Prova-Modelo de Exame de Matemática A – 12.º ano – Proposta de resolução

1. Opção (B)

$$u_n = \begin{cases} \dfrac{1}{n+1} & \text{se} \quad n \text{ ímpar} \\ \dfrac{-1}{n+1} & \text{se} \quad n \text{ par} \end{cases}$$

$\lim u_n = 0; \quad \lim \frac{1}{n+1} = 0^+ \ \text{ e } \ \lim \frac{-1}{n+1} = 0^-$

(A) $f(x) = \ln|x|$

$$\lim f(u_n) = \lim \ (\ln|u_n|) = \lim \ln\left(\frac{1}{n+1}\right) = \ln(0^+) = -\infty$$

(B) $f(x) = \frac{e^x}{x}$

$$\lim f(u_n) = \lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{e^x}{x} = \frac{1}{0}$$

Averiguemos os limites laterais:

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{e^x}{x} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{e^x}{x} = \frac{1}{0^-} = -\infty$$

Logo, não existe $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$, de onde se conclui que não existe $\lim f(u_n)$.

(C) $f(x) = \frac{\text{sen}(x)}{x}$

$$\lim f(u_n) = \lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{\text{sen}(x)}{x} = 1$$

(D) $f(x) = \frac{e^x-1}{x}$

$$\lim f(u_n) = \lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

2. $u_1 = p - 2 \qquad u_2 = -2p \qquad u_3 = -2p - 2$

$$\frac{u_2}{u_1} = \frac{u_3}{u_2} \Leftrightarrow \frac{-2p}{p-2} = \frac{-2p-2}{-2p} \Leftrightarrow 4p^2 = (p-2)(-2p-2)$$

$$\Leftrightarrow 4p^2 = -2p^2 - 2p + 4p + 4$$

$$\Leftrightarrow 6p^2 - 2p - 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow p = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4\times 6\times(-4)}}{12}$$

$$\Leftrightarrow p = \frac{2 \pm 10}{12}$$

$$\Leftrightarrow p = 1 \quad \vee \quad p = -\frac{2}{3}$$

Como $p \in \text{IR}^-$, então $p = -\frac{2}{3}$.

$u_1 = -\frac{2}{3} - 2 = -\frac{8}{3}$ $\qquad$ $u_2 = -2 \times \left(-\frac{2}{3}\right) = \frac{4}{3}$

$$r = \frac{\frac{4}{3}}{-\frac{8}{3}} = -\frac{1}{2}$$

$$\lim S_n = \lim\left(u_1 \times \frac{1-r^n}{1-r}\right) = \lim\left(-\frac{8}{3} \times \frac{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^n}{1+\frac{1}{2}}\right) =$$

$$= \lim\left(-\frac{8}{3} \times \frac{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^n}{\frac{3}{2}}\right) =$$

$$= -\frac{8}{3} \times \frac{1-0}{\frac{3}{2}} =$$

$$= -\frac{8}{3} \times \frac{2}{3} =$$

$$= -\frac{16}{9}$$

Nota: $\left(-\frac{1}{2}\right)^n = \begin{cases} -\frac{1}{2^n} & \text{se} \quad n \text{ ímpar} \\ \frac{1}{2^n} & \text{se} \quad n \text{ par} \end{cases}$

$$\lim\left(-\frac{1}{2}\right)^n = 0$$

3. Opção (C)

$$ {}^{n}C_{p+1} - {}^{6}C_{p+1} = {}^{6}C_p \Leftrightarrow {}^{n}C_{p+1} = {}^{6}C_p + {}^{6}C_{p+1}$$

$$\Leftrightarrow {}^{n}C_{p+1} = {}^{7}C_{p+1}$$

$$\Leftrightarrow n = 7$$

A linha de ordem 7 do triângulo de Pascal é constituída pelos seguintes elementos:

${}^{7}C_0 = 1$ $\quad$ ${}^{7}C_1 = 7$ $\quad$ ${}^{7}C_2 = 21$ $\quad$ ${}^{7}C_3 = 35$ $\quad$ ${}^{7}C_4 = 35$ $\quad$ ${}^{7}C_5 = 21$ $\quad$ ${}^{7}C_6 = 7$ $\quad$ ${}^{7}C_7 = 1$

A probabilidade de saírem dois cartões com números iguais é:

$$\frac{4 \times {}^{2}C_2 \times {}^{6}C_1}{{}^{8}C_3} = \frac{3}{7}$$

4. Consideremos os acontecimentos:

A: “A bola ser azul.”

B: “A bola estar numerada.”

Sabemos que:

$P(A) = 2P(B)$

$P(A|\,B) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow P(A \cap B) = \frac{1}{2}P(B)$

$$P(A \cup B) = \frac{5}{8} \Leftrightarrow P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{5}{8} \Leftrightarrow 2P(B) + P(B) - \frac{1}{2}P(B) = \frac{5}{8}$$

$$\Leftrightarrow \frac{5}{2}P(B) = \frac{5}{8}$$

$$\Leftrightarrow P(B) = \frac{1}{4}$$

Logo, $P(A \cap B) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{8}$.

$\frac{1}{8} = \frac{3}{n} \Leftrightarrow n = 24$

A caixa contém 24 bolas.

5. ${}^3A_2 \times {}^4C_3 \times 9! \times 4!$

${}^3A_2$ é o número de maneiras distintas de escolher ordenadamente quais os condutores de nacionalidade neerlandesa da carrinha e do automóvel.

A carrinha (exceto o lugar do condutor) será ocupada pelos cinco palestrantes chineses, três palestrantes brasileiros e o palestrante neerlandês que não foi escolhido para conduzir, o que pode ser feito de ${}^4C_3 \times 9!$ maneiras distintas.

O automóvel (exceto o lugar de condutor) será ocupado por um brasileiro, um português, um espanhol e um francês, o que pode ser feito de 4! modos distintos.

6.

6.1 Opção (D)

Pretende-se uma condição que defina a superfície esférica que passa nos oito vértices do cubo, logo o seu centro é equidistante de quaisquer destes vértices e, em particular, dos vértices B e E.

O centro é o ponto médio de $[BE]$:

$E = B + \overrightarrow{BE} = (0,3,6) + (3,3,-3) = (3,6,3)$

centro $= \left(\frac{0+3}{2}, \frac{3+6}{2}, \frac{6+3}{2}\right) = \left(\frac{3}{2}, \frac{9}{2}, \frac{9}{2}\right)$

Como $[BE]$ é um diâmetro da superfície esférica:

raio $= \frac{d(B,E)}{2} = \frac{\|\overrightarrow{BE}\|}{2} = \frac{\sqrt{3^2+3^2+(-3)^2}}{2} = \frac{\sqrt{27}}{2}$

Portanto, a condição pedida é $\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{9}{2}\right)^2 + \left(z - \frac{9}{2}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{27}}{2}\right)^2$, ou seja,

$\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{9}{2}\right)^2 + \left(z - \frac{9}{2}\right)^2 = \frac{27}{4}$.

6.2. O vértice B tem coordenadas $(0,3,6)$ e o vértice E tem coordenadas $(3,6,3)$.

$E = B + \overrightarrow{BE} = (0,3,6) + (3,3,-3) = (3,6,3)$

Assim, o vértice G tem coordenadas $(0,3,3)$.

O plano α é perpendicular à reta OE, logo é definido por uma equação do tipo $3x + 6y + 3z + d = 0$. Como o vértice G pertence ao plano α, então:

$3 \times 0 + 6 \times 3 + 3 \times 3 + d = 0 \Leftrightarrow 18 + 9 + d = 0 \Leftrightarrow d = -27$

Logo, o plano α pode ser definido por $3x + 6y + 3z - 27 = 0$ ou, de forma equivalente, por $x + 2y + z - 9 = 0$.

Equação vetorial da reta BE: $(x, y, z) = (0, 3, 6) + k(3, 3, -3), k \in \mathbb{R}$

Um ponto genérico da reta BE é do tipo $(3k, 3 + 3k, 6 - 3k)$, com $k \in \mathbb{R}$.

Substituindo as coordenadas do ponto genérico na equação do plano α, obtemos:

$$3k + 2(3 + 3k) + (6 - 3k) - 9 = 0 \Leftrightarrow 3k + 6 + 6k + 6 - 3k - 9 = 0$$
$$\Leftrightarrow 6k + 3 = 0$$
$$\Leftrightarrow k = -\frac{1}{2}$$

Para $k = -\frac{1}{2}$, obtemos o ponto P de coordenadas

$\left(3 \times \left(-\frac{1}{2}\right), 3 + 3 \times \left(-\frac{1}{2}\right), 6 - 3 \times \left(-\frac{1}{2}\right)\right) = \left(-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, \frac{15}{2}\right)$.

Logo, a distância do ponto P ao plano xOy é a cota de P, que é $\frac{15}{2}$.

7. Assíntotas verticais:

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} \left(xe^{\frac{1}{x}} - 2\right) \underbrace{=}_{(0 \times \infty)}$$

Considerando a mudança de variável $y = \frac{1}{x}$, $x \to 0^+ \Rightarrow y \to +\infty$:

$$= \lim_{y \to +\infty} \left(\frac{1}{y} e^y - 2\right) =$$
$$= \underbrace{\lim_{y \to +\infty} \frac{e^y}{y}}_{\text{limite notável}} - 2 =$$
$$= +\infty - 2$$
$$= +\infty$$

A reta de equação $x = 0$ é assíntota vertical ao gráfico de f e é a única, visto que a função é contínua em todos os pontos do seu domínio, IR^+.

Assíntotas não verticais:

Como o domínio da função é IR^+, só faz sentido o estudo das assíntotas não verticais ao seu gráfico quando $x \to +\infty$:

$$m = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{xe^{\frac{1}{x}} - 2}{x} =$$
$$= \lim_{x \to +\infty} \left(e^{\frac{1}{x}} - \frac{2}{x}\right) =$$

$$= e^{\frac{1}{+\infty}} - \frac{2}{+\infty} =$$

$$= e^0 - 0 =$$

$$= 1$$

$$b = \lim_{x\to+\infty}(f(x) - x) = \lim_{x\to+\infty}\left(xe^{\frac{1}{x}} - 2 - x\right) \underbrace{=}_{(+\infty-\infty)} \lim_{x\to+\infty}\left(x\left(e^{\frac{1}{x}} - 1\right)\right) - 2 \underbrace{=}_{(\infty\times 0)}$$

Considerando a mudança de variável $y = \frac{1}{x}$, $x \to +\infty \Rightarrow y \to 0^+$:

$$= \lim_{y\to0^+}\left(\frac{1}{y}(e^y - 1)\right) - 2 =$$

$$= \underbrace{\lim_{y\to0^+}\frac{e^y - 1}{y}}_{\text{limite notável}} - 2 =$$

$$= 1 - 2 =$$

$$= -1$$

A reta de equação $y = x - 1$ é assíntota oblíqua ao gráfico de f quando $x \to +\infty$.

8.

8.1. $D_g = \text{IR}\backslash\{5\}$

$\lim_{x\to5} g(x)$ existe se e só se $\lim_{x\to5^-} g(x) = \lim_{x\to\to5^+} g(x)$.

- $\lim_{x\to5^-}\frac{xe^x - 5e^5}{x-5} = \lim_{x\to5^-}\frac{e^5(xe^{x-5} - 5)}{x-5} =$

  Considerando a mudança de variável $y = x - 5$, $x \to 5 \Rightarrow y \to 0^-$:

$$= e^5 \lim_{y\to0^-}\frac{(y+5)e^y - 5}{y} =$$

$$= e^5 \lim_{y\to0^-}\frac{ye^y + 5e^y - 5}{y} =$$

$$= e^5\left(\lim_{y\to0^-}\frac{ye^y}{y} + \lim_{y\to0^-}\frac{5(e^y - 1)}{y}\right) =$$

$$= e^5\left(e^0 + 5\underbrace{\lim_{y\to0^-}\frac{e^y - 1}{y}}_{\text{limite notável}}\right) =$$

$$= e^5(1 + 5\times 1) =$$

$$= 6e^5$$

- $\lim_{x\to5^+}\left(x\log(x-5)\right) = 5\times\log 0^+ =$

$$= 5\times(-\infty) =$$

$$= -\infty$$

Como $\lim_{x\to5^-} g(x) \neq \lim_{x\to5^+} g(x)$, então não existe $\lim_{x\to5} g(x)$.

8.2. Pretende-se os valores de x do intervalo $]5, +\infty[$ que satisfazem a condição $g(x) < x$:

$x \log(x-5) < x \Leftrightarrow x \log(x-5) - x < 0$

$\Leftrightarrow x\,(\log(x-5) - 1) < 0$

x	5		15	$+\infty$
x		$+$	$+$	$+$
$\log(x-5)-1$		$-$	0	$+$
$x(\log(x-5)-1)$		$-$	0	$+$

Cálculo auxiliar

$\log(x-5) - 1 = 0 \Leftrightarrow \log(x-5) = 1$

$\Leftrightarrow x - 5 = 10$

$\Leftrightarrow x = 15$

$x \in \,]5, 15[$

9.

9.1. Opção (B)

$140 \times 0{,}75 = 105$

$105 : 150 = 0{,}7$ toneladas/segundo

9.2. $v(t_1 + t_1) = 1{,}1 + v(t_1) \Leftrightarrow v(2t_1) = 1{,}1 + v(t_1)$

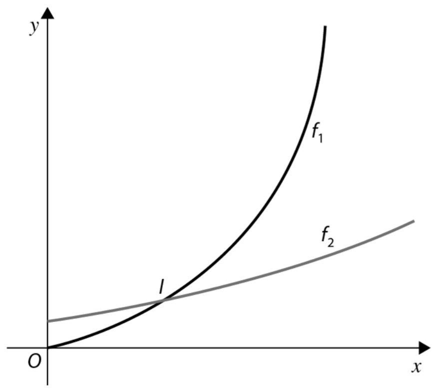
Utilizando x como variável independente:

$v(2x) = 1{,}1 + v(x) \Leftrightarrow -4\ln(1 - 0{,}008x) - 0{,}002x = 1{,}1 - 4\ln(1 - 0{,}004x) - 0{,}001x$

Recorrendo às capacidades gráficas da calculadora:

$f_1(x) = -4\ln(1 - 0{,}008x) - 0{,}002x$

$f_2(x) = 1{,}1 - 4\ln(1 - 0{,}004x) - 0{,}001x, \quad 0 \leq x \leq 150$



$I(49{,}98; 1{,}94)$

$v(49{,}98) = -4\ln(1 - 0{,}004 \times 49{,}98) - 0{,}001 \times 49{,}98 \approx 0{,}84$ km/s

10. Opção (C)

Como o triângulo [*OAB*] é equilátero, então os pontos *A* e *B* são afixos de dois números complexos com o mesmo módulo e cujo argumento difere de $\frac{\pi}{3}$ rad.

Assim, sendo *A* o afixo de um número complexo $z = re^{i\theta}$, então *B* é o afixo do número complexo $z' = re^{i\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)}$.

Tem-se que:

$$re^{i\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)} = re^{i\theta} \times e^{i\left(\frac{\pi}{3}\right)} =$$
$$= re^{i\theta} \times \left(\cos\frac{\pi}{3} + i\text{sen}\frac{\pi}{3}\right) =$$
$$= z \times \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$$

11. $z_1 = \sqrt{2}\,e^{i\frac{\pi}{4}} + i^{2023} = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\text{sen}\frac{\pi}{4}\right) + i^3 =$
$$= \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right) + (-i) =$$
$$= 1 + i - i =$$
$$= 1$$

$\overline{z_2} = e^{i(-\theta)}$

Assim, $z_1 + \overline{z_2} = 1 + e^{i(-\theta)} = 1 + \cos(-\theta) + i\,\text{sen}\,(-\theta) = \ 1 + \cos\theta - \text{i}\,\text{sen}\,\theta$

$$|z_1 + \overline{z_2}|^2 = \left(\sqrt{(1+\cos\theta)^2 + (-\text{sen}\,\theta)^2}\right)^2 =$$
$$= 1 + 2\cos\theta + \underbrace{\cos^2\theta + \text{sen}^2\theta}_{1} =$$
$$= 1 + 2\cos\theta + 1 =$$
$$= 2 + 2\cos\theta$$

Como, para qualquer valor real de θ, se tem:

$$-1 \leq \cos\theta \leq 1$$

então:

$$-2 \leq 2\cos\theta \leq 2$$

e:

$$0 \leq 2 + 2\cos\theta \leq 4$$

isto é:

$$|z_1 + \overline{z_2}|^2 \in [0, 4]$$

12. $f''(x) = (\ln(e^x + 12e^{-x} + x))' =$
$$= \frac{(e^x+12e^{-x}+x)'}{e^x+12e^{-x}+x} =$$
$$= \frac{e^x-12e^{-x}+1}{e^x+12e^{-x}+x}$$

$f''(x) = 0$

$\frac{e^x-12e^{-x}+1}{e^x+12e^{-x}+x} = 0 \Leftrightarrow e^x - 12e^{-x} + 1 = 0 \quad \wedge \quad \underbrace{e^x}_{>0} + \underbrace{12e^{-x}}_{>0} + \underbrace{x}_{>0} \neq 0 \leftarrow$ Condição universal em IR^+

$$\Leftrightarrow e^x - \frac{12}{e^x} + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow (e^x)^2 - 12 + e^x = 0$$

$$\Leftrightarrow e^x = 3 \quad \vee \quad \underbrace{e^x = -4}_{\text{condição impossível em IR}}$$

$$\Leftrightarrow x = \ln 3$$

Cálculo auxiliar

Considerando $e^x = y$

$$y^2 - 12 + y = 0 \Leftrightarrow y^2 + y - 12 = 0$$

$$\Leftrightarrow y = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \times 1 \times (-12)}}{2 \times 1}$$

$$\Leftrightarrow y = \frac{-1 \pm \sqrt{49}}{2}$$

$$\Leftrightarrow y = \frac{-1+7}{2} \quad \vee \quad y = \frac{-1-7}{2}$$

$$\Leftrightarrow y = 3 \quad \vee \quad y = -4$$

x	0		ln 3	$+\infty$
Sinal de f''		$-$	0	+
Sentido das concavidades do gráfico de f		$\cap$	PI	$\cup$

Cálculos auxiliares

$$f''(\ln 2) = \frac{e^{\ln 2} - 12e^{-\ln 2} + 1}{e^{\ln 2} + 12e^{-\ln 2} + \ln 2} = \frac{2 - 12 \times \frac{1}{2} + 1 \quad (< 0)}{2 + 12 \times \frac{1}{2} + \ln 2 \quad (> 0)}$$

$$f''(\ln 4) = \frac{e^{\ln 4} - 12e^{-\ln 4} + 1}{e^{\ln 4} + 12e^{-\ln 4} + \ln 4} = \frac{4 - 12 \times \frac{1}{4} + 1 \quad (> 0)}{4 + 12 \times \frac{1}{4} + \ln 4 \quad (> 0)}$$

O gráfico de f tem a concavidade voltada para baixo em $]0, \ln 3]$ e tem a concavidade voltada para cima em $[\ln 3, +\infty[$. Tem um ponto de inflexão de abcissa ln 3.

13. $h(x) = \frac{1}{9}$

$$3^{\cos(\pi+2x) - 4\text{sen}^2 x} = \frac{1}{9} \Leftrightarrow 3^{-\cos(2x) - 4\text{sen}^2 x} = 3^{-2} \Leftrightarrow -\cos(2x) - 4\text{sen}^2 x = -2$$

$$\Leftrightarrow \cos(2x) + 4\text{sen}^2 x = 2$$

$$\Leftrightarrow \cos^2 x - \text{sen}^2 x + 4\text{sen}^2 x = 2$$

$$\Leftrightarrow 1 - \text{sen}^2 x + 3\text{sen}^2 x = 2$$

$$\Leftrightarrow 2\text{sen}^2 x = 1$$

$$\Leftrightarrow \text{sen}^2 x = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \text{sen}\, x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\Leftrightarrow \text{sen}\, x = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$$

14. Pretendemos provar que:

$$\exists c \in \left]\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right[: f'(c) \times g'(c) = -1$$

$f'(x) = 2\text{sen}x \cos x + 2\text{sen}(2x) = \text{sen}(2x) + 2\text{sen}(2x) = 3\text{sen}(2x)$

$g'(x) = -\frac{1}{x^2}$

Seja h a função definida em $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right]$ por $h(x) = f'(x) \times g'(x) = \frac{-3\text{sen}(2x)}{x^2}$.

h é contínua por se tratar do quociente de duas funções contínuas.

$$h\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{-3\text{sen}\left(2\times\frac{\pi}{4}\right)}{\left(\frac{\pi}{4}\right)^2} = \frac{-3\times 1}{\frac{\pi^2}{16}} = -\frac{48}{\pi^2} \quad (< -1)$$

$$h\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \frac{-3\text{sen}\left(2\times\frac{3\pi}{4}\right)}{\left(\frac{3\pi}{4}\right)^2} = \frac{3}{\frac{9\pi^2}{16}} = \frac{48}{9\pi^2} \quad (> -1)$$

$$h\left(\frac{\pi}{4}\right) < -1 < h\left(\frac{3\pi}{4}\right)$$

Logo, pelo teorema de Bolzano-Cauchy, concluímos que:

$\exists c \in \left]\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right[: h(c) = -1$, ou seja, $\exists c \in \left]\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right[: f'(c) \times g'(c) = -1$

15. Seja α a inclinação da reta OA.

Como m é o declive da reta OA, então $m = \text{tg}\,\alpha$.

Como *B* pertence à circunferência trigonométrica e é um vértice do quadrado de diagonal [*OB*], então a abcissa de *B* pode ser dada, em função de α, por $\cos\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right)$.

$$\cos\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) = \cos\alpha \times \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) - \text{sen}\,\alpha \times \text{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1+m^2}} \times \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{m}{\sqrt{1+m^2}} \times \frac{\sqrt{2}}{2} =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{1-m}{\sqrt{1+m^2}}\right) =$$

$$= \frac{\sqrt{2}(1-m)}{2\sqrt{1+m^2}}$$ c.q.d.

Cálculos auxiliares

Como $1 + \text{tg}^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}$, vem que:

$$1 + m^2 = \frac{1}{\cos^2\alpha} \Leftrightarrow \cos^2\alpha = \frac{1}{1+m^2}$$

$$\Leftrightarrow \cos\alpha = \sqrt{\frac{1}{1+m^2}} \quad (\cos\alpha > 0)$$

$$\Leftrightarrow \cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+m^2}}$$

Como $\text{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$, vem que:

$$\text{sen}^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha \Leftrightarrow \text{sen}^2\alpha = 1 - \frac{1}{1+m^2}$$

$$\Leftrightarrow \text{sen}^2\alpha = \frac{1+m^2-1}{1+m^2}$$

$$\Leftrightarrow \text{sen}\,\alpha = \sqrt{\frac{m^2}{1+m^2}} \quad (\text{sen}\,\alpha > 0)$$

$$\Leftrightarrow \text{sen}\,\alpha = \frac{m}{\sqrt{1+m^2}} \quad (m > 0)$$