23 + curso

Universidade do Minho
DMA

# Matemática

## Folha 9 - Funções Polinomiais

Chama-se **função polinomial** numa variável $x$ a toda a função

$$\begin{aligned} f\colon D \subseteq \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto y = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n \end{aligned}$$

em que $n$ é um número inteiro não negativo, $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n$ são número reais e $a_0 \neq 0$, ou seja, a uma função que pode ser definida por um polinómio de grau $n$ na variável $x$.

As funções quadráticas, estudadas na folha 3, são casos particulares de funções polinomiais.

Os **zeros** de uma função polinomial são as raízes do polinómio que pertençam ao domínio da função.

As **raízes** de um polinómio são os valores para a incógnita que tornam nulo o polinómio. Um polinómio de grau $n$ tem, no máximo, $n$ raízes reais.

**Exemplo 1** *Considere a função polinomial de domínio $\mathbb{R}$ definida por $P(x) = x^4 + x^3 + 2x - 4$. Mostre que 1 é um dos zeros de $P$.*

$P(1) = 1^4 + 1^3 + 2 \times 1 - 4 = 1 + 1 + 2 - 4 = 0$

### Fatorização de Polinómios

Fatorizar um polinómio é escrevê-lo sob a forma de produto de polinómios. Pretende-se que os fatores sejam de menor grau possível, preferencialmente lineares.

Um polinómio $P(x)$ é divisível por $x - c$ (ou $x - c$ é um dos fatores de $P(x)$) se e só se $c$ for raiz do polinómio.

**Exemplo 2** *Retomando o exemplo anterior, como 1 é um dos zeros de $P$, $P(x)$ é divisível por $(x-1)$. Ou seja, o resto da divisão inteira de $P(x)$ por $x - 1$ é zero.*

### Divisão inteira de polinómios

Um algoritmo geral para a divisão inteira de polinómios será exemplificado na aula.

Quando o divisor é um binómio do tipo $x - c$, recorre-se frequentemente a um prático método, popularizado com o nome de Regra de Ruffini.

**Exemplo 3** *Vamos pois dividir $P(x) = x^4 + x^3 + 2x - 4$ por $(x - 1)$.*

$$\begin{array}{c|ccccc} & 1 & 1 & 0 & 2 & -4 \\ 1 & & 1 & 2 & 2 & 4 \\ \hline & 1 & 2 & 2 & 4 & |0 \end{array}$$

*Na primeira linha escrevem-se, por ordem decrescente, todos os 5 coeficientes dos monómios que compõem o polinómio.*

*O número no canto inferior esquerdo é o valor que anula o divisor. O coeficiente do monómio do maior grau é diretamente transposto para a linha de baixo. A partir daí o número mais à direita em baixo é multiplicado pelo número do canto; o produto é registado na coluna seguinte na linha do meio; e os dois primeiros números de cada coluna são adicionados, sendo a soma registada nessa coluna na linha de baixo.*

*Isto significa que zero é, efetivamente, o resto da divisão inteira de $P(x)$ por $(x - 1)$ e que o quociente é o polinómio $Q_1(x) = x^3 + 2x^2 + 2x + 4$, ou que $P(x) = (x - 1)(x^3 + 2x^2 + 2x + 4)$.*

*Repetindo o processo para o quociente encontrado, será possível prosseguir com a fatorização de $P(x)$. Verifica-se que -2 é raiz de $Q_1(x)$ e, consequentemente, de $P(x)$.*

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 2 & 2 & 4 \\ & & & & \\ -2 & & -2 & 0 & -4 \\ \hline & 1 & 0 & 2 & |0 \end{array}$$

*Isto significa que $Q_1(x)$ é divisível por $(x+2)$ e que o quociente é o polinómio $Q_2(x) = x^2 + 2$.*

*Assim, $P(x) = (x-1)(x+2)(x^2+2)$ e a fatorização está concluída porque $x^2+2$ não admite raízes reais.*

**Estudo de uma função polinomial**

**Exemplo 4** *Para um estudo das principais características da função polinomial de domínio $\mathbb{R}$ definida por $P(x) = x^4 + x^3 + 2x - 4$, considere-se $P(x) = (x-1)(x+2)(x^2+2)$.*

- *zeros: -2 e 1 (como visto anteriormente);*
- *é não injetiva;*
- *estudo do sinal:*

| $x$ | $-\infty$ | $-2$ | | $1$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $x-1$ | $-$ | $-$ | $-$ | $0$ | $+$ |
| $x+2$ | $-$ | $0$ | $+$ | $+$ | $+$ |
| $x^2+2$ | $+$ | $+$ | $+$ | $+$ | $+$ |
| | | | | | |
| $P(x)$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ |

- *é não limitada (não é majorada);*
- *contradomínio: se o grau do polinómio fosse ímpar, o contradomínio seria $\mathbb{R}$; assim, é preciso determinar o mínimo absoluto (necessário o cálculo da derivada da função – mais adiante na unidade curricular);*
- *monotonia: não monótona; para o estudo dos intervalos de monotonia, recorre-se também ao estudo da derivada.*

## Exercícios Propostos

Exercício 1  Resolva, em $\mathbb{R}$, cada uma das seguintes inequações:

a) $x^3 > x^2$;

b) $x^3 + x^2 - 2x > 0$;

c) $(x-1)(4-x^2)(x^2-4x+6) \leq 0$.

Exercício 2  Considere a função polinomial definida em $\mathbb{R}$ por $f(x) = x^3 - x^2 - 4x + 4$.

a) Usando a regra de Ruffini, mostre que

$$x^3 - x^2 - 4x + 4 = (x-2)\left(x^2 + x - 2\right), \text{ para todo } x \in \mathbb{R}.$$

b) Determine os zeros de $f$.

c) Determine o conjunto de números reais que verificam a condição $f(x) < 0$.

Exercício 3  Considere o polinómio $p(x) = x^4 - 2x^3 - 2x^2 - 2x - 3$.

a) Mostre que $p(x)$ é divisível por $(x+1)(x-3)$.

b) Resolva, em $\mathbb{R}$, a inequação $p(x) > 0$.