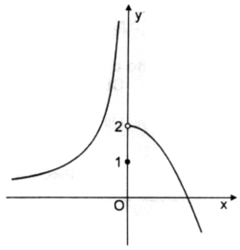
Escola Secundária de Francisco Franco

Matemática A (aprendizagens essenciais) – 11.º ano

Exercícios saídos em exames nacionais e em testes intermédios (desde 1998)

Tema IV: funções reais de variável real

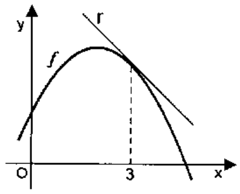
1. Na figura está parte da representação gráfica de uma função g de domínio $\mathbb{R}$ e contínua em $\mathbb{R}\backslash\{0\}$. Considere a sucessão de termo geral $u_n=1/n$. Indique o valor de $\lim g(u_n)$.



(A) $+\infty$ (B) 0 (C) 1 (D) 2

Prova Modelo 1998

2. Na figura estão representadas: parte do gráfico de uma função diferenciável em $\mathbb{R}$; uma recta r tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa 3. O valor de f '(3), derivada da função f no ponto 3, pode ser igual a



(A) -1 (B) 0 (C) 1/f(3) (D) 1

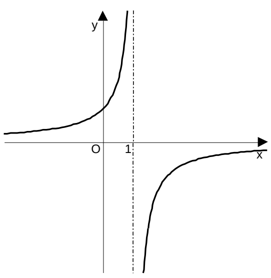
Exame Nacional 1998, 1.ª chamada

3. Um projéctil é lançado verticalmente de baixo para cima. Admita que a sua altitude h (em metros), t segundos após ter sido lançado, é dada pela expressão $h(t)=100t-5t^2$. Qual é a velocidade (em metros por segundo) do projéctil, dois segundos após o lançamento?

(A) 80 (B) 130 (C) 170 (D) 230

Exame Nacional 1998, 2.ª fase

4. Na figura está desenhada parte da representação gráfica de uma função real ***g*** , cujo domínio é R \ {1}. A recta de equação $x = 1$ é uma assímptota vertical do gráfico de ***g***. Considere a sucessão de termo geral $x_n = 1+\frac{1}{n}$ e seja $u_n = g(x_n)$. Qual das afirmações seguintes é verdadeira?

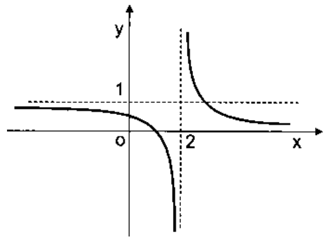


(A) $\lim u_n=-\infty$ (B) $\lim u_n=+\infty$

(C) $\lim u_n=0$ (D) Não existe $\lim u_n$

Prova Modelo 1999

5. Na figura está desenhada parte da representação gráfica de uma função f, cujo domínio é $\mathbb{R}\backslash\{2\}$. As rectas de equações x=2, y=1 e y=0 são assímptotas do gráfico de f. Seja (x_n) a sucessão de termo geral $x_n=2-n^2$. Indique o valor de $\lim f(x_n)$.

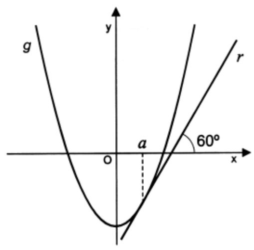


(A) 0 (B) 1

(C) $-\infty$ (D) $+\infty$

Exame Nacional 1999, 1.ª chamada

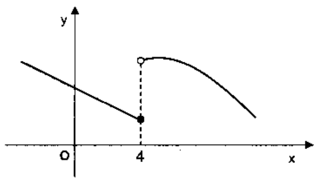
6. Na figura estão representadas: parte do gráfico da função g, de domínio R, definida por $g(x)=\sqrt{3}\, x^2-1$; uma recta r tangente ao gráfico de g, no ponto de abcissa *a*. A inclinação da recta r é 60°. Indique o valor de *a*.



(A) $\sqrt{3}/4$ (B) $\sqrt{3}/2$ (C) 1/3 (D) 1/2

Exame Nacional 1999, 1.ª chamada

7. Na figura está representada parte do gráfico de uma função f, de domínio $\mathbb{R}$. Qual das seguintes afirmações é verdadeira?



(A) $\lim\limits_{x\to 4^-} f(x)=f(4)$ e $\lim\limits_{x\to 4^+} f(x)=f(4)$

(B) $\lim\limits_{x\to 4^-} f(x)=f(4)$ e $\lim\limits_{x\to 4^+} f(x)\neq f(4)$

(C) $\lim\limits_{x\to 4^-} f(x)\neq f(4)$ e $\lim\limits_{x\to 4^+} f(x)=f(4)$

(D) $\lim\limits_{x\to 4^-} f(x)\neq f(4)$ e $\lim\limits_{x\to 4^+} f(x)\neq f(4)$

Exame Nacional 2000, 2.ª chamada

8. A recta de equação y=x é tangente ao gráfico de uma certa função f, no ponto de abcissa 0. Qual das seguintes expressões pode definir a função f?

(A) x^2+x (B) x^2+2x (C) x^2+2x+1 (D) x^2+x+1

Exame Nacional 2001, 1.ª chamada

9. Seja f uma função tal que a sua derivada , no ponto 3, é igual a 4. Indique o valor de $\lim\limits_{x\to 3}\frac{f(x)-f(3)}{x^2-9}$

(A) 2/3 (B) 3/2 (C) 4 (D) 0

Exame Nacional 2001, 2.ª fase

10. Prove que, para qualquer função quadrática g, existe um e um só ponto do gráfico onde a recta

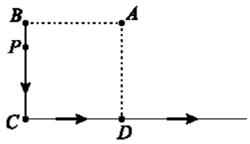
tangente é paralela à bissectriz dos quadrantes ímpares.

Exame Nacional 2003, 1.ª chamada

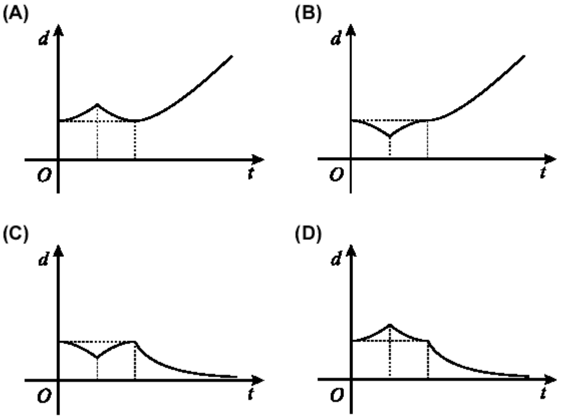
11. Na figura estão representados:

• um quadrado [ABCD]

• uma semi-recta $\dot{C}D$.



Admita que um ponto P, partindo de B, se desloca, a velocidade constante, ao longo do percurso sugerido pelas setas (primeiro percorre o segmento [BC] e seguidamente a semi-recta $\dot{C}D$). Qual dos gráficos seguintes dá a distância *d*, do ponto P ao ponto A, em função do tempo *t*, contado a partir do instante em que P inicia o seu movimento?

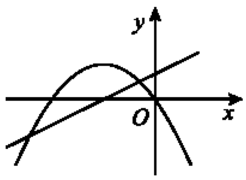


Teste intermédio 2006

12. Na figura estão representadas:

• parte do gráfico de uma função quadrática f;

• parte do gráfico de uma função afim g. Qual dos seguintes conjuntos pode ser o conjunto solução da inequação $\frac{f(x)}{g(x)} \leq 0$?



(A) $]-\infty, -4[\ \cup [-2, 0[$ **(B)** $]-\infty, -4]\ \cup\ ]-2, 0]$

(C) $]-4, -2]\cup]0, +\infty[$ **(D)** $[-4, -2[\ \cup [0, +\infty[$

Teste intermédio 2006

13. Na figura 1 está representada graficamente a função f. Na figura 2 está representada graficamente a função g.

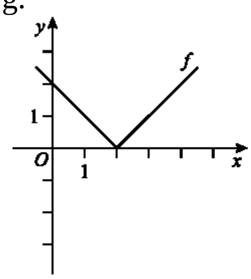


Figura 1

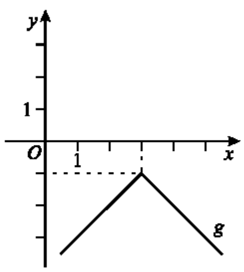


Figura 2

Qual das igualdades seguintes é verdadeira?

(A) $g(x) = -f(x+1) - 1$ **(B)** $g(x) = f(x-1) + 1$

(C) $g(x) = f(x+1) - 1$ **(D)** $g(x) = -f(x-1) - 1$

Teste intermédio 2006

14. De uma função quadrática f sabe-se que o conjunto solução da inequação f(x)≥0 é o intervalo [1,5]. Qual é o contradomínio de f?

(A) $]-\infty, f(1)]$ **(B)** $[f(5), +\infty[$

(C) $[f(3), +\infty[$ **(D)** $]-\infty, f(3)]$

Teste intermédio 2006

15. Considere a função f, de domínio R\{1}, definida por $f(x) = 2 + \frac{1}{1-x}$

a) Sem recorrer à calculadora, determine o conjunto dos números reais *x* tais que f(x)≤−1. Apresente a resposta final na forma de intervalo (ou união de intervalos).

b) O gráfico da função f tem duas assimptotas. Escreva as suas equações.

Teste intermédio 2006

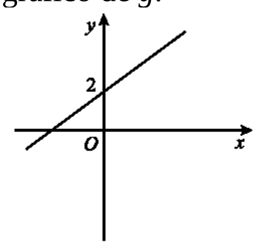
16. A Anabela espremeu várias laranjas e obteve três litros de sumo de laranja, para um lanche que vai oferecer aos amigos. Para que a quantidade de bebida seja suficiente, a Anabela vai juntar água aos três litros de sumo de laranja obtidos. Admita que o sumo de laranja puro, ou seja, acabado de espremer, já contém 92% de água.

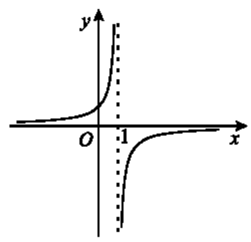
a) Designando por *x* a quantidade (em litros) de água que vai ser acrescentada aos três litros de sumo de laranja puro, justifique que a percentagem de água existente na bebida que a Anabela vai oferecer aos amigos é dada por $\frac{100x+276}{x+3}$

b) Qual é a quantidade máxima de água que a Anabela pode acrescentar aos três litros de sumo de laranja puro, de tal modo que a sua bebida não tenha mais de 97% de água? Apresente o resultado em litros.

Teste intermédio de Matemática B 2006

17. De duas funções, *f* e *g*, sabe-se que: • o gráfico de *f* é uma recta, cuja ordenada na origem é igual a 2; • o gráfico de *g* é uma hipérbole. Nas figuras seguintes estão representadas parte dessa recta e parte dessa hipérbole. A recta de equação *x* = 1 é assimptota do gráfico de *g*.



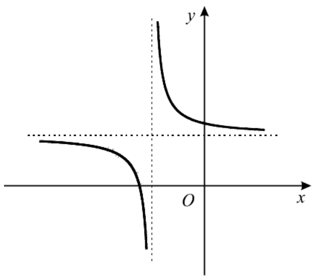


Indique o valor de $\lim_{x \to 1^+} \frac{f(x)}{g(x)}$

(A) 0 (B) 2 (C) $+\infty$ (D) $-\infty$

Exame Nacional 2006, 2.ª fase

18. Para um certo valor de a e para um certo valor de b, a expressão $f(x) = a + \frac{1}{x-b}$ define a função f cujo gráfico está parcialmente representado na figura. Qual das afirmações seguintes é verdadeira?



(A) $a > 0 \ \wedge \ b > 0$ **(B)** $a > 0 \ \wedge \ b < 0$

(C) $a < 0 \ \wedge \ b > 0$ **(D)** $a < 0 \ \wedge \ b < 0$

Teste intermédio 2007

19. Indique o conjunto dos números reais que são soluções da inequação $\frac{x^2+1}{2-x} < 0$

(A) $]-1,2[$ (B) $]1,2[$ (C) $]-\infty,2[$ (D) $]2,+\infty[$

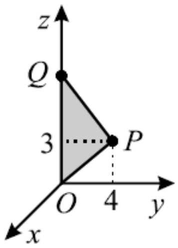
Teste intermédio 2007

20. Considere a função f, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $f(x) = 1 - x^2$. Seja t a recta tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa ½. Qual é a inclinação da recta t ?

(A) 30° (B) 45° (C) 135° (D) 150°

Teste intermédio 2007

21. Considere, em referencial o.n. $Oxyz$, o ponto P(0,4,3). Admita que um ponto Q se desloca ao longo do semieixo positivo Oz, nunca coincidindo com a origem O do referencial. Seja f a função que faz corresponder, à cota z do ponto Q, o perímetro do triângulo [OPQ].

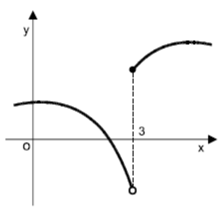


a) Mostre que $f(z) = z + 5 + \sqrt{z^2 - 6z + 25}$

b) <u>Sem recorrer à calculadora</u>, determine a cota do ponto Q de modo que o perímetro do triângulo [OPQ] seja igual a 16.

Teste intermédio 2007

22. Na figura, está representada parte do gráfico de uma função f, real de variável real. Qual das afirmações seguintes é verdadeira?

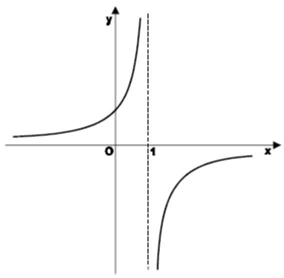


(A) $\lim_{x \to 3} \frac{1}{f(x)} = 0$ **(B)** $\lim_{x \to 3} \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{2}$

(C) $\lim_{x \to 3} \frac{1}{f(x)} = -\frac{1}{2}$ **(D)** Não existe $\lim_{x \to 3} \frac{1}{f(x)}$

Exame Nacional 2007, 2.ª fase

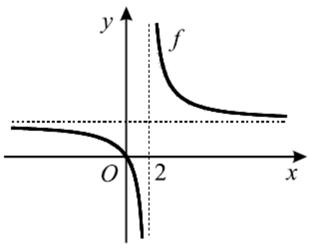
23. Na figura, está representada parte do gráfico de uma função g, real de variável real. Tal como a figura sugere, a recta de equação $x = 1$ é assimptota do gráfico da função g. Seja $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a função definida por $h(x) = x - 1$. O valor do $\lim_{x \to 1} \frac{h(x)}{g(x)}$ é:



(A) $-\infty$ (B) $+\infty$ (C) 0 (D) 1

Exame Nacional 2007, 2.ª fase

24. Na figura está representada, em referencial o.n. xOy, parte do gráfico de uma função f, bem como as duas assimptotas deste gráfico. Tal como a figura sugere,



- a origem do referencial pertence ao gráfico de f
- uma das assimptotas é paralela ao eixo Ox
- a outra assimptota é paralela ao eixo Oy e intersecta o eixo Ox no ponto de abcissa 2

a) Seja g a função, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $g(x) = 3x + 9$. Tendo em conta o gráfico de f e a expressão analítica de g, <u>resolva</u> a inequação $f(x) \times g(x) \leq 0$, <u>completando</u> a seguinte tabela de variação de sinal, que deve <u>transcrever</u> para a sua folha de prova:

x	$-\infty$ $\qquad$ $+\infty$
$f(x)$	
$g(x)$	
$f(x) \times g(x)$	

Apresente o <u>conjunto solução</u> da inequação utilizando a notação de intervalos de números reais.

b) Admita agora que:

- a assimptota do gráfico de f paralela ao eixo das abcissas tem equação $y = 3$
- f é definida por uma expressão do tipo $f(x) = a + \frac{b}{x-c}$, onde a, b, e c designam números reais.

Indique os valores de a e de c e determine o valor de b.

2.º Teste intermédio 2008

25. A Maria vai sempre de carro, com o pai, para a escola, saindo de casa entre as sete e meia e as oito

horas da manhã. Admita que, quando a Maria sai de casa *t* minutos depois das sete e meia, a duração da viagem, em minutos, é dada por $d(t) = 45 - \frac{5600}{t^2+300}$ ($t \in [0,30]$). As aulas da Maria começam sempre às oito e meia.

a) Mostre que, se a Maria sair de casa às 7 h 40 m, chega à escola às 8 h 11 m, mas, se sair de casa às 7 h 55 m, já chega atrasada às aulas.

b) Recorrendo às capacidades gráficas da calculadora, resolva o seguinte problema: *Até que horas pode a Maria sair de casa, de modo a não chegar atrasada às aulas?*

A sua resolução deve incluir:

• uma explicação de que, para que a Maria não chegue atrasada às aulas, é necessário que $t + d(t) \leq 60$

• o(s) gráfico(s) visualizado(s) na calculadora

• a resposta ao problema em horas e minutos (minutos arredondados às unidades)

2.º Teste intermédio 2008

26. O gráfico de uma função *f* é uma parábola com a concavidade voltada para baixo cujo vértice é o ponto (3,2). Seja *f '* a função derivada da função *f*. Qual dos valores seguintes é negativo?

(A) *f* '(1) (B) *f* '(2) (C) *f* '(3) (D) *f* '(4)

2.º Teste intermédio 2009

27. Na figura 1 está representada parte do gráfico de uma função g, de domínio $\mathbb{R}$ e contínua em $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$. As rectas de equações $x = -2$ e $y = 1$ são as únicas assimptotas do gráfico de *g*. Seja (x_n) uma sucessão tal que $\lim g(x_n) = +\infty$. Qual das expressões seguintes pode ser o termo geral da sucessão (x_n)?

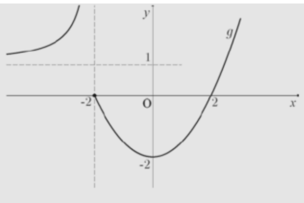


Fig. 1

(A) $-2 + \frac{2}{n}$ (B) $-2 - \frac{1}{n}$ (C) $1 + \frac{1}{n}$ (D) $1 - \frac{1}{n}$

Exame Nacional 2008, 2.ª fase

28. Na figura 2 está representada parte do gráfico de uma função *f*, de domínio $\mathbb{R}$, sendo $y = -1$ a única assimptota do seu gráfico. Qual é o valor do $\lim_{x \to -\infty} \frac{3}{f(x)}$?

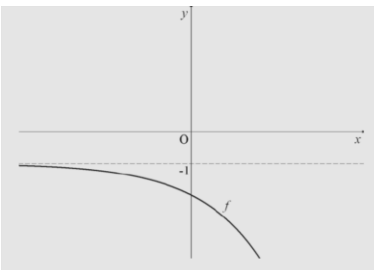


Fig. 2

(A) $-\infty$ (B) -3 (C) -1 (D) 3

Exame Nacional 2008, 2.ª fase

29. Considere a função *f*, de domínio R\{−2}, definida por $f(x) = 4 - \frac{4}{x+2}$. Sem recorrer à calculadora, resolva os itens seguintes:

a) Determine o conjunto dos números reais que são soluções da inequação *f*(*x*)≥3. Apresente a sua resposta utilizando a notação de intervalos de números reais.

b) Na figura 3 estão representados, em referencial o.n. *xOy*:

• parte do gráfico da função *f*

• as rectas *r* e *s*, assimptotas do gráfico de *f*

• o quadrilátero [*ABCD*]

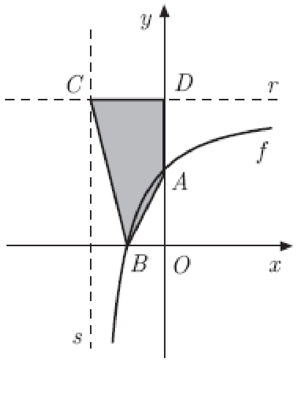


Figura 3

A e *B* são os pontos de intersecção do gráfico da função *f* com os eixos coordenados. *C* é o ponto de intersecção das rectas *r* e *s*. *D* é o ponto de intersecção da recta *r* com o eixo *Oy*. Determine a área do quadrilátero [*ABCD*]

2.º Teste intermédio 2009

30. Na empresa onde o Manuel trabalha, o cumprimento do horário é controlado por relógio electrónico. De acordo com o contrato de trabalho, qualquer trabalhador deve entrar às oito horas e sair ao meio-dia. Porém, se o trabalhador chegar atrasado, terá de continuar a trabalhar depois do meio-dia. Sempre que um trabalhador chega *t* minutos atrasado, o número de minutos, depois do meio-dia, que ele tem de permanecer na empresa é dado por

$c(t) = \frac{t^2+25t}{t+1} \quad (t \geq 0)$

a) Na segunda-feira, o Manuel entrou na empresa às nove horas e um quarto. A que horas deveria ter saído, de modo a cumprir o estipulado no contrato? Apresente a sua resposta em horas e minutos (minutos arredondados às unidades).

b) Ontem, o Manuel saiu da empresa às 12 horas e 25 minutos. Com quantos minutos de atraso é que ele chegou à empresa?

c) Ao sair ontem da empresa, o Manuel pensou: «Então eu atrasei-me tão pouco e tive de ficar a trabalhar quase meia hora depois do meio-dia?! Não é justo.» Depois de ter conversado com os seus colegas de trabalho, o Manuel decidiu propor à administração da empresa que o tempo de permanência de um trabalhador na empresa, após o meio-dia, passasse a ser igual ao tempo de atraso, acrescido de 40% desse tempo (por exemplo, um atraso de 10 minutos deve ser compensado com 14 minutos de trabalho depois do meio-dia). Numa pequena composição, compare a proposta do Manuel com o contrato em vigor, contemplando os seguintes tópicos:

• justifique que, de acordo com a proposta do Manuel, o número de minutos depois do meio-dia que um trabalhador terá de permanecer na empresa, quando se atrasa *t* minutos, é dado por $p(t) = 1,4t$;

• refira se a proposta do Manuel é, ou não, sempre mais favorável ao trabalhador do que o contrato em vigor;

• considerando que, para um certo atraso, a proposta do Manuel e o contrato em vigor determinam o mesmo tempo de permanência na empresa, após o meio-dia, refira:

– o atraso;

– o tempo de permanência, depois do meio-dia, que esse atraso determina.

Utilize a calculadora para comparar os gráficos das duas funções (*c* e *p*); transcreva para a sua folha de prova esses gráficos e assinale o ponto relevante que lhe permite responder a algumas das questões colocadas, bem como as suas coordenadas, arredondadas às unidades.

2.º Teste intermédio 2009

31. Seja *f* a função cujo gráfico está representado na figura 1. Seja f^{-1} a função inversa da função *f*. Qual é o valor de $f(-4) + f^{-1}(2)$?

(A) –2 (B) 0 (C) 1 (D) 2

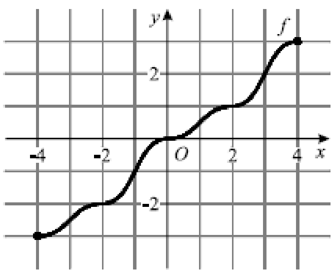


Figura 1

2.º Teste intermédio 2010

32. Sejam *f* e *g* duas funções reais de variável real. Sabe-se que: • a função *f* tem domínio ℝ e tem cinco zeros;

• a função *g* tem domínio ℝ e tem três zeros;

• um, e só um, dos zeros da função *f* também é zero da função *g*

Quantos zeros tem a função $\frac{f}{g}$?

(A) 7 ((B) 5 (C) 4 (D) 2

2.º Teste intermédio 2010

33. Na figura 3, está representado um triângulo rectângulo [ABC] cujos lados medem 3, 4 e 5.

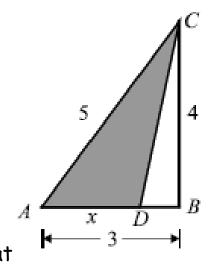


Figura 3

Considere que um ponto D se desloca ao longo do cateto [AB], nunca coincidindo com o ponto A. Para cada posição do ponto D, seja *x* o comprimento do segmento de recta [AD]. Qual das expressões seguintes dá o perímetro do triângulo [ACD], em função de *x* ?

(A) $x + 4 + \sqrt{25 - x^2}$ **(B)** $x + 5 + \sqrt{25 - x^2}$

(C) $x + 4 + \sqrt{x^2 - 6x + 25}$ **(D)** $x + 5 + \sqrt{x^2 - 6x + 25}$

2.º Teste intermédio 2010

34. Num certo ecossistema habitam as espécies animais A e B. Admita que, *t* anos após o início do ano 2009, o número de animais, em milhares, da espécie A é dado aproximadamente por $a(t) = \frac{11t+6}{t+1} (t \geq 0)$ e que o número de animais, em milhares, da espécie B é dado aproximadamente por $b(t) = \frac{t+9}{t+3} (t \geq 0)$. Resolva os dois itens seguintes, usando exclusivamente métodos analíticos.

a) Desde o início do ano 2009 até ao início do ano 2010, morreram 500 animais da espécie A. Determine quantos animais dessa espécie nasceram nesse intervalo de tempo.

b) Na figura 5, estão representadas graficamente as funções *a* e *b*. Tal como estes gráficos sugerem, a diferença entre o número de animais da espécie A e o número de animais da espécie B vai aumentando, com o decorrer do tempo, e tende para um certo valor. Determine esse valor, recorrendo às assimptotas horizontais dos gráficos das funções *a* e *b* cujas equações deve apresentar.

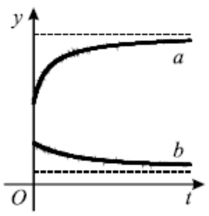


Figura 5

2.º Teste intermédio 2010

35. Na figura 2, está representada parte do gráfico de uma função *h*, de domínio ℝ. Seja (u_n) a sucessão de termo geral $u_n = h(4 - \frac{1000}{n})$. Qual é o valor de lim (u_n) ?

(A) $-\infty$ (B) 1 (C) 2 (D) 3

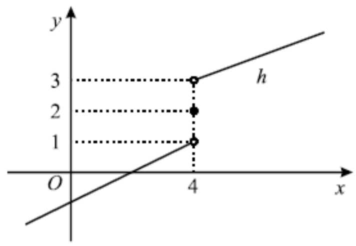


Figura 2

Teste intermédio (12.º ano) 2010

36. Seja *f* a função, de domínio $[1,+\infty[$, definida por $f(x) = \sqrt{x-1}$. Qual é o valor de $f^{-1}(3)$?

(A) 8 (B) 9 (C) 10 (D) 11

2.º Teste intermédio 2011

37. Uma floresta foi atingida por uma praga. Admita que a área, em milhares de hectares, da região afectada por essa praga é dada por $A(t) = \frac{2t}{t^2+3}\,(t \geq 0)$

(Considere que t é medido em anos e que o instante $t = 0$ corresponde ao início da praga.)

a) Houve um certo intervalo de tempo durante o qual a área da região afectada pela praga foi, pelo menos, de 500 hectares. Nesse intervalo de tempo, a floresta esteve seriamente ameaçada. Durante quanto tempo esteve a floresta seriamente ameaçada? Na sua resposta deve:

- escrever uma inequação que lhe permita resolver o problema;
- resolver analiticamente essa inequação;
- apresentar o valor pedido.

b) Utilize as capacidades gráficas da calculadora para resolver o seguinte problema: *Ao fim de quanto tempo, contado a partir do início da praga, foi máximo o valor da área atingida por essa praga?*

Na sua resposta deve:

- reproduzir o gráfico visualizado na calculadora;
- assinalar, no gráfico, o ponto relevante para a resolução do problema e indicar as coordenadas desse ponto, arredondadas às milésimas;
- apresentar a solução do problema em dias, arredondada às unidades (considere 1 ano = 365 dias).

2.º Teste intermédio 2011

38. Na Figura 1, está representada, num referencial o.n. xOy, parte da hipérbole que é o gráfico de uma função f. As retas de equações x =2 e y =1 são as assíntotas do gráfico da função f.

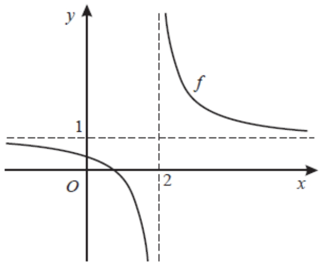


Figura 1

Para um certo número real k, a função g, definida por g(x) = f(x)+ k, não tem zeros. Qual é o valor de k ?

(A) –1 (B) 1 (C) –2 (D) 2

Teste intermédio 2012

39. Na Figura 3, está representada, num referencial o.n. xOy , parte da hipérbole que é o gráfico de uma função f. O gráfico da função f intersecta o eixo Ox no ponto de abcissa –1. As retas de equações x =1 e y =-2 são as assíntotas do gráfico da função f.

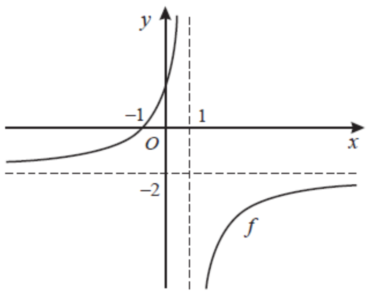


Figura 3

a) Responda aos dois itens seguintes sem efetuar cálculos, ou seja, recorrendo apenas à leitura do gráfico.

a_1) Indique o contradomínio da função f

a_2) Apresente, usando a notação de intervalos de números reais, o conjunto solução da condição f(x)≤ 0

b) Defina, por uma expressão analítica, a função f

Teste intermédio 2012

40. Na Figura 1, está representada, num referencial o.n. xOy, parte do gráfico de uma função *f*, de domínio]–1, 3[. Sabe-se que:

- $f(1) = -4$
- a reta de equação $x = 1$ é assíntota do gráfico de *f*
- (x_n) é uma sucessão com termos em]–1, 1[
- $\lim (x_n) = 1$

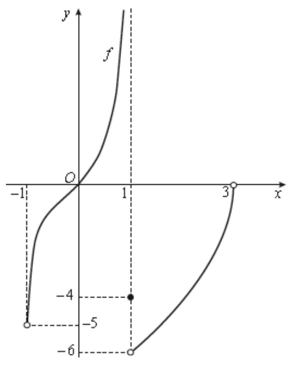


Figura 1

Qual é o valor de $\lim f(x_n)$?

(A) +∞ (B) –4 (C) –5 (D) –6

Exame Nacional 2012, 2.ª fase

41. Considere a função f, de domínio $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$, definida por $f(x) = \frac{1}{x+1}$. Considere a função g definida por g(x) = f(x+ a) + k, com $a \in \mathbb{R}$ e $k \in \mathbb{R}$. Sabe-se que as retas de equações x = −2 e y = 2 são assíntotas do gráfico de g. Quais são os valores de *a* e de k ?

(A) a = 1 e k = −2 (B) a = 1 e k = 2

(C) a = −1 e k = −2 (D) a = −1 e k = 2

Teste intermédio 2013

42. Sejam f e g duas funções de domínio $\mathbb{R}$. Sabe-se que:

- as funções f e g são funções quadráticas
- a função f tem dois zeros distintos
- a função g tem um único zero
- os gráficos das funções f e g intersectam-se no ponto de coordenadas (3, 0). Qual das afirmações seguintes é verdadeira?

(A) A função f × g tem dois zeros e a função $\frac{f}{g}$ tem um zero.

(B) A função f × g tem dois zeros e a função $\frac{f}{g}$ tem dois zeros.

(C) A função f × g tem três zeros e a função $\frac{f}{g}$ tem um zero.

(D) A função f × g tem três zeros e a função $\frac{f}{g}$ tem dois zeros.

Teste intermédio 2013

43. Na Figura 1, está representada, num referencial o.n. xOy , parte da hipérbole que é o gráfico de uma função f , de domínio $\mathbb{R}\backslash\{2\}$.

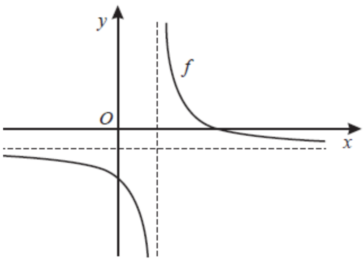


Figura 1

As retas de equações x =2 e y =-1 são as assíntotas do gráfico da função f.

a) Responda aos dois itens seguintes sem apresentar cálculos.

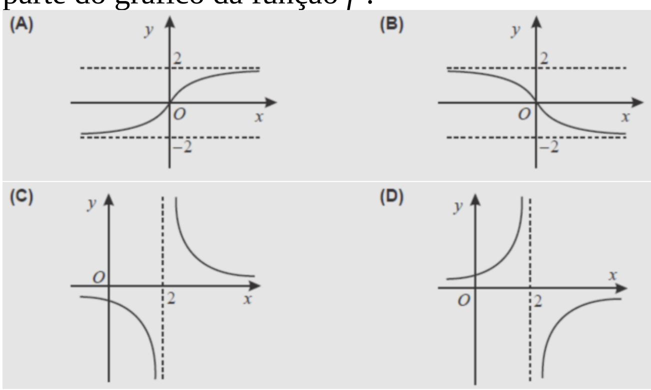
a_1) Qual é o valor de k para o qual a equação f(x) = k é impossível?

a_2) Qual é o limite de f(x) quando x tende para +∞?

b) Admita agora que a função f é definida pela expressão $f(x) = \frac{6-x}{x-2}$. Resolva analiticamente a condição $f(x) \leq \frac{4-x}{x+2}$. Apresente o conjunto solução usando a notação de intervalos de números reais.

Teste intermédio 2013

44. Seja (u_n) a sucessão definida por $u_n = 2 + \frac{1}{n}$. De uma certa função *f* , sabe-se que $\lim f(u_n) = +\infty$. Em qual das seguintes opções pode estar representada parte do gráfico da função *f* ?



Teste intermédio (12.º ano) 2013

45. Na Figura 2, está representada, num referencial o.n. xOy, parte da hipérbole que é o gráfico de uma função f. O gráfico da função f intersecta o eixo Ox no ponto de abcissa -1. As retas de equações x=1 e y=−2 são as assíntotas do gráfico da função f. Qual é o conjunto solução da condição f (x)≤0 ?

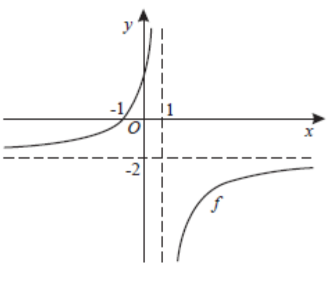


Figura 2

(A) $]-\infty,-2[\cup]-2,0]$ (B) $]-\infty,-1]\cup]0,+\infty[$

(C) $]-\infty,0]\cup]1,+\infty]$ (D) $]-\infty,-1]\cup]1,+\infty]$

Teste intermédio 2014

46. Sejam f e g duas funções de domínio $\mathbb{R}$. Sabe-se que:

• a função f é definida por f (x) = 3x + 6

• a função g é uma função quadrática e é uma função par

• g(2) = 0

Qual das afirmações seguintes é verdadeira?

(A) A função f × g tem três zeros e a função $\frac{f}{g}$ não tem zeros.

(B) A função f × g tem três zeros e a função $\frac{f}{g}$ tem um zero.

(C) A função f × g tem dois zeros e a função $\frac{f}{g}$ não tem zeros.

(D) A função f × g tem dois zeros e a função $\frac{f}{g}$ tem um zero.

Teste intermédio 2014

47. Seja f a função, de domínio R, definida por

$$f(x)=\begin{cases} \frac{2}{3}x^3+3x^2-13 & \text{se } x\leq 1 \\ \frac{2x-3}{1-x} & \text{se } x>1 \end{cases}$$

a) Resolva analiticamente, em]1, +∞[, a condição $f(x) < \frac{1}{x-2}$. Apresente o conjunto solução usando a notação de intervalos de números reais.

b) Determine o contradomínio da função f. Para resolver este item, recorra à calculadora gráfica. Na sua resposta, deve:

• reproduzir, num referencial, o gráfico da função f que visualizar na calculadora (sugere-se a utilização da janela em que x∈[–5, 5] e y∈[–15,10]); nesse referencial:

– assinale o ponto do gráfico de abcissa 1 e indique a sua ordenada

– represente as assíntotas do gráfico de f

– assinale o ponto do gráfico correspondente ao máximo relativo da função

• apresentar o contradomínio da função f , usando a notação de intervalos de números reais.

Teste intermédio 2014

48. Seja f uma função de domínio ℝ. Sabe-se que f '(2) = 6. Qual é o valor de $\lim\limits_{x \to 2} \frac{f(x)-f(2)}{x^2-2x}$?
(A) 3 (B) 4 (C) 5 (D) 6

Exame Nacional 2015, época especial

49. Seja f : $\mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ uma função tal que f '(x)<0, para qualquer número real positivo x. Considere, num referencial o.n. xOy,
• um ponto P, de abcissa a, pertencente ao gráfico de f
• a reta r, tangente ao gráfico de f no ponto P
• o ponto Q, ponto de intersecção da reta r com o eixo Ox

Sabe-se que $\overline{OP} = \overline{PQ}$.

Determine o valor de $f'(a) + \frac{f(a)}{a}$

Exame Nacional 2017, 1.ª fase

50. De uma função f , de domínio ℝ, com derivada finita em todos os pontos do seu domínio, sabe-se que $\lim\limits_{x \to 2} \frac{x^2-2x}{f(x)-f(2)} = 4$. Qual é o valor de f '(2) ?

(A) $-\frac{1}{2}$ (B) $-\frac{1}{4}$ (C) $\frac{1}{2}$ (D) $\frac{1}{4}$

Exame Nacional 2017, 2.ª fase

51. Sejam f e g duas funções de domínio ℝ, tais que a função f − g admite inversa. Sabe-se que f(3) = 4 e que $(f-g)^{-1}(2)=3$. Qual é o valor de g(3) ?
(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4

Exame Nacional 2017, época especial

52. Uma lente de contacto é um meio transparente limitado por duas faces, sendo cada uma delas parte de uma superfície esférica. Na Figura 2, pode observar-se uma lente de contacto.

Figura 2

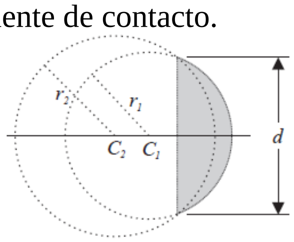


Figura 3

Na Figura 3, está representado um corte longitudinal de duas superfícies esféricas, uma de centro C_1 e raio r_1 e outra de centro C_2 e raio r_2, com $r_2>r_2$, que servem de base à construção de uma lente de contacto, representada a sombreado na figura. Seja $x = \overline{C_1C_2}$. Sabe-se que o diâmetro, d, da lente é dado por

$$\frac{\sqrt{\left[(r_1+r_2)^2-x^2\right]\left[x^2-(r_1-r_2)^2\right]}}{x}, \text{ com } r_2-r_1<x<\sqrt{r_2^2-r_1^2}$$

Uma lente de contacto foi obtida a partir de duas superfícies esféricas com 7 mm e 8 mm de raio, respetivamente. O diâmetro dessa lente excede em 9 mm a distância, *x*, entre os centros das duas superfícies esféricas. Determine, recorrendo às capacidades gráficas da calculadora, o valor de *x*, sabendo-se que esse valor é único no intervalo $\left]r_2-r_1, \sqrt{r_2^2-r_1^2}\right[$ Não justifique a validade do resultado obtido na calculadora. Na sua resposta:
— apresente uma equação que lhe permita resolver o problema;
— reproduza, num referencial, o(s) gráfico(s) da(s) função(ões) visualizado(s) na calculadora que lhe permite(m) resolver a equação;
— apresente o valor pedido em milímetros, arredondado às décimas.

Exame Nacional 2019, 1.ª fase

53. Na Figura 5, está representado o gráfico da função f, definida, em ℝ , por $f(x) = x^2$.

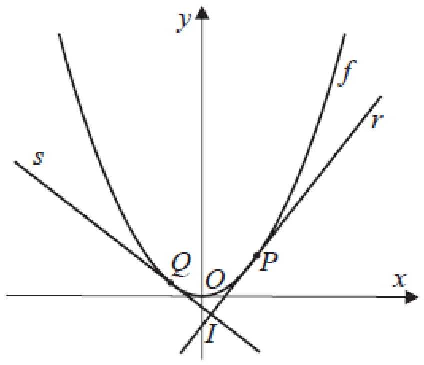


Figura 5

Considere que um ponto P, de abcissa positiva, se desloca sobre o gráfico da função f. Para cada posição do ponto P, seja:
• r a reta tangente ao gráfico de f nesse ponto;
• s a reta perpendicular a r e tangente ao gráfico de f
• Q o ponto de tangência da reta s com o gráfico de f
• I o ponto de intersecção das retas r e s

Mostre que, qualquer que seja a abcissa do ponto P, a ordenada do ponto I é sempre igual a $-\frac{1}{4}$.

Sugestão: Designe a abcissa do ponto P por *a*.

Exame Nacional 2019, 2.ª fase

54. Os satélites artificiais são utilizados para diversos fins e a altitude a que são colocados depende do fim a que se destinam. Admita que a Terra é uma esfera. A Figura 2 apresenta um esquema em que se pode observar a superfície terrestre coberta por um satélite, quando este se encontra numa certa posição.

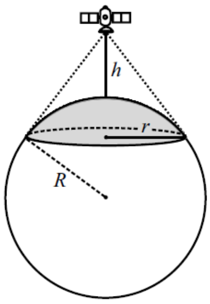


Figura 2

Nesta figura,

- R é o raio, em quilómetros, da Terra;
- h é a altitude, em quilómetros, do satélite (h>0)
- r é o raio, em quilómetros, da base da calote esférica cuja superfície é coberta pelo satélite (0<r<R)
- as grandezas h e r podem relacionar-se por meio da igualdade $r = \dfrac{R}{h+R}\sqrt{h^2+2hR}$

Sabe-se que, para cada posição do satélite, a percentagem da área da superfície terrestre coberta pelo satélite é dada por $50\left(1-\sqrt{1-\left(\dfrac{r}{R}\right)^2}\right)$

a) Qual é a percentagem da área da superfície terrestre coberta por um satélite se o raio da base da calote esférica for igual a 3/5 do raio da Terra?

(A) 20% (B) 15% (C) 10% (D) 5%

b) Considere que o raio da Terra é 6400 km. Determine, recorrendo às capacidades gráficas da calculadora, a percentagem da área da superfície terrestre coberta por um satélite se a altitude deste for igual ao raio da base da respetiva calote esférica.

Apresente o resultado arredondado às unidades.

Não justifique a validade do resultado obtido na calculadora.

Na sua resposta:

— apresente uma equação que lhe permita resolver o problema;

— reproduza, num referencial, o(s) gráfico(s) da(s) função(ões) visualizado(s) na calculadora que lhe permite(m) resolver a equação e apresente as coordenadas do(s) ponto(s) relevante(s) arredondadas às centésimas;

— apresente o valor pedido arredondado às unidades.

Se, nos cálculos intermédios, proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, duas casas decimais.

Exame Nacional 2020, 2.ª fase

55. Um município construiu, num dos seus parques, uma rampa de skate entre duas paredes verticais distanciadas 21 metros uma da outra. Na Figura 4, estão representados um corte longitudinal da rampa e dois jovens, cada um no seu skate.

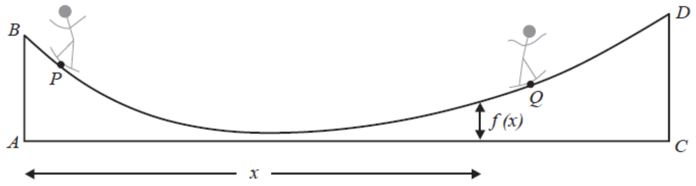


Figura 4

Nesta figura, o arco BD representa a rampa, os segmentos de reta [AB] e [CD] representam as paredes e o segmento de reta [AC] representa o solo. Os pontos P e Q representam as posições dos dois jovens na rampa. Admita que a distância ao solo, em metros, de um ponto da rampa situado x metros à direita da parede representada na figura por [AB] é dada por

$$f(x) = 0{,}0001x^4 - 0{,}005x^3 + 0{,}11x^2 - x + 3{,}4 \;,\quad 0 \leq x \leq 21$$

a) Qual é, em metros, com arredondamento às décimas, o valor absoluto da diferença entre as alturas das duas paredes da rampa de skate?

(A) 0,8 (B) 0,7 (C) 0,5 (D) 0,4

b) Num certo instante, os dois jovens estão à mesma distância do solo, um mais próximo da parede representada por [AB] e o outro mais próximo da parede representada por [CD]. O jovem que se encontra mais próximo da parede representada por [AB] está a um metro desta parede. Seja d a distância a que se encontra da parede representada por [CD] o jovem que dela está mais próximo. Determine, recorrendo às capacidades gráficas da calculadora, o valor de d, sabendo-se que esse valor existe e é único.

Não justifique a validade do resultado obtido na calculadora. Na sua resposta:

— apresente uma equação que lhe permita resolver o problema;

— reproduza, num referencial, o(s) gráfico(s) da(s) função(ões) visualizado(s) na calculadora que lhe permite(m) resolver a equação e apresente as coordenadas do(s) ponto(s) relevante(s) arredondadas às centésimas;

— apresente o valor de d em metros, arredondado às décimas.

Se, nos cálculos intermédios, proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, duas casas decimais.

Exame Nacional 2020, época especial

56. A Figura 3 representa um depósito de forma cilíndrica, instalado na horizontal, que contém uma certa quantidade de combustível. Sabe-se que as bases do cilindro têm 1,8 metros de diâmetro. Num certo instante, iniciou-se o vazamento do

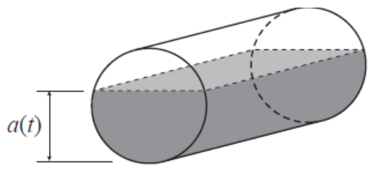


Figura 3

depósito. Seja $a(t)$ a altura, em metros, do combustível no depósito, t minutos após o início do vazamento. Admita que $a(t)=1{,}8-(0{,}216+0{,}0039t)^{\frac{2}{3}}$

a) Qual é, em metros, a diferença entre a altura do combustível no depósito no início do vazamento e a altura do combustível quando este ocupa metade da capacidade do depósito?

(A) 0,72 (B) 0,54 (C) 0,36 (D) 0,27

b) Decorridos t_1 minutos após o início do vazamento, a altura do combustível no depósito é igual a um certo valor. Sabe-se que, passado igual período de tempo, a altura do combustível no depósito é igual a metade desse valor. Determine, recorrendo às capacidades gráficas da calculadora, o valor de t_1, sabendo que esse valor existe e é único. Apresente o resultado em horas e minutos (minutos arredondados às unidades). Não justifique a validade do resultado obtido na calculadora. Na sua resposta:

— apresente uma equação que lhe permita resolver o problema;

— reproduza, num referencial, o(s) gráfico(s) da(s) função(ões) visualizado(s) na calculadora que lhe permite(m) resolver a equação, e apresente as coordenadas do(s) ponto(s) relevante(s) arredondadas às centésimas.

Se, nos cálculos intermédios, proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, duas casas decimais.

Exame Nacional 2021, 1.ª fase

57. Na Figura 2, está representada parte do gráfico de uma função g, de domínio $\mathbb{R}\backslash\{2\}$.

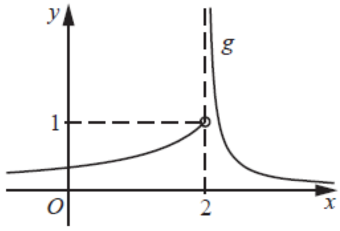


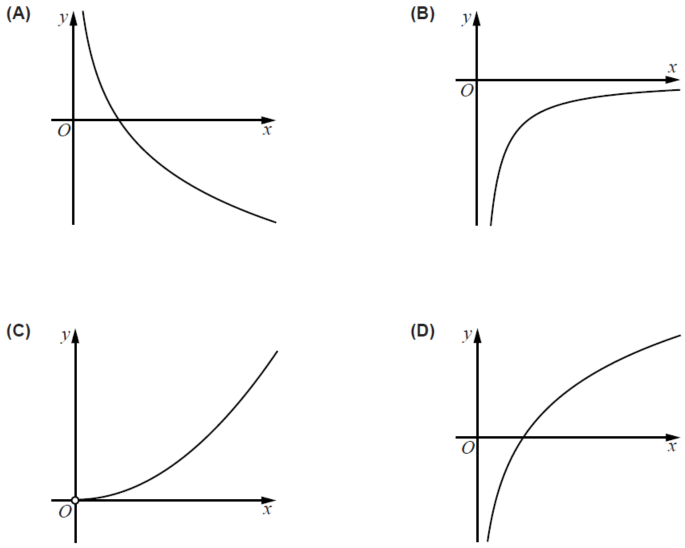
Figura 2

A reta de equação x = 2 é uma assíntota vertical ao gráfico da função g. Seja (v_n) a sucessão de termo geral $v_n = 2-\frac{5}{n+3}$ A que é igual lim $g(v_n)$?

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) $+\infty$

Exame Nacional 2021, 2.ª fase

58. Considere a sucessão (u_n) definida por $u_n = 2n^2-n$. Em relação a uma certa função *f*, de domínio $\mathbb{R}^+$, sabe-se que $\lim f\left(\frac{1}{u_n}\right)=+\infty$. Em qual das opções seguintes pode estar representada parte do gráfico da função f ?



Exame Nacional 2021, época especial

<u>Soluções</u>:

1. D 2. A 3. A 4. A 5. B 6. D 7. B 8. A 9. A 11. A 12. D 13. D 14. D
15.]1,4/3]; y=2 e x=1 16. 5 17. A 18. B 19. D 20. C 21. 6 22. D 23. C 24.]–∞,–3]∪[0,2[; 3, 6 e 2
25. 7h52min 26. D 27. B 28. B 29.]–∞,–2[∪]2,+∞[; 5 30. 13h39’; 5 31. B 32. C 33. D 34. 3000; 10000
35. B 36. C 37. 2; 632 38. A 39. ℝ\{-2};]-∞,-1]∪]1,+∞[; f(x)=-2-4/(x-1) 40. A 41. B 42. A
43. -1; -1;]-2,2[∪]10,+∞[44. C 45. D 46. C 47.]2,+∞[;]-∞,-4]∪]-2,+∞[48. A 49. 0 50. C 51. B
52. 1,4 54. C; 23% 55 B; 2,7 56. B; 2h58min 57. B 58. A

O professor: Roberto Oliveira