Escola Secundária de Paredes

Ficha de Trabalho 12

Matemática A

12.º Ano de Escolaridade • Turma: $B + C + H$

Aula de Apoio

abril de 2023

1. $z_1 = 2 - 2i^{17}$ e $z_2 = e^{i\frac{\pi}{6}}$, dois números complexos

1.1. $17 = 4 \times 4 + 1$

Logo, $i^{17} = i^{4\times 4+1} = i$

Portanto,

$z_1 = 2 - 2i$, de afixo $P_1\left(2; -2\right)$

$|z_1| = \sqrt{2^2 + (-2)^2} = \sqrt{4+4} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

Seja α, um argumento de z_1

$\tan\alpha = \dfrac{-2}{2} \wedge \alpha \in 4^\circ$ Q

$\therefore \tan\alpha = -1 \wedge \alpha \in 4^\circ$ Q

$\therefore \alpha = -\dfrac{\pi}{4}$

Portanto, $z_1 = 2\sqrt{2}e^{i\left(-\frac{\pi}{4}\right)}$

1.2. Ora,

$z_2^3 = \left(e^{i\frac{\pi}{6}}\right)^3 = e^{i\frac{3\pi}{6}} = e^{i\frac{\pi}{2}}$

$\overline{z_1} = \overline{2\sqrt{2}e^{i\left(-\frac{\pi}{4}\right)}} = 2\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$

Assim,

$$\frac{z_2^3}{\overline{z_1}} = \frac{e^{i\frac{\pi}{2}}}{2\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}} = \frac{1}{2\sqrt{2}}e^{i\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)} = \frac{\sqrt{2}}{4}e^{i\frac{\pi}{4}} \mapsto \text{forma trigonométrica}$$

Por outro lado,

$$\frac{z_2^3}{\overline{z_1}} = \frac{\sqrt{2}}{4}e^{i\frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{4}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) = \frac{\sqrt{2}}{4}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right) =$$

$$= \frac{2}{8} + \frac{2}{8}i = \frac{1}{4} + \frac{1}{4}i \mapsto \text{forma algébrica}$$

1.3. $z^4+z_1=0 \Leftrightarrow z^4=-z_1 \Leftrightarrow z=\sqrt[4]{-z_1} \Leftrightarrow z=\sqrt[4]{2\sqrt{2}e^{i\left(\pi-\frac{\pi}{4}\right)}} \Leftrightarrow z=\sqrt[4]{2\sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow z=\sqrt[4]{\sqrt{8}}e^{i\left(\frac{\frac{3\pi}{4}+k2\pi}{4}\right)}$, $k\in\{0;1;2;3\} \Leftrightarrow z=\sqrt[8]{8}e^{i\left(\frac{3\pi}{16}+k\frac{\pi}{2}\right)}$, $k\in\{0;1;2;3\}$

Atribuindo valores a k, vem,

$k=0 \mapsto w_0=\sqrt[8]{8}e^{i\frac{3\pi}{16}}$

$k=1 \mapsto w_1=\sqrt[8]{8}e^{i\left(\frac{3\pi}{16}+\frac{\pi}{2}\right)}=\sqrt[8]{8}e^{i\left(\frac{11\pi}{16}\right)}$

$k=2 \mapsto w_2=\sqrt[8]{8}e^{i\left(\frac{3\pi}{16}+\frac{2\pi}{2}\right)}=\sqrt[8]{8}e^{i\left(\frac{19\pi}{16}\right)}=\sqrt[8]{8}e^{i\left(-\frac{13\pi}{16}\right)}$

$k=3 \mapsto w_3=\sqrt[8]{8}e^{i\left(\frac{3\pi}{16}+\frac{3\pi}{2}\right)}=\sqrt[8]{8}e^{i\left(\frac{27\pi}{16}\right)}=\sqrt[8]{8}e^{i\left(-\frac{5\pi}{16}\right)}$

Portanto,

$C.S.=\left\{\sqrt[8]{8}e^{i\frac{3\pi}{16}};\sqrt[8]{8}e^{i\left(\frac{11\pi}{16}\right)};\sqrt[8]{8}e^{i\left(-\frac{13\pi}{16}\right)};\sqrt[8]{8}e^{i\left(-\frac{5\pi}{16}\right)}\right\}$

Geometricamente, os afixos destas quatro soluções, são vértices de um quadrado, inscrito numa circunferência centrada na origem (O) e de raio $\sqrt[8]{8}$

1.4. Ora,

$i\overline{z_2}=e^{i\frac{\pi}{2}}\times e^{i\frac{\pi}{6}}=e^{i\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{6}\right)}=e^{i\frac{4\pi}{6}}=e^{i\frac{2\pi}{3}}$

Seja $z=|z|e^{i\theta}$, com $\theta\in\mathbb{R}$ e $|z|\geq 0$

Assim,

$\overline{z}z^3=i\overline{z_2} \Leftrightarrow \overline{|z|=e^{i\theta}}\times\left(|z|e^{i\theta}\right)^3=e^{i\frac{2\pi}{3}} \Leftrightarrow |z|e^{i(-\theta)}\times|z|^3e^{i(3\theta)}=e^{i\frac{2\pi}{3}} \Leftrightarrow |z|^4e^{i(3\theta-\theta)}=e^{i\frac{2\pi}{3}} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow |z|^4e^{i(2\theta)}=e^{i\frac{2\pi}{3}} \Leftrightarrow \begin{cases}|z|^4=1\\ 2\theta=\dfrac{2\pi}{3}+k2\pi, k\in\mathbb{Z}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}|z|=1\\ \theta=\dfrac{2\pi}{6}+k\pi, k\in\mathbb{Z}\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}|z|=1\\ \theta=\dfrac{\pi}{3}+k\pi, k\in\mathbb{Z}\end{cases}$$

Logo, $z=e^{i\left(\frac{\pi}{3}+k\pi\right)}, k\in\mathbb{Z}$

Atribuindo valores a k, vem,

$k=0 \mapsto w_0=e^{i\frac{\pi}{3}}$

$k=1 \mapsto w_1=e^{i\left(\frac{\pi}{3}+\pi\right)}=e^{i\left(\frac{4\pi}{3}\right)}=e^{i\left(-\frac{2\pi}{3}\right)}$

$k=2 \mapsto w_2=e^{i\left(\frac{\pi}{3}+2\pi\right)}=e^{i\frac{\pi}{3}}$

Portanto,

$C.S.=\left\{e^{i\frac{\pi}{3}};e^{i\left(-\frac{2\pi}{3}\right)}\right\}$

2. Seja $z = |z|e^{i\theta}$, com $\theta \in \mathbb{R}$ e $|z| \geq 0$

   Assim,

   $iz = e^{i\frac{\pi}{2}}|z|e^{i\theta} = |z|e^{i\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)}$

   Portanto, o afixo P_2 do número complexo iz_1, obtém-se do afixo do número complexo z_1, por uma rotação de centro na origem e ângulo de amplitude $\frac{\pi}{2}$ radianos

   Como o afixo P_1 situa-se no segundo quadrante, então, o afixo P_2 se situa-se no terceiro quadrante

3. .

   Zeros de h:

   $h(x) = 0 \Leftrightarrow -2\sin(2x+\pi) = 0 \Leftrightarrow \sin(2x+\pi) = 0 \Leftrightarrow -\sin(2x) = 0 \Leftrightarrow \sin(2x) = 0 \Leftrightarrow$

   $\Leftrightarrow \sin(2x) = sin(0) \Leftrightarrow 2x = k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$

   Atribuindo valores a k

   $k = 0 \twoheadrightarrow x = 0$

   $k = 1 \twoheadrightarrow x = \frac{\pi}{2}$

   $k = 2 \twoheadrightarrow x = \pi$

   Logo, $A\left(\pi;0\right)$ e $O(0;0)$

   Portanto, $\overline{OA} = \pi$

   Determinação do contradomínio da função h

   $-1 \leq \sin(2x+\pi) \leq 1, \forall x \in \mathbb{R}$

   $\therefore -2 \leq -2\sin(2x+\pi) \leq 2, \forall x \in \mathbb{R}$

   $\therefore -2 \leq h(x) \leq 2, \forall x \in D_h$

   Logo, $D'_h = [-2;2]$

   Assim, a ordenada do ponto B é 2

   $A_{[OAB]} = \frac{\overline{OA} \times |\text{ordenada do ponto B}|}{2} = \frac{\pi \times 2}{2} = \pi$

   Resposta: (A)

4. .

4.1. Como o triângulo $[OPQ]$ é isósceles, e a abcissa do ponto P é x, vem que a abcissa do ponto Q é $2x$

$$A(x) = A_{[OPQ]} = \frac{\overline{OQ} \times |f(x)|}{2} = \frac{2x \times |2^{-x+1}|}{2} = x \times 2^{-x+1} = \frac{x}{2^{x-1}}$$

4.2. $f(x) > \frac{1}{8^{-x}} \Leftrightarrow 2^{-x+1} > \frac{1}{8^{-x}} \Leftrightarrow 2^{-x+1} > 8^x \Leftrightarrow 2^{-x+1} > \left(2^3\right)^x \Leftrightarrow 2^{-x+1} > 2^{3x} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow -x+1 > 3x \Leftrightarrow 4x < 1 \Leftrightarrow x < \frac{1}{4}$$

$$C.S. = \left]-\infty; \frac{1}{4}\right[$$

5. Sabe-se que $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x) + \ln x}{5x} = 1$

Assim, tem-se:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x) + \ln x}{5x} = 1 \Leftrightarrow \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{5x} + \lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{5x} = 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{5} \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} + \frac{1}{5} \underbrace{\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x}}_{\text{limite notável}} = 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{5} \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} + \frac{1}{5} \times 0 = 1$$

$$\Leftrightarrow \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = 5$$

Desta forma, uma possível assíntota ao gráfico de f, quando $x \to +\infty$, tem equação $y = 5x$

Resposta: (B)

6. O teorema de Bolzano-Cauchy garante que a função h interseta a bissetriz dos quadrantes pares num ponto de abcissa pertencente ao intervalo $]0, 1[$, logo, $\exists c \in]0, 1[: h(x) = -x \Longleftrightarrow \exists c \in]0, 1[: h(x) + x = 0$

Seja $f(x) = ke^x + x$

Dado que a função f é contínua no seu domínio, é também contínua no intervalo $[0, 1]$ por se tratar da soma de duas funções contínuas

Para que o teorema de Bolzano garanta a existência de, pelo menos, um zero da função f no intervalo $]0, 1[$, deve ter-se $f(0) \times f(1) < 0$

$f(0) = ke^0 + 0 = k$

$f(1) = ke^1 + 1 = ek + 1$

Assim, teremos $k(ek + 1) < 0$, ou seja, $k \in \left]-\frac{1}{e}, 0\right[$

k	$-\infty$	$-\frac{1}{e}$		0	$+\infty$
k	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$ek+1$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$k(ek+1)$	$+$	0	$-$	0	$+$

Resposta: (B)

7. $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{x^2+x}{\sqrt{1-\cos(2x)}} \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{x(x+1)\sqrt{1+\cos(2x)}}{\sqrt{1-\cos(2x)}\sqrt{1+\cos(2x)}} = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{x(x+1)\sqrt{1+\cos(2x)}}{\sqrt{(1-\cos(2x))\,(1+\cos(2x))}}$

$= \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{x(x+1)\sqrt{1+\cos(2x)}}{\sqrt{1-\cos^2(2x)}} = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{x(x+1)\sqrt{1+\cos(2x)}}{\sqrt{\sin^2(2x)}} =$

$= \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{x(x+1)\sqrt{1+\cos(2x)}}{|\sin(2x)|} = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{x(x+1)\sqrt{1+\cos(2x)}}{\sin(2x)} =$

$= \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{x}{\sin(2x)} \times \lim\limits_{x\to 0^+} \left[(x+1)\sqrt{1+\cos(2x)}\right] =$

$= \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1}{\dfrac{\sin(2x)}{x}} \times \sqrt{2} =$

$= \dfrac{1}{2 \times \lim\limits_{2x\to 0^+} \dfrac{\sin(2x)}{2x}} \times \sqrt{2} =$

$= \dfrac{1}{2} \times \sqrt{2} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$