Exame final nacional de Matemática A (2022, Época especial)

Proposta de resolução

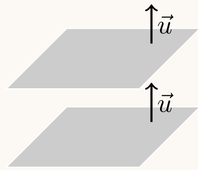
1.

1.1. Como o vértice A pertence ao semieixo positivo Ox e o vértice F pertence ao semieixo positivo Oy, então a base $[ABCDEF]$ do prisma pertence ao plano xOy.
Como o prisma hexagonal $[ABCDEFGHIJKL]$ é reto, a base $[GHIJKL]$ é paralela ao plano xOy, o seja o plano que contem esta face é definido por uma equação da forma $z = k$, $k \in \mathbb{R}$

Como o ponto M, equidistante de ambas as bases tem de cota 2, então a altura do prima é $2 \times 2 = 4$, ou seja, a equação do plano que contém a face $[GHIJKL]$ é $z = 4$

Resposta: **Opção B**

1.2. Como as bases do prisma são hexágonos regulares, as faces laterais opostas são paralelas, pelo que os planos BCJ e LEF são paralelos, ou seja os respetivos vetores normais são colineares.



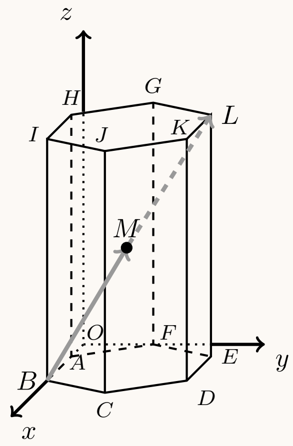
Observando a equação que define o plano BCJpodemos verificar que um vetor normal deste plano (e também do plano LEF é $\overrightarrow{u} = (3, -\sqrt{3}, 0)$, pelo que o plano LEF é da forma

$$3x - \sqrt{3}y + d = 0$$

Como o ponto B tem ordenada e cota nulas e pertence ao plano BCJ, determinamos a sua abcissa, x_B, substituindo as coordenas conhecidas na equação do plano:

$$3x_B - \sqrt{3} \times 0 - 6 = 0 \Leftrightarrow 3x_B - 0 = 6 \Leftrightarrow x_B = \frac{6}{3} \Leftrightarrow x_B = 2$$

Como o ponto M é o centro do prisma, também é o ponto médio do segmento $[BL]$, e assim, temos que: $L = M + \overrightarrow{BM}$



Determinando as coordenadas do vetor $\overrightarrow{BM}$, temos:

$$\overrightarrow{BM} = M - B = \left(\frac{4}{3}, \frac{2\sqrt{3}}{3}, 2\right) - (2,0,0) = \left(\frac{4}{3} - \frac{6}{3}, \frac{2\sqrt{3}}{3}, 2\right) =$$

$$= \left(-\frac{2}{3}, \frac{2\sqrt{3}}{3}, 2\right)$$

Pelo que as coordenadas do ponto L são:

$$L = M + \overrightarrow{BM} = \left(\frac{4}{3}, \frac{2\sqrt{3}}{3}, 2\right) + \left(-\frac{2}{3}, \frac{2\sqrt{3}}{3}, 2\right) = \left(\frac{2}{3}, \frac{4\sqrt{3}}{3}, 4\right)$$

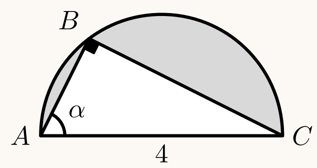
Como o ponto L pertence ao plano LEF, substituindo as coordenadas na equação anteriormente identificada, podemos determinar o valor do parâmetro d:

$$3 \times \frac{2}{3} - \sqrt{3} \times \frac{4\sqrt{3}}{3} + d = 0 \Leftrightarrow 2 - \frac{4 \times \sqrt{3}^2}{3} + d = 0 \Leftrightarrow 2 - 4 + d = 0 \Leftrightarrow -2 + d = 0 \Leftrightarrow d = 2$$

Assim, uma equação do plano uma equação cartesiana do plano LEF, na forma indicada, é:

$$3x - \sqrt{3}y + 0z + 2 = 0$$

2. Como qualquer triângulo inscrito numa semicircunferência é retângulo, temos que a medida da hipotenusa do triângulo é $\overline{AC} = 4$, e recorrendo às definições de seno e cosseno, para determinar as medidas da base ($\overline{BC}$) e da altura ($\overline{AB}$), vem:



$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{\overline{BC}}{\overline{AC}} \Leftrightarrow \operatorname{sen}\alpha = \frac{\overline{BC}}{4} \Leftrightarrow \overline{BC} = 4\operatorname{sen}\alpha$$

$$\cos\alpha = \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} \Leftrightarrow \cos\alpha = \frac{\overline{AB}}{4} \Leftrightarrow \overline{AB} = 4\cos\alpha$$

Como o raio da circunferência é metade do respetivo diâmetro, $r = \frac{\overline{AC}}{2} = \frac{4}{2} = 2$, temos que a área da região é a diferença da área do semicírculo e da área do triângulo:

$$A = \frac{A_\circ}{2} - A_{[ABC]} = \frac{\pi r^2}{2} - \frac{\overline{BC} \times \overline{AB}}{2} = \frac{\pi (2)^2}{2} - \frac{4\operatorname{sen}\alpha \times 4\cos\alpha}{2} = \frac{4\pi}{2} - 8\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha =$$

$$= 2\pi - 4 \times 2\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha = 2\pi - 4\operatorname{sen}(2\alpha)$$

3. Como o número deve ter 5 algarismos diferentes como os 6 algarismos de 0 a 5, e o algarismo das unidades deve ser 5, existe apenas uma alternativa para o algarismo das unidades.

   Como o algarismo das dezenas de milhar não pode ser zero, nem 5 (que é o algarismo das unidades), existem 4 alternativas para este algarismo.

   Para o terceiro algarismo escolhido, por exemplo o dos milhares, voltam a existir 4 alternativas, porque o zero já pode ser considerado nesta posição, e para as restantes duas posições existem, respetivamente 3 e 2 alternativas.

   Assim, a quantidade de números que existem nas condições descritas, é:

$$4 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 96$$

   Resposta: **Opção D**

4. Determinando a probabilidade com recurso à regra de LaPlace, calculamos o quociente do número de casos favoráveis pelo número de casos possíveis, sendo os casos possíveis equiprováveis.

   Como a empresa tem 60 funcionários, o número de grupos de 4 funcionários que podem ser formados, sem sequência ou hierarquia, ou seja, o número de casos possíveis é ${}^{60}C_4$.

   O número de funcionários que trabalham em regime presencial corresponde a 75% do total de trabalhadores (sendo excluídos os 25% que trabalham exclusivamente a distância), ou seja $0{,}75 \times 60 = 45$.
   Como se pretende calcular a probabilidade de serem selecionados, no máximo, três funcionários que trabalham em regime presencial, podemos calcular o número de casos favoráveis pela diferença de todos os grupos que se podem constituir e o número de grupos que é constituído exclusivamente pelos funcionários que trabalham em regime presencial, ou seja ${}^{60}C_4 - {}^{45}C_4$.

   Assim, recorrendo à regra de LaPlace, a probabilidade de serem selecionados, no máximo, três funcionários que trabalham em regime presencial, pelo menos, dois dias por semana, é: $\frac{{}^{60}C_4 - {}^{45}C_4}{{}^{60}C_4}$

5. Como A e B são acontecimentos independentes, temos que

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$$

Assim,

$$\begin{aligned} P(B) + P(A) \times (1 - P(B|A)) = & \ P(B) + P(A) \times \left(1 - \frac{P(B \cap A)}{P(A)}\right) && (1) \\ = & \ P(B) + P(A) - P(B \cap A) \\ = & \ P(B) + P(A) - P(A) \times P(B) && (2) \\ = & \ P(A) + P(B) - P(A) \times P(B) \\ = & \ P(A) + P(B)\big(1 - P(A)\big) \\ = & \ P(A) + P(B) \times P\left(\overline{A}\right) && (3) \end{aligned}$$

(1) Definição de probabilidade condicionada
(2) Hipótese: $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$
(3) Teorema: $P\left(\overline{X}\right) = 1 - P(X)$

Logo $P(B) + P(A) \times (1 - P(B|A)) = P(A) + P(B) \times P\left(\overline{A}\right)$ *q.e.d.*

6. Usando a definição do número e, temos que:

$$\lim u_n = \lim \left(\frac{n+k}{n}\right)^n = \lim \left(\frac{n}{n} + \frac{k}{n}\right)^n = \lim \left(1 + \frac{k}{n}\right)^n = e^k$$

Resposta: **Opção C**

7. De acordo com a enunciado, e com a definição de progressão aritmética, temos que:

- $v_3 = 1 \Leftrightarrow v1 + 2r = 1 \Leftrightarrow v_1 = 1 - 2r$
- $v_{10} = v_1 + 9r = 1 - 2r + 9r = 1 + 7r$
- $v_9 = v_1 + 8r = 1 - 2r + 8r = 1 + 6r$

Desta forma, vem que a razão é:

$$v_{10} = \frac{5}{4}v_9 \Leftrightarrow 1 + 7r = \frac{5}{4}(1 + 6r) \Leftrightarrow 1 + 7r = \frac{5}{4}1 + \frac{30r}{4} \Leftrightarrow 7r - \frac{30r}{4} = \frac{5}{4} - 1 \Leftrightarrow -\frac{2r}{4} = \frac{1}{4} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -2r = 1 \Leftrightarrow r = -\frac{1}{2}$$

E o primeiro termo é: $v_1 = 1 - 2r = 1 - 2\left(-\frac{1}{2}\right) = 1 + 1 = 2$

Assim o termo geral da sucessão é: $v_n = 2 - \frac{1}{2}(n-1)$

Desta forma, resolvendo a equação $v_n = -50$, vem:

$$v_n = -50 \Leftrightarrow 2 - \frac{1}{2}(n-1) = -50 \Leftrightarrow -\frac{n}{2} + \frac{1}{2} = -50 - 2 \Leftrightarrow -\frac{n}{2} = -52 - \frac{1}{2} \Leftrightarrow -\frac{n}{2} = -\frac{105}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow n = 2 \times \frac{105}{2} \Leftrightarrow n = 105$$

Como a solução da equação é um número natural, então -50 é o termo de ordem 105 da sucessão (v_n), ou seja, $v_{105} = -50$

8. Como $z = ee^{ie}$, temos que:

   - $|z| = e$, pelo que o afixo de z é um ponto pertencente à circunferência de centro na origem e raio e
   - $\operatorname{Arg}(z) = e$, como $e \approx 2{,}7$ temos que $\pi < \operatorname{Arg}(z) < \frac{\pi}{2}$, pelo que o afixo de z é um ponto do 2.º quadrante.

   Resposta: **Opção A**

9. Simplificando a expressão de z_1, como $i^7 = i^{4+3} = i^3 = -i$, temos que:

$$z_1 = (1+i)^2 \times (2+i) + i^7 = (1+2i+i^2) \times (2+i) - i = 2i \times (2+i) - i =$$

$$= (1+2i-1) \times (2+i) - i = 2i(2+i) - i = 4i + 2i^2 - i = 3i + 2(-1) = -2+3i$$

   Assim, podemos determinar o valor de z_2:

$$z_1 \times z_2 = 3+2i \Leftrightarrow z_2 = \frac{3+2i}{z_1} \Leftrightarrow z_2 = \frac{3+2i}{-2+3i} \Leftrightarrow z_2 = \frac{(3+2i)(-2-3i)}{(-2+3i)(-2-3i)} \Leftrightarrow z_2 = \frac{-6-9i-4i-6i^2}{(-2)^2-(3i)^2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow z_2 = \frac{-6-13i-6(-1)}{4-9(-1)^2} \Leftrightarrow z_2 = \frac{-6+6-13i}{4+9} \Leftrightarrow z_2 = -\frac{13i}{13} \Leftrightarrow z_2 = -i$$

   Logo temos que:

$$z_2 = \operatorname{sen}\theta + i\cos\theta \Leftrightarrow \operatorname{sen}\theta + i\cos\theta = -i \Leftrightarrow \operatorname{sen}\theta + i\cos\theta = 0 - i$$

   Ou seja $\operatorname{sen}\theta = 0 \wedge \cos\theta = -1$, pelo que $\theta = \pi$

10. Para averiguar se a função f é contínua em $x = 0$, temos que verificar se $f(0) = \lim\limits_{x\to 0} f(x)$

   - $f(0) = \frac{3}{5}$
   - $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} \frac{3x}{e^{5x}-1} = \frac{3(0)}{e^{5(0)}-1} = \frac{0}{e^0-1} = \frac{0}{0}$ (Indeterminação)

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{3x}{e^{5x}-1} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{\frac{e^{5x}-1}{3x}} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{\frac{(e^{5x}-1)\times\frac{5}{3}}{3x\times\frac{5}{3}}} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{\frac{(e^{5x}-1)\times\frac{5}{3}}{5x}} =$$

   (considerando $y = 5x$, temos que se $x \to 0$, então $y \to 0$)

$$= \lim_{y\to 0} \frac{1}{\frac{(e^y-1)\times\frac{5}{3}}{y}} = \frac{\lim\limits_{y\to 0} 1}{\lim\limits_{y\to 0} \frac{(e^y-1)\times\frac{5}{3}}{y}} = \frac{1}{\underbrace{\lim\limits_{y\to 0} \frac{e^y-1}{y}}_{\text{Lim. Notável}} \times \lim\limits_{y\to 0} \frac{5}{3}} = \frac{1}{1\times\frac{5}{3}} = \frac{3}{5}$$

   Como $f(0) = \lim\limits_{x\to 0} f(x)$, então a função f é contínua em $x = 0$.

11.

11.1. Determinando a equação da assíntota horizontal do gráfico de g, quando $x \to +\infty$, temos:

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty} \big(\ln(1+e^x) - x\big) = \ln(1+e^{+\infty}) - \infty = +\infty - \infty \text{ (Indeterminação)}$$

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty} \big(\ln(1+e^x) - x\big) = \lim_{x\to+\infty} \big(\ln(1+e^x) - \ln e^x\big) = \lim_{x\to+\infty} \ln \frac{1+e^x}{e^x} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \ln\left(\frac{1}{e^x} + \frac{e^x}{e^x}\right) = \lim_{x\to+\infty} \ln\left(\frac{1}{e^x} + 1\right) = \ln\left(\frac{1}{e^{+\infty}} + 1\right) = \ln(0+1) = \ln 1 = 0$$

Logo a reta definida por $y = 0$ é uma assíntota do gráfico de g, quando $x \to +\infty$

Determinando o declive da assíntota oblíqua do gráfico de g, quando $x \to -\infty$, temos:

$$m = \lim_{x\to-\infty} \frac{g(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\ln(1+e^x) - x}{x} = \lim_{x\to-\infty} \left(\frac{\ln(1+e^x)}{x} - \frac{x}{x}\right) =$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \left(\frac{\ln(1+e^x)}{x} - 1\right) = \frac{\ln(1+e^{-\infty})}{-\infty} - 1 = \frac{\ln(1+0^+)}{-\infty} - 1 = \frac{0^+}{-\infty} - 1 = 0^- - 1 = -1$$

Calculando o valor da ordenada na origem, temos que:

$$b = \lim_{x\to-\infty} \big(g(x) - mx\big) = \lim_{x\to-\infty} \big(\ln(1+e^x) - x - (-1)x\big) = \lim_{x\to-\infty} \big(\ln(1+e^x) - x + x\big) =$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \ln(1+e^x) = \ln(1+e^{-\infty}) = \ln(1+0) = \ln 1 = 0$$

Desta forma a equação reduzida da assíntota oblíqua do gráfico de g, quando $x \to -\infty$, é:

$$y = -1 \times x + 0 \Leftrightarrow y = -x$$

11.2. Determinando a expressão da função derivada, temos:

$$g'(x) = \big(g(x)\big)' = \big(\ln(1+e^x) - x\big)' = \big(\ln(1+e^x)\big)' - (x)' = \frac{(1+e^x)'}{1+e^x} - 1 = \frac{(1)' + (e^x)'}{1+e^x} - 1 =$$

$$= \frac{0+e^x}{1+e^x} - 1 = \frac{e^x}{1+e^x} - 1$$

O declive da reta tangente ao gráfico de g, no ponto de abcissa 0, é dado por:

$$m = g'(0) = \frac{e^0}{1+e^0} - 1 = \frac{1}{1+1} - 1 = \frac{1}{2} - 1 = -\frac{1}{2}$$

Determinando a ordenada do ponto do gráfico de abcissa 0, temos:

$$g(0) = \ln(1+e^0) - 0 = \ln(1+1) = \ln 2$$

Como o ponto de abcissa 0, também pertence à reta tangente, substituímos as coordenadas deste ponto e o declive da reta, em $y = mx + b$, para calcular o valor de b:

$$\ln 2 = -\frac{1}{2} \times 0 + b \Leftrightarrow \ln 2 = b$$

Desta forma, a equação da reta tangente ao gráfico de g no ponto de abcissa 0, é:

$$y = -\frac{1}{2} \times x + \ln 2 \Leftrightarrow y = -\frac{x}{2} + \ln 2$$

Assim, as coordenadas do pontos A e B, são:

- $A(0, \ln 2)$ porque $g(0) = \ln 2$
- $B(2\ln 2{,}0)$ porque $0 = -\frac{x}{2} + \ln 2 \Leftrightarrow \frac{x}{2} = \ln 2 \Leftrightarrow x = 2\ln 2$

E assim, a área do triângulo $[OAB]$ é:

$$A_{[OAB]} = \frac{\overline{OA} \times \overline{OB}}{2} = \frac{\ln 2 \times 2\ln 2}{2} = \frac{2(\ln 2)^2}{2} = (\ln 2)^2$$

12.

12.1. Considerando o ponto P como o ponto de interseção da reta s com o eixo Oy temos que as respetivas coordenadas são $P(0{,}b)$, sendo b para calcular a ordenada na origem da reta s.

Assim, temos que o declive da reta s, é:

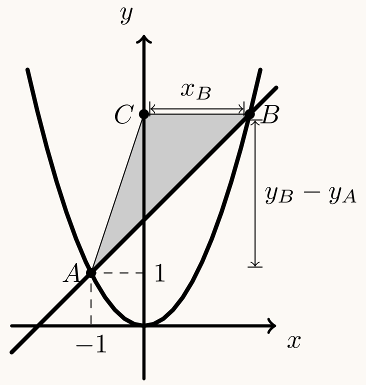
$$m = \frac{y_P - y_A}{x_P - x_A} = \frac{b-1}{0-(-1)} = \frac{b-1}{1} = b - 1$$

Como $m = b - 1$, temos que:

$$m = b - 1 \Leftrightarrow b = m + 1$$

Resposta: **Opção A**

12.2. Como o ponto C é projeção ortogonal do ponto B sobre o eixo Oy, as coordenadas do ponto C são $(0,(m+1)^2)$, e o valor de m para o qual a área do triângulo $[ABC]$ é igual a 4 , é a solução da equação:

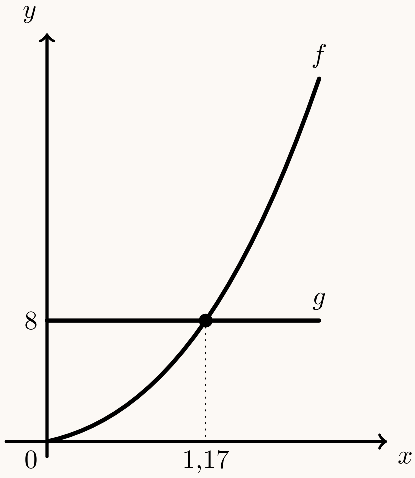


$$A_{[ABC]} = 4 \Leftrightarrow \frac{x_B \times (y_B - y_A)}{2} = 4 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{(m+1) \times \left((m+1)^2 - 1\right)}{2} = 4 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (m+1)^3 - (m+1) = 8$$

Desta forma, visualizando na calculadora gráfica os gráficos das funções $f(x) = (x+1)^3 - (x+1)$ e $g(x) = 8$, numa janela que permita a visualização da interseção dos dois gráficos, reproduzido na figura ao lado, e usando a funcionalidade da calculadora para determinar valores aproximados das coordenadas do ponto de interseção de dois gráficos, obtemos o valor aproximado (às centésimas) das coordenadas do ponto de interseção, cuja abcissa é o valor de m pretendido:



$$(1{,}17\,;\,8)$$

Assim, o valor arredondado às centésimas de m para o qual a área do triângulo $[ABC]$ é igual a 4, é 1,17.

13. Para estudar o sentido o sentido das concavidades e a existência de pontos de inflexão, começamos por determinar a expressão da segunda derivada:

$$g''(x) = \left(g'(x)\right)' = \left(\frac{x - e^{3x}}{x}\right)' = \frac{(x - e^{3x})'(x) - (x - e^{3x})(x)'}{x^2} = \frac{\left((x)' - (3x)'e^{3x}\right)(x) - (x - e^{3x}) \times 1}{x^2} =$$

$$= \frac{\left(1 - 3e^{3x}\right)(x) - (x - e^{3x})}{x^2} = \frac{x - 3xe^{3x} - x + e^{3x}}{x^2} = \frac{-3xe^{3x} + e^{3x}}{x^2} = \frac{e^{3x}(-3x + 1)}{x^2}$$

Determinando os zeros da segunda derivada, vem:

$$g''(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{e^{3x}(-3x+1)}{x^2} = 0 \Leftrightarrow e^{3x}(-3x+1) = 0 \wedge \underbrace{x^2 \neq 0}_{\text{PV, } x>0} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{e^{3x} = 0}_{\text{Cond. impossível}} \vee -3x + 1 = 0 \Leftrightarrow 1 = 3x \Leftrightarrow \frac{1}{3} = x$$

Assim, estudando a variação de sinal de g'' e relacionando com o sentido das concavidades do gráfico de g, vem:

x	0		$\frac{1}{3}$	$+\infty$
e^{3x}	n.d.	$+$	$+$	$+$
$-3x+1$	n.d.	$+$	0	$-$
x^2	n.d.	$+$	$+$	$+$
g''	n.d.	$+$	0	$-$
g	n.d.	$\smile$	Pt. I.	$\frown$

Logo, podemos concluir que o gráfico de g:

- tem a concavidade voltada para baixo no intervalo $\left[\frac{1}{3}, +\infty\right[$
- tem a concavidade voltada para cima no intervalo $\left]0, \frac{1}{3}\right]$
- tem um único ponto de inflexão, cuja abcissa é $x = \frac{1}{3}$.

14. As soluções da equação pertencem ao conjunto $\{x \in \mathbb{R} : 9x + 1 > 0 \wedge 6x > 0\}$

Como $9x > -1 \wedge 6x > 0 \Leftrightarrow x > -\frac{1}{9} \wedge x > 0 \Leftrightarrow x > 0$, temos que $x \in]0, +\infty[$, e resolvendo a equação, vem que:

$$\frac{1}{2}\log_2(9x+1) = \log_2(6x) \Leftrightarrow \log_2(9x+1) = 2\log_2(6x) \Leftrightarrow \log_2(9x+1) = \log_2(6x)^2 \Leftrightarrow 9x + 1 = (6x)^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 9x + 1 = 36x^2 \Leftrightarrow -36x^2 + 9x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-9 \pm \sqrt{9^2 - 4(-36)(1)}}{2 \times (-36)} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-9 + 15}{-72} \vee x = \frac{-9 - 15}{-72} \Leftrightarrow x = -\frac{1}{12} \vee x = \frac{1}{3}$$

Assim, como $x > 0$, $x = -\frac{1}{12}$ não é solução da equação, pelo que o conjunto dos números reais que são solução da equação, é: $\left\{\frac{1}{3}\right\}$

15. Começamos por determinar a expressão da derivada da função f, para estudar a monotonia da função e a existência de extremos:

$$f'(x) = \left(\sqrt{kx} - \ln(kx)\right)' = \left(\sqrt{kx}\right)' - \left(\ln(kx)\right)' = \left((kx)^{\frac{1}{2}}\right)' - \frac{(kx)'}{kx} = \frac{1}{2} \times (kx)^{1-\frac{1}{2}} \times (kx)' - \frac{k}{kx} =$$

$$= \frac{1}{2} \times (kx)^{-\frac{1}{2}} \times k - \frac{k}{kx} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{\sqrt{kx}} \times k - \frac{k}{kx} = \frac{k}{2\sqrt{kx}} - \frac{k}{kx} = \frac{k^2x - 2k\sqrt{kx}}{2kx\sqrt{kx}} =$$

$$= \frac{k\left(kx - 2\sqrt{kx}\right)}{k \times 2x\sqrt{kx}} \underset{k \neq 0}{=} \frac{kx - 2\sqrt{kx}}{2x\sqrt{kx}}$$

Calculando os zeros da derivada da função f, temos:

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{kx - 2\sqrt{kx}}{2x\sqrt{kx}} = 0 \Leftrightarrow kx - 2\sqrt{kx} = 0 \wedge \underbrace{2x\sqrt{kx} \neq 0}_{\text{Cond. universal para } x>0} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow kx = 2\sqrt{kx} \Rightarrow (kx)^2 = \left(2\sqrt{kx}\right)^2 \Leftrightarrow (kx)^2 = 4kx \Leftrightarrow \frac{(kx)^2}{kx} = 4 \underset{kx \neq 0}{=} kx = 4 \Leftrightarrow x = \frac{4}{k}$$

Estudando a variação do sinal da derivada e relacionando com a monotonia da função, vem:

x	0		$\frac{4}{k}$	$+\infty$
$kx - 2\sqrt{kx}$	n.d.	$-$	0	$+$
$2x\sqrt{kx}$	n.d.	$+$	$+$	$+$
f'	n.d.	$-$	0	$+$
f	n.d.	$\searrow$	min	$\nearrow$

Assim, podemos concluir que a função f tem um mínimo absoluto em $x = \frac{4}{k}$ porque é decrescente no intervalo $\left]0, \frac{4}{k}\right[$ e crescente no intervalo $\left]\frac{4}{k}, +\infty\right[$.

O valor do mínimo é:

$$f\left(\frac{4}{k}\right) = \sqrt{k \times \frac{4}{k}} - \ln\left(k \times \frac{4}{k}\right) = \sqrt{4} - \ln 4 = 2 - \ln 4$$

Como a função é contínua, porque é o produto, a diferença e a composição de funções contínuas, e

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} \left(\sqrt{kx} - \ln(kx)\right) = \sqrt{k \times 0^+} - \ln(k \times 0^+) = \sqrt{0} - \ln(0^+) = 0 - (-\infty) = +\infty$$

então o contradomínio de f é

$$D'_f = [2 - \ln 4, +\infty[$$