23 + curso

Matemática- 2022

1º Teste- Tópicos de resolução

Universidade do Minho
DMA

Exercício 1

a) $A = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$.

b) $C =]-\infty, 2] \cup]4, +\infty[$

$B \cap C =]0, 2] \cup]4, 5[$.

Exercício 2

a) $(x-1)(x-4) = 0 \Leftrightarrow x - 1 = 0 \vee x - 4 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \vee x = 4$

$S = \{1, 4\}$.

b) $\frac{-3(1-3x)}{3} - \frac{1-2x}{2} < 1 \Leftrightarrow \frac{-3+9x}{3} - \frac{1-2x}{2} < 1 \Leftrightarrow \frac{-6+18x}{6} - \frac{3-6x}{6} < \frac{6}{6}$

$\Leftrightarrow -6 + 18x - 3 + 6x < 6 \Leftrightarrow 24x < 15 \Leftrightarrow x < \frac{15}{24} \Leftrightarrow x < \frac{5}{8}$

$S =]-\infty, \frac{5}{8}[$.

Exercício 3 a) $\overrightarrow{AB} = B - A = (-2, 5) - (-1, 3) = (-1, 2)$

$\|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{(-1)^2 + 2^2} = \sqrt{5}$.

b) Seja $\overrightarrow{u}$ o vetor colinear com $\overrightarrow{AB}$ e com norma superior a $\overrightarrow{AB}$. Por exemplo:

$\overrightarrow{u} = (-2, 4)$.

Exercício 4 a) $y = -2x - 10$

Por exemplo: $\overrightarrow{r} = (1, -2)$.

ou

vetor perpendicular à reta r: $(2, 1)$.

vetor diretor da reta r, por exemplo: $\overrightarrow{r} = (1, -2)$.

b) $y = -2x - 10$
declive da reta r: $m_r = -2$

declive da reta s: $m_s = \frac{1}{2}$
$0 = \frac{1}{2} \times 2 + b \Leftrightarrow b = -1$

A equação reduzida da reta: $y = \dfrac{1}{2}x - 1$.

Exercício 5 a) Centro: $(3, -2)$.

Por exemplo: $x = 3$

b) $\begin{cases} (x-3)^2 + (y+2)^2 = 3 \\ x = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (4-3)^2 + (y+2)^2 = 3 \\ --- \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2 + 4y + 2 = 0 \\ --- \end{cases} \Leftrightarrow$

$\begin{cases} y = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 4 \times 2}}{2} \\ --- \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{-4 \pm \sqrt{8}}{2} \\ --- \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{-4 \pm 2\sqrt{2}}{2} \\ --- \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -2 \pm \sqrt{2} \\ --- \end{cases}$

Os pontos de interseção da reta r com a circunferência $\mathcal{C}$ são:

$P_1(4, -2 + \sqrt{2})$ e $P_2(4, -2 - \sqrt{2})$.

c) $d_{O,C} = \sqrt{(3-0)^2 + (-2-0)^2} = \sqrt{9+4} = \sqrt{13}$

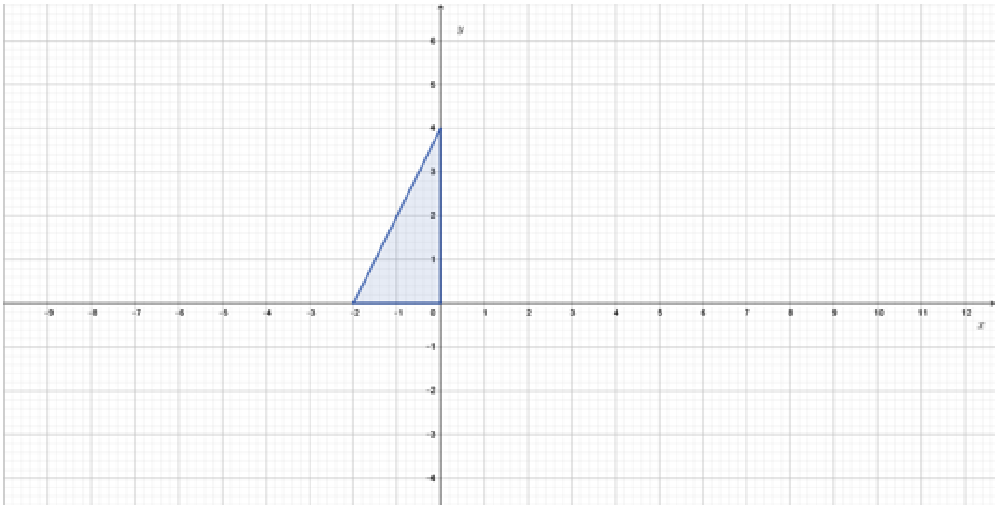
Exercício 6

$x^2 + 2x + y^2 + 4y = -1 \Leftrightarrow x^2 + 2x + 1 + y^2 + 4y + 4 = -1 + 1 + 4 \Leftrightarrow (x+1)^2 + (y+2)^2 = 4$

Coordenadas do centro: $(-1, -2)$

Raio: 2.

Exercício 7



Exercício 8 a) $3\cos\theta + 3 = 0$

$\Leftrightarrow \cos\theta = -\frac{3}{3}$

$\Leftrightarrow \cos\theta = -1$

$\Leftrightarrow \theta = \pi + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$

b) $\sqrt{2}\sin\theta - 1 = 0$

$\Leftrightarrow \sin\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$\Leftrightarrow \sin\theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$\Leftrightarrow \theta = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \vee \theta = \pi - \frac{\pi}{4} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$

$\Leftrightarrow \theta = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \vee \theta = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$

Exercício 9 $\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{3\pi}{2}$ e $\tan\theta > 0$ logo θ é um ângulo do 3º quadrante. Então $\cos\theta < 0$.

De $\tan^2\theta + 1 = \dfrac{1}{\cos^2\theta}$, vem

$$\left(\frac{5}{3}\right)^2 + 1 = \frac{1}{\cos^2\theta} \Leftrightarrow \frac{25}{9} + 1 = \frac{1}{\cos^2\theta} \Leftrightarrow \frac{1}{\cos^2\theta} = \frac{34}{9} \Leftrightarrow \cos^2\theta = \frac{9}{34} \Leftrightarrow \cos\theta = \pm\sqrt{\frac{9}{34}}$$

Como $\cos\theta < 0$, então $\cos\theta = -\dfrac{3\sqrt{34}}{34}$.

Exercício 10 $\sin\theta \times \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta} + \cos\theta = \dfrac{\sin^2\theta}{\cos\theta} + \cos\theta = \dfrac{\sin^2\theta + \cos^2\theta}{\cos\theta} = \dfrac{1}{\cos\theta}$.