12.º Ano de Escolaridade | Turma G-K

1. $\dfrac{\overline{2z_1}\times(2-2i)-e^{i\left(-\frac{\pi}{2}\right)}}{i^{52}+2i}=\dfrac{\overline{1+i}\times(2-2i)-(-i)}{i^0+2i}=\dfrac{(1-i)\times(2-2i)+i}{1+2i}=\dfrac{2-2i-2i+2i^2+i}{1+2i}=$

$=\dfrac{-3i}{1+2i}=\dfrac{-3i(1-2i)}{(1+2i)(1-2i)}=\dfrac{-3i+6i^2}{1^2+2^2}=\dfrac{-6-3i}{5}=-\dfrac{6}{5}-\dfrac{3}{5}i$

O afixo deste número complexo é $A\left(-\dfrac{6}{5};-\dfrac{3}{5}\right)$

Representação no plano complexo

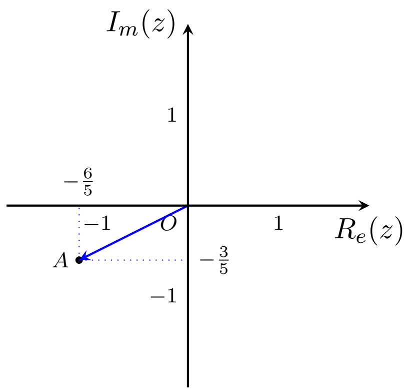

Figura 1

2. .

2.1. $|z_1|=\sqrt{\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}=\sqrt{\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}}=\sqrt{1}=1$

Logo, z_1 é um complexo unitário

2.2. Seja $\theta=Arg(z_1)$
Assim,
$\tan(\theta)=\dfrac{-\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}$, com $\theta\in 4^{\text{o}}$ Q
Ou seja,
$\tan(\theta)=-1$, com $\theta\in 4^{\text{o}}$ Q
Portanto, $\theta=-\dfrac{\pi}{4}$

Logo, o argumento principal de z_1 é $-\dfrac{\pi}{4}$

Resposta:(D)

2.3. $z_1=e^{i\left(-\frac{\pi}{4}\right)}$
Logo,
$z_1^4=\left[e^{i\left(-\frac{\pi}{4}\right)}\right]^4=e^{i\left(-\frac{\pi}{4}\times 4\right)}=e^{i(-\pi)}$

Seja, $z_3 = 1 + i$
$|z_3| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$

Seja $\theta = Arg(z_3)$
Assim,
$\tan(\theta) = \frac{1}{1}$, com $\theta \in 1^{\underline{o}}$ Q
Ou seja,
$\tan(\theta) = 1$, com $\theta \in 1^{\underline{o}}$ Q
$\therefore \theta = \frac{\pi}{4}$

Portanto,

$z_3 = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$

$$w = \frac{z_1^4 \times (-z_2)}{(1+i)^4} = \frac{e^{i(-\pi)} \times \sqrt{2}e^{i\left(-\frac{\pi}{4}+\pi\right)}}{\left[\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}\right]^4} = \frac{\sqrt{2}e^{i(-\pi)} \times e^{i\left(\frac{3\pi}{4}\right)}}{4e^{i\left(\frac{\pi}{4}\times 4\right)}} = \frac{\sqrt{2}e^{i\left(-\pi+\frac{3\pi}{4}\right)}}{4e^{i\pi}} =$$
$$= \frac{\sqrt{2}}{4}e^{i\left(-\frac{\pi}{4}-\pi\right)} = \frac{\sqrt{2}}{4}e^{i\left(-\frac{5\pi}{4}\right)} = \frac{\sqrt{2}}{4}e^{i\left(-\frac{5\pi}{4}+2\pi\right)} = \frac{\sqrt{2}}{4}e^{i\left(\frac{3\pi}{4}\right)} = \frac{\sqrt{2}}{4}\times\left[\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right] =$$
$$= \frac{\sqrt{2}}{4} \times \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right) = -\frac{1}{4} + \frac{1}{4}i$$

2.4. .

2.1. Seja $z = x + yi$, com $x \in \mathbb{R}$ e $x \in \mathbb{R}$

$$\overline{-z}z_2 + z = \overline{z} + 1 - i \Leftrightarrow \overline{-x-yi}(1-i) + x + yi = \overline{x+yi} + 1 - i \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (-x+yi)(1-i) + x + yi = x - yi + 1 - i \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow -x + xi + yi - yi^2 + x + yi = x + 1 + (-y-1)i \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow y + (x+2y)i = x + 1 + (-y-1)i \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow y = x + 1 \wedge x + 2y = -y - 1 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow y = x + 1 \wedge x + 2(x+1) = -(x+1) - 1 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow y = x + 1 \wedge x + 2x + 2 = -x - 2 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow y = x + 1 \wedge 4x = -4 \Leftrightarrow y = x + 1 \wedge x = -1 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow y = 0 \wedge x = -1$$

Logo, $z = -1$

2.2. $z^6 - z_1 z = 0 \Leftrightarrow z(z^5 - z_1) = 0 \Leftrightarrow z = 0 \vee z^5 - z_1 = 0 \Leftrightarrow z = 0 \vee z^5 = z_1 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow z = 0 \vee z = \sqrt[5]{z_1} \Leftrightarrow z = 0 \vee z = \sqrt[5]{e^{i\left(-\frac{\pi}{4}\right)}}$
Determinemos $z = \sqrt[5]{e^{i\left(-\frac{\pi}{4}\right)}}$

$$z = \sqrt[5]{e^{i\left(-\frac{\pi}{4}\right)}} \Leftrightarrow z = e^{i\left(\frac{-\frac{\pi}{4}+2k\pi}{5}\right)} \Leftrightarrow z = e^{i\left(-\frac{\pi}{20}+\frac{2k\pi}{5}\right)}, \text{ com } k \in \{0;1;2;3;4\}$$

Atribuindo valores a k, vem,

$k = 0 \rightarrow w_0 = e^{i\left(-\frac{\pi}{20}\right)}$
$k = 1 \rightarrow w_0 = e^{i\left(-\frac{\pi}{20}+\frac{2\pi}{5}\right)} = e^{i\left(-\frac{\pi}{20}+\frac{8\pi}{20}\right)} = e^{i\frac{7\pi}{20}}$
$k = 2 \rightarrow w_0 = e^{i\left(-\frac{\pi}{20}+\frac{4\pi}{5}\right)} = e^{i\left(-\frac{\pi}{20}+\frac{16\pi}{20}\right)} = e^{i\frac{15\pi}{20}}$
$k = 3 \rightarrow w_0 = e^{i\left(-\frac{\pi}{20}+\frac{6\pi}{5}\right)} = e^{i\left(-\frac{\pi}{20}+\frac{24\pi}{20}\right)} = e^{i\frac{23\pi}{20}} = e^{i\left(-\frac{17\pi}{20}\right)}$
$k = 4 \rightarrow w_0 = e^{i\left(-\frac{\pi}{20}+\frac{8\pi}{5}\right)} = e^{i\left(-\frac{\pi}{20}+\frac{32\pi}{20}\right)} = e^{i\frac{31\pi}{20}} = e^{i\left(-\frac{9\pi}{20}\right)}$

Assim, o conjunto solução da equação é $C.S. = \left\{0; e^{i\left(-\frac{17\pi}{20}\right)}; e^{i\left(-\frac{9\pi}{20}\right)}; e^{i\left(-\frac{\pi}{20}\right)}; e^{i\frac{7\pi}{20}}; e^{i\frac{15\pi}{20}}\right\}$

3. $z^3 - z^2 + 8z - 8 = (z-1) \times Q(z)$

Pela regra de Ruffini, vem,

$$\begin{array}{c|ccc|c} & 1 & -1 & 8 & -8 \\ 1 & & 1 & 0 & 8 \\ \hline & 1 & 0 & 8 & 0 \end{array}$$

Logo, $Q(z) = z^2 + 8$, e portanto, $z^3 - z^2 + 8z - 8 = (z-1)(z^2+8)$

Assim,

$z^3 - z^2 + 8z - 8 = 0 \Leftrightarrow (z-1)(z^2+8) = 0 \Leftrightarrow z - 1 = 0 \vee z^2 + 8 = 0 \Leftrightarrow z = 1 \vee z^2 = -8 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow z = 1 \vee z = \pm\sqrt{-8} \Leftrightarrow z = 1 \vee z = \pm 2\sqrt{2}i$

Os afixos destas três soluções são $A(1;0)$, $B(0;2\sqrt{2})$ e $C(0;-2\sqrt{2})$

Representação no plano complexo

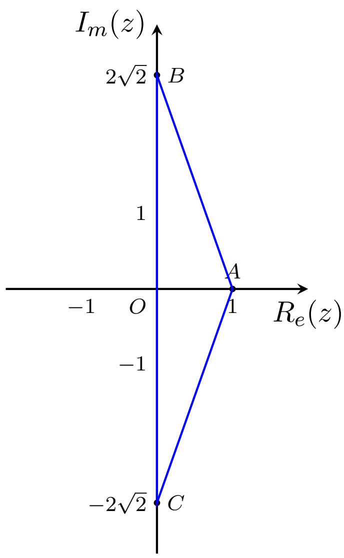

Figura 2

Pelo teorema de Pitágoras tem-se,

$\overline{AB}^2 = \overline{OA}^2 + \overline{OB}^2 \Leftrightarrow \overline{AB}^2 = 1^2 + (2\sqrt{2})^2 \Leftrightarrow \overline{AB}^2 = 1 + 8 \Leftrightarrow \overline{AB}^2 = 9 \Leftrightarrow \overline{AB} = \pm 3$, e como $\overline{AB} > 0$, vem $\overline{AB} = 3$

Assim,

$P_{[ABC]} = \overline{AB} + \overline{AC} + \overline{BC} = 3 + 3 + 4\sqrt{2} = 6 + 4\sqrt{2}$

Resposta: (D)

4. Testando $-i$ na equação da opção (D), vem,

   $(-i)^3 = -(-i)$
   $\therefore -i^3 = i$
   $\therefore -(-i) = i$
   $\therefore i = i$ (verdadeiro)

   Resposta: (D)

5. Seja $z = |z|e^{i\theta}$, com $\theta \in \mathbb{R}$, um complexo não nulo

   $$w = \frac{\sqrt{2}}{2}\bar{i}z = \frac{\sqrt{2}}{2} \times (-i) \times |z|e^{i\theta} = \frac{\sqrt{2}}{2}e^{i\left(-\frac{\pi}{2}\right)} \times |z|e^{i\theta} = \frac{\sqrt{2}}{2}|z|e^{i\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right)}$$

   Se o afixo do complexo z se situa no terceiro quadrante, então o afixo de w situa-se no segundo quadrante, pois este afixo obtém-se do afixo de z por uma rotação de centro O e ângulo de amplitude $-\frac{\pi}{2}$, seguido de uma homotetia de razão $\frac{\sqrt{2}}{2}$

6. Como se trata de um hexágono, então os seus vértices são os afixos das raízes sextas do complexo z

   Se o vértice B tem coordenadas $(0;1)$ então o complexo correspondente é $z_0 = e^{i\frac{\pi}{2}}$

   E como os argumentos destas raízes sextas estão em progressão aritmética de razão $\frac{2\pi}{6}$, ou seja, $\frac{\pi}{3}$,vem que,

   $z_1 = e^{i\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{3}\right)} = e^{i\left(\frac{5\pi}{6}\right)}$ tem afixo C

   $z_2 = e^{i\left(\frac{5\pi}{6}+\frac{\pi}{3}\right)} = e^{i\left(\frac{7\pi}{6}\right)} = e^{i\left(-\frac{5\pi}{6}\right)}$ tem afixo D

   $z_3 = e^{i\left(\frac{7\pi}{6}+\frac{\pi}{3}\right)} = e^{i\left(\frac{9\pi}{6}\right)} = e^{i\left(\frac{3\pi}{2}\right)} = e^{i\left(-\frac{\pi}{2}\right)}$ tem afixo E

   $z_4 = e^{i\left(\frac{3\pi}{2}+\frac{\pi}{3}\right)} = e^{i\left(\frac{11\pi}{6}\right)} = e^{i\left(-\frac{\pi}{6}\right)}$ tem afixo F

7. $Arg(iz) = \frac{9\pi}{10} \Leftrightarrow Arg(i) + Arg(z) = \frac{9\pi}{10} \Leftrightarrow \frac{\pi}{2} + Arg(z) = \frac{9\pi}{10} \Leftrightarrow Arg(z) = \frac{9\pi}{10} - \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow$
   $\Leftrightarrow Arg(z) = \frac{4\pi}{10} \Leftrightarrow Arg(z) = \frac{2\pi}{5}$
   Logo, $z = 2e^{i\frac{2\pi}{5}}$
   Assim, $\overline{z} = 2e^{i\left(-\frac{2\pi}{5}\right)}$

   Portanto,

   $$(\overline{z})^5 = \left[2e^{i\left(-\frac{2\pi}{5}\right)}\right]^5 = 2^5e^{i\left(-\frac{10\pi}{5}\right)} = 32e^{i(-2\pi)} = 32e^{i(0)} = 32$$