Escola Secundária de Francisco Franco

Matemática A (Aprendizagens Essenciais) – 12.º ano

Exercícios saídos em exames nacionais e em testes intermédios (desde 1996)

Tema I: CÁLCULO COMBINATÓRIO

1. Uma das provas de um campeonato de atletismo é a estafeta 4x100 metros planos em que cada equipa participa com 4 atletas. O clube “Pés Voadores” vai participar na prova, dispondo de 10 atletas para formar a equipa de estafeta.

a) Quantos conjuntos diferentes é possível construir para formar a equipa de estafeta deste clube?

b) Formada a equipa, é necessário estabelecer a ordem de participação dos atletas que a constituem. Por razões tácticas escolheu-se o João Rui para iniciar a prova, podendo os restantes atletas da equipa participar em qualquer posição. De quantas formas diferentes se pode organizar esta equipa?

Prova modelo 1996

2. Os 4 primeiros números de certa linha do triângulo de Pascal são 1, 11, 55 e 165; então os 3 últimos números da linha seguinte são:

[A] 36, 24 e 12 [B] 66, 12 e 1
[C] 220, 66 e 12 [D] 24, 12 e 1

Exame nacional de 1996 (2.ª fase)

3. No bar de uma escola estão à venda 5 tipos de pastéis (laranja, feijão, nata, coco e amêndoa). Quatro amigos, João, Maria, Paulo e Rui decidem comer um pastel cada um. O João escolhe pastel de laranja ou de feijão. A Maria não escolhe pastel de nata. De quantas maneiras diferentes podem ser escolhidos os pastéis?

[A] ${}^{5}C_4$ [B] 5^2+4+2 [C] $5^2 x 4 x 2$ [D] ${}^{5}A_4$

Prova modelo 1997

4. ${}^{1997}C_{100} + {}^{1997}C_{101}$ é igual a:

[A] ${}^{1998}C_{101}$ [B] ${}^{1996}C_{100}$
[C] ${}^{1997}C_{201}$ [D] ${}^{1998}C_{201}$

Prova modelo 1997

5. Considere todos os n.ºs pares com 5 algarismos. Quantos destes n.ºs têm 4 algarismos ímpares?

[A] $5 \text{ x } {}^{5}C_4$ [B] 5^5 [C] 5! [D] $5 \text{ x } {}^{5}A_4$

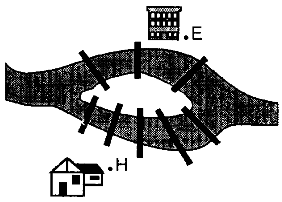
Exame nacional de 1997 (1.ª chamada)

6. Foram oferecidos 10 bilhetes para uma peça de teatro a uma turma com 12 rapazes e 8 raparigas. Ficou decidido que o grupo, que vai ao teatro, é formado por 5 rapazes e 5 raparigas. De quantas maneiras diferentes se pode formar este grupo?

[A] ${}^{12}C_5 \times {}^{8}C_5$ [B] ${}^{12}A_5 \times {}^{8}A_5$
[C] $12 \times 8 \times 5$ [D] $12! \times 8! / 5!$

Exame nacional de 1997 (2.ª chamada)

7. Na figura ao lado estão representados: o rio que atravessa certa localidade; uma ilha situada no leito desse rio; as 8 pontes que ligam a ilha às margens. H representa a habitação e E a escola de um jovem dessa localidade. Para efectuar o percurso de ida (*casa-ilha-escola*) e volta (*escola-ilha-casa*), o jovem pode seguir vários caminhos, que diferem uns dos outros pela sequência de pontes utilizadas. Indique quantos caminhos diferentes pode o jovem seguir, num percurso de ida e volta, sem passar 2 vezes pela mesma ponte.



[A] 5 x 3 + 4 x 2 [B] 5 x 4 x 3 x 2
[C] 5 + 4 + 3 + 2 [D] $5^2 \text{ x } 3^2$

Exame nacional de 1997 (2.ª fase)

8. O penúltimo n.º de uma certa linha do Triângulo de Pascal é 10. Qual é o 3.º n.º dessa linha?

(A) 11 (B) 19 (C) 45 (D) 144

Exame nacional de 1998 (1.ª chamada)

9. Num torneio de xadrez, cada jogador jogou uma partida com cada um dos outros jogadores. Supondo que participaram no torneio 10 jogadores, o n.º de partidas disputadas foi

(A) ${}^{10}C_2$ (B) ${}^{10}A_2$ (C) 10! (D) 10×9

Exame nacional de 1998 (2.ª fase)

10. Considere 2 linhas consecutivas do triângulo de Pascal, das quais se reproduzem alguns elementos:

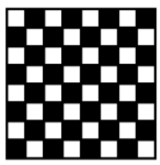
... 36 a 126 ...
... 120 b ...

Indique o valor de b.

(A) 164 (B) 198 (C)210 (D) 234

Prova modelo 1999

11. Admita que tem à sua frente um tabuleiro de xadrez, no qual pretende colocar os 2 cavalos brancos, de tal modo que fiquem na mesma fila horizontal. De quantas maneiras



diferentes pode colocar os 2 cavalos no tabuleiro, respeitando a condição indicada?

(A) $8\times{}^{8}C_2$ (B) ${}^{64}C_2$ (C) ${}^{64}C_2/8$ (D) ${}^{8}A_2$

Prova modelo 1999

12. <u>*a b c d e f g*</u> representa uma linha completa do Triângulo de Pascal, onde todos os elementos estão substituídos por letras. Qual das seguintes igualdades é verdadeira?

(A) $c={}^{6}C_3$ (B) $c={}^{6}C_2$ (C) $c={}^{7}C_2$ (D) $c={}^{7}A_2$

Exame nacional de 1999 (1.ª chamada)

13. De quantas maneiras se podem sentar 3 raparigas e 4 rapazes, num banco de 7 lugares, sabendo que em cada um dos extremos fica uma rapariga?

(A) 120 (B) 240 (C) 720 (D) 5040

Exame nacional de 1999 (2.ª fase)

14. Para representar Portugal num campeonato internacional de hóquei em patins foram seleccionados 10 jogadores: 2 guarda-redes, 4 defesas e 4 avançados. Sabendo que o treinador da selecção nacional opta que Portugal jogue sempre com 1 guarda-redes, 2 defesas e 2 avançados, quantas equipas diferentes pode ele constituir?

Exame nacional de 1999 (2.ª fase)

15. Considere todos os n.ºs de 6 algarismos que se podem formar com os algarismos de 1 a 9. Destes n.ºs, quantos têm exactamente um algarismo 4?

(A) 8^5 (B) 9^5 (C) 6×8^5 (D) $6\times{}^{8}A_5$

Exame nacional de 2000 (2.ª chamada)

16. Três rapazes e duas raparigas vão dar um passeio de automóvel. Qualquer um dos 5 jovens pode conduzir. De quantas maneiras podem ocupar os 5 lugares, 2 à frente e 3 atrás, de modo a que o condutor seja uma rapariga e a seu lado viaje um rapaz?

(A) 36 (B) 120 (C) 12 (D) 72

Exame nacional de 2000 (2.ª fase)

17. *Capicua* é uma sequência de algarismos cuja leitura da direita para a esquerda ou da esquerda para a direita dá o mesmo n.º. Por exemplo, 75957 e 30003 são *capicuas*. Quantas *capicuas* existem com 5 algarismos, sendo o 1.º algarismo ímpar?

(A) 300 (B) 400 (C) 500 (D) 600

Exame nacional de 2001 (1.ª chamada)

18. Num curso superior existem 10 disciplinas de índole literária, das quais 3 são de literatura contemporânea. Um estudante pretende inscrever-se em 6 disciplinas desse curso. Quantas escolhas pode ele fazer se tiver de se inscrever em, pelo menos, 2 disciplinas de literatura contemporânea?

(A) ${}^{3}C_2+{}^{7}C_4\times{}^{7}C_3$ (B) ${}^{3}C_2+{}^{7}C_4+{}^{7}C_3$

(C) ${}^{3}C_2\times{}^{7}C_4\times{}^{7}C_3$ (D) ${}^{3}C_2\times{}^{7}C_4+{}^{7}C_3$

Exame nacional de 2001 (2.ª chamada)

19. Num certo país existem 3 empresas operadoras de telecomunicações móveis: A, B e C. Independentemente do operador, os nºs de telemóvel têm 9 algarismos. Os n.ºs do operador A começam por 51, os do B por 52 e os do C por 53. Quantos n.ºs de telemóvel constituídos <u>só por algarismos ímpares</u> podem ser atribuídos nesse país?

(A) 139630 (B) 143620

(C) 156250 (D) 165340

Exame nacional de 2001 (2.ª fase)

20. Uma turma do 12.º ano é constituída por 25 alunos (15 raparigas e 10 rapazes). Nessa turma, vai ser escolhida 1 comissão para organizar 1 viagem de finalistas. A comissão será formada por 3 pessoas: 1 presidente, 1 tesoureiro e 1 responsável pelas relações públicas.

a) Se o delegado de turma tivesse obrigatoriamente de fazer parte da comissão, podendo ocupar qualquer 1 dos 3 cargos, quantas comissões distintas poderiam ser formadas?

b) Admita agora que o delegado de turma pode, ou não, fazer parte da comissão. Quantas comissões mistas distintas podem ser formadas?

<u>Nota</u>: Entenda-se por comissão mista uma comissão constituída por jovens que não são todos do mesmo sexo.

Exame nacional de 2001 (2.ª fase)

21. Pretende-se dispor, numa prateleira de uma estante, 6 livros, dois dos quais são de Astronomia. De quantas maneiras diferentes o podemos fazer, de tal forma que os 2 primeiros livros, do lado esquerdo, seja os de Astronomia?

(A) 24 (B) 36 (C) 48 (D) 60

Exame nacional de 2002 (2.ª fase)

22. No balcão de uma geladaria existe um recipiente com dez compartimentos, cinco à frente e cinco atrás, para colocar gelado. Em cada compartimento só é colocado um sabor, e nunca existem dois compartimentos com o mesmo sabor. Num certo dia, a geladaria tem sete sabores disponíveis: cinco são de fruta (morango, ananás, pêssego, manga e framboesa) e os outros dois são baunilha e chocolate.

a) De quantas maneiras distintas se podem colocar os sete sabores no recipiente?

b) De quantas maneiras distintas se podem colocar os sete sabores no recipiente, de tal forma que os cinco de fruta preencham a fila da frente?

Exame nacional de 2003 (1.ª chamada)

23. O quarto número de uma certa linha do Triângulo de Pascal é 19600. A soma dos quatro primeiros números dessa linha é 20876. Qual é o terceiro número da <u>linha seguinte</u>?
(A) 1275 (B) 1581 (C) 2193 (D) 2634

Exame nacional de 2003 (2.ª chamada)

24. De um baralho de cartas, seleccionam-se 6 cartas do naipe de espadas; Ás, Rei, Dama, Valete, Dez e Nove. Dispõem-se as 6 cartas, em fila, em cima de uma mesa.

a) Quantas disposições diferentes podem ser feitas, de modo que as 2 cartas do meio sejam o Ás e o Rei (não necessariamente por esta ordem)?

b) Quantas disposições diferentes podem ser feitas, de modo que o Rei não fique ao lado da Dama?

Exame nacional de 2003 (2.ª fase)

25. Uma pessoa vai visitar cinco locais, situados no Parque das Nações, em Lisboa: o Pavilhão de Portugal, o Oceanário, o Pavilhão Atlântico, a Torre Vasco da Gama e o Pavilhão do Conhecimento. De quantas maneiras diferentes pode planear a sequência das cinco visitas, se quiser começar na Torre Vasco da Gama e acabar no Oceanário?
(A)6 (B) 12 (C) 24 (D) 120

Exame nacional de 2004 (1.ª fase)

26. De quantas maneiras distintas podem ficar sentados três rapazes e quatro raparigas num banco de sete lugares, sabendo que se sentam alternadamente por sexo, ou seja, cada rapaz fica sentado entre duas raparigas?
(A) 121 (B) 133 (C) 144 (D) 156

Exame nacional de 2004 (2.ª fase)

27. Considere um prisma regular em que cada base tem n lados. Numa pequena composição, justifique que o número total de diagonais de todas as faces do prisma (incluindo as bases) é dado por $2({}^nC_2 - n) + 2n$

Exame nacional de 2005 (1.ª fase)

28. O João tem 14 discos de música ligeira: 6 são portugueses; 4 são espanhóis; 3 são franceses; 1 é italiano. O João pretende seleccionar 4 desses 14 discos.

a) Quantos conjuntos diferentes pode o João fazer, de tal modo que os 4 discos seleccionados sejam de 4 países diferentes, ou seja, um de cada país?

b) Quantos conjuntos diferentes pode o João fazer, de tal modo que os 4 discos seleccionados sejam todos do mesmo país?

Exame nacional de 2005 (2.ª fase)

29. Três raparigas e os respectivos namorados posam para uma fotografia. De quantas maneiras se podem dispor, lado a lado, de modo que cada par de namorados fique junto na fotografia?
(A) 12 (B) 24 (C) 36 (D) 48

Teste intermédio 1 (2005/06)

30. Um baralho de cartas completo é constituído por 52 cartas, repartidas em 4 naipes (Espadas, Copas, Ouros e Paus). Em cada naipe há um Ás, três figuras (Rei, Dama e Valete) e mais nove cartas (do Dois ao Dez). A Joana pretende fazer uma sequência com <u>seis</u> cartas do naipe de Espadas. Ela quer iniciar a sequência com o Ás, quer que as três cartas seguintes sejam figuras e quer concluir a sequência com duas das nove restantes cartas desse naipe. Quantas sequências diferentes pode a Joana fazer?
(A) 416 (B) 432 (C) 528 (D) 562

Teste intermédio 1 (2005/06)

31. De uma certa linha do Triângulo de Pascal, sabe-se que a soma dos dois primeiros é 21. Qual é o maior termo dessa linha?
(A) 169247 (B) 175324 (C) 184756 (D) 193628

Teste intermédio 1 (2005/06)

32. Seja C o conjunto de todos os números naturais com três algarismos (ou seja, de todos os nºs naturais de 100 a 999)

a) Quantos elementos do conjunto C são múltiplos de 5?

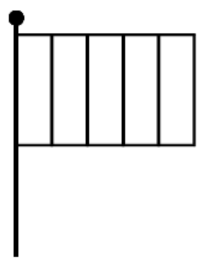
b) Quantos elementos do conjunto C têm os algarismos todos diferentes?

Teste intermédio 1 (2005/06)

33. Quatro raparigas e quatro rapazes entram num autocarro, no qual existem seis lugares sentados, ainda não ocupados. De quantas maneiras diferentes podem ficar ocupados esses seis lugares, supondo que ficam dois rapazes em pé?
(A) 3560 (B) 3840 (C) 4180 (D) 4320

Exame nacional de 2006 (2.ª fase)

34. Pretende-se fazer uma bandeira com cinco tiras verticais, respeitando as seguintes condições:
• duas tiras vizinhas não podem ser pintadas com a mesma cor; • cada uma das três tiras centrais pode ser pintada de vermelho ou de amarelo;



• cada uma das duas tiras das extremidades pode ser pintada de branco, de azul ou de verde. De acordo com estas condições, quantas bandeiras diferentes se podem fazer?

(A) 12 (B) 18 (C) 24 (D) 32

Teste intermédio 1 (2006/07)

35. Dois rapazes e três raparigas vão fazer um passeio num automóvel com cinco lugares, dois à frente e três atrás. Sabe-se que:

• apenas os rapazes podem conduzir;

• a Inês, namorada do Paulo, tem de ficar ao lado dele.

De acordo com estas restrições, de quantos modos distintos podem ficar dispostos os cinco jovens no automóvel?

(A) 10 (B) 14 (C) 22 (D) 48

Teste intermédio 1 (2006/07)

36. No Triângulo de Pascal, considere a linha que contém os elementos da forma ${}^{2006}C_k$. Quantos elementos desta linha são menores do que ${}^{2006}C_4$?

(A) 8 (B) 6 (C) 5 (D) 3

Teste intermédio 1 (2006/07)

37. Considere todos os números de três algarismos que se podem formar com os algarismos 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 e 9. Considere o seguinte problema: *De entre todos os números de três algarismos diferentes que se podem formar com os algarismos 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 e 9, em quantos deles o produto dos seus algarismos é um número par*?

Uma resposta correcta a este problema é: ${}^{9}A_3 - {}^{5}A_3$.

Numa pequena composição explique porquê.

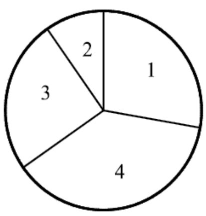
Exame nacional de 2007 (1.ª fase)

38. A soma dos dois primeiros elementos de uma certa linha do Triângulo de Pascal é 13. Quantos elementos dessa linha são menores do que 70?

(A) 2 (B) 4 (C) 6 (D) 8

Teste intermédio 1 (2008/09)

39. Na figura está representado um círculo dividido em quatro sectores circulares diferentes, numerados de 1 a 4. Estão disponíveis cinco cores para pintar este círculo. Pretende-se que sejam respeitadas as seguintes condições:



• todos os sectores devem ser pintados;

• cada sector é pintado com uma única cor;

• sectores com um raio em comum não podem ficar pintados com a mesma cor;

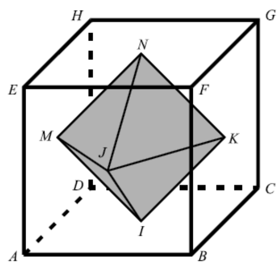
• o círculo deve ficar pintado com duas ou com quatro cores.

De quantas maneiras diferentes pode o círculo ficar pintado?

(A) 140 (B) 230 (C) 310 (D) 390

Teste intermédio 1 (2008/09)

40. Na figura estão representados dois poliedros, o cubo [ABCDEFGH] e o octaedro [IJKLMN] (o vértice L do octaedro não está visível). Cada vértice do octaedro pertence a uma face do cubo. Considere todos os conjuntos que são constituídos por cinco dos catorze vértices dos dois poliedros (como, por exemplo, {A,B,C,K,L}).



a) Quantos desses conjuntos são constituídos por três vértices do cubo e dois vértices do octaedro?

b) Quantos desses conjuntos são constituídos por cinco vértices do mesmo poliedro?

Teste intermédio 1 (2008/09)

41. A Ana, a Bárbara, a Catarina, o Diogo e o Eduardo vão sentar-se num banco corrido, com cinco lugares. De quantas maneiras o podem fazer, ficando uma rapariga no lugar do meio?

(A) 27 (B) 72 (C) 120 (D) 144

Teste intermédio 2 (2008/09)

42. De um bilhete de lotaria sabe-se que o seu número é formado por sete algarismos, dos quais três são iguais a 1, dois são iguais a 4 e dois são iguais a 5 (por exemplo: 1551414). Determine quantos números diferentes satisfazem as condições anteriores.

Exame nacional de 2009 (1.ª fase)

43. Considere uma turma de uma escola secundária, com 8 rapazes e 12 raparigas. Pretende-se eleger o Delegado e o Subdelegado da turma. De quantas maneiras se pode fazer essa escolha, de modo a que os alunos escolhidos sejam de sexos diferentes?

(A) 96 (B) 190 (C) 192 (D) 380

Exame nacional de 2009 (fase especial)

44. Considere o conjunto A = {1, 3, 5, 6, 8}. Com os elementos do conjunto A, quantos números pares de quatro algarismos se podem formar, que tenham dois e só dois algarismos iguais a 5?

Exame nacional de 2009 (fase especial)

45. Quantos números pares de cinco algarismos diferentes se podem escrever, utilizando os algarismos do número 12345?
(A) 24 (B) 48 (C) 60 (D) 96

Teste intermédio 1 (2009/10)

46. Numa certa linha do Triângulo de Pascal, o segundo elemento é 2009. Quantos elementos dessa linha são maiores do que *um milhão*?
(A) 2004 (B) 2005 (C) 2006 (D) 2007

Teste intermédio 1 (2009/10)

47. Uma professora de Matemática propôs o seguinte problema aos seus alunos: *Uma turma tem 25 alunos, dos quais 15 são rapazes e 10 são raparigas. Pretende-se formar uma comissão com dois alunos do mesmo sexo. Quantas comissões diferentes se podem formar?*
Apresentam-se, em seguida, as respostas da Rita e do André a este problema.
Resposta da Rita: ${}^{15}C_2 \times {}^{10}C_2$
Resposta do André: ${}^{25}C_2 - 15\times10$
Apenas uma das respostas está correcta. Elabore uma composição na qual:
• identifique a resposta correcta;
• explique o raciocínio que conduz à resposta correcta;
• proponha uma alteração na expressão da resposta incorrecta, de modo a torná-la correcta;
• explique, no contexto do problema, a razão da alteração.

Teste intermédio 2 (2009/10)

48. Quantos números naturais de três algarismos diferentes se podem escrever, não utilizando o algarismo 2 nem o algarismo 5 ?
(A) 256 (B) 278 (C) 286 (D) 294

Teste intermédio 3 (2009/10)

49. Considere todos os números de cinco algarismos que se podem formar com os algarismos 5, 6, 7, 8 e 9. De entre estes números, quantos têm, exactamente, três algarismos 5 ?
(A) ${}^5C_3 \times {}^4A_2$ (B) ${}^5C_3 \times 4^2$ (C) ${}^5A_3 \times 4^2$ (D) ${}^5A_3 \times {}^4C_2$

Exame nacional de 2010 (2.ª fase)

50. A Rita tem oito livros, todos diferentes, sendo três de Matemática, três de Português e dois de Biologia. A Rita pretende arrumar, numa prateleira, os oito livros, uns a seguir aos outros. De quantas maneiras diferentes o pode fazer, ficando os livros de Matemática todos juntos numa das pontas?
(A) 72 (B) 240 (C) 720 (D) 1440

Exame nacional de 2010 (fase especial)

51. O terceiro elemento de uma certa linha do Triângulo de Pascal é 55. Qual é o penúltimo elemento dessa linha?
(A) 10 (B) 11 (C) 12 (D) 13

Teste intermédio 1 (2010/11)

52. A Ana dispõe de sete cartas todas diferentes: quatro cartas do naipe de espadas e três cartas do naipe de copas. A Ana vai dispor essas sete cartas sobre uma mesa, lado a lado, da esquerda para a direita, de modo a formar uma sequência com as sete cartas. A Ana pretende que a primeira e a última cartas da sequência sejam ambas do naipe de espadas. Quantas sequências diferentes, nestas condições, pode a Ana fazer?

Teste intermédio 1 (2010/11)

53. O código de um auto-rádio é constituído por uma sequência de quatro algarismos. Por exemplo, 0137. Quantos desses códigos têm dois e só dois algarismos iguais a 7 ?
(A) 486 (B) 810 (C) 432 (D) 600

Exame nacional de 2011 (1.ª fase)

54. A MatFinance é uma empresa de consultoria financeira. Considere o problema seguinte. «*Foi pedido a 15 funcionários da MatFinance que se pronunciassem sobre um novo horário de trabalho. Desses 15 funcionários, 9 estão a favor do novo horário, 4 estão contra, e os restantes estão indecisos. Escolhe-se, ao acaso, 3 funcionários de entre os 15 funcionários considerados. De quantas maneiras diferentes podem ser escolhidos os 3 funcionários, de forma que pelo menos 2 dos funcionários escolhidos estejam a favor do novo horário de trabalho?*»
Apresentam-se, em seguida, duas respostas.
Resposta I: ${}^{15}C_3 - {}^{6}C_3$ Resposta II: $6 \times {}^{9}C_2 + {}^{9}C_3$
Apenas uma das respostas está correcta. Elabore uma composição na qual:
• identifique a resposta correcta;
• explique um raciocínio que conduza à resposta correcta;
• proponha uma alteração na expressão correspondente à resposta incorrecta, de modo a torná-la correcta;
• explique, no contexto do problema, a razão da alteração proposta.

Exame nacional de 2011 (2.ª fase)

55. O terceiro elemento de uma linha do triângulo de Pascal é 61 075. A soma dos três primeiros elementos

dessa linha é 61 426. Qual é a soma dos três últimos elementos da linha seguinte?
(A) 61 425 (B) 61 426 (C) 61 777 (D) 122 501

Exame nacional de 2011 (1.ª fase especial)

56. Considere as 13 cartas do naipe de copas: ás, três figuras (rei, dama e valete) e mais nove cartas (do 2 ao 10). As cartas vão ser dispostas, ao acaso, sobre uma mesa, lado a lado, de modo a formarem uma sequência de 13 cartas. Determine o número de sequências diferentes que é possível construir, de modo que as três figuras fiquem juntas.

Exame nacional de 2011 (especial normal)

57. Uma turma de 12.º ano é constituída por 14 raparigas e 10 rapazes. Os alunos da turma vão dispor-se em duas filas para tirarem uma fotografia de grupo. Combinaram que:
• os rapazes ficam sentados na fila da frente;
• as raparigas ficam na fila de trás, em pé, ficando a delegada numa das extremidades e a subdelegada na outra extremidade, podendo cada uma destas duas alunas ocupar qualquer uma das extremidades.
Escreva uma expressão que dê o número de maneiras diferentes de, nestas condições, os jovens se poderem dispor para a fotografia.
Nota – Não calcule o valor da expressão que escreveu.

Teste intermédio 1 (2011/12)

58. Numa caixa com 12 compartimentos, pretende-se arrumar 10 copos, com tamanho e forma iguais: sete brancos, um verde, um azul e um roxo. Em cada compartimento pode ser arrumado apenas um copo. De quantas maneiras diferentes se podem arrumar os 10 copos nessa caixa?
(A) ${}^{12}A_7 \times 3!$ (B) ${}^{12}A_7 \times {}^{5}C_3$ (C) ${}^{12}C_7 \times {}^{5}A_3$ (D) ${}^{12}C_7 \times {}^{12}A_3$

Exame nacional de 2012 (1.ª fase)

59. O código de acesso a uma conta de e-mail é constituído por quatro letras e três algarismos. Sabe-se que um código tem quatro «a», dois «5» e um «2», como, por exemplo, o código 2aa5a5a. Quantos códigos diferentes existem nestas condições?
(A) 105 (B) 210 (C) 5040 (D) 39

Exame nacional de 2012 (2.ª fase)

60. A empresa AP comercializa pacotes de açúcar. Considere o problema seguinte. «A empresa AP pretende aplicar, junto dos seus funcionários, um programa de reeducação alimentar. De entre os 500 funcionários da empresa AP vão ser selecionados 30 para formarem um grupo para frequentar esse programa. A Joana e a Margarida são irmãs e são funcionárias da empresa AP. Quantos grupos diferentes podem ser formados de modo que, pelo menos, uma das duas irmãs, a Joana ou a Margarida, não seja escolhida para esse grupo?» Apresentam-se, em seguida, duas respostas corretas.
I) ${}^{500}C_{30} - {}^{498}C_{28}$ II) $2 \times {}^{498}C_{29} + {}^{498}C_{30}$
Numa composição, apresente o raciocínio que conduz a cada uma dessas respostas.

Exame nacional de 2012 (2.ª fase)

61. Uma sequência de algarismos cuja leitura da direita para a esquerda ou da esquerda para a direita dá o mesmo número designa-se por capicua. Por exemplo, 103301 é capicua. Quantos números com seis algarismos são capicuas?
(A) 729 (B) 900 (C) 810 000 (D) 900 000

Exame nacional de 2012 (fase especial)

62. Os três irmãos Andrade e os quatro irmãos Martins vão escolher, de entre eles, dois elementos de cada família para um jogo de matraquilhos, de uma família contra a outra. De quantas maneiras pode ser feita a escolha dos jogadores de modo que o Carlos, o mais velho dos irmãos da família Andrade, seja um dos escolhidos?
(A) 8 (B) 12 (C) 16 (D) 20

Teste intermédio 1 (2012/13)

63. Considere todos os números que se podem obter alterando a ordem dos algarismos do número 12 345. Quantos desses números são ímpares e maiores do que 40 000 ?
(A) 18 (B) 30 (C) 120 (D) 240

Teste intermédio 2 (2012/13)

64. Num grupo de nove pessoas, constituído por seis homens e três mulheres, vão ser escolhidos três elementos para formarem uma comissão. Quantas comissões diferentes se podem formar com exatamente duas mulheres?
(A) ${}^{3}C_2$ (B) $6\times{}^{3}C_2$ (C) ${}^{9}A_3$ (D) $6 \times {}^{3}A_2$

Exame nacional de 2013 (1.ª fase)

65. Na Figura 1, está representado um tabuleiro quadrado dividido em dezasseis quadrados iguais, cujas linhas são A, B, C e D e cujas colunas são 1, 2, 3 e 4. O João tem doze discos, nove brancos e três pretos, só distinguíveis pela cor, que pretende colocar no tabuleiro, não mais do que um em cada quadrado. De quantas maneiras diferentes

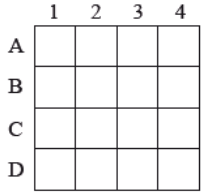


Figura 1

pode o João colocar os doze discos nos dezasseis quadrados do tabuleiro?
(A) ${}^{16}C_{12}$ (B) ${}^{16}C_9 \times {}^{7}C_3$ (C) ${}^{16}A_{12}$ (D) ${}^{16}A_9 \times {}^{7}A_3$
Exame nacional de 2013 (2.ª fase)

66. Numa conferência de imprensa, estiveram presentes 20 jornalistas. Considere o problema seguinte.
«*Admita que a conferência de imprensa se realiza numa sala, cujas cadeiras se encontram dispostas em cinco filas, cada uma com oito cadeiras. Todos os jornalistas se sentam, não mais do que um em cada cadeira, nas três primeiras filas. De quantas maneiras diferentes se podem sentar os 20 jornalistas, sabendo que as duas primeiras filas devem ficar totalmente ocupadas?*»
Apresentam-se, em seguida, duas respostas corretas.
Resposta I) ${}^{20}C_{16} \times 16! \times {}^{8}A_4$
Resposta II) ${}^{20}A_8 \times {}^{12}A_8 \times {}^{8}A_4$
Numa composição, apresente os raciocínios que conduzem a cada uma dessas respostas.
Exame nacional de 2013 (2.ª fase)

67. Numa turma com 15 raparigas e 7 rapazes, vai ser formada uma comissão com 5 elementos. Pretende-se que essa comissão seja mista e que tenha mais raparigas do que rapazes. Quantas comissões diferentes se podem formar?
(A) ${}^{15}A_3 + {}^{15}A_4$ (B) ${}^{15}C_3 \times {}^{7}C_2 + {}^{15}C_4 \times 7$
(C) ${}^{15}C_3 \times {}^{7}C_2 \times {}^{15}C_4 \times 7$ (D) ${}^{22}C_3 \times {}^{19}C_2$
Exame nacional de 2013 (fase especial)

68. A soma de todos os elementos de uma certa linha do triângulo de Pascal é igual a 256. Qual é o terceiro elemento dessa linha?
(A) 28 (B) 36 (C) 56 (D) 84
Teste intermédio 1 (2013/14)

69. Do desenvolvimento de $(x^2 + 2)^6$ resulta um polinómio reduzido. Qual é o termo de grau 6 desse polinómio?
(A) $8x^6$ (B) $20x^6$ (C) $64\,x^6$ (D) $160\,x^6$
Teste intermédio 1 (2013/14)

70. Considere todos os números naturais de dez algarismos que se podem escrever com os algarismos de 1 a 9. Quantos desses números têm exatamente seis algarismos 2 ?
(A) ${}^{10}C_6 \times 8^4$ (B) ${}^{10}C_6 \times {}^{8}A_4$ (C) ${}^{10}A_6 \times {}^{8}A_4$ (D) ${}^{10}A_6 \times 8^4$
Exame nacional de 2014 (1.ª fase)

71. Um dos termos do desenvolvimento de $\left(\frac{2}{x} + x\right)^{10}$, com $x \neq 0$, não depende da variável x. Qual é esse termo?
(A) 10 240 (B) 8064 (C) 1024 (D) 252
Exame nacional de 2014 (2.ª fase)

72. Considere todos os números ímpares com cinco algarismos. Quantos desses números têm quatro algarismos pares e são superiores a 20 000 ?
(A) 5^4 (B) 5^5 (C) 3×5^4 (D) 4×5^4
Exame nacional de 2014 (fase especial)

73. Dois rapazes e quatro raparigas vão sentar-se num banco corrido com seis lugares. De quantas maneiras o podem fazer, de modo que fique um rapaz em cada extremidade do banco?
(A) 12 (B) 24 (C) 48 (D) 60
Exame nacional de 2015 (1.ª fase)

74. Nove jovens, três rapazes e seis raparigas, vão dispor-se, lado a lado, para uma fotografia. De quantas maneiras o podem fazer, de modo que os rapazes fiquem juntos?
(A) 40 140 (B) 30 240 (C) 20 340 (D) 10 440
Exame nacional de 2015 (fase especial)

75. Considere nove bolas, quatro numeradas com o número 1, quatro com o número 2 e uma com o número 4. Considere agora que se colocam as nove bolas lado a lado, de modo a formar um número com nove algarismos. Quantos números ímpares diferentes se podem obter?
Exame nacional de 2016 (1.ª fase)

76. Considere todos os números naturais de quatro algarismos que se podem formar com os algarismos de 1 a 9. Destes números, quantos são múltiplos de 5 ?
(A) 729 (B) 1458 (C) 3645 (D) 6561
Exame nacional de 2017 (1.ª fase)

77. Considere todos os números naturais de cinco algarismos diferentes que se podem formar com os algarismos 1, 2, 3, 4 e 5. Destes números, quantos têm os algarismos pares um a seguir ao outro?
(A) 24 (B) 48 (C) 72 (D) 96
Exame nacional de 2017 (2.ª fase)

78. Com os algarismos 0, 1, 2, 3 e 4, quantos números naturais maiores do que 20 000 e com os cinco algarismos todos diferentes é possível formar?
(A) 24 (B) 48 (C) 72 (D) 96
Exame nacional de 2017 (fase especial)

79. Com cinco pessoas, quantos conjuntos com, pelo menos, três pessoas é possível formar?
(A) 60 (B) 81 (C) 10 (D) 16
Exame nacional de 2018 (fase especial)

80. Considere todos os números naturais de sete algarismos que se podem escrever utilizando dois algarismos 5, quatro algarismos 6 e um algarismo 7. Determine quantos destes números são ímpares e maiores do que seis milhões.
Exame nacional de 2019 (1.ª fase)

81. Considere todos os números naturais superiores a 9999 e inferiores a 22 000. Destes números, quantos se podem escrever com os algarismos 0, 1, 2 e 3?
(A) 192 (B) 236 (C) 384 (D) 512
Exame nacional de 2020 (2.ª fase)

82. O corfebol é um desporto coletivo misto, com origem na Holanda. Um clube de corfebol de um certo país vai participar num torneio internacional. A comitiva vai deslocar-se por via terrestre, utilizando um automóvel de cinco lugares e uma carrinha de nove lugares. A comitiva é constituída por três dirigentes, um treinador, cinco jogadores do sexo masculino e cinco do sexo feminino. Escreva uma expressão que dê o número de maneiras diferentes de distribuir os catorze elementos da comitiva pelos catorze lugares disponíveis, sabendo-se que os dois condutores são dois dos dirigentes e que, no automóvel, vão dois jogadores de cada sexo.
Exame nacional de 2021 (1.ª fase)

83. Considere, num plano α, duas retas paralelas r e s. Assinalam-se, na reta r, cinco pontos distintos e, na reta s, um certo número n de pontos, igualmente distintos. Sabe-se que, com os pontos assinalados nas duas retas, é possível definir exatamente 175 triângulos. Determine o valor de n.
Exame nacional de 2021 (2.ª fase)

84. A Fernanda tem cinco livros diferentes e sete canetas, também diferentes, para repartir pelos seus dois netos, o Armando e o Catarino. A Fernanda vai oferecer três livros e três canetas a um dos netos, e os restantes objetos ao outro, ou quatro livros e duas canetas a um dos netos, e os restantes objetos ao outro. Determine, nestas condições, de quantos modos diferentes pode a Fernanda repartir os doze objetos pelos seus dois netos.
Exame nacional de 2021 (fase especial)

85. O Semáforo é um jogo matemático em que se usa um tabuleiro retangular de 3 × 4 casas e se dispõe de peças verdes, peças amarelas e peças encarnadas. As peças da mesma cor são iguais. Na Figura 1, está representado um tabuleiro do jogo Semáforo cujas casas foram numeradas de 1 a 12. Pretende-se colocar 2 peças no tabuleiro, uma peça por casa, de modo a obter uma configuração colorida. Para o efeito, dispõe-se de várias peças de cada cor. Considera-se uma configuração colorida o resultado da colocação de duas peças no tabuleiro. Duas configurações coloridas são diferentes se diferirem nas casas ocupadas pelas peças usadas ou na cor dessas peças.

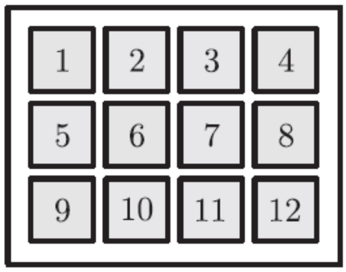


Figura 1

A expressão seguinte permite determinar o número de configurações coloridas diferentes que é possível obter. $3\times{}^{12}C_2 + {}^{3}C_2\times{}^{12}A_2$
Explique, no contexto descrito, cada parcela desta expressão.
Exame nacional de 2022 (1.ª fase)

86. A soma de todos os elementos de uma dada linha do triângulo de Pascal é igual a 16 384. Qual é o valor do quarto elemento da linha seguinte?
(A) 286 (B) 455 (C) 715 (D) 1365
Exame nacional de 2022 (2.ª fase)

87. Considere todos os números naturais de cinco algarismos diferentes que se podem formar com os algarismos de 0 a 5. Destes números, quantos têm o algarismo das unidades igual a 5 ?
(A) 625 (B) 256 (C) 128 (D) 96
Exame nacional de 2022 (fase especial)

88. Considere todos os números naturais de seis algarismos que é possível formar com os algarismos de 1 a 9. Destes números, quantos têm exatamente dois cincos?
(A) 98 415 (B) 61 440 (C) 36 015 (D) 25 200
Exame nacional de 2023 (2.ª fase)

Soluções:

1. 210; 6; 1/28		2. B	3. C	4. A	5. B	6. A	7. B	8. C	9. A	10. C	11. A	12. B	13. C
14. 72	15. C	16. A	17. C	18. D	19. C	20. 1656; 10350			21. C	22. 604800; 2400			23. A
24. 48; 480		25. A	26. C	28. 72; 16		29. D	30. B	31. C	32. 180; 648		33. D	34. B	35. B
36. A	38. C	39. A	40. 840; 62		41. B	42. 210		43. C	44. 24	45. B	46. C	47. André	
48. D	49. B	50. D	51. B	52. 1440		53. A	54. II	55. C	56. 239500800		57. $10!\times12!\times2$		58. C
59. A	61. B	62. B	63. B	64. B	65. B	67. B	68. A	69. D	70. A	71. B	72. D	73. C	74. B
75. 280.		76. A	77. B	78. C	79. D	80. 35	81. C	82. ${}^3A_2\times({}^5C_2)^2\times4!\times8!$			83. 7	84. 910	86. B
87. D	88. B												

O professor: Roberto Oliveira