Escola Secundária de Paredes

Proposta de Resolução da Ficha de Trabalho 10

Matemática A

12.º Ano de Escolaridade • Turma: $B + C + H$

Aula de Apoio

março de 2023

1. .

1.1. $2z^2 - 2z + 1 = 0 \Leftrightarrow z = \dfrac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \times 2 \times 1}}{2 \times 2} \Leftrightarrow z = \dfrac{2 \pm \sqrt{-4}}{4} \Leftrightarrow z = \dfrac{2 \pm \sqrt{4i^2}}{4} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow z = \dfrac{2 \pm 2i}{4} \Leftrightarrow z = \dfrac{2 - 2i}{4} \vee z = \dfrac{2 + 2i}{4} \Leftrightarrow z = \dfrac{2}{4} - \dfrac{2}{4}i \vee z = \dfrac{2}{4} + \dfrac{2}{4}i \Leftrightarrow z = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2}i \vee z = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}i$

Portanto, $C.S. = \left\{\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2}i; \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}i\right\}$

1.2. Sabe-se que 1 é uma das soluções da equação, então,

$z^3 - z^2 + 4z - 4 = 0 = (z - 1)Q(z)$

Pela regra de Ruffini, vem,

$$\begin{array}{c|ccc|c} & 1 & -1 & 4 & -4 \\ 1 & & 1 & 0 & 4 \\ \hline & 1 & 0 & 4 & 0 \end{array}$$

Assim,

$Q(z) = z^2 + 4$

Logo,

$z^3 - z^2 + 4z - 4 = (z - 1)(z^2 + 4)$

Deste modo,

$z^3 - z^2 + 4z - 4 = 0 \Leftrightarrow (z - 1)(z^2 + 4) = 0 \Leftrightarrow z - 1 = 0 \vee z^2 + 4 = 0 \Leftrightarrow z = 1 \vee z^2 = -4 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow z = 1 \vee z = \pm\sqrt{-4} \Leftrightarrow z = 1 \vee z = \pm\sqrt{4i^2} \Leftrightarrow z = 1 \vee z = \pm 2i$

Portanto, $C.S. = \{1; -2i; 2i\}$

2. .

2.1. Ora,

$163 = 4 \times 40 + 3$

Logo, $z_1 = -2 + 2i^{163} = -2 + 2i^{4 \times 40 + 3} = -2 + 2i^3 = -2 - 2i$

$wz_1 - 2i \times \overline{1 + i} = \overline{w}z_2 \Leftrightarrow (x + yi)(-2 - 2i) - 2i \times (1 - i) = (x - yi)(-1) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -2x-2yi-2xi-2yi^2-2i+2i^2=-x+yi \Leftrightarrow -2x-2yi-2xi+2y-2i-2=-x+yi \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -2x+2y-2+(-2y-2x-2)i=-x+yi \Leftrightarrow -2x+2y-2=-x \wedge -2y-2x-2=y \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -2x+x+2y-2=0 \wedge -2y-2x-2=y \Leftrightarrow -x+2y-2=0 \wedge -2y-2x-2=y \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x=2y-2 \wedge -2y-2x-2=y \Leftrightarrow x=2y-2 \wedge -2y-2(2y-2)-2=y \Leftrightarrow x=2y-2 \wedge -6y+4-2=y \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x=2y-2 \wedge -6y-y=-2 \Leftrightarrow x=2y-2 \wedge -7y=-2 \Leftrightarrow x=2y-2 \wedge y=\dfrac{-2}{-7} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x=2y-2 \wedge y=\dfrac{2}{7} \Leftrightarrow x=2\times\dfrac{2}{7}-2 \wedge y=\dfrac{2}{7} \Leftrightarrow x=\dfrac{4}{7}-2 \wedge y=\dfrac{2}{7} \Leftrightarrow x=\dfrac{4}{7}-\dfrac{14}{7} \wedge y=\dfrac{2}{7} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x=-\dfrac{10}{7} \wedge y=\dfrac{2}{7}$

Logo, $w=-\dfrac{10}{7}+\dfrac{2}{7}i$

2.2. $w=\dfrac{-i\left(\overline{z_1}-\overline{3+4i}\right)-1-i^4}{\overline{z_2}+2i}=\dfrac{-i\left(\overline{-2-2i}-(3-4i)\right)-1-1}{\overline{-1}+2i}=\dfrac{-i\left(-2+2i-3+4i\right)-2}{-1+2i}=$

$=\dfrac{-i\left(-5+6i\right)-2}{-1+2i}=\dfrac{5i-6i^2-2}{-1+2i}=\dfrac{5i+6-2}{-1+2i}=\dfrac{4+5i}{-1+2i}=\dfrac{(4+5i)(-1-2i)}{(-1+2i)(-1-2i)}=$

$=\dfrac{-4-8i-5i-10i^2}{1^2+2^2}=\dfrac{-4-8i-5i+10}{5}=\dfrac{6-13i}{5}=\dfrac{6}{5}-\dfrac{13}{5}i$

3. Calculemos $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{x-e^x}{x-1}\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}\lim_{x\to-\infty}\frac{\frac{x}{x}-\frac{e^x}{x}}{\frac{x}{x}-\frac{1}{x}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{1-\frac{e^x}{x}}{1-\frac{1}{x}}=\frac{1-\frac{0}{-\infty}}{1-\frac{1}{-\infty}}=\frac{1-0}{1+0}=1$$

Logo, a equação da assíntota horizontal ao gráfico de f, quando $x\to-\infty$, é $y=1$

Resposta: (B)

4. .

4.1. $g(x)=\left[(\sin(x-2)-\cos(x-2))(\sin(x-2)+\cos(x-2))\right]\sin(2x-4)=$

$=\left(\sin^2(x-2)-\cos^2(x-2)\right)\sin(2x-4)=$

$=-\left(\cos^2(x-2)-\sin^2(x-2)\right)\sin(2x-4)=-\cos(2x-4)\sin(2x-4)=$

$=-\dfrac{1}{2}\times 2\sin(2x-4)\cos(2x-4)=-\dfrac{1}{2}\sin(4x-8)$

4.2. $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{g(x)}{x^2-4}=\lim\limits_{x\to2}\dfrac{-\frac{1}{2}\sin(4x-8)}{(x-2)(x+2)}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}-\dfrac{1}{2}\lim\limits_{x\to2}\dfrac{\sin(4(x-2))}{x-2}\times\lim\limits_{x\to2}\dfrac{1}{x+2}=$

$=-\dfrac{1}{2}\lim\limits_{x\to2}\dfrac{4\sin(4x-8)}{4x-8}\times\dfrac{1}{4}=-\dfrac{1}{2}\lim\limits_{y\to0}\dfrac{\sin y}{y}=-\dfrac{1}{2}\times1=-\dfrac{1}{2}$

Fez-se a mudança de variável

$y=4x-8\Leftrightarrow 4x=y+8\Leftrightarrow x=\dfrac{y+8}{4}$

Se $x\to2$, então $y\to0$

Aplicou-se o limite notável $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{x}=1$

5. $$\lim_{x\to 0}\frac{x-\ln(x+1)}{2e-2e^{x+1}} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x\to 0}\frac{x-\ln(x+1)}{-2e\left(e^x-1\right)} = -\frac{1}{2e}\times\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x}{x}-\frac{\ln(x+1)}{x}}{\frac{e^x-1}{x}} = -\frac{1}{2e}\times\frac{\lim_{x\to 0}(1)-\lim_{y\to 0}\frac{y}{e^y-1}}{\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}} =$$

$$= -\frac{1}{2e}\times\frac{1-\frac{1}{\lim_{y\to 0}\frac{e^y-1}{y}}}{1} = -\frac{1}{2e}\times\frac{1-\frac{1}{1}}{1} = -\frac{1}{2e}\times 0 = 0$$

Fez-se a mudança de variável

$y=\ln(x+1)\Leftrightarrow x+1=e^y\Leftrightarrow x=e^y-1$

Se $x\to 0$, então $y\to 0$

Aplicou-se o limite notável $\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1$

6. $$\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\frac{-f(x)}{\sin\left(2x-\frac{2\pi}{3}\right)} = \lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\frac{-2\cos x+1}{\sin\left(2x-\frac{2\pi}{3}\right)} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{y\to 0}\frac{-2\cos\left(y+\frac{\pi}{3}\right)+1}{\sin(2y)} =$$

$$= \lim_{y\to 0}\frac{-2\left(\cos y\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)-\sin y\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)+1}{\sin(2y)} = \lim_{y\to 0}\frac{-2\left(\cos y\times\frac{1}{2}-\sin y\times\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+1}{\sin(2y)} =$$

$$= \lim_{y\to 0}\frac{-\cos y+1+\sqrt{3}\sin y}{\sin(2y)} = \lim_{y\to 0}\frac{1-\cos y}{\sin(2y)}+\lim_{y\to 0}\frac{\sqrt{3}\sin y}{\sin(2y)} =$$

$$= \lim_{y\to 0}\frac{(1-\cos y)(1+\cos y)}{\sin(2y)(1+\cos y)}+\lim_{y\to 0}\frac{\sqrt{3}\sin y}{2\sin(y)\cos(y)} = \lim_{y\to 0}\frac{1-\cos^2 y}{\sin(2y)(1+\cos y)}+\lim_{y\to 0}\frac{\sqrt{3}}{2\cos(y)} =$$

$$= \lim_{y\to 0}\frac{\sin^2 y}{2\sin y\cos y(1+\cos y)}+\frac{\sqrt{3}}{2} = \lim_{y\to 0}\frac{\sin y}{2\cos y(1+\cos y)}+\frac{\sqrt{3}}{2} =$$

$$= 0+\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Fez-se a mudança de variável

$y=x-\frac{\pi}{3}\Leftrightarrow x=y+\frac{\pi}{3}$

Se $x\to\frac{\pi}{3}$, então $y\to 0$

7. .

7.1. $f'(x)\geq 2e^{2x}\Leftrightarrow (x^2+x)e^{2x}\geq 2e^{2x}\Leftrightarrow (x^2+x)e^{2x}-2e^{2x}\geq 0\Leftrightarrow (x^2+x-2)e^{2x}\geq 0\Leftrightarrow x^2+x-2\geq 0$,

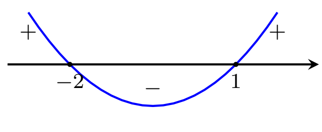
visto que $e^{2x}>0,\forall x\in\mathbb{R}$

Zeros de x^2+x-2

$x^2+x-2=0\Leftrightarrow x=\frac{-1\pm\sqrt{1^2-4\times 1\times(-2)}}{2\times 1}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x=-2\vee x=1$

Sinal de x^2+x-2



Assim,

$x^2+x-2\geq 0\Leftrightarrow x\leq -2\vee x\geq 1$

$C.S.=\left]-\infty;-2\right]\cup\left[1;+\infty\right[$

7.2. Seja $t : y = mx + b, m, b \in \mathbb{R}$, a reta tangente

$f''(x) = \left[(x^2+x)e^{2x}\right]' = (x^2+x)'e^{2x} + (x^2+x)\left(e^{2x}\right)' = (2x+1)e^{2x} + (x^2+x)2e^{2x} =$

$= (2x^2+2x+2x+1)e^{2x} = (2x^2+4x+1)e^{2x}$

$m = f''(1) = (2+4+1)e^2 = 7e^2$

Logo, $t : y = 7e^2x + b, b \in \mathbb{R}$

Ponto de tangência $T(1; f'(1))$

$f'(1) = (1+1)e^2 = 2e^2$

Logo, $T(1; 2e^2)$

Como o ponto T é ponto da reta t, vem,

$2e^2 = 7e^2 \times 1 + b \Leftrightarrow 2e^2 = 7e^2 + b \Leftrightarrow b = 2e^2 - 7e^2 \Leftrightarrow b = -5e^2$

Portanto,

$t : y = 7e^2x - 5e^2$

7.3. $f'(x) = (x^2+x)e^{2x}$

Zeros de $f'(x)$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow (x^2+x)e^{2x} = 0 \Leftrightarrow e^{2x} = 0 \vee x^2+x = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ Equação impossível $\vee x(x+1) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x+1 = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = -1$

Sinal de $f'(x)$

Ora,

- $e^{2x} > 0, \forall x \in \mathbb{R}$

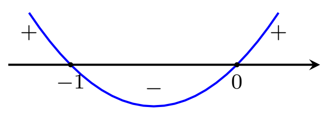
- $x^2 + x$

  Como se trata de uma função quadrática, estuda-se o sinal pela representação gráfica da parábola

  Assim,

  - $x^2 + x > 0 \Leftrightarrow x < -1 \vee x > 0$

  - $x^2 + x < 0 \Leftrightarrow -1 < x < 0$



Elaborando um quadro de sinal de $f'(x)$

x	$-\infty$	-1		0	$+\infty$
e^{2x}	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
x^2+x	$+$	0	$-$	0	$+$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	$f(-1)$	$\searrow$	$f(0)$	$\nearrow$

Concluindo,

A função f é crescente em $]-\infty;-1]$ e em $[0;+\infty[$, e é decrescente em $[-1;0]$

A função atinge o máximo relativo $f\left(-1\right)$, para $x=-1$, e atinge o mínimo relativo $f\left(0\right)$, para $x=0$

7.4. $f''(x)=(2x^2+4x+1)e^{2x}$

Zeros de $f''(x)$

$f''(x)=0 \Leftrightarrow (2x^2+4x+1)e^{2x}=0 \Leftrightarrow e^{2x}=0 \vee 2x^2+4x+1=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ Equação impossível $\vee x=\dfrac{-4\pm\sqrt{4^2-4\times 2\times 1}}{2\times 2} \Leftrightarrow x=\dfrac{-2-\sqrt{2}}{2} \vee x=\dfrac{-2+\sqrt{2}}{2}$

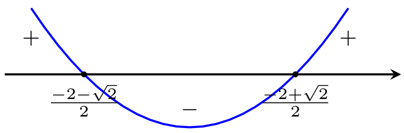
Sinal de $f''(x)$

Ora,

- $e^{2x}>0, \forall x \in \mathbb{R}$
- $2x^2+4x+1$

  Como se trata de uma função quadrática, estuda-se o sinal pela representação gráfica da parábola

  Assim,



  - $2x^2+4x+1>0 \Leftrightarrow x<\dfrac{-2-\sqrt{2}}{2} \vee x>\dfrac{-2+\sqrt{2}}{2}$
  - $2x^2+4x+1<0 \Leftrightarrow \dfrac{-2-\sqrt{2}}{2}<x<\dfrac{-2+\sqrt{2}}{2}$

Elaborando um quadro de sinal de $f''(x)$

x	$-\infty$	$\frac{-2-\sqrt{2}}{2}$		$\frac{-2+\sqrt{2}}{2}$	$+\infty$
e^{2x}	+	+	+	+	+
$2x^2+4x+1$	+	0	−	0	+
$f''(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	$\smile$	$f\left(\frac{-2-\sqrt{2}}{2}\right)$	$\frown$	$f\left(\frac{-2+\sqrt{2}}{2}\right)$	$\smile$

Concluindo,

O gráfico da função f tem a concavidade voltada para cima em $\left]-\infty;\dfrac{-2-\sqrt{2}}{2}\right]$ e em $\left[\dfrac{-2+\sqrt{2}}{2};+\infty\right[$, e tem a concavidade voltada para baixo em $\left[\dfrac{-2-\sqrt{2}}{2};\dfrac{-2+\sqrt{2}}{2}\right]$

$I\left(\dfrac{-2-\sqrt{2}}{2};f\left(\dfrac{-2-\sqrt{2}}{2}\right)\right)$ e $J\left(\dfrac{-2-\sqrt{2}}{2};f\left(\dfrac{-2-\sqrt{2}}{2}\right)\right)$, são pontos de inflexão do gráfico da função f

8. $\ln(1-2x)3^x + 3^x\ln(-x) < \dfrac{\ln 2}{3^{-x}} \Leftrightarrow \ln(1-2x)3^x + 3^x\ln(-x) < 3^x\ln 2 \wedge 1-2x>0 \wedge -x>0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \ln(1-2x)3^x + 3^x\ln(-x) - 3^x\ln 2 < 0 \wedge -2x > -1 \wedge x<0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 3^x\left[\ln(1-2x)+\ln(-x)-\ln 2\right] < 0 \wedge x < \dfrac{1}{2} \wedge x<0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \ln(1-2x)+\ln(-x)-\ln 2 < 0 \wedge x<0$, visto que $3^x>0, \forall x \in \mathbb{R}$

$\Leftrightarrow \ln\left[(1-2x)(-x)\right] < \ln 2 \wedge x<0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \ln(2x^2-x) < \ln 2 \wedge x<0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2x^2-x<2 \wedge x<0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2x^2-x-2<0 \wedge x<0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \dfrac{1-\sqrt{17}}{4} < x < \dfrac{1+\sqrt{17}}{4} \wedge x<0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \dfrac{1-\sqrt{17}}{4} < x < 0$

$C.S. = \left]\dfrac{1-\sqrt{17}}{4}; 0\right[$

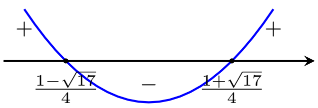
Cálculos auxiliares

Zeros de $2x^2+x-2$

$2x^2-x-2=0 \Leftrightarrow x = \dfrac{-(-1)\pm\sqrt{(-1)^2-4\times 2\times(-2)}}{2\times 2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = \dfrac{1-\sqrt{17}}{4} \vee x = \dfrac{1+\sqrt{17}}{4}$

Sinal de $2x^2-x-2$



9. .

9.1. O ponto A tem coordenadas $(\cos(x); \sin(x))$, com $\cos(x)<0$ e $\sin(x)>0$

O ponto B tem coordenadas $(\cos(x); 1)$, com $\cos(x)<0$

O ponto C tem coordenadas $(-\cos(x); 1)$, com $\cos(x)<0$

O ponto D tem coordenadas $(-\cos(x); \sin(x))$, com $\cos(x)<0$ e $\sin(x)>0$

Assim,

$\overline{AB} = 1-|\sin(x)| = 1-\sin(x)$

$\overline{BC} = 2|\cos(x)| = -2\cos(x)$

Deste modo, a área do retângulo $[ABCD]$, é dada, em função de x, por

$A(x) = \overline{AB} \times \overline{BC} = (1 - \sin(x)) \times (-2\cos(x)) = -2\cos(x) + 2\sin(x)\cos(x) =$

$= -2\cos(x) + \sin(2x)$, com $x \in \left]\frac{\pi}{2}; \pi\right[$

9.2. Para certo $\alpha \in \left]\frac{\pi}{2}; \pi\right[$, sabe-se que $\cos(\pi - \alpha) = \frac{1}{5}$

Então, $\cos(\pi - \alpha) = \frac{1}{5} \Leftrightarrow -\cos(\alpha) = \frac{1}{5} \Leftrightarrow \cos(\alpha) = -\frac{1}{5}$

Ora, de $\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1$, vem,

$\sin^2(\alpha) + \left(-\frac{1}{5}\right)^2 = 1 \Leftrightarrow \sin^2(\alpha) + \frac{1}{25} = 1 \Leftrightarrow \sin^2(\alpha) = 1 - \frac{1}{25} \Leftrightarrow \sin^2(\alpha) = \frac{24}{25} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \sin(\alpha) = \pm\sqrt{\frac{24}{25}} \Leftrightarrow \sin(\alpha) = \pm\frac{2\sqrt{6}}{5}$, e como $\sin(\alpha) > 0$, vem, $\sin(\alpha) = \frac{2\sqrt{6}}{5}$

Assim, a área do retângulo é igual a

$A(\alpha) = -2\cos(\alpha) + \sin(2\alpha) = -2\cos(\alpha) + 2\sin(\alpha)\cos(\alpha) =$

$= -2 \times \left(-\frac{1}{5}\right) + 2 \times \frac{2\sqrt{6}}{5} \times \left(-\frac{1}{5}\right) = \frac{2}{5} - \frac{4\sqrt{6}}{25} = \frac{10 - 4\sqrt{6}}{25}$ $u.a.$

9.3. Resolvendo a equação $A(x) = -\cos x$, vem

$A(x) = -\cos x \Leftrightarrow -2\cos(x) + \sin(2x) = -\cos x \Leftrightarrow -\cos(x) + \sin(2x) = 0 \Leftrightarrow \cos(x) = \sin(2x) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \cos(x) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right) \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} - 2x + k2\pi \vee x = -\frac{\pi}{2} + 2x + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x + 2x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \vee x - 2x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow 3x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \vee -x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$

$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} + k\frac{2\pi}{3} \vee x = \frac{\pi}{2} - k2\pi, k \in \mathbb{Z}$

Atribuindo valores a k, vem,

$k = 0 \mapsto x = \frac{\pi}{6} \vee x = \frac{\pi}{2}$

$k = 1 \mapsto x = \frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{3} \vee x = \frac{\pi}{2} - 2\pi$

$\therefore x = \frac{5\pi}{6} \vee x = -\frac{3\pi}{2}$

$k = 2 \mapsto x = \frac{\pi}{6} + \frac{4\pi}{3} \vee x = \frac{\pi}{2} - 4\pi$

$\therefore x = \frac{3\pi}{2} \vee x = -\frac{7\pi}{2}$

$k = -1 \mapsto x = \frac{\pi}{6} - \frac{2\pi}{3} \vee x = \frac{\pi}{2} + 2\pi$

$\therefore x = -\frac{3\pi}{6} \vee x = \frac{5\pi}{2}$

$\therefore x = -\frac{\pi}{2} \vee x = \frac{5\pi}{2}$

Como $x \in \left]\frac{\pi}{2}; \pi\right[$, tem-se que $x = \frac{5\pi}{6}$