Exercícios de aplicação **(págs. 73 a 79)**

1.

1.1. $(A \cap \bar{B}) \cup (A \cap B) = A \cap (\bar{B} \cup B) = A \cap U = A$

1.2. $(A \cap \bar{B}) \cup (\bar{A} \cap B) \cup (\bar{A} \cap \bar{B}) = (A \cap \bar{B}) \cup (\bar{A} \cap B) \cup (\bar{A} \cap \bar{B}) =$

$= (A \cap \bar{B}) \cup [\bar{A} \cap (B \cup \bar{B})] =$

$= (A \cap \bar{B}) \cup (\bar{A} \cap U) =$

$= (A \cap \bar{B}) \cup \bar{A} =$

$= (\bar{A} \cup A) \cap (\bar{A} \cup \bar{B}) =$

$= U \cap (\bar{A} \cup \bar{B}) =$

$= \bar{A} \cup \bar{B} =$

$= \overline{A \cap B}$

1.3. $\overline{(\bar{A} \cap B) \cup (\bar{A} \cap \bar{B})} = \overline{(\bar{A} \cap B)} \cap \overline{(\bar{A} \cap \bar{B})} = (A \cup \bar{B}) \cap (A \cup B) =$

$= A \cup (\bar{B} \cap B) =$

$= A \cup \emptyset =$

$= A$

2. ${}^4C_1 + {}^4C_2 + {}^4C_3 + {}^4C_4 = 4 + 6 + 4 + 1 = 15$

3.

3.1. ${}^{28}A_3 = 19\,656$

3.2. ${}^{28}C_4 = 20\,475$

3.3. ${}^{28}A_2 \times {}^{26}C_3 = 1\,965\,600$

4.

4.1. $14! = 87\,178\,291\,200$

4.2. $6! \times 9! = 261\,273\,600$

4.3. $9! \times 5! \times 2 = 87\,091\,200$

4.4. $9 \times 8 \times 12! = 34\,488\,115\,200$

4.5. $14! - 13! \times 2 = 74\,724\,249\,600$

5. $\frac{11!}{3! \times 2! \times 2! \times 2!} = 831\,600$

6. $9 \times 8 \times 7 + 8 \times 8 \times 7 \times 4 = 504 + 1792 = 2296$

Daniela Raposo e Luzia Gomes

7. $^{n}C_2 = 3n-5 \Leftrightarrow \frac{n!}{(n-2)!\times 2!} = 3n-5 \Leftrightarrow \frac{n(n-1)}{2} = 3n-5$

$\Leftrightarrow n(n-1) = 2(3n-5)$

$\Leftrightarrow n^2 - n = 6n - 10$

$\Leftrightarrow n^2 - 7n + 10 = 0$

$\Leftrightarrow n = 2 \ \vee \ n = 5$

$\text{C. S.} = \{2, 5\}$

8. $^{n}C_0 \times {}^{n}C_1 \times {}^{n}C_2 = 10n \Leftrightarrow 1 \times n \times \frac{n!}{(n-2)!\times 2!} = 10n$

$\Leftrightarrow n \times n \times (n-1) = 20n$

$\Leftrightarrow n^3 - n^2 - 20n = 0$

$\Leftrightarrow n(n^2 - n - 20) = 0$

$\Leftrightarrow n = 0 \ \vee \ n^2 - n - 20 = 0$

$\Leftrightarrow n = 0 \ \vee \ n = 5 \ \vee \ n = -4$

Logo, $n = 5$.

Assim, $2^5 = 32$.

9. $^{n}C_0 + {}^{n}C_1 + {}^{n}C_2 = 5152 \Leftrightarrow 1 + n + \frac{n!}{(n-2)!\times 2!} = 5152$

$\Leftrightarrow 1 + n + \frac{n(n-1)}{2} = 5152$

$\Leftrightarrow 2 + 2n + n^2 - n = 10\,304$

$\Leftrightarrow n^2 + n - 10\,302 = 0$

$\Leftrightarrow n = 101 \ \vee \ n = -102$

Portanto, a linha seguinte é a 102.

$^{102}C_{100} = 5151$

10. $^{n}C_7 = {}^{n}C_8$ linha 15

O maior elemento da linha 16 é $^{16}C_8 = 12\,870$.

11. Tem-se que:

$0 \le p+1 \le 26 \ \wedge \ 0 \le p^2 - p \le 26 \ \wedge \ p \in \mathbb{Z}$, isto é,

$-1 \le p \le 25 \ \wedge \ \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{105}}{2} \le p \le 0 \ \vee \ 1 \le p \le \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{105}}{2}\right) \ \wedge \ p \in \mathbb{Z}$, ou seja,

$p \in \{-1,0,1,2,3,4,5\}$

$$
\begin{aligned}
{}^{26}C_{p+1} = {}^{26}C_{p^2-p} &\Leftrightarrow p+1 = p^2 - p \ \vee \ p+1 = 26-(p^2-p) \\
&\Leftrightarrow -p^2+2p+1=0 \ \vee \ p+1 = 26-p^2+p \\
&\Leftrightarrow p = 1+\sqrt{2} \ \vee \ p = 1-\sqrt{2} \ \vee \ p^2 = 25 \\
&\Leftrightarrow p = 1+\sqrt{2} \ \vee \ p = 1-\sqrt{2} \ \vee \ p=-5 \ \vee \ p = 5
\end{aligned}
$$

Como $p \in \{-1,0,1,2,3,4,5\}$, então $\text{C.S.} = \{5\}$.

Cálculos auxiliares

$p^2-p=0 \Leftrightarrow p(p-1)=0 \Leftrightarrow p=0 \ \vee \ p=1$, logo $p^2-p \geq 0 \Leftrightarrow p \leq 0 \ \vee \ p \geq 1$

$p^2-p-26=0 \Leftrightarrow p = \frac{1\pm\sqrt{1-4\times(-26)}}{2} \Leftrightarrow p = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{105}}{2}$, logo $p^2-p-26 \leq 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}-\frac{\sqrt{105}}{2} \leq p \leq \frac{1}{2}+\frac{\sqrt{105}}{2}$

Assim, $0 \leq p^2-p \leq 26 \Leftrightarrow \frac{1}{2}-\frac{\sqrt{105}}{2} \leq p \leq 0 \ \vee \ 1 \leq p \leq \frac{1}{2}+\frac{\sqrt{105}}{2}$.

12. ${}^{10}C_p \ (x^2)^{10-p} \times \left(-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^p$

Assim, temos:

$$
\begin{aligned}
x^{20-2p} \times \left(\frac{1}{x^{\frac{1}{2}}}\right)^p \times (-1)^p &= x^{20-2p} \times \left(x^{-\frac{1}{2}}\right)^p \times (-1)^p = \\
&= x^{20-\frac{5}{2}p} \times (-1)^p
\end{aligned}
$$

Logo:

$$20-\frac{5}{2}p = 0 \Leftrightarrow -\frac{5}{2}p = -20 \Leftrightarrow p = 8$$

${}^{10}C_p \ (x^2)^{10-p} \times \left(-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^p$, ou seja, ${}^{10}C_8 \ = 45$.

13.

$$
\begin{aligned}
&\left(1+\frac{3}{n}\right)^n = \\
&{}^{n}C_0 \times 1^n \times \left(\frac{3}{n}\right)^0 + {}^{n}C_1 \times 1^{n-1} \times \frac{3}{n} + {}^{n}C_2 \times 1^{n-2} \times \left(\frac{3}{n}\right)^2 + \cdots + {}^{n}C_n \times 1^0 \times \left(\frac{3}{n}\right)^n = \\
&\qquad = 1 + n \times \frac{3}{n} + \frac{n(n-1)}{2} \times \frac{9}{n^2} + \cdots + \left(\frac{3}{n}\right)^n = \\
&\qquad = 1 + 3 + \frac{9\times(n-1)}{2n} + \cdots + \left(\frac{3}{n}\right)^n = \\
&\qquad = 4 + \frac{9n-9}{2n} + \cdots + \left(\frac{3}{n}\right)^n
\end{aligned}
$$

Assim, $\left(1+\frac{3}{n}\right)^n > 6 \Leftrightarrow 4 + \frac{9n-9}{2n} + \cdots + \left(\frac{3}{n}\right)^n > 6$.

Dado que $4 + \frac{9n-9}{2n} + \cdots + \left(\frac{3}{n}\right)^n$ é a soma de $n+1$ parcelas positivas, para provar o pretendido, basta provar que $4 + \frac{9n-9}{2n} > 6$.

$$4 + \frac{9n-9}{2n} > 6 \Leftrightarrow \frac{9n-9}{2n} > 2 \Leftrightarrow 9n - 9 > 4n$$
$$\Leftrightarrow 5n > 9$$
$$\Leftrightarrow n > \frac{9}{5}$$

Como, por hipótese, $n \geq 2$, provámos o que se pretendia.

Exercícios propostos (págs. 80 a 88)

Itens de seleção (págs. 80 a 82)

1. $2! \times 3! = 12$

Opção (B)

2. ${}^{8}C_4 = 70$

Opção (C)

3. ${}^{50}C_2 \times {}^{20}C_1 = {}^{50}C_2 \times 20$

Opção (D)

4. $3 \times 2 \times 5!$

Opção (B)

5. ${}^{4}A'_6 = 4^6 = 4096$

Opção (A)

6. Linha 12: ${}^{12}C_6 = 924$

Opção (C)

7. Os dois últimos elementos são iguais aos dois primeiros.

${}^{n}C_0 + {}^{n}C_1 = 20 \Leftrightarrow 1 + n = 20 \Leftrightarrow n = 19$

A linha 18 é a linha anterior. Assim:

${}^{18}C_2 \times {}^{18}C_3 = 124\,848$

Opção (D)

8. $2^5 = 32$

Opção (A)

9. $\frac{(n-1)!}{n!-(n-1)!} = \frac{(n-1)!}{\left(\frac{n!}{(n-1)!}-1\right)(n-1)!} =$

$= \frac{1}{\frac{n\times(n-1)!}{(n-1)!}-1} =$

$= \frac{1}{n-1}$

Opção (A)

10. Para cada um dos dez utensílios há 5 possibilidades (5^{10}).

Opção (C)

11. ${}^{10}C_3 \times {}^{12}C_5 \times 8!$

Opção (C)

12. ${}^{n}C_2 = 190 \Leftrightarrow \frac{n!}{(n-2)!\times 2!} = 190 \Leftrightarrow n(n-1) = 380$

$\Leftrightarrow n^2 - n - 380 = 0$

$\Leftrightarrow n = 20 \;\vee\; n = -19$

$n = 20$, ou seja, 20 pessoas.

Opção (B)

13. $9\times 8\times 7 + 9\times 8\times 7 + 9\times 8\times 7 + 5\times 8\times 7 = 1792$

Opção (C)

14. $2^n = 4096 \Leftrightarrow 2^n = 2^{12} \Leftrightarrow n = 12$

Logo, ${}^{13}C_2 = 78$.

Opção (D)

15. ${}^{n}C_0 + {}^{n}C_1 + {}^{n}C_{n-1} + {}^{n}C_n = 20 \Leftrightarrow 1 + n + n + 1 = 20$

$\Leftrightarrow 2n + 2 = 20$

$\Leftrightarrow 2n = 18$

$\Leftrightarrow n = 9$

${}^{9}C_5 = 126$

Opção (B)

16. ${}^{11}C_4 \times {}^{7}C_5 \times 3 \times 3 = {}^{11}C_4 \times {}^{7}C_5 \times 3^2$

Opção (C)

17. $(x+999)^6 = {}^6C_0 x^0 + {}^6C_1 x \times 999^5 + \cdots$

$^6C_1 x = 6 \Leftrightarrow 6x = 6 \Leftrightarrow x = 1$

Logo:

$(1+999)^6 = 1000^6 = (10^3)^6 = 10^{18}$

Opção (C)

18. $(1+\cos x)^4 = 0 \Leftrightarrow 1 + \cos x = 0 \Leftrightarrow \cos x = -1$

$\Leftrightarrow \cos x = \cos \pi$

$\Leftrightarrow x = \pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$

Opção (B)

19. $^nC_3 = \frac{n!}{(n-3)!3!} = \frac{n(n-1)(n-2)}{6}$

Opção (A)

20. $^nC_2 - n = 77 \Leftrightarrow \frac{n!}{(n-2)!2!} - n = 77 \Leftrightarrow \frac{n(n-1)}{2} - n = 77$

$\Leftrightarrow n(n-1) - 2n = 154$

$\Leftrightarrow n^2 - n - 2n - 154 = 0$

$\Leftrightarrow n^2 - 3n - 154 = 0$

$\Leftrightarrow n = 14 \vee n = -11$

Opção (D)

21. $^6C_3 = 20$

Opção (B)

22. $7 \times 7 \times 7 \times 7 \times 7 = 7^5$

Opção (B)

23. $\frac{(n+1)(n+2)}{2}$

Opção (C)

24. $^4C_2 \times {}^3C_1 + {}^4C_1 \times {}^3C_2 = 30$

Opção (A)

25. ${}^{13}C_P(\sqrt{5x})^{13-p}\ \left(-\frac{y}{3}\right)^P$

Assim, temos:

$$\left[(5x)^{\frac{1}{2}}\right]^{13-p}\times(-1)^p\times\left(\frac{y}{3}\right)^P=(5x)^{\frac{13}{2}-\frac{p}{2}}$$

Logo:

$$\frac{13}{2}-\frac{p}{2}=3\Leftrightarrow 13-6=p$$
$$\Leftrightarrow 7=p$$

$${}^{13}C_7\left(\sqrt{5x}\right)^6\ \left(-\frac{y}{3}\right)^7={}^{13}C_7\times\left(5^{\frac{1}{2}}\right)^6\times\left(x^{\frac{1}{2}}\right)^6\times\left(-\frac{1}{3}\right)^7\times y^7=$$
$$={}^{13}C_7\times 5^3\times x^3\times\left(-\frac{1}{2187}\right)\times y^7=$$
$$={}^{13}C_7\times 5^3\times\left(-\frac{1}{3}\right)^7 x^3y^7$$

Opção (B)

26. ${}^{15}C_0(2x)^{15}\times(3y)^0=2^{15}x^{15}+15\times 2^{14}x^{14}\times 3\times y^1+105\times 2^{13}x^{13}\times 3^2y^2+455\times 2^{12}x^{12}\times 3^3y^3+1365\times 2^{11}x^{11}\times 3^4y^4+3003\times 2^{10}x^{10}\times 3^5y^5+5005\times 2^9x^9\times 3^6y^6+6435\times 2^8x^8\times 3^7y^7+6435\times 2^7x^7\times 3^8y^8+5005\times 2^6x^6\times 3^9y^9+3003\times 2^5x^5\times 3^{10}y^{10}+1365\times 2^4x^4\times 3^{11}y^{11}+455\times 2^3x^3\times 3^{12}y^{12}+105\times 2^2x^2\times 3^{13}y^{13}+15\times 2x\times 3^{14}y^{14}+3^{15}y^{15}$

$5^{15}=30\,517\,578\,130$

Opção (B)

Itens de construção **(págs. 83 a 88)**

1.

1.1. $(\overline{A\cap B})\cup\bar{\bar{A}}=(\bar{A}\cup\bar{B})\cup A=\bar{A}\cup(\bar{B}\cup A)=$
$$=\bar{A}\cup(A\cup\bar{B})=$$
$$=(\bar{A}\cup A)\cup\bar{B}=$$
$$=U\cup\bar{B}=$$
$$=U$$

1.2. $(A\cap\bar{B})\cup(A\cap B)=A\cap(\bar{B}\cup B)=$
$$=A\cap U=$$
$$=A$$

1.3. $(A\cap\bar{B})\cup(A\cap B)\cup(\bar{A}\cap B)=[A\cap(\bar{B}\cup B)]\cup(\bar{A}\cap B)=$
$$=(A\cap U)\cup(\bar{A}\cap B)=$$

LeYa EDUCAÇÃO Daniela Raposo e Luzia Gomes

$$= A \cup (\bar{A} \cap B) =$$
$$= (A \cup \bar{A}) \cap (A \cup B) =$$
$$= U \cap (A \cup B) =$$
$$= A \cup B$$

2. $3 \times 2 = 6$

3. $4 \times 3 \times 3 \times 3 = 108$

4. $26 \times 26 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 = 26^2 \times 10^4 = 6\ 760\ 000$

5. $5^{10} = 9\ 765\ 625$

6. $3 \times 3 \times 2 = 18$

7. $9 \times 9 \times 8 \times 7 = 4536$

8. $4 \times 8 \times 5 + 4 \times 8 \times 5 = 320$

9. $3 \times 4 \times 4 \times 4 \times 1 = 192$

10. ${}^{10}C_2 - 2 \times {}^{5}C_2 = 25$

11.

11.1. $8! = 40\ 320$

11.2. ${}^{8}A_5 = 6720$

11.3. ${}^{8}C_5 \times 5! = 6720$

12.

12.1. $5! = 120$

12.2. $7! = 5040$

12.3. $\frac{6!}{2!} = 360$

12.4. $\frac{9!}{2!3!} = 30\ 240$

Daniela Raposo e Luzia Gomes

13. ${}^{7}C_4 - {}^{5}C_2 \times {}^{2}C_2 = 35 - 10 = 25$

14. ${}^{5}A_3 = \frac{5!}{2!} = \frac{120}{2} = 60$

15. $2^8 = 2^n \Leftrightarrow n = 8$

${}^{8}C_4 = 70$

16. ${}^{n}C_0 \times {}^{n}C_1 = 15 \Leftrightarrow 1 \times n = 15 \Leftrightarrow n = 15$

${}^{15}C_7 = 6435$ e ${}^{15}C_8 = 6435$

17.

17.1. $(x+4)^5 = {}^{5}C_0 x^5 \times 4^0 + {}^{5}C_1 x^4 \times 4^1 + {}^{5}C_2 x^3 \times 4^2 + {}^{5}C_3 x^2 \times 4^3 + {}^{5}C_4 x \times 4^4$

$+ {}^{5}C_5 x^0 \times 4^5 = x^5 + 20x^4 + 160x^3 + 640x^2 + 1280x + 1024$

17.2. $\left(x+\sqrt{3}\right)^7 = {}^{7}C_0 x^7 \sqrt{3}^0 + {}^{7}C_1 x^6 \sqrt{3} + {}^{7}C_2 x^5 \sqrt{3}^2 + {}^{7}C_3 x^4 \sqrt{3}^3 + {}^{7}C_4 x^3 \sqrt{3}^4$

${}^{7}C_5 x^2 \sqrt{3}^5 + {}^{7}C_6 x \sqrt{3}^6 + {}^{7}C_7 x^0 \sqrt{3}^7 = x^7 + 7\sqrt{3}x^6 + 63x^5 + 105\sqrt{3}x^4 + 315x^3 +$

$+189\sqrt{3}x^2 + 189x + 27\sqrt{3}$

17.3. $\left(\frac{x}{4} - 2\right)^5 = {}^{5}C_0 \left(\frac{x}{4}\right)^5 \times (-2)^0 + {}^{5}C_1 \left(\frac{x}{4}\right)^4 (-2)^1 + {}^{5}C_2 \left(\frac{x}{4}\right)^3 (-2)^2 + {}^{5}C_3 \left(\frac{x}{4}\right)^2 (-2)^3 +$

${}^{5}C_4 \left(\frac{x}{4}\right)^4 (-2)^4 + {}^{5}C_5 \left(\frac{x}{4}\right)^0 (-2)^5 = \frac{1}{1024}x^5 - \frac{5}{128}x^4 + \frac{5}{8}x^3 - 5x^2 + 20x - 32$

18.

18.1. $\overline{A \cup (B \cap \bar{A})} = \bar{A} \cap \left(\overline{B \cap \bar{A}}\right) = \bar{A} \cap (\bar{B} \cup A) =$

$= (\bar{A} \cap \bar{B}) \cup (\bar{A} \cap A) =$

$= (\bar{A} \cap \bar{B}) \cup \emptyset =$

$= \bar{A} \cap \bar{B} =$

$= \bar{A} \setminus B$

18.2. $B \cup (\overline{A \cup B}) = B \cup (\bar{A} \cap \bar{B}) = (B \cup \bar{A}) \cap (B \cup \bar{B}) =$

$= (B \cup \bar{A}) \cap U =$

$= B \cup \bar{A} =$

$= \overline{\overline{B \cap A}} =$

$= \left(\overline{A \setminus B}\right)$

18.3. $[(\overline{A \cap B}) \cap B] \cup (A \cap B) = [(\bar{A} \cup \bar{B}) \cap B] \cup (A \cap B) =$

$= [(\bar{A} \cap B) \cup (B \cap B)] \cup (A \cap B) =$

$= (\bar{A} \cap B) \cup (A \cap B) =$

$= B \cap (\bar{A} \cup A) =$

$= B \cap U =$

$= B$

19. Construindo um diagrama de árvore e considerando os acontecimentos *A*: "o jogador A ganha o jogo" e *B*: "o jogador B ganha o jogo", o torneio pode desenrolar-se de 14 maneiras diferentes: *AA*, *BB*, *ABB*, *BAA*, *ABAA*, *BABB*, *ABABB*, *BABAA*, *ABABAA*, *BABABB*, *ABABABA*, *ABABABB*, *BABABAA* e *BABABAB*.

20.

20.1. $6 \times 5 \times 4 = 120$

20.2.

a) $3 \times 2 \times 1 = 6$

b) $6 \times 1 \times 4 = 24$

c) $6 \times 4 \times 2 = 48$

21. $9 \times 8 + 8 \times 8 + 8 \times 8 + 8 \times 8 + 8 \times 8 = 328$

22.

22.1. $2^6 = 64$

22.2. ${}^6C_2 = 15$

22.3. $1 + 4 + {}^4C_2 + {}^4C_3 + 1 = 16$

23. $n! - (n-2)! = n(n-1)(n-2)! - (n-2)! =$

$= (n-2)!\,[n(n-1) - 1] =$

$= (n-2)!\,(n^2 - n - 1) =$

$= (n^2 - n - 1)(n-2)!$ c.q.m.

24. ${}^{15}C_2 \times 2 - 2 \times 14 = 182$

25. ${}^{n}A_4 = {}^{n}C_5 \Leftrightarrow \frac{n!}{(n-4)!} = \frac{n!}{(n-5)!5!} \Leftrightarrow (n-4)! = (n-5)!\,5!$

$$\Leftrightarrow \frac{(n-4)!}{(n-5)!} = 120$$

$$\Leftrightarrow \frac{(n-4)!(n-5)!}{(n-5)!} = 120$$

$$\Leftrightarrow n-4 = 120$$

$$\Leftrightarrow n = 124$$

26.

26.1. $2 \times 1 \times 8! = 80\,640$

26.2. $10! - 9! \times 2 = 2\,903\,040$

26.3. $6! \times 5! = 86\,400$

26.4. $3! \times 5! \times 3! \times 2! = 8640$

26.5. Os livros das três disciplinas ficarem juntos: 8640

Apenas os livros de lógica e probabilidades juntos: $7! \times 3! \times 2! - 8640 = 51\,840$

Apenas os livros de álgebra e probabilidades juntos: $5! \times 5! \times 2! - 8640 = 20\,160$

Apenas os livros de álgebra e lógica juntos: $4! \times 5! \times 3! - 8640 = 8640$

Apenas os livros de álgebra juntos: $6! \times 5! - 8640 - 20160 - 8640 = 48\,960$

Apenas os livros de lógica juntos: $8! \times 3! - 8640 - 51840 - 8640 = 172\,800$

Apenas os livros de probabilidades juntos: $9! \times 2! - 8640 - 51840 - 20160 = 645\,120$

$10! - 8640 - 51\,840 - 20\,160 - 8640 - 48\,960 - 172\,800 - 645\,120 = 2\,672\,640$

27. ${}^{n}C_3 - {}^{5}C_3 + 1$

28.

28.1. ${}^{9}C_5 = 126$

28.2. ${}^{5}C_2 \times 1 \times {}^{3}C_1 = 30$

28.3. ${}^{5}C_1 + {}^{4}C_1 \times {}^{4}C_1 + {}^{5}C_2 \times {}^{3}C_1 + {}^{6}C_3 \times {}^{2}C_1 - {}^{5}C_2 \times {}^{2}C_1 + {}^{7}C_4 - {}^{5}C_2 \times {}^{2}C_2 = 96$

29. $p \times {}^{n}C_p = n \times {}^{n-1}C_{p-1} \Leftrightarrow p \times \frac{n!}{(n-p)!p!} = n \times \frac{(n-1)!}{(n-1-p+1)!(p-1)!}$

$$\Leftrightarrow p \times \frac{n!}{(n-p)!\,p!} = \frac{n!}{(n-p)!\,(p-1)!}$$

$$\Leftrightarrow \frac{p \times n!}{(n-p)!\,p(p-1)!} = \frac{n!}{(n-p)!\,(p-1)!}$$

$$\Leftrightarrow \frac{n!}{(n-p)!\,(p-1)!} = \frac{n!}{(n-p)!\,(p-1)!}$$

30. Existem ${}^{36}C_6$ maneiras diferentes de escolher os seis compartimentos onde vão ser colocadas as seis cápsulas pretas (dado que as cápsulas pretas são indistinguíveis, não interessa a ordem pela qual ficam dispostas na caixa). Para cada seleção destes compartimentos, existem ${}^{30}C_5$maneiras diferentes de colocar as cinco cápsulas vermelhas nos trinta compartimentos que sobram (dado que as cápsulas vermelhas são indistinguíveis, não interessa a ordem pela qual ficam dispostas na caixa). E, por cada uma destas maneiras, existem ${}^{25}C_4$maneiras diferentes de selecionar os quatro compartimentos onde vão ser colocadas as cápsulas roxas de entre os vinte e cinco compartimentos disponíveis (dado que as cápsulas roxas são indistinguíveis, não interessa a ordem pela qual ficam dispostas na caixa). E, por cada uma destas maneiras, existem ${}^{21}A_5$ maneiras diferentes de colocar as cinco cápsulas de cores diferentes (amarela, rosa, azul, verde e dourada) nos vinte e um compartimentos restantes (dado que estas cápsulas são distintas, interessa a ordem pela qual ficam dispostas na caixa). Logo, existem ${}^{36}C_6 \times {}^{30}C_5 \times {}^{25}C_4 \times {}^{21}A_5$maneiras diferentes de colocar as vinte cápsulas na caixa.

31.

31.1. ${}^{50}C_{2n} = {}^{50}C_{n+5} \Leftrightarrow 2n = n+5 \;\vee\; 2n = 50-(n+5) \Leftrightarrow n = 5 \;\vee\; 2n = 50-n-5$

$\Leftrightarrow n = 5 \;\vee\; 3n = 45$

$\Leftrightarrow n = 5 \;\vee\; n = 15$

$\text{C.S.} = \{5, 15\}$

31.2. ${}^{35}C_{3n} = {}^{35}C_{n-9} \Leftrightarrow 3n = n-9 \;\vee\; 3n = 35-(n-9) \Leftrightarrow 2n = -9 \;\vee\; 3n = 35-n+9$

$\Leftrightarrow n = -4{,}5 \;\vee\; 4n = 44$

$\Leftrightarrow n = -4{,}5 \;\vee\; n = 11$

Como $n \in \mathrm{IN}$, então $\text{C.S.} = \{11\}$.

31.3. ${}^{n-1}C_2 + {}^{n-1}C_3 + {}^{n}C_4 + {}^{n+1}C_5 + {}^{n+2}C_6 = {}^{20}C_6 \Leftrightarrow {}^{n}C_3 + {}^{n}C_4 + {}^{n+1}C_5 + {}^{n+2}C_6 = {}^{20}C_6$

$\Leftrightarrow {}^{n+1}C_4 + {}^{n+1}C_5 + {}^{n+2}C_6 = {}^{20}C_6$

$\Leftrightarrow {}^{n+2}C_5 + {}^{n+2}C_6 = {}^{20}C_6$

$\Leftrightarrow {}^{n+3}C_6 = {}^{20}C_6$

$\Leftrightarrow n+3 = 20$

$\Leftrightarrow n = 17$

31.4. ${}^{10}C_5 + {}^{9}C_4 + {}^{8}C_3 + {}^{7}C_2 + {}^{6}C_1 + 1 = {}^{11}C_n \Leftrightarrow 252+126+56+21+6+1 = {}^{11}C_n$

$\Leftrightarrow 462 = {}^{11}C_n$

Como ${}^{11}C_5 = {}^{11}C_6 = 462$, então $n = 5 \;\vee\; n = 6$.

$\text{C.S.} = \{5, 6\}$

32.

32.1. $(x-2)^5 = x^5 - 10x^4 + 40x^3 + 96x - 33$

$\Leftrightarrow x^5 + 5x^4 \times (-2) + 10x^3(-2)^2 + 10x^2(-2)^3 + 5x(-2)^4 + (-2)^5 = x^5 - 10x^4 + 40x^3 + 96x - 33$

$\Leftrightarrow x^5 - 10x^4 + 40x^3 - 80x^2 + 80x - 32 = x^5 - 10x^4 + 40x^3 + 96x - 33$

$\Leftrightarrow -80x^2 + 80x - 96x - 32 + 33 = 0$

$\Leftrightarrow -80x^2 - 16x + 1 = 0$

$\Leftrightarrow x = \frac{1}{20} \ \vee \ x = -\frac{1}{4}$

$\text{C.S.} = \left\{-\frac{1}{4}, \frac{1}{20}\right\}$

32.2. $\left(\sqrt{x} - x\right)^4 = -4x^2\sqrt{x} - 4x^3\sqrt{x}$

$\Leftrightarrow \left(\sqrt{x}\right)^4 + 4\left(\sqrt{x}\right)^3(-x) + 6\left(\sqrt{x}\right)^2(-x)^2 + 4\sqrt{x}(-x)^3 + (-x)^4 = -4x^2\sqrt{x} - 4x^3\sqrt{x}$

$\Leftrightarrow x^2 - 4x^2\sqrt{x} + 6x^3 - 4\sqrt{x} \times x^3 + x^4 = -4x^2\sqrt{x} - 4x^3\sqrt{x}$

$\Leftrightarrow x^4 + 6x^3 + x^2 = 0$

$\Leftrightarrow x^2(x^2 + 6x + 1) = 0$

$\Leftrightarrow x = 0 \ \vee \ x = -3 + 2\sqrt{2} \ \vee \ x = -3 - 2\sqrt{2}$

$\text{C.S.} = \left\{-3 - 2\sqrt{2}, -3 + 2\sqrt{2}, 0\right\}$

33. $9! \times 2! - 8! \times 2! \times 2! = 564\,480$

34.

34.1. $8^5 = 32\,768$

34.2. $8^4 = 4096$

34.3. ${}^8A_5 = 6720$

35. $\frac{(n+2)! + (n+1) \times (n-1)!}{(n+1) \times (n-1)!} = \frac{(n+2)(n+1)n(n-1)! + (n+1)(n-1)!}{(n+1)(n-1)!} =$

$= \frac{(n+1)(n-1)![n(n+2)+1]}{(n+1)(n-1)!} =$

$= n^2 + 2n + 1 =$

$= (n+1)^2$

36. $8 \times 7! + 2 \times 7 \times 7! + 3 \times 6 \times 7! + 4 \times 5 \times 7! + 5 \times 4 \times 7! + 6 \times 3 \times 7! + 7 \times 2 \times 7! + 8 \times 7! =$

$= 604\,800$

37.

37.1. $6! = 720$

37.2. $6 \times 5 = 30$ (número de maneiras de numerar as “bases” do dado cúbico)

38. A resposta correta é a (IV).

Dos 18 quadrados disponíveis, vamos selecionar sete para dispor as sete peças brancas e indistinguíveis. Portanto, temos ${}^{18}C_7$ maneiras de o fazer.

Restam-nos 11 quadrados para colocar as três peças azuis.

No entanto, como é possível distinguir as três peças azuis, temos ${}^{11}A_3$ maneiras de as dispor.

39. $\frac{150 \times 149 \times \ldots \times 101}{50 \times 49 \times \ldots \times 1} = \frac{{}^{150}A_{50}}{50!} =$

$= \frac{\frac{150!}{(150-50)!}}{50!} =$

$= \frac{150!}{100!50!} =$

$= {}^{150}C_{50}$, o que corresponde a um número inteiro.

40. $\frac{{}^{n}A_p}{p!} = \frac{\frac{n!}{(n-p)!}}{p!} =$

$= \frac{n!}{(n-p)!p!} =$

$= {}^{n}C_p$, o que representa um número inteiro.

41. Uma vez que temos 10 estradas secundárias, existem $2^{10} \times 2 = 2048$ caminhos de A para B, sem voltar para trás.

42. Espadas (E) Rei (R) Não Dama ($\overline{D}$)

$1 \times 3 \times 46 \quad + \quad 1 \times 4 \times 47 \quad + \quad 11 \times 4 \times 46 \quad = \ 2350$

(Rei de Espadas, Rei (não Espadas), Não Dama) ou (Dama de Espadas, Rei, Não Dama) ou (Espadas (não Rei e não Dama), Rei, Não Dama).

43. $x \times (x-1) \times (x-1) \times (x-2) = x(x-1)(x^2 - 2x - x + 2) =$

$= x(x-1)(x^2 - 3x + 2)$

Daniela Raposo e Luzia Gomes

44.

44.1. $\left(\frac{1}{x}+x\sqrt{x}\right)^{10}$

$$T_{p+1} = {}^{10}C_p(x^{-1})^{10-p}x^p\left(x^{\frac{1}{2}}\right)^p = {}^{10}C_p x^{-10+p}x^p \times x^{\frac{p}{2}} =$$
$$= {}^{10}C_p x^{-10+p+p+\frac{p}{2}} =$$
$$= {}^{10}C_p x^{\frac{5p}{2}-10}$$

$$\frac{5p}{2}-10=0 \Leftrightarrow 5p=20$$
$$\Leftrightarrow p=4$$

$$T_5 = {}^{10}C_4 x^0 = 210$$

44.2. $\left(\frac{1}{x}-x^3\right)^{18}$

$$T_{p+1} = {}^{18}C_p(x^{-1})^{18-p}(x^3)^p = {}^{18}C_p x^{-18+p}x^{3p} =$$
$$= {}^{18}C_p x^{-18+4p}$$

$$-18+4p=0 \Leftrightarrow 4p=18$$
$$\Leftrightarrow p=\frac{9}{2}$$

Como $p \notin \mathrm{IN}_0$, não existe termo independente de x.

44.3. $\left(\frac{y}{\sqrt{x}}-\frac{x}{y^3}\right)^{24}$

$$T_{P+1} = {}^{24}C_p\left(\frac{y}{\sqrt{x}}\right)^{24-p}\left(-\frac{x}{y^3}\right)^p = {}^{24}C_p y^{24-p}\left(x^{-\frac{1}{2}}\right)^{24-p}\left(\frac{1}{-y^3}\right)^p x^p$$

Logo:

$$x^{-12+\frac{p}{2}} \times x^p = x^{-12+\frac{3}{2}p}$$

$$-12+\frac{3}{2}p=0 \Leftrightarrow \frac{3}{2}p=12$$
$$\Leftrightarrow p=8$$

Assim:

$${}^{24}C_8 y^{16}\left(-\frac{1}{y^3}\right)^8 = {}^{24}C_8\frac{y^{16}}{y^{24}} = 735\,471y^{-8}$$

45. $T_{p+1} = {}^{12}C_p(3x^2)^{12-p}\times 2^p$

Assim, $(x^2)^{12-p} = x^{24-2p}$.

$24-2p=4 \Leftrightarrow 24-4=2p \Leftrightarrow 20=2p \Leftrightarrow p=10$

Logo:

$${}^{12}C_{10}(3x^2)^{12-10}\times 2^{10} = {}^{12}C_{10}\times 3^2\times x^4\times 2^{10} = 608\,256x^4$$

LeYa EDUCAÇÃO Daniela Raposo e Luzia Gomes

46.

46.1. $\sum_{k=0}^{n} {}^nC_k 2^k = \sum_{k=0}^{n} {}^nC_k \times 2^k \times 1^{n-k} = (2+1)^n = 3^n$

46.2. $\sum_{k=0}^{n} {}^nC_k = {}^nC_0 + {}^nC_1 + {}^nC_2 + \cdots\ {}^nC_n =$

$$= {}^nC_0 \times 1^n \times 1^0 + {}^nC_1 \times 1^{n-1} \times 1^1 + {}^nC_2 \times 1^{n-2} \times 1^2 + \cdots + {}^nC_n \times 1^0 \times 1^n =$$

$$= (1+1)^n =$$

$$= 2^n$$

46.3. $\sum_{k=0}^{n} {}^nC_k (-1)^k = \sum_{k=0}^{n} {}^nC_k \times 1^{n-k} \times (-1)^k = (1-1)^n = 0$

47.

47.1. Um conjunto com n elementos admite como subconjuntos o conjunto vazio e ele próprio.

Temos ainda todos os conjuntos formados por um único elemento, por dois elementos, por três elementos e assim sucessivamente. Assim, o número de subconjuntos é igual a:

$${}^nC_0 + {}^nC_1 + {}^nC_2 + \cdots\ {}^nC_n =$$

$$= {}^nC_0 \times 1^n \times 1^0 + {}^nC_1 \times 1^{n-1} \times 1^1 + {}^nC_2 \times 1^{n-2} \times 1^2 + \cdots + {}^nC_n \times 1^0 \times 1^n =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} {}^nC_k 1^{n-k} 1^k =$$

$$= (1+1)^n =$$

$$= 2^n$$

47.2. Premissas:

- O conjunto vazio tem 0 elementos e 0 é um número par;
- 2^n é um número par, $\forall n \in \mathrm{IN}$.

Consideremos o seguinte desenvolvimento:

$${}^nC_0 + {}^nC_1 + {}^nC_2 + \cdots\ {}^nC_n = {}^nC_0 \times 1^n \times 1^0 + {}^nC_1 \times 1^{n-1} \times 1^1 + {}^nC_2 \times 1^{n-2} \times 1^2 + \cdots + {}^nC_n \times 1^0 \times 1^n$$

Os subconjuntos associados a ${}^nC_p$, com *p* ímpar têm um número ímpar de elementos e os subconjuntos associados a ${}^nC_p$, com *p* par têm um número par de elementos.

Como ${}^nC_0 = {}^nC_n$, ${}^nC_1 = {}^nC_{n-1}$, ${}^nC_2 = {}^nC_{n-2}$ e, assim, sucessivamente, o número de subconjuntos com um número par de elementos é igual ao número de subconjuntos com um número ímpar de elementos.

Daniela Raposo e Luzia Gomes