Folha 12 - Das Funções Exponenciais às Funções Logarítmicas

Conceito de logaritmo de um número

1. Definição

Logaritmo de um número positivo x numa base a positiva e diferente de 1 é o número y a que se deve elevar a para se obter x. Escrevemos $\boxed{\log_a x = y \iff x = a^y}$.

Daqui se conclui também, por substituição, que:

$$\boxed{\log_a a^y = y} \qquad \text{e} \qquad \boxed{a^{\log_a x}} = x.$$

Exemplo 1 *Verificar que* *i)* $\log_3 9 = 2$, *ii)* $\log_2 16 = 4$, *iii)* $\log_8 4\frac{2}{3}$ *iv)* $\log_{0.1} 100 = -2$.

i) $\log_3 9 = x \iff 3^x = 9 \iff 3^x = 3^2 \iff x = 2$

ii) $\log_2 16 = x \iff 2^x = 16 \iff 2^x = 2^4 \iff x = 4$

iii) $\log_8 4 = x \iff 8^x = 4 \iff (2^3)^x = 4 \iff 2^{3x} = 2^2 \iff 3x = 2 \iff x = \frac{2}{3}$

iv) $\log_{0.1} 100 = x \iff 0.1^x = 100 \iff \frac{1}{10^x} = 10^2 \iff 10^{-x} = 10^2 \iff x = -2$

Exemplo 2 *Resolver, em* $\mathbb{R}$*, as equações:* *a)* $\log_5 x^2 = 0$; *b)* $\log_b 81 = -4$.

(a) $\log_5 x^2 = 0 \iff x^2 = 5^0 \iff x^2 = 1 \iff x = 1 \lor x = -1$

(b) $\log_b 81 = -4 \iff b^{-4} = 81 \iff \left(\frac{1}{b}\right)^4 = 3^4 \iff \frac{1}{b} = 3 \iff b = \frac{1}{3}$

2. Propriedades

As duas propriedades seguintes decorrem imediatamente da definição.

- $\boxed{\log_a a = 1}$, uma vez que $a^1 = a$.
- $\boxed{\log_a 1 = 0}$, uma vez que $a^0 = 1$.

Vamos agora estabelecer as *propriedades operatórias dos logaritmos*:

Suponhamos que $x, y \in \mathbb{R}^+$ e que a e b são números positivos diferentes de 1.

- $\boxed{\log_a(x \cdot y) = \log_a x + \log_a y}$

Por definição, $x = a^{\log_a x}$ e $y = a^{\log_a y}$. Então,

$$x \cdot y = a^{\log_a x} \cdot a^{\log_a y} = a^{\log_a x + \log_a y},$$

e, atendendo à definição de logaritmo de base a, podemos escrever

$$\log_a(x \cdot y) = \log_a x + \log_a y.$$

Exemplo $\log_5(125 \times 625) = \log_5 125 + \log_5 625 = \log_5 5^3 + \log_5 5^4 = 3 + 4 = 7$

- $\boxed{\log_a \dfrac{x}{y} = \log_a x - \log_a y}$

Do mesmo modo, $x = a^{\log_a x}$ e $y = a^{\log_a y}$,

$$\frac{x}{y} = \frac{a^{\log_a x}}{a^{\log_a y}} = a^{\log_a x - \log_a y}$$

e, por definição de logaritmo,

$$\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y.$$

Exemplo $\log_2 \frac{32}{128} = \log_2 32 - \log_2 128 = \log_2 2^5 - \log_2 2^7 = 5 - 7 = -2$

- $\boxed{\log_a x^p = p \cdot \log_a x, \quad \forall p \in \mathbb{R}}$

  Com efeito, se $x = a^{\log_a x}$, então,

$$x^p = \left(a^{\log_a x}\right)^p = a^{p \cdot \log_a x}$$

  e, por definição de logaritmo,

$$\log_a x^p = p \cdot \log_a x.$$

  Exemplos

  (a) $\log_5 125 = \log_5 5^3 = 3 \log_5 5 = 3.$

  (b) $\log_2 \left(\dfrac{32}{512}\right)^3 = 3 \log_2 \dfrac{2^5}{2^9} = 3(\log_2 2^5 - \log_2 2^9) = 3(5 - 9) = -12$

- $\boxed{\log_a \sqrt[n]{x} = \dfrac{1}{n} \cdot \log_a x, \quad \forall n \in \mathbb{N}}$

  Esta propriedade é um caso particular da propriedade anterior, visto que $\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$.

  Exemplo $\log_3 \sqrt[5]{27} = \frac{1}{5} \log_3 27 = \frac{1}{5} \log_3 3^3 = \frac{3}{5}$

- $\boxed{\log_b x = \log_a x \cdot \log_b a}$

  Esta propriedade permite-nos passar do logaritmo de um número numa dada base a para o logaritmo do mesmo número noutra base b.

Estudo da função logarítmica

1. Definição

A função exponencial no conjunto de chegada $\mathbb{R}^+$, $\begin{array}{rl} f\colon \mathbb{R} & \longrightarrow \mathbb{R}^+ \\ x & \mapsto a^x \end{array}$,

é uma função bijetiva, para $a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$ e, como tal, admite inversa $\begin{array}{rl} f^{-1}\colon \mathbb{R}^+ & \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \mapsto \log_a x \end{array}$.

É a função assim definida que se chama *função logarítmica (ou logaritmo) de base a.*

2. Propriedades da função logarítmica

Domínio: $\mathbb{R}^+$

Contradomínio: $\mathbb{R}$

Zeros: $x = 1$.
$\log_a x = 0 \iff x = a^0 \iff x = 1$

Injetividade: A função é injetiva: $\log_a x_1 = \log_a x_2 \implies x_1 = x_2, \quad \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}^+$.

Para estudar a monotonia consideremos dois casos:

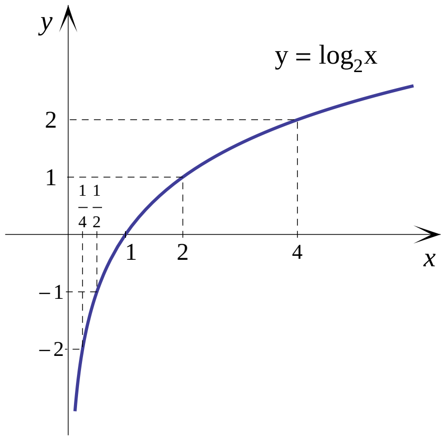
1. $\boxed{a > 1}$ A função é crescente,

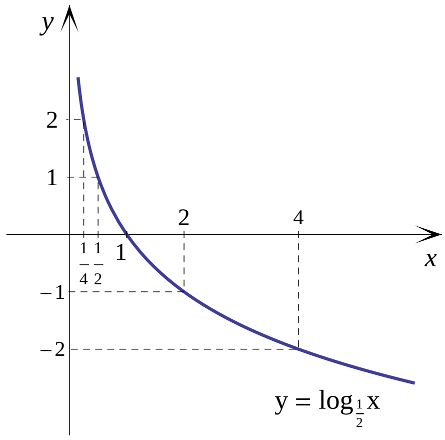
$$x_2 > x_1 \implies \log_a x_2 > \log_a x_1, \quad \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}^+.$$

2. $\boxed{a < 1}$ A função é decrescente,

$$x_2 > x_1 \implies \log_a x_2 < \log_a x_1, \quad \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}^+.$$

Exemplo 3 *Esboçar o gráfico das funções definidas por* $y = \log_2 x$, *e* $y = \log_{\frac{1}{2}} x$, $x \in \mathbb{R}$ *e observar as propriedades acima apresentadas.*





Apresentamos de seguida alguns exemplos que envolvem funções logarítmicas. Vamos usar a notação ln para designar $\log_e$ e escrever simplesmente log quando se trata de $\log_{10}$.

Exemplo 4 *Seja* f *a função real, de variável real, definida por* $f(x) = 5 - \log_3(2 + 3x)$.

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} : \; 2 + 3x > 0\} = \left\{x \in \mathbb{R} : \; x > -\frac{2}{3}\right\} = \left]-\frac{2}{3}, +\infty\right[$$

$$D'_f = \mathbb{R}$$

Determinar o conjunto solução de cada uma das condições $f(x) = f(0)$ *e* $f(x) > 6$.

$$\begin{aligned} f(x) = f(0) &\iff 5 - \log_3(2 + 3x) = 5 - \log_3 2 \\ &\iff \log_3(2 + 3x) = \log_3 2 \\ &\iff 2 + 3x = 2 \\ &\iff x = 0. \end{aligned}$$

Como $0 \in D_f$, $S = \{0\}$.

$$\begin{aligned} f(x) > 6 &\Longleftrightarrow 5 - \log_3(2+3x) > 6 \\ &\Longleftrightarrow -\log_3(2+3x) > 1 \\ &\Longleftrightarrow \log_3(2+3x) < -1 \\ &\Longleftrightarrow \log_3(2+3x) < \log_3 3^{-1}. \end{aligned}$$

Como a base é maior do que 1, a função logarítmica é crescente e, portanto,

$$\log_3(2+3x) < \log_3 3^{-1} \Leftrightarrow 2+3x < \frac{1}{3} \Leftrightarrow 3x < \frac{1}{3} - 2 \Leftrightarrow x < -\frac{5}{9}.$$

O conjunto solução é, então, $D_f \cap \left]-\infty, -\frac{5}{9}\right[= \left]-\frac{2}{3}, +\infty\right[\cap \left]-\infty, -\frac{5}{9}\right[= \left]-\frac{2}{3}, -\frac{5}{9}\right[.$

Exemplo 5 *Determinar domínio e contradomínio e definir a função inversa da função definida por*

$$f(x) = 2 - 5^{x-1}.$$

O domínio $D_f = \mathbb{R}$. *Quanto ao contradomínio, tem-se*

$$5^{x-1} > 0 \Longleftrightarrow -5^{x-1} < 0 \Longleftrightarrow 2 - 5^{x-1} < 2.$$

Portanto, $D'f =]-\infty, 2[$.

Para definir a função inversa, vamos igualar a expressão designatória de f *a* y *e resolver em ordem a* x.

$y = 2 - 5^{x-1} \Leftrightarrow 5^{x-1} = 2 - y \Leftrightarrow \log_5(2-y) = x - 1 \Leftrightarrow x = \log_5(2-y) + 1.$

A função inversa de f *é, então,*

$$\begin{aligned} f^{-1}\colon\ ]-\infty, 2[&\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \log_5(2-x) + 1 \end{aligned}.$$

Exemplo 6 *Consideremos a função definida por* $f(x) = 1 + \ln(2-3x)$.

Determinar

(a) *o domínio de* f;

(b) *uma expressão designatória da inversa;*

(c) $f\left(\dfrac{2-e}{3}\right)$.

(a) $2 - 3x > 0 \Longleftrightarrow -3x > -2 \Longleftrightarrow x < \frac{2}{3}.$

Então $D_f = \{x \in \mathbb{R} :\ 2 - 3x > 0\} = \left]-\infty, \frac{2}{3}\right[,$

(b) *Vamos resolver a equação* $y = 1 + \ln(2-3x)$ *em ordem a* x.

$y = 1 + \ln(2-3x) \Leftrightarrow y - 1 = \ln(2-3x) \Leftrightarrow 2 - 3x = e^{y-1} \Leftrightarrow 3x = 2 - e^{y-1} \Leftrightarrow x = \frac{2-e^{y-1}}{3}.$

Podemos, então, definir a função inversa de f,

$$\begin{aligned} f^{-1}\colon \mathbb{R} &\longrightarrow \left]-\infty, \tfrac{2}{3}\right[\\ x &\mapsto \frac{2-e^{x-1}}{3}. \end{aligned}$$

(c) $f\left(\frac{2-e}{3}\right) = 1 + \ln\left(2 - 3 \times \frac{2-e}{3}\right) = 1 + \ln(2 - 2 + e) = 1 + \ln(e) = 2.$

Exercícios Propostos

Exercício 1 Calcule:

a) $\log_2(\frac{1}{64})$;

b) $\log(1000)$;

c) $\ln(e^3)$;

d) $\ln(\sqrt[5]{e})$;

e) $\ln(e^2) + \ln(e^{-10}) + \ln(1)$;

f) $\log_3\left(\frac{\sqrt{27}}{81^8}\right)$;

g) $\log_4(64)$;

h) $\log_2(\sqrt{32})$;

i) $\log_5 1$;

Exercício 2 Seja $f(x) = \dfrac{1 + 2\ln(x)}{x}$.

a) Determine D_f.

b) Resolva a inequação $f(x) \geq 0$.

Exercício 3 Para cada uma das funções seguintes, determine o domínio, o contradomínio e os zeros. Caracterize, caso exista, a função inversa.

a) $m(x) = 5 - \log(x + 5)$;

b) $g(x) = 3 + \dfrac{1}{2}\log_7(2x - 1)$;

c) $f(x) = e^{x-3} - 2$.

Exercício 4 Resolva, em $\mathbb{R}$, cada uma das seguintes condições:

a) $\ln(x^2 - 1) = 1$;

b) $\log_2(1 - 2x) > \log_2 x$;

c) $\log_{10}(1 - x^2) < 1$.

Exercício 5 Considere a função real, de variável real, definida por

$$f(x) = 1 - 3^x.$$

a) Calcule $f(0) + f(\log_3 2)$.

b) Caracterize, caso exista, a função inversa f^{-1}.