Proposta de Resolução da Ficha 2

Matemática A

12.º Ano de Escolaridade | setembro de 2022

Turma: $B+C+H$

Aula de Preparação Para Exame

1. .

1.1. Pontos da reta r

$B(3;-1)$ e $C(2;-2)$

Declive: $m_r = \frac{-2-(-1)}{2-3} = \frac{-2+1}{-1} = \frac{-1}{-1} = 1$
Assim,

$y = x + b, b \in \mathbb{R}$

Como, $B(3;-1)$ é ponto da reta, vem,

$-1 = 3 + b \Leftrightarrow -1 - 3 = b \Leftrightarrow -4 = b$

Logo, a equação reduzida da reta r é $y = x - 4$

1.2. Determinemos as coordenadas do ponto E

Ora, $E(x;0)$ e E é ponto da reta r

Então,

$x - 4 = 0 \Leftrightarrow x = 4$

Logo, $E(4;0)$

Seja $P(x;y)$ um ponto genérico da mediatriz do segmento de reta $[DE]$

Então,

$\overline{DP} = \overline{EP} \Leftrightarrow \sqrt{(x-0)^2 + (y-(-3))^2} = \sqrt{(x-4)^2 + (y-0)^2}$

Elevando ao quadrado ambos os membros da equação, resulta,

$(x-0)^2 + (y-(-3))^2 = (x-4)^2 + (y-0)^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2 + (y+3)^2 = (x-4)^2 + y^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + 6y + 9 = x^2 - 8x + 16 + y^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 6y + 9 = -8x + 16 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 6y = -8x + 16 - 9 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 6y = -8x + 7 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow y = -\frac{8}{6}x + \frac{7}{6} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow y = -\frac{4}{3}x + \frac{7}{6} \Leftrightarrow$

Logo, a equação reduzida da reta s é $y = -\frac{4}{3}x + \frac{7}{6}$

1.3. Equação cartesiana reduzida da circunferência: $(x-3)^2 + (y+2)^2 = 4$

Assim,

$$\begin{cases} y = x - 4 \\ (x-3)^2 + (y+2)^2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x - 4 \\ (x-3)^2 + (x-4+2)^2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x - 4 \\ (x-3)^2 + (x-2)^2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = x - 4 \\ x^2 - 6x + 9 + x^2 - 4x + 4 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x - 4 \\ 2x^2 - 10x + 9 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x - 4 \\ x = \frac{-(-10) \pm \sqrt{(-10)^2 - 4 \times 2 \times 9}}{2 \times 2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = x - 4 \\ x = \frac{10 \pm \sqrt{28}}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x - 4 \\ x = \frac{10 \pm 2\sqrt{7}}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x - 4 \\ x = \frac{5 - \sqrt{7}}{2} \end{cases} \vee \begin{cases} y = x - 4 \\ x = \frac{5 + \sqrt{7}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{5 - \sqrt{7}}{2} - 4 \\ x = \frac{5 - \sqrt{7}}{2} \end{cases} \vee \begin{cases} y = \frac{5 + \sqrt{7}}{2} - 4 \\ x = \frac{5 + \sqrt{7}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{-3 - \sqrt{7}}{2} \\ x = \frac{5 - \sqrt{7}}{2} \end{cases} \vee \begin{cases} y = \frac{-3 + \sqrt{7}}{2} \\ x = \frac{5 + \sqrt{7}}{2} \end{cases}$$

Cálculo auxiliar:

$28 = 4 \times 7 = 2^2 \times 7$

$\sqrt{28} = \sqrt{2^2 \times 7} = 2\sqrt{7}$

Portanto, os pontos de interseção são $I\left(\frac{5 - \sqrt{7}}{2}; \frac{-3 - \sqrt{7}}{2}\right)$ e $J\left(\frac{5 + \sqrt{7}}{2}; \frac{-3 + \sqrt{7}}{2}\right)$

1.4. Condição que define a região colorida (incluindo a fronteira)

$$1 \leq (x-3)^2 + (y+2)^2 \leq 4 \wedge \left[\left(y \geq x - 4 \wedge y \leq -\frac{4}{3}x + \frac{7}{6}\right) \vee \left(y \leq x - 4 \wedge y \geq -\frac{4}{3}x + \frac{7}{6}\right)\right]$$

2. A circunferência tem centro no ponto $A(2;1)$ e tem raio 2

A condição que define o círculo de centro no ponto $A(2;1)$ e de raio 2, é $(x-2)^2 + (y-1)^2 \leq 4$

A condição que caracteriza o semiplano inferior fechado definido pela reta de equação $y = 0$ é $y \leq 0$

Portanto, a região colorida é caracterizada por $(x-2)^2 + (y-1)^2 \leq 4 \wedge y \leq 0$

Resposta:(A)

3. .

3.1. Determinemos as coordenadas do ponto A

Sabe-se que $A(0;0;z)$, com $z \in \mathbb{R}$

Como o ponto A pertence ao plano ABC, vem,

$0 + 0 + 2z - 6 = 0 \Leftrightarrow 2z - 6 = 0 \Leftrightarrow 2z = 6 \Leftrightarrow z = \frac{6}{2} \Leftrightarrow z = 3$

Logo, $A(0;0;3)$

Determinemos uma equação vetorial da reta AC

O vetor diretor desta reta é $\overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{AC} = C - A = (0;-4;5) - (0;0;3) = (0-0;-4-0;5-3) = (0;-4;2)$

Portanto, uma equação vetorial da reta AC, é

$(x;y;z) = (0;0;3) + k(0;-4;2), k \in \mathbb{R}$

Analisando as opções, verificamos que só podem ser resposta as opções (A) e (D)

Vejamos se o ponto $(0;1;5)$ da opção (A) é ponto da reta AC

$(0;1;5) = (0;0;3) + k(0;-4;2) \Leftrightarrow 0 = 0 + 0k \wedge 1 = 0 - 4k \wedge 5 = 3 + 2k \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 0 = 0 \wedge k = \frac{1}{-4} \wedge 2k = 5 - 3 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 0 = 0 \wedge k = -\frac{1}{4} \wedge k = \frac{2}{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 0 = 0 \wedge k = -\frac{1}{4} \wedge k = 1$

Logo, $(0;1;5)$ não é ponto da reta AC

Vejamos se o ponto $(0;20;-7)$ da opção (D) é ponto da reta AC

$(0;20;-7) = (0;0;3) + k(0;-4;2) \Leftrightarrow 0 = 0 + 0k \wedge 20 = 0 - 4k \wedge -7 = 3 + 2k \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 0 = 0 \wedge k = \frac{20}{-4} \wedge 2k = -10 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 0 = 0 \wedge k = -5 \wedge k = \frac{-10}{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 0 = 0 \wedge k = -5 \wedge k = -5$

Logo, $(0;20;-7)$ é ponto da reta AC

Resposta: (D)

3.2. Determinemos as coordenadas do ponto E

Seja E' a projeção ortogonal do ponto E sobre o plano ABC

Assim, E' é o ponto médio do segmento de reta $[AC]$

Logo, $E'\left(\frac{0+0}{2};\frac{-4+0}{2};\frac{5+3}{2}\right)$, ou seja, $E'(0;-2;4)$

Determinemos uma equação vetorial da reta perpendicular ao plano ABC e que passa em E'

O vetor diretor desta reta é colinear com o vetor normal ao plano ABC

Assim, uma equação vetorial da reta é, $(x;y;z) = (0;-2;4) + k(1;1;2), k \in \mathbb{R}$

Um ponto genérico desta reta é $(k;-2+k;4+2k), k \in \mathbb{R}$

Determinemos k de modo que este ponto pertença ao plano CDE

$2k-(-2+k)+4+2k-9=0 \Leftrightarrow 2k+2-k+4+2k-9=0 \Leftrightarrow 3k-3=0 \Leftrightarrow 3k=3 \Leftrightarrow k=\dfrac{3}{3} \Leftrightarrow k=1$

Logo $E(1;-2+1;4+2)$, ou seja, $E(1;-1;6)$

$\overline{EE'}$, medida de comprimento da altura da pirâmide

$\overline{EE'} = \sqrt{(1-0)^2+(-1-(-2))^2+(6-4)^2} = \sqrt{1+1+4} = \sqrt{6}$

$\overline{AB} = \sqrt{(-2-0)^2+(-2-0)^2+(5-3)^2} = \sqrt{4+4+4} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$

$\overline{BC} = \sqrt{(-2-0)^2+(-2-(-4))^2+(5-5)^2} = \sqrt{4+4+0} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

Portanto, o volume da pirâmide é,

$V_{[ABCDE]} = \dfrac{\overline{AB}\times\overline{BC}\times\overline{EE'}}{3} = \dfrac{2\sqrt{3}\times 2\sqrt{2}\times\sqrt{6}}{3} = \dfrac{4\times 6}{3} = 8\ u.v.$

4. .

4.1. Determinemos as coordenadas do ponto A

Comecemos por escrever a equação cartesiana do plano ABC

Um vetor normal ao plano ABC é colinear com o vetor $\overrightarrow{BF}$

$\overrightarrow{BF} = F-B = (5;-7;-2)-(3;-2;2) = (5-3;-7-(-2);-2-2) = (2;-5;-4)$

Portanto, $\overrightarrow{\alpha}(2;-5;-4)$ é um vetor normal ao plano ABC

Uma equação cartesiana deste plano ABC é $2x-5y-4z+d=0, d\in\mathbb{R}$

Como o ponto $B(3;-2;2)$ é ponto deste plano, resulta,

$2\times 3-5\times(-2)-4\times 2+d=0 \Leftrightarrow 6+10-8+d=0 \Leftrightarrow d=-8$

Portanto, uma equação cartesiana do plano ABC é $2x-5y-4z-8=0$

Sabe-se que $A(x;0;0)$, com $x\in\mathbb{R}$

Como o ponto A pertence ao plano ABC, vem,

$2x-0-0-8=0 \Leftrightarrow 2x-8=0 \Leftrightarrow 2x=8 \Leftrightarrow x=\dfrac{8}{2} \Leftrightarrow x=4$

Logo, $A(4;0;0)$

Um vetor normal ao plano ADE é colinear com o vetor $\overrightarrow{AB}$

$\overrightarrow{AB} = B-A = (3;-2;2)-(4;0;0) = (3-4;-2-0;2-0) = (-1;-2;2)$

Portanto, $\overrightarrow{\alpha}(-1;-2;2)$ é um vetor normal ao plano ADE

Uma equação cartesiana deste plano ADE é $-x-2y+2z+d=0, d\in\mathbb{R}$

Como o ponto $A(4;0;0)$ é ponto deste plano, resulta,

$-4-2\times 0+2\times 0+d=0 \Leftrightarrow -4+d=0 \Leftrightarrow d=4$

Portanto, uma equação cartesiana do plano ADE é $-x-2y+2z+4=0$

Resposta: (A)

4.2. Determinemos as coordenadas do ponto H

Sabe-se que $\left(x-\frac{13}{2}\right)^2+(y+6)^2+\left(z+\frac{5}{2}\right)^2=\frac{7}{2}$,

é uma equação cartesiana reduzida da superfície esférica de diâmetro $[FH]$, então o ponto médio do segmento de reta $[FH]$ é $M\left(\frac{13}{2};-6;-\frac{5}{2}\right)$

Determinemos $\overrightarrow{FM}$

$\overrightarrow{FM}=M-F=\left(\frac{13}{2};-6;-\frac{5}{2}\right)-(5;-7;-2)=\left(\frac{13}{2}-5;-6-(-7);-\frac{5}{2}-(-2)\right)=\left(\frac{3}{2};1;-\frac{1}{2}\right)$

Assim, $H=M+\overrightarrow{FM}=\left(\frac{13}{2};-6;-\frac{5}{2}\right)+\left(\frac{3}{2};1;-\frac{1}{2}\right)=\left(\frac{13}{2}+\frac{3}{2};-6+1;-\frac{5}{2}-\frac{1}{2}\right)=(8;-5;-3)$

Logo, o raio da superfície esférica pedida é

$||\overrightarrow{AH}||=\sqrt{(4-8)^2+(0-(-5))^2+(0-(-3))^2}=\sqrt{16+25+9}=\sqrt{50}$

Portanto, a equação cartesiana reduzida da superfície esférica de centro no ponto A e de raio $\overline{AH}$, é

$(x-4)^2+(y-0)^2+(z-0)^2=(\sqrt{50})^2$, ou seja, $(x-4)^2+y^2+z^2=50$