OmegaMat

Exame Modelo XIII de Matemática A

Duração do Exame: 150 **minutos** + 30 **minutos de tolerância** |

12.º Ano de Escolaridade

Utiliza apenas caneta ou esferográfica de tinta azul ou preta

É permitido o uso de calculadora

Não é permitido o uso de corretor. Risca o que pretendes que não seja classificado

Para cada resposta identifica o item

Apresenta as tuas respostas de forma legível

Apresenta apenas uma resposta para cada item

A prova apresenta um formulário na página 2

As cotações dos itens encontram-se na página 6

Na resposta aos itens de seleção (escolha múltipla), seleciona a resposta correta. Escreve na folha de respostas o número do item e a letra que identifica a opção escolhida.

Na resposta aos restantes itens, apresenta o teu raciocínio de forma clara, indicando todos os cálculos que tiveres de efetuar e todas as justificações necessárias. Quando, para um resultado, não é pedida aproximação apresenta sempre o valor exato.

NOTA

⋇ Itens cujas respostas contribuem obrigatoriamente para a classificação final:

1, 3, 4.1, 4.2, 5, 6, 7.2, 7.3, 8.1, 8.2 e 11

Estes itens estão assinalados no enunciado com o símbolo $*$

⋇ Dos restantes 7 itens da prova, apenas contribuem para a classificação final os 4 itens cujas respostas obtenham melhor pontuação

Formulário

Geometria

Comprimento de um arco de circunferência:

αr *(α - amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r - raio)*

área de um polígono regular: *Semiperímetro* $\times$ *Apótema*

área de um setor circular:

$\frac{\alpha r^2}{2}$ *(α- amplitude, em radianos, do ângulo ao centro, r - raio)*

área lateral de um cone: $\pi r g$ *(r - raio da base, g - geratriz)*

área de uma superfície esférica: $4\pi r^2$ *(r - raio)*

Volume da pirâmide: $\frac{1}{3}\times$ *área da base* $\times$ *Altura*

Volume do cone: $\frac{1}{3}\times$ *área da base* $\times$ *Altura*

Volume da esfera: $\frac{4}{3}\pi r^3$ *(r - raio)*

Progressões

Soma dos n primeiros termos de uma progressão (u_n):

Progressão aritmética: $\frac{u_1 + u_n}{2} \times n$

Progressão geométrica: $u_1 \times \frac{1-r^n}{1-r}$, $r \neq 1$

Trigonometria

$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$

$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$

Complexos

$(|z|e^{i\theta})^n = |z|^n e^{i(n\theta)}$

$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|}e^{i\left(\frac{\theta+2k\pi}{n}\right)}$, $k \in \{0;1;2;...;n-1\}$ e $n \in \mathbb{N}$

Regras de derivação

$(u+v)' = u' + v'$

$(uv)' = u'v + uv'$

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$

$(u^n)' = nu^{n-1}u' \quad (n \in \mathbb{R})$

$(\sin u)' = u' \cos u$

$(\cos u)' = -u' \sin u$

$(\tan u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$

$(e^u)' = u'e^u$

$(a^u)' = u'a^u \ln a \quad (a \in \mathbb{R}^+ \backslash \{1\})$

$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$

$(\log_a u)' = \frac{u'}{u \ln a} \quad (a \in \mathbb{R}^+ \backslash \{1\})$

Limites notáveis

$\lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e \quad (n \in \mathbb{N})$

$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^p} = +\infty \quad (p \in \mathbb{R})$

1. (∗) Em qual das opções está o valor de ${}^{2020}C_{500} + {}^{2020}C_{501} + {}^{2021}C_{502}$?

(A) ${}^{2021}C_{501}$
(B) ${}^{2021}C_{502}$
(C) ${}^{2022}C_{501}$
(D) ${}^{2022}C_{502}$

2. Considera todos os anagramas da palavra $INCONSTITUCIONAL$

Escolhido, ao acaso, um desses anagramas, qual é probabilidade de ter os três I juntos no final da palavra?

Apresenta o valor sob a forma de fração irredutivel

Nota: Anagrama de uma palavra, é uma nova palavra que se escreve com as mesmas letras, e que pode ter ou não sentido

3. (∗) Num encontro de 50 surfistas na praia da Nazaré, 10 só falam francês, 25 só falam inglês e 15 falam as duas línguas

Escolhidos dois surfistas ao acaso, qual é probabilidade de os dois se entenderem numa conversa sem o auxílio de tradutor?

4. Na figura 1 está representado, em referencial *o.n.* $Oxyz$, um cubo $[ABCDEFGH]$

Sabe-se que:

- a face $[ABCD]$ está contida no plano xOy
- o plano ABG tem equação cartesiana

  $x + y + \sqrt{2}z - 2\sqrt{2} = 0$
- os pontos A e C pertencem ao eixo Ox
- os pontos B e D pertencem ao eixo Oy
- a origem do referencial é o centro face $[ABCD]$
- o ponto I é o centro face $[EFGH]$

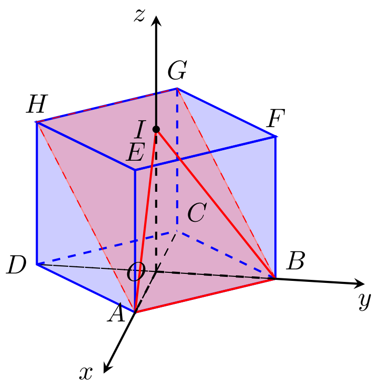

Figura 1

4.1. (∗) Escreve a equação cartesiana reduzida da superfície esférica que contém os vértices do cubo

4.2. (∗) Em qual das opções está um valor aproximado às centésimas da amplitude do ângulo AIB?

(A) 48.19° **(B)** 48.18° **(C)** 41.81° **(D)** 41.82°

4.3. Há um ponto do plano ABG que está mais próximo do ponto I do que de todos os outros
Determina a distância entre o ponto I e esse ponto do plano ABG

5. (∗) Seja f, a função real de variável real, definida por, $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin(2x-4)}{x-2} & se \quad x < 2 \\ k^2 + \ln\left(e^k\right) & se \quad x = 2 \\ \dfrac{x^2-2x}{\ln(x-1)} & se \quad x > 2 \end{cases}$, $k \in \mathbb{R}$

Averigua, analiticamente, se existe algum $k \in \mathbb{R}$, para o qual a função f é contínua no ponto $x = 2$

6. (*) Seja, f, a função de domínio $\left]0;\frac{\pi}{2}\right[$, definida por $f(x)=x-\frac{1}{2}\sin(2x)$

Em qual das opções está o valor de x com arredondamento às centésimas, para o qual $f(x)=1$?

(A) 1.27
(B) 1.28
(C) 1.29
(D) 1.31

7. Seja f, a função real de variável real, definida por, $f(x)=\begin{cases} e^{x+1}(2x+1) & se \quad x\leq 0 \\ 1+\dfrac{\ln(x)}{x} & se \quad x>0 \end{cases}$

7.1. Mostra , analiticamente, que a função f tem uma assíntota vertical e escreve a sua equação

7.2. (*) A função f tem duas assíntotas paralelas ao eixo das abcissas

Determina, analiticamente, as suas equações

7.3. (*) Seja g, a restrição da função f ao intervalo $]-\infty;0[$

Estuda a função g quanto a monotonia e extremos

8. Seja $\mathbb{C}$, o conjunto dos números complexos

Sejam $z_1=-1+8i+i^{164}$ e $z_2=\frac{2+2i}{2i}$, dois números complexos

8.1. (*) Os afixos das soluções da equação $z^3-z_1=0$ são vértices de um polígono regular

Determina o perímetro desse polígono

8.2. (*) Considera o conjunto $A=\left\{z\in\mathbb{C}:|z|\leq|z_2|^2\wedge Im(z)=-Re(z)\wedge Re(z)\geq 0\wedge Im(z)\leq 0\right\}$

O conjunto A representa uma linha

Em qual das opções está o comprimento dessa linha?

(A) 2
(B) 4
(C) $2\sqrt{2}$
(D) $\sqrt{2}$

9. Seja g, a função real de variável real, definida por, $g(x)=\begin{cases} \sin(2x)\cos(2x) & se \quad x\leq 0 \\ \dfrac{\sin(4x)}{1-e^{2x}} & se \quad x>0 \end{cases}$

9.1. Escreve a equação reduzida da reta tangente ao gráfico de g, no ponto de abcissa $-\frac{\pi}{16}$

9.2. Determina $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x)$

10. Considera, num plano munido de um referencial ortonormado xOy, a circunferência trigonométrica, como se observa na figura 2

Sabe-se que:

- os pontos A, B, C e D pertencem à circunferência
- os pontos A e B são simétricos em relação ao eixo Oy
- os pontos C e D são simétricos em relação ao eixo Oy
- os pontos A e D são simétricos em relação ao eixo Ox
- os pontos B e C são simétricos em relação ao eixo Ox
- $E(1;0)$ e $F(-1;0)$
- o ponto A move-se no segundo quadrante, e os pontos B, C e D, acompanham esse movimento
- $E\hat{O}A = x$, com $x \in \left]\frac{\pi}{2};\pi\right[$

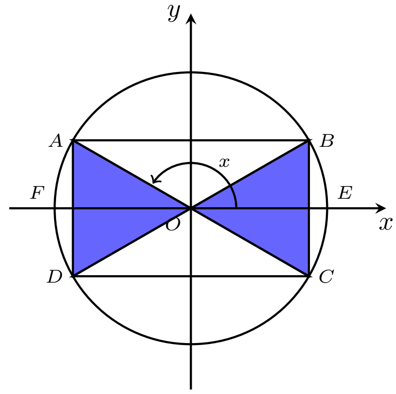

Figura 2

10.1. Em qual das opções está a expressão, em função de x, da área da região colorida da figura?

(A) $A(x) = \frac{1}{2}\sin(2x)$

(B) $A(x) = \sin(2x)$

(C) $A(x) = -\sin(2x)$

(D) $A(x) = -\frac{1}{2}\sin(x)$

10.2. Determina, analiticamente, o valor exato de x, para o qual a área da região colorida é igual a 1

11. (∗) Seja f, a função real de variável real, definida em $]0;\pi[$, por $f(x) = \sin(-2x) + \frac{e}{2}$,

Considera, num plano munido de um referencial o.n. xOy, o gráfico da função f e um triângulo $[ABC]$

sabe-se que:

- $A(\ln(2); e)$
- $B(\ln(6); e)$
- C é um ponto que se desloca sobre o gráfico da função f

Recorrendo às capacidades gráficas da tua calculadora determina a abcissa do ponto C para a qual o perímetro do triangulo $[ABC]$ é mínimo

Na tua resposta deves:

- equacionar o problema
- desenhar, num referencial o.n., o(s) gráfico(s) da(s) função(ões) que visualizaste na calculadora, devidamente identificado(s)
- indicar a abcissa do ponto C com arredondamento às centésimas

FIM

COTAÇÕES

As pontuações obtidas nas respostas a estes 11 itens da prova contribuem obrigatoriamente para a classificação final

Itens	1	3	4.1	4.2	5	6	7.2	7.3	8.1	8.2	11	Subtotal
Cotação (Pontos)	14	12	12	14	14	14	12	12	12	14	14	144

Destes 11 itens da prova, contribuem para a classificação final da prova os 5 itens cujas respostas obtenham melhor pontuação

Itens	2	4.3	7.1	9.1	9.2	10.1	10.2	Subtotal
Cotação (Pontos)	4×14 Pontos							56