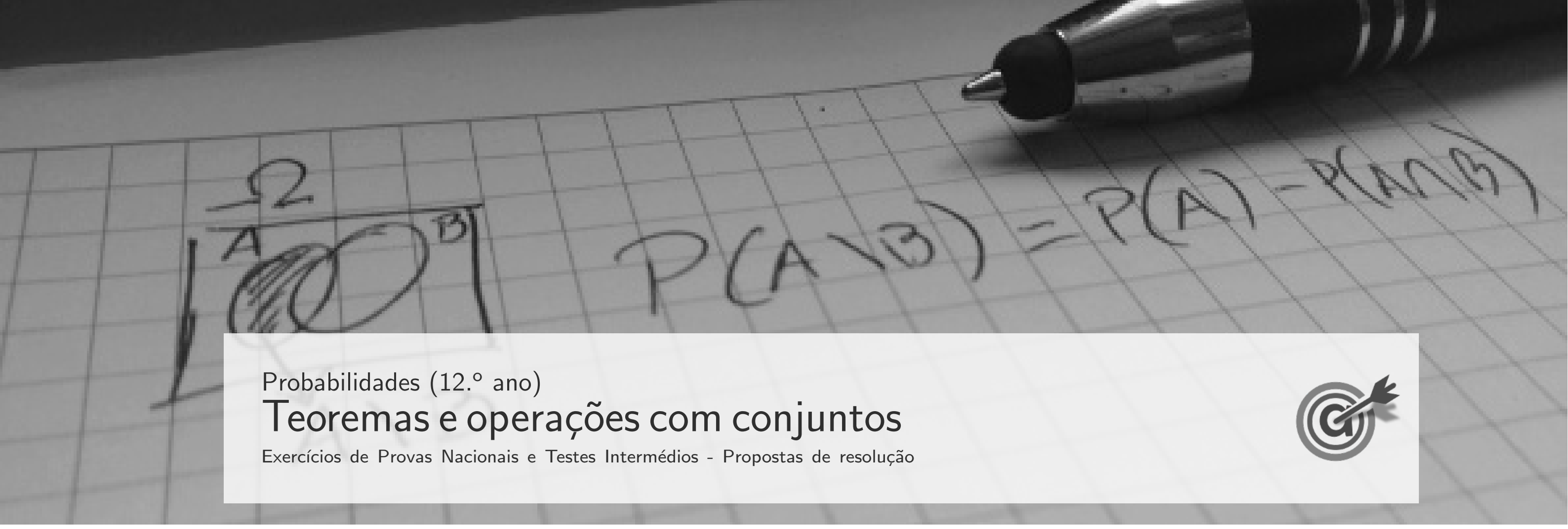


Probabilidades (12.º ano)

Teoremas e operações com conjuntos

Exercícios de Provas Nacionais e Testes Intermédios - Propostas de resolução

1. Temos que:
   - Como $A \cap B = \emptyset$ então $P(A \cap B) = 0$
   - $P(B) = 1 - P\left(\overline{B}\right) = 1 - 0{,}6 = 0{,}4$
   - $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B) \Leftrightarrow 0{,}6 = P(A) + 0{,}4 - 0 \Leftrightarrow 0{,}6 - 0{,}4 = P(A) \Leftrightarrow 0{,}2 = P(A)$

   E assim: $P\left(\overline{A}\right) = 1 - P(A) = 1 - 0{,}2 = 0{,}8$

   Resposta: **Opção D**

Exame – 2022, 1.ª Fase

2. Temos que:
   - Pelas leis de De Morgan temos que $P\left(\overline{A} \cup \overline{B}\right) = P\left(\overline{A \cap B}\right) = \frac{8}{9}$
   - Pelo teorema do acontecimento contrário, $P\left(\overline{A \cap B}\right) = 1 - P\left(A \cap B\right) = \frac{8}{9}$
   - Como são independentes $(P(A \cap B) = P(A) \times P(B))$ vem que $1 - P\left(A \cap B\right) = 1 - \big(P(A) \times P(B)\big) = \frac{8}{9}$
   - Como os acontecimentos são equiprováveis $(P(B) = P(A))$, vem que $1 - \big(P(A) \times P(A)\big) = \frac{8}{9}$

   Assim, resolvendo a equação temos:

$$1 - \big(P(A) \times P(A)\big) = \frac{8}{9} \Leftrightarrow \big(P(A)\big)^2 = 1 - \frac{8}{9} \Leftrightarrow \big(P(A)\big)^2 = \frac{1}{9} \underset{P(A)>0}{\Leftrightarrow} P(A) = \sqrt{\frac{1}{9}} \Leftrightarrow P(A) = \frac{1}{3}$$

   Resposta: **Opção C**

Exame – 2019, Ép. especial

3. Como A e B são acontecimentos equiprováveis, temos que $P(A) = P(B)$

   E como A e B são acontecimentos independentes, temos que

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B) = P(A) \times P(A) = \big(P(A)\big)^2$$

   Logo, como $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$, temos que:

$$0{,}64 = P(A) + P(A) - \big(P(A)\big)^2 \Leftrightarrow \big(P(A)\big)^2 - 2 \times P(A) + 0{,}64 = 0$$

   Finalmente, usando a fórmula resolvente para equações do segundo grau, temos que:

$$P(A) = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \times 1 \times 0{,}64}}{2 \times 1} \Leftrightarrow P(A) = \frac{2 \pm 1{,}2}{2} \Leftrightarrow P(A) = 1{,}6 \vee P(A) = 0{,}4$$

   Como $P(A) \leq 1$, então temos que $P(A) = 0{,}4 = 0{,}40$

   Resposta: **Opção B**

Exame – 2018, Ép. especial

4. Como $P(B) = 1 - P\left(\overline{B}\right) = P(B) - P(A \cap B)$ vem que $P(B) = 1 - 0{,}7 = 0{,}3$

   Como $P\left(A \cup B\right) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \Leftrightarrow P\left(A \cap B\right) = P(A) + P(B) - P(A \cup B)$, temos que:

$$P\left(A \cap B\right) = 0{,}4 + 0{,}3 - 0{,}5 = 0{,}2$$

   Finalmente, pelas leis de De Morgan, temos que:

$$P\left(\overline{A} \cup \overline{B}\right) = P\left(\overline{A \cap B}\right) = 1 - P(A \cap B) = 1 - 0{,}2 = 0{,}8$$

   Resposta: **Opção C**

Exame – 2015, 1.ª Fase

5. Usando as leis de DeMorgan, e a probabilidade do acontecimento contrário, temos que:
   $P\left(\overline{A} \cap \overline{B}\right) = P\left(\overline{A \cup B}\right) = 1 - P(A \cup B)$ então

$$P\left(\overline{A} \cap \overline{B}\right) = 0{,}48 \Leftrightarrow 1 - P(A \cup B) = 0{,}48 \Leftrightarrow 1 - 0{,}48 = P(A \cup B) \Leftrightarrow 0{,}52 = P(A \cup B)$$

   Como A e B são acontecimentos independentes, temos que $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$, logo

$$P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B) \Leftrightarrow P(A) \times P(B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B)$$

   Substituindo os valores das probabilidade, vem

$$0{,}4 \times P(B) = 0{,}4 + P(B) - 0{,}52 \Leftrightarrow 0{,}52 - 0{,}4 = P(B) - 0{,}4 \times P(B) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 0{,}12 = P(B) \times \Big(1 - 0{,}4\Big) \Leftrightarrow 0{,}12 = P(B) \times 0{,}6 \Leftrightarrow \frac{0{,}12}{0{,}6} = P(B) \Leftrightarrow 0{,}2 = P(B)$$

   Resposta: **Opção C**

Exame – 2014, 2.ª Fase

6. Temos que A e B são acontecimentos incompatíveis, logo $P(A \cap B) = 0$

   Como $P\left(\overline{A} \cap B\right) = P(B) - P(A \cap B)$, e $P(A \cap B) = 0$, vem que:
   $P\left(\overline{A} \cap B\right) = P(B)$, pelo que $P(B) = 0{,}55$

   Como $P\left(A \cup B\right) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$, $P(A \cap B) = 0$ e $P(A) = 0{,}3$, temos que:
   $P\left(A \cup B\right) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0{,}3 + 0{,}55 = 0{,}85$

   Assim, pelo teorema do acontecimento contrário, $P\left(\overline{A \cup B}\right) = 1 - P\left(A \cup B\right) = 1 - 0{,}85 = 0{,}15$

   Finalmente, pelas leis de De Morgan, temos que:

   $$P\left(\overline{A} \cap \overline{B}\right) = P\left(\overline{A \cup B}\right) = 0{,}15$$

   Resposta: **Opção C**

Exame – 2013, Ép. especial

7. A e B são independentes se $P(A) \times P(B) = P\left(A \cap B\right)$

   Temos ainda que
   - $P(B) = 1 - 0{,}6 = 0{,}4$, porque $P(B) = 1 - P\left(\overline{B}\right)$
   - $P\left(\overline{A \cup B}\right) = 0{,}4$, porque $P\left(\overline{A} \cap \overline{B}\right) = P\left(\overline{A \cup B}\right)$
   - $P\left(A \cup B\right) = 1 - 0{,}4 = 0{,}6$, porque $P\left(A \cup B\right) = 1 - P\left(\overline{A \cup B}\right)$
   - $P(A \cap B) = 0{,}3 + 0{,}4 - 0{,}6 = 0{,}1$, porque $P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B)$

   Assim temos que
   $$P(A) \times P(B) \neq P\left(A \cap B\right)$$
   porque $0{,}3 \times 0{,}4 = 0{,}12 \neq 0{,}1$

   Logo A e B não são acontecimentos independentes.

Teste Intermédio 12.º ano – 28.02.2013

8. Como
   - $\overline{A} \cup \left(A \cap \overline{B}\right) = \left(\overline{A} \cup A\right) \cap \left(\overline{A} \cup \overline{B}\right) = \Omega \cap \left(\overline{A \cap B}\right) = \overline{A \cap B}$
   - $P\left(\overline{A \cap B}\right) = 1 - P(A \cap B)$

   temos que
   $$P\left(\overline{A} \cup \left(A \cap \overline{B}\right)\right) = P\left(\overline{A \cap B}\right) = 1 - \frac{1}{5} = \frac{4}{5}$$

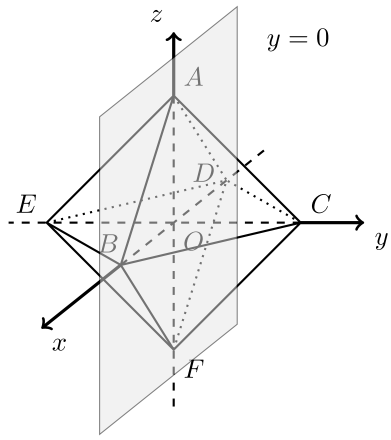
   Resposta: **Opção D**

Teste Intermédio 12.º ano – 29.11.2013

9. X e Y são independentes se $P(X) \times P(Y) = P\left(X \cap Y\right)$

Observando a figura ao lado, podemos verificar que apenas os pontos A, B, D e E pertencem ao plano de equação $y=0$, pelo que existem 4 casos favoráveis ao acontecimento X, num total de 6 casos possíveis, ou seja, recorrendo à Regra de Laplace, temos que

$$P(X) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$



Analisando as coordenadas dos pontos, podemos verificar que todos os vértices do octaedro têm duas coordenadas nulas, pelo que a soma das coordenadas é igual à coordenada não nula.
Assim temos que os pontos A, B e C têm a coordenada não nula positiva, e por isso a soma das coordenadas é positiva, e para os restantes pontos a coordenada não nula é negativa, e por isso a soma das coordenadas é negativa, pelo que existem 3 casos favoráveis à ocorrência do acontecimento Y, num total de 6 possíveis, e assim, recorrendo à Regra de Laplace, temos:

$$P(Y) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

Temos ainda que o acontecimento $X \cap Y$ corresponde a selecionar um vértice que pertence ao plano de equação $y = 0$ e cuja soma das coordenadas seja positiva.
Assim, podemos verificar que apenas os pontos A e B verificam simultaneamente as duas condições, pelo que existem 2 casos favoráveis e 6 possíveis, e assim, recorrendo à Regra de Laplace, temos

$$P(X \cap Y) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

Assim temos que

$$P(X) \times P(Y) = \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} = P\left(X \cap Y\right)$$

Logo X e Y são acontecimentos independentes.

Teste Intermédio 12.º ano – 29.11.2013

10. Temos que:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \Leftrightarrow P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B)$$

Como A e B são independentes, então $P(A) \times P(B) = P\left(A \cap B\right)$, pelo que, podemos escrever que

$$P(A) + P(B) - P(A \cup B) = P(A) \times P(B) \qquad (1)$$

Como $P(A) = 1 - P\left(\overline{A}\right) = 1 - \frac{7}{10} = \frac{10}{10} - \frac{7}{10} = \frac{3}{10}$, substituindo os valores conhecidos na igualdade (1), vem:

$$\frac{3}{10} + P(B) - \frac{3}{4} = \frac{3}{10} \times P(B) \Leftrightarrow \frac{6}{20} + \frac{20P(B)}{20} - \frac{15}{20} = \frac{6P(B)}{20} \Leftrightarrow 6 + 20P(B) - 15 = 6P(B) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 20P(B) - 6P(B) = 15 - 6 \Leftrightarrow 14P(B) = 9 \Leftrightarrow P(B) = \frac{9}{14}$$

Resposta: **Opção B**

Exame – 2012, 1.ª Fase

11. O acontecimento ≪o aluno é do sexo masculino≫ pode ser representado por $\overline{A}$
O acontecimento ≪o aluno não está no 12.º ano≫ pode ser representado por $\overline{B}$

Assim, o acontecimento ≪o aluno é do sexo masculino e não está no 12.º ano≫ pode ser representado por $\overline{A} \cap \overline{B}$

E, pelas leis de De Morgan, temos $\overline{A} \cap \overline{B} = \overline{A \cup B}$

Resposta: **Opção D**

Teste Intermédio 12.º ano – 24.05.2012

12. Se A e B são dois acontecimentos incompatíveis, então não podem ocorrer simultaneamente.

Assim, temos que $A \cap B = \emptyset$, pelo que $P(A \cap B) = 0$

Resposta: **Opção C**

Teste Intermédio 12.º ano – 13.03.2012

13. Temos que $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$, e como A e B são acontecimentos independentes, vem que $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$

Assim,

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \Leftrightarrow P(A \cup B) - P(A) = P(B) - P(A) \times P(B) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow P(A \cup B) - P(A) = P(B)\big(1 - P(A)\big) \Leftrightarrow P(A \cup B) - P(A) = P(B) \times P\left(\overline{A}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{P(A \cup B) - P(A)}{P\left(\overline{A}\right)} = P(B)$$

Como $P(A) = 1 - P\left(\overline{A}\right) = 1 - 0{,}9 = 0{,}1$, temos que:

$$P(B) = \frac{0{,}73 - 0{,}1}{0{,}9} = \frac{0{,}63}{0{,}9} = 0{,}7$$

Resposta: **Opção D**

Exame – 2011, Prova especial

14. Como A e B são acontecimentos incompatíveis, temos que $A \cap B = \emptyset$, ou seja, $P(A \cap B) = 0$

Pelas leis de De Morgan temos que $P\left(\overline{A} \cap \overline{B}\right) = 0{,}3 \Leftrightarrow P\left(\overline{A \cup B}\right) = 0{,}3$, e assim

$$P(A \cup B) = 1 - P\left(\overline{A \cup B}\right) = 1 - 0{,}3 = 0{,}7$$

Como $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \Leftrightarrow P(A \cup B) + P(A \cap B) - P(A) = P(B)$, calculamos o valor de $P(B)$, substituindo os valores conhecidos:

$$P(B) = 0{,}7 + 0 - 0{,}5 = 0{,}2$$

Resposta: **Opção A**

Exame – 2011, Ép. especial

15. A e B são independentes se $P(A) \times P(B) = P(A \cap B)$

Pela Regra de Laplace, como existem 4 cartas do naipe de espadas (número de casos favoráveis, no conjunto das 7 cartas que a Ana introduziu no saco (número de casos possíveis), temos que $P(A) = \frac{4}{7}$

Da mesma forma, temos como nas 7 cartas existem 2 reis, temos que \$$P(B) = \frac{2}{7}$

E assim, vem que

$$P(A) \times P(B) = \frac{4}{7} \times \frac{2}{7} = \frac{8}{49}$$

Temos ainda que $P(A \cap B)$ é a probabilidade de retirar o rei de espadas, ou seja, existe apenas 1 carta cuja extração é favorável a este acontecimento, num conjunto de 7 possíveis, pelo que

$$P(A \cap B) = \frac{1}{7}$$

E assim, como $P(A) \times P(B) \neq P(A \cap B)$, podemos afirmar que os acontecimentos A e B não são independentes.

Teste Intermédio 12.º ano – 19.01.2011

16. Como $P\left(\overline{B}\right) = 0{,}3$, pelo teorema $P(X) = 1 - P\left(\overline{X}\right)$, temos que:

$$P(B) = 1 - 0{,}3 = 0{,}7$$

Assim, pelo teorema $P(X \cup Y) = P(X) + P(Y) - P(X \cap Y)$, temos que:

$$P(A \cup B) = 0{,}4 + 0{,}7 - 0{,}3 = 0{,}8$$

Resposta: **Opção D**

Exame – 2010, Ép. especial

17. Como a probabilidade de pelo menos, uma das amigas telefonar à sua mãe, é $P(A \cup B)$
Como os acontecimentos A e B são independentes, temos que $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$
Assim, pelo teorema $P(X \cup Y) = P(X) + P(Y) - P(X \cap Y)$, temos que:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A) \times P(B)$$

Pelo que

$$P(A \cup B) = 0{,}7 + 0{,}8 - 0{,}7 \times 0{,}8 = 0{,}94$$

Apresentando o valor da probabilidade calculada em percentagem, temos $P(A \cup B) = 94\%$

Exame – 2010, Ép. especial

18. Como A e B são acontecimentos incompatíveis, temos que $A \cap B = \emptyset$, ou seja, $P(A \cap B) = 0$

Como $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \Leftrightarrow P(A \cup B) + P(A \cap B) - P(A) = P(B)$, calculamos o valor de $P(B)$, substituindo os valores conhecidos:

$$P(B) = 70\% + 0\% - 30\% = 40\%$$

Resposta: **Opção B**

Exame – 2010, 1.ª Fase

19. Como A e B são acontecimentos independentes, então

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B) = 0{,}4 \times 0{,}5 = 0{,}2$$

E assim temos que

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0{,}4 + 0{,}5 - 0{,}2 = 0{,}7$$

Resposta: **Opção B**

Teste Intermédio 12.º ano – 15.03.2010

20. Como $P(A) = 0{,}5$ e $P(B) = 0{,}7$, temos que

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0{,}5 + 0{,}7 - P(A \cap B) = 1{,}2 - P(A \cap B)$$

Logo, como $P(A \cup B) \leq 1$, então $P(A \cap B) > 0$

Como $P(A \cap B) > 0$ então $A \cap B \neq \emptyset$, ou seja, A e B são acontecimentos compatíveis.

Resposta: **Opção B**

Teste Intermédio 12.º ano – 10.12.2008

21. R e S são independentes se $P(R) \times P(S) = P\left(R \cap S\right)$

Recorrendo à Regra de Laplace, e verificando que o dado tem 2 faces com os números todos iguais (número de casos favoráveis) num total de 6 (número de casos possíveis), podemos calcular a probabilidade do acontecimento R:

$$P(R) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

Da mesma forma, observando que o dado tem 2 faces em que a soma dos três algarismos é 3 ($1+1+1=3$ e $2+1+0=3$) num total de 6 faces, temos que a probabilidade do acontecimento S é

$$P(S) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

Assim vem que

$$P(R) \times P(S) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{9}$$

Temos ainda que o acontecimento $R \cap S$ corresponde a ≪os números saídos são todos iguais, e a sua **soma** é igual a 3≫, pelo que existe apenas uma face do dado ($1+1+1=3$) que é favorável à ocorrência do acontecimento $R \cap S$, e assim vem que

$$P(R \cap S) = \frac{1}{6}$$

Desta forma, verificámos que $P(R) \times P(S) \neq P\left(R \cap S\right)$, pelo que os acontecimentos R e S não são independentes.

Teste Intermédio 12.º ano – 10.12.2008

22. Como se pretende calcular a probabilidade de o estudante escolhido não ser rapaz ou não ter tido classificação positiva, para utilizar a igualdade $P\left(\overline{A} \cup \overline{B}\right) = P\left(\overline{A}\right) - P(B) + P(A \cup B)$, podemos definir os acontecimentos

    - A: O estudante escolhido ser rapaz
    - B: O estudante escolhido ter tido classificação positiva

    E assim, $\overline{A} \cup \overline{B}$ é o acontecimento "o estudante escolhido não ser rapaz ou não ter tido classificação positiva".

    Temos que o número de casos possíveis é $160 + 120 = 280$, correspondendo ao número total de estudantes que realizaram o exame (160 raparigas e 120 rapazes).

    - O número de casos favoráveis para o acontecimento $\overline{A}$ é 160, correspondendo ao número de raparigas. E assim temos que $P\left(\overline{A}\right) = \frac{160}{280}$
    - O número de casos favoráveis para o acontecimento B é $160 \times 0{,}65 + 120 \times 0{,}6 = 176$, correspondendo a 65% das raparigas e 60% dos rapazes. E assim temos que $P\left(B\right) = \frac{176}{280}$
    - O número de casos favoráveis para o acontecimento $A \cup B$ é $120 + 160 \times 0{,}65 = 224$, correspondendo à soma do número de rapazes com 65% das raparigas que teve positiva. E assim temos que $P\left(A \cup B\right) = \frac{224}{280}$

    Logo, calculando a probabilidade de o estudante escolhido não ser rapaz ou não ter tido classificação positiva, e apresentando o resultado em forma de dízima, com aproximação às centésimas, vem

    $$P\left(\overline{A} \cup \overline{B}\right) = P\left(\overline{A}\right) - P(B) + P(A \cup B) = \frac{160}{280} - \frac{176}{280} + \frac{224}{280} = \frac{208}{280} \approx 0{,}74$$

    Exame – 2008, 2.ª Fase

23. Como

    $$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \Leftrightarrow P(A \cup B) - P(B) + P(A \cap B) = P(A)$$

    Vem que

    $$P(A) = P(A \cup B) - P(B) + P(A \cap B) = 80\% - 60\% + 10\% = 30\%$$

    Resposta: **Opção C**

    Exame – 2008, 1.ª Fase

24. Definindo os acontecimentos

    - X:≪tirar um iogurte de pêssego≫
    - Y:≪tirar um sumo de laranja≫

    Temos que $a = P(X) = \frac{1}{5}$, $b = P(Y) = \frac{1}{3}$ e admite-se que X e Y são independentes.

    Como a probabilidade de que não ocorra X nem ocorra Y é igual a $1 - a - b + a \times b$, temos que a probabilidade (na forma de fração irredutível) de, ao tirar, ao acaso, um iogurte e um sumo do frigorífico, o iogurte não ser de pêssego e o sumo não ser de laranja é:

    $$1 - a - b + a \times b = 1 - \frac{1}{5} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} \times \frac{1}{3} = \frac{15}{15} - \frac{3}{15} - \frac{5}{15} + \frac{1}{15} = \frac{8}{15}$$

    Exame – 2007, 2.ª Fase

25. A e B são acontecimentos independentes se

$$P(A) \times P(B) = P(A \cap B)$$

Assim, sabemos que existem $9 \times 9 \times 9 = 9^3$ algarismos diferentes que se podem formar com os nove algarismos.
Calculando a probabilidade dos acontecimentos A, B e $A \cap B$ temos:

- Apenas os números cujo algarismo das unidades é 5 são múltiplos de 5, pelo que existem $9 \times 9 \times 1 = 9^2$ números diferentes que são múltiplos de 5, e assim vem que $P(A) = \frac{9^2}{9^3} = \frac{1}{9}$
- Existem $9 \times 8 \times 7$ números cujos algarismos são todos diferentes, pelo que $P(B) = \frac{9 \times 8 \times 7}{9^3} = \frac{56}{9^2}$
- Os números que são múltiplos de cinco e cujos algarismos são todos diferentes são $8 \times 7 \times 1 = 56$, pelo que $P(A \cap B) = \frac{56}{9^3}$

Assim, como

$$P(A) \times P(B) = \frac{1}{9} \times \frac{56}{9^2} = \frac{56}{9^3} = P(A \cap B)$$

podemos afirmar que A e B são acontecimentos independentes.

Exame – 2007, 1.ª Fase

26. Como

$$(A \cup B) \cap C = \emptyset \Leftrightarrow (A \cap C) \cup (B \cap C) = \emptyset \Leftrightarrow A \cap C = \emptyset \wedge B \cap C = \emptyset$$

E assim, como $A \cap C = \emptyset$, então $P(A \cap C) = 0$, pelo que

$$P(A \cup C) = P(A) + P(C) - P(A \cap C) = 0{,}21 + 0{,}47 - 0 = 0{,}68$$

Exame – 2007, 1.ª Fase

27. Como $A \subset B$, então $A \cup B = B$, pelo que

$$P\left[(A \cup B) \cap \overline{B}\right] = P\left(B \cap \overline{B}\right) = P\left(\emptyset\right) = 0$$

Resposta: **Opção A**

Teste Intermédio 12.º ano – 07.12.2006

28. Como A e B são acontecimentos independentes, então $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$, pelo que, substituindo os valores conhecidos vem

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B) \Leftrightarrow \frac{1}{2} = P(A) \times \frac{2}{3} \Leftrightarrow \frac{3}{4} = P(A)$$

E assim, calculando o valor de $P(A \cup B)$e apresente o resultado na forma de fração irredutível, temos

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{3}{4} + \frac{2}{3} - \frac{1}{2} = \frac{9}{12} + \frac{8}{12} - \frac{6}{12} = \frac{11}{12}$$

Teste Intermédio 12.º ano – 07.12.2006

29. Como se pretende que $P(A \cap B) = P(A)$, então $A \cap B = A$, ou seja $A \subset B$

    No âmbito da experiência descrita, podemos definir os acontecimentos, nem impossíveis nem certos, tais que $A \neq B$ e $P(A \cap B) = P(A)$:

    - A: O produto dos dois números saídos é 48
    - B: O produto dos dois números saídos é um número par

Exame – 2006, Ép. especial

30. Relativamente à Opção 1, como todos os alunos da turma têm 16 ou 17 anos ou mais do que 17 anos, vem que $X \cup Y = \Omega$, pelo que $P(X \cup Y) = 1$, e assim a afirmação $P(X \cap Y) < 1$ é falsa.

    Relativamente à Opção 2, temos que os alunos da turma cuja idade é par ou um múltiplo de 4, são exatamente os mesmos cuja idade é par, pelo que $X \cup Y = X$, e assim a afirmação $P(X \cup Y) > P(X)$ é falsa.

    Relativamente à Opção 3, como não existem raparigas de 18 anos na turma, vem que $X \cap Y = \emptyset$, pelo que $P(X \cap Y) = 0$, e assim a afirmação $P(X \cap Y) > 0$ é falsa.

    Temos assim que, relativamente à Opção 4, as três afirmações são verdadeiras.

Exame – 2006, 2.ª Fase

31. Como $A = A \cup B \ \vee \ A \subset (A \cup B)$, então $P(A) \leq P(A \cup B) \ \Leftrightarrow \ P(A \cup B) \geq P(A) \ \Leftrightarrow \ P(A \cup B) \geq 0{,}3$

    Como $P\left(\overline{A}\right) = 1 - P(A) = 1 - 0{,}3 = 0{,}7$ e $\overline{A} = \overline{A} \cup B \ \vee \ \overline{A} \subset \left(\overline{A} \cup B\right)$, então
    $P\left(\overline{A}\right) \leq \left(\overline{A} \cup B\right) \ \Leftrightarrow \ P\left(\overline{A} \cup B\right) \geq P\left(\overline{A}\right) \ \Leftrightarrow \ P\left(\overline{A} \cup B\right) \geq 0{,}7$

    Como $A \cap B = A \ \vee \ (A \cap B) \subset A$, então $P(A \cap B) \leq P(A) \ \Leftrightarrow \ P(A \cap B) \leq 0{,}3$

    Como $P\left(\overline{A \cap B}\right) = 1 - P(A \cap B)$ e $P(A \cap B) \leq 0{,}3$, vem que $P\left(\overline{A \cap B}\right) > 1 - 0{,}3 \ \Leftrightarrow \ P\left(\overline{A \cap B}\right) > 0{,}7$

    Assim temos que o único acontecimento que pode ter probabilidade inferior a 0,3 é o acontecimento $A \cap B$

    Resposta: **Opção C**

Exame – 2006, 1.ª Fase

32. Como o acontecimento $A \cup B$ corresponde a selecionar uma rapariga ou um aluno que não usa óculos, vem que o acontecimento contrário de $A \cup B$, é «selecionar um rapaz e um aluno que usa óculos», ou mais simplesmente

    O aluno é um rapaz e usa óculos

    Resposta: **Opção A**

Exame – 2005, Ép. especial

33. Recorrendo a um contra-exemplo, considerando a experiência aleatória de lançar uma moeda ao ar e considerando os acontecimentos
    - X: Sair cara
    - Y: Sair coroa

    Temos que $P(X \cap Y) = 0$, mas nem o acontecimento X é impossível, nem o acontecimento Y é impossível.

    Resposta: **Opção D**

Exame – 2005, 1.ª Fase

34. Como $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \Leftrightarrow P(A \cup B) + P(A \cap B) - P(A) = P(B)$, calculamos o valor de $P(B)$, substituindo os valores conhecidos:

$$P(B) = 0{,}8 + 0{,}1 - 0{,}3 = 0{,}6$$

E assim,

$$P\left(\overline{B}\right) = 1 - P(B) = 1 - 0{,}6 = 0{,}4$$

Resposta: **Opção D**

Exame – 2004, 2.ª Fase

35. Dois acontecimentos A e B são incompatíveis se $A \cap B = \emptyset$, ou seja se $P(A \cap B) = 0$. E assim temos que

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \leftrightarrow P(A) + P(B) = P(A \cup B)$$

Dois acontecimentos A e $\overline{A}$ são contrários se

$$P(A) = 1 - P\left(\overline{A}\right) \Leftrightarrow P(A) + P\left(\overline{A}\right) = 1$$

Resposta: **Opção C**

Exame – 2004, 1.ª Fase

36. Como o saco contém bolas azuis, brancas e pretas, ao retirar, ao acaso, uma bola do saco, ela pode ser azul, branca ou preta.

Assim o contrário do acontecimento A é o acontecimento $\overline{A}$ - a bola retirada não é azul, ou seja, a bola retirada é branca ou preta.

O acontecimento contrário de $\overline{B}$ é o acontecimento B.

Os acontecimentos A e B não podem ocorrer simultaneamente, porque só é retirada uma bola, e cada bola só tem uma cor, pelo que são incompatíveis.

Quando é retirada uma bola azul, é também "não branca", pelo que os acontecimentos A e $\overline{B}$ ocorrem simultaneamente, ou seja, não são incompatíveis.

Resposta: **Opção C**

Exame – 2003, 1.ª Fase – 2ª chamada

37. Como $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$, vem que

$$P(A\cup B)=0{,}3+0{,}5-P(A\cap B)=0{,}8-P(A\cap B)$$

- Como $P(A\cap B)\geq 0$ então $P(A\cup B)\leq 0{,}8$
- Como $(A\cap B)\subset A$, então $P(A\cap B)\leq P(A) \Leftrightarrow P(A\cap B)\leq 0{,}3$
  E assim, $P(A\cup B)=0{,}8-P(A\cap B) \Leftrightarrow P(A\cup B)\geq 0{,}8-0{,}3 \Leftrightarrow P(A\cup B)\geq 0{,}5$

Pelo que podemos afirmar que

$$0{,}5\leq P(A\cup B)\leq 0{,}8$$

Resposta: **Opção C**

Exame – 2003, 1.ª Fase – 1ª chamada

38. Fazendo a contagem dos alunos que que têm dezasseis anos ou são raparigas, temos $5+2+4+4=15$ casos favoráveis, num conjunto de 25 casos possíveis, pelo que, recorrendo à Regra de Laplace, e apresentando o resultado na forma de fração irredutível temos

Idade	Rapazes	Raparigas
15	4	2
16	5	4
17	6	4

$$p=\frac{15}{25}=\frac{3}{5}$$

*** Outra resolução: ***

Definindo os acontecimentos

- D: O aluno selecionado ter 16 anos
- R: O aluno selecionado ser rapariga

Temos que $P(D)=\frac{5+4}{25}=\frac{9}{25}$; $P(R)=\frac{2+4+4}{25}=\frac{10}{25}$ e $P(D\cap R)=\frac{4}{25}=\frac{10}{25}$ e assim, a probabilidade, na forma de fração irredutível, de que o representante, escolhido ao acaso, que tenha dezasseis anos ou seja uma rapariga é

$$P(D\cup R)=P(D)+P(R)-P(D\cap R)=\frac{9}{25}+\frac{10}{25}-\frac{4}{25}=\frac{15}{25}=\frac{3}{5}$$

Exame – 2002, Prova para militares

39. Definindo os acontecimentos

- A: ≪O António acerta no alvo≫
- B: ≪O Belmiro acerta no alvo≫

Como A e B são acontecimentos independentes, temos que

$$P(A\cap B)=P(A)\times P(B)=0{,}7\times 0{,}8=0{,}42$$

Como o alvo é atingido se ocorrer o acontecimento A ou o acontecimento B, temos que a probabilidade de o alvo ser atingido é

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=0{,}6+0{,}7-0{,}42=0{,}88$$

Resposta: **Opção B**

Exame – 2001, Ép. especial

40. Definindo os acontecimentos
    - A: A bola retirada é amarela
    - N: A bola retirada é tem o número 1

    Temos que a bola amarela número 1 está no saco é equivalente a $P(A \cap U) > 0$

    Como sabemos que $P(A) >= 0{,}5$, $P(N) = 0{,}25$ e $P(A \cup N) = 0{,}625$, então

    $$P(A \cap N) = P(A) + P(N) - P(A \cup N) = 0{,}5 + 0{,}25 - 0{,}625 = 0{,}125$$

    E assim podemos concluir que a probabilidade de extrair a bola amarela com o número 1 é superior a zero, ou seja a bola amarela com o número 1 está no saco.

    Exame – 2001, 1.ª Fase – 1.ª chamada

41. Como $A \subset B$, então
    - $P(A) \leq P(B)$
    - $(A \cap B) = A$, pelo que $P(A \cap B) = P(A)$ (e $P(A) \neq 0$ porque A não é um acontecimento impossível)
    - $(A \cup B) = B$, pelo que $P(A \cap B) = P(B)$ (e $P(B) \neq 1$ porque B não é um acontecimento certo)
    - Como $P(A) \leq P(B)$, $P(A) = 1 - P\left(\overline{A}\right)$ e $P(B) = 1 - P\left(\overline{B}\right)$ então

    $$P(A) \leq P(B) \Leftrightarrow 1 - P\left(\overline{A}\right) \leq 1 - P\left(\overline{B}\right) \Leftrightarrow -P\left(\overline{A}\right) \leq -P\left(\overline{B}\right) \Leftrightarrow P\left(\overline{A}\right) \geq P\left(\overline{B}\right)$$

    Resposta: **Opção D**

    Prova modelo – 2001

42. O acontecimento $A \cup B$ corresponde a ≪sair face ímpar ou número maior ou igual a 4≫, o que corresponde a verificar-se a ocorrência das faces 1, 3, 4, 5, ou 6

    Assim o acontecimento contrário de $A \cup B$ corresponde a ≪não sair uma das facces 1, 3, 4, 5 ou 6≫, o que significa

    ≪sair face 2≫

    Resposta: **Opção C**

    Exame – 2000, 1.ª Fase – 1.ª chamada