NÚMEROS COMPLEXOS

MATEMÁTICA A | 12.º ANO

"Conhece a Matemática e dominarás o Mundo."
Galileu Galilei

1. Em $\mathbb{C}$, conjuntos dos números complexos, considere os números $z_1 = 2 + ai$ e $z_2 = a + i$, como $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

1.1. Mostre que para todo o $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $\frac{z_1}{\overline{z_2}}$ não é real nem imaginário puro.

1.2. Determine a de modo que a imagem geométrica de $\left(\overline{z_1}\right)^2 \times \left(z_2 - a\right)^{325}$ pertença à bissectriz dos quadrantes ímpares.

1.3. Considere $a = 1$

a) Determine, na forma algébrica, $\dfrac{z_1 \times \left(\left(z_2\right)^3 + 4i\right)}{z_1 - \overline{z_2}}$.

b) Seja $P(z)$ o polinómio definido por $P(z) = z^4 - 2z^3 + 3z^2 - 2z + 2$.

b₁) Mostre que z_2 é raiz do polinómio $P(z)$.

b₂) Determine as restantes raízes de $P(z)$ e decomponha-o num produto de polinómios irredutíveis.

c) Resolva, em $\mathbb{C}$, a seguintes equações:

c₁) $z^2 \times z_1 + z \times z_2 = 3z^2$

c₂) $z \times z_2 - \overline{z \times z_1} = -3 + 4i$

c₃) $\dfrac{|z_2|^6}{z - z_1} = z^2 - 2z \times z_1 + \left(z_1\right)^2$

2. Em $\mathbb{C}$, conjuntos dos números complexos, considere:

$$z_1 = \operatorname{sen}\alpha + i\operatorname{sen}\alpha\operatorname{tg}\alpha \text{ , com } \alpha \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[\qquad \text{e} \qquad z_2 = \frac{e^{i\frac{19\pi}{12}}}{\sqrt{2}+\sqrt{6}i}$$

2.1. Mostre que $z_1 = \operatorname{tg}\alpha\, e^{i\alpha}$

2.2. Escreva, na forma algébrica, o número complexo $8\overline{z}_2 + i^{-8n+27}(1-3i)^2$, com $n \in \mathbb{N}$.

2.3. Determine α de modo que a imagem geométrica de $(z_1)^2 \times z_2$ pertence à bissectriz dos quadrantes pares.

2.4. Considere $\alpha = \frac{\pi}{3}$.

a) Determine as raízes quartas do número complexo $\frac{-\overline{z}_1}{\sqrt{3}i^6 + \sqrt{3}i^9}$ e determine o perímetro do polígono cujos vértices são as imagens geométricas dessas raízes.

Apresente as raízes quartas na forma trigonométrica e o perímetro com denominador racional.

b) Determine o conjunto solução da equação $\overline{\left(\frac{z}{z_2}\right)} + \frac{z^2 \times z_1}{|z_1|} = 0$.

3. Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, considere o número complexo w, tal que:

$$\left(\sqrt{2}-\sqrt{2}i\right)^5 w = 2\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{12}\right) + 2i^{83}\operatorname{sen}\left(-\frac{5\pi}{12}\right)$$

3.1. Mostre que $w = \frac{1}{32} - \frac{\sqrt{3}}{32}i$.

3.2. Determine o conjunto solução da equação $\frac{z^4}{w} = 1$ e determine a área do polígono cujos vértices são os afixos das soluções da equação.

Na sua resposta deve:

- apresentar as soluções da equação na forma trigonométrica
- caracterizar o polígono e indicar a medida da sua área.

4. Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, seja $z=2\left(\cos^2\alpha-\operatorname{sen}^2\alpha+i\operatorname{sen}(2\alpha)\right)$, com $\alpha\in\left[0,\frac{3\pi}{2}\right[$.

Sabe-se que:

- o afixo de z pertence ao terceiro quadrante
- z é uma das raízes de índice n, com $n\in\mathbb{N}$, do número complexo -128

Qual das seguintes opções é a correcta?

A $\alpha=\frac{10\pi}{7}$

B $\alpha=\frac{9\pi}{7}$

C $\alpha=\frac{10\pi}{14}$

D $\alpha=\frac{9\pi}{14}$

5. Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, considere $z_1=\cos\alpha+i\operatorname{sen}\alpha$ e $z_2=\frac{i^{35}-2}{(2i-1)\left(\overline{z_1}\right)^5}$, com $\alpha\in[0,\pi[$.

Determine os valores que α para os quais o afixo de z_2 pertence à região do plano complexo definida pela condição:

$$\operatorname{Arg}(z)=\operatorname{Arg}\left(\sqrt{6}-3\sqrt{2}i\right)$$

6. Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, considere:

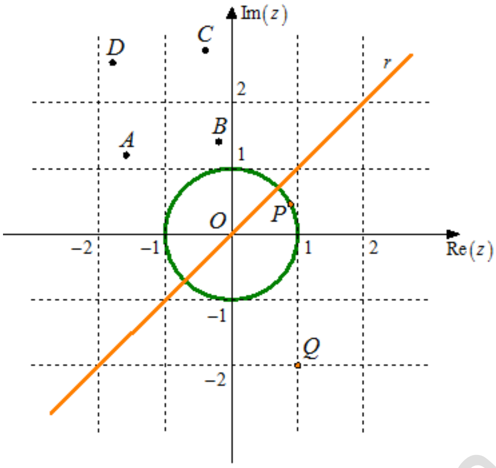
- $w_1=\frac{2-i^{35}}{1+3i}-(1-i)^3-4i^{200}$
- $w_2=\cos^2(2\alpha)-\operatorname{sen}^2(2\alpha)+2i\operatorname{sen}(2\alpha)\cos(2\alpha)$, com $\alpha\in\left]\frac{\pi}{2},\pi\right[$

6.1. Mostre que $w_1=-\frac{3}{2}+\frac{3}{2}i$.

6.2. Mostre que $w_2=e^{i(4\alpha)}$

6.3. Determine α de modo que $\frac{w_1}{w_2}$ seja um número real negativo.

7. Na figura estão representados no plano complexo os pontos A, B, C, D, P e Q , a circunferência centrada na origem e que contém o ponto de coordenadas $(1,0)$, e a recta r , bissectriz dos quadrantes ímpares.



Sabe-se que:

- o ponto P pertence à circunferência e é o afixo do número complexo z_1
- o ponto Q é o afixo do número complexo z_2
- as rectas verticais a tracejado são paralelas ao eixo imaginário e as rectas horizontais a tracejado são paralelas aos eixo real.

Qual dos seguintes pontos pode ser o afixo do número complexo $\frac{(z_1)^2}{i} - z_2$?

A A **B** B **C** C **D** D

FIM

Solucionário

1.2. $a=-2+2\sqrt{2} \vee \Leftrightarrow a=-2-2\sqrt{2}$

1.3. a) $2+6i$

1.3. b2) $\{1+i, 1-i, i, -i\}$; $P(z)=(z-1-i)(z-1+i)(z-i)(z+i)$

1.3. c1) $\{0, i\}$

1.3. c2) $\left\{3-\frac{2}{3}i\right\}$

1.3. c3) $\left\{4+i, 1+\left(1-\sqrt{3}\right)i, 1+\left(1+\sqrt{3}\right)i\right\}$

2.2. $-8+10i$

2.3. $\alpha=\frac{\pi}{4}$

2.4. a) $\frac{1}{\sqrt[8]{2}}e^{i\left(-\frac{\pi}{48}\right)}$; $\frac{1}{\sqrt[8]{2}}e^{i\frac{23\pi}{48}}$; $\frac{1}{\sqrt[8]{2}}e^{i\frac{47\pi}{48}}$; $\frac{1}{\sqrt[8]{2}}e^{i\frac{71\pi}{48}}$; $Perímetro=4\sqrt[8]{8}$

2.4. b) $\left\{0, 2\sqrt{2}e^{i\left(-\frac{\pi}{36}\right)}, 2\sqrt{2}e^{i\frac{23\pi}{36}}, 2\sqrt{2}e^{i\frac{47\pi}{36}}\right\}$

3.2. $\left\{\frac{1}{2}e^{i\frac{5\pi}{12}}, \frac{1}{2}e^{i\frac{11\pi}{12}}, \frac{1}{2}e^{i\frac{17\pi}{12}}, \frac{1}{2}e^{i\frac{23\pi}{12}}\right\}$; O polígono é um quadrado de área $\frac{1}{2}$ centrado na origem do referencial.

4. D

5. $\alpha=\frac{7\pi}{30} \vee \alpha=\frac{19\pi}{30}$

6.3. $\alpha=\frac{15\pi}{16}$

7. B