O gráfico de uma função é, na maioria das vezes bastante útil para visualizar propriedades da função. Assim, de forma a podermos representar com rigor uma função, devemos fazer um estudo pormenorizado de forma a conhecer as suas diversas caraterísticas.

No estudo de uma função, em geral, devem-se considerar os seguintes aspetos:

1. domínio
2. continuidade
3. paridade (se for par ou ímpar, o estudo pode ser feito apenas numa parte do domínio)
4. assíntotas
5. pontos de interseção com os eixos coordenados (zeros e ordenada na origem)
6. monotonia e extremos (estudo do sinal da 1ª derivada)
7. concavidades e pontos de inflexão (estudo do sinal da 2ª derivada)
8. representação gráfica
9. contradomínio

Nota: Confrontar os dados obtidos analiticamente com o gráfico obtido através da calculadora gráfica

1. Os domínios de duas funções f e g são $\mathbb{R}\setminus\{-3,3\}$ e $\mathbb{R}\setminus\{-1,2\}$, respetivamente. Sabe-se que uma das funções é par e a outra não é par nem ímpar. Identifique cada uma delas.

2. Faça um estudo de cada uma das seguintes funções.

2.1. $f(x)=\dfrac{x-1}{x+1}$

2.2. $f(x)=\dfrac{x^2+2x+10}{x+1}$

2.3. $f(x)=\dfrac{e^x}{x}$

2.4. $f(x)=x^4e^x$

2.5. $f(x)=\dfrac{1}{2^x+1}$

2.6. $f(x)=\sqrt{x^2-4}$

2.7. $f(x)=\dfrac{3}{\ln x+1}$

2.8. $f(x)=\begin{cases}2-\dfrac{1}{x+1} & se \quad x<0\\ xe^x & se \quad x\geq 0\end{cases}$

3. Relativamente à função f sabe-se que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=5$, $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[f(x)-2x-1\right]=0$ e que satisfaz a seguinte tabela:

x	$-\infty$	-2		4	$+\infty$
f'	+	0	-	0	+
f		2		1	

3.1. Complete a tabela.

3.2. f é continua? Justifique.

3.3. Escreva uma equação da reta tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa -2.

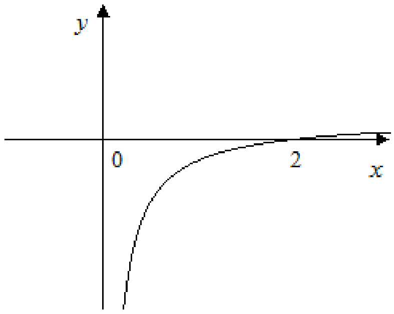
3.4. Qual o contradomínio de f?

4. No referencial da figura está representada a função $f\,'$, derivada de uma função *f* de domínio $\mathbb{R}^+$.

Qual das seguintes expressões pode definir a função *f*?

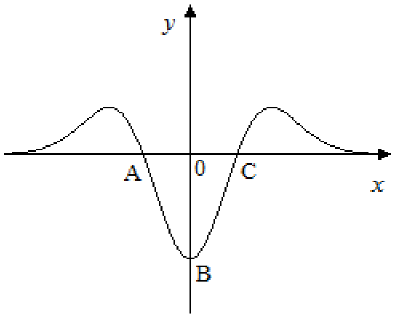
(A) $\sqrt{x^2-4}$ (B) $\ln x$

(C) $\dfrac{1}{e^x+2}$ (D) $x-\ln x$

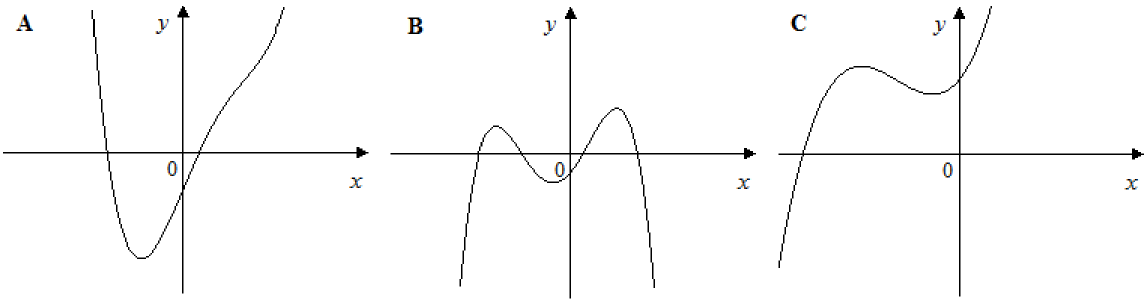


5. Considere a função f definida por $f(x)=e^{-x^2}$. Na figura seguinte encontra-se representada a função $f\,''$.

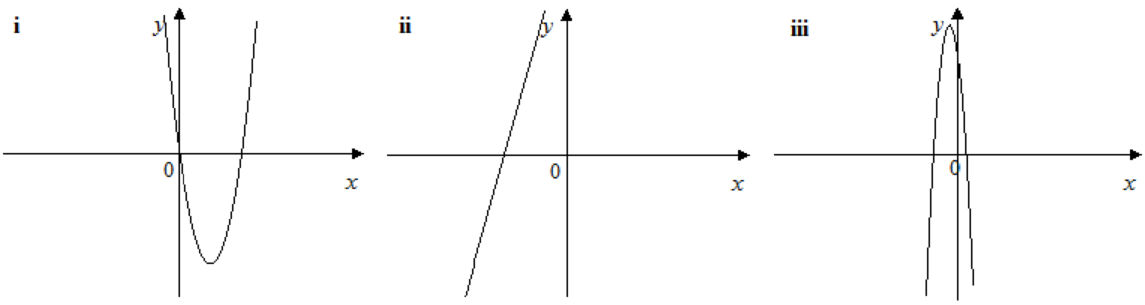
Determine as coordenadas dos pontos assinalados pelas letras *A*, *B*, e *C*.



6. Considere as funções representadas graficamente:



Sabendo que os gráficos seguintes são os das segundas derivadas dessas funções, estabeleça a correspondência correta entre a cada função e a respetiva derivada.



Bom trabalho!!

Soluções

1. *f* é par, *g* não par nem ímpar

2.

2.1.

Domínio: $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$

Continuidade: f é contínua em todo o seu domínio

Paridade: *f* não é par nem ímpar

Assíntotas: $y=1$ e $x=-1$

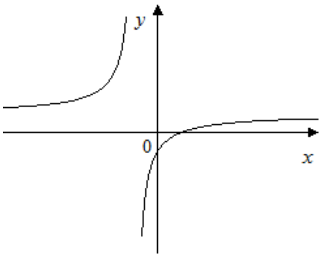
Pontos de interseção com os eixos: $(1,0)$ e $(0,-1)$

Monotonia: Crescente em todo o domínio

Concavidades:

$\cup \rightarrow \left]-\infty,-1\right[$; $\cap \rightarrow \left]-1,+\infty\right[$

Gráfico



Contradomínio: $\mathbb{R}\setminus\{1\}$

2.2.

Domínio: $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$

Continuidade: f é contínua em todo o seu domínio

Paridade: *f* não é par nem ímpar

Assíntotas: $x=-1$ e $y=x+1$

Pontos de interseção com os eixos: $(0,10)$

Monotonia:

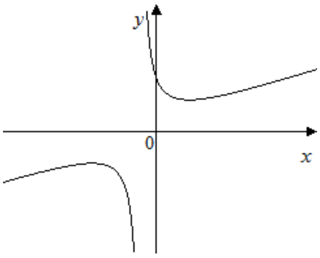
$\nearrow$ $\left]-\infty,-4\right]\cup\left[2,+\infty\right[$; $\searrow$ $\left[-4,2\right]\setminus\{-1\}$

Máximo $(-4,-6)$, mínimo $(2,6)$

Concavidades:

$\cup$ $\left]-\infty,-4\right[\cup\left[2,+\infty\right[$; $\cap$ $\left]-\infty,-1\right[$

Gráfico



Contradomínio: $\left]-\infty,-6\right]\cup\left[2,+\infty\right[$

2.3.

Domínio: $\mathbb{R}\setminus\{0\}$

Continuidade: f é contínua em todo o seu domínio

Paridade: *f* não é par nem ímpar

Assíntotas: $x=0$ e $y=0$

Pontos de interseção com os eixos: Não tem

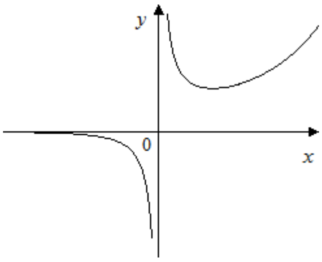
Monotonia:

$\nearrow$ $\left[1,+\infty\right[$; $\searrow$ $\left]-\infty,1\right]\setminus\{0\}$

Mínimo $(1,e)$

Concavidades: $\cup$ $\left]0,+\infty\right[$; $\cap$ $\left]-\infty,0\right[$

Gráfico



Contradomínio: $\left]-\infty,0\right[\cup\left[e,+\infty\right[$

2.4.

Domínio: $\mathbb{R}$

Continuidade: f é contínua em todo o seu domínio

Paridade: *f* não é par nem ímpar

Assíntotas: $y=0$, para $-\infty$

Pontos de interseção com os eixos: $(0,0)$

Monotonia

$\nearrow$ $\left]-\infty,-4\right]\cup\left[0,+\infty\right[$; $\searrow$ $\left[-4,0\right]$

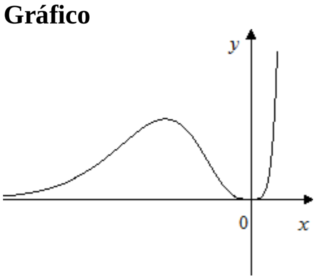
Máximo $\left(-4,\frac{256}{e^4}\right)$, mínimo $(0,0)$

Concavidades:

$\cup$ $\left]-\infty,-6\right]\cup\left[-2,+\infty\right[$; $\cap$ $\left[-6,-2\right]$

Ponto de inflexão $\left(-6,\frac{1296}{e^6}\right)$ e $\left(-2,\frac{4}{e^2}\right)$

Gráfico



Contradomínio: $\left[0,+\infty\right[$

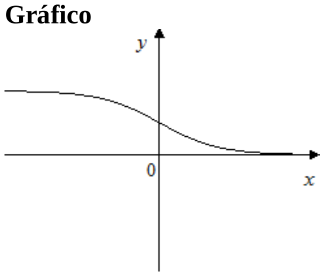
2.5.
Domínio: $\mathbb{R}$
Continuidade: f é contínua em todo o seu domínio
Paridade: f não é par nem ímpar
Assíntotas:
$y = 0$, para $+\infty$
$y = 1$, para $-\infty$

Pontos de interseção com os eixos: $\left(0, \frac{1}{2}\right)$

Monotonia: Crescente em todo o seu domínio
Concavidades: $\cup$ $\left[0, +\infty\right[$; $\cap$ $\left]-\infty, 0\right]$

Ponto de inflexão $\left(0, \frac{1}{2}\right)$

Gráfico



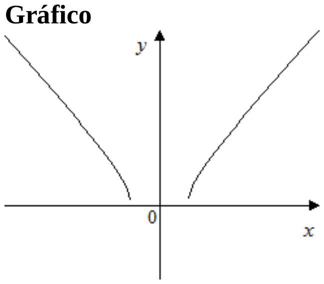
Contradomínio: $\left]0,1\right[$

2.6.
Domínio: $\left]-\infty, -2\right] \cup \left[2, +\infty\right[$
Continuidade: f é contínua em todo o seu domínio
Paridade: f é par
Assíntotas:
$y = x$, para $+\infty$
$y = -x$, para $-\infty$
Pontos de interseção com os eixos:
$(-2, 0)$ e $(2, 0)$

Monotonia: $\nearrow$ $\left[2, +\infty\right[$; $\searrow$ $\left]-\infty, -2\right]$

Mínimo $(-2, 0)$ e $(2, 0)$

Concavidades: $\cap$ em todo o seu domínio
Gráfico

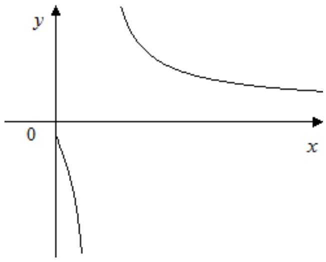


Contradomínio: $\left[0, +\infty\right[$

2.7.
Domínio: $\mathbb{R}^+ \setminus \left\{e^{-1}\right\}$
Continuidade: f é contínua em todo o seu domínio
Paridade: f não é par nem ímpar
Assíntotas: $y = 0$ e $x = e^{-1}$
Pontos de interseção com os eixos: Não tem
Monotonia: Decrescente em todo o seu domínio
Concavidades:
$\cup$ $\left]0, e^{-3}\right] \cup \left]e^{-1}, +\infty\right[$; $\cap$ $\left[e^{-3}, e^{-1}\right[$

Ponto de inflexão $\left(e^{-3}, -\frac{3}{2}\right)$

Gráfico



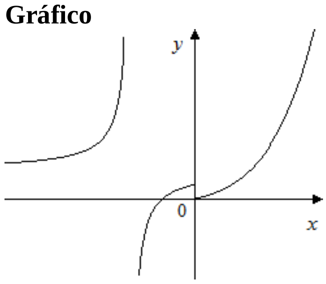
Contradomínio: $\mathbb{R} \setminus \{0\}$

2.8.
Domínio: $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$

Continuidade: $\mathbb{R} \setminus \{-1, 0\}$

Paridade: f não é par nem ímpar
Assíntotas: $y = 2$, para $-\infty$; $x = -1$
Pontos de interseção com os eixos:
$(0, 0)$ e $\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$

Monotonia: Crescente em todo o domínio
Mínimo $(0, 0)$
Concavidades:
$\cup$ $\left]-\infty, -1\right] \cup \left[0, +\infty\right[$; $\cap$ $\left]-1, 0\right[$
Gráfico



Contradomínio: $\mathbb{R}$

3.

3.1.

x	$-\infty$	-2		4	$+\infty$
f'	+	0	-	0	+
f	↗	2	↘	1	↗

3.2. Sim, $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x)$ tem derivada finita

3.3. $y = 2$

3.4. $]-\infty, 5[$

4. D

5. $A\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right)$, $B(0,-2)$, $C\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right)$

6. A – i, B – iii, C – ii