Escola Secundária de Paredes

Ficha de Trabalho 8

Matemática A

12.º Ano de Escolaridade | Turma: J

1. Seja f, a função definida por $f(x) = 1 - 2\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$

   1.1. Em qual das opções está o contradomínio da função f?

   (A) $D'_f = [-2; 2]$
   (B) $D'_f = [-1; 2]$
   (C) $D'_f = [-1; 3]$
   (D) $D'_f = [-3; 1]$

   1.2. Determina o período positivo mínimo da função f

   1.3. Determina os zeros da função f que pertencem ao intervalo $]-\pi; \pi[$

2. Sabe-se que $\frac{5\pi}{12} = \frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{4}$

   Sem recorreres à calculadora, determina o valor exato de $\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right)$

3. Sem recorreres à calculadora, determina o valor exato de cada uma das seguintes expressões

   3.1. $\frac{1}{2}\sin\left(\frac{3\pi}{8}\right)\cos\left(\frac{3\pi}{8}\right)$

   3.2. $\sin^4\left(\frac{\pi}{12}\right) - \cos^4\left(\frac{\pi}{12}\right)$

4. Resolve, em $\mathbb{R}$, as equações seguintes

   4.1. $2\cos^2(2x) - 2\sin^2(2x) = -\sqrt{2}$

   4.2. $\sqrt{3}\sin(2x) - \cos(2x) = \sqrt{3}$

5. Seja g, a função definida por $g(x) = \sin\left(4x + \frac{\pi}{4}\right)\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(4x + \frac{\pi}{4}\right)\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$

   5.1. Mostra que $g(x) = \sin(5x)$

   5.2. Determina $\lim\limits_{x \to 0} \frac{e^2 - e^{x+2}}{g(2x)}$

   5.3. Escreve a equação reduzida da reta tangente ao gráfico da função g no ponto de abcissa $\frac{\pi}{15}$

6. Considera as funções h e i, definidas em $\left]0; \frac{\pi}{2}\right[$, por $h(x) = 1 - \frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)\left[\cos^2\left(\frac{x}{4}\right) - \sin^2\left(\frac{x}{4}\right)\right]}{\frac{1}{2}\tan(x)}$, e $i(x) = 1 - \cos(4x)$, respetivamente

   6.1. Mostra que $h(x) = 1 - \cos(x)$

   6.2. Estuda a função i, quanto a monotonia e extremos

   6.3. Mostra que $\lim\limits_{x \to 0} \frac{h(x)}{x\sin(2x)} = \frac{1}{4}$

7. Sabendo que $\sin(2\alpha) = 2\sin(\alpha)\cos(\alpha)$ e que $\cos(2\alpha) = \cos^2(\alpha) - \sin^2(\alpha)$

   Mostra que $\tan(2\alpha) = \dfrac{2\tan(\alpha)}{1-\tan^2(\alpha)}$

8. Mostra que $\left[\cos\left(\dfrac{\alpha}{4}\right) - \sin\left(\dfrac{\alpha}{4}\right)\right]\left[\cos\left(\dfrac{\alpha}{4}\right) + \sin\left(\dfrac{\alpha}{4}\right)\right] = 1 - 2\sin^2\left(\dfrac{\alpha}{4}\right)$

9. Resolve, em $\mathbb{R}$, a equação $\cos(2x) - \sin(x) = 1$

10. Seja f, a função real de variável real, definida por, $f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^{x-2}-1}{-5x^2+25x-30} & se \quad x < 2 \\ \ln\left(\dfrac{k+1}{2}\right) & se \quad x = 2 \\ \dfrac{\sin(x-2)}{x^2+x-6} & se \quad x > 2 \end{cases}$,

    com $k > -1$

    Averigua, analiticamente, se existe algum $k > -1$, para o qual a função f é contínua no ponto $x = 2$

11. Considera a circunferência trigonométrica representada num plano munido de um referencial ortonormado xOy, como se observa na figura 1

    Sabe-se que:

    - $E(1;0)$
    - os pontos A e D pertencem à circunferência
    - os pontos A e D são simétricos em relação ao eixo Ox
    - os pontos B e C, pertencem à reta de equação $x = 1$
    - os pontos B e C são simétricos em relação ao eixo Ox
    - o ponto A move-se no quarto quadrante, e os pontos B, C e D, acompanham esse movimento
    - $E\hat{O}A = x$, com $x \in \left]\dfrac{3\pi}{2}; 2\pi\right[$

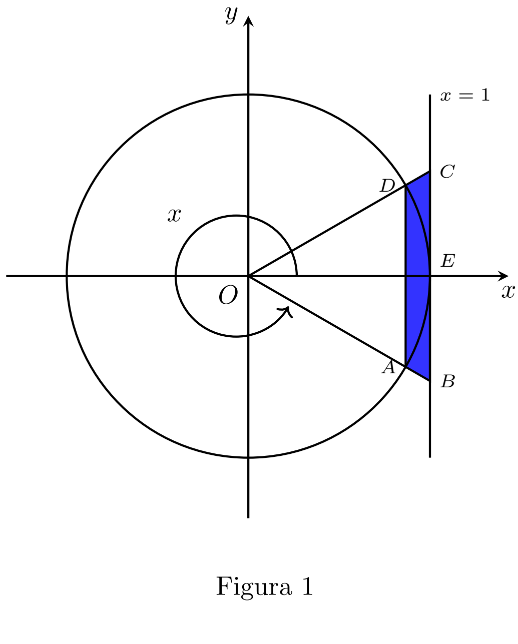

Figura 1

    11.1. Mostra que a área do trapézio $[ABCD]$, é dada, em função de x, por

    $A(x) = -\tan(x) + \dfrac{1}{2}\sin(2x)$, com $x \in \left]\dfrac{3\pi}{2}; 2\pi\right[$

    11.2. Para certo $\alpha \in \left]\dfrac{3\pi}{2}; 2\pi\right[$, sabe-se que $\tan(\pi - \alpha) = \dfrac{3}{5}$

    Determina a área do trapézio $[ABCD]$, para esse valor de α