Escola Secundária de Paredes

Proposta de Resolução da 2ª Ficha Formativa

Matemática A

10.º Ano de Escolaridade | Turmas: F-K

novembro de 2018

1. .

   1.1. .

   1.1.1. **Condição:** $x=4 \wedge y=0$

   1.1.2. **Condição:** $y=-4 \wedge z=0 \wedge 0 \leq x \leq 4$

   1.1.3. **Condição:** $z=0 \wedge 0 \leq x \leq 4 \wedge -4 \leq y \leq 0$

   1.2. P pertence à face $[ADHE]$, se, e só se, $0 \leq 2k+1 \leq 4$

   Ora,

   $0 \leq 2k+1 \leq 4 \Leftrightarrow 2k+1 \geq 0 \wedge 2k+1 \leq 4 \Leftrightarrow 2k \geq -1 \wedge 2k \leq 4-1 \Leftrightarrow k \geq -\frac{1}{2} \wedge k \leq \frac{3}{2}$

   Outro processo

   $0 \leq 2k+1 \leq 4 \Leftrightarrow$
   $\Leftrightarrow 0-1 \leq 2k \leq 4-1 \Leftrightarrow$
   $\Leftrightarrow -1 \leq 2k \leq 3 \Leftrightarrow$
   $\Leftrightarrow -\frac{1}{2} \leq k \leq \frac{3}{2}$

   Portanto, $k \in \left[-\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right]$

   1.3. Ponto médio do segmento $[DH]$: $T(0;-4;-2)$

   Equação do plano: $z=-2$

2. $x^2+y^2+z^2+2x-2y+4z-1=0 \Leftrightarrow$
   $\Leftrightarrow x^2+2x+y^2-2y+z^2+4z-1=0 \Leftrightarrow$
   $\Leftrightarrow (x^2+2\times x\times 1+1^2)-1^2+(y^2-2\times y\times 1+1^2)-1^2+(z^2+2\times z\times 2+2^2)-2^2-1=0 \Leftrightarrow$
   $\Leftrightarrow (x+1)^2-1+(y-1)^2-1+(z+2)^2-4-1=0 \Leftrightarrow$
   $\Leftrightarrow (x+1)^2+(y-1)^2+(z+2)^2=7 \Leftrightarrow$
   $\Leftrightarrow (x-(-1))^2+(y-1)^2+(z-(-2))^2=(\sqrt{7})^2 \Leftrightarrow$

   Esta condição define a superfície esférica de centro no ponto $C(-1,1;-2)$ e de raio $\sqrt{7}$

3. .

   3.1. Seja $P(x,y)$ um ponto genérico da mediatriz do segmento $[OA]$

   Então, deverá ter-se, $\overline{OP}=\overline{AP}$

   Ora,

   $\overline{OP}=\overline{AP} \Leftrightarrow \sqrt{(x-0)^2+(y-0)^2}=\sqrt{(x-4)^2+(y-(-2))^2}$

   Elevando ambos os membros ao quadrado, vem,

   $x^2+y^2=(x-4)^2+(y+2)^2 \Leftrightarrow$
   $\Leftrightarrow x^2+y^2=x^2-8x+16+y^2+4y+4 \Leftrightarrow$
   $\Leftrightarrow 0=-8x+16+4y+4 \Leftrightarrow$
   $\Leftrightarrow 4y=8x-20 \Leftrightarrow$
   $\Leftrightarrow y=2x-5 \mapsto$ Equação reduzida da mediatriz do segmento $[OA]$

3.2. O ponto C é da forma $(0; y_C)$, em que y_C é a ordenada na origem da reta AB

Determinemos, então o ponto B, que é da forma $(x; 0)$

Primeiro processo:

a condição que define a circunferência representada é $(x-4)^2 + (y-(-2))^2 = 3^2$
Ou seja, $(x-4)^2 + (y+2)^2 = 9$

Como B é ponto da circunferência, tem-se,

$y = 0 \mapsto (x-4)^2 + (0+2)^2 = 9 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow (x-4)^2 + 4 = 9 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow (x-4)^2 = 9 - 4 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow (x-4)^2 = 5 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x - 4 = \pm\sqrt{5} \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x - 4 = -\sqrt{5} \vee x - 4 = \sqrt{5} \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x = 4 - \sqrt{5} \vee x = 4 + \sqrt{5} \Leftrightarrow$

Logo, $B(4+\sqrt{5}; 0)$

Segundo processo:

Aplicando o Teorema de Pitágoras ao triângulo retângulo $[ABD]$, sendo $D(4; 0)$
$\overline{AB}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{BD}^2 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 3^2 = 2^2 + \overline{BD}^2 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 9 = 4 + \overline{BD}^2 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 9 - 4 = \overline{BD}^2 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \overline{BD}^2 = 5 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \overline{BD} = \pm\sqrt{5} \Leftrightarrow$, e como $\overline{BD} > 0$, vem, $\overline{BD} = \sqrt{5}$

Logo, $B(4+\sqrt{5}; 0)$

Determinação da equação reduzida da reta AB

$$m_{AB} = \frac{0-(-2)}{4+\sqrt{5}-4} = \frac{0+2}{\sqrt{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

Assim, $AB : y = \frac{2\sqrt{5}}{5}x + b$, com $b \in \mathbb{R}$

Como a reta "passa"no ponto A, vem,

$$-2 = \frac{2\sqrt{5}}{5} \times 4 + b \Leftrightarrow b = -2 - \frac{8\sqrt{5}}{5} \Leftrightarrow b = \frac{-10-8\sqrt{5}}{5}$$

Logo, $AB : y = \frac{2\sqrt{5}}{5}x - \frac{10+8\sqrt{5}}{5}$

Portanto, $C\left(0; \frac{-10-8\sqrt{5}}{5}\right)$

3.3. A condição que define a região colorida é:

$$(x-4)^2 + (y+2)^2 \leq 9 \wedge \left(y \geq 0 \vee y \leq \frac{2\sqrt{5}}{5}x - \frac{10+8\sqrt{5}}{5}\right)$$

4. .

4.1. $V_{Solido} = 224 \Leftrightarrow V_{Prisma} + V_{Piramide} = 224 \Leftrightarrow \overline{AD}^2 \times \overline{AE} + \frac{\overline{EH}^2 \times 3}{3} = 224 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \overline{AD}^2 \times 6 + \overline{AD}^2 = 224 \Leftrightarrow 7\overline{AD}^2 = 224 \Leftrightarrow \overline{AD}^2 = \frac{224}{7} \Leftrightarrow \overline{AD}^2 = 32 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \overline{AD} = \pm\sqrt{32}$, como, $\overline{AD} > 0$, vem, $\overline{AD} = \sqrt{32}$

Aplicando o Teorema de Pitágoras ao triângulo retângulo $[OAD]$, vem,

$\overline{AD}^2 = \overline{OA}^2 + \overline{OD}^2 \Leftrightarrow 32 = 2\overline{OA}^2 \Leftrightarrow \overline{OA}^2 = 16 \Leftrightarrow \overline{OA} = \pm\sqrt{16}$, como, $\overline{OA} > 0$, vem, $\overline{OA} = \sqrt{16} = 4$

Portanto,

$A(4;0;0)$; $B(0;0;-4)$; $C(-4;0;0)$; $D(0;0;4)$
$E(4;6;0)$; $F(0;6;-4)$; $G(-4;6;0)$; $H(0;6;4)$
$I(0;9;0)$

4.2. O quadrilátero $[ACGE]$ está contido no plano xOy

A condição que o define é: $z = 0 \wedge -4 \leq x \leq 4 \wedge 0 \leq y \leq 6$

4.3. Sabemos que $E(4;6;0)$ e $I(0;9;0)$

$\overline{EI} = \sqrt{(4-0)^2 + (6-9)^2 + (0-0)^2} = \sqrt{16+9+0} = \sqrt{25} = 5$

$\overline{HI} = \overline{EI} = 5$ e $\overline{EH} = \overline{AD} = 4\sqrt{2}$

Logo, $P_{[EHI]} = 2\overline{EI} + \overline{EH} = (10 + 4\sqrt{2})\ u.c.$

4.4. Centro: $O(0;0;0)$
Raio:$\overline{OA} = 4$

Logo, a equação reduzida da superfície esférica pedida é $(x-0)^2 + (y-0)^2 + (z-0)^2 = 4^2$

Ou seja, $x^2 + y^2 + z^2 = 16$

As equações dos planos tangentes pedidos são $z = -4$ e $z = 4$

4.5. Determinemos as coordenadas do ponto T, ponto médio do segmento $[GI]$

Sabemos que $E(4;6;0)$, $G(-4;6;0)$ e $I(0;9;0)$

$T\left(\frac{-4+0}{2}; \frac{6+9}{2}; \frac{0+0}{2}\right)$, ou seja, $T\left(-2; \frac{15}{2}; 0\right)$

Seja $P(x;y;z)$ um ponto genérico do plano mediador do segmento $[ET]$

Então, deverá ter-se, $\overline{EP} = \overline{TP}$

Ora,

$$\overline{EP} = \overline{TP} \Leftrightarrow \sqrt{(x-4)^2 + (y-6)^2 + (z-0)^2} = \sqrt{(x-(-2))^2 + \left(y - \frac{15}{2}\right)^2 + (z-0)^2}$$

Elevando ambos os membros ao quadrado, vem,

$$(x-4)^2 + (y-6)^2 + (z-0)^2 = (x+2)^2 + \left(y - \frac{15}{2}\right)^2 + (z-0)^2 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x^2 - 8x + 16 + y^2 - 12y + 36 + z^2 = x^2 + 4x + 4 + y^2 - 15y + \frac{225}{4} + z^2 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow -8x + 16 - 12y + 36 = 4x + 4 - 15y + \frac{225}{4} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow -8x - 4x - 12y + 15y + 16 + 36 - 4 - \frac{225}{4} = 0 \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow -12x+3y+48-\dfrac{225}{4}=0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow -48x+12y-33=0 \mapsto$ Equação do plano mediador do segmento $[ET]$

5. .

   5.1. .
   $A(4;0;0)$; $B(0;4;0)$
   $C(0;0;4)$; $D(-4;0;0)$
   $E(0;-4;0)$; $F(0;0;-4)$

   $P\left(\dfrac{0+0}{2};\dfrac{4+0}{2};\dfrac{0-4}{2}\right)=(0;2;-2)$
   Assim, a distância entre os pontos P e C é igual a
   $\overline{PC}=\sqrt{(0-0)^2+(0-2)^2+(4+2)^2}=\sqrt{40}=\sqrt{2^2\times 10}=2\sqrt{10}$

   5.2. .

   Primeiro processo

   Determinemos $\overline{AB}$

   $\overline{AB}=\sqrt{(4-0)^2+(0-4)^2+(0-0)^2}=\sqrt{16+16+0}=\sqrt{32}=\sqrt{2^5}=\sqrt{2^2\times 2^2\times 2}=4\sqrt{2}$

   Seja M o ponto médio do segmento $[AB]$

   Então, $M\left(\dfrac{4+0}{2};\dfrac{0+4}{2};\dfrac{0+0}{2}\right)$, ou seja, $M(2;2,0)$

   A medida da altura do triângulo $[ABC]$ é
   $\overline{CM}=\sqrt{(2-0)^2+(2-0)^2+(0-4)^2}=\sqrt{4+4+16}=\sqrt{24}=2\sqrt{6}$
   Assim, a área de uma face do octaedro é igual a
   $A_{[ABC]}=\dfrac{\overline{AB}\times\overline{CM}}{2}=\dfrac{4\sqrt{2}\times 2\sqrt{6}}{2}=4\sqrt{2\times 6}=4\sqrt{12}=4\sqrt{2^2\times 3}=8\sqrt{3}\ u.a.$

   Então, a área da superfície do octaedro é igual a $A_{superficiedooctaedro}=8\times A_{[ABC]}=64\sqrt{3}\ u.a.$

   Segundo processo

   Determinemos $\overline{AB}$
   Aplicando o teorema de Pitágoras ao triângulo retângulo $[OAB]$, vem,
   $\overline{AB}^2=\overline{OA}^2+\overline{OB}^2 \Leftrightarrow$
   $\Leftrightarrow \overline{AB}^2=4^2+4^2 \Leftrightarrow$
   $\Leftrightarrow \overline{AB}^2=32 \Leftrightarrow$
   $\Leftrightarrow \overline{AB}=\pm\sqrt{32} \Leftrightarrow$
   $\Leftrightarrow \overline{AB}=\pm 4\sqrt{2}$, como $\overline{AB}>0$, vem, $\overline{AB}=4\sqrt{2}$
   Consideremos agora o triângulo equilátero $[ABC]$, e seja M o ponto médio do segmento $[AB]$
   Aplicando o teorema de Pitágoras ao triângulo retângulo $[AMC]$, vem,
   $\overline{AC}^2=\overline{AM}^2+\overline{CM}^2 \Leftrightarrow$
   $\Leftrightarrow (4\sqrt{2})^2=(2\sqrt{2})^2+\overline{CM}^2 \Leftrightarrow$
   $\Leftrightarrow \overline{CM}^2=32-8 \Leftrightarrow$
   $\Leftrightarrow \overline{CM}=\pm\sqrt{24} \Leftrightarrow$, como $\overline{CM}>0$, vem, $\overline{CM}=2\sqrt{6}$

   Assim, a área de uma face do octaedro é igual a
   $A_{[ABC]}=\dfrac{\overline{AB}\times\overline{CM}}{2}=\dfrac{4\sqrt{2}\times 2\sqrt{6}}{2}=4\sqrt{2\times 6}=4\sqrt{12}=4\sqrt{2^2\times 3}=8\sqrt{3}\ u.a.$

   Então, a área da superfície do octaedro é igual a $A_{superficiedooctaedro}=8\times A_{[ABC]}=64\sqrt{3}\ u.a.$