Atividade

34 Classifica de: designação, expressão designatória, proposição ou condição.

34.1. $4x$

34.2. $5 > 3$

34.3. $2\pi r = 10$

34.4. 4π

34.5. $3n + 1$

34.6. $3n + 1 < 15$

34.7. A bicicleta tem duas rodas.

34.8. 15 é múltiplo de 6.

34.9. $|x| > 3$

34.10. A soma dos ângulos internos, em graus, de um polígono com n lados é igual a $(n-2) \times 180$.

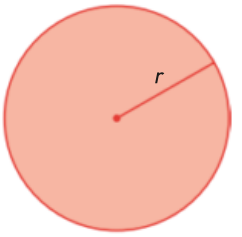
2. Condições e conjuntos

NEMA10-P1 © Porto Editora

2.1. Expressões com variáveis

Considere-se um círculo de raio 2.
O valor da área desse círculo é dado $\pi \times 2^2$, ou seja, 4π.

Se considerarmos os círculos de raio r, sendo r um número real positivo, isto é, $r \in \mathbb{R}^+$, a área desses círculos é dada por πr^2.



Neste caso, r é uma variável que pode designar qualquer número real positivo, sendo πr^2 uma **expressão com variável** r.

Repara que, substituindo o raio, por exemplo, por 5, a expressão πr^2 converte-se na designação 25π.

De igual forma, substituindo r por qualquer número real positivo, a expressão πr^2 converte-se numa designação.

Diz-se que πr^2 é uma **expressão designatória**.

Ao conjunto de valores que a variável r pode tomar dá-se o nome de **domínio** da variável r.

Dá-se o nome de **expressão designatória** a uma expressão $p(x)$ envolvendo uma variável x tal que, substituindo x por um objeto a, obtém-se uma designação $p(a)$.

Considere-se a expressão $\pi r^2 > 20$.

Continua a ter-se uma expressão com variável r, mas cada concretização da variável converte a expressão numa proposição.

Assim, substituindo o raio, por exemplo, por 3, a expressão $\pi r^2 > 20$ converte-se na proposição $9\pi > 20$, que é verdadeira.

De igual forma, substituindo r por qualquer número real positivo, a expressão $\pi r^2 > 20$ converte-se numa proposição.

Diz-se que $\pi r^2 > 20$ é uma **expressão proposicional ou condição.**

Dá-se o nome de **expressão proposicional ou condição** a uma expressão $p(x)$ envolvendo uma variável x tal que, substituindo x por um objeto a, obtém-se uma proposição $p(a)$.

INFORMAÇÃO

Domínio
Ao conjunto de valores que uma variável de uma expressão designatória ou de uma condição toma dá-se o nome de domínio.

Exclusivo do Professor

Resolução

Atividade

2.2. Quantificadores: universal e existencial

2.2.1. Quantificador universal

Considera a condição $p(x): \ x = x$.

A substituição de x por qualquer valor converte a condição $p(x)$ numa proposição verdadeira.

Diz-se que $p(x)$ é uma **condição universal** e a expressão "qualquer que seja x, $x = x$" é uma proposição verdadeira.

A expressão "qualquer que seja" representa-se pelo símbolo $\forall$ (designado por **quantificador universal**) e aplicado a uma condição transforma-a numa proposição.

Neste caso, a proposição $\forall x, \ x = x$ ou $\forall x, \ p(x)$ é verdadeira.

Quando se escreve uma condição está implícito um universo onde a condição dada faça sentido.

Exemplo

Seja $q(x)$ a condição $2x + x = 3x$. Esta condição faz sentido no conjunto dos números reais.

A proposição $\forall x, \ 2x + x = 3x$ é verdadeira. **Qualquer** concretização da variável x converte a condição $q(x)$ numa proposição verdadeira.

Diz-se que $2x + x = 3x$ é uma **condição universal**.

A proposição $\forall x, \ p(x)$ é verdadeira quando e apenas quando se obtém uma proposição verdadeira ao se substituir x em $p(x)$ por qualquer objeto arbitrário.
A **condição** $p(x)$ diz-se **universal** se e só se a proposição $\forall x, \ p(x)$ é verdadeira.

No geral, dada uma condição $q(x)$ para decidir qual é o valor lógico da proposição $\forall x, \ q(x)$, é necessário conhecer o domínio, isto é, o conjunto de elementos que a variável toma.

Exemplo

Considera a condição $q(x): \ x^2 > 0$.

Qual é o valor lógico da proposição $\forall x, \ x^2 > 0$?

A resposta a esta questão depende do domínio.

35 Indica, no conjunto dos números reais, o valor lógico de cada uma das proposições.

35.1. $\forall x, \ x - 2 < x$

35.2. $\forall x, \ x^2 + 1 > 0$

Exclusivo do Professor

Resolução

NEMA10-P1 © Porto Editora

Atividade

36 Representando x qualquer número real, considera as condições:

I : $x \in \{\ \}$ (conjunto vazio)

II : $x^2 = x \times x$

III : $x \notin \mathbb{Q}$

IV : $x \neq x + 2$

36.1. Das condições dadas indica as que são universais.

36.2. Das condições dadas indica, justificando, as que não são universais.

37 Indica o valor lógico de cada uma das proposições:

37.1. $\forall x \in \mathbb{Z},\ x^2 > x$

37.2. $\forall x \in \mathbb{Z}^-,\ x^2 > x$

37.3. $\forall n \in \mathbb{N},\ \frac{n}{2} \in \mathbb{N}$

37.4. $\forall n \in \mathbb{N},\ n^2 \in \mathbb{N}$

38 Indica o valor lógico de cada uma das proposições:

38.1. $\exists x \in \mathbb{N}$: x é ímpar e divisível por 2.

38.2. No conjunto dos triângulos, existe um triângulo com todos os ângulos externos agudos.

38.3. $\exists x \in \mathbb{R}$: $x^2 = -3$

Dada uma condição $p(x)$ e um conjunto U, representa-se a proposição $\forall x,\ x \in U \Longrightarrow p(x)$ por $\forall x \in U,\ p(x)$, que é verdadeira quando e apenas quando se obtém uma proposição verdadeira sempre que se substitui x em $p(x)$ por qualquer objeto pertencente a U.

A **condição** $p(x)$ diz-se **universal em** U se e só se a proposição $\forall x \in U,\ p(x)$ é verdadeira.

Exemplo

- Em $\mathbb{N}$, a proposição $\forall x \in \mathbb{N},\ x^2 > 0$ é verdadeira.

  A condição $q(x)$: $x^2 > 0$ diz-se universal em $\mathbb{N}$.

- Em $\mathbb{Z}$, a proposição $\forall x \in \mathbb{Z},\ x^2 > 0$ é falsa.

  Repara que se $x = 0$, obtém-se $0 > 0$, que é uma proposição falsa.

- Em $\mathbb{Q}^-$, a proposição $\forall x \in \mathbb{Q}^-,\ x^2 > 0$ é verdadeira.

  A condição $q(x)$: $x^2 > 0$ diz-se universal em $\mathbb{Q}^-$.

2.2.2. Quantificador existencial

Considera, no universo dos números, a condição $p(x)$: $x^2 = x$.

A condição $p(x)$ é universal?

A proposição $\forall x,\ x^2 = x$ é falsa.

Basta observar que, se for atribuído a x o valor 2, tem-se $2^2 = 2$, que é uma proposição falsa.

No entanto, existe pelo menos um valor de x para o qual a condição $p(x)$ é convertida numa proposição verdadeira.

Neste caso, basta substituir x por 1 e obtém-se $1^2 = 1$, uma proposição verdadeira.

Diz-se que a **condição é possível**.

A expressão "**existe pelo menos um**" representa-se pelo símbolo $\exists$ (designa-se por **quantificador existencial**) e, aplicado a uma condição, converte-a numa proposição.

Dada uma condição $p(x)$, a proposição $\exists x$: $p(x)$ é verdadeira quando e apenas quando para, pelo menos, um objeto a, $p(a)$ for verdadeira.

A **condição** $p(x)$ diz-se **possível** se e só se a proposição $\exists x$: $p(x)$ é verdadeira.

Exclusivo do Professor

Resolução

NEMA10-P1 © Porto Editora

Tal como foi visto para o quantificador universal, dada uma condição $p(x)$, para decidir qual é o valor lógico da proposição $\exists x: p(x)$ é necessário conhecer o domínio da variável x.

Exemplo

Considera a condição $q(x): 2x = 1$.

Qual é o valor lógico da proposição $\exists x: 2x = 1$?

A resposta a esta questão depende do domínio.

- Em $\mathbb{Q}$, a proposição $\exists x: 2x = 1$ é verdadeira.

  Basta substituir x por $\frac{1}{2}$ e obtém-se uma proposição verdadeira.

  A **condição** $q(x)$ é **possível** em $\mathbb{Q}$.

- Em $\mathbb{Z}$, a proposição $\exists x \in \mathbb{Z}: 2x = 1$ é falsa.

  A equação não tem solução em $\mathbb{Z}$.

  Como a condição $q(x)$ não é possível em $\mathbb{Z}$, diz-se **condição impossível** em $\mathbb{Z}$.

Dada uma condição $p(x)$ e um conjunto U, a proposição $\exists x: x \in U \wedge p(x)$ é representada por $\exists x \in U: p(x)$. No caso de ser verdadeira, designa-se $p(x)$ por condição **possível em** U e, no caso contrário, por condição **impossível em** U.

Nota:

– Se uma condição não é possível diz-se **impossível**.

– Se uma condição é **universal**, então é **possível** (domínio não vazio).

Exemplo

- Em $\mathbb{R}$, considera a condição $p(x): x^2 = -3$.

  A proposição $\exists x \in \mathbb{R}: x^2 = -3$ é falsa.

  O quadrado de qualquer número real é não negativo.

  A condição $p(x): x^2 = -3$ é **impossível** em $\mathbb{R}$.

- Considera a condição $q(x): x^2 < 1$

  – Em $\mathbb{N}$, a proposição $\exists x \in \mathbb{N}: x^2 < 1$ é falsa.

  Diz-se que $q(x)$ é **impossível** em $\mathbb{N}$.

  – Em $\mathbb{R}$, a proposição $\exists x \in \mathbb{R}: x^2 < 1$ é verdadeira $\left(\text{basta substituir } x \text{ por } \frac{1}{2}\right)$.

  Diz-se que $q(x)$ é **possível** em $\mathbb{R}$.

39 Representando x qualquer número real, considera as condições:

I: $x^2 < 0$

II: $x < \frac{x}{2}$

III: $(x-1)(x+1) = x^2 - 1$

IV: $x < |x|$

39.1. Das condições dadas indica uma que seja:

a) universal em $\mathbb{R}$;

b) impossível em $\mathbb{R}$.

39.2. Das condições dadas indica, justificando, as que são possíveis não universais.

INFORMAÇÃO

Quando não há ambiguidade quanto ao domínio a considerar, pode omitir-se essa referência.

Exclusivo do Professor

Resolução

NEMA10-P1 © Porto Editora

Vídeo

INFORMAÇÃO

Atendendo a que uma condição $p(x)$, após a substituição da variável x por um objeto a, corresponde a uma proposição $p(a)$, as operações lógicas entre proposições estendem-se naturalmente a condições.

40 No conjunto dos números reais, considera as condições:

$p(x): |x| \geqslant x$

$q(x): x \neq x$

$r(x): -x > 0$

40.1. Classifica cada uma das condições dadas.

40.2. Classifica as condições:

a) $p(x) \vee q(x)$

b) $p(x) \wedge q(x)$

c) $p(x) \vee r(x)$

d) $q(x) \wedge r(x)$

e) $r(x) \vee q(x)$

40.3. Seja $t(x)$ uma condição qualquer. Classifica as condições:

a) $p(x) \vee t(x)$

b) $q(x) \wedge t(x)$

c) $r(x) \vee t(x)$

TAREFA 5

1 Em $\mathbb{R}$, considera as condições $p(x)$, $q(x)$ e $r(x)$ condições tais que:

$p(x): x + 1 > x$; $q(x): x^2 < 0$ e $r(x): x^2 = 4$

1.1. Justifica a afirmação:

a) a condição $p(x)$ é universal;

b) a condição $q(x)$ é impossível;

c) a condição $r(x)$ é possível não universal.

1.2. A condição $p(x)$ é universal. Classifica a condição:

a) $p(x) \vee q(x)$

b) $p(x) \vee r(x)$

c) $p(x) \vee t(x)$, sendo $t(x)$ uma condição qualquer.

1.3. A condição $q(x)$ é impossível. Classifica a condição:

a) $q(x) \wedge p(x)$

b) $q(x) \wedge r(x)$

c) $q(x) \wedge t(x)$, sendo $t(x)$ uma condição qualquer.

1.4. A condição $r(x)$ é possível. Classifica a condição:

a) $r(x) \vee p(x)$

b) $r(x) \vee q(x)$

c) $r(x) \vee t(x)$, sendo $t(x)$ uma condição qualquer.

Das propriedades já estudadas sobre valores lógicos de proposições, sabe-se que:

$a \vee \mathrm{V} = \mathrm{V}$ (V é elemento absorvente da disjunção);

$\mathrm{F} \wedge a = \mathrm{F}$ (F é elemento absorvente da conjunção).

Aplicando estas propriedades às proposições que resultam de concretizações das variáveis das condições, tem-se:

Propriedades:

Dadas condições $p(x)$, $q(x)$, $r(x)$ e $t(x)$, tais que:

$p(x)$ – **condição universal** $q(x)$ – **condição impossível**

$r(x)$ – **condição possível** $t(x)$ – **condição qualquer**

Então, tem-se:

- $p(x) \vee t(x)$ é uma condição universal;
- $q(x) \wedge t(x)$ é uma condição impossível;
- $r(x) \vee t(x)$ é uma condição possível (podendo ser, ou não, universal).

Exclusivo do Professor

Resolução

NEMA10-P1 © Porto Editora

Vídeo

2.2.3. Segundas Leis de De Morgan

A seguir são apresentadas algumas proposições p, todas elas correspondendo a condições quantificadas quer em linguagem simbólica quer em linguagem natural, e as respetivas negações, ou seja, $\sim p$.

Proposição p	Proposição $\sim p$
Todos os alunos da turma **têm** 15 anos.	**Existe pelo menos um** aluno da turma que **não tem** 15 anos.
Existe pelo menos um aluno da turma que **não pratica** natação.	**Todos** os alunos da turma **praticam** natação.
Todos os números naturais **são pares**.	**Existe pelo menos um** número natural que **não é par**.
$\forall n \in \mathbb{N}$, n é par	$\exists n \in \mathbb{N}$: n não é par
Existe um número natural **que é** número primo.	**Todos** os números naturais **não são** números primos.
$\exists n \in \mathbb{N}$: n é primo	$\forall n \in \mathbb{N}$, n não é primo
$\forall x$, $p(x)$	$\exists x$: $\sim p(x)$
$\exists x$: $q(x)$	$\forall x$, $\sim q(x)$

Repara que a negação transforma:

- o quantificador universal no quantificador existencial, seguido da negação;
- o quantificador existencial no quantificador universal, seguido da negação.

Repara que a negação de uma condição $p(x)$ é a condição $\sim p(x)$ que, quando a variável x é substituída por um objeto a, corresponde à negação $\sim p(a)$ da proposição $p(a)$.

No caso geral:

Segundas leis de De Morgan

- $\sim(\forall x,\ p(x)) \Leftrightarrow \exists x : \sim p(x)$
- $\sim(\exists x :\ p(x)) \Leftrightarrow \forall x,\ \sim p(x)$

Exemplos

- A negação da proposição "Existe um jogador que não correu." é "Todos os jogadores correram.".
- A negação da proposição $\forall x,\ x > 0$ é equivalente a $\exists x :\ x \leqslant 0$, em $\mathbb{R}$.
- A negação da proposição $\exists x :\ x^2 = 7$ é equivalente a $\forall x,\ x^2 \neq 7$, em $\mathbb{R}$.

41 Escreve a negação das seguintes proposições, utilizando as segundas leis de De Morgan.

41.1. Todos os quadriláteros com os lados iguais são quadrados.

41.2. Todas as turmas têm pelo menos 25 alunos.

41.3. Qualquer quadrado perfeito é um número par.

41.4. Na turma A, existe pelo menos um aluno com 16 anos.

41.5. Pelo menos uma intervenção foi positiva.

41.6. Existe pelo menos um número real que não tem inverso.

42 Escreve em linguagem simbólica a negação das proposições em $\mathbb{R}$:

42.1. $\forall x,\ x^2 = x$

42.2. $\forall x,\ x^2 > 0$

42.3. $\forall x,\ x < 3$

42.4. $\exists x :\ x + 1 = 2x$

42.5. $\exists x :\ x \leqslant -2$

42.6. $\exists x,\ \sqrt[3]{x} \in \mathbb{Z}^-$

42.7. $\forall x,\ x < 3 \vee x > 5$

42.8. $\exists x :\ x \geqslant -3 \wedge x < 0$

Exclusivo do Professor

Resolução

NEMA10-P1 © Porto Editora

43 Considera os conjuntos $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{-1, 0, 1\}$ e a condição $p(x): |x| \leqslant 1$.

Mostra que:

43.1. a proposição $\forall x, x \in A \Longrightarrow p(x)$ é falsa;

43.2. a proposição $\exists x: x \in A \wedge p(x)$ é verdadeira;

43.3. a proposição $\forall x, x \in B \Longrightarrow p(x)$ é verdadeira.

44 Considera as condições:

$p(x): x^2$ é quadrado perfeito.

$q(x): \frac{1}{x} \in \mathbb{Z}$

Indica o valor lógico de cada uma das seguintes proposições:

44.1. $\forall x, x \in \mathbb{N} \Longrightarrow p(x)$

44.2. $\forall x, x \in \mathbb{R} \Longrightarrow p(x)$

44.3. $\exists x: x \in \mathbb{R} \wedge q(x)$

- **Se $p(x)$ é uma condição universal, então $\sim p(x)$ é uma condição impossível.**

  Demonstração:

  Seja $p(x)$ uma condição universal.

  Então, a proposição $\forall x, p(x)$ é verdadeira e $\sim(\forall x, p(x))$ é falsa. Mas $\sim(\forall x, p(x)) \Longleftrightarrow \exists x: \sim p(x)$.

  Se a proposição $\exists x: \sim p(x)$ é falsa, então a condição $\sim p(x)$ é impossível.

- **Se $q(x)$ é uma condição impossível, então $\sim q(x)$ é uma condição universal.**

  Demonstração:

  Seja $q(x)$ uma condição impossível.

  Então, a proposição $\exists x: q(x)$ é falsa e $\sim(\exists x: q(x))$ é verdadeira. Mas $\sim(\exists x: q(x)) \Longleftrightarrow \forall x, \sim q(x)$.

  Se a proposição $\forall x, \sim q(x)$ é verdadeira, então a condição $\sim q(x)$ é universal.

Num dado domínio U, uma condição $p(x)$ é universal se e só se $\sim p(x)$ é uma condição impossível.

EXERCÍCIOS

1 Seja $A = \{-3, 2, 4\}$ e a condição $p(x)$ tal que $p(x): x^2 > 3$.

Qual é o valor lógico da proposição $\forall x, x \in A \Longrightarrow p(x)$?

Resolução

Se $x \notin A$, a implicação $x \in A \Longrightarrow p(x)$ é verdadeira.

Se $x \in A$, neste caso, o valor lógico da implicação $x \in A \Longrightarrow x^2 > 3$ também é verdade, conforme se mostra na tabela abaixo.

x	x^2	$x \in A$	$x^2 > 3$	$x \in A \Longrightarrow x^2 > 3$
-3	9	V	V	V
2	4	V	V	V
4	16	V	V	V

A proposição $\forall x, x \in A \Longrightarrow p(x)$ ou, simplesmente, $\forall x \in A, p(x)$ é verdadeira.

Repara que o quantificador universal traduz, neste caso, uma conjunção $((-3)^2 > 3 \wedge 2^2 > 3 \wedge 4^2 > 3)$ que é verdadeira.

NEMA10-P1 © Porto Editora

Exclusivo do Professor

Resolução

Dado um conjunto U e uma condição $p(x)$ diz-se que $p(x)$ é **condição universal** em U se e só se a proposição $\forall x \in U,\ p(x)$ é verdadeira.

Dado um universo U, não vazio, a negação da proposição $\forall x \in U,\ p(x)$ é equivalente a $\exists x \in U : \sim p(x)$.

$$\sim (\forall x \in U,\ p(x)) \Leftrightarrow \exists x \in U : \sim p(x)$$

Contraexemplos

Para justificar que uma proposição do tipo $\forall x \in U,\ p(x)$ é falsa será necessário demonstrar a existência de um elemento de U que converta $p(x)$ numa proposição falsa. Esse elemento de U é designado por **contraexemplo** para a proposição $\forall x \in U,\ p(x)$.

Exemplos

1. A proposição "Todos os gatos são pretos." é falsa.

Contraexemplo: o gato retratado na figura (não é preto).

2. A proposição $\forall x \in \mathbb{R},\ x^2 > 0$ é falsa.
   Contraexemplo: 0 (pois $0 \in \mathbb{R}$ e 0^2 não é maior que 0)

3. A proposição $\forall x \in \mathbb{N},\ \frac{x}{2} \in \mathbb{Z}$ é falsa.
   Contraexemplo: 5 $\left(\text{pois } 5 \in \mathbb{N} \text{ e } \frac{5}{2} \notin \mathbb{Z}\right)$

4. A proposição "Todos os números primos são ímpares." é falsa.
   Contraexemplo: 2 (pois 2 é número primo e não é ímpar).

45 Considera os conjuntos $A = \{-1,\ 1,\ 2\}$, $B = \{1,\ 2,\ 3\}$ e a condição $p(x) :\ 3x < 8$.

45.1. Mostra que $p(x)$ é universal em A.

45.2. Mostra, através de um contraexemplo, que a proposição $\forall x \in B,\ p(x)$ é falsa.

46 Através de um contraexemplo, mostra que as seguintes proposições são falsas.

46.1. Todos os múltiplos de 3 são múltiplos de 9.

46.2. Todos os losangos do plano têm diagonais iguais.

46.3. $\forall n \in \mathbb{N},\ n^2 > 1$

46.4. $\forall x \in \mathbb{R}^-,\ x^3 < x$

NEMA10-P1 © Porto Editora

Exclusivo do Professor

Resolução

Vídeo

47 Considera o conjunto $A = \{1, 2, 4, 6\}$ e as condições:

$p(x): \frac{x}{2} \notin \mathbb{N}$ e $q(x): \frac{x}{5} \in \mathbb{N}$.

Mostra que:

47.1. $p(x)$ é possível em A;

47.2. $q(x)$ é impossível em A.

48 Considera o conjunto $U = \left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}\right\}$ e a condição $r(x): \frac{1}{x} \notin \mathbb{N}$.

48.1. Indica o valor lógico da proposição $\exists x \in U: r(x)$.

48.2. Classifica, em U, a condição $\sim r(x)$.

Exemplo

Seja $B = \{2, 5, 8\}$ e a condição $p(x)$ tal que $p(x): \frac{x}{2} \in \mathbb{N}$.

Qual é o valor lógico da proposição $\exists x, x \in B \wedge p(x)$?

Para responder a esta questão vamos considerar dois casos:

1. Valores de x que não pertencem ao conjunto B.

Neste caso, a conjunção $x \in B \wedge \frac{x}{2} \in \mathbb{N}$ é falsa.

2. Valores de x que pertencem ao conjunto B.

Neste caso, o valor lógico da conjunção $x \in B \wedge \frac{x}{2} \in \mathbb{N}$ é visto na tabela abaixo.

x	$\frac{x}{2}$	$x \in B$	$\frac{x}{2} \in \mathbb{N}$	$x \in B \wedge \frac{x}{2} \in \mathbb{N}$
2	1	V	V	V
5	2,5	V	F	F
8	4	V	V	V

Conclui-se que a conjunção é verdadeira para $x = 2$ e para $x = 8$.

Assim, a proposição $\exists x, x \in B \wedge p(x)$, ou simplesmente $\exists x \in B: p(x)$, é verdadeira e diz-se que $p(x)$ é uma **condição possível em B**. No caso de a proposição $\exists x \in B: p(x)$ ser falsa, diz-se que $p(x)$ é uma **condição impossível em B**.

Repara que o quantificador existencial traduz, neste caso, uma disjunção: $\left(\frac{2}{2} \in \mathbb{N} \vee \frac{5}{2} \in \mathbb{N} \vee \frac{8}{2} \in \mathbb{N}\right)$ que é verdadeira.

Dado um conjunto U e uma condição $p(x)$ diz-se que $p(x)$ é **possível** em U se e só se a proposição $\exists x \in U: p(x)$ é verdadeira. Caso seja falsa, a condição é **impossível** em U.
Nota: O quantificador existencial traduz uma disjunção.

A negação da proposição $\exists x \in U: p(x)$ é equivalente a $\forall x \in U, \sim p(x)$.

$$\sim (\exists x \in U: p(x)) \Leftrightarrow \forall x \in U, \sim p(x)$$

NEMA10-P1 © Porto Editora

Exclusivo do Professor

Resolução

EXERCÍCIOS

1 Considera o conjunto $A = \{-2, 0, 1, 2\}$ e a condição $p(x)$ tal que $p(x): x^3 = 4x$.

1.1. Indica o valor lógico da proposição $\forall x \in A, p(x)$.

1.2. Escreve na forma de implicação quantificada a proposição $\forall x \in A, p(x)$ e utiliza as segundas leis de De Morgan para determinar uma proposição equivalente à respetiva negação, escrevendo-a também na forma abreviada.

Resolução

1.1. A proposição $\forall x \in A, p(x) \Leftrightarrow \forall x \in A, x^3 = 4x$ é falsa.

Contraexemplo, 1. Repara que se $x = 1$, a proposição $1^3 = 4 \times 1$ é falsa.

1.2. $\forall x \in A, p(x) \Leftrightarrow \forall x, x \in A \Rightarrow p(x)$

Aplicando as segundas leis de De Morgan, tem-se:

$\sim (\forall x, x \in A \Rightarrow p(x)) \Leftrightarrow \exists x: \sim (x \in A \Rightarrow p(x)) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \exists x: x \in A \wedge \sim p(x) \Leftrightarrow \exists x: x \in A \wedge x^3 \neq 4x$

2 Considera o conjunto $A = \{-1, 0, 1\}$. Classifica em A a condição:

2.1. $\frac{x}{2} \in A$

2.2. $x^2 > 1$

Resolução

2.1. Na condição $\frac{x}{2} \in A$, substituindo a variável x, obtêm-se as proposições: $\frac{1}{2} \in A$ (falsa), $-\frac{1}{2} \in A$ (falsa) e $\frac{0}{2} \in A$ (verdadeira).

Então, a proposição $\left(\frac{1}{2} \in A \vee -\frac{1}{2} \in A \vee \frac{0}{2} \in A\right)$ é verdadeira e equivalente à proposição $\exists x \in A: \frac{x}{2} \in A$.

Conclui-se que a condição $\frac{x}{2} \in A$ é **possível** em A.

2.2. As proposições: $(-1)^2 > 1$; $0^2 > 1$ e $1^2 > 1$ são falsas.

Ou seja, a proposição $\exists x \in A: x^2 > 1$ é falsa.

Conclui-se que a condição $x^2 > 1$ é **impossível** em A.

49 Considera o conjunto $U = \{-2, 1, 2\}$ e as condições:

$p(x): 3x - 1 < 6$

$q(x): x^2 = 2x$

$r(x): (x^2 - 1)(x^2 - 4) \neq 0$

49.1. Mostra que, em U:

a) $p(x)$ é universal;

b) $q(x)$ é possível não universal;

c) $r(x)$ é impossível.

49.2. Classifica as condições em U:

a) $\sim p(x)$

b) $\sim q(x)$

c) $\sim r(x)$

50 Dadas as condições

$p(x): 4 - x > 0$

$q(x): x - 1 \geqslant 0$

dá exemplo de um conjunto U tal que:

50.1. $p(x)$ seja universal em U;

50.2. $q(x)$ seja impossível em U;

50.3. $p(x)$ e $q(x)$ sejam ambas possíveis não universais em U.

NEMA10-P1 © Porto Editora

Exclusivo do Professor

Resolução

51 Considera os conjuntos:

$A = \left\{-\frac{1}{3}, \frac{3}{4}, \frac{1}{2}\right\}$ e

$B = \{1, 4, 9, 16\}$

51.1. Indica o valor lógico das proposições:

a) $\exists x \in A : x > 1$

b) $\forall x \in B$, x é quadrado perfeito.

c) $\exists x \in B : \sqrt{x}$ é quadrado perfeito.

51.2. Classifica, em A, as condições:

a) $4x^2 = 1$

b) $|x| < 1$

c) $x^2 > 1$

52 Seja $t(x)$ uma condição possível não universal em $\mathbb{N}$.

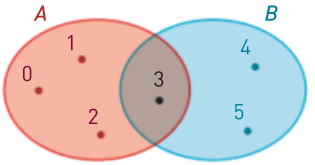
Classifica, em $\mathbb{N}$, as condições:

52.1. $t(x) \wedge x < 0$

52.2. $t(x) \vee \frac{x}{2} \in \mathbb{Z}$

52.3. $t(x) \vee 2x \in \mathbb{N}$

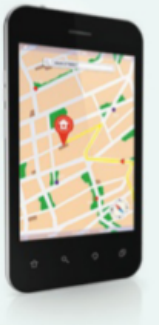
53 Na figura estão representados dois conjuntos A e B.



Existe uma condição $p(x)$ que seja universal em A e impossível em B? Explica.

TAREFA 6

1 Escreve afirmações equivalentes à negação das seguintes proposições, utilizando as segundas leis de De Morgan:



1.1. Existe um museu na cidade que não visitei.

1.2. Todos os museus da cidade têm guia.

1.3. Todas as entrevistas tiveram uma duração superior a 15 minutos.

1.4. Existe um candidato que não reúne as condições mínimas.

2 Considera os conjuntos $A = \{-3, 2, 1, 3\}$ e $B = \{3, 5, 9\}$ e as condições $p(x) : |x| < 4$ e $q(x) : 3x = 6$.

2.1. Indica o valor lógico das proposições:

a) $\forall x \in A$, $p(x)$

b) $\exists x \in B : q(x)$

c) $\exists x \in A : q(x)$

d) $\forall x \in A$, $q(x)$

e) $\exists x \in B : p(x)$

f) $\forall x \in B$, $\sim q(x)$

g) $\forall x \in A$, $\sim q(x)$

h) $\exists x \in A : \sim q(x)$

2.2. Escreve uma proposição que comece por um quantificador e seja equivalente à negação de cada uma das proposições das alíneas anteriores.

2.3. Quanto a cada uma das seguintes condições $p(x)$, $q(x)$, $\sim p(x)$ e $\sim q(x)$, indica se é possível, impossível ou universal:

a) em A;

b) em B.

2.4. Seja $r(x)$ uma condição qualquer. Mostra que:

a) $p(x) \vee r(x)$ é uma condição universal em A;

b) $q(x) \vee r(x)$ é uma condição possível em A;

c) $q(x) \wedge r(x)$ é uma condição impossível em B;

d) $q(x) \Longrightarrow r(x)$ é uma condição universal em B.

NEMA10-P1 © Porto Editora

Exclusivo do Professor

Resolução

Implicações e equivalências quantificadas e não quantificadas

Por vezes, em implicações e equivalências quantificadas, omite-se a explicitação do quantificador universal, por abuso de linguagem e não havendo ambiguidade.

Exemplo

- A resolução da equação $x^2 - 4 = 0$, em $\mathbb{R}$, aparece apresentada habitualmente na forma de cadeia de equivalências.

$$x^2 - 4 = 0 \iff x^2 = 4 \iff x = 2 \vee x = -2$$

No entanto, este tipo de representação significa que cada uma das equivalências é uma condição universal, a que se pretende dar o seguinte significado:

$\forall x \in \mathbb{R},\ (x^2 - 4 = 0 \iff x^2 = 4) \wedge (x^2 = 4 \iff x = 2 \vee x = -2)$

O exemplo seguinte permite recordar os conceitos de **condição suficiente** e **condição necessária**.

Exemplo

- Estar a chover $\Longrightarrow$ Haver nuvens

Estar a chover basta (é suficiente) para haver nuvens.

Haver nuvens não basta para se concluir que está a chover.

Mas é necessário haver nuvens para que esteja a chover.

Na implicação:

Estar a chover $\Longrightarrow$ Haver nuvens

Estar a chover (antecedente) é **condição suficiente** para haver nuvens (consequente);

Haver nuvens (consequente) é **condição necessária** para que chova (antecedente).

INFORMAÇÃO

Na equivalência $p(x) \iff q(x)$ a condição $p(x)$ é **condição necessária e suficiente** para que se verifique a condição $q(x)$, atendendo a que $q(x) \Longrightarrow p(x)$ e $p(x) \Longrightarrow q(x)$.

EXERCÍCIOS

1 Em $\mathbb{R}$, a condição $xy > 0$ é condição necessária ou condição suficiente para a condição $x > 0 \wedge y > 0$?

Resolução

Repara que:

- $xy > 0 \Longrightarrow x > 0 \wedge y > 0$ (em $\mathbb{R}$) é falsa.
  Por exemplo, $x = -3$ e $y = -5$ satisfazem o antecedente e não satisfazem o consequente.
  Assim , a condição $xy > 0$ não é suficiente para a condição $x > 0 \wedge y > 0$.
- $x > 0 \wedge y > 0 \Longrightarrow xy > 0$ (em $\mathbb{R}$) é verdadeira.
  O produto de quaisquer dois números reais positivos é um número positivo.
  Assim, a condição $xy > 0$ é necessária para a condição $x > 0 \wedge y > 0$.

54 Traduz por uma implicação ou uma equivalência.

54.1. Ter dois ângulos iguais é condição suficiente para um triângulo ser isósceles.

54.2. Ser retângulo é condição necessária para ser quadrado.

54.3. Ser triângulo equilátero é condição necessária e suficiente para ter os três ângulos iguais.

54.4. O produto de dois números ser positivo é condição necessária para que os números sejam negativos.

Exclusivo do Professor

Resolução

NEMA10-P1 © Porto Editora

55 Em $\mathbb{R}$, indica se é verdadeira a proposição:

55.1. $\forall x,\ x > 2 \Longrightarrow x^2 > 4$

55.2. $\forall x,\ x < -2 \Longrightarrow x^2 < -4$

55.3. $\forall x,\ x < 1 \Longrightarrow x^2 \geqslant 0$

56 Escreve a implicação contrarrecíproca de:

56.1. $2x < 4 \Longrightarrow x < 3$

56.2. $x^2 = 9 \Longrightarrow x = 3$

56.3. $2x \geqslant 4 \Longrightarrow x > 3$

56.4. $x \leqslant -2 \Longrightarrow x^2 \geqslant 4$

57 Demonstra, por contrarrecíproco, que se um triângulo não tem dois ângulos diferentes, então o triângulo não é retângulo.

- **Dadas duas condições $p(x)$ e $q(x)$, mostra-se que:**

$$(\forall x,\ p(x) \Longrightarrow q(x)) \Longleftrightarrow (\forall x,\ \sim q(x) \Longrightarrow \sim p(x))$$

Demonstração:

Para toda a concretização da variável x por um objeto a, aplicando a lei da conversão à proposição $p(a) \Longrightarrow q(a)$, tem-se:

$$p(a) \Longrightarrow q(a) \Longleftrightarrow \sim q(a) \Longrightarrow \sim p(a)$$

Assim, conclui-se que a proposição $p(a) \Longrightarrow q(a)$ é verdadeira para todo o objeto a se e só se a proposição $\sim p(a) \Longrightarrow \sim q(a)$ é verdadeira para todo o objeto a. Logo, a proposição $\forall x,\ p(x) \Longrightarrow q(x)$ é equivalente à proposição $\forall x,\ \sim q(x) \Longrightarrow \sim p(x)$.

Para demonstrar certas implicações, por vezes, recorre-se à demonstração da implicação contrarrecíproca. Nestes casos, diz-se que a **demonstração** é feita **por contrarrecíproco**.

Exemplo

Considera a afirmação:

"Se um número natural n não é divisível por 3, então não é divisível por 12."

A afirmação é verdadeira.

A demonstração pode ser feita por contrarrecíproco.

Demonstração:

Sejam as condições:

$p(n)$: n não é divisível por 3.

$q(n)$: n não é divisível por 12.

Pretende-se provar que $\forall n \in \mathbb{N},\ p(n) \Longrightarrow q(n)$.

Seja n um qualquer número natural.

Sabe-se que:

$(p(n) \Longrightarrow q(n)) \Longleftrightarrow (\sim q(n) \Longrightarrow \sim p(n))$

$\sim q(n)$: n é divisível por 12.

$\sim p(n)$: n é divisível por 3.

Sendo n divisível por 12, então n é múltiplo de 12.

Existe um número natural k tal que $n = 12k$. Mas $12 = 3 \times 4$, então $n = 3 \times (4k)$. Conclui-se que n é múltiplo de 3, ou seja, é divisível por 3.

Provou-se que $\forall n \in \mathbb{N},\ \sim q(n) \Longrightarrow \sim p(n)$, ou seja, $\forall n \in \mathbb{N},\ p(n) \Longrightarrow q(n)$, como se queria demonstrar (c.q.d.).

NEMA10-P1 © Porto Editora

Exclusivo do Professor

Resolução

2.3. Conjuntos definidos por condições

Logo nos primeiros anos de escolaridade os alunos utilizam o conceito intuitivo de conjunto, que é considerado um conceito primitivo da Matemática. Informalmente, um conjunto é uma coleção de objetos que a ele pertencem e se dizem os seus elementos.

- **Igualdade de conjuntos**

Dois conjuntos A e B dizem-se iguais, isto é, $A = B$, se têm os mesmos elementos.

Assim, tem-se:

> Dados dois conjuntos A e B tem-se $A = B$ se e só se $\forall x\,(x \in A \iff x \in B)$ ou, simplesmente, $\forall x,\ x \in A \iff x \in B$.

Já vimos algumas formas de representar conjuntos:

- **Conjunto representado em extensão** – quando, entre chavetas, todos os elementos são indicados, um a um, separados por vírgulas.

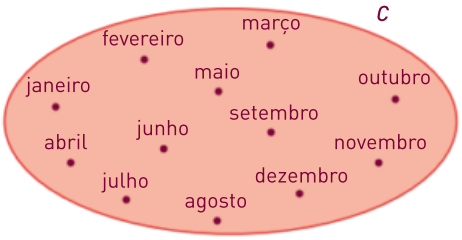
Exemplos

- Seja A o conjunto dos números naturais inferiores a 5.
  $A = \{1, 2, 3, 4\}$
- Seja B o conjunto das vogais.
  $B = \{a, e, i, o, u\}$
- Seja C o conjunto dos números naturais não inferiores a 12 e inferiores a 17.
  $C = \{12, 13, 14, 15, 16\}$

- **Conjunto representado em diagrama de Venn** – cada elemento é representado por um ponto e todos esses pontos são rodeados por uma linha fechada, representando o conjunto.

Exemplo

Seja C o conjunto dos meses do ano.



Estas duas formas de representar conjuntos são adequadas apenas para conjuntos finitos e com poucos elementos.

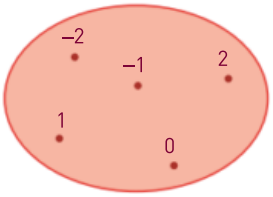
58 Representa em extensão o conjunto:

58.1. dos números naturais menores que $\sqrt{11}$;

58.2. dos números inteiros negativos maiores que -2π;

58.3. dos números inteiros cujos quadrados são menores que 10.

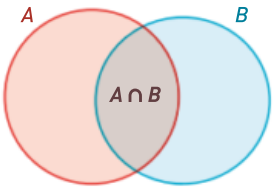
59 A qual dos seguintes conjuntos corresponde o diagrama?



$A = \{x \in \mathbb{R} : x \geqslant -2\}$
$B = \{x \in \mathbb{Z} : x \leqslant 2\}$
$C = \{x \in \mathbb{N} : |x| \leqslant 2\}$
$D = \{x \in \mathbb{Z} : x^2 \leqslant 4\}$

REFERÊNCIA HISTÓRICA

John Venn (1834-1923) nasceu em Hull, Inglaterra, foi sacerdote e ensinou Lógica e Probabilidades na Universidade de Cambridge. No entanto, o seu nome aparece muitas vezes associado aos conhecidos diagramas de Venn, esquemas que utilizou para representar conjuntos, reunião de conjuntos e interseção de conjuntos.



Atividade

Exclusivo do Professor

Resolução

NEMA10-P1 © Porto Editora

NEMA10-P1 © Porto Editora

60 Considera os conjuntos:
$A = \{-3, 2, 4, 6\}$ e
$B = \{-1, 1, 3, 5\}$
Define, em extensão, o conjunto:

60.1. $\{x \in A : x^2 = 9\}$

60.2. $\{x \in B : x^2 = 9\}$

60.3. $\{x \in \mathbb{Z} : x^2 = 9\}$

- **Conjunto representado em compreensão –** quando é apresentada uma propriedade que caracteriza os seus elementos e só esses.

Exemplo

Seja D o conjunto dos números reais maiores que 1.

$D = \{x \in \mathbb{R} : x > 1\}$.

Dada uma condição $p(x)$, num certo universo, os valores de x que a convertem numa proposição verdadeira podem ser representados por $\{x : p(x)\}$, que se designa por **conjunto-solução** da condição $p(x)$.

Seja A o conjunto-solução da condição $p(x)$, a proposição $\forall x,\ x \in A \iff p(x)$ é verdadeira e o conjunto A fica definido em compreensão pela condição $p(x)$ escrevendo-se $A = \{x : p(x)\}$.

INFORMAÇÃO

- Se uma **condição** $p(x)$ é **universal** no domínio U, então o **conjunto-solução** é U.
- Se uma **condição** $p(x)$ é **impossível** no domínio U, então o **conjunto-solução** é $\{\ \}$, **conjunto vazio.**

Dado um conjunto U e uma condição $p(x)$, o conjunto $\{x : x \in U \wedge p(x)\}$ ou simplesmente $\{x \in U : p(x)\}$ é o conjunto definido por $p(x)$ em U ou conjunto-solução de $p(x)$ em U.

Exemplo

Considera o conjunto $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ e as condições:

$p(x)$: "x é número primo" $\quad q(x)$: $x \geqslant 4$

- Seja A o conjunto definido por $p(x)$ em U.

$A = \{x : x \in U \wedge p(x)\}$ ou simplesmente $A = \{x \in U : p(x)\}$.

Repara que:

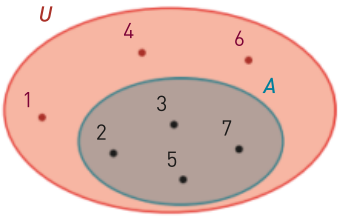
$1 \in U$, mas $p(1)$ é falso. Logo, $1 \notin A$.

$2 \in U$ e $p(2)$ é verdadeiro. Logo, $2 \in A$.

Repetindo o raciocínio para os restantes elementos do conjunto U, tem-se:

$A = \{2, 3, 5, 7\}$ (definido em extensão)

$A = \{x \in U : x$ é número primo$\}$
(definido em compreensão)

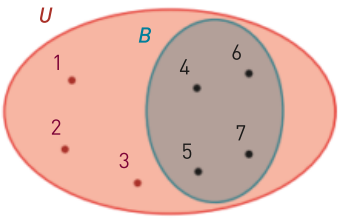


- Seja B o conjunto definido por $q(x)$ em U.

$B = \{x : x \in U \wedge q(x)\}$ ou simplesmente
$B = \{x \in U : q(x)\}$.

Repara que:

$B = \{x \in U : x \geqslant 4\} = \{4, 5, 6, 7\}$



61 Considera os conjuntos:
$A = \{-2, 0, 2\}$, $B = \{-1, 1\}$
e $C = \{1, 0, 3\}$.

61.1. Define, em extensão, o conjunto:
a) $\{x \in A : x(x^2 - 4) = 0\}$
b) $\{x \in B : x(x^2 - 4) = 0\}$
c) $\{x \in C : x(x^2 - 4) = 0\}$

61.2. Classifica a condição $x(x^2 - 4) = 0$ em:
a) A
b) B
c) C

Exclusivo do Professor

Resolução

Atividade

EXERCÍCIOS

1 Considera os conjuntos A, B e C tais que:

$A=\left\{x\in\mathbb{N}:\ |x|<\frac{7}{2}\right\}$; $B=\{x\in\mathbb{N}:\ 2x-8<0\}$ e

$C=\{x\in\mathbb{N}:\ x \text{ é divisor de } 3\}$.

Mostra que:

1.1. $A=B$

1.2. $B\neq C$

Resolução

1.1. $A=\left\{x\in\mathbb{N}:\ |x|<\frac{7}{2}\right\}=\{1,\ 2,\ 3\}$

Atendendo a que $2x-8<0 \iff x<4$, tem-se:

$B=\{x\in\mathbb{N}:\ 2x-8<0\}=\{x\in\mathbb{N}:\ x<4\}=\{1,\ 2,\ 3\}$

$A=B=\{1,\ 2,\ 3\}$

1.2. $C=\{x\in\mathbb{N}:\ x \text{ é divisor de } 3\}=\{1,\ 3\}$

$B=\{1,\ 2,\ 3\}$.

Repara que $2\in B$ e $2\notin C$. Então $B\neq C$.

62 Considera os conjuntos:

$A=\left\{x\in\mathbb{N}:\ 2(x-5)<\frac{1}{2}\right\}$

$B=\left\{x\in\mathbb{N}:\ \frac{5}{2}<x<7\right\}$

$C=\{x\in\mathbb{Z}^+:\ 2x\leqslant 11\}$

62.1. Dá exemplo de um elemento que pertence a A e não pertence a B.

62.2. Mostra que $A=C$.

62.3. Dá exemplo de um conjunto U de modo que:

a) a condição $2(x-5)<\frac{1}{2}$ seja universal em U;

b) a condição $\frac{5}{2}<x<7$ seja impossível em U.

2.3.1. União (ou reunião) e interseção de conjuntos

Dados conjuntos A e B a **união** ou **reunião** dos conjuntos A e B representa-se por $A\cup B$, sendo $A\cup B=\{x:\ x\in A\vee x\in B\}$.

A **interseção** dos conjuntos A e B representa-se por $A\cap B$, sendo $A\cap B=\{x:\ x\in A\wedge x\in B\}$.

Dados conjuntos A e B, tem-se:

- $A\cup B=\{x:\ x\in A\vee x\in B\}$
- $A\cap B=\{x:\ x\in A\wedge x\in B\}$

Sejam $A=\{x\in U:\ p(x)\}$ e $B=\{x\in U:\ q(x)\}$.

Repara que:

- o conjunto-solução da condição $p(x)\vee q(x)$, em U, é $A\cup B$;
- o conjunto-solução da condição $p(x)\wedge q(x)$, em U, é $A\cap B$.

INFORMAÇÃO

Condição	Conjunto-solução
$a(x)$	A
$b(x)$	B
$a(x)\vee b(x)$	$A\cup B$
$a(x)\wedge b(x)$	$A\cap B$

Exclusivo do Professor

Resolução

NEMA10-P1 © Porto Editora

Atividade

63 Sabe-se que:

$\{x \in U : p(x)\} = \{-3, 5, 7\}$

$\{x \in U : q(x)\} = \{1, 5, 6, 7\}$

Representa, em extensão, o conjunto:

63.1. $A = \{x \in U : p(x) \vee q(x)\}$

63.2. $B = \{x \in U : p(x) \wedge q(x)\}$

64 Considera, em $\mathbb{R}$, as condições:

$p(x) : \frac{8-x}{3} < x$

$q(x) : \frac{2x}{5} \leqslant 3$

$r(x) : 1 < x \leqslant 3$

Representa na forma de intervalo de números reais o conjunto:

64.1. $A = \{x \in \mathbb{R} : p(x)\}$

64.2. $B = \{x \in \mathbb{R} : q(x)\}$

64.3. $C = \{x \in \mathbb{R} : r(x)\}$

64.4. $D = \{x \in \mathbb{R} : p(x) \wedge q(x)\}$

64.5. $E = \{x \in \mathbb{R} : p(x) \vee r(x)\}$

INFORMAÇÃO

- $A \subset B$ lê-se: "A **está contido** em B."
- $A \not\subset B$ lê-se: "A **não está contido** em B."
- $B \supset A$ lê-se: "B **contém** A." (significa $A \subset B$).

Exclusivo do Professor

Resolução

Exemplo

Considera as condições, no conjunto dos números naturais:

$p(n)$: $1 + 3n < 22$

$q(n)$: "n é número primo menor que 12"

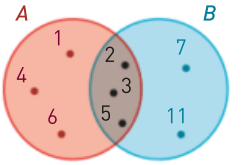
Sejam $A = \{n \in \mathbb{N} : p(n)\}$ e $B = \{n \in \mathbb{N} : q(n)\}$

Repara que $1 + 3n < 22 \iff 3n < 21 \iff n < 7$

A seguir representam-se os conjuntos A, B, $A \cup B$ e $A \cap B$ em extensão e através de um diagrama de Venn:

$A = \{n \in \mathbb{N} : n < 7\} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

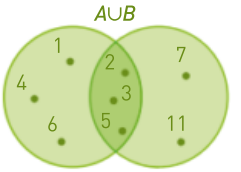
$B = \{n \in \mathbb{N} : q(n)\} = \{2, 3, 5, 7, 11\}$



- Reunião de A e B

  $A \cup B = \{n \in \mathbb{N} : p(n) \vee q(n)\}$

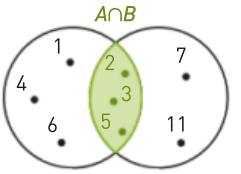
  $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 11\}$



- Interseção de A e B

  $A \cap B = \{n \in \mathbb{N} : p(n) \wedge q(n)\}$

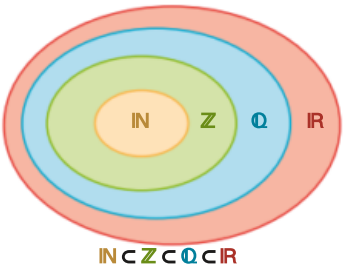
  $A \cap B = \{2, 3, 5\}$



2.3.2. Subconjunto de um conjunto

A partir de $\mathbb{N}$, conjunto dos números naturais, os conjuntos numéricos $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{R}$ surgem acrescentando novos números, pelo que se obtém a seguinte relação:

$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$



Quando se diz, por exemplo, que o conjunto dos números naturais está contido no conjunto dos números inteiros, isto é, $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$, significa que qualquer número natural é número inteiro.

Assim, $\forall x$, $x \in \mathbb{N} \Longrightarrow x \in \mathbb{Z}$ e diz-se que $\mathbb{N}$ é um **subconjunto** ou **parte** de $\mathbb{Z}$.

Dados dois conjuntos A e B, diz-se que **A é um subconjunto** (ou parte) **de B**, ou está contido em B, representando-se por $A \subset B$, se todo o elemento de A é elemento de B, isto é, quando é verdadeira a proposição $\forall x$, $x \in A \Longrightarrow x \in B$.

NEMA10-P1 © Porto Editora

Exemplo

- O conjunto dos triângulos equiláteros é um subconjunto do conjunto dos triângulos.

  (Todo o triângulo equilátero é um triângulo.)

- O conjunto dos quadriláteros **não é um subconjunto** do conjunto dos retângulos.

  (Há quadriláteros que não são retângulos.)

EXERCÍCIOS

1 Considera os conjuntos $A = \{n \in \mathbb{N} : p(n)\}$; $B = \{n \in \mathbb{N} : q(n)\}$ e $C = \{n \in \mathbb{N} : r(n)\}$, sendo:

$p(n)$: n é divisor de 8 ; $q(n)$: n é número par inferior a 10

$r(n)$: n é múltiplo de 4 inferior a 10

Mostra que:

1.1. $C \subset A$ **1.2.** $A \not\subset B$

Resolução

1.1. $C = \{4 , 8\}$ e $A = \{1 , 2 , 4 , 8\}$

Todo o elemento de C pertence a A . Então, $C \subset A$.

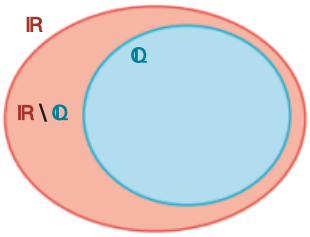
1.2. $A = \{1 , 2 , 4 , 8\}$ e $B = \{2 , 4 , 6 , 8\}$

Repara que nem todo o elemento de A pertence a B .

$1 \in A$ e $1 \notin B$. Conclui-se que A não está contido em B , ou seja, $A \not\subset B$.

2.3.3. Diferença entre conjuntos e conjunto complementar

Já vimos que os números irracionais são números reais que não são números racionais, podendo o conjunto dos números irracionais ser representado por $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.



Assim, tem-se: $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} = \{x \in \mathbb{R} : x \notin \mathbb{Q}\}$.

Como $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$, o conjunto $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ designa-se por complementar de $\mathbb{Q}$, em $\mathbb{R}$.

Dados dois conjuntos A e B , a **diferença entre A e B** é o conjunto $\{x \in A : x \notin B\}$ e representa-se por $A \setminus B$, também designado por **complementar de B em A** .

No universo U , seja $A = \{x \in U : p(x)\}$.

Por vezes, o complementar de A em U representa-se por $\overline{A}$, sendo $\overline{A} = \{x \in U : \sim p(x)\}$.

Repara que $U \setminus A$, **complementar de A em U** , é igual a $\overline{A}$.

Atividade

65 Considera os conjuntos:

$A = \{x \in \mathbb{R} : x(x^2 - x - 2) = 0\}$

$B = \{x \in \mathbb{R} : 3 - x > 0\}$

65.1. Representa, em extensão, o conjunto A .

65.2. Representa o conjunto B na forma de intervalo.

65.3. O que podes concluir quanto ao valor lógico da proposição $\forall x , x \in A \Longrightarrow x \in B$?

65.4. Mostra, com um contraexemplo, que é falsa a proposição $\forall x , x \in B \Longrightarrow x \in A$.

66 Considera as condições:

$p(n)$: n é múltiplo de 4

$q(n)$: n é par

Sejam $A = \{n \in \mathbb{N} : p(n)\}$ e $B = \{n \in \mathbb{N} : q(n)\}$.

66.1. Mostra que a proposição $\forall n , n \in A \Longrightarrow n \in B$ é verdadeira para concluíres que $A \subset B$.

66.2. Dá exemplo de um elemento do conjunto B que não pertença ao conjunto A . O que podes concluir quanto à afirmação $B \subset A$?

INFORMAÇÃO

Condição	Conjunto-solução
$a(x)$	A
$b(x)$	B
$\sim a(x)$	$\overline{A}$
$a(x) \wedge \sim b(x)$	$A \cap \overline{B} = A \setminus B$

Exclusivo do Professor

Resolução

NEMA10-P1 © Porto Editora

Atividade

Exercício

INFORMAÇÃO

Dois **conjuntos** A e B dizem-se **disjuntos** se não têm qualquer elemento em comum, ou seja, $A \cap B = \{\ \}$.

EXERCÍCIOS

1 Considera os seguintes conjuntos de números reais:

$A = \{x \in \mathbb{R} : x < 7\}$; $B = \{x \in \mathbb{R} : x > 1\}$ e $C = \{x \in \mathbb{R} : x > 4\}$

Representa, sob a forma de intervalo, ou reunião de intervalos disjuntos, os seguintes conjuntos.

1.1. $A \cap B$

1.2. $B \setminus C$

1.3. $B \cup C$

1.4. $B \setminus (A \cap C)$

1.5. $\overline{B}$

1.6. $B \setminus \overline{C}$

Resolução

$A =]-\infty\ ,\ 7[$; $B =]1\ ,\ +\infty[$ e $C =]4\ ,\ +\infty[$

1.1. $A \cap B =]-\infty\ ,\ 7[\cap]1\ ,\ +\infty[=]1\ ,\ 7[$

1.2. $B \setminus C = \{x \in B : x \notin C\}$

$B \setminus C = \{x \in]1\ ,\ +\infty[: x \notin]4\ ,\ +\infty[\} =]1\ ,\ 4]$

1.3. $B \cup C =]1\ ,\ +\infty[\cup]4\ ,\ +\infty[=]1\ ,\ +\infty[$

1.4. $B \setminus (A \cap C) = \{x \in B : x \notin A \cap C\}$

$B \setminus (A \cap C) = \{x \in]1\ ,\ +\infty[: x \notin]4\ ,\ 7[\} =]1\ ,\ 4] \cup [7\ ,\ +\infty[$

1.5. $\overline{B} = \{x \in \mathbb{R} : x \leqslant 1\} =]-\infty\ ,\ 1]$

1.6. $B \setminus \overline{C} = \{x \in B : x \notin \overline{C}\}$

$B \setminus \overline{C} = \{x \in]1\ ,\ +\infty[: x \notin]-\infty\ ,\ 4]\} =]4\ ,\ +\infty[$

67 Considera as seguintes condições definidas em $\mathbb{N}$:

$a(n)$: n é número ímpar

$b(n)$: n é número primo

$c(n)$: n é divisor de 12

$d(n)$: n é número par inferior a 9

Define, em extensão, o conjunto:

67.1. $A = \{n : a(n) \wedge c(n)\}$

67.2. $B = \{n : b(n) \wedge c(n)\}$

67.3. $C = \{n : c(n) \vee d(n)\}$

67.4. $D = \{n : c(n) \wedge \sim b(n)\}$

68 Considera os conjuntos:

$A = \{x \in \mathbb{R} : x > -5\}$

$B = \{x \in \mathbb{R} : x \leqslant \sqrt{5}\}$

$C = \{x \in \mathbb{R} : -2 \leqslant x < 4\}$

Representa na forma de intervalo, ou união de intervalos disjuntos, os seguintes subconjuntos de $\mathbb{R}$:

68.1. $A \cap C$

68.2. $B \setminus C$

68.3. $\overline{B} \cup C$

68.4. $\overline{C} \setminus A$

TAREFA 7

1 Considera os seguintes conjuntos de números naturais:

$A = \{n \in \mathbb{N} : (n-1)(n^2 - 5n + 6) = 0\}$; $B = \left\{n \in \mathbb{N} : \dfrac{2n+1}{3} < 4\right\}$

$C = \{n \in \mathbb{N} : |n-2| < 3\}$

1.1. Representa em extensão os conjuntos A , B , C e $B \setminus C$.

1.2. Indica o valor lógico da proposição:

a) $\forall n\ ,\ n \in A \Longrightarrow n \in B$

b) $\forall n\ ,\ n \in C \Longrightarrow n \in B$

c) $\forall n\ ,\ n \in A \Longleftrightarrow n \in C$

d) $\forall n\ ,\ (n \in A \Longrightarrow n \in C \wedge n \in C \Longrightarrow n \in A)$

Exclusivo do Professor

Resolução

NEMA10-P1 © Porto Editora

2.3.4. Condições equivalentes e igualdade de conjuntos

Duas condições $p(x)$ e $q(x)$ são equivalentes se são convertidas em proposições com o mesmo valor lógico para cada concretização da variável x.

Assim, provar que duas condições $p(x)$ e $q(x)$ são equivalentes é provar que a proposição $\forall x,\ p(x) \Longleftrightarrow q(x)$ é verdadeira.

Para cada concretização da variável x tem-se uma proposição do tipo $p(a) \Longleftrightarrow q(a)$. Repara que a proposição $p(a) \Longleftrightarrow q(a)$ é verdadeira se e só se:

- $p(a) \Longrightarrow q(a)$ verdadeira
- $q(a) \Longrightarrow p(a)$ verdadeira

A equivalência $p(a) \Longleftrightarrow q(a)$ é verdadeira se ambas as implicações forem verdadeiras (Princípio da dupla implicação).

Daqui resulta que as proposições

$$\forall x,\ p(x) \Longleftrightarrow q(x) \quad \text{e} \quad \forall x,\ \big(p(x) \Longrightarrow q(x)\big) \wedge \big(q(x) \Longrightarrow p(x)\big)$$

são equivalentes.

Duas **condições** $p(x)$ e $q(x)$ dizem-se **equivalentes** se é verdadeira a proposição $\forall x,\ p(x) \Longleftrightarrow q(x)$.
A demonstração dessa equivalência pode ser feita por dupla implicação, ou seja, provar que é verdadeira a proposição
$\forall x,\ \big(p(x) \Longrightarrow q(x)\big) \wedge \big(q(x) \Longrightarrow p(x)\big)$.

Exemplo

Sejam as condições relativas a triângulos no plano.

$p(x)$: x é triângulo equilátero.

$q(x)$: x é um triângulo com os ângulos iguais.

Mostra que é verdadeira a proposição $\forall x,\ p(x) \Longleftrightarrow q(x)$.

Seja x um triângulo qualquer no plano.

- $p(x) \Longrightarrow q(x)$

Se o triângulo é equilátero, tem os lados iguais. Como num triângulo a lados iguais opõem-se ângulos iguais, conclui-se que os ângulos são iguais.

- $q(x) \Longrightarrow p(x)$

Se o triângulo tem os ângulos iguais e num triângulo a ângulo iguais opõem-se lados iguais, conclui-se que o triângulo tem os lados iguais, ou seja, é equilátero.

Assim, a proposição $\forall x,\ \big(p(x) \Longrightarrow q(x)\big) \wedge \big(q(x) \Longrightarrow p(x)\big)$ é verdadeira.

Então, fica provado que $\forall x,\ p(x) \Longleftrightarrow q(x)$.

Note-se ainda que a proposição $\forall x,\ \big(\big(p(x) \Longrightarrow q(x)\big) \wedge \big(q(x) \Longrightarrow p(x)\big)\big)$ é verdadeira se e só se $\forall x,\ \big(p(x) \Longrightarrow q(x)\big) \wedge \forall x,\ \big(q(x) \Longrightarrow p(x)\big)$.

69 Considera, em $\mathbb{R}$, as condições:

$p(x)$: $x \geqslant 0$

$q(x)$: $x > 1$

69.1. Indica o valor lógico da proposição:

a) $\forall x,\ p(x) \Longrightarrow q(x)$

b) $\forall x,\ q(x) \Longrightarrow p(x)$

69.2. As condições $p(x)$ e $q(x)$ são equivalentes? Justifica.

70 Considera, em $\mathbb{R}$, as condições:

$a(x)$: $|x| \leqslant 1$

$b(x)$: $-1 \leqslant x \leqslant 1$

Mostra que é verdadeira a proposição:

70.1. $\forall x,\ a(x) \Longrightarrow b(x)$

70.2. $\forall x,\ b(x) \Longrightarrow a(x)$

70.3. $\forall x,\ a(x) \Longleftrightarrow b(x)$

71 Sabe-se que:

- $\{x \in \mathbb{R} :\ a(x)\} = [2,\ 5]$
- $\{x \in \mathbb{R} :\ b(x)\} =]2,\ 5]$

Em $\mathbb{R}$, as condições $a(x)$ e $b(x)$ são equivalentes? Justifica.

Exclusivo do Professor

Resolução

NEMA10-P1 © Porto Editora

Vídeo

INFORMAÇÃO

Condição	Conjunto-solução
$a(x)$	A
$b(x)$	B
$a(x) \Longrightarrow b(x)$	$A \subset B$
$b(x) \Longrightarrow a(x)$	$B \subset A$
$a(x) \Longleftrightarrow b(x)$	$A = B$

Dadas duas condições $p(x)$ e $q(x)$ equivalentes, sejam A e B os respetivos conjuntos-solução:
$A = \{x : p(x)\}$ e $B = \{x : q(x)\}$
Sendo $p(x)$ e $q(x)$ equivalentes, ambas são verdadeiras para as mesmas concretizações da variável x. Então, $A = B$, ou seja,
$\forall x,\ x \in A \Longleftrightarrow x \in B$. Aplicando o princípio da dupla implicação, tem-se que $A = B$ se e só se $(\forall x,\ x \in A \Longrightarrow x \in B) \wedge (\forall x,\ x \in B \Longrightarrow x \in A)$.
Daqui resulta que $A = B$ se e só se $A \subset B$ e $B \subset A$.

Dadas duas **condições** $p(x)$ e $q(x)$ **equivalentes**, sendo A e B os respetivos conjuntos-solução, tem-se $A = B$.
Dados dois conjuntos A e B tem-se $A = B$ se e só se $A \subset B$ e $B \subset A$ (**princípio da dupla inclusão**).

72 Considera as condições:
$p(x)$: $x < 5$
$q(x)$: $0 < x \leqslant 4$
Verifica se as condições $p(x)$ e $q(x)$ são equivalentes:

72.1. em $\mathbb{N}$

72.2. em $\mathbb{Z}$

72.3. em $U = \left\{\frac{5}{2},\ 3,\ \frac{7}{2}\right\}$

72.4. em $A = \left\{-1,\ 2,\ \frac{5}{2},\ 4\right\}$

73 Dadas em $\mathbb{R}$ duas condições $a(x)$ e $b(x)$, tem-se:
- $A = \{x \in \mathbb{R} : a(x)\} = [1,\ 5]$
- $B = \{x \in \mathbb{R} : b(x)\} = [3,\ +\infty[$

Mostra que:

73.1. $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

73.2. $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$

74 Em $\mathbb{N}$, considera os conjuntos:
- $A = \{x \in \mathbb{N} : x \leqslant 4\}$
- $B = \{x \in \mathbb{N} : x > 2\}$

Define por uma condição o conjunto:

74.1. $\overline{B}$

74.2. $\overline{A \cup B}$

74.3. $\overline{A} \cup \overline{B}$

Exemplo

Considera, em $\mathbb{N}$, as condições:
$p(n)$: n é múltiplo comum de 2 e de 5
$q(n)$: n é divisível por 10
Sejam A e B os conjuntos $A = \{n : p(n)\}$ e $B = \{n : q(n)\}$.
Pode-se mostrar que $A = B$ por dupla inclusão.

- Mostrar que $A \subset B$.
  Seja n um elemento qualquer de A. Sendo n um múltiplo comum de 2 e de 5, é múltiplo de 2×5, ou seja, de 10. Sendo n múltiplo de 10, é divisível por 10, logo pertence ao conjunto B.
  Provou-se que qualquer elemento de A pertence a B, ou seja, $A \subset B$.

- Mostrar que $B \subset A$.
  Seja n um elemento qualquer de B. Então, n é um número divisível por 10, ou seja, é um múltiplo de 10. Sendo múltiplo de 10, é um número par e o algarismo das unidades é 0. Então, é um múltiplo comum de 2 e de 5. Então, n pertence ao conjunto A.
  Provou-se que qualquer elemento de B pertence a A, ou seja, $B \subset A$.
  Atendendo a que $A \subset B$ e $B \subset A$, conclui-se que $A = B$.

REFERÊNCIA HISTÓRICA

Filho de um militar inglês, nasceu na Índia, acompanhando a família no regresso a Inglaterra poucos meses após o seu nascimento.
Entre os contributos dados para o desenvolvimento da Lógica Matemática, destacam-se as conhecidas leis de De Morgan.
As leis de De Morgan, em termos de conjuntos, têm a seguinte tradução:
- $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$
- $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

Augustus De Morgan
(1807-1871)

NEMA10-P1 © Porto Editora

Exclusivo do Professor

Resolução

Atividade

EXERCÍCIOS

1 Considera, em $\mathbb{R}$, a implicação $x-4>0 \Longrightarrow x(x+1)\neq 0$.

1.1. Representa na forma de intervalo ou reunião de intervalos disjuntos os conjuntos $A=\{x:\ x-4>0\}$ e $B=\{x:\ x(x+1)\neq 0\}$.

1.2. A implicação dada é verdadeira? Justifica.

1.3. Escreve a implicação contrarrecíproca da implicação dada.

Resolução

1.1. $A=\{x:\ x-4>0\}$

Repara que $x-4>0 \Longleftrightarrow x>4$. $A=]4\,,\ +\infty[$

$B=\{x:\ x(x+1)\neq 0\}$

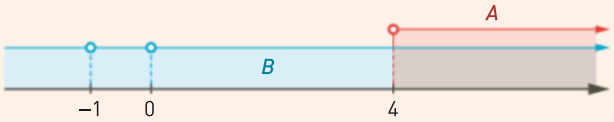
$x(x+1)\neq 0 \Longleftrightarrow \sim[x(x+1)=0] \Longleftrightarrow \sim(x=0 \vee x=-1) \Longleftrightarrow$

$\Longleftrightarrow x\neq 0 \wedge x\neq -1$

$B=\mathbb{R}\setminus\{-1\,,\ 0\}=]-\infty\,,\ -1[\ \cup\ ]-1\,,\ 0[\ \cup\ ]0\,,\ +\infty[$

1.2. A implicação $x-4>0 \Longrightarrow x(x+1)\neq 0$ é verdadeira.

Repara que $A\subset B$. Daqui resulta que toda a solução da primeira condição (antecedente) é solução da segunda condição (consequente).



1.3. A implicação contrarrecíproca de $x-4>0 \Longrightarrow x(x+1)\neq 0$ é $x(x+1)=0 \Longrightarrow x-4\leqslant 0$.

75 Considera, em $\mathbb{R}$, a implicação $x^3-4x=0 \Longrightarrow |x|\leqslant 2$.

75.1. Representa, em extensão, o conjunto $A=\{x\in\mathbb{R}:\ x^3-4x=0\}$.

75.2. Representa, na forma de intervalo de números reais, o conjunto $B=\{x\in\mathbb{R}:\ |x|\leqslant 2\}$.

75.3. Indica se é verdadeira ou falsa a implicação dada.

75.4. Indica se é verdadeira ou falsa a implicação contrarrecíproca da implicação dada.

TAREFA 8

1 Indica se a implicação é universal no domínio referido e apresenta a implicação contrarrecíproca.

1.1. $x<5 \Longrightarrow x^2<25$ (em $\mathbb{R}$)

1.2. $x<10 \Longrightarrow x^2<85$ (em $\mathbb{N}$)

1.3. n é múltiplo de 3 $\Longrightarrow$ n é múltiplo de 6 (em $\mathbb{N}$)

1.4. $x\in[-1\,,\ 0] \Longrightarrow |x|\in[0\,,\ 1]$ (em $\mathbb{R}$)

2 No conjunto dos triângulos de um plano considera a afirmação: *Um triângulo é retângulo quando tem um ângulo externo reto.*

2.1. Apresenta a afirmação dada na forma de implicação.

2.2. A afirmação é verdadeira? Justifica.

3 No conjunto dos triângulos de um plano, demonstra, por contrarrecíproco, que se um triângulo tem pelo menos um ângulo externo que não é obtuso, então o triângulo não é acutângulo.

NEMA10-P1 © Porto Editora

Exclusivo do Professor

Resolução

Resumo

- **Na lógica matemática são válidos os princípios:**
  - **Princípio da não contradição:**
    Uma proposição não pode ser simultaneamente verdadeira e falsa, isto é, $\sim(p \wedge \sim p)$ (verdadeiro).
  - **Princípio do terceiro excluído:** Uma proposição ou é verdadeira ou a sua negação é verdadeira, isto é, $p \vee \sim p$ (verdadeira).

- **Operações lógicas**

		Negação	Conjunção	Disjunção	Implicação	Equivalência	Disjunção exclusiva
p	q	$\sim p$	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \Longrightarrow q$	$p \Longleftrightarrow q$	$p \dot{\vee} q$
V	V	F	V	V	V	V	F
V	F		F	V	F	F	V
F	V	V	F	V	V	F	V
F	F		F	F	V	V	F

- **Primeiras leis de De Morgan:**
  - $\sim(p \wedge q) \Longleftrightarrow \sim p \vee \sim q$
  - $\sim(p \vee q) \Longleftrightarrow \sim p \wedge \sim q$

- **Segundas leis de De Morgan:**
  - $\sim(\forall x,\ p(x)) \Longleftrightarrow \exists x:\ \sim p(x)$
  - $\sim(\exists x:\ p(x)) \Longleftrightarrow \forall x,\ \sim p(x)$

- **Leis de De Morgan (em conjuntos)**
  - $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$
  - $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

- **Na implicação tem-se:**
  - $\sim(p \Longrightarrow q) \Longleftrightarrow (p \wedge \sim q)$
  - $p \Longrightarrow q \Longleftrightarrow \sim p \vee q$
  - **Lei da conversão:** $(p \Longrightarrow q) \Longleftrightarrow (\sim q \Longrightarrow \sim p)$

  À implicação $\sim q \Longrightarrow \sim p$ dá-se o nome de **contrarrecíproca** da implicação $p \Longrightarrow q$.

- **Conjuntos definidos por condições num determinado domínio**

Condições definidas em U		Relações entre os conjuntos-solução em U	
$a(x)$		A	
$b(x)$		B	
$\sim a(x)$	negação	$\overline{A}$	complementação
$a(x) \wedge b(x)$	conjunção	$A \cap B$	interseção
$a(x) \vee b(x)$	disjunção	$A \cup B$	reunião
$a(x) \Longrightarrow b(x)$	implicação	$A \subset B$	inclusão
$a(x) \Longleftrightarrow b(x)$	equivalência	$A = B$	igualdade

- **Classificação de uma condição $p(x)$ no universo U:**
  - Condição universal
  - Condição possível
  - Condição impossível

PROPOSTA 22 Classifica de: designação, expressão designatória, proposição ou condição (admitindo-se que x e r são variáveis).

22.1. $4x - 2$ **22.2.** 7π **22.3.** $5x < 3$

22.4. $\frac{7}{2} > 3$ **22.5.** $\frac{1}{3}\pi r^2$ **22.6.** $\frac{3x+4}{2} = x$

22.7. $x \in \mathbb{Z}$ **22.8.** $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ **22.9.** $\pi x \in \mathbb{R}$

PROPOSTA 23 Considera as condições $p(x): x^2 + 2 = 0$ e $q(x): (x+1)^2 - 1 = x(x+2)$.

23.1. Indica o valor lógico da proposição:

a) $\forall x,\ p(x)$ **b)** $\forall x,\ q(x)$ **c)** $\exists x:\ p(x)$

23.2. Classifica as condições $p(x)$, $q(x)$, $\sim p(x)$ e $\sim q(x)$ em universal ou impossível.

23.3. Seja $r(x): x^3 + x = 7$.

Classifica a condição:

a) $p(x) \wedge r(x)$ **b)** $q(x) \vee r(x)$

PROPOSTA 24 Completa a seguinte tabela com o valor lógico V ou F.

Proposições	Valor lógico em			
	$U = \mathbb{N}$	$U = \mathbb{Z}$	$U = \mathbb{Q}$	$U = \mathbb{R}$
$\exists x \in U:\ 2x + 1 < 0$				
$\forall x \in U,\ (x+1)^2 \geqslant 1$				
$\exists x \in U:\ x^2 = 5$				
$\exists x \in U:\ x^2 = \frac{1}{4}$				
$\forall x \in U,\ (x-1)^2 - x^2 = 1 - 2x$				

PROPOSTA 25

25.1. A proposição $\forall x \in U,\ (x+1)^2 \geqslant 4$ é verdadeira se $U = \mathbb{N}$ e falsa se $U = \mathbb{Z}$. Justifica.

25.2. A proposição $\exists x \in U:\ 2x^2 = x$ é falsa se $U = \mathbb{N}$ e verdadeira se $U = \mathbb{Q}$. Justifica.

25.3. A proposição $\exists x \in U:\ 2x^2 = 10$ é falsa se $U = \mathbb{Q}$ e verdadeira se $U = \mathbb{R}$. Justifica.

25.4. A proposição $\forall x \in U:\ 4 - x^2 = -(x-2)(x+2)$ é verdadeira se $U = \mathbb{R}$. Justifica.

NEMA10-P1 © Porto Editora

Exclusivo do Professor
Resolução

NEMA10-P1 © Porto Editora

PROPOSTA 26 Considera, em $\mathbb{R}$, as condições:

$a(x): \ x^2 + 3 < 0$ e $b(x): \ (-2x)^2 = 4x^2$

26.1. Indica o conjunto definido por cada uma das condições.

26.2. Justifica as equivalências seguintes.

a) $x^2 + 3 < 0 \ \vee \ 3x > 1 \iff 3x > 1$

b) $x^2 + 3 < 0 \ \wedge \ 3 - x \geqslant 0 \iff x^2 + 3 < 0$

c) $(-2x)^2 = 4x^2 \ \vee \ 3x^2 = 12 \iff (-2x)^2 = 4x^2$

d) $(-2x)^2 = 4x^2 \ \wedge \ x < 0 \iff x < 0$

PROPOSTA 27 Num dado universo $U \neq \{\ \}$, sabe-se que a proposição $\forall x \in U, \ p(x)$ é verdadeira e a proposição $\exists x \in U: \ q(x)$ é falsa.

27.1. Indica o valor lógico das proposições:

a) $\exists x: \ p(x)$

b) $\forall x, \ q(x)$

27.2. Seja $r(x)$ uma condição definida em U.

Classifica as condições:

a) $p(x) \vee r(x)$

b) $q(x) \wedge r(x)$

c) $\sim p(x) \wedge r(x)$

d) $\sim q(x) \vee r(x)$

PROPOSTA 28 Em relação aos alunos da turma do Ricardo considera as condições:

$p(x)$: x tem olhos azuis

$q(x)$: x tem 15 anos

$r(x)$: x é filho único

28.1. Considera a proposição $\forall x, \ q(x)$.

a) Traduz em linguagem corrente a proposição dada.

b) Escreve em linguagem simbólica a negação da proposição dada.

28.2. Considera a proposição $\exists x: \ q(x)$.

a) Traduz em linguagem corrente a proposição dada.

b) Escreve em linguagem simbólica a negação da proposição dada.

28.3. Traduz em linguagem corrente as proposições:

a) $\exists x: \ r(x) \wedge p(x)$

b) $\sim (\forall x, \ r(x))$

Exclusivo do Professor

Resolução

PROPOSTA 29 Escreve a negação das seguintes proposições, utilizando as segundas leis de De Morgan.

29.1. Todos os sábados vou à piscina.

29.2. Pelo menos um dia na semana há música na biblioteca.

29.3. Todos os números naturais têm simétrico.

29.4. Todos os paralelogramos são retângulos.

29.5. Existe um número inteiro que não tem inverso.

29.6. $\forall x\,,\ x > \frac{1}{2}$

29.7. $\exists x:\ 2x = \frac{x}{2}$

29.8. $\exists x:\ x^2 + 1 \neq (x+1)^2$

29.9. $\exists x:\ x \times \frac{1}{x} \neq 1$

PROPOSTA 30 Considera os conjuntos $A = \{2\,,\ 4\,,\ 6\}$ e $B = \{1\,,\ 3\,,\ 5\}$.

Para cada uma das seguintes proposições indica o valor lógico e escreve a proposição que resulta da sua negação.

30.1. $\forall x\,,\ x \in A \Longrightarrow \frac{x}{2}$ é um número par

30.2. $\exists x:\ x \in B \wedge x$ é número primo

30.3. $\exists x:\ x \in B \wedge x \leqslant 3$

30.4. $\forall x\,,\ x \in A \Longrightarrow x \notin B$

30.5. $\exists x:\ x \in A \wedge x \in B$

30.6. $\forall x\,,\ x \in A \Longrightarrow \frac{x}{2} \notin B$

PROPOSTA 31 Considera as proposições:

$a(x):\ \frac{x+1}{2} < x$

$b(x):\ 3x - 2 \leqslant 4$

31.1. A condição $a(x)$ não é universal em $\mathbb{N}$. Justifica.

31.2. A condição $b(x)$ é impossível em $U = \{3\,,\ 5\,,\ 6\}$. Justifica.

31.3. A condição $b(x)$ é possível não universal em $\mathbb{R}$. Justifica.

31.4. Representa na forma de intervalo os conjuntos:

a) $A = \{x \in \mathbb{R}:\ a(x)\}$

b) $B = \{x \in \mathbb{R}:\ b(x)\}$

c) $C = \{x \in \mathbb{R}:\ a(x) \wedge b(x)\}$

NEMA10-P1 © Porto Editora

Exclusivo do Professor

Resolução

NEMA10-P1 © Porto Editora

PROPOSTA 32 Considera os conjuntos: $A = \{x \in \mathbb{R} : \ 2x^2 + x = 2\}$, $B = \{x \in \mathbb{R} : \ x^2 = 1\}$ e $C = \{x \in \mathbb{R} : \ x - 1 \geqslant 0\}$.

32.1. Representa, em extensão, o conjunto:

a) A **b)** B

c) $A \cup B$ **d)** $A \cap B$

32.2. Representa na forma de intervalo o conjunto:

a) C **b)** $C \setminus B$

c) $\overline{C}$ **d)** $\mathbb{R}^+ \cap \overline{C}$

PROPOSTA 33 Considera as condições: $a(x): \ 1 - \frac{x}{2} > 0$; $b(x): \ 2\left(x - \frac{1}{3}\right) \geqslant 0$ e $c(x): \ 1 - x \geqslant 0$.

Representa na forma de intervalo, ou união de intervalos disjuntos, os seguintes subconjuntos de $\mathbb{R}$.

33.1. $A = \{x \in \mathbb{R} : \ a(x)\}$ **33.2.** $B = \{x \in \mathbb{R} : \ b(x)\}$

33.3. $C = \{x \in \mathbb{R} : \ a(x) \wedge b(x)\}$ **33.4.** $D = \{x \in \mathbb{R} : \ a(x) \wedge \sim b(x)\}$

33.5. $E = \{x \in \mathbb{R} : \ b(x) \vee \sim c(x)\}$ **33.6.** $F = \{x \in \mathbb{R} : \ \sim a(x) \vee \sim c(x)\}$

PROPOSTA 34 Considera os conjuntos:

$A = \{x \in \mathbb{R} : |x| \leqslant 2\}$; $B = \{x \in \mathbb{R} : \ 2x - 6 < 0\}$ e $C = \{x \in \mathbb{R} : 2x + 4 \geqslant 0 \wedge x \leqslant 2\}$

34.1. Indica, justificando, o valor lógico da proposição $\forall x, \ x \in A \Longrightarrow x \in B$.

34.2. Mostra, através de um contraexemplo, que é falsa a proposição $\forall x, \ x \in B \Longrightarrow x \in A$.

34.3. Mostra que $A = C$.

34.4. Dá exemplo de uma condição $p(x)$ que seja:

a) possível em B e impossível em C;

b) possível em A e em B.

PROPOSTA 35 Considera as condições: $a(x): \ \frac{x}{2} < 3$ e $b(x): \ x - 1 \leqslant 4$.

35.1. Mostra que, em $\mathbb{N}$, as condições $a(x)$ e $b(x)$ são equivalentes.

35.2. Considera, em $\mathbb{R}$, a implicação $b(x) \Longrightarrow a(x)$.

a) Escreve a implicação contrarrecíproca da implicação dada.

b) Demonstra, por contrarrecíproco, que a implicação dada é universal em $\mathbb{N}$.

Exclusivo do Professor

Resolução

PROPOSTA 36 Considera, em $\mathbb{R}$, as condições $a(x): -1 < x \leqslant 3$ e $b(x): x \geqslant 2$.

$A = \{x \in \mathbb{R} : a(x)\}$ e $B = \{x \in \mathbb{R} : b(x)\}$

36.1. Representa na forma de intervalo:

a) o complementar de B;

b) o complementar de A em relação a B.

36.2. Indica uma condição à qual corresponda o conjunto:

a) $A \setminus B$

b) $\overline{A} \cap B$

c) $\overline{A \cup B}$

36.3. Considera, em $\mathbb{R}$, a proposição $\forall x \in \mathbb{R},\ x \geqslant 2 \Longrightarrow x > 0$.

a) A proposição dada traduz uma inclusão entre dois conjuntos. Indica essa inclusão.

b) Escreve a implicação contrarrecíproca da implicação $x \geqslant 2 \Longrightarrow x > 0$.

PROPOSTA 37 Considera condições $p(x)$ e $q(x)$ em U.

Utilizando as segundas leis de De Morgan, mostra que são equivalentes as proposições $\sim (\forall x,\ p(x) \Longrightarrow \sim q(x))$ e $\exists x : p(x) \wedge q(x)$.

PROPOSTA 38 Sejam $p(x)$, $q(x)$ e $r(x)$ condições definidas no universo U, às quais correspondem os conjuntos P, Q e R.

Sabe-se que:

$r(x)$ é impossível em U

$p(x)$ é universal em U

Mostra que:

38.1. $\{x \in U : q(x) \wedge \sim p(x)\} = \{\ \}$

38.2. $\{x \in U : [r(x) \vee q(x)] \wedge \sim r(x)\} = Q$

PROPOSTA 39 Sejam A e B subconjuntos de $\mathbb{R}$, tais que:

$A = \{x : p(x)\}$ e $B = \{x : q(x)\}$.

Sabe-se que $A \subset B$.

Mostra que é verdadeira a proposição $\forall x \in \mathbb{R},\ \sim q(x) \Longrightarrow \sim p(x)$.

NEMA10-P1 © Porto Editora

Exclusivo do Professor

Resolução

Avaliar

Para cada questão há quatro opções de resposta em que apenas uma está correta. Identifica-a.

NEMA10-P1 © Porto Editora

1 Considera a afirmação: *Todos os participantes na reunião foram pontuais*.

A negação da afirmação dada é:

(A) Todos os participantes na reunião não foram pontuais.

(B) Alguns participantes foram pontuais.

(C) Pelo menos um participante na reunião não foi pontual.

(D) Nenhum participante na reunião foi pontual.

2 Considera a condição $x^2 < x$. A condição dada é universal no conjunto:

(A) $\mathbb{N}$ **(B)** $]-1\,,\,1[$

(C) $]-1\,,\,0[$ **(D)** $]0\,,\,1[$

3 Em $\mathbb{R}$, considera o conjunto $A = \{x \in \mathbb{R} : x > 0 \wedge p(x)\}$.

Sabe-se que $A =]0\,,\,3[$.

A condição $p(x)$ pode ser definida por:

(A) $|x| < 3$ **(B)** $1 - x > 4$

(C) $2x \leqslant 6$ **(D)** $x > 3$

4 A negação da proposição $\forall x \in \mathbb{R}\,,\ 2 \leqslant x < 4$ é equivalente a:

(A) $\exists x : x \geqslant 2 \vee x < 4$ **(B)** $\exists x : x < 2 \vee x \geqslant 4$

(C) $\exists x : x \leqslant 2 \wedge x > 4$ **(D)** $\forall x\,,\ x < 2 \vee x \geqslant 4$

5 A proposição $\forall x \in \mathbb{R}\,,\ x^2 > 4 \Longrightarrow x > 2$ é falsa.

Um contraexemplo é:

(A) 4 **(B)** 1

(C) -2 **(D)** -3

6 Em $\mathbb{R}$, dadas duas condições $a(x)$ e $b(x)$, sabe-se que:

- $A = \{x \in \mathbb{R} : a(x)\} = \{-\sqrt{2}\,,\ 0\,,\ \sqrt{2}\}$
- $a(x) \Longleftrightarrow b(x)$

A condição $b(x)$ pode ser definida por:

(A) $x^2 = 2$ **(B)** $x^3 = 2x$

(C) $x^2 - 2 = x$ **(D)** $x^2 + 2x = 0$

Exercício

Lê com atenção os enunciados e dá respostas completas com todas as justificações que julgues necessárias.

1 Utiliza linguagem simbólica e quantificadores para representar a proposição:

1.1. Todos os números naturais são positivos.

1.2. Há números inteiros que não são naturais.

2 Sem utilizar o símbolo $\sim$, escreve a negação da proposição.

2.1. $\forall x \in \mathbb{R},\ x = 3 \Longrightarrow x < \pi$

2.2. $\exists x \in \mathbb{R} : x \notin \mathbb{N} \wedge x^2 \in \mathbb{N}$

3 Em $\mathbb{N}$, considera as proposições:

$p(n)$: n é divisor de 20

$q(n)$: n é divisor de 5

Sejam $P = \{n \in \mathbb{N} : p(n)\}$ e $Q = \{n \in \mathbb{N} : q(n)\}$

3.1. Mostra que $Q \subset P$, mas $P \not\subset Q$.

3.2. Traduz através de uma implicação o facto de $p(n)$ ser condição necessária para $q(n)$.

4 Em $\mathbb{R}$, considera as condições:

$a(x)$: $3 < x \leqslant 7$; $b(x)$: $x \geqslant 5$ e $c(x)$: $x < 1$ e os conjuntos que lhes correspondem, sendo representados, respetivamente, por A, B e C.

4.1. Representa em extensão o conjunto $\{x \in \mathbb{N} : a(x)\}$.

4.2. A proposição $\forall x \in \mathbb{R},\ c(x) \Longrightarrow \sim b(x)$ é verdadeira. Justifica.

4.3. Representa na forma de intervalo o conjunto $\{x \in \mathbb{R} : \sim a(x) \wedge b(x)\}$.

4.4. Escreve uma condição $p(x)$ tal que o conjunto-solução é $A \setminus B$.

5 Considera o conjunto $U = \{-1, 0, 2, 3, 4\}$ e as condições:

$a(x)$: $\frac{x}{2} \in U$ e $b(x)$: $2 - 3x < 6$.

5.1. Classifica, em U, a condição:

a) $a(x)$

b) $\sim b(x)$

5.2. A proposição $\forall x,\ a(x) \Longleftrightarrow b(x)$ é falsa. Apresenta um contraexemplo.

NEMA10-P1 © Porto Editora

Exclusivo do Professor

Resolução