SPM@TESTES

Teste de Matemática 11.º ano

2023

11.º ano de Escolaridade

Duração da Prova: 90 minutos. | Tolerância: 30 minutos. (seis páginas)

VERSÃO 1

Para cada resposta, identifique o grupo e o item.

Apresente as suas respostas de forma legível.

As cotações dos itens encontram-se no final do enunciado da prova.

Não é necessário o uso de máquina de calcular.

Na resposta aos itens de **escolha múltipla**, selecione a opção correta. Escreva, na folha de respostas, o número do item e a letra que identifica a opção escolhida.

Na resposta aos restantes, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias.

1. Na Figura 1, está representada, num referencial o.n. xOy, uma circunferência de raio 4.

Sabe-se que:

- a reta CB é definida pela equação $x = 4$;
- o ponto C tem coordenadas $(4{,}0)$;
- a circunferência tem centro na origem;
- o ponto A pertence à circunferência;
- α é a inclinação da reta AB $\left(\alpha \in \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right[\right)$

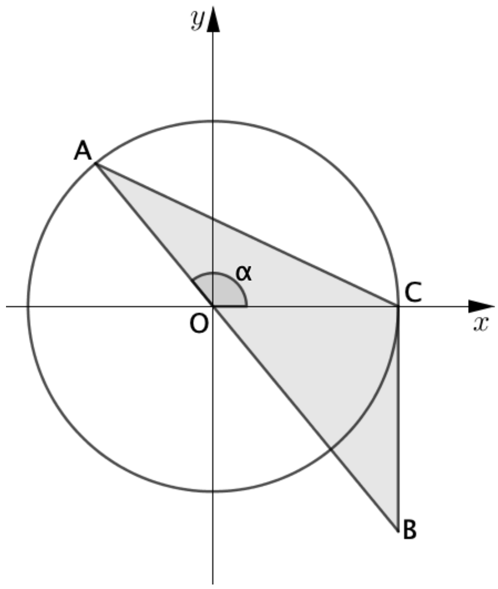

Figura 1

1.1. Mostre que a área do triângulo $[ABC]$, representado a sombreado, é dada em função de α por $A(\alpha) = 8\,(\sin\alpha - \tan\alpha)$

1.2. Para um determinado valor de α o declive da reta AC é igual a $-\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Determine as coordenadas do ponto A para esse valor de α.

2. Seja f a função definida em $\mathbb{R}$ por $f(x) = k - 2a\sin(ax)$, com $a, k \in \mathbb{N}$.
Sendo $D'_f = [-1, 15]$ o contradomínio da função f, então o período positivo mínimo de f é:

(A) 8π **(B)** $\frac{\pi}{2}$ **(C)** $\frac{\pi}{4}$ **(D)** 4π

3. Considere a função f, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $f(x) = \sin x \cos x$

3.1. Mostre que f é uma função periódica de período π

3.2. Determine os valores de $x \in [-\pi, \pi[$ tais que $f(x) = \sin^2 x$

4. Considere, num referencial o.n. xOy, uma reta r definida pela equação $y = \sqrt{5}\,x - 1$.

Seja t uma reta perpendicular à reta r.

Se a inclinação da reta t for α, qual é o valor de $\sin\alpha$?

(A) $\frac{\sqrt{6}}{6}$ **(B)** $\frac{\sqrt{30}}{6}$ **(C)** $-\frac{\sqrt{6}}{6}$ **(D)** $-\frac{\sqrt{30}}{6}$

5. Considere, num referencial o.n. $Oxyz$, o plano α de equação $2x - y + z - 1 = 0$ e o ponto $A(2\,,-1\,,8)$.

5.1. Determine o raio da superfície esférica de centro em A e tangente ao plano α

5.2. Para certos valores reais de m e n, a seguinte equação vetorial define uma reta r :

$$(x, y, z) = (n\,,-1\,,-4m) + k(3m\,,m\,,m-6)\,,\quad k \in \mathbb{R}$$

Determine os valores de m e n sabendo que a reta r está contida no plano α

6. Sabe-se que a sucessão (v_n) tem todos os termos positivos e $v_n \times (3 - v_n) \geq 0$, para todo o valor natural de n.

Qual das seguintes afirmações é necessariamente verdadeira?

(A) (v_n) não é monótona

(B) (v_n) é limitada

(C) (v_n) é crescente

(D) Existe um valor natural de n para o qual $\frac{v_n}{4-v_n} < 0$

7. Considere duas sucessões (a_n) e (b_n) que têm as seguintes características:

- (a_n) é uma progressão geométrica;
- (b_n) é uma progressão aritmética;
- Em ambas as sucessões o primeiro termo é igual a 3;
- $a_2 = b_4$ e $a_3 = b_8$.

Determine a razão de cada uma das progressões.

8. Considere a sucessão (u_n) definida por $\begin{cases} u_1 = 10 \\ u_n = u_{n+1} + 2, \;\; n \in \mathbb{N} \end{cases}$

Qual o valor de $\lim u_n$?

(A) 0 **(B)** -10 **(C)** $+\infty$ **(D)** $-\infty$

9. Na Figura 2, estão representados, num referencial o.n. xOy, parte dos gráficos das funções f e g bem como o triângulo $[OAB]$.

- O ponto A é o ponto de interseção dos gráficos de f e g com abcissa positiva;
- O ponto B é o ponto de interseção do gráfico de f com o eixo Ox;
- A função f define-se, no respetivo domínio, por $f(x) = \frac{3x-4}{x-2}$
- A função g define-se, em $\mathbb{R}$, por $g(x) = \frac{1}{2}x + 2$

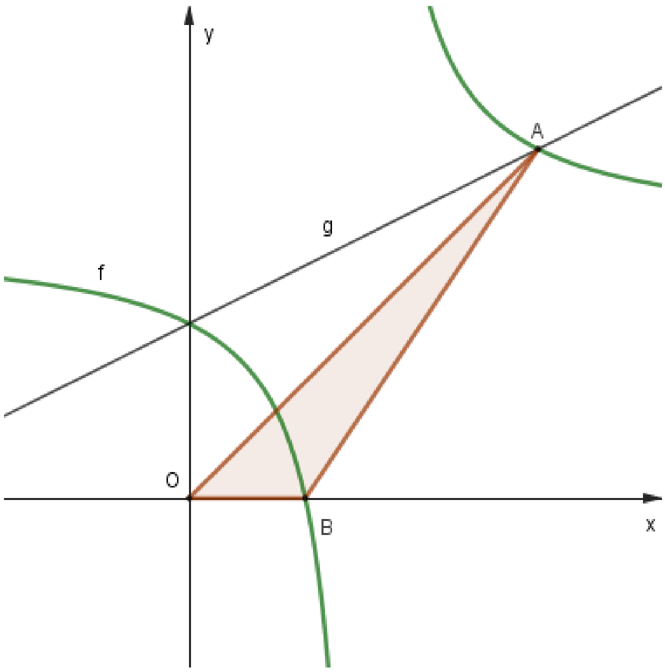

Figura 2

9.1. Determine as coordenadas dos pontos A e B e a área do triângulo $[OAB]$.

9.2. Determine o domínio da função h definida por $h(x) = \sqrt{-f(x)}$.

9.3. Para cada valor de a e de b tem-se a função j definida por $j(x) = f(x-a) + b$.

Os valores de a e de b para os quais as assíntotas vertical e horizontal do gráfico da função j coincidem, respetivamente, com os eixos Oy e Ox, são:

(A) $a = 3$ e $b = -2$ **(B)** $a = 2$ e $b = 3$

(C) $a = -2$ e $b = -3$ **(D)** $a = 2$ e $b = -3$

10. Na Figura 3, está representada, num referencial o.n. xOy, parte do gráfico da função h, bem como as respetivas assíntotas verticais, de equações $x = -1$, $x = 0$ e $x = 2$ e a assintota horizontal $y = 0$

Sabe-se que $\lim h(u_n) = +\infty$.

Então a sucessão (u_n) pode ser definida por:

(A) $u_n = -\frac{1}{n+2}$ **(B)** $u_n = 2 + \frac{(-1)^n}{n+2}$

(C) $u_n = -1 + \frac{1}{n+2}$ **(D)** $u_n = 2n + 5$

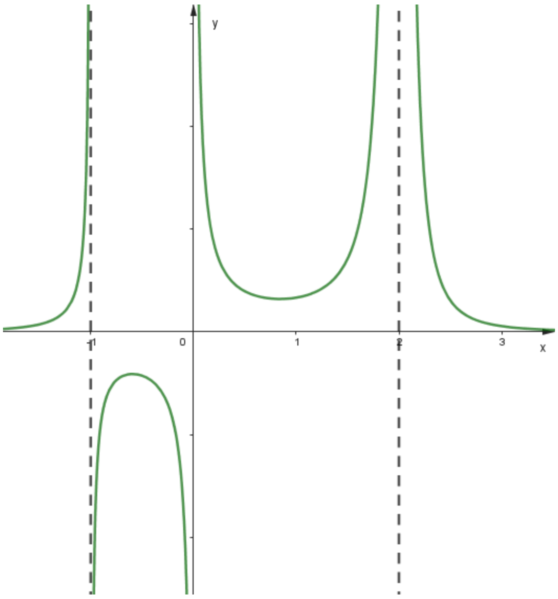

Figura 3

Responda a um e um só dos grupos A ou B

Se responder a mais do que um destes grupos deve indicar qual deles pretende que seja classificado.

Se não der esta indicação será classificado o grupo a que responder em primeiro lugar.

GRUPO A

11. Considere as sucessões (a_n), (b_n) e (c_n) definidas por:

$$a_n = 4n^3 - 2n^2 \qquad b_n = (1 + 2n)(5n - 2n^2 + 1) \qquad c_n = \frac{1}{\sqrt{4n^2-1}}$$

11.1. Calcule o valor de $\lim (a_n \times c_n)$

11.2. Indique, justificando, qual o valor lógico da afirmação: $\lim a_n \neq \lim b_n$, mas $\lim \frac{a_n}{b_n} = \lim \frac{b_n}{a_n}$

GRUPO B

11. Considere as funções reais de variável real f, g e h definidas por:

$$f(x) = 2x^2 - 8 \qquad g(x) = \sqrt{4x^2 - 1} \qquad h(x) = x^2 - 4$$

11.1. Calcule, caso exista, o valor de $\lim\limits_{x \to 2} \left(\frac{x}{f(x)} - \frac{1}{h(x)} \right)$

11.2. Indique, justificando, qual o valor lógico da afirmação**:**

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{h(x)}{g(x)} \neq \lim_{x \to +\infty} \frac{h(x)}{g(x)}$$

FIM

Questão	1.1	1.2	2.	3.1	3.2	4.	5.1	5.2	6.	7.	8.	9.1	9.2	9.3	10.	Grupo A		Grupo B	
																11.1	11.2	11.1	11.2
Cotação	16	12	8	12	16	8	16	12	8	16	8	16	12	8	8	12	12	12	12

CD5183

SPM@TESTES

Teste de Matemática 11.º ano

2023

11.º ano de Escolaridade

Duração da Prova: 90 minutos. | Tolerância: 30 minutos. (seis páginas)

VERSÃO 2

Para cada resposta, identifique o grupo e o item.

Apresente as suas respostas de forma legível.

As cotações dos itens encontram-se no final do enunciado da prova.

Não é necessário o uso de máquina de calcular.

Na resposta aos itens de **escolha múltipla**, selecione a opção correta. Escreva, na folha de respostas, o número do item e a letra que identifica a opção escolhida.

Na resposta aos restantes, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias.

1. Na Figura 1, está representada, num referencial o.n. xOy, uma circunferência de raio 4.

Sabe-se que:

- a reta CB é definida pela equação $x = 4$;
- o ponto C tem coordenadas $(4,0)$;
- a circunferência tem centro na origem;
- o ponto A pertence à circunferência;
- α é a inclinação da reta AB $\left(\alpha \in \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right[\right)$

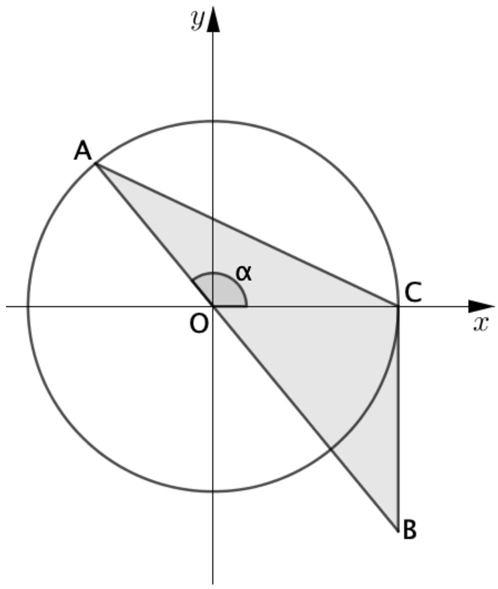

Figura 1

1.1. Mostre que a área do triângulo $[ABC]$, representado a sombreado, é dada em função de α por $A(\alpha) = 8\,(\sin\alpha - \tan\alpha)$.

1.2. Para um determinado valor de α o declive da reta AC é igual a $-\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Determine as coordenadas do ponto A para esse valor de α.

2. Seja f a função definida em $\mathbb{R}$ por $f(x) = k - 2a\sin(ax)$, com $a, k \in \mathbb{N}$.

Sendo $D'_f = [-1, 15]$ o contradomínio da função f, então o período positivo mínimo de f é:

(A) 4π **(B)** $\frac{\pi}{4}$ **(C)** $\frac{\pi}{2}$ **(D)** 8π

3. Considere a função f, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $f(x) = \sin x \cos x$

3.1. Mostre que f é uma função periódica de período π

3.2. Determine os valores de $x \in [-\pi, \pi[$ tais que $f(x) = \sin^2 x$

4. Considere, num referencial o.n. xOy, uma reta r definida pela equação $y = \sqrt{5}\,x - 1$.

Seja t uma reta perpendicular à reta r.

Se a inclinação da reta t for α, qual é o valor de $\sin\alpha$?

(A) -- $\frac{\sqrt{6}}{6}$ **(B)** -- $\frac{\sqrt{30}}{6}$ **(C)** $\frac{\sqrt{6}}{6}$ **(D)** $\frac{\sqrt{30}}{6}$

5. Considere, num referencial o.n. $Oxyz$, o plano α de equação $2x - y + z - 1 = 0$ e o ponto $A(2\,,-1\,,8)$.

5.1. Determine o raio da superfície esférica de centro em A e tangente ao plano α

5.2. Para certos valores reais de m e n, a seguinte equação vetorial define uma reta r :

$$(x, y, z) = (n\,,-1\,,-4m) + k(3m\,,m\,,m - 6)\,,\quad k \in \mathbb{R}$$

Determine os valores de m e n sabendo que a reta r está contida em α

6. Sabe-se que a sucessão (v_n) tem todos os termos positivos e $v_n \times (3 - v_n) \geq 0$, para todo o valor natural de n.

Qual das seguintes afirmações é necessariamente verdadeira?

(A) (v_n) é crescente

(B) Existe um valor natural de n para o qual $\frac{v_n}{4-v_n} < 0$

(C) (v_n) não é monótona

(D) (v_n) é limitada

7. Considere duas sucessões (a_n) e (b_n) que têm as seguintes características:

- (a_n) é uma progressão geométrica;
- (b_n) é uma progressão aritmética;
- Em ambas as sucessões o primeiro termo é igual a 3;
- $a_2 = b_4$ e $a_3 = b_8$.

Determine a razão de cada uma das progressões.

8. Considere a sucessão (u_n) definida por $u_n = \begin{cases} u_1 = 10 \\ u_n = u_{n+1} + 2, \ \ n \in \mathbb{N} \end{cases}$

Qual o valor de $\lim u_n$?

(A) $-\infty$ **(B)** -10 **(C)** 0 **(D)** $+\infty$

9. Na Figura 2, estão representados, num referencial o.n. xOy, parte dos gráficos das funções f e g bem como o triângulo $[OAB]$.

- O ponto A é o ponto de interseção dos gráficos de f e g com abcissa positiva;
- O ponto B é o ponto de interseção do gráfico de f com o eixo Ox;
- A função f define-se, no respetivo domínio, por $f(x) = \frac{3x-4}{x-2}$
- A função g define-se, em $\mathbb{R}$, por $g(x) = \frac{1}{2}x + 2$

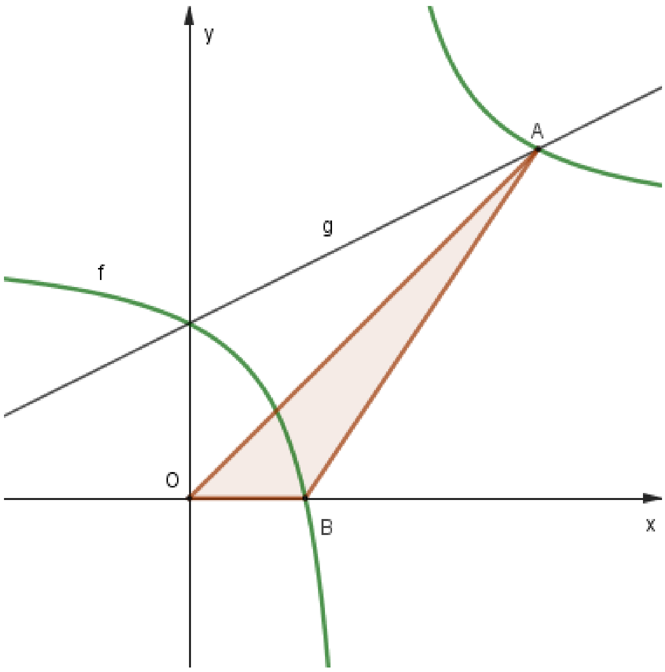

Figura 2

9.1. Determine as coordenadas dos pontos A e B e a área do triângulo $[OAB]$.

9.2. Determine o domínio da função h definida por $h(x) = \sqrt{-f(x)}$.

9.3. Para cada valor de a e de b tem-se a função j definida por $j(x) = f(x-a) + b$.

Os valores de a e de b para os quais as assíntotas vertical e horizontal do gráfico da função j coincidem, respetivamente, com os eixos Oy e Ox, são:

(A) $a = 2$ e $b = 3$ **(B)** $a = 3$ e $b = -2$

(C) $a = 2$ e $b = -3$ **(D)** $a = -2$ e $b = -3$

10. Na Figura 3, está representada, num referencial o.n. xOy, parte do gráfico da função h, bem como as respetivas assíntotas verticais, de equações $x = -1,\ x = 0$ e $x = 2$ e a assintota horizontal $y = 0$

Sabe-se que $\lim h(u_n) = +\infty$.

Então a sucessão (u_n) pode ser definida por:

(A) $u_n = 2n + 5$ **(B)** $u_n = -1 + \frac{1}{n+2}$

(C) $u_n = 2 + \frac{(-1)^n}{n+2}$ **(D)** $u_n = -\frac{1}{n+2}$

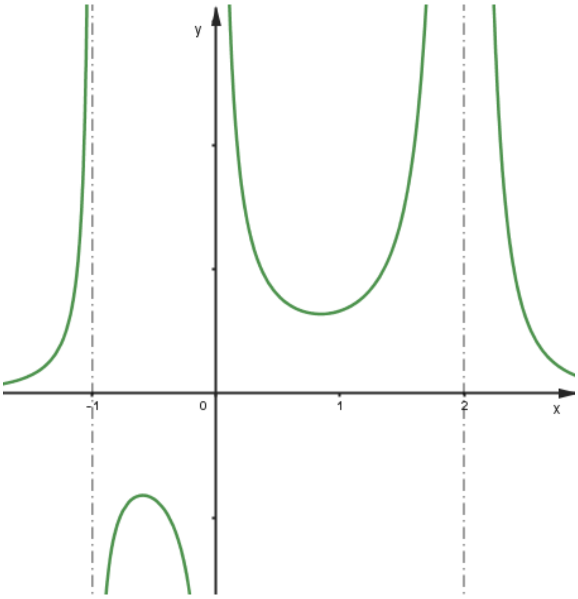

Figura 3

Responda a um e um só dos grupos A ou B

Se responder a mais do que um destes grupos deve indicar qual deles pretende que seja classificado.

Se não der esta indicação será classificado o grupo a que responder em primeiro lugar.

GRUPO A

11. Considere as sucessões (a_n), (b_n) e (c_n) definidas por:

$$a_n = 4n^3 - 2n^2 \qquad b_n = (1 + 2n)(5n - 2n^2 + 1) \qquad c_n = \frac{1}{\sqrt{4n^2-1}}$$

11.1. Calcule o valor de $\lim\,(a_n \times c_n)$

11.2. Indique, justificando, qual o valor lógico da afirmação: $\lim a_n \neq \lim b_n$, mas $\lim \frac{a_n}{b_n} = \lim \frac{b_n}{a_n}$

GRUPO B

11. Considere as funções reais de variável real f, g e h definidas por:

$$f(x) = 2x^2 - 8 \qquad g(x) = \sqrt{4x^2 - 1} \qquad h(x) = x^2 - 4$$

11.1. Calcule, caso exista, o valor de $\lim\limits_{x \to 2} \left(\frac{x}{f(x)} - \frac{1}{h(x)} \right)$

11.2. Indique, justificando, qual o valor lógico da afirmação**:**

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{h(x)}{g(x)} \neq \lim_{x \to +\infty} \frac{h(x)}{g(x)}$$

FIM

Questão	**1.1**	**1.2**	**2.**	**3.1**	**3.2**	**4.**	**5.1**	**5.2**	**6.**	**7.**	**8.**	**9.1**	**9.2**	**9.3**	**10.**	**Grupo A**		**Grupo B**	
																11.1	**11.2**	**11.1**	**11.2**
Cotação	16	12	8	12	16	8	16	12	8	16	8	16	12	8	8	12	12	12	12