Tópicos de Matemática II - 2016/ 2017
2º Teste – Tópicos de resolução

Exercício 1

a)

	1	0	-3	-2
-1		-1	1	2
	1	-1	-2	0 = Resto

Logo: $p(x)=[x-(-1)](x^2-x-2)=(x+1)(x^2-x-2)$

b) Cálculo auxiliar: $x^2-x-2=0 \Leftrightarrow x=\dfrac{1\pm\sqrt{1+8}}{2} \Leftrightarrow x=-1 \vee x=2$

x	$-\infty$	-1		0		2	$+\infty$
$x+1$	$-$	0	+	+	+	+	+
x^2-x-2	+	0	$-$	$-$	$-$	0	+
x	$-$	$-$	$-$	0	+	+	+
$\dfrac{p(x)}{x}$	+	0	+	s.s.	$-$	0	+

C.S. $=\{-1\}\cup]0,2]$

Exercício 2

$D=\{x\in IR: x-4>0 \wedge 10-x>0\}=\{x\in IR: x>4 \wedge x<10\}=]4,10[$

$\log(x-4)\geq\log(10-x)$

$\Leftrightarrow x-4\geq 10-x \wedge x\in]4,10[$

$\Leftrightarrow 2x\geq 14 \wedge x\in]4,10[$

$\Leftrightarrow x\geq 7 \wedge x\in]4,10[$

$\Leftrightarrow x\in[7,10[$

Exercício 3

$$D_g = \{x \in IR : 2x + 5 > 0\} = \left]-\frac{5}{2}, +\infty\right[= D'_{g^{-1}}$$

$$D'_g = IR = D_{g^{-1}}$$

$$y = g(x) \Leftrightarrow y - 1 = \log(2x+5) \Leftrightarrow 2x + 5 = 10^{y-1} \Leftrightarrow x = \frac{10^{y-1} - 5}{2}$$

$$\begin{array}{lcc} g^{-1} : IR & \rightarrow & \left]-\frac{5}{2}, +\infty\right[\\ x & \mapsto & \dfrac{10^{x-1} - 5}{2} \end{array}$$

Exercício 4

a) $2 - e^x = -5 \Leftrightarrow e^x = 7 \Leftrightarrow x = \ln 7$

Resposta: $(\ln 7, -5)$

b) $e^x > 0 \Leftrightarrow -e^x < 0 \Leftrightarrow 2 - e^x < 2$

$D'_f =]-\infty, 2[$

c) $f'(x) = (2 - e^x)' = 0 - e^x = -e^x$

O declive da reta tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa zero é igual a:

$f'(0) = -e^0 = -1$

Exercício 5

a) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x^3\left(1-\dfrac{64}{x^3}\right)}{x\left(1-\dfrac{4}{x}\right)} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x^2\left(1-\dfrac{64}{x^3}\right)}{1-\dfrac{4}{x}} = \dfrac{(+\infty)(1-0)}{1-0} = +\infty$

b) Cálculo auxiliar:

	1	0	0	-64
4		4	16	64
	1	4	16	$\boxed{0}$

$$\lim_{x\to4^-} \frac{(x-4)(x^2+4x+16)}{x-4} = \lim_{x\to4^-}(x^2+4x+16) = 16+16+16 = 48$$

$$\lim_{x\to4^+} \frac{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)}{(x-4)(\sqrt{x}+2)} = \lim_{x\to4^+} \frac{x-4}{(x-4)(\sqrt{x}+2)} = \lim_{x\to4^+} \frac{1}{\sqrt{x}+2} = \frac{1}{4}$$

$\lim\limits_{x\to4^-} f(x) \neq \lim\limits_{x\to4^+} f(x)$. Logo, não existe $\lim\limits_{x\to4} f(x)$.

Exercício 6

a) $y' = 3(4x+1)^2(4x+1)' = 3(4x+1)^2 \times 4 = 12(4x+1)^2$

b) $y' = (2x-1)'(x^3-3)+(2x-1)(x^3-3)' = 2(x^3-3)+(2x-1)(3x^2) = 8x^3-3x^2-6$

Exercício 7

$$\log_2\left(\frac{a^5}{8}\right) = \log_2 a^5 - \log_2 8 = 5\log_2 a - \log_2 2^3 = 5\times\frac{1}{5} - 3 = -2$$

Outra resolução:

$\log_2 a = \dfrac{1}{5} \Leftrightarrow a = 2^{1/5}$. Então:

$$\log_2\left(\frac{a^5}{8}\right) = \log_2\left(\frac{(2^{1/5})^5}{8}\right) = \log_2\left(\frac{2}{8}\right) = \log_2\left(\frac{1}{4}\right) = \log_2 2^{-2} = -2$$