Escola Secundária de Paredes

Proposta de Resolução da Ficha Formativa 2

Matemática A

12.º Ano de Escolaridade | novembro de 2022

Turma: $B + C + H$

1. .

1.1. Seja $r: y = mx + b, m, b \in \mathbb{R}$, a equação da reta tangente

Calculemos a função derivada de f

$$f'(x) = \left(\frac{x+2}{x+3}\right)' = \frac{(x+2)' \times (x+3) - (x+2) \times (x+3)'}{(x+3)^2} = \frac{1 \times (x+3) - (x+2) \times 1}{(x+3)^2} =$$
$$= \frac{x+3-x-2}{(x+3)^2} = \frac{1}{(x+3)^2}$$

Assim, $m_r = f'(-1) = \frac{1}{(-1+3)^2} = \frac{1}{4}$

Por outro lado,

$$f(-1) = \frac{-1+2}{-1+3} = \frac{1}{2}$$

Então o ponto de tangência T tem coordenadas $\left(-1; \frac{1}{2}\right)$

Deste modo, $r: y = \frac{1}{4}x + b, b \in \mathbb{R}$

Como T é ponto da reta r, vem,

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{4} \times (-1) + b \Leftrightarrow \frac{1}{2} = -\frac{1}{4} + b \Leftrightarrow b = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \Leftrightarrow b = \frac{2}{4} + \frac{1}{4} \Leftrightarrow b = \frac{3}{4}$$

Portanto, a equação reduzida da reta tangente ao gráfico da função f, no ponto de abcissa -1, é $y = \frac{1}{4}x + \frac{3}{4}$

1.2. Ora,

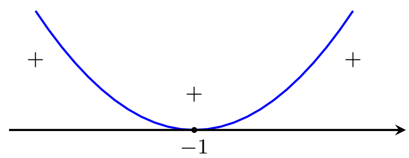
$$f(x) \geq -\frac{1}{x^2+3x} \Leftrightarrow \frac{x+2}{x+3} \geq -\frac{1}{x^2+3x} \Leftrightarrow \frac{x+2}{x+3} + \frac{1}{x^2+3x} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{x+2}{x+3} + \frac{1}{x(x+3)} \geq 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \frac{x^2+2x+1}{x(x+3)} \geq 0$$

$\twoheadrightarrow$ **Numerador:**

Zeros: $x^2 + 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow (x+1)^2 = 0 \Leftrightarrow x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = -1$

Sinal:

Como se trata de uma função quadrática, estuda-se o sinal pela representação gráfica da parábola



Assim,

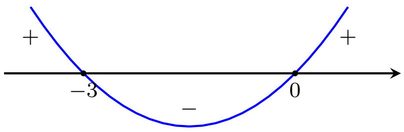
$x^2 + 2x + 1 > 0, \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$

$\twoheadrightarrow$ **Denominador**

Zeros: $x(x+3) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x+3 = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = -3$

Sinal:

Como se trata de uma função quadrática, estuda-se o sinal pela representação gráfica da parábola



Assim,

$x(x+3) < 0 \Leftrightarrow -3 < x < 0$

$x(x+3) > 0 \Leftrightarrow x < -3 \vee x > 0$

Quadro de sinais

x	$-\infty$	-3		-1		0	$+\infty$
x^2+2x+1	$+$	$+$	$+$	0	$+$	$+$	$+$
$x(x+3)$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$\dfrac{x^2+2x+1}{x(x+3)}$	$+$	$n.d.$	$-$	0	$-$	$n.d.$	$+$

Assim,

$\dfrac{x^2+2x+1}{x(x+3)} \geq 0 \Leftrightarrow x < -3 \vee x = -1 \vee x > 0$

Portanto,

$C.S. =]-\infty; -3[\cup \cup \{-1\}]0; +\infty[$

2. $-1 \in D_g$ e é ponto aderente a D_g

A função g é contínua em $x = -1$, se existir $\lim\limits_{x \to -1} g(x)$, ou seja,

se $\lim\limits_{x \to -1^-} g(x) = \lim\limits_{x \to -1^+} g(x) = g(-1)$

Ora,

- $\lim\limits_{x \to -1^-} g(x) = \lim\limits_{x \to -1^-} \dfrac{2x^2+2x}{x^2-1} =^{\left(\frac{0}{0}\right)} \lim\limits_{x \to -1^-} \dfrac{2x(x+1)}{(x-1)(x+1)} = \lim\limits_{x \to -1^-} \dfrac{2x}{x-1} = 1$
- $\lim\limits_{x \to -1^+} g(x) = \lim\limits_{x \to -1^+} \dfrac{4\sqrt{2x+6}-8}{x^2+4x+3} =^{\left(\frac{0}{0}\right)} 4 \times \lim\limits_{x \to -1^+} \dfrac{\sqrt{2x+6}-2}{x^2+4x+3} = 4 \times \lim\limits_{x \to -1^+} \dfrac{\left(\sqrt{2x+6}-2\right)\left(\sqrt{2x+6}+2\right)}{(x+1)(x+3)\left(\sqrt{2x+6}+2\right)} =$

$= 4 \times \lim\limits_{x \to -1^+} \dfrac{\left(\sqrt{2x+6}\right)^2 - 2^2}{(x+1)(x+3)\left(\sqrt{2x+6}+2\right)} = 4 \times \lim\limits_{x \to -1^+} \dfrac{2x+6-4}{(x+1)(x+3)\left(\sqrt{2x+6}+2\right)} =$

$= 4 \times \lim\limits_{x \to -1} \dfrac{2x+2}{(x+1)(x+3))\left(\sqrt{2x+6}+2\right)} = 4 \times \lim\limits_{x \to -1^+} \dfrac{2(x+1)}{(x+1)(x+3)\left(\sqrt{2x+6}+2\right)} =$

$= 4 \times \lim\limits_{x \to -1^+} \dfrac{2}{(x+3)\left(\sqrt{2x+6}+2\right)} = 4 \times \dfrac{2}{8} = 1$

Cálculo auxiliar

Sabe-se que -1 é zero do polinómio x^2+4x+3

Então,

$x^2+4x+3=(x+1)Q(x)$

Pela regra de Ruffini, vem,

$$\begin{array}{r|rr|r} & 1 & 4 & 3 \\ -1 & & -1 & -3 \\ \hline & 1 & 3 & 0 \end{array}$$

Assim,

$Q(x)=x+3$

Logo,

$x^2+4x+3=(x+1)(x+3)$

- $g(-1)=\dfrac{k^2+1}{3}$

Assim, g é contínua em $x=-1$, se $\lim\limits_{x\to -1^-} g(x)=\lim\limits_{x\to -1^+} g(x)=g(-1)$

Ou seja, se,

$\dfrac{k^2+1}{3}=1 \Leftrightarrow k^2+1=3 \Leftrightarrow k^2=2 \Leftrightarrow k=\pm\sqrt{2}$

Resposta: Para $k=-\sqrt{2} \vee k=\sqrt{2}$, a função g é contínua em $x=-1$

3. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{xh(x)+2x^2}{x^2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{xh(x)}{x^2}+\dfrac{2x^2}{x^2}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{h(x)}{x}+\lim\limits_{x\to+\infty}(2)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\dfrac{-x^3-x^2-2x+2}{x^2+1}}{x}+2=$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{-x^3-x^2-2x+2}{x^3+x}+2=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3\left(-1-\frac{x^2}{x^3}-\frac{2x}{x^3}+\frac{2}{x^3}\right)}{x^3\left(1+\frac{x}{x^3}\right)}+2=$$

$$=\frac{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-1-\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}+\frac{2}{x^3}\right)}{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}+2=\frac{-1-0-0+0}{1+0}+2=-1+2=1$$

Resposta: (A)

4. O declive da reta r é igual a $h'(1)$

Calculemos a expressão da função derivada de h

$$h'(x)=\left(-\frac{1}{4}(x^2-9)(x+2)\right)'=-\frac{1}{4}\left[(x^2-9)(x+2)\right]'=$$

$$=-\frac{1}{4}\left[(x^2-9)'\times(x+2)+(x^2-9)\times(x+2)'\right]=-\frac{1}{4}\left[2x\times(x+2)+(x^2-9)\times 1\right]=$$

$$=-\frac{1}{4}\left(2x^2+4x+x^2-9\right)=-\frac{1}{4}\left(3x^2+4x-9\right)$$

Assim,

$$m_r=h'(1)=-\frac{1}{4}\left(3\times 1^2+4\times 1-9\right)=-\frac{1}{4}\times(-2)=\frac{1}{2}$$

Resposta: (C)

5. .

5.1. Quando $x \to +\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{14x}{\sqrt{7x^2+4}+\sqrt{7}x}}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{14x}{x\left(\sqrt{7x^2+4}+\sqrt{7}x\right)} =^{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)} \lim_{x\to+\infty} \frac{14}{\sqrt{7x^2+4}+\sqrt{7}x} =$$

$$= \frac{14}{+\infty} = 0$$

Logo, $m = 0$

$$\lim_{x\to+\infty} (f(x)-0) = \lim_{x\to+\infty} \frac{14x}{\sqrt{7x^2+4}+\sqrt{7}x} =^{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)} \lim_{x\to+\infty} \frac{14x}{\sqrt{x^2\left(7+\frac{4}{x^2}\right)}+\sqrt{7}x}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{14x}{|x|\sqrt{7+\frac{4}{x^2}}+\sqrt{7}x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{14x}{x\sqrt{7+\frac{4}{x^2}}+\sqrt{7}x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{14x}{x\left(\sqrt{7+\frac{4}{x^2}}+\sqrt{7}\right)} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{14}{\sqrt{7+\frac{4}{x^2}}+\sqrt{7}} = \frac{14}{\sqrt{7+0}+\sqrt{7}} = \frac{14}{2\sqrt{7}} = \frac{7}{\sqrt{7}} = \frac{7\sqrt{7}}{7} = \sqrt{7}$$

Logo, $b = \sqrt{7}$

Portanto, a reta de equação $y = \sqrt{7}$ é assíntota ao gráfico de f, quando $x \to +\infty$

5.2. No intervalo $]-\infty; 1[$, a função f é definida por $f(x) = x^3 + \frac{3}{2}x^2 - 1$

Determinemos a expressão da função derivada de f

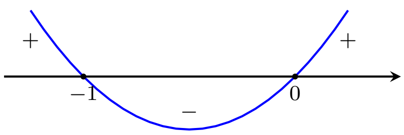
$$f'(x) = \left(x^3 + \frac{3}{2}x^2 - 1\right)' = 3x^2 + 3x$$

Zeros de $f'(x)$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 + 3x = 0 \Leftrightarrow x^2 + x = 0 \Leftrightarrow x(x+1) \Leftrightarrow x = 0 \vee x+1 = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = -1$$

Sinal:

Como se trata de uma função quadrática, estuda-se o sinal pela representação gráfica da parábola



Assim,

$3x^2 + 3x < 0 \Leftrightarrow -1 < x < 0$

$3x^2 + 3x > 0 \Leftrightarrow x < -1 \vee x > 0$

Quadro de sinal de f' e de variação de f

x	$-\infty$	-1		0		1
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	\\\
$f(x)$	$\nearrow$	$-\frac{1}{2}$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	\\\

$$f(-1) = (-1)^3 + \frac{3}{2} \times (-1)^2 - 1 = -1 + \frac{3}{2} - 1 = -2 + \frac{3}{2} = -\frac{4}{2} + \frac{3}{2} = -\frac{1}{2}$$

$$f(0) = 0^3 + \frac{3}{2} \times 0^2 - 1 = -1$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}\left(x^3+\frac{3}{2}x^2-1\right) =^{(\infty-\infty)} \lim_{x\to-\infty}\left[x^3\left(1+\frac{3x^2}{2x^3}-\frac{1}{x^3}\right)\right] =$$

$$= \lim_{x\to-\infty}\left(x^3\right)\times\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{3}{2x}-\frac{1}{x^3}\right) = -\infty\times(1-0+0) = -\infty$$

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-}\left(x^3+\frac{3}{2}x^2-1\right) = 1+\frac{3}{2}-1 = \frac{3}{2}$$

Concluindo:

A função f é crescente em $]-\infty;-1]$ e em $[0;1[$, e é decrescente em $[-1;0]$

A função f atinge um máximo relativo igual a $-\frac{1}{2}$, para $x=-1$, e um mínimo relativo igual a -1, para $x=0$

6. Se o ponto A tem coordenadas $(-1;2)$, então, $f(-1)=2$

Determinemos a expressão da função derivada de g

$$g'(x) = \left(x\sqrt{-x+1}\right)' = x'\sqrt{-x+1}+x\times\left(\sqrt{-x+1}\right)' = 1\times\sqrt{-x+1}+x\times\frac{(-x+1)'}{2\sqrt{-x+1}} =$$

$$= \sqrt{-x+1}+x\times\frac{-1}{2\sqrt{-x+1}} = \sqrt{-x+1}-\frac{x}{2\sqrt{-x+1}} = \frac{2\sqrt{-x+1}\times\sqrt{-x+1}}{2\sqrt{-x+1}}-\frac{x}{2\sqrt{-x+1}} =$$

$$= \frac{2(-x+1)-x)}{2\sqrt{-x+1}} = \frac{-2x+2-x)}{2\sqrt{-x+1}} = \frac{-3x+2}{2\sqrt{-x+1}}$$

Assim,

$$g'(-1) = \frac{-3\times(-1)+2}{2\sqrt{-(-1)+1}} = \frac{5}{2\sqrt{2}} = \frac{5\sqrt{2}}{2\times 2} = \frac{5\sqrt{2}}{4}$$

$$g(-1) = -1\times\sqrt{2} = -\sqrt{2}$$

Deste modo, de $(f\times g)'(-1) = 2\sqrt{2}$, vem,

$$(f\times g)'(-1) = 2\sqrt{2} \Leftrightarrow f'(-1)\times g(-1)+f(-1)\times g'(-1) = 2\sqrt{2} \Leftrightarrow f'(-1)\times(-\sqrt{2})+2\times\frac{5\sqrt{2}}{4} = 2\sqrt{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -\sqrt{2}f'(-1)+\frac{5\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2} \Leftrightarrow \sqrt{2}f'(-1) = \frac{5\sqrt{2}}{2}-2\sqrt{2} \Leftrightarrow \sqrt{2}f'(-1) = \frac{5\sqrt{2}}{2}-\frac{4\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2}f'(-1) = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow f'(-1) = \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} \Leftrightarrow f'(-1) = \frac{1}{2}$$

Como o declive m_t da reta tangente t é igual a $f'(-1)$, tem-se que $m_t = \frac{1}{2}$

7. A função g é contínua em $[2;3]$, pois trata-se de um quociente de funções contínuas

$$g(2) = \frac{\sqrt{2\times 2+1}}{2-1} = \sqrt{5} \approx 2.24$$

$$g(3) = \frac{\sqrt{2\times 3+1}}{3-1} = \frac{\sqrt{7}}{2} \approx 1.32$$

Logo, $g(3) < 2 < g(2)$

Como a função g é contínua em $[2;3]$ e $g(3) < 2 < g(2)$, então, pelo Teorema de Bolzano-Cauchy, $\exists c \in]2;3[: g(c) = 2$

Ou seja, a equação $g(x) = 2$ é possível no intervalo $]2;3[$

8. Seja g, a função real de variável real, definida por $g(x) = f(x-a) - f(x)$

   A função g é contínua em $[0;a]$, pois trata-se da diferença de duas funções contínuas

   $g\left(a\right) = f(a-a) - f(a) = f(0) - f(a)$

   $g\left(0\right) = f(0-a) - f(0) = f(-a) - f(0) = f(a) - f(0)$, visto que f é função par, logo, $f(-a) = f(a)$

   Verificamos que $g(a)$ e $g(0)$ têm sinais contrários

   Logo, $g\left(a\right) \times g\left(0\right) < 0$

   Como a função g é contínua em $[0;a]$ e $g\left(a\right) \times g\left(0\right) < 0$, então, pelo Corolário do Teorema de Bolzano-Cauchy, $\exists c \in]0;a[: g(c) = 0$

   Ou seja, $\exists c \in]0;a[: f(c-a) = f(c)$

   Portanto, a equação $f(x-a) = f(x)$ tem pelo menos uma solução em $]0;a[$

9. Seja D o conjunto de todos os pontos do domínio da função g que têm derivada

   Seja $a \in D$

   $$g'(a) = \lim_{x\to a}\frac{g(x)-g(a)}{x-a} = \lim_{x\to a}\frac{\dfrac{b}{x-c}-\dfrac{b}{a-c}}{x-a} = \lim_{x\to a}\frac{\dfrac{b(a-c)-b(x-c)}{(x-c)(a-c)}}{x-a} = \lim_{x\to a}\frac{b(a-c)-b(x-c)}{(x-c)(a-c)(x-a)} =$$
   $$= \lim_{x\to a}\frac{ab-bc-bx+bc}{(x-c)(a-c)(x-a)} = \lim_{x\to a}\frac{ab-bx}{(x-c)(a-c)(x-a)} =^{\left(\frac{0}{0}\right)} \lim_{x\to a}\frac{-b(x-a)}{(x-c)(a-c)(x-a)} =$$
   $$= \lim_{x\to a}\frac{-b}{(x-c)(a-c)} = -\frac{b}{(a-c)^2}$$

   Portanto, $g'(x) = -\dfrac{b}{(x-c)^2}$, com $x \neq c$

10. Seja D o conjunto de todos os pontos do domínio da função h que têm derivada

    Seja $a \in D$

    $$h'(a) = \lim_{x\to a}\frac{h(x)-h(a)}{x-a} = \lim_{x\to a}\frac{\sqrt{bx+1}-\sqrt{ab+1}}{x-a} =^{\left(\frac{0}{0}\right)} \lim_{x\to a}\frac{\left(\sqrt{bx+1}-\sqrt{ab+1}\right)\left(\sqrt{bx+1}+\sqrt{ab+1}\right)}{(x-a)\left(\sqrt{bx+1}+\sqrt{ab+1}\right)} =$$
    $$= \lim_{x\to a}\frac{\left(\sqrt{bx+1}\right)^2-\left(\sqrt{ab+1}\right)^2}{(x-a)\left(\sqrt{bx+1}+\sqrt{ab+1}\right)} = \lim_{x\to a}\frac{bx+1-(ab+1)}{(x-a)\left(\sqrt{bx+1}+\sqrt{ab+1}\right)} = \lim_{x\to a}\frac{bx+1-ab-1}{(x-a)\left(\sqrt{bx+1}+\sqrt{ab+1}\right)} =$$
    $$= \lim_{x\to a}\frac{b(x-a)}{(x-a)\left(\sqrt{bx+1}+\sqrt{ab+1}\right)} = \lim_{x\to a}\frac{b}{\sqrt{bx+1}+\sqrt{ab+1}} = \frac{b}{2\sqrt{ab+1}}$$

    Portanto,

    $h'(x) = \dfrac{b}{2\sqrt{bx+1}}$, com $bx+1 > 0$