Proposta de Resolução do 1º Teste de Avaliação - Versão 1

Matemática A

12.º Ano de Escolaridade | outubro de 2022

Turma: 12ºB

1. .

   1.1. .

      1.1.1. $-2 \in D_f$

      Para existir $\lim\limits_{x \to -2} f(x)$, deve ter-se $\lim\limits_{x \to -2^-} f(x) = \lim\limits_{x \to -2^+} f(x) = f(-2)$

      Ora,

      - $\lim\limits_{x \to -2^-} f(x) = -1$
      - $\lim\limits_{x \to -2^+} f(x) = -1$
      - $f(-2) = 2$

      Como, $\lim\limits_{x \to -2^-} f(x) \neq f(-2)$ e $\lim\limits_{x \to -2^+} f(x) \neq f(-2)$, então, não existe $\lim\limits_{x \to -2} f(x)$

      1.1.2. $1 \notin D_f$ e é ponto aderente a D_f

      Para existir $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$, deve ter-se $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} f(x)$

      Ora,

      - $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = 4$
      - $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = 4$

      Como, $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} f(x)$, então, existe $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$, e o seu valor é 4

   1.2. Ora,

   $a_n = 2 + \dfrac{1}{n+1} > 2, \forall n \in \mathbb{N}$

   $\lim a_n = \lim \left(2 + \dfrac{1}{n+1}\right) = 2^+$

   Assim, $\lim f(a_n) = 4$

   Resposta: (B)

2. Sabe-se que 3 é zero de f, então,

   $x^3 - 3x^2 - 2x + 6 = (x-3)Q(x)$

   Pela regra de Ruffini, vem,

   $$\begin{array}{c|ccc|c} & 1 & -3 & -2 & 6 \\ 3 & & 3 & 0 & -6 \\ \hline & 1 & 0 & -2 & 0 \end{array}$$

   Assim,

   $Q(x) = x^2 - 2$

   Logo,

   $x^3 - 3x^2 - 2x + 6 = (x-3)(x^2-2)$

   Deste modo,

   $f(x) = 0 \Leftrightarrow \dfrac{x^3 - 3x^2 - 2x + 6}{4x^2+3} = 0 \Leftrightarrow x^3 - 3x^2 - 2x + 6 = 0 \wedge 4x^2 + 3 \neq 0 \Leftrightarrow$

   $\Leftrightarrow (x-3)(x^2-2) = 0 \wedge$ Condição universal $\Leftrightarrow$

   $\Leftrightarrow x - 3 = 0 \vee x^2 - 2 = 0 \Leftrightarrow x - 3 = 0 \vee x^2 = 2 \Leftrightarrow x = 3 \vee x = -\sqrt{2} \vee x = \sqrt{2}$

   Resposta: $-\sqrt{2}; \sqrt{2}; 3$, são os zeros de f

3. $\dfrac{x^2 - 6x + 9}{x^2 - 3x} = \dfrac{(x-3)^2}{x(x-3)} = \dfrac{x-3}{x}$, com $x \neq 0 \wedge x \neq 3$

   Resposta: (A)

4. $-2 \in D_f$

   A função f é contínua em $x = -2$, se existir $\lim\limits_{x \to -2} f(x)$, ou seja,

   se $\lim\limits_{x \to -2^-} f(x) = \lim\limits_{x \to -2^+} f(x) = f(-2)$

   Ora,

   - $\lim\limits_{x \to -2^-} f(x) = \lim\limits_{x \to -2^-} \dfrac{x^2+4x+4}{2x^2-8} =^{\left(\frac{0}{0}\right)} \lim\limits_{x \to -2^-} \dfrac{(x+2)^2}{2(x-2)(x+2)} = \lim\limits_{x \to -2^-} \dfrac{x+2}{2x-4} = 0$

   - $\lim\limits_{x \to -2^+} f(x) = \lim\limits_{x \to -2^+} \left[\dfrac{1}{x+2} \times \left(x^3 + 3x^2 - 4\right)\right] =^{(0 \times \infty)} \lim\limits_{x \to -2^+} \dfrac{x^3+3x^2-4}{x+2} =^{\left(\frac{0}{0}\right)} \lim\limits_{x \to -2^+} \dfrac{(x+2)(x^2+x-2)}{x+2} =$

     $= \lim\limits_{x \to -2^+} \left(x^2 + x - 2\right) = 0$

     Cálculo auxiliar

     Sabe-se que -2 é zero do polinómio $x^3 + 3x^2 - 4$

     Então,

     $x^3 + 3x^2 - 4 = (x+2)Q(x)$

     Pela regra de Ruffini, vem,

$$
\begin{array}{c|ccc|c}
 & 1 & 3 & 0 & -4 \\
-2 & & -2 & -2 & 4 \\
\hline
 & 1 & 1 & -2 & 0
\end{array}
$$

Assim,

$Q(x) = x^2 + x - 2$

Logo,

$x^3 + 3x^2 - 4 = (x+2)(x^2 + x - 2)$

- $f(-2) = \dfrac{2-4k}{7}$

Assim, f é contínua em $x = -2$, se $\lim\limits_{x \to -2^-} f(x) = \lim\limits_{x \to -2^+} f(x) = f(-2)$

Ou seja, se,

$\dfrac{2-4k}{7} = 0 \Leftrightarrow 2 - 4k = 0 \Leftrightarrow 4k = 2 \Leftrightarrow k = \dfrac{2}{4} \Leftrightarrow k = \dfrac{1}{2}$

Resposta: Para $k = \dfrac{1}{2}$, a função f é contínua em $x = -2$

5. $D_g = \{x \in \mathbb{R} : f(x) + 1 \geq 0\} = \{x \in \mathbb{R} : -3 \leq x \leq 3\} = [-3; 3]$

Cálculo auxiliar

$f(x) + 1 \geq 0 \Leftrightarrow 8 - x^2 + 1 \geq 0 \Leftrightarrow 9 - x^2 \geq 0$

- $9 - x^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 9 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{9} \Leftrightarrow x = -3 \lor x = 3$

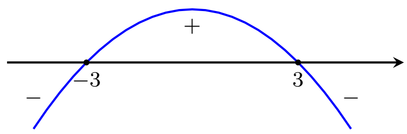
- **Sinal:**

  Como se trata de uma função quadrática, estuda-se o sinal pela representação gráfica da parábola

  Assim,

  $9 - x^2 < 0 \Leftrightarrow x < -3 \lor x > 3$

  $9 - x^2 > 0 \Leftrightarrow -3 < x < 3$



Resposta: (A)

6. $\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{4x^2-2x}+2x\right) =^{(\infty-\infty)} \lim_{x\to-\infty}\frac{\left(\sqrt{4x^2-2x}+2x\right)\left(\sqrt{4x^2-2x}-2x\right)}{\sqrt{4x^2-2x}-2x} =$

$$= \lim_{x\to-\infty}\frac{\left(\sqrt{4x^2-2x}\right)^2-(2x)^2}{\sqrt{4x^2-2x}-2x} = \lim_{x\to-\infty}\frac{4x^2-2x-4x^2}{\sqrt{4x^2-2x}-2x} =$$

$$= \lim_{x\to-\infty}\frac{-2x}{\sqrt{4x^2-2x}-2x} =^{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)} \lim_{x\to-\infty}\frac{-2x}{\sqrt{x^2\left(4-\frac{2}{x^2}\right)}-2x}$$

$$= \lim_{x\to-\infty}\frac{-2x}{|x|\sqrt{4-\frac{2}{x^2}}-2x} = \lim_{x\to-\infty}\frac{-2x}{-x\sqrt{4-\frac{2}{x^2}}-2x} =$$

$$= \lim_{x\to-\infty}\frac{-2x}{-x\left(\sqrt{4-\frac{2}{x^2}}+2\right)} = \lim_{x\to-\infty}\frac{2}{\sqrt{4-\frac{2}{x^2}}+2} =$$

$$= \lim_{x\to-\infty}\frac{2}{\sqrt{4-\frac{2}{x^2}}+2} = \frac{2}{\sqrt{4-\frac{2}{+\infty}}+2} = \frac{2}{\sqrt{4-0}+2} = \frac{1}{2}$$

7. .

7.1. Para toda a sucessão (a_n), tal que $a_n \in D_f$ e $\lim a_n = 1$, tem-se,

$$\lim f(a_n) = \lim\frac{2a_n+1}{(a_n)^2-4} = \frac{2\times\lim a_n+1}{(\lim a_n)^2-4} = \frac{2\times1+1}{1^2-4} = \frac{3}{-3} = -1$$

Assim,

$$\lim_{x\to1} f(x) = -1$$

7.2. $f(x) \geq \frac{x}{x+2} \Leftrightarrow \frac{2x+1}{x^2-4} \geq \frac{x}{x+2} \Leftrightarrow \frac{2x+1}{(x-2)(x+2)} - \frac{x}{x+2} \geq 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \frac{2x+1}{(x-2)(x+2)} - \frac{x(x-2)}{(x-2)(x+2)} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{2x+1-x(x-2)}{(x-2)(x+2)} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{2x+1-x^2+2x}{(x-2)(x+2)} \geq 0 \Leftrightarrow$$

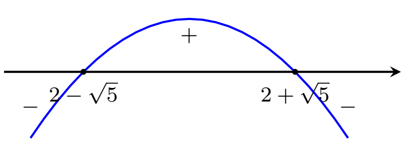
$$\Leftrightarrow \frac{-x^2+4x+1}{(x-2)(x+2)} \geq 0$$

$\twoheadrightarrow$ **Numerador:**

Zeros: $-x^2+4x+1=0 \Leftrightarrow x = \frac{-4\pm\sqrt{4^2-4\times(-1)\times1}}{2\times(-1)} \Leftrightarrow x = 2-\sqrt{5} \vee x = 2+\sqrt{5}$

Sinal:

Como se trata de uma função quadrática, estuda-se o sinal pela representação gráfica da parábola



Assim,

$-x^2+4x+1 < 0 \Leftrightarrow x < 2-\sqrt{5} \vee x > 2+\sqrt{5}$

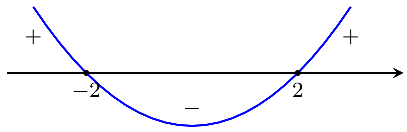
$-x^2+4x+1 > 0 \Leftrightarrow 2-\sqrt{5} < x < 2+\sqrt{5}$

$\twoheadrightarrow$ **Denominador**

Zeros: $(x-2)(x+2)=0 \Leftrightarrow x-2=0 \vee x+2=0 \Leftrightarrow x=2 \vee x=-2$

Sinal:

Como se trata de uma função quadrática, estuda-se o sinal pela representação gráfica da parábola



Assim,

$(x-2)(x+2)<0 \Leftrightarrow -2<x<2$

$(x-2)(x+2)>0 \Leftrightarrow x<-2 \vee x>2$

Quadro de sinais

x	$-\infty$	-2		$2-\sqrt{5}$		2		$2+\sqrt{5}$	$+\infty$
$-x^2+4x+1$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$
$(x-2)(x+2)$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$\dfrac{-x^2+4x+1}{(x-2)(x+2)}$	$-$	$n.d.$	$+$	0	$-$	$n.d.$	$+$	0	$-$

Assim,

$$\frac{-x^2+4x+1}{(x-2)(x+2)} \geq 0 \Leftrightarrow -2<x\leq 2-\sqrt{5} \vee 2<x\leq 2+\sqrt{5}$$

Portanto,

$C.S. = \left]-2;2-\sqrt{5}\right] \cup \left]2;2+\sqrt{5}\right]$

7.3. $D_g = \left\{x\in\mathbb{R} : 4+2x\geq 0 \wedge \sqrt{4+2x}-4\neq 0\right\} = \{x\in\mathbb{R} : x\geq -2 \wedge x\neq 6\} = [-2;6[\cup]6;+\infty[$

Cálculo auxiliar

- $4+2x\geq 0 \Leftrightarrow 2x\geq -4 \Leftrightarrow x\geq \dfrac{-4}{2} \Leftrightarrow x\geq -2$
- $\sqrt{4+2x}-4=0 \wedge 4+2x\geq 0 \Leftrightarrow \sqrt{4+2x}=4 \wedge x\geq -2$

  $\Rightarrow \left(\sqrt{4+2x}\right)^2 = 4^2 \wedge x\geq -2 \Leftrightarrow 4+2x=16 \wedge x\geq -2 \Leftrightarrow$

  $\Leftrightarrow 2x=16-4 \wedge x\geq -2 \Leftrightarrow 2x=12 \wedge x\geq -2 \Leftrightarrow x=6 \wedge x\geq -2$

  $\Leftrightarrow x=6$

  Verificação:

  $x=6 \mapsto \sqrt{4+2\times 6}-4=0$

  $\therefore \sqrt{16}-4=0$

  $\therefore 4-4=0$

  $\therefore 0=0$ (Verdadeiro)

  Logo, 6 é solução da equação dada

8. $$\lim_{x\to 5}\frac{\sqrt{3x+1}-4}{2x^2-9x-5} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x\to 5}\frac{\left(\sqrt{3x+1}-4\right)\left(\sqrt{3x+1}+4\right)}{(x-5)(2x+1)\left(\sqrt{3x+1}+4\right)} = \lim_{x\to 5}\frac{\left(\sqrt{3x+1}\right)^2-4^2}{(x-5)(2x+1)\left(\sqrt{3x+1}+4\right)} =$$
$$\lim_{x\to 5}\frac{3x+1-16}{(x-5)(2x+1)\left(\sqrt{3x+1}+4\right)} = \lim_{x\to 5}\frac{3x-15}{(x-5)(2x+1)\left(\sqrt{3x+1}+4\right)} = \lim_{x\to 5}\frac{3(x-5)}{(x-5)(2x+1)\left(\sqrt{3x+1}+4\right)} =$$
$$\lim_{x\to 5}\frac{3}{(2x+1)\left(\sqrt{3x+1}+4\right)} = \frac{3}{88}$$

Cálculo auxiliar

Sabe-se que o polinómio $2x^2 - 9x - 5$ é divisível por $x - 5$

Então,

$2x^2 - 9x - 5 = (x - 5)Q(x)$

Pela regra de Ruffini, vem,

$$\begin{array}{c|cc|c} & 2 & -9 & -5 \\ 5 & & 10 & 5 \\ \hline & 2 & 1 & 0 \end{array}$$

Assim,

$Q(x) = 2x + 1$

Logo,

$2x^2 - 9x - 5 = (x - 5)(2x + 1)$

Resposta: (A)

9. .

9.1. $D_h = \{x \in \mathbb{R} : f(x) > 0\} = \{x \in \mathbb{R} : x < -3 \vee -1 < x < 3\} =]-\infty; -3[\cup]-1; 3[$

9.2. Elaborando um quadro de sinal, vem,

x	$-\infty$	-3		-1		3	$+\infty$
$f(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$
$g(x)$	$+$	$+$	$+$	0	$-$	0	$+$
$\frac{f(x)}{g(x)}$	$+$	0	$-$	$n.d.$	$-$	$n.d.$	$-$

Assim,

$\frac{f(x)}{g(x)} \leq 0 \Leftrightarrow -3 \leq x \leq -1 \vee -1 < x < 3 \vee x > 3$

Portanto,

$C.S. = [-3; -1[\cup]-1; 3[\cup]3; +\infty[$