Preparação para exame

12.º Ano de Escolaridade | Turma K-G

1. (D)
   $C\hat{B}A = 180° - B\hat{A}C - A\hat{C}B = 180° - 82° - 52° = 46°$
   Aplicando a lei dos senos, vem
   $\dfrac{\sin(A\hat{C}B)}{\overline{AB}} = \dfrac{\sin(C\hat{B}A)}{\overline{AC}} \Leftrightarrow \dfrac{\sin(52°)}{6.4} = \dfrac{\sin(46°)}{\overline{AC}} \Leftrightarrow \overline{AC} = \dfrac{6.4 \times \sin(46°)}{\sin(52°)} \Leftrightarrow \overline{AC} \approx 5.8m$

2. $A\hat{C}B = 180° - B\hat{A}C - C\hat{B}A = 180° - 30° - 120° = 30°$
   Aplicando a lei dos senos, vem
   $\dfrac{\sin(A\hat{C}B)}{\overline{AB}} = \dfrac{\sin(C\hat{B}A)}{\overline{AC}} \Leftrightarrow \dfrac{\sin(30°)}{\overline{AB}} = \dfrac{\sin(120°)}{12} \Leftrightarrow \overline{AB} = \dfrac{12 \times \sin(30°)}{\sin(180° - 120°)} \Leftrightarrow$
   $\Leftrightarrow \overline{AB} = \dfrac{12 \times \frac{1}{2}}{\sin(60°)} \Leftrightarrow \overline{AB} = \dfrac{6}{\frac{\sqrt{3}}{2}} \Leftrightarrow \overline{AB} = \dfrac{12}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow \overline{AB} = \dfrac{12\sqrt{3}}{3} \Leftrightarrow \overline{AB} = 4\sqrt{3}$
   Assim, $\overline{BC} = \overline{AB} = 4\sqrt{3}$
   Portanto, $P_{[ABC]} = \overline{AC} + \overline{BC} + \overline{AB} = 12 + 8\sqrt{3}$

3. Pelo Teorema de Carnot (Lei dos cossenos), vem,

   $\overline{IM}^2 = \overline{IR}^2 + \overline{RM}^2 - 2 \times \overline{IR} \times \overline{RM} \times \cos(I\hat{R}M) \Leftrightarrow \overline{IM}^2 = 6^2 + 6^2 - 2 \times 6 \times 6 \times \cos(30°) \Leftrightarrow$
   $\overline{IM}^2 = 72 - 72 \times \dfrac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \overline{IM} = \pm\sqrt{72 - 72 \times \dfrac{\sqrt{3}}{2}}$. Como $\overline{IM}$ é uma medida, não pode tomar valores negativos, assim,
   $\overline{IM} = \sqrt{72 - 72 \times \dfrac{\sqrt{3}}{2}} \approx 3.11km$

   Outro processo: usar Lei dos senos
   $M\hat{I}R = \dfrac{180° - I\hat{R}M}{2} = \dfrac{180° - 30°}{2} = 75°$
   Aplicando a lei dos senos, vem
   $\dfrac{\sin(I\hat{R}M)}{\overline{IM}} = \dfrac{\sin(M\hat{I}R)}{\overline{MR}} \Leftrightarrow \dfrac{\sin(30°)}{\overline{IM}} = \dfrac{\sin(75°)}{6} \Leftrightarrow \overline{IM} = \dfrac{6 \times \sin(30°)}{\sin(75°)} \Leftrightarrow \overline{IM} \approx 3.11km$

   A distância entre as casas da Inês e da Marta é, aproximadamente, $3.11km$

4. No triângulo $[BCD]$, tem-se que,
   $\sin(D\hat{B}C) = \dfrac{\overline{CD}}{\overline{BC}} \Leftrightarrow \sin\theta = \dfrac{4}{a} \Leftrightarrow a = \dfrac{4}{\sin\theta}$

   $C\hat{B}A = 180° - \theta - 2\theta = 180° - 3\theta$
   Aplicando a lei dos senos ao triângulo $[ABC]$, vem
   $\dfrac{\sin(C\hat{B}A)}{\overline{AC}} = \dfrac{\sin(B\hat{A}C)}{\overline{BC}} \Leftrightarrow \dfrac{\sin(180° - 3\theta)}{b} = \dfrac{\sin(2\theta)}{a} \Leftrightarrow b = \dfrac{a \times \sin(3\theta)}{\sin(2\theta)} \Leftrightarrow$
   $\Leftrightarrow b = \dfrac{\frac{4}{\sin\theta} \times \sin(3\theta)}{\sin(2\theta)} \Leftrightarrow b = \dfrac{4\sin(3\theta)}{\sin(\theta)\sin(2\theta)}$

5. 5.1. (C)

   5.2. (A)
   $1450° = 10° + 4 \times 360°$

6. .

   6.1. $\dfrac{2205°}{360°} = 6.125$
   $6 \times 360° = 2160°$
   $2205° - 2160° = 45°$
   $-2205° = -45° - 6 \times 360°$
   O lado extremidade do ângulo orientado com lado origem $\dot{O}F$ é $\dot{O}E$.

   6.2. (A)
   $$H\hat{G}F = \frac{6 \times \frac{360°}{8}}{2} = 135°$$

   6.3. Como o perímetro do octógono regular é $40dm$, tem-se que a medida do lado é $5dm$.
   $$H\hat{G}F = \frac{6 \times \frac{360°}{8}}{2} = 135°$$
   $$F\hat{H}G = \frac{180° - H\hat{G}F}{2} = \frac{180° - 135°}{2} = 22.5°$$
   Aplicando a lei dos senos ao triângulo $[FGH]$, vem
   $$\frac{\sin(H\hat{G}F)}{\overline{FH}} = \frac{\sin(F\hat{H}G)}{\overline{FG}} \Leftrightarrow \frac{\sin(135°)}{\overline{FH}} = \frac{\sin(22.5°)}{5} \Leftrightarrow \overline{FH} = \frac{5 \times \sin(135°)}{\sin(22.5°)} \Leftrightarrow$$
   $$\Leftrightarrow \overline{FH} = \frac{5 \times \sin(180° - 135°)}{\sin(22.5°)} \Leftrightarrow \overline{FH} = \frac{5 \times \sin(45°)}{\sin(22.5°)} \Leftrightarrow \overline{FH} \approx 9.239dm.$$

   Determinemos a altura do triângulo $[FGH]$ relativa ao lado $[FH]$
   Seja I a projeção do ponto G sobre $[FH]$
   Assim, no triângulo retângulo $[FIG]$, vem,
   $\sin(G\hat{F}I) = \dfrac{\overline{GI}}{\overline{FG}} \Leftrightarrow \sin(22.5°) = \dfrac{\overline{GI}}{5} \Leftrightarrow \overline{GI} = 5\sin(22.5°) \Leftrightarrow \overline{GI} \approx 1.913dm$. Portanto, a área do triângulo $[FGH]$ é igual a $A_{[FGH]} = \dfrac{\overline{FH} \times \overline{GI}}{2} = \dfrac{9.239 \times 1.913}{2} \approx 8.84dm^2$.

   6.4. O triângulo $[CFH]$ é isósceles, dado que $\overline{CF} = \overline{CH}$
   $$F\hat{C}H = \frac{90°}{2} = 45°$$
   $$C\hat{H}F = \frac{180° - F\hat{C}H}{2} = \frac{180° - 45°}{2} = 67.5°$$

   Aplicando a lei dos senos ao triângulo $[CFH]$, vem
   $$\frac{\sin(C\hat{H}F)}{\overline{CF}} = \frac{\sin(F\hat{C}H)}{\overline{FH}} \Leftrightarrow \frac{\sin(67.5°)}{\overline{CF}} = \frac{\sin(45°)}{9.239} \Leftrightarrow \overline{CF} = \frac{9.239 \times \sin(67.5°)}{\sin(45°)} \Leftrightarrow$$
   $\Leftrightarrow \overline{CF} \approx 12.071dm.$
   assim, o perímetro do triângulo $[CFH]$ é igual a
   $P_{[CFH]} = \overline{FH} + \overline{CF} + \overline{CH} = 9.239 + 12.071 + 12.071 = 33.381dm.$

7. Pelo Teorema de Carnot aplicado ao triângulo $[ABC]$, resulta,

$\overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 - 2 \times \overline{AC} \times \overline{BC} \times \cos(B\hat{C}A)$
$\therefore \overline{AB}^2 = 2^2 + 3^2 - 2 \times 2 \times 3 \times \cos(60°)$
$\therefore \overline{AB}^2 = 13 - 12 \times \frac{1}{2}$
$\therefore \overline{AB}^2 = 13 - 6$
$\therefore \overline{AB}^2 = 7$
$\therefore \overline{AB} = \pm\sqrt{7}$, como $\overline{AB}$ é uma medida, não pode tomar valores negativos, assim,
$\overline{AB} = \sqrt{7} \approx 2.65$
O comprimento do túnel é, aproximadamente, $2.65km$.

8. Sejam, $h + 1.6$ e y, as distâncias do drone ao solo e ao jovem que se encontra no ponto A, respetivamente. Seja x a distância do ponto B ao ponto D, sendo D a projeção ortogonal do ponto C sobre o segmento de reta $[AB]$. Então tem-se que: $\overline{BD} = x$ e $\overline{AD} = 40 - x$.

$$\begin{cases} tg37° = \frac{h}{x} \\ tg52° = \frac{h}{40-x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} h = xtg37° \\ tg52° = \frac{h}{40-x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} h = xtg37° \\ 40tg52° - xtg52° = xtg37° \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} h = xtg37° \\ (tg37° + tg52°)x = 40tg52° \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} h = xtg37° \\ x = \frac{40tg52°}{tg37° + tg52°} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} h = \frac{40tg52°}{tg37° + tg52°} \times tg37° \\ x = \frac{40tg52°}{tg37° + tg52°} \end{cases}$$

Sendo assim, a distância do drone ao solo é dada por
$d = 1.6 + h = 1.6 + \frac{40tg52°}{tg37° + tg52°} \times tg37° \approx 20.57$
por outro lado, tem-se que $\sin 52° = \frac{h}{y} \Leftrightarrow y = \frac{h}{\sin 52°} = \frac{\frac{40tg52°}{tg37°+tg52°} \times tg37°}{\sin 52°} \approx 24.08$
e sendo assim, a distância do drone ao jovem que está no ponto A é aproximadamente $24.08m$

Nota: Uma outra resolução passaria por usar a lei dos senos.

9. 9.1. .

$$\sin(x) = \frac{\overline{BC}}{\overline{AC}} \Leftrightarrow \sin(x) = \frac{\overline{BC}}{12} \Leftrightarrow \overline{BC} = 12\sin(x)$$

$$\cos(x) = \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} \Leftrightarrow \cos(x) = \frac{\overline{AB}}{12} \Leftrightarrow \overline{AB} = 12\cos(x)$$

Então, a área da região sombreada é igual a
$A_{regiaosombreada} = \frac{\pi \times 6^2}{2} - \frac{\overline{AB} \times \overline{BC}}{2} = 18\pi - \frac{12\cos(x) \times 12\sin(x)}{2} =$
$= 18\pi - \frac{144\cos(x)\sin(x)}{2} = 18\pi - 72\sin(x)\cos(x)$

9.2. $tgx = \frac{2}{3}$
então de
$1 + tg^2x = \frac{1}{cos^2x}$
resulta que
$1+\left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{1}{\cos^2 x} \Leftrightarrow 1+\frac{4}{9} = \frac{1}{\cos^2 x} \Leftrightarrow \frac{13}{9} = \frac{1}{\cos^2 x} \Leftrightarrow \cos^2 x = \frac{9}{13} \Leftrightarrow \cos x = \pm\sqrt{\frac{9}{13}}, \wedge x \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[$
, logo $\cos x = \frac{3\sqrt{13}}{13}$
de $tgx = \frac{\sin x}{\cos x}$ resulta que $\sin x = tgx \times \cos x = \frac{2}{3} \times \frac{3\sqrt{13}}{13} = \frac{2\sqrt{13}}{13}$
e sendo assim,
$A_{regiaosombreada} = 18\pi - 72 \times \frac{2\sqrt{13}}{13} \times \frac{3\sqrt{13}}{13} = \left(18\pi - \frac{432}{13}\right) u.a.$

10. $\dfrac{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)+\cos(\pi+\beta)}{tg(\pi-\beta)\cdot\cos\beta}=\dfrac{\cos\alpha-\cos\beta}{-tg\beta\cdot\cos\beta}=\dfrac{-\cos\alpha+\cos\beta}{\sin\beta}=\dfrac{-\frac{x}{z}+\frac{y}{z}}{\frac{x}{z}}=\dfrac{y-x}{x}$

11. .

11.1. $\dfrac{-\cos^2 x}{1+\sin x}=\dfrac{\sin^2 x-1}{1+\sin x}=\dfrac{(\sin x+1)(\sin x-1)}{1+\sin x}=\sin x-1$

11.2. $\dfrac{1-\frac{1}{tg^2x}}{1+\frac{1}{tg^2x}}-1=\dfrac{\dfrac{tg^2x-1}{tg^2x}}{\dfrac{tg^2x+1}{tg^2x}}-1=\dfrac{tg^2x-1}{tg^2x+1}-1=\dfrac{tg^2x-1-tg^2x-1}{tg^2x+1}=$

$=-\dfrac{2}{tg^2x+1}=-\dfrac{2}{\dfrac{1}{\cos^2 x}}=-2\cos^2 x$

12. (C)
$f(x)=2\sin(2x)$
Procuremos x tais que $f(x)=0$
$f(x)=0\Leftrightarrow 2\sin(2x)=0\Leftrightarrow \sin(2x)=0\Leftrightarrow \sin(2x)=\sin 0\Leftrightarrow 2x=k\pi, k\in\mathbb{Z}$
$\Leftrightarrow x=k\dfrac{\pi}{2}, k\in\mathbb{Z}$

13. (D)
$\sin(-\pi-x)+\cos\left(\dfrac{3\pi}{2}-x\right)=\sin x-\sin x=0$

14. (A)
$f(x)=\sqrt{2}-3\sin(\pi-2x)$
$-1\leq\sin(\pi-2x)\leq 1, \forall x\in D_f$
$\therefore 3\geq -3\sin(\pi-2x)\geq -3, \forall x\in D_f$
$\therefore -3\leq -3\sin(\pi-2x)\leq 3, \forall x\in D_f$
$\therefore \sqrt{2}-3\leq\sqrt{2}-3\sin(\pi-2x\leq 3+\sqrt{2}, \forall x\in D_f$
$\therefore -3+\sqrt{2}\leq f(x)\leq 3+\sqrt{2}, \forall x\in D_f$
logo, $D'_f=[-3+\sqrt{2};3+\sqrt{2}]$

15. (D)
$f(-x)=\sin^2(-x)=[\sin(-x)]^2=[-\sin x]^2=$
$=\sin^2 x=f(x), \forall x,-x\in D_f$.
A função f é par.
$g(-x)=\cos(3(-x))=\cos(-3x)=\cos(3x)=g(x), \forall x,-x\in D_g$.
A função g é par.