UNIVERSIDADE da MADEIRA

Faculdade de Ciências Exatas e da Engenharia

PROVA DE AVALIAÇÃO DE CONHECIMENTOS E COMPETÊNCIAS PARA ADMISSÃO AO ENSINO SUPERIOR PARA MAIORES DE 23 ANOS

Matemática - 08/06/2022

Atenção: ***Justifique*** *os raciocínios utilizados na resolução das questões.*
Não é permitido *o uso de* ***calculadora*** *nem de* ***telemóvel****.*
A prova tem a duração de ***120 minutos****.*

Questão	1.	2	3	4	5.(a)	5.(b)	5.(c)	6
Cotação	2.5	2.0	2.0	3.0	3.0	2.0	2.5	3.0

1. Represente graficamente a região definida pelos pontos (x, y) tais que $|x - y| \leq 1$ e $xy > 0$.

2. Verifique se a sucessão $u_n = \dfrac{3^n + 5^{n+2}}{5^n}$ é convergente.

3. Calcule $\cos^2\left(\frac{\pi}{8}\right) - \sin^2\left(\frac{\pi}{8}\right)$.

4. Determine a derivada da função definida por $f(x) = \mathrm{e}^{2x} \cos(\ln x)$.

5. Considere a função definida para $x \in \mathbb{R}$ por $f(x) = x^3 - 3x + 1$.

   (a) Estude os intervalos de monotonia e a existência de extremos de f.

   (b) Mostre que f tem um, e um só, zero, no intervalo $[0, 1]$.

   (c) Estude o sentido da concavidade do gráfico da função f e determine, caso existam, os seus pontos de inflexão.

6. Lançam-se, de forma independente, dois dados equilibrados e registam-se o número de pintas resultante de cada um, X e Y. Seja Z o valor absoluto da diferença do número de pintas entre os dois dados, *i.e.*, $Z = |X - Y|$. Determine os valores que Z pode tomar e as respetivas probabilidades.

Faculdade de Ciências Exatas e da Engenharia

PROVA DE AVALIAÇÃO DE CONHECIMENTOS E COMPETÊNCIAS PARA ADMISSÃO AO ENSINO SUPERIOR PARA MAIORES DE 23 ANOS

Matemática - 08/06/2022

Uma possível resolução

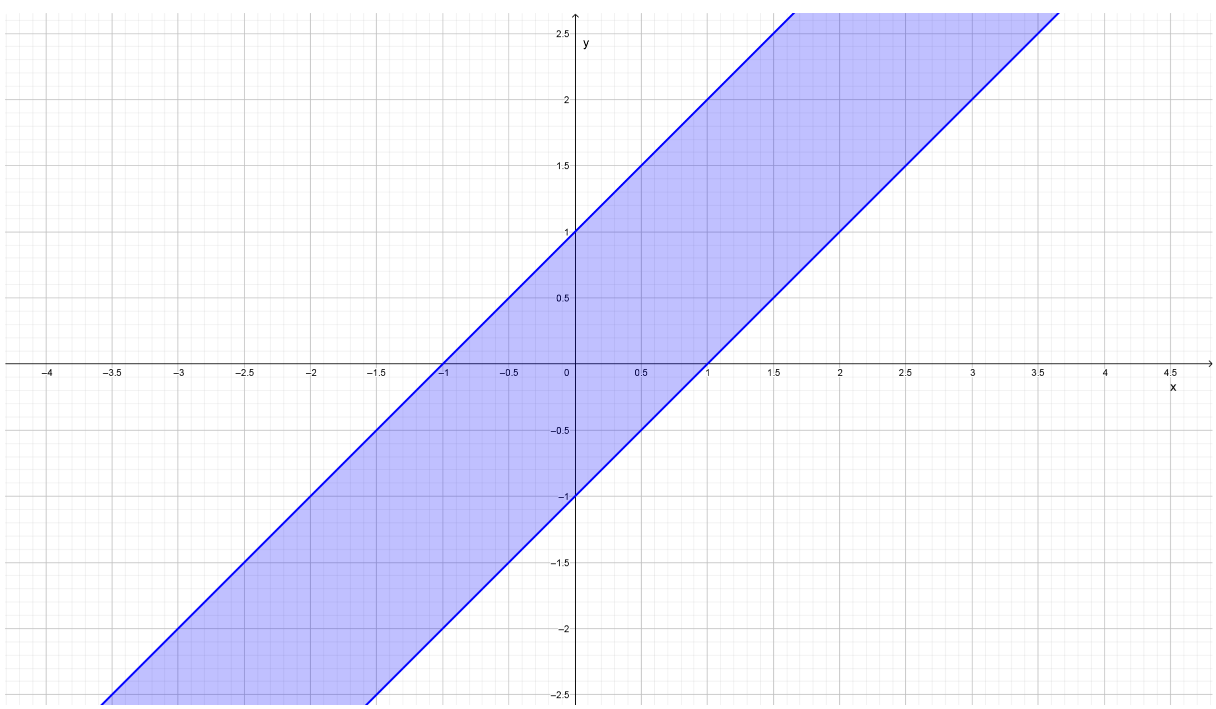
Questão	1	2	3	4	5.(a)	5.(b)	5.(c)	6
Cotação	2.5	2.0	2.0	3.0	3.0	2.0	2.5	3.0

1. Represente graficamente a região definida pelos pontos (x, y) tais que $|x - y| \leq 1$ e $xy > 0$.

   De

$$\begin{aligned} |x-y| \leq 1 &\Leftrightarrow -1 \leq x - y \leq 1 \\ &\Leftrightarrow 1 \geq y - x \geq -1 \\ &\Leftrightarrow x + 1 \geq y \geq x - 1 \\ &\Leftrightarrow x - 1 \leq y \leq x + 1, \end{aligned}$$

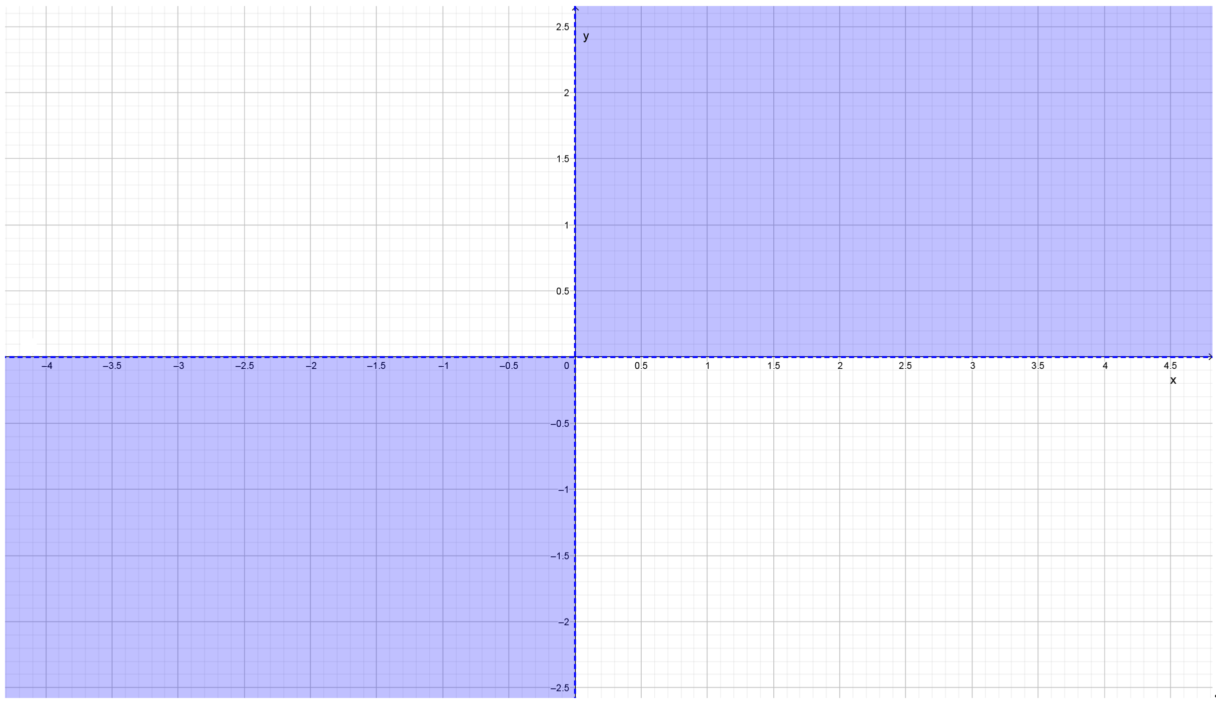
   resulta que os pontos (x, y) tais que $|x - y| \leq 1$ são os pontos cujas coordenadas se encontram na região entre as retas $y = x - 1$ e $y = x + 1$, incluindo-as:



De

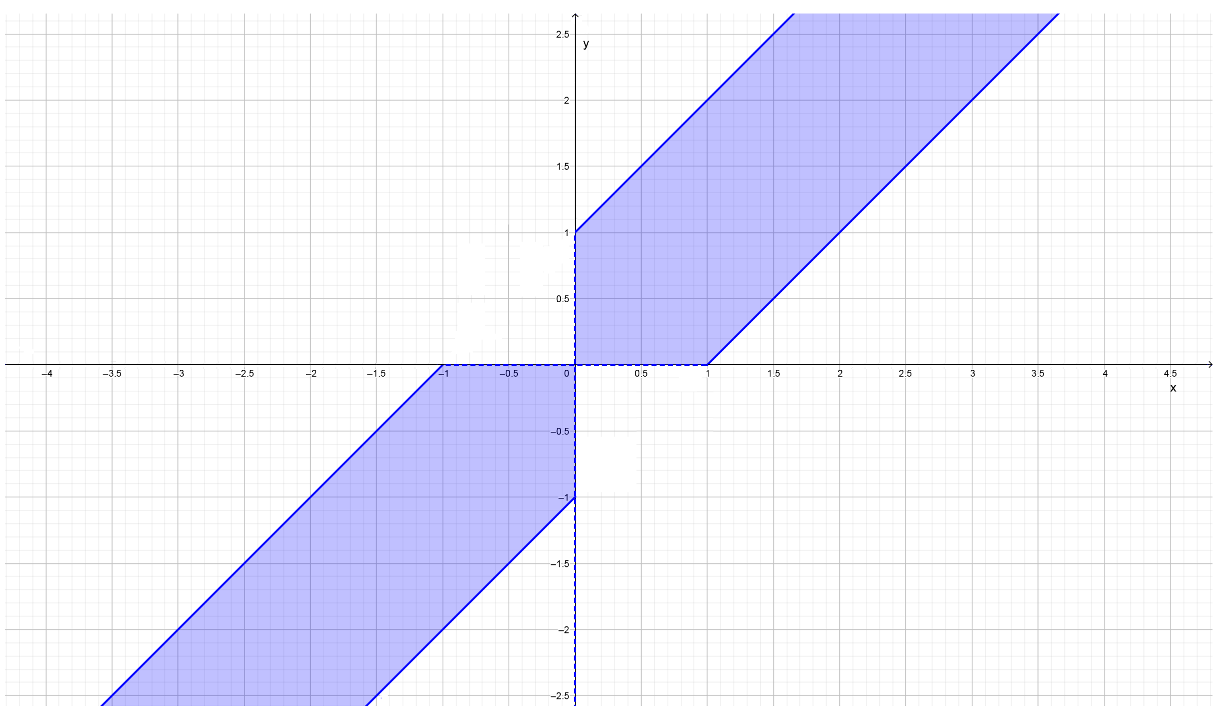
$$xy > 0 \Leftrightarrow (x > 0 \text{ e } y > 0) \text{ ou } (x < 0 \text{ e } y < 0),$$

resulta que os pontos (x, y) tais que $xy > 0$ são os pontos cujas coordenadas se encontram nos quadrantes primeiro e terceiro, sem incluir as retas $x = 0$ e $y = 0$:



.

A interseção destas duas regiões resulta na região seguidamente apresentada:



2. Verifique se a sucessão $u_n = \frac{3^n+5^{n+2}}{5^n}$ é convergente.
Como

$$u_n = \frac{3^n + 5^{n+2}}{5^n} = \frac{3^n}{5^n} + \frac{5^{n+2}}{5^n} = \left(\frac{3}{5}\right)^n + \frac{5^n 5^2}{5^n} = \left(\frac{3}{5}\right)^n + 5^2,$$

temos que

$$\lim u_n = \lim \left[\left(\frac{3}{5}\right)^n + 5^2\right] = \lim \left(\frac{3}{5}\right)^n + 5^2 = 0 + 5^2 = 25,$$

pois $\left|\frac{3}{5}\right| = \frac{3}{5} < 1$. Conclui-se assim que a sucessão é convergente sendo o seu limite 25.

3. Calcule $\cos^2\left(\frac{\pi}{8}\right) - \sin^2\left(\frac{\pi}{8}\right)$.
   Dado um ângulo θ sabemos que

$$\cos(2\theta) = \cos^2(\theta) - \sin^2(\theta),$$

   logo

$$\cos^2\left(\frac{\pi}{8}\right) - \sin^2\left(\frac{\pi}{8}\right) = \cos\left(2\frac{\pi}{8}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

4. Determine a derivada da função definida por $f(x) = \mathrm{e}^{2x}\cos(\ln x)$.
   Temos que

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(e^{2x}\cos(\ln x)\right)' \\ &= \left(e^{2x}\right)'\cos(\ln x) + e^{2x}\left(\cos(\ln x)\right)' \\ &= 2e^{2x}\cos(\ln x) + e^{2x}\left(-\sin(\ln x)\right)(\ln x)' \\ &= e^{2x}\left[2\cos(\ln x) - \frac{\sin(\ln x)}{x}\right]. \end{aligned}$$

5. Considere a função definida para $x \in \mathbb{R}$ por $f(x) = x^3 - 3x + 1$.

   (a) Estude os intervalos de monotonia e a existência de extremos de f.

   A derivada da função f para x real é dada por

$$f'(x) = \left(x^3 - 3x + 1\right)' = 3x^2 - 3.$$

   Temos

$$f'(x) < 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 3 < 0 \Leftrightarrow 3x^2 < 3 \Leftrightarrow x^2 < 1 \Leftrightarrow |x| < 1 \Leftrightarrow -1 < x < 1.$$

   De igual forma se conclui que

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow |x| > 1 \Leftrightarrow x < -1 \text{ ou } x > 1$$

   e que

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow |x| = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1.$$

   Apresentando os resultados anteriores num quadro de estudo do sinal de f', considerando que

$$f(-1) = (-1)^3 - 3(-1) + 1 = -1 + 3 + 1 = 3$$

   e que

$$f(1) = (1)^3 - 3(1) + 1 = 1 - 3 + 1 = -1,$$

   obtemos:

		-1		1	
f'	$+$	0	$-$	0	$+$
f	$\nearrow$	3	$\searrow$	-1	$\nearrow$

   Conclui-se assim que f é crescente no intervalo $]-\infty, -1[$, decrescente no intervalo $]-1, 1[$ e volta a ser crescente no intervalo $]1, \infty[$. A função tem um máximo local em $x = -1$, que vale 3 e um mínimo local em $x = 1$, que vale -1.

(b) Mostre que f tem um, e um só, zero, no intervalo $[0,1]$.

Temos que $f(0) = (0)^3 - 3 \times 0 + 1 = 1$ e $f(1) = -1$. Como a função f é contínua no intervalo $[0,1]$, e as imagens dos extremos deste têm sinais contrários, pelo teorema de Bolzano podemos concluir que existe um valor $a \in \left]0,1\right[$ onde a função vale zero, *i.e.*, tal que $f(a) = 0$. Como, além de a função f ser contínua, sabemos, pela alínea anterior, que é uma função decrescente no intervalo $\left]-1,1\right[$ e, em particular, é uma função decrescente no intervalo $\left]0,1\right[$. Assim, podemos concluir que f tem um, e um só, zero, no intervalo $[0,1]$.

(c) Estude o sentido da concavidade do gráfico da função f e determine, caso existam, os seus pontos de inflexão.

A segunda derivada da função f para x real é dada por

$$f''(x) = \left(3x^2 - 3\right)' = 6x.$$

Resulta assim que

$$f''(x) < 0 \Leftrightarrow 6x < 0 \Leftrightarrow x < 0.$$

De forma análoga se conclui que

$$f''(x) > 0 \Leftrightarrow x > 0$$

e que

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0.$$

Apresentando os resultados anteriores num quadro de estudo do sinal de f'', considerando que $f(0) = 1$, obtemos:

		0	
f''	$-$	0	$+$
f	$\frown$	1	$\smile$

.

Concluímos assim que no intervalo $\left]-\infty,0\right[$ o gráfico da função f tem concavidade voltada para baixo e no intervalo $\left]0,+\infty\right[$ o gráfico da função f tem concavidade voltada para cima. O gráfico de f tem um ponto de inflexão: $(0,1)$.

6. Lançam-se, de forma independente, dois dados equilibrados e registam-se o número de pintas resultante de cada um, X e Y. Considere o valor absoluto da diferença do número de pintas entre os dois dados, $Z = |X - Y|$. Determine os valores que Z pode tomar e as respetivas probabilidades.

Podemos resumir os resultados possíveis do lançamento dos dois dados da seguinte forma:

		Y					
	$\lvert X-Y\rvert$	1	2	3	4	5	6
	1	0	1	2	3	4	5
	2	1	0	1	2	3	4
X	3	2	1	0	1	2	3
	4	3	2	1	0	1	2
	5	4	3	2	1	0	1
	6	5	4	3	2	1	0

Observamos assim que os valores possíveis para Z são: $0,1,2,3,4$ e 5. A probabilidade de Z tomar o valor zero é determinada da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
P(Z=0) &= P(|X-Y|=0) = P(X-Y=0) = P(X=Y) \\
&= P(\ X=Y=1 \text{ ou...ou } X=Y=6) \\
&= P(X=1 \text{ e } Y=1\ ) + ... + P(X=6 \text{ e } Y=6) \\
&= P(X=1) \times P(Y=1) + ... + P(X=6) \times P(Y=6) \\
&= \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} + ... + \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{6}{36}.
\end{aligned}$$

Para $Z = 5$ temos

$$\begin{aligned}
P(Z=5) &= P(|X-Y|=5) = P(X-Y=5 \text{ ou } X-Y=-5) \\
&= P(Y = X-5 \text{ ou } Y = X+5) \\
&= P[(X=6 \text{ e } Y=1) \text{ ou } (X=1 \text{ e } Y=6)] \\
&= P(X=6 \text{ e } Y=1) + P(X=1 \text{ e } Y=6) \\
&= P(X=6)\,P(Y=1) + P(X=1)\,P(Y=6) \\
&= \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} + \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{2}{36}.
\end{aligned}$$

De forma análoga se conclui que

$$P(Z=1) = \frac{10}{36}, \quad P(Z=2) = \frac{8}{36}, \quad P(Z=3) = \frac{6}{36} \quad \text{e} \quad P(Z=4) = \frac{4}{36}.$$

Resumindo,

i	0	1	2	3	4	5
$P(Z=i)$	$\frac{6}{36}$	$\frac{10}{36}$	$\frac{8}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{2}{36}$