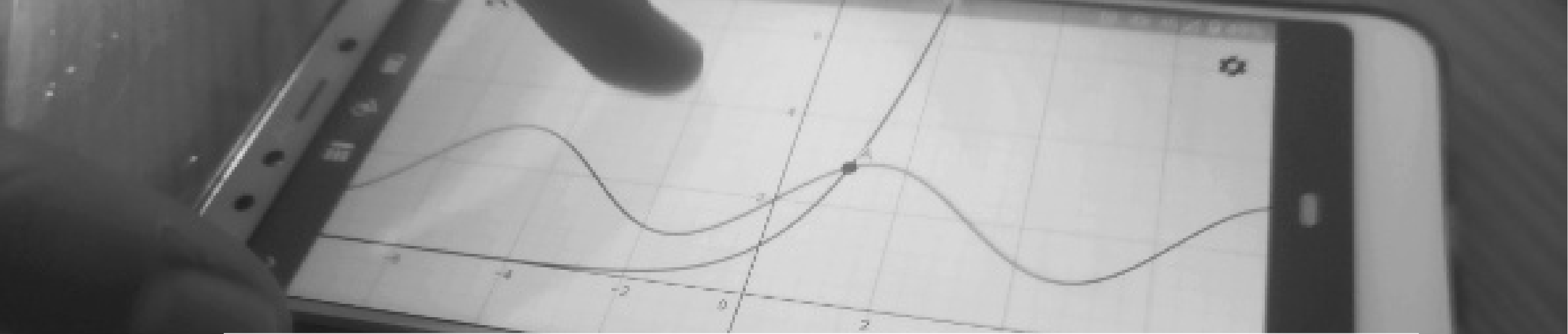


Funções trigonométricas (resolução gráfica)

Exercícios de Provas Nacionais e Testes Intermédios - Propostas de resolução

1.

1.1. Como quando o movimento de rotação da manivela se inicia, o pistão se encontra na posição B, a distância do pistão ao ponto O, zero segundos, após o instante em que é iniciado o movimento, é dada por:

$$\overline{OP} = \overline{OB} = d(0)$$

Assim, o comprimento da biela, em centímetros, é:

$$\overline{OB} - \overline{OM} = d(0) - 1 = \cos(0) + \sqrt{9 - \operatorname{sen}^2(0)} - 1 = 1 + \sqrt{9-0} - 1 = 3$$

Resposta: **Opção B**

1.2. Temos que no instante t_0, a distância do pistão ao ponto O é $d(t_0)$ e passados 2 segundos, a distância é dada por $d(t_0+2)$

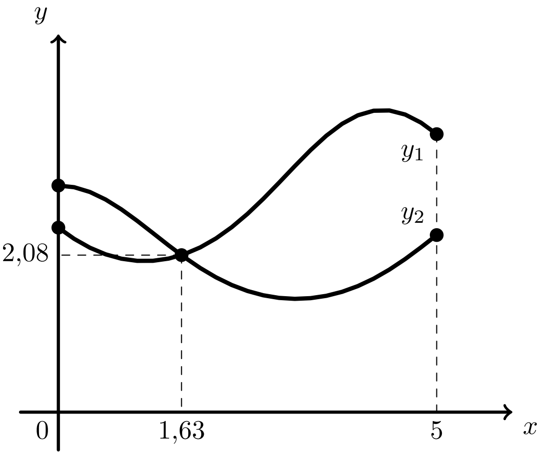
Como nestes dois segundos a distância diminuiu 25%, ficou reduzida a 75% do valor anterior, ou seja:

$$d(t_0+2) = 0{,}75d(t_0)$$

Desta forma simplificando a equação temos:

$$d(t_0+2) = 0{,}75d(t_0) \Leftrightarrow \cos(t_0+2) + \sqrt{9 - \operatorname{sen}^2(t_0+2)} = 0{,}75\big(\cos(t_0) + \sqrt{9 - \operatorname{sen}^2(t_0)}\big)$$

Visualizando na calculadora gráfica os gráficos das funções $y_1 = \cos(x+2) + \sqrt{9 - \operatorname{sen}^2(x+2)}$, e $y_2 = 0{,}75\big(\cos(x) + \sqrt{9 - \operatorname{sen}^2(x)}\big)$, para $0 \leq x \leq 5$ (porque a situação descrita se reporta aos primeiros 5 segundos do movimento), reproduzidos na figura ao lado, e usando a função da calculadora para determinar valores aproximados das coordenadas do ponto de interseção de dois gráficos, obtemos o valor aproximado com duas casas decimais das coordenadas do ponto de interseção $(1{,}63; 2{,}08)$



Assim, temos que $t_0 \approx 1{,}63$ e que a distância correspondente, arredondada às décimas, é:

$$d(1{,}63) \approx \cos(1{,}63) + \sqrt{9 - \operatorname{sen}^2(1{,}63)} \approx 2{,}8 \text{ cm}$$

Exame – 2020, 2.ª Fase

2. No primeiro instante considerado a amplitude do ângulo ASM é α, e a distância de Mercúrio ao Sol é $d(\alpha) = \dfrac{555}{10 - 2{,}06\cos\alpha}$

   Relativamente ao segundo instante considerado, a amplitude do ângulo ASM é três vezes maior, ou seja, 3α, e a distância respetiva é $d(3\alpha) = \dfrac{555}{10 - 2{,}06\cos(3\alpha)}$

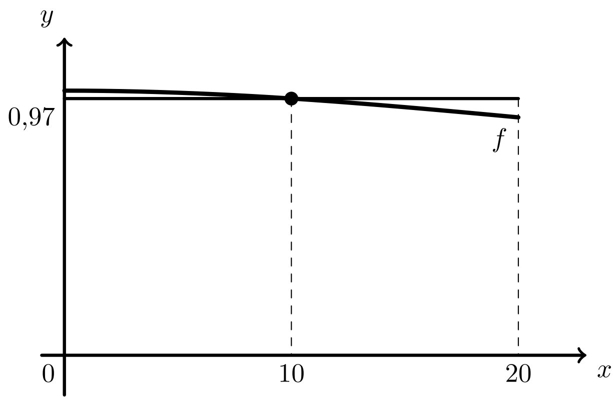
   Ainda relativamente ao segundo instante considerado, como a distância do planeta Mercúrio ao Sol diminuiu 3%, é igual a 97% da distância anterior, ou seja:

$$d(3\alpha) = 0{,}97 \times d(\alpha) \Leftrightarrow \frac{555}{10 - 2{,}06\cos(3\alpha)} = 0{,}97 \times \frac{555}{10 - 2{,}06\cos\alpha} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{10 - 2{,}06\cos\alpha}{10 - 2{,}06\cos(3\alpha)} = 0{,}97 \times \frac{555}{555} \Leftrightarrow \frac{10 - 2{,}06\cos\alpha}{10 - 2{,}06\cos(3\alpha)} = 0{,}97$$

   Visualizando na calculadora gráfica o gráfico da função $f(x) = \dfrac{10 - 2{,}06\cos x}{10 - 2{,}06\cos(3x)}$, e a reta horizontal de equação $y = 0{,}97$, para $0 < x < 20$ (porque α está compreendido entre 0 e 20 graus), reproduzido na figura ao lado, e usando a função da calculadora para determinar valores aproximados das coordenadas do ponto de interseção de dois gráficos, obtemos o valor aproximado (às unidades) da abcissa do ponto de interseção, ou seja:

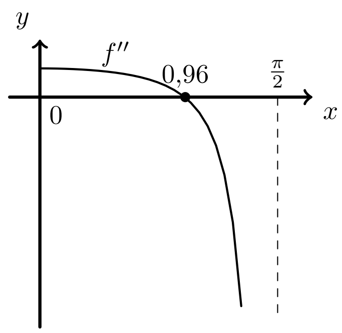
$$\alpha \approx 10^\circ$$



Exame – 2018, 2.ª Fase

3. Como a abcissa do ponto de inflexão é o zero da segunda derivada da função, começamos por determinar a expressão da segunda derivada:

$$f''(x) = (f'(x))' = (3x - \operatorname{tg} x)' = (3x)' - (\operatorname{tg} x)' = 3 - \frac{(x)'}{\cos^2 x} = 3 - \frac{1}{\cos^2 x}$$



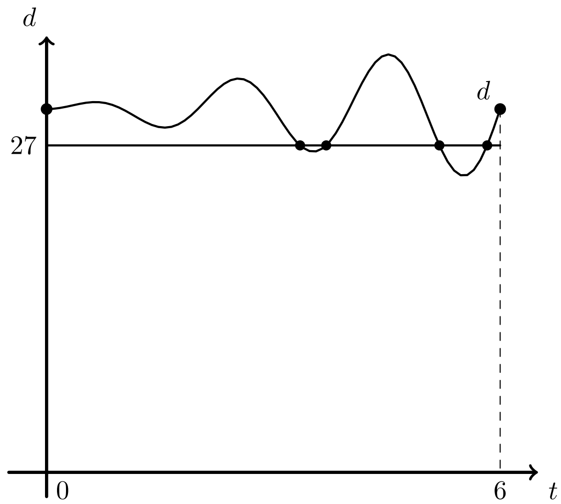
Representando na calculadora gráfica o gráfico da função f'', para valores de $x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, (reproduzido na figura ao lado) e usando a função da calculadora para determinar valores aproximados dos zeros de uma função determinamos o valor (aproximado às centésimas) do zero da função f''

Assim, temos que a abcissa do ponto de inflexão do gráfico da função f, aproximado às centésimas, é 0,96

Resposta: **Opção D**

Exame – 2018, 2.ª Fase

4. Representando na calculadora gráfica o gráfico da função d, para valores de $t \in [0,6]$, ou seja, para $t \leq 12$ e a reta de equação $d = 27$, (reproduzido na figura ao lado) podemos observar que a reta interseta o gráfico da função neste intervalo em 4 pontos, pelo que o número de soluções da equação $d = 27$, no intervalo $[0,6]$ é 4



No contexto da situação descrita, a existência de 4 soluções no intervalo $[0,6]$, significa que a criança esteve a uma distância de 27 decímetros do muro, por quatro vezes, nos primeiros seis segundos.

Exame – 2017, 2.ª Fase

5. Para calcular o declive da reta tangente, no ponto de abcissa $\frac{1}{2}$ começamos por determinar a expressão da derivada da função, para $x > 0$:

$$f'(x) = \big(x - \ln x\big)' = (x)' - \big(\ln x\big)' = 1 - \frac{(x)'}{x} = 1 - \frac{1}{x}$$

Assim, temos que o declive da reta tangente no ponto de abcissa $\frac{1}{2}$ é:

$$m = f'\left(\frac{1}{2}\right) = 1 - \frac{1}{\frac{1}{2}} = 1 - 2 = -1$$

Logo a equação da reta tangente é da forma $y = -x + b$

Como $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} - \ln\frac{1}{2} = \frac{1}{2} - (\ln 1 - \ln 2) = \frac{1}{2} - (0 - \ln 2) = \frac{1}{2} + \ln 2$, sabemos que o ponto $P\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} + \ln 2\right)$ pertence ao gráfico da função e também à reta tangente.

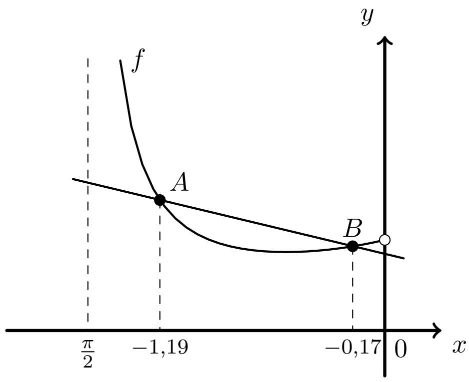
Assim, substituindo as coordenadas do ponto de tangência na equação da reta, podemos calcular o valor de b:

$$\frac{1}{2} + \ln 2 = -\frac{1}{2} + b \Leftrightarrow \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \ln 2 = b \Leftrightarrow 1 + \ln 2 = b$$

Pelo que a equação da reta tangente é: $y = -x + 1 + \ln 2$

Como as abcissas dos pontos A e B pertencem ao intervalo $\left]-\frac{\pi}{2}, 0\right[$, representando na calculadora gráfica o gráfico da função f e a reta tangente ao gráfico em $x = \frac{1}{2}$, numa janela coerente com o intervalo $\left]-\frac{\pi}{2}, 0\right[$, (reproduzido na figura ao lado) e determinando a interseção das duas, obtemos os valores aproximados (às centésimas) das coordenadas dos pontos A e B:

$$x_A \approx -1{,}19 \text{ e } x_B \approx -0{,}17$$



Exame – 2016, 2.ª Fase

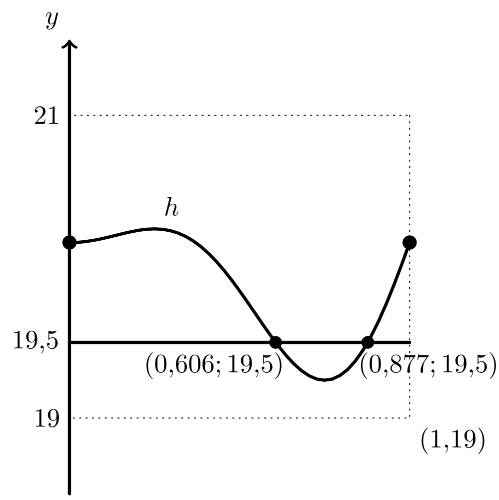
6. Representando na calculadora o gráfico da função h e a reta de equação $y = 19{,}5$ na janela compatível com o domínio de h e com $y \in [19{,}21]$, obtemos o gráfico se reproduz na figura ao lado.

   Recorrendo à função da calculadora que permite determinar valores aproximados de um ponto de interseção de dois gráficos, determinamos os valores das abcissas (com aproximação às milésimas) dos pontos do gráfico de h que têm ordenada 19,5, ou seja, os valores de a e de b:

$$a \approx 0{,}606 \text{ e } b \approx 0{,}877$$

   E assim, o valor de $b - a$ arredondado às centésimas, é:

$$b - a \approx 0{,}877 - 0{,}606 \approx 0{,}27$$



   No contexto da situação descrita, o valor de $b - a$ é a duração do intervalo de tempo em que a distância do ponto P do tabuleiro a um ponto fixo foi inferior a 19,5 metros; ou seja, que, durante o minuto em que durou a medição, o ponto P esteve a menos de 19,5 metros de distância do ponto fixo durante 0,27 minutos, aproximadamente.

Exame – 2016, 1.ª Fase

7. Como o declive da reta tangente ao gráfico da função, em cada ponto, é dado pela função derivada, vamos determinar a expressão analítica da função derivada:

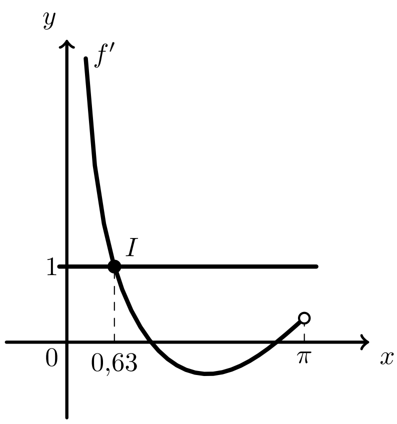
$$f'(x) = (\ln x + \cos x - 1)' = (\ln x)' + (\cos x)' - (1)' = \frac{1}{x} + (-\operatorname{sen} x) - 0 = \frac{1}{x} - \frac{x \operatorname{sen} x}{x} = \frac{1 - x \operatorname{sen} x}{x}$$

   Como o declive de uma reta é dado pela tangente da sua inclinação, temos que: $m = \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} = 1$

   Logo a abcissa do ponto A é a solução da equação

$$f'(x) = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1 - x \operatorname{sen} x}{x} = 1$$

   Assim, visualizando na calculadora gráfica o gráfico da função f' e a reta $y = 1$, numa janela coerente com o domínio da função f $(0 < x < \pi)$, (reproduzido na figura ao lado) e determinando a interseção das duas, obtemos os valores aproximados (às centésimas) das coordenadas do ponto: $I(0{,}63; 1{,}00)$.



   Ou seja o valor aproximado às centésimas da abcissa do ponto A, é 0,63

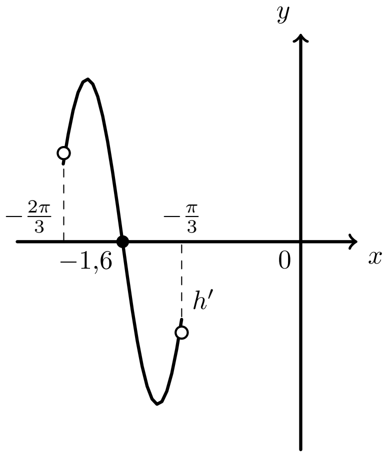
Exame – 2013, Ép. especial

8. Sabemos que o declive da reta tangente ao gráfico de h, no ponto A, é zero, porque a tangente é paralela ao eixo Ox.

   Por outro lado o declive (m) da reta tangente em qualquer ponto é
   $m = h'(x)$, e $h'(x) = (f(x) - g(x))' = f'(x) - g'(x)$, pelo que é necessário determinar a derivada de f:

   $f'(x) = (\pi - 4\,\mathrm{sen}\,(5x))' = (\pi)' - (4\,\mathrm{sen}\,(5x))' = 0 - 4 \times 5\cos(5x) = -20\cos(5x)$

   Assim, como $m = h'(x)$ e $m = 0$, temos que a abcissa do ponto A é a solução da equação:
   $h'(x) = 0 \;\Leftrightarrow\; f'(x) - g'(x) = 0 \;\Leftrightarrow\; -20\cos(5x) - \log_2\left(-\frac{\pi}{6} - x\right) = 0$
   Logo, podemos traçar na calculadora o gráfico da função h', numa janela compatível com o domínio (ou seja o domínio de g'), que se reproduz na figura ao lado.

   Recorrendo à função da calculadora que permite determinar valores aproximados dos zeros de uma função, podemos determinar o valor (aproximado às décimas) do único zero da função, que coincide com a abcissa do ponto A:

   $$x \approx -1{,}6$$

   Exame – 2011, Ép. especial

9. Sabemos que o declive da reta tangente ao gráfico de f, no ponto B, é 8, porque a tangente a uma reta de declive 8.

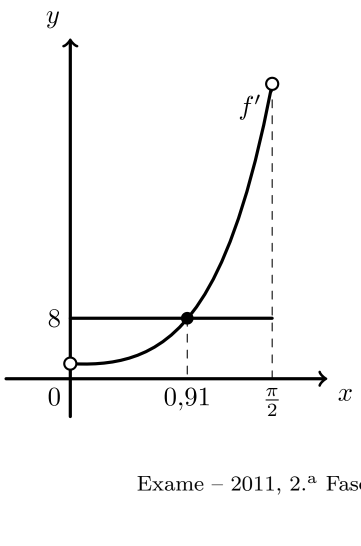
   Por outro lado o declive (m) da reta tangente em qualquer ponto é $m = f'(x)$, pelo que é necessário determinar a derivada de f:

   $f'(x) = (e^{2x} + \cos x - 2x^2)' = (e^{2x})' + (\cos x)' - (2x^2)' = 2e^{2x} - \,\mathrm{sen}\,x - 4x$

   Assim, como $m = f'(x)$ e $m = 8$, temos que a abcissa do ponto B é a solução da equação:

   $$f'(x) = 8 \;\Leftrightarrow\; 2e^{2x} - \,\mathrm{sen}\,x - 4x = 8$$

   Logo, podemos traçar na calculadora o gráfico da função f' e a reta de equação $y = 8$ numa janela compatível com o domínio de f (que coincide com o domínio de f'), que se reproduz na figura ao lado.

   Recorrendo à função da calculadora que permite determinar valores aproximados de um ponto de interseção de dois gráficos, determinamos o valor da abcissa (com aproximação às centésimas) do ponto do gráfico de f' que tem ordenada 8, ou seja a abcissa do ponto B:

   $$x \approx 0{,}91$$

   Exame – 2011, 2.ª Fase

10. Como o declive da reta tangente ao gráfico de uma função num ponto, é igual ao valor da derivada nesse ponto, temos que a abcissa do ponto A é a solução da equação

$$f'(x) = 3$$

Assim, determinando a derivada da função f, temos:

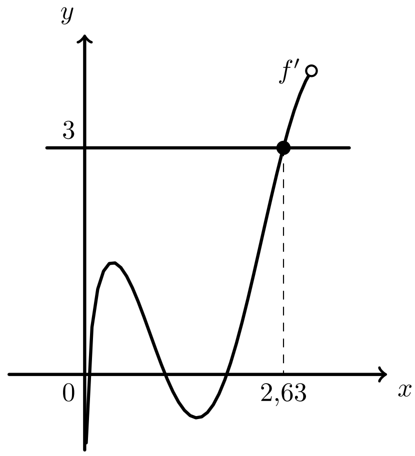
$$f'(x) = (x \ln x + \operatorname{sen}(2x))' = (x \ln x)' + (\operatorname{sen}(2x))' = (x)'(\ln x) + (x)(\ln x)' + ((2x)' \cos(2x)) =$$
$$= \ln x + x \times \frac{1}{x} + 2\cos(2x) = \ln x + \frac{x}{x} + 2\cos(2x) = \ln x + 1 + 2\cos(2x)$$

Logo, a abcissa do ponto A é a solução da equação

$$\ln x + 1 + 2\cos(2x) = 3$$

no intervalo $]0,3[$.

Assim, traçando na calculadora o gráfico da função f' e a reta $y = 3$ numa janela compatível com o domínio de f', obtemos o gráfico que se reproduz na figura ao lado.



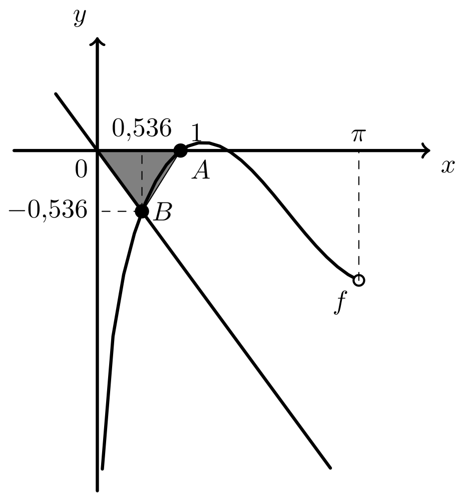
Recorrendo à função da calculadora que permite determinar valores aproximados de um ponto de interseção de dois gráficos, determinamos o valor (aproximado às centésimas) da abcissa do ponto de interseção, ou seja a abcissa do ponto A:

$$x \approx 2{,}63$$

Teste Intermédio 12.º ano – 26.05.2011

11. Traçando na calculadora o gráfico da função f e a bissetriz dos quadrantes pares, ou seja a reta de equação $y = -x$ numa janela compatível com o domínio de f, obtemos o gráfico que se reproduz na figura seguinte.

Logo podemos considerar como a medida da base do triângulo, a abcissa do ponto A, e como a medida da altura o valor absoluto da ordenada do ponto B (como se pode ver na figura).



Recorrendo à função da calculadora que permite determinar valores dos zeros de uma função, determinamos o valor da abcissa do ponto A, $x_A = 1$. Usando a função da calculadora para determinar valores aproximados de um ponto de interseção de dois gráficos determinamos o valor (aproximado às centésimas) da ordenada do ponto B, $y_B \approx -0{,}536$.

Assim, calculando a área do triângulo, e arredondando o resultado às centésimas, vem:

$$A_{[OAB]} = \frac{x_A \times |y_B|}{2} \approx \frac{1 \times 0{,}536}{2} \approx 0{,}268 \approx 0{,}27$$

Exame – 2010, Ép. especial

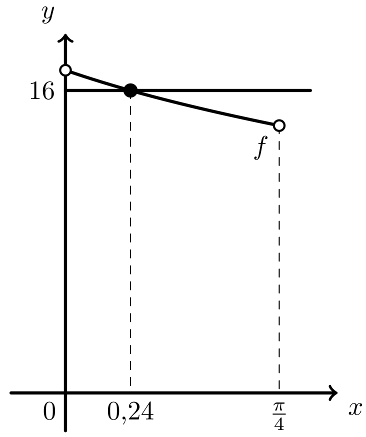
12. Como o perímetro do triângulo é dado pela função f, o valor de x para o qual o perímetro é 16, é a solução da equação

$$f(x) = 16$$

Assim, começamos por representar na calculadora o gráfico da função f, numa janela compatível com domínio, e a reta $y = 16$.

Usando a função da calculadora para determinar valores aproximados de um ponto de interseção de dois gráficos determinamos o valor (aproximado às centésimas) da abcissa do ponto do gráfico de f que tem ordenada 16, ou seja

$$x \approx 0{,}24$$



Teste Intermédio 12.º ano – 19.05.2010

13. Começamos por representar o gráfico de f, no domínio definido (reproduzido na figura ao lado), numa janela compatível com o domínio da função.

Calculando a ordenada do ponto A, temos:

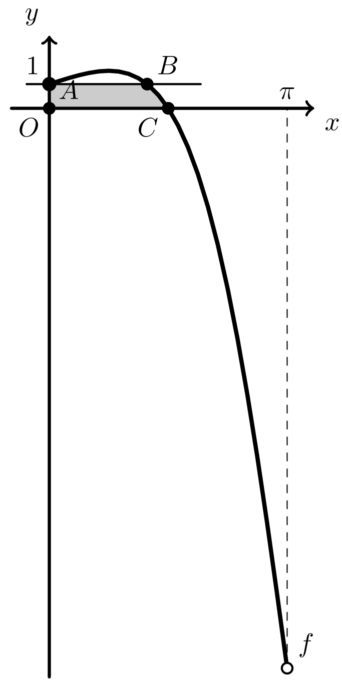
$$y_A = f(0) = e^0 \times \cos(0) = 1 \times 1 = 1$$

Assim, traçamos também a reta de equação $y = 1$ para determinar a abcissa do ponto B. Usando a função da calculadora gráfica para determinar valores aproximados das coordenadas de pontos de interseção de dois gráficos (o gráfico de f e a reta $y = 1$), encontramos as coordenadas do ponto B, arredondadas com duas casas decimais, que são: $B(1{,}293; 1)$

Com a função da calculadora gráfica para determinar valores aproximados do zero de uma função, obtemos o valor da abcissa do ponto C, ou seja, do zero da função, que arredondado com duas casas decimais é, $x_C = 1{,}57$

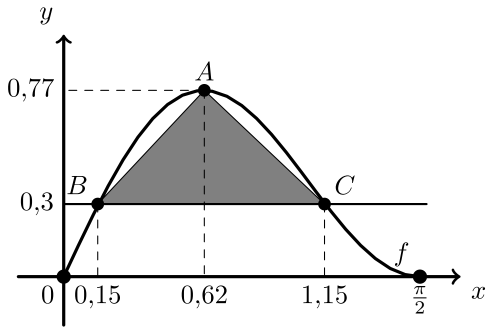
Assim, calculando a área do trapézio, (também reproduzido na figura ao lado) e arredondando o resultado às décimas, temos:

$$A_{[OABC]} = \frac{\overline{OC} + \overline{AB}}{2} \times \overline{OA} = \frac{x_C + x_B}{2} \times y_A = \frac{1{,}57 + 1{,}29}{2} \times 1 \approx 1{,}4$$



Exame – 2009, Ép. especial

14. Começamos por representar na calculadora gráfica a função f a reta de equação $y = 0{,}3$, numa janela compatível com o domínio e obtemos o gráfico que está reproduzido na figura seguinte, onde ainda se acrescentou o triângulo $[ABC]$.



Recorremos à função da calculadora que permite determinar valores aproximados para o maximizante e o respetivo máximo de uma função, determinamos as coordenadas, com duas casas decimais, do ponto $A(0{,}62; 0{,}77)$.

Usando a função da calculadora pra determinar valores aproximados das coordenadas dos pontos de interseção de dois gráficos, determinamos as abcissas, com duas casas decimais, dos pontos B e C: $x_B \approx 0{,}15$ e $x_C \approx 1{,}15$.

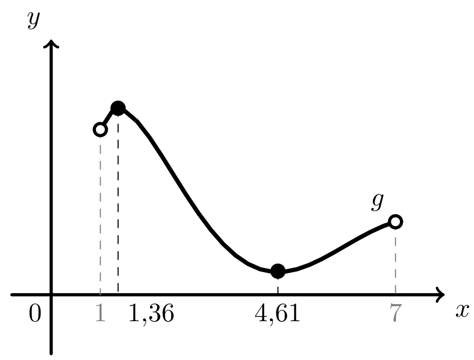
Assim, podemos calcular a medida da base do triângulo, como a diferença das abcissas dos pontos C e B, ou seja: $x_C - x_B \approx 1{,}15 - 0{,}15 \approx 1$.
A altura do triângulo pode ser calculada como a diferença das ordenadas dos pontos A e B, ou seja: $y_A - y_B \approx 0{,}77 - 0{,}3 \approx 0{,}47$

Assim, calculando um valor aproximado às décimas da área do triângulo, vem:

$$A_{[ABC]} = \frac{(x_C - x_B) \times (y_A - y_B)}{2} \approx \frac{0{,}47}{2} \approx 0{,}2$$

Exame – 2009, 2.ª Fase

15. Representando esta função no intervalo $]1{,}7[$, na calculadora gráfica, obtemos o gráfico reproduzido na figura seguinte.



Depois, como os valores de x que verificam a condição $g'(x) < 0$, ($]a,b[$) são aqueles em que a função é decrescente. Por observação do gráfico, podemos concluir que são os valores compreendidos entre o maximizante de g, no intervalo definido (ou seja a), e o minimizante da função no mesmo intervalo, (b).

Assim, recorrendo à função da calculadora para determinar valores aproximados de maximizantes e minimizantes da função, obtemos que os valores, aproximados às centésimas, de a e de b:

$$a \approx 1{,}36 \text{ e } b \approx 4{,}61$$

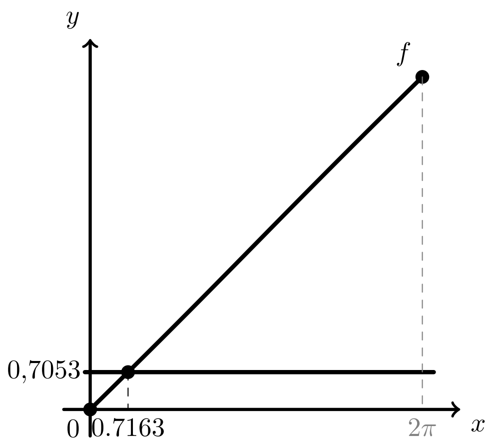
Exame – 2007, 2.ª Fase

16. Como t é o número de dias decorridos após o dia 4 de janeiro (dia da passagem da Terra pelo periélio), o dia 14 de fevereiro, corresponde a $t = 31 + 14 - 4 = 41$.

Como $T = 364{,}24$, temos a amplitude do ângulo x pode ser calculada como:

$$\frac{2\pi t}{T} = x - 0{,}0167 \operatorname{sen} x \quad \Leftrightarrow \quad \frac{2\pi \times 41}{365{,}24} = x - 0{,}0167 \operatorname{sen} x \quad \Leftrightarrow \quad 0{,}7053 = x - 0{,}0167 \operatorname{sen} x$$

Para resolver a equação anterior, representamos na calculadora gráfica a reta definida por $y = 0{,}7053$ e o gráfico da função $f(x) = x - 0{,}0167 \operatorname{sen} x$, numa janela compatível com o domínio da função ($[0{,}2\pi[$). O gráfico visualizado está reproduzido na figura ao lado.



Recorrendo à funcionalidade da calculadora para determinar valores aproximados de pontos de interseção de dois gráficos, obtemos o valor, com quatro casas decimais, de $x \approx 0{,}7163$ para a solução da equação $0{,}7053 = x - 0{,}0167 \operatorname{sen} x$.

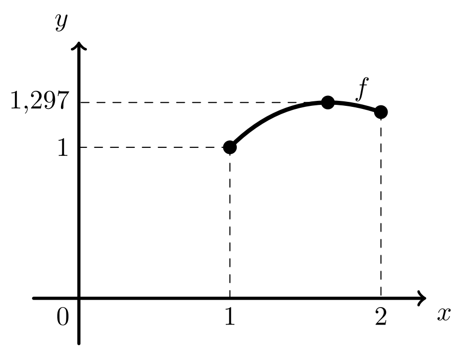
Após determinar a amplitude do ângulo correspondente à posição da Terra no dia 14 de fevereiro, resta calcular a distância ao Sol, arredondado o resultado às décimas:

$$d \approx 149{,}6(1 - 0{,}0167 \cos(0{,}7163)) \approx 147{,}1$$

Logo, no dia 14 de fevereiro, a Terra encontra-se a uma distância aproximada de 147,1 milhões de quilómetros do Sol.

Exame – 2006, 2.ª Fase

17. Representando na calculadora a função f, no domínio definido, visualizamos o gráfico reproduzido na figura ao lado.



Usando a função da calculadora para determinar valores aproximados do máximo da função num intervalo, obtemos o valor arredondando às milésimas, para o máximo da função de 1,297.

Por observação do gráfico, e como
$f(1) = \cos(1-1) + \ln 1 = \cos(0) + 0 = 1$, podemos afirmar que o contradomínio de f é, aproximadamente, $[1; 1{,}297]$
Ou seja a amplitude do contradomínio é $1{,}297 - 1 = 0{,}297$

Como se pretende fazer uma transformação da função f, por forma a dar origem a uma função de contradomínio de amplitude 1 (o intervalo [4,5] tem amplitude 1), o parâmetro a deve ser tal que: $a \times 0{,}297 = 1$.
Assim podemos calcular o valor de a:

$$a \times 0{,}297 = 1 \quad \Leftrightarrow \quad a = \frac{1}{0{,}297} \quad \Leftrightarrow \quad a \approx 3{,}367$$

Logo, como $f(1) = 1$, $a \times f(1) = 3{,}367 \times 1 = 3{,}367$, e como se pretende que o valor mínimo da função g (que é a imagem de 1) seja, 4, podemos calcular o valor de b:

$$b = 4 - 3{,}367 = 0{,}633$$

Ou seja, arredondando às centésimas os valores calculados de a e de b, temos que a função $g(x) = 0{,}37f(x) + 0{,}63$ tem contradomínio [4,5], aproximadamente.

Exame – 2006, 1.ª Fase

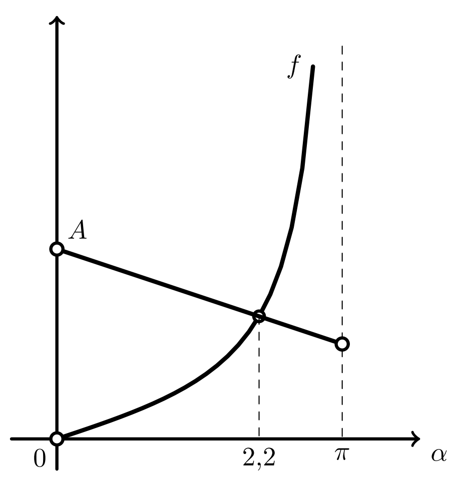
18. A área da região sombreada é dada em função de α pela diferença entre a área do círculo (πr^2) e a área da região interior do círculo não sombreada, que é dada em função de α por $\frac{\alpha r^2}{2}$ (ver formulário).

Assim temos que a área da região sombreada, A, é dada em função de α, por: $A = \pi r^2 - \frac{\alpha r^2}{2}$, e como o raio do círculo é 1, temos que $A = \pi - \frac{\alpha}{2}$

Como a área do quadrilátero é dada, em função de α, por $f(\alpha) = \operatorname{tg}\left(\frac{\alpha}{2}\right)$, temos o valor de α, para o qual, as duas áreas são iguais é a solução da equação

$$\pi - \frac{\alpha}{2} = \operatorname{tg}\left(\frac{\alpha}{2}\right) \ , \ \alpha \in]0,\pi[$$

Representando na calculadora gráfica as expressões de f e de A (expressas na variável x), no domínio $]0,\pi[$, visualizamos os gráficos reproduzidos na figura ao lado.



Depois, recorrendo à função da calculadora para determinar valores aproximados para as coordenadas de pontos de interseção de dois gráficos, obtemos o valor 2,2 como a abcissa do ponto de interseção, ou seja a solução da equação, aproximada às décimas, é

$$\alpha \approx 2{,}2$$

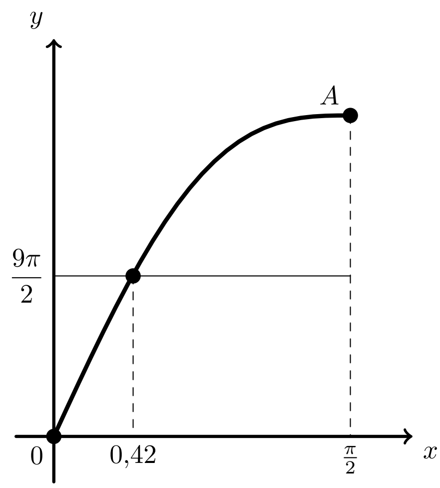
Exame – 2005, Ép. especial (cód. 435)

19. Calculando a área do círculo temos: $A_\circ = \pi r^2 = \pi \times 3^2 = 9\pi$

Ou seja, como se pretende descobrir o valor de x para o qual a área sombreada $(18(x + \operatorname{sen} x.\cos x))$ seja metade da área do círculo, temos que o valor de x é a solução da equação

$$18(x + \operatorname{sen} x.\cos x) = \frac{9\pi}{2}\ ,\ \left(x \in \left[0,\frac{\pi}{2}\right]\right)$$

Assim, representando na calculadora o gráfico da função A no seu domínio e a reta de equação $y = \frac{9\pi}{2}$, obtemos o gráfico que se reproduz na figura ao lado.



Depois, recorrendo à funcionalidade da calculadora para a determinar valores aproximados de pontos de interseção de dois gráficos, obtemos a abcissa do ponto de interseção, arredondado às centésimas, ou seja a solução da equação:

$$x \approx 0{,}42$$

Exame – 2005, 1.ª Fase (cód. 435)

20. Como o declive de uma reta tangente ao gráfico de uma função num ponto, é igual ao valor da derivada da função para a abcissa desse ponto, começamos por derivar a função f:

$$f'(x) = (\operatorname{sen}(ax))' = (ax)'\cos(ax) = a\cos x$$

Logo, os declives das retas r e s podem ser calculados como:

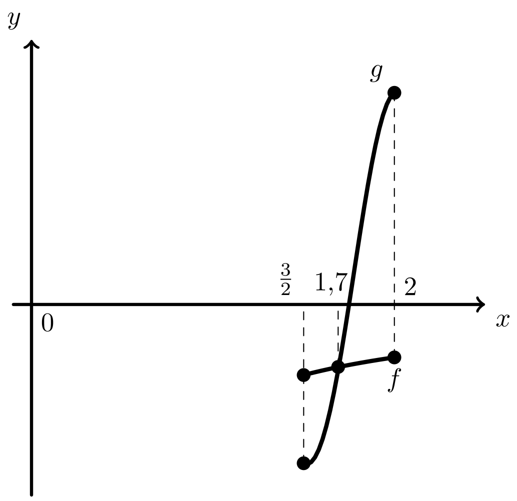
$$m_r = f'(0) = a \times \cos(a.0) = a \times \cos(0) = a$$

$$m_s = f'(2\pi) = a\cos(a \times 2\pi) = a\cos(2\pi a)$$

Como as retas r e s são perpendculares, logo

$$m_s = -\frac{1}{m_r} \quad \Leftrightarrow \quad a\cos(2\pi a) = -\frac{1}{a}$$

Ou seja, o valor de a pode obtido como a solução da equação $x\cos(2\pi x) = -\frac{1}{x}$ que pertence ao intervalo $\left]\frac{3}{2},2\right[$ Assim, representando, no intervalo definido, as funções $f(x) = x\cos(2\pi x)$ e $g(x) = -\frac{1}{x}$, obtemos o gráfico reproduzido na figura ao lado.



Depois, recorrendo à função da calculadora para determinar valores aproximados das coordenadas de pontos de interseção de dois gráficos, obtemos a solução da equação, ou seja o valor de a, arredondado às décimas:

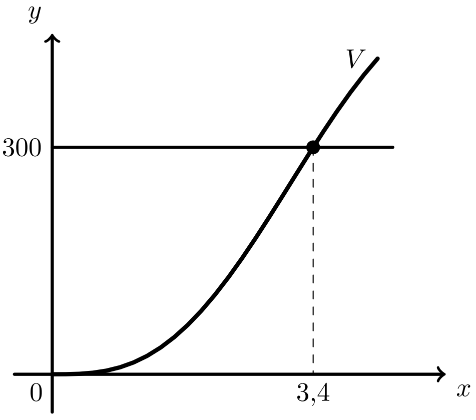
$$a \approx 1{,}7$$

Exame – 2004, Ép. especial (cód. 435)

21. Como a função V relaciona a amplitude x, em radianos, do arco ABC com o volume de combustível em m^3, o problema pode ser traduzido pela equação

$$V(x) = 300 \quad \Leftrightarrow \quad 80(x - \operatorname{sen} x) = 300$$

Representando na calculadora a função V e a reta de equação $y = 300$, visualizamos os gráficos reproduzidos na figura ao lado.



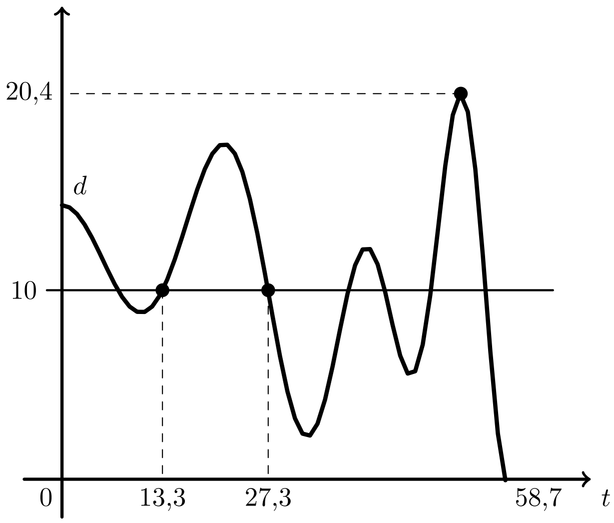
Recorrendo à função da calculadora para determinar vlores aproximados para as coordenadas do ponto de interseção de dois gráficos, obtemos o valor, aproximado, às décimas para a abcissa do ponto do gráfico de V com ordenada 300:

$$x \approx 3{,}4$$

Ou seja, quando o arco ABC tem uma amplitude de 3,4 *radianos*, aproximadamente, o depósito terá 300 m^3 de combustível.

Exame – 2004, 1.ª Fase (cód. 435)

22. Traçando, na calculadora o gráfico da função d, até ao valor de t em que o papagaio atinge o solo, obtemos o gráfico que se reporduz na figura seguinte.



Usando a função da calculadora para determinar valores aproximados de um zero de uma função, obtemos o valor, arredondado às décimas, de $t \approx 58{,}7$, para o zero da função, ou seja, menos que 60 segundos, o que significa que o papagaio não permaneceu no ar mais do que um minuto.

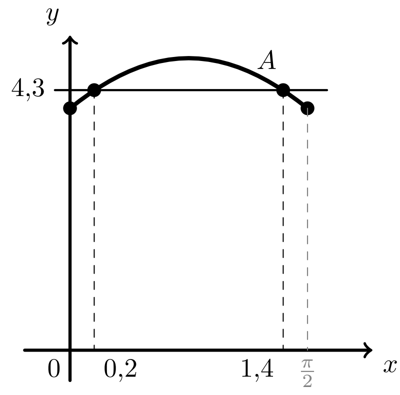
Traçando a reta de equação $y = 10$, e determinando valores aproximados das coordenadas dos pontos de interseção desta reta com o gráfico da função, assinalados na figura, obtemos os valores $t \approx 13{,}3$ e $t \approx 27{,}3$, o que significa que o papagaio este acima dos 10 metros durante 14 segundos, aproximadamente, ou seja, mais do que os 12 segundos estabelecidos pelo regulamento do concurso.

Finalmente, usando a função da calculadora que permite determinar valores aproximados de extremos relativos de uma função, podemos determinar o máximo da função, no domínio representado, aproximado às décimas $d \approx 20{,}4$, o que significa que a altura máxima atingida pelo papagaio foi de 20,4 metros, superior ao 20 metros necessários para o apuramento.

Assim, e uma vez que as três condições estabelecidas foram cumpridas, concluímos que a Rita deve ser apurada para a final do concurso.

Exame – 2003, 2.ª Fase (cód. 435)

23. Traçando na calculadora o gráfico da função A, no respetivo domínio, e a reta de equação $y = 4{,}3$, obtemos o gráfico reproduzido na figura ao lado.



Depois, recorrendo à função da calculadora para determinar pontos de interseção de dois gráficos, obtemos as abcissas (arredondadas às décimas) dos dois pontos em que a reta interseta o gráfico da função A, ou seja as duas soluções da equação

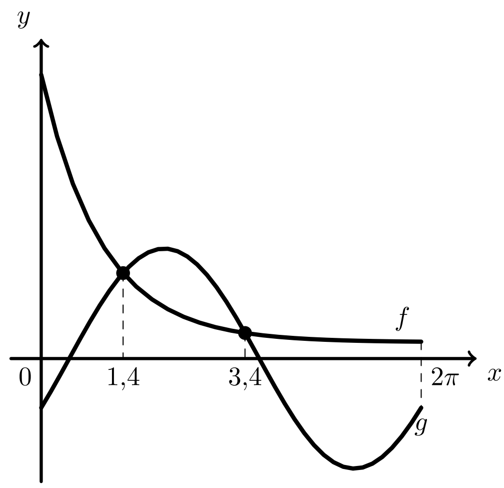
$$A(x) = 4{,}3$$

no intervalo correspondente ao domínio da função:

$$x \approx 0{,}2 \text{ e } x \approx 1{,}4$$

Exame – 2003, 1.ª fase - 1.ª chamada (cód. 435)

24. Traçando na calculadora os gráficos das funções f e g, no intervalo $[0{,}2\pi]$, obtemos o gráfico reproduzido na figura seguinte.



Depois, utilizando a função da calculadora que permite determinar valores aproximados das coordenadas dos pontos de interseção de dois gráficos, determinamos as abcissas dos pontos de interseção dos dois gráficos: $x \approx 1{,}4$ e $x \approx 3{,}4$

Assim, é possível observar que, no intervalo $[0{,}2\pi]$, os pontos de abcissa inteira, do gráfico de f em que a ordenada é superior ao ponto do gráfico de g com a mesma ordenada, são os pontos de abcissas: 0,1,4,5 e 6

Ou seja, o conjunto das soluções inteiras da inequação $f(x) > g(x)$, no intervalo $[0{,}2\pi]$ é:

$$\{0{,}1{,}4{,}5{,}6\}$$

Exame – 2002, 2.ª Fase (cód. 435)

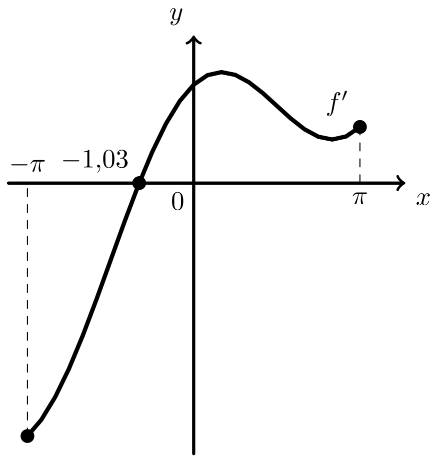
25. Como o declive da reta tangente, em cada ponto, é dado pelo valor da derivada para a abcissa desse ponto, e uma reta tangente é paralela ao eixo Ox, se tiver declive zero, procuramos um ponto de derivada nula, ou seja a solução da equação

$$f'(x) = 0$$

Assim, traçando na calculadora o gráfico da função f', no intervalo correspondente ao seu domínio (e também de f), $[-\pi,\pi]$, obtemos o gráfico reproduzido na figura ao lado.

Depois, utilizando a função da calculadora que permite determinar valores aproximados dos zeros de uma função, determinamos o valor arredondado às centésimas do zero da derivada:

$$x \approx -1{,}03$$



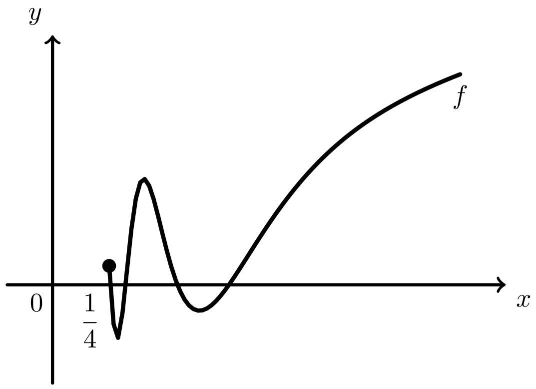
Ou seja, o ponto do gráfico de f, cuja reta tangente é paralela ao eixo Ox tem abcissa -1,03 (aprox.).

Exame – 2002, 1.ª fase - 2.ª chamada (cód. 435)

26. Traçando na calculadora o gráfico da restrição da função f ao intervalo $\left[\frac{1}{4}, +\infty\right[$, obtemos o gráfico reproduzido na figura ao lado.

Como para $x < 1$, a função não tem zeros, porque a soma entre x e o valor de $\operatorname{sen} x$ não pode ser zero, porque $\operatorname{sen} x \geq -1$, logo concluímos que todos os zeros da função, no intervalo dado são visíveis no gráfico.

Assim, pela análise do gráfico é possível afirmar que a função tem 4 zeros no intervalo definido.



Exame – 2001, Prova para militares (cód. 435)

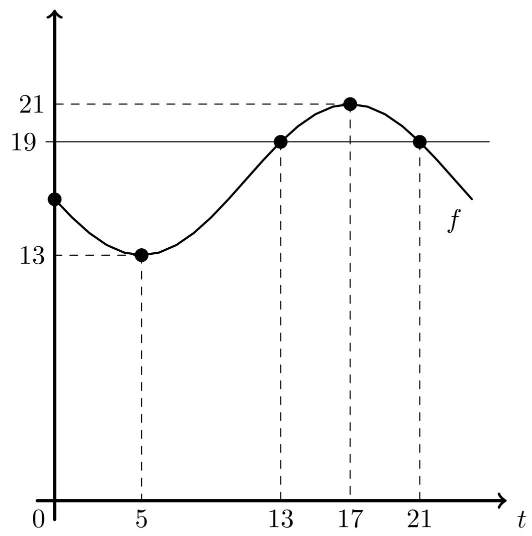
27. Traçando na calculadora o gráfico da função f, no intervalo correspondente à duração do dia ($t \in [0,12[$, obtemos o gráfico reproduzido na figura seguinte.

Recorrendo às funções da calculadora para determinar valores aproximados das coordenadas dos pontos de ordenada mínima e ordenada máxima, encontramos o valor do minimizante da função ($t_m = 5$) e o valor do maximizante ($t_M = 17$).
Assim verificamos que, entre as 0 e as 5 horas, a temperatura da água do lado esteve sempre a diminuir. Depois, entre as 5 e as 17 horas, a temperatura aumentou sempre.
Finalmente, o período após as 17 horas (até ao final do dia - 24 horas) voltou a ser de descida continuada da temperatura da água.

Pela observação das coordenadas do ponto de ordenada máxima (17,21), podemos afirmar que a temperatura máxima da água do lago, durante este dia, foi de 21º, tendo sido registada às 17 horas.

Analogamente, a observação das coordenadas do ponto do gráfico de f de ordenada mínima (5,13), permite afirmar que a temperatura mínima da água, neste dia, foi de 13º, registada às 5 horas.

Finalmente, traçamos a reta de equação $y = 19$, também reproduzida na figura, e recorrendo à função que permite determinar valores aproximados das coordenadas dos pontos de interseção de dois gráficos, encontramos os pontos de ordenada 19: (13,19) e (21,19). Verificamos ainda que é no intervalo [13,19] que os pontos do gráfico de f têm ordenada não inferior a 19. Ou seja, as melhores horas do dia para se tomar um banho realmente bom são entre as 13 e as 21 ($t \in [13,21]$).



Exame – 2001, Ép. especial (cód. 435)

28. Como a ordenada do ponto A (y_A) é um máximo relativo da função, o valor da derivada neste ponto é zero, pelo que a reta tangente também tem declive zero, ou seja, a reta tangente é uma reta horizontal de equação $y = y_A$. Como $y_A = \frac{\pi + 6\sqrt{3}}{6}$, a equação da reta tangente é $y = \frac{\pi + 6\sqrt{3}}{6}$

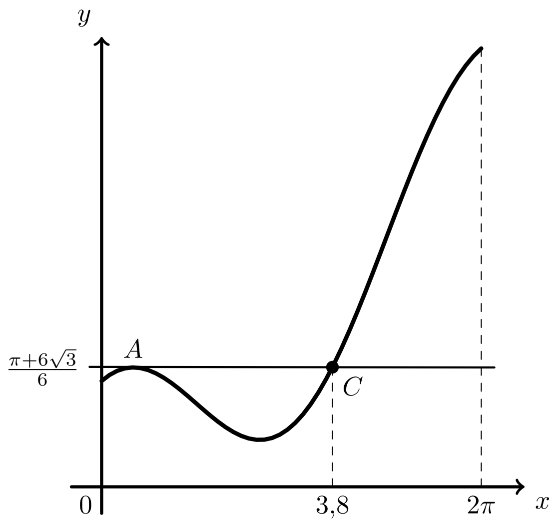
Assim, representando na calculadora o gráfico da função f e a reta horizontal $y = y_A$, obtemos o gráfico reproduzido na figura ao lado.

Assim a abcissa do ponto C, também assinalado na figura, é a solução da equação

$$f(x) = \frac{\pi + 6\sqrt{3}}{6}$$

Logo, recorrendo à função da calculadora para determinar valores aproximados das coordenadas dos pontos de interseção de dois gráficos, obtemos o valor da abcissa do ponto C, x_C, arredondado às décimas:

$$x_C \approx 3{,}8$$

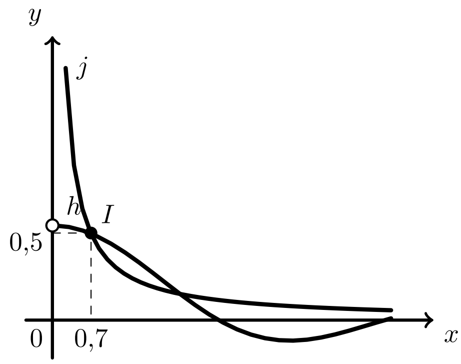


Exame – 2001, 1.ª fase - 2.ª chamada (cód. 435)

29. Como se pretende encontrar um ponto de abcissa positiva, representa-se, na calculadora, o gráfico de h, para valores de x, positivos, e também o gráfico de j, no mesmo referencial e obtemos o gráfico reproduzido na figura ao lado.

Depois, recorrendo à função da calculadora para determinar valores aproximados das coordenadas dos pontos de interseção de dois gráficos num intervalo, e dirigindo a procura para a interseção mais à esquerda, obtemos o valor das coordenadas (do ponto procurado) arredondadas às décimas:

$$x_I \approx 0{,}7 \text{ e } y_I \approx 0{,}5$$



Exame – 2001, Prova modelo (cód. 435)

30.

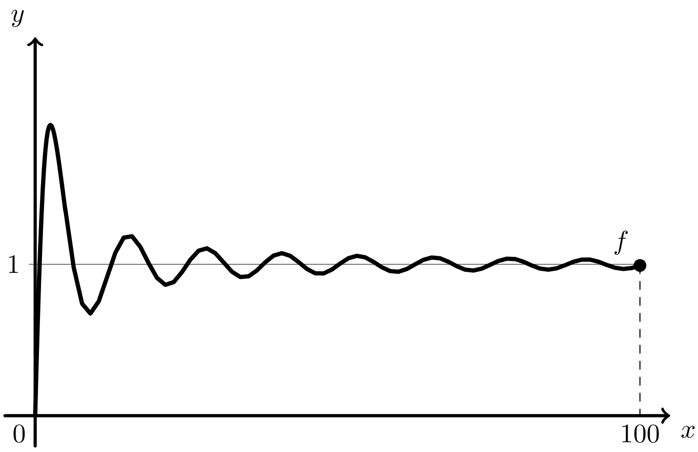
30.1. Como se pretende averiguar a existência do limite, quando x toma valores arbitrariamente grandes, representamos, na calculadora, o gráfico de f, de modo a encontrar uma tendência. Por exemplo, trançando o gráfico de f, para valores de x entre 0 e 100, visualizamos o gráfico reproduzido na figura seguinte.

Depois, verificando que os valores das imagens tendem a estabilizar, recorrendo à função da calculadora para determinar valores aproximados da imagem de um objeto, determinamos a imagem de 100:

$$f(100) \approx 0{,}99$$

Assim, considerando a informação de que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ existe e o seu valor é um número inteiro, é razoável conjeturar que

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 1$$



30.2. Um método baseado exclusivamente na utilização da calculadora não pode ser considerado conclusivo. Uma conclusão que assente, por exemplo, na visualização do gráfico de uma função ou nos valores da tabela de valores da função, será sempre restrita a um domínio finito, não permitindo assegurar, sem outros argumentos, que a tendência de variação observada se irá manter indefinidamente.
De resto é impossível analisar a variação da função para valores arbitrariamente grandes de x, em virtude da calculadora ter capacidades de cálculo finitas, pelo que um valor arbitrariamente grande de x não poderá ser calculado.

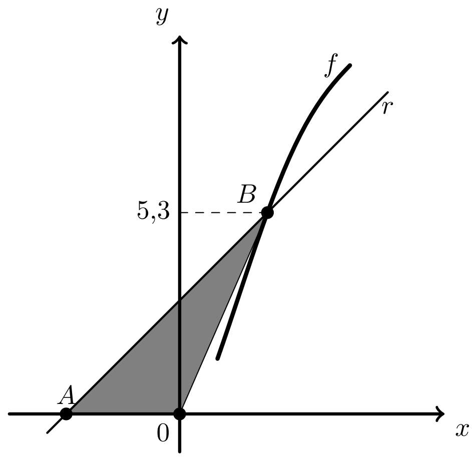
Exame – 2001, Prova modelo (cód. 435)

31. Como a reta r tem inclinação de 45º, podemos calcular o seu declive: $m = \text{tg}\,(45°) = 1$.
Logo, substituindo as coordenadas do ponto $A(-3{,}0)$ e o declive na equação reduzida da reta, temos:

$$y = mx + b \quad \Leftrightarrow \quad 0 = 1 \times (-3) + b \quad \Leftrightarrow \quad 3 = b$$

Assim, a equação da reta r é: $y = x + 3$

Representando na calculadora, a função f e a reta r, numa janela compatível com a imagem do enunciado, obtemos um gráfico semelhante ao do enunciado.



Depois, recorrendo à função da calculadora para determinar valores aproximados das coordenadas de pontos de interseção de dois gráficos, obtemos o valor, com uma casa decimal, para a ordenada do ponto B:

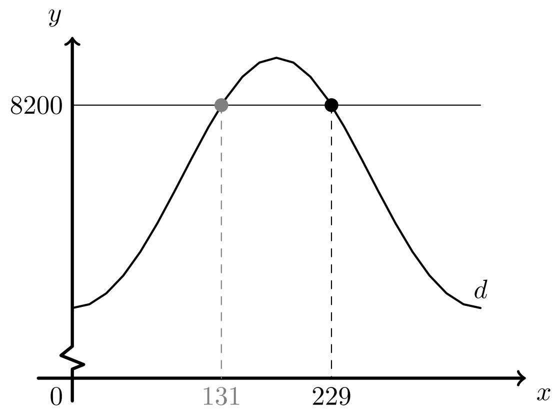
$$y_B \approx 5{,}3$$

Logo, para calcular a área do triângulo $[AOB]$, consideramos a medida da base, como a distância $\overline{OA}$, e calculamos a área, arredondando o resultado às unidades:

$$A_{[AOB]} = \frac{\overline{OA} \times y_B}{2} \approx \frac{|-3| \times 5{,}3}{2} \approx 7{,}95 \approx 8$$

Exame – 2000, 2.ª fase (cód. 435)

32. Traçando na calculadora o gráfico da função $d = \dfrac{7\,820}{1 + 0{,}07\cos x}$, $x \in [0{,}360[$, correspondente à variação da distância, em km, do satélite ao centro da Terra e a reta de equação $y = 8200$, reproduzidos na figura ao lado, e recorrendo à função que permite determinar valores aproximados das coordenadas dos pontos de interseção de dois gráficos, determinamos as abcissas dos dois pontos de interseção, ou seja, os valores x que correspondem a uma distância de 8200 km

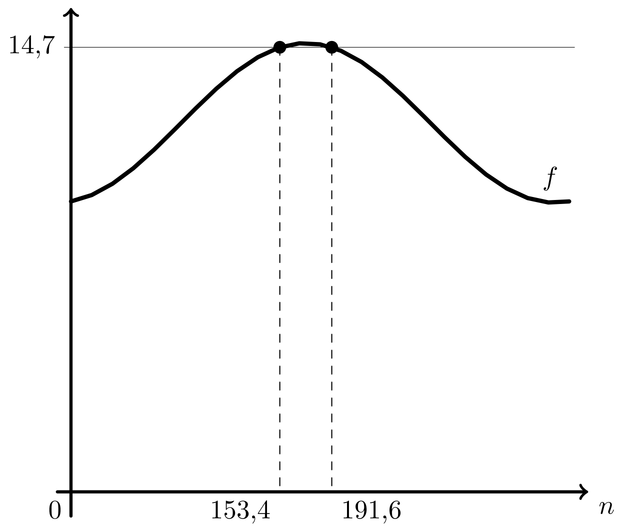


Como a posição do satélite é a que está indicada na figura, ou seja, o ângulo x é maior que 180° então, o valor de de x, em graus, arredondado às unidades, é 229

Exame – 2000, 1.ª fase - 2.ª chamada (cód. 435)

33. Como a função f dá a o valor aproximado do número de horas de sol, pretendemos saber quantas são as soluções (inteiras) da inequação: $f(x) > 14{,}7$

Assim, recorrendo à calculadora para traçar o gráfico da função f, numa janela compatível com o domínio ($0 < n < 366$) e ainda a reta horizontal de equação $y = 14{,}7$, obtemos o gráfico que se reproduz na figura ao lado.



Depois, recorrendo à função da calculadora para determinar valores aproximados das coordenadas de pontos de interseção de dois gráficos, obtemos as abcissas, 153,4 e 191,6, como os valores entre os quais a duração do dia é superior a 14,7 horas.

Finalmente, procuramos os valores inteiros, correspondentes aos dias compreendidos entre 153,4 e 191,6, ou seja, os valores do conjunto $\{154, 155, ...,190,191\}$

Logo, podemos concluir que existem 38 dias com mais de 14,7 horas de sol ($191 - 153 = 38$).

Exame – 2000, 1.ª fase - 1.ª chamada (cód. 435)