Escola Secundária de Paredes

Proposta de Resolução do 1º Miniteste de Avaliação - Versão 2

Matemática A

12.º Ano de Escolaridade | novembro de 2022

Turma: 12ºH

1. .

A reta r é definida por $y = -x + 3$, então,

$\lim_{x\to-\infty} [f(x) - (-x+3)] = 0$ e de $\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = -1$

Resposta: (C)

2. .

2.1. $D_g = \mathbb{R}$

$x = -1$ é um possível ponto de descontinuidade da função g

Assim,

$$\lim_{x\to-1^-} g(x) = \lim_{x\to-1^-} \frac{3x+1}{x+1} = \frac{-2}{0^-} = +\infty$$

Logo, a reta de equação $x = -1$ é assíntota ao gráfico de g

Como a função é contínua em $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$, então, não existem mais assíntotas verticais ao gráfico de g

2.2. Quando $x \to +\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{g(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{2x^4+1}{x^3+1}}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2x^4+1}{x^4+x} =^{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)} \lim_{x\to+\infty} \frac{x^4\left(2+\frac{1}{x^4}\right)}{x^4\left(1+\frac{x}{x^4}\right)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2+\frac{1}{x^4}}{1+\frac{1}{x^3}} =$$

$$= \frac{2+0}{1+0} = 2$$

Logo, $m = 2$

$$\lim_{x\to+\infty} (g(x) - 2x) = \lim_{x\to-\infty} \left(\frac{2x^4+1}{x^3+1} - 2x\right) = \lim_{x\to+\infty} \frac{2x^4+1-2x^4-2x}{x^3+1} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{-2x+1}{x^3+1} =^{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)} \lim_{x\to+\infty} \frac{x\left(-2+\frac{1}{x}\right)}{x^3\left(1+\frac{1}{x^3}\right)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^2} \times \lim_{x\to+\infty} \frac{-2+\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x^3}} = 0 \times \frac{-2+0}{1+0} = 0$$

Logo, $b = 0$

Portanto, a reta de equação $y = 2x$ é assíntota ao gráfico de g, quando $x \to +\infty$

3. A função f é contínua em $[1;2]$, pois trata-se de uma função polinomial

   Ora,

   $f(1) = -2 \times 1^5 + 4 \times 1 - 1 = -2 + 4 - 1 = 1 > 0$

   $f(2) = -2 \times 2^5 + 4 \times 2 - 1 = -64 + 8 - 1 = -57 < 0$

   Logo, $f(1) \times f(2) < 0$

   Como a função f é contínua em $[1;2]$ e $f(1) \times f(2) < 0$, então, pelo Corolário do Teorema de Bolzano-Cauchy, $\exists c \in]1;2[: f(c) = 0$

   Ou seja, a função f tem pelo menos um zero em $]1;2[$

4. $A(2;-3)$ é ponto de interseção das assíntotas ao gráfico de g, então, $a = -3$ e $c = 2$

   Assim,

   $g(x) = -3 + \dfrac{b}{x-2}$, com $b \in \mathbb{R}$, $b \neq 0$

   Como o gráfico de g interseta o eixo Ox no ponto de abcissa 1, então, $g(1) = 0$

   $g(1) = 0 \Leftrightarrow -3 + \dfrac{b}{1-2} = 0 \Leftrightarrow -3 - b = 0 \Leftrightarrow b = -3$

   Logo, $g(x) = -3 - \dfrac{3}{x-2}$

   Portanto,

   $g(-3) = -3 - \dfrac{3}{-3-2} = -3 - \dfrac{3}{-5} = -3 + \dfrac{3}{5} = -\dfrac{12}{5}$

5. .

   Assíntotas verticais

   $D_h =]-3;+\infty[$

   $x = -1$ é um possível ponto de descontinuidade da função h

   Assim,

   $\lim\limits_{x \to -1^-} h(x) = \lim\limits_{x \to -1^-} \dfrac{2x^3+1}{x+1} = \dfrac{-1}{0^-} = +\infty$

   Logo, a reta de equação $x = -1$ é assíntota ao gráfico de h

   Como a função é contínua em $]-3;-1[\cup]-1;+\infty[$, então, não existem mais assíntotas verticais ao gráfico de h

Assíntotas não verticais

- Quando $x \to +\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{h(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{1+16x^2}+3x}{x} =^{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)} \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^2\left(\frac{1}{x^2}+16\right)}+3x}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{|x|\sqrt{\frac{1}{x^2}+16}+3x}{x} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{x\sqrt{\frac{1}{x^2}+16}+3x}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x\left(\sqrt{\frac{1}{x^2}+16}+3\right)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \left(\sqrt{\frac{1}{x^2}+16}+3\right) =$$

$$= \sqrt{0+16}+3 = 7$$

Logo, $m = 7$

$$\lim_{x\to+\infty} (h(x)-7x) = \lim_{x\to+\infty} \left(\sqrt{1+16x^2}+3x-7x\right) = \lim_{x\to+\infty} \left(\sqrt{1+16x^2}-4x\right) =^{(\infty-\infty)}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\left(\sqrt{1+16x^2}-4x\right)\left(\sqrt{1+16x^2}+4x\right)}{\sqrt{1+16x^2}+4x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\left(\sqrt{1+16x^2}\right)^2-16x^2}{\sqrt{1+16x^2}+4x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1+16x^2-16x^2}{\sqrt{1+16x^2}+4x} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{1+16x^2}+4x} = \frac{1}{+\infty} = 0$$

Logo, $b = 0$

Portanto, a reta de equação $y = 7x$ é assíntota ao gráfico de h, quando $x \to +\infty$

6. .

6.1. Como $\lim_{x\to-1^-} f(x) = +\infty$, então a reta s tem equação $x = -1$

Por outro lado, $\lim_{x\to-\infty} (f(x)-2x+1) = 0$, ou seja, $\lim_{x\to-\infty} (f(x)-(2x-1)) = 0$

Então a reta r tem equação $y = 2x-1$

Assim,

$$\begin{cases} x = -1 \\ y = 2x-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = 2\times(-1)-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = -3 \end{cases}$$

Portanto, o ponto T tem coordenadas $(-1;-3)$

6.2. $\lim_{x\to-\infty} \frac{6x^2+xf(x)}{x^2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{6x^2}{x^2} + \lim_{x\to+\infty} \frac{xf(x)}{x^2} = \lim_{x\to+\infty} (6) + \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = 6+2 = 8$

Resposta: (D)