Prova de Matemática A

Ensino Secundário | maio de 2022

12.º Ano de Escolaridade

Duração da Prova: 120 minutos | Tolerância: 30 minutos **8 páginas**

VERSÃO 1

Utilize apenas caneta ou esferográfica de tinta azul ou preta.

É permitido o uso de régua, compasso, esquadro, transferidor e calculadora gráfica.

Não é permitido o uso de corretor. Risque aquilo que pretende que não seja classificado.

Para cada resposta, identifique o grupo e o item.

Apresente as suas respostas de forma legível.

Apresente apenas uma resposta para cada item.

A prova inclui um formulário.

As cotações dos itens encontram-se no final do enunciado da prova.

Na resposta aos itens de escolha múltipla, selecione a opção correta.

Escreva, na folha de respostas, o número do item e a letra que identifica a opção escolhida.

Na resposta aos restantes itens, apresente **todos os cálculos** que tiver de efetuar e **todas as justificações** necessárias.

Quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, apresente sempre o **valor exato**.

Formulário

Comprimento de um arco de circunferência

αr (α – amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r – raio)

Áreas de figuras planas

Losango: $\frac{\text{Diagonal maior} \times \text{Diagonal menor}}{2}$

Trapézio: $\frac{\text{Base maior} + \text{base menor}}{2} \times \text{Altura}$

Polígono regular: Semiperímetro $\times$ Apótema

Setor circular: $\frac{\alpha r^2}{2}$ (α – amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r – raio)

Áreas de superfície

Área lateral de um cone: $\pi\, r\, g$ (r – raio da base; g – geratriz)

Área de uma superfície esférica: $4\,\pi\, r^2$ (r – raio)

Volumes

Pirâmide: $\frac{1}{3} \times$ Área da base $\times$ Altura

Cone: $\frac{1}{3} \times$ Área da base $\times$ Altura

Esfera: $\frac{4}{3}\,\pi\, r^3$ (r – raio)

Progressões

Soma dos n primeiros termos de uma progressão (u_n)

Progressão aritmética: $\frac{u_1+u_n}{2} \times n$

Progressão geométrica: $u_1 \times \frac{1-r^n}{1-r}$

Complexos

$\left(r\, e^{i\theta}\right)^n = r^n\, e^{in\theta}$

As raízes índice n de $z = re^{i\theta}$ são dadas por:

$\sqrt[n]{r}\; e^{i\left(\frac{\theta+2k\pi}{n}\right)}$ ($k \in \{0, \dots, n-1\}$ e $n \in \mathbb{N}$)

Trigonometria

$\sin(a+b) = \sin a\, \cos b + \sin b\, \cos a$

$\cos(a+b) = \cos a\, \cos b - \sin a\, \sin b$

Regras de derivação

$(u+v)' = u' + v'$

$(u.v)' = u'.v + u.v'$

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'.v - u.v'}{v^2}$

$(u^n)' = n\,.u^{n-1}.u'$ $(n \in \mathbb{R})$

$(\operatorname{sen} u)' = u'.\cos u$

$(\cos u)' = -u'.\sin u$

$(\operatorname{tg} u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$

$(e^u)' = u'.e^u$

$(a^u)' = u'.a^u.\ln a$ $(a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$

$(\log_a u)' = \frac{u'}{u\,.\ln a}$ $(a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

Limites notáveis

$\lim \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$ $(n \in \mathbb{N})$

$\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

$\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

$\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

$\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{e^x}{x^p} = +\infty$ $(p \in \mathbb{R})$

1. Considere num referencial cartesiano do espaço, $Oxyz$, o plano β definido pela condição $x + 2y - z = -4$ e o ponto $P(2, 1, 3)$.

1.1. As coordenadas do ponto de interseção da reta OP com o plano β são:

(A) $(-8, -4, -12)$ **(B)** $(8, -4, 12)$

(C) $(12, -3, 10)$ **(D)** $(-12, 3, -2)$

1.2. Sejam Q e R os pontos do plano β que pertencem ao eixo Oz e ao eixo Oy, respetivamente.

Determine uma equação cartesiana do plano PQR.

2. Na **Figura 1** está representada, num referencial o.n.xOy, uma circunferência de centro O e raio 1.

Sabe-se que:

- os pontos A, B, C e D pertencem à circunferência
- os segmentos $[BA]$ e $[CD]$ são paralelos ao eixo das abcissas
- o triângulo $[AOD]$ é retângulo em O

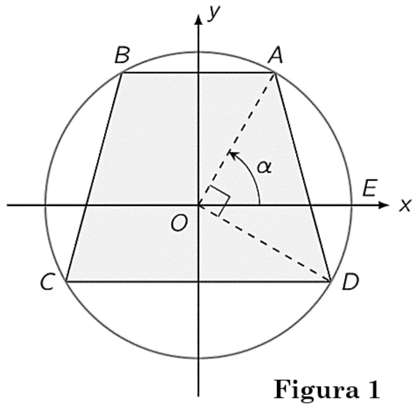

Figura 1

Seja α a amplitude, em radianos, do ângulo AOE $\left(\alpha \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[\right)$.

Mostre que a área do trapézio $[ABCD]$ é dada em função de α por:

$$1 + \sin(2\alpha)$$

3. De uma sucessão monótona (u_n), sabe-se que:

- $u_1 = 3$
- $u_2 = 2$
- $u_n > 0, \forall\, n \in \mathbb{N}$

Qual é a proposição **necessariamente** verdadeira?

(A) (u_n) não é limitada

(B) (u_n) é decrescente e limitada

(C) (u_n) converge para 0

(D) (u_n) é crescente e limitada

4. De uma progressão geométrica (w_n) monótona, sabe-se que:

- o sétimo termo é igual a 8
- o nono termo é igual a 2

De uma progressão aritmética (v_n), sabe-se que:

- o primeiro termo é igual w_4
- a sua razão é igual à razão da progressão geométrica, (w_n)

Sabe-se ainda que 213 é termo de (v_n).

Determine a ordem do termo 213.

5. Considere a função definida em $\mathbb{R}^+$ por $f(x) = x \ln\left(\frac{1}{x}\right)$.

5.1. Seja (x_n) uma sucessão tal que $\lim f(x_n) = -\infty$.

Qual das seguintes, pode ser a sucessão (x_n)?

(A) $\frac{n}{n^2+2022}$ **(B)** $\frac{n^2}{n^2+2022}$ **(C)** $\frac{\sqrt{n}}{n+2022}$ **(D)** $\frac{n^2}{n+2022}$

Sem recorrer à calculadora, a não ser para eventuais cálculos numéricos, resolva os dois itens seguintes:

5.2. Determine as coordenadas do ponto do gráfico de f em que a ordenada é metade da abcissa.

5.3. Mostre que $\frac{1}{e}$ é extremo relativo da função f e indique, justificando, se se trata de um mínimo ou de um máximo.

6. Seja f uma função real, diferenciável em $\mathbb{R}$, tal que $f(1) = 1$ e $f'(1) = 2$.

Considere a função real de variável real definida, em $\mathbb{R}^+$, por $g(x) = xf(\ln(x))$.

O valor do declive da reta tangente ao gráfico de g, no ponto de abcissa e, é:

(A) $1 + 2e$ **(B)** -1 **(C)** $\frac{2}{e}$ **(D)** 3

7. Considere a função h definida, em $\mathbb{R}$, por:

$$h(x)=\begin{cases} 1-3x+xe^{x-3} & se & x<3 \\ -5 & se & x=3 \\ \dfrac{x^2-x-6}{1-e^{x-3}} & se & x>3 \end{cases}$$

7.1. Averigue se a função h é contínua em $x=3$.

7.2. O gráfico da função h admite uma assíntota oblíqua, quando $x\to-\infty$.

Determine a equação reduzida dessa assíntota.

7.3.

7.3.1. Admita que no intervalo $]0,2[$ os gráficos de h e de h', primeira derivada da função h, se intersetam, no **máximo**, num ponto.

Recorrendo ao $Teorema\ de\ Bolzano-Cauchy$, mostre que os gráficos se intersetam **num único ponto**, em $]0,2[$.

7.3.2. Seja I o ponto de interseção, cuja a existência foi provada no item 7.3.1.

Considere a circunferência de centro em O e que passa em I.

Pretende-se determinar um valor aproximado às décimas da medida do raio da circunferência.

Sabe-se que a utilização das **capacidades gráficas da sua calculadora** lhe permite, neste caso, determinar valores aproximados das coordenadas do ponto I, mas não se pede para justificar este facto.

Para calcular o referido valor aproximado proceda da seguinte forma:

- equacione o problema
- reproduza o gráfico da função ou os gráficos das funções que tiver necessidade de visualizar na calculadora, devidamente identificado(s), incluindo o referencial.
- indique as coordenadas do ponto I, com aproximação às **centésimas.**
- exprima o raio da circunferência através das coordenadas de I e calcule um valor aproximado da medida do raio usando as aproximações acima referidas dessas coordenadas, arredondando **às décimas** o resultado assim obtido.

8. Seja k um número real não nulo.

Considere a função g, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $g(x) = \cos(-kx) + \sin(-2kx)$

Mostre que a segunda derivada de g, g'', pode ser dada por:

$$g''(x) = -k^2 \cos(kx)\,(1 - 8\sin(kx))$$

Responda a um e um só dos grupos A ou B

Se responder a mais do que um destes grupos deve indicar qual deles pretende que seja classificado. Se não der esta indicação será classificado o grupo a que responder em primeiro lugar.

Grupo A

9. Seja $\mathbb{C}$ o conjunto dos números complexos.

Considere a equação $z^3 - 2z + 4 = 0$

Esta equação tem três soluções em $\mathbb{C}$, sendo uma delas o número real -2

As imagens geométricas, no plano complexo, dessas três soluções, são vértices de um triângulo.

Sem recorrer à calculadora, determine o perímetro desse triângulo.

Apresente o resultado na forma $a + b\sqrt{n}$, onde $a, b \in \mathbb{Z}$ e $n \in \mathbb{N}$

10. Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, considere os números w_1 e w_2.

Sabe-se que:

- $w_2 = \frac{2e^{i\left(\frac{\pi}{4}\right)} - \sqrt{2}i^{25}}{2 + 2\sqrt{3}i}$
- a imagem geométrica de w_1 pertence à bissetriz dos quadrantes pares
- $|w_1| = |w_2|$
- $Re(w_1) < 0$ e $Im(w_1) > 0$

Sem recorrer à calculadora, determine, na forma trigonométrica, o número complexo w_1.

11. Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, considere os números:

$$z_1 = -2\cos\theta + 2i\sin\theta\,,\ \text{com } \theta \in [0, 2\pi[\quad \text{e} \quad z_2 = -\frac{1}{2}i\,z_1$$

Uma representação do número complexo z_2, na forma trigonométrica, é:

(A) $-e^{i(\pi-\theta)}$ **(B)** $e^{i(\pi-\theta)}$ **(C)** $e^{i\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)}$ **(D)** $e^{i\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)}$

Grupo B

9. No congresso *O Futuro da Educação em Portugal*, estiveram presentes Professores de Matemática e de outras áreas disciplinares.

Devido às medidas restritivas da COVID19, o uso de máscara foi **obrigatório** neste congresso.

Sabe-se que todos os Professores presentes cumpriram a medida restritiva.

Havia **apenas** dois tipos de máscaras permitidas no congresso: as *máscaras cirúrgicas* e as *máscaras respiratórias*.

Durante o congresso, foi possível concluir que:

- 65% dos congressistas não eram Professores de Matemática
- dos Professores de Matemática, 4 em cada 7, usaram máscara respiratória
- 45% dos congressistas eram Professores de Matemática ou usaram máscara cirúrgica

9.1. No final, foi realizado um sorteio aleatório de um congressista entre **todos** os congressistas presentes.

Constatou-se que o Professor selecionado usava uma máscara cirúrgica.

Qual é a probabilidade de não ser Professor de Matemática?

Apresente o resultado na forma de percentagem.

9.2. Sabe-se que estiveram presentes um total de 1200 professores no congresso e que o número de Professores de Matemática era o **triplo** do número de Professores de Português.

Foram escolhidos, ao acaso, de entre os presentes, **cinco** Professores, para formar uma comissão que organizará o congresso seguinte.

Quantas comissões podem ser constituídas com exatamente três Professores de Matemática e, pelo menos, um Professor de Português?

(A) $140 \times {}^{420}C_3 \times 640$

(B) ${}^{420}C_3\left(640 \times 140 + {}^{140}C_2\right)$

(C) ${}^{140}C_2 \times {}^{420}C_3$

(D) ${}^{640}C_2 \times {}^{420}C_3$

CD5183

10. Seja $(E, \mathcal{P}(E), P)$ um espaço de probabilidades e $A, B \in \mathcal{P}(E)$ acontecimentos possíveis.

Mostre que:

$$1 + P(A|\bar{B}) \times \left(\frac{1}{P(B)} - 1\right) = P(\bar{A}|B) + \frac{P(A)}{P(B)}$$

FIM

<table>
<tr><th colspan="12">Item</th></tr>
<tr><th colspan="12">Cotação (em pontos)</th></tr>
<tr><td>1.1.</td><td>1.2.</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5.1.</td><td>5.2.</td><td>5.3.</td><td>6</td><td>7.1.</td><td rowspan="6">TOTAL</td><td rowspan="6">200 pontos</td></tr>
<tr><td>10</td><td>12</td><td>14</td><td>10</td><td>12</td><td>10</td><td>12</td><td>12</td><td>10</td><td>12</td></tr>
<tr><td rowspan="2">7.2.</td><td rowspan="2">7.3.1.</td><td rowspan="2">7.3.2.</td><td rowspan="2">8</td><td colspan="3">GRUPO A</td><td colspan="3">GRUPO B</td></tr>
<tr><td>9</td><td>10</td><td>11</td><td>9.1.</td><td>9.2.</td><td>10</td></tr>
<tr><td>12</td><td>14</td><td>14</td><td>12</td><td>12</td><td>12</td><td>10</td><td>12</td><td>10</td><td>12</td></tr>
</table>

Prova de Matemática A

Ensino Secundário | maio de 2022

12.º Ano de Escolaridade

Duração da Prova: 120 minutos | Tolerância: 30 minutos **8 páginas**

VERSÃO 2

Utilize apenas caneta ou esferográfica de tinta azul ou preta.

É permitido o uso de régua, compasso, esquadro, transferidor e calculadora gráfica.

Não é permitido o uso de corretor. Risque aquilo que pretende que não seja classificado.

Para cada resposta, identifique o grupo e o item.

Apresente as suas respostas de forma legível.

Apresente apenas uma resposta para cada item.

A prova inclui um formulário.

As cotações dos itens encontram-se no final do enunciado da prova.

Na resposta aos itens de escolha múltipla, selecione a opção correta.

Escreva, na folha de respostas, o número do item e a letra que identifica a opção escolhida.

Na resposta aos restantes itens, apresente **todos os cálculos** que tiver de efetuar e **todas as justificações** necessárias.

Quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, apresente sempre o **valor exato**.

Formulário

Comprimento de um arco de circunferência

αr (α – amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r – raio)

Áreas de figuras planas

Losango: $\frac{\text{Diagonal maior} \times \text{Diagonal menor}}{2}$

Trapézio: $\frac{\text{Base maior} + \text{base menor}}{2} \times \text{Altura}$

Polígono regular: Semiperímetro $\times$ Apótema

Setor circular: $\frac{\alpha r^2}{2}$ (α – amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r – raio)

Áreas de superfície

Área lateral de um cone: $\pi\, r\, g$ (r – raio da base; g – geratriz)

Área de uma superfície esférica: $4\,\pi\, r^2$ (r – raio)

Volumes

Pirâmide: $\frac{1}{3} \times$ Área da base $\times$ Altura

Cone: $\frac{1}{3} \times$ Área da base $\times$ Altura

Esfera: $\frac{4}{3}\,\pi\, r^3$ (r – raio)

Progressões

Soma dos n primeiros termos de uma progressão (u_n)

Progressão aritmética: $\frac{u_1 + u_n}{2} \times n$

Progressão geométrica: $u_1 \times \frac{1-r^n}{1-r}$

Complexos

$\left(r\, e^{i\theta}\right)^n = r^n\, e^{in\theta}$

As raízes índice n de $z = re^{i\theta}$ são dadas por:

$\sqrt[n]{r}\, e^{i\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right)}$ ($k \in \{0, \ldots, n-1\}$ e $n \in \mathbb{N}$)

Trigonometria

$\sin(a+b) = \sin a\, \cos b + \sin b\, \cos a$

$\cos(a+b) = \cos a\, \cos b - \sin a\, \sin b$

Regras de derivação

$(u+v)' = u' + v'$

$(u.v)' = u'.v + u.v'$

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'.v - u.v'}{v^2}$

$(u^n)' = n\,.u^{n-1}.u' \, (n \in \mathbb{R})$

$(\operatorname{sen} u)' = u'.\cos u$

$(\cos u)' = -u'.\sin u$

$(\operatorname{tg} u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$

$(e^u)' = u'.e^u$

$(a^u)' = u'.a^u.\ln a \, (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$

$(\log_a u)' = \frac{u'}{u\,.\ln a} \, (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

Limites notáveis

$\lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e \; (n \in \mathbb{N})$

$\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

$\lim\limits_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^p} = +\infty \; (p \in \mathbb{R})$

1. Considere num referencial cartesiano do espaço, $Oxyz$, o plano β definido pela condição $x + 2y - z = -4$ e o ponto $P(2, 1, 3)$.

1.1. As coordenadas do ponto de interseção da reta OP com o plano β são:

(A) $(12, -3, 10)$ **(B)** $(-8, -4, -12)$

(C) $(-12, 3, -2)$ **(D)** $(8, -4, 12)$

1.2. Sejam Q e R os pontos do plano β que pertencem ao eixo Oz e ao eixo Oy, respetivamente.

Determine uma equação cartesiana do plano PQR.

2. Na **Figura 1** está representada, num referencial o.n. xOy, uma circunferência de centro O e raio 1.

Sabe-se que:

- os pontos A, B, C e D pertencem à circunferência
- os segmentos $[BA]$ e $[CD]$ são paralelos ao eixo das abcissas
- o triângulo $[AOD]$ é retângulo em O

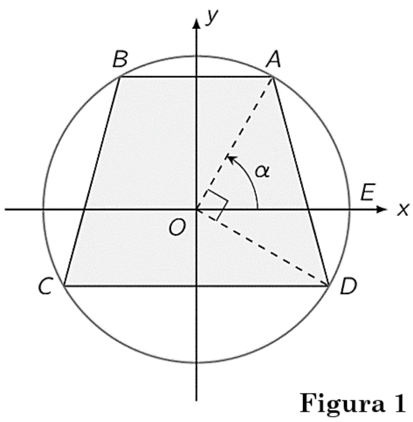

Figura 1

Seja α a amplitude, em radianos, do ângulo AOE $\left(\alpha \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[\right)$.

Mostre que a área do trapézio $[ABCD]$ é dada em função de α por:

$$1 + \sin(2\alpha)$$

3. De uma sucessão monótona (u_n), sabe-se que:

- $u_1 = 3$
- $u_2 = 2$
- $u_n > 0, \forall\, n \in \mathbb{N}$

Qual é a proposição **necessariamente** verdadeira?

(A) (u_n) é decrescente e limitada

(B) (u_n) é crescente e limitada

(C) (u_n) não é limitada

(D) (u_n) converge para 0

4. De uma progressão geométrica (w_n) monótona, sabe-se que:

- o sétimo termo é igual a 8
- o nono termo é igual a 2

De uma progressão aritmética (v_n), sabe-se que:

- o primeiro termo é igual w_4
- a sua razão é igual à razão da progressão geométrica, (w_n)

Sabe-se ainda que 213 é termo de (v_n).

Determine a ordem do termo 213.

5. Considere a função definida em $\mathbb{R}^+$ por $f(x) = x \ln\left(\frac{1}{x}\right)$.

Seja (x_n) uma sucessão tal que $\lim f(x_n) = -\infty$.

5.1. Qual das seguintes, pode ser a sucessão (x_n)?

(A) $\frac{n^2}{n+2022}$ **(B)** $\frac{\sqrt{n}}{n+2022}$ **(C)** $\frac{n}{n^2+2022}$ **(D)** $\frac{n^2}{n^2+2022}$

Sem recorrer à calculadora, a não ser para eventuais cálculos numéricos, resolva os dois itens seguintes:

5.2. Determine as coordenadas do ponto do gráfico de f em que a ordenada é metade da abcissa.

5.3. Mostre que $\frac{1}{e}$ é extremo relativo da função f e indique, justificando, se se trata de um mínimo ou de um máximo.

6. Seja f uma função real, diferenciável em $\mathbb{R}$, tal que $f(1) = 1$ e $f'(1) = 2$.

Considere a função real de variável real definida em $\mathbb{R}^+$ por $g(x) = xf(\ln(x))$.

O valor do declive da reta tangente ao gráfico de g, no ponto de abcissa e, é:

(A) -1 **(B)** $1 + 2e$ **(C)** 3 **(D)** $\frac{2}{e}$

7. Considere a função h definida, em $\mathbb{R}$, por:

$$h(x) = \begin{cases} 1 - 3x + xe^{x-3} & se \quad x < 3 \\ -5 & se \quad x = 3 \\ \dfrac{x^2 - x - 6}{1 - e^{x-3}} & se \quad x > 3 \end{cases}$$

7.1. Averigue se a função h é contínua em $x = 3$.

7.2. O gráfico da função h admite uma assíntota oblíqua, quando $x \to -\infty$

Determine a equação reduzida dessa assíntota.

7.3.

7.3.1. Admita que no intervalo $]0,2[$ os gráficos de h e de h', primeira derivada da função h, se intersetam, no **máximo**, num ponto. Recorrendo ao $Teorema\ de\ Bolzano - Cauchy$, mostre que os gráficos se intersetam **num único ponto**, em $]0,2[$.

7.3.2. Seja I o ponto de interseção, cuja a existência foi provada no item 7.3.1.

Considere a circunferência de centro em O e que passa em I.

Pretende-se determinar um valor aproximado às décimas da medida do raio da circunferência.

Sabe-se que a utilização das **capacidades gráficas da sua calculadora** lhe permite, neste caso, determinar valores aproximados das coordenadas do ponto I, mas não se pede para justificar este facto.

Para calcular o referido valor aproximado proceda da seguinte forma:

- equacione o problema
- reproduza o gráfico da função ou os gráficos das funções que tiver necessidade de visualizar na calculadora, devidamente identificado(s), incluindo o referencial.
- indique as coordenadas do ponto I, com aproximação às **centésimas.**
- exprima o raio da circunferência através das coordenadas de I e calcule um valor aproximado da medida do raio usando as aproximações acima referidas dessas coordenadas, arredondando **às décimas** o resultado assim obtido

8. Seja k um número real não nulo.

Considere a função g, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $g(x) = \cos(-kx) + \sin(-2kx)$

Mostre que a segunda derivada de g, g'', pode ser dada por:

$$g''(x) = -k^2 \cos(kx)\,(1 - 8\sin(kx))$$

Responda a um e um só dos grupos A ou B

Se responder a mais do que um destes grupos deve indicar qual deles pretende que seja classificado. Se não der esta indicação será classificado o grupo a que responder em primeiro lugar.

Grupo A

9. Seja $\mathbb{C}$ o conjunto dos números complexos.

Considere a equação $z^3 - 2z + 4 = 0$

Esta equação tem três soluções em $\mathbb{C}$, sendo uma delas o número real -2

As imagens geométricas, no plano complexo, dessas três soluções, são vértices de um triângulo.

Sem recorrer à calculadora, determine o perímetro desse triângulo.

Apresente o resultado na forma $a + b\sqrt{n}$, onde $a, b \in \mathbb{Z}$ e $n \in \mathbb{N}$

10. Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, considere os números w_1 e w_2.

Sabe-se que:

- $w_2 = \frac{2e^{i\left(\frac{\pi}{4}\right)} - \sqrt{2}i^{25}}{2 + 2\sqrt{3}i}$
- a imagem geométrica de w_1 pertence à bissetriz dos quadrantes pares
- $|w_1| = |w_2|$
- $Re(w_1) < 0$ e $Im(w_1) > 0$

Sem recorrer à calculadora, determine, na forma trigonométrica, o número complexo w_1.

11. Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, considere os números:

$$z_1 = -2\cos\theta + 2i\sin\theta\,,\ \text{com } \theta \in [0, 2\pi[\quad \text{e} \quad z_2 = -\frac{1}{2}i\,z_1$$

Uma representação do número complexo z_2, na forma trigonométrica, é:

(A) $-e^{i(\pi-\theta)}$ **(B)** $e^{i\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)}$ **(C)** $e^{i\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)}$ **(D)** $e^{i(\pi-\theta)}$

Grupo B

9. No congresso *O Futuro da Educação em Portugal*, estiveram presentes Professores de Matemática e de outras áreas disciplinares.

Devido às medidas restritivas da COVID19, o uso de máscara foi **obrigatório** neste congresso.

Sabe-se que todos os Professores presentes cumpriram a medida restritiva.

Havia **apenas** dois tipos de máscaras permitidas no congresso: as *máscaras cirúrgicas* e as *máscaras respiratórias*.

Durante o congresso, foi possível concluir que:

- 65% dos congressistas não eram Professores de Matemática
- dos Professores de Matemática, 4 em cada 7, usaram máscara respiratória
- 45% dos congressistas eram Professores de Matemática ou usaram máscara cirúrgica

9.1. No final, foi realizado um sorteio aleatório, de um congressista entre **todos** os presentes.

Constatou-se que o Professor selecionado usava uma máscara cirúrgica.

Qual é a probabilidade de não ser Professor de Matemática?

Apresente o resultado na forma de percentagem.

9.2. Sabe-se que estiveram presentes um total de 1200 professores no congresso e que o número de Professores de Matemática era o **triplo** do número de Professores de Português.

Foram escolhidos, ao acaso, de entre os presentes, **cinco** Professores para formar uma comissão que organizará o congresso seguinte.

Quantas comissões podem ser constituídas com exatamente três Professores de Matemática e, pelo menos, um Professor de Português?

(A) ${}^{140}C_2 \times {}^{420}C_3$ **(B)** ${}^{640}C_2 \times {}^{420}C_3$

(C) $140 \times {}^{420}C_3 \times 640$ **(D)** ${}^{420}C_3(640 \times 140 + {}^{140}C_2)$

10. Seja $(E, \mathcal{P}(E), P)$ um espaço de probabilidades e $A, B \in \mathcal{P}(E)$ acontecimentos possíveis.

Mostre que:

$$1 + P(A|\bar{B}) \times \left(\frac{1}{P(B)} - 1\right) = P(\bar{A}|B) + \frac{P(A)}{P(B)}$$

FIM

<table>
<tr><th colspan="12">Item</th></tr>
<tr><th colspan="12">Cotação (em pontos)</th></tr>
<tr><th>1.1.</th><th>1.2.</th><th>2</th><th>3</th><th>4</th><th>5.1.</th><th>5.2.</th><th>5.3.</th><th>6</th><th>7.1.</th><th rowspan="6">TOTAL</th><th rowspan="6">200 pontos</th></tr>
<tr><td>10</td><td>12</td><td>14</td><td>10</td><td>12</td><td>10</td><td>12</td><td>12</td><td>10</td><td>12</td></tr>
<tr><th rowspan="2">7.2.</th><th rowspan="2">7.3.1.</th><th rowspan="2">7.3.2.</th><th rowspan="2">8</th><th colspan="3">GRUPO A</th><th colspan="3">GRUPO B</th></tr>
<tr><th>9</th><th>10</th><th>11</th><th>9.1.</th><th>9.2.</th><th>10</th></tr>
<tr><td>12</td><td>14</td><td>14</td><td>12</td><td>12</td><td>12</td><td>10</td><td>12</td><td>10</td><td>12</td></tr>
</table>