UNIVERSIDADE da MADEIRA

Faculdade de Ciências Exatas e da Engenharia

PROVA DE AVALIAÇÃO DE CONHECIMENTOS E COMPETÊNCIAS PARA ADMISSÃO AO ENSINO SUPERIOR PARA MAIORES DE 23 ANOS - 2018

Matemática - 13/06/2018

Atenção: ***Justifique*** *os raciocínios utilizados na resolução das questões.*
Não é permitido *o uso de* ***calculadora*** *nem de* ***telemóvel****.*
A prova tem a duração de ***120 minutos****.*

Questão	1	2	3	4.(a)	4.(b)	5.(a)	5.(b)	6.(a)	6.(b)	6.(c)	7
Cotação	2.0	2.0	2.0	1.5	2.0	2.5	2.0	1.5	1.5	1.5	1.5

1. Determine os valores reais de x de forma a que os vetores $\vec{u} = (1, x, -2)$ e $\vec{v} = (0, x-3, -1)$ sejam ortogonais.

2. Represente geometricamente no plano o conjunto de pontos definido pela condição

$$6y^2 + 9x^2 - 18 = 0.$$

3. Considere, para $n \in \mathbb{N}$, a sucessão de termo geral

$$u_n = \frac{a^n}{2^{2n}}.$$

Indique, justificando, o conjunto dos valores reais de a para os quais a sucessão u_n é convergente.

4. Considere a função real de variável real definida por

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x}, & \text{se } x > 0 \\ \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right), & \text{se } x \leq 0 \end{cases}.$$

(a) Calcule $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x)$.

(b) Verifique se a função g é contínua em $x = 0$.

V.S.F.F.

5. Considere a função real de variável real definida por

$$f(x) = x^4 - 8x^2 + 1.$$

   (a) Estude os intervalos de monotonia e a existência de extremos da função f.
   (b) Estude o sentido da concavidade do gráfico da função f e determine, caso existam, os seus pontos de inflexão.

6. Considere A e B dois acontecimentos tais que

$$P(A) = 0.6 \quad \text{e} \quad P(A \cup B) = 0.8.$$

   Determine $P(B)$ quando:

   (a) os acontecimentos A e B são disjuntos;
   (b) os acontecimentos A e B são independentes;
   (c) $P(A|B) = 0.5$.

7. Complete a seguinte tabela de frequências referente ao número de irmãos dos estudantes de uma turma de uma determinada disciplina:

Número de irmãos	Frequência	Frequência acumulada	Frequência relativa	Frequência acumulada relativa
0		12		$\frac{2}{5}$
1	10			
2			$\frac{1}{6}$	
3				

UNIVERSIDADE da MADEIRA

Faculdade de Ciências Exatas e da Engenharia

Sugestão de correção da

PROVA DE AVALIAÇÃO DE CONHECIMENTOS E COMPETÊNCIAS PARA ADMISSÃO AO ENSINO SUPERIOR PARA MAIORES DE 23 ANOS - 2018

Matemática - 13/06/2018

Atenção: ***Justifique*** *os raciocínios utilizados na resolução das questões.*
Não é permitido *o uso de* ***calculadora*** *nem de* ***telemóvel****.*
A prova tem a duração de ***120 minutos****.*

Questão	1	2	3	4.(a)	4.(b)	5.(a)	5.(b)	6.(a)	6.(b)	6.(c)	7
Cotação	2.0	2.0	2.0	1.5	2.0	2.5	2.0	1.5	1.5	1.5	1.5

1. Determine os valores reais de x de forma a que os vetores $\vec{u} = (1, x, -2)$ e $\vec{v} = (0, x-3, -1)$ sejam ortogonais.

R: Como os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são não nulos, para que sejam ortogonais entre si o seu produto interno, $\vec{u} \cdot \vec{v}$, terá de ser nulo. Ora,

$$\begin{aligned} \vec{u} \cdot \vec{v} &= (1, x, -2) \cdot (0, x-3, -1) \\ &= 1 \times 0 + x \times (x-3) + (-2) \times (-1) \\ &= x^2 - 3x + 2 \end{aligned}$$

e

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \Leftrightarrow x^2 - 3x + 2 = 0.$$

Usando a fórmula resolvente para resolver a equação de segundo grau obtemos

$$x = \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \times 1 \times 2}}{2 \times 1} = \frac{3 \pm \sqrt{9-8}}{2} = \frac{3 \pm \sqrt{1}}{2} = \frac{3 \pm 1}{2},$$

i.e.,

$$x = \frac{4}{2} = 2 \text{ ou } x = \frac{2}{2} = 1.$$

Conclui-se assim que os vetores $\vec{u} = (1, x, -2)$ e $\vec{v} = (0, x-3, -1)$ são ortogonais se $x = 2$ ou se $x = 1$.

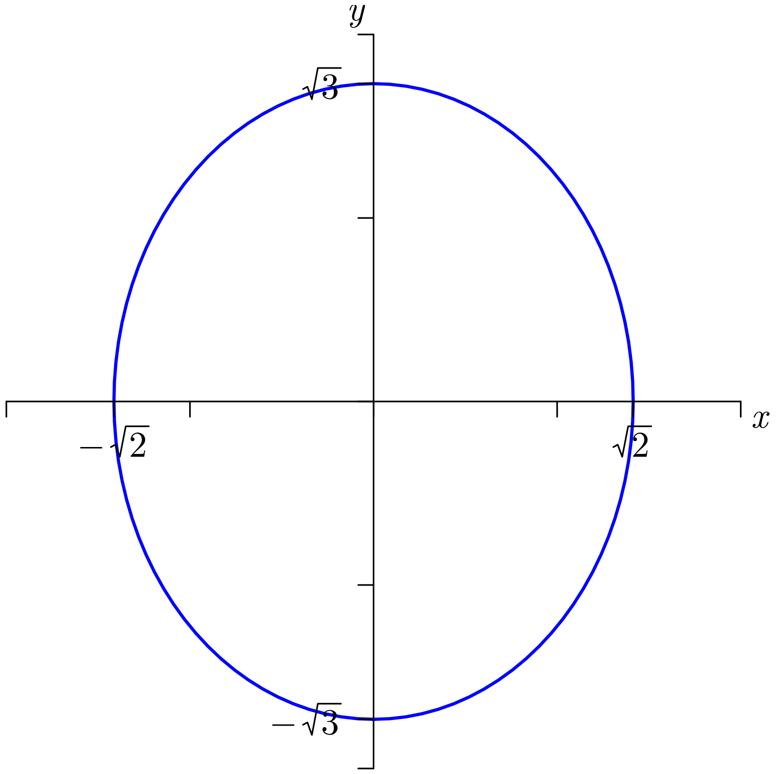
2. Represente geometricamente no plano o conjunto de pontos definido pela condição

$$6y^2 + 9x^2 - 18 = 0.$$

R: A equação dada é equivalente à equação

$$\frac{6}{18}y^2 + \frac{9}{18}x^2 = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{3}y^2 + \frac{1}{2}x^2 = 1 \Leftrightarrow \frac{x^2}{(\sqrt{2})^2} + \frac{y^2}{(\sqrt{3})^2} = 1,$$

que, graficamente, se representa pela elipse centrada em $(0,0)$ que passa pelos pontos $\big(0,\sqrt{3}\big)$, $\big(0,-\sqrt{3}\big)$, $\big(\sqrt{2},0\big)$ e $\big(-\sqrt{2},0\big)$, como na figura que a seguir se apresenta:



3. Considere, para $n \in \mathbb{N}$, a sucessão de termo geral

$$u_n = \frac{a^n}{2^{2n}}.$$

Indique, justificando, o conjunto dos valores reais de a para os quais a sucessão u_n é convergente.

R: Temos que

$$u_n = \frac{a^n}{2^{2n}} = \left(\frac{a}{2^2}\right)^n = \left(\frac{a}{4}\right)^n.$$

Sabemos que a sucessão cujo termo geral é da forma b^n é convergente apenas quando $-1 < b \leq 1$. Assim, para que u_n seja convergente temos de ter

$$-1 < \frac{a}{4} \leq 1 \Leftrightarrow -4 < a \leq 4.$$

Conclui-se, assim, que a sucessão u_n é convergente se, e só se, $-4 < a \leq 4$.

4. Considere a função real de variável real definida por

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x}, & \text{se } x > 0 \\ \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right), & \text{se } x \leq 0 \end{cases} .$$

(a) Calcule $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x)$.

R: Temos

$$\lim_{x \to +\infty} g(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{\sin x}{x} = 0,$$

dado que $\sin x$ é uma função limitada ($-1 \leq \sin x \leq 1, \forall x \in \mathbb{R}$) e a função $\frac{1}{x}$ converge para zero quando $x \to \infty$.

(b) Verifique se a função g é contínua em $x = 0$.

R: Em consequência da continuidade da função $\cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$ (note-se que esta é uma composição das funções contínuas, $\cos x$ e $x + \frac{\pi}{3}$) resulta que

$$\lim_{x \to 0^-} g(x) = \lim_{x \to 0^-} \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(0 + \frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} = g(0).$$

No entanto, no limite da função g à direita de zero temos

$$\lim_{x \to 0^+} g(x) = \lim_{x \to 0^+} \frac{\sin x}{x} = 1,$$

que é diferente do limite de g à esquerda de zero e de $g(0)$. Concluímos assim que a função g não é contínua em $x = 0$.

5. Considere a função real de variável real definida por

$$f(x) = x^4 - 8x^2 + 1.$$

(a) Estude os intervalos de monotonia e a existência de extremos da função f.

R: Sendo f uma função polinomial e, consequentemente, diferenciável, a monotonia de f depende do sinal da primeira derivada de f e os extremos da função, caso existam, serão zeros da função $f'(x)$. Ora,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(x^4 - 8x^2 + 1\right)' \\ &= 4x^3 - 16x \\ &= 4x\left(x^2 - 4\right) \\ &= 4x(x-2)(x+2). \end{aligned}$$

Representando o sinal da derivada de f e a monotonia de f num quadro obtemos:

Zeros de f'		-2		0		2	
Sinal de f'	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
Monotonia de f	$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$

Resumindo, a função f é decrescente, em sentido lato, no conjunto

$$(-\infty, -2] \cup [0, 2]$$

e é crescente, em sentido lato, no conjunto

$$[-2, 0] \cup [2, +\infty) .$$

Os valores -2 e 2 são minimizantes de f sendo as suas imagens dadas por

$$f(-2) = (-2)^4 - 8(-2)^2 + 1 = 16 - 8 \times 4 + 1 = 16 - 32 + 1 = -16 + 1 = -15$$

e

$$f(2) = 2^4 - 8 \times 2^2 + 1 = f(-2) = -15.$$

O valor -15 é assim um mínimo relativo (local) de f. Dado que

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty,$$

concluímos que -15 é também um máximo global de f. Por outro lado, o valor 0 é um maximizante de f sendo a sua imagem dada por

$$f(x) = 0^4 - 8 \times 0^2 + 1 = 1.$$

No entanto, como, recordamos,

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty,$$

o valor 1 é apenas um máximo relativo (local) de f.

(b) Estude o sentido da concavidade do gráfico da função f e determine, caso existam, os seus pontos de inflexão.

R: Para determinar o sentido da concavidade do gráfico da função de f necessitamos de conhecer o sinal da segunda derivada de f. Ora,

$$\begin{aligned}
f''(x) &= \left(x^4 - 8x^2 + 1\right)'' = \left(4x^3 - 16x\right)' \\
&= 12x^2 - 16 = 12\left(x^2 - \frac{16}{12}\right) \\
&= 12\left(x^2 - \frac{4}{3}\right) \\
&= 12\left(x - \frac{2}{\sqrt{3}}\right)\left(x + \frac{2}{\sqrt{3}}\right).
\end{aligned}$$

Representando o sinal da segunda derivada de f e os sentidos das concavidades de f num quadro obtemos:

Zeros de f''		$-\frac{2}{\sqrt{3}}$		$\frac{2}{\sqrt{3}}$	
Sinal de f''	$+$	0	$-$	0	$+$
Monotonia de f	$\smile$		$\frown$		$\smile$

A função f tem dois pontos de inflexão, $-\frac{2}{\sqrt{3}}$ e $\frac{2}{\sqrt{3}}$, tendo a concavidade voltada para cima no conjunto

$$\left(-\infty, -\frac{2}{\sqrt{3}}\right] \cup \left[\frac{2}{\sqrt{3}}, +\infty\right)$$

e a concavidade voltada para baixo no intervalo

$$\left[-\frac{2}{\sqrt{3}}, \frac{2}{\sqrt{3}}\right].$$

6. Considere A e B dois acontecimentos tais que $P(A) = 0.6$ e $P(A \cup B) = 0.8$. Determine $P(B)$ quando:

   (a) os acontecimentos A e B são disjuntos;

   R: Quando A e B são disjuntos temos que $A \cap B = \emptyset$ e, consequentemente, $P(A \cap B) = 0$. Ora,

$$\begin{aligned} P(A \cup B) &= P(A) + P(B) - P(A \cap B) \Leftrightarrow \\ 0.8 &= 0.6 + P(B) - 0 \Leftrightarrow \\ P(B) &= 0.8 - 0.6 = 0.2. \end{aligned}$$

   Conclui-se assim que $P(B) = 0.2$.

   (b) os acontecimentos A e B são independentes;

   R: Quando os acontecimentos A e B são independentes temos

$$P(A \cap B) = P(A)\,P(B).$$

   Ora,

$$\begin{aligned} P(A \cup B) &= P(A) + P(B) - P(A \cap B) \Leftrightarrow \\ P(A \cup B) &= P(A) + P(B) - P(A)\,P(B) \Leftrightarrow \\ 0.8 &= 0.6 + P(B) - 0.6 \times P(B) \Leftrightarrow \\ 0.2 &= P(B)(1 - 0.6) \Leftrightarrow \\ P(B) &= \frac{0.2}{0.4} = \frac{1}{2} = 0.5. \end{aligned}$$

   Conclui-se assim que $P(B) = 0.5$.

(c) $P(A|B) = 0.5$.

Como

$$P(A|B) = 0.5 \Leftrightarrow \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = 0.5 \Leftrightarrow P(A \cap B) = 0.5 \times P(B)$$

resulta que

$$\begin{aligned}
P(A \cup B) &= P(A) + P(B) - P(A \cap B) \Leftrightarrow \\
P(A \cup B) &= P(A) + P(B) - 0.5 \times P(B) \Leftrightarrow \\
0.8 &= 0.6 + P(B) - 0.5 \times P(B) \Leftrightarrow \\
0.2 &= P(B)(1 - 0.5) \Leftrightarrow \\
P(B) &= \frac{0.2}{0.5} = \frac{2}{5} = 0.4.
\end{aligned}$$

Conclui-se assim que $P(B) = 0.4$.

7. Complete a seguinte tabela de frequências referente ao número de irmãos dos estudantes de uma turma de uma determinada disciplina:

Número de irmãos	Frequência	Frequência acumulada	Frequência relativa	Frequência acumulada relativa
0		12		$\frac{2}{5}$
1	10			
2			$\frac{1}{6}$	
3				

Note-se que na primeira linha da tabela as frequências simples e acumuladas coincidem. Note-se ainda que tendo a primeira linha preenchida é possível encontrar a dimensão da amostra. De facto, se denotarmos por n a dimensão da amostra, por n_0 a frequência do valor 0 e por f_0 a frequência relativa do mesmo valor, temos

$$f_0 = \frac{n_0}{n} \Leftrightarrow n = \frac{n_0}{f_0} \Leftrightarrow n = \frac{12}{\frac{2}{5}} = \frac{12}{2} \times 5 = 6 \times 5 = 30.$$

Por outro lado, conhecendo a dimensão da amostra e a frequência relativa, é possível conhecer a frequência. Assim, para o valor 2 temos (usando uma notação semelhante à apresentada acima):

$$f_2 = \frac{n_2}{n} \Leftrightarrow n_2 = f_2 \times n = \frac{1}{6} \times 30 = 5.$$

A tabela completa é assim dada por:

Número de irmãos	Frequência	Frequência acumulada	Frequência relativa	Frequência acumulada relativa
0	12	12	$\frac{2}{5}$	$\frac{2}{5}$
1	10	22	$\frac{10}{30} = \frac{1}{3}$	$\frac{22}{30} = \frac{11}{15}$
2	5	27	$\frac{1}{6}$	$\frac{27}{30} = \frac{9}{10}$
3	3	30	$\frac{3}{30} = \frac{1}{10}$	$\frac{30}{30} = 1$
Total	30	-	1	-