4. AXIOMATIZAÇÃO DA GEOMETRIA. PARALELISMO E PERPENDICULARIDADE

Ficha n.º 1 – Página 54

1. **Opção correta: (B)**

2. **Opção correta: (C)**

3.1. **a)** A hipótese de *A* é "um retângulo tem os lados todos iguais" e a de *B* é "*n* é múltiplo de 4".

b) A tese de *A* é "o retângulo é um quadrado" e a de *B* é "*n* é múltiplo de 2".

3.2. *A*: Se um retângulo tem os lados todos iguais, então tem quatro ângulos retos e quatro lados iguais, logo, pela definição de quadrado, conclui-se que esse retângulo é um quadrado.

B: Se *n* é múltiplo de 4, então $n = 4k$, com $k \in \mathbb{N}_0$. Como $4k = 2 \times 2k$, então $4k$ é também múltiplo de 2.

3.3. O recíproco deste teorema não é um teorema, pois nem sempre é válido, uma vez que nem todos os números múltiplos de 2 são múltiplos de 4. Por exemplo, 10 é múltiplo de 2, mas não é múltiplo de 4.

4.1. *A*: "[*ABCD*] é um triângulo retângulo em *B*"

4.2. *B*: "$\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2$"

5. Não. Por exemplo, na questão **3.3.** desta ficha é apresentado um teorema cujo recíproco não é verdadeiro.

Ficha n.º 1 – Página 55

6. **Opção correta: (B)**

7.1. Não vou à praia.

7.2. Amanhã a temperatura é inferior a 25 ºC.

8. **Opção correta: (B)**

9. **Opção correta: (B)**

10. Sejam x e y dois número múltiplos de 3. Então $x = 3n$ e $y = 3m$, com $n, m \in \mathbb{N}_0$. Assim, $x + y = 3n + 3m = 3(n + m)$, logo $x + y$ é múltiplo de 3, já que corresponde ao produto de 3 pelo número inteiro não negativo.

11. $a \Rightarrow b$, tal que:

a: "Tirar boa nota no teste"

b: "Estudar"

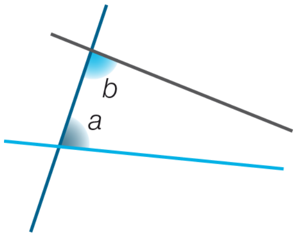
4. AXIOMATIZAÇÃO DA GEOMETRIA. PARALELISMO E PERPENDICULARIDADE

Ficha n.º 2 – Página 56

1. Apenas a afirmação **1.4.** é falsa.

2. **Opção correta: (C)**

3.



$a + b < 180°$

Ficha n.º 2 – Página 57

4. **Opção correta: (A)**

(Nas opções (B) e (C) estão dois postulados de Euclides; na opção (D) não está escrito um axioma nem um postulado).

5. **Opção correta: (A)**

6.1. Uma reta.

6.2. A conclusão obtida em **6.1.** foi evidente para Euclides sendo hoje conhecida como o axioma euclidiano de paralelismo.

7.1. Considera duas retas, *r* e *s*, paralelas, representadas na figura acima. No mesmo plano, considere-se uma terceira reta *t*, que interseta a reta *s* no ponto *P*. Pelo axioma euclidiano de paralelismo, conclui-se que pelo ponto *P* passa uma única reta paralela à reta *r*, pelo que a reta *t* não é paralela à reta *r*. Contudo, como *t* e *r* são complanares, então, se não são paralelas, conclui-se que se intersetam, provando-se assim o pretendido.

7.2. Considerem-se duas retas, *r* e *s*, paralelas, representadas na figura acima, e uma reta *t*, que interseta as outras duas. Os ângulos *a* e *b*, assinalados na figura, são ângulos correspondentes Além disso, os ângulos *a* e *c* são suplementares, pois $\hat{a}+\hat{c}=180^{\circ}$.

$\hat{b}+\hat{c}$ não pode ser inferior a 180º, pois se fosse as retas *r* e *s* intersetar-se-iam, pelo 5.º postulado de Euclides, o que não pode acontecer, pois *r* e *s* são retas paralelas. Pelo mesmo raciocínio, $\hat{b}+\hat{c}$ também não pode ser superior a 180º.

Conclui-se, então, que $\hat{b}+\hat{c}=180^{\circ}$. Como $\hat{b}+\hat{c}=180^{\circ}$ e $\hat{a}+\hat{c}=180^{\circ}$, então *a* e *b* são ângulos iguais concluindo-se então o pretendido.

7.3. Considerem-se duas retas *r* e *s*, ambas paralelas a *t*. Pretende-se provar que *r* e *s* são também retas paralelas. Se *r* e *s* não fossem paralelas, como são complanares, intersetar-se-iam num ponto *P*. Pelo axioma euclidiano de paralelismo, por um ponto *P* exterior a *t* passa uma só reta paralela a *t*. Assim, como *r* é paralela a *t* e *s* é também paralela a *t*, e *r* e *s* passam ambas no ponto *P*, então *r* e *s* seriam retas concorrentes, contrariando o facto de serem paralelas.

Conclui-se, desta forma, o pretendido.

8. **Opção correta: (C)**

Ficha n.º 2 – Página 59

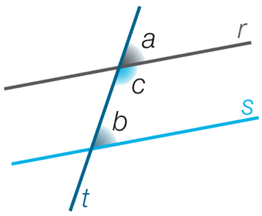
9. $D\hat{A}B + A\hat{B}C = 180^\circ$, pois se fosse inferior a 180º ou superior a 180º, então, pelo 5.º postulado de Euclides, *r* e *s* intersetar-se-iam o que não acontece pois *r* e *s* são retas paralelas. Além disso, $F\hat{A}D + D\hat{A}B = 180^\circ$ pois tratar-se de ângulos suplementares.

Como $D\hat{A}B + A\hat{B}C = 180^\circ$ e $F\hat{A}D + D\hat{A}B = 180^\circ$, então $A\hat{B}C = F\hat{A}D = 65^\circ$.

10.1. Num plano, se os ângulos correspondentes determinados em duas retas por uma secante são iguais, então essas retas são paralelas.

10.2. Hipótese: “Os ângulos correspondentes determinados em duas retas por uma secante são iguais.”
Tese: “As duas retas são paralelas.”

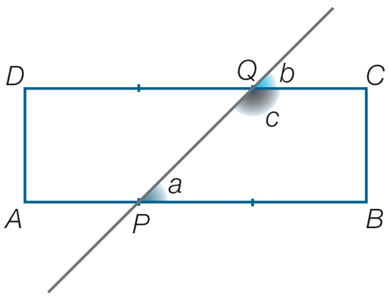
10.3.



$a = b$

10.4. Se as retas *r* e *s* não fossem paralelas, então seriam concorrentes, pois são complanares, intersetando-se num certo ponto *P*, de um dos lados da reta secante *t*. Mas se assim fosse, $\hat{b} + \hat{c}$ seria inferior a 180º, no caso de *r* e *s* se intersetarem no lado de *t* que contém os ângulos *b* e *c*. Como $\hat{a} + \hat{c} = 180^\circ$, então $\hat{a} \neq \hat{b}$, pois $\hat{b} + \hat{c} < 180^\circ$. Mas, por hipótese, $\hat{a} = \hat{b}$, logo as retas *r* e *s* terão de ser paralelas.

11.



Sejam *a* e *b* dois ângulos correspondentes determinados pela reta *PQ* em *AB* e *DC*. $\hat{b} + \hat{c} = 180^\circ$, pois *b* e *c* são ângulos suplementares. $\hat{a} + \hat{c} = 180^\circ$, pois se fosse inferior ou superior a 180º, as retas *AB* e *DC* teriam de se intersetar, pelo 5.º postulado de Euclides, o que não pode acontecer, pois $AB \, // \, DC$. Assim, se $\hat{b} + \hat{c} = 180^\circ$ e $\hat{a} + \hat{c} = 180^\circ$, então $\hat{a} = \hat{b}$.

Ficha n.º 3 – Página 60

4. AXIOMATIZAÇÃO DA GEOMETRIA. PARALELISMO E PERPENDICULARIDADE

1. **Opção correta: (B)**

Para que três pontos definam um plano, não podem estar alinhados.

2.1. 12 retas, pois o sólido apresenta 12 arestas.

2.2. **a)** Paralelas

b) Concorrentes oblíquas

c) Concorrentes oblíquas

2.3. Por exemplo:

a) *AB* e *BC*

b) *AB* e *GC*

c) *AB* e *DC*

d) *AB* e *BD*

2.4. Pode ser definido um plano apenas (nota que, por exemplo, *ABC* e *CBD* são o mesmo plano)

2.5. Seis planos, pois o sólido apresenta seis faces.

2.6. Por exemplo:

a) *EA*

b) *FB*

c) *EF*

d) *EG*

2.7. Por exemplo:

a) *EAD* e *BCG*

b) *EFG* e *DCG*

c) *ABC* e *DCG*

2.8. Apenas **c)** é falsa. Apesar da reta *EF* ser paralela ao plano *ABC*, o plano *EFG* não é paralelo ao plano *ABC*, mas sim concorrente oblíquo.

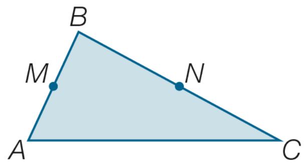
Ficha n.º 3 – Página 61

2.9. **a)** $ABC \cap BCG = BC$ **b)** $HD \cap ABC = \{D\}$ **c)** $EHC \cap HGC = HC$

2.10. **a)** A reta *AC* está contido no plano *BCD*.
b) A reta *AC* é secante não perpendicular ao plano *EFG*.
c) A reta *AC* é secante não perpendicular ao plano *DHG*.

3.1. Um plano é definido por três pontos não alinhados, logo existe um único plano qua contém [*ABC*].

3.2. Considere-se o triângulo [*ABC*] e sejam *M* e *N* os pontos médios dos lados [*AB*] e [*BC*], respetivamente.



$\frac{\overline{BA}}{\overline{BM}} = \frac{1}{2}$ e $\frac{\overline{BC}}{\overline{BN}} = \frac{1}{2}$, logo $\frac{\overline{BA}}{\overline{BM}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{BN}}$ e, por isso, pelo recíproco do Teorema de Tales, conclui-se que *MN* // *AC*.
Assim, se considerarmos o plano que contém *MN* e *AC*, a reta *AC* está contida no referido plano. Se o plano contiver *MN*, mas não contiver *AC*, então a reta *AC* será paralela a esse plano, pois não o intersetará.

4. Num prisma reto, as duas bases estão contidas em planos paralelos e, por isso, qualquer reta de um deles é paralela ao outro, logo qualquer aresta da base de um prisma reto é paralela à outra base.

5.1. Afirmação verdadeira. Até existe mais do que uma reta paralela à dada.

5.2. Afirmação verdadeira

5.3. Afirmação falsa. Por exemplo, considerando o sólido da questão **2**. desta ficha, a reta *EF* é paralela ao plano *ABC*, mas não é paralela a todas as retas deste plano, pois não é paralela à reta *AC*, por exemplo.

5.4. Afirmação falsa. Existem infinitas.

5.5. Afirmação verdadeira

5.6. Afirmação falsa. Se um plano contém duas retas paralelas a outro, os dois planos são paralelos.

5.7. Afirmação falsa. Por exemplo, considerando o sólido da questão **2**. desta ficha as retas *EF* e *HG*, contidas no plano *EFG*, são ambas paralelas ao plano *ABC*. Contudo, os planos *EFG* e *ABC* não são paralelos. A afirmação seria verdadeira se as duas retas consideradas fossem concorrentes.

6. Não. A condição é necessária, mas não é suficiente, pois, se considerarmos o sólido da questão **2** desta ficha, temos o exemplo da reta *EF* contida no plano *EFG* que é paralela ao plano *ABC*. Contudo, os planos *EFG* e *ABC* não são paralelos.

Ficha n.º 4 – Página 62

4. AXIOMATIZAÇÃO DA GEOMETRIA. PARALELISMO E PERPENDICULARIDADE

1.1. Por exemplo:

a) *FG* e *EL*

b) *FG* e *GL*

c) *GL* e *DK*

d) *GE* e *FL*

e) *FG* e *GLK*

f) *FE* e *GLK*

1.2. **a)** A reta *AH* é paralela ao plano *EDK*, porque não o interseta.

b) A reta *AH* é perpendicular ao plano *HGL*, pois é perpendicular, em *H*, a duas retas distintas desse plano (por exemplo, as retas *HG* e *HI*).

1.3. **a)** *EL* **b)** *CE*

1.4. **a)** *AFE* **b)** *AEL*

1.5. Um único plano.

1.6. *AHG* e *LDK* são planos concorrentes, assim como *LDK* e *BEL*.

1.7. Não. Só com as informações anteriores, nada se conclui quanto à posição relativa dos planos *AHG* e *BEL*. Neste caso, são paralelos. Contudo, pode haver situações em que α e β são concorrentes, β e γ são concorrentes e α e γ são também concorrentes. Isto acontece se, por exemplo, $\alpha \equiv HGF$, $\beta \equiv GLE$ e $\gamma \equiv ELK$.

1.8. Apenas a afirmação em **b)** é verdadeira.

a) é falsa porque a distância do ponto *D* ao plano *GLK* é igual à distância do ponto *D* ao ponto *K*, pois *K* é a projeção ortogonal de *D* no plano *GLK*.

c) é falsa porque a distância entre os planos *GLE* e *BCJ* é igual à distância entre qualquer ponto de um deles e a respetiva projeção ortogonal no outro.

Ficha n.º 4 – Página 63

1.9. A altura da pirâmide é a distância do vértice *M* ao plano *ABC*. A altura do prisma é a distância entre os planos *GHI* e *ABC*. Como a distância entre dois planos é igual à distância de um ponto qualquer de um deles ao outro, então, como $M \in GHI$, conclui-se que a distância entre os planos *GHI* e *ABC* é igual à distância de *M* ao plano *ABC*. Assim sendo, a altura da pirâmide é igual à altura do prisma.

1.10. O ângulo a que se refere o enunciado é o ângulo *KLG*. Um hexágono regular pode ser decomposto em seis triângulos equiláteros iguais, sendo 60º a amplitude dos seus ângulos internos. Assim, $K\hat{L}G = K\hat{L}M + M\hat{L}G = 60º + 60º = 120º$.

1.11. O ângulo é de 90º, uma vez que *FEL* é perpendicular a *FBG*.

1.12. *C*

1.13. O primeiro é o centro da face [*ABCDEF*] e o segundo é o ponto médio de [*EF*].

1.14. **a)** Reta *HK*
b) Reta *IM*
c) Plano mediador de [*BF*], que coincide com o plano *ADK*.

1.15. **a)** A reta *AD* é paralela ao plano *GFE*, uma vez que não o interseta.
b) Os planos *BDK* e *AEL* são paralelos, pois é possível identificar um par de retas concorrentes em cada plano, duas a duas paralelas. Por exemplo, as retas concorrentes *BD* e *DK*, do plano *BDK*, são paralelas às retas *AE* e *EL*, do plano *AEL*, respetivamente.

2.1. A reta *t* é perpendicular a α, pois é perpendicular, em *P*, a um par de retas distintas de α : *r* e *s*.

2.2. α é perpendicular a β, uma vez que β contém uma reta, *t*, que é perpendicular a α.

2.3. Apesar de α e β serem planos perpendiculares, de facto, nem todas as retas contidas em α são perpendiculares a β (é o caso da reta *s*). Assim, a afirmação é verdadeira.

3.1. Afirmação falsa. Os pontos *A*, *F* e *K* não definem um plano, uma vez que estão alinhados.

3.2. Afirmação verdadeira. *AK* e *AI* definem um plano, pois são duas retas concorrentes.

3.3. Afirmação verdadeira. O plano *ADC* interseta α segundo *DC* e β segundo *HI*. Como um plano interseta planos paralelos segundo retas paralelas, conclui-se que *CD* // *HI*. Analogamente se justificaria que *BE* // *GJ*.

3.4. Afirmação falsa. Não existe nenhum plano que contenha as retas *AJ* e *BC* e, por isso, são não complanares.

3.5. Afirmação verdadeira. Se *AF* é perpendicular a α e α é paralelo a β, então *AF* é também perpendicular a β.

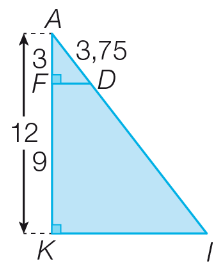
3.6. Afirmação verdadeira. Se *AF* é perpendicular a β (justificado em **3.5.**), então o plano que contém *AF* e *H* é perpendicular a β, uma vez que para que um plano seja perpendicular a outro, basta que contenha uma reta perpendicular a esse outro plano.

3.7. Afirmação verdadeira. Como α é paralelo a β qualquer reta contida em α é paralela a β, em particular a reta *DC*.

3.8. Afirmação verdadeira. *AF* é perpendicular a β (justificado em **3.5.**) e $AF \cap \beta = \{K\}$, logo *AF* é perpendicular a qualquer reta contida em β e que passa em *K*, em particular a reta *JH*.

3.9. Afirmação verdadeira. Se *AK* é perpendicular a β, então AK é perpendicular a qualquer reta contida em β e que passa em *K*, em particular a reta *KG*. Assim, se *AK* é perpendicular a *KG*, então o triângulo [*AKG*] é retângulo em *K*.

3.10. Afirmação verdadeira. Os triângulos [*AFD*] e [*AKI*] partilham um ângulo (*FAD*) e têm ambos um ângulo reto, logo são semelhantes. A razão de semelhança da ampliação que transforma o triângulo [*AFD*] no triângulo [*AKI*] é $\frac{12}{3} = 4$. Assim, $\overline{AI} = 3{,}75 \times 4 = 15$ cm. Em relação a $\overline{FD}$, como o triângulo [*AFD*] é retângulo em *F*, pode aplicar-se o Teorema de Pitágoras:

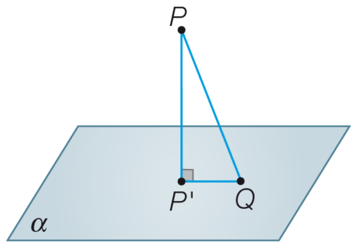


$$\overline{AF}^2 + \overline{FD}^2 = \overline{AD}^2 \Leftrightarrow 3^2 + \overline{FD}^2 = 3{,}75^2 \Leftrightarrow \overline{FD}^2 = 5{,}0625 \underset{\overline{FD}>0}{\Leftrightarrow} \overline{FD} = \sqrt{5{,}0625} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \overline{FD} = 2{,}25 \text{ cm}$$

4. **(A)**

Ficha n.º 4 – Página 65



5. Seja *P*' a projeção ortogonal de *P* em α. Seja Q outro ponto qualquer de α. A reta *PP*' é perpendicular a α, logo é perpendicular a qualquer reta contida em α e que passe em *P*', em perpendicular, a reta *P'Q*. Assim, *PP'* é perpendicular a *P'Q*, logo o triângulo [*PP'Q*] é retângulo em *P'* sendo [*PP*'] um cateto e [*PQ*] a hipotenusa. Como a hipotenusa é sempre o maior lado de um triângulo retângulo conclui-se que a distância de *P* a *P*' é inferior à distância de *P* a qualquer outro ponto de α.

6. Sejam α e β dois planos, ambos paralelos a γ. Pretende-se mostrar que α é paralelo a β. Ora, se α e β não fossem paralelos, então seriam concorrentes, ou seja, intersetar-se-iam segundo uma reta. Como α é paralelo a γ, se β interseta o plano α, então também teria de intersetar o plano γ, pois se um plano interseta um de dois planos paralelos, então também tem de intersetar necessariamente o outro. Mas, se assim fosse, β e γ não seriam paralelos, o que não é válido, pois partiu-se do princípio que seriam. Logo, α e β são planos paralelos.

7. Seja β um plano paralelo a α e que contém *P*. Pretende-se mostrar que β é único. Se não o fosse, existiria outro plano, γ, diferente de β, que também passaria por *P* e seria paralelo a α. Como β e γ passam ambos pelo ponto *P* e são diferentes, então são planos concorrentes. Como α e β são planos paralelos, se γ é concorrente com β, também é concorrente com α, o que não pode acontecer, pois partiu-se do princípio que α e γ eram paralelos. Assim, β é único.

8. A afirmação é falsa. Por exemplo, se tivermos em consideração o sólido da questão **2**. da ficha n.º 3, os planos *EFG* e *ABC* são concorrentes não perpendiculares e existem retas contidas em *EFG* que são paralelas a *ABC*: por exemplo a reta *EF*.

Teste n.º 1 – Página 66

4. AXIOMATIZAÇÃO DA GEOMETRIA. PARALELISMO E PERPENDICULARIDADE

1.1. A condição necessária é o “triângulo tem dois ângulos com a mesma amplitude”.

1.2. A condição suficiente é o “triângulo é isósceles”.

2. $a \Rightarrow b$, tal que:

a: “o algarismo das unidades de um número natural é o zero”

b: “o número natural é múltiplo de 5.”

3. O lado oposto a [*AB*] é paralelo a esse plano. Isto porque os lados opostos de um paralelogramo são paralelos. Assim [*AB*] // [*CD*]. Se um plano contém [*AB*] e não contém [*CD*], então o plano terá de ser paralelo a [*CD*].

4. **Opção correta: (C)**

Por exemplo, tendo como base a figura da questão **3** da ficha n.º 4, as retas *ED* e *BC* são paralelas, *AD* interseta *ED*, mas não interseta *BC*.

5. Sejam β um plano, *r* uma reta perpendicular a β e α um plano que contém *r*. Se *r* é perpendicular a β, então *r* é perpendicular a qualquer reta contida em β e que passa no ponto de interseção de *r* com β, em particular, *r* é perpendicular às retas *s* e *t*, sendo *s* a reta de interseção de α com β e *t* uma reta contida em β e perpendicular a *s*. Assim, como *r* e *t* são ambas perpendiculares a *s* e *s* é comum aos dois planos, então α e β são perpendiculares.

Teste n.º 1 – Página 67

6.1. Por exemplo:

a) *ABC* e *BCG*

b) *ABC* e *BCE*

c) *BC*

d) *FG*

e) *BC*

f) *AB*

6.2. **a)** As retas *AF* e *DG* são paralelas.

b) As retas *AB* e *FC* são não complanares.

c) Os planos *BCG* e *ADH* são paralelos.

d) As retas *AC* e *EG* são paralelas.

e) O pé da perpendicular de *I* no plano *ABC* é o ponto médio do segmento de reta [*AC*] ou [*DB*].

f) Por exemplo: As faces [*ABFE*] e [*BCGF*] do sólido estão contidas em semiplanos perpendiculares.

g) Por exemplo: As faces [*ABFE*] e [*EFI*] do sólido estão contidas em semiplanos não perpendiculares.

h) Os planos *ACG* e *DBF* são perpendiculares.

i) Por exemplo: A reta *FA* é secante não perpendicular ao plano *ABC*.

6.3. *D*

6.4. *AC*

6.5. Plano *DBF*

6.6. O ponto *I* pertence ao plano mediador de [*EH*] , uma vez que *I* é equidistante de *E* e de *H*.

6.7. Reta *FB*

6.8. **a)** Os planos *ABC* e *FGI* não são paralelos. De facto, para que dois planos sejam paralelos, basta que exista num deles duas retas concorrentes paralelas ao outro plano. Contudo, apesar de as retas *AD* e *BC* serem ambas paralelas ao plano *FGI*, não são concorrentes.

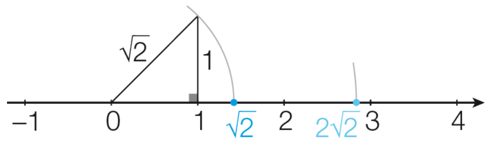
b) *BF* não é perpendicular ao plano *FGI*. Para garantir que uma reta é perpendicular a um plano num ponto, ela tem de ser perpendicular nesse ponto a duas retas distintas desse plano e não apenas a uma, como é o caso da situação apresentada.

Teste n.º 2 – Página 68

4. AXIOMATIZAÇÃO DA GEOMETRIA. PARALELISMO E PERPENDICULARIDADE

1. **Opção correta: (D)**

2. $f\left(\sqrt{2}\right)=3\sqrt{2}-\sqrt{2}=2\sqrt{2}$



Nota: O arco de circunferência que interseta a reta real em *A* tem centro na origem e raio igual ao comprimento da hipotenusa do triângulo retângulo de catetos unitários. O arco de circunferência que interseta a reta real em *B* tem origem em *A* e o mesmo raio do anterior.

3.1. $\Delta=b^2-4\times(-1)\times(-4)=b^2-16$

$\Delta=0 \Leftrightarrow b^2-16=0 \Leftrightarrow b^2=16 \Leftrightarrow b=4 \vee b=-4$

b pode assumir os valores –4 ou 4.

3.2. $-x^2+5x-4=0 \Leftrightarrow x=\dfrac{-5\pm\sqrt{5^2-4\times(-1)\times(-4)}}{2\times(-1)} \Leftrightarrow x=\dfrac{-5\pm\sqrt{25-16}}{-2} \Leftrightarrow x=\dfrac{-5\pm\sqrt{9}}{-2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x=\dfrac{-5\pm 3}{-2} \Leftrightarrow x=\dfrac{-5-3}{-2} \vee x=\dfrac{-5+3}{-2} \Leftrightarrow x=\dfrac{-8}{-2} \vee x=\dfrac{-2}{-2} \Leftrightarrow x=4 \vee x=1$

$\text{C.S.}=\{1, 4\}$

4. **Opção correta: (D)**

$kx^2-2x+k=0$

O binómio discriminante é: $\Delta=(-2)^2-4\times k\times k=4-4k^2=4\left(1-k^2\right)=4(1-k)(1+k)$

Teste n.º 2 – Página 69

5. **Opção correta: (A)**

Se $x, y \in \mathbb{R}^+$ e $x < y$, então $\frac{1}{x} > \frac{1}{y}$, logo $\frac{1}{x} + 3 > \frac{1}{y} + 3$.

6.1. $\frac{1}{3}x - \frac{1}{2}\left(1 - \frac{x-1}{3}\right) \geq 1 \Leftrightarrow \frac{1}{3}x - \frac{1}{2} + \frac{x-1}{6} \geq 1 \Leftrightarrow 2x - 3 + x - 1 \geq 6 \Leftrightarrow 3x \geq 6 + 3 + 1 \Leftrightarrow x \geq \frac{10}{3}$

$A = \left[\frac{10}{3}, +\infty\right[$

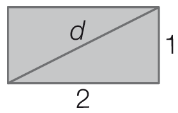
6.2. $\frac{1}{2}x^2 - (x+3) = -x^2 + 1 \Leftrightarrow \frac{1}{2}x^2 - x - 3 + x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 6 + 2x^2 - 2 = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 2x - 8 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \times 3 \times (-8)}}{2 \times 3} \Leftrightarrow x = \frac{-(-2) \pm \sqrt{4 + 12 \times 8}}{6} \Leftrightarrow x = \frac{-(-2) \pm \sqrt{100}}{6} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = \frac{2 \pm 10}{6} \Leftrightarrow x = \frac{2+10}{6} \vee x = \frac{2-10}{6} \Leftrightarrow x = \frac{12}{6} \vee x = \frac{-8}{6} \Leftrightarrow x = 2 \vee x = -\frac{4}{3}$

A equação é impossível em *A*, uma vez que nem 2 nem $-\frac{4}{3}$ pertencem a *A*.

7. Seja *l* a largura e *c* o comprimento do retângulo.



$l \times c = 2 \Leftrightarrow 1 \times c = 2 \Leftrightarrow c = 2$

$d^2 = 2^2 + 1^2 \Leftrightarrow d^2 = 5 \underset{d>0}{\Leftrightarrow} d = \sqrt{5}$

1 décima: $\frac{1}{10}$

$10^2 \times 5 = 500$; $22^2 = 484$; $23^2 = 529$

$22^2 < 10^2 \times 5 < 23^2 \Leftrightarrow \left(\frac{22}{10}\right)^2 < 5 < \left(\frac{23}{10}\right)^2 \Leftrightarrow \frac{22}{10} < \sqrt{5} < \frac{23}{10} \Leftrightarrow 2{,}2 < \sqrt{5} < 2{,}3$

8. A afirmação é verdadeira. Se *AB* é uma reta paralela a um plano α e se *A'* e *B'* forem as projeções ortogonais de *A* e *B* em α, respetivamente, então *A'B'* é uma reta de α paralela a *AB*. Existem em α infinitas retas paralelas a *A'B'*, logo existem infinitas retas paralelas a *AB*.

Teste n.º 2 – Página 70

4. AXIOMATIZAÇÃO DA GEOMETRIA. PARALELISMO E PERPENDICULARIDADE

9.1. $y = ax^2$. Como $(-5, 50)$ é um ponto da parábola, então:

$$50 = a \times (-5)^2 \Leftrightarrow 50 = 25a \Leftrightarrow a = \frac{50}{25} \Leftrightarrow a = 2$$

Logo, a equação que define a parábola é $y = 2x^2$.

9.2. Como $(-2, 0)$ e $(0, 4)$ são pontos da reta, então o seu declive é $\frac{4-0}{0-(-2)} = \frac{4}{2} = 2$.

A ordenada na origem é 4, uma vez que a reta interseta o eixo *Oy* no ponto de coordenadas (0, 4). Logo a equação da reta é $y = 2x + 4$.

9.3. Determinemos as coordendas dos pontos *A* e *D*:

$$2x^2 = 2x + 4 \Leftrightarrow 2x^2 - 2x - 4 = 0 \Leftrightarrow x^2 - x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \times 1 \times (-2)}}{2 \times 1} \Leftrightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{9}}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{1-3}{2} \vee x = \frac{1+3}{2} \Leftrightarrow x = \frac{-2}{2} \vee x = \frac{4}{2} \Leftrightarrow x = -1 \vee x = 2$$

Se $x = -1$: $y = 2 \times (-1)^2 = 2 \times 1 = 2$. Se $x = 2$: $y = 2 \times 2^2 = 2 \times 4 = 8$.

Logo, $A(-1, 2)$; $D(2, 8)$; $B(-1, 0)$ e $C(2, 2)$.

O quadrilátero [*ABCD*] é um trapézio, pois *AB* // *CD*.

$$A = \frac{\left(\overline{AB} + \overline{CD}\right) \times h}{2} = \frac{(2 + (8-2)) \times (1+2)}{2} = \frac{(2+6) \times 3}{2} = \frac{8 \times 3}{2} = 12 \text{ unidades quadradas.}$$

10.1. Sejam *a* e *c* os valores de *Y* correspondentes a $x = 2$ e $x = 10$, respetivamente, e *b* o valor de X correspondente a $y = 4$.

Se $1 \times 2 = 2$, então $a = 20 : 2 = 10$. Se $20 : 5 = 4$, então $b = 1 \times 5 = 5$.

Se $5 \times 2 = 10$, então $c = 4 : 2 = 2$.

X	2	1	5	10
Y	10	20	4	2

10.2. A constante de proporcionalidade é 20 $(1 \times 20 = 20)$.

10.3. **Opção correta: (B).** $y \times x = 20 \Leftrightarrow y = \frac{20}{x}$

11.1. Afirmação falsa. O ângulo *EDF* é reto, uma vez que é igual ao ângulo *BAC*. Num triângulo só pode haver, no máximo, um ângulo reto, logo $D\hat{F}E \neq 90º$ e, por isso, *DF* e *FE* não são perpendiculares.

11.2. Afirmação falsa. Pertencem ambas ao plano *ABC*.

11.3. Afirmação verdadeira. A reta *AD* é perpendicular ao plano *ABC*, uma vez que o prisma é reto, logo *A* é o pé da perpendicular de *D* no plano *ABC*.

11.4. Afirmação verdadeira

Teste n.º 2 – Página 71

11.5. Afirmação verdadeira. A reta *AC* é perpendicular ao plano *ABE* em *A*, logo trata-se da reta normal a esse plano em *A*.

11.6. Afirmação verdadeira

11.7. Afirmação falsa. Os planos *FEB* e *DAC* são concorrentes, intersetando-se segundo a reta *FC*.

11.8. Afirmação falsa. As retas *AD* e *FC* não se intersetam, uma vez que são paralelas.

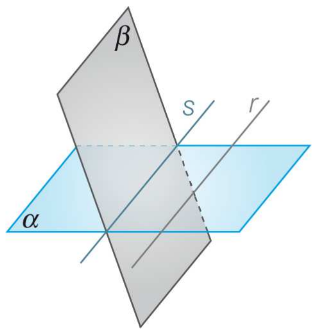
11.9. Afirmação falsa. O plano mediador de [*AB*] contém o ponto médio deste segmento de reta e é-lhe perpendicular. Como o plano *ADF* também é perpendicular ao segmento de reta [*AB*], então é paralelo ao plano mediador de [*AB*].

11.10. Afirmação verdadeira

11.11. Afirmação verdadeira. É o plano *ABE*.

11.12. Afirmação falsa. Estas retas são não complanares, não existindo, portanto, nenhum plano que as contenha em simultâneo.

12. Sejam α e β dois planos que se intersetam segundo a reta *s* e seja *r* uma reta contida em α , diferente de *s*. Pretende-se mostrar que *r* e *s* são retas paralelas. Se *r* e *s* não fossem paralelas, como são complanares (pertencem ambas a α), teriam de ser concorrentes, intersetando-se num ponto *P*. Este ponto pertenceria a *s*, logo pertenceria a β , uma vez que *s* está contida em β . Mas se assim fosse, *r* não seria paralela a β , o que contraria uma das condições tidas por hipótese. Conclui-se que *r* e *s* são retas paralelas.



13. Seja α um plano e *r* uma reta perpendicular a α e que contém *P*. Pretende-se mostrar que *r* é única. Se *r* não fosse única, existiria uma outra reta, *s*, também perpendicular a α e que passaria em *P* . Se *s* é diferente de *r* e ambas contêm o ponto *P*, então terão de ser diferentes os pontos *A* e *B*, de interseção das retas *r* e *s* com o plano α , respetivamente. Mas, se assim fosse, o triângulo [*ABP*] teria dois ângulos retos: os ângulos *BAP* e *PBA*, o que não pode acontecer pois um triângulo só pode ter, no máximo, um ângulo reto. Conclui-se, então, que a reta *r* é única.