## PROGRESSÕES ARITMÉTICAS E GEOMÉTRICAS

1. .

1.1. $u_{n+1}-u_n=\dfrac{n+1+2}{3}-\dfrac{n+2}{3}=\dfrac{n+3}{3}-\dfrac{n+2}{3}=\dfrac{n+3-n-2}{3}=\dfrac{1}{3}(\text{constante}),\ \forall n\in\mathbb{N}$

Logo, a sucessão $(u_n)$ é uma progressão aritmética de razão $\dfrac{1}{3}$

1.2. $u_1=\dfrac{1+2}{3}=1$ e $u_{100}=\dfrac{100+2}{3}=\dfrac{102}{3}$

Assim, $S_{100}=\dfrac{1+\frac{102}{3}}{2}\times 100=\dfrac{105}{3}\times 50=\dfrac{5250}{3}$

1.3. $u_{34}=\dfrac{34+2}{3}=12$ e $u_{125}=\dfrac{125+2}{3}=\dfrac{127}{3}$

$$S=u_{35}+u_{36}+u_{37}+...+u_{125}=S_{125}-S_{34}=\dfrac{1+\frac{127}{3}}{2}\times 125-\dfrac{1+12}{2}\times 34=$$
$$=\dfrac{\frac{130}{3}}{2}\times 125-\dfrac{13}{2}\times 34=\dfrac{8125}{3}-221=\dfrac{7462}{3}$$

**Outro processo**

$u_{35}=\dfrac{35+2}{3}=\dfrac{37}{3}$ e $u_{125}=\dfrac{125+2}{3}=\dfrac{127}{3}$

$$S=u_{35}+u_{36}+u_{37}+...+u_{125}=\dfrac{\frac{37}{3}+\frac{127}{3}}{2}\times(125-35+1)=\dfrac{82}{3}\times 91=\dfrac{7462}{3}$$

1.4. .

1.4.1. $S_n=u_1+u_2+u_3+...+u_n=\dfrac{1+\frac{n+2}{3}}{2}\times n=\dfrac{\frac{n+5}{3}}{2}\times n=\dfrac{n^2+5n}{6}$

1.4.2. Sabemos que $S_n=u_1+u_2+u_3+...+u_n$ e que $u_n=\dfrac{n+2}{3}$

Seja $P(n): S_n=\dfrac{n^2+5n}{6}$

$(i)$ $P(1)$ é verdadeira(?)

$n=1\twoheadrightarrow S_1=\dfrac{1^2+5\times 1}{6}$

$\therefore u_1=\dfrac{6}{6}$

$\therefore \dfrac{1+2}{3}=1$

$\therefore 1=1(verdadeiro)$

Logo, $P(1)$ é verdadeira

$(ii)$ $P(n)$ é hereditária(?)

Hipótese de indução: $P(n)$ é verdadeira, isto é, $S_n = \dfrac{n^2+5n}{6}$

Tese de indução: $P(n+1)$ é verdadeira, isto é, $S_{n+1} = \dfrac{(n+1)^2+5(n+1)}{6}$

**Demonstração**

$$S_{n+1} = u_1 + u_2 + u_3 + ... + u_n + u_{n+1} = S_n + u_{n+1} = \frac{n^2+5n}{6} + \frac{n+1+2}{3} =$$
$$= \frac{n^2+5n}{6} + \frac{n+3}{3} = \frac{n^2+5n+2n+6}{6} = \frac{n^2+2n+1+5n+5}{6} = \frac{(n+1)^2+5(n+1)}{6}$$

Logo, $P(n)$ é hereditária, ou seja, $P(n) \Rightarrow P(n+1)$

Conclusão: Como $P(1)$ é verdadeira e $P(n)$ é hereditária, ou seja, $P(n) \Rightarrow P(n+1)$, $P(n)$ é verdadeira para todo o número natural(ou seja, é universal)

2. .

2.1. $v_1 = -2$
$v_2 = v_1 + 2 = -2 + 2 = 0$
$v_3 = v_2 + 2 = 0 + 2 = 2$
$v_4 = v_3 + 2 = 2 + 2 = 4$

2.2. $v_{n+1} - v_n = 2$ (constante), $\forall n \in \mathbb{N}$

Logo, a sucessão $(v_n)$ é uma progressão aritmética de razão 2

2.3. $v_{500} = v_1 + 499 \times 2 = -2 + 998 = 996$

2.4. $v_n = -2 + (n-1) \times 2 = -2 + 2n - 2 = 2n - 4$, $n \in \mathbb{N}$

2.5. $v_1 = -2$ e $v_{1000} = 2 \times 1000 - 4 = 1996$

$$S_{1000} = \frac{-2+1996}{2} \times 1000 = \frac{1994}{2} \times 1000 = 997000$$

2.6. $v_{50} = 2 \times 50 - 4 = 96$ e $v_{571} = 2 \times 571 - 4 = 1138$

$$S = \frac{96+1138}{2} \times (571 - 50 + 1) = \frac{1234}{2} \times 522 = 322074$$

2.7. $S_n = v_1 + v_2 + v_3 + ... + v_n = \dfrac{-2+2n-4}{2} \times n = \dfrac{2n-6}{2} \times n = n^2 - 3n$

$$S_n = 9700 \Leftrightarrow n^2 - 3n = 9700 \Leftrightarrow n^2 - 3n - 9700 = 0 \Leftrightarrow n = \frac{3 \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \times 1 \times (-9700)}}{2 \times 1} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow n = -97 \vee n = 100$$

Como, $n \in \mathbb{N}$, tem-se que $n = 100$

2.8. .

2.8.1. $S_n = v_1 + v_2 + v_3 + ... + v_n = \dfrac{-2+2n-4}{2} \times n = \dfrac{2n-6}{2} \times n = n^2 - 3n$

2.8.2. Sabemos que $S_n = v_1 + v_2 + v_3 + ... + v_n$ e que $v_n = 2n - 4$

Seja $P(n) : S_n = n^2 - 3n$

$(i)$ $P(1)$ é verdadeira(?)

$n = 1 \twoheadrightarrow S_1 = 1^2 - 3 \times 1$
$\therefore v_1 = 1 - 3$
$\therefore -2 = -2(verdadeiro)$

Logo, $P(1)$ é verdadeira

$(ii)$ $P(n)$ é hereditária(?)

Hipótese de indução: $P(n)$ é verdadeira, isto é, $S_n = n^2 - 3n$
Tese de indução: $P(n+1)$ é verdadeira, isto é, $S_{n+1} = (n+1)^2 - 3(n+1)$

**Demonstração**

$S_{n+1} = v_1 + v_2 + v_3 + ... + v_n + v_{n+1} = S_n + v_{n+1} = n^2 - 3n + 2(n+1) - 4 =$
$= n^2 - 3n + 2n + 2 - 4 = n^2 + 2n + 1 - 3n - 3 = (n+1)^2 - 3(n+1)$

Logo, $P(n)$ é hereditária, ou seja, $P(n) \Rightarrow P(n+1)$

Conclusão: Como $P(1)$ é verdadeira e $P(n)$ é hereditária, ou seja, $P(n) \Rightarrow P(n+1)$, $P(n)$ é verdadeira para todo o número natural(ou seja, é universal)

3. Seja, $r$ a razão da progressão aritmética.
$a_{500} = a_{100} + 400 \times r \Leftrightarrow 999 = 199 + 400r \Leftrightarrow 999 - 199 = 400r \Leftrightarrow 800 = 400r \Leftrightarrow r = \frac{800}{400} \Leftrightarrow r = 2$

O primeiro termo é tal que , $a_{500} = a_1 + 499 \times 2 \Leftrightarrow 999 = a_1 + 998 \Leftrightarrow a_1 = 999 - 998 \Leftrightarrow a_1 = 1$

Assim,
$a_n = 1 + (n-1) \times 2 = 1 + 2n - 2 = 2n - 1$

4. .

4.1. $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\frac{1}{5} \times 2^{n+1+3}}{\frac{1}{5} \times 2^{n+3}} = \frac{2^{n+4}}{2^{n+3}} = 2^{n+4-(n+3)} = 2^{n+4-n-3} = 2$ (constante), $\forall n \in \mathbb{N}$.
Logo, a sucessão $(u_n)$ é uma progressão geométrica de razão 2

4.2. $u_1 = \frac{1}{5} \times 2^{1+3} = \frac{1}{5} \times 2^4 = \frac{1}{5} \times 16 = \frac{16}{5}$

$S_{10} = \frac{16}{5} \times \frac{1 - 2^{10}}{1 - 2} = \frac{16}{5} \times \frac{1 - 1024}{-1} = \frac{16 \times 1023}{5} = \frac{16368}{5}$

4.3. $u_4 = \frac{1}{5} \times 2^{4+3} = \frac{1}{5} \times 2^7 = \frac{1}{5} \times 128 = \frac{128}{5}$

$S = u_4 + u_5 + u_6 + ... + u_{10} = \frac{128}{5} \times \frac{1 - 2^{10-4+1}}{1 - 2} = \frac{128}{5} \times \frac{1 - 128}{-1} = \frac{128 \times 127}{5} = \frac{16256}{5}$

4.4. .

4.4.1. $S_n = \frac{16}{5} \times \frac{1 - 2^n}{1 - 2} = \frac{2^4}{5} \times \frac{1 - 2^n}{-1} = \frac{2^4 \times (2^n - 1)}{5} = \frac{2^{n+4} - 16}{5}$

4.4.2. Sabemos que $S_n = u_1 + u_2 + u_3 + ... + u_n$ e que $u_n = \frac{1}{5} \times 2^{n+3}$.

Seja $P(n) : S_n = \frac{2^{n+4} - 16}{5}$

$(i)$ $P(1)$ é verdadeira(?)

$n = 1 \twoheadrightarrow S_1 = \frac{2^{1+4} - 16}{5}$
$\therefore u_1 = \frac{2^5 - 16}{5}$
$\therefore \frac{16}{5} = \frac{32 - 16}{5}$
$\therefore \frac{16}{5} = \frac{16}{5} (verdadeiro)$

Logo, $P(1)$ é verdadeira

$(ii)$ $P(n)$ é hereditária(?)

Hipótese de indução: $P(n)$ é verdadeira, isto é, $S_n = \frac{2^{n+4} - 16}{5}$

Tese de indução: $P(n+1)$ é verdadeira, isto é, $S_{n+1} = \frac{2^{n+5} - 16}{5}$

**Demonstração**

$$S_{n+1} = u_1 + u_2 + u_3 + ... + u_n + u_{n+1} = S_n + u_{n+1} = \frac{2^{n+4} - 16}{5} + \frac{1}{5} \times 2^{n+4} =$$
$$= \frac{2^{n+4} - 16 + 2^{n+4}}{5} = \frac{2 \times 2^{n+4} - 16}{5} = \frac{2^{n+5} - 16}{5}$$

Logo, $P(n)$ é hereditária, ou seja, $P(n) \Rightarrow P(n+1)$

Conclusão: Como $P(1)$ é verdadeira e $P(n)$ é hereditária, ou seja, $P(n) \Rightarrow P(n+1)$, $P(n)$ é verdadeira para todo o número natural(ou seja, é universal)

5. .

5.1. $v_1 = \frac{1}{2}$

$$v_2 = \frac{v_1}{4} = \frac{\frac{1}{2}}{4} = \frac{1}{8}$$

$$v_3 = \frac{v_2}{4} = \frac{\frac{1}{8}}{4} = \frac{1}{32}$$

$$v_4 = \frac{v_3}{4} = \frac{\frac{1}{16}}{4} = \frac{1}{64}$$

5.2. $\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{\frac{v_n}{4}}{v_n} = \frac{1}{4}$ (constante), $\forall n \in \mathbb{N}$

Logo, a sucessão $(v_n)$ é uma progressão geométrica de razão $\frac{1}{4}$

5.3. $v_{10} = v_1 \times r^9 = \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{4}\right)^9 = \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{2^{18}}\right) = \frac{1}{2^{19}} = \frac{1}{524288}$

5.4. $v_n = v_1 \times r^{n-1} = \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} = \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{2^{2n-2}}\right) = \frac{1}{2^{2n-1}} = 2^{-2n+1}$

5.5. $S_{20} = \frac{1}{2} \times \frac{1-\left(\frac{1}{4}\right)^{20}}{1-\frac{1}{4}} = \frac{1}{2} \times \frac{1-2^{-40}}{\frac{3}{4}} = \frac{2 \times \left(1-2^{-40}\right)}{3} = \frac{2-2^{-39}}{3}$

5.6. .

5.6.1. $S_n = \frac{1}{2} \times \frac{1-\left(\frac{1}{4}\right)^{n}}{1-\frac{1}{4}} = \frac{1}{2} \times \frac{1-2^{-2n}}{\frac{3}{4}} = \frac{2 \times \left(1-2^{-2n}\right)}{3} = \frac{2-2^{1-2n}}{3}$

5.6.2. Sabemos que $S_n = v_1 + v_2 + v_3 + ... + v_n$ e que $v_n = 2^{-2n+1}$.

Seja $P(n) : S_n = \frac{2-2^{1-2n}}{3}$

$(i)$ $P(1)$ é verdadeira(?)

$n = 1 \twoheadrightarrow S_1 = \frac{2-2^{1-2\times 1}}{3}$

$\therefore \frac{1}{2} = \frac{2-2^{-1}}{3}$

$\therefore \frac{1}{2} = \frac{2-\frac{1}{2}}{3}$

$\therefore \frac{1}{2} = \frac{\frac{3}{2}}{3}$

$\therefore \frac{1}{2} = \frac{1}{2}(verdadeiro)$

Logo, $P(1)$ é verdadeira

$(ii)$ $P(n)$ é hereditária(?)

Hipótese de indução: $P(n)$ é verdadeira, isto é, $S_n = \frac{2-2^{1-2n}}{3}$

Tese de indução: $P(n+1)$ é verdadeira, isto é, $S_{n+1} = \frac{2-2^{1-2(n+1)}}{3} = \frac{2-2^{-2n-1}}{3}$

**Demonstração**

$$S_{n+1} = v_1 + v_2 + v_3 + ... + v_n + v_{n+1} = S_n + v_{n+1} = \frac{2-2^{1-2n}}{3} + 2^{-2(n+1)+1} =$$
$$= \frac{2-2^{1-2n}}{3} + 2^{-2n-1} = \frac{2-2^{1-2n}+3\times 2^{-2n-1}}{3} = \frac{2-2\times 2^{-2n}+3\times 2^{-1}\times 2^{-2n}}{3} =$$
$$= \frac{2-2\times 2^{-2n}+\frac{3}{2}\times 2^{-2n}}{3} = \frac{2-2^{-2n}\left(2-\frac{3}{2}\right)}{3} = \frac{2-2^{-2n}\times\frac{1}{2}}{3} = \frac{2-2^{-2n-1}}{3}$$

Logo, $P(n)$ é hereditária, ou seja, $P(n) \Rightarrow P(n+1)$

Conclusão: Como $P(1)$ é verdadeira e $P(n)$ é hereditária, ou seja, $P(n) \Rightarrow P(n+1)$, $P(n)$ é verdadeira para todo o número natural(ou seja, é universal)

5.7. A soma de todos os termos da progressão geométrica é
$$S = \lim S_n = \lim \frac{2 - 2^{1-2n}}{3} = \frac{2 - 2^{-\infty}}{3} = \frac{2-0}{3} = \frac{2}{3}$$

6. Seja, $r$ a razão da progressão geométrica.

$$b_{13} = b_{10} \times r^3 \Leftrightarrow r^3 = \frac{b_{13}}{b_{10}} \Leftrightarrow r^3 = \frac{\frac{1}{4096}}{\frac{1}{512}} \Leftrightarrow r^3 = \frac{512}{4096} \Leftrightarrow r^3 = \frac{1}{8} \Leftrightarrow r = \sqrt[3]{\frac{1}{8}} = \frac{1}{2}$$

$$b_{10} = b_1 \times r^9 \Leftrightarrow \frac{1}{512} = b_1 \times \left(\frac{1}{2}\right)^9 \Leftrightarrow b_1 = \frac{\frac{1}{512}}{\frac{1}{512}} \Leftrightarrow b_1 = 1$$

Então, o termo geral é $b_n = 1 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = 2^{1-n}$

7. Seja, $r$ a razão da progressão geométrica.

$$u_{12} = u_8 \times r^4 \Leftrightarrow r^4 = \frac{u_{12}}{u_8} \Leftrightarrow r^4 = \frac{\frac{3}{2048}}{\frac{3}{128}} \Leftrightarrow r^4 = \frac{128}{2048} \Leftrightarrow r^4 = \frac{1}{16} \Leftrightarrow r = \pm\sqrt[4]{\frac{1}{16}} \Leftrightarrow r = \pm\frac{1}{2}$$

Como por hipótese a razão é positiva, então, $r = \frac{1}{2}$

$$u_8 = u_1 \times r^7 \Leftrightarrow \frac{3}{128} = u_1 \times \left(\frac{1}{2}\right)^7 \Leftrightarrow u_1 = \frac{\frac{3}{128}}{\frac{1}{128}} \Leftrightarrow u_1 = 3$$

Então,

$$S_{10} = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_{10} = 3 \times \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{10}}{1 - \frac{1}{2}} = 3 \times \frac{1 - \frac{1}{1024}}{\frac{1}{2}} = 6 \times \frac{1023}{1024} = \frac{3069}{512}$$

8. Sabemos que $(a_n)$ é uma progressão aritmética de razão 3, então, tem-se que

$$a_{n+1} - a_n = 3, \forall n \in \mathbb{N}$$

Assim,

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{2^{-3a_{n+1}}}{2^{-3a_n}} = 2^{-3a_{n+1}+3a_n} = 2^{-3(a_{n+1}-a_n)} = 2^{-3\times 3} = 2^{-9} = \frac{1}{2^9} = \frac{1}{512}(constante), \forall n \in \mathbb{N}$$

Logo, $(b_n)$ é uma progressão geométrica de razão $\frac{1}{512}$

9. Seja $(a_n)$ uma progressão geométrica de razão $r_1$ e $(b_n)$ uma progressão geométrica de razão $r_2$

Assim, tem-se que,

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = r_1, \forall n \in \mathbb{N} \text{ e } \frac{b_{n+1}}{b_n} = r_2, \forall n \in \mathbb{N}$$

Consideremos $(c_n)$ a sucessão definida por $c_n = a_n \times b_n, \forall n \in \mathbb{N}$

Então,

$$\frac{c_{n+1}}{c_n} = \frac{a_{n+1} \times b_{n+1}}{a_n \times b_n} = \frac{a_{n+1}}{a_n} \times \frac{b_{n+1}}{b_n} = r_1 \times r_2 (constante), \forall n \in \mathbb{N}$$

Portanto, o produto de duas progressões geométricas é ainda uma progressão geométrica de razão igual ao produto das respetivas razões

10. $\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{a \times b^{c(n+1)+d}}{a \times b^{cn+d}} = \frac{b^{cn+c+d}}{b^{cn+d}} = b^{cn+c+d-cn-d} = b^c (constante), \forall n \in \mathbb{N}$

Portanto, as sucessões definidas por um termo geral do tipo $v_n = a \times b^{cn+d}$,$n \in \mathbb{N}$, $a, b, c \in \mathbb{R} \backslash \{0\}$, $d \in \mathbb{R}$, são progressões geométricas de razão $b^c$