1. Se temos 8 termos no desenvolvimento então $n = 7$.

Todos os termos do desenvolvimento de $(a+b)^n$ têm a seguinte forma:

$$^nC_p a^{n-p} b^p$$

Logo, neste caso, ficamos com:

$$^7C_{7-p}\left(x^3\right)^{7-p}\left(e^{k-b}\right)^p = {}^7C_p x^{21-3p} e^{kp-bp}$$

Como sabemos que um dos termos é $70\sqrt{e^{6k}} \times x^9$ então

$$21 - 3p = 9 \Leftrightarrow p = 4$$

Substituindo na expressão anterior:

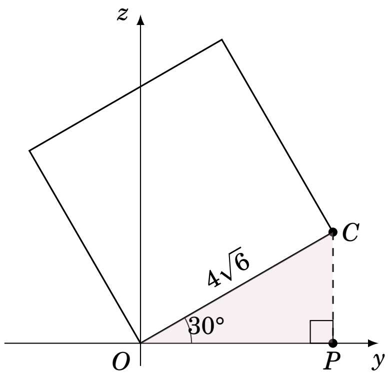
$$\begin{aligned}
& {}^7C_4 \cancel{x^9} e^{4k-4b} = 70\sqrt{e^{6k}} \times \cancel{x^9} \\
\Leftrightarrow\ & 35e^{4k-4b} = 70e^{3k} \\
\Leftrightarrow\ & \frac{e^{4k-4b}}{e^{3k}} = 2 \\
\Leftrightarrow\ & e^{k-4b} = 2 \\
\Leftrightarrow\ & k - 4b = \ln 2 \\
\Leftrightarrow\ & k = \ln 2 + 4b \\
\Leftrightarrow\ & k = \ln 2 + \ln\left(e^{4b}\right) \\
\Leftrightarrow\ & k = \ln\left(2e^{4b}\right)
\end{aligned}$$

Opção: $\boxed{\text{A}}$

2.

2.1 Como sabemos que o ponto A tem coordenadas $\left(4\sqrt{6}, 0, 0\right)$ então $\overline{OA} = 4\sqrt{6}$. Sendo $[ABCODEFG]$ um cubo então sabemos também que todas as arestas têm o mesmo comprimento, e por conseguinte, $\overline{OC} = 4\sqrt{6}$.

Considerando o plano yOz temos:



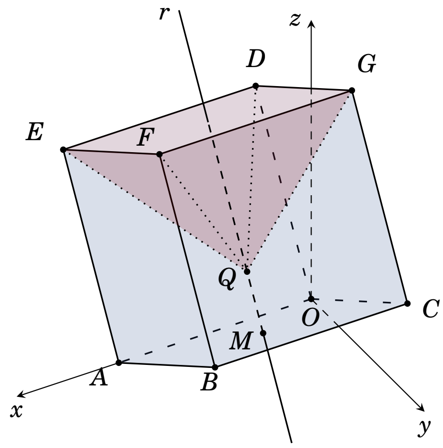
$$\sin 30° = \frac{\overline{CP}}{4\sqrt{6}} \Leftrightarrow \overline{CP} = 4\sqrt{6} \times \frac{1}{2} \Leftrightarrow \overline{CP} = 2\sqrt{6}$$

$$\cos 30° = \frac{\overline{OP}}{4\sqrt{6}} \Leftrightarrow \overline{OP} = 4\sqrt{6} \times \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow$$
$$\overline{OP} = 2\sqrt{18} \Leftrightarrow \overline{OP} = 6\sqrt{2}$$

Assim sendo, $C\left(0, 6\sqrt{2}, 2\sqrt{6}\right)$.

Agora, com os pontos A e C, podemos determinar as coordenadas do ponto $M\left(x_M, y_M, z_M\right)$, uma vez que é o ponto médio do $[AC]$.

$$x_M = \frac{4\sqrt{6}+0}{2} = 2\sqrt{6}$$
$$y_M = \frac{0+6\sqrt{2}}{2} = 3\sqrt{2}$$
$$z_M = \frac{0+2\sqrt{6}}{2} = \sqrt{6}$$



$$M\left(2\sqrt{6}, 3\sqrt{2}, \sqrt{6}\right)$$

Como sabemos que r tem a mesma direção da reta CG e a face $[OCGD]$ está no plano yOz, podemos determinar um vector diretor de r, chamemos-lhe $\vec{u}$, rapidamente:

$$\overrightarrow{OC} = \left(0, 6\sqrt{2}, 2\sqrt{6}\right)$$

logo

$$\overrightarrow{CG} = \left(0, -2\sqrt{6}, 6\sqrt{2}\right)$$

e podemos determinar um vetor colinear com este multiplicando todas as coordenadas por $\frac{1}{2\sqrt{2}}$, ficando:

$$\vec{u} = \frac{1}{2\sqrt{2}}\left(0, -2\sqrt{6}, 6\sqrt{2}\right) = \left(0, -\sqrt{3}, 3\right)$$

Então uma equação da reta r pode ser a apresentada.

2.2 Seja $Q\left(x_Q, y_Q, z_Q\right)$.

Sendo paralelo a xOy, a equação do plano BQC é $z = 2\sqrt{6}$, logo, $z_Q = 2\sqrt{6}$

Recorrendo à equação da reta apresentada na alínea anterior,

$$2\sqrt{6} = \sqrt{6} + 3k \Leftrightarrow k = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

e, portanto:

$$x_Q = 2\sqrt{6} + \frac{\sqrt{6}}{3} \times 0 = 2\sqrt{6}$$

$$y_Q = 3\sqrt{2} + \frac{\sqrt{6}}{3} \times \left(-\sqrt{3}\right) = 2\sqrt{2}$$

O que permite concluir que $Q\left(2\sqrt{6}, 2\sqrt{2}, 2\sqrt{6}\right)$.

3. Considerando o primeiro ponto do enunciado, temos duas situações distintas que é importante considerar.

A primeira em que ainda temos um número cujo algarismo das dezenas é o 1:

$$\begin{array}{cccccc} & & & & 1 & 7{,}9 \\ \underline{\qquad} & \underline{\qquad} & \underline{\qquad} & \underline{\qquad} & \underline{\qquad} & \underline{\qquad} \\ & & & & 1 & 2 \end{array}$$

e a segunda em que já não temos o 1 como algarismo das dezenas:

$$\begin{array}{cccccc} & & & & 2{,}3{,}4{,} & 1{,}3{,}5{,} \\ & & & & \ldots{,}9 & 7{,}9 \\ \underline{\qquad} & \underline{\qquad} & \underline{\qquad} & \underline{\qquad} & \underline{\qquad} & \underline{\qquad} \\ & & & & 8 & 5 \end{array}$$

Para o segundo ponto do enunciado, temos de te ter em conta que a palavra "matemática" tem 6 letras distintas e que uma e só uma delas tem de aparecer na combinação, sendo um dos espaços ocupado por ela enquanto que no outro apenas podem aparecer as restantes letras (20):

$$\begin{array}{cccccc} & & \text{A,C,E,} & & & \\ & & \text{I,M,T} & \text{restantes} & & \\ \underline{\qquad} & \underline{\qquad} & \underline{\qquad} & \underline{\qquad} & \underline{\qquad} & \underline{\qquad} \\ & & 6 & 20 & & \\ & & \multicolumn{2}{c}{\times 2} & & \end{array}$$

No terceiro ponto do enunciado apenas é pedido que o primeiro dígito seja um número primo, nada sendo imposto no segundo, temos:

$$\begin{array}{cccccc} 2{,}3{,} & & & & & \\ 5{,}7 & \text{todos} & & & & \\ \underline{\qquad} & \underline{\qquad} & \underline{\qquad} & \underline{\qquad} & \underline{\qquad} & \underline{\qquad} \\ 4 & 10 & & & & \end{array}$$

A solução será:

$$4 \times 10 \times 6 \times 20 \times 2 \times (1 \times 2 + 8 \times 5) = 403200$$

Opção: $\boxed{\text{A}}$

4.

4.1 Sejam:

A: «A bola é preta.»

B: «A bola está numerada com um número par.»

Do enunciado sai que:

- $P(A) = 0{,}625$
- $P(B|A) = \frac{3}{5}$
- $P\left(\overline{A}\middle|B\right) = \frac{1}{3}$

Queremos saber o valor de $P\left(\overline{B}\right)$.

Como

$$P(B|A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)}$$

temos

$$\begin{aligned} \frac{3}{5} &= \frac{P(B \cap A)}{0{,}625} \\ \Leftrightarrow \frac{3}{5} \times 0{,}625 &= P(B \cap A) \\ \Leftrightarrow \quad \frac{3}{8} &= P(B \cap A) \end{aligned}$$

Sabemos também que:

$$P\left(\overline{A}\middle|B\right) = 1 - P(A|B) = 1 - \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

portanto:

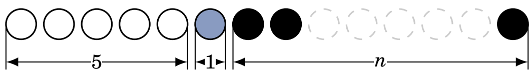
$$\begin{aligned} \frac{1}{3} &= 1 - \frac{\frac{3}{8}}{P(B)} \\ \Leftrightarrow P(B) &= \frac{\frac{3}{8}}{\frac{2}{3}} \\ \Leftrightarrow P(B) &= \frac{9}{16} \end{aligned}$$

Assim sendo:

$$P\left(\overline{B}\right) = 1 - \frac{9}{16} = 43{,}75\%$$

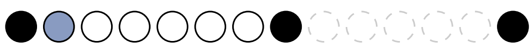
4.2 De acordo com a definição de X e Y feita no enunciado, $P(Y|X)$ é a probabilidade de as bolas com a mesma cor serem extraídas consecutivamente sabendo que isso acontece com as bolas brancas. Assim, apenas temos de considerar o que acontece com as pretas (à falta de um valor concreto para o seu número vamos considerar n) e com a azul mas também com o posicionamento dos três grupos de cores presentes na extração.

Podemos visualizar uma das situações que queremos que aconteça (casos favoráveis):



Claro que os grupos podem trocar de posição entre si e, por isso, o número de casos favoráveis é: $3! = 6$.

No entanto, podemos ter um caso assim:



Para contarmos todas as situações possíveis vamos considerar que temos n bolas pretas, 1 bola azul e 1 grupo de bolas brancas que estará sempre junto, o que perfaz um total de $n+2$ elementos/espaços. Vamos começar por colocar todas as bolas pretas - n - nos $n+2$ espaços:

$$^{n+2}C_n = \frac{(n+2)!}{n!(n+2-n)!} = \frac{(n+2)(n+1)}{2}$$

Isto terá de ser multiplicado pelas trocas entre a bola azul e o grupo de bolas brancas, assim:

$$\frac{(n+2)(n+1)}{2} \times 2 = (n+2)(n+1)$$

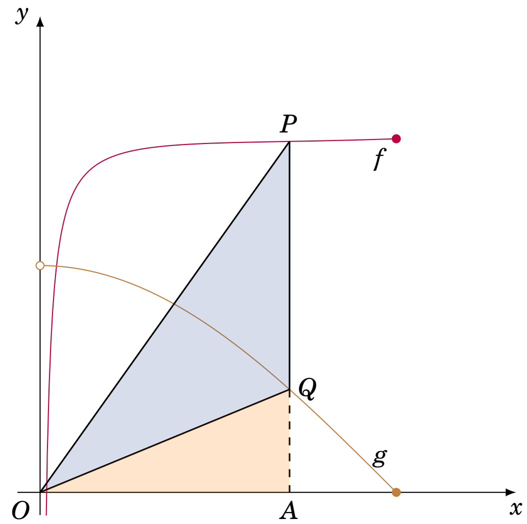
Assim sendo:

$$\begin{aligned} & \frac{6}{(n+2)(n+1)} && = \frac{1}{22} \\ \Leftrightarrow\ & 132 && = n^2+3n+2 \\ \Leftrightarrow\ & n^2+3n-130 && = 0 \\ \Leftrightarrow\ & \boxed{n=10} \vee n=-13 \notin \mathbb{N} \end{aligned}$$

Usando a fórmula resolvente

Temos $10+5+1 = 16$ bolas dentro da caixa.

5. Vamos considerar o seguinte:



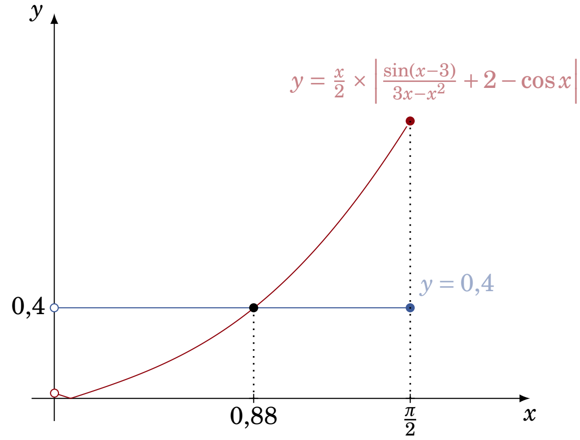
A área do triângulo $[OPQ]$, pode definir-se como a diferença entre as áreas dos triângulos $[OAP]$ e $[OAQ]$.

Assim, queremos saber para que a se tem:

$$\left| \underbrace{\frac{a \times \left(\frac{\sin(a-3)}{3a-a^2}+2\right)}{2}}_{A_{[OAP]}} - \underbrace{\frac{a \times \cos a}{2}}_{A_{[OAQ]}} \right| = 0{,}4$$

ou, se quisermos:

$$\frac{a}{2} \times \left| \frac{\sin(a-3)}{3a-a^2} + 2 - \cos a \right| = 0{,}4$$



Assim,depois de fazermos a representação na calculadora das funções $y = \frac{x}{2} \times \left|\frac{\sin(x-3)}{3x-x^2} + 2 - \cos x\right|$ e $y = 0{,}4$, conseguimos verificar que se intersetam quando $x \approx 0{,}88$, ou seja, $a \approx 0{,}88$.

6. Sabendo que (u_n) é progressão aritmética, podemos escrever já que:

$$u_n = u_k + (n-k)r$$

e

$$S = \frac{u_n - u_k}{2} \times (n-k+1)$$

A partir daqui e com a informação que nos é dada no segundo ponto do enunciado, temos:

$$\begin{aligned}
& u_3 + u_4 + \ldots + u_{12} &= 35 \\
\Leftrightarrow\ & \frac{u_3 + u_{12}}{2} \times (12-3+1) &= 35 \\
\Leftrightarrow\ & \frac{u_7 - 4r_1 + u_8 + 4r_1}{2} \times 10 &= 35 \\
\Leftrightarrow\ & (u_7 - \cancel{4r_1} + u_8 + \cancel{4r_1}) \times 5 &= 35 \\
\Leftrightarrow\ & u_7 + u_8 &= 7 \\
\Leftrightarrow\ & u_8 &= 7 - u_7
\end{aligned}$$

Usando a fórmula indicada anteriormente

Considere-se r_1 a razão da p.a. (u_n)

Sendo assim, usando o primeiro ponto do enunciado:

$$\begin{aligned}
& u_8 - 1 &= (u_7)^2 \\
\Leftrightarrow\ & 7 - u_7 - 1 &= (u_7)^2 \\
\Leftrightarrow\ & (u_7)^2 + u_7 - 6 = 0 & \\
\Leftrightarrow\ & u_7 = -3 \quad \vee u_7 = 2 &
\end{aligned}$$

Usando a fórmula resolvente.

Vamos analisar cada um destes valores de u_7:

i) Se $u_7 = -3$ então $u_8 = 7+3 = 10$ e, consequentemente, o valor de $r_1 = r_8 - r_7 = 13$. Podemos, com isto, determinar o valor de $u_9 = 10 + 13 = 23$.

Sendo u_7 e u_9 os dois primeiros termos de (v_n), progressão geométrica, a sua razão pode calcular-se a partir da divisão destes termos que, como têm sinais contrários, será negativa e impossibilita a monotonia da sucessão (v_n).

ii) Se $u_7 = 2$ então $u_8 = 7-2 = 5$ e a razão é $r_1 = 3$. Assim sendo, $u_9 = 5+3 = 8$. Pelo facto de (v_n) ser decrescente conseguimos dizer que $v_1 = u_9 = 8$ e que $v_2 = u_7 = 2$. A razão desta progressão geométrica é

$$r_2 = \frac{2}{8} = \frac{1}{4} = 2^{-2}.$$

Como (v_n) é uma progressão geométrica,

$$v_n = v_k \times r^{n-k}$$

O que, substituindo adequadamente, fica:

$$v_n = 8 \times \left(2^{-2}\right)^{n-1} = 2^3 \times 2^{-2n+2} = 2^{5-2n}$$

7. Temos:

$$\text{Arg}(z_1) = \frac{\pi}{24} \qquad \text{Arg}(z_2) = \frac{13\pi}{24}$$

assim,

$$\text{Arg}(z_2) - \text{Arg}(z_1) = \frac{13\pi}{24} - \frac{\pi}{24} = \frac{\pi}{2}$$

Com isto podemos descartar as opções **(A)**, **(B)** e **(D)**:

- descartamos **(A)** pois nesse caso teríamos um quadrado e os afixos seriam vértices consecutivos contrariando o enunciado;
- descartamos **(B)** e **(D)** pois no caso de um hexágono e de um decágono não encontramos vértices que resultem da rotação centrada na origem e ângulo $\frac{\pi}{2}$ de outro vértice.

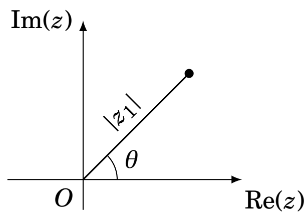
Opção: $\boxed{\text{C}}$

8. Em primeiro lugar vamos simplificar os números z_1 e z_2 presentes na expressão.

$$\begin{aligned}
z_1 &= \frac{i^{3-4k} + 3 + 2i}{2-i} \\
&= \frac{i^3 \times \left(i^4\right)^{-k} + 3 + 2i}{2-i} \\
&= \frac{-i \times 1 + 3 + 2i}{2-i} \\
&= \frac{3+i}{2-i} \\
&= \frac{3+i}{2-i}_{\times(2+i)} \\
&= \frac{(3+i)(2+i)}{(2-i)(2+i)} \\
&= \frac{6+3i+2i-1}{2^2+1} = \frac{5+5i}{5} = 1+i
\end{aligned}$$

Como $i^3 = -i$ e $i^4 = 1$

Seguindo as regras da divisão de complexos escritos na forma algébrica.



Passando agora z_1 para a forma trigonométrica:

$$|z_1| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

Seja θ um argumento de z_1, então

$$\tan\theta = \frac{1}{1} \wedge \theta \in 1^{\text{o}}Q.$$

Logo,

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{1}{1}\right) = \frac{\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

e assim, podemos escolher $k = 0$, ficando $\theta = \frac{\pi}{4}$.

Concluimos, portanto, que

$$z_1 = \sqrt{2}e^{i\left(\frac{\pi}{4}\right)}.$$

Analisemos agora o número z_2.

$$\begin{aligned}
z_2 &= \cos\left(\frac{9\pi}{8}\right) + \frac{\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)}{i} \\
&= \cos\left(\frac{9\pi}{8}\right) + \frac{1}{i} \times \sin\left(\frac{\pi}{8}\right) \\
&= \cos\left(\frac{9\pi}{8}\right) - i\sin\left(\frac{\pi}{8}\right) \\
&= \cos\left(\frac{9\pi}{8}\right) + i\sin\left(\pi + \frac{\pi}{8}\right) \\
&= \cos\left(\frac{9\pi}{8}\right) + i\sin\left(\frac{9\pi}{8}\right) \\
&= e^{i\left(\frac{9\pi}{8}\right)}
\end{aligned}$$

Como $\frac{1}{i} = -i$

Sendo que $-\sin(\alpha) = +\sin(\pi + \alpha)$ podemos escrever

Agora,

$$\overline{z_2}^2 = \left(e^{i\left(-\frac{9\pi}{8}\right)}\right)^2 = e^{i\left(-\frac{9\pi}{4}\right)}$$

mas, tendo em conta que:

$$-\frac{9\pi}{4} = -2\pi - \frac{\pi}{4}$$

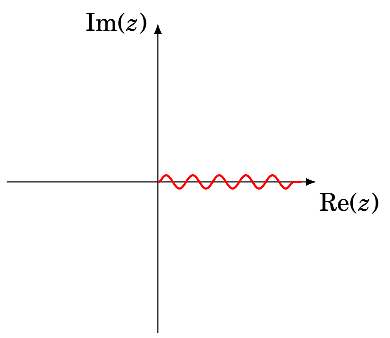
então, podemos simplificar para:

$$\overline{z_2}^2 = e^{i\left(-\frac{\pi}{4}\right)}$$

Assim sendo,

$$\frac{(z_1)^n}{\left(\overline{z_2}^2\right)} = \frac{\left(\sqrt{2}e^{i\left(\frac{\pi}{4}\right)}\right)^n}{e^{i\left(-\frac{\pi}{4}\right)}} = \sqrt{2}e^{i\left(\frac{\pi}{4}n + \frac{\pi}{4}\right)}$$

Para o número ser real positivo, o argumento tem de ser da forma: $0 + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$.



Por isso

$$\begin{aligned}
\frac{\pi}{4}n + \frac{\pi}{4} &= 0 + 2k\pi\ , k \in \mathbb{Z} \\
\pi n + \pi &= 8k\pi\ , k \in \mathbb{Z} \\
n + 1 &= 8k\ , k \in \mathbb{Z} \\
n &= 8k - 1\ , k \in \mathbb{Z}
\end{aligned}$$

Colocamos os mesmos denominadores.

Dividimos tudo por π.

O menor valor de n obtém-se quando $k = 1$:

$$n = 8 - 1 = 7.$$

9. Manipulando a expressão da circunferência

$$\begin{aligned}
& x^2 - 2x + y^2 - 8y + 13 && = 0 \\
\Leftrightarrow & x^2 - 2x + 1 - 1 + y^2 - 8y + 4^2 - 4^2 + 13 && = 0 \\
\Leftrightarrow & (x-1)^2 + (y-4)^2 && = 2^2
\end{aligned}$$

conseguimos determinar o seu centro $(1,4)$ e o raio $r = 2$.

Como BC é paralela ao eixo Ox e sabemos que os ângulos internos de um triângulo equilátero têm 60° de amplitude, o declive - m - da reta AB é: $m = \tan 60° = \sqrt{3}$

O declive - m' - da mediatriz é: $m' = -\frac{1}{m} = -\frac{1}{\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

Num triângulo equilátero o incentro e o circuncentro coincidem e, por isso, sabemos que a mediatriz contém o centro da circunferência representada. Sendo assim:

$$\begin{aligned}
y - 4 = -\frac{\sqrt{3}}{3}(x-1) &\Leftrightarrow 3y - 12 = -\sqrt{3}x + \sqrt{3} \\
&\Leftrightarrow 3y + \sqrt{3}x = 12 + \sqrt{3}
\end{aligned}$$

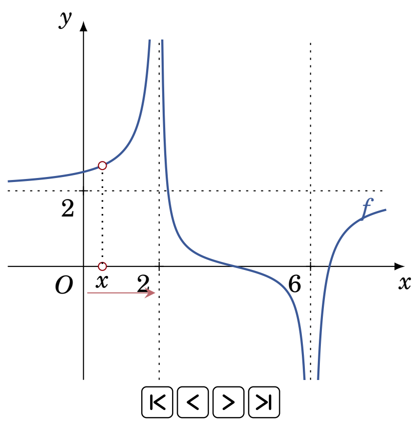
Opção: $\boxed{\text{C}}$

10. Começamos por calcular o valor de $\lim\left[n \cdot \ln\left(\frac{n+4}{n+2}\right)\right]$

$$\begin{aligned}
\lim\left[n \cdot \ln\left(\frac{n+4}{n+2}\right)\right] &= \lim\left[\ln\left(\frac{\cancel{n}\left(1+\frac{4}{n}\right)}{\cancel{n}\left(1+\frac{2}{n}\right)}\right)^n\right] \\
&= \ln\left[\frac{\lim\left[\left(1+\frac{4}{n}\right)^n\right]}{\lim\left[\left(1+\frac{2}{n}\right)^n\right]}\right] \\
&= \ln\frac{e^4}{e^2} = \ln e^2 = 2^-
\end{aligned}$$

Então o limite $\lim f(u_n)$ é equivalente a $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x)$.

Observando o gráfico, vemos que, à medida que o x toma valores próximos mas inferiores a 2, os valores de $f(x)$ tendem para $+\infty$.



Opção: $\boxed{\text{B}}$

11. Se queremos que a função g seja contínua no ponto $x=-2$ então queremos que

$$\lim_{x\to -2^-} g(x) = \lim_{x\to -2^+} g(x) = g(-2)$$

Comecemos por resolver o limite onde não encontramos o a nem o b.

$$\lim_{x\to -2^-} \frac{e^{x+2}+x+1}{x+2} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x\to -2^-} \frac{e^{x+2}+x+1-0}{x-(-2)} = f'(-2) = 2$$

Considerando que

$$f(x) = e^{x+2}+x+1$$

f é derivável no seu domínio e o limite é igual a

$$\lim_{x\to -2} \frac{f(x)-f(-2)}{x-(-2)}$$

Podemos então concluir que este se resume a $f'(2)$.

$f'(x) = e^{x+2}+1 \Rightarrow f'(-2) = e^0+1 = 2$

Como o limite calculado tem de ser igual ao valor de $g(-2)$ então sabemos já que $a=2$ (descartamos as opções **(C)** e **(D)**).

$$\lim_{x\to -2^+} \left(b + \frac{\ln(x+3)}{x+2}\right) = b + \lim_{x\to -2^+} \frac{\ln(x+3)-0}{x-(-2)}$$
$$= b + h'(-2) = b+1$$

Considerando que

$$h(x) = \ln(x+3)$$

h é derivável no seu domínio e o limite é igual a

$$\lim_{x\to -2} \frac{h(x)-h(-2)}{x-(-2)}$$

Podemos então concluir que este se resume a $h'(2)$.

$h'(x) = \frac{1}{x+3} \Rightarrow h'(-2) = \frac{1}{-2+3} = 1$

Também este limite tem de ser igual a 2 e, portanto, $b=1$.

Opção: $\boxed{\text{B}}$

12. De sabermos que $y=-3x+2$ é assíntota do gráfico de g e que $D_g = \mathbb{R}^+$, sabemos também que:

- $\lim_{x\to +\infty} \frac{g(x)}{x} = -3$
- $\lim_{x\to +\infty} [g(x)-(-3x)] = 2$

Então:

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{(g(x))^2+3g(x)}{\ln x - g(x)} = \lim_{x\to +\infty} \frac{g(x)(g(x)+3x)}{\ln x - g(x)}$$
$$= \lim_{x\to +\infty} \frac{\frac{g(x)}{x}(g(x)+3x)}{\frac{\ln x}{x} - \frac{g(x)}{x}}$$
$$= \frac{\overbrace{\lim_{x\to +\infty} \frac{g(x)}{x}}^{-3} \cdot \overbrace{\lim_{x\to +\infty} [g(x)-(-3x)]}^{2}}{\underbrace{\lim_{x\to +\infty} \frac{\ln x}{x}}_{\text{Limite notável } =0} - \underbrace{\lim_{x\to +\infty} \frac{g(x)}{x}}_{-3}}$$
$$= \frac{-3\cdot 2}{3} = -2$$

Opção: $\boxed{\text{B}}$

13.

13.1 $$\lim_{x\to 1} \frac{f(x)-f(1)}{x-\sqrt{x}} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x\to 1} \left[\frac{f(x)-f(1)}{x-1}\cdot\frac{x-1}{x-\sqrt{x}}\right]$$
$$= \underbrace{\lim_{x\to 1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1}}_{f'(1)} \cdot \lim_{x\to 1} \frac{x-1}{x-\sqrt{x}}\,{\scriptstyle (x+\sqrt{x})}$$
$$= f'(1)\cdot \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)(x+\sqrt{x})}{x^2-x}$$
$$= f'(1)\cdot \lim_{x\to 1} \frac{\cancel{(x-1)}(x+\sqrt{x})}{\cancel{(x-1)}x}$$
$$= f'(1)\cdot \lim_{x\to 1} \frac{x+\sqrt{x}}{x}$$

Como

- $f'(1) = (1+1)^2 e^{2\cdot 1+1} = 4e^3$
- $\lim_{x\to 1} \frac{x+\sqrt{x}}{x} = \frac{1+1}{1} = 2$

temos:

$$= 4e^3\cdot 2$$
$$= 8e^3$$

Opção: $\boxed{\text{D}}$

13.2 O declive da reta tangente à função para $x = a$ é dado por $f'(a)$. Se queremos saber o declive máximo no intervalo $]-\infty, -1]$ então queremos saber onde $f'(x)$ atinge o seu máximo nesse intervalo. Para isso vamos analisar $f''(x)$.

$$\begin{aligned} f''(x) &= \left((x+1)^2 e^{2x+1}\right)' \\ &= \left((x+1)^2\right)' e^{2x+1} + (x+1)^2 \left(e^{2x+1}\right)' \\ &= 2(x+1)e^{2x+1} + 2(x+1)^2 e^{2x+1} \\ &= 2e^{2x+1}(x+1)(x+2) \end{aligned}$$

Calculamos agora os seus zeros:

$$2e^{2x+1}(x+1)(x+2) = 0$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{2e^{2x+1} = 0}_{\text{Impossível em } \mathbb{R}} \lor x+1 = 0 \lor x+2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = -1 \lor x = -2$$

x	$-\infty$	-2		-1
$2e^{2x+1}$	$+$	$+$	$+$	$+$
$x+1$	$-$	$-$	$-$	0
$x+2$	$-$	0	$+$	$+$
$f''(x)$	$+$	0	$-$	0
$f'(x)$	$\nearrow$	máx. $f'(-2)$	$\searrow$	min. $f'(-1)$

Assim sendo, o declive máximo no intervalo pedido é igual a $f'(-2)$ ou seja:

$$f'(-2) = (-2+1)^2 e^{2\cdot(-2)+1} = e^{-3}$$

Item extra: $\ln\left((x+1)^2 e^{2x+1}\right) - 1 \geq \ln\left(3x^2 + x\right) + 2x$

Começamos com a determinação do domínio em que esta desigualdade é válida:

$$D = \left\{x \in \mathbb{R} : (x+1)^2 e^{2x+1} > 0 \land 3x^2 + x > 0\right\}$$

Para verificarmos a primeira condição

$$(x+1)^2 e^{2x+1} > 0$$

basta que $x \neq -1$, ou seja, $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

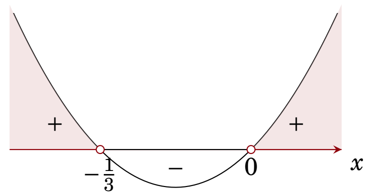
Para a segunda, temos uma inequação de segundo grau:

$$3x^2 + x > 0$$

Calculamos os zeros:

$$\begin{aligned} &3x^2 + x = 0 \\ \Leftrightarrow\ &x(3x+1) = 0 \\ \Leftrightarrow\ &x = 0 \lor x = -\frac{1}{3} \end{aligned}$$

Fazemos o esboço da parábola:



Como queremos que seja positiva, ficamos com:

$$\left]-\infty, -\frac{1}{3}\right[\cup \left]0, +\infty\right[$$

Assim, o domínio onde vamos trabalhar é

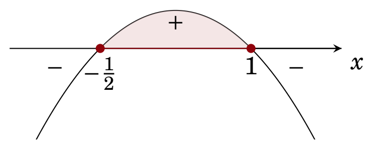
$$\begin{aligned} D &= \mathbb{R} \setminus \{-1\} \cap \left(\left]-\infty, -\frac{1}{3}\right[\cup \left]0, +\infty\right[\right) \\ &= \left]-\infty, -\frac{1}{3}\right[\cup \left]0, +\infty\right[\setminus \{-1\} \end{aligned}$$

Então, em D temos:

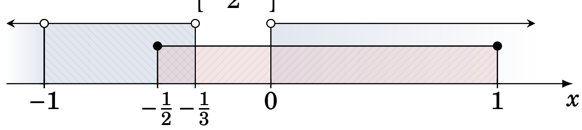
$$\begin{aligned} &\ln\left((x+1)^2 e^{2x+1}\right) - 1 \geq \ln\left(3x^2 + x\right) + 2x \\ \Leftrightarrow\ &\ln\left((x+1)^2 e^{2x+1}\right) \geq \ln\left(3x^2 + x\right) + 2x + 1 \\ \Leftrightarrow\ &\ln\left((x+1)^2 e^{2x+1}\right) \geq \ln\left(3x^2 + x\right) + \ln\left(e^{2x+1}\right) \\ \Leftrightarrow\ &\ln\left((x+1)^2 e^{2x+1}\right) \geq \ln\left[\left(3x^2 + x\right)\left(e^{2x+1}\right)\right] \quad e > 1 \\ \Leftrightarrow\ &(x+1)^2 e^{2x+1} \geq \left(3x^2 + x\right)\left(e^{2x+1}\right) \\ \Leftrightarrow\ &(x+1)^2 e^{2x+1} - \left(3x^2 + x\right)\left(e^{2x+1}\right) \geq 0 \\ \Leftrightarrow\ &\underbrace{e^{2x+1}}_{>0 \forall x \in D} \left[(x+1)^2 - \left(3x^2 + x\right)\right] \geq 0 \\ \Leftrightarrow\ &x^2 + 2x + 1 - 3x^2 - x \geq 0 \\ \Leftrightarrow\ &-2x^2 + x + 1 \geq 0 \end{aligned}$$

Mais uma vez temos uma inequação de segundo grau, cujos zeros podemos calcular usando a fórmula resolvente e são: $-\frac{1}{2}$ e 1.

Desta vez a parábola está voltada para baixo:



A solução é: $D \cap \left[-\frac{1}{2}, 1\right]$



Ou seja:

$$S = \left[-\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}\right[\cup \left]0, 1\right].$$

14.

14.1 Para os casos em que o ponto não pertence ao domínio, a existência de limite da função em a apenas prevê que

$$\lim_{x\to a^-} g(x) = \lim_{x\to a^+} g(x)$$

Assim, neste caso, queremos verificar se:

$$\lim_{x\to 0^-} g(x) = \lim_{x\to 0^+} g(x)$$

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{\sin x(1-\cos x)}{x^3} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}$$

$$= \lim_{x\to 0^-} \frac{\sin x(1-\cos x)(1+\cos x)}{x^3(1+\cos x)}$$

$$= \lim_{x\to 0^-} \frac{\sin x\left(1-\cos^2 x\right)}{x^3(1+\cos x)}$$

Pela fórmula fundamental da trigonometria.

$$= \lim_{x\to 0^-} \frac{\sin x \sin^2 x}{x^3(1+\cos x)}$$

$$= \lim_{x\to 0^-} \left(\frac{\sin^3 x}{x^3}\cdot\frac{1}{1+\cos x}\right)$$

$$= \Bigg(\underbrace{\lim_{x\to 0^-} \frac{\sin x}{x}}_{\substack{\text{limite notável}\\ =1}}\Bigg)^3 \cdot \underbrace{\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{1+\cos x}}_{\frac{1}{2}}$$

$$=1\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to 0^+} \left(xe^{\frac{2}{x}}\right) \overset{(0\cdot\infty)}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{e^{\frac{2}{x}}}{\frac{1}{x}}$$

$$=2\lim_{x\to 0^+} \frac{e^{\frac{2}{x}}}{\frac{2}{x}}$$

Se $x\to 0^+$ então $\frac{2}{x}\to+\infty$. Seja $y=\frac{2}{x}$, $y\to+\infty$

$$= \underbrace{\lim_{y\to+\infty} \frac{e^y}{y}}_{\substack{\text{limite}\\ \text{notável=}\\ +\infty}}$$

$$=2\cdot+\infty=+\infty$$

Com isto, concluímos que não existe $\lim\limits_{x\to 0} g(x)$.

14.2 Vamos começar por ver qual a expressão da função f apresentada no enunciado.

$$f(x) = x^3\cdot g(x)$$

$$= \begin{cases} x^3\,\dfrac{\sin x(1-\cos x)}{x^3} & \text{se } -\pi\le x<0 \\ x^3\cdot xe^{\frac{2}{x}} & \text{se } x>0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \sin x(1-\cos x) & \text{se } -\pi\le x<0 \\ x^4\cdot e^{\frac{2}{x}} & \text{se } x>0 \end{cases}$$

Para estudar a sua monotonia e existência de extremos relativos vamos analisar f'.
Para $x\in[-\pi,0[$:

$$(\sin x(1-\cos x))' = (\sin x)'(1-\cos x)+\sin x(1-\cos x)'$$

$$=\cos x(1-\cos x)+\sin x\cdot\sin x$$

$$=\cos x-\cos^2 x+\sin^2 x$$

$$=\cos x-\cos^2 x+1-\cos^2 x$$

$$=-2\cos^2 x+\cos x+1$$

já quando $x\in]0,+\infty[$:

$$\left(x^4e^{\frac{2}{x}}\right)' = \left(x^4\right)'e^{\frac{2}{x}}+x^4\left(e^{\frac{2}{x}}\right)'$$

$$=4x^3e^{\frac{2}{x}}+x^4\left(-\frac{2}{x^2}e^{\frac{2}{x}}\right)$$

$$=4x^3e^{\frac{2}{x}}-2x^2e^{\frac{2}{x}}$$

$$=2x^2e^{\frac{2}{x}}(2x-1)$$

e, portanto:

$$f'(x) = \begin{cases} -2\cos^2 x+\cos x+1 & \text{se } -\pi\le x<0 \\ 2x^2e^{\frac{2}{x}}(2x-1) & \text{se } x>0 \end{cases}$$

Vejamos agora para que valores $f'(x)=0$.
Quando $x\in[-\pi,0[$:

$$-2\cos^2 x+\cos x+1=0$$

Usando a fórmula resolvente.

$$\Leftrightarrow \cos x=1 \lor \cos x=-\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \cos x = 0+2k\pi \lor x=\pi-\frac{\pi}{3}+2k\pi$$

$$\lor\, x=-\pi+\frac{\pi}{3}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow \cos x = 2k\pi \lor x=\frac{2\pi}{3}+2k\pi \lor x=-\frac{2\pi}{3}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$$

De todas as soluções, a que pertence ao intervalo onde estamos a trabalhar é: $-\dfrac{2\pi}{3}$.

Se $x \in \left]0,+\infty\right[$:

$$2x^2 e^{\frac{2}{x}}(2x-1)=0$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 e^{\frac{2}{x}}=0 \vee 2x-1=0$$

$$\Leftrightarrow 2x^2=0 \vee \underbrace{e^{\frac{2}{x}}=0}_{\substack{\text{Impossível}\\ \text{em } \mathbb{R}}} \vee 2x-1=0$$

$$\Leftrightarrow x=0 \vee x=\tfrac{1}{2}$$

Neste intervalo, temos de considerar a solução $\frac{1}{2}$.

x	$-\pi$		$-\frac{2\pi}{3}$		0		$\frac{1}{2}$	$+\infty$
f'	$-$	$-$	0	$+$		$-$	0	$+$
f	máx.	$\searrow$	min.	$\nearrow$		$\searrow$	min.	$\nearrow$

Assim, podemos dizer que

- f é decrescente em $\left[-\pi,-\dfrac{2\pi}{3}\right]$ e em $\left]0,\dfrac{1}{2}\right]$.
- f é crescente em $\left[-\dfrac{2\pi}{3},0\right[$ e em $\left[\dfrac{1}{2},+\infty\right[$.
- f tem um máximo relativo quando $x=-\pi$.
- f tem mínimos relativos quando $x=-\dfrac{2\pi}{3}$ e quando $x=\dfrac{1}{2}$.