PROVA MODELO NRº 8

JULHO 2016

-> GRUPO I

1.:

Par {2;4;6;8} (não pode colocar o zero)

$\boxed{3}\boxed{0}$ _ _ _

$1 \; 1 \; 8 \; 8 \; 4 = 1^2 \times 8^2 \times 4 = 256$

_ $\boxed{\begin{matrix}3 & 0\\ 0 & 3\end{matrix}}$ _ _

$8 \; 2 \; 1 \; 8 \; 4 = 8^2 \times 2! \times 4 = 512$

_ _ $\boxed{\begin{matrix}3 & 0\\ 0 & 3\end{matrix}}$ _

$8 \; 8 \; 2 \; 1 \; 4 = 8^2 \times 2! \times 4 = 512$

_ _ _ $\boxed{3}\boxed{0}$

$8 \; 8 \; 8 \; 1 \; 1 = 8^3 \times 1^2 = 512$

1792

Resposta: B//

2.:

linha n

- oitavo elemento $\rightarrow {}^nC_7$
- décimo quinto elemento $\rightarrow {}^nC_{14}$

i) Lei da simetria

$${}^nC_p = {}^nC_{n-p}$$

$$\therefore \frac{{}^nC_7}{{}^nC_{14}} = 1 \Leftrightarrow {}^nC_7 = {}^nC_{14} \underset{i)}{\Rightarrow} n-7 = 14 \Leftrightarrow n = 21//$$

$\therefore$ linha 21 $\rightarrow$ tem 22 elementos.

P(B|A) é a probabilidade de o produto dos três elementos escolhidos ser igual ao valor do 11º elemento, sabendo que a soma dos dois primeiros elementos escolhidos é 2. Logo, os dois primeiros elementos escolhidos foram o $\underbrace{{}^{21}C_0}_{=1}$ e o $\underbrace{{}^{21}C_{21}}_{=1}$.

Logo, para a terceira escolha há 20 elementos disponíveis. Portanto o nrº de casos possíveis é 20.

Assim, para que o produto dos três seja igual ao valor do 11º elemento, temos de escolher o ${}^{21}C_{10}$ ou o ${}^{21}C_{11}$, pois ${}^{21}C_{10} = {}^{21}C_{11}$:

$({}^{21}C_0 \times {}^{21}C_{21} \times {}^{21}C_{10} = {}^{21}C_{10}$ ou ${}^{21}C_0 \times {}^{21}C_{21} \times {}^{21}C_{11} = {}^{21}C_{10})$

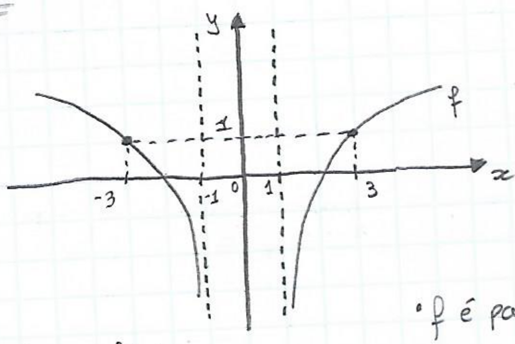
Logo, o número de casos possíveis é 2.

Pela regra de Laplace, a probabilidade de um acontecimento é dada pelo quociente entre o número de casos favoráveis e o número de casos possíveis, quando estes são equiprováveis.

$\therefore P(B|A) = \frac{2}{20}$ //

Resposta: A //

3.:



$\lim_{x \to -3^+} \frac{f(x)}{\ln(f(x))} =$

$= \frac{\lim_{x \to -3^+} f(x)}{\lim_{x \to -3^+} \ln(f(x))} =$

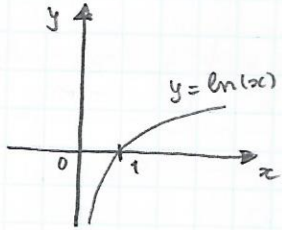
• f é par;

• $f(3) = 1$ e $x = 1$ é A.V.

$\Downarrow$

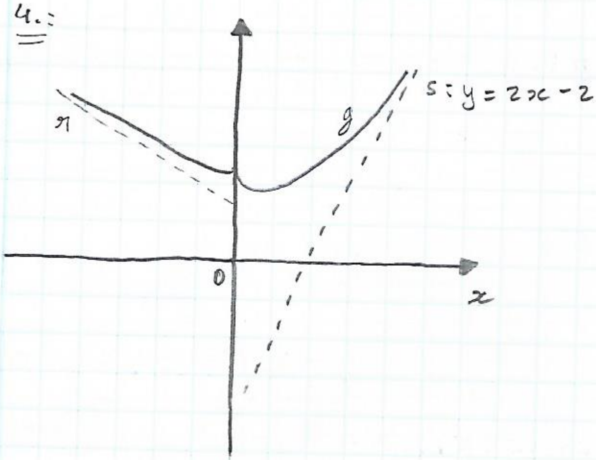
$f(-3) = 1$ e $x = 1$ é A.V.

$$= \frac{f(-3)}{\ln(1^-)} = \frac{1}{\ln(1^-)} = \frac{1}{0^-} = -\infty$$



Resposta: A

4.:



$$\therefore \lim_{x \to +\infty} \frac{g(x)}{x} = 2 \quad e \quad \lim_{x \to +\infty} (g(x) - 2x) = -2$$

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{g(x)}{x} = m_r = -\frac{1}{m_s} = -\frac{1}{2}$$

$r \perp s$

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{g(-x) - x\,g(x)}{x} + 2x \right) =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{g(-x)}{x} - \frac{\cancel{x}\,g(x)}{\cancel{x}} + 2x \right) =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{g(-x)}{x} \right) - \underbrace{\lim_{x \to +\infty} \left(g(x) - 2x \right)}_{= -2} =$$

$$= \lim_{y \to -\infty} \frac{g(y)}{-y} - (-2) =$$

$y = -x$
$x = -y$
$x \to +\infty \Rightarrow y \to -\infty$

$$= - \underbrace{\lim_{y \to -\infty} \frac{g(y)}{y}}_{= -\frac{1}{2}} + 2 = -\left(-\frac{1}{2}\right) + 2 = \frac{1}{2} + 2 = \frac{5}{2} \;//$$

Resposta: D //

5.:

$h(\pi) = \text{sen}(2n\pi) = 0, \forall n \in \mathbb{N}$

$$h(x) = \text{sen}(2nx), \quad n \in \mathbb{N}$$

$$\lim_{x \to \pi} \frac{h(x)}{x^2 - \pi^2} = \lim_{x \to \pi} \frac{h(x) - 0}{(x-\pi)(x+\pi)} =$$

$$= \underbrace{\lim_{x \to \pi} \frac{h(x) - h(\pi)}{x - \pi}}_{h'(\pi)} \times \lim_{x \to \pi} \frac{1}{x + \pi} =$$

$h'(x) = (\text{sen}(2nx))' =$
$= (2nx)' \times \cos(2nx) =$
$= 2n\cos(2nx) \;//$

$$= h'(\pi) \times \frac{1}{\pi + \pi} =$$

$h'(\pi) = 2n\cos(2n\pi) =$
$= 2n \times 1 = 2n, \forall n \in \mathbb{N} \;//$

$$= 2n \times \frac{1}{2\pi} = \frac{n}{\pi} \;//$$

Resposta: C //

<u>OU</u>

$$\lim_{x\to\pi}\left(\frac{h(x)}{x^2-\pi^2}\right)=\lim_{x\to\pi}\left(\frac{sen(2nx)}{x-\pi}\times\frac{1}{x+\pi}\right)=$$

$$=\lim_{x\to\pi}\left(\frac{sen(2nx)}{x-\pi}\right)\times\underbrace{\lim_{x\to\pi}\left(\frac{1}{x+\pi}\right)}_{\frac{1}{2\pi}}=$$

$x\to\pi \Rightarrow x-\pi\to 0$

seja $y=x-\pi \Leftrightarrow x=y+\pi$

$y\to 0$

$$=\frac{1}{2\pi}\cdot\underbrace{\lim_{y\to 0}\frac{sen(2ny)}{2ny}}_{\substack{y\to 0\Rightarrow 2ny\to 0\\ \text{Limite Notável}}}\times 2n=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\times 1\times 2n=\frac{n}{\pi}\,{}_{//}$$

$\therefore\ sen(2nx)=$

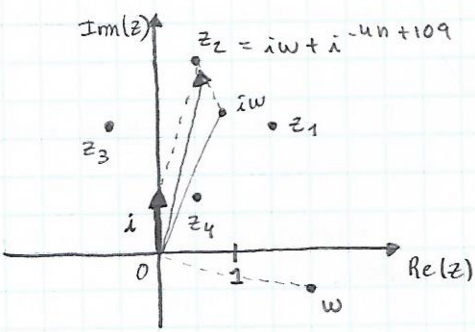
$=sen(2ny+2n\pi)=$

$=sen(2ny)$

↓

período 2π

<u>6.i.</u>



$$iw+i^{-4n+109}=$$

$$=iw+i\,{}_{//}$$

<u>C. Aux.:</u>

$i^{-4n+109}=$

$=i^{-4n}\times i^{109}=$

$=(i^4)^{-n}\times i^{4\times 27+1}=$

$=1^{-n}\times i^{4\times 27}\times i^1=$

$=1\times(i^4)^{27}\times i=$

$=1\times i^{27}\times i=i\,{}_{//}$

<u>OU</u>

$w=a+bi$

$iw+i=i(a+bi)+i=$

$=ai+bi^2+1=$

$=-b+(a+1)i$

- $Re(iw+i)=-b=-Im(w)\Rightarrow$ Só pode ser z_2 ou z_4.
- $Im(iw+i)=a+1>2\Rightarrow$ só pode ser z_2.

7.:

$\alpha: 4ax + a^2 y + a^2 z = 0 \ , \ a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$\Downarrow$

$\vec{n_\alpha} = (4a \, ; a^2 \, ; a^2)$

$P = (1;1;1) \in \alpha \Rightarrow 4a \times 1 + a^2 \times 1 + a^2 \times 1 = 0 \Leftrightarrow$

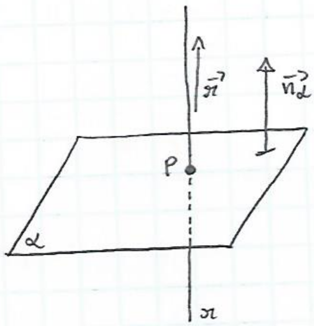
$\Leftrightarrow 4a + 2a^2 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2a(2+a) = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2a = 0 \ \vee \ 2 + a = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow a = 0 \ \vee \ a = -2 \xRightarrow[a \neq 0]{} \boxed{a = -2}$

$\therefore \vec{n_\alpha} = (-8 \, ; 4 \, ; 4) \hookrightarrow (-2 \, ; 1 \, ; 1)$



- Um vetor diretor da reta perpendicular a α que contém o ponto $P = (1;1;1)$ é $(-2;1;1)$.

- $\dfrac{x-1}{-2} = \dfrac{y-1}{1} = \dfrac{z-1}{1}$ elimina (A)

ou

- $(x;y;z) = (1;1;1) + k(-2;1;1) \ , \ k \in \mathbb{R}$

elimina (D)

- $P = (1;1;1) \in r$?

Substituindo em:

$\dfrac{x-1}{-2} = \dfrac{y-1}{1} = \dfrac{z-1}{1}$, vem: $0 = 0 = -1$, P.F. elimina (B)

- $-\dfrac{x}{2} = y - \dfrac{3}{2} = z - \dfrac{3}{2} \Leftrightarrow -\dfrac{x}{2} = \dfrac{y - \frac{3}{2}}{1} = \dfrac{z - \frac{3}{2}}{1} \hookrightarrow P \in r$?

$\vec{r}(-2;1;1)$

$-\dfrac{1}{2} = 1 - \dfrac{3}{2} = 1 - \dfrac{3}{2} \Leftrightarrow -\dfrac{1}{2} = -\dfrac{1}{2} = -\dfrac{1}{2}$, P.V.

Resposta: C//

8.:

(v_n) é uma progressão, tal que $v_6 = 3$ e $v_8 = 9$

Seja r a razão da progressão (v_n)

$\boxed{I}$ Se (v_n) for progressão aritmética, então:

$v_8 = v_6 + 2r \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 9 = 3 + 2r \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 6 = 2r \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow r = 3$

$\longrightarrow$ elimina (D)

$\boxed{II}$ Se (v_n) for progressão geométrica, então:

$v_8 = v_6 \times r^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 9 = 3 \times r^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow r^2 = \frac{9}{3} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow r^2 = 3 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow r = \pm\sqrt{3}$

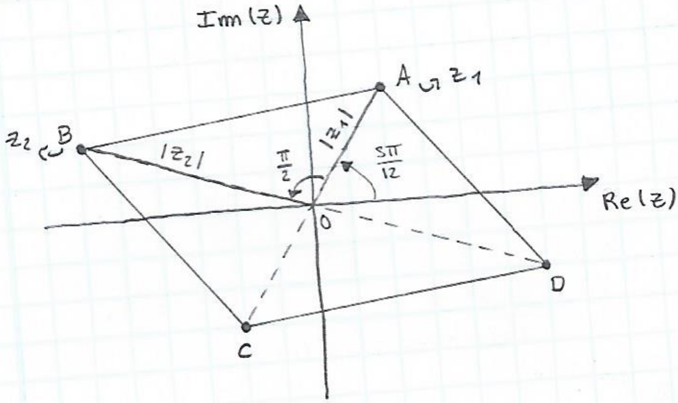
$\longrightarrow$ elimina (B) e (C)

Resposta: A

→ GRUPO II

1.:

- [ABCD] é um losango centrado na origem.
- As suas diagonais bissectam-se em O e são perpendiculares.
- A é a imagem geométrica de z_1.
- B é a imagem geométrica de z_2.
- Um argumento de z_1 é $\frac{5\pi}{12}$.
- A área do losango [ABCD] é 8.



$\boxed{\text{I}}$ $A_{[ABCD]} = 8 \Leftrightarrow 4 \times A_{[OAB]} = 8 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 4 \times \frac{|z_1| \times |z_2|}{2} = 8 \Leftrightarrow \boxed{|z_1| \times |z_2| = 4}$

$\boxed{\text{II}}$ $\arg(z_1) = \frac{5\pi}{12} \Rightarrow z_1 = |z_1| \operatorname{cis}\left(\frac{5\pi}{12}\right)$ //

$[OA] \perp [OB] \Rightarrow z_2 = |z_2| \operatorname{cis}\left(\frac{5\pi}{12} + \frac{\pi}{2}\right) = |z_2| \operatorname{cis}\left(\frac{11\pi}{12}\right)$ //

$|z_2| = |\overline{z_2}|$

$\therefore z_1 \times \overline{z_2} = |z_1| \operatorname{cis}\left(\frac{5\pi}{12}\right) \times |z_2| \operatorname{cis}\left(-\frac{11\pi}{12}\right) =$

$= \underbrace{|z_1| \times |z_2|}_{=4} \operatorname{cis}\left(\frac{5\pi}{12} - \frac{11\pi}{12}\right) = 4 \operatorname{cis}\left(-\frac{6\pi}{12}\right) = 4 \operatorname{cis}\left(-\frac{\pi}{2}\right) =$

$= 4 \operatorname{cis}\left(\frac{3\pi}{2}\right)$ //

$\boxed{III}$ $|-\sqrt{3}+i| = \sqrt{(-\sqrt{3})^2 + 1^2} = \sqrt{4} = 2$ //

Seja θ um argumento de $-\sqrt{3}+i$:

$\tan(\theta) = \frac{1}{-\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$, $\theta \in 2^{\circ} Q$ //

$\therefore \theta = -\frac{\pi}{6} + \pi = \frac{5\pi}{6}$ //

$\therefore -\sqrt{3}+i = 2 \operatorname{cis}\left(\frac{5\pi}{6}\right)$ //

$\boxed{IV}$ $\frac{z_1 \times \overline{z_2}}{-\sqrt{3}+i} = \frac{4 \operatorname{cis}\left(\frac{3\pi}{2}\right)}{2 \operatorname{cis}\left(\frac{5\pi}{6}\right)} = 2 \operatorname{cis}\left(\frac{3\pi}{2} - \frac{5\pi}{6}\right) =$

$= 2 \operatorname{cis}\left(\frac{2\pi}{3}\right)$ //

$\boxed{V}$ $\sqrt[4]{2 \operatorname{cis}\left(\frac{2\pi}{3}\right)} = \sqrt[4]{2} \operatorname{cis}\left(\frac{\frac{2\pi}{3} + 2k\pi}{4}\right)$, $k \in \{0; 1; 2; 3\}$

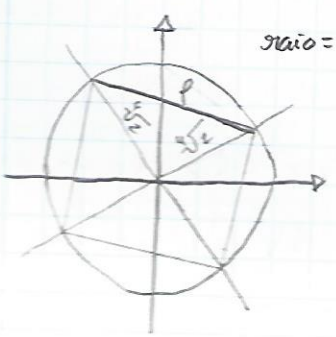
$k=0 \hookrightarrow \sqrt[4]{2} \operatorname{cis}\left(\frac{\pi}{6}\right)$ //

$k=1 \hookrightarrow \sqrt[4]{2} \operatorname{cis}\left(\frac{8\pi}{12}\right) = \sqrt[4]{2} \operatorname{cis}\left(\frac{2\pi}{3}\right)$ //

$k=2 \hookrightarrow \sqrt[4]{2} \operatorname{cis}\left(\frac{7\pi}{6}\right)$ //

$k=3 \hookrightarrow \sqrt[4]{2} \operatorname{cis}\left(\frac{5\pi}{3}\right)$ //

$\boxed{VI}$



raio $= \sqrt[4]{2}$

$A = l^2 = \left(\sqrt[4]{2}\right)^2 + \left(\sqrt[4]{2}\right)^2 =$

$\downarrow$

T. Pitágoras

$= \sqrt{2} + \sqrt{2} = 2\sqrt{2}$ //

2.:

$P(A\cup B) - P(A|B) = P(B) \times P(\bar{A}) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow P(A) + P(B) - P(A\cap B) - \frac{P(A\cap B)}{P(B)} = P(B)\times(1 - P(A)) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow P(A) + \cancel{P(B)} - P(A\cap B) - \frac{P(A\cap B)}{P(B)} = \cancel{P(B)} - P(B)\times P(A) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow P(A)\times P(B) - P(B)\times P(A\cap B) - P(A\cap B) = [P(B)]^2 \times P(A) \Leftrightarrow$
$\times P(B)$

$\Leftrightarrow P(B)\times P(A) + [P(B)]^2 \times P(A\cap B) = P(B)\times P(A\cap B) + P(A\cap B) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow P(A)\times P(B)\,(\cancel{1 + P(B)}) = P(A\cap B)\,(\cancel{P(B) + 1}) \Leftrightarrow$

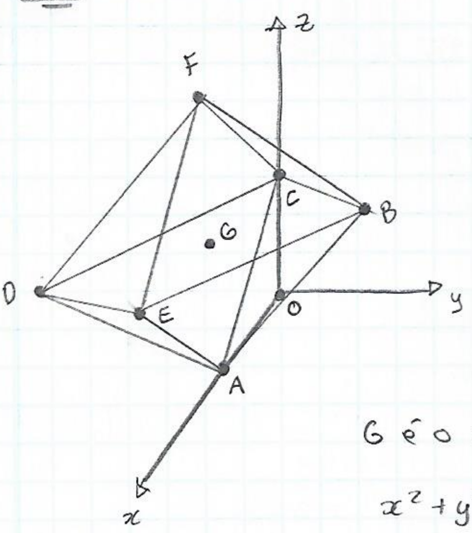
$\Leftrightarrow P(A\cap B) = P(A)\times P(B) \Leftrightarrow$ A e B forem independentes, c.q.d.

$\downarrow$

$P(B)+1>1$

$P(B)+1\neq 0$

3.1.:



- [ABEF] está contido no plano $xOz \Rightarrow y_A = y_B = y_F = y_E = 0$
- $A \in Ox \Rightarrow A = (x;0;0)$
- $C \in Oz \Rightarrow z = (0;0;z)$
- $x^2+y^2+z^2-4x-4z+4=0$

G é o centro de S.E.:

$x^2+y^2+z^2-4x-4z+4=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \underbrace{x^2-4x+4}_{(x-2)^2} + y^2 + \underbrace{z^2-4z+2^2}_{(z-2)^2} = 2^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x-2)^2 + y^2 + (z-2)^2 = 2^2$ //

$\therefore G = (2;0;2)$.

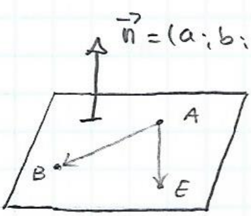
<u>3.2.</u>:

Tendo em conta que $G = (2;0;2)$ e o raio da superfície esférica é 2, vem:

- $A = (2;0;0)$

- $B = (2;2;2)$

- $E = (4;0;2)$



$\vec{AB} = B - A = (0;2;2)$

$\vec{AE} = E - A = (2;0;2)$

$$\therefore \begin{cases} \vec{n} \cdot \vec{AB} = 0 \\ \vec{n} \cdot \vec{AE} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a;b;c)\cdot(0;2;2) = 0 \\ (a;b;c)\cdot(2;0;2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2b + 2c = 0 \\ 2a + 2c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -c \\ a = -c \end{cases} //$$

$\therefore \vec{n}(-c;-c;c),\ c \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$

Fazendo $c = -1$, vem $\vec{n} = (1;1;-1)$.

Como $A = (2;0;0) \in ABE$:

$1(x-2) + 1(y-0) - 1(z-0) = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x - 2 + y - z = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x + y - z = 2$ //