## Preparação para exame

**12.º Ano de Escolaridade** | Turma G-K

1. .

1.1. Determinemos os vetores normais aos planos
$\overrightarrow{\alpha} = (1;2;-1)$ e $\overrightarrow{\beta} = (-2;-4;2)$
Seja $k$ um número real não nulo.

$$\overrightarrow{\alpha} = k\overrightarrow{\beta} \Leftrightarrow (1;2;-1) = k(-2;-4;2) \Leftrightarrow \begin{cases} 1 = -2k \\ 2 = -4k \\ -1 = 2k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = -\frac{1}{2} \\ k = -\frac{1}{2} \\ k = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

logo, $k = -\frac{1}{2}$
Portanto, os vetores $\overrightarrow{\alpha}$ e $\overrightarrow{\beta}$ são colineares, e assim sendo, os planos são paralelos.
Como,

$$\begin{cases} x + 2y - z + 1 = 0 \\ -2x - 4y + 2z - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y - z = -1 \\ x + 2y - z = -\frac{3}{2} \end{cases}$$

é um sistema impossível, então os planos são estritamente paralelos.

1.2. Determinemos os vetores normais aos planos
$\overrightarrow{\delta} = (4a;-2;a^2)$ e $\overrightarrow{\beta} = (-2;-4;2)$
Os planos em causa são perpendiculares se $\overrightarrow{\delta}.\overrightarrow{\beta} = 0$
$\overrightarrow{\delta}.\overrightarrow{\beta} = 0 \Leftrightarrow (4a;-2;a^2).(-2;-4;2) = 0 \Leftrightarrow -8a + 8 + 2a^2 = 0 \Leftrightarrow a^2 - 4a + 4 = 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow (a-2)^2 = 0 \Leftrightarrow a - 2 = 0 \Leftrightarrow a = 2$

1.3. Seja $\overrightarrow{r} = \left(-\frac{1}{2};-1;\frac{1}{2}\right)$ um vetor diretor da reta $r$ e seja $\overrightarrow{\alpha} = (1;2;-1)$ um vetor normal ao plano $\alpha$.

A reta $r$ é perpendicular ao plano $\alpha$ se os dois vetores acima indicados forem colineares.
Seja $k$ um número real não nulo.

$$\overrightarrow{\alpha} = k\overrightarrow{r} \Leftrightarrow (1;2;-1) = k\left(-\frac{1}{2};-1;\frac{1}{2}\right) \Leftrightarrow \begin{cases} 1 = -k \times \frac{1}{2} \\ 2 = -k \\ -1 = k \times \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = -2 \\ k = -2 \\ k = -2 \end{cases}$$

logo, $k = -2$
Portanto, os vetores $\overrightarrow{\alpha}$ e $\overrightarrow{r}$ são colineares, e assim sendo, a reta $r$ é perpendicular ao plano $\alpha$.

1.4. Um vetor diretor da reta $t$ poderá ser $\overrightarrow{t} = (-1;1;1)$.
então uma equação vetorial da reta é $t : (x;y;z) = (-1,2;-1) + k(-1;1;1), k \in \mathbb{R}$

2. .

2.1. Seja $h$ a altura da pirâmide

$V_{piramide} = \frac{80}{3} \Leftrightarrow \frac{\frac{4\times4}{2}\times h}{3} = \frac{80}{3} \Leftrightarrow \frac{8h}{3} = \frac{80}{3} \Leftrightarrow h = 10.$
Determinemos a medida de $\overline{CE}$
Seja $V$ o vértice da pirâmide. Por semelhança dos triângulos $[OAV]$ e $[CEV]$, tem-se que $\frac{\overline{OA}}{\overline{CE}} = \frac{\overline{OV}}{\overline{EV}} \Leftrightarrow \frac{4}{\overline{CE}} = \frac{10}{5} \Leftrightarrow \overline{CE} = 2$
então, $A_{[CDE]} = \frac{\overline{CE}\times\overline{DE}}{2} = \frac{2\times2}{2} = 2$ unidades quadradas.

2.2. Seja
$V_1 = V_{piramidegrande} = \frac{80}{3}$
$V_2 = V_{piramidepequena} = \frac{2\times5}{3} = \frac{10}{3}$
Então, $V_{toncodepiramide} = V_1 - V_2 = \frac{80}{3} - \frac{10}{3} = \frac{70}{3}$ unidades cúbicas.

2.3. A projeção do ponto $D(0;-2;5)$ sobre o plano $xOy$ é o ponto de coordenadas $(0;-2;0)$.

2.4. Determinemos um vetor diretor da reta: $\overrightarrow{BD} = D - B = (0-0;-2+4;5-0) = (0;2;5)$ e uma equação vetorial da reta é: $(x;y;z) = (0;-2;5) + k(0;2;5), k \in \mathbb{R}$

2.5. A equação do plano que contém a face $[CDE]$ é $z = 5$.

2.6. $A = (4;0;0)$ ; $B = (0;-4;0)$
Determinemos o ponto médio de $[AB]$
$M = \left(\frac{4+0}{2};\frac{0-4}{2};\frac{0+0}{2}\right) = (2;-2;0)$
determinemos o raio $r = ||\overrightarrow{CD}|| = \sqrt{(2-0)^2+(0+2)^2+(5-5)^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$
e sendo assim, a equação da superfície esférica de centro no ponto médio de $[AB]$, e de raio $||\overrightarrow{CD}||$ é $(x-2)^2+(y+2)^2+(z-0)^2 = (2\sqrt{2})^2$, ou seja,$(x-2)^2+(y+2)^2+z^2 = 8$

2.7. .

2.7.1. Se não há qualquer tipo de restrição, então há ${}^9A'_5 = 59049$ maneiras distintas de numerar as cinco faces do sólido. Com efeito, para a primeira face a numerar há nove possibilidades, fixado esse número nessa face, existem nove possibilidades de numerar a segunda face. Fixados os números nas duas primeiras faces a numerar, existem nove possibilidades de numerar a terceira face, e assim sucessivamente. Tratam-se de arranjos com repetição.

2.7.2. Como não pode haver faces numeradas com o mesmo número, então podemos numerar as duas bases de ${}^4A_2 = 12$. Para cada maneira de numerar as duas bases do sólido, existem ${}^7A_3 = 210$ maneiras distintas de numerar a três faces laterais do sólido.Assim, as cinco faces do sólido podem ser numeradas de ${}^4A_2 \times {}^7A_3 = 2520$ maneiras distintas.

2.7.3. Como não pode haver faces numeradas com o mesmo número, então podemos numerar as duas bases de ${}^4A_2 = 12$. Para cada maneira de numerar as duas bases do sólido, existem ${}^7A_3 = 210$ maneiras distintas de numerar a três faces laterais do sólido. Assim, as cinco faces do sólido podem ser numeradas de ${}^4A_2 \times {}^7A_3 = 2520$ maneiras distintas.

2.7.4. Podemos numerar as duas bases do sólido de 2 maneiras distintas. Como não pode haver faces numeradas com o mesmo número, para cada maneira de numerar as duas bases do sólido, existem ${}^7A_3 = 210$ maneiras distintas de numerar a três faces laterais do sólido.Assim, as cinco faces do sólido podem ser numeradas de $2 \times {}^7A_3 = 420$ maneiras distintas.

2.7.5. Como os números 5 e 7 têm, necessariamente, de ser utilizados, comecemos contar todas as possibilidades de colocar, ordenadamente, estes dois números nas faces do sólido. O número de maneiras distintas de o fazer é igual a ${}^5A_2 = 20$. Para cada maneira de numerar duas faces do sólido com os números 5 e 7, existem ${}^7A_3 = 210$ maneiras distintas de numerar as restantes faces do sólido. Assim, as cinco faces do sólido podem ser numeradas de ${}^5A_2 \times {}^7A_3 = 4200$ maneiras distintas.

2.8. No sólido existem 6 vértices, e não há três vértices colineares. Para desenhar um triângulo são necessários três pontos não colineares. Há dois casos a considerar:

- o triângulo tem um vértice na base inferior e dois na base superior: existem ${}^3C_1 \times {}^3 C_2 = 9$;
- o triângulo tem dois vértice na base inferior e um na base superior: existem ${}^3C_2 \times {}^3 C_1 = 9$;

Resumindo, com os seis vértices do sólido podem ser desenhados ${}^3C_1 \times {}^3C_2 + {}^3C_2 \times {}^3C_1 = 18$

3. .

3.1. .

3.1.1. Se o Rodrigo entra necessariamente na equipa, então teremos de selecionar os outros nove elementos de entre os 29 alunos restantes. essa escolha pode ser feita de ${}^{29}C_9 = 10015005$ maneiras distintas. Assim, podem ser constituídas ${}^{29}C_9 = 10015005$ equipas.

3.1.2. Se o Pedro, a Maria e a Beatriz, que são alunas da turma, fazem parte da equipa, então têm de ser selecionados mais sete alunos da turma para formar a equipa completa. O número de maneiras de fazer essa seleção é igual a ${}^{27}C_7 = 888030$. Portanto, há ${}^{27}C_7 = 888030$ equipas nas condições desejadas.

3.1.3. Se a Inês e a Marta, que são alunas da turma, não fazem parte da equipa, então o número de equipas que pode ser constituídas é igual a ${}^{28}C_{10} = 13123110$. Portanto, há ${}^{28}C_{10} = 13123110$ equipas nas condições desejadas.

3.1.4. Se na equipa tem de haver tantos rapazes como raparigas, então têm de ser selecionados cinco rapazes de entre os 17 e serem selecionadas cinco raparigas de entre as 13. O número de equipas que se podem constituir é dado por ${}^{17}C_5 \times {}^{13} C_5 = 7963956$.

3.1.5. Se na equipa tem de haver mais rapazes do que raparigas, então há quatro casos a considerar:

- a equipa tem seis rapazes e quatro raparigas: ${}^{17}C_6 \times {}^{13} C_4$;
- a equipa tem sete rapazes e três raparigas: ${}^{17}C_7 \times {}^{13} C_3$;
- a equipa tem oito rapazes e duas raparigas: ${}^{17}C_8 \times {}^{13} C_2$.
- a equipa tem nove rapazes e uma rapariga: ${}^{17}C_9 \times {}^{13} C_1$.
- a equipa tem dez rapazes: ${}^{17}C_{10}$.

Assim, o professor pode formar ${}^{17}C_6 \times {}^{13} C_4 + {}^{17} C_7 \times {}^{13} C_3 + {}^{17} C_8 \times {}^{13} C_2 + {}^{17} C_9 \times {}^{13} C_1 + {}^{17} C_{10} = 16642626$ equipas distintas.

3.2. .

3.2.1. .

3.2.1.1. Se as duas raparigas ficam uma em cada extremo, então só há duas maneiras de as colocar na fila. Fixadas as duas raparigas na fila, os restantes elementos podem colocar-se na fila de $8! = 40320$ maneiras distintas. Assim, o professor pode tirar $2 \times 8! = 80640$ fotografias diferentes.

3.2.1.2. Se os elementos do mesmo sexo ficam juntos, então imaginemos que o grupo dos rapazes forma um bloco e o grupo das raparigas forma outro bloco. Assim, esses dois grupos podem permutar entre si de 2! maneiras distintas, e para cada uma dessas permutações, dentro de cada grupo também pode haver permutações, ou seja, os rapazes permutam de lugar de 8! maneiras distintas e o grupo das raparigas permuta de 2! maneiras distintas. Portanto, o número de fotografias que se podem tirar nas condições impostas é igual a $2! \times 8! \times 2! = 161280$.

3.2.1.3. Se os rapazes ficam juntos, então imaginemos que o grupo dos rapazes forma um bloco. Assim, o grupo dos rapazes e as duas raparigas podem permutar entre si de 3! maneiras distintas, e para cada uma dessas permutações, dentro do grupo de rapazes também pode haver permutações, ou seja, os rapazes permutam de lugar de 8! maneiras distintas. Portanto, o número de fotografias que se podem tirar nas condições impostas é igual a $3! \times 8! = 241920$.

3.2.2. .

**Resposta A:**

Se as duas raparigas não podem ficar juntas, então terão de ficar nos extremos ou entre dos rapazes, ou seja, têm nove posições possíveis na fila, conforme se mostra no esquema seguinte

$$\bullet \underline{R_1} \bullet \underline{R_2} \bullet \underline{R_3} \bullet \underline{R_4} \bullet \underline{R_5} \bullet \underline{R_6} \bullet \underline{R_7} \bullet \underline{R_8} \bullet$$

Assim, as raparigas podem ocupar duas das nove posições possíveis na fila de ${}^9C_2$ maneiras distintas. Escolhidos os lugares para as raparigas, as raparigas podem de trocar de lugar entre si de 2! maneiras distintas, e para cada uma delas, os rapazes podem colocar-se na fila de 8! maneiras distintas. Portanto, os dez elementos da equipa podem colocar-se na fila de ${}^9C_2 \times 2! \times 8!$ formas distintas.

**Resposta B:**

Se não houvesse qualquer restrição, os dez elementos da equipa poderiam colocar-se na fila de 10! maneiras distintas.
Contemos os casos em que as duas raparigas aparecem juntas na fila. Façamos um esquema.

$$\underline{M_1 M_2}\ \ \underline{R_1}\ \ \underline{R_2}\ \ \underline{R_3}\ \ \underline{R_4}\ \ \underline{R_5}\ \ \underline{R_6}\ \ \underline{R_7}\ \ \underline{R_8}$$

Imaginemos que as duas raparigas funcionam como um bloco. Assim, o bloco das raparigas e os oito rapazes podem permutar de lugar de 9! maneiras distintas, e para cada uma dessas permutações, as duas raparigas podem permutar de lugar dentro do bloco de 2! maneiras distintas. Portanto, existem $9! \times 2!$ de as duas raparigas ficarem juntas na fila.
Como se pretende que as duas raparigas não fiquem juntas na fotografia, então o número de maneiras de tal acontecer é igual a $10! - 9! \times 2!$

4. .

4.1. Como as bolas da mesma cor não se distinguem, então estamos perante um problema de permutações com repetição.
Admitindo que todas as bolas eram distintas, o número total de sequências era dado por 10!. Atendendo que que as bolas da mesma cor não se distinguem, então temos de eliminar todas as permutações de cada grupo de bolas. Portanto, o número total de sequências é igual a $\dfrac{10!}{4! \times 3! \times 3!} = 4200$.

**Outro processo:**

Colocar as bolas brancas na sequência: ${}^{10}C_4$
Colocadas as bolas brancas, sobram seis posições para as pretas.
Colocar as bolas pretas na sequência: ${}^{6}C_3$ Colocadas as bolas brancas e pretas sobram três posições para as três bolas azuis que só têm uma possibilidade de serem colocadas.
Então, o número de sequências é igual a ${}^{10}C_4 \times {}^{6}C_3 = 4200$.

4.2. Se as bolas azuis saem seguidas logo no início da extração então só há uma maneira de saírem, pois não se distinguem.
Colocadas as bolas azuis, sobram sete posições para colocar as bolas brancas e pretas.

Colocar as bolas brancas e pretas na sequência: $\dfrac{7!}{4! \times 3!} = 35$.

Portanto, o número total de sequências é igual a $\dfrac{7!}{4! \times 3!} = 35$.

**Outro processo:**

Se as bolas azuis saem seguidas logo no início da extração então só há uma maneira de saírem, pois não se distinguem.
Colocadas as bolas azuis, sobram sete posições para colocar as bolas brancas.

Colocar as bolas brancas na sequência: ${}^{7}C_4$
Colocadas as bolas azuis e brancas sobram três posições para as três bolas pretas, que só têm uma possibilidade de serem colocadas.

Portanto, o número total de sequências é igual a ${}^{7}C_4 \times 1 = 35$.

4.3. Se as bolas brancas saem todas seguidas, então há 7 maneiras distintas de as colocar na sequência.
Fixadas as bolas brancas, sobram seis posições para colocar as restantes bolas.
Colocar as bolas azuis e pretas na sequência: $\dfrac{6!}{3! \times 3!}$.

Portanto, o número total de sequências é igual a $7 \times \dfrac{6!}{3! \times 3!} = 140$.

**Outro processo:**
Se as bolas brancas saem todas seguidas, então há 7 maneiras distintas de as colocar na sequência.
Fixadas as bolas brancas, sobram seis posições para colocar as restantes bolas.
Colocar as bolas azuis na sequência: ${}^{6}C_3$.
Fixadas as bolas brancas e azuis, sobram três posições para colocar as restantes bolas, que só têm uma possibilidade de colocação.
Portanto, o número total de sequências é igual a $7 \times {}^{6}C_3 = 140$.

4.4. Imaginemos que cada grupo de bolas da mesma cor formam um bloco. Assim temos três blocos que podem permutar entre si de 3! maneiras distintas. Uma vez que as bolas da mesma cor não se distinguem, não se contam as permutações dentro de cada bloco.
Assim, o número total de sequências é igual a $3! = 6$.

5. Seja $n$ o número da linha do triângulo de Pascal.
Sabemos que a soma de todos os elementos dessa linha é igual a $2^n$, assim, vem,
$2^n = 2048 \Leftrightarrow 2^n = 2^{11} \Leftrightarrow n = 11$.

5.1. Trata-se da linha $n = 11$, pelo que o número de elementos é igual a 12.

5.2. A soma dos três últimos elementos da linha seguinte é igual a ${}^{12}C_{10} +^{12} C_{11} +^{12} C_{12} = 79$.

5.3. O maior termo da linha anterior é ${}^{10}C_5 = 252$.

$$\left(-\frac{1}{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^{12} =$$
$$= \sum_{p=0}^{12} \left[{}^{12}C_p \times \left(-\frac{1}{x}\right)^{12-p} \times \left(-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^p\right] =$$
$$= \sum_{p=0}^{12} \left[{}^{12}C_p \times (-1)^{12-p} \times \left(x^{-1}\right)^{12-p} \times (-1)^p \times \left(x^{-\frac{1}{2}}\right)^p\right] =$$
$$= \sum_{p=0}^{12} \left[{}^{12}C_p \times (-1)^{12} \times x^{-12+p} \times x^{-\frac{p}{2}}\right] =$$
$$= \sum_{p=0}^{12} \left[{}^{12}C_p \times x^{-12+\frac{p}{2}}\right]$$

5.1. Procuremos $p$ de modo que $-12 + \dfrac{p}{2} = 4$
$-12 + \dfrac{p}{2} = 4 \Leftrightarrow -24 + p = 8 \Leftrightarrow p = 32$

Então, não existe o termo, uma vez que $p$ tinha de ser inferior ou igual a doze.

5.2. O desenvolvimento tem treze termos, pelo que o termo médio obtém-se para $p = 6$
Assim, o termo médio é ${}^{12}C_6 \times x^{-12+\frac{6}{2}} = 924x^{-9}$