www.sinalmaismat.com
facebook.com/sinalmaismat
instagram.com/sinalmaismat

Prova Modelo de Exame Final Nacional

Prova 3 | Ensino Secundário | 2020

12º Ano de Escolaridade

Nuno Miguel Guerreiro

Duração da Prova: 150 minutos. | Tolerância: 30 minutos

Os items sombreados a azul são obrigatórios, estando também representados na margem da prova como **Ob.** Dos restantes 14 items da prova, apenas os 8 melhores contarão para a nota final.

É permitido o uso da calculadora.

Utilize apenas caneta ou esferográfica de tinta azul ou preta.

Não é permitido o uso do corretor. Risque aquilo que pretende que não seja classificado.

Para cada resposta, identifique o caderno e o item.

Apresente as suas respostas de forma legível.

Apresente apenas uma resposta para cada item.

As cotações dos itens encontram-se na margem de cada página.

Na resposta aos itens de escolha múltipla, selecione a opção correta. Escreva, na folha de respostas, o número do item e a letra que identifica a opção escolhida.

Na resposta aos restantes itens, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias. Quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, apresente sempre o valor exato.

Todos os itens desta prova são originais do autor – referência ao autor no margem da prova. Prova realizada em junho de 2020 . Última atualização às 15:57 de 4 de Julho de 2020.

Formulário

Geometria

Comprimento de um arco de circunferência:

αr (α – amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r – raio)

Área de um polígono regular: *Semiperímetro* $\times$ *Apótema*

Área de um sector circular:

$\dfrac{\alpha r^2}{2}$ (α – amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r – raio)

Área lateral de um cone: $\pi r g$ (r – raio da base; g – geratriz)

Área de uma superfície esférica: $4\pi r^2$ (r – raio)

Volume de uma pirâmide: $\dfrac{1}{3} \times$ *Área da base* $\times$ *Altura*

Volume de um cone: $\dfrac{1}{3} \times$ *Área da base* $\times$ *Altura*

Volume de uma esfera: $\dfrac{4}{3}\pi r^3$ (r – raio)

Progressões

Soma dos n primeiros termos de uma progressão (u_n):

Progressão aritmética: $\dfrac{u_1 + u_n}{2} \times n$

Progressão geométrica: $u_1 \times \dfrac{1 - r^n}{1 - r}$

Trigonometria

$\operatorname{sen}(a+b) = \operatorname{sen} a \cos b + \operatorname{sen} b \cos a$

$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b$

Complexos

$(\rho e^{i\theta})^n = \rho^n e^{in\theta}$

$\sqrt[n]{\rho e^{i\theta}} = \sqrt[n]{\rho}\, e^{i\frac{\theta + 2k\pi}{n}} \quad (k \in \{0, \ldots, n-1\} \text{ e } n \in \mathbb{N})$

Regras de derivação

$(u+v)' = u' + v'$

$(u\,v)' = u'\,v + u\,v'$

$\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'\,v - u\,v'}{v^2}$

$(u^n)' = n\,u^{n-1}\,u' \quad (n \in \mathbb{R})$

$(\operatorname{sen} u)' = u' \cos u$

$(\cos u)' = -u' \operatorname{sen} u$

$(\operatorname{tg} u)' = \dfrac{u'}{\cos^2 u}$

$(e^u)' = u'\,e^u$

$(a^u)' = u'\,a^u \ln a \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

$(\ln u)' = \dfrac{u'}{u}$

$(\log_a u)' = \dfrac{u'}{u \ln a} \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

Limites notáveis

$\lim \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n = e \quad (n \in \mathbb{N})$

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x^p} = +\infty \quad (p \in \mathbb{R})$

Cotações

1. Uma revista de música britânica teve a iniciativa de criar um inquérito nacional de forma a saber qual é a opinião dos habitantes no Reino Unido relativamente a qual consideram ser a melhor banda britânica de todos os tempos.

1.1. Um correspondente dessa revista em Manchester ficou responsável por fazer o inquérito a 18 pessoas.

O correspondente tem dois dias para obter as respostas e pode, no máximo, recolher a resposta de 10 pessoas por dia.

De quantas formas distintas pode o correspondente distribuir os inquéritos pelos dois dias?

(A) 48 620 **(B)** 136 136 **(C)** 145 860 **(D)** 408 408

1.2. Escolhe-se, ao acaso, um inquérito realizado pela revista.

Seja A o acontecimento "a pessoa inquirida tem nacionalidade inglesa", e seja B o acontecimento "a pessoa inquirida selecionou a banda *The Beatles*".

Sabe-se que:

- 80% dos inquiridos têm nacionalidade inglesa;
- entre os inquiridos que não têm nacionalidade inglesa, 1 em cada 5 selecionou os *The Beatles* como melhor banda inglesa de todos os tempos.

Determine $P\left(\overline{A} \middle| (A \cup B)\right)$.

Apresente o resultado em forma de fração irredutível.

1.3. Alguns dos inquiridos que selecionaram a banda *The Beatles* como melhor banda inglesa de todos os tempos foram ainda selecionados para um segundo inquérito, em que foi pedido que selecionassem aquele que consideram ser o melhor álbum da banda.

Sabe-se que três em cada dez desses inquiridos selecionaram o álbum *Abbey Road* como o seu favorito.

Escolheram-se, ao acaso, dois inquiridos neste segundo inquérito.

Sabe-se que a probabilidade de, pelo menos, um deles não ter considerado o álbum *Abbey Road* como o melhor da banda é $\frac{31}{34}$.

Determine o número de pessoas que foram questionadas no segundo inquérito.

2. Sejam a e b duas constantes reais.

Considere, para um dado $n \in \mathbb{N}$ par, a linha n do Triângulo de Pascal tal que:

- o maior elemento dessa linha tem valor a;
- o maior elemento da linha par seguinte tem valor b

Qual o valor do segundo maior elemento da linha n ?

(A) $\frac{b}{2}$ **(B)** $\frac{b}{2} + a$ **(C)** $\frac{a}{2}$ **(D)** $\frac{b}{2} - a$

3. Considere, num referencial o.n xOy, os pontos A e B tais que a mediatriz do segmento $[AB]$ é definida pela equação reduzida $y = 2x - 3$.

Sabe-se que a mediatriz interseta o segmento $[AB]$ no ponto de coordenadas $(2{,}1)$, e que o ponto A tem abcissa 6.

Qual é a ordenada do ponto B ?

(A) 3 **(B)** 2 **(C)** 1 **(D)** 0

4. Num referencial o.n $Oxyz$, considere o plano α definido pela equação $2x + y - 3z = 9$, e o ponto A de coordenadas $(2{,}2, -6)$.

Ob. (16) **4.1.** Seja a uma constante real, e P o ponto de coordenadas $(a, 1 - a, -3)$.

Sabe-se que a reta AP é paralela ao plano α.

Determine o valor de a.

Ob. (20) **4.2.** Seja $\mathcal{S}$ a superfície esférica de centro em A e raio $6\sqrt{2}$.

O ponto T é o ponto, de cota positiva, que resulta da interseção da superfície $\mathcal{S}$ com o eixo das cotas.

Determine o ponto de interseção entre a reta AT e o plano α.

5. Na Figura 1 (não necessariamente à escala), está representada, num referencial o.n xOy, uma circunferência de centro O.

Sabe-se que:

- os pontos B e D pertencem à circunferência;
- o ponto D pertence ao eixo Ox;
- os pontos A e D pertencem à reta de equação $x = 1$;
- o triângulo $[AOB]$ é retângulo em O;
- α é a amplitude, em radianos, do ângulo DOB $\left(\alpha \in \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right[\right)$;
- o ponto A tem ordenada $\frac{3}{2}$.

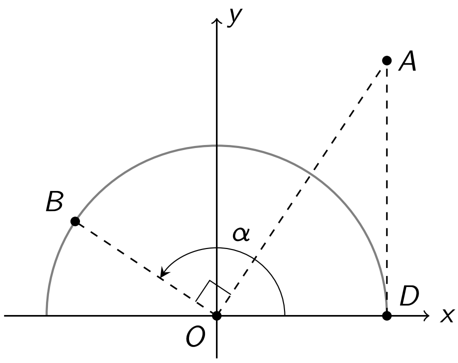

Figura 1

Qual é o valor, arredondado às centésimas, de $\cos(\pi + \alpha)$?

(A) $-0{,}83$ **(B)** $-0{,}55$ **(C)** $0{,}55$ **(D)** $0{,}83$

6. De uma progressão geométrica não monótona, (v_n), sabe-se que o seu segundo termo é -1 e o seu sexto termo é $-\frac{1}{16}$.

Considere a sucessão (u_n) de termo geral $u_n = (-1)^n\,(n\,v_n)$.

Comece por mostrar que o termo geral de (u_n) é $u_n = -n\,2^{2-n}$, e estude (u_n) quanto à monotonia para $n \geq 2$.

7. Seja f uma função **contínua**, de domínio $]-\infty, 2]$, definida por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{3}(x-1)^3 - x + k & \text{se } \; -2 \leq x \leq 2 \\ \dfrac{2x+4}{\sqrt{21+x^2}-5} & \text{se } \; x < -2 \end{cases}$$

7.1. Mostre que $k = 2$. **Ob. (20)**

7.2. Seja a uma constante real tal que $0 < a < 2$. **Ob. (16)**

Sabe-se que:

- O é a origem de um referencial o.n xOy e A é o ponto do gráfico de f de abcissa a;
- a reta s é a reta tangente ao gráfico de f no ponto A
- o ponto B é a interseção da reta s com o eixo Oy
- a distância entre os pontos O e A é igual à distância entre os pontos O e B

Recorrendo às capacidades gráficas da calculadora, determine o(s) valor(es) de a.

Na sua resposta deve:

- equacionar o problema;
- reproduzir, num referencial, o(s) gráfico(s) da(s) função(ões) visualizada(s) na calculadora que lhe permite(m) resolver a equação;
- apresentar o(s) valor(es) de a, com arredondamento às centésimas.

8. Seja f uma função, diferenciável em $\mathbb{R}$, cujo gráfico interseta o eixo Ox no ponto de abcissa $\frac{\pi}{2}$.

Sabe-se que $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \dfrac{\operatorname{sen}(2x) - f(x)}{2x - \pi} = 2$.

Qual é o valor de $f'\left(\frac{\pi}{2}\right)$?

(A) -6 **(B)** -4 **(C)** -2 **(D)** 0

9. Na Figura 2, está representado, no plano complexo, o triângulo $[OAB]$ e uma semicircunferência.

Tal como a figura sugere, o vértice O coincide com a origem do referencial, e os pontos A e B pertencem à semicircunferência.

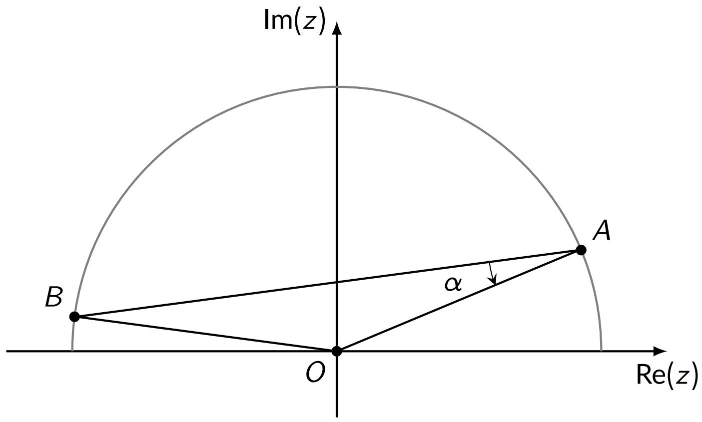

Figura 2

Seja z o número complexo cujo afixo é o ponto A, e seja w o número complexo cujo afixo é o ponto B.

Sabe-se que $\alpha = \frac{\pi}{12}$, e que $w = 2\cos\left(\frac{23\pi}{24}\right) + 2\,\mathrm{sen}\left(\frac{23\pi}{24}\right) i$.

Qual é a representação do número complexo iz ?

(A) $2e^{i\left(\frac{11\pi}{16}\right)}$ **(B)** $2e^{i\left(\frac{5\pi}{8}\right)}$ $2\sqrt{2}e^{i\left(\frac{11\pi}{16}\right)}$ **(D)** $2\sqrt{2}e^{i\left(\frac{5\pi}{8}\right)}$

10. Seja r um número real positivo, e seja θ um número real pertence ao intervalo $\left]-\frac{\pi}{4}, 0\right[$.

Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, considere $z_1 = -2\sqrt{3} - i$ e $z_2 = -1 + \sqrt{3}i$.

Seja $z = \frac{z_1 + 7i^{21}}{4i} + \overline{z_2}$ e $w = \frac{z}{\left(re^{i\theta}\right)^3}$.

O afixo do número complexo w pertence à circunferência centrada na origem de raio 8, e à bissetriz dos quadrantes pares.

Determine o valor de r e o valor de θ.

11. Na Figura 3, está representado o gráfico de uma função f, de domínio $[-\pi,\pi]$.

Tal como a figura sugere todos os objetos inteiros têm imagens inteiras.

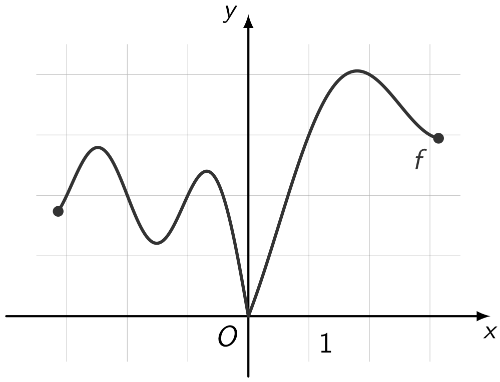

Figura 3

Seja h a função, de domínio $[-\pi,\pi]$, definida por $h(x) = f(\cos x)$.

Qual é o contradomínio de h ?

(A) $[-1,1]$ **(B)** $[2,3]$ **(C)** $[0,3]$ **(D)** $[0,1]$

12. Na Figura 4, está representada, num referencial o.n xOy, parte do gráfico da função f'', segunda derivada de f, contínua em $\mathbb{R}$.

Sabe-se que:

- -1, 0 e 4 são os únicos zeros da função f'';
- $f'(0) = 0$.

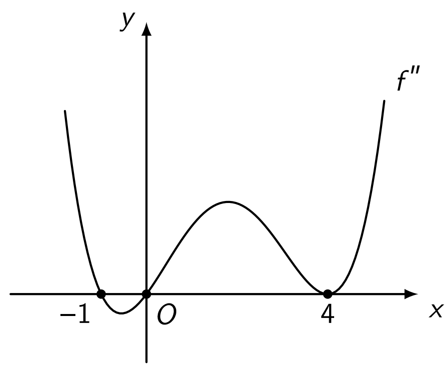

Figura 4

Considere as seguintes afirmações:

I) A função g, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $g(x) = f(x-1)$ admite 3 pontos de inflexão;

II) A função f é crescente em $]0,4[$.

Qual das seguintes afirmações é verdadeira?

(A) **I)** e **II)** são verdadeiras.

(B) **I)** é verdadeira e **II)** é falsa.

(C) **I)** é falsa e **II)** é verdadeira.

(D) **I)** e **II)** são falsas.

13. Seja g', de domínio $\mathbb{R}^+$, a primeira derivada de uma função g, de domínio $\mathbb{R}^+$, definida por

$$g'(x) = -4x + \ln(e^{2x} - 1)$$

13.1. Mostre, recorrendo exclusivamente a métodos analíticos, que existe pelo menos um ponto do gráfico de g' no intervalo $]1, 3[$, tal que a sua ordenada é igual ao simétrico do quadrado da sua abcissa.

Se utilizar a calculadora em eventuais cálculos numéricos, sempre que proceder a arredondamentos, use duas casas decimais.

13.2. Estude a função g quanto ao sentido das concavidades do seu gráfico e quanto à existência de pontos de inflexão.

Na sua resposta deve apresentar:

- o(s) intervalo(s) em que o gráfico de g tem concavidade voltada para baixo;
- o(s) intervalo(s) em que o gráfico de g tem concavidade voltada para cima;
- a(s) abcissa(s) do(s) ponto(s) de inflexão do gráfico de g.

FIM