Proposta de Resolução da Ficha de Trabalho 5

Matemática A

12.º Ano de Escolaridade | Turma: J

1. A função h é contínua em $[1;6]$, pois trata-se de diferença de funções contínuas

   $h(1) = f(1) - 1$

   Como o contradomínio da função f é $[2;5]$, tem-se,

   $2 \leq f(1) \leq 5$

   $\therefore 2 - 1 \leq f(1) - 1 \leq 5 - 1$

   $\therefore 1 \leq f(1) - 1 \leq 4$

   $\therefore 1 \leq h(1) \leq 4$

   Ou seja, $h(1) > 0$

   De igual modo,

   Como o contradomínio da função f é $[2;5]$, tem-se,

   $2 \leq f(6) \leq 5$

   $\therefore 2 - 6 \leq f(6) - 6 \leq 5 - 6$

   $\therefore -4 \leq f(6) - 6 \leq -1$

   $\therefore -4 \leq h(6) \leq -1$

   Ou seja, $h(6) < 0$

   Logo, $h(1) \times h(6) < 0$

   Como a função h é contínua em $[1;6]$ e $h(1) \times h(6) < 0$, então, pelo Corolário do Teorema de Bolzano-Cauchy, $\exists c \in]1;6[: h(c) = 0$

   Ou seja, a função h tem pelo menos um zero no intervalo $]1;6[$

2. $$\lim_{x \to -2} \frac{3x+6}{2f(x)+8} = \lim_{x \to -2} \frac{3(x+2)}{2(f(x)+4)} = \frac{3}{2} \times \lim_{x \to -2} \frac{x+2}{f(x)+4} = \frac{3}{2} \times \lim_{x \to -2} \frac{1}{\frac{f(x)+4}{x+2}} =$$

   $$= \frac{3}{2} \times \frac{1}{\lim\limits_{x \to -2} \frac{f(x)-(-4)}{x-(-2)}} = \frac{3}{2} \times \frac{1}{\lim\limits_{x \to -2} \frac{f(x)-f(-2)}{x-(-2)}} = \frac{3}{2} \times \frac{1}{f'(-2)} = \frac{3}{2} \times \frac{1}{-1} = -\frac{3}{2}$$

   Resposta: D

3. .

3.1. $D_g = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0 \wedge x+1 \neq 0\} = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0 \wedge x \neq -1\} = \mathbb{R}_0^+$
Seja t a reta tangente

Assim,

$m_t = g'(4)$

$g(4) = \frac{\sqrt{4}}{4+1} = \frac{2}{5}$
Determinemos a função derivada de g

$$g'(x) = \left(\frac{\sqrt{x}}{x+1}\right)' = \frac{(\sqrt{x})' \times (x+1) - \sqrt{x} \times (x+1)'}{(x+1)^2} = \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}} \times (x+1) - \sqrt{x} \times 1}{(x+1)^2} = \frac{\frac{x+1}{2\sqrt{x}} - \sqrt{x}}{(x+1)^2} =$$

$$= \frac{\frac{x+1-2(\sqrt{x})^2}{2\sqrt{x}}}{(x+1)^2} = \frac{x+1-2|x|}{2\sqrt{x}(x+1)^2} = \frac{x+1-2x}{2\sqrt{x}(x+1)^2} = \frac{1-x}{2\sqrt{x}(x+1)^2}, \text{ com } x > 0$$

Assim,

$m_t = g'(4) = \frac{1-4}{2\sqrt{4} \times (4+1)^2} = -\frac{3}{100}$

Logo,

$t : y = -\frac{3}{100}x + b, b \in \mathbb{R}$

Como o ponto $T\left(4; \frac{2}{5}\right)$ pertence à reta, resulta,

$\frac{2}{5} = -\frac{3}{100} \times 4 + b \Leftrightarrow b = \frac{2}{5} + \frac{12}{100} \Leftrightarrow b = \frac{52}{100} \Leftrightarrow b = \frac{13}{25}$

Logo, a equação reduzida da reta tangente ao gráfico de g no ponto de abcissa zero é $y = -\frac{3}{100}x + \frac{13}{25}$

Resposta: C

3.2. $f(x) = x + \frac{x+3}{x+1} = x + \frac{x+1+2}{x+1} = x + \frac{x+1}{x+1} + \frac{2}{x+1} = x + 1 + \frac{2}{x+1}$

Assíntotas verticais

$D_f = \{x \in \mathbb{R} : x+1 \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$

$\lim_{x \to -1^+} f(x) = \lim_{x \to -1^+} \left(x + 1 + \frac{2}{x+1}\right) = 0 + \frac{2}{0^+} = +\infty$

Logo, a reta de equação $x = -1$ é assíntota vertical ao gráfico da função f

Nota: $\lim_{x \to -1^-} f(x) = \lim_{x \to -1^-} \left(x + 1 + \frac{2}{x+1}\right) = 0 + \frac{2}{0^-} = -\infty$

A assíntota vertical é bilateral

Como a função é contínua em todo o seu domínio, então, não existem mais assíntotas verticais ao gráfico da função f

Assíntotas não verticais

- Quando $x \mapsto +\infty$
  Ora, $f(x)=x+1+\dfrac{2}{x+1} \Leftrightarrow f(x)-(x+1)=\dfrac{2}{x+1}$
  Como, $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2}{x+1}=\dfrac{2}{+\infty}=0$, então, também, $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-(x+1)]=0$
  Portanto, a reta de equação $y=x+1$ é assíntota não vertical ao gráfico da função, quando $x\mapsto+\infty$
- Quando $x \mapsto -\infty$
  Ora, $f(x)=x+1+\dfrac{2}{x+1} \Leftrightarrow f(x)-(x+1)=\dfrac{2}{x+1}$
  Como, $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2}{x+1}=\dfrac{2}{-\infty}=0$, então, também, $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)-(x+1)]=0$
  Portanto, a reta de equação $y=x+1$ é assíntota não vertical ao gráfico da função, quando $x\mapsto-\infty$

A assíntota não vertical é bilateral

4. $$\lim_{x\to-\infty}\frac{f^2(x)}{-3x^2+x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\frac{f^2(x)}{x^2}}{\frac{-3x^2}{x^2}+\frac{x}{x^2}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\left(\frac{f(x)}{x}\right)^2}{-3+\frac{1}{x}}=\frac{\left(\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}\right)^2}{-3+\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{x}}=\frac{(-2)^2}{-3+\frac{1}{-\infty}}=$$
$$=\frac{4}{-3+0}=-\frac{4}{3}$$

5. .

5.1. $$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\frac{x^3-1}{2x^2+2x-4}}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^3-1}{2x^3+2x^2-4x}=^{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}\lim_{x\to-\infty}\frac{x^3\left(1-\frac{1}{x^3}\right)}{x^3\left(2+\frac{2x^2}{x^3}-\frac{4x}{x^3}\right)}=$$
$$=\frac{\lim\limits_{x\to-\infty}\left(1-\frac{1}{x^3}\right)}{\lim\limits_{x\to-\infty}\left(2+\frac{2}{x}-\frac{4}{x^2}\right)}=\frac{1-0}{2+0-0}=\frac{1}{2}$$

Logo, $m=\dfrac{1}{2}$

$$\lim_{x\to-\infty}\left[f(x)-\frac{1}{2}x\right]=\lim_{x\to-\infty}\left[\frac{x^3-1}{2x^2+2x-4}-\frac{1}{2}x\right]=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^3-1-x^3-x^2+2x}{2x^2+2x-4}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-x^2+2x-1}{2x^2+2x-4}=^{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}$$
$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2\left(-1+\frac{2x}{x^2}-\frac{1}{x^2}\right)}{x^2\left(2+\frac{2x}{x^2}-\frac{4}{x^2}\right)}=\frac{\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-1+\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}\right)}{\lim\limits_{x\to-\infty}\left(2+\frac{2}{x}-\frac{4}{x^2}\right)}=\frac{-1+0-0}{2+0-0}=-\frac{1}{2}$$

Logo, $b=-\dfrac{1}{2}$

Portanto, a reta de equação $y=\dfrac{1}{2}x-\dfrac{1}{2}$ é assíntota ao gráfico de f, quando $x\to-\infty$

5.2. $1\in D_f$

A função f é contínua em $x=1$, se existir $\lim\limits_{x\to1}f(x)$, ou seja,

se $\lim\limits_{x\to1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to1^+}f(x)=f(1)$

Ora,

$$\lim_{x\to1^-}f(x)=\lim_{x\to1^-}\frac{x^3-1}{2x^2+2x-4}=^{\left(\frac{0}{0}\right)}\lim_{x\to3^+}\frac{(x-1)(x^2+x+1)}{(x-1)(2x+4)}=$$

$$= \lim_{x\to 1^-} \frac{x^2+x+1}{2x+4} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

Cálculos auxiliares

$x^3 - 1 = (x-1)\times Q(x)$

Pela regra de Ruffini

$$\begin{array}{c|ccc|c} & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & & 1 & 1 & 1 \\ \hline & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}$$

Logo, $Q(x) = x^2 + x + 1$

$2x^2 + 2x - 4 = (x-1)\times Q(x)$

Pela regra de Ruffini

$$\begin{array}{c|cc|c} & 2 & 2 & -4 \\ 1 & & 2 & 4 \\ \hline & 2 & 4 & 0 \end{array}$$

Logo, $Q(x) = 2x + 4$

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} \frac{\sqrt{2x+2}-2}{x-1} =^{\left(\frac{0}{0}\right)} \lim_{x\to 1^+} \frac{(\sqrt{2x+2}-2)(\sqrt{2x+2}+2)}{(x-1)(\sqrt{2x+2}+2)} = \lim_{x\to 1^+} \frac{(\sqrt{2x+2})^2-2^2}{(x-1)(\sqrt{2x+2}+2)} =$$

$$= \lim_{x\to 1^+} \frac{|2x+2|-4}{(x-1)(\sqrt{2x+2}+2)} = \lim_{x\to 1^+} \frac{2x+2-4}{(x-1)(\sqrt{2x+2}+2)} = \lim_{x\to 1^+} \frac{2x-2}{(x-1)(\sqrt{2x+2}+2)} =$$

$$= \lim_{x\to 1^+} \frac{2(x-1)}{(x-1)(\sqrt{2x+2}+2)} = \lim_{x\to 1^+} \frac{2}{\sqrt{2x+2}+2} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

$f(1) = \dfrac{1-3k}{3}$

Ora, a função f é contínua em $x=1$, se, $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = f(1)$

Então, deverá ter-se,

$$\frac{1-3k}{3} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{2-6k}{6} = \frac{3}{6} \Leftrightarrow 2-6k = 3 \Leftrightarrow -6k = 3-2 \Leftrightarrow -6k = 1 \Leftrightarrow k = -\frac{1}{6}$$

Portanto, a função f é contínua em $x=1$, se $k = -\dfrac{1}{6}$

6. Ora,

$$45000\times\left(1+\frac{0.7}{2\times 100}\right)^2$$

$$75000\times\left(1+\frac{0.75}{4\times 100}\right)^4$$

Assim, o rendimento que o Sr. Rodrigo obteve ao fim de um ano de aplicação dos 120000 euros, foi de

$$45000\times\left(1+\frac{0.7}{2\times 100}\right)^2 + 75000\times\left(1+\frac{0.75}{4\times 100}\right)^4 - 120000 \approx 879.64 \text{ euros}$$

7. .

7.1. $\lim\left(1-\dfrac{2}{n+2}\right)^{-n} = \left[\lim\left(1-\dfrac{2}{n+2}\right)^{n}\right]^{-1} = \left[\lim\left(1-\dfrac{2}{n+2}\right)^{n+2-2}\right]^{-1} =$

$$= \left[\lim\left(1-\frac{2}{n+2}\right)^{n+2}\times\lim\left(1+\frac{-2}{n+2}\right)^{-2}\right]^{-1} = \left[e^{-2}\times(1-0)^{-2}\right]^{-1} = \left(e^{-2}\right)^{-1} = e^2$$

7.2. $\lim\left(\dfrac{4n+1}{3n+4}\right)^{n-2} = \lim\left(\dfrac{4n\left(1+\frac{1}{4n}\right)}{3n\left(1+\frac{4}{3n}\right)}\right)^{n-2} = \lim\left(\dfrac{4}{3}\right)^{n-2}\times\lim\left(\dfrac{\left(1+\frac{1}{4n}\right)}{\left(1+\frac{4}{3n}\right)}\right)^{n}\times\lim\left(\dfrac{\left(1+\frac{1}{4n}\right)}{\left(1+\frac{4}{3n}\right)}\right)^{-2} =$

$$= \lim \left(\frac{4}{3}\right)^{n-2} \times \frac{\lim \left(1+\frac{\frac{1}{4}}{n}\right)^n}{\lim \left(1+\frac{\frac{4}{3}}{n}\right)^n} \times \left(\frac{\lim\left(1+\frac{1}{4n}\right)}{\lim\left(1+\frac{4}{3n}\right)}\right)^{-2} = +\infty \times \frac{e^{\frac{1}{4}}}{e^{\frac{4}{3}}} \times \left(\frac{1+0}{1+0}\right)^{-2} = +\infty$$

7.3. $\lim \left(\frac{3n-5}{5n+1}\right)^{2n} = \left[\lim\left(\frac{3n-5}{5n+1}\right)^n\right]^2 = \left[\lim\left(\frac{3n\left(1-\frac{5}{3n}\right)}{5n\left(1+\frac{1}{5n}\right)}\right)^n\right]^2 = \left[\lim\left(\frac{3}{5}\right)^n \times \frac{\lim\left(1-\frac{5}{3n}\right)^n}{\lim\left(1+\frac{1}{5n}\right)^n}\right]^2 =$

$$= \left[\lim\left(\frac{3}{5}\right)^n \times \frac{\lim\left(1+\frac{-\frac{5}{3}}{n}\right)^n}{\lim\left(1+\frac{\frac{1}{5}}{n}\right)^n}\right]^2 = \left[0 \times \frac{e^{-\frac{5}{3}}}{e^{\frac{1}{5}}}\right]^2 = 0$$

7.4. $\lim \left(\frac{1}{3}+\frac{1}{n+2}\right)^{\frac{n}{3}} = \left[\lim\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{n+2}\right)^n\right]^{\frac{1}{3}} = \left[\lim\left[\frac{1}{3}\left(1+\frac{\frac{1}{n+2}}{\frac{1}{3}}\right)\right]^n\right]^{\frac{1}{3}} =$

$$= \left[\lim\left(\frac{1}{3}\right)^n \times \lim\left(1+\frac{3}{n+2}\right)^n\right]^{\frac{1}{3}} = \left[\lim\left(\frac{1}{3}\right)^n \times \lim\left(1+\frac{3}{n+2}\right)^{n+2} \times \lim\left(1+\frac{3}{n+2}\right)^{-2}\right]^{\frac{1}{3}} =$$

$$= \left[0 \times e^3 \times \lim\left(1+0\right)^{-2}\right]^{\frac{1}{3}} = 0$$

8. .

$$\lim\left(\frac{5n+3}{5n+4}\right)^{-\frac{n+1}{2}} = \left[\lim\left(\frac{5n+3}{5n+4}\right)^{n+1}\right]^{-\frac{1}{2}} = \left[\lim\left(\frac{5n\left(1+\frac{3}{5n}\right)}{5n\left(1+\frac{4}{5n}\right)}\right)^{n+1}\right]^{-\frac{1}{2}} =$$

$$= \left[\frac{\lim\left(1+\frac{\frac{3}{5}}{n}\right)^n}{\lim\left(1+\frac{\frac{4}{5}}{n}\right)^n} \times \frac{\lim\left(1+\frac{3}{5n}\right)^2}{\lim\left(1+\frac{4}{5n}\right)^2}\right]^{-\frac{1}{2}} = \left(\frac{e^{\frac{3}{5}}}{e^{\frac{4}{5}}} \times \frac{(1+0)^2}{(1+0)^2}\right)^{-\frac{1}{2}} = \left(e^{\frac{3}{5}-\frac{4}{5}} \times 1\right)^{-\frac{1}{2}} = \left(e^{-\frac{1}{5}}\right)^{-\frac{1}{2}} = e^{\frac{1}{10}}$$

Assim,

$\lim\left(\frac{5n+3}{5n+4}\right)^{-\frac{n+1}{2}} = \frac{1}{e^{2k+1}} \Leftrightarrow e^{\frac{1}{10}} = e^{-2k-1} \Leftrightarrow -2k-1 = \frac{1}{10} \Leftrightarrow 2k = -\frac{1}{10} - 1 \Leftrightarrow 2k = -\frac{11}{10} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow k = -\frac{11}{20}$

9. $f(x) = 1 - 5^{1+2x}$

9.1. $f\left(2x\right) = 1 - \frac{1}{25} \Leftrightarrow 1 - 5^{1+4x} = 1 - \frac{1}{25} \Leftrightarrow 5^{1+4x} = 5^{-2} \Leftrightarrow 1+4x = -2 \Leftrightarrow 4x = -2-1 \Leftrightarrow 4x = -3 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = -\frac{3}{4}$

$C.S. = \left\{-\frac{3}{4}\right\}$

9.2. $-f(x+1)+1>625^x \Leftrightarrow -1+5^{1+2(x+1)}+1>(5^4)^x \Leftrightarrow 5^{2x+3}>5^{4x} \Leftrightarrow 2x+3>4x \Leftrightarrow 3>4x-2x \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 3>2x \Leftrightarrow x<\dfrac{3}{2}$
$C.S.=\left]-\infty;\dfrac{3}{2}\right[$

9.3. $f(x)<-\dfrac{30}{5^{-x}}+26 \Leftrightarrow 1-5^{2x+1}<-30\times 5^x+26 \Leftrightarrow 1-5\times 5^{2x}<-30\times 5^x+26 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 5\times(5^x)^2-30\times 5^x+25>0$

Fazendo a mudança de variável, $y=5^x$, resulta,

$5y^2-30y+25>0$

Cálculo auxiliar

$\Leftrightarrow 5y^2-30y+25=0 \Leftrightarrow y=\dfrac{30\pm\sqrt{(-30)^2-4\times 5\times 25}}{2\times 5} \Leftrightarrow y=1 \vee y=5$
Assim,

$5y^2-30y+25>0 \Leftrightarrow y<1 \vee y>5 \Leftrightarrow 5^x<1 \vee 5^x>5 \Leftrightarrow 5^x<5^0 \vee 5^x>5 \Leftrightarrow x<0 \vee x>1$

O conjunto-solução é $C.S.=]-\infty;0[\cup]1;+\infty[$

10. Determinemos as coordenadas dos vértices do triângulo

Ponto C

$f(0)=e-e^{2-\frac{1}{4}\times 0^2}=e-e^2$
Logo, $C(0;e-e^2)$

Pontos A e B

Determinemos os zeros da função f

$f(x)=0 \Leftrightarrow e-e^{2-\frac{1}{4}x^2}=0 \Leftrightarrow e^{2-\frac{1}{4}x^2}=e \Leftrightarrow 2-\dfrac{1}{4}x^2=1 \Leftrightarrow -\dfrac{1}{4}x^2=-1 \Leftrightarrow \dfrac{1}{4}x^2=1 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x^2=4 \Leftrightarrow x=-2 \vee x=2$

Logo, $A(-2;0)$ e $B(2;0)$

Assim,

$\overline{AB}=|2-(-2)|=|4|=4$
$\overline{OC}=|e-e^2|=e^2-e$

Portanto, $A_{[ABC]}=\dfrac{\overline{AB}\times\overline{OC}}{2}=\dfrac{4\times(e^2-e)}{2}=2e^2-2e\ u.a.$