



## SPM@TESTES

Teste de Matemática

2021

11.º ano de Escolaridade

Duração da Prova: 90 minutos. | Tolerância: 30 minutos.

(cinco páginas)

**VERSÃO 1**

Para cada resposta, identifique o grupo e o item.

Apresente as suas respostas de forma legível.

As cotações dos itens encontram-se no final do enunciado da prova.

**Não é permitido o uso de máquina de calcular.**

Na resposta aos itens de **escolha múltipla**, selecione a opção correta. Escreva, na folha de respostas, o número do item e a letra que identifica a opção escolhida.

Na resposta aos restantes, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias.



1. Na Figura 1 está representada, num referencial o.n.  $xOy$ , a circunferência trigonométrica.

Sabe-se que:

- o ponto  $D$  tem coordenadas  $(1, 0)$ ;
- o ponto  $A$  pertence à circunferência;
- o ponto  $B$  pertence à circunferência e é tal que o segmento de reta  $[AB]$  é paralelo ao eixo  $Oy$ ;
- o ponto  $C$  tem coordenadas  $(-2, 0)$ ;
- $\alpha$  é a amplitude, em radianos, do ângulo  $DOB$ , com  $\alpha \in \left] \frac{\pi}{2}, \pi \right[$ .

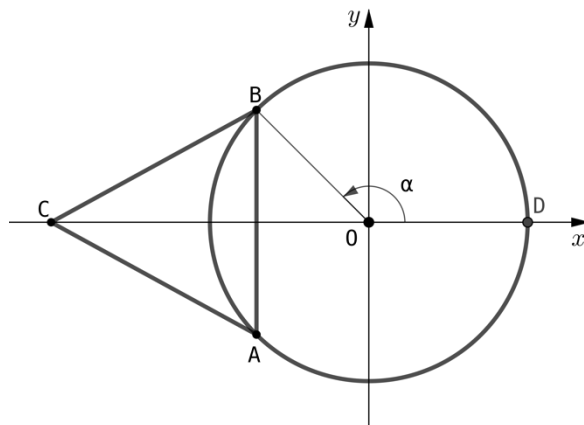


Figura 1

O perímetro do triângulo  $[ABC]$  é dado, em função de  $\alpha$ , por:

- |  |   |
|--|---|
| (A) $2\sin \alpha + 2\sqrt{5 + 4 \cos \alpha}$ | (B) $-2\sin \alpha + 2\sqrt{5 + 4 \cos \alpha}$ |
| (C) $2\sin \alpha + 2\sqrt{5 - 4 \cos \alpha}$ | (D) $-2\sin \alpha + 2\sqrt{5 - 4 \cos \alpha}$ |

2. Considere a função  $f$ , de domínio  $\mathbb{R}$ , definida por  $f(x) = 1 - 2 \cos\left(\frac{x}{2}\right)$

2.1. Seja  $\alpha \in \left]-\frac{\pi}{2}, 0\right[$  tal que  $f(2\alpha + \pi) = 1 - \sqrt{2}$ . Determine o valor de  $f(4\alpha)$ .

2.2. Na Figura 2 está representada parte do gráfico da função  $f$  bem como o triângulo  $[ABC]$ .

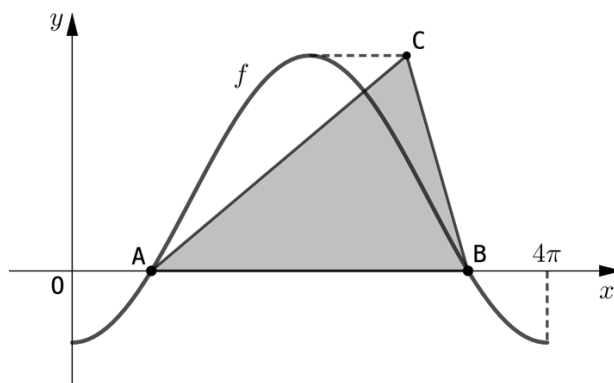


Figura 2

Sabe-se que:

- $A$  e  $B$  são pontos de interseção do gráfico de  $f$  com o eixo das abcissas;
- a ordenada do ponto  $C$  é igual ao máximo de  $f$ .

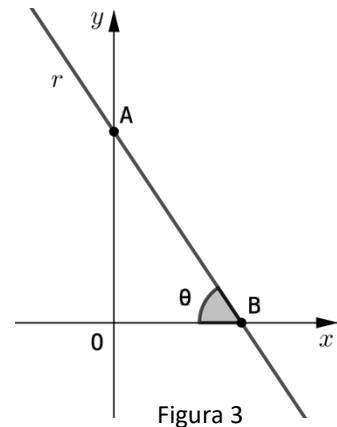
Determine o valor da área do triângulo  $[ABC]$ .

3. Na Figura 3 está representada, num referencial o.n.  $xOy$ , uma reta  $r$  que intersesta os eixos coordenados  $Oy$  e  $Ox$  nos pontos  $A$  e  $B$ , respetivamente.

A reta  $r$  é paralela à reta definida pela equação vetorial

$$(x, y) = (\sqrt{13}, 2) + k(2, -3), \quad k \in \mathbb{R}$$

Sendo  $\widehat{ABO} = \theta$ , determine o valor de  $\sin\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right)$ .



4. Considere, num referencial o.n.  $Oxyz$ , os planos:

$$\alpha: 2x - 2y + z - 1 = 0 \quad \text{e} \quad \beta: x + 4ky - (k^2 + 2)z = 0, \quad \text{com } k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

- 4.1. Para um certo valor de  $k$ , os planos  $\alpha$  e  $\beta$  são perpendiculares.

Determine esse valor de  $k$ .

- 4.2. Considere a reta  $r$  que passa pelo ponto  $(1, 1, 1)$  e tem a direção do vetor  $\vec{r}(-1, -1, 0)$ .

Qual das seguintes afirmações é verdadeira?

- (A) A reta  $r$  é perpendicular ao plano  $\alpha$ .
- (B) A reta  $r$  é concorrente com o plano  $\alpha$ , mas não é perpendicular ao plano  $\alpha$ .
- (C) A reta  $r$  é estritamente paralela ao plano  $\alpha$ .
- (D) A reta  $r$  está contida no plano  $\alpha$ .

- 4.3. Determine uma equação da superfície esférica de centro  $C(3, -1, 2)$  que é tangente ao plano  $\alpha$ .

5. De dois vetores  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$ , sabe-se que:

- $\|\vec{u}\| = 3$
- $\|\vec{v}\| = 5$
- $\|\vec{u} + \vec{v}\| = 6$

Qual é o valor de  $\vec{u} \cdot \vec{v}$ ?

(A)  $\sqrt{2}$

(B)  $\frac{\sqrt{2}}{2}$

(C) 1

(D) 2

6. Acerca de uma sucessão  $(u_n)$ , sabe-se que:

- $u_{n+1} - u_n = -\frac{2}{(n+2)(2n+3)}$ , para todo  $n \in \mathbb{N}$
- $\lim u_n = \lim v_n$  e  $v_n = \frac{1-4n}{2n+3}$

Qual das seguintes afirmações é verdadeira?

- (A)  $(u_n)$  não é monótona nem limitada.  
 (B)  $(u_n)$  é monótona crescente e é limitada.  
 (C)  $(u_n)$  é monótona decrescente e  $u_1 > -2$ .  
 (D)  $(u_n)$  é monótona decrescente e não é minorada.

7. A sucessão  $(a_n)$  é uma progressão aritmética tal que  $a_{10} = -25$  e  $a_4 = -7$ .

Determine a soma dos primeiros 20 termos da sucessão.

8. Dado um certo valor natural de  $p$ , a sucessão  $(w_n)$ , de termos não nulos, verifica:

- $\frac{w_{n+1}}{w_n} = \frac{(-1)^p}{2}$
- $w_2 = -16$

Qual das seguintes afirmações é verdadeira?

- (A) Se  $p = 1$  a sucessão  $(w_n)$  é uma progressão geométrica decrescente.  
 (B) Se  $p = 2$  a sucessão  $(w_n)$  é uma progressão geométrica de termos negativos e  $-16$  é um dos minorantes do conjunto dos termos da sucessão.  
 (C) Se  $p = 3$  a sucessão  $(w_n)$  é uma progressão geométrica de razão  $-\frac{1}{2}$  e  $w_n = (-2)^{6-n}$ .  
 (D) Se  $p = 2$  a sucessão  $(w_n)$  é uma progressão geométrica de razão  $\frac{1}{2}$  e  $w_n = -2^{6-n}$ .

9. Fixado um número real  $k$ , a expressão seguinte define, no respetivo domínio, uma função racional  $f$ .

$$f(x) = \frac{kx + 1}{2x + 3}$$

9.1. Sabe-se que o gráfico da função  $f$  admite duas assíntotas que se intersectam num ponto. Designe esse ponto por  $P$ . Determine para que valor negativo de  $k$ , a distância de  $P$  à origem  $O$  é igual a  $\frac{5}{2}$ .

9.2. Considere  $k = 1$  nas próximas questões.

9.2.1. Resolva a inequação  $f(x) \leq \frac{3}{5}$

Apresente o conjunto solução na forma de intervalo ou de reunião de intervalos.

9.2.2. Determine o valor de  $\lim_{x \rightarrow -1^+} \left( f(x) \times \frac{4x+6}{x^3-3x-2} \right)$

10. No referencial cartesiano da Figura 4 estão representados parte do gráfico de uma função  $g$  e a reta  $t$  tangente ao gráfico de  $g$  no ponto  $A(1,1)$ .

Sabe-se ainda que a reta  $t$  interseca o eixo  $Ox$  no ponto  $B$  de abcissa  $-\frac{1}{2}$ .

Qual o valor de  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{g(x)-1}{2-2x}$  ?

- (A)  $-\frac{2}{3}$
- (B)  $-\frac{1}{3}$
- (C)  $\frac{1}{3}$
- (D)  $\frac{2}{3}$

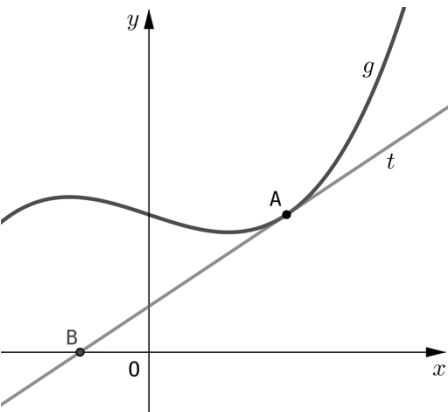


Figura 4

FIM

QUESTÃO	1.	2.1	2.2	3	4.1	4.2	4.3	5.	6.	7.	8.	9.1	9.2.1	9.2.2	10.	TOTAL
COTAÇÃO	8	18	20	16	12	8	20	8	8	18	8	16	16	16	8	200



## SPM@TESTES

Teste de Matemática

2021

11.º ano de Escolaridade

Duração da Prova: 90 minutos. | Tolerância: 30 minutos.

(cinco páginas)

### VERSÃO 2

Para cada resposta, identifique o grupo e o item.

Apresente as suas respostas de forma legível.

As cotações dos itens encontram-se no final do enunciado da prova.

**Não é permitido o uso de máquina de calcular.**

Na resposta aos itens de **escolha múltipla**, selecione a opção correta. Escreva, na folha de respostas, o número do item e a letra que identifica a opção escolhida.

Na resposta aos restantes, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias.



1. Na Figura 1 está representada, num referencial o.n.  $xOy$ , a circunferência trigonométrica.

Sabe-se que:

- o ponto  $D$  tem coordenadas  $(1, 0)$ ;
- o ponto  $A$  pertence à circunferência;
- o ponto  $B$  pertence à circunferência e é tal que o segmento de reta  $[AB]$  é paralelo ao eixo  $Oy$ ;
- o ponto  $C$  tem coordenadas  $(-2, 0)$ ;
- $\alpha$  é a amplitude, em radianos, do ângulo  $DOB$ , com  $\alpha \in \left] \frac{\pi}{2}, \pi \right[$ .

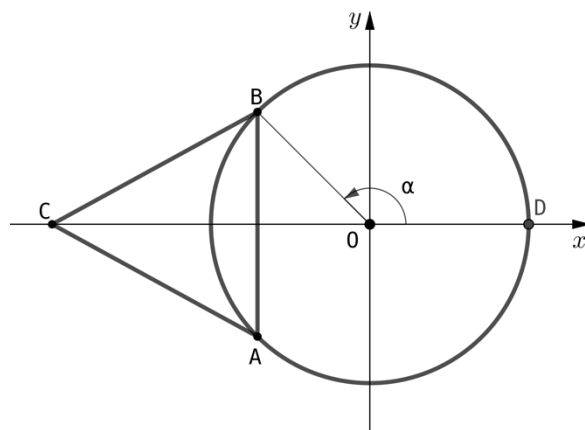


Figura 1

O perímetro do triângulo  $[ABC]$  é dado, em função de  $\alpha$ , por:

- |  |   |
|--|---|
| (A) $2\sin \alpha + 2\sqrt{5 - 4 \cos \alpha}$ | (B) $-2\sin \alpha + 2\sqrt{5 - 4 \cos \alpha}$ |
| (C) $2\sin \alpha + 2\sqrt{5 + 4 \cos \alpha}$ | (D) $-2\sin \alpha + 2\sqrt{5 + 4 \cos \alpha}$ |

2. Considere a função  $f$ , de domínio  $\mathbb{R}$ , definida por  $f(x) = 1 - 2 \cos\left(\frac{x}{2}\right)$

2.1. Seja  $\alpha \in \left] -\frac{\pi}{2}, 0 \right[$  tal que  $f(2\alpha + \pi) = 1 - \sqrt{2}$ . Determine o valor de  $f(4\alpha)$ .

2.2. Na Figura 2 está representada parte do gráfico da função  $f$  bem como o triângulo  $[ABC]$ .

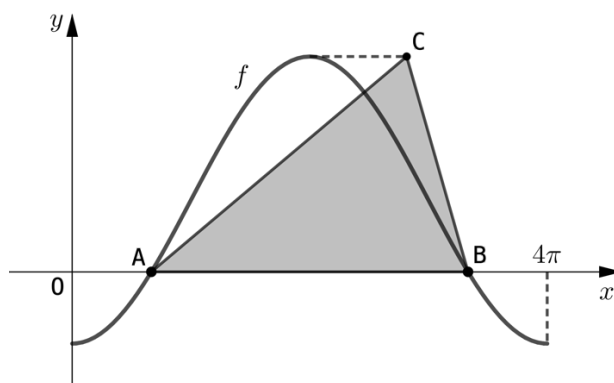


Figura 2

Sabe-se que:

- $A$  e  $B$  são pontos de interseção do gráfico de  $f$  com o eixo das abcissas;
- a ordenada do ponto  $C$  é igual ao máximo de  $f$ .

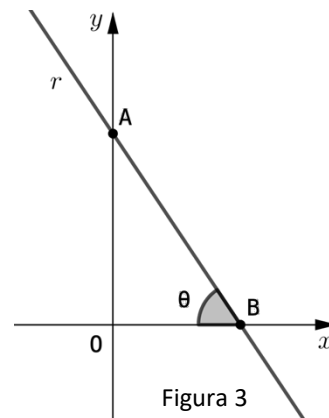
Determine o valor da área do triângulo  $[ABC]$ .

3. Na Figura 3 está representada, num referencial o.n.  $xOy$ , uma reta  $r$  que intersesta os eixos coordenados  $Oy$  e  $Ox$  nos pontos  $A$  e  $B$ , respetivamente.

A reta  $r$  é paralela à reta definida pela equação vetorial

$$(x, y) = (\sqrt{13}, 2) + k(2, -3), \quad k \in \mathbb{R}$$

Sendo  $\widehat{ABO} = \theta$ , determine o valor de  $\sin\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right)$ .



4. Considere, num referencial o.n.  $Oxyz$ , os planos:

$$\alpha: 2x - 2y + z - 1 = 0 \quad \text{e} \quad \beta: x + 4ky - (k^2 + 2)z = 0, \quad \text{com } k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

- 4.1. Para um certo valor de  $k$ , os planos  $\alpha$  e  $\beta$  são perpendiculares.

Determine esse valor de  $k$ .

- 4.2. Considere a reta  $r$  que passa pelo ponto  $(1, 1, 1)$  e tem a direção do vetor  $\vec{r}(-1, -1, 0)$ .

Qual das seguintes afirmações é verdadeira?

(A) A reta  $r$  é estritamente paralela ao plano  $\alpha$ .

(B) A reta  $r$  está contida no plano  $\alpha$ .

(C) A reta  $r$  é perpendicular ao plano  $\alpha$ .

(D) A reta  $r$  é concorrente com o plano  $\alpha$ , mas não é perpendicular ao plano  $\alpha$ .

- 4.3. Determine uma equação da superfície esférica de centro  $C(3, -1, 2)$  que é tangente ao plano  $\alpha$ .

5. De dois vetores  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$ , sabe-se que:

- $\|\vec{u}\| = 3$
- $\|\vec{v}\| = 5$
- $\|\vec{u} + \vec{v}\| = 6$

Qual é o valor de  $\vec{u} \cdot \vec{v}$ ?

(A) 2

(B)  $\sqrt{2}$

(C)  $\frac{\sqrt{2}}{2}$

(D) 1



6. Acerca de uma sucessão  $(u_n)$ , sabe-se que:

- $u_{n+1} - u_n = -\frac{2}{(n+2)(2n+3)}$ , para todo  $n \in \mathbb{N}$
- $\lim u_n = \lim v_n$  e  $v_n = \frac{1-4n}{2n+3}$

Qual das seguintes afirmações é verdadeira?

- (A)  $(u_n)$  não é monótona nem limitada.
- (B)  $(u_n)$  é monótona decrescente e  $u_1 > -2$ .
- (C)  $(u_n)$  é monótona decrescente e não é minorada.
- (D)  $(u_n)$  é monótona crescente e é limitada.

7. A sucessão  $(a_n)$  é uma progressão aritmética tal que  $a_{10} = -25$  e  $a_4 = -7$ .

Determine a soma dos primeiros 20 termos da sucessão.

8. Dado um certo valor natural de  $p$ , a sucessão  $(w_n)$ , de termos não nulos, verifica:

- $\frac{w_{n+1}}{w_n} = \frac{(-1)^p}{2}$
- $w_2 = -16$

Qual das seguintes afirmações é verdadeira?

- (A) Se  $p = 1$  a sucessão  $(w_n)$  é uma progressão geométrica decrescente.
- (B) Se  $p = 2$  a sucessão  $(w_n)$  é uma progressão geométrica de razão  $\frac{1}{2}$  e  $w_n = -2^{6-n}$ .
- (C) Se  $p = 2$  a sucessão  $(w_n)$  é uma progressão geométrica de termos negativos e  $-16$  é um dos minorantes do conjunto dos termos da sucessão.
- (D) Se  $p = 3$  a sucessão  $(w_n)$  é uma progressão geométrica de razão  $-\frac{1}{2}$  e  $w_n = (-2)^{6-n}$ .

9. Fixado um número real  $k$ , a expressão seguinte define, no respetivo domínio, uma função racional  $f$ .

$$f(x) = \frac{kx + 1}{2x + 3}$$

9.1. Sabe-se que o gráfico da função  $f$  admite duas assíntotas que se intersectam num ponto. Designe esse ponto por  $P$ . Determine para que valor negativo de  $k$ , a distância de  $P$  à origem  $O$  é igual a  $\frac{5}{2}$ .

9.2. Considere  $k = 1$  nas próximas questões.

9.2.1. Resolva a inequação  $f(x) \leq \frac{3}{5}$

Apresente o conjunto solução na forma de intervalo ou de reunião de intervalos.

9.2.2. Determine o valor de  $\lim_{x \rightarrow -1^+} \left( f(x) \times \frac{4x+6}{x^3-3x-2} \right)$

10. No referencial cartesiano da Figura 4 estão representados parte do gráfico de uma função  $g$  e a reta  $t$  tangente ao gráfico de  $g$  no ponto  $A(1,1)$ .

Sabe-se ainda que a reta  $t$  interseca o eixo  $Ox$  no ponto  $B$  de abscissa  $-\frac{1}{2}$ .

Qual o valor de  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{g(x)-1}{2-2x}$ ?

- (A)  $-\frac{2}{3}$
- (B)  $\frac{2}{3}$
- (C)  $-\frac{1}{3}$
- (D)  $\frac{1}{3}$

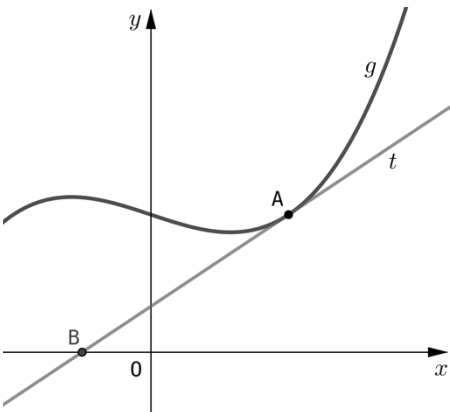


Figura 4

FIM

COTAÇÕES

QUESTÃO	1.	2.1	2.2	3	4.1	4.2	4.3	5.	6.	7.	8.	9.1	9.2.1	9.2.2	10.	TOTAL
COTAÇÃO	8	18	20	16	12	8	20	8	8	18	8	16	16	16	8	200