Propostas de Resolução

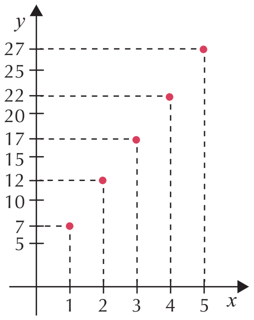
Propostas de Resolução

Sequências e Funções

Sequências

Rever + praticar – páginas 72 e 73

1. 1.º termo: 7
2.º termo: 7 + 5 = 12
3.º termo: 12 + 5 = 17
4.º termo: 17 + 5 = 22
5.º termo: 22 + 5 = 27
Assim, os termos pedidos são 7, 12, 17, 22 e 27.



2. 4.º termo: 12
5.º termo: 4.º termo – 2 = 12 – 2 = 10
3.º termo: 4.º termo + 2 = 12 + 2 = 14
2.º termo: 3.º termo + 2 = 14 + 2 = 16
1.º termo: 2.º termo + 2 = 16 + 2 = 18
Assim, os cinco primeiros termos da sequência são 18, 16, 14, 12 e 10.

3.
3.1. a) 1.ª figura: 1 quadrado
2.ª figura: 2 quadrados
3.ª figura: 3 quadrados
Então, a 7.ª figura tem 7 quadrados.
b) A figura de ordem n tem n quadrados.
3.2. a) 1.ª figura: 4 triângulos
2.ª figura: 6 triângulos
3.ª figura: 8 triângulos
4.ª figura: 10 triângulos (8 + 2)
5.ª figura: 12 triângulos (10 + 2)
b) $2n + 2$

Praticar + – páginas 74 a 77

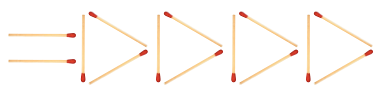
1. O 4.º termo é 96, pois, sendo 44 o 3.º termo, temos:
44 + 4 = 48
48 × 2 = 96
O 1.º termo é 5, pois, sendo 18 o 2.º termo, temos:
18 : 2 = 9
9 – 4 = 5
Assim:

1.º termo	2.º termo	3.º termo	4.º termo
5	18	44	**96**

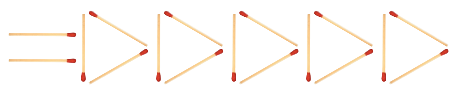
2.
2.1. 1.º termo: $4 \times 1^2 + 1 = 4 + 1 = 5$
2.º termo: $4 \times 2^2 + 1 = 4 \times 4 + 1 = 16 + 1 = 17$
Soma dos dois primeiros termos: 5 + 17 = 22
2.2. Termo de ordem 12:
$$4 \times 12^2 + 1 = 4 \times 144 + 1 = 576 + 1 = 577$$
2.3. O último termo é o termo de ordem 20. Assim:
$$4 \times 20^2 + 1 = 4 \times 400 + 1 = 1600 + 1 = 1601$$

3.
3.1. O quinto termo da sequência é 19 (13 + 6).
3.2. $-5 \xrightarrow{+6} 1 \xrightarrow{+6} 7 \xrightarrow{+6} 13 \xrightarrow{+6} 19 \xrightarrow{+6} 25 \xrightarrow{+6} 31 \xrightarrow{+6} 37 \xrightarrow{+6} 43$
Logo, 43 é o primeiro termo da sequência que é maior que 40.
3.3. 1.º termo: 6 × 1 – 11 = –5
2.º termo: 6 × 2 – 11 = 1
3.º termo: 6 × 3 – 11 = 7
…
Logo, a expressão do termo geral é $6n - 11$.
A opção correta é a [B].

4.
4.1.



4.º termo



5.º termo

4.2. O 1.º termo da sequência é composto por cinco fósforos.
Cada um dos termos seguintes utiliza mais três fósforos do que o termo anterior.
Assim, $3n + 2$ é uma expressão que permite gerar a sequência do número de fósforos de cada termo.

Logo, para construir o termo de ordem 40 são necessários $3 \times 40 + 2 = 120 + 2 = 122$ fósforos.

4.3. $3n + 2 = 103 \Leftrightarrow 3n = 103 - 2$

$\Leftrightarrow 3n = 101$

$\Leftrightarrow n = \dfrac{101}{3}$

Como $\dfrac{101}{3} \notin \mathbb{N}$, podemos concluir que não existe qualquer termo composto por 103 fósforos.

5.

5.1. $\dfrac{5 \times 1 + 4}{2} = \dfrac{5 + 4}{2} = \dfrac{9}{2}$

$\dfrac{5 \times 2 + 4}{2} = \dfrac{10 + 4}{2} = \dfrac{14}{2} = 7$

Os dois primeiros termos da sequência são $\dfrac{9}{2}$ e 7.

5.2. $\dfrac{5n + 4}{2} = \underset{(\times 2)}{\dfrac{127}{1}} \Leftrightarrow 5n + 4 = 254$

$\Leftrightarrow 5n = 250$

$\Leftrightarrow n = \dfrac{250}{5}$

$\Leftrightarrow n = 50$

A sequência tem 50 termos.

6.

6.1. A sequência do número de pontos é 4, 7, 10, 13, …

O termo geral da sequência do número de pontos é $3n + 1$.

Assim, para construir o oitavo termo da sequência, são necessários $3 \times 8 + 1 = 24 + 1 = 25$ pontos.

6.2. A sequência do número de triângulos é 2, 6, 10, 14, …

O termo geral da sequência do número de triângulos é $4n - 2$.

Assim, o 10.º termo é composto por 38 triângulos ($4 \times 10 - 2 = 40 - 2 = 38$).

6.3. $4n - 2 = 37 \Leftrightarrow 4n = 39$

$\Leftrightarrow n = \dfrac{39}{4}$

Como $\dfrac{39}{4} \notin \mathbb{N}$, então não existe qualquer termo desta sequência composto por 37 triângulos.

7.

7.1. $2 \times (1 - 2) + 1 = 2 \times (-1) + 1 = -2 + 1 = -1$

$2 \times (2 - 2) + 1 = 2 \times 0 + 1 = 1$

$2 \times (3 - 2) + 1 = 2 \times 1 + 1 = 2 + 1 = 3$

Os três primeiros termos da sequência são -1, 1 e 3.

7.2. $2 \times (100 - 2) + 1 = 2 \times 98 + 1 = 197$

7.3. $2(n - 2) + 1 = 150 \Leftrightarrow 2n - 4 + 1 = 150$

$\Leftrightarrow 2n - 4 + 1 = 150$

$\Leftrightarrow 2n = 153$

$\Leftrightarrow n = \dfrac{153}{2}$

Como $\dfrac{153}{2} \notin \mathbb{N}$, podemos concluir que 150 não é termo da sequência.

7.4. $2(n - 2) + 1 = 149 \Leftrightarrow 2n - 4 + 1 = 149$

$\Leftrightarrow 2n = 149 + 4 - 1$

$\Leftrightarrow 2n = 152$

$\Leftrightarrow n = \dfrac{152}{2}$

$\Leftrightarrow n = 76$

Logo, 149 é o termo de ordem 76 da sequência.

8.

8.1. Tem um hexágono preto, pois todos os termos da sequência têm um hexágono preto.

8.2. A sequência do número total de hexágonos é 7, 13, 19, …

A expressão que permite calcular o número total de hexágonos é $6n + 1$.

8.3. A sequência do número de hexágonos verdes é 6, 12, 18, …

O termo geral da sequência do número de hexágonos verdes é $6n$. Logo, o décimo sétimo termo tem 102 (6×17) hexágonos verdes.

9.

9.1. Quadrados azuis:

1.º termo	2.º termo	3.º termo		10.º termo
↓	↓	↓		↓
2	3	4	(…)	11

O termo geral da sequência do número de quadrados azuis é $n + 1$. Logo, o termo de ordem 10 tem $10 + 1 = 11$ quadrados azuis.

O termo de ordem 10 tem 11 quadrados azuis.

9.2. A sequência do número de quadrados brancos é 1, 3, 5, …

O termo geral da sequência do número de quadrados brancos é $2n - 1$. Logo, o termo de ordem 20 tem $2 \times 20 - 1 = 40 - 1 = 39$ quadrados brancos.

9.3. A sequência do número total de quadrados é 3, 6, 9, …

O termo geral da sequência do número total de quadrados é $3n$. Logo, o termo de ordem 6 tem $3 \times 6 = 18$ quadrados.

Propostas de Resolução

9.4. Se o termo é composto por 17 quadrados azuis, então é o termo de ordem 16. O termo de ordem 16 tem $2 \times 16 - 1 = 31$ quadrados brancos.

9.5. Como a expressão do número total de quadrados é $3n$, então o termo de ordem 51 tem 153 quadrados.

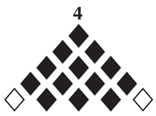
$3n = 153 \Leftrightarrow n = \frac{153}{3}$

$\Leftrightarrow n = 51$

9.6. O termo geral da sequência do número de quadrados brancos é $2n - 1$.

10.

10.1.



10.2. Todas as figuras da sequência têm dois losangos brancos. Logo, a opção correta é a [C].

10.3. A sequência do número de losangos pretos é:

$$1 \xrightarrow{+3} 4 \xrightarrow{+4} 8 \xrightarrow{+5} 13 \xrightarrow{+6} 19 \xrightarrow{+7} 26$$

Logo, a opção correta é a [C].

11.

11.1. Linha 5: 1 5 10 10 5 1

Linha 6: 1 6 15 20 15 6 1

11.2. Soma dos elementos da linha 0: $1 = 2^0$

Soma dos elementos da linha 1: $2 = 2^1$

Soma dos elementos da linha 2: $4 = 2^2$

Soma dos elementos da linha 3: $8 = 2^3$

Soma dos elementos da linha 4: $16 = 2^4$

11.3. $2^{10} = 1024$

12.

12.1. A sequência do número de bolas é 4, 7, 10, …

O termo geral da sequência do número de bolas é $3n + 1$.

Assim, para construir o 9.º termo são necessárias $3 \times 9 + 1 = 28$ bolas.

12.2. O número de bolas brancas é igual à ordem da figura. Logo, como há 17 bolas brancas, a ordem da figura é 17.

O termo geral da sequência do número de bolas é $3n + 1$, sendo n a ordem do termo.

Logo, o 17.º termo tem $3 \times 17 + 1 = 52$ bolas, ou seja, são necessárias 52 bolas para construir o termo.

12.3. O termo geral da sequência do número de bolas é $3n + 1$, sendo n a ordem do termo.

Determinemos n tal que $3n + 1 = 151$.

$3n + 1 = 151 \Leftrightarrow 3n = 151 - 1$

$\Leftrightarrow 3n = 150$

$\Leftrightarrow n = 50$

Como o número de bolas brancas é igual à ordem da figura, o termo tem 50 bolas brancas e $151 - 50 = 101$ bolas verdes.

13.

13.1. $T_{20} = \frac{1}{6} \times 20 \times (20 + 1) \times (2 \times 20 + 1) =$

$= 2870$

13.2. $T_{15} = \frac{1}{6} \times 15 \times (15 + 1) \times (2 \times 15 + 1) =$

$= 1240$

$T_{12} = \frac{1}{6} \times 12 \times (12 + 1) \times (2 \times 12 + 1) =$

$= 650$

$6 \times (T_{15} - T_{12}) = 6 \times (1240 - 650) =$

$= 3540$

13.3. Como $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + 33^2 + 34^2 = T_{34}$, então:

$T_{34} = \frac{1}{6} \times 34 \times (34 + 1) \times (2 \times 34 + 1) =$

$= 13\,685$

13.4. a) $V_1 = T_2 - T_1 =$

$= 1^2 + 2^2 - 1^2 =$

$= 2^2 =$

$= 4$

$V_2 = T_3 - T_2 =$

$= 1^2 + 2^2 + 3^2 - (1^2 + 2^2) =$

$= 3^2 =$

$= 9$

$V_3 = T_4 - T_3 =$

$= (1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2) - (1^2 + 2^2 + 3^2) =$

$= 4^2 =$

$= 16$

$V_4 = T_5 - T_4 =$

$= (1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2) - (1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2) =$

$= 5^2 =$

$= 25$

Logo, os quatro primeiros termos desta nova sequência são: 4, 9, 16, 25

b) Como $T_3 = 1^2 + 2^2 + 3^2$, então:

$V_3 - V_2 = T_4 - T_3 - (T_3 - T_2) =$

$= 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 - (1^2 + 2^2 + 3^2) -$

$- (1^2 + 2^2 + 3^2) + 1^2 + 2^2 =$

$= 4^2 - 3^2$

$V_3 - V_1 = T_4 - T_3 - (T_2 - T_1) =$
$= T_4 - T_3 - T_2 + T_1 =$
$= 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 - 1^2 - 2^2 - 3^2 - 1^2 - 2^2 + 1^2 =$
$= 4^2 - 2^2$

$V_1 - T_1 = T_2 - T_1 - T_1 =$
$= 1^2 + 2^2 - 1^2 - 1^2 =$
$= 2^2 - 1^2$

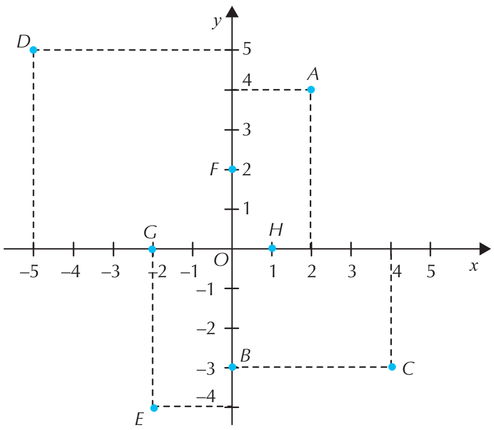
Figura 1	T_3
Figura 2	$V_3 - V_2$
Figura 3	$V_3 - V_1$
Figura 4	$V_1 - T_1$

Funções

Rever + praticar – páginas 78 a 87

1. $A(2, 1)$; $B(1, 3)$; $C(4, 0)$; $D(0, -2)$; $E(0, 2)$; $F(-4, 0)$; $G(-2, 1)$; $H(-3, -3)$; $I(3, -4)$

2.



3.

3.1. Conjunto de partida = {Porto, Lisboa, Vila do Conde, Coimbra}
Conjunto de chegada = {Douro, Tejo, Ave, Mondego}

3.2. Sim, porque a cada cidade corresponde um e um só rio.

4.

4.1. A imagem do objeto 1 é 2.

4.2. 2 é o objeto cuja imagem é 3.

4.3. $D'_f = \{-1, 0, 2, 3\}$

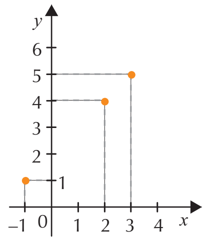
4.4.

x	–2	–1	1	2
y	–1	0	2	3

5.

5.1. O contradomínio da função é o conjunto das imagens dos objetos do domínio. Neste caso, o domínio é $A = \{1, 2, 3\}$, logo:
$f(-1) = -1 + 2 = 1$
$f(2) = 2 + 2 = 4$
$f(3) = 3 + 2 = 5$
Logo, $D'_f = \{1, 4, 5\}$.

5.2.



6. A expressão de uma função linear é do tipo $y = ax$, logo $y = \frac{3}{2}x$ é uma expressão de uma função linear, com $a = \frac{3}{2}$.
A opção correta é a [D].

7.

7.1. $f(x) = -5(x - 3) - (x - 1) =$
$= -5x + 15 - x + 1 =$
$= -6x + 16$
$f(x)$ é uma função afim.

7.2. $g(x) = -3(x - 6) + 3x =$
$= -3x + 18 + 3x =$
$= 18$
$g(x)$ é uma função constante.

7.3. $h(x) = \frac{x - (3x - 3) + 2}{5} + 1 =$
$= \frac{x - 3x + 3 + 2}{5} + \frac{5}{5} =$
$= \frac{-2x + 5 + 5}{5} =$
$= \frac{-2x + 10}{5} =$
$= -\frac{2}{5}x + 2$
$h(x)$ é uma função afim.

7.4. $i(x) = -(x^2 - 2) + x^2 - 3 =$
$= -x^2 + 2 + x^2 - 3 =$
$= -1$
$i(x)$ é uma função constante.

Propostas de Resolução

7.5. $j(x) = x + 4 - \frac{1}{6}(2x + 24) =$

$= x + 4 - \frac{2}{6}x - \frac{24}{6} =$

$= x + 4 - \frac{1}{3}x - 4 =$

$= \frac{3}{3}x - \frac{1}{3}x =$

$= \frac{2}{3}x$

$j(x)$ é uma função linear.

8.

8.1. Sabe-se que $P(\ell) = 6 \times \ell$, sendo ℓ o comprimento do lado dos hexágonos regulares e P o seu perímetro. Como esta é uma função do tipo $y = kx$, $k \neq 0$, conclui-se que P é uma função de proporcionalidade direta.

8.2. a) $P(2) = 6 \times 2 = 12$

b) $6\ell = 7{,}2 \Leftrightarrow \ell = \frac{7{,}2}{6}$

$\Leftrightarrow \ell = 7{,}2$

Logo, $P(1{,}2) = 7{,}2$.

8.3. O objeto é 2 e a imagem é 12.
Um hexágono cujo lado tenha 2 unidades de comprimento terá 12 unidades de perímetro.
O objeto é 1,2 e a imagem é 7,2.
Um hexágono cujo lado tenha 1,2 unidades de comprimento terá 7,2 unidades de perímetro.

8.4 $P(\ell) = 6\ell$

9. $\boldsymbol{r}$: $y = 5x + 2$ tem declive 5.
$\boldsymbol{s}$: $y = -3x + 2$ tem declive -3.
$\boldsymbol{t}$: $y = 3x + 5$ tem declive 3.
$\boldsymbol{u}$: $y = -3x + 5$ tem declive -3.
As retas s e u têm o mesmo declive, ou seja, são paralelas.

10. O declive da reta AB é:

$$m_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{5-3}{-2-1} = \frac{2}{-3} = -\frac{2}{3}$$

O declive da reta BC é:

$$m_{BC} = \frac{y_C - y_B}{x_C - x_B} = \frac{7-5}{4-(-2)} = \frac{2}{4+2} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

11. A expressão algébrica que define estas funções é da forma $y = mx + b$.
No caso da função f, $b = 4$ porque passa no ponto $(0, 4)$ e como é paralela à reta s tem o mesmo declive, ou seja, $\frac{3}{2}$. Assim, $f(x) = \frac{3}{2}x + 4$.

No caso da função h, $b = -2$ porque passa no ponto $(0, -2)$ e como é paralela à reta s tem o mesmo declive, ou seja, $\frac{3}{2}$. Assim, $h(x) = \frac{3}{2}x - 2$.

12. • 1 operário demora 8 horas.
4 operários demoram 2 horas.
Para passar de 1 para 4, é necessário multiplicar por $\frac{4}{1} = 4$.
Para passar de 8 para 2, é necessário multiplicar por $\frac{2}{8} = \frac{1}{4}$.
(Inversamente, para passar de 2 para 8 multiplica-se por $\frac{8}{2} = 4$).

• 1 operário demora 8 horas.
16 operários demoram $\frac{1}{2}$ hora.
Para passar de 1 para 16, é necessário multiplicar por $\frac{16}{1} = 16$.
Para passar de 8 para $\frac{1}{2}$, é necessário multiplicar por $\frac{\frac{1}{2}}{8} = \frac{1}{16}$.
(Inversamente, para passar de 16 para 1 multiplica-se por $\frac{1}{16}$ e para passar de $\frac{1}{2}$ para 8 multiplica-se por 16).

• 4 operários demoram 2 horas.
16 operários demoram $\frac{1}{2}$ hora.
Para passar de 4 para 16, é necessário multiplicar por $\frac{16}{4} = 4$.
Para passar de 2 para $\frac{1}{2}$, é necessário multiplicar por $\frac{\frac{1}{2}}{2} = \frac{1}{4}$.
(Inversamente, para passar de 16 para 4 multiplica-se por $\frac{4}{16} = \frac{1}{4}$ e para passar de $\frac{1}{2}$ para 2, é necessário multiplicar por $\frac{2}{\frac{1}{2}} = 4$).

Podemos, então, concluir que a grandeza "número de operários" é inversamente proporcional à grandeza "tempo", uma vez que depende dela de tal forma que, fixadas unidades, ao multiplicar a medida da segunda por um dado número positivo, a medida da primeira fica multiplicada pelo inverso desse número.

13. Uma grandeza é inversamente proporcional a outra quando dela depende de tal forma que, fixadas unidades, ao multiplicar a medida da segunda por um dado número positivo, a medida da primeira fica multiplicada pelo inverso desse número.

13.1. Como as grandezas x e y são inversamente proporcionais, temos que $3 \times 5 = 15$ é a constante de proporcionalidade inversa. Assim:

$5 \times a = 15 \Leftrightarrow a = \frac{15}{2} \Leftrightarrow a = 3$

$b \times 30 = 15 \Leftrightarrow b = \frac{15}{30} \Leftrightarrow b = \frac{1}{2}$

$1 \times c = 15 \Leftrightarrow c = \frac{15}{1} \Leftrightarrow c = 15$

$d \times \frac{15}{2} = 15 \Leftrightarrow d = \frac{15}{\frac{15}{2}} \Leftrightarrow d = \frac{30}{15} \Leftrightarrow d = 2$

x	3	5	$\mathbf{\frac{1}{2}}$	1	**2**
y	5	**3**	30	**15**	$\frac{15}{2}$

13.2. Como as grandezas x e y são inversamente proporcionais, temos que $2 \times 20 = 40$ é a constante de proporcionalidade inversa. Assim:

$10 \times a = 40 \Leftrightarrow a = \frac{40}{10} \Leftrightarrow a = 4$

$5 \times b = 40 \Leftrightarrow b = \frac{40}{5} \Leftrightarrow b = 8$

$8 \times c = 40 \Leftrightarrow c = \frac{40}{8} \Leftrightarrow c = 5$

$d \times 40 = 40 \Leftrightarrow d = \frac{40}{40} \Leftrightarrow d = 1$

x	10	2	5	8	**1**
y	**4**	20	**8**	**5**	40

14. A constante de proporcionalidade inversa é $40 \times 5 = 200$. Logo, $f(x) = \frac{200}{x}$, $x > 0$, sendo f a função de proporcionalidade inversa associada.

15. A função representada graficamente é da forma $y = \frac{k}{x}$, com $x > 0$ e $k = f(1)$. Como o ponto (2, 1) pertence ao gráfico da função, $1 = \frac{k}{2} \Leftrightarrow k = 2$. Assim, a expressão algébrica que define a função é $y = \frac{2}{x}$, $x > 0$.

16. A função h tem uma expressão analítica da forma $y = ax^2$, $a \neq 0$, pois todos os pontos do seu gráfico estão sobre uma parábola e o ponto (0, 0) pertence ao seu gráfico.

17. Consideremos um dos pontos pertencente ao gráfico da função, que não o (0, 0). Por exemplo, o ponto (–2, 8). Assim, como a função é representada por uma expressão analítica do tipo $y = ax^2$, $a \neq 0$, temos que:

$8 = a \times (-2)^2 \Leftrightarrow 8 = 4a \Leftrightarrow a = 2$

Logo, a função é definida por $y = 2x^2$.

Praticar + – páginas 88 a 104

1.

1.1. $A(-3, -2)$; $B(-4, 0)$; $C(3, 3)$; $D(-2, 3)$; $E(5, -1)$; $F(0, 2)$

1.2. F, pois tem abcissa nula.

1.3. Ponto C

2.

2.1. As correspondências que são funções são as correspondências A e B. Nestas correspondências, a cada elemento do conjunto de partida corresponde um e um só elemento do conjunto de chegada.

2.2. Correspondência A

$D = \{1, 2, 3\}$

$D' = \{2, 3, 4\}$

Conjunto de chegada = {2, 3, 4}

Correspondência B

$D = \{1, 2, 4\}$

$D' = \{3\}$

Conjunto de chegada = {3, 5, 6}

3.

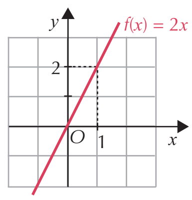
3.1. $f(-2) = 2 \times (-2) = -4$

3.2. $f(x) = 64 \Leftrightarrow 2x = 64 \Leftrightarrow x = \frac{64}{2} \Leftrightarrow x = 32$

O objeto que, por f, tem imagem 64 é o 32.

3.3.

x	$y = 2x$
0	0
1	2



4. As opções [B] e [D] não são as corretas porque não são funções de proporcionalidade direta, ou seja, do tipo $y = kx$.

A opção [A] não é a correta porque $f(3) = \frac{3}{4}$.

Logo, a opção correta é a [C] ($f(3) = 4 \times 3 = 12$).

Propostas de Resolução

5.

5.1. A correspondência é uma função, pois a cada valor da variável "tempo de aquecimento" corresponde um e um só valor da variável "temperatura".

5.2. $D = \{0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20\}$

5.3. 18 tem como imagem 43.

5.4. 2 tem como imagem 20.

5.5. Variável dependente: temperatura

Variável independente: tempo

6.

6.1. $A(2, 2)$, $B(3, 4)$ e $C(0, 1)$

6.2. A reta r é paralela à reta s, pelo que r e s têm o mesmo declive ($a_r = a_s$).

$$a_r = a_s = \frac{4-2}{3-2} = 2$$

A ordenada na origem da reta r é 1 (por observação do gráfico).

Então, uma equação da reta r é $y = 2x + 1$.

7.

7.1. Como as retas r e s são paralelas, têm o mesmo declive. Logo, o declive da reta s é 4.

7.2. O declive da reta s é 4 (por 7.1) e a ordenada na origem da reta s é 17. Então, uma equação da reta s é $y = 4x + 17$.

7.3. Sabe-se que 4 é o declive da reta r.

Então, $y = 4x + b$.

Como o ponto $(0, 5)$ pertence à reta r, então:

$$5 = 4 \times 0 + b \Leftrightarrow 5 = 0 + b$$
$$\Leftrightarrow 5 = b$$

Logo, uma equação da reta r é $y = 4x + 5$.

8. A reta $y = -2x + 1$ tem ordenada na origem 1. Assim, as opções [C] e [D] não são corretas. Por outro lado, a reta tem declive negativo, logo a opção correta é a [B].

9.

9.1. a) A constante de proporcionalidade é 243.

b) A constante de proporcionalidade representa, no contexto da situação, o custo de produção de cada relógio daquele modelo.

9.2. a) Custo de produção de cada relógio: 243 €

Custo de venda de cada relógio: 2 × 243 € = 486 €.

18 000 € : 486 € ≈ 37

O cliente poderá comprar 37 relógios.

b) O custo dos oito relógios, para o Sr. José, é 8 × 486 € = 3888 €.

Como o Sr. José pretende obter 5432 € de lucro bruto, terá de conseguir obter com as vendas 5432 € + 3888 € = 9320 €.

Assim, cada relógio deve ter um preço de venda ao público de 9320 € : 8 = 1165 €.

10. Se f é uma função afim, é da forma $f(x) = ax + b$, sendo a e b números reais.

$$a = \frac{2-4}{0-2} = \frac{-2}{-2} = 1$$

Logo, $f(x) = 1 \times x + b$.

Como $(0, 2)$ pertence ao gráfico de f:

$$2 = 1 \times 0 + b \Leftrightarrow b = 2$$

Então, $f(x) = x + 2$.

11. Como $g(6) = 8$, então $(6, 8)$ pertence ao gráfico de g.

Como $g(-4) = -12$, então $(-4, -12)$ pertence ao gráfico de g.

Assim, sendo $g(x) = ax + b$, temos:

$$a = \frac{-12-8}{-4-6} = \frac{-20}{-10} = 2$$

Logo, $g(x) = 2x + b$.

Como $(6, 8)$ pertence ao gráfico de g, então:

$$8 = 2 \times 6 + b \Leftrightarrow b = -4$$

Logo, $g(x) = 2x - 4$. Então:

$$\begin{aligned} g(0) - 5 \times g(1) &= 2 \times 0 - 4 - 5 \times (2 \times 1 - 4) = \\ &= 0 - 4 - 5 \times (2 - 4) = \\ &= -4 - 10 + 20 = \\ &= 6 \end{aligned}$$

12. Duas grandezas são diretamente proporcionais se a razão entre os valores correspondentes das duas, tomados pela mesma ordem, for constante e não nula.

Logo, a opção correta é a [A].

13. Duas grandezas são inversamente proporcionais se o produto dos valores correspondentes das duas for constante e não nulo.

Logo, a opção correta é a [C].

14. Como as grandezas x e y são inversamente proporcionais, o produto dos valores correspondentes das duas é constante.

$$a \times 10 = 20 \times 5 \Leftrightarrow a = \frac{20 \times 5}{10}$$
$$\Leftrightarrow a = 10$$

15.

15.1. Como x e y são inversamente proporcionais, o produto dos valores correspondentes é constante.

$$4 \times 12 = 1 \times a \Leftrightarrow a = \frac{4 \times 12}{1}$$
$$\Leftrightarrow a = 48$$

$$4 \times 12 = b \times 24 \Leftrightarrow b = \frac{4 \times 12}{24}$$
$$\Leftrightarrow b = 2$$

$$4 \times 12 = c \times 40 \Leftrightarrow c = \frac{4 \times 12}{40}$$
$$\Leftrightarrow c = \frac{48}{40}$$
$$\Leftrightarrow c = \frac{6}{5}$$

$$4 \times 12 = 8 \times d \Leftrightarrow d = \frac{4 \times 12}{8}$$
$$\Leftrightarrow d = \frac{48}{8}$$
$$\Leftrightarrow d = 6$$

15.2. Como x e y são diretamente proporcionais, o quociente entre os valores correspondentes das duas grandezas, tomados pela mesma ordem, é constante.

$$\frac{12}{4} = \frac{a}{1} \Leftrightarrow a = \frac{12 \times 1}{4}$$
$$\Leftrightarrow a = \frac{12}{4}$$
$$\Leftrightarrow a = 3$$

$$\frac{12}{4} = \frac{24}{b} \Leftrightarrow b = \frac{4 \times 12}{12}$$
$$\Leftrightarrow b = 8$$

$$\frac{12}{4} = \frac{40}{c} \Leftrightarrow c = \frac{4 \times 40}{12}$$
$$\Leftrightarrow c = \frac{40}{3}$$

$$\frac{12}{4} = \frac{d}{8} \Leftrightarrow d = \frac{8 \times 12}{4}$$
$$\Leftrightarrow d = 24$$

16. Como $2 \times 3 = 6$, então 6 é a constante de proporcionalidade.

Logo, $y = \frac{6}{x}$, $x > 0$, e, portanto, a opção correta é a [B].

17.

17.1. As grandezas são diretamente proporcionais e a constante de proporcionalidade é $k = \frac{300}{1} = 300$.

$7 \times 300 = 2100$

O automóvel percorrerá 2100 km.

17.2. 300 km ———— 1 ℓ

750 km ———— x ℓ

$$x = \frac{750 \times 1}{300} = 2{,}5$$

São necessários 2,5 ℓ de combustível.

18. 80 elementos ($100 - 20 = 80$) do grupo de escuteiros vão acampar.

Número de elementos	100	80
Número de dias	8	x

Trata-se de uma situação de proporcionalidade inversa. Então:

$$100 \times 8 = 80 \times x \Leftrightarrow x = \frac{100 \times 8}{80}$$
$$\Leftrightarrow x = 10$$

Com a mesma quantidade de comida, os restantes elementos podem ficar acampados mais dois dias ($10 - 8 = 2$).

19. **[A]** Falsa, pois, se V – volume do cubo e a – aresta do cubo, então $V = a^3$ não é do tipo $y = \frac{a}{x}$, $x > 0$.

[B] Falsa, pois, se $y = \frac{a}{x}$, então $a = x \times y$, $x > 0$.

[D] Falsa, pois as grandezas "velocidade média" e "tempo" são inversamente proporcionais, logo, se se deslocar a 70 km/h, demora 4 horas.

A opção correta é a [C].

20.

20.1. A opção correta é a [C], pois, as grandezas "número de participantes" e "valor a pagar" são inversamente proporcionais.

20.2. 10×50 € $= 500$ €

Se participarem 10 pessoas, então pagam de transporte, no total, 500 €.

Então, se cada um pagou 10 €, o número de pessoas é igual a 500 € : 10 € = 50.

Foram à visita 50 pessoas.

21.

Volume (cm^3)	600
Pressão (mmHg)	378

21.1. Como as grandezas são inversamente proporcionais, a constante de proporcionalidade é $600 \times 378 = 226\,800$. Assim:

$$V \times P = 226\,800 \Leftrightarrow V = \frac{226\,800}{P}$$

Propostas de Resolução

21.2. Se $V = 700$ cm^3, então:

$$700 = \frac{226\,800}{P} \Leftrightarrow P = \frac{226\,800}{P}$$
$$\Leftrightarrow P = 324$$

A um volume de 700 cm^3 corresponde uma pressão de 324 mmHg.

21.3. Se $P = 2268$ mmHg, então:

$$V = \frac{226\,800}{2268} \Leftrightarrow V = 100$$

A uma pressão de 2268 mmHg corresponde um volume de 100 cm^3.

22. Como o "caudal" e o "tempo" são grandezas inversamente proporcionais, o produto dos valores das duas grandezas é constante. Assim:

$10 \times 15 = a \times 20 = 30 \times b$

Logo:

$$10 \times 15 = a \times 20 \Leftrightarrow a = \frac{10 \times 15}{20}$$
$$\Leftrightarrow a = 7{,}5$$
$$10 \times 15 = 30 \times b \Leftrightarrow b = \frac{10 \times 15}{30}$$
$$\Leftrightarrow b = 5$$

23.

23.1. Funções f e g: $a > 0$, pois as parábolas têm a concavidade voltada para cima.

Função h: $a < 0$, pois a parábola tem a concavidade voltada para baixo.

23.2. $h(x) = ax^2$

Como $A(1, -2)$ pertence ao gráfico de h, temos:

$-2 = a \times 1^2 \Leftrightarrow -2 = a$

Logo, $h(x) = -2x^2$.

24. [A] Verdadeira. Como o coeficiente de x^2 é negativo (-4), a parábola tem a concavidade voltada para baixo.

[B] Falsa.

$f(1) = -4 \times 1^2 = -4$ e $-4 \neq 4$.

Logo, o ponto de coordenadas (1, 4) não pertence ao gráfico da função.

[C] Verdadeira. A função é quadrática, pois é do tipo $y = ax^2$.

[D] Verdadeira. A parábola contém o ponto (0, 0).

A opção correta é a [B].

25.

25.1. A função que tem expressão analítica da forma $y = ax^2$, $a \neq 0$, é a função f, pois é a única cujo gráfico é uma parábola de vértice na origem.

25.2. O ponto de coordenadas (1, 2) pertence ao gráfico da função $y = ax^2$. Assim:

$2 = a \times 1^2 \Leftrightarrow a = 2$

Logo, $y = 2x^2$.

A opção correta é a [B].

26. Para determinar as coordenadas dos pontos A e B, basta resolver a equação.

$x^2 = -x + 12 \Leftrightarrow x^2 + x - 12 = 0$

Recorrendo à fórmula resolvente, com $a = 1$, $b = 1$ e $c = -12$, tem-se:

$$\Leftrightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \times 1 \times (-12)}}{2 \times 1}$$
$$\Leftrightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 48}}{2}$$
$$\Leftrightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{49}}{2}$$
$$\Leftrightarrow x = \frac{-1 \pm 7}{2}$$
$$\Leftrightarrow x = \frac{-1 - 7}{2} \vee x = \frac{-1 + 7}{2}$$
$$\Leftrightarrow x = -\frac{8}{2} \vee x = \frac{6}{2}$$
$$\Leftrightarrow x = -4 \vee x = 3$$

C.S. = $\{-4, 3\}$

Como a abcissa do ponto A é negativa, -4, então a ordenada é 16 ($y = (-4)^2 \Leftrightarrow y = 16$).

Logo, $A\,(-4, 16)$.

A abcissa do ponto B é positiva, 3, então $y = 3^2$ $\Leftrightarrow y = 9$. A ordenada é 9.

Logo, $B\,(3, 9)$.

As coordenadas dos pontos A e B são $A(-4, 16)$ e $B(3, 9)$.

27.

27.1. Como o ponto D, de coordenadas (1, 2), pertence ao gráfico de f, cuja expressão é do tipo $f(x) = ax^2$, temos que:

$2 = a \times 1^2 \Leftrightarrow a \times 1 \Leftrightarrow a = 2$

Logo, $f(x) = 2x^2$.

27.2. O ponto A tem ordenada nula. Como A pertence ao gráfico de g, temos que:

$0 = g(x) \Leftrightarrow 0 = -x + 3 \Leftrightarrow x = 3$

Logo, as coordenadas do ponto A são (3, 0) e $\overline{CA} = 3$.

Como $f(x) = 2x^2$ e o ponto $B(-2, y)$ pertence ao gráfico de f, temos que:

$y = 2 \times 2^2 = 2 \times 4 = 8$

Logo, $B(-2, 8)$.

Assim:

$A_{[ABC]} = \frac{b \times h}{2}$, ou seja:

$A_{[ABC]} = \frac{3 \times 8}{2} = 12$ u.a.

28.

28.1. a) (1, –1)

b) Por exemplo, (1, 1).

c) Por exemplo, (0, –2).

d) Por exemplo, (0, 2).

28.2. (1, 1)

28.3. (–1, –1)

28.4. 2 unidades

29. O gráfico [B] não é o correto porque a distância da cadeira número 1 ao solo não se mantém constante com o decorrer do tempo.

O gráfico [D] também não é o correto porque a cadeira número 1 não se encontra, seja em que momento for, a uma distância nula do solo.

O gráfico [C] também não representa a relação entre t e d porque, no instante inicial, a cadeira número 1 não se encontra à distância máximo do solo.

Logo, a opção correta é a [A].

30.

30.1. É uma função porque a cada objeto corresponde uma e uma só imagem.

30.2. Não é uma função porque a cada objeto correspondem duas imagens.

31.

31.1. Como a reta tem declive 4, então $y = 4x + b$.

Por outro lado, sabe-se que a reta passa em (2, 6).

$6 = 4 \times 2 + b \Leftrightarrow b = 6 - 8 \Leftrightarrow b = -2$

Então, uma equação da reta é $y = 4x - 2$.

31.2. 1.º processo

Sabe-se que a reta é paralela a $y = -3x + 3$. Como retas paralelas têm o mesmo declive, então $y = -3x + b$.

Por outro lado, sabe-se que a reta passa na origem do referencial, então:

$0 = -3 \times 0 + b \Leftrightarrow b = 0$

Logo, uma equação da reta é $y = -3x$.

2.º processo

Como a reta passa na origem, então $y = -3x$.

31.3. Como a reta passa nos pontos (–1, 4) e (2, –5), o declive é igual a:

$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{-5 - 4}{2 - (-1)} = \frac{-9}{3} = -3$

Então, $y = -3x + b$.

Como passa em (–1, 4), temos:

$4 = -3 \times (-1) + b \Leftrightarrow 4 = 3 + b \Leftrightarrow 1 = b$

Então, uma equação da reta é $y = -3x + 1$.

32.

32.1. Como o ponto (1, –6) pertence ao gráfico de f, temos:

$$\begin{aligned} -6 = 6 \times 1 + (s - 5) &\Leftrightarrow -6 = 6 + s - 5 \\ &\Leftrightarrow -6 - 6 + 5 = s \\ &\Leftrightarrow -7 = s \end{aligned}$$

32.2. Como a ordenada na origem é 5, então:

$s - 5 = 5 \Leftrightarrow s = 10$

33.

33.1. $n = 100$

$P(100) = -0{,}1 \times 100 + 50 = 40$

O bilhete custa 40 €.

33.2. $n = 250$

$P(250) = -0{,}1 \times 250 + 50 = -25 + 50 = 25$

Se a sala encher, cada bilhete custa 25 €, pelo que a receita arrecadada com o espetáculo é 6250 € (25 × 250 € = 6250 €).

34. O ponto A de coordenadas (1, 1) pertence à reta. Logo:

$1 = -2 \times 1 + b \Leftrightarrow 1 = -2 + b \Leftrightarrow 3 = b$

Então, $b = 3$.

35. $f(x) = 1 - \frac{1}{5}(x + 5) = 1 - \frac{1}{5}x - \frac{1}{5} \times 5 =$

$= 1 - \frac{1}{5}x - 1 =$

$= -\frac{1}{5}x$

Então, $f(x) = -\frac{1}{5}x$ é uma função linear, pois é da forma $y = ax$, $a \neq 0$, com $a \in \mathbb{R}$.

$g(x) = \frac{3}{2}x - 3\left(\frac{x}{2} - 1\right) = \frac{3}{2}x - \frac{3}{2}x + 3 = 3$

Então, $g(x) = 3$ é uma função constante, pois é da forma $y = a$, com $a \in \mathbb{R}$.

Logo, a afirmação é verdadeira.

Propostas de Resolução

36.

36.1. As retas s e t têm a mesma ordenada na origem, pois o ponto de interseção das duas retas pertence ao eixo dos yy.

36.2. Sabemos que o ponto A tem abcissa 1 e que pertence à reta r de equação $y = x + 2$.
Assim, a ordenada do ponto A é $y = 1 + 2 = 3$.
Logo, A tem coordenadas $(1, 3)$.
A reta t contém os pontos $A(1, 3)$ e $A(4, 0)$.
Assim, o declive da reta t é $a = \frac{0-3}{4-1} = \frac{-3}{3} = -1$.
Logo, $y = -1x + b$.
Como $D(4, 0)$, temos:
$0 = -1 \times 4 + b \Leftrightarrow b = 4$
Logo, $y = -x + 4$ é uma equação da reta t.
A reta s tem o mesmo declive da reta r, pois são retas paralelas, e a mesma ordenada na origem de t.
Logo, s: $y = x + 4$.

37.

37.1. Como $f(5) = 10$, então $y = ax \Leftrightarrow 10 = a \times 5$
$\Leftrightarrow a = \frac{10}{5} \Leftrightarrow a = 2$.
Assim, $f(x) = 2x$.

37.2. Como $f(5) = 10$, então $y = a \Leftrightarrow a = 10$.
Assim, $f(x) = 10$.

37.3. Como $f(5) = 10$, então:
$y = ax + b \Leftrightarrow 10 = a \times 5 + b \Leftrightarrow 10 - 5a = b$
Se $a = 1$, então:
$10 - 5 = b \Leftrightarrow b = 5$
Logo, $x = x + 5$.
Assim, $f(x) = x + 5$.

38.

38.1. $C(n) = 60 + 30n$

38.2. Uma expressão analítica da função que relaciona o número n de consultas num mês com o valor a pagar C, em euros, por alguém que adquira o seguro Saúde Plus, é $C(n) = 20 + 35n$, logo:
$20\,€ + 10 \times 35\,€ = 20\,€ + 350\,€ = 370\,€$
O Mário pagou 370 €.

38.3. Para que o seguro Saúde Mais compense mais que o seguro Saúde Plus, é necessário que:
$20 + 35n > 60 + 30n$

$$\begin{aligned} 20 + 35n > 60 + 30n &\Leftrightarrow 35n - 30n > 60 - 20 \\ &\Leftrightarrow 5n > 40 \\ &\Leftrightarrow n > 8 \end{aligned}$$

Será necessário marcar, pelo menos, nove consultas num mês, para que o seguro Saúde Mais compense.

39.

39.1. • c representa a função f, pois tem a maior ordenada na origem.
• a representa a função g, pois tem ordenada na origem 0.
• Logo, b representa a função h.

39.2. Como as retas são paralelas, têm o mesmo declive. Assim, $h(x) = 2x + b$.
Como a reta passa no ponto A de coordenadas $(2, 2)$:

$$\begin{aligned} 2 = 2 \times 2 + b &\Leftrightarrow 2 = 4 + b \\ &\Leftrightarrow b = -2 \end{aligned}$$

Logo, $h(x) = 2x - 2$.

39.3. $f(x) = 2x + 4$
$g(x) = 2x$
$h(x) = 2x - 2$
Assim:

$$\begin{aligned} f(0) - 3 \times g(1) &= 2 \times 0 + 4 - 3 \times (2 \times 1) = \\ &= 0 + 4 - 6 = \\ &= -2 \end{aligned}$$

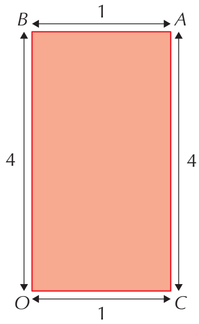
40. [A] $2^4 \times 1 = 4 \times 4 = \sqrt{100} \times 1{,}6 = 2 \times 8 = 16$
As grandezas A e B são inversamente proporcionais se o produto dos valores correspondentes das duas for constante e não nulo.
[B] $20 \times 200 \neq 0{,}1 \times 2$. As grandezas A e B não são inversamente proporcionais.
[C] $2 \times 2^8 \neq 1 \times 4$. As grandezas A e B não são inversamente proporcionais.
[D] $0{,}01 \times 0{,}1 \neq \frac{1}{20} \times 4$. As grandezas A e B não são inversamente proporcionais.
A opção correta é a [A].

41. [A] e [C] são falsas, pois as variáveis não são inversamente proporcionais.
[B] é falsa, pois, se $a = 12$, então $\frac{12}{b} = 6 \Leftrightarrow b = \frac{12}{6}$ $\Leftrightarrow b = 2$.
A opção correta é a [D].
$\left(\frac{a}{3} = 6 \Leftrightarrow a = 18\right)$

42. A função representada é uma função quadrática, logo é da forma $y = ax^2$, $a \neq 0$. Como o ponto $A(2, 8)$ pertence ao seu gráfico, temos:
$8 = a \times 2^2 \Leftrightarrow a = \frac{8}{4} \Leftrightarrow a = 2$
Logo, a função é definida pela expressão $y = 2x^2$.

42.1. Como o ponto $B(1, k)$ pertence ao gráfico da função, temos:
$k = 2 \times 1^2 \Leftrightarrow k = 2 \times 1 \Leftrightarrow k = 2$
A ordenada do ponto B é 2.
42.2. Como o ponto $C(w, 4)$ pertence ao gráfico da função, temos:
$4 = 2 \times w^2 \Leftrightarrow w^2 = \frac{4}{2} \Leftrightarrow w^2 = 2 \Leftrightarrow w = \pm\sqrt{2}$
Por observação da figura, sabe-se que C tem abcissa negativa. Logo, $w = -\sqrt{2}$.
A abcissa do ponto C é $-\sqrt{2}$.
42.3. Se o gráfico é simétrico ao gráfico de f, em relação ao eixo das abcissas, então $a = -2$.
Logo, a opção correta é a [D].

43.
43.1. Como o retângulo tem 10 unidades de perímetro e $\overline{OC} = 1$, temos:



Logo, a área do retângulo é $1 \times 4 = 4$ u.a.
43.2. Da alínea anterior, resulta que $A(1, 4)$.
Sabe-se que numa função de proporcionalidade inversa o produto da abcissa pela ordenada de qualquer ponto do seu gráfico é constante e igual à constante de proporcionalidade inversa.
Assim, como $1 \times 4 = 4$, temos que $g(x) = \frac{4}{x}, x > 0$.
43.3. $g(2) = \frac{4}{2} = 2$
A ordenada do ponto do gráfico de g que tem abcissa 2 é 2.
43.4. $g\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{4}{\frac{1}{2}} = 8$
Logo, $m = 8$.

44.
44.1. Como tem um desconto de 70%, o André vai pagar 30% do valor do bilhete, ou seja,
$0,3 \times 20$ € $= 6$ €.
44.2. A opção correta é a [B].
44.3. Seja c o preço do bilhete. Para que compense tornar-se sócio e comprar o bilhete com desconto, $40 + 0,3c$ terá de ser inferior ao preço do bilhete, c.
Assim:
$$\begin{aligned} 40 + 0,3c < c &\Leftrightarrow 0,3c - c < -40 \\ &\Leftrightarrow -0,7c < -40 \\ &\Leftrightarrow 0,7c > 40 \\ &\Leftrightarrow \frac{7}{10}c > 40 \\ &\Leftrightarrow 7c > 400 \\ &\Leftrightarrow c > \frac{400}{7} \end{aligned}$$
Como $\frac{400}{7} \approx 57$, o bilhete terá de custar, no mínimo, 58 €.

45. Para reduzir em 20 dias o tempo de construção previsto, a escola deveria ser construída em 60 dias $(80 - 20 = 60)$.

Número de operários	60	a
Número de dias	80	60

Como as grandezas são inversamente proporcionais, o produto dos valores correspondentes das duas é constante.
Assim:
$$\begin{aligned} 60 \times 80 = a \times 60 &\Leftrightarrow a = \frac{60 \times 80}{60} \\ &\Leftrightarrow a = 80 \end{aligned}$$
Para construir a escola em 60 dias, são necessários 80 trabalhadores, ou seja, mais 20 operários do que o inicialmente previsto.

46.
46.1. g é uma função de proporcionalidade direta. Logo, é da forma $y = k \times x$.
Como o ponto $B(6, 3)$ pertence ao gráfico de g, temos:
$$\begin{aligned} 3 = k \times 6 &\Leftrightarrow k = \frac{3}{6} \\ &\Leftrightarrow k = \frac{1}{2} \end{aligned}$$
Logo, $g(x) = \frac{1}{2} \times x$.
Assim, $g(4) = \frac{1}{2} \times 4 = 2$.
46.2. • f é uma função de proporcionalidade inversa.
Logo, é da forma $y = \frac{k}{x}, x > 0$.
• O ponto A pertence ao gráfico de g. Logo, $A(2, g(2))$.
Como $g(2) = \frac{1}{2} \times 2 = 1$, então $A(2, 1)$.

Propostas de Resolução

- Como A também pertence ao gráfico de f, temos:

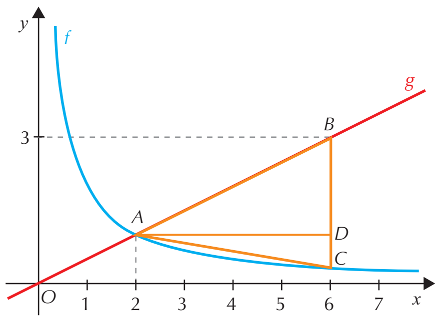
$1 = \frac{k}{2} \Leftrightarrow k = 2 \times 1 = 2$

Então, $f(x) = \frac{2}{x}$, $x > 0$.

46.3. $f(6) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

Logo, $C\left(6, \frac{1}{3}\right)$.

Então:



$A_{[ABC]} = \frac{\overline{CB} \times \overline{AD}}{2}$

$A_{[ABC]} = \frac{\left(3 - \frac{1}{3}\right) \times 4}{2} = \frac{8}{3} \times 2 =$

$= \frac{16}{3}$

A área do triângulo $[ABC]$ é $\frac{16}{3}$ u.a.

47.

47.1. $k > 0$, pois a parábola tem a concavidade voltada para cima.

47.2. O ponto $A(-2, 2)$ pertence ao gráfico da função f, definida por $y = k \times x^2$. Logo:

$2 = k \times (-2)^2 \Leftrightarrow 2 = k \times 4$

$\Leftrightarrow k = \frac{1}{2}$

47.3. Da alínea anterior, $f(x) = \frac{1}{2} \times x^2$. Assim:

$f(4) - 2 \times f(0) = \frac{1}{2} \times 4^2 - 2 \times \frac{1}{2} \times 0^2 =$

$= \frac{1}{2} \times 16 - 0 =$

$= 8$

47.4. A função g é da forma $y = \frac{m}{x}$, $x > 0$.

Sabe-se que o ponto $A(-2, 2)$ pertence ao gráfico da função g. Assim, $2 = \frac{m}{-2} \Leftrightarrow m = -4$.

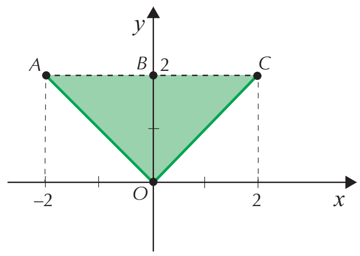
Temos, então, que $g(x) = -\frac{4}{x}$, $x > 0$.

Como o ponto $B(-4, y)$ pertence ao gráfico de g, temos, $y = \frac{-4}{-4} \Leftrightarrow y = 1$.

Então, fica provado que a ordenada do ponto B é 1.

47.5. C é a imagem de A por meio de uma reflexão do eixo Oy. Assim, $C(2, 2)$.

Logo:



$A_{[AOC]} = \frac{\overline{AC} \times \overline{OD}}{2}$

$A_{[AOC]} = \frac{4 \times 2}{2} = 4$

A área do triângulo $[AOC]$ é 4 u.a.

48.

48.1. a) 1.º processo

Como g é uma função afim, é do tipo $y = ax + b$.

Como $A(1, 5)$ e $B(2, 4)$ pertencem ao seu gráfico, temos:

$$\begin{cases} 5 = 1 \times a + b \\ 4 = 2 \times a + b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + b = 5 \\ 2a + b = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 5 - b \\ 2(5 - b) + b = 4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \text{———} \\ 10 - 2b + b = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{———} \\ -2b + b = 4 - 10 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \text{———} \\ -b = -6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 5 - 6 \\ b = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = 6 \end{cases}$$

$(a, b) = (-1, 6)$

Então, $g(x) = -x + 6$.

2.º processo

O declive é igual a:

$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{4 - 5}{2 - 1} = -\frac{1}{1} = -1$

Logo, $y = -x + b$. Como, por exemplo, o ponto B pertence ao gráfico da função:

$4 = -2 + b \Leftrightarrow b = 4 + 2 \Leftrightarrow b = 6$

Então, $g(x) = -x + 6$.

b) Como a função f é uma função quadrática, com vértice na origem do referencial, então $f(x) = ax^2$, $a \neq 0$.

Sendo $B(2, 4)$ um ponto do seu gráfico, então:

$4 = a \times 2^2 \Leftrightarrow 4a = 4 \Leftrightarrow a = 1$

Logo, $f(x) = x^2$.

c) Se o gráfico cartesiano é simétrico do gráfico de f, relativamente ao eixo das abcissas, o coeficiente de x^2 é simétrico de 1, ou seja, –1. Assim, $y = -x^2$.

48.2. $f(x) = 25$

$x^2 = 25 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{25} \Leftrightarrow x = -5 \lor x = 5$

C.S. = {–5, 5}

R.: Os objetos são –5 e 5.

48.3. Como o ponto c é o ponto de interseção dos gráficos das duas funções, basta igualar as funções e determinar o valor de x, ou seja:

$x^2 = -x + 6 \Leftrightarrow x^2 + x - 6 = 0$

Recorrendo à fórmula resolvente, com $a = 1$, $b = 1$ e $c = -6$, tem-se:

$$\Leftrightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4 \times (-6)}}{2 \times 1}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 24}}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{25}}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-1 \pm 5}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-1 - 5}{2} \lor x = \frac{-1 + 5}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{6}{2} \lor x = \frac{4}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = -3 \lor x = 2$$

C.S. = {–3, 2}

↓

abcissa do ponto B

Por observação do gráfico, podemos verificar que o ponto C tem abcissa negativa.

Se $x = -3$, então $g(-3) = -(-3) + 6 = 3 + 6 = 9$.

Assim, $C(-3, 9)$.

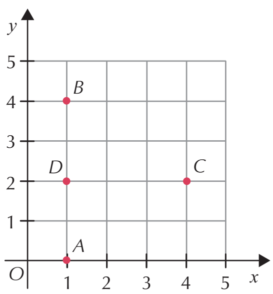
49.

49.1. $A(1, 0)$; $B(1, 4)$

49.2. $6m - 8 = 4 \Leftrightarrow 6m = 12$

$\Leftrightarrow m = 2$

49.3. $A = \dfrac{b \times h}{2}$



$$A = \frac{\overline{AB} \times \overline{DC}}{2}$$

$$A = \frac{4 \times 3}{2} = \frac{12}{2} = 6 \text{ u.a.}$$

49.4. Como $\overline{AB} = 4$, $\overline{BD} = 3$ e $\overline{AD} > 4$ ([AD] é o lado que se opõe ao ângulo de maior amplitude, logo é o lado com maior comprimento), conclui-se que o triângulo é escaleno. Como $A\hat{B}D = 90°$, então o triângulo é retângulo.

49.5. $E(5, 4)$ e $F(5, 0)$ ou $E(-3, 0)$ e $F(-3, 4)$

49.6. Por exemplo, (1, 2). Não é o único, os pontos (2, 2), (3, 2), ..., ou seja, todos os pontos que tenham ordenada 2, pois pertencem à mediatriz de [AB].

50.

50.1. $[2 \times g(0) - g(1)]^3 =$

$$= \left[2 \times \left(\frac{2 \times 0}{3} - 1\right) - \left(\frac{2 \times 1}{3} - 1\right)\right]^3 =$$

$$= \left(2 \times (-1) - \frac{2}{3} + 1\right)^3 =$$

$$= \left(-1 - \frac{2}{3}\right)^3 =$$

$$= \left(-\frac{5}{3}\right)^3 =$$

$$= -\frac{125}{27}$$

50.2. O inverso de $\dfrac{1}{7}$ é 7.

$$\frac{2x}{3} - 1 = 7 \Leftrightarrow \frac{2x}{3} = 8$$

$$\Leftrightarrow 2x = 24$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{24}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = 12$$

Como 12 não pertence ao domínio de g, 7 não pertence ao contradomínio de g.

51. A função g é representada por uma reta com declive 1 e ordenada na origem –2.

Como $m > 0$, a função g é crescente, logo a opção [C] fica excluída.

Como a ordenada na origem é –2, a opção correta é a [A].

52.

52.1. $\dfrac{8}{2} = 4$

O polígono regular é um quadrado.

52.2. O ponto (10, 30) não pertence ao gráfico da função f, pois $\dfrac{30}{10} = 3$ e $3 \neq 4$.

Propostas de Resolução

52.3. Se $\frac{8}{2} = 4$, então $f(x) = 4x$.

52.4. $f(30) = 4 \times 30 = 120$
Significa que o perímetro de um quadrado de lado 30 é 120.

52.5. Como $f(x) = 4x$, temos:
$4x = 48 \Leftrightarrow x = \frac{48}{4} = 12$
O objeto é 12.

53. Os gráficos 1 e 5 são hipérboles. Logo, são representações de funções de proporcionalidade inversa, ou seja, as funções são de forma $y = \frac{k}{x}$, $x > 0$.
No gráfico 1, os pontos de abcissa positiva têm ordenada negativa, ou seja, $k < 0$. Logo, gráfico 1: $i(x) = -\frac{3}{x}$, $x > 0$ e gráfico 5: $h(x) = \frac{3}{x}$, $x > 0$.
Os gráficos 2 e 6 são parábolas com a concavidade voltada para baixo, ou seja, as funções são da forma $y = ax^2$, com $a < 0$. Sabemos que quanto maior é o valor absoluto de a, menor é a abertura da parábola. Logo, gráfico 2: $j(x) = -3x^2$ e gráfico 6: $k(x) = -\frac{1}{2}x^2$.
Os gráficos 3 e 4 são parábolas com a concavidade voltada para cima. Tendo em conta o seu crescimento, concluímos que gráfico 3: $g(x) = 3x^2$ e gráfico 4: $\frac{1}{2}x^2$.

54.

54.1. Na 2.ª modalidade:

Número de quilómetros percorridos	1	2	3	(…)
Preço a pagar (em euros)	104	108	112	(…)

$\frac{104}{1} = 104$

$\frac{108}{2} = 54$

$\frac{112}{3} \approx 37{,}3$

(…)

Na 2.ª modalidade, o preço a pagar pelo cliente não é diretamente proporcional ao número de quilómetros percorridos porque, como mostram os cálculos anteriores, a razão entre os valores correspondentes das duas grandezas, tomados pela mesma ordem, não é constante.

54.2. A opção correta é a [D], pois são 100 € fixos e 4 € por cada quilómetro percorrido.

54.3. 1.ª modalidade: 30 × 5 € = 150 €
2.ª modalidade: 100 € + 4 × 30 € = 100 € + 120 € = = 220 €
Como o restaurante fica a 30 km, a 1.ª modalidade é financeiramente mais compensatória.

54.4. Seja n o número de quilómetros percorridos.
Preço a pagar na 1.ª modalidade: $5 \times n$
Preço a pagar na 2.ª modalidade: $100 + 4 \times n$
Para que a 2.ª modalidade compense, é necessário que o custo seja inferior ao custo da 1.ª.

$$100 + 4n < 5n \Leftrightarrow 4n - 5n < -100$$
$$\Leftrightarrow -n < -100$$
$$\Leftrightarrow n > 100$$

Ou seja, o número mínimo de quilómetros a partir do qual deixa de compensar financeiramente a 1.ª modalidade é 101.

55.

55.1. $D_g = \mathbb{N}$

55.2.

s	1	2	c	5	10
g(s)	a	b	120º	d	36º

Como as grandezas "número de setores" e "amplitude de cada setor" são inversamente proporcionais, temos que:

$$10 \times 36º = 1 \times a \Leftrightarrow a = 360º$$
$$10 \times 36º = 2 \times b \Leftrightarrow b = \frac{10 \times 36º}{2}$$
$$\Leftrightarrow b = 180º$$
$$10 \times 36º = c \times 120º \Leftrightarrow c = \frac{10 \times 36º}{120º}$$
$$\Leftrightarrow c = \frac{360º}{120º}$$
$$\Leftrightarrow c = 3$$
$$10 \times 36º = 5 \times d \Leftrightarrow d = \frac{10 \times 36º}{5}$$
$$\Leftrightarrow d = 72º$$

Logo:

s	1	2	3	5	10
g(s)	360º	180º	120º	72º	36º

55.3. A constante é 360º e representa a amplitude do setor circular que corresponde ao círculo.

55.4. Como $k = 10 \times 36 = 360$, então $g(s) = \frac{360}{s}$.
Logo, a opção correta é a [D].

56. $f(x) = ax^2 - 2x^2 = x^2 \times (a - 2)$
Como a parábola que representa graficamente a função tem a concavidade voltada para cima, $a - 2 > 0$.
Logo, a opção correta é a [A].

57.

57.1. O ponto P tem a mesma abcissa do ponto A e a mesma ordenada do ponto C. Logo, $P(2, y)$.
Como P pertence ao gráfico de f, temos:

$y = \frac{12}{2} \Leftrightarrow y = 6$

Logo, a ordenada do ponto P é 6.
Consequentemente, a ordenada de C também é 6. Logo, $C(0, 6)$.

57.2. Consideremos que o ponto Q tem coordenadas (a, b). Sabe-se que numa função de proporcionalidade inversa, o produto da abcissa pela ordenada de qualquer ponto do gráfico é constante e igual à constante de proporcionalidade inversa.
Assim, como $P(2, 6)$ pertence ao gráfico de f, a constante de proporcionalidade inversa é $2 \times 6 = 12$.
Como o triângulo $[OBQ]$ é retângulo em B, temos:

$A_{[OBQ]} = \frac{\overline{OB} \times \overline{BQ}}{2} = \frac{a \times b}{2}$

Como $Q(a, b)$ pertence ao gráfico de f, temos que $a \times b = 12$.
Logo, $A_{[OBQ]} = \frac{12}{2} = 6$.
A área do triângulo $[OBQ]$ é 6 u.a.

58.

58.1. $a > 0$, pois a parábola que representa graficamente a função f tem a concavidade voltada para cima.

58.2. Como $\overline{AB} = 4$, a abcissa do ponto B é 2. Logo, $B(2, y)$. Como B pertence ao gráfico de g, $y = g(2)$, ou seja:

$y = -2 \times 2^2 \Leftrightarrow y = -2 \times 4 \Leftrightarrow y = -8$

Logo, $B(2, -8)$.

58.3. • Como a área do retângulo é 96, temos que: $\overline{EB} \times \overline{AB} = 96 \Leftrightarrow \overline{EB} = \frac{96}{\overline{AB}}$, ou seja:

$\overline{EB} = \frac{96}{4} \Leftrightarrow \overline{EB} = 24$

• Como a ordenada do ponto B é -8, podemos concluir que a ordenada do ponto E é $24 - 8 = 16$.
• Como os pontos E e B têm a mesma abcissa, pois $[EB]$ é paralelo ao eixo Oy, temos que a abcissa de E é 2. Logo, $E(2, 16)$.
• O ponto $E(2, 16)$ pertence ao gráfico da função f.
Assim:

$16 = a \times 2^2 \Leftrightarrow a = \frac{16}{4} \Leftrightarrow a = 4$

Podemos, então, concluir que $a = 4$.

59.

59.1. $f(x) = 2(x - 5) + \frac{x}{3} = \underset{(\times 3)}{\frac{2x}{1}} - 10 + \frac{x}{3} =$

$= \frac{6x}{3} - 10 + \frac{x}{3} =$

$= \frac{7}{3}x - 10$

$f(x)$ é uma função afim, pois é do tipo $y = ax + b$.

59.2. $f(x) = 2(x^2 - x) - 10(x + x^2) + 8x^2 =$

$= 2x^2 - 2x - 10x - 10x^2 + 8x^2 =$

$= -12x$

$f(x)$ é uma função linear, pois é do tipo $y = ax$.

59.3. $f(x) = 3 + \frac{2x}{3} + 3(x - 1) =$

$= 3 + \frac{2x}{3} + \underset{(\times 3)}{\frac{3x}{1}} - 3 =$

$= \frac{2x}{3} + \frac{9x}{3} =$

$= \frac{11}{3}x$

$f(x)$ é uma função linear, pois é do tipo $y = ax$.

59.4. $f(x) = \frac{2(x - 5)}{3} - \left(\frac{x}{3} - 3\right) - \frac{x}{3} =$

$= \frac{2x - 10}{3} - \frac{x}{3} + 3 - \frac{x}{3} =$

$= \frac{2x}{3} - \frac{10}{3} - \frac{2x}{3} + \underset{(\times 3)}{\frac{3}{1}} =$

$= -\frac{1}{3}$

$f(x)$ é uma função constante, pois é do tipo $y = b$.

60. $y = x^2$ e $y = 2(x + 1)^2 - 7$
Para determinar a abcissa do ponto de interseção das duas parábolas, basta resolver a equação.

$x^2 = 2(x + 1)^2 - 7$

$\Leftrightarrow x^2 = 2(x^2 + 2x + 1) - 7$

$\Leftrightarrow x^2 = 2x^2 + 4x + 2 - 7$

$\Leftrightarrow x^2 - 2x^2 - 4x - 2 + 7 = 0$

$\Leftrightarrow -x^2 - 4x + 5 = 0$

Recorrendo à fórmula resolvente, com $a = -1$, $b = -4$ e $c = 5$, tem-se:

$\Leftrightarrow x = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \times (-1) \times 5}}{2 \times (-1)}$

$\Leftrightarrow x = \frac{4 \pm \sqrt{16 + 20}}{-2}$

$\Leftrightarrow x = \frac{4 \pm \sqrt{36}}{-2}$

Propostas de Resolução

$\Leftrightarrow x = \dfrac{4 \pm 6}{-2}$

$\Leftrightarrow x = \dfrac{-2}{-2} \ \vee \ x = \dfrac{10}{-2}$

$\Leftrightarrow x = 1 \ \vee \ x = -5$

C.S. = $\{-5, 1\}$

A abcissa do ponto A é positiva, logo é 1, e a ordenada é igual a:

$y = 1^2 \Leftrightarrow y = 1$

As coordenadas do ponto A são $(1, 1)$.

61.

61.1. Como a abcissa de A é x e pertence ao gráfico da função $y = 2x^2$, então $A(x, 2x^2)$.

61.2. Como os pontos A e B têm a mesma ordenada, então $B(0, 18)$. Como A pertence ao gráfico da função $y = 2x^2$, então:

$2x^2 = 18 \Leftrightarrow x^2 = 9 \Leftrightarrow x = \pm 3$

$\Leftrightarrow x = 3 \ (x > 0)$

Logo, $A(3, 18)$.

$A_{[OAB]} = \dfrac{b \times h}{2}$

$A_{[OAB]} = \dfrac{3 \times 18}{2} = 27$ u.a.

61.3. Como B tem a mesma ordenada que A, então $B(0, 2x^2)$.

Logo, $A_{[OAB]} = \dfrac{x \times 2x^2}{2} = x^3$.

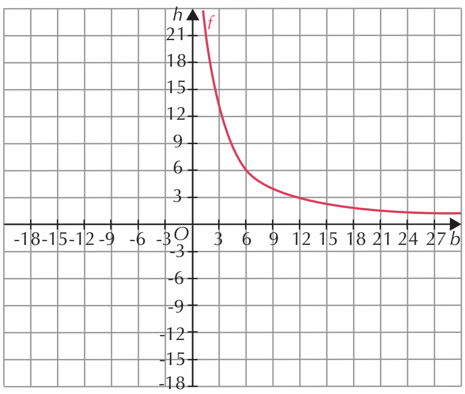
62.

62.1. A área é igual a $\dfrac{b \times h}{2}$. Então:

$\dfrac{b \times h}{2} = 18 \Leftrightarrow b \times h = 36 \Leftrightarrow h = \dfrac{36}{b}$

62.2. A função f é de proporcionalidade inversa, uma vez que o produto da abcissa pela ordenada de qualquer ponto do gráfico é constante e igual à constante de proporcionalidade inversa (36).

62.3.



63.

63.1. Os pontos A e B são os pontos de interseção dos dois gráficos, então:

$-x^2 + 2 = -x \Leftrightarrow -x^2 + x + 2 = 0$

Recorrendo à fórmula resolvente, com $a = -1$, $b = 1$ e $c = 2$, tem-se que:

$\Leftrightarrow x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \times (-1) \times 2}}{2 \times (-1)}$

$\Leftrightarrow x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1 + 8}}{-2}$

$\Leftrightarrow x = \dfrac{-1 \pm 3}{-2}$

$\Leftrightarrow x = -1 \ \vee \ x = 2$

C.S. = $\{-1, 2\}$

As abcissas dos pontos A e B são, respetivamente, -1 e 2.

Para determinar as ordenadas, basta substituir o valor de cada uma das abcissas numa das equações, $y_A = -(-1) = 1$, a ordenada de A é 1.

$y_B = -2$, a ordenada de B é -2.

Logo, $A(-1, 1)$ e $B(2, -2)$.

63.2. Os pontos C e D têm ordenada nula e pertencem ao gráfico de função f.

Basta substituir y por zero e determinar as abcissas de C e de D.

$y = -x^2 + 2 \Leftrightarrow -x^2 + 2 = 0 \Leftrightarrow -x^2 = -2$

$\Leftrightarrow x = \pm \sqrt{2}$

$\Leftrightarrow x = -\sqrt{2} \ \vee \ x = \sqrt{2}$

C.S. = $\left\{-\sqrt{2}, \sqrt{2}\right\}$

As abcissas dos pontos C e D são, respetivamente, $-\sqrt{2}$ e $\sqrt{2}$.

$C\left(-\sqrt{2}, 0\right)$, $D\left(\sqrt{2}, 0\right)$ e $\overline{CD} = 2\sqrt{2}$

$A_{[BCD]} = \dfrac{b \times h}{2}$

$A_{[BCD]} = \dfrac{2 \times \sqrt{2} \times 2}{2} = 2\sqrt{2}$

A área do triângulo $[BCD[$ é $2\sqrt{2}$ u.a.