1.

1.1. O correspondente tem três opções para a distribuição dos inquéritos pelos dois dias:

- realizar dez inquéritos no dia 1 e oito inquéritos no dia 2: ${}^{18}C_{10}$
- realizar nove inquéritos no dia 1 e nove inquéritos no dia 2: ${}^{18}C_{9}$
- realizar oito inquéritos no dia 1 e dez inquéritos no dia 2: ${}^{18}C_{8}$

O número de formas distintas é ${}^{18}C_{10} + {}^{18}C_{9} + {}^{18}C_{8} = 136\,136$.

Resposta: (B)

1.2. Do enunciado tem-se que $P(A) = \frac{4}{5}$ e $P(B|\overline{A}) = \frac{1}{5}$, vindo então:

$$P\left(\overline{A}|(A\cup B)\right) = \frac{P\left(\overline{A}\cap(A\cup B)\right)}{P(A\cup B)} = \frac{P\left((\overline{A}\cap A)\cup(\overline{A}\cap B)\right)}{P(A\cup B)} \overset{(1)}{=} \frac{P(\overline{A}\cap B)}{P(A)+P(B)-P(A\cap B)} \overset{(2)}{=} \frac{P(\overline{A}\cap B)}{P(A)+P(\overline{A}\cap B)}$$

$$= \frac{P(B|\overline{A})\times P(\overline{A})}{P(A)+P(B|\overline{A})\times P(\overline{A})} \overset{(3)}{=} \frac{\frac{1}{5}\times\frac{1}{5}}{\frac{4}{5}+\frac{1}{5}\times\frac{1}{5}} = \frac{1/25}{21/25} = \frac{1}{21}$$

em que se usou o facto de $\overline{A}\cap A = \varnothing$ em (1), a propriedade $P(B) - P(A\cap B) = P(\overline{A}\cap B)$ em (2), e, por fim, o facto de $P(\overline{A}) = 1 - P(A) = 1 - \frac{4}{5} = \frac{1}{5}$ em (3).

1.3. Seja n o número de inquiridos no segundo inquérito. Sabe-se que $\frac{3}{10}n$ selecionaram o álbum *Abbey Road* como aquele que consideram ser o melhor álbum da banda. Logo, $\frac{7}{10}n$ não selecionaram esse álbum como o que consideram ser o melhor álbum da banda.

Note-se que, escolhendo dois inquiridos no segundo inquérito, pelo menos um deles não ter considerado o álbum *Abbey Road* como o melhor da banda é o acontecimento contrário a ambos terem considerado esse álbum como o melhor da banda. Desta forma:

$$1 - \frac{\frac{3}{10}\cancel{n}\left(\frac{3}{10}n-1\right)}{\cancel{n}(n-1)} = \frac{31}{34} \Leftrightarrow \frac{3}{10}\cdot\frac{\frac{3}{10}n-1}{n-1} = \frac{3}{34} \Leftrightarrow \frac{\frac{3}{10}n-1}{n-1} = \frac{5}{17} \overset{n>1}{\Leftrightarrow} 17\left(\frac{3}{10}n-1\right) = 5(n-1) \Leftrightarrow \frac{51}{10}n - 17 = 5n-5$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{51}{10}-5\right)n = 12 \Leftrightarrow \frac{1}{10}n = 12 \Leftrightarrow n = 120$$

Conclui-se que foram inquiridas 120 pessoas no segundo inquérito.

2. O maior elemento da linha n do Triângulo de Pascal é o elemento central dessa mesma e tem valor a. A linha par seguinte é a linha $n+2$ e o maior elemento dessa linha tem valor b. Seja x o segundo maior elemento da linha n.

Pode-se usar o esquema abaixo

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
 & & 1 & \ldots & x & & a & & x & \ldots & 1 & & \\
 & 1 & \ldots & & & x+a & & x+a & & & \ldots & 1 & \\
1 & \ldots & & & & & b & & & & & \ldots & 1
\end{array}$$

em que se usaram as propriedade ${}^{n+1}C_{p+1} = {}^{n}C_{p} + {}^{n}C_{p+1}$ e ${}^{n}C_{p} = {}^{n}C_{n-p}$.

Conclui-se então que: $b = x + a + x + a \Leftrightarrow 2x = b - 2a \Leftrightarrow x = \frac{b}{2} - a$

Resposta: (D)

3. A mediatriz do segmento $[AB]$ interseta esse mesmo segmento no seu ponto médio, M. Desta forma, tem-se que M tem coordenadas $(2,1)$.

A reta AB é perpendicular à mediatriz do segmento $[AB]$, pelo que o seu declive é $m = -\frac{1}{2}$, pelo que a equação reduzida da reta é da forma $y = -\frac{1}{2}x + b$. Como passa no ponto $(2,1)$ tem-se $1 = -\frac{1}{2} \times 2 + b \Leftrightarrow b = 2$. Resulta então que a equação reduzida da reta AB é $y = -\frac{1}{2}x + 2$. Logo, como o ponto A tem abcissa 6, a sua ordenada é $y = -\frac{1}{2} \times 6 + 2 = -3 + 2 = -1$.

A ordenada do ponto M, y_M, tratando-se da ordenada do ponto médio do segmento $[AB]$, é dada por:

$$y_M = \frac{y_A + y_B}{2} \Leftrightarrow 1 = \frac{-1 + y_B}{2} \Leftrightarrow -1 + y_B = 2 \Leftrightarrow y_B = 3.$$

Resposta: (A)

4.

4.1. Como a reta AP é paralela ao plano α, tem-se que o vetor $\overrightarrow{AP}$ é perpendicular ao vetor normal ao plano α, $\overrightarrow{n_\alpha}(2,1,-3)$. Desta forma, pode escrever-se $\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{n_\alpha} = 0$.

Como $\overrightarrow{AP} = P - A = (a, 1-a, -3) - (2,2,-6) = (a-2, -1-a, 3)$, vem então que:

$$\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{n_\alpha} = 0 \Leftrightarrow (a-2, -1-a, 3) \cdot (2,1,-3) = 0 \Leftrightarrow 2(a-2) + (-1-a) + 3(-3) = 0 \Leftrightarrow 2a - 4 - 1 - a - 9 = 0 \Leftrightarrow a = 14$$

Conclui-se que o valor de a é 14.

4.2. A superfície esférica S tem centro em $A(2,2-6)$ e raio $6\sqrt{2}$, pelo que uma equação que a define é:

$$(x-2)^2 + (y-2)^2 + (z+6)^2 = \left(6\sqrt{2}\right)^2 \Leftrightarrow (x-2)^2 + (y-2)^2 + (z+6)^2 = 72.$$

As coordenadas do ponto T são da forma $(0,0,z_T)$ com $z_T > 0$. Como T pertence à superfície esférica S tem-se:

$$(0-2)^2 + (0-2)^2 + (z_T+6)^2 = 72 \Leftrightarrow 4 + 4 + (z_T+6)^2 = 72 \Leftrightarrow (z_T+6)^2 = 64 \Leftrightarrow z_T + 6 = \pm\sqrt{64} \Leftrightarrow z_T + 6 = \pm 8$$

$$\Leftrightarrow z_T = -6 \pm 8 \Leftrightarrow z_6 = -6 + 8 \vee z_T = -6 - 8 \Leftrightarrow z_T = 2 \vee z_T = -14 \overset{z_T > 0}{\Leftrightarrow} z_T = 2$$

Como $\overrightarrow{AT} = T - A = (0,0,2) - (2,2,-6) = (-2,-2,8)$ tem a mesma direção do vetor $(1,1,-4)$, uma equação vetorial que define a reta AT é $(x,y,z) = (0,0,2) + k(1,1,-4)$, $k \in \mathbb{R}$. Desta forma, as coordenadas genéricas de um ponto da reta AT são $(k,k,2-4k)$.

As coordenadas do ponto de interseção entre a reta AT e o plano α são da forma $(k,k,2-4k)$ e respeitam a equação $2x + y - 3z = 9$, logo:

$$2k + k - 3(2-4k) = 9 \Leftrightarrow 3k - 6 + 12k = 9 \Leftrightarrow 15k = 15 \Leftrightarrow k = 1$$

concluindo-se que as coordenadas do ponto pretendido são $(1,1,2-4\times 1)$, isto é, $(1,1,-2)$.

5. Note-se que $\cos(\pi + \alpha) = -\cos\alpha$, pelo que deve ser determinado o valor de $\cos\alpha$ para resolver o problema.

O ponto A tem coordenadas $\left(1, \operatorname{tg}\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right)\right)$, e como $\operatorname{tg}\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) = -\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha} = \frac{3}{2}$, vem que $\operatorname{tg}\alpha = -\frac{2}{3}$.

Desta forma:

$$1 + \operatorname{tg}^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha} \Leftrightarrow \cos\alpha = \pm\sqrt{\frac{1}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}} \overset{(1)}{\Leftrightarrow} \cos\alpha = -\frac{1}{\sqrt{1+\left(-\frac{2}{3}\right)^2}} \Leftrightarrow \cos\alpha = -\frac{1}{\sqrt{1+\frac{4}{9}}} \Leftrightarrow \cos\alpha = -\frac{3}{\sqrt{13}}$$

em que se usou o facto de $\cos\alpha < 0$, $\forall\alpha \in \left]\frac{\pi}{2}, \alpha\right[$ em (1).

Conclui-se então que $\cos(\pi + \alpha) = -\cos\alpha = -\left(-\frac{3}{\sqrt{13}}\right) = \frac{3}{\sqrt{13}} \approx 0{,}83$.

Resposta: (D)

6. Tem-se que $v_2 = -1$ e $v_6 = -\dfrac{1}{16}$. Considerando r a razão da progressão geométrica (v_n), pode-se escrever:

$$v_6 = v_2 \times r^4 \Leftrightarrow r^4 = \frac{v_6}{v_2} \Leftrightarrow r = \pm\sqrt[4]{\frac{-1/16}{-1}} \overset{(1)}{\Leftrightarrow} r = -\sqrt[4]{\frac{1}{16}} \Leftrightarrow r = -\frac{1}{2}$$

em que se usou, em **(1)**, o facto de (v_n) ser uma progressão geométrica não monótona para concluir que a sua razão é negativa.

O termo geral de (v_n) é $v_n = v_2 \times r^{n-2} = -1 \times \left(-\dfrac{1}{2}\right)^{n-2} = -1 \times (-1)^{n-2} \times \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-2} = (-1)^{n-1}\, 2^{2-n}$.

O termo geral de (u_n) é então:

$$u_n = (-1)^n\ (nv_n) = (-1)^n\ \left(n\,(-1)^{n-1}\,2^{2-n}\right) = (-1)^{2n-1}\ n\ 2^{2-n} \overset{(2)}{=} -n\ 2^{2-n}$$

em que se usou o facto de $(-1)^{2n-1} = -1, \forall n \in \mathbb{N}$ em **(2)**.

De forma a analisar a monotonia de (u_n) para $n \geq 2$, determine-se $u_{n+1} - u_n$:

$$u_{n+1} - u_n = -(n+1)\ 2^{2-(n+1)} - \left(-n\ 2^{2-n}\right) = -(n+1)2^{1-n} + n\ 2^{2-n} = 2^{1-n}\left(-(n+1) + 2n\right) = 2^{1-n}\,(n-1) > 0, \forall n \geq 2$$

Conclui-se então que (u_n) é crescente para todo o $n \in \mathbb{N}$, tal que $n \geq 2$.

7.

7.1. A função f é contínua no seu domínio, logo, é contínua no ponto de abcissa -2, isto é, $\lim\limits_{x\to -2^-} f(x) = f(-2) = \lim\limits_{x\to -2^+} f(x)$.

Tem-se então:

$$\lim_{x\to -2^-} f(x) = \lim_{x\to -2^-} \frac{2x+4}{\sqrt{21+x^2}-5} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x\to -2^-}\left(\frac{2x+4}{\sqrt{21+x^2}-5}\,\frac{\left(\sqrt{21+x^2}+5\right)}{\left(\sqrt{21+x^2}+5\right)}\right) = \lim_{x\to -2^-}\frac{2(x+2)}{\left(\sqrt{21+x^2}\right)^2-5^2} \times \lim_{x\to -2^-}\left(\sqrt{21+x^2}+5\right)$$

$$= 2\left(\sqrt{21+(-2)^2}+5\right)\lim_{x\to -2^-}\frac{(x+2)}{21+x^2-25} \times = 2\left(\sqrt{25}+5\right)\lim_{x\to -2^-}\frac{x+2}{x^2-4} = 20\lim_{x\to -2^-}\frac{\cancel{x+2}}{(x-2)\cancel{(x+2)}}$$

$$= 20 \times \frac{1}{-2-2} = -\frac{20}{4} = -5$$

$$\lim_{x\to -2^+} f(x) = f(-2) = \frac{1}{3}(-2-1)^3 - (-2) + k = \frac{1}{3}(-3)^3 + 2 + k = \frac{-27}{3} + 2 + k = -9 + 2 + k = -7 + k$$

logo tem-se $-7 + k = -5 \Leftrightarrow k = 2$, como se pretendia mostrar.

7.2. A reta s é a reta tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa a, pelo que o seu declive é $f'(a)$, logo, a equação reduzida da reta s é da forma $y = f'(a)x+b$. Como s contém o ponto de coordenadas $(a, f(a))$, vem $f(a) = f'(a)a+b \Leftrightarrow b = f(a)-f'(a)a$. A equação reduzida de s é então $y = f'(a)x + f(a) - f'(a)a$, pelo que, o ponto B, interseção de s com o eixo Oy, tem então coordenadas $\left(0, f(a) - f'(a)a\right)$.

Considerem-se os valores, d_A e d_B, que dizem respeito à distância entre o ponto O e o ponto A, e à distância entre o ponto O e o ponto B, respetivamente. Estes valores podem ser dados, para um dado a, por:

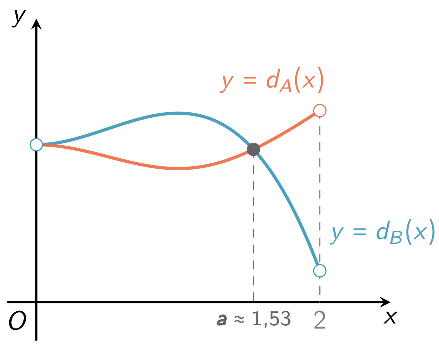
- $d_A = \sqrt{(a-0)^2 + (f(a)-0)^2} = \sqrt{a^2 + f^2(a)}$
- $d_B = \sqrt{(0-0)^2 + (f(a) - f'(a)a - 0)^2} = \sqrt{(f(a) - f'(a)a)^2}$

em que $f'(a) = \left.\left(\dfrac{1}{3}(x-1)^3 - x + 2\right)'\right|_{x=a} = \left.\left(\dfrac{1}{3} \times 3(x-1)^2(x-1)' - 1 + 0\right)\right|_{x=a} = \left.\left((x-1)^2 - 1\right)\right|_{x=a} = (a-1)^2 - 1.$

Na figura ao lado estão representados os gráficos das duas curvas $d_A(x) = \sqrt{x^2 + f^2(x)}$ e $d_B(x) = \sqrt{(f(x) - f'(x)x)^2}$ em $]0,2[$.

Recorrendo às capacidades gráficas da calculadora pode ser resolvida a equação $d_A(x) = d_B(x)$, de forma a determinar a solução do problema.

Conclui-se então que existe um só ponto em $]0,2[$ que é solução dessa equação. A abcissas desse mesmos é o valor de a: $a \approx 1{,}53$.



8. Como o gráfico de f interseta o eixo Ox no ponto de abcissa $\frac{\pi}{2}$ tem-se que $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$.

Tem-se que:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{sen}(2x) - f(x)}{2x - \pi} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{sen}(2x)}{2\left(x - \frac{\pi}{2}\right)} - \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{f(x) - f\left(\frac{\pi}{2}\right)}{2\left(x - \frac{\pi}{2}\right)} \overset{(1)}{=} \frac{1}{2}\lim_{y\to 0} \frac{\operatorname{sen}(2y + \pi)}{y} - \frac{1}{2}\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{f(x) - f\left(\frac{\pi}{2}\right)}{x - \frac{\pi}{2}}$$
$$\overset{(2)}{=} -\frac{1}{2}\lim_{y\to 0} \frac{\operatorname{sen}(2y)}{y} - \frac{1}{2}f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{1}{2} \times 2 \lim_{2y\to 0} \frac{\operatorname{sen}(2y)}{2y} - \frac{1}{2}f'\left(\frac{\pi}{2}\right) \overset{(3)}{=} -1 - \frac{1}{2}f'\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

em que se usou a mudança de variável $y = x - \frac{\pi}{2}$ tal que $x \to \frac{\pi}{2} \Rightarrow y \to 0$ em (1). Usou-se a propriedade $\operatorname{sen}(2y+\pi) = -\operatorname{sen}(2y)$ e a definição de derivada em (2). Por fim, usou-se o limite notável $\lim_{u\to 0} \frac{\operatorname{sen} u}{u} = 1$ em (3).

Como se sabe que $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{sen}(2x) - f(x)}{2x - \pi} = 2$, vem que $-1 - \frac{1}{2}f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2 \Leftrightarrow -\frac{1}{2}f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 3 \Leftrightarrow f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -6$.

Resposta: (A)

9. O triângulo $[AOB]$ é isósceles, pelo que a amplitude do ângulo OBA é igual à amplitude do ângulo OAB, α.

Pode-se escrever $O\hat{A}B + O\hat{B}A + A\hat{O}B = \pi \Leftrightarrow A\hat{O}B = \pi - 2\alpha \Leftrightarrow A\hat{O}B = \pi - 2 \times \frac{\pi}{12} \Leftrightarrow A\hat{O}B = \frac{5\pi}{6}$.

Obtém-se então $\operatorname{Arg}(z) + \frac{5\pi}{6} = \operatorname{Arg}(w) \Leftrightarrow \operatorname{Arg}(z) = \frac{23\pi}{24} - \frac{5\pi}{6} \Leftrightarrow \operatorname{Arg}(z) = \frac{\pi}{8}$, e como A e B pertencem à mesma semicircunferência centrada na origem, tem-se que $|z| = |w| = 2$. Desta forma, o número complexo z pode ser representado por $z = 2e^{i\left(\frac{\pi}{8}\right)}$.

Conclui-se então que $iz = e^{i\left(\frac{\pi}{2}\right)} \times e^{i\left(\frac{\pi}{8}\right)} = e^{i\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{8}\right)} = e^{i\frac{5\pi}{8}}$.

Resposta: (B)

10. Como $i^{21} = i^{20} \times i = 1 \times i = i$ e $\overline{z_2} = -1 - \sqrt{3}i$, tem-se:

$$z = \frac{z_1 + 7i^{21}}{4i} + \overline{z_2} = \frac{-2\sqrt{3} - i + 7i}{4i} + \left(-1 - \sqrt{3}i\right) = \frac{-2\sqrt{3}}{4i} + \frac{6i}{4i} - 1 - \sqrt{3}i = \frac{-\sqrt{3}(-i)}{2i(-i)} + \frac{3}{2} - 1 - \sqrt{3}i = \frac{\sqrt{3}i}{-2i^2} + \frac{1}{2} - \sqrt{3}i$$
$$= \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}i}{-2(-1)} - \sqrt{3}i = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i = \cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\operatorname{sen}\left(-\frac{\pi}{3}\right) = e^{i\left(-\frac{\pi}{3}\right)}.$$

Tem-se então:

$$w = \frac{z}{\left(re^{i\theta}\right)^3} = \frac{e^{i\left(-\frac{\pi}{3}\right)}}{r^3 e^{i(3\theta)}} = \frac{1}{r^3}e^{i\left(-\frac{\pi}{3}-3\theta\right)},$$ pelo que $|w| = \frac{1}{r^3}$ e um argumento de w é $-\frac{\pi}{3} - 3\theta$.

Como o afixo de w pertence à circunferência centrada na origem de raio 8, tem-se que $|w| = 8$. Uma vez que também pertence à bissetriz dos quadrantes pares, sabe-se que o seu argumento é da forma $-\frac{\pi}{4} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

Desta forma pode ser escrito o sistema abaixo:

$$\begin{cases} |w| = 8 \\ \text{Arg}(w) = -\frac{\pi}{4} + \pi k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{r^3} = 8 \\ -\frac{\pi}{3} - 3\theta = -\frac{\pi}{4} + \pi k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r = \sqrt[3]{\frac{1}{8}} \\ -3\theta = \frac{\pi}{12} + \pi k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r = \frac{1}{2} \\ \theta = -\frac{\pi}{36} - \frac{\pi}{3}k \end{cases}$$

de onde vem que $r = \frac{1}{2}$, e como $\theta = -\frac{\pi}{36} - \frac{\pi}{3}k \wedge \theta \in \left]-\frac{\pi}{4}, 0\right[$, tem-se, para $k = 0$, $\theta = -\frac{\pi}{36}$.

11. Como $-\pi \leq x \leq \pi \Rightarrow -1 \leq \cos x \leq 1$, tem-se que o contradomínio de h é o contradomínio da restrição da função f ao intervalo $[-1,1]$. Logo, o contradomínio de h é $[0,3]$.

Resposta: (C)

12. A função f tem dois pontos de inflexão em $x = -1$ e em $x = 0$. Note-se que a segunda derivada de f não muda de sinal em $x = 4$, pelo que o ponto do gráfico de f de abcissa 4 não é um ponto de inflexão.

A função g definida, em $\mathbb{R}$, por $g(x) = f(x-1)$ é tal que $g''(x) = f''(x-1)$, pelo que o seu gráfico pode ser obtido através de uma translação horizontal do gráfico de f'' em uma unidade no sentido positivo. Desta forma, tal como o gráfico de f, o gráfico de g também admite dois pontos de inflexão. São eles respetivos aos pontos do gráfico de g de abcissa $x = 0$ e $x = 1$. Logo, a afirmação **I)** é falsa.

Note-se que $f''(x) > 0, \forall x \in]0,4[$, pelo que a função f' é crescente neste intervalo. Como se sabe que $f'(0) = 0$, tem-se que $f'(x) > f'(0) = 0, \forall x \in]0,4[$. Desta forma, como a primeira derivada de f é positiva em $]0,4[$, conclui-se que f é crescente neste intervalo. Logo, a afirmação **II)** é verdadeira.

Resposta: (C)

13.

13.1. Começando por equacionar o problema, pode-se escrever que se pretende mostrar que existe, pelo menos, uma solução da equação $g'(x) = -x^2$ em $]1,3[$, isto é, pretende mostrar-se que $\exists c \in]1,3[: g'(c) = -c^2$.

Seja h a função definida, em $\mathbb{R}^+$, por $h(x) = g'(x) + x^2$. Mostrar que existe, pelo menos, uma solução da equação $g'(x) = -x^2$ em $]1,3[$ é equivalente a mostrar que existe, pelo menos, um zero da função h nesse intervalo. Note que a função h é uma função contínua em $[1,3]$, pois resulta da soma e diferença de funções contínuas (polinomial) e composição de funções contínuas (logarítmica e exponencial) nesse intervalo. Estão então reunidas as condições de aplicação do Teorema de Bolzano-Cauchy, pelo que obtemos:

- $h(1) = g'(1) + 1^2 = -4 + \ln(e^2 - 1) + 1 = -3 + \ln(e^2 - 1) \approx -1{,}15$
- $h(3) = g'(3) + 3^2 = -4 \times 3 + \ln(e^{(2\times 3)} - 1) + 3^2 = -3 + \ln(e^6 - 1) \approx 3{,}00$

Como $h(1) \times h(3) < 0$, e h é contínua em $[1,3]$, conclui-se, pelo corolário do Teorema de Bolzano-Cauchy, que a função h admite, pelo menos, um zero em $]1,3[$. Equivalentemente, tal como pretendido, está provado que existe, pelo menos, uma solução da equação $g'(x) = -x^2$ em $]1,3[$.

13.2. A segunda derivada de g, g'', é dada por:

$$g''(x) = \left(-4x + \ln\left(e^{2x} - 1\right)\right)' = (-4x)' + \left(\ln\left(e^{2x} - 1\right)\right)' = -4 + \frac{(e^{2x} - 1)'}{e^{2x} - 1} = -4 + \frac{2e^{2x}}{e^{2x} - 1} = \frac{-4(e^{2x} - 1) + 2e^{2x}}{e^{2x} - 1}$$

$$= \frac{-2e^{2x} + 4}{e^{2x} - 1} = \frac{-2\left(e^{2x} - 2\right)}{e^{2x} - 1}$$

pelo que, em $\mathbb{R}^+$, os zeros de g'' são:

$$g''(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{-2\left(e^{2x} - 2\right)}{e^{2x} - 1} = 0 \Leftrightarrow e^{2x} - 2 = 0 \wedge e^{2x} - 1 \neq 0 \overset{(1)}{\Leftrightarrow} e^{2x} = 2 \Leftrightarrow 2x = \ln 2 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}\ln 2 \Leftrightarrow x = \ln\sqrt{2}$$

em que se usou o facto de $e^{2x} - 1 > 0, \forall x \in \mathbb{R}^+$ em **(1)**.

Através de uma tabela de sinal tem-se:

x	0		$\ln\sqrt{2}$	$+\infty$
$g''(x)$	ND	+	0	−
$g(x)$	ND	$\cup$	**p.i**	$\cap$

Conclui-se então que:

- o gráfico de g tem concavidade voltada para cima em $\left]0, \ln\sqrt{2}\right]$;
- o gráfico de g tem concavidade voltada para baixo em $\left[\ln\sqrt{2}, +\infty\right[$;
- o gráfico de g admite um pontos de inflexão no pontos de abcissa $x = \ln\sqrt{2}$.

FIM