Ficha de Trabalho n.º 7 – Matemática A – 10.º Ano

Cálculo Vectorial no Espaço

Algumas Resoluções

"Conhece a Matemática e dominarás o Mundo."
Galileu Galilei

3.1. Tem-se que $\vec{v} = 2\vec{e}_1 + k\,\vec{e}_2 + \vec{e}_3 = (2,k,1)$. Assim:

$$\vec{u} - \vec{v} = \left(k^2 - 1, k, k\right) - (2,k,1) = \left(k^2 - 3, 0, k-1\right)$$

Assim vem:

$$\|\vec{u} - \vec{v}\|^2 = 10 \Leftrightarrow \left\|\left(k^2 - 3, 0, k-1\right)\right\|^2 = 10 \Leftrightarrow \left(\sqrt{\left(k^2-3\right)^2 + 0^2 + (k-1)^2}\right)^2 = 10 \Leftrightarrow \left(k^2-3\right)^2 + (k-1)^2 = 10 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow k^4 - 6k^2 + 9 + k^2 - 2k + 1 = 10 \Leftrightarrow k^4 - 5k^2 - 2k + \cancel{10} = \cancel{10} \Leftrightarrow k^4 - 5k^2 - 2k = 0$$

$$\Leftrightarrow k\left(k^3 - 5k - 2\right) = 0 \Leftrightarrow k = 0 \ \vee \ k^3 - 5k - 2 = 0$$

Como -2 é solução da equação $\|\vec{u} - \vec{v}\|^2 = 10$, é também solução da equação $k^3 - 5k - 2 = 0$, isto é, é raiz do polinómio $k^3 - 5k - 2$. Usando a regra de Ruffini para o decompor, vem:

	1	0	-5	-2
-2		-2	4	2
	1	-2	-1	0

Logo, $k^3 - 5k - 2 = (k+2)\left(k^2 - 2k - 1\right)$. Portanto:

$$k = 0 \ \vee \ k^3 - 5k - 2 \Leftrightarrow k = 0 \ \vee \ (k+2)\left(k^2 - 2k - 1\right) = 0 \Leftrightarrow k = 0 \ \vee \ k + 2 = 0 \ \vee \ k^2 - 2k - 1 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow k = 0 \ \vee \ k = -2 \ \vee \ k = \frac{2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 4\times(-1)\times 1}}{2\times 1}$$

$$\Leftrightarrow k = 0 \ \vee \ k = -2 \ \vee \ k = \frac{2 \pm \sqrt{8}}{2}$$

$$\Leftrightarrow k = 0 \ \vee \ k = -2 \ \vee \ k = \frac{2 - 2\sqrt{2}}{2} \ \vee \ k = \frac{2 + 2\sqrt{2}}{2}$$

$$\Leftrightarrow k = 0 \ \vee \ k = -2 \ \vee \ k = 1 - \sqrt{2} \ \vee \ k = 1 + \sqrt{2}$$

$\therefore$ os restantes valores não nulos de k de tais que $\|\vec{u}-\vec{v}\|^2=10$ são $1-\sqrt{2}$ e $1+\sqrt{2}$.

Resposta: B