Proposta de Resolução da Ficha 5

Matemática A

12.º Ano de Escolaridade | dezembro de 2022

Turma: $B + C + H$

Aula de Preparação Para Exame

1. .

1.1. Determinemos $b_{n+1} - b_n$

$$b_{n+1} - b_n = 2(n+1) + 1 - (2n+1) = 2n + 2 + 1 - 2n - 1 = 2 > 0, \forall n \in \mathbb{N}$$

Logo, a sucessão (b_n) é monótona crescente

1.2. Determinemos $a_{n+1} - a_n$

$$a_{n+1} - a_n = \frac{2(n+1)+3}{n+1+1} - \frac{2n+3}{n+1} = \frac{2n+5}{n+2} - \frac{2n+3}{n+1} = \frac{(2n+5)(n+1)}{(n+2)(n+1)} - \frac{(2n+3)(n+2)}{(n+2)(n+1)} =$$

$$= \frac{2n^2+2n+5n+5}{(n+2)(n+1)} - \frac{2n^2+4n+3n+6}{(n+2)(n+1)} = \frac{2n^2+7n+5}{(n+2)(n+1)} - \frac{2n^2+7n+6}{(n+2)(n+1)} = \frac{2n^2+7n+5-2n^2-7n-6}{(n+2)(n+1)} =$$

$$= -\frac{1}{(n+2)(n+1)} < 0, \forall n \in \mathbb{N}$$

Logo, a sucessão (a_n) é monótona decrescente

1.3. Pelo algoritmo de divisão de polinómios, resulta que $a_n = \dfrac{2n+3}{n+1} = 2 + \dfrac{1}{n+1}$

$n \geq 1, \forall n \in \mathbb{N}$

$\therefore n + 1 \geq 2, \forall n \in \mathbb{N}$

$\therefore \dfrac{1}{n+1} \leq \dfrac{1}{2}, \forall n \in \mathbb{N}$

Por outro lado, a sucessão de termo geral $\dfrac{1}{n+1}$ tem os termos todos positivos, assim,

$0 < \dfrac{1}{n+1} \leq \dfrac{1}{2}, \forall n \in \mathbb{N}$

$\therefore 2 < 2 + \dfrac{1}{n+1} \leq 2 + \dfrac{1}{2}, \forall n \in \mathbb{N}$

$\therefore 2 < a_n \leq \dfrac{5}{2}, \forall n \in \mathbb{N}$

1.4. Como, $2 < a_n \leq \dfrac{5}{2}, \forall n \in \mathbb{N}$, o conjunto dos termos da sucessão (a_n) é majorado e minorado, logo, a sucessão é limitada

A afirmação é verdadeira

2. .

   2.1. .

   $u_{n+1}-u_n=1-\frac{2}{n+1}-\left(1-\frac{2}{n}\right)=\frac{2}{n}-\frac{2}{n+1}=\frac{2(n+1)-2n}{n(n+1)}=\frac{2n+2-2n}{n(n+1)}=$
   $=\frac{2}{n(n+1)}>0,\forall n\in\mathbb{N}$

   Logo, a sucessão (u_n) é monótona crescente

   2.2. .

   $n\geq 1,\forall n\in\mathbb{N}$

   $\therefore \frac{1}{n}\leq 1,\forall n\in\mathbb{N}$

   Por outro lado, a sucessão de termo geral $\frac{1}{n}$ tem os termos todos positivos, assim,

   $0<\frac{1}{n}\leq 1,\forall n\in\mathbb{N}$

   $\therefore -1\leq -\frac{1}{n}<0,\forall n\in\mathbb{N}$

   $\therefore -2\leq -\frac{2}{n}<0,\forall n\in\mathbb{N}$

   $\therefore -2+1\leq 1-\frac{2}{n}<0+1,\forall n\in\mathbb{N}$

   $\therefore -1\leq u_n<1,\forall n\in\mathbb{N}$

   Logo, a sucessão (u_n) é limitada

   -1 é um minorante e 1 é um majorante do conjunto dos termos da sucessão (u_n)

   2.3. Toda a sucessão monótona e limitada é convergente

   Como ser provou que a sucessão (u_n) é monótona e limitada, então, conclui-se que é convergente

   2.4. $\lim u_n=\lim\left(1-\frac{2}{n}\right)=1-\frac{2}{+\infty}=1-0=1$

3. .

   3.1. $u_2=1+\frac{2}{2}=1+1=2$

   $u_{10}=1+\frac{2}{10}=1+\frac{1}{5}=\frac{6}{5}$

   $u_{100}=1+\frac{2}{100}=1+\frac{1}{50}=\frac{51}{50}$

   3.2. $\exists n\in\mathbb{N}:u_n=\frac{21}{22}$?

   $u_n=\frac{21}{22}\Leftrightarrow 1+\frac{2}{n}=\frac{21}{22}\Leftrightarrow 1+\frac{2}{n}-\frac{21}{22}=0\Leftrightarrow \frac{2}{n}+\frac{1}{22}=0\Leftrightarrow \frac{44+n}{22n}=0\Leftrightarrow$

   $\Leftrightarrow 44+n=0\wedge 22n\neq 0\Leftrightarrow n=-44\notin\mathbb{N}$

   logo, $\frac{21}{22}$ não é termo da sucessão (u_n)

3.3. $u_{n+1} - u_n = 1 + \frac{2}{n+1} - \left(1 + \frac{2}{n}\right) = 1 + \frac{2}{n+1} - 1 - \frac{2}{n} = \frac{2}{n+1} - \frac{2}{n} = \frac{2n}{n(n+1)} - \frac{2(n+1)}{n(n+1)} =$

$= \frac{2n - 2n - 2}{n(n+1)} = -\frac{2}{n(n+1)} > 0, \forall n \in \mathbb{N}$

Logo, a sucessão (u_n) é monótona decrescente

3.4. .

$n \geq 1, \forall n \in \mathbb{N}$

$\therefore \frac{1}{n} \leq 1, \forall n \in \mathbb{N}$

Por outro lado, a sucessão de termo geral $\frac{1}{n}$ tem os termos todos positivos, assim,

$0 < \frac{1}{n} \leq 1, \forall n \in \mathbb{N}$

$\therefore 0 < \frac{2}{n} \leq 2, \forall n \in \mathbb{N}$

$\therefore 0 + 1 < 1 + \frac{2}{n} \leq 2 + 1, \forall n \in \mathbb{N}$

$\therefore 1 < u_n \leq 3, \forall n \in \mathbb{N}$

Logo, a sucessão (u_n) é limitada

1 é um minorante e 3 é um majorante do conjunto dos termos da sucessão (u_n)

3.5. Toda a sucessão monótona e limitada é convergente, pelo que a sucessão (u_n) é convergente