Exame final nacional de Matemática A (2019, 2.ª fase)

Proposta de resolução

Caderno 1

1.

1.1. Como $[ABCDEFGH]$ é um paralelepípedo e os pontos A, B e G pertencem ao plano xOy (porque têm todos cota nula), então a reta CB é paralela ao eixo Oz, e o ponto B tem abcissa e ordenada, respetivamente iguais às do ponto C e cota nula (porque pertence ao eixo Oy, ou seja, as coordenadas do ponto B são $(0,3,0)$

Como o ponto A pertence ao eixo Ox tem ordenada e cota nulas, e como pertence ao plano ABC, podemos determinar a sua abcissa substituindo o valor da ordenada na equação do plano:

$$3x + 4(0) - 12 = 0 \Leftrightarrow 3x + 0 = 12 \Leftrightarrow x = \frac{12}{3} \Leftrightarrow x = 4$$

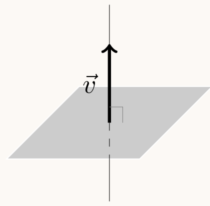
Assim, temos que as coordenadas do ponto A são $(4,0,0)$, e, calculando a distância entre dois pontos, temos que o volume do paralelepípedo, é:

$$V_{[ABCDEFGH]} = \overline{AB} \times \overline{BG} \times \overline{BC} =$$

$$= \sqrt{(4-0)^2 + (0-3)^2 + (0-0)^2} \times \sqrt{(0-6)^2 + (3-11)^2 + (0-0)^2} \times \sqrt{(0-0)^2 + (3-3)^2 + (0-6)^2} =$$

$$= \sqrt{16+9} \times \sqrt{36+64} \times \sqrt{36} = \sqrt{25} \times \sqrt{100} \times 6 = 5 \times 10 \times 6 = 300$$

1.2. Como a reta r é perpendicular ao plano ABC, vetor normal do plano ($\vec{v} = (3,4,0)$) é um vetor diretor da reta, e assim, considerando as coordenadas do ponto P, temos que uma equação vetorial da reta r é:



$$(x,y,z) = (1,-4,3) + \lambda(3,4,0),\ \lambda \in \mathbb{R}$$

Assim, as coordenadas de todos os pontos da reta r, e em particular o ponto de interseção da reta r com o plano ABC, para $\lambda \in \mathbb{R}$, são da forma:

$$(x,y,z) = (1,-4,3) + \lambda(3,4,0) = (1+3\lambda, -4+4\lambda, 3+0\times\lambda) = (1+3\lambda, -4+4\lambda, 3)$$

Como o ponto de interseção pertence ao plano ABC podemos determinar o valor de λ substituindo as coordenadas genéricas do ponto, na equação do plano:

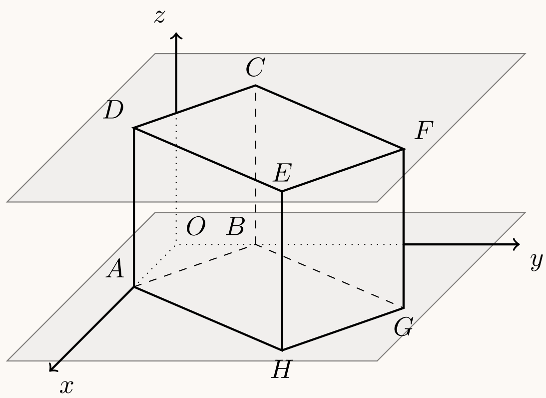
$$3(1+3\lambda) + 4(-4+4\lambda) - 12 = 0 \Leftrightarrow 3 + 9\lambda - 16 + 16\lambda - 12 = 0 \Leftrightarrow 25\lambda = -3 + 16 + 12 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 25\lambda = 25 \Leftrightarrow \lambda = \frac{25}{25} \Leftrightarrow \lambda = 1$$

Desta forma temos que as coordenadas do ponto de interseção da reta r com o plano ABC são:

$$\big(1 + 3\times 1 - 4 + 4\times 1, 3\big) = (1+3, -4+4, 3) = (4,0,3)$$

1.3. Para que a terceira coordenada do vetor $\overrightarrow{XY}$ seja igual a zero, isto é, para que os pontos X e Y tenham a mesma cota, como $[ABCDEFGH]$ é um paralelepípedo retângulo e o vértice A pertence ao eixo Ox e o vértice B pertence ao eixo Oy, então os pontos X e Y pertencem ambos ao plano ABG, ou pertencem ambos ao plano CDE



Assim, como existem 8 vértices do paralelepípedo, o número de vetores diferentes que podem ser definidos, ou seja o número de casos possíveis, é ${}^8C_2$

Como em cada um dos 2 grupos de vértices que originam um vetor $\overrightarrow{XY}$ com cota nula existem 4 vértices, temos que o número de vetores diferentes nas condições do enunciado, ou seja, o número de casos favoráveis, é $2 \times {}^4C_2$

Assim, recorrendo à Regra de Laplace, calculando a probabilidade e apresentando o resultado na forma de fração irredutível, temos:

$$p = \frac{2 \times {}^4C_2}{{}^8C_2} = \frac{3}{7}$$

2.

2.1. Considerando a experiência aleatória que consiste em escolher, ao acaso, um aluno da escola, e os acontecimentos:
R:≪O aluno é um rapaz≫
D:≪O aluno frequenta o décimo ano≫

Temos que $P\left(R|D\right) = \frac{3}{5}$; $P(R) = \frac{11}{21}$ e $P\left(R \cap D\right) = \frac{1}{7}$

Assim, organizando os dados numa tabela obtemos:

- $P\left(D\right) = \frac{P\left(R \cap D\right)}{P\left(R|D\right)} = \frac{\frac{1}{7}}{\frac{3}{5}} = \frac{5}{21}$
- $P\left(\overline{D}\right) = 1 - P\left(D\right) = 1 - \frac{5}{21} = \frac{16}{21}$
- $P\left(R \cap \overline{D}\right) = P(R) - P\left(D \cap R\right) = \frac{11}{21} - \frac{1}{7} = \frac{8}{21}$

	R	$\overline{R}$	
D	$\frac{1}{7}$		$\frac{5}{21}$
$\overline{D}$	$\frac{8}{21}$		$\frac{16}{21}$
	$\frac{11}{21}$		1

Assim, a probabilidade de o aluno escolhido ser uma rapariga e não frequentar o 10.º ano, na forma de dízima, arredondado às centésimas, é:

$$P\left(\overline{R} \cap \overline{D}\right) = P\left(\overline{D}\right) - P\left(R \cap \overline{D}\right) = \frac{16}{21} - \frac{8}{21} = \frac{8}{21} \approx 0{,}38$$

2.2. Como o delegado de turma tem de fazer parte da comissão e esta deve incluir rapazes e raparigas, os restantes dois membros devem ser duas raparigas ou um rapaz e uma rapariga.

Como a turma tem 15 raparigas, selecionando duas delas, temos que existem ${}^{15}C_2 = 105$ comissões formadas pelo delegado e por mais duas raparigas.

Selecionando uma das 15 raparigas, e um dos $26 - 15 - 1 = 10$ rapazes (correspondendo a retirar dos 26 alunos, as 15 raparigas e o delegado que deve integrar a comissão obrigatoriamente), temos que existem $15 \times 10 = 150$ comissões formadas pelo delegado e por um rapaz e uma rapariga.

Assim, o número de comissões diferentes, que incluam rapazes e raparigas, se podem formar, sabendo-se que o delegado de turma tem de fazer parte da comissão é:

$${}^{15}C_2 + 15 \times 10 = 105 + 150 = 255$$

Resposta: **Opção D**

3.

3.1. Como a caixa contém duas bolas brancas e três bolas pretas, num total de cinco e se retiram-se, ao acaso e em simultâneo, duas bolas da caixa, identificando os valores que a variável X pode assumir, e calculando as respetivas probabilidades, temos:

- 0 - correspondente à extração de duas bolas pretas;
  $P(X=0) = \frac{^3C_2}{^5C_2} = \frac{3}{10}$
- 1 - correspondente à extração de uma bola branca e outra preta;
  $P(X=1) = \frac{^3C_1 \times {^2C_1}}{^5C_2} = \frac{3}{5}$
- 2 - correspondente à extração de duas bolas brancas;
  $P(X=2) = \frac{^2C_2}{^5C_2} = \frac{1}{10}$

Logo, a tabela de distribuição de probabilidades da variável aleatória X é:

x_i	0	1	2
$P(X=x_i)$	$\frac{3}{10}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{10}$

E assim, o valor médio da variável X, é:

$$\mu = 0 \times \frac{3}{10} + 1 \times \frac{3}{5} + 2 \times \frac{1}{10} = \frac{3}{5} + \frac{2}{10} = \frac{3}{5} + \frac{1}{5} = \frac{4}{5} = 0{,}8$$

Resposta: **Opção B**

3.2. Como o ângulo interno de maior amplitude se opõe ao lado maior do triângulo (concretamente o lado de comprimento 6), podemos calcular o valor de $\cos\alpha$ recorrendo à Lei dos cossenos:

$$6^2 = 5^2+4^2-2\times5\times4\times\cos\alpha \Leftrightarrow 36 = 25+16-40\cos\alpha \Leftrightarrow 40\cos\alpha = 41-36 \Leftrightarrow \cos\alpha = \frac{5}{40} \Leftrightarrow \cos\alpha = \frac{1}{8}$$

Recorrendo à fórmula fundamental da trigonometria, como o α é um ângulo interno de um triângulo, então $\operatorname{sen}\alpha > 0$, e assim temos que o valor de $\operatorname{sen}\alpha$, arredondado às milésimas, é:

$$\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \Leftrightarrow \operatorname{sen}^2\alpha + \left(\frac{1}{8}\right)^2 = 1 \Leftrightarrow \operatorname{sen}^2\alpha = 1 - \frac{1}{64} \Rightarrow \operatorname{sen}\alpha = \sqrt{\frac{63}{64}} \Rightarrow \operatorname{sen}\alpha \approx 0{,}992$$

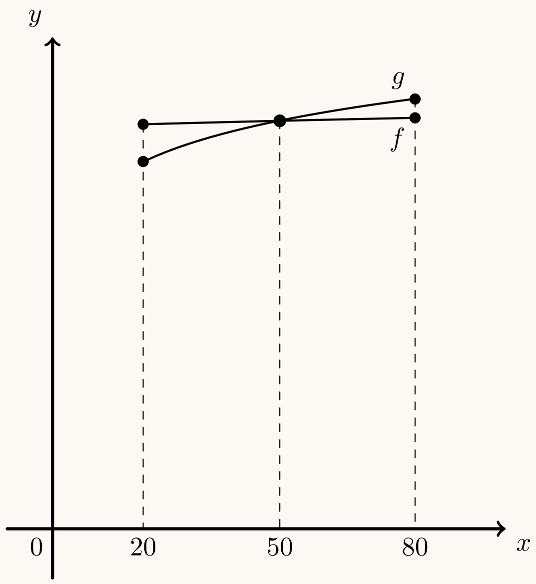
Resposta: **Opção B**

4. Relativamente a um nível de som inicial do despertador, um aumento da respetiva intensidade em 150 $\mu W/m^2$ é representado por $60 + 10\log_{10}(I + 150)$ e 1,4% do quadrado do nível inicial é representado por $0{,}014\,(60 + 10\log_{10} I)^2$, pelo que o valor da intensidade inicial do som desse despertador, é a solução da equação:

$$60 + 10\log_{10}(I + 150) = 0{,}014\,(60 + 10\log_{10} I)^2$$

Assim, visualizando na calculadora gráfica os gráficos das funções $f(x) = 60 + 10\log_{10}(I + 150)$ e $g(x) = 0{,}014\,(60 + 10\log_{10} I)^2$, para $20 < x < 80$, reproduzido na figura ao lado, e usando a função da calculadora para determinar valores aproximados das coordenadas do ponto de interseção de dois gráficos, obtemos o valor aproximado (às unidades) da abcissa do ponto de interseção, ou seja, o valor da intensidade inicial do som desse despertador:

$$50\,\mu W/m^2$$



5. Como a função é contínua em $\mathbb{R}$, também é contínua em $x = 1$, pelo que

$$f(1) = \lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^+} f(x)$$

Temos que $f(1) = \log_3 k$

E calculando $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$ e $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)$, vem:

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x-1} = \frac{1^2-1}{1-1} = \frac{0}{0} \text{ (Indeterminação)}$$

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} = \lim_{x\to 1}(x+1) = 1+1 = 2$$

Como $f(1) = \lim\limits_{x\to 1} f(x)$, podemos calcular o valor de k:

$$\log_3 k = 2 \Leftrightarrow k = 3^2 \Leftrightarrow k = 9$$

Resposta: **Opção D**

6. Como 2, a e b são três termos consecutivos de uma progressão geométrica, designado por r a razão da progressão, temos que:

$$2\times r = a \Leftrightarrow r = \frac{a}{2}, \text{ e também que } a\times r = b \Leftrightarrow r = \frac{b}{a}$$

E assim, vem que:

$$\frac{a}{2} = \frac{b}{a} \Leftrightarrow a^2 = 2b$$

Por outro lado, como $a-2$, b e 2 são três termos consecutivos de uma progressão aritmética, designado por k a razão da progressão, temos que:

$$a-2+k = b \Leftrightarrow k = b-a+2, \text{ e também que } b+k = 2 \Leftrightarrow k = 2+b$$

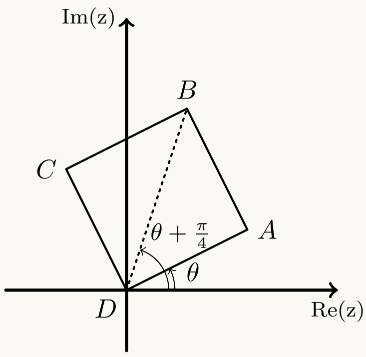
E assim, vem que:

$$b-a+2 = 2+b \Leftrightarrow 2b = a$$

Resolvendo o sistema seguinte, determinamos a e b:

$$\begin{cases} a^2 = 2b \\ 2b = a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 = a \\ b = \frac{a}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - a = 0 \\ b = \frac{a}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a(a-1) = 0 \\ b = \frac{a}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \lor a-1 = 0 \\ b = \frac{a}{2} \end{cases} \underset{a\neq 0}{\Leftrightarrow} \begin{cases} a = 1 \\ b = \frac{1}{2} \end{cases}$$

7. Considerando $\overline{AB} = \rho$ e o ângulo definido pelo semieixo positivo horizontal e a reta AD com amplitude θ, temos que $z = \rho e^{i\theta}$



Como $[ABCD]$ é um quadrado, a diagonal $\overline{BD} = \rho\sqrt{2}$ e $A\hat{D}B = \frac{\frac{\pi}{2}}{2} = \frac{\pi}{4}$, pelo que o ângulo definido pelo semieixo positivo horizontal e a reta BD tem amplitude $\theta + \frac{\pi}{4}$. Assim, temos que o ponto B é o afixo do número complexo

$$w = \rho\sqrt{2}e^{i\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)}$$

Decompondo o número complexo num produto de dois números complexos, vem que:

$$w = \rho\sqrt{2}e^{i\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)} = \rho e^{i\theta} \times \sqrt{2}e^{i\left(\frac{\pi}{4}\right)} = z \times \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i \operatorname{sen}\frac{\pi}{4}\right) = z \times \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = z(1+i)$$

Resposta: **Opção A**

Caderno 2

8. Simplificando a expressão de w, como $i^7 = i^{4+3} = i^4 \times i^3 = 1\times(-i) = -i$, e $\overline{z_2} = 1+2i$, temos que:

$$w = \frac{3(2-3i) - i(1+2i)}{1+(-i)} = \frac{6-9i-i-2i^2}{1-i} = \frac{6-10i-2(-1)}{1-i} = \frac{6-10i+2}{1-i} = \frac{8-10i}{1-i} =$$

$$= \frac{(8-10i)(1+i)}{(1-i)(1+i)} = \frac{8+8i-10i-10i^2}{1^2-i^2} = \frac{8-2i-10(-1)}{1-(-1)} = \frac{8-2i+10}{1+1} = \frac{18-2i}{2} = 9-i$$

Calculando a distância entre os afixos de z_1 e w, temos:

$$|w-z_1| = |9-i-(2-3i)| = |9-i-(2-3i)| = |9-i-2+3i| = |7+2i| = \sqrt{7^2+2^2} = \sqrt{49+4} = \sqrt{53}$$

Como a distância entre os afixos de z_1 e w é igual a $\sqrt{53}$, o afixo do número complexo w pertence à circunferência de centro no afixo (imagem geométrica) de z_1 e raio igual a $\sqrt{53}$

9.

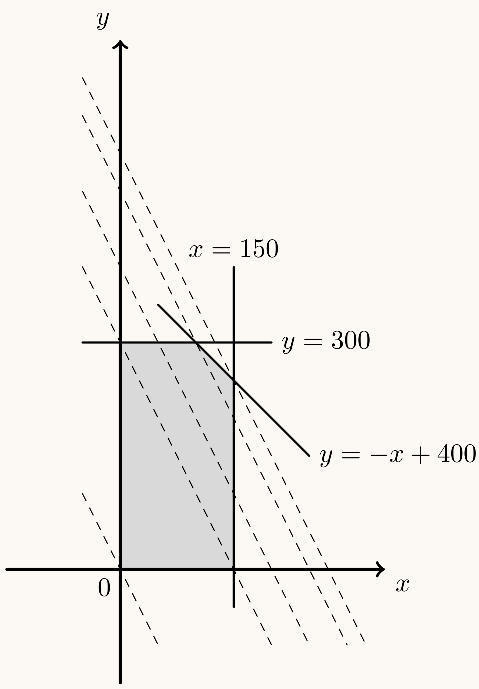
9.1. Representando a região admissível, de acordo com as restrições apresentadas, reproduzida na figura ao lado, e retas com o declive igual à reta definida pela função objetivo:

$$L = 2x + y \Leftrightarrow y = L - 2x \Leftrightarrow y = -2x + L$$

Podemos verificar que o máximo é obtido no vértice que resulta da interseção da reta $x = 150$ com a reta $y = -x + 400$, ou seja o ponto de coordenadas $(150, -150 + 400)$. Assim, substituindo as coordenadas deste ponto na função objetivo, calculamos o valor máximo que a função objetivo pode alcançar nesta região:

$$L = 2(150) + (-150 + 400) = 300 + 250 = 550$$

Resposta: **Opção C**



9.2. Como $\cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$, então $\arccos\frac{1}{2} = \frac{\pi}{3}$, e assim:

$$\operatorname{sen}\left(3\arccos\frac{1}{2}\right) = \operatorname{sen}\left(3 \times \frac{\pi}{3}\right) = \operatorname{sen}(\pi) = 0$$

Resposta: **Opção C**

10. Como o ponto B pertence ao semieixo positivo Oy e à reta de equação $y = 2x + 4$, as suas coordenadas são $(0{,}4)$

Como o ponto A pertence ao semieixo negativo Ox, tem ordenada nula, pelo que a sua abcissa é: $0 = 2x + 4 \Leftrightarrow -4 = 2x \Leftrightarrow -\frac{4}{2} = x \Leftrightarrow -2 = x$

Assim, as coordenadas do ponto médio, M, do segmento de reta $[AB]$, são:

$$\left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2}\right) = \left(\frac{-2+0}{2}, \frac{0+4}{2}\right) = (-1{,}2)$$

Resposta: **Opção B**

11.

11.1. As equações que definem a reta r podem ser escritas na forma seguinte:

$$\frac{x-1}{2}=\frac{3-y}{4}=z \Leftrightarrow \frac{x-1}{2}=\frac{y-3}{-4}=\frac{z-0}{1}$$

Assim, um vetor diretor da reta r é $\vec{v}=(2,-4,1)$

Desta forma, de entre as opções apresentadas, o único vetor que pode ser um vetor diretor de uma reta perpendicular à reta r, por ser perpendicular a um vetor diretor da reta r (ou seja, o produto escalar entre os dois vetores é nulo), é o vetor $\vec{c}$, de acordo com a verificação apresentada a seguir:

- $\vec{a}.\vec{v}=(2,4,1).(2,-4,1)=2\times 2+4\times(-4)+1\times 1=4-16+1=-11$
- $\vec{b}.\vec{v}=(-3,1,0).(2,-4,1)=-3\times 2+1\times(-4)+0\times 1=-6-4+0=-10$
- $\vec{c}.\vec{v}=(1,1,2).(2,-4,1)=1\times 2+1\times(-4)+2\times 1=2-4+2=0$
- $\vec{d}.\vec{v}=(-4,2,0).(2,-4,1)=-4\times 2+2\times(-4)+0\times 1=-8-8+0=-16$

Resposta: **Opção C**

11.2. Calculando o limite da sucessão, temos:

$$\lim\left(\left(\frac{n+\ln a}{n}\right)^{n+2}\right)=\lim\left(\left(\frac{n}{n}+\frac{\ln a}{n}\right)^{n+2}\right)=\lim\left(\left(1+\frac{\ln a}{n}\right)^{n}\times\left(1+\frac{\ln a}{n}\right)^{2}\right)=$$

$$=\lim\left(1+\frac{\ln a}{n}\right)^{n}\times\lim\left(1+\frac{\ln a}{n}\right)^{2}=e^{\ln a}\times\left(1+\frac{\ln a}{+\infty}\right)^{2}=a\times(1+0)^2=a\times 1=a$$

Resposta: **Opção C**

12.

12.1. Como a função é contínua em $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ (porque é o quociente de funções contínuas), a reta de equação $x=1$ é a única reta vertical que pode ser assíntota do gráfico de h. Para averiguar esta hipótese vamos calcular $\lim\limits_{x\to 1^-} h(x)$ e $\lim\limits_{x\to 1^+} h(x)$:

- $\lim\limits_{x\to 1^-} h(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}\frac{e^x}{x-1}=\frac{e^{1^-}}{1^- -1}=\frac{e}{0^-}=-\infty$
- $\lim\limits_{x\to 1^+} h(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}\frac{e^x}{x-1}=\frac{e^{1^+}}{1^+ -1}=\frac{e}{0^+}=+\infty$

Logo a reta de equação $x=1$ é a única assíntota do gráfico de h paralela ao eixo das ordenadas.

Para averiguar a existência de assíntotas horizontais, vamos calcular $\lim\limits_{x\to -\infty} h(x)$ e $\lim\limits_{x\to +\infty} h(x)$:

- $\lim\limits_{x\to -\infty} h(x)=\lim\limits_{x\to -\infty}\frac{e^x}{x-1}=\frac{e^{-\infty}}{-\infty-1}=\frac{0^+}{-\infty}=0$
- $\lim\limits_{x\to +\infty} h(x)=\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{e^x}{x-1}=\frac{e^{+\infty}}{+\infty-1}=\frac{+\infty}{+\infty}$ (indeterminação)

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x-1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{e^x}{x}}{\frac{x-1}{x}}=\frac{\underbrace{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x}}_{\text{Lim. Notável}}}{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x}{x}-\frac{1}{x}\right)}=\frac{+\infty}{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)}=\frac{+\infty}{1+\frac{1}{+\infty}}=\frac{0}{1+0}=+\infty$$

Logo, podemos concluir que a reta de equação $y=0$ é assíntota horizontal do gráfico de h, quando $x\to-\infty$ e que não existe qualquer assíntota do gráfico de h, quando $x\to+\infty$, pelo que a reta $y=0$ é a única assíntota do gráfico de h paralela ao eixo das abcissas.

12.2. Resolvendo a equação, temos:

$$(x-1)\times h(x)+2e^{-x}=3 \Leftrightarrow (x-1)\times\frac{e^x}{x-1}+2\times\frac{1}{e^x}=3 \underset{x\neq 1}{\Leftrightarrow} e^x+\frac{2}{e^x}-3=0 \Leftrightarrow \frac{(e^x)^2}{e^x}+\frac{2}{e^x}-\frac{3e^x}{e^x}=0 \underset{e^x\neq 0}{\Leftrightarrow}$$

$$\Leftrightarrow (e^x)^2+2-3e^x=0 \Leftrightarrow (e^x)^2-3e^x+2=0 \Leftrightarrow$$

Fazendo a substituição de variável $y=e^x$, e usando a fórmula resolvente, vem:

$$\Leftrightarrow y^2-3y+2=0 \Leftrightarrow y=\frac{3\pm\sqrt{(-3)^2-4(1)(2)}}{2} \Leftrightarrow y=\frac{3\pm\sqrt{9+8}}{2} \Leftrightarrow y=\frac{3\pm 1}{2} \Leftrightarrow y=1 \vee y=2$$

Como $y=e^x$, temos que:

$$e^x=1 \vee e^x=2 \Leftrightarrow x=\ln 1 \vee x=\ln 2 \Leftrightarrow x=0 \vee x=\ln 2$$

C.S.$=\{0,\ln 2\}$

13.

13.1. Para estudar o sentido das concavidades do gráfico e a existência de pontos de inflexão, vamos determinar a expressão da segunda derivada, pelo que começamos por determinar g':

$$g'(x) = \left(\frac{1}{4}\cos(2x) - \cos x\right)' = \left(\frac{1}{4}\cos(2x)\right)' - (\cos x)' = \frac{1}{4}(\cos(2x))' - (-\operatorname{sen} x) =$$

$$= \frac{1}{4}(-(2x)'\operatorname{sen}(2x)) + \operatorname{sen} x = \frac{1}{4}\times(-2)\times\operatorname{sen}(2x) + \operatorname{sen} x = -\frac{1}{2}\operatorname{sen}(2x) + \operatorname{sen} x$$

Assim, determinando g'', temos que:

$$g''(x) = (g'(x))' = \left(-\frac{1}{2}\operatorname{sen}(2x) + \operatorname{sen} x\right)' = \left(-\frac{1}{2}\operatorname{sen}(2x)\right)' + (\operatorname{sen} x)' = -\frac{1}{2}(\operatorname{sen}(2x))' + \cos x =$$

$$= -\frac{1}{2}((2x)'\cos(2x)) + \cos x = -\frac{1}{2}\times 2\times\cos(2x) + \cos x = -\cos(2x) + \cos x$$

Como os pontos de inflexão são zeros da segunda derivada, vamos determiná-los:

$$g''(x) = 0 \Leftrightarrow -\cos(2x) + \cos x = 0 \Leftrightarrow \cos x = \cos(2x) \Leftrightarrow x = 2x + 2k\pi \vee x = -2x + 2k\pi, k\in\mathbb{Z} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x - 2x = 2k\pi \vee x + 2x = 2k\pi, k\in\mathbb{Z} \Leftrightarrow -x = 2k\pi \vee 3x = 2k\pi, k\in\mathbb{Z} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = -2k\pi \vee x = \frac{2k\pi}{3}, k\in\mathbb{Z}$$

Para $k = 1$, vem $x = -2\pi \vee x = \frac{2\pi}{3}$, e como $x \in]0,\pi[$, podemos verificar que a única solução da equação é $x = \frac{2\pi}{3}$

Assim, estudando o sinal da segunda derivada para relacionar com o sentido das concavidades, vem:

x	0		$\frac{2\pi}{3}$		π
g''	n.d.	+	0	−	n.d.
g	n.d.	$\smile$	Pt. I.	$\frown$	n.d.

Cálculos auxiliares:

$$g''\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\cos\left(2\times\frac{\pi}{2}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) =$$
$$= -\cos\pi + 0 = -(-1) + 0 = 1 > 0$$

$$g''\left(\frac{3\pi}{4}\right) = -\cos\left(2\times\frac{3\pi}{4}\right) + \cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) =$$
$$= -\cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) - \frac{\sqrt{2}}{2} = -0 - \frac{\sqrt{2}}{2} = -\frac{\sqrt{2}}{2} < 0$$

Logo, podemos concluir que o gráfico de g:

- tem a concavidade voltada para baixo no intervalo $\left[\frac{2\pi}{3},\pi\right[$
- tem a concavidade voltada para cima no intervalo $\left]0,\frac{2\pi}{3}\right]$
- tem um ponto de inflexão de abcissa $\frac{2\pi}{3}$ e cuja ordenada é:

$$g\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \frac{1}{4}\cos\left(2\times\frac{2\pi}{3}\right) - \cos\frac{2\pi}{3} = \frac{1}{4}\cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) - \left(-\cos\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{4}\left(-\cos\frac{\pi}{3}\right) + \frac{1}{2} =$$

$$= \frac{1}{4}\left(-\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2} = -\frac{1}{8} + \frac{1}{2} = -\frac{1}{8} + \frac{4}{8} = \frac{3}{8}$$

Ou seja, o ponto de inflexão do gráfico da função tem coordenadas $\left(\frac{2\pi}{3}, \frac{3}{8}\right)$

13.2. Simplificando a expressão da função f, como $\cos(-\alpha) = \cos\alpha$, $\cos(\pi-\alpha) = -\cos\alpha$ e $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \operatorname{sen}\alpha$, temos:

$$f(x) = g(-x) + g\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \frac{1}{4}\cos(2(-x)) - \cos(-x) + \frac{1}{4}\cos\left(2\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right) - \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) =$$

$$= \frac{1}{4}\cos(-2x) - \cos(-x) + \frac{1}{4}\cos(\pi - 2x) - \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \frac{1}{4}\cos(2x) - \cos x + \frac{1}{4}(-\cos(2x)) - \operatorname{sen} x =$$

$$= \frac{1}{4}\cos(2x) - \cos x - \frac{1}{4}\cos(2x) - \operatorname{sen} x = -\cos x - \operatorname{sen} x = -\operatorname{sen} x - \cos x$$

Resposta: **Opção B**

14. Designando por a a abcissa do ponto P, temos que as suas coordenadas são $(a,f(a)) = (a,a^2)$, e como o declive da reta tangente no ponto P, é o valor da derivada no ponto e $(x^2)' = 2x$, o declive da reta r é:

$$m_r = f'(a) = 2a$$

Assim, a equação da reta r é da forma $y = 2ax + b$, e substituindo as coordenadas do ponto P (que pertence à reta) podemos determinar uma expressão para o valor da ordenada na origem:

$$a^2 = 2a \times a + b \Leftrightarrow a^2 = 2a^2 + b \Leftrightarrow a^2 - 2a^2 = b \Leftrightarrow -a^2 = b$$

Ou seja, a equação reduzida da reta r é da forma $y = 2ax - a^2$

Designando por k a abcissa do ponto Q $(k < 0)$, temos que as suas coordenadas são $(k,f(k)) = (k,k^2)$ e como o declive da reta tangente no ponto Q, é o valor da derivada no ponto pelo que o declive da reta s é:

$$m_s = f'(k) = 2k$$

Temos ainda que, como o declive da reta perpendicular é o simétrico do inverso da reta, temos que o declive da reta s é:

$$m_s = -\frac{1}{2a}$$

Ou seja, temos que: $2k = -\frac{1}{2a} \Leftrightarrow k = -\frac{1}{2 \times 2a} \Leftrightarrow k = -\frac{1}{4a}$, pelo que as coordenadas do ponto Q são $(k,k^2) = \left(-\frac{1}{4a},\left(-\frac{1}{4a}\right)^2\right) = \left(-\frac{1}{4a},\frac{1}{16a^2}\right)$

Assim a equação reduzida da reta s é da forma $y = -\frac{1}{2a}x + b$ e substituindo as coordenadas do ponto Q (que pertence à reta) podemos determinar uma expressão para o valor da ordenada na origem:

$$\frac{1}{16a^2} = -\frac{1}{2a} \times -\frac{1}{4a} + b \Leftrightarrow \frac{1}{16a^2} = \frac{1}{8a^2} + b \Leftrightarrow \frac{1}{16a^2} - \frac{1}{8a^2} = b \Leftrightarrow \frac{1}{16a^2} - \frac{2}{16a^2} = b \Leftrightarrow -\frac{1}{16a^2} = b$$

Ou seja, a equação reduzida da reta r é da forma $y = -\frac{1}{2a}x - \frac{1}{16a^2}$

Determinando as coordenadas do ponto de interseção das retas r e s, em particular a ordenada, vem:

$$\begin{cases} y = 2ax - a^2 \\ y = -\frac{1}{2a}x - \frac{1}{16a^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y + a^2 = 2ax \\ y + \frac{1}{16a^2} = -\frac{1}{2a}x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{y + a^2}{2a} = x \\ -2ay - \frac{2a}{16a^2} = x \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{y + a^2}{2a} = -2ay - \frac{2a}{16a^2} \Leftrightarrow \frac{y}{2a} + \frac{a^2}{2a} = -2ay - \frac{2}{16a} \Leftrightarrow \frac{y}{2a} + \frac{a}{2} = -2ay - \frac{1}{8a} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{4y}{8a} + \frac{4a^2}{8a} = -\frac{16a^2y}{8a} - \frac{1}{8a} \underset{a>0}{\Leftrightarrow} 4y + 4a^2 = -16a^2y - 1 \Leftrightarrow 4y + 16a^2y = -4a^2 - 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4y(1 + 4a^2) = -(1 + 4a^2) \Leftrightarrow 4y = \frac{-(1 + 4a^2)}{1 + 4a^2} \underset{1+4a^2 \neq 0}{\Leftrightarrow} 4y = -1 \Leftrightarrow y = -\frac{1}{4}$$

Logo o valor da ordenada do ponto de interseção das retas r e s é $-\frac{1}{4}$, independentemente do valor de a