



EXAME NACIONAL DO ENSINO SECUNDÁRIO – MATEMÁTICA A

12.º ANO DE ESCOLARIDADE

Sites: <http://www.sinalmaismat.com/> | <http://recursos-para-matematica.webnode.pt/>

Facebook: <https://www.facebook.com/sinalmaismat/> | <https://www.facebook.com/recursos.para.matematica>

PROVA MODELO N.º 12

JULHO DE 2019

CADERNO 1

Neste grupo a utilização de calculadora gráfica é permitida.

Na resposta aos itens de escolha múltipla, seleccione a opção correcta. Escreva, na folha de respostas, o número do item e a letra que identifica a opção escolhida.

Na resposta aos itens de resposta aberta apresente todos os cálculos que tiver de efectuar e todas as justificações necessárias. Quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, apresente sempre o valor exacto.

1.1.	1.2.
P2001/2002	PMC2015

1.1. Numa população de aves de uma determinada espécie sabe-se que 7% têm uma anomalia genética.

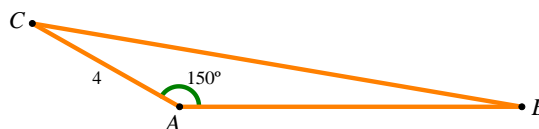
Um grupo de cientistas vai fazer um estudo sobre essa espécie de aves e para tal precisa de nove exemplares. Para que o estudo seja considerado válido o número de exemplares com a referida anomalia entre os nove escolhidos tem de ser no máximo 2.

O grupo de cientistas escolheu uma amostra de nove exemplares dessa espécie de aves.

Qual é a probabilidade, aproximada às centésimas, de o estudo ser considerado válido?

- [A]** 0,02 **[B]** 0,11 **[C]** 0,89 **[D]** 0,98

1.2. Na figura está representado o triângulo escaleno $[ABC]$ de área 8.

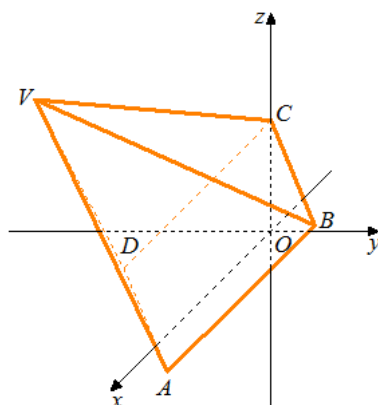


Sabe-se que a amplitude do ângulo BAC é 150° e $\overline{AC} = 4$.

Qual é o valor de \overline{BC} , arredondado às centésimas?

- [A]** 10,58 **[B]** 11,64 **[C]** 12,74 **[D]** 13,61

2. Na figura está representada, em referencial o.n. $Oxyz$, a pirâmide $[ABCDV]$ cuja base é o quadrilátero $[ABCD]$.



Sabe-se que:

- $C(0,0,3)$ e $V(4,-5,5)$
- o ponto A tem abcissa positiva e pertence à recta t definida por $(x, y, z) = (0, 0, 1) + k(4, 0, -1)$, $k \in \mathbb{R}$
- $\overrightarrow{AV} \cdot \overrightarrow{CA} = -56$

2.1. Mostre que $A(8, 0, -1)$.

2.2. Admita que $D(0, -4, -1)$.

Mostre que uma equação cartesiana do plano ABC é $x - 2y + 2z = 6$ e determine a altura da pirâmide.

3. Considere o desenvolvimento do binómio $\left(\frac{2}{x} - x^2\right)^n$, com $x \neq 0$ e $n \in \mathbb{N}$.

Sabe-se que n satisfaz a equação ${}^nC_3 - {}^nC_7 = 0$.

Qual é o coeficiente do termo cuja parte literal é x^{11} ?

A -960

B -360

C 360

D 960

4. Um saco contém dez bolas, seis vermelhas e quatro brancas. As bolas da mesma cor são indistinguíveis

4.1. Considere a experiência aleatória que consiste em extrair, simultaneamente e ao acaso, três bolas do saco.

Qual a probabilidade de as três bolas extraídas não serem todas da mesma cor?

Apresente o resultado na forma de fracção irredutível

4.2. Colocaram-se n bolas pretas indistinguíveis no saco, com $n \in \mathbb{N}$.

Considere a experiência aleatória que considere em extrair, sucessivamente e sem reposição, seis bolas do saco.

Sejam, A , B e C os acontecimentos:

A : «as seis bolas extraídas são todas da mesma cor»

B : «as cinco primeiras bolas extraídas são da mesma cor»

C : «nenhuma das cinco primeiras bolas extraídas é preta»

Sabe-se que $P(\bar{A} | (B \cap C)) = 96\%$

Sem utilizar a fórmula da probabilidade condicionada, determine o valor de n .

Comece por interpretar o significado de $P(\bar{A} | (B \cap C))$ no contexto da situação descrita.

5. O Bairro do Garrafão vai ser desocupado e os seus habitantes serão realojados no Bairro da Fonte. Este processo irá iniciar-se no dia 1 de Setembro de 2019 e decorrerá durante oito meses.

O Departamento de Habitação da Câmara Municipal estima que o número aproximado de habitantes, em centenas, t meses após o dia 1 de Setembro de 2019, no Bairro da Fonte e no Bairro do Garrafão, será dado, respectivamente por:

$$F(t) = \frac{13,5}{1 + 4e^{-2t}} \quad \text{e} \quad G(t) = 11e^{-0,3t}, \quad \text{com } t \in [0, 8]$$

O Departamento de Habitação sabe que haverá um dia t_0 em que passados exactamente dois meses desse dia, o número de habitantes no Bairro da Fonte será 92% superior ao número de habitantes que viviam no Bairro do Garrafão no dia t_0 .

Recorrendo às capacidades gráficas da calculadora, determine t_0 .

Na sua resposta deve:

- equacionar o problema;
- reproduzir o(s) gráfico(s) que considerar necessário(s) para a resolução do problema bem como a(s) coordenada(s) de algum (ou alguns) ponto(s) relevante(s);
- apresentar t_0 arredondado às milésimas;
- indicar o dia e o mês correspondente ao dia t_0 .

6. Em \mathbb{C} , conjunto dos números complexos, considere a condição:

$$|2z + iz| = 1 \wedge \text{Arg}(3z - 3iz) = \frac{\pi}{2}$$

No plano complexo esta condição define um único ponto.

Qual é o número complexo cujo afixo é o ponto definido pela condição dada?

A $\frac{\sqrt{10}}{2} + \frac{\sqrt{10}}{2}i$

B $\frac{\sqrt{10}}{10} + \frac{\sqrt{10}}{10}i$

C $-\frac{\sqrt{10}}{10} + \frac{\sqrt{10}}{10}i$

D $-\frac{\sqrt{10}}{2} + \frac{\sqrt{10}}{2}i$

7. Seja (u_n) a sucessão definida por:

$$u_n = \begin{cases} 2^n & \text{se } n < 10 \\ \frac{2n+3}{n+2} & \text{se } n \geq 10 \end{cases}$$

Mostre que (u_n) é limitada.

8. Seja g uma função de domínio \mathbb{R} definida por $g(x) = axe^{2x}$, com $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Sabe-se que a inclinação da recta tangente ao gráfico de g no ponto de abcissa 1 é 85° .

Qual é o valor de a , arredondado às centésimas?

A 0,01

B 0,52

C 0,77

D 1,55

FIM DO CADERNO 1

CADERNO 2

Neste grupo a utilização de calculadora gráfica não é permitida.

Na resposta aos itens de escolha múltipla, seleccione a opção correcta. Escreva, na folha de respostas, o número do item e a letra que identifica a opção escolhida.

Na resposta aos itens de resposta aberta apresente todos os cálculos que tiver de efectuar e todas as justificações necessárias. Quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, apresente sempre o valor exacto.

9.1.	9.2.
P2001/2002	PMC2015

9.1. Considere num referencial o.n. $Oxyz$ a recta r e o plano α definidos respectivamente por:

$$r: \frac{x-2}{a} = y = \frac{2-z}{3a^2} \quad \text{e} \quad \alpha: x + by + \frac{z}{a} = 1, \quad \text{com } a, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

Sabendo que a recta r é paralela ao plano α , quais podem ser os valores de a e de b ?

A $a = 1$ e $b = 1$

B $a = 2$ e $b = 1$

C $a = 1$ e $b = 2$

D $a = 0$ e $b = 0$

9.2. Seja a um número real não nulo tal que $\cos\left(\arcsen\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - \operatorname{arctg}(-\sqrt{3})\right) = \operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg}\left(\frac{2}{a}\right)\right)$

Qual é o valor de a ?

A $a = -4$

B $a = -2$

C $a = 2$

D $a = 4$

10. Em \mathbb{C} , conjunto dos números complexos, considere:

▪ $z_1 = \frac{1+i^{17}}{1-i} - \frac{1-i^{4n+5}}{1+i}$, com $n \in \mathbb{N}$

▪ $z_2 = \cos\left(\frac{\pi}{12}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{12}\right)$

▪ $z_3 = z_1 \times z_2$

Para um certo número real positivo k , sabe-se que z_3 é a raiz cúbica de um número complexo $k - ki$.

Qual é o valor de k ?

11.1.	11.2.
P2001/2002	PMC2015

11.1. A tabela de distribuição de probabilidades de uma variável aleatória X é a seguinte:

x_i	-2	-1	1	2
$P(X = x_i)$	$1 - 6a$	a	$2a$	$3a$

com $a \in \mathbb{R}$.

Sabe-se que $P(X > -1) = \frac{1}{2}$.

Qual é o valor médio da variável aleatória X ?

A $-\frac{5}{12}$

B $-\frac{1}{10}$

C $\frac{1}{4}$

D $\frac{1}{10}$

11.2. Seja g uma função duas vezes derivável em $[0, 4]$ tal que $g(0) = 1$, $g(2) = 3$ e $g(4) = 5$.

Considere as seguintes afirmações:

I. Existem c_1 e c_2 distintos e pertencentes ao intervalo $]0, 4[$ tais que $g'(c_1) = g'(c_2)$.

II. A função g'' , segunda derivada de g , tem pelo menos um zero no intervalo $]0, 4[$.

Qual das opções é a correcta?

A Ambas as afirmações são falsas.

B Apenas a afirmação **I.** é verdadeira.

C Apenas a afirmação **II.** é verdadeira.

D Ambas as afirmações são verdadeiras.

12. Considere a função f de domínio \mathbb{R} definida por:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{xe^{x-3} - 4e}{x-4} & \text{se } x > 4 \\ \frac{3x+8}{\sqrt{x^2+9}} & \text{se } x \leq 4 \end{cases}$$

12.1. Seja g a função de domínio \mathbb{R} definida por $g(x) = 3x - 1$.

Qual é o valor de $(f \circ g^{-1})(-1)$?

A $\frac{8}{9}$

B $\frac{8}{3}$

C e

D $4e$

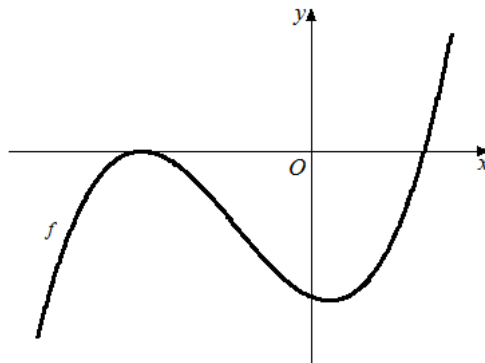
12.2. Mostre que o gráfico da função f não admite assíntotas verticais, mas que admite uma assíntota horizontal quando $x \rightarrow -\infty$, escrevendo a sua equação.

13. Determine o conjunto solução da inequação:

$$\log_4(x+3) - \log_4(4-x) \geq \frac{1}{2} + \log_4 x$$

Apresente resultado na forma de intervalo ou união de intervalos de números reais.

14. Na figura está representado parte do gráfico de uma função f , polinomial de grau 3 com dois zeros.



Seja (u_n) uma sucessão tal que $u_n \rightarrow a$, sendo a o zero de multiplicidade 2 de f .

Acerca do $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(u_n - a)^2}{f(u_n)}$ pode afirmar-se que:

A Não existe

B é igual a $-\infty$

C é igual a 0

D é igual a $+\infty$

15. Considere a função h de domínio $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ definida por $h(x) = 2x^2 + \ln(\cos x)$.

15.1. Mostre que $h''(x) = \frac{4\cos^2 x - 1}{\cos^2 x}$ e estude a função h quando ao sentido das concavidades e à existência de pontos de inflexão do seu gráfico.

15.2. Mostre que a equação $h(x) = 1$ tem pelo menos uma solução em $[0, 1]$.

Sugestão: tenha em atenção que $1 < \frac{\pi}{3}$ e que $2 < e$.

FIM DO CADERNO 2

FIM DA PROVA MODELO 12

Cotações

Caderno 1

1.	8 pontos	
2.		
2.1.	12 pontos	
2.2.	12 pontos	
3.	8 pontos	
4.		
4.1.	12 pontos	
4.2.	13 pontos	
5.	12 pontos	
6.	8 pontos	
7.	12 pontos	
8.	8 pontos	
Total Caderno 1		105 pontos

Caderno 2

9.	8 pontos	
10.	13 pontos	
11.	8 pontos	
12.		
12.1.	8 pontos	
12.2.	13 pontos	
13.	13 pontos	
14.	8 pontos	
15.		
15.1.	14 pontos	
15.2.	10 pontos	
Total Caderno 2		95 pontos

Total Caderno 1 + Caderno 2 200 pontos

Solucionário

Caderno 1

1.1. D

1.2. B

2.2. 6

3. A

4.1. $\frac{4}{5}$

4.2. $P(\bar{A} | (B \cap C))$ é a probabilidade de as seis bolas extraídas não serem todas da mesma cor, sabendo que as cinco primeiras são todas da mesma cor mas nenhuma delas é preta; $n = 20$.

5. $t_0 \approx 1,504$; t_0 corresponde ao dia 15 de Outubro de 2019.

6. C

8. B

Caderno 2

9.1. C

9.2. A

10. $k = 4\sqrt{2}$

11.1. B

11.2. D

12.1. B

12.2. A.H.: $y = -3$, quando $x \rightarrow -\infty$.

13. $\left]0, \frac{1}{2}\right] \cup [3, 4[$

14. D

15.1. O gráfico de h tem a concavidade voltada para baixo em $\left[-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{3}\right]$ e em $\left[\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right]$, tem a concavidade voltada para cima em $\left[-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right]$ e tem ponto de inflexão em $x = -\frac{\pi}{3}$ e em $x = \frac{\pi}{3}$.