Exercício 1

Seja $(u_n)_n$ uma sucessão definida por: $u_n = \frac{1-3n}{n+1}$

a)

Verifique se $-\frac{14}{5}$ é um dos termos de $(u_n)_n$

$$\frac{1-3n}{n+1} = -\frac{14}{5}$$

$$n = 19$$

$$u_{19} = -\frac{14}{5}$$

b)

Estude $(u_n)_n$ quanto à monotonia

$(u_{n+1}) - (u_n) < 0$ é monótona decrescente
$(u_{n+1}) - (u_n) > 0$ é monótona crescente

$$\left[\frac{n+1}{n+1}\right]\left[\frac{-3n-2}{n+2}\right] - \left[\frac{1-3n}{n+1}\right]\left[\frac{n+2}{n+2}\right]$$

$$\frac{-3n^2-3n-2n-2}{(n+1)(n+2)} - \frac{n+2-3n^2-6n}{(n+1)(n+2)}$$

$$\frac{-3n^2-3n-2n-2-n-2+3n^2+6n}{(n+1)(n+2)}$$

$$\frac{-4}{(n+1)(n+2)} < 0, \forall n \in \mathbb{N}$$

u_n é monótona decrescente

c)

$(u_n)_n$ é uma sucessão convergente? E limitada? Justifique.

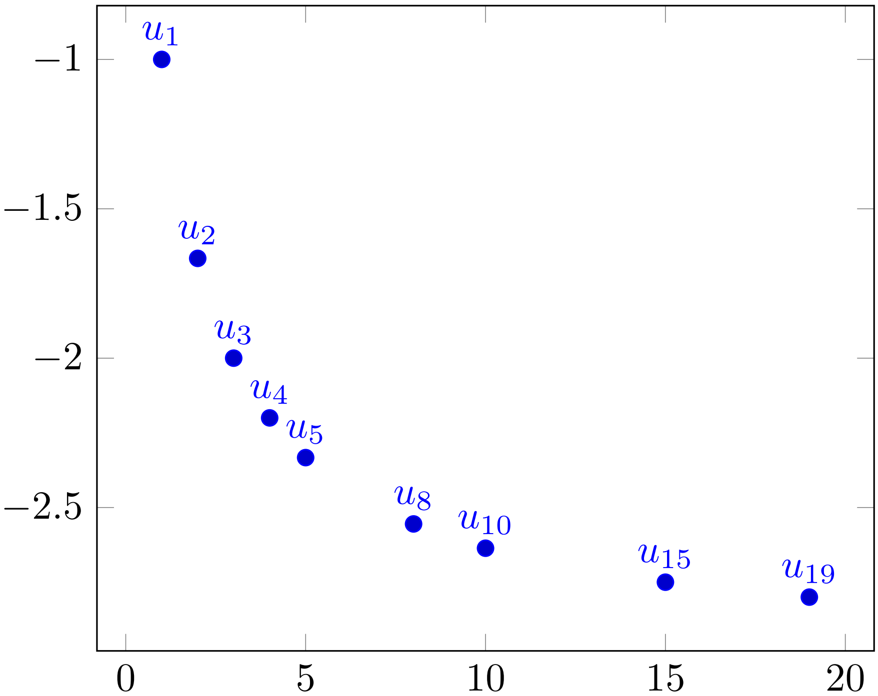
$$\lim_n \frac{1-3n}{n+1} = \lim_n \frac{\cancel{n}\left(\frac{1}{n}-3\right)}{\cancel{n}\left(1+\frac{1}{n}\right)} = \frac{\overset{0}{\cancel{\frac{1}{n}}}-3}{1+\overset{0}{\cancel{\frac{1}{n}}}} = -3$$

$(u_n)_n$ é convergente pois tende para um número real. Toda a sucessão convergente é limitada. Como $(u_n)_n$ é decrescente sabemos que:

$$\frac{1-3n}{n+1} = -3 + \frac{4}{n+1}$$

$$\frac{4}{n+1} > 0, \text{então qualquer termo será sempre superior a } -3$$

$$-3 < u_n < -1, \forall n \in \mathbb{N}$$

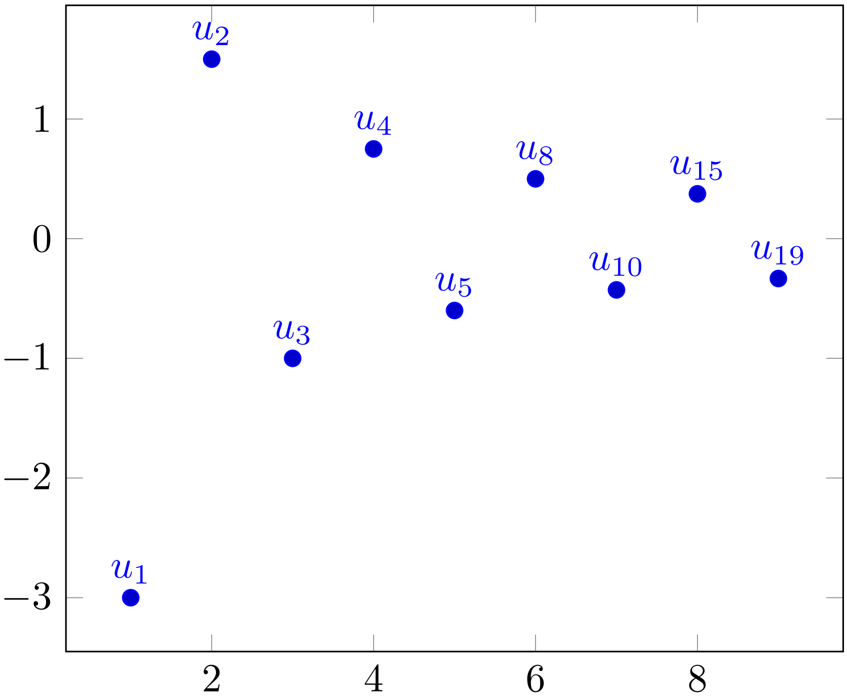


Exercício 2

Dê um exemplo concreto de uma sucessão $(a_n)_n$, que verifique em simultâneo as seguintes afirmações:

- $(a_n)_n$ é uma sucessão limitada e não monótona
- $\lim\limits_n (3a_n) = 0$
  Justifique a sua resposta.

$$a_n = \frac{3\,(-1)^n}{n}$$



Exercício 3

a)

$$\lim_n \left(\frac{-7n^3-5n^2+n}{3\sqrt{n^2+1}}\right) \overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}$$

$$\lim_n \left(\frac{n^{\cancel{3}}\left(-7-\cancelto{0}{\frac{5}{n}}+\cancelto{0}{\frac{1}{n^2}}\right)}{3\cancel{n}\sqrt{1+\cancelto{0}{\frac{1}{n^2}}}}\right)$$

$$= \frac{+\infty\,(-7)}{3} = -\infty$$

b)

$$\lim_n \left(\sqrt{2n-3}-\sqrt{2n+5}\right) \overset{\infty-\infty}{=}$$

$$\lim_n \left(\frac{\left(\sqrt{2n-3}-\sqrt{2n+5}\right)\left(\sqrt{2n-3}+\sqrt{2n+5}\right)}{\left(\sqrt{2n-3}+\sqrt{2n+5}\right)}\right)$$

$$\lim_n \frac{-8}{\sqrt{2n-3}+\sqrt{2n+5}} = \frac{-8}{+\infty} = 0$$

c)

$$\lim_n \left(\frac{n-2}{n+1}\right)^{n+3} \overset{1^\infty}{=}$$

$$\lim_n \left(\frac{\cancel{n}\left(1-\frac{2}{n}\right)}{\cancel{n}\left(1+\frac{1}{n}\right)}\right)^n \cdot \lim_n \left(\frac{\cancel{n}\left(1-\frac{2}{n}\right)}{\cancel{n}\left(1+\frac{1}{n}\right)}\right)^3$$

$$\frac{\lim_n \left(1-\overset{0}{\cancel{\frac{2}{n}}}\right)^n}{\lim_n \left(1+\overset{0}{\cancel{\frac{1}{n}}}\right)^n} \cdot \lim_n \left(\frac{1-\overset{0}{\cancel{\frac{2}{n}}}}{1+\overset{0}{\cancel{\frac{1}{n}}}}\right)^3 = \frac{e^-2}{e} \cdot 1^3 = e^{-3}$$

d)

$$\lim_n \left(n^2 - (-2)^n\, n\right) = +\infty$$

$$\begin{cases} \text{Para n par: } \lim_n \left(n^2 - n\right) \overset{\infty-\infty}{=} \lim_n \left(n^2\left(1-\overset{0}{\cancel{\frac{1}{n}}}\right)\right) = +\infty \\ \text{Para n ímpar: } \lim_n \left(n^2 + n\right) = +\infty \end{cases}$$

Exercício 4

a)

Considere a função real de variável real definida por $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2x+4}}$

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} : 2x + 4 > 0\} =]-2, +\infty[$$

b)

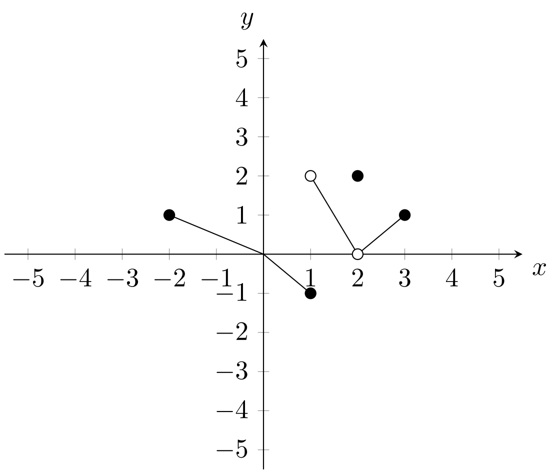
Averigue se o ponto de coordenadas $\left(16, \frac{1}{6}\right)$ **pertence ao gráfico de** f .

$$f\,(16) = \frac{1}{\sqrt{2\,(16)+4}} = \frac{1}{6} = \frac{1}{6}$$

Logo $\left(16, \frac{1}{6}\right)$ pertence a f

Exercício 5

Na figura está representada graficamente a função g**.**



a)

Indique:

i) **o domínio e o contradomínio de g;**

$$D_g = [-2, 3]$$

$$D'_g = [-1, 2]$$

ii) **os zeros de g, se existirem;**

g só tem um zero que é $x = 0$

iii) **um intervalo em que g seja simultaneamente positiva e decrescente;**

$[-2, 0]$ e $]1, 2[$.

iv) **os extremos (máximo e mínimo) absolutos de g, se existirem.**
Máximo absoluto $x = 2$ e mínimo absoluto $x = -1$.

b)

Indique o número de soluções da condição $|g(x)| = 1$.
Existem 4 soluções: $-2, 3, 1$ e entre 1 e 2.

Exercício 6

Considere a funcão quadrática f, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $f(x) = -x^2 + 4x + 5$.

a)

Escreva a expressão $-x^2 + 4x + 5$ na forma $a\,(x-h)^2 + k$.

$$f(x) = -\,(x-2)^2 + 9$$

b)

Escreva uma equação do eixo de simetria da parábola representativa do gráfico da função.

$$x = 2$$

c)

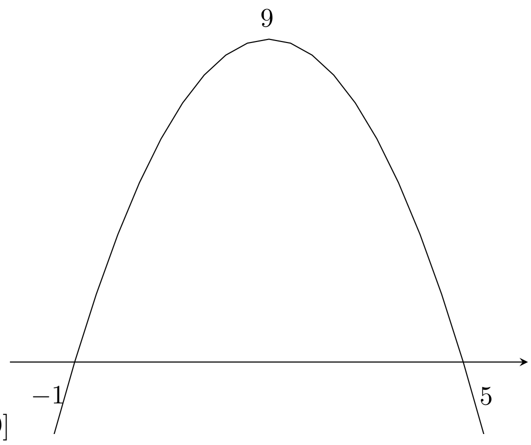
Indique dois objetos diferentes que tenham a mesma imagem por f.

$$x = -1$$

$$x = 5$$

d)

Indique, justificando, o contradomínio de f.



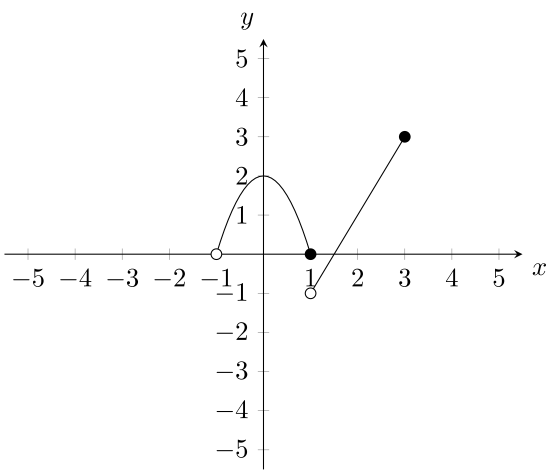
$D'_f =]-\infty, 9]$

Exercício 7

Considere a função h real de domínio $]-1, 3]$ definida por:

$$h(x) = \begin{cases} -2x^2 + 2, \text{ se } -1 < x \leq 1 \\ 2x - 3, \text{ se } 1 < x \leq 3 \end{cases}$$

Represente graficamente a função h. (Nota: apresente todos os cálculos que efetuar.)



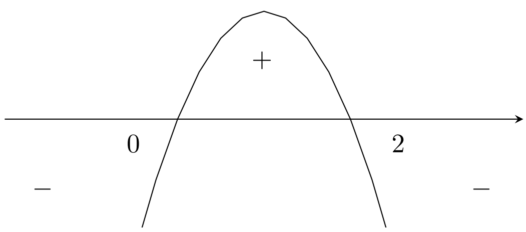
$$D_f =]-1,3]$$

$$D'_f =]-1,3]$$

Exercício 8

a)

$$2x - x^2 \geq 0$$



C.S.=[0,2]

b)

$$2x^3 + 3x^2 \leq 2x$$

$$(x)\left(2x^2 + 3x - 2\right) \leq 0$$

x	$-\infty$	-2		0		$\frac{1}{2}$	$+\infty$
x	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$2x^2+3x-2$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$x\left(2x^2+3x-2\right)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

Decrescente Decrescente

$$CS]-\infty,-2]\cup[0,\frac{1}{2}]$$

c)

$$(x-2)\left(x^2+3\right)(4-x)>0$$

x	$-\infty$	2		4	$+\infty$
$x-2$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
x^2+3	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$4-x$	$+$	$+$	$+$	0	$-$
$(x-2)\left(x^2+3\right)(4-x)$	$-$	0	$+$	0	$-$

Crescente

$$\text{C.S} =]2,4[$$