Escola Secundária de Penafiel

Exame Modelo V de Matemática A

Duração do Exame: 150 **minutos** + 30 **minutos de tolerância** | **junho de 2018**

Caderno 1 (75 minutos + 15min) + **Caderno 2 (75 minutos + 15min)**

12.º Ano de Escolaridade | Turma - G - K

Caderno 1

- **Duração:** 75 **minutos** + 15 **minutos de tolerância**
- **É permitido o uso de calculadora gráfica**

Indica de forma legível a versão da prova. A prova é constituída por dois cadernos (Caderno 1 e Caderno 2). Utiliza apenas caneta ou esferográfica de tinta azul ou preta. Só é permitido o uso de calculadora no Caderno 1. Não é permitido o uso de corretor. Risca o que pretendes que não seja classificado. Para cada resposta identifica o item. Apresenta as tuas respostas de forma legível. Apresenta apenas uma resposta para cada item. A prova apresenta um formulário no Caderno 1. As cotações dos itens de cada Caderno encontram-se no final de cada Caderno.

Na resposta aos itens de seleção (escolha múltipla), seleciona a resposta correta. Escreve na folha de respostas o número do item e a letra que identifica a opção escolhida.

Na resposta aos restantes itens, apresenta o teu raciocínio de forma clara, indicando todos os cálculos que tiveres de efetuar e todas as justificações necessárias. Quando, para um resultado, não é pedida aproximação apresenta sempre o valor exato.

Formulário

Geometria

Comprimento de um arco de circunferência:

αr *(α - amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r - raio)*

área de um polígono regular: *Semiperímetro* $\times$ *Apótema*

área de um setor circular:

$\frac{\alpha r^2}{2}$ *(α- amplitude, em radianos, do ângulo ao centro, r - raio)*

área lateral de um cone: $\pi r g$ *(r - raio da base, g - geratriz)*

área de uma superfície esférica: $4\pi r^2$ *(r - raio)*

Volume da pirâmide: $\frac{1}{3}\times$ *área da base* $\times$ *Altura*

Volume do cone: $\frac{1}{3}\times$ *área da base* $\times$ *Altura*

Volume da esfera: $\frac{4}{3}\pi r^3$ *(r - raio)*

Progressões

Soma dos n primeiros termos de uma progressão (u_n):

Progressão aritmética: $\frac{u_1+u_n}{2}\times n$

Progressão geométrica: $u_1 \times \frac{1-r^n}{1-r}$, $r\neq 1$

Trigonometria

$\sin(a+b)=\sin a\cos b+\sin b\cos a$

$\cos(a+b)=\cos a\cos b-\sin a\sin b$

Lei dos senos

$$\frac{\sin\hat{A}}{a}=\frac{\sin\hat{B}}{b}=\frac{\sin\hat{C}}{c}$$

Lei dos cossenos ou Teorema de Carnot

$a^2=b^2+c^2-2bc\cos\hat{A}$

Complexos

$(|z|cis\theta)^n=|z|^n cis(n\theta)$ ou $(|z|e^{i\theta})^n=|z|^n e^{i(n\theta)}$

$\sqrt[n]{|z|cis\theta}=\sqrt[n]{|z|}cis\left(\frac{\theta+2k\pi}{n}\right)$ ou

$\sqrt[n]{z}=\sqrt[n]{|z|}e^{i\left(\frac{\theta+2k\pi}{n}\right)}$, $k\in\{0;1;2;...;n-1\}$ e $n\in\mathbb{N}$

Probabilidades

$\mu=p_1x_1+\cdots+p_nx_n$

$\sigma=\sqrt{p_1(x_1-\mu)^2+\cdots+p_n(x_n-\mu)^2}$

Se $X\sim N(\mu,\sigma)$, então:

$P(\mu-\sigma<X<\mu+\sigma)\approx 0.6827$

$P(\mu-2\sigma<X<\mu+2\sigma)\approx 0.9545$

$P(\mu-3\sigma<X<\mu+3\sigma)\approx 0.9973$

Regras de derivação

$(u+v)'=u'+v'$

$(uv)'=u'v+uv'$

$\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-uv'}{v^2}$

$(u^n)'=nu^{n-1}u' \quad (n\in\mathbb{R})$

$(\sin u)'=u'\cos u$

$(\cos u)'=-u'\sin u$

$(\tan u)'=\frac{u'}{\cos^2 u}$

$(e^u)'=u'e^u$

$(a^u)'=u'a^u\ln a \quad (a\in\mathbb{R}^+\backslash\{1\})$

$(\ln u)'=\frac{u'}{u}$

$(\log_a u)'=\frac{u'}{u\ln a} \quad (a\in\mathbb{R}^+\backslash\{1\})$

Limites notáveis

$\lim\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e \quad (n\in\mathbb{N})$

$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$

$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1$

$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0$

$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^p}=+\infty \quad (p\in\mathbb{R})$

1. .

Os dois itens que se apresentam a seguir são itens em alternativa
O **item 1.1.** integra-se nos Programas de Matemática A, de 10°, 11° e 12° anos, homologados em 2001 e 2002 **(2001/2002)**
O **item 1.2.** integra-se no Programas e Metas Curriculares de Matemática A, homologado em 2015 **(PMC2015)**
Responde apenas a um dos dois itens
Na tua folha de respostas, identifica claramente o item selecionado

P2001/2002

1.1. Uma moeda equilibrada foi lançada vinte vezes, e, em cada lançamento, registou-se a face que ficou voltada para cima (face nacional ou face europeia)
Qual é a probabilidade, arredondada às centésimas, de sair dez vezes a face nacional?

(A) 0.16
(B) 0.17
(C) 0.18
(D) 0.19

PMC2015

1.2. Um ponto P desloca-se numa reta numérica durante um intervalo de tempo I, de tal forma que a respetiva abcissa é dada, para um certo valor $\alpha \in \mathbb{R}$, por $x(t) = 2\cos\left(\alpha t + \frac{\pi}{4}\right)$, com $t \in I$
Na figura 1 , está representado, em referencial o.n. xOy, o gráfico do oscilador

Sabe-se que:

- $t_1 = \frac{21}{4}$ e $t_2 = \frac{45}{4}$ são dois maximizantes consecutivos da função x

Em qual das opções estão, respetivamente, o valor de α e a frequência deste oscilador?

(A) $\frac{\pi}{3}$ e 6

(B) $\frac{\pi}{4}$ e 6

(C) $\frac{\pi}{3}$ e $\frac{1}{6}$

(D) $\frac{\pi}{4}$ e $\frac{1}{6}$

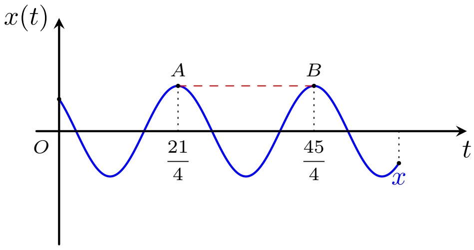

Figura 1

2. Na figura 2, está representada, num referencial o.n. $Oxyz$, uma pirâmide de base retangular

Sabe-se que:

- os pontos A e D estão contidos no plano xOy
- os pontos B e C estão contidos no plano xOz
- o ponto A pertence ao eixo Oy
- o ponto B pertence ao eixo Oz
- o ponto T de coordenadas $\left(1, \frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right)$ é um ponto da base da pirâmide
- o vértice V tem coordenadas $(2; 4; 4)$
- uma equação vetorial da reta que contém a altura da pirâmide é $(x; y; z) = (2; -2; -2) + k(0; 6; 6), k \in \mathbb{R}$

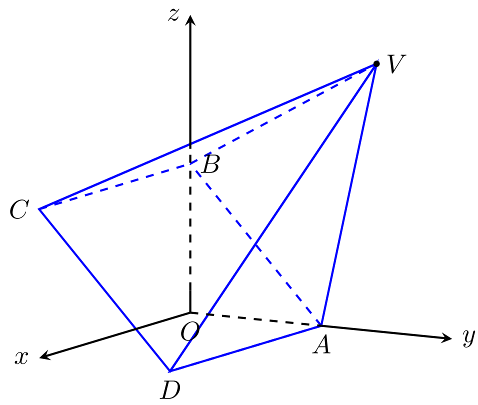

Figura 2

2.1. Determina o volume da pirâmide

2.2. Seja P um ponto do espaço
Identifica o conjunto de pontos do espaço definido pela condição $\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{CP} = 0$

2.3. Vão ser coloridas as cinco faces da pirâmide
Para o efeito, estão disponíveis as seguintes cores: preto, azul, vermelho, verde, castanho, amarelo, rosa e cinzento
Determina a probabilidade de duas e só duas faces opostas serem coloridas com a mesma cor e as restantes faces serem coloridas com cores distintas
Apresenta o resultado na forma de fração irredutível

3. O clube de motards da cidade de Arribas de Baixo é constituído por homens e mulheres, maioritariamente, por homens

3.1. Dez elementos do clube, no último almoço do clube ficaram juntos numa mesa retangular, exatamente com dez lugares, sendo quatro lugares num lado, outros quatro no outro lado e um lugar em cada extremo da mesa
A Ana e o Pedro(que são dois dos elementos deste grupo) gostam de ficar sentados um em frente do outro
De quantas maneiras distintas se podem dispor os dez elementos na mesa, sabendo que a Ana e o Pedro ficam sentados um em frente do outro, e não se sentam nos extremos da mesa?

(A) 322560
(B) 161280
(C) 2257920
(D) 1128960

3.2. Relativamente a esse clube motard, sabe-se que

- um quinto dos elementos do clube são mulheres
- do grupo das mulheres, um quarto tem mota própria
- do grupo dos homens, um quarto não tem mota própria

Escolhe-se, ao acaso, um elemento desse clube motard

Determina a probabilidade desse elemento ser homem dado que tem mota própria
Apresenta o resultado na forma de fração irredutível

4. Seja f a função real de variável real, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $f(x) = e^{-x} + x^2$

   Sejam, $A(0; f(0))$ e $B(1; f(1))$, dois pontos do gráfico de f

   Existe um ponto $C(c; f(c))$, com $0 < c < 1$, em que a reta tangente ao gráfico no ponto C é paralela à reta AB

   Determina, recorrendo à calculadora gráfica, o valor da abcissa c desse ponto C

   Na tua resposta deves:

   - equacionar o problema
   - reproduzir, num referencial o.n., o(s)gráfico(s)da(s)função(ões) visualizado(s) na calculadora que te permite(m) resolver a equação
   - apresenta o valor pedido arredondado às centésimas

5. Seja $w = 2\sin(\alpha) + 2i\cos(\alpha)$, um número complexo em $\mathbb{C}$
   Qual é o valor de $\alpha \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, para o qual iw^3 é solução da condição Re(z)=Im(z)

   (A) $\frac{\pi}{12}$
   (B) $\frac{\pi}{4}$
   (C) $\frac{\pi}{3}$
   (D) $\frac{\pi}{6}$

6. Relativamente a uma progressão geométrica (a_n), monótona crescente, sabe-se que $a_4 = 256$, $a_7 = 131072$ e que $S_n = \frac{585}{2}$, sendo S_n, a soma dos n primeiros termos consecutivos da progressão geométrica
   Determina o valor de n

7. Na figura 3 está representado o plano de Argand-Gauss e nele, um conjunto de pontos (região colorida, incluindo a fronteira), afixos do número complexo $z = x + yi$, com $x, y \in \mathbb{R}$

   Sabe-se que:

   - a circunferência representada tem centro no ponto A
   - $[BC]$ é a corda da circunferência contida no eixo Ox
   - $[DE]$ é uma corda da circunferência paralela ao eixo Ox
   - $[BE]$ é uma corda da circunferência paralela ao eixo Oy
   - $[CD]$ é uma corda da circunferência paralela ao eixo Oy
   - $A(-7; 2)$ e $E(-7 + 2\sqrt{3}; 4)$

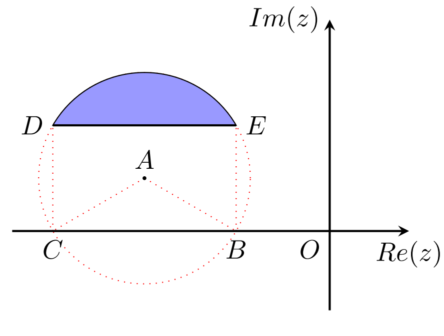

Figura 3

   Qual das condições, na variável complexa, define o conjunto de pontos representado?

   (A) $|z - 7 + 2i| \leq 4 \wedge Im(z) \geq 4$
   (B) $|z + 7 - 2i| \leq 4 \wedge Im(z) \leq 4$
   (C) $|z + 7 - 2i| \leq 4 \wedge Im(z) \geq 4$
   (D) $|z + 7 - 2i| = 4 \wedge Im(z) \geq 4$

FIM DO CADERNO 1

COTAÇÕES

1.		
	....	8 pontos
2.		
2.1	....	14 pontos
2.2	....	8 pontos
2.3	....	12 pontos
3.		
3.1	....	8 pontos
3.2	....	13 pontos
4.		
	....	13 pontos
5.		
	....	8 pontos
6.		
	....	13 pontos
7.		
	....	8 pontos
	TOTAL	**105 pontos**

PÁGINA EM BRANCO

Caderno 2

- **Duração:** 75 **minutos** + 15 **minutos de tolerância**
- **Neste Caderno não é permitida a utilização de calculadora**

8. .

Os dois itens que se apresentam a seguir são itens em alternativa
O **item 8.1.** integra-se nos Programas de Matemática A, de 10°, 11° e 12° anos, homologados em 2001 e 2002 **(2001/2002)**
O **item 8.2.** integra-se no Programas e Metas Curriculares de Matemática A, homologado em 2015 **(PMC2015)**
Responde apenas a um dos dois itens
Na tua folha de respostas, identifica claramente o item selecionado

P2001/2002

8.1. Seja X uma variável aleatória, cuja tabela de distribuição de probabilidade é a que se segue

x_i	0	1	2	3	4
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	a	b	$\frac{1}{3}$

Sabe-se que:

- $P(X = 3) = 3 \times P(X = 2)$

Em qual das opções está o valor de $P(X = 3)$?

(A) $\frac{1}{32}$

(B) $\frac{1}{24}$

(C) $\frac{1}{48}$

(D) $\frac{1}{16}$

PMC2015

8.2. Considera a elipse, definida pela equação $9x^2 + 16y^2 = 144$, e o quadrilátero $[ABCD]$, representados no referencial o.n. xOy, da figura 4

Sabe-se que, os pontos A, B e D são vértices da elipse e que C é o foco que se situa no semieixo negativo Ox

Em qual das opções está o valor da área (em u.a.) do quadrilátero $[ABCD]$?

(A) $12 + \sqrt{7}$

(B) $12 + 4\sqrt{7}$

(C) $12 + 2\sqrt{7}$

(D) $12 + 3\sqrt{7}$

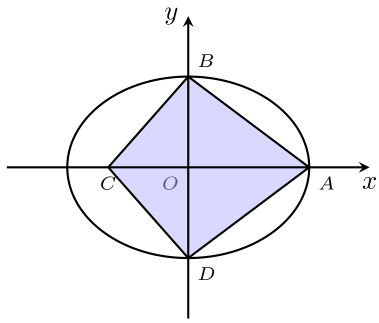

Figura 4

9. Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, considera $w = \dfrac{(1-i)\times i^{19}}{1+\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)^5}$

Sabe-se que o afixo de w é, no plano complexo, vértice de um hexágono regular
Determina o perímetro desse hexágono

10. .

Os dois itens que se apresentam a seguir são itens em alternativa
O **item 10.1.** integra-se nos Programas de Matemática A, de 10°, 11° e 12° anos, homologados em 2001 e 2002 **(2001/2002)**
O **item 10.2.** integra-se no Programas e Metas Curriculares de Matemática A, homologado em 2015 **(PMC2015)**
Responde apenas a um dos dois itens
Na tua folha de respostas, identifica claramente o item selecionado

---

P2001/2002

10.1. Considera, num referencial o.n. $Oxyz$, o plano α definido pela condição $2x+3z-1=0$ e a reta r definida por $\dfrac{x}{2}=\dfrac{y}{3}\wedge z=4$
Pode-se afirmar que

(A) a reta está contida no plano
(B) a reta é oblíqua ao plano
(C) a reta é perpendicular ao plano
(D) a reta é estritamente paralela ao plano

PMC2015

10.2. Considera a função f, real de variável real, definida por $f(x)=\arcsin\left(-1-\dfrac{x}{2}\right)+2\arccos(x)$
Em qual das opções está o valor de $f(-1)$?
(A) $\dfrac{5\pi}{3}$ (B) $\dfrac{11\pi}{6}$ (C) $\dfrac{13\pi}{6}$ (D) $\dfrac{8\pi}{3}$

11. A figura 5 representa uma ponte sobre um rio

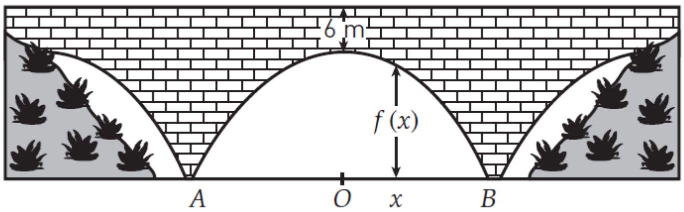

Figura 5

Sabe-se que:

- a distância mínima do arco central da ponte ao tabuleiro é de $6m$
- A e B são os pontos de interseção do arco central da ponte com o nível da água do rio e O o ponto médio de $[AB]$

Considera a reta AB como eixo orientado da esquerda para direita, com origem em O, e onde uma unidade corresponde a um metro
Para cada ponto situado entre A e B de abcissa x, a altura do arco, em metros, é dada por
$f(x)=35-5\left(e^{0.03x}+e^{-0.03x}\right)$

Mostra que, como a figura sugere, que é no ponto de abcissa zero que a altura do arco é máxima

(Retirado e adaptado de exame nacional de 1999, 2ª fase)

12. Considera a função g, real de variável real, de domínio $\mathbb{R}^+$, definida por $g(x) = e^{\ln(x+a)-\ln(x)}$, com $a > 0$
Para um certo valor de a, o ponto de coordenadas $\left(e+1; \dfrac{e+2}{e+1}\right)$ pertence ao gráfico de g
Qual é o valor de a?

(A) 1
(B) 2
(C) 3
(D) 4

13. Considera a função h, real de variável real, de domínio $\mathbb{R}$, definida por

$$h(x) = \begin{cases} \dfrac{e^x - 1}{1 - e^{2x}} & se \quad x < 0 \\ -\dfrac{1}{2} & se \quad x = 0 \\ \dfrac{1 - \sqrt{x+1}}{x} & se \quad x > 0 \end{cases}$$

13.1. Averigua se a função h é contínua no ponto 0
Justifica a tua resposta

13.2. O gráfico da função tem uma assíntota da forma $y = b$, com $b \in \mathbb{R}$, quando $x \to +\infty$
Determina o valor de b
Justifica a tua resposta

14. Considera a função f, real de variável real, definida em $\mathbb{R}^+$ por $f(x) = \ln(x^2)$ e sejam g, uma função real de variável real, contínua e diferenciável, definida em $\mathbb{R}^+$, e cujo gráfico, se representa, em parte, no referencial o.n. xOy, da figura 6, e a um número real, com $0 < a < e$

Qual das afirmações é **falsa**?

(A) $f'(a) \times g''(a) > 0$
(B) $f'(a) \times g'(a) < 0$
(C) $f''(a) + g(a) < 0$
(D) $f''(a) - g''(a) > 0$

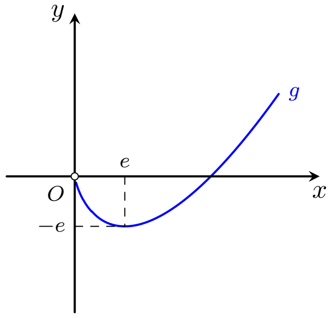

Figura 6

15. Seja f, uma função, real de variável real, de domínio $\mathbb{R}$, contínua e diferenciável, em todo o seu domínio

Sabe-se que:

- $f(0) = 2$ e que $f'(0) = \dfrac{1}{2}$

Mostra que

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(2x)\cos(2x)}{f(x) - 2} = 4$$

16. Considera a função f, real de variável real, de domínio $\mathbb{R}^+$, definida por $f(x) = \ln(x)$
Na figura 7 está, em referencial o.n. xOy, parte do gráfico de f, e um triângulo $[ABC]$

Sabe-se que:

- A e B são pontos do gráfico da função f, de abcissas a e $2a$, respetivamente, com $a > 0$
- o ponto C tem a mesma abcissa do ponto B e a mesma ordenada do ponto A

Determina o(s) valor(es) de a, para o(s) qual(ais), a área do triângulo $[ABC]$ é igual a $\ln(2)a^2$

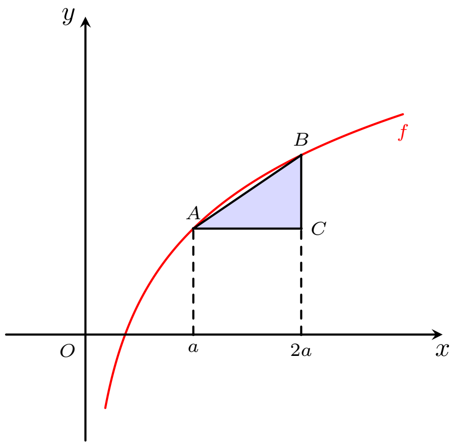

Figura 7

FIM DO CADERNO 2

COTAÇÕES

8.		
	....	8 pontos
9.		
	....	10 pontos
10.		
	....	8 pontos
11.		
	....	10 pontos
12.		
	....	8 pontos
13.		
	13.1	13 pontos
	13.2	10 pontos
14.		
	....	8 pontos
15.		
	....	10 pontos
16.		
	....	10 pontos
	TOTAL	**95 pontos**