



Matemática A

12.º Ano de Escolaridade | outubro de 2022

Turma: 12ºH

1. $\lim_{x \rightarrow -3^-} \frac{-2x - 6}{(x + 3)^2} = \left(\frac{0}{0}\right) \lim_{x \rightarrow -3^-} \frac{-2(x + 3)}{(x + 3)^2} = \lim_{x \rightarrow -3^-} \frac{-2}{x + 3} = \frac{-2}{0^-} = +\infty$

Resposta: (A)

2. $D_f = \{x \in \mathbb{R} : x^2 + 2x + 1 \neq 0\} = \{x \in \mathbb{R} : x \neq -1\} = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$

Cálculo auxiliar

$$x^2 + 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow (x + 1)^2 = 0 \Leftrightarrow x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = -1$$

Por outro lado, sabe-se que -1 é zero do polinómio $x^3 + x^2 + x + 1$

Então,

$$x^3 + 4x^2 + 5x + 2 = (x + 1)Q(x)$$

Pela regra de Ruffini, vem,

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 4 & 5 & 2 \\ -1 & & -1 & -2 & -2 \\ \hline & 1 & 3 & 2 & 0 \end{array}$$

Assim,

$$Q(x) = x^2 + 3x + 2$$

Logo,

$$x^3 + x^2 + x + 1 = (x + 1)(x^2 + 3x + 2)$$

Assim,

$$f(x) = \frac{x^3 + x^2 + x + 1}{x^2 + 2x + 1} = \frac{(x + 1)(x^2 + 3x + 2)}{(x + 1)^2} = \frac{(x + 1)(x + 1)(x + 2)}{(x + 1)^2} = x + 2, \text{ com } x \neq -1$$

3. .

3.1. .

3.1.1. $4 \in D_f$

Para existir $\lim_{x \rightarrow 4} f(x)$, deve ter-se $\lim_{x \rightarrow 4^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 4^+} f(x) = f(4)$

Ora,

- $\lim_{x \rightarrow 4^-} f(x) = -1$
- $\lim_{x \rightarrow 4^+} f(x) = -1$
- $f(4) = 3$

Como, $\lim_{x \rightarrow 4^-} f(x) \neq f(4)$ e $\lim_{x \rightarrow 4^+} f(x) \neq f(4)$, então, não existe $\lim_{x \rightarrow 4} f(x)$

3.1.2. $2 \notin D_f$ e é ponto aderente de D_f

Para existir $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$, deve ter-se $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$

Ora,

- $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = -1$
- $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = -1$

Como, $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$, então, existe $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$, e o seu valor é -1

3.2. Ora,

$$a_n = -2 - \frac{2}{n+2} < -2, \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\lim a_n = \lim \left(-2 - \frac{2}{n+2} \right) = -2^-$$

Assim, $\lim f(a_n) = 3$

Resposta: (B)

$$4. D_g = \{x \in \mathbb{R} : f(x) \geq 0\} = \{x \in \mathbb{R} : x \leq 0 \vee x \geq 2\} =]-\infty; 0] \cup [2; +\infty[$$

Cálculo auxiliar

$$f(x) \geq 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x \geq 0$$

$$\bullet x^2 - 2x = 0 \Leftrightarrow x(x-2) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 2$$

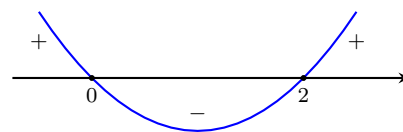
• **Sinal:**

Como se trata de uma função quadrática, estuda-se o sinal pela representação gráfica da parábola

Assim,

$$x^2 - 2x > 0 \Leftrightarrow x < 0 \vee x > 2$$

$$x^2 - 2x < 0 \Leftrightarrow 0 < x < 2$$



Resposta: (C)

5. .

5.1. Para toda a sucessão (a_n) , tal que $a_n \in D_f$ e $\lim a_n = -2$, tem-se,

$$\lim f(a_n) = \lim \frac{2a_n}{(a_n)^2 + 4a_n} = \frac{2 \times \lim a_n}{(\lim a_n)^2 + 4 \times \lim a_n} = \frac{2 \times (-2)}{(-2)^2 + 4 \times (-2)} = \frac{-4}{-4} = 1$$

Assim,

$$\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = 1$$

$$5.2. f(x) \leq \frac{1}{x} \Leftrightarrow \frac{2x}{x^2 + 4x} \leq \frac{1}{x} \Leftrightarrow \frac{2x}{x(x+4)} - \frac{1}{x} \leq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{2x}{x(x+4)} - \frac{x+4}{x(x+4)} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{2x - (x+4)}{x(x+4)} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{x-4}{x(x+4)} \leq 0$$

\rightarrow **Numerador:**

$$\textbf{Zeros: } x - 4 = 0 \Leftrightarrow x = 4$$

Sinal:

$$x - 4 > 0 \Leftrightarrow x > 4$$

$$x - 4 < 0 \Leftrightarrow x < 4$$

\rightarrow **Denominador**

$$\textbf{Zeros: } x(x+4) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x + 4 = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = -4$$

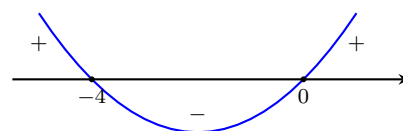
Sinal:

Como se trata de uma função quadrática, estuda-se o sinal pela representação gráfica da parábola

Assim,

$$x(x+4) > 0 \Leftrightarrow x < -4 \vee x > 0$$

$$x(x+4) < 0 \Leftrightarrow -4 < x < 0$$



Quadro de sinais

x	$-\infty$	-4		0		4	$+\infty$
$x - 4$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$x(x+4)$	$+$	0	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$\frac{x-4}{x(x+4)}$	$-$	$n.d.$	$+$	$n.d.$	$-$	0	$+$

Assim,

$$\frac{x-4}{x(x+4)} \leq 0 \Leftrightarrow x < -4 \vee 0 < x \leq 4$$

Portanto,

$$C.S. =]-\infty; -4[\cup]0; 4]$$

$$5.3. D_g = \{x \in \mathbb{R} : 4x + 5 \geq 0 \wedge \sqrt{4x+5} - 3 \neq 0\} = \left\{x \in \mathbb{R} : x \geq -\frac{5}{4} \wedge x \neq 1\right\} = \left[-\frac{5}{4}; 1[\cup]1; +\infty[\right.$$

Cálculo auxiliar

$$\begin{aligned} & \bullet 4x + 5 \geq 0 \Leftrightarrow 4x \geq -5 \Leftrightarrow x \geq -\frac{5}{4} \\ & \bullet \sqrt{4x+5} - 3 = 0 \wedge 4x + 5 \geq 0 \Leftrightarrow \sqrt{4x+5} = 3 \wedge x \geq -\frac{5}{4} \\ & \Rightarrow (\sqrt{4x+5})^2 = 3^2 \wedge x \geq -\frac{5}{4} \Leftrightarrow 4x + 5 = 9 \wedge x \geq -\frac{5}{4} \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow 4x = 9 - 5 \wedge x \geq -\frac{5}{4} \Leftrightarrow 4x = 4 \wedge x \geq -\frac{5}{4} \Leftrightarrow x = 1 \wedge x \geq -\frac{5}{4} \\ & \Leftrightarrow x = 1 \end{aligned}$$

Verificação:

$$x = 1 \mapsto \sqrt{4 \times 1 + 5} - 3 = 0$$

$$\therefore \sqrt{9} - 3 = 0 = 0$$

$$\therefore 3 - 3 = 0$$

$$\therefore 0 = 0 \text{ (Verdadeiro)}$$

Logo, 1 é solução da equação dada

6. .

$$6.1. D_h = \{x \in \mathbb{R} : g(x) \neq 0\} = \{x \in \mathbb{R} : x \neq -2 \wedge x \neq 0 \wedge x \neq 3\} = \mathbb{R} \setminus \{-2; 0; 3\}$$

6.2. Elaborando um quadro de sinal, vem,

x	$-\infty$	-2		0		3	$+\infty$
$f(x)$	$+$	$+$	$+$	0	$-$	0	$+$
$g(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$
$\frac{g(x)}{f(x)}$	$+$	0	$-$	$n.d.$	$-$	$n.d.$	$-$

Assim,

$$\frac{g(x)}{f(x)} \leq 0 \Leftrightarrow -2 \leq x < 0 \vee 0 < x < 3 \vee x > 3$$

Portanto,

$$C.S. = [-2; 0[\cup]0; 3[\cup]3; +\infty[$$

$$\begin{aligned} 7. \lim_{x \rightarrow 1} \left[\frac{1}{x^3 - 1} \times (2x^2 + 3x - 5) \right] &= (0 \times \infty) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2 + 3x - 5}{x^3 - 1} = \left(\frac{0}{0} \right) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(2x+5)}{(x-1)(x^2+x+1)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x+5}{x^2+x+1} = \frac{7}{3} \end{aligned}$$

Cálculo auxiliar

Sabe-se que 1 é zero do polinómio $2x^2 + 3x - 5$

Então,

$$2x^2 + 3x - 5 = (x - 1)Q(x)$$

Pela regra de Ruffini, vem,

$$\begin{array}{r|rr|r} & 2 & 3 & -5 \\ 1 & & 2 & 5 \\ \hline & 2 & 5 & 0 \end{array}$$

Assim,

$$Q(x) = 2x + 5$$

Logo,

$$2x^2 + 3x - 5 = (x - 1)(2x + 5)$$

Sabe-se que 1 é zero do polinómio $x^3 - 1$

Então,

$$x^3 - 1 = (x - 1)Q(x)$$

Pela regra de Ruffini, vem,

$$\begin{array}{r|rrrr|r} & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & & 1 & 1 & 1 \\ \hline & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}$$

Assim,

$$Q(x) = x^2 + x + 1$$

Logo,

$$x^3 - 1 = (x - 1)(x^2 + x + 1)$$

Resposta: (D)

8. $3 \in D_f$

A função f é contínua em $x = 3$, se existir $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$, ou seja,

$$\text{se } \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = f(3)$$

Ora,

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{3x^2 - 6x - 9}{x^2 - 7x + 12} = \left(\frac{0}{0}\right) \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{(x-3)(3x+3)}{(x-3)(x-4)} = \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{3x+3}{x-4} = -12$$

Cálculo auxiliar

Sabe-se que 3 é zero do polinómio $3x^2 - 6x - 9$

Então,

$$3x^2 - 6x - 9 = (x - 3)Q(x)$$

Pela regra de Ruffini, vem,

$$\begin{array}{r|rr|r} 3 & 3 & -6 & -9 \\ & & 9 & 9 \\ \hline & 3 & 3 & 0 \end{array}$$

Assim,

$$Q(x) = 3x + 3$$

Logo,

$$3x^2 - 6x - 9 = (x - 3)(3x + 3)$$

Sabe-se que 3 é zero do polinómio $x^2 - 7x + 12$

Então,

$$x^2 - 7x + 12 = (x - 3)Q(x)$$

Pela regra de Ruffini, vem,

$$\begin{array}{r|rr|r} 3 & 1 & -7 & 12 \\ & & 3 & -12 \\ \hline & 1 & -4 & 0 \end{array}$$

Assim,

$$Q(x) = x - 4$$

Logo,

$$x^2 - 7x + 12 = (x - 3)(x - 4)$$

$$\begin{aligned} \bullet \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{\sqrt{x+6}-3}{x-3} \stackrel{(\frac{0}{0})}{=} \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{(\sqrt{x+6}-3)(\sqrt{x+6}+3)}{(x-3)(\sqrt{x+6}+3)} = \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{(\sqrt{x+6})^2 - 3^2}{(x-3)(\sqrt{x+6}+3)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{x+6-9}{(x-3)(\sqrt{x+6}+3)} = \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{x-3}{(x-3)(\sqrt{x+6}+3)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{1}{\sqrt{x+6}+3} = \frac{1}{6} \\ \bullet f(3) &= -2k + 3 \end{aligned}$$

Como $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x)$, então, não existe $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$

Ou seja, não existe k , para o qual a função f é contínua em $x = 3$

$$\begin{aligned} 9. \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2+5}+3x}{x+2} &\stackrel{(\frac{\infty}{\infty})}{=} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2\left(1+\frac{5}{x^2}\right)}+3x}{x+2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{|x|\sqrt{1+\frac{5}{x^2}}+3x}{x+2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x\sqrt{1+\frac{5}{x^2}}+3x}{x+2} = \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x\left(-\sqrt{1+\frac{5}{x^2}}+3\right)}{x\left(1+\frac{2}{x}\right)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-\sqrt{1+\frac{5}{x^2}}+3}{1+\frac{2}{x}} = \frac{-\sqrt{1+\frac{5}{+\infty}}+3}{1+\frac{2}{-\infty}} = \frac{-\sqrt{1+0}+3}{1-0} = 2 \end{aligned}$$