

Teste N.º 2

**Matemática A**

---

---

**12.º Ano de Escolaridade**

---

Nome do aluno: \_\_\_\_\_ N.º: \_\_\_\_ Turma: \_\_\_\_

---

---

Utilize apenas caneta ou esferográfica de tinta azul ou preta.

Não é permitido o uso de corretor. Risque aquilo que pretende que não seja classificado.

É permitido o uso de calculadora.

Apresente apenas uma resposta para cada item.

As cotações dos itens encontram-se no final do enunciado.

---

---

Na resposta aos itens de escolha múltipla, selecione a opção correta. Escreva na folha de respostas o número do item e a letra que identifica a opção escolhida.

Na resposta aos restantes itens, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias. Quando para um resultado não é pedida a aproximação, apresente sempre o valor exato.

---

# Formulário

## Geometria

**Comprimento de um arco de circunferência:**

$\alpha r$  ( $\alpha$  – amplitude, em radianos, do ângulo ao centro;  $r$  – raio)

**Área de um polígono regular:** Semiperímetro  $\times$  Apótema

**Área de um setor circular:**

$\frac{\alpha r^2}{2}$  ( $\alpha$  – amplitude, em radianos, do ângulo ao centro;  $r$  – raio)

**Área lateral de um cone:**  $\pi r g$  ( $r$  – raio da base;  $g$  – geratriz)

**Área de uma superfície esférica:**  $4 \pi r^2$  ( $r$  – raio)

**Volume de uma pirâmide:**  $\frac{1}{3} \times$  Área da base  $\times$  Altura

**Volume de um cone:**  $\frac{1}{3} \times$  Área da base  $\times$  Altura

**Volume de uma esfera:**  $\frac{4}{3} \pi r^3$  ( $r$  – raio)

## Progressões

Soma dos  $n$  primeiros termos de uma progressão  $(u_n)$ :

**Progressão aritmética:**  $\frac{u_1 + u_n}{2} \times n$

**Progressão geométrica:**  $u_1 \times \frac{1 - r^n}{1 - r}$

## Trigonometria

$\sin(a + b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$

$\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$

## Complexos

$(\rho e^{i\theta})^n = \rho^n e^{in\theta}$

$\sqrt[n]{\rho e^{i\theta}} = \sqrt[n]{\rho} e^{i \frac{\theta + 2k\pi}{n}}$  ( $k \in \{0, \dots, n-1\}$  e  $n \in \mathbb{N}$ )

## Regras de derivação

$(u + v)' = u' + v'$

$(u v)' = u' v + u v'$

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' v - u v'}{v^2}$

$(u^n)' = n u^{n-1} u' (n \in \mathbb{R})$

$(\sin u)' = u' \cos u$

$(\cos u)' = -u' \sin u$

$(\tan u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$

$(e^u)' = u' e^u$

$(a^u)' = u' a^u \ln a \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$

$(\log_a u)' = \frac{u'}{u \ln a} \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

## Limites notáveis

$\lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e \quad (n \in \mathbb{N})$

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^p} = +\infty \quad (p \in \mathbb{R})$

1. Um hotel do centro da cidade do Porto, que promove atividades turísticas, é procurado por turistas de várias nacionalidades.

Num certo dia, o hotel organizou uma visita ao Palácio da Bolsa e uma viagem de barco rabelo no rio Douro. Sabe-se que:

- 50% dos hóspedes participaram na viagem de barco rabelo no rio Douro;
- 10% dos hóspedes que participaram na viagem de barco rabelo no rio Douro não participaram na visita ao Palácio da Bolsa;
- 20% dos hóspedes não participaram na visita ao Palácio da Bolsa nem participaram na viagem de barco rabelo no rio Douro.

- 1.1. Nesse dia, escolheu-se, ao acaso, um dos hóspedes do hotel e verificou-se que tinha participado na visita ao Palácio da Bolsa.

Qual é a probabilidade de o hóspede escolhido não ter participado na viagem de barco rabelo no rio Douro? Apresente o resultado sob a forma de percentagem.

- 1.2. Nesse dia, escolheu-se, ao acaso, uma comissão constituída por dois hóspedes desse hotel. Sabe-se que a probabilidade de a comissão escolhida ser constituída por hóspedes que não participaram em nenhuma das duas atividades é igual a  $\frac{3}{95}$ .

Seja  $n$  o número total de hóspedes desse hotel.

Determine o valor de  $n$ .

Para resolver este problema, percorra as seguintes etapas:

- equacione o problema;
- resolva a equação, sem utilizar a calculadora, a não ser para efetuar eventuais cálculos numéricos.

2. Seja  $S$ , conjunto finito, o espaço amostral associado a uma certa experiência aleatória.

Sejam  $A$  e  $B$  dois acontecimentos ( $A \subset S$  e  $B \subset S$ ).

Sabe-se que:

- $P(B) \neq 0$
- $P(A|B) = \frac{5}{6}$
- $P(\bar{A} \cup \bar{B}) = 3P(A \cap B)$

Qual é o valor de  $P(\bar{A} \cap B)$ ?

- (A) 0,05  
(B) 0,1  
(C) 0,25  
(D) 0,6

3. Num encontro de antigos elementos de uma determinada universidade participaram 55 pessoas: 40 antigos alunos, 10 antigos professores e 5 antigos funcionários.

3.1. Para organizar o próximo encontro, foram sorteados os nomes de seis destes participantes aleatoriamente.

Qual é a probabilidade de terem sido selecionados pelo menos dois antigos professores? Apresente o resultado na forma de percentagem, arredondado às unidades.

3.2. Para tirar uma fotografia de grupo, todos os participantes se distribuíram por quatro filas e colocaram-se lado a lado. De quantas maneiras se podem colocar todos os participantes de modo que nas duas filas de trás fiquem apenas antigos alunos (20 em cada fila), na fila seguinte fiquem todos os professores e na primeira fila fiquem os antigos funcionários?

(A)  ${}^{40}A_{20} \times 10! \times 5!$

(B)  $(20!)^2 \times 10! \times 5!$

(C)  $2 \times 20! \times 10! \times 5!$

(D)  ${}^{40}C_{20} \times (20!)^2 \times 10! \times 5!$

3.3. Considere a experiência aleatória que consiste em escolher, ao acaso, cinco desses cinquenta e cinco participantes.

Sejam  $A$  e  $B$  os acontecimentos:

$A$ : “Exatamente três dos participantes escolhidos são antigos professores.”

$B$ : “Pelo menos um dos participantes escolhido é antigo aluno.”

Determine, sem usar a fórmula da probabilidade condicionada, o valor de  $P(A|\overline{B})$ .

Numa pequena composição, justifique a sua resposta.

Na sua resposta, deve:

- explicar o significado de  $P(A|\overline{B})$  no contexto do problema;
- fazer referência à regra de Laplace;
- explicar o número de casos possíveis;
- explicar o número de casos favoráveis;
- apresentar o valor de  $P(A|\overline{B})$  na forma de fração irredutível.

4. Uma certa linha do triângulo de Pascal tem 2024 elementos.

Escolhendo, ao acaso, dois elementos desta linha, qual é a probabilidade de o seu produto ser 2023?

(A)  $\frac{4}{2\,045\,253}$

(B)  $\frac{8}{2\,045\,253}$

(C)  $\frac{1}{511\,819}$

(D)  $\frac{2}{511\,819}$

5. O Pedro tem na mochila cromos da coleção oficial do campeonato do mundo de futebol Qatar 2022.

Os cromos são todos indistinguíveis ao tato e o Pedro só tem na mochila cromos de dois tipos:  $x$  cromos da seleção de futebol de Portugal e  $y$  cromos da seleção de futebol do Brasil.

Retiraram-se ao acaso, sucessivamente e sem reposição, dois cromos da mochila.

Sejam  $A$  e  $B$  os acontecimentos:

$A$ : “O primeiro cromo retirado é da seleção portuguesa.”

$B$ : “O segundo cromo retirado é da seleção brasileira.”

Sabe-se que  $5P(A \cap B) = P(A)$ .

Justifique que, inicialmente, existia um número ímpar de cromos da seleção portuguesa na mochila do Pedro.

6. Considere um determinado número real  $a$  e a função  $f$ , de domínio  $\mathbb{R}$ , da qual se sabe que:

- $f$  é contínua;
- $f(a) > a + 2$ ;
- $f(a + 1) < a + 3$ .

Mostre que o gráfico da função  $f$  e a reta definida por  $y = x + 2$  se interseitam em pelo menos um ponto cuja abcissa pertence ao intervalo  $]a, a + 1[$ .

7. Seja  $h$  a função, de domínio  $\mathbb{R}$ , definida por:

$$h(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{4x^2 + x + 4} - 3x}{x - 1} & \text{se } x < 1 \\ -\frac{3}{2} & \text{se } x = 1 \\ \frac{x^2 + x - 2}{x - x^3} & \text{se } x > 1 \end{cases}$$

Resolva os itens seguintes sem recorrer à calculadora.

7.1. Averigue se a função  $h$  é contínua em  $x = 1$ .

7.2. Estude a função  $h$  quanto à existência de assíntotas ao seu gráfico paralelas aos eixos coordenados e, caso existam, escreva as suas equações.

8. Considere duas funções  $f$  e  $g$ , de domínio  $\mathbb{R}^+$ . Sabe-se que:

- a reta de equação  $y = -2x + 1$  é assíntota ao gráfico da função  $f$ ;
- a função  $g$  é definida por  $g(x) = \frac{(f(x)+2x)x^2}{(f(x))^2}$ .

Mostre que o gráfico da função  $g$  tem uma assíntota horizontal

9. Seja  $k$  um número real.

Considere a função polinomial  $f$  definida, em  $\mathbb{R}$ , por  $f(x) = \frac{1}{12}x^4 + \frac{k}{3}x^3 + \frac{k^2}{2}x^2 + 5x + 9$ .

9.1. Considere  $k = 1$ .

Qual é a equação reduzida da reta tangente ao gráfico de  $f$  no ponto de abscissa 0?

- (A)  $y = -5x + 9$   
 (B)  $y = 5x + 9$   
 (C)  $y = x + 5$   
 (D)  $y = -x + 5$

9.2. Mostre que, para qualquer valor de  $k$ , o gráfico de  $f$  não admite pontos de inflexão.

10. Considere a sucessão  $(u_n)$  de termo geral  $u_n = -\frac{1}{1-2^n}$ .

Seja  $f$  a função, de domínio  $\mathbb{R}$ , definida por:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & \text{se } x > 0 \\ \cos x - 1 & \text{se } x \leq 0 \end{cases}$$

O  $\lim f(u_n)$  é igual a:

- (A)  $-\infty$                       (B) 0                      (C) 1                      (D)  $+\infty$

**FIM**

**COTAÇÕES**

Item															
Cotação (em pontos)															
1.1.	1.2.	2.	3.1.	3.2.	3.3.	4.	5.	6.	7.1.	7.2.	8.	9.1.	9.2.	10.	TOTAL
15	15	10	15	10	15	10	15	15	15	15	15	10	15	10	200