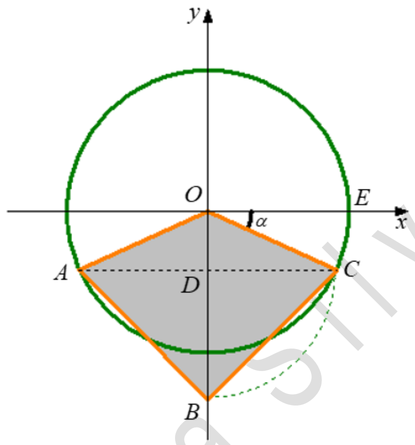
TRIGONOMETRIA | FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS

MATEMÁTICA A | 12.º ANO

"Conhece a Matemática e dominarás o Mundo."
Galileu Galilei

1. Na figura estão representados num referencial o.n. xOy a circunferência trigonométrica e o quadrilátero $[OABC]$.



Sabe-se que:

- o ponto C desloca-se sobre a circunferência, no quarto quadrante (eixo Oy não incluído). O ponto A acompanha o movimento de C, de modo que o segmento de recta $[AC]$ é sempre paralelo a Ox

- o ponto B pertence ao eixo Oy e o arco de circunferência BC está centrado no ponto D, ponto médio de $[AC]$

Sejam α a amplitude, em radianos, do ângulo EOC, com $\alpha \in \left]-\frac{\pi}{2}, 0\right[$ e f a função que dá a área do quadrilátero $[OABC]$ em função de α.

1.1. Mostre que $f(\alpha) = \cos^2 \alpha - \frac{\operatorname{sen}(2\alpha)}{2}$.

1.2. Estude a função f quanto à monotonia e à existência de extremos relativos e indique o valor máximo da área do quadrilátero $[OABC]$.

2. Considere a função g , de domínio $]-\infty,\pi]$, definida por:

$$g(x)=\begin{cases}\dfrac{\ln(-2x+1)}{e-e^{3ax+1}} & \text{se} \quad x<0 \\ \operatorname{sen}^2(2x)-2\cos(2x) & \text{se} \quad 0\leq x\leq \pi\end{cases}$$, com $a\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$

2.1. Determine $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{g(x)-1}{16x^2-\pi^2}$.

2.2. Determine a de modo que a função g seja contínua no seu domínio.

2.3. Mostre que a equação $g(x)=2\cos\left(\dfrac{\pi}{5}\right)$ é possível no intervalo $\left[\dfrac{\pi}{2},\dfrac{5\pi}{6}\right]$.

Não recorra à calculadora, nem mesmo para eventuais cálculos numéricos.

2.4. Para $x\in[0,\pi]$, estude a função g quanto ao sentido das concavidades e à existência de pontos de inflexão do seu gráfico.

2.5. Seja $\theta\in[0,\pi]$.

Determine $g(\theta)$ sabendo que $\operatorname{tg}^2(-\theta-\pi)=2$

3. Considere a função g , contínua em $\mathbb{R}$, definida por:

$$g(x)=\begin{cases}\dfrac{\operatorname{sen}(3x-3)}{x^2-x} & \text{se} \quad x<1 \\ \log_2(3x+2k)-\log_2 k & \text{se} \quad x\geq 1\end{cases}$$, com $k\in\mathbb{R}^+$

Qual é o valor de k ?

A $\dfrac{1}{4}$ **B** $\dfrac{1}{2}$ **C** 1 **D** 2

4. Considere a função g, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $g(x)=2\cos x+\operatorname{sen}(2x)$

4.1. Determine, por definição, $g'\left(\frac{\pi}{2}\right)$ e escreva a equação reduzida da recta tangente ao gráfico de g no ponto de abcissa $\frac{\pi}{2}$.

4.2. Seja $\theta\in\left]\pi,\frac{5\pi}{4}\right[$ tal que $\operatorname{tg}\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)=2+\frac{5\sqrt{3}}{3}$.

a) Mostre que $\operatorname{tg}\theta=\frac{1}{3}$

b) Determine o valor exacto de $g'\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)$.

4.3. Calcule o valor dos seguintes limites:

a) $\lim\limits_{x\to\pi}\frac{g(x)+2}{\operatorname{tg}x}$

b) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{g(x)}{2x-\pi}$

5. Considere a função h, de domínio $]-\pi,\pi[$, definida por $h(x)=\frac{\operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x+3\cos x+2}$.

5.1. Mostre que para todo o $x\in]-\pi,\pi[$ se tem $h(x)=\frac{1-\cos x}{2+\cos x}$.

5.2. Para um certo valor de $\beta\in]-\pi,\pi[$ tem-se que $\left(1+\frac{1}{\operatorname{tg}^2\beta}\right)\times\cos\left(-\frac{3\pi}{2}+\beta\right)=3$.

Qual é valor de $h(2\beta)$.

5.3. Estude a função h quanto à monotonia e à existência de extremos relativos e indique o valor máximo da área do quadrilátero $[OABC]$.

6. Considere a função g , de domínio $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, definida por $g(x) = e^x \operatorname{sen}(6x)$.

Seja A um ponto de abcissa a do gráfico de g tal que:

- $g'(a) = 0$
- a recta r , tangente ao gráfico de gráfico de g no ponto A intersecta o seu gráfico em mais dois pontos, P e Q

Recorrendo à calculadora gráfica, determine a área do triângulo $[OPQ]$, sendo O a origem do referencial.

Na sua resposta deve:

- reproduzir o gráfico da função g bem como a recta r
- desenhar o triângulo $[OPQ]$
- indicar as coordenadas dos pontos A, P e Q, arredondadas às centésimas
- em eventuais cálculos intermédios utilize sempre arredondamentos às centésimas
- apresentar o valor da medida da área do triângulo $[OPQ]$, arredondado às décimas

7. Considere a função f , de domínio $\mathbb{R}$ definida por $f(x) = 3x + \operatorname{sen}(3x) - \cos(3x)$.

7.1. Determine, por definição, $f'\left(-\frac{2\pi}{3}\right)$ e mostre que uma equação da recta tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa $-\frac{2\pi}{3}$ é dada por $y + 1 = 2(3x + \pi)$.

Sugestão: comece escrever a expressão analítica de f na forma $3x + a\operatorname{sen}(bx + c)$, com $a, b, c \in \mathbb{R}$

7.2. Considere as rectas tangentes ao gráfico de f paralelas ao eixo Ox . Algumas dessas rectas são tangentes em pontos em que abcissa pertence ao intervalo $\left[-\frac{\pi}{2}, \pi\right]$.

Determine essas abcissas.

7.3. Estude, no intervalo $[-\pi, 0]$, a função f quanto ao sentido das concavidades e à existência de pontos de inflexão do seu gráfico.

7.4. Seja $\alpha \in \left]-\frac{\pi}{6}, 0\right[$ tal que $\operatorname{tg}\left(6\left(\alpha+\frac{\pi}{12}\right)\right)=\frac{12}{5}$.

Qual é o valor de $\frac{f'(\alpha)-3}{f''(\alpha)}$?

7.5. Determine o valor de $\lim\limits_{x \to -\frac{\pi}{4}} \frac{f'(3x)-3}{\operatorname{tg}(4x)}$.

7.6. Considere a função g, de domínio $\mathbb{R}$, definida por:

$$g(x)=\begin{cases} f(x) & \text{se} \quad x \leq 0 \\ \dfrac{\operatorname{sen}(4x+\pi)-\cos\left(x-\frac{3\pi}{2}\right)}{\ln(3x+1)} & \text{se} \quad x>0 \end{cases}$$

a) Mostre que a função g é contínua em $x=0$.

b) Estude a função g quanto à existência de assimptotas horizontais do seu gráfico. Caso exista(m), indique a(s) sua(s) equação(ões).

8. Seja $x \in \mathbb{R}$ tal que $\operatorname{tg} x = 3 \operatorname{sen} x \ \wedge \ x \neq k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Qual é o valor de $\operatorname{sen}^2 x + \cos x$?

A 1 **B** $\frac{2\sqrt{2}+1}{3}$ **C** $\frac{11}{9}$ **D** $\frac{2\sqrt{2}+3}{9}$

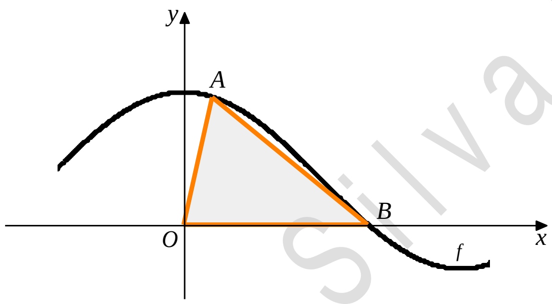
9. Considere a função f, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $f(x) = 1 + 2\cos(2x)$.

9.1. Determine o conjunto solução das seguintes condições:

a) $f(x) = 3 + \sqrt{12}\,\text{sen}(\pi - 2x) \ \wedge \ x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \pi\right]$

b) $f(x) = 4\cos^2\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{18}\right) - 1 \ \wedge \ x \in \mathbb{R}$

9.2. Na figura está representado, em referencial o.n. xOy, parte do gráfico da função f e o triângulo $[OBA]$.



Sabe-se que:

- o gráfico f intersecta o eixo Ox no ponto B
- o ponto A desloca-se sobre o gráfico de f no primeiro quadrante nunca coincidindo com os eixos coordenados.

Qual é a abcissa do ponto A de modo que a área do triângulo $[OBA]$ seja igual a $\frac{\pi}{6}$.

A $\frac{\pi}{4}$ **B** $\frac{\pi}{6}$ **C** $\frac{\pi}{8}$ **D** $\frac{\pi}{12}$

10. Considere a função h definida em $\left]-\frac{\pi}{2},+\infty\right[$ por:

$$h(x)=\begin{cases}(\cos x-1)(\cos x+1)\operatorname{tg} x & \text{se} \quad -\frac{\pi}{2}<x\leq 0\\ 2e^{-x}-2+x & \text{se} \quad x>0\end{cases}$$

10.1. Considere a sucessão (u_n) definida por $u_n=\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)$.

Qual é o valor de $\lim\frac{h(u_n)}{u_n}$?

A -2

B -1

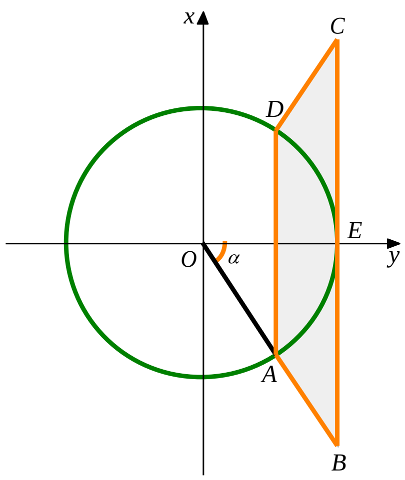
C 1

D 2

10.2. Mostre que a função h tem pelo menos um zero no intervalo $\left[-\frac{\pi}{3},1\right]$.

10.3. Determine o valor de $\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{h(x)}{x^3}$

10.4. Na figura estão representados em referencial o.n. xOy, a circunferência trigonométrica e o trapézio $[ABCD]$.



Sabe-se que:

- o ponto E pertence à circunferência trigonométrica e ao eixo Ox ;
- os pontos A e D pertencem à circunferência trigonométrica e são simétricos em relação ao eixo Ox ;
- a recta BC é tangente à circunferência trigonométrica no ponto E ;
- os pontos B e C são simétricos em relação ao eixo Ox ;
- α é a amplitude em radianos do ângulo EOA, com $\alpha \in \left]-\frac{\pi}{2},0\right[$

Mostre que a área do trapézio $[ABCD]$ é dada em função de α por $h(\alpha)$.

FIM

Solucionário

1.2. A função f é decrescente em $\left[-\frac{\pi}{8},0\right]$ e é crescente em $\left]-\frac{\pi}{2},-\frac{\pi}{8}\right]$. Tem um máximo absoluto em $\alpha=-\frac{\pi}{8}$ e um mínimo relativo em $\alpha=0$. O valor máximo da área do quadrilátero $[OABC]$ é $f\left(-\frac{\pi}{8}\right)=\frac{\sqrt{2}+1}{2}$.

2.1. $\frac{1}{2\pi}$ **2.2.** $a=-\frac{1}{3e}$ **2.3.** 8

2.4. Para $[0,\pi]$, o gráfico de g tem a concavidade voltada para baixo em $\left[\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6}\right]$, tem a concavidade voltada para cima em $\left[0,\frac{\pi}{6}\right]$ e em $\left[\frac{5\pi}{6},\pi\right]$ e tem pontos de inflexão em $x=\frac{\pi}{6}$ e em $x=\frac{5\pi}{6}$.

2.5. $\frac{14}{9}$

3. B

4.1. $g'\left(\frac{\pi}{2}\right)=-4$; $y=-4x+2\pi$ **4.2.** **b)** $\frac{6-2\sqrt{5}}{5}$ **4.3.** **a)** 2

4.3. **b)** -2

5.2. $\frac{2}{25}$

5.3. A função h é decrescente em $]-\pi,0]$, é crescente em $[0,\pi[$ e tem um mínimo em $x=0$.

6. $A_{[OPQ]}\approx 0,3$

7.1. 6 **7.2.** $-\frac{\pi}{3}$, $-\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{3}$, $\frac{\pi}{2}$ e π

7.3. No intervalo $[-\pi,0]$, o gráfico de f tem a concavidade voltada para baixo em $\left[-\pi,-\frac{11\pi}{12}\right]$ e em $\left[-\frac{7\pi}{12},-\frac{\pi}{4}\right]$, tem a concavidade voltada para cima em $\left[-\frac{11\pi}{12},-\frac{7\pi}{12}\right]$ e em $\left[-\frac{\pi}{4},0\right]$ e tem pontos de inflexão em $x=-\frac{11\pi}{12}$, em $x=-\frac{7\pi}{12}$ e em $x=-\frac{\pi}{4}$.

7.4. $\frac{2}{9}$ **7.5.** $\frac{27\sqrt{2}}{4}$ **7.6** **b)** A.H.: $y=0$, quando $x\to+\infty$

8. C

9.1. **a)** $\left\{-\frac{\pi}{3},0,\frac{2\pi}{3},\pi\right\}$ **9.1.** **b)** $x=-\frac{\pi}{9}+2k\pi \vee x=\frac{\pi}{27}+\frac{2k\pi}{3}$, $k\in\mathbb{Z}$ **9.2.** A

10.1. B **10.3.** -1