Exercício 1

Seja $(u_n)_n$ uma sucessão definida por: $u_n = \frac{1-3n}{n+1}$

a)

Verifique se $-\frac{14}{5}$ é um dos termos de $(u_n)_n$

$$\frac{1-3n}{n+1} = -\frac{14}{5}$$

$$n = 19$$

$$u_{19} = -\frac{14}{5}$$

b)

Estude $(u_n)_n$ quanto à monotonia

$(u_{n+1}) - (u_n) < 0$ é monótona decrescente
$(u_{n+1}) - (u_n) > 0$ é monótona crescente

$$\left[\frac{n+1}{n+1}\right]\left[\frac{-3n-2}{n+2}\right] - \left[\frac{1-3n}{n+1}\right]\left[\frac{n+2}{n+2}\right]$$

$$\frac{-3n^2-3n-2n-2}{(n+1)(n+2)} - \frac{n+2-3n^2-6n}{(n+1)(n+2)}$$

$$\frac{-3n^2-3n-2n-2-n-2+3n^2+6n}{(n+1)(n+2)}$$

$$\frac{-4}{(n+1)(n+2)} < 0, \forall n \in \mathbb{N}$$

u_n é monótona decrescente

c)

$(u_n)_n$ é uma sucessão convergente? E limitada? Justifique.

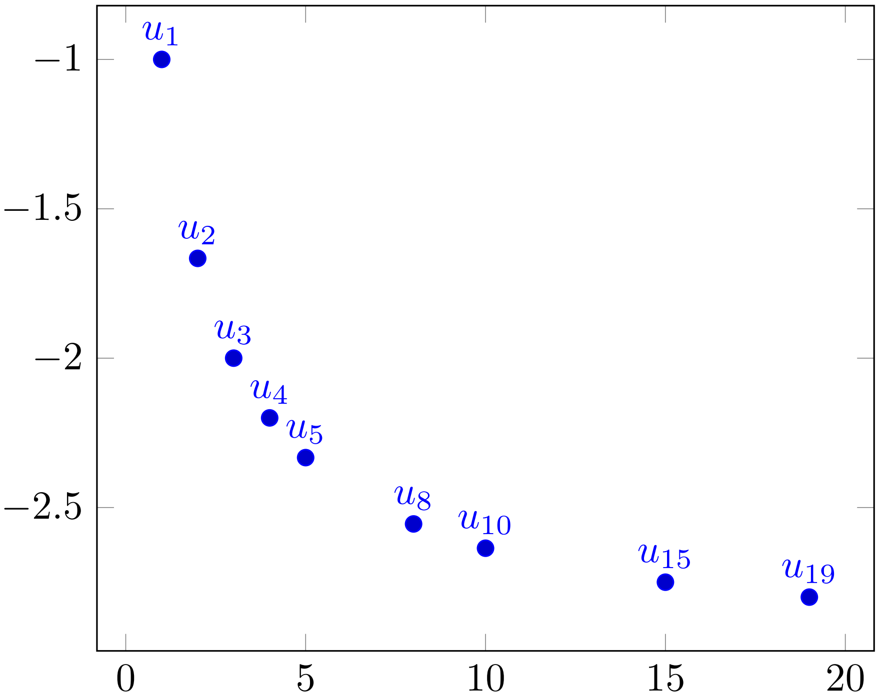
$$\lim_n \frac{1-3n}{n+1} = \lim_n \frac{\cancel{n}\left(\frac{1}{n}-3\right)}{\cancel{n}\left(1+\frac{1}{n}\right)} = \frac{\cancel{\frac{1}{n}}^{\,0} - 3}{1+\cancel{\frac{1}{n}}^{\,0}} = -3$$

$(u_n)_n$ é convergente pois tende para um número real. Toda a sucessão convergente é limitada.
Como $(u_n)_n$ é decrescente sabemos que:

$$\frac{1-3n}{n+1} = -3 + \frac{4}{n+1}$$

$$\frac{4}{n+1} > 0, \text{então qualquer termo será sempre superior a } -3$$

$$-3 < u_n < -1, \forall n \in \mathbb{N}$$

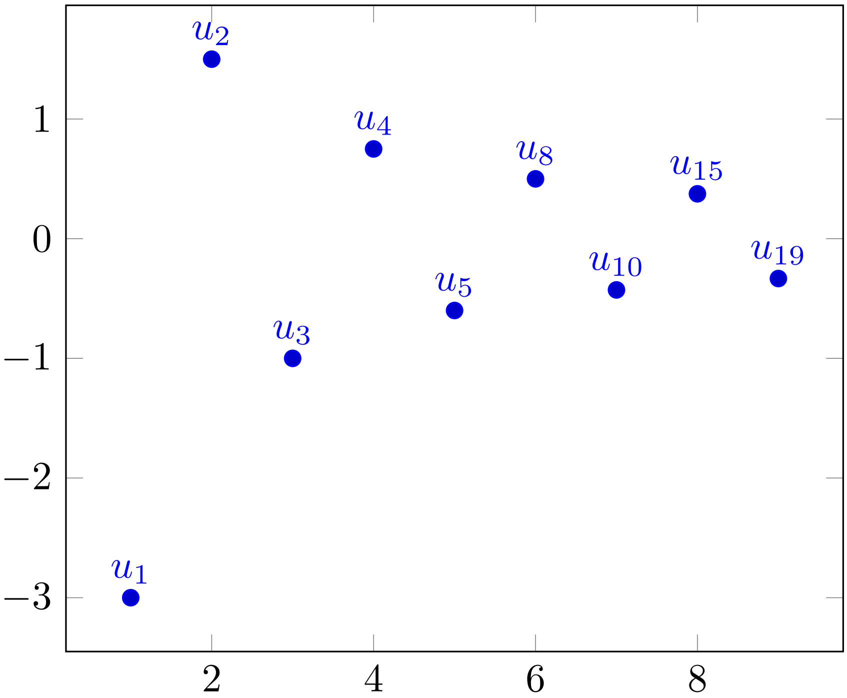


Exercício 2

Dê um exemplo concreto de uma sucessão $(a_n)_n$, que verifique em simultâneo as seguintes afirmações:

- $(a_n)_n$ é uma sucessão limitada e não monótona
- $\lim_n (3a_n) = 0$
  Justifique a sua resposta.

$$a_n = \frac{3\,(-1)^n}{n}$$



Exercício 3

a)

$$\lim_n \left(\frac{-7n^3 - 5n^2 + n}{3\sqrt{n^2+1}} \right) \overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}$$

$$\lim_n \left(\frac{n^{\cancel{3}\left(-7-\cancelto{0}{\frac{5}{n}}+\cancelto{0}{\frac{1}{n^2}}\right)^0}}{3\cancel{n}\sqrt{1+\cancelto{0}{\frac{1}{n^2}}}} \right)$$

$$= \frac{+\infty\,(-7)}{3} = -\infty$$

b)

$$\lim_n \left(\sqrt{2n-3} - \sqrt{2n+5}\right) \overset{\infty-\infty}{=}$$

$$\lim_n \left(\frac{\left(\sqrt{2n-3} - \sqrt{2n+5}\right)\left(\sqrt{2n-3} + \sqrt{2n+5}\right)}{\left(\sqrt{2n-3} + \sqrt{2n+5}\right)} \right)$$

$$\lim_n \frac{-8}{\sqrt{2n-3} + \sqrt{2n+5}} = \frac{-8}{+\infty} = 0$$

c)

$$\lim_n \left(\frac{n-2}{n+1}\right)^{n+3} \overset{1^\infty}{=}$$

$$\lim_n \left(\frac{\cancel{n}\left(1-\frac{2}{n}\right)}{\cancel{n}\left(1+\frac{1}{n}\right)}\right)^n \cdot \lim_n \left(\frac{\cancel{n}\left(1-\frac{2}{n}\right)}{\cancel{n}\left(1+\frac{1}{n}\right)}\right)^3$$

$$\frac{\lim_n \left(1-\cancelto{0}{\frac{2}{n}}\right)^n}{\lim_n \left(1+\cancelto{0}{\frac{1}{n}}\right)^n} \cdot \lim_n \left(\frac{1-\cancelto{0}{\frac{2}{n}}}{1+\cancelto{0}{\frac{1}{n}}}\right)^3 = \frac{e^-2}{e} \cdot 1^3 = e^{-3}$$

d)

$$\lim_n \left(n^2 - (-2)^n\, n\right) = +\infty$$

$$\begin{cases} \text{Para n par: } \lim_n \left(n^2 - n\right) \overset{\infty-\infty}{=} \lim_n \left(n^2\left(1-\cancelto{0}{\frac{1}{n}}\right)\right) = +\infty \\ \text{Para n ímpar: } \lim_n \left(n^2 + n\right) = +\infty \end{cases}$$

Exercício 4

a)

Considere a função real de variável real definida por $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2x+4}}$

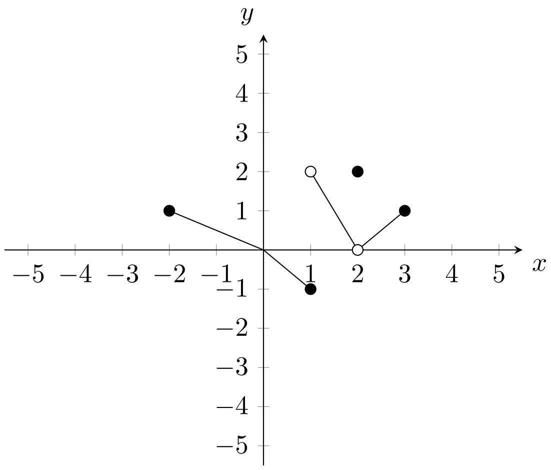
$$D_f = \{x \in \mathbb{R} : 2x+4 > 0\} =]-2, +\infty[$$

b)

Averigue se o ponto de coordenadas $\left(16, \frac{1}{6}\right)$ **pertence ao gráfico de** f .

$$f\,(16) = \frac{1}{\sqrt{2\,(16)+4}} = \frac{1}{6} = \frac{1}{6}$$

Logo $\left(16, \frac{1}{6}\right)$ pertence a f



$$D_g = [-2, 3]$$

$$D'_g = [-1, 2]$$