Ficha de Trabalho – Preparação Para o Teste

Maio de 2015

Matemática A – 12.º Ano

"Em relação à Matemática não houve, até hoje, quem lastimasse o tempo empregue no seu estudo."
Benjamim Franklin

1. Considere uma certa linha n do triângulo de Pascal tal que ${}^{n}C_{308} + {}^{n}C_{309} = {}^{n+1}C_{1705}$. Qual é o valor da soma de todos os elementos da linha seguinte, excluindo o primeiro e o último?

A $2\times\left(2^{2013}-1\right)$ **B** 2^{2013}

C $2\times\left(2^{2012}-1\right)$ **D** 2^{2014}

2. Considere um conjunto de doze bolas, seis azuis, indistinguíveis, duas pretas, indistinguíveis e quatro encarnadas, numeradas de 1 a 4. De quantas maneiras distintas se podem colocar as doze bolas numa só fila, de modo que as azuis ocupem posições consecutivas?

A $\frac{7!}{2!}$ **B** $\frac{7!\times 6!}{2!}$ **C** $\frac{12!}{2!\times 6!}$ **D** $7!\times 6!$

3. Considere os conjuntos X e Y tais que:

- X é o conjunto de todos os números pares de quatro algarismos distintos que se podem formar com os algarismos $1, 3, 5, 6, 7, 8$ e 9.

- Y é o conjunto de todos os números de três algarismos se podem formar com os algarismos $0, 3, 5, 6, 7$ e 9.

Pretende-se escolher três elementos de X e dois de Y. De quantas maneiras distintas se pode fazê-lo?

A ${}^{686}C_3\times{}^{216}C_2$ **B** ${}^{240}C_3\times{}^{180}C_2$

C ${}^{686}C_3\times{}^{180}C_2$ **D** ${}^{240}C_3\times{}^{216}C_2$

4. Considere uma caixa com vinte compartimentos numerados de 1 a 20. Pretende-se guardar nessa caixa doze bolas, uma por compartimento: cinco pretas, indistinguíveis; quatro brancas numeradas de 1 a 4; três azuis, numeradas de 1 a 3. De quantas maneiras distintas se pode fazê-lo?

A ${}^{20}C_5\times{}^{15}A_4\times 3!$ **B** ${}^{20}C_{12}\times{}^{12}C_5\times 7!$

C ${}^{20}C_5\times 7!$ **D** ${}^{20}C_{12}\times{}^{12}C_5\times 4!\times 3!$

5. A distribuição de probabilidades de uma variável aleatória X é dada pela tabela:

x_i	0	1	2
$P(X=x_i)$	$\frac{^{2012}C_{298}+^{2012}C_{300}}{^{2014}C_{300}}$	$\frac{a}{^{2014}C_{300}}$	$\frac{^{2012}C_{1713}}{^{2014}C_{300}}$

(a designa um número real positivo)

Qual é o valor de a?

A $^{2012}C_{298}$ **B** $^{2012}C_{299}$ **C** $^{2013}C_{298}$ **D** $^{2013}C_{299}$

6. Seja S o espaço de resultados associados a uma certa experiência aleatória. Sejam A e B dois acontecimentos possíveis ($A \subset S$ e $B \subset S$). Sabe-se que $P(A) = 0{,}3$ e que $P(B|\bar{A}) = 0{,}2$. Qual pode ser o valor de $P(B)$?

A $0{,}1$ **B** $0{,}3$ **C** $0{,}5$ **D** $0{,}7$

7. A quantidade de água, em mL, presente nas garrafas de água que uma empresa produz é uma variável aleatória com distribuição normal. Todas as garrafas de água passam pelo controle de qualidade e só são aprovadas se o seu volume estiver a menos de dois desvios padrões da média. Num lote de doze garrafas, qual é a probabilidade, arredondada às milésimas, de exactamente três serem rejeitadas?

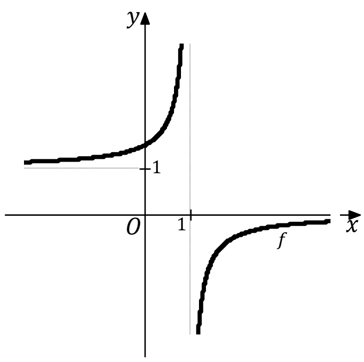
A $0{,}013$ **B** $0{,}014$ **C** $0{,}226$ **D** $0{,}227$

8. Sejam $a, b \in \mathbb{R}$ e $x, y \in \mathbb{R}^+$ tal que $a = \log_2 x$ e $b = \log_4 y$. A que é igual a expressão $\log_{64}\left(\frac{x^5}{(xy)^2}\right)$?

A $\frac{3a-2b}{6}$ **B** $\frac{a-4b}{6}$ **C** $\frac{3a-4b}{6}$ **D** $\frac{4a-3b}{6}$

9. Na figura está representado parte do gráfico de uma função f de domínio $\mathbb{R}\backslash\{1\}$.

Sabe-se que as retas de equação $x = 1$, $y = 0$ e $y = 1$ são assíntotas do gráfico de f.



Seja (x_n) uma progressão geométrica tal que:

$$x_2 = -\frac{16}{3} \quad \text{e} \quad x_5 = -\frac{128}{81}$$

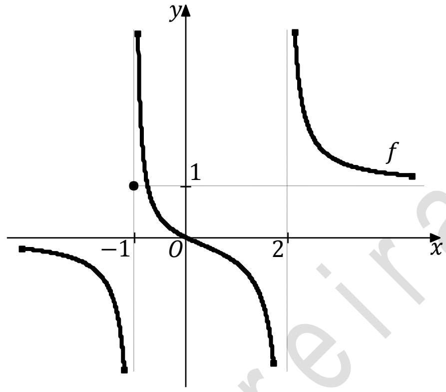
Qual é o valor de $\lim f(x_n + 1)$?

A $-\infty$ **B** 0 **C** 1 **D** $+\infty$

10. Na figura está representado parte do gráfico de uma função f de domínio $\mathbb{R}\backslash\{2\}$.

Sabe-se que:

- $f(-1) = 1$
- as rectas de equação $x = -1$, $x = 2$ e $y = 0$ são assimptotas do gráfico de f.



Seja (x_n) uma sucessão tal que $x_n \longrightarrow 2$ e $-1 < x_n < 2, \forall n \in \mathbb{N}$.

Qual é o valor de $\lim f\left(2 - e^{-\frac{1}{2-x_n}}\right)$?

A $-\infty$ **B** 0 **C** 1 **D** $+\infty$

11. Seja f uma função contínua em $\mathbb{R}$, definida por:

$$f(x) = \begin{cases} a^2\cos(\pi x) & \text{se} \quad x \leq 1 \\ \frac{e^{b-bx}-1}{\ln(ax-a+1)} & \text{se} \quad x > 1 \end{cases}, \text{ com } a, b \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$$

Quais podem ser os valores de a e de b?

A $a = -2$ e $b = -6$ **B** $a = -1$ e $b = 1$ **C** $a = 1$ e $b = 3$ **D** $a = 2$ e $b = 8$

12. Sejam f, g e h três funções de domínio $\mathbb{R}$, tal que o contradomínio de f é $]0,1[$, a função g é definida por $g(x) = e^{x^3-2x^2+x}$ e a segunda derivada de h é definida por $h''(x) = \ln\big(f(x)\big) \times g'(x)$. Qual das afirmações é verdadeira?

A O gráfico de h tem a concavidade voltada para baixo em $\left[\frac{1}{3}, 1\right]$.

B O gráfico de h tem a concavidade voltada para cima em $\left[0, \frac{4}{3}\right]$.

C O gráfico de h tem a concavidade voltada para baixo em $\left]-\infty, \frac{1}{3}\right]$ e em $[1, +\infty[$.

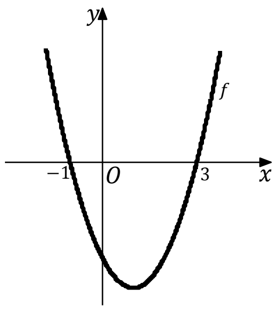
D O gráfico de h tem a concavidade voltada para cima em $]-\infty, 0]$ e em $\left[\frac{4}{3}, +\infty\right[$.

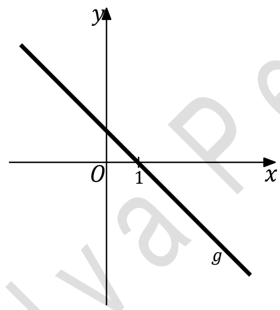
13. Sejam f e g duas funções de domínio $\mathbb{R}$ tais que $f(x)=\ln(x^2+x)$ e a recta tangente ao gráfico de g no ponto de abcissa 1 é perpendicular à recta de equação $y=-\frac{x}{2}+1$ e contém o ponto de coordenadas $(2,3)$.

Qual é o valor de $(f\circ g)'(1)$?

A 1 **B** 2 **C** 3 **D** 4

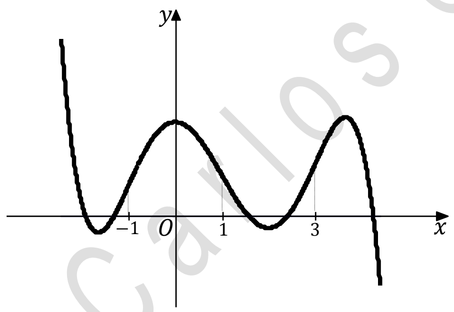
14. Nas figuras estão representadas, num referencial o.n. xOy, parte dos gráficos de duas funções polinomiais f e g.



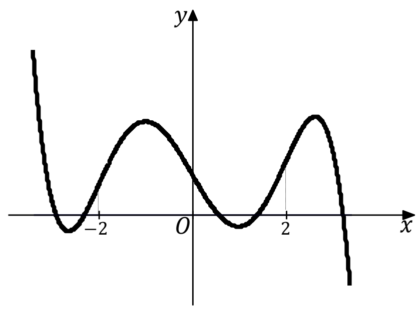


Seja h uma função de domínio $\mathbb{R}$, tal que $h''(x)=(f\times g)(x)$. Em qual das opções seguintes pode estar representado parte do gráfico da função $-h(x+1)$?

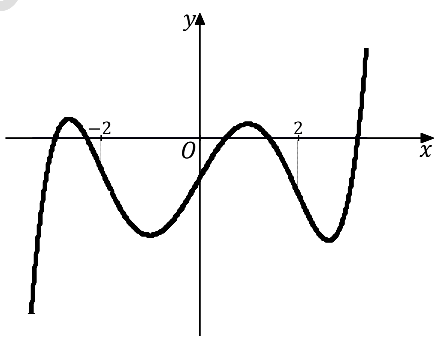
A



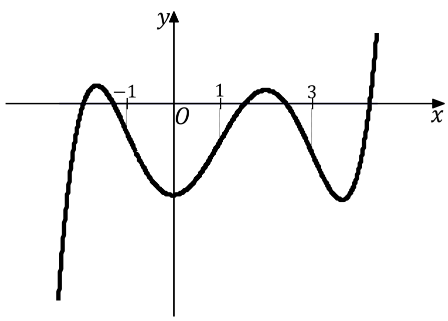
B



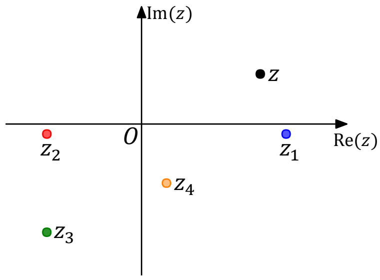
C



D



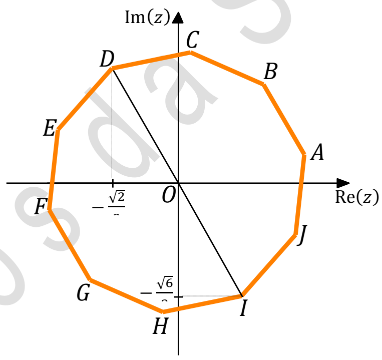
15. Na figura estão representados, no plano complexo, as imagens geométricas dos números complexos z, z_1, z_2, z_3 e z_4.



Sabendo que $|z| = 2$, qual deles pode ser igual a $\frac{8}{z^3} - \bar{z}$?

A z_1 **B** z_2 **C** z_3 **D** z_4

16. No plano complexo da figura está representado um decágono regular inscrito numa circunferência centrada na origem. Os vértices do decágono são as raízes de índice n de um número complexo z. O vértice D tem abcissa $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ e o vértice I tem ordenada $-\frac{\sqrt{6}}{2}$.



Qual é o número complexo cuja imagem é o ponto G?

A $\frac{\sqrt{2}}{2}\operatorname{cis}\frac{27\pi}{20}$ **B** $\sqrt{2}\operatorname{cis}\frac{19\pi}{15}$ **C** $\frac{\sqrt{2}}{2}\operatorname{cis}\frac{19\pi}{15}$ **D** $\sqrt{2}\operatorname{cis}\frac{27\pi}{20}$

17. Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, considere os números $z_1 = 2\operatorname{cis}\frac{5\pi}{12}$ e $z_2 = \frac{-4i^{37}}{1+i} - \frac{1}{i} - i$.

17.1. Mostre que $z_2 = 2\sqrt{2}\operatorname{cis}\frac{5\pi}{4}$ e determine o menor natural n de modo que a imagem geométrica do número complexo $\left(\frac{z_2}{(z_1)^2 \times i}\right)^{3n}$ pertença à bissectriz do terceiro quadrante.

17.2. Resolva, em $\mathbb{C}$, a equação $z^3 \times (z_2)^2 - 32\bar{z} = 0 \quad \wedge \quad z \neq 0$ e determine a área do polígono cujos vértices são as imagens geométricas das soluções da condição. Apresente as soluções na forma trigonométrica.

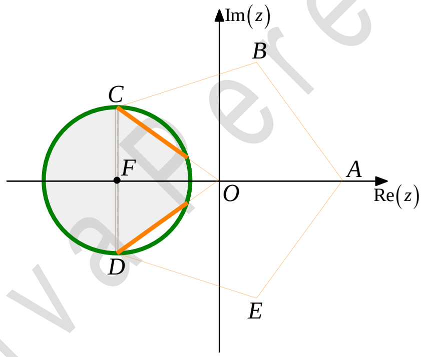
18. Mostre que $|z - w|^2 = |z|^2 - 2\operatorname{Re}(\bar{z} \times w) + |w|^2, \forall z, w \in \mathbb{C}$.

19. Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, considere $z_1 = 2 + 2xi + x^2 i^{8n+3}$ e $z_2 = -3 + x^2 + x^3 i^{5-16n}$, com $n \in \mathbb{N}$ e $x \in \mathbb{R}$.

19.1. Nesta alínea, considere $x = -1$. Determine, na forma trigonométrica $\frac{z_1}{\overline{z_2} - \text{cis}\frac{3\pi}{2}} + \frac{1+4i}{4i} + \frac{\sqrt{3}}{4}\text{cis}\frac{\pi}{2}$.

19.2. Determine x de modo que z_2 seja igual ao simétrico do conjugado de z_1.

20. Na figura estão representados, no plano complexo, um pentágono regular $[ABCDE]$, inscrito numa circunferência centrada na origem, e uma circunferência centrada no ponto F.



Sabe-se que:

- o segmento de recta $[CD]$ é paralelo ao eixo imaginário.
- os pontos C e D pertencem à circunferência.
- o ponto A pertence ao eixo real e $\overline{OA} = 2$

Seja C a imagem geométrica do número complexo z_3. Escreva na forma algébrica o número complexo

$$\frac{(z_3)^5 \times \text{cis}\frac{\pi}{12}}{-\sqrt{6} + \sqrt{2}i} - \frac{2-6i}{1-i}$$

21. Seja S o espaço de resultados associado a uma experiência aleatória e sejam A e B dois acontecimentos possíveis ($A \subset S$ e $B \subset S$).

21.1. Mostre que $P(A|\overline{B}) \times \left(\frac{1}{P(B)} - 1\right) - \frac{P(A)}{P(B)} = P(\overline{A}|B) - 1$.

21.2. Uma caixa contém bolas pretas e encarnadas numeradas com números naturais.

Sabe-se que:

- O número de bolas pretas é o dobro do número de bolas numeradas com um número par.
- Entre as bolas numeradas com um número ímpar, 70% são pretas.
- Entre as bolas numeradas com um número par, dois quintos são encarnadas.

Escolhendo ao acaso uma bola da caixa, qual é a probabilidade de ser preta? Apresente o resultado na forma de fracção irredutível.

Sugestão: Pode utilizar a igualdade enunciada em 2.1. Nesse caso, deverá começar por caracterizar claramente os acontecimentos A e B, no contexto da situação apresentada.

22. No Departamento Financeiro de uma empresa trabalham sete homens e três mulheres.

22.1. Escolhem-se ao acaso quatro funcionários do Departamento Financeiro da empresa. Qual é a probabilidade de serem todos do sexo masculino, sabendo que pelo menos dois são do sexo masculino?

Uma resposta a este problema é $\dfrac{{}^{7}C_{4}}{{}^{7}C_{2}\times{}^{3}C_{2}+{}^{7}C_{3}\times{}^{3}C_{1}+{}^{7}C_{4}}$. Numa pequena composição, explique porquê. A composição deve incluir:

- uma referência à regra de Laplace.
- uma explicação do número de casos possíveis.
- uma explicação do número de casos favoráveis.

22.2. Um estudo feito pela empresa revelou que a altura das suas funcionárias segue uma distribuição normal de valor médio 162 cm e que a percentagem de funcionárias com altura superior a 168 cm é de 20%.

Considere a variável aleatória X: «número de funcionárias do Departamento Financeiro com altura entre 156 cm e 162 cm».

Defina por meio de uma tabela a distribuição de probabilidades da variável aleatória X. Apresente as probabilidades na forma de dízima.

22.3. A empresa contratou mais alguns funcionários para o Departamento Financeiro, todos do sexo feminino.

Com a nova composição do Departamento Financeiro a de escolher ao acaso dois funcionários e estes serem do sexo feminino é $\dfrac{4}{15}$. Quantas funcionárias foram contratadas?

23. Seja S o espaço de resultados associados a uma certa experiência aleatória. Sejam A e B dois acontecimentos possíveis ($A \subset S$ e $B \subset S$). Mostre que:

$P(\bar{A} \cup B) - P(A|\bar{B}) \times P(B) = P(\bar{A})$ se e só se A e B forem independentes.

24. Considere a função g de domínio $\mathbb{R}$ definida por $g(x) = -xe^{4-x^2}$.

24.1. Estude a função g quanto ao sentido das concavidades e à existência de pontos de inflexão do seu gráfico.

24.2. Seja f a função de domínio $\mathbb{R}\backslash\{0,4\}$ definida por:

$$f(x) = \begin{cases} g(x)\ln(-x) & \text{se} \quad x < 0 \\ \dfrac{4-x}{x-\sqrt{4x}} & \text{se} \quad x > 0 \end{cases}$$

Estude a função f quanto à existência de assimptotas do seu gráfico, paralelas aos eixos coordenados.

25. Sejam f e g duas funções de domínio $\mathbb{R}$ tal que $g(x) = mx + b$, com $m \in \mathbb{R}\backslash\{-1,0\}$ e $b \in \mathbb{R}$. Sabe-se que o gráfico de g é assimptota do gráfico de f, quando $x \longrightarrow +\infty$.

Considere a função h, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $h(x) = \frac{x^2}{f(-x)-g\left(\frac{x}{m}\right)}$. Mostre que o gráfico de h admite uma assimptota quando $x \longrightarrow -\infty$ e escreva uma equação que a defina.

26. Num hipermercado o preço de venda, em euros, de um quilograma de cerejas é dado por:

$$V(t) = \frac{2}{3}t + 8 - 2\ln(t^2 + 7t + 1), \text{ com } t \in [0,10]$$

onde t representa o tempo, em semanas, decorrido após o inicio da sua comercialização.

26.1. Ao fim de quanto tempo foi mínimo o preço de venda de cada quilograma de cerejas? Qual foi esse preço? Apresente o resultado em euros.

26.2. Durante as dez semanas que as cerejas estiveram à venda, o hipermercado comprou cada quilograma por 3 euros. O número de quilogramas que vendeu, em milhares, é dado por:

$$Q(t) = 4t^2e^{-0,5t}, \text{ com } t \in [0,10]$$

Recorrendo à calculadora gráfica, determine durante quanto tempo o lucro do hipermercado foi superior a 2000 euros.

Na sua resposta deve:

- escrever a condição que permite resolver o problema.
- reproduzir o(s) gráfico(s) (devidamente identificado(s)) que achar necessário(s) para a resolução do problema.
- indicar os valores que t que são solução do problema.

Apresente os valores que retirar da calculadora arredondados às milésimas e a resposta à questão em semanas e dias, com os dias arredondados às unidades.

27. Sejam f e g duas funções de domínio $\mathbb{R}$ tais que, f', g', f'' e g'', todas de domínio $\mathbb{R}$, satisfazem as condições:

- $f''(x) > 0$ e $g''(x) < 0, \forall x \in \mathbb{R}$
- $f'(1) = 0$ e $g'(2) = 0$

Mostre que existe pelo menos um $c \in]0,3[$ tal que as rectas tangentes aos gráficos de f e g no ponto de abcissa c são paralelas.

28. Considere a função f, de domínio $\mathbb{R}$, definida por:

$$f(x)=\begin{cases}\frac{3x+\ln(2x)}{x} & \text{se} \quad x>0\\ 0 & \text{se} \quad x=0\\ 2x-\frac{x^2+x+1}{x\sqrt{x^2+1}} & \text{se} \quad x<0\end{cases}$$

28.1. Determine, por definição, $f'(1)$ e mostre que uma equação da reta tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa 1 é $y=\ln\left(\frac{e^{x+2}}{2^{x-2}}\right)$.

28.2. Verifique se existe $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ e estude a função f quanto à existência de assimptotas do seu gráfico. Caso existam, indique as suas equações.

28.3. Estude, para $x\in\mathbb{R}^+$, a função f quanto à monotonia e existência de extremos relativos, determinando-os caso existam.

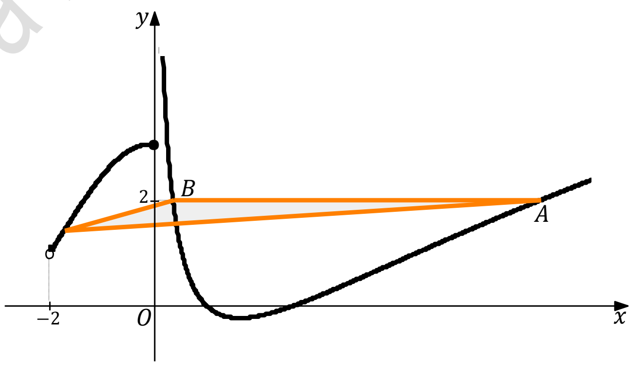
29. Considere a função f, de domínio $\mathbb{R}\backslash\{-2\}$, definida por:

$$f(x)=\begin{cases}\frac{4-x^2}{1-e^{-2x-4}}-1 & \text{se} \quad x\leq 0\\ \ln^2 x-\ln x & \text{se} \quad x>0\end{cases}$$

29.1. Estude a função f quanto à existência de assimptotas do seu gráfico, paralelas aos eixos coordenados. Caso existam, indique as suas equações.

29.2. Estude, para $x\in\mathbb{R}^+$, a função f quanto ao sentido das concavidades e à existência de pontos de inflexão do seu gráfico.

29.3. Na figura está representado, num referencial o.n. xOy, parte do gráfico da função f e um triângulo $[ABP]$.



Sabe-se que:

- os pontos A e B pertencem ao gráfico da função f, têm ordenada 2 e têm abcissa positiva;

- o ponto P desloca-se sobre o gráfico da função f, no segundo quadrante. Para cada posição do ponto P a sua abcissa, x, pertence ao intervalo $]-2,0]$.

Determine as abcissas dos pontos P de modo que a área do triângulo $[ABP]$ seja igual a 2.

Na sua resposta deve:

- Determinar, analiticamente, o valor exacto das abcissas dos pontos A e B;
- escrever uma condição que permite resolver o problema;
- reproduzir o(s) gráfico(s) (devidamente identificado(s)) que achar necessário(s) para a resolução do problema;
- indicar as abcissas dos pontos P que são solução do problema, apresentando-as arredondadas às centésimas.

30. Considere a função *f*, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $f(x)=3x-\ln\left(x^2+2\right)$.

30.1. Resolva, em $\mathbb{R}$, a inequação $3x-\ln(3-x)-f(x)\geq\ln(2x+2)$.

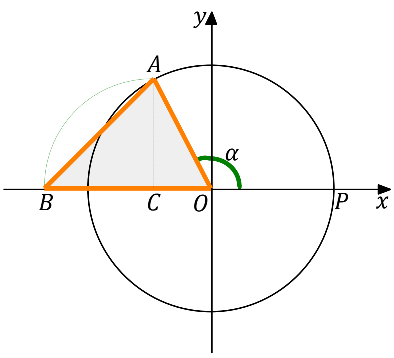
30.2. Estude a função g, de domínio $\mathbb{R}\setminus\{0\}$, definida por $g(x)=\dfrac{f(x)}{x}$ quanto à existência de assimptotas do seu gráfico. Caso existam, indica as suas equações.

30.3. Estude a função f quanto ao sentido das concavidades e à existência de pontos de inflexão do seu gráfico.

31. Na figura estão representados em referencial o.n. xOy um círculo trigonométrico e um triângulo $[OAB]$.

Sabe-se que:

- o ponto A desloca-se sobre a circunferência, no segundo quadrante (eixo Ox não incluído). O ponto C acompanha o movimento de A, de modo que $[AC]$ é sempre paralelo a Oy;
- o ponto B pertence ao eixo Ox;
- o arco de circunferência AB está centrado em C;
- α é a amplitude, em radianos, do ângulo POA, com $\alpha\in\left]\frac{\pi}{2},\pi\right[$.



Seja g a função que dá a área do triângulo $[OAB]$ em função de α.

31.1. Mostre que $g(\alpha)=\frac{\operatorname{sen}^2\alpha-\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha}{2}$. Determine $g\left(\frac{\pi}{2}\right)$ e interpreta geometricamente o resultado obtido.

31.2. Mostre que $g'(\alpha)=\frac{\operatorname{sen}(2\alpha)-\cos(2\alpha)}{2}$ e determine o valor de α para o qual a área do triângulo $[OAB]$ é máxima.

32. Considere a função h, de domínio $\mathbb{R}$ definida por $h(x) = \text{sen}(2x) - 2\,\text{sen}\,x$.

32.1. Determine, por definição, $h'\left(\frac{\pi}{2}\right)$.

32.2. Seja P um ponto de abcissa $x \in [0, \pi]$, que se desloca sobre o gráfico de h. Para cada posição do ponto P, considere o triângulo $[OPQ]$ tais que O é a origem do referencial e Q pertence ao eixo Ox e tem a mesma abcissa que P.

Recorrendo à calculadora gráfica, determine a abcissa do ponto P de modo que a área do triângulo seja máxima.

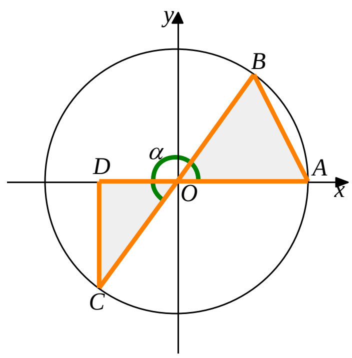
Na sua resposta deve:

- escrever a área do triângulo $[OPQ]$ em função da abcissa de P.
- escrever a condição que permite resolver o problema.
- reproduzir o(s) gráfico(s) (devidamente identificado(s)) que achar necessário(s) para a resolução do problema.
- indicar a abcissa do ponto P, arredondada às décimas, que é a solução do problema.

32.3. Na figura estão representados, num referencial o.n. xOy, o polígono $[ABOCD]$ e a circunferência de equação $x^2 + y^2 = 4$.

Sabe-se que:

- O ponto A pertence ao eixo Ox e à circunferência.
- O ponto C desloca-se no terceiro quadrante (eixos não incluídos) sobre a circunferência. O ponto B acompanha o seu movimento de modo que $[BC]$ é sempre um diâmetro da circunferência.
- O ponto D pertence ao eixo Ox e acompanha o movimento do ponto C de modo que $[CD]$ é sempre paralelo a Oy.



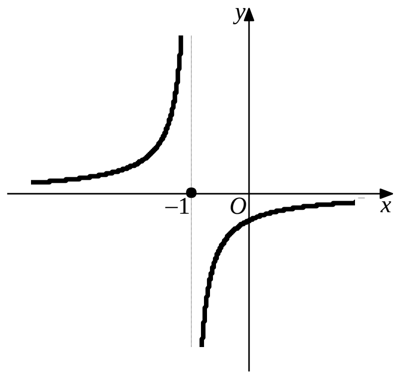
Seja α a amplitude do ângulo AOC, com $\alpha \in \left]\pi, \frac{3\pi}{2}\right[$. Determine o valor de α de modo que a área do polígono $[ABOCD]$ seja máxima e indique o valor da área máxima.

Sugestão: Comece por mostrar que a área do polígono $[ABOCD]$ é dada por $h(\alpha)$.

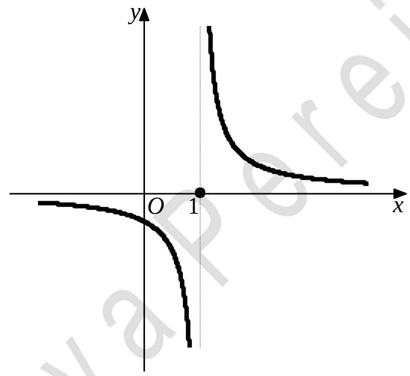
33. Sejam (u_n) a sucessão definida por $u_n = \dfrac{1}{n\,\text{sen}\left(\dfrac{1}{n}\right)}$ e f uma função de domínio $\mathbb{R}$ tal que $\lim f(u_n - 2) = +\infty$

Em qual das seguintes opções pode estar representado parte do gráfico da função f?

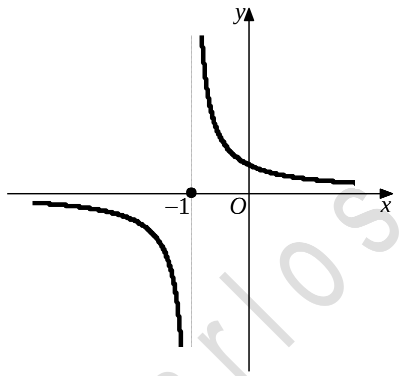
A



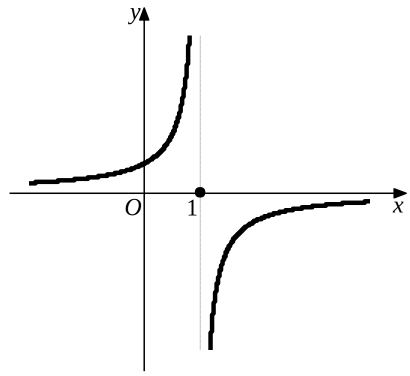
B



C



D



Numa pequena composição indique a opção correcta e explique as razões que o levam a rejeitar as restantes opções. Apresente três razões, uma por cada opção rejeitada.

Solucionário

1.	A	**2.**	A	**3.**	B	**4.**	B
5.	B	**6.**	B	**7.**	B	**8.**	C
9.	D	**10.**	A	**11.**	D	**12.**	C
13.	C	**14.**	C	**15.**	B	**16.**	B
17.1.	$n = 3$	**17.**	$\left\{2\text{cis}\left(-\frac{\pi}{8}\right), 2\text{cis}\frac{3\pi}{8}, 2\text{cis}\frac{7\pi}{8}, 2\text{cis}\frac{11\pi}{8}\right\}$; $\text{Área}_{\text{polígono}} = 8$						
19.1.	$\frac{1}{2}\text{cis}\frac{2\pi}{3}$	**19.2.**	$x = 1$				
20.	$-12-6i$						

21.2. $\frac{2}{3}$

22.2.

x_i	0	1	2	3
$P(X = x_i)$	0,343	0,441	0,189	0,027

22.3. Cinco funcionárias.

24.1. $g''(x) = xe^{4-x^2}(6-4x^2)$; O gráfico de g tem a concavidade voltada para baixo em $\left[-\frac{\sqrt{6}}{2}, 0\right]$ e em $\left[\frac{\sqrt{6}}{2}, +\infty\right[$, tem a concavidade voltada para cima em $\left]-\infty, -\frac{\sqrt{6}}{2}\right]$ e em $\left[0, \frac{\sqrt{6}}{2}\right]$ e tem pontos de inflexão em $x = -\frac{\sqrt{6}}{2}$, em $x = 0$ e em $x = -\frac{\sqrt{6}}{2}$.

24.2. A.V.: $x = 0$; A.H.: $y = 0$, quando $x \longrightarrow -\infty$ e $y = -1$, quando $x \longrightarrow +\infty$.

25. $y = -\frac{x}{m+1}$.

26.1. O preço de venda de cada quilograma de cerejas foi mínimo passadas quatro semanas. Esse preço foi de, aproximadamente, 3,05 euros ($V(4) \approx 3{,}05$)

26.2. $(V(t) - 2) \times Q(t) > 2 \Leftrightarrow t \in]a, b[\cup]c, 10]$, com $a \approx 0{,}572$, $b \approx 2{,}37$ e $c \approx 6{,}126$. O lucro do hipermercado foi superior a 2000 euros durante $(b-a) + (10-c) \approx 5{,}672$ semanas, isto é, durante, aproximadamente, 5 semanas e 5 dias ($0{,}672 \times 7 \approx 5$).

28.1. $f'(1) = \lim\limits_{x\to 1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = 1 - \ln 2 = \ln\left(\frac{e}{2}\right)$

28.2. Não existe $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$, porque $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = +\infty$ e $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$. A.V.: $x = 0$; A.O.: $y = 2x + 1$, quando $x \longrightarrow -\infty$; A.H.: $y = 3$, quando $x \longrightarrow +\infty$.

28.3. Para $x \in \mathbb{R}^+$, a função f é crescente em $\left]0, \frac{e}{2}\right]$, é decrescente em $\left[\frac{e}{2}, +\infty\right[$ e tem máximo em $x = \frac{e}{2}$ que é $f\left(\frac{e}{2}\right) = 3 + \frac{2}{e}$.

29.1. A.V.: $x = 0$; A.H.: $y = -1$, quando $x \longrightarrow -\infty$.

29.2. $f''(x) = \frac{3 - 2\ln x}{x^2}$; Para $x \in \mathbb{R}^+$, o gráfico de f tem a concavidade voltada para baixo em $\left[\sqrt{e^3}, +\infty\right[$, tem a concavidade voltada para cima em $\left]0, \sqrt{e^3}\right]$ e tem ponto de inflexão em $x = \sqrt{e^3}$.

29.3. A altura do triângulo é dada por $\left|2 - \left(\frac{4-x^2}{1-e^{-2x-4}} - 1\right)\right| = \left|3 - \frac{4-x^2}{1-e^{-2x-4}}\right|$ e a sua área por $\left|3 - \frac{4-x^2}{1-e^{-2x-4}}\right| \times \frac{e^2 - e^{-1}}{2}$. Assim:

$$\left|3 - \frac{4-x^2}{1-e^{-2x-4}}\right| \times \frac{e^2-e^{-1}}{2} = 2 \Leftrightarrow x = a \quad \vee \quad x = b, \text{ com } a \approx -1{,}72 \text{ e } b \approx -0{,}92$$

30.1. $x \in \left]-1, -\frac{2}{3}\right] \cup [2, 3[$ **30.2.** A.V: $x = 0$. A.H.: $y = 3$, quando $x \to \pm\infty$

30.3. O gráfico de f tem a concavidade voltada para baixo em $\left[-\sqrt{2}, \sqrt{2}\right]$, tem a concavidade voltada para cima em $\left]-\infty, -\sqrt{2}\right]$ e em $\left[\sqrt{2}, +\infty\right[$ e tem pontos de inflexão em $x = -\sqrt{2}$ e em $x = \sqrt{2}$.

31.1. $g\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{2}$. Quando $\alpha = \frac{\pi}{2}$, o triângulo $[OAB]$ é rectângulo e isósceles. A medida do comprimento dos seus catetos é 1 e a sua área $\frac{1}{2}$.

31.2. $\alpha = \frac{5\pi}{8}$

32.1.

$$h'\left(\frac{\pi}{2}\right) = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{h(x) - h\left(\frac{\pi}{2}\right)}{x - \frac{\pi}{2}} = -2$$

32.2. A área do triângulo $[OPQ]$ é máxima se $x = a$, com $a \approx 2{,}3$.

32.3. A área do polígono $[ABOCD]$ é máxima se $x = \frac{4\pi}{3}$. O valor da área máxima é $\frac{3\sqrt{3}}{2}$.

33. C