

EXAME ESPECIAL PARA ACESSO AO ENSINO SUPERIOR
PROVA DE MATEMÁTICA

04 de Junho de 2018

- O tempo para a realização desta prova é de **2 horas**.
- A prova é sem consulta e não é permitido o uso de máquinas de calcular.
- Apresente os seus raciocínios de forma clara, indicando todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias.
- Separe as respostas às questões 1 – 3 das respostas às questões 4 – 7.

1. (3 valores)

Considere a sucessão de termo geral $a_n = -1 + 2n$, $n \in \mathbb{N}$.

- (a) Verifique que a_n é uma sucessão estritamente crescente de números reais positivos.
- (b) Verifique que $\sqrt{a_{2n-1}a_{2n+1}} < a_{2n}$, $\forall n \in \mathbb{N}$.
- (c) Indique o valor lógico da seguinte proposição. Justifique a sua resposta.

$$\forall x \in \mathbb{R} \exists n \in \mathbb{N} : a_n > x$$

2. (4 valores)

Considere a função real de variável real definida por $f(x) = x^3 + 3x^2 - 4$

- (a) Verifique que $f(-2) = 0$ e determine as restantes soluções de $f(x) = 0$.
- (b) Identifique o conjunto $A = \{x \in \mathbb{R} : f(x) \geq 0\}$.
- (c) Determine $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ e $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.
- (d) Indique os intervalos de monotonia e os máximos e mínimos locais, caso existam.
- (e) Determine o sentido da concavidade e pontos de inflexão, caso existam, da função.
- (f) Faça um esboço do gráfico de f .
- (g) A função é injetiva? Justifique.

3. (2 valores)

- (a) Determine as soluções reais da equação $2 \ln(\sqrt{x-3}) + \ln(x-1) = \ln(2x-5)$.
- (b) Calcule a derivada da função $f(x) = e^{1+\sqrt{x^2+4}}$.



4. (3 valores)

- (a) Resolva a equação $2 \sin(\theta) \cos^2(\theta) = \sin(\theta)$.
- (b) Considere a função real de variável real $f(x) = 2 \sin(2x + \frac{\pi}{2}) + 1$.
- i) Determine o contradomínio de f .
- ii) Faça a representação gráfica da função f em $x \in [0, \pi]$.

5. (3 valores)

Considere os números complexos $z_1 = -1 + \sqrt{3}i$ e $z_2 = \frac{2+i}{1-2i}$.

- (a) Determine z_1^4 na forma trigonométrica.
- (b) Verifique que $z_2 = i$ e represente no plano complexo o conjunto de pontos definido pela condição

$$|z| \leq (\operatorname{Im}(z_1))^2 \quad \wedge \quad |z - z_2| \geq |z - 1|.$$

6. (2 valores)

Num referencial ortonormado Oxyz, considere o plano α e a reta r definidos pelas condições

$$\alpha: 2x - y + 2z = 1 \quad r: \frac{x-1}{2} = -y = \frac{z}{2}$$

- (a) Determine as coordenadas de um vetor normal a α .
- (b) Mostre que a reta r é perpendicular ao plano α .
- (c) Determine a distância do ponto $A = (1, 0, 0)$ ao plano α .

7. (3 valores)

O João tem um saco preto com 10 bolas iguais, sendo 5 brancas, 3 pretas e 2 azuis.

- (a) Indique a probabilidade do João tirar, ao acaso, uma bola que não é preta.
- (b) Sabendo que o João tirou sucessivamente 3 bolas do saco, sem as repor, determine a probabilidade de as três bolas serem brancas.
- (c) Se o João efetuasse o procedimento anterior quatro vezes, repondo todas as bolas no saco no final de cada procedimento, indique a probabilidade de obter as 3 bolas brancas em dois desses procedimentos.

Nota: Nesta questão deverá simplificar as expressões mas não efetuar os cálculos.