



Matemática A

12.º Ano de Escolaridade | Turma: B

Duração do Teste de Avaliação: 90 minutos | dezembro de 2022

Versão 1

Nome _____ Nº. _____

Instruções gerais

- Não é permitido o uso de corretor
- É permitido o uso de calculadora
- Para responderes aos itens de escolha múltipla, assinala de forma inequívoca, a opção escolhida, escrevendo a letra correspondente **Não apresentes cálculos nem justificações** neste tipo de itens

1. **(20 pontos)** Seja h , a função real, de variável real, definida por $h(x) = \frac{1}{x-4}$
Escreve a equação reduzida da reta tangente ao gráfico de h no ponto de abcissa 2
2. Sejam f e g , duas funções reais, de variável real, definidas, respetivamente, por $f(x) = \sqrt{2x^2 + 1} + \sqrt{2}x$
e $g(x) = \begin{cases} \frac{-4x^2 + 20x - 16}{(-9x + 36)(12 - x)} & \text{se } x < 4 \\ k^2 - \frac{5}{6} & \text{se } x = 4 \\ \frac{4\sqrt{x+5} - 12}{x^2 - 4x} & \text{se } x > 4 \end{cases}$, com $k \in \mathbb{R}$
 - 2.1. **(20 pontos)** Averigua, analiticamente, se existe algum $k \in \mathbb{R}$, para o qual a função g é contínua no ponto $x = 4$
 - 2.2. **(20 pontos)** Determina, analiticamente e caso exista, a equação da assíntota ao gráfico da função f quando $x \rightarrow -\infty$
3. **(10 pontos)** No referencial ortonormado da figura 1 encontra-se parte da representação gráfica da função f , de domínio \mathbb{R}^+ , e uma reta r tangente ao gráfico da função no ponto B de abcissa 4

Sabe-se que:

- o ponto A , de coordenadas $(0, 8)$, pertence à reta r
- o ponto C é o ponto de interseção da reta r com o eixo Ox e tem abcissa 8

Qual é o valor de $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{f(x) - f(4)}{x^2 - 16}$?

- (A) $-\frac{1}{8}$ (B) $\frac{1}{8}$ (C) $-\frac{1}{4}$ (D) $\frac{1}{4}$

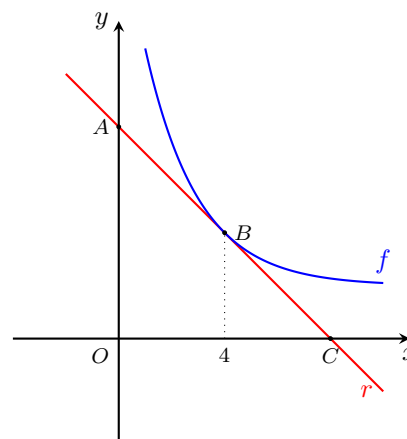


Figura 1

4. **(20 pontos)** Seja f , a função real, de variável real, contínua em $[-1; 3]$

Sabe-se que:

$$f(-1) = k^2 - 1 \text{ e } f(3) = 2 - 3k, \text{ com } k \in \mathbb{R}$$

Determina os valores de k de modo que a função f tenha pelo menos um zero no intervalo $] -1; 3[$

5. **(10 pontos)** Sejam f e g , duas funções reais, de variável real

No referencial ortonormado da figura 2 encontra-se parte da representação gráfica da função f , de domínio $[0; +\infty[$, e uma reta r tangente ao gráfico da função no ponto A

Sabe-se que:

- o ponto A tem abcissa 2
- a reta r tem equação $x - 2y + 4 = 0$
- a função g é definida por $g(x) = x^3 - 3x^2$

Qual é o valor de $\left(\frac{f}{g}\right)'(2)$?

- (A) $\frac{1}{8}$ (B) $-\frac{1}{8}$ (C) $-\frac{5}{4}$ (D) $\frac{5}{4}$

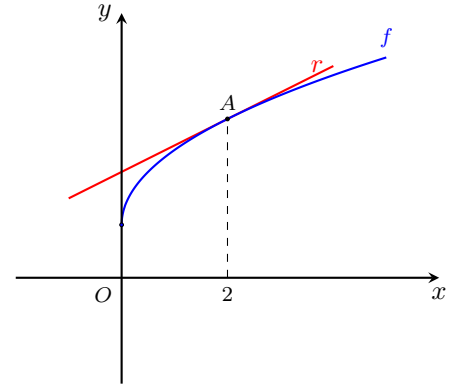


Figura 2

6. **(10 pontos)** Seja f , a função real, de variável real, de domínio \mathbb{R}^+ , definida por $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{x}$

Em qual das opções está a expressão algébrica da função derivada de f ?

- (A) $\frac{1}{2x\sqrt{x}}$ (B) $-\frac{1}{2\sqrt{x}}$ (C) $\frac{2}{x\sqrt{x}}$ (D) $-\frac{1}{2x\sqrt{x}}$

7. **(20 pontos)** Seja f , a função real, de variável real, definida por $f(x) = bx^2 + c$, com $b, c \in \mathbb{R}$ e $b \neq 0$

Mostra, pela definição de derivada num ponto, que $f'(a) = 2ab$, $\forall a \in \mathbb{R}$

8. **(10 pontos)** Seja f , uma função real de variável real, de domínio \mathbb{R}

Sabe-se que:

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 5$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - 5x + 4] = 0$

Em qual das opções está o valor de $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x-1}{f(x)}$?

- (A) 4
(B) 5
(C) $\frac{1}{5}$
(D) $\frac{1}{4}$

9. Considera a função g , real de variável real, definida por $g(x) = -\frac{1}{12}x^3 + x + 3$

No referencial ortonormado da figura 3 estão representados parte do gráfico da função g , e duas retas paralelas, r e s

Sabe-se que:

- a reta r é tangente ao gráfico da função no ponto T de abscissa a , com $a < 0$
- a reta s é tangente ao gráfico da função no ponto S de abscissa b , com $b > 0$

9.1. (20 pontos) Estuda, analiticamente, a função g quanto à monotonia e quanto à existência de extremos

Na tua resposta, apresenta o(s) intervalo(s) de monotonia

9.2. (20 pontos) Mostra, analiticamente, que $a = -b$

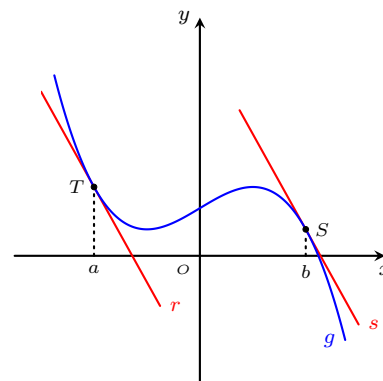


Figura 3

10. **(20 pontos)** Seja h , a função real, de variável real, definida por $h(x) = \frac{1}{x^2 - 2x}$

Resolve, em \mathbb{R} , e analiticamente, a condição $h(x) \geq \frac{x}{x-2}$

Apresenta o conjunto solução sob a forma de intervalo ou reunião de intervalos de números reais

FIM

Formulário

Regras de derivação

$$(u + v)' = u' + v'$$

$$(uv)' = u'v + uv'$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

$$(u^n)' = nu^{n-1}u' \quad (n \in \mathbb{R})$$

$$(\sqrt[n]{u})' = \frac{u'}{n\sqrt[n]{u^{n-1}}}$$