Matemática - 2021
2º Teste – Tópicos de resolução

Exercício 1

a) $u_1 = \frac{(-1)^1}{1+1} = -\frac{1}{2}$; $u_2 = \frac{(-1)^2}{2+1} = \frac{1}{3}$; $u_3 = \frac{(-1)^3}{3+1} = -\frac{1}{4}$.

$(u_n)_n$ não é monótona porque, por exemplo, $u_1 < u_2$ e $u_2 > u_3$.

b)

$$u_n = \begin{cases} \dfrac{1}{n+1} \, se\ n\ par \\ -\dfrac{1}{n+1} \, se\ n\ ímpar \end{cases}$$

$\lim_n \left(\frac{1}{n+1}\right) = \frac{1}{+\infty} = 0$ $\qquad$ $\lim_n \left(-\frac{1}{n+1}\right) = -\frac{1}{+\infty} = 0$

$\therefore \lim_n u_n = 0$

$\therefore$ $(u_n)_n$ é convergente.

$\therefore$ $(u_n)_n$ é limitada.

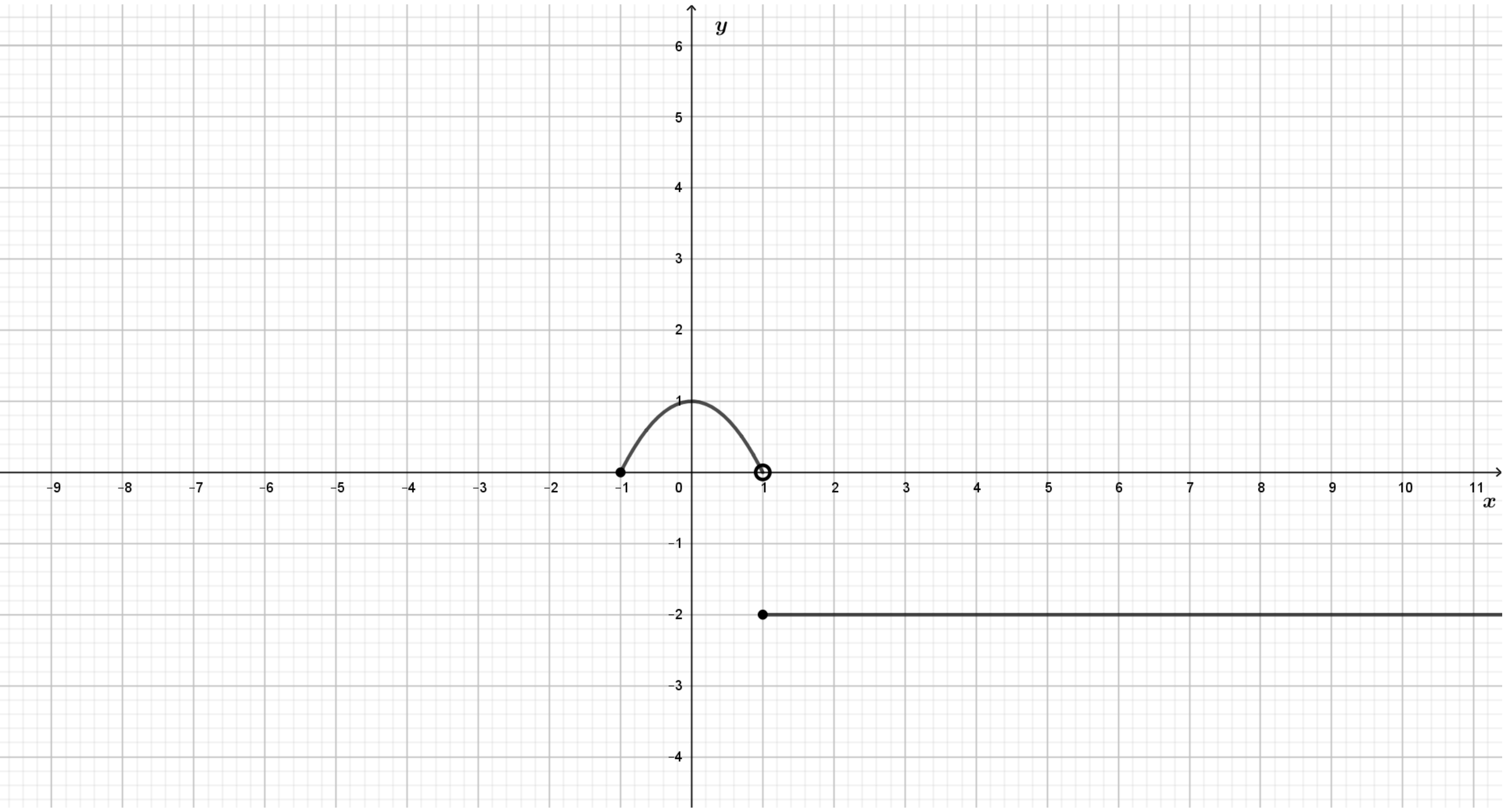
Exercício 2

a) $\lim_n \left(\sqrt{n^2+4} - n\right) = \lim_n \frac{\left(\sqrt{n^2+4}-n\right)\left(\sqrt{n^2+4}+n\right)}{\left(\sqrt{n^2+4}+n\right)} = \frac{n^2+4-n^2}{\left(\sqrt{n^2+4}+n\right)} = \frac{4}{+\infty} = 0$

b) $\lim_n \left(1+\frac{4}{n}\right)^{\frac{n}{2}} = \lim_n \left[\left(1+\frac{4}{n}\right)^n\right]^{\frac{1}{2}} = (e^4)^{\frac{1}{2}} = e^2$

Exercício 3

a)



b) f não é injetiva porque, por exemplo, $3 \neq 4 \wedge f(3) = f(4) = -2$.

Exercício 4

$D = \{x \in \mathbb{R}: x \geq 0 \wedge x^2 - 9 \neq 0\} = [0, 3[\cup]3, +\infty[$

<u>Cálculo auxiliar:</u>

$x^2 - 9 \neq 0 \Leftrightarrow x^2 \neq 9 \Leftrightarrow x \neq -\sqrt{9} \wedge x \neq \sqrt{9} \Leftrightarrow x \neq -3 \wedge x \neq 3$

Exercício 5

a)

$$
\begin{array}{c|ccccc}
 & 1 & 0 & -8 & 0 & -16 \\
2 & & 2 & 4 & -8 & 16 \\
\hline
 & 1 & 2 & -4 & -8 & \underline{\lfloor 0}
\end{array}
$$

$\therefore p(x) = (x-2)(x^3 + 2x^2 - 4x - 8), \forall x \in \mathbb{R}.$

b) $\lim\limits_{x\to 2} \frac{(x-2)(x^3+2x^2-4x-8)}{x-2} = \lim\limits_{x\to 2}(x^3 + 2x^2 - 4x - 8) =$

$= 2^3 + 2 \times 2^2 - 4 \times 2 - 8 = 0$

c) $D_p = \mathbb{R}$

Se $x \in \mathbb{R}, -x \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}.$

$p(-x) = (-x)^4 - 8(-x)^2 + 16 = x^4 - 8x^2 + 16 = p(x), \forall x \in \mathbb{R}.$

$\therefore$ p é uma função par.

Exercício 6

$\frac{x^2-1}{x^2+x} = 0 \Leftrightarrow (x = -1 \vee x = 1) \wedge (x \neq 0 \wedge x \neq -1) \Leftrightarrow x = 1$

$C.S. = \{1\}$

<u>Cálculos auxiliares:</u>

$x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{1} \Leftrightarrow x = \pm 1$

$x^2 + x \neq 0 \Leftrightarrow x(x+1) \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 0 \wedge x + 1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 0 \wedge x \neq -1$

Exercício7

a) $y' = \frac{(x^2+1)' \times 2x - (x^2+1)\times(2x)'}{(2x)^2} = \frac{2x\times 2x-(x^2+1)\times 2}{4x^2} = \frac{4x^2-2x^2-2}{4x^2} = \frac{2x^2-2}{4x^2} = \frac{x^2-1}{2x^2}$

b) $(x+1)'ln(x) + (x+1)[ln(x)]' = ln(x) + (x+1)\times\frac{1}{x} = \frac{xln(x)+x+1}{x}$

Exercício 8

a) $h(x) = 16 \Leftrightarrow 2^{x+1} = 16 \Leftrightarrow 2^{x+1} = 2^4 \Leftrightarrow x+1 = 4 \Leftrightarrow x = 3$

$\therefore (3, 16)$

<u>Cálculo auxiliar:</u>

$$\begin{array}{r|l} 16 & 2 \\ 8 & 2 \\ 4 & 2 \\ 2 & 2 \\ 1 & \end{array} \qquad \therefore 16 = 2^4$$

b) $h(-2) = 2^{-2+1} = 2^{-1} = \frac{1}{2}$

$\therefore$ O ponto de coordenadas $\left(-2, \frac{1}{2}\right)$ pertence ao gráfico da função h.

Exercício 9

$D_g = \{x \in \mathbb{R}: 2x+2>0\} =]-1, +\infty[$

<u>Cálculo auxiliar:</u>

$2x+2>0 \Leftrightarrow 2x>-2 \Leftrightarrow x>-1$

$4 - \log_2(2x+2) = y \Leftrightarrow -\log_2(2x+2) = y-4 \Leftrightarrow \log_2(2x+2) = -y+4 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2x+2 = 2^{-y+4} \Leftrightarrow 2x = 2^{-y+4} - 2 \Leftrightarrow x = \dfrac{2^{-y+4}-2}{2} \Leftrightarrow x = 2^{-y+3} - 1$

$g^{-1}(x) = 2^{-x+3} - 1$

$D_{g^{-1}} = \mathbb{R}$ $\qquad D'_{g^{-1}}\ D_g$

$$\therefore g^{-1}: \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow]-1, +\infty[\\ \mathrm{x} \longrightarrow 2^{-x+3} - 1 \end{array}$$

Exercício 10

a) $D = \{x \in \mathbb{R}: 2x + 5 > 0 \wedge x > 0\} =]0, +\infty[$

<u>Cálculo auxiliar:</u>

$2x + 5 > 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 2x > -5 \Leftrightarrow x > -\frac{5}{2}$

$ln(2x + 5) \geq ln(x) \Leftrightarrow 2x + 5 \geq x \wedge x \in]0, +\infty[\Leftrightarrow x \geq -5 \wedge x \in]0, +\infty[\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x \in]0, +\infty[$

$\therefore CS =]0, +\infty[$

b) $x \cdot 3^{x+1} = 9x \Leftrightarrow x \cdot 3^{x+1} - 9x = 0 \Leftrightarrow x(3^{x+1} - 9) = 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x = 0 \vee 3^{x+1} - 9 = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee 3^{x+1} = 9 \Leftrightarrow x = 0 \vee 3^{x+1} = 3^2 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x = 0 \vee x + 1 = 2 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 1$

$\therefore CS = \{0, 1\}$

Exercício 11

A parábola representativa do gráfico de h tem a concavidade "voltada para cima" porque o coeficiente do termo em x^2 do polinómio que define a função é $1 > 0$.
$\therefore$ h é sempre positiva se não tiver zeros, ou seja, se $m^2 - 4 < 0$.

$m^2 - 4 < 0 \Leftrightarrow m \in]-2, 2[$

<u>Cálculo auxiliar:</u>

$m^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow m^2 = 4 \Leftrightarrow m = \pm\sqrt{4} \Leftrightarrow m = \pm 2$