

Funções (12.º ano)
Funções trigonométricas
Exercícios de Provas Nacionais e Testes Intermédios



1. Seja f a função, de domínio \mathbb{R} , definida por

$$f(x) = \begin{cases} x - 2 + \ln(3 - 2x) & \text{se } x \leq 1 \\ \frac{\sin(x-1)}{1-x^2} + k & \text{se } x > 1 \end{cases} \quad (k \text{ é um número real})$$

Determine k , sem recorrer à calculadora, sabendo que a função f é contínua em $x = 1$

Exame – 2021, Ép. especial

2. Seja g a função, de domínio $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, definida por

$$g(x) = \log_2(1 - \cos x) + \log_2(1 + \cos x) + 2 \log_2(2 \cos x)$$

Mostre que $g(x) = 2 \log_2(\sin(2x))$

Exame – 2021, Ép. especial

3. Seja h a função, de domínio $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, definida por $h(x) = \sin x + \cos^2 x$

Estude, sem recorrer à calculadora, a função h quanto à monotonia e quanto à existência de extremos relativos, e determine, caso existam, esses extremos.

Na sua resposta, apresente o(s) intervalo(s) de monotonia.

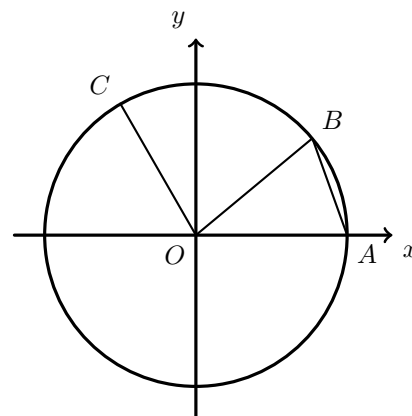
Exame – 2021, 2.ª Fase

4. Na figura ao lado, está representada a circunferência trigonométrica.

Sabe-se que:

- os pontos A , B e C pertencem à circunferência;
- o ponto A pertence ao semieixo positivo Ox e o ponto B pertence ao primeiro quadrante;
- a amplitude do ângulo BOC é igual ao dobro da amplitude do ângulo AOB
- a área do triângulo $[AOB]$ é igual a k $\left(0 < k < \frac{1}{2}\right)$

Mostre que a ordenada do ponto C é dada, em função de k , por $6k - 32k^3$



Exame – 2021, 2.^a Fase

5. Resolva este item sem recorrer à calculadora.

Seja g a função, de domínio $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$, definida por $g(x) = x \cos x + \sin x$

Mostre, recorrendo ao teorema de Bolzano-Cauchy, que existe pelo menos um ponto pertencente ao gráfico da função g tal que a reta tangente ao gráfico da função nesse ponto tem declive $-\frac{1}{2}$

Exame – 2021, 1.^a Fase

6. Considere, para um certo número real positivo k , as funções f e g , de domínio $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, definidas por $f(x) = k \sin(2x)$ e $g(x) = k \cos x$

Sejam, num referencial ortonormado do plano, A , B , e C os pontos de intersecção dos gráficos de f e g , sendo A o ponto de menor abcissa e C o ponto de maior abcissa.

Sabe-se que o triângulo $[ABC]$ é retângulo em B

Determine, sem recorrer à calculadora, o valor de k

Exame – 2021, 1.^a Fase

7. Seja f a função, de domínio $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, definida por $f(x) = \frac{e^{2x} - 1}{\operatorname{tg} x}$

Mostre que o gráfico da função f não tem assíntotas.

Exame – 2020, Ép. especial



8. Considere a função h , de domínio \mathbb{R} , definida por $h(x) = \frac{5}{4 + 3 \cos(2x)}$

8.1. Qual é a taxa média de variação da função h entre $\frac{\pi}{6}$ e $\frac{7\pi}{6}$?

- (A) 1 (B) $\frac{1}{2}$ (C) 0 (D) $-\frac{1}{2}$

8.2. Determine, sem recorrer à calculadora, as abcissas dos pontos do gráfico da função h , pertencentes ao intervalo $]-\pi, \pi[$, cuja ordenada é 2

Exame – 2020, Ép. especial

9. Sejam f e g as funções, de domínio \mathbb{R} , definidas, respetivamente, por $f(x) = x^2$ e $g(x) = \cos x$

9.1. Qual é o declive da reta tangente ao gráfico da função $f \circ g$ no ponto de abcissa $\frac{\pi}{4}$?

- (A) -2 (B) -1 (C) 1 (D) 2

9.2. Mostre, recorrendo ao teorema de Bolzano-Cauchy, que a equação $f(x) = g(x)$ tem, pelo menos, uma solução no intervalo $\left]0, \frac{\pi}{3}\right[$

Exame – 2020, 2.ª Fase

10. Seja h a função, de domínio $]-\infty, 4[$, definida por

$$h(x) = \begin{cases} 1 + xe^{x-1} & \text{se } x \leq 1 \\ \frac{\sqrt{x}-1}{\sin(x-1)} & \text{se } 1 < x < 4 \end{cases}$$

Averigue, sem recorrer à calculadora, se a função h é contínua em $x = 1$

Exame – 2020, 2.ª Fase

11. Seja g a função, de domínio \mathbb{R} , definida por

$$g(x) = \begin{cases} 1 + \frac{\sin x}{1 - e^x} & \text{se } x < 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \\ x^2 \ln x & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

Resolva o item seguinte sem recorrer à calculadora.

Averigue se a função g é contínua em $x = 0$

Exame – 2020, 1.ª Fase



12. Considere a função f , definida em $]0, \pi[$ por $f(x) = \frac{\sin x}{2 + \cos x}$

12.1. Determine $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(\pi - x)}{x}$

12.2. Estude a função f quanto à monotonia e determine, caso existam, os extremos relativos.

Exame – 2019, Ép. especial

13. Seja g a função definida em $]0, \pi[$, por $g(x) = \frac{1}{4} \cos(2x) - \cos x$

13.1. Estude a função g quanto ao sentido das concavidades do seu gráfico e quanto à existência de pontos de inflexão.

Na sua resposta, apresente:

- o(s) intervalo(s) em que o gráfico de g tem concavidade voltada para baixo;
- o(s) intervalo(s) em que o gráfico de g tem concavidade voltada para cima;
- as coordenadas do(s) ponto(s) de inflexão do gráfico de g , caso este(s) exista(m).

13.2. Seja f a função, de domínio $]-\frac{\pi}{2}, 0[$, definida por $f(x) = g(-x) + g\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$

Qual das expressões seguintes também pode definir a função f ?

- (A) $\sin x + \cos x$ (B) $-\sin x - \cos x$
 (C) $\sin x - \cos x$ (D) $-\sin x + \cos x$

Exame – 2019, 2.ª Fase

14. Seja f a função, de domínio \mathbb{R} , definida por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1 - \cos x}{x} & \text{se } x < 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \\ \frac{x}{x - \ln x} & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

Averigue se a função f é contínua no ponto 0

Justifique a sua resposta.

Exame – 2019, 1.ª Fase

15. Seja h a função, de domínio $\left[-\frac{\pi}{3}, +\infty\right[$, definida por

$$h(x) = \begin{cases} \frac{\sin^2 x}{\sin(x^2)} & \text{se } -\frac{\pi}{3} \leq x < 0 \\ \frac{e^x}{x+1} & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$$

Mostre que a função h é contínua no ponto 0

Exame – 2018, Ép. especial



16. Seja g a função, de domínio $[0, \pi]$, definida por $g(x) = 2 \sin x + \sin^2 x$.
Seja r a reta tangente ao gráfico da função g que tem declive máximo.

Determine o declive da reta r

Apresente a sua resposta na forma $\frac{a\sqrt{b}}{c}$, com a , b e c números naturais.

Exame – 2018, 2.ª Fase

17. Seja g a função, de domínio $] - \infty, \pi]$, definida por

$$g(x) = \begin{cases} \frac{e^{2x} - 1}{4x} & \text{se } x < 0 \\ \frac{1}{2 - \sin(2x)} & \text{se } 0 \leq x \leq \pi \end{cases}$$

- 17.1. Qual das afirmações seguintes é verdadeira?

- (A) A função g não tem zeros.
(B) A função g tem um único zero.
(C) A função g tem exatamente dois zeros.
(D) A função g tem exatamente três zeros.

- 17.2. Averigue se a função g é contínua no ponto 0

Justifique a sua resposta.

- 17.3. Estude a função g quanto à monotonia no intervalo $]0, \pi]$ e determine, caso existam, os extremos relativos.

Exame – 2018, 1.ª Fase

18. Considere a função f definida em $]0, \pi[$ por $f(x) = \frac{x}{\sin x}$

Qual das equações seguintes define uma assíntota do gráfico da função f ?

- (A) $x = 0$ (B) $x = \pi$ (C) $x = 1$ (D) $x = \frac{\pi}{2}$

Exame – 2018, 1.ª Fase



19. Seja f a função, de domínio $]1 - \pi, +\infty[$, definida por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2x-2}{\sin(x-1)} & \text{se } 1 - \pi < x < 1 \\ 2 & \text{se } x = 1 \\ e^{-2x+4} + \ln(x-1) & \text{se } x > 1 \end{cases}$$

Resolva os dois itens seguintes recorrendo exclusivamente a métodos analíticos, sem utilizar a calculadora.

19.1. Indique, justificando, se a seguinte afirmação é verdadeira ou é falsa.

«A função f é contínua à esquerda no ponto 1, mas não é contínua à direita nesse ponto.»

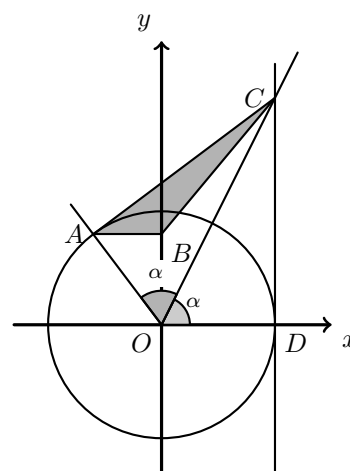
19.2. Escreva a equação reduzida da reta tangente ao gráfico da função f no ponto de abcissa $1 - \frac{\pi}{2}$

Exame – 2017, Ép. especial

20. Na figura ao lado, está representada, num referencial o.n. xOy , a circunferência de centro na origem e raio 1

Sabe-se que:

- o ponto A está no segundo quadrante e pertence à circunferência;
- o ponto D tem coordenadas $(1,0)$
- o ponto C pertence ao primeiro quadrante e tem abcissa igual à do ponto D
- o ponto B pertence ao eixo Oy e é tal que o segmento de reta $[AB]$ é paralelo ao eixo Ox
- os ângulos AOC e COD são geometricamente iguais e cada um deles tem amplitude α , $\left(\alpha \in \left]\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right[\right)$



Mostre que a área do triângulo $[ABC]$, representado a sombreado, é dada por $\frac{\operatorname{tg} \alpha \cos^2(2\alpha)}{2}$

Exame – 2017, Ép. especial

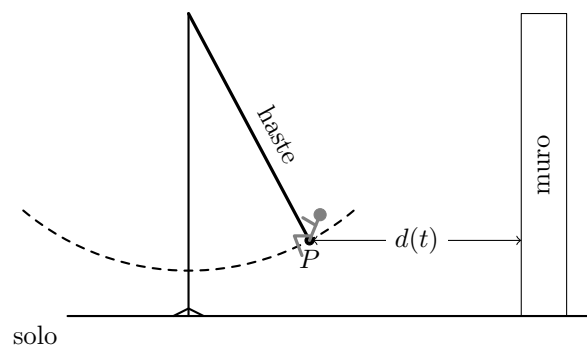


21. Num jardim, uma criança está a andar num balanço cuja cadeira está suspensa por duas hastes rígidas.

Atrás do balanço, há um muro que limita esse jardim.

A figura ao lado esquematiza a situação. O ponto P representa a posição da cadeira.

Num determinado instante, em que a criança está a dar balanço, é iniciada a contagem do tempo. Doze segundos após esse instante, a criança deixa de dar balanço e procura parar o balanço arrastando os pés no chão.



Admita que a distância, em decímetros, do ponto P ao muro, t segundos após o instante inicial, é dada por

$$d(t) = \begin{cases} 30 + t \sin(\pi t) & \text{se } 0 \leq t < 12 \\ 30 + 12e^{12-t} \sin(\pi t) & \text{se } t \geq 12 \end{cases}$$

(o argumento da função seno está expresso em radianos)

Admita que, no instante em que é iniciada a contagem do tempo, as hastes do balanço estão na vertical e que a distância do ponto P ao chão, nesse instante, é 4 dm

Treze segundos e meio após o instante inicial, a distância do ponto P ao chão é 4,2 dm

Qual é o comprimento da haste?

Apresente o resultado em decímetros, arredondado às unidades.

Se, em cálculos intermédios, proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, duas casas decimais.

Exame – 2017, 2.ª Fase

22. Considere o desenvolvimento de $\left(2x \sin \alpha + \frac{\cos \alpha}{x}\right)^2$, em que $\alpha \in \mathbb{R}$ e $x \neq 0$

Determine os valores de α , pertencentes ao intervalo $]\pi, 2\pi[$, para os quais o termo independente de x , neste desenvolvimento, é igual a 1

Resolva este item recorrendo a métodos analíticos, sem utilizar a calculadora.

Exame – 2017, 2.ª Fase

23. Seja f a função, de domínio A e contradomínio $]-1, +\infty[$, definida por $f(x) = \operatorname{tg} x$

Qual dos conjuntos seguintes pode ser o conjunto A ?

(A) $\left]-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right[$ (B) $\left]\frac{3\pi}{4}, \frac{3\pi}{2}\right[$ (C) $\left]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}\right[$ (D) $\left]\frac{5\pi}{4}, \frac{3\pi}{2}\right[$

Exame – 2017, 1.ª Fase



24. Seja g a função, de domínio \mathbb{R} , definida por

$$g(x) = \begin{cases} \frac{1-x^2}{1-e^{x-1}} & \text{se } x < 1 \\ 2 & \text{se } x = 1 \\ 3 + \frac{\sin(x-1)}{1-x} & \text{se } x > 1 \end{cases}$$

Resolva os itens seguintes recorrendo a métodos analíticos, sem utilizar a calculadora.

24.1. Estude a função g quanto à continuidade no ponto 1

24.2. Resolva, no intervalo $]4,5[$, a equação $g(x) = 3$

Exame – 2017, 1.ª Fase

25. Para um certo número real k , é contínua em \mathbb{R} a função f definida por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin(3x+3)}{4x+4} & \text{se } x \neq -1 \\ k+2 & \text{se } x = -1 \end{cases}$$

Qual é o valor de k ?

- (A) $-\frac{5}{3}$ (B) $-\frac{5}{4}$ (C) $\frac{5}{4}$ (D) $\frac{5}{3}$

Exame – 2016, Ép. especial

26. Seja f a função, de domínio $\left]-\frac{3\pi}{2}, +\infty\right[$, definida por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{4}x^2 + \cos x & \text{se } -\frac{3\pi}{2} < x < 0 \\ \ln(e^x + x) & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$$

Estude, recorrendo a métodos analíticos, sem utilizar a calculadora, a função f quanto ao sentido das concavidades e quanto à existência de pontos de inflexão do seu gráfico, no intervalo $\left]-\frac{3\pi}{2}, 0\right[$

Na sua resposta, indique:

- o(s) intervalo(s) em que o gráfico de f tem concavidade voltada para baixo;
- o(s) intervalo(s) em que o gráfico de f tem concavidade voltada para cima;
- a(s) abcissa(s) do(s) ponto(s) de inflexão do gráfico de f

Exame – 2016, Ép. especial



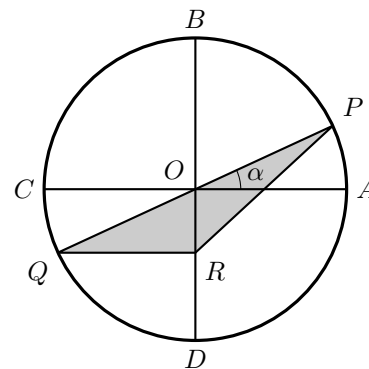
27. Na figura ao lado, está representada uma circunferência de centro no ponto O e raio 1

Sabe-se que:

- os diâmetros $[AC]$ e $[BD]$ são perpendiculares;
- o ponto P pertence ao arco AB
- $[PQ]$ é um diâmetro da circunferência;
- o ponto R pertence a $[OD]$ e é tal que $[QR]$ é paralelo a $[AC]$

Seja α a amplitude, em radianos, do ângulo AOP ($\alpha \in]0, \frac{\pi}{2}[$);

Qual das seguintes expressões dá a área do triângulo $[PQR]$, representado a sombreado, em função de α ?



- (A) $\frac{\cos(2\alpha)}{4}$ (B) $\frac{\sin(2\alpha)}{4}$ (C) $\frac{\cos(2\alpha)}{2}$ (D) $\frac{\sin(2\alpha)}{2}$

Exame – 2016, 2.ª Fase

28. Seja f a função, de domínio $]-\frac{\pi}{2}, +\infty[$, definida por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2 + \sin x}{\cos x} & \text{se } -\frac{\pi}{2} < x \leq 0 \\ x - \ln x & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

Estude, recorrendo a métodos analíticos, sem utilizar a calculadora, a função f quanto à monotonia e quanto à existência de extremos relativos, no intervalo $]-\frac{\pi}{2}, 0[$

Exame – 2016, 2.ª Fase

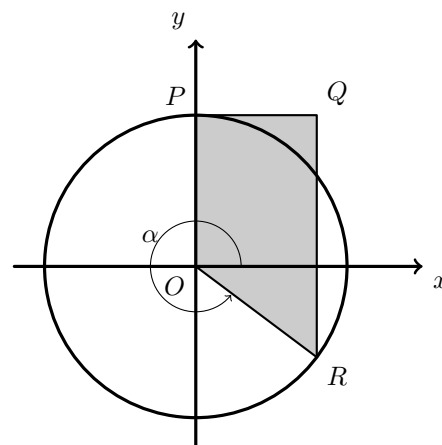
29. Na figura ao lado, estão representados o círculo trigonométrico e um trapézio retângulo $[OPQR]$

Sabe-se que:

- o ponto P tem coordenadas $(0,1)$
- o ponto R pertence ao quarto quadrante e à circunferência.

Seja α a amplitude de um ângulo orientado cujo lado origem é o semieixo positivo Ox e cujo lado extremidade é a semirreta OR

Qual das expressões seguintes dá a área do trapézio $[OPQR]$, em função de α ?



- (A) $\frac{\cos \alpha}{2} + \sin \alpha \cos \alpha$ (B) $\frac{\cos \alpha}{2} - \sin \alpha \cos \alpha$
- (C) $\cos \alpha + \frac{\sin \alpha \cos \alpha}{2}$ (D) $\cos \alpha - \frac{\sin \alpha \cos \alpha}{2}$

Exame – 2016, 1.ª Fase



30. Num dia de vento, são observadas oscilações no tabuleiro de uma ponte suspensa, construída sobre um vale.

Mediu-se a oscilação do tabuleiro da ponte durante um minuto.

Admita que, durante esse minuto, a distância de um ponto P do tabuleiro a um ponto fixo do vale é dada, em metros, por

$$h(t) = 20 + \frac{1}{2\pi} \cos(2\pi t) + t \sin(2\pi t) \quad (t \text{ é medido em minutos e pertence a } [0,1])$$

Sejam M e m , respetivamente, o máximo e o mínimo absolutos da função h no intervalo $[0,1]$

A amplitude A da oscilação do tabuleiro da ponte, neste intervalo, é dada por $A = M - m$

Determine o valor de A , recorrendo a métodos analíticos e utilizando a calculadora apenas para efetuar eventuais cálculos numéricos.

Apresente o resultado em metros.

Exame – 2016, 1.ª Fase

31. Seja a um número real.

Considere a função f , de domínio \mathbb{R} , definida por $f(x) = a \sin x$

Seja r a reta tangente ao gráfico de f no ponto de abscissa $\frac{2\pi}{3}$

Sabe-se que a inclinação da reta r é igual a $\frac{\pi}{6}$ radianos.

Determine o valor de a

Exame – 2015, Ép. especial

32. Seja f a função, de domínio \mathbb{R} , definida por $f(x) = 3 \sin^2(x)$

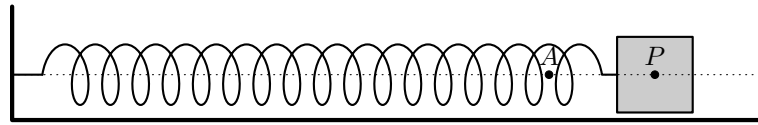
Qual das expressões seguintes define a função f'' , segunda derivada de f ?

- (A) $6 \sin(2x) \cos(x)$ (B) $6 \sin(x) \cos(2x)$ (C) $6 \cos(2x)$ (D) $6 \sin(2x)$

Exame – 2015, 2.ª Fase



33. Um cubo encontra-se em movimento oscilatório provocado pela força elástica exercida por uma mola. A figura seguinte esquematiza esta situação. Nesta figura, os pontos O e A são pontos fixos. O ponto P representa o centro do cubo e desloca-se sobre a semirreta \vec{OA}



Admita que não existe qualquer resistência ao movimento.

Sabe-se que a distância, em metros, do ponto P ao ponto O é dada por

$$d(t) = 1 + \frac{1}{2} \sin \left(\pi t + \frac{\pi}{6} \right)$$

A variável t designa o tempo, medido em segundos, que decorre desde o instante em que foi iniciada a contagem do tempo ($t \in [0, +\infty[$). Resolva os dois itens seguintes sem recorrer à calculadora.

- 33.1. No instante em que se iniciou a contagem do tempo, o ponto P coincidia com o ponto A . Durante os primeiros três segundos do movimento, o ponto P passou pelo ponto A mais do que uma vez.

Determine os instantes, diferentes do inicial, em que tal aconteceu.

Apresente os valores exatos das soluções, em segundos.

- 33.2. Justifique, recorrendo ao teorema de Bolzano, que houve, pelo menos, um instante, entre os três segundos e os quatro segundos após o início da contagem do tempo, em que a distância do ponto P ao ponto O foi igual a 1,1 metros.

Exame – 2015, 2.ª Fase

34. Na figura ao lado, está representado o círculo trigonométrico.

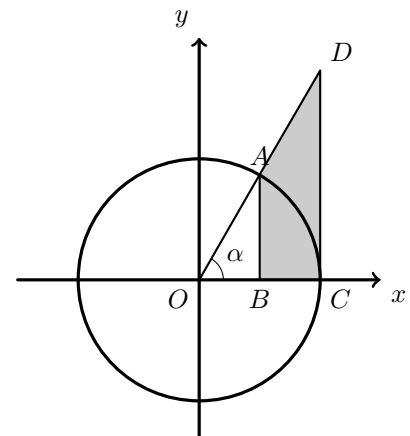
Sabe-se que:

- o ponto A pertence ao primeiro quadrante e à circunferência;
- o ponto B pertence ao eixo Ox
- o ponto C tem coordenadas $(1,0)$
- o ponto D pertence à semirreta \vec{OA}
- os segmentos de reta $[AB]$ e $[DC]$ são paralelos ao eixo Oy

Seja α a amplitude do ângulo COD ($\alpha \in]0, \frac{\pi}{2}[$)

Qual das expressões seguintes dá a área do quadrilátero $[ABCD]$, representado a sombreado, em função de α ?

- (A) $\frac{\operatorname{tg} \alpha}{2} - \frac{\operatorname{sen}(2\alpha)}{2}$ (B) $\frac{\operatorname{tg} \alpha}{2} - \frac{\operatorname{sen}(2\alpha)}{4}$
- (C) $\operatorname{tg} \alpha - \frac{\operatorname{sen}(2\alpha)}{4}$ (D) $\operatorname{tg} \alpha - \frac{\operatorname{sen}(2\alpha)}{2}$



Exame – 2015, 1.ª Fase



35. Sejam f e g as funções, de domínio \mathbb{R} , definidas, respetivamente, por

$$f(x) = 1 - \cos(3x) \text{ e } g(x) = \sin(3x)$$

Seja a um número real pertencente ao intervalo $\left] \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2} \right[$

Considere as retas r e s tais que:

- a reta r é tangente ao gráfico da função f no ponto de abscissa a
- a reta s é tangente ao gráfico da função g no ponto de abscissa $a + \frac{\pi}{6}$

Sabe-se que as retas r e s são perpendiculares.

Mostre que $\sin(3a) = -\frac{1}{3}$

Exame – 2015, 1.ª Fase

36. Considere, para um certo número real k , a função f , de domínio $] -\infty, e[$, definida por

$$f(x) = \begin{cases} xe^{x-2} & \text{se } x \leq 2 \\ \frac{\sin(2-x)}{x^2+x-6} + k & \text{se } 2 < x < e \end{cases}$$

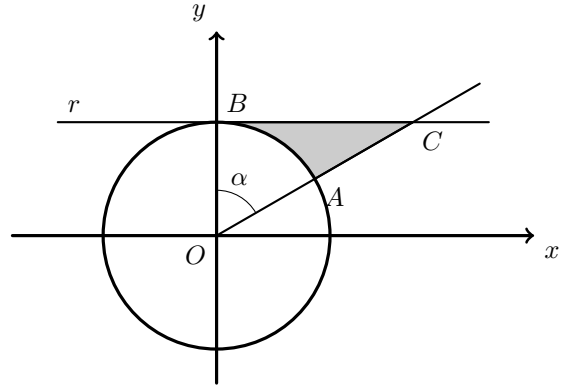
Determine k , de modo que a função f seja contínua em $x = 2$, recorrendo a métodos analíticos, sem utilizar a calculadora.

Exame – 2014, Ép. especial

37. Na figura ao lado, estão representadas, num referencial o.n. xOy , a circunferência de centro O e a reta r

Sabe-se que:

- os pontos A e B pertencem à circunferência;
- o ponto B tem coordenadas $(0,1)$
- a reta r é tangente à circunferência no ponto B
- o ponto C é o ponto de interseção da reta r com a semirreta \vec{OA}
- α é a amplitude, em radianos, do ângulo AOB , com $\alpha \in \left] 0, \frac{\pi}{2} \right[$



Qual das expressões seguintes representa, em função de α , a área da região a sombreado?

- (A) $\frac{\sin \alpha - \alpha}{2}$ (B) $\frac{\operatorname{tg} \alpha - \alpha}{2}$ (C) $\frac{\operatorname{tg} \alpha}{2}$ (D) $\frac{\alpha}{2}$

Exame – 2014, Ép. especial



38. Considere, para um certo número real k , a função f , contínua em $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$, definida por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\cos x}{x - \frac{\pi}{2}} & \text{se } \frac{\pi}{4} \leq x < \frac{\pi}{2} \\ k - 3 & \text{se } x = \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

Qual é o valor de k ?

- (A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 4

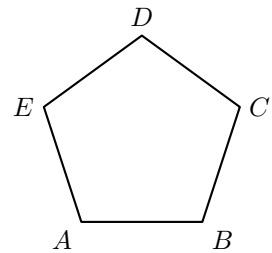
Exame – 2014, 2.ª Fase

39. Na figura ao lado, está representado um pentágono regular $[ABCDE]$

Sabe-se que $\overline{AB} = 1$

Mostre que $\frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}}{\|\overrightarrow{AD}\|} = 1 - 2 \sin^2\left(\frac{\pi}{5}\right)$

Nota: $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}$ designa o produto escalar do vetor \overrightarrow{AB} pelo vetor \overrightarrow{AD}

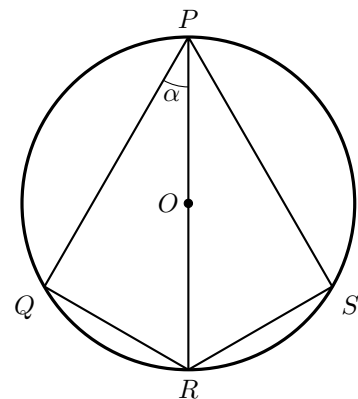


Exame – 2014, 2.ª Fase

40. Na figura ao lado, estão representados uma circunferência de centro O e raio 2 e os pontos P , Q , R e S

Sabe-se que:

- os pontos P , Q , R e S pertencem à circunferência;
- $[PR]$ é um diâmetro da circunferência;
- $\overline{PQ} = \overline{PS}$
- α é a amplitude, em radianos, do ângulo QPR
- $\alpha \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$
- $A(\alpha)$ é a área do quadrilátero $[PQRS]$, em função de α



Para um certo número real θ , com $\theta \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, tem-se que $\operatorname{tg} \theta = 2\sqrt{2}$

Determine o valor exato de $A(\theta)$, recorrendo a métodos analíticos, sem utilizar a calculadora.

Comece por mostrar que $A(\alpha) = 16 \sin \alpha \cos \alpha$

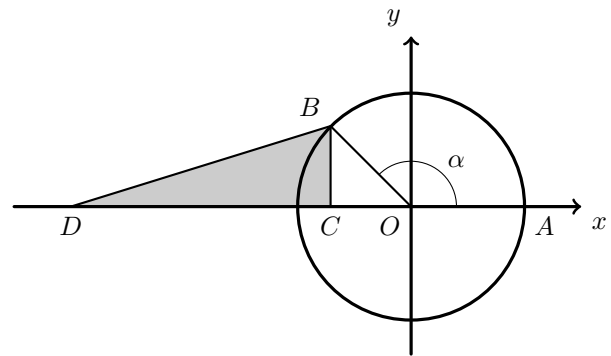
Exame – 2014, 2.ª Fase



41. Na figura seguinte, está representada, num referencial o.n. xOy , uma circunferência de centro O e raio 1

Sabe-se que:

- os pontos A e B pertencem à circunferência;
- o ponto A tem coordenadas $(1,0)$
- os pontos B e C têm a mesma abscissa;
- o ponto C tem ordenada zero;
- o ponto D tem coordenadas $(-3,0)$
- α é a amplitude, em radianos, do ângulo AOB , com $\alpha \in \left] \frac{\pi}{2}, \pi \right[$



Qual das expressões seguintes representa, em função de α , a área do triângulo $[BCD]$?

- (A) $\frac{1}{2}(-3 - \sin \alpha) \cos \alpha$ (B) $\frac{1}{2}(-3 + \sin \alpha) \cos \alpha$
 (C) $\frac{1}{2}(3 + \cos \alpha) \sin \alpha$ (D) $\frac{1}{2}(3 - \cos \alpha) \sin \alpha$

Exame – 2014, 1.ª Fase

42. Seja f uma função cuja derivada f' , de domínio \mathbb{R} , é dada por $f'(x) = x - \sin(2x)$

42.1. Determine o valor de $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{f(x) - f\left(\frac{\pi}{2}\right)}{2x - \pi}$

42.2. Estude o gráfico da função f , quanto ao sentido das concavidades e quanto à existência de pontos de inflexão em $\left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4} \right]$, recorrendo a métodos analíticos, sem utilizar a calculadora.

Na sua resposta, deve indicar o(s) intervalo(s) onde o gráfico da função f tem concavidade voltada para cima, o(s) intervalo(s) onde o gráfico da função f tem concavidade voltada para baixo e, caso existam, as abcissas dos pontos de inflexão do gráfico da função f

Exame – 2014, 1.ª Fase

43. Seja g a função, de domínio \mathbb{R} , definida por $g(x) = \cos^2\left(\frac{x}{12}\right) - \sin^2\left(\frac{x}{12}\right)$

Qual das expressões seguintes também define a função g ?

- (A) $\sin\left(\frac{x}{24}\right)$ (B) $\cos\left(\frac{x}{24}\right)$ (C) $\sin\left(\frac{x}{6}\right)$ (D) $\cos\left(\frac{x}{6}\right)$

Teste Intermédio 12.º ano – 30.04.2014



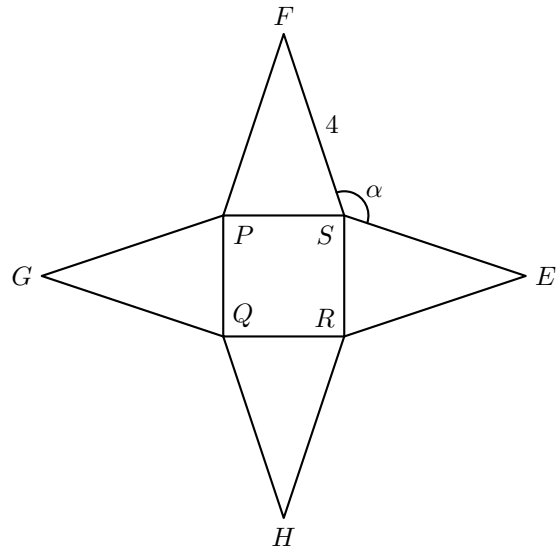
44. Na figura ao lado, está representada uma planificação de uma pirâmide quadrangular regular cujas arestas laterais medem 4

Seja α a amplitude, em radianos, do ângulo FSE ($\alpha \in]\frac{\pi}{2}, \pi[$)

A aresta da base da pirâmide e, consequentemente, a área de cada uma das faces laterais variam em função de α

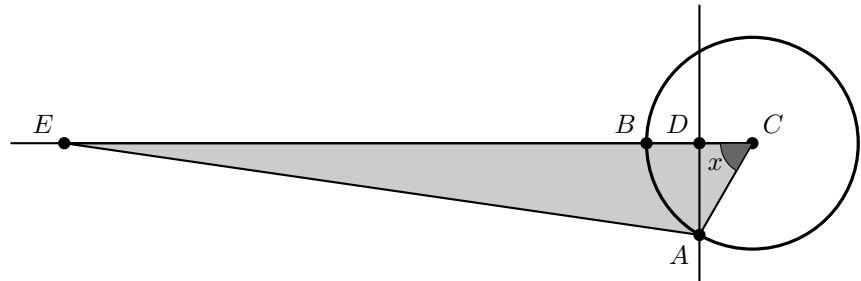
Mostre que a área lateral da pirâmide é dada, em função de α , por $-32 \cos \alpha$

Sugestão – Comece por exprimir a área de uma face lateral em função da amplitude do ângulo FSP , que poderá designar por β



Teste Intermédio 12.º ano – 30.04.2014

45. Na figura ao lado, estão representados a circunferência de centro no ponto C e de raio 1, a semirreta \vec{CB} , a reta AD e o triângulo $[ACE]$



Sabe-se que:

- os pontos A e B pertencem à circunferência;
- os pontos D e E pertencem à semirreta \vec{CB}
- a reta AD é perpendicular à semirreta \vec{CB}
- o ponto A desloca-se sobre a circunferência, e os pontos D e E acompanham esse movimento de modo que $\overline{DE} = 6$
- x é a amplitude, em radianos, do ângulo ACB
- $x \in]0, \frac{\pi}{2}[$

45.1. Mostre que a área do triângulo $[ACE]$ é dada, em função de x , por $f(x) = 3 \sin x + \frac{1}{4} \sin(2x)$

45.2. Mostre, sem resolver a equação, que $f(x) = 2$ tem, pelo menos, uma solução em $]\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}[$

Exame – 2013, Ép. especial

46. Considere a função f , de domínio \mathbb{R} , definida por

$$f(x) = \begin{cases} xe^{3+x} + 2x & \text{se } x \leq 1 \\ \frac{1 - \sqrt{x} + \sin(x-1)}{1-x} & \text{se } x > 1 \end{cases}$$

Averigue, recorrendo a métodos analíticos, sem utilizar a calculadora, se a função f é contínua em $x = 1$.

Exame – 2013, 2.ª Fase



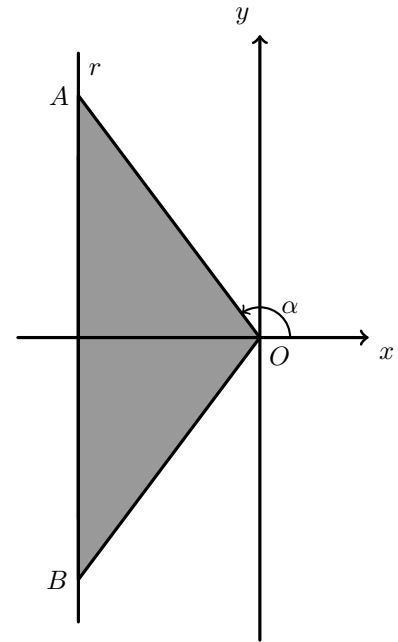
47. Na figura ao lado, estão representados, num referencial o.n. xOy , o triângulo $[OAB]$ e a reta r

Sabe-se que:

- a reta r é definida por $x = -3$
- o ponto A pertence à reta r e tem ordenada positiva;
- o ponto B é o simétrico do ponto A em relação ao eixo Ox
- α é a amplitude, em radianos, do ângulo cujo lado origem é o semieixo positivo Ox e cujo lado extremidade é a semirreta \vec{OA}
- $\alpha \in \left] \frac{\pi}{2}, \pi \right[$
- a função P , de domínio $\left] \frac{\pi}{2}, \pi \right[$, é definida por

$$P(x) = -6 \operatorname{tg} x - \frac{6}{\cos x}$$

- 47.1. Mostre que o perímetro do triângulo $[OAB]$ é dado, em função de α , por $P(\alpha)$
- 47.2. Determine o declive da reta tangente ao gráfico da função P no ponto de abscissa $\frac{5\pi}{6}$, sem utilizar a calculadora.



Exame – 2013, 2.ª Fase

48. Seja f a função, de domínio $\mathbb{R} \setminus 0$, definida por $f(x) = \frac{\operatorname{sen}(-x)}{x}$

Considere a sucessão de números reais (x_n) tal que $x_n = \frac{1}{n}$

Qual é o valor de $\lim f(x_n)$?

- (A) -1 (B) 0 (C) 1 (D) $+\infty$

Exame – 2013, 1.ª Fase

49. Considere a função g , de domínio $\left] -\frac{\pi}{2}, 0 \right[$, definida por $g(x) = \operatorname{sen}(2x) - \cos x$

Seja a um número real do domínio de g

A reta tangente ao gráfico da função g no ponto de abscissa a é paralela à reta de equação $y = \frac{x}{2} + 1$

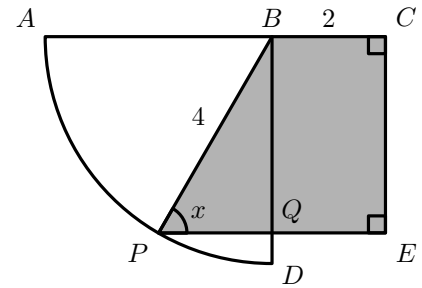
Determine o valor de a , recorrendo a métodos analíticos, sem utilizar a calculadora.

Exame – 2013, 1.ª Fase



50. Relativamente à figura ao lado, sabe-se que:

- o ponto B pertence ao segmento de reta $[AC]$
- os pontos A e D pertencem à circunferência que tem centro no ponto B e raio igual a 4
- o segmento de reta $[BD]$ é perpendicular ao segmento de reta $[AC]$
- $\overline{BC} = 2$



Admita que um ponto P se desloca ao longo do arco AD , nunca coincidindo com A nem com D , e que um ponto E acompanha o movimento do ponto P de forma que o quadrilátero $[PBCE]$ seja um trapézio retângulo.

O ponto Q é a intersecção do segmento de reta $[PE]$ com o segmento de reta $[BD]$

Para cada posição do ponto P , seja x a amplitude do ângulo EPB e seja $S(x)$ a área do trapézio $[PBCE]$

50.1. Mostre que $S(x) = 8 \sin x + 4 \sin(2x)$ $\left(x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[\right]$

50.2. Estude a função S quanto à monotonia e quanto à existência de extremos relativos, recorrendo a métodos analíticos, sem utilizar a calculadora.

Na sua resposta, deve apresentar:

- o(s) intervalo(s) em que a função é crescente;
- o(s) intervalo(s) em que a função é decrescente;
- os valores de x para os quais a função tem extremos relativos, caso existam.

Teste Intermédio 12.º ano – 24.05.2013

51. Seja f a função, de domínio \mathbb{R} , definida por

$$f(x) = \begin{cases} 3x + 1 - xe^x & \text{se } x < 0 \\ x + \cos x & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$$

Recorrendo a métodos analíticos, sem utilizar a calculadora, determine, $f'\left(\frac{\pi}{2}\right)$ com recurso à definição de derivada de uma função num ponto.

Teste Intermédio 12.º ano – 24.05.2013

52. Considere as funções f e g , de domínio \mathbb{R} , definidas, respetivamente, por

$$f(x) = -x + \sin\left(\frac{x}{2}\right) \text{ e } g(x) = \begin{cases} \frac{f(x)}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ e^k - 1 & \text{se } x = 0 \end{cases} \text{ com } k \in \mathbb{R}$$

Resolva os itens seguintes, recorrendo a métodos exclusivamente analíticos.

52.1. Determine k de modo que a função g seja contínua.

52.2. Determine, em $] -2\pi, 5\pi[$, as soluções da equação $2f'(x) = (f(x) + x)^2 - 1$

Exame – 2012, Ép. especial



53. Considere a função f , de domínio \mathbb{R} , definida por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{1 - \sqrt{1 - x^3}} & \text{se } x < 0 \\ 1 - e^{k+1} & \text{se } x = 0 \\ \frac{1 - e^{4x}}{x} & \text{se } x > 0 \end{cases} \quad \text{com } k \in \mathbb{R}$$

Estude a função f quanto à existência de assíntotas verticais do seu gráfico, recorrendo a métodos exclusivamente analíticos.

Exame – 2012, 2.^a Fase

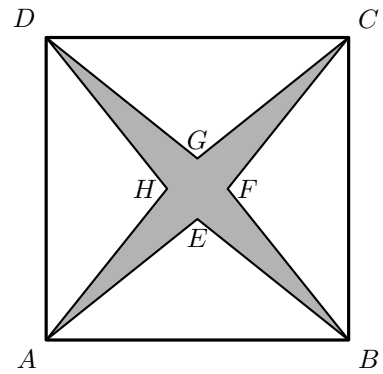
54. Na figura ao lado, está representado o quadrado $[ABCD]$

Sabe-se que:

- $\overline{AB} = 4$
- $\overline{AE} = \overline{AH} = \overline{BE} = \overline{BF} = \overline{CF} = \overline{CG} = \overline{DG} = \overline{DH}$
- x é a amplitude, em radianos, do ângulo EAB
- $x \in \left] 0, \frac{\pi}{4} \right[$

54.1. Mostre que a área da região sombreada é dada, em função de x , por $a(x) = 16(1 - \operatorname{tg} x)$

54.2. Mostre que existe um valor de x compreendido entre $\frac{\pi}{12}$ e $\frac{\pi}{5}$ para o qual a área da região sombreada é 5
Se utilizar a calculadora em eventuais cálculos numéricos, sempre que proceder a arredondamentos, use duas casas decimais.

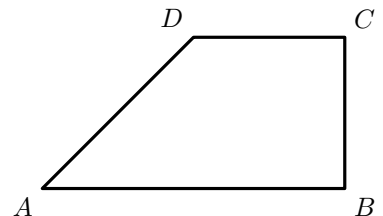


Exame – 2012, 2.^a Fase

55. Na figura ao lado, está representado um trapézio retângulo $[ABCD]$

Sabe-se que:

- $\overline{BC} = 1$
- $\overline{CD} = 1$
- α é a amplitude, em radianos, do ângulo ADC
- $\alpha \in \left] \frac{\pi}{2}, \pi \right[$



Resolva os itens seguintes, recorrendo a métodos exclusivamente analíticos.

55.1. Mostre que o perímetro do trapézio $[ABCD]$ é dado, em função de α , por $P(\alpha) = 3 + \frac{1 - \cos \alpha}{\sin \alpha}$

55.2. Para um certo número real θ , tem-se que $\operatorname{tg} \theta = -\sqrt{8}$, com $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$

Determine o valor exato de $P'(\theta)$

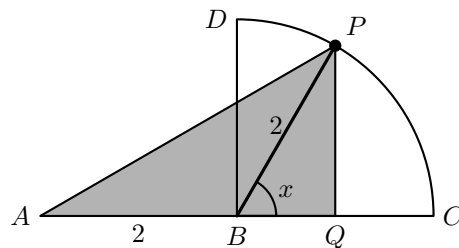
Comece por mostrar que $P'(\alpha) = \frac{1 - \cos \alpha}{\sin^2 \alpha}$

Exame – 2012, 1.^a Fase



56. Relativamente à figura ao lado, sabe-se que:

- o segmento de reta $[AC]$ tem comprimento 4
- o ponto B é o ponto médio de $[AC]$
- o segmento de reta $[BD]$ é perpendicular a $[AC]$
- o arco de circunferência CD tem centro em B



Admita que um ponto P se desloca ao longo do arco CD , nunca coincidindo com C nem com D , e que um ponto Q se desloca ao longo do segmento de reta $[BC]$ de tal forma que $[PQ]$ é sempre perpendicular a $[BC]$

Para cada posição do ponto P , seja x a amplitude, em radianos, do ângulo CBP e seja $A(x)$ a área do triângulo $[APQ]$

Resolva os dois itens seguintes, recorrendo a métodos exclusivamente analíticos.

56.1. Mostre que $A(x) = 2 \sin x + \sin(2x)$ $\left(x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right]\right)$

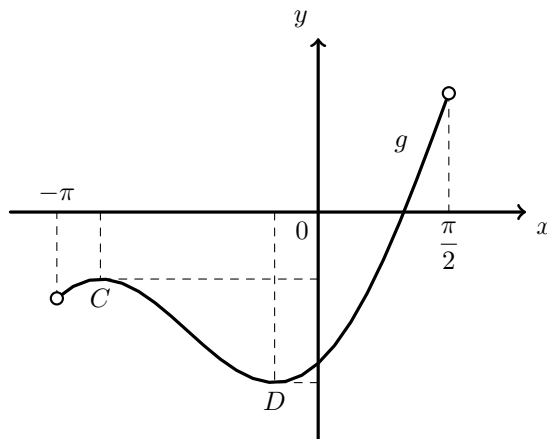
56.2. Mostre que existe um valor de x para o qual a área do triângulo $[APQ]$ é máxima

Teste Intermédio 12.º ano – 24.05.2012

57. Na figura ao lado, está representado, num referencial o. n. xOy , o gráfico da função g , de domínio $\left]-\pi, \frac{\pi}{2}\right]$, definida por $g(x) = x - 2 \cos x$

Sabe-se que C e D são pontos do gráfico de g cujas ordenadas são extremos relativos de g

Determine os valores exatos das coordenadas dos pontos C e D recorrendo a métodos exclusivamente analíticos.



Exame – 2011, Prova especial

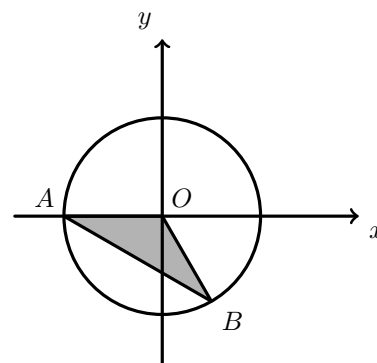
58. Na figura ao lado, estão representados, num referencial o. n. xOy , uma circunferência e o triângulo $[OAB]$

Sabe-se que:

- O é a origem do referencial;
- a circunferência tem centro no ponto O e raio 1
- A é o ponto de coordenadas $(-1, 0)$
- B pertence à circunferência e tem ordenada negativa;
- o ângulo AOB tem amplitude igual a $\frac{2\pi}{3}$ radianos.

Qual é a área do triângulo $[OAB]$?

- (A) $\frac{\sqrt{3}}{4}$ (B) $\frac{\sqrt{1}}{2}$ (C) $\frac{\sqrt{1}}{4}$ (D) $\sqrt{3}$



Exame – 2011, Ép. especial

59. A função f tem domínio \mathbb{R} e é definida por $f(x) = \pi - 4 \sin(5x)$

Calcule o valor de $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{f(x) - \pi}$

Exame – 2011, Ép. especial



60. Para um certo número real positivo, k , a função g definida em \mathbb{R} por

$$g(x) = \begin{cases} \frac{\operatorname{sen} x}{3x} & \text{se } x > 0 \\ \ln(k - x) & \text{se } x \leq 0 \end{cases} \quad \text{é contínua.}$$

Qual é o valor de k ?

- (A) $\sqrt[3]{e}$ (B) e^3 (C) $-\frac{e}{3}$ (D) $3e$

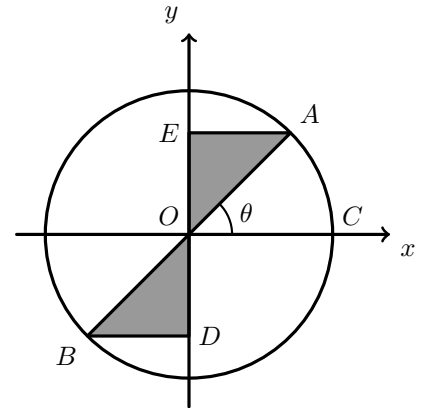
Exame – 2011, 2.ª fase

61. Na figura ao lado, está representado, num referencial o. n. xOy , um círculo trigonométrico.

Sabe-se que:

- C é o ponto de coordenadas $(1,0)$
- Os pontos D e E pertencem ao eixo Oy
- $[AB]$ é um diâmetro do círculo trigonométrico
- as retas EA e BD são paralelas ao eixo Ox
- θ é a amplitude do ângulo COA
- $\theta \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$

Qual das expressões seguintes dá a o perímetro da região sombreada na figura anterior?



- (A) $2(\cos \theta + \operatorname{sen} \theta)$ (B) $\cos \theta + \operatorname{sen} \theta$ (C) $2(1 + \cos \theta + \operatorname{sen} \theta)$ (D) $1 + \cos \theta + \operatorname{sen} \theta$

Exame – 2011, 2.ª Fase

62. Para a , b e n , números reais positivos, considere a função f , de domínio \mathbb{R} , definida por

$$f(x) = a \cos(nx) + b \operatorname{sen}(nx)$$

Seja f'' a segunda derivada da função f

Mostre que $f''(x) + n^2 f(x) = 0$

Exame – 2011, 2.ª Fase

63. Qual é o valor de $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x^2} \operatorname{sen}^2 \left(\frac{x}{2} \right) \right)$?

- (A) 4 (B) 0 (C) $\frac{1}{4}$ (D) $\frac{1}{2}$

Exame – 2011, 1.ª Fase



64. Na figura seguinte está representado, num referencial o. n. xOy , parte do gráfico de uma função f , de domínio \mathbb{R} , definida por $f(x) = 4\cos(2x)$

Sabe-se que:

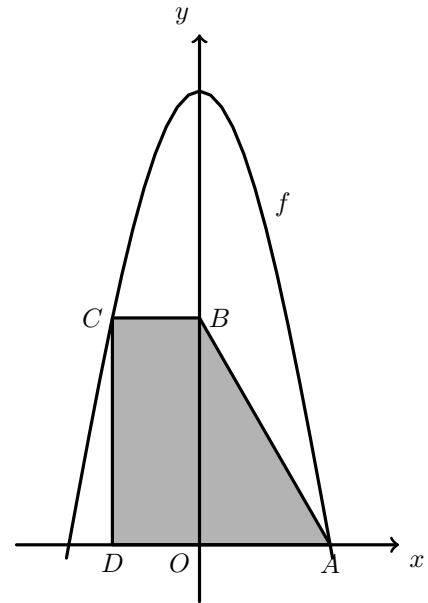
- os vértices A e D do trapézio $[ABCD]$ pertencem ao eixo Ox
- o vértice B do trapézio $[ABCD]$ pertence ao eixo Oy
- o vértice D do trapézio $[ABCD]$ tem abcissa $-\frac{\pi}{6}$
- os pontos A e C pertencem ao gráfico de f
- a reta CD é paralela ao eixo Oy

Resolva os dois itens seguintes recorrendo a métodos exclusivamente analíticos.

64.1. Determine o valor exato da área do trapézio $[ABCD]$

64.2. Seja f' a primeira derivada da função f e seja f'' a segunda derivada da função f

Mostre que $f(x) + f'(x) + f''(x) = -4(3\cos(2x) + 2\sin(2x))$ para qualquer número real x



Exame – 2011, 1.ª Fase

65. Seja f a função, de domínio \mathbb{R}^+ , definida por

$$f(x) = \begin{cases} 2 + \frac{\sin(x-1)}{ex-e} & \text{se } 0 < x < 1 \\ xe^{-x} + 2x & \text{se } x \geq 1 \end{cases}$$

Averigue, sem recorrer à calculadora, se a função f é contínua em $x = 1$

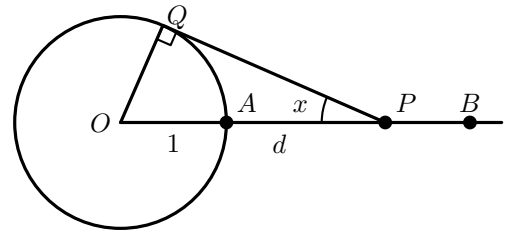
Teste Intermédio 12.º ano – 26.05.2011



66. Na figura ao lado, está representada uma circunferência de centro no ponto O e raio 1

Sabe-se que:

- o ponto A pertence à circunferência;
- os pontos O , A , e B são colineares;
- o ponto A está entre o ponto O e o ponto B
- o ponto P desloca-se ao longo da semirreta \overrightarrow{AB} , nunca coincidindo com o ponto A
- d é a distância do ponto A ao ponto P
- para cada posição do ponto P , o ponto Q é um ponto da circunferência tal que a reta PQ é tangente à circunferência;
- x é a amplitude, em radianos, do ângulo OPQ ($x \in]0, \frac{\pi}{2}[$)



Seja f a função, de domínio $]0, \frac{\pi}{2}[$ definida por $f(x) = \frac{1 - \sin x}{\sin x}$

Resolva os dois itens seguintes **sem recorrer à calculadora**.

66.1. Mostre que $d = f(x)$

66.2. Considere a seguinte afirmação: «Quanto maior é o valor de x , menor é o valor de d »
Averigüe a veracidade desta afirmação, começando por estudar a função f quanto à monotonia.

Teste Intermédio 12.º ano – 26.05.2011

67. Admita que, numa certa marina, a profundidade da água, em metros, t horas após as zero horas de um certo dia, é dada por $P(t) = 2 \cos\left(\frac{\pi}{6}t\right) + 8$, em que $t \in [0, 24]$

Resolva os dois itens seguintes, recorrendo a métodos exclusivamente analíticos.

67.1. Determine a profundidade da água da marina às três horas da tarde, desse dia.

67.2. Determine, recorrendo ao estudo da função derivada, a profundidade mínima, em metros, da água da marina, nesse dia.

Exame – 2010, Ép. especial



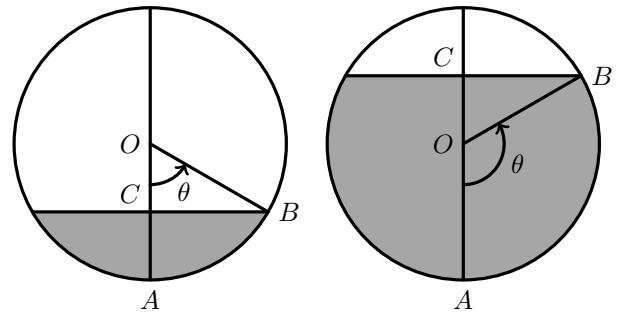
68. Um depósito de combustível tem a forma de uma esfera.

As figuras seguintes representam dois cortes do mesmo depósito, com alturas de combustível distintas. Os cortes são feitos por um plano vertical que passa pelo centro da esfera.

Sabe-se que:

- o ponto O é o centro da esfera;
- a esfera tem 6 metros de diâmetro;
- a amplitude θ , em radianos, do arco AB é igual à amplitude do ângulo ao centro AOB correspondente

A altura \overline{AC} , em metros, do combustível existente no depósito é dada, em função de θ , por h , de domínio $[0, \pi]$



Resolva os itens seguintes, recorrendo a métodos exclusivamente analíticos.

68.1. Mostre que $h(\theta) = 3 - 3 \cos(\theta)$, para qualquer $\theta \in]0, \pi[$

68.2. Resolva a condição $h(\theta) = 3$, $\theta \in]0, \pi[$

Interprete o resultado obtido no contexto da situação apresentada.

Exame – 2010, 2.ª Fase

69. Considere a função f , de domínio $] - \infty, 2\pi]$, definida por

$$f(x) = \begin{cases} ax + b + e^x & \text{se } x \leq 0 \\ \frac{x - \sin(2x)}{x} & \text{se } 0 < x \leq 2\pi \end{cases}$$

Determine o valor de b , recorrendo a métodos exclusivamente analíticos, de modo que f seja contínua em $x = 0$

Exame – 2010, 1.ª Fase



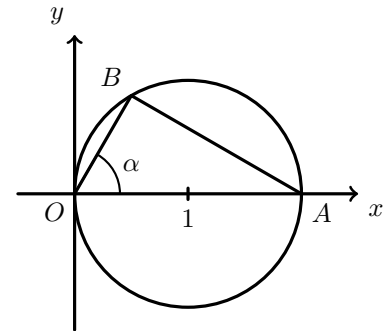
70. Na figura ao lado, estão representados, num referencial o.n. xOy , uma circunferência e o triângulo $[OAB]$.

Sabe-se que:

- a circunferência tem diâmetro $[OA]$;
- o ponto A tem coordenadas $(2, 0)$;
- o vértice O do triângulo $[OAB]$ coincide com a origem do referencial;
- o ponto B desloca-se ao longo da semicircunferência superior.

Para cada posição do ponto B , seja α a amplitude do ângulo AOB , com $\alpha \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$

Resolva os dois itens seguintes, recorrendo a métodos exclusivamente analíticos.



- 70.1. Mostre que o perímetro do triângulo $[OAB]$ é dado, em função de α , por

$$f(\alpha) = 2(1 + \cos \alpha + \sin \alpha)$$

- 70.2. Determine o valor de α para o qual o perímetro do triângulo $[OAB]$ é máximo.

Exame – 2010, 1.ª Fase

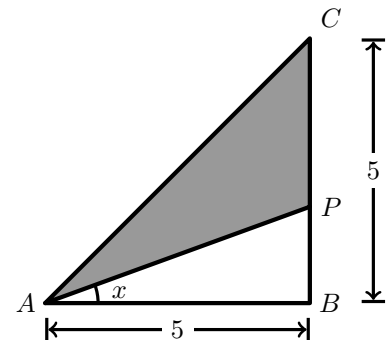
71. Na figura ao lado, está representado um triângulo retângulo $[ABC]$, cujos catetos $[AB]$ e $[BC]$, medem 5 unidades.

Considere que um ponto P se desloca sobre o cateto $[BC]$, nunca coincidindo com nem B com C

Para cada posição do ponto P , seja x a amplitude, em radianos, do ângulo BAP $\left(x \in \left]0, \frac{\pi}{4}\right[\right)$

Seja f a função que, a cada valor de x , faz corresponder o **perímetro** do triângulo $[APC]$

Resolva os dois itens seguintes **usando exclusivamente métodos analíticos**.



- 71.1. Mostre que $f(x) = \frac{5}{\cos x} - 5 \operatorname{tg} x + \sqrt{50} + 5$

- 71.2. Seja r a reta tangente ao gráfico da função f no ponto de abscissa $\frac{\pi}{6}$
Determine o declive da reta r

Teste Intermédio 12.º ano – 19.05.2010

72. Seja a função f , de domínio \mathbb{R} , definida por $f(x) = \sin(2x)$.

Qual é o declive da reta tangente ao gráfico de f no ponto de abscissa $\frac{\pi}{8}$?

- (A) $\sqrt{2}$ (B) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (C) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (D) $\frac{1}{2}$

Exame – 2009, Ép. especial

73. Seja a função f , de domínio $[0, \pi[$, definida por $f(x) = e^x \cdot \cos x$

Estude, **recorrendo exclusivamente a métodos analíticos**, a função f , quanto à monotonia e quanto à existência de extremos relativos, indicando os intervalos de monotonia e, caso existam, os extremos relativos.

Exame – 2009, Ép. especial



74. Seja f a função, de domínio $[0, \frac{\pi}{2}]$, definida por $f(x) = \sin(2x) \cos x$

Determine, **recorrendo a métodos exclusivamente analíticos**, a equação reduzida da reta tangente ao gráfico de f , no ponto de abscissa 0.

Exame – 2009, 2.ª Fase

75. Para um certo número real positivo k , é contínua a função f , de domínio \mathbb{R} , definida por

$$f(x) = \begin{cases} \log_2(k+x) & \text{se } x \geq 0 \\ \frac{\sin(2x)}{x} & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

Qual é o valor de k ?

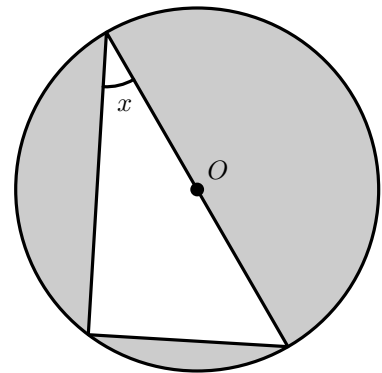
- (A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4

Exame – 2009, 1.ª Fase

76. Na figura ao lado, está representado um triângulo inscrito numa circunferência de centro O e raio igual a 1.

Um dos lados do triângulo é um diâmetro da circunferência.

Qual das expressões seguintes representa, em função de x , a área da parte sombreada?



- (A) $\pi - \sin(2x)$ (B) $\frac{\pi}{2} - \sin(2x)$
 (C) $\pi - 2 \sin(2x)$ (D) $\pi - \frac{\sin(2x)}{4}$

Exame – 2009, 1.ª Fase

77. Sejam a , b , c , e d as funções reais de variável real definidas por:

$$a(x) = 3 + \ln x \qquad b(x) = e^x \qquad c(x) = 10 \sin x \qquad d(x) = 2 + \operatorname{tg} x$$

Considere que o domínio de cada uma das quatro funções é o conjunto dos números reais para os quais tem significado a expressão que a define.

Qual é a função cujo gráfico tem mais do que uma assintota?

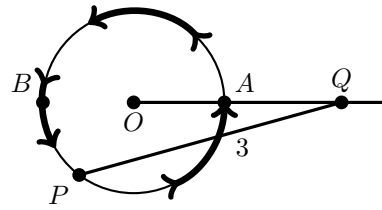
- (A) A função a (B) A função b (C) A função c (D) A função d

Teste Intermédio 12.º ano – 27.05.2009



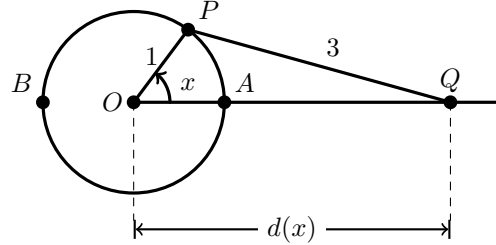
78. Na figura ao lado, em cima, estão representados:

- uma circunferência de centro O e raio 1
- dois pontos A e B , sobre a circunferência, tais que $[AB]$ é um diâmetro
- uma semirreta \vec{OA}
- um segmento de reta $[PQ]$



Considere que:

- o ponto P , partindo de A , se desloca sobre a circunferência, dando uma volta completa, no sentido indicado pelas setas da figura, em cima
- o ponto Q se desloca sobre a semirreta \vec{OA} , acompanhando o movimento do ponto P , de tal forma que se tem sempre $\overline{PQ} = 3$



Para cada posição do ponto P , seja x a amplitude, em radianos, do ângulo orientado que tem por lado origem a semirreta \vec{OA} e por lado extremidade a semirreta \vec{OP} (ver figura, em baixo).

Seja d a função que, a cada valor de x pertencente a $[0, 2\pi]$, associa a distância, $d(x)$, do ponto Q ao ponto O

78.1. Considere as seguintes afirmações sobre a função d e sobre a sua derivada, d' (a função tem derivada finita em todos os pontos do seu domínio).

I. $d(0) = 2d(\pi)$

II. $\forall x \in [0, 2\pi], d'(x) < 0$

Elabore uma pequena **composição** na qual indique, justificando, se cada uma das afirmações é verdadeira, ou falsa.

Nota: neste item, não defina analiticamente a função d ; a sua composição deve apoiar-se na forma como esta função foi apresentada (para cada valor de x , tem-se $d(x)$ que é a distância do ponto Q ao ponto O).

78.2. Defina analiticamente a função d no intervalo $\left]0, \frac{\pi}{2}\right]$ (isto é, determine uma expressão que dê o valor de $d(x)$, para cada x pertencente a este intervalo).

Sugestão: trace a altura do triângulo $[OPQ]$ relativa ao vértice P , designe por R o ponto de interseção desta altura com a semirreta \vec{OA} , e tenha em conta que $\overline{OQ} = \overline{OR} + \overline{RQ}$.

Teste Intermédio 12.º ano – 27.05.2009

79. Seja a função f , de domínio $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}\right]$, definida por $f(x) = \cos(x)$.

Qual é o contradomínio de f ?

- (A) $[-1, 0]$ (B) $[0, 1]$ (C) $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ (D) $\left[0, \frac{\sqrt{3}}{2}\right]$

Exame – 2008, Ép. especial

80. Seja a função f , de domínio $[0, \pi]$, definida por $f(x) = 2 \sin(x) \cdot \cos(x) + 2$.

O gráfico da função f intersesta a reta $y = 1$ num só ponto.

Determine, **recorrendo exclusivamente a métodos analíticos**, as coordenadas desse ponto.

Exame – 2008, Ép. especial



81. Considere a função g , de domínio \mathbb{R} , definida por $g(x) = 2 + \sin(4x)$.

Resolva, **usando métodos analíticos**, os dois itens seguintes.

Nota: A calculadora pode ser utilizada em eventuais cálculos intermédios; sempre que proceder a arredondamentos, use duas casas decimais.

81.1. Determine $g'(0)$, recorrendo à **definição de derivada** de uma função num ponto.

81.2. Estude a monotonia da função g , no intervalo $]0, \frac{\pi}{2}[$, indicando o valor dos extremos relativos, caso existam, e os intervalos de monotonia.

Exame – 2008, 2.ª Fase

82. Seja f a função de domínio $[-\pi, +\infty[$, definida por:

$$f(x) = \begin{cases} e^{-4x+1} & \text{se } x \geq 0 \\ \frac{3 \sin(x)}{x^2} & \text{se } -\pi \leq x < 0 \end{cases}$$

Estude a função f quanto à existência de assintotas do seu gráfico, paralelas aos eixos coordenados, escrevendo as suas equações, caso existam.

Exame – 2008, 1.ª Fase

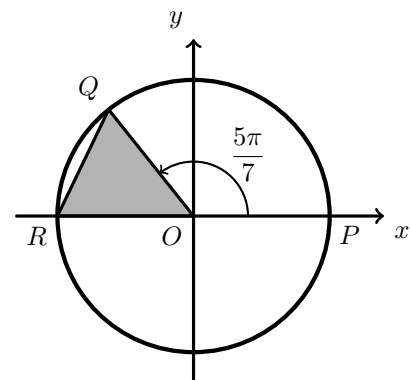
83. Na figura ao lado está representado o círculo trigonométrico.

Tal como a figura sugere, O é a origem do referencial, Q pertence à circunferência, P é o ponto de coordenadas $(1,0)$ e R é o ponto de coordenadas $(-1,0)$

A amplitude, em radianos, do ângulo POQ é $\frac{5\pi}{7}$

Qual é o valor, arredondado às centésimas, da área do triângulo $[OQR]$?

- (A) 0,39 (B) 0,42 (C) 0,46 (D) 0,49



Teste Intermédio 12.º ano – 29.04.2008

84. Seja $f : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}$ a função definida por $f(x) = 3 - 2 \cos x$. Indique o valor x de para o qual $f(x)$ é máximo.

- (A) 0 (B) $\frac{\pi}{2}$ (C) π (D) $\frac{3\pi}{2}$

Exame – 2007, 2.ª fase



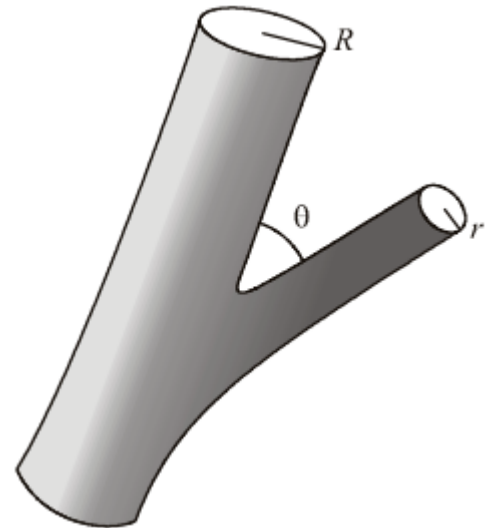
85. Na figura ao lado está representada uma artéria principal do corpo humano, cuja secção é um círculo com raio R , e uma sua ramificação, mais estreita, cuja secção é um círculo com raio r .

A secção da artéria principal tem área A e a da ramificação tem área a .

Seja $\theta \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ a amplitude, em radianos, do ângulo que a artéria principal faz com sua ramificação (medida relativamente a duas geratrizes coplanares dos dois cilindros).

Sabe-se que $a = A\sqrt{\cos \theta}$

Admitindo que o modelo descrito se adequa com exactidão à situação real, determine θ no caso em que os raios referidos verificam a relação $R = \sqrt[4]{2}r$



Exame – 2007, 2.ª fase

86. Considere as funções f e g , definidas em \mathbb{R} por

$$f(x) = e^{x-1} \quad \text{e} \quad g(x) = \sin x$$

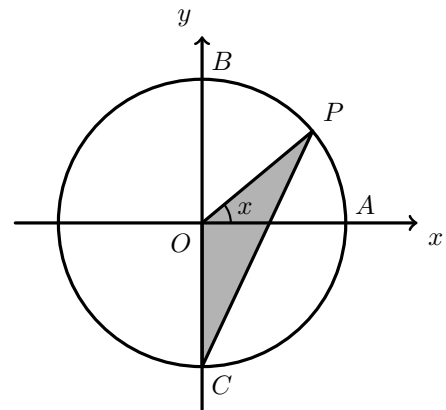
Considere ainda a função h , definida em \mathbb{R} por $h(x) = f'(x) - g'(x)$

Sem recorrer à calculadora, a não ser para efetuar eventuais cálculos numéricos, resolva os dois itens seguintes:

- 86.1. Mostre que a função h tem, pelo menos, um zero no intervalo $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$
- 86.2. Tendo em conta a **alínea anterior**, justifique que existe $a \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ tal que as retas tangentes aos gráficos de f e g , nos pontos de abcissa a , são paralelas.

Exame – 2007, 1.ª fase

87. Na figura ao lado está representado o círculo trigonométrico. Os pontos A , B e C têm coordenadas $(1,0)$, $(0,1)$ e $(0,-1)$, respetivamente. O Ponto P desloca-se ao longo do arco AB , nunca coincidindo com o ponto B . Para cada posição do ponto P , seja x a amplitude do ângulo AOP , e seja $f(x)$ a área do triângulo $[OPC]$.



Qual das expressões seguintes define a função f ?

- (A) $\frac{\sin x}{2}$ (B) $\frac{\cos x}{2}$
- (C) $\frac{\sin x + \cos x}{2}$ (D) $\frac{\sin x \cdot \cos x}{2}$

Exame – 2006, Ép. especial



88. Considere a expressão $f(x) = A + B \cos(Cx)$. Sempre que se atribuem valores reais positivos a A , B e C , obtemos uma função de domínio \mathbb{R} .

88.1. Prove que $\frac{2\pi}{C}$ é o período de qualquer função definida por uma expressão do tipo indicado.

88.2. Num certo rio, existe um ancoradouro de atracagem para barcos. A distância do ancoradouro ao fundo do rio, varia com a maré.

Admita que, num certo dia, a distância do ancoradouro ao fundo do rio, x horas depois das zero horas desse dia, pode ser modelada por uma função do tipo $f(x) = A + B \cos(Cx)$, com $x \in [0, 24]$.

Admita ainda que, no intervalo de tempo $[0, 24]$:

- a distância máxima do ancoradouro ao fundo do rio é de 17 metros; e a mínima é de 11 metros;
- ocorrem apenas duas marés altas, umas às 0 horas e outra às 12 horas;
- ocorrem apenas duas marés baixas, umas às 6 horas e outra às 18 horas.

Justifique que, no modelo $f(x) = A + B \cos(Cx)$ se tem $C = \frac{\pi}{6}$ (tenha em conta a alínea anterior e que não existe nenhum período positivo inferior a $\frac{2\pi}{C}$).

Em seguida determine os valores de A e B (positivos) adequados ao modelo.

Exame – 2006, Ép. especial

89. Na figura ao lado está representado, em referencial o.n. xOy , um arco AB , que está contido na circunferência de equação $x^2 + y^2 = 1$.

O ponto C pertence ao eixo Ox e o segmento de reta $[AC]$ é perpendicular a este eixo.

α é a amplitude, em radianos, do ângulo AOB .

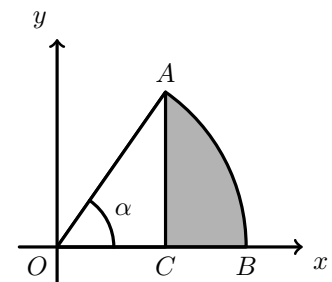
Qual é a expressão que dá o perímetro da região sombreada, em função de α ?

(A) $\pi \times \alpha + \sin \alpha + \cos \alpha$

(B) $\pi \times \alpha + \sin \alpha + 1 - \cos \alpha$

(C) $1 + \alpha - \sin \alpha + \cos \alpha$

(D) $1 + \alpha + \sin \alpha - \cos \alpha$



Exame – 2006, 2.ª Fase



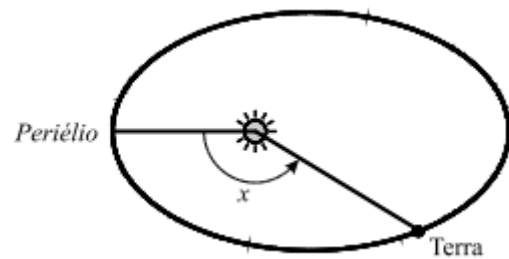
90. Como sabe, a Terra descreve uma órbita elíptica em torno do Sol.

Na figura está representado um esquema dessa órbita. Está assinalado o *periélio*, o ponto da órbita da Terra mais próximo do Sol.

Na figura está assinalado um ângulo de amplitude x radianos ($x \in [0, 2\pi]$).

Este ângulo tem o seu vértice no Sol, o seu lado origem passa no *periélio* e o seu lado extremidade passa na Terra. A distância d , em milhões de quilómetros, da Terra ao Sol, é (aproximadamente) dada, em função de x por

$$d = 149,6(1 - 0,0167 \cos x)$$



- 90.1. **Sem recorrer à calculadora**, a não ser para efetuar eventuais cálculos numéricos, determine a distância máxima e a distância mínima da Terra ao Sol.
 Apresente os valores pedidos em milhões de quilómetros, arredondados às décimas.

- 90.2. Sabe-se que x verifica a relação $\frac{2\pi t}{T} = x - 0,0167 \sin x$ em que:

- t é o tempo, em dias, que decorre desde a passagem da Terra pelo *periélio* até ao instante em que atinge a posição correspondente ao ângulo x ;
- T é o tempo que a Terra demora a descrever uma órbita completa (365,24 dias).

Mostre que, para $x = \pi$, se tem $t = \frac{T}{2}$.

Interprete este resultado no contexto da situação descrita.

Exame – 2006, 2.ª Fase

91. Na figura ao lado está representada uma esfera suspensa de um fio com 1 metro de comprimento, fixo no ponto O . O centro da esfera oscila entre os pontos A e B , que são simétricos relativamente à reta vertical r .

A reta r passa pelo ponto O e é perpendicular à reta OS .

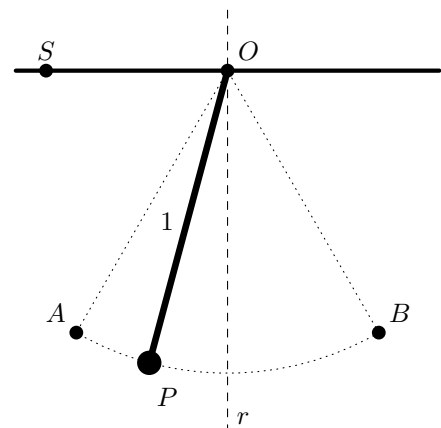
No instante inicial, o centro da esfera coincide com o ponto A .

Admita que, t segundos após esse instante inicial, o centro da esfera está num ponto P tal que a amplitude, em radianos, do ângulo SOP é dada (aproximadamente) por

$$\alpha(t) = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6} \cos(\sqrt{9,8}t)$$

Nas duas alíneas seguintes, **não utilize a calculadora**, a não ser para efetuar eventuais cálculos numéricos.

- 91.1. Determine a distância do centro da esfera à reta OS , no instante inicial.
 91.2. Determine o instante em que o centro da esfera passa pela primeira vez na reta r .
 Apresente o resultado em segundos, arredondado às décimas.



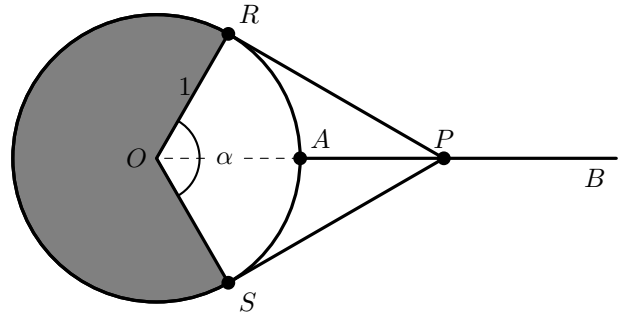
Exame – 2006, 1.ª Fase



92. Na figura ao lado, estão representadas uma semirreta \overrightarrow{AB} e uma circunferência de centro O e de raio 1 (os pontos O , A e B são colineares; o ponto A pertence à circunferência).

Considere que o ponto P se desloca ao longo da semirreta \overrightarrow{AB} , nunca coincidindo com o ponto A . Os pontos R e S acompanham o movimento do ponto P , de tal forma que as retas PR e PS são sempre tangentes à circunferência, nos pontos R e S , respectivamente.

Seja α a amplitude, em radianos, do ângulo SOR ($\alpha \in]0, \pi[$).



- 92.1. Mostre que a área do **quadrilátero** $[ORPS]$ é dada, em função de α , por $f(\alpha) = \operatorname{tg}\left(\frac{\alpha}{2}\right)$
- 92.2. Calcule $\lim_{\alpha \rightarrow \pi^-} f(\alpha)$ e interprete geometricamente o resultado obtido.

Exame – 2005, Ép. especial (cód. 435)

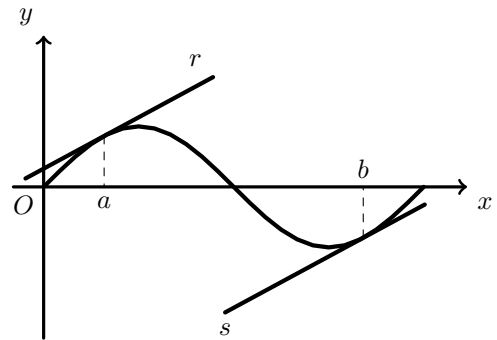
93. Seja f a função, de domínio $[0, 2\pi]$, definida por $f(x) = \sin x$.

- 93.1. Na figura ao lado estão representados:

- o gráfico da função f ;
- duas retas, r e s , tangentes ao gráfico de f , nos pontos de abscissas a e b , respectivamente.

Prove que, se $a+b = 2\pi$, então as retas r e s são paralelas.

- 93.2. Sem recorrer à calculadora, estude, quanto à existência de assíntotas do seu gráfico, a função g , de domínio $]0, 2\pi[\setminus \{\pi\}$, definida por $g(x) = \frac{x}{f(x)}$



Exame – 2005, 2.ª Fase (cód. 435)

94. Considere a função f , de domínio \mathbb{R} , definida por $f(x) = \cos x$. Qual das expressões seguintes dá a derivada de f , no ponto π ?

(A) $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\cos x + 1}{x - \pi}$

(B) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \pi}{x}$

(C) $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\cos x}{x - \pi}$

(D) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{x + \pi}$

Exame – 2005, 1.ª fase (cód. 435)



95. Na figura ao lado está representada uma circunferência com centro no ponto O e **raio 3**.
Os diâmetros $[EF]$ e $[GH]$ são perpendiculares.

Considere que o ponto B se desloca sobre o arco FG .

Os pontos A , C e D acompanham o movimento do ponto B , de tal forma que:

- as cordas $[AB]$ e $[CD]$ permanecem paralelas a $[EF]$;
- $[AD]$ e $[BC]$ são sempre diâmetros da circunferência

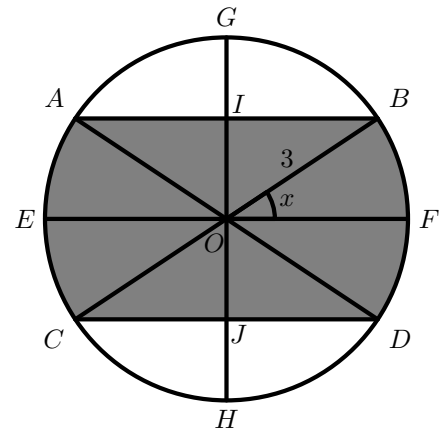
Os pontos I e J também acompanham o mesmo movimento, de tal forma que são sempre os pontos de interseção de $[GH]$ com $[AB]$ e $[CD]$, respetivamente.

Para cada posição do ponto B , seja x a amplitude, em radianos, do ângulo FOB , $\left(x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]\right)$.

Mostre que a área da região sombreada é dada, em função de x por

$$A(x) = 18(x + \sin x \cdot \cos x)$$

Sugestão: use a decomposição sugerida na figura.



Exame – 2005, 1.ª Fase (cód. 435)

96. No Solstício de Junho (dia em que começa o Verão), em qualquer local da Terra situado entre o Equador e o Círculo Polar Ártico, o tempo t , medido em horas, que decorre entre o nascer e o pôr do Sol, está relacionado com a latitude λ , desse local, por meio da fórmula

$$\cos(7,5t) = -\frac{\operatorname{tg} \lambda}{\operatorname{tg} \phi} \quad (\phi \text{ é a latitude do Círculo Polar Ártico})$$

Os argumentos das funções **co-seno** e **tangente** estão expressos em **graus**.

- 96.1. Sabendo que $\phi \approx 66,5^\circ$ e que a latitude de Beja é de 38° , determine o tempo que decorre entre o nascer e o pôr do Sol, em Beja, no Solstício de Junho.

Apresente o resultado em horas e minutos (minutos arredondados às unidades).

Nota: sempre que, nos cálculos intermédios, proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, quatro casas decimais.

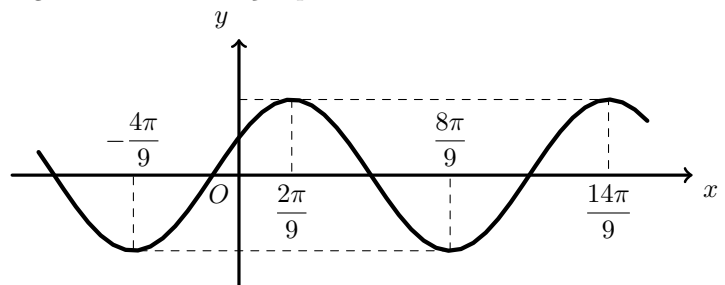
- 96.2. Esta fórmula nunca poderia ser aplicável a locais situados entre o Círculo Polar Ártico e o Polo Norte. Justifique.

Exame – 2004, Ép. especial (cód. 435)

97. Na figura seguinte está representada parte do gráfico de uma função periódica.

Qual dos valores seguintes poderá ser período desta função?

- (A) $\frac{\pi}{9}$ (B) $\frac{2\pi}{9}$
(C) $\frac{2\pi}{3}$ (D) $\frac{4\pi}{3}$



Exame – 2004, 2.ª Fase (cód. 435)



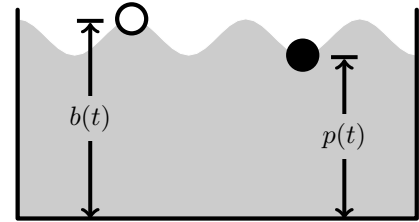
98. Duas bolas de plástico com o mesmo raio, uma branca e outra preta, flutuam na superfície de um líquido contido num recipiente.

Por ação de uma força exterior, o líquido perdeu o estado de repouso em que se encontrava, tendo a distância de cada uma das bolas à base do recipiente deixado de ser constante.

Designando por $b(t)$ e $p(t)$ as distâncias, em cm , dos centros das bolas (branca e preta, respetivamente) à base do recipiente, t segundos após o início da perturbação, admita que se tem:

$$b(t) = 10 + e^{-0,1t} \sin(\pi t), \quad t > 0$$

$$p(t) = 10 - 1,37e^{-0,1t} \sin(\pi t), \quad t > 0$$

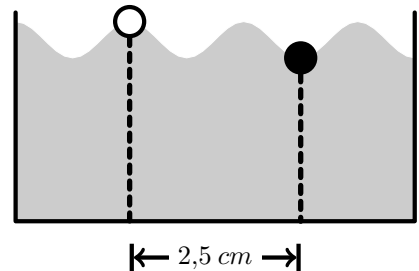


- 98.1. **Sem recorrer à calculadora**, resolva o seguinte problema:

Durante os primeiros cinco segundos após o início da perturbação (instantes 0 e 5 incluídos), houve alguns instantes em que as duas bolas estiveram a igual distância da base do recipiente. Quantas vezes isso aconteceu?

- 98.2. Determine a distância que vai do **centro da bola branca** ao **centro da bola preta**, meio segundo após o início da perturbação, sabendo que, nesse instante, a distância entre as respetivas projeções horizontais (na base do recipiente) é de $2,5 \text{ cm}$. Apresente o resultado em cm , arredondado às décimas.

Nota: sempre que, nos cálculos intermédios, proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, duas casas decimais.



Exame – 2004, 2.^a Fase (cód. 435)

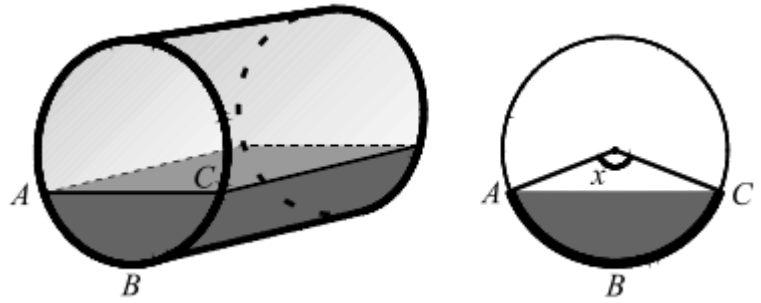


99. A figura seguinte, à esquerda, representa um depósito de forma cilíndrica, que contém um certo volume de um combustível.

Admita que a função V , de domínio $[0, 2\pi]$, definida por

$$V(x) = 80(x - \sin x)$$

dá o volume, em metros cúbicos, de combustível existente no depósito, em função da amplitude x , em **radianos**, do arco ABC (que, como se sabe, é igual à amplitude do ângulo ao centro correspondente, assinalado na figura da direita).



- 99.1. Qual é a capacidade total do depósito, em metros cúbicos?

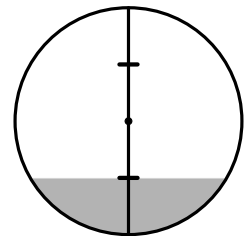
Apresente o resultado arredondado às unidades.

Nota: se, nos cálculos intermédios, proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, três casas decimais.

- 99.2. Determine, em metros cúbicos, o volume do combustível existente no depósito, no momento em que a sua altura é $\frac{1}{4}$ da altura máxima.

Apresente o resultado arredondado às unidades.

Nota: se, nos cálculos intermédios, proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, três casas decimais.

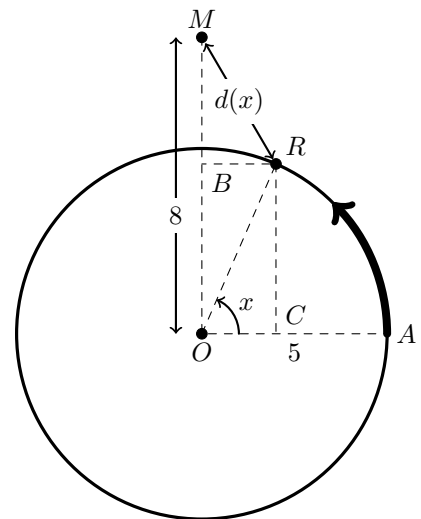


Exame – 2004, 1.ª Fase (cód. 435)

100. A Rita foi andar num carrossel. A figura ao lado ilustra a situação. Em cada volta, que se inicia no ponto A , a Rita descreve uma circunferência com 5 metros de raio, centrada no ponto O , rodando no sentido indicado na figura.

A mãe da Rita ficou a observá-la de um ponto M , situado à distância de 8 metros de O e tal que o ângulo AOM é reto.

Para cada posição R , da Rita, fica determinado um ângulo de amplitude x , medida em radianos, que tem como lado origem a semirreta OA e como lado extremidade a semirreta OR .



- 100.1. Mostre que, para cada valor de x , a distância $d(x)$, da Rita à mãe, é dada, em metros, por

$$d(x) = \sqrt{89 - 80 \sin x}$$

- 100.2. Calcule $d\left(\frac{\pi}{2}\right)$ e justifique o valor obtido, no contexto do problema.

Exame – 2003, Prova para militares (cód. 435)



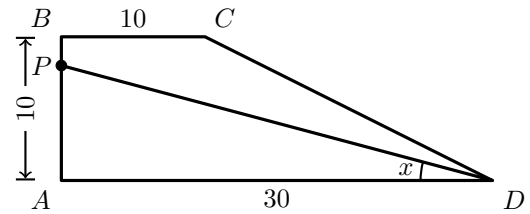
101. Na figura seguinte está representado um trapézio retângulo $[ABCD]$, cujas bases têm 10 e 30 unidades de comprimento e a altura tem 10 unidades de comprimento.

Considere que um ponto P se desloca sobre o segmento $[AB]$.

Para cada posição do ponto P , seja x a amplitude, em radianos, do ângulo PDA .

Pretende-se determinar o valor de x para o qual o segmento $[PD]$ divide o trapézio em duas figuras com a mesma área.

Qual das equações seguintes traduz este problema?



- (A) $\frac{30^2 \sin x}{2} = 100$ (B) $\frac{30^2 \operatorname{tg} x}{2} = 100$
 (C) $\frac{30 \times 10 \sin x}{4} = 150$ (D) $\frac{30 \times 10 \operatorname{tg} x}{4} = 150$

Exame – 2003, 2.ª Fase (cód. 435)

102. Considere a função f , de domínio $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$, definida por

$$f(x) = x + \sin x$$

Sem recorrer à calculadora, resolva as três alíneas seguintes.

- 102.1. Utilizando a definição de derivada num ponto, calcule $f'(0)$.
 102.2. Estude a função f quanto ao sentido das concavidades do seu gráfico e quanto à existência de pontos de inflexão.
 102.3. Determine os valores de x , pertencentes ao intervalo $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$, tais que $f(x) = x + \cos x$

Exame – 2003, 2.ª Fase (cód. 435)

103. Considere a expressão $f(x) = a + b \sin^2 x$

Sempre que se atribui um valor real a a e um valor real a b , obtemos uma função de domínio \mathbb{R} .

- 103.1. Nesta alínea, considere $a = 2$ e $b = -5$

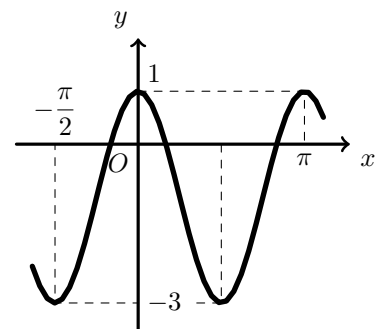
Sabe-se que $\operatorname{tg} \theta = \frac{1}{2}$. **Sem recorrer à calculadora** calcule $f(\theta)$

- 103.2. Para um certo valor de a e um certo valor de b , a função f tem o seu gráfico parcialmente representado na figura ao lado.

Conforme essa figura sugere, tem-se:

- o contradomínio de f é $[-3, 1]$
- 0 e π são maximizantes
- $-\frac{\pi}{2}$ e $\frac{\pi}{2}$ são minimizantes

Determine a e b .



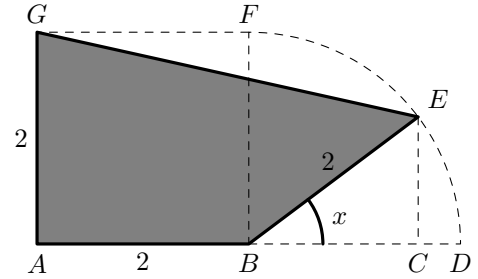
Exame – 2003, 1.ª fase - 2.ª chamada (cód. 435)



104. Na figura ao lado está representado a sombreado um polígono $[ABEG]$.

Tem-se que:

- $[ABFG]$ é um quadrado de lado 2
- FD é um arco de circunferência de centro em B ; o ponto E move-se ao longo desse arco; em consequência, o ponto C desloca-se sobre o segmento $[BD]$, de tal forma que se tem sempre $[EC] \perp [BD]$
- x designa a amplitude, em radianos, do ângulo CBE $\left(x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]\right)$



- 104.1. Mostre que a área do polígono $[ABEG]$ é dada, em função de x , por

$$A(x) = 2(1 + \sin x + \cos x)$$

(Sugestão: pode ser-lhe útil considerar o trapézio $[ACEG]$)

- 104.2. Determine $A(0)$ e $A\left(\frac{\pi}{2}\right)$

Interprete geometricamente cada um dos valores obtidos.

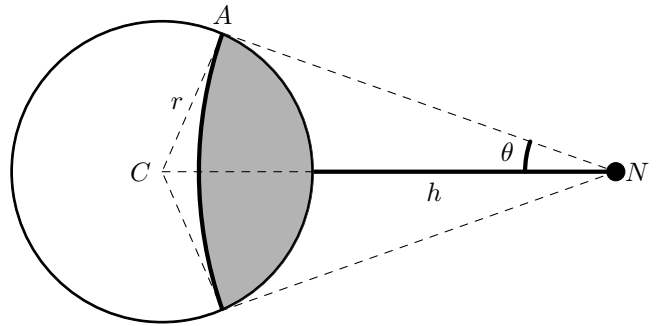
Exame – 2003, 1.ª fase - 1.ª chamada (cód. 435)

105. Na figura ao lado está representada a Terra e uma nave espacial N .

Considere que a Terra é uma esfera de centro C e raio r .

A área da superfície da terra visível da nave, representada a sombreado na figura, é dada, em função do ângulo θ , por

$$f(\theta) = 2\pi r^2(1 - \sin \theta) \quad \left(\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]\right).$$



- 105.1. Determine o valor de θ para o qual é visível, da nave, a quarta parte da superfície terrestre.

- 105.2. Designando por h a distância da nave à Terra, mostre que a área da superfície da terra visível da nave é dada, em função de h , por $g(h) = \frac{2\pi r^2 h}{r + h}$

Sugestão: tenha em conta que o ângulo CAN é reto.

- 105.3. Calcule $\lim_{h \rightarrow +\infty} g(h)$ e interprete o resultado obtido no contexto da situação descrita.

Exame – 2002, Prova para militares (cód. 435)

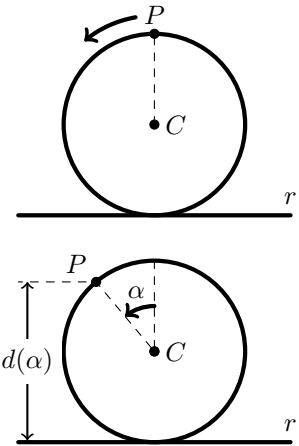


106. Considere uma circunferência de centro C e raio 1, tangente a uma reta r . Um ponto P começa a deslocar-se sobre a circunferência, no sentido indicado na figura. Inicialmente, o ponto P encontra-se à distância de duas unidades da reta r .

Seja $d(\alpha)$ a distância de P a r , após uma rotação de amplitude α .

Qual das igualdades seguintes é verdadeira para qualquer número real positivo α ?

- (A) $d(\alpha) = 1 + \cos \alpha$ (B) $d(\alpha) = 2 + \sin \alpha$
 (C) $d(\alpha) = 1 - \cos \alpha$ (D) $d(\alpha) = 2 - \sin \alpha$



Exame – 2002, 2.ª fase (cód. 435)

107. Na figura ao lado estão representados, em referencial o. n. xOy , o círculo trigonométrico e um triângulo $[OAB]$.

Os pontos A e B pertencem à circunferência.

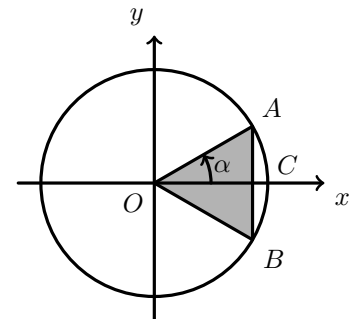
O segmento $[AB]$ é perpendicular ao semieixo positivo Ox .

O ponto C é o ponto de interseção da circunferência com o semieixo positivo Ox .

Seja α a amplitude do ângulo COA $\alpha \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$

Qual das expressões seguintes dá a área do triângulo $[OAB]$, em função de α ?

- (A) $\sin \alpha \cdot \cos \alpha$ (B) $\frac{\operatorname{tg} \alpha \cdot \cos \alpha}{2}$
 (C) $\operatorname{tg} \alpha \cdot \sin \alpha$ (D) $\frac{\operatorname{tg} \alpha \cdot \sin \alpha}{2}$



Exame – 2002, 1.ª fase - 2.ª chamada (cód. 435)

108. De uma função f , de domínio $[-\pi, \pi]$, sabe-se que a sua **derivada** f' está definida igualmente no intervalo $[-\pi, \pi]$ e é dada por

$$f'(x) = x + 2 \cos x$$

Utilizando métodos exclusivamente analíticos, resolva as duas alíneas seguintes:

108.1. Determine o valor de $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x}$

- 108.2. Estude a função f quanto às concavidades do seu gráfico e determine as abscissas dos pontos de inflexão.

Exame – 2002, 1.ª fase - 2.ª chamada (cód. 435)

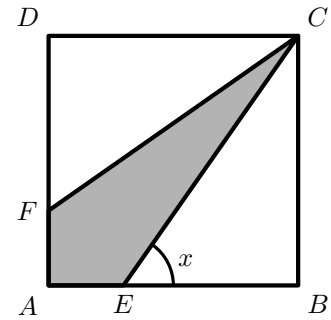


109. Na figura ao lado está representado um quadrado $[ABCD]$ de lado 1.

O ponto E desloca-se sobre o lado $[AB]$ e o ponto F desloca-se sobre o lado $[AD]$, de tal forma que se tem sempre $\overline{AE} = \overline{AF}$.

Para cada posição do ponto E , seja a x amplitude do ângulo BEC $\left(x \in \left] \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2} \right[\right)$

Recorrendo a métodos exclusivamente analíticos, resolva as três alíneas seguintes:



109.1. Mostre que o **perímetro** do quadrilátero $[CEAF]$ é dado, em função de x , por $f(x) = 2 - \frac{2}{\operatorname{tg} x} + \frac{2}{\operatorname{sen} x}$

109.2. Calcule $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} f(x)$ e interprete geometricamente o valor obtido.

109.3. Mostre que $f'(x) = \frac{2 - 2 \cos x}{\operatorname{sen}^2 x}$ e estude a função quanto à monotonia.

Exame – 2002, 1.ª fase - 1.ª chamada (cód. 435)

110. Seja f uma função par, de domínio \mathbb{R} , que não admite zeros.

Qual das seguintes expressões pode definir a função f ?

(A) $f(x) = x^2$

(B) $f(x) = e^x$

(C) $f(x) = \cos x$

(D) $f(x) = \pi$

Exame – 2001, Prova para militares (cód. 435)

111. Considere a função, de domínio \mathbb{R}^+ , definida por $f(x) = x + \operatorname{sen} \frac{\pi}{x}$

Utilize métodos exclusivamente analíticos para resolver as três alíneas seguintes:

111.1. Estude a função f quanto à existência de assíntotas não verticais do seu gráfico.

111.2. Determine uma equação da reta tangente ao gráfico de f , no ponto de abscissa 2.

111.3. Prove que, no intervalo $]1, +\infty[$, a função f não tem zeros.

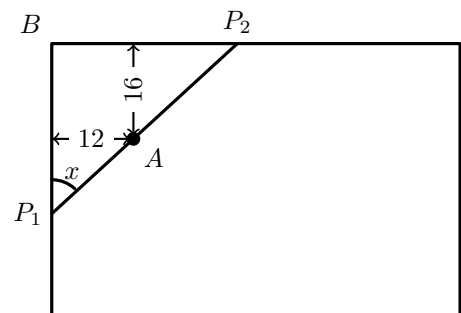
Exame – 2001, Prova para militares (cód. 435)

112. Na figura ao lado está representado um lago artificial de forma retangular.

Pretende-se construir uma ponte, ligando duas margens do lago, entre os pontos P_1 e P_2 , tal como a figura ilustra.

A ponte tem um ponto de apoio A , situado a 12 m de uma das margens e a 16 m da outra.

Seja x a amplitude do ângulo P_2P_1B .



112.1. Mostre que o comprimento da ponte, em metros, é dado por $c(x) = \frac{16 \operatorname{sen} x + 12 \cos x}{\operatorname{sen} x \cdot \cos x}$

112.2. Considerando que a localização de P_1 e P_2 pode variar, determine o comprimento da ponte para o qual se tem $\overline{BP_1} = \overline{BP_2}$

Apresente o resultado em metros, arredondado às décimas.

Exame – 2001, Ép. especial (cód. 435)



113. Considere a função f , de domínio $] - \pi, \pi[$, definida por $f(x) = \frac{\cos x}{1 + \cos x}$.
Sem recorrer à calculadora, resolva os três itens seguintes:

113.1. Estude a função f , quanto à existência de assíntotas do seu gráfico.

113.2. Mostre que a função f tem um máximo e determine-o.

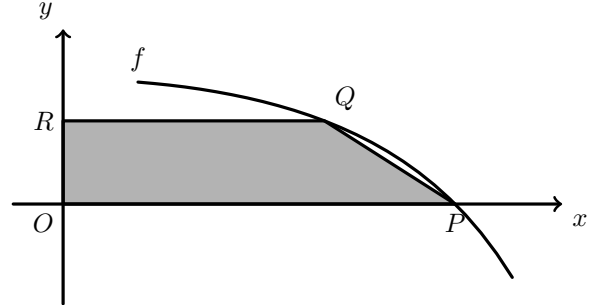
113.3. Na figura seguinte está representado, em referencial o.n. xOy , uma parte do gráfico da função f .

Na mesma figura está também representado um trapézio $[OPQR]$.

O ponto O é a origem do referencial e os pontos P e R pertencem aos eixos Ox e Oy , respetivamente.

Os pontos P e Q pertencem ao gráfico de f .

Sabendo que o ponto Q tem ordenada $\frac{1}{3}$, determine a área do trapézio.



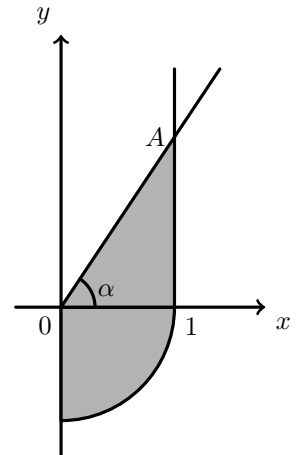
Exame – 2001, 2.ª fase (cód. 435)

114. Na figura ao lado estão representados, em referencial o.n. xOy :

- um quarto de círculo, de centro na origem e raio 1
- uma semirreta paralela ao eixo Oy , com origem no ponto $(1,0)$
- um ponto A , pertencente a esta semirreta
- um ângulo de amplitude α , cujo lado origem é o semieixo positivo Ox e cujo lado extremidade é a semirreta \vec{OA}

Qual das expressões seguintes dá a área da região sombreada, em função de α ?

- (A) $\frac{\pi}{4} + \frac{\operatorname{tg} \alpha}{2}$ (B) $\frac{\pi}{4} + \frac{2}{\operatorname{tg} \alpha}$
(C) $\pi + \frac{\operatorname{tg} \alpha}{2}$ (D) $\pi + \frac{2}{\operatorname{tg} \alpha}$



Exame – 2001, 1.ª fase - 2.ª chamada (cód. 435)

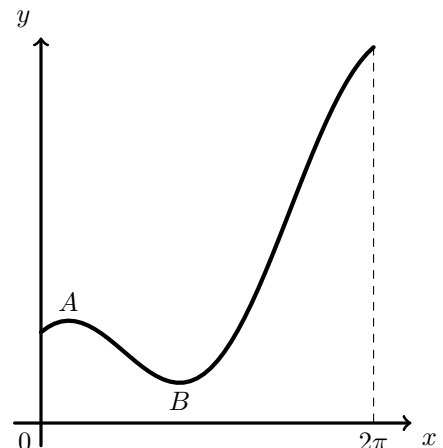
115. Na figura ao lado está representado o gráfico da função f , de domínio $[0, 2\pi]$, definida por $f(x) = x + 2 \cos x$.

A e B são pontos do gráfico cujas ordenadas são extremos relativos de f .

Sem recorrer à calculadora resolva os dois itens seguintes.

- 115.1. Mostre que a ordenada do ponto A é $\frac{\pi + 6\sqrt{3}}{6}$ e que a do ponto B é $\frac{5\pi - 6\sqrt{3}}{6}$.

- 115.2. Qual é o contradomínio de f ?



Exame – 2001, 1.ª fase - 2.ª chamada (cód. 435)



116. Na figura ao lado está representada uma pirâmide quadrangular regular.

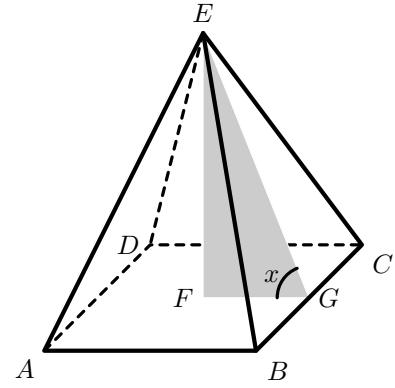
Sabe-se que:

- a base da pirâmide tem centro F e lado 2
- G é o ponto médio da aresta BC
- x designa a amplitude do ângulo FGE

- 116.1. Mostre que a área total da pirâmide é dada, em função de x , por

$$A(x) = \frac{4 \cos x + 4}{\cos x} \quad \left(x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[\right)$$

- 116.2. Calcule $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} A(x)$ e interprete geometricamente o valor obtido.



Exame – 2001, 1.ª fase - 1.ª chamada (cód. 435)

117. Indique o valor de $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{\sin x}$

(A) $-\infty$ (B) 0 (C) 1 (D) $+\infty$

Exame – 2001, Prova modelo (cód. 435)

118. Considere a função h , de domínio \mathbb{R} , definida por

$$h(x) = \begin{cases} \frac{x+1}{x} & \text{se } x < 0 \\ \frac{1}{2} & \text{se } x = 0 \\ \frac{\sin x}{2x} & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

Utilize métodos exclusivamente analíticos para resolver os dois itens seguintes.

- 118.1. Estude a função h quanto à continuidade no ponto de abscissa 0.
(Deve indicar, justificando, se a função h é contínua nesse ponto e, no caso de não ser, se se verifica a continuidade à esquerda, ou à direita, nesse ponto.)
- 118.2. Considere a função j , de domínio $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, definida por $j(x) = \frac{1}{3x}$

Mostre que no intervalo $[-1, 1000\pi]$, os gráficos de j e de h se intersectam em 1001 pontos.

Exame – 2001, Prova modelo (cód. 435)

119. Considere a função h definida em \mathbb{R} por $h(x) = \sin x$
Qual das seguintes equações pode definir uma reta tangente ao gráfico de h ?

(A) $y = 2x + \pi$ (B) $y = -2$ (C) $y = \sqrt{2}x - 9$ (D) $y = x$

Exame – 2000, 2.ª fase (cód. 435)

120. Considere a função f de domínio \mathbb{R} definida por $f(x) = 2x - \cos x$

- 120.1. Recorrendo ao Teorema de Bolzano, mostre que a função tem, pelo menos, um zero, no intervalo $]0, \pi[$
- 120.2. Seja f' a função derivada de f . Mostre que $f'(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$, e justifique que o zero de f , cuja existência é garantida pela enunciado do item anterior, é o único zero da função.

Exame – 2000, 2.ª fase (cód. 435)

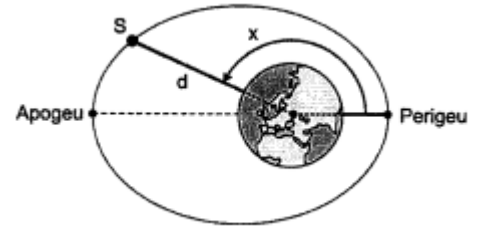


121. Um satélite **S** tem uma órbita elíptica em torno da Terra, tal como se representa na figura ao lado.

Tenha em atenção que os elementos nela desenhados não estão na mesma escala.

Na elipse estão assinalados dois pontos:

- o *apogeu*, que é o ponto da órbita mais afastado do centro da Terra;
- o *perigeu*, que é o ponto da órbita mais próximo do centro da Terra;



O ângulo x , assinalado na figura, tem o seu vértice no centro da Terra; o seu lado origem passa no *perigeu*, o seu lado extremidade passa no satélite e a sua amplitude está compreendida entre 0 e 360 graus.

A distância d , em km , do satélite ao **centro** da Terra, é dada por $d = \frac{7820}{1 + 0,07 \cos x}$

Considere que a Terra é uma esfera de raio $6378 km$.

Determine a altitude do satélite (distância à **superfície** da Terra) quando este se encontra no *apogeu*. Apresente o resultado em km , arredondado às unidades.

Exame – 2000, 1.ª fase - 2.ª chamada (cód. 435)

122. Qual das afirmações seguintes é verdadeira?

- (A) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sin x = 0$ (B) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sin x = +\infty$
- (C) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sin x = 1$ (D) Não existe $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sin x$

Exame – 2000, 1.ª fase - 1.ª chamada (cód. 435)

123. No ano de 2000, em Lisboa, o tempo que decorreu entre o nascer e o pôr do Sol, no dia de ordem n do ano, é dado em horas, aproximadamente por

$$f(n) = 12,2 + 2,64 \sin \frac{\pi(n - 81)}{183} \quad n \in \{1, 2, 3, \dots, 366\}$$

(o argumento da função seno está expresso em radianos).

Por exemplo: No dia 3 de fevereiro, trigésimo quarto dia do ano, o tempo que decorreu entre o nascer e o pôr do Sol foi de $f(34) \approx 10,3$ horas.

No dia 24 de março, Dia Nacional do Estudante, o Sol nasceu às seis e meia da manhã. Em que instante ocorreu o pôr do Sol? Apresente o resultado em horas e minutos (minutos arredondados às unidades).

Notas:

- Recorde que, no ano 2000, o mês de fevereiro teve 29 dias.
- Sempre que, nos cálculos intermédios, proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, três casas decimais.

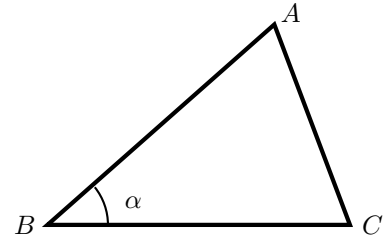
Exame – 2000, 1.ª fase - 1.ª chamada (cód. 435)



124.

- 124.1. Seja $[ABC]$ um triângulo isósceles, em que $\overline{BA} = \overline{BC}$.
Seja α a amplitude do ângulo ABC .
Mostre que a área do triângulo $[ABC]$ é dada por

$$\frac{\overline{BC}^2}{2} \times \sin \alpha \quad \alpha \in]0, \pi[$$



- 124.2. Considere agora um polígono regular de n lados, inscrito numa circunferência de raio 1. Utilize o resultado do item anterior para mostrar que a área do polígono é dada por

$$A_n = \frac{n}{2} \sin \left(\frac{2\pi}{n} \right)$$

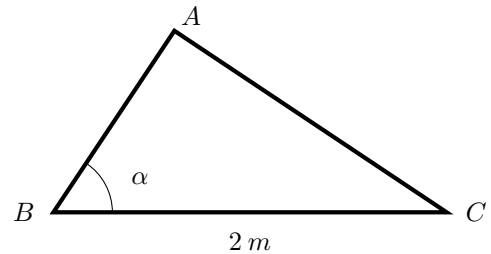
- 124.3. Determine e interprete o valor de $\lim_{n \rightarrow +\infty} A_n$

Exame – 2000, Prova modelo (cód. 435)

125. Na figura ao lado está representado um triângulo $[ABC]$, cuja hipotenusa mede $2m$.

Qual das expressões seguintes dá a área (em m^2) do triângulo $[ABC]$, em função da amplitude, α , do ângulo ABC ?

- (A) $2 \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha$ (B) $2 \cdot \sin \alpha \cdot \operatorname{tg} \alpha$
(C) $4 \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha$ (D) $4 \cdot \sin \alpha \cdot \operatorname{tg} \alpha$



Exame – 2000, Prova para militares (cód. 135)

126. Seja uma função definida por $g(x) = \operatorname{tg} x$.
Qual dos seguintes conjuntos poderá ser o domínio de g ?

- (A) $\left] -\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3} \right[$ (B) $\left] \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4} \right[$ (C) $]0, \pi[$ (D) $] \pi, 2\pi[$

Exame – 1999, Prova para militares (cód. 135)

127. Considere a função f , de domínio \mathbb{R} , definida por $f(x) = \sin(x) - \frac{1}{2} \sin(2x)$

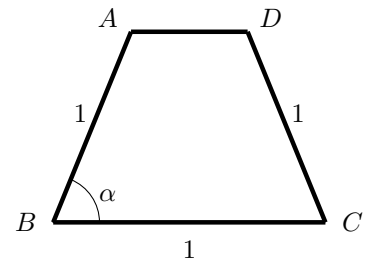
- 127.1. Recorrendo à definição de derivada de uma função num ponto, determine $f'(0)$.

- 127.2. $[ABCD]$ é um trapézio isósceles; os lados $[AD]$ e $[BC]$ são paralelos.

Tem-se que:

- $\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CD} = 1$
- $\overline{AD} \leq 1$

Seja α a amplitude do ângulo ABC , $\alpha \in \left] \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2} \right]$



- 127.2.1. Mostre que, para cada $\alpha \in \left] \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2} \right]$, a área do trapézio é igual a $f(\alpha)$.

- 127.2.2. Determine $f\left(\frac{\pi}{2}\right)$ e interprete geometricamente o resultado obtido, caracterizando o quadrilátero que se obtém para $\alpha = \frac{\pi}{2}$

Exame – 1999, Prova modelo (cód. 135)



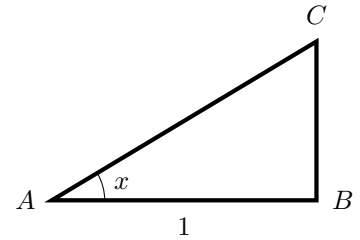
128. Considere um triângulo retângulo $[ABC]$, cujos catetos são $[AB]$ e $[BC]$.
Admita que se tem $\overline{AB} = 1$ e que x designa a amplitude do ângulo BAC .

128.1. Mostre que o perímetro do triângulo $[ABC]$ é dado por

$$f(x) = \frac{1 + \sin x + \cos x}{\cos x}, \quad x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$$

- 128.2. Seja $\alpha \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ tal que $\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\frac{3}{5}$.
Determine o valor de $f(\alpha)$.

128.3. Recorrendo à função derivada de f , mostre que f é crescente.
Interprete geometricamente o resultado obtido.



Exame – 1998, Prova para militares (cód. 135)

129. Na figura ao lado

- o triângulo $[ABC]$ é isósceles ($\overline{AB} = \overline{BC}$)
- $[DEFG]$ é um retângulo
- $\overline{DG} = 2$
- $\overline{DE} = 1$
- x designa a amplitude do ângulo BAC

129.1. Mostre que a área do triângulo $[ABC]$ é dada, em função de x , por

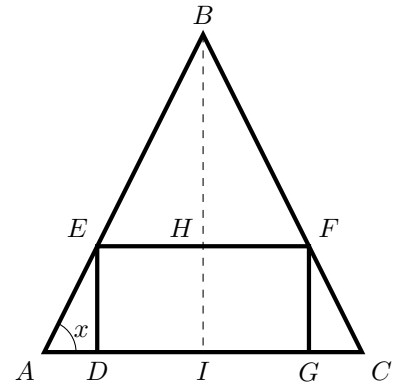
$$f(x) = 2 + \operatorname{tg} x + \frac{1}{\operatorname{tg} x} \quad \left(x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[\right)$$

(Nota: Pode ser-lhe útil reparar que $\widehat{BEF} = \widehat{BAC}$)

129.2. Mostre que $f'(x) = -\frac{\cos(2x)}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x}$

(f' designa a derivada de f).

129.3. Determine o valor de x para o qual a área do triângulo $[ABC]$ é mínima.



Exame – 1998, 2.ª fase (cód. 135)



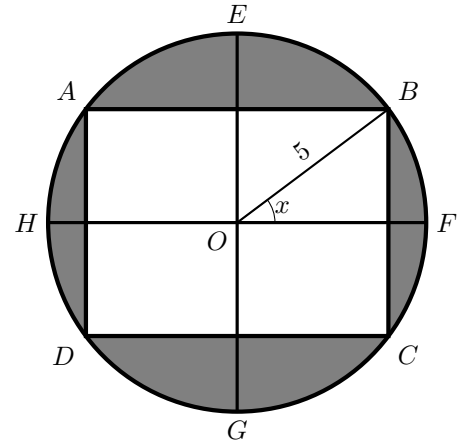
130. A figura ao lado representa um canteiro de forma circular com 5 m de raio.

O canteiro tem uma zona retangular, que se destina à plantação de flores, e uma zona relvada, assinalada a sombreado na figura.

Os vértices A , B , C e D do retângulo pertencem à circunferência que limita o canteiro.

Na figura também estão assinalados:

- dois diâmetros da circunferência, $[EG]$ e $[HF]$, que contêm os pontos médios dos lados do retângulo
- o centro O da circunferência
- o ângulo BOF , de amplitude $x \left(\left[0, \frac{\pi}{2} \right] \right)$



Mostre que a área (em m^2) da zona relvada é dada, em função de x , por

$$g(x) = 25\pi - 50 \sin(2x)$$

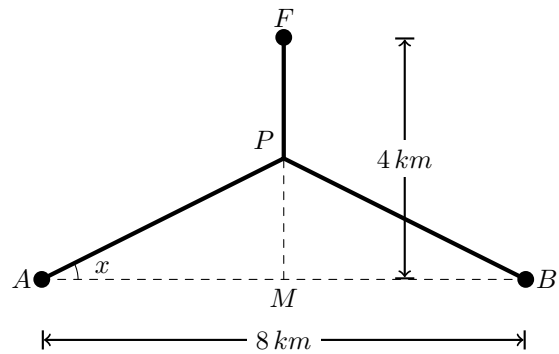
Exame – 1998, 1.ª fase - 2.ª chamada (cód. 135)

131. Duas povoações, A e B , distanciadas 8 km uma da outra estão a igual distância de uma fonte de abastecimento de água, localizada em F .

Pretende-se construir uma canalização ligando a fonte às duas povoações, como se indica na figura ao lado. A canalização é formada por três canos: um que vai da fonte F até um ponto P e dois que partem de P , um para A e outro para B . O ponto P está a igual distância de A e de B .

Tem-se ainda que

- o ponto M , ponto médio de $[AB]$, dista 4 km de F ;
- x é amplitude do ângulo PAM ($x \in \left[0, \frac{\pi}{4} \right]$)



131.1. Tomando para unidade o quilómetro, mostre que o comprimento total da canalização é dado por

$$g(x) = 4 + \frac{8 - 4 \sin x}{\cos x}$$

(Sugestão: Comece por mostrar que $\overline{PA} = \frac{4}{\cos x}$ e que $\overline{FP} = 4 - 4 \tan x$)

131.2. Calcule $g(0)$ e interprete o resultado obtido, referindo a forma da canalização e consequente comprimento.

131.3. Determine o valor de x para o qual o comprimento da canalização é mínimo.

Exame – 1988, 1.ª fase - 1.ª chamada (cód. 135)



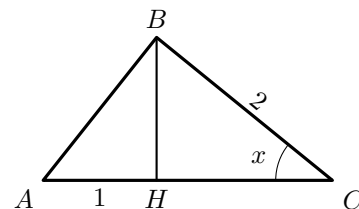
132. Considere a função g , definida em $[0, \pi]$ por $g(x) = \sin x + \sin(2x)$

132.1. Determine os zeros da função g .

132.2. Estude, quanto à existência de assíntotas, a função h definida em $[0, \pi] \setminus \left\{\frac{\pi}{2}\right\}$ por $h(x) = \frac{g(x)}{\cos x}$

132.3. Mostre que, para qualquer $x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, $g(x)$ é a área de um triângulo $[ABC]$, em que

- x é a amplitude do ângulo BCA ;
- $\overline{BC} = 2$
- $[BH]$ é a altura relativa ao vértice B ;
- $\overline{AH} = 1$.



Exame – 1998, Prova modelo (cód. 135)

