PROPOSTA DE TESTE N.º 2

MATEMÁTICA A – 11.º ANO – DEZEMBRO DE 2014

"Conhece a Matemática e dominarás o Mundo."
Galileu Galilei

GRUPO I – ITENS DE ESCOLHA MÚLTIPLA

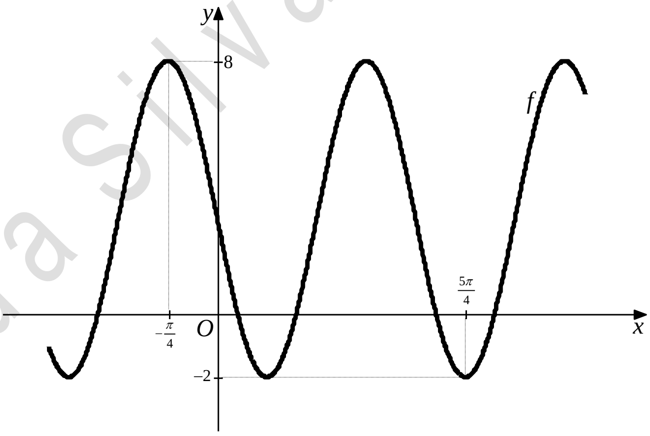
1. Considere a equação $1+3\operatorname{tg}(3x+\pi)=2$. Quantas soluções tem a equação no intervalo $[-2\pi,-\pi]$?

A Uma **B** Duas **C** Três **D** Quatro

2. Na figura está representado, em referencial o.n. xOy, parte do gráfico de uma função *f*, de domínio $\mathbb{R}$, definida por uma expressão do tipo $f(x)=a-b\operatorname{sen}(cx)$, sendo a, b e c constantes reais positivas.

Sabe-se que:

- $-\frac{\pi}{4}$ é um maximizante e 8 é o máximo de *f*
- $\frac{5\pi}{4}$ é um minimizante e -2 é o mínimo de *f*



Quais são os valores de a, b e c?

A $a=3,\ b=5$ e $c=1$

B $a=5,\ b=3$ e $c=2$

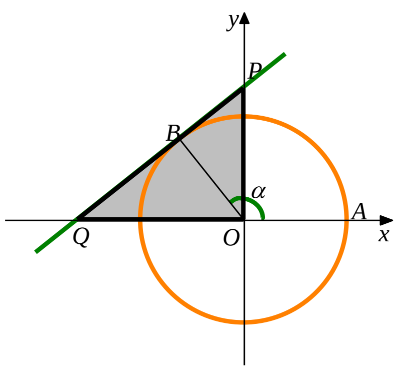
C $a=5,\ b=3$ e $c=1$

D $a=3,\ b=5$ e $c=2$

3. Na figura está representado, em referencial o.n. xOy, o círculo trigonométrico e o triângulo $[OPQ]$.

Sabe-se que:

- o ponto P pertence ao eixo Oy;
- o ponto Q pertence ao eixo Ox;
- a recta QP é tangente ao círculo no ponto B.



Seja α a amplitude do ângulo AOB, $\alpha\in\left]\frac{\pi}{2},\pi\right[$.

Qual das seguintes expressões dá o área do triângulo $[OPQ]$, em função de α?

A $\dfrac{2}{\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha}$

B $-\dfrac{1}{2\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha}$

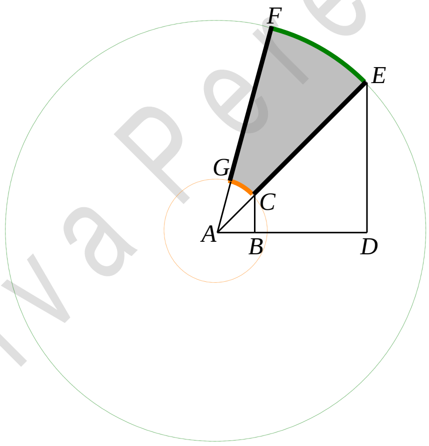
C $\dfrac{1}{2\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha}$

D $-\dfrac{2}{\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha}$

4. Na figura está representada uma coroa circular com uma parte sombreada.

Sabe-se que:

- a coroa circular está centrada no ponto A;
- os triângulos $[ABC]$ e $[ADE]$ são rectângulos e isósceles;
- $\overline{AC}=\sqrt{2}$ e $\overline{AD}=4$
- a área da região sombreada é $\dfrac{5\pi}{2}$



Qual é o valor do produto escalar $\overrightarrow{AG}\cdot\overrightarrow{EC}$?

A $-\dfrac{3}{2}$

B $-3\sqrt{3}$

C $-4\sqrt{3}$

D $4\sqrt{3}$

5. Sejam $\vec{u}$ e $\vec{v}$ dois vectores não colineares tais que $\|\vec{u}-\vec{v}\|>\|\vec{u}+\vec{v}\|$. O ângulo formado pelos vectores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ é:

A obtuso.

B recto.

C agudo.

D raso.

GRUPO II – ITENS DE RESPOSTA ABERTA

1. Considere a função g, de domínio $\mathbb{R}\setminus\left\{\dfrac{\pi}{2}+k\pi,\quad k\in\mathbb{Z}\right\}$, definida por:

$$g(x)=\cos(x-\pi)\operatorname{tg}x+\operatorname{sen}\left(2x-\frac{3\pi}{2}\right)\cos(2x)-\operatorname{sen}^2(2x)-\operatorname{sen}(-x)$$

1.1. Mostre que $g(x)=1-2\operatorname{sen}^2(2x)$ e determine a expressão geral dos seus zeros e mostre que g é par.

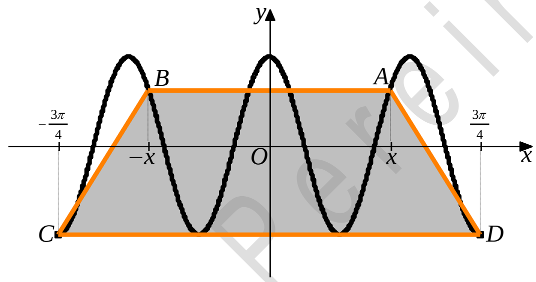
1.2. Resolva em $\left[-\pi,\dfrac{3\pi}{2}\right[$ a equação $g\left(\dfrac{x}{2}\right)+1=-\cos x$.

1.3. Seja θ um número real tal que $\operatorname{tg}\theta = -\sqrt{7}$. Qual é o valor de $\left(g\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)^2$?

1.4. Na figura estão representados, em referencial o.n. xOy, o gráfico da função g no em $\left[-\frac{3\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right] \backslash \left\{-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right\}$ e o trapézio isósceles $[ABCD]$.

Sabe-se que:

- os pontos A e B pertencem ao gráfico de g e são simétricos em relação ao eixo Oy;
- os pontos C e D pertencem ao gráfico de g e têm abcissa $-\frac{3\pi}{4}$ e $\frac{3\pi}{4}$, respectivamente.



Seja x a abcissa do ponto A, com $x \in \left[0, \frac{3\pi}{4}\right] \backslash \left\{\frac{\pi}{2}\right\}$.

Recorrendo à calculadora gráfica, determine o valor de x para o qual a área do trapézio $[ABCD]$ é a maior possível. Apresente o resultado arredondado às décimas.

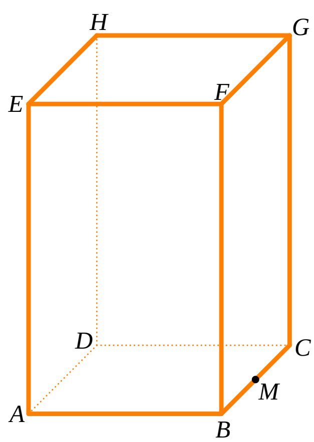
Sugestão: comece por mostrar que a área do trapézio $[ABCD]$ é dada, em função de x, por $\left(2x + \frac{3\pi}{2}\right)\left(1 - \operatorname{sen}^2(2x)\right)$.

2. Determine para que valores reais de k se tem $2\sqrt{3}\operatorname{tg}(3\pi - x) = k(k+5) \quad \wedge \quad x \in \left]\frac{2\pi}{3}, \frac{3\pi}{2}\right[$.

3. Na figura está representado um prisma quadrangular regular $[ABCDEFGH]$.

Sabe-se:

- M é o ponto médio da aresta $[BC]$
- $\overline{AE} = a$



Seja v o volume do prisma.

Mostre que $\overrightarrow{EM} \cdot \overrightarrow{DM} = \frac{3v}{4a}$

4. Num referencial o.n. xOy considere os pontos $A(-2,-3)$, $B(1,6)$ e $C(4,2)$ e a recta r definida por $2x+3y=5$.

4.1. Escreva a equação reduzida da recta que contém a altura do triângulo $[ABC]$ em relação ao vértice C. Indique a sua inclinação. Apresente o resultado em graus, arredondado às décimas.

4.2. Seja P um ponto pertencente à recta r. Determine as suas coordenadas de modo que a recta AP seja perpendicular à recta OB.

4.3. Sejam Q o ponto médio do segmento de recta $[AB]$, R o ponto médio do segmento de recta $[AC]$ e $P(x,y)$ um ponto do plano.

Mostre a condição $\left(\overrightarrow{AQ}-\overrightarrow{RQ}\right)\cdot\left(\overrightarrow{RB}+\overrightarrow{BP}\right)=0$ define a mediatriz do segmento de recta $[AC]$ e escreva a sua equação reduzida.

4.4. Considere a recta s definida por $(x,y)=(1+2k,-k),\quad k\in\mathbb{R}$ e seja α a amplitude do ângulo formado pelas rectas r e s. Qual é o valor de $\operatorname{tg}\alpha+13\operatorname{sen}^2\alpha$.

5. Considere num referencial o.n. $Oxyz$ a superfície esférica de diâmetro $[AB]$, com $A(-1,0,3)$ e $B(1,3,-2)$.

5.1. Usando o produto escalar escreva uma equação da superfície esférica de diâmetro $[AB]$, apresentando-a na forma $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=r^2$, onde (a,b,c) são as coordenadas do centro e r a medida do seu raio.

5.2. Seja β o plano tangente à superfície esférica de diâmetro $[AB]$ no ponto B. Mostre que uma equação do plano β é $2x+3y-5z=21$.

5.3. O plano β intersecta o eixo Oy no ponto C. Escreve uma equação cartesiana do plano ABC.

5.4. Considere o vector $\vec{u}$, definido por $\vec{u}=\overrightarrow{OB}+\left(k^2,-5-k,1\right)$, com $k\in\mathbb{R}$. Quais são os valores de k de modo que os vectores $\overrightarrow{AB}$ e $\vec{u}$ formem um ângulo obtuso?

Solucionário

Grupo I – Itens de escolha múltipla

1. C **2.** D **3.** B **4.** B **5.** A

Grupo II – Itens de resposta aberta

1.1. Expressão geral dos zeros de g: $x=\frac{\pi}{8}+\frac{k\pi}{4},\quad k\in\mathbb{Z}$

1.2. $\left\{-\frac{2\pi}{3},-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2},\frac{2\pi}{3},\frac{4\pi}{3}\right\}$

1.3. $\frac{9}{16}$

1.4. $x\approx 1,6$

2. $k\in\left]-6,1\right[$

4.1. $y=-\frac{1}{3}x+\frac{10}{3}$; $\approx 161,6^{\circ}$

4.2. $P(10,-5)$

4.3. $y=-\frac{6}{5}x+\frac{7}{10}$

4.4. $\frac{13}{40}$

5.1. $x^2+\left(y-\frac{3}{2}\right)^2+\left(z-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{19}{2}$

5.3. $26x+y+11z=7$

5.4. $k\in\left]\frac{1}{2},1\right[$