



---

EXAME FINAL NACIONAL DO ENSINO SECUNDÁRIO

---

**Prova Escrita de Matemática A**

---

12.º Ano de Escolaridade

---

Decreto-Lei n.º 139/2012, de 5 de julho

---

**Prova 635/2.ª Fase**

---

Critérios de Classificação

12 Páginas

---

**2014**

## CRITÉRIOS GERAIS DE CLASSIFICAÇÃO

A classificação a atribuir a cada resposta resulta da aplicação dos critérios gerais e dos critérios específicos apresentados para cada item e é expressa por um número inteiro.

A ausência de indicação inequívoca da versão da prova implica a classificação com zero pontos das respostas aos itens de escolha múltipla.

As respostas ilegíveis são classificadas com zero pontos.

Em caso de omissão ou de engano na identificação de uma resposta, esta pode ser classificada se for possível identificar inequivocamente o item a que diz respeito.

Se for apresentada mais do que uma resposta ao mesmo item, só é classificada a resposta que surgir em primeiro lugar.

### Itens de seleção

Nos itens de escolha múltipla, a cotação do item só é atribuída às respostas que apresentem de forma inequívoca a opção correta. Todas as outras respostas são classificadas com zero pontos.

### Itens de construção

Nos itens de resposta restrita e de resposta extensa, os critérios de classificação apresentam-se organizados por níveis de desempenho ou por etapas. A cada nível de desempenho e a cada etapa corresponde uma dada pontuação.

A classificação das respostas aos itens cujos critérios se apresentam organizados por níveis de desempenho resulta da pontuação do nível de desempenho em que forem enquadradas e da aplicação dos critérios de desvalorização definidos para situações específicas.

A classificação das respostas aos itens cujos critérios se apresentam organizados por etapas resulta da soma das pontuações atribuídas às etapas apresentadas e da aplicação dos critérios de desvalorização definidos para situações específicas.

Nas respostas classificadas por níveis de desempenho, se permanecerem dúvidas quanto ao nível a atribuir, deve optar-se pelo nível mais elevado de entre os dois tidos em consideração.

É classificada com zero pontos qualquer resposta que não atinja o nível 1 de desempenho.

A classificação das respostas aos itens que envolvam a produção de um texto deve ter em conta a organização dos conteúdos e a utilização da linguagem científica adequada.

As respostas que não apresentem exatamente os termos ou expressões constantes dos critérios específicos de classificação devem ser classificadas em igualdade de circunstâncias com aquelas que os apresentam, desde que o seu conteúdo seja cientificamente válido, adequado ao solicitado e enquadrado pelos documentos curriculares de referência.

A classificação das respostas aos itens que envolvam o uso obrigatório das potencialidades gráficas da calculadora deve ter em conta a apresentação, num referencial, do gráfico da função ou dos gráficos das funções visualizados, devidamente identificados.

No quadro seguinte, apresentam-se os critérios de classificação e as desvalorizações a aplicar, em situações específicas, às respostas aos itens de resposta restrita e de resposta extensa que envolvam a realização de cálculos.

Situação	Classificação
1. Utilização de processos de resolução que não estão previstos no critério específico de classificação.	É aceite qualquer processo de resolução cientificamente correto, desde que enquadrado pelo programa da disciplina (ver nota 1). O critério específico deve ser adaptado ao processo de resolução apresentado.
2. Utilização de processos de resolução que não respeitem as instruções dadas [exemplos: «sem recorrer à calculadora gráfica», «recorrendo a métodos analíticos, sem utilizar a calculadora»].	A etapa em que a instrução não é respeitada e todas as etapas subsequentes que dela dependam são pontuadas com zero pontos.
3. Apresentação apenas do resultado final quando é pedida a apresentação de cálculos ou justificações.	A resposta é classificada com zero pontos.
4. Ausência de apresentação de cálculos ou de justificações necessários à resolução de uma etapa.	A etapa é pontuada com zero pontos.
5. Ausência de apresentação explícita de uma etapa que não envolva cálculos ou justificações.	Se a resolução apresentada permitir perceber inequivocamente que a etapa foi percorrida, esta deve ser pontuada com a pontuação prevista. Caso contrário, a etapa é pontuada com zero pontos, bem como todas as etapas subsequentes que dela dependam.
6. Transcrição incorreta de dados do enunciado, que não altere o que se pretende avaliar com o item.	Se a dificuldade da resolução do item não diminuir, é subtraído um ponto à soma das pontuações atribuídas. Se a dificuldade da resolução do item diminuir, o item é classificado do modo seguinte: – nas etapas em que a dificuldade da resolução diminuir, a pontuação máxima a atribuir deve ser a parte inteira de metade da pontuação prevista; – nas etapas em que a dificuldade da resolução não diminuir, estas devem ser pontuadas de acordo com os critérios específicos de classificação.
7. Transcrição incorreta de um número ou de um sinal na resolução de uma etapa.	Se a dificuldade da resolução da etapa não diminuir, é subtraído um ponto à pontuação da etapa. Se a dificuldade da resolução da etapa diminuir, a pontuação máxima a atribuir a essa etapa deve ser a parte inteira de metade da pontuação prevista. As etapas subsequentes são pontuadas de acordo com os efeitos do erro cometido (ver nota 2).
8. Ocorrência de um erro ocasional num cálculo, na resolução de uma etapa.	É subtraído um ponto à pontuação da etapa em que o erro ocorre. As etapas subsequentes são pontuadas de acordo com os efeitos do erro cometido (ver nota 2).
9. Ocorrência de um erro que revela desconhecimento de conceitos, de regras ou de propriedades, na resolução de uma etapa.	A pontuação máxima a atribuir a essa etapa deve ser a parte inteira de metade da pontuação prevista. As etapas subsequentes são pontuadas de acordo com os efeitos do erro cometido (ver nota 2).
10. Resolução incompleta de uma etapa.	Se à resolução da etapa faltar apenas a passagem final, é subtraído um ponto à pontuação da etapa; caso contrário, a pontuação máxima a atribuir deve ser a parte inteira de metade da pontuação prevista.

Situação	Classificação
11. Apresentação de cálculos intermédios com um número de casas decimais diferente do solicitado ou apresentação de um arredondamento incorreto.	É subtraído um ponto à soma das pontuações atribuídas, salvo se houver indicação em contrário no critério específico de classificação.
12. Apresentação do resultado final que não respeita a forma solicitada [exemplo: é pedido o resultado na forma de fração, e a resposta apresenta-se na forma decimal].	É subtraído um ponto à pontuação da etapa correspondente à apresentação do resultado final.
13. Utilização de valores exatos nos cálculos intermédios e apresentação do resultado final com aproximação quando deveria ter sido apresentado o valor exato.	É subtraído um ponto à pontuação da etapa correspondente à apresentação do resultado final.
14. Utilização de valores aproximados numa etapa quando deveriam ter sido usados valores exatos.	A pontuação máxima a atribuir a essa etapa, bem como a cada uma das etapas subsequentes que dela dependam, deve ser a parte inteira de metade da pontuação prevista.
15. Apresentação do resultado final com um número de casas decimais diferente do solicitado, ou apresentação do resultado final incorretamente arredondado.	É subtraído um ponto à pontuação da etapa correspondente à apresentação do resultado final.
16. Omissão da unidade de medida na apresentação do resultado final.	A etapa relativa à apresentação do resultado final é pontuada com a pontuação prevista.
17. Apresentação de elementos em excesso face ao solicitado.	Se os elementos em excesso não afetarem a caracterização do desempenho, a classificação a atribuir à resposta não deve ser desvalorizada.  Se os elementos em excesso afetarem a caracterização do desempenho, são subtraídos dois pontos à soma das pontuações atribuídas, salvo se houver indicação em contrário no critério específico de classificação.
18. Utilização de simbologias ou de expressões inequivocamente incorretas do ponto de vista formal.	É subtraído um ponto à soma das pontuações atribuídas, exceto: – se as incorreções ocorrerem apenas em etapas já pontuadas com zero pontos; – nos casos de uso do símbolo de igualdade onde, em rigor, deveria ter sido usado o símbolo de igualdade aproximada.

**Nota 1** – A título de exemplo, faz-se notar que **não** são aceites processos de resolução que envolvam a aplicação da regra de Cauchy, da regra de L'Hôpital ou de resultados da teoria de matrizes.

**Nota 2** – Se a dificuldade da resolução das etapas subsequentes não diminuir, estas são pontuadas de acordo com os critérios específicos de classificação; se a dificuldade da resolução das etapas subsequentes diminuir, a pontuação máxima a atribuir a cada uma delas deve ser a parte inteira de metade da pontuação prevista.

# CRITÉRIOS ESPECÍFICOS DE CLASSIFICAÇÃO

## GRUPO I

1. a 8. .... (8 × 5 pontos)..... 40 pontos

As respostas corretas são as seguintes.

Itens	1	2	3	4	5	6	7	8
Versão 1	C	B	B	D	C	A	B	C
Versão 2	B	C	C	A	B	A	D	D

## GRUPO II

1.1. .... 15 pontos

Escrever  $z$  na forma algébrica ..... 2 pontos

Determinar  $w$  na forma algébrica ..... 6 pontos

Obter  $(z - i)^4$  ..... 2 pontos

Calcular  $1 + z i$  ..... 2 pontos

Obter  $w$  ..... 2 pontos

Escrever  $\bar{z}$  na forma algébrica ou escrever  $\bar{z}$  na forma trigonométrica ..... 1 ponto

Determinar a área do triângulo  $[AOB]$  ..... 6 pontos

Identificar a base do triângulo  $[AOB]$  com  $[BO]$  (ou equivalente) 1 ponto

Referir que a altura do triângulo  $[AOB]$  referente a  $[BO]$  tem comprimento igual à abcissa do ponto  $A$  ..... 3 pontos

Calcular a área do triângulo  $[AOB]$  ..... 2 pontos

1.2. .... 15 pontos

Escrever  $z = \frac{2 \cos \alpha \pm \sqrt{(-2 \cos \alpha)^2 - 4}}{2}$  ..... 3 pontos

Obter  $z = \frac{2 \cos \alpha \pm \sqrt{4 \cos^2 \alpha - 4}}{2}$  ..... 1 ponto

Obter  $z = \frac{2 \cos \alpha \pm \sqrt{-4(1 - \cos^2 \alpha)}}{2}$  ..... 2 pontos

Obter  $z = \frac{2 \cos \alpha \pm \sqrt{-4 \sin^2 \alpha}}{2}$  ..... 2 pontos

Obter  $z = \frac{2 \cos \alpha \pm 2i \sin \alpha}{2}$  ..... 2 pontos

Referir que  $z = \cos \alpha + i \sin \alpha \vee z = \cos \alpha - i \sin \alpha$  ..... 1 ponto

Escrever  $\cos \alpha + i \sin \alpha = \operatorname{cis} \alpha$  ..... 1 ponto

Escrever  $\cos \alpha - i \sin \alpha = \operatorname{cis}(-\alpha)$  ..... 3 pontos

**2.1. .... 10 pontos**

Indicar o número de casos possíveis ..... 3 pontos

Indicar o número de casos favoráveis (**ver nota 1**) ..... 5 pontos

Obter a probabilidade pedida (**ver nota 2**) ..... 2 pontos

**Notas:**

1. Se, na resposta, o número de casos favoráveis for superior ao número de casos possíveis ou se o número de casos favoráveis não for coerente com o modelo evidenciado pelo número de casos possíveis, a pontuação a atribuir nesta etapa é zero pontos.
2. Se, na resposta, alguma das duas etapas anteriores tiver sido pontuada com zero pontos, a pontuação a atribuir nesta etapa é zero pontos.

**2.2. .... 15 pontos**

Indicar os valores que a variável  $X$  pode tomar ..... 2 pontos

Determinar a probabilidade de cada um dos valores da variável  $X$  (**ver nota 1**)  
..... (4 + 4 + 4)..... 12 pontos

Apresentar a tabela de distribuição de probabilidades da variável  $X$  (**ver nota 2**)  
..... 1 ponto

**Notas:**

1. Se, na resposta, a probabilidade de um dos valores da variável  $X$  for obtida como a probabilidade de essa variável não tomar nenhum dos outros valores da variável  $X$ , a pontuação a atribuir não deve ser desvalorizada.
2. A pontuação relativa a esta etapa só é atribuída se, à etapa anterior, não tiverem sido atribuídos zero pontos.

3. .... 15 pontos

Seja  $O$  o centro da circunferência na qual o pentágono pode ser inscrito.

Escrever  $\vec{AB} \cdot \vec{AD} = \|\vec{AB}\| \times \|\vec{AD}\| \times \cos(\vec{AB} \wedge \vec{AD})$  ..... 1 ponto

Escrever  $\frac{\vec{AB} \cdot \vec{AD}}{\|\vec{AD}\|} = \|\vec{AB}\| \times \cos(\vec{AB} \wedge \vec{AD})$  ..... 1 ponto

Escrever  $\frac{\vec{AB} \cdot \vec{AD}}{\|\vec{AD}\|} = \cos(\vec{AB} \wedge \vec{AD})$  ..... 1 ponto

Determinar a amplitude do ângulo  $BAD$  ..... 5 pontos

Esta etapa pode ser resolvida por, pelo menos, dois processos.

**1.º Processo**

Calcular a amplitude do ângulo  $COD$  OU a do ângulo  $BOC$  ..... 2 pontos

Calcular a amplitude do ângulo  $BOD$  ..... 1 ponto

Obter  $\hat{BAD} = \frac{2\pi}{5}$  (ou equivalente) ..... 2 pontos

**2.º Processo**

Calcular a amplitude do ângulo  $BAE$  ..... 2 pontos

Calcular a amplitude do ângulo  $DAE$  ..... 2 pontos

Obter  $\hat{BAD} = \frac{2\pi}{5}$  (ou equivalente) ..... 1 ponto

Escrever  $\frac{\vec{AB} \cdot \vec{AD}}{\|\vec{AD}\|} = \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$  ..... 1 ponto

Escrever  $\frac{\vec{AB} \cdot \vec{AD}}{\|\vec{AD}\|} = \cos^2\left(\frac{\pi}{5}\right) - \sin^2\left(\frac{\pi}{5}\right)$  (ou equivalente) ..... 3 pontos

Escrever  $\cos^2\left(\frac{\pi}{5}\right) = 1 - \sin^2\left(\frac{\pi}{5}\right)$  (ou equivalente) ..... 1 ponto

Concluir o pretendido ..... 2 pontos

4.1. .... 20 pontos

Estudar a existência de assíntotas verticais do gráfico da função  $f$  ..... 6 pontos

Determinar  $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$  ..... 4 pontos

Escrever

$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \left( x - 1 + \frac{\ln(-x)}{x} \right)$  ..... 1 ponto

Obter o valor de  $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\ln(-x)}{x}$  ..... 2 pontos

Obter o valor de  $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$  ..... 1 ponto

Indicar uma equação da assíntota vertical do gráfico da função  $f$ .. 1 ponto

Concluir que, por  $f$  ser contínua em  $]-\infty, 0[$ , o gráfico da função  $f$  não admite outras assíntotas verticais ..... 1 ponto

Estudar a existência de assíntota não vertical do gráfico da função  $f$  ..... 14 pontos

Determinar  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x}$  ..... 7 pontos

Escrever  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left( 1 - \frac{1}{x} + \frac{\ln(-x)}{x^2} \right)$

(ou equivalente) ..... 1 ponto

Determinar o valor de  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\ln(-x)}{x^2}$  ..... 4 pontos

Escrever

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\ln(-x)}{x^2} = \lim_{y \rightarrow +\infty} \left( \frac{\ln(y)}{y^2} \right)$$

(ver nota) ..... 2 pontos

Escrever

$$\lim_{y \rightarrow +\infty} \left( \frac{\ln(y)}{y^2} \right) = \lim_{y \rightarrow +\infty} \left( \frac{\ln(y)}{y} \times \frac{1}{y} \right)$$

Obter o valor de  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\ln(-x)}{x^2}$  ..... 1 ponto

Obter o valor de  $m = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x}$  ..... 2 pontos

Determinar  $\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - mx)$  ..... 6 pontos

Escrever  $\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - x) =$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left( -1 + \frac{\ln(-x)}{x} \right) \text{ (ou equivalente) } \dots\dots\dots 1 \text{ ponto}$$

Determinar  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\ln(-x)}{x}$  ..... 3 pontos

Escrever  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\ln(-x)}{x} = \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{-\ln(y)}{y}$

(ver nota)..... 2 pontos

Obter o valor de  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\ln(-x)}{x}$  ..... 1 ponto

Obter o valor de  $b = \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - mx)$  ..... 2 pontos

Indicar uma equação da assíntota não vertical do gráfico da função  $f$  quando  $x \rightarrow -\infty$  ..... 1 ponto

**Nota** – Se, na resposta, for referido que  $x \rightarrow -\infty$  é equivalente a  $-x \rightarrow +\infty$ , esta etapa deve ser considerada como cumprida.



4.2. .... 10 pontos

Este item pode ser resolvido por, pelo menos, dois processos.

**1.º Processo**

- Referir que a função  $f$  é contínua em  $[-e, -1]$  (**ver notas 1 e 2**) ..... 2 pontos
- Calcular  $f(-e)$  ..... 2 pontos
- Calcular  $f(-1)$  ..... 1 ponto
- Escrever  $f(-e) < -e < f(-1)$  (ou equivalente) ..... 2 pontos
- Referir que o pretendido resulta da aplicação do teorema de Bolzano ..... 3 pontos

**2.º Processo**

- Referir que  $f(x) = -e$  é equivalente a  $f(x) + e = 0$  ..... 1 ponto
- Referir que, em  $[-e, -1]$ , a função  $h$ , definida por  $h(x) = f(x) + e$ , é contínua (**ver notas 1 e 2**) ..... 2 pontos
- Calcular  $h(-e)$  ..... 2 pontos
- Calcular  $h(-1)$  ..... 1 ponto
- Escrever  $h(-e) \times h(-1) < 0$  (ou equivalente) ..... 1 ponto
- Concluir que a função  $h$  tem, pelo menos, um zero em  $] -e, -1[$  (**ver nota 3**) . 2 pontos
- Concluir o pretendido (**ver nota 4**) ..... 1 ponto

**Notas:**

1. Se, na resposta, for referido que a função é contínua, esta etapa deve ser considerada como cumprida.
2. Se, na resposta, for referido que a função é contínua em  $] -e, -1[$ , a pontuação a atribuir nesta etapa é zero pontos.
3. Se, na resposta, não for referido que a conclusão resulta da aplicação do teorema de Bolzano, a pontuação a atribuir nesta etapa é zero pontos.
4. A pontuação relativa a esta etapa só pode ser atribuída se a etapa anterior não tiver sido pontuada com zero pontos.

4.3. .... 15 pontos

- Determinar  $g'(x)$  ..... 5 pontos
- Calcular  $(-1)'$  ..... 1 ponto
- Calcular  $\left(\frac{\ln(-x)}{x}\right)'$  ..... 3 pontos
- Obter  $g'(x)$  ..... 1 ponto
- Determinar os zeros de  $g'$  (**ver nota 1**) ..... 3 pontos

Estudar a função $g$ quanto à monotonia .....	6 pontos
Concluir que $g'$ é negativa em $]-\infty, -e[$ .....	1 ponto
Concluir que $g'$ é positiva em $]-e, 0[$ .....	1 ponto
Referir que $g$ é decrescente em $]-\infty, -e]$ ( <b>ver nota 2</b> ) .....	2 pontos
Referir que $g$ é crescente em $[-e, 0[$ ( <b>ver nota 3</b> ) .....	2 pontos
Indicar o valor de $x$ para o qual a função $g$ tem extremo relativo .....	1 ponto

**Notas:**

1. Se, na resposta, não forem determinados os zeros de  $g'$  mas se for apresentada a conclusão de que  $g'$  é negativa em  $]-\infty, -e[$  e de que  $g'$  é positiva em  $]-e, 0[$ , esta etapa deve ser considerada como cumprida.
2. Se, na resposta, for referido que  $g$  é decrescente em  $]-\infty, -e[$ , em vez de em  $]-\infty, -e]$ , esta etapa deve ser considerada como cumprida.
3. Se, na resposta, for referido que  $g$  é crescente em  $]-e, 0[$ , em vez de em  $[-e, 0[$ , esta etapa deve ser considerada como cumprida.

**5. .... 15 pontos**

Referir que a área do quadrilátero $[PQRS]$ é igual a $\overline{PQ} \times \overline{QR}$ (ou equivalente) ..	3 pontos
Escrever $\overline{PQ} = 4\cos\alpha$ (ou equivalente) .....	2 pontos
Escrever $\overline{QR} = 4\sin\alpha$ (ou equivalente) .....	2 pontos
Concluir que $A(\alpha) = 16\sin\alpha \cos\alpha$ .....	2 pontos
Calcular o valor de $\cos\theta$ .....	2 pontos
Calcular o valor de $\sin\theta$ .....	2 pontos
Obter o valor de $A(\theta)$ .....	2 pontos

**6. .... 15 pontos**

Determinar $f(0)$ .....	2 pontos
Determinar o declive da reta $AB$ em função da abcissa do ponto $B$ .....	4 pontos
Equacionar o problema $\left(\frac{f(x)-7}{x} = -2, \text{ com } x > 0\right)$ (ou equivalente) ( <b>ver nota 1</b> ) .....	2 pontos
Reproduzir o gráfico da função ou os gráficos das funções visualizados na calculadora ( <b>ver notas 2 e 3</b> ) .....	4 pontos
Indicar o valor da abcissa do ponto $B$ .....	3 pontos

**Notas:**

1. Se, na resposta, não for referido que  $x > 0$ , a pontuação a atribuir nesta etapa deve ser desvalorizada em 1 ponto.
2. Se, na resposta, não for apresentado o referencial, a pontuação a atribuir nesta etapa deve ser desvalorizada em 1 ponto.
3. Se, na resposta, for apresentado um gráfico que não respeite o domínio da função, a pontuação a atribuir nesta etapa deve ser desvalorizada em 1 ponto.

## 7. .... 15 pontos

Tópicos de resposta:

- justificar que a afirmação I é falsa;
- justificar que a afirmação II é verdadeira;
- justificar que a afirmação III é falsa.

Níveis	Descritores do nível de desempenho	Pontuação
6	Na resposta, são apresentados os três tópicos, com organização coerente dos conteúdos e linguagem científica adequada.	15
5	Na resposta, são apresentados os três tópicos, com falhas na organização dos conteúdos ou na utilização da linguagem científica.	13
4	Na resposta, apenas são apresentados dois dos três tópicos, com organização coerente dos conteúdos e linguagem científica adequada.	10
3	Na resposta, apenas são apresentados dois dos três tópicos, com falhas na organização dos conteúdos ou na utilização da linguagem científica.	8
2	Na resposta, apenas é apresentado um dos três tópicos, com organização coerente dos conteúdos e linguagem científica adequada.	5
1	Na resposta, apenas é apresentado um dos três tópicos, com falhas na organização dos conteúdos ou na utilização da linguagem científica.	3

## COTAÇÕES

### GRUPO I

1. a 8. .... (8 × 5 pontos) ..... 40 pontos  
**40 pontos**

### GRUPO II

1.  
    1.1. .... 15 pontos  
    1.2. .... 15 pontos  
2.  
    2.1. .... 10 pontos  
    2.2. .... 15 pontos  
3. .... 15 pontos  
4.  
    4.1. .... 20 pontos  
    4.2. .... 10 pontos  
    4.3. .... 15 pontos  
5. .... 15 pontos  
6. .... 15 pontos  
7. .... 15 pontos  
**160 pontos**

**TOTAL** ..... **200 pontos**