-e^{2(x-1)}} = \lim\limits_{x\to 1^+} \frac{-4x\,(x-1)}{-(e^{2(x-1)}-1)}$ ou equivalente		1	
		• Mudar a variável e escrever $\lim\limits_{x\to 1^+} \frac{-4x\,(x-1)}{-(e^{2(x-1)}-1)} = \lim\limits_{y\to 0^+} \frac{4y\,(y+1)}{(e^{2y}-1)}$ ou equivalente		1	
		• Escrever $\lim\limits_{y\to 0^+} \frac{4y\,(y+1)}{(e^{2y}-1)} = \lim\limits_{y\to 0^+} \frac{2y}{(e^{2y}-1)} \times \lim\limits_{y\to 0^+} 2(y+1)$ ou equivalente		2	
		• Mudar novamente a variável e escrever $\frac{1}{\lim\limits_{z\to 0^+} \frac{(e^z-1)}{z}} \times 2$ ou equivalente		1	
		• Concluir que $\lim\limits_{x\to 1^+} g(x) = 2$		1	
		• Concluir que, uma vez que $\lim\limits_{x\to 1^-} g(x) = g(1) = \lim\limits_{x\to 1^+} g(x) = 2$, então g é contínua em $x = 1$		2	
8.		Versão 1 **(B)** — Versão 2 **(A)**			10
9.					12
		• Mostrar que $v_n = \log 2^n$ é uma progressão aritmética de razão $\log 2$		4	
		• Referir que u_n é a soma dos n primeiros termos de v_n		2	
		• Calcular a soma dos n primeiros termos de v_n		6	
		Grupo A			
10.					12
		• Concluir que $P(A \cap \overline{B}) = 0{,}25 \Leftrightarrow P(A \cap B) = P(A) - 0{,}25$		2	
		• Concluir que $P(\overline{A \cup B}) = k \Leftrightarrow P(A \cup B) = 1 - k$		1	
		• Concluir que $P(B\|A) = 0{,}4 \Leftrightarrow P(A \cap B) = 0{,}4\,P(A)$		2	

		• Concluir de $P(A \cap B) = P(A) - 0{,}25$ e de $P(A \cap B) = 0{,}4\,P(A)$ que $P(A) = \frac{5}{12}$ ou equivalente		2	
		• Concluir que $P(A \cup B) = 1 - k \Leftrightarrow P(A) + P(B) = 1 - k + P(A \cap B)$		2	
		• Escrever $P(A) + P(B) = 1 - k + P(A \cap B) \Leftrightarrow P(A) + P(B) = 1 - k + P(A) - 0{,}25$		2	
		• Concluir que $P(A) + P(B) = \frac{7-6k}{6}$ ou equivalente		1	
11.					**12**
		• Concluir que se a linha tem m elementos então estamos na linha $m-1$		2	
		• Indicar os casos possíveis ($m(m-1)$ ou ${}^{m}C_2$		2	
		• Indicar os casos favoráveis ($2 \times 2 \times 2!$ ou ${}^{2}C_1 \times {}^{2}C_1$)		4	
		• Escrever $\frac{2}{m} \times \frac{2}{(m-1)} \times 2! = \frac{1}{75}$ ou $\frac{{}^{2}C_1 \times {}^{2}C_1}{{}^{m}C_2} = \frac{1}{75}$ ou equivalente		1	
		• Resolver a equação de 2.º grau		2	
		• Responder $m = 25$ porque $m > 1$		1	
12.		**Versão 1** **(C)** **Versão 2** **(D)**			**10**
		Grupo B			
10.					**24**
	10.1.			**12**	
		• Determinar $Z_1 \times Z_2$ $\quad ((a+2b) + (b-2a)i)$	**2**		
		• Concluir que se $Z_1 \times Z_2$ é um número real então $b = 2a$ ou equivalente	**1**		
		• Determinar $1 + \frac{z_1}{z_2}$ $\left(\left(\frac{5+a-2b}{5}\right) + \left(\frac{b+2a}{5}\right)i\right)$	**4**		
		• Concluir que se $1 + \frac{z_1}{z_2}$ é um imaginário puro então $a - 2b = -5$ ou equivalente	**1**		
		• Resolver o sistema $\begin{cases} b = 2a \\ a - 2b = -5 \end{cases}$ ou equivalente	**3**		
		• Concluir que $a = \frac{5}{3}$ e $b = \frac{10}{3}$	**1**		
	10.2			**12**	
		• Determinar w $\quad (w = -2 - 2i)$	**2**		
		• Escrever w na forma trigonométrica $\left(w = \sqrt{8}.e^{i\frac{5\pi}{4}}\right)$ ou equivalente	**4**		
		• Calcular as raízes quadradas de w $\left(Z_0 = \sqrt[4]{8}e^{i\frac{5\pi}{8}}\ e\ Z_0 = \sqrt[4]{8}e^{i\frac{13\pi}{8}}\right)$ ou equivalente	**6**		
11.		**Versão 1** **(C)** **Versão 2** **(D)**			**10**