Escola Secundária de Paredes

2º Teste de Avaliação

Matemática A

12.º Ano de Escolaridade | Turma: H

Duração do Teste de Avaliação: 90 minutos | novembro de 2022

Versão 1

Nome ______________________________ **Nº.** ________

Instruções gerais

- Não é permitido o uso de corretor
- É permitido o uso de calculadora
- Para responderes aos itens de escolha múltipla, assinala de forma inequívoca, a opção escolhida, escrevendo a letra correspondente **Não apresentes cálculos nem justificações** neste tipo de itens

1. **(10 pontos)** Seja f, a função real, de variável real, de domínio $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$, definida por $f(x) = \dfrac{1}{x+1}$

   Em qual das opções está a expressão algébrica da função derivada de f?

   (A) $\dfrac{1}{(x+1)^2}$ (B) $-\dfrac{1}{(x+1)^2}$ (C) $-\dfrac{1}{x+1}$ (D) $\dfrac{2}{(x+1)^2}$

2. **(20 pontos)** Seja g, a função real, de variável real, definida por $g(x) = (2x+1)(1-3x)$

   Determina, analiticamente, a equação da reta tangente ao gráfico da função g no ponto de abcissa zero

3. **(20 pontos)** Seja f, uma função real, de variável real, contínua no intervalo $[1;3]$, e tal que $f(1) = 4$ e $f(3) = 2$

   Seja g, a função real, de variável real, definida por $g(x) = 2x + f(x)$

   Mostra que a equação $g(x) = 7$ é possível em $]1;3[$

4. **(20 pontos)** Seja f, a função real, de variável real, definida por $f(x) = x^2 + c$, com $c \in \mathbb{R}$

   Mostra, pela definição, que $f'(a) = 2a$

5. **(10 pontos)** Seja f, uma função real de variável real, de domínio $\mathbb{R}^+$

   Sabe-se que:

   - $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 2$
   - $\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) - 2x - 5] = 0$

   Em qual das opções está o valor de $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^3+2}{x^2 f(x)}$?

   (A) $\dfrac{1}{5}$

   (B) 2

   (C) $-\dfrac{1}{2}$

   (D) $\dfrac{1}{2}$

6. Considera a função g, real de variável real, definida por $g(x) = -\frac{1}{3}x^3 + x + 1$

No referencial ortonormado da figura 1 estão representados parte do gráfico da função g, e duas retas paralelas, r e s

Sabe-se que:

- a reta r é tangente ao gráfico da função no ponto A de abcissa a
- a reta s é tangente ao gráfico da função no ponto B de abcissa b
- as retas r e s são paralelas à reta de equação $y = -3x$

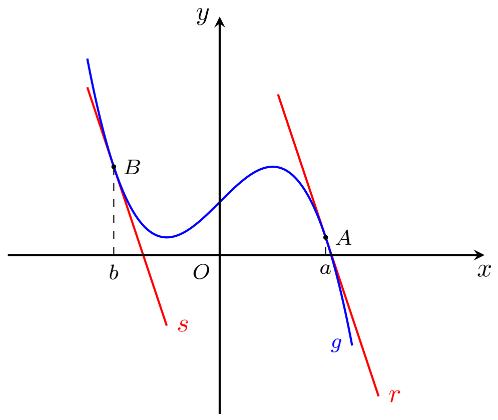

Figura 1

6.1. **(20 pontos)** Estuda, analiticamente, a função g quanto à monotonia e quanto à existência de extremos

Na tua resposta, apresenta o(s) intervalo(s) de monotonia

6.2. **(20 pontos)** Determina, analiticamente, os valores de a e b

7. **(10 pontos)** Seja f, a função real, de variável real, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $f(x) = \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{4}x - \frac{1}{2}$

No referencial ortonormado da figura 2 encontra-se parte da representação gráfica da função f e uma reta r tangente ao gráfico da função no ponto A de abcissa 2

Em qual das opções está o valor do declive da reta r?

(A) $\frac{3}{4}$

(B) $\frac{1}{2}$

(C) $\frac{5}{4}$

(D) $\frac{4}{3}$

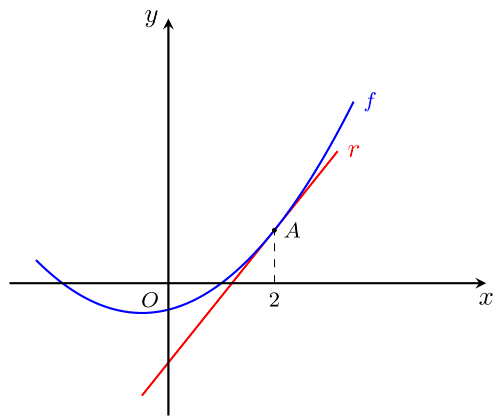

Figura 2

8. Sejam f e g, duas funções reais, de variável real, definidas, respetivamente, por $f(x) = \sqrt{x^2+1} + x$ e

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 2x}{2x^2 - 10x + 12} & se \quad x < 2 \\ 2k^2 - 3 & se \quad x = 2 \\ \dfrac{3\sqrt{2x+5} - 9}{(x-2)(1-x)} & se \quad x > 2 \end{cases}, \text{ com } k \in \mathbb{R}$$

8.1. **(20 pontos)** Averigua, analiticamente, se existe algum $k \in \mathbb{R}$, para o qual a função g é contínua no ponto $x = 2$

8.2. **(20 pontos)** Determina, analiticamente e caso exista, a equação da assíntota ao gráfico da função f quando $x \to -\infty$

9. **(10 pontos)** Sejam f e g, duas funções reais, de variável real, de domínio $[0;+\infty[$

No referencial ortonormado da figura 3 encontra-se parte da representação gráfica da função f e uma reta r tangente ao gráfico da função no ponto A

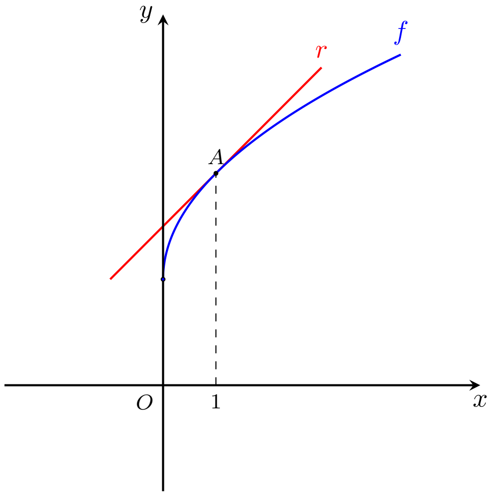

Figura 3

Sabe-se que:

- o ponto A tem abcissa 1
- $(0;3)$ e $(-3;0)$ são pontos da reta r
- a função g é definida por $g(x) = \sqrt{x} + 2$

Qual é o valor de $(g \times f)'(1)$?

(A) 5 (B) 7 (C) 6 (D) 4

10. **(20 pontos)** Seja h, a função real, de variável real, definida por $h(x) = \dfrac{2x}{x^2 - 4}$

Resolve, em $\mathbb{R}$, e analiticaamente, a condição $h(x) \leq \dfrac{x}{x+2}$

Apresenta o conjunto solução sob a forma de intervalo ou reunião de intervalos de números reais

FIM

Formulário

Regras de derivação

$(u+v)' = u' + v'$

$(uv)' = u'v + uv'$

$\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$

$(u^n)' = nu^{n-1}u' \quad (n \in \mathbb{R})$

$(\sqrt[n]{u})' = \dfrac{u'}{n\sqrt[n]{u^{n-1}}}$