1.

1.1. Tem-se que $\cos\alpha = \frac{\overline{OG}}{\overline{GB}}$. Como o raio da superfície esférica é 3, tem-se $\overline{GB} = 6$. A área da base do prisma é 16, pelo que o lado do quadrado da base é 4. Logo $B(4,4,0)$.

Como $G(0,0,z_G)$, tem-se:

$\sqrt{4^2+4^2+(-z_G)^2} = 6 \Leftrightarrow 16+16+z_G^2 = 36 \Leftrightarrow z_G^2 = 4 \overset{z_G>0}{\Leftrightarrow} z_G = 2.$

Logo, $\overline{OG} = 2$ e tem-se $\cos\alpha = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$.

Resposta: (A)

1.2. Seja $M(2,2,1)$ o centro da superfície esférica $\mathcal{S}$, e $P(x,y,z)$ um ponto genérico do plano tangente a $\mathcal{S}$ no ponto C. Tem-se que $\overrightarrow{CP}\cdot\overrightarrow{CM} = 0$, em que $\overrightarrow{CP} = P-C = (x,y-4,z)$ e $\overrightarrow{CM} = M-C = (2,2,1)-(0,4,0) = (2,-2,1)$.

$\overrightarrow{CP}\cdot\overrightarrow{CM} = 0 \Leftrightarrow (x,y-4,z)\cdot(2,-2,1) = 0 \Leftrightarrow 2x-2y+8+z = 0 \Leftrightarrow 2x-2y+z+8 = 0$

A equação do plano tangente a $\mathcal{S}$ no ponto C é $2x-2y+z+8 = 0$.

2. Seja r a razão da progressão geométrica (u_n). O termo geral de (u_n) é $u_n = u_1 \times r^{n-1}$. Tem-se que:

$$2u_3+2u_1 = 5u_2 \Leftrightarrow 2u_1r^2+2u_1 = 5u_1r \Leftrightarrow 2u_1\left(r^2-\frac{5}{2}r+1\right) = 0 \Leftrightarrow u_1 = 0 \vee \left(r-\frac{1}{2}\right)(r-2) = 0$$
$$\overset{(1)}{\Leftrightarrow} r = \frac{1}{2} \vee r = 2 \overset{(2)}{\Leftrightarrow} r = \frac{1}{2}$$

em que se usou o facto de (u_n) ser uma sucessão de termos positivos em (1). Em (2) usou-se o seguinte raciocínio: como (u_n) é uma progressão geométrica de termos positivos, então de modo a que seja decrescente tem de se verificar que a sua razão é positiva e menor que 1, isto é, $0 < r < 1$.

Seja (S_n) a sucessão cujos termos correspondem à soma dos primeiros n termos. Desta forma, $u_3+u_4+\cdots+u_{10} = S_{10}-S_2 = 510$, vindo que:

$$S_{10}-S_2 = 510 \Leftrightarrow u_1\times\frac{1-r^{10}}{1-r} - u_1\times\frac{1-r^2}{1-r} = 510 \overset{r=1/2}{\Leftrightarrow} u_1\times\frac{1-(1/2)^{10}}{1-1/2} - u_1\times\frac{1-(1/2)^2}{1-1/2} = 510$$
$$\Leftrightarrow 2u_1\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{1024}\right) = 510 \Leftrightarrow \frac{255u_1}{512} = 510 \Leftrightarrow u_1 = 1024.$$

Desta forma $u_n = 1024\times\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = 2048\times\left(\frac{1}{2}\right)^n$.

3. Quando (v_n) é uma sucessão de termos negativos decrescente, tem-se que (v_n) não é necessariamente uma sucessão limitada (será apenas limitada no caso de ser convergente). Logo, **(I)** é falsa.

Se (v_n) é crescente e é uma sucessão de termos negativos, conclui-se que (v_n) é limitada inferiormente pelo seu primeiro termo e superiormente por 0. Desta forma, (v_n) é monótona e limitada, logo convergente. Logo, **(II)** é verdadeira.

Resposta: (C)

4. Consideremos os dois elevadores (designados por A e B). Reparemos que, escolhendo as pessoas para o elevador A, ficam também automaticamente selecionadas as pessoas para o elevador B. Logo, podemos focar-nos primeiramente em distribuir as pessoas no elevador A.

De seguida determinemos as configurações possíveis para o elevador A considerando que o Bruno e o Alexandre têm de ir neste elevador:

- 5 pessoas no elevador A: ${}^4C_3 = 4$
- 4 pessoas no elevador A: ${}^4C_2 = 6$
- 3 pessoas no elevador A: ${}^4C_1 = 4$
- 2 pessoas no elevador A: ${}^4C_0 = 1$

Este número de configurações deve ser complicado para ter em consideração que também são válidas para o elevador B. Logo, tem-se que o número pedido é $2 \times (4+6+4+1) = 30$.

5. A chave correta tem 4 opções A, 2 opções B, 2 opções C e 2 opções D. A opção A é a opção correta em questões consecutivas. Existem 7 configurações de quatro questões consecutivas, pelo que a opção A deverá ser a resposta para cada uma das questões numa destas configurações.

Restarão, portanto, 6 perguntas para as quais a resposta é B, C ou D, vindo: ${}^6C_2 \times {}^4C_2 \times {}^2C_2 = 15 \times 6 = 90$.

Logo, existem $7 \times 90 = 630$ chaves nas condições enunciadas pelo professor. Destas, uma só é a chave correta. Logo, a probabilidade da chave do Miguel ser a chave correta é $p = \dfrac{1}{630}$.

6. Seja A o acontecimento "o artista musical é oriundo de Nova Iorque", e B o acontecimento "o artista musical é do género Jazz". Desta forma, tem-se $P(A) = \dfrac{60}{90} = \dfrac{2}{3}$, $P(A|B) = \dfrac{4}{5}$ e $P(A \cap \overline{B}) = 0$. Tem-se:

$P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap \overline{B}) \Leftrightarrow \dfrac{2}{3} = P(A|B)P(B) + 0 \Leftrightarrow \dfrac{2}{3} = \dfrac{4}{5}P(B) \Leftrightarrow P(B) = \dfrac{5}{6}$.

Logo, o Afonso ouviu $\dfrac{5}{6} \times 90 = 75$ artistas de Jazz durante esse mês.

Resposta: (B)

7. Como $i^{43} = i^{40} \times i^3 = 1 \times (-i) = -i$, vem que $z_2 = -3i$. Logo $\overline{z_2} = 3i$, e portanto $z_1 - \overline{z_2} = -1 + 2i - 3i = -1 - i$.

Portanto $(z_1 - \overline{z_2})^6 = (-1-i)^6 = (1+i)^6 = \left[(1+i)^2\right]^3 = \left(1 + 2i + i^2\right)^3 = (2i)^3 = 8i^3 = -8i = 8e^{-i\frac{\pi}{2}}$.

Desta forma $w = \dfrac{(z_1 - \overline{z_2})^6}{\cos\beta - i \operatorname{sen}\beta} = \dfrac{8e^{-i\frac{\pi}{2}}}{\cos(-\beta) + i\operatorname{sen}(-\beta)} = \dfrac{8e^{-i\frac{\pi}{2}}}{e^{-i\beta}} = 8e^{i\left(-\frac{\pi}{2}+\beta\right)}$. Como $\operatorname{Re}(w) + \operatorname{Im}(w) = 0$, tem-se que o afixo de w pertence à bissetriz dos quadrantes pares, isto é, $\arg(w) = -\dfrac{\pi}{4} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

Logo $-\dfrac{\pi}{2} + \beta \Leftrightarrow -\dfrac{\pi}{4} + \pi k \Leftrightarrow \beta = \dfrac{\pi}{4} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, e portanto, para $k = 0$ tem-se $\beta = -\dfrac{3\pi}{4}$.

8. Como $[OABC]$ é um paralelogramo tem-se $z_C = z_A + z_B$. O número complexo z_A tem argumento θ e pertence à circunferência de raio ρ. Como o segmento $[AB]$ é um lado de um pentágono regular centrado na origem, tem-se que o argumento de z_B é $\theta + \dfrac{2\pi}{5}$ e o módulo é ρ. Vindo então que:

$z_C = \rho e^{i\theta} + \rho e^{i\left(\theta + \frac{2\pi}{5}\right)} = \rho\left[\cos\theta + \cos\left(\theta + \dfrac{2\pi}{5}\right) + i\left(\operatorname{sen}\theta + \operatorname{sen}\left(\theta + \dfrac{2\pi}{5}\right)\right)\right]$. Como o afixo de z_C pertence ao eixo imaginário, tem-se $\operatorname{Re}(z_C) = 0$, logo $\cos\theta + \cos\left(\theta + \dfrac{2\pi}{5}\right) = 0$. Das opções dadas, apenas a opção $\theta = \dfrac{3\pi}{10}$ verifica a condição.

Resposta: (B)

9. As soluções da inequação deverão pertencer ao intervalo D em que o logaritmo $\log_2(4^x - 3)$ tem significado: $D = \{x \in \mathbb{R} : 4^x - 3 > 0\} =]\log_4 3, +\infty[$. Tem-se:

$$\frac{\log_2(4^x - 3) - 1}{x} \le 1 \overset{(1)}{\Leftrightarrow} \log_2(4^x - 3) - 1 \le x \Leftrightarrow \log_2(4^x - 3) \le x + 1 \Leftrightarrow 4^x - 3 \le 2^{x+1}$$

$$\Leftrightarrow 2^{2x} - 2 \cdot 2^x - 3 \le 0 \Leftrightarrow (2^x - 3)(2^x + 1) \le 0 \overset{(2)}{\Leftrightarrow} 2^x - 3 \le 0 \Leftrightarrow x \le \log_2 3$$

em que se usou o facto de $x > 0, \forall x \in D$ em (1). Em (2), usou-se o facto de $2^x + 1 > 0, \forall x \in D$. O conjunto-solução resulta de intersetar a condição obtida com D, vindo: $]\log_4 3, +\infty[\cap]-\infty, \log_2 3] =]\log_4 3, \log_2 3]$.

10.

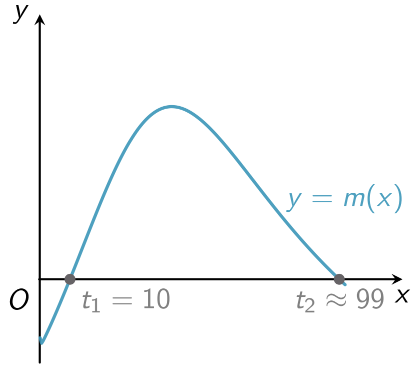
10.1. Pretende-se mostrar que $\exists c \in]0{,}12[: \ n(c) = 2n(0)$, em que $n(0) = \dfrac{450}{1+2^{3-0{,}1\times 0}} = \dfrac{450}{1+2^3} = \dfrac{450}{9} = 50$.
Mostremos que a equação $n(c) = 100$ tem solução em $]0{,}12[$. A função n é contínua em $[0{,}12]$ pois resulta do quociente de duas funções contínuas (constante, e a soma de uma constante e uma função exponencial).
Como $n(12) = \dfrac{450}{1+2^{3-0{,}1\times 12}} \approx 100{,}40$, tem-se que $n(0) < 100 < n(12)$.
Logo, como n é contínua em $[0{,}12]$ e $n(0) < 100 < n(12)$ fica provado, pelo Teorema de Bolzano-Cauchy, que existiu um instante nos primeiros doze dias da infeção em que o número de plantas infetadas foi o dobro do número de plantas infetadas no momento em que o químico foi detetado.

10.2. Uma vez que o aumento médio de plantas infetadas desde o momento em que o químico foi detetado até o instante t era de 4 plantas por dia, tem-se que a taxa média de variação de n em $[0,t]$ é 4.

Tem-se então que $\dfrac{n(t)-n(0)}{t-0} = 4 \Leftrightarrow \dfrac{\dfrac{450}{1+2^{3-0{,}1t}} - 50}{t} - 4 = 0$.

Recorrendo às capacidades gráficas da calculadora pode ser resolvida a equação $m(x) = 0$. Para tal, esboçemos a curva $m(x) = \dfrac{\dfrac{450}{1+2^{3-0{,}1x}} - 50}{x} - 4$ e averiguemos quais os seus zeros.

Conclui-se então que existem dois pontos que são soluções dessa equação. A abcissas desse mesmos pontos correspondem aos instantes t_1 e t_2: $t_1 = 10$ e $t_2 \approx 99$.



11. A função f é contínua em $\mathbb{R}^-$ pois resulta do quociente de duas funções contínuas (função exponencial e função afim) neste intervalo. Em $]1, +\infty[$, a função f também é o quociente de duas funções contínuas (função irracional e função quadrática). Desta forma, a existirem assíntotas verticais ao gráfico de f, essas terão equação $x = 0$ ou $x = 1$. Para tal determinem-se os limites $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$ e $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$.

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{\sqrt{e^x}-1}{x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{e^{x/2}-1}{x} = \frac{1}{2}\lim_{\frac{x}{2}\to 0^-} \frac{e^{x/2}-1}{x/2} \overset{(1)}{=} \frac{1}{2}\times 1 = \frac{1}{2}$$

em que se usou o limite notável $\lim\limits_{u\to 0} \dfrac{e^u - 1}{u} = 1$ em (1). Desta forma, conclui-se que $x = 0$ não é assíntota vertical ao gráfico de f.

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} \frac{\sqrt{x+3}-2}{(x-1)^2} = \lim_{x\to 1^+} \frac{\left(\sqrt{x+3}-2\right)\left(\sqrt{x+3}+2\right)}{(x-1)^2\left(\sqrt{x+3}+2\right)} = \lim_{x\to 1^+} \frac{\left(\sqrt{x+3}\right)^2 - 2^2}{(x-1)^2} \times \lim_{x\to 1^+} \frac{1}{\sqrt{x+3}+2}$$
$$= \lim_{x\to 1^+} \frac{x-1}{(x-1)^2} \times \frac{1}{\sqrt{4}+2} = \lim_{x\to 1^+} \frac{1}{x-1} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{4} \times \frac{1}{1^+ - 1} = \frac{1}{4} \times \frac{1}{0^+} = \frac{1}{4} \times (+\infty) = +\infty$$

de onde se conclui que $x = 1$ é assíntota vertical ao gráfico de f.

12. Como o segmento $[OB]$ pertence à bissetriz do ângulo COA tem-se que $C\hat{O}B = C\hat{O}A/2 = \dfrac{\alpha}{2}$. Desta forma, as coordenadas de B são $\left(\cos\left(\dfrac{\alpha}{2}\right), \operatorname{sen}\left(\dfrac{\alpha}{2}\right)\right)$. Uma vez que a abcissa de B é $\dfrac{3}{4}$ tem-se que $\cos\left(\dfrac{\alpha}{2}\right) = \dfrac{3}{4}$.

Como o ponto A tem coordenadas $(1, \operatorname{tg}\alpha)$, tem-se que $\overline{OA} = \sqrt{1^2 + \operatorname{tg}^2\alpha} = \sqrt{\dfrac{1}{\cos^2\alpha}} = \dfrac{1}{|\cos\alpha|} \overset{(1)}{=} \dfrac{1}{\cos\alpha}$, em que se usou o facto de $\cos\alpha > 0, \forall \alpha \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$.

Note-se que $\cos\alpha = \cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) - \text{sen}^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) - \left(1 - \cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right) = 2\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) - 1 = 2\left(\frac{3}{4}\right)^2 - 1 = \frac{1}{8}$.

Conclui-se, portanto, que $\overline{OA} = \frac{1}{1/8} = 8$.

13.

13.1. Como o gráfico de g passa pela origem do referencial tem-se que $g(0) = 0$, e portanto $\frac{x}{g(x)} = \frac{x-0}{g(x)-g(0)} = \frac{1}{\frac{g(x)-g(0)}{x-0}}$. Tem-se então:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x}{g(x)} = \frac{1}{\lim\limits_{x\to 0}\frac{g(x)-g(0)}{x-0}} = \frac{1}{g'(0)} = \frac{1}{(0+1)\,\text{sen}\,0 + (1-0)\cos 0} = \frac{1}{1\times 0 + 1\times 0} = \frac{1}{1} = 1.$$

13.2. A segunda derivada de g, g'', é dada por:

$$\begin{aligned} g''(x) &= ((x+1)\,\text{sen}\,x + (1-x)\cos x)' = (x+1)'\,\text{sen}\,x + (x+1)(\text{sen}\,x)' + (1-x)'\cos x + (1-x)(\cos x)' \\ &= \text{sen}\,x + (x+1)\cos x - \cos x - (1-x)\,\text{sen}\,x = x(\cos x + \text{sen}\,x) \end{aligned}$$

pelo que, em $\mathbb{R}$, os zeros de g'' são:

$$\begin{aligned} g''(x) = 0 &\Leftrightarrow x = 0 \vee \cos x + \text{sen}\,x = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee \cos x = -\text{sen}\,x \Leftrightarrow x = 0 \vee \cos x = \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) \\ &\Leftrightarrow x = 0 \vee \underbrace{x = \frac{\pi}{2} + x + 2\pi k}_{\text{Eq. Impossível}} \vee x = -\frac{\pi}{2} - x + 2\pi k,\ k\in\mathbb{Z} \Leftrightarrow x = 0 \vee x = -\frac{\pi}{4} + \pi k,\ k\in\mathbb{Z} \end{aligned}$$

Logo, em $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, as soluções da equação acima são $x = -\frac{\pi}{4}$ e $x = 0$.
Através de uma tabela de sinal tem-se:

x	$-\frac{\pi}{2}$		$-\frac{\pi}{4}$		0		$\frac{\pi}{2}$
$g''(x)$	ND	$+$	0	$-$	0	$+$	ND
$g(x)$	ND	$\cup$	**p.i**	$\cap$	**p.i**	$\cup$	ND

Conclui-se então que:

- o gráfico de g tem concavidade voltada para cima em $\left]-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{4}\right]$ e em $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$;
- o gráfico de g tem concavidade voltada para baixo em $\left[-\frac{\pi}{4}, 0\right]$;
- o gráfico de g admite dois pontos de inflexão nos pontos de abcissa $x = -\frac{\pi}{4}$ e $x = 0$.

14. A reta tangente ao gráfico de h no ponto de abcissa 1 (designaremos por r) é perpendicular à reta de equação $y = -\frac{1}{2}x - 5$ (designe-se por t), logo o seu declive, m_r, é dado por $m_r = -\frac{1}{-1/2} = 2$. Mais ainda, a reta r interseta a reta t no ponto de ordenada -4. Determinemos a abcissa desse ponto: $4 = -\frac{1}{2}x - 5 \Leftrightarrow x = -2$. Isto é, o ponto de coordenadas $(-2, -4)$ pertence à reta r de equação $y = 2x + b$, vindo $-4 = 2\times(-2) + b \Leftrightarrow b = 0$. Uma vez que a reta tangente ao gráfico de h no ponto de abcissa 1 tem equação $y = 2x$, tem-se que $h'(1) = 2$ e $h(1) = 2$. Uma vez que $h'(x) = (e^{ax} + b\ln x)' = ae^{ax} + \frac{b}{x}$ tem-se:

$$\begin{cases} h(1) = 2 \\ h'(1) = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} e^{a\times 1} + b\ln 1 = 2 \\ ae^{a\times 1} + \frac{b}{1} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} e^a = 2 \\ ae^a + b = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \ln 2 \\ 2\ln 2 + b = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \ln 2 \\ b = 2 - 2\ln 2 \end{cases}$$

De onde vem que $a - b = \ln 2 - (2 - 2\ln 2) = 3\ln 2 - 2 = \ln 8 - \ln e^2 = \ln\left(\frac{8}{e^2}\right)$.

15. Tem-se que:

$$\lim_{x\to+\infty}\left[x\,\text{sen}\left(e^{-x}\right)\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[x\,\text{sen}\left(\frac{1}{e^x}\right)\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[x\times\frac{\text{sen}\left(\frac{1}{e^x}\right)}{\frac{1}{e^x}}\times\frac{1}{e^x}\right]=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{e^x}\times\lim_{x\to+\infty}\frac{\text{sen}\left(\frac{1}{e^x}\right)}{\frac{1}{e^x}}$$

tem-se que:

- $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{e^x}=\frac{1}{\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x}}\overset{(1)}{=}\frac{1}{+\infty}=0$, em que se usou o limite notável $\displaystyle\lim_{u\to+\infty}\frac{e^u}{u^p}=+\infty$, $p\in\mathbb{R}$ em **(1)**;
- $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{\text{sen}\left(\frac{1}{e^x}\right)}{\frac{1}{e^x}}\overset{(2)}{=}\lim_{y\to0^+}\frac{\text{sen}\,y}{y}\overset{(3)}{=}1$, em que se usou a mudança de variável $y=\dfrac{1}{e^x}$ tal que $x\to+\infty\Rightarrow y\to0^+$ em **(2)**. Em **(3)**, usou-se o limite notável $\displaystyle\lim_{u\to0}\frac{\text{sen}\,u}{u}=1$.

Desta forma, conclui-se que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left[x\,\text{sen}\left(e^{-x}\right)\right]=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{e^x}\times\lim_{x\to+\infty}\frac{\text{sen}\left(\frac{1}{e^x}\right)}{\frac{1}{e^x}}=0\times1=0$.

FIM