Ficha n.º 1 – Página 88 **6. TRIGONOMETRIA**

1.1. $\cos\theta = \dfrac{\overline{ML}}{\overline{ME}}$; $\sin\theta = \dfrac{\overline{EL}}{\overline{ME}}$; $\tan\theta = \dfrac{\overline{EL}}{\overline{ML}}$

1.2. $\cos\theta = \dfrac{\overline{MR}}{\overline{MA}}$; $\sin\theta = \dfrac{\overline{AR}}{\overline{MA}}$; $\tan\theta = \dfrac{\overline{AR}}{\overline{MR}}$

1.3. Pelo Teorema de Tales, uma vez que *EL*//*AR* (já que *EL* e *AR* são perpendiculares a *MR*), então $\dfrac{\overline{ML}}{\overline{ME}} = \dfrac{\overline{MR}}{\overline{MA}}$, o que faz com que o cosseno de θ seja o mesmo, quer consideremos o triângulo [*MEL*], quer o triângulo [*MAR*]. Assim, o cosseno de um ângulo agudo não depende das dimensões do triângulo considerado. Um raciocínio análogo permite concluir o mesmo para o seno e para a tangente.

2. Seja *x* a medida do comprimento do lado em falta em cada um dos triângulos.

2.1. $5^2 = 3^2 + x^2 \Leftrightarrow 25 - 9 = x^2 \Leftrightarrow x^2 = 16 \underset{(x>0)}{\Leftrightarrow} x = 4$.

Logo, $\sin\beta = \dfrac{3}{5}$; $\cos\beta = \dfrac{4}{5}$ e $\tan\beta = \dfrac{3}{4}$

2.2. $x^2 = 9^2 + 12^2 \Leftrightarrow x^2 = 81 + 144 \Leftrightarrow x^2 = 225 \underset{(x>0)}{\Leftrightarrow} x = \sqrt{225} \Leftrightarrow x = 15$

Logo, $\sin\beta = \dfrac{9}{15} = \dfrac{3}{5}$; $\cos\beta = \dfrac{12}{15} = \dfrac{4}{5}$ e $\tan\beta = \dfrac{9}{12} = \dfrac{3}{4}$.

2.3. $2^2 = 1^2 + x^2 \Leftrightarrow 4 - 1 = x^2 \Leftrightarrow x^2 = 3 \underset{(x>0)}{\Leftrightarrow} x = \sqrt{3}$

Logo, $\sin\beta = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$; $\cos\beta = \dfrac{1}{2}$ e $\tan\beta = \dfrac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3}$.

2.4. $x^2 = 2^2 + \left(\sqrt{10}\right)^2 \Leftrightarrow x^2 = 4 + 10 \underset{(x>0)}{\Leftrightarrow} x = \sqrt{14}$

Logo, $\sin\beta = \dfrac{\sqrt{10}}{\sqrt{14}} = \sqrt{\dfrac{10}{14}} = \sqrt{\dfrac{5}{7}} = \dfrac{\sqrt{5}\times\sqrt{7}}{7} = \dfrac{\sqrt{35}}{7}$, $\cos\beta = \dfrac{2}{\sqrt{14}} = \dfrac{2\sqrt{14}}{14} = \dfrac{\sqrt{14}}{7}$ e $\tan\beta = \dfrac{\sqrt{10}}{2}$.

2.5. $13^2 = 12^2 + x^2 \Leftrightarrow 169 - 144 = x^2 \Leftrightarrow x^2 = 25 \underset{(x>0)}{\Leftrightarrow} x = 5$

Logo, $\sin\beta = \dfrac{5}{13}$; $\cos\beta = \dfrac{12}{13}$ e $\tan\beta = \dfrac{5}{12}$.

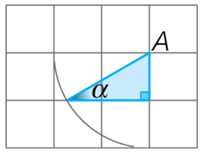
2.6. $10^2 = 6^2 + x^2 \Leftrightarrow 100 - 36 = x^2 \Leftrightarrow x^2 = 64 \underset{(x>0)}{\Leftrightarrow} x = 8$

Logo, $\sin\beta = \dfrac{8}{10} = \dfrac{4}{5}$; $\cos\beta = \dfrac{6}{10} = \dfrac{3}{5}$ e $\tan\beta = \dfrac{8}{6} = \dfrac{4}{3}$.

Ficha n.º 1 – Página 89

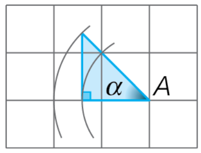
3. **Opção correta: (D).** $\tan\alpha = \frac{a}{b} \Leftrightarrow b\tan\alpha = a \Leftrightarrow b = \frac{a}{\tan\alpha}$

4.1. Se $\sin\alpha = \frac{1}{2}$, o triângulo retângulo pode ser tal que o cateto oposto a α tem 1 unidade de comprimento e a hipotenusa 2 unidades.



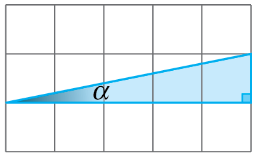
Na figura, o arco de circunferência traçado é centrado em *A* e tem 2 unidades de comprimento.

4.2. Se $\cos\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$, o triângulo retângulo pode ser tal que o cateto adjacente a α tem $\sqrt{2}$ unidades de comprimento (o que corresponde à diagonal de uma quadrícula) e a hipotenusa tem 2 unidades.

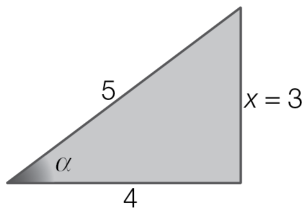


Na figura estão traçados dois arcos de circunferência, ambos centrados em A. Um deles tem 2 unidades de raio e o outro $\sqrt{2}$ unidades.

4.3. Se $\tan\alpha = 0{,}2 = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}$, o triângulo retângulo pode ser tal que o cateto adjacente a α tem 5 unidades de comprimento e o oposto tem 1 unidade.



5. Se $\cos\alpha = \frac{4}{5}$, o triângulo retângulo considerado pode ter um cateto com 4 unidades e a hipotenusa com 5 unidades.



$5^2 = 4^2 + x^2 \Leftrightarrow 25 - 16 = x^2 \Leftrightarrow x^2 = 9 \underset{(x>0)}{\Leftrightarrow} x = 3$.

Assim, $\sin\alpha = \frac{3}{5}$ e $(\cos\alpha + \sin\alpha)^2 = \left(\frac{4}{5} + \frac{3}{5}\right)^2 = \left(\frac{7}{5}\right)^2 = \frac{49}{25}$.

6.1. $\cos\alpha > 0$, pois $\cos\alpha$ é o quociente entre as medidas dos comprimentos de dois lados de um triângulo, ambos positivos. $\cos\alpha < 1$, pois num triângulo retângulo qualquer cateto tem um comprimento inferior ao da hipotenusa. Assim, o quociente entre a medida do comprimento do cateto adjacente a α e a medida do comprimento da hipotenusa será necessariamente inferior a 1.

6.2. Análogo ao anterior.

6.3. $\tan\alpha > 0$, pois $\tan\alpha$ é o quociente entre as medidas dos comprimentos de dois lados de um triângulo, ambos positivos.

7.1. $3x - 1 > 0 \wedge 3x - 1 < 1 \Leftrightarrow 3x > 1 \wedge 3x < 1 + 1 \Leftrightarrow x > \frac{1}{3} \wedge x < \frac{2}{3}$, logo $x \in \left]\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right[$.

7.2. $\frac{3-x}{2} > 0 \wedge \frac{3-x}{2} < 1 \Leftrightarrow 3 - x > 0 \wedge 3 - x < 2 \Leftrightarrow -x > -3 \wedge -x < 2 - 3 \Leftrightarrow x < 3 \wedge x > 1$, logo $x \in \left]1, 3\right[$.

Ficha n.º 2 – Página 90 **6. TRIGONOMETRIA**

1.1. $\cos\theta = \frac{a}{c}$ e $\sin\theta = \frac{b}{c}$

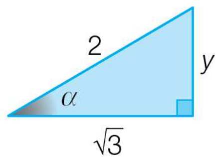
1.2. $\cos^2\theta + \sin^2\theta = \left(\frac{a}{c}\right)^2 + \left(\frac{b}{c}\right)^2 = \frac{a^2}{c^2} + \frac{b^2}{c^2} = \frac{a^2+b^2}{c^2} = \frac{c^2}{c^2} = 1$

Nota: $a^2 + b^2 = c^2$, pelo Teorema de Pitágoras.

2. **Opção correta: (C)**

Como $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$, então $\sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta \underset{(\sin\theta>0)}{\Leftrightarrow} \sin\theta = \sqrt{1-\cos^2\theta}$

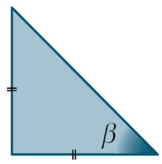
3.1. $y^2 + \left(\sqrt{3}\right)^2 = 2^2 \Leftrightarrow y^2 + 3 = 4 \Leftrightarrow y^2 = 1 \underset{(y>0)}{\Leftrightarrow} y = 1$, logo $\sin\alpha = \frac{1}{2}$.



3.2. $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \sin^2\alpha = 1 \Leftrightarrow \frac{3}{4} + \sin^2\alpha = 1 \Leftrightarrow \sin^2\alpha = 1 - \frac{3}{4} \Leftrightarrow \sin^2\alpha = \frac{1}{4} \underset{(\sin\alpha>0)}{\Leftrightarrow} \sin\alpha = \frac{1}{2}$

4. **Opção correta: (C)**

Se o triângulo retângulo for isósceles e se β for um dos seus ângulos agudos, $\sin\beta = \cos\beta$ pois o cateto adjacente a β tem o mesmo comprimento que o cateto oposto.



Ficha n.º 2 – Página 91

5.1. $\left(\frac{2}{3}\right)^2+\sin^2\beta=1 \Leftrightarrow \frac{4}{9}+\sin^2\beta=1 \Leftrightarrow \sin^2\beta=1-\frac{4}{9} \Leftrightarrow \sin^2\beta=\frac{5}{9} \underset{(\sin\beta>0)}{\Leftrightarrow} \sin\beta=\frac{\sqrt{5}}{3}$

5.2. $\left(\frac{1}{5}\right)^2+\cos^2\theta=1 \Leftrightarrow \frac{1}{25}+\cos^2\theta=1 \Leftrightarrow \cos^2\theta=1-\frac{1}{25} \Leftrightarrow \cos^2\theta=\frac{24}{25} \underset{(\cos\theta>0)}{\Leftrightarrow} \cos\theta=\frac{\sqrt{4\times 6}}{5} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \cos\theta=\frac{2\sqrt{6}}{5}$

5.3. $\left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right)^2+\sin^2\alpha=1 \Leftrightarrow \frac{2}{9}+\sin^2\alpha=1 \Leftrightarrow \sin^2\alpha=1-\frac{2}{9} \Leftrightarrow \sin^2\alpha=\frac{7}{9} \underset{(\sin\alpha>0)}{\Leftrightarrow} \sin\alpha=\frac{\sqrt{7}}{3}$

$\sin^2\alpha-\sqrt{7}\sin\alpha=\left(\frac{\sqrt{7}}{3}\right)^2-\sqrt{7}\times\frac{\sqrt{7}}{3}=\frac{7}{9}-\frac{7}{3}=\frac{7}{9}-\frac{21}{9}=-\frac{14}{9}$

6. $\left(\frac{\sqrt{3}}{5}\right)^2+\left(\frac{2}{5}\right)^2=\frac{3}{25}+\frac{4}{25}=\frac{7}{25}\neq 1$, logo os valores de $\sin\theta$ e $\cos\theta$ fornecidos não satisfazem a fórmula fundamental da Trigonometria, por isso a afirmação é falsa.

7. $\sin\alpha>0 \;\wedge\; \sin\alpha<1 \Leftrightarrow \frac{k-1}{3}>0 \;\wedge\; \frac{k-1}{3}<1 \Leftrightarrow k-1>0 \;\wedge\; k-1<3 \Leftrightarrow k>1 \;\wedge\; k<4$, logo $k\in\,]1,4[$.

8. $\cos^2\theta+\sin^2\theta=1$, logo

$\left(\frac{k}{5}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{10k+1}}{5}\right)^2=1 \Leftrightarrow \frac{k^2}{25}+\frac{10k+1}{25}=1 \Leftrightarrow k^2+10k+1=25 \Leftrightarrow k^2+10k-24=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow k=\frac{-10\pm\sqrt{10^2-4\times 1\times(-24)}}{2\times 1} \Leftrightarrow k=\frac{-10\pm\sqrt{100+96}}{2} \Leftrightarrow k=\frac{-10\pm\sqrt{196}}{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow k=\frac{-10\pm 14}{2} \Leftrightarrow k=\frac{4}{2} \;\vee\; k=\frac{-24}{2} \Leftrightarrow k=2 \;\vee\; k=-12$

Se $k=-12$, $\cos\theta=-\frac{12}{5}$, mas $\cos\theta$ não pode assumir valores negativos, logo $k=2$.

$\left(\cos\theta=\frac{2}{5} \text{ e } \sin\theta=\frac{\sqrt{10\times 2+1}}{5}=\frac{\sqrt{21}}{5}\right)$

1. $\tan\theta = \dfrac{b}{a}$

$$\frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{\frac{b}{c}}{\frac{a}{c}} = \frac{b \times c}{a \times c} = \frac{b}{a} = \tan\theta$$

2.1. $\alpha + \theta + 90° = 180° \Leftrightarrow \alpha + \theta = 180° - 90° \Leftrightarrow \alpha + \theta = 90°$, logo α e θ são ângulos complementares, visto que a soma das suas amplitudes é 90º.

2.2. $\sin\alpha = \dfrac{\overline{AB}}{\overline{CB}}$ e $\cos\theta = \dfrac{\overline{AB}}{\overline{CB}}$.

2.3. Pela alínea anterior, conclui-se que $\sin\alpha = \cos\theta$. Assim, fica provado que o seno de um ângulo agudo é o cosseno do seu ângulo complementar.

3. **Opção correta: (D)**

$\cos(40°) = \sin(90° - 40°) = \sin(50°)$

4.1. $\cos(30°) = \sin(90° - 30°) = \sin(60°)$

4.2. $\sin(85°) = \cos(90° - 85°) = \cos(5°)$

4.3. $\sin(42°) = \cos(90° - 42°) = \cos(48°)$

4.4. $\sin(38°) = \cos(90° - 38°) = \cos(52°)$

5. $(\sin\alpha+\cos\alpha)^2=\sin^2\alpha+2\sin\alpha\times\cos\alpha+\cos^2\alpha=\sin^2\alpha+\cos^2\alpha+2\sin\alpha\cos\alpha=$

$=1+2\sin\alpha\cos\alpha$, pela fórmula fundamental da trigonometria

6.1. $\left(\frac{\sqrt{2}}{5}\right)^2+\cos^2\alpha=1\Leftrightarrow\frac{2}{25}+\cos^2\alpha=1\Leftrightarrow\cos^2\alpha=1-\frac{2}{25}\Leftrightarrow\cos^2\alpha=\frac{23}{25}\underset{(\cos\alpha>0)}{\Leftrightarrow}\cos\alpha=\frac{\sqrt{23}}{5}$

Logo, $\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{\frac{\sqrt{2}}{5}}{\frac{\sqrt{23}}{5}}=\frac{\sqrt{2}\times5}{\sqrt{23}\times5}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{23}}=\frac{\sqrt{46}}{23}$.

6.2. $\sin(90°-\alpha)=\cos\alpha=\frac{\sqrt{23}}{5}$ e $\cos(90°-\alpha)=\sin\alpha=\frac{\sqrt{2}}{5}$

7. $\tan\alpha=\frac{b}{a}$ e $\cos\alpha=\frac{a}{c}$

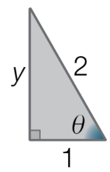
$1+\tan^2\alpha=1+\left(\frac{b}{a}\right)^2=\frac{a^2}{a^2}+\frac{b^2}{a^2}=\frac{a^2+b^2}{a^2}=\frac{c^2}{a^2}=\left(\frac{c}{a}\right)^2=\frac{1}{\left(\frac{a}{c}\right)^2}=\frac{1}{\cos^2\alpha}$

Nota: $a^2+b^2=c^2$, pelo Teorema de Pitágoras.

8.1. $\left(\frac{1}{2}\right)^2+\sin^2\alpha=1\Leftrightarrow\frac{1}{4}+\sin^2\alpha=1\Leftrightarrow\sin^2\alpha=1-\frac{1}{4}\Leftrightarrow\sin^2\alpha=\frac{3}{4}\underset{(\sin\alpha>0)}{\Leftrightarrow}\sin\alpha=\frac{\sqrt{3}}{2}$

Assim, $\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}}=\frac{2\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}$.

8.2. $y^2+1^2=2^2\Leftrightarrow y^2=4-1\Leftrightarrow y^2=3\underset{(y>0)}{\Leftrightarrow}y=\sqrt{3}$. Assim, $\tan\theta=\frac{\sqrt{3}}{1}=\sqrt{3}$.



8.3. $1+\tan^2\theta=\frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)^2}\Leftrightarrow1+\tan^2\theta=\frac{1}{\frac{1}{4}}\Leftrightarrow\tan^2\theta=4-1\underset{(\tan\theta>0)}{\Leftrightarrow}\tan\theta=\sqrt{3}$

9.1. **Afirmação falsa.** Se α for um ângulo agudo de um triângulo retângulo isósceles, $\sin\alpha=\cos\alpha$, pois nesse triângulo os catetos adjacente e oposto têm o mesmo comprimento.

9.2. **Afirmação falsa.** O seno de um ângulo é um valor inferior a 1, logo não pode ser 1,2.

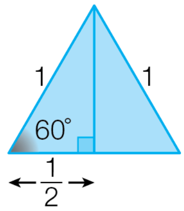
9.3. **Afirmação verdadeira**

9.4. **Afirmação falsa.** O cosseno não pode ser superior a 1, logo não pode ser 3. De facto, $\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{1}{3}$, mas isso não implica que $\sin\alpha=1$ e $\cos\alpha=3$; apenas que o quociente entre $\sin\alpha$ e $\cos\alpha$ é $\frac{1}{3}$.

9.5. **Afirmação verdadeira.** $(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)^{10}=1^{10}=1$.

Ficha n.º 4 – Página 94 **6. TRIGONOMETRIA**

1. $180^\circ : 3 = 60^\circ$



$$1^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + h^2 \Leftrightarrow 1 = \frac{1}{4} + h^2 \Leftrightarrow 1 - \frac{1}{4} = h^2 \Leftrightarrow \frac{3}{4} = h^2 \underset{(h>0)}{\Leftrightarrow} h = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

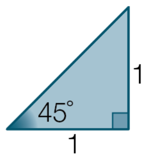
Como as razões trigonométricas de um ângulo não dependem das dimensões do triângulo considerado:

$$\sin 60^\circ = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{1} = \frac{\sqrt{3}}{2}; \ \cos 60^\circ = \frac{\frac{1}{2}}{1} = \frac{1}{2} \text{ e } \tan 60^\circ = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = \frac{2\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$$

2. $\sin 30^\circ = \cos(90^\circ - 30^\circ) = \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$; $\cos 30^\circ = \sin(90^\circ - 30^\circ) = \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$ e

$$\tan 30^\circ = \frac{\sin 30^\circ}{\cos 30^\circ} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{2}{2\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

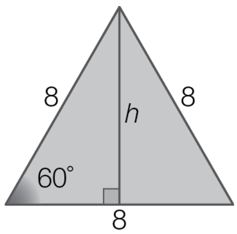
3. $\frac{180^\circ - 90^\circ}{2} = 45^\circ$



$$h^2 = 1^2 + 1^2 \Leftrightarrow h^2 = 2 \underset{(h>0)}{\Leftrightarrow} h = \sqrt{2}$$

$$\sin 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}; \ \cos 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ e } \tan 45^\circ = \frac{1}{1} = 1.$$

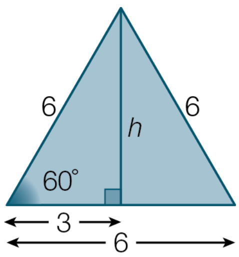
4. $180^\circ : 3 = 60^\circ$



$$\sin 60^\circ = \frac{h}{8} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{h}{8} \Leftrightarrow h = \frac{8\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow h = 4\sqrt{3}$$

$$A_\Delta = \frac{8 \times 4\sqrt{3}}{2} = 4 \times 4\sqrt{3} = 16\sqrt{3} \text{ unidades quadradas}$$

5.1. Cada um dos seis triângulos da figura é equilátero.



$$\tan 60^\circ = \frac{h}{3} \Leftrightarrow \sqrt{3} = \frac{h}{3} \Leftrightarrow h = 3\sqrt{3}$$

$$A_\Delta = \frac{6 \times 3\sqrt{3}}{2} = 3 \times 3\sqrt{3} = 9\sqrt{3}$$

A área do hexágono é, portanto, $9\sqrt{3} \times 6 = 54\sqrt{3}$ dm^2.

5.2. $V = \frac{1}{3} \times A_b \times h = \frac{1}{3} \times 54\sqrt{3} \times 7 = 18\sqrt{3} \times 7 = 126\sqrt{3}$ dm^3

6. No triângulo [*ACD*]: $\sin 30° = \frac{\overline{AD}}{5} \Leftrightarrow \frac{1}{2} = \frac{\overline{AD}}{5} \Leftrightarrow \overline{AD} = \frac{5}{2}$ e $\cos 30° = \frac{\overline{AC}}{5} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\overline{AC}}{5} \Leftrightarrow \overline{AC} = \frac{5\sqrt{3}}{2}$

No triângulo [*ACB*]: $\sin 30° = \frac{\overline{AC}}{\overline{CB}} \Leftrightarrow \frac{1}{2} = \frac{\frac{5\sqrt{3}}{2}}{\overline{CB}} \Leftrightarrow \overline{CB} = \frac{\frac{5\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} \Leftrightarrow \overline{CB} = 5\sqrt{3}$

$$\tan 30° = \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{\frac{5\sqrt{3}}{2}}{\overline{AB}} \Leftrightarrow \overline{AB} = \frac{\frac{5\sqrt{3}}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{3}} \Leftrightarrow \overline{AB} = \frac{15\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} \Leftrightarrow \overline{AB} = \frac{15}{2}$$

Assim, o perímetro do triângulo [*CDB*] é:

$$\overline{DB} + \overline{CB} + \overline{CD} = \left(\overline{AB} - \overline{AD}\right) + \overline{CB} + \overline{CD} = \frac{15}{2} - \frac{5}{2} + 5\sqrt{3} + 5 = \frac{10}{2} + 5\sqrt{3} + 5 = 10 + 5\sqrt{3} \text{ cm}$$

7.1. $\sin 30° = \frac{4}{x} \Leftrightarrow \frac{1}{2} = \frac{4}{x} \Leftrightarrow x = 2 \times 4 \Leftrightarrow x = 8$ cm

7.2. $\sin 60° = \frac{x}{6} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{x}{6} \Leftrightarrow x = \frac{6\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow x = 3\sqrt{3}$ cm

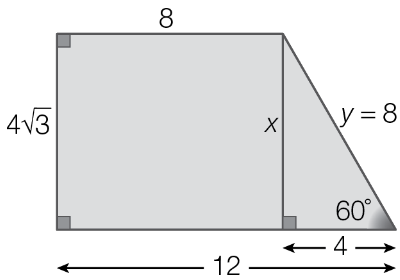
7.3. $\cos 45° = \frac{2}{x} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{2}{x} \Leftrightarrow \sqrt{2}x = 4 \Leftrightarrow x = \frac{4}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow x = \frac{4\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow x = 2\sqrt{2}$ cm

7.4. $\tan 60° = \frac{x}{7} \Leftrightarrow \sqrt{3} = \frac{x}{7} \Leftrightarrow x = 7\sqrt{3}$ dm

7.5. $\cos 30° = \frac{x}{4} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{x}{4} \Leftrightarrow x = \frac{4\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow x = 2\sqrt{3}$ m

7.6. $\tan 30° = \frac{8}{x} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{8}{x} \Leftrightarrow x = \frac{24}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow x = \frac{24\sqrt{3}}{3} \Leftrightarrow x = 8\sqrt{3}$ cm

8. $\tan 60° = \frac{x}{4} \Leftrightarrow \sqrt{3} = \frac{x}{4} \Leftrightarrow x = 4\sqrt{3}$; $\cos 60° = \frac{4}{y} \Leftrightarrow \frac{1}{2} = \frac{4}{y} \Leftrightarrow y = 8$



A área do trapézio é

$$\frac{(8+12)\times 4\sqrt{3}}{2} = \frac{20 \times 4\sqrt{3}}{2} = 10 \times 4\sqrt{3} = 40\sqrt{3} \text{ m}^2$$

O perímetro do trapézio é $8 + 4\sqrt{3} + 12 + 8 = 28 + 4\sqrt{3}$ m.

9. $\left(\cos 45° - \sin 30°\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 - 2 \times \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{2}{4} - \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4} - \frac{\sqrt{2}}{2}$

10. Se $A = 2\sin 30° - \cos 45° + \tan 30° + \sin 45° - \frac{\sqrt{3}}{3}$ e $B = \frac{\tan 45°}{\cos^2 45° + \sin^2 45°}$, então:

$A = 2 \times \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{2}{2} = 1$ e $B = \frac{1}{1} = 1$, logo $A = B$.

1.1. $\alpha = \cos^{-1}\left(\frac{1}{3}\right) \approx 70{,}5°$

1.2. $\alpha = \sin^{-1}\left(\frac{2}{7}\right) \approx 16{,}6°$

1.3. $\alpha = \tan^{-1}\left(\frac{7}{3}\right) \approx 66{,}8°$

1.4. $\alpha = \cos^{-1}(0{,}78) \approx 38{,}7°$

1.5. $\alpha = \sin^{-1}(0{,}51) \approx 30{,}7°$

1.6. $\alpha = \tan^{-1}(2{,}36) \approx 67{,}0°$

2.1. $\cos 25° = \frac{x}{10} \Leftrightarrow 0{,}906 = \frac{x}{10} \Leftrightarrow x = 10 \times 0{,}906 \Leftrightarrow x \approx 9{,}1 \text{ cm}$

2.2. $\tan 62° = \frac{8{,}2}{x} \Leftrightarrow 1{,}881 = \frac{8{,}2}{x} \Leftrightarrow x = \frac{8{,}2}{1{,}881} \Leftrightarrow x \approx 4{,}4 \text{ dm}$

2.3. $\sin x = \frac{5}{8} \Leftrightarrow x = \sin^{-1}\left(\frac{5}{8}\right) \Leftrightarrow x \approx 38{,}7°$

2.4. $\sin x = \frac{5{,}8}{7{,}1} \Leftrightarrow \sin x \approx 0{,}817 \Leftrightarrow x = \sin^{-1}(0{,}817) \Leftrightarrow x \approx 54{,}8°$

2.5. $\tan 53° = \frac{6{,}8}{x} \Leftrightarrow 1{,}327 = \frac{6{,}8}{x} \Leftrightarrow 1{,}327x = 6{,}8 \Leftrightarrow x = \frac{6{,}8}{1{,}327} \Leftrightarrow x \approx 5{,}1 \text{ cm}$

2.6. $\cos x = \frac{3{,}1}{5{,}4} \Leftrightarrow \cos x \approx 0{,}574 \Leftrightarrow x = \cos^{-1}(0{,}574) \Leftrightarrow x \approx 55{,}0°$

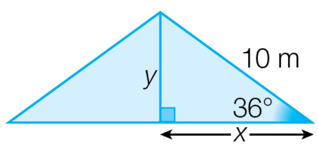
2.7. $\tan x = \frac{10}{4} \Leftrightarrow \tan x = 2{,}5 \Leftrightarrow x = \tan^{-1}(2{,}5) \Leftrightarrow x \approx 68{,}2°$

2.8. $\sin x = \frac{2{,}9}{3{,}8} \Leftrightarrow \sin x \approx 0{,}763 \Leftrightarrow x = \sin^{-1}(0{,}763) \Leftrightarrow x \approx 49{,}7°$

3.1. $\sin 36° = \frac{y}{10} \Leftrightarrow 0{,}588 = \frac{y}{10} \Leftrightarrow y = 10 \times 0{,}588 \Leftrightarrow y = 5{,}88$

$\cos 36° = \frac{x}{10} \Leftrightarrow 0{,}809 = \frac{x}{10} \Leftrightarrow x = 10 \times 0{,}809 \Leftrightarrow x = 8{,}09$

O perímetro do triângulo é $10 + 10 + 2 \times 8{,}09 \approx 36{,}2$ m



3.2. A área do triângulo é $\frac{2 \times 8{,}09 \times 5{,}88}{2} \approx 47{,}6 \text{ m}^2$.

Ficha n.º 5 – Página 97

4. $70°: 2 = 35°$

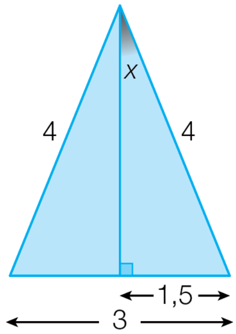
$$\tan\theta = \frac{35}{90} \Leftrightarrow \theta = \tan^{-1}\left(\frac{35}{90}\right) \Leftrightarrow \theta \approx 21{,}3°$$

$$\tan\beta = \frac{30}{35} \Leftrightarrow \beta = \tan^{-1}\left(\frac{30}{35}\right) \Leftrightarrow \beta \approx 40{,}6°$$

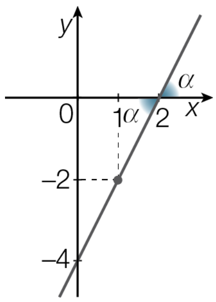
5. $$\sin x = \frac{1{,}5}{4} \Leftrightarrow x = \sin^{-1}\left(\frac{1{,}5}{4}\right) \Leftrightarrow x \approx 22{,}024°$$

$$2 \times 22{,}024° = 44{,}048°; \quad \frac{180° - 44{,}048°}{2} = 67{,}976°$$

Dois ângulos do triângulo têm 68º e o outro tem 44º, aproximadamente.



6. $$\tan\alpha = \frac{4}{2} \Leftrightarrow \tan\alpha = 2 \Leftrightarrow \alpha = \tan^{-1}(2) \Leftrightarrow \alpha \approx 63°$$



x	$y = 2x - 4$
0	– 4
1	– 2
2	0

7. $$\tan 60° = \frac{12}{r} \Leftrightarrow \sqrt{3} = \frac{12}{r} \Leftrightarrow r = \frac{12}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow r = \frac{12\sqrt{3}}{3} \Leftrightarrow r = 4\sqrt{3}$$

O volume do cone é $\frac{1}{3} \times A_b \times h = \frac{1}{3} \times \pi \times \left(4\sqrt{3}\right)^2 \times 12 = \frac{16 \times 3 \times 12\pi}{3} = 192\pi \text{ cm}^3$.

8. $$\tan\alpha = \frac{3}{7} \Leftrightarrow \alpha = \tan^{-1}\left(\frac{3}{7}\right) \Leftrightarrow \alpha \approx 23{,}2°$$

Seja d a diagonal da face inferior do paralelepípedo.

$$d^2 = 7^2 + 3^2 \Leftrightarrow d^2 = 49 + 9 \Leftrightarrow d^2 = 58 \underset{(d>0)}{\Leftrightarrow} d = \sqrt{58}$$

$$\tan\beta = \frac{5}{\sqrt{58}} \Leftrightarrow \tan\beta \approx 0{,}657 \Leftrightarrow \beta = \tan^{-1}(0{,}657) \Leftrightarrow \beta \approx 33{,}3°$$

Ficha n.º 6 – Página 98 **6. TRIGONOMETRIA**

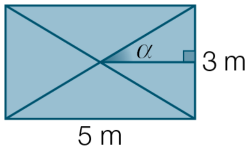
1. **Opção correta: (A)**

$$\sin\alpha = \frac{\overline{DC}}{4} \Leftrightarrow \overline{DC} = 4\sin\alpha$$

$$\sin 60^\circ = \frac{\overline{CD}}{\overline{AC}} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{4\sin\alpha}{\overline{AC}} \Leftrightarrow \overline{AC}\times\sqrt{3} = 8\sin\alpha \Leftrightarrow \overline{AC} = \frac{8\sin\alpha}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow \overline{AC} = \frac{8\sqrt{3}\sin\alpha}{3}$$

2. $\tan\alpha = \frac{1{,}5}{2{,}5} \Leftrightarrow \alpha = \tan^{-1}\left(\frac{1{,}5}{2{,}5}\right) \Leftrightarrow \alpha \approx 31^\circ$

O ângulo pedido é $2\alpha = 62^\circ$.



3. No triângulo [*ADE*]:

$$\sin 30^\circ = \frac{\overline{DE}}{5} \Leftrightarrow \frac{1}{2} = \frac{\overline{DE}}{5} \Leftrightarrow \overline{DE} = \frac{5}{2}\,;\ \cos 30^\circ = \frac{\overline{AD}}{5} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\overline{AD}}{5} \Leftrightarrow \overline{AD} = \frac{5\sqrt{3}}{2}$$

A área do triângulo [*ADE*] é $\dfrac{\frac{5\sqrt{3}}{2}\times\frac{5}{2}}{2} = \dfrac{\frac{5\sqrt{3}}{4}}{2} = \dfrac{5\sqrt{3}}{8}$ cm^2

No triângulo [*ABC*]: $\tan 30^\circ = \frac{8}{\overline{AB}} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{8}{\overline{AB}} \Leftrightarrow \overline{AB} = \frac{8\times 3}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow \overline{AB} = \frac{24\sqrt{3}}{3} \Leftrightarrow \overline{AB} = 8\sqrt{3}$

A área do triângulo [*ABC*] é $\frac{8\sqrt{3}\times 8}{2} = 4\sqrt{3}\times 8 = 32\sqrt{3}$ cm^2

A área de [*EBCD*] é $32\sqrt{3} - \frac{5\sqrt{3}}{8} = \frac{256\sqrt{3} - 5\sqrt{3}}{8} = \frac{251\sqrt{3}}{8}$ cm^2

4. Seja *x* a medida do comprimento do lado da base.

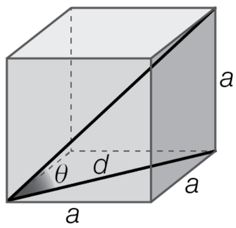
$$x^2 = 46{,}24 \underset{(x>0)}{\Leftrightarrow} x = \sqrt{46{,}24} \Leftrightarrow x = 6{,}8\,;\ \frac{x}{2} = 3{,}4$$

$\tan 72^\circ = \frac{h}{3{,}4} \Leftrightarrow 3{,}078 = \frac{h}{3{,}4} \Leftrightarrow 3{,}078\times 3{,}4 = h \Leftrightarrow h \approx 10{,}465$, sendo *h* a altura da pirâmide.

O volume da pirâmide é, portanto, $\frac{1}{3}\times A_b\times h = \frac{1}{3}\times 46{,}24\times 10{,}465 \approx 161{,}3$ cm^3

5. $d^2 = a^2 + a^2 \Leftrightarrow d^2 = 2a^2 \underset{(d>0)}{\Leftrightarrow} d = \sqrt{2a^2} \Leftrightarrow d = \sqrt{2}a$

$\tan\theta = \frac{a}{\sqrt{2}a} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, logo $\theta = \tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \approx 35{,}3^\circ$.



Ficha n.º 6 – Página 99

6.1. $\tan\alpha = \frac{\overline{AP}}{2} \Leftrightarrow \overline{AP} = 2\tan\alpha$ e $A(\Delta[CPB]) = A(\Delta[ABC]) - A(\Delta[ACP]) = \frac{4\times 2}{2} - \frac{2\tan\alpha \times 2}{2} = 4 - 2\tan\alpha$

6.2. Pela alínea anterior, se $\alpha = 45°$, $A(\Delta[CPB]) = 4 - 2\tan 45° = 4 - 2\times 1 = 2$ unidades quadradas.

Se $\alpha = 45°$, então $A\hat{P}C = 180° - (90° + 45°) = 45°$, logo o triângulo [*ACP*] é isósceles e, por isso, $\overline{AC} = \overline{AP} = 2$. Assim, o triângulo [*ACP*] e o triângulo [*CPB*] têm ambos 2 unidades de base e 2 de altura. São, portanto, triângulos equivalentes, daí que a sua área seja metade da área do triângulo [*ABC*], que é 4 unidades quadradas, ou seja, 2 unidades quadradas.

6.3. $4 - 2\tan 60° = 4 - 2\sqrt{3}$

6.4. **a)** $\sin^2\alpha + \left(\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)^2 = 1 \Leftrightarrow \sin^2\alpha + \frac{4\times 5}{25} = 1 \Leftrightarrow \sin^2\alpha = 1 - \frac{20}{25} \Leftrightarrow \sin^2\alpha = \frac{5}{25} \underset{(\sin\alpha > 0)}{\Leftrightarrow} \sin\alpha = \frac{\sqrt{5}}{5}$

$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\frac{\sqrt{5}}{5}}{\frac{2\sqrt{5}}{5}} = \frac{5\sqrt{5}}{2\times 5\sqrt{5}} = \frac{1}{2}$, logo a área do triângulo [*CPB*] é $4 - 2\times\frac{1}{2} = 4 - 1 = 3$ unidades quadradas.

b.) $A(\Delta[CPB]) = 3 \Leftrightarrow \frac{\overline{PB}\times 2}{2} = 3 \Leftrightarrow \overline{PB} = 3$. Assim, a distância de *P* a *A* é $4 - 3 = 1$ unidade.

7.1. O lado da base mede $\frac{16}{4} = 4$ cm.

a) $\tan\theta = \frac{h}{2} \Leftrightarrow h = 2\tan\theta$

b) $\cos\theta = \frac{2}{ap} \Leftrightarrow ap = \frac{2}{\cos\theta}$

c) $4\times A_\Delta = 4\times\frac{4\times\frac{2}{\cos\theta}}{2} = 2\times 4\times\frac{2}{\cos\theta} = \frac{16}{\cos\theta}$

d) $\frac{16}{\cos\theta} + 4\times 4 = \frac{16}{\cos\theta} + 16$

e) $\frac{16\times 2\tan\theta}{3} = \frac{32\tan\theta}{3}$

7.2. **d)** $\frac{16}{\cos 45°} + 16 = \frac{16}{\frac{\sqrt{2}}{2}} + 16 = \frac{32}{\sqrt{2}} + 16 = \frac{32\sqrt{2}}{2} + 16 = 16\sqrt{2} + 16$

e) $\frac{32\tan 45°}{3} = \frac{32\times 1}{3} = \frac{32}{3}$

8.1. Opção correta: (C)

8.2. $\tan i = \frac{35}{100} = 0{,}35$

8.3. $i = \tan^{-1}(0{,}35) \approx 19{,}29^\circ$

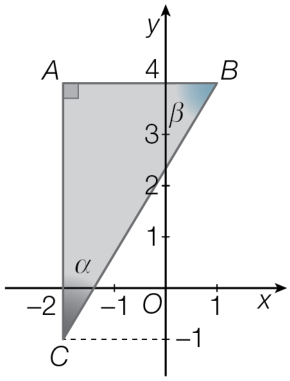
9. $\tan 45^\circ = \frac{\overline{CB}}{6} \Leftrightarrow 1 \times 6 = \overline{CB} \Leftrightarrow \overline{CB} = 6$

$\tan 30^\circ = \frac{\overline{CB}}{\overline{AB}} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{6}{\overline{AB}} \Leftrightarrow \overline{AB} = \frac{6 \times 3}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow \overline{AB} = \frac{18\sqrt{3}}{3} \Leftrightarrow \overline{AB} = 6\sqrt{3}$

Assim, $\overline{AM} = \overline{AB} - \overline{MB} = \left(6\sqrt{3} - 6\right)$ m .

10. $\tan \alpha = \frac{3}{5} \Leftrightarrow \alpha = \tan^{-1}\left(\frac{3}{5}\right) \Leftrightarrow \alpha \approx 31^\circ$

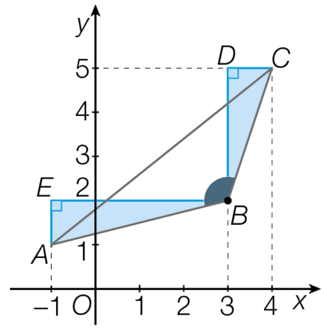
$\tan \beta = \frac{5}{3} \Leftrightarrow \beta = \tan^{-1}\left(\frac{5}{3}\right) \Leftrightarrow \beta \approx 59^\circ$



Os ângulos externos do triângulo têm as seguintes amplitudes:

$180^\circ - 90^\circ = 90^\circ$, $180^\circ - 31^\circ = 149^\circ$ e $180^\circ - 59^\circ = 121^\circ$.

Ficha n.º 6 – Página 101



11. Sejam D e E os pontos de coordenadas $(3, 5)$ e $(-1, 2)$, respetivamente.

$$\tan\left(D\hat{B}C\right) = \frac{1}{3} \Leftrightarrow D\hat{B}C = \tan^{-1}\left(\frac{1}{3}\right) \Leftrightarrow D\hat{B}C \approx 18{,}435^\circ$$

$$\tan\left(E\hat{B}A\right) = \frac{1}{4} \Leftrightarrow E\hat{B}A = \tan^{-1}\left(\frac{1}{4}\right) \Leftrightarrow E\hat{B}A \approx 14{,}036^\circ$$

Assim, $C\hat{B}A = 90^\circ + 18{,}435^\circ + 14{,}036^\circ \approx 122{,}5^\circ$.

12. $$1+\frac{\sin\alpha\tan\alpha}{\cos\alpha} = 1+\frac{\sin\alpha\times\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}}{\cos\alpha} = 1+\frac{\frac{\sin^2\alpha}{\cos\alpha}}{\cos\alpha} = 1+\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha} = \frac{\cos^2\alpha+\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha} = \frac{1}{\cos^2\alpha}$$

13.1. Seja E a projeção ortogonal de Q sobre $[BC]$.

$$\sin\alpha = \frac{\overline{EQ}}{\overline{\overline{QO}}} \Leftrightarrow \sin\alpha = \frac{\overline{EQ}}{\text{raio}} \Leftrightarrow \sin\alpha = \frac{\overline{EQ}}{1} \Leftrightarrow \overline{EQ} = \sin\alpha$$

$$A(\triangle[BQO]) = \frac{1\times\sin\alpha}{2} = \frac{\sin\alpha}{2}$$

$$\tan\alpha = \frac{\overline{PC}}{\overline{\overline{OC}}} \Leftrightarrow \tan\alpha = \frac{\overline{PC}}{1} \Leftrightarrow \overline{PC} = \tan\alpha$$

$$A([ABOPD]) = A([ABCD]) - A([OCP]) = 2\times 1-\frac{1\times\tan\alpha}{2} = 2-\frac{\tan\alpha}{2}$$

$$A([ABQPD]) = 2-\frac{\tan\alpha}{2}+\frac{\sin\alpha}{2}$$

13.2. $$2-\frac{\tan 30^\circ}{2}+\frac{\sin 30^\circ}{2} = 2-\frac{\frac{\sqrt{3}}{3}}{2}+\frac{\frac{1}{2}}{2} = 2-\frac{\sqrt{3}}{6}+\frac{1}{4} = \frac{8}{4}-\frac{\sqrt{3}}{6}+\frac{1}{4} = \frac{9}{4}-\frac{\sqrt{3}}{6}$$ unidades quadradas

13.3. $$\left(\frac{4}{5}\right)^2+\sin^2\alpha = 1 \Leftrightarrow \frac{16}{25}+\sin^2\alpha = 1 \Leftrightarrow \sin^2\alpha = 1-\frac{16}{25} \Leftrightarrow \sin^2\alpha = \frac{9}{25} \underset{(\sin\alpha>0)}{\Leftrightarrow} \sin\alpha = \frac{3}{5}$$

$$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\frac{3}{5}}{\frac{4}{5}} = \frac{3}{4}$$

A área do polígono sombreado é, então:

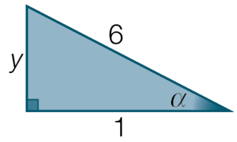
$$2-\frac{\frac{3}{4}}{2}+\frac{\frac{3}{5}}{2} = 2-\frac{3}{8}+\frac{3}{10} = \frac{80-15+12}{40} = \frac{77}{40}$$ unidades quadradas.

1. **Opção correta: (A)**

Se o triângulo é retângulo isósceles, os seus dois ângulos internos agudos são iguais e têm 45º de amplitude, pois $\frac{180º - 90º}{2} = 45º$. Assim, como as razões trigonométricas de um ângulo agudo não dependem das dimensões do triângulo considerado, a afirmação (A) é falsa.

2.1. $\left(\frac{1}{6}\right)^2 + \sin^2 \alpha = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{36} + \sin^2 \alpha = 1 \Leftrightarrow \sin^2 \alpha = 1 - \frac{1}{36} \Leftrightarrow \sin^2 \alpha = \frac{35}{36} \underset{(\sin\alpha > 0)}{\Leftrightarrow} \sin\alpha = \frac{\sqrt{35}}{6}$

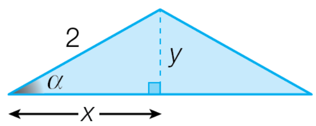
2.2. $6^2 = 1^2 + y^2 \Leftrightarrow y^2 = 36 - 1 \underset{(y>0)}{\Leftrightarrow} y = \sqrt{35}$



Logo, $\sin\alpha = \frac{\sqrt{35}}{6}$.

3. $\cos\beta = \frac{3}{5}$, logo $\beta = \cos^{-1}\left(\frac{3}{5}\right) \approx 53{,}13º$

4. **Opção correta: (D)**



$\cos\alpha = \frac{x}{2} \Leftrightarrow x = 2\cos\alpha$; $\sin\alpha = \frac{y}{2} \Leftrightarrow y = 2\sin\alpha$

$A_{\Delta} = \frac{4\cos\alpha \times 2\sin\alpha}{2} = 4\cos\alpha\sin\alpha$

Teste n.º 1 – Página 103

5. $\sin^4\alpha - \cos^4\alpha = \left(\sin^2\alpha\right)^2 - \left(\cos^2\alpha\right)^2 = \left(\sin^2\alpha - \cos^2\alpha\right)\left(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha\right) =$

$= \left(\sin^2\alpha - \cos^2\alpha\right)\times 1 = \sin^2\alpha - \cos^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha - \cos^2\alpha = 1 - 2\cos^2\alpha$

6. $\cos^2\phi + \left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = 1 \Leftrightarrow \cos^2\phi = 1 - \dfrac{2}{4} \Leftrightarrow \cos^2\phi = \dfrac{2}{4} \underset{(\cos\phi>0)}{\Leftrightarrow} \cos\phi = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$\tan\phi = \dfrac{\sin\phi}{\cos\phi} = \dfrac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = 1$

$\left(\cos\phi + \tan\phi\right)^2 - \dfrac{1}{\cos\phi} = \left(\dfrac{\sqrt{2}}{2} + 1\right)^2 - \dfrac{1}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \dfrac{2}{4} + 2\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}\times 1 + 1 - \dfrac{2}{\sqrt{2}} = \dfrac{1}{2} + \sqrt{2} + 1 - \dfrac{2\sqrt{2}}{2} =$

$= \dfrac{1}{2} + \sqrt{2} + \dfrac{2}{2} - \sqrt{2} = \dfrac{3}{2}$

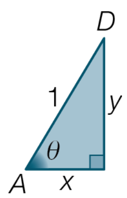
7. **Opção correta: (D)**

$\dfrac{4-k}{3} > 0 \ \wedge\ \dfrac{4-k}{3} < 1 \Leftrightarrow 4 - k > 0 \ \wedge\ 4 - k < 3 \Leftrightarrow -k > -4 \ \wedge\ -k < 3 - 4 \Leftrightarrow k < 4 \ \wedge\ -k < -1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow k < 4 \ \wedge\ k > 1$

$k \in \left]1, 4\right[$

8.1. $\sin\theta = \dfrac{y}{1} \Leftrightarrow y = \sin\theta$; $\cos\theta = \dfrac{x}{1} \Leftrightarrow x = \cos\theta$



A área do trapézio é:

$\dfrac{\left(\overline{AB} + \overline{DC}\right)\times h}{2} = \dfrac{\left(\cos\theta + 1 + \cos\theta + 1\right)\times\sin\theta}{2} = \dfrac{\left(2\cos\theta + 2\right)\times\sin\theta}{2} =$

$= \left(\cos\theta + 1\right)\times\sin\theta = \sin\theta\times\left(\cos\theta + 1\right)$

8.2. $\sin 45^\circ\left(1 + \cos 45^\circ\right) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\left(1 + \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) = \dfrac{\sqrt{2}}{2} + \dfrac{2}{4} = \dfrac{\sqrt{2}+1}{2}$ unidades quadradas

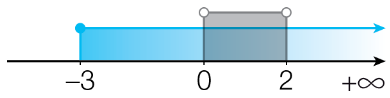
8.3. Se $\cos\theta = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$, então $\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \sin^2\theta = 1 \Leftrightarrow \sin^2\theta = 1 - \dfrac{3}{4} \Leftrightarrow \sin^2\theta = \dfrac{1}{4} \underset{(\sin\theta>0)}{\Leftrightarrow} \sin\theta = \dfrac{1}{2}$. Assim, a área do trapézio é $\dfrac{1}{2}\left(1 + \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = \dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{4} = \dfrac{2+\sqrt{3}}{4}$ unidades quadradas.

Teste n.º 2 – Página 104 **6. TRIGONOMETRIA**

1. Opção correta: (A)

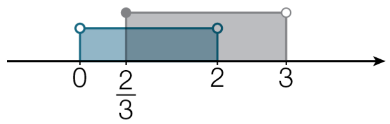
Se $A \subset B$, então $A \cap B = A$.

2.1. a) $A \cap B =]0, 2[$



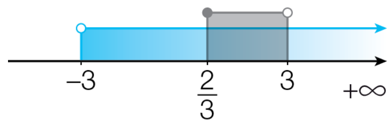
b) $A \cup B =]-3, +\infty[$

c) $B \cap C = \left[\frac{2}{3}, 2\right[$

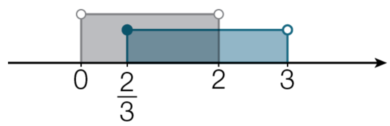


Logo $(B \cap C) \cup [1, 7[= \left[\frac{2}{3}, 7\right[$.

d) $A \cap C = \left[\frac{2}{3}, 3\right[$



Logo $(A \cap C) \cup B = \left[\frac{2}{3}, 3\right[\cup]0, 2[=]0, 3[$



2.2. $B \cap \mathbb{N} = \{1\}$, logo $x = 1$.

$(x - y) \notin A \Leftrightarrow (1 - y) \notin]-3, +\infty[$

O menor número natural tal que $(1 - y) \notin]-3, +\infty[$ é o 4, pois $1 - 4 = -3 \notin]-3, +\infty[$, mas $1 - 3 = -2 \in]-3, +\infty[$.

3. Aresta $= \sqrt[3]{30}$ e 1 décima $= \frac{1}{10}$

$30 \times 10^3 = 30 \times 1000 = 30000$

$31^3 = 29791$; $32^3 = 32768$, logo $29791 < 30000 < 32768$

$31^3 < 30 \times 10^3 < 32^3 \Leftrightarrow \frac{31^3}{10^3} < 30 < \frac{32^3}{10^3} \Leftrightarrow \left(\frac{31}{10}\right)^3 < 30 < \left(\frac{32}{10}\right)^3$, logo conclui-se que:

$\frac{31}{10} < \sqrt[3]{30} < \frac{32}{10} \Leftrightarrow 3{,}1 < \sqrt[3]{30} < 3{,}2$.

4. $\frac{\frac{1}{2} - x}{3} - 4x \geq \frac{1}{2} \Leftrightarrow 1 - 2x - 24x \geq 3 \Leftrightarrow -26x \geq 3 - 1 \Leftrightarrow -26x \geq 2 \Leftrightarrow x \leq -\frac{2}{26} \Leftrightarrow x \leq -\frac{1}{13}$

$C.S. = \left]-\infty, -\frac{1}{13}\right]$

5. Opção correta: (C)

Teste n.º 2 – Página 105

6.1. Opção correta: (A)

$y = ax^2$

Como o gráfico contém o ponto de coordenadas $(-2,-2)$, então

$-2 = a \times (-2)^2 \Leftrightarrow -2 = 4a \Leftrightarrow a = -\frac{2}{4} \Leftrightarrow a = -\frac{1}{2}$, logo $f(x) = -\frac{1}{2}x^2$.

6.2. $f(4) = -\frac{1}{2} \times 4^2 = -\frac{1}{2} \times 16 = -8$

$g(x) = kx$

O gráfico de *g* contém o ponto de coordenadas $(4,-8)$, logo $-8 = k \times 4 \Leftrightarrow k = \frac{-8}{4} \Leftrightarrow k = -2$

A expressão algébrica de *g* é, portanto, $g(x) = -2x$.

6.3. Retas paralelas têm o mesmo declive, logo a equação pedida é do tipo $y = -2x + b$. Por substituição de *x* e *y* pelas coordenadas de $\left(-\frac{1}{2}, 5\right)$, obtém-se $5 = -2 \times \left(-\frac{1}{2}\right) + b \Leftrightarrow 5 = 1 + b \Leftrightarrow b = 4$. A equação pedida é, portanto, $y = -2x + 4$.

7. Por exemplo:

$$\left(x - \frac{3}{4}\right)(x-2) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x - \frac{3}{4}x + \frac{6}{4} = 0 \Leftrightarrow 4x^2 - 8x - 3x + 6 = 0 \Leftrightarrow 4x^2 - 11x + 6 = 0$$

8. $x^2 + 4x - 5 = 0 \Leftrightarrow x^2 + 4x = 5 \Leftrightarrow x^2 + 4x + 2^2 = 5 + 2^2 \Leftrightarrow (x+2)^2 = 9 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x + 2 = \sqrt{9} \vee x + 2 = -\sqrt{9} \Leftrightarrow x = 3 - 2 \vee x = -3 - 2 \Leftrightarrow x = 1 \vee x = -5$

$C.S. = \{-5, 1\}$

9. Opção correta: (B)

$x^2 + 2x + c = 0$; $\Delta = 2^2 - 4 \times 1 \times c = 4 - 4c$

Tem uma só solução se $\Delta = 0 \Leftrightarrow 4 - 4c = 0 \Leftrightarrow c = \frac{4}{4} \Leftrightarrow c = 1$.

É impossível se $\Delta < 0 \Leftrightarrow 4 - 4c < 0 \Leftrightarrow -4c < -4 \Leftrightarrow c > \frac{-4}{-4} \Leftrightarrow c > 1$.

Teste n.º 2 – Página 106 **6. TRIGONOMETRIA**

10.

X	a	$2a$	$\frac{a}{3}$	$\frac{3}{10}a$	a^2
Y	b	$\frac{b}{2}$	$3b$	$\frac{10}{3}b$	$\frac{b}{a}$

11. **Opção correta: (C)**

12.1. **a)** Paralelas

b) *ABC*

c) Não complanares

d) Médio de [*AC*]

e) *FGH*

f) *ABC*

12.2. Um. Infinitos

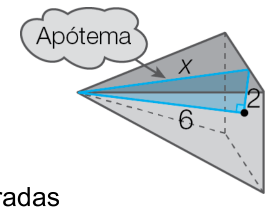
12.3. Infinitas. Uma

12.4. $16-10=6$ representa a altura da pirâmide.

O volume pedido corresponde à soma do volume da pirâmide com o do prisma. Assim:

$V=\frac{1}{3}\times 4^2\times 6+10\times 4\times 4=\frac{16\times 6}{3}+160=32+160=192$ unidades de volume

$x^2=6^2+2^2 \Leftrightarrow x^2=36+4 \Leftrightarrow x^2=40 \underset{(x>0)}{\Leftrightarrow} x=\sqrt{4\times 10} \Leftrightarrow x=2\sqrt{10}$



A área da superfície do sólido é:

$4\times\frac{4\times 2\sqrt{10}}{2}+4\times(10\times 4)+4\times 4=4\times 4\sqrt{10}+160+16=16\sqrt{10}+176$ unidades quadradas

Teste n.º 2 – Página 107

13.1. a) $\sin 30^\circ = \frac{r}{12} \Leftrightarrow \frac{1}{2} = \frac{r}{12} \Leftrightarrow r = \frac{12}{2} \Leftrightarrow r = 6$; $\cos 30^\circ = \frac{h}{12} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{h}{12} \Leftrightarrow h = \frac{12\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow h = 6\sqrt{3}$

Volume $= \frac{1}{3}\pi \times 6^2 \times 6\sqrt{3} = \frac{\pi \times 36 \times 6\sqrt{3}}{3} = \pi \times 36 \times 2\sqrt{3} = 72\pi\sqrt{3}$ cm^3

b A área pedida é $\pi \times 6 \times 12 + \pi \times 6^2 = 72\pi + 36\pi = 108\pi$ cm^2

13.2. $V = 72\pi\sqrt{3} \Leftrightarrow \frac{4}{3}\pi r^3 = 72\pi\sqrt{3} \Leftrightarrow r^3 = \frac{72\pi\sqrt{3}}{\frac{4}{3}\pi} \Leftrightarrow r^3 = \frac{72 \times 3\sqrt{3}}{4} \Leftrightarrow r^3 = 54\sqrt{3} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow r = \sqrt[3]{54\sqrt{3}} \Leftrightarrow r \approx 4{,}5$ cm

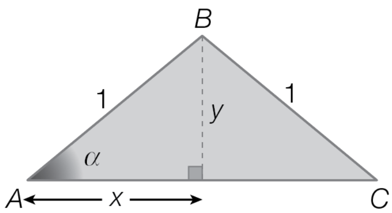
14. Seja $\overline{CB} = x$ e $\overline{AB} = 3x$.

$\overline{AC}^2 = x^2 + (3x)^2 \Leftrightarrow \overline{AC}^2 = x^2 + 9x^2 \Leftrightarrow \overline{AC}^2 = 10x^2 \underset{(\overline{AC}>0)}{\Leftrightarrow} \overline{AC} = \sqrt{10x^2} \Leftrightarrow \overline{AC} = \sqrt{10}x$

$\sin\alpha = \frac{x}{\sqrt{10}x} = \frac{1}{\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{10}}{10}$; $\cos\alpha = \frac{3x}{\sqrt{10}x} = \frac{3}{\sqrt{10}} = \frac{3\sqrt{10}}{10}$ e $\tan\alpha = \frac{x}{3x} = \frac{1}{3}$

15. **Opção correta: (D).** $\sin\alpha = \sin(90^\circ - \beta) = \cos\beta$

16. $\sin\alpha = \frac{y}{1} \Leftrightarrow y = \sin\alpha$ e $\cos\alpha = \frac{x}{1} \Leftrightarrow x = \cos\alpha$



O perímetro do triângulo é dado por:

$1 + 1 + 2\cos\alpha = 2 + 2\cos\alpha$ unidades de comprimento

A área do triângulo é dada por:

$\frac{2\cos\alpha\sin\alpha}{2} = \cos\alpha\sin\alpha$ unidades quadradas.

17. $\left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right)^2 + \cos^2\alpha = 1 \Leftrightarrow \frac{5}{9} + \cos^2\alpha = 1 \Leftrightarrow \cos^2\alpha = 1 - \frac{5}{9} \Leftrightarrow \cos^2\alpha = \frac{4}{9} \underset{(\cos\alpha>0)}{\Leftrightarrow} \cos\alpha = \frac{2}{3}$

$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\frac{\sqrt{5}}{3}}{\frac{2}{3}} = \frac{\sqrt{5}}{2}$