Proposta de Teste n.º 5

Matemática A – 11.º Ano – Maio de 2015

Algumas Resoluções

"Conhece a Matemática e dominarás o Mundo."
Galileu Galilei

2.

2.1. Usando o algoritmo da divisão inteira de pois polinómio, tem-se:

$$\begin{array}{rcl|l} \cancel{ax} & + & 5 & x-a \\ \cline{4-4} -\cancel{ax} & + & a^2 & a \\ \cline{1-3} & & 5+a^2 & \end{array}$$

Logo, $g(x)=a+\dfrac{5+a^2}{x-a}$. Usando a regra de derivação $\left(\dfrac{k}{x-b}\right)'=-\dfrac{k}{(x-b)^2}$, com $k\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$ e $b\in\mathbb{R}$, vem:

$$g'(x)=\left(a+\frac{5+a^2}{x-a}\right)'=a'+\left(\frac{5+a^2}{x-a}\right)'=0-\frac{5+a^2}{(x-a)^2}=-\frac{5+a^2}{(x-a)^2}$$

Como $g'(1)=-9$, vem:

$$g'(1)=-9\Leftrightarrow-\frac{5+a^2}{(1-a)^2}=-9\Leftrightarrow\frac{5+a^2}{(1-a)^2}=9\underset{a>1\Rightarrow 1-a<0\Rightarrow 1-a\neq 0}{\Leftrightarrow}5+a^2=9(1-a)^2\Leftrightarrow 5+a^2=9\left(1-2a+a^2\right)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 5+a^2=9-18a+9a^2\Leftrightarrow -8a^2+18a-4=0\underset{\div(-2)}{\Leftrightarrow}4a^2-9a+2=0$$

$$\Leftrightarrow a=\frac{9\pm\sqrt{(-9)^2-4\times 4\times 2}}{2\times 4}\Leftrightarrow a=\frac{1}{4}\ \vee\ a=2$$

Como $a>1$, conclui-se que $a=2$.

Nota: como $a=2$, vem que $g(x)=\dfrac{2x+5}{x-2}$ e $g'(x)=-\dfrac{9}{(x-2)^2}$.

2.3.

▪ A recta t é paralela à bissectriz dos quadrantes pares ($y=-x$). Portanto, $m_t = m_{bissectriz\ dos\ quadrantes\ pares} = -1$, ou seja, a equação da recta t é do tipo $y=-x+b$.

▪ A recta t é também tangente ao gráfico de g no ponto paralela $P\left(x_p, g\left(x_p\right)\right)$. Logo, a derivada nesse ponto é igual ao declive da recta t, isto é, $g'\left(x_p\right)=-1$. Assim:

$$g'(x)=-1 \Leftrightarrow -\frac{9}{(x-2)^2}=-1 \Leftrightarrow \frac{9}{(x-2)^2}=1 \underset{x\neq 2 \Rightarrow x-2\neq 0}{\Leftrightarrow} 9=(x-2)^2 \Leftrightarrow x-2=\pm\sqrt{9} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x-2=-3 \ \vee \ x-2=3 \Leftrightarrow x=-1 \ \vee \ x=5$$

Como $x_p>0$, vem que $x_p=5$ e portanto $P(5,g(5))=\left(5,\frac{2\times 5+5}{5-2}\right)=(5,5)$.

Consequentemente, $C(5,0)$ e $B(0,5)$

▪ o ponto $P(5,5)$ pertence à recta t, logo, substituindo-o na equação de t, vem $5=-5+b \Leftrightarrow b=10$.

$\therefore \ t: y=-x+10$

▪ Tem-se que:

$D\in Ox \Rightarrow D(x_c,0)$ e $D\in t$. Logo, substituindo-o na equação de t, vem $0=-x_c+10 \Leftrightarrow x_c=10$. $\therefore$ $D(10,0)$

$A\in Oy \Rightarrow A(0,y_A)$ e $D\in t$. Logo, substituindo-o na equação de t, vem $y_A=0+10 \Leftrightarrow y_A=10$. $\therefore$ $A(0,10)$

Portanto, $A_{[ABCD]}=A_{[AOD]}-A_{[BOC]}=\frac{\overline{AO}\times\overline{DO}}{2}-\frac{\overline{BO}\times\overline{CO}}{2}=\frac{10\times 10}{2}-\frac{5\times 5}{2}=\frac{100}{2}-\frac{25}{2}=\frac{75}{2}$.

ou, $A_{[ABCD]}=3\times A_{[BCP]}=3\times\frac{\overline{BP}\times\overline{CP}}{2}=3\times\frac{5\times 5}{2}=\frac{75}{2}$.

3. Tem-se que:

▪ $t.v.m._{[a,2a]}(f)=a \Leftrightarrow \frac{f(2a)-f(a)}{2a-a}=a \Leftrightarrow \frac{f(2a)-f(a)}{a}=a \underset{a>0\Rightarrow a\neq 0}{\Leftrightarrow} f(2a)-f(a)=a^2 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow f(2a)-a^2=f(a)$$

▪ $t.v.m._{[2a,4a]}(f)=2a \Leftrightarrow \dfrac{f(4a)-f(2a)}{4a-2a}=2a \Leftrightarrow \dfrac{f(4a)-f(2a)}{2a}=2a \underset{a>0 \Rightarrow 2a\neq 0}{\Leftrightarrow} f(4a)-f(2a)=4a^2 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow f(4a)=f(2a)+4a^2$$

Assim,

$$t.v.m._{[a,4a]}(f)=4 \Leftrightarrow \frac{f(4a)-f(a)}{4a-a}=4 \Leftrightarrow \frac{f(2a)+4a^2-\left(f(2a)-a^2\right)}{3a}=4 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\cancel{f(2a)}+4a^2-\cancel{f(2a)}+a^2}{3a}=4 \Leftrightarrow \frac{5a^{\cancel{2}}}{3\cancel{a}}=4 \Leftrightarrow 5a=12 \Leftrightarrow a=\frac{12}{5}$$

4.1. Um vector director da reta AB por ser:

$$\overrightarrow{AB}=B-A=(6,8,0)-(0,0,4)=(6,8,-4)$$

Como o ponto A pertence à recta AB, uma condição que define a recta AB é:

$$\frac{x-0}{6}=\frac{y-0}{8}=\frac{z-4}{-4} \Leftrightarrow \frac{x}{6}=\frac{y}{8}=\frac{4-z}{4}.$$

Outra resolução: Por três quaisquer pontos passa uma única recta. Assim, se os pontos A e B pertencerem à recta definida pela $\frac{x}{6}=\frac{y}{8}=\frac{4-z}{4}$, então esta é uma condição que define o plano AB:

$A(0,0,4)$: $\dfrac{0}{6}=\dfrac{0}{8}=\dfrac{4-4}{4} \Leftrightarrow 0=0=0$. Afirmação verdadeira

$B(6,8,0)$: $\dfrac{6}{6}=\dfrac{8}{8}=\dfrac{4-0}{4} \Leftrightarrow 1=1=1$. Afirmação verdadeira

Logo, uma condição que define a recta AB é $\frac{x}{6}=\frac{y}{8}=\frac{4-z}{4}$.

4.2. Tem-se que as coordenadas de P são do tipo (a,y,z). Como P pertence à recta AB, vem:

$$\frac{a}{6}=\frac{y}{8}=\frac{4-z}{4} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{y}{8}=\dfrac{a}{6} \\ \dfrac{4-z}{z}=\dfrac{a}{6} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=\dfrac{8a}{6} \\ 4-z=\dfrac{4a}{6} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=\dfrac{4a}{3} \\ 4-\dfrac{2a}{3}=z \end{cases}$$

Logo, $P\left(a,\frac{4a}{3},4-\frac{2a}{3}\right)$.

Tem-se que:

▪ o ponto Q pertence ao plano xOy (a face $[QRS]$ está contida no plano xOy) e a aresta $[PQ]$ é paralela ao eixo Oz. Logo, as coordenadas do ponto Q são $\left(a,\frac{4a}{3},0\right)$, pelo que $\overline{PQ}=4-\frac{2a}{3}$.

▪ o ponto S pertence ao eixo Ox e a aresta $[QS]$ é paralela ao eixo Oy. Logo, as coordenadas do ponto S são $(a,0,0)$, pelo que $\overline{SQ}=\frac{4a}{3}$.

▪ o ponto R pertence ao eixo Oy e a aresta $[QR]$ é paralela ao eixo Ox. Logo, as coordenadas do ponto R são $\left(0,\frac{4a}{3},0\right)$, pelo que $\overline{RQ}=a$.

O triângulo $[QRS]$ é rectângulo em Q. Assim:

$$V_{[PQRS]}=\frac{1}{3}(\text{Área da Base})\times\text{altura}=\frac{1}{3}\times A_{[QRS]}\times\overline{PQ}=\frac{1}{3}\times\frac{a\times\frac{4a}{3}}{2}\times\left(4-\frac{2a}{3}\right)=\frac{\frac{4a^2}{3}}{6}\times\left(4-\frac{2a}{3}\right)=$$

$$=\frac{2a^2}{9}\times\left(4-\frac{2a}{3}\right)=\frac{8a^2}{9}-\frac{4a^3}{27}$$