Escola
Secundária de
Paredes

Proposta de Resolução da Ficha de Trabalho 2

Matemática A

12.º Ano de Escolaridade | Turma: $B + C + H$

1. A bissetriz dos quadrantes pares tem equação $y = -x$

   As abcissas dos pontos de interseção que se procuram são soluções da equação $f(x) = -x$

   $f(x) = -x \Leftrightarrow \dfrac{4x+6}{x+1} = -x \Leftrightarrow \dfrac{4x+6}{x+1} + x = 0 \Leftrightarrow$

   $\Leftrightarrow \dfrac{4x+6+x^2+x}{x+1} = 0 \Leftrightarrow \dfrac{x^2+5x+6}{x+1} = 0 \Leftrightarrow$

   $\Leftrightarrow x^2+5x+6 = 0 \wedge x+1 \neq 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 4\times 1\times 6}}{2\times 1} \wedge x \neq -1 \Leftrightarrow$

   $\Leftrightarrow (x = -3 \vee x = -2) \wedge x \neq -1 \Leftrightarrow x = -3 \vee x = -2$

   Determinemos as coordenadas dos pontos de interseção.

   Se $x = -3$, então, $y = 3 \mapsto A(-3; 3)$

   Se $x = -2$, então, $y = 2 \mapsto B(-2; 2)$

2. A bissetriz dos quadrantes ímpares tem equação $y = x$

   As abcissas dos pontos de interseção que se procuram são soluções da equação $g(x) = x$

   $g(x) = x \Leftrightarrow \dfrac{-3x}{x^2-1} = x \Leftrightarrow \dfrac{-3x}{x^2-1} - x = 0 \Leftrightarrow$

   $\Leftrightarrow \dfrac{-3x - x^3 + x}{x^2-1} = 0 \Leftrightarrow \dfrac{-x^3-2x}{x^2-1} = 0 \Leftrightarrow$

   $\Leftrightarrow -x^3 - 2x = 0 \wedge x^2 - 1 \neq 0 \Leftrightarrow$

   $\Leftrightarrow x(-x^2-2) = 0 \wedge x \neq -1 \wedge x \neq 1 \Leftrightarrow$

   $\Leftrightarrow \left(x = 0 \vee -x^2 - 2 = 0\right) \wedge x \neq -1 \wedge x \neq 1 \Leftrightarrow$

   $\Leftrightarrow \left(x = 0 \vee x^2 = -2\right) \wedge x \neq -1 \wedge x \neq 1 \Leftrightarrow$

   $\Leftrightarrow (x = 0 \vee \text{Equação impossível}) \wedge x \neq -1 \wedge x \neq 1 \Leftrightarrow$

   $\Leftrightarrow x = 0$

   Cálculos auxiliares:

   $x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1$

   Determinemos as coordenadas dos pontos de interseção.

   Se $x = 0$, então, $y = 0 \mapsto A(0; 0)$

3. $f(x) = 0 \Leftrightarrow \dfrac{x^3 - x^2 - 4x + 4}{x^2 + 2} = 0 \Leftrightarrow x^3 - x^2 - 4x + 4 = 0 \wedge x^2 + 2 \neq 0$

   Por outro lado sabe-se que um dos pontos de interseção do gráfico da função f com o eixo das abcissas tem abcissa 1, então, 1 é zero de f

   Ou seja, 1 anula o polinómio $x^3 - x^2 - 4x + 4$

   Logo, o polinómio $x^3 - x^2 - 4x + 4$ é divisível por $x - 1$

   Isto é, existe um polinómio $Q(x)$, tal que

   $x^3 - x^2 - 4x + 4 = (x - 1) \times Q(x)$

   Pela regra de Ruffini

	1	-1	-4	4
1		1	0	-4
	1	0	-4	0

   $Q(x) = x^2 - 4$

   Portanto,

   $x^3 - x^2 - 4x + 4 = 0 \wedge x^2 + 2 \neq 0 \Leftrightarrow (x - 1) \times (x^2 - 4) = 0 \wedge \text{Condição universal em } \mathbb{R} \Leftrightarrow$

   $\Leftrightarrow x - 1 = 0 \vee x^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow x - 1 = 0 \vee x^2 = 4 \Leftrightarrow$

   $\Leftrightarrow x = 1 \vee x = \pm\sqrt{4} \Leftrightarrow x = 1 \vee x = -2 \vee x = 2$

   Zeros de f: $-2; 1; 2$

4. .

   4.1. $\dfrac{x+1}{x^2 - 3x} - \dfrac{x}{x-3} \leq \dfrac{1}{x} \Leftrightarrow \dfrac{x+1}{x(x-3)} - \dfrac{x}{x-3} - \dfrac{1}{x} \leq 0 \Leftrightarrow$

   $\Leftrightarrow \dfrac{x+1}{x(x-3)} - \dfrac{x^2}{x(x-3)} - \dfrac{x-3}{x(x-3)} \leq 0 \Leftrightarrow \dfrac{x + 1 - x^2 - x + 3}{x(x-3)} \leq 0 \Leftrightarrow$

   $\Leftrightarrow \dfrac{-x^2 + 4}{x(x-3)} \leq 0$

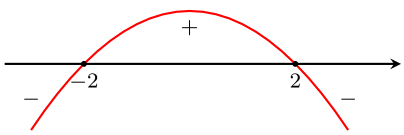
   Estudemos o numerador e o denominador, quanto a zeros e sinal

   $\twoheadrightarrow$ **Numerador**

   Zeros: $-x^2 + 4 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 4 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{4} \Leftrightarrow x = -2 \vee x = 2$

   Sinal:

   Como se trata de uma função quadrática, estuda-se o sinal pela representação gráfica da parábola



   Assim,

   $-x^2 + 4 > 0 \Leftrightarrow -2 < x < 2$

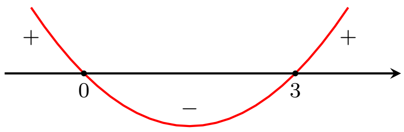
   $-x^2 + 4 < 0 \Leftrightarrow x < -2 \vee x > 2$

↠ **Denominador**

Zeros: $x(x-3)=0 \Leftrightarrow x=0 \vee x-3=0 \Leftrightarrow x=0 \vee x=3$

Sinal:

Como se trata de uma função quadrática, estuda-se o sinal pela representação gráfica da parábola



Assim,

$x(x-3)>0 \Leftrightarrow x<0 \vee x>3$

$x(x-3)<0 \Leftrightarrow 0<x<3$

Quadro de sinais

x	$-\infty$	-2		0		2		3	$+\infty$
$-x^2+4$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$
$x(x-3)$	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$\frac{-x^2+4}{x(x-3)}$	$-$	0	$+$	$n.d.$	$-$	0	$+$	$n.d.$	$-$

Concluindo:

$\frac{-x^2+4}{x(x-3)} \leq 0 \Leftrightarrow x \leq -2 \vee 0<x \leq 2 \vee x>3$

$C.S. =]-\infty;-2] \cup]0;2] \cup]3;+\infty[$

4.2. $\frac{3x^2}{4x-2x^2}-\frac{2}{x}>\frac{x+1}{x-2} \Leftrightarrow \frac{3x^2}{2x(2-x)}-\frac{4(2-x)}{2x(2-x)}+\frac{2x(x+1)}{2x(2-x)}>0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{3x^2-4(2-x)+2x(x+1)}{2x(2-x)}>0 \Leftrightarrow \frac{3x^2-8+4x+2x^2+2x}{2x(2-x)}>0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{5x^2+6x-8}{2x(2-x)}>0$

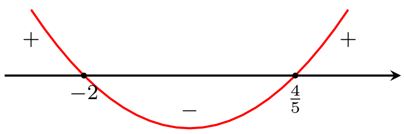
Estudemos o numerador e o denominador, quanto a zeros e sinal

↠ **Numerador**

Zeros: $5x^2+6x-8=0 \Leftrightarrow x=\frac{-6 \pm \sqrt{6^2-4\times 5\times(-8)}}{2\times 5} \Leftrightarrow x=-2 \vee x=\frac{4}{5}$

Sinal:

Como se trata de uma função quadrática, estuda-se o sinal pela representação gráfica da parábola



Assim,

$5x^2+6x-8>0 \Leftrightarrow x<-2 \vee x>\frac{4}{5}$

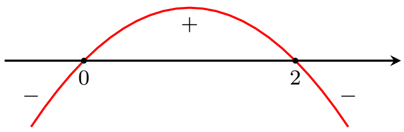
$5x^2+6x-8<0 \Leftrightarrow -2<x<\frac{4}{5}$

$\twoheadrightarrow$ **Denominador**

Zeros: $2x(2-x)=0 \Leftrightarrow 2x=0 \vee 2-x=0 \Leftrightarrow x=0 \vee x=2$

Sinal:

Como se trata de uma função quadrática, estuda-se o sinal pela representação gráfica da parábola



Assim,

$2x(2-x)>0 \Leftrightarrow 0<x<2$

$2x(2-x)<0 \Leftrightarrow x<0 \vee x>2$

Quadro de sinais

x	$-\infty$	-2		0		$\frac{4}{5}$		2	$-\infty$
$5x^2+6x-8$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$2x(2-x)$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$
$\frac{5x^2+6x-8}{2x(2-x)}$	$-$	0	$+$	$n.d.$	$-$	0	$+$	$n.d.$	$-$

Concluindo:

$$\frac{5x^2+6x-8}{2x(2-x)}>0 \Leftrightarrow -2<x<0 \vee \frac{4}{5}<x<2$$

$$C.S.=\left]-2;0\right[\cup\left]\frac{4}{5};2\right[$$

5. .

5.1. Domínio: $D_f=\left\{x\in\mathbb{R}: x^2+x\neq 0\right\}=\{x\in\mathbb{R}: x\neq -1 \wedge x\neq 0\}=\mathbb{R}\setminus\{-1;0\}$

Cálculo auxiliar:

$x^2+x=0 \Leftrightarrow x(x+1)=0 \Leftrightarrow x=0 \vee x+1=0 \Leftrightarrow x=0 \vee x=-1$

$$f(x)=\frac{x^2+2x+1}{x^2+x}=\frac{(x+1)^2}{x(x+1)}=\frac{x+1}{x}, \text{ com } x\neq -1 \wedge x\neq 0$$

5.2. $g(x)=\dfrac{x^3-4x^2+x+6}{2x^2-5x+2}$

Domínio: $D_f=\left\{x\in\mathbb{R}: 2x^2-5x+2\neq 0\right\}=\left\{x\in\mathbb{R}: x\neq \frac{1}{2} \wedge x\neq 2\right\}=\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{1}{2};2\right\}$

Cálculo auxiliar:

$$2x^2-5x+2=0 \Leftrightarrow x=\frac{-(-5)\pm\sqrt{(-5)^2-4\times 2\times 2}}{2\times 2} \Leftrightarrow x=\frac{1}{2} \vee x=2$$

Fatorizemos o denominador

$$2x^2-5x+2=2\left(x-\frac{1}{2}\right)(x-2)$$

Fatorizemos o numerador

Ora, 2 anula o polinómio x^3-4x^2+x+6, visto que $2^3-4\times 2^2+2+6=8-16+8=0$

Assim,

o polinómio $x^3 - 4x^2 + x + 6$ é divisível por $x - 2$

Isto é, existe um polinómio $Q(x)$, tal que

$x^3 - 4x^2 + x + 6 = (x - 2) \times Q(x)$

Pela regra de Ruffini

$$
\begin{array}{c|ccc|c}
 & 1 & -4 & 1 & 6 \\
2 & & 2 & -4 & -6 \\
\hline
 & 1 & -2 & -3 & 0
\end{array}
$$

$Q(x) = x^2 - 2x - 3$

$x^2 - 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \times 1 \times (-3)}}{2 \times 1} \Leftrightarrow x = -1 \vee x = 3$

Logo, $Q(x) = (x + 1)(x - 3)$

Assim,

$x^3 - 4x^2 + x + 6 = (x - 2) \times Q(x) = (x - 2)(x + 1)(x - 3)$

Portanto,

$$g(x) = \frac{x^3 - 4x^2 + x + 6}{2x^2 - 5x + 2} = \frac{(x-2)(x+1)(x-3)}{2\left(x - \frac{1}{2}\right)(x-2)} = \frac{(x+1)(x-3)}{2\left(x - \frac{1}{2}\right)} = \frac{x^2 - 3x + x - 3}{2x - 1} = \frac{x^2 - 2x - 3}{2x - 1},$$

com $x \neq \dfrac{1}{2} \wedge x \neq 2$

6. .

6.1. $D_f = \{x \in \mathbb{R} : 1 - 4x \geq 0\} = \left\{x \in \mathbb{R} : x \leq \dfrac{1}{4}\right\} = \left]-\infty; \dfrac{1}{4}\right]$

Cálculo auxiliar:

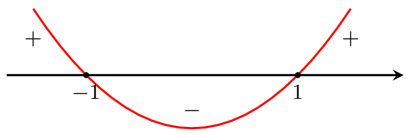
$1 - 4x \geq 0 \Leftrightarrow -4x \geq -1 \Leftrightarrow 4x \leq 1 \Leftrightarrow x \leq \dfrac{1}{4}$

6.2. $D_f = \left\{x \in \mathbb{R} : 2x^2 - 2 \geq 0\right\} = \{x \in \mathbb{R} : x \leq -1 \vee x \geq 1\} =]-\infty; -1] \cup [1; +\infty[$

Cálculo auxiliar:

$2x^2 - 2 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x = -1 \vee x = 1$

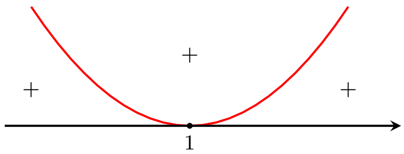
$2x^2 - 2 \geq 0 \Leftrightarrow x^2 - 1 \geq 0 \Leftrightarrow x \leq -1 \vee x \geq 1$



6.3. $D_f = \left\{x \in \mathbb{R} : x^2 - 2x + 1 \geq 0\right\} = \mathbb{R}$

Cálculo auxiliar:

$x^2 - 2x + 1 \geq 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 \geq 0 \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}$



6.4. $D_f = \left\{x \in \mathbb{R} : \dfrac{x+1}{x-1} \geq 0 \wedge x - 1 \neq 0\right\} = \{x \in \mathbb{R} : x \leq -1 \vee x > 1\} =]-\infty; -1] \cup]1; +\infty[$

Cálculo auxiliar:

$\dfrac{x+1}{x-1}$

- **Numerador:**

  Zeros: $x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = -1$

  Sinal:

  $x + 1 > 0 \Leftrightarrow x > -1$

  $x + 1 < 0 \Leftrightarrow x < -1$

- **Denominador:**

  Zeros: $x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$

  Sinal:

  $x - 1 > 0 \Leftrightarrow x > 1$

  $x - 1 < 0 \Leftrightarrow x < 1$

Quadro de sinais

x	$-\infty$	-1		1	$+\infty$
$x+1$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$x-1$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$\dfrac{x+1}{x-1}$	$+$	0	$-$	$n.d.$	$+$

6.5. $D_f = \{x \in \mathbb{R} : x \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

6.6. $D_f = \left\{x \in \mathbb{R} : x^2 - 9 \neq 0\right\} = \{x \in \mathbb{R} : x \neq -3 \wedge x \neq 3\} = \mathbb{R} \setminus \{-3; 3\}$

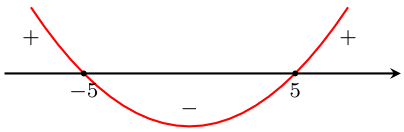
Cálculo auxiliar:

$x^2 - 9 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 9 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{9} \Leftrightarrow x = -3 \vee x = 3$

7. $D_f = \left\{x \in \mathbb{R} : x^2 - 25 > 0\right\} = \{x \in \mathbb{R} : x < -5 \vee x > 5\} =]-\infty; -5[\cup]5; +\infty[$

Cálculo auxiliar:

$x^2 - 25 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 25 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{25} \Leftrightarrow x = -5 \vee x = 5$



8. .

8.1. $1 - \sqrt{x+4} = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x+4} = 1 \wedge x + 4 \geq 0$

$\Rightarrow (\sqrt{x+4})^2 = 1^2 \wedge x \geq -4 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x + 4 = 1 \wedge x \geq -4 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = -3 \wedge x \geq -4 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = -3$

Verificação:

$x = -3 \mapsto 1 - \sqrt{-3+4} = 0$

$\therefore 1 - 1 = 0$

$\therefore 0 = 0$ (Verdadeiro)

$C.S. = \{-3\}$

8.2. $-x + \sqrt{x^2 - x + 1} = 0$

$-x + \sqrt{x^2 - x + 1} = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x^2 - x + 1} = x \wedge x^2 - x + 1 \geq 0$

$\Rightarrow (\sqrt{x^2 - x + 1})^2 = x^2 \wedge$ Condição universal $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2 - x + 1 = x^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -x + 1 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = 1$

Verificação:

$x = 1 \mapsto -1 + \sqrt{1^2 - 1 + 1} = 0$

$\therefore -1 + 1 = 0$

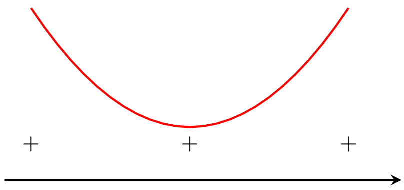
$\therefore 0 = 0$ (Verdadeiro)

Cálculo auxiliar:

$x^2 - x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \times 1 \times 1}}{2 \times 1} \Leftrightarrow x = \dfrac{1 \pm \sqrt{-3}}{2}$

Equação impossível em $\mathbb{R}$

Sinal



$C.S. = \{1\}$

8.3. $1 - \sqrt[3]{2x-1} = -1 \Leftrightarrow \sqrt[3]{2x-1} = 2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left(\sqrt[3]{2x-1}\right)^3 = 2^3 \Leftrightarrow 2x - 1 = 8 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2x = 9 \Leftrightarrow x = \dfrac{9}{2}$

$C.S. = \left\{\dfrac{9}{2}\right\}$

8.4. $\sqrt[3]{-x^2+2x} + 1 = 0 \Leftrightarrow \sqrt[3]{-x^2+2x} = -1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left(\sqrt[3]{-x^2+2x}\right)^3 = (-1)^3 \Leftrightarrow -x^2 + 2x = -1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -x^2 + 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \times (-1) \times 1}}{2 \times (-1)} \Leftrightarrow x = 1 - \sqrt{2} \vee x = 1 + \sqrt{2}$

$C.S. = \left\{1 - \sqrt{2}; 1 + \sqrt{2}\right\}$

9. $D_f = \left\{x \in \mathbb{R} : 2x + 2 \geq 0 \wedge 2 - \sqrt{2x+2} \neq 0\right\} = \{x \in \mathbb{R} : x \geq -1 \wedge x \neq 1\} = [-1; 1[\cup]1; \infty[$

Cálculo auxiliar:

- $2x + 2 \geq 0 \Leftrightarrow 2x \geq -2 \Leftrightarrow x \geq \dfrac{-2}{2} \Leftrightarrow x \geq -1$
- $2 - \sqrt{2x+2} = 0 \Leftrightarrow \sqrt{2x+2} = 2 \wedge x \geq -1$

$\Leftrightarrow \left(\sqrt{2x+2}\right)^2 = 2^2 \wedge x \geq -1 \Leftrightarrow 2x + 2 = 4 \wedge x \geq -1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2x = 4 - 2 \wedge x \geq -1 \Leftrightarrow 2x = 2 \wedge x \geq -1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = \dfrac{2}{2} \wedge x \geq -1 \Leftrightarrow x = 1 \wedge x \geq -1 \Leftrightarrow x = 1$

Verificação:

$x = 1 \mapsto 2 - \sqrt{2 \times 1 + 2} = 0$

$\therefore 2 - \sqrt{4} = 0$

$\therefore 0 = 0$ (Verdadeiro)

Logo, 1 é solução da equação $2 - \sqrt{2x+2} = 0$