FICHA DE TRABALHO N.º 5 – MATEMÁTICA A - 10.º ANO

GEOMETRIA ANALÍTICA E CÁLCULO VECTORIAL NO PLANO

ALGUMAS RESOLUÇÕES

"Conhece a Matemática e dominarás o Mundo."
Galileu Galilei

9.3. Tem-se que:

$$B = M - \frac{1}{3}\overrightarrow{AD} - \frac{2}{3}\overrightarrow{AP} = (3,-2) - \frac{1}{3}\vec{e}_1 + \frac{2}{3}\vec{e}_2 = (3,-2) - \left(\frac{1}{3},0\right) + \left(0,\frac{2}{3}\right) = \left(3-\frac{1}{3},-2+\frac{2}{3}\right) = \left(\frac{8}{3},-\frac{4}{3}\right)$$

Resposta: A

18.

18.1. Tem-se que:

- o ponto de coordenadas $\left(5,\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ pertence à elipse, substituindo-o na sua equação, vem:

$$5^2 + b\left(\sqrt{50}\times\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = a^2 \Leftrightarrow 25 + 25b = a^2$$

- $x^2 + b\left(\sqrt{50}y\right)^2 = a^2 \Leftrightarrow x^2 + 50by^2 = a^2 \underset{\div a^2}{\Leftrightarrow} \frac{x^2}{a^2} + \frac{50by^2}{a^2} = \frac{a^2}{a^2} \Leftrightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{\frac{a^2}{50b}} = 1$

Como $50b > 1$, vem $50b > 1 \Leftrightarrow \frac{1}{50b} < 1 \Leftrightarrow \frac{a^2}{50b} < a^2$. Logo, o eixo maior é $2a$.

- a distância focal é 14, então $2c = 14 \Leftrightarrow c = 7$. Logo, as coordenadas dos focos são $F_1(7,0)$ e $F_2(-7,0)$ e portanto, eixo maior da elipse está sobre o eixo Ox. Assim:

$$a^2 = 7^2 + \frac{a^2}{50b} \Leftrightarrow 25 + 25b = 49 + \frac{25+25b}{50b} \Leftrightarrow 25 + 25b = 49 + \frac{1+b}{2b} \underset{\times 2b}{\Leftrightarrow} 50b + 50b^2 = 98b + 1 + b \Leftrightarrow$$

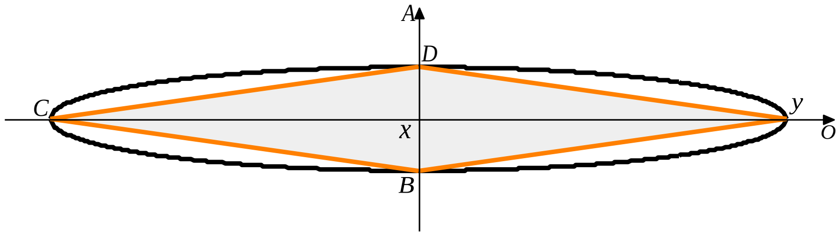
$$\Leftrightarrow 50b^2 - 49b - 1 = 0 \Leftrightarrow b = \frac{49 \pm \sqrt{(-49)^2 - 4\times 50\times(-1)}}{2\times 50} \Leftrightarrow b = -\frac{1}{50} \ \vee \ b = 1$$

Como $b \in \mathbb{R}^+$, vem $b = 1$. Portanto, $a^2 = 25 + 25\times 1 \Leftrightarrow a = 50 \underset{a>0}{\Leftrightarrow} a = \sqrt{50} \Leftrightarrow a = 5\sqrt{2}$

$\therefore \ d(P,F_1) + d(P,F_2) = 2a = 2\times 5\sqrt{2} = 10\sqrt{2}$.

$$\therefore \ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{\frac{a^2}{50b}} = 1 \underset{\substack{a^2=50\\ b=1}}{\Leftrightarrow} \frac{x^2}{50} + \frac{y^2}{\frac{50}{50\times 1}} = 1 \Leftrightarrow \frac{x^2}{50} + \frac{y^2}{1} = 1 \Leftrightarrow \frac{x^2}{50} + y^2 = 1$$

18.2. As coordenadas dos vértices da elipse são $A\left(5\sqrt{2},0\right)$, $C\left(-5\sqrt{2},0\right)$, $B(0,1)$ e $D(0,-1)$. Representando a elipse num referencial o.n. xOy:



Logo, $A_{[ABCD]}=2\times A_{[ABC]}=2\times\frac{\overline{AC}\times\overline{OB}}{2}=\overline{AC}\times\overline{OB}=10\sqrt{2}\times 1=10\sqrt{2}$.

20. O quadrilátero $[ABCD]$ é um paralelogramo se $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$ e $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$.

Tem-se:

- $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{GB}$. Como $\overline{FG}=k\times\overline{AG}$ e $\overline{EG}=k\times\overline{BG}$, então $\frac{1}{k}\times\overline{FG}=\overline{AG}$ e $\frac{1}{k}\times\overline{EG}=\overline{BG}$ e portanto:

$$\overrightarrow{AG}=\frac{1}{k}\times\overrightarrow{FG}\ \text{ e }\ \overrightarrow{GB}=\frac{1}{k}\times\overrightarrow{GE}$$

Logo, $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{GB}=\frac{1}{k}\times\overrightarrow{FG}+\frac{1}{k}\times\overrightarrow{GE}=\frac{1}{k}\times\left(\overrightarrow{FG}+\overrightarrow{GE}\right)=\frac{1}{k}\times\overrightarrow{FE}=\frac{1}{\cancel{k}}\times\cancel{k}\times\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{DC}$

pois $\overline{EF}=k\times\overline{CD}$ e portanto, $\overrightarrow{FE}=k\times\overrightarrow{DC}$.

- $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD}\underset{\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{BA}}{=}\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{BC}$

$\therefore$ O quadrilátero $[ABCD]$ é um paralelogramo.