Escola Secundária de Penafiel

Ficha de Trabalho nº 12
Proposta de resolução

Preparação para exame

12.º Ano de Escolaridade | Turma G-K

FUNÇÃO EXPONENCIAL

1. 1.1. O regime mais favorável é o de capitalizações mensais.

   1.2. Capital inicial: 30000

   - capitalizações mensais

     O capital acumulado ao fim de um ano será: $30000 \times \left(1 + \frac{3.5}{100 \times 12}\right)^{12} \approx 31067$ euros

   - capitalizações trimestrais

     O capital acumulado ao fim de um ano será: $30000 \times \left(1 + \frac{3.5}{100 \times 4}\right)^{4} \approx 31064$ euros

2. .

   2.1. Calculemos $\lim \left(\frac{5+6n}{1+6n}\right)^n$

$$\lim \left(\frac{5+6n}{1+6n}\right)^n = \lim \left(\frac{6n\left(1+\frac{5}{6n}\right)}{6n\left(1+\frac{1}{6n}\right)}\right)^{\frac{6n}{6}} = \left(\frac{\lim\left(1+\frac{5}{6n}\right)^{6n}}{\lim\left(1+\frac{1}{6n}\right)^{6n}}\right)^{\frac{1}{6}} = \left(\frac{e^5}{e}\right)^{\frac{1}{6}} = \left(e^4\right)^{\frac{1}{6}} =$$
$$= e^{\frac{4}{6}} = e^{\frac{2}{3}}.$$

   Calculemos $f(k)$.
   $f(k) = \frac{e}{e^{-k+2}} = e^{1+k-2} = e^{k-1}$

   Assim,

$$\lim \left(\frac{5+6n}{1+6n}\right)^n = f(k) \Leftrightarrow e^{\frac{2}{3}} = e^{k-1} \Leftrightarrow k-1 = \tfrac{2}{3} \Leftrightarrow k = \tfrac{2}{3}+1 \Leftrightarrow k = \tfrac{5}{3}.$$

   2.2. Calculemos a função derivada da função f

   Ora, $f(x) = \frac{e}{e^{-x+2}} = e^{1+x-2} = e^{x-1}$
   Assim,
   $f'(x) = \left(e^{x-1}\right)' = (x-1)' \times e^{x-1} = 1 \times e^{x-1} = e^{x-1}$

   Determinemos a abcissa do ponto de tangência

   Seja a a sua abcissa
   Então, tem-se que
   $f(a) = e \Leftrightarrow e^{a-1} = e \Leftrightarrow a-1 = 1 \Leftrightarrow a = 2$
   Então, o ponto de tangência é $T(2; e)$
   O declive da reta tangente é igual a $f'(2) = e^{2-1} = e$
   Assim, a equação da reta tangente é da forma
   $y = ex + b$, com $b \in \mathbb{R}$

Determinemos b tendo em conta que a reta passa no ponto T

$e = e \times 2 + b \Leftrightarrow b = e - 2e \Leftrightarrow b = -e$

Logo, $y = ex - e$ é a equação reduzida reta tangente pedida.

2.3. $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{e}{e^{-x+2}} = \dfrac{e}{e^{+\infty}} = \dfrac{e}{+\infty} = 0$

Logo, a reta de equação $y = 0$ é assintota ao gráfico da função, quando $x \to -\infty$.

3. 3.1. $-\dfrac{2}{2^{x-3}} + \left(\dfrac{16}{2^x}\right)^{-1} \leq 0 \Leftrightarrow \dfrac{2^x}{16} \leq \dfrac{2}{2^{x-3}} \Leftrightarrow \dfrac{2^x}{2^4} \leq 2^{1-x+3} \Leftrightarrow 2^{x-4} \leq 2^{4-x} \Leftrightarrow x - 4 \leq 4 - x \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2x \leq 8 \Leftrightarrow x \leq 4$

$C.S. =]-\infty; 4]$

3.2. $2e^x + 2 = \dfrac{4}{e^x} \Leftrightarrow 2e^x + 2 - \dfrac{4}{e^x} = 0 \Leftrightarrow \dfrac{2(e^x)^2 + 2 \times e^x - 4}{e^x} = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2(e^x)^2 + 2 \times e^x - 4 = 0 \wedge e^x \neq 0 \Leftrightarrow 2(e^x)^2 + 2 \times e^x - 4 = 0$

Fazendo, $y = e^x$, vem,

$2y^2 + 2y - 4 = 0 \Leftrightarrow y^2 + y - 2 = 0 \Leftrightarrow y = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \times 1 \times (-2)}}{2 \times 1} \Leftrightarrow y = -2 \vee y = 1$

Assim, resulta,

$e^x = -2 \vee e^x = 1 \Leftrightarrow$ equação impossível $\vee e^x = e^0 \Leftrightarrow x = 0$

$C.S. = \{0\}$

4. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{2 - 2x}{\sqrt{2} - \sqrt{2}e^{x-1}} = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{-2(x-1)}{-\sqrt{2}(e^{x-1} - 1)} = \dfrac{2}{\sqrt{2}} \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x-1}{e^{x-1} - 1} = \dfrac{2\sqrt{2}}{2} \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{1}{\dfrac{e^{x-1} - 1}{x - 1}} =$

$= \sqrt{2} \times \dfrac{1}{\lim\limits_{x-1 \to 0} \dfrac{e^{x-1} - 1}{x - 1}} = \sqrt{2} \times \dfrac{1}{1} = \sqrt{2}$

Aplicou-se o limite notável $\lim\limits_{y \to 0} \dfrac{e^y - 1}{y} = 1$

5. -1 é ponto aderente e pertence ao domínio da função g

Assim, a função g é contínua em $x = -1$ se e só se, existe $\lim\limits_{x \to -1} g(x)$

ou seja, se e só se, $\lim\limits_{x \to -1^+} g(x) = g(-1)$ e $\lim\limits_{x \to -1^-} g(x) = g(-1)$

Ora,

$\lim\limits_{x \to -1^+} g(x) = \lim\limits_{x \to -1^+} \dfrac{e^{x+4} - e^3}{1 + x} = \lim\limits_{x \to -1^+} \dfrac{e^{x+1} \times e^3 - e^3}{x + 1} = \lim\limits_{x \to -1^+} \dfrac{(e^{x+1} - 1) \times e^3}{x + 1} =$

$= e^3 \times \lim\limits_{x+1 \to 0^+} \dfrac{e^{x+1} - 1}{x + 1} = e^3 \times 1 = e^3$

Aplicou-se o limite notável $\lim\limits_{y \to 0} \dfrac{e^y - 1}{y} = 1$

$\lim\limits_{x \to -1^-} g(x) = \lim\limits_{x \to -1^-} \dfrac{2ax^2 - 2ax}{x^2 + 1} = \dfrac{2a \times (-1)^2 - 2a \times (-1)}{(-1)^2 + 1} = \dfrac{2a + 2a}{2} = 2a$

$g(-1) = \dfrac{2a \times (-1)^2 - 2a \times (-1)}{(-1)^2 + 1} = \dfrac{2a + 2a}{2} = 2a$

Então, como deverá ter-se, $\lim\limits_{x \to -1^+} g(x) = \lim\limits_{x \to -1^-} g(x) = g(-1)$, vem,

$e^3 = 2a \Leftrightarrow a = \dfrac{e^3}{2}$

FUNÇÃO LOGARÍTMICA

6. .

   6.1. $\log_2(128) = a \Leftrightarrow 2^a = 128 \Leftrightarrow 2^a = 2^7 \Leftrightarrow a = 7$
   logo, $\log_2(128) = 7$

   $\log_2(64) = a \Leftrightarrow 2^a = 64 \Leftrightarrow 2^a = 2^6 \Leftrightarrow a = 6$
   logo, $\log_2(64) = 6$

   então,
   $\log_2(128) - 3\log_2(64) = 7 - 3 \times 6 = 7 - 18 = -11$

   6.2. $\log(100) = a \Leftrightarrow 10^a = 100 \Leftrightarrow 10^a = 10^2 \Leftrightarrow a = 2$
   logo, $\log(100) = 2$

   $\log(0.001) = a \Leftrightarrow 10^a = 0.001 \Leftrightarrow 10^a = 10^{-3} \Leftrightarrow a = -3$
   logo, $\log(0.001) = -3$

   Então,
   $\log(100) + 2\log(0.001) = 2 + 2 \times (-3) = 2 - 6 = -4$

7. .

   7.1. $D_g = \{x \in \mathbb{R} : 2x - 4 > 0\} = \{x \in \mathbb{R} : 2x > 4\} = \{x \in \mathbb{R} : x > 2\} =]2; +\infty[$

   7.2. $g\left(\frac{5}{2}\right) = \ln\left(2 \times \frac{5}{2} - 4\right) + 1 = \ln(5-4) + 1 = \ln(1) + 1 = 0 + 1 = 1$

   $g\left(\frac{e}{2} + 2\right) = \ln\left(2 \times \left(\frac{e}{2} + 2\right) - 4\right) + 1 = \ln(e + 4 - 4) + 1 = \ln(e) + 1 = 1 + 1 = 2$

   Então, $g\left(\frac{5}{2}\right) - \frac{g\left(\frac{e}{2} + 2\right)}{2} = 1 - \frac{2}{2} = 1 - 1 = 0.$