Tema 5 – Geometria

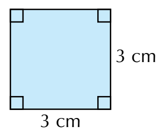
Linhas poligonais e polígonos. Quadriláteros. Áreas

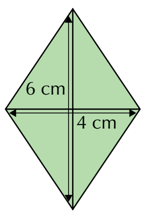
Praticar – páginas 140 a 145

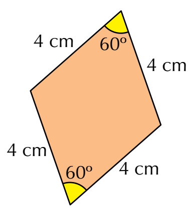
1.
1.1. III e IV
1.2. II e IV

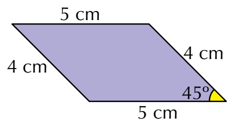
2.
2.1. I e IV
2.2. II e III

3.
3.1. *B*, *C*, *D*, *E* e *F* são trapézios porque são quadriláteros com lados paralelos.
3.2. *F* é um trapézio não paralelogramo, porque é um quadrilátero que não tem dois pares de lados paralelos.
3.3. *C* e *E* são retângulos, porque são quadriláteros com quatro ângulos retos.
3.4. *D* e *E* são losangos, porque são paralelogramos com quatro lados geometricamente iguais.
3.5. *A* e *G* são papagaios, porque são quadriláteros com dois pares de lados consecutivos geometricamente iguais e cujos lados opostos não são iguais.
3.6. *E* é um quadrado, porque é um paralelogramo com quatro lados geometricamente iguais e quatro ângulos retos.

4.
4.1.


4.2.


4.3.


4.4.


5.
5.1. Retângulo.
5.2. Losango.
5.3. Quadrado.
5.4. Paralelogramo.

6. A amplitude de um ângulo interno de um polígono regular é $\frac{180 \times (n-2)}{n}$, sendo *n* o número de lados do polígono.
Assim, $\frac{180 \times (20-2)}{20} = \frac{3240}{20} = 162$.
Logo, a opção correta é a [C].

7.
7.1. $C\hat{B}A = 180º - B\hat{A}D$, pois *CBA* e *BAD* são ângulos suplementares.
Assim, $C\hat{B}A = 180º - 50º = 130º$.
7.2. $A\hat{D}C = C\hat{B}A$ porque *ADC* e *CDA* são ângulos opostos de uma paralelogramo.
Assim, $A\hat{D}C = 130º$.

8.
8.1. $A = \frac{d \times D}{2}$

$A = \frac{6 \times 10}{2} = 30$

R.: $A = 30\ cm^2$.

8.2. $A = \frac{d \times D}{2}$

$A = \frac{6 \times 12}{2} = 36$

R.: $A = 36\ cm^2$.

8.3. $A = \frac{d \times D}{2}$

$A = \frac{4 \times 10}{2} = 20$

R.: $A = 20\ cm^2$.

8.4. $A = \frac{d \times D}{2}$

$A = \frac{5 \times 6}{2} = 15$

R.: $A = 15\ cm^2$.

9.

9.1. $A = \frac{b+B}{2} \times h$

$A = \frac{4+12}{2} \times 4 = 32$

R.: $A = 32$ cm^2.

9.2. $A = \frac{b+B}{2} \times h$

$A = \frac{8+12}{2} \times 6 = 60$

R.: $A = 60$ cm^2.

9.3. $A = \frac{b+B}{2} \times h$

$A = \frac{2+5}{2} \times 3 = 10{,}5$

R.: $A = 10{,}5$ cm^2.

9.4. $A = \frac{b+B}{2} \times h$

$A = \frac{2+4}{2} \times 5 = 15$

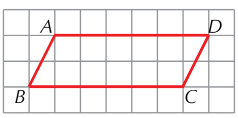
R.: $A = 15$ cm^2.

10. A soma das amplitudes dos ângulos internos de um polígono convexo de n lados é $(n-2) \times 180°$.
Neste caso, $(5-2) \times 180° = 3 \times 180° = 540°$.
Assim, $\hat{\alpha} = 540° - (74° + 115° + 100° + 104°)$
$\Leftrightarrow \hat{\alpha} = 540° - 393°$
$\Leftrightarrow \hat{\alpha} = 147°$

11.
11.1. Duas diagonais.
11.2. Nove diagonais.
11.3. Não tem diagonais.

12. A opção [C] pode ser falsa. O único losango com diagonais geometricamente iguais é o quadrado. Todos os outros losangos têm diagonais com comprimentos diferentes.

13.
13.1.



13.2. $A = 6 \text{ cm} \times 2 \text{ cm} = 12 \text{ cm}^2$

14. A soma das amplitudes dos ângulos internos de um polígono convexo de n lados é $(n-2) \times 180°$.

14.1. A soma das amplitudes dos ângulos internos do polígono é $(5-2) \times 180° = 3 \times 180° = 540°$.
Assim, $x = 540° - (68° + 125° + 122° + 70°) =$
$= 540° - 385° =$
$= 155°$

14.2. A soma das amplitudes dos ângulos internos do polígono é $(4-2) \times 180° = 2 \times 180° = 360°$.
Assim, $x + 2x + 90 + 90 = 360$
$\Leftrightarrow 3x = 180$
$\Leftrightarrow x = \frac{180}{3}$
$\Leftrightarrow x = 60$

14.3. A amplitude de um ângulo interno de um polígono regular é $\frac{180 \times (n-2)}{n}$.

Logo, $x = \frac{180 \times 7}{9} \Leftrightarrow x = \frac{1260}{9} \Leftrightarrow x = 140$

14.4. Dois ângulos consecutivos de um losango são suplementares.
Logo, $x = 180 - 48 \Leftrightarrow x = 132$

15. A amplitude de um ângulo interno de um polígono regular com n lados é $\frac{(n-2) \times 180}{n}$.

Assim, $\frac{(n-2) \times 180}{n} = 140$

$\Leftrightarrow 180n - 360 = 140n$
$\Leftrightarrow 180n - 140n = 360$
$\Leftrightarrow 40n = 360$
$\Leftrightarrow n = \frac{360}{40}$
$\Leftrightarrow n = 9$
R.: O polígono tem nove lados.

16.
16.1. Como DCB e BAD são ângulos opostos do paralelogramo, então são geometricamente iguais.
Logo, $D\hat{C}B = 119°$.
16.2. Como CBA e BAD são ângulos consecutivos do paralelogramo, então são suplementares.
Logo, $C\hat{B}A = 180° - 119° = 61°$.
16.3. $\overline{DC} = \overline{AB} = 6$ cm, porque lados opostos de um paralelogramo são geometricamente iguais.

17. Os ângulos CED e AEC são suplementares.
Logo, $\hat{y} = 180° - 120° = 60°$.
Como a soma das amplitudes dos ângulos internos de um triângulo é 180°, então os ângulos BAD e

DCB são ângulos opostos do paralelogramo. Logo, são geometricamente iguais. Assim,
$\hat{z} = 180° - 70° - 60° = 50°$
$\hat{x} = 60° - \hat{z} = 60° + 50° = 110°$

18. Como o retângulo [*ABCD*] é equivalente a um losango, então têm a mesma área.
$A = \dfrac{d \times D}{2}$
$A = \dfrac{25 \times 8}{2} = 100$
Então, a área do retângulo também é 100 cm^2.
Como $A = b \times h$, temos:
$100 = 10 \times \overline{AD} \Leftrightarrow \overline{AD} = 10$
R.: $\overline{AD} = 10$ cm.

19.
19.1. No grupo 1 estão os quadriláteros com quatro ângulos retos.
19.2. No grupo 2 estão os restantes quadriláteros.
Os polígonos do grupo I são retângulos.

20.
20.1. A soma das amplitudes dos ângulos internos de um polígono convexo é $(n - 2) \times 180°$.
Assim,
$$\begin{aligned}(n-2) \times 180° = 4140 &\Leftrightarrow n - 2 = \frac{4140}{180}\\ &\Leftrightarrow n - 2 = 23\\ &\Leftrightarrow n = 23 + 2\\ &\Leftrightarrow n = 25\end{aligned}$$
R.: O polígono tem 25 lados.
20.2. $n - 3 = 25 - 3 = 22$
R.: Podem ser traçadas 22 diagonais.

21. $\overline{BC} = \dfrac{3}{2}\overline{AD} \Leftrightarrow \overline{BC} = \dfrac{3}{2} \times 4$
$\Leftrightarrow \overline{BC} = 6$ cm

$A_{[ABCD]} = \dfrac{\overline{BC} + \overline{AD}}{2} \times \overline{DE}$

$A_{[ABCD]} = \dfrac{4 + 6}{2} \times 5 = 5 \times 5 = 25$
R.: $A_{[ABCD]} = 25$ cm^2.

22. $A_{[BCDE]} = 16 \Leftrightarrow \dfrac{\overline{DC} + \overline{EB}}{2} \times \overline{CF} = 16$

Como $\overline{DC} = \overline{AB}$, temos:
$$\frac{\overline{AB} + \frac{1}{3}\overline{AB}}{2} \times 4 = 16$$
$\Leftrightarrow \dfrac{3}{3}\overline{AB} + \dfrac{1}{3}\overline{AB} = \dfrac{16 \times 2}{4}$
$\Leftrightarrow \dfrac{4}{3}\overline{AB} = 8$
$\Leftrightarrow \overline{AB} = \dfrac{8 \times 3}{4}$
$\Leftrightarrow \overline{AB} = 6$
$A_{[ABCD]} = \overline{AD} \times \overline{CF}$
$A_{[ABCD]} = 6 \text{ cm} \times 4 \text{ cm} = 24 \text{ cm}^2$

23. Como o polígono foi dividido em cinco triângulos, o número de lados é 5 + 2 = 7.
Logo, é um heptágono.

24. Não concordo com o João. Os únicos paralelogramos cujas diagonais são perpendiculares são o quadrado e o losango.

25. $A_{\text{trapézio}} = \dfrac{b + B}{2} \times h$
$$\begin{aligned}A_{\text{trapézio}} &= \frac{\overline{AB} + \overline{DC}}{2} \times 10\\ &= \frac{\overline{AH}}{2} \times 10\\ &= \frac{12}{2} \times 10\\ &= 6 \times 10\\ &= 60\end{aligned}$$
R.: $A_{[ABCD]} = 60$ cm^2.

26. $E\hat{C}D = \dfrac{180°}{3} = 60°$, porque [*CED*] é um triângulo equilátero e a soma das amplitudes dos ângulos internos de um triângulo é 180°.
$B\hat{C}F = 360° - 90° - 90° - 60° = 120°$
A soma das amplitudes dos ângulos internos do polígono [*BHIFC*] é $(5 - 2) \times 180° = 3 \times 180° = 540°$.
Assim, $\hat{o} = 540° - 79° - 87° - 129° - 120° = 125°$.

27. A afirmação é falsa. O retângulo é um quadrilátero com quatro ângulos retos e não é regular.

28.
28.1. $\overline{AB} = \overline{AE}$ porque [*AB*] e [*AE*] são raios da mesma circunferência de centro *A*.

28.2. Como AEB e EAD são ângulos agudos de lados paralelos, então $A\hat{E}B = E\hat{A}D = 56^o$.

28.3. Como o triângulo $[ABE]$ é isósceles, $(\overline{AB} = \overline{AE})$, então $A\hat{E}B = E\hat{B}A$.

Como a soma das amplitudes dos ângulos internos de um triângulo é 180º, $B\hat{A}E = 180^o - 56^o - 56^o = 68^o$.

29. Como o polígono $[ABCDE]$ é um pentágono regular, então $\hat{\alpha} = 540^o : 5 = 108^o$.

Considerando o triângulo $[BAF]$, temos:

$F\hat{A}B = A\hat{B}F = 180^o - 108^o = 72^o$

Logo, como a soma das amplitudes dos ângulos internos de um triângulo é 180º, então,

$\hat{\beta} = B\hat{F}A = 180^o - 72^o - 72^o = 36^o$.

R.: $\hat{\alpha} = 108^o$ e $\hat{\beta} = 36^o$.

Circunferência e semelhança

Praticar – páginas 148 a 153

1.

1.1. Aplicando o Teorema de Tales,

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{CE}}{\overline{CD}}$$

Assim, $\frac{\overline{AC}}{4} = \frac{6}{3} \Leftrightarrow \overline{AC} = \frac{4 \times 6}{3}$

$\Leftrightarrow \overline{AC} = 8$

Como $\overline{AB} = \overline{AC} - \overline{BC}$, então $\overline{AB} = 8 - 4 = 4$.

R.: $\overline{AB} = 4$ cm.

1.2. Aplicando o Teorema de Tales,

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{CD}} = \frac{\overline{AE}}{\overline{CE}}$$

Assim, $\frac{\overline{AB}}{5} = \frac{8}{4} \Leftrightarrow \overline{AB} = \frac{8 \times 5}{4}$

$\Leftrightarrow \overline{AB} = 10$

R.: $\overline{AB} = 10$ cm.

2. Aplicando o Teorema de Tales,

$\frac{10}{15} = \frac{8}{x} \Leftrightarrow x = \frac{8 \times 15}{10}$

$\Leftrightarrow x = 12$

R.: $x = 12$ cm.

3. As figuras A e B são semelhantes à figura dada. A figura A é geometricamente igual e a figura B é uma ampliação.

4. Retângulo C: razão de semelhança $\frac{1}{2}$.

Retângulo F: razão de semelhança 1.

5. A opção correta é a [A].

6.

6.1. Utilizando, por exemplo, o critério LLL, temos:

$$\frac{\overline{FE}}{\overline{IJ}} = \frac{\overline{DE}}{\overline{HI}} = \frac{\overline{DF}}{\overline{HJ}}$$

Assim, $\frac{10}{15} = \frac{6}{9} = \frac{8}{12} \Leftrightarrow \frac{2}{3} = \frac{2}{3} = \frac{2}{3}$. Verdadeiro.

Os triângulos $[DEF]$ e $[IHJ]$ são semelhantes, pelo critério LLL.

6.1. Utilizando o critério LAL, temos:

- $A\hat{C}B = D\hat{E}F$
- $\frac{\overline{AC}}{\overline{DF}} = \frac{\overline{CB}}{\overline{FE}}$, ou seja, $\frac{6}{4} = \frac{12}{8} \Leftrightarrow \frac{3}{2} = \frac{3}{2}$

Verdadeiro.

Os triângulos $[ABC]$ e $[DEF]$ são semelhantes pelo critério LAL.

6.3. Utilizando o critério AA, temos:

- $G\hat{I}H = 180^o - 50^o - 58^o = 72^o$.
- $Y\hat{X}Z = 180^o - 72^o - 52^o = 58^o$.

Assim, $\hat{H} = \hat{X}$ e $\hat{G} = \hat{J}$.

Os triângulos $[GHI]$ e $[JXY]$ são semelhantes pelo critério AA.

6.4. Utilizando o critério LAL, temos:

- $T\hat{R}S = V\hat{U}K = 90^o$
- $\frac{\overline{TR}}{\overline{KU}} = \frac{\overline{RS}}{\overline{UV}}$, ou seja, $\frac{12}{16} = \frac{3}{4} \Leftrightarrow \frac{3}{4} = \frac{3}{4}$

Verdadeiro.

Os triângulos $[STR]$ e $[KUV]$ são semelhantes pelo critério LAL.

7.

7.1. Os triângulos $[ABC]$ e $[BCD]$ são semelhantes pelo critério AA de semelhança de triângulos ($C\hat{D}A = B\hat{D}C$ e CBA é comum aos dois triângulos). Assim, os comprimentos dos lados correspondentes dos triângulos são diretamente proporcionais, ou seja, $\frac{\overline{AC}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{DC}}$.

$\frac{5}{3} = \frac{3}{x} \Leftrightarrow x = \frac{9}{5}$

$\Leftrightarrow x = 1{,}80$

7.2. Os triângulos [*ABC*] e [*ABD*] são semelhantes pelo critério AA ($A\hat{D}B = C\hat{B}A$ e $B\hat{A}D = B\hat{A}C$). Então, os comprimentos dos lados correspondentes dos triângulos são diretamente proporcionais, ou seja,

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{BD}}{\overline{BC}}$$

$$\frac{8}{17} = \frac{x}{15} \Leftrightarrow x \approx 7{,}06$$

8. $\frac{\overline{F'A'}}{\overline{FA}} = \frac{2}{3}$

9.

9.1. Como a soma das amplitudes dos ângulos internos de um triângulo é 180º, então

$L\hat{M}N = 180º - 102º - 48º = 30º$.

O ângulo com maior amplitude é $N\hat{L}M$ e como num triângulo ao ângulo de maior amplitude opõe-se o lado de maior comprimento, concluímos que o lado [*MN*] é o lado maior do triângulo [*MNL*].

9.2. Os triângulos são semelhantes, pelo critério AA de semelhança de triângulos:

$F\hat{E}G = N\hat{L}M = 102º$ e $G\hat{F}E = L\hat{M}N = 30º$

9.3. Como os triângulos são semelhantes e [*MNL*] é uma ampliação de [*GEF*], a razão de semelhança é

$r = \frac{\overline{MN}}{\overline{FQ}} = \frac{5}{3}$.

Assim, como a razão das áreas é o quadrado da razão de semelhança, $\frac{A_{[MNL]}}{A_{[EFG]}} = r^2$, ou seja,

$$\frac{A_{[MNL]}}{2{,}5} = \left(\frac{5}{3}\right)^2 \Leftrightarrow A_{[MNL]} = \frac{25}{9} \times \frac{25}{10}$$

$$\Leftrightarrow A_{[MNL]} = \frac{125}{18}$$

$$\Leftrightarrow A_{[MNL]} \approx 7$$

R.: $A_{[MNL]} \approx 7$ cm².

10.

10.1. Como as retas *r* e *s* são paralelas, podemos aplicar o Teorema de Tales.

Assim, $\frac{\overline{JL}}{\overline{JM}} = \frac{\overline{KJ}}{\overline{JI}}$, ou seja, $\frac{x}{8} = \frac{24}{6}$

$\Leftrightarrow x = \frac{24 \times 8}{6} = 32$

R.: $x = 32$ cm.

10.2. Como as retas *r* e *s* são paralelas, podemos aplicar o Teorema de Tales.

Assim, $\frac{\overline{HF}}{\overline{EH}} = \frac{\overline{GD}}{\overline{EG}}$, ou seja, $\frac{x}{16} = \frac{30}{20}$

$\Leftrightarrow x = \frac{16 \times 30}{20}$

$\Leftrightarrow x = 24$

R.: $x = 24$ cm.

11. Se as retas *DE* e *BC* forem paralelas, então, pelo Teorema de Tales, $\frac{\overline{AD}}{\overline{DB}} = \frac{\overline{AE}}{\overline{CD}}$.

Como $\frac{112}{42} \neq \frac{96}{32}$ podemos concluir que as retas não são paralelas.

12. [A] Todos os círculos são semelhantes, sendo a razão de semelhança igual à razão entre os comprimentos dos raios.

A opção [B] não é a correta. Se dois círculos tiverem raios diferentes os círculos não são geometricamente iguais.

A opção [C] não é a correta. Se dois círculos tiverem raios diferentes, eles têm áreas diferentes e, portanto, não são equivalentes.

A opção [D] também não é correta. Os círculos não são polígonos porque não são formados por linhas poligonais fechadas.

Logo, a opção correta é a [A].

12.

13.1 $\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{AD}}{\overline{\mathbf{AB}}}$

13.2 $\frac{\overline{AD}}{\overline{DC}} = \frac{\overline{\mathbf{BD}}}{\overline{AB}}$

14. Como os triângulos são semelhantes, a razão de semelhança é $r = \frac{51}{17}$.

$P_{[ABC]} = 12 + 14 + 17 = 43$

Como a razão dos perímetros é igual à razão de semelhança, então, $\frac{P_{[TVJ]}}{P_{[ABC]}} = \frac{51}{17}$.

Logo, $P_{[TVJ]} = \frac{51}{17} \times 43 \Leftrightarrow P_{[TVJ]} = 129$.

R.: $P_{[TVJ]} = 129$ u.c.

15. Os triângulos $[ABC]$ e $[EDC]$ são semelhantes pelo critério AA de semelhança de triângulos: $C\hat{B}A = E\hat{D}C = 90^{\circ}$ e $A\hat{C}B = D\hat{C}E$ (ângulo comum).

16.

16.1. Como os triângulos $[ABC]$ e $[PQR]$ são semelhantes, os ângulos correspondentes têm a mesma amplitude. Então, $R\hat{P}Q = C\hat{A}B = 16^{\circ}$.

16.2. Como os triângulos $[ABC]$ e $[PQR]$ são semelhantes os comprimentos dos lados correspondentes são diretamente proporcionais, ou seja,

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{PR}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{PQ}}.$$

Assim, $\frac{14}{7} = \frac{9}{\overline{PQ}} \Leftrightarrow \overline{PQ} = \frac{7\times 9}{14}$

$\Leftrightarrow \overline{PQ} = 4{,}5$ cm

16.3. A razão de semelhança entre $[ABC]$ e $[PQR]$

$$r = \frac{\overline{AC}}{\overline{PR}} = \frac{14}{7} = 2.$$

Como a razão das áreas é o quadrado da razão de semelhança, temos

$\frac{A_{[ABC]}}{A_{[PQR]}} = r^2$, ou seja, $\frac{A_{[ABC]}}{7} = 2^2 \Leftrightarrow A_{[ABC]} = 28.$

R.: $A_{[ABC]} = 28$ cm^2.

17.

17.1. Os triângulos $[CDF]$ e $[ABC]$ são semelhantes, pelo critério AA:
$C\hat{F}D = C\hat{B}A$ e $F\hat{D}C = B\hat{A}C$ (ângulos de lados paralelos).

17.2. $A_{[AFDE]} = \overline{EB} \times \overline{BF}$.
Os triângulos $[AED]$ e $[ABC]$ são semelhantes, pelo critério AA ($D\hat{E}A = C\hat{B}A$ e o ângulo BAC é comum aos dois triângulos).

Assim, $\frac{\overline{AB}}{\overline{AE}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{BF}} \Leftrightarrow \frac{6}{2} = \frac{4}{\overline{BF}}$

$\Leftrightarrow \overline{BF} = \frac{2\times 4}{6}$

$\Leftrightarrow \overline{BF} = \frac{4}{3}$

Logo, $A_{[AFDE]} = 4 \text{ cm} \times \frac{4}{3} \text{ cm} = \frac{16}{3}$ cm^2.

18.

18.1. Como a razão entre as áreas é o quadrado da razão de semelhança, temos:

$\frac{A_{[AEFG]}}{A_{[ABCD]}} = r^2$, ou seja, $\frac{\frac{81}{4}}{A_{[ABCD]}} = \left(\frac{3}{2}\right)^2$

$\Leftrightarrow A_{[ABCD]} = \frac{81}{4} : \frac{9}{4}$

$\Leftrightarrow A_{[ABCD]} = \frac{81}{4} \times \frac{4}{9}$

$\Leftrightarrow A_{[ABCD]} = 9$

R.: $A_{[ABCD]} = 9$ u.a.

18.2. Como a razão entre os perímetros é igual à razão de semelhança, temos

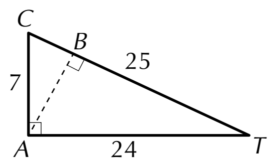
$\frac{P_{[AEFG]}}{P_{[ABCD]}} = r$, ou seja, $\frac{P_{[AEFG]}}{18} = \frac{3}{2}$

$\Leftrightarrow P_{[AEFG]} = \frac{18 \times 3}{2}$

$\Leftrightarrow P = 27$

R.: $P = 27$ u.c.

19.



Os triângulos $[ATC]$ e $[ATB]$ são semelhantes pelo critério AA: $T\hat{A}C = A\hat{B}T = 90^{\circ}$ e $C\hat{T}A = B\hat{T}A$ (ângulo comum).

Assim, $\frac{7}{25} = \frac{\overline{AB}}{24}$.

Logo, $\overline{AB}$ $\frac{7\times 24}{25} = 6{,}72$.

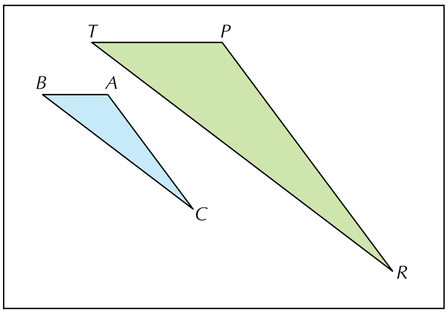
20. Pelo teorema de Tales as retas r e s são paralelas se:

$\frac{8}{6} = \frac{\frac{20}{3}}{5} \Leftrightarrow \frac{4}{3} = \frac{20}{3} \times \frac{1}{5}$

$\Leftrightarrow \frac{4}{3} = \frac{4}{3}$ Verdadeiro.

Logo, a afirmação é verdadeira.

21. Como $\overline{TP} = 2 \times \overline{BA}$, então $\overline{TR} = 2 \times \overline{BC}$ e $\overline{PR} = 2 \times \overline{AC}$.



22.

22.1. Método a homotetia.

22.2. a) $D'\hat{B}'A' = 60^o$, porque é o ângulo correspondente ao ângulo DBA.

b) Se $\overline{DA'} = \frac{1}{3}\ \overline{OA}$, então a razão de semelhança é igual a $\frac{1}{3}$, considerando uma redução.

Como a razão entre as áreas é o quadrado da razão de semelhança, temos:

$\frac{A_{[A'B'C'D']}}{A_{[ABCD]}} = 2^2$, ou seja $\frac{A_{[A'B'C'D']}}{90} = \left(\frac{1}{3}\right)^2$

$\Leftrightarrow A_{[A'B'C'D']} = \frac{1}{9} \times 90$

$\Leftrightarrow A_{[A'B'C'D']} = 10$

R.: $A_{[A'B'C'D']} = 10$ cm^2.

23.

23.1. Os triângulos $[ABC]$ e $[AFE]$ são semelhantes pelo critério AA: $C\hat{B}A = A\hat{E}F = 90^o$ e $B\hat{A}C = F\hat{A}E$ (ângulo comum aos dois triângulos).

23.2. $A_{[BCEF]} = A_{[ABC]} - A_{[AFE]}$

$A_{[ABC]} = \frac{\overline{BC} \times \overline{AB}}{2}$

$A_{[ABC]} = \frac{3 \times 4}{2} = 6$

Como os triângulos são semelhantes, os comprimentos dos lados correspondentes são diretamente proporcionais.

Assim, $\frac{\overline{FE}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{AE}}{\overline{AB}}$, ou seja $\frac{\overline{FE}}{3} = \frac{2{,}5}{4}$

$\Leftrightarrow \overline{FE} = \frac{2{,}5 \times 3}{4}$

$\Leftrightarrow \overline{FE} = 1{,}875$

$A_{[AFE]} = \frac{\overline{AE} \times \overline{FE}}{2}$

$A_{[AFE]} = \frac{2{,}5 \times 1{,}875}{2} = 2{,}34375$

$A_{[BCEF]} = 6 - 2{,}34375 \approx 3{,}66$

R.: $A_{[BCEF]} \approx 3{,}66$ cm^2

24. Como a razão entre as áreas é o quadrado da razão de semelhança, temos $\frac{A_1}{A_2} = r^2$, ou seja,

$\frac{144}{A_2} = 4^2 \Leftrightarrow A_2 = \frac{144}{16} \Leftrightarrow A_2 = 9$

Como $A = \ell^2$, então $A_2 = 9 \Leftrightarrow \ell^2 = 9 \Leftrightarrow \ell = 3$

Logo, $P = 4 \times 3 = 12$.

R.: $P = 12$ cm.

25.

25.1. Os triângulos $[ABC]$ e $[AMN]$ são semelhantes pelo critério AA: $B\hat{A}C = M\hat{A}N$ (ângulo comum) e $C\hat{B}A = N\hat{M}A$ (ângulos agudos de lados paralelos).

25.2. Como os triângulos são semelhantes e a razão das áreas é o quadrado da razão de semelhança, temos $\frac{A_{[ABC]}}{A_{[AMN]}} = r^2$.

Assim, como $A_{[AMN]} = A_{\text{trapézio}}$ e, $A_{[ABC]} = 2 \times A_{[AMN]}$,

então $\frac{2 \times A_{[AMN]}}{A_{[AMN]}} = r^2 \Leftrightarrow r^2 = 2$

$\Leftrightarrow r = \pm\sqrt{2}$.

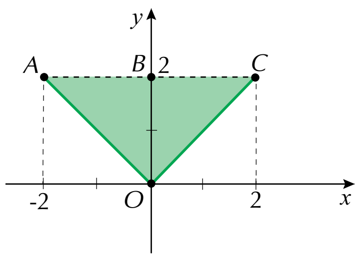
Logo, $r = \sqrt{2}$.

Como os triângulos são semelhantes:

$\frac{\overline{BC}}{\overline{MN}} = r$, ou seja, $\frac{\overline{BC}}{10} = \sqrt{2} \Leftrightarrow \overline{BC} = 10\sqrt{2}$.

R.: $\overline{BC} = 10\sqrt{2}$ cm.

26.



Considerando os pontos E e F da figura, os triângulos $[BCD]$ e $[BFE]$ são semelhantes pelo critério AA: $B\hat{E}F = B\hat{D}C = 90^o$ e $F\hat{B}E = C\hat{B}D$ (ângulo comum).

Então, $\frac{\overline{CD}}{\overline{EF}} = \frac{\overline{DB}}{\overline{EB}}$, ou seja, $\frac{8}{\overline{EF}} = \frac{2}{2 - \overline{DE}}$.

Como $\overline{EF} = 2 \times \overline{DE}$, temos:

$\frac{8}{2\overline{DE}} = \frac{2}{2 - \overline{DE}}$

$\Leftrightarrow 8(2 - \overline{DE}) = 2 \times 2\overline{DE}$

$\Leftrightarrow\ 15 - 8\overline{DE} = 4\overline{DE}$
$\Leftrightarrow\ -8\overline{DE} - 4\overline{DE} = -16$
$\Leftrightarrow\ 12\overline{DE} = 16$
$\Leftrightarrow\ \overline{DE} = \frac{4}{3}$
$\overline{DE} = \frac{4}{3}$ então $\overline{EF} = \frac{4}{3} \times 2 = \frac{8}{3}$
Logo, a opção correta é a [C].

Teorema de Pitágoras

Praticar – páginas 156 a 161

1.
1.1. Pelo teorema de Pitágoras
$x^2 = 7^2 + 10^2$
$\Leftrightarrow\ x^2 = 49 + 100$
$\Leftrightarrow\ x^2 = 149$
$\Leftrightarrow\ x = \pm\sqrt{149}$
$\Leftrightarrow x = \sqrt{149}$
R.: $x = \sqrt{149}$ m
1.2. Pelo teorema de Pitágoras
$x^2 = 4^2 + 4^2$
$\Leftrightarrow\ x^2 = 16 + 16$
$\Leftrightarrow\ x^2 = 32$
$\Leftrightarrow\ x = \pm\sqrt{32}$
$\Leftrightarrow x = \sqrt{32}$
$\Leftrightarrow\ x = 4\sqrt{2}$
R.: $x = 4\sqrt{2}$ m
1.3. Pelo teorema de Pitágoras
$4^2 = x^2 + 1^2$
$\Leftrightarrow\ x^2 = 16 - 1$
$\Leftrightarrow\ x^2 = 15$
$\Leftrightarrow\ x = \pm\sqrt{15}$
$\Leftrightarrow x = \sqrt{15}$
R.: $x = \sqrt{15}$ m
1.4. Pelo teorema de Pitágoras
$(\sqrt{244})^2 = x^2 + 12^2$
$\Leftrightarrow\ x^2 = 244 - 144$
$\Leftrightarrow\ x^2 = 100$
$\Leftrightarrow\ x = \pm\sqrt{100}$
$\Leftrightarrow x = 10$
R.: $x = 10$ dm

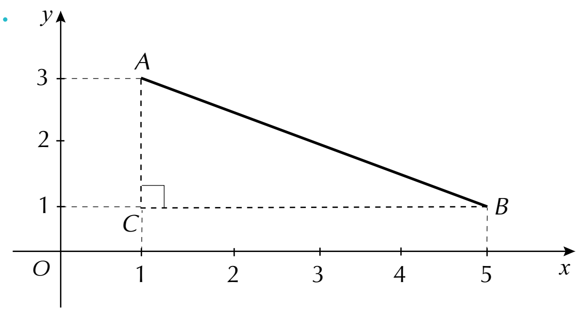
1.5. Pelo teorema de Pitágoras
$8^2 = 5^2 + x^2$
$\Leftrightarrow\ x^2 = 64 - 25$
$\Leftrightarrow\ x^2 = 39$
$\Leftrightarrow\ x = \pm\sqrt{39}$
$\Leftrightarrow x = \sqrt{39}$
R.: $x = \sqrt{39}$ mm
1.6. Pelo teorema de Pitágoras
$6^2 = 5^2 + x^2$
$\Leftrightarrow\ x^2 = 36 - 25$
$\Leftrightarrow\ x^2 = 11$
$\Leftrightarrow\ x = \pm\sqrt{11}$
$\Leftrightarrow x = \sqrt{11}$
R.: $x = \sqrt{11}$ cm

2. A opção [A] não é a correta pois $52^2 = 46^2 + 20^2$
$\Leftrightarrow\ 2704 = 2116 + 400$
$\Leftrightarrow\ 2704 = 2516$
A opção [B] não representa um termo pitagórico porque $52^2 = 18^2 + 46^2$
$\Leftrightarrow\ 2704 = 324 + 2116$
$\Leftrightarrow\ 2704 = 2440$ Falso
A opção [C] é a correta pois $52^2 = 48^2 + 20^2$
$\Leftrightarrow\ 2704 + 400$
$\Leftrightarrow\ 2704 = 2704$ Verdadeiro
A opção [D] não é a correta pois $52^2 = 48^2 + 18^2$
$\Leftrightarrow\ 2704 = 2304 + 324$
$\Leftrightarrow\ 2704 = 2628$ falso
Logo, a opção correta é a [C].

3.
3.1. $D = \sqrt{3^2 + 6^2 + 4^2}$
$\Leftrightarrow\ D = \sqrt{9 + 36 + 16}$
$\Leftrightarrow\ D = \sqrt{61}$ cm
3.2. Pelo teorema de Pitágoras
$d^2 = 6^2 + 3^2$
$\Leftrightarrow\ d^2 = 36 + 9$
$\Leftrightarrow\ d^2 = 45$
$\Leftrightarrow\ d = \pm\sqrt{45}$
$\Leftrightarrow\ d = \sqrt{45}$
$\Leftrightarrow\ d = 3\sqrt{5}$
R.: $d = 3\sqrt{5}$ cm

4. O triângulo é retângulo se verificar o teorema de Pigágoras.
$\overline{AB} = 18$ mm
$\overline{BC} = 8$ cm $= 80$ mm
$\overline{AC} = 0{,}82$ dm $= 82$ mm (lados de maior comprimento)
$\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 \ \Leftrightarrow\ 82^2 = 18^2 + 80^2$
$\Leftrightarrow\ 6724 = 324 + 6400$
$\Leftrightarrow\ 6724 = 6724$ Verdade
R.: O triângulo $[ABC]$ é retângulo.

5.



Pelo teorema de Pitágoras $\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 + \overline{CB}^2$. Assim,

$\overline{AB}^2 = 2^2 + 4^2$
$\Leftrightarrow \overline{AB}^2 = 4 + 6$
$\Leftrightarrow \overline{AB}^2 = 20$
$\Leftrightarrow \overline{AB} = \pm\sqrt{20}$
$\Leftrightarrow \overline{AB} = \sqrt{20}$
$\Leftrightarrow \overline{AB} = 2\sqrt{5}$

6. O triângulo $[ABC]$ é retângulo em B e $\overline{AB} = \overline{BC}$.
Pelo teorema de Pitágoras $\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2$. Assim,

$(\sqrt{50})^2 = x^2 + x^2$
$\Leftrightarrow 50 = 2x^2$
$\Leftrightarrow x^2 = 25$
$\Leftrightarrow x = \pm\sqrt{25}$
$\Leftrightarrow x = 5$

$\overline{BE} = 5$ m e $\overline{BD} = 2 \times 5$ cm $= 10$ cm
$A_{[BEFD]} = 5 \times 10 = 50$
R.: $A_{[BEFD]} = 50$ cm^2

7. $A_{[ACGF]} = 25 \Leftrightarrow \overline{FA} = \sqrt{25} \Leftrightarrow \overline{FA} = 5$ cm
Pelo teorema de Pitágoras,

$\overline{AB}^2 = 5^2 + 12^2$
$\Leftrightarrow \overline{AB}^2 = 25 + 144$
$\Leftrightarrow \overline{AB}^2 = 169$
$\Leftrightarrow \overline{AB} = \pm\sqrt{169}$
$\Leftrightarrow \overline{AB} = \sqrt{169}$
$\Leftrightarrow \overline{AB} = 13$

$P_{[ACBDE]} = 5 + 12 + 3 \times 13 = 56$
R.: $P_{[ACBDE]} = 56$ cm.

8. $A = 225 \Leftrightarrow \ell = \sqrt{225} \Leftrightarrow \ell = 25$
Pelo teorema de Pitágoras,

$d^2 = 15^2 + 15^2$
$\Leftrightarrow d^2 = 2 \times 225$
$\Leftrightarrow d^2 = 450$
$\Leftrightarrow d = \pm\sqrt{450}$
$\Leftrightarrow d = 15\sqrt{2}$

R.: A diagonal do quadrado tem $15\sqrt{2}$ cm.

9. Pelo teorema de Pitágoras, $\overline{CE}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{BC}^2$

$10^2 = \overline{BC}^2 + 8^2$
$\Leftrightarrow \overline{BC}^2 = 100 - 64$
$\Leftrightarrow \overline{BC}^2 = 34$
$\Leftrightarrow \overline{BC} = \pm\sqrt{36}$
$\Leftrightarrow \overline{BC}\ 6$

$A_{[ABCD]} = \overline{BC}^2 = 6^2 = 36$
R.: $A_{[ABCD]} = 36$ cm^2

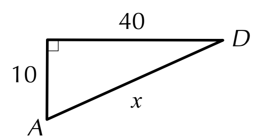
10.

10.1. Sabemos que $P_{[ABCD]} = 13 + \sqrt{41}$.
Então, $13 + \sqrt{41} = \overline{AB} + \overline{BC} + \overline{AC} + \overline{DA}$
$\Leftrightarrow 13 + \sqrt{41} = 5 + 5 + 3 + \overline{DA}$
$\Leftrightarrow \overline{DA} = \sqrt{41}$
R.: $\overline{DA} = \sqrt{41}$ cm

10.2. Como $D\hat{B}A = 90^\circ$, segundo o teorema de Pitágoras, temos $\overline{AD}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BD}^2$.
Assim, $(\sqrt{41})^2 = 5^2 + \overline{BD}^2$
$\Leftrightarrow \overline{BD}^2 = 41 - 25$
$\Leftrightarrow \overline{BD}^2 = 16$
$\Leftrightarrow \overline{BD} = \pm\sqrt{16}$
$\Leftrightarrow \overline{BD} = 4$ cm
O triângulo $[BDC]$ é retângulo se $\overline{BC}^2 + \overline{BD}^2 + \overline{CD}^2$, ou seja, $5^2 = 4^2 + 3^2 \Leftrightarrow 25 = 16 + 9$ verdade

11. O triângulo retângulo é o que verifica o teorema de Pitágoras.
[A] $6^2 = 3^2 + 4^2 \Leftrightarrow 36 = 9 + 16 \Leftrightarrow 36 = 25$ falso
[B] $(\sqrt{90})^2 = 7^2 + 7^2 \Leftrightarrow 90 = 49 + 49 \Leftrightarrow 90 = 98$ falso
[C] $(\sqrt{42})^2 = (\sqrt{5})^2 + (\sqrt{37})^2$
$\Leftrightarrow 42 = 5 + 37$
$\Leftrightarrow 42 = 42$ verdadeiro
[D] $10^2 = 6^2 + 4^2 \Leftrightarrow 100 = 36 + 16 \Leftrightarrow 100 = 52$ falso
Logo, a opção correta é a [C].

12.



Pelo teorem de Pitágoras, $x^2 = 10^2 + 40^2$
$\Leftrightarrow x^2 = 100 + 1600$
$\Leftrightarrow x^2 = 1700$
$\Leftrightarrow x = \pm\sqrt{1700}$
$\Leftrightarrow x = \sqrt{1700}$
$3 \times \sqrt{1700} \approx 124$
R.: Aproximadamente 124 milhões de euros.

13. $A_{[ABCD]} = 225 \Leftrightarrow \overline{CD} = \sqrt{225} \Leftrightarrow \overline{CD} = 15$ cm

Então, $\overline{DE} = 2 \times \overline{CD} = 2 \times 15 = 30$ cm.

Pelo teorema de Pitágoras, $\overline{DE}^2 = \overline{DF}^2 + \overline{EF}^2$.

$30^2 = x^2 + x^2$

$\Leftrightarrow 900 = 2x^2$

$\Leftrightarrow x^2 = \dfrac{900}{2}$

$\Leftrightarrow x^2 = 450$

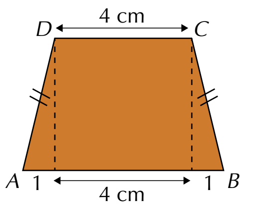
$\Leftrightarrow x = \pm\sqrt{450}$

$\Leftrightarrow x = \sqrt{450}$

Logo, $A = (\sqrt{450})^2 = 450$.

R.: $A = 450$ cm^2.

14.



Pelo teorema de Pitágoras, $4^2 = h^2 + 1^2$

$\Leftrightarrow h^2 = 16 - 1$

$\Leftrightarrow h = \pm\sqrt{15}$

$\Leftrightarrow h = \sqrt{15}$

Área do trapézio

$A = \dfrac{4+6}{2} \times \sqrt{15} = 5\sqrt{15}$ cm^2

15.

15.1. $\overline{AC} = \overline{AD}$ e como o triângulo $[ABC]$ é isósceles, $\overline{AB} = \overline{BC}$.

Pelo teorema de Pitágoras

$\overline{AC}^2 = 3^2 + 3^2$

$\Leftrightarrow \overline{AC}^2 = 9 + 9$

$\Leftrightarrow \overline{AC} = \pm\sqrt{18}$

$\Leftrightarrow \overline{AC} = 3\sqrt{2}$

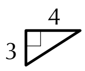
$\overline{AD} = 3\sqrt{2}$

$D \leftrightarrow -1 + 3\sqrt{2}$

15.2. $-1 + 3\sqrt{2} \approx 3{,}24$

$3 < -1\ 3\sqrt{2} < 3{,}4$

16.



Cada degrau forma um triângulo retângulo.

Teorema de Pitágoras,

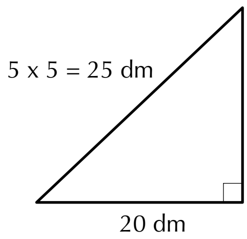
$x^2 = 4^2 + 3^2$

$\Leftrightarrow x^2 = 16 + 9$

$\Leftrightarrow x^2 = 25$

$\Leftrightarrow x = \pm\sqrt{25}$

$\Leftrightarrow x = 5$ cm



Pelo teorema de Pitágoras,

$y^2 = 25^2 - 20^2$

$\Leftrightarrow y^2 = 625 - 400$

$\Leftrightarrow y = \pm\sqrt{225}$

$\Leftrightarrow y = 15$

Como $15 + 3 = 18$ e 18 dm = 1,8 m, a altura do palco é 1,8 m.

17. A área do semicírculo é igual a $\dfrac{\pi r^2}{2}$.

Assim, $\dfrac{\pi r^2}{2} = \dfrac{9\pi}{8}$

$\Leftrightarrow r^2 = \dfrac{18}{8}$

$\Leftrightarrow r^2 = \dfrac{9}{4}$

$\Leftrightarrow r = \sqrt{\dfrac{9}{4}}$

$\Leftrightarrow r = \dfrac{3}{2}$ cm

Então, $\overline{AB} = 2 \times r = 2 \times \dfrac{3}{2} = 3$ cm

Determinemos a altura do triângulo $[ABC]$, pelo teorema de Pitágoras:

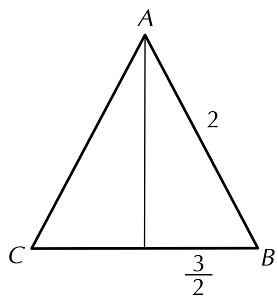
$2^2 = x^2 + \left(\dfrac{3}{2}\right)^2$

$\Leftrightarrow x^2 = 4 - \dfrac{9}{4}$

$\Leftrightarrow x^2 = \dfrac{7}{4}$

$\Leftrightarrow x = \pm\sqrt{\dfrac{7}{4}}$

$\Leftrightarrow x = \dfrac{\sqrt{7}}{2}$



$A_{[ABC]} = \dfrac{b \times h}{2}$

Logo, $A_{[ABC]} = \dfrac{3 \times \dfrac{\sqrt{7}}{2}}{2} = \dfrac{3}{4}\sqrt{7}$

Logo, $A_{total} = A_{semicírculo} + A_{triângulo}$

$A_{total} = \frac{9\pi}{8} + \frac{3}{4}\sqrt{7} \approx 5{,}52$

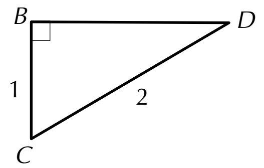
R.: $A = 5{,}52$ cm^2.

18. A área do círculo é 4π cm^2. Logo,

$\pi r^2 = 4\pi$
$\Leftrightarrow r^2 = 4$
$\Leftrightarrow r = \sqrt{4}$
$\Leftrightarrow r = 2$

Então, $\overline{AC} = 2$ cm.

$\overline{CD} = \overline{AC} = 2$ cm e, como B é o ponto médio de $[AC]$, $\overline{BC} = 1$ cm.



Pelo teorema de Pitágoras

$2^2 = 1^2 + \overline{BD}^2$
$\Leftrightarrow \overline{BD}^2 = 4 - 1$
$\Leftrightarrow \overline{BD} = \pm\sqrt{3}$
$\Leftrightarrow \overline{BD} = \sqrt{3}$

R.: $\overline{BD} = \sqrt{3}$ cm.

19. Como $\overline{AD} = \overline{AB}$, então $\overline{AB} = 8$ cm.

Pelo teorema de Pitágoras, $\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2$.

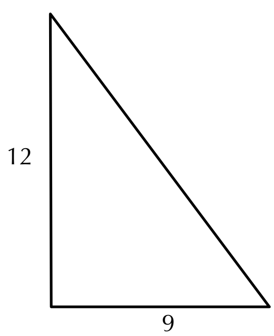
Assim, $\overline{AC}^2 = 8^2 + 15$

$\Leftrightarrow \overline{AC}^2 = 64 + 225$
$\Leftrightarrow \overline{AC} = \pm\sqrt{289}$
$\Leftrightarrow \overline{AC} = 17$

$P_{[ABC]} = 8 + 15 + 17 = 40$

R.: $P_{[ABC]} = 40$ cm.

20.



Pelo teorema de Pitágoras

$x^2 = 9^2 + 12^2$
$\Leftrightarrow x^2 = 81 + 124$
$\Leftrightarrow x^2 = 225$
$\Leftrightarrow x = \pm\sqrt{225}$
$\Leftrightarrow x = \sqrt{225}$
$\Leftrightarrow x = 15$

R.: A corda tem 15 cm.

21.

21.1. Como o triângulo $[ABC]$ é isósceles, $\overline{AB} = \overline{BC}$.

Pelo teorema de Pitágoras,

$\overline{AC}^2 = 3^2 + 3^2$
$\Leftrightarrow \overline{AC}^2 = 18$
$\Leftrightarrow \overline{AC} = \pm\sqrt{18}$
$\Leftrightarrow \overline{AC} = \sqrt{18}$

Como o triângulo $[ACD]$ é isósceles, $\overline{AC} = \overline{CD}$, e, pelo teorema de Pitágoras, $\overline{AD}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{DC}^2$.

$\overline{AD}^2 = (\sqrt{18})^2 + (\sqrt{18})^2$
$\Leftrightarrow \overline{AD}^2 = 36$
$\Leftrightarrow \overline{AD} = \sqrt{36}$
$\Leftrightarrow \overline{AD} = 6$

Como $\overline{AD} = \overline{AE} = 6$, então a abcissa do ponto E é -6 é a abcissa do ponto F é 6.

21.2. $A_{[ABC]} = \frac{\overline{AB} \times \overline{BC}}{2}$

$A_{[ABC]} = \frac{3 \times 3}{2} = \frac{9}{2}$

$A_{[ABC]} = \frac{\sqrt{18} \times \sqrt{18}}{2} = \frac{18}{2} = 9$

Logo, $A_{[ABCD]} = A_{[ABC]} + A_{[ACD]}$, ou seja,

$A_{[ABCD]} = \frac{9}{2} + 9 = \frac{27}{2} = 13{,}5$

R: $A_{[ABCD]} = 13{,}5$ u.a.

22. Pelo teorema de Pitágoras, $\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2$.

Assim, $\overline{AC}^2 = 16^2 + 8^2$

$\Leftrightarrow \overline{AC}^2 = 256 + 64$
$\Leftrightarrow \overline{AC}^2 = 320$
$\Leftrightarrow \overline{AC} = \pm\sqrt{320}$
$\Leftrightarrow \overline{AC} = \sqrt{320}$
$\Leftrightarrow \overline{AC} = 8\sqrt{5}$

320	2
160	2
80	2
40	2
20	2
10	2
5	5
1	

Área do semicírculo, cujo raio é $r = \frac{8\sqrt{5}}{2} = 4\sqrt{5}$:

$\frac{\pi \times r^2}{2} = \frac{\pi \times (4\sqrt{5})^2}{2} = \frac{80\pi}{2} = 40\pi$

Área do triângulo $[ADC]$:

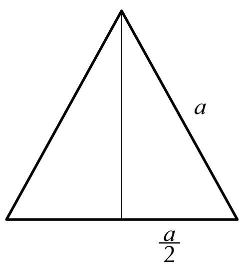
$A = \frac{b \times h}{2}$

$A = \dfrac{8 \times 16}{2} = \dfrac{128}{2} = 64$

Logo, $A_{\text{colorida}} = A_{\text{semicírculo}} - A_{[ADC]}$.
$A_{\text{colorida}} = (40\pi - 64)\text{ cm}^2 \approx 61{,}7\text{ cm}^2$

23. $V = \overline{AB} \times \overline{BC} \times \overline{BF}$
$\overline{AB} = \overline{DC} = 4$ cm
Pelo teorema de Pitágoras, $\overline{HB}^2 = \overline{HF}^2 + \overline{BF}^2$.
Assim, $6^2 = \overline{HF}^2 + (\sqrt{11})^2$
$\Leftrightarrow\ \overline{HF}^2 = 36 - 11$
$\Leftrightarrow\ \overline{HF}^2 = 25$
$\Leftrightarrow\ \overline{HF} = \pm\sqrt{25}$
$\Leftrightarrow\ \overline{HF} = \sqrt{25}$
$\Leftrightarrow\ \overline{HF} = 5$
Pelo teorema de Pitágoras, $\overline{HF}^2 = \overline{HG}^2 + \overline{FG}^2$.
Assim, $5^2 = 4^2 + \overline{FG}^2$
$\Leftrightarrow\ \overline{FG}^2 = 25 - 16$
$\Leftrightarrow\ \overline{FG}^2 = 9$
$\Leftrightarrow\ \overline{FG} = \pm\sqrt{9}$
$\Leftrightarrow\ \overline{FG} = 3$
Como $\overline{BC} = \overline{FG}$, então $V = 4 \times \sqrt{11} \times 3 = 12\sqrt{11}\text{ cm}^3$.

24. Seja a a medida do lado do triângulo.
Comemos por determinar a altrua do triângulo recorrendo ao teorema de Pitágoras.



$x^2 = a^2 - \left(\dfrac{a}{2}\right)^2$

$\Leftrightarrow\ x^2 = \dfrac{4}{4}a^2 - \dfrac{a^2}{4}$

$\Leftrightarrow\ x^2 = \dfrac{3}{4}a^2$

$\Leftrightarrow\ x = \pm\sqrt{\dfrac{3}{4}a^2}$

$\Leftrightarrow\ x = \dfrac{\sqrt{3}}{2}a$

Como $A = 5\sqrt{75}$ e $A = \dfrac{b \times h}{2}$, temos:

$\dfrac{\frac{\sqrt{3}}{2}a \times a}{2} = 5\sqrt{75}$

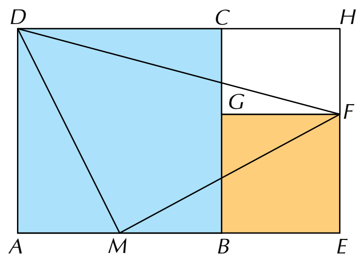
$\Leftrightarrow\ \dfrac{\sqrt{3}}{2}a^2 = 10\sqrt{75}$

$\Leftrightarrow\ a^2 = \dfrac{20\sqrt{75}}{\sqrt{3}}$

$\Leftrightarrow\ a^2 = 20\sqrt{\dfrac{75}{3}}$

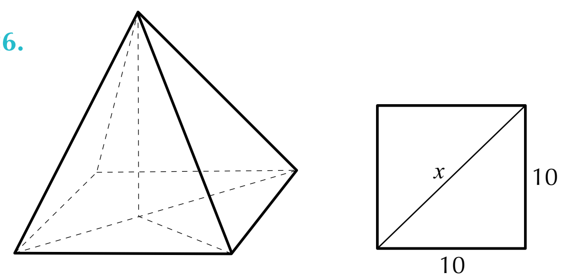
$\Leftrightarrow\ a^2 = 20\sqrt{25}$
$\Leftrightarrow\ a^2 = 20 \times 5$
$\Leftrightarrow\ a^2 = 100$
$\Leftrightarrow\ a = \pm\sqrt{100}$
$\Leftrightarrow\ a = 10$ cm
Logo, $P = 3 \times 10 = 30$
R.: $P = 30$ cm

25. Como a área do quadrado $[ABCD]$ é 144 cm^2, então $\overline{AB} = \sqrt{144} = 12$ cm.
Como a área do quadrado $[BEFG]$ é 81 cm^2, então $\overline{BE} = \sqrt{81} = 9$ cm.
Vamos determinar $\overline{DM}$ e $\overline{MF}$, utilizando o teorema de Pitágoras.
$\overline{DM}^2 = \overline{AM}^2 + \overline{AD}^2$
$\Leftrightarrow\ \overline{DM}^2 = 6^2 + 12^2$
$\Leftrightarrow\ \overline{DM}^2 = \sqrt{180}$ e
$\overline{MF}^2 = \overline{FE}^2 + \overline{ME}^2$
$\Leftrightarrow\ \overline{MF}^2 = 9^2 + (9 + 6)^2$
$\Leftrightarrow\ \overline{MF}^2 = 306$
$\Leftrightarrow\ \overline{MF} = \sqrt{306}$
Consideremos a figura:



$[HDF]$ é um triângulo retângulo.
Então, $\overline{DF}^2 = \overline{HD}^2 + \overline{HF}^2$, ou seja,
$\overline{DF}^2 = (12 - 9)^2 + (12 + 9)^2$
$\Leftrightarrow\ \overline{DF}^2 = 9 + 441$
$\Leftrightarrow\ \overline{DF} = \sqrt{450}$
Vamos verificar se o triângulo $[MDF]$ é retângulo.
$\overline{DF}^2 = \overline{DM}^2 + \overline{MF}^2$, ou seja,
$(\sqrt{450})^2 = (\sqrt{180})^2 + (\sqrt{306})^2$
$\Leftrightarrow\ 450 = 486$ Falso.
Logo, como o triângulo $[DMF]$ não é retângulo, o ângulo FMD não é reto.

26.

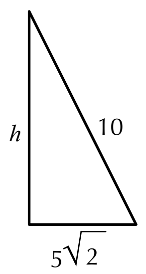


Comecemos por determinar a diagonal da base.
Pelo teorema de Pitágoras:

$x^2 = 10^2 + 10^2$
$\Leftrightarrow x^2 = 200$
$\Leftrightarrow x = \pm\sqrt{200}$
$\Leftrightarrow x = \sqrt{200}$
$\Leftrightarrow x = 10\sqrt{2}$

Para determinar a altura da pirâmide, recorremos novamente ao eorema de Pitágoras:

$10^2 = h^2 + (5\sqrt{2})^2$
$\Leftrightarrow h^2 = 100 - 50$
$\Leftrightarrow h^2 = 50$
$\Leftrightarrow h = \pm\sqrt{50}$
$\Leftrightarrow h = 5\sqrt{2}$



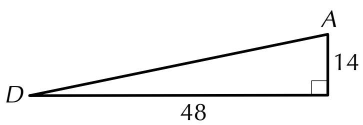
$$V_{\text{pirâmide}} = \frac{1}{3} A_{\text{base}} \times h$$

$$V_{\text{pirâmide}} = \frac{1}{3} \times 10^2 + 5\sqrt{2} =$$

$$= \frac{500}{3}\sqrt{2} \approx 235{,}7$$

R.: $V = 235{,}7$ u.v.

27.



Utilizando o teorema de Pitágoras, temos:

$\overline{AD}^2 = 48^2 + 14^2 \Leftrightarrow \overline{AD}^2 = 2500$
$\Leftrightarrow \overline{AD} = \pm 50$
$\Leftrightarrow \overline{AD} = 50$

Como $\overline{DC} = 10$ cm e $\overline{AB} = 24$ cm, então
$\overline{CB} = 50 - 24 - 10 = 16$
R.: $\overline{CB} = 16$ cm.

28. $\overline{AD} + \overline{AC} = \overline{DB} + \overline{BC}$
$\Leftrightarrow \overline{AC} = 3 + \overline{BC}$
$\Leftrightarrow \overline{AC} = 1 + \overline{BC}$

Utilizando o teorema de Pitágoras, temos:
$\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2$, ou seja,
$(1 + \overline{BC})^2 = 5^2 + \overline{BC}^2$
$\Leftrightarrow 1 + \overline{BC} + \overline{BC}^2 = 25 + \overline{BC}^2$
$\Leftrightarrow 2\overline{BC} = 25 - 1$
$\Leftrightarrow \overline{BC} = 12$
$\overline{AC} = 1 + 12 = 13$ cm
$P_{[ABC]} = \overline{AB} + \overline{BC} + \overline{AC} = 5 + 12 + 13 = 30$
R.: $P_{[ABC]} = 30$ cm

29. Como $A_{[AGD]} = 6$ cm^2, então $\dfrac{\overline{AB} \times \overline{GD}}{2} = 6$, ou seja, $\dfrac{3 \times \overline{GD}}{2} = 6$

$\Leftrightarrow \overline{GD} = \dfrac{6 \times 2}{3}$

$\Leftrightarrow \overline{GD} = 4$ cm

Pelo teorema de Pitágoras $\overline{AD}^2 = \overline{AG}^2 + \overline{GD}^2$, isto é,
$\overline{AD}^2 = 3^2 + 4^2$
$\Leftrightarrow \overline{AD}^2 = 9 + 16$
$\Leftrightarrow \overline{AD} = \pm\sqrt{25}$
$\Leftrightarrow \overline{AD} = 5$ cm
Então, $\overline{BC} = 5$ cm.

Pelo teorema de Pitágoras $\overline{BC}^2 = \overline{BH}^2 + \overline{HC}^2$, ou seja,

$5^2 = \overline{BH}^2 + \left(\dfrac{\sqrt{91}}{2}\right)^2$

$\Leftrightarrow \overline{BH}^2 = 25 - \dfrac{91}{4}$

$\Leftrightarrow \overline{BH}^2 = \dfrac{9}{4}$

$\Leftrightarrow \overline{BH} = \pm\sqrt{\dfrac{9}{4}}$

$\Leftrightarrow \overline{BH} = \dfrac{3}{2}$

Assim, $A_{[BHC]} = \dfrac{\overline{BH} \times \overline{HC}}{2}$

$$A_{[BHC]} = \frac{\frac{3}{2} \times \frac{\sqrt{91}}{2}}{2} = \frac{3}{8}\sqrt{91}$$

$A_{[ABCD]} = 5^2 = 25$
Logo, $A_{\text{laranja}} = A_{[ABCD]} - A_{[AGD]} - A_{[BHC]} =$

$A_{\text{laranja}} = 25 - 6 - \dfrac{3}{8}\sqrt{91} \approx 15{,}4$

R.: $A = 15{,}4$ cm^2.

30. $A_{\text{zona branca}} = A_{\text{semicircunferência}} - A_{[ABC]}$

$$A_{\text{zona branca}} = \frac{\pi \times \left(\frac{\overline{AB}}{2}\right)^2}{2} - \frac{\overline{AC} \times \overline{BC}}{2} =$$

$$= \frac{\pi \overline{AB}^2}{8} - \frac{\overline{AC} \times \overline{BC}}{2}$$

Logo,

$$A_{\text{lúnulas}} = \frac{\pi \times \left(\frac{\overline{AC}}{2}\right)^2}{2} + \frac{\pi \times \left(\frac{\overline{BC}}{2}\right)^2}{2} -$$

$$-\left(\frac{\pi\,\overline{AB}^2}{8}-\frac{\overline{AC}\times\overline{BC}}{2}\right)=$$

$$=\frac{\pi\,\overline{AC}^2}{8}+\frac{\pi\,\overline{BC}^2}{8}-\frac{\pi\,\overline{AB}^2}{8}+\frac{\overline{AC}\times\overline{BC}}{2}$$

Como $\overline{AB}^2=\overline{AC}^2+\overline{BC}^2$, temos:

$$A_{\text{lúnulas}}=\frac{\pi}{8}\underbrace{\left(\overline{AC}^2+\overline{BC}^2-\overline{AB}^2\right)}_{0}+\frac{\overline{AC}\times\overline{BC}}{2}=$$

$$=\frac{\overline{AC}\times\overline{BC}}{2}$$

Por outro lado, $A_{[ABC]}=\dfrac{b\times h}{2}$, ou seja,

$$A_{[ABC]}=\frac{\overline{AC}\times\overline{BC}}{2}.$$

Logo, $A_{[ABC]}=A_{\text{lúnulas}}$.

Vetores, translações e isometrias

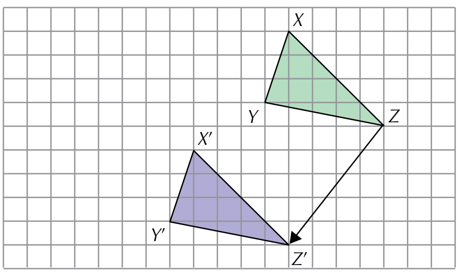
Praticar – páginas 166 a 171

1. *A*, *B* e *D* representam isometrias.
C não representa uma isometria porque não conserva o tamanho da figura.

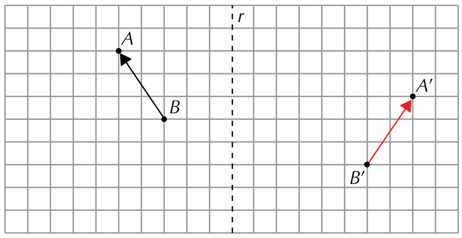
2.
2.1. Reflexão.
2.2. Rotação.
2.3. Reflexão deslizante.
2.4. Translação.

3. A opção correta é a [C].

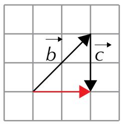
4.



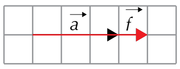
5.



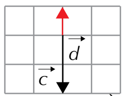
6.
6.1. a) $\vec{e}$ e $\vec{f}$
b) $\vec{a}$
c) $\vec{a}$ e $\vec{e}$
6.2. $\vec{a}$, $\vec{f}$ e $\vec{e}$
$\vec{c}$ e $\vec{d}$
$\vec{b}$ e $\vec{h}$
6.3. $\vec{a}$ e $\vec{e}$ são simétricos porque $\vec{a}+\vec{e}=\vec{0}$
6.4. a)



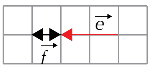
b)



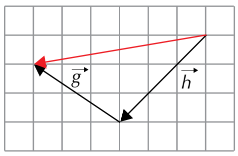
c)



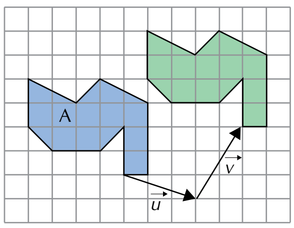
d) $\vec{a}+\vec{e}=\vec{0}$
e)



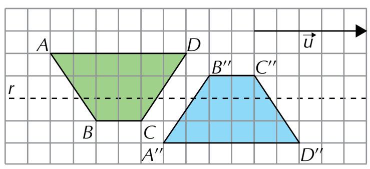
f)



7.



8.

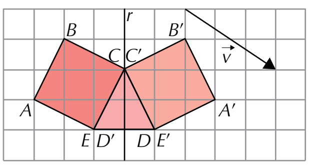


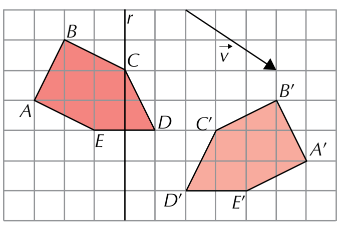
9. A. A afirmação é falsa.
Para além de terem o mesmo comprimento e a mesma direção, os segmentos de reta têm de ter o mesmo comprimento, para serem iguais.
Corrigindo a afirmação:
"Dois segmentos de reta orientados com a mesma direção, o mesmo comprimento e o mesmo sentido são equipolentes".
B. A afirmação é verdadeira.
C. A afirmação é verdadeira.

10. A opção correta é a [B], porque o vetor soma tem que ser vertical com sentido de baixo para cima.

11.
11.1. a) Por exemplo, [*C*, *E*] e [*B*, *I*].
b) Por exemplo, [*A*, *B*] e [*D*, *F*].
c) Por exemplo, [*A*, *B*] e [*D*, *B*].
d) Por exemplo, [*C*, *E*] e [*B*, *F*].
e) Por exemplo, [*H*, *E*] e [*G*, *I*].
11.2. a) $\overrightarrow{BE} + \overrightarrow{ED} + \overrightarrow{BD}$
b) $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{EJ} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CI} = \overrightarrow{AI}$
c) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DB} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{0}$
d) $H + \overrightarrow{HJ} = J$
e) $I + \overrightarrow{HE} = I + \overrightarrow{IG} = G$
f) $B - \overrightarrow{DA} = B + \overrightarrow{AD} = B + \overrightarrow{BD} = F$
11.3. Os ângulos são geometricamente iguais, porque a translação conserva as amplitudes dos ângulos.

12.
12.1. Ponto *A*.
12.2. Ponto *B*.
12.3. [*FG*]
12.4. [*CDE*]
12.5. [*HG*]
12.6. [*FG*]

13.
13.1. a)


b)


13.2. A afirmação é verdadeira.

14.
14.1. a) Por exemplo, $\overrightarrow{AD}$ e $\overrightarrow{BC}$.
b) Por exemplo, $\overrightarrow{AE}$ e $\overrightarrow{CA}$.
c) Por exemplo, $\overrightarrow{AD}$ e $\overrightarrow{AB}$.
d) Por exemplo, $\overrightarrow{AD}$ e $\overrightarrow{CB}$.
e) Por exemplo, $\overrightarrow{AD}$ e $\overrightarrow{BC}$.
f) Por exemplo, $\overrightarrow{AD}$ e $\overrightarrow{CB}$.
14.2. A. A afirmação é verdadeira.
$\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{BC}$
B. A afirmação é falsa.
$\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BD}$ e $\overrightarrow{BD} \neq \overrightarrow{AC}$
C. A afirmação é falsa.
$\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{BA}$ e $\overrightarrow{BA} \neq \overrightarrow{AB}$
D. A afirmação é verdadeira.
$\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{0}$

15.
15.1. O quadrilátero [*IKQP*].
15.2. O quadrilátero [*QOUV*].
15.3. $\vec{v} = \overrightarrow{IL}$.
15.4. Como a rotação conserva os comprimentos dos segmentos de reta e as amplitudes dos ângulos, $A_{[A'C'I'H']} = A_{[ACIH]}$. Assim,

$$A_{[A'C'I'H']} = \frac{\overline{AC} + \overline{HI}}{2} \times \overline{CI}$$

$$A_{[A'C'I'H']} = \frac{2+1}{2} \times 1 = \frac{3}{2} \text{ u.a.}$$

16.
16.1. a) $\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{SR} = \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{DA}$
b) $\overrightarrow{FH} + \overrightarrow{JT} = \overrightarrow{FH} + \overrightarrow{HR} = \overrightarrow{FR}$
c) $\overrightarrow{RQ} + \overrightarrow{DN} = \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CM} = \overrightarrow{DM}$
d) $\overrightarrow{IG} + \overrightarrow{NO} = \overrightarrow{IG} + \overrightarrow{GH} = \overrightarrow{IH}$
e) $\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{RF} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{FR} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CO} = \overrightarrow{0}$
f) $\overrightarrow{JH} - \overrightarrow{QG} = \overrightarrow{JH} + \overrightarrow{GQ} = \overrightarrow{JH} + \overrightarrow{HR} = \overrightarrow{JR}$
16.2. a) *I*
b) *S*
c) *S*
d) *G*
16.3. [*RT*]
16.4. [*MHG*]
16.5. Por exemplo, reflexão de eixo *RC*. Esta isometria não é única, podia ser uma rotação ou uma reflexão deslizante.

17.

17.1. $A'(1, 1)$, $B'(-4, -1)$, $C'(-4, 5)$ e $D'(1, 4)$.

17.2. $A''(-1, -2)$

18.

18.1. $A'(-4, 1)$, $B'(-1, -3)$, $C'(-2, -5)$ e $D'(-5, -4)$.

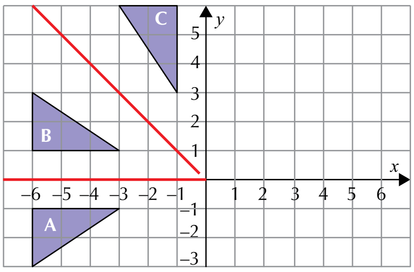
18.2. a) $A'(-1, 1)$, $B'(2, 3)$, $C'(1, 5)$ e $D'(-2, 4)$.

b) $A'(-1, -3)$, $B'(2, -1)$, $C'(1, 1)$ e $D'(-2, 0)$.

18.3. $C'(2, 4)$.

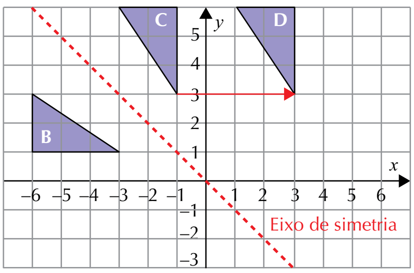
19.

19.1. A e C.



19.2. Sim, o triângulo E, rotação de centro O e de amplitude 180º.

19.3. D



Geometria euclidiana.
Paralelismo e perpendicularidade. Volumes

Praticar – páginas 174 a 179

1. A opção [A] é falsa porque as retas DF e AB são não complanares.

A opção [B] é verdadeira, porque a reta CD é paralela à reta AF e a reta AF pertence ao plano ABE.

A opção [C] é falsa, porque os planos CBE e CAF são concorrentes oblíquos.

A opção [D] é falsa, porque as retas AB e BE são perpendiculares.

Logo, a opção correta é a [B].

2.

2.1. a) Por exemplo, EF.

b) Por exemplo, AB.

c) Por exemplo, HA e GF.

d) Por exemplo, HP e HA.

e) Por exemplo, ABG e EFC.

f) Por exemplo, ABG e ABC.

g) Por exemplo, HGP e ABC.

2.2. A afirmação é falsa porque as retas HG e BC são não complanares.

3.

3.1. $V_{cubo} = a^3$

$V_{cubo} = 3^3 = 27$ u.v.

3.2. $V_{paralelepípedo} = Ab \times h$

$V_{paralelepípedo} = 2 \times 3 \times 4 = 24.$ u.v

3.3. $V_{prisma} = Ab \times h$

$V_{prisma} = \frac{4 \times 3}{2} \times 5 = 30.$ u.v

3.4. $V_{pirâmide} = \frac{1}{3} \times Ab \times h$

$V_{pirâmide} = \frac{1}{3} \times 4 \times 4 \times 3 = 16$ u.v.

3.5. $V_{cone} = \frac{1}{3} \times Ab \times h = \frac{1}{3} \times \pi r^2 \times h$

$V_{pirâmide} = \frac{1}{3} \times \pi \times 3^2 \times 9 = 27\pi$ u.v.

3.6. $V_{esfera} = \frac{4}{3} \times \pi r^3$

$V_{esfera} = \frac{4}{3} \times \pi \times 2{,}5^3 = \frac{125}{6}\pi$ u.v.

4.

4.1. $A = 2 \times A_{base}$ + área faces laterais

$A = 2 \times 5^2 + 4 \times 5^2 = 150$ u.a.

4.2. $A = 2 \times A_{base}$ + área faces laterais

$A = 2 \times 4 \times 3 + 2 \times 3 \times 1 + 2 \times 4 \times 1 = 38$ u.a.

4.3. $A = 2 \times A_{base}$ + área faces laterais

Pelo teorema de Pitágoras:

$h^2 = 3^2 + 4^2$

$\Leftrightarrow h^2 = 9 + 16$

$\Leftrightarrow h = \pm\sqrt{25}$

$\Leftrightarrow h = 5$

Logo, $A = 2 \times \frac{3 \times 4}{2} + 7 \times 5 + 4 \times 7 + 7 \times 3 = 96$ u.a.

4.4. $A = 4 \times \pi \times r^2$

$A = 4 \times \pi \times 6^2 = 144\ \pi$ u.a.

4.5. $A = A_{base}$ + área da superfície lateral =
$= \pi r^2 + \pi rg$

Pelo teorema de Pitágoras:

$g^2 = 8^2 + 6^2$
$\Leftrightarrow g^2 = 64 + 36$
$\Leftrightarrow g^2 = 100$
$\Leftrightarrow g = \pm\sqrt{100}$
$\Leftrightarrow g = 10$

Logo, $A = \pi \times 6^2 + \pi \times 6 \times 10 =$
$= 36\,\pi + 60\pi =$
$= 96\pi$ u.a.

4.6. $A = 2 \times A_{base}$ + Área lateral =
$= 2 \times \pi r^2 + h \times 2\pi r$

$A = 2\pi \times 5^2 + 14 \times 2\pi \times 5$
$= 50\,\pi + 140\pi =$
$= 190\pi$ u.a.

5.

5.1. a) Por exemplo, *IE*.

b) Por exemplo, *IE*.

5.2. $V_{[ABCDIGFJ]} = V_{[ABCDEFGH]} + V_{[EFGHIJ]} =$
$= \overline{AB} \times \overline{BC} \times \overline{AE} + A_{[EFJ]} \times \overline{FG}$

Logo, $V_{[ABCDIGFJ]} = 6 \times 9 \times 4 + \dfrac{6 \times 4}{2} \times 9 =$
$= 216 + 108 =$
$= 324$

R.: $V = 324$ cm^3.

6.

6.1. $V_{cilindro} = Ab \times$ altura =
$= \pi \times r^2 \times h$

Como $d = 50$ cm, então $r = 25$ cm.

Assim, $V_{cilindro} = 12\,500\pi$

R.: $V = 12\,500\pi$ cm^3.

6.2. $A_{lateral} = 2 \times \pi \times r \times$ altrua

$A_{lateral} = 2 \times \pi \times 25 \times 20 =$
$= 1000\pi$

R.: $A = 1000\pi$ cm^3.

7.

7.1. $V_{pirâmide} = \dfrac{1}{3} Ab \times$ altura

$V_{pirâmide} = \dfrac{1}{3} \times 5^2 \times 3 = 25$

R.: $V = 25$ cm^3.

7.2. a) Por exemplo, *DC* e *DA*.

b) Por exemplo, *ADE* e *DCE*.

8. $V_{observatório} = V_{cilindro} + V_{semiesfera} =$
$= \pi \times r^2 \times h + \dfrac{\frac{4}{3}\pi r^3}{2}$

$V_{observatório} = \pi \times 6^2 \times 18 + \left(\dfrac{4}{3}\pi \times 6^3\right) \times \dfrac{1}{2} =$
$= 648\pi + 144\pi =$
$= 792\pi \approx 2488$

R.: $V \approx 2488$ m^3.

9. $A_{esfera} = 4 \times \pi \times r^2$

Assim, $4\pi r^2 = 1600\pi \Leftrightarrow 4r^2 = 1600$
$\Leftrightarrow r^2 = \dfrac{1600}{4}$
$\Leftrightarrow r^2 = 400$
$\Leftrightarrow r = \pm\sqrt{400}$
$\Leftrightarrow r = 20$

20 cm = 2 dm

$V_{esfera} = \dfrac{4}{3}\pi r^3$

$V_{esfera} = \dfrac{4}{3}\pi \times 2^3 \approx 34$

34 dm^3 = 34 litros.

R.: 34 litros.

10.

10.1. A opção [A] é falsa, porque os planos *ABF* e *ADH* são perpendiculares.

10.2. A opção [B] é falsa, porque a reta *DI* é concorrente oblíqua ao plano *BFG*.

10.3. A opção [C] é verdadeira, porque a reta *EF* está contida no plano *ABF* e *EF* // *GH*.

10.4. A opção [D] é falsa, porque as retas *AJ* e *GH* são não complanares.

Logo a opção correta é a [C].

10.2. $V_{[HJEFGI]} = \dfrac{\overline{HE} \times \overline{BF}}{2} \times \overline{HG}$

$V_{[HJEFGI]} = \dfrac{12 \times 3}{2} \times 12 = 216$

$V_{[ADHEBFGC]} = 12 \times 12 \times 3 = 432$ cm^3

Logo, $V_{sólido\ verde} = 432 - 216 = 216$

R.: $V = 216$ cm^3.

11.

11.1. a) Por exemplo, *IJK* e *HGJ*.

b) Por exemplo, *OC*.

11.2. $V_{[ABCDFEHG]} = 10 \times 3 \times 3 = 90$

$V_{[ABKLJI]} = \dfrac{2 \times 2}{2} \times 3 = 6$

$V_{\text{contentor}} = 90 - 6 \times 2 = 78$

$78 \text{ m}^3 = 78\,000 \text{ dm}^3 = 78\,000$ litros

R.: 78 000 litros.

12. Como $V_{\text{cubo}} = 512 \text{ cm}^3$ e $V_{\text{cubo}} = a^3$, então $a = \sqrt[3]{512} = 8$ cm.

Logo, o diâmetro da esfera é 8 cm e o seu raio é $\frac{8}{2} = 4$ cm.

Assim, $A_{\text{superfície esférica}} = 4 \times \pi \times r^2$

$A_{\text{superfície esférica}} = 4 \times \pi \times 4^2 = 64\pi$

R.: $A = 64\pi \text{ cm}^2$

13.

13.1. a) Por exemplo, *GH*.

b) Por exemplo, *ACE* e *ABC*.

c) Por exemplo, *AB* e *FE*.

13.2. *ACE* e *HEF*

13.3. $V_{\text{prisma}} = \overline{AD} \times \overline{DC} \times \overline{DE}$

$$V_{\text{pirâmide}} = \frac{1}{3} \times \frac{\overline{AD} \times \overline{DC}}{2} \times \overline{DE} = \frac{\overline{AD} \times \overline{DC} \times \overline{DE}}{6}$$

Como o volume do prisma é 80, então

$$V_{\text{pirâmide}} = \frac{80}{6} = \frac{40}{3}$$

R.: $V = \frac{40}{3}$ u.v.

14.

14.1. a) Não complanares.

b) Paralelas.

14.2. Ponto *I*.

14.3. $V_{\text{cubo}} = \overline{AH}^3 = 7^3 = 343$

$$V_{\text{paralelepípedo}} = \frac{2}{7} V_{\text{cubo}}$$

$$V_{\text{paralelepípedo}} = \frac{2}{7} \times 343 = 98$$

Por outro lado $V_{\text{paralelepípedo}} = \overline{BM} \times \overline{MN} \times \overline{BL}$, ou seja,

$98 = \overline{BM} \times \overline{MN} \times \overline{BL} \Leftrightarrow 98 = 7 \times 7 \times \overline{BL}$

$\Leftrightarrow \overline{BL} = 2$

14.4. Como $V_{\text{pirâmide}} = V_{\text{cubo}}$, então

$$\frac{1}{3} Ab \times h = 343$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{3} \times 7^2 \times h = 343$$

$$\Leftrightarrow h = \frac{343 \times 3}{49}$$

$$\Leftrightarrow h = 21$$

R.: A pirâmide tem 21 u.c. de altura.

15. $$\frac{V'}{V} = \frac{\frac{1}{3} Ab_1 \times h_1}{Ab_2 \times h_2}$$

Sabemos que os sólidos têm bases iguais, logo, $Ab_1 = Ab_2$.

Por outro lado, $h_1 = \frac{1}{5} h_2$, ou seja, $h_2 = 5h_1$.

Assim, $\frac{V'}{V} = \frac{1}{3} \times \frac{h_1}{5h_1} = \frac{1}{15}$

16.

16.1. a) Reta *FG*.

b) Reta *HC*.

c) Por exemplo, *FA* e *EH*.

16.2. Sabemos que $V_{\text{sólido}} = 24$.

Sendo *a* a medida da aresta do cubo, temos:

$$a^3 + \frac{1}{3} a^2 \times a = 24$$

$$\Leftrightarrow a^3 + \frac{a^3}{3} = 24$$

$$\Leftrightarrow a^3 = \frac{4}{3} a^3 = 24$$

$$\Leftrightarrow a^3 = \frac{24 \times 3}{4}$$

$$\Leftrightarrow a^3 = 18$$

$$\Leftrightarrow a = \sqrt[3]{18}$$

R.: $a = \sqrt[3]{18}$ cm.

17.

17.1.

Pares de retas	**Chave**
BC e *AD*	
HD e *BP*	Não complanares
AB e *GH*	Paralelas
BE e *CH*	Perpendiculares
BE e *GD*	Concorrentes não perpendiculares
FC e *FG*	

17.2.

Pares (reta, plano)	**Chave**
EF e *DCF*	
AB e *CGH*	Reta contida no plano
AD e *ABP*	Reta estritamente paralela ao plano
BC e *AEH*	Reta perpendicular ao plano
FB e *ADC*	Reta concorrente com o plano, não perpendicular
AH e *BCG*	

17.3. Sabemos que $V_{\text{sólido}} = V_{\text{pirâmide}} + V_{\text{cone}}$ e que $V_{\text{pirâmide}} = V_{\text{cone}} = 100 \text{ cm}^3$. Então, sendo *a* a medida da aresta do cubo, $a = \sqrt[3]{100}$ cm.

Assim, $V_{\text{pirâmide}} = 100 \Leftrightarrow \frac{1}{3} A_{\text{base}} \times h = 100$

ou seja, $\frac{1}{3} \sqrt[3]{100} \times \sqrt[3]{100} \times h = 100$

$\Leftrightarrow (\sqrt[3]{100})^2\ h = 300$

$\Leftrightarrow h = \frac{300}{(\sqrt[3]{100})^2}$

$\Leftrightarrow h \approx 12,92$

R.: $\approx$ 12,92 cm

18.

18.1. $V_{\text{cone}} = \frac{1}{3} Ab \times \text{altura}$

$= \frac{1}{3} \pi \frac{1}{3} r^2 \frac{1}{3} 15$

$V_{\text{cone}} = \frac{1}{3} \pi \frac{1}{3} 5^2 \frac{1}{3} 15 = 125\pi$

R.: $V = 125\pi$ cm^3

18.2. a) $V_{\text{esfera}} = \frac{4}{3} \pi r^3$

$= \frac{4}{3} \times \pi \times 2^3$

$V_{\text{esfera}} = \frac{32}{3} \pi$

Logo, $V_{\text{duas esferas}} = 2 \times \frac{32}{3} \pi = \frac{64}{3} \pi$

R.: $V = \frac{64}{3} \pi$ cm^3.

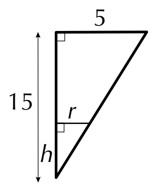
b) Como o volume das duas esferas é igual a $\frac{64}{3} \pi$ e o volume do cone é igual a $\frac{1}{3} \pi \times r^2 \times \text{altura}$, temos:

$\frac{15}{h} = \frac{5}{r} \Leftrightarrow r = \frac{5 \times h}{15}$

$\Leftrightarrow r = \frac{h}{3}$

$\frac{1}{3} \pi \times r^2 \times \text{altura} = \frac{64}{3} \pi$

$\Leftrightarrow r^2 \times h = 64$



Logo, $\left(\frac{h}{3}\right)^2 \times h = 64$

$\Leftrightarrow h^3 = 64 \times 9$

$\Leftrightarrow h = \sqrt[3]{64 \times 9} = \sqrt[3]{9}$

19.

19.1. $V_{\text{líquido}} = \text{Área base} \times \text{altura}$

$= \pi \times r^2 \times h$

$V_{\text{líquido}} = \pi \times 8^2 \times 1,5 = 98\ \pi$

R.: $V = 96\pi$ cm^3.

19.2. Como a altura do líquido duplicou, passou de 1,5 cm a 3 cm.

Assim, como $V_{\text{cilindro}} = Ab \times h = \pi \times r^2 \times h$, temos:

$V_{\text{cilindro}} = \pi \times 8^2 \times 3 = 192\pi$

Logo, $V_{\text{cubo com líquido}} = 192\pi - 96\pi = 96\pi$

Sendo a a medida da aresta do cubo,

$\frac{1}{3} a \times a^2 = 96\pi \Leftrightarrow a^3 = 288\pi$

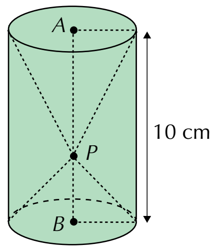
$\Leftrightarrow a = \sqrt[3]{288\pi}$

$\Leftrightarrow a \approx 9,7$

R.: $a = 9,7$ cm

19.3. A opção correta é a [C].

20. Considerando $\overline{AP} = x$, então $\overline{BP} = 10 - x$.



$V_{\text{cone}} = \frac{1}{3} A_{\text{base}} \times h$

$V_{\text{cone 1}} = \frac{1}{3} \times \pi \times r^2 \times x = \frac{\pi r^2 x}{3}$

$V_{\text{cone 2}} = \frac{1}{3} \times \pi \times r^2 \times (10 - x) = \frac{\pi r^2 (10 - x)}{3}$

Assim, $V_{\text{cone 1}} + V_{\text{cone 2}} = \frac{\pi r^2 x}{3} + \frac{\pi r^2 (10 - x)}{3} =$

$= \frac{\pi r^2 x}{3} + \frac{10\pi r^2}{3} - \frac{\pi r^2 x}{3} =$

$= \frac{10\pi r^2}{3}$

Concluímos então que a soma dos volumes dos dois cones é constante e é igual a $\frac{10\pi r^2}{3}$.

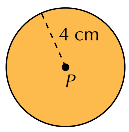
Lugares geométricos

Praticar – páginas 182 a 187

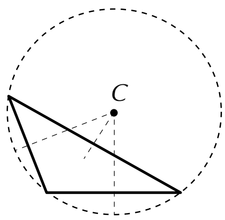
1. A opção correta é a [D].

2. Circunferência de centro *A* e raio 8 cm.

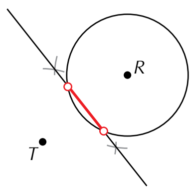
3. 1.º Marcar o ponto *P*.
2.º Colocar a ponta seca do compasso no ponto *P* e, com abertura 4 cm, traçar a circunferência de centro no ponto *P* e de raio 4 cm.
3.º Sombrear a circunferência e o seu interior.



4. A opção correta é a [B]. O circuncentro de um triângulo pode situar-se no exterior do triângulo.
Por exemplo,

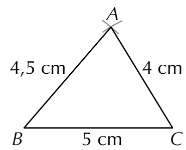


5. 1.º Colocar a ponta seca do compasso no ponto *R* e, com abertura superior a metade da distância do ponto *R* ao ponto *T*, traçar um arco de circunferência.
2.º Colocar a ponta seca do compasso no ponto *T* e, com a mesma abertura do 1º passo, traçar um arco de circunferência.
3.º Traçar a reta que passa pelos dois pontos de interseção dos dois arcos – a mediatriz do segmento de reta [*TR*].
4º Colocar a ponta seca do compasso no ponto *R* e, com abertura 2 cm, traçar a circunferência de centro no ponto *R* e raio 2 cm.
5.º O lugar geométrico pedido é o segmento de reta a vermelho.

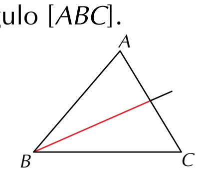


6.

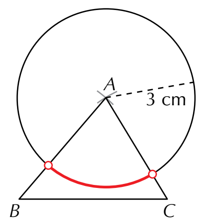
6.1. 1.º Traçar o segmento de reta [*BC*] com 5 cm.
2.º Colocar a ponta seca do compasso no ponto *B* e, com abertura 4,5 cm, traçar um arco de circunferência.
3.º Colocar a ponta seca do compasso no ponto *C* e, com abertura 4 cm, traçar um arco de circunferência.
4.º Marcar o ponto *A*, ponto de interseção dos dois arcos de circunferência.
5.º Traçar *BA* e *CA*.



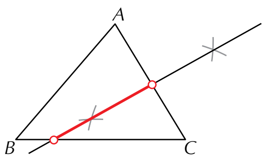
6.2. a) 1.º Colocar a ponta seca do compasso no ponto *B* e, com uma abertura qualquer, traçar um arco de circunferência. O arco interseta os segmentos de reta [*AB*] e [*BC*].
2.º Com a mesma abertura do 1º passo e com a ponta seca num dos pontos, traçar um arco de circunferência. Realizar o mesmo processo para o outro ponto. Os arcos intersetam-se num ponto.
3.º Traçar a semirreta com origem no ponto *B* e que passa no ponto de interseção dos dois arcos – a bissetriz do ângulo *CBA*.
4.º Marcar os pontos da bissetriz que pertencem ao interior do triângulo [*ABC*].



b) 1.º Colocar a ponta seca do compasso no ponto *A* e, com abertura 3 cm, traçar a circunferência de centro no ponto *A* e raio 3 cm.
2.º Marcar os pontos da circunferência que pertencem ao interior do triângulo [*ABC*].

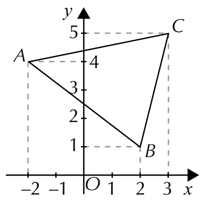


c) 1.º Colocar a ponta seca do compasso no ponto *A* e, com abertura superior a metade da distância do ponto *A* ao ponto *C*, traçar um arco de circunferência.
2.º Colocar a ponta seca do compasso no ponto *C* e, com a mesma abertura do 1º passo, traçar um arco de circunferência.
3.º Traçar a reta que passa pelos dois pontos de interseção dos dois arcos – a mediatriz do segmento de reta [*AC*].
4.º Marcar os pontos da mediatriz que pertencem ao interior do triângulo [*ABC*].

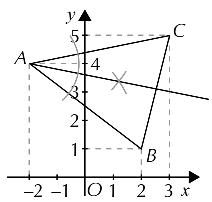


7.

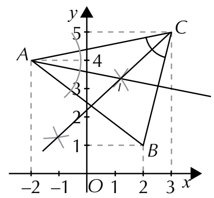
7.1. 1.º Marcar os pontos *A*, *B* e *C*.
2.ºTraçar [*AB*], [*BC*] e [*AC*].



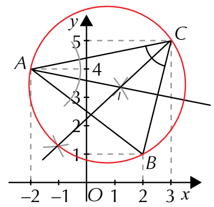
7.2. 1.º Colocar a ponta seca do compasso no ponto *A* e, com uma abertura qualquer, traçar um arco de circunferência. O arco interseta os segmentos de reta [*AC*] e [*AB*].
2.º Com a mesma abertura do 1º passo e com a ponta seca num dos pontos, traçar um arco de circunferência. Realizar o mesmo processo para o outro ponto. Os arcos intersetam-se num ponto.
3.º Traçar a semirreta com origem no ponto *A* e que passa no ponto de interseção dos dois arcos – a bissetriz do ângulo *BAC*.



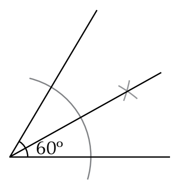
7.3. 1.º Colocar a ponta seca do compasso no ponto *C* e, com uma abertura qualquer, traçar um arco de circunferência. O arco interseta os segmentos de reta [*AC*] e [*BC*].
2.º Com a mesma abertura do 1º passo e com a ponta seca num dos pontos, traçar um arco de circunferência. Realizar o mesmo processo para o outro ponto. Os arcos intersetam-se num ponto.
3.º Traçar a semirreta com origem no ponto *C* e que passa no ponto de interseção dos dois arcos – a bissetriz do ângulo *ACB*.
4.º Marcar o ponto *I*, ponto de interseção das duas bissetrizes – *I* é o incentro do triângulo.



7.4. 1.º Colocar a ponta seca do compasso no ponto *I* e com abertura traçar a circunferência de centro no ponto *I* e raio .

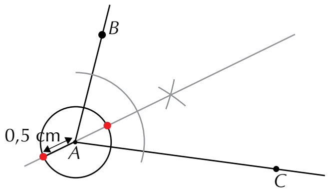


8. 1.º Traçar um segmento de reta.
2.º Com o transferidor, marcar um ângulo de amplitude.
3.º Colocar a ponta seca do compasso no vértice do ângulo e, com uma abertura qualquer, traçar um arco de circunferência. O arco interseta os lados do ângulo.
4.º Com a mesma abertura do 3º passo e com a ponta seca num dos pontos, traçar um arco de circunferência. Realizar o mesmo processo para o outro ponto. Os arcos intersetam-se num ponto.
5.º Traçar a semirreta com origem no vértice do ângulo e que passa no ponto de interseção dos dois arcos – a bissetriz do ângulo.



9. 1.º Colocar a ponta seca do compasso no ponto *A* e, com uma abertura qualquer, traçar um arco de circunferência. O arco interseta os segmentos de reta [*AB*] e [*AC*].
2.º Com a mesma abertura do 1.º passo e com a ponta seca num dos pontos, traçar um arco de circunferência. Realizar o mesmo processo para o outro ponto. Os arcos intersetam-se num ponto.
3.º Traçar a reta que passa por *A* e pelo ponto de interseção dos dois arcos – reta que contém a bissetriz do ângulo *CBA*.
4.º Com a ponta seca do compasso no ponto *A*, traçar uma circunferência de centro *A* e raio 0,5 cm.

5.º Assinalar os dois pontos de interseção da circunferência com a reta traçada no 3.º passo.



10.

10.1. A reta *PM* é a mediatriz do segmento de reta [*AB*].

10.2. Como o ponto *P* pertence à mediatriz do segmento de reta [*AB*], então está à mesma distância de *A* e de *B*.

10.3. A opção correta é a [B]. O triângulo [*AMP*] é um triângulo acutângulo.

11. Reta paralela às duas retas dadas, que dista 5 cm de cada uma delas.

12.

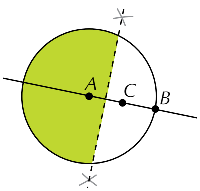
12.1. Como o ponto *C* é o ponto médio de [*AB*], ele está à mesma distância de *A* e de *B*. Logo, o ponto *C* pertence à mediatriz de [*AB*].

12.2. 1.º Colocar a ponta seca do compasso no ponto *A* e com abertura superior a metade da distância do ponto *A* ao ponto *C*, traçar um arco de circunferência.

2.º Colocar a ponta seca do compasso no ponto *C* e, com a mesma abertura, traçar um arco de circunferência.

3.º Traçar a reta que passa pelos dois pontos de interseção dos dois arcos – a mediatriz de [*AC*].

4.º Marcar os pontos do círculo mais próximos de *A* do que de *C*.

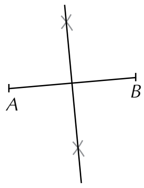


13.

13.1. 1.º Colocar a ponta seca do compasso no ponto *A* e, com abertura superior a metade da distância do ponto *A* ao ponto *B*, traçar um arco de circunferência.

2.º Colocar a ponta seca do compasso no ponto *B* e, com a mesma abertura do 1º passo, traçar um arco de circunferência.

3.º Traçar a reta que passa pelos dois pontos de interseção dos dois arcos – a mediatriz de [*AB*].

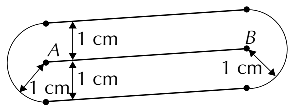


13.2. 1.º raçar um segmento de reta perpendicular a [*AB*], com 2 cm de comprimento 1 cm para cada lado de [*AB*].

2.º Traçar os segmentos retas paralelos a [*AB*] e perpendiculares ao segmento de reta anterior, que passam nos extemos desse segmento de reta, com o mesmo comprimento de [*AB*].

3.º Colocar a ponta seca do compasso no ponto *A* e, com abertura 1 cm, traçar a semicircunferência de centro *A*.

4.º Colocar a ponta seca do compasso no ponto *B* e, com abertura 1 cm, traçar a semicircunferência de centro *B*.



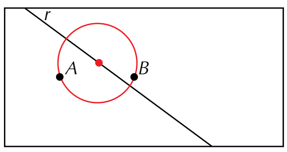
14. 1.º Colocar a ponta seca do compasso no ponto *A* e, com abertura superior a metade da distância do ponto *A* ao ponto *B*, traçar um arco de circunferência.

2.º Colocar a ponta seca do compasso no ponto *B* e, com a mesma abertura do 1º passo, traçar um arco de circunferência.

3.º Traçar a reta que passa pelos dois pontos de interseção dos dois arcos – a mediatriz de [*AB*].

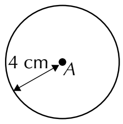
4.º Marcar o ponto de interseção da mediatriz de [*AB*] com a reta *r*.

5.º Colocar a ponta seca do compasso no ponto de interseção da mediatriz com a reta *r* e com abertura até um dos pontos, A ou B, traçar a circunferência.

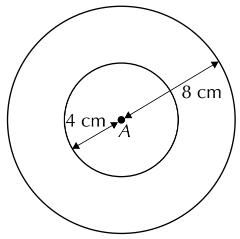


15.

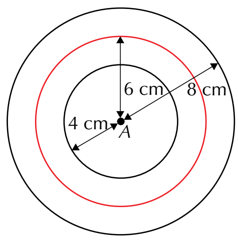
15.1. Colocar a ponta seca do compasso no ponto *A* e com abertura 4 cm, traçar a circunferência de centro no ponto *A* e raio 4 cm.



15.2. Colocar a ponta seca do compasso no ponto *A* e, com abertura 8 cm, traçar a circunferência de centro no ponto *A* e raio 8 cm.

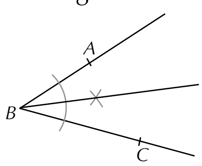


15.3. A circunferência de centro no ponto *A* e raio 6 cm é o lugar geométrico dos pontos que distam igualmente das duas circunferências anteriores.
Colocar a ponta seca do compasso no ponto *A* e, com abertura 6 cm, traçar a circunferência de centro no ponto *A* e raio 6 cm.

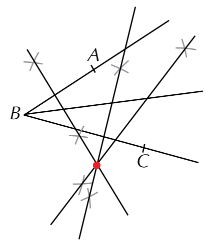


16.

16.1. 1.º Colocar a ponta seca do compasso no vértice do ângulo, ponto *B*, e, com uma abertura qualquer, traçar um arco de circunferência. O arco interseta os lados do ângulo.
2.º Com a mesma abertura do 1.º passo e com a ponta seca num dos pontos traçar um arco de circunferência. Realizar o mesmo processo para o outro ponto. Os arcos intersetam-se num ponto.
3.º Traçar a semirreta com origem no vértice do ângulo e que passa no ponto de interseção dos dois arcos – a bissetriz do ângulo *CBA*.



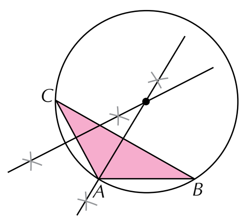
16.2. 1.º Colocar a ponta seca do compasso no ponto *A* e, com abertura superior a metade da distância do ponto *A* ao ponto *B*, traçar um arco de circunferência.
2.º Colocar a ponta seca do compasso no ponto *B* e, com a mesma abertura do 1º passo, traçar um arco de circunferência.
3.º Traçar a reta que passa pelos dois pontos de interseção dos dois arcos – a mediatriz de [*AB*].
4.º Colocar a ponta seca do compasso no ponto *A* e, com abertura superior a metade da distância do ponto *A* ao ponto *C*, traçar um arco de circunferência.
5.º Colocar a ponta seca do compasso no ponto *C* e, com a mesma abertura do 4º passo, traçar um arco de circunferência.
6.º Traçar a reta que passa pelos dois pontos de interseção dos dois arcos – a mediatriz de [*AC*].
7.º Colocar a ponta seca do compasso no ponto *C* e, com abertura superior a metade da distância do ponto *C* ao ponto *B*, traçar um arco de circunferência.
8.º Colocar a ponta seca do compasso no ponto *B* e, com a mesma abertura do 7º passo, traçar um arco de circunferência.
9.º Traçar a reta que passa pelos dois pontos de interseção dos dois arcos – a mediatriz de [*BC*].
10.º Assinalar o ponto de interseção das três mediatrizes traçadas.



17.

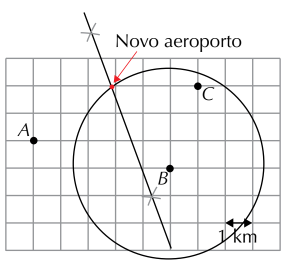
17.1. 1.º Colocar a ponta seca do compasso no ponto *C* e, com abertura superior a metade da distância do ponto *C* ao ponto *B*, traçar um arco de circunferência.
2.º Colocar a ponta seca do compasso no ponto *B* e, com a mesma abertura do 1º passo, traçar um arco de circunferência.
3.º Traçar a reta que passa pelos dois pontos de interseção dos dois arcos – a mediatriz de [*BC*].

4.º Colocar a ponta seca do compasso no ponto *A* e, com abertura superior a metade da distância do ponto *A* ao ponto *C*, traçar um arco de circunferência.
5.º Colocar a ponta seca do compasso no ponto *C* e, com a mesma abertura do 4º passo, traçar um arco de circunferência.
6.º Traçar a reta que passa pelos dois pontos de interseção dos dois arcos – a mediatriz de [*AC*].
7.º Marcar o ponto de interseção das duas mediatrizes.
8.º Colocar a ponta seca do compasso no ponto encontrado no passo anterior e, com abertura até qualquer uns dos pontos, A, B ou C, traçar uma circunferência.



17.2. O centro da circunferência designa-se por circuncentro.

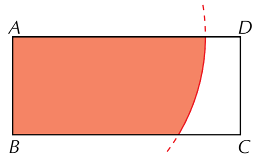
18. 1.º Colocar a ponta seca do compasso no ponto *A* e, com abertura superior a metade da distância do ponto *A* ao ponto *C*, traçar um arco de circunferência.
2.º Colocar a ponta seca do compasso no ponto *C* e, com a mesma abertura do 1.º passo, traçar um arco de circunferência.
3.º Traçar a reta que passa pelos dois pontos de interseção dos dois arcos – a mediatriz de [*AC*].
4.º Colocar a ponta seca do compasso no ponto *B* e, com abertura 4 unidades de quadricula, que corresponde a 4 km, traçar uma circunferência.
5.º Assinalar, no mapa, o ponto de interseção da mediatriz com a circunferência – localização do novo aeroporto.



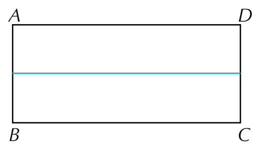
19. Mediatriz dos outros dois lados do quadrado.

20. Na segunda situação.

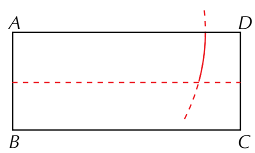
21.
21.1. a) 1.º Colocar a ponta seca do compasso no ponto *A* e, com abertura 5 cm, traçar uma circunferência.
2.º Assinalar os pontos do retângulo que pertencem à circunferência e ao seu interior.



b) 1.º Colocar a ponta seca do compasso no ponto *A* e, com abertura superior a metade da distância do ponto *A* ao ponto *D*, traçar um arco de circunferência.
2.º Colocar a ponta seca do compasso no ponto *D* e, com a mesma abertura do 1º passo, traçar um arco de circunferência.
3.º Traçar a reta que passa pelos dois pontos de interseção dos dois arcos – a mediatriz de [*AD*].



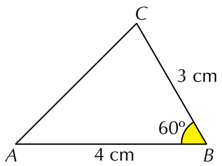
21.2. Os pontos mais próximos do lado [*AB*] do que do lado [*DC*], são os que ficam acima da mediatriz de [*AD*].
1.º Colocar a ponta seca do compasso no ponto *A* e, com abertura 5 cm, traçar um arco de circunferência.
2.º Assinalar o arco contido no retângulo que fica acima da mediatriz de [*AD*].



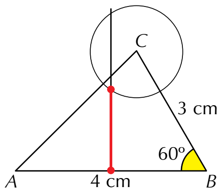
22. Conjunto dos pontos do quadrado [*ABCD*] que estão mais próximos de [*AD*] do que de [*BC*] e que distam 3 cm ou mais do ponto *A*.

23.
23.1. 1.º Traçar o segmento de reta [*AB*] com 4 cm.
2.º Com transferidor, marcar o ângulo *CBA* com 60º de amplitude.

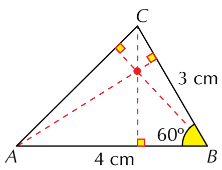
3.º Traçar o segmento de reta [*BC*] com 3 cm.
4.º Traçar o segmento de reta [*AC*].



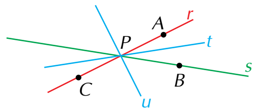
23.2. 1.º Colocar a ponta seca do compasso no ponto *A* e, com abertura superior a metade da distância do ponto *A* ao ponto *B*, traçar um arco de circunferência.
2.º Colocar a ponta seca do compasso no ponto *B* e, com a mesma abertura do 1.º passo, traçar um arco de circunferência.
3.º Traçar a reta que passa pelos dois pontos de interseção dos dois arcos – a mediatriz de [*AB*].
4.º Colocar a ponta seca do compasso no ponto *C* e, com abertura 1 cm, traçar uma circunferência.
5.º Marcar a vermelho os pontos do triângulo que estão no exterior da circunferência e que pertencem à mediatriz de [*AB*].



23.3. 1.º Traçar as retas suporte das alturas dos três lados do triângulo [*ABC*].
2.º Marcar o ponto de interseção das três retas suporte – o ortocentro do triângulo [*ABC*].



24. Seja *P* o ponto de interseção das retas *r* e *s*.
1.º Colocar a ponta seca do compasso no ponto *P* e, com uma abertura qualquer, traçar um arco de circunferência, de forma a intersetar a reta *r* em dois pontos, *A* e *C*, e a reta s num ponto *B*.
2.º Com a mesma abertura do 1º passo, colocar a ponta seca do compasso em cada um dos pontos *A*, *B* e *C* e traçar arcos de circunferência.
3.º Traçar as bissetrizes dos ângulos formados pelas retas *r* e *s*, unindo o ponto *P* aos pontos de interseção dos arcos traçados.

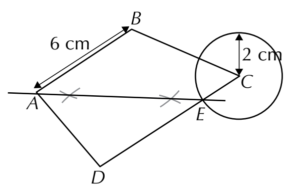


25.

26.
26.1 60 m = 6000 cm

Assim, $\dfrac{60}{6000} = \dfrac{6}{600} = \dfrac{1}{100}$

Logo, a escala utilizada é 1 : 100.
26.2 1.º Colocar a ponta seca do compasso no ponto *B* e, com abertura superior a metade da distância do ponto *B* ao ponto *D*, traçar um arco de circunferência.
2.º Colocar a ponta seca do compasso no ponto *D* e, com a mesma abertura do 1º passo, traçar um arco de circunferência.
3.º Traçar a reta que passa pelos dois pontos de interseção dos dois arcos a mediatriz de [*BD*].
4.º Colocar a ponta seca do compasso no ponto *C* e, com abertura 2 cm, traçar uma circunferência.
5.º Assinalar o ponto *E*, ponto de interseção da circunferência com a mediatriz de [*BD*].



Circunferência

Praticar – páginas 192 a 197

1.

1.1. Como *COA* é um ângulo ao centro, $\overset{\frown}{AC} = C\hat{O}A = 120º$.

1.2. Como *COA* é um ângulo ao centro, $C\hat{O}A = \overset{\frown}{AC} = 130º$.

1.3. Como *CBA* é um ângulo inscrito,

$C\hat{B}A = \dfrac{\overset{\frown}{AC}}{2}$, ou seja, $\overset{\frown}{AC} = 2C\hat{B}A$.

Logo, $\overset{\frown}{AC} = 2 \times 45º = 90º$.

1.4. Como *CBA* é um ângulo inscrito,

$C\hat{B}A = \dfrac{\overset{\frown}{AC}}{2}$, ou seja, $\overset{\frown}{AC} = 2C\hat{B}A$.

Logo, $C\hat{B}A = \dfrac{100º}{2} = 50º$.

2.

2.1. $x = 128º$, pois *BOA* é um ângulo ao centro.

2.2. $x = \dfrac{140º}{2} = 70º$, pois *ABC* é um ângulo inscrito correspondente ao ângulo ao centro *AOC*.

2.3. *ABC* e *ADC* são ângulos inscritos no mesmo arco de circunferência (arco *AC*).

Logo, $x = y = \dfrac{98º}{2} = 49º$

2.4. Como *ADC* é um ângulo inscrito, $A\hat{D}C = \dfrac{\overset{\frown}{AC}}{2}$, ou seja, $\overset{\frown}{AC} = 2A\hat{D}C$.

Assim, $y = \overset{\frown}{AC} = 2 \times 38º = 76º$.

Como *ABC ADC* são ângulos inscritos no mesmo arco de circunferência, $x = A\hat{B}C = A\hat{D}C = 38º$.

3.

3.1. *DEC* é um ângulo com o vértice no interior da circunferência.

Logo, $D\hat{E}C = \dfrac{\overset{\frown}{BA} + \overset{\frown}{DC}}{2}$.

Então, $D\hat{E}C = \dfrac{128º + 77º}{2} = \dfrac{205º}{2} = 102{,}5º$.

3.2. *AED* é um ângulo com o vértice no interior da circunferência.

Logo, $A\hat{E}D = \dfrac{\overset{\frown}{AD} + \overset{\frown}{CB}}{2}$.

Então, $D\hat{E}C = \dfrac{44º + 80}{2} = \dfrac{124º}{2} = 62º$.

3.3. *CEB* é um ângulo com o vértice no interior da circunferência.

Logo, $C\hat{E}B = \dfrac{\overset{\frown}{CB} - \overset{\frown}{AD}}{2}$.

Então, $C\hat{E}B = \dfrac{130º - 40º}{2} = \dfrac{90º}{2} = 45º$.

3.4. *AED* é um ângulo com o vértice no interior da circunferência.

Logo, $A\hat{E}D = \dfrac{\overset{\frown}{AD} - \overset{\frown}{CB}}{2}$.

Então, $A\hat{E}D = \dfrac{218º - 44º}{2} = \dfrac{174º}{2} = 87º$.

4. A soma das amplitudes dos ângulos opostos de um quadrilátero inscrito numa circunferência é 180º.
Logo, $A\hat{D}C = 180º - 70º = 110º$ e
$B\hat{A}D = 180º - 85º = 95º$.

5. $X\hat{O}Z = 180º - 110º = 70$ porque *XOZ* e *YOZ* são ângulos suplementares.
Como o triângulo [*XOZ*] é isósceles ($\overline{OX} = \overline{OZ}$ porque são raios da circunferência), então $X\hat{Z}O = O\hat{X}Z$.
Como a soma das amplitudes dos ângulos internos de um triângulo é 180º, então

$X\hat{Z}O = \dfrac{180º - 70}{2} = \dfrac{110º}{2} = 55º$.

Outro processo:
A amplitude de um ângulo externo de um triângulo é igual à soma das amplitudes dos ângulos internos não adjacentes a esse ângulo, ou seja,

$X\hat{Z}O = \dfrac{Y\hat{O}Z}{2} = \dfrac{110º}{2} = 55º$.

6. $\overset{\frown}{DC} = \overset{\frown}{BC} - \overset{\frown}{BD}$

Como *BAC* é um ângulo inscrito, $B\hat{A}C = \dfrac{\overset{\frown}{BC}}{2}$, ou seja, $\overset{\frown}{BC} = 2 \times B\hat{A}C$.
Assim, $\overset{\frown}{BC} = 2 \times 65º\ 0\ 130º$.
Como, *BOD* é um ângulo ao centro, $B\hat{O}D = \overset{\frown}{BD}$.
Logo $\overset{\frown}{DC} = 130º - 40º = 90º$.

7. $C\hat{O}B = 180º - D\hat{O}A - A\hat{O}C$
Como os segmentos de reta [*BD*] e [*CA*] são paralelos, $\overset{\frown}{CB} = \overset{\frown}{DA}$ e consequentemente, os ângulos ao centro *COB* e *DOA* são geometricamente iguais.
Assim, $C\hat{O}B = 180º - C\hat{O}B - 115º$
$\Leftrightarrow\ 2\,C\hat{O}B = 180º - 115º$

$\Leftrightarrow\ 2\,C\hat{O}B = 65^\circ$

$\Leftrightarrow\ C\hat{O}B = \dfrac{65^\circ}{2}$

$\Leftrightarrow\ C\hat{O}B = 32{,}5^\circ$

8.

8.1. A reta AD é tangente à circunferência no ponto A se AD e AO forem perpendiculares.
Consideremos o triângulo $[ABO]$.
Como $[ABO]$ é um triângulo isósceles ($\overline{OA} = \overline{OB}$ porque são raios da circunferência), então
$O\hat{B}A = B\hat{A}O = 60^\circ$.
Por outro lado, a soma das amplitudes dos ângulos internos de um triângulo é 180°.
Logo $A\hat{O}B = 180^\circ - 60^\circ - 60^\circ = 60^\circ$.
Considerando agora o triângulo $[ADO]$, temos que $D\hat{A}O = 180^\circ - 30^\circ - 60^\circ = 90^\circ$.
Concluímos então que AD e DO são perpendiculares e, portanto, a reta AD é tangente à circunferência no ponto A.

8.2. Como COA é um ângulo ao centro, $\overset{\frown}{CA} = C\hat{O}A$.
Por outro lado, $C\hat{O}A = 180^\circ - A\hat{O}B$ porque COA e AOB são suplementares.
Assim, $C\hat{O}A = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$.
Logo, $\overset{\frown}{CA} = 120^\circ$.

9. $A = \dfrac{x \times \pi \times r^2}{360}$, sendo x° a amplitude do ângulo ao centro.

Como CBA é um ângulo inscrito, $C\hat{B}A = \dfrac{\overset{\frown}{AC}}{2}$, ou seja, $\overset{\frown}{CA} = 2 \times C\hat{B}A$.
Assim, $\overset{\frown}{CA} = 2 \times 60^\circ = 120^\circ$.

Logo, $A = \dfrac{120 \times \pi \times 4^2}{360} = \dfrac{1920\pi}{360} = \dfrac{16}{3}\pi \approx 17$.

R.: $A = 17$ cm^3.

10. Como ACD é um ângulo inscrito, $A\hat{C}D = \dfrac{\overset{\frown}{AD}}{2}$.

Como AOB é um ângulo ao centro, $A\hat{O}B = \overset{\frown}{AB}$.

Assim, $\overset{\frown}{AB} = 60^\circ$ e $\overset{\frown}{AD} = \dfrac{1}{3}\,\overset{\frown}{AD} = \dfrac{1}{3}$ ¥ $60^\circ = 20^\circ$.

Logo, $A\hat{C}D = \dfrac{20^\circ}{2} = 10^\circ$.

11.

11.1. Sabemos que $A_{[OTC]} = 8$ cm^2 e que

$A_{[OTC]} = \dfrac{\overline{TC} \times \overline{TG}}{2}$, ou seja, $8 = \dfrac{4 \times \overline{TG}}{2}$.

Logo, $8 \times 2 = 4\,\overline{TG}$

$\Leftrightarrow\ 16 = 4\,\overline{TG}$

$\Leftrightarrow\ \overline{TG} = \dfrac{16}{4}$

$\Leftrightarrow\ \overline{TG} = 4$

Concluímos então que o triângulo $[OTC]$ é isósceles porque tem dois lados iguais ($\overline{TC} = \overline{TG} = 4$ cm).

11.2. Como AOT é um ângulo ao centro $A\hat{O}T = \overset{\frown}{AT}$.
Por outro lado, os ângulos AOT e COT são suplementares. Logo, $A\hat{O}T = 180^\circ - C\hat{O}T$.
Como o triângulo $[OTC]$ é retângulo e isósceles,

$C\hat{O}T = \dfrac{180^\circ - 90^\circ}{2} = \dfrac{90^\circ}{2} = 45^\circ$.

Assim, $A\hat{O}T = 180^\circ - 45^\circ = 135^\circ$ e $\overset{\frown}{AT} = A\hat{O}T = 135^\circ$.

12.

12.1. Numa circunferência, a cordas geometricamente iguais correspondem arcos geometricamente iguais.
Assim, como $\overline{AB} = \overline{AC}$, podemos concluir que $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{AC}$.

12.2. Como ADC é um ângulo inscrito, $A\hat{D}C = \dfrac{\overset{\frown}{AC}}{2}$.

Como BAC é um ângulo inscrito, $B\hat{A}C = \dfrac{\overset{\frown}{BC}}{2}$ ou seja, $\overset{\frown}{BC} = 2 \times B\hat{A}C$.
Assim, $\overset{\frown}{BC} = 2 \times 30^\circ = 60^\circ$.
Como $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{CA}$ = (por 12.1.) e $\overset{\frown}{AB} + \overset{\frown}{BC} + \overset{\frown}{CA} = 360^\circ$, então $\overset{\frown}{AB} + 60^\circ + \overset{\frown}{AB} = 360^\circ$.

$\Leftrightarrow\ 2\overset{\frown}{AB} = 360^\circ - 60^\circ$

$\Leftrightarrow\ 2\overset{\frown}{AB} = 300^\circ$

$\Leftrightarrow\ \overset{\frown}{AB} = \dfrac{300^\circ}{2}$

$\Leftrightarrow\ \overset{\frown}{AB} = 150^\circ$

Assim, como $\overset{\frown}{AC} = \overset{\frown}{AB} + \overset{\frown}{BC}$, $\overset{\frown}{AC} = 150^\circ + 60^\circ = 210^\circ$.

Logo, $A\hat{D}C = \dfrac{210^\circ}{2} = 105^\circ$.

13. Como FEB é um ângulo com o vértice no exterior da circunferência, $F\hat{E}B = \dfrac{\overset{\frown}{CB} - \overset{\frown}{AD}}{2}$.

Os ângulos FCA e ACD são suplementares.
Logo, $A\hat{C}D = 180^\circ - F\hat{C}A = 180^\circ - 160^\circ = 20^\circ$.

Como ACD é um ângulo inscrito, $A\hat{C}D = \dfrac{\overset{\frown}{AD}}{2}$, ou seja, $\overset{\frown}{AD} = 2 \times A\hat{C}D$.

Assim, $\overset{\frown}{AD} = 2 \times 20^{o} = 40^{o}$.

Logo, $F\hat{E}B = \dfrac{100^{o} - 40}{2} = \dfrac{60^{o}}{2} = 30^{o}$.

15. Como *AEB* é um ângulo como vértice no interior da circunferência, $A\hat{E}B = \dfrac{\overset{\frown}{AB} + \overset{\frown}{CD}}{2}$, ou seja,

$A\hat{E}B = \dfrac{120^{o} + 58^{o}}{2} = \dfrac{178^{o}}{2} = 89^{o}$.

- Como *CAD* é um ângulo inscrito, $C\hat{A}D = \dfrac{\overset{\frown}{CD}}{2}$, ou seja, $C\hat{A}D = \dfrac{58^{o}}{2} = 29^{o}$.
- Como *FDA* é um ângulo ex-inscrito, $F\hat{D}A = \dfrac{\overset{\frown}{DA} + \overset{\frown}{DB}}{2}$, ou seja, $F\hat{D}A = \dfrac{\overset{\frown}{BA}}{2} =$

$= \dfrac{360^{o} - \overset{\frown}{AB}}{2} = \dfrac{360^{o} - 120^{o}}{2} = \dfrac{240^{o}}{2} = 120^{o}$.

16. Como *BFC* é um ângulo com o vértice no interior da circunferência, $B\hat{F}C = \dfrac{\overset{\frown}{BC} - \overset{\frown}{DA}}{2}$.

Como $B\hat{E}C$ é um ângulo com o vértice no exterior da circunferência $B\hat{E}C = \dfrac{\overset{\frown}{BC} - \overset{\frown}{DA}}{2}$, ou seja

$70^{o} = \dfrac{\overset{\frown}{BC} - 50^{o}}{2}$

$\Leftrightarrow 140^{o} = \overset{\frown}{BC} - 50^{o}$

$\Leftrightarrow 140^{o} + 50^{o} = \overset{\frown}{BC}$

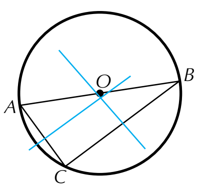
$\Leftrightarrow \overset{\frown}{BC} = 190^{o}$

Assim, $B\hat{F}C = \dfrac{190^{o} + 50^{o}}{2} = \dfrac{240^{o}}{2} = 120^{o}$.

17.

17.1. O triângulo [*ABC*] é um triângulo retângulo.
$C\hat{B}A = 90^{o}$ porque *CBA* é um ângulo inscrito numa semicircunferência.

17.2.



O ponto de interseção das mediatrizes é o circuncentro.

17.3. $\overset{\frown}{AB} = 180^{o} - \overset{\frown}{BC} = 180^{o} - 120^{o} = 60^{o}$.
$360^{o} : 60^{o} = 6$
Logo, o polígono tem seis lados iguais e, portanto é um hexágono regular.

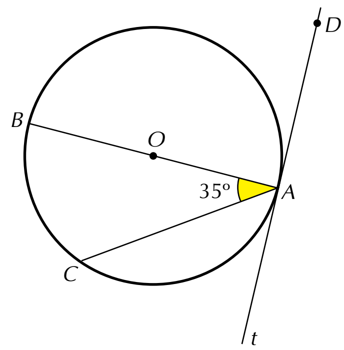
18.

18.1. $\overset{\frown}{CB} = 360^{o} - \overset{\frown}{BC}$
Como *BAC* é um ângulo inscrito, $B\hat{A}C = \dfrac{\overset{\frown}{BC}}{2}$, ou seja, $\overset{\frown}{BC} = 2 \times B\hat{A}C$.
Assim, $\overset{\frown}{BC} = 2 \times 35^{o} = 70^{o}$ e, portanto,
$\overset{\frown}{CB} = 360^{o} - 80^{o} = 290^{o}$.

18.2. Como *CBA* é um ângulo inscrito, $C\hat{B}A = \dfrac{\overset{\frown}{CA}}{2}$.

Assim, $C\hat{B}A = \dfrac{180^{o} - \overset{\frown}{BC}}{2} = \dfrac{180^{o} - 70^{o}}{2} = \dfrac{110^{o}}{2} = 55^{o}$.

18.3.



Como a reta *t* é tangente à circunferência no ponto *A*, então *t* é perpendicular a *BA*, $D\hat{A}B = 90^{o}$.
Logo, $D\hat{A}C = D\hat{A}B + B\hat{A}C = 90^{o} + 35^{o} + 125^{o}$.

19.

19.1. a) $\overset{\frown}{AC} = 180^{o} - \overset{\frown}{CB} =$

$= 180^{o} - \dfrac{1}{4}\overset{\frown}{AB} =$

$= 180^{o} - \dfrac{1}{4} \times 180^{o} =$

$= 180^{o} - 45^{o} =$

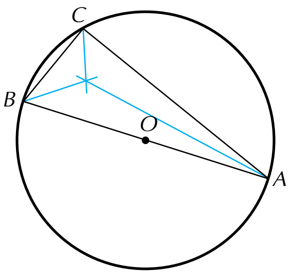
$= 135^{o}$

b) Como *CAB* é um ângulo inscrito, $C\hat{A}B = \dfrac{\overset{\frown}{CB}}{2}$.

Assim, como $\overset{\frown}{CB} = \dfrac{1}{4}\overset{\frown}{AB} = \dfrac{1}{4} \times 180^{o} = 45^{o}$,

$C\hat{A}B = \dfrac{45^{o}}{2} = 22{,}5^{o}$

19.2.



O ponto que está à mesma distância dos três lados do triângulo $[ABC]$ é o incentro.

20.

20.1. Como AOB é um ângulo ao centro, $A\hat{O}B = \overset{\frown}{AB} = 36^{\circ}$.

20.2. A amplitude de um ângulo interno de um polígono regular de n lados é dada por $\dfrac{(n-2)\times 180^{\circ}}{n}$.

Como $\overset{\frown}{AB} = 36^{\circ}$, $n = 360^{\circ} : 36^{\circ} = 10$.

Assim, a amplitude de um ângulo interno do polígono é $\dfrac{(10-2)\times 180^{\circ}}{10} = \dfrac{8\times 180^{\circ}}{10} = 8 \times 18^{\circ} = 144^{\circ}$.

21. Queremos determinar $D\hat{C}A = \dfrac{\overset{\frown}{CA}}{2}$.

Consideremos o triângulo $[BCO]$. Como o triângulo é isósceles ($\overline{OB} = \overline{OC}$ porque são raios da circunferência), $O\hat{C}B = C\hat{B}O$.

Como a soma das amplitudes dos ângulos internos de um triângulo é 180°, então

$$O\hat{C}B = C\hat{B}O = \frac{180^{\circ} - 120^{\circ}}{2} = \frac{60^{\circ}}{2} = 30^{\circ}.$$

Assim, $C\hat{B}A = 30^{\circ} + 20^{\circ} = 50^{\circ}$ e, como CBA é um ângulo inscrito, $CBA = \dfrac{\overset{\frown}{CA}}{2}$, ou seja, $\overset{\frown}{CA} = 2 \times C\hat{B}A$.

Logo, $\overset{\frown}{CA} = 2 \times 50^{\circ} = 100^{\circ}$ e $D\hat{C}A = \dfrac{100^{\circ}}{2} = 50^{\circ}$.

22.

22.1. Como CFD é um ângulo inscrito, $C\hat{F}D = \dfrac{\overset{\frown}{DC}}{2}$, ou seja, $\overset{\frown}{DC} = 2 \times C\hat{F}C$.

Assim, $\overset{\frown}{DC} = 2 \times 115^{\circ} = 230^{\circ}$.

Logo, $\overset{\frown}{CD} = 360^{\circ} - \overset{\frown}{DC} = 360^{\circ} - 230^{\circ} = 130^{\circ}$.

22.2. Como BEC é um ângulo como vértice no interior da circunferêcia, $B\hat{E}C = \dfrac{\overset{\frown}{BC} + \overset{\frown}{DA}}{2}$.

Sabemos que $\overset{\frown}{BC} + \overset{\frown}{CD} + \overset{\frown}{DA} + \overset{\frown}{AB} = 360$.

Assim, $\overset{\frown}{BC} + 130^{\circ} + \overset{\frown}{DA} + 120^{\circ} = 360^{\circ}$

$\Leftrightarrow \overset{\frown}{BC} + \overset{\frown}{DA} = 360^{\circ} - 130^{\circ} - 120^{\circ}$

$\Leftrightarrow \overset{\frown}{BC} + \overset{\frown}{DA} = 110^{\circ}$

Logo, $B\hat{E}C = \dfrac{110^{\circ}}{2} = 55^{\circ}$.

22.3. $D\hat{E}A = B\hat{E}C$ porque DEA e BEC são ângulos verticalmente opostos.

Logo, $D\hat{E}A = 55^{\circ}$.

23. Como $D\hat{H}F$ é um ângulo com o vértice no interior da circunferência, $D\hat{H}F = \dfrac{\overset{\frown}{DF} + \overset{\frown}{EG}}{2}$.

Como $AB \perp CF$ e $[CF] \,//\, [ED]$, então $AB \perp ED$. Assim, $E\hat{O}A = 90^{\circ}$ e, como EOA é um ângulo ao centro, $\overset{\frown}{EA} = EOA = 90^{\circ}$.

Logo, $\overset{\frown}{EG} = 90^{\circ} - \overset{\frown}{GA} = 90^{\circ} - 40^{\circ} = 50^{\circ}$.

Como arcos compreendidos entre cordas paralelas são geometricamente iguais, $\overset{\frown}{DF} = \overset{\frown}{CE} = 30^{\circ}$.

Logo, $D\hat{H}F = \dfrac{30^{\circ} + 50^{\circ}}{2} = \dfrac{80^{\circ}}{2} = 40^{\circ}$.

24.

24.1. Como o polígono é regular, divide a circunferência em 12 arcos geometricamente iguais, cada um com 30° ($360^{\circ} : 12 = 30^{\circ}$).

Como GEA é um ângulo inscrito,

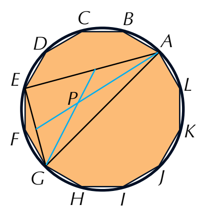
$$G\hat{E}A = \frac{\overset{\frown}{GA}}{2} = \frac{6 \times 30^{\circ}}{2} = 90^{\circ}.$$

Concluímos então que o triângulo $[GEA]$ é um triângulo retângulo porque tem um ângulo de 90°.

24.2. Como AGE é um ângulo inscrito,

$$A\hat{G}E = \frac{\overset{\frown}{AE}}{2} = \frac{4 \times 40^{\circ}}{2} = 60^{\circ}.$$

24.3.



Sabemos que $A_{\odot} = 81\pi$ e que $A_{\odot} = \pi r^2$.

Assim, $\pi r^2 = 81\pi \Leftrightarrow r^2 = 81 \Leftrightarrow r = \pm\sqrt{81} \Leftrightarrow r = 9$.

Seja O o centro da circunferência. O é o ponto médio do segmento de reta $[AG]$ e $[EO]$ é uma mediana do triângulo $[GEA]$.

Assim, $\overline{EP} = \dfrac{2}{3}r$ e $\overline{PO} = \dfrac{1}{3}r$.

Logo, a distância do baricentro ao centro da circunferência é $\overline{PO} = \dfrac{1}{3} \times 9 = 3$.

Trigonometria

Praticar – páginas 200 a 205

1.

1.1. sen α = $\dfrac{\text{medida do cateto oposto}}{\text{medida da hipotenusa}} = \dfrac{15}{17}$

cos α = $\dfrac{\text{medida do cateto adjacente}}{\text{medida da hipotenusa}} = \dfrac{8}{17}$

tg α = $\dfrac{\text{medida do cateto oposto}}{\text{medida do cateto adjacente}} = \dfrac{15}{8}$

1.2. sen β = $\dfrac{\text{medida do cateto oposto}}{\text{medida da hipotenusa}} = \dfrac{5}{13}$

cos β = $\dfrac{\text{medida do cateto adjacente}}{\text{medida da hipotenusa}} = \dfrac{12}{3}$

tg β = $\dfrac{\text{medida do cateto oposto}}{\text{medida do cateto adjacente}} = \dfrac{5}{12}$

2.

2.1. cos x = $\dfrac{\text{medida do cateto adjacente}}{\text{medida da hipotenusa}}$

Assim, $\cos x = \dfrac{9}{12} \Leftrightarrow x = \cos^{-1}\left(\dfrac{9}{12}\right) \Leftrightarrow x = 41{,}4^\circ$.

2.2. sen x = $\dfrac{\text{medida do cateto adjacente}}{\text{medida da hipotenusa}}$

Assim, $\text{sen}\, x = \dfrac{4}{6} \Leftrightarrow x = \text{sen}^{-1}\left(\dfrac{4}{6}\right) \Leftrightarrow x = 41{,}8^\circ$.

2.3. tg x = $\dfrac{\text{medida do cateto oposto}}{\text{medida do cateto adjacente}}$

Assim, $\text{sen}\, x = \dfrac{4}{5} \Leftrightarrow x = \text{tg}^{-1}\left(\dfrac{4}{5}\right) \Leftrightarrow x = 38{,}7^\circ$.

3.

3.1. tg α = $\dfrac{\text{medida do cateto oposto}}{\text{medida do cateto adjacente}}$

$\text{tg}\, 20^\circ = \dfrac{x}{12} \Leftrightarrow x = 12 \times \text{tg}\, 20^\circ$

$\Leftrightarrow x = 4{,}37$

3.2. cos α = $\dfrac{\text{medida do cateto adjacente}}{\text{medida da hipotenusa}}$

$\cos 63^\circ = \dfrac{x}{8} \Leftrightarrow x = 8 \times \cos 63^\circ$

$\Leftrightarrow x = 3{,}63$

3.3. sen α = $\dfrac{\text{medida do cateto oposto}}{\text{medida da hipotenusa}}$

$\cos 63^\circ = \dfrac{3}{x} \Leftrightarrow x = \dfrac{3}{\text{sen}\, 35^\circ}$

$\Leftrightarrow x = 5{,}23$

4.

4.1. $\text{tg}\, 60^\circ = \dfrac{x}{3} \Leftrightarrow x = 3\ \text{tg}\, 60^\circ$

$\Leftrightarrow x = 3\sqrt{3}$

4.2. $\cos 30^\circ = \dfrac{x}{10} \Leftrightarrow x = 10 \cos 30^\circ$

$\Leftrightarrow x = 10 \times \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$\Leftrightarrow x = 5\sqrt{3}$

4.3. $\text{sen}\, 45^\circ = \dfrac{x}{8} \Leftrightarrow x = 8 \times \text{sen}\, 45^\circ$

$\Leftrightarrow x = 8 \times \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$\Leftrightarrow x = 4\sqrt{2}$

5.

5.1. sen (42º) + cos (48º) = 0,6691 + sen (90º – 48º) =
= 0,6691 + sen (42º) =
= 0,6691 + 0,6691 =
= 1,3382

5.2. 3 × sen (44º) + cos (44º) = 3 × 0,6947 +
+ sen (90º – 44º) =
= 2,0841 + sesn (46º) =
= 2,0841 + 0,7193 =
= 2,8034

6. $\text{tg}\, 60^\circ = \dfrac{h}{30} \Leftrightarrow h = 30 \times \text{tg}\, 60^\circ$

$\Leftrightarrow h = 30\sqrt{3}$

Assim, a altura da roda é igual a $30\sqrt{3} + 1{,}65$
= 30 × 1,73 + 1,65 =
= 51,9 + 1,65 =
= 53,55

R.: A roda tem 53,55 m de altura.

7. O algarismo que falta é o 0, porque o cosseno de um ângulo agudo varia entre –1 e 1.
Assim, cos 52º = 0,615661.

8. $\text{sen}\ \alpha = \dfrac{\text{medida do cateto oposto}}{\text{medida da hipotenusa}}$ e

$\cos\alpha = \dfrac{\text{medida do cateto adjacente}}{\text{medida da hipotenusa}}$

$\text{sen}\ \alpha = \dfrac{12}{37}$

Para determinar cos α temos de calcular a medida do cateto adjacente a α.
Utilizando o teorema de Pitágoras:

$37^2 = x^2 + 12^2 \Leftrightarrow x^2 = 1369 - 144$

$\Leftrightarrow x = \pm\sqrt{1225}$

$\Leftrightarrow x = 35$

Assim, $\cos\alpha = \dfrac{35}{37}$

Logo, $\cos\alpha + \text{sen}\ \alpha = \dfrac{35}{37} + 2 \times \dfrac{12}{37} = \dfrac{35}{37} + \dfrac{24}{37} = \dfrac{59}{37}$

9.

9.1. Como o perímetro é igual a 24 cm e o triângulo é equilátero, então $\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{AC}\ \dfrac{24}{3} = 8$ cm.

9.2. Como o ponto D é o ponto médio de $[AB]$, então $\overline{AD} = \overline{DB} = 4$ cm.
Como o triângulo $[DAC]$ é retângulo, então

$\cos(D\hat{A}C) = \dfrac{\overline{AD}}{\overline{AC}}$, ou seja,

$(D\hat{A}C) = \dfrac{4}{8} \Leftrightarrow (D\hat{A}C) = \cos^{-1}\left(\dfrac{1}{2}\right)$

$\Leftrightarrow (D\hat{A}C) = 60^\circ$

Determinemos $\overline{CD}$, utilizando o teorema de Pitágoras.

$\overline{AC}^{\,2} = \overline{AD}^{\,2} + \overline{CD}^{\,2}$, ou seja,

$8^2 = 4^2 + \overline{CD}^{\,2} \Leftrightarrow \overline{CD}^{\,2} = 64 - 16$

$\Leftrightarrow \overline{CD} = \pm\sqrt{48}$

$\Leftrightarrow \overline{CD} = 4\sqrt{3}$

48	2
24	2
12	2
6	2
3	3
1	

R.: $B\hat{A}C = 60^\circ$ e $\overline{CD} = 4\sqrt{3}$ cm.

9.3. $A_{[ABC]} = \dfrac{\overline{AB} \times \overline{DC}}{2}$

Logo, $A = \dfrac{8 \times 4\sqrt{3}}{2} = 16\sqrt{3}$

R.: $A = 16\sqrt{3}$ cm³.

10. Utilizando a fórmula fundamental da trigonometria, temos:

$\text{sen}^2\ \alpha + \cos^2\alpha = 1$, ou seja, $\text{sen}^2\ \alpha + \left(\dfrac{4}{5}\right)^2 = 1$

$\Leftrightarrow \text{sen}^2\ \alpha = 1 - \dfrac{16}{25}$

$\Leftrightarrow \text{sen}^2\ \alpha = \dfrac{9}{25}$

$\Leftrightarrow \text{sen}\ \alpha = \pm\sqrt{\dfrac{9}{25}}$

$\Leftrightarrow \text{sen}\ \alpha = \dfrac{3}{5}$

Como $\text{tg}\ \alpha = \dfrac{\text{sen}\ \alpha}{\cos\alpha}$, então $\text{tg}\ \alpha = \dfrac{\frac{3}{5}}{\frac{4}{5}} = \dfrac{3}{4}$.

11.

11.1. Traçando a altura, h do triângulo, relativamente à base $[AB]$, obemos um triângulo retângulo.
Como o triângulo é isósceles e a soma das amplitudes dos seus ângulos internos é 180º,

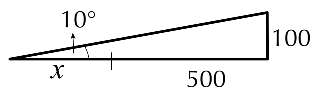
$CBA = \dfrac{180^\circ - 46^\circ}{2} = 67^\circ$

Logo, $\text{tg}\ (67^\circ) = \dfrac{h}{\frac{\overline{AB}}{2}} \Leftrightarrow h = 5\ \text{tg}\ 67^\circ$

11.2. $A_{[ABC]} = \dfrac{\overline{AB} \times h}{2} = \dfrac{10 \times 5\ \text{tg}\ 67^\circ}{2} \approx 59$

R.: $A = 59$ m²

12.



$\text{tg}\ 10^\circ = \dfrac{100}{x + 500} \Leftrightarrow x + 500 = \dfrac{100}{\text{tg}\ 10^\circ}$

$\Leftrightarrow x = \dfrac{100}{\text{tg}\ 10^\circ} - 500$

$\Leftrightarrow x \approx 67$

R.: O barco está a 67 metros da costa.

13.

13.1. A opção correta é a [C] porque

$\text{sen}\ (C\hat{A}B) = \dfrac{\text{medida do cateto oposto}}{\text{medida da hipotenusa}} = \dfrac{\overline{DE}}{\overline{AD}}$

13.2. sen $(B\hat{C}A)$ = sen $(E\hat{D}A) = \frac{4}{5}$

cos $(B\hat{C}A)$ = cos $(E\hat{D}A) = \frac{3}{5}$

tg $(B\hat{C}A)$ = tg $(E\hat{D}A) = \frac{4}{3}$

14. $TG\,(90^{o} - 15^{o}) = \frac{x}{1200} \Leftrightarrow \text{tg } 75^{o} = \frac{x}{1200}$

$\Leftrightarrow x = 1200 \text{ tg } 75^{o}$

$\Leftrightarrow x = 4478$

R.: O avião encontra-se a 4478 pés do ponto de aterragem.

15. O cateto de maior comprimento do triângulo verde tem 12 cm, porque corresponde ao lado do retângulo antes da dobragem.
Determinemos a medida do cateto menor do triângulo verde:

$\text{tg } 30^{o} = \frac{x}{12} \Leftrightarrow x = 12 \times \frac{\sqrt{3}}{3}$

$\Leftrightarrow 4\sqrt{3}$

Assim, utilizando o teorema de Pitágoras, temos:

$a^2 = 12^2 + (43)^2 \Leftrightarrow a^2 = 144 + 48$

$\Leftrightarrow a = \neq \sqrt{192}$

$\Leftrightarrow a = \sqrt{192}$

$\Leftrightarrow a = 8\sqrt{3}$

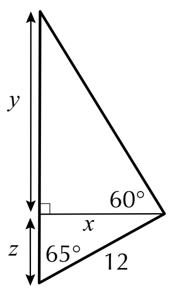
$\Leftrightarrow a \approx 13,9$

R.: O vinco mede 13,9 cm.

16. $\text{tg } x = \left(\frac{12}{100}\right) \Leftrightarrow x = \text{tg}^{-1}\left(\frac{12}{100}\right)$

$\Leftrightarrow x \approx 7^{o}$

17.



$\text{sen } (65^{o}) = \frac{x}{12} \Leftrightarrow x = 12 \text{ sen } (65^{o}) \approx 10,88 \text{ m}$

$\cos (60^{o}) = \frac{y}{10,88} \Leftrightarrow x = 10,88 \times \text{tg } (60^{o}) \approx 10,84 \text{ m}$

$\text{sen } (65^{o}) = \frac{z}{12} \Leftrightarrow z = 12\cos (65^{o}) \Leftrightarrow z = 5,07 \text{ m}$

A altura do *placard* é $y + z$.
$y + z = 18,84 + 5,07 = 23,91$
R.: A altura do *placard* é 23,91 m.

18.

18.1. $(\text{sen } x + \cos x)^2 - 2 \text{ sen } x \cos x =$
$= \text{sen}^2 x + 2 \text{ sen } x \cos x + \cos^2 x - 2 \text{ sen } x \cos x =$
$= \underbrace{\text{sen}^2 x + \cos^2 x}_{1} + \underbrace{2 \text{ sen } x \cos x - 2 \text{ sen } x \cos x}_{0} =$
$= 1$

18.2. $(\text{tg } x \times \cos x)^2 - 1 =$
$= \text{tg}^2 x \times \cos^2 x - 1 =$
$= \left(\frac{\text{sen} x}{\cos x}\right)^2 \times \cos^2 x - 1 =$
$= \frac{\text{sen}^2 x}{\cos^2 x} \times \cos^2 x - 1 =$
$= \text{sen}^2 x - 1$
Como $\text{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$, então $\text{sen}^2 x = 1 - \cos^2 x$.
Assim, $\text{sen}^2 x - 1 =$
$= 1 - \cos^2 x - 1 =$
$= -\cos^2 x$

18.3. $(\text{sen } x + \cos x)(\text{sen } x - \cos x) =$
Aplicando o caso notável, $(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$, temos: $\text{sen}^2 x - \cos^2 x =$
Como $\text{sen}^2 x = 1 - \cos^2 x$:
$1 - \cos^2 x - \cos^2 x =$
$= 1 - 2 \cos^2 x$

18.4. $\cos (90^{o} - x) \times \text{sen } x =$
$= \text{sen } x \times \text{sen } x =$
$= \text{sen}^2 x =$
$= 1 - \cos^2 x$

19. $A_{[ABC]} = \frac{\overline{AB} \times \overline{CB}}{2}$

$\text{tg } 25^{o} = \frac{1,5}{\overline{AD}} \Leftrightarrow \overline{AD} = \frac{1,5}{\text{tg } 25}$

$\Leftrightarrow \overline{AD} \approx 3.2168$

Logo $\overline{AB} = 3,22 + 5 = 8,22$.

$\text{tg } 25^{o} = \frac{\overline{CB}}{513,2168} \Leftrightarrow \overline{CB} = 8,2168 \times \text{tg } 25^{o}$

$\Leftrightarrow \overline{CB} \approx 3,8316$

Assim, $A_{[ABC]} = \frac{8,22 \times 3,83}{2} = 15,74$

R.: $A = 15,74$ cm^2.

20. O ponto B tem abcissa 0 e ordenada igual a $\overline{OB}$.
Consideremos o triângulo retângulo $[OAB]$.
$OAB = 180^o - 120^o = 60^o$

$$\text{tg } 60^o = \frac{\overline{OB}}{2} \Leftrightarrow \overline{OB} = 2 \times \text{tg } 60^o$$
$$\Leftrightarrow \overline{OB} = 2\sqrt{3}$$

Logo, $B\,(0,\ 2\sqrt{3})$.

21. Como o losango tem os lados iguais e o seu perímetro é 20, então

$$\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CD} = \overline{AD} = \frac{20}{4} = 5$$

$$\cos\left(\frac{50^o}{2}\right) = \frac{y}{5} \Leftrightarrow y = 5 \cos 25^o$$

$y \approx 4{,}5315$
Assim, a diagonal menor tem 4,2260 cm e a diagonal maior tem 9,0630 cm.

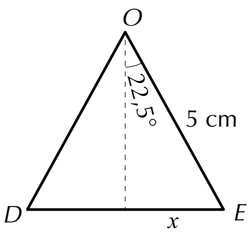
Como $A = \frac{d \times D}{2}$, temos $A = \frac{4{,}2260 \times 9{,}0630}{2} = 19{,}15$

R.: $A = 19{,}15$ cm^2

22.

22.1. Como se trata de um octógono regular inscrito numa circunferência e $B\hat{O}C$ é um ângulo ao centro, inscrito no arco $\overset{\frown}{BC}$, então $B\hat{O}C = \frac{360^o}{8} = 45^o$.

22.2.



$$\text{sen}\,(22{,}5^o) = \frac{x}{5} \Leftrightarrow x = 5\ \text{sen}\,(22{,}5^o)$$

$$\overline{DE} = 2 \times 5\ \text{sen}\,(22{,}5^o) \Leftrightarrow \overline{DE} = 3{,}830$$

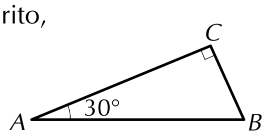
Logo, $P = 8 \times 3{,}83 = 30{,}6$ cm

23. O triângulo $[ABC]$ é um triângulo retângulo pois ACB é um ângulo inscrito numa semicircunferência, ou seja $A\hat{C}B = \frac{180^o}{2} = 90^o$.

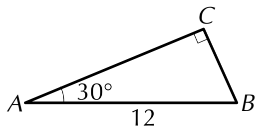
$$A_{[ABC]} = \frac{\overline{AC} \times \overline{BC}}{2}$$

Como BAC é um ângulo inscrito,

$$B\hat{A}C = \frac{\overset{\frown}{BC}}{2}\ \frac{60^o}{2} = 30^o.$$



A hipotenusa do triângulo, $[AB]$, é um diâmetro da circunferência. Logo, sendo $P = 2\pi r = d \times \pi$ e $P = 12\pi$, temos:
$d \times \pi = 12\pi \Leftrightarrow d = 12$
Utilizando as razões trigonométricas, temos:



$$\text{sen}\,(B\hat{A}C) = \frac{\overline{CB}}{\overline{AB}}, \text{ ou seja, sen } 30^o = \frac{\overline{CB}}{2}$$

$$\Leftrightarrow \overline{CB} = 12 \text{ sen } 30^o$$

$$\Leftrightarrow \overline{CB} = 12 \times \frac{1}{2} = 6$$

$$\cos\,(B\hat{A}C) = \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}}, \text{ ou seja, cos } 30^o = \frac{\overline{AC}}{2}$$

$$\Leftrightarrow \overline{AC} = 12 \cos 30^o$$

$$\Leftrightarrow \overline{AC} = 12 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 6\sqrt{3}$$

$$\text{Logo, } A_{[ABC]} = \frac{6 \times 6\sqrt{3}}{3} = 18\sqrt{3}$$

R.: $A = 18\sqrt{3}$ u.a.

24.

$$\begin{cases} \text{tg } 45^o = \dfrac{h}{x} \\ \text{tg } 30^o = \dfrac{h}{300 + x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 \times r = h \\ \text{———} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} h = x \\ \dfrac{\sqrt{3}}{3} \times (300 + x) = h \end{cases}$$

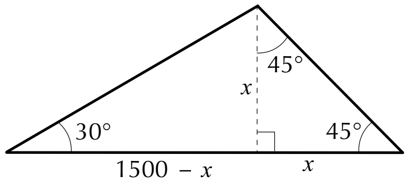
$$\Leftrightarrow \begin{cases} \text{———} \\ \dfrac{300\sqrt{3}}{3} + \dfrac{\sqrt{3}}{3}\,h = \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \text{———} \\ 3h - \sqrt{3}h = 300\sqrt{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{———} \\ h = \dfrac{300\sqrt{3}}{3 - \sqrt{3}} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \approx 410 \\ h \approx 410 \end{cases}$$

R.: O monte tem 410 metros de altura.

25. tg $30^o = \dfrac{x}{1500 - x}$



$$1500 \times \frac{\sqrt{3}}{3} - \frac{\sqrt{3}}{3}x = x$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{3}x + x = 15500\,\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{3} + 3)x = 1500\sqrt{3}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{1500\sqrt{3}}{\sqrt{3}+3}$$

$$\Leftrightarrow x \approx 549{,}04$$

$$\text{sen } 30^o = \frac{549{,}04}{\overline{AB}}$$

$$\Leftrightarrow \overline{AB} = \frac{549{,}04}{\text{sen } 40^o}$$

$$\Leftrightarrow \overline{AB} \approx 1098{,}08$$

R.: A distância entre os acampamentos A e B é 1098,08 m.

26. $\overline{OR} = \overline{OP} = 1$, porque são raios de circunferência.

Os triângulos $[OQP]$ e $[ORS]$ são semelhantes, pelo critério AA (têm um ângulo em comum e um ângulo reto).

Então, $\dfrac{\overline{OR}}{\overline{OQ}} = \dfrac{\overline{OS}}{\overline{OP}}$, ou seja, $\dfrac{1}{\overline{OQ}} = \dfrac{\overline{OS}}{1}$

$$\Leftrightarrow \overline{OQ} \times \overline{OS} = 1$$

$$\text{tg } x = \frac{\overline{SR}}{\overline{OR}} \Leftrightarrow \overline{SR} = \text{tg } x$$

$$\text{sen } x = \frac{\overline{PQ}}{\overline{OP}} \Leftrightarrow \overline{PQ} = \text{sen } x$$

$$\cos x = \frac{\overline{OQ}}{\overline{OP}} \Leftrightarrow \overline{OQ} = \cos x$$

Então, $\overline{QR} = 1 - \cos x$

$$A_{[PQRS]} = \frac{\overline{RS} + \overline{QP}}{2} \times \overline{QR}$$

$$A_{[PQRS]} = \frac{\text{tg } x + \text{sen } x}{2} \times (1 - \cos x) =$$

$$= \frac{\text{tg } x - \text{tg } x \cos x + \text{sen } x - \text{sen } x - \cos x}{2} =$$

$$= \frac{\text{tg } x - \dfrac{\text{sen } x}{\cos} x \cos x + \text{sen } x - \text{sen } x \cos x}{2} =$$

$$= \frac{\text{tg } x - \text{sen } x + \text{sen } x - \text{sen } x \cos x}{2} =$$

$$= \frac{\text{tg } x - \text{sen } x \times \cos x}{2}$$

Praticar + – páginas 206 a 212

1.

1.1. Como ACB é um ângulo inscrito, $A\hat{C}B = \dfrac{\overset{\frown}{AB}}{2}$.

Então, $A\hat{C}B = \dfrac{180^o}{2} = 90^o$.

Logo, o triângulo $[ABC]$ é retângulo em C.

1.2. Como a soma das amplitudes dos ângulos internos de um triângulo é 180^o, $B\hat{A}C = \dfrac{\overset{\frown}{BC}}{2}$, ou seja, $\overset{\frown}{BC} = 2 \times B\hat{A}C$.

Logo, $\overset{\frown}{BC} = 2 \times 50^o = 100^o$.

1.3. Sabemos que $A_\odot = \pi r^2$ e que $A_\odot = 9\pi$.

$$\text{Logo, } \pi \times r^2 = 9\pi \Leftrightarrow r^2 = \frac{9\pi}{\pi}$$

$$\Leftrightarrow r^2 = 9$$

$$\Leftrightarrow r = \sqrt{9}$$

$$\Leftrightarrow r = 3$$

1.4. $A_{[ABC]} = \dfrac{\overline{AC} \times \overline{BC}}{2}$

$$\text{sen } 40^o = \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} \Leftrightarrow \text{sen } 40^o = \frac{\overline{AC}}{2 \times r}$$

$$\Leftrightarrow \overline{AC} = 6 \text{ sen } 40^o$$

$$\Leftrightarrow \overline{AC} \approx 3{,}8567$$

$$\cos 40^o = \frac{\overline{CB}}{\overline{AB}} \Leftrightarrow \overline{CB} = 6 \cos 40^o$$

$$\Leftrightarrow \overline{CB} \approx 4{,}5963$$

Logo, $A_{[ABC]} = \dfrac{3{,}8567 \times 4{,}5963}{2} \approx 8{,}9$

R.: $A = 8{,}9$ u.a.

2.

2.1. Como o ângulo ACB é um ângulo com o vértice no exterior da circunferência, $A\hat{C}B = \frac{\overset{\frown}{BA} - \overset{\frown}{GE}}{2}$, ou seja, $\overset{\frown}{BA} = 2A\hat{C}B + \overset{\frown}{GF}$.

Consideremos o triângulo $[CDE]$. Como a soma das amplitudes dos seus ângulos internos é 180º, então $D\hat{C}E = 180º - 90º - 53º = 37º$.

Assim, $A\hat{C}B = 37º$ porque ACB e DCE são ângulos verticalmente opostos.

Logo, $\overset{\frown}{BA} = 2 \times 37º + 34º = 74º + 34º = 108º$.

Como os triângulos $[ABC]$ e $[CDE]$ são semelhantes, $A\hat{B}F = 53º$.

Por outro lado, como ABF é um ângulo inscrito,

$A\hat{B}F = \frac{\overset{\frown}{AF}}{2}$, ou seja, $\overset{\frown}{AF} = 2 \times A\hat{B}F$

Assim, $\overset{\frown}{AF} = 2 \times 53º = 106º$.

Logo $\overset{\frown}{AG} = \overset{\frown}{AF} - \overset{\frown}{GF} = 106º - 34º = 72º$.

2.2. Se $\frac{\overline{BC}}{\overline{CD}} = 3$ então a razão de semelhança do triângulo $[CDE]$ para o triângulo $[ACC]$ é igual a 3.

Logo, $\frac{\text{Área do triângulo } [ABC]}{\text{Área do triângulo } [CDE]} = r^2 = 3^2 = 9$

3.

3.1. Como AOD é um ângulo ao centro, $A\hat{O}D = \overset{\frown}{AD}$.

Como ABD é um ângulo inscrito, $A\hat{B}D = \frac{\overset{\frown}{AD}}{2}$, ou seja, $\overset{\frown}{AD} = 2 \times A\hat{B}D$.

Assim, $\overset{\frown}{AD} = 2 \times 80º = 160º$ e, portanto, $A\hat{O}D = 160º$.

3.2. Consideremos o triângulo $[ABC]$.

$[ABC]$ é um triângulo retângulo porque ABC é um ângulo inscrito numa circunferência.

Assim, aplicando o teorema de Pitágoras, temos $\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2$.

$$\text{Assim, } \overline{AC}^2 = 4^2 + 3^2 \Leftrightarrow \overline{AC}^2 = 16 + 9 \Leftrightarrow \overline{AC}^2 = 25 \Leftrightarrow \overline{AC} = \pm\sqrt{25} \Leftrightarrow \overline{AC} = 5$$

Logo, $r = \frac{\overline{AC}}{2} = \frac{5}{2} = 2{,}5$ cm.

Como $P_\odot = 2\pi r$, então $P = 2 \times \pi \times 2{,}5 = 5\pi$

R.: $P = 5\pi$ cm.

4.

4.1. Sabemos que $P_{[ABCD]} = 48$ dm.

Então, $\overline{AB} = \overline{BC} = \frac{48}{4} = 12$

Logo, $r = \frac{\overline{AB}}{2} = \frac{12}{2} = 6$

O raio da circunferência mede 6 dm.

4.2. $A_{\text{colorido a verde}} = A_{[ABCD]} - A_\odot$

$A_{[ABCD]} = 12 \times 12 = 144$

$A_\odot = \pi \times r^2$

$A_\odot = \pi \times 6^2 = 36\pi$

Logo, $A_{\text{colorido a verde}} = 144 - 36\pi \approx 31$

R.: $A = 31$ dm^2

5.

5.1. Como $D\hat{C}B = 22{,}5º$, sendo um ângulo inscrito no arco de circunferência $\overset{\frown}{DB}$.

$\overset{\frown}{DB} = 2 \times D\hat{C}B = 2 \times 22{,}5 = 45º$

$A_{\text{setor circular}} = \frac{\alpha \times \pi \times r^2}{3\,60º}$

Como DCB é um ângulo inscrito, $D\hat{C}B = \frac{\overset{\frown}{BD}}{2}$, ou seja, $\overset{\frown}{BD} = 2 \times D\hat{C}B$.

Assim, $\overset{\frown}{BD} = 2 \times 22{,}5º = 45º$.

Como DOB é um ângulo ao centro, $B\hat{O}D = \overset{\frown}{BD} = 45º$.

Sabemos que $P_\odot = 14\pi$ e que $P_\odot = 2\pi r$.

Logo, $2 \times \pi \times r = 14\pi \Leftrightarrow r = \frac{14\pi}{2\pi} \Leftrightarrow r = 7$

Então, $A_{\text{setor circular}} = \frac{45º \times \pi \times 7^2}{360º} = 6{,}125\pi \approx 19$

R.: $A = 19$ u.a.

5.2. Como $\overset{\frown}{DB} = 45º$ e $\overset{\frown}{BA} = 180º$, então a amplitude de rotação de centro O que transforma o ponto D no ponto A pode ser $45º + 180º = +225º$ (sentido positivo) **ou** $-135º$ (sentido negativo).

5.3. Como $\overrightarrow{AO} = \overrightarrow{OB}$ e $O + \overrightarrow{OB} = B$, o transformado do ponto O pela translação associada a $\overrightarrow{AO}$ é o ponto B.

6

6.1. Sabemos que a circunferência tem 6 cm de diâmetro. Logo, tem 3 cm de raio, ou seja, $\overline{OR} = 3$ cm.

Como a reta s é tangente à circunferência, no ponto T, s é perpendicular à reta TO, ou seja, $P\hat{T}O = 90º$ e, portanto, o triângulo $[PTO]$ é retângulo em T.

Pelo teorema de Pitágoras, $\overline{PO}^2 = \overline{OT}^2 + \overline{PT}^2$.

Como $\overline{OT} = \overline{OR}$, $\overline{OP}^2 = 3^2 + (\sqrt{3})^2$
$\Leftrightarrow \overline{OP}^2 = 9 + 3$
$\Leftrightarrow \overline{OP}^2 = 12$
$\Leftrightarrow \overline{OP} = \pm\sqrt{12}$
$\Leftrightarrow \overline{OP} = 2\sqrt{3}$
R.: $\overline{OP} = 2\sqrt{3}$ cm

6.2. $A_{\text{setor circular}} = \dfrac{\alpha \times \pi \times r^0}{360^o}$

$\text{sen}\,(T\hat{O}R) = \dfrac{\overline{PT}}{\overline{PO}}$

$\Leftrightarrow \text{sen}\,(T\hat{O}R) = \dfrac{\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}$

$\Leftrightarrow \text{sen}\,(T\hat{O}R) = \dfrac{1}{2}$

$\Leftrightarrow \text{sen}\,(T\hat{O}R) = \left(\dfrac{1}{2}\right)$

$\Leftrightarrow \text{sen}\,(T\hat{O}R) = 30^o$

Logo, $A_{\text{setor circular}} = \dfrac{30^o \times \pi \times 3^2}{360^o} = \dfrac{3}{4}\pi$

R.: $A = \dfrac{3}{4}\pi$ cm^2

7.
7.1. a) Ponto D.
b) Segmento de reta $[DB]$.
7.2. Como FAH é um ângulo com o vértice no interior da circunferência, $F\hat{A}H = \dfrac{\overset{\frown}{GC} + \overset{\frown}{FH}}{2}$.

Por outro lado, $F\hat{A}H = G\hat{A}F$ porque são ângulos verticalmente opostos. Como o triângulo $[ABC]$ é equilátero, $G\hat{A}C = \dfrac{180^o}{3} = 60^o$.
Logo, $F\hat{A}H = 60^o$.
$\overset{\frown}{GC} = 90^o$ porque $[CD]$ e $[FG]$ são diâmetros perpendiculares. Assim,

$F\hat{A}H = \dfrac{\overset{\frown}{GC} + \overset{\frown}{FH}}{2}$

$\Leftrightarrow 30^o = \dfrac{90^o - \overset{\frown}{FH}}{2}$

$\Leftrightarrow 60^o = 90^o - \overset{\frown}{FH}$
$\Leftrightarrow \overset{\frown}{FH} = 90^o - 60^o$
$\Leftrightarrow \overset{\frown}{FH} = 30^o$

7.3. Como $P_{[ADBC]} = 32$ cm, então $\overline{AB} = \dfrac{32}{4} = 8$ cm.

Pelo teorema de Pitágoras, $\overline{CB}^2 = \overline{CE}^2 + \overline{EB}^2$.
$8^2 = \overline{CE}^2 + 4^2$
$\Leftrightarrow \overline{CE}^2 = 64 - 16$
$\Leftrightarrow \overline{CE}^2 = 48$
$\Leftrightarrow \overline{CE} = \pm\sqrt{48}$
$\Leftrightarrow \overline{CE} = 4\sqrt{3}$
Logo, $\overline{CD} = 2 \times \overline{CE} = 2 \times 4\sqrt{3} = 8\sqrt{3}$.

Então, $A_{[ADBC]} = \dfrac{\overline{AB} \times \overline{CD}}{2} = \dfrac{8 \times 8\sqrt{3}}{2} =$

$= 32\sqrt{3} \approx 55$
R.: $A_{[ADBC]} = 55$ cm^2

7.4. Sabemos que $\text{sen}\,\alpha = \dfrac{\overline{EA}}{\overline{CA}}$ e que

$\text{sen}\,\alpha = \dfrac{\text{media do cateto oposto}}{\text{medida da hipotenusa}}$

Então, $\alpha = A\hat{C}E$.

8.
8.1. Sabemos que $P_{[AECD]} = 20$ cm.
Logo, $2\overline{AD} + 2\overline{AE} = 20$
$\Leftrightarrow 2 \times 4 + 2\overline{AE} = 20$
$\Leftrightarrow 2\overline{AE} = 20 - 8$
$\Leftrightarrow 2\overline{AE} = 12$
$\Leftrightarrow \overline{AE} = 6$
Logo, $\overline{AE} = 6$ cm.
8.2. $B\hat{E}C = 90^o$ e a soma das amplitudes dos ângulos internos de um triângulo é 180^o, então
$E\hat{C}B = 180^o - 90^o - 30^o = 60^o$.

8.3. $A_{[ABCD]} = \dfrac{\overline{DC} + \overline{AB}}{2} \times \overline{CE}$

$\overline{CE} = \overline{DA} = 4$ cm
Considerando o triângulo retângulo $[CEB]$, temos:

$\text{tg}\, E\hat{B}C = \dfrac{\overline{CE}}{\overline{BE}}$

$\Leftrightarrow \text{tg}\, 30^o = \dfrac{4}{\overline{BE}}$

$\Leftrightarrow \overline{BE} = \dfrac{4}{\frac{\sqrt{3}}{3}}$

$\Leftrightarrow \overline{BE} = \dfrac{12}{\sqrt{3}}$

$\Leftrightarrow \ \overline{BE} = \frac{12\sqrt{3}}{3}$

$\Leftrightarrow \ \overline{BE} = 4\sqrt{3}$

Logo, $A_{[ABCD]} = \frac{6 + (6 + 4\sqrt{3})}{2} \times 4 =$

$= 4 = (6 + 2\sqrt{3}) \times 4 =$
$= 24 + 8\sqrt{3} \approx 38$
R.: $A = 38$ cm^2.

9.
9.1. Os ângulos BOC e DOA são geometricamente iguais porque são ângulos ao centro compreendidos entre cordas paralelas ([AB] e [DC]).

9.2. Como ACB é um ângulo inscrito, $A\hat{C}B = \frac{\overset{\frown}{AB}}{2}$.

Como [$ABCD$] é um trapézio, [AB] // [DC].
Então, $\overset{\frown}{BC} = \overset{\frown}{DA}$ porque são arcos compreendidos entre cordas paralelas.

Como DBA é um ângulo inscrito, $D\hat{B}A = \frac{\overset{\frown}{DA}}{2}$,ou seja, $\overset{\frown}{DA} = 2 \times D\hat{B}A$.
Assim, $\overset{\frown}{BC} = \overset{\frown}{DA} = 2 \times D\hat{B}A = 2 \times 30^o = 60^o$.
Logo, como $\overset{\frown}{AB} + \overset{\frown}{BC} + \overset{\frown}{CD} + \overset{\frown}{DA} = 360^o$, então $\overset{\frown}{AB} = 360^o - 60^o - 75^o - 60^o = 165^o$.

Concluímos então que $A\hat{C}B = \frac{165^o}{2} = 82{,}5^o$.

9.3. $A_{[ABCD]} = \frac{\overline{AB} + \overline{DC}}{2} \times \overline{FG}$

Sabemos que $\overline{AB} = 11{,}9$ cm e que $\overline{FG} = \overline{EF} + \overline{EG}$, ou seja, $\overline{FG} = 2 + \frac{7}{6} \times 2 = 2 + \frac{14}{6} = 2 + \frac{7}{3} = \frac{13}{3}$

Consideremos o triângulo [FEC].
O triângulo é retângulo porque como [IH] $\perp$ [AB] e [AB] // [DC], então [IH] $\perp$ [DC].
Como DCA é um ângulo inscrito, $D\hat{C}A = \frac{\overset{\frown}{DA}}{2}$.

Assim, $F\hat{C}E = D\hat{C}A = \frac{60^o}{2} = 30^o$.

Logo, tg $(F\hat{C}E) = \frac{\overline{EF}}{\overline{FC}}$, ou seja, tg $30^o = \frac{2}{\overline{FC}}$

$\Leftrightarrow \ \overline{FC} = \frac{2}{\text{tg } 30^o}$

$\Leftrightarrow \ \overline{FC} = \frac{2}{\frac{\sqrt{3}}{3}}$

$\Leftrightarrow \ \overline{FC} = \frac{6}{\sqrt{3}}$

Logo, $\overline{DC} = 2 \times \overline{FC} = 2 \times \frac{6}{\sqrt{3}} = \frac{12}{\sqrt{3}} \approx 6{,}928$

Então, $A_{[ABCD]} = \frac{11{,}9 + 6{,}928}{2} \times \frac{13}{3} \approx 40{,}8$

R.: $A = 40{,}8$ cm^2.
9.4. O transformado de A por $T_{\overrightarrow{AE}}$ é o ponto E.
O transformado de E por $T_{\overrightarrow{EB}}$ é o ponto B.
Logo, o transforamdo de A por $T_{\overrightarrow{EB}}$ o $T_{\overrightarrow{AE}}$ é o ponto B.

10.
10.1. Como COA é um ângulo ao centro, $C\hat{O}A = \overset{\frown}{CA}$.
Sabemos que CBA é um ângulo inscrito e que

$C\hat{B}A = 38^o$. Assim, $C\hat{B}A = \frac{\overset{\frown}{CA}}{2}$, ou seja

$\overset{\frown}{CA} = 2 \times C\hat{B}A = 2 \times 38^o = 76^o$.
Logo, $C\hat{O}A = 76^o$.
10.2. O triângulo [ABC] está inscrito na semicircunferência, logo é retângulo em A.
Sabemos que $\overline{BC} = 8$ cm.

Assim, cos $(C\hat{B}A) = \frac{\overline{AB}}{\overline{BC}}$, ou seja, cos $38^o = \frac{\overline{AB}}{8}$

$\Leftrightarrow \ \overline{AB} = 8 \cos 38^o \approx 6{,}3$
R.: $\overline{BA} = 6{,}3$ cm.

11.
11.1. $V_{\text{paralelepípedo}} = Ab \times h$
$V_{\text{paralelepípedo}} = 225 \times 10 = 2250$

$V_{\text{esfera}} = \frac{4}{3} \times \pi \times r^3$

$V_{\text{esfera}} = \frac{4}{3} \times \pi \times 5^3 = \frac{500\pi}{3}$

Logo, $V_{\text{líquido}} = 2250 - \frac{500\pi}{3} = 1726$

R.: $V = 1726$ cm^3.
11.2. a) Oblíquas.
b) Complanares.
c) Estritamente paralelas.

12.
12.1. sen $30^o = \frac{\overline{GB}}{56}$

Assim, sen $30^o = \frac{\overline{GB}}{10}$

$\Leftrightarrow \ \overline{GB} = 10$ sen 30^o

$\Leftrightarrow \overline{GB} = 5$
$A_{[ABCD]} = 25$
$\Leftrightarrow \overline{AB} = \sqrt{25}$
$\Leftrightarrow \overline{AB} = 5$
Assim, $\overline{AB} = 5$ cm e $\overline{BC} = 5$ cm.
Logo, $[ABCDEFGH]$ é um cubo.
12.2. $V_{\text{sólido}} = V_{[ABCDEFGH]} + V_{[BJICGH]}$
Utilizando o teorema de Pitágoras, $\overline{GJ}^2 = \overline{BJ}^2 + \overline{BG}^2$.
Assim, $10^2 = \overline{BJ}^2 + 5^2$
$\Leftrightarrow \overline{BJ}^2 = 100 - 25$
$\Leftrightarrow \overline{BJ} = \pm\sqrt{75}$
$\Leftrightarrow \overline{BJ} = 5\sqrt{3}$
Logo, $V_{\text{sólido}} = 5^3 + \dfrac{5\sqrt{3} \times 5}{2} \times 5 \approx 233$
R.: $V_{\text{sólido}} \approx 233$ cm^3.
12.3. [A] Falsa. A reta HI é oblíqua ao plano ABC.
[B] Falsa. A reta HI é oblíqua ao plano ABC.
[C] Falsa. A reta FE é perpendicular ao plano AJC.
[D] Verdadeira.
Logo, a opção correta é a [D].
12.4. A reta GJ.

13.
13.1. Por exemplo, HC.
13.2. Sabemos que $\overline{BC} = \overline{AB} = 4$ cm.
$\text{tg } 60° = \dfrac{\overline{BG}}{\overline{AB}}$, ou seja, $\overline{BG} = 4 \text{ tg } 60°$
$\Leftrightarrow \overline{BG} = 4\sqrt{3}$
$V_{\text{paralelepípedo}} = \overline{AB} \times \overline{BC} \times \overline{BG} = 4 \times 4 \times 4\sqrt{3} = 64\sqrt{3}$
Logo, $V = 64\sqrt{3}$ cm^3.
13.3. Como o cubo tem o mesmo volume do paralelepípedo e $V_{\text{cubo}} = a^3$, então $a^3 = 64\sqrt{3}$
$\Leftrightarrow a = \sqrt[3]{64\sqrt{3}} \approx 4{,}8$
R.: $a = 4{,}8$ cm.

14.
14.1. $A_{\text{total cilindro}} = 2 \times Ab + A_{\text{lateral}}$
Determinemos o raio da base:
como $A_{\odot} = \pi \times r^2$, então $\pi \times r^2 = 36\pi$
$\Leftrightarrow r = \pm\sqrt{36}$
$\Leftrightarrow r = 6$
$A_{\text{lateral}} = P_{\odot} \times h$, ou seja,
$A_{\text{lateral}} = 2 \times \pi \times 6 \times 11 = 132\pi$
Logo, $A_{\text{total cilindro}} = 2 \times 36\pi + 132\pi = 204\pi$.
R.: $A = 204\pi$ cm^2.
14.2. $V_{\text{cilindro}} = Ab \times h$
$V_{\text{cilindro}} = 36\pi \times (5 + 6) = 396\pi$
$V_{\text{esfera}} = \dfrac{4}{3}\pi r^3$
$\Leftrightarrow \dfrac{4}{3}\pi r^3 = 396\pi$
$\Leftrightarrow r^3 = \dfrac{396 \times 3 \times \pi}{4\pi}$
$\Leftrightarrow r = \sqrt[3]{297} \approx 6{,}7$
R.: $r \approx 6{,}7$ cm.

15.
15.1. 20% de 1 litro é igual a 1 $\ell \times 0{,}2 = 0{,}2$ litros.
Como 1 litro = 1 dm^3, então
$1{,}2\ \ell = 1{,}2$ dm^3 = 1200 cm^3.
15.2. Determinemos a capacidade de cada copo.
$V_{\text{cilindro}} = Ab \times h$
$V_{\text{cilindro}} = \pi \times r^2 \times \text{altura} =$
$= \pi \times 2{,}5 \times a =$
$= 56{,}25\pi$
Como $1200 : 56{,}25\pi \approx 6{,}8$, então é possível encher seis copos.
15.3. $D + \overrightarrow{AG} = D + \overrightarrow{DF} = F$
R.: Ponto F.

16.
16.1. $\text{tg } 60° = \dfrac{\overline{BC}}{8}$
$\Leftrightarrow \overline{BC} = 8 \text{ tg } 60°$
$\Leftrightarrow \overline{BC} = 8\sqrt{3} \approx 14$
R.: $\overline{BC} = 14$ dm.
16.2. O sólido que se obtém é um cone de raio de base $\overline{AB}$ e altura $\overline{BC}$.
Pelo teorema de Pitágoras,
$\overline{AC}^2 = (8\sqrt{3})^2 + 8^2$
$\Leftrightarrow \overline{AC}^2 = 256$
$\Leftrightarrow \overline{AC} = 16$
Logo, $A_{\text{cone}} = \pi \times r \times g + \pi \times r^2$
$A_{\text{cone}} = \pi \times 8 \times 16 + \pi \times 8^2 =$
$= 128\pi + 64\pi =$
$= 192\pi$
R.: $A = 192\pi$ dm^2.

17.
17.1. $V_{\text{esfera}} = \dfrac{4}{3}\pi r^3$
$V_{2 \text{ esferas}} = \dfrac{8}{3}\pi r^3$

$V_{cilindro} = Ab \times h =$
$= \pi \times r^2 \times 2 \times d =$
$= \pi \times r^2 \times 4r =$
$= 4\,\pi r^3$

Logo, $\dfrac{V_{esferas}}{V_{cilindro}} = \dfrac{\frac{8}{3}\pi r^3}{4\,\pi r^3} = \dfrac{8}{3} \times \dfrac{1}{4} = \dfrac{2}{3}$

17.2. $V_{cilindro} = 36\pi$
$\Leftrightarrow\ \pi r^2 \times 4r = 36$
$\Leftrightarrow\ r^3 = \dfrac{36\pi}{4\pi}$
$\Leftrightarrow\ r = \sqrt[3]{9}$

$V_{2\ esferas} = \dfrac{8}{3}\pi\,(\sqrt[3]{9})^3 =$
$= \dfrac{8}{3}\pi \times 9 =$
$= 24\pi$

Volume da caixa não ocupado pelas esferas:
$36\pi - 24\pi = 12\pi$.
R.: $V = 12\pi$ u.v.

18.
18.1. Pela semelhança de triângulos,

$\dfrac{8}{21{,}5} = \dfrac{60}{60 - x}$
$\Leftrightarrow\ 60 - x = \dfrac{60 \times 2{,}5}{8}$
$\Leftrightarrow\ x = 41{,}25$

Logo, a altura do cone menor é igual a $60 - 41{,}25 =$ $= 18{,}25$.

18.2. $V_{cone\ maior} = \dfrac{1}{3} \times \pi \times 8^2 \times 60 = 1280\pi$

$V_{cone\ menor} = \dfrac{1}{3} \times \pi \times 2{,}5^2 \times 18{,}75 \approx 39{,}1\pi$

Logo, $V_{branco} = 1280\pi - 39{,}1\pi \approx 3898$.
R.: $V = 3898$ cm^3.

19.
19.1. $V_{cilindro} = Ab \times h$
$V_{cilindro} = \pi \times r^2 \times$ altura
$= \pi \times 4^2 \times 15 =$
$= 240\pi$
R.: $V = 240\pi$ cm^3.

19.2. Pelo teorema de Pitágoras, temos:
$\overline{AD}^2 = (4\pi)^2 + 15^2$
$\Leftrightarrow\ \overline{AD}^2 = 16\pi^2 + 225$
$\Leftrightarrow\ \overline{AD} = \pm\sqrt{16\pi^2 + 225}$
$\Leftrightarrow\ \overline{AD} \approx 20$
R.: $\overline{AD} \approx 20$.

20.
20.1. a) Por exemplo, *GH*.
b) Por exemplo, *ABE* e *BCE*.
c) Por exemplo, *AB* e *DC*.

20.2. Como $A_{[FGHI]} = 16$ cm^2, então $\overline{AB} = \sqrt{256}$
$\Leftrightarrow\ \overline{AB} = 16$
Por outro lado, como $A_{[FGHI]} = 16$ cm^2, então
$\overline{FG} = \sqrt{16}\ \Leftrightarrow\ \overline{FG} = 4$
Pelo teorema de Pitágoras,
$x^2 = 12^2 + 6^2$
$\Leftrightarrow\ x^2 = 144 + 64$
$\Leftrightarrow\ x^2 = 208$
$\Leftrightarrow\ x = \pm\sqrt{208}$
$\Leftrightarrow\ x = 4\sqrt{13}$
Como os triângulos são semelhantes, os comprimentos dos lados são proporcionais.

Assim, $\dfrac{12}{x} = \dfrac{8}{2}$
$\Leftrightarrow\ x = \dfrac{12 \times 2}{8}$
$\Leftrightarrow\ x = 3$
Logo, a altura da pirâmide [*FGHIE*] é 3 cm.

20.3. Determinemos $\overline{DB}$, pelo teorema de Pitágoras.
$\overline{DB}^2 = 16^2 + 16^2$
$\Leftrightarrow\ \overline{DB}^2 = 512$
$\Leftrightarrow\ \overline{DB} = \pm\sqrt{512}$
$\Leftrightarrow\ \overline{DB} = 16\sqrt{2}$

Então, $\overline{OB} = \dfrac{\overline{DB}}{2} = 8\sqrt{2}$

$\text{tg}\,(E\hat{B}D) = \dfrac{12}{8\sqrt{2}}$
$\Leftrightarrow\ E\hat{B}D = \text{tg}^{-1}\left(\dfrac{12}{8\sqrt{2}}\right) \approx 4{,}7^{\text{o}}$

R.: $E\hat{B}D = 4{,}7^{\text{o}}$.

21.
21.1. Determinemos $\overline{JK}$, considerando que o cubo tem de aresta *a*.

$\overline{JK}^2 = \left(\dfrac{a}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{a}{2}\right)^2$
$\Leftrightarrow\ \overline{JK}^2 = \dfrac{a^2}{4} + \dfrac{a^2}{4}$
$\Leftrightarrow\ \overline{JK}^2 = \dfrac{a^2}{2}$
$\Leftrightarrow\ \overline{JK} = \dfrac{a}{\sqrt{2}}$

$V_{pirâmide} = \frac{1}{3}\left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right)^2 \times a = \frac{a^3}{6}$

Como $V_{cubo} = a^3$, então $\frac{5}{6} \times 21 = 17{,}5 \approx 18$

R.: $V = 18$ u.v.

21.2. a) Por exemplo, *ABC* e *HGF*.

b) Por exemplo, *GF*.

c) Por exemplo, *AD*.

d) Por exemplo, *CE*.

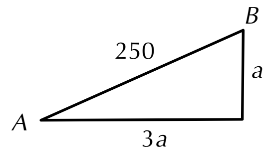
21.3. a) Ponto *C*

b) [*CB*]

22.

22.1. A opção correta é a [A].

22.2. Pelo teorema de Pitágoras,



$250^2 = a^2 + (3a)^2$

$\Leftrightarrow\ 62\ 500 = a^2 + 9a^2$

$\Leftrightarrow\ 10a^2 = 62\ 500$

$\Leftrightarrow\ a^2 = 6250$

$\Leftrightarrow\ a = \pm\sqrt{6250}$

$\Leftrightarrow\ a \approx 79$

R.: $a \approx 79$ mm.