Prova-Modelo 1 (págs. 409-412)

Caderno 1

1. O aluno acerta à segunda tentativa quando falha na primeira tentativa e acerta na segunda.

Seja A o acontecimento: "O aluno falha na primeira tentativa" e seja B o acontecimento: "O aluno acerta na segunda tentativa".

Assim, a probabilidade pretendida é $P(A \cap B) = P(A) \times P(B|A) = \frac{4}{5} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{5}$.

Opção (B)

2. Seja A o acontecimento: "Os dois pratos foram elaborados pelo mesmo cozinheiro".

Sabemos que, ao todo, foram confecionados 12 pratos.

Assim, $P(A) = \frac{6\times 1}{^{12}C_2} = \frac{6}{66} = \frac{1}{11}$.

Opção (A)

3.

3.1. Consideremos os seguintes acontecimentos:

F: "O aluno é do sexo feminino."

I: "O aluno prefere ir a Ibiza."

Pelos dados do enunciado, sabe-se que:

- $P(F) = 0{,}6$
- $P(I|F) = 0{,}5$
- $P(\overline{I}\,|\,\overline{F}) = \frac{1}{5} = 0{,}2$

Assim:

	I	$\overline{I}$	
F	0,3	0,3	0,6
$\overline{F}$	0,32	0,08	0,4
	0,62	0,38	1

Cálculos auxiliares

$P(I|F) = 0{,}5 \Leftrightarrow \frac{P(I\cap F)}{P(F)} = 0{,}5$

$\Leftrightarrow P(I \cap F) = 0{,}5 \times 0{,}6$

$\Leftrightarrow P(I \cap F) = 0{,}3$

$P(\overline{I}\,|\,\overline{F}) = 0{,}2 \Leftrightarrow \frac{P(\overline{I}\cap\overline{F})}{P(\overline{F})} = 0{,}2$

$\Leftrightarrow P(\overline{I} \cap \overline{F}) = 0{,}2 \times 0{,}4$

$\Leftrightarrow P(\overline{I} \cap \overline{F}) = 0{,}08$

Logo, $P(F|I) = \frac{P(F\cap I)}{P(I)} = \frac{0{,}3}{0{,}62} = \frac{15}{31}$.

3.2. Esta escola tem 150 alunos de 12.º ano, dos quais 60% são raparigas. Então, existem 90 raparigas das quais se pretende escolher cinco para organizar as atividades no destino de viagem escolhido. Assim, a resposta (I) é uma resposta correta ao problema, pois $^{90}C_5$ é o número de maneiras diferentes de constituir o grupo com cinco raparigas, escolhidas de entre as 90 existentes. Existem $^{88}C_4$ grupos que não podem ser formados, pois têm a

Ana e não têm a Bárbara (de acordo com o enunciado, a Ana só aceita fazer parte do grupo se a Bárbara fizer). Então, subtrai-se este número de conjuntos ao número total, obtendo assim o número de grupos que satisfazem as condições pretendidas. Na resposta (II), $^{88}C_5$ é o número de grupos que podem ser formados sem a Ana e sem a Bárbara, pois são escolhidas cinco raparigas de entre as 88 que não são a Ana nem a Bárbara. Existem $^{88}C_3$ grupos que se podem constituir com a Ana e com a Bárbara, pois, além destas raparigas, são escolhidas outras três de entre as restantes 88 para fazer um grupo com um total de cinco. Finalmente, para satisfazer as condições pretendidas, podem ainda ser formados grupos sem a Ana, mas com a Bárbara. $^{88}C_4$ é o número de grupos , nessa situação, já que, com a Bárbara no grupo, apenas é necessário escolher outras quatro raparigas, de entre as 88 possíveis, pois, como a Bárbara já faz parte e a Ana não pode fazer, os elementos são escolhidos de entre 90 – 2 = 88 raparigas.

Assim, $^{88}C_5 + {}^{88}C_3 + {}^{88}C_4$ é o número de grupos que podem ser formados, sabendo que a Ana só aceita fazer parte do grupo se a Bárbara também fizer.

4. Se a linha tem 2016 elementos, então os seus elementos são os seguintes:

$$\begin{array}{ccccccc} ^{2015}C_0 & ^{2015}C_1 & ^{2015}C_2 & \ldots & ^{2015}C_{2013} & ^{2015}C_{2014} & ^{2015}C_{2015} \\ 1 & 2015 & 2\,029\,105 & \ldots & 2\,029\,105 & 2015 & 1 \end{array}$$

Ora, existem 4 elementos inferiores a 5000 e não existem elementos iguais a 5000.

Portanto, existem $2016 - 4 = 2012$ elementos maiores que 5000.

Opção (B)

5. $A_{\text{círculo}} = 25\pi \Leftrightarrow \pi r^2 = 25\pi \ \wedge \ r > 0 \Leftrightarrow r^2 = 25 \ \wedge \ r > 0$

$$\Leftrightarrow r = 5 \ \wedge \ r > 0$$

Como $r = 5$, então B e C têm, respetivamente, coordenadas $B(0,5,0)$ e $C(0,-5,0)$.

Logo, uma equação vetorial de BD é:

$$BD: (x,y,z) = (0,5,0) + k(0,0,1), k \in \text{IR}$$

$\overrightarrow{AC} = C - A = (0,-5,0) - (4,y,0) = (-4,-5-y,0)$

$\overrightarrow{AB} = B - A = (0,5,0) - (4,y,0) = (-4,5-y,0)$

$\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB} = 0 \Leftrightarrow (-4,-5-y,0) \cdot (-4,5-y,0) = 0 \Leftrightarrow 16 + (-5-y)(5-y) = 0$

$$\Leftrightarrow 16 - 25 + 5y - 5y + y^2 = 0$$
$$\Leftrightarrow -9 + y^2 = 0$$
$$\Leftrightarrow y^2 = 9$$
$$\Leftrightarrow y = \pm 3$$

Assim, $A(4,3,0)$ e $\overrightarrow{AC} = (-4,-8,0)$.

Observe-se que o triângulo $[ABC]$ é um triângulo retângulo em A, por estar inscrito numa semicircunferência. O vetor $\overrightarrow{AC}$ é, então, um vetor normal ao plano ABD.

Por conseguinte, a equação do plano ABD é da forma $-4x - 8y + d = 0$.

Como $A \in ABD$, então:

$$-4 \times 4 - 8 \times 3 + d = 0 \Leftrightarrow -16 - 24 + d = 0$$

$$\Leftrightarrow d = 40$$

$$ABD: -4x - 8y + 40 = 0 \Leftrightarrow x + 2y - 10 = 0$$

6.

6.1. $g'(x) = \frac{2-2(1+\cos x)(-\sin x)}{4} = \frac{2+2\sin x(1+\cos x)}{4}$

$$g''(x) = \frac{2\cos x(1+\cos x)+2\sin x(-\sin x)}{4} = \frac{2\cos x+2\cos^2 x-2\sin^2 x}{4} =$$

$$= \frac{2(\cos x+\cos^2 x-\sin^2 x)}{4} =$$

$$= \frac{\cos x+\cos^2 x-(1-\cos^2 x)}{2} =$$

$$= \frac{\cos x+\cos^2 x-1+\cos^2 x}{2} =$$

$$= \frac{2\cos^2 x+\cos x-1}{2}$$

$$g''(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{2\cos^2 x+\cos x-1}{2} = 0 \Leftrightarrow 2\cos^2 x + \cos x - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos x = \frac{-1\pm\sqrt{1^2-4\times2\times(-1)}}{2\times2}$$

$$\Leftrightarrow \cos x = \frac{1}{2} \ \vee \ \cos x = -1$$

$$\Leftrightarrow x = \pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi \ \vee \ x = \pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Se $k = 0, x = -\frac{\pi}{3} \vee x = \frac{\pi}{3} \vee x = \pi$

Se $k = 1, x = \frac{5\pi}{3} \vee x = \frac{7\pi}{3} \vee x = 3\pi$

No intervalo $\left[-\frac{\pi}{6}, \frac{13\pi}{6}\right]$ as soluções da equação $g''(x) = 0$ são $\frac{\pi}{3}, \pi \ e \ \frac{5\pi}{3}$.

x	$-\frac{\pi}{6}$		$\frac{\pi}{3}$		π		$\frac{5\pi}{3}$		$\frac{13\pi}{6}$
Sinal de g''	$g''\left(-\frac{\pi}{6}\right)$	$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$	$g''\left(\frac{13\pi}{6}\right)$
Sentido das concavidades do gráfico de g	$g\left(-\frac{\pi}{6}\right)$	$\cup$	P. I.	$\cap$	$g(\pi)$	$\cap$	P. I.	$\cup$	$g\left(\frac{13\pi}{6}\right)$

O gráfico de g tem a concavidade voltada para cima em $\left[-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\right]$ e em $\left[\frac{5\pi}{3}, \frac{13\pi}{6}\right]$ e tem a concavidade voltada para baixo em $\left[\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\right]$. Os pontos de abcissa $\frac{\pi}{3}$ e $\frac{5\pi}{3}$ são pontos de inflexão do gráfico de g.

6.2. Pretende-se provar que a equação $g'(x) = g(x)$ tem, pelo menos, uma solução no intervalo $]0, \pi[$.

Consideremos a função h, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $h(x) = g'(x) - g(x)$, isto é:

$$h(x) = \frac{2+2\sin x(1+\cos x)}{4} - \frac{2x-(1+\cos x)^2}{4} \Leftrightarrow h(x) = \frac{2+2\sin x(1+\cos x)-2x+(1+\cos x)^2}{4}$$

$$\Leftrightarrow h(x) = \frac{2-2x+2\sin x(1+\cos x)+(1+\cos x)^2}{4}$$

h é contínua em $\mathbb{R}$, por se tratar de uma função que resulta da diferença entre funções contínuas em $\mathbb{R}$. Em particular, h é contínua em $[0, \pi]$.

$$h(0) = \frac{2-0+2\sin 0(1+\cos 0)+(1+\cos 0)^2}{4} = \frac{2-0+0+(1+1)^2}{4} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$$

$$h(\pi) = \frac{2-2\pi+2\sin\pi(1+\cos\pi)+(1+\cos\pi)^2}{4} = \frac{2-2\pi}{4} = \frac{1-\pi}{2}$$

Portanto, $h(\pi) < 0 < h(0)$.

Assim, pelo teorema de Bolzano-Cauchy, concluímos que:

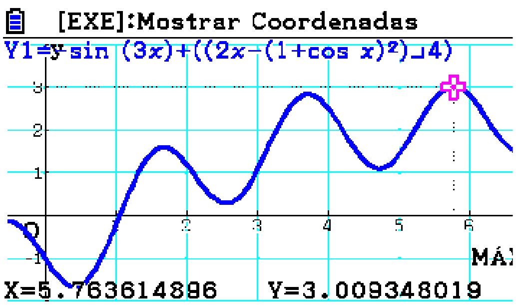
$$\exists\, c \in\,]0, \pi[: h(c) = 0 \Leftrightarrow \exists\, c \in\,]0, \pi[: g'(c) - g(c) = 0$$

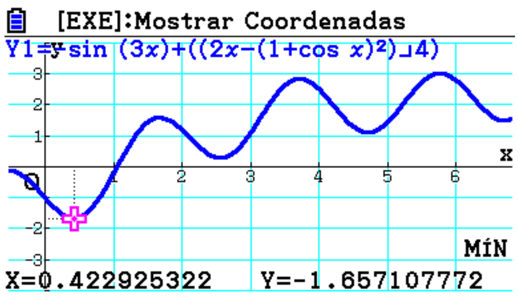
$$\Leftrightarrow \exists\, c \in\,]0, \pi[: g'(c) = g(c)$$

isto é, a equação $g'(x) = g(x)$ tem pelo menos uma solução no intervalo $]0, \pi[$.

Por conseguinte, o gráfico de g' interseta o gráfico de g em, pelo menos, um ponto no intervalo $]0, \pi[$.

6.3.





Assim:

$$-1{,}66 \leq -\text{sen}(3x) + g(x) \leq 3{,}01$$

$$\Leftrightarrow -1{,}66a \leq a[-\text{sen}(3x) + g(x)] \leq 3{,}01a$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{-1{,}66a + b}_{-1} \leq \underbrace{a[-\text{sen}(3x) + g(x)] + b}_{h(x)} \leq \underbrace{3{,}01a + b}_{2}$$

Logo:

$$\begin{cases} -1{,}66a + b = -1 \\ 3{,}01a + b = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1{,}66a + 2 - 3{,}01a = -1 \\ b = 2 - 3{,}01a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4{,}67a = 3 \\ b = 2 - 3{,}01a \end{cases}$$

Assim:

$$\begin{cases} a \approx 0{,}64 \\ b \approx 0{,}07 \end{cases}$$

Caderno 2

7. $P(A|B) - 1 + \frac{P(\bar{A}) - P(\bar{A} \cap \bar{B})}{1 - P(\bar{B})} = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} - 1 + \frac{P(\bar{A}) - P(\bar{A} \cap \bar{B})}{P(B)} = \frac{P(A \cap B) - P(B) + P(\bar{A}) - P(\bar{A} \cap \bar{B})}{P(B)} =$

$= \frac{P(A \cap B) - P(B) + 1 - P(A) - P(\bar{A} \cap \bar{B})}{P(B)} =$

$= \frac{-[P(A) + P(B) - P(A \cap B)] + 1 - P(\overline{A \cup B})}{P(B)} =$

$= \frac{-P(A \cup B) + P(A \cup B)}{P(B)} =$

$= \frac{0}{P(B)} =$

$= 0$ c.q.d.

8. Sabemos que $\lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e^-$. Assim, $\lim \left[5 \ln \left[\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right]\right] = 5 \times \ln(e^-) = 5^-$.

Como $x_n \to 5^-$, então $\lim f(x_n) = 3$.

Opção (C)

9.

9.1. Como f é contínua em $D_f = \mathbb{R} \backslash \{-3\}$, a única candidata a assíntota vertical ao gráfico de f é a reta de equação $x = -3$.

Uma vez que $\lim_{x \to -3^+} \left(x e^{\frac{1}{x+3}}\right) = -3 \times e^{\frac{1}{-3^+ + 3}} = -3e^{\frac{1}{0^+}} = -3e^{+\infty} = -\infty$, então a reta de equação $x = -3$ é assíntota vertical ao gráfico de f.

Vamos agora aferir se existem assíntotas **não verticais** ao gráfico de f.

$$m = \lim_{x \to +\infty} \frac{x e^{\frac{1}{x+3}}}{x} = \lim_{x \to +\infty} e^{\frac{1}{x+3}} = e^{\frac{1}{+\infty}} = e^0 = 1$$

$$b = \lim_{x \to +\infty} \left(x e^{\frac{1}{x+3}} - x\right) = \lim_{x \to +\infty} \left[x \left(e^{\frac{1}{x+3}} - 1\right)\right] =$$

Considerando a mudança de variável $y = \frac{1}{x+3} \Leftrightarrow xy + 3y = 1 \Leftrightarrow xy = 1 - 3y$

$\Leftrightarrow x = \frac{1-3y}{y}$: se $x \to +\infty$, então $y \to 0$.

$$= \lim_{y\to 0}\left[\frac{1-3y}{y}(e^y-1)\right] =$$

$$= \lim_{y\to 0}\left[\frac{e^y-1}{y}(1-3y)\right] =$$

$$= \underbrace{\lim_{y\to 0}\frac{e^y-1}{y}}_{\text{limite notável}} \times \lim_{y\to 0}(1-3y) =$$

$$= 1\times 1 =$$

$$= 1$$

Logo, a reta de equação $y = x + 1$ é assíntota oblíqua ao gráfico de f, quando $x \to +\infty$.

Por cálculos idênticos, concluiu-se que a reta de equação $y = x + 1$ é assíntota oblíqua ao gráfico de f, quando $x \to -\infty$. Assim, concluímos que o gráfico de f tem duas assíntotas, as retas de equação $x = -3$ e $y = x + 1$.

9.2. $f(x) = x\, e^{\frac{1}{x+3}}$

$$f'(x) = 1e^{\frac{1}{x+3}} + xe^{\frac{1}{x+3}} \times \frac{-1}{(x+3)^2} = e^{\frac{1}{x+3}} - \frac{xe^{\frac{1}{x+3}}}{(x+3)^2} =$$

$$= e^{\frac{1}{x+3}}\left(1 - \frac{x}{(x+3)^2}\right)$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow e^{\frac{1}{x+3}}\left(1-\frac{x}{(x+3)^2}\right) = 0 \Leftrightarrow \underbrace{e^{\frac{1}{x+3}} = 0}_{\text{equação impossível}} \vee 1 - \frac{x}{(x+3)^2} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x+3)^2 - x}{(x+3)^2} = 0 \Leftrightarrow \frac{x^2+6x+9-x}{(x+3)^2} = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 5x + 9 = 0 \ \wedge \ x \neq -3$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{x = \frac{-5\pm\sqrt{5^2-4\times 1\times 9}}{2\times 1}}_{\text{equação impossível}}$$

x	$-\infty$	-3	$+\infty$
Sinal de f'	$+$	n.d.	$+$
Variação de f	$\nearrow$	n.d.	$\nearrow$

f é crescente em $]-\infty,-3[$ e em $]-3,+\infty[$; f não tem extremos.

10. $\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty}\frac{2+e^{-x}}{f(x)+1} = \frac{\lim_{x\to+\infty}(2+e^{-x})}{\lim_{x\to+\infty} f(x) + \lim_{x\to+\infty} 1} =$

$$= \frac{2+e^{-\infty}}{0+1} =$$

$$= \frac{2+0^+}{1} =$$

$$= 2$$

Logo, a reta de equação $y = 2$ é assíntota horizontal ao gráfico de g.

Opção (C)

Daniela Raposo e Luzia Gomes

11.

x	$-\infty$	-2		0		2	$+\infty$
Sinal de f''	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$
Variação de f'	$\nearrow$	Máx.	$\searrow$	mín.	$\nearrow$	Máx.	$\searrow$

Opção (A)

12. $\lim_{x\to 0^-} \frac{\sin x}{x(x^2+2)} = \lim_{x\to 0^-} \frac{\sin x}{x} \times \lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x^2+2} = 1 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

$$\lim_{x\to 0^+} \left(\frac{\ln(x)}{x} + 1\right) = \frac{-\infty}{0^+} + 1 = -\infty$$

Para que a função g fosse contínua em todo o seu domínio, teria de ser contínua; em particular, em $x = 0$, ou seja, teria de se verificar $\lim_{x\to 0^-} g(x) = \lim_{x\to 0^+} g(x) = g(0) = k$, o que não é possível, já que $\lim_{x\to 0^-} g(x) \neq \lim_{x\to 0^+} g(x)$. Logo, g não é contínua em $x = 0$.

Assim, a função não é contínua em todo o seu domínio.

13. $\overline{AB} = 2r$, uma vez que *A* é o afixo de z e *B* é o afixo de $-z$.

$$\frac{1}{z} = \frac{e^{i0}}{re^{i\left(-\frac{\pi}{4}\right)}} = \frac{1}{r} e^{i\left(0-\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)} = \frac{1}{r} e^{i\left(\frac{\pi}{4}\right)}$$

Portanto, o *C* (afixo de $\frac{1}{z}$) pertence à bissetriz dos quadrantes ímpares e o módulo de $\frac{1}{z}$ é igual a $\frac{1}{r}$, que é a altura do triângulo $[ABC]$. Assim, $A_{[ABC]} = \frac{2r \times \frac{1}{r}}{2} = 1$.

Opção (C)

14.

14.1. $|z+2| \leq 3 \wedge \left(0 \leq \operatorname{Arg}(z) \leq \frac{\pi}{2} \vee \frac{5\pi}{6} \leq \operatorname{Arg}(z) \leq \pi\right)$

14.2. $\left(\sqrt{3} - i\right)z^3 + 54e^{i\frac{4\pi}{3}} = 0 \Leftrightarrow z^3 = \frac{-54e^{i\frac{4\pi}{3}}}{\sqrt{3}-i}$

$$\Leftrightarrow z^3 = \frac{54e^{i\frac{\pi}{3}}}{2e^{i\left(-\frac{\pi}{6}\right)}}$$

$$\Leftrightarrow z^3 = 27e^{i\frac{\pi}{2}}$$

Cálculos auxiliares

$|z| = \sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2 + (-1)^2} = 2$

$\operatorname{tg}\theta = \frac{-1}{\sqrt{3}} \wedge \theta \in 4.º\ Q \Leftrightarrow \operatorname{tg}\theta = -\frac{\sqrt{3}}{3} \wedge \theta \in 4.º\ Q$

Logo, $\theta = -\frac{\pi}{6}$, por exemplo.

Assim, $z = \sqrt[3]{27}e^{i\frac{\frac{\pi}{2}+2k\pi}{3}}$, $k \in \{0, 1, 2\}$.

Se $k = 0, z = 3e^{i\frac{\frac{\pi}{2}}{3}} = 3e^{i\frac{\pi}{6}}$.

Se $k = 1, z = 3e^{i\frac{\frac{\pi}{2}+2\pi}{3}} = 3e^{i\frac{\frac{5\pi}{2}}{3}} = 3e^{i\frac{5\pi}{6}}$.

Se $k = 2, z = 3e^{i\frac{\frac{\pi}{2}+4\pi}{3}} = 3e^{i\frac{\frac{9}{2}\pi}{3}} = 3e^{i\frac{3\pi}{2}}$.

Assim, $z_2 = 3e^{i\frac{5\pi}{6}}$, ou seja, $z_2 = 3e^{i\frac{5\pi}{6}} = 3\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}\right) = -\frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i$.

15. $-16 = 16e^{i\,\pi}$

As raízes índice 8 de -16 são da forma $z_k = \sqrt[8]{16}e^{i\frac{\pi+2k\pi}{8}} = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi+2k\pi}{8}}$, $k \in \{0,1,2,3,4,5,6,7\}$.

Todas as raízes índice 8 de -16 têm módulo $\sqrt{2}$. Este facto exclui as opções (A) e (D).

Se A é o afixo de $\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{8}}$, então F é o afixo do número complexo $\sqrt{2}e^{i\left(\frac{\pi}{8}-3\times\frac{2\pi}{8}\right)}$, isto é, $\sqrt{2}e^{i\left(-\frac{5\pi}{8}\right)}$.

Opção (B)

16. i. Comecemos por provar que $P(1)$ é verdadeira:

$$P(1): (1+i)^1 = 2^{\frac{1}{2}}e^{i\frac{\pi}{4}} \Leftrightarrow 1+i = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{4}\right)$$
$$\Leftrightarrow 1+i = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$
$$\Leftrightarrow 1+i = 1+i$$

Portanto, $P(1)$ é verdadeira.

ii. Provemos que $\forall n \in \mathrm{IN}, P(n) \Rightarrow P(n+1)$, isto é, se $P(n)$ é verdadeira, então $P(n+1)$ também é verdadeira.

Hipótese de indução: $\forall n \in \mathrm{IN}, (1+i)^n = 2^{\frac{n}{2}}e^{i\left(\frac{n\pi}{4}\right)}$

Tese de indução: $\forall n \in \mathrm{IN}, (1+i)^{n+1} = 2^{\frac{n+1}{2}}e^{i\left(\frac{(n+1)\pi}{4}\right)}$

Demonstração:

$$(1+i)^{n+1} = (1+i)^n(1+i) \underbrace{=}_{\text{hipótese de indução}} 2^{\frac{n}{2}}e^{i\left(\frac{n\pi}{4}\right)}(1+i) =$$
$$= 2^{\frac{n}{2}}e^{i\left(\frac{n\pi}{4}\right)}\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}} =$$
$$= 2^{\frac{n}{2}} \times 2^{\frac{1}{2}} \times e^{i\left(\frac{n\pi}{4}+\frac{\pi}{4}\right)} =$$
$$= 2^{\frac{n+1}{2}} \times e^{i\left(\frac{(n+1)\pi}{4}\right)}$$

Demonstrámos, assim, a hereditariedade da condição $P(n)$.

Por **i.** e **ii.**, pelo princípio de indução matemática, provámos que $\forall n \in \mathbb{N}$, $P(n)$ é verdadeira.

Prova-Modelo 2 (págs. 413-416)

Caderno 1

1. $c = 6$ e $b = 8$

$a^2 = 8^2 + 6^2 \ \wedge \ a > 0 \Leftrightarrow a^2 = 100 \ \wedge \ a > 0 \Leftrightarrow a = 10$

Logo, o comprimento do eixo maior da elipse é igual a 20.

Opção (D)

2. Sabemos que $\text{t.m.v.}_{[1,3]} = 2$ e que f é diferenciável em $[1,3]$.

Pelo Teorema de Lagrange, temos que $\exists\, x \in]1, 3[: f'(x) = 2$.

Opção (C)

3.

3.1. Consideremos os seguintes acontecimentos:

I: "O funcionário fala inglês."

E: "O funcionário fala espanhol."

Pelos dados do enunciado, sabe-se que:

- $P(I) = 0{,}8$
- $P(E|I) = 0{,}25$
- $P(\overline{I} \cap \overline{E}) = 0{,}05$

Assim:

Cálculo auxiliar

$P(E|I) = 0{,}25 \Leftrightarrow \frac{P(E\cap I)}{P(I)} = 0{,}25$

$\Leftrightarrow P(E \cap I) = 0{,}25 \times 0{,}8$

$\Leftrightarrow P(E \cap I) = 0{,}2$

	E	$\overline{E}$	
I	0,2	0,6	0,8
$\overline{I}$	0,15	0,05	0,2
	0,35	0,65	1

$$P(I|\overline{E}) = \frac{P(I \cap \overline{E})}{P(\overline{E})} = \frac{0{,}60}{0{,}65} = \frac{12}{13}$$

3.2. Se a empresa tem 50 funcionários, e sabe-se que 80% falam inglês, então na empresa há 40 $(50 \times 0{,}8)$ funcionários que falam inglês.

Assim, $\frac{{}^{40}C_7 \times {}^{10}C_1 + {}^{40}C_8}{{}^{50}C_8} \approx 0{,}49$.

4. Para que o teorema de Bolzano-Cauchy se possa aplicar, a função g tem de ser contínua no intervalo $[0, 2]$; em particular, tem que ser contínua em $x = 1$, isto é, tem que existir $\lim_{x\to 1^+} g(x)$.

• $\lim_{x\to 1^-} \frac{e^{x-1}-1}{2(x-1)} = \frac{1}{2}\lim_{x\to 1^-} \frac{e^{x-1}-1}{x-1} =$

Considerando a mudança de variável $x - 1 = y \Leftrightarrow x = y + 1$: se $x \to 1^-$, então $y \to 0$.

$$= \frac{1}{2}\underbrace{\lim_{y\to 0} \frac{e^{y}-1}{y}}_{\text{limite notável}} =$$

$$= \frac{1}{2} \times 1 =$$

$$= \frac{1}{2}$$

• $\lim_{x\to 1^+}(e^x + \ln(x) + k) = g(1) = e^1 + \ln(1) + k = e + k$

• $e + k = \frac{1}{2} \Leftrightarrow k = \frac{1}{2} - e$

Opção (C)

5.

5.1. $C(t) = 0{,}5 \Leftrightarrow 10(e^{-t} - e^{-2t}) = 0{,}5 \Leftrightarrow e^{-t} - e^{-2t} = 0{,}05$

$$\Leftrightarrow -e^{-2t} + e^{-t} - 0{,}05 = 0$$

$$\Leftrightarrow -(e^{-t})^2 + e^{-t} - 0{,}05 = 0$$

$$\Leftrightarrow e^{-t} = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4\times(-1)\times(-0{,}05)}}{2\times(-1)}$$

$$\Leftrightarrow e^{-t} = \frac{5+2\sqrt{5}}{10} \ \vee \ e^{-t} = \frac{5-2\sqrt{5}}{10}$$

$$\Leftrightarrow -t = \ln\left(\frac{5+2\sqrt{5}}{10}\right) \ \vee \ -t = \ln\left(\frac{5-2\sqrt{5}}{10}\right)$$

$$\Leftrightarrow t = -\ln\left(\frac{5+2\sqrt{5}}{10}\right) \ \vee \ t = -\ln\left(\frac{5-2\sqrt{5}}{10}\right)$$

Assim, $t \approx 0{,}1$ minutos $\vee$ $t \approx 2{,}9$ minutos.

5.2. $C'(t) = 10 \times (-e^{-t} + 2e^{-2t})$

$C'(t) = 0 \Leftrightarrow 10(-e^{-t} + 2e^{-2t}) = 0 \Leftrightarrow -e^{-t} + 2e^{-2t} = 0$

$$\Leftrightarrow 2e^{-2t} - e^{-t} = 0$$

$$\Leftrightarrow 2(e^{-t})^2 - e^{-t} = 0$$

$$\Leftrightarrow e^{-t}(2e^{-t} - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{e^{-t} = 0}_{\text{equação impossível}} \vee e^{-t} = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow -t = \ln\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow t = -\ln\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow t = \ln(2)$$

t	0		$\ln(2)$	$+\infty$
Sinal de C'		$+$	0	$-$
Variação de C		$\nearrow$	Máx.	$\searrow$

Verifica-se que C atinge o máximo em $t = \ln(2)$. Como $\ln(2) \approx 0{,}693$, podemos, então, concluir que a concentração atinge o seu máximo em menos de 1 minuto e que a concentração máxima é 2,5.

Cálculo auxiliar

$C(\ln(2)) = 10\left(e^{-\ln(2)} - e^{-2\ln(2)}\right) = 10\left(e^{\ln(2^{-1})} - e^{\ln(2^{-2})}\right) = 10 \times (2^{-1} - 2^{-2}) = 2{,}5$

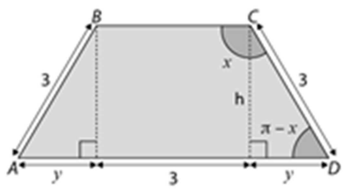
6.

6.1.

Cálculos auxiliares

$\cos(\pi - x) = \frac{y}{3} \Leftrightarrow y = -3\cos x$

$\operatorname{sen}(\pi - x) = \frac{h}{3} \Leftrightarrow h = 3\operatorname{sen} x$, onde h é a altura do trapézio .



Assim:

Base maior $= 3 + 2y = 3 + 2 \times (-3\cos x) = 3 - 6\cos x$

Base menor $= 3$

Altura $= 3\sin x$

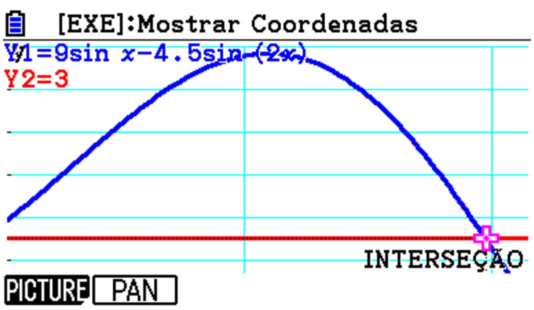
$$A_{\text{trapézio}} = \frac{3 - 6\cos x + 3}{2} \times 3\sin x = (3 - 3\cos x) \times 3\sin x =$$

$$= 9\sin x - 9\sin x\cos x =$$

$$= 9\sin x - 4{,}5 \times 2\sin x\cos x =$$

$$= 9\sin x - 4{,}5\sin(2x) \quad \text{c. q. m.}$$

6.2.



O ponto de interseção tem coordenadas $(2{,}97; 3)$.

Portanto, $x \approx 2{,}97$.

7. Comecemos por escrever os dois números complexos na forma trigonométrica:

$-4i$, na forma trigonométrica, é igual a $4e^{i\frac{3\pi}{2}}$.

$-2\sqrt{2}-2\sqrt{2}i$, na forma trigonométrica, é igual a $4e^{i\frac{5\pi}{4}}$.

Como $\frac{3\pi}{2}-\frac{5\pi}{4}=\frac{\pi}{4}$, e como os argumentos das raízes consecutivas de um mesmo número complexo diferem entre si $\frac{2\pi}{n}$, então $\frac{2\pi}{n}=\frac{\pi}{4}$ e, portanto, $n=8$.

Cálculos auxiliares

Seja $z=-2\sqrt{2}-2\sqrt{2}i$.

$|z|=\sqrt{\left(-2\sqrt{2}\right)^2+\left(-2\sqrt{2}\right)^2}=\sqrt{16}=4$

$\text{tg}\theta=\frac{-2\sqrt{2}}{-2\sqrt{2}} \wedge \theta \in 3.^{\text{o}}\,Q \Leftrightarrow \text{tg}\theta=1 \ \wedge \ \theta \in 3.^{\text{o}}\,Q$

Logo, $\theta=\frac{5\pi}{4}$, por exemplo.

Opção (D)

Caderno 2

$$^{2009}C_{300}+{}^{2009}C_{301}+{}^{2009}C_{301}+{}^{2009}C_{301}+{}^{2009}C_{302}+{}^{2009}C_{302}+{}^{2009}C_{302}+{}^{2009}C_{303}=$$
$$={}^{2010}C_{301}+{}^{2010}C_{302}+{}^{2010}C_{302}+{}^{2010}C_{303}=$$
$$={}^{2011}C_{302}+{}^{2011}C_{303}=$$
$$={}^{2012}C_{303}$$

Opção (B)

9. i. Comecemos por provar que $P(1)$ é verdadeira:

$P(1): 1=\frac{(2\times 1)!}{2^1\times 1!} \Leftrightarrow 1=\frac{2!}{2} \Leftrightarrow 1=1$

Logo, $P(1)$ é verdadeira.

ii. Provemos que $\forall n \in \text{IN}, P(n) \Rightarrow P(n+1)$, isto é, se $P(n)$ é verdadeira, então $P(n+1)$ também é verdadeira.

Hipótese de indução: $\forall n \in \text{IN}, 1\times 3\times 5\times \ldots \times (2n-1)=\frac{(2n)!}{2^n\times n!}$

Tese de indução: $\forall n \in \text{IN}, 1\times 3\times 5\times \ldots \times (2n-1)\times(2n+1)=\frac{[2(n+1)]!}{2^{n+1}(n+1)!}$

Demonstração:

$$1\times 3\times 5\times \ldots \times (2n-1)\times(2n+1) \underbrace{=}_{\text{hipótese de indução}} \frac{(2n)!}{2^n\times n!}\times(2n+1)=$$
$$=\frac{(2n+1)!}{2^n\times n!}=$$
$$=\frac{(2n+1)!\times(2n+2)}{2^n\times n!\times(2n+2)}=$$
$$=\frac{(2n+2)!}{2^n\times n!\times 2(n+1)}=$$

$$= \frac{[2(n+1)]!}{2^{n+1}(n+1)!}$$

Demonstrámos, assim, a hereditariedade da condição $P(n)$.

Por **i.** e **ii.**, pelo princípio de indução matemática, provámos que $\forall n \in \mathbb{N}$, $P(n)$ é verdadeira.

10. $D_g = \{x \in [-3,1]: f(x) \neq 0\}$

Como:

- f é contínua em $[-3,1]$;
- $f(-3) = 2$ e $f(1) = -5$, ou seja, $f(1) < 0 < f(-3)$;

Então, pelo teorema de Bolzano-Cauchy, $\exists\, c \in]-3,1[: f(c) = 0$, isto é, existe pelo menos um valor de $c \in]-3,1[$ tal que $f(c) = 0$. Como f é estritamente decrescente, existe apenas um valor de c nestas condições. Assim, $D_g = \{x \in [-3,1]: f(x) \neq 0\} = [-3,1]\backslash\{c\}$.

Como a função g é contínua em todos os pontos do seu domínio, pois resulta de operações entre funções contínuas, então a única candidata a assíntota vertical ao gráfico de g é a reta de equação $x = c$.

$$\lim_{x\to c^+} g(x) = \lim_{x\to c^+}\left[\frac{1}{f(x)} + k\right] = \frac{1}{0^-} + k = -\infty$$

$$\lim_{x\to c^-} g(x) = \lim_{x\to c^-}\left[\frac{1}{f(x)} + k\right] = \frac{1}{0^+} + k = +\infty$$

(Note-se que, como f é contínua e estritamente decrescente e c é zero de f, podemos concluir que $\lim\limits_{x\to c^+} f(x) = 0^-$ e $\lim\limits_{x\to c^-} f(x) = 0^+$.)

A reta de equação $x = c$ é a única assíntota vertical ao gráfico de g.

Não faz sentido falar em assíntotas não verticais ao gráfico de g, visto que o domínio da função é um conjunto limitado. Assim, fica provado que o gráfico da função g tem uma única assíntota.

11. $\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x+\ln(x)+f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x} + \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln(x)}{x} + \underbrace{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}}_{\substack{\text{declive da assíntota oblíqua}\\ (\text{reta de equação } y=-x)}} =$

$$= +\infty + 0 - 1 =$$

$$= +\infty$$

Opção (C)

12. $g(x) = e^{2x} - 5x$

$g'(x) = 2e^{2x} - 5$

$m = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$ e, portanto, $g'(a) = 1$.

Assim:

$$2e^{2a} - 5 = 1 \Leftrightarrow 2e^{2a} = 6 \Leftrightarrow e^{2a} = 3$$
$$\Leftrightarrow 2a = \ln(3)$$
$$\Leftrightarrow a = \frac{\ln(3)}{2}$$
$$\Leftrightarrow a = \ln\left(3^{\frac{1}{2}}\right)$$
$$\Leftrightarrow a = \ln\left(\sqrt{3}\right)$$

Opção (D)

13. A opção (I) não pode representar o gráfico da função g, pois g é uma função ímpar, ou seja, o gráfico de g tem que ser simétrico em relação à origem do referencial. Nesta opção está representada uma função par, isto é, um gráfico simétrico em relação ao eixo Oy. A opção (III) também não pode representar o gráfico da função g, pois g tem duas assíntotas não verticais de declive $\frac{1}{2}$ (dado que g é ímpar e $\lim_{x\to-\infty}\frac{g(x)}{x} = \frac{1}{2}$), ou seja, as duas assíntotas não verticais têm que ser oblíquas e não horizontais.

A opção (IV) não pode representar o gráfico da função g, pois, nesta opção, para $x > 0$, o gráfico da função apresenta a concavidade voltada para baixo. Como se sabe que $g''(x) > 0$, para $x > 0$, o gráfico de g terá que apresentar a concavidade voltada para cima, quando $x > 0$.

Assim, a única opção que pode representar o gráfico da função g é o da opção (II).

14.

14.1. $z_1 = (1-i)^3 = (1-i)^2 \times (1-i) = (1-2i+i^2)(1-i) =$

$$= (1-2i-1)(1-i) =$$
$$= -2i(1-i) =$$
$$= -2i + 2i^2 =$$
$$= -2 - 2i$$

$$z_2 = \frac{-1+i^5+i^{53}+3\,i^{34}}{1+2i} = \frac{-1+i+i+3\,i^2}{1+2i} = \frac{-4+2i}{1+2i} =$$
$$= \frac{(-4+2i)\times(1-2i)}{(1+2i)\times(1-2i)} =$$
$$= \frac{-4+8i+2i-4i^2}{1-(2i)^2} =$$
$$= \frac{10i}{1+4} =$$
$$= 2i$$

Sendo $z_1 = -2 - 2i$ e $z_2 = 2i$, vem que a equação que se pretende resolver é:

$$z^3 - 2i = -6 + (-2 - 2i) \Leftrightarrow z^3 = -8$$

$$\Leftrightarrow z^3 = 8e^{i\pi}$$

Logo, $z = \sqrt[3]{8}e^{i\frac{\pi+2k\pi}{3}} = 2\,e^{i\frac{\pi+2k\pi}{3}}, k \in \{0, 1, 2\}$.

$z_0 = 2e^{i\frac{\pi}{3}} = 1 + \sqrt{3}i$

$z_1 = 2e^{\pi} = -2$

$z_2 = 2e^{\frac{5\pi}{3}} = 1 - \sqrt{3}i$

$\text{C.S.} = \{1 + \sqrt{3}i, -2, 1 - \sqrt{3}i\}$

14.2. $\frac{z+w}{1+zw} = \frac{z}{1+zw} + \frac{w}{1+zw} = \frac{z\bar{z}}{\bar{z}(1+zw)} + \frac{w\bar{w}}{\bar{w}(1+zw)} =$

$$= \frac{|z|^2}{\bar{z}+\bar{z}zw} + \frac{|w|^2}{\bar{w}+z\bar{w}w} =$$

$$= \frac{1}{\bar{z}+|z|^2w} + \frac{1}{\bar{w}+z|w|^2} =$$

$$= \frac{1}{\bar{z}+w} + \frac{1}{\bar{w}+z} =$$

$$= \frac{\bar{w}+z+\bar{z}+w}{(\bar{z}+w)(\bar{w}+z)} =$$

$$= \frac{\overbrace{z+\bar{z}}^{2\text{Re}\,(z)} + \overbrace{w+\bar{w}}^{2\text{Re}\,(w)}}{(\bar{z}+w)(\bar{w}+z)} =$$

$$= \frac{2\text{Re}(z)+2\text{Re}(w)}{\bar{z}\bar{w}+\bar{z}z+w\bar{w}+wz} =$$

$$= \frac{2\text{Re}(z)+2\text{Re}(w)}{\bar{z}\,\bar{w}+|z|^2+|w|^2+wz} =$$

$$= \frac{2\text{Re}(z)+2\text{Re}(w)}{\overline{zw}+1+1+zw} =$$

$= \frac{2\text{Re}(z)+2\text{Re}(w)}{2\text{Re}(zw)+2}$, que é um número real, como queríamos demonstrar.

15. Seja $z = x + yi$. Como $2z - 2\bar{z} = 4i$, vem que:

$$2z - 2\bar{z} = 4i \Leftrightarrow z - \bar{z} = 2i$$

$$\Leftrightarrow x + yi - (x - yi) = 2i$$

$$\Leftrightarrow 2yi = 2i$$

$$\Leftrightarrow y = 1$$

isto é, $\text{Im}(z) = 1$.

$\text{Im}(z) = 1$ e $0 < \text{Arg}(z) \leq \frac{\pi}{4}$

Opção (B)

16.

16.1. Reta *AB*

$A(3\sqrt{2}, 0{,}3)$

$\overrightarrow{DC} = C - D = (0{,}3{,}0) - (0{,}0{,}3) = (0, 3, -3)$

Como a reta AB é paralela à reta DC, a reta AB pode ser definida por:

Cálculo auxiliar
Seja l o lado do quadrado que é a base da pirâmide:
$l^2 = 3^2 + 3^2 \Leftrightarrow l^2 = 18$
Logo, $l = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$.

$(x, y, z) = (3\sqrt{2}, 0{,}3) + k(0{,}3, -3), k \in \mathbb{R}$ (equação vetorial)

$\begin{cases} x = 3\sqrt{2} \\ y = 3k \\ z = 3 - 3k \end{cases}, k \in \mathbb{R}$ (equações paramétricas)

Reta *EV*

$E =$ ponto médio de $[AC] = \left(\frac{3\sqrt{2}}{2}, \frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right)$

Sabemos que $\overrightarrow{EV}$ é um vetor normal ao plano ADC.

$$\begin{cases} \vec{n} \cdot \overrightarrow{AD} = 0 \\ \vec{n} \cdot \overrightarrow{AB} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a, b, c) \cdot (3{,}0{,}0) = 0 \\ (a, b, c) \cdot (0{,}3, -3) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3a = 0 \\ 3b - 3c = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = c \end{cases}$$

Os vetores normais ao plano ADC são da forma $\vec{n}(0, c, c)$, com $c \in \mathbb{R}$.

Se $c = 1$, por exemplo, tem-se $\vec{n}(0{,}1{,}1)$. Assim:

$$EV: (x, y, z) = \left(\frac{3\sqrt{2}}{2}, \frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right) + k(0{,}1{,}1), k \in \mathbb{R}$$

16.2. $E\left(\frac{3\sqrt{2}}{2}, \frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right)$

$V = E + \overrightarrow{EV} = \left(\frac{3\sqrt{2}}{2}, \frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right) + \overrightarrow{EV}$

Sabemos que $\overrightarrow{EV}$ é um vetor normal ao plano ADC e tem norma $3\sqrt{2}$.

Já vimos que os vetores normais ao plano ADC são da forma $\vec{n}(0, c, c)$, com $c \in \mathbb{R}$.

Como $\left\|\overrightarrow{EV}\right\| = 3\sqrt{2}$, tem-se que:

$$\left\|\overrightarrow{EV}\right\| = 3\sqrt{2} \Leftrightarrow \sqrt{c^2 + c^2} = 3\sqrt{2} \Leftrightarrow \sqrt{2c^2} = 3\sqrt{2}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2}|c| = 3\sqrt{2}$$

$$\Leftrightarrow |c| = 3$$

$$\Leftrightarrow c = \pm 3$$

Considerando $c = 3$, temos $\overrightarrow{EV} = (0{,}3{,}3)$.

$$V = E + \overrightarrow{EV} = \left(\frac{3\sqrt{2}}{2}, \frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right) + (0{,}3{,}3) = \left(\frac{3\sqrt{2}}{2}, \frac{9}{2}, \frac{9}{2}\right)$$

Logo, uma equação da superfície esférica de centro em V e que passa no ponto E pode ser:

$$\left(x-\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)^2+\left(y-\frac{9}{2}\right)^2+\left(z-\frac{9}{2}\right)^2=\left(3\sqrt{2}\right)^2$$

Ou de forma equivalente:

$$\left(x-\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)^2+\left(y-\frac{9}{2}\right)^2+\left(z-\frac{9}{2}\right)^2=18$$

Prova-Modelo 3 **(págs. 417-419)**

Caderno 1

1. Os números naturais nestas condições podem terminar em 0 ou em 5: se terminarem em 0, para os algarismos pares estarem todos juntos, temos $3!\times 2=12$ possibilidades (i i i p p 0); se terminarem em 5, existem dois tipos de casos mutuamente exclusivos, ou começam com par, excluindo naturalmente o zero (p p p i i 5) ou começam com ímpar (i p p p i 5):

$2\times 2\times 1\times 2\times 1\times 1 \quad + \quad 2\times 3!\times 1\times 1\times 2=32$ possibilidades

Portanto, ao todo, temos 44 possibilidades.

Opção (D)

2. Sabemos que $P(\bar{A}\cup\bar{B})=P(\overline{A\cap B})=1-P(A\cap B)$.

Assim:

$$1-P(A\cap B)=\frac{0{,}16}{P(A\cap B)}\Leftrightarrow P(A\cap B)-[P(A\cap B)]^2=0{,}16$$

$$\Leftrightarrow -[P(A\cap B)]^2+P(A\cap B)-0{,}16=0$$

$$\Leftrightarrow P(A\cap B)=\frac{-1\pm\sqrt{1^2-4\times(-1)\times(-0{,}16)}}{2\times(-1)}$$

$$\Leftrightarrow P(A\cap B)=\frac{4}{5}\ \vee\ P(A\cap B)=\frac{1}{5}$$

Como $P(B)=0{,}5$, então $P(A\cap B)=\frac{1}{5}=0{,}2$, pois $P(A\cap B)\leq P(B)$.

Sabemos que $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$.

Assim:

$$\frac{3P(A)}{2}=P(A)+0{,}5-0{,}2\Leftrightarrow\frac{3}{2}P(A)-P(A)=0{,}3$$

$$\Leftrightarrow 0{,}5P(A)=0{,}3$$

$$\Leftrightarrow P(A)=\frac{3}{5}$$

$$\Leftrightarrow P(A)=0{,}6$$

Opção (C)

3.

3.1. $x = 1 - 6y - 4z \Leftrightarrow x + 6y + 4z = 1$

Seja $\overrightarrow{n_\alpha}$ um vetor normal ao plano α e $\overrightarrow{n_\beta}$ um vetor normal ao plano β.

Por exemplo, $\overrightarrow{n_\alpha}(2,-1,1)$ e $\overrightarrow{n_\beta}(1,6,4)$.

$\overrightarrow{n_\alpha} \cdot \overrightarrow{n_\beta} = 2 \times 1 + (-1) \times 6 + 1 \times 4 =$

$= 2 - 6 + 4 =$

$= 0$

Portanto, os planos α e β são perpendiculares.

3.2. $V = C + \overrightarrow{CV}$ e $\overrightarrow{CV}$ é um vetor normal ao plano α de norma $4\sqrt{6}$.

Assim, $\overrightarrow{CV}$ é da forma $k(2,-1,1), k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

$\overrightarrow{CV} = (2k, -k, k)$

$\|\overrightarrow{CV}\| = 4\sqrt{6} \Leftrightarrow \sqrt{4k^2 + k^2 + k^2} = 4\sqrt{6} \Leftrightarrow \sqrt{6k^2} = 4\sqrt{6}$

$\Leftrightarrow \sqrt{6}|k| = 4\sqrt{6}$

$\Leftrightarrow |k| = 4$

$\Leftrightarrow k = \pm 4$

Considerando $k = 4$, temos $\overrightarrow{CV} = (8,-4,4)$.

$V = C + \overrightarrow{CV}$, logo $V = (1,-1,1) + (8,-4,4)$, ou seja, $V = (9,-5,5)$.

4. $\lim(u_n) = \lim\left(\left(1 + \frac{-1}{n}\right)^n\right)^4 = (e^{-1})^4 = e^{-4}$

$\lim f(u_n) = \lim\limits_{x \to e^{-4}} f(x) = \lim\limits_{x \to e^{-4}} \ln\left(\frac{e^{-4}}{x}\right) = \ln\left(\frac{e^{-4}}{e^{-4}}\right) = \ln(1) = 0$

Opção (A)

5.

5.1. Pretende-se provar que $\exists c \in]14,16[$ tal que $d(c) = 30$.

Comecemos por provar que d é uma função contínua no seu domínio $\mathbb{R}_0^+$:

- d é contínua em $[0,15[$, visto, neste intervalo, a função d estar definida pela soma de duas funções contínuas (uma função constante e o produto de duas funções contínuas);
- d é contínua em $]15,+\infty[$, visto, neste intervalo, a função d estar definida pela soma de duas funções contínuas (uma função constante e o produto de duas funções contínuas);
- d é contínua em $x = 15$, visto $\lim_{t \to 15^-} d(t) = \lim_{t \to 15^+} d(t) = d(15)$.

$$\lim_{t\to 15^-}\left(20+t\cos(\pi t)\right)=20+15\cos(15\pi)=$$
$$=20+15\times(-1)=$$
$$=5$$

$$\lim_{t\to 15^+}\left(20+15e^{15-t}\cos(\pi t)\right)=20+15\,e^{15-15}\cos(15\pi)=$$
$$=20+15\times e^{0}\times(-1)=$$
$$=5=$$
$$=d(15)$$

d é, então, uma função contínua em todo o seu domínio $\mathbb{R}_0^+$, logo é contínua, em particular, em $[14,16]\subset\mathbb{R}_0^+$.

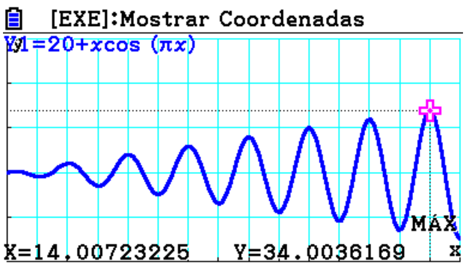
$d(14)=20+14\cos(14\pi)=20+14\times 1=34>30$

$d(16)=20+15e^{15-16}\cos(16\pi)\approx 25{,}52<30$

Como d é contínua em $[14,16]$ e, como $d(16)<30<d(14)$, então, pelo teorema de Bolzano-Cauchy, $\exists c\in\,]14{,}16[$ tal que $d(c)=30$.

5.2. Pretende-se calcular a distância máxima atingida entre a cadeira e o muro e o respetivo instante em que tal se verificou, durante os primeiros 15 segundos em que a criança está a dar balanço.

$y=20+x\cos(\pi x)$, com $x\in[0,15[$



A distância máxima é igual a 34 dm, para *t* = 14 segundos, aproximadamente.

6.

- $(f\times g)(3)=f(3)\times g(3)=\log(3)\times 5>0$
- $\left(\frac{f}{g}\right)\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{\log\left(\frac{1}{2}\right)}{g\left(\frac{1}{2}\right)}=\frac{\log(1)-\log(2)}{g\left(\frac{1}{2}\right)}=\frac{-\log(2)}{g\left(\frac{1}{2}\right)}<0$, uma vez que $g\left(\frac{1}{2}\right)>0$.
- $(f\circ g)(4)=f\left(g(4)\right)=f(5)=\log(5)<1$
- $(f^{-1}+f)(1)=f^{-1}(1)+f(1)=10^1+f(1)\neq 0$, uma vez que $f(1)>0$.

Cálculo auxiliar

$f(x)=\log(x)$, logo $f^{-1}(x)=10^x$.

Opção (B)

7. Sabemos que a função arco-cosseno está definida de $[-1,1]$ em $[0,\pi]$.

Portanto, $g(x)=\arccos(2x+1)$ está definida de $[-1,0]$ em $[0,\pi]$.

Logo, $f(x)=-\pi+\arccos(2x+1)$ está definida de $[-1,0]$ em $[-\pi,0]$.

Opção (A)

8. $P(B|\bar{A})$ representa a probabilidade de serem retiradas duas bolas brancas da caixa C_2, sabendo que as bolas retiradas da caixa C_1 não tinham a mesma cor.

Seja x o número de bolas brancas existentes inicialmente na caixa C_2.

$$P(B|\bar{A})=\frac{1}{12}\Leftrightarrow\frac{(x+1)\times x}{9\times 8}=\frac{1}{12}\Leftrightarrow x^2+x=\frac{72}{12}$$
$$\Leftrightarrow x^2+x-6=0$$
$$\Leftrightarrow x=\frac{-1\pm\sqrt{1^2-4\times1\times(-6)}}{2\times1}$$
$$\Leftrightarrow x=2 \ \vee \ x=-3$$

Portanto, existiam inicialmente na C_2 duas bolas brancas, num total de sete. Logo, a caixa C_2 tinha duas bolas brancas e cinco bolas pretas.

Caderno 2

9. $a=5$ e $b=4$. Portanto, $c=\sqrt{5^2-4^2}=\sqrt{25-16}=\sqrt{9}=3$.

Assim, $P_{[ABC]}=6+2a$, ou seja, $P_{[ABC]}=6+2\times5=16$.

Opção (C)

10. Como $\lim_{h\to0}\frac{f'(x+h)-f'(x)}{12}$ existe e é negativo, para qualquer número real x, significa que a segunda derivada existe e é sempre negativa, pelo que o gráfico da função f tem a concavidade voltada para baixo em todo o seu domínio. Conclui-se, assim, que a afirmação (I) é verdadeira.

Como $\lim_{x\to+\infty}(f(x)-2x)=0$, tal significa que $y=2x$ é a equação reduzida da assíntota oblíqua ao gráfico de f quando $x\to+\infty$, logo o gráfico de f não admite assíntota horizontal quando $x\to+\infty$, tornando assim a afirmação (II) falsa.

Relativamente à afirmação (III), podemos afirmar que é falsa. Supondo que a reta de equação $y=2x$ é perpendicular à reta tangente ao gráfico da função f no ponto de abcissa 0, então o declive da reta tangente ao gráfico da função f no ponto de abcissa 0 deveria ser $-\frac{1}{2}$ (visto as retas serem perpendiculares), o que é absurdo, pois sabemos que $f'(x)>0$, para qualquer número real x.

11. $\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{3}(x-3)}{f(x)-f(3)}+\lim_{x\to 3^-}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{3}}{\frac{f(x)-f(3)}{x-3}}+\frac{\lim\limits_{x\to 3^-}f(x)}{\lim\limits_{x\to 3^-}g(x)}=$

$$=\frac{\sqrt{3}}{\lim\limits_{x\to 3}\frac{f(x)-f(3)}{x-3}}+\frac{f(3)}{\pm\infty}\overset{*}{=}$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}+0=$$

$$=1$$

(*) Como f é diferenciável em $\mathbb{R}$, então f é contínua em $\mathbb{R}$. Logo, é contínua, em particular, em $x=3$ e, portanto, $\lim\limits_{x\to 3}f(x)=f(3)$.

Opção (B)

12. $\forall\, n\in\mathbb{N}$: $\frac{u_{n+1}}{u_n}<1\Leftrightarrow u_{n+1}>u_n$ (porque todos os termos da sucessão são negativos.)

$\Leftrightarrow u_{n+1}-u_n>0$, ou seja a sucessão é monótona crescente.

Como todos os termos da sucessão são negativos, isto é, $u_n<0, \forall\, n\in\mathbb{N}$, então, tem-se que $u_1\le u_n<0, \forall\, n\in\mathbb{N}$, isto é, a sucessão é limitada.

Como a sucessão é monótona e limitada, então a sucessão (u_n) é convergente.

Opção (D)

13.

13.1. Para que a função f seja contínua em $x=0$, tem que existir $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$, isto é, $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=f(0)$. Tem, então, que se verificar $\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=f(0)$.

- $\lim_{x\to 0^-}\frac{x^2}{\ln(-x)}=\frac{0^+}{-\infty}=0$

- $\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{\operatorname{sen}(2x)}{e^x-1}+3x\right)=\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{\operatorname{sen}(2x)}{2x}}{\frac{e^x-1}{2x}}+\lim\limits_{x\to 0^+}(3x)=$

$$=\frac{\lim_{2x\to 0^+}\frac{\operatorname{sen}(2x)}{2x}}{\frac{1}{2}\lim_{x\to 0^+}\frac{e^x-1}{x}}+0=$$

$$=\frac{1}{\frac{1}{2}\times 1}$$

$$=2$$

Como $\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)\neq\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)$, não existe nenhum valor de *k* tal que f seja contínua em $x=0$.

13.2. Para $x\to+\infty$:

$$m=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{\operatorname{sen}(2x)}{e^x-1}+3x}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{\operatorname{sen}(2x)}{e^x-1}}{x}+\lim_{x\to+\infty}\frac{3x}{x}=$$

Daniela Raposo e Luzia Gomes

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\operatorname{sen}(2x)}{x(e^x-1)} + 3 =$$
$$= 0 + 3 =$$
$$= 3$$

$$b = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{\operatorname{sem}(2x)}{e^x-1} + 3x - 3x\right) =$$
$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\operatorname{sem}(2x)}{e^x-1} =$$
$$= 0$$

Assim, a reta de equação $y = 3x$ é assíntota oblíqua ao gráfico de f, quando $x \to +\infty$.

Cálculos auxiliares

$\lim_{x\to+\infty} \frac{\operatorname{sen}(2x)}{x(e^x-1)} = \lim_{x\to+\infty} \left(\operatorname{sen}(2x) \times \frac{1}{x(e^x-1)}\right) = 0$, pois é o limite do produto de uma função limitada por uma função de limite nulo:

- $-1 \leq \operatorname{sen}(2x) \leq 1, \forall x \in \mathbb{R}$
- $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x(e^x-1)} = \frac{1}{+\infty} = 0$

Pelo mesmo motivo:

$\lim_{x\to+\infty} \frac{\operatorname{sen}(2x)}{e^x - 1} = \lim_{x\to+\infty} \left(\operatorname{sen}(2x) \times \frac{1}{e^x - 1}\right) = 0$

Para $x \to -\infty$:

$$m = \lim_{x\to-\infty} \frac{\frac{x^2}{\ln(-x)}}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x}{\ln(-x)} =$$

Considerando a mudança de variável $y = -x \Leftrightarrow x = -y$: se $x \to -\infty$, então $y \to +\infty$.

$$\lim_{y\to+\infty} \frac{-y}{\ln(y)} = -\frac{1}{\underbrace{\lim_{y\to+\infty}\frac{\ln(y)}{y}}_{\text{limite notável}}} = -\frac{1}{0^+} = -\infty$$

Como m não é um número real, então o gráfico de f não admite assíntotas oblíquas quando $x \to -\infty$.

13.3. $g'(x) = \frac{\frac{-1}{-x}\times x^2 - \ln(-x)\times 2x}{x^4} = \frac{x - 2x\ln(-x)}{x^4} = \frac{x(1-2\ln(-x))}{x^4} =$

$$= \frac{1-2\ln(-x)}{x^3}$$

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1-2\ln(-x)}{x^3} = 0 \Leftrightarrow 1 - 2\ln(-x) \ \wedge \ x \neq 0 \Leftrightarrow -2\ln(-x) = -1$$
$$\Leftrightarrow \ln(-x) = \frac{1}{2}$$
$$\Leftrightarrow -x = e^{\frac{1}{2}}$$
$$\Leftrightarrow x = -e^{\frac{1}{2}}$$

x	$-\infty$	$-e^{\frac{1}{2}}$		0
Sinal de g'	$+$	0	$-$	n. d.
Variação de g	↗	Máximo absoluto	↘	n. d.

Cálculo auxiliar

$g\left(-e^{\frac{1}{2}}\right) = \frac{\ln\left(-\left(-e^{\frac{1}{2}}\right)\right)}{\left(-e^{\frac{1}{2}}\right)^2} = \frac{1}{2e}$

g é estritamente crescente em $\left]-\infty, -e^{\frac{1}{2}}\right]$ e é estritamente decrescente em $\left[-e^{\frac{1}{2}}, 0\right[$;

g admite um máximo relativo (absoluto) igual a $\frac{1}{2e}$ para $x = -e^{\frac{1}{2}}$.

14. Seja $z = a + bi$, com $a > 0, b > 0$ e $a > b$.

$$\frac{z}{i} - \bar{z} = \frac{a+bi}{i} - (a - bi) = \frac{(a+bi)\times(-i)}{-i^2} - a + bi =$$
$$= -ai - bi^2 - a + bi =$$
$$= (-a+b)i - a + b =$$
$$= \underbrace{(-a+b)}_{<0} + \underbrace{(-a+b)}_{<0}\, i$$

Como $a > b$, então o afixo de $\frac{z}{i} - \bar{z}$ pertence ao terceiro quadrante.

Opção (C)

15.

15.1. $|z_1| = \sqrt{(-1)^2 + \left(-\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{4} = 2$

$\text{tg}\theta = \frac{-\sqrt{3}}{-1} \ \wedge \ \theta \in \left]\pi, \frac{3\pi}{2}\right[$

Logo, $\theta = \frac{4\pi}{3}$, por exemplo. Portanto, $z_1 = 2e^{i\frac{4\pi}{3}}$.

$z_2 = \cos\left(\frac{\pi}{5}\right) - i\text{sen}\left(\frac{\pi}{5}\right) = \cos\left(-\frac{\pi}{5}\right) + i\text{sen}\left(-\frac{\pi}{5}\right) = e^{i\times\left(-\frac{\pi}{5}\right)}$

$(z_1 \times z_2)^n = \left(2e^{i\frac{4\pi}{3}} \times e^{i\times\left(-\frac{\pi}{5}\right)}\right)^n = \left(2e^{i\frac{17\pi}{15}}\right)^n = 2^n e^{i\frac{17\pi}{15}n}$

Para que $(z_1 \times z_2)^n$ seja um número real positivo, então o seu argumento terá de ser da forma $2k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

$\frac{17\pi}{15}n = 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow n = \frac{15\times 2k\pi}{17\pi}, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow n = \frac{30k}{17}, k \in \mathbb{Z}$

Logo, o menor valor natural n que satisfaz a condição pretendida é $n = 30$ (quando $k = 17$).

15.2. $|z+i|^2 - |z-i|^2 = (z+i)(\overline{z+i}) - (z-i)(\overline{z-i}) =$

$$= (z+i)(\bar{z}+\bar{i}) - (z-i)(\bar{z}-\bar{i}) =$$
$$= z\bar{z} + z\bar{i} + i\bar{z} + i\bar{i} - (z\bar{z} - z\bar{i} - i\bar{z} + i\bar{i}) =$$
$$= |z|^2 - zi + i\bar{z} + 1 - |z|^2 - zi + i\bar{z} - 1 =$$
$$= -2zi + 2i\bar{z} =$$
$$= 2i(-z+\bar{z}) =$$
$$= -2i(z-\bar{z}) =$$
$$= -2i \times 2i \times \frac{z-\bar{z}}{2i} =$$
$$= -4i^2\text{Im}(z)$$
$$= 4\text{Im}(z)$$ c.q.m.

Propriedade

$\text{Im}(z) = \frac{z-\bar{z}}{2i}$

Prova-Modelo 4 (págs. 420-423)

Caderno 1

1. $D\hat{C}B = 180° - (63° + 53°) = 64°$

Pela Lei dos Senos:

$\frac{\sin 53°}{16} = \frac{\sin 64°}{\overline{BD}} \Leftrightarrow \overline{BD} \approx 18$

Pela Lei dos Cossenos:

$18^2 = 18^2 + 22^2 - 2 \times 18 \times 22 \times \cos\left(D\hat{A}B\right) \Leftrightarrow 2 \times 18 \times 22 \times \cos\left(D\hat{A}B\right) = 22^2$

Por conseguinte, $D\hat{A}B = \cos^{-1}\left(\frac{484}{792}\right) \approx 52°$.

Opção (B)

2. Consideremos os seguintes acontecimentos:

D: "O paciente tem a doença."

T: "O teste apresenta um resultado positivo."

Pelos dados do enunciado, sabe-se que:

- $P(D) = 0{,}25$
- $P(T|D) = 0{,}9$
- $P(D|T) = \frac{3}{4} = 0{,}75$

Pretende-se determinar o valor de $P(\overline{D} \cap \overline{T})$.

Assim:

	T	$\overline{T}$	
D	0,225	0,025	0,25
$\overline{D}$	0,075	0,675	0,75
	0,3	0,7	1

Cálculos auxiliares

- $P(T|D) = 0{,}9 \Leftrightarrow \frac{P(T \cap D)}{P(D)} = 0{,}9$

$\Leftrightarrow P(T \cap D) = 0{,}9 \times 0{,}25$

$\Leftrightarrow P(T \cap D) = 0{,}225$

- $P(D|T) = 0{,}75 \Leftrightarrow \frac{P(D \cap T)}{P(T)} = 0{,}75$

$\Leftrightarrow \frac{0{,}225}{P(T)} = 0{,}75$

$\Leftrightarrow P(T) = \frac{0{,}225}{0{,}75}$

$\Leftrightarrow P(T) = 0{,}3$

Portanto, $P(\overline{D} \cap \overline{T}) = 0{,}675$.

3.

3.1. $\frac{{}^{15}C_2 \times {}^{11}C_3 + {}^{15}C_3 \times {}^{11}C_2 + {}^{15}C_2 \times {}^{11}C_2}{{}^{16}C_3 \times {}^{12}C_3} = \frac{25}{64}$

3.2. ${}^{7}C_2 \times 9^5 = 1\ 240\ 029$

Opção (C)

LeYa EDUCAÇÃO Daniela Raposo e Luzia Gomes

4.

4.1. $A(3,0,0)$

Por ser paralelo ao plano definido por $7x+7y+3z-63=0$, uma equação cartesiana do plano pedido é da forma $7x+7y+3z+d=0$.

Como o ponto *A* pertence a este plano, temos:

$0+0+7\times 3+d=0 \Leftrightarrow d=-21$

Assim, uma equação cartesiana do plano que passa no ponto *A* e é paralelo a *BCV* é:

$$7x+7y+3z-21=0$$

Opção (A)

4.2. Seja V o volume da pirâmide:

$V=\frac{1}{3}\times\ a^2\times h$, onde a é a aresta da base e h é a altura da pirâmide.

Sabe-se que $a=3\sqrt{2}$ e as coordenadas de *V* são da forma $V(3,3,z)$.

Como $V\in BCV$:

$7\times 3+7\times 3+3z-63=0 \Leftrightarrow z=\frac{63-42}{3} \Leftrightarrow z=7$

Assim, $V(3,3,7)$ e, consequentemente, $h=7$.

O volume da pirâmide é, então:

$V=\frac{1}{3}\times\ (3\sqrt{2})^2\times 7=\frac{18\times 7}{3}=42$ unidades de volume

4.3. Um vetor normal ao plano *BCV* tem coordenadas $(7,7,3)$. Seja r a reta perpendicular a *BCV*, que passa por *T* e pela origem do referencial. Uma equação vetorial dessa reta é:

$$(x,y,z)=(0,0,0)+k(7,7,3), k\in\mathbb{R}$$

O ponto *T* é o ponto de interseção da reta r com o plano *BCV*.

Assim, podemos determinar as coordenadas de *T* resolvendo o seguinte sistema:

$$\begin{cases} x=7k \\ y=7k \\ z=3k \\ 7x+7y+3z-63=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \_\_\_\_ \\ \_\_\_\_ \\ \_\_\_\_ \\ 7\times 7k+7\times 7k+3\times 3k-63=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \_\_\_\_ \\ \_\_\_\_ \\ \_\_\_\_ \\ 107k=63 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \_\_\_\_ \\ \_\_\_\_ \\ \_\_\_\_ \\ k=\frac{63}{107} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{441}{107} \\ y=\frac{441}{107} \\ z=\frac{189}{107} \\ \_\_\_\_ \end{cases}$$

Portanto, $T\left(\frac{441}{107},\frac{441}{107},\frac{189}{107}\right)$. Logo:

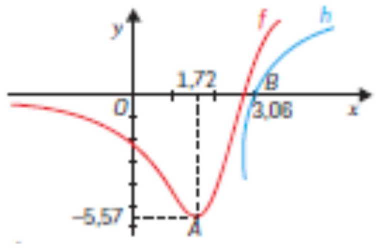
$$\text{raio}=\overline{OT}=\sqrt{\left(\frac{441}{107}\right)^2+\left(\frac{441}{107}\right)^2\left(\frac{189}{107}\right)^2}=\sqrt{\frac{424\,683}{11\,449}}$$

A área da superfície esférica é $4\pi\frac{424\,683}{11\,449}=\frac{15\,876}{107}\pi$ unidades de área.

5. $h(x) = (gof)(x) = g\big(f(x)\big) =$

$= g\big((x-e)e^{x}\big) =$

$= \ln[(x-e)e^{x}] - 2$



$A(1{,}72; -5{,}57)$ $B(3{,}06; 0)$

$$A_{[OAB]} = \frac{3{,}06 \times |-5{,}57|}{2} \approx 8{,}5 \text{ u. a.}$$

6. $\frac{u_1+u_{10}}{2} \times 10 = 190 \Leftrightarrow u_1 + u_{10} = 38$

Como se sabe que $u_1 = u_3 - 2r$ e $u_{10} = u_3 + 7r$, tem-se que:

$u_1 + u_{10} = 38 \Leftrightarrow u_3 - 2r + u_3 + 7r = 38$

$\Leftrightarrow 9 - 2r + 9 + 7r = 38$

$\Leftrightarrow 5r = 20$

$\Leftrightarrow r = 4$

Assim, $u_n = u_3 + (n-3) \times 4 \Leftrightarrow u_n = 9 + 4n - 12$, isto é, uma expressão do termo geral de (u_n) pode ser $u_n = 4n - 3$.

7. $\frac{-z_1 \times \overline{z_2}}{e^{i\frac{\pi}{2}}} = \frac{-(1-i)(2-ki)}{i} = \frac{-(2-ki-2i+ki^2)}{i} =$

$= \frac{-2+ki+2i-ki^2}{i} =$

$= \frac{-2+k+(k+2)i}{i} =$

$= \frac{(-2+k+(k+2)i)\times(-i)}{-i^2} =$

$= \frac{2i-ki+k+2}{1} =$

$= (k+2) + (2-k)i$

Para $(k+2)+(2-k)i$ ser um imaginário puro, tem que se verificar:

$k+2=0 \;\;\wedge\;\; 2-k \neq 0 \Leftrightarrow k=-2 \;\;\wedge\;\; k \neq 2$

Opção (B)

Caderno 2

8. $2a = 10 \Leftrightarrow a = 5$

Como a área do retângulo é igual a 60 unidades de área, a altura do retângulo é igual a $\frac{60}{10} = 6\ \text{u.c.}$

Assim, $b = 3$.

Portanto, a equação reduzida da elipse é igual a $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$.

Opção (C)

9. $2e^{i\left(-\frac{\pi}{3}\right)} = 2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\ \text{sen}\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right) = 2\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = 1 - \sqrt{3}i$

$z_1 + z_2 = 1 - \sqrt{3}i + \left(-\sqrt{3} + i\right) = 1 - \sqrt{3} + \left(1 - \sqrt{3}\right)i$

$w = \frac{z_1 + z_2}{\sqrt{2} - \sqrt{6}} = \frac{1 - \sqrt{3} + \left(1 - \sqrt{3}\right)i}{\sqrt{2} - \sqrt{6}} = \frac{1 - \sqrt{3}}{\sqrt{2} - \sqrt{6}} + \frac{1 - \sqrt{3}}{\sqrt{2} - \sqrt{6}}i = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$

$|w| = 1$ e $\theta = \frac{\pi}{4}$, por exemplo.

$w = e^{i\frac{\pi}{4}}$

Logo, as raízes de ordem 3 de w são da forma:

$$w_k = \sqrt[3]{1}e^{i\frac{\frac{\pi}{4} + 2k\pi}{3}},\ \ k \in \{0, 1, 2\}$$

Se $k = 0,\ \ w_0 = \sqrt[3]{1}e^{i\frac{\frac{\pi}{4} + 2\times 0\times\pi}{3}} = e^{i\frac{\pi}{12}}$

Se $k = 1, w_1 = \sqrt[3]{1}e^{i\frac{\frac{\pi}{4} + 2\times 1\times\pi}{3}} = e^{i\frac{3\pi}{4}}$

Se $k = 2,\ \ w_2 = \sqrt[3]{1}e^{i\frac{\frac{\pi}{4} + 2\times 2\times\pi}{3}} = e^{i\frac{17\pi}{12}}$

As raízes de ordem 3 de w são $e^{i\frac{\pi}{12}}$, $e^{i\frac{3\pi}{4}}$ e $e^{i\frac{17\pi}{12}}$.

Cálculo auxiliar

$\frac{1 - \sqrt{3}}{\sqrt{2} - \sqrt{6}} = \frac{\left(1 - \sqrt{3}\right)\times\left(\sqrt{2} + \sqrt{6}\right)}{\left(\sqrt{2} - \sqrt{6}\right)\times\left(\sqrt{2} + \sqrt{6}\right)} =$

$= \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6} - \sqrt{6} - \sqrt{18}}{\left(\sqrt{2}\right)^2 - \left(\sqrt{6}\right)^2} =$

$= \frac{\sqrt{2} - 3\sqrt{2}}{2 - 6} =$

$= \frac{-2\sqrt{2}}{-4} =$

$= \frac{\sqrt{2}}{2}$

10. $x^2 + y^2 - 2x - 6y + 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 + y^2 - 6y + 3^2 = -1 + 1 + 3^2$

$$\Leftrightarrow (x - 1)^2 + (y - 3)^2 = 9$$

Assim, o centro da circunferência pretendida é o ponto C de coordenadas $(1{,}3)$.

Seja T o ponto de interseção da circunferência pretendida com a reta de equação $y = 2x - 5$. Como esta reta é tangente à circunferência em T, então é perpendicular à reta CT. Assim, o declive da reta CT é igual a $-\frac{1}{2}$ e a reta CT é da forma $y = -\frac{1}{2}x + b$.

Como $C(1{,}3) \in CT$, então:

$3 = -\frac{1}{2} \times 1 + b \Leftrightarrow b = \frac{7}{2}$

Logo, $CT: y = -\frac{1}{2}x + \frac{7}{2}$.

LeYa EDUCAÇÃO Daniela Raposo e Luzia Gomes

As coordenadas do ponto *T* podem ser determinadas resolvendo o seguinte sistema:

$$\begin{cases} y = 2x - 5 \\ y = -\frac{1}{2}x + \frac{7}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 5 = -\frac{1}{2}x + \frac{7}{2} \\ \overline{\qquad\qquad} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + \frac{1}{2}x = \frac{7}{2} + 5 \\ \overline{\qquad\qquad} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{5}{2}x = \frac{17}{2} \\ \overline{\qquad} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2 \times \frac{17}{5} - 5 \\ x = \frac{17}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{9}{5} \\ x = \frac{17}{5} \end{cases}$$

Portanto, $T\left(\frac{17}{5}, \frac{9}{5}\right)$. O raio da circunferência pretendida é igual a $\overline{TC}$.

$$\overline{TC} = \sqrt{\left(1 - \frac{17}{5}\right)^2 + \left(3 - \frac{9}{5}\right)^2} = \sqrt{\frac{144}{25} + \frac{36}{25}} = \sqrt{\frac{180}{25}} = \frac{6\sqrt{5}}{5}$$

$$r^2 = \left(\frac{6\sqrt{5}}{5}\right)^2 = \frac{36}{5}$$

Uma condição que define a circunferência pretendida é, então, $(x-1)^2 + (y-3)^2 = \frac{36}{5}$.

Opção (A)

11. $\lim\left(\frac{5n+2}{5n+1}\right)^{3n} = \lim\left(\left(\frac{\frac{5n}{5n}+\frac{2}{5n}}{\frac{5n}{5n}+\frac{1}{5n}}\right)^n\right)^3 = \left(\lim\left(\frac{1+\frac{2}{5n}}{1+\frac{1}{5n}}\right)^n\right)^3 = \left(\frac{\lim\left(1+\frac{\frac{2}{5}}{n}\right)^n}{\lim\left(1+\frac{\frac{1}{5}}{n}\right)^n}\right)^3 =$

$$= \left(\frac{e^{\frac{2}{5}}}{e^{\frac{1}{5}}}\right)^3 =$$

$$= \left(e^{\frac{1}{5}}\right)^3 =$$

$$= e^{\frac{3}{5}} =$$

$$= \sqrt[5]{e^3}$$

Opção (C)

12. $D = \{x \in \mathbb{R}: 9 - x > 0 \ \wedge \ x + 1 > 0\} = \{x \in \mathbb{R}: x < 9 \ \wedge \ x > -1\} =]-1, 9[$

Neste domínio, tem-se que:

$$\log_3(9-x) \geq \log_3(9) - \log_3(x+1) \Leftrightarrow \log_3(9-x) + \log_3(x+1) \geq \log_3(9)$$

$$\Leftrightarrow \log_3[(9-x)(x+1)] \geq \log_3(9)$$

$$\Leftrightarrow \log_3(-x^2 + 8x + 9) \geq \log_3(9)$$

$$\Leftrightarrow -x^2 + 8x + 9 \geq 9$$

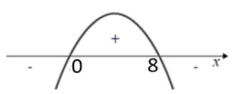
$$\Leftrightarrow -x^2 + 8x \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (x > 0 \ \wedge \ x < 8)$$

Cálculo auxiliar

$-x^2 + 8x = 0 \Leftrightarrow x(-x+8) = 0$

$\Leftrightarrow x = 0 \ \vee \ x = 8$



$\text{C.S.} =]0, 8[\cap D =]0, 8[$

13.

13.1. Como, em $]-\infty\,,-1[$, a função g é contínua, visto tratar-se do quociente de funções contínuas cujo denominador não se anula no intervalo considerado, a única candidata a assíntota vertical ao gráfico de g é a reta de equação $x = -1$.

$$\lim_{x\to -1}\frac{1-e^{x+1}}{x^2-1} = \lim_{x\to -1}\left(-\frac{e^{x+1}-1}{(x-1)(x+1)}\right) = \lim_{x\to -1}\left(-\frac{1}{x-1}\right)\times \lim_{x\to -1}\left(\frac{e^{x+1}-1}{x+1}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\times \underbrace{\lim_{y\to 0}\left(\frac{e^y-1}{y}\right)}_{\text{limite notável}} =$$

$$= \frac{1}{2}\times 1 =$$

$$= \frac{1}{2}$$

Conclui-se assim que o gráfico de g não admite assíntotas verticais em $]-\infty\,,-1[$.

$$\lim_{x\to -\infty}\frac{1-e^{x+1}}{x^2-1} = \frac{1-e^{-\infty}}{+\infty} = \frac{1-0}{+\infty} = 0$$

A reta de equação $y = 0$ é assíntota horizontal ao gráfico de g quando $x \to -\infty$.

13.2. Em $]-1,+\infty\,[$:

$$g'(x) = 1 + \frac{2x}{1+x^2} \qquad\qquad g''(x) = \frac{2(1+x^2)-2x\times 2x}{(1+x^2)^4} = \frac{2-2x^2}{(1+x^2)^4}$$

$$g''(x) = 0 \Leftrightarrow 2-2x^2 = 0 \ \wedge\ (1+x^2)^4 \neq 0 \Leftrightarrow x^2 = 1 \ \wedge\ \underbrace{(1+x^2)^4 \neq 0}_{\text{condição universal}}$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{x=-1}_{\notin\,]-1,+\infty\,[} \vee\ x = 1$$

x	-1		1	$+\infty$
Sinal de g''	n. d.	$+$	0	$-$
Sentido das concavidades do gráfico de g	n. d.	$\cup$	P. I.	$\cap$

O gráfico de g tem a concavidade voltada para cima em $]-1,1]$ e tem a concavidade voltada para baixo em $]1,+\infty[$; admite um ponto de inflexão de abcissa 1.

14.

x	$-\infty$	-1		0		1	$+\infty$
Sinal de f'	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
Sinal de f''	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
Sinal de $f'\times f''$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

$\text{C.S.} = \,]-\infty,-1] \cup [0,1]$

Opção (D)

15. Sabemos que:

- $f(a) = -a$;
- $f^{-1}(a) = f(a)$, isto é, $f^{-1}(a) = -a$;
- $(f(a), a)$ pertence ao gráfico de f, isto é, $f\big(f(a)\big) = a$.

1) f é contínua; em particular, f é contínua em $[f(a), a]$.

2) $f\big(f(a)\big) = a > 0$, pois $a \in \mathbb{R}^+$.

$f(a) = -a < 0$, pois $a \in \mathbb{R}^+$.

$$f(a) < 0 < f(f(a))$$

Logo, pelo teorema de Bolzano-Cauchy, concluímos que $\exists\, c \in]f(a), a[: f(c) = 0$.

Como f é bijetiva, em particular, f é injetiva. Logo, não pode admitir mais do que um zero.

Daqui se conclui que a função f tem um único zero em $]f(a), a[$.

Prova-Modelo 5 **(págs. 424-426)**

Caderno 1

1. $\text{t.m.v.}_{[a,a+1]} = \frac{\ln(a+1)-\ln(a)}{a+1-a} = \ln\left(\frac{a+1}{a}\right) = \ln\left(1+\frac{1}{a}\right)$

$f'(x) = \dfrac{1}{x}$

$f\,'(a) = \frac{1}{a}$

Assim, $\frac{1}{a} > \ln\left(1+\frac{1}{a}\right)$.

Opção (B)

2.

2.1. O plano DCG é paralelo ao plano ABF, logo DCG pode ser definido por uma equação da forma $3x + y - \frac{3}{2}z + d = 0$.

Como o plano contém o ponto D de coordenadas $(-2, 4, 7)$, vem que:

$3 \times (-2) + 4 - \frac{3}{2} \times 7 + d = 0 \Leftrightarrow -6 + 4 - \frac{21}{2} + d = 0 \Leftrightarrow d = \frac{25}{2}$

Assim, $DCG: 3x + y - \frac{3}{2}z + \frac{25}{2} = 0$, que é equivalente a $6x + 2y - 3z + 25 = 0$.

Opção (A)

2.2. Comecemos por definir a reta DA, perpendicular ao plano ABF:

$$(x, y, z) = (-2,4,7) + k(6,2,-3), k \in \mathbb{R}$$

Então, $(-2 + 6k, 4 + 2k, 7 - 3k)$, com $k \in \mathbb{R}$ é um ponto genérico da reta DA.

Determinemos as coordenadas de A, ponto de interseção da reta DA com o plano ABF:

$6(-2+6k)+2(4+2k)-3(7-3k)-24=0$

$\Leftrightarrow -12+36k+8+4k-21+9k-24=0$

$\Leftrightarrow 49k=49$

$\Leftrightarrow k=1$

Logo, $A(-2+6{,}4+2{,}7-3)$, isto é, $A(4{,}6{,}4)$.

É possível, então, determinar o valor da aresta do cubo:

$$d(A,D)=\sqrt{(4+2)^2+(6-4)^2+(4-7)^2}=\sqrt{36+4+9}=$$
$$=\sqrt{49}=$$
$$=7$$

Logo, o volume do cubo é igual a $7^3=343$ unidades de volume.

2.3. Comecemos por determinar uma condição que defina o plano ABC.

$\overrightarrow{CG}$ é um vetor perpendicular ao plano ABC e tem coordenadas $(-2a,-3a,-6a), a\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

Sabe-se que $\|\overrightarrow{CG}\|=7$, visto $[CG]$ ser uma aresta do cubo.

$$\|\overrightarrow{CG}\|=7\Leftrightarrow\sqrt{(-2a)^2+(-3a)^2+(-6a)^2}=7$$
$$\Leftrightarrow\sqrt{49a^2}=7$$
$$\Rightarrow 49a^2=49$$
$$\Rightarrow a^2=1$$
$$\Rightarrow a=1\ \vee\ a=-1$$

Um vetor normal ao plano é, por exemplo, o vetor de coordenadas $(2,3,6)$.

Assim, uma condição que define o plano ABC é da forma $2x+3y+6z+d=0$.

Como $D(-2{,}4{,}7)$ pertence ao plano, então:

$2\times(-2)+3\times 4+6\times 7+d=0\Leftrightarrow d=-50$

$$ABC\colon 2x+3y+6z-50=0$$

Sabemos que P admite coordenadas $(0{,}0,c)$, $c\in\mathbb{R}$ e pertence ao plano ABC, logo:

$2\times 0+3\times 0+6c-50=0\Leftrightarrow c=\frac{50}{6}\Leftrightarrow c=\frac{25}{3}$

$P\left(0{,}0,\frac{25}{3}\right)$

Sabemos, também, que Q admite coordenadas $(a,0{,}0)$, $a\in\mathbb{R}$ e pertence ao plano ABF, logo:

$3a+0-\frac{3}{2}\times 0-12=0\Leftrightarrow 3a=12\ \Leftrightarrow a=4$

$Q(4{,}0{,}0)$

Assim:

$$\overline{PQ} = \sqrt{4^2 + 0^2 + \left(-\frac{25}{3}\right)} = \sqrt{16 + \frac{625}{9}} = \sqrt{\frac{769}{9}} = \frac{\sqrt{769}}{3}$$

3.

3.1. $8 \times 1 \times 6 \times 1 \times 4 \times 1 \times 2 \times 1 = 384$ maneiras

3.2. $\frac{6+9}{{}^6C_2 \times {}^6C_2} = \frac{15}{15 \times 15} = \frac{1}{15}$

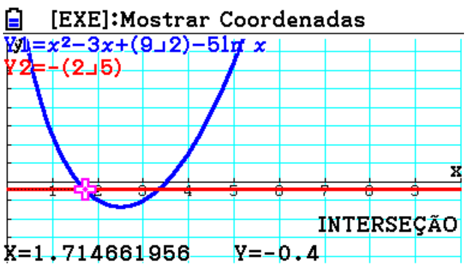
Opção (B)

4.

4.1. $m_r = g'(1) = 1 - 3 + \frac{9}{2} - 5\ln(1) = \frac{5}{2}$

Como as retas r e s são perpendiculares, $m_s = -\frac{2}{5}$.

Como $m_s = g'(b)$, pretendemos determinar $x \in \left]1,3\right[$ tal que $g'(x) = -\frac{2}{5}$.



Portanto, $b \approx 1{,}715$.

4.2. Em $\mathbb{R}^+$:

$$g''(x) = 2x - 3 - \frac{5}{x}$$

$$2x - 3 - \frac{5}{x} = 0 \Leftrightarrow \frac{2x^2 - 3x - 5}{x} = 0 \Leftrightarrow 2x^2 - 3x - 5 = 0 \ \wedge \ x \neq 0$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{3 \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \times 2 \times (-5)}}{2 \times 2}$$

$$\Leftrightarrow x = -1 \ \vee \ x = \frac{5}{2}$$

Como, $D_g = \mathbb{R}^+$, $x = \frac{5}{2}$.

x	0		$\frac{5}{2}$	$+\infty$
Sinal de g''	n. d.	$-$	0	$+$
Sentido das concavidades do gráfico de g	n. d.	$\cap$	P. I.	$\cup$

A abcissa do ponto de inflexão é $\frac{5}{2}$.

5. Seja r a razão da progressão geométrica (u_n).

Como $a, a+4$ e $a+16$ são três termos consecutivos de (u_n), então $r = \frac{a+4}{a} = \frac{a+16}{a+4}$.

$$\frac{a+4}{a} = \frac{a+16}{a+4} \Leftrightarrow (a+4)^2 = a(a+16) \Leftrightarrow a^2 + 8a + 16 = a^2 + 16a$$

$$\Leftrightarrow -8a = -16$$

$$\Leftrightarrow a = 2$$

Logo, $r = 3$.

$$728 = u_1 \times \frac{1-3^6}{1-3} \Leftrightarrow u_1 = \frac{728}{\frac{1-3^6}{1-3}} \Leftrightarrow u_1 = 2$$

Uma expressão do termo geral de (u_n) é $u_n = 2 \times 3^{n-1}$.

6. $\text{tg}^2\alpha + 1 = \frac{1}{\left(-\frac{\sqrt{10}}{10}\right)^2} \Leftrightarrow \text{tg}^2\alpha + 1 = 10 \Leftrightarrow \text{tg}^2\alpha = 9$

$$\Leftrightarrow \text{tg}\,\alpha = -3 \quad \vee \quad \text{tg}\,\alpha = 3$$

Uma vez que $\cos\alpha < 0$ e α é a inclinação da reta, então $\alpha \in \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right[$ e, portanto, $\text{tg}\,\alpha = -3$.

Seja m o declive da reta *r*.

$m = \text{tg}\,\alpha$, ou seja, $m = -3$.

Das opções apresentadas, a equação reduzida da reta r só pode ser $y = -3x$.

Opção (C)

Caderno 2

7. $\text{arctg}\left(\text{sen}\frac{\pi}{2}\right) + \arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \text{arctg}(1) + \frac{5\pi}{6} = \frac{\pi}{4} + \frac{5\pi}{6} =$

$$= \frac{3\pi + 10\pi}{12} =$$

$$= \frac{13\pi}{12}$$

Opção (D)

8. $w = 2 + \frac{(2-i)^2}{1+2i^{13}} = 2 + \frac{4-4i+i^2}{1+2i} = 2 + \frac{3-4i}{1+2i} =$

$$= 2 + \frac{(3-4i)(1-2i)}{(1+2i)(1-2i)} =$$

$$= 2 + \frac{3-6i-4i+8i^2}{5} =$$

$$= 2 + \frac{-5-10i}{5} =$$

$$= 2 + (-1-2i) =$$

$$= 1 - 2i$$

Sendo w uma raiz de ordem 3 de um certo número complexo z, as restantes duas raízes de z têm o mesmo módulo de w e os argumentos de raízes consecutivas diferem entre si de $\frac{2\pi}{3}$.

Seja u a raiz consecutiva de w:

$u = w \times e^{i\times\frac{2\pi}{3}} =$

(Observe-se que $w \times e^{i\times\frac{2\pi}{3}}$ mantém o módulo de w e o argumento difere do de w em $\frac{2\pi}{3}$.)

$$= (1-2i) \times e^{i\times\frac{2\pi}{3}} =$$

$$= (1-2i)\left(\cos\frac{2\pi}{3} + \text{isen}\frac{2\pi}{3}\right) =$$

$$= (1-2i)\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) =$$

$$= \underbrace{\underbrace{\sqrt{3}-\frac{1}{2}}_{>0} + \underbrace{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+1\right)}_{>0} i}_{\text{o afixo de } u \text{ pertence ao } 1^{\text{o}} \text{ quadrante}}$$

9. $\lim\left(\frac{n+k}{n+2k}\right)^n = \lim\left(\frac{1+\frac{k}{n}}{1+\frac{2k}{n}}\right)^n = \frac{\lim\left(1+\frac{k}{n}\right)^n}{\lim\left(1+\frac{2k}{n}\right)^n} =$

$$= \frac{e^k}{e^{2k}} =$$

$$= e^{-k}$$

$\text{Ln}(ex) = 2 \Leftrightarrow ex = e^2 \Leftrightarrow x = \frac{e^2}{e}$

$$\Leftrightarrow x = e$$

$e = e^{-k} \Leftrightarrow k = -1$

Opção (A)

10. $\ln(b) = 9\ln(a) \Leftrightarrow \ln(b) - 9\ln(a) = 0$

$$\Leftrightarrow \ln(b) - \ln(a^9) = 0$$

$$\Leftrightarrow \ln\left(\frac{b}{a^9}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{b}{a^9} = e^0$$

$$\Leftrightarrow b = a^9$$

$a^x \leq b^{\frac{1}{x}} \Leftrightarrow a^x \leq (a^9)^{\frac{1}{x}}$

$$\Leftrightarrow a^x \leq a^{\frac{9}{x}}$$

$$\Leftrightarrow x - \frac{9}{x} \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2-9}{x} \leq 0$$

x	$-\infty$		-3		0		3		$+\infty$
x^2-9		$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$	
x		$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	
$\frac{x^2-9}{x}$		$-$	0	$+$	n. d.	$-$	0	$+$	

$\text{C.S.} =]-\infty, -3] \cup]0, 3]$

11.

11.1. $\lim_{x\to0^-}\left[\frac{\text{sen}(6x)}{x^3+3x} - k^2\right] = \lim_{x\to0^-}\left[\frac{\text{sen}(6x)}{x(x^2+3)} - k^2\right] =$

$= \lim_{x\to0^-}\left[\frac{\text{sen}(6x)}{x} \times \frac{1}{x^2+3} - k^2\right] =$

$= \lim_{x\to0^-}\left(\frac{6\text{sen}(6x)}{6x}\right) \times \lim_{x\to0^-}\frac{1}{x^2+3} - \lim_{x\to0^-}(k^2) =$

$= 6\lim_{6x\to0^-}\frac{\text{sen}(6x)}{6x} \times \frac{1}{3} - k^2 =$

$= 2 - k^2$

$f(0) = -7$

$2 - k^2 > -7 \Leftrightarrow -k^2 > -9$

$\Leftrightarrow k^2 < 9$

$\Leftrightarrow k^2 - 9 < 0$

$\Leftrightarrow k > -3 \ \wedge\ k < 3$

$\text{C.S.} =]-3, 3[$

11.2. $\lim_{x\to0^+}\frac{\sqrt{x}+2x}{x} = \lim_{x\to0^+}\frac{x\left(x^{-\frac{1}{2}}+2\right)}{x} =$

$= \lim_{x\to0^+}\left(x^{-\frac{1}{2}} + 2\right) =$

$= \lim_{x\to0^+}\left(\frac{1}{\sqrt{x}} = +2\right) =$

$= \frac{1}{0^+} + 2 =$

$= +\infty$

A reta de equação $x = 0$ é assíntota vertical ao gráfico de f e é única, uma vez que f é contínua em $]0, +\infty[$ (visto, neste intervalo, estar definida pelo quociente de funções contínuas cujo denominador não se anula no intervalo considerado).

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x}+2x}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x\left(x^{-\frac{1}{2}}+2\right)}{x} = \lim_{x\to+\infty}\left(x^{-\frac{1}{2}}+2\right) =$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{x}}+2\right) =$$

$$= \frac{1}{+\infty} + 2 =$$

$$= 0 + 2 =$$

$$= 2$$

A reta de equação $y = 2$ é assíntota horizontal ao gráfico de f quando $x \to +\infty$.

12. $A(\alpha) = A_{\text{triângulo}} + A_{\text{trapézio}} = \frac{-2\cos\alpha \times 2\text{sen}\alpha}{2} + \frac{2+(-2\cos\alpha)}{2} \times 2\,\text{sen}\,\alpha =$

$$= -2\,\text{sen}\,\alpha\cos\alpha + (1 - \cos\alpha) \times 2\,\text{sen}\,\alpha =$$

$$= 2\,\text{sen}\,\alpha - \text{sen}\,\alpha\cos\alpha - \text{sen}(2\alpha) =$$

$$= 2\,\text{sen}\,\alpha - 2\,\text{sen}(2\alpha)$$

Opção (A)

13. $iz + \frac{z}{i} = iz + \frac{z \times (-i)}{-i^2} = iz - zi =$

$$= iz - iz =$$

$$= 0$$

Opção (D)

14. $f'(x) = -3 + 3\cos(3x)$

$g'(x) = \text{sen}\,x$

$m_r = f'(a) = -3 + 3\cos(3a)$

$m_s = g'\left(a + \frac{\pi}{2}\right) = \text{sen}\left(a + \frac{\pi}{2}\right) = \cos a$

Para que as retas *r* e *s* sejam paralelas, os seus declives têm de ser iguais. Assim:

$m_r = m_s \Leftrightarrow -3 + 3\cos(3a) = \cos a \Leftrightarrow 3\cos(3a) - \cos(a) - 3 = 0$

Seja *h* a função definida por $h(x) = 3\cos(3x) - \cos(x) - 3$.

Por conseguinte, para provar o que se pretende, basta mostrar que *h* tem pelo menos um zero pertencente ao intervalo $\left]\frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}\right[$.

- A função *h* é contínua em $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}\right]$, por se tratar da diferença entre duas funções contínuas.
- $h\left(\frac{\pi}{2}\right) = 3\cos\left(3 \times \frac{\pi}{2}\right) - \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) - 3 = -3 < 0$

  $h\left(\frac{2\pi}{3}\right) = 3\cos\left(3 \times \frac{2\pi}{3}\right) - \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) - 3 = \frac{1}{2} > 0$

Como h é uma função contínua em $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}\right]$ e, como $h\left(\frac{\pi}{2}\right) < 0 < h\left(\frac{2\pi}{3}\right)$, então, pelo teorema de Bolzano-Cauchy, $\exists\, c \in \left]\frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}\right[: h(c) = 0$, ficando provado assim o que se pretendia.