

Teste de Matemática

2021

10.º ano de Escolaridade

Duração da Prova: 90 minutos. | Tolerância: 30 minutos.

(cinco páginas)

VERSÃO 1

Para cada resposta, identifique o grupo e o item.

Apresente as suas respostas de forma legível.

As cotações dos itens encontram-se no final do enunciado da prova.

Não é permitido o uso de máquina de calcular.

Na resposta aos itens de **escolha múltipla**, selecione a opção correta. Escreva, na folha de respostas, o número do item e a letra que identifica a opção escolhida.

Na resposta aos restantes, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias.



1. Considere a função f , de domínio $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, definida por $f(x) = \frac{1}{x}$.

Qual das seguintes afirmações é falsa ?

- (A) $f(2 + \sqrt{3}) = 2 - \sqrt{3}$ (B) $g(x) = f(x - 1)$ é uma função de domínio $\mathbb{R} \setminus \{1\}$
 (C) $f(7^{-30}) = -7^{30}$ (D) $f(2) = \frac{1}{2}$

2. Na *Figura 1* estão representadas, num referencial ortonormado do plano, as retas r , s e p , definidas respetivamente pelas equações

$$y = x + 1, \quad y = -5x + 18 \quad \text{e} \quad y = 2$$

Qual é a condição que define a região sombreada?

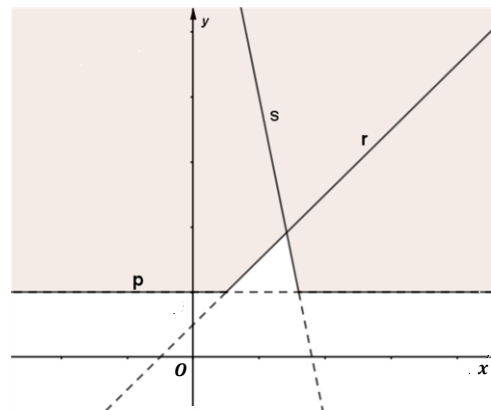


Figura 1

- (A) $y \geq 2 \vee (y \geq x + 1 \wedge y \geq -5x + 18)$ (B) $y \geq 2 \wedge (y \geq x + 1 \vee y \geq -5x + 18)$
 (C) $(y \geq 2 \vee y \geq x + 1) \wedge y \geq -5x + 18$ (D) $y \geq 2 \wedge y \geq x + 1 \wedge y \geq -5x + 18$

3. Considere o polinómio $P(x) = (x - 1)^2(x + 2)$.

3.1 Considere f a função, de domínio \mathbb{R} , definida pelo polinómio dado.

Construa para essa função, uma tabela de sinais e em seguida comente as seguintes afirmações:

- I) O gráfico de f intersesta o eixo Ox em três pontos distintos;
 II) $f(x) > 0 \Leftrightarrow x \in]-2, +\infty[$;
 III) $f(1)$ é o mínimo absoluto.

3.2 Determine o resto da divisão inteira do polinómio $P(x + 1)$ por $x + 3$.

4. Considere, num plano munido de um referencial ortonormado, os pontos $A(1, -1)$, $B(3, -4)$ e $C(-1, 2)$.

Qual das seguintes afirmações é verdadeira?

- (A) Um vetor diretor da reta AB tem coordenadas $(2, 3)$.
 (B) O declive da reta AB é $-\frac{2}{3}$.
 (C) Uma equação vetorial da reta AB é $(x, y) = (1, -1) + k(2, 3), k \in \mathbb{R}$.
 (D) A equação reduzida da reta r , paralela à reta AB e que passa no ponto C é $y = -\frac{3}{2}x + \frac{1}{2}$.

5. Considere a função f , de domínio \mathbb{R} , definida por $f(x) = (x - 1)^2 + 2$ e o respetivo gráfico num referencial ortonormado Oxy .

Sabe-se que

- O ponto V é o vértice da parábola que representa graficamente a função;
- O ponto B , distinto de V , pertence ao gráfico da função f ;
- Os vetores \vec{v} e \vec{b} , vetores de posição dos pontos V e B , respetivamente, são colineares.

Determine as coordenadas do ponto B .

Sugestão: Note que $\vec{v} = \overrightarrow{OV}$ e $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$

6. Na *Figura 2* está representada, num referencial ortonormado do plano, a reta BC de equação $y = -x + 1$

- O ponto C tem abscissa $\frac{1}{2} - a$ e o ponto B tem de abscissa $\frac{1}{2} + a$, em que $a \in]0, \frac{1}{2}[$.

Sabendo que a área do triângulo $[OCP]$ é m e a área triângulo $[OBP]$ é n , o valor de $m + n$ é:

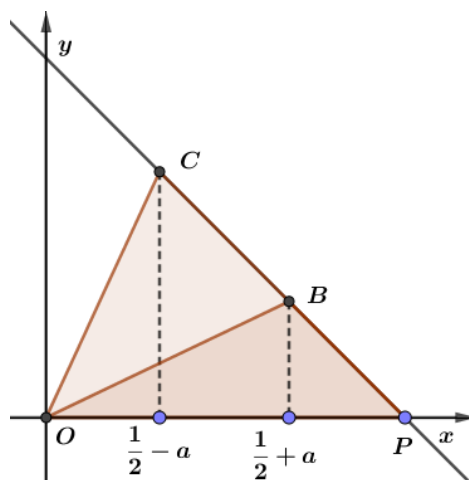


Figura 2

- (A) $\frac{1}{2}$ (B) $2a$ (C) $\frac{1}{3}$ (D) $\frac{1}{4}$

7. No referencial ortonormado da *Figura 3* está representado:

- O gráfico da função f , definida em \mathbb{R} , por $f(x) = x^2$;
- O ponto $A(0, \frac{1}{4})$;
- O ponto B de abscissa 1 que pertence ao gráfico da função.

7.1 Mostre que a circunferência de diâmetro $[AB]$ é tangente ao eixo das abscissas.

7.2 Determine, em \mathbb{R} , o conjunto solução da condição

$$f(x) < 5x - 6$$

Apresente o conjunto na forma de intervalo.

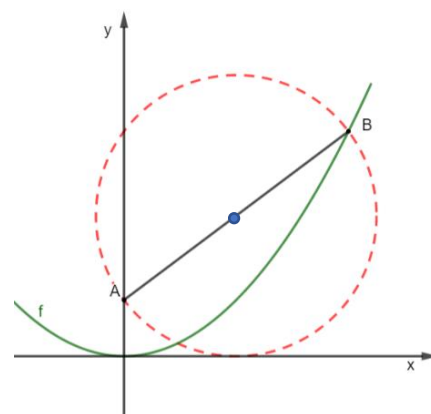
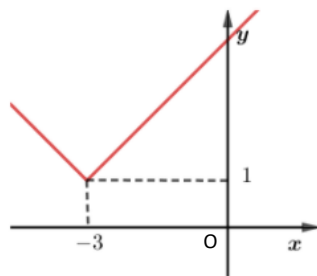


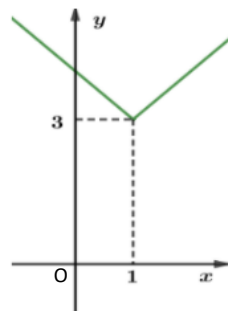
Figura 3

8. O gráfico da função f , definida em \mathbb{R} por $f(x) = 1 + |x + 3|$ é:

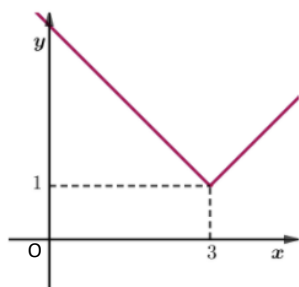
(A)



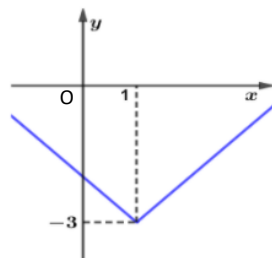
(B)



(C)



(D)



9. No referencial ortonormado do plano da *Figura 4* está representado o losango $[OABC]$.

Sabe-se que:

- O ponto A tem coordenadas $(3, 0)$;
- $y = \frac{1}{3}x$ é uma equação da reta OB .

Determine a área do losango $[OABC]$.

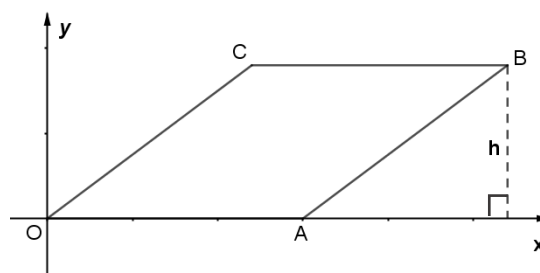


Figura 4

Sugestão: Comece por considerar as coordenadas do ponto B .

10. Considere, num referencial ortonormado do espaço,

- os pontos $A(1, 1, 3)$, $B(5, -3, 0)$, $C(3, -1, 4)$ e $D(-1, 3, 6)$
- As retas AB e CD de equações $(x, y, z) = (1, 1, 3) + k(4, -4, -3), k \in \mathbb{R}$ e $(x, y, z) = (3, -1, 4) + k(-4, 4, 2), k \in \mathbb{R}$, respetivamente.

10.1 Justifique que $(-7, 9, 9)$ são as coordenadas do ponto comum às duas retas.

Diga, justificando, se as duas retas são ou não coplanares.

10.2 Admita que um *drone* parte do ponto A e segue no sentido de $\overrightarrow{AB} = (4, -4, -3)$ e outro *drone* parte do ponto C e segue no sentido de $\overrightarrow{CD} = (-4, 4, 2)$.

Averigue se há a possibilidade de os *drones* colidirem.

11. Considere na *Figura 5* um referencial $Oxyz$ e nele representado o paralelepípedo retângulo $[CBGIHFDA]$.

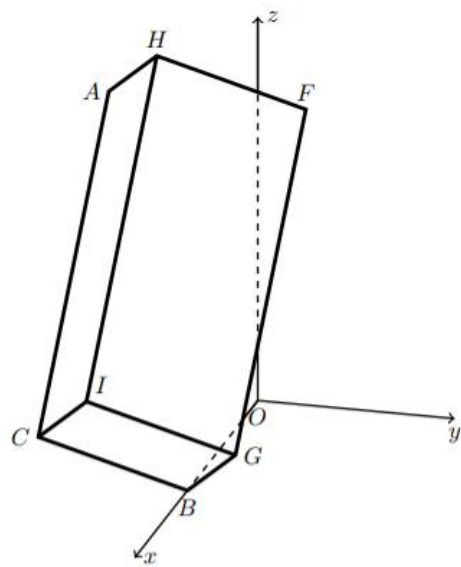


Figura 5

- $A(1, -2, 5)$, $C(5, -2, 1)$, $H(2, -1, 6)$ e $B(4, 0, 0)$ são vértices do paralelepípedo.
- 11.1 Determine as coordenadas do vértice D do paralelepípedo (ponto que não se visualiza na figura).
- 11.2 A reta AC está contida num plano paralelo a um dos planos coordenados. Uma equação desse plano que contém AC é:

- (A) $x = 4$ (B) $y = 0$ (C) $z = -4$ (D) $y = -2$

FIM

Questão	1.	2.	3.1	3.2	4.	5.	6.	7.1	7.2	8.	9.	10.1	10.2	11.1	11.2	TOTAL
Cotação	8	8	19	18	8	18	8	19	19	8	10	16	16	17	8	200

PROIBIDA A REPRODUÇÃO OU DIVULGAÇÃO TOTAL OU PARCIAL POR QUALQUER MEIO. O PRESENTE ENUNCIADO É PROPRIEDADE DA SOCIEDADE PORTUGUESA DE MATEMÁTICA E A SUA DIVULGAÇÃO É SUSCEPTÍVEL DE CAUSAR GRAVES PREJUÍZOS À SPM E ÀS SUAS ESCOLAS ASSOCIADAS. OS RESPONSÁVEIS SERÃO PROCESSADOS CIVIL E CRIMINALMENTE PELOS PREJUÍZOS CAUSADOS.

Teste de Matemática

2021

10.º ano de Escolaridade

Duração da Prova: 90 minutos. | Tolerância: 30 minutos.

(cinco páginas)

VERSÃO 2

Para cada resposta, identifique o grupo e o item.

Apresente as suas respostas de forma legível.

As citações dos itens encontram-se no final do enunciado da prova.

Não é permitido o uso de máquina de calcular.

Na resposta aos itens de **escolha múltipla**, selecione a opção correta. Escreva, na folha de respostas, o número do item e a letra que identifica a opção escolhida.

Na resposta aos restantes, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias.



1. Considere a função f , de domínio $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, definida por $f(x) = \frac{1}{x}$.

Qual das seguintes afirmações é falsa ?

- (A) $f(7^{-30}) = -7^{30}$ (B) $g(x) = f(x - 1)$ é uma função de domínio $\mathbb{R} \setminus \{1\}$
 (B) $f(2 + \sqrt{3}) = 2 - \sqrt{3}$ (D) $f(2) = \frac{1}{2}$

2. Na *Figura 1* estão representadas, num referencial ortonormado do plano, as retas r , s e p , definidas respetivamente pelas equações

$$y = x + 1, \quad y = -5x + 18 \quad \text{e} \quad y = 2$$

Qual é a condição que define a região sombreada?

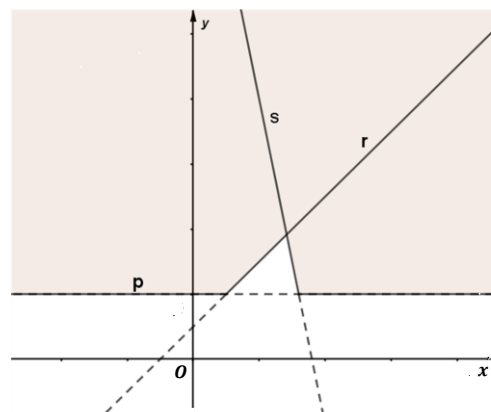


Figura 1

- (A) $y \geq 2 \vee (y \geq x + 1 \wedge y \geq -5x + 18)$ (B) $(y \geq 2 \vee y \geq x + 1) \wedge y \geq -5x + 18$
 (C) $y \geq 2 \wedge (y \geq x + 1 \vee y \geq -5x + 18)$ (D) $y \geq 2 \wedge y \geq x + 1 \wedge y \geq -5x + 18$
3. Considere o polinómio $P(x) = (x - 1)^2(x + 2)$.

- 3.1 Considere f a função, de domínio \mathbb{R} , definida pelo polinómio dado.

Construa para essa função, uma tabela de sinais e em seguida comente as seguintes afirmações:

- I) O gráfico de f intersesta o eixo Ox em três pontos distintos;
 II) $f(x) > 0 \Leftrightarrow x \in]-2, +\infty[$;
 III) $f(1)$ é o mínimo absoluto.

- 3.2 Determine o resto da divisão inteira do polinómio $P(x + 1)$ por $x + 3$.

4. Considere, num plano munido de um referencial ortonormado, os pontos $A(1, -1)$, $B(3, -4)$ e $C(-1, 2)$.

Qual das seguintes afirmações é verdadeira?

- (A) Um vetor diretor da reta AB tem coordenadas $(2, 3)$.
 (B) O declive da reta AB é $-\frac{2}{3}$.
 (C) Uma equação vetorial da reta AB é $(x, y) = (1, -1) + k(2, 3), k \in \mathbb{R}$.
 (D) A equação reduzida da reta r , paralela à reta AB e que passa no ponto C é $y = -\frac{3}{2}x + \frac{1}{2}$.

5. Considere a função f , de domínio \mathbb{R} , definida por $f(x) = (x - 1)^2 + 2$ e o respetivo gráfico num referencial ortonormado Oxy .

Sabe-se que

- O ponto V é o vértice da parábola que representa graficamente a função;
- O ponto B , distinto de V , pertence ao gráfico da função f ;
- Os vetores \vec{v} e \vec{b} , vetores de posição dos pontos V e B respetivamente, são colineares.

Determine as coordenadas do ponto B .

Sugestão: Note que $\vec{v} = \overrightarrow{OV}$ e $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$

6. Na *Figura 2* está representada, num referencial ortonormado do plano, a reta BC de equação $y = -x + 1$

- O ponto C tem abcissa $\frac{1}{2} - a$ e o ponto B tem de abcissa $\frac{1}{2} + a$, em que $a \in]0, \frac{1}{2}[$.

Sabendo que a área do triângulo $[OCP]$ é m e a área triângulo $[OBP]$ é n , o valor de $m + n$ é:

- (A) $2a$ (B) $\frac{1}{2}$ (C) $\frac{1}{3}$ (D) $\frac{1}{4}$

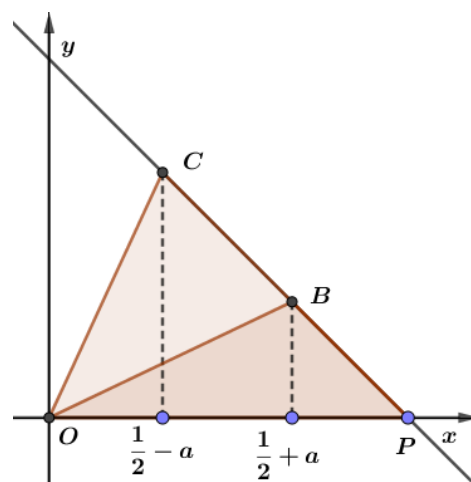


Figura 2

7. No referencial ortonormado da *Figura 3* está representado:

- O gráfico da função f , definida em \mathbb{R} , por $f(x) = x^2$;
- O ponto $A(0, \frac{1}{4})$;
- O ponto B de abcissa 1 que pertence ao gráfico da função.

7.1 Mostre que a circunferência de diâmetro $[AB]$ é tangente ao eixo das abcissas.

7.2 Determine, em \mathbb{R} , o conjunto solução da condição

$$f(x) < 5x - 6$$

Apresente o conjunto na forma de intervalo.

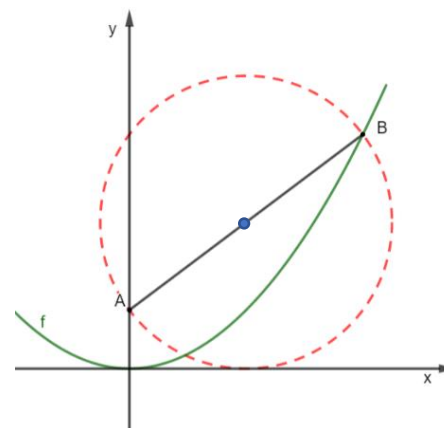
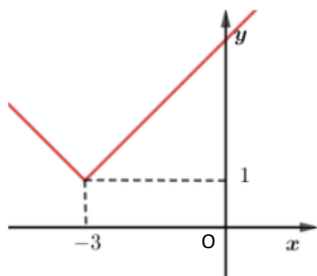


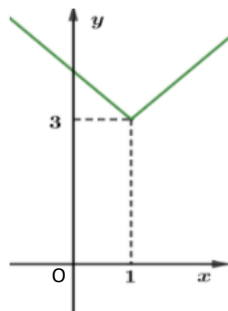
Figura 3

8. O gráfico da função f , definida em \mathbb{R} por $f(x) = 1 + |x - 3|$ é:

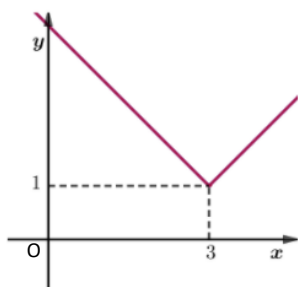
(A)



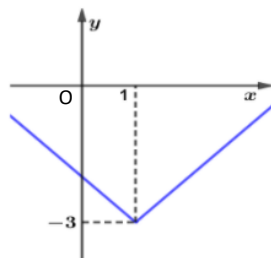
(B)



(C)



(D)



9. No referencial ortonormado do plano da *Figura 4* está representado o losango $[OABC]$.

Sabe-se que:

- O ponto A tem coordenadas $(3, 0)$;
- $y = \frac{1}{3}x$ é uma equação da reta OB .

Determine a área do losango $[OABC]$.

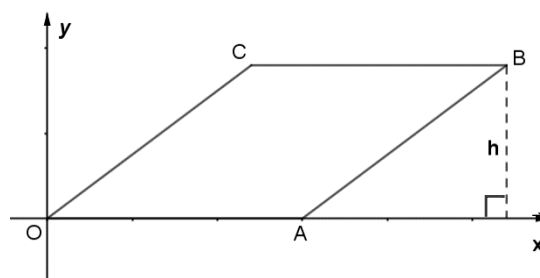


Figura 4

Sugestão: Comece por considerar as coordenadas do ponto B .

10. Considere, num referencial ortonormado do espaço,

- os pontos $A(1, 1, 3)$, $B(5, -3, 0)$, $C(3, -1, 4)$ e $D(-1, 3, 6)$
- As retas AB e CD de equações $(x, y, z) = (1, 1, 3) + k(4, -4, -3), k \in \mathbb{R}$ e $(x, y, z) = (3, -1, 4) + k(-4, 4, 2), k \in \mathbb{R}$, respetivamente.

10.1 Justifique que $(-7, 9, 9)$ são as coordenadas do ponto comum às duas retas.

Diga, justificando, se as duas retas são ou não coplanares.

10.2 Admita que um *drone* parte do ponto A e segue no sentido de $\overrightarrow{AB} = (4, -4, -3)$ e outro *drone* parte do ponto C e segue no sentido de $\overrightarrow{CD} = (-4, 4, 2)$.

Averigue se há a possibilidade de os drones colidirem.

11. Considere na *Figura 5* um referencial $Oxyz$ e nele representado o paralelepípedo retângulo $[CBGIHFDA]$.

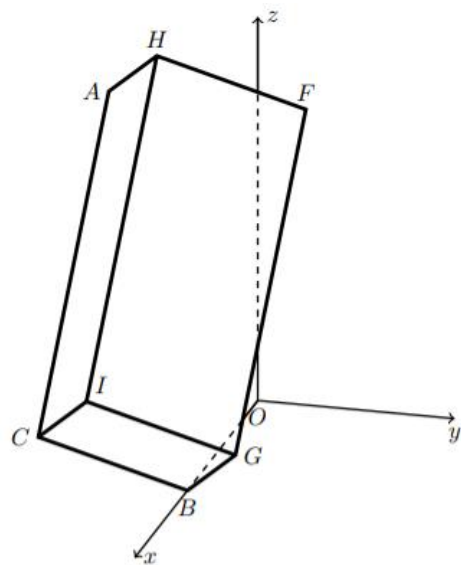


Figura 5

- $A(1, -2, 5)$, $C(5, -2, 1)$, $H(2, -1, 6)$ e $B(4, 0, 0)$ são vértices do paralelepípedo.
- 11.1 Determine as coordenadas do vértice D do paralelepípedo (ponto que não se visualiza na figura).
- 11.2 A reta AC está contida num plano paralelo a um dos planos coordenados. Uma equação desse plano que contém AC é:

- (A) $x = 4$ (B) $y = -2$ (C) $z = -4$ (D) $y = 0$

FIM

Questão	1.	2.	3.1	3.2	4.	5.	6.	7.1	7.2	8.	9.	10.1	10.2	11.1	11.2	TOTAL
Cotação	8	8	19	18	8	18	8	19	19	8	10	16	16	17	8	200

PROIBIDA A REPRODUÇÃO OU DIVULGAÇÃO TOTAL OU PARCIAL POR QUALQUER MEIO. O PRESENTE ENUNCIADO É PROPRIEDADE DA SOCIEDADE PORTUGUESA DE MATEMÁTICA E A SUA DIVULGAÇÃO É SUSCEPTÍVEL DE CAUSAR GRAVES PREJUÍZOS À SPM E ÀS SUAS ESCOLAS ASSOCIADAS. OS RESPONSÁVEIS SERÃO PROCESSADOS CIVIL E CRIMINALMENTE PELOS PREJUÍZOS CAUSADOS.