Ficha de Trabalho n.º 1 – Matemática A – 10.º Ano

Introdução à Lógica Bivalente

Proposta de Resolução

"Conhece a Matemática e dominarás o Mundo."
Galileu Galilei

Grupo I – Itens de Escolha Múltipla

1. Se as proposições p e q têm o mesmo valor lógico, então ou são ambas verdadeiras ou são ambas falsas. Assim:

▪ a proposição $p \Leftrightarrow q$ é sempre **verdadeira**, pois a equivalência entre duas proposições é falsa se somente se as proposições tiverem valores lógicos diferentes.

▪ a proposição $p \Rightarrow q$ é sempre **verdadeira**, pois a implicação entre duas proposições é falsa se e somente se o antecedente for uma proposição verdadeira e o consequente for uma proposição falsa.

▪ a proposição $p \vee \sim q$ é sempre **verdadeira**, pois a disjunção entre duas proposições é falsa se e somente se ambas forem falsas. Logo, se as proposições p e q forem verdadeiras, então a proposição $p \vee \sim q$ é verdadeira, visto que a proposição p é verdadeira. Se as proposições p e q forem falsas, então a proposição $\sim q$ é verdadeira e portanto a proposição $p \vee \sim q$ é verdadeira, visto que a proposição $\sim q$ é verdadeira.

▪ a proposição $p \wedge \sim q$ é sempre **falsa**, pois a conjunção entre duas proposições é verdadeira se e somente se ambas forem verdadeiras. Logo, se as proposições p e q forem verdadeiras, então a proposição $\sim q$ é falsa e portanto a proposição $p \wedge \sim q$ é falsa, visto que a proposição $\sim q$ é falsa. Se as proposições p e q forem falsas, então a proposição $p \wedge \sim q$ é falsa, visto que a proposição p é falsa.

Resposta: D

2. Tem-se que a proposição $p \Leftrightarrow q$ é verdadeira. Portanto as proposições p e q têm o mesmo valor lógico.

Como a proposição $\sim p \vee r$ é falsa, as proposições $\sim p$ e r são ambas falsas, pois a disjunção entre duas condições é falsa se e somente se ambas forem falsas. Assim, como a proposição $\sim p$ é falsa, a proposição p é verdadeira e consequentemente, a proposição q também é verdadeira, pois as proposições p e q têm o mesmo valor lógico.

Logo, é verdade que a Maria tem uma licenciatura em Matemática e que tem um mestrado em Física, mas é falso que seja professora de Matemática.

Analisando as opções:

A Se a Maria é licenciada em Matemática e tem um mestrado em Física então é professora de Matemática.

Esta proposição pode ser traduzida simbolicamente por $p \wedge q \Rightarrow r$. Tem-se que a proposição $p \wedge q$ é verdadeira, pois as proposições p e q são verdadeiras e a proposição r é falsa. Logo a proposição $p \wedge q \Rightarrow r$ é **falsa** pois a implicação entre duas proposições é falsa se e somente se o antecedente for uma proposição verdadeira e o consequente for uma proposição falsa.

B A Maria tem uma licenciatura em Matemática e não tem um mestrado em Física.

Esta proposição pode ser traduzida simbolicamente por $p \wedge \sim q$. A proposição $\sim q$ é falsa, visto que a proposição q é verdadeira. Logo, a proposição $p \wedge \sim q$ é **falsa**, pois a conjunção entre duas proposições só é verdadeira se e somente se ambas forem verdadeiras.

C A Maria é licenciada em Matemática se for professora de Matemática.

Esta proposição pode ser traduzida simbolicamente por $r \Rightarrow p$. Como a proposição r é falsa e a proposição p é verdadeira, a proposição $r \Rightarrow p$ é **verdadeira**, pois a implicação entre duas proposições é falsa se e somente se o antecedente for uma proposição verdadeira e o consequente for uma proposição falsa.

D A Maria não tem um mestrado em Física ou é professora de Matemática.

Esta proposição pode ser traduzida simbolicamente por $\sim q \vee r$. A proposição Como a proposição $\sim q$ é falsa visto que a proposição q é verdadeira. Como a proposição r também é falsa, a proposição $\sim q \vee r$ é falsa, p é verdadeira, pois a disjunção entre duas proposições é falsa se e somente se ambas forem falsas.

Esta proposição pode ser traduzida simbolicamente por $p \wedge q \Rightarrow r$. Tem-se que a proposição $p \wedge q$ é verdadeira, pois as proposições p e q são verdadeiras e a proposição r é falsa. Logo a proposição $p \wedge q \Rightarrow r$ é **falsa** pois a implicação entre duas proposições é falsa se e somente se o antecedente for uma proposição verdadeira e o consequente for uma proposição falsa.

Resposta: C

3. Tem-se que:

▪ a proposição $p \Rightarrow q \vee \sim r$ é falsa. Portanto a proposição p é verdadeira e a proposição $q \vee \sim r$ é falsa, pois a implicação entre duas proposições é falsa se e somente se o antecedente for uma proposição verdadeira e o consequente for uma proposição falsa.

▪ a disjunção entre duas proposições é falsa se e somente se ambas forem falsas. Portanto, como a proposição $q \vee \sim r$ é falsa, a proposição p é falsa e a proposição $\sim r$ também é falsa. Consequentemente, a proposição r é verdadeira.

$\therefore$ A proposição p é verdadeira, a proposição q é falsa e a proposição r é verdadeira.

Resposta: B

4. Tem-se que:

$$\left(\left(\left(p \vee p\right) \wedge \sim q\right) \Rightarrow q\right) \underset{i)}{\Leftrightarrow} \left(\left(p \wedge \sim q\right) \Rightarrow q\right) \Leftrightarrow \sim\left(p \wedge \sim q\right) \vee q \Leftrightarrow \left(\sim p \vee \sim\left(\sim q\right)\right) \vee q \Leftrightarrow \left(\sim p \vee q\right) \vee q \underset{ii)}{\Leftrightarrow} \sim p \vee \left(q \vee q\right) \Leftrightarrow \sim p \vee q$$

Logo, a negação da proposição $\left(\left(p \vee p\right) \wedge \sim q\right) \Rightarrow q$ é equivalente a:

$$\sim\left(\left(\left(p \vee p\right) \wedge \sim q\right) \Rightarrow q\right) \Leftrightarrow \sim\left(\sim p \vee q\right) \Leftrightarrow \sim\left(\sim p\right) \wedge \sim q \Leftrightarrow p \wedge \sim q$$

i) Idempotência: Se p é uma proposição então $p \vee p \Leftrightarrow p$ e $p \wedge p \Leftrightarrow p$.

ii) Propriedade associativa da disjunção.

Resposta: A

5.

1.º Processo:

Se a proposição p for verdadeira, então $q \Rightarrow p$ é uma proposição verdadeira, pois a implicação entre duas proposições é falsa se e somente se o antecedente for uma proposição verdadeira e o consequente for uma proposição falsa. Logo a proposição $p \wedge \left(q \Rightarrow p\right)$ é verdadeira e portanto tem o mesmo valor lógico que a proposição p.

Se a proposição p for falsa, então a proposição $p \wedge (q \Rightarrow p)$ também é falsa, pois a conjunção entre duas proposições é verdadeira se e somente se ambas forem verdadeiras. Logo, a proposição $p \wedge (q \Rightarrow p)$ é o mesmo valor lógico que a proposição p.

Assim, para quaisquer que sejam as proposições p e q, a proposição $p \wedge (q \Rightarrow p)$ tem sempre o mesmo valor lógico que a proposição p. Logo, $p \wedge (q \Rightarrow p) \Leftrightarrow p$.

2.º Processo: Tabela de Verdade

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$q \Rightarrow p$	$p \wedge (q \Rightarrow p)$
V	V	F	F	V	V
V	F	F	V	V	V
F	V	V	F	F	F
F	F	V	V	V	F

Logo, $p \wedge (q \Rightarrow p) \Leftrightarrow p$.

3.º Processo:

Tem-se que, $p \wedge (q \Rightarrow p) \Leftrightarrow p \wedge (\sim q \vee p) \Leftrightarrow p \wedge (\sim q \vee p) \underset{i)}{\Leftrightarrow} (p \vee F) \wedge (\sim q \vee p) \underset{ii)}{\Leftrightarrow} p \vee (F \wedge \sim q) \underset{i)}{\Leftrightarrow} p \vee F \underset{i)}{\Leftrightarrow} p$.

i) Se p é uma proposição e F é uma qualquer proposição falsa então $p \vee F \Leftrightarrow p$ (existência de elemento neutro da disjunção) e $p \wedge F \Leftrightarrow F$ (existência de elemento absorvente da disjunção).

ii) Propriedade distributiva da disjunção em relação à conjunção.

Resposta: A

6. Como a proposição $(p \Rightarrow q) \wedge (p \vee \sim r) \wedge \sim q$ é verdadeira, as proposições $p \Rightarrow q$, $p \vee \sim r$ e $\sim q$ são verdadeiras. Assim:

▪ se a proposição $\sim q$ é verdadeira, então a proposição q é falsa.

▪ se a proposição q é falsa e a proposição $p \Rightarrow q$ é verdadeira, então a proposição p é necessariamente falsa, pois a implicação de duas proposições é falsa se e somente se o antecedente for uma proposição verdadeira e o consequente for uma proposição falsa.

▪ se a proposição p é falsa e a proposição $p \vee \sim r$ é verdadeira, então a proposição $\sim r$ é necessariamente verdadeira, pois a disjunção de duas proposições é falsa se e somente se ambas fossem falsas. Logo, se a proposição $\sim r$ é verdadeira, então a proposição r é falsa.

$\therefore$ A proposição p é falsa, a proposição q é falsa e a proposição r é falsa.

Resposta: D

7. Como a proposição $(\sim a \wedge (b \Rightarrow c)) \vee a$ é falsa, as proposições $\sim a \wedge (b \Rightarrow c)$ e a são falsas. Assim, se a proposição a é falsa, então a proposição $\sim a$ é verdadeira. Logo, como a proposição $\sim a \wedge (b \Rightarrow c)$ é falsa, a proposição $b \Rightarrow c$ tem de ser necessariamente falsa. Portanto, como a implicação é falsa se e somente se o antecedente for uma proposição verdadeira e o consequente for uma proposição falsa, vem que a proposição b é verdadeira e a proposição c é falsa.

$\therefore$ A proposição a é falsa, a proposição b é verdadeira e a proposição c é falsa. Logo, a Joana tem um gato de cor preta.

Resposta: C

8. Recorrendo a uma tabela de verdade verifica.se que a única proposição que não é uma tautologia é a da opção **C**:

p	q	r	$p \wedge q$	$\underbrace{p \wedge q \Rightarrow r}_{a}$	$p \Rightarrow r$	$q \Rightarrow r$	$\underbrace{(p \Rightarrow r) \wedge (q \Rightarrow r)}_{b}$	$a \Rightarrow b$
V	V	V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	V	F	F	F	F	V
V	F	V	F	V	V	V	V	V
V	F	F	F	V	F	V	F	F
F	V	V	F	V	V	V	V	V
F	V	F	F	V	V	F	F	F
F	F	V	F	V	V	V	V	V
F	F	F	F	V	V	V	V	V

Logo, a proposição $(p \wedge q \Rightarrow r) \Rightarrow ((p \Rightarrow r) \wedge (q \Rightarrow r))$ não é uma tautologia.

Usando tabelas de verdade verificar-se-ia que as proposições das restantes opções são tautologias. O mesmo também pode ser feito usando as propriedades das operações lógicas. Seja V uma qualquer proposição verdadeira:

A $((p \Rightarrow q) \wedge (p \Rightarrow r)) \Rightarrow (p \Rightarrow q \wedge r) \Leftrightarrow ((\sim p \vee q) \wedge (\sim p \vee r)) \Rightarrow (p \Rightarrow q \wedge r) \Leftrightarrow (\sim p \vee (q \wedge r)) \Rightarrow (p \Rightarrow q \wedge r) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow (\sim(\sim p) \Rightarrow q \wedge r) \Rightarrow (p \Rightarrow q \wedge r) \Leftrightarrow (p \Rightarrow q \wedge r) \Rightarrow (p \Rightarrow q \wedge r) \underset{i)}{\Leftrightarrow} V$$

B $((p \Rightarrow q) \vee (p \Rightarrow r)) \Rightarrow (p \Rightarrow q \vee r) \Leftrightarrow ((\sim p \vee q) \vee (\sim p \vee r)) \Rightarrow (p \Rightarrow q \vee r) \Leftrightarrow ((\sim p \vee \sim p) \vee (q \vee r)) \Rightarrow (p \Rightarrow q \vee r) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow (\sim p \vee (q \vee r)) \Rightarrow (p \Rightarrow q \vee r) \Leftrightarrow (\sim(\sim p) \Rightarrow q \vee r) \Rightarrow (p \Rightarrow q \vee r) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (p \Rightarrow q \vee r) \Rightarrow (p \Rightarrow q \vee r) \underset{i)}{\Leftrightarrow} V$$

D $(p \vee q \Rightarrow r) \Rightarrow ((p \Rightarrow r) \wedge (q \Rightarrow r)) \Leftrightarrow (p \vee q \Rightarrow r) \Rightarrow ((\sim p \vee r) \wedge (\sim q \vee r)) \Leftrightarrow (p \vee q \Rightarrow r) \Rightarrow (r \vee (\sim p \wedge \sim q)) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow (p \vee q \Rightarrow r) \Rightarrow (\sim(p \vee q) \vee r) \Leftrightarrow (p \vee q \Rightarrow r) \Rightarrow (\sim(\sim(p \vee q)) \Rightarrow r) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (p \vee q \Rightarrow r) \Rightarrow (p \vee q \Rightarrow r) \underset{i)}{\Leftrightarrow} V$$

i) Como o antecedente e o consequente são a mesma proposição, a implicação é sempre verdadeira.

Resposta: C

9. A resposta correcta é a B. Fazendo uma tabela de verdade, vem:

p	q	$\sim q$	$p \wedge \sim q$	$p \Rightarrow p \wedge \sim q$
V	V	F	F	F
V	F	V	V	V
F	V	F	F	V
F	F	V	F	V

Fazendo uma tabela de verdade para cada uma das restantes proposições, verificar-se-ia que nenhuma dessas tabelas é igual à dada.

Resposta: B

10. Tem-se:

$$(p \Leftrightarrow p \vee q) \Leftrightarrow (p \Rightarrow p \vee q) \wedge (p \vee q \Rightarrow p) \Leftrightarrow (\sim p \vee (p \vee q)) \wedge (\sim (p \vee q) \vee p) \Leftrightarrow ((\sim p \vee p) \vee q) \wedge ((\sim p \wedge \sim q) \vee p) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (V \vee q) \wedge (p \vee (\sim p \wedge \sim q)) \Leftrightarrow V \wedge ((p \vee \sim p) \wedge (p \vee \sim q)) \Leftrightarrow V \wedge (p \vee \sim q) \Leftrightarrow p \vee \sim q \Leftrightarrow \sim (\sim p \wedge q)$$

Resposta: D

GRUPO II – ITENS DE RESPOSTA ABERTA

11.

11.1. A proposição pode ser reescrita da seguinte forma:

"O José ainda não fez uma viagem aos Estados Unidos **e, se** já fez uma viagem à Tailândia, **então**, também já fez uma viagem à China."

Portanto, em linguagem simbólica, a proposição fica: $\sim q \wedge (r \Rightarrow p)$.

11.2. Sabe-se que a proposição $(\sim p \wedge q) \Rightarrow \sim (p \vee r)$ é falsa. Logo, como a implicação é falsa se e somente se o antecedente for uma proposição verdadeira e o consequente for uma proposição falsa, vem que $\sim p \wedge q$ é verdadeira e que $\sim (p \vee r) \Leftrightarrow \sim p \wedge \sim r$ é falsa. Assim:

▪ se a proposição $\sim p \wedge q$ é verdadeira, então as proposições $\sim p$ e q são verdadeiras, pois a conjunção de duas proposições é verdadeira se e somente se ambas forem verdadeiras. Logo, a proposição p é falsa.

▪ como a proposição $\sim p \wedge \sim r$ é falsa e a proposição $\sim p$ é verdadeira, a proposição $\sim r$ é falsa, pois a conjunção de duas proposições é verdadeira se e somente se ambas forem verdadeiras. Logo, a proposição r é verdadeira.

$\therefore$ A proposição p é falsa, a proposição q é verdadeira e a proposição r é verdadeira. Portanto, o José já esteve nos Estados Unidos e na Tailândia mas não esteve na China.

11.3. Tem-se:

$$((\sim p \wedge q) \Rightarrow \sim (p \vee r)) \Leftrightarrow (\sim (\sim p \wedge q) \vee (\sim p \wedge \sim r)) \Leftrightarrow (p \vee \sim q) \vee (\sim p \wedge \sim r) \Leftrightarrow \sim q \vee (p \vee (\sim p \wedge \sim r)) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sim q \vee ((p \vee \sim p) \wedge (p \vee \sim r)) \Leftrightarrow \sim q \vee (V \wedge (p \vee \sim r)) \Leftrightarrow \sim q \vee (p \vee \sim r) \Leftrightarrow p \vee \sim q \vee \sim r$$

12.

12.1. Tem-se:

$$(\sim p \Rightarrow \sim(p \Rightarrow q)) \Leftrightarrow (\sim(\sim p) \vee \sim(\sim p \vee q)) \Leftrightarrow p \vee (p \wedge \sim q) \underset{i)}{\Leftrightarrow} (p \wedge V) \vee (p \wedge \sim q) \Leftrightarrow p \wedge (V \vee \sim q) \Leftrightarrow p \wedge V \Leftrightarrow p$$

i) Se p é uma proposição e V é uma qualquer proposição verdadeira então $p \wedge V \Leftrightarrow p$ (existência de elemento neutro da conjunção) e $p \vee V \Leftrightarrow V$ (existência de elemento absorvente da conjunção).

12.2.

p	q	$\sim p$	$p \Rightarrow q$	$\sim(p \Rightarrow q)$	$\sim p \Rightarrow \sim(p \Rightarrow q)$
V	V	F	V	F	V
V	F	F	F	V	V
F	V	V	V	F	F
F	F	V	V	F	F

Logo, $(\sim p \Rightarrow (p \Rightarrow q)) \Leftrightarrow p$.

13.

13.1.

p	q	r	$\sim q$	$\sim q \vee r$	$p \wedge (\sim q \vee r)$
V	V	V	F	V	V
V	V	F	F	F	F
V	F	V	V	V	V
V	F	F	V	V	V
F	V	V	F	V	F
F	V	F	F	F	F
F	F	V	V	V	F
F	F	F	V	F	F

13.2. Sabe-se que a proposição $p \wedge (\sim q \vee r)$ é verdadeira. Logo, como a conjunção de duas proposições é verdadeira se e somente se ambas as proposições forem verdadeiras, vem que a proposição p é verdadeira e a proposição $\sim q \vee r$ também é verdadeira. Assim:

▪ se a proposição p é verdadeira, então a proposição $r \Rightarrow p$ é verdadeira, pois a implicação é falsa se e somente se o antecedente for uma proposição verdadeira e o consequente for uma proposição falsa.

▪ tem-se que como a $\sim(\sim q \vee r) \Leftrightarrow q \wedge \sim r \Leftrightarrow \sim r \wedge q$, ou seja, a proposição $\sim r \wedge q$ é a negação da proposição $\sim q \vee r$. Portanto, como a proposição $\sim q \vee r$ é verdadeira, a proposição $\sim r \wedge q$ é falsa.

Logo, a proposição $(r \Rightarrow p) \Leftrightarrow (\sim r \wedge q)$ é falsa, pois a equivalência de duas proposições é falsa se e somente se as duas proposições tiverem valores lógicos diferentes.

14.

14.1. A proposição $X \Rightarrow Y$ pode ser traduzida em linguagem corrente como: **se *X* então *Y***. A proposição $X \Leftrightarrow Y$ pode ser traduzida em linguagem corrente como: ***X* se e somente se *Y***. Assim, a proposição $p \Rightarrow (q \Leftrightarrow \sim r)$ pode ser traduzida para linguagem corrente da seguinte forma:

"Se o José passou as suas férias no Algarve, então, foi à Praia da Rocha se e somente se não foi à Praia da Ilha de Tavira."

14.2 A proposição pode ser reescrita da seguinte forma:

"**Se** o José passou férias no Algarve, **então**, foi à Praia da Rocha **e** foi à Praia da Ilha de Tavira."

Portanto, em linguagem simbólica, a proposição fica: $p \Rightarrow q \wedge r$.

15.

15.1. Tem-se, $(p\vee(p\wedge q))\Rightarrow p \Leftrightarrow ((p\wedge V)\vee(p\wedge q))\Rightarrow p \underset{i)}{\Leftrightarrow} (p\wedge(V\vee q))\Rightarrow p \Leftrightarrow (p\wedge V)\Rightarrow p\Leftrightarrow (p\Rightarrow p)\Leftrightarrow \sim p\vee p\Leftrightarrow V$

i) Se p é uma proposição e V é uma qualquer proposição verdadeira então $p\wedge V \Leftrightarrow p$ (existência de elemento neutro da conjunção)

15.2. Tem-se:

$$\sim(\sim p\wedge(p\vee q))\wedge(p\vee q)\Leftrightarrow\sim((\sim p\wedge p)\vee(\sim p\wedge q))\wedge(p\vee q)\Leftrightarrow\sim(F\vee(\sim p\wedge q))\wedge(p\vee q)\Leftrightarrow\sim(\sim p\wedge q)\wedge(p\vee q)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow(p\vee\sim q)\wedge(p\vee q)\Leftrightarrow p\vee(\sim q\wedge q)\Leftrightarrow p\vee F\Leftrightarrow p$$

15.3. Tem-se:

$$p\Rightarrow(p\Rightarrow p\wedge q)\Leftrightarrow p\Rightarrow(\sim p\vee(p\wedge q))\Leftrightarrow p\Rightarrow((\sim p\vee p)\wedge(\sim p\vee q))\Leftrightarrow p\Rightarrow(V\wedge(\sim p\vee q))\Leftrightarrow\sim p\vee(\sim p\vee q)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow(\sim p\vee\sim p)\vee q\Leftrightarrow\sim p\vee q$$

15.4. Tem-se:

$$(p\Rightarrow(p\wedge\sim q))\wedge(\sim p\vee q)\Leftrightarrow(\sim p\vee(p\wedge\sim q))\wedge(\sim p\vee q)\Leftrightarrow((\sim p\vee p)\wedge(\sim p\vee\sim q))\wedge(\sim p\vee q)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow(V\wedge(\sim p\vee\sim q))\wedge(\sim p\vee q)\Leftrightarrow(\sim p\vee\sim q)\wedge(\sim p\vee q)\Leftrightarrow\sim p\vee(\sim q\wedge q)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\sim p\vee F\Leftrightarrow\sim p$$

15.5. Tem-se:

$$\sim((p\Rightarrow\sim q)\vee(p\wedge q))\Leftrightarrow\sim((\sim p\vee\sim q)\vee(p\wedge q))\Leftrightarrow\sim(\sim p\vee(\sim q\vee(p\wedge q)))\Leftrightarrow\sim(\sim p\vee((\sim q\vee p)\wedge(\sim q\vee q)))\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\sim(\sim p\vee((\sim q\vee p)\wedge V))\Leftrightarrow\sim(\sim p\vee(\sim q\vee p))\Leftrightarrow\sim((\sim p\vee p)\vee\sim q)\Leftrightarrow\sim(V\vee\sim q)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\sim V\Leftrightarrow F$$

15.6. Tem-se:

$$(p\wedge q)\vee(\sim p\wedge q)\vee(p\wedge\sim q)\Leftrightarrow(q\wedge(p\vee\sim p))\vee(p\wedge\sim q)\Leftrightarrow(q\wedge V)\vee(p\wedge\sim q)\Leftrightarrow q\vee(p\wedge\sim q)\Leftrightarrow(q\vee p)\wedge(q\vee\sim q)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow(q\vee p)\wedge V\Leftrightarrow q\vee p\Leftrightarrow p\vee q$$

15.7. Tem-se:

$$q\Rightarrow(\sim(p\Rightarrow\sim q)\wedge q)\Leftrightarrow\sim q\vee(\sim(\sim p\vee\sim q)\wedge q)\Leftrightarrow\sim q\vee((p\wedge q)\wedge q)\Leftrightarrow\sim q\vee(p\wedge(q\wedge q))\Leftrightarrow\sim q\vee(p\wedge q)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow(\sim q\vee p)\wedge(\sim q\vee q)\Leftrightarrow(\sim q\vee p)\wedge V\Leftrightarrow\sim q\vee p\Leftrightarrow p\vee\sim q$$

15.8. Tem-se:

$$(p\wedge\sim(p\wedge q))\Rightarrow\sim p\vee q\Leftrightarrow(p\wedge(\sim p\vee\sim q))\Rightarrow\sim p\vee q\Leftrightarrow((p\wedge\sim p)\vee(p\wedge\sim q))\Rightarrow\sim p\vee q\Leftrightarrow(F\vee(p\wedge\sim q))\Rightarrow\sim p\vee q\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow p\wedge\sim q\Rightarrow\sim p\vee q\Leftrightarrow\sim(p\wedge\sim q)\vee(\sim p\vee q)\Leftrightarrow(\sim p\vee q)\vee(\sim p\vee q)\Leftrightarrow\sim p\vee q$$

16.

16.1.

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$p\vee\sim q$	$q\wedge(p\vee\sim q)$	$\sim p\vee q$	$(q\wedge(p\vee\sim q))\Rightarrow(\sim p\vee q)$
V	V	F	F	V	V	V	V
V	F	F	V	V	F	F	V
F	V	V	F	F	F	V	V
F	F	V	V	V	F	V	V

Logo, $(q\wedge(p\vee\sim q))\Rightarrow(\sim p\vee q)\Leftrightarrow V$, sendo V uma qualquer proposição verdadeira. Portanto, para quaisquer que sejam as proposições p e q, $(q\wedge(p\vee\sim q))\Rightarrow(\sim p\vee q)$ é sempre verdadeira, ou seja, é uma tautologia.

16.2. Tem-se:

$$(q\wedge(p\vee\sim q))\Rightarrow(\sim p\vee q)\Leftrightarrow(q\wedge p)\vee(q\wedge\sim q)\Rightarrow(\sim p\vee q)\Leftrightarrow(q\wedge p)\vee F\Rightarrow(\sim p\vee q)\Leftrightarrow(q\wedge p)\Rightarrow(\sim p\vee q)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\sim(q\wedge p)\vee(\sim p\vee q)\Leftrightarrow(\sim q\vee\sim p)\vee(\sim p\vee q)\Leftrightarrow\sim q\vee\sim p\vee\sim p\vee q\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow(\sim q\vee q)\vee(\sim p\vee\sim p)\Leftrightarrow V\vee\sim p\Leftrightarrow V$$

Logo, $(q\wedge(p\vee\sim q))\Rightarrow(\sim p\vee q)\Leftrightarrow V$, sendo V uma qualquer proposição verdadeira. Portanto, para quaisquer que sejam as proposições p e q, $(q\wedge(p\vee\sim q))\Rightarrow(\sim p\vee q)$ é sempre verdadeira, ou seja, é uma tautologia.

17.

17.1. Usando uma tabela de verdade:

p	q	r	$p\Rightarrow r$	$q\Rightarrow r$	$\underbrace{(p\Rightarrow r)\wedge(q\Rightarrow r)}_{a}$	$p\wedge q$	$\underbrace{p\wedge q\Rightarrow r}_{b}$	$a\Rightarrow b$
V	V	V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	F	F	F	V	F	V
V	F	V	V	V	V	F	V	V
V	F	F	F	V	F	F	V	V
F	V	V	V	V	V	F	V	V
F	V	F	V	F	F	F	V	V
F	F	V	V	V	V	F	V	V
F	F	F	V	V	V	F	V	V

Portanto, a proposição $(p\Rightarrow r)\wedge(q\Rightarrow r)\Rightarrow(p\wedge q\Rightarrow r)$ é uma tautologia, pois é sempre verdadeira para quaisquer que sejam a proposições, p, q e r.

17.2.

a) Tem-se, $(p\Rightarrow r)\wedge(q\Rightarrow r)\Leftrightarrow(\sim p\vee r)\wedge(\sim q\vee r)\Leftrightarrow r\vee(\sim p\wedge\sim q)\Leftrightarrow(\sim p\wedge\sim q)\vee r\Leftrightarrow\sim(p\vee q)\vee r\Leftrightarrow(p\vee q\Rightarrow r)$.

b) Tem-se, $(p\Rightarrow q)\wedge(p\Rightarrow r)\Leftrightarrow(\sim p\vee q)\wedge(\sim p\vee r)\Leftrightarrow\sim p\vee(q\wedge r)\Leftrightarrow(p\Rightarrow q\wedge r)$

18. Podemos resolver o problema recorrendo a uma tabela de verdade:

a	b	c	$\sim c$	$a\vee b$	$b\vee c$	$a\wedge c$	$b\wedge\sim c$
V	V	V	F	V	V	V	F
V	V	F	V	V	V	F	V
V	F	V	F	V	V	V	F
V	F	F	V	V	F	F	V
F	V	V	F	V	V	F	F
F	V	F	V	V	V	F	F
F	F	V	F	F	V	F	F
F	F	F	V	F	F	F	F

Na tabela existe uma única linha onde as proposições $a\vee b$ e $b\vee c$ são verdadeiras e as proposições $a\wedge c$ e $b\wedge\sim c$ são falsas. Portanto, as proposições $a\vee b$ e $b\vee c$ são verdadeiras e as proposições $a\wedge c$ e $b\wedge\sim c$ são falsas e a proposição a é falsa e se as proposições b e c são verdadeiras.

Logo, o Pedro tem um carro preto e tem outro cinzento.

19. Tem-se:

▪ a proposição a é falsa, pois existem número primos que não são ímpares. O número 2 é primo e não é ímpar.

▪ a proposição b é verdadeira. Um trapézio é um quadrilátero com pelo menos dois lados paralelos. Logo, um quadrado é um trapézio.

▪ a proposição c é falsa, pois os números 3, 4 e 5 são inteiros consecutivos e são solução da equação $x^2+y^2=z^2$. De facto:

$$3^2+4^2=5^2 \Leftrightarrow 9+16=25 \Leftrightarrow 25=25$$, que é uma proposição verdadeira.

19.1. A proposição c é falsa, consequentemente, a proposição $\sim c$ é verdadeira. Logo, como a proposição b é verdadeira, vem que a proposição $b \wedge \sim c$ é verdadeira.

Portanto, como a proposição a é falsa e a proposição $b \wedge \sim c$ é verdadeira, a proposição $a \vee (b \wedge \sim c)$ é verdadeira.

19.2. A proposição a é falsa e a proposição b é verdadeira. Logo, a proposição $a \vee b$ é verdadeira. Como a proposição c é falsa, vem que a proposição $b \wedge c$ é falsa.

Portanto, como a proposição $a \vee b$ é verdadeira e a proposição $b \wedge c$ é falsa, a proposição $a \vee b \Rightarrow b \wedge c$ é falsa.

19.3. Como as proposições a e c o mesmo valor lógico (falso), a proposição $a \Leftrightarrow c$ é verdadeira. Como a proposição a é falsa e a proposição b é verdadeira, a proposição $a \vee b$ é verdadeira. A proposição $\sim a$ é verdadeira, pois a proposição a é falsa. Logo, como as proposições $\sim a$ e $a \vee b$ são verdadeiras, a proposição $\sim a \wedge (a \vee b)$ é verdadeira.

Portanto, como as proposições $a \Leftrightarrow c$ e $\sim a \wedge (a \vee b)$ são verdadeiras, a proposição $(a \Leftrightarrow c) \Rightarrow (\sim a \wedge (a \vee b))$ é verdadeira.

19.4. A proposição $\sim a$ é verdadeira, pois a proposição a é falsa e a proposição $\sim b$ é falsa, pois a proposição b é verdadeira. Logo, a proposição $\sim a \wedge \sim b$ é falsa. Como as proposições c e $\sim a \wedge \sim b$ são falsas, a proposição $\sim a \wedge \sim b \vee c$ é falsa.

Portanto, a proposição $\sim (\sim a \wedge \sim b \vee c)$ é verdadeira, pois a proposição $\sim a \wedge \sim b \vee c$ é falsa.

19.5. Como proposição a é falsa e a proposição b é verdadeira, a proposição $a \vee b$ é verdadeira. A proposição $\sim c$ é verdadeira, pois a proposição c é falsa.

Logo, como as proposições $\sim c$ e $a \vee b$ são verdadeiras, a proposição $\sim c \Rightarrow a \vee b$ é verdadeira.

Como as proposições b e $\sim c \Rightarrow a \vee b$ são verdadeiras, a proposição $b \Leftrightarrow (\sim c \Rightarrow a \vee b)$ é verdadeira.

Por fim, a proposição $\sim a$ é verdadeira, pois a proposição a é falsa. Portanto, como as proposições $\sim a$ e $b \Leftrightarrow (\sim c \Rightarrow a \vee b)$ são verdadeiras, a proposição $\sim a \Rightarrow (b \Rightarrow (\sim c \Rightarrow a \vee b))$ é verdadeira.

19.6. Como proposição a é falsa e a proposição b é verdadeira, a proposição $a \vee b$ é verdadeira. Como a proposição b é verdadeira e a proposição c é falsa, a proposição $b \Rightarrow c$ é falsa.

Portanto, como a proposição $a \vee b$ é verdadeira e a proposição $b \Rightarrow c$ é falsa, a proposição $(a \vee b) \wedge (b \Rightarrow c)$ é falsa.

20.

20.1.

p	q	$\sim p$	$p \Rightarrow q$	$\sim p \vee q$
V	V	F	V	V
V	F	F	F	F
F	V	V	V	V
F	F	V	V	V

Como as colunas correspondentes às proposições $p \Rightarrow q$ e $\sim p \vee q$ são iguais, tem-se que, para quaisquer proposições p e q, $p \Rightarrow q \Leftrightarrow \sim p \vee q$.

20.2.

p	q	$p \Leftrightarrow q$	$p \Rightarrow q$	$q \Rightarrow p$	$(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$
V	V	V	V	V	V
V	F	F	F	V	F
F	V	F	V	F	F
F	F	V	V	V	V

Como as colunas correspondentes às proposições $p \Rightarrow q$ e $(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$ são iguais, tem-se que, para quaisquer proposições p e q, $(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow (p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$.

20.3.

p	q	r	$p \Rightarrow q$	$q \Rightarrow r$	$p \Rightarrow r$	$\underbrace{(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)}_{a}$	$a \Rightarrow (p \Rightarrow r)$
V	V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	V	F	F	F	V
V	F	V	F	V	V	F	V
V	F	F	F	V	F	F	V
F	V	V	V	V	V	V	V
F	V	F	V	F	V	F	V
F	F	V	V	V	V	V	V
F	F	F	V	V	V	V	V

Portanto, $(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r) \Rightarrow p \Rightarrow r$ é uma tautologia, pois é verdadeira para quaisquer proposições p, q e r.

20.4.

p	q	$p \vee q$	$p \wedge q$	$(p \vee q) \wedge (p \wedge q)$
V	V	V	V	V
V	F	V	F	F
F	V	V	F	F
F	F	F	F	F

Como as colunas correspondentes às proposições $(p \vee q) \wedge (p \wedge q)$ e $p \wedge q$ são iguais, tem-se que, para quaisquer proposições p e q, $(p \vee q) \wedge (p \wedge q) \Leftrightarrow p \wedge q$.

20.5.

p	q	$p \vee q$	$p \wedge q$	$p \wedge q \Rightarrow p \vee q$
V	V	V	V	V
V	F	V	F	V
F	V	V	F	V
F	F	F	F	V

Portanto, $p \wedge q \Rightarrow p \vee q$ é uma tautologia, pois é verdadeira para quaisquer proposições p, q e r. Logo, $(p \wedge q \Rightarrow p \vee q) \Leftrightarrow V$, sendo V uma qualquer proposição verdadeira.

21.

21.1. Tem-se, $\sim p \wedge (p \vee q) \Leftrightarrow (\sim p \wedge p) \vee (\sim p \wedge q) \Leftrightarrow F \vee (\sim p \wedge q) \Leftrightarrow (\sim p \wedge q) \Leftrightarrow \sim (p \vee \sim q) \Leftrightarrow \sim (\sim q \vee p) \Leftrightarrow \sim (q \Rightarrow p)$.

21.2. Tem-se:

$$(\sim((p \Rightarrow q) \vee p) \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\sim((p \Rightarrow q) \vee p) \Rightarrow q) \Leftrightarrow \sim(\sim((p \Rightarrow q) \vee p) \vee q) \Leftrightarrow\Leftrightarrow \sim(\sim((\sim p \vee q) \vee p) \vee q) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sim(\sim((\sim p \vee p) \vee q) \vee q) \Leftrightarrow \sim(\sim(V \vee q) \vee q) \Leftrightarrow \sim(\sim V \vee q) \Leftrightarrow \sim(F \vee q) \Leftrightarrow \sim F \Leftrightarrow V$$

21.3. Tem-se:

$$\sim(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow \sim((p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)) \Leftrightarrow \sim((\sim p \vee q) \wedge (\sim q \vee p)) \Leftrightarrow \sim(\sim p \vee q) \vee \sim(\sim q \vee p) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\sim(\sim p) \wedge \sim q) \vee (\sim(\sim q) \wedge \sim p) \Leftrightarrow (p \wedge \sim q) \vee (q \wedge \sim p) \Leftrightarrow (p \wedge \sim q) \vee (\sim p \wedge q)$$

21.4. Tem-se:

$$(p\vee q\Rightarrow p\wedge q)\Leftrightarrow \sim(p\vee q)\vee(p\wedge q)\Leftrightarrow(\sim p\wedge \sim q)\vee(p\wedge q)\Leftrightarrow(\sim p\vee(p\wedge q))\wedge(\sim q\vee(p\wedge q))\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow(\sim p\vee(p\wedge q))\wedge(\sim q\vee(p\wedge q))\Leftrightarrow((\sim p\vee p)\wedge(\sim p\vee q))\wedge((\sim q\vee p)\wedge(\sim q\vee q))\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow(V\wedge(\sim p\vee q))\wedge((\sim q\vee p)\wedge V)\Leftrightarrow(\sim p\vee q)\wedge(\sim q\vee p)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow(p\Rightarrow q)\wedge(q\Rightarrow p)\Leftrightarrow(p\Leftrightarrow q)$$

21.5. Tem-se, $(p\wedge q\Rightarrow r)\Leftrightarrow \sim(p\wedge q)\vee r\Leftrightarrow(\sim p\vee \sim q)\vee r\Leftrightarrow \sim p\vee(\sim q\vee r)\Leftrightarrow \sim p\vee(q\Rightarrow r)\Leftrightarrow(p\Rightarrow(q\Rightarrow r))$

21.6. Tem-se:

$$(p\vee q)\wedge((p\wedge r)\vee \sim q)\Leftrightarrow(p\vee q)\wedge((p\vee \sim q)\wedge(r\vee \sim q))\Leftrightarrow((p\vee q)\wedge(p\vee \sim q))\wedge(r\vee \sim q)\Leftrightarrow(p\vee(q\wedge \sim q))\wedge(r\vee \sim q)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow(p\vee F)\wedge(r\vee \sim q)\Leftrightarrow p\wedge(r\vee \sim q)\Leftrightarrow p\wedge(\sim q\vee r)\Leftrightarrow p\wedge(q\Rightarrow r)$$

21.7. Tem-se:

$$(p\wedge(p\vee q))\wedge(p\vee(p\wedge q))\underset{i)}{\Leftrightarrow}((p\vee F)\wedge(p\vee q))\wedge((p\wedge V)\vee(p\wedge q))\Leftrightarrow(p\vee(F\wedge q))\wedge(p\wedge(V\vee q))\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow(p\vee F)\wedge(p\wedge V)\Leftrightarrow p\wedge p\Leftrightarrow p$$

i) Se p é uma proposição e F é uma qualquer proposição falsa então $p\vee F\Leftrightarrow p$ (existência de elemento neutro da disjunção) e $p\wedge V\Leftrightarrow p$ (existência de elemento neutro da conjunção).

21.8. Tem-se:

$$(p\vee(\sim p\wedge q))\wedge(\sim p\wedge \sim q)\Leftrightarrow((p\vee \sim p)\wedge(p\vee q))\wedge(\sim p\wedge \sim q)\Leftrightarrow(V\wedge(p\vee q))\wedge \sim(p\vee q)\Leftrightarrow(p\vee q)\wedge \sim(p\vee q)\Leftrightarrow F$$

22.

22.1. Esta proposição é do tipo "p a menos que q", onde p: "O Carlos não sai de casa quando está a chover" e q: "tenha aulas" que é o mesmo que "**se** $\sim q$ **então** p". A proposição p: "O Carlos não sai de casa quando está a chover" pode ser reescrita da seguinte forma:

p: "**Se** estiver a chover, **então**, o Carlos não sai de casa"

Assim, tem-se que $\sim q\Leftrightarrow \sim c$ e $p\Leftrightarrow(a\Rightarrow \sim b)$. Portanto, em linguagem simbólica, a proposição fica: $\sim c\Rightarrow(a\Rightarrow \sim b)$.

Outra resolução: A proposição pode ser interpretada da seguinte forma:

"**Se** o Carlos não tiver aulas **e** se estiver a chover, **então**, o Carlos não sai de casa"

Portanto, em linguagem simbólica, a proposição fica: $(\sim c\wedge a)\Rightarrow \sim b$.

As duas formas são equivalentes: $(\sim c\Rightarrow(a\Rightarrow \sim b))\Leftrightarrow c\vee(\sim a\vee \sim b)\Leftrightarrow(c\vee \sim a)\vee \sim b\Leftrightarrow(\sim(c\vee \sim a)\Rightarrow \sim b)\Leftrightarrow(\sim c\wedge a)\Rightarrow \sim b$

22.2. A proposição $X \vee Y$ pode ser traduzida em linguagem corrente como: **X ou Y**. A proposição $X \Rightarrow Y$ pode ser traduzida em linguagem corrente como: **se X então Y** ou então, **Y quando X**. Assim, a proposição $\sim a \vee c \Rightarrow b$ pode ser traduzida para linguagem corrente da seguinte forma:

"Se não estiver a chover ou se tiver aulas, então, o Carlos sai de casa." ou "O Carlos sai de casa quando não está a chover ou quando tem aulas."

23.

23.1.

a) Tem-se que $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow \sim p \vee q \Leftrightarrow \sim (p \wedge \sim q)$.

Como $p \Rightarrow q$ é verdadeira, vem que $\sim (p \wedge \sim q)$ também é verdadeira e consequentemente, $p \wedge \sim q$ é falsa.

b) A proposição $p \Rightarrow q$ é verdadeira. Logo, podem ocorrer três casos: as proposições p e q são ambas verdadeiras; as proposições p e q são ambas falsas; a proposição p é falsa e a proposição q é verdadeira.

1.º Caso - as proposições p e q são ambas verdadeiras:

Se a proposição q é verdadeira, então, a proposição $r \wedge p \Rightarrow q$ é necessariamente **verdadeira**, pois a implicação entre duas proposições é falsa se e somente se o antecedente for uma proposição verdadeira e o consequente for uma proposição falsa.

2.º Caso - as proposições p e q são ambas falsas:

Se a proposição p é falsa, então, a proposição $r \wedge p$ é falsa, pois a conjunção de duas proposições é verdadeira se e somente se ambas forem verdadeiras. Logo, se a proposição $r \wedge p$ é falsa, então, a proposição $r \wedge p \Rightarrow q$ é **verdadeira**.

3.º Caso – a proposição p é falsa e a proposição q é verdadeira:

As justificações dadas nos 1.º e 2.º casos podem ser usadas para justificar que neste caso a proposição $r \wedge p \Rightarrow q$ é **verdadeira**.

Portanto, a proposição $r \wedge p \Rightarrow q$ é verdadeira.

c) A proposição $p \Rightarrow q$ é verdadeira. Logo, podem ocorrer três casos referidos na alínea anterior:

1.º Caso - as proposições p e q são ambas verdadeiras:

Se a proposição q é verdadeira, então, a proposição $r \Rightarrow q$ é necessariamente verdadeira, pois a implicação entre duas proposições é falsa se e somente se o antecedente for uma proposição verdadeira e o consequente for uma proposição falsa. Consequentemente, a proposição $(p \Rightarrow r) \vee (r \Rightarrow q)$ é necessariamente **verdadeira**, pois a disjunção entre duas proposições é falsa se e somente se ambas forem falsas.

2.º Caso - as proposições p e q são ambas falsas:

Se a proposição p é falsa, então, a proposição $p \Rightarrow r$ é verdadeira, pois a implicação entre duas proposições é falsa se e somente se o antecedente for uma proposição verdadeira e o consequente for uma proposição falsa. Consequentemente, a proposição $(p \Rightarrow r) \vee (r \Rightarrow q)$ é necessariamente **verdadeira**, pois a disjunção entre duas proposições é falsa se e somente se ambas forem falsas.

3.º Caso – a proposição p é falsa e a proposição q é verdadeira:

As justificações dadas nos 1.º e 2.º casos podem ser usadas para justificar que neste caso a proposição $(p \Rightarrow r) \vee (r \Rightarrow q)$ é **verdadeira**.

Portanto, a proposição $(p \Rightarrow r) \vee (r \Rightarrow q)$ é verdadeira.

23.2. As proposições $p \Rightarrow q$ e $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow ((\sim q \vee \sim r) \wedge r)$ são verdadeiras. Logo, a proposição $(\sim q \vee \sim r) \wedge r$ é verdadeira. Assim:

▪ Como a conjunção de duas proposições é verdadeira se e somente se ambas forem verdadeiras, vem que as proposições $\sim q \vee \sim r$ e r são verdadeiras.

▪ A proposição $\sim r$ é falsa, visto que a proposição r é verdadeira. Como a proposição $\sim q \vee \sim r$ é verdadeira e como a disjunção de duas proposições é falsa se e somente se ambas forem falsas, conclui-se que a proposição $\sim q$ é verdadeira e consequentemente a proposição q é falsa.

▪ Como a proposição $p \Rightarrow q$ é verdadeira e como a proposição q é falsa, vem que a proposição p é falsa.

$\therefore$ A proposição p é falsa, a proposição q é falsa e a proposição r é verdadeira.

23.3. Tem-se que:

$$(p \Rightarrow (\sim r \Rightarrow (q \Rightarrow \sim p))) \Leftrightarrow (p \Rightarrow (\sim r \Rightarrow \sim q \vee \sim p)) \Leftrightarrow (p \Rightarrow (r \vee \sim q \vee \sim p)) \Leftrightarrow (\sim p \vee \sim p) \vee r \vee \sim q \Leftrightarrow \sim p \vee r \vee \sim q$$

Como $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow \sim (p \wedge \sim q)$ e como a proposição $p \Rightarrow q$ é verdadeira, vem que a proposição $\sim (p \wedge \sim q)$ é verdadeira e consequentemente, a proposição $p \wedge \sim q$ é falsa. Portanto, a proposição $\sim p \vee r \vee \sim q$ é falsa.

A disjunção entre duas ou mais proposições é falsa se e somente se todas as proposições forem falsas. Logo, as proposições $\sim p$, $\sim q$ e r são falsas. Consequentemente as proposições p e q são verdadeiras.

$\therefore$ A proposição p é verdadeira, a proposição q é verdadeira e a proposição r é falsa.

24. Podemos resolver o problema recorrendo a uma tabela de verdade:

p	q	r	$\sim r$	$p \Leftrightarrow q$	$p \vee q$	$p \wedge q$	$r \Rightarrow p \wedge q$	$\sim r \wedge (p \vee q)$	$\sim(\sim r \wedge (p \vee q))$
V	V	V	F	V	V	V	V	F	V
V	V	F	V	V	V	V	V	V	F
V	F	V	F	F	V	F	F	F	V
V	F	F	V	F	V	F	V	V	F
F	V	V	F	F	V	F	F	F	V
F	V	F	V	F	V	F	V	V	F
F	F	V	F	V	F	F	F	F	V
F	F	F	V	V	F	F	V	F	V

Analisando a tabela verifica-se que sempre que a proposição $p \Leftrightarrow q$ é falsa e que a proposição $r \Rightarrow p \wedge q$ é verdadeira, a proposição $\sim(\sim r \wedge (p \vee q))$ é falsa.

$\therefore$ A proposição $\sim(\sim r \wedge (p \vee q))$ é falsa.

25.

25.1. A proposição $(p \wedge \sim r) \vee (p \Rightarrow \sim q)$ é falsa. Logo, como a disjunção de duas proposições é falsa se e somente se ambas forem falsas, vem que as proposições $p \wedge \sim r$ e $p \Rightarrow \sim q$ são falsas. Assim:

▪ como a proposição $p \Rightarrow \sim q$ é falsa, vem que a proposição p é verdadeira e a proposição $\sim q$ é falsa, pois a implicação entre duas proposições é falsa se e somente se o antecedente for uma proposição verdadeira e o consequente for uma proposição falsa. Consequentemente, a proposição q é verdadeira.

▪ como a proposição $p \wedge \sim r$ é falsa e a proposição p é verdadeira, vem que a proposição $\sim r$ é falsa, pois a disjunção entre duas proposições é verdadeira se e somente se ambas forem verdadeiras. Consequentemente a proposição r é verdadeira.

$\therefore$ As proposições p, q e r são verdadeiras.

25.2. A proposição $\sim p \Rightarrow (q \Rightarrow r)$ é falsa. Logo, como a implicação entre duas proposições é falsa se e somente se o antecedente for uma proposição verdadeira e o consequente for uma proposição falsa, vem que a proposição $\sim p$ é verdadeira e a proposição $q \Rightarrow r$ é falsa. Consequentemente, a proposição p é falsa. Da mesma forma, como a proposição $q \Rightarrow r$ é falsa, conclui-se que a proposição q é verdadeira e a proposição r é falsa.

$\therefore$ A proposição p é falsa, a proposição q é verdadeira e a proposição r é falsa.

25.3. A proposição $(\sim p \Rightarrow r) \wedge (\sim q \Leftrightarrow p) \wedge \sim r$ é verdadeira. Logo, como a conjunção de duas ou mais proposições é verdadeira se e somente se todas forem verdadeiras, vem que as proposições $\sim p \Rightarrow r$, $\sim q \Leftrightarrow p$ e $\sim r$ são verdadeiras. Assim:

▪ a proposição $\sim r$ é verdadeira, consequentemente aa proposição r é falsa.

▪ como a proposição $\sim p \Rightarrow r$ é verdadeira e a proposição r é falsa, vem que a proposição $\sim p$ é falsa, pois a implicação entre duas proposições é falsa se e somente se o antecedente for uma proposição verdadeira e o consequente for uma proposição falsa. Consequentemente, a proposição p é verdadeira.

▪ como a proposição $\sim q \Leftrightarrow p$ é verdadeira, vem que as proposições p e $\sim q$ têm o mesmo valor lógico. Como a proposição p é verdadeira, conclui-se que a proposição $\sim q$ é também verdadeira. Logo, a proposição q é falsa.

$\therefore$ A proposição p é verdadeira, a proposição q é falsa e a proposição r é falsa.

Nota: o exercício **25.** poderia ter sido resolvido recorrendo a tabelas de verdade, a exemplo do que se fez no item **24.** Para o item **25.3.** ficaria:

p	q	r	$\sim p$	$\sim q$	$\sim r$	$\sim p \Rightarrow r$	$\sim q \Leftrightarrow p$	$(\sim p \Rightarrow r) \wedge (\sim q \Leftrightarrow p) \wedge \sim r$
V	V	V	F	F	F	V	F	F
V	V	F	F	F	V	V	F	F
V	F	V	F	V	F	V	V	F
V	F	F	F	V	V	V	V	V
F	V	V	V	F	F	V	V	F
F	V	F	V	F	V	F	V	F
F	F	V	V	V	F	V	F	F
F	F	F	V	V	V	F	F	F

Analisando a tabela verifica-se a proposição $(\sim p \Rightarrow r) \wedge (\sim q \Leftrightarrow p) \wedge \sim r$ é verdadeira se e somente se proposição p é verdadeira, a proposição q é falsa e a proposição r é falsa.