Prova-Modelo 1 **(págs. 391 a 394)**

1. O aluno acerta à segunda tentativa quando falha na primeira tentativa e acerta na segunda.

Seja *A* o acontecimento: "O aluno falha na primeira tentativa" e seja *B* o acontecimento: "O aluno acerta na segunda tentativa".

Assim, a probabilidade pretendida é $P(A \cap B) = P(A) \times P(B|A) = \frac{4}{5} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{5}$.

Opção (B)

2. Seja *A* o acontecimento: "Os dois pratos foram elaborados pelo mesmo cozinheiro".

Sabemos que, ao todo, foram confecionados 12 pratos.

Assim, $P(A) = \frac{6 \times 1}{^{12}C_2} = \frac{6}{66} = \frac{1}{11}$.

Opção (A)

3.

3.1. Consideremos os seguintes acontecimentos:

F: "O aluno é do sexo feminino."

I: "O aluno prefere ir a Ibiza."

Pelos dados do enunciado, sabe-se que:

- $P(F) = 0{,}6$
- $P(I|F) = 0{,}5$
- $P(\overline{I}\,|\,\overline{F}) = \frac{1}{5} = 0{,}2$

Assim:

	I	$\overline{I}$	
F	0,3	0,3	0,6
$\overline{F}$	0,32	0,08	0,4
	0,62	0,38	1

Cálculos auxiliares

$P(I|F) = 0{,}5 \Leftrightarrow \frac{P(I \cap F)}{P(F)} = 0{,}5$

$\Leftrightarrow P(I \cap F) = 0{,}5 \times 0{,}6$

$\Leftrightarrow P(I \cap F) = 0{,}3$

$P(\overline{I}\,|\,\overline{F}) = 0{,}2 \Leftrightarrow \frac{P(\overline{I} \cap \overline{F})}{P(\overline{F})} = 0{,}2$

$\Leftrightarrow P(\overline{I} \cap \overline{F}) = 0{,}2 \times 0{,}4$

$\Leftrightarrow P(\overline{I} \cap \overline{F}) = 0{,}08$

Logo, $P(F|I) = \frac{P(F \cap I)}{P(I)} = \frac{0{,}3}{0{,}62} = \frac{15}{31}$.

3.2. Esta escola tem 150 alunos de 12.º ano, dos quais 60% são raparigas. Então, existem 90 raparigas das quais se pretende escolher cinco para organizar as atividades no destino de viagem escolhido. Assim, a resposta (I) é uma resposta correta ao problema, pois $^{90}C_5$ é o número de maneiras diferentes de constituir o grupo com cinco raparigas, escolhidas de entre as 90 existentes. Existem $^{88}C_4$ grupos que não podem ser formados, pois têm a Ana e não têm a Bárbara (de acordo com o enunciado, a Ana só aceita fazer parte do grupo se a Bárbara fizer). Então, subtrai-se este número de conjuntos ao número total, obtendo assim o número de grupos que satisfazem as condições pretendidas. Na resposta (II), ${}^{88}C_5$ é o número de grupos que podem ser formados sem a Ana e sem a Bárbara, pois são escolhidas cinco raparigas de entre as 88 que não são a Ana nem a Bárbara. Existem ${}^{88}C_3$ grupos que se podem constituir com a Ana e com a Bárbara, pois, além destas raparigas, são escolhidas outras três de entre as restantes 88 para fazer um grupo com um total de cinco. Finalmente, para satisfazer as condições pretendidas, podem ainda ser formados grupos sem a Ana, mas com a Bárbara. ${}^{88}C_4$ é o número de grupos nessa situação, já que, com a Bárbara no grupo, apenas é necessário escolher outras quatro raparigas, de entre as 88 possíveis, pois como a Bárbara já faz parte e a Ana não pode fazer, os elementos são escolhidos de entre 90 – 2 = 88 raparigas.

Assim, ${}^{88}C_5 + {}^{88}C_3 + {}^{88}C_4$ é o número de grupos que podem ser formados, sabendo que a Ana só aceita fazer parte do grupo se a Bárbara também fizer.

4. Se a linha tem 2016 elementos, então os seus elementos são os seguintes:

${}^{2015}C_0$	${}^{2015}C_1$	${}^{2015}C_2$	…	${}^{2015}C_{2013}$	${}^{2015}C_{2014}$	${}^{2015}C_{2015}$
1	2015	2 029 105	…	2 029 105	2015	1

Ora, existem 4 elementos inferiores a 5000 e não existem elementos iguais a 5000.

Portanto, existem $2016 - 4 = 2012$ elementos maiores que 5000.

Opção (B)

5. $A_{\text{círculo}} = 25\pi \Leftrightarrow \pi r^2 = 25\pi \ \wedge \ r > 0 \Leftrightarrow r^2 = 25 \ \wedge \ r > 0$

$$\Leftrightarrow r = 5 \ \wedge \ r > 0$$

Como $r = 5$, então B e C têm, respetivamente, coordenadas $B(0,5,0)$ e $C(0,-5,0)$.

Logo, uma equação vetorial de BD é:

$$BD: (x, y, z) = (0,5,0) + k(0,0,1), k \in \mathrm{IR}$$

$\overrightarrow{AC} = C - A = (0,-5,0) - (4, y, 0) = (-4, -5 - y, 0)$

$\overrightarrow{AB} = B - A = (0,5,0) - (4, y, 0) = (-4, 5 - y, 0)$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB} = 0 \Leftrightarrow (-4,-5-y,0)\cdot(-4,5-y,0) = 0 &\Leftrightarrow 16 + (-5-y)(5-y) = 0\\ &\Leftrightarrow 16 - 25 + 5y - 5y + y^2 = 0\\ &\Leftrightarrow -9 + y^2 = 0\\ &\Leftrightarrow y^2 = 9\\ &\Leftrightarrow y = \pm 3\end{aligned}$$

Assim, $A(4,3,0)$ e $\overrightarrow{AC} = (-4,-8,0)$.

Observe-se que o triângulo $[ABC]$ é um triângulo retângulo em A, por estar inscrito numa semicircunferência. O vetor $\overrightarrow{AC}$ é, então, um vetor normal ao plano ABD.

Por conseguinte, a equação do plano ABD é da forma $-4x - 8y + d = 0$.

Como $A \in ABD$, então:

$-4 \times 4 - 8 \times 3 + d = 0 \Leftrightarrow -16 - 24 + d = 0 \Leftrightarrow d = 40$

$$ABD: -4x - 8y + 40 = 0 \Leftrightarrow x + 2y - 10 = 0$$

6.

6.1. $g'(x) = \frac{2-2(1+\cos x)(-\sin x)}{4} = \frac{2+2\sin x(1+\cos x)}{4}$

$$g''(x) = \frac{2\cos x(1+\cos x)+2\sin x(-\sin x)}{4} = \frac{2\cos x+2\cos^2 x-2\sin^2 x}{4} =$$
$$= \frac{2(\cos x+\cos^2 x-\sin^2 x)}{4} =$$
$$= \frac{\cos x+\cos^2 x-(1-\cos^2 x)}{2} =$$
$$= \frac{\cos x+\cos^2 x-1+\cos^2 x}{2} =$$
$$= \frac{2\cos^2 x+\cos x-1}{2}$$

$$g''(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{2\cos^2 x+\cos x-1}{2} = 0 \Leftrightarrow 2\cos^2 x + \cos x - 1 = 0$$
$$\Leftrightarrow \cos x = \frac{-1\pm\sqrt{1^2-4\times2\times(-1)}}{2\times2}$$
$$\Leftrightarrow \cos x = \frac{1}{2} \ \vee \ \cos x = -1$$
$$\Leftrightarrow x = \pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi \ \vee \ x = \pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Se $k = 0, x = -\frac{\pi}{3} \vee x = \frac{\pi}{3} \vee x = \pi$

Se $k = 1, x = \frac{5\pi}{3} \vee x = \frac{7\pi}{3} \vee x = 3\pi$

No intervalo $\left[-\frac{\pi}{6}, \frac{13\pi}{6}\right]$ as soluções da equação $g''(x) = 0$ são $\frac{\pi}{3}, \pi$ *e* $\frac{5\pi}{3}$.

x	$-\frac{\pi}{6}$		$\frac{\pi}{3}$		π		$\frac{5\pi}{3}$		$\frac{13\pi}{6}$
Sinal de g''	$g''\left(-\frac{\pi}{6}\right)$	$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$	$g''\left(\frac{13\pi}{6}\right)$
Sentido das concavidades do gráfico de g	$g\left(-\frac{\pi}{6}\right)$	$\cup$	P. I.	$\cap$	$g(\pi)$	$\cap$	P. I.	$\cup$	$g\left(\frac{13\pi}{6}\right)$

O gráfico de g tem a concavidade voltada para cima em $\left[-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\right]$ e em $\left[\frac{5\pi}{3}, \frac{13\pi}{6}\right]$ e tem a concavidade voltada para baixo em $\left[\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\right]$. Os pontos de abcissa $\frac{\pi}{3}$ e $\frac{5\pi}{3}$ são pontos de inflexão do gráfico de g.

6.2. Pretende-se provar que a equação $g'(x) = g(x)$ tem pelo menos uma solução no intervalo $]0, \pi[$.

Consideremos a função h, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $h(x) = g'(x) - g(x)$, isto é:

$$h(x) = \frac{2+2\sin x(1+\cos x)}{4} - \frac{2x-(1+\cos x)^2}{4} \Leftrightarrow h(x) = \frac{2+2\sin x(1+\cos x)-2x+(1+\cos x)^2}{4}$$

$$\Leftrightarrow h(x) = \frac{2-2x+2\sin x(1+\cos x)+(1+\cos x)^2}{4}$$

h é contínua em $\mathbb{R}$, por se tratar de uma função que resulta da diferença entre funções contínuas em $\mathbb{R}$. Em particular, h é contínua em $[0, \pi]$.

$$h(0) = \frac{2-0+2\sin 0(1+\cos 0)+(1+\cos 0)^2}{4} = \frac{2-0+0+(1+1)^2}{4} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$$

$$h(\pi) = \frac{2-2\pi+2\sin\pi(1+\cos\pi)+(1+\cos\pi)^2}{4} = \frac{2-2\pi}{4} = \frac{1-\pi}{2}$$

Portanto, $h(\pi) < 0 < h(0)$.

Assim, pelo teorema de Bolzano-Cauchy, concluímos que:

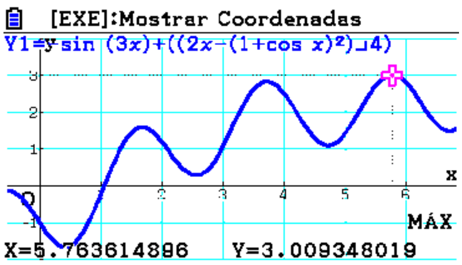
$$\exists\, c \in]0, \pi[: h(c) = 0 \Leftrightarrow \exists\, c \in]0, \pi[: g'(c) - g(c) = 0$$

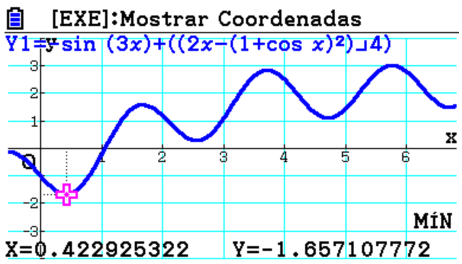
$$\Leftrightarrow \exists\, c \in]0, \pi[: g'(c) = g(c)$$

isto é, a equação $g'(x) = g(x)$ tem pelo menos uma solução no intervalo $]0, \pi[$.

Por conseguinte, o gráfico de g' interseta o gráfico de g em, pelo menos, um ponto no intervalo $]0, \pi[$.

6.3.





Assim:

$$-1{,}66 \leq -\text{sen}(3x) + g(x) \leq 3{,}01 \Leftrightarrow -1{,}66a \leq a[-\text{sen}(3x) + g(x)] \leq 3{,}01a$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{-1{,}66a + b}_{-1} \leq \underbrace{a[-\text{sen}(3x) + g(x)] + b}_{h(x)} \leq \underbrace{3{,}01a + b}_{2}$$

Logo:

$$\begin{cases} -1{,}66a + b = -1 \\ 3{,}01a + b = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1{,}66a + 2 - 3{,}01a = -1 \\ b = 2 - 3{,}01a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4{,}67a = 3 \\ b = 2 - 3{,}01a \end{cases}$$

Assim:

$$\begin{cases} a \approx 0{,}64 \\ b \approx 0{,}07 \end{cases}$$

7. $P(A|B)-1+\frac{P(\bar{A})-P(\bar{A}\cap\bar{B})}{1-P(\bar{B})}=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}-1+\frac{P(\bar{A})-P(\bar{A}\cap\bar{B})}{P(B)}=\frac{P(A\cap B)-P(B)+P(\bar{A})-P(\bar{A}\cap\bar{B})}{P(B)}=$

$=\frac{P(A\cap B)-P(B)+1-P(A)-P(\bar{A}\cap\bar{B})}{P(B)}=$

$=\frac{-[P(A)+P(B)-P(A\cap B)]+1-P(\overline{A\cup B})}{P(B)}=$

$=\frac{-P(A\cup B)+P(A\cup B)}{P(B)}=$

$=\frac{0}{P(B)}=$

$=0$ c.q.d.

8. Sabemos que $\lim\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e^-$. Assim, $\lim\left[5\ln\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right]\right]=5\times\ln(e^-)=5^-$.

Como $x_n\to 5^-$, $\lim f(x_n)=3$.

Opção (C)

9.

9.1. Como f é contínua em $D_f=\mathbb{R}\backslash\{-3\}$, a única candidata a assíntota vertical ao gráfico de f é a reta de equação $x=-3$

Uma vez que $\lim\limits_{x\to-3^+}\left(xe^{\frac{1}{x+3}}\right)=-3\times e^{\frac{1}{-3^++3}}=-3e^{\frac{1}{0^+}}=-3e^{+\infty}=-\infty$, então a reta de equação $x=-3$ é assíntota vertical ao gráfico de f.

Vamos agora aferir se existem assíntotas **não verticais** ao gráfico de f.

$$m=\lim_{x\to+\infty}\frac{xe^{\frac{1}{x+3}}}{x}=\lim_{x\to+\infty}e^{\frac{1}{x+3}}=e^{\frac{1}{+\infty}}=e^0=1$$

$$b=\lim_{x\to+\infty}\left(xe^{\frac{1}{x+3}}-x\right)=\lim_{x\to+\infty}\left[x\left(e^{\frac{1}{x+3}}-1\right)\right]=$$

Considerando a mudança de variável $y=\frac{1}{x+3}\Leftrightarrow xy+3y=1\Leftrightarrow xy=1-3y\Leftrightarrow x=\frac{1-3y}{y}$: se $x\to+\infty$, então $y\to 0$.

$$=\lim_{y\to0}\left[\frac{1-3y}{y}(e^y-1)\right]=$$

$$=\lim_{y\to0}\left[\frac{e^y-1}{y}(1-3y)\right]=$$

$$=\underbrace{\lim_{y\to0}\frac{e^y-1}{y}}_{\text{limite notável}}\times\lim_{y\to0}(1-3y)=$$

$$=1\times1=$$

$$=1$$

Logo, a reta de equação $y=x+1$ é assíntota oblíqua ao gráfico de f, quando $x\to+\infty$.

Por cálculos idênticos, concluiu-se que a reta de equação $y = x + 1$ é assíntota oblíqua ao gráfico de f, quando $x \to -\infty$. Assim, concluímos que o gráfico de f tem duas assíntotas, as retas de equação $x = -3$ e $y = x + 1$.

9.2. $f(x) = x\, e^{\frac{1}{x+3}}$

$$f'(x) = 1e^{\frac{1}{x+3}} + xe^{\frac{1}{x+3}} \times \frac{-1}{(x+3)^2} = e^{\frac{1}{x+3}} - \frac{xe^{\frac{1}{x+3}}}{(x+3)^2} =$$

$$= e^{\frac{1}{x+3}}\left(1 - \frac{x}{(x+3)^2}\right)$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow e^{\frac{1}{x+3}}\left(1 - \frac{x}{(x+3)^2}\right) = 0 \Leftrightarrow \underbrace{e^{\frac{1}{x+3}} = 0}_{\text{equação impossível}} \vee 1 - \frac{x}{(x+3)^2} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x+3)^2 - x}{(x+3)^2} = 0 \Leftrightarrow \frac{x^2+6x+9-x}{(x+3)^2} = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 5x + 9 = 0 \wedge x \neq -3$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{x = \frac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 4 \times 1 \times 9}}{2 \times 1}}_{\text{equação impossível}}$$

x	$-\infty$	-3	$+\infty$
Sinal de f'	$+$	n. d.	$+$
Variação de f	↗	n. d.	↗

f é crescente em $]-\infty, -3[$ e em $]-3, +\infty[$; f não tem extremos.

10. $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2+e^{-x}}{f(x)+1} = \frac{\lim\limits_{x\to+\infty}(2+e^{-x})}{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) + \lim\limits_{x\to+\infty} 1} = \frac{2+e^{-\infty}}{0+1} = \frac{2+0^+}{1} = 2$

Logo, a reta de equação $y = 2$ é assíntota horizontal ao gráfico de g.

Opção (C)

11.

x	$-\infty$	-2		0		2	$+\infty$
Sinal de f''	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$
Variação de f'	↗	Máx.	↘	mín.	↗	Máx.	↘

Opção (A)

12. $\lim\limits_{x\to0^-} \frac{\sin x}{x(x^2+2)} = \lim\limits_{x\to0^-} \frac{\sin x}{x} \times \lim\limits_{x\to0^-} \frac{1}{x^2+2} = 1 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

$$\lim_{x\to0^+}\left(\frac{\ln(x)}{x} + 1\right) = \frac{-\infty}{0^+} + 1 = -\infty$$

Para que a função g fosse contínua em todo o seu domínio, teria de ser contínua; em particular, em $x = 0$, ou seja, teria de se verificar $\lim\limits_{x \to 0^-} g(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} g(x) = g(0) = k$, o que não é possível, já que $\lim\limits_{x \to 0^-} g(x) \neq \lim\limits_{x \to 0^+} g(x)$. Logo, g não é contínua em $x = 0$. Assim, a função não é contínua em todo o seu domínio.

13. $\overline{AB} = 2r$, uma vez que A é o afixo de z e B é o afixo de $-z$.

$\frac{1}{z} = \frac{e^{i0}}{re^{i\left(-\frac{\pi}{4}\right)}} = \frac{1}{r}e^{i\left(0-\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)} = \frac{1}{r}e^{i\left(\frac{\pi}{4}\right)}$

Portanto, o C (afixo de $\frac{1}{z}$) pertence à bissetriz dos quadrantes ímpares e o módulo de $\frac{1}{z}$ é igual a $\frac{1}{r}$, que é a altura do triângulo $[ABC]$. Assim, $A_{[ABC]} = \frac{2r \times \frac{1}{r}}{2} = 1$.

Opção (C)

14.

14.1. $|z + 2| \leq 3 \ \wedge \ \left(0 \leq \operatorname{Arg}(z) \leq \frac{\pi}{2} \vee \frac{5\pi}{6} \leq \operatorname{Arg}(z) \leq \pi\right)$

14.2. $\left(\sqrt{3} - i\right)z^3 + 54e^{i\frac{4\pi}{3}} = 0 \Leftrightarrow z^3 = \frac{-54e^{i\frac{4\pi}{3}}}{\sqrt{3}-i}$

$\Leftrightarrow z^3 = \frac{54e^{i\frac{\pi}{3}}}{2e^{i\left(-\frac{\pi}{6}\right)}}$

$\Leftrightarrow z^3 = 27e^{i\frac{\pi}{2}}$

Cálculos auxiliares

$|z| = \sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2 + (-1)^2} = 2$

$\operatorname{tg}\theta = \frac{-1}{\sqrt{3}} \ \wedge \ \theta \in 4.º\ Q \Leftrightarrow \operatorname{tg}\theta = -\frac{\sqrt{3}}{3} \wedge \theta \in 4.º\ Q$

Logo, $\theta = -\frac{\pi}{6}$, por exemplo.

Assim, $z = \sqrt[3]{27}e^{i\frac{\frac{\pi}{2}+2k\pi}{3}}$, $k \in \{0, 1, 2\}$.

Se $k = 0, z = 3e^{i\frac{\frac{\pi}{2}}{3}} = 3e^{i\frac{\pi}{6}}$.

Se $k = 1, z = 3e^{i\frac{\frac{\pi}{2}+2\pi}{3}} = 3e^{i\frac{\frac{5\pi}{2}}{3}} = 3e^{i\frac{5\pi}{6}}$.

Se $k = 2, z = 3e^{i\frac{\frac{\pi}{2}+4\pi}{3}} = 3e^{i\frac{\frac{9}{2}\pi}{3}} = 3e^{i\frac{3\pi}{2}}$.

Assim, $z_2 = 3e^{i\frac{5\pi}{6}}$, ou seja, $z_2 = 3e^{i\frac{5\pi}{6}} = 3\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}\right) = -\frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i$.

15. $-16 = 16e^{i\,\pi}$

As raízes índice 8 de -16 são da forma $z_k = \sqrt[8]{16}e^{i\frac{\pi+2k\pi}{8}} = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi+2k\pi}{8}}$, $k \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Todas as raízes índice 8 de -16 têm módulo $\sqrt{2}$. Este facto exclui as opções (A) e (D).

Se A é o afixo de $\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{8}}$, então F é o afixo do número complexo $\sqrt{2}e^{i\left(\frac{\pi}{8}-3\times\frac{2\pi}{8}\right)}$, isto é, $\sqrt{2}e^{i\left(-\frac{5\pi}{8}\right)}$.

Opção (B)

16. Sabe-se que k e $2k$ são o primeiro e segundo termos, respetivamente.

Logo, $2k - k = r \Leftrightarrow k = r$.

O termo de ordem p é 76, isto é:

$$a_p = 76 \Leftrightarrow k + (p-1)k = 76 \Leftrightarrow k + pk - k = 76$$
$$\Leftrightarrow pk = 76$$

A soma dos primeiros p termos é igual a 760.

Assim, vem que:

$$\frac{k+76}{2} \times p = 760 \Leftrightarrow \frac{kp+76p}{2} = 760 \Leftrightarrow \frac{76+76p}{2} = 760$$
$$\Leftrightarrow 38 + 38p = 760$$
$$\Leftrightarrow 38p = 722$$
$$\Leftrightarrow p = 19$$

Assim, $19k = 76 \Leftrightarrow k = 4$. Logo, $k = 4$ e $p = 19$.

Prova-Modelo 2 **(págs. 395 a 398)**

1. $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{HA} = \overrightarrow{AB}.\left(-\overrightarrow{AH}\right) = -\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AH} =$

$$= -\left\|\overrightarrow{AB}\right\| \times \left\|\overrightarrow{AH}\right\| \times \cos\left(B\hat{A}H\right) =$$
$$= -a \times a \times \cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) =$$
$$= -a^2 \times \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) =$$
$$= \frac{\sqrt{2}}{2}a^2$$

> **Cálculo auxiliar**
> Como $\sphericalangle BAH$ é um ângulo inscrito numa circunferência e o arco correspondente *BH* tem amplitude $6 \times \frac{2\pi}{8} = \frac{3\pi}{2}$, então $B\hat{A}H = \frac{\frac{3\pi}{2}}{2} = \frac{3\pi}{4}$.

Opção (C)

2. Sabemos que $\text{t. m. v.}_{[0,3]} = \ln\left(\sqrt[3]{3}\right)$ e que $\text{t. m. v.}_{[0,3]} = \frac{f(3)-f(0)}{3-0}$.

$$\text{t. m. v.}_{[0,3]} = \frac{f(3)-f(0)}{3-0} = \frac{\ln(4\times3+k) - \ln(4\times0+k)}{3} = \frac{\ln\left(\frac{12+k}{k}\right)}{3}$$

Assim:

$$\frac{\ln\left(\frac{12+k}{k}\right)}{3} = \ln\left(\sqrt[3]{3}\right) \Leftrightarrow \ln\left(\frac{12+k}{k}\right) = 3\ln\left(3^{\frac{1}{3}}\right) \Leftrightarrow \ln\left(\frac{12+k}{k}\right) = \ln(3)$$
$$\Leftrightarrow \frac{12+k}{k} = 3$$
$$\Leftrightarrow 12 + k = 3k$$
$$\Leftrightarrow k = 6$$

Opção (C)

3.

3.1. Consideremos os seguintes acontecimentos:

I: "O funcionário fala inglês."

E: "O funcionário fala espanhol."

Pelos dados do enunciado, sabe-se que:

- $P(I) = 0{,}8$
- $P(E|I) = 0{,}25$
- $P(\overline{I} \cap \overline{E}) = 0{,}05$

Assim:

Cálculo auxiliar

$$P(E|I) = 0{,}25 \Leftrightarrow \frac{P(E\cap I)}{P(I)} = 0{,}25$$
$$\Leftrightarrow P(E \cap I) = 0{,}25 \times 0{,}8$$
$$\Leftrightarrow P(E \cap I) = 0{,}2$$

	E	$\overline{E}$	
I	0,2	0,6	0,8
$\overline{I}$	0,15	0,05	0,2
	0,35	0,65	1

$$P(I|\overline{E}) = \frac{P(I \cap \overline{E})}{P(\overline{E})} = \frac{0{,}60}{0{,}65} = \frac{12}{13}$$

3.2. Se a empresa tem 50 funcionários, e sabe-se que 80% falam inglês, então na empresa há 40 $(50 \times 0{,}8)$ funcionários que falam inglês.

Assim, $\frac{{}^{40}C_7 \times {}^{10}C_1 + {}^{40}C_8}{{}^{50}C_8} \approx 0{,}49$.

4. Para que o teorema de Bolzano-Cauchy se possa aplicar, a função g tem de ser contínua no intervalo $[0, 2]$; em particular, tem que ser contínua em $x = 1$, isto é, tem que existir $\lim\limits_{x\to 1^+} g(x)$.

- $\lim\limits_{x\to 1^-} \frac{e^{x-1}-1}{2(x-1)} = \frac{1}{2} \lim\limits_{x\to 1^-} \frac{e^{x-1}-1}{x-1} =$

  Considerando a mudança de variável $x - 1 = y \Leftrightarrow x = y + 1$: se $x \to 1^-$, então $y \to 0$.

$$= \frac{1}{2} \underbrace{\lim_{y\to 0} \frac{e^y - 1}{y}}_{\text{limite notável}} =$$
$$= \frac{1}{2} \times 1 =$$
$$= \frac{1}{2}$$

- $\lim\limits_{x\to 1^+} (e^x + \ln(x) + k) = g(1) = e^1 + \ln(1) + k = e + k$
- $e + k = \frac{1}{2} \Leftrightarrow k = \frac{1}{2} - e$

Opção (C)

5.

5.1. $C(t) = 0{,}5 \Leftrightarrow 10(e^{-t} - e^{-2t}) = 0{,}5 \Leftrightarrow e^{-t} - e^{-2t} = 0{,}05$

$\Leftrightarrow -e^{-2t} + e^{-t} - 0{,}05 = 0$

$\Leftrightarrow -(e^{-t})^2 + e^{-t} - 0{,}05 = 0$

$\Leftrightarrow e^{-t} = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4\times(-1)\times(-0{,}05)}}{2\times(-1)}$

$\Leftrightarrow e^{-t} = \frac{5+2\sqrt{5}}{10} \ \vee \ e^{-t} = \frac{5-2\sqrt{5}}{10}$

$\Leftrightarrow -t = \ln\left(\frac{5+2\sqrt{5}}{10}\right) \ \vee \ -t = \ln\left(\frac{5-2\sqrt{5}}{10}\right)$

$\Leftrightarrow t = -\ln\left(\frac{5+2\sqrt{5}}{10}\right) \ \vee \ t = -\ln\left(\frac{5-2\sqrt{5}}{10}\right)$

Assim, $t \approx 0{,}1$ minutos $\vee$ $t \approx 2{,}9$ minutos.

5.2. $C'(t) = 10 \times (-e^{-t} + 2e^{-2t})$

$C'(t) = 0 \Leftrightarrow 10(-e^{-t} + 2e^{-2t}) = 0 \Leftrightarrow -e^{-t} + 2e^{-2t} = 0$

$\Leftrightarrow 2e^{-2t} - e^{-t} = 0$

$\Leftrightarrow 2(e^{-t})^2 - e^{-t} = 0$

$\Leftrightarrow e^{-t}(2e^{-t} - 1) = 0$

$\Leftrightarrow \underbrace{e^{-t} = 0}_{\text{equação impossível}} \vee e^{-t} = \frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow -t = \ln\left(\frac{1}{2}\right)$

$\Leftrightarrow t = -\ln\left(\frac{1}{2}\right)$

$\Leftrightarrow t = \ln(2)$

t	0		$\ln(2)$	$+\infty$
Sinal de C'		$+$	0	$-$
Variação de C		↗	Máx.	↘

Verifica-se que C atinge o máximo em $t = \ln(2)$.

Como $\ln(2) \approx 0{,}693$, podemos então concluir que a concentração atinge o seu máximo em menos de 1 minuto e que a concentração máxima é de 2,5.

Cálculo auxiliar

$C(\ln(2)) = 10\left(e^{-\ln(2)} - e^{-2\ln(2)}\right) = 10\left(e^{\ln(2^{-1})} - e^{\ln(2^{-2})}\right) =$

$= 10 \times (2^{-1} - 2^{-2}) =$

$= 2{,}5$

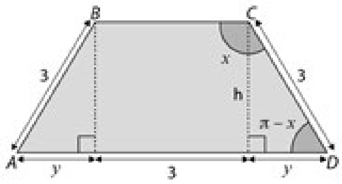
6.

6.1.

Cálculos auxiliares

$\cos(\pi - x) = \frac{y}{3} \Leftrightarrow y = -3\cos x$

$\text{sen}(\pi - x) = \frac{h}{3} \Leftrightarrow h = 3\text{sen}\, x$, onde h é a altura do trapézio .



Assim:

Base maior $= 3 + 2y = 3 + 2 \times (-3\cos x) = 3 - 6\cos x$

Base menor $= 3$

Altura $= 3\sin x$

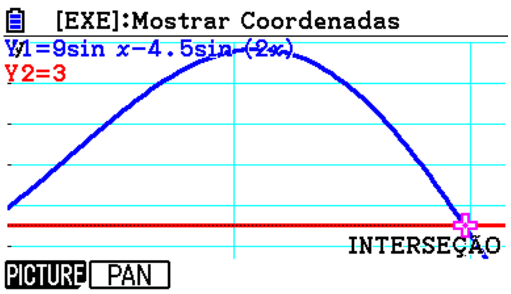
$$A_{\text{trapézio}} = \frac{3 - 6\cos x + 3}{2} \times 3\sin x = (3 - 3\cos x) \times 3\sin x =$$

$$= 9\sin x - 9\sin x\cos x =$$

$$= 9\sin x - 4{,}5 \times 2\sin x\cos x =$$

$$= 9\sin x - 4{,}5\sin(2x) \text{ c.q.m.}$$

6.2.



O ponto de interseção tem coordenadas $(2{,}97; 3)$.

Portanto, $x \approx 2{,}97$.

7. Comecemos por escrever os dois números complexos na forma trigonométrica:

$-4i$, na forma trigonométrica, é igual a $4e^{i\frac{3\pi}{2}}$.

$-2\sqrt{2} - 2\sqrt{2}i$, na forma trigonométrica, é igual a $4e^{i\frac{5\pi}{4}}$.

Como $\frac{3\pi}{2} - \frac{5\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$, e como os argumentos das raízes consecutivas de um mesmo número complexo diferem entre si $\frac{2\pi}{n}$, então $\frac{2\pi}{n} = \frac{\pi}{4}$ e, portanto, $n = 8$.

Cálculos auxiliares

Seja $z = -2\sqrt{2} - 2\sqrt{2}i$.

$|z| = \sqrt{\left(-2\sqrt{2}\right)^2 + \left(-2\sqrt{2}\right)^2} = \sqrt{16} = 4$

$\text{tg}\theta = \frac{-2\sqrt{2}}{-2\sqrt{2}} \wedge \theta \in 3.º\text{ Q} \Leftrightarrow \text{tg}\theta = 1 \wedge \theta \in 3.º\text{ Q}$

Logo, $\theta = \frac{5\pi}{4}$, por exemplo.

Opção (D)

8. ${}^{2009}C_{300} + {}^{2009}C_{301} + {}^{2009}C_{301} + {}^{2009}C_{301} + {}^{2009}C_{302} + {}^{2009}C_{302} + {}^{2009}C_{302} + {}^{2009}C_{303} =$

$= {}^{2010}C_{301} + {}^{2010}C_{302} + {}^{2010}C_{302} + {}^{2010}C_{303} =$

$= {}^{2011}C_{302} + {}^{2011}C_{303} =$

$= {}^{2012}C_{303}$

Opção (B)

9. Sabe-se que a sucessão (u_n) é uma progressão aritmética e que:

- $\frac{u_1+u_8}{2} \times 8 = \frac{u_9+u_{12}}{2} \times 4$
- $u_{10} - u_4 = 36$

Assim:

$$\frac{u_1+u_1+7r}{2} \times 8 = \frac{u_1+8r+u_1+11r}{2} \times 4 \Leftrightarrow (2u_1 + 7r) \times 4 = (2u_1 + 19r) \times 2$$

$$\Leftrightarrow (2u_1 + 7r) \times 2 = 2u_1 + 19r$$

$$\Leftrightarrow 4u_1 + 14r = 2u_1 + 19r$$

$$\Leftrightarrow 2u_1 - 5r = 0$$

$$\Leftrightarrow u_1 = \frac{5}{2}r$$

Por outro lado:

$$u_{10} - u_4 = 36 \Leftrightarrow u_4 + 6r - u_4 = 36 \Leftrightarrow 6r = 36$$

$$\Leftrightarrow r = 6$$

Conclui-se, assim, que $u_1 = \frac{5}{2} \times 6 = 15$.

10. $D_g = \{x \in [-3,1]: f(x) \neq 0\}$

Como:

- f é contínua em $[-3,1]$;
- $f(-3) = 2$ e $f(1) = -5$, ou seja, $f(1) < 0 < f(-3)$;

então pelo teorema de Bolzano-Cauchy, $\exists\, c \in]-3,1[: f(c) = 0$, isto é, existe pelo menos um valor de $c \in]-3,1[$ tal que $f(c) = 0$. Como f é estritamente decrescente, existe apenas um valor de c nestas condições.

Assim, $D_g = \{x \in [-3,1]: f(x) \neq 0\} = [-3,1]\backslash\{c\}$.

Como a função g é contínua em todos os pontos do seu domínio, pois resulta de operações entre funções contínuas, então a única candidata a assíntota vertical ao gráfico de g é a reta de equação $x = c$.

$$\lim_{x\to c^+} g(x) = \lim_{x\to c^+} \left[\frac{1}{f(x)} + k\right] = \frac{1}{0^-} + k = -\infty$$

$$\lim_{x\to c^-} g(x) = \lim_{x\to c^-} \left[\frac{1}{f(x)} + k\right] = \frac{1}{0^+} + k = +\infty$$

(Note-se que, como f é contínua e estritamente decrescente e c é zero de f, podemos concluir que $\lim\limits_{x\to c^+} f(x) = 0^-$ e $\lim\limits_{x\to c^-} f(x) = 0^+$.)

A reta de equação $x = c$ é a única assíntota vertical ao gráfico de g.

Não faz sentido falar em assíntotas não verticais ao gráfico de g, visto que o domínio da função é um conjunto limitado. Assim, fica provado que o gráfico da função g tem uma única assíntota.

11. $$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x+\ln(x)+f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x} + \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(x)}{x} + \underbrace{\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}}_{\substack{\text{declive da assíntota oblíqua} \\ (\text{reta de equação } y=-x)}} =$$

$$= +\infty + 0 - 1 =$$

$$= +\infty$$

Opção (C)

12. $g(x) = e^{2x} - 5x$ $\qquad$ $g'(x) = 2e^{2x} - 5$

$m = \text{tg}\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$ e, portanto, $g'(a) = 1$. Assim:

$$2e^{2a} - 5 = 1 \Leftrightarrow 2e^{2a} = 6 \Leftrightarrow e^{2a} = 3$$

$$\Leftrightarrow 2a = \ln(3)$$

$$\Leftrightarrow a = \frac{\ln(3)}{2}$$

$$\Leftrightarrow a = \ln\left(3^{\frac{1}{2}}\right)$$

$$\Leftrightarrow a = \ln\left(\sqrt{3}\right)$$

Opção (D)

13. A opção (I) não pode representar o gráfico da função g, pois g é uma função ímpar, ou seja, o gráfico de g tem que ser simétrico em relação à origem do referencial. Nesta opção está representada uma função par, isto é, um gráfico simétrico em relação ao eixo Oy. A opção (III) também não pode representar o gráfico da função g, pois g tem duas assíntotas não verticais de declive $\frac{1}{2}$ (dado que g é ímpar e $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{g(x)}{x} = \frac{1}{2}$), ou seja, as duas assíntotas não verticais têm que ser oblíquas e não horizontais.

A opção (IV) não pode representar o gráfico da função *g*, pois, nesta opção, para $x > 0$, o gráfico da função apresenta a concavidade voltada para baixo. Como se sabe que $g''(x) > 0$ para $x > 0$, o gráfico de *g* terá que apresentar a concavidade voltada para cima quando $x > 0$.

Assim, a única opção que pode representar o gráfico da função *g* é o da opção (II).

14.

14.1. $z_1 = (1-i)^3 = (1-i)^2 \times (1-i) = (1-2i+i^2)(1-i) =$

$= (1-2i-1)(1-i) =$

$= -2i(1-i) =$

$= -2i+2i^2 =$

$= -2-2i$

$z_2 = \frac{-1+i^5+i^{53}+3\,i^{34}}{1+2i} = \frac{-1+i+i+3\,i^2}{1+2i} = \frac{-4+2i}{1+2i} =$

$= \frac{(-4+2i)\times(1-2i)}{(1+2i)\times(1-2i)} =$

$= \frac{-4+8i+2i-4i^2}{1-(2i)^2} =$

$= \frac{10i}{1+4} =$

$= 2i$

Sendo $z_1 = -2-2i$ e $z_2 = 2i$, vem que a equação que se pretende resolver é:

$z^3 - 2i = -6 + (-2-2i) \Leftrightarrow z^3 = -8 \Leftrightarrow z^3 = 8e^{i\pi}$

Logo, $z = \sqrt[3]{8}e^{i\frac{\pi+2k\pi}{3}} = 2\,e^{i\frac{\pi+2k\pi}{3}}$, $k \in \{0,1,2\}$.

$z_0 = 2e^{i\frac{\pi}{3}} = 1+\sqrt{3}i$

$z_1 = 2e^{\pi} = -2$

$z_2 = 2e^{\frac{5\pi}{3}} = 1-\sqrt{3}i$

$\text{C.S.} = \left\{1+\sqrt{3}i, -2, 1-\sqrt{3}i\right\}$

14.2. $\frac{z+w}{1+zw} = \frac{z}{1+zw} + \frac{w}{1+zw} = \frac{z\bar{z}}{\bar{z}(1+zw)} + \frac{w\bar{w}}{\bar{w}(1+zw)} =$

$= \frac{|z|^2}{\bar{z}+\bar{z}zw} + \frac{|w|^2}{\bar{w}+z\bar{w}w} =$

$= \frac{1}{\bar{z}+|z|^2 w} + \frac{1}{\bar{w}+z|w|^2} =$

$= \frac{1}{\bar{z}+w} + \frac{1}{\bar{w}+z} =$

$= \frac{\bar{w}+z+\bar{z}+w}{(\bar{z}+w)(\bar{w}+z)} =$

$= \frac{\overbrace{z+\bar{z}}^{2\text{Re}\,(z)} + \overbrace{w+\bar{w}}^{2\text{Re}\,(w)}}{(\bar{z}+w)(\bar{w}+z)} =$

$= \frac{2\text{Re}(z)+2\text{Re}(w)}{\bar{z}\bar{w}+\bar{z}z+w\bar{w}+wz} =$

$= \frac{2\text{Re}(z)+2\text{Re}(w)}{\bar{z}\,\bar{w}+|z|^2+|w|^2+wz} =$

$= \frac{2\text{Re}(z)+2\text{Re}(w)}{\overline{zw}+1+1+zw} =$

$= \frac{2\text{Re}(z)+2\text{Re}(w)}{2\text{Re}(zw)+2}$, que é um número real, como queríamos demonstrar.

15. Seja $z = x + yi$. Como $2z - 2\bar{z} = 4i$, vem que:

$$2z - 2\bar{z} = 4i \Leftrightarrow z - \bar{z} = 2i \Leftrightarrow x + yi - (x - yi) = 2i$$
$$\Leftrightarrow 2yi = 2i$$
$$\Leftrightarrow y = 1$$

isto é, $\mathrm{Im}(z) = 1$.

$\mathrm{Im}(z) = 1$ e $0 < \mathrm{Arg}(z) \leq \frac{\pi}{4}$

Opção (B)

16.

16.1. E = ponto médio de $[AC] = \left(\frac{3\sqrt{2}}{2}, \frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right)$

Sabemos que $\overrightarrow{EV}$ é um vetor normal ao plano ADC.

$$\begin{cases} \vec{n} \cdot \overrightarrow{AD} = 0 \\ \vec{n} \cdot \overrightarrow{AB} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a, b, c) \cdot (3,0,0) = 0 \\ (a, b, c) \cdot (0,3,-3) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3a = 0 \\ 3b - 3c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = c \end{cases}$$

Os vetores normais ao plano ADC são da forma $\vec{n}(0, c, c)$, com $c \in \mathbb{R}$.

Se $c = 1$, por exemplo, tem-se $\vec{n}(0,1,1)$.

Assim, $EV: (x, y, z) = \left(\frac{3\sqrt{2}}{2}, \frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right) + k(0,1,1), k \in \mathbb{R}$.

16.2. $E\left(\frac{3\sqrt{2}}{2}, \frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right)$

$$V = E + \overrightarrow{EV} = \left(\frac{3\sqrt{2}}{2}, \frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right) + \overrightarrow{EV}$$

Sabemos que $\overrightarrow{EV}$ é um vetor normal ao plano ADC e tem norma $3\sqrt{2}$.

Já vimos que os vetores normais ao plano ADC são da forma $\vec{n}(0, c, c)$, com $c \in \mathbb{R}$.

E como $\left\|\overrightarrow{EV}\right\| = 3\sqrt{2}$, tem-se que:

$$\left\|\overrightarrow{EV}\right\| = 3\sqrt{2} \Leftrightarrow \sqrt{c^2 + c^2} = 3\sqrt{2} \Leftrightarrow \sqrt{2c^2} = 3\sqrt{2}$$
$$\Leftrightarrow \sqrt{2}|c| = 3\sqrt{2}$$
$$\Leftrightarrow |c| = 3$$
$$\Leftrightarrow c = \pm 3$$

Considerando $c = 3$, temos $\overrightarrow{EV} = (0,3,3)$.

$$V = E + \overrightarrow{EV} = \left(\frac{3\sqrt{2}}{2}, \frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right) + (0,3,3) = \left(\frac{3\sqrt{2}}{2}, \frac{9}{2}, \frac{9}{2}\right)$$

Logo, uma equação da superfície esférica de centro em V e que passa no ponto E pode ser:

$\left(x - \frac{3\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{9}{2}\right)^2 + \left(z - \frac{9}{2}\right)^2 = \left(3\sqrt{2}\right)^2$, ou de forma equivalente,

$$\left(x - \frac{3\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{9}{2}\right)^2 + \left(z - \frac{9}{2}\right)^2 = 18$$

Prova-Modelo 3 **(págs. 399 a 402)**

1. Os números naturais nestas condições podem terminar em 0 ou em 5: se terminarem em 0, para os algarismos pares estarem todos juntos, temos $3! \times 2 = 12$ possibilidades (i i i p p 0); se terminarem em 5, existem dois tipos de casos mutuamente exclusivos, ou começam com par, excluindo naturalmente o zero (p p p i i 5) ou começam com ímpar (i p p p i 5):

$2 \times 2 \times 1 \times 2 \times 1 \times 1 \quad + \quad 2 \times 3! \times 1 \times 1 \times 2 = 32$ possibilidades

Portanto, ao todo, temos 44 possibilidades.

Opção (D)

2. Sabemos que $P(\bar{A} \cup \bar{B}) = P(\overline{A \cap B}) = 1 - P(A \cap B)$. Assim:

$$1 - P(A \cap B) = \frac{0{,}16}{P(A \cap B)} \Leftrightarrow P(A \cap B) - [P(A \cap B)]^2 = 0{,}16$$

$$\Leftrightarrow -[P(A \cap B)]^2 + P(A \cap B) - 0{,}16 = 0$$

$$\Leftrightarrow P(A \cap B) = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \times (-1) \times (-0{,}16)}}{2 \times (-1)}$$

$$\Leftrightarrow P(A \cap B) = \frac{4}{5} \ \vee \ P(A \cap B) = \frac{1}{5}$$

Como $P(B) = 0{,}5$, então $P(A \cap B) = \frac{1}{5} = 0{,}2$, pois $P(A \cap B) \leq P(B)$.

Sabemos que $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

Assim:

$$\frac{3P(A)}{2} = P(A) + 0{,}5 - 0{,}2 \Leftrightarrow \frac{3}{2}P(A) - P(A) = 0{,}3$$

$$\Leftrightarrow 0{,}5P(A) = 0{,}3$$

$$\Leftrightarrow P(A) = \frac{3}{5}$$

$$\Leftrightarrow P(A) = 0{,}6$$

Opção (C)

3.

3.1. $x = 1 - 6y - 4z \Leftrightarrow x + 6y + 4z = 1$

Seja $\overrightarrow{n_\alpha}$ um vetor normal ao plano α e $\overrightarrow{n_\beta}$ um vetor normal ao plano β.

Por exemplo, $\overrightarrow{n_\alpha}(2, -1, 1)$ e $\overrightarrow{n_\beta}(1, 6, 4)$.

$$\overrightarrow{n_\alpha} \cdot \overrightarrow{n_\beta} = 2 \times 1 + (-1) \times 6 + 1 \times 4 =$$

$$= 2 - 6 + 4 =$$

$$= 0$$

Portanto, os planos α e β são perpendiculares.

3.2. $V = C + \overrightarrow{CV}$ e $\overrightarrow{CV}$ é um vetor normal ao plano α de norma $4\sqrt{6}$.

Assim, $\overrightarrow{CV}$ é da forma $k(2,-1,1)$, $k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

$\overrightarrow{CV} = (2k,-k,k)$

$$\|\overrightarrow{CV}\| = 4\sqrt{6} \Leftrightarrow \sqrt{4k^2+k^2+k^2} = 4\sqrt{6} \Leftrightarrow \sqrt{6k^2} = 4\sqrt{6}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{6}|k| = 4\sqrt{6}$$

$$\Leftrightarrow |k| = 4$$

$$\Leftrightarrow k = \pm 4$$

Considerando $k = 4$, temos $\overrightarrow{CV} = (8,-4,4)$.

$V = C + \overrightarrow{CV}$, logo $V = (1,-1,1) + (8,-4,4)$, ou seja, $V = (9,-5,5)$.

4. $\lim(u_n) = \lim\left(\left(1+\frac{-1}{n}\right)^n\right)^4 = (e^{-1})^4 = e^{-4}$

$$\lim f(u_n) = \lim_{x\to e^{-4}} f(x) = \lim_{x\to e^{-4}} \ln\left(\frac{e^{-4}}{x}\right) = \ln\left(\frac{e^{-4}}{e^{-4}}\right) = \ln(1) = 0$$

Opção (A)

5.

5.1. Pretende-se provar que $\exists c \in \,]14,16[$ tal que $d(c) = 30$.

Comecemos por provar que d é uma função contínua no seu domínio $\mathbb{R}_0^+$:

- d é contínua em $[0,15[$, visto, neste intervalo, a função d estar definida pela soma de duas funções contínuas (uma função constante e o produto de duas funções contínuas);
- d é contínua em $]15,+\infty[$, visto, neste intervalo, a função d estar definida pela soma de duas funções contínuas (uma função constante e o produto de duas funções contínuas);
- d é contínua em $x = 15$, visto que $\lim_{t\to 15^-} d(t) = \lim_{t\to 15^+} d(t) = d(15)$:

$$\lim_{t\to 15^-}\left(20 + t\cos(\pi t)\right) = 20 + 15\cos(15\pi) = 20 + 15\times(-1) = 5$$

$$\lim_{t\to 15^+}\left(20 + 15e^{15-t}\cos(\pi t)\right) = 20 + 15\,e^{15-15}\cos(15\pi) =$$

$$= 20 + 15\times e^0 \times (-1) =$$

$$= 5 = d(15)$$

d é então uma função contínua em todo o seu domínio $\mathbb{R}_0^+$, logo é contínua, em particular, em $[14,16] \subset \mathbb{R}_0^+$.

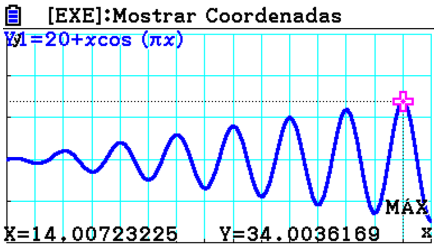
$d(14) = 20 + 14\cos(14\pi) = 20 + 14\times 1 = 34 > 30$

$d(16) = 20 + 15e^{15-16}\cos(16\pi) \approx 25{,}52 < 30$

Como d é contínua em $[14,16]$ e, como $d(16) < 30 < d(14)$, então, pelo teorema de Bolzano-Cauchy, $\exists c \in \,]14,16[$ tal que $d(c) = 30$.

5.2. Pretende-se calcular a distância máxima atingida entre a cadeira e o muro e o respetivo instante em que tal se verificou durante os primeiros 15 segundos em que a criança está a dar balanço.

$y = 20 + x\cos(\pi x)$, com $x \in [0, 15[$



A distância máxima é igual a 34 dm, para *t* = 14 segundos, aproximadamente.

6.

- $(f \times g)(3) = f(3) \times g(3) = \log(3) \times 5 > 0$
- $\left(\frac{f}{g}\right)\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\log\left(\frac{1}{2}\right)}{g\left(\frac{1}{2}\right)} = \frac{\log(1)-\log(2)}{g\left(\frac{1}{2}\right)} = \frac{-\log(2)}{g\left(\frac{1}{2}\right)} < 0$, uma vez que $g\left(\frac{1}{2}\right) > 0$.
- $(f \circ g)(4) = f\big(g(4)\big) = f(5) = \log(5) < 1$
- $(f^{-1} + f)(1) = f^{-1}(1) + f(1) = 10^1 + f(1) \neq 0$, uma vez que $f(1) > 0$.

Cálculo auxiliar

$f(x) = \log(x)$, logo $f^{-1}(x) = 10^x$.

Opção (B)

7. Seja $A(\alpha)$ a área do triângulo [*OAB*] em função de α.

Sabemos que:

$$A(\alpha) = \frac{\text{base}\times\text{altura}}{2} = \frac{2\text{sen}\alpha\times\cos\alpha}{2} = \text{sen}\alpha\cos\alpha$$

Como $\text{sen}\alpha = \frac{2}{5}$ e $\text{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$, temos que:

$$\left(\frac{2}{5}\right)^2 + \cos^2\alpha = 1 \Leftrightarrow \cos^2\alpha = 1 - \frac{4}{25}$$

$$\Leftrightarrow \cos^2\alpha = \frac{21}{25}$$

$$\Leftrightarrow \cos\alpha = \pm\frac{\sqrt{21}}{5}$$

Como $\alpha \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, vem que $\cos\alpha > 0$ e, portanto, $\cos\alpha = \frac{\sqrt{21}}{5}$.

Assim, $A(\alpha) = \frac{2}{5} \times \frac{\sqrt{21}}{5} = \frac{2\sqrt{21}}{25}$.

Opção (B)

8. $P(B|\bar{A})$ representa a probabilidade de serem retiradas duas bolas brancas da caixa C_2, sabendo que as bolas retiradas da caixa C_1 não tinham a mesma cor.

Seja x o número de bolas brancas existentes inicialmente na caixa C_2.

$$P(B|\bar{A}) = \frac{1}{12} \Leftrightarrow \frac{(x+1)\times x}{9\times 8} = \frac{1}{12} \Leftrightarrow x^2 + x = \frac{72}{12}$$

$$\Leftrightarrow x^2 + x - 6 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-1\pm\sqrt{1^2-4\times 1\times(-6)}}{2\times 1}$$

$$\Leftrightarrow x = 2 \ \vee \ x = -3$$

Portanto, existiam inicialmente na C_2 duas bolas brancas, num total de sete. Logo, a caixa C_2 tinha duas bolas brancas e cinco bolas pretas.

9. Como o triângulo [*ABC*] é isósceles e $A\hat{C}B = 120°$, então:

$$C\hat{B}A = B\hat{A}C = \frac{180°-120°}{2} = 30°$$

Seja m o declive da reta BC. Então:

$$m = \text{tg}(180° - 30°) = \text{tg}(150°) = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

Assim, um vetor diretor da reta *BC* pode ser o vetor de coordenadas $\left(-3, \sqrt{3}\right)$ (opção (C)) ou $\left(3, -\sqrt{3}\right)$ (opção (D)). No entanto, a opção (C) apresenta a equação vetorial de uma reta de ordenada na origem positiva (1), o que dadas as condições do enunciado não é possível.

Observe-se que as opções (A) e (B) estão excluídas, pois, na opção (A), encontra-se uma equação de uma reta de declive $\frac{3}{\sqrt{3}}$ e, na opção (B), encontra-se uma equação de uma reta de declive $-\frac{3}{\sqrt{3}}$.

Opção (D)

10. Como $\lim\limits_{h\to 0} \frac{f'(x+h)-f'(x)}{12}$ existe e é negativo, para qualquer número real x, significa que a segunda derivada existe e é sempre negativa, pelo que o gráfico da função f tem a concavidade voltada para baixo em todo o seu domínio. Conclui-se, assim, que a afirmação (I) é verdadeira.

Como $\lim\limits_{x\to +\infty} (f(x) - 2x) = 0$, tal significa que $y = 2x$ é a equação reduzida da assíntota oblíqua ao gráfico de f quando $x \to +\infty$, logo o gráfico de f não admite assíntota horizontal quando $x \to +\infty$, tornando assim a afirmação (II) falsa.

Relativamente à afirmação (III), podemos afirmar que é falsa. Supondo que a reta de equação $y = 2x$ é perpendicular à reta tangente ao gráfico da função f no ponto de abcissa 0, então o declive da reta tangente ao gráfico da função f no ponto de abcissa 0 deveria ser $-\frac{1}{2}$ (visto as retas serem perpendiculares), o que é absurdo, pois sabemos que$f'(x) > 0$, para qualquer número real x.

11. $\lim\limits_{x\to 3}\frac{\sqrt{3}(x-3)}{f(x)-f(3)}+\lim\limits_{x\to 3^-}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to 3}\frac{\sqrt{3}}{\frac{f(x)-f(3)}{x-3}}+\frac{\lim\limits_{x\to 3^-}f(x)}{\lim\limits_{x\to 3^-}g(x)}=$

$$=\frac{\sqrt{3}}{\lim\limits_{x\to 3}\frac{f(x)-f(3)}{x-3}}+\frac{f(3)}{\pm\infty}\overset{*}{=}$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}+0=1$$

(*) Como f é diferenciável em $\mathbb{R}$, então f é contínua em $\mathbb{R}$. Logo, é contínua, em particular, em $x=3$ e, portanto, $\lim\limits_{x\to 3}f(x)=f(3)$.

Opção (B)

12. $\forall\, n\in\mathbb{N}$: $\frac{u_{n+1}}{u_n}<1 \Leftrightarrow u_{n+1}>u_n$ (porque todos os termos da sucessão são negativos.)

$\Leftrightarrow u_{n+1}-u_n>0$, ou seja, a sucessão é monótona crescente.

Como todos os termos da sucessão são negativos, isto é, $u_n<0,\forall\, n\in\mathbb{N}$, então, tem-se que $u_1\leq u_n<0,\forall\, n\in\mathbb{N}$, isto é, a sucessão é limitada.

Como a sucessão é monótona e limitada, então a sucessão (u_n) é convergente.

Opção (D)

13.

13.1. Para que a função f seja contínua em $x=0$, tem que existir $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$, isto é, $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=f(0)$.

Tem então que se verificar $\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=f(0)$.

- $\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{x^2}{\ln(-x)}=\frac{0^+}{-\infty}=0$
- $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\frac{\operatorname{sen}(2x)}{e^x-1}+3x\right)=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\frac{\operatorname{sen}(2x)}{2x}}{\frac{e^x-1}{2x}}+\lim\limits_{x\to 0^+}(3x)=$

$$=\frac{\lim\limits_{2x\to 0^+}\frac{\operatorname{sen}(2x)}{2x}}{\frac{1}{2}\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{e^x-1}{x}}+0=$$

$$=\frac{1}{\frac{1}{2}\times 1}$$

$$=2$$

Como $\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)\neq\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)$, não existe nenhum valor de *k* tal que f seja contínua em $x=0$.

13.2. Para $x\to+\infty$:

$$m=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\frac{\operatorname{sen}(2x)}{e^x-1}+3x}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\frac{\operatorname{sen}(2x)}{e^x-1}}{x}+\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{3x}{x}=$$

$$=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\operatorname{sen}(2x)}{x(e^x-1)}+3=$$

$$=0+3=$$

$$=3$$

Cálculos auxiliares

$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\operatorname{sen}(2x)}{x(e^x-1)}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\operatorname{sen}(2x)\times\frac{1}{x(e^x-1)}\right)=0$, pois é o limite do produto de uma função limitada por uma função de limite nulo:

- $-1\leq\operatorname{sen}(2x)\leq 1,\forall x\in\mathbb{R}$
- $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x(e^x-1)}=\frac{1}{+\infty}=0$

Pelo mesmo motivo:

$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\operatorname{sen}(2x)}{e^x-1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\operatorname{sen}(2x)\times\frac{1}{e^x-1}\right)=0$

$$b = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\text{sem}(2x)}{e^x-1} + 3x - 3x\right) =$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{\text{sem}(2x)}{e^x-1} =$$

$$= 0$$

Assim, a reta de equação $y = 3x$ é assíntota oblíqua ao gráfico de f, quando $x \to +\infty$.

Para $x \to -\infty$:

$$m = \lim_{x\to-\infty}\frac{\frac{x^2}{\ln(-x)}}{x} = \lim_{x\to-\infty}\frac{x}{\ln(-x)} =$$

Considerando a mudança de variável $y = -x \Leftrightarrow x = -y$: se $x \to -\infty$, então $y \to +\infty$.

$$\lim_{y\to+\infty}\frac{-y}{\ln(y)} = -\frac{1}{\underbrace{\lim_{y\to+\infty}\frac{\ln(y)}{y}}_{\text{limite notável}}} = -\frac{1}{0^+} = -\infty$$

Como m não é um número real, então o gráfico de f não admite assíntotas oblíquas quando $x \to -\infty$.

13.3. $g'(x) = \dfrac{\frac{-1}{-x}\times x^2 - \ln(-x)\times 2x}{x^4} = \dfrac{x - 2x\ln(-x)}{x^4} =$

$$= \frac{x(1-2\ln(-x))}{x^4} =$$

$$= \frac{1-2\ln(-x)}{x^3}$$

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1-2\ln(-x)}{x^3} = 0 \Leftrightarrow 1 - 2\ln(-x) \ \wedge \ x \neq 0$$

$$\Leftrightarrow -2\ln(-x) = -1$$

$$\Leftrightarrow \ln(-x) = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow -x = e^{\frac{1}{2}}$$

$$\Leftrightarrow x = -e^{\frac{1}{2}}$$

x	$-\infty$	$-e^{\frac{1}{2}}$		0
Sinal de g'	$+$	0	$-$	n. d.
Variação de g	↗	Máximo absoluto	↘	n. d.

Cálculo auxiliar

$$g\left(-e^{\frac{1}{2}}\right) = \frac{\ln\left(-\left(-e^{\frac{1}{2}}\right)\right)}{\left(-e^{\frac{1}{2}}\right)^2} = \frac{1}{2e}$$

g é estritamente crescente em $\left]-\infty, -e^{\frac{1}{2}}\right]$ e é estritamente decrescente em $\left[-e^{\frac{1}{2}}, 0\right[$; g admite um máximo relativo (absoluto) igual a $\frac{1}{2e}$ para $x = -e^{\frac{1}{2}}$.

14. Seja $z = a + bi$, com $a > 0, b > 0$ e $a > b$

$$\frac{z}{i} - \bar{z} = \frac{a+bi}{i} - (a - bi) = \frac{(a+bi)\times(-i)}{-i^2} - a + bi =$$

$$= -ai - bi^2 - a + bi =$$

$$= (-a + b)i - a + b =$$

$$= \underbrace{(-a + b)}_{<0} + \underbrace{(-a + b)}_{<0} i$$

Como $a > b$, então o afixo de $\frac{z}{i} - \bar{z}$ pertence ao terceiro quadrante.

Opção (C)

15.

15.1. $|z_1| = \sqrt{(-1)^2 + \left(-\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{4} = 2$

$\text{tg}\theta = \frac{-\sqrt{3}}{-1} \wedge \theta \in \left]\pi, \frac{3\pi}{2}\right[$

Logo, $\theta = \frac{4\pi}{3}$, por exemplo.

Portanto, $z_1 = 2e^{i\frac{4\pi}{3}}$.

$$z_2 = \cos\left(\frac{\pi}{5}\right) - i\text{sen}\left(\frac{\pi}{5}\right) = \cos\left(-\frac{\pi}{5}\right) + i\text{sen}\left(-\frac{\pi}{5}\right) = e^{i\times\left(-\frac{\pi}{5}\right)}$$

$$(z_1 \times z_2)^n = \left(2e^{i\frac{4\pi}{3}} \times e^{i\times\left(-\frac{\pi}{5}\right)}\right)^n = \left(2e^{i\frac{17\pi}{15}}\right)^n =$$

$$= 2^n e^{i\frac{17\pi}{15}n}$$

Para que $(z_1 \times z_2)^n$ seja um número real positivo, então o seu argumento terá de ser da forma $2k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

$$\frac{17\pi}{15}n = 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow n = \frac{15\times 2k\pi}{17\pi}, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow n = \frac{30k}{17}, k \in \mathbb{Z}$$

Logo, o menor valor natural n que satisfaz a condição pretendida é $n = 30$ (quando $k = 17$).

15.2. $|z + i|^2 - |z - i|^2 = (z + i)(\overline{z + i}) - (z - i)(\overline{z - i}) =$

$$= (z + i)(\bar{z} + \bar{i}) - (z - i)(\bar{z} - \bar{i}) =$$

$$= z\bar{z} + z\bar{i} + i\bar{z} + i\bar{i} - (z\bar{z} - z\bar{i} - i\bar{z} + i\bar{i}) =$$

$$= |z|^2 - zi + i\bar{z} + 1 - |z|^2 - zi + i\bar{z} - 1 =$$

$$= -2zi + 2i\bar{z} =$$

$$= 2i(-z + \bar{z}) =$$

$$= -2i(z - \bar{z}) =$$

$$= -2i \times 2i \times \frac{z - \bar{z}}{2i} =$$

$$= -4i^2\text{Im}(z)$$

$$= 4\text{Im}(z)$$ c.q.m.

Propriedade

$\text{Im}(z) = \frac{z - \bar{z}}{2i}$

Prova-Modelo 4 **(págs. 403 a 406)**

1. As retas r e s são perpendiculares se e só se o produto dos seus declives for igual a -1.

$$8ax + a^2y - 3 = 0 \Leftrightarrow a^2y = -8ax + 3$$
$$\Leftrightarrow y = -\frac{8}{a}x + \frac{3}{a^2}$$

Assim, o declive da reta r é igual a $-\frac{8}{a}$ e o declive da reta s é igual a $\frac{2a}{a^2} = \frac{2}{a}$.

Então, para que as retas r e s sejam perpendiculares, tem-se que:

$$-\frac{8}{a} \times \frac{2}{a} = -1 \Leftrightarrow \frac{16}{a^2} = 1 \Leftrightarrow a^2 = 16$$
$$\Leftrightarrow a = \pm 4$$

Como $a < 0$, então $a = -4$.

Opção (D)

2. Consideremos os seguintes acontecimentos:

D: "O paciente tem a doença."

T: "O teste apresenta um resultado positivo."

Pelos dados do enunciado, sabe-se que:

- $P(D) = 0{,}25$
- $P(T|D) = 0{,}9$
- $P(D|T) = \frac{3}{4} = 0{,}75$

Pretende-se determinar o valor de $P(\overline{D} \cap \overline{T})$.

Assim:

	T	$\overline{T}$	
D	0,225	0,025	0,25
$\overline{D}$	0,075	0,675	0,75
	0,3	0,7	1

Cálculos auxiliares

- $P(T|D) = 0{,}9 \Leftrightarrow \frac{P(T\cap D)}{P(D)} = 0{,}9$
  $\Leftrightarrow P(T \cap D) = 0{,}9 \times 0{,}25$
  $\Leftrightarrow P(T \cap D) = 0{,}225$
- $P(D|T) = 0{,}75 \Leftrightarrow \frac{P(D\cap T)}{P(T)} = 0{,}75$
  $\Leftrightarrow \frac{0{,}225}{P(T)} = 0{,}75$
  $\Leftrightarrow P(T) = \frac{0{,}225}{0{,}75}$
  $\Leftrightarrow P(T) = 0{,}3$

Portanto, $P(\overline{D} \cap \overline{T}) = 0{,}675$.

3.

3.1. $\frac{{}^{15}C_2 \times {}^{11}C_3 + {}^{15}C_3 \times {}^{11}C_2 + {}^{15}C_2 \times {}^{11}C_2}{{}^{16}C_3 \times {}^{12}C_3} = \frac{25}{64}$

3.2. ${}^{7}C_2 \times 9^5 = 1\ 240\ 029$

Opção (C)

LeYa EDUCAÇÃO Daniela Raposo e Luzia Gomes

4.

4.1. $A(3,0,0)$

Por ser paralelo ao plano definido por $7x+7y+3z-63=0$, uma equação cartesiana do plano pedido é da forma $7x+7y+3z+d=0$.

Como o ponto *A* pertence a este plano, temos:

$0+0+7\times 3+d=0 \Leftrightarrow d=-21$

Assim, uma equação cartesiana do plano que passa no ponto *A* e é paralelo a *BCV* é:

$$7x+7y+3z-21=0$$

Opção (A)

4.2. Seja V o volume da pirâmide:

$V=\frac{1}{3}\times\ a^2\times h$, onde a é a aresta da base e h é a altura da pirâmide.

Sabe-se que $a=3\sqrt{2}$ e as coordenadas de *V* são da forma $V(3,3,z)$.

Como $V\in BCV$:

$7\times 3+7\times 3+3z-63=0 \Leftrightarrow z=\frac{63-42}{3} \Leftrightarrow z=7$

Assim, $V(3,3,7)$ e, consequentemente, $h=7$.

O volume da pirâmide é, então:

$V=\frac{1}{3}\times\ (3\sqrt{2})^2\times 7=\frac{18\times 7}{3}=42$ unidades de volume

4.3. Um vetor normal ao plano *BCV* tem coordenadas $(7,7,3)$. Seja r a reta perpendicular a *BCV*, que passa por *T* e pela origem do referencial. Uma equação vetorial dessa reta é:

$$(x,y,z)=(0,0,0)+k(7,7,3), k\in\mathbb{R}$$

O ponto *T* é o ponto de interseção da reta r com o plano *BCV*.

Assim, podemos determinar as coordenadas de *T* resolvendo o seguinte sistema:

$$\begin{cases} x=7k \\ y=7k \\ z=3k \\ 7x+7y+3z-63=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \_\_\_\_ \\ \_\_\_\_ \\ \_\_\_\_ \\ 7\times 7k+7\times 7k+3\times 3k-63=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \_\_\_\_ \\ \_\_\_\_ \\ \_\_\_\_ \\ 107k=63 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \_\_\_\_ \\ \_\_\_\_ \\ \_\_\_\_ \\ k=\frac{63}{107} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{441}{107} \\ y=\frac{441}{107} \\ z=\frac{189}{107} \\ \_\_\_\_ \end{cases}$$

Portanto, $T\left(\frac{441}{107},\frac{441}{107},\frac{189}{107}\right)$. Logo:

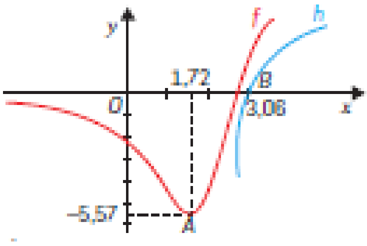
$$\text{raio}=\overline{OT}=\sqrt{\left(\frac{441}{107}\right)^2+\left(\frac{441}{107}\right)^2\left(\frac{189}{107}\right)^2}=\sqrt{\frac{424\,683}{11\,449}}$$

A área da superfície esférica é $4\pi\frac{424\,683}{11\,449}=\frac{15\,876}{107}\pi$ unidades de área.

5. $h(x) = (gof)(x) = g\big(f(x)\big) =$

$$= g\big((x-e)e^x\big) =$$

$$= \ln[(x-e)e^x] - 2$$



$A(1{,}72; -5{,}57)$ $B(3{,}06; 0)$

$$A_{[OAB]} = \frac{3{,}06 \times |-5{,}57|}{2} \approx 8{,}5 \text{ u. a.}$$

6. $\frac{u_1+u_{10}}{2} \times 10 = 190 \Leftrightarrow u_1 + u_{10} = 38$

Como se sabe que $u_1 = u_3 - 2r$ e $u_{10} = u_3 + 7r$, tem-se que:

$u_1 + u_{10} = 38 \Leftrightarrow u_3 - 2r + u_3 + 7r = 38$

$\Leftrightarrow 9 - 2r + 9 + 7r = 38$

$\Leftrightarrow 5r = 20$

$\Leftrightarrow r = 4$

Assim, $u_n = u_3 + (n-3) \times 4 \Leftrightarrow u_n = 9 + 4n - 12$, isto é, uma expressão do termo geral de (u_n) pode ser $u_n = 4n - 3$.

7. $\frac{-z_1 \times \overline{z_2}}{e^{i\frac{\pi}{2}}} = \frac{-(1-i)(2-ki)}{i} = \frac{-(2-ki-2i+ki^2)}{i} =$

$$= \frac{-2+ki+2i-ki^2}{i} =$$

$$= \frac{-2+k+(k+2)i}{i} =$$

$$= \frac{(-2+k+(k+2)i)\times(-i)}{-i^2} =$$

$$= \frac{2i-ki+k+2}{1} =$$

$$= (k+2) + (2-k)i$$

Para $(k+2) + (2-k)i$ ser um imaginário puro tem que se verificar:

$k + 2 = 0 \quad \wedge \quad 2 - k \neq 0 \Leftrightarrow k = -2 \quad \wedge \quad k \neq 2$

Opção (B)

8. $D=\left\{x\in\mathbb{R}: 2x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi, k\in\mathbb{Z}\right\}=\left\{x\in\mathbb{R}: x\neq\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2}, k\in\mathbb{Z}\right\}=$

$$=\mathbb{R}\backslash\left\{x: x=\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2}, k\in\mathbb{Z}\right\}$$

Opção (C)

9. $2e^{i\left(-\frac{\pi}{3}\right)}=2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+i\ \text{sen}\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)=2\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)=1-\sqrt{3}i$

$z_1+z_2=1-\sqrt{3}i+\left(-\sqrt{3}+i\right)=1-\sqrt{3}+\left(1-\sqrt{3}\right)i$

$w=\frac{z_1+z_2}{\sqrt{2}-\sqrt{6}}=\frac{1-\sqrt{3}+\left(1-\sqrt{3}\right)i}{\sqrt{2}-\sqrt{6}}=\frac{1-\sqrt{3}}{\sqrt{2}-\sqrt{6}}+\frac{1-\sqrt{3}}{\sqrt{2}-\sqrt{6}}i=\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i$

$|w|=1$ e $\theta=\frac{\pi}{4}$, por exemplo.

$w=e^{i\frac{\pi}{4}}$

Cálculo auxiliar

$\frac{1-\sqrt{3}}{\sqrt{2}-\sqrt{6}}=\frac{(1-\sqrt{3})\times(\sqrt{2}+\sqrt{6})}{(\sqrt{2}-\sqrt{6})\times(\sqrt{2}+\sqrt{6})}=$

$=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}-\sqrt{6}-\sqrt{18}}{(\sqrt{2})^2-(\sqrt{6})^2}=$

$=\frac{\sqrt{2}-3\sqrt{2}}{2-6}=$

$=\frac{-2\sqrt{2}}{-4}=$

$=\frac{\sqrt{2}}{2}$

Logo, as raízes de ordem 3 de w são da forma:

$$w_k=\sqrt[3]{1}e^{i\frac{\frac{\pi}{4}+2k\pi}{3}},\quad k\in\{0,1,2\}$$

Se $k=0$, $w_0=\sqrt[3]{1}e^{i\frac{\frac{\pi}{4}+2\times0\times\pi}{3}}=e^{i\frac{\pi}{12}}$

Se $k=1$, $w_1=\sqrt[3]{1}e^{i\frac{\frac{\pi}{4}+2\times1\times\pi}{3}}=e^{i\frac{3\pi}{4}}$

Se $k=2$, $w_2=\sqrt[3]{1}e^{i\frac{\frac{\pi}{4}+2\times2\times\pi}{3}}=e^{i\frac{17\pi}{12}}$

As raízes de ordem 3 de w são $e^{i\frac{\pi}{12}}$, $e^{i\frac{3\pi}{4}}$ e $e^{i\frac{17\pi}{12}}$.

10. $x^2+y^2-2x-6y+1=0\Leftrightarrow x^2-2x+1+y^2-6y+3^2=-1+1+3^2$

$$\Leftrightarrow(x-1)^2+(y-3)^2=9$$

Assim, o centro da circunferência pretendida é o ponto C de coordenadas $(1,3)$.

Seja T o ponto de interseção da circunferência pretendida com a reta de equação $y=2x-5$. Como esta reta é tangente à circunferência em T, então é perpendicular à reta CT. Assim, o declive da reta CT é igual a $-\frac{1}{2}$ e a reta CT é da forma $y=-\frac{1}{2}x+b$.

Como $C(1,3)\in CT$, então:

$3=-\frac{1}{2}\times1+b\Leftrightarrow b=\frac{7}{2}$

Logo, $CT: y=-\frac{1}{2}x+\frac{7}{2}$.

As coordenadas do ponto T podem ser determinadas resolvendo o seguinte sistema:

$$\begin{cases}y=2x-5\\ y=-\frac{1}{2}x+\frac{7}{2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\overline{\qquad\qquad}\\ 2x-5=-\frac{1}{2}x+\frac{7}{2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\overline{\qquad\qquad}\\ 2x+\frac{1}{2}x=\frac{7}{2}+5\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{5}{2}x = \frac{17}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2 \times \frac{17}{5} - 5 \\ x = \frac{17}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{9}{5} \\ x = \frac{17}{5} \end{cases}$$

Portanto, $T\left(\frac{17}{5}, \frac{9}{5}\right)$.

O raio da circunferência pretendida é igual a $\overline{TC}$.

$$\overline{TC} = \sqrt{\left(1 - \frac{17}{5}\right)^2 + \left(3 - \frac{9}{5}\right)^2} = \sqrt{\frac{144}{25} + \frac{36}{25}} = \sqrt{\frac{180}{25}} = \frac{6\sqrt{5}}{5}$$

$$r^2 = \left(\frac{6\sqrt{5}}{5}\right)^2 = \frac{36}{5}$$

Uma condição que define a circunferência pretendida é, então, $(x-1)^2 + (y-3)^2 = \frac{36}{5}$.

Opção (A)

11. $\lim\left(\frac{5n+2}{5n+1}\right)^{3n} = \lim\left(\left(\frac{\frac{5n}{5n}+\frac{2}{5n}}{\frac{5n}{5n}+\frac{1}{5n}}\right)^n\right)^3 = \left(\lim\left(\frac{1+\frac{2}{5n}}{1+\frac{1}{5n}}\right)^n\right)^3 =$

$$= \left(\frac{\lim\left(1+\frac{\frac{2}{5}}{n}\right)^n}{\lim\left(1+\frac{\frac{1}{5}}{n}\right)^n}\right)^3 =$$

$$= \left(\frac{e^{\frac{2}{5}}}{e^{\frac{1}{5}}}\right)^3 =$$

$$= \left(e^{\frac{1}{5}}\right)^3 =$$

$$= e^{\frac{3}{5}} =$$

$$= \sqrt[5]{e^3}$$

Opção (C)

12. $D = \{x \in \mathbb{R}: 9 - x > 0 \ \wedge \ x + 1 > 0\} = \{x \in \mathbb{R}: x < 9 \ \wedge \ x > -1\} =]-1, 9[$

Neste domínio, tem-se que:

$$\log_3(9-x) \geq \log_3(9) - \log_3(x+1) \Leftrightarrow \log_3(9-x) + \log_3(x+1) \geq \log_3(9)$$

$$\Leftrightarrow \log_3[(9-x)(x+1)] \geq \log_3(9)$$

$$\Leftrightarrow \log_3(-x^2 + 8x + 9) \geq \log_3(9)$$

$$\Leftrightarrow -x^2 + 8x + 9 \geq 9$$

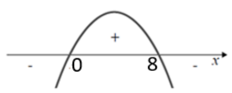
$$\Leftrightarrow -x^2 + 8x \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (x > 0 \ \wedge \ x < 8)$$

Cálculo auxiliar

$-x^2 + 8x = 0 \Leftrightarrow x(-x+8) = 0$

$\Leftrightarrow x = 0 \ \vee \ x = 8$



$\text{C.S.} =]0, 8[\cap D =]0, 8[$

13.

13.1. Como, em $]-\infty\,,-1[$, a função g é contínua, visto tratar-se do quociente de funções contínuas cujo denominador não se anula no intervalo considerado, a única candidata a assíntota vertical ao gráfico de g é a reta de equação $x=-1$.

$$\lim_{x\to-1}\frac{1-e^{x+1}}{x^2-1}=\lim_{x\to-1}\left(-\frac{e^{x+1}-1}{(x-1)(x+1)}\right)=$$

$$=\lim_{x\to-1}\left(-\frac{1}{x-1}\right)\times\lim_{x\to-1}\left(\frac{e^{x+1}-1}{x+1}\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\times\underbrace{\lim_{y\to0}\left(\frac{e^{y}-1}{y}\right)}_{\text{limite notável}}=$$

$$=\frac{1}{2}\times1=$$

$$=\frac{1}{2}$$

Conclui-se assim que o gráfico de g não admite assíntotas verticais em $]-\infty\,,-1[$.

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{1-e^{x+1}}{x^2-1}=\frac{1-e^{-\infty}}{+\infty}=\frac{1-0}{+\infty}=0$$

A reta de equação $y=0$ é assíntota horizontal ao gráfico de g quando $x\to-\infty$.

13.2. Em $]-1,+\infty\,[$:

$$g'(x)=1+\frac{2x}{1+x^2}$$

$$g''(x)=\frac{2(1+x^2)-2x\times2x}{(1+x^2)^4}=$$

$$=\frac{2-2x^2}{(1+x^2)^4}$$

$$g''(x)=0\Leftrightarrow 2-2x^2=0\ \wedge\ (1+x^2)^4\neq0$$

$$\Leftrightarrow x^2=1\ \wedge\ \underbrace{(1+x^2)^4\neq0}_{condição\ universal}$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{x=-1}_{\notin]-1,+\infty[}\ \vee\ x=1$$

x	-1		1	$+\infty$
Sinal de g''	n. d.	$+$	0	$-$
Sentido das concavidades do gráfico de g	n. d.	$\cup$	P. I.	$\cap$

O gráfico de g tem a concavidade voltada para cima em $]-1,1]$ e tem a concavidade voltada para baixo em $]1,+\infty[$; admite um ponto de inflexão de abcissa 1.

14.

x	$-\infty$	-1		0		1	$+\infty$
Sinal de f'	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
Sinal de f''	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
Sinal de $f' \times f''$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

$\text{C.S.} = \left]-\infty, -1\right] \cup [0, 1]$

Opção (D)

15. Sabemos que:

- $f(a) = -a$;
- $f^{-1}(a) = f(a)$, isto é, $f^{-1}(a) = -a$;
- $(f(a), a)$ pertence ao gráfico de f, isto é, $f\big(f(a)\big) = a$.

1) f é contínua; em particular, f é contínua em $[f(a), a]$.

2) $f\big(f(a)\big) = a > 0$, pois $a \in \mathbb{R}^+$. $\quad f(a) = -a < 0$, pois $a \in \mathbb{R}^+$.

$$f(a) < 0 < f(f(a))$$

Logo, pelo teorema de Bolzano-Cauchy, concluímos que $\exists\, c \in \left]f(a), a\right[: f(c) = 0$.

Como f é bijetiva, em particular, f é injetiva. Logo, não pode admitir mais do que um zero.

Daqui se conclui que a função f tem um único zero em $\left]f(a), a\right[$.

Prova-Modelo 5 **(págs. 407 a 410)**

1. Tem-se que $P(\bar{A} \cup \bar{B}) = \frac{3}{5}$ e $P(A|B) = \frac{2}{3}$.

- $P(\bar{A} \cup \bar{B}) = \frac{3}{5} \Leftrightarrow P\left(\overline{A \cap B}\right) = \frac{3}{5} \Leftrightarrow 1 - P(A \cap B) = \frac{3}{5}$

$$\Leftrightarrow 1 - \frac{3}{5} = P(A \cap B)$$

$$\Leftrightarrow P(A \cap B) = \frac{2}{5}$$

- $P(A|B) = \frac{2}{3} \Leftrightarrow \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{2}{3} \Leftrightarrow \frac{\frac{2}{5}}{P(B)} = \frac{2}{3}$

$$\Leftrightarrow P(B) = \frac{\frac{2}{5}}{\frac{2}{3}}$$

$$\Leftrightarrow P(B) = \frac{6}{10}$$

$$\Leftrightarrow P(B) = \frac{3}{5}$$

Pretende-se determinar o valor de $P(B \backslash A)$:

$$P(B\backslash A) = P\left(B \cap \overline{A}\right) = P(B) - P(A \cap B) = \frac{3}{5} - \frac{2}{5} =$$
$$= \frac{1}{5} =$$
$$= 0{,}2$$

Opção (B)

2.

2.1. O plano DCG é paralelo ao plano ABF, logo DCG pode ser definido por uma equação da forma $3x + y - \frac{3}{2}z + d = 0$. Como o plano contém o ponto D de coordenadas $(-2, 4, 7)$, vem que:

$3 \times (-2) + 4 - \frac{3}{2} \times 7 + d = 0 \Leftrightarrow -6 + 4 - \frac{21}{2} + d = 0 \Leftrightarrow d = \frac{25}{2}$

Assim, $DCG: 3x + y - \frac{3}{2}z + \frac{25}{2} = 0$, que é equivalente a $6x + 2y - 3z + 25 = 0$.

Opção (A)

2.2. Comecemos por definir a reta DA, perpendicular ao plano ABF:

$$(x, y, z) = (-2{,}4{,}7) + k(6{,}2{,}-3), k \in \mathbb{R}$$

Então, $(-2 + 6k, 4 + 2k, 7 - 3k)$, com $k \in \mathbb{R}$ é um ponto genérico da reta DA.

Determinemos as coordenadas de A, ponto de interseção da reta DA com o plano ABF:

$6(-2 + 6k) + 2(4 + 2k) - 3(7 - 3k) - 24 = 0$

$\Leftrightarrow -12 + 36k + 8 + 4k - 21 + 9k - 24 = 0$

$\Leftrightarrow 49k = 49$

$\Leftrightarrow k = 1$

Logo, $A(-2 + 6{,}4 + 2{,}7 - 3)$, isto é, $A(4{,}6{,}4)$.

É possível, então, determinar o valor da aresta do cubo:

$$d(A, D) = \sqrt{(4 + 2)^2 + (6 - 4)^2 + (4 - 7)^2} = \sqrt{36 + 4 + 9} =$$
$$= \sqrt{49} =$$
$$= 7$$

Logo, o volume do cubo é igual a $7^3 = 343$ unidades de volume.

2.3. Comecemos por determinar uma condição que defina o plano ABC.

$\overrightarrow{CG}$ é um vetor perpendicular ao plano ABC e tem coordenadas $(-2a, -3a, -6a), a \in \mathbb{R}\backslash \{0\}$.

Sabe-se que $\|\overrightarrow{CG}\| = 7$, visto $[CG]$ ser uma aresta do cubo.

$\|\overrightarrow{CG}\| = 7 \Leftrightarrow \sqrt{(-2a)^2 + (-3a)^2 + (-6a)^2} = 7$

$\Leftrightarrow \sqrt{49a^2} = 7$

$\Longrightarrow 49a^2 = 49$

$\Longrightarrow a^2 = 1$

$\Longrightarrow a = 1 \ \vee \ a = -1$

Um vetor normal ao plano é, por exemplo, o vetor de coordenadas $(2, 3, 6)$.

Assim, uma condição que define o plano ABC é da forma $2x + 3y + 6z + d = 0$.

Como $D(-2,4,7)$ pertence ao plano, então:

$2 \times (-2) + 3 \times 4 + 6 \times 7 + d = 0 \Leftrightarrow d = -50$

$$ABC: 2x + 3y + 6z - 50 = 0$$

Sabemos que P admite coordenadas $(0,0,c)$, $c \in \mathbb{R}$ e pertence ao plano ABC, logo:

$2 \times 0 + 3 \times 0 + 6c - 50 = 0 \Leftrightarrow c = \frac{50}{6} \Leftrightarrow c = \frac{25}{3}$

$P\left(0,0,\frac{25}{3}\right)$

Sabemos, também, que Q admite coordenadas $(a, 0,0)$, $a \in \mathbb{R}$ e pertence ao plano ABF, logo:

$3a + 0 - \frac{3}{2} \times 0 - 12 = 0 \Leftrightarrow 3a = 12 \Leftrightarrow a = 4$

$Q(4,0,0)$

Assim:

$\overline{PQ} = \sqrt{4^2 + 0^2 + \left(-\frac{25}{3}\right)} = \sqrt{16 + \frac{625}{9}} = \sqrt{\frac{769}{9}} = \frac{\sqrt{769}}{3}$

3.

3.1. $8 \times 1 \times 6 \times 1 \times 4 \times 1 \times 2 \times 1 = 384$ maneiras

3.2. $\frac{6+9}{{}^6C_2 \times {}^6C_2} = \frac{15}{15 \times 15} = \frac{1}{15}$

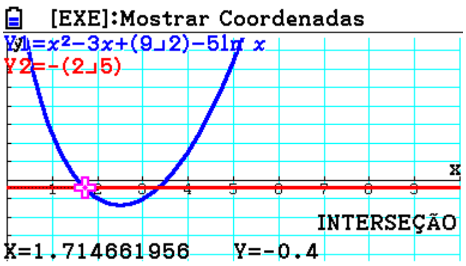
Opção (B)

4.

4.1. $m_r = g'(1) = 1 - 3 + \frac{9}{2} - 5\ln(1) = \frac{5}{2}$

Como as retas r e s são perpendiculares, $m_s = -\frac{2}{5}$.

Como $m_s = g'(b)$, pretendemos determinar $x \in]1,3[$ tal que $g'(x) = -\frac{2}{5}$.



Portanto, $b \approx 1{,}715$.

4.2. Em $\mathbb{R}^+$:

$g''(x) = 2x - 3 - \frac{5}{x}$

$2x-3-\frac{5}{x}=0 \Leftrightarrow \frac{2x^2-3x-5}{x}=0$

$\Leftrightarrow 2x^2-3x-5=0 \ \wedge \ x\neq 0$

$\Leftrightarrow x=\frac{3\pm\sqrt{(-3)^2-4\times 2\times(-5)}}{2\times 2}$

$\Leftrightarrow x=-1 \ \vee \ x=\frac{5}{2}$

Como, $D_g=\mathbb{R}^+$, $x=\frac{5}{2}$.

x	0		$\frac{5}{2}$	$+\infty$
Sinal de g''	n. d.	$-$	0	$+$
Sentido das concavidades do gráfico de g	n. d.	$\cap$	P. I.	$\cup$

A abcissa do ponto de inflexão é $\frac{5}{2}$.

5. Seja r a razão da progressão geométrica (u_n).

Como $a, a+4$ e $a+16$ são três termos consecutivos de (u_n), então $r=\frac{a+4}{a}=\frac{a+16}{a+4}$.

$\frac{a+4}{a}=\frac{a+16}{a+4} \Leftrightarrow (a+4)^2=a(a+16)$

$\Leftrightarrow a^2+8a+16=a^2+16a$

$\Leftrightarrow -8a=-16$

$\Leftrightarrow a=2$

Logo, $r=3$.

$728=u_1\times\frac{1-3^6}{1-3} \Leftrightarrow u_1=\frac{728}{\frac{1-3^6}{1-3}} \Leftrightarrow u_1=2$

Uma expressão do termo geral de (u_n) é $u_n=2\times 3^{n-1}$.

6. $\mathrm{tg}^2\alpha+1=\frac{1}{\left(-\frac{\sqrt{10}}{10}\right)^2} \Leftrightarrow \mathrm{tg}^2\alpha+1=10 \Leftrightarrow \mathrm{tg}^2\alpha=9$

$\Leftrightarrow \mathrm{tg}\,\alpha=-3 \quad \vee \quad \mathrm{tg}\,\alpha=3$

Uma vez que $\cos\alpha<0$ e α é a inclinação da reta, então $\alpha\in\left]\frac{\pi}{2},\pi\right[$ e, portanto, $\mathrm{tg}\,\alpha=-3$.

Seja m o declive da reta r.

$m=\mathrm{tg}\,\alpha$, ou seja, $m=-3$.

Das opções apresentadas, a equação reduzida da reta r só pode ser $y=-3x$.

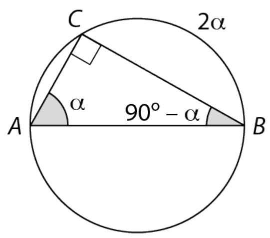
Opção (C)

7. $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC} = \|\overrightarrow{BA}\| \times \|\overrightarrow{BC}\| \times \cos\left(\widehat{\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC}}\right) =$

$= 2r \times \overline{BC} \times \cos(A\hat{B}C)$

Consideremos o triângulo retângulo [*ABC*]:

Como a amplitude do arco *BC* é igual a 2α, então a amplitude do ângulo inscrito $C\hat{A}B$ é igual a α. Como o triângulo [*ABC*] é inscrito numa semicircunferência, sabemos que $A\hat{C}B = 90°$.



Dado que $C\hat{A}B = \alpha$, então $A\hat{B}C = 90° - \alpha$. Por outro lado:

$\text{sen}\alpha = \frac{\overline{BC}}{2r} \Leftrightarrow \overline{BC} = 2r\text{sen}\alpha$

Assim:

$\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC} = 2r \times 2r\text{sen}\alpha \times \cos(90° - \alpha) = 4r^2 \times \text{sen}\alpha \times \text{sen}\alpha =$

$= 4r^2\text{sen}^2\alpha$ c.q.d.

Opção (C)

8. $w = 2 + \frac{(2-i)^2}{1+2i^{13}} = 2 + \frac{4-4i+i^2}{1+2i} = 2 + \frac{3-4i}{1+2i} =$

$= 2 + \frac{(3-4i)(1-2i)}{(1+2i)(1-2i)} =$

$= 2 + \frac{3-6i-4i+8i^2}{5} =$

$= 2 + \frac{-5-10i}{5} =$

$= 2 + (-1-2i) =$

$= 1 - 2i$

Sendo w uma raiz de ordem 3 de um certo número complexo z, as restantes duas raízes de z têm o mesmo módulo de w e os argumentos de raízes consecutivas diferem entre si de $\frac{2\pi}{3}$.

Seja u a raiz consecutiva de w:

$u = w \times e^{i\times\frac{2\pi}{3}} =$

(Observe-se que $w \times e^{i\times\frac{2\pi}{3}}$ mantém o módulo de w e o argumento difere do de w em $\frac{2\pi}{3}$.)

$= (1-2i) \times e^{i\times\frac{2\pi}{3}} =$

$= (1-2i)\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\text{sen}\frac{2\pi}{3}\right) =$

$= (1-2i)\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) =$

$$= \underbrace{\underbrace{\sqrt{3} - \frac{1}{2}}_{>0} + \underbrace{\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + 1\right)}_{>0} i}_{\text{o afixo de } u \text{ pertence ao } 1^{\text{o}} \text{ quadrante}}$$

9. $\lim\left(\frac{n+k}{n+2k}\right)^n = \lim\left(\frac{1+\frac{k}{n}}{1+\frac{2k}{n}}\right)^n = \frac{\lim\left(1+\frac{k}{n}\right)^n}{\lim\left(1+\frac{2k}{n}\right)^n} =$

$= \frac{e^k}{e^{2k}} =$

$= e^{-k}$

$\ln(ex) = 2 \Leftrightarrow ex = e^2 \Leftrightarrow x = \frac{e^2}{e} \Leftrightarrow x = e$

$e = e^{-k} \Leftrightarrow k = -1$

Opção (A)

10. $\ln(b) = 9\ln(a) \Leftrightarrow \ln(b) - 9\ln(a) = 0 \Leftrightarrow \ln(b) - \ln(a^9) = 0$

$\Leftrightarrow \ln\left(\frac{b}{a^9}\right) = 0$

$\Leftrightarrow \frac{b}{a^9} = e^0$

$\Leftrightarrow b = a^9$

$a^x \leq b^{\frac{1}{x}} \Leftrightarrow a^x \leq (a^9)^{\frac{1}{x}} \Leftrightarrow a^x \leq a^{\frac{9}{x}}$

$\Leftrightarrow x - \frac{9}{x} \leq 0$

$\Leftrightarrow \frac{x^2-9}{x} \leq 0$

x	$-\infty$	-3		0		3	$+\infty$
x^2-9	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
x	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$\frac{x^2-9}{x}$	$-$	0	$+$	n. d.	$-$	0	$+$

$\text{C.S.} =]-\infty, -3] \cup]0, 3]$

11.

11.1. $\lim\limits_{x\to 0^-}\left[\frac{\text{sen}(6x)}{x^3+3x} - k^2\right] = \lim\limits_{x\to 0^-}\left[\frac{\text{sen}(6x)}{x(x^2+3)} - k^2\right] = \lim\limits_{x\to 0^-}\left[\frac{\text{sen}(6x)}{x} \times \frac{1}{x^2+3} - k^2\right] =$

$= \lim\limits_{x\to 0^-}\left(\frac{6\text{sen}(6x)}{6x}\right) \times \lim\limits_{x\to 0^-}\frac{1}{x^2+3} - \lim\limits_{x\to 0^-}(k^2) =$

$= 6\lim\limits_{6x\to 0^-}\frac{\text{sen}(6x)}{6x} \times \frac{1}{3} - k^2 =$

$= 2 - k^2$

$f(0) = -7$

$2 - k^2 > -7 \Leftrightarrow -k^2 > -9 \Leftrightarrow k^2 < 9$

$\Leftrightarrow k^2 - 9 < 0$

$\Leftrightarrow k > -3 \wedge k < 3$

$\text{C.S.} =]-3, 3[$

11.2. $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{\sqrt{x}+2x}{x} = \lim\limits_{x \to 0^+} \frac{x\left(x^{-\frac{1}{2}}+2\right)}{x} = \lim\limits_{x \to 0^+} \left(x^{-\frac{1}{2}}+2\right) =$

$= \lim\limits_{x \to 0^+} \left(\frac{1}{\sqrt{x}}+2\right) =$

$= \frac{1}{0^+}+2 =$

$= +\infty$

A reta de equação $x = 0$ é assíntota vertical ao gráfico de f e é única, uma vez que f é contínua em $]0, +\infty[$ (visto, neste intervalo, estar definida pelo quociente de funções contínuas cujo denominador não se anula no intervalo considerado).

$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{x}+2x}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x\left(x^{-\frac{1}{2}}+2\right)}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(x^{-\frac{1}{2}}+2\right) =$

$= \lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{x}}+2\right) =$

$= \frac{1}{+\infty}+2 =$

$= 0+2 =$

$= 2$

A reta de equação $y = 2$ é assíntota horizontal ao gráfico de f quando $x \to +\infty$.

12. $A(\alpha) = A_{\text{triângulo}} + A_{\text{trapézio}} = \frac{-2\cos\alpha \times 2\text{sen}\alpha}{2} + \frac{2+(-2\cos\alpha)}{2} \times 2\text{sen}\alpha =$

$= -2\text{sen}\alpha\cos\alpha + (1-\cos\alpha) \times 2\text{sen}\alpha =$

$= 2\text{sen}\alpha - \text{sen}\alpha\cos\alpha - \text{sen}(2\alpha) =$

$= 2\text{sen}\alpha - 2\text{sen}(2\alpha)$

Opção (A)

13. $iz + \frac{z}{i} = iz + \frac{z \times (-i)}{-i^2} = iz - zi =$

$= iz - iz =$

$= 0$

Opção (D)

14. $f'(x) = -3 + 3\cos(3x)$

$g'(x) = \text{sen}x$

$m_r = f'(a) = -3 + 3\cos(3a)$

$m_s = g'\left(a + \frac{\pi}{2}\right) = \text{sen}\left(a + \frac{\pi}{2}\right) = \cos a$

Para que as retas *r* e *s* sejam paralelas, os seus declives têm de ser iguais. Assim:

$m_r = m_s \Leftrightarrow -3 + 3\cos(3a) = \cos a \Leftrightarrow 3\cos(3a) - \cos(a) - 3 = 0$

Seja *h* a função definida por $h(x) = 3\cos(3x) - \cos(x) - 3$.

Por conseguinte, para provar o que se pretende, basta mostrar que *h* tem pelo menos um zero pertencente ao intervalo $\left]\frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}\right[$.

• A função *h* é contínua em $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}\right]$, por se tratar da diferença entre duas funções contínuas.

• $h\left(\frac{\pi}{2}\right) = 3\cos\left(3 \times \frac{\pi}{2}\right) - \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) - 3 = -3 < 0$

$h\left(\frac{2\pi}{3}\right) = 3\cos\left(3 \times \frac{2\pi}{3}\right) - \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) - 3 = \frac{1}{2} > 0$

Como h é uma função contínua em $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}\right]$ e, como $h\left(\frac{\pi}{2}\right) < 0 < h\left(\frac{2\pi}{3}\right)$, então, pelo teorema de Bolzano-Cauchy $\exists\, c \in \left]\frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}\right[: h(c) = 0$, ficando provado assim o que se pretendia.

Prova-Modelo 6 **(págs. 411 a 414)**

1. Sabemos que ${}^{n}C_{12} = {}^{n}C_{19}$.

Logo, $n = 12 + 19 = 31$.

O elemento central da linha seguinte é ${}^{32}C_{16}$.

Opção (A)

2.

2.1. Consideremos a reta perpendicular ao plano ABC e que contém o ponto V:

$$(x, y, z) = \left(4, \frac{19}{4}, 13\right) + k(2, 3, 6), k \in \mathbb{R}$$

Um ponto genérico desta reta é:

$$(x, y, z) = \left(4 + 2k, \frac{19}{4} + 3k, 13 + 6k\right), \text{com } k \in \mathbb{R}$$

Determinemos a interseção desta reta com o plano ABC:

$2(4 + 2k) + 3\left(\frac{19}{4} + 3k\right) + 6(13 + 6k) + 10 = 0$

$\Leftrightarrow 8 + 4k + \frac{57}{4} + 9k + 78 + 36k + 10 = 0$

$\Leftrightarrow 49k = -\frac{441}{4}$

$\Leftrightarrow k = -\frac{9}{4}$

A interseção desta reta com o plano é, assim, o ponto de coordenadas:

$$\left(4+2\left(-\frac{9}{4}\right),\frac{19}{4}+3\left(-\frac{9}{4}\right),13+6\left(-\frac{9}{4}\right)\right)=\left(-\frac{1}{2},-2,-\frac{1}{2}\right)$$

Assim, $I\left(-\frac{1}{2},-2,-\frac{1}{2}\right)$.

Logo:

$$h=d(V,I)=\sqrt{\left(4+\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{19}{4}+2\right)^2+\left(13+\frac{1}{2}\right)^2}=$$

$$=\sqrt{\frac{81}{4}+\frac{729}{16}+\frac{729}{4}}=$$

$$=\sqrt{\frac{3969}{16}}=$$

$$=\frac{63}{4}$$

A altura da pirâmide é igual a $\frac{63}{4}$.

2.2. Os pontos P_1 e P_2 pertencem aos semieixos positivos Ox e Oy.

Como A pertence ao plano definido por $z=-3$, então $\overrightarrow{AP_1}$ e $\overrightarrow{AP_2}$ não são colineares.

Logo, o ângulo P_1AP_2 não pode ser raso.

Assim, o ângulo P_1AP_2 é obtuso se e só se $\overrightarrow{AP_1}\,.\,\overrightarrow{AP_2}<0$.

Sabemos que $P_1(a,0,0)$, $P_2(0,a,0)$ e $A(1,2,-3)$.

$$\overrightarrow{AP_1}\,.\,\overrightarrow{AP_2}=(a-1,-2,3).(-1,a-2,3)=-a+11-2a+4+9=$$
$$=-3a+14$$

Assim, o ângulo P_1AP_2 é obtuso se e só se:

$$-3a+14<0\Leftrightarrow -3a<-14\Leftrightarrow a>\frac{14}{3}$$

Logo, a ângulo P_1AP_2 é obtuso se e só se $a\in\left]\frac{14}{3},+\infty\right[$.

2.3. Número de casos possíveis: 6^5

Número de casos favoráveis: ${}^6C_5\times 5!+{}^6C_4\times 2\times 4!+{}^6C_3\times 3!$

- são utilizadas 5 cores distintas: ${}^6C_5\times 5!$

  ${}^6C_5$ é o número de maneiras distintas de escolher as 5 cores de entre as 6 disponíveis. Por cada uma destas maneiras, existem 5! maneiras distintas de colorir as 5 faces com as 5 cores.

- são utilizadas 4 cores distintas: ${}^6C_4\times 2\times 4!$

  ${}^6C_4$ é o número de maneiras distintas de escolher as 4 cores de entre as 6 disponíveis. Por cada uma destas maneiras, existem 2 possibilidades para escolher as duas faces que vão ser pintadas da mesma cor ($[ABV]$ e $[DCV]$ ou $[ADV]$ e $[BCV]$) e, por cada uma destas possibilidades, existem 4! maneiras distintas de colorir as faces da pirâmide.

- são utilizadas 3 cores distintas: ${}^6C_3\times 3!$

${}^6C_3$ é o número de maneiras distintas de escolher 3 cores de entre as 6 disponíveis. Como só utilizamos 3 cores, as faces $[ABV]$ e $[CDV]$ e as faces $[ADV]$ e $[BCV]$ serão pintadas com a mesma cor. Assim, após termos selecionado as cores, existem 3! maneiras diferentes de colorir as faces da pirâmide. Assim, a probabilidade pedida é igual a $\frac{{}^6C_5\times 5!+\,{}^6C_4\times 2\times 4!+\,{}^6C_3\times 3!}{6^5}=\frac{65}{324}$.

3.

3.1. Consideremos os acontecimentos:

B: "Usar batom."

L: "Usar lápis de olhos."

Sabemos que:

- $P(B)=P(L)$
- $P(B\cap L)=\frac{1}{5}P(B\cup L)$

Pretende-se determinar $P(\overline{L}|B)$. Como:

- $P(B\cap L)=\frac{1}{5}P(B\cup L)\Leftrightarrow P(B\cup L)=5P(B\cap L)$
- $P(B\cup L)=P(B)+P(L)-P(B\cap L)$

tem-se que:

$$5P(B\cap L)=P(B)+P(L)-P(B\cap L)$$

Como $P(B)=P(L)$, então:

$$5P(B\cap L)=P(B)+P(B)-P(B\cap L)$$

Assim:

$$6P(B\cap L)=2P(B)$$

ou seja:

$$P(B\cap L)=\frac{1}{3}P(B)$$

Logo:

$$\begin{aligned}P(\overline{L}|B)&=\frac{P(\overline{L}\cap B)}{P(B)}=\frac{P(B)-P(B\cap L)}{P(B)}=\\&=1-\frac{P(B\cap L)}{P(B)}=\\&=1-\frac{\frac{1}{3}P(B)}{P(B)}=\\&=1-\frac{1}{3}=\\&=\frac{2}{3}\end{aligned}$$

A probabilidade pedida é $\frac{2}{3}$.

3.2.

$$\underbrace{\_\ \_}_{\text{Vogais}}\ \underbrace{\_\ \_\ \_}_{\text{Primos: 2, 3, 5}}\ \underbrace{\_\ \_\ \_}_{\text{Restantes algarismos 1, 4 e 6}}$$

$$^5A_2 \quad \times \quad 3! \quad \times 5!$$

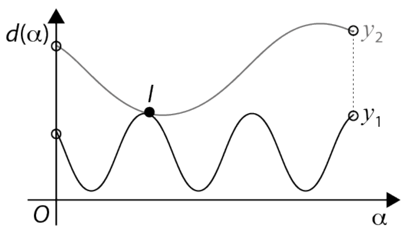
- $^5A_2$ é o número de maneiras de escolher ordenadamente duas das cinco vogais existentes.
- 3! é o número de maneiras de permutar entre si os três algarismos primos.
- 5! é o número de maneiras de permutar o bloco das vogais, o bloco dos algarismos primos e os algarismos 1, 4 e 6 todos entre si.

$^5A_2 \times 3! \times 5! = 14\ 400$

Opção (D)

4. Pretendemos determinar a solução da equação:

$$d(3\alpha) = 1{,}175d(\alpha) \Leftrightarrow \underbrace{12 + \cos(5{,}8 \times 3\alpha + 1)}_{y_1} = \underbrace{1{,}175(12 + \cos(5{,}8\alpha + 1))}_{y_2}$$



$I(a, b)$

$\alpha \approx 0{,}31$

A solução pedida é igual a 0,31 rad.

5. Número de casos possíveis: $6 \times 6 = 36$

Número de casos favoráveis (número de casos em que o produto é um número real, ou seja, o produto de dois números reais e o produto de dois números imaginários puros): $4 \times 4 + 2 \times 2 = 20$

A probabilidade pretendida é $\frac{20}{36} = \frac{5}{9}$.

Opção (B)

6. A sucessão (u_n) é uma progressão aritmética de razão 5 e primeiro termo a.

Seja S_{10} a soma dos 10 primeiros termos de (u_n).

Então, $S_{10} = \frac{u_1+u_{10}}{2} \times 10$, ou seja:

$$305 = \frac{a+a+9\times5}{2} \times 10 \Leftrightarrow 305 = (2a + 45) \times 5$$

$$\Leftrightarrow 2a + 45 = 61$$

$$\Leftrightarrow a = 8$$

7. $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2-2x}{f(x)-f(2)}=\frac{1}{2e^4}\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 2}\frac{x(x-2)}{f(x)-f(2)}=\frac{1}{2e^4}$

$\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 2}x\times\lim\limits_{x\to 2}\frac{x-2}{f(x)-f(2)}=\frac{1}{2e^4}$, pois os dois limites existem e são finitos.

$\Leftrightarrow 2\times\frac{1}{f'(2)}=\frac{1}{2e^4}$

$\Leftrightarrow 4e^4=f'(2)$

- Se $f(x)=e^{x^2}$, vem que $f'(x)=2xe^{x^2}$ e $f'(2)=4e^4$.
- Se $f(x)=e^{2x}$, vem que $f'(x)=2e^{2x}$ e $f'(2)=2e^4$.
- Se $f(x)=2^{x^2}$, vem que $f'(x)=2x\times 2^{x^2}\times\ln(2)$ e $f'(2)=4\times 2^4\times\ln(2)=64\ln(2)$.
- Se $f(x)=2^{2x}$, vem que $f'(x)=2\times 2^{2x}\times\ln(2)$ e $f'(2)=32\ln(2)$.

Opção (A)

8. Um vetor diretor de r é $\vec{r}(-2,0,3)$.Um vetor normal ao plano α é $\vec{n}(3,1,2)$.

$\vec{r}.\vec{n}=(-2,0,3).(3,1,2)=-6+6=0$

Um ponto pertencente à reta r é $P(4,-1,1)$.

Averiguemos se P pertence ao plano α:

$3\times 4+(-1)+2\times 1+10=0\Leftrightarrow 12-1+2+10=0\Leftrightarrow 23=0$, que é uma proposição falsa.

Logo, P não pertence ao plano α.

Como $\vec{r}$ e $\vec{n}$ são vetores perpendiculares e o ponto P da reta não pertence ao plano α, concluímos que r é estritamente paralela a α.

Opção (C)

9. $z=\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i=e^{i\frac{\pi}{4}}$

Cálculo das raízes cúbicas de z:

$\sqrt[3]{e^{i\frac{\pi}{4}}}=\sqrt[3]{1}\times e^{i\left(\frac{\frac{\pi}{4}+2k\pi}{3}\right)}, k\in\{0,1,2\}=e^{i\left(\frac{\pi}{12}+\frac{2k\pi}{3}\right)}, k\in\{0,1,2\}$

$z_1=e^{i\frac{\pi}{12}}$

$z_2=e^{i\frac{9\pi}{12}}=e^{i\frac{3\pi}{4}}=w$, pois o afixo desta raiz cúbica de z é o único que pertence ao 2.º quadrante.

$z_3=e^{i\frac{17\pi}{12}}$

Assim:

$$\frac{w\times\bar{z}}{\sqrt{2}z-i^{2019}}=\frac{e^{i\frac{3\pi}{4}}\times e^{i(-\frac{\pi}{4})}}{\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)-i^3}=\frac{e^{i\left(\frac{3\pi}{4}-\frac{\pi}{4}\right)}}{1+i-(-i)}=$$

$$=\frac{e^{i\left(\frac{\pi}{2}\right)}}{1+2i}=$$

$$= \frac{i \times (1-2i)}{(1+2i)\times(1-2i)} =$$

$$= \frac{i-2i^2}{1^2-(2i)^2} =$$

$$= \frac{2+i}{1+4} =$$

$$= \frac{2}{5} + \frac{1}{5}i$$

10. $\lim \ln(u_n) = \lim \ln\left[\left(\frac{3n-9}{3n+6}\right)^{n+2}\right] = \lim \ln\left[\left(\frac{n-3}{n+2}\right)^{n+2}\right] =$

$$= \lim \ln\left[\left(\frac{n+2-5}{n+2}\right)^{n+2}\right] =$$

$$= \lim \ln\left[\left(1 + \frac{-5}{n+2}\right)^{n+2}\right] =$$

$$= \ln\left[\lim\left(1 - \frac{5}{n+2}\right)^{n+2}\right] =$$

$$= \ln(e^{-5}) =$$

$$= -5$$

Opção (C)

11. $D = \mathbb{R}^+$

Neste domínio:

$e^{(\ln x)^2} > x^2 \Leftrightarrow (\ln x)^2 > \ln(x^2)$

$\Leftrightarrow (\ln x)^2 - \ln(x^2) > 0$

$\Leftrightarrow (\ln x)^2 - 2\ln x > 0$

Consideremos a mudança de variável $y = \ln x$:

$y^2 - 2y > 0 \Leftrightarrow y < 0 \ \vee \ y > 2$

Como $y = \ln x$, em $\mathbb{R}^+$, vem que:

$(\ln x)^2 - 2\ln x > 0 \Leftrightarrow \ln x < 0 \ \vee \ \ln x > 2$

$\Leftrightarrow x < 1 \ \vee \ x > e^2$

C.S. $= (\,]-\infty, 1[\, \cup \,]e^2, +\infty[\,) \cap \mathbb{R}^+ =$

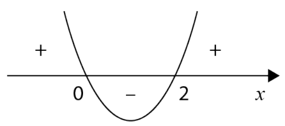
$= \,]0, 1[\, \cup \,]e^2, +\infty[$

Cálculo auxiliar

$y^2 - 2y = 0 \Leftrightarrow y(y-2) = 0$

$\Leftrightarrow y = 0 \ \vee \ y - 2 = 0$

$\Leftrightarrow y = 0 \ \vee \ y = 2$



12. $r: 3y - ax - 2 = 0 \Leftrightarrow 3y = ax + 2 \Leftrightarrow y = \frac{a}{3}x + \frac{2}{3}$

Sejam m_r o declive da reta r e m_s o declive da reta s.

Como r e s são perpendiculares, então tem-se que $m_r = -\frac{1}{m_s}$, isto é:

$$\frac{a}{3} = -\frac{1}{1+\sqrt{2}} \Leftrightarrow a = \frac{-3(1-\sqrt{2})}{(1+\sqrt{2})(1-\sqrt{2})} \Leftrightarrow a = \frac{-3+3\sqrt{2}}{1-2}$$

$$\Leftrightarrow a = 3 - 3\sqrt{2}$$

Opção (C)

13. $(f^{-1} \circ h')(1) = f^{-1}(h'(1)) = f^{-1}(0)$

$f(x) = 0 \Leftrightarrow \ln(x-1) = 0 \Leftrightarrow x - 1 = 1$

$\Leftrightarrow x = 2$

$f(2) = 0 \Leftrightarrow f^{-1}(0) = 2$

Logo, $(f^{-1} \circ h')(1) = 2$.

Opção (D)

14.

14.1. g é contínua em $x = 1$ se e só se existir $\lim\limits_{x \to 1} g(x)$, isto é:

$$\lim_{x \to 1^-} g(x) = \lim_{x \to 1^+} g(x) = g(1)$$

- $\lim\limits_{x \to 1^-} g(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} \frac{xe^x - e}{ex - e} = \lim\limits_{x \to 1^-} \frac{xe^{x-1} - 1}{x-1} =$

  Consideremos a mudança de variável $x - 1 = y$: se $x \to 1^-$, então $y \to 0^-$.

$$= \lim_{y \to 0^-} \frac{(y+1)e^y - 1}{y} =$$

$$= \lim_{y \to 0^-} \frac{ye^y + e^y - 1}{y} =$$

$$= \lim_{y \to 0^-} e^y + \underbrace{\lim_{y \to 0^-} \frac{e^y - 1}{y}}_{\text{limite notável}} =$$

$$= 1 + 1 =$$

$$= 2$$

- $\lim\limits_{x \to 1^+} g(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} \frac{x^2 + \ln(x^2) + 1}{x} = \frac{2}{1} = 2$
- $g(1) = 2$

Logo, g é contínua em $x = 1$.

14.2. Para $x \to +\infty$:

$$m = \lim_{x \to +\infty} \frac{g(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 + \ln(x^2) + 1}{x^2} =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{\ln(x^2)}{x^2} + \frac{1}{x^2}\right) =$$

Consideremos a mudança de variável $x^2 = y$: se $x \to +\infty$, então $y \to +\infty$.

$$= 1 + \lim_{y \to +\infty} \frac{\ln(y)}{y} + \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x^2} =$$

$$= 1 + 0 + 0 =$$

$$= 1$$

$$b = \lim_{x \to +\infty} (g(x) - x) = \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{x^2 + \ln(x^2) + 1}{x} - x \right) =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 + \ln(x^2) + 1 - x^2}{x} =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{\ln(x^2) + 1}{x} =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{2\ln|x|}{x} + \frac{1}{x} \right) =$$

$$= 2 \lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} + \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} =$$

$$= 2 \times 0 + 0 =$$

$$= 0$$

A reta de equação $y = x$ é assíntota oblíqua ao gráfico de g quando $x \to +\infty$.

Para $\boldsymbol{x} \to -\infty$**:**

$$m = \lim_{x \to -\infty} \frac{g(x)}{x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{xe^x - e}{x(ex - e)} =$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{e^x - \frac{e}{x}}{ex - e} =$$

$$= \frac{0}{-\infty} =$$

$$= 0$$

$$b = \lim_{x \to -\infty} g(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{xe^x - e}{ex - e} =$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{e^x - \frac{e}{x}}{e - \frac{e}{x}} =$$

$$= \frac{0}{e} =$$

$$= 0$$

A reta de equação $y = 0$ é assíntota horizontal ao gráfico de g quando $x \to -\infty$.

14.3. Em $]1, +\infty[$:

$$g'(x) = \frac{\left(2x + \frac{2x}{x^2}\right)x - (x^2 + \ln(x^2 + 1))}{x^2} = \frac{2x^2 + 2 - x^2 - \ln(x^2) - 1}{x^2} =$$

$$= \frac{x^2 + 1 - \ln(x^2)}{x^2} =$$

$$g''(x) = \frac{\left(2x - \frac{2x}{x^2}\right)x^2 - (x^2 + 1 - \ln(x^2)) \times 2x}{4} = \frac{2x^3 - 2x - 2x^3 - 2x + 2x\ln(x^2)}{x^4} =$$

$$= \frac{-4x + 2x\ln(x^2)}{x^4} =$$

$$= \frac{-4 + 2\ln(x^2)}{x^3}$$

$$g''(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{-4+2\ln(x^2)}{x^3} = 0 \Leftrightarrow -4 + 2\ln(x^2) = 0 \ \wedge\ x^3 \neq 0$$

$$\Leftrightarrow \ln(x^2) = 2 \ \wedge \ \underbrace{x \neq 0}_{\text{condição universal em }]1,+\infty[}$$

$$\Leftrightarrow x^2 = e^2$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{x = -e}_{\text{condição impossível em }]1,+\infty[} \ \vee \ x = e$$

$$\Leftrightarrow x = e$$

Assim:

x	1		e	$+\infty$
Sinal de g''		$-$	0	$+$
Sentido das concavidades do gráfico de g		$\cap$	P.I.	$\cup$

Cálculos auxiliares

$e^0 < e^{\frac{1}{2}} < e$ $\quad$ $1 < \sqrt{e} < e$

$-4 + 2\ln\left((\sqrt{e})^2\right) = -4 + 2 = -2$

$-4 + 2\ln\left((e^2)\right) = -4 + 2 \times 4 = 4$

O gráfico de g tem a concavidade voltada para baixo em $]1, e]$ e tem a concavidade voltada para cima em $[e, +\infty[$.

$$g(e) = \frac{e^2 + \ln(e^2) + 1}{e} = e + \frac{3}{e}$$

$\left(e, e + \frac{3}{e}\right)$ é ponto de inflexão do gráfico de g.

Exame Final Nacional de Matemática A – 2023 (1.ª Fase) **(págs. 417 a 421)**

1. $\lim\left(1+\frac{1}{n}\right)^{2n} = \lim\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\right]^2 = \left[\lim\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\right]^2 = (e^1)^2 = e^2$

Opção (C)

2. Seja (u_n) a sucessão dos comprimentos dos segmentos de reta que constitui a linha poligonal.

(u_n) é uma progressão aritmética de razão 2.

$u_1 = \overline{AB} = a$ cm

$u_2 = a + 2$

$u_3 = a + 4$

$u_n = a + (n-1) \times 2 = 2n - 2 + a$

$u_{100} = 200 - 2 + a = 198 + a$

$$S_{100} = 104 \Leftrightarrow \frac{a + 198 + a}{2} \times 100 = 10\,400$$
$$\Leftrightarrow (a + 99) \times 100 = 10\,400$$
$$\Leftrightarrow 100a + 9900 = 10\,400$$
$$\Leftrightarrow 100a = 500$$
$$\Leftrightarrow a = 5$$

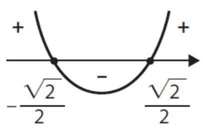
3. $f'(x) = -2xe^{1-x^2}$ $\qquad D_{f'} = \text{IR}$

$$f''(x) = (-2x)'e^{1-x^2} + (-2x)\left(e^{1-x^2}\right)' = -2e^{1-x^2} - 2x \times (-2x)e^{1-x^2} =$$
$$= -2e^{1-x^2} - 2x \times (-2x)e^{1-x^2} =$$
$$= -2e^{1-x^2} + 4x^2e^{1-x^2} =$$
$$= e^{1-x^2}(4x^2 - 2)$$

$D_{f''} = \text{IR}$

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow e^{1-x^2}(4x^2 - 2) = 0 \Leftrightarrow \underbrace{e^{1-x^2} = 0}_{\text{Equação impossível}} \lor 4x^2 - 2 = 0$$
$$\Leftrightarrow 4x^2 - 2 = 0$$
$$\Leftrightarrow 4x^2 = 2$$
$$\Leftrightarrow x^2 = \frac{1}{2}$$
$$\Leftrightarrow x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$$

x	$-\infty$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$		$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$+\infty$
e^{1-x^2}	+	+	+	+	+
$4x^2 - 2$	+	0	–	0	+
Sinal de f''	+	0	–	0	+
Sentido das concavidades do gráfico de f	$\cup$	P.I.	$\cap$	P.I.	$\cup$



O gráfico de f tem a concavidade voltada para cima em $\left]-\infty, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right]$ e em $\left[\frac{\sqrt{2}}{2}, +\infty\right[$.

O gráfico de f tem a concavidade voltada para baixo em $\left[-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$.

O gráfico de f tem dois pontos de inflexão de abcissas $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ e $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

4.

4.1. g é contínua em $x = 1$ se $\lim\limits_{x \to 1^-} g(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} g(x) = g(1)$.

- $\lim\limits_{x\to 1^-} g(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} \frac{4x-4}{e^{x-1}-1} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim\limits_{x\to 1^-} \frac{4(x-1)}{e^{x-1}-1} \underbrace{=}_{\substack{\text{Mudança de variável} \\ y=x-1 \\ x\to 1^- \Rightarrow y\to 0^-}} 4 \lim\limits_{y\to 0^-} \frac{y}{e^y-1} =$

$$= 4 \times \frac{1}{\underbrace{\lim\limits_{y\to 0^-} \frac{e^y-1}{y}}_{\text{Limite notável}}} =$$

$$= 4 \times \frac{1}{1} =$$

$$= 4$$

- $\lim\limits_{x\to 1^+} g(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} (7 \times 3^{x-1} - 3) = 7 \times 1 - 3 = 4$
- $g(1) = 7 \times 3^0 - 3 = 4$

Logo, g é contínua em $x = 1$.

4.2. Em $[1, +\infty[: \log_3\left(g(x)\right) = x + \log_3 2$

$$D = \{x \in [1, +\infty[: 7 \times 3^{x-1} - 3 > 0\} = \left\{x \in [1, +\infty[: x > \log_3\left(\frac{9}{7}\right)\right\} =$$
$$= [1, +\infty[$$

$$\begin{aligned} 7 \times 3^{x-1} - 3 > 0 &\Leftrightarrow 7 \times 3^{x-1} > 3 \\ &\Leftrightarrow 3^{x-1} > \frac{3}{7} \\ &\Leftrightarrow x - 1 > \log_3\left(\frac{3}{7}\right) \\ &\Leftrightarrow x > 1 + \log_3\left(\frac{3}{7}\right) \\ &\Leftrightarrow x > \log_3(3) + \log_3\left(\frac{3}{7}\right) \\ &\Leftrightarrow x > \log_3\left(\frac{9}{7}\right) \end{aligned}$$

$\log_3\left(\frac{9}{7}\right) < \log_3(3)$, logo $\log_3\left(\frac{9}{7}\right) < 1$.

Em $[1, +\infty[$:

$$\begin{aligned} \log_3(7 \times 3^{x-1} - 3) = x + \log_3(2) &\Leftrightarrow \log_3(7 \times 3^{x-1} - 3) = \log_3(3^x) + \log_3(2) \\ &\Leftrightarrow \log_3(7 \times 3^{x-1} - 3) = \log_3(3^x \times 2) \\ &\Leftrightarrow 7 \times 3^{x-1} - 3 = 3^x \times 2 \\ &\Leftrightarrow -2 \times 3^x + \frac{7}{3} \times 3^x = 3 \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{3} \times 3^x = 3 \\ &\Leftrightarrow 3^x = 3^2 \\ &\Leftrightarrow x = 2 \end{aligned}$$

C.S. = {2}

5.

5.1.

$$\underset{3!}{\boxed{\begin{matrix}A\\D\\F\end{matrix}}} \times \underset{8!}{\_\ \_\ \_\ \_\ \_\ \_\ \_} = 241\,920$$

Opção (B)

5.2. Consideremos os acontecimentos A e B definidos por:

A: "O jovem respondeu que praticava *surf*."

B: "O jovem respondeu que praticava *skate*."

Sabe-se que:

- $P(A) = 0{,}65$
- $P\left(\overline{A} \cap B\right) = 0{,}20$
- $P(B|A) = \frac{4}{5}$

$$P(B|A) = \frac{4}{5} \Leftrightarrow P(A \cap B) = \frac{4}{5} \times P(A) \Leftrightarrow P(A \cap B) = \frac{4}{5} \times 0{,}65$$

$$\Leftrightarrow P(A \cap B) = 0{,}52$$

Pretende-se determinar $P(A|\overline{B})$.

$$P\left(A|\overline{B}\right) = \frac{P(A \cap \overline{B})}{P(\overline{B})}$$

Organizando os dados numa tabela:

	B	$\overline{B}$	**Total**
A	0,52		0,65
$\overline{A}$	0,2		
Total			

$$P\left(A \cap \overline{B}\right) = 0{,}65 - 0{,}52 = 0{,}13$$
$$P\left(\overline{A}\right) = 1 - 0{,}65 = 0{,}35$$
$$P\left(\overline{A} \cap \overline{B}\right) = 0{,}35 - 0{,}2 = 0{,}15$$
$$P\left(\overline{B}\right) = 0{,}28$$

	B	$\overline{B}$	**Total**
A	0,52	0,13	0,65
$\overline{A}$	0,2	0,15	0,35
Total		0,28	1

Assim:

$$P\left(A|\overline{B}\right) = \frac{P\left(A \cap \overline{B}\right)}{P\left(\overline{B}\right)} = \frac{0{,}13}{0{,}28} = \frac{13}{28}$$

5.3. $n \rightarrow$ número de jovens com 13 anos.

$70 - n \rightarrow$ número de jovens com 14 anos.

$70 - n > n \Leftrightarrow 70 > 2n \Leftrightarrow n < 35$

$$\frac{n\times(70-n)}{^{70}C_2} = \frac{16}{35} \Leftrightarrow \frac{70n-n^2}{2415} = \frac{16}{35} \Leftrightarrow 70n - n^2 = \frac{16\times 2415}{35}$$

$$\Leftrightarrow 70n - n^2 = 1104$$

$$\Leftrightarrow -n^2 + 70n - 1104 = 0$$

$$\Leftrightarrow n = \frac{-70\pm\sqrt{4900-4\times(-1)\times(-1104)}}{-2}$$

$$\Leftrightarrow n = \frac{-70\pm\sqrt{484}}{-2}$$

$$\Leftrightarrow n = \frac{-70\pm 22}{-2}$$

$$\Leftrightarrow n = 46 \quad \vee \quad n = 24$$

Como $n < 35$, então $n = 24$.

Há 24 jovens com 13 anos.

6. Sabe-se que $\overline{OE} = 12{,}5$ e que a reta AC é definida por $(x, y, z) = (10, 0, 0) + k(0, 4, 3), k \in$ IR.

6.1. Como as retas AC e OD são paralelas, então o vetor de coordenadas (0, 4, 3) é um vetor diretor da reta OD.

(A) $\left(0, 2, \frac{3}{2}\right) = \frac{1}{2} \times (0, 4, 3)$

Averiguemos se o ponto O pertence à reta:

$$(0, 0, 0) = (0, 6, 8) + k\left(0, 2, \frac{3}{2}\right)$$

$$\begin{cases} 0 = 0 \\ 0 = 6 + 2k \\ 0 = 8 + \frac{3}{2}k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = -3 \\ \\ \frac{3}{2}k = -8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = -3 \\ \\ k = -\frac{16}{3} \end{cases} \quad \text{Condição impossível}$$

(B) $\left(0, 2, \frac{3}{2}\right) = \frac{1}{2} \times (0, 4, 3)$

Averiguemos se o ponto O pertence à reta:

$$(0, 0, 0) = (0, -4, -3) + k\left(0, 2, \frac{3}{2}\right)$$

$$\begin{cases} 0 = 0 \\ 0 = -4 + 2k \\ 0 = -3 + \frac{3}{2}k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = 2 \\ \\ \frac{3}{2}k = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = 2 \\ \\ k = 2 \end{cases}$$

(C) Os vetores de coordenadas (0, 3, –4) e (0, 4, 3) não são colineares.

(D) Os vetores de coordenadas (0, 3, –4) e (0, 4, 3) não são colineares.

Opção (B)

6.2. 1.º Processo

$E(0; 12{,}5; 0)$

Sabe-se que *AC* ⊥ *CB*, pois o triângulo [*ABC*] e retângulo em *B*.

Sabe-se que *AC* ⊥ *CD*, pois [*CD*] é a altura do prisma triangular reto.

AC é perpendicular ao plano *BCD*.

Logo, uma equação do plano *BCD* é do tipo $4y + 3z + d = 0$.

Como o ponto *E* pertence ao plano:

$4 \times 12{,}5 + 0 + d = 0 \Leftrightarrow d = -50$

BCD: $4y + 3z - 50 = 0$

O ponto *C* é a interseção da reta *AC* com o plano *BCD*:

$(10, 4k, 3k)$, $k \in IR$ é um ponto genérico da reta *AC*:

$4 \times 4k + 3 \times 3k - 50 = 0 \Leftrightarrow 25k = 50 \Leftrightarrow k = 2$

$k = 2 \leadsto C(10, 8, 6)$

2.º Processo

As coordenadas do ponto *A* são (10, 0, 0).

As coordenadas do ponto *B* são (10; 12,5; 0).

Como *C* pertence à reta *AC*, as coordenadas do ponto *C* são de forma $(10, 4k, 3k)$, com $k \in IR$.

Como o triângulo [*ABC*] está inscrito numa semicircunferência de diâmetro [*AB*], os vetores $\overrightarrow{AC}$ e $\overrightarrow{BC}$ são perpendiculares, logo $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BC} = 0$.

$\overrightarrow{AC} = (10, 4k, 3k) - (10, 0, 0) = (0, 4k, 3k)$

$\overrightarrow{BC} = (10, 4k, 3k) - (10; 12{,}5; 0) = (0; 4k - 12{,}5; 3k)$

$\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BC} = 0 \Leftrightarrow (0, 4k, 3k) . (0; 4k - 12{,}5; 3k) = 0$

$\Leftrightarrow 16k^2 - 50k + 9k^2 = 0$

$\Leftrightarrow 25k^2 - 50k = 0$

$\Leftrightarrow k(25k - 50) = 0$

$\Leftrightarrow k = 0 \vee k = 2$

Como *C* não pertence ao eixo Ox, entao $k \neq 0$. Logo, $k = 2$.

$k = 2 \leadsto C(10, 8, 6)$

3.º Processo

As coordenadas do ponto *A* são (10, 0, 0).

As coordenadas do ponto *B* são (10; 12,5; 0).

Como *C* pertence à reta *AC*, as suas coordenadas são da forma $(10, 4k, 3k)$, com $k \in IR$.

C pertence à superfície esférica de diâmetro [*AB*] definida pela equação

$(x-10)^2+\left(y-\frac{25}{4}\right)^2+z^2=\left(\frac{25}{4}\right)^2$. Logo:

$$0^2+\left(4k-\frac{25}{4}\right)^2+(3k)^2=\left(\frac{25}{4}\right)^2 \Leftrightarrow 16k^2-50k+\frac{625}{16}+9k^2=\frac{625}{16}$$

$$\Leftrightarrow 25k^2-50k=0$$

$$\Leftrightarrow k(25k-50)=0$$

$$\Leftrightarrow k=0 \quad \vee \quad k=2$$

Como *C* não pertence ao eixo Ox, entao $k \neq 0$. Logo, $k = 2$.

$k = 2 \leadsto C(10, 8, 6)$

7. $\overrightarrow{OP}.\overrightarrow{OQ}=3 \Leftrightarrow ||\overrightarrow{OP}|| \times ||\overrightarrow{OQ}|| \times \cos(\widehat{\overrightarrow{OP}.\overrightarrow{OQ}}) = 3$

$Q(2\cos\alpha, 2\operatorname{sen}\alpha)$

$P(2\cos\alpha, -2\operatorname{sen}\alpha)$

$$\Leftrightarrow 2\times 2\times \cos\big(2(\alpha-\pi)\big)=3$$

$$\Leftrightarrow 4\times\cos(2\alpha-2\pi)=3$$

$$\Leftrightarrow 4\times\cos(2\alpha)=3$$

$$\Leftrightarrow \cos(2\alpha)=\frac{3}{4}$$

8. $a(t+3)-a(t)=25, -3 \leq t \leq 5$

Cálculo auxiliar

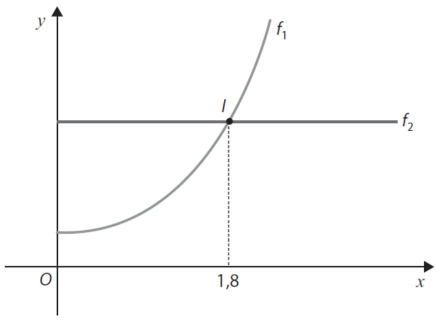
$0 \leq t+3 \leq 8$

$-3 \leq t \leq 5$

Utilizando x como variavel independente:

$$f_1(x)=100\left(x+3+(10-x-3)\ln\left(1-\frac{x+3}{10}\right)\right)-4{,}9(x+3)^2-100\left(x+(10-x)\ln\left(1-\frac{x}{10}\right)\right)-4{,}9x^2$$

$f_2(x)=25$



Assim, $t \approx 1{,}8$ s.

9. $D_f = \mathbb{R}$

$D_g = \mathbb{R}^+$

$r: y=2x-1$

I. A afirmação é falsa.

Como $\lim\limits_{x\to+\infty}\big(f(x)-(2x-1)\big)=0$, então o gráfico da função *f* admite uma assíntota oblíqua quando $x\to+\infty$ de equação $y=2x-1$, pelo que não existe assíntota horizontal ao gráfico de *f* quando $x\to+\infty$.

II. A afirmação é falsa.

Como a reta de equação $y = 2x - 1$ é tangente ao gráfico de *g* em $x = 1$, *g*(1) = 2 – 1 = 1 e, como *g* e diferenciável, então *g* é contínua em $x = 1$, logo $\lim\limits_{x \to 1} g(x) = g(1) = 1$.

III. A afirmação é falsa.

Se o gráfico de *f* tem a concavidade voltada para cima, então $f''(x) \geq 0, \forall x \in \mathrm{IR}$.

Se o gráfico de *g* tem a concavidade voltada para baixo, então $g''(x) \leq 0, \forall x \in \mathrm{IR}^+$.

Logo, $g''(x) \leq f''(x), \forall x \in]0, +\infty[$, o que contradiz a afirmação $f''(x) \leq g''(x), \forall x \in]0, +\infty[$.

10. Um argumento de z é $\frac{\pi}{4}$.

Um argumento de w é $\frac{\pi}{4} + \frac{5\pi}{8} = \frac{7\pi}{8}$.

Um argumento de $w \times z$ é $\frac{7\pi}{8} + \underbrace{\frac{\pi}{4}}_{(\times 2)} = \frac{9\pi}{8}$.

Opção (C)

11. $w = \frac{e^{i\frac{5\pi}{6}} - i^{17}}{i} = \frac{\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) + i\,\mathrm{sen}\left(\frac{5\pi}{6}\right) - i}{i} = \frac{-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i - i}{i} =$

$$= \frac{-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i}{i} =$$

$$= \frac{-\frac{\sqrt{3}}{2}i + \frac{1}{2}}{-1} =$$

$$= -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

$|w| = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}} = \sqrt{1} = 1$

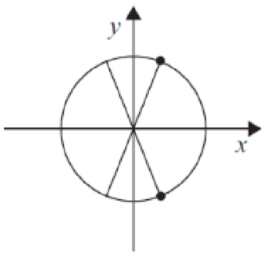
$\mathrm{tg}\alpha = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{-\frac{1}{2}} \wedge \alpha \in 2.^{\circ}\,\mathrm{Q} \Leftrightarrow \mathrm{tg}\alpha = -\sqrt{3} \wedge \alpha \in 2.^{\circ}\,\mathrm{Q}$

$\alpha = \frac{2\pi}{3}$, por exemplo.

$z^2 = 1e^{i\frac{2\pi}{3}}$

Pretendemos determinar as raízes quadradas do número $e^{i\frac{2\pi}{3}}$ que são da forma:

$z_k = e^{i\left(\frac{\frac{2\pi}{3} + 2k\pi}{2}\right)}, \ k \in \{0, 1\}$



$k = 0 \curvearrowright z_0 = e^{i\frac{\pi}{3}} = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\,\mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$

$k = 1 \curvearrowright z_1 = e^{i\frac{4\pi}{3}} = \cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) + i\,\mathrm{sen}\left(4\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$

12.

12.1. $f(x) = \text{sen}(2x) + x$

$$\begin{aligned} f'(x) = (2x)' \cos(2x) + x' &= 2\cos(2x) + 1 = \\ &= 2(\cos^2 x - \text{sen}^2 x) + 1 = \\ &= 2\cos^2 x - 2\text{sen}^2 x + 1 = \\ &= 2(1 - \text{sen}^2 x) - 2\text{sen}^2 x + 1 = \\ &= 2 - 2\text{sen}^2 x - 2\text{sen}^2 x + 1 = \\ &= -4\text{sen}^2 x + 3 = \\ &= 3 - 4\text{sen}^2 x \end{aligned}$$

Opção (D)

12.2. $f(x) = -x + 2 \Leftrightarrow f(x) + x - 2 = 0$

Seja g a função, de domínio $[0, \pi]$, definida por $g(x) = f(x) + x - 2$, ou seja, $g(x) = \text{sen}(2x) + 2x - 2$.

g é contínua, por se tratar da soma de duas funções contínuas (uma função trigonométrica e uma função polinomial). Em particular, g e contínua em $\left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\right]$.

$$g\left(\frac{\pi}{6}\right) = \text{sen}\left(\frac{2\pi}{6}\right) + \frac{2\pi}{6} - 2 = \text{sen}\left(\frac{\pi}{3}\right) + \frac{\pi}{3} - 2 = \underbrace{\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\pi}{3} - 2}_{\approx 0{,}0868} < 0$$

$$g\left(\frac{\pi}{3}\right) = \text{sen}\left(\frac{2\pi}{3}\right) + \frac{2\pi}{3} - 2 = \underbrace{\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{2\pi}{3} - 2}_{\approx 0{,}960421} > 0$$

$$g\left(\frac{\pi}{6}\right) < 0 < g\left(\frac{\pi}{3}\right)$$

Logo, pelo teorema de Bolzano-Cauchy, concluímos que $\exists c \in \left]\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\right[: g(c) = 0$, isto é, $\exists c \in \left]\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\right[: f(c) + c - 2 = 0 \Leftrightarrow \exists c \in \left]\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\right[: f(c) = -c + 2$

Logo, o gráfico da função f interseta a reta *r* em, pelo menos, um ponto de abcissa pertencente ao intervalo $\left]\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\right[$.

13. $f(x) = ax^2 + bx$

$f'(x) = 2ax + b$

$f'(x) = a \Leftrightarrow 2ax + b = a \Leftrightarrow 2ax = a - b \Leftrightarrow x = \frac{a-b}{2a}$

- T pertence à reta definida por $y = ax + b$, logo:

$y = a \times \frac{a-b}{2a} + b = \frac{a-b}{2} + b = \frac{a}{2} - \frac{b}{2} + \frac{2b}{2} = \frac{a+b}{2}$

$T\left(\frac{a-b}{2a}, \frac{a+b}{2}\right)$

• T pertence ao gráfico de f:

$$f\left(\frac{a-b}{2a}\right) = a\left(\frac{a-b}{2a}\right)^2 + b\left(\frac{a-b}{2a}\right) = a \times \frac{a^2-2ab+b^2}{4a^2} + \frac{ab-b^2}{2a} =$$

$$= \frac{a^2-2ab+b^2}{4a} + \underbrace{\frac{ab-b^2}{2a}}_{(\times 2)} =$$

$$= \frac{a^2-2ab+b^2+2ab-2b^2}{4a} =$$

$$= \frac{a^2-b^2}{4a}$$

$$T\left(\frac{a-b}{2a}, \frac{a^2-b^2}{4a}\right)$$

Logo:

$$\frac{a^2-b^2}{4a} = \underbrace{\frac{a+b}{2}}_{(\times 2a)} \Leftrightarrow \frac{a^2-b^2}{4a} = \frac{2a^2+2ab}{4a} \Leftrightarrow \frac{a^2+2ab+b^2}{4a} = 0$$

$$\Leftrightarrow (a+b)^2 = 0 \quad \underbrace{4a \neq 0}_{a \in \mathrm{IR}\backslash\{0\}}$$

$$\Leftrightarrow a + b = 0$$

$$\Leftrightarrow a = -b$$

Então:

$T\left(\frac{-b-b}{2(-b)}, \frac{-b+b}{2}\right)$, ou seja, $T\left(\frac{-2b}{-2b}, 0\right)$, isto é, $T(1, 0)$.