ESCOLA SECUNDÁRIA DE PENAFIEL

Ficha de Trabalho nº 3
Proposta de resolução

Preparação para exame

12.º Ano de Escolaridade | Turmas G - K

1. .
Um vetor normal ao plano α é $\overrightarrow{\alpha} = (a; -1; -1)$
Um vetor normal ao plano β é $\overrightarrow{\beta} = (0; -a^2 + 5; 1)$
O plano α é perpendicular ao plano β se, e só se, $\overrightarrow{\alpha} \cdot \overrightarrow{\beta} = 0$
ou seja, $(a; -1; -1) \cdot (0; -a^2 + 5; 1) = 0 \Leftrightarrow a \times 0 - 1 \times (-a^2 + 5) - 1 \times 1 = 0 \Leftrightarrow a^2 - 5 - 1 = 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow a^2 = 6 \Leftrightarrow a = -\sqrt{6} \vee a = \sqrt{6}$
Logo, $a \in \{-\sqrt{6}; \sqrt{6}\}$

2. .
Um vetor diretor diretor da reta é $\overrightarrow{s} = (1; 0; 0)$.
Um vetor normal ao plano β é $\overrightarrow{\beta} = (0; -2; 0)$
Como $\overrightarrow{s} \cdot \overrightarrow{\beta} = (1; 0; 0) \cdot (0; -2; 0) = 1 \times 0 + 0 \times (-2) + 0 \times 0 = 0$, então os vetores $\overrightarrow{\beta}$ e $\overrightarrow{s}$ são perpendiculares, e portanto, a reta s é paralela ao plano β. Por outro lado, tem-se que o ponto da reta s de coordenadas $(1; 2; 3)$ não é ponto do plano β, uma vez que as suas coordenadas não satisfazem a condição $-2y + 2 = 0$. Sendo assim, a reta s é estritamente paralela ao plano β.

3. .
$\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} = ||\overrightarrow{a}|| \times ||\overrightarrow{b}|| \times \cos(\theta) = 5 \times 5 \times \frac{24}{25} = 24$

Cálculos auxiliares

De $\sin^2(\theta) + \cos^2(\theta) = 1$, resulta que
$\left(\frac{7}{25}\right)^2 + \cos^2(\theta) = 1 \Leftrightarrow \cos^2(\theta) = 1 - \frac{49}{625} \Leftrightarrow \cos^2(\theta) = \frac{576}{625} \Leftrightarrow \cos(\theta) = \pm\sqrt{\frac{576}{625}} \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \cos(\theta) = \pm\frac{24}{25}$
Como θ é agudo, tem-se que $\cos(\theta) = \frac{24}{25}$

4. .

4.1. O declive da reta t é $m_t = -\frac{1}{m_s} = -1$. Então, um vetor diretor da reta t é
$\overrightarrow{t} = (1; m_t) = (1; -1)$
Por outro lado, a reta t "passa"no ponto de coordenadas $(0; 2)$
sendo assim, uma equação vetorial da reta t é $(x; y) = (0; 2) + k(1; -1), k \in \mathbb{R}$.
A reta t tem equação reduzida da forma $t : y = -x + b$
como a reta "passa "no ponto de coordenadas $(0; 2)$
então,$b = 2$
logo, $t : y = -x + 2$

4.2. Comecemos por resolver o seguinte sistema.

$$\begin{cases} y = x - 1 \\ y = -x + 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x - 1 \\ -x + 2 = x - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x - 1 \\ 2x = 3 \end{cases} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = x - 1 \\ x = \frac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{3}{2} - 1 \\ x = \frac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{1}{2} \\ x = \frac{3}{2} \end{cases}$$

O ponto de interseção das duas retas é $I(\frac{3}{2}; \frac{1}{2})$.

4.3. Comecemos por resolver o seguinte sistema.

$$\begin{cases} y = x - 1 \\ (x-1)^2 + y^2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x - 1 \\ (x-1)^2 + (x-1)^2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x - 1 \\ 2(x-1)^2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = x - 1 \\ (x-1)^2 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x - 1 \\ x - 1 = -\sqrt{2} \vee x - 1 = \sqrt{2} \end{cases} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = x - 1 \\ x = 1 - \sqrt{2} \end{cases} \vee \begin{cases} y = x - 1 \\ x = 1 + \sqrt{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -\sqrt{2} \\ x = 1 - \sqrt{2} \end{cases} \vee \begin{cases} y = \sqrt{2} \\ x = 1 + \sqrt{2} \end{cases}$$

Os pontos de interseção da reta com a circunferência são:e $A(1-\sqrt{2}; -\sqrt{2})$ e $B(1+\sqrt{2}; \sqrt{2})$.

5. .

5.1. O ponto A tem coordenadas $(x; 0; 0)$, e como é ponto do plano α, tem-se que $x + 0 + 0 - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 2$. Ou seja, A tem coordenadas $(2; 0; 0)$.

O volume do sólido é $\dfrac{32}{3}$, então,

$2 \times \dfrac{2^2 \times \overline{TV}}{3} = \dfrac{32}{3} \Leftrightarrow \dfrac{8\overline{TV}}{3} = \dfrac{32}{3} \Leftrightarrow 8\overline{TV} = 32 \Leftrightarrow \overline{TV} = 4.$

A ordenada do ponto V é igual a 4.

Assim, o ponto P tem coordenadas $(1; -4; 1)$.

Seja $Q(x; y; z)$ um ponto genérico da superfície esférica.

$\overrightarrow{AQ} = Q - A = (x - 2; y - 0; z - 0) = (x - 2; y; z)$

$\overrightarrow{PQ} = Q - P = (x - 1; y + 4; z - 1)$

Então, tem-se que

$\overrightarrow{AQ} \cdot \overrightarrow{PQ} = 0 \Leftrightarrow (x - 2; y; z) \cdot (x - 1; y + 4; z - 1) = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x - 2)(x - 1) + y(y + 4) + z(z - 1) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 3x + 2 + y^2 + 4y + z^2 - z = 0 \Leftrightarrow$ $x^2 + y^2 + z^2 - 3x + 4y - z + 2 = 0.$

5.2. . Consideremos a face $[BCV]$.

Seja R o ponto médio de $[BC]$

aplicando o Teorema de Pitágoras ao triângulo $[TRV]$ vem,

$\overline{RV}^2 = \overline{TV}^2 + \overline{RT}^2 \Leftrightarrow \overline{RV}^2 = 1 + 16 \Leftrightarrow \overline{RV}^2 = 17 \Leftrightarrow \overline{RV} = \pm\sqrt{17}$. Como $\overline{RV}$ é uma medida, então, $\overline{RV} = \sqrt{17}$.

A área da superfície do sólido será igual a $A_{superficie} = 8 \times A_{[BCV]} = 8 \times \dfrac{2 \times \sqrt{17}}{2} = 8\sqrt{17}$.

5.3. Da figura tem-se que $C(0; 0; 2)$ e $V(1; 4; 1)$

Determinemos um vetor diretor da reta CV.

$\overrightarrow{CV} = V - C = (1 - 0; 4 - 0; 1 - 2) = (1; 4; -1)$

as equações paramétricas da reta podem ser:

$$\begin{cases} x = 0 + k \\ y = 0 + 4k \\ z = 2 - k \end{cases}, k \in \mathbb{R}$$

5.4. Da figura tem-se que $A(2;0;0)$, $T(1;0;1)$ e $V(1;4;1)$

Para escrever a equação cartesiana do plano, é necessário determinar um vetor normal ao plano.
Seja $\overrightarrow{\delta}=(a;b;c)$ o vetor (não nulo) normal ao plano ATV
Ora,
$\overrightarrow{AT}=T-A=(1-2;0-0;1-0)=(-1;0;1)$
$\overrightarrow{TV}=V-T=(1-1;4-0;1-1)=(0;4;0)$

Determinemos a,b,c, tendo em conta que se deve ter $\overrightarrow{AT}\cdot\overrightarrow{\delta}=0\wedge\overrightarrow{TV}\cdot\overrightarrow{\delta}=0$

$\overrightarrow{AT}\cdot\overrightarrow{\delta}=0\wedge\overrightarrow{TV}\cdot\overrightarrow{\delta}=0\Leftrightarrow(-1;0;1)\cdot(a;b;c)=0\wedge(0;4;0)\cdot(a;b;c)=0\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow -a+c=0\wedge 4b=0\Leftrightarrow c=a\wedge b=0$
Sendo assim, $\overrightarrow{\delta}=(a;0;a)$, com a número real não nulo. tomando, $a=1$, tem-se que $\overrightarrow{\delta}=(1;0;1)$

então, $\delta: 1x+0y+1z+d=0$, ou seja, $\delta: x+z+d=0$
determinemos d tendo em conta que o plano contém, por exemplo, o ponto A
então, $2+0+d=0\Leftrightarrow d=-2$
logo, $\delta: x+z-2=0$

5.5. Sejam $\overrightarrow{\alpha}=(1;1;-1)$ e $\overrightarrow{\delta}=(1;0;1)$, respetivamente, vetores normais aos planos α e δ.
Os planos α e β são perpendiculares se $\overrightarrow{\alpha}\cdot\overrightarrow{\delta}=0$.
Ora,
$\overrightarrow{\alpha}\cdot\overrightarrow{\delta}=(1;1;-1)\cdot(1;0;1)=1\times1+1\times0-1\times1=0$.
Logo, os planos α e β são perpendiculares.

6. .

6.1. Dos dados e por observação da figura, tem-se que
$A(5;0;0)$; $B(10;5;0)$; $C(5;10;0)$;$D(0;5;0)$
Aplicando o teorema de Pitágoras ao triângulo retângulo $[ATV]$, resulta que
$\overline{AV}^2=\overline{AT}^2+\overline{TV}^2\Leftrightarrow\overline{TV}^2=13^2-5^2\Leftrightarrow\overline{TV}^2=144\Leftrightarrow\overline{TV}=\pm12$. Como $\overline{TV}>0$, resulta que $\overline{TV}=12$
Deste modo tem-se que a cota do ponto V é 12
$V_{[ABCDV]}=\dfrac{50\times12}{3}=200u.v.$

6.2. Seja M o ponto médio da aresta $[CV]$
$M\left(\dfrac{5+5}{2};\dfrac{10+5}{2};\dfrac{0+12}{2}\right)=\left(5,\dfrac{15}{2},6\right)$
Um vetor diretor da reta é $\overrightarrow{BM}=M-B=\left(5,\dfrac{15}{2},6\right)-(10,5;0)=\left(-5,\dfrac{5}{2},6\right)$
e uma equação vetorial da reta pode ser: $(x;y;z)=(10;5;0)+k\left(-5,\dfrac{5}{2},6\right),k\in\mathbb{R}$

6.3. $\overrightarrow{AV}=V-A=(5,5;12)-(5,0;0)=(0;5;12)$.
Um vetor normal ao plano é $\overrightarrow{\delta}=\overrightarrow{AV}=(0;5;12)$ então, $\delta: 0x+5y+12z+d=0$, ou seja, $\delta: 5y+12z+d=0$
determinemos d tendo em conta que o plano contém o ponto $T(5;5;0)$
então, $5\times5+12\times0+d=0\Leftrightarrow d=-25$
logo, $\delta: 5y+12z-25=0$