23 + curso

Matemática- 2023

Exame- Tópicos de resolução

Universidade do Minho
DMA

Exercício 1

a) $2\sqrt{2}(2-\sqrt{2})+(-2+\sqrt{2})^2 = 4\sqrt{2}-4+4-4\sqrt{2}+2 = 2.$

b) $(2+a)^2+(a-2)(a+2)-a(4+a) = 4+4a+a^2+a^2-4-4a-a^2 = a^2.$

Exercício 2

a) $(x^2+5)(x-1)=0 \Leftrightarrow x^2+5=0 \vee x-1=0 \Leftrightarrow x^2=-5 \vee x=1 \Leftrightarrow$
$x\in\emptyset \vee x=1 \Leftrightarrow x=1$

$S=\{1\}.$

b) $|x-5|=2 \Leftrightarrow x-5=2 \vee x-5=-2 \Leftrightarrow x=5+2 \vee x=5-2 \Leftrightarrow x=7 \vee x=3$

$S=\{7,3\}.$

Exercício 3 a) $\overrightarrow{AB} = B-A = (4,-2)-(-1,5) = (5,-7)$
$\|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{5^2+(-7)^2} = \sqrt{74}$

b) $D = (-1,5)-\frac{1}{2}(3,-1) = (-1,5)+(-\frac{3}{2},\frac{1}{2}) = (-\frac{5}{2},\frac{11}{2})$

c) $\frac{a}{3} = \frac{4}{-1} \Leftrightarrow -a = 12 \Leftrightarrow a = -12$

Exercício 4

$x^2+y^2-6y-27=0 \Leftrightarrow x^2+y^2-6y+9=27+9 \Leftrightarrow x^2+(y-3)^2=36$

Coordenadas do centro: $(0,3)$

Raio: 6.

Exercício 5 a) Por exemplo (0,5).

b) declive da reta r: $m_r = -\frac{1}{2}$

declive da reta perpendicular à reta r: $m = 2$.

Consideremos a equação da reta na forma $y = mx + b$.
Determinação da ordenada na origem:
$y = 2x + b$
$1 = 2(-2) + b \Leftrightarrow 1 = -4 + b \Leftrightarrow b = 4 + 1 \Leftrightarrow b = 5$
$y = 2x + 5$

Exercício 6 a) $(x+1)5^x = 5^x \Leftrightarrow (x+1)5^x - 5^x = 0 \Leftrightarrow 5^x(x+1-1) = 0 \Leftrightarrow$

$5^x = 0 \vee x = 0 \Leftrightarrow x \in \emptyset \vee x = 0$;

$S = \{0\}$.

b) $\sqrt{2}\cos\theta + 1 = 0 \Leftrightarrow \cos\theta = -\frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \cos\theta = -\frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \theta = \pi - \frac{\pi}{4} + 2k\pi \vee \theta = \pi + \frac{\pi}{4} + 2k\pi,\ \ k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \theta = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi \vee \theta = \frac{5\pi}{4} + 2k\pi,\ \ k \in \mathbb{Z}$

Exercício 7 $\frac{x}{x^2+x} = 0 \Leftrightarrow x = 0 \wedge x^2 + x \neq 0 \Leftrightarrow x = 0 \wedge x \neq 0 \wedge x \neq -1$

$S = \emptyset$.

Exercício 8 $u_{n+1} - u_n = 5 - (n+1) - (5-n)$
$= 5 - n - 1 - 5 + n$
$= -1$

Assim, $u_{n+1} - u_n < 0, \forall n \in \mathbb{N}$, pelo que se conclui que $(u_n)_n$ é monótona, estritamente decrescente.

Exercício 9 a) $\lim_n \dfrac{-5n^2+2n}{n+5} = \lim_n \dfrac{n^2(-5+\frac{2}{n})}{n(1+\frac{5}{n})} = \dfrac{+\infty(-5+0)}{1} = -\infty$

b) $\lim_n \left(\dfrac{n-1}{n}\right)^{3n} = \lim_n \left(\left(1 - \dfrac{1}{n}\right)^n\right)^3 = (e^{-1})^3 = e^{-3}$

Exercício 10 a) c.a.
$x(x-1) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 1$
(o esboço do gráfico é uma parábola voltada para cima com dois zeros)

$D_f = \{x \in \mathbb{R} : x^2 - x \geq 0\} =]-\infty, 0] \cup [1, +\infty[$

b) $f'(x) = \frac{1}{2}(x^2 - x)^{-\frac{1}{2}}(2x - 1)$

$f'(2) = \frac{1}{2}(4 - 2)^{-\frac{1}{2}}(4 - 1) = \frac{3}{2\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{4}$

$m = f'(2) = \frac{3\sqrt{2}}{4}$

Exercício 11 a) $D_h = \mathbb{R}$

c.a. $5^{x+1} > 0 \Leftrightarrow -5^{x+1} < 0 \Leftrightarrow 2 - 5^{x+1} < 2$

$D'_h =]-\infty, 2[$

b) $2 - 5^{x+1} \geq -3 \Leftrightarrow -5^{x+1} \geq -5 \Leftrightarrow 5^{x+1} \leq 5 \Leftrightarrow x + 1 \leq 1 \Leftrightarrow x \leq 0$

$S =]-\infty, 0]$.