Folha 7 - Funções (Noções Elementares)

Dados dois conjuntos A e B, chama-se *função de A em B* a toda a correspondência que a cada elemento de A associa um e um só elemento de B.

Se designarmos a função por f e por x e y as variáveis representativas dos elementos de A e de B,respetivamente, escreve-se

$$\begin{aligned} f\colon A &\longrightarrow B \\ x &\mapsto y = f(x) \end{aligned}.$$

A x dá-se o nome de *variável independente* e a y chama-se *variável dependente*. O conjunto A diz-se o *domínio* de f e representa-se por D_f e o conjunto B é o *conjunto de chegada*.

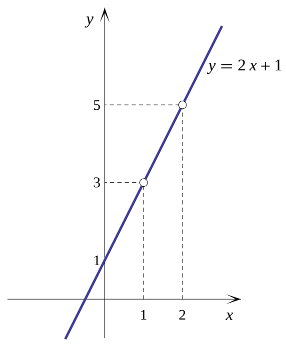
Dizemos também que y é a *imagem* do *objeto* x por f.

O *contradomínio* de f é o conjunto constituído por todas as imagens de f e representa-se por D'_f ou Im_f,

$$D'_f = \{f(x) : x \in A\}.$$

O *gráfico* da função f é o conjunto dos pontos (x, y) do plano que satisfazem a condição $y = f(x)$, com $x \in D_f$.

Exemplo 1 *Seja* $\begin{aligned} f\colon \mathbb{R}\backslash\{1,2\} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto y = 2x+1 \end{aligned}$. *Tem-se* $D_f = \mathbb{R}\backslash\{1,2\}$ *e* $D'_f = \mathbb{R}\backslash\{3,5\}$.



Chamamos *função real de variável real* a uma função $f : A \longrightarrow B$ em que A e B são subconjuntos de $\mathbb{R}$.

Uma função real de variável real $f : D \longrightarrow E$ diz-se

- *injetiva* quando a objetos distintos em D correspondem imagens distintas em E, ou seja, quando para quaisquer $a, b \in D$, $a \neq b \Longrightarrow f(a) \neq f(b)$,

  ou ainda, quando $f(a) = f(b) \Longrightarrow a = b$;

- *sobrejetiva* quando o seu contradomínio coincide com o conjunto de chegada, ou seja, quando para qualquer número $c \in E$, existe um número $a \in D$ tal que $f(a) = c$;

- *bijetiva* quando é simultaneamente injetiva e sobrejetiva;

- *par* quando, para qualquer $a \in D$, se tem $-a \in D$ e $f(-a) = f(a)$;

- *ímpar* quando, para qualquer $a \in D$, se tem $-a \in D$ e $f(-a) = -f(a)$;

- *crescente* quando, para quaisquer números $a, b \in D$, $b > a \Longrightarrow f(b) \geq f(a)$,

  em particular, *estritamente crescente* se $b > a \Longrightarrow f(b) > f(a)$;

- *decrescente* quando, para quaisquer números $a, b \in D$, $b > a \Longrightarrow f(b) \leq f(a)$,

  em particular, *estritamente decrescente* se $b > a \Longrightarrow f(b) < f(a)$;

- *monótona* se é crescente ou decrescente; em particular, *estritamente monótona* se é estritamente crescente ou estritamente decrescente;

- *periódica de período P* quando, para qualquer $a \in D$, se tem $a+P \in D$ e $f(a+P) = f(a)$;

- *majorada* quando existe um número $M \in \mathbb{R}$ tal que, para qualquer $a \in D$, se tem $f(a) \leq M$;

- *minorada* quando existe um número $m \in \mathbb{R}$ tal que, para qualquer $a \in D$, se tem $f(a) \geq m$;

- *limitada* quando é minorada e majorada, ou seja, quando existem números $M, m \in \mathbb{R}$ tais que, para qualquer $a \in D$, se tem $f(a) \in [m, M]$;

- que possui um *máximo local* em $c \in D$ se existe uma vizinhança de centro c e raio $\delta > 0$, $]c - \delta, c + \delta[$, tal que, para qualquer $a \in]c - \delta, c + \delta[$, $f(c) \geq f(a)$;

- que possui um *máximo absoluto* em $c \in D$ se, para qualquer $a \in D$, $f(c) \geq f(a)$;

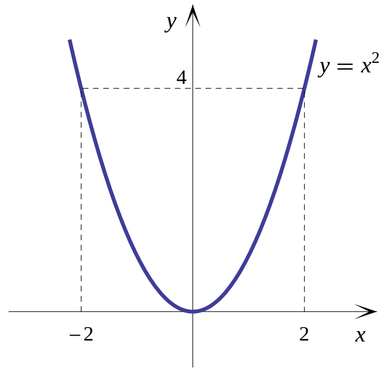
- que possui um *mínimo local* em $c \in D$ se existe uma vizinhança de centro c e raio $\delta > 0$, $]c - \delta, c + \delta[$, tal que, para qualquer $a \in]c - \delta, c + \delta[$, $f(c) \leq f(a)$;

- que possui um *mínimo absoluto* em $c \in D$ se, para qualquer $a \in D$, $f(c) \leq f(a)$.

- que possui um *extremo* em $c \in D$ se $f(c)$ é um máximo ou um mínimo de f; neste caso, c diz-se um *extremante* de f, (um *maximizante* ou um *minimizante*).

Exemplo 2 *Considere a função*

$$\begin{aligned} f \colon \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto y = x^2 \end{aligned}$$



Função par; não é injetiva nem é sobrejetiva ($D'f = [0, +\infty[\neq \mathbb{R}$). f é minorada mas não é majorada, não possui máximos locais (nem absolutos), mas possui um mínimo absoluto na origem que é 0. Não é uma função monótona, embora seja estritamente crescente em $[0, +\infty[$ e estritamente decrescente em $]-\infty, 0]$.

23 + curso

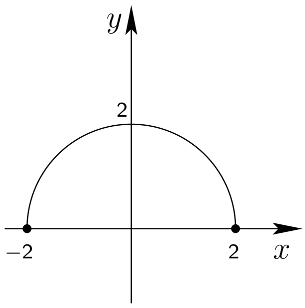
Matemática

Universidade do Minho
DMA

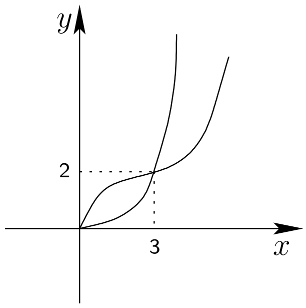
Folha 2 - Funções (Noções Elementares): **Exercícios Propostos**

Exercício 1 Das representações gráficas seguintes indique, justificando, as que podem representar funções, indicando, para essas, o domínio e o contradomínio.

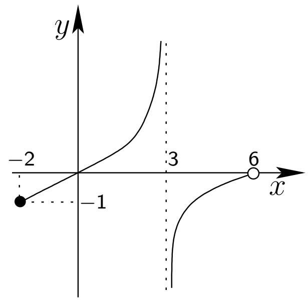
a)



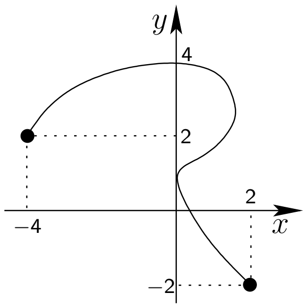
b)



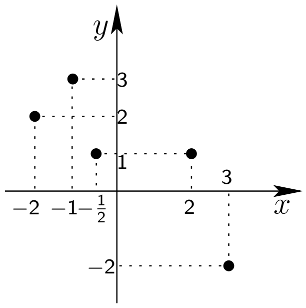
c)



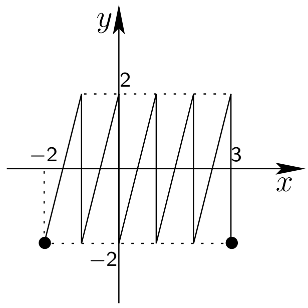
d)



e)



f)



Exercício 2 Considere a função real de variável real definida por $f(x) = -\frac{3x-1}{2}$.

a) Verifique se o ponto $(-\frac{1}{2}, \frac{5}{4})$ pertence ao gráfico de f.

b) Calcule $f(-\frac{1}{3})$.

c) Resolva a condição $f(x) > -3$ e indique o significado geométrico desta condição.

Exercício 3 Determine o domínio das seguintes funções:

a) $f(x) = \frac{1}{x} + 5$; b) $f(x) = \frac{x}{x^2+x}$; c) $f(x) = \frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{9+4x}}$

Exercício 4 Considere as funções

$$f(x) = \begin{cases} 3 & \text{se } x < 2, \\ x-3 & \text{se } x \geq 2 \end{cases} \quad \text{e} \quad g(x) = \begin{cases} -2 & \text{se } x = -1, \\ -x+3 & \text{se } -1 < x < 3, \\ -x & \text{se } 3 \leq x < 6. \end{cases}$$

a) Determine D_f e D_g.

b) Represente graficamente cada uma das funções.

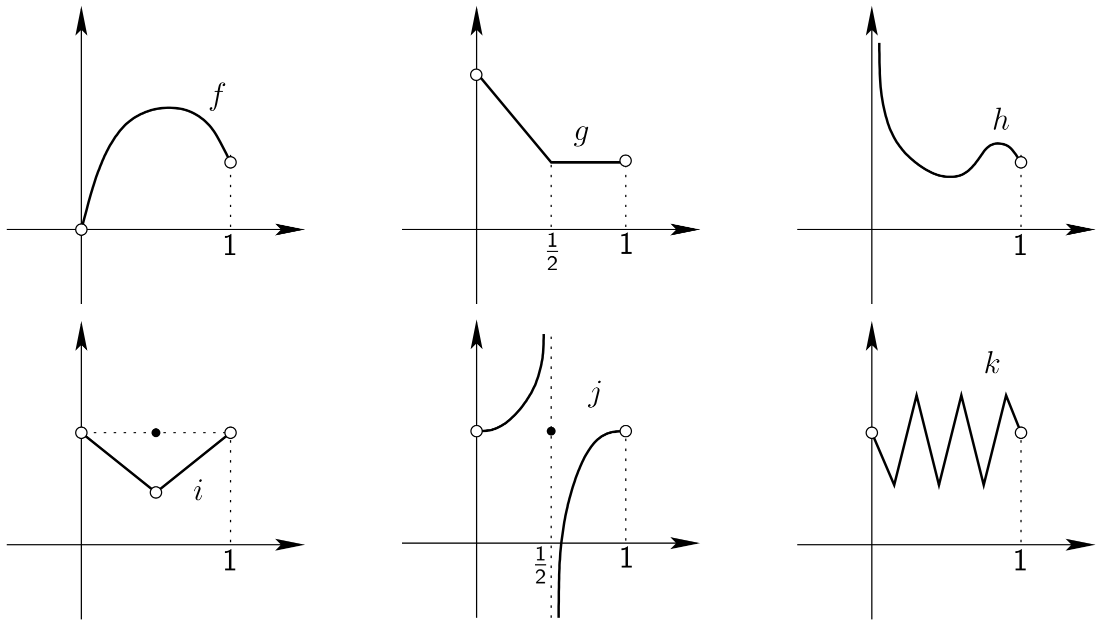
c) Verifique se alguma das funções é injetiva.

d) Indique, caso existam, o máximo e o mínimo absolutos da função g.

Exercício 5 Estude a paridade das funções:

a) $f(x) = x - 4x^2$; b) $f(x) = 1 - x^4$; c) $f(x) = \sqrt[3]{x} - 9x^3$.

Exercício 6 Considere os gráficos das funções f, g, h, i, j, k : $]0,1[\longrightarrow \mathbb{R}$:



a) Indique as funções que têm máximo absoluto.

b) Indique as funções que têm mínimo absoluto.

c) Indique o conjunto dos minimizantes de g.

d) Indique as funções que são sobrejetivas.

e) Indique as funções que são não injetivas.

f) Indique as funções que não são limitadas.

g) Indique as funções decrescentes.

h) Indique as funções crescentes.

i) Indique os intervalos de monotonia de j.