Escola Secundária de Francisco Franco
Matemática A – 10.º ano

# Tema transversal: lógica

## CONDIÇÕES

- **Condição** ou **expressão proposicional** – expressão envolvendo uma certa variável que se transforma numa proposição quando se substitui essa variável por um objeto.

NOTA:
Em particular, diz-se que $p(x)$ é uma condição porque, substituindo a variável $x$ por um objeto $a$, obtém-se a proposição $p(a)$

**Exemplo**
Considera a condição
$p(x):\ x^2+8x=0$.
Indica a veracidade das proposições $p(-8)$ e $p(8)$.

**Exercício pág. 40**
1. Considere a condição definida em $\mathbb{R}$ por $x^2 \leqslant 0$.
Indique se é verdadeira ou falsa a proposição que se obtém substituindo a variável $x$ por:
1.1. 2
1.2. 0

**Exercícios para praticar: pág. 58**
18 De entre as expressões seguintes, indique as que são condições.
$A$: O dobro da soma de $x$ com 2.
$B$: $|x|=3$ $C$: $x^2-1-3x$
$D$: $x-5=0$ $E$: O triplo de $x$.

19 Substituindo a variável $x$ por $\frac{1}{4}$ na condição $\frac{x-\frac{1}{2}}{2}=3$, obtém-se uma proposição verdadeira ou falsa?


- **Quantificador universal** – representa-se por $\forall$ e é utilizado quando queremos nos referir a todos os elementos de um conjunto.

NOTA:
«$\forall\ x,\ p(x)$» lê-se «qualquer que seja $x$, $p(x)$» ou «para qualquer $x$, $p(x)$» ou «para todo $x$, $p(x)$» ou «para cada $x$, $p(x)$», etc.

**Exemplo**
Classifica as condições a seguir e traduz para linguagem natural:
a) $\forall x \in \mathbb{R},\ x^2+5 \neq 0$

b) $\forall x \in \mathbb{N},\ x \geq -5$

**Exercício pág. 41**
2. Escreva em linguagem simbólica cada uma das proposições.
2.1. Todo o número real é um número racional.
2.2. Todo o número inteiro é um número racional.
2.3. Qualquer número primo é um número natural.
Designe por $P$ o conjunto dos números primos.
2.4. Todas as flores são tulipas.
Designe por $F$ o conjunto de todas as flores.

**Exercícios para praticar: pág. 58**
20 Escreva em linguagem simbólica.

20.1. Todas as árvores dão fruto.
20.2. Todos os triângulos têm três ângulos.
20.3. Todo o número real é um número natural.
20.4. Qualquer número natural é um número racional.

21 Traduza em linguagem natural.
21.1. $\forall x \in \mathbb{R},\ x^2+1>0$
21.2. $\forall x \in \mathbb{Q},\ x>x+1$
21.3. $\forall n \in \mathbb{N},\ 2n+1$ é um número ímpar.
21.4. $\forall n \in \mathbb{N},\ 2n$ é um número par.

22 Indique as proposições verdadeiras do exercício 21..

23 Indique o valor lógico de cada uma das proposições.
23.1. $\forall x \in \mathbb{R},\ (x+1)^2=x^2+1$
23.2. $\forall x \in \mathbb{R},\ \frac{4}{3} \leqslant x$

24 Sendo $A=\{1, 2, 3\}$, escreva na forma de uma expressão quantificada.
24.1. $1 \in \mathbb{N} \wedge 2 \in \mathbb{N} \wedge 3 \in \mathbb{N}$
24.2. $1<2\times 1 \wedge 2<2\times 2 \wedge 3<2\times 3$

- **Quantificador existencial** – representa-se por ∃ e é utilizado quando queremos nos referir a pelo menos um elemento de um conjunto;
  ou
  **Quantificador existencial de unicidade** – representa-se por $\exists^1$ e é utilizado quando queremos nos referir a apenas um elemento de um conjunto.

NOTAS:
1) «$\exists\ x$: $p(x)$» lê-se «existe pelo menos um $x$ tal que $p(x)$» ou « existe um $x$ tal que $p(x)$» ou « há pelo menos um $x$ tal que $p(x)$», etc.
2) «$\exists^1\ x$: $p(x)$» lê-se «existe um e um só $x$ tal que $p(x)$»

Exemplo

Escreve em linguagem simbólica e classifica as proposições:

a) No conjunto dos polígonos regulares $P$, existe pelo menos um com dois lados.

b) Há apenas um número real cujo valor absoluto é 0.

Exercício pág. 42

**3.** Traduza em linguagem natural e diga se se trata de uma proposição verdadeira ou falsa.

**3.1.** $\exists x \in \mathbb{R}: x = 2x$

**3.2.** $\exists x \in \mathbb{N}: x^2 + 1 < 0$

**3.3.** $\exists x \in \mathbb{N}: 2x - 1 = 1$

**3.4.** $\exists x: x$ é triângulo $\wedge\ x$ é escaleno.

3.5. $\exists^1 x \in \mathbb{Q}: x$ é uma fração irredutível

3.6. $\exists^1 x \in P:$ todas as faces de $x$ são quadradas sendo $P$ = {poliedros regulares}

**4.** Considere as condições definidas em $\mathbb{R}$.

$3x = 3x \qquad x^2 = x^2 \qquad x \in \mathbb{Z}$

$x \notin \mathbb{N} \qquad x + 2 = x \qquad x \notin \{\ \}$

**4.1.** Indique as condições que são:

a) universais;

b) possíveis não universais;

c) impossíveis.

**4.2.** Indique se é possível, impossível ou universal cada uma das condições.

a) $x + 2 = x \ \wedge\ x \notin \mathbb{N}$

b) $3x = 3x \ \vee\ x + 2 = x$

c) $x + 2 = x \ \vee\ x \in \mathbb{Z}$

d) $x^2 = x^2 \ \vee\ x \notin \mathbb{N}$

e) $x^2 = x^2 \ \wedge\ x + 2 = x$

f) $x + 2 = x \ \wedge\ 3x = 3x$

**33** Considere, em $\mathbb{R}$, a condição:

$$p(x): |x| + 1 > 0$$

Escreva uma condição $q(x)$, em $\mathbb{R}$, tal que $p(x) \wedge q(x)$ seja uma condição:

**33.1.** impossível;

**33.2.** possível não universal.

Exercícios para praticar: pág. 58 e 59

**25** Escreva as proposições em linguagem simbólica.

**25.1.** Alguns retângulos são quadrados.

**25.2.** Existe pelo menos um número real cujo dobro é igual ao seu quadrado.

**25.3.** Há pelo menos um número natural cuja raiz quadrada é igual a 2.

**25.4.** Alguns barcos são de pesca.

**26** Traduza em linguagem natural cada uma das proposições.

**26.1.** $\exists x \in \mathbb{R}: x = x^2$

**26.2.** $\exists x \in \mathbb{R}: x > x^2$

**26.3.** $\exists x \in \mathbb{R}: \frac{x}{2} > x$

**26.4.** $\exists x \in \mathbb{N}: x \neq x + 1$

**27** Indique o valor lógico das proposições do exercício **26.**.

**28** Sendo $A = \{1, 2, 3\}$, escreva na forma de uma proposição quantificada.

**28.1.** 1 é primo $\vee$ 2 é primo $\vee$ 3 é primo.

**28.2.** $1 > 1 \ \vee\ 2 > 2 \ \vee\ 3 > 3$

**28.3.** $1 < 3 \times 1 \ \vee\ 2 < 3 \times 2 \ \vee\ 3 < 3 \times 3$

**29** Qual é o valor lógico das proposições obtidas no exercício **28.**?

**30** Dada a condição $x > 2x$, indique um universo em que a condição seja:

**30.1.** impossível;

**30.2.** universal;

**30.3.** possível mas não universal.

**31** Classifique em $\mathbb{N}$, $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{R}$ as condições:

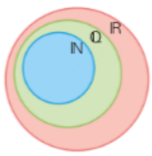
**31.1.** $x + 1 = 0$

**31.2.** $x = x$

**31.3.** $x \neq x$

**31.4.** $3x < 0$

**31.5.** $(x-1)^2 - x^2 = 0$




**32** Justifique se, em $\mathbb{R}$, é universal, impossível ou possível não universal cada uma das condições.

**32.1.** $x + 1 > 0 \ \vee\ x + 1 > 0$

**32.2.** $|x| \geqslant 0 \ \vee\ x - 3 = 0$

**32.3.** $-x < 0 \ \vee\ x^2 + 1 > 0$

**32.4.** $|x| + 1 < 0 \ \wedge\ x + 2 > x$

**32.5.** $x + 1 < 0 \ \vee\ x - 2 = 0$

**32.6.** $x^2 - 9 = 0 \ \vee\ x^2 + 3 < 0$

**32.7.** $x + 1 < x \ \wedge\ x > 2$

**32.8.** $x < 3 \ \wedge\ x < 3 + x$

**32.9.** $|x| \geqslant 0 \ \wedge\ x + 1 = 3$

**32.10.** $|x| \leqslant 1 \ \wedge\ x > 0$

- **Negação de uma condição** – representa-se por **~** e serve para negar uma condição, ou seja, a negação de uma condição $p(x)$ é $\boxed{\sim p(x)}$.

NOTAS:
- A negação de uma condição universal é uma condição impossível;
- A negação de uma condição impossível é uma condição universal.

- **Primeiras leis de De Morgan**: $\boxed{\sim\left[p(x)\wedge q(x)\right] \Leftrightarrow \left[\sim p(x)\vee \sim q(x)\right]}$ $\boxed{\sim\left[p(x)\vee q(x)\right] \Leftrightarrow \left[\sim p(x)\wedge \sim q(x)\right]}$

- **Segundas leis de De Morgan**: $\boxed{\sim\left[\forall x, p(x)\right] \Leftrightarrow \left[\exists x : \sim p(x)\right]}$ $\boxed{\sim\left[\exists x : p(x)\right] \Leftrightarrow \left[\forall x, \sim p(x)\right]}$

<u>Exemplo 1</u>

Escreve proposições equiva-lentes à seguintes:

a) ~ (Madrid é uma cidade e pertence à Península Ibérica)

b) ~ (Um retângulo tem área igual a 20 m$^2$ ou o seu comprimento mede 5 m)

c) $\sim (x > 0 \vee x \le -3)$

d) $\sim (x \ge 3 \wedge x < 5)$

<u>Exemplo 2</u>

Classifica as condições a seguir e, usando as segundas leis de De Morgan, nega-as.

a) $\forall\ x \in$ 10.º ano, $x$ é rapaz

b) Sendo T o conjunto de todos os triângulos:

$\exists\ x \in$ T: $x$ não é retângulo

c) $\forall x \in \mathbb{R}^+,\ x^2 \ge 1$

d) $\exists x \in \mathbb{Q}:\ \sqrt{x} \le 0$

<u>Exercício pág. 45</u>

**5.** Traduza em linguagem simbólica cada uma das proposições e a respetiva negação.
(Designe por $C$ o conjunto de todos os cães.)

**5.1.** Todos os cães são treinados.

**5.2.** Alguns cães usam coleira.

**6.** Escreva a negação de cada uma das proposições e indique o seu valor lógico.

**6.1.** $\forall x \in \mathbb{R}^+,\ \dfrac{1}{x} > 0$

**6.2.** $\exists x \in \mathbb{Z}:\ x + 1 = 0$

**6.3.** $\forall x \in \mathbb{N},\ x$ é par

**6.4.** $\exists x \in \mathbb{N}:\ x^2 = \dfrac{1}{2}$

**6.5.** $\forall x \in \mathbb{N},\ \dfrac{x-1}{2} \leqslant 1$


**7.** Considere as condições seguintes, definidas nos domínios indicados.

- $p(x):\ x + 1 = 0$, em $\mathbb{N}$
- $q(x):\ x^2 > 0$, em $\mathbb{R}$

**7.1.** Classifique as condições $p(x)$ e $q(x)$.

**7.2.** Indique o valor lógico das proposições.

**a)** $\forall x \in \mathbb{N},\ x + 1 \neq 0$

**b)** $\exists x \in \mathbb{R}:\ x^2 \leqslant 0$

7.3. Escreve a negação das proposições anteriores sem usar o símbolo de negação.

<u>Exercícios para praticar: pág. 59</u>

**34** Seja $E$ o conjuntos dos alunos da escola do Pedro.

Traduza em linguagem simbólica cada uma das proposições bem como a respetiva negação.

**34.1.** Há alunos da escola do Pedro que não utilizam telemóvel.

**34.2.** Todos os alunos da escola do Pedro são portugueses.

**35** Escreva a negação de cada uma das proposições e indique o valor lógico da proposição obtida.

**35.1.** $\forall x \in \mathbb{R},\ x \geqslant \dfrac{x}{2}$

**35.2.** $\forall x \in \mathbb{R},\ |x| < 0$

**35.3.** $\exists x \in \mathbb{R}:\ x + 1 = 0$

**35.4.** $\exists x \in \mathbb{N}:\ x + 1 > x$

**36** Considere o conjunto $C = \{-2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2\}$ e seja $p(x)$ a condição:

"O valor absoluto de $x$ é maior que $2$."

**36.1.** Indique o valor lógico da proposição:

$$\exists x \in C:\ p(x)$$

**36.2.** Traduza em linguagem simbólica e em linguagem natural uma proposição equivalente à negação da proposição referida em **36.1.**.

**36.3.** Qual é o valor lógico de cada uma das proposições?

**a)** $\exists x \in C:\ \sim p(x)$

**b)** $\forall x \in C,\ p(x)$

**36.4.** Classifique, em $C$, as condições:

**a)** $p(x)$ **b)** $\sim p(x)$

- **Contrarrecíproco**: $\boxed{\left[p(x)\Rightarrow q(x)\right] \Leftrightarrow \left[\sim q(x)\Rightarrow \sim p(x)\right]}$

<u>Exemplo</u>

Escreve o contrarrecícproco de cada proposição seguinte.

a) Se um aluno pertence à ESFF, logo pertence a uma escola da RAM.

b) Se um número natural não é divisível por 25, não é divisível por 5.

c) Sendo T o conjunto de todos os triângulos:
Se $x \in$ T, $x$ tem 3 lados

d) Todo o número racional é real.

<u>Exercícios para praticar: pág. 55</u>

**16.** Escreva o contrarrecíproco de cada uma das proposições.

**16.1.** Qualquer triângulo equilátero é um triângulo isósceles.

**16.2.** Qualquer número natural é um número racional.

**17.** Escreve o contrarrecíproco de:

**17.1.** Se o quadrado de um dado número natural $n$ é ímpar, então $n$ é ímpar.

**17.2.** Se um dado número natural $n$ não é divisível por $7$, então não é divisível por $35$.

**17.3.** Se $x$ é um número primo, então $x$ não é um quadrado perfeito.

**17.4.** Se o produto de dois números naturais é par, então pelo menos um desses números é par.


O professor: Roberto Oliveira