Caderno 1

1. $\cos(a-b)=\frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \cos(a)\cos(b)+\sin(a)\sin(b)=\frac{\sqrt{3}}{2}$

   Por outro lado, sabe-se que $\sin(a)=-\frac{\sqrt{2}}{2} \wedge \frac{3\pi}{2}<a<2\pi$
   Determinemos, então $\cos(a)$

   De $\sin^2(a)+\cos^2(a)=1$, vem,
   $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\cos^2(a)=1 \Leftrightarrow \frac{2}{4}+\cos^2(a)=1 \Leftrightarrow \frac{1}{2}+\cos^2(a)=1 \Leftrightarrow \cos^2(a)=1-\frac{1}{2} \Leftrightarrow$
   $\Leftrightarrow \cos^2(a)=\frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos(a)=\pm\sqrt{\frac{1}{2}} \Leftrightarrow \cos(a)=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$
   Como, $\frac{3\pi}{2}<a<2\pi$, tem-se que $\cos(a)=\frac{\sqrt{2}}{2}$

   Assim, voltando a $\cos(a-b)=\frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \cos(a)\cos(b)+\sin(a)\sin(b)=\frac{\sqrt{3}}{2}$,
   tem-se,
   $\cos(a-b)=\frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \cos(a)\cos(b)+\sin(a)\sin(b)=\frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{2}}{2}\cos(b)-\frac{\sqrt{2}}{2}\sin(b)=\frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow$
   $\Leftrightarrow \frac{\sqrt{2}}{2}(\cos(b)-\sin(b))=\frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \cos(b)-\sin(b)=\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{2}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \cos(b)-\sin(b)=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow$
   $\Leftrightarrow \cos(b)-\sin(b)=\frac{\sqrt{3}\times\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \cos(b)-\sin(b)=\frac{\sqrt{6}}{2}$

2. $\cos\left(\frac{x}{2}\right)=\cos\left(2\times\frac{x}{4}\right)$
   $\therefore \cos\left(\frac{x}{2}\right)=\cos^2\left(\frac{x}{4}\right)-\sin^2\left(\frac{x}{4}\right)$
   $\therefore \cos\left(\frac{x}{2}\right)=\cos^2\left(\frac{x}{4}\right)-\left[1-\cos^2\left(\frac{x}{4}\right)\right]$
   $\therefore \cos\left(\frac{x}{2}\right)=\cos^2\left(\frac{x}{4}\right)-1+\cos^2\left(\frac{x}{4}\right)$
   $\therefore \cos\left(\frac{x}{2}\right)=2\cos^2\left(\frac{x}{4}\right)-1$
   $\therefore 1+\cos\left(\frac{x}{2}\right)=2\cos^2\left(\frac{x}{4}\right)$c.q.d.

3. Calculemos $\lim_{x\to+\infty} g(x)$

   $\lim_{x\to+\infty} g(x)=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{\pi}{2}+2x\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right]=\frac{\pi}{2}+\lim_{x\to+\infty}\left[2x\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right]=^{(\infty\times 0)}$
   $=\frac{\pi}{2}+2\times\lim_{y\to 0^+}\left[\frac{1}{y}\sin(y)\right]=\frac{\pi}{2}+2\times\lim_{y\to 0^+}\frac{\sin(y)}{y}=\frac{\pi}{2}+2\times 1=\frac{\pi}{2}+2$
   Logo,
   $b=\frac{\pi}{2}+2$

Fez-se a mudança de variável
$y = \frac{1}{x} \Leftrightarrow x = \frac{1}{y}$
Se $x \to +\infty$, então, $y \to 0^+$
Utilizou-se o limite notável: $\lim\limits_{y \to 0} \frac{\sin(y)}{y}$

4. Determinemos a função derivada de g
$g'(x) = (\ln(x))' = \frac{1}{x}$

Então, $g'(b) = \frac{1}{b}$

Assim, tem-se que,

$g'(b) = g(b) \Leftrightarrow \frac{1}{b} = \ln(b) \Leftrightarrow 1 = b\ln(b) \Leftrightarrow \ln\left(b^b\right) = 1 \Leftrightarrow b^b = e$
Resposta: (B)

5. .

5.1. $f\left(\frac{1}{e}\right) = \frac{2 + \ln\left(\frac{1}{e}\right)}{\ln(b)} = \frac{2 - \ln(e)}{\ln(b)} = \frac{2-1}{\ln(b)} = \frac{1}{\ln(b)}$
$f\left(\frac{1}{e^3}\right) = \frac{2 + \ln\left(\frac{1}{e^3}\right)}{\ln(b)} = \frac{2 - \ln\left(e^3\right)}{\ln(b)} = \frac{2-3}{\ln(b)} = -\frac{1}{\ln(b)}$
Assim,

$$f\left(\frac{1}{e}\right) - f\left(\frac{1}{e^3}\right) = \frac{1}{\ln(b)} - \left(-\frac{1}{\ln(b)}\right) = \frac{1}{\ln(b)} + \frac{1}{\ln(b)} = \frac{2}{\ln(b)}$$

5.2. $$\lim_{h \to 0} \frac{f(h+1) - f(1)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\frac{2 + \ln(h+1)}{\ln(b)} - \frac{2 + \ln(1)}{\ln(b)}}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\frac{2 + \ln(h+1)}{\ln(b)} - \frac{2+0}{\ln(b)}}{h} =$$
$$= \lim_{h \to 0} \frac{\frac{\ln(h+1)}{\ln(b)}}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\ln(h+1)}{h\ln(b)} = \frac{1}{\ln(b)} \times \lim_{h \to 0} \frac{\ln(h+1)}{h} = \frac{1}{\ln(b)} \times \lim_{y \to 0} \frac{y}{e^y - 1} =$$
$$= \frac{1}{\ln(b)} \times \frac{1}{\lim\limits_{y \to 0} \frac{e^y - 1}{y}} = \frac{1}{\ln(b)} \times \frac{1}{1} = \frac{1}{\ln(b)}$$

Fez-se a mudança de variável
$y = \ln(h+1) \Leftrightarrow e^y = h + 1 \Leftrightarrow e^y - 1 = h$

Se $h \to 0$, então, $y \to 0$

Utilizou-se o limite notável $\lim\limits_{y \to 0} \frac{e^y - 1}{y} = 1$

6. Sabe-se que a reta de equação $y = 7x - 2$ é assíntota ao gráfico da função g, então,
$\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{g(x)}{x} = 7$

Assim,
$$\lim_{x \to -\infty} \frac{e^{-\frac{1}{x^2}} - g(x)}{x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x} - \lim_{x \to -\infty} \frac{g(x)}{x} = \frac{e^{-\frac{1}{+\infty}}}{+\infty} - 7 = \frac{e^0}{+\infty} - 7 = \frac{1}{+\infty} - 7 = 0 - 7 = -7$$

Resposta: (B)

7. .

   7.1. Pretende-se encontrar uma relação entre a e b
   Como as retas r e s, tangntes ao gráfcico da função, respetivamente, nos pontos de abcissas a e b, são paralelas, então tem-se que $m_r = m_s$

   Assim, comecemos por determinar $g'(x)$

   $$g'(x) = \left(-\frac{1}{12}x^3 + x + 3\right)' = -\frac{1}{12} \times 3x^2 + 1 = -\frac{1}{4}x^2 + 1$$

   Portanto, de $m_r = m_s$, vem que,

   $$m_r = m_s \Leftrightarrow g'(a) = g'(b) \Leftrightarrow -\frac{1}{4}a^2 + 1 = -\frac{1}{4}b^2 + 1 \Leftrightarrow \frac{1}{4}a^2 = \frac{1}{4}b^2 \Leftrightarrow a^2 = b^2 \Leftrightarrow$$
   $$\Leftrightarrow a^2 - b^2 = 0 \Leftrightarrow (a-b)(a+b) = 0 \Leftrightarrow a - b = 0 \vee a + b = 0 \Leftrightarrow a = b \vee a = -b$$

   Como $a \neq b$, tem-se que, $a = -b$

   Resposta: (B)

   7.2. $m_r = g'(-4) = -\frac{1}{4} \times (-4)^2 + 1 = -3$
   Assim, vem que,
   $\tan(\alpha) = m_r \Leftrightarrow \tan(\alpha) = -3$
   Logo, $\alpha = \arctan(-3) + 180° \approx 108.43°$

8. $A_1 = x^2$; $A_2 = 4x^2$; $A_3 = 16x^2$
   Área possível: $16x^2$
   Área favorável: $x^2 + 16x^2 - 4x^2 = 13x^2$
   então, P("acertar na região azul")$= \frac{13x^2}{16x^2} = \frac{13}{16}$

   Resposta: (D)

9. $\ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad | \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots$
   Número de casos possíveis: $8^4 \times 10^4$
   Número de casos favoráveis: $8^2 \times 10^2$

   $AA \quad \ldots \quad \ldots | \quad \ldots \quad \ldots \quad 99$

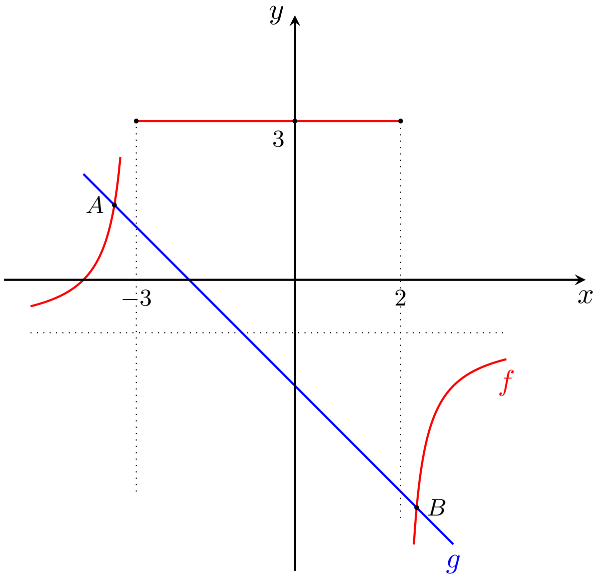
   A probabilidade é igual a $P = \frac{8^2 \times 10^2}{8^4 \times 10^4} = \frac{1}{6400}$

10. Pretendemos determinar as coordenadas dos pontos de interseção dos gráficos das duas funções
    Então,

    Inserir a s funções
    $y_1 = f(x)$
    $y_2 = -x - 2$

    Ajustar a janela de visualização: $[-8; 8] \times [-8; 8]$

    Desenhar os gráficos e procurar as abcissas e as ordenadas dos pontos de interseção dos dois gráficos



Assim, tem-se que $A(-3.41; 1.41)$ e $B(2.30; -4.30)$, são os pontos de interseção dos dois gráficos

11. O período é $\tau = \dfrac{2\pi}{\frac{\pi}{4}} = 8$

    Logo, a frequência $f = \dfrac{1}{\tau} = \dfrac{1}{8}$

    Resposta: (D)

12. .

    12.1. $-1 \in D_f$ e é ponto aderente de D_f
    Assim, a função f é contínua em $x=-1$ se existir $\lim\limits_{x\to -1} f(x)$

    $$\lim_{x\to -1^-} f(x) = \lim_{x\to -1^-}\left(3+\frac{e^{x+k}}{x-2}\right) = 3+\frac{e^{-1+k}}{-3} = 3-\frac{e^{-1+k}}{3}$$

    $$\lim_{x\to -1^+} f(x) = \lim_{x\to -1^+}\frac{\ln(2+x)+x+1}{1+x} = \lim_{x\to -1^+}\frac{\ln(2+x)}{1+x} + \lim_{x\to -1^+}\frac{x+1}{1+x} =$$
    $$= \lim_{x\to -1^+}\frac{\ln(2+x)}{1+x} + 1 = \lim_{y\to 0^+}\frac{y}{1+e^y-2} + 1 = \lim_{y\to 0^+}\frac{y}{e^y-1} + 1 = \frac{1}{\lim\limits_{y\to 0^+}\frac{e^y-1}{y}} + 1 =$$
    $$= \frac{1}{1} + 1 = 2$$

    Fez-se a mudança de variável
    $y = \ln(x+2) \Leftrightarrow e^y = x+2 \Leftrightarrow e^y - 2 = x$

    Se $x \to -1^+$, então $y \to 0^+$
    Utilizou-se o limite notável $\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{e^y-1}{y}$

    $$f(-1) = \frac{\log\left(e^4\right)}{\log(e)} - 2 = \ln\left(e^4\right) - 2 = 4-2 = 2$$

    Resumindo, para que a função seja contínua em $x=-1$ tem de existir $\lim\limits_{x\to -1} f(x)$,

    Ou seja, deverá ter-se,
    $\lim\limits_{x\to -1^-} f(x) = f(-1) \wedge \lim\limits_{x\to -1^+} f(x) = f(-1)$

portanto, vem,
$3-\dfrac{e^{-1+k}}{3}=2\wedge 2=2 \Leftrightarrow -\dfrac{e^{-1+k}}{3}=2-3 \Leftrightarrow \dfrac{e^{-1+k}}{3}=1 \Leftrightarrow e^{-1+k}=3 \Leftrightarrow -1+k=\ln(3) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow k=\ln(3)+1$

12.2. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(3+\dfrac{e^{x+k}}{x-2}\right)=3+\dfrac{e^{-\infty}}{-\infty}=3+\dfrac{0^+}{-\infty}=3+0=3$
Assim, a reta de equação $y=3$ é assíntota ao gráfico da função f, quando $x\to-\infty$

12.3. Se $x<-1$, tem-se que $f(x)=3+\dfrac{e^{x+2}}{x-2}$

Ora, $f(-2)=3+\dfrac{e^{-2+2}}{-2-2}=3-\dfrac{1}{4}=\dfrac{11}{4}$
Logo, o ponto de tangência é $T\left(-2;\dfrac{11}{4}\right)$

Determinemos a função derivada de f (neste ramo)

$$f'(x)=\left(3+\frac{e^{x+2}}{x-2}\right)'=0+\frac{\left(e^{x+2}\right)'\times(x-2)-e^{x+2}\times(x-2)'}{(x-2)^2}=\frac{e^{x+2}\times(x-2)-e^{x+2}\times 1}{(x-2)^2}=$$
$$=\frac{e^{x+2}\times(x-2)-e^{x+2}}{(x-2)^2}=\frac{e^{x+2}(x-2-1)}{(x-2)^2}=\frac{e^{x+2}(x-3)}{(x-2)^2}$$

O declive da reta tangente é igual a $m=f'(-2)=\dfrac{e^{-2+2}\times(-2-3)}{(-2-2)^2}=-\dfrac{5}{16}$

A equação reta é da forma $y=-\dfrac{5}{16}x+b$

Determinemos o valor de b, tendo em conta que a reta "passa"no ponto $T\left(-2;\dfrac{11}{4}\right)$

$\dfrac{11}{4}=-\dfrac{5}{16}\times(-2)+b \Leftrightarrow \dfrac{11}{4}=\dfrac{5}{8}+b \Leftrightarrow b=\dfrac{11}{4}-\dfrac{5}{8} \Leftrightarrow b=\dfrac{17}{8}$

Portanto, a equação da reta tangente é $y=-\dfrac{5}{16}x+\dfrac{17}{8}$

13. .

13.1. O sólido é constituído por oito vértices, não havendo três que sejam colineares

Número de casos possíveis: ${}^8C_3$ (dos oito vértices do sólido escolhem-se três)

Quanto ao número de casos favoráveis:

Os planos que contêm as faces $[ABCD]$, $[EFGH]$, $[BCGF]$, $[ADHE]$ e os polígonos $[AFGD]$ e $[BCHE]$, são perpendiculares ao plano yOz

Cada um desses planos pode ser definido de ${}^4C_3$ (dos quatro vértices do polígono escolhem-se três)

Assim, o número de casos favoráveis é igual a ${}^4C_3\times 6$

Portanto, a probabilidade pedida é igual a $P(pedida)=\dfrac{{}^4C_3\times 6}{{}^8C_3}=\dfrac{24}{56}=\dfrac{3}{7}$

13.2. $A(3;-2;0)$, $E(3;-2;2)$ e $G(-3;2;2)$

Seja P o ponto médio de $[EG]$

$P\left(\frac{3+(-3)}{2};\frac{-2+2}{2};\frac{2+2}{2}\right)$, ou seja, $P\,(0;0;2)$

Determinemos um vetor diretor da reta AP

$\overrightarrow{AP}=P-A=(0-3;0-(-2);2-0)=(-3;2;2)$

As equações paramétricas da reta AP podem ser $\begin{cases} x=-3k \\ y=2k \\ z=2+2k \end{cases}$, $k\in\mathbb{R}$

13.3. $A(3;-2;0)$, $F(3;2;2)$ e $G(-3;2;2)$

Precisamos de determinar um vetor normal ao plano ADF

$\overrightarrow{AF}=F-A=(3-3;2-(-2);2-0)=(0;4;2)$

$\overrightarrow{GF}=F-G=(3-(-3);2-2;2-2)=(6;0;0)$

Seja $\overrightarrow{\alpha}=(a;b;c)$, um vetor normal ao plano ADF

Então,

$$\begin{cases} \overrightarrow{AF}\cdot\overrightarrow{\alpha}=0 \\ \overrightarrow{GF}\cdot\overrightarrow{\alpha}=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (0;4;2)\cdot(a;b;c)=0 \\ (6;0;0)\cdot(a;b;c)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4b+2c=0=0 \\ 6a=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c=-2b \\ a=0 \end{cases}$$

Logo, $\overrightarrow{\alpha}=(0;b;-2b)$, com $b\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$

Considerando que $b=1$, vem

$\overrightarrow{\alpha}=(0;1;-2)$, um vetor normal ao plano ADF

Assim, a equação do plano ADF é da forma $0x+1y-2z+d=0$

Determinemos d, tendo em conta que o plano contém o ponto F

Assim,

$2-2\times 2+d=0\Leftrightarrow d=2$

Portanto, $y-2z+2=0$ é uma equação cartesiana do plano ADF

13.4. $B(3;2;0)$ e $H(-3;-2;2)$

Seja P o ponto médio de $[BH]$

$P\left(\frac{3+(-3)}{2};\frac{2+(-2)}{2};\frac{0+2}{2}\right)$, ou seja, $P\,(0;0;1)$

Este ponto P é o centro da superfície esférica

Determinemos o raio

$r=\overline{BP}=\sqrt{(3-0)^2+(2-0)^2+(0-1)^2}=\sqrt{9+4+1}=\sqrt{14}$

A equação da superfície esférica pedida é $(x-0)^2+(y-0)^2+(z-1)^2=(\sqrt{14})^2$

Ou seja, $x^2+y^2+(z-1)^2=14$

14. Sabemos que $\log_a(b^3)=2\Leftrightarrow 3\log_a(b)=2\Leftrightarrow \log_a(b)=\frac{2}{3}$

Assim,

$$\log_b\left(\frac{\sqrt[4]{a^3b}}{b}\right)=\log_b\left(\sqrt[4]{a^3b}\right)-\log_b(b)=\log_b\left((a^3b)^{\frac{1}{4}}\right)-1=\frac{1}{4}\times\log_b(a^3b)-1=$$

$$=\frac{1}{4}\times(\log_b(a^3)+\log_b(b))-1=\frac{1}{4}\times(3\log_b(a)+1)-1=\frac{1}{4}\times\left(3\times\frac{\log_a(a)}{\log_a(b)}+1\right)-1=$$

$$=\frac{1}{4}\times\left(3\times\frac{1}{\frac{2}{3}}+1\right)-1=\frac{1}{4}\times\left(3\times\frac{3}{2}+1\right)-1=\frac{1}{4}\times\left(\frac{9}{2}+1\right)-1=\frac{1}{4}\times\frac{11}{2}-1=\frac{11}{8}-1=\frac{3}{8}$$

15. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f(x)-f(2)}{x^2-4}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f(x)-f(2)}{(x-2)(x+2)}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f(x)-f(2)}{x-2}\times\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{1}{x+2}=f'(2)\times\dfrac{1}{4}=-1\times\dfrac{1}{4}=-\dfrac{1}{4}$

Cálculo auxiliar:

$f'(2)=m_r=\dfrac{4-0}{0-4}=-1$

Resposta:(C)

Caderno 2

16. Para encontrar as coordenadas dos pontos A e C é necessário resolver a equação $f(x)=g(x)$

$$f(x)=g(x)\Leftrightarrow 2\sin(-x)=-2\sin\left(\frac{x}{2}\right)\Leftrightarrow -2\sin(x)=-2\sin\left(\frac{x}{2}\right)\Leftrightarrow \sin(x)=\sin\left(\frac{x}{2}\right)\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x=\frac{x}{2}+2k\pi\vee x=\pi-\frac{x}{2}+2k\pi,k\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow x-\frac{x}{2}=2k\pi\vee x+\frac{x}{2}=\pi+2k\pi,k\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\frac{x}{2}=2k\pi\vee\frac{3x}{2}=\pi+2k\pi,k\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow x=4k\pi\vee 3x=2\pi+4k\pi,k\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x=4k\pi\vee x=\frac{2\pi}{3}+\frac{4k\pi}{3},k\in\mathbb{Z}$$

Atribuindo valores a k, resulta,

$k=0\twoheadrightarrow x=0\vee x=\dfrac{2\pi}{3}$ $k=1\twoheadrightarrow x=4\pi\vee x=\dfrac{2\pi}{3}+\dfrac{4\pi}{3}$
$\therefore x=4\pi\vee x=2\pi$
$k=-1\twoheadrightarrow x=-4\pi\vee x=\dfrac{2\pi}{3}-\dfrac{4\pi}{3}$
$\therefore x=-4\pi\vee x=-\dfrac{2\pi}{3}$

Assim, tem-se que

Ponto C
$f\left(-\dfrac{2\pi}{3}\right)=2\sin\left(\dfrac{2\pi}{3}\right)=2\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}$
Portanto, $C\left(-\dfrac{2\pi}{3};\sqrt{3}\right)$
Ponto A
$f\left(\dfrac{2\pi}{3}\right)=2\sin\left(-\dfrac{2\pi}{3}\right)=-2\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=-\sqrt{3}$
Portanto, $A\left(\dfrac{2\pi}{3};-\sqrt{3}\right)$
Portanto,
$B\left(0;-\sqrt{3}\right)$ e $D\left(0;\sqrt{3}\right)$

A área do paralelogramo é igual a $A_{[ABCD]}=\overline{AB}\times\overline{BD}=\dfrac{2\pi}{3}\times|-\sqrt{3}-\sqrt{3}|=\dfrac{4\sqrt{3}\pi}{3}$ $u.a.$

17. 17.1. Seja P' a projeção ortogonal do ponto P sobre $[AB]$

Então,

$$\sin(x) = \frac{\overline{PP'}}{\overline{AP}} \Leftrightarrow \sin(x) = \frac{\overline{PP'}}{2} \Leftrightarrow \overline{PP'} = 2\sin(x)$$

$$\cos(x) = \frac{\overline{AP'}}{\overline{AP}} \Leftrightarrow \cos(x) = \frac{\overline{AP'}}{2} \Leftrightarrow \overline{AP'} = 2\cos(x)$$

Assim, a área do pentágono é igual a $S(x) = 2 \times A_{[APDE]} = 2 \times \frac{\overline{DP} + \overline{AE}}{2} \times \overline{DE} =$
$= 2 \times \frac{1 + 2\cos(x) + 1}{2} \times 2\sin(x) = 4 \times \frac{2 + 2\cos(x)}{2} \times \sin(x) = 2(2 + 2\cos(x))\sin(x) =$
$= 4\sin(x) + 4\sin(x)\cos(x) = 4\sin(x) + 2 \times (2\sin(x)\cos(x)) = 4\sin(x) + 2\sin(2x)$

17.2. Sabe-se que $\tan(2\pi - x) = -\frac{12}{5} \Leftrightarrow -\tan(x) = -\frac{12}{5} \Leftrightarrow \tan(x) = \frac{12}{5}$

De $1 + \tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$
vem,

$$1 + \left(\frac{12}{5}\right)^2 = \frac{1}{\cos^2(x)} \Leftrightarrow 1 + \frac{144}{25} = \frac{1}{\cos^2(x)} \Leftrightarrow \frac{169}{25} = \frac{1}{\cos^2(x)} \Leftrightarrow \cos^2(x) = \frac{25}{169} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \cos(x) = \pm\sqrt{\frac{25}{169}} \Leftrightarrow \cos(x) = \pm\frac{5}{13}$$

Como, $x \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[$, tem-se que, $\cos(x) = \frac{5}{13}$

De $\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$, resulta,

$$\frac{12}{5} = \frac{\sin(x)}{\frac{5}{13}} \Leftrightarrow \sin(x) = \frac{12}{5} \times \frac{5}{13} \Leftrightarrow \sin(x) = \frac{12}{13}$$

Assim, a área do pentágono será igual a
$S = 4 \times \frac{12}{13} + 4 \times \frac{12}{13} \times \frac{5}{13} = \frac{48}{13} + \frac{240}{169} = \frac{48 \times 13 + 240}{169} = \frac{864}{169}$ *u.a.*

17.3. Determinemos a função derivada de S

$$S'(x) = [4\sin(x) + 2\sin(2x)]' = 4\cos(x) + 4\cos(2x)$$

Determinemos os zeros de S'

$$S'(x) = 0 \Leftrightarrow 4\cos(x) + 4\cos(2x) = 0 \Leftrightarrow \cos(x) = -\cos(2x) \Leftrightarrow \cos(x) = \cos(\pi - 2x) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x = \pi - 2x + 2k\pi \vee x = -(\pi - 2x) + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x + 2x = \pi + 2k\pi \vee x - 2x = -\pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 3x = \pi + 2k\pi \vee -x = -\pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3} + \frac{2k\pi}{3} \vee x = \pi - 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$$

Atribuindo valores a k, vem,

$$k = 0 \twoheadrightarrow x = \frac{\pi}{3} \vee x = \pi$$

$$k = 1 \twoheadrightarrow x = \frac{\pi}{3} + \frac{2\pi}{3} \vee x = \pi - 2\pi$$
$\therefore x = \pi \vee x = -\pi$

$$k = -1 \twoheadrightarrow x = \frac{\pi}{3} - \frac{2\pi}{3} \vee x = \pi + 2\pi$$

$\therefore x = -\frac{\pi}{3} \vee x = 3\pi$

Como, $x \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[$, tem-se que $x = \frac{\pi}{3}$

Quadro de sinal de S' e de variação de S

x	0		$\frac{\pi}{3}$		$\frac{\pi}{2}$
$S'(x)$	$\backslash\backslash\backslash$	$+$	0	$-$	$\backslash\backslash\backslash$
$S(x)$	$\backslash\backslash\backslash$	$\nearrow$	$3\sqrt{3}$	$\searrow$	$\backslash\backslash\backslash$

$S\left(\frac{\pi}{3}\right) = 4 \times \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) + 2 \times \sin\left(2 \times \frac{\pi}{3}\right) = 4 \times \frac{\sqrt{3}}{2} + 2 \times \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) = 2\sqrt{3} + 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} =$
$= 2\sqrt{3} + \sqrt{3} = 3\sqrt{3}$

O pentágono tem área máxima igual a $3\sqrt{3}$ $u.a$, quando $x = \frac{\pi}{3}$

18. Seja $\overrightarrow{\alpha} = (-1; 1; -1)$ um vetor normal ao plano α e seja $\overrightarrow{\beta} = (a; -4a; 2a^2)$ um vetor normal ao plano β

Os dois planos são perpendiculares se e somente se $\overrightarrow{\alpha} \cdot \overrightarrow{\beta} = 0$

$\overrightarrow{\alpha} \cdot \overrightarrow{\beta} = 0 \Leftrightarrow (-1; 1; -1) \cdot (a; -4a; 2a^2) = 0 \Leftrightarrow -a - 4a - 2a^2 = 0 \Leftrightarrow a(5 + 2a) = 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow a = 0 \vee a = -\frac{5}{2}$

Como $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, então, $a = -\frac{5}{2}$

Resposta: (B)

19. Determinemos a função derivada de f

$f'(x) = \left[(2 - x^2)e^{2-x}\right]' = (2-x^2)' \times e^{2-x} + (2-x^2) \times \left(e^{2-x}\right)' = -2x \times e^{2-x} + (2-x^2) \times (-1) \times e^{2-x} =$
$= -2x \times e^{2-x} - (2 - x^2) \times e^{2-x} = e^{2-x}(x^2 - 2x - 2)$

Determinemos os zeros de f'

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow e^{2-x}(x^2 - 2x - 2) = 0 \Leftrightarrow e^{2-x} = 0 \vee x^2 - 2x - 2 = 0 \Leftrightarrow$
equação impossível $\vee x = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \times 1 \times (-2)}}{2 \times 1} \Leftrightarrow x = \frac{2 \pm \sqrt{12}}{2} \Leftrightarrow x = \frac{2 \pm 2\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x = 1 \pm \sqrt{3}$

Quadro de sinal de f' e de variação de f

x	$-\infty$	$1 - \sqrt{3}$		$1 + \sqrt{3}$	$+\infty$
e^{2-x}	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$x^2 - 2x - 2$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	$-2(1 - \sqrt{3})e^{1+\sqrt{3}}$	$\searrow$	$-2(1 + \sqrt{3})e^{1-\sqrt{3}}$	$\nearrow$

$f(1 - \sqrt{3}) = (2 - (1 - \sqrt{3})^2)e^{2-(1-\sqrt{3})} = (-2 + 2\sqrt{3})e^{1+\sqrt{3}} = -2(1 - \sqrt{3})e^{1+\sqrt{3}}$
$f(1 + \sqrt{3}) = (2 - (1 + \sqrt{3})^2)e^{2-(1+\sqrt{3})} = (-2 - 2\sqrt{3})e^{1-\sqrt{3}} = -2(1 + \sqrt{3})e^{1-\sqrt{3}}$

A função é estritamente crescente em $]-\infty; 1 - \sqrt{3}[$ e em $]1 + \sqrt{3}; +\infty[$, e é estritamente decrescente em $]1 - \sqrt{3}; 1 + \sqrt{3}[$

Atinge o valor máximo absoluto $-2(1 - \sqrt{3})e^{1+\sqrt{3}}$, para $x = 1 - \sqrt{3}$, e atinge o valor mínimo relativo $-2(1 + \sqrt{3})e^{1-\sqrt{3}}$, para $x = 1 + \sqrt{3}$

Nota:

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \left((2-x^2)e^{2-x}\right) = -\infty \times e^{+\infty} = -\infty \times (+\infty) = -\infty$
Logo, $-2(1+\sqrt{3})e^{1-\sqrt{3}}$ não é mínimo absoluto

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \left((2-x^2)e^{2-x}\right) = \lim_{x\to+\infty} \frac{2-x^2}{e^{x-2}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2}{e^{x-2}} - \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{e^{x-2}} =$$
$$= \frac{2}{+\infty} - \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{e^x \times e^{-2}} = 0 - e^2 \times \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{e^x} = e^2 \times \frac{1}{\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^2}} = e^2 \times \frac{1}{+\infty} = e^2 \times 0 = 0$$

Ou seja, a reta de equação $y = 0$ é assíntota horizontal ao gráfico da função quando $x \to +\infty$, razão pela qual $-2(1-\sqrt{3})e^{1+\sqrt{3}}$ é máximo absoluto

20. Depois do Rodrigo ter colocado a bola preta na caixa, ficaram na caixa $p+b+1$ bolas, sendo $p+1$ pretas e b brancas.
A probabilidade de saírem duas bolas de cores diferentes, uma vez que não há reposição da primeira bola, é dada por:
$$P = \frac{(p+1)\times b}{(p+b+1)\times(p+b)} + \frac{b\times(p+1)}{(p+b+1)\times(p+b)} = \frac{2b(p+1)}{(p+b+1)(p+b)} = \frac{2(bp+b)}{(p+b)^2+(p+b)}$$

Outro processo:
Depois do Rodrigo ter colocado a bola preta na caixa, ficaram na caixa $p+b+1$ bolas, sendo $p+1$ pretas e b brancas.
Número de casos possíveis: $(p+b+1)\times(p+b) = (p+b)\times(p+b)+(p+b)\times 1 = (p+b)^2+(p+b)$
Número de casos favoráveis: $(p+1)\times b + b\times(p+1) = 2b(p+1) = 2bp+2b = 2(bp+b)$
A probabilidade de saírem duas bolas de cores diferentes, uma vez que não há reposição da primeira bola, é dada por:
$$P = \frac{2(bp+b)}{(p+b)^2+(p+b)}$$

21. $$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(x)}{e^4 - e^{4+\cos(x)}} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(x)}{-e^4\left(e^{\cos(x)}-1\right)} = -\frac{1}{e^4}\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(x)}{e^{\cos(x)}-1} = -\frac{1}{e^4}\lim_{z\to 0}\frac{z}{e^z-1} =$$
$$= -\frac{1}{e^4} \times \frac{1}{\lim\limits_{z\to 0}\frac{e^z-1}{z}} = -\frac{1}{e^4}\times\frac{1}{1} = -\frac{1}{e^4} = -e^{-4}$$

Fez-se a mudança de variável $z = \cos(x)$
Se $x \to \dfrac{\pi}{2}$, então $z \to 0$

Aplicou-se o limite notável $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x} = 1$

Outro processo

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(x)}{e^4 - e^{4+\cos(x)}} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(x)}{-e^4\left(e^{\cos(x)}-1\right)} = -\frac{1}{e^4}\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(x)}{e^{\cos(x)}-1} = -\frac{1}{e^4}\lim_{y\to 0}\frac{\cos\left(y+\frac{\pi}{2}\right)}{e^{\cos\left(y+\frac{\pi}{2}\right)}-1} =$$
$$= -\frac{1}{e^4}\lim_{y\to 0}\frac{-\sin(y)}{e^{-\sin(y)}-1} = -\frac{1}{e^4}\lim_{z\to 0}\frac{z}{e^z-1} = -\frac{1}{e^4}\times\frac{1}{\lim\limits_{z\to 0}\frac{e^z-1}{z}} = -\frac{1}{e^4}\times\frac{1}{1} = -\frac{1}{e^4} = -e^{-4}$$

Fez-se a mudança de variável $y = x - \dfrac{\pi}{2} \Leftrightarrow y + \dfrac{\pi}{2} = x$
Se $x \to \frac{\pi}{2}$, então $y \to 0$

Fez-se a mudança de variável $z = -\sin(y)$
Se $y \to 0$, então $z \to 0$

Aplicou-se o limite notável $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1$

Resposta: (C)

22. De uma certa linha do triângulo de Pascal, sabe-se que a soma do segundo elemento com o penúltimo é 30
Seja n o número da linha
Então, tem-se que $n + n = 30$, ou seja, $n = 15$
Assim, a linha seguinte tem 17 elementos, pelo que o maior elemento é ${}^{16}C_8 = 12870$

23. $\lim\left(\dfrac{4n-1}{4n+1}\right)^{2n} = \dfrac{1}{e^{3k+2}} \Leftrightarrow \lim\left(\dfrac{4n\left(1-\dfrac{1}{4n}\right)}{4n\left(1+\dfrac{1}{4n}\right)}\right)^{2n} = \dfrac{1}{e^{3k+2}} \Leftrightarrow \dfrac{\lim\left(1-\dfrac{1}{4n}\right)^{2n}}{\lim\left(1+\dfrac{1}{4n}\right)^{2n}} = \dfrac{1}{e^{3k+2}} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \dfrac{\left[\lim\left(1+\dfrac{-1}{4n}\right)^{4n}\right]^{\frac{1}{2}}}{\left[\lim\left(1+\dfrac{1}{4n}\right)^{4n}\right]^{\frac{1}{2}}} = \dfrac{1}{e^{3k+2}} \Leftrightarrow \dfrac{e^{-\frac{1}{2}}}{e^{\frac{1}{2}}} = \dfrac{1}{e^{3k+2}} \Leftrightarrow e^{-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}} = e^{-3k-2} \Leftrightarrow e^{-1} = e^{-3k-2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -3k - 2 = -1 \Leftrightarrow -3k = 1 \Leftrightarrow k = -\dfrac{1}{3}$

24. Ora $\lim x_n = \lim \dfrac{1}{e^n} = \dfrac{1}{+\infty} = 0^+$

Portanto, $\lim\left(f(x_n)\right)$ será $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$

Assim, $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{\sin(-2x)}{3x} = \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{-\sin(2x)}{3x} = -\lim\limits_{x \to 0^+}\left[\dfrac{\sin(2x)}{2x} \times \dfrac{2}{3}\right] =$
$= -\dfrac{2}{3} \times \lim\limits_{2x \to 0^+} \dfrac{\sin(2x)}{2x} = -\dfrac{2}{3} \times 1 = -\dfrac{2}{3}$

Utilizou-se o limite notável $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin(x)}{x} = 1$

25. Se o número tem seis algarismos e se se pretende que tenha dois e só dois quatros na sua composição, então, comecemos por escolher a posição que ocupam esses dois quatros. O número de maneiras de o fazer é dado por ${}^6C_2$
Para cada uma destas maneiras, existem 8^4 maneiras distintas de colocar os restantes algarismos.
Então, de todos os números de seis algarismos,${}^6C_2 \times 8^4$ têm exatamente dois algarismos iguais a quatro
Como, ${}^6C_2 \times 8^4 = {}^6C_4 \times 8^4$, a opção correta é a (A)

Resposta: (A)