Tópicos de Matemática II - 2015/ 2016
1º Teste – Tópicos de resolução

Exercício 1

a) $u_n = -\frac{14}{5} \Leftrightarrow \frac{1-3n}{n+1} = -\frac{14}{5} \Leftrightarrow 5-15n = -14n-14 \Leftrightarrow n = 19$

$u_{19} = -\frac{14}{5}$

b)

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1-3(n+1)}{n+2} - \frac{1-3n}{n+1} = \frac{-3n-2}{n+2} - \frac{1-3n}{n+1} = \frac{-3n^2-3n-2n-2-n+3n^2-2+6n}{(n+2)(n+1)}$$

$$= \frac{-4}{(n+2)(n+1)} < 0, \forall n \in IN.$$

$(u_n)_n$ é monótona (estritamente) decrescente.

c) $$\lim_n u_n = \lim_n \frac{n\left(\frac{1}{n}-3\right)}{n\left(1+\frac{1}{n}\right)} = \lim_n \frac{\frac{1}{n}-3}{1+\frac{1}{n}} = \frac{0-3}{1+0} = -3$$

$(u_n)_n$ é convergente pois tende para um número real. Sendo convergente é também, necessariamente, limitada.

Nota: Por $(u_n)_n$ ser estritamente decrescente e convergir para -3, sabemos que $-3 < u_n \leq u_1, \forall n \in IN$, ou seja: $-3 < u_n \leq -1, \forall n \in IN$.

Exercício 2

Por exemplo: $a_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^n$

Exercício 3

a) $\lim_n \dfrac{n^3\left(-7-\dfrac{5}{n}+\dfrac{1}{n^2}\right)}{3n\sqrt{1+\dfrac{1}{n^2}}} = \lim_n \dfrac{n^2\left(-7-\dfrac{5}{n}+\dfrac{1}{n^2}\right)}{3\sqrt{1+\dfrac{1}{n^2}}} = \dfrac{(+\infty)(-7-0+0)}{3\sqrt{1+0}} = -\infty$

b) $\lim_n \dfrac{\left(\sqrt{2n-3}-\sqrt{2n+5}\right)\left(\sqrt{2n-3}+\sqrt{2n+5}\right)}{\sqrt{2n-3}+\sqrt{2n+5}} = \lim_n \dfrac{2n-3-(2n+5)}{\sqrt{2n-3}+\sqrt{2n+5}} =$

$= \lim_n \dfrac{-8}{\sqrt{2n-3}+\sqrt{2n+5}} = \dfrac{-8}{(+\infty)} = 0$

c) $\lim_n \dfrac{\left(1-\dfrac{2}{n}\right)^n \times \left(1-\dfrac{2}{n}\right)^3}{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n \times \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^3} = \dfrac{e^{-2}\times 1^3}{e^1 \times 1^3} = e^{-3}$

d)

- Para n par: $\lim_n \left(n^2-n\right) = \lim_n \left[n^2\left(1-\dfrac{1}{n}\right)\right] = (+\infty)(1-0) = +\infty$
- Para n ímpar: $\lim_n \left(n^2+n\right) = +\infty$

Então: $\lim_n \left(n^2-(-1)^n n\right) = +\infty$

Exercício 4

a) $D_f = \{x \in IR : 2x+4>0\} =]-2+\infty[$

b) $f(16) = \dfrac{1}{\sqrt{2\times 16+4}} = \dfrac{1}{\sqrt{36}} = \dfrac{1}{6}$. Logo, o ponto $\left(16, \dfrac{1}{6}\right)$ pertence ao gráfico de f **.**

Exercício 5

a)

i) $D_g = [-2,3]$; $D'_g = [-1,2]$ **ii)** 0 **iii)** Por exemplo: $]1,2[$

iv) Máximo absoluto: 2 **;** mínimo absoluto: -1 **.**

b) Tem 4 soluções: $-2,1,3$ e ainda outra entre 1 e 2 **.**

Exercício 6

a) $-x^2+4x+5=-\left(x^2-4x-5\right)=-\left[(x-2)^2-4-5\right]=-(x-2)^2+9$

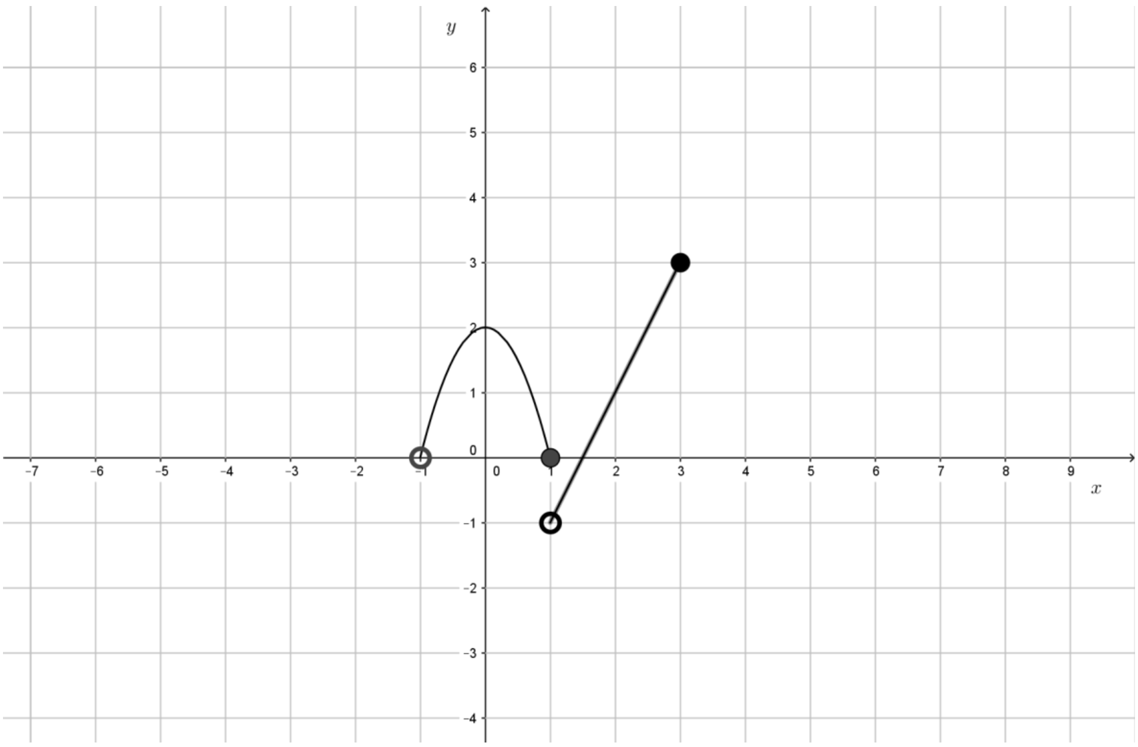
Nota: a parábola representativa do gráfico de f tem vértice de abcissa $-\dfrac{b}{2a}=2$ e ordenada $f(2)=9$. Logo: $f(x)=-(x-2)^2+9$.

b) $x=2$

c) Por exemplo: 1 e 3

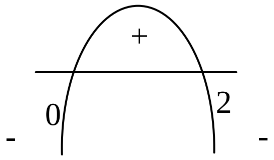
d) A parábola representativa do gráfico de f tem concavidade "voltada para baixo" e a ordenada do seu vértice é 9 ; logo: $D'_f=\left]-\infty,9\right]$

Exercício 7



Exercício 8

a) Cálculo auxiliar: $2x - x^2 = 0 \Leftrightarrow x\,(2-x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 2$



C.S. = $[0, 2]$

b) $2x^3 + 3x^2 - 2x \leq 0 \Leftrightarrow x\left(2x^2 + 3x - 2\right) \leq 0$

Cálculo auxiliar: $2x^2 + 3x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{-3 \pm \sqrt{9+16}}{4} \Leftrightarrow x = -2 \vee x = \dfrac{1}{2}$

x	$-\infty$	-2		0		$1/2$	$+\infty$
x	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$2x^2 + 3x - 2$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$x\left(2x^2 + 3x - 2\right)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

C.S. = $]-\infty, -2] \cup \left[0, \dfrac{1}{2}\right]$

c) Cálculos auxiliares: $x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 2$; $x^2 + 3 = 0 \Leftrightarrow x^2 = -3 \Leftrightarrow x \in \phi$;
$4 - x = 0 \Leftrightarrow x = 4$

x	$-\infty$	2		4	$+\infty$
$x-2$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
x^2+3	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$4-x$	$+$	$+$	$+$	0	$-$
$(x-2)\left(x^2+3\right)(4-x)$	$-$	0	$+$	0	$-$

C.S. = $]2, 4[$