



FICHA DE TRABALHO | SUCESSÕES E GEOMETRIA ANALÍTICA

PREPARAÇÃO PARA O EXAME NACIONAL DE MATEMÁTICA A

MATEMÁTICA A | 12.º ANO

"Conhece a Matemática e dominarás o Mundo."
Galileu Galilei

1. Seja (u_n) uma progressão aritmética tal que $u_4 = 15$ e $u_{10} = 33$.

Qual é o valor de $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{u_n}{3n-6} \right)^{2n}$?

A e^{-2}

B e^3

C e^6

D $+\infty$

2. Considere a sucessão (u_n) definida por recorrência da seguinte forma $\begin{cases} u_1 = -1 \\ u_2 = -2 \\ u_{n+2} \times u_n = u_{n+1}, \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$.

Qual das seguintes afirmações não é verdadeira?

A $u_{n+6} - u_n = 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}$

B (u_n) é limitada.

C (u_n) é convergente.

D (u_n) não é monótona.

3. Seja (u_n) uma progressão aritmética tal que $u_{30} + u_{40} = 40$.

3.1. Qual é a soma de todos os termos consecutivos de (u_n) entre os termos de ordem 10 e 60, incluindo-os?

A 1000

B 1020

C 1200

D 2040

3.2. Admita que $u_{10} = 5r$, sendo r a razão da progressão aritmética (u_n) , com $r \in \mathbb{R}$.

a) Mostre que $u_n = \frac{2n-10}{3}$.

b) Determine a soma dos primeiros quarenta e nove termos de ordem par da sucessão (u_n) .

4. Seja (w_n) uma progressão geométrica de termos positivos tal que $w_3 \times w_7 = w_1 = 16$.

4.1. Mostre que $w_n = \sqrt{2^{9-n}}$.

4.2. Qual é o valor da soma de todos os termos da progressão entre o sétimo e o décimo segundo, incluindo-os?

5. Seja (w_n) uma progressão geométrica de termos não nulos tal que $w_{n+3} + w_n = 0$, para todo o n natural

A soma dos 2020 primeiros termos de (w_n) é igual a:

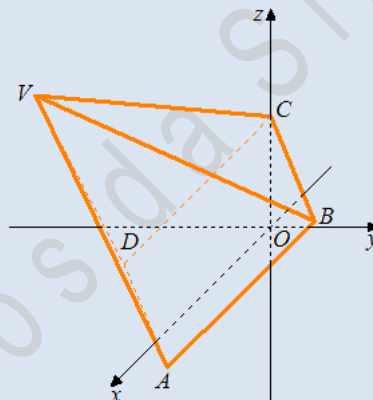
A 0

B $-w_1$

C w_1

D 2020

6. Na figura está representada, em referencial o.n. $Oxyz$, a pirâmide $[ABCDV]$ cuja base é o quadrilátero $[ABCD]$.



Sabe-se que:

- o ponto A pertence ao plano xOz e o ponto C pertence ao eixo Oz
- o ponto V tem a cota igual a 5 e abcissa positiva;
- a abcissa do ponto A é igual ao dobro da abcissa do ponto V
- $\overrightarrow{AV} \cdot \overrightarrow{CA} = -56$
- uma equação cartesiana do plano ACV é $5x + 8y + 10z = 30$

6.1. Mostre que $A(8, 0, -1)$ e que $V(4, -5, 5)$.

6.2. Determine a amplitude do ângulo AVC .

Apresente o resultado em graus, arredondado às décimas.

6.3. Admita que $D(0, -4, -1)$.

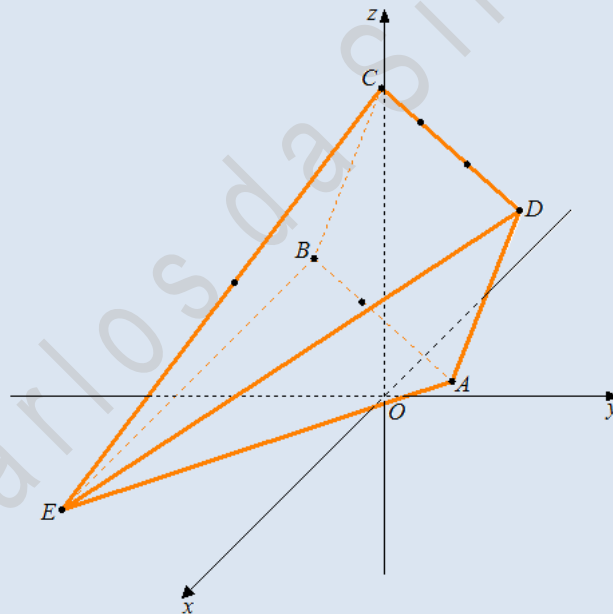
a) Mostre que uma equação vectorial da recta r que contém o ponto V e é perpendicular ao plano ABC é:

$$(x, y, z) = (-3, 9, -9) + k(-1, 2, -2), \quad k \in \mathbb{R}$$

b) Sabendo que ABC é o plano mediador do segmento de recta $[VQ]$, determine as coordenadas do ponto Q

c) Determine as coordenadas do ponto E , pertencente à recta r , de modo que a recta ED seja estritamente paralela ao plano ACV .

7. Na figura está representado em referencial o.n. $Oxyz$ a pirâmide $[ABCDE]$.



Sabe-se que:

- $\overrightarrow{AB}(-1, -3, 2)$ e $\overrightarrow{AE}(8, -5, 0)$
- $B(1, -1, 3)$ e $C(3, 1, 7)$

7.1. Mostre que uma equação vectorial da recta perpendicular a ABC que contém o ponto A é:

$$(x, y, z) = (-2, 4, 2) + k(4, -2, -1), \quad k \in \mathbb{R}$$

7.2. Mostre que $E(10, -3, 1)$ e que escreva uma equação cartesiana que define o plano paralelo a ABC e que contém o ponto E .

7.3. Determine a altura da pirâmide $[ABCDE]$.

7.4. Tal como sugerido na figura, além dos vértices, estão também assinalados mais quatro pontos: um sobre a aresta $[AB]$, dois sobre a aresta $[CD]$ e um sobre a aresta $[CE]$.

a) Escolhem-se, simultaneamente e ao acaso, três desses pontos assinalados.

Qual é a probabilidade de definirem o plano ABC ?

Apresente o resultado na forma de fracção irredutível.

b) Estão disponíveis dez cores para colorir as faces da pirâmide, entre as quais as cores verde, azul e encarnado.

A coloração deve ser feita respeitando as seguintes condições:

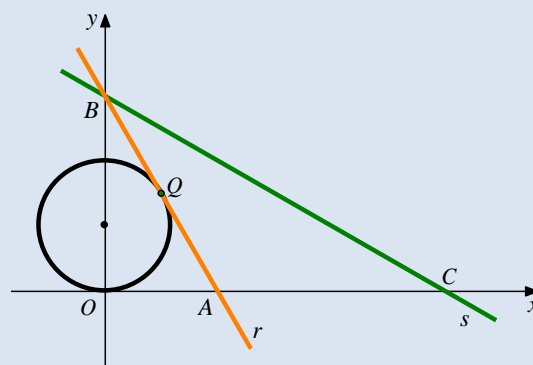
- as faces que partilham uma aresta são coloridas com cores distintas;
- a face $[ABCD]$ só pode ser colorida de verde, azul ou encarnado.

Nestas condições, de quantas maneiras distintas se pode colorir a pirâmide?

Uma resposta a este problema é $3 \times ({}^9A_4 + {}^9C_3 \times 3 \times 2 \times 2! + {}^9C_2 \times 2)$.

Numa pequena composição, explique-a.

8. Na figura, estão representadas, num referencial o.n. xOy , as retas r e s e a circunferência centrada no ponto de coordenadas $(0, 2)$ e que contém a origem.



Sabe-se que:

- a reta r é tangente à circunferência no ponto Q de ordenada 3 e abscissa positiva;
- a reta r interseca o eixo Ox no ponto A
- a reta s interseca o eixo Ox no ponto C
- as retas r e s interseçam-se no ponto B , que pertence ao eixo Oy

Qual das seguintes pode ser a equação reduzida da recta s ?

A $y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x + 3\sqrt{3}$

B $y = -\sqrt{3}x + 6$

C $y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x + 6$

D $y = -\sqrt{3}x + 3\sqrt{3}$

F I M

Solucionário

1. C

2. C

3.1. B

3.2. b) 1470

4.2. $\frac{7}{2} + \frac{7\sqrt{2}}{4}$

5. A

6.2. $\approx 69,1^\circ$

6.3. b) $Q(0,3,-3)$

6.3. c) $E(-4,11,-11)$

7.2. $4x - 2y - z - 45 = 0$

7.3. $2\sqrt{21}$

7.4. a) $\frac{5}{14}$

8. C