Ficha n.º 1 – Página 72 **5. ÁREAS E VOLUMES DE SÓLIDOS GEOMÉTRICOS**

1. **Opção correta: (D)**

A aresta do cubo mede $\sqrt[3]{27} = 3$.

$A = 3^2 = 9$

A área da superfície do cubo é, então $9 \times 6 = 54$ cm².

2.1. **Opção correta: (A)**

$V = \pi \times 3^2 \times 7 = \pi \times 9 \times 7 = 63\pi$ dm³

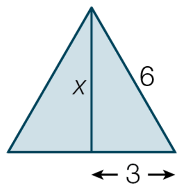
2.2. **Opção correta: (A)**

$A_{\text{círculo}} = \pi \times 3^2 = 9\pi$

$A_{\text{retângulo}} = 2\pi \times 3 \times 7 = 42\pi$

$A_{\text{total}} = 9\pi \times 2 + 42\pi = 18\pi + 42\pi = 60\pi$ dm²

3.1. Seja x a altura do triângulo da base.



$6^2 = x^2 + 3^2 \Leftrightarrow 36 - 9 = x^2 \underset{x>0}{\Leftrightarrow} x = \sqrt{27} \Leftrightarrow x = \sqrt{3^3} \Leftrightarrow x = \sqrt{3^2 \times 3} \Leftrightarrow x = 3\sqrt{3}$

$A_{\text{triângulo}} = \dfrac{6 \times 3\sqrt{3}}{2} = 9\sqrt{3}$ cm²

$A_{\text{retângulo}} = 6 \times 10 = 60$ cm²

$A_{\text{total}} = 2 \times 9\sqrt{3} + 3 \times 60 = \left(18\sqrt{3} + 180\right)$ cm²

3.2. $V = 9\sqrt{3} \times 10 = 90\sqrt{3}$ cm³

4.1. $d_{\text{círculo}} = \dfrac{2}{3}h = \dfrac{2}{3} \times 12 = \dfrac{24}{3} = 8$

$r_{\text{círculo}} = d_{\text{círculo}} : 2 = 4$ m

$V = \pi \times 4^2 \times 12 = \pi \times 16 \times 12 = 192\pi$ m³

4.2. $A_{\text{círculo}} = \pi \times 4^2 = 16\pi$

$A_{\text{retângulo}} = 2\pi \times 4 \times 12 = 96\pi$

$A_{\text{total}} = 16\pi \times 2 + 96\pi = 32\pi + 96\pi = 128\pi$ m²

5. $A_{\text{base}} = 6 \times 4 = 24$ m² = 2400 dm²

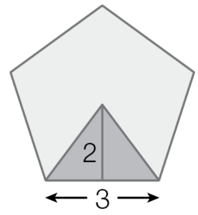
$V = 720\ 000$ l = 720 000 dm³

$720\ 000 = 2400h \Leftrightarrow h = \dfrac{720\ 000}{2400} \Leftrightarrow h = 30$ m

A altura do tanque é 30 m.

Ficha n.º 1 – Página 73

6. $129 : 5 = 25{,}8$ é a área de uma face lateral



$$3 \times h = 25{,}8 \Leftrightarrow h = \frac{25{,}8}{3} \Leftrightarrow h = 8{,}6 \text{ cm}$$

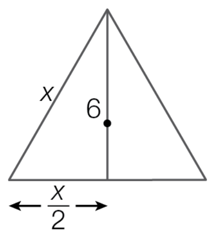
$A_{\text{triângulo}} = \frac{3 \times 2}{2} = 3$ e $A_{\text{pentágono}} = 3 \times 5 = 15$ cm². Assim $V = 15 \times 8{,}6 = 129$ cm³.

7. $P_{\text{círculo}} = 18{,}85 \Leftrightarrow 2\pi r = 18{,}85 \Leftrightarrow r = \frac{18{,}85}{2\pi} \Leftrightarrow r \approx 3$; $A_{\text{círculo}} = \pi \times 3^2 = 9\pi \approx 28{,}274$

$$A_{\text{total}} = 28{,}274 \times 2 + 8{,}2 \times 18{,}85 = 211{,}118 \approx 211{,}1 \text{ cm}^2$$

8. **Opção correta: (A)**

$A_{\text{círculo}} = \pi \times 6^2 = 36\pi \text{ dm}^2$; $\frac{r}{2} = 6 : 2 = 3$ dm



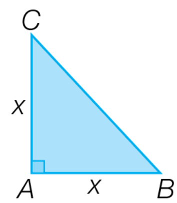
$$x^2 = 9^2 + \left(\frac{x}{2}\right)^2 \Leftrightarrow x^2 = 81 + \frac{x^2}{4} \Leftrightarrow 4x^2 = 324 + x^2 \Leftrightarrow 3x^2 = 324 \Leftrightarrow x^2 = 108 \underset{x>0}{\Leftrightarrow} x = \sqrt{108}$$

$A_{\text{triângulo}} = \frac{\sqrt{108} \times 9}{2} \approx 46{,}765$; $A_{\text{sombreada}} = 36\pi - 46{,}765 \approx 66{,}3$ dm²

9. $V = A_b \times h \Leftrightarrow 108\pi = A_b \times 12 \Leftrightarrow A_b = \frac{108\pi}{12} \Leftrightarrow A_b = 9\pi$

$9\pi = \pi R^2 \Leftrightarrow R^2 = 9 \underset{R>0}{\Leftrightarrow} R = \sqrt{9} \Leftrightarrow R = 3$, logo $P_{\text{triângulo}} = 2\pi r = 2\pi \times 3 = 6\pi$ cm

10. $A_{\text{triângulo}} = 8 \Leftrightarrow \frac{x \times x}{2} = 8 \Leftrightarrow \frac{x^2}{2} = 8 \Leftrightarrow x^2 = 2 \times 8 \underset{x>0}{\Leftrightarrow} x = \sqrt{16} \Leftrightarrow x = 4$

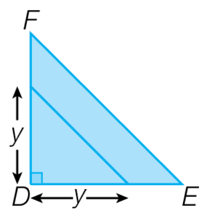


$$\overline{EB} = h_{\text{prisma}} = \frac{5}{2} \times \overline{DE} = \frac{5}{2} \times 4 = \frac{20}{2} = 10 \text{ cm}$$

O prisma triangular mais pequeno que resultará do corte tem a mesma altura do prisma original, mas a sua base é mais pequena.

O volume deste prisma é metade do volume do prisma original ou seja: $\frac{1}{2} \times 8 \times 10 = 40$ cm³

A_{base} (prisma triangular mais pequeno) $= V : h = 40 : 10 = 4$ cm²

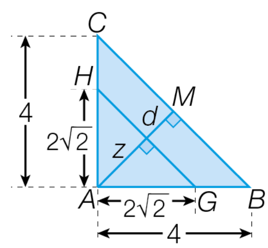


$$\frac{y \times y}{2} = 4 \Leftrightarrow y^2 = 8 \underset{y>0}{\Leftrightarrow} y = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

$\overline{CB}^2 = 4^2 + 4^2 \overset{\overline{CB}>0}{\Leftrightarrow} \overline{CB} = 4\sqrt{2}$, logo $\overline{MB} = \frac{4\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2}$

Sendo o triângulo [*AMB*] isósceles, então $\overline{AM} = \overline{MB} = 2\sqrt{2}$.

Os triângulos [*AGH*] e [*ABC*] são semelhantes, logo:



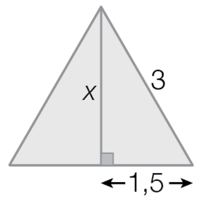
$$\frac{z}{\overline{AM}} = \frac{2\sqrt{2}}{4} \Leftrightarrow \frac{z}{2\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{4} \Leftrightarrow z = \frac{2\sqrt{2} \times 2\sqrt{2}}{4} \Leftrightarrow z = 2$$

Assim, $d = \overline{AM} - z = 2\sqrt{2} - 2 \approx 0{,}8$ cm.

O corte deve ser feito a 0,8 cm da face [*BEFC*].

1. **Opção correta: (D)**

$3^2 = 1{,}5^2 + x^2 \Leftrightarrow 9 - 2{,}25 = x^2 \underset{x>0}{\Leftrightarrow} x = \sqrt{6{,}75} \Leftrightarrow x \approx 2{,}598$

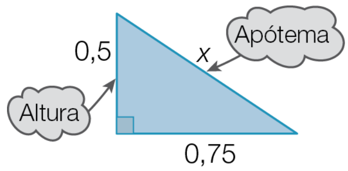


$A_{\text{triângulo}} = \dfrac{3 \times 2{,}598}{2} = 3{,}897$

$A_{\text{superfície do prisma}} = 2 \times 3{,}897 + 3 \times 3 \times 10 = 97{,}794 \text{ cm}^2$

2500 caixas: $97{,}794 \times 2500 = 244\ 485 \text{ cm}^2 = 24{,}4485 \text{ m}^2 < 25 \text{ m}^2$

2.1. $1{,}5 : 2 = 0{,}75$



$x^2 = 0{,}75^2 + 0{,}5^2 \Leftrightarrow x^2 = 0{,}8125 \Leftrightarrow x = \sqrt{0{,}8125} \Leftrightarrow x = \sqrt{\dfrac{8125}{10\ 000}}$

$\Leftrightarrow x = \sqrt{\dfrac{13}{16}} \Leftrightarrow x = \dfrac{\sqrt{13}}{4} \text{ m}$

2.2. $A_{\text{triângulo}} = \dfrac{1{,}5 \times \dfrac{\sqrt{13}}{4}}{2} = \dfrac{1{,}5\sqrt{13}}{8} = \dfrac{15\sqrt{13}}{80} = \dfrac{3\sqrt{13}}{16} \text{ m}^2$

2.3. 15 cm = 0,15 m

$A_{\text{total}} = 4 \times A_{\text{triângulo}} + 4 \times A_{\text{retângulo}} = \dfrac{3\sqrt{13}}{16} \times 4 + 1{,}5 \times 0{,}15 \times 4 \approx 3{,}60 > 3{,}50 \text{ m}^2$

3,50 m² de tecido não são suficientes.

Ficha n.º 2 – Página 75

3. $R = 22 : 2 = 11$

$A_{\text{superfície esférica}} = 4\pi \times 11^2 = 4 \times 3{,}1416 \times 121 \approx 1520{,}5\ \text{cm}^2 = 15{,}205\ \text{dm}^2 \approx 15{,}2\ \text{dm}^2$

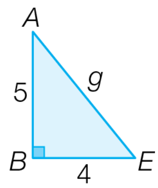
4.1. **a)** Obtém-se um sólido formado por um cilindro e um cone justapostos.

O raio da base de ambos é 4 cm, sendo 5 cm a altura do cone e 4 cm a do cilindro.

b) Obtém-se um sólido formado por um cone e uma semiesfera justapostos.

A semiesfera tem 4 cm de raio, sendo igualmente 4 cm a medida do raio da base e da altura do cone.

4.2. **Figura 1:** geratriz do cone = g



$g^2 = 5^2 + 4^2 \Leftrightarrow g^2 = 41 \underset{g>0}{\Leftrightarrow} g = \sqrt{41}$

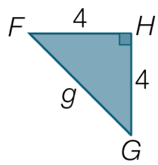
$A_{\text{superfície lateral do cone}} = \pi r g = \pi \times 4 \times \sqrt{41} \approx 80{,}464\ \text{cm}^2$

$A_{\text{círculo}} = \pi \times 4^2 \approx 50{,}265\ \text{cm}^2$

$A_{\text{superfície lateral do cilindro}} = P_{\text{círculo}} \times h = 2\pi r \times h = 2\pi \times 4 \times 4 = 32\pi \approx 100{,}531\ \text{cm}^2$

$A_{\text{total}} = 80{,}464 + 50{,}265 + 100{,}531 = 231{,}26\ \text{cm}^2$

Figura 2:



$A_{\text{superfície da semiesfera}} = \dfrac{4\pi \times 4^2}{2} = 32\pi \approx 100{,}531$

Seja g a geratriz do cone.

$g^2 = 4^2 + 4^2 \Leftrightarrow g^2 = 32 \underset{g>0}{\Leftrightarrow} g = \sqrt{32}$

$A_{\text{superfície lateral do cone}} = \pi \times 4 \times \sqrt{32} \approx 71{,}086$

$A_{\text{total}} = 100{,}531 + 71{,}086 = 171{,}617 \approx 171{,}62\ \text{cm}^2$

5.1. $A_{\text{círculo}} = \pi \times 3^2 = 9\pi$

9π ------- 360º

x --------- 56º

$x = \dfrac{9\pi \times 56}{360} = \dfrac{504\pi}{360} = \dfrac{7}{5}\pi\ \text{cm}^2$

5.2. $A_{\text{superfície lateral do cone}} = \pi r g \Leftrightarrow \dfrac{7}{5}\pi = \pi r \times 3 \Leftrightarrow r = \dfrac{\frac{7}{5}\pi}{3\pi} \Leftrightarrow r = \dfrac{7\pi}{15\pi} \Leftrightarrow r = \dfrac{7}{15}$

$A_{\text{tampa}} = \pi\left(\dfrac{7}{15}\right)^2 \approx 0{,}68\ \text{cm}^2$

6. ***BriAses***

$A_{\text{retângulo}} = 10 \times 3 = 30 \text{ cm}^2$

$A_{\text{círculo}} = \pi \times 10^2 = 100\pi$

100π ------- 360º

x --------- 24º $\qquad x = \dfrac{100\pi \times 24}{360} = \dfrac{2400\pi}{360} \approx 20{,}944 \text{ cm}^2$

$P_{\text{círculo}} = 2\pi \times 10 = 20\pi$

20π ------- 360º

y --------- 24º $\qquad y = \dfrac{20\pi \times 24}{360} = \dfrac{480\pi}{360} \approx 4{,}189 \text{ cm}$

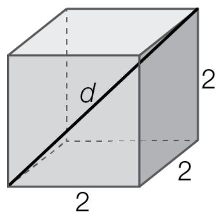
$A_{\text{retângulo}} = 3 \times 4{,}189 = 12{,}567$

$A_{\text{total}} = 12{,}567 + 2 \times 30 + 2 \times 20{,}944 \approx 115 \text{ cm}^2$

EmmentAses:

$A_{\text{superfície esférica}} = 4\pi \times 4^2 \approx 202 \text{ cm}^2$

7.1. A diagonal espacial do cubo coincide com o diâmetro da esfera circunscrita.



$d^2 = 2^2 + 2^2 + 2^2 \Leftrightarrow d^2 = 12 \Leftrightarrow d = \sqrt{12} \Leftrightarrow d = \sqrt{2^2 \times 3} \Leftrightarrow d = 2\sqrt{3}$

$r = \dfrac{2\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3} \text{ cm}$

7.2. O raio da esfera inscrita no cubo é $\dfrac{2}{2} = 1$ cm.

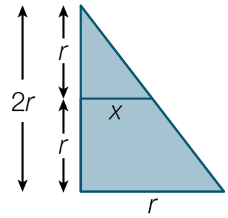
A razão pedida é $\dfrac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3}$

7.3. $A_{\text{superfície esférica circunscrita}} = 4\pi \times \left(\sqrt{3}\right)^2 = 4\pi \times 3 = 12\pi \text{ cm}^2$

$A_{\text{superfície esférica inscrita}} = 4\pi \times 1^2 = 4\pi \text{ cm}^2$

7.4. Não. A razão dos raios é $\sqrt{3}$. A razão das áreas é $\dfrac{12\pi}{4\pi} = 3$.

Ficha n.º 2 – Página 77



8. Cone maior: o raio é r e a altura é $d = 2r$

Cone menor: o raio é desconhecido e a altura é r

Os dois triângulos retângulos da figura ao lado são semelhantes (ambos têm um ângulo reto e há um ângulo comum)

$\frac{r}{2r} = \frac{x}{r} \Leftrightarrow x = \frac{r \times r}{2r} \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}r$, logo o raio do cone menor é $\frac{1}{2}r$.

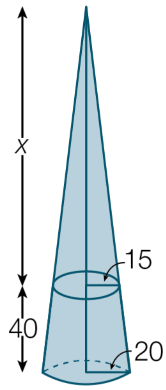
8.1. $g^2 = (2r)^2 + r^2 \Leftrightarrow g^2 = 4r^2 + r^2 \Leftrightarrow g^2 = 5r^2 \underset{g>0}{\Leftrightarrow} g = \sqrt{5r^2} \Leftrightarrow g = \sqrt{5}r$

8.2. $A = \pi rg = \pi r\sqrt{5}r = \sqrt{5}\pi r^2$ u. a.

8.3. $\frac{1}{2}r$

8.4. $\frac{1}{2} \times \sqrt{5}r = \frac{\sqrt{5}}{2}r$, pois o cone menor é uma redução do cone maior com razão de semelhança $\frac{1}{2}$.

8.5. $A = \pi \times \frac{1}{2}r \times \frac{\sqrt{5}}{2}r = \frac{\sqrt{5}}{4}\pi r^2$ u. a.



9. Os triângulos representados no interior do cone são semelhantes.

$\frac{40 + x}{x} = \frac{20}{15} \Leftrightarrow 15(40 + x) = 20x \Leftrightarrow 600 + 15x = 20x \Leftrightarrow -5x = -600 \Leftrightarrow x = 120$ cm

A altura do cone menor é 120 cm. Seja g a geratriz do cone menor.

$120^2 + 15^2 = g^2 \Leftrightarrow g^2 = 14\ 625 \Leftrightarrow g = \sqrt{14\ 625} \Leftrightarrow g \approx 120{,}934$ cm

A geratriz do cone maior será $120{,}934 \times \frac{20}{15} = 161{,}245$ cm

A área da superfície lateral do cone maior é $\pi \times 20 \times 161{,}245 = 10\ 131{,}346$ e a do cone menor é $\pi \times 15 \times 120{,}934 = 5698{,}894$.

A área pedida é, portanto:

$10\ 131{,}346 - 5698{,}894 = 4432{,}452 \approx 4432{,}5$ cm^2

Ficha n.º 3 – Página 78 **5. ÁREAS E VOLUMES DE SÓLIDOS GEOMÉTRICOS**

1. As bases do prisma são os triângulos [*ABC*] e [*DEF*].

O prisma pode ser decomposto em três pirâmides triangulares: as pirâmides [*ABCE*], [*ADEF*] e [*ACFE*].

As duas primeiras pirâmides têm bases iguais – os triângulos [*ABC*] e [*DEF*] – e a mesma altura – a medida do comprimento do segmento de reta [*BE*] (por exemplo). As duas últimas partilham a mesma base – o triângulo [*AEF*] – e a mesma altura – a distância do ponto *D* ao plano *AEF*.

Assim, as três pirâmides têm o mesmo volume.

Se o volume do prisma é $A_b \times h$, sendo A_b a área do triângulo [*ABC*] e $h = \overline{AD}$, então o volume de cada uma das pirâmides é $\frac{A_b \times h}{3}$.

2. A pirâmide quadrangular [*ABCDE*] pode ser decomposta em duas pirâmides triangulares: [*ABCE*] e [*ADCE*]. Estas duas pirâmides triangulares têm o mesmo volume pois têm a mesma altura (a distância do ponto *E* ao plano *ABC*) e a base tem a mesma área.

$V_{[ABCDE]} = 2 \times V_{[ABCE]} = 2 \times \frac{A_b \times h}{3} = \frac{2A_b \times h}{3} = \frac{(2A_b) \times h}{3} = \frac{A_{[ABCD]} \times h}{3} = \frac{V_{\text{prisma}}}{3}$, sendo este um prisma quadrangular com a mesma base da pirâmide [*ABCDE*] e a mesma altura.

3. **Opção correta: (C)**

$V_{\text{pirâmide}} = \frac{A_b \times h}{3} = \frac{V_{\text{prisma}}}{3}$; $V_{\text{cone}} = \frac{A_b \times h}{3} = \frac{V_{\text{cilindro}}}{3}$

Ficha n.º 3 – Página 79

4.1. **Opção correta: (A).** $V_{\text{pirâmide}} = \frac{1}{3} \times A_b \times h = \frac{1}{3} \times \pi \times 3^2 \times 10 = \frac{90\pi}{3} = 30\pi \text{ m}^3$

4.2. **Opção correta: (D).** $g^2 = 10^2 + \left(\frac{6}{2}\right)^2 \Leftrightarrow g^2 = 100 + 9 \underset{g>0}{\Leftrightarrow} g = \sqrt{109}$

5.1. $V_{\text{cilindro}} = \pi \times 2^2 \times 8 = \pi \times 4 \times 8 = 32\pi$; $V_{\text{cone}} = \frac{\pi \times 2^2 \times 7}{3} = \frac{28\pi}{3}$

$V_{\text{total}} = 32\pi + \frac{28\pi}{3} = \frac{96\pi + 28\pi}{3} = \frac{124\pi}{3} \text{ m}^3$

5.2. $V_{\text{esfera}} = \frac{4}{3}\pi \times 5^3 = \frac{4\pi \times 125}{3} = \frac{500\pi}{3} \text{ cm}^3$

5.3. $A_{\text{hexágono}} = 6 \times A_{\text{triângulo}} = 6 \times \frac{2 \times \sqrt{3}}{2} = 6\sqrt{3} \text{ m}^2$

$V_{\text{pirâmide}} = \frac{6\sqrt{3} \times 12}{3} = 24\sqrt{3} \text{ m}^3$

5.4. Seja *h* a altura do cone.

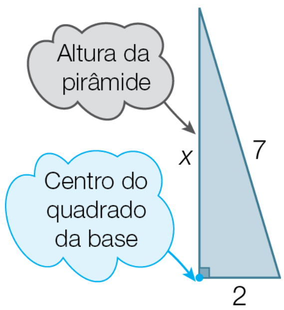
$h^2 + \left(\sqrt{7}\right)^2 = \left(\sqrt{11}\right)^2 \Leftrightarrow h^2 + 7 = 11 \Leftrightarrow h^2 = 11 - 7 \Leftrightarrow h^2 = 4 \underset{h>0}{\Leftrightarrow} h = 2$

$V_{\text{cone}} = \frac{\pi \times \left(\sqrt{7}\right)^2 \times 2}{3} = \frac{\pi \times 7 \times 2}{3} = \frac{14\pi}{3} \text{ m}^3$

5.5. $7^2 = x^2 + 2^2 \Leftrightarrow 49 = x^2 + 4 \Leftrightarrow x^2 = 49 - 4 \Leftrightarrow x^2 = 45 \underset{x>0}{\Leftrightarrow} x = \sqrt{45}$

$\Leftrightarrow x = \sqrt{3^2 \times 5} \Leftrightarrow x = 3\sqrt{5}$

$V_{\text{pirâmide}} = \frac{4 \times 4 \times 3\sqrt{5}}{3} = 16\sqrt{5} \text{ dm}^3$



5.6. $\left(\sqrt{73}\right)^2 = x^2 + 3^2 \Leftrightarrow 73 = x^2 + 9 \Leftrightarrow x^2 = 73 - 9 \Leftrightarrow x^2 = 64 \underset{x>0}{\Leftrightarrow} x = \sqrt{64} \Leftrightarrow x = 8$

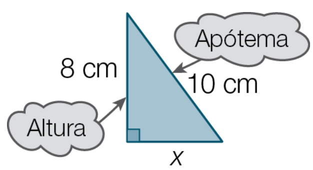
$V_{\text{pirâmide}} = \frac{8 \times 5 \times 3}{3} = 40 \text{ cm}^3$

6. $V = \frac{\pi \times r^2 \times h}{3} = \frac{\pi \times \left(\frac{5}{2}\right)^2 \times 8}{3} = \frac{\pi \times \frac{25}{4} \times 8}{3} = \frac{\frac{200\pi}{4}}{3} = \frac{50\pi}{3} \text{ m}^3$

7. $x^2 + 8^2 = 10^2 \Leftrightarrow x^2 = 100 - 64 \Leftrightarrow x^2 = 36 \underset{x>0}{\Leftrightarrow} x = \sqrt{36} \Leftrightarrow x = 6$

$l = 6 \times 2 = 12 \text{ cm}$

$V_{\text{pirâmide}} = \frac{12 \times 12 \times 8}{3} = 384 \text{ cm}^3$



Ficha n.º 3 – Página 80 **5. ÁREAS E VOLUMES DE SÓLIDOS GEOMÉTRICOS**

8.1. $V_{\text{cilindro}} = \pi \times 4^2 \times 16 = 256\pi \text{ cm}^3$; $V_{\text{cone}} = \dfrac{256\pi}{3} \text{ cm}^3$

$V_{\text{água dentro do copo}} = 256\pi - \dfrac{256\pi}{3} = \dfrac{768\pi}{3} - \dfrac{256\pi}{3} = \dfrac{512\pi}{3} \approx 536{,}165 \text{ cm}^3 \approx 536{,}2 \text{ ml}$

8.2. Do copo transbordou uma quantidade de água correspondente ao volume ocupada pelo cone. Como este ocupa $\dfrac{1}{3}$ do volume do cilindro, então a percentagem pedida é $\dfrac{1}{3} \times 100 \approx 33\%$.

8.3. Não. Qualquer que seja o copo cilíndrico, um cone com a mesma base e mesma altura terá $\dfrac{1}{3}$ do seu volume, independentemente das suas dimensões.

9. $V_{\text{esferas}} = 3 \times \dfrac{4}{3} \pi \times 3{,}5^3 \approx 538{,}78 \text{ cm}^3$; $V_{\text{caixa}} = (6 \times 3{,}5) \times (2 \times 3{,}5) \times (2 \times 3{,}5) = 21 \times 7 \times 7 = 1029 \text{ cm}^3$

O volume pedido é $1029 - 538{,}78 \approx 490 \text{ cm}^3$.

10.1. Afirmação verdadeira

10.2. Afirmação falsa. Se o raio duplicar, o volume aumenta oito vezes, pois:

$\dfrac{4}{3} \pi \times \left(2\sqrt{3}\right)^3 = \dfrac{4}{3} \pi \times 8r^3 = \left(\dfrac{4}{3} \pi r^3\right) \times 8$

10.3. Afirmação verdadeira.

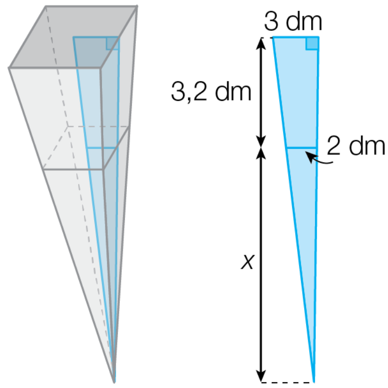
$V_{\text{esfera}} = \dfrac{4}{3} \pi \times 4^3 = \dfrac{256\pi}{3} \text{ dm}^3$ e $V_{\text{cone}} = \dfrac{\pi \times 4^2 \times 8}{3} = \dfrac{128\pi}{3} \text{ dm}^3$

$\dfrac{256\pi}{3} > \dfrac{128\pi}{3}$

10.3. Afirmação verdadeira. Se a altura duplicar, o volume será $V = A_b \times 2h = (A_b \times h) \times 2$, ou seja, o volume também duplica.

Ficha n.º 3 – Página 81

11. Os dois triângulos retângulos da figura sãos semelhantes.



$$\frac{3}{2}=\frac{3,2+x}{x} \Leftrightarrow 3x=2(3,2+x) \Leftrightarrow 3x=6,4+2x \Leftrightarrow x=6,4$$

$$V_{\text{pirâmide maior}}=\frac{6\times 6\times (3,2+6,4)}{3}=115,2\ \text{dm}^3$$

$$V_{\text{pirâmide menor}}=\frac{4\times 4\times 6,4}{3}=\frac{512}{15}\approx 34,13\ \text{dm}^3$$

$$V_{\text{tronco}}=115,2-34,13=81,07\approx 81\ \text{dm}^3$$

12. $\left(\sqrt{891}\right)^2=(3a)^2+a^2+a^2$, sendo a o comprimento, em centímetros, da aresta de cada um dos cubos.

$$891=9a^2+a^2+a^2 \Leftrightarrow 891=11a^2 \Leftrightarrow a^2=\frac{891}{11} \Leftrightarrow a^2=81 \underset{a>0}{\Leftrightarrow} a=\sqrt{81} \Leftrightarrow a=9$$

$$V_{\text{paralelepípedo}}=(9\times 3)\times 9\times 9=2187\ \text{cm}^3$$

$$A_{\text{superfície do paralelepípedo}}=14\times A_{\text{quadrado}}=14\times (9\times 9)=14\times 81=1134\ \text{cm}^2$$

13. Seja r o raio da esfera. Então, a aresta do cubo mede $2r$.

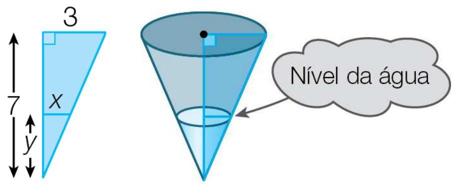
$$V_{\text{cubo}}=(2r)^3=8r^3 \ \text{ e } \ V_{\text{esfera}}=\frac{4}{3}\pi r^3$$

A percentagem de volume do cubo ocupado pela esfera é $\dfrac{\frac{4}{3}\pi r^3}{8r^3}=\dfrac{\frac{4}{3}\pi}{8}=\dfrac{4\pi}{24}=\dfrac{\pi}{6}\approx 0,52=52\%$

14. $V_{\text{cone}}=\dfrac{1}{3}\times\pi\times 3^2\times 7=\dfrac{\pi\times 9\times 7}{3}=21\pi\ \text{m}^3$

$$\frac{4}{5}\times 21\pi=\frac{84}{5}\pi$$

$$\frac{3}{x}=\frac{7}{y} \Leftrightarrow 3y=7x \Leftrightarrow y=\frac{7}{3}x$$



O volume ocupado pela água é:

$$\frac{1}{3}\pi\times x^2\times\frac{7}{3}x=\frac{84\pi}{5} \Leftrightarrow \frac{7\pi x^3}{9}=\frac{84\pi}{5} \Leftrightarrow x^3=\frac{\frac{84\pi}{5}}{\frac{7\pi}{9}} \Leftrightarrow x^3=\frac{84\times 9}{5\times 7} \Leftrightarrow x^3=\frac{756}{35} \Leftrightarrow x^3=\frac{108}{5} \Leftrightarrow x=\sqrt[3]{\frac{108}{5}}$$

A altura da água é, portanto, $y=\dfrac{7}{3}\times\sqrt[3]{\dfrac{108}{5}}\approx 6,5\ \text{m}$

15. Seja h_1 a altura do cone inferior, h_2 a do cone superior e r o raio de ambos.

$$V_{\text{dois cones}}=\frac{1}{3}\pi r^2\times h_1+\frac{1}{3}\pi r^2\times h_2=\frac{1}{3}\pi r^2(h_1+h_2)$$

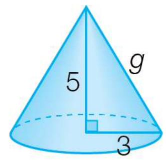
Como (h_1+h_2) é a altura do cilindro, que não é variável, então conclui-se que o volume total dos dois cones é independente da altura de cada um deles.

1.1. Opção correta: (A)

I: $V = \dfrac{\pi \times 3^2 \times 5}{3} = 15\pi \approx 47{,}1 \text{ cm}^3$ **II:** $V = \dfrac{4}{3}\pi \times 2^3 = \dfrac{32\pi}{3} \approx 33{,}5 \text{ cm}^3$

III: $V = \dfrac{1}{3} \times 3 \times 3 \times 5 = 15 \text{ cm}^3$

1.2. Opção correta: (B)



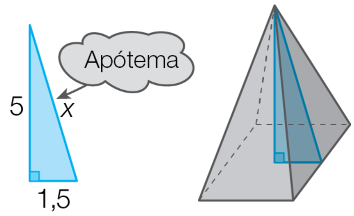
I: $g^2 = 5^2 + 3^2 \Leftrightarrow g^2 = 34 \underset{g>0}{\Leftrightarrow} g = \sqrt{34}$

$A_{\text{superfície do cone}} = \pi \times 3^2 + \pi \times 3 \times \sqrt{34} = 9\pi + 3\sqrt{34}\pi \approx 83{,}2 \text{ cm}^2$

II: $A_{\text{superfície esférica}} = 4\pi \times 2^2 = 16\pi \approx 50{,}3 \text{ cm}^2$

III: $x^2 = 5^2 + 1{,}5^2 \Leftrightarrow x^2 = 27{,}25 \underset{x>0}{\Leftrightarrow} x = \sqrt{27{,}25} \Leftrightarrow x \approx 5{,}22$

$A_{\text{superfície da pirâmide}} = 3 \times 3 + 4 \times \dfrac{3 \times 5{,}22}{2} \approx 40{,}3 \text{ cm}^3$



2.1. O sólido é um cone com 4 metros de altura e 3 metros de raio.

A sua geratriz, g, é tal que $g^2 = 3^2 + 4^2 \Leftrightarrow g^2 = 25 \underset{g>0}{\Leftrightarrow} g = \sqrt{25}$.

$V = \dfrac{\pi \times 3^2 \times 4}{3} = 12\pi \text{ m}^3$

$A = \pi \times 3^2 + \pi \times 3 \times 5 = 9\pi + 15\pi = 24\pi \text{ m}^2$

2.2. O sólido é uma esfera com 3 dm de raio.

$V = \dfrac{4}{3}\pi \times 3^3 = \dfrac{4\pi \times 27}{3} = 36\pi \text{ dm}^3$

$A = 4\pi \times 3^2 = 36\pi \text{ dm}^2$

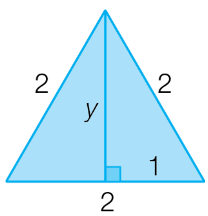
2.3. O sólido é um cilindro com 5 metros de altura e 2 metros de raio.

$V = \pi \times 2^2 \times 5 = \pi \times 4 \times 5 = 20\pi \text{ m}^3$

$A = 2 \times \left(\pi \times 2^2\right) + 5 \times \left(2\pi \times 2\right) = 8\pi + 20\pi = 28\pi \text{ m}^2$

3. Seja y a altura do triângulo da base.

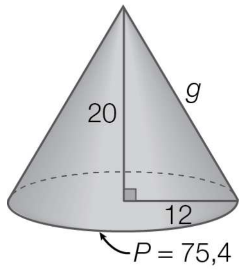
$y^2 + 1^2 = 2^2 \Leftrightarrow y^2 = 4 - 1 \underset{y>0}{\Leftrightarrow} y = \sqrt{3}$

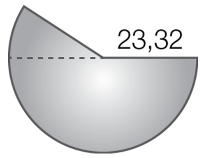


$A_b = \dfrac{2\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$

$V = \dfrac{\sqrt{3} \times 7}{3} = \dfrac{7\sqrt{3}}{3} \text{ cm}^3$

Teste n.º 1 – Página 83





4.1. $75,4 = 2\pi r \Leftrightarrow r = \dfrac{75,4}{2\pi} \Leftrightarrow r \approx 12$

$g^2 = 12^2 + 20^2 \Leftrightarrow g^2 = 144 + 400 \Leftrightarrow g^2 = 544 \underset{g>0}{\Leftrightarrow} g = \sqrt{544} \Leftrightarrow g \approx 23,32$

A geratriz do cone coincide com o raio do setor circular da sua planificação.

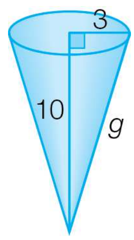
$23,32 \times 2 = 46,64 > 45$

Logo, as dimensões da cartolina não são suficientes.

4.2. No mínimo 47 cm de lado.

5.1. $V_{\text{cilindro}} = \pi \times 2,5^2 \times 8 = 50\pi \text{ cm}^3$; $V_{\text{cone}} = \dfrac{\pi \times 3^2 \times 10}{3} = 30\pi \text{ cm}^3$

O preço não é justo uma vez que a quantidade de nozes que cabem no pacote cilíndrico é muito maior comparativamente com o pacote cónico.



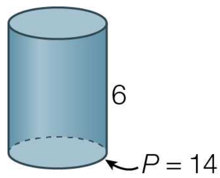
5.2. $g^2 = 10^2 + 3^2 \underset{g>0}{\Leftrightarrow} g = \sqrt{109}$

$A_{\text{superfície do pacote cónico}} = \pi \times 3 \times \sqrt{109} = 3\sqrt{109}\pi$

$A_{\text{superfície do pacote cilíndrico}} = \pi \times 2,5^2 + 2\pi \times 2,5 \times 8 = 6,25\pi + 40\pi = 46,25\pi$

$\dfrac{46,25\pi}{3\sqrt{109}\pi} \approx 1,477$ $\qquad 0,15 \times 1,477 \approx 0,22$ €

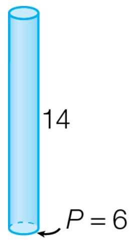
O preço do pacote cilíndrico deverá ser 0,22 €.



6. Se a folha for enrolada segundo [*AD*]:

$14 = 2\pi r \Leftrightarrow r = \dfrac{14}{2\pi} \Leftrightarrow r = \dfrac{7}{\pi}$

$V = \pi \times \left(\dfrac{7}{\pi}\right)^2 \times 6 = \dfrac{\pi \times 49 \times 6}{\pi^2} = \dfrac{49 \times 6}{\pi} = \dfrac{294}{\pi} \text{ cm}^3$



Se a folha for enrolada segundo [*AB*]:

$6 = 2\pi r \Leftrightarrow r = \dfrac{6}{2\pi} \Leftrightarrow r = \dfrac{3}{\pi}$

$V = \pi \times \left(\dfrac{3}{\pi}\right)^2 \times 14 = \dfrac{\pi \times 9 \times 14}{\pi^2} = \dfrac{9 \times 14}{\pi} = \dfrac{126}{\pi} \text{ cm}^3$

Os dois cilindros não apresentam o mesmo volume.

1.1. Opção correta: (B)

$A \cap \mathbb{Z}^{+} = \{1,2,3\}$. Assim, 1, 2 e 3 são os números inteiros positivos que fazem parte do conjunto *A*.

2.1. $-10 < x < 4 \Leftrightarrow -10-2 < x-2 < 4-2 \Leftrightarrow -12 < x-2 < 2$

2.2. $-10 < x < 4 \Leftrightarrow -4 < -x < 10$

2.3. $-10 < x < 4 \Leftrightarrow (-10)^3 < x^3 < 4^3 \Leftrightarrow -1000 < x^3 < 64$

2.4. $-10 < x < 4 \Leftrightarrow 2\times(-10)-1 < 2x-1 < 2\times 4-1 \Leftrightarrow -21 < 2x-1 < 7$

2.5. $-10 < x < 4 \Leftrightarrow 3\times(-10)+4 < 3x+4 < 3\times 4+4 \Leftrightarrow -26 < 3x+4 < 16$

2.6. $-10 < x < 4 \Leftrightarrow -4 < -x < 10 \Leftrightarrow -8 < -2x < 20 \Leftrightarrow -5 < -2x+3 < 23$

3. Opção correta: (B)

$P(x) = 2x^2 - 6x = 2xx - 2x\times 3 = 2x(x-3)$

4. $32 = a\times(-4)^2 \Leftrightarrow 32 = a\times 16 \Leftrightarrow a = \dfrac{32}{16} \Leftrightarrow a = 2$

5. $-\dfrac{1}{4}x(x-2) \geq -\dfrac{x-1}{2} - \left(\dfrac{1}{2}x\right)^2 \Leftrightarrow -\dfrac{1}{4}x^2 + \dfrac{2}{4}x \geq \dfrac{-x+1}{2} - \dfrac{1}{4}x^2 \Leftrightarrow \dfrac{1}{2}x \geq \dfrac{-x+1}{2} \Leftrightarrow x \geq -x+1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x + x \geq 1 \Leftrightarrow 2x \geq 1 \Leftrightarrow x \geq \dfrac{1}{2}$

$C.S. = \left[\dfrac{1}{2}, +\infty\right[$

6. Opção correta: (A)

$(x+2)^2 - bx = 5 \Leftrightarrow x^2 + 4x + 4 - bx - 5 = 0 \Leftrightarrow x^2 + (4-b)x - 1 = 0$

$\Delta = (4-b)^2 - 4\times 1\times(-1) = (4-b)^2 + 4$

Como $(4-b)^2 \geq 0$, então $(4-b)^2 + 4 \geq 4$. Assim, $\Delta > 0$, seja qual for o valor de *b*, logo a equação tem sempre duas soluções distintas.

Teste n.º 2 – Página 85

7.1. Dois números naturais são pares.

7.2. A soma é um número par.

8.1. **a)** $a^2 = 9$

b) $a = -3$

8.2. Não, pois se $a^2 = 9$, o valor de *a* não tem se ser necessariamente -3; pode ser -3 ou 3.

9.1. **a)** *AB* e *HC*, por exemplo

b) *ABC* e *BCG*, por exemplo

c) *EG*, por exemplo

d) *EF* e *AB*, por exemplo

e) *C*

f) *EF*

g) *EF*

9.2. O plano mediador do segmento de reta [*DB*] é o plano *ACG*. Este plano contém a reta *CG*, logo contém o ponto *I*, pois *I* pertence à reta *CG*.

9.3. *HG* é perpendicular ao plano *ADH*, pois é perpendicular a duas retas concorrentes deste plano: as retas *EH* e *HD*.

9.4. A área lateral do cubo é 144 unidades quadradas, logo a área de uma face lateral é $144 : 4 = 36$. A aresta do cubo mede, portanto, $\sqrt{36} = 6$ unidades de comprimento. Sendo *IC* paralela ao plano *ABF*, a distância de *IC* ao plano *ABF* é a distância de qualquer ponto de *IC* ao referido plano, por exemplo *C*. Por sua vez, a distância de *C* ao plano *ABF* é igual à distância de *C* ao seu pé da perpendicular em relação a este plano, isto é, a distância de *C* a *B*. Esta distância coincide com a aresta do cubo, logo é igual a 6 unidades de comprimento.

9.5. O volume do sólido é a soma do volume do cubo com o volume da pirâmide.

$\overline{IG} = \frac{1}{3}\overline{CG} = \frac{1}{3} \times 6 = 2$. Logo, o volume do sólido é: $6^3 + \frac{1}{3} \times 6^2 \times 2 = 216 + \frac{36 \times 2}{3} = 216 + 24 = 240$ unidades de volume.

10. A área do triângulo é igual à do trapézio, logo:

$$\frac{(2x+4)(x-2)}{2} = \frac{(x+2x-2)(x-2)}{2} \Leftrightarrow 2x^2 - 4x + 4x - 8 = (3x-2)(x-2) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 - 8 = 3x^2 - 6x - 2x + 4 \Leftrightarrow -x^2 + 8x - 12 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-8 \pm \sqrt{8^2 - 4 \times (-1) \times (-12)}}{2 \times (-1)}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-8 \pm \sqrt{64-48}}{-2} \Leftrightarrow x = \frac{-8 \pm \sqrt{16}}{-2} \Leftrightarrow x = \frac{-8+4}{-2} \ \vee \ x = \frac{-8-4}{-2} \Leftrightarrow x = 2 \ \vee \ x = 6$$

Se $x = 6$, $x - 2 = 4$, $2x + 4 = 2 \times 6 + 4 = 16$ e $2x - 2 = 2 \times 6 - 2 = 10$

Se $x = 2$, $x - 2 = 0$, contudo as medidas dos comprimentos dos lados de uma figura geométrica não podem ser nulas. Assim, *x* pode assumir um único valor: 6.

11. $6{,}4 \text{ m} = 640 \text{ cm}$; $3{,}2 \text{ m} = 320 \text{ cm}$; $640 : 80 = 8 \text{ cm}$; $320 : 80 = 4 \text{ cm}$

Cilindro: $r = \frac{4}{2} = 2 \text{ cm}$; $h = 8 - 2 = 6 \text{ cm}$ Semiesfera: $r = 2 \text{ cm}$

O volume do sólido é a soma do volume do cilindro com o da semiesfera, ou seja:

$$\pi \times 2^2 \times 6 + \frac{\frac{4}{3}\pi \times 2^3}{2} = 24\pi + \frac{\frac{32\pi}{3}}{2} = 24\pi + \frac{32\pi}{6} = \frac{72\pi}{3} + \frac{16\pi}{3} = \frac{88\pi}{3} \text{ cm}^3$$

A área da superfície do sólido é:

$$P_{\circ} \times 6 + \pi \times 2^2 + \frac{4\pi \times 2^2}{2} = 2\pi \times 2 \times 6 + 4\pi + \frac{16\pi}{2} = 24\pi + 4\pi + 8\pi = 36\pi \text{ cm}^2$$

12. $h = 12 - 3 = 9 \text{ cm}$; $V = \frac{1}{3}\pi \times 4^2 \times 9 = 48\pi \text{ cm}^3 \approx 150{,}8 \text{ cm}^3 = 150{,}8 \text{ ml} = 0{,}1508 \text{ l}$

$2 : 0{,}1508 \approx 13{,}3$, logo é possível encher completamente 13 copos.

Teste n.º 2 – Página 87

13. Os pontos $(-2,0)$ e $(0,1)$ pertencem ao gráfico de *g*.

$g(x) = kx + b$; $b = 1$; $k = \dfrac{0-1}{-2-0} = \dfrac{-1}{-2} = \dfrac{1}{2}$

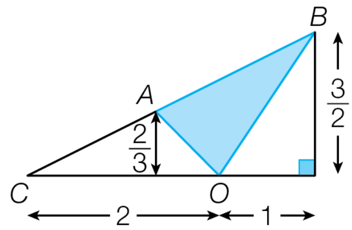
Logo, $g(x) = \dfrac{1}{2}x + 1$. As abcissas dos pontos de interseção dos dois gráficos são tais que:

$$f(x) = g(x) \Leftrightarrow \frac{3}{2}x^2 = \frac{1}{2}x + 1 \Leftrightarrow 3x^2 - x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{(-1)^2 - 4\times 3\times(-2)}}{2\times 3} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{1\pm\sqrt{1+24}}{6} \Leftrightarrow x = \frac{1\pm\sqrt{25}}{6} \Leftrightarrow x = \frac{1-5}{6} \vee x = \frac{1+5}{6} \Leftrightarrow x = -\frac{4}{6} \vee x = \frac{6}{6} \Leftrightarrow x = -\frac{2}{3} \vee x = 1$$

$g\left(-\dfrac{2}{3}\right) = \dfrac{1}{2}\times\left(-\dfrac{2}{3}\right) + 1 = -\dfrac{1}{3} + 1 = -\dfrac{1}{3} + \dfrac{3}{3} = \dfrac{2}{3}$, logo $A\left(-\dfrac{2}{3}, \dfrac{2}{3}\right)$.

$g(1) = \dfrac{1}{2}\times 1 + 1 = \dfrac{1}{2} + \dfrac{2}{2} = \dfrac{3}{2}$, logo $B\left(1, \dfrac{3}{2}\right)$.



C: ponto de interseção da reta *AB* com o eixo *Ox*

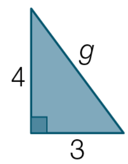
$$A([AOB]) = \frac{3\times\frac{3}{2}}{2} - \frac{2\times\frac{2}{3}}{2} - \frac{1\times\frac{3}{2}}{2} = \frac{\frac{9}{2}}{2} - \frac{\frac{4}{3}}{2} - \frac{\frac{3}{2}}{2} = \frac{9}{4} - \frac{4}{6} - \frac{3}{4} = \frac{27}{12} - \frac{8}{12} - \frac{9}{12} = \frac{10}{12} = \frac{5}{6}$$ unidades quadradas.

14.1. $h(x) = \dfrac{k}{x}, x \neq 0$. Como o gráfico de *h* contém o ponto de coordenadas $(6,2)$, então

$2 = \dfrac{k}{6} \Leftrightarrow k = 2\times 6 \Leftrightarrow k = 12$, logo $h(x) = \dfrac{12}{x}$, $x \neq 0$.

14.2. **a)** As coordenadas de *P* são $\left(x, \dfrac{12}{x}\right)$. Assim, $\overline{OA} = x$ e $\overline{AP} = \dfrac{12}{x}$. A área do retângulo [*OAPB*] é igual a $\overline{OA}\times\overline{AP}$, ou seja, $x \times \dfrac{12}{x} = 12$. Assim, a área não depende da posição de *P*, pois seja qual for a posição deste ponto, a área é sempre igual a 12 unidades quadradas.

b) $\dfrac{12}{3} = 4$, logo $P(3,4)$.



O sólido gerado é um cone com 4 unidades de altura e 3 unidades de raio.

Se *g* for a sua geratriz, então $g^2 = 4^2 + 3^2 \Leftrightarrow g^2 = 25 \underset{g>0}{\Leftrightarrow} g = 5$.

$V = \dfrac{1}{3}\pi \times 3^2 \times 4 = \dfrac{9\times 4\pi}{3} = 12\pi$ unidades de volume

$A = A(\text{lateral}) + A(\text{base}) = \pi\times 3\times 5 + \pi\times 3^2 = 15\pi + 9\pi = 24\pi$ unidades quadradas