PROPOSTA DE RESOLUÇÃO

Prova 2 – Matemática A – 2021

Sinal + *Nuno Miguel Guerreiro*

1.

⋆ **1.1.** Como $\overrightarrow{FA} = \overrightarrow{FH} + \overrightarrow{HA}$ e $\overrightarrow{FH} = -\overrightarrow{AC}$ tem-se:

$$2\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{FA} = 2\overrightarrow{AC} \cdot \left(\overrightarrow{FH} + \overrightarrow{HA} + \overrightarrow{AH}\right) = 2\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{FH} = 2\overrightarrow{AC} \cdot \left(-\overrightarrow{AC}\right) = -2\|\overrightarrow{AC}\|^2$$

$$= -2\left(\sqrt{1^2 + 3^2 + (-1)^2}\right)^2 = -2\left(\sqrt{11}\right)^2 = -22$$

⋆ **1.2.** Seja M o ponto médio do segmento $[HF]$, e seja $P(x,y,z)$ um ponto do plano mediador deste segmento. Tem-se então que $\overrightarrow{HF} \cdot \overrightarrow{MP} = 0$.

Pode-se obter o ponto M notando que $F = H + \overrightarrow{AC} = \left(0, -\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right) + (1,3,-1) = \left(1, \frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right)$. Logo tem-se que $M = \left(\frac{1+0}{2}, \frac{3/2 - 3/2}{2}, \frac{1/2 + 3/2}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}, 0, 1\right)$.

Como $\overrightarrow{HF} = \overrightarrow{AC} = (1,3,-1)$ e $\overrightarrow{MP} = P - M = (x,y,z) - \left(\frac{1}{2}, 0, 1\right) = \left(x - \frac{1}{2}, y, z-1\right)$ tem-se:

$$\overrightarrow{HF} \cdot \overrightarrow{MP} = 0 \Leftrightarrow (1,3,-1) \cdot \left(x - \frac{1}{2}, y, z-1\right) = 0 \Leftrightarrow x - \frac{1}{2} + 3y - z + 1 = 0 \Leftrightarrow x + 3y - z + \frac{1}{2} = 0$$

O plano mediador do segmento $[HF]$ é definido pela equação $x + 3y - z + \frac{1}{2} = 0$.

2. Note-se que para $n < 50$ tem-se $1 \leq u_n \leq 49^2$ e para $n \geq 50$ tem-se $-1 \leq u_n \leq 1$. Desta forma tem-se que $\forall n \in \mathbb{N}, -1 \leq u_n \leq 49^2$, logo a sucessão (u_n) é limitada.

Resposta: (C)

⋆ **3.** Tem-se:

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{(-1/2)^{4(n+1)+1}}{(-1/2)^{4n+1}} = \frac{(-1/2)^{4n+5}}{(-1/2)^{4n+1}} = \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{16}$$

concluindo-se que (v_n) é uma progressão geométrica, uma vez que $\forall n \in \mathbb{N}, \frac{v_{n+1}}{v_n} = 1/16 \in \mathbb{R}$.

Estudemos a monotonia de (v_n):

$$v_{n+1} - v_n = (-1/2)^{4n+5} - (-1/2)^{4n+1} = (-1/2)^{4n+1}\left(\frac{1}{16} - 1\right) = -\frac{15}{16}(-1/2)^{4n+1}$$

uma vez que $4n+1$ é um número ímpar para todo e qualquer $n \in \mathbb{N}$, tem-se que $\forall n \in \mathbb{N}, (-1/2)^{4n+1} < 0$, e portanto $\forall n \in \mathbb{N}, -\frac{15}{16}(-1/2)^{4n+1} > 0$, isto é $\forall n \in \mathbb{N}, v_{n+1} - v_n > 0$. Conclui-se que (v_n) é estritamente crescente.

⋆ **4.** Tem-se que:

$$P\left(A|(\overline{A} \cup B)\right) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{P\left(A \cap (\overline{A} \cup B)\right)}{P\left(\overline{A} \cup B\right)} = \frac{1}{2} \overset{(1)}{\Leftrightarrow} \frac{P(A \cap B)}{P\left(\overline{A} \cup B\right)} = \frac{1}{2} \overset{(2)}{\Leftrightarrow} \frac{P(A \cap B)}{1 - P\left(A \cap \overline{B}\right)} = \frac{1}{2}$$

$$1 - P(A \cap \overline{B}) = 2P(A \cap B) \Leftrightarrow P(A \cap \overline{B}) = 1 - 2P(A \cap B)$$

em que se usou o facto de $A\cap\left(\overline{A}\cup B\right)=(A\cap\overline{A})\cup(A\cap B)=\emptyset\cup(A\cap B)=A\cap B$ em **(1)**, e ainda a propriedade $P(\overline{A}\cup B)=1-P(\overline{\overline{A}\cup B})=1-P(A\cap\overline{B})$ pelas Leis de De Morgan em **(2)**.

Logo tem-se:

$P(A)=\dfrac{3}{5}\Leftrightarrow P(A\cap B)+1-2P(A\cap B)=\dfrac{3}{5}\Leftrightarrow P(A\cap B)=\dfrac{2}{5}$

concluindo-se que $P(B|A)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(A)}=\dfrac{2/5}{3/5}=\dfrac{2}{3}$.

5. Pela simetria do Triângulo de Pascal tem-se que ${}^{448}C_{400}={}^{448}C_{448-400}={}^{448}C_{48}$.

Logo tem-se ${}^{448}C_{49}+{}^{448}C_{400}={}^{448}C_{49}+{}^{448}C_{48}={}^{449}C_{49}$. A linha cujos elementos são da forma ${}^{449}C_p$ é a linha 449 que tem 450 elementos. Destes 450 elementos, os elementos entre ${}^{449}C_{50}$ e ${}^{449}C_{399}$ são todos maiores que ${}^{449}C_{49}={}^{449}C_{400}$. Existem, portanto, $399-50+1=350$ elementos maiores que ${}^{449}C_{49}$.

A probabilidade pedida é então $\dfrac{350}{450}=\dfrac{7}{9}$.

Resposta: (D)

⋆ 6. Existem 5 maneiras de dispôr as bolas brancas no tabuleiro de modo a que uma coluna fique inteiramente preenchida com bolas brancas. Note-se que escolhendo a coluna, as bolas ficam dispostas inequivocamente (não interessa a ordem).

Existem agora 20 casas no tabuleiro por preencher para 10 bolas pretas numeradas (portanto diferentes entre si), sendo possível distribui-las de ${}^{20}A_{10}$ maneiras diferentes.

Desta forma, existem $5\times{}^{20}A_{10}$ maneiras diferentes de dispor as peças no tabuleiro de acordo com as condições do enunciado.

7. Como o afixo de $\bar{z}$ está situado no segundo quadrante, o afixo de z está situado no terceiro quadrante.

O número complexo $z/3$ é tal que o seu módulo é $1/3$ do módulo de z, mas o seu argumento é o mesmo que o argumento de z. Logo, o afixo de $z/3$ também se situa no terceiro quadrante.

Resposta: (C)

⋆ 8. Note-se que $|\sqrt{3}-i|=\sqrt{(-\sqrt{3})^2+1^2}=\sqrt{4}=2$ e $\arg(\sqrt{3}-i)=\operatorname{tg}^{-1}(-1/\sqrt{3})=-\dfrac{\pi}{6}$, uma vez que o afixo de $\sqrt{3}-i$ está situado no quarto quadrante. Logo $\sqrt{3}-i=2e^{i(-\pi/6)}$.

Como $(2+3i)^2=2^2+12i+9i^2=4+12i-9=-5+12i$ tem-se:

$$w=\frac{5(\sqrt{3}-i)^5}{(2+3i)^2-12i}=\frac{5\left(2e^{i(-\pi/6)}\right)^5}{-5+12i-12i}=\frac{5\times2^5e^{i(-5\pi/6)}}{-5}=-32e^{i(-5\pi/6)}=32e^{i\pi}e^{i(-5\pi/6)}=32e^{i(\pi/6)}$$

Como $i^7=i^4\times i^3=1\times(-i)=-i=e^{i(-\pi/2)}$, considerando $z=\rho e^{i\beta}$ tem-se:

$$\frac{z^4}{w}=i^7\Leftrightarrow\frac{\left(\rho e^{i\beta}\right)^4}{32e^{i(\pi/6)}}=e^{i(-\pi/2)}\Leftrightarrow\frac{\rho^4e^{i(4\beta)}}{32e^{i(\pi/6)}}=e^{i(-\pi/2)}\Leftrightarrow\frac{\rho^4}{32}e^{i(4\beta-\pi/6)}=e^{i(-\pi/2)}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{\rho^4}{32}=1\\ 4\beta-\dfrac{\pi}{6}=-\dfrac{\pi}{2}+2\pi k\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\rho=\sqrt[4]{32}=2\sqrt{2}\\ \beta=-\dfrac{\pi}{12}+\dfrac{\pi k}{2}\end{cases},k\in\{0,1,2,3\}$$

As quatro soluções da equação são $2\sqrt[4]{2}e^{-i\pi/12}$, $2\sqrt[4]{2}e^{i5\pi/12}$, $2\sqrt[4]{2}e^{i11\pi/12}$ e $2\sqrt[4]{2}e^{i17\pi/12}$.

9. O domínio de $h \circ f$ é o conjunto D tal que:

$D = \{x \in D_f : f(x) \in D_h\} = \{x \in [-2{,}4] : f(x) + 2 > 0\} = \{x \in [-2{,}4] : f(x) > -2\}$

Por observação do gráfico de f conclui-se o intervalo de números reais que é solução da inequação $f(x) > -2$ é $]-1{,}4]$.

Resposta: (C)

10.

⋆ **10.1.** Como o raio do orifício é igual a $1/75$ do raio do tanque tem-se $D/d = 75$. O tanque esvaziou-se inteiramente em 1 hora, isto é, em $60 \times 60 = 3600$ segundos. Vem então:

$$3600 = 75^2\sqrt{\frac{2H}{9.81}} \Leftrightarrow \sqrt{\frac{2H}{9.81}} = \frac{3600}{75^2} \Leftrightarrow \frac{2H}{9.81} = \left(\frac{3600}{75^2}\right)^2 \Leftrightarrow H = \frac{9.81}{2} \times \left(\frac{3600}{75^2}\right)^2 \approx 2{,}01$$

A altura do tanque é de aproximadamente 2 metros.

⋆ **10.2.** Os dois tanques têm o mesmo diâmetro D.

O tanque A é tal que $H = D$ e $d = D - 0{,}5$, logo

$$t_A = \left(\frac{D}{D-0{,}5}\right)^2\sqrt{\frac{2D}{9{,}81}}$$

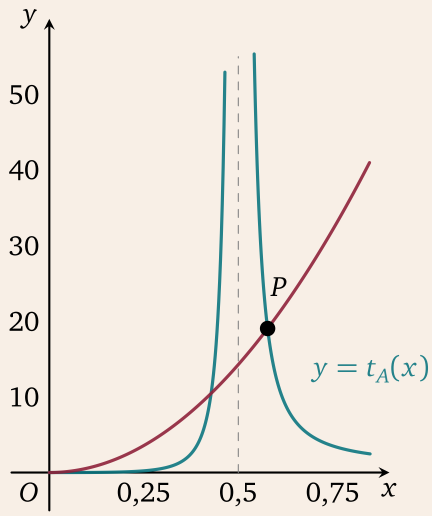
O tanque B é tal que $H = 0{,}4$ e $d = 0{,}1$, logo

$$t_B = \left(\frac{D}{0{,}1}\right)^2\sqrt{\frac{2 \times 0{,}4}{9{,}81}} = 100D^2\sqrt{\frac{0{,}8}{9{,}81}}$$

Sabe-se que $t_A = 2t_B$.

Recorrendo às capacidades gráficas da calculadora pode ser resolvida a equação $t_A = 2t_B$. Para tal, esboçemos a curva $t_A(x) = \left(\frac{x}{x-0{,}5}\right)^2\sqrt{\frac{2x}{9{,}81}}$ e a curva $2t_B(x) = 200x^2\sqrt{\frac{0{,}8}{9{,}81}}$. A solução obter-se-á através da abcissa do ponto de interseção das duas curvas para $x > 0{,}5$.

A abcissa desse ponto de interseção (ponto P representado na figura a cheio e preto) é $x \approx 0{,}58$.



11. O ponto A tem coordenadas $(2\cos\alpha, 2\operatorname{sen}\alpha)$, pelo que $\overline{OB} = 2\operatorname{sen}\alpha$ e $\overline{OE} = 2\cos\alpha$. Desta forma, obtém-se que a área pretendida é:

$A_{[OBCD]} - A_{[OGFE]} = (2\operatorname{sen}\alpha)^2 - (2\cos\alpha)^2 = 4\operatorname{sen}^2\alpha - 4\cos^2\alpha = 4\left(\operatorname{sen}^2\alpha - \cos^2\alpha\right) = -4\cos(2\alpha)$

em que se utilizou o facto de $\operatorname{sen}^2\alpha - \cos^2\alpha = -\left(\cos^2\alpha - \operatorname{sen}^2\alpha\right) = -\cos(2\alpha)$.

Resposta: (B)

12. Estude-se o sinal de g':

$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \ln x = 0 \land x - 1 \neq 0 \Leftrightarrow x = 1 \land x \neq 1$

Pelo que se conclui que g' não admite quaisquer zeros no seu domínio. Mais ainda, é fácil verificar que $g'(x) > 0, \forall x \in D_{g'}$. Logo, g é estritamente crescente no seu domínio.

Como g é estritamente crescente no seu domínio, g é injetiva no seu domínio, logo só admite um zero. Mais ainda, tem-se que $2 < 3 \Rightarrow g(2) < g(3)$, logo $g(2) < 0$.

Resposta: (A)

13.

★ 13.1. A reta AB passa pelos pontos de coordenadas $A(0,f(0))$ e $B(0,f(\pi/4))$.

Tem-se que $f(0)=\dfrac{1}{1+\operatorname{tg}0}=\dfrac{1}{1+0}=1$ e $f(\pi/4)=\dfrac{1}{1+\operatorname{tg}(\pi/4)}=\dfrac{1}{1+1}=\dfrac{1}{2}$.

O declive de AB é $m=\dfrac{f(\pi/4)-f(0)}{\pi/4-0}=\dfrac{1/2-1}{\pi/4}=-\dfrac{2}{\pi}$.

Qualquer reta perpendicular à reta AB tem declive $m'=-\dfrac{1}{m}=-\dfrac{1}{-2/\pi}=\dfrac{\pi}{2}$. Como a reta pretendida passa pela origem, a sua ordenada na origem é 0 e uma equação que pode defini-la é $y=\dfrac{\pi}{2}x$.

★ 13.2. Repare que:

$$f(x)=\frac{1}{1+\operatorname{tg}x}=\frac{1}{1+\operatorname{sen}x/\cos x}=\frac{\cos x}{\operatorname{sen}x+\cos x}$$

Vindo que:

$$\begin{aligned}
f'(x)=\left(\frac{\cos x}{\operatorname{sen}x+\cos x}\right)'&=\frac{(\cos x)'(\operatorname{sen}x+\cos x)-\cos x\,(\operatorname{sen}x+\cos x)'}{(\operatorname{sen}x+\cos x)^2}\\
&=\frac{-\operatorname{sen}x(\operatorname{sen}x+\cos x)-\cos x(\cos x-\operatorname{sen}x)}{(\operatorname{sen}x+\cos x)^2}\\
&=\frac{-\operatorname{sen}^2x-\operatorname{sen}x\cos x+\cos^2x+\operatorname{sen}x\cos x}{(\operatorname{sen}x+\cos x)^2}\\
&=\frac{-\left(\operatorname{sen}^2x+\cos^2x\right)}{(\operatorname{sen}x+\cos x)^2}=-\frac{1}{(\operatorname{sen}x+\cos x)^2}
\end{aligned}$$

E, portanto:

$$\begin{aligned}
f''(x)=\left(-\frac{1}{(\operatorname{sen}x+\cos x)^2}\right)'=-\left(-\frac{\left[(\operatorname{sen}x+\cos x)^2\right]'}{(\operatorname{sen}x+\cos x)^4}\right)&=\frac{2\,(\operatorname{sen}x+\cos x)'(\operatorname{sen}x+\cos x)}{(\operatorname{sen}x+\cos x)^4}\\
&=\frac{2(\cos x-\operatorname{sen}x)(\operatorname{sen}x+\cos x)}{(\operatorname{sen}x+\cos x)^4}=\frac{2\left(\cos^2x-\operatorname{sen}^2x\right)}{(\operatorname{sen}x+\cos x)^4}\\
&=\frac{2\cos(2x)}{(\operatorname{sen}x+\cos x)^4}
\end{aligned}$$

Desta forma tem-se:

$g''(x)=0\Leftrightarrow 2\cos(2x)=0\wedge(\operatorname{sen}x+\cos x)^4\neq 0\Leftrightarrow\cos(2x)=0$

uma vez que a condição $(\operatorname{sen}x+\cos x)^4\neq 0$ é universal em D_f.

Em $\mathbb{R}$ tem-se:

$\cos(2x)=0\Leftrightarrow 2x=\dfrac{\pi}{2}+k\pi\Leftrightarrow x=\dfrac{\pi}{4}+k\dfrac{\pi}{2}, k\in\mathbb{Z}$, pelo que a única solução em D_f é $x=\dfrac{\pi}{4}$.

Através de uma tabela de sinal tem-se:

x	$-\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{2}$
$g''(x)$	ND	$+$	0	$-$	ND
$g(x)$	ND	$\cup$	p.i	$\cap$	ND

Conclui-se então que:

- o gráfico de g tem concavidade voltada para cima em $\left]-\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{4}\right]$;

- o gráfico de g tem concavidade voltada para baixo em $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right[$;
- o gráfico de g admite um ponto de inflexão no ponto de abcissa $x = \frac{\pi}{4}$ tal que $f\left(\pi/4\right) = \frac{1}{2}$. As coordenadas do ponto de inflexão são então $\left(\frac{\pi}{4}, \frac{1}{2}\right)$.

14. Tem-se que $\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) + 4x] + 3 = 0$, logo $\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) - (-4x - 3)] = 0$. Conclui-se então que $y = -4x - 3$ é assíntota oblíqua ao gráfico de g quando $x \to +\infty$.

Como a função f é par, então o seu gráfico é simétrico em relação ao eixo Oy. Desta forma, a reta de equação $y = 4x - 3$ é assíntota oblíqua ao gráfico de g quando $x \to -\infty$.

Resposta: (C)

★ 15. Tem-se que:

$$\lim_{x \to -\infty} [x \ln(e^x + 1)] \overset{\infty \times 0}{=} \lim_{y \to +\infty} \left[-y \ln(e^{-y} + 1)\right] = \lim_{y \to +\infty} \left[-y \ln\left(1 + \frac{1}{e^y}\right)\right]$$

em que se aplicou a mudança de variável $y = -x$, tal que $x \to -\infty \Rightarrow y \to +\infty$.

Ora:

$$-\lim_{y \to +\infty} \left[y \ln\left(1 + \frac{1}{e^y}\right)\right] = -\lim_{y \to +\infty} \left[y \frac{e^y}{e^y} \ln\left(1 + \frac{1}{e^y}\right)\right] = -\lim_{y \to +\infty} \left[\frac{y}{e^y} \ln\left(1 + \frac{1}{e^y}\right)^{e^y}\right]$$

$$= -\lim_{y \to +\infty} \frac{y}{e^y} \times \lim_{y \to +\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{e^y}\right)^{e^y}$$

Tem-se que:

- $\lim\limits_{y \to +\infty} \frac{y}{e^y} = \dfrac{1}{\lim\limits_{y \to +\infty} \frac{e^y}{y}} = \frac{1}{+\infty} = 0$, em que se utilizou o limite notável $\lim\limits_{u \to +\infty} \frac{e^u}{u^p} = +\infty, p \in \mathbb{R}$;
- Seja $u = e^y$ tal que $y \to +\infty \Rightarrow u \to +\infty$: $\lim\limits_{y \to +\infty} \ln\left[\left(1 + \frac{1}{e^y}\right)^{e^y}\right] = \ln\left[\lim\limits_{u \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{u}\right)^u\right] = \ln e = 1$.

Desta forma, tem-se:

$$\lim_{x \to -\infty} [x \ln(e^x + 1)] = -\lim_{y \to +\infty} \frac{y}{e^y} \times \lim_{y \to +\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{e^y}\right)^{e^y} = -0 \times 1 = 0.$$

FIM