Escola Secundária de Paredes

Proposta de Resolução da Ficha Formativa 4

Matemática A

12.º Ano de Escolaridade | maio de 2021

Turma: 12ºJ

1. .

1.1. .

1.1.1. Se, se pretende que o grupo tenha pelo menos quatro raparigas

Então,

quatro raparigas + um rapaz: ${}^7C_4 \times {}^6 C_1$

cinco raparigas + zero rapazes: ${}^7C_5$

É possível constituir

${}^7C_4 \times {}^6 C_1 + {}^7 C_5 = 231$ comissões distintas

1.1.2. Se, se pretende que o grupo tenha no máximo dois rapazes

Então,

três raparigas + dois rapazes: ${}^7C_3 \times {}^6 C_2$

quatro raparigas + um rapaz: ${}^7C_4 \times {}^6 C_1$

cinco raparigas + zero rapazes: ${}^7C_5$

É possível constituir

${}^7C_3 \times {}^6 C_2 + {}^7 C_4 \times {}^6 C_1 + {}^7 C_5 = 756$ comissões distintas

1.2. .

1.2.1. Fazendo um esquema

$\underline{M_1M_2M_3M_4M_5M_6M_7}\quad \underline{H_1}\quad \underline{H_2}\quad \underline{H_3}\quad \underline{H_4}\quad \underline{H_5}\quad \underline{H_6}$

Ou

$\underline{H_1}\quad \underline{H_2}\quad \underline{H_3}\quad \underline{H_4}\quad \underline{H_5}\quad \underline{H_6}\quad \underline{M_1M_2M_3M_4M_5M_6M_7}$

Observando o primeiro esquema, tem-se que os seis rapazes podem permutar entre si, de 6! maneiras distintas, e para cada uma destas maneiras, o grupo das raparigas que estão em bloco podem permutar entre si de 7! maneiras distintas

Tendo em conta que o bloco das raparigas pode ficar no início ou no fim do alinhamento, tem-se que o número de maneiras distintas de os alunos se disporem lado a lado, como o pretendido, é igual a $6! \times 7! \times 2 = 7257600$, pelo que podem ser tiradas 7257600 fotos diferentes

Resposta: (C)

1.2.2. Fazendo um esquema

$\bullet - \bullet - \bullet - \bullet - \bullet - \bullet - \bullet - \bullet$

Legenda:

Os traços são as posições das sete raparigas

As bolas são as possíveis posições para os seis rapazes

Escolha das seis posições para os rapazes: ${}^{8}C_6$

Escolhidas estas posições, os rapazes podem trocar de posição entre si de 6! maneiras distintas e as raparigas podem trocar de posição entre si de 7! maneiras distintas

Assim existem ${}^{8}C_6 \times 6! \times 7! = 101606400$ maneiras distintas de dispor os alunos de modo que não fiquem dois rapazes juntos, pelo que podem ser tiradas 101606400 fotos diferentes

2. Os números têm seis algarismos

Fazendo um esquema

$- \quad - \quad - \quad - \quad - \quad -$

Como se pretende que o número seja inferior a 200000, então para o primeiro algarismo só podemos escolher o 1, visto que não pode começar por zero

Fixado o primeiro algarismo, como se pretende que o número seja par, então o algarismo das unidades tem de ser 0, 2, 4, 6 ou 8, ou seja, existem cinco possibilidades

Fixado o primeiro algarismo e escolhido o algarismo das unidades, para os restantes algarismos temos ${}^{7}A_4$ maneiras distintas de os escolher, dado que o número tem de ter os algarismos todos diferentes

Assim, existem $5 \times {}^{7}A_4 = 4200$ números de seis algarismos que satisfazem as condições impostas

3. .

Resposta I

Comecemos por colocar as nove bolas pretas na caixa. Como as nove bolas pretas não se distinguem, então existem ${}^{24}C_9$ maneiras diferentes de as colocar na caixa. Colocadas as nove bolas pretas, restam quinze compartimentos para colocar as seis bolas brancas. Como as seis bolas brancas não se distinguem, então existem ${}^{15}C_6$ maneiras diferentes de as colocar na caixa. Colocadas as bolas pretas e brancas, sobram nove compartimentos para colocar as quatro bolas azuis, que são numeradas, e que, portanto, se distinguem umas das outras. Existem ${}^{9}A_4$ maneiras distintas de colocar as bolas azuis na caixa

Concluindo, há ${}^{24}C_9 \times {}^{15}C_6 \times {}^{9}A_4$ maneiras diferentes de colocar as bolas na caixa

Resposta II

Comecemos por colocar as quatro bolas azuis na caixa. Como as quatro bolas azuis são numeradas, e que, portanto, se distinguem umas das outras, existem ${}^{24}C_4 \times 4!$ maneiras distintas de colocar as bolas azuis na caixa
Colocadas as bolas azuis na caixa, sobram vinte compartimentos para colocar as seis bolas brancas, que não se distinguem umas das outras, logo, existem ${}^{20}C_6$ maneiras diferentes de as colocar na caixa. Colocadas as bolas azuis e brancas na caixa, restam catorze compartimentos para colocar as bolas pretas. Como as nove bolas pretas não se distinguem então, existem ${}^{14}C_9$ maneiras diferentes de as colocar na caixa

Concluindo, há ${}^{24}C_4 \times 4! \times {}^{20}C_6 \times {}^{14}C_9$ maneiras diferentes de colocar as bolas na caixa

Resposta III

Comecemos por escolher os cinco compartimentos que ficam vazios. O número de maneiras distintas de fazer essa escolha é dado por $^{24}C_5$
Restam dezanove compartimentos para colocar as bolas pretas. Como as nove bolas pretas não se distinguem, então existem $^{19}C_9$ maneiras diferentes de as colocar na caixa. Colocadas as nove bolas pretas, restam dez compartimentos para colocar as seis bolas brancas. Como as seis bolas brancas não se distinguem, então existem $^{10}C_6$ maneiras diferentes de as colocar na caixa. Colocadas as bolas pretas e brancas, e definidos os compartimentos que ficam vazios, sobram quatro compartimentos para colocar as quatro bolas azuis, que são numeradas, e que, portanto, se distinguem umas das outras. existem $^4A_4$ maneiras distintas de colocar as bolas azuis na caixa

Concluindo, há $^{24}C_5 \times^{19} C_9 \times^{10} C_6 \times^4 A_4$ maneiras diferentes de colocar as bolas na caixa

4. Seja n, o número da linha do triângulo de Pascal

   Sabe-se que o produto de quatro elementos (os dois primeiros e os dois últimos) desta linha do triângulo de Pascal é igual a 1600

   Então,

   $^nC_0 \times^n C_1 \times^n C_{n-1} \times^n C_n = 1600 \Leftrightarrow$

   $\Leftrightarrow 1 \times n \times n \times 1 = 1600 \Leftrightarrow$

   $\Leftrightarrow n^2 = 1600 \Leftrightarrow$

   $\Leftrightarrow n = \pm\sqrt{1600} \Leftrightarrow$

   $\Leftrightarrow n = \pm 40$

   Como $n \geq 1$, então, $n = 40$

   Trata-se portanto da linha 40 do triângulo de Pascal

   Assim, a soma dos três primeiros elementos da linha seguinte é igual a $^{41}C_0 +^{41} C_1 +^{41} C_2 = 862$

5. Desenvolvendo $\left(\frac{x}{y^2} + \sqrt[4]{y^3}\right)^n$, vem,

   $$\left(\frac{x}{y^2} + \sqrt[4]{y^3}\right)^n =$$
   $$= \sum_{p=0}^{n} \left[{}^nC_p \times \left(\frac{x}{y^2}\right)^{n-p} \times \left(\sqrt[4]{y^3}\right)^p\right] =$$
   $$= \sum_{p=0}^{n} \left[{}^nC_p \times x^{n-p} \times \left(y^{-2}\right)^{n-p} \times \left(y^{\frac{3}{4}}\right)^p\right] =$$
   $$= \sum_{p=0}^{n} \left[{}^nC_p \times x^{n-p} \times y^{-2n+2p} \times y^{\frac{3p}{4}}\right] =$$
   $$= \sum_{p=0}^{n} \left[{}^nC_p \times x^{n-p} \times y^{-2n+2p+\frac{3p}{4}}\right] =$$
   $$= \sum_{p=0}^{n} \left[{}^nC_p \times x^{n-p} \times y^{\frac{-8n+11p}{4}}\right]$$

   Como um dos termos deste desenvolvimento tem parte literal igual a x^4y^4

   Procuremos n e p de modo que $n - p = 4 \land \frac{-8n+11p}{4} = 4 \land 0 \leq p \leq n$

$n-p=4 \wedge \frac{-8n+11p}{4}=4 \wedge 0 \leq p \leq n \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow n-p=4 \wedge -8n+11p=16 \wedge 0 \leq p \leq n$

$\Leftrightarrow n=p+4 \wedge -8n+11p=16 \wedge 0 \leq p \leq n$

$\Leftrightarrow n=p+4 \wedge -8(p+4)+11p=16 \wedge 0 \leq p \leq n$

$\Leftrightarrow n=p+4 \wedge -8p-32+11p=16 \wedge 0 \leq p \leq n$

$\Leftrightarrow n=p+4 \wedge 3p=16+32 \wedge 0 \leq p \leq n$

$\Leftrightarrow n=p+4 \wedge 3p=48 \wedge 0 \leq p \leq n$

$\Leftrightarrow n=p+4 \wedge p=16 \wedge 0 \leq p \leq n$

$\Leftrightarrow n=16+4 \wedge p=16 \wedge 0 \leq p \leq n$

$\Leftrightarrow n=20 \wedge p=16 \wedge 0 \leq p \leq n$

O coeficiente do termo que tem parte literal igual a x^4y^4, é ${}^{20}C_{16}=4845$

6. .

6.1. $z_1=2e^{i\frac{\pi}{2}}=2\times\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)=2\,(0+i)=2i$

$|z-z_1|=|z-2+2i| \wedge |z+2+3i| \leq 2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow |z-(0+2i)|=|z-(2-2i)| \wedge |z-(-2-3i)| \leq 2$

A condição $|z-(0+2i)|=|z-(2-2i)|$ representa a mediatriz do segmento de reta de extremos $P_1(0;2)$ e $P_2(2;-2)$, afixos dos números complexos $z_1=2i$ e $z_2=2-2i$

A condição $|z-(-2-3i)| \leq 2$ representa o círculo de centro em $P_3(-2;-3)$, afixo do número complexo $z_3=-2-3i$, e de raio 2

Representando os conjuntos no plano complexo, tem-se

O conjunto de pontos definido pela condição dada é o segmento de reta representado a vermelho

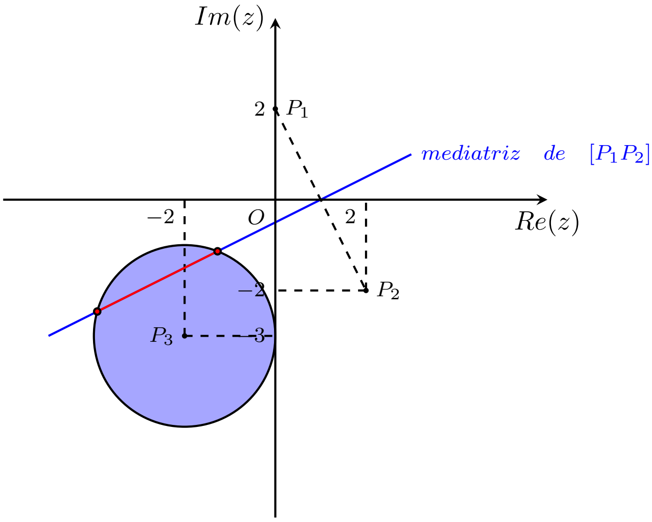

Figura 1

6.2. Escrever z_2 na forma trigonométrica

$|z_2| = \sqrt{2^2 + (-2)^2} = \sqrt{4+4} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

Seja α o argumento de z_2

$\tan(\alpha) = \frac{-2}{2} \wedge \alpha \in 4^{\text{o}}\text{Q}$

$\tan(\alpha) = -1 \wedge \alpha \in 4^{\text{o}}\text{Q}$

$\alpha = -\frac{\pi}{4}$

Assim,

$z_2 = 2\sqrt{2}e^{i\left(-\frac{\pi}{4}\right)}$

Seja $z = |z|e^{i\theta}$

$\overline{z} = |z|e^{i(-\theta)}$
$z^4 = |z|^4 e^{i(4\theta)}$

$\overline{z_2} = 2\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$

$\overline{z_2}^4 = \left(2\sqrt{2}\right)^4 e^{i\frac{4\pi}{4}} = 64e^{i\pi}$

Assim,

$\overline{z} \times z^4 - \overline{z_2}^4 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow |z|e^{i(-\theta)} \times |z|^4 e^{i(4\theta)} = 64e^{i\pi} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow |z|^5 e^{i(-\theta+4\theta)} = 64e^{i\pi} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow |z|^5 e^{i(3\theta)} = 64e^{i\pi} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow |z|^5 = 64 \wedge 3\theta = \pi + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow |z| = \sqrt[5]{64} \wedge \theta = \frac{\pi + k2\pi}{3}, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow |z| = \sqrt[5]{2^6} \wedge \theta = \frac{\pi + k2\pi}{3}, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow |z| = 2\sqrt[5]{2} \wedge \theta = \frac{\pi + k2\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$

Se $k = 0 \mapsto w_0 = 2\sqrt[5]{2}e^{i\frac{\pi}{3}}$

Se $k = 1 \mapsto w_1 = 2\sqrt[5]{2}e^{i\frac{3\pi}{3}} = 2\sqrt[5]{2}e^{i\pi}$

Se $k = 2 \mapsto w_2 = 2\sqrt[5]{2}e^{i\frac{5\pi}{3}} = 2\sqrt[5]{2}e^{i\left(-\frac{\pi}{3}\right)}$

Se $k = 3 \mapsto w_3 = 2\sqrt[5]{2}e^{i\frac{7\pi}{3}} = 2\sqrt[5]{2}e^{i\frac{\pi}{3}}$

Se $k = -1 \mapsto w_4 = 2\sqrt[5]{2}e^{i\left(-\frac{\pi}{3}\right)}$

Portanto,

$C.S. = \left\{2\sqrt[5]{2}e^{i\frac{\pi}{3}}; 2\sqrt[5]{2}e^{i\pi}; 2\sqrt[5]{2}e^{i\left(-\frac{\pi}{3}\right)}\right\}$

7. .

7.1. $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

Determinemos a função primeira derivada de f

$$f'(x) = \left(\frac{e^x}{x}\right)' = \frac{(e^x)' \times x - e^x \times x'}{x^2} = \frac{e^x \times x - e^x \times 1}{x^2} = \frac{xe^x - e^x}{x^2} = \frac{e^x\,(x-1)}{x^2}$$

O declive da reta tangente t é $m_t = f'(-1) = \dfrac{e^{-1}\,(-1-1)}{(-1)^2} = -2e^{-1} = -\dfrac{2}{e}$

Ponto de tangência $T(-1; f(-1))$

$$f(-1) = \frac{e^{-1}}{-1} = -\frac{1}{e}$$

Logo, $T\left(-1; -\dfrac{1}{e}\right)$

A equação da reta tangente t é da forma $y = -\dfrac{2}{e}x + b$, $b \in \mathbb{R}$

Assim,

$$-\frac{1}{e} = -\frac{2}{e} \times (-1) + b \Leftrightarrow -\frac{1}{e} = \frac{2}{e} + b \Leftrightarrow b = -\frac{1}{e} - \frac{2}{e} \Leftrightarrow b = -\frac{3}{e}$$

Portanto, $t: y = -\dfrac{2}{e}x - \dfrac{3}{e}$

7.2. $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

Determinemos a função segunda derivada de f

Comecemos por determinar a derivada de $e^x(x-1)$, numerador da função primeira derivada de f

$$(e^x(x-1))' = (e^x)' \times (x-1) + e^x \times (x-1)' = e^x \times (x-1) + e^x \times 1 = xe^x$$

$$f''(x) = \left(\frac{e^x\,(x-1)}{x^2}\right)' = \frac{(e^x(x-1))' \times x^2 - e^x(x-1) \times (x^2)'}{x^4} = \frac{xe^x \times x^2 - e^x(x-1) \times 2x}{x^2} =$$

$$= \frac{xe^x\left(x^2-2x+2\right)}{x^4} = \frac{e^x\left(x^2-2x+2\right)}{x^3}$$

Zeros de f''

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{e^x\left(x^2-2x+2\right)}{x^3} = 0 \Leftrightarrow e^x\left(x^2-2x+2\right) \wedge x^3 \neq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(e^x = 0 \vee x^2 - 2x + 2 = 0\right) \wedge x \neq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(equac\tilde{a}oimposs\acute{i}vel \vee x = \frac{2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \times 1 \times 2}}{2 \times 1}\right) \wedge x \neq 0 \Leftrightarrow equac\tilde{a}oimposs\acute{i}vel \wedge x \neq 0$$

Não existem zeros para $f''(x)$

Elaborando um quadro de sinal de $f''(x)$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
e^x	$+$	$+$	$+$
x^2-2x+2	$+$	$+$	$+$
x^3	$-$	0	$+$
$f''(x)$	$-$	$n.d.$	$+$
$f(x)$	$\frown$	$n.d.$	$\smile$

O gráfico da função f tem a concavidade voltada para cima em $]0;+\infty[$

e tem a concavidade voltada para baixo em $]-\infty;0[$

Não existem pontos de inflexão do gráfico de f

8. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2e^2-xe^x}{2x-x^2}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2e^2-xe^x}{x(2-x)}=\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{2e^2-(y+2)e^{y+2}}{(y+2)(-y)}=\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{2e^2-ye^{y+2}-2e^{y+2}}{(y+2)(-y)}=$

$=\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{-ye^{y+2}}{(y+2)(-y)}+\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{2e^2-2e^{y+2}}{(y+2)(-y)}=\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{e^{y+2}}{y+2}-\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{2e^2-2e^ye^2}{(y+2)y}=\dfrac{e^2}{2}-\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{-2e^2\left(e^y-1\right)}{(y+2)y}=$

$=\dfrac{e^2}{2}+\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{e^y-1}{y}\times\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{2e^2}{y+2}=\dfrac{e^2}{2}+1\times\dfrac{2e^2}{2}=\dfrac{e^2}{2}+\dfrac{2e^2}{2}=\dfrac{3e^2}{2}$

Fez-se a mudança de variável

$y=x-2\Leftrightarrow x=y+2$

Se $x\to 2$, então, $y\to 0$

Utilizou-se o limite notável $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x}=1$

Resposta: (C)

9. .

9.1. $D_g=\left\{x\in\mathbb{R}:e^{2x}+e^x-6>0\right\}$

Cálculos auxiliares

Coemecemos por determinar os zeros de $e^{2x}+e^x-6$

$e^{2x}+e^x-6=0\Leftrightarrow\left(e^x\right)^2+e^x-6=0$

Fazendo a mudança de variável $y=e^x$, resulta

$y^2+y-6=0\Leftrightarrow y=\dfrac{-1\pm\sqrt{1^2-4\times 1\times(-6)}}{2\times 1}\Leftrightarrow y=\dfrac{-1\pm 5}{2}\Leftrightarrow y=-3\vee y=2$

Assim

$y^2+y-6>0\Leftrightarrow y<-3\vee y>2$

Como $y=e^x$, tem-se,

$e^{2x}+e^x-6>0\Leftrightarrow e^x<-3\vee e^x>2\Leftrightarrow$ Condição impossível $\vee e^x>2\Leftrightarrow x>\ln(2)$

Concluindo,

$D_g=\left\{x\in\mathbb{R}:e^{2x}+e^x-6>0\right\}=]\ln(2);+\infty[$

9.2. A função g é contínua em $[1;2]$

Por outro lado,

$g(1) = \ln(e^2 + e^1 - 6) - 2 = \ln(e^2 + e - 6) - 2 < 0$

$g(2) = \ln(e^4 + e^2 - 6) - 2 > 0$

Como g é função contínua em $[1;2]$, e $g(1) \times g(2) < 0$, então, pelo corolário do teorema de Bolzano-Cauchy, $\exists x \in]1;2[: g(x) = 0$

Concluimos, assim, que a função g tem pelo menos um zero em $]1;2[$

10. A reta r é da forma $y = mx + b$, $m, b \in \mathbb{R}$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{xe^x + 2x}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x(e^x + 2)}{x} = \lim_{x\to-\infty} (e^x + 2) = e^{-\infty} + 2 = 2 \in \mathbb{R}$$

Logo, $m = 2$

$$\lim_{x\to-\infty} (f(x) - 2x) = \lim_{x\to-\infty} (xe^x + 2x - 2x) = \lim_{x\to-\infty} (xe^x) = \lim_{y\to+\infty} (-ye^{-y}) = -\lim_{y\to+\infty} \frac{y}{e^y} = -\frac{1}{\lim\limits_{y\to+\infty} \frac{e^y}{y}} =$$

$$= -\frac{1}{+\infty} = 0 \in \mathbb{R}$$

Logo, $b = 0$

Fez-se a mudança de variável

$y = -x \Leftrightarrow x = -y$

Se $x \to -\infty$, então, $y \to +\infty$

Utilizou-se o limite notável $\lim\limits_{y\to+\infty} \frac{e^y}{y}$

Portanto, $r : y = 2x$

Resposta: (A)