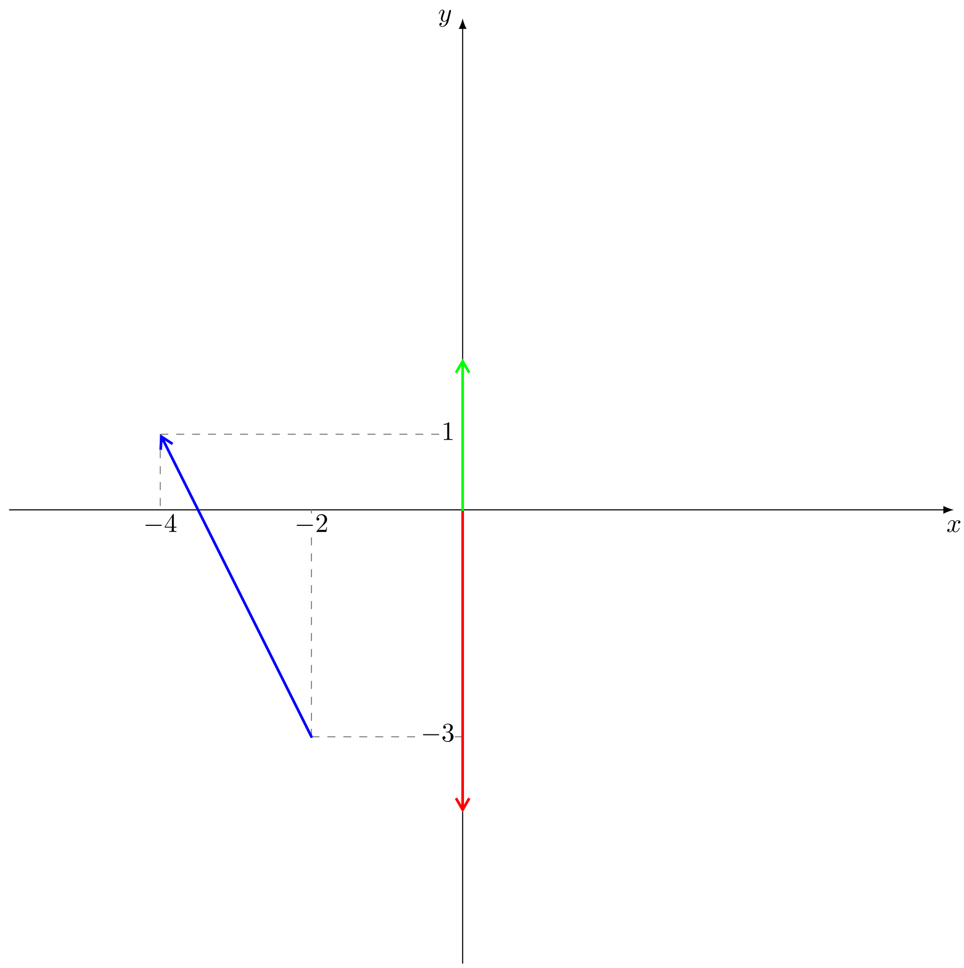


Exercício 6

Determine uma expressão geral das soluções reais da equação $-2\sin x - \sqrt{2} = 0$

$$-2\sin x - \sqrt{2} = 0$$

$$\Leftrightarrow \sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Leftrightarrow \sin x = \sin(-\frac{\pi}{4})$$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \vee x = \pi - \frac{\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \vee x = \frac{5\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Exercício 7

Mostre, no domínio em que a expressão é válida, que:
$\frac{\sin x \cdot \cos x}{\tan x} = \cos^2 x$

$$\frac{\sin x \cdot \cos x}{\tan x} = \frac{\sin x \cdot \cos x}{\frac{\sin x}{\cos x}} = \frac{\cancel{\sin x} \cdot \cos^2 x}{\cancel{\sin x}} = \cos^2 x$$

Como queríamos demonstrar.

Exercício 8

Resolva, em $\mathbb{R}$, a seguinte inequação fracionária: $\frac{-x+1}{x^2+1} \geq 0$**.**
C.A.

$$-x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

$$\underbrace{x^2 + 1 = 0}_{Impossível}$$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$-x+1$	$+$	0	$-$
x^2+1	$+$	$+$	$+$
$\frac{-x+1}{x^2+1}$	$+$	0	$-$

Crescente

$$C.S =]-\infty, 1]$$

Exercício 9

Seja $(u_n)_n$ uma sucessão definida por: $u_n = 1 + \frac{n+1}{n}$

a)

Verifique se $\frac{11}{5}$ é um dos termos de $(u_n)_n$

$$1 + \frac{n+1}{n} = \frac{11}{5}$$

$$n = 5 \in \mathbb{N}$$

b)

Estude $(u_n)_n$ quanto à monotonia

$(u_{n+1}) - (u_n) < 0$ é monótona decrescente
$(u_{n+1}) - (u_n) > 0$ é monótona crescente

$$\left[\frac{n}{n}\right]\left[\frac{2n+3}{n+1}\right] - \left[\frac{2n+1}{n}\right]\left[\frac{n+1}{n+1}\right]$$

$$\frac{2n^2+3n}{(n+1)\,(n)} - \frac{2n^2+2n+n+1}{(n+1)\,(n)}$$

$$\frac{2n^2+3n-2n^2-2n-n-1}{(n+1)\,(n)}$$

$$\frac{-1}{(n+1)\,(n)} < 0, \forall n \in \mathbb{N}$$

u_n é monótona decrescente

c)

Diga, justificando, se $(u_n)_n$ é uma sucessão convergente e se é uma sucessão limitada.

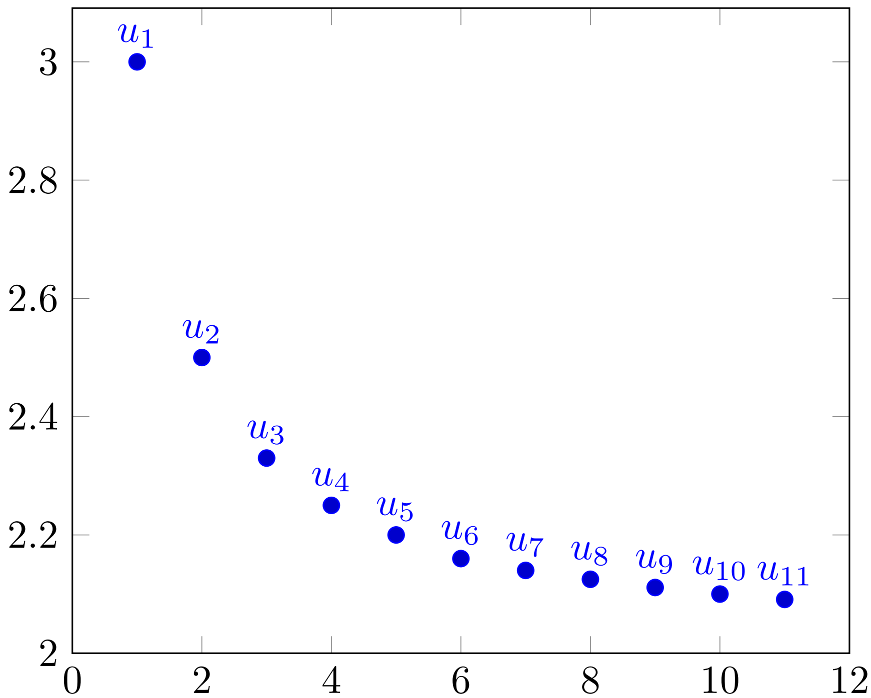
$$\lim_n\ 1+\frac{n+1}{n} = \lim_n\ 1+\lim_n \frac{\cancel{n}\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\cancel{n}(1)} = 1+\frac{1+\cancelto{0}{\frac{1}{n}}}{1} = 2$$

$(u_n)_n$ é convergente pois tende para um número real. Toda a sucessão convergente é limitada. Como $(u_n)_n$ é decrescente sabemos que:

$$1+\frac{n+1}{n}$$

$$\frac{n+1}{n} > 0$$

$$2 < u_n \leq 3, \forall n \in \mathbb{N}$$



Exercício 10

Determine, caso existam, os seguintes limites:

a)

$$\lim_n \frac{2n-5}{\sqrt{4n^2+1}} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}$$

$$\lim_n \frac{\cancel{n}\left(2+\cancelto{0}{\frac{5}{n}}\right)}{\cancel{n}\sqrt{4+\cancelto{0}{\frac{1}{n^2}}}}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{4+0}} = 1$$

b)

$$\lim_n \left(\frac{n+1}{n-2}\right)^{3n} \overset{1^\infty}{=}$$

$$= \lim_{n} \left(\frac{1 + \frac{1}{n}}{1 - \frac{2}{n}} \right)^{3n}$$

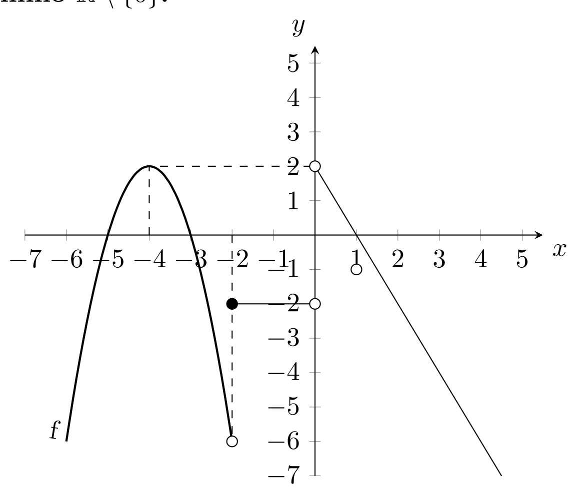
$$= \left[\frac{\lim_{n} \left(1 + \cancelto{0}{\frac{1}{n}} \right)^{n}}{\lim_{n} \left(1 - \cancelto{0}{\frac{2}{n}} \right)^{n}} \right]^{3}$$

$$= \left[\frac{e^{1}}{e^{-2}} \right]^{3}$$

$$= e^{9}$$

Exercício 11

Na figura está representada parte de um gráfico de uma função f de domínio $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.



Indique:

a)

$\lim_{x\to 0^-} f(x)$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = -2$$

b)

$\lim_{x\to -2^-} f(x)$

$$\lim_{x\to -2^-} f(x) = -6$$

c)

$\lim_{x \to +\infty} f(x)$
$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$$

Exercício 12

Considere a função real, de variável real, definida por $f(x) = 10 - 2^{x-1}$.

a)

Determine o domínio e o contradomínio da função f.

$$D_f = \mathbb{R}$$

$$D'_f = 10 - 2^{x-1} < 10 =]-\infty, 10[$$

b)

Caracterize a função inversa da função f .

$$f^{-1} = \log_2(10 - x) + 1$$
$$f^{-1} :]-\infty, 10[\to \mathbb{R}$$
$$x \rightarrowtail \log_2(10 - x) + 1$$

c)

Resolva em $\mathbb{R}$ a seguinte equação: $f(x) = -6$.

$$10 - 2^{x-1} = -6$$
$$\Leftrightarrow 2^{x-1} = 2^4$$
$$\Leftrightarrow x = 5$$

Exercício 13

Considere a função f definida por $f(x) = -\frac{x^4}{4} + 2x^2$. Determine, na forma reduzida,a equação da reta tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa 1.

$$f'(1) = 4x - x^3 = 3$$
$$f(1) = -\frac{1^4}{4} + 2 \cdot 1^2 = \frac{7}{4}$$
$$y - f(1) = f'(1) \cdot (x - 1)$$

$$\Leftrightarrow y - \frac{7}{4} = 3x - 3$$

$$\Leftrightarrow y = 3x - \frac{5}{4}$$