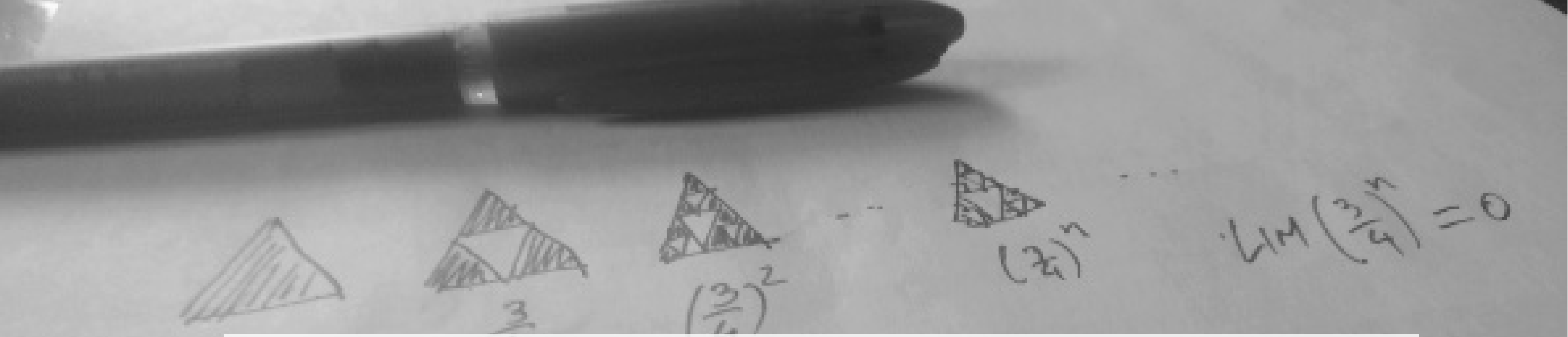

Sucessões (11.º ano)

Sucessões, progressões aritméticas e geométricas

Exercícios de Provas Nacionais e Testes Intermédios - Propostas de resolução

1. De acordo com a enunciado, e com a definição de progressão aritmética, temos que:
   - $v_3 = 1 \Leftrightarrow v1 + 2r = 1 \Leftrightarrow v_1 = 1 - 2r$
   - $v_{10} = v_1 + 9r = 1 - 2r + 9r = 1 + 7r$
   - $v_9 = v_1 + 8r = 1 - 2r + 8r = 1 + 6r$

   Desta forma, vem que a razão é:

   $$v_{10} = \frac{5}{4}v_9 \Leftrightarrow 1 + 7r = \frac{5}{4}(1 + 6r) \Leftrightarrow 1 + 7r = \frac{5}{4}1 + \frac{30r}{4} \Leftrightarrow 7r - \frac{30r}{4} = \frac{5}{4} - 1 \Leftrightarrow -\frac{2r}{4} = \frac{1}{4} \Leftrightarrow$$

   $$\Leftrightarrow -2r = 1 \Leftrightarrow r = -\frac{1}{2}$$

   E o primeiro termo é: $v_1 = 1 - 2r = 1 - 2\left(-\frac{1}{2}\right) = 1 + 1 = 2$

   Assim o termo geral da sucessão é: $v_n = 2 - \frac{1}{2}(n - 1)$

   Desta forma, resolvendo a equação $v_n = -50$, vem:

   $$v_n = -50 \Leftrightarrow 2 - \frac{1}{2}(n - 1) = -50 \Leftrightarrow -\frac{n}{2} + \frac{1}{2} = -50 - 2 \Leftrightarrow -\frac{n}{2} = -52 - \frac{1}{2} \Leftrightarrow -\frac{n}{2} = -\frac{105}{2} \Leftrightarrow$$

   $$\Leftrightarrow n = 2 \times \frac{105}{2} \Leftrightarrow n = 105$$

   Como a solução da equação é um número natural, então -50 é o termo de ordem 105 da sucessão (v_n), ou seja, $v_{105} = -50$

   Exame – 2022, Ép. especial

2. Como $\lim u_n = \lim \frac{4n - 1}{n + 3} = \lim \frac{4n}{n} = \lim 4 = 4$, então (u_n) é uma sucessão convergente.

   Como qualquer sucessão convergente é limitada, então (u_n) é uma sucessão limitada.

   Exame – 2022, 2.ª Fase

3. Para cada uma das expressões apresentadas, considerando que
   - se n é par, então $(-1)^n = 1$;
   - se n é ímpar, então $(-1)^n = -1$;

   temos que:
   - $(-1)^n \times n$ não representa uma sucessão convergente porque:
     n par: $\lim\left((-1)^n \times n\right) = \lim n = +\infty$
     n ímpar: $\lim\left((-1)^n \times n\right) = \lim(-n) = -\infty$
   - $\dfrac{(-1)^n}{n}$ representa uma sucessão convergente porque:
     n par: $\lim\left(\dfrac{(-1)^n}{n}\right) = \lim\dfrac{1}{n} = 0$
     n ímpar: $\lim\left(\dfrac{(-1)^n}{n}\right) = \lim\left(-\dfrac{1}{n}\right) = 0$
   - $(-1)^n + n$ não representa uma sucessão convergente porque:
     n par: $\lim\left((-1)^n + n\right) = \lim n = +\infty$
     n ímpar: $\lim\left((-1)^n + n\right) = \lim(-1+n) = +\infty$
   - $(-1)^n - n$ não representa uma sucessão convergente porque:
     n par: $\lim\left((-1)^n - n\right) = \lim(1-n) = -\infty$
     n ímpar: $\lim\left((-1)^n - n\right) = \lim(-1-n) = -\infty$

   Resposta: **Opção B**

   Exame – 2022, 1.ª Fase

4. Como a soma dos 5 primeiro termos da progressão geométrica é 211 e a razão é $\dfrac{2}{3}$, calculando o primeiro termo (u_1), temos:

$$S_5 = 211 \Leftrightarrow 211 = u_1 \times \frac{1-\left(\frac{2}{3}\right)^5}{1-\frac{2}{3}} \Leftrightarrow 211 = u_1 \times \frac{211}{81} \Leftrightarrow \frac{211\times 81}{211} = u_1 \Leftrightarrow 81 = u_1$$

   E assim, o 5.º termo (u_5), é:

$$u_5 = u_1 \times r^4 = 81 \times \left(\frac{2}{3}\right)^4 = 16$$

   Exame – 2022, 1.ª Fase

5. Os termos de ordem ímpar da sucessão (u_n) são aqueles cuja ordem é da forma $2k-1$ ($k \in \mathbb{N}$), ou seja a sucessão dos termos de ordem ímpar da sucessão (u_n) é:

$$v_k = 2(2k-1)+1 = 4k-2+1 = 4k-1$$

   Ou seja, é uma progressão aritmética de razão 4, pelo que a soma dos 200 primeiros termos é:

$$S_{200} = \frac{v_1+v_{200}}{2}\times 200 = \frac{4(1)-1+4(200)-1}{2}\times 200 = \frac{4-2+800}{2}\times 200 = \frac{802}{2}\times 200 = 401\times 200 = 80200$$

   Exame – 2021, Ép. especial

6. De acordo com a enunciado temos que:

   - $u_6 + u_{20} = -5$
   - $u_{19} = 4 \times u_7$

   Assim, resolvendo o sistema seguinte, usando a expressão to termo geral de uma progressão aritmética ($u_n = u_1 + r(n-1)$), determinamos o valor do primeiro termo (u_1) e da razão (r) da progressão:

$$\begin{cases} u_6 + u_{20} = -5 \\ \\ u_{19} = 4 \times u_7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + r(6-1) + u_1 + r(20-1) = -5 \\ \\ u_1 + r(19-1) = 4\big(u_1 + r(7-1)\big) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2u_1 + 5r + 19r = -5 \\ \\ u_1 + 18r = 4u_1 + 4 \times 6r \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2u_1 + 24r = -5 \\ \\ u_1 + 18r = 4u_1 + 24r \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2u_1 + 24r = -5 \\ \\ 18r - 24r = 4u_1 - u_1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2u_1 + 24r = -5 \\ \\ -6r = 3u_1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2u_1 + 24r = -5 \\ \\ -\dfrac{6}{3}r = u_1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2(-2r) + 24r = -5 \\ \\ -2r = u_1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -4r + 24r = -5 \\ \\ -2r = u_1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 20r = -5 \\ \\ -2r = u_1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r = -\dfrac{5}{20} \\ \\ -2r = u_1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} r = -\dfrac{1}{4} \\ \\ -2\left(-\dfrac{1}{4}\right) = u_1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r = -\dfrac{1}{4} \\ \\ \dfrac{2}{4} = u_1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r = -\dfrac{1}{4} \\ \\ u_1 = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

   Assim, temos que a soma dos dezasseis primeiros termos desta progressão, S_{16}, é:

$$S_{16} = \frac{u_{16} + u_1}{2} \times 16 = \frac{\frac{1}{2} + 15\left(-\frac{1}{4}\right) + \frac{1}{2}}{2} \times 16 = \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{15}{4}}{2} \times 16 =$$

$$= \left(1 - \frac{15}{4}\right) \times 8 = 8 - \frac{15 \times 8}{4} = 8 - 15 \times 2 = 8 - 30 = -22$$

Exame – 2021, 2.ª Fase

7. Como a sucessão (v_n) é uma progressão geométrica, temos que:

$$v_8 = v_5 \times r \times r \times r \Leftrightarrow 108 = 4 \times r^3 \Leftrightarrow \frac{108}{4} = r^3 \Leftrightarrow \sqrt[3]{27} = r \Leftrightarrow 3 = r$$

   E assim, vem que:

$$v_6 = v_5 \times r = 4 \times 3 = 12$$

   Resposta: **Opção A**

Exame – 2021, 1.ª Fase

8. Observando que para as ordens ímpares, temos que $n+1$ é par, e que por isso, $(-1)^{n+1}=1$, então os termos de ordem ímpar da sucessão são da forma $u_n = 2+\frac{1}{n}$

   Assim, para que os termos pertençam ao intervalo $\left[\frac{83}{41},\frac{67}{33}\right]$, temos que:

$$2+\frac{1}{n} \geq \frac{83}{41} \wedge 2+\frac{1}{n} \leq \frac{67}{43} \Leftrightarrow \frac{1}{n} \geq \frac{83}{41}-2 \wedge \frac{1}{n} \leq \frac{67}{33}-2 \Leftrightarrow \frac{1}{n} \geq \frac{83}{41}-\frac{82}{41} \wedge \frac{1}{n} \leq \frac{67}{43}-\frac{66}{33} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{n} \geq \frac{1}{41} \wedge \frac{1}{n} \leq \frac{1}{33} \underset{n\neq 0}{\Leftrightarrow} n \leq 41 \wedge n \geq 33$$

   Como se pretende identificar apenas os termos de ordem ímpar, temos os termos u_{33}; u_{35}; u_{37}; u_{39} e u_{41}, ou seja, o número de termos de ordem ímpar que pertence ao intervalo dado é 5.

   Exame – 2021, 1.ª Fase

9. Como a sucessão (u_n) é uma progressão geométrica, temos que $u_n = u_1 \times r^{n-1}$, com $r<0$, porque a progressão não é monótona.

   Sabe-se que:

   - $u_3 = \frac{1}{12} \Leftrightarrow u_1 \times r^2 = \frac{1}{12}$
   - $u_{18} = 4u_{20} \Leftrightarrow u_1 \times r^{17} = 4 \times u_1 \times r^{19}$

   Resolvendo o sistema seguinte, determinamos o valor do primeiro termo e da razão da progressão:

$$\begin{cases} u_1 \times r^2 = \frac{1}{12} \\ u_1 \times r^{17} = 4 \times u_1 \times r^{19} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = \frac{1}{12r^2} \\ \frac{1}{12r^2} \times r^{17} = 4 \times \frac{1}{12r^2} \times r^{19} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = \frac{1}{12r^2} \\ r^{17} = 4 \times r^{19} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = \frac{1}{12r^2} \\ \frac{1}{4} = \frac{r^{19}}{r^{17}} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = \frac{1}{12r^2} \\ \frac{1}{4} = r^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = \frac{1}{12r^2} \\ r = \pm\sqrt{\frac{1}{4}} \end{cases} \underset{r<0}{\Leftrightarrow} \begin{cases} u_1 = \frac{1}{12 \times \left(-\frac{1}{2}\right)^2} \\ r = -\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = \frac{1}{\frac{12}{4}} \\ r = -\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = \frac{1}{3} \\ r = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

   Assim, temos que a expressão do termo geral na forma $a \times b^n$, é:

$$u_n = \frac{1}{3} \times \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \frac{1}{3} \times \left(-\frac{1}{2}\right)^{n} \times \left(-\frac{1}{2}\right)^{-1} = \frac{1}{3} \times \left(-\frac{1}{2}\right)^{n} \times (-2) = -\frac{2}{3} \times \left(-\frac{1}{2}\right)^{n}$$

   Exame – 2020, Ép. especial

10. Como o inverso de 2 é $\frac{1}{2}$ e o inverso de $\frac{1}{2}$ é 2, todos os termos de ordem ímpar da sucessão são iguais a 2 e todos os termos de ordem par são iguais a $\frac{1}{2}$

    Assim, temos que a sucessão não é nem uma progressão aritmética nem uma progressão geométrica.

    Por outro lado verifica-se que os termos alternam sucessivamente entre dois valores, pelo que não é monótona e como $\frac{1}{2} \leq v_n \leq 2, \forall n \in \mathbb{N}$, logo (v_n) é uma sucessão limitada.

    Resposta: **Opção D**

Exame – 2020, Ép. especial

11. Como o sétimo termo da progressão aritmética é igual ao dobro do segundo, designado a razão por r, temos que:

    $u_7 = 2 \times u_2 \Leftrightarrow u_1 + (7-1) \times r = 2(u_1 + r) \Leftrightarrow u_1 + 6r = 2u_1 + 2r \Leftrightarrow 6r - 2r = 2u_1 - u_1 \Leftrightarrow 4r = u_1$

    Como a soma dos 12 primeiros termos é:

$$S_{12} = \frac{u_1 + u_{12}}{2} \times 12 = \frac{u_1 + u_1 + 11r}{2} \times 12 = (4r + 4r + 11r) \times \frac{12}{2} = 19r \times 6 = 114r$$

    Como a soma dos doze primeiros termos é 57, temos que:

$$S_{12} = 57 \Leftrightarrow 114r = 57 \Leftrightarrow r = \frac{57}{114} \Leftrightarrow r = \frac{1}{2}$$

    Logo, $u_1 = 4r = 4 \times \frac{1}{2} = 2$ e $u_n = 2 + \frac{n-1}{2}$, pelo que a ordem do termo 500, é a solução da equação $u_n = 500$:

$$u_n = 500 \Leftrightarrow 2 + \frac{n-1}{2} = 500 \Leftrightarrow \frac{n-1}{2} = 500 - 2 \Leftrightarrow n - 1 = 498 \times 2 \Leftrightarrow n = 996 + 1 :\Leftrightarrow n = 997$$

    Ou seja, a ordem do termo 500 é 997, isto é, $u_{997} = 500$

Exame – 2020, 2.ª Fase

12. Observando que $\lim v_n = \lim \left(1 + \frac{1}{n}\right) = 1 + 0 = 1$, podemos garantir que o limite da sucessão não é nulo, e também que a sucessão não é divergente.

Verificando que $v_1 = 1$, $v_9 = 9$ e $v_{10} = 1 + \frac{1}{10} = 1{,}1$, temos que $v_1 < v_9$ e que $v_9 > v_{10}$, é possível afirmar que a sucessão não é monotóna.

Desta forma, de entre as opções apresentadas a única afirmação verdadeira é que a sucessão é limitada, o que pode ser confirmado atendendo a que:

- a representação gráfica dos primeiros nove termos da sucessão são pontos sobre a bissetriz dos quadrantes ímpares, ou seja $1 \leq v_n \leq 9, \forall n \leq 9$
- a representação gráfica dos restantes termos da sucessão são pontos sobre uma hipérbole tal que $v_n > 1, \forall n \geq 10$

ou seja, $1 \leq v_n \leq 9, \forall n \in \mathbb{N}$

Resposta: **Opção C**

Exame – 2020, 2.ª Fase

13. Determinando uma expressão de $u_{n+1} - u_n$ temos

$$u_{n+1} - u_n = \frac{8(n+1)-4}{(n+1)+1} - \frac{8n-4}{n+1} = \frac{8n+4}{n+2}_{(n+1)} - \frac{8n-4}{n+1}_{(n+2)} = \frac{(8n+4)(n+1)-(8n-4)(n+2)}{(n+2)(n+1)} =$$

$$= \frac{8n^2+8n+4n+4-\left(8n^2+16n-4n-8\right)}{(n+2)(n+1)} = \frac{8n^2+8n+4n+4-8n^2-16n+4n+8}{(n+2)(n+1)} =$$

$$= \frac{12n+4-12n+8}{(n+2)(n+1)} = \frac{12}{(n+2)(n+1)}$$

Como $n > 0$, temos que $(n+2)(n+1) > 0$, e como o quociente de dois números positivos (12 e $(n+2)(n+1)$) é um valor positivo, temos que:

$$u_{n+1} - u_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}$$

Ou seja, (u_n) é uma sucessão **monótona crescente**.

Exame – 2020, 1.ª Fase

14. Observando a expressão da sucessão, temos que:

$$u_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n+1} = \frac{(-1)^n \times (-1)^1}{n+1} = -\frac{(-1)^n}{n+1} = \begin{cases} -\dfrac{1}{n+1} & \text{se } n \text{ par} \\ \dfrac{1}{n+1} & \text{se } n \text{ ímpar} \end{cases}$$

Desta forma, quando n é ímpar, todos os termos são positivos, pelo que, $u_n > -0{,}01$

Quando o n é par, temos que:

$$u_n > -0{,}01 \Leftrightarrow -\frac{1}{n+1} > -\frac{1}{100} \Leftrightarrow \frac{1}{n+1} < \frac{1}{100} \Leftrightarrow \frac{1}{n+1} - \frac{1}{100} < 0 \Leftrightarrow \frac{100-n-1}{100(n+1)} < 0 \underset{100(n+1)>0}{\Rightarrow}$$

$$\Rightarrow 100 - n - 1 < 0 \Leftrightarrow -n < -99 \Leftrightarrow n > 99$$

Ou seja, os termos da sucessão (u_n) são maiores do que –0,01 para ordens pares superiores a 99 e também para todas as ordens ímpares, ou seja, a menor ordem a partir da qual todos os termos da sucessão (u_n) são maiores do que –0,01 é 99.

Exame – 2019, Ép. especial

15. Como 2, a e b são três termos consecutivos de uma progressão geométrica, designado por r a razão da progressão, temos que:

$$2 \times r = a \Leftrightarrow r = \frac{a}{2}, \text{ e também que } a \times r = b \Leftrightarrow r = \frac{b}{a}$$

E assim, vem que:

$$\frac{a}{2} = \frac{b}{a} \Leftrightarrow a^2 = 2b$$

Por outro lado, como $a-2$, b e 2 são três termos consecutivos de uma progressão aritmética, designado por k a razão da progressão, temos que:

$$a - 2 + k = b \Leftrightarrow k = b - a + 2, \text{ e também que } b + k = 2 \Leftrightarrow k = 2 - b$$

E assim, vem que:

$$b - a + 2 = 2 - b \Leftrightarrow 2b = a$$

Resolvendo o sistema seguinte, determinamos a e b:

$$\begin{cases} a^2 = 2b \\ 2b = a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 = a \\ b = \dfrac{a}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - a = 0 \\ b = \dfrac{a}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a(a-1) = 0 \\ b = \dfrac{a}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \lor a - 1 = 0 \\ b = \dfrac{a}{2} \end{cases} \underset{a \neq 0}{\Leftrightarrow} \begin{cases} a = 1 \\ b = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

Exame – 2019, 2.ª Fase

16. Designado por a o maior dos dois termos considerados da progressão geométrica, e por b 0 menor, como a razão é r, temos que:

$$\frac{a}{b} = r \Leftrightarrow a = b \times r$$

Como a soma dos termos é 12, temos que: $a + b = 12 \Leftrightarrow b \times r + b = 12 \Leftrightarrow b \times r = 12 - b$

Como a diferença dos termos é 3, temos que: $a - b = 3 \Leftrightarrow b \times r - b = 3 \Leftrightarrow b \times r = 3 + b$

Assim, por transitividade das duas igualdades anteriores, temos que:

$$12 - b = 3 + b \Leftrightarrow 12 - 3 = b + b \Leftrightarrow 9 = 2b \Leftrightarrow \frac{9}{2} = b$$

Substituindo o valor de b na igualdade $b \times r - b = 3$, e resolvendo a equação, obtemos o valor de r:

$$\frac{9}{2} \times r = 3 + \frac{9}{2} \Leftrightarrow \frac{9}{2} \times r = \frac{6}{2} + \frac{9}{2} \Leftrightarrow \frac{9}{2} \times r = \frac{15}{2} \Leftrightarrow r = \frac{15 \times 2}{2 \times 9} \Leftrightarrow r = \frac{5}{3}$$

Exame – 2019, 1.ª Fase

17. Determinando uma expressão de $u_{n+1} - u_n$ temos

$$u_{n+1} - u_n = \frac{(n+1)+5}{(n+1)+3} - \frac{n+5}{n+3} = \frac{n+6}{n+4}_{(n+3)} - \frac{n+5}{n+3}_{(n+4)} = \frac{(n+6)(n+3) - (n+5)(n+4)}{(n+4)(n+3)} =$$

$$= \frac{n^2 + 3n + 6n + 18 - \left(n^2 + 4n + 5n + 20\right)}{(n+4)(n+3)} = \frac{n^2 + 3n + 6n + 18 - n^2 - 4n - 5n - 20}{(n+4)(n+3)} =$$

$$= \frac{9n + 18 - 9n - 20}{(n+4)(n+3)} = \frac{-2}{(n+4)(n+3)}$$

Como $n > 0$, temos que $(n+4)(n+3) > 0$, e como o quociente de um número negativo (-2) por um positivo ($(n+4)(n+3)$), é sempre um valor negativo, temos que

$$u_{n+1} - u_n < 0, \forall n \in \mathbb{N}$$

Ou seja, (u_n) é uma sucessão **monótona decrescente**.

Exame – 2018, Ép. especial

18. Como o terceiro termo da progressão aritmética é 4, designado a razão por r, temos que:

- $u_3 = 4 \Leftrightarrow u_1 + (3-1) \times r = 4 \Leftrightarrow u_1 + 2r = 4 \Leftrightarrow u_1 = 4 - 2r$
- $u_{12} = u_1 + (12-1) \times r = u_1 + 11r$
- a soma dos 12 primeiros termos é:

$$S_{12} = \frac{u_1 + u_{12}}{2} \times 12 = \frac{u_1 + u_1 + 11r}{2} \times 12 = (4 - 2r + 4 - 2r + 11r) \times \frac{12}{2} = (8 + 7r) \times 6$$

Como a soma dos doze primeiros termos é 174, temos que:

$$S_{12} = 174 \Leftrightarrow (8+7r) \times 6 = 174 \Leftrightarrow 8 + 7r = \frac{174}{6} \Leftrightarrow 7r = 29 - 8 \Leftrightarrow r = \frac{21}{7} \Leftrightarrow r = 3$$

Assim, vem que:

- $u_1 = 4 - 2 \times 3 = 4 - 6 = -2$
- $u_n = u_1 + (n-1) \times r = -2 + 3(n-1)$

E assim, resolvendo a equação $u_n = 5371$, vem:

$$u_n = 5371 \Leftrightarrow -2 + 3(n-1) = 5371 \Leftrightarrow 3n - 3 = 5371 + 2 \Leftrightarrow 3n = 5373 + 3 \Leftrightarrow n = \frac{5376}{3} \Leftrightarrow n = 1792$$

Como a solução da equação é um número natural, então 5371 é o termo de ordem 1972 da sucessão (u_n), ou seja, $u_{1792} = 5371$

Exame – 2018, 2.ª Fase

19. Como o quociente de termos consecutivos de uma progressão geométrica é constante e igual à razão (r), temos que:

$$\frac{a+18}{a+6} = r \text{ e também que } \frac{a+6}{a} = r$$

Assim, igualando os quocientes e resolvendo a equação em ordem a a, vem:

$$\frac{a+18}{a+6} = \frac{a+6}{a} \underset{a \neq 0 \wedge a \neq -6}{\Leftrightarrow} a(a+18) = (a+6)^2 \Leftrightarrow a^2 + 18a = a^2 + 12a + 36 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a^2 - a^2 + 18a - 12a = 36 \Leftrightarrow 6a = 36 \Leftrightarrow a = \frac{36}{6} \Leftrightarrow a = 6$$

Assim, como $\frac{a+6}{a} = r$, temos que $r = \frac{6+6}{6} = \frac{12}{6} = 2$

Desta forma, podemos calcular o primeiro termo da progressão, u_1, recorrendo à fórmula da soma dos 7 primeiros termos:

$$S_7 = u_1 \times \frac{1 - r^7}{1 - r} \Leftrightarrow 381 = u_1 \times \frac{1 - 2^7}{1 - 2} \Leftrightarrow 381 = u_1 \times \frac{1 - 128}{-1} \Leftrightarrow 381 = u_1 \times \frac{-127}{-1} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 381 = u_1 \times 127 \Leftrightarrow \frac{381}{127} = u_1 \Leftrightarrow 3 = u_1$$

Exame – 2018, 1.ª Fase

20. Como todos os termos da sucessão são positivos, $u_n \neq 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$, e assim, vem que:

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} < 1 \Leftrightarrow u_{n+1} < u_n \Leftrightarrow u_{n+1} - u_n < 0$$

Ou seja, a sucessão (u_n) é monótona decrescente, pelo que é limitada superiormente pelo primeiro termo e como todos os termos são positivos, então é limitada inferiormente por zero, isto é:

$$0 < u_n \leq u_1$$

Isto é, a sucessão (u_n) é limitada.

Resposta: **Opção A**

Exame – 2017, Ép. especial

21. Temos que:

$$u_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{1-n} = \left(\frac{1}{2}\right)^{1} \times \left(\frac{1}{2}\right)^{-n} = \frac{1}{2} \times 2^n = \frac{2^n}{2} = 2^{n-1} = 1 \times 2^{n-1}$$

Assim, como $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{2^{n-1+1}}{2^{n-1}} = \frac{2^n}{2^n \times 2^{-1}} = \frac{2^n}{2^n} \times \frac{1}{2^{-1}} = 1 \times 2 = 2$, (u_n) é uma progressão geométrica de razão 2

Resposta: **Opção B**

Exame – 2017, 2.ª Fase

22. Observando a expressão da sucessão, temos que:

- Para $n \leq 20$, os termos da sucessão são iguais aos valores da ordem, ou seja, $1 \leq u_n \leq 20$
- Para $n > 20$, os termos da sucessão são iguais a 1, ou -1, pelo que $-1 \leq u_n \leq 1$

Assim, para qualquer valor de n, temos que $-1 \leq u_n \leq 20$, ou seja, a sucessão (u_n) é limitada.

Resposta: **Opção C**

Exame – 2017, 1.ª Fase

23. Como (u_n) é progressão geométrica (u_n), designado por r a razão, temos que o termo de ordem n é

$$u_n = u_1 \times r^{n-1}$$

Assim, temos que

- $u_4 = 32 \Leftrightarrow u_1 \times r^{4-1} = 32 \Leftrightarrow u_1 \times r^3 = 32 \Leftrightarrow u_1 = \dfrac{32}{r^3}$
- $u_8 = 8192 \Leftrightarrow u_1 \times r^{8-1} = 8192 \Leftrightarrow u_1 \times r^7 = 8192 \Leftrightarrow u_1 = \dfrac{8192}{r^7}$

Desta forma, e como a progressão é monótona crescente, temos que a razão é positiva ($r > 0$), pelo que podemos calcular o valor da razão:

$$\frac{32}{r^3} = \frac{8192}{r^7} \Leftrightarrow \frac{r^7}{r^3} = \frac{8192}{32} \Leftrightarrow r^4 = 256 \Leftrightarrow r = \sqrt[4]{256} \underset{r>0}{\Rightarrow} r = 4$$

Logo, obtemos o quinto termo, multiplicando o quarto termo pela razão:

$$u_5 = u_4 \times r = 32 \times 4 = 128$$

Resposta: **Opção B**

Exame – 2016, 2.ª Fase

24. Como (a_n) é progressão geométrica (a_n), designado por r a razão, temos que o termo de ordem n é

$$a_n = a_1 \times r^{n-1}$$

Assim, temos que

- $a_3 = \dfrac{1}{4} \Leftrightarrow a_1 \times r^{3-1} = \dfrac{1}{4} \Leftrightarrow a_1 \times r^2 = \dfrac{1}{4} \Leftrightarrow a_1 = \dfrac{1}{4 \times r^2}$
- $a_6 = 2 \Leftrightarrow a_1 \times r^{6-1} = 2 \Leftrightarrow a_1 \times r^5 = 2 \Leftrightarrow a_1 = \dfrac{2}{r^5}$

Desta forma, podemos calcular o valor da razão:

$$\frac{1}{4 \times r^2} = \frac{2}{r^5} \Leftrightarrow \frac{r^5}{r^2} = 2 \times 4 \Leftrightarrow r^3 = 8 \Leftrightarrow r = \sqrt[3]{8} \Leftrightarrow r = 2$$

E o valor do primeiro termo:

$$a_6 = 2 \Leftrightarrow a_1 = \frac{2}{r^5} \underset{r=2}{\Leftrightarrow} a_1 = \frac{2}{2^5} \Leftrightarrow a_1 = \frac{1}{2^4}$$

Assim, calculado o valor do vigésimo termo, vem

$$a_{20} = a_1 \times r^{20-1} = \frac{1}{2^4} \times 2^{19} = \frac{2^{19}}{2^4} = 2^{19-4} = 2^{15} = 32\,768$$

Resposta: **Opção C**

Exame – 2015, Ép. especial

25. Analisando cada uma das expressões temos:

- Se $u_n = (-1)^n$, então $u_1 = (-1)^1 = -1$; $u_2 = (-1)^2 = 1$ e $u_3 = (-1)^3 = -1$
Como $u_2 > u_1$ mas $u_3 < u_2$ a sucessão não é monótona.
- Se $u_n = (-1)^n.n$, então $u_1 = (-1)^1 \times 1 = -1$; $u_2 = (-1)^2 \times 2 = 2$ e $u_3 = (-1)^3 \times 3 = -3$
Da mesma forma, temos que, como $u_2 > u_1$ mas $u_3 < u_2$ a sucessão não é monótona.
- Se $u_n = -\frac{1}{n}$, como $u_{n+1} = -\frac{1}{n+1}$, vem que

$$u_{n+1} - u_n = -\frac{1}{n+1} - \left(-\frac{1}{n}\right) = -\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n} = -\frac{n}{n(n+1)} + \frac{n+1}{n(n+1)} = \frac{-n+n+1}{n(n+1)} = \frac{1}{n(n+1)}$$

Ou seja, $u_{n+1} - u_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}$ (porque como $n > 0$, então $n(n+1) > 0$ e também $\frac{1}{n(n+1)}$), ou seja u_n é uma sucessão **monótona** crescente.

Temos ainda que, como u_n é monótona crescente, $u_n > u_1, \forall n > 1$ e que $u_n < 0, \forall n \in \mathbb{N}$ (porque como $\frac{1}{n} > 0, n \in \mathbb{N}$ então $-\frac{1}{n} < 0, n \in \mathbb{N}$), pelo que $-1 \leq u_n < 0$, ou seja u_n **é limitada**.
- Se $u_n = 1 + n^2$, então u_n é um infinitamente grande positivo, ou seja, $\forall \delta \in \mathbb{R}, \exists k \in \mathbb{N} : u_k > \delta$, ou seja a sucessão não é limitada.

Resposta: **Opção C**

Exame – 2015, 2.ª Fase

26. Recorrendo à definição da sucessão (u_n) temos que

- $u_1 = a$
- $u_2 = -3u_1 + 2 = -3a + 2$
- $u_3 = -3u_2 + 2 = -3(-3a + 2) + 2 = 9a - 6 + 2 = 9a - 4$

Resposta: **Opção B**

Exame – 2015, 1.ª Fase

27. Começando por determinar o valor de u_2, vem:

$$u_2 = u_1 + 2 \times 2 = 3 + 4 = 7$$

Resolvendo a equação $w_n = u_2$, temos:

$$w_n = u_2 \Leftrightarrow 5n - 13 = 7 \Leftrightarrow 5n = 7 + 13 \Leftrightarrow n = \frac{20}{5} \Leftrightarrow n = 4$$

Resposta: **Opção B**

Teste Intermédio 11.º ano – 24.05.2011

28. Determinando uma expressão de $u_{n+1} - u_n$ temos

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1-2(n+1)}{(n+1)+3} - \frac{1-2n}{n+3} = \frac{1-2n-2}{n+1+3} - \frac{1-2n}{n+3} = \frac{-2n-1}{n+4}_{(n+3)} - \frac{1-2n}{n+3}_{(n+4)} =$$

$$= \frac{(-2n-1)(n+3)-(1-2n)(n+4)}{(n+4)(n+3)} = \frac{-2n^2-6n-n-3-\left(n+4-2n^2-8n\right)}{(n+4)(n+3)} =$$

$$= \frac{-2n^2-6n-n-3-n-4+2n^2+8n}{(n+4)(n+3)} = \frac{-7}{(n+4)(n+3)}$$

Como $n > 0$, temos que $(n+4)(n+3) > 0$, e como o quociente de um número negativo (-7) por um positivo ($(n+4)(n+3)$), é sempre um valor negativo, temos que

$$u_{n+1} - u_n < 0, \forall n \in \mathbb{N}$$

Ou seja, u_n é uma sucessão **monótona decrescente**.

Teste Intermédio 11.º ano – 24.05.2011