Ficha n.º 1 – Página 108

7. LUGARES GEOMÉTRICOS. CIRCUNFERÊNCIA

1. **Opção correta: (A)**

2. **Opção correta: (B)**

3. **Opção correta: (C)**

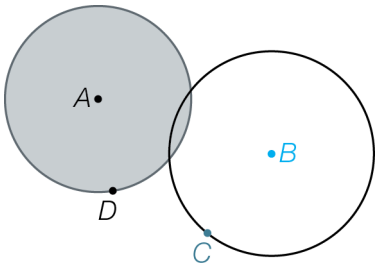
4.1. Mediatriz do segmento de reta [*AB*]

4.2. **Opção correta: (A)**

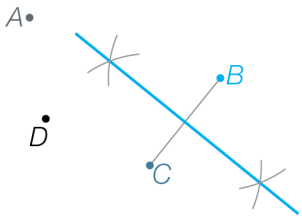
4.3. **Opção correta: (B)**

Ficha n.º 1 – Página 109

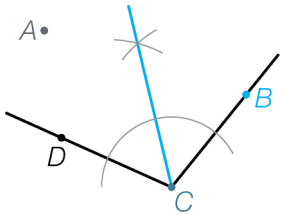
5.1. e **5.2.**



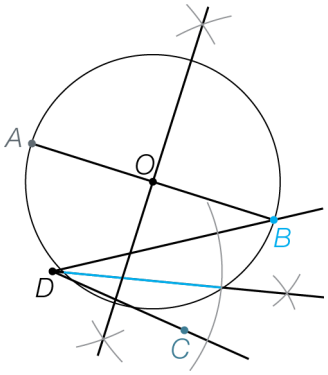
5.3.



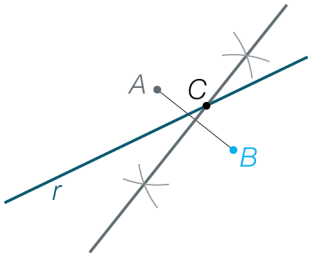
5.4.



5.5.



6. O problema tem uma única solução, porque a mediatriz do segmento de reta [*AB*] interseta a reta *r* num único ponto.

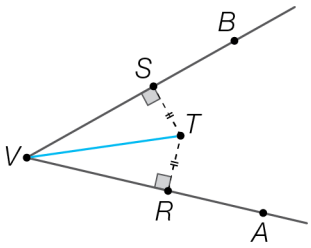


7.1. [*VP*] é um lado comum aos dois triângulos; $R\hat{V}P = P\hat{V}S$, pois a bissetriz do ângulo *AVB*, por definição, bisseta-o, ou seja, divide-o em dois ângulos de igual amplitude. Se dois triângulos têm de um para o outro, dois ângulos iguais, o outro ângulo também será igual, logo $V\hat{P}R = S\hat{P}V$.

Resumindo, o lado [VP] é comum, $R\hat{V}P = P\hat{V}S$ e $V\hat{P}R = S\hat{P}V$ e, por isso, os triângulos [RVP] e [*PVS*] são iguais pelo critério ALA de igualdade de triângulos.

7.2. Como os triângulos [*RVP*] e [*SPV*] são iguais, então os lados correspondentes têm o mesmo comprimento, logo $\overline{RP} = \overline{SP}$. Como *P* é um ponto qualquer da bissetriz do ângulo *AVB*, conclui-se que *P* está à mesma distância dos lados do ângulo, logo será equidistante das retas-suporte dos lados do ângulo.

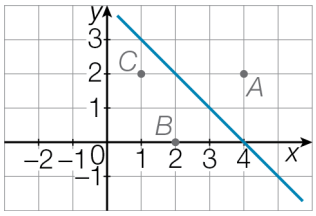
7.3. Seja T um ponto do ângulo *AVB* equidistante das retas-suporte do ângulo *AVB*. $\overline{ST} = \overline{TR}$ e $V\hat{S}T = V\hat{R}T = 90º$. Pelo Teorema de Pitágoras, $\overline{VS} = \sqrt{\overline{VT}^2 - \overline{ST}^2}$ e $\overline{VR} = \sqrt{\overline{VT}^2 - \overline{TR}^2}$. Como $\overline{ST} = \overline{TR}$, então $\overline{VS} = \overline{VR}$. Assim, os triângulos [RVP] e [SVP] são iguais pelo critério LLL de igualdade de triângulos. Em triângulos iguais, os ângulos correspondentes são iguais, logo $R\hat{V}P = T\hat{V}S$ e, por isso, $\dot{V}T$ é a bissetriz do ângulo *AVB*. Conclui-se, portanto, que *T* pertence à bissetriz do ângulo.



7.4. A **bissetriz de um ângulo convexo** é o lugar geométrico dos pontos do ângulo que são equidistantes das retas-suporte dos lados do ângulo.

8. **I. → (C), II. → (G), III. → (D), IV. → (A), V. → (B), VI. → (E), VII. → (F)**

9.1.

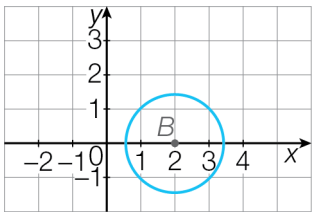


9.2. $(0, 4)$

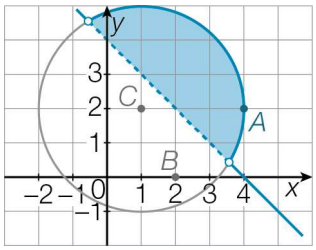
Ficha n.º 1 – Página 111

9.3. $y = kx + 4 \underset{(3,\,1)}{\rightarrow} 1 = k \times 3 + 4 \Leftrightarrow 1 - 4 = 3k \Leftrightarrow -3 = 3k \Leftrightarrow k = \frac{-3}{3} \Leftrightarrow k = -1$, logo $y = -x + 4$

9.4. $\sqrt{2}$ é o comprimento da diagonal de uma quadrícula cujo lado corresponde a uma unidade de comprimento. O lugar geométrico está assinalado a azul na figura abaixo.



9.5. O lugar geométrico está assinalado a azul na figura abaixo.



10.1. Afirmação falsa

A distância de um ponto *P* a uma reta *r* é igual à distância de *P* ao seu pé da perpendicular sobre *r*.

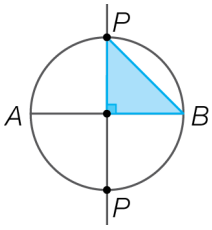
10.2. Afirmação falsa. A mediatriz de um segmento de reta é o lugar geométrico dos pontos equidistantes dos seus extremos.

10.3. Afirmação falsa. A bissetriz de um ângulo é um semirreta com origem no vértice do angulo e cujos pontos são equidistantes das retas-suporte dos lados do ângulo.

10.4. Afirmação verdadeira

10.5. Afirmação verdadeira

Há dois pontos na circunferência equidistantes de *A* e *B*. A distância de *P* é dada por: $\overline{PB}^2 = 5^2 + 5^2 \Leftrightarrow \overline{PB}^2 = 2 \times 5^2 \underset{\overline{PB} > 0}{\Leftrightarrow} \overline{PB} = \sqrt{2 \times 5^2} \Leftrightarrow \overline{PB} = 5\sqrt{2}$

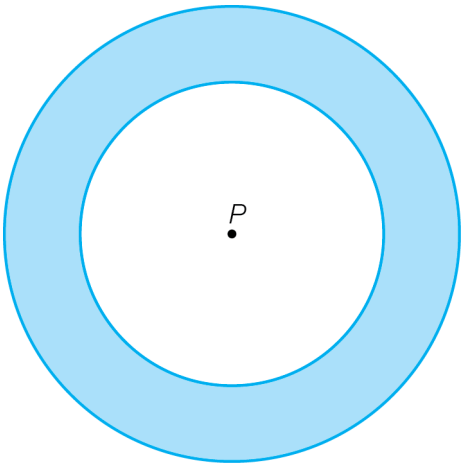


10.6. Afirmação verdadeira

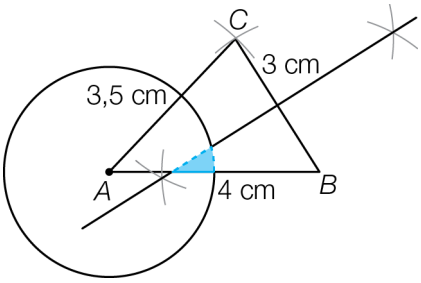
As diagonais bissetam-se e são perpendiculares logo a mediatriz de uma contém a outra.

11. Área $= A_{\text{circunferência maior}} - A_{\text{circunferência menor}}$

$= \pi \times 3^2 - \pi \times 2^2 = 9\pi - 4\pi = 5\pi \text{ cm}^2$



12.

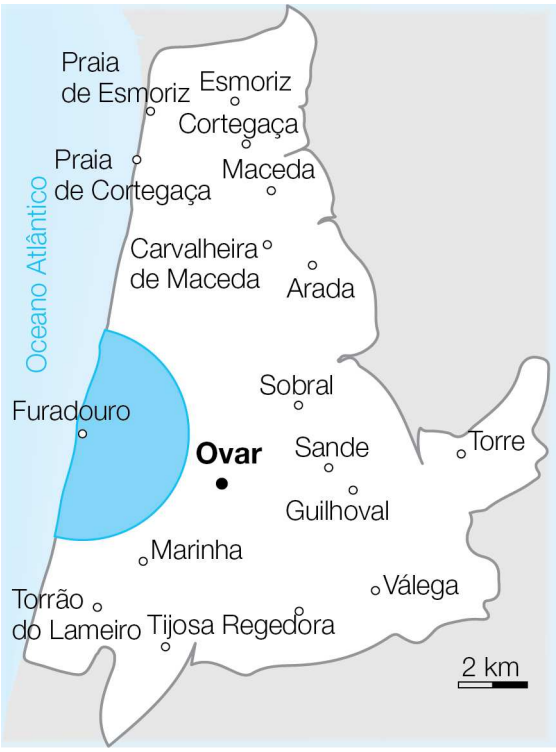


Ficha n.º 2 – Página 112 **7. LUGARES GEOMÉTRICOS. CIRCUNFERÊNCIA**

1.1. Não, porque Ovar fica a mais do que 3 km do Furadouro.

1.2. 2 km ---- 0,9 cm

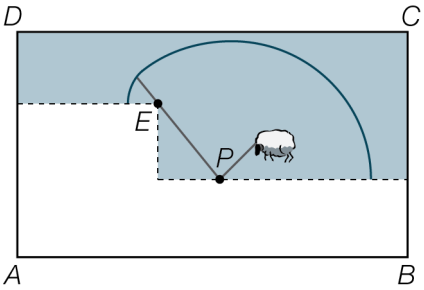
3 km ---- x $\qquad x = \dfrac{3 \times 0{,}9}{2} = 1{,}35 \approx 1{,}4$ cm



2. 1 cm ---- 200 cm

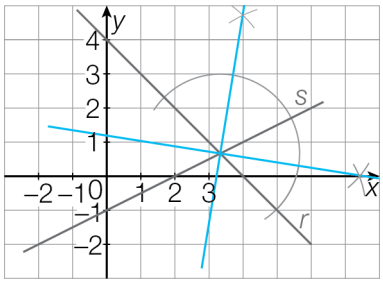
2 cm ---- 400 cm

A corda que prende a ovelha tem, no desenho, 2 cm de comprimento.



Ficha n.º 2 – Página 113

3.



x	$y = -x + 4$
0	4
1	3

x	$y = \frac{1}{2}x - 1$
0	– 1
2	0

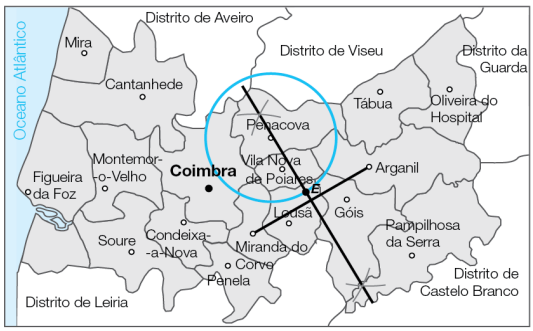
O lugar geométrico pedido corresponde às duas retas traçadas a azul.

4. 1 ------- 1 400 000 cm

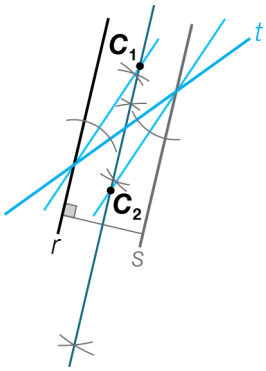
x ------- 2 000 000 cm $\qquad x = \dfrac{2\,000\,000}{1\,400\,000} \approx 1{,}4$ cm

Na figura estão traçadas:

- Uma circunferência de centro em Penacova e raio 1,4 cm.
- A mediatriz do segmento de reta de extremos em Miranda do Corvo e Arganil.



5. As possíveis localizações da referida central estão assinaladas com C_1 e C_2.

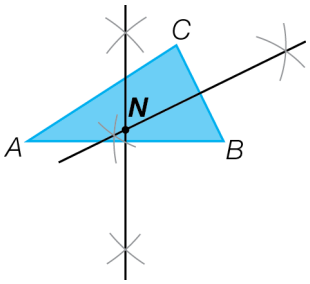


Ficha n.º 3 – Página 114 **7. LUGARES GEOMÉTRICOS. CIRCUNFERÊNCIA**

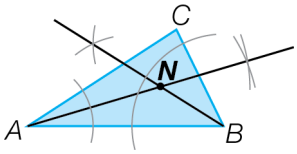
1. **Opção correta: (A)**

2. **Opção correta: (C)**

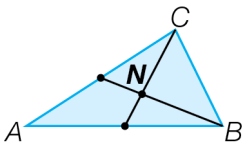
3.1. O circuncentro é o ponto de interseção das mediatrizes dos lados de um triângulo, ou seja, das retas que contêm os pontos médios dos lados do triângulo e lhes são perpendiculares.



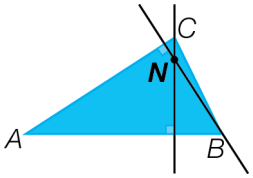
3.2. O incerto de um triângulo é o ponto de interseção das bissetrizes dos ângulos internos do triângulo.



3.3. O baricentro de um triângulo é o ponto de interseção das medianas do triângulo, ou seja, dos segmentos de reta de extremos em cada vértice e no ponto médio do lado oposto.



3.4. O ortocentro é o ponto de interseção das retas-suporte das três alturas do triângulo, ou seja, das retas que passam num vértice e são perpendiculares ao lado oposto.



4. **I.** Se r e s não se intersetassem num ponto, seriam paralelas. Como $r \perp AB$ e $s \perp CB$, então AB e CB seriam também paralelas. Contudo, as retas-suporte que contêm dois quaisquer lados de um triângulo não podem ser paralelas. Assim, r e s intersetam-se num ponto.

II. Se P pertence à mediatriz de $[AB]$, então é equidistante de A e de B. Se P pertence à mediatriz de $[BC]$, então é equidistante de B e de C.

Ficha n.º 3 – Página 115

4. **III.** Se *P* está à mesma distância de *A* e *B* e também à mesma distância de *B* e *C*, então é equidistante de *A*, *B* e *C*. Assim, sendo *P* equidistante de *A* e *C*, pertence à mediatriz de [*AC*].

IV. Como *r* e *s* se intersetam um único ponto P e esse ponto é equidistante de *A*, *B* e *C* então *P* é o centro de uma circunferência (única) que contém os pontos *A*, *B* e *C* cujo raio é $\overline{PA} = \overline{PB} = \overline{PC}$.

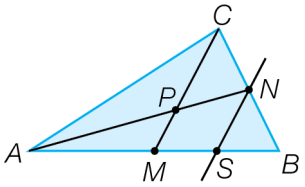
5. **I.** Se *I* pertence à bissetriz do ângulo *CAB*, então está à mesma distância das retas-suporte dos lados deste ângulo, ou seja, *CA* e *BA*.

II. Se *I* pertence à bissetriz do ângulo *ACB* então está à mesma distância das retas-suporte dos lados deste ângulo, ou seja, *CA* e *CB*.

III. Sendo *I* equidistante de *CA* e *BA* e também equidistante de *CA* e *CB*, então é equidistante de *BA* e *CB*, logo *I* pertence à bissetriz do ângulo *ABC*.

IV. A distância de *I* a *AC* é igual à distância de *I* ao seu pé da perpendicular sobre *AC*, *L*. Da mesma forma, a distância de *I* a *BC* é $\overline{IK}$ e a distância de *I* a *AB* é $\overline{IJ}$. Como *I* é equidistante das três retas, $\overline{IL} = \overline{IK} = \overline{IJ}$, sendo esta distância a medida do raio da única circunferência inscrita no triângulo [*ABC*], já que as bissetrizes não se podem intersetar em mais do que um ponto.

6. **I.**

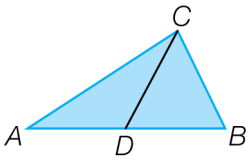


II. Como *CM* // *NS*, pelo Teorema de Tales, $\frac{\overline{CB}}{\overline{BN}} = \frac{\overline{MB}}{\overline{SB}}$. Como *N* é o ponto médio de [*BC*], então $\frac{\overline{CB}}{\overline{BN}} = 2$, logo também $\frac{\overline{MB}}{\overline{SB}} = 2$, pelo que *S* é o ponto médio de [*BM*].

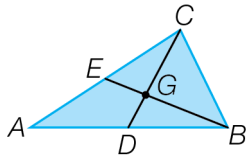
III. Como *CM* // *NS*, pelo Teorema de Tales, $\frac{\overline{AP}}{\overline{AN}} = \frac{\overline{AM}}{\overline{AS}}$. Como *S* é o ponto médio de [*MB*] e *M* é o ponto médio de [*AB*], então $\overline{AM} = 2\overline{MS}$ e $\overline{AS} = 3\overline{MS}$, logo $\frac{\overline{AM}}{\overline{AS}} = \frac{2\overline{MS}}{3\overline{MS}} = \frac{2}{3}$. Assim, também $\frac{\overline{AP}}{\overline{AN}} = \frac{2}{3} \Leftrightarrow \overline{AP} = \frac{2}{3}\overline{AN}$.

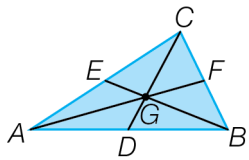
Ficha n.º 3 – Página 116

7.1. Como D é o ponto médio de [AB], então $\overline{AD} = \overline{DB}$. Assim, os triângulos [$ACD$] e [$BCD$] têm bases com o mesmo comprimento. A altura do triângulo [ACD] é a distância de C à reta-suporte do lado [AD], sendo a mesma altura do triângulo [BCD], pois a reta-suporte do lado [DB] é a mesma que a do lado [AD]. Assim, os triângulos [ACD] e [BCD] têm a mesma área, pois partilham a mesma altura e têm bases de igual comprimento.

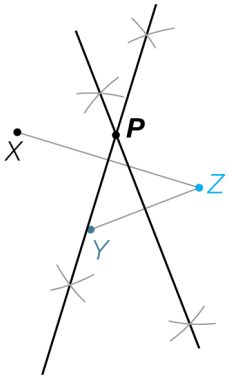


7.2. Os triângulos [ADG] e [DGB] têm a mesma altura (a distância de G à reta AB) e a mesma base $\left(\overline{AD} = \overline{DB}\right)$, logo têm a mesma área. Da mesma forma se conclui que os triângulos [AEG] e [EGC] são equivalentes, assim como os triângulos [BGF] e [GFC]. Para além disso, como $\overline{AG} = \frac{2}{3}\overline{AF}$, então $\overline{AG} = 2\overline{GF}$. Assim, o triângulo [$AGC$] tem o dobro da base do triângulo [GCF], partilhando a mesma altura (a distância de C à reta AF), logo o triângulo [AGC] tem o dobro da área do triângulo [GCF]. Assim sendo, a área do triângulo [EGC] é igual à do triângulo [GCF]. Conclui-se, então, que os seis triângulos têm a mesma área.





8. O problema tem uma única solução.



9.1. Afirmação falsa. Se o triângulo for obtusângulo, o circuncentro é exterior ao triângulo.

9.2. Afirmação verdadeira

9.3. Afirmação verdadeira

9.4. Afirmação verdadeira. Se o triângulo for retângulo, o ortocentro coincide com o vértice associado ao ângulo reto.

9.5. Afirmação falsa. O circuncentro é um ponto equidistante dos três vértices do triângulo, logo não pode coincidir com um dos vértices.

9.6. Afirmação falsa. O incentro é equidistante dos três lados do triângulo, logo não pode pertencer a nenhum deles.

9.7. Afirmação falsa. Se o triângulo for equilátero, o circuncentro, o incentro, o baricentro e o ortocentro coincidem.

Ficha n.º 3 – Página 117

10. Opção correta: (A)

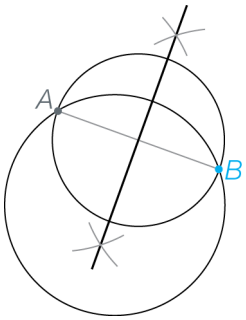
$A_{[ABC]} = 2 \times A_{[CMB]} = 2 \times 7{,}5 = 15 \text{ cm}^2$

11. Opção correta: (A)

$12{,}8 : 4 = 3{,}2 \text{ dm}^2$ → área de cada um dos seis triângulos em que está decomposto o triângulo [*ABC*].

A área do triângulo [*ABC*] é, portanto, $3{,}2 \times 6 = 19{,}2 \text{ dm}^2$.

12.1.

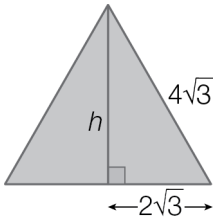


12.2. Infinitas

O lugar geométrico dos pontos que são centros das referidas circunferências é a mediatriz do segmento de reta [*AB*], uma vez que o centro da circunferência dista o mesmo de *A* e *B* e a referida mediatriz é precisamente o lugar geométrico dos pontos equidistantes de *A* e *B*.

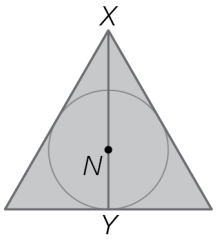
13. $h^2 + \left(2\sqrt{3}\right)^2 = \left(4\sqrt{3}\right)^2 \Leftrightarrow h^2 + 4 \times 3 = 16 \times 3 \Leftrightarrow$

$h^2 = 48 - 12 \Leftrightarrow h^2 = 36 \overset{h>0}{\Leftrightarrow} h = 6$



Num triângulo equilátero, o incentro, o circuncentro e o baricentro coincidem.

Tendo em conta a figura acima, o raio da circunferência inscrita é $\overline{NY}$ e o da circunscrita é $\overline{XN}$. Sabe-se que o baricentro de um triângulo divide a mediana de tal modo que $\overline{XN} = \frac{2}{3}\overline{XY}$. Assim:



$\overline{XN} = \frac{2}{3} \times 6 = 4$ e $\overline{NY} = 6 - 4 = 2$

O raio da circunferência circunscrita é 4 unidades e o da inscrita é 2 unidades.

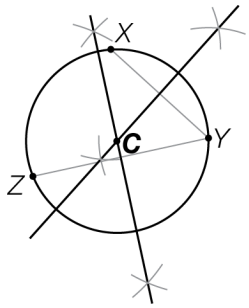
Ficha n.º 4 – Página 118 **7. LUGARES GEOMÉTRICOS. CIRCUNFERÊNCIA**

1. Para encontrar o centro da circunferência, a Inês deve:

1.º: Marcar três pontos na circunferência, *X*, *Y* e *Z*.

2.º: Traçar a mediatriz do segmento de reta [*XY*], assim como a mediatriz de [*YZ*].

3.º: O ponto de interseção das mediatrizes referidas é o centro da circunferência, pois trata-se do ponto equidistante de *X*, *Y* e *Z*.

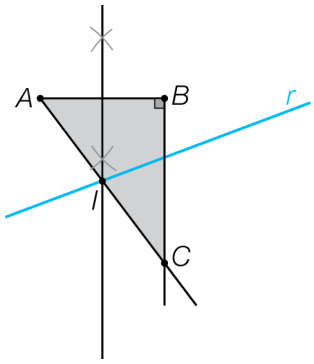


2. **1.º:** Traçar uma reta perpendicular a *AB* por *B*.

2.º: Traçar a mediatriz do segmento de reta [*AB*].

3.º: Sendo *I* o ponto de interseção da mediatriz de [*AB*] com *r*, então *I* está à mesma distância de *A* e *B* e pertence a *r*. Como o circuncentro de triângulo retângulo é sempre um ponto da hipotenusa, então *I* é o circuncentro do triângulo [*ABC*].

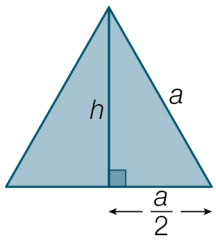
4.º: Traçar *AI* que interseta a reta perpendicular a *AB* por *B* em *C*.



3. Considere-se um triângulo [*ABC*], equilátero, com *a* unidades de lado. Pretende-se determinar, em função de *a*, a sua área.

$$h^2+\left(\frac{a}{2}\right)^2=a^2 \Leftrightarrow h^2+\frac{a^2}{4}=a^2 \Leftrightarrow h^2=a^2-\frac{a^2}{4} \Leftrightarrow h^2=\frac{4a^2}{4}-\frac{a^2}{4} \Leftrightarrow h^2=\frac{3a^2}{4}$$

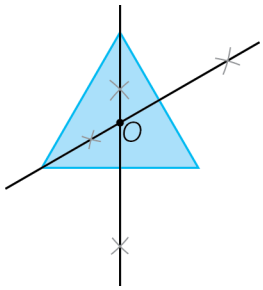
$$\overset{h>0}{\Leftrightarrow} h=\sqrt{\frac{3a^2}{4}} \Leftrightarrow h=\frac{\sqrt{3}a}{2}$$



$$A_{\text{triângulo}}=\frac{a\times\frac{\sqrt{3}a}{2}}{2}=\frac{\frac{\sqrt{3}a^2}{2}}{2}=\frac{\sqrt{3}a^2}{4}$$

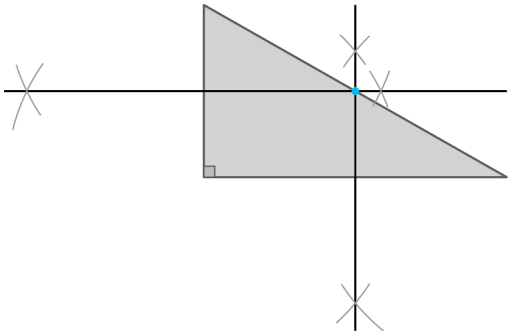
Assim, $\frac{9\sqrt{3}}{4}=\frac{\sqrt{3}a^2}{4} \Leftrightarrow a^2=9 \overset{a>0}{\Leftrightarrow} a=3$. O triângulo equilátero a que se refere o enunciado tem 3cm de lado.

O ortocentro de um triângulo equilátero coincide com o seu circuncentro. Assim, para o assinalar, basta determinar o ponto de interseção das mediatrizes de dois lados do triângulo. O referido ponto está assinalado com a letra *O* na figura.



Ficha n.º 4 – Página 119

4. **Opção correta: (C)**



5. $A_{\text{círculo}} = 5{,}3066 \Leftrightarrow \pi r^2 = 5{,}3066 \Leftrightarrow r^2 = \dfrac{5{,}3066}{\pi} \Leftrightarrow r^2 = 1{,}69 \overset{r>0}{\Leftrightarrow} r = \sqrt{1{,}69} \Leftrightarrow r \approx 1{,}3 \text{ cm}$

$A_{\text{triângulo }[AIB]} = \dfrac{5 \times 1{,}3}{2} = 3{,}25$; $A_{\text{triângulo }[BIC]} = \dfrac{4 \times 1{,}3}{2} = 2{,}6$; $A_{\text{triângulo }[AIC]} = \dfrac{6 \times 1{,}3}{2} = 3{,}9$

Logo, $A_{\text{triângulo }[ABC]} = 3{,}25 + 2{,}6 + 3{,}9 = 9{,}75 \text{ cm}^2$

6. **Opção correta: (A)**

Sabe-se que $\overline{CP} = \dfrac{2}{3}\overline{CY}$, logo $\overline{PY} = \dfrac{1}{3}\overline{CY}$. Conclui-se que $\overline{CP} = 2\overline{PY}$, pois $\dfrac{2}{3} = 2 \times \dfrac{1}{3}$.

7.1. Baricentro

7.2. $\overline{PB} = 2\overline{BY} = 2 \times 3 = 6 \text{ cm}$

$A_{\text{triângulo }[PXB]} = \dfrac{1}{6} \times A_{\text{triângulo }[MNP]} = \dfrac{1}{6} \times 18{,}6 = 3{,}1 \text{ cm}^2$

$A_{\text{triângulo }[PXB]} = \dfrac{\overline{PB} \times \overline{XQ}}{2}$, logo $\dfrac{6 \times \overline{XQ}}{2} = 3{,}1 \Leftrightarrow 3 \times \overline{XQ} = 3{,}1 \Leftrightarrow \overline{XQ} = \dfrac{3{,}1}{3} \Leftrightarrow \overline{XQ} \approx 1{,}03 \text{ cm}$

Ficha n.º 5 – Página 120 **7. LUGARES GEOMÉTRICOS. CIRCUNFERÊNCIA**

1.1. [*DB*] e [*DA*], respetivamente

1.2. Corda [*AB*] e arco *BA*

1.3. *BCA* e *ACB*, respetivamente

1.4. Arco *AD* e arco *DBA*

1.5. Arco *BA* e arco *ADB*, respetivamente

1.6. Arco *BD*

1.7. Arco *BA* e ângulo *BCA*

1.8. Arco *DB*

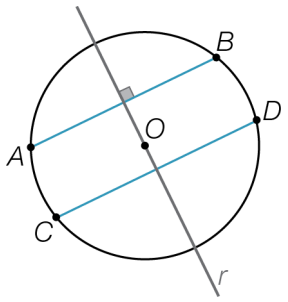
1.9. Arco *ADA*

1.10. Reta *t*, reta *DA* e reta *r*, respetivamente

2.1. Os ângulos *BOA* e *DOC* são iguais, porque numa circunferência a arcos iguais correspondem ângulo ao centro iguais.

2.2. As cordas [*AB*] e [*CD*] são iguais, porque numa circunferência, a arcos iguais correspondem cordas iguais.

3. **I.**



Como $\overline{AO} = \overline{OB}$, então O pertence à mediatriz de [*AB*]. Como esta é perpendicular a [*AB*], então *r* terá de ser mediatriz de [*AB*]. O mesmo raciocínio pode ser feito para [*CD*], pois se *AB* é paralela a *CD* e *AB* é perpendicular a *r*, também *r* é perpendicular a *CD*.

Ficha n.º 5 – Página 121

II. Sendo r a mediatriz de [AB] e de [CD], então A é a imagem de B por uma reflexão de eixo r e C é a imagem de D pela mesma reflexão. Como a reflexão é uma isometria, preserva distâncias, logo $\overline{AC} = \overline{BD}$. Conclui-se, então, que as cordas [AC] e [BD] são iguais.

III. A cordas iguais correspondem arcos iguais, logo os arcos AC e BD são iguais.

4.1. $B\hat{C}O = O\hat{B}C = \frac{180º - 60º}{2} = 60º$. Assim, o triângulo [$OBC$] tem os ângulos todos com 60º de amplitude, logo tem também os lados todos iguais. Logo, o triângulo [OBC] é equilátero e acutângulo.

4.2. O triângulo [AOB] é isósceles, pois $\overline{AO} = \overline{OB}$.

$B\hat{O}A = 180º - 60º = 120º$ e $O\hat{A}B = A\hat{B}O = \frac{180º - 120º}{2} = 30º$

4.3. $A\hat{B}C = 180º - (30º + 60º) = 90º$. O triângulo [$ABC$] é retângulo.

4.4. $\frac{\overline{BO}}{\overline{AC}} = \frac{r}{2r} = \frac{1}{2}$. Conclui-se que a mediana referida no enunciado tem metade do comprimento da hipotenusa do triângulo.

5.1. $\overline{OA} = \overline{OB}$, pois representam raios da mesma circunferência.

5.2. $\overline{OA} = \overline{OB}$. O lado [$OI$] é comum aos dois triângulos. Se r é perpendicular a [AB] e contém O, então r é a mediatriz de [AB], logo $\overline{IA} = \overline{IB}$. Assim, os triângulos [$OAI$] e [$OIB$] são iguais pelo critério LLL de igualdade de triângulos.

5.3. Em triângulos iguais, a lados iguais opõem-se ângulos iguais, logo $I\hat{O}A = I\hat{O}B$.

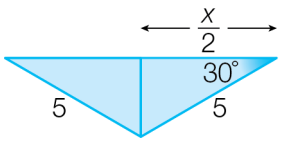
5.4. Como $I\hat{O}A = I\hat{O}B$, então $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{CB}$, pois a ângulos ao centro iguais correspondem arcos iguais. Assim, conclui-se que qualquer reta que contém o centro de uma circunferência e é perpendicular a uma corda, bisseta-a, assim como aos arcos subtensos e aos ângulos ao centro correspondentes.

6.1. $\hat{y} = 180º - 40º = 140º$ e $\hat{x} = 40º$

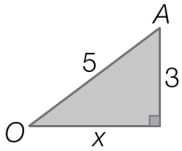
6.2. $\hat{x} = \hat{y} = \frac{360º - (85º + 135º)}{2} = \frac{140º}{2} = 70º$ e $\hat{x} = 40º$

6.3. $180º - 60º = 120º$ e $\frac{180º - 120º}{2} = 30º$ e $\hat{x} = 40º$

$\cos 30º = \frac{\frac{x}{2}}{5} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{x}{10} \Leftrightarrow x = \frac{10\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow x = 5\sqrt{3}$ cm



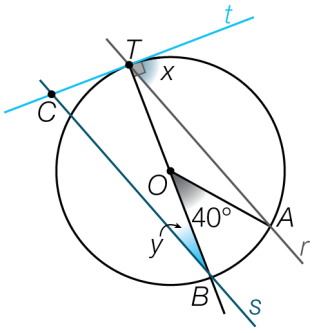
6.4. $5^2 = 3^2 + x^2 \Leftrightarrow 25 - 9)x^2 \Leftrightarrow 16 = x^2 \overset{x>0}{\Leftrightarrow} x = \sqrt{16} \Leftrightarrow x = 4$ cm



6.5. $A\hat{O}T = 180º - 40º = 140º$; $B\hat{T}A = \frac{180º - 140º}{2} = 20º$;

$\hat{y} = 20º$ pois os ângulos TBC e BTA são alternos internos e t // s

$\hat{x} = 90º - B\hat{T}A = 90º - 20º = 70º$



Ficha n.º 6 – Página 122 **7. LUGARES GEOMÉTRICOS. CIRCUNFERÊNCIA**

1. O ângulo *ACB* diz-se inscrito no arco de circunferência *BVA*. O arco *BVA* diz-se arco capaz do ângulo *AVB*, sendo o arco *AB* designado por arco compreendido entre os lados do ângulo *AVB*.
A amplitude do ângulo *AVB* é metade da amplitude do arco *AB*.

2.1. $\hat{x} = \frac{150^\circ}{2} = 75^\circ$

2.2. $\hat{x} = 42^\circ$ e $\hat{y} = 42^\circ \times 2 = 84^\circ$

2.3. $\hat{x} = 180^\circ - (90^\circ + 65^\circ) = 25^\circ$, $\hat{y} = 2 \times 25^\circ = 50^\circ$ e $\hat{z} = 90^\circ$

2.4. $O\hat{T}P = 90^\circ$; $\hat{x} = 180^\circ - (90^\circ + 25^\circ) = 65^\circ$

2.5. $\overset{\frown}{AC} = 42^\circ \times 2 = 84^\circ$; $\overset{\frown}{AD} = 55^\circ$ e $\overset{\frown}{DC} = \hat{x} = 84^\circ - 55^\circ = 29^\circ$

2.6. $O\hat{T}A = 70^\circ$, porque o triângulo [*OAT*] é isósceles.
$\hat{x} = 180^\circ - 2 \times 70^\circ = 40^\circ$; $O\hat{T}B = 90^\circ$; $\hat{y} = 180^\circ - (90^\circ + 40^\circ) = 50^\circ$

2.7. $\hat{x} = 30^\circ$, porque ADC e DAB são ângulos alternos internos e AB // CD.
$\overset{\frown}{BD} = \overset{\frown}{AC} = 2 \times 30^\circ = 60^\circ$; $\hat{y} = 180^\circ - 2 \times 60^\circ = 60^\circ$; $\hat{z} = 180^\circ - (180^\circ - 2 \times 30^\circ) = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$

2.8. $\hat{y} = \frac{180^\circ - 110^\circ}{2} = 35^\circ$; $\hat{x} = \frac{110^\circ}{2} = 55^\circ$; $D\hat{A}O = 90^\circ$; $C\hat{A}B = 180^\circ - (35^\circ + 22^\circ + 55^\circ) = 69^\circ$
$C\hat{A}O = 68^\circ - 35^\circ = 33^\circ$; $\hat{z} = 90^\circ - 33^\circ = 57^\circ$

2.9. $A\hat{D}C = 360^\circ - \overset{\frown}{CA} = 360^\circ - 170^\circ = 190^\circ$; $\hat{y} = 190^\circ : 2 = 95^\circ$; $\hat{x} = 170^\circ : 2 = 85^\circ$

Ficha n.º 6 – Página 123

3. **Situação I:**

Nesta situação, seja $\overset{\frown}{AB} = \alpha$. Assim, $A\hat{O}B = \alpha$, logo $V\hat{O}A = 180^\circ - \alpha$. Como $A\hat{V}O = O\hat{A}V$, então

$A\hat{V}O = \dfrac{180^\circ - (180^\circ - \alpha)}{2} = \dfrac{180^\circ - 180^\circ + \alpha}{2} = \dfrac{\alpha}{2}$, provando-se assim o pretendido.

Situação II:

a) De acordo com o que foi provado na situação I, $A\hat{V}C = \dfrac{\overset{\frown}{AC}}{2}$ e $B\hat{V}C = \dfrac{\overset{\frown}{BC}}{2}$, logo

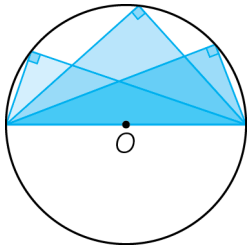
$A\hat{V}B = A\hat{V}C - B\hat{V}C = \dfrac{\overset{\frown}{AC}}{2} - \dfrac{\overset{\frown}{BC}}{2} = \dfrac{\overset{\frown}{AC} - \overset{\frown}{BC}}{2} = \dfrac{\overset{\frown}{AB}}{2}$, provando-se assim o pretendido.

b) De acordo com o que foi provado na situação I, $A\hat{V}C = \dfrac{\overset{\frown}{AC}}{2}$ e $C\hat{V}B = \dfrac{\overset{\frown}{CB}}{2}$, logo

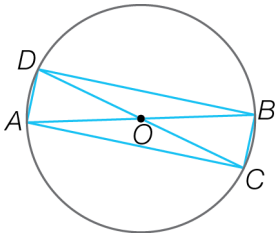
$A\hat{V}B = A\hat{V}C - C\hat{V}B = \dfrac{\overset{\frown}{AC}}{2} + \dfrac{\overset{\frown}{CB}}{2} = \dfrac{\overset{\frown}{AC} + \overset{\frown}{CB}}{2} = \dfrac{\overset{\frown}{AB}}{2}$, provando-se assim o pretendido.

4. O arco compreendido entre os lados de um ângulo inscrito numa semicircunferência é igualmente uma semicircunferência. Como a amplitude de um ângulo inscrito num arco de circunferência é metade da amplitude do arco compreendido entre os seus lados, então será $\dfrac{180^\circ}{2} = 90^\circ$.

5. Qualquer triângulo inscrito numa semicircunferência é retângulo, logo basta que a circunferência tenha 4 cm de diâmetro, isto é, 2 cm de raio.



6. Sejam [*AB*] e [*CD*] dois diâmetros distintos de uma circunferência. O ângulo *CAD* é reto por ser um ângulo inscrito numa semicircunferência; o mesmo se passa com os ângulos *ADB*, *DBC* e *BCA*. Assim, [*ACBD*] é um polígono com quatro lados e com quatro ângulos internos retos, tratando-se, portanto, de um retângulo.



7. $\hat{x} = \dfrac{112^\circ}{2} = 56^\circ$, $\overset{\frown}{AC} = 112^\circ$, logo $C\hat{B}A = 360 - 112^\circ = 248^\circ$.

$\hat{y} = \dfrac{248^\circ}{2} = 124^\circ$

$C\hat{A}O = O\hat{C}A = \dfrac{180^\circ - 112^\circ}{2} = 34^\circ$

Considerando o triângulo [*ABC*]:

$C\hat{A}B = 180^\circ - (56^\circ + 25^\circ + 34^\circ) = 65^\circ$, logo

$\hat{z} = 65^\circ - C\hat{A}O = 65^\circ - 34^\circ = 31^\circ$ e $\hat{w} = C\hat{A}B \times 2 = 65^\circ \times 2 = 130^\circ$

Ficha n.º 7 – Página 124 **7. LUGARES GEOMÉTRICOS. CIRCUNFERÊNCIA**

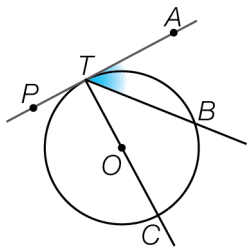
1.1. **Opção correta: (A)**

1.2. Segmento de círculo

2. $A_{\text{Triângulo }[COD]} = \frac{3 \times 3}{2} = \frac{9}{2}$

A área do setor circular correspondente ao arco *CD* é: $\frac{\pi \times 3^2}{4} = \frac{9\pi}{4}$. Assim, a área do segmento de círculo é, portanto, $\frac{9\pi}{4} - \frac{9}{2} = \frac{9\pi - 18}{4}$ cm².

3.1. **I.** Como *AP* é tangente à circunferência, então $C\hat{T}A = 90^\circ$.



II. $B\hat{T}A = 90^\circ - C\hat{T}B$, concluindo-se assim o pretendido.

III. $B\hat{T}A = 90^\circ - C\hat{T}B = 90^\circ - \frac{\overset{\frown}{CB}}{2} = \frac{180^\circ - \overset{\frown}{CB}}{2} = \frac{\overset{\frown}{BT}}{2}$, concluindo-se assim o pretendido.

3.2. $C\hat{T}B = 130^\circ - 90^\circ = 40^\circ$, logo $B\hat{T}A = 90^\circ - 40^\circ = 50^\circ$.

$\overset{\frown}{BT} = 180^\circ - \overset{\frown}{CB} = 180^\circ - 2 \times 40^\circ = 180^\circ - 80^\circ = 100^\circ$

Ficha n.º 7 – Página 125

4.1. **Opção correta: (B)**

4.2. $C\hat{A}P = 180^\circ - B\hat{A}C = 180^\circ - \frac{\overset{\frown}{BC}}{2} = \frac{360^\circ - \overset{\frown}{BC}}{2} = \frac{\overset{\frown}{AB} + \overset{\frown}{CA}}{2}$

4.3. $C\hat{A}P = \frac{\overset{\frown}{AB} + \overset{\frown}{CA}}{2} = \frac{100^\circ + 112^\circ}{2} = \frac{212^\circ}{2} == 106^\circ$

5.1. **I.** $D\hat{A}C = \frac{\overset{\frown}{DC}}{2}$ e $B\hat{D}A = \frac{\overset{\frown}{BA}}{2}$

II. $A\hat{E}D = 180^\circ - \left(D\hat{A}C + B\hat{D}A\right) = 180^\circ - \frac{\overset{\frown}{DC}}{2} - \frac{\overset{\frown}{BA}}{2}$

III. $D\hat{E}C = 180^\circ - A\hat{E}D = 180^\circ - \left(180^\circ - \frac{\overset{\frown}{DC}}{2} - \frac{\overset{\frown}{BA}}{2}\right) = 180^\circ - 180^\circ + \frac{\overset{\frown}{DC}}{2} + \frac{\overset{\frown}{BA}}{2} = \frac{\overset{\frown}{DC}}{2} + \frac{\overset{\frown}{BA}}{2} = \frac{\overset{\frown}{BA} + \overset{\frown}{DC}}{2}$

5.2. $D\hat{E}C = \frac{\overset{\frown}{BA} + \overset{\frown}{DC}}{2} = \frac{40^\circ + 68^\circ}{2} = \frac{108^\circ}{2} = 54^\circ$

6. $B\hat{E}A = D\hat{E}C = 54^\circ$ por 5.2.

$B\hat{E}A = \frac{\overset{\frown}{BA} + \overset{\frown}{DC}}{2}$, logo $54^\circ = \frac{\overset{\frown}{BA} + 68^\circ}{2} \Leftrightarrow 54^\circ \times 2 - 68^\circ = \overset{\frown}{BA} \Leftrightarrow \overset{\frown}{BA} = 40^\circ$

Assim, a amplitude do arco maior AB é $\overset{\frown}{ADB} = 360^\circ - 40^\circ = 320^\circ$.

Ficha n.º 7 – Página 126 **7. LUGARES GEOMÉTRICOS. CIRCUNFERÊNCIA**

7.1. $C\hat{A}D = \frac{\overset{\frown}{CD}}{2}$, logo $D\hat{A}V = 180° - \frac{\overset{\frown}{CD}}{2}$. $V\hat{D}A = \frac{\overset{\frown}{BA}}{2}$

$$C\hat{V}D = 180° - \left(D\hat{A}V + V\hat{D}A\right) = 180° - \left(180° - \frac{\overset{\frown}{CD}}{2} + \frac{\overset{\frown}{BA}}{2}\right) = 180° - 180° + \frac{\overset{\frown}{CD}}{2} - \frac{\overset{\frown}{BA}}{2} = \frac{\overset{\frown}{CD}}{2} - \frac{\overset{\frown}{BA}}{2} = \frac{\overset{\frown}{CD} - \overset{\frown}{BA}}{2}$$

7.2. $\overset{\frown}{CD} = 360° - (100° + 31° + 129°) = 100°$, logo $D\hat{A}V = 180° - \frac{\overset{\frown}{CD}}{2}$. $V\hat{D}A = \frac{\overset{\frown}{BA}}{2}$

$$C\hat{V}D = \frac{\overset{\frown}{CD} - \overset{\frown}{BA}}{2} = \frac{100° - 31°}{2} = \frac{69°}{2} = 34{,}5°$$

8.1. **Opção correta: (A)**

$$C\hat{P}B = \frac{\overset{\frown}{CB} - \overset{\frown}{AD}}{2} = \frac{100° - 30°}{2} = \frac{70°}{2} = 35°$$

8.2. **Opção correta: (B)**

$$C\hat{E}B = \frac{\overset{\frown}{CB} + \overset{\frown}{AD}}{2} = \frac{100° + 30°}{2} = \frac{130°}{2} = 65°$$

9.1. **a)** Arco *CD* (ou arco *DEC*)

b) Ângulo *DAE*

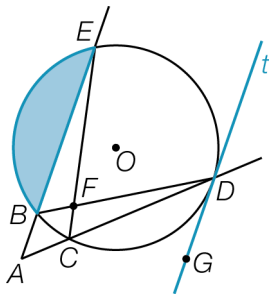
c) Ângulo *DFE*, por exemplo

d) Ângulo *DCE*, por exemplo

e) Ângulo *ECA*, por exemplo

f) Ângulo *CDG*, por exemplo

9.2.



Ficha n.º 7 – Página 127

10.1. $180^\circ - 72^\circ = 108^\circ$

$\hat{x} = 180^\circ - (108^\circ + 30^\circ) = 42^\circ$

$\hat{z} = 30^\circ \times 2 = 60^\circ$

$\hat{x} = \dfrac{\hat{y} - \hat{z}}{2}$, logo $42^\circ = \dfrac{\hat{y} - 60^\circ}{2} \Leftrightarrow 84^\circ = \hat{y} - 60^\circ \Leftrightarrow \hat{y} = 84^\circ + 60^\circ \Leftrightarrow \hat{y} = 144^\circ$

10.2. $\overset{\frown}{CD} + \overset{\frown}{DA} + \overset{\frown}{BC} = 360^\circ$, logo:

$32^\circ + \dfrac{1}{2}\overset{\frown}{AB} + \overset{\frown}{AB} + \dfrac{1}{2}\overset{\frown}{AB} = 360^\circ \Leftrightarrow 64^\circ + \overset{\frown}{AB} + 2\overset{\frown}{AB} + \overset{\frown}{AB} = 720^\circ \Leftrightarrow 4\overset{\frown}{AB} = 720^\circ - 64^\circ \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \overset{\frown}{AB} = \dfrac{656^\circ}{4} \Leftrightarrow \overset{\frown}{AB} = 164^\circ$

$\hat{x} = \dfrac{\overset{\frown}{AB} - \overset{\frown}{CD}}{2} = \dfrac{164^\circ + 32^\circ}{2} = \dfrac{196^\circ}{2} = 98^\circ$

10.3. $\hat{y} = A\hat{O}C = 180^\circ - 80^\circ = 100^\circ$

x é um ângulo de se um segmento logo $\hat{x} = \dfrac{\overset{\frown}{TA}}{2} = \dfrac{80^\circ}{2} = 40^\circ$

11. $\overset{\frown}{DC} = 38^\circ \times 2 = 76^\circ$; $D\hat{B}C = D\hat{E}C = 38^\circ$

$C\hat{D}B = 180^\circ - (DBC + BCD) = 180^\circ - (38^\circ + 90^\circ) = 52^\circ$

Assim, $\overset{\frown}{CB} = 52^\circ \times 2 = 104^\circ$, logo $\overset{\frown}{AB} = CB - CA = 104^\circ - 95^\circ = 9^\circ$.

$B\hat{P}A = \dfrac{DC - AB}{2} = \dfrac{76^\circ - 9^\circ}{2} = 33{,}5^\circ$

12.1. Opção correta: (D)

12.2. $\dfrac{152^\circ - \hat{x}}{2} = 57^\circ \Leftrightarrow 152^\circ - \hat{x} = 57^\circ \times 2 \Leftrightarrow 152^\circ - 114^\circ = \hat{x} \Leftrightarrow \hat{x} = 38^\circ$

$\dfrac{152^\circ + \hat{y}}{2} = 80^\circ \Leftrightarrow 152^\circ + \hat{y} = 80^\circ \times 2 \Leftrightarrow \hat{y} = 160^\circ - 152^\circ \Leftrightarrow \hat{y} = 8^\circ$

Ficha n.º 8 – Página 128 **7. LUGARES GEOMÉTRICOS. CIRCUNFERÊNCIA**

1.1. $180^\circ \times 9 = 1620^\circ$

1.2. 360°

1.3. $1620^\circ - 360^\circ = 1260^\circ$

1.4. Um polígono de *n* lados pode ser decomposto em *n* triângulos em que um dos vértices é comum e interior ao polígono, *O*, e os outros dois vértices coincidem com vértices consecutivos do polígono. A soma das amplitudes dos ângulos internos destes *n* triângulos é $180^\circ \times n$. Contudo, nesta soma entram *n* ângulos com vértice em O, cuja soma é 360º. Assim, a soma das amplitudes dos ângulos internos do polígono é $180^\circ \times n - 360^\circ = 180^\circ \times n - 180^\circ \times 2 = 180^\circ \times (n-2) = (n-2) \times 180^\circ$.

2.1. $(5-2) \times 180^\circ = 180^\circ \times 3 = 540^\circ$

2.2. A soma das amplitudes dos ângulos externos do pentágono é:
$(180^\circ - a) + (180^\circ - b) + (180^\circ - c) + (180^\circ - d) + (180^\circ - e)$ (sendo *a*, *b*, *c*, *d* e *e* as amplitudes dos respetivos ângulos internos do polígono).
Assim, a soma das amplitudes dos ângulos externos é:
$180^\circ \times 5 - (a+b+c+d+e) = 180^\circ \times 5 - 180^\circ \times (5-2) = 180^\circ \times 5 - 180^\circ \times 3 = 180^\circ \times (5-3) = 180^\circ \times 2 = 360^\circ$

2.3. A soma das amplitudes dos ângulos externos de um polígono de *n* lados é:
$(180^\circ - a) + (180^\circ - b) + (180^\circ - c) + \ldots$ (sendo *a*, *b*, *c*,… as amplitudes dos respetivos ângulos internos do polígono).
Assim, a soma das amplitudes dos ângulos externos será:

$$\underbrace{180^\circ + 180^\circ + 180^\circ}_{n \text{ vezes}} + \ldots - \underbrace{(a+b+c+\ldots)}_{\text{soma das amplitudes dos ângulos internos}} = 180^\circ \times n - 180^\circ \times (n-2) = 180^\circ \times n - 180^\circ \times n + 180^\circ \times 2 = 360^\circ$$

Ficha n.º 8 – Página 129

3. **Opção correta: (C)**

$180^\circ \times (17-2) = 180^\circ \times 15 = 2700^\circ$

4.1. **Afirmação falsa**. O ângulo interno e o ângulo externo de um quadrado têm a mesma amplitude: 90º

4.2. **Afirmação falsa**. O polígono regular tal que cada ângulo interno tem a mesma amplitude que cada ângulo externo é o quadrado.

4.3. **Afirmação verdadeira**. A amplitude de cada ângulo interno de um hexágono regular é $\frac{180^\circ \times 4}{6} = 120^\circ$; a amplitude de cada ângulo externo é $180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$ e $60^\circ = \frac{120^\circ}{2}$.

4.4. **Afirmação verdadeira**. A amplitude de cada ângulo externo de um octógono regular é $\frac{360^\circ}{8} = 45^\circ$. A amplitude de cada ângulo interno é $180^\circ - 45^\circ = 135^\circ$ e $\frac{135^\circ}{3} = 45^\circ$.

5. $3240^\circ = 180^\circ(n-2) \Leftrightarrow 3240^\circ = 180^\circ n - 360^\circ \Leftrightarrow 3240^\circ + 360^\circ = 180^\circ n \Leftrightarrow \frac{3600^\circ}{180^\circ} = n \Leftrightarrow n = 20$

O polígono tem 20 lados.

6.1. $180^\circ - 170^\circ = 10^\circ$

6.2. $360^\circ : 10 = 36$ lados

6.3. $180^\circ \times (36-2) = 6120^\circ$

7.1. $s_i = (n-2) \times 180 \Leftrightarrow \frac{s_i}{180} = n - 2 \Leftrightarrow \frac{s_i}{180} + 2 = n \Leftrightarrow n = \frac{s_i}{180} + 2$

7.2. Como 500 não é múltiplo de 180, $\frac{500}{180} + 2$ não seria um número natural. Como o número de lados de um polígono é um número natural, conclui-se que não existe nenhum polígono cuja soma das amplitudes dos ângulos internos é 500º.

8. Aa firmação é falsa. Um polígono regular tem os ângulos externos todos iguais. Se cada ângulo externo tivesse 50º, o número de lados do polígono seria $\frac{360^\circ}{50^\circ} = 7{,}2 \notin \mathbb{N}$, logo não há nenhum polígono regular em que cada ângulo externo tenha 50º de amplitude.

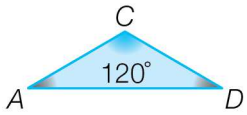
Ficha n.º 9 – Página 130 **7. LUGARES GEOMÉTRICOS. CIRCUNFERÊNCIA**

1.1. No triângulo: $360º : 3 = 120º$; no hexágono: $360º : 6 = 60º$.

1.2. $A\hat{C}D = \overset{\frown}{AD} = 120º$ e $J\hat{O}I = \overset{\frown}{JI} = 60º$

1.3. Triângulo isósceles

1.4. $D\hat{A}C = C\hat{D}A = \frac{180º - 120º}{2} = \frac{60º}{2} = 30º$ e $A\hat{C}D = 120º$



1.5. Triângulos equiláteros, pois têm os ângulos internos todos iguais, logo têm também os lados iguais.

$J\hat{O}I = 60º$; $I\hat{J}O = O\hat{I}J = \frac{180º - 60º}{2} = 60º$

1.6. Pela alínea 1.5., 60º cada um .

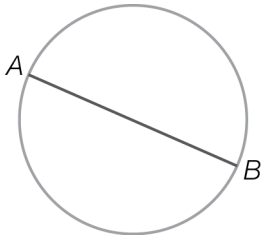
1.7. Pela alínea 1.5., os seis triângulos em que se decompõe o hexágono são equiláteros, logo o lado do hexágono é igual ao raio da circunferência em que o hexágono está inscrito.

Ficha n.º 9 – Página 131

2.1. $B\hat{A}D = \frac{\overset{\frown}{BCD}}{2} = \frac{360^\circ - \overset{\frown}{DB}}{2}$ e $D\hat{C}B = \frac{\overset{\frown}{DB}}{2}$

2.2. $B\hat{A}D + D\hat{C}B = \frac{360^\circ - \overset{\frown}{DB}}{2} + \frac{\overset{\frown}{DB}}{2} = \frac{360^\circ - \overset{\frown}{DB} + \overset{\frown}{DB}}{2} = \frac{360^\circ}{2} = 180^\circ$, logo os ângulos *BAD* e *DCB* são suplementares, pois somam 180º.

3. Se *P* pertence à circunferência e não coincide com *A* e *B*, o ângulo *APB* é retângulo. Se *P* pertence ao interior da circunferência (mas não ao diâmetro [*AB*]), o ângulo *APB* é obtuso. O lugar geométrico pedido são os pontos que pertencem ao interior ao círculo com exceção do diâmetro [*AB*].



4. Se *AB* é tangente à circunferência menor em *P*, então *AB* é perpendicular a *PO*. Assim, $A\hat{P}O = O\hat{P}B = 90^\circ$. Além disso, o triângulo [AOB] é isósceles, pois $\overline{AO} = \overline{BO}$, logo $P\hat{B}O = O\hat{A}P$ uma vez que, num triângulo, a lados iguais opõem-se ângulos iguais. Se dois triângulos têm de um para o outro dois ângulos iguais, então o outro ângulo também é igual, Além disso, [*PO*] é um lado comum aos triângulos [*APO*] e [*OPB*].

Resumindo, $A\hat{P}O = O\hat{P}B$, $P\hat{O}A = B\hat{O}P$ e [*OP*] é comum aos dois triângulos [*APO*] e [*OPB*], logo estes dois triângulos são iguais pelo critério ALA de igualdade de triângulos. Em triângulos iguais, a ângulos iguais opõem-se lados iguais, logo $\overline{AP} = \overline{PB}$.

5.1. $\overline{BO} = \overline{AO}$, pois são ambos raios da circunferência. $V\hat{B}O = O\hat{A}V = 90^\circ$, pois qualquer reta tangente a uma circunferência é perpendicular ao respetivo raio no ponto de tangência. [*VO*] é um lado comum aos triângulos [*VOB*] e [*VOA*]. Pelo Teorema de Pitágoras, $\overline{VB} = \sqrt{\overline{VO}^2 - \overline{BO}^2} = \sqrt{\overline{VO}^2 - \overline{AO}^2} = \overline{VA}$, concluindo-se, assim, que $\overline{VA} = \overline{VB}$.

5.2. $\overset{\frown}{BA} = 360^\circ - 250^\circ = 110^\circ$

Seja *C* o ponto de interseção do arco *BA* com a reta *VO*. $\overset{\frown}{BC} = \frac{110^\circ}{2} = 55^\circ = B\hat{O}V$.

$O\hat{V}B = 180^\circ - (90^\circ + 55^\circ) = 35^\circ$, logo $A\hat{V}B = 2 \times 35^\circ = 70^\circ$.

6. Relatório:

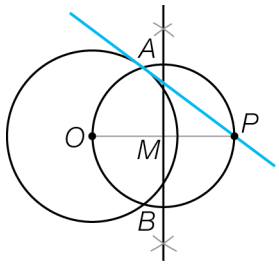
1.º: Traçar [*OP*].

2.º: Traçar a mediatriz de [*OP*] que interseta [*OP*] no seu ponto médio, *M*.

3.º: Traçar uma circunferência centrada em M e que passa em *O* e em *P*.

4.º: A circunferência referida no ponto anterior interseta a circunferência dada em dois pontos, *A* e *B*. Quer *AP* quer *BP* são tangentes à circunferência dada.

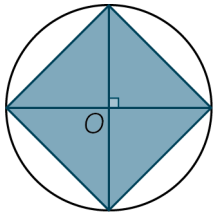
5.º: Traçar *AP* (ou *BP*).



Ficha n.º 9 – Página 132 **7. LUGARES GEOMÉTRICOS. CIRCUNFERÊNCIA**

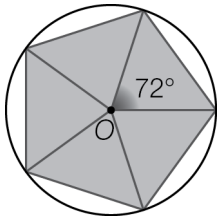
7. **Quadrado**

$360^\circ : 4 = 90^\circ$



Pentágono

$360^\circ : 5 = 72^\circ$



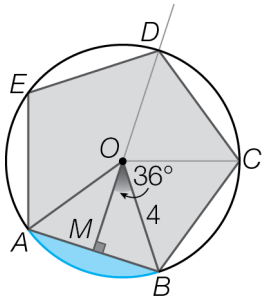
8. $360^\circ : 10 = 36^\circ$

O decágono regular pode ser inscrito numa circunferência e os seus dez vértices dividem-se em dez arcos de circunferência com 36º de amplitude cada um.

Assim, $\overset{\frown}{JA} = 36^\circ$ e $\overset{\frown}{CF} = 36^\circ \times 3 = 108^\circ$.

$$C\hat{P}F = \frac{36^\circ + 108^\circ}{2} = \frac{144^\circ}{2} = 72^\circ$$

9. $360^\circ : 5 = 72^\circ$ e $72^\circ : 5 = 36^\circ$. Seja M o ponto médio de $[AB]$.



$$\sin 36^\circ = \frac{\overline{MB}}{4} \Leftrightarrow 0{,}588 = \frac{\overline{MB}}{4} \Leftrightarrow \overline{MB} = 4 \times 0{,}588 \Leftrightarrow \overline{MB} = 2{,}352$$

$$\overline{AB} = 2 \times \overline{MB} = 2 \times 2{,}352 = 4{,}704$$

$$\cos 36^\circ = \frac{\overline{MO}}{4} \Leftrightarrow 0{,}809 = \frac{\overline{MO}}{4} \Leftrightarrow \overline{MO} = 4 \times 0{,}809 \Leftrightarrow \overline{MO} = 3{,}236$$

$$A_{[AOB]} = \frac{4{,}704 \times 3{,}236}{2} \approx 7{,}611 \text{ e } A_{\text{setor circular correspondente ao arco } AB} = \frac{\pi \times 4^2}{5} = \frac{16\pi}{5} \approx 10{,}053$$

$$A_{\text{segmento de círculo}} = 10{,}053 - 7{,}611 = 2{,}442 \approx 2{,}4 \text{ cm}^2$$

10.1. $\overset{\frown}{DA} = \overset{\frown}{BC}$, logo $\overline{DA} = \overline{CB}$, pois numa circunferência, a arcos iguais correspondem cordas iguais.

10.2. **a)** $B\hat{A}C = \dfrac{\overset{\frown}{BC}}{2} = \dfrac{100^\circ}{2} = 50^\circ$

b) $A\hat{E}B = \dfrac{\overset{\frown}{AB} + \overset{\frown}{CD}}{2} = \dfrac{(360^\circ - 100^\circ - 100^\circ - 60^\circ) + 60^\circ}{2} = \dfrac{100^\circ + 60^\circ}{2} = 80^\circ$

c) $D\hat{E}A = \dfrac{\overset{\frown}{BC} + \overset{\frown}{DA}}{2} = \dfrac{100^\circ + 100^\circ}{2} = 100^\circ$

10.3. Como $\overset{\frown}{BC} = \overset{\frown}{DA}$, então os arcos BC e DA são compreendidos entre cordas paralelas. Portanto, $DC \,//\, AB$. Além disso, $\overline{AD} = \overline{CB}$. Assim, o quadrilátero [ABCD] é um trapézio isósceles.

Ficha n.º 9 – Página 133

11.1. $\overset{\frown}{DC} = 64^\circ \times 2 = 128^\circ$

11.2. $\overset{\frown}{BD} = 82^\circ \times 2 = 164^\circ$ e $\overset{\frown}{BE} = \overset{\frown}{BD} - \overset{\frown}{ED} = 164^\circ - 68^\circ = 96^\circ$

11.3. $CB = 360^\circ - (128^\circ + 68^\circ + 96^\circ) = 68^\circ$, pelo que $C\hat{E}B = \frac{68^\circ}{2} = 34^\circ$

11.4. $D\hat{A}C = \frac{\overset{\frown}{DC} - \overset{\frown}{BE}}{2} = \frac{128^\circ - 96^\circ}{2} = \frac{32^\circ}{2} = 16^\circ$

12.1. $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{BC} = \overset{\frown}{CD} = \overset{\frown}{DE} = \overset{\frown}{EA} = \frac{360^\circ}{5} = 72^\circ$

12.2. As somas das amplitudes dos ângulos internos do pentágono é $180^\circ \times (5-2) = 180^\circ \times 3 = 540^\circ$. Cada ângulo interno tem $540^\circ : 5 = 108^\circ$. O ângulo externo que lhe é adjacente tem $180^\circ - 108^\circ = 72^\circ$.

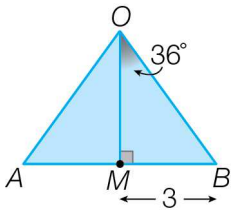
12.3. $D\hat{C}B = 108^\circ$ e $C\hat{B}D = B\hat{D}C = \frac{72^\circ}{2} = 36^\circ$. Assim, o triângulo [*DCB*] é isósceles.

$D\hat{B}A = E\hat{D}B = \frac{\overset{\frown}{EB}}{2} = \frac{72^\circ \times 2}{2} = 72^\circ$. Assim, o quadrilátero [*ABDE*] é um trapézio isósceles.

$(DB // EA$ e $\overline{ED} = \overline{AE})$

12.4. $216^\circ = 72^\circ \times 3$. O transformado de *D* por uma rotação de –216º é o ponto *A*.

12.5. $72^\circ : 2 = 36^\circ$. Seja *M* o ponto médio de [*AB*].

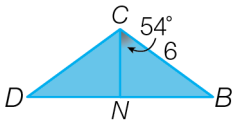


$\overline{AM} = \overline{MB} = \frac{6}{2} = 3$ e $\tan 36^\circ = \frac{3}{\overline{OM}} \Leftrightarrow 0{,}73 = \frac{3}{\overline{OM}} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 0{,}73\overline{OM} = 3 \Leftrightarrow \overline{OM} = \frac{3}{0{,}73} \Leftrightarrow \overline{OM} \approx 4{,}11$

$A_{\text{pentágono}} = 5 \times A_{[AOB]} = 5 \times \frac{\overline{AB} \times \overline{OM}}{2} = 5 \times \frac{6 \times 4{,}11}{2} \approx 61{,}65 \text{ cm}^2$

$108^\circ : 2 = 54^\circ$. Seja *N* o ponto médio de [*DB*].



$\sin 54^\circ = \frac{\overline{NB}}{6} \Leftrightarrow 0{,}81 = \frac{\overline{NB}}{6} \Leftrightarrow \overline{NB} = 6 \times 0{,}81 \Leftrightarrow \overline{NB} = 4{,}86$

$\cos 54^\circ = \frac{\overline{CN}}{6} \Leftrightarrow 0{,}57 = \frac{\overline{CN}}{6} \Leftrightarrow \overline{CN} = 6 \times 0{,}57 \Leftrightarrow \overline{CN} = 3{,}42$

$A_{[DCB]} = \frac{\overline{DC} \times \overline{CN}}{2} = \frac{(2 \times 4{,}86) \times 3{,}42}{2} \approx 16{,}62 \text{ cm}^2$ e $A_{[ABDE]} = A_{\text{pentágono}} - A_{[DCB]} = 61{,}65 - 16{,}62 \approx 45 \text{ cm}^2$

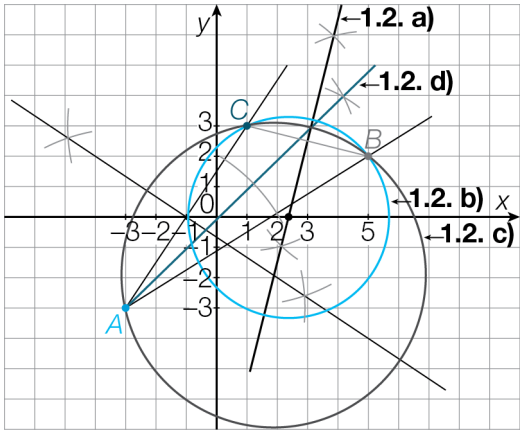
13. $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{BC} = \overset{\frown}{CD} = \overset{\frown}{DE} = \overset{\frown}{EF} = \overset{\frown}{FG} = \overset{\frown}{GH} = \overset{\frown}{HA} = \frac{360^\circ}{8} = 45^\circ$

$\hat{x} = \frac{\overset{\frown}{BC}}{2} = \frac{2 \times 45^\circ}{2} = 45^\circ$, $\hat{y} = \overset{\frown}{GH} = 45^\circ$, $\hat{z} = \frac{\overset{\frown}{GAE}}{2} = \frac{6 \times 45^\circ}{2} = 135^\circ$, $\hat{w} = \frac{\overset{\frown}{EH} + \overset{\frown}{BC}}{2} = \frac{3 \times 45^\circ + 45^\circ}{2} = 90^\circ$

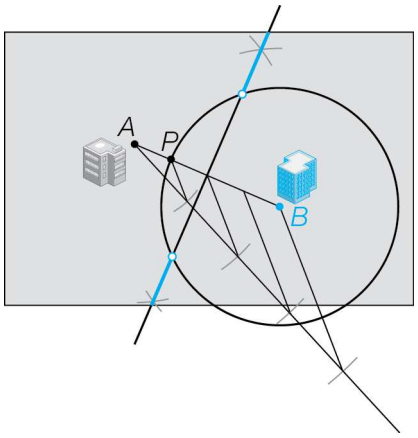
e $\hat{u} = \frac{\overset{\frown}{EH} - \overset{\frown}{CD}}{2} = \frac{3 \times 45^\circ - 45^\circ}{2} = \frac{2 \times 45^\circ}{2} = 45^\circ$

Teste n.º 1 – Página 134 **7. LUGARES GEOMÉTRICOS. CIRCUNFERÊNCIA**

1.



2.



Nota: O segmento de reta [*AB*] foi dividido, de forma rigorosa, em quarto partes iguais. O ponto *P* é tal que $BP = \frac{3}{4}AB = \frac{3}{4} \times 2 \text{ km} = \frac{3}{4} \times 2000 \text{ m} = 1500$

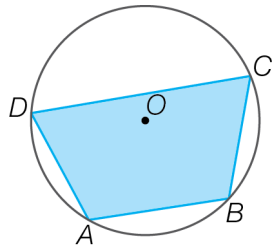
O conjunto de pontos correspondentes aos locais onde pode ser instalada a piscina está representado a azul.

Teste n.º 1 – Página 135

3.1. Opção correta: (A)

3.2. $\overline{AG} = \frac{2}{3}\overline{AM}$, logo $\overline{AG} = 2\overline{GM} \Leftrightarrow \overline{GM} = \frac{\overline{AG}}{2} \Leftrightarrow \overline{GM} = \frac{10}{2} \Leftrightarrow \overline{GM} = 5 \Leftrightarrow x = 5\,\text{cm}$

$z = \frac{1}{3}\overline{NC} = \frac{12}{3} = 4$ cm e $y = 12 - 4 = 8\,\text{cm}$



4. Seja [*ABCD*] um trapézio inscrito numa circunferência, tal que *DC* // *AB*. Numa circunferência, cordas compreendidas entre cordas paralelas são iguais, logo $\overline{AD} = \overline{BC}$ e, portanto, o trapézio é isósceles.

5.1. Afirmação verdadeira

5.2. Afirmação falsa. O ângulo *ADB* é inscrito numa semicircunferência, logo é reto.

5.3. Afirmação falsa. *BD* é perpendicular a *DA* e *CT* é perpendicular a *TF* (porque a reta tangente é perpendicular ao respetivo raio, no ponto de tangência). Como *DA* // *TF*, então *TF* é perpendicular a *BD*, logo $\overset{\frown}{TB} = \overset{\frown}{DT}$, uma vez que, se uma reta que passa pelo centro de uma circunferência é perpendicular a uma corda, bisseta-a, assim como aos arcos subtensos. Logo, $T\hat{O}B = D\hat{O}T$.

5.4. Afirmação verdadeira. $F\hat{O}A = T\hat{O}B$ por se tratarem de ângulos verticalmente opostos, logo $\overset{\frown}{FA} = \overset{\frown}{TB}$. Como $\overset{\frown}{TB} = \overset{\frown}{DT}$, também $\overset{\frown}{FA} = \overset{\frown}{DT}$.

5.5. Afirmação falsa. O ângulo ao centro correspondente ao ângulo *DAB* é *DOB* e não *TOB*.

5.6. Afirmação falsa. $C\hat{T}B = \frac{\overset{\frown}{TB}}{2}$. Como $\overset{\frown}{AT} = 3\overset{\frown}{TB}$ e $\overset{\frown}{AT} + \overset{\frown}{TB} = 180^\circ$, então:

$3\overset{\frown}{TB} + \overset{\frown}{TB} = 180^\circ \Leftrightarrow 4\overset{\frown}{TB} = 180^\circ \Leftrightarrow \overset{\frown}{TB} = \frac{180^\circ}{4} \Leftrightarrow \overset{\frown}{TB} = 45^\circ$. Logo, $C\hat{T}B = \frac{45^\circ}{2} = 22{,}5^\circ$.

5.7. Afirmação verdadeira. *BD* é perpendicular a *TF*, logo $B\hat{E}O = 90^\circ$.

5.8. Afirmação falsa. $D\hat{O}B = \overset{\frown}{DB} = \overset{\frown}{DT} + \overset{\frown}{TB} = 45^\circ + 45^\circ = 90^\circ$, logo $\overset{\frown}{AD} = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ$. Assim,

$A\hat{B}D = \frac{90^\circ}{2} = 45^\circ$ e, portanto, $D\hat{B}C = 180^\circ - 45^\circ = 135^\circ$

5.9. Afirmação falsa. Os ângulos internos de um triângulo equilátero têm 60º de amplitude, pois $\frac{180^\circ}{3} = 60^\circ$. Como *BD* // *CT*, então $A\hat{C}T = A\hat{B}D = 45^\circ \neq 60^\circ$.

5.10. Afirmação verdadeira. Como $\overset{\frown}{AD} = 45^\circ$ e $\frac{360^\circ}{45^\circ} = 8$, então [*AD*] representa o lado de um octógono regular inscrito na circunferência. A soma das amplitudes dos seus ângulos internos é

$180^\circ \times (8 - 2) = 180^\circ \times 6 = 1080^\circ$

Teste n.º 2 – Página 136 **7. LUGARES GEOMÉTRICOS. CIRCUNFERÊNCIA**

1.1. $\mathbb{N} \cap]-1, 3[= \{1, 2\}$, pelo que $a = 2$ e $b = 1$. Assim: $f(x) = 2x + 1$

1.2. $f(x) > \frac{1-x}{3} - \left(4 + \frac{x}{2}\right) \Leftrightarrow 2x + 1 > \frac{1-x}{3} - 4 - \frac{x}{2} \Leftrightarrow 12x + 6 > 2 - 2x - 24 - 3x \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 12x + 2x + 3x > -6 + 2 - 24 \Leftrightarrow 17x > -28 \Leftrightarrow x > -\frac{28}{17}$

C.S. $= \left]-\frac{28}{17}, +\infty\right[$

1.3. **a)** $P(x, 2x+1)$

$\overline{OA} = x$ e $\overline{AP} = 2x + 1$

$A_{[OAP]} = \frac{x(2x+1)}{2} = \frac{2x^2 + x}{2} = x^2 + \frac{x}{2}$

b) $A(2) = 2^2 + \frac{2}{2} = 4 + 1 = 5$. Significa que, quando a abcissa de P é 2, a área do triângulo [OAP] é 5 unidades quadradas.

c) $x^2 + \frac{x}{2} = 33 \Leftrightarrow 2x^2 + x - 66 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \times 2 \times (-66)}}{2 \times 22} \Leftrightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 528}}{4} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{529}}{4} \Leftrightarrow x = \frac{-1 \pm 23}{4} \Leftrightarrow x = \frac{22}{4} \vee x = -\frac{24}{4} \Leftrightarrow x = \frac{11}{2} \vee x = -6$

$x = \frac{11}{2}$

d) $A(\sqrt{2}) = (\sqrt{2})^2 + \frac{\sqrt{2}}{2} = 2 + \frac{\sqrt{2}}{2}$; dobro da aresta: $4 + \sqrt{2}$

1 centésima é 0,01 = $\frac{1}{100}$

$2 \times 100 = 200$; $14^2 = 196$ e $15^2 = 225$

$14^2 < 2 \times 10^2 < 15^2$

$\frac{14^2}{10^2} < 2 < \frac{15^2}{10^2}$

$\frac{14}{10} < \sqrt{2} < \frac{15}{10}$

$1{,}4 < \sqrt{2} < 1{,}5$

$5{,}4 < 4 + \sqrt{2} < 5{,}5$

Assim, $5{,}4 < 4 + \sqrt{2} < 5{,}5$.

Teste n.º 2 – Página 137

e) Não existe. Para que o triângulo [OAP] seja isósceles, $\overline{OA} = \overline{AP}$, logo:

$x = 2x + 1 \Leftrightarrow x - 2x = 1 \Leftrightarrow -x = 1 \Leftrightarrow x = -1$

Como *P* tem abcissa positiva, conclui-se que não existe nenhum valor de *x* para o qual o triângulo [*OAP*] é isósceles.

f) $f(2) = 2 \times 2 + 1 = 5$, logo $P(2, 5)$.

O sólido obtido é um cone com 5 unidades de raio e 2 unidades de altura.

$V_{\text{cone}} = \dfrac{\pi \times 5^2 \times 2}{3} = \dfrac{50\pi}{3} \approx 52{,}36$ unidades de volume

Seja *g* a medida da geratriz do cone.

$g^2 = 5^2 + 2^2 \Leftrightarrow g^2 = 20 \underset{g>0}{\Leftrightarrow} g = \sqrt{29}$

$A_{\text{superfície do cone}} = \pi \times 5 \times \sqrt{29} + \pi \times 5^2 = 5\sqrt{29}\pi + 25\pi \approx 163{,}13$ unidades de área

g) Opção correta: (B)

O ortocentro é o ponto de interseção das retas que contêm as alturas do triângulo. A altura relativa a [*OA*] é [*AP*] e vice-versa e estas duas intersetam-se no ponto *A*.

2.1. Como $2 \times \dfrac{1}{2} = 1$, então $f(1) = f(2) \times 2 = 4 \times 2 = 8$.

2.2. $f(x) = \dfrac{k}{x}$ e $4 = \dfrac{k}{2} \Leftrightarrow 4 \times 2 = k \Leftrightarrow k = 8$, logo $f(x) = \dfrac{8}{x}$, $x \neq 0$.

2.3. $g(x) = ax^2$ e $4 = a \times 2^2 \Leftrightarrow 4 = 4a \Leftrightarrow a = 1$, logo $f(x) = \dfrac{8}{x}$, $x \neq 0$.

2.4. $h(x) = kx$ e $4 = k \times 2 \Leftrightarrow k = \dfrac{4}{2} \Leftrightarrow k = 2$, logo $h(x) = 2x$.

Teste n.º 2 – Página 138 **7. LUGARES GEOMÉTRICOS. CIRCUNFERÊNCIA**

3.1. **a)** Corda [*AB*] e arcos *AB* e *BDA*

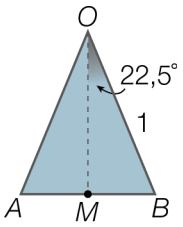
b) Ângulo *AOB*

c) Ângulo *ADB*

3.2. Como r é tangente à circunferência em B, então $O\hat{B}C = 90^\circ$. Assim, o triângulo é retângulo.

3.3. $A\hat{D}B = \frac{\overset{\frown}{AB}}{2} = \frac{A\hat{O}B}{2} = \frac{\alpha}{2}$

3.4. **a)** O polígono a que se refere o enunciado é um octógono regular, pois $\frac{360^\circ}{45^\circ} = 8$.



$M\hat{O}B = \frac{45^\circ}{2} = 22{,}5^\circ$, sendo *M* o ponto médio de [*AB*].

$\sin 22{,}5^\circ = \frac{\overline{MB}}{1} \Leftrightarrow \overline{MB} = 0{,}383$ e $\cos 22{,}5^\circ = \frac{\overline{OM}}{1} \Leftrightarrow \overline{OM} = 0{,}924$

$A_{[ABO]} = \frac{(2 \times 0{,}383) \times 0{,}924}{2} \approx 0{,}354$; $A_{\text{octógono}} = 0{,}354 \times 8 = 2{,}832$ e $A_{\text{círculo}} = \pi \times 1^2 = \pi \approx 3{,}142$

Assim, a área pedida é $3{,}142 - 2{,}832 = 0{,}31 \approx 0{,}3$.

b) Opção correta: (B)

3.5. **Opção correta: (B)**

$\overline{OB} = 1$; $\tan\alpha = \frac{\overline{BC}}{1} \Leftrightarrow \overline{BC} = \tan\alpha$

$A_{[OCB]} = \frac{\overline{OB} \times \overline{BC}}{2} = \frac{1 \times \tan\alpha}{2} = \frac{\tan\alpha}{2}$

Teste n.º 2 – Página 139

3.6. $\frac{\tan\alpha}{2}=1 \Leftrightarrow \tan\alpha=2 \Leftrightarrow \alpha=\tan^{-1}(2) \Leftrightarrow \alpha=63{,}435^{\circ}$

3.7. $\sin^2\alpha+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2=1 \Leftrightarrow \sin^2\alpha+\frac{3}{4}=1 \Leftrightarrow \sin^2\alpha=\frac{4}{4}-\frac{3}{4} \Leftrightarrow \sin^2\alpha=\frac{1}{4} \underset{\sin\alpha>0}{\Leftrightarrow} \sin\alpha=\sqrt{\frac{1}{4}} \Leftrightarrow \sin\alpha=\frac{1}{2}$

$$\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{2}{2\sqrt{3}}=\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$A_{[OCB]}=\frac{\tan\alpha}{2}=\frac{\frac{\sqrt{3}}{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{6}$$

4. **Opção correta: (C)**

A condição necessária mas não é suficiente, pois existem losangos (com os quatro lados iguais) que não são quadrados.

5.1. **a)** *ABC* e *BCE*, por exemplo

b) *LN*, por exemplo

c) *AB* e *BE*, por exemplo

5.2. **a)** O plano *FGL* é perpendicular ao plano *ABC*, pois contém uma reta perpendicular a este plano, pois contém uma reta perpendicular a este plano: por exemplo *GL* é perpendicular ao plano *ABC* pois é perpendicular a duas retas concorrentes deste plano – as retas *FG* e *GH*.

b) *JN* // *FI* pois são complanares e não se intersetam, pelo mesmo motivo, *FI* // *BC*. Como *JN* // *FI* e *FI* // *BC*, então *JN* // *BC*.

c) A distância de uma reta a um plano que lhe é paralelo é a distância de qualquer ponto da reta ao seu pé da perpendicular no referido plano. Assim, a distância de *LM* ao plano *ABC* é $\overline{LG}$ e a distância de *JL* ao plano *ABC* é também $\overline{LG}$. Conclui-se, portanto, que as retas *LM* e *JL* são equidistantes do plano *ABC*.