Números Complexos (12.º ano)

Operações e simplificação de expressões

Exercícios de Provas Nacionais e Testes Intermédios - Propostas de resolução

1. Escrevendo z_1 e z_2 na forma algébrica, com o objetivo de fazer a adição, temos:
   - $z_1 = e^{i\theta} = \cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta$
   - $z_2 = 2e^{i(\theta+\pi)} = 2\big(\cos(\theta+\pi) + i\,\text{sen}\,(\theta+\pi)\big) = 2\big(-\cos\theta + i(-\,\text{sen}\,\theta)\big) = -2\cos\theta - 2i\,\text{sen}\,\theta$

   E assim, vem que:

   $$z_1 + z_2 = e^{i\theta} = \cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta + \big(-2\cos\theta - 2i\,\text{sen}\,\theta\big) = \cos\theta - 2\cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta - 2i\,\text{sen}\,\theta =$$

   $$= -\cos\theta - i\,\text{sen}\,\theta = -\big(\cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta\big) = -z_1$$

   Assim, temos que:

   $$\arg(z_1+z_2) = \arg(-z_1) = \pi + \theta$$

   E como $\theta \in \left]0,\frac{\pi}{2}\right[$, o afixo do número complexo $z_1 + z_2$ pertence ao 3.º quadrante.

   Resposta: **Opção C**

   Exame – 2021, Ép. especial

2. Como $z \times w = i \Leftrightarrow w = \frac{i}{z}$, logo temos que uma expressão do número complexo w, é:

   $$w = \frac{i}{z} = \frac{e^{i\frac{\pi}{2}}}{2e^{i\frac{3\pi}{5}}} = \frac{1}{2}e^{i\left(\frac{\pi}{2}-\frac{3\pi}{5}\right)} = \frac{1}{2}e^{i\left(\frac{5\pi}{10}-\frac{6\pi}{10}\right)} = \frac{1}{2}e^{i\left(-\frac{\pi}{10}\right)}$$

   Assim, como $\arg(w) = -\frac{\pi}{10}$, temos que $-\frac{\pi}{10} + 2\pi$ também é um argumento do número complexo w, ou seja:

   $$\arg(w) = -\frac{\pi}{10} + 2\pi = -\frac{\pi}{10} + \frac{20\pi}{10} = \frac{19\pi}{10}$$

   Resposta: **Opção A**

   Exame – 2021, 2.ª Fase

3. Calculando o produto $z1 \times z_2$, vem:

$$z_1 \times z_2 = (-3+2i) \times (1+2i) = -3-6i+2i+4i^2 = -3-4i+4(-1) = -3-4-4i = -7-4i$$

Simplificando a expressão de w, temos:

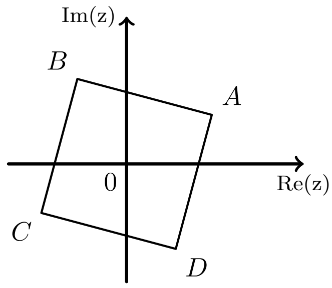
$$w = \frac{z_1 \times z_2}{z_3} = \frac{-7-4i}{2-i} = \frac{(-7-4i)(2+i)}{(2-i)(2+i)} = \frac{-14-7i-8i-4i^2}{2^2-i^2} = \frac{-14+4-15i}{4+1} = \frac{-10-15i}{5} = 2-3i$$

Desta forma, considerando $\theta = \arg(w)$ temos que:

- $|w| = \sqrt{(-2)^2+(-3)^2} = \sqrt{4+9} = \sqrt{13}$
- $\operatorname{tg}\theta = \frac{-3}{-2} = \frac{3}{2}$; como $\operatorname{sen}\theta < 0$ e $\cos\theta < 0$, θ é um ângulo do 3º quadrante.
- Como $\operatorname{tg}\left(-\frac{3\pi}{4}\right) = 1$, a função tangente é crescente e contínua no intervalo $\left]-\frac{3\pi}{4}, -\frac{\pi}{2}\right[$ e $\frac{3}{2} > 1$ então $\theta > -\frac{3\pi}{4}$
- Como θ é um ângulo do 3º quadrante e $\theta > -\frac{3\pi}{4}$, então $\arg(w) \in \left]-\frac{3\pi}{4}, -\frac{\pi}{2}\right[$

Exame – 2021, 1.ª Fase

4. Como os pontos A e C são equidistantes da origem e o respetivo ponto médio é a origem, temos que são afixos de números complexos simétricos, ou seja, $z_1 = -z_3$ (alternativamente podemos verificar que $-z_1 = z_1 \times i^2 = z_1 \times i \times i = z_2 \times i = z_3$)



De forma análoga temos que os pontos B e D são afixos de números complexos simétricos, ou seja, $z_2 = -z_4$

Assim, temos que

$$z_1 + z_2 + z_3 + z_4 = z_1 + z_2 - z_1 - z_2 = 0$$

Resposta: **Opção A**

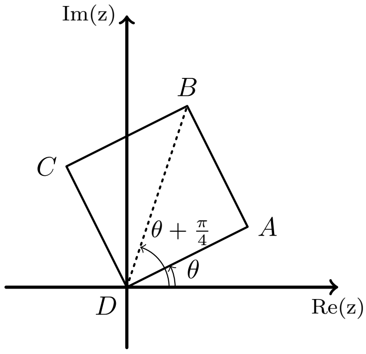
Exame – 2019, Ép. especial

5. Considerando $\overline{AB} = \rho$ e o ângulo definido pelo semieixo positivo horizontal e a reta AD com amplitude θ, temos que $z = \rho e^{i\theta}$

   Como $[ABCD]$ é um quadrado, a diagonal $\overline{BD} = \rho\sqrt{2}$ e $A\hat{D}B = \frac{\frac{\pi}{2}}{2} = \frac{\pi}{4}$, pelo que o ângulo definido pelo semieixo positivo horizontal e a reta BD tem amplitude $\theta + \frac{\pi}{4}$. Assim, temos que o ponto B é o afixo do número complexo

$$w = \rho\sqrt{2}e^{i\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)}$$

   Decompondo o número complexo num produto de dois números complexos, vem que:



$$w = \rho\sqrt{2}e^{i\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)} = \rho e^{i\theta} \times \sqrt{2}e^{i\left(\frac{\pi}{4}\right)} = z \times \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\,\text{sen}\,\frac{\pi}{4}\right) = z \times \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = z(1+i)$$

   Resposta: **Opção A**

Exame – 2019, 2.ª Fase

6. Como $z = -1 + 2i$, temos que $\overline{z} = -1 - 2i$

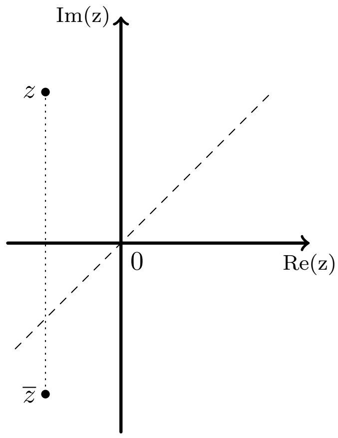
   Como $\text{Re}\,(z) < 0$ e $\text{Im}\,(z) < 0$, temos que θ é um ângulo do 3º quadrante, ou seja, $\theta \in \left]\pi, \frac{3\pi}{2}\right[$, pelo que $\theta < \frac{3\pi}{2}$

   Por outro lado, como $\text{tg}\,\theta = \frac{-2}{-1} = 2$, ou seja, $\text{tg}\,\theta > 1$, temos que $\theta > \frac{5\pi}{4}$

   Assim, vem que:

$$\theta \in \left]\frac{5\pi}{4}, \frac{3\pi}{2}\right[$$

   Resposta: **Opção D**



Exame – 2019, 1.ª Fase

7. Sabemos que, como $i^0 + i^1 + i^2 + i^3 = 1 + i - 1 - i = 0$ e como $i^n = i^{n+4} (\forall n \in \mathbb{N})$, então a soma de quaisquer quatro parcelas consecutivas é nula.

   O valor pedido é a soma de 2019 parcelas (porque incluí i^0), pelo que, como $2019 = 4 \times 504 + 3$, temos que:

$$i^0 + i^1 + i^2 + \underbrace{i^3 + i^4 + i^5 + i^6}_{0} + \ldots + \underbrace{i^{2017} + i^{2016} + i^{2017} + i^{2018}}_{0} = i^0 + i^1 + i^2 = 1 + i - 1 = i$$

   Resposta: **Opção A**

Exame – 2018, Ép. especial

8. Simplificando a expressão de z, como $i^{15} = i^{4\times 3+3} = i^3 = -i$, temos que:

$$z = \frac{(2-i)^2+1+i}{1-2i} + 3i^{15} = \frac{4-2\times 2i+i^2+1+i}{1-2i} + 3(-i) = \frac{4-4i-1+1+i}{1-2i} - 3i =$$

$$= \frac{4-3i}{1-2i} - 3i = \frac{(4-3i)(1+2i)}{(1-2i)(1+2i)} - 3i = \frac{4+8i-3i-6i^2}{1+2i-2i-4i^2} - 3i = \frac{4+5i-6(-1)}{1-4(-1)} - 3i =$$

$$= \frac{4+5i+6}{1+4} - 3i = \frac{10+5i}{5} - 3i = 2+i-3i = 2-2i$$

Assim, vem que $\overline{z} = 2+2i$, pelo que:

$$-\frac{1}{2}\times\overline{z} = -\frac{1}{2}\times(2+2i) = -1-i$$

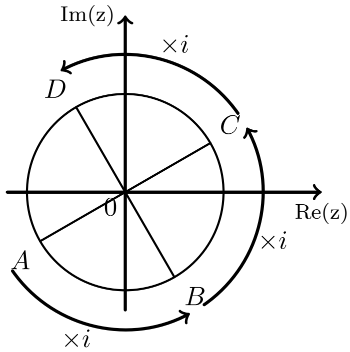
Escrevendo $-\frac{1}{2}\times\overline{z}$ na forma trigonométrica ($\rho e^{i\theta}$) temos:

- $\rho = |z| = \sqrt{(-1)^2+(-1)^2} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$
- $\operatorname{tg}\theta = \frac{-1}{-1} = 1$; como $\operatorname{sen}\theta < 0$ e $\cos\theta < 0$, θ é um ângulo do 3º quadrante, logo $\theta = \pi + \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{4}$

Assim $-\frac{1}{2}\times\overline{z} = \sqrt{2}e^{i\left(\frac{5\pi}{4}\right)}$

Exame – 2018, 2.ª Fase

9. Como a multiplicação de um número complexo por i corresponde a uma rotação de $\frac{\pi}{2}$ rad da imagem geométrica desse número complexo, temos que:



- B é a imagem geométrica de iz
- C é a imagem geométrica de $i\times i\times z = i^2z$
- D é a imagem geométrica de $i\times i\times i\times z = i^3z$

Resposta: **Opção D**

Exame – 2017, Ép. especial

10. Temos que:

- os argumentos dos complexos z e $5z$ são iguais

$$\arg(5z) = \arg(z) = \frac{\pi}{5}$$

- os argumentos de complexos simétricos, $-5z$ e $5z$, diferem de π

$$\arg(-5z) = \arg(5z) - \pi = \frac{\pi}{5} - \pi = -\frac{4\pi}{5}$$

- a multiplicação por i de um complexo corresponde a somar $\frac{\pi}{2}$ ao seu argumento

$$\arg(-5iz) = \arg(-5z) + \frac{\pi}{2} = -\frac{4\pi}{5} + \frac{\pi}{2} = -\frac{8\pi}{10} + \frac{5\pi}{10} = -\frac{3\pi}{10}$$

Resposta: **Opção A**

Exame – 2017, 2.ª Fase

11. Escrevendo o número complexo -3 na forma trigonométrica, vem $-3 = 3e^{i(-\pi)}$
Desta forma, temos que:

$$z = -3e^{i\theta} = 3e^{i(-\pi)} \times e^{i\theta} = 3e^{i(-\pi+\theta)} = 3e^{i(\theta-\pi)}$$

Logo, como $\theta \in \left]\pi, \frac{3\pi}{2}\right[$, então $\pi < \theta < \frac{3\pi}{2}$, pelo que:

$$\pi - \pi < \theta - \pi < \frac{3\pi}{2} - \pi \Leftrightarrow 0 < \theta - \pi < \frac{\pi}{2}$$

Ou seja, $\arg(z) \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, logo a imagem geométrica do número complexo z é um ponto do primeiro quadrante.

Resposta: **Opção A**

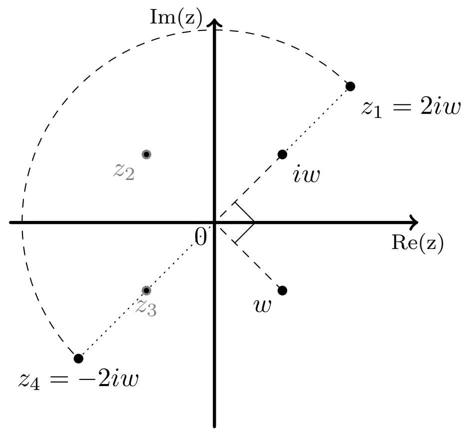
Exame – 2016, 1.ª Fase

12. A operação "*multiplicar por i*" corresponde a "fazer uma rotação de centro em O e amplitude $\frac{\pi}{2}$ radianos", pelo que a imagem geométrica de iw está no primeiro quadrante a igual distância da origem do que a imagem geométrica de w

A operação "*multiplicar por* 2" corresponde a "fazer duplicar a distância à origem, mantendo o argumento do número complexo", pelo que $2iw = z_1$

Finalmente, a imagem geométrica de um número complexo, e do seu simétrico correspondem a rotações de centro em O e amplitude π radianos, pelo que $-2iw = z_4$

Resposta: **Opção D**



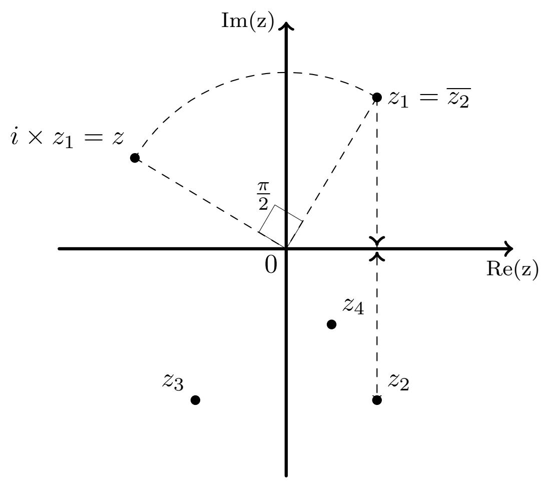
Exame – 2014, Ép. especial

13. As operações "*multiplicar por i*" e "*transformar no conjugado*" correspondem geometricamente a "fazer uma rotação de centro em O e amplitude $\frac{\pi}{2}$ radianos" e "encontrar o ponto simétrico relativamente ao eixo real", respetivamente.

Assim, se considerarmos as operações inversas, pela ordem inversa, a partir da imagem geométrica de z, (como indicado na figura), obtemos como resposta a imagem geométrica de z_2.

Ou, dizendo de outra forma, se $w = z_2$, temos que $\overline{w} = \overline{z_2} = z_1$ e $i \times \overline{w} = i \times z_1 = z$, pelo que $w = z_2$.

Resposta: **Opção C**



Exame – 2013, Ép. especial

14. Se $z = 2 + bi$, então $\overline{z} = 2 - bi$

Assim temos $\text{Re}\,(\overline{z}) > 0$ e como $b < 0$, $\text{Im}\,(\overline{z}) > 0$, pelo que sabemos que ¡ representação geométrica de $\overline{z}$ pertence ao primeiro quadrante, logo $\arg(\overline{z})$ não pode ser $-\alpha$

Por outro lado $|\overline{z}| = \sqrt{2^2 + b^2}$, como $b^2 > 0$, temos que $|\overline{z}| > 2$, logo $|\overline{z}|$ não pode ser $\dfrac{3}{2}$

Resposta: **Opção C**

Exame – 2013, 2.ª Fase

15.

$$\begin{aligned}
\frac{\cos(\pi-\alpha) + i\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)}{\cos\alpha + i\,\text{sen}\,\alpha} &= \frac{\cos(\pi-\alpha) + i\,\text{sen}\,\alpha}{\cos\alpha + i\,\text{sen}\,\alpha} && \text{Porque } \cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) = \text{sen}\,\alpha \\
&= \frac{\cos(\pi-\alpha) + i\,\text{sen}\,(\pi-\alpha)}{\cos\alpha + i\,\text{sen}\,\alpha} && \text{Porque } \text{sen}\,\alpha = \text{sen}\,(\pi-\alpha) \\
&= \frac{e^{i(\pi-\alpha)}}{e^{i\alpha}} \\
&= e^{i(\pi-\alpha-\alpha)} && \text{Fazendo a divisão na forma trigonométrica} \\
&= e^{i(\pi-2\alpha)} && \text{Como queríamos mostrar}
\end{aligned}$$

Exame – 2013, 2.ª Fase

16. Temos que: $|z| = \sqrt{(-8)^2 + 6^2} = \sqrt{64 + 36} = \sqrt{100} = 10$
e sabemos que $\arg(z) = \alpha$, pelo que podemos escrever que $z = 10e^{i\alpha}$

Assim, temos que

$$\begin{aligned}
w &= \frac{-i \times z^2}{\overline{z}} && \text{(do enunciado)} \\
&= \frac{-i \times 10^2 e^{i(2\alpha)}}{10e^{i(-\alpha)}} && \text{(calculado } z^2 \text{ e escrevendo } \overline{z} \text{ na f.t.)} \\
&= -i \times 10e^{i(2\alpha-(-\alpha)} && \text{(fazendo a divisão na f.t.)} \\
&= e^{i\left(-\frac{\pi}{2}\right)} \times 10e^{i(3\alpha)} && \text{(escrevendo } -i \text{ na f.t.)} \\
&= 10e^{i\left(-\frac{\pi}{2}+3\alpha\right)} && \text{(fazendo o produto na f.t.)} \\
&= 10e^{i\left(3\alpha-\frac{\pi}{2}\right)}
\end{aligned}$$

Resposta: **Opção A**

Exame – 2013, 1.ª Fase

17. Sabemos que $i^0 = 1$, $i^1 = i$, $i^2 = -1$ e $i^3 = -i$, e que é válida a igualdade $i^n = i^k$, onde k é o resto da divisão inteira de n por 4.

Assim,

- como $8n = 4 \times 2n + \mathbf{0}$, temos que $i^{8n} = i^0 = 1$
- como $8n - 1 = 8n - 4 + 3 = 4(2n-1) + \mathbf{3}$ temos que $i^{8n-1} = i^3 = -i$
- como $8n - 2 = 8n - 4 + 2 = 4(2n-1) + \mathbf{2}$ temos que $i^{8n-2} = i^2 = -1$

Temos que $i^{8n} \times i^{8n-1} + i^{8n-2} = i^0 \times i^3 + i^2 = 1 \times (-i) + (-1) = -i - 1$

Logo a imagem geométrica de $i^{8n} \times i^{8n-1} + i^{8n-2}$ pertence ao terceiro quadrante.

Resposta: **Opção C**

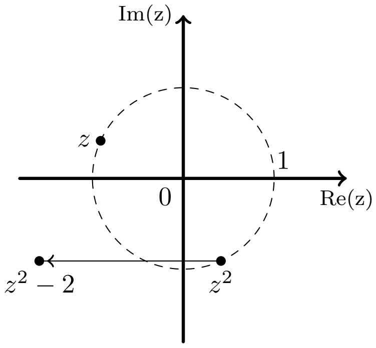
Exame – 2013, 1.ª Fase

18. Como $z = e^{i\theta}$, então $z^2 = e^{i(2\theta)}$.

Como $\frac{3\pi}{4} < \theta < \pi$, então $2 \times \frac{3\pi}{4} < 2\theta < 2 \times \pi$, ou seja $2\theta \in \left]\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right[$

Logo z^2 pertence ao 4º quadrante e $|z^2| = 1$, ou seja z^2 é da forma $a + bi$, com $0 < a < 1$ e $-1 < b < 0$.

Assim $z^2 - 2 = (a-2) + bi$, em que $a - 2 < 0$ e $b < 0$, pelo que $z^2 - 2$ pertence ao 3º quadrante.



Resposta: **Opção C**

Teste Intermédio 12.º ano – 24.05.2013

19. Sabemos que $i^6 = i^2 = -1$ e que $i^7 = i^3 = -i$.

Logo $\frac{i^6 + 2i^7}{2-i} = \frac{-1 + 2(-i)}{2-i} = \frac{(-1-2i)(2+i)}{(2-i)(2+i)} = \frac{-2 - i - 4i - 2i^2}{2^2 - i^2} = \frac{-2 - 5i + 2}{4+1} = \frac{-5i}{5} = -i$

Teste Intermédio 12.º ano – 24.05.2013

20. Se z e w são inversos um do outro, temos que $\frac{1}{z} = w$

Por um lado $\frac{1}{z} = \frac{1}{1+i} = \frac{1-i}{(1-i)(1-i)} = \frac{1-i}{1^2 - i^2} = \frac{1-i}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$

Por outro lado. como $11 = 4 \times 2 + 3$, sabemos que $i^{11} = i^3 = -i$ e assim
$w = (k-1) + 2pi^{11} = (k-1) + 2p(-i) = (k-1) - (2p)i$

Como $\frac{1}{z} = w$ temos que $\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i = (k-1) - (2p)i$

Logo $\frac{1}{2} = k - 1 \ \wedge \ \frac{1}{2} = 2p \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{2} + 1 = k \ \wedge \ \frac{1}{4} = p \quad \Leftrightarrow \quad \frac{3}{2} = k \ \wedge \ \frac{1}{4} = p$

Assim temos que $k + p = \frac{3}{2} + \frac{1}{4} = \frac{6}{4} + \frac{1}{4} = \frac{7}{4}$

Resposta: **Opção D**

Exame – 2012, Ép. especial

21. Como $\overline{z_2} = 3 + ki$ temos:

$z_1 \times \overline{z_2} = (2+i)(3+ki) = 6 + 2ki + 3i + ki^2 = 6 - 1 \times k + i(2k+3) = (6-k) + (2k+3)i$

Para que $z_1 \times \overline{z_2}$ seja um imaginário puro $\operatorname{Re}(z_1 \times \overline{z_2}) = 0$

Logo $6 - k = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 6 = k$

Resposta: **Opção D**

Exame – 2012, 2.ª Fase

22. Sabemos que $i^0 = 1$, $i^1 = i$, $i^2 = -1$ e $i^3 = -i$, e que é válida a igualdade $i^n = i^k$, onde k é o resto da divisão inteira de n por 4.
Assim, como $4n - 6 = 4n - 8 + 2 = 4(n-2) \mathbf{+2}$ temos que $i^{4n-6} = i^2 = -1$

Devemos escrever $2e^{i\left(-\frac{\pi}{6}\right)}$ na f.a. para podermos somar as parcelas do numerador:
$2e^{i\left(-\frac{\pi}{6}\right)} = 2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i\,\mathrm{sen}\,\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right) = 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) - i\,\mathrm{sen}\,\left(\frac{\pi}{6}\right)\right) = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right)$

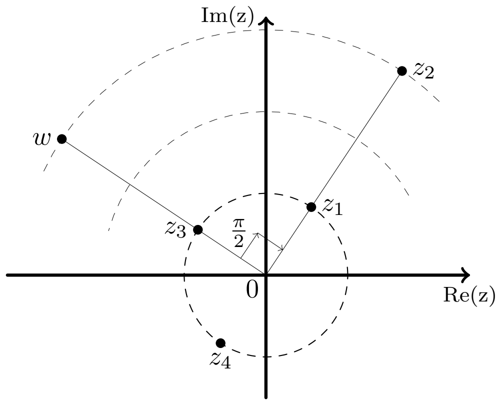
Assim temos que:

$$\frac{\sqrt{3} \times i^{4n-6} + 2e^{i\left(-\frac{\pi}{6}\right)}}{2e^{i\left(\frac{\pi}{5}\right)}} = \frac{\sqrt{3} \times (-1) + 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right)}{2e^{i\left(\frac{\pi}{5}\right)}} = \frac{-\sqrt{3} + \sqrt{3} - \frac{2}{2}i}{2e^{i\left(\frac{\pi}{5}\right)}} = \frac{-i}{2e^{i\left(\frac{\pi}{5}\right)}} =$$

$$= \frac{e^{i\left(-\frac{\pi}{2}\right)}}{2e^{i\left(\frac{\pi}{5}\right)}} = \frac{1}{2}e^{i\left(-\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{5}\right)} = \frac{1}{2}e^{i\left(-\frac{7\pi}{10}\right)} = \frac{1}{2}e^{i\left(\frac{13\pi}{10}\right)}$$

Exame – 2012, 2.ª Fase

23. As operações "*dividir por i*" e "*dividir por 3*" correspondem geometricamente a "fazer uma rotação de centro em O e amplitude $-\frac{\pi}{2}$ radianos" e "dividir a distância ao centro por 3", respetivamente.



Assim, podemos fazer as operações por qualquer ordem e, por isso, temos duas alternativas:

- $\frac{w}{i} = z_2$ e $\frac{z_2}{3} = z_1$, ou então
- $\frac{w}{3} = z_3$ e $\frac{z_3}{i} = z_1$

Resposta: **Opção A**

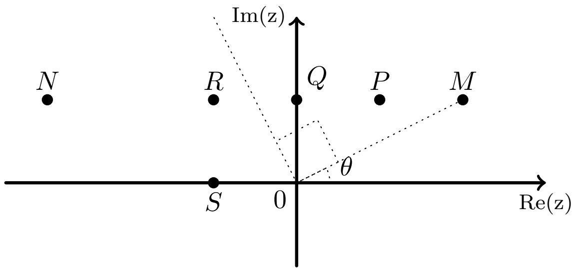
Exame – 2012, 1.ª Fase

24. Como o ponto M é a imagem geométrica do número complexo z_1 que vamos designar por $z_1 = \rho_1 e^{i\theta}$, em que $0 < \theta < \frac{\pi}{4}$ porque M é um ponto do primeiro quadrante e $\text{Re}(z_1) > \text{Im}(z_1)$.

- Podemos excluir o ponto da opção (D), o ponto S porque é a imagem geométrica de um número complexo z da forma $z = \rho_3 e^{i\pi}$, e assim, $z_1 \times z = (\rho_1\rho_3)e^{i(\pi+\theta)}$; e como $0 < \theta < \frac{\pi}{4}$ então a imagem geométrica de $z_1 \times z$ seria um ponto do 3º quadrante e não o ponto N
- Podemos excluir o ponto da opção (B), o ponto Q porque é a imagem geométrica de um número complexo z da forma $z = \rho_4 e^{i\left(\frac{\pi}{2}\right)}$, e assim, $z_1 \times z = (\rho_1\rho_3)e^{i\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)}$; ou seja a imagem geométrica de $z_1 \times z$ seria um ponto sobre a reta perpendicular a à reta OM pelo ponto O e não o ponto N
- Podemos excluir o ponto da opção (A), o ponto P porque é a imagem geométrica de um número complexo z da forma $z = \rho_5 e^{i\alpha}$, e assim, $z_1 \times z = (\rho_1\rho_5)e^{i(\theta+\alpha)}$; e como $\alpha < \frac{\pi}{2}$, então a imagem geométrica de $z_1 \times z$ seria um ponto do quadrante definido pela reta OM e pela perpendicular pelo ponto O e não o ponto N

Logo o ponto R é o único, de entre as opções apresentadas, que pode ser a imagem geométrica do número complexo z_2

Resposta: **Opção C**



Exame – 2011, Prova especial

25. Para que z_1 seja igual ao conjugado de z_2, tem que se verificar a condição
$\text{Re}(z_1) = \text{Re}(z_2) \;\wedge\; \text{Im}(z_1) = -\text{Im}(z_2)$

Logo:

$$\begin{cases} \text{Re}(z_1) = \text{Re}(z_2) \\ \text{Im}(z_1) = -\text{Im} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3k+2 = 3p-4 \\ p = -(2-5k) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3k+6 = 3p \\ p = 5k-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k+2 = p \\ k+2 = 5k-2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} k+2 = p \\ 2+2 = 5k-k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k+2 = p \\ 4 = 4k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1+2 = p \\ 1 = k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3 = p \\ 1 = k \end{cases}$$

Resposta: **Opção B**

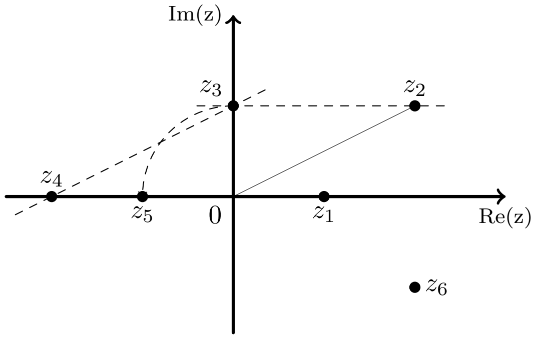
Exame – 2011, Ép. especial

26. Pela observação da figura podemos adicionar geometricamente os afixos de z_2 e de z_4 e temos que $z_2 + z_4 = z_3$

A operação "*multiplicar por i*" corresponde geometricamente a "fazer uma rotação de centro em O e amplitude $\frac{\pi}{2}$", pelo que $z_3 \times i = z_5$.

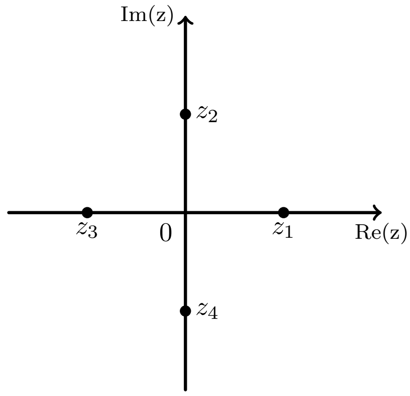
Logo $(z_2 + z_4) \times i = z_3 \times i = z_5$.

Resposta: **Opção C**



Exame – 2011, 2.ª Fase

27. Sabemos que $i^0 = 1$, $i^1 = i$, $i^2 = -1$ e $i^3 = -i$, e que é válida a igualdade $i^n = i^k$, onde k é o resto da divisão inteira de n por 4.



Assim,

- como $4n = 4 \times n \mathbf{+0}$, temos que $i^{4n} = i^0 = 1$
- como $4n + 1 = 4 \times n \mathbf{+1}$ temos que $i^{4n+1} = i^1 = i$
- como $4n + 2 = 4 \times n \mathbf{+2}$ temos que $i^{4n+2} = i^2 = -1$

Assim temos que:

$i^{4n} + i^{4n+1} + i^{4n+2} = 1 + i - 1 = i$, pelo que, de acordo com a figura, temos que $i^{4n} + i^{4n+1} + i^{4n+2} = z_2$

Resposta: **Opção B**

Exame – 2011, 1.ª Fase

28. Designando por w, z_1 e z_2 os números complexos cujas imagens geométricas são os pontos B, A e C, respetivamente, temos que

- $|w| = |z_1|$, porque os pontos A e B estão à mesma distância da origem; logo

  $|w| = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$
- $\arg(w) = \arg(z_2) - \frac{\pi}{9}$, como $\arg(z_2) = \frac{3\pi}{2}$, temos que

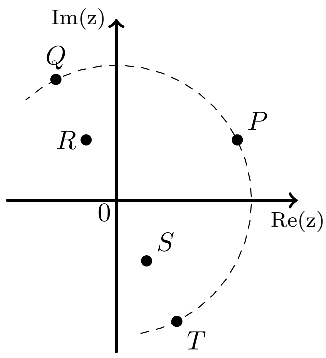
  $\arg(w) = \frac{3\pi}{2} - \frac{\pi}{9} = \frac{27\pi}{18} - \frac{2\pi}{18} = \frac{25\pi}{18}$

Assim temos que $w = 5e^{i\left(\frac{25\pi}{18}\right)}$

Resposta: **Opção B**

Teste Intermédio 12.º ano – 26.05.2011

29. A operação "*multiplicar por i*" corresponde geometricamente a "fazer uma rotação de centro em O e amplitude $\frac{\pi}{2}$ radianos".



Assim temos que $i \times z = w$, sendo w o número complexo que tem por imagem geométrica o ponto Q.

Logo $-i \times z = -w$, ou seja o número complexo que tem por imagem geométrica o ponto T.

Resposta: **Opção D**

Exame – 2010, Ép. especial

30. z é um imaginário puro, se $\arg z = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$
Assim temos que:

$$\frac{\pi}{8} - \theta = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \quad \Leftrightarrow \quad \theta = \frac{\pi}{8} - \frac{\pi}{2} - k\pi, k \in \mathbb{Z} \quad \Leftrightarrow \quad \theta = \frac{\pi}{8} - \frac{4\pi}{8} - k\pi, k \in \mathbb{Z} \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \theta = -\frac{3\pi}{8} - k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Atribuindo valores a k, temos:

- Se $k = 0$, $\theta = -\frac{3\pi}{8}$
- Se $k = -1$, $\theta = -\frac{3\pi}{8} + \pi = -\frac{3\pi}{8} + \frac{8\pi}{8} = \frac{5\pi}{8}$

Resposta: **Opção D**

Exame – 2010, 1.ª Fase

31. Como

- $i^6 = i^{4+2} = i^2 = -1$
- $i^7 = i^{4+3} = i^3 = -i$
- $(1+2i)(3+i) = 3 + i + 6i + 2i^2 = 3 + 2(-1) + 7i = 1 + 7i$

Temos que:

$$\frac{(1+2i)(3+i) - i^6 + i^7}{3i} = \frac{1 + 7i - (-1) - i}{3i} = \frac{2+6i}{3i} = \frac{(2+6i)\times i}{3i \times i} = \frac{2i + 6i^2}{3i^2} = \frac{2i - 6}{-3} = \frac{-6}{-3} + \frac{2i}{-3} =$$

$$= 2 - \frac{2}{3}i$$

Teste Intermédio 12.º ano – 19.05.2010

32. Como $i = e^{i\left(\frac{\pi}{2}\right)}$, podemos fazer a multiplicação na forma trigonométrica:

$$z = i.e^{i\theta} = e^{i\left(\frac{\pi}{2}\right)} \times e^{i\theta} = e^{i\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)}$$

Assim o conjugado de z é:

$$\overline{z} = e^{i\left(-\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)\right)} = e^{i\left(-\frac{\pi}{2}-\theta\right)}$$

Resposta: **Opção A**

Exame – 2009, Ép. especial

33. Temos que $i^{43} = i^{4\times 10+3} = i^3 = -i$

Calculando z_1^2 temos: $z_1^2 = (3-2i)^2 = 3^2 - 2\times 3(2i) + (2i)^2 = 9 - 12i + 4i^2 = 9 - 4 - 12i = 5 - 12i$

Como $8e^{i\left(\frac{3\pi}{2}\right)} = -8i$, calculando z na forma algébrica, temos:

$$z = \frac{z_1 + z_1^2 + 2i^{43}}{8e^{i\left(\frac{3\pi}{2}\right)}} = \frac{(3-2i) + (5-12i) + 2(-i)}{-8i} = \frac{8-16i}{-8i} = \frac{1-2i}{-i} =$$

$$= \frac{(1-2i)\times i}{-i\times i} = \frac{i - 2i^2}{-i^2} = \frac{i - 2(-1)}{-(-1)} = 2 + i$$

Exame – 2009, Ép. especial

34. Se $\arg(z) = \frac{\pi}{3}$ então $\arg(\overline{z}) = -\frac{\pi}{3}$

Escrevendo $2i$ na f.t. temos $2i = 2e^{i\left(\frac{\pi}{2}\right)}$

Assim, sendo $\rho = |z|$ (e por isso também $\rho = |\overline{z}|$) e fazendo a divisão na f.t. temos que:

$$\frac{2i}{\overline{z}} = \frac{2e^{i\left(\frac{\pi}{2}\right)}}{\rho e^{i\left(-\frac{\pi}{3}\right)}} = \frac{2}{\rho}e^{i\left(\frac{\pi}{2}-\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)} = \frac{2}{\rho}e^{i\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{3}\right)} = \frac{2}{\rho}e^{i\left(\frac{3\pi}{6}+\frac{2\pi}{6}\right)} = \frac{2}{\rho}e^{i\left(\frac{5\pi}{6}\right)}$$

Logo $\arg\left(\frac{2i}{\overline{z}}\right) = \frac{5}{6}\pi$

Resposta: **Opção C**

Exame – 2009, 1.ª Fase

35. Como $i^{18} = i^{4\times 4+2} = i^2 = -1$, temos que:

$$z_1 = \frac{i}{1-i} - i^{18} = \frac{i(1+i)}{(1-i)(1+i)} - (-1) = \frac{i+i^2}{1^2-i^2} + 1 = \frac{-1+i}{1+1} + 1 = \frac{-1+i}{2} + \frac{2}{2} = \frac{1+i}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$$

Escrevendo z_1 na f.t. temos $z_1 = \rho e^{i\theta}$, onde:

- $\rho = |z_1| = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{4}+\frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{2}{4}} = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1\times\sqrt{2}}{\sqrt{2}\times\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$
- $\operatorname{tg}\theta = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = 1$; como $\operatorname{sen}\theta > 0$ e $\cos\theta > 0$, θ é um ângulo do 1º quadrante, logo $\theta = \frac{\pi}{4}$

Logo $z_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}e^{i\left(\frac{\pi}{4}\right)}$

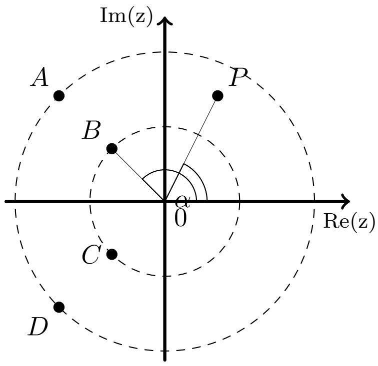
Exame – 2009, 1.ª Fase

36. A imagem geométrica do número complexo $\frac{\rho}{2}e^{i(2\alpha)}$ é um número complexo w tal que:

- $|w| = \frac{|z|}{2}$ (apenas os pontos B e C verificam esta condição)
- $\arg(w) = 2\times\arg(z)$ (apenas os pontos A e B verificam esta condição)

Assim o ponto B é a imagem geométrica de $\frac{\rho}{2}e^{i(2\alpha)}$

Resposta: **Opção B**



Teste Intermédio 12.º ano – 27.05.2009

37. Como $i^{35} = i^{8\times 4+3} = i^3 = -i$, e

$(2+i)^2 = (2+i)(2+i) = 4+2i+2i+i^2 = 4-1+4i = 3+4i$

temos que:

$$\frac{(2+i)^2+1+6i^{35}}{1+2i} = \frac{3+4i+1+6(-i)}{1+2i} = \frac{3+1+4i-6i}{1+2i} = \frac{4-2i}{1+2i} = \frac{(4-2i)(1-2i)}{(1+2i)(1-2i)} =$$

$$= \frac{4-8i-2i+4i^2}{1^2-4i^2} = \frac{4-4-10i}{1+4} = \frac{-10i}{5} = -2i$$

Teste Intermédio 12.º ano – 27.05.2009

38. Como $e^{i\left(\frac{\pi}{2}\right)} = i$, temos que:

$z_1 = (1-i).(1+i) = 1^2 - i^2 = 1 + 1 = 2$

Na f.t.: $z_1 = 2e^{i\times 0}$

Fazendo a divisão na f.t.:

$w = \frac{z_1}{z_2} = \frac{2e^{i\times 0}}{8e^{i\left(-\frac{\pi}{4}\right)}} = \frac{2}{8}e^{i\left(0-\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)} = \frac{1}{4}e^{i\left(\frac{\pi}{4}\right)}$

Exame – 2008, Ép. especial

39. Os números complexos z e $-z$, têm argumentos que diferem de π radianos, logo, temos que:

$$\arg(-z) = \pi + \arg(z) = \pi + \frac{\pi}{6} = \frac{6\pi}{6} + \frac{\pi}{6} = \frac{7\pi}{6}$$

Resposta: **Opção D**

Exame – 2008, 2.ª Fase

40. Como $i^{18} = i^{4\times 2+2} = (i^2)^4 \times i^2 = (-1)^4 \times (-1) = -1$, temos que:

$\frac{2z_1 - i^{18} - 3}{1-2i} = \frac{2(1-i)-(-1)-3}{1-2i} = \frac{2-2i+1-3}{1-2i} = \frac{-2i}{1-2i} = \frac{-2i(1+2i)}{(1-2i)(1+2i)} = \frac{-2i-4i^2}{1^2-(2i)^2} =$

$= \frac{-2i+4}{1+4} = \frac{4-2i}{5} = \frac{4}{5} - \frac{2}{5}i$

Exame – 2008, 2.ª Fase

41. O número complexo $3i$ tem a sua representação geométrica sobre a parte positiva do eixo imaginário, pelo que define um ângulo de $\frac{\pi}{2}$ radianos com o semieixo real positivo, logo $\arg(z) = \frac{\pi}{2} = \frac{1}{2}\pi$

Resposta: **Opção B**

Exame – 2008, 1.ª fase

42. Sabemos que $i^0 = 1$, $i^1 = i$, $i^2 = -1$ e $i^3 = -i$, e que é válida a igualdade $i^p = i^k$, onde k é o resto da divisão inteira de p por 4.

Assim, como $i^n = -i$, temos que $i^n = -i = i^3 = i^{4\times p+3}$, para $p \in \mathbb{N}$.

Logo $i^{n+1} = i^{(4\times p+3)+1} = i^{4\times p+4} = i^{4\times(p+1)} = i^{4\times(p+1)+0} = i^0 = 1$

Resposta: **Opção A**

Exame – 2007, 2.ª fase

43. Como $\arg(z_1) = \alpha$, temos que $z_1 = \rho e^{i\alpha}$
Como $z_2 = 4iz_1$, temos que $-z_2 = -4iz_1$

Como $-4i = 4e^{i\left(\frac{3\pi}{2}\right)}$, fazendo a multiplicação na f.t. temos que:

$-z_2 = -4iz_1 = 4e^{i\left(\frac{3\pi}{2}\right)} \times \rho e^{i\alpha} = (4\rho)e^{i\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)}$

Assim, como $\alpha \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, temos que $\arg(-z_2) = \frac{3\pi}{2} + \alpha$

Exame – 2007, 2.ª fase

44. Designando por w, z_1 e z_2 os números complexos cujas imagens geométricas são os pontos C, A e B, respetivamente, temos que

- $|w| = |z_1|$, porque os pontos A e C estão à mesma distância da origem; logo

  $|w| = \sqrt{4^2+3^2} = \sqrt{25} = 5$
- Como $18° = 18 \times \frac{\pi}{180} rad = 18 \times \frac{\pi}{18\times 10} rad = \frac{\pi}{10} rad$, então:
  $\arg(w) = \arg(z_2) + \frac{\pi}{10} = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{10} = \frac{5\pi}{10} + \frac{\pi}{10} = \frac{6\pi}{10} = \frac{3\pi}{5}$

Assim temos que $w = 5e^{i\left(\frac{3\pi}{5}\right)}$

Resposta: **Opção D**

Exame – 2006, Ép. especial

45. Como $e^{i\left(\frac{\pi}{2}\right)} = i$ temos que:

$$z_1 = (2-i)\left(2+e^{i\left(\frac{\pi}{2}\right)}\right) = (2-i)(2+i) = 2^2 - i^2 = 4-(-1) = 5$$

Escrevendo z_1 na f.t. temos $z_1 = 5 = 5e^{i\times 0}$

Fazendo a divisão na f.t. vem:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{5e^{i\times 0}}{\frac{1}{5}e^{i\left(-\frac{\pi}{7}\right)}} = \frac{5}{\frac{1}{5}} e^{i\left(0-\left(-\frac{\pi}{7}\right)\right)} = 25e^{i\left(\frac{\pi}{7}\right)}$$

Exame – 2006, 2.ª fase

46. Seja $z = a+bi$ com $a \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ e $b \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$, cuja imagem geométrica é o ponto A.

Assim $\overline{z} = a - bi$, cuja imagem geométrica é o ponto A', simétrico do ponto A relativamente ao eixo real.

Logo $-\overline{z} = -(a-bi) = -a+bi$, cuja imagem geométrica é o ponto B, simétrico do ponto A relativamente ao eixo imaginário.

Resposta: **Opção C**

Exame – 2005, Ép. especial

47. Escrevendo w_1 na f.t. temos $w_1 = \rho e^{i\theta}$, onde:

- $\rho = |w_1| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$
- $\operatorname{tg}\theta = \dfrac{1}{1} = 1$; como $\operatorname{sen}\theta > 0$ e $\cos\theta > 0$, θ é um ângulo do 1º quadrante, logo $\theta = \dfrac{\pi}{4}$

Assim $w_1 = \sqrt{2}e^{i\left(\frac{\pi}{4}\right)}$

Calculando o produto $w_1 \times w_2$ na f.t., e escrevendo o resultado na f.a. vem:

$$w_1 \times w_2 = \sqrt{2}e^{i\left(\frac{\pi}{4}\right)} \times \sqrt{2}e^{i\left(\frac{\pi}{12}\right)} = (\sqrt{2}\times\sqrt{2})e^{i\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{12}\right)} = 2e^{i\left(\frac{3\pi}{12}+\frac{\pi}{12}\right)} = 2e^{i\left(\frac{4\pi}{12}\right)} = 2e^{i\left(\frac{\pi}{3}\right)} =$$
$$= 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3}\right)\right) = 2\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = 1 + \sqrt{3}i$$

Podemos ainda escrever w_3 na f.a.: $w_3 = \sqrt{3}e^{i\left(-\frac{\pi}{2}\right)} = -\sqrt{3}i$

Assim temos que:

$$\frac{w_1 \times w_2 - 2}{w_3} = \frac{1+\sqrt{3}i-2}{-\sqrt{3}i} = \frac{-1+\sqrt{3}i}{-\sqrt{3}i} = \frac{(-1+\sqrt{3}i)\times i}{-\sqrt{3}i \times i} = \frac{-i+\sqrt{3}i^2}{-\sqrt{3}i^2} = \frac{-i-\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{-\sqrt{3}}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{3}}i =$$
$$= -1 - \frac{\sqrt{3}}{3}i$$

Exame – 2005, 2.ª fase

48. $w = \dfrac{2+i}{1-i} - i = \dfrac{(2+i)(1+i)}{(1-i)(1+i)} - i = \dfrac{2+2i+i+i^2}{1^2-i^2} - i = \dfrac{2+3i-1}{1-(-1)} - i = \dfrac{1+3i}{2} - \dfrac{2i}{2} = \dfrac{1+i}{2} = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}i$

Escrevendo w na f.t. temos $w = \rho e^{i\theta}$, onde:

- $\rho = |w| = \sqrt{\left(\dfrac{1}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{4}} = \sqrt{\dfrac{2}{4}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$
- $\operatorname{tg}\theta = \dfrac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = 1$; como $\operatorname{sen}\theta > 0$ e $\cos\theta > 0$, θ é um ângulo do 1º quadrante, logo $\theta = \dfrac{\pi}{4}$

Assim $w = \dfrac{\sqrt{2}}{2}e^{i\left(\frac{\pi}{4}\right)}$

Exame – 2005, 1.ª fase

49.

49.1. Como $w^2 = (4-3i)(4-3i) = 16 - 12i - 12i + 9i^2 = 16 - 24i - 9 = 7 - 24i$

$$2i + \frac{w^2}{i} = 2i + \frac{7-24i}{i} = 2i + \frac{(7-24i)\times i}{i \times i} = 2i + \frac{7i - 24i^2}{i^2} = 2i + \frac{7i+24}{-1} = 2i - 7i - 24 = -24 - 5i$$

49.2. Se $\arg(w) = \alpha$ então $w = \rho e^{i\alpha}$, sendo $\rho = |w| = \sqrt{4^2 + (-3)^2} = \sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5$

Assim $\overline{w} = 5e^{i(-\alpha)}$

Como $i = e^{i\left(\frac{\pi}{2}\right)}$, fazendo o produto na f.t., temos:

$i \times \overline{w} = e^{i\left(\frac{\pi}{2}\right)} \times 5e^{i(-\alpha)} = 5e^{i\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)}$

Exame – 2004, 2.ª fase

50. Como $i^{23} = i^{4\times 5+3} = i^3 = -i$ temos que:

$$\frac{z_1 + i^{23}}{z_2} = \frac{-6+3i+(-i)}{1-2i} = \frac{(-6+2i)\times(1+2i)}{(1-2i)\times(1+2i)} = \frac{-6-12i+2i+4i^2}{1^2-(2i)^2} = \frac{-6-10i-4}{1-4i^2} =$$
$$= \frac{-10-10i}{1+4} = \frac{-10-10i}{5} = -2-2i$$

Escrevendo $-2-2i$ na f.t. temos $-2-2i = \rho e^{i\theta}$, onde:

- $\rho = |-2-2i| = \sqrt{(-2)^2+(-2)^2} = \sqrt{4+4} = \sqrt{4\times 2} = 2\sqrt{2}$
- $\operatorname{tg}\theta = \frac{-2}{-2} = 1$; como $\operatorname{sen}\theta < 0$ e $\cos\theta < 0$, θ é um ângulo do 3º quadrante, logo $\theta = \pi + \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{4}$

Assim $\frac{z_1 + i^{23}}{z_2} = 2\sqrt{2}e^{i\left(\frac{5\pi}{4}\right)}$

Exame – 2004, 1.ª fase

51. Para que z seja um número real $\arg(z) = 0 \vee \arg(z) = \pi$

Assim $\theta - \frac{\pi}{5} = 0 \vee \theta - \frac{\pi}{5} = \pi \quad \Leftrightarrow \quad \theta = \frac{\pi}{5} \vee \theta = \pi + \frac{\pi}{5} \quad \Leftrightarrow \quad \theta = \frac{\pi}{5} \vee \theta = \frac{6\pi}{5}$

Resposta: **Opção A**

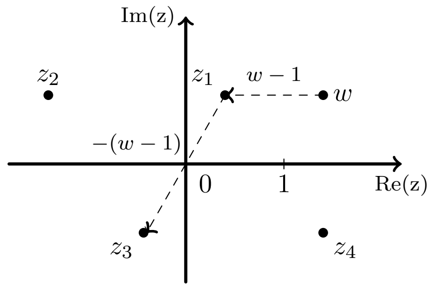
Exame – 2003, Prova para militares

52. Como $\operatorname{Re}(w) > 1$ então $\operatorname{Re}(w-1) > 0$ e $\operatorname{Im}(w) = \operatorname{Im}(w-1)$, pelo que é razoável admitir que $w - 1 = z_1$

Como $\operatorname{Re}(z_3) = -\operatorname{Re}(z_1) \wedge \operatorname{Im}(z_3) = -\operatorname{Im}(z_1)$, temos que $z_3 = -z_1$

Assim temos que $z_3 = -z_1 = -(w-1) = 1 - w$

Resposta: **Opção C**



Exame – 2003, 2.ª fase

53. Escrevendo z_1 na f.t. temos $z_1 = \rho e^{i\theta}$, onde:

- $\rho = |z_1| = \sqrt{2^2+(-2)^2} = \sqrt{4+4} = \sqrt{8} = \sqrt{2^2\times 2} = 2\sqrt{2}$
- $\operatorname{tg}\theta = \frac{-2}{2} = -1$; como $\operatorname{sen}\theta < 0$ e $\cos\theta > 0$, θ é um ângulo do 4º quadrante, logo $\theta = \frac{3\pi}{2} + \frac{\pi}{4} = \frac{6\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = \frac{7\pi}{4}$

Assim $z_1 = 2\sqrt{2}e^{i\left(\frac{7\pi}{4}\right)}$

Fazendo a divisão na f.t. e escrevendo o quociente na f.a., temos:
$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{2\sqrt{2}e^{i\left(\frac{7\pi}{4}\right)}}{\sqrt{2}e^{i\left(\frac{5\pi}{4}\right)}} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2}}e^{i\left(\frac{7\pi}{4}-\frac{5\pi}{4}\right)} = 2e^{i\left(\frac{2\pi}{4}\right)} = 2e^{i\left(\frac{\pi}{2}\right)} = 2i$$

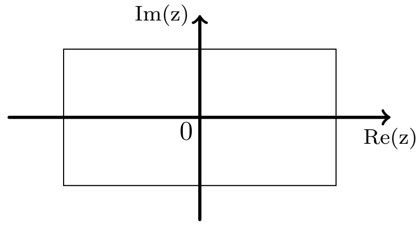
Exame – 2003, 1.ª fase - 1.ª chamada

54. Como $-2 < \text{Re}(z) < 2 \wedge -1 < \text{Im}(z) < 1$ e

- $\text{Re}(z) = \text{Re}(\overline{z})$
- $\text{Im}(z) = -\text{Im}(\overline{z})$

Temos que, também, $-2 < \text{Re}(\overline{z}) < 2 \wedge -1 < \text{Im}(\overline{z}) < 1$

Logo a imagem geométrica de $\overline{z}$ também pertence ao interior do retângulo.



Resposta: **Opção B**

Exame – 2002, 2.ª fase

55. $w = \dfrac{-1+i}{i} = \dfrac{(-1+i)\times i}{i\times i} = \dfrac{-i+i^2}{i^2} = \dfrac{-1-i}{-1} = 1+i$

Escrevendo w na f.t. temos $w = \rho e^{i\theta}$, onde:

- $\rho = |w| = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$
- $\text{tg}\,\theta = \dfrac{1}{1} = 1$; como $\text{sen}\,\theta > 0$ e $\cos\theta > 0$, θ é um ângulo do 1º quadrante, logo $\theta = \dfrac{\pi}{4}$

Assim $w = \sqrt{2}e^{i\left(\frac{\pi}{4}\right)}$, e por isso:

- $\arg(w) = \dfrac{\pi}{4} \neq \dfrac{\pi}{3} = \arg(z_1)$, pelo que $w \neq z_1$
- $|w| = \sqrt{2} \neq 4 = |z_2|$, pelo que $w \neq z_2$

Exame – 2002, 1.ª fase - 2.ª chamada

56. Como $i^{23} = i^{4\times5+3} = i^3 = -i$, temos que:

$$\frac{z_1+i^{23}+4}{2-i} = \frac{1+i+(-i)+4}{2-i} = \frac{5}{2-i} = \frac{5(2+i)}{(2-i)(2+i)} = \frac{10+5i}{2^2-i^2} = \frac{10+5i}{4-(-1)} = \frac{10+5i}{5} = 2+i$$

Exame – 2001, Ép. especial

57. Se $w = 2+i$, então $\dfrac{1}{w} = \dfrac{1}{2+i} = \dfrac{1(2-i)}{(2+i)(2-i)} = \dfrac{2-i}{2^2-i^2} = \dfrac{2-i}{4-(-1)} = \dfrac{2-i}{5} = \dfrac{2}{5} - \dfrac{1}{5}i$

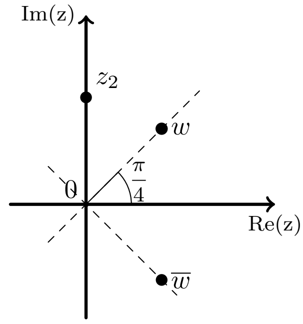
Escrevendo $\sqrt{2}e^{i\left(\frac{3\pi}{4}\right)}$ na f.a., temos que:

$$\sqrt{2}e^{i\left(\frac{3\pi}{4}\right)} = \sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\,\text{sen}\,\frac{3\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right) = -\frac{2}{2} + \frac{2}{2} = -1+i$$

Logo $\dfrac{1}{w} \neq \sqrt{2}e^{i\left(\frac{3\pi}{4}\right)}$

Exame – 2001, 2.ª fase

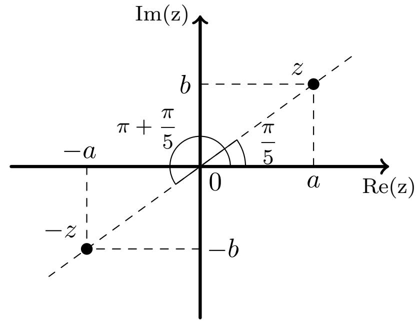
58. Se a imagem geométrica de w está no primeiro quadrante e pertence à bissetriz dos quadrantes ímpares, então $\arg(w) = \frac{\pi}{4}$, e w é da forma $w = \rho e^{i\left(\frac{\pi}{4}\right)}$



Assim temos que $\overline{w} = \rho e^{i\left(-\frac{\pi}{4}\right)}$
Logo
$\frac{w}{\overline{w}} = \frac{\rho e^{i\left(\frac{\pi}{4}\right)}}{\rho e^{i\left(-\frac{\pi}{4}\right)}} = \frac{\rho}{\rho} e^{i\left(\frac{\pi}{4} - \left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)} = 1 \times e^{i\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4}\right)} = e^{i\left(\frac{2\pi}{4}\right)} = e^{i\left(\frac{\pi}{2}\right)}$
Logo a representação geométrica de $\frac{w}{\overline{w}}$ está sobre a parte positiva do eixo imaginário, como a imagem geométrica de z_2

Resposta: **Opção B**

Exame – 2001, 1.ª fase - 1.ª chamada



59. Se $\arg(z) = \frac{\pi}{5}$, então z tem a imagem geométrica no 1º quadrante.

Se $z = a + bi$, com $a > 0 \wedge b > 0$, então $-z = -a - bi$, com $a > 0 \wedge b > 0$, logo $\arg(-z) = \pi + \frac{\pi}{5}$

Resposta: **Opção B**

Exame – 2000, 1.ª fase - 2.ª chamada

60. Sabemos que $z \in A$ se $|z| < 1$.

Como $|1 + \sqrt{3}i| = \sqrt{1^2 + \sqrt{3}^2} = \sqrt{1+3} = \sqrt{4} = 2$, sendo $\theta = \arg(1 + \sqrt{3}i)$ podemos escrever $1 + \sqrt{3}i = 2e^{i\theta}$,

Assim temos que :

$\frac{1 + \sqrt{3}i}{4e^{i\left(\frac{\pi}{6}\right)}} = \frac{2e^{i\theta}}{4e^{i\left(\frac{\pi}{6}\right)}} = \frac{2}{4} e^{i\left(\theta - \frac{\pi}{6}\right)} = \frac{1}{2} e^{i\left(\theta - \frac{\pi}{6}\right)}$
Logo, como $\left|\frac{1 + \sqrt{3}i}{4e^{i\left(\frac{\pi}{6}\right)}}\right| = \frac{1}{2}$, e $\frac{1}{2} < 1$, podemos afirmar que $\frac{1 + \sqrt{3}i}{4e^{i\left(\frac{\pi}{6}\right)}}$ pertence ao conjunto A.

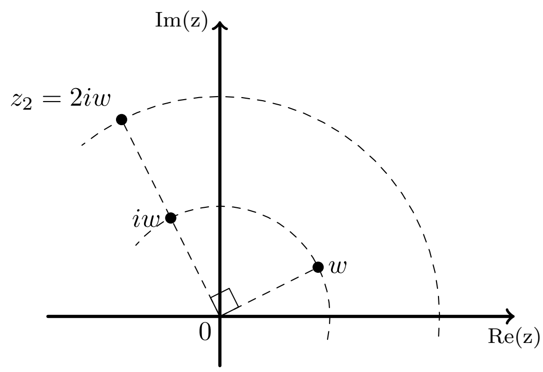
Exame – 2000, 1.ª fase - 1.ª chamada

61. A operação "*multiplicar por i*" corresponde geometricamente a "fazer uma rotação de centro em O e amplitude $\frac{\pi}{2}$ radianos" pelo que a imagem geométrica de iw, está sobre a circunferência de centro na origem que contem w.

A operação "*multiplicar por 2*" corresponde a duplicar a distância à origem, mantendo o ângulo que com o sei-eixo real positivo.

Assim temos que $2iw = z_2$

Resposta: **Opção B**



Exame – 2000, Prova modelo