Preparação para exame

12.º Ano de Escolaridade | Turma G-K

FUNÇÕES REAIS DE VARIÁVEL REAL /FUNÇÃO EXPONENCIAL / FUNÇÃO LOGARÍTMICA

1. Na figura 1 está representado, em referencial, o.n. xOy, parte do gráfico da função polinomial definida por $A(x) = x^3 - 3x^2 + 4$ e um trapézio $[OPQR]$.

   Tal como a figura sugere:

   - O é a origem do referencial;
   - R é o ponto de interseção do gráfico da função com o eixo das ordenadas;
   - Q é o ponto de gráfico da função com abcissa a, com $a > 2$;
   - P pertence a Ox e tem a mesma abcissa de Q.

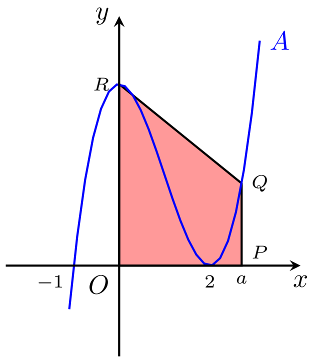

Figura 1

   Recorre às capacidades gráficas da tua calculadora para resolver o seguinte problema:

   Qual é o valor da abcissa do ponto P para o qual a área do trapézio $[OPQR]$ é igual a 20?

   Na tua resposta deves:

   - mostrar que a área do área do trapézio $[OPQR]$, em função de a, é dada por $f(a) = \frac{1}{2}a^4 - \frac{3}{2}a^3 + 4a$, com $a > 2$;
   - equacionar o problema;
   - apresentar o(s)gráfico(s)visualizado(s)na calculadora gráfica, devidamente identificados, assinalando o(s)ponto(s) que consideres relevantes;
   - apresentar a solução para o problema com aproximação às centésimas.

2. Na figura 2, está representado um triângulo retângulo $[ABC]$.

   Admite que:

   - os catetos $[AB]$ e $[AC]$ medem, respetivamente, 4 e 3 unidades de comprimento;
   - o ponto D desloca-se ao longo do cateto $[AB]$, nunca coincidindo com o ponto A, nem com o ponto B.

   Para cada posição do ponto D, seja x o comprimento do segmento de reta $[DB]$.

   Qual das expressões seguintes dá,em função de x, o perímetro do triângulo $[BCD]$?

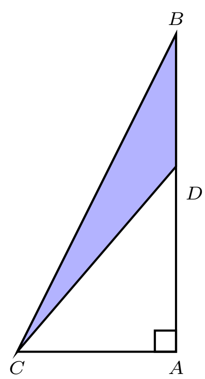

Figura 2

   (A) $5 + x + \sqrt{25 + x^2}$

   (B) $4 + x + \sqrt{25 + x^2}$

   (C) $5 + x + \sqrt{x^2 - 8x + 25}$

   (D) $4 + x + \sqrt{x^2 - 8x + 25}$

3. Na figura 3 está representado, em referencial ortonormado xOy, parte do gráfico da função f, real de variável real.

Seja (a_n) uma sucessão de valores do domínio de f.
Sabe-se que a sucessão $f(a_n)$ tende para 4.

Qual das sucessões poderá ser (a_n)?

(A) $a_n = -2 + \dfrac{1}{e^n}$

(B) $a_n = 4 + \dfrac{1}{e^n}$

(C) $a_n = 2 - \dfrac{1}{e^n}$

(D) $a_n = 2 + \dfrac{1}{e^n}$

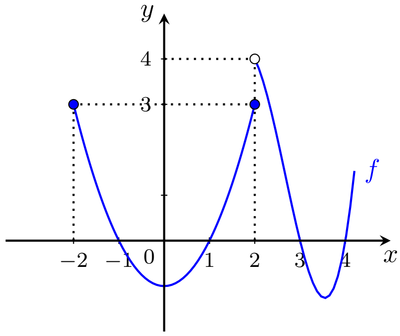

Figura 3

4. O valor de k para o qual se tem $\lim \left(1 + \dfrac{2}{5n}\right)^{2n-3} = e^{k+1}$ é:

(A) $-\dfrac{1}{5}$

(B) $\dfrac{1}{5}$

(C) $\dfrac{4}{5}$

(D) $\dfrac{9}{5}$

5. Na figura 4 está representado, em referencial ortonormado xOy, parte do gráfico de uma função f de domínio $\mathbb{R}^+$, definida por $f(x) = \ln(x) + e$.

A é um ponto do gráfico da função f, cuja ordenada é $1 + e$.

Em qual das opções está a abcissa do ponto A?

(A) e

(B) $2e$

(C) e^{-1}

(D) 2

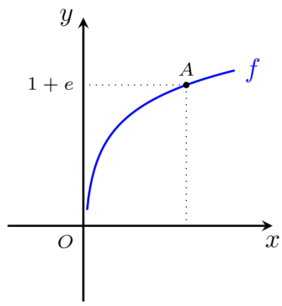

Figura 4

6. Considera as funções f, g e h, reais de variável real, definidas por $f(x) = e^x - 2e^{-x}$, $g(x) = e^{-x} + e$ e $h(x) = \ln\left(\dfrac{x+e}{e}\right) - 1$.

6.1. Sem recorres à expressão da função inversa de h, determina $h^{-1}(-1)$.

6.2. Resolve a condição $f(x) = 3 - 4e^{-x}$.

6.3. Na figura 5 estão representados, em referencial o.n. xOy, partes dos gráficos das funções f e g e um triângulo $[ABC]$.

Sabe-se que:

- A é o ponto de interseção do gráfico da função g com o eixo Oy;
- B é o ponto de interseção do gráfico da função f com o eixo Oy;
- C é o ponto de interseção dos dois gráficos representados.

Determina um valor aproximado às centésimas da área do triângulo $[ABC]$.
Nota: Para o cálculo das coordenadas do ponto C, recorre às potencialidades da calculadora gráfica e considera os valores arredondados às centésimas.

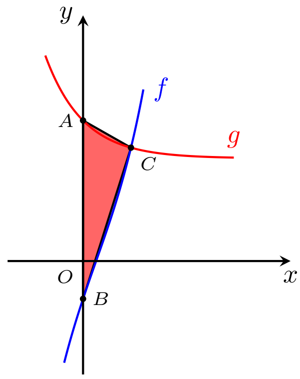

Figura 5

7. Seja $k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ e seja a função f, real de variável real, definida por

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{ex}{e - e^{2kx+1}} & se \quad x < 0 \\ e^{-\ln(4)} & se \quad x = 0 \\ \dfrac{\sqrt{x+4}-2}{x} & se \quad x > 0 \end{cases}$$

Averigua se existe $k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ para o qual a função f é contínua no ponto $x = 0$. Em caso afirmativo, indica o seu valor.

8. Sabendo que $a, c \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$ e que $log_c(a) = 2$, mostra que $log_c(\sqrt[3]{a^2c}) = \dfrac{5}{3}$.

9. Determina:

9.1. $\lim\limits_{x \to +\infty} \left[\dfrac{\sqrt{e^{-x}} + x}{x + \sqrt{x}} + \dfrac{\sqrt{x^2}}{x} \right]$

9.2. $\lim\limits_{x \to 4} \left[(x^2 - 16) \times \dfrac{2}{x^3 - 7x^2 + 8x + 16} \right]$

10. O Rodrigo está prestes a tomar o seu café expresso matinal no bar da faculdade onde estuda. Sabe-se que a temperatura do café, t minutos após ser colocado na chávena, é bem modelada pela função

$$f(t) = 30 + 45e^{-0.6t}$$

10.1. Qual a temperatura do café no preciso momento em que o funcionário do bar o coloca na chávena?

10.2. O Rodrigo espera sempre que o café que se encontra na chávena arrefeça um pouco antes de o tomar. Quanto tempo vai ter de esperar para tomar o café, se o quiser tomar a uma temperatura de $35°\ C$? Apresenta o resultado arredondada às centésimas.

11. A atividade F, de qualquer substância radioativa, é dada, numa certa unidade de medida, pela expressão

$$F(t) = A \times e^{-Bt}$$

Sendo A e B constantes reais positivas e t é o tempo em horas, com $t \geq 0$.

Mostra que o tempo necessário para que a atividade F passe do seu valor inicial para metade é $\dfrac{\ln(2)}{B}$.

12. Para certos valores de a e de b $(a > 1)$ e $(b > 1)$, tem-se $\log_b(a^4 b) = 6$.
Qual é, para esses valores de a e de b, o valor de $\log_a(b)$?

(A) $\frac{4}{5}$

(B) $\frac{7}{4}$

(C) $\frac{4}{7}$

(D) $\frac{5}{4}$

13. Sejam a e b dois números reais superiores a 1, tais que $a = b^{10}$.
Determina $\log_a(\sqrt{b}) + \log_b(a^2)$.

14. Seja a um número real.
Seja a função f, de domínio $\mathbb{R}^+$, definida por $f(x) = e^{a^2 \ln x}$.
Considera, num referencial o. n. xOy, o ponto $P\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{64}\right)$
Sabe-se que o ponto P pertence ao gráfico de f. Determina o(s) valor(es) de a.

15. Considera a função f, de domínio $]-\infty; -1[$, definida por $f(x) = 2x + 1 + \frac{\ln(-x-1)}{2x}$.
Resolve os dois itens seguintes, recorrendo a métodos analíticos, sem usares a calculadora.

15.1. Estuda a função f quanto à existência de assintotas ao seu gráfico e, caso existam, indica as suas equações.

15.2. Mostra que a equação $f(x) = -2e$ tem, pelo menos, uma solução em $]-e-1; -2[$.

16. Considera a função f, de domínio $\mathbb{R}^+$.
Sabe-se que:

- o gráfico de f tem uma assíntota oblíqua;
- $\lim\limits_{x \mapsto +\infty} \frac{x}{f(x) + e^{-x} + 2x} = -2$

Qual é o declive dessa assíntota?

SUCESSÕES DE NÚMEROS REAIS

17. Prova, usando o método de indução matemática, que:

$$1 \times 1! + 2 \times 2! + 3 \times 3! + \ldots + n \times n! = (n+1)! - 1, \forall n \in \mathbb{N}$$

Entenda-se que: $n! \twoheadrightarrow$ fatorial de n

18. Prova que se (a_n) é progressão aritmética de razão r então $b_n = k^{a_n}$ define uma progressão geométrica de razão k^r, sendo k diferente de zero e um.

19. Se (a_n) é progressão geométrica de termos positivos e de razão r, com $r \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$ então $b_n = \log_a(a_n)$ define uma progressão aritmética de razão $\log_a(r)$, sendo $a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$.

(**Nota:** Os itens 18 e 19 são adaptados de dois itens da autoria do professor *José Luís Freitas*)