



SPM@TESTES

Teste de Matemática

2022

10.º ano de Escolaridade

Duração da Prova: 90 minutos. | Tolerância: 30 minutos.

(seis páginas)

VERSÃO 1

Para cada resposta, identifique o grupo e o item.

Apresente as suas respostas de forma legível.

As cotações dos itens encontram-se no final do enunciado da prova.

Na resposta aos itens de **escolha múltipla**, selecione a opção correta. Escreva, na folha de respostas, o número do item e a letra que identifica a opção escolhida.

Na resposta aos restantes itens, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias.



1. Na *Figura 1* estão representadas, num referencial *o. n. Oxy*, a circunferência de equação $x^2 + y^2 = 10$ e a reta CD de equação $y = 2x - 5$.

Os pontos C e D pertencem à circunferência.

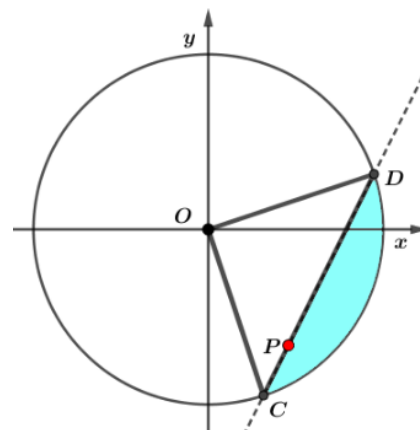


Figura 1

1.1. Represente por meio de uma condição a região sombreada, em que a fronteira está incluída.

1.2. O ponto P de coordenadas (x, y) , desloca-se sobre o segmento de reta $[CD]$.

Entre que valores varia a ordenada do ponto P ?

- (A) $y \in [-1, 3]$ (B) $y \in [-2, 3]$ (C) $y \in [-5, 3]$ (D) $y \in [-3, 1]$

2. Num referencial *o. n. Oxy*, considere a reta definida pela equação vetorial

$$(x, y) = (4, p) + k(2, 6), k \in \mathbb{R}$$

Se a ordenada na origem for -2 então p será igual a:

- (A) -2 (B) 2 (C) 10 (D) -10

3. Na *Figura 2* está representado o gráfico da função f , definida no intervalo $[-2,8]$, sendo constituído pelos segmentos de reta $[AB]$, $[BC]$ e $[CD]$.

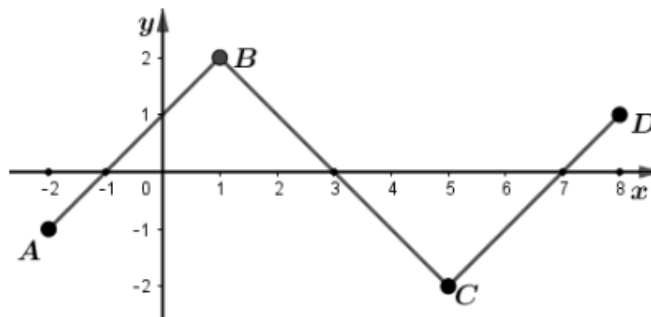


Figura 2

Sabe-se que

- os zeros de f são números inteiros.
- A $(-2, -1)$, B $(1, 2)$, C $(5, -2)$ e D $(8, 1)$ são pontos do gráfico de f .

3.1. Apresente uma tabela de variação da função que descreva a monotonia e os extremos da função f . Indique os intervalos de monotonia da função bem como os seus extremos relativos e absolutos.

3.2. Considere as funções a , b , c e d definidas por:

$$a(x) = 3f(x), \quad b(x) = f(x - 3), \quad c(x) = f(-2x) \quad \text{e} \quad d(x) = f(x) - 3$$

3.2.1. Averigue se as funções b e d têm zeros, identificando-os, em caso afirmativo, e justificando, caso não existam.

3.2.2. Qual das funções a , b , c ou d tem o menor mínimo absoluto?

- (A) a (B) b (C) c (D) d

4. De uma função f , estritamente decrescente em \mathbb{R} , sabe-se que $f(2) = 3$.

Qual dos seguintes valores é negativo?

- (A) $3 - f(2,01)$ (B) $3 - f(1,99)$ (C) $3 - f(3)$ (D) $3 - f(4)$

5. Considere os polinómios $A(x) = x^3 - 9x$, $B(x) = 3x + 16$ e $C(x) = A(x) - B(x)$.

5.1. Determine, em \mathbb{R} , o conjunto solução da condição $A(x) > 0$.

5.2. Mostre que $A(-2) = B(-2)$ e $A(4) = B(4)$ e daí justifique que $C(x) = 0$ é uma equação possível.

5.3. Fatorize $C(x)$ e indique a multiplicidade de cada uma das suas raízes.

6. O gráfico representado na *Figura 3* é uma parábola.

Qual das seguintes expressões a pode definir ?

- (A) $y = (x - 3) \times \left(x - \frac{1}{10}\right)$ (B) $y = x^2 - 3x + 6$
(C) $y = x^2 + 6x + 10$ (D) $y = -x^2 + x + 6$

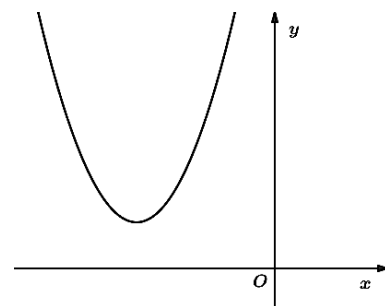


Figura 3

7. Seja f a função definida, em \mathbb{R} , por $f(x) = x^2 - 4x + d$, sendo $d < 4$, e $[ABC]$ um triângulo.

Sabe-se que:

- A e B são os pontos de interseção de f com o eixo Ox ;
- C tem coordenadas $(2, 2)$.

Determine d sabendo que o triângulo $[ABC]$ tem área 2, assumindo que os pontos A e B são equidistantes da reta $x = 2$, eixo de simetria do gráfico de f .

8. Considere a função g definida, em \mathbb{R} , por $g(x) = 3|x - 2| - 1$, cujo gráfico está representado na *Figura 4*.

Determine a equação reduzida de cada uma das retas que contêm as semirretas do gráfico de g .

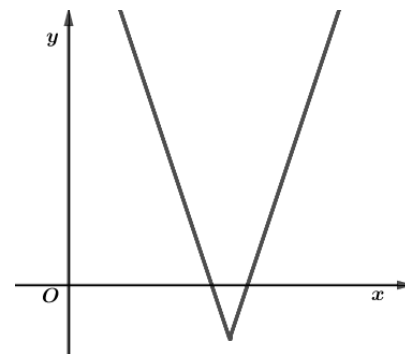


Figura 4

9. $\frac{1}{\sqrt{2}-\sqrt{3}}$ é igual a:

- (A) $\sqrt{3} - \sqrt{2}$ (B) $-\sqrt{2} - \sqrt{3}$ (C) $\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{3}}$ (D) $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$

10. Na *Figura 5*, está representado num referencial *o.n.* $Oxyz$, um paralelepípedo retângulo $[ABCDEFGH]$.

Sabe-se que:

- O vértice A pertence ao eixo Ox e o vértice B pertence ao eixo Oy ;
- As coordenadas dos vértices E e G são $(7, 2, 15)$ e $(6, 10, 13)$, respetivamente;
- A reta EF é definida pela equação vetorial

$$(x, y, z) = (1, -2, 19) + k(-3, -2, 2), k \in \mathbb{R}.$$

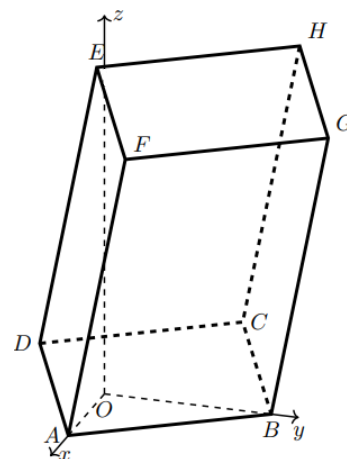


Figura 5

10.1. Considere a superfície esférica de centro em G e que passa em E .

Mostre que os pontos $P(6, 10, 13 + \sqrt{69})$ e $Q(6, 10, 13 - \sqrt{69})$ pertencem a essa superfície esférica e são os extremos de um seu diâmetro.

10.2. Justifique que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{FG}$ e conclua que $\overrightarrow{FG} = (-a, b, 0)$, para certos valores numéricos de a e b , diferentes de zero.

10.3. Determine as coordenadas do ponto F .

Sugestão:

- Comece por justificar que as coordenadas de F podem ser obtidas através da expressão $(1, -2, 19) + k(-3, -2, 2)$, para certo valor de $k \in \mathbb{R}$;
- Utilize $\overrightarrow{FG} = G - F = (-a, b, 0)$, pela alínea 10.2.

FIM

Questão	1.1	1.2	2.	3.1	3.2.1	3.2.2	4	5.1.	5.2.	5.3.	6.	7.	8.	9.	10.1	10.2	10.3	TOTAL
Cotação	14	8	8	14	13	8	8	14	14	14	8	13	14	8	14	14	14	200



SPM@TESTES

Teste de Matemática

2022

10.º ano de Escolaridade

Duração da Prova: 90 minutos. | Tolerância: 30 minutos.

(seis páginas)

VERSÃO 2

Para cada resposta, identifique o grupo e o item.

Apresente as suas respostas de forma legível.

As cotações dos itens encontram-se no final do enunciado da prova.

Na resposta aos itens de **escolha múltipla**, selecione a opção correta. Escreva, na folha de respostas, o número do item e a letra que identifica a opção escolhida.

Na resposta aos restantes itens, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias.



1. Na *Figura 1* estão representadas, num referencial *o. n. Oxy*, a circunferência de equação $x^2 + y^2 = 10$ e a reta CD de equação $y = 2x - 5$.

Os pontos C e D pertencem à circunferência.

1.1. Represente por meio de uma condição a região sombreada, em que a fronteira está incluída.

1.2. O ponto P de coordenadas (x, y) , desloca-se sobre o segmento de reta $[CD]$.

Entre que valores varia a ordenada do ponto P ?

- (A) $y \in [-1, 3]$ (B) $y \in [-2, 3]$ (C) $y \in [-3, 1]$ (D) $y \in [-5, 3]$

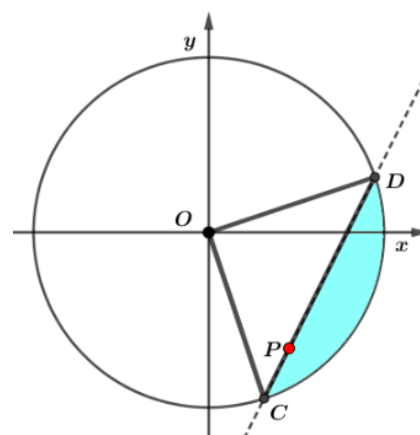


Figura 1

2. Num referencial *o. n. Oxy*, considere a reta definida pela equação vetorial

$$(x, y) = (4, p) + k(2, 6), k \in \mathbb{R}$$

Se a ordenada na origem for -2 então p será igual a:

- (A) -10 (B) -2 (C) 2 (D) 10

3. Na *Figura 2* está representado o gráfico da função f , definida no intervalo $[-2,8]$, sendo constituído pelos segmentos de reta $[AB]$, $[BC]$ e $[CD]$.

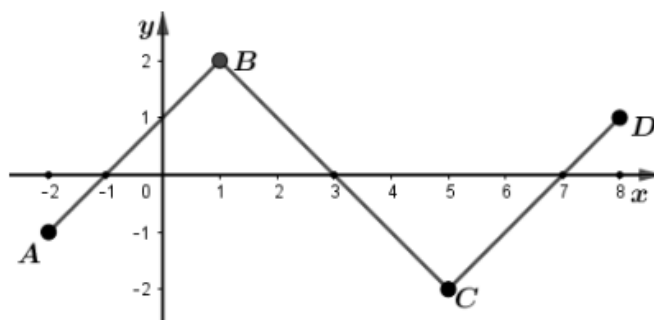


Figura 2

Sabe-se que:

- Os zeros de f são números inteiros;
- $A(-2, -1)$, $B(1, 2)$, $C(5, -2)$ e $D(8, 1)$ são pontos do gráfico de f .

3.1. Apresente uma tabela de variação da função que descreva a monotonia e os extremos da função f . Indique os intervalos de monotonia da função bem como os seus extremos relativos e absolutos.

3.2. Considere as funções a , b , c e d definidas por:

$$a(x) = 3f(x), \quad b(x) = f(x - 3), \quad c(x) = f(-2x) \quad \text{e} \quad d(x) = f(x) - 3$$

3.2.1. Averigue se as funções b e d têm zeros, identificando-os, em caso afirmativo, e justificando, caso não existam.

3.2.2. Qual das funções a , b , c ou d tem o menor mínimo absoluto?

- (A) d (B) c (C) b (D) a

4. De uma função f , estritamente decrescente em \mathbb{R} , sabe-se que $f(2) = 3$.

Qual dos seguintes valores é negativo?

- (A) $3 - f(2,01)$ (B) $3 - f(3)$ (C) $3 - f(1,99)$ (D) $3 - f(4)$

5. Considere os polinómios $A(x) = x^3 - 9x$, $B(x) = 3x + 16$ e $C(x) = A(x) - B(x)$.

5.1. Determine, em \mathbb{R} , o conjunto solução da condição $A(x) > 0$.

5.2. Mostre que $A(-2) = B(-2)$ e $A(4) = B(4)$ e daí justifique que $C(x) = 0$ é uma equação possível.

5.3. Fatorize $C(x)$ e indique a multiplicidade de cada uma das suas raízes.

6. O gráfico representado na *Figura 3* é uma parábola.

Qual das seguintes expressões a pode definir ?

- (A) $y = -x^2 + x + 6$ (B) $y = x^2 + 6x + 10$
 (C) $y = (x - 3) \times \left(x - \frac{1}{10}\right)$ (D) $y = x^2 - 3x + 6$

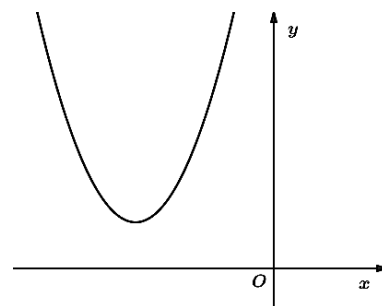


Figura 3

7. Seja f a função definida, em \mathbb{R} , por $f(x) = x^2 - 4x + d$, sendo $d < 4$, e $[ABC]$ um triângulo.

Sabe-se que:

- A e B são os pontos de interseção de f com o eixo Ox ;
- C tem coordenadas $(2, 2)$.

Determine d sabendo que o triângulo $[ABC]$ tem área 2, assumindo que os pontos A e B são equidistantes da reta $x = 2$, eixo de simetria do gráfico de f .

8. Considere a função g definida, em \mathbb{R} , por $g(x) = 3|x - 2| - 1$, cujo gráfico está representado na *Figura 4*.

Determine a equação reduzida de cada uma das retas que contêm as semirretas do gráfico de g .

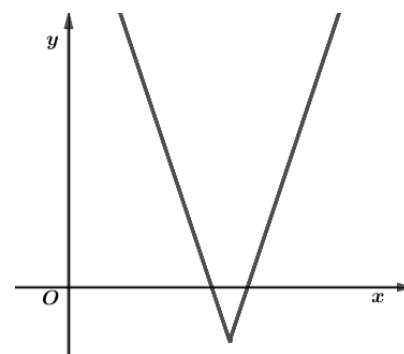


Figura 4

9. $\frac{1}{\sqrt{2}-\sqrt{3}}$ é igual a:

(A) $-\sqrt{2} - \sqrt{3}$

(B) $\sqrt{3} - \sqrt{2}$

(C) $\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{3}}$

(D) $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$

10. Na *Figura 5*, está representado, num referencial o.n. $Oxyz$, um paralelepípedo retângulo $[ABCDEFGH]$.

Sabe-se que:

- O vértice A pertence ao eixo Ox e o vértice B pertence ao eixo Oy ;
- As coordenadas dos vértices E e G são $(7, 2, 15)$ e $(6, 10, 13)$, respetivamente;
- A reta EF é definida pela equação vetorial

$$(x, y, z) = (1, -2, 19) + k(-3, -2, 2), k \in \mathbb{R}$$

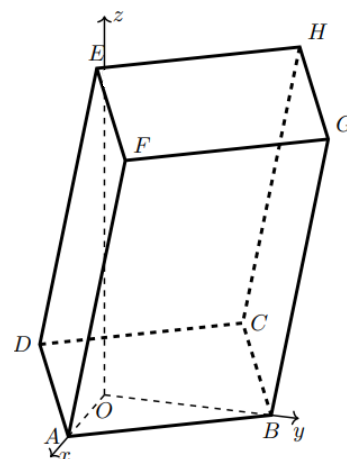


Figura 5

10.1. Considere a superfície esférica de centro em G e que passa em E .

Mostre que os pontos $P(6, 10, 13 + \sqrt{69})$ e $Q(6, 10, 13 - \sqrt{69})$ pertencem a essa superfície esférica e são os extremos de um seu diâmetro.

10.2. Justifique que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{FG}$ e conclua que $\overrightarrow{FG} = (-a, b, 0)$, para certos valores numéricos de a e b , diferentes de zero.

10.3. Determine as coordenadas do ponto F .

Sugestão:

- Comece por justificar que as coordenadas de F podem ser obtidas através da expressão $(1, -2, 19) + k(-3, -2, 2)$, para certo valor de $k \in \mathbb{R}$;
- Utilize $\overrightarrow{FG} = G - F = (-a, b, 0)$, pela alínea **10.2**.

FIM

Questão	1.1	1.2	2.	3.1	3.2.1	3.2.2	4	5.1.	5.2.	5.3.	6.	7.	8.	9.	10.1	10.2	10.3	TOTAL
Cotação	14	8	8	14	13	8	8	14	14	14	8	13	14	8	14	14	14	200