OmegaMat

Exame Modelo XII de Matemática A

Duração do Exame: 150 **minutos** + 30 **minutos de tolerância** |

12.º Ano de Escolaridade

Utiliza apenas caneta ou esferográfica de tinta azul ou preta

É permitido o uso de calculadora

Não é permitido o uso de corretor. Risca o que pretendes que não seja classificado

Para cada resposta identifica o item

Apresenta as tuas respostas de forma legível

Apresenta apenas uma resposta para cada item

A prova apresenta um formulário na página 2

As cotações dos itens encontram-se na página 7

Na resposta aos itens de seleção (escolha múltipla), seleciona a resposta correta. Escreve na folha de respostas o número do item e a letra que identifica a opção escolhida.

Na resposta aos restantes itens, apresenta o teu raciocínio de forma clara, indicando todos os cálculos que tiveres de efetuar e todas as justificações necessárias. Quando, para um resultado, não é pedida aproximação apresenta sempre o valor exato.

NOTA

⋇ Itens cujas respostas contribuem obrigatoriamente para a classificação final:

1, 2, 3, 4, 5, 6.1, 6.2, 8.1, 8.2, 9 e 14

Estes itens estão assinalados no enunciado com o símbolo $*$

⋇ Dos restantes 7 itens da prova, apenas contribuem para a classificação final os 4 itens cujas respostas obtenham melhor pontuação

Formulário

Geometria

Comprimento de um arco de circunferência:

αr *(α - amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r - raio)*

área de um polígono regular: *Semiperímetro* $\times$ *Apótema*

área de um setor circular:

$\frac{\alpha r^2}{2}$ *(α- amplitude, em radianos, do ângulo ao centro, r - raio)*

área lateral de um cone: $\pi r g$ *(r - raio da base, g - geratriz)*

área de uma superfície esférica: $4\pi r^2$ *(r - raio)*

Volume da pirâmide: $\frac{1}{3}\times$ *área da base* $\times$ *Altura*

Volume do cone: $\frac{1}{3}\times$ *área da base* $\times$ *Altura*

Volume da esfera: $\frac{4}{3}\pi r^3$ *(r - raio)*

Progressões

Soma dos n primeiros termos de uma progressão (u_n):

Progressão aritmética: $\frac{u_1 + u_n}{2} \times n$

Progressão geométrica: $u_1 \times \frac{1 - r^n}{1 - r}$, $r \neq 1$

Trigonometria

$\sin(a + b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$

$\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$

Complexos

$(|z|e^{i\theta})^n = |z|^n e^{i(n\theta)}$

$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|}e^{i\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right)}$, $k \in \{0; 1; 2; ...; n-1\}$ e $n \in \mathbb{N}$

Regras de derivação

$(u + v)' = u' + v'$

$(uv)' = u'v + uv'$

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$

$(u^n)' = nu^{n-1}u' \quad (n \in \mathbb{R})$

$(\sin u)' = u' \cos u$

$(\cos u)' = -u' \sin u$

$(\tan u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$

$(e^u)' = u'e^u$

$(a^u)' = u'a^u \ln a \quad (a \in \mathbb{R}^+ \backslash \{1\})$

$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$

$(\log_a u)' = \frac{u'}{u \ln a} \quad (a \in \mathbb{R}^+ \backslash \{1\})$

Limites notáveis

$\lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e \quad (n \in \mathbb{N})$

$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^p} = +\infty \quad (p \in \mathbb{R})$

1. $(*)$ Seja (a_n), a sucessão definida por $a_n = \dfrac{2n+1}{4n-2}$

   Em qual das opções está o valor de $\lim\left((a_n)^n\right)$?

   (A) e

   (B) 0

   (C) 1

   (D) e^2

2. $(*)$ Na figura 1 está representado o modelo da mesa de jantar, retangular, com catorze lugares, que existe na casa do João e da Joana

   O João, a Joana e os seus onze amigos, vão sentar-se à mesa para um jantar de aniversário do João

   De quantas maneiras se podem sentar à mesa, o João, a Joana e os seus onze amigos, de modo que:

   - o lugar vago da mesa fique na cabeceira da mesa
   - o João e a Joana ocupem dois lugares na cabeceira da mesa
   - a Inês e a Beatriz, que são duas das amigas, fiquem juntas num dos lados da mesa que tem cinco lugares

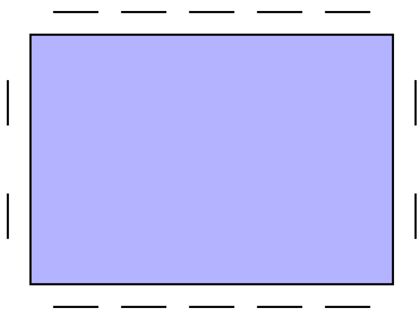

Figura 1

3. $(*)$ Seja $(E, P(E), P)$ um espaço de probabilidade, P uma probabilidade em $P(E)$ e sejam A e B dois acontecimentos

   Sabe-se que:

   - $P\left(\overline{B}\right) = \dfrac{3}{10}$
   - $P\left(\overline{A}|B\right) = \dfrac{6}{7}$
   - $P\left(\overline{A \cup B}\right) = \dfrac{1}{5}$

   Em qual das opções está o valor de $P\left(\overline{B}|A\right)$?

   (A) 50%

   (B) 40%

   (C) 30%

   (D) 20%

4. $(*)$ Seja g, a função real de variável real, definida por $g(x) = \begin{cases} \dfrac{x+\sqrt{2}}{x-1} & se \quad x < 0 \\ 2 & se \quad x = 0 \\ -x^2+2 & se \quad x > 0 \end{cases}$

   Em qual das opções está um intervalo onde o teorema de Bolzano-Cauchy garante a existência de, pelo menos, um zero da função g?

   (A) $[-1; 1]$

   (B) $[-2; -1]$

   (C) $[-3; -2]$

   (D) $[2; 3]$

5. (∗) Seja f, a função real de variável real, definida por, $f(x)=\begin{cases} \dfrac{\sin(2x)\cos(2x)}{2x^2-x} & se \quad x<0 \\ 1+\ln(k-1) & se \quad x=0 \\ \dfrac{ex^2+ex}{e^{x+1}-e} & se \quad x>0 \end{cases}$, $k>1$

Averigua, analiticamente, se existe algum k, para o qual a função f é contínua no ponto $x=0$

6. Considera a circunferência trigonométrica representada num plano munido de um referencial o.n. xOy, como se observa na figura 2

Sabe-se que:

- $E(1;0)$
- os pontos A e D pertencem à circunferência
- os pontos A e D são simétricos em relação ao eixo Ox
- os pontos B e C, pertencem à reta de equação $x=1$
- os pontos B e C são simétricos em relação ao eixo Ox
- o ponto A move-se no primeiro quadrante, e os pontos B, C e D, acompanham esse movimento
- $E\hat{O}A=x$, com $x\in\left]0;\dfrac{\pi}{2}\right[$

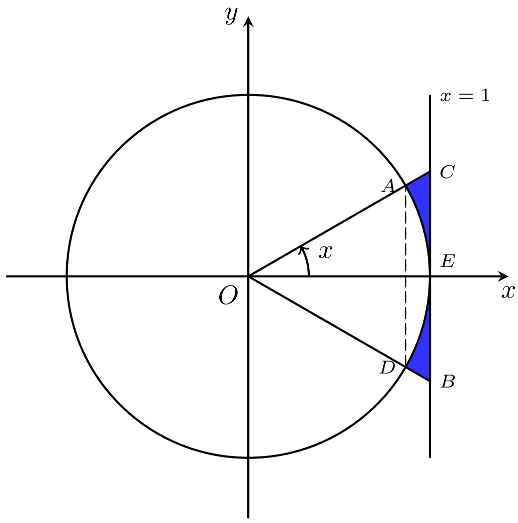

Figura 2

6.1. (∗) Mostra que a área da região colorida, é dada, em função de x, por

$A(x)=\tan(x)-x$, com $x\in\left]0;\dfrac{\pi}{2}\right[$

6.2. (∗) Para certo valor de $x\in\left]0;\dfrac{\pi}{2}\right[$, sabe-se que $\cos^2(x)-\sin^2(x)=\dfrac{1}{2}$

Em qual das opções está o valor exato da área da região colorida para esse valor de x?

(A) $\dfrac{2\sqrt{3}-\pi}{6}$

(B) $\dfrac{3\sqrt{3}-\pi}{3}$

(C) $\dfrac{\sqrt{3}-\pi}{3}$

(D) $\dfrac{2\sqrt{3}-\pi}{3}$

7. Sabe-se que $\log_a\sqrt{b}=-\dfrac{3}{2}$, com $a\in\mathbb{R}^+\setminus\{1\}$ e $b>0$

Determina o valor de $\log_b\left(\sqrt[4]{\dfrac{a^3}{b^2}}\right)$

8. Seja f, a função real de variável real, definida por $f(x)=e^{x^2-4}-x^2$

   8.1. $(*)$ Estuda, analiticamente, a função f quanto a monotonia e extremos

   8.2. $(*)$ Escreve a equação reduzida da reta tangente ao gráfico da função f' (primeira derivada de f), no ponto de abcissa 2

9. $(*)$ Seja h, a função real de variável real, definida por $h(x)=x+\ln\left(e^{x+1}-1\right)$

   Mostra que $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{h(x)}{x}=2$

10. Na figura 3, está representado, no plano complexo, o quadrado $[ABCO]$

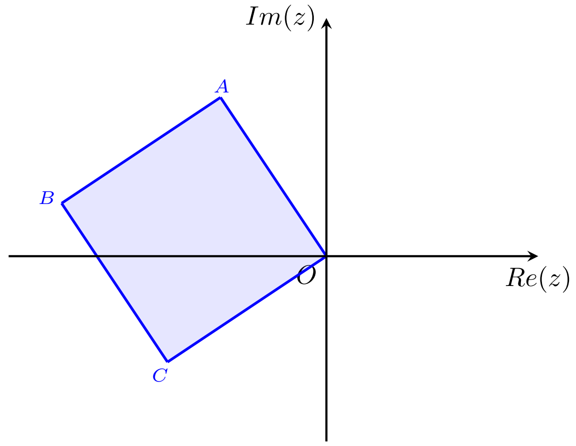

Figura 3

   Sabe-se que:

   - A e C são os afixos de duas raízes índice n de um número complexo z

   Determina o menor valor natural de n

11. Considera em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, $w_1=-\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$, $w_2=2e^{i\left(-\frac{\pi}{6}\right)}$, dois números complexos

    Determina as raízes cúbicas do número complexo $z_0=\dfrac{\overline{w_1}+1}{w_2}$

    Nota: Apresenta as soluções na forma trigonométrica

12. Considera a função f, real de variável real, definida em $\mathbb{R}$, por $f(x)=\ln(2e^x+2)$

    Resolve a equação $f(x)=\ln(4)-x$

13. Na figura 4, está representada, em referencial *o.n.* $(O;\overrightarrow{e_1};\overrightarrow{e_2};\overrightarrow{e_3})$, uma pirâmide quandragular regular reta $[ABCDE]$

Sabe-se que:

- $A(3;-1;1)$
- $E(3-\sqrt{2};2;-4)$
- $D(3-2\sqrt{2};-1;1)$
- $\overrightarrow{BA}=(0;2;2)$

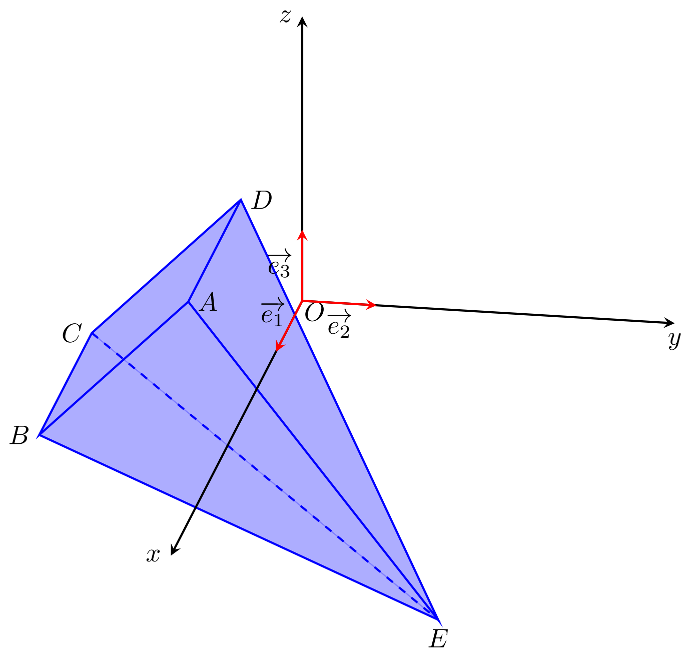

Figura 4

13.1. Escreve a equação cartesiana do plano $[ABC]$

Apresenta a equação na forma $ax+by+cz+d=0$, com $a,b,c,d\in\mathbb{R}$

13.2. Em qual das opções está o valor exato do volume da pirâmide $[ABCDE]$?

(A) $\frac{8}{3}$

(B) 16

(C) $\frac{16}{3}$

(D) $\frac{32\sqrt{2}}{3}$

14. (∗) De uma progressão geométrica (u_n) sabe-se que, para determinado número real a, positivo e diferente de 1,

- $u_1=\ln(e^a)$
- $u_2=\frac{a}{2}$
- $u_3=\log_2(4)$

são os três primeiros termos

Averigua se $\frac{1}{1024}$ é um termo da sucessão (u_n)

15. Relativamente ao desenvolvimento de $\left(\frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{1}{\sqrt{y}}\right)^8$, com $x>0$ e $y>0$, sabe-se que há um termo da forma $ax^{-3}y^{-1}$, com $a\in\mathbb{R}$

Determina a

COTAÇÕES

As pontuações obtidas nas respostas a estes 11 itens da prova contribuem obrigatoriamente para a classificação final											
Itens	1	2	3	4	5	6.1	6.2	8.1	8.2	9	14	Subtotal
Cotação (Pontos)	14	12	14	14	14	12	14	14	12	12	12	144

Destes 11 itens da prova, contribuem para a classificação final da prova os 5 itens cujas respostas obtenham melhor pontuação								
Itens	7	10	11	12	13.1	13.2	15	Subtotal
Cotação (Pontos)	4×14 Pontos							56