Escola Secundária de Paredes

2º Teste de Avaliação

Matemática A

12.º Ano de Escolaridade | Turma: C

Duração do Teste de Avaliação: 90 minutos | dezembro de 2022

Versão 2

Nome ________________________ **Nº.** ______

Instruções gerais

- Não é permitido o uso de corretor
- É permitido o uso de calculadora
- Para responderes aos itens de escolha múltipla, assinala de forma inequívoca, a opção escolhida, escrevendo a letra correspondente **Não apresentes cálculos nem justificações** neste tipo de itens

1. **(20 pontos)** Seja g, a função real, de variável real, definida por $g(x) = \dfrac{2}{x+1}$

   Escreve a equação reduzida da reta tangente ao gráfico de g no ponto de abcissa 1

2. **(10 pontos)** Sejam f e g, duas funções reais, de variável real, de domínio $]-\infty;0]$

   No referencial ortonormado da figura 1 encontra-se parte da representação gráfica da função f e uma reta r tangente ao gráfico da função no ponto A

   Sabe-se que:

   - o ponto A tem abcissa -1
   - $(0;2)$ e $(2;0)$ são pontos da reta r
   - a função g é definida por $g(x) = \sqrt{-x}+1$

   Qual é o valor de $(f \times g)'(-1)$?

   (A) $-\dfrac{1}{2}$ (B) $\dfrac{1}{2}$ (C) $-\dfrac{7}{2}$ (D) $\dfrac{7}{2}$

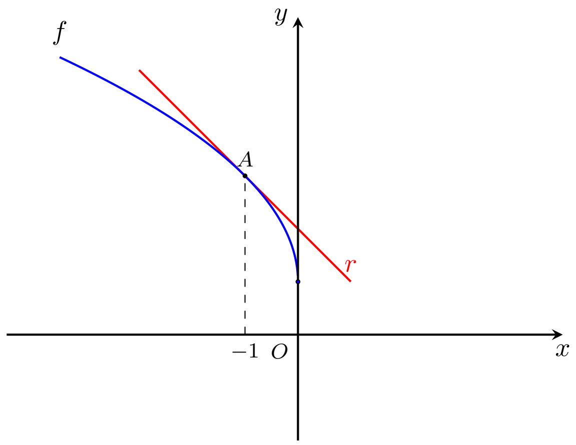

Figura 1

3. **(10 pontos)** Seja f uma função real de variável real, diferenciável em todo o seu domínio $\mathbb{R}$

   Sabe-se que:

   - $f'(-2) = -3$
   - $f(-2) = 4$

   Em qual das opções está o valor de $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{f(x)-4}{x^2+2x}$?

   (A) $-\dfrac{3}{2}$ (B) -2 (C) $-\dfrac{1}{2}$ (D) $\dfrac{3}{2}$

4. Sejam f e g, duas funções reais, de variável real, definidas, respetivamente, por $f(x)=\sqrt{4x^2+2}-2x$ e

$$g(x)=\begin{cases} \dfrac{4\sqrt{x+1}-8}{x^2-8x+15} & se \quad x<3 \\[2ex] -k^2+\dfrac{1}{2} & se \quad x=3 \\[2ex] \dfrac{-x^2+3x}{x^2-9} & se \quad x>3 \end{cases}, \text{ com } k\in\mathbb{R}$$

4.1. **(20 pontos)** Averigua, analiticamente, se existe algum $k\in\mathbb{R}$, para o qual a função g é contínua no ponto $x=3$

4.2. **(20 pontos)** Determina, analiticamente e caso exista, a equação da assíntota ao gráfico da função f quando $x\to+\infty$

5. **(20 pontos)** Seja f, a função real, de variável real, definida por $f(x)=bx^3+c$, com $b,c\in\mathbb{R}$ e $b\neq 0$

Mostra, pela definição de derivada num ponto, que $f'(a)=3a^2b$, $\forall a\in\mathbb{R}$

6. **(10 pontos)** Seja f, a função real, de variável real, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $f(x)=\frac{1}{5}x^3-\frac{1}{5}x^2-\frac{4}{5}x+\frac{4}{5}$

No referencial ortonormado da figura 2 encontra-se parte da representação gráfica da função f e uma reta r tangente ao gráfico da função no ponto A de abcissa -1

Em qual das opções está o declive da reta r?

(A) $\frac{1}{5}$

(B) $\frac{3}{5}$

(C) $-\frac{3}{5}$

(D) $\frac{2}{5}$

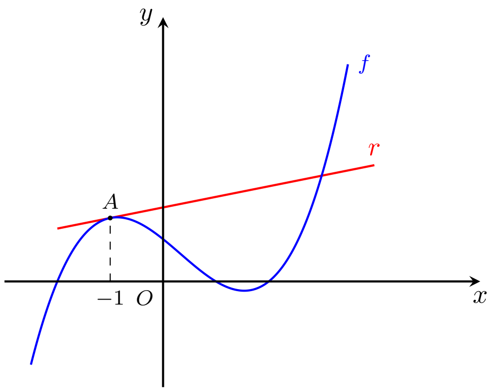

Figura 2

7. **(10 pontos)** Seja f, uma função real de variável real, de domínio $\mathbb{R}^-$

Sabe-se que:

- $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}=-3$
- $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)+3x-2]=0$

Em qual das opções está o valor de $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x^2+1}{xf(x)}$?

(A) $-\frac{3}{2}$

(B) $-\frac{2}{3}$

(C) $\frac{2}{3}$

(D) -3

8. **(20 pontos)** Seja f, a função real, de variável real, contínua, de domínio $[1;4]$ e contradomínio $[3;7]$

   Seja g a função real, de variável real, definida em $[1;4]$, por $g(x) = -2f(x) + 4x$

   Mostra que a função g tem pelo menos um zero em $]1;4[$

9. Considera a função g, real de variável real, definida por $g(x) = \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{2}x + 1$

   No referencial ortonormado da figura 3 estão representados parte do gráfico da função g, e duas retas paralelas, r e s

   Sabe-se que:

   - a reta r é tangente ao gráfico da função no ponto A de abcissa a
   - a reta s é tangente ao gráfico da função no ponto B de abcissa b
   - as retas r e s são paralelas à reta de equação $y = 4x$

   9.1. **(20 pontos)** Estuda, analiticamente, a função g quanto à monotonia e quanto à existência de extremos

   Na tua resposta, apresenta o(s) intervalo(s) de monotonia

   9.2. **(20 pontos)** Determina, analiticamente, os valores de a e b

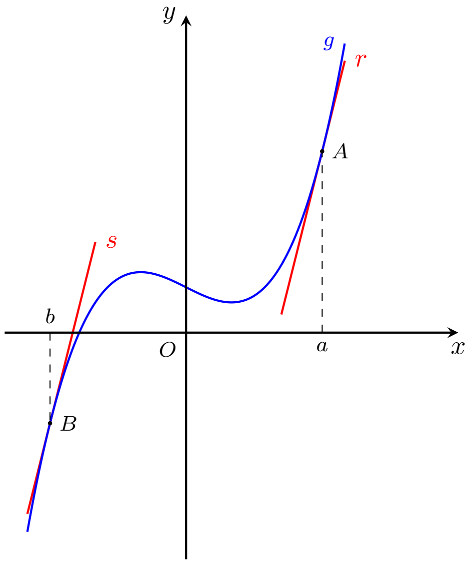

Figura 3

10. **(20 pontos)** Seja h, a função real, de variável real, definida por $h(x) = \frac{2x+1}{x^2-9}$

    Resolve, em $\mathbb{R}$, e analiticaamente, a condição $h(x) \leq \frac{1}{x-3}$

    Apresenta o conjunto solução sob a forma de intervalo ou reunião de intervalos de números reais

FIM

Formulário

Regras de derivação

$(u+v)' = u' + v'$

$(uv)' = u'v + uv'$

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$

$(u^n)' = nu^{n-1}u' \quad (n \in \mathbb{R})$

$(\sqrt[n]{u})' = \frac{u'}{n\sqrt[n]{u^{n-1}}}$