UNIVERSIDADE da MADEIRA

Centro de Competência de Ciências Exactas e da Engenharia

# PROVA DE AVALIAÇÃO DE CONHECIMENTOS E COMPETÊNCIAS PARA ADMISSÃO AO ENSINO SUPERIOR

## MATEMÁTICA 15/06/2011

**Atenção:** |*Não é permitido o uso de calculadora nem de telemóvel.*
**Duração:** 120m

**Nome:** ___________________________________

**B.I.**__________

*Justifique os raciocínios utilizados na resolução das questões.*

| **Questões:** | **1** | **2** | **3** | **4** | **5** | **6** | **7** |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **Cotações:** | **2,5** | **2,5** | **2,0** | **3,0** | **4,5** | **2,5** | **3,0** |

**1.** Considere as sucessões de termos gerais:

$$a_n = \frac{(-1)^n}{2} \qquad b_n = 1 - (1-n)^2$$

$$c_n = \frac{\sqrt{n}}{n+1} \qquad d_n = \left(\frac{1}{3}\right)^n$$

Indique, *justificando*:

**1.1** uma sucessão monótona;

**1.2** uma sucessão limitada;

**1.3** uma sucessão convergente;

**1.4** uma sucessão majorada mas não minorada.

**2.** Considere $u_n = a^{n+1}$. Calcule o $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$ nos seguintes casos:

**2.1** com $a > 1$

**2.2** com $0 < a < 1$

**3.** Determine o valor de $k$ (ou valores de $k$) de modo que a função $f(x) = e^x + \dfrac{k + \log(1+x)^2}{1-x}$ intercepte os eixos coordenados em $(0, -2)$.

**4.** Sejam as funções $g(x) = \log\left(-x + \dfrac{3}{x}\right)$ e $h(x) = \sqrt[4]{\dfrac{x^2}{e^x}}$. Indique a afirmação correcta, *justificando*:

**(A)** $Dg \subset D_h$

**(B)** $D_g = D_h$

**(C)** $D_h \subset D_g$

**5.** Considere a seguinte função real de variável real:

$$j(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{\sqrt[3]{1-x}} & x > 1 \\ x - x^3 & x \leq 1 \end{cases}$$

**5.1** determine o domínio da função $j(x)$;

**5.2** calcule, caso existam, os zeros de $j(x)$;

**5.3** $\lim\limits_{x \to 1^-} j(x)$ e $\lim\limits_{x \to 1^+} j(x)$;

**5.4** calcule, caso existam, as assímptotas de $j(x)$;

**5.5** estude a continuidade de $j(x)$.

**6.** Seja $\operatorname{tg}\theta = 2$ com $\theta \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$. Mostre que:

$$\frac{\sin^2\theta - \cos^2\theta \operatorname{tg}\theta}{\sin\theta\cos\theta} = 1$$

**7.** Num determinado exame compareceram 60 alunos, dos quais 15 são do sexo masculino, 20 têm idade superior a 30 anos e 9 têm as 2 características anteriores.

Escolhido um aluno ao acaso, determine a probabilidade de esse aluno

**7.1** ser do sexo masculino;

**7.2** ter idade até 30 anos;

**7.3** ser do sexo masculino e ter idade até 30 anos.

UNIVERSIDADE da MADEIRA

Centro de Competência de Ciências Exactas e da Engenharia

# PROVA DE AVALIAÇÃO DE CONHECIMENTOS E COMPETÊNCIAS PARA ADMISSÃO AO ENSINO SUPERIOR

## MATEMÁTICA 15/06/2011 - $\boxed{\text{Soluções}}$

**1.**

$$a_n \left| \begin{array}{l} \text{divergente} \\ \text{limitada } -\frac{1}{2} \leq a_n \leq \frac{1}{2} \\ \text{não monótona} \end{array} \right. \qquad b_n \left| \begin{array}{l} \text{divergente} \\ \text{não limitada, majorada } b_n \leq 1 \\ \text{monótona decrescente} \end{array} \right.$$

$$c_n \left| \begin{array}{l} \text{convergente } \lim c_n = 0 \\ \text{limitada } 0 < c_n \leq \frac{1}{2} \\ \text{monótona decrescente} \end{array} \right. \qquad d_n \left| \begin{array}{l} \text{convergente } \lim d_n = 0 \\ \text{limitada } 0 < d_n \leq \frac{1}{3} \\ \text{monótona decrescente} \end{array} \right.$$

**1.1** $b_n$ ou $c_n$ ou $d_n$ **1.2** $a_n$ ou $c_n$ ou $d_n$

**1.3** $c_n$ ou $d_n$ **1.4** $b_n$

**2.1** $a > 1$

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} a^{n+1} = a \lim_{n\to+\infty} a^n = +\infty$$

**2.2** $0 < a < 1$

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} a^{n+1} = a \underbrace{\lim_{n\to+\infty} a^n}_{0} = 0$$

**3.** $f(0) = -2 \Leftrightarrow e^0 + \dfrac{0 + \log(1+0)^2}{1-0} = -2 \Leftrightarrow \boxed{k = -3}$

**4.** $\quad D_g = \left\{ x : -x + \dfrac{3}{x} > 0 \right\} = \left]-\infty, -\sqrt{3}\right[ \cup \left]0, \sqrt{3}\right[ \qquad D_h = \mathbb{R}$

$-x + \dfrac{3}{x} = \dfrac{-x^2+3}{x}$

| | | $-\sqrt{3}$ | | $0$ | | $\sqrt{3}$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $-x^2+3$ | $-$ | $0$ | $+$ | $+$ | $+$ | $0$ | $-$ |
| $x$ | $-$ | $-$ | $-$ | $0$ | $+$ | $+$ | $+$ |
| $g(x) = \dfrac{-x^2+3}{x}$ | $+$ | $0$ | $-$ | $\blacksquare$ | $+$ | $0$ | $-$ |

$\left(\left]-\infty, -\sqrt{3}\right[ \cup \left]0, \sqrt{3}\right[\right) \subset \mathbb{R}$, a afirmação correcta é **(A)** $Dg \subset D_h$

**5.1** $\quad D_j = \mathbb{R}$

**5.2** $\quad j(x) = 0 \Leftrightarrow \dfrac{x}{\sqrt[3]{1-x}} = 0 \Leftrightarrow x = 0$ com $x \neq 1$, mas $0 \notin \left]1, +\infty\right[$

$j(x) = 0 \Leftrightarrow x - x^3 = 0 \Leftrightarrow x(1-x^2) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 1 \vee x = -1$

os zeros de $j(x)$ são: $\{-1, 0, 1\}$

**5.3** $\quad \lim\limits_{x\to 1^-} j(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} (x - x^3) = 0$

$$\lim_{x\to 1^+} j(x) = \lim_{x\to 1^+} \left( \frac{x}{\sqrt[3]{1-x}} \right) = -\infty$$

**5.4**

$$\begin{aligned} m &= \lim_{x\to -\infty} \frac{j(x)}{x} \\ &= \lim_{x\to -\infty} \frac{x - x^3}{x} \\ &= \lim_{x\to -\infty} \left(1 - x^2\right) \\ &= -\infty \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} m &= \lim_{x\to +\infty} \frac{j(x)}{x} = \lim_{x\to +\infty} \frac{\frac{x}{\sqrt[3]{1-x}}}{x} \\ &= \lim_{x\to +\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{1-x}} = 0 \\ b &= \lim_{x\to +\infty} \left( j(x) - mx \right) \\ &= \lim_{x\to +\infty} \frac{x}{\sqrt[3]{1-x}} = +\infty \end{aligned}$$

Existe apenas uma assímptota vertical em $x = 1^{+}$(pela alínea **5.3**)

**5.5** Pela alínea **5.3)** $j(x)$ não é contínua em $x = 1$ $\left(\text{não existe } \lim_{x \to 1} j(x)\right)$.

Logo $j(x)$ é contínua em $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.

**6.**

$$\operatorname{tg}\theta = 2 \Leftrightarrow \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = 2 \Leftrightarrow \sin\theta = 2\cos\theta$$

$$\begin{aligned}\frac{\sin^2\theta - \cos^2\theta \operatorname{tg}\theta}{\sin\theta\cos\theta} &= \frac{(2\cos\theta)^2 - (\cos\theta)^2 2}{(2\cos\theta)(\cos\theta)} \\ &= \frac{4\cos^2\theta - 2\cos^2\theta}{2\cos^2\theta} = \frac{2\cos^2\theta}{2\cos^2\theta} = 1\end{aligned}$$

**7.** Considerando

**A**: "aluno do sexo masculino"

**B**: "aluno com idade até 30 anos"

**7.1** P(**A**)= $\frac{15}{60} = 0,25$

**7.2** P(**B**)= $\frac{40}{60} = \frac{2}{3} = 0,667$

**7.3** P(**A**∩**B**)= $\frac{6}{60} = 0,1$