SOCIEDADE PORTUGUESA DE MATEMÁTICA

TESTE DE MATEMÁTICA – MOCK TESTE 2021

10.º ano de Escolaridade (quatro páginas)

Para cada resposta, identifique o grupo e o item.

Apresente as suas respostas de forma legível.

As cotações dos itens encontram-se no final do enunciado da prova.

Não é permitido o uso de máquina de calcular.

Na resposta aos itens de **escolha múltipla**, selecione a opção correta. Escreva, na folha de respostas, o número do item e a letra que identifica a opção escolhida.

Na resposta aos restantes, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias.

1. De uma função f, injetiva de domínio $\{-3, 1, 0\}$ e conjunto de chegada $\{7, 8, 9\}$, sabe-se que:

$f(1) = 9$

$f(0) = f(1) - 2$

Qual é a imagem de -3 por meio de f?

(A) 11 **(B)** 7 **(C)** 8 **(D)** 9

2. $\sqrt[6]{4} \div \sqrt[6]{2} \times \sqrt[3]{\sqrt{9}} \div \sqrt[6]{9}$ é igual a:

(A) $\sqrt[6]{2}$ **(B)** $\sqrt[6]{9}$ **(C)** $\sqrt[6]{3}$ **(D)** $\sqrt[3]{2}$

3. O valor de $m \in IN$, tal que $\sqrt{11 + 6\sqrt{2}} = m + \sqrt{2}$ é:

(A) 1 **(B)** 2 **(C)** 3 **(D)** 4

4. Considere, num referencial ortonormado xOy, os pontos $A(1, -5)$ e $B(4, -1)$. Qual das seguintes afirmações é verdadeira?

(A) A distância entre os pontos A e B é 25 unidades.

(B) A reta de equação $y = \frac{4}{3}x + 5$ é paralela à reta AB.

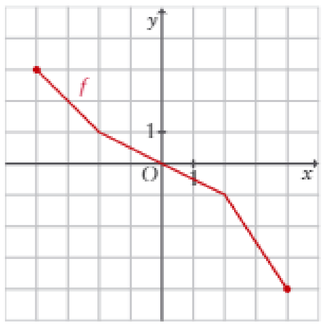
(C) A equação reduzida da mediatriz de $[AB]$ é $y = -6x + 9$.

(D) O ponto médio de $[AB]$ tem coordenadas $(5, -3)$.

5. Das seguintes condições, qual a que define uma região do plano que contém o 3.º quadrante?

(A) $x + y \leq 1$ **(B)** $1 \geq y - 2x$ **(C)** $x < 1 \wedge y > 2$ **(D)** $x > -1 \wedge y > -2$

6. Seja f a função bijetiva representada graficamente ao lado e seja g a função, de domínio IR, definida por $g(x) = 2 - x$.



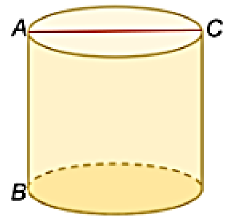
Determine $(f o g)(4)$ e $f(2) + f^{-1}(2)$.

7. Considere, em IR as condições:

$p(x): 20 - 3x \geq 41$; $q(x): |x| > 4 \ \wedge \ x^2 + 5 < 0$

Justifique que a seguinte proposição é falsa: $\exists x \in IN: \ p(x) \vee q(x)$

8. Na figura ao lado está representado um cilindro. Sabe-se que:



- $[AB]$ é uma geratriz do cilindro
- $[AC]$ é um diâmetro de uma das bases do cilindro;
- As retas AB e AC são perpendiculares;
- $\overline{AB} = 2\sqrt[3]{9}$ e $\overline{BC} = \frac{5}{2} \times 3^{\frac{2}{3}}$.

Determine o perímetro da base do cilindro.

9. Seja k um número real e $A(x) = -x^3 + kx^2 - k + 1$ uma família de polinómios.

9.1. Resolva a equação $A(x) = 0$, sabendo que $A(x)$ é divisível por $x + 2$.

9.2. Mostre que o resto da divisão inteira de $A(x)$ por $x^2 - 1$ não depende de k.

9.3. Resolva a condição $A(x) > 0$, para $k = 1$.

10. Averigue se o polinómio $x^n + a^n$, a ≠ 0 e n ímpar, é divisível por $x + a$.

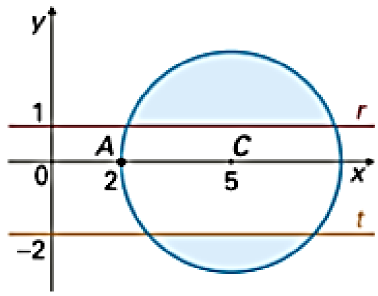
11. Considere, num referencial ortonormado, as retas

m: $(x, y) = (1,2) + t(3, -2), t \in IR$ e p: $3x + y - 8 = 0$.

Determine a equação reduzida da reta n que verifica as seguintes condições:

- n é paralela a m;
- as retas n e p intersetam o eixo Ox no mesmo ponto.

12. Considere, num plano munido de um referencial ortonormado, a circunferência de centro $C(5,0)$, o ponto $A(2,0)$ pertencente à circunferência e as retas horizontais r e t.



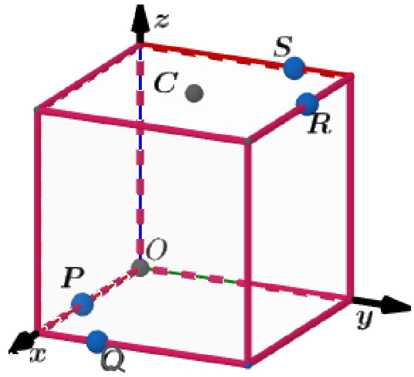
12.1. Defina, por meio de uma condição, a região sombreada, incluindo a fronteira.

12.2. Sejam P e Q , pontos tais que:

- P é o ponto de menor abcissa que pertence simultaneamente à reta r e à circunferência;
- Q é o ponto de maior abcissa que pertence simultaneamente à reta t e à circunferência.

Determine o valor da medida do comprimento do segmento de reta $[PQ]$.

13. Na figura representa-se um cubo de aresta 1 no espaço munido do referencial ortonormado $Oxyz$. Os pontos $(0,0,0)$ e $(1,1,1)$ são vértices do cubo e o ponto C é o centro da face superior do cubo.



Os pontos $P, Q\ , R, e\ S$ pertencem a arestas do cubo.

13.1 Escreva as equações de dois planos perpendiculares à face superior do cubo que passam pelo ponto C e represente a reta de interseção desses dois planos por uma condição.

13.2 Escreva uma equação da superfície esférica de centro em C que passa por todos os vértices da base do cubo.

13.3 Supondo que $\overrightarrow{PQ}$= $\overrightarrow{SR}$, verifique que $\overrightarrow{PS}$= $\overrightarrow{QR}$.

Nestas condições, mostre que o ponto de interseção das diagonais do paralelogramo $[PSRQ]$ coincide com o centro do cubo.

Sugestão: Comece por identificar as coordenadas dos pontos $P, Q, R\ e\ S$. Exemplo: $P(p, 0, 0)$.

FIM