Logaritmos e Funções Logarítmicas

Matemática A | 12.º Ano

"Conhece a Matemática e dominarás o Mundo."
Galileu Galilei

1. Sejam a e b dois números reais positivos tais que $\log_4 a = b$ e $\log_2 b = 7$.

Qual é o valor de $\log_2\left(\sqrt[4]{a}\,b\right)$?

A 57 **B** 71 **C** 121 **D** 135

2. Sejam x e y dois números reais positivos tais que $\log_3 x - \log_9 y = \frac{1}{2}$.

Qual é o valor de $\frac{x^6}{y^3}$?

A 4 **B** 8 **C** 9 **D** 27

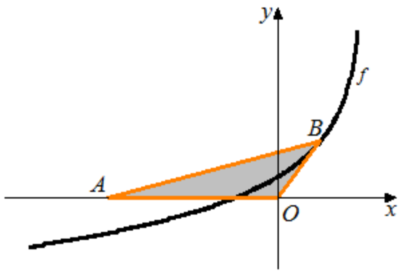
3. Sejam a e x dois números reais tais que $\log_5 a = x$.

A expressão $\log_5\left(\frac{\sqrt{125^x}}{5a^x}\right)$ é equivalente a:

A $-x^2+\frac{3x}{2}-1$ **B** $\frac{x}{2}-1$

C $x^2-\frac{3x}{2}+1$ **D** $1-\frac{x}{2}$

4. Na figura estão representados, em referencial o.n. xOy, parte do gráfico da função f, de domínio $\left]-\infty,\frac{a}{4}\right[$, definida por $f(x)=2-\log_3(a-4x)$, com $a\in\mathbb{R}^+$, e o triângulo $[AOB]$.



Sabe-se que:

- o ponto A pertence ao eixo Ox e tem abcissa -3
- o ponto B pertence ao gráfico de f e tem abcissa $\frac{a}{8}$
- a área do triângulo $[AOB]$ é $\frac{3}{2}$

4.1. Mostre que $a=6$

4.2. Admitindo que f é bijectiva, caracterize a função f^{-1}, função inversa de f.

4.3. Determine o conjunto solução das seguintes condições:

a) $f(x)+\log_3(x^2-3)=1$

b) $f\left(\frac{3}{2}-\frac{x}{4}\right)=\log_9 x$

c) $\log_3{}^2(6-4x)-f(x)=0$

d) $1-f(x)<\log_3(2x-1)-1$

e) $\log_3(x+3)+f\left(\frac{x}{4}\right)\leq 2-2\log_3\left(\sqrt{x+2}\right)$

f) $f(2x)\geq\log_3(x+4)$

4.4. Considere a equação $3\log_8{}^3(x+1)-8\log_8{}^2(x+1)+3\log_8(x+1)+f\left(\frac{5}{4}\right)=0$.

a) Mostre que 63 é solução da equação.

b) Determine o conjunto solução da equação.

5. Considere a função f, de domínio $\mathbb{R}^+$, tal que, a sua derivada, também de domínio $\mathbb{R}^+$, é definida por:

$$f'(x) = \frac{\ln x + nx}{x}, \text{ com } n \in \mathbb{N}$$

5.1. Admitindo que $\lim\limits_{x \to 1} \frac{f(x) - f(1)}{\sqrt[3]{e^{2x-2}} - x} = -9$, qual é o valor de n?

A 2 **B** 3 **C** 4 **D** 5

5.2. Mostre que no intervalo $\left]e^{-n}, 1\right[$ a função f tem pelo menos um extremo relativo, para todo o $n \in \mathbb{N}$.

5.3. Estude a função f quanto ao sentido das concavidades e à existência de pontos de inflexão do seu gráfico.

5.4. Determine o valor de $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x - x}{x^3 f'(x)}$.

6. Considere a função g, de domínio $\mathbb{R}^+$, definida por $g(x) = \ln^2 x - \ln x$.

6.1. Determine, por definição, $g'(1)$ e escreva a equação reduzida da recta tangente ao gráfico de g no ponto de abcissa 1.

6.2. Determine o valor de:

a) $\lim\limits_{x \to 0^+} \left(x g(x)\right)$

b) $\lim\limits_{x \to 2} \frac{g(x) - \ln\left(\frac{2}{e}\right)\ln 2}{x^2 - 2x}$

6.3. Estude a função g quando à existência de assimptotas do seu gráfico.

6.4. Estude a função g quanto à monotonia e à existência de extremos relativos.

6.5. Estude a função g quanto ao sentido das concavidades e à existência de pontos de inflexão do seu gráfico.

6.6. Determine o conjunto solução das seguintes inequações:

a) $g(x) \geq 6$

b) $g(x) - \ln^2 x < \ln(x+1) - \ln(3-x)$

7. Sejam f uma função polinomial de grau 4 e g uma função de domínio $\mathbb{R}$ tais que:

- f não tem zeros e $f(0) > 0$
- $g(x) = \ln(f(x))$

7.1. Considere as seguintes afirmações:

I. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{g(x)}{f(x)+1} = 0$

II. Se a função f tem três extremos relativos, então a função g tem também três extremos relativos.

Qual das seguintes opções é a verdadeira?

A Ambas as opções são verdadeiras.

B **I.** é verdadeira e **II.** é falsa.

C **I.** é falsa e **II.** é verdadeira.

D Ambas as opções são falsas.

7.2. Qual dos seguintes conjuntos pode ser o contradomínio de g ?

A $\mathbb{R}$

B $[-1,1]$

C $\mathbb{R}_0^+$

D $\mathbb{R}_0^-$

7.3. Considere agora que $f(x) = x^4 + 1$.

a) Determine, caso exista, o valor de $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x}{g(x)}$.

b) Estude a função g quanto ao sentido das concavidades e à existência de pontos de inflexão do seu gráfico.

c) Seja h a função de domínio $\mathbb{R}$, definida por:

$$h(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2e^{x-1}-x}{x-1} & \text{se} \quad x<1 \\ \log_2 20-\log_4 25 & \text{se} \quad x=1 \\ \dfrac{2g(x)-\ln 4}{x^2-1} & \text{se} \quad x>1 \end{cases}$$

Mostre que h é contínua em todo o seu domínio.

d) Determine o conjunto solução da inequação $g(x)\geq \ln\left(x^2+3\right)$.

7.4. Considere a função j, de domínio $\mathbb{R}$, tal que:

- a recta de equação $y=3-4x$ é assimptota do gráfico de j, quando $x\to+\infty$
- j é par

Qual é o valor de $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{j(x)\left(x^3+g(x)\right)}{x^4}$?

FIM

Solucionário

1. B

2. D

3. A

4.2. $f^{-1}(x)=\frac{3}{2}-\frac{3^{2-x}}{4}$; $D_{f^{-1}}=\mathbb{R}$; $D'_{f^{-1}}=\left]-\infty,\frac{3}{2}\right[$

4.3. **a)** $\{-3\}$

4.3. **b)** $\left\{3\sqrt[3]{3}\right\}$

4.3. **c)** $\left\{\frac{3}{4},\frac{53}{36}\right\}$

4.3. **d)** $\left]\frac{7}{6},\frac{3}{2}\right[$

4.3. **e)** $]-2,0]$

4.3. **f)** $\left]-4,-\frac{15}{4}\right]\cup\left[\frac{1}{2},\frac{3}{4}\right[$

4.4. **b)** $\left\{-\frac{1}{2},7,63\right\}$

5.1. B

5.3. O gráfico de f tem a concavidade voltada para baixo em $[e,+\infty[$, tem a concavidade voltada para cima em $]0,e]$ e tem um ponto de inflexão em $x=e$.

5.4. $+\infty$

6.1. $g'(1)=-1$; $y=-x+1$

6.2. **a)** 0

6.2. **b)** $\ln\sqrt{2}-\frac{1}{4}$

6.3. A.V.: $x=0$; o gráfico de g não tem assimptota não vertical.

6.4. A função g é decrescente em $\left]0,\sqrt{e}\right]$, é crescente em $\left[\sqrt{e},+\infty\right[$ e tem mínimo relativo em $x=\sqrt{e}$.

6.5. O gráfico da função g tem a concavidade voltada para baixo em $\left[\sqrt{e^3},+\infty\right[$, tem a concavidade voltada para cima em $\left]0,\sqrt{e^3}\right]$ e tem ponto de inflexão em $x=\sqrt{e^3}$.

6.6. **a)** $\left]0,\frac{1}{e^2}\right]\cup\left[e^3,+\infty\right[$

6.6. **b)** $]1,3[$

7.1. A

7.2. C

7.3. **a)** Não existe

7.3. **b)** O gráfico de g tem a concavidade voltada para baixo em $\left]-\infty,-\sqrt[4]{3}\right]$ e em $\left[\sqrt[4]{3},+\infty\right[$, tem a concavidade voltada para cima em $\left[-\sqrt[4]{3},\sqrt[4]{3}\right]$ e tem um ponto de inflexão em $x=-\sqrt[4]{3}$ e em $x=\sqrt[4]{3}$.

7.3. **d)** $\left]-\infty,-\sqrt{2}\right]\cup\left[\sqrt{2},+\infty\right[$

7.4. 4