Preparação para exame

12.º Ano de Escolaridade | Turma G-K

PROBABILIDADES E CÁLCULO COMBINATÓRIO

1. Num saco existem vinte cartões numerados e indistinguíveis ao tato, sendo doze com numeração par e oito com numeração ímpar. Considera a experiência aleatória que consiste em extrair, de um a só vez, oito cartões do saco e observar os números saídos. A probabilidade de saírem pelo menos seis cartões com numeração par é dada por $\frac{{}^{12}C_6 \times {}^8C_2 + {}^{12}C_7 \times {}^8C_1 + {}^{12}C_8}{{}^{20}C_8}$
Numa composição, justifica-a.

2. Por hipótese A e B são acontecimentos independentes, então, $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$.
Pretende-se $P\left(\overline{A} \cap \overline{B}\right)$
Ora,
$P\left(\overline{A} \cap \overline{B}\right) = P\left(\overline{A \cup B}\right) = 1 - P(A \cup B) = 1 - [P(A) + P(B) - P(A \cap B)] =$
$= 1 - P(A) - P(B) + P(A \cap B) = P(\overline{A}) - P(B) + P(A) \times P(B) =$
$= P(\overline{A}) + [P(A) - 1] \times P(B)$

FUNÇÃO EXPONENCIAL

3. 3.1. $f\left(\frac{x}{2}\right) = -2 + \frac{1}{e} \Leftrightarrow -2 + e^{x-2} = -2 + \frac{1}{e} \Leftrightarrow e^{x-2} = e^{-1} \Leftrightarrow x - 2 = -1 \Leftrightarrow x = 1$
$C.S. = \{1\}$

3.2. $f(x+1) = e^x \Leftrightarrow -2 + e^{2(x+1)-2} = e^x \Leftrightarrow e^{2x} - e^x - 2 = 0 \Leftrightarrow [e^x]^2 - e^x - 2 = 0$
Fazendo a mudança de variável $y = e^x$, vem,

$$y^2 - y - 2 = 0 \Leftrightarrow y = \frac{1 \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \times 1 \times (-2)}}{2 \times 1} \Leftrightarrow y = -1 \vee y = 2$$
então,
$e^x = -1 \vee e^x = 2 \Leftrightarrow$ equação impossível $\vee x = \ln(2) \Leftrightarrow \vee x = \ln(2)$
$C.S. = \{\ln(2)\}$

3.3. Seja $x = f^{-1}(-2+e)$
então, $f(x) = -2 + e \Leftrightarrow -2 + e^{2x-2} = -2 + e \Leftrightarrow e^{2x-2} = e \Leftrightarrow 2x - 2 = 1 \Leftrightarrow x = \frac{3}{2}$
Logo, $f^{-1}(-2+e) = \frac{3}{2}$

4. 4.1. A função g é injetiva se e só se $\forall x_1, x_2 \in D_g, x_1 \neq x_2 \Rightarrow g(x_1) \neq g(x_2)$.
Demonstração por contrarrecíproco

$g(x_1) = g(x_2) \Leftrightarrow 1 + 2^{-x_1} = 1 + 2^{-x_2} \Leftrightarrow 2^{-x_1} = 2^{-x_2} \Leftrightarrow -x_1 = -x_2 \Leftrightarrow x_1 = x_2$, c.q.d.
Logo, a função g é injetiva

4.2. A função f é estritamente crescente em todo o seu domínio se e só se
$\forall x_1, x_2 \in D_f, x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$.

Demonstração por contrarrecíproco

$f(x_1) \geq f(x_2) \Leftrightarrow 1+2^{x_1-2} \geq 1+2^{x_2-2} \Leftrightarrow 2^{x_1-2} \geq 2^{x_2-2} \Leftrightarrow x_1-2 \geq x_2-2 \Leftrightarrow x_1 \geq x_2$, c.q.d.

Logo, a função f é estritamente crescente em todo o seu domínio

4.3. .

Função f

$2^{x-2} > 0, \forall x \in \mathbb{R}$
$\therefore 1+2^{x-2} > 1, \forall x \in \mathbb{R}$
$\therefore f(x) > 1, \forall x \in D_f$
Logo,$D'_f =]1;+\infty[$

Função g

$2^{-x} > 0, \forall x \in \mathbb{R}$
$\therefore 1+2^{-x} > 1, \forall x \in \mathbb{R}$
$\therefore g(x) > 1, \forall x \in D_g$
Logo,$D'_g =]1;+\infty[$

Conclui–se, assim, que as duas funções têm o mesmo contradomínio

4.4. Função f

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}\left(1+2^{x-2}\right) = 1+2^{-\infty} = 1+\frac{1}{2^{+\infty}} = 1+\frac{1}{+\infty} = 1+0 = 1$$

Logo, a reta de equação $y=1$ é assíntota horizontal do gráfico da função f

Função g

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(1+2^{-x}\right) = 1+2^{-\infty} = 1+\frac{1}{2^{+\infty}} = 1+\frac{1}{+\infty} = 1+0 = 1$$

Logo, a reta de equação $y=1$ é assíntota horizontal do gráfico da função g

4.5. Determinemos as coordenadas dos pontos, vértices do triângulo

Ponto $B(0;f(0))$

$f(0) = 1+2^{0-2} = 1+\frac{1}{2^2} = \frac{5}{4}$
logo, $B\left(0;\frac{5}{4}\right)$

Ponto $C(0;g(0))$

$g(0) = 1+2^0 = 1+1 = 2$
logo, $C(0;2)$

Ponto A

$f(x) = g(x) \Leftrightarrow 1+2^{x-2} = 1+2^{-x} \Leftrightarrow 2^{x-2} = 2^{-x} \Leftrightarrow x-2 = -x \Leftrightarrow x = 1$

$g(1) = 1+2^{-1} = 1+\frac{1}{2} = \frac{3}{2}$
logo, $A\left(1;\frac{3}{2}\right)$

Então, $A_{[ABC]} = \dfrac{\overline{BC} \times |abcissadopontoA|}{2} = \dfrac{\left(2 - \dfrac{5}{4}\right) \times 1}{2} = \dfrac{3}{8}\ u.a.$