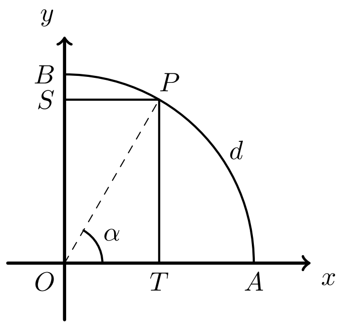
Geometria (11.º ano)

Trigonometria

Exercícios de Provas Nacionais e Testes Intermédios - Propostas de resolução

1. Considerando α como a amplitude do ângulo AOP, temos que as coordenadas do ponto P são:



$$P(r\cos\alpha, r\operatorname{sen}\alpha)$$

E assim, como $\overline{OA} = \overline{OB} = r$, $\overline{OT} = x_P = r\cos\alpha$ e $\overline{OS} = y_P = r\operatorname{sen}\alpha$, vem que:

$$\overline{BS} + \overline{TA} = \overline{OB} - \overline{OS} + \overline{OA} - \overline{OT} = r - r\cos\alpha + r - r\operatorname{sen}\alpha =$$

$$= r(1 - \cos\alpha + 1 - \operatorname{sen}\alpha) = r(2 - \operatorname{sen}\alpha - \cos\alpha)$$

Como d o comprimento do arco AP, definido pelo ângulo α, e o perímetro da circunferência é $2\pi r$, correspondente a um ângulo de amplitude 2π radianos, então podemos identificar uma relação entre α, r e d:

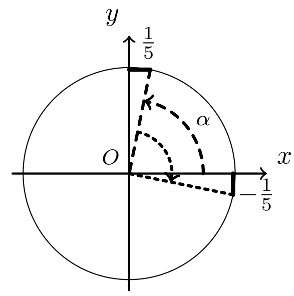
$$\frac{\alpha}{2\pi} = \frac{d}{2\pi r} \Leftrightarrow \alpha = \frac{2\pi \times d}{2\pi \times r} \Leftrightarrow \alpha = \frac{d}{r}$$

E assim, temos que:

$$\overline{BS} + \overline{TA} = r\left(2 - \operatorname{sen}\left(\frac{d}{r}\right) - \cos\left(\frac{d}{r}\right)\right)$$

Exame – 2021, Ép. especial

2. Representando no círculo trigonométrico um ângulo de amplitude $\alpha \in \left]0,\frac{\pi}{2}\right[$, tal que, $\operatorname{sen}\alpha = -\frac{1}{5}$ (como na figura ao lado), podemos verificar que $\operatorname{sen}\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) = -\cos\alpha$, ou seja, $\cos\alpha = -\left(-\frac{1}{5}\right) = \frac{1}{5}$



E, pela fórmula fundamental da trigonometria, vem:

$$\operatorname{sen}^2\alpha + \left(\frac{1}{5}\right)^2 = 1 \Leftrightarrow \operatorname{sen}^2\alpha = 1 - \frac{1}{24} \Leftrightarrow \operatorname{sen}^2\alpha = \frac{24}{25} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \operatorname{sen}\alpha = \pm\sqrt{\frac{24}{25}} \Leftrightarrow \operatorname{sen}\alpha = \pm\frac{\sqrt{24}}{5} \underset{\alpha\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right[}{\Leftrightarrow} \operatorname{sen}\alpha = \frac{\sqrt{24}}{5}$$

Logo, podemos calcular o valor de $\operatorname{tg}\alpha$:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\frac{\sqrt{24}}{5}}{\frac{1}{5}} = \frac{\sqrt{24}}{1} = \sqrt{24}$$

E, como $\operatorname{tg}\beta = \operatorname{tg}(\beta - \pi)$ e $\operatorname{tg}(-\beta) = -\operatorname{tg}\beta$, temos que:

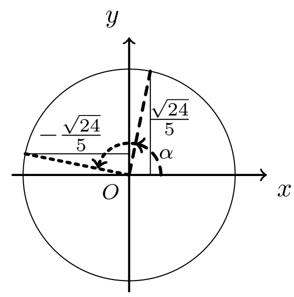
$$\operatorname{tg}(\pi - \alpha) = \operatorname{tg}(\pi - \alpha - \pi) = \operatorname{tg}(-\alpha) = -\operatorname{tg}\alpha = -\sqrt{24}$$

Como $\cos\beta = \cos(\beta + 2\pi)$, logo $\cos\beta = \cos(\beta + 4\pi)$, e assim, temos que:

$$\cos\left(-\frac{7\pi}{2} + \alpha\right) = \cos\left(-\frac{7\pi}{2} + \alpha + 4\pi\right) =$$

$$= \cos\left(-\frac{7\pi}{2} + \alpha + \frac{8\pi}{2}\right) = \cos\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right)$$

Representando no círculo trigonométrico um ângulo de amplitude $\alpha \in \left]0,\frac{\pi}{2}\right[$, tal que, $\cos\alpha = \frac{1}{5}$ (como na figura ao lado), podemos verificar que:



$$\cos\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) = -\operatorname{sen}\alpha = -\frac{\sqrt{24}}{5}$$

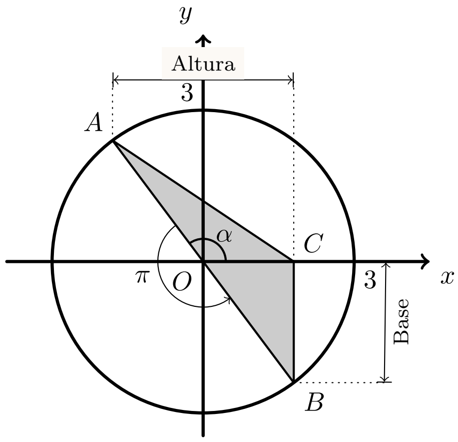
E assim, temos que:

$$\operatorname{tg}(\pi-\alpha) + 2\cos\left(-\frac{7\pi}{2} + \alpha\right) = -\operatorname{tg}\alpha + 2(-\operatorname{sen}\alpha) = -\sqrt{24} + 2\times\left(-\frac{\sqrt{24}}{5}\right) = -\frac{5\sqrt{24}}{5} - -\frac{2\sqrt{24}}{5} = \frac{-7\sqrt{24}}{5}$$

Exame – 2021, 2.ª Fase

3. Como a circunferência tem raio 3 e está centrada na origem, as coordenadas do ponto A são da forma $(3\cos\alpha, 3\,\text{sen}\,\alpha)$ e como $[AB]$ é um diâmetro da circunferência as coordenadas do ponto B são da forma $(3\cos(\alpha+\pi), 3\,\text{sen}\,(\alpha+\pi)$.

   Assim, considerando o lado $[BC]$ como a base do triângulo, temos que a altura é $2 \times \overline{OC}$, porque a abcissa do ponto A é simétrica da abcissa dos pontos B e C



   Como α é um ângulo do segundo quadrante, então:

   - $\text{sen}\,\alpha > 0$ e $\text{sen}\,(\alpha+\pi) < 0$, pelo que:

   $$\overline{BC} = |3\,\text{sen}\,(\alpha+\pi)| = |-3\,\text{sen}\,\alpha| = 3\,\text{sen}\,\alpha$$

   - $\cos\alpha < 0$ e $\cos(\alpha+\pi) > 0$, pelo que:

   $$\overline{OC} = |3\,\text{sen}\,(\alpha+\pi)| = -|3\cos\alpha| = -3\cos\alpha$$

   Assim, temos que a área do triângulo é:

   $$A_{[ABC]} = \frac{\overline{BC} \times 2 \times \overline{OC}}{2} = 3\,\text{sen}\,\alpha \times (-3\cos\alpha) = -9\,\text{sen}\,\alpha\cos\alpha$$

Exame – 2021, 1.ª Fase

4. Como o ponto A está sobre a reta definida pela equação $x = 1$, tangente à circunferência trigonométrica, então a ordenada do ponto A é $y_A = \text{tg}\,\alpha = a$, sendo α o ângulo definido pelo semieixo positivo Ox e pela semireta $\dot{O}A$

   Como o ponto B pertence à circunferência trigonométrica, tem coordenadas $(\cos\alpha, \text{sen}\,\alpha)$, ou seja, a abcissa do ponto B é $x_B = \cos\alpha$

   Desta forma, como $1 + \text{tg}^2\,\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}$, $\text{tg}\,\alpha \neq 0$, e $\cos\alpha \neq 0$, temos que a abcissa do ponto B:

   $$1 + a^2 = \frac{1}{{x_B}^2} \Leftrightarrow {x_B}^2 = \frac{1}{1+a^2} \underset{x_B>0}{\Leftrightarrow} x_B = \sqrt{\frac{1}{1+a^2}} \Leftrightarrow x_B = \frac{1}{\sqrt{1+a^2}}$$

   Resposta: **Opção A**

Exame – 2020, 1.ª Fase

5. Como $\cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$, então $\arccos\frac{1}{2} = \frac{\pi}{3}$, e assim:

   $$\text{sen}\left(3\arccos\frac{1}{2}\right) = \text{sen}\left(3 \times \frac{\pi}{3}\right) = \text{sen}\,(\pi) = 0$$

   Resposta: **Opção C**

Exame – 2019, 2.ª Fase

6. Simplificando a equação, temos:

$$2\cos x + 1 = 0 \Leftrightarrow 2\cos x = -1 \Leftrightarrow \cos x = -\frac{1}{2}$$

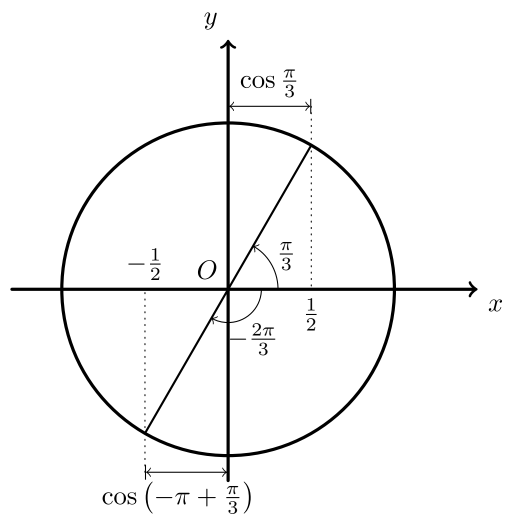
Como $\cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$, podemos observar no círculo trigonométrico que:

$$\cos\left(-\pi + \frac{\pi}{3}\right) = -\cos\frac{\pi}{3} \Leftrightarrow \cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}$$

Pelo que a solução da equação no intervalo $[-\pi, 0]$ é:

$$x = -\frac{2\pi}{3}$$

Resposta: **Opção B**



Exame – 2019, 1.ª Fase

7. Como a soma dos ângulos internos de um triângulo é 180°, vem que:

$$A\hat{C}B = 180 - A\hat{B}C - B\hat{A}C = 180 - 81 - 57 = 42^\circ$$

E assim, calculando o valor de $\overline{AB}$ recorrendo à Lei dos senos, e arredondando o resultado às centésimas, temos que:

$$\frac{\operatorname{sen} A\hat{B}C}{\overline{AC}} = \frac{\operatorname{sen} A\hat{C}B}{\overline{AB}} \Leftrightarrow \frac{\operatorname{sen} 81^\circ}{5} = \frac{\operatorname{sen} 42^\circ}{\overline{AB}} \Leftrightarrow \overline{AB} = \frac{5 \times \operatorname{sen} 42^\circ}{\operatorname{sen} 81^\circ} \Rightarrow \overline{AB} \approx 3{,}39$$

Resposta: **Opção C**

Exame – 2018, 2.ª Fase

8. Considerando que:

- $\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$, temos que $\operatorname{arcsen}(1) = \frac{\pi}{2}$
- $\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) = -\frac{1}{2}$, temos que $\arccos\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{2\pi}{3}$

E assim, vem que:

$$\operatorname{arcsen}(1) + \arccos\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{2} + \frac{2\pi}{3} = \frac{3\pi}{6} + \frac{4\pi}{6} = \frac{7\pi}{6}$$

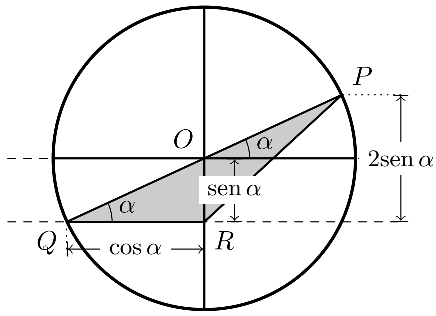
Resposta: **Opção A**

Exame – 2018, 1.ª Fase

9. Observando que os ângulos AOP e RQO têm a mesma amplitude (porque são ângulos de lados paralelos), relativamente ao triângulo $[PQR]$, vem que:

- $\overline{QR} = \cos\alpha$
- $\overline{OR} = \operatorname{sen}\alpha$
- a altura do triângulo, relativa ao lado $[QR]$ é

$$h = 2 \times \overline{OR} = 2\operatorname{sen}\alpha$$



Desta forma, a área do triângulo é:

$$A_{[PQR]} = \frac{\overline{QR} \times h}{2} = \frac{\cos\alpha \times 2\operatorname{sen}\alpha}{2} = \frac{2\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha}{2} = \operatorname{sen}\alpha\cos\alpha$$

Resposta: **Opção D**

Exame – 2016, 2.ª Fase (adaptado)

10. Identificando as medidas relevantes para o cálculo da área do trapézio, temos que:
- a base menor é a ordenada o ponto P, ou seja, $\overline{OP} = 1$
- como R é um ponto do quarto quadrante, então temos que $\cos\alpha > 0$, pelo que a altura do trapézio $[OPQR]$ é: $\overline{PQ} = \cos\alpha$
- como R é um ponto do quarto quadrante, então temos que $\operatorname{sen}\,\alpha < 0$, pelo que a base maior do trapézio $[OPQR]$ é: $\overline{QR} = 1 + (-\operatorname{sen}\,\alpha) = 1 - \operatorname{sen}\,\alpha$

Desta forma, a área do trapézio é:

$$A_{[OPQR]} = \frac{\overline{OP} + \overline{QR}}{2} \times \overline{PQ} = \frac{1 + 1 - \operatorname{sen}\,\alpha}{2} \times \cos\alpha = \frac{2 - \operatorname{sen}\,\alpha}{2} \times \cos\alpha =$$

$$= \frac{2\cos\alpha - \operatorname{sen}\,\alpha\cos\alpha}{2} = \cos\alpha - \frac{\operatorname{sen}\,\alpha\cos\alpha}{2}$$

Resposta: **Opção D**

Exame – 2016, 1.ª Fase

11. Como na figura está representado o círculo trigonométrico, temos que:

$$\overline{OC} = 1\,\alpha\,,\ \overline{AB} = \operatorname{sen}\alpha\,,\ \overline{OB} = \cos\alpha \ \text{ e } \ \operatorname{tg}\alpha = \overline{CD}$$

Temos que a área do quadrilátero $[ABCD]$ pode ser obtida pela diferença das áreas dos triângulos $[OCD]$ e $[OAB]$,

$$A_{[ABCD]} = A_{[OAB]} - A_{[OCD]} = \frac{\overline{OC} \times \overline{CD}}{2} - \frac{\overline{OB} \times \overline{AB}}{2}$$

Assim, vem que:

$$A_{[ABCD]} = \frac{1 \times \operatorname{tg}\alpha}{2} - \frac{\cos\alpha \times \operatorname{sen}\alpha}{2} = \frac{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{sen}\alpha\cos\alpha}{2}$$

Resposta: **Opção B**

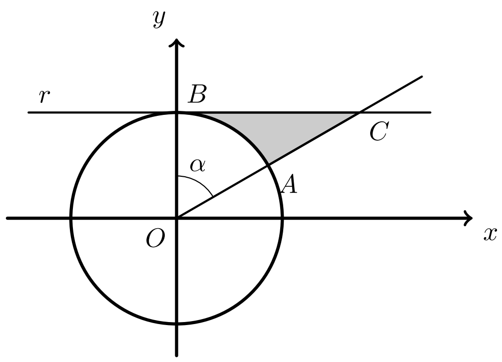
Exame – 2015, 1.ª Fase (adaptado)

12. O triângulo $[OBC]$ é retângulo em B, $\overline{OB} = 1$, e $[BC]$ é o cateto oposto ao ângulo α, temos que:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\overline{BC}}{\overline{OB}} \Leftrightarrow \operatorname{tg} \alpha = \frac{\overline{BC}}{1} \Leftrightarrow \operatorname{tg} \alpha = \overline{BC}$$

Logo,

$$A_{[OBC]} = \frac{\overline{OB} \times \overline{BC}}{2} = \frac{1 \times \operatorname{tg} \alpha}{2} = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{2}$$



A área do setor circular de centro O, raio 1 e amplitude α (delimitado pelo arco AB) é

$$A = \frac{\alpha \times 1^2}{2} = \frac{\alpha}{2}$$

Como a área da zona sombreada (A_S) pode ser calculada como a diferença entre as áreas do triângulo $[OBC]$ e o setor circular de centro O e delimitado pelo arco AB, temos que

$$A_S = A_{[OBC]} - A = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{2} - \frac{\alpha}{2} = \frac{\operatorname{tg} \alpha - \alpha}{2}$$

Resposta: **Opção B**

Exame – 2014, Ép. especial

13.

13.1. Como o lado $[PR]$ do triângulo $[PQR]$ é um diâmetro da circunferência e o vértice Q pertence à mesma circunferência, podemos garantir que o triângulo $[PQR]$ é retângulo, sendo $[PR]$ a hipotenusa.
Como a circunferência tem raio 2, vem que $\overline{PR} = 2 \times 2 = 4$, e assim, recorrendo à definição de seno e cosseno temos:

$$\operatorname{sen} \alpha = \frac{\overline{QR}}{\overline{PR}} \Leftrightarrow \operatorname{sen} \alpha = \frac{\overline{QR}}{4} \Leftrightarrow \overline{QR} = 4 \operatorname{sen} \alpha$$
$$\cos \alpha = \frac{\overline{PQ}}{\overline{PR}} \Leftrightarrow \cos \alpha = \frac{\overline{PQ}}{4} \Leftrightarrow \overline{PQ} = 4 \cos \alpha$$

Como os lados $[QR]$ e $[PQ]$ são perpendiculares, temos que:

$$A_{[PQR]} = \frac{\overline{QR} \times \overline{PQ}}{2} = \frac{4 \operatorname{sen} \alpha \times 4 \cos \alpha}{2} = 8 \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha$$

Como o triângulo $[PSR]$ é congruente com o triângulo $[PQR]$ (ambos têm 1 ângulo reto e dois lados iguais), vem que:

$$A_{[PQRS]} = A_{[PQR]} + A_{[PSR]} = 2 \times A_{[PQR]} = 2 \times 8 \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha = 16 \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha$$

13.2. Como $\operatorname{tg}\theta = 2\sqrt{2}$ e $\operatorname{tg}^2\theta + 1 = \dfrac{1}{\cos^2\theta}$, temos que:

$$\left(2\sqrt{2}\right)^2 + 1 = \frac{1}{\cos^2\theta} \Leftrightarrow 4\times 2+1 = \frac{1}{\cos^2\theta} \Leftrightarrow 9 = \frac{1}{\cos^2\theta} \Leftrightarrow \cos^2\theta = \frac{1}{9} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cos\theta = \pm\sqrt{\frac{1}{9}} \Leftrightarrow \cos\theta = \pm\frac{1}{3} \underset{\theta\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right[}{\Leftrightarrow} \cos\theta = \frac{1}{3}$$

E, pela fórmula fundamental da trigonometria, vem:

$$\operatorname{sen}^2\theta + \frac{1}{9} = 1 \Leftrightarrow \operatorname{sen}^2\theta = 1 - \frac{1}{9} \Leftrightarrow \operatorname{sen}^2\theta = \frac{8}{9} \Leftrightarrow \operatorname{sen}\theta = \pm\sqrt{\frac{8}{9}} \Leftrightarrow \operatorname{sen}\theta = \pm\frac{2\sqrt{2}}{3} \underset{\theta\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right[}{\Leftrightarrow} \operatorname{sen}\theta = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

Finalmente, recorrendo expressão da área do quadrilátero $[PQRS]$, deduzida antes, temos que:

$$16\times\frac{2\sqrt{2}}{3}\times\frac{1}{3} = \frac{32\sqrt{2}}{9}$$

Exame – 2014, 2.ª Fase (adaptado)

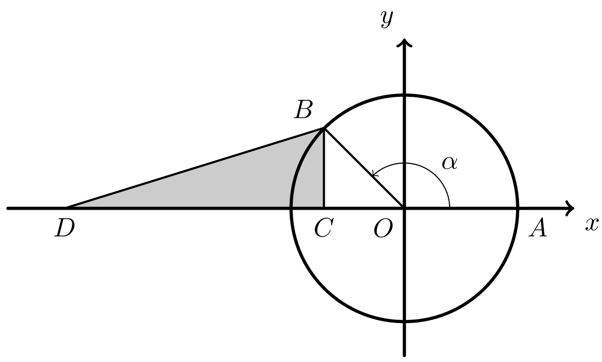
14. Como

- $\overline{BC} = \operatorname{sen}\alpha$
- $\overline{OC} = \cos\alpha$

Temos que $\overline{DC} = \overline{OD} - \overline{OC} = 3 - |\cos\alpha|$

Como $\alpha \in \left]\frac{\pi}{2},\pi\right[$, logo $\cos\alpha < 0$, pelo que $|\cos\alpha| = -\cos\alpha$

Assim, $\overline{DC} = 3 - |\cos\alpha| = 3 - (-\cos\alpha) = 3 + \cos\alpha$



Desta forma, temos que:

$$A_{[BCD]} = \frac{\overline{DC}\times\overline{BC}}{2} = \frac{\operatorname{sen}\alpha(3+\cos\alpha)}{2} = \frac{1}{2}(3+\cos\alpha)\operatorname{sen}\alpha$$

Resposta: **Opção C**

Exame – 2014, 1.ª Fase

15. Como $x \in \left]\pi,\frac{3\pi}{2}\right[$, temos que x é a amplitude de um ângulo do 3º quadrante.

Assim, temos que:

- $\operatorname{sen} x < 0$
- $\cos x < 0$
- $\operatorname{tg} x > 0$

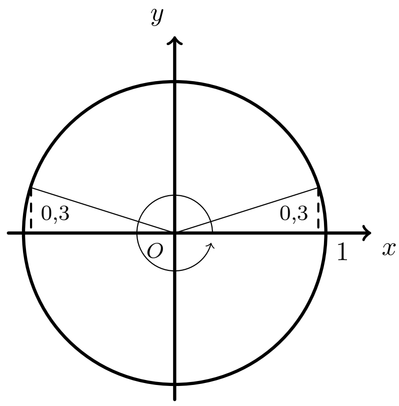
Assim, analisando cada uma das hipóteses, vem que:

- $\operatorname{sen} x + \cos x < 0$ (porque é a soma de valores negativos)
- $\dfrac{\cos x}{\operatorname{tg} x} < 0$ (porque é o quociente de um valor negativo por um positivo)
- $\operatorname{tg} x - \operatorname{sen} x > 0$ (porque é a diferença entre um valor positivo e um negativo, ou de forma equivalente, a soma de dois valores positivos)
- $\operatorname{sen} x \times \operatorname{tg} x < 0$ (porque é o produto de um valor negativo por um positivo)

Resposta: **Opção C**

Teste Intermédio 11.º ano – 11.03.2014

16. Como no intervalo $[0,2\pi[$ a equação $\operatorname{sen} x = 0{,}3$ tem 2 soluções, então:



- no intervalo $[0,2\pi \times 10[= [0,20\pi[$ a equação $\operatorname{sen} x = 0{,}3$ tem 20 soluções, (correspondentes a 10 repetições das duas soluções iniciais por cada uma das 10 voltas completas no círculo trigonométrico, no sentido positivo).

Analogamente,

- no intervalo $[-2\pi \times 10,0[= [-20\pi,0[$ a equação $\operatorname{sen} x = 0{,}3$ tem 20 soluções, (correspondentes a 10 repetições das duas soluções iniciais por cada uma das 10 voltas completas no círculo trigonométrico, no sentido negativo).

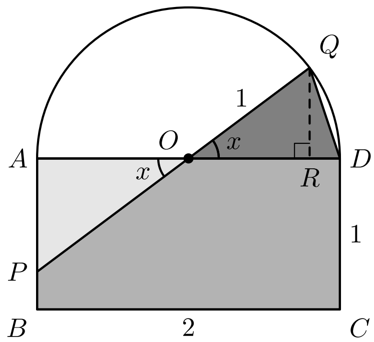
Assim, temos que, no intervalo $[-20\pi,20\pi[$, a equação trigonométrica $\operatorname{sen} x = 0{,}3$ tem $20+20 = 40$ soluções.

Resposta: **Opção B**

Teste Intermédio 11.º ano – 11.03.2014

17.

17.1. Como os ângulos DOC e AOP são ângulos verticalmente opostos, x também é a amplitude do ângulo AOP. Como $[OA]$ e $[OQ]$ são raios da semicircunferência, $\overline{OA} = \overline{OD} = 1$, e assim, recorrendo à definição de seno e tangente temos:



$$\operatorname{sen} x = \frac{\overline{QR}}{\overline{OQ}} \Leftrightarrow \operatorname{sen} x = \frac{\overline{QR}}{1} \Leftrightarrow \overline{QR} = \operatorname{sen} x$$

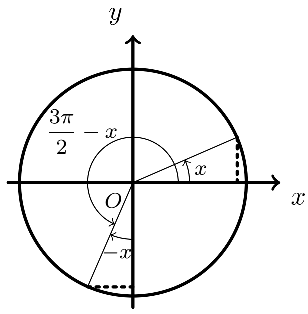
$$\operatorname{tg} x = \frac{\overline{AP}}{\overline{OA}} \Leftrightarrow \operatorname{tg} x = \frac{\overline{AP}}{1} \Leftrightarrow \overline{AP} = \operatorname{tg} x$$

E assim, temos que a área do polígono $[BCDQP]$ pode ser calculada como a soma das áreas do triângulo $[ODQ]$ com a do retângulo $[ABCD]$ subtraindo a área do triângulo $[OAP]$:

$$A_{[BCDQP]} = A_{[ODQ]} + A_{[ABCD]} - A_{[OAP]} = \frac{\overline{OD} \times \overline{QR}}{2} + \overline{DC} \times \overline{BC} - \frac{\overline{AP} \times \overline{OA}}{2} =$$

$$= \frac{1 \times \operatorname{sen} x}{2} + 2 \times 1 - \frac{\operatorname{tg} x \times 1}{2} = \frac{\operatorname{sen} x}{2} + 2 - \frac{\operatorname{tg} x}{2} = 2 - \frac{\operatorname{tg} x}{2} + \frac{\operatorname{sen} x}{2}$$

17.2. Como $\cos\left(\frac{3\pi}{2}-x\right) = -\operatorname{sen} x$ (como se pretende ilustrar na figura ao lado), então temos que:



$$\cos\left(\frac{3\pi}{2}-x\right) = -\frac{3}{5} \Leftrightarrow \operatorname{sen} x = -\left(-\frac{3}{5}\right) \Leftrightarrow \operatorname{sen} x = \frac{3}{5}$$

Assim, recorrendo à fórmula fundamental da trigonometria, vem:

$$\left(\frac{3}{5}\right)^2 + \cos^2 x = 1 \Leftrightarrow \cos^2 x = 1 - \frac{9}{25} \Leftrightarrow \cos^2 x = \frac{16}{25} \Leftrightarrow \cos x = \pm\frac{4}{5}$$

Como $x \in \left]0, \frac{\pi}{4}\right]$, então $\cos x > 0$, e assim, temos que: $\cos x = \frac{4}{5}$

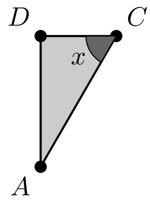
Calculando o valor da tangente de x, vem: $\operatorname{tg} x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} = \frac{\frac{3}{5}}{\frac{4}{5}} = \frac{3}{4}$

E assim, substituindo os valores de $\operatorname{tg} x$ e $\operatorname{sen} x$ na expressão da área do polígono $[BCDQP]$, obtemos a área para a posição do ponto P:

$$2 - \frac{\frac{3}{4}}{2} + \frac{\frac{3}{5}}{2} = 2 - \frac{3}{8} + \frac{3}{10} = \frac{80}{40} - \frac{15}{40} + \frac{12}{40} = \frac{77}{40}$$

Teste Intermédio 11.º ano – 11.03.2014

18. Vamos considerar $\overline{DA}$ a medida da altura do triângulo e $\overline{EC}$ a medida da base.
Sabemos que $\overline{CA} = 1$, porque é a medida do raio da circunferência.



Como $[CA]$ é a hipotenusa do triângulo e $[DA]$ o cateto oposto ao ângulo x, usando o seno do ângulo temos que:

$$\operatorname{sen} x = \frac{\overline{DA}}{\overline{CA}} \Leftrightarrow \operatorname{sen} x = \frac{\overline{DA}}{1} \Leftrightarrow \overline{DA} = \operatorname{sen} x$$

Por outro lado, como $[DC]$ é o cateto adjacente, usando a definição de cosseno, temos:

$$\cos x = \frac{\overline{DC}}{\overline{CA}} \Leftrightarrow \cos x = \frac{\overline{DC}}{1} \Leftrightarrow \overline{DC} = \cos x$$

Como $\overline{ED} = 6$ temos que:

$$\overline{EC} = \overline{ED} + \overline{DC} \Leftrightarrow \overline{EC} = 6 + \cos x$$

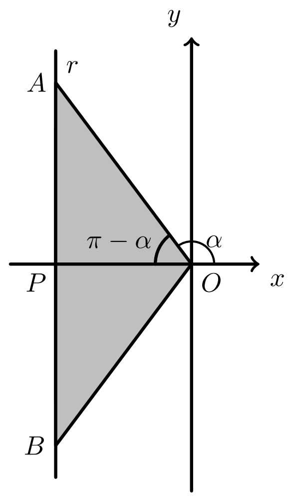
Logo, calculando a área do triângulo, obtemos:

$$A_{[AEC]} = \frac{\overline{EC} \times \overline{DA}}{2} = \frac{(6+\cos x)(\operatorname{sen} x)}{2} = \frac{6\operatorname{sen} x + \operatorname{sen} x \cos x}{2} = \frac{\operatorname{sen} x(6+\cos x)}{2}$$

Exame – 2013, Ép. especial (adaptado)

19. Começamos por definir o ponto $P(-3{,}0)$ e o ângulo AOP, cuja amplitude é $\pi - \alpha$.

    Assim, como sabemos que que $\overline{OP} = 3$, podemos usar a definição de cosseno podemos calcular $\overline{OA}$:



$$\cos(\pi-\alpha) = \frac{\overline{OP}}{\overline{OA}} \Leftrightarrow \cos(\pi-\alpha) = \frac{3}{\overline{OA}} \Leftrightarrow \overline{OA} = \frac{3}{\cos(\pi-\alpha)}$$

Como $\cos(\pi-\alpha) = -\cos\alpha$, temos que:

$$\overline{OA} = \frac{3}{\cos(\pi-\alpha)} \Leftrightarrow \overline{OA} = \frac{3}{-\cos\alpha} \Leftrightarrow \overline{OA} = -\frac{3}{\cos\alpha}$$

Depois, calculamos $\overline{AP}$ recorrendo à definição de tangente:

$$\operatorname{tg}(\pi-\alpha) = \frac{\overline{AP}}{\overline{OP}} \Leftrightarrow \operatorname{tg}(\pi-\alpha) = \frac{\overline{AP}}{3} \Leftrightarrow \overline{AP} = 3\operatorname{tg}(\pi-\alpha)$$

Como $\operatorname{tg}(\pi-\alpha) = -\operatorname{tg}\alpha$, temos que:

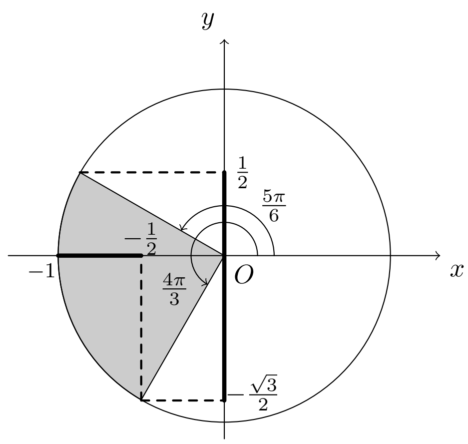
$$\overline{AP} = 3\operatorname{tg}(\pi-\alpha) \Leftrightarrow \overline{AP} = -3\operatorname{tg}\alpha$$

Como $\overline{AB} = 2 \times \overline{AP}$ e $\overline{OB} = \overline{OA}$, calculado a expressão do perímetro vem:

$$P_{[OAB]} = \overline{AB} + \overline{OA} + \overline{OB} = 2 \times \overline{AP} + 2 \times \overline{OA} = 2 \times (-3\operatorname{tg}\alpha) + 2 \times \left(-\frac{3}{\cos\alpha}\right) = -6\operatorname{tg}\alpha - \frac{6}{\cos\alpha}$$

Exame – 2013, 2.ª Fase (adaptado)

20. Representando as amplitudes dos ângulos do intervalo $\left[\frac{5\pi}{6}, \frac{4\pi}{3}\right]$ no círculo trigonométrico, podemos verificar que, neste intervalo:



- $-\frac{\sqrt{3}}{2} \leq \operatorname{sen} x \leq \frac{1}{2}$
- $-1 \leq \cos x \leq -\frac{1}{2}$

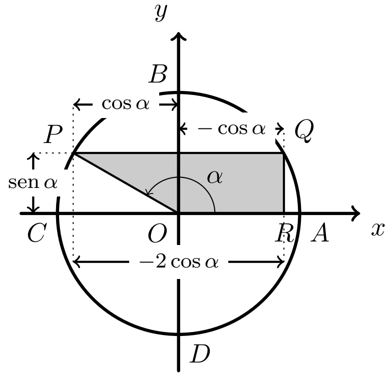
Como $-\frac{\sqrt{3}}{2} \approx -0{,}87$, temos que $-0{,}9 < -\frac{\sqrt{3}}{2}$, pelo que a equação $\operatorname{sen} x = -0{,}9$ não tem soluções no intervalo considerado.

Resposta: **Opção D**

Teste Intermédio 11.º ano – 6.03.2013

21.

21.1. Como o círculo representado é o círculo trigonométrico, então, temos que $\overline{OP} = 1$, e que as coordenadas do ponto P são $(\cos\alpha, \operatorname{sen}\alpha)$



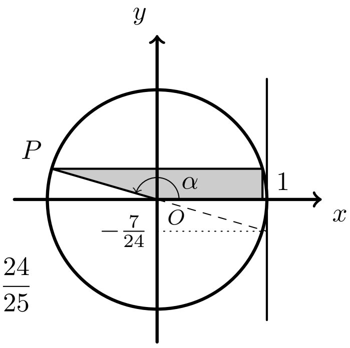
Como o ponto Q é simétrico do ponto P relativamente ao eixo Oy então os dois pontos têm ordenadas iguais e abcissas simétricas, pelo que as coordenadas do ponto Q são $(-\cos\alpha, \operatorname{sen}\alpha)$ e assim, como $\alpha \in \left]\frac{\pi}{2},\pi\right[$, ou seja, no segundo quadrante, temos que $\cos\alpha < 0$, pelo que $\overline{PQ} = -2\cos\alpha$

Como o ponto R tem a mesma abcissa que o ponto Q, e como α é um ângulo do segundo quadrante, $\operatorname{sen}\alpha > 0$, pelo que $\overline{RQ} = \operatorname{sen}\alpha$ e como o ponto R pertence ao semieixo positivo Ox, vem que $\overline{OR} = -\cos\alpha$

Desta forma, considerando a base maior do trapézio o lado $[PQ]$, a base menor o lado $[OR]$ e a altura o lado $[RQ]$, temos que a área (A) do trapézio é dada por:

$$A = \frac{\overline{PQ} + \overline{OR}}{2} \times \overline{RQ} = \frac{-2\cos\alpha + (-\cos\alpha)}{2} \times \operatorname{sen}\alpha = \frac{-3\cos\alpha \times \operatorname{sen}\alpha}{2} = -\frac{3}{2}\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha$$

21.2. Como a reta OP intersecta a reta de equação $x = 1$ no ponto de ordenada $-\frac{7}{24}$, temos que $\operatorname{tg}\alpha = -\frac{7}{24}$



Como $\operatorname{tg}^2\alpha + 1 = \frac{1}{\cos^2\alpha}$, temos que:

$$\left(-\frac{7}{24}\right)^2 + 1 = \frac{1}{\cos^2\alpha} \Leftrightarrow \frac{49}{576} + \frac{576}{576} = \frac{1}{\cos^2\alpha} \Leftrightarrow \frac{625}{576} = \frac{1}{\cos^2\alpha} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cos^2\alpha = \frac{1}{\frac{625}{576}} \Leftrightarrow \cos^2\alpha = \frac{576}{625} \Leftrightarrow \cos\alpha = \pm\sqrt{\frac{576}{625}} \underset{\cos<0}{\Rightarrow} \cos\alpha = -\frac{24}{25}$$

Logo, recorrendo à fórmula fundamental da trigonometria, vem:

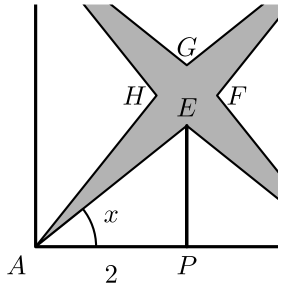
$$\operatorname{sen}^2\alpha + \frac{576}{625} = 1 \Leftrightarrow \operatorname{sen}^2\alpha = 1 - \frac{576}{625} \Leftrightarrow \operatorname{sen}^2\alpha = \frac{49}{625} \Leftrightarrow \operatorname{sen}\alpha = \pm\frac{7}{25} \underset{\operatorname{sen}\alpha>0}{\Rightarrow} \operatorname{sen}\alpha = \frac{7}{25}$$

Logo, de acordo com a expressão da área do trapézio $[OPQR]$, $\left(-\frac{3}{2}\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha\right)$, para a posição do ponto P definida, a área, na forma de fração irredutível, é:

$$-\frac{3}{2} \times \frac{7}{25} \times \left(-\frac{24}{25}\right) = \frac{504}{1250} = \frac{252}{625}$$

Teste Intermédio 11.º ano – 6.03.2013

22. Definindo o ponto P, como o ponto médio do lado $[AB]$, a área da região sombreada pode ser calculada como a diferença entre a área do quadrado e a soma das áreas de 8 triângulos retângulos (o triângulo $[AEP]$ e os restantes 7 semelhantes a este):



$$A_{[AEBFCGDH]} = A_{[ABCD]} - 8 \times A_{[AEP]}$$

Como P é o ponto médio de $[AB]$, temos que $\overline{AP} = 2$, podemos determinar $\overline{EP}$, recorrendo à definição de tangente de um ângulo:

$$\operatorname{tg} x = \frac{\overline{EP}}{\overline{AP}} \Leftrightarrow \operatorname{tg} x = \frac{\overline{EP}}{2} \Leftrightarrow \overline{EP} = 2\operatorname{tg} x$$

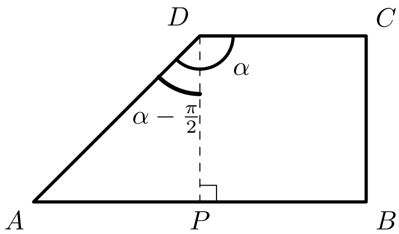
Assim, calculando a área da região sombreada, vem:

$$A_{[AEBFCGDH]} = A_{[ABCD]} - 8 \times A_{[AEP]} = \overline{AB}^2 - 8 \times \frac{\overline{AP} \times \overline{EP}}{2} = 4^2 - 8 \times \frac{2 \times 2\operatorname{tg} x}{2} =$$

$$= 16 - 8 \times 2\operatorname{tg} x = 16 - 16\operatorname{tg} x = 16(1 - \operatorname{tg} x)$$

Exame – 2012, 2.ª Fase

23. Considerando um ponto P, sobre o lado $[AB]$ do trapézio, tal que o segmento $[DP]$ seja perpendicular ao lado $[AB]$, consideramos o ângulo ADP com amplitude $\frac{\pi}{2} - \alpha$



Como $\overline{DP} = 1$, recorrendo à definição de cosseno, temos:

$$\cos\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{\overline{DP}}{\overline{DA}} \Leftrightarrow \overline{DA} = \frac{1}{\cos\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right)}$$

e como $\cos\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) = \operatorname{sen}\alpha$, temos que: $\overline{DA} = \frac{1}{\operatorname{sen}\alpha}$

Da definição de tangente de um ângulo, e como $\operatorname{tg}\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) = -\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}$ temos:

$$\operatorname{tg}\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{\overline{AP}}{\overline{DP}} \Leftrightarrow \operatorname{tg}\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{\overline{AP}}{1} \Leftrightarrow \overline{AP} = -\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}$$

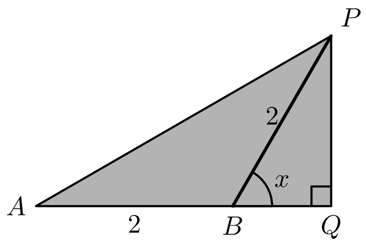
Logo, o perímetro do trapézio é:

$$P_{[ABCD]} = \overline{PB} + \overline{BC} + \overline{CD} + \overline{DA} + \overline{AP} = 1 + 1 + 1 + \frac{1}{\operatorname{sen}\alpha} + \left(-\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}\right) =$$

$$= 3 + \frac{1}{\operatorname{sen}\alpha} - \frac{1}{\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}} = 3 + \frac{1}{\operatorname{sen}\alpha} - \frac{\cos\alpha}{\operatorname{sen}\alpha} = 3 + \frac{1 - \cos\alpha}{\operatorname{sen}\alpha}$$

Exame – 2012, 1.ª Fase

24. Usando a definição de seno, temos:



$$\operatorname{sen} x = \frac{\overline{PQ}}{\overline{BP}} \Leftrightarrow \operatorname{sen} x = \frac{\overline{PQ}}{2} \Leftrightarrow \overline{PQ} = 2 \operatorname{sen} x$$

e usando a definição de cosseno, vem:

$$\cos x = \frac{\overline{BQ}}{\overline{BP}} \Leftrightarrow \cos x = \frac{\overline{BQ}}{2} \Leftrightarrow \overline{BQ} = 2 \cos x$$

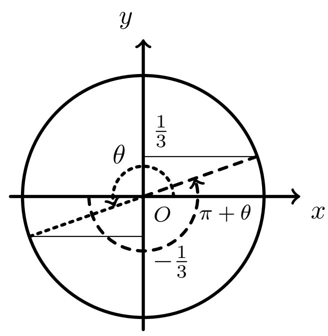
Calculando a área do triângulo vem:

$$A_{[APQ]} = \frac{(\overline{AB} + \overline{BQ}) \times \overline{PQ}}{2} = \frac{(2 + 2\cos x)(2 \operatorname{sen} x)}{2} = \frac{4 \operatorname{sen} x + 4 \operatorname{sen} x \cos x}{2} = 2 \operatorname{sen} x + 2 \operatorname{sen} x \cos x =$$

$$= 2\left(\operatorname{sen} x + \operatorname{sen} x \cos x\right) = 2 \operatorname{sen} x (1 + \cos x)$$

Teste Intermédio 12.º ano – 24.05.2012 (adaptado)

25. Representando no círculo trigonométrico um ângulo de amplitude θ, tal que, $\operatorname{sen} \theta = -\frac{1}{3}$ (como na figura ao lado), podemos verificar que, a representação do ângulo com amplitude $\pi + \theta$ verifica a condição $\operatorname{sen}(\pi + \theta) = \frac{1}{3}$, ou seja:



$$\operatorname{sen}(\pi + \theta) = -\operatorname{sen} \theta$$

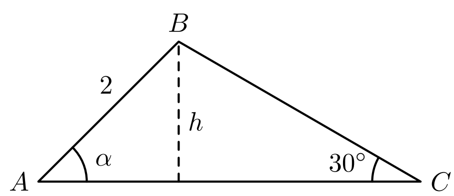
E assim, de entre as opções apresentadas $\pi + \theta$ é a única solução da equação $\operatorname{sen} x = \frac{1}{3}$

Resposta: **Opção B**

Teste Intermédio 11.º ano – 9.02.2012

26. Considerando que o altura assinalas na figura divide o triângulo $[ABC]$ em dois triângulos retângulos cujas hipotenusas são os lados $[AB]$ e $[C]$ e usando a definição de seno, temos que:

$$\operatorname{sen} \alpha = \frac{h}{\overline{AB}} \Leftrightarrow \operatorname{sen} \alpha = \frac{h}{2} \Leftrightarrow h = 2 \operatorname{sen} \alpha$$



E como $\operatorname{sen} 30° = \frac{1}{2}$, vem que:

$$\operatorname{sen} 30° = \frac{h}{\overline{BC}} \Leftrightarrow \frac{1}{2} = \frac{h}{\overline{BC}} \Leftrightarrow \overline{BC} = 2h \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \overline{BC} = 2 \times 2 \operatorname{sen} \alpha \Leftrightarrow \overline{BC} = 4 \operatorname{sen} \alpha$$

Resposta: **Opção A**

Teste Intermédio 11.º ano – 9.02.2012

27.

27.1. De acordo com a sugestão apresentada, como o ponto P se move sobre a circunferência que delimita o círculo trigonométrico, temos que as coordenadas do ponto P, são $(\cos\alpha, \operatorname{sen}\alpha)$
Assim como as coordenadas do ponto B são (3,0), a distância $\overline{PB}$ é:

$$d = \sqrt{(\cos\alpha - 3)^2 + (\operatorname{sen}\alpha - 0)^2} = \sqrt{\cos^2\alpha - 6\cos\alpha + 9 + \operatorname{sen}^2\alpha} =$$

$$= \sqrt{\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha - 6\cos\alpha + 9} = \sqrt{-6\cos\alpha + 9 + 1} = \sqrt{10 - 6\cos\alpha}$$

E assim, vem que:

$$d = \sqrt{10 - 6\cos\alpha} \Rightarrow d^2 = \left(\sqrt{10 - 6\cos\alpha}\right)^2 \Rightarrow d^2 = 10 - 6\cos\alpha$$

27.2.

27.2.1. Resolvendo a equação no intervalo $[0,2\pi[$, temos que:

$$d^2 = 7 \Leftrightarrow 10 - 6\cos\alpha = 7 \Leftrightarrow -6\cos\alpha = 7 - 10 \Leftrightarrow 6\cos\alpha = 3 \Leftrightarrow \cos\alpha = \frac{3}{6} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cos\alpha = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos\alpha = \cos\frac{\pi}{3} \Leftrightarrow \alpha = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \vee \alpha = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Como $\alpha \in [0,2\pi[$, as soluções da equação correspondem aos valores de $k = 0$ e $k = 1$:

- $k = 0$: $\alpha = \frac{\pi}{3} \vee \alpha = -\frac{\pi}{3}$, e $\frac{\pi}{3} \in [0,2\pi[$
- $k = 1$: $\alpha = \frac{\pi}{3} + 2\pi \vee \alpha = -\frac{\pi}{3} + 2\pi$, $-\frac{\pi}{3} + 2\pi = \frac{5\pi}{3}$ e $\frac{5\pi}{3} \in [0,2\pi[$

Assim, as soluções da equação $d^2 = 7$ que pertencem ao intervalo $[0,2\pi[$ são $\frac{5\pi}{3}$ e $\frac{\pi}{3}$

27.2.2. Como $\operatorname{tg}^2\alpha + 1 = \frac{1}{\cos^2\alpha}$ e $\operatorname{tg}\alpha = -\sqrt{35}$, vem que:

$$\left(-\sqrt{35}\right)^2 + 1 = \frac{1}{\cos^2\alpha} \Leftrightarrow 35 + 1 = \frac{1}{\cos^2\alpha} \Leftrightarrow \cos^2\alpha = \frac{1}{36} \Leftrightarrow \cos\alpha = \pm\sqrt{\frac{1}{36}} \Leftrightarrow \cos\alpha = \pm\frac{1}{6}$$

Como $\alpha \in [0,\pi]$ e $\operatorname{tg}\alpha < 0$, então α é um ângulo do segundo quadrante $\left(\alpha \in \left]\frac{\pi}{2},\pi\right[\right)$, pelo que $\cos\alpha < 0$, e assim temos que: $\cos\alpha = -\frac{1}{6}$
Calculando o valor de d, correspondente, vem:

$$d^2 = 10 - 6\cos\alpha \Leftrightarrow d^2 = 10 - 6 \times \left(-\frac{1}{6}\right) \Leftrightarrow d^2 = 10 + 1 \Leftrightarrow d = \pm\sqrt{11}$$

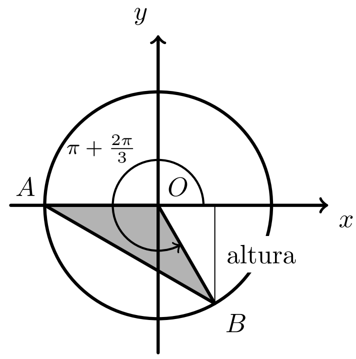
Como $d > 0$, vem que $d = \sqrt{11}$

Teste Intermédio 11.º ano – 9.02.2012

28. Como se trata de um círculo trigonométrico, o ponto B tem coordenadas $B\left(\cos\frac{5\pi}{3},\operatorname{sen}\frac{5\pi}{3}\right)$, porque o segmento $[OB]$, define com o semieixo postivo Ox um ângulo de $\pi+\frac{2\pi}{3}=\frac{5\pi}{3}$ radianos.

Podemos considerar como a medida da base do triângulo $\overline{OA}=1$ e o valor absoluto da ordenada de B como a medida da altura:

$|y_B|=\left|\operatorname{sen}\frac{5\pi}{3}\right|=\left|-\operatorname{sen}\frac{\pi}{3}\right|=\left|-\frac{\sqrt{3}}{2}\right|=\frac{\sqrt{3}}{2}$



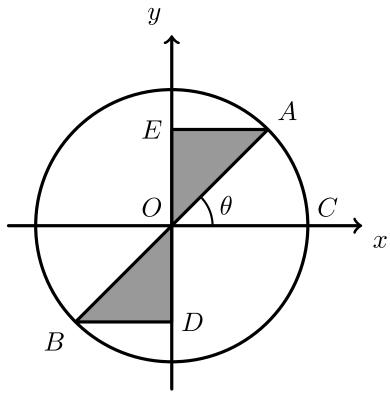
Assim, calculando a área do triângulo vem:

$$A_{[OAB]}=\frac{\overline{OA}\times|y_B|}{2}=\frac{1\times\frac{\sqrt{3}}{2}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{4}$$

Resposta: **Opção A**

Exame – 2011, Ép. especial

29. Como $\overline{OA}=1$, usando as definições de seno e cosseno temos:



$$\operatorname{sen}\theta=\frac{\overline{OE}}{\overline{OA}}\Leftrightarrow\operatorname{sen}\theta=\frac{\overline{OE}}{1}\Leftrightarrow\overline{OE}=\operatorname{sen}\theta$$

$$\cos\theta=\frac{\overline{EA}}{\overline{OA}}\Leftrightarrow\cos\theta=\frac{\overline{EA}}{1}\Leftrightarrow\overline{EA}=\cos\theta$$

E assim, o perímetro da região sombreada é:

$$P_{[ABDE]}=\overline{AO}+\overline{OB}+\overline{BD}+\overline{DO}+\overline{OE}+\overline{EA}$$

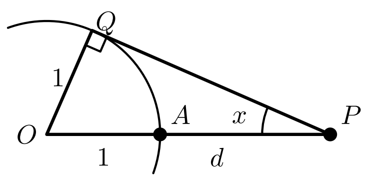
Como $\overline{AO}=\overline{OB}$; $\overline{BD}=\overline{EA}$ e $\overline{DO}=\overline{OE}$, temos:

$$P_{[ABDE]}=2\overline{AO}+2\overline{EA}+2\overline{OE}=2\times1+2\cos\theta+2\operatorname{sen}\theta=2(1+\cos\theta+\operatorname{sen}\theta)$$

Resposta: **Opção C**

Exame – 2011, 2.ª Fase

30. Como $\overline{OQ}=1$ (medida do cateto oposto ao ângulo x) e $\overline{OP}=1+d$ (medida da hipotenusa do triângulo retângulo), usando a definição de seno de um ângulo, temos que:

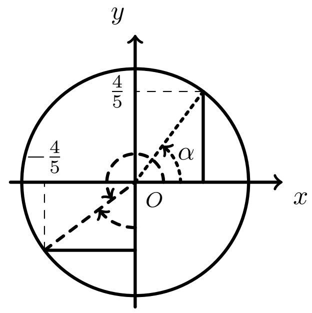


$$\operatorname{sen}x=\frac{\overline{OQ}}{\overline{OP}}\Leftrightarrow\operatorname{sen}x=\frac{1}{1+d}\Leftrightarrow 1+d=\frac{1}{\operatorname{sen}x}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow d=\frac{1}{\operatorname{sen}x}-1\Leftrightarrow d=\frac{1}{\operatorname{sen}x}-\frac{\operatorname{sen}x}{\operatorname{sen}x}\Leftrightarrow d=\frac{1-\operatorname{sen}x}{\operatorname{sen}x}$$

Teste Intermédio 12.º ano – 26.05.2011

31. Representando no círculo trigonométrico um ângulo de amplitude α, tal que, $\cos\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)=-\frac{4}{5}$ (como na figura ao lado), podemos ilustrar que:



$$\cos\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)=-\operatorname{sen}\alpha$$

E assim, $\operatorname{sen}\alpha=-\left(-\frac{4}{5}\right)=\frac{4}{5}$, pelo que, podemos calcular o valor de $\cos\alpha$, recorrendo à fórmula fundamental da trigonometria:

$$\left(\frac{4}{5}\right)^2+\cos^2\alpha=1 \Leftrightarrow \cos^2\alpha=1-\frac{16}{25} \Leftrightarrow \cos^2\alpha=\frac{9}{25} \Leftrightarrow \cos\alpha=\pm\sqrt{\frac{9}{25}} \Leftrightarrow \cos\alpha=\pm\frac{3}{5}$$

Como $\alpha\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$, então $\cos\alpha>0$, e assim, $\cos\alpha=\frac{3}{5}$, pelo que o valor de $\operatorname{tg}\alpha$, é:

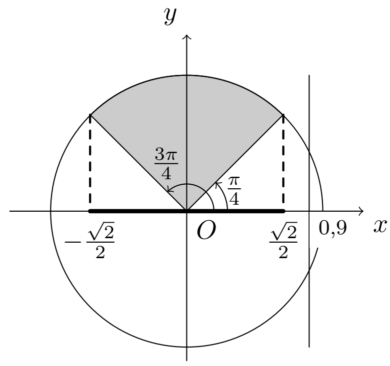
$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}=\frac{\frac{4}{5}}{\frac{3}{5}}=\frac{4}{3}$$

Desta forma, temos que:

$$3-\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}=3-\frac{1}{\frac{4}{3}}=3-\frac{3}{4}=\frac{12}{4}-\frac{3}{4}=\frac{9}{4}$$

Teste Intermédio 11.º ano – 24.05.2011

32. Representando as amplitudes dos ângulos do intervalo $\left[\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4}\right]$ no círculo trigonométrico, podemos verificar que, neste intervalo:



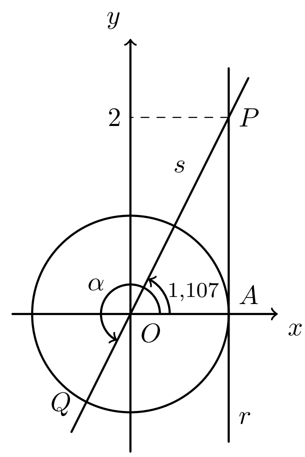
$$-\frac{\sqrt{2}}{2}\leq\cos x\leq\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Ou seja, a equação $\cos x=-0{,}9$ não tem soluções no intervalo considerado.

Resposta: **Opção C**

Teste Intermédio 11.º ano – 27.01.2011

33. Como a ordenada do ponto de interseção do prolongamento da reta OQ com a reta tangente ao círculo trigonométrico no ponto de coordenadas (1,0) é 2, temos que $\operatorname{tg}\alpha=2$



Assim, o valor de um ângulo cuja tangente é 2, pode ser calculado por:

$$\operatorname{tg}^{-1}(2)\approx 1{,}107$$

Como este valor corresponde a um ângulo do 1º quadrante, podemos obter um ângulo do 3º quadrante, cuja tangente também é 2, somando π à solução anterior:

$$\alpha=\operatorname{tg}^{-1}(2)+\pi\approx 4{,}25$$

Resposta: **Opção B**

Teste Intermédio 11.º ano – 27.01.2011

34. Observando que:

- Como $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$ então $\alpha = \frac{\pi}{2} - \beta$, e assim, $\cos\alpha = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right) = \operatorname{sen}\beta$
- Como $\alpha + \theta = 2\pi$ então $\alpha = 2\pi - \theta$, e assim, $\operatorname{sen}\alpha = \operatorname{sen}(2\pi - \theta) = \operatorname{sen}(-\theta) = -\operatorname{sen}\theta$

Podemos concluir que:

$$\operatorname{sen}\alpha + \underbrace{\operatorname{sen}\beta}_{\cos\alpha} + \underbrace{\operatorname{sen}\theta}_{-\operatorname{sen}\alpha} = \operatorname{sen}\alpha + \cos\alpha - \operatorname{sen}\alpha = \cos\alpha$$

Resposta: **Opção D**

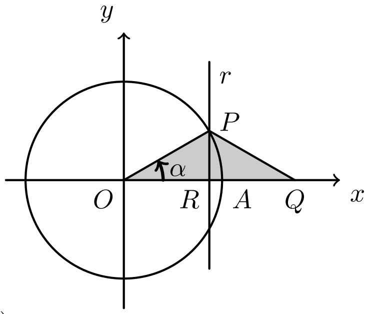
Teste Intermédio 11.º ano – 27.01.2011

35.

35.1. Como $\overline{OP} = 5$, usando as definições de seno e cosseno temos:

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{\overline{PR}}{\overline{OP}} \Leftrightarrow \operatorname{sen}\alpha = \frac{\overline{PR}}{5} \Leftrightarrow \overline{PR} = 5\operatorname{sen}\alpha$$

$$\cos\alpha = \frac{\overline{OR}}{\overline{OP}} \Leftrightarrow \cos\alpha = \frac{\overline{OR}}{5} \Leftrightarrow \overline{OR} = 5\cos\alpha$$



E assim, como $\overline{PO} = \overline{PQ}$, também $\overline{PR} = \overline{RQ}$, pelo que $\overline{OQ} = \overline{OR} + \overline{RQ} = 2\overline{OR}$; e a área do triângulo $[OPQ]$ é dada por:

$$A_{[OPR]} = \frac{\overline{OQ} \times \overline{PR}}{2} = \frac{2 \times 5\cos\alpha \times 5\operatorname{sen}\alpha}{2} = 25\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha = f(\alpha)$$

35.2. Resolvendo a equação no intervalo $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, temos que:

$$f(\alpha) = 25\cos^2\alpha \Leftrightarrow 25\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha = 25\cos^2\alpha \underset{\cos^2\alpha\neq 0}{\Leftrightarrow} \frac{25\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha}{25\cos\alpha\cos\alpha} = 1 \Leftrightarrow \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha} = 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \operatorname{tg}\alpha = 1 \Leftrightarrow \operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}\frac{\pi}{4} \Leftrightarrow \alpha = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Assim, no intervalo indicado, a única solução da equação é $\alpha = \frac{\pi}{4}$, $(k = 0)$

35.3. Como $f(\theta) = 5$, temos que;

$$f(\theta) = 5 \Leftrightarrow 25\operatorname{sen}\theta\cos\theta = 5 \Leftrightarrow \operatorname{sen}\theta\cos\theta = \frac{5}{25} \Leftrightarrow \operatorname{sen}\theta\cos\theta = \frac{1}{5}$$

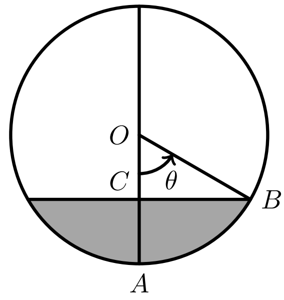
E assim, vem que:

$$(\operatorname{sen}\theta + \cos\theta)^2 = \operatorname{sen}^2\theta + 2\operatorname{sen}\theta\cos\theta + \cos^2\theta = \operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta + 2\operatorname{sen}\theta\cos\theta = 1 + 2\times\frac{1}{5} = \frac{5}{5} + \frac{2}{5} = \frac{7}{5}$$

Teste Intermédio 11.º ano – 27.01.2011

36.

36.1. Analisando as figuras podemos dividir o cálculo da altura em dois casos:
No primeiro caso, $\left(\theta \in \left]0,\frac{\pi}{2}\right]\right)$, $h = 3 - \overline{OC}$



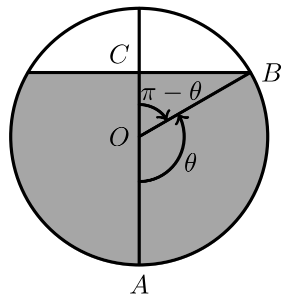
Como $\overline{OB} = 3$, recorrendo à definição de cosseno de um ângulo, temos:

$$\cos\theta = \frac{\overline{OC}}{3} \Leftrightarrow \overline{OC} = 3\cos\theta$$

e assim,

$$h = 3 - \overline{OC} = 3 - 3\cos\theta$$

No segundo caso, $\left(\theta \in \left]\frac{\pi}{2},\pi\right[\right)$, $h = 3 + \overline{OC}$



Como $\overline{OB} = 3$, recorrendo à definição de cosseno de um ângulo, temos:

$$\cos(\pi - \theta) = \frac{\overline{OC}}{3} \Leftrightarrow \overline{OC} = 3\cos(\pi - \theta) \Leftrightarrow \overline{OC} = 3(-\cos\theta) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \overline{OC} = -3\cos\theta$$

e assim,

$$h = 3 + \overline{OC} = 3 + (-3\cos\theta) = 3 - 3\cos\theta$$

Ou seja em ambos os casos, isto é, para qualquer $\theta \in]0,\pi[$, a altura h pode ser calculada como que $h(\theta) = 3 - 3\cos(\theta)$

36.2. Como $h(\theta) = 3 - 3\cos(\theta)$, temos que:

$$h(\theta) = 3 \Leftrightarrow 3 - 3\cos(\theta) = 3 \Leftrightarrow -3\cos(\theta) = 0 \Leftrightarrow \cos(\theta) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cos(\theta) = \cos\frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \theta = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

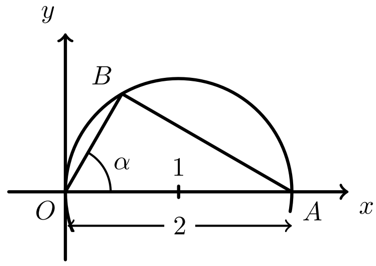
Como $\theta \in]0,\pi[$, $\theta = \frac{\pi}{2}$ é a única solução da equação.

Calcular θ tal que $h(\theta) = 3$, significa determinar o ângulo associado a uma quantidade de combustível no depósito com 3 metros de altura.
Assim a solução calculada significa que, quando o combustível no depósito tiver uma altura de 3 metros, o ângulo θ será um ângulo reto $\left(\frac{\pi}{2}\, rad.\right)$.

Exame – 2010, 2.ª Fase

37. Como o triângulo está inscrito numa semicircunferência é um triângulo retângulo. Sabemos que a hipotenusa coincide com o diâmetro e tem comprimento 2 ($\overline{OA} = 2$).

Assim, recorrendo à definição de seno temos:



$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{\overline{AB}}{\overline{OA}} \Leftrightarrow \operatorname{sen}\alpha = \frac{\overline{AB}}{2} \Leftrightarrow \overline{AB} = 2\operatorname{sen}\alpha$$

Analogamente, pela definição de cosseno, vem:

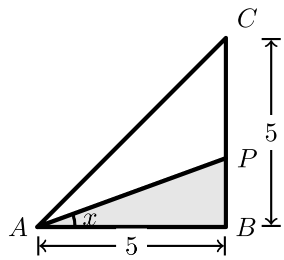
$$\cos\alpha = \frac{\overline{OB}}{\overline{OA}} \Leftrightarrow \cos\alpha = \frac{\overline{OB}}{2} \Leftrightarrow \overline{OB} = 2\cos\alpha$$

Logo, para cada valor de $\alpha \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, o perímetro do triângulo $[OAB]$ é dado, em função de α, por:

$$P_{[OAB]} = \overline{OA} + \overline{AB} + \overline{OB} = 2 + 2\operatorname{sen}\alpha + 2\cos\alpha = 2(1 + \cos\alpha + \operatorname{sen}\alpha)$$

Exame – 2010, 1.ª Fase

38. Relativamente ao triângulo retângulo $[ABP]$, do qual conhecemos a medida do cateto adjacente ao ângulo x, usando a definição de cosseno e de tangente do ângulo x, temos:



$$\cos x = \frac{\overline{AB}}{\overline{AP}} \Leftrightarrow \cos x = \frac{5}{\overline{AP}} \Leftrightarrow \overline{AP} = \frac{5}{\cos x}$$

$$\operatorname{tg} x = \frac{\overline{BP}}{\overline{AB}} \Leftrightarrow \operatorname{tg} x = \frac{\overline{BP}}{5} \Leftrightarrow \overline{BP} = 5\operatorname{tg} x$$

Temos ainda que

$$\overline{BP} + \overline{PC} = 5 \Leftrightarrow \overline{PC} = 5 - \overline{BP} \Leftrightarrow \overline{PC} = 5 - 5\operatorname{tg} x$$

Recorrendo ao teorema de Pitágoras, podemos calcular a medida do segmento $[AC]$:

$$\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 \Leftrightarrow \overline{AC}^2 = 5^2 + 5^2 \Leftrightarrow \overline{AC}^2 = 25 + 25 \Leftrightarrow \overline{AC} = \sqrt{50}$$

Assim, para cada valor de $x \in \left]0, \frac{\pi}{4}\right[$, o perímetro do triângulo $[APC]$ é dado por:

$$P_{[APC]} = \overline{AP} + \overline{PC} + \overline{AC} = \frac{5}{\cos x} + 5 - 5\operatorname{tg} x + \sqrt{50} = \frac{5}{\cos x} - 5\operatorname{tg} x + \sqrt{50} + 5$$

Teste Intermédio 12.º ano – 19.05.2010

39. Como o ponto P pertence à superfície esférica, as suas coordenadas verificam a equação que define a superfície esférica, pelo que:

$$(\operatorname{tg}\alpha)^2 + (\operatorname{sen}\alpha)^2 + (2 + \cos\alpha - 2)^2 = 4 \Leftrightarrow \operatorname{tg}^2\alpha + \operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 4 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \operatorname{tg}^2\alpha + 1 = 4 \Leftrightarrow \operatorname{tg}^2\alpha = 3 \Leftrightarrow \operatorname{tg}\alpha = \pm\sqrt{3}$$

Como $\alpha \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, então $\operatorname{tg}\alpha = \sqrt{3}$, pelo que $\alpha = \operatorname{tg}^{-1}\left(\sqrt{3}\right) = \frac{\pi}{3}$

Desta forma, os valores numéricos das coordenadas do ponto P são:

$$\left(\operatorname{tg}\frac{\pi}{3}, \operatorname{sen}\frac{\pi}{3}, 2 + \cos\frac{\pi}{3}\right) = \left(\sqrt{3}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 2 + \frac{1}{2}\right) = \left(\sqrt{3}, \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{5}{2}\right)$$

Teste Intermédio 11.º ano – 6.05.2010

40. Como um ângulo raso tem π radianos de amplitude, e $\frac{\pi}{2} < 3 < \pi$, então um ângulo com amplitude de 3 radianos é um ângulo obtuso, ou um ângulo do 2º quadrante.

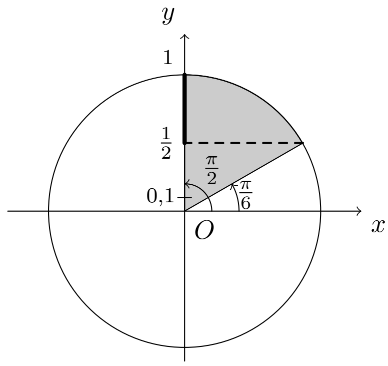
Resposta: **Opção B**

Teste Intermédio 11.º ano – 27.01.2010

41. Representando as amplitudes dos ângulos do intervalo $\left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right]$ no círculo trigonométrico, podemos verificar que, neste intervalo:

$$\frac{1}{2} \leq \operatorname{sen} x \leq 1$$

Ou seja, como $0{,}1 < \frac{1}{2}$ a equação $\operatorname{sen} x = 0{,}1$ não tem soluções no intervalo considerado.

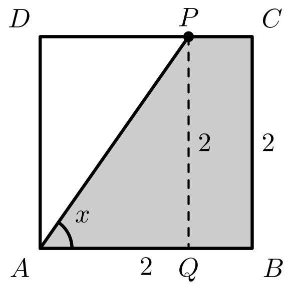


Resposta: **Opção D**

Teste Intermédio 11.º ano – 27.01.2010

42.

42.1. Considerando um ponto Q, sobre o lado $[AB]$ do trapézio, tal que o segmento $[PQ]$ seja perpendicular ao lado $[AB]$, e recorrendo à definição de tangente, temos:



$$\operatorname{tg} x = \frac{\overline{PQ}}{\overline{AQ}} \Leftrightarrow \operatorname{tg} x = \frac{2}{\overline{AQ}} \Leftrightarrow \overline{AQ} = \frac{2}{\operatorname{tg} x}$$

Como $\overline{PC} = \overline{DQ} - \overline{DP} = \overline{DQ} - \overline{AQ} = 2 - \frac{2}{\operatorname{tg} x}$, vem que:

$$A_{[ABCQ]} = \frac{\overline{AB} + \overline{PC}}{2} \times \overline{CB} = \frac{2 + 2 - \frac{2}{\operatorname{tg} x}}{2} \times 2 = 4 - \frac{2}{\operatorname{tg} x}$$

42.2. Resolvendo a equação, temos que:

$$4 - \frac{2}{\operatorname{tg} x} = \frac{12 - 2\sqrt{2}}{3} \Leftrightarrow 4 - \frac{2}{\operatorname{tg} x} = 4 - \frac{2\sqrt{3}}{3} \Leftrightarrow \frac{2}{\operatorname{tg} x} = \frac{2\sqrt{3}}{3} \Leftrightarrow \frac{2 \times 3}{2\sqrt{3}} = \operatorname{tg} x \Leftrightarrow \frac{3}{\sqrt{3}} = \operatorname{tg} x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \operatorname{tg} x = \frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{3} \times \sqrt{3}} \Leftrightarrow \operatorname{tg} x = \frac{3\sqrt{3}}{3} \Leftrightarrow \operatorname{tg} x = \sqrt{3} \Leftrightarrow \operatorname{tg} x = \operatorname{tg} \frac{\pi}{3} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Como $x \in \left]\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right[$, o valor de de x para o qual a área da região sombreada é $\frac{12 - 2\sqrt{2}}{3}$, é $x = \frac{\pi}{3}$

42.3. Como $\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right)=-\operatorname{sen}\alpha$, vem que: $-\operatorname{sen}x=-\frac{15}{17}\Leftrightarrow\operatorname{sen}x=\frac{15}{17}$

Pela fórmula fundamental da trigonometria, temos que:

$$\left(\frac{15}{17}\right)^2+\cos^2 x=1\Leftrightarrow\left(\frac{15}{17}\right)^2+\cos^2 x=1\Leftrightarrow\cos^2 x=1-\frac{225}{289}\Leftrightarrow\cos^2 x=\frac{289}{289}-\frac{225}{289}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\cos^2 x=\frac{64}{289}\Leftrightarrow\cos x=\pm\sqrt{\frac{64}{289}}\Leftrightarrow\cos x=\pm\frac{8}{17}$$

Como $x\in\left]\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right[$, então $\cos x>0$ e assim $\cos x=\frac{8}{17}$

Temos ainda que:

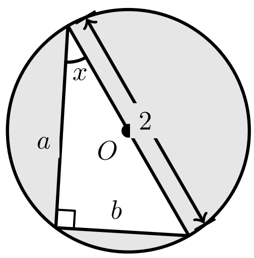
$$\operatorname{tg}x=\frac{\operatorname{sen}x}{\cos x}=\frac{\frac{15}{17}}{\frac{8}{17}}=\frac{15}{8}$$

Desta forma, se $\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=-\frac{15}{17}$ então a área da região sombreada correspondente é:

$$4-\frac{2}{\frac{15}{8}}=4-\frac{16}{15}=\frac{60}{15}-\frac{16}{15}=\frac{44}{15}$$

Teste Intermédio 11.º ano – 27.01.2010

43. Como a medida da hipotenusa do triângulo é 2 (porque é um diâmetro de uma circunferência de raio 1), podemos recorrer à definição de seno e cosseno, para determinar a medida da base (b) e da altura (a):



$$\operatorname{sen}x=\frac{b}{2}\Leftrightarrow b=2\operatorname{sen}x \qquad \text{e} \qquad \cos x=\frac{a}{2}\Leftrightarrow a=2\cos x$$

Logo a área sombreada é a diferença da área do círculo e da área do triângulo:

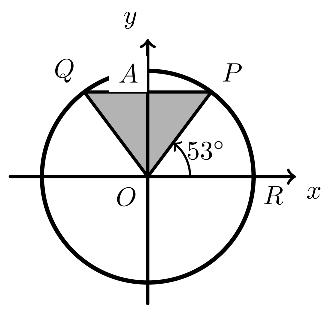
$$A=A_\circ-A_\Delta=\pi r^2-\frac{b\times a}{2}=\pi(1)^2-\frac{2\operatorname{sen}x\times 2\cos x}{2}=\pi-2\operatorname{sen}x\cos x$$

Resposta: **Opção A**

Exame – 2009, 1.ª Fase (adaptado)

44. Como o ponto P pertence ao circunferência que delimita o círculo trigonométrico, as suas coordenadas são $(\cos 53°,\operatorname{sen}53°)$

Considerando um ponto A, sobre o lado $[PQ]$ do triângulo, tal que o ângulo OAP seja reto, como a reta PQ é paralela ao eixo Ox e a circunferência está centrada na origem, temos que $\overline{PA}=\overline{QA}$ e como $[PO]$ e $[OQ]$ são raios de um círculo trigonométrico, então $\overline{OP}=\overline{OQ}=1$, e assim perímetro do triângulo $[OPQ]$, arredondado às décimas, é:



$$P[OPQ]=\overline{PA}+\overline{QA}+\overline{OP}+\overline{OQ}=2\times\overline{PA}+2\times\overline{OP}=2\times\cos 53°+2\times 1\approx 3{,}2$$

Resposta: **Opção A**

Teste Intermédio 11.º ano – 7.05.2009

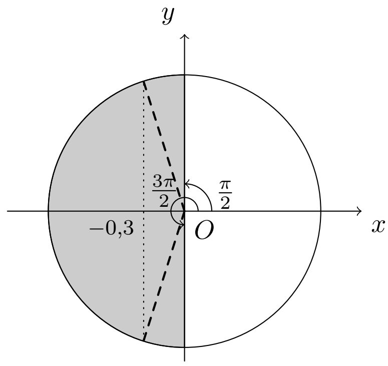
45. Como uma rotação de -3π radianos corresponde a uma volta completa e mais meia volta ($-3\pi = -2\pi + (-\pi)$), no sentido dos ponteiros do relógio (porque o sentido positivo é contrário ao sentido dos ponteiros do relógio), então a Inês voltou a ver as horas 1 hora e meia depois da primeira vez.

Assim, uma hora e meia depois das 10 h e 45 min, corresponde a 12 h e 15 min.

Resposta: **Opção C**

Teste Intermédio 11.º ano – 7.05.2009

46. Representando as amplitudes dos ângulos do intervalo $\left[\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right]$ no círculo trigonométrico, podemos verificar que, neste intervalo a equação $\cos x = -0{,}3$ tem duas soluções.

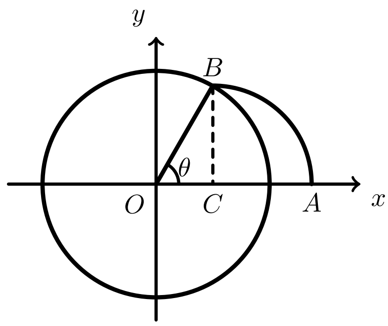


Podemos ainda verificar que nos intervalos $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ e $\left[\frac{3\pi}{2},2\pi\right]$ a equação não tem qualquer solução, porque $\cos x > 0$ nos 1º e 4º quadrantes; e que no intervalo $[0,\pi]$, a equação só tem uma solução (no segundo quadrante).

Resposta: **Opção B**

Teste Intermédio 11.º ano – 29.01.2009

47. Como $[OB]$ é um raio do círculo trigonométrico e O é a origem do referencial, então as coordenadas de B são $(\cos\theta, \operatorname{sen}\theta)$, ou seja, $\overline{OC} = \cos\theta$ e $\overline{BC} = \operatorname{sen}\theta$



Como o arco de circunferência AB tem centro no ponto C, temos que $\overline{BC} = \overline{AC}$, e assim a abcissa do ponto A é:

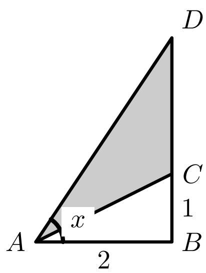
$$x_A = \overline{OA} = \overline{OC} + \overline{AC} = \cos\theta + \operatorname{sen}\theta$$

Resposta: **Opção C**

Teste Intermédio 11.º ano – 29.01.2009

48.

48.1. Recorrendo à definição de tangente temos que:



$$\operatorname{tg} x = \frac{\overline{BD}}{\overline{AB}} \Leftrightarrow \operatorname{tg} x = \frac{\overline{BD}}{2} \Leftrightarrow \overline{BD} = 2\operatorname{tg} x$$

Como a área do triângulo $[ACD]$ pode ser calculada como a diferença das áreas dos triângulos $[ABD]$ e $[ABC]$, temos que a área do triângulo $[ACD]$ é dada, em função de x, por:

$$A_{[ACD]} = A_{[ABC]} - A_{[ABC]} = \frac{\overline{AB} \times \overline{BD}}{2} - \frac{\overline{AB} \times \overline{BC}}{2} = \frac{2 \times 2\operatorname{tg} x}{2} - \frac{2 \times 1}{2} = 2\operatorname{tg} x - 1$$

48.2. Equacionado o problema e resolvendo a equação, temos:

$$2\operatorname{tg} x - 1 = 1 \Leftrightarrow 2\operatorname{tg} x = 2 \Leftrightarrow \operatorname{tg} x = 1 \Leftrightarrow \operatorname{tg} x = \operatorname{tg}\frac{\pi}{4} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

E assim, como $x \in \left]0,\frac{\pi}{2}\right[$ a única solução da equação é $\frac{\pi}{4}$, ou seja, a área do triângulo $[ACD]$ é igual a 1 se $x = \frac{\pi}{4}$

48.3. Como $\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}+a\right)=\cos a$, temos que $\cos a=\frac{5}{13}$

Como $\operatorname{tg}^2\alpha+1=\frac{1}{\cos^2\alpha}$, temos que:

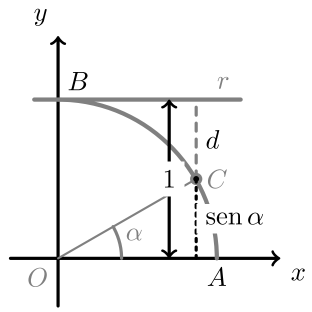
$$\operatorname{tg}^2 a+1=\frac{1}{\left(\frac{5}{13}\right)^2} \Leftrightarrow \operatorname{tg}^2 a=\frac{1}{\frac{25}{169}}-1 \Leftrightarrow \operatorname{tg}^2 a=\frac{169}{25}-\frac{25}{25} \Leftrightarrow \operatorname{tg} a=\pm\sqrt{\frac{144}{25}} \Leftrightarrow \operatorname{tg} a=\pm\frac{12}{5}$$

Como $a\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$, então $\operatorname{tg} a>0$ e assim, $\operatorname{tg} a=\frac{12}{5}$, pelo que o valor de $2\operatorname{tg} a-1$, é:

$$2\times\frac{12}{5}-1=\frac{24}{5}-\frac{5}{5}=\frac{19}{5}$$

Teste Intermédio 11.º ano – 29.01.2009

49. Como a circunferência tem lado 1, é a circunferência que delimita o círculo trigonométrico, e por isso, o ponto C tem coordenadas $(\cos\alpha, \operatorname{sen}\alpha)$; em particular a ordenada é $y_C=\operatorname{sen}\alpha$



Como a reta r é paralela ao eixo Ox e a distância entre a reta e o eixo é 1, temos que:

$$d+y_C=1 \Leftrightarrow d+\operatorname{sen}\alpha=1 \Leftrightarrow d=1-\operatorname{sen}\alpha$$

Resposta: **Opção B**

Teste Intermédio 11.º ano – 6.05.2008

50. Como $x\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$, então x é um ângulo do 1º quadrante, pelo que $\operatorname{sen} x>0$ e $\cos x>0$

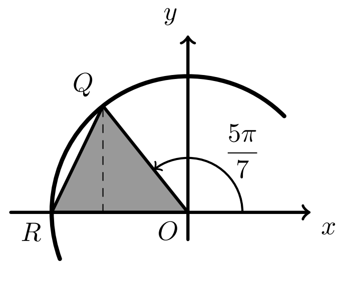
Assim, temos que:

- $\cos(\pi-x)=-\cos x$, ou seja, $\cos(\pi-x)<0$
- $\operatorname{sen}(\pi-x)=\operatorname{sen} x$, ou seja, $\operatorname{sen}(\pi-x)>0$
- $\cos\left(\frac{3\pi}{2}-x\right)=-\cos x$, ou seja, $\cos\left(\frac{3\pi}{2}-x\right)<0$
- $\operatorname{sen}\left(\frac{3\pi}{2}-x\right)=-\operatorname{sen} x$, ou seja, $\operatorname{sen}\left(\frac{3\pi}{2}-x\right)<0$

Resposta: **Opção B**

Teste Intermédio 11.º ano – 6.05.2008

51. Como o ponto Q está sobre um círculo trigonométrico, temos as coordenadas do ponto Q são $\left(\cos\frac{5\pi}{7}, \operatorname{sen}\frac{5\pi}{7}\right)$



Considerando o lado $[OR]$ como a base, a medida da altura é y_Q (a ordenada do ponto Q). E assim a área do triângulo pode ser calculada como:

$$A_{[OQR]}=\frac{\overline{OR}\times y_Q}{2}=\frac{1\times\operatorname{sen}\frac{5\pi}{7}}{2}\approx 0{,}39$$

Resposta: **Opção A**

Teste Intermédio 12.º ano – 29.04.2008

52. Como a soma dos ângulos internos de um triângulo é π radianos, vem que:

$$\alpha + \alpha + \beta = \pi \Leftrightarrow \beta = \pi - 2\alpha$$

E assim, como $\cos(\pi - x) = -\cos x$, vem que:

$$\beta = \pi - 2\alpha \Rightarrow \cos\beta = \cos(\pi - 2\alpha) \Leftrightarrow \cos\beta = -\cos(2\alpha)$$

Resposta: **Opção D**

Teste Intermédio 11.º ano – 24.01.2008

53. Como $\theta \in \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right[$ então θ é um ângulo do 2º quadrante, pelo que:

- $\operatorname{sen}\theta > 0$
- $\cos\theta < 0$
- $\operatorname{tg}\theta < 0$

E desta forma, temos que:

- $\cos\theta - \operatorname{sen}\theta < 0$ (subtração de um valor negativo por um positivo, ou soma de dois negativos)
- $\operatorname{sen}\theta \times \cos\theta < 0$ (produto de um número positivo por um negativo)
- $\operatorname{sen}\theta \times \operatorname{tg}\theta < 0$ (produto de um número positivo por um negativo)
- $\operatorname{sen}\theta - \operatorname{tg}\theta > 0$ (subtração de um valor positivo por um negativo, ou soma de dois positivos)

Resposta: **Opção D**

Teste Intermédio 11.º ano – 24.01.2008

54. Resolvendo a equação, temos:

$$1 + 3\operatorname{tg}(2x) = 4 \Leftrightarrow 3\operatorname{tg}(2x) = 4 - 1 \Leftrightarrow \operatorname{tg}(2x) = \frac{3}{3} \Leftrightarrow \operatorname{tg}(2x) = 1 \Leftrightarrow \operatorname{tg}(2x) = \operatorname{tg}\frac{\pi}{4} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2x = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$$

Desta forma, se $k = 1$ uma solução da equação é:

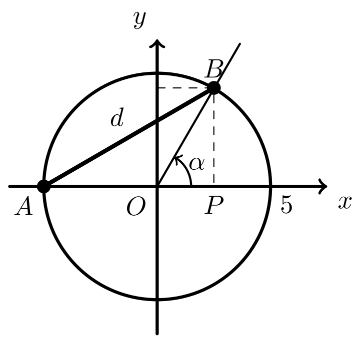
$$x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{8} + \frac{4\pi}{8} = \frac{5\pi}{8}$$

Resposta: **Opção C**

Teste Intermédio 11.º ano – 24.01.2008

55.

55.1. Considerando o ponto P, como a projeção ortogonal do ponto B sobre o eixo Ox, e usando a definição de seno e cosseno temos que:



$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{\overline{BP}}{\overline{OB}} \Leftrightarrow \operatorname{sen}\alpha = \frac{\overline{BP}}{5} \Leftrightarrow \overline{BP} = 5\operatorname{sen}\alpha$$

$$\cos\alpha = \frac{\overline{OP}}{\overline{OB}} \Leftrightarrow \cos\alpha = \frac{\overline{OP}}{5} \Leftrightarrow \overline{OP} = 5\cos\alpha$$

Como o triângulo $[ABP]$ é retângulo em P, recorrendo ao teorema de Pitágoras, vem que:

$$d^2 = \overline{BP}^2 + \overline{AP}^2 = \overline{BP}^2 + \left(\overline{AO} + \overline{OP}\right)^2 = (5\operatorname{sen}\alpha)^2 + (5 + 5\cos\alpha)^2 =$$

$$= 25\operatorname{sen}^2\alpha + 25 + 50\cos\alpha + 25\cos^2\alpha = 25\operatorname{sen}^2\alpha + 25\cos^2\alpha + 25 + 50\cos\alpha =$$

$$= 25\left(\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha\right) + 25 + 50\cos\alpha = 25 \times 1 + 25 + 50\cos\alpha = 50 + 50\cos\alpha$$

55.2. Como $\operatorname{tg}\alpha = \sqrt{24}$ e como $\operatorname{tg}^2\alpha + 1 = \dfrac{1}{\cos^2\alpha}$, temos que:

$$\left(\sqrt{24}\right)^2 + 1 = \frac{1}{\cos^2\alpha} \Leftrightarrow 24 + 1 = \frac{1}{\cos^2\alpha} \Leftrightarrow \cos^2\alpha = \frac{1}{25} \Leftrightarrow \cos\alpha = \pm\sqrt{\frac{1}{25}} \Leftrightarrow \cos\alpha = \pm\frac{1}{5}$$

Como o ponto B se desloca ao longo da circunferência, no primeiro quadrante, então α é um ângulo do 1º quadrante, $\cos\alpha > 0$, e assim, temos que $\cos\alpha = \dfrac{1}{5}$

Assim, temos que:

$$d^2 = 50 + 50 \times \frac{1}{5} \Leftrightarrow d^2 = 50 + 10 \Leftrightarrow d^2 = 60 \underset{d>0}{\Rightarrow} d = \sqrt{60}$$

Teste Intermédio 11.º ano – 24.01.2008

56. Resolvendo a equação, temos:

$$5 + 2\cos x = 6 \Leftrightarrow 2\cos x = 6 - 5 \Leftrightarrow \cos x = \cos\frac{\pi}{3} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \lor x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Desta forma, as soluções da equação que pertencem ao intervalo $]0,2\pi[$, são:

$$x = \frac{\pi}{3}\ (k = 0) \quad \text{e} \quad x = -\frac{\pi}{3} + 2\pi = \frac{5\pi}{3}\ (k = 1)$$

Resposta: **Opção B**

Teste Intermédio 11.º ano – 10.05.2007

57. Como a ordenada do ponto de intersecção do prolongamento da semirreta $\dot{O}A$ com a reta de equação $x = 1$ é $\sqrt{8}$, temos que $\operatorname{tg}\alpha = \sqrt{8}$

Como $\operatorname{tg}^2\alpha + 1 = \dfrac{1}{\cos^2\alpha}$, temos que:

$$\left(\sqrt{8}\right)^2 + 1 = \frac{1}{\cos^2\alpha} \Leftrightarrow 8 + 1 = \frac{1}{\cos^2\alpha} \Leftrightarrow \cos^2\alpha = \frac{1}{9} \Leftrightarrow \cos\alpha = \pm\sqrt{\frac{1}{9}} \Leftrightarrow \cos\alpha = \pm\frac{1}{3}$$

Como α é um ângulo do 3º quadrante, $\cos\alpha < 0$, e assim, temos que $\cos\alpha = -\dfrac{1}{3}$

Assim, podemos observar que:

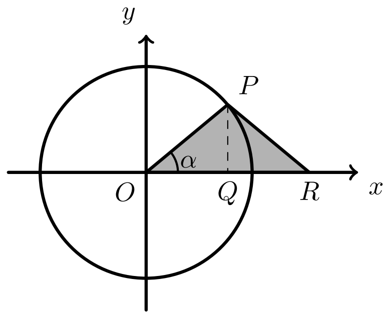
- $\operatorname{sen}\left(\dfrac{\pi}{2} + \alpha\right) = \cos\alpha = -\dfrac{1}{3}$
- $\cos(3\pi - \alpha) = \cos(\pi - \alpha) = -\cos\alpha = -\left(-\dfrac{1}{3}\right) = \dfrac{1}{3}$

E, desta forma, vem que:

$$5\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) + 2\cos(3\pi - \alpha) = 5\left(-\frac{1}{3}\right) + 2 \times \frac{1}{3} = -\frac{5}{3} + \frac{2}{3} = -\frac{3}{3} = -1$$

Teste Intermédio 11.º ano – 10.05.2007

58. Considerando o ponto Q como o pé da altura do triângulo relativa à base $[OR]$ e usando a definição de seno e cosseno temos que:



$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{\overline{PQ}}{\overline{OP}} \Leftrightarrow \operatorname{sen}\alpha = \frac{\overline{PQ}}{1} \Leftrightarrow \overline{PQ} = \operatorname{sen}\alpha$$

$$\cos\alpha = \frac{\overline{OQ}}{\overline{OA}} \Leftrightarrow \cos\alpha = \frac{\overline{OQ}}{1} \Leftrightarrow \overline{OQ} = \cos\alpha$$

Assim, como o triângulo $[OPR]$ é isósceles, $\overline{OP} = \overline{PR}$ e também $\overline{OQ} = \overline{QR}$, pelo que a área do triângulo, em função de α, é:

$$A_{[OPR]} = \frac{\overline{OR} \times \overline{PQ}}{2} = \frac{\left(\overline{OQ} + \overline{QR}\right) \times \overline{PQ}}{2} = \frac{(\cos\alpha + \cos\alpha) \times \operatorname{sen}\alpha}{2} = \frac{2\cos\alpha \times \operatorname{sen}\alpha}{2} = \cos\alpha \times \operatorname{sen}\alpha$$

Resposta: **Opção A**

Teste Intermédio 11.º ano – 19.05.2006

59. Pela fórmula fundamental da trigonometria, temos que:

$$\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \Leftrightarrow \operatorname{sen}^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha \Leftrightarrow \operatorname{sen}\alpha = \pm\sqrt{1 - \cos^2\alpha}$$

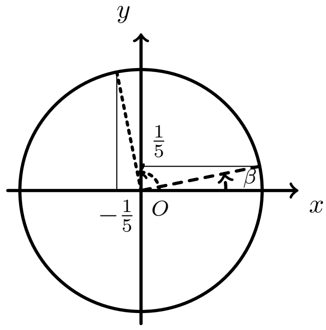
Como $\cos\alpha < 0$ e $\operatorname{tg}\alpha > 0$, então α é um ângulo do 3º quadrante, e assim $\operatorname{sen}\alpha < 0$, pelo que:

$$\operatorname{sen}\alpha = -\sqrt{1 - \cos^2\alpha}$$

Resposta: **Opção B**

Teste Intermédio 11.º ano – 19.05.2006

60. Representando no círculo trigonométrico um ângulo de amplitude β, tal que, $\operatorname{sen}\beta = \frac{1}{5}$ (como na figura ao lado), podemos verificar que, a representação do ângulo com amplitude $\frac{\pi}{2} + \beta$ verifica a condição $\cos\left(\frac{\pi}{2} + \beta\right) = -\frac{1}{5}$, ou seja:



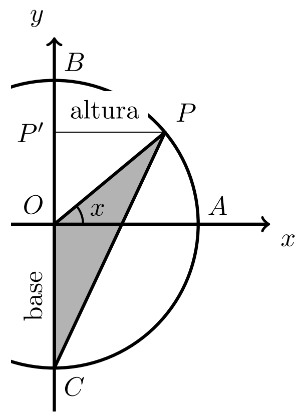
$$\cos\left(\frac{\pi}{2} + \beta\right) = -\operatorname{sen}\beta$$

E assim, de entre as opções apresentadas $\frac{\pi}{2} + \beta$ é a única solução da equação $\cos x = -\frac{1}{5}$

Resposta: **Opção B**

Teste Intermédio 11.º ano – 19.05.2006

61. Considerando o lado $[OC]$ como a base do triângulo ($\overline{OC} = 1$), a altura será o segmento que contém o ponto P e a sua projeção ortogonal (P') sobre a reta OC.



Como $\overline{OP} = 1$, recorrendo à definição de cosseno, vem:

$$\cos x = \frac{\overline{PP'}}{\overline{OP}} \Leftrightarrow \cos x = \frac{\overline{PP'}}{1} \Leftrightarrow \overline{PP'} = \cos x$$

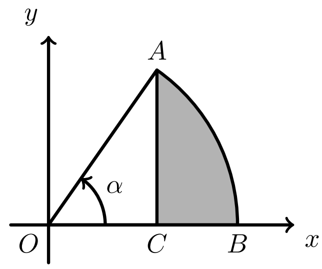
Assim a área do triângulo $[OPC]$ é:

$$A_{[OPC]} = \frac{\overline{OC} \times \overline{PP'}}{2} = \frac{1 \times \cos x}{2} = \frac{\cos x}{2}$$

Resposta: **Opção B**

Exame – 2006, Ép. especial

62. Como o arco BA é um arco de uma circunferência de raio 1, e com amplitude α, tem de comprimento α.
Como $\overline{OA} = 1$, e recorrendo às definições de seno e cosseno, vem:



$$\operatorname{sen} \alpha = \frac{\overline{AC}}{\overline{OA}} \Leftrightarrow \operatorname{sen} \alpha = \frac{\overline{AC}}{1} \Leftrightarrow \overline{AC} = \operatorname{sen} \alpha$$

$$\cos \alpha = \frac{\overline{OC}}{\overline{OA}} \Leftrightarrow \cos \alpha = \frac{\overline{OC}}{1} \Leftrightarrow \overline{OC} = \cos \alpha$$

Logo, $\overline{OB} = \overline{OC} + \overline{CB} \Leftrightarrow 1 = \cos \alpha + \overline{CB} \Leftrightarrow \overline{CB} = 1 - \cos \alpha$

Assim, o perímetro da região sombreada é:

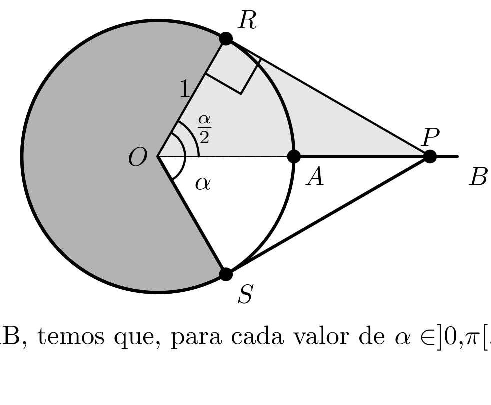
$$P = \alpha + \overline{AC} + \overline{CB} = \alpha + \operatorname{sen} \alpha + 1 - \cos \alpha = 1 + \alpha + \operatorname{sen} \alpha - \cos \alpha$$

Resposta: **Opção D**

Exame – 2006, 2.ª Fase

63. Como a reta PR é tangente à circunferência no ponto R, é perpendicular ao raio $[OR]$, ou seja o ângulo ORP é reto, e por isso o triângulo $[ORP]$ é retângulo.
Como o ângulo POR tem amplitude $\frac{\alpha}{2}$ radianos e $\overline{OR} = 1$, recorrendo à definição de tangente, temos:

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{\overline{RP}}{\overline{OR}} \Leftrightarrow \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{\overline{RP}}{1} \Leftrightarrow \overline{RP} = \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$$



Logo, considerando $[OR]$ como a base do triângulo $[ORP]$ e $[RP]$ como a altura, vem:

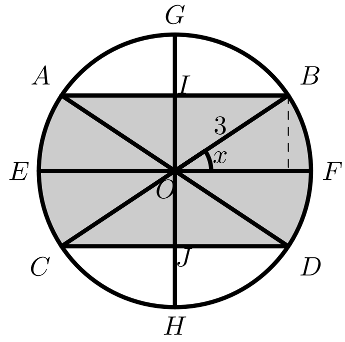
$$A_{[ORP]} = \frac{\overline{OR} \times \overline{RP}}{2} = \frac{1 \times \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{2} = \frac{\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{2}$$

Como os pontos R e S são simétricos relativamente à reta AB, temos que, para cada valor de $\alpha \in]0,\pi[$, a área do quadrilátero $[ORPS]$ é dada por:

$$A_{[ORPS]} = A_{[ORP]} + A_{[OPS]} = 2 \times A_{[ORP]} = 2 \times \frac{\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{2} = \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$$

Exame – 2005, Ép. especial (cód. 435)

64. Como $\overline{OB} = 3$, recorrendo à definição de seno e cosseno temos:



$$\operatorname{sen} x = \frac{\overline{OI}}{\overline{OB}} \Leftrightarrow \operatorname{sen} x = \frac{\overline{OI}}{3} \Leftrightarrow \overline{OI} = 3 \operatorname{sen} x$$

$$\cos x = \frac{\overline{BI}}{\overline{OB}} \Leftrightarrow \cos x = \frac{\overline{BI}}{3} \Leftrightarrow \overline{BI} = 3 \cos x$$

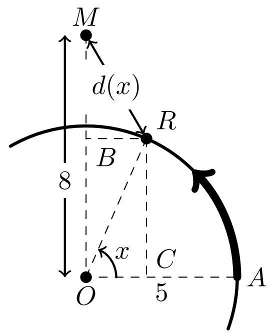
Recorrendo à decomposição sugerida na figura temos que a área da zona sombreada pode ser obtida através da soma das áreas de 4 triângulos congruentes e de 4 setores circulares de raio 3 e amplitude x, ou seja, para cada valor de $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, a área da região sombreada é dada por:

$$A = 4 \times A_{[OIB]} + 4 \times A_{setor FB} = 4 \times \frac{\overline{OI} \times \overline{BI}}{2} + 4 \times \frac{x \times \overline{OB}^2}{2} = 4 \times \frac{3 \operatorname{sen} x \times 3 \cos x}{2} + 4 \times \frac{x \times 3^2}{2} =$$

$$= 2 \times 9 \operatorname{sen} x . \cos x + 2 \times x \times 9 = 18x + 18 \operatorname{sen} x . \cos x = 18(x + \operatorname{sen} x . \cos x)$$

Exame – 2005, 1.ª Fase (cód. 435)

65. Como $\overline{OR} = 5$, recorrendo à definição de seno e cosseno, e notando que $\overline{CR} = \overline{OB}$ e ainda que $\overline{OC} = \overline{BR}$, temos:



$$\operatorname{sen} x = \frac{\overline{CR}}{\overline{OR}} \Leftrightarrow \operatorname{sen} x = \frac{\overline{CR}}{5} \Leftrightarrow \overline{CR} = 5 \operatorname{sen} x \Leftrightarrow \overline{OB} = 5 \operatorname{sen} x$$

$$\cos x = \frac{\overline{OC}}{\overline{OR}} \Leftrightarrow \cos x = \frac{\overline{OC}}{5} \Leftrightarrow \overline{OC} = 5 \cos x \Leftrightarrow \overline{BR} = 5 \cos x$$

Temos ainda que:

$$\overline{OB} + \overline{BM} = 8 \Leftrightarrow \overline{BM} = 8 \Leftrightarrow \overline{BM} = 8 - \overline{OB} \Leftrightarrow \overline{BM} = 8 - 5 \operatorname{sen} x$$

Logo, usando o Teorema de Pitágoras, vem:

$$\overline{RM}^2 = \overline{BM}^2 + \overline{BR}^2 \Leftrightarrow \overline{RM}^2 = (8 - 5 \operatorname{sen} x)^2 + (5 \cos x)^2 \Leftrightarrow$$

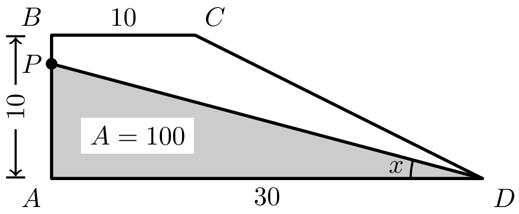
$$\Leftrightarrow \overline{RM}^2 = 64 - 80 \operatorname{sen} x + 25 \operatorname{sen}^2 x + 25 \cos^2 x \Leftrightarrow \overline{RM}^2 = 64 - 80 \operatorname{sen} x + 25\left(\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \overline{RM}^2 = 64 - 80 \operatorname{sen} x + 25(1) \Leftrightarrow \overline{RM}^2 = 64 + 25 - 80 \operatorname{sen} x \Leftrightarrow \overline{RM}^2 = 89 - 80 \operatorname{sen} x$$

Logo, para cada valor de x, a distância da Rita à mãe, é: $\overline{RM} = \sqrt{89 - 80 \operatorname{sen} x}$

Exame – 2003, Prova para militares (cód. 435)

66. Calculando a área do trapézio, temos:



$$A_{[ABCD]} = \frac{\overline{AD}+\overline{BC}}{2}\times\overline{AB} = \frac{30+10}{2}\times 10 = 20\times 10 = 200$$

Logo, dividir o trapézio em duas figuras com a mesma área, significa que o triângulo $[APD]$ terá área 100.

Usando a definição de tangente vem:

$$\operatorname{tg} x = \frac{\overline{PA}}{\overline{AD}} \Leftrightarrow \operatorname{tg} x = \frac{\overline{PA}}{30} \Leftrightarrow \overline{PA} = 30\operatorname{tg} x$$

Logo a área do triângulo $[APD]$, é: $A_{[APD]} = \frac{\overline{AD}\times\overline{PA}}{2} = \frac{30\times 30\operatorname{tg} x}{2} = \frac{30^2\operatorname{tg} x}{2}$

Ou seja, $A_{[APD]} = 100 \Leftrightarrow \frac{30^2\operatorname{tg} x}{2} = 100$

Resposta: **Opção B**

Exame – 2003, 2.ª Fase (cód. 435)

67. Como $\operatorname{tg}^2 x + 1 = \frac{1}{\cos^2 x}$ e $\operatorname{tg}\theta = \frac{1}{2}$, vem:

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 1 = \frac{1}{\cos^2\theta} \Leftrightarrow \frac{1}{4}+1 = \frac{1}{\cos^2\theta} \Leftrightarrow \frac{5}{4} = \frac{1}{\cos^2\theta} \Leftrightarrow \cos^2\theta = \frac{1}{\frac{5}{4}} \Leftrightarrow \cos^2\theta = \frac{4}{5}$$

Como $\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$ e $\cos^2\theta = \frac{4}{5}$, vem:

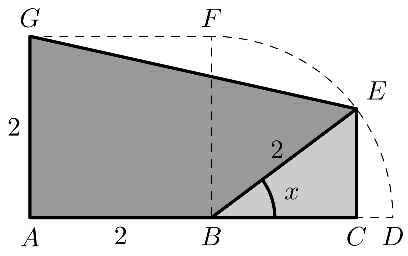
$$\operatorname{sen}^2\theta + \frac{4}{5} = 1 \Leftrightarrow \operatorname{sen}^2\theta = 1 - \frac{4}{5} \Leftrightarrow \operatorname{sen}^2\theta = \frac{5}{5} - \frac{4}{5} \Leftrightarrow \operatorname{sen}^2\theta = \frac{1}{5}$$

Logo, $2 - 5\operatorname{sen}^2\theta = 2 - 5\left(\frac{1}{5}\right) = 2 - 1 = 1$

Exame – 2003, 1.ª fase - 2.ª chamada (cód. 435) (adaptado)

68.

68.1. Considerando o triângulo $[BCE]$,e recorrendo à definição de seno e cosseno, temos:



$$\operatorname{sen} x = \frac{\overline{CE}}{\overline{BE}} \Leftrightarrow \operatorname{sen} x = \frac{\overline{CE}}{2} \Leftrightarrow \overline{CE} = 2\operatorname{sen} x$$

$$\cos x = \frac{\overline{BC}}{\overline{BE}} \Leftrightarrow \cos x = \frac{\overline{BC}}{2} \Leftrightarrow \overline{BC} = 2\cos x$$

Logo, considerando a área da zona sombreada como a diferença das áreas do o trapézio $[ACEG]$ e do triângulo $[BCE]$, para cada valor de $x \in \left]0,\frac{\pi}{2}\right[$, a área do polígono $[ABEG]$ é dada por:

$$A_{[ABEG]} = A_{[ACEG]} - A_{[BCE]} = \frac{\overline{AG}+\overline{CE}}{2}\times\overline{AC} - \frac{\overline{BC}\times\overline{CE}}{2} = \frac{2+2\operatorname{sen} x}{2}\times\left(2+\overline{BC}\right) - \frac{2\cos x\times 2\operatorname{sen} x}{2} =$$

$$= (1+\operatorname{sen} x)\times(2+2\cos x) - \frac{4\operatorname{sen} x\cos x}{2} = 2 + 2\cos x + 2\operatorname{sen} x + 2\operatorname{sen} x\cos x - 2\operatorname{sen} x\cos x =$$

$$= 2 + 2\operatorname{sen} x + 2\cos x = 2(1+\operatorname{sen} x+\cos x)$$

68.2. • Se $x = 0$, então $A_{[ABEG]} = 2\big(1 + \operatorname{sen}(0) + \cos(0)\big) = 2(1 + 0 + 1) = 2 \times 2 = 4$
O que também pode ser observado na figura, porque se $x = 0$, o ponto E coincide com o ponto D, e por isso a área sombreada também pode ser calculada como a área do triângulo $[AGD]$:

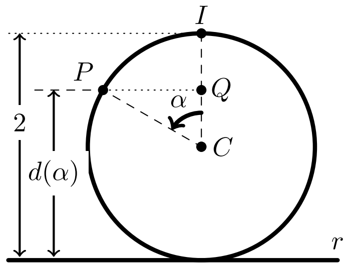
$$A_{[AGD]} = \frac{\overline{AG} \times \overline{AD}}{2} = \frac{4 \times 2}{2} = 4$$

• Se $x = \frac{\pi}{2}$, então $A_{[ABEG]} = 2\left(2\big(1 + \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{2}\right)\big)\right) = 2(1 + 1 + 0) = 2 \times 2 = 4$
O que também pode ser observado na figura, porque se $x = \frac{\pi}{2}$, o ponto E coincide com o ponto F, e por isso a área sombreada também pode ser calculada como a área do quadrado $[ABFG]$:

$$A_{[ABFG]} = \overline{AB} \times \overline{AG} = 2 \times 2 = 4$$

Exame – 2003, 1.ª fase - 1.ª chamada (cód. 435)

69. Considerando o ponto I como a posição inicial do ponto P, e o ponto Q como a projeção ortogonal do ponto P sobre a reta IC, pela definição de cosseno vem:



$$\cos\alpha = \frac{\overline{CQ}}{\overline{CP}} \Leftrightarrow \cos\alpha = \frac{\overline{CQ}}{1} \Leftrightarrow \overline{CQ} = \cos\alpha$$

Como $\overline{CQ} + \overline{QI} = 1 \Leftrightarrow \overline{QI} = 1 - \overline{CQ} \Leftrightarrow \overline{QI} = 1 - \cos\alpha$, temos que:

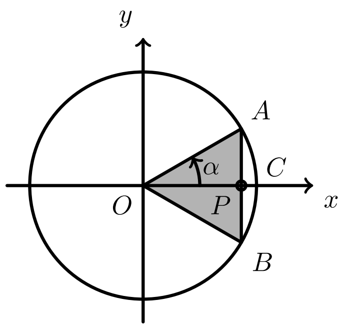
$$d(\alpha) = 2 - \overline{QI} \Leftrightarrow d(\alpha) = 2 - (1 - \cos\alpha) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow d(\alpha) = 2 - 1 + \cos\alpha \Leftrightarrow d(\alpha) = 1 + \cos\alpha$$

Resposta: **Opção A**

Exame – 2002, 2.ª fase (cód. 435)

70. Considerando o ponto P como intersecção da reta AB com o eixo Ox e usando a definição de seno e cosseno temos que:



$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{\overline{AP}}{\overline{OA}} \Leftrightarrow \operatorname{sen}\alpha = \frac{\overline{AP}}{1} \Leftrightarrow \overline{AP} = \operatorname{sen}\alpha$$

$$\cos\alpha = \frac{\overline{OP}}{\overline{OA}} \Leftrightarrow \cos\alpha = \frac{\overline{OP}}{1} \Leftrightarrow \overline{OP} = \cos\alpha$$

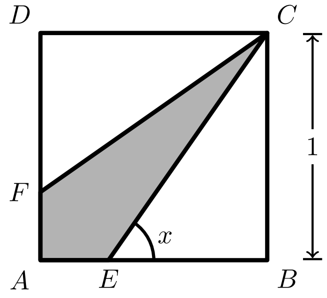
Assim, considerando $[AB]$ como a base e $[OP]$ como a altura, a área do triângulo $[OAB]$ é:

$$A_{[OAB]} = \frac{\overline{AB} \times \overline{OP}}{2} = \frac{2 \times \overline{AP} \times \overline{OP}}{2} = \overline{AP} \times \overline{OP} = \operatorname{sen}\alpha \,.\, \cos\alpha$$

Resposta: **Opção A**

Exame – 2002, 1.ª fase - 2.ª chamada (cód. 435)

71. Usando as definições de seno e tangente, vem:



$$\operatorname{sen} x = \frac{\overline{BC}}{\overline{EC}} \Leftrightarrow \operatorname{sen} x = \frac{1}{\overline{EC}} \Leftrightarrow \overline{EC} = \frac{1}{\operatorname{sen} x}$$

$$\operatorname{tg} x = \frac{\overline{BC}}{\overline{EB}} \Leftrightarrow \operatorname{tg} x = \frac{1}{\overline{EB}} \Leftrightarrow \overline{EB} = \frac{1}{\operatorname{tg} x}$$

Sabemos ainda que

$$\overline{AE} + \overline{EB} = 1 \Leftrightarrow \overline{AE} = 1 - \overline{EB} \Leftrightarrow \overline{AE} = 1 - \frac{1}{\operatorname{tg} x}$$

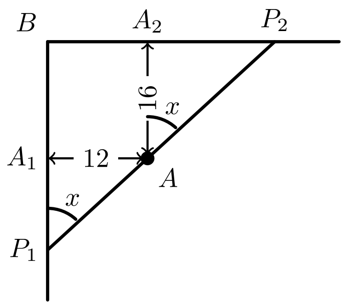
Assim, como $\overline{FC} = \overline{EC}$ e $\overline{AF} = \overline{AE}$, para cada valor de $x \in \left]\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right[$, o perímetro do quadrilátero é:

$$P_{[CEAF]} = 2 \times \overline{AE} + 2 \times \overline{EC} = 2 \times \left(1 - \frac{1}{\operatorname{tg} x}\right) + 2 \times \frac{1}{\operatorname{sen} x} = 2 - \frac{2}{\operatorname{tg} x} + \frac{2}{\operatorname{sen} x}$$

Exame – 2002, 1.ª fase - 1.ª chamada (cód. 435)

72.

72.1. Considerando A_1 e A_2 as projeções ortogonais do ponto sobre as retas BP_1 e BP_2, respetivamente, temos que o ângulo A_2AP_2 também tem amplitude x, pelo que recorrendo às definições de seno e cosseno temos:



$$\operatorname{sen} x = \frac{\overline{AA_1}}{\overline{AP_1}} \Leftrightarrow \operatorname{sen} x = \frac{12}{\overline{AP_1}} \Leftrightarrow \overline{AP_1} = \frac{12}{\operatorname{sen} x}$$

$$\cos x = \frac{\overline{AA_2}}{\overline{AP_2}} \Leftrightarrow \cos x = \frac{16}{\overline{AP_2}} \Leftrightarrow \overline{AP_2} = \frac{16}{\cos x}$$

Calculando o comprimento da ponte, em função de x, vem:

$$\overline{AP_2} + \overline{AP_1} = \frac{16}{\cos x} + \frac{12}{\operatorname{sen} x} = \frac{16 \operatorname{sen} x}{\cos x . \operatorname{sen} x} + \frac{12 \cos x}{\operatorname{sen} x . \cos x} = \frac{16 \operatorname{sen} x + 12 \cos x}{\operatorname{sen} x . \cos x}$$

72.2. Se $\overline{BP_1} = \overline{BP_2}$, o triângulo $[P_1BP]$ é um triângulo retângulo isósceles, ou seja os ângulos agudos são iguais, e por isso, têm amplitude $\frac{\pi}{4}$ radianos.

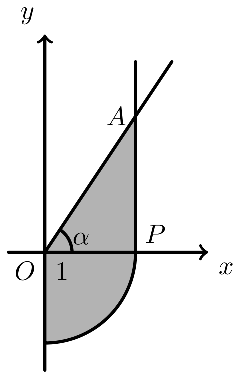
Assim, calculando o comprimento da ponte, para $x = \frac{\pi}{4}$, vem:

$$\frac{16 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right) + 12 \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)}{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right) . \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)} = \frac{16 \times \frac{\sqrt{2}}{2} + 12 \times \frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{28 \times \frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{2}{4}} = 28\sqrt{2} \approx 39{,}6$$

Ou, seja, se o vértice a ponte for construída entre dois pontos equidistantes do vértice B, terá um comprimento aproximado de 39,6 metros.

Exame – 2001, Ép. especial (cód. 435)

73. Designando o ponto (1,0) por P e recorrendo à definição de tangente, temos que:



$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\overline{AP}}{\overline{OP}} \;\Leftrightarrow\; \operatorname{tg}\alpha = \frac{\overline{AP}}{1} \;\Leftrightarrow\; \overline{AP} = \operatorname{tg}\alpha$$

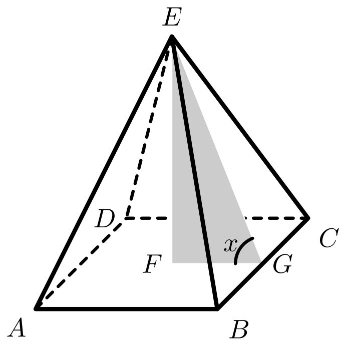
Logo, podemos calcular a área da região sombreada, como a soma do quarto de círculo de raio 1, com a área do triângulo $[OPA]$:

$$A = \frac{A_\circ}{4} + A_{[OPA]} = \frac{\pi \times 1^2}{4} + \frac{\overline{OP} \times \overline{AP}}{2} = \frac{\pi}{4} + \frac{1 \times \operatorname{tg}\alpha}{2} = \frac{\pi}{4} + \frac{\operatorname{tg}\alpha}{2}$$

Resposta: **Opção A**

Exame – 2001, 1.ª fase - 2.ª chamada (cód. 435)

74. Para determinar a área de uma das faces laterais, começamos determinar a altura do triângulo ($\overline{EG}$). Recorrendo à definição de cosseno, como $\overline{FG} = \frac{\overline{AB}}{2} = \frac{2}{2} = 1$, vem:



$$\cos x = \frac{\overline{FG}}{\overline{EG}} \;\Leftrightarrow\; \cos x = \frac{1}{\overline{EG}} \;\Leftrightarrow\; \overline{EG} = \frac{1}{\cos x}$$

Assim, calculando a área do triângulo $[BCE]$, temos:

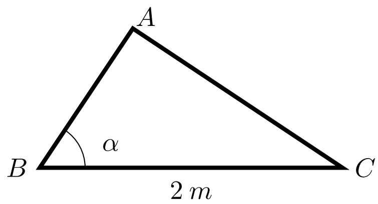
$$A_{[BCE]} = \frac{\overline{BC} \times \overline{EG}}{2} = \frac{2 \times \frac{1}{\cos x}}{2} = \frac{1}{\cos x}$$

Logo, para cada valor de $x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, a área da pirâmide é dada por:

$$A_T = 4 \times A_{[BCE]} + A_{[}ABCD] = 4 \times \frac{1}{\cos x} + 2 \times 2 = \frac{4}{\cos x} + 4 = \frac{4}{\cos x} + \frac{4\cos x}{\cos x} = \frac{4\cos x + 4}{\cos x}$$

Exame – 2001, 1.ª fase - 1.ª chamada (cód. 435)

75. Recorrendo às definições de seno e cosseno temos:



$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{\overline{AC}}{\overline{BC}} \;\Leftrightarrow\; \operatorname{sen}\alpha = \frac{\overline{AC}}{2} \;\Leftrightarrow\; \overline{AC} = 2\operatorname{sen}\alpha$$

$$\cos\alpha = \frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} \;\Leftrightarrow\; \cos\alpha = \frac{\overline{AB}}{2} \;\Leftrightarrow\; \overline{AB} = 2\cos\alpha$$

E assim, considerando o lado $[AB]$ como a base e o lado $[AC]$ como a altura, a área do triângulo $[ABC]$ é:

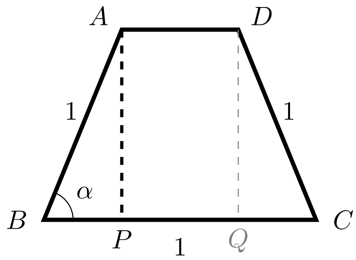
$$A_{[ABC]} = \frac{\overline{AB} \times \overline{AC}}{2} = \frac{2\cos\alpha \times 2\operatorname{sen}\alpha}{2} = \frac{4\operatorname{sen}\alpha . \cos\alpha}{2} = 2\operatorname{sen}\alpha . \cos\alpha$$

Resposta: **Opção A**

Exame – 2000, Prova para militares (cód. 135)

76.

76.1. Considerando as projeções ortogonais dos vértices A e D sobre o lado $[BC]$, respetivamente os pontos P e Q, e recorrendo às definições de seno e cosseno, vem:



$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{\overline{AP}}{\overline{AB}} \Leftrightarrow \operatorname{sen}\alpha = \frac{\overline{AP}}{1} \Leftrightarrow \overline{AP} = \operatorname{sen}\alpha$$

$$\cos\alpha = \frac{\overline{BP}}{\overline{AB}} \Leftrightarrow \cos\alpha = \frac{\overline{BP}}{1} \Leftrightarrow \overline{BP} = \cos\alpha$$

Logo, como $\overline{AD} = 1 - \overline{BP} - \overline{QC} = 1 - 2\overline{BP} = 1 - 2\cos\alpha$, para cada valor de $\alpha \in \left]\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{2}\right]$ a área do trapézio é:

$$A_{[ABCD]} = \frac{\overline{BC}+\overline{AD}}{2}\times\overline{AP} = \frac{1+1-2\cos\alpha}{2}\times\operatorname{sen}\alpha = \frac{2-2\cos\alpha}{2}\times\operatorname{sen}\alpha = \left(\frac{2}{2}-\frac{2\cos\alpha}{2}\right)\times\operatorname{sen}\alpha =$$

$$= (1-\cos\alpha)\operatorname{sen}\alpha = (\operatorname{sen}\alpha)(1-\cos\alpha)$$

76.2. Se $\alpha = \frac{\pi}{2}$, então a área do trapézio é:

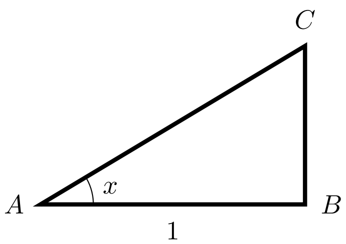
$$\left(\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}\right)\left(1-\cos\frac{\pi}{2}\right) = 1\times(1-0) = 1\times 1 = 1$$

Se $\alpha = \frac{\pi}{2}$, o ângulo ABC é reto, tal como o ângulo BCD, e como os lados $[AB]$, $[BC]$ e $[CD]$ são congruentes, o quadrilátero é um quadrado de lado 1, pelo que a sua área também é 1, de acordo com o cálculo anterior.

Exame – 1999, Prova modelo (cód. 135) (adaptado)

77.

77.1. Usando as definições de cosseno e de tangente, temos:



$$\cos x = \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} \Leftrightarrow \cos x = \frac{1}{\overline{AC}} \Leftrightarrow \overline{AC} = \frac{1}{\cos x}$$

$$\operatorname{tg} x = \frac{\overline{BC}}{\overline{AB}} \Leftrightarrow \operatorname{tg} x = \frac{\overline{BC}}{1} \Leftrightarrow \overline{BC} = \operatorname{tg} x$$

Logo, para cada valor de $x \in \left]0,\frac{\pi}{2}\right[$, o perímetro do triângulo é:

$$P_{[ABC]} = \overline{AB}+\overline{BC}+\overline{AC} = 1+\operatorname{tg}x+\frac{1}{\cos x} = \frac{\cos x}{\cos x}+\frac{\operatorname{sen}x}{\cos x}+\frac{1}{\cos x} = \frac{1+\operatorname{sen}x+\cos x}{\cos x}$$

77.2. Como $\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right) = -\operatorname{sen}\alpha$, temos que: $\operatorname{sen}\alpha = -\left(-\frac{3}{5}\right) = \frac{3}{5}$

E, pela fórmula fundamental ($\operatorname{sen}^2\alpha+\cos^2\alpha = 1$), temos que:

$$\left(\frac{3}{5}\right)^2+\cos^2\alpha = 1 \Leftrightarrow \cos^2\alpha = 1-\frac{9}{25} \Leftrightarrow \cos^2\alpha = \frac{25}{25}-\frac{9}{25} \Leftrightarrow \cos^2\alpha = \frac{16}{25} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cos\alpha = \pm\sqrt{\frac{16}{25}} \Leftrightarrow \cos\alpha = \pm\frac{4}{5}$$

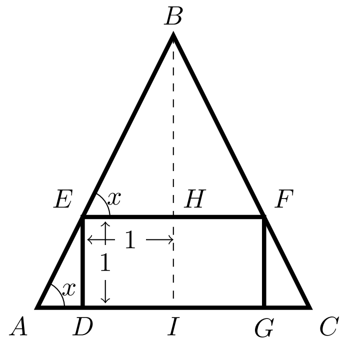
Como $\alpha \in \left]0,\frac{\pi}{2}\right[$ sabemos que $\cos\alpha > 0$, logo $\cos\alpha = \frac{4}{5}$

Desta forma, o valor do perímetro do triângulo $[ABC]$ para este valor de α é:

$$\frac{1+\operatorname{sen}\alpha+\cos\alpha}{\cos\alpha} = \frac{1+\frac{3}{5}+\frac{4}{5}}{\frac{4}{5}} = \frac{\frac{5}{5}+\frac{3}{5}+\frac{4}{5}}{\frac{4}{5}} = \frac{5+3+4}{4} = \frac{12}{4} = 3$$

Exame – 1998, Prova para militares (cód. 135)

78. Como $\overline{DE} = 1$ e $\overline{EH} = \frac{\overline{DG}}{2} = 1$, e recorrendo à definição de tangente, vem:



$$\operatorname{tg} x = \frac{\overline{DE}}{\overline{AD}} \Leftrightarrow \operatorname{tg} x = \frac{1}{\overline{AD}} \Leftrightarrow \overline{AD} = \frac{1}{\operatorname{tg} x}$$

$$\operatorname{tg} x = \frac{\overline{BH}}{\overline{EH}} \Leftrightarrow \operatorname{tg} x = \frac{\overline{BH}}{1} \Leftrightarrow \overline{BH} = \operatorname{tg} x$$

Assim, temos que:

$$\overline{AC} = \overline{AD} + \overline{DG} + \overline{GC} = 2\overline{AD} + 2 = 2\left(\frac{1}{\operatorname{tg} x}\right) + 2 = \frac{2}{\operatorname{tg} x} + 2$$

$$\overline{BI} = \overline{BH} + \overline{HI} = \operatorname{tg} x + 1$$

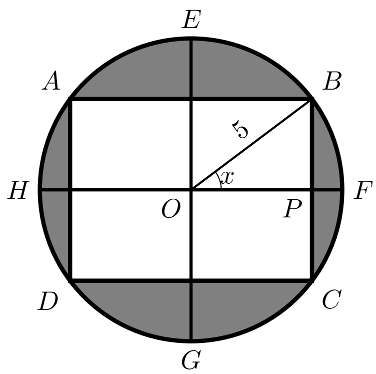
Logo, para cada valor de $x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, a área do triângulo $[ABC]$ é:

$$A_{[ABC]} = \frac{\overline{AC} \times \overline{BI}}{2} = \frac{\left(\frac{2}{\operatorname{tg} x} + 2\right) \times (\operatorname{tg} x + 1)}{2} = \frac{\frac{2\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} x} + \frac{2}{\operatorname{tg} x} + 2\operatorname{tg} x + 2}{2} =$$

$$= \frac{2\left(\frac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} x} + \frac{1}{\operatorname{tg} x} + \operatorname{tg} x + 1\right)}{2} = 1 + \frac{1}{\operatorname{tg} x} + \operatorname{tg} x + 1 = 2 + \operatorname{tg} x + \frac{1}{\operatorname{tg} x}$$

Exame – 1998, 2.ª fase (cód. 135)

79. Considerando o ponto P como a projeção ortogonal do vértice B sobre a reta HF, e recorrendo às definições de seno e cosseno, vem:



$$\operatorname{sen} x = \frac{\overline{BP}}{\overline{OB}} \Leftrightarrow \operatorname{sen} x = \frac{\overline{BP}}{5} \Leftrightarrow \overline{BP} = 5\operatorname{sen} x$$

$$\cos x = \frac{\overline{OP}}{\overline{OB}} \Leftrightarrow \cos x = \frac{\overline{OP}}{5} \Leftrightarrow \overline{OP} = 5\cos x$$

Sabemos ainda que

- $\overline{AB} = 2\overline{OP} = 2 \times 5\cos x = 10\cos x$
- $\overline{BC} = 2\overline{BP} = 2 \times 5\operatorname{sen} x = 10\operatorname{sen} x$

Logo, para cada valor de $x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ a área da zona relvada, em m^2, é dada pela diferença da área da circunferência e do retângulo $[ABCD]$:

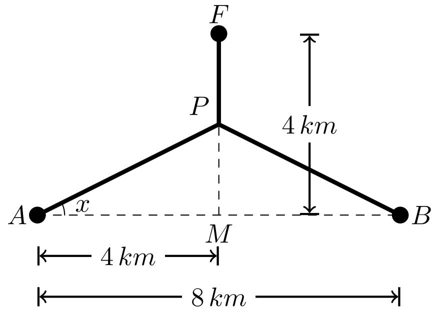
$$A = A_{\circ} - A_{[ABCD]} = \pi\left(\overline{OB}\right)^2 - \overline{AB} \times \overline{BC} = \pi(5)^2 - 10\cos x \times 10\operatorname{sen} x =$$

$$= 25\pi - 100\operatorname{sen} x.\cos x = 25(\pi - 4\operatorname{sen} x.\cos x)$$

Exame – 1998, 1.ª fase - 2.ª chamada (cód. 135)

80.

80.1. Como $\overline{AM} = \frac{\overline{AB}}{2} = \frac{4}{2} = 2$, e recorrendo à definição de cosseno e tangente, vem:



$$\cos x = \frac{\overline{AM}}{\overline{PA}} \Leftrightarrow \cos x = \frac{4}{\overline{PA}} \Leftrightarrow \overline{PA} = \frac{4}{\cos x}$$

$$\operatorname{tg} x = \frac{\overline{PM}}{\overline{AM}} \Leftrightarrow \operatorname{tg} x = \frac{\overline{PM}}{4} \Leftrightarrow \overline{PM} = 4\operatorname{tg} x$$

Como $\overline{FM} = \overline{FP} + \overline{PM}$ e $\overline{FM} = 4$, temos que:

$\overline{FP} + \overline{PM} = 4 \Leftrightarrow \overline{FP} = 4 - \overline{PM} \Leftrightarrow \overline{FP} = 4 - 4\operatorname{tg} x$

Assim, como $\overline{PA} = \overline{PB}$, temos que, para cada $x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$, o comprimento total é dado por:

$$\overline{PA} + \overline{PB} + \overline{FP} = 2\overline{PA} + \overline{FP} = 2\left(\frac{4}{\cos x}\right) + 4 - 4\operatorname{tg} x = \frac{8}{\cos x} + 4 - 4 \times \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} =$$

$$= 4 + \frac{8}{\cos x} - \frac{4\operatorname{sen} x}{\cos x} = 4 + \frac{8 - 4\operatorname{sen} x}{\cos x}$$

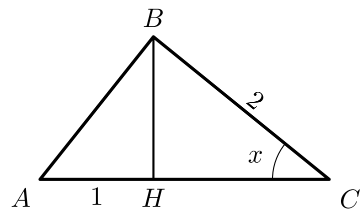
80.2. Para $x = 0$, o comprimento da canalização é:

$$4 + \frac{8 - 4\operatorname{sen} 0}{\cos 0} = 4 + \frac{8 - 4 \times 0}{1} = 4 + 8 = 12$$

Ou seja, se o ângulo x tiver amplitude de 0 (zero) radianos, o comprimento da canalização é 12 km, o que pode ser observado na figura, porque com este valor do ângulo x, o comprimento é dado por $\overline{AB} + \overline{FM} = 8 + 4 = 12$, tendo a canalização a forma de um "T"invertido ($\perp$).

Exame – 1988, 1.ª fase - 1.ª chamada (cód. 135)

81. Recorrendo às definições de seno e cosseno vem:



$$\operatorname{sen} x = \frac{\overline{BH}}{\overline{BC}} \Leftrightarrow \operatorname{sen} x = \frac{\overline{BH}}{2} \Leftrightarrow \overline{BH} = 2\operatorname{sen} x$$

$$\cos x = \frac{\overline{CH}}{\overline{BC}} \Leftrightarrow \cos x = \frac{\overline{CH}}{2} \Leftrightarrow \overline{CH} = 2\cos x$$

Como $\overline{AH} = 1$ e $\overline{AC} = \overline{AH} + \overline{CH}$, temos que:

$$\overline{AC} = \overline{AH} + \overline{CH} \Leftrightarrow \overline{AC} = 1 + \overline{CH} \Leftrightarrow \overline{AC} = 1 + 2\cos x$$

Logo a área do triângulo $[ABC]$ é:

$$A_{[ABC]} = \frac{\overline{AC} \times \overline{BH}}{2} = \frac{(1 + 2\cos x) \times 2\operatorname{sen} x}{2} = \frac{2\operatorname{sen} x + 4\operatorname{sen} x\cos x}{2} = \operatorname{sen} x + 2\operatorname{sen} x\cos x =$$

$$= \operatorname{sen} x(1 + 2\cos x)$$

Exame – 1998, Prova modelo (cód. 135) (adaptado)