Matemática A (Aprendizagens Essenciais) – 11.º ano

Exercícios saídos em exames nacionais e em testes intermédios (desde 1997)

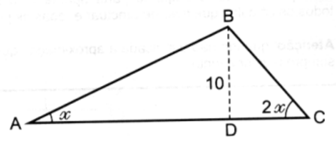
TRIGONOMETRIA E FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS

1. Um navio encontra-se atracado num porto. A distância h, de um dado ponto do casco do navio ao fundo do mar, varia com a maré. Admita que h é dada, em função do tempo x, por $h(x)=10-3\cos(2x)$. A distância desse ponto do casco ao fundo do mar, no momento da maré-alta, é

(A) 4 (B) 10 (C) 13 (D) 16

Exame Nacional 2.ª fase 1997

2. Na figura está representado um triângulo [ABC]. Seja $g(x)=\frac{75-25tg^2x}{tg\,x}$.

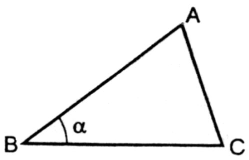


a) Mostre que a área de [ABC] é dada por g(x), para qualquer $x\in]0,\pi/4[$.

b) Considere o triângulo [ABC] quando $x=\pi/4$. Classifique-o quanto aos ângulos e quanto aos lados e prove que a sua área ainda é dada por g(x).

Exame Nacional 2.ª fase 1999

3.a) Seja [ABC] um triângulo isósceles em que $\overline{BA}=\overline{BC}$. Seja α a amplitude do ângulo ABC. Mostre que a área do triângulo [ABC] é dada por $\frac{\overline{BC}^2}{2}\times sen\,\alpha$ $(\alpha \in]0,\pi[)$



b) Considere agora um polígono regular de n lados, inscrito numa circunferência de raio 1. Utilize o resultado anterior para mostrar que a área do polígono é dada por $A_n=\frac{n}{2}\times sen\left(\frac{2\pi}{n}\right)$.

c) Interprete geometricamente o que acontece a A_n quando n aumenta indefinidamente.

Prova Modelo 2000-adaptação

4. No presente ano civil [2000], em Lisboa, o tempo que decorre entre o nascer e o pôr do Sol, no dia de ordem n do ano, é dado em horas, aproximadamente, por

$f(n)=12{,}2+2{,}64\ \operatorname{sen}\frac{\pi(n-81)}{183}$, $n\in\{1,2,3,...,366\}$ (o argumento da função seno está expresso em radianos).

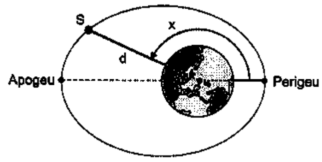
a) No dia 24 de Março, Dia Nacional do Estudante, o Sol nasceu às 6 e meia da manhã. Em que instante ocorreu o pôr do Sol? Apresente o resultado em horas e minutos (minutos arredondado às unidades).

Notas: recorde que, no presente ano, o mês de Fevereiro teve 29 dias; sempre que, nos cálculos, proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, 3 casas decimais.

b) Em alguns dias do ano, o tempo que decorre entre o nascer e o pôr do Sol é superior a 14,7 horas. Recorrendo à sua calculadora, determine em quantos dias do ano é que isso acontece. Indique como procedeu.

Exame Nacional 1.ª chamada 2000

5. Um satélite S tem uma órbita elíptica em torno da Terra, tal como se representa na figura. Tenha em atenção que os elementos nela desenhados não estão na mesma escala. Na elipse, estão assinalados 2 pontos: o *apogeu*, que é o ponto da órbita mais afastado do centro da Terra; o *perigeu*, que é o ponto da órbita mais próximo do centro da Terra. O ângulo x, assinalado na figura, tem o seu vértice no centro da Terra; o seu lado origem passa no *perigeu*, o seu lado extremidade passa no satélite e a sua amplitude está compreendida entre 0 e 360 graus.

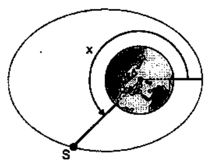


A distância d, em km, do satélite ao centro da Terra, é dada por

$d=\frac{7820}{1+0{,}07\cos x}$. Considere que a Terra é uma esfera de raio 6378 km.

a) Determine a altitude do satélite (distância à superfície da Terra) quando este se encontra no *apogeu*. Apresente o resultado em km, arredondado às unidades.

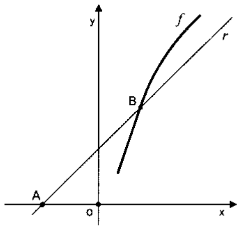
b) Num certo instante, o satélite está na posição indicada na figura.



A distância do satélite ao centro da terra é, então, de 8200 km. Determine o valor de x, em graus, arredondado às unidades.

Exame Nacional 2.ª chamada 2000

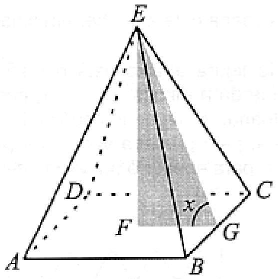
6. Considere a função f, de domínio R, definida por f(x)=2x-cos x. Na figura abaixo estão representadas: parte do gráfico da função f; parte de uma recta r, cuja inclinação é 45^0, que contém o ponto A(-3,0) e que intersecta o gráfico da função f no ponto B.



Recorrendo à sua calculadora, determine a área do triângulo [AOB], onde O designa a origem do referencial. Apresente o resultado arredondado às unidades.

Exame Nacional 1.ª chamada 2000

7. Na figura está representada uma pirâmide quadrangular regular.
Sabe-se que: a base da pirâmide tem centro F e lado 2; G é o ponto médio da aresta [BC]; x designa a amplitude do ângulo FGE.

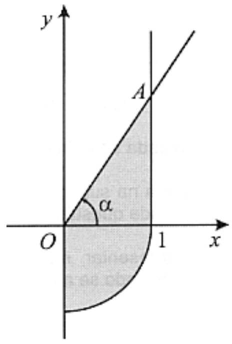


a) Mostre que a área total da pirâmide é dada, em função de x, por A(x)= $\frac{4\cos x + 4}{\cos x}$ (x∈]0,π/2[)

b) Use a calculadora gráfica para resolver o seguinte problema: o que acontece a A(x) quando x aproxima-se de $\frac{\pi}{2}$? Interprete geometricamente o valor obtido.

Exame Nacional 1.ª chamada 2001-adaptação

8. Na figura estão representados, em referencial o.n. xOy: um quarto de círculo, de centro na origem e raio1; uma semi-recta paralela ao eixo Oy, com origem no ponto (1,0); um ponto A pertencente a esta semi-recta; um ângulo de amplitude α, cujo lado origem é o semieixo positivo Ox e cujo lado extremidade é a semi-recta AO. Qual das expressões seguintes dá a área da região sombreada, em função de α?

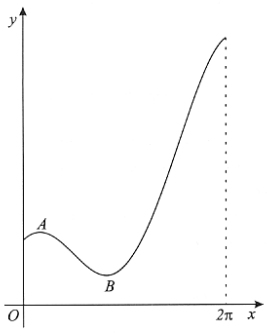


(A) $\frac{\pi}{4} + \frac{tg\,\alpha}{2}$ (B) $\frac{\pi}{4} + \frac{2}{tg\,\alpha}$

(C) $\pi + \frac{tg\,\alpha}{2}$ (D) $\pi + \frac{2}{tg\,\alpha}$

Exame Nacional 1.ª chamada 2001

9. Na figura está representado o gráfico da função f, de domínio [0,2π], definida por f(x)=x+2cosx
A e B são pontos do gráfico cujas ordenadas são extremos relativos de f. A ordenada do ponto A é $\frac{\pi+6\sqrt{3}}{6}$ e a do ponto B é $\frac{5\pi-6\sqrt{3}}{6}$.

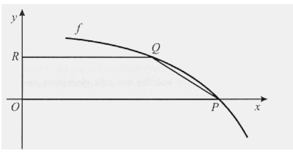


a) Qual é o contradomínio de f?

b) Considere a recta tangente ao gráfico de f no ponto A. Esta recta intersecta o gráfico num outro ponto C. Recorrendo à calculadora, determine um valor aproximado para a abcissa do ponto C (apresente o resultado arredondado às décimas). Explique como procedeu (na sua explicação, deve incluir o gráfico, ou gráficos, que considerou para resolver esta questão).

Exame Nacional 2.ª chamada 2001-adaptação

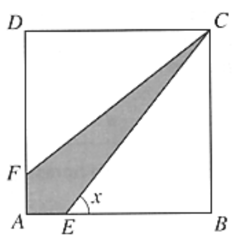
10. Considere a função f, de domínio]-π,π[, definida por f(x)= $\frac{\cos x}{1+\cos x}$. Sem recorrer à calculadora, resolva a alínea seguinte.



Na figura está representada, em referencial o.n. xOy, uma parte do gráfico da função f. Na mesma figura está também representado um trapézio [OPQR]. O ponto O é a origem do referencial, e os pontos P e R pertencem aos eixos Ox e Oy, respectivamente. Os pontos P e Q pertencem ao gráfico de f. Sabendo que o ponto R tem ordenada 1/3, determine a área do trapézio.

Exame Nacional 2.ª fase 2001-adaptação

11. Na figura está representado um quadrado [ABCD], de lado 1. O ponto E desloca-se sobre o lado [AB], e o ponto F desloca-se sobre o lado [AD], de tal forma que se tem sempre $\overline{AE} = \overline{AF}$. Para cada posição do ponto E, seja x a amplitude do ângulo BEC (x∈]π/4,π/2[).

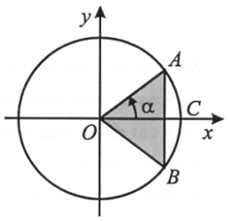


a) Mostre que o <u>perímetro</u> do quadrilátero [CEAF] é dado, em função de x, por $f(x) = 2 - \frac{2}{tgx} + \frac{2}{senx}$.

b) Use a calculadora gráfica para resolver o seguinte problema: o que acontece a f(*x*) quando *x* se aproxima de $\frac{\pi}{2}$? Interprete geometricamente o valor obtido.

Exame Nacional 1.ª chamada 2002-adaptação

12. Na figura estão representados, em referencial o.n. xOy, o círculo trigonométrico e um triângulo [OAB]. Os pontos A e B pertencem à circunferência; o segmento [AB] é perpendicular ao semieixo positivo Ox; o ponto C é o ponto de intersecção da circunferência com o semieixo positivo Ox.



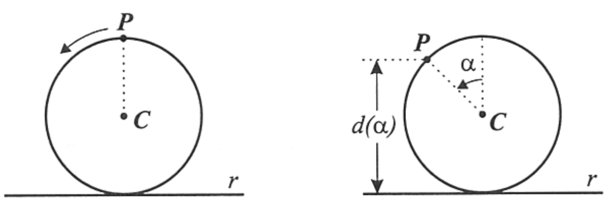
Seja α a amplitude do ângulo COA ($\alpha \in]0,\pi/2[$). Qual das expressões seguintes dá a área do triângulo [OAB], em função de α?

(A) $sen\alpha \cdot cos\alpha$ (B) $\frac{tg\alpha \cdot \cos\alpha}{2}$

(C) $tg\alpha \cdot sen\alpha$ (D) $\frac{tg\alpha \cdot sen\alpha}{2}$

Exame Nacional 2.ª chamada 2002

13. Considere uma circunferência de centro C e raio 1, tangente a uma recta r. Um ponto P começa a deslocar-se sobre a circunferência, no sentido indicado na figura. Inicialmente, o ponto P encontra-se à distância de 2 unidades da recta r.



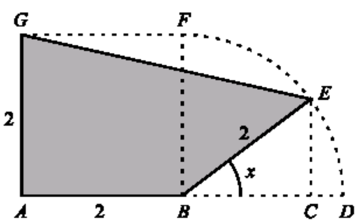
Seja $d(\alpha)$ a distância de P a r, após uma rotação de amplitude α. Qual das igualdades seguintes é verdadeira para qualquer nº real positivo α?

(A) $d(\alpha)=1+\cos\alpha$ (B) $d(\alpha)=2+sen\alpha$

(C) $d(\alpha)=1-\cos\alpha$ (D) $d(\alpha)=2-sen\alpha$

Exame Nacional 2.ª fase 2002

14. Na figura está representado a sombreado um polígono [ABEG].



Tem-se que: [ABFG] é um quadrado de lado 2; FD é um arco de circunferência de centro em B; o ponto E move-se ao longo desse arco; em consequência, o ponto C desloca-se sobre o segmento [BD], de tal forma que se tem sempre [EC]⊥[BD]; *x* designa a amplitude, em radianos, do ângulo CBE, $x \in [0,\pi/2]$

a) Mostre que a área do polígono [ABEG] é dada, em função de *x*, por A(*x*)=2(1+sen*x*+cos*x*)

Sugestão: pode ser-lhe útil considerar o trapézio [ACEG]

b) Determine A(0) e A(π/2). Interprete geometricamente cada um dos valores obtidos.

c) Recorra à calculadora para determinar <u>graficamente</u> as soluções da equação que lhe permite resolver o seguinte problema:

Quais são os valores de x para os quais a área do polígono [ABEG] é 4,3?

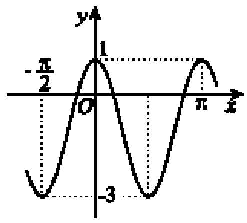
Apresente todos os elementos recolhidos na utilização da calculadora, nomeadamente o <u>gráfico</u>, ou <u>gráficos</u>, obtido(s), bem como coordenadas relevantes de alguns pontos. Apresente os valores pedidos na forma de dízima, arredondados às décimas.

Exame Nacional 1.ª chamada 2003

15. Considere a expressão f(x)=$a+b\,sen^2x$. Sempre que se atribui um valor real a *a* e um valor real a *b*, obtemos uma função de domínio R.

a) Nesta alínea, considere *a*=2 e *b*= -5. Sabe-se que $tg\theta=1/2$. <u>Sem recorrer à calculadora</u>, calcule $f(\theta)$.

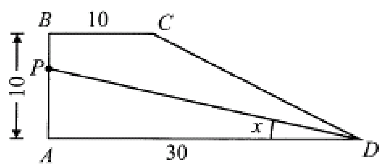
b) Para um certo valor de *a* e um certo valor de *b*, a função f tem o seu gráfico parcialmente representado na figura junta.



Conforme essa figura sugere, tem-se: o contradomínio de f é [-3,1]; 0 e π e são maximizantes; $-\pi/2$ e $\pi/2$ são minimizantes. Determine *a* e *b*.

Exame Nacional 2.ª chamada 2003

16. Na figura está representado um trapézio rectângulo [ABCD], cujas bases têm 10 e 30 unidades de comprimento e a altura tem 10 unidades de comprimento.



Considere que um ponto P se desloca sobre o lado [AB]. Para cada posição do ponto P, seja x a amplitude, em radianos, do ângulo PDA. Pretende-se determinar o valor de x para o qual o segmento [PD] divide o trapézio em 2 figuras com a mesma área. Qual das equações seguintes traduz este problema?

(A) $\frac{30^2 \text{ sen } x}{2} = 100$ (B) $\frac{30^2 \text{ tg } x}{2} = 100$

(C) $\frac{30 \times 10 \text{ sen } x}{4} = 150$ (D) $\frac{30 \times 10 \text{ tg } x}{4} = 150$

Exame Nacional 2.ª fase 2003

17. Considere a função f, de domínio $[-\pi/2, 3\pi/2]$, definida por $f(x)=x+\text{sen } x$. Sem recorrer à calculadora, determine os valores de x, pertencentes ao intervalo $[-\pi/2, 3\pi/2]$, tais que $f(x)=x + \cos x$.

Exame Nacional 2.ª fase 2003

18. A figura 1 representa um depósito de forma cilíndrica, que contém um certo volume de um combustível.

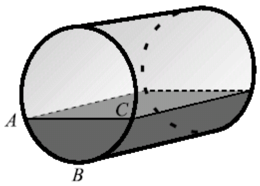


Figura 1

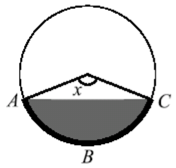


Figura 2

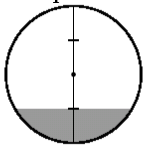
Admita que a função V, de domínio $[0,2\pi]$, definida por $V(x)=80(x-\text{sen}x)$, dá o volume, em metros cúbicos, de combustível existente no depósito, em função da amplitude x, em radianos, do arco ABC (que, como se sabe, é igual à amplitude do ângulo ao centro correspondente, assinalado na figura 2).

a) Qual é a capacidade total do depósito, em metros cúbicos? Apresente o resultado arredondado às unidades.

Nota: se, nos cálculos intermédios, proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, três casas decimais.

b) Recorra à calculadora para determinar graficamente a solução da equação que lhe permite resolver o seguinte problema: *Qual terá de ser a amplitude, em radianos, do arco ABC, para que existam 300 m^3 de combustível no depósito*? Apresente todos os elementos recolhidos na utilização da calculadora, nomeadamente o gráfico, ou gráficos, obtido(s). Apresente o resultado na forma de dízima, arredondado às décimas.

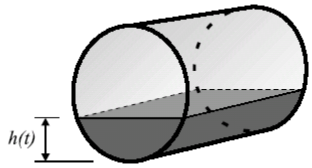
c) Determine, em metros cúbicos, o volume do combustível existente no depósito, no momento em que a sua altura é ¼ da altura máxima.



Apresente o resultado arredondado às unidades.

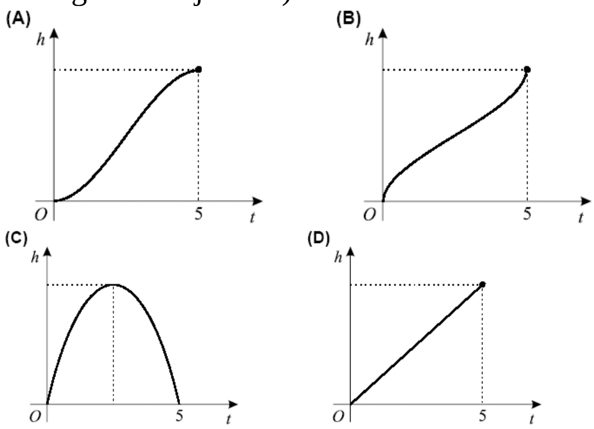
Nota: se, nos cálculos intermédios, proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, três casas decimais.

d) Admita agora que o depósito está vazio e que, num certo instante, se começa a introduzir combustível a uma taxa constante, até ficar cheio, o que acontece ao fim de cinco horas.



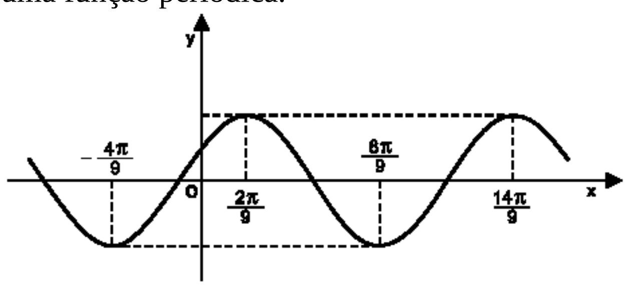
Seja h(t) a altura do combustível no depósito, t horas após o instante em que começa a ser introduzido. Qual dos gráficos seguintes pode ser o da função h?

Numa pequena composição, com cerca de dez linhas, indique as razões que o levam a rejeitar os restantes gráficos (indique três razões, uma por cada gráfico rejeitado).



Exame Nacional 1.ª fase 2004

19. Na figura está representada parte do gráfico de uma função periódica.



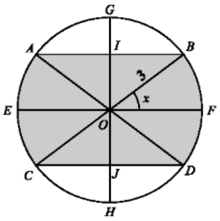
Qual dos valores seguintes poderá ser período desta função?

(A) $\pi/9$ (B) $2\pi/9$ (C) $2\pi/3$ (D) $4\pi/3$

Exame Nacional 2.ª fase 2004

20. Na figura está representada uma circunferência com centro no ponto O e raio 3. Os diâmetros [EF] e [GH] são perpendiculares.

Considere que o ponto B se desloca sobre o arco FG.



Os pontos A, C e D acompanham o movimento do ponto B, de tal forma que: as cordas [AB] e [CD] permanecem paralelas a [EF]; [AD] e [BC] são sempre diâmetros da circunferência.

Os pontos I e J também acompanham o mesmo movimento, de tal forma que são sempre os pontos de intersecção de [GH] com [AB] e [CD], respectivamente. Para cada posição do ponto B, seja x a amplitude, em radianos, do ângulo FOB ($x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$).

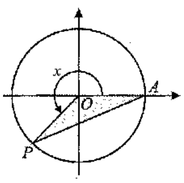
a) Mostre que a área da região sombreada é dada, em função de x, por $A(x)=18(x+\text{sen } x \cdot \cos x)$

Sugestão: use a decomposição sugerida na figura.

b) Recorra à calculadora para determinar graficamente a solução da equação que lhe permite resolver o seguinte problema: Qual é o valor de x para o qual a área da região sombreada é igual a metade da área do círculo? Apresente todos os elementos recolhidos na utilização da calculadora, nomeadamente o gráfico, ou gráficos, obtido(s), bem como coordenadas relevantes, de algum, ou de alguns, ponto(s). Apresente o resultado na forma de dízima, arredondado às centésimas.

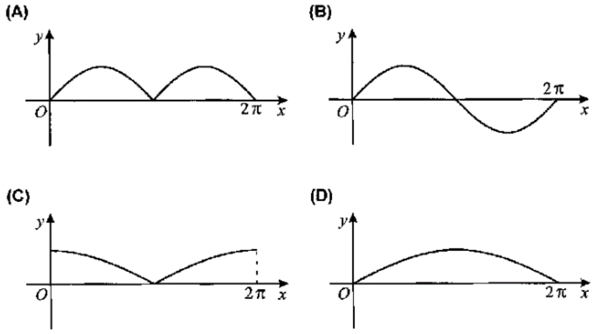
Exame Nacional 1.ª fase 2005

21. Na figura junta está representado o círculo trigonométrico.



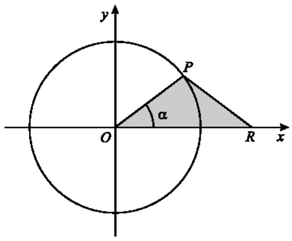
Considere que um ponto P parte de A(1,0) e se desloca sobre uma circunferência, dando uma volta completa, em sentido contrário ao dos ponteiros do relógio. Para cada posição do ponto P, seja x a amplitude, em radianos, do ângulo orientado cujo lado origem é a semi-recta $\dot{O}A$ e cujo lado extremidade é a semi-recta $\dot{O}P$ ($x \in [0, 2\pi]$). Seja *g* a função que, a cada valor de x, faz corresponder a área da região sombreada (região limitada pelo segmentos de recta [OP], [PA] e [AO]).

Qual dos seguintes gráficos pode ser o da função *g*?



Exame Nacional 2.ª fase 2005

22. Na figura está representado o círculo trigonométrico e um triângulo [OPR].



O ponto P desloca-se ao longo da circunferência, no primeiro quadrante. O ponto R desloca-se ao longo do eixo Ox, de tal modo que o triângulo [OPR] sempre isósceles. Sendo α a amplitude, em radianos, do ângulo ROP, qual das expressões seguintes dá a área do triângulo [OPR], em função de α?

(A) $\text{sen}\,\alpha \,.\, \cos\alpha$ **(B)** $2 \,.\, \text{sen}\,\alpha \,.\, \cos\alpha$

(C) $\frac{1+\text{sen}\,\alpha \,.\, \cos\alpha}{2}$ **(D)** $\frac{(1+\cos\alpha)\,.\,\text{sen}\,\alpha}{2}$

Teste Intermédio 2006

23. Da amplitude α de um certo ângulo orientado sabe-se que cos α<0 e tg α>0. Qual das expressões seguintes dá o valor de sen α?

(A) $\sqrt{1-\cos^2\alpha}$ **(B)** $-\sqrt{1-\cos^2\alpha}$

(C) $\sqrt{1+\cos^2\alpha}$ **(D)** $-\sqrt{1+\cos^2\alpha}$

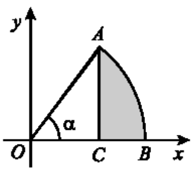
Teste Intermédio 2006

24. Sabe-se que $\beta \in \mathbb{R}$ é uma solução da equação $\text{sen}\, x = \frac{1}{5}$. Qual das expressões seguintes designa uma solução da equação $\cos x = -\frac{1}{5}$?

(A) $\pi+\beta$ (B) $\frac{\pi}{2}+\beta$ (C) $-\beta$ (D) $\frac{\pi}{2}-\beta$

(Teste Intermédio 2006

25. Na figura está representado, em referencial o.n. xOy, um arco AB, que está contido na circunferência de equação $x^2+y^2=1$.



O ponto C pertence ao eixo Ox e o segmento de recta [AC] é perpendicular a este eixo. α é a amplitude, em radianos, do ângulo AOB. Qual é a expressão que dá o perímetro da região sombreada, em função de α?

(A) π×α+sen α+cos α (B) π×α+sen α+1−cos α

(C) 1+α−sen α+cos α (D) 1+α+sen α−cos α

Exame Nacional 2.ª fase 2006

26. Indique as soluções da equação 5+2cos*x*=6 que pertencem ao intervalo [0,2π]

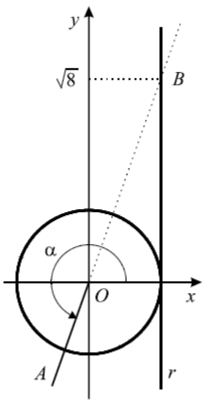
(A) $\frac{\pi}{3}$ e $\frac{4\pi}{3}$ **(B)** $\frac{\pi}{3}$ e $\frac{5\pi}{3}$

(C) $\frac{\pi}{6}$ e $\frac{7\pi}{6}$ **(D)** $\frac{\pi}{6}$ e $\frac{11\pi}{6}$

Teste Intermédio 2007

27. Na figura junta estão representados, em referencial o. n. xOy:

• o círculo trigonométrico; • a recta r, de equação x=1; • o ângulo, de amplitude α, que tem por lado origem o semieixo positivo Ox e por lado extremidade a semi-recta $\dot{O}A$; • o ponto B, intersecção do prolongamento da semi-recta $\dot{O}A$ com a recta r. Como a figura sugere, a ordenada de B é $\sqrt{8}$. <u>Sem recorrer à calculadora</u>, determine o valor de



$5\,\mathrm{sen}(\frac{\pi}{2}+\alpha)+2\cos(3\pi-\alpha)$

Teste Intermédio 2007

28. Seja g a função, de domínio]0,2π[, definida por $g(x)=\frac{x+\mathrm{sen}\,x}{x}$. Considere, num referencial o.n. xOy, a recta r, de equação $y=1$. <u>Recorrendo às capacidades gráficas da sua calculadora</u>, visualize, na janela [0,4] × [0,3], o gráfico da função g e a recta r. Reproduza, na sua folha de teste, o referencial e ambos os gráficos, visualizados na calculadora. Assinale ainda os pontos A e B, em que:

• A é o ponto do gráfico de g de abcissa $\frac{\pi}{2}$; • B é o ponto de intersecção entre o gráfico de g e a recta r. Determine o comprimento do segmento [AB], apresentando o resultado final arredondado às décimas. Se, em cálculos intermédios, proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, duas casas decimais.

Exame ESAAS 1.ª fase 2007

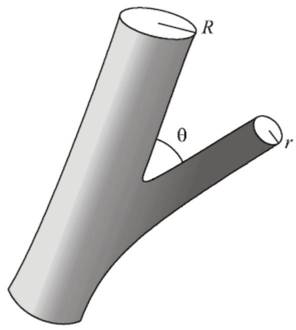
29. Seja f:[0,2π]→ℝ a função definida por f(x)=3−2cosx.

Indique o valor de x para o qual f(x) é máximo.

(A) 0 (B) $\frac{\pi}{2}$ (C) π (D) $\frac{3\pi}{2}$

Exame Nacional 2.ª fase 2007

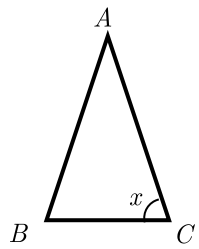
30. Na figura seguinte está representada uma artéria principal do corpo humano, cuja secção é um círculo com raio R, e uma sua ramificação, mais estreita, cuja secção é um círculo com raio r. A secção da artéria principal tem área A e a da ramificação tem área *a*. Seja $\theta\in]0,\frac{\pi}{2}[$ a amplitude, em radianos, do ângulo que a artéria principal faz com a sua ramificação (medida relativamente a duas geratrizes complanares dos dois cilindros). Sabe-se que $a=A\sqrt{\cos\theta}$. Admitindo que o modelo descrito se adequa com exactidão à situação real, determine θ no caso em que os raios referidos verificam a relação $R=\sqrt[4]{2}\ r$



Exame Nacional 2.ª fase 2007

31. Na figura está representado um triângulo isósceles $[ABC]$ em que $\overline{AB}=\overline{AC}=1$. Seja x a amplitude do ângulo ACB.

Qual das expressões seguintes dá a área do triângulo $[ABC]$ em função de x?

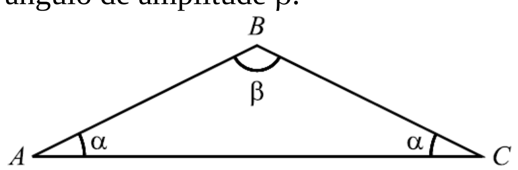


(A) $\mathrm{sen}\,x+\cos x$ (B) $\mathrm{sen}\,x-\cos x$

(C) $\mathrm{sen}\,x\cdot\cos x$ (D) $\frac{\mathrm{sen}\,x}{\cos x}$

Exame ESAAS 2.ª fase 2007

32. Na figura está representado um triângulo [ABC] com dois ângulos de amplitude α e um ângulo de amplitude β.



Qual das igualdades seguintes é verdadeira, para qualquer triângulo nestas condições?

(A) cos β=sen(2α) (B) cos β=cos(2α)

(C) cos β=−sen(2α) (D) cos β=−cos(2α)

1.º Teste Intermédio 2008

33. Seja θ um valor pertencente ao intervalo $]\frac{\pi}{2},\pi[$. Qual das expressões seguintes designa um número real positivo?

(A) cosθ −senθ (B) senθ×cosθ

(C) senθ×tgθ (D) senθ-tgθ

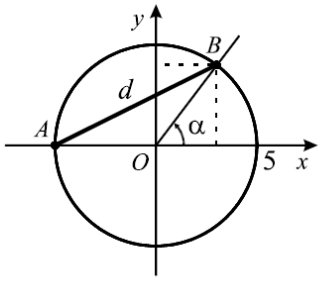
1.º Teste Intermédio 2008

34. Considere a equação $1+3tg(2x)=4$. Qual dos seguintes valores é solução desta equação?

(A) $-\frac{\pi}{8}$ (B) $\frac{3\pi}{8}$ (C) $\frac{5\pi}{8}$ (D) $\frac{7\pi}{8}$

1.º Teste Intermédio 2008

35. Na figura estão representadas, em referencial o. n. *xOy*, uma recta AB e uma circunferência com centro na origem e raio igual a 5. Os pontos A e B pertencem à circunferência. O ponto A também pertence ao eixo das abcissas. Admita agora que o ponto B se desloca ao longo da circunferência, no primeiro quadrante.



Para cada posição do ponto B, seja α a amplitude do ângulo orientado cujo lado origem é o semieixo positivo *Ox* e cujo lado extremidade é a semi-recta $\dot{O}B$.

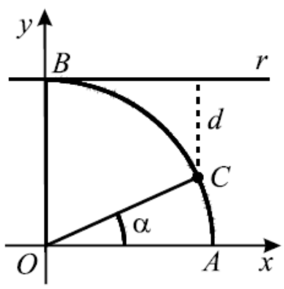
Seja *d* o comprimento do segmento [AB].

a) Mostre que $d^2 = 50 + 50\cos\alpha$

b) Para uma certa posição do ponto B, tem-se $tg\alpha = \sqrt{24}$. Sem recorrer à calculadora, determine, para este caso, o valor de *d*.

1.º Teste Intermédio 2008

36. Na figura está representado, em referencial o.n. *xOy*, um arco de circunferência AB, de centro na origem do referencial e raio igual a 1. A recta *r* tem equação *y* = 1. O ponto C pertence ao arco AB. Seja α a amplitude do ângulo AOC. Qual das expressões seguintes dá a distância *d* do ponto C à recta *r*?



(A) 1+sen(α) (B) 1−sen(α) (C) 1+cos(α) (D) 1−cos(α)

2.º Teste Intermédio 2008

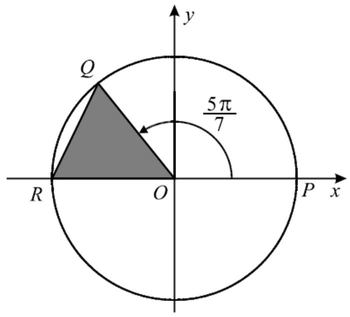
37. Seja $x \in]0,\frac{\pi}{2}[$. Qual das expressões seguintes designa um número positivo?

(A) cos(π−*x*) (B) sen(π−*x*)

(C) $\cos(\frac{3\pi}{2}-x)$ (D) $sen(\frac{3\pi}{2}-x)$

2.º Teste Intermédio 2008

38. Na figura está representado o círculo trigonométrico.



Tal como a figura sugere, *O* é a origem do referencial, Q pertence à circunferência, P é o ponto de coordenadas (1,0) e R é o ponto de coordenadas (−1,0). A amplitude, em radianos, do ângulo POQ é $\frac{5\pi}{7}$. Qual é o valor, arredondado às centésimas, da área do triângulo [OQR]?

(A) 0,39 (B) 0,42 (C) 0,46 (D) 0,49

2.º Teste Intermédio 2008-12.º ano

39. Na figura 4 estão representadas duas rectas paralelas, a recta AB (em que A e B são pontos fixos) e a recta s. O ponto S é um ponto móvel, deslocando-se ao longo de toda a recta s. Para cada posição do ponto S , seja *x* a amplitude, em radianos, do ângulo BAS e seja *a*(*x*) a área do triângulo [ABS]. Apenas um dos seguintes gráficos pode representar a função *a*.

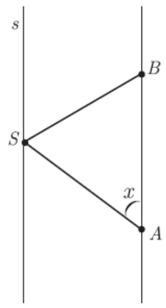
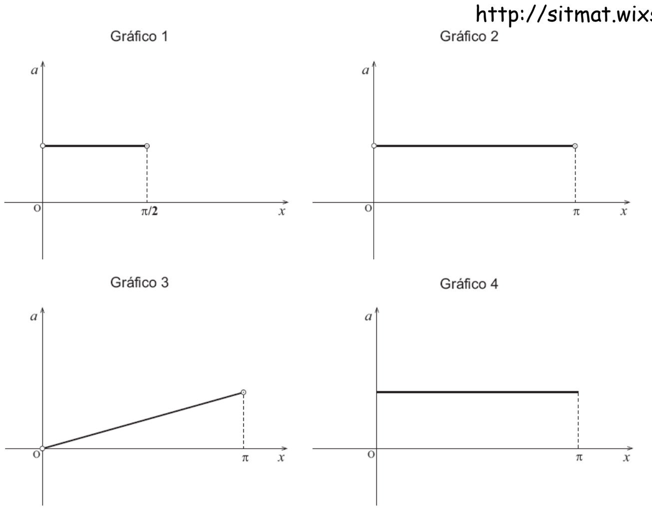


Fig. 4

Numa composição, explique por que razão cada um dos outros três gráficos não pode representar a função *a*.



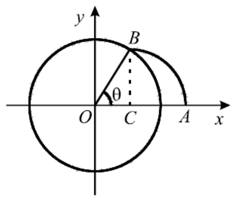
Exame Nacional 2.ª fase 2008

40. Considere a equação trigonométrica cos x = –0,3. Num dos intervalos seguintes, esta equação tem <u>apenas uma</u> solução. Em qual deles?

(A) $[0,\frac{\pi}{2}]$ (B) $[0,\pi]$ (C) $[\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}]$ (D) $[\frac{3\pi}{2},2\pi]$

1.º Teste Intermédio 2009

41. Na figura estão representados, em referencial o.n. *xOy*:



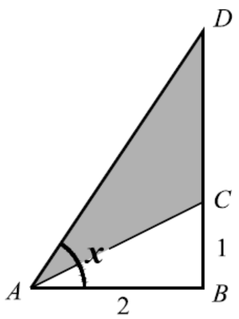
• o círculo trigonométrico
• o raio [OB] deste círculo
• o arco de circunferência AB, de centro no ponto C

Tal como a figura sugere, o ponto B pertence ao primeiro quadrante, os pontos A e C pertencem ao eixo *Ox* e a recta BC é perpendicular a este eixo. Seja θ a amplitude do ângulo AOB. Qual é a abcissa do ponto A?

(A) 1+senθ (B) 1+ cosθ (C) cosθ+senθ (D) 1+cosθ+senθ

1.º Teste Intermédio 2009

42. Relativamente à figura junta, sabe-se que:



• o triângulo [ABD] é rectângulo
• o ponto C pertence ao cateto [BD]
• x designa a amplitude, em radianos, do ângulo BAD
• $\overline{AB}=2$ e $\overline{BC}=1$

a) Mostre que a área do triângulo [ACD] é dada por 2tg(x)–1

b) Determine o valor de x para o qual a área do triângulo [ACD] é igual a 1.

c) Sabendo que $sen(\frac{\pi}{2}+a)=\frac{5}{13}$ e que $a\in]0,\frac{\pi}{2}[$, determine o valor de 2tg(a)–1

1.º Teste Intermédio 2009

43. Na figura 1 está representado, em referencial o.n. *xOy*, o círculo trigonométrico. Os pontos P e Q pertencem à circunferência, sendo a recta PQ paralela ao eixo *Ox*. O ponto R pertence ao eixo *Ox*.

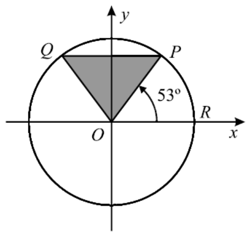


Figura 1

O ângulo ROP tem 53° de amplitude.
Qual é o perímetro do triângulo [OPQ] (valor aproximado às décimas)?

(A) 3,2 (B) 3,4 (C) 3,6 (D) 3,8

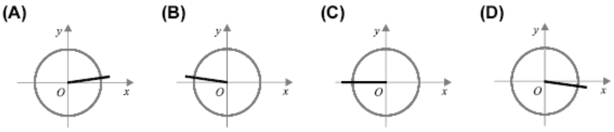
2.º Teste Intermédio 2009

44. A Inês olhou para o seu relógio quando este marcava 10 h e 45 min. Passado algum tempo, ao ver novamente as horas, a Inês concluiu que o ponteiro dos minutos tinha rodado –3π radianos. Que horas marcava o relógio da Inês, neste último instante?

(A) 11 h e 15 min (B) 11 h e 45 min
(C) 12 h e 15 min (D) 13 h e 45 min

2.º Teste Intermédio 2009

45. Em cada uma das figuras seguintes, está representado, no círculo trigonométrico, a traço grosso, o lado extremidade de um ângulo cujo lado origem é o semieixo positivo *Ox*. Em qual das figuras esse ângulo pode ter 3 radianos de amplitude?



1.º Teste Intermédio 2010

46. Considere a equação trigonométrica sen$x$ = 0,1. Em qual dos intervalos seguintes esta equação <u>não</u> tem solução?

(A) $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ **(B)** $\left[0,\pi\right]$

(C) $\left[0,\frac{\pi}{6}\right]$ **(D)** $\left[\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2}\right]$

1.º Teste Intermédio 2010

47. Na figura 1, está representado o quadrado [ABCD] de lado 2. Considere que um ponto P se desloca ao longo do lado [CD], nunca coincidindo com o ponto C, nem com o ponto D. Para cada posição do ponto P, seja *x* a amplitude, em radianos, do ângulo BAP $\left(x \in]\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}[\right)$. Resolva os três itens seguintes, <u>sem recorrer à calculadora</u>, a não ser para efectuar eventuais cálculos numéricos.

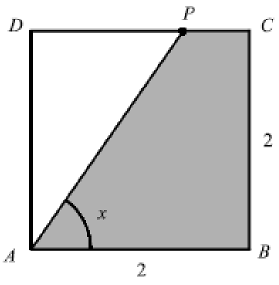


Figura 1

a) Mostre que a área da região sombreada é dada por $4 - \frac{2}{tgx}$

b) Determine o valor de *x* para o qual a área da região sombreada é $\frac{12-2\sqrt{3}}{3}$

c) Para um certo valor de *x*, sabe-se que $\cos(x + \frac{\pi}{2}) = -\frac{15}{17}$. Determine, para esse valor de *x*, a área da região sombreada.

1.º Teste Intermédio 2010

48. Considere, em $\mathbb{R}$, a equação trigonométrica cos*x* = 0,9. Em qual dos intervalos seguintes esta equação <u>não</u> tem solução?

(A) $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ (B) $[0,\pi]$ (C) $[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}]$ (D) $[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$

1.º Teste Intermédio 2011

49. Na Figura 2, está representado o círculo trigonométrico. Sabe-se que:

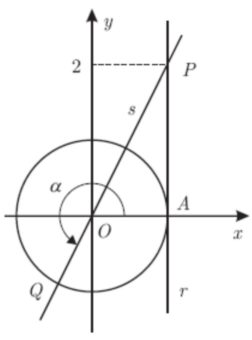


Figura 2

• a recta *r* é tangente à circunferência no ponto A(1,0)
• a recta *s* passa na origem do referencial e intersecta a recta r no ponto P, cuja ordenada é 2
• o ponto Q, situado no terceiro quadrante, pertence à recta *s*

Seja α a amplitude, em <u>radianos</u>, do ângulo orientado, assinalado na figura, que tem por lado origem o semieixo positivo *Ox* e por lado extremidade a semi-recta OQ. Qual é o valor de α, arredondado às centésimas?

(A) 4,23 (B) 4,25 (C) 4,27 (D) 4,29

1.º Teste Intermédio 2011

50. Sejam α, β e θ três números reais. Sabe-se que:
• $\alpha \in]0, \frac{\pi}{4}[$
• $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$
• $\alpha + \theta = 2\pi$

Qual das expressões seguintes é equivalente a senα+senβ+senθ?

(A) 2 senα+ cosα (B) 2 senα− cosα
(C) − cosα (D) cos α

1.º Teste Intermédio 2011

51. Determine o valor de $3 - \frac{1}{tg\alpha}$ sabendo que $\alpha \in]0, \frac{\pi}{2}[$ e que $\cos(\frac{3\pi}{2} - \alpha) = -\frac{4}{5}$. Resolva este item <u>sem recorrer à calculadora</u>.

2.º Teste Intermédio 2011

52. Seja θ um número real. Sabe-se que θ é uma solução da equação $senx = -\frac{1}{3}$. Qual das expressões seguintes designa uma solução da equação $senx = \frac{1}{3}$?

(A) $\pi - \theta$ (B) $\pi + \theta$ (C) $\frac{\pi}{2} - \theta$ (D) $\frac{\pi}{2} + \theta$

Teste Intermédio 2012

53. Considere o triângulo [ABC] representado na Figura 2.

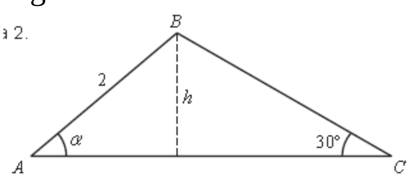


Figura 2

Sabe-se que:
• $\overline{AB} = 2$
• $A\hat{C}B = 30°$

Seja $\alpha = B\hat{A}C$. Qual das expressões seguintes representa $\overline{BC}$, em função de α?

(A) 4 sen α (B) 6 sen α (C) 4 cos α (D) 6 cos α

Teste Intermédio 2012

54. Na Figura 5, está representado, num referencial o.n. xOy, o círculo trigonométrico.

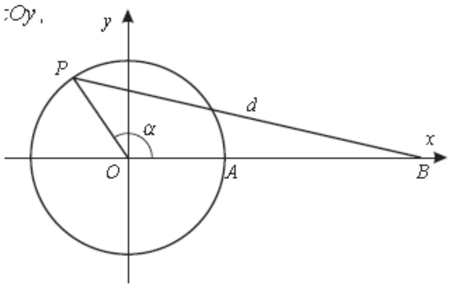


Figura 5

Sabe-se que:

- o ponto A tem coordenadas (1, 0)
- o ponto B tem coordenadas (3, 0)

Considere que um ponto P se move sobre a circunferência.

Para cada posição do ponto P, seja $d = \overline{PB}$ e seja $\alpha \in [0,2\pi[$ a amplitude, em radianos, do ângulo orientado cujo lado origem é o semieixo positivo Ox e cujo lado extremidade é a semirreta $\dot{O}P$. Resolva os itens seguintes sem recorrer à calculadora.

a) Mostre que $d^2 = 10 - 6\cos\alpha$

Sugestão: Exprima as coordenadas do ponto P em função de α e utilize a fórmula da distância entre dois pontos.

b) Resolva os dois itens seguintes tendo em conta que
$d^2 = 10 - 6\cos\alpha$

b_1) Determine os valores de $\alpha \in [0,2\pi[$ para os quais $d^2 = 7$

b_2) Para um certo valor de α pertencente ao intervalo $[0,\pi]$, tem-se tg $\alpha = \sqrt{35}$. Determine d, para esse valor de α

Teste Intermédio 2012

55. Considere o intervalo $[\frac{5\pi}{6}, \frac{4\pi}{3}]$. Qual das equações seguintes não tem solução neste intervalo?

(A) cos x = −0,5 (B) sen x = −0,5

(C) cos x = −0,9 (D) sen x = −0,9

Teste Intermédio 2013

56. Na Figura 3, está representado, num referencial o.n. xOy, o círculo trigonométrico. Os pontos A, B, C e D são os pontos de intersecção da circunferência com os eixos do referencial.

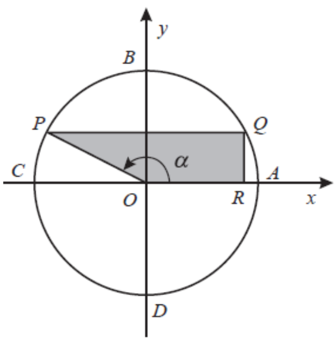


Figura 3

Considere que um ponto P se desloca ao longo do arco BC, nunca coincidindo com B nem com C. Para cada posição do ponto P, seja Q o ponto do arco AB que tem ordenada igual à ordenada do ponto P e seja R o ponto do eixo Ox que tem abcissa igual à abcissa do ponto Q. Seja α a amplitude, em radianos, do ângulo orientado que tem por lado origem o semieixo positivo Ox e por lado extremidade a semirreta $\dot{O}P$ $(\alpha \in]\frac{\pi}{2}, \pi[)$.

Resolva os itens seguintes, sem recorrer à calculadora.

a) Mostre que a área do trapézio [OPQR] é dada por $-\frac{3}{2} sen\alpha \cos\alpha$

b) Para uma certa posição do ponto P, a reta OP intersecta a reta de equação x = 1 num ponto de ordenada $-\frac{7}{24}$. Determine, para essa posição do ponto P, a área do trapézio [OPQR]. Apresente o resultado na forma de fração irredutível.

Teste Intermédio 2013

57. Qual das expressões seguintes designa um número real positivo, para qualquer *x* pertencente ao intervalo $]\pi, \frac{3\pi}{2}[$?

(A) sen *x* + cos *x* (B) $\frac{\cos x}{tgx}$

(C) tg *x* - sen *x* (D) sen *x* × tg *x*

Teste Intermédio 2014

58. Considere, em $\mathbb{R}$, a equação trigonométrica sen *x* = 0,3. Quantas soluções tem esta equação no intervalo $[-20\pi, 20\pi[$?

(A) 20 (B) 40 (C) 60 (D) 80

Teste Intermédio 2014

59. Na Figura 3, estão representados:

- o retângulo [ABCD], em que $\overline{DC} = 1$ e $\overline{BC} = 2$
- o ponto O, ponto médio do segmento [AD]
- uma semicircunferência de centro no ponto O e raio 1.

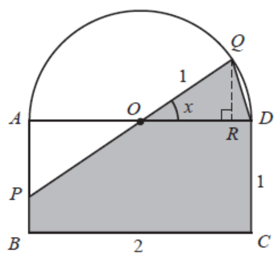


Figura 3

Considere que um ponto P se desloca ao longo do segmento de reta [AB], nunca coincidindo com A, mas podendo coincidir com B. Para cada posição do ponto P, seja Q o ponto de intersecção da reta PO com a semicircunferência. Seja *x* a amplitude, em radianos, do ângulo DOQ ($x \in]0, \frac{\pi}{4}[$). Resolva os dois itens seguintes sem recorrer à calculadora.

a) Mostre que a área do polígono [BCDQP], representado a sombreado, é dada, em função de x, por $2-\frac{tgx}{2}+\frac{senx}{2}$

b) Para uma certa posição do ponto P, tem-se $\cos(\frac{3\pi}{2}-x)=-\frac{3}{5}$. Determine, para essa posição do ponto P, a área do polígono [BCDQP]. Apresente o resultado na forma de fração irredutível.

Teste Intermédio 2014

60. Na Figura 1, está representada, num referencial o.n. xOy, uma circunferência de centro O e raio 1.

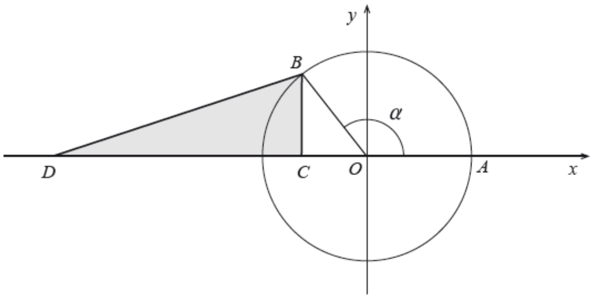


Figura 1

Sabe-se que:
• os pontos A e B pertencem à circunferência;
• o ponto A tem coordenadas (1, 0)
• os pontos B e C têm a mesma abcissa;
• o ponto C tem ordenada zero;
• o ponto D tem coordenadas (–3, 0)
• α é a amplitude, em radianos, do ângulo AOB, com $\alpha\in]\frac{\pi}{2},\pi[$. Qual das expressões seguintes representa, em função de α, a área do triângulo [BCD] ?

(A) $\frac{1}{2}(-3-\operatorname{sen}\alpha)\cos\alpha$ **(B)** $\frac{1}{2}(-3+\operatorname{sen}\alpha)\cos\alpha$

(C) $\frac{1}{2}(3+\cos\alpha)\operatorname{sen}\alpha$ **(D)** $\frac{1}{2}(3-\cos\alpha)\operatorname{sen}\alpha$

Exame Nacional 1.ª fase 2014

61. Na Figura 5, estão representados uma circunferência de centro O e raio 2 e os pontos P, Q, R e S. Sabe-se que:

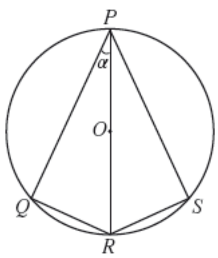


Figura 5

• os pontos P, Q, R e S pertencem à circunferência;
• [PR] é um diâmetro da circunferência;
• $\overline{PQ}=\overline{PS}$
• α é a amplitude, em radianos, do ângulo QPR
• $\alpha\in]0,\frac{\pi}{2}[$
• A(α) é a área do quadrilátero [PQRS], em função de α

Para um certo número real θ, com $\theta\in]0,\frac{\pi}{2}[$, tem-se que $tg\theta=2\sqrt{2}$. Determine o valor exato de A(θ), recorrendo a métodos analíticos, sem utilizar a calculadora. Comece por mostrar que A(α) = 16senα cos α

Exame Nacional 2.ª fase 2014

62. Na Figura 1, estão representadas, num referencial o.n. xOy, a circunferência de centro O e a reta r.

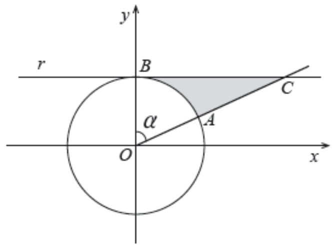


Figura 1

Sabe-se que:
• os pontos A e B pertencem à circunferência;
• o ponto B tem coordenadas (0, 1)
• a reta r é tangente à circunferência no ponto B
• o ponto C é o ponto de intersecção da reta r com a semirreta $\dot{O}A$
• α é a amplitude, em radianos, do ângulo AOB, com $\alpha\in]0,\frac{\pi}{2}[$

Qual das expressões seguintes representa, em função de α, a área da região a sombreado?

(A) $\frac{\operatorname{sen}\alpha-\alpha}{2}$ **(B)** $\frac{\operatorname{tg}\alpha-\alpha}{2}$

(C) $\frac{\operatorname{tg}\alpha}{2}$ **(D)** $\frac{\alpha}{2}$

Exame Nacional fase especial 2014

63. Na Figura 1, estão representados o círculo trigonométrico e um trapézio retângulo [OPQR]. Sabe-se que:

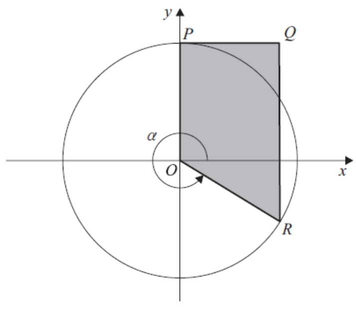


Figura 1

• o ponto P tem coordenadas (0,1)

• o ponto R pertence ao quarto quadrante e à circunferência.

Seja α a amplitude de um ângulo orientado cujo lado origem é o semieixo positivo Ox e cujo lado extremidade é a semirreta $\dot{O}R$. Qual das expressões seguintes dá a área do trapézio [OPQR], em função de α?

(A) $\frac{\cos\alpha}{2}+\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha$ (B) $\frac{\cos\alpha}{2}-\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha$

(C) $\cos\alpha+\frac{\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha}{2}$ (D) $\cos\alpha-\frac{\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha}{2}$

Exame Nacional 1.ª fase 2016

64. Seja f a função, de domínio A e contradomínio $]-1,+\infty[$, definida por f(x) = tg x. Qual dos conjuntos seguintes pode ser o conjunto A ?

(A) $\left]-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right[$ (B) $\left]\frac{3\pi}{4},\frac{3\pi}{2}\right[$

(C) $\left]\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{4}\right[$ (D) $\left]\frac{5\pi}{4},\frac{3\pi}{2}\right[$

Exame Nacional 1.ª fase 2017

65. Seja f a função definida por f(x)=1+arccos(−2x). Quais são, respetivamente, o domínio e o contradomínio desta função?

(A) $\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$ e $[1,1+\pi]$ (B) $[-2,2]$ e $[0,\pi]$

(C) $\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$ e $[0,\pi]$ (D) $[-2,2]$ e $[1,1+\pi]$

Informações complementares 2018

66. Qual é o valor de $arcsen(1)+arccos(-\frac{1}{2})$?

(A) $\frac{7\pi}{6}$ (B) $\frac{\pi}{6}$ (C) $\frac{3\pi}{4}$ (D) $\frac{\pi}{4}$

Exame Nacional 1.ª fase 2018

67. Na Figura 1, está representado um triângulo [ABC]. Sabe-se que:

- $\overline{AC}=5$
- $B\hat{A}C=57^\circ$
- $A\hat{B}C=81^\circ$

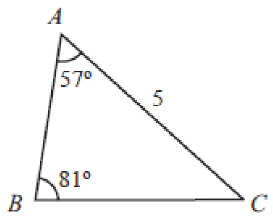


Figura 1

Qual é o valor de $\overline{AB}$, arredondado às centésimas ?

(A) 3,31 (B) 3,35 (C) 3,39 (D) 3,43

Exame Nacional 2.ª fase 2018

68. O planeta Mercúrio descreve uma órbita elíptica em torno do Sol. Na Figura 2, está representado um esquema de uma parte dessa órbita.

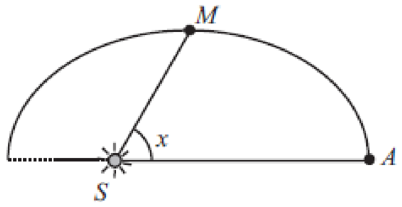


Figura 2

Relativamente a esta figura, tem-se que:

• o ponto S representa o Sol;
• o ponto M representa o planeta Mercúrio;
• o ponto A representa o afélio, que é o ponto da órbita mais afastado do Sol;
• x é a amplitude do ângulo ASM, compreendida entre 0 e 180 graus.

Admita que a distância, d, em milhões de quilómetros, do planeta Mercúrio ao Sol é dada, em função de x, por $d=\frac{555}{10-2{,}06\cos x}$

Seja α a amplitude do ângulo ASM, num certo instante (α está compreendido entre 0 e 20 graus). Nesse instante, o planeta Mercúrio encontra-se a uma certa distância do Sol. Passado algum tempo, a amplitude do ângulo ASM é três vezes maior e a distância do planeta Mercúrio ao Sol diminuiu 3%. Determine, recorrendo às capacidades gráficas da calculadora, o valor de α, sabendo-se que esse valor existe e é único. Não justifique a validade do resultado obtido na calculadora.

Na sua resposta:

— equacione o problema;

— reproduza, num referencial, o(s) gráfico(s) da(s) função(ões) visualizado(s) na calculadora que lhe permite(m) resolver a equação;

— apresente o valor de α em graus, arredondado às unidades.

Exame Nacional 2.ª fase 2018

69. Considere a função f , definida em $\left[-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3}\right]$ por f(x) = cos x. Qual dos seguintes conjuntos é o contradomínio da função f ?

(A) $\left[\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right]$ (B) $\left[\frac{\sqrt{3}}{2},1\right]$

(C) $\left[\frac{1}{2},1\right]$ (D) $\left[0,\frac{1}{2}\right]$

Exame Nacional fase especial 2018

70. Qual é a solução da equação 2cos x + 1 = 0 no intervalo [−π,0]?

(A) $-\frac{5\pi}{6}$ (B) $-\frac{2\pi}{3}$ (C) $-\frac{\pi}{3}$ (D) $-\frac{\pi}{6}$

Exame Nacional 1.ª fase 2019

71. Qual é o valor de $\operatorname{sen}\left(3\arccos\frac{1}{2}\right)$?

(A) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (B) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (C) 0 (D) 1

Exame Nacional 2.ª fase 2019

72. Seja g a função definida em]0,π[por $g(x)=\frac{1}{4}\cos(2x)-\cos x$ e seja f a função, de domínio $\left]-\frac{\pi}{2},0\right[$, definida por $f(x)=g(-x)+g\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$. Qual das expressões seguintes também pode definir a função f ?

(A) sen x + cos x (B) −sen x − cos x

(C) sen x − cos x (D) −sen x + cos x

Exame Nacional 2.ª fase 2019

73. De um triângulo, sabe-se que os comprimentos dos seus lados são 4, 5 e 8. Seja α a amplitude, em graus, do maior ângulo interno desse triângulo. Qual é o valor de α, arredondado às unidades?

(A) 75° (B) 100° (C) 120° (D) 125°

Exame Nacional fase especial 2019

74. Na Figura 5, estão representados, num referencial o.n. xOy, a circunferência trigonométrica, a reta r de equação x = 1, e um ponto A, de ordenada *a* (*a*>1), pertencente à reta r. Está também representada a semirreta $\dot{O}A$, que intersecta a circunferência trigonométrica no ponto B.

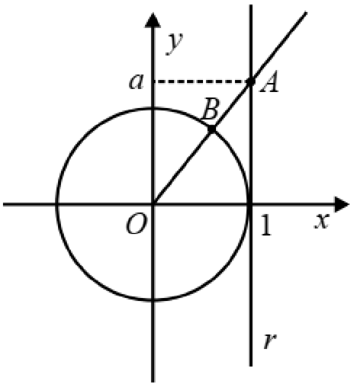


Figura 5

Qual das expressões seguintes dá, em função de *a*, a abcissa do ponto B?

(A) $\frac{1}{\sqrt{a^2+1}}$ (B) $\sqrt{a^2+1}$

(C) $\frac{1}{\sqrt{a^2-1}}$ (D) $\sqrt{a^2-1}$

Exame Nacional 1.ª fase 2020

75. Considere a função h, de domínio ℝ, definida por $h(x)=\frac{5}{4+3\cos(2x)}$. Determine, sem recorrer à calculadora, as abcissas dos pontos do gráfico da função h, pertencentes ao intervalo]−π,π[, cuja ordenada é 2.

Exame Nacional fase especial 2020

76. Na Figura 2, estão representados, num referencial o.n. xOy, a circunferência de centro em O e raio 3 e o triângulo [ABC]. Sabe-se que:

- o segmento de reta [AB] é um diâmetro da circunferência;
- α é a inclinação da reta AB $\left(\alpha\in\left]\frac{\pi}{2},\pi\right[\right)$
- o ponto C pertence ao semieixo positivo Ox
- a reta BC é paralela ao eixo Oy

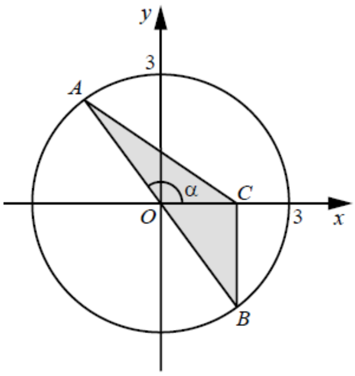


Figura 2

Mostre que a área do triângulo [ABC] é dada pela expressão −9 senα cosα.

Exame Nacional 1.ª fase 2021

77.

Sabe-se que $\operatorname{sen}\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)=-\frac{1}{5}$ e que $\alpha\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$

Determine, sem recorrer à calculadora, o valor de $\operatorname{tg}(\pi-\alpha)+2\cos\left(-\frac{7\pi}{2}+\alpha\right)$

Apresente o resultado na forma $\frac{a\sqrt{b}}{c}$, $a\in\mathbb{Z}$, $b\in\mathbb{N}$ e $c\in\mathbb{N}$

Exame Nacional 2.ª fase 2021

78. Na Figura 2, está representado, num referencial o.n. xOy, o arco de circunferência AB, contido no primeiro quadrante do plano cartesiano, cujo centro é a origem do referencial e cujo raio é igual a r (r>0).

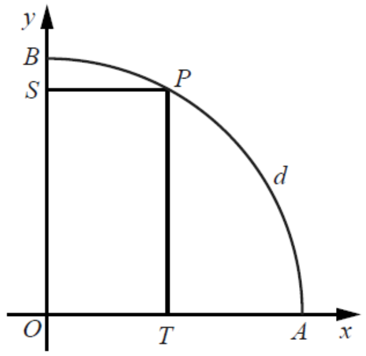


Figura 2

O ponto A pertence ao eixo Ox e o ponto B pertence ao eixo Oy. Seja P um ponto do arco AB, distinto de A e de B, e seja d o comprimento do arco AP. O ponto S pertence ao eixo das ordenadas e tem ordenada igual à do ponto P. O ponto T pertence ao eixo das abcissas e tem abcissa igual à do ponto P. Mostre que uma expressão que dá o valor de $\overline{BS}+\overline{TA}$, em função de d e de r, é

$$r\left(2-\operatorname{sen}\left(\frac{d}{r}\right)-\cos\left(\frac{d}{r}\right)\right)$$

Exame Nacional fase especial 2021

79. Na Figura 6, está representado o triângulo [ABC].

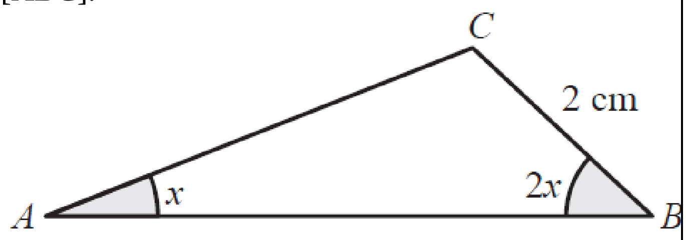


Figura 6

Seja $x\in\left]0,\frac{\pi}{4}\right[$: a amplitude, em radianos, do ângulo BAC. Sabe-se que:

- $C\hat{B}A = 2x$;
- $\overline{BC} = 2\text{ cm}$.

Sabendo que $\operatorname{sen}(2x)=2\operatorname{sen}x\cos x$ e que $\cos(2x)=\cos^2 x-\operatorname{sen}^2 x$, mostre que o comprimento de [AB], em centímetros, é dado, para cada valor de x, pela expressão

$$8\cos^2 x-2$$

Adaptado do Exame Nacional 1.ª fase 2022

80. Na Figura 2, está representado um triângulo, [ABC], inscrito numa semicircunferência de diâmetro $\overline{AC}=4$.

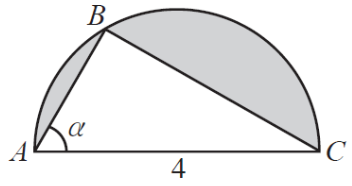


Figura 2

Seja α a amplitude do ângulo CAB. Sabendo que $\operatorname{sen}(2\alpha)=2\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha$, mostre que a área da região sombreada na figura é dada, em função de α, por $2\pi-4\operatorname{sen}(2\alpha)$

Adaptado do Exame Nacional fase especial 2022

81. Na Figura 4, estão representados, em referencial o.n. Oxy, a circunferência trigonométrica, o triângulo [ABC] e a reta de equação x = 1 .

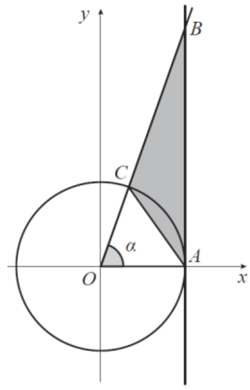


Figura 4

Sabe-se que:

- o ponto A tem coordenadas (1,0);
- o ponto B pertence à reta de equação x = 1 ;
- C é o ponto de intersecção da semirreta $\dot{O}B$ com a circunferência trigonométrica;
- $A\hat{O}B=\alpha$, $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$ e $\cos\alpha=\frac{1}{3}$.

Determine a área do triângulo [ABC].

Exame Nacional fase especial 2023

82. Na Figura 5, estão representados, em referencial o.n. Oxy :

- uma circunferência, de centro na origem;
- o ponto A , ponto de intersecção da circunferência com o semieixo positivo Ox ;
- a reta r , de equação reduzida y= x - 6 .

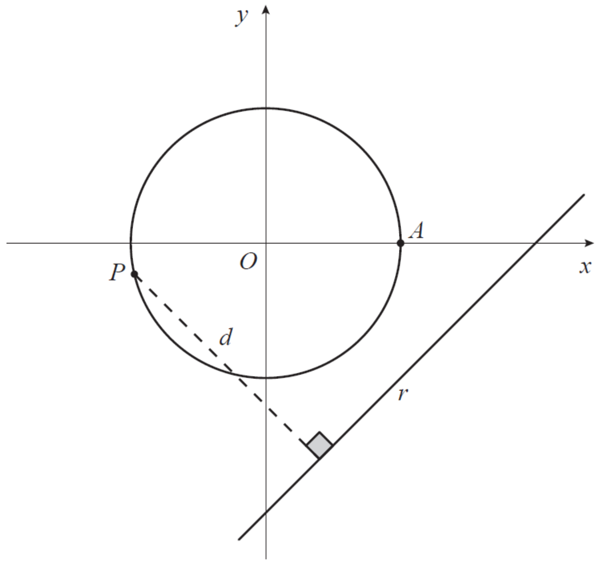


Figura 5

Considere que um ponto, P, partindo de A , se desloca sobre a circunferência, no sentido positivo, durante 7 segundos, percorrendo mais do que uma volta. Nesse percurso, a distância, d , do ponto P à reta r , t segundos após o início do deslocamento, é dada por

$$d(t)=\frac{3\sqrt{2}}{2}(2+\operatorname{sen} t-\cos t)\ ,\ \text{com}\ \ t\in[0,7]$$

Sabe-se que as distâncias máxima e mínima do ponto P à reta r são, respetivamente, $3\sqrt{2}+3$ e $3\sqrt{2}-3$. Durante o percurso, existem dois instantes em que a distância do ponto P à reta r é igual ao diâmetro da circunferência. Determine, recorrendo à calculadora gráfica, esses instantes. Apresente os resultados em segundos, arredondados às décimas. Não justifique a validade dos resultados obtidos. Na sua resposta:

– apresente uma equação que lhe permita resolver o problema;

– represente, num referencial, o(s) gráfico(s) da(s) função(ões) visualizado(s) na calculadora e assinale os pontos relevantes, que lhe permitem resolver a equação.

Exame Nacional fase especial 2023

Soluções:

1. C 2. triang. rect. e isósc. 3. π 4. 18h50m; 38 5. 2031; 229^0 6. 8 7. +∞ 8. A
9. [(5π-6√3)/6,2π+2]; 3,8 10. 5π/36 11. 4 12. A 13. A 14. 4; 0,2 e 1,4
15. 1; 1 e -4 16. B 17. π/4 e 5π/4 18. 503; 3,4; 98; B 19. D 20. 0,42 21. A 22. A 23. B
24. B 25. D 26. B 27. -1 28. 1,7 29. C 30. π/3 31. C 32. D 33. D 34. C 35. √60 36. B
37. B 38. A 39. 2 40. B 41. C 42. π/4; 19/5 43. A 44. C 45. B 46. D 47. π/3; 38/3 48. C
49. B 50. D 51. 9/4 52. B 53. A 54. π/3 ∨ 5π/3; √11 55. D 56. 252/625 57. C 58. B 59. 77/40
60. C 61. 32√2/9 62. B 63. D 64. D 65. A 66. A 67. C 68. 10 69. C 70. B 71. C 72. B
73. D 74. A 75. -2π/3, -π/3, π/3 e 2π/3 77. –14√6/5 81. 2√2/3 82. 1,4 e 3,3

O professor: Roberto Oliveira