ESCOLA SECUNDÁRIA DE PENAFIEL

Ficha de Trabalho nº 19

Preparação para exame

12.º Ano de Escolaridade | Turma G-K

TRIGONOMETRIA

Recorda:

- Seja $[ABC]$ um triângulo

Lei dos senos
$\dfrac{\sin \hat{A}}{a} = \dfrac{\sin \hat{B}}{b} = \dfrac{\sin \hat{C}}{c}$

- Seja $[ABC]$ um triângulo

Lei dos cossenos (Teorema de Carnot)
$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \hat{A}$

- $tg(x) = \dfrac{\sin(x)}{\cos(x)}$
- $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$
- $1 + \tan^2(x) = \dfrac{1}{\cos^2(x)}$

  (No conjunto onde as expressões têm significado)

- $-1 \le \sin(x) \le 1, \forall x \in \mathbb{R}$
- $-1 \le \cos(x) \le 1, \forall x \in \mathbb{R}$
- f é uma função par se $f(-x) = f(x), \forall -x, x \in D_f$
- f é uma função ímpar se $f(-x) = -f(x), \forall -x, x \in D_f$

- $\sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b)$
- $\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$

- $(\sin(u))' = u' \cos(u)$
- $(\cos(u))' = -u' \sin(u)$
- $(\tan(u))' = \dfrac{u'}{\cos^2(u)}$

- Sendo f, uma função definida por $f(x) = a\sin(bx+c)+d$, com $a, b, c, d \in \mathbb{R}, a \neq 0, b \neq 0,$

  o período positivo mínimo é $\tau = \dfrac{2\pi}{|b|}$

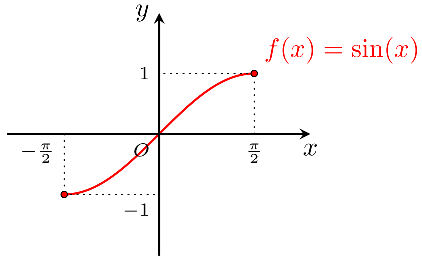
- **Limite notável**: $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin(x)}{x} = 1$

- Oscilador harmónico: Designa-se por oscilador harmónico um sistema constituído por um ponto que se desloca numa reta numérica em determinado intervalo de tempo I, de tal forma que a respetiva abcissa, como função de $t \in I$, seja dada por uma expressão da forma $x(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$, com $A > 0$, $\omega > 0$ e $\varphi \in [0; 2\pi]$. $A \twoheadrightarrow$ amplitude ; $\omega \twoheadrightarrow$ pulsação; $\varphi \twoheadrightarrow$ fase

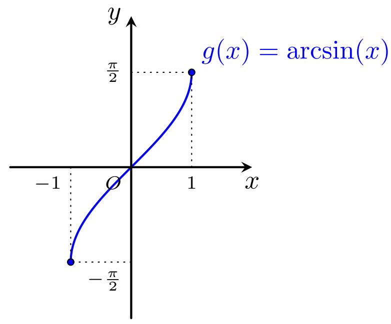
Funções trigonométricas inversas

- **Função arcsin**

Seja f, a função $f : \left[-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right] \to [-1; 1]$, tal que $f(x) = \sin(x)$, uma restrição bijetiva da função seno.

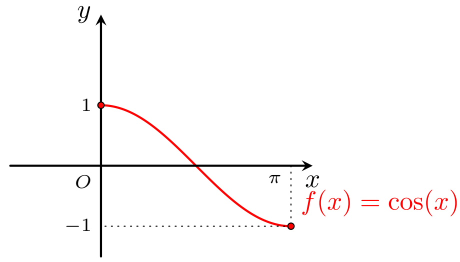


Então, a função inversa de f é a função $g : [-1; 1] \to \left[-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right]$, tal que $g(x) = \arcsin(x)$

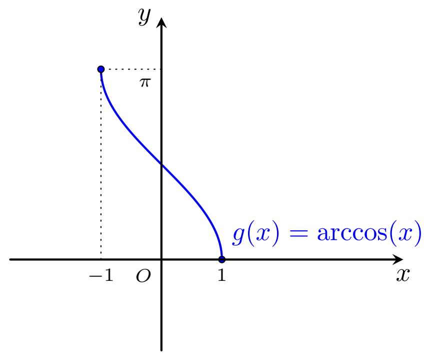


- **Função arcos**

Seja f, a função $f : [0; \pi] \to [-1; 1]$, tal que $f(x) = \cos(x)$, uma restrição bijetiva da função cosseno.

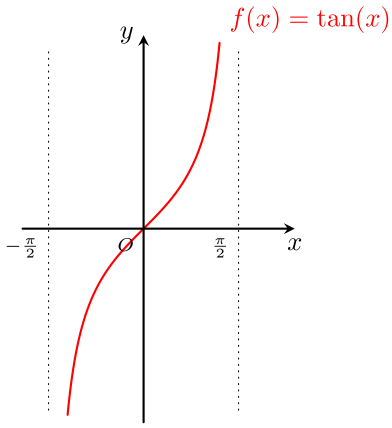


Então, a função inversa de f é a função $g : [-1; 1] \to [0; \pi]$, tal que $g(x) = \arccos(x)$

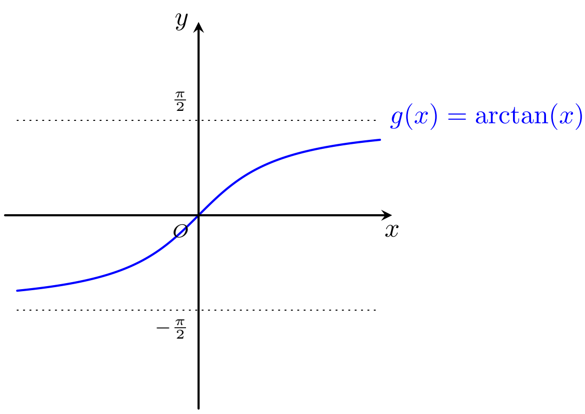


- **Função arctan**

Seja f, a função $f : \left]-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right[\to \mathbb{R}$, tal que $f(x) = \tan(x)$, uma restrição bijetiva da função tangente.



Então, a função inversa de f é a função $g : \mathbb{R} \to \left]-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right[$, tal que $g(x) = \arctan(x)$



Na resolução dos itens não é permitido a utilização de calculadora gráfica

1. Na figura 1 está representada a função f, definida por $f(x) = \arccos(x) + \frac{\pi}{4}$.

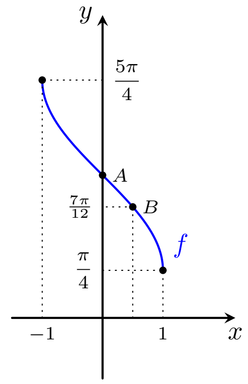


Figura 1

Sabe-se que:

- A é o ponto de interseção do gráfico de f com o eixo das ordenadas;
- B é o ponto do gráfico de f com ordenada $\frac{7\pi}{12}$.

1.1. Calcula o valor de $\arctan(-1) + f\left[\cos\left(\frac{5\pi}{3}\right)\right]$.

1.2. Determina as coordenadas dos pontos A e B, assinalados no gráfico.

2. Calcula o valor de $\arccos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - \arcsin(1) + \arctan\left(\tan\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$

3. Considera a função f, real de variável real, definida por $f(x) = \arcsin(4x) - \frac{3\pi}{4}$.

3.1. Determina o domínio da função f.

3.2. Calcula $f\left(\frac{1}{8}\right) - f(0)$.

3.3. Mostra que o contradomínio da função f é $\left[-\frac{5\pi}{4}; -\frac{\pi}{4}\right]$.

3.4. Determina x, tal que $f(x) = -\frac{3\pi}{4}$.

4. Mostra que $\tan\left(\arccos\left(\frac{1}{2}\right)\right) = \sqrt{3}$

5. A partir da igualdade $\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$, mostra que:

5.1. $\cos(2a) = \cos^2(a) - \sin^2(a)$

5.2. $\sin(a-b) = \sin(a)\cos(b) - \cos(a)\sin(b)$

5.3. $\cos(3a) = \cos(a)(1 - 4\sin^2(a))$

6. Calcula o valor de $\dfrac{\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right)\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right)}{2} - 2\sin^2\left(\frac{\pi}{12}\right) + 2\cos^2\left(\frac{\pi}{12}\right)$

7. Calcula o valor exato de $\cos\left(\frac{\pi}{3} - \arcsin\left(\frac{5}{13}\right)\right)$

8. Sabendo que $\sin(\alpha) = -\frac{4}{5} \wedge \alpha \in \left]0; \frac{3\pi}{2}\right[$, determina o valor exato de $\sin\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)$ e de $\cos\left(\frac{\pi}{6} + \alpha\right)$

9. Resolve, em $\mathbb{R}$, as equações seguintes:

9.1. $\cos^2\left(\frac{x}{4}\right) - \sin^2\left(\frac{x}{4}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

9.2. $\cos(2x) - \cos(x) + 1 = 0$

9.3. $\cos(x) - \sqrt{3}\sin(x) = \sqrt{2}$