1. Num referencial ortonormado $Oxyz$, a condição $(x-2)^2+(y-3)^2+(z+1)^2 \leq 4$ define uma esfera.

Qual das equações seguintes define um plano que divide essa esfera em dois sólidos com o mesmo volume?

(A) $x=0$ **(B)** $x=-2$ **(C)** $x=2$ **(D)** $x=3$

2. Considera, num referencial ortonormado xOy, a reta r de equação vetorial:

$$(x,y)=(-2,4)+k(-1,3), k \in \mathbb{R}$$

Seja s a reta paralela a r que passa no ponto de coordenadas $(0,1)$.

Qual é a equação reduzida da reta s?

(A) $y=-3x+1$ **(B)** $y=-\frac{1}{3}x+1$ **(C)** $y=-2x+1$ **(D)** $y=-3x+3$

3. Considera, num referencial ortonormado $Oxyz$, os pontos $C(1,-1,2)$ e $D(-1,0,1)$ e o vetor $\vec{u}(a,2,b)$.

Os vetores $\overrightarrow{CD}$ e $\vec{u}$ são colineares se:

(A) $a=-\frac{1}{4}$ e $b=-2$ **(B)** $a=\frac{1}{4}$ e $b=2$

(C) $a=-4$ e $b=-2$ **(D)** $a=4$ e $b=2$

4. Qual das condições seguintes define, num referencial ortonormado $Oxyz$, uma reta paralela ao eixo Oy?

(A) $y=1$ **(B)** $x=2 \wedge z=1$ **(C)** $x=1 \wedge y=1 \wedge z=2$ **(D)** $x=1 \wedge y=2$

5. Considera num referencial ortonormado $(O,\vec{e_1},\vec{e_2},\vec{e_3})$ os pontos $A(2,-1,3)$ e $B(-1,0,2)$ e o vetor $\vec{u}=2\vec{e_1}-\vec{e_2}+5\vec{e_3}$.

5.1) Calcula:

(a) as coordenadas do ponto C, tal que $C+\vec{u}=B$.

(b) as coordenadas dos vetores $\vec{v}$ colineares com $\vec{u}$ e de norma 2.

(c) as coordenadas do ponto médio de $[AB]$.

(d) $\|\overrightarrow{AB}\|$.

5.2) Escreve uma equação vetorial da reta que passa em A e tem a direção do vetor $\vec{u}$.

5.3) Escreve a inequação da esfera de centro em A e que contém a origem do referencial.

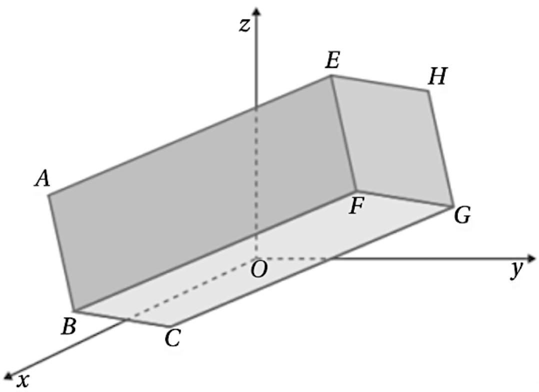
6. Considera, num referencial ortonormado $Oxyz$, o ponto $A(2,0,-1)$ e a reta r definida por:

$$(x,y,z)=(1,4,-1)+\lambda(1,-4,3), \lambda \in \mathbb{R}$$

6.1) Determina uma equação vetorial da reta que passa por A e é paralela ao eixo Ox.

6.2) Determina as coordenadas do ponto de interseção da reta r com o plano yOz.

7. Na figura está representada, em referencial ortonormado $Oxyz$, um prisma quadrangular regular $[ABCDEFGH]$ (o vértice D não é visível).



7.1) Preenche cada um dos espaços utilizando a designação de um ponto ou de um vetor, de modo a obter proposições verdadeiras.

(a) $B + \_\_\_\_ = F$

(b) $\overrightarrow{CG} - \_\_\_\_ = \overrightarrow{AF}$

(c) $F + \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{FH} = \_\_\_\_$

7.2) Admite que as coordenadas dos pontos A, B, C e E são, respetivamente, $(16, -3, 10)$, $(20, 1, 3)$, $(12, 2, -1)$ e $(14, 13, 18)$.

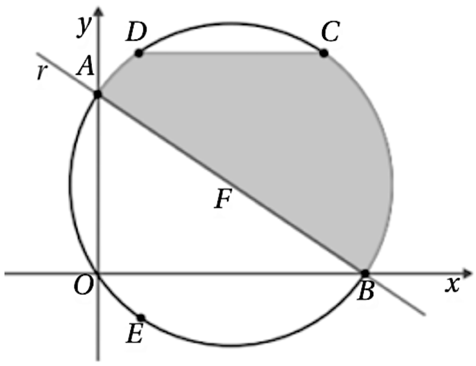
(a) Prova que as coordenadas do ponto G são $(10, 18, 7)$.

(b) Determina o volume do prisma.

(c) Escreve uma equação que defina a superfície esférica com centro no ponto A e que passa no ponto B.

(d) Escreve uma equação vetorial da reta AB.

8. Considera num plano munido de um referencial cartesiano:



- a reta r definida pelo sistema de equações paramétricas $\begin{cases} x = -3 + 3k \\ y = 6 - 2k \end{cases}, k \in \mathbb{R}$, que interseta os eixos coordenados Oy e Ox nos pontos A e B, respetivamente;
- a circunferência de diâmetros $[AB]$ e $[EC]$.

Sabe-se que o ponto E tem coordenadas $(1, -1)$ e que $[DC]$ é uma corda da circunferência paralela ao eixo Ox.

8.1) Determina a equação reduzida da reta r.

8.2) Determina as coordenadas dos pontos A e B.

8.3) Mostra que o centro da circunferência é o ponto de coordenadas $(3,2)$.

8.4) Mostra que a circunferência pode ser definida pela equação $x^2 + y^2 - 6x - 4y = 0$.

8.5) Determina as coordenadas do ponto C.

8.6) Define por uma condição a parte colorida da figura (incluindo a fronteira).

9. A negação da proposição $\exists x \in \mathbb{Z} : x < 0 \wedge x^2 \geq 0$ é:

(A) $\exists x \in \mathbb{Z} : x \geq 0 \vee x^2 \leq 0$

(B) $\forall x \in \mathbb{Z}, x \geq 0 \vee x^2 < 0$

(C) $\forall x \in \mathbb{Z}, x \geq 0 \vee x^2 \leq 0$

(D) $\forall x \in \mathbb{Z}, x > 0 \wedge x^2 < 0$

10. Indica o valor lógico de cada uma das proposições. Nos casos em que são falsas, apresenta uma justificação e escreve a respetiva negação (sem utilizar o símbolo ~).

10.1) $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 > \frac{1}{3}$

10.2) $\exists x \in \mathbb{N} : 5 - 2x = 2$

10.3) $\forall x \in \mathbb{R}, 3(x^2 - 1) = 3x^2 - 3$

10.4) $\exists x \in \mathbb{Q} : 2x - 1 = 0$

11. O inverso de $\sqrt{\frac{a}{b}\sqrt[3]{\frac{b}{a}}}$, $a, b \in \mathbb{R}^+$, é igual a:

(A) $\frac{\sqrt[6]{ab^5}}{b}$ (B) $\frac{\sqrt[6]{a^5b}}{a}$ (C) $\frac{\sqrt[3]{ab^2}}{b}$ (D) $\frac{\sqrt[3]{a^2b}}{a}$

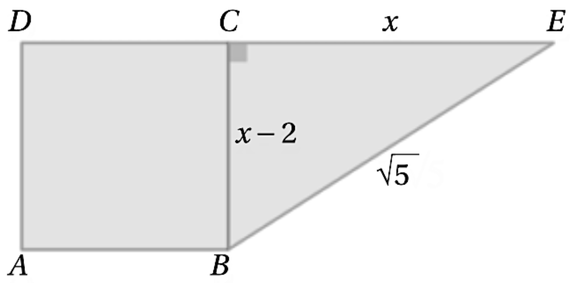
12. Na figura está representado o quadrado $[ABCD]$ e o triângulo $[BCE]$ retângulo em C.

Considera $\overline{CE} = x, \overline{BC} = x - 2$ e $\overline{BE} = \sqrt{5}$.

As medidas estão expressas em centímetros.

12.1) Mostra que $x = \frac{2+\sqrt{6}}{2}$.

12.2) Determina a área do quadrado.



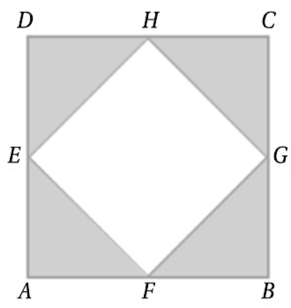
13. Aplicando as propriedades das operações com expoente fracionário, mostra que:

$$\frac{\left(2^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{2}{3}} \times 3^{\frac{1}{3}}}{15^{\frac{1}{3}} : \left(10^{\frac{1}{5}}\right)^{\frac{5}{3}}} = 4^{\frac{1}{3}}$$

14. Na figura está representado um quadrado $[ABCD]$.

E, F, G e H são os pontos médios dos lados a que pertencem e $\overline{EH} = \sqrt[4]{32}$.

Determina uma expressão simplificada para a área da parte colorida da figura.



15. O resto da divisão de x^{1001} por $2x + 2$ é:

(A) -1 (B) 1 (C) -2 (D) $-\frac{1}{2}$

16. Determina os valores de m e n de modo que a expressão $P(x) = x^3 - mx^2 + nx + 1$ seja um polinómio divisível por $x^2 - 1$.

17. O conjunto – solução da inequação $(x-2)^2(x-1)^3 \leq 0$ é:

(A) $]-\infty, 1] \cup [2, +\infty[$ (B) $]-\infty, 1] \cup \{2\}$

(C) $]-\infty, 1]$ (D) $[1,2]$

18. Determina o polinómio-quociente e o polinómio-resto da divisão inteira de $A(x)$ por $B(x)$, sendo:

$$A(x) = 3x^5 - x^4 + 2x^3 + 4x - 3 \text{ e } B(x) = x^3 - 2x + 1$$

19. Considera o polinómio $P(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$.

19.1) Mostra que o polinómio é divisível por $B(x) = x - 3$.

19.2) Resolve, em $\mathbb{R}$, a inequação $x^3 - 6x^2 + 11x - 6 > 0$.

20. Resolve, em $\mathbb{R}$, a inequação: $x^4 + x^2 - 6 \leq 0$.

21. Considera os polinómios $A(x) = -x^3 - 2x^2 - x$ e $B(x) = x^3 - x^2 - 4x + 4$.

21.1) Verifica que -2 é uma raiz de $B(x)$.

21.2) Determina as outras raízes de $B(x)$ e fatoriza o polinómio.

21.3) Resolve a inequação $B(x) < 0$.

21.4) Fatoriza o polinómio $A(x)$ e resolve a inequação $A(x) \geq 0$.

22. O conjunto solução da inequação $x^2 > 9$ é:

(A) $]-3,3[$ (B) $]3, +\infty[$

(C) $]-\infty, -3[\cup]3, +\infty[$ (D) $]0, +\infty[$

23. Considera o polinómio $A(x) = 4x^3 - 19x^2 + 28x + k$.

Sabe-se que 2 é uma raiz dupla do polinómio $A(x)$.

23.1) Determina o valor real de k.

23.2) Fatoriza o polinómio $A(x)$ e resolve a inequação $A(x) \leq 0$.

24. Considera a equação $x^4 - 34x^2 + 64 = 0$ e um retângulo cuja área é igual a 8 unidades quadradas.

Sabe-se que a largura do retângulo é quádrupla do seu comprimento.

Prova que as dimensões do retângulo são as soluções positivas de $x^4 - 34x^2 + 64 = 0$.

25. Determina os números reais k e p de modo que os polinómios $A(x)$ e $B(x)$ sejam iguais:

$$A(x) = 5x^4 - 3x^2 + 8x - 4 \qquad B(x) = 5x^4 - 2(2x-1)^2 - (k+2)x^2 - p - 3$$

26. Sejam a e b dois números reais positivos. Mostra que:

$$\frac{a^{\frac{3}{2}} \times \sqrt[4]{a^5}}{\left(\sqrt{b}\right)^{-\frac{2}{3}}} : \frac{a^{-1} \times \left(\frac{1}{a}\right)^{-\frac{7}{4}}}{\sqrt[3]{b^2}} = a^2 b$$