

Exercícios de aplicação - páginas 165 a 171

1.

O gráfico da função f é simétrico relativamente à origem, pelo que, a função é ímpar. Assim a proposição (I) é verdadeira.

A função f é bijetiva, pelo que admite função inversa. Assim a proposição (II) é verdadeira.

O gráfico da função g não é simétrico relativamente ao eixo das ordenadas, pelo que a função não é par. Assim a proposição (III) é falsa.

A função f não é injetiva, pelo que não é bijetiva, logo não admite função inversa. Assim a proposição (IV) é falsa.

2.

2.1.

Devemos começar por fatorizar a expressão:

$$-x^5 + 2x^4 + 5x^3 - 6x^2 = x^2(-x^3 + 2x^2 + 5x - 6)$$

Como 3 é zero de f , usamos a Regra de Ruffini para continuar a factorização:

	-1	2	5	-6
3		-3	-3	6
	-1	-1	2	0

$$\text{Assim, } -x^3 + 2x^2 + 5x - 6 = (x - 3)(-x^2 - x + 2).$$

Resolvendo agora a equação $-x^2 - x + 2 = 0$ obtemos $x = 1 \vee x = -2$.

$$\text{Temos então que } f(x) = -x^5 + 2x^4 + 5x^3 - 6x^2 = -x^2(x - 3)(x - 1)(x + 2).$$

O conjunto dos zeros de f é $\{-2, 0, 1, 3\}$.

2.2.

$$f(x) < 0 \Leftrightarrow -x^2(x - 3)(x - 1)(x + 2) < 0$$

x		-2		0		1		3	
$-x^2$	-	-	-	0	-	-	-	-	-
$x - 3$	-	-	-	-	-	-	-	0	+
$x - 1$	-	-	-	-	-	0	+	+	+
$x + 2$	-	0	+	+	+	+	+	+	+
$f(x)$	+	0	-	0	-	0	+	0	-

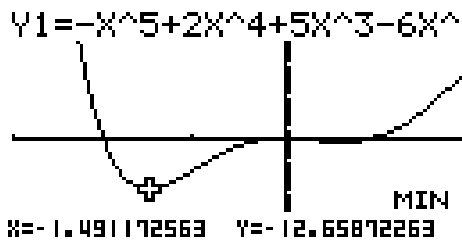
$$f(x) < 0 \Leftrightarrow -2 < x < 0 \vee 0 < x < 1 \vee x > 3$$

$$\text{C.S.} =]-2, 0[\cup]0, 1[\cup]3, +\infty[$$

2.3.

Uma vez que o maior zero de f é 3 temos que $A(3, 0)$.

Com o auxílio da máquina gráfica podemos verificar que $B(-1.49, -12.66)$.



Desta forma a área do triângulo $[OAB]$ é dada por:

$$\frac{-\text{Ordenada de B} \times \text{Abcissa de A}}{2} \simeq 18,99 \text{ (2 C.D.) u. a.}$$

3.

$$3.1. |3x + 2| = 1 \Leftrightarrow 3x + 2 = 1 \vee 3x + 2 = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{3} \vee x = -1 \quad C.S. = \left\{-1, -\frac{1}{3}\right\}$$

$$3.2. |2x - 3| \leq 2 \Leftrightarrow 2x - 3 \leq 2 \wedge 2x - 3 \geq -2 \Leftrightarrow x \leq \frac{5}{2} \wedge x \geq \frac{1}{2} \quad C.S. = \left[\frac{1}{2}, \frac{5}{2}\right]$$

$$3.3. 2|-x + 1| \geq 4 \Leftrightarrow |-x + 1| \geq 2 \Leftrightarrow -x + 1 \geq 2 \vee -x + 1 \leq -2 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow -x \geq 1 \vee -x \leq -3 \Leftrightarrow x \leq -1 \vee x \geq 3 \quad C.S. =]-\infty, -1] \cup [3, +\infty[$$

$$3.4. -|2x + 5| + 1 > 0 \Leftrightarrow |2x + 5| < 1 \Leftrightarrow 2x + 5 < 1 \wedge 2x + 5 > -1 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow x < -2 \wedge x > -3 \quad C.S. =]-3, -2[$$

$$3.5. |x + 2| > |x - 3| \Leftrightarrow (x + 2)^2 > (x - 3)^2 \Leftrightarrow x^2 + 4x + 4 > x^2 - 6x + 9 \Leftrightarrow 10x > 5 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow x > \frac{1}{2} \quad C.S. = \left]\frac{1}{2}, +\infty\right[$$

$$4.1. \sqrt{5x - 4} = x \Rightarrow 5x - 4 = x^2 \Leftrightarrow x = 1 \vee x = 4$$

Verificação:

$$\sqrt{5 \times 1 - 4} = 1 \Leftrightarrow 1 = 1 \text{ prop. verdadeira}$$

$$\sqrt{5 \times 4 - 4} = 4 \Leftrightarrow 4 = 4 \text{ prop. verdadeira}$$

$$C.S. = \{1, 4\}$$

$$4.2. \sqrt{x + 6} - x = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x + 6} = x \Rightarrow x + 6 = x^2 \Leftrightarrow x = 3 \vee x = -2$$

Verificação:

$$\sqrt{3 + 6} - 3 = 0 \Leftrightarrow 0 = 0 \text{ prop. verdadeira}$$

$$\sqrt{-2 + 6} - (-2) = 0 \Leftrightarrow 2 + 2 = 0 \Leftrightarrow 4 = 0 \text{ prop. falsa.}$$

$$C.S. = \{3\}$$

4.3.

$$\sqrt{x} + \sqrt{x-3} = 3 \Rightarrow x + x - 3 + 2\sqrt{x^2 - 3x} = 9 \Leftrightarrow \sqrt{x^2 - 3x} = 6 - x \Rightarrow x^2 - 3x = (6 - x)^2 \Leftrightarrow x^2 - 3x = 36 + x^2 - 12x \Leftrightarrow x = 4$$

Verificando temos que $\sqrt{4} + \sqrt{4-3} = 3$ prop. verdadeira

$$C.S. = 4$$

4.4.

$$\sqrt{x-2} < 2 \Rightarrow x-2 < 2^2 \wedge x-2 > -2^2 \Leftrightarrow x < 6 \wedge x > -2$$

Por outro lado, a expressão só é válida no seu domínio.

$$x-2 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 2$$

$$C.S. = [2, 6[$$

5.

$$g(x) = 2x + 4 \Leftrightarrow y = 2x + 4 \Leftrightarrow x = \frac{y-4}{2} \quad (1)$$

Assim,

$$g^{-1}(x) = \frac{x-4}{2}$$

Resolvendo agora a equação temos,

$$f \circ g^{-1}(x) = 0 \Leftrightarrow g^{-1}(x) = 3 \vee g^{-1}(x) = -3 \Leftrightarrow \frac{x-4}{2} = 3 \vee \frac{x-4}{2} = -3 \Leftrightarrow \Leftrightarrow x = 10 \vee x = -2$$

$$C.S. = \{-2, 10\}$$

6.

$$g(x) = 0 \Leftrightarrow -f(x-1) = 0 \Leftrightarrow x-1 = -5 \vee x-1 = 3 \Leftrightarrow x = -4 \vee x = 4$$

A tabela de sinais de g fica então

x		-4		4	
Sinal de g	-	0	+	0	-

7.

$$\begin{aligned} g(x) = 0 &\Leftrightarrow |2f(x)| - 4 = 0 \Leftrightarrow |2f(x)| = 4 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 2f(x) = 4 \vee 2f(x) = -4 \Leftrightarrow f(x) = 2 \vee f(x) = -2 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x = -1 \vee x = 1 \vee x = 3 \vee x = 6 \end{aligned}$$

A tabela de sinais de g fica então

x	-1		1		3		5		6
Sinal de g	0	-	0	-	0	-	0	-	-

8.

8.1.

O ponto P é vértice do prisma quadrangular regular, cujas bases são perpendiculares a Oz , pelo que, $P(a, a, z)$. Como P também pertence ao plano ABC temos que $3a + 2a + z = 9$, ou seja, $z = -5a + 9$. O ponto P tem coordenadas $(a, a, -5a + 9)$.

A área das bases é dada por a^2 e a área das faces laterais do prisma é dada por $a \times (9 - 5a) = -5a^2 + 9a$. Assim, a área total da superfície do prisma é dada por $4 \times (-5a^2 + 9a) + 2 \times a^2 = -18a^2 + 36a$, como queríamos demonstrar.

8.2.

A área total da superfície do prisma, A , é dada em função de a através da expressão

$$A(a) = -18a^2 + 36a = -18a(a - 2)$$

Assim, o gráfico de A é uma parábola com a concavidade voltada para baixo. Desta forma, A é máxima quando a corresponde à abcissa do vértice da parábola, ou seja, para $a = 1$.

8.3.

$$-18a^2 + 36a = 10 \Leftrightarrow a = \frac{1}{3} \vee a = \frac{5}{3}$$

Como a parábola tem a concavidade voltada para baixo

$$-18a^2 + 36a < 10 \Leftrightarrow a < \frac{1}{3} \vee a > \frac{5}{3}$$

Tendo em consideração que $a \in]0, \frac{9}{5}[$ temos que

$$C.S. = \left]0, \frac{1}{3}\right[\cup \left[\frac{5}{3}, \frac{9}{5}\right[$$

9.

9.1.

$$x^2 + x - 6 = 0 \Leftrightarrow x = -3 \vee x = 2$$

$$2 - x^2 = 0 \Leftrightarrow x = -\sqrt{2} \vee x = \sqrt{2}$$

A tabela de sinais é então

x		-3		$-\sqrt{2}$		$\sqrt{2}$		2	
$x^2 + x - 6$	+	0	-	-	-	-	-	0	+
$2 - x^2$	-	-	-	0	+	0	-	-	-
$\frac{x^2+x-6}{2-x^2}$	-	0	+	n.d.	-	n.d.	+	0	-

Assim, os zeros de f são -3 e 2 .

A função é positiva em $] -3, -\sqrt{2}[\cup] \sqrt{2}, 2[$

A função é negativa em $] -\infty, -3[\cup] -\sqrt{2}, \sqrt{2}[\cup] 2, +\infty[$

9.2. Começemos por simplificar a expresso

$$\frac{1}{x} - \frac{2}{x^2 - 3x} = \frac{x - 3 - 2}{x(x - 3)} = \frac{x - 5}{x(x - 3)}$$

$$x - 5 = 0 \Leftrightarrow x = 5$$

$$x(x - 3) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 3$$

A tabela de sinais é então

x		0		3		5	
$x - 5$	—	—	—	—	—	0	+
$x(x - 3)$	+	0	—	0	+	+	+
$\frac{x-5}{x(x-3)}$	—	n.d.	+	n.d.	—	0	+

Assim, o zero de f é 5.

A função é positiva em $]0, 3[\cup]5, +\infty[$.

A função é negativa em $] -\infty, 0[\cup]3, 5[$.

Exercícios propostos

Itens de seleção - páginas 172 a 177

1. Nas representações I e IV existem valores de x que correspondem a mais do que um valor de y , pelo que não podem representar funções.

Opção (B).

2. A Joana sai de casa pelo que a distância inicial é 0 depois, quando se desloca do ponto A ao ponto B , a sua distância aumenta de forma constante. Entre o ponto B e o ponto C a distância da Joana a sua casa diminui e depois volta a aumentar. O único gráfico que representa todas estas características é o gráfico em (D).

Opção (D).

3. A soma das áreas dos quadrados é dada por

$$x^2 + (8 - x)^2 = x^2 + 64 + x^2 - 16x = 2x^2 - 16x + 64$$

Opção (A).

4. A diferença entre o ponto mais distante e o ponto mais próximo é de 20 metros. Assim, a circunferência tem um diâmetro de 20 metros e, consequentemente, um raio de 10 metros.

Opção (B).

5. Se um quadrado tem perímetro p então o seu lado mede $\frac{p}{4}$. Desta forma, a área do quadrado é dada por

$$\left(\frac{p}{4}\right)^2 = \frac{p^2}{16}$$

Opção (C).

6. Sabemos que os pontos $A(3, 0)$ e $B(1, 3)$ pertencem ao gráfico de g . Assim, o declive da reta é dado por

$$\frac{0 - (-5)}{3 - (-2)} = 1$$

Além disso, como a reta passa no ponto A temos que

$$0 = 3 + b \Leftrightarrow b = -3$$

A função g é então definida pela expressão $g(x) = x - 3$.

Opção (D).

7. Como a abcissa do vértice da parábola não é 0 a função não é par. Como a ordenada do vértice é 3 e o ponto de coordenadas $(-2, -4)$ pertence à parábola, então a função tem a concavidade voltada para baixo, pelo que, tem dois zeros, é crescente no intervalo $] - \infty, 1]$ e o seu contradomínio é $] - \infty, 3]$.

Opção (C).

8.

$$-x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 0$$

Opção (B).

9. Se o tempo for inferior ou igual a uma hora o preço é de 3 euros se o tempo é superior a uma hora o preço é de 3 euros mais 0,1 euros por cada minuto após os 60.

Opção (C).

10.

Para $x \leq 0$:

$$9 - x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 3 \vee x = -3$$

Assim, -3 é zero de f .

Para $x > 0$:

$$\frac{x^2 - 4}{x + 2} = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4 = 0 \wedge x + 2 \neq 0 \Leftrightarrow x = 2$$

Assim, 2 é zero de f .

Opção (B).

11.

11.1. O gráfico da função definida por $f(x) + \frac{5}{2}$ obtém-se através do gráfico de f por uma translação associada ao vetor $(0, \frac{5}{2})$. Desta forma a função definida por $f(x) + \frac{5}{2}$ não tem zeros.

Opção (A).

11.2. Pelo gráfico da função, os valores de y que têm exatamente três valores de x que lhes correspondem são os que pertencem ao intervalo $[2, 3]$.

Opção (C).

12. A função g não está definida em $x = a$ e $h(a)$ não é máximo nem mínimo de h . As únicas funções com máximo em $x = a$ são as funções f e i .

Opção (B).

13. Para que a função f não tenha zeros é necessário que o binómio discriminante da equação $f(x) = 0$ seja negativo.

$$6^2 - 4 \times 1 \times k < 0 \Leftrightarrow -4k < -36 \Leftrightarrow k > 9$$

Opção (B).

14. Uma função nessas condições deve ter um gráfico obtido a partir do gráfico de f através de uma translação associada ao vetor $(-3, 0)$.

Opção (C).

15. O gráfico de g pode ser obtido a partir do gráfico de f , através de uma reflexão relativamente ao eixo Ox , seguida de uma translação associada ao vetor $(-2, -2)$.

Opção (D).

16. A função $f \times g$ tem um zero, pelo que a opção (A) é falsa. Temos que $g(-1) = 0$ e $f(0) = 1$, logo g não é a função inversa de f . O domínio de g é $]-\infty, 0[$ e o contradomínio de f é $]0, +\infty[$, donde são diferentes.

Opção (C).

17. Uma vez que a função é estritamente decrescente, não pode ter mais do que um zero, é necessariamente injetiva e não poderá ser uma função par. Assim, as opções (A), (B) e (C) não podem ser falsas. **Opção (D).**

18. O domínio da função j é o conjunto-solução da inequação $f(x) \geq 0$.

Opção (D).

19. O vértice desta parábola tem as coordenadas $(-h, k)$ assim, $h < 0$ e $k > 0$.

Opção (B).

20.

$$D_f = \left\{ x \in \mathbb{R} : \frac{-x+1}{x+2} \geq 0 \wedge x+2 \neq 0 \right\}$$

Considerando a tabela de sinais

x		-2		1	
$-x+1$	$+$	$+$	$+$	0	$-$
$x+2$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$\frac{x-1}{x+2}$	$-$	n.d.	$+$	0	$-$

Obtemos

$$D_f =]-2, 1]$$

Opção (A).

21.

$$-2 \leq x \leq 4 \Leftrightarrow -1 \leq \frac{x}{2} \leq 2 \Leftrightarrow -2 \leq -\frac{x}{2} \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq -\frac{x}{2} + 1 \leq 2$$

$$-1 \leq f(x) \leq 2 \Leftrightarrow -1 \leq f(x-2) \leq 2 \Leftrightarrow -2 \leq -f(x-2) \leq 1 \Leftrightarrow 1 \leq -f(x-2)+3 \leq 4$$

Opção (B).

22.

$$f(g(3)) = f(g(-3)) = f(5) = 9$$

Pelo que a proposição p é verdadeira.

$$y = 2x - 1 \Leftrightarrow x = \frac{y+1}{2}$$

Assim, a função f^{-1} é definida pela expressão $f^{-1}(x) = \frac{x+1}{2}$.

$$(f^{-1} + f)(3) = \frac{3+1}{2} + 2 \times 3 - 1 = 7$$

Pelo que a proposição q é falsa.

Opção (D).

23. Para que a função seja crescente em $]1, +\infty[$ é necessário que $b < 0$ e para que a função não tenha zeros nesse intervalo é necessário que $a \leq 0$.

Opção (D).

24.

$$-6 \leq f(x) \leq 5 \Rightarrow 0 \leq |f(x)| \leq 6$$

Opção (A).

25. Como a função é par e $P(a, b)$ pertence ao gráfico de g então também o ponto de coordenadas $(-a, b)$ pertence ao gráfico de g . Como $b \neq 0$ então o ponto de coordenadas $(-a, -b)$ não poderá pertencer ao gráfico de g .

Opção (C).

26.

26.1. Uma vez que $-1 \notin D_f$ não pode ser zero de $f \times g$. 0 é zero de $f \times g$ pois é zero de f e 2 é zero de $f \times g$ pois é zero de g .

Opção (A).

26.2.

$$(f \circ g)(0) = f(2) = \frac{2}{3} \neq 2$$

Opção (D).

26.3. O gráfico da função $-g$ pode ser obtido a partir do gráfico de g através de uma simetria relativamente ao eixo Ox . Assim, 2 é um maximizante de $-g$.

Opção (C).

27. Se f e g são negativas em todo o seu domínio então a função $f + g$ também é negativa em todo o seu domínio.

Opção (A).

28. Se $x \in [-\infty, -3[$ então $g(x) = -1$ e portanto $f(g(x)) = -2$.

Opção (B).

29. A função não é simétrica relativamente ao eixo Oy , pelo que não é uma função par. Além disso, uma vez que existem objetos diferentes com a mesma imagem a função também não é bijetiva. Desta forma, tanto a proposição p como a proposição q são falsas. A equivalência de duas proposições falsas é verdadeira.

Opção (C).

30.

$$\begin{aligned} |x^2 - 1| - 1 \geq 0 &\Leftrightarrow |x^2 - 1| \geq 1 \Leftrightarrow x^2 - 1 \geq 1 \vee x^2 - 1 \leq -1 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x^2 - 2 \geq 0 \vee x^2 \leq 0 \Leftrightarrow x \geq \sqrt{2} \vee x \leq -\sqrt{2} \vee x = 0 \end{aligned}$$

Opção (A).

31. Sabemos que 0 é solução da inequação $f(x) \leq g(x)$ pois $\sqrt[3]{0} = \sqrt{0}$. Assim a opção (A) é falsa. Sabemos também que, por exemplo, $\frac{1}{2^6}$ não é solução da inequação pois

$$\sqrt[3]{\frac{1}{2^6}} = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4}$$

$$\sqrt{\frac{1}{2^6}} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$$

Assim, as opções (B) e (D) são falsas.

Opção (C).

Exercícios de aplicação - páginas 184 a 225

1.

1.1.

Seja f uma função real de variável real definida por $f(x) = \frac{4}{x^2-1}$ e (x_n) uma sucessão qualquer de termos pertencentes a D_f tais que $x_n \rightarrow 3$:

$$\lim f(x_n) = \lim \left(\frac{4}{(x_n)^2 - 1} \right) = \frac{4}{(\lim x_n)^2 - 1} = \frac{4}{3^2 - 1} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

Como queríamos demonstrar.

1.2.

Seja f uma função real de variável real definida por $f(x) = 3 + \frac{1}{5x^2+1}$ e (x_n) uma sucessão qualquer de termos pertencentes a D_f tais que $x_n \rightarrow -\infty$:

$$\begin{aligned} \lim f(x_n) &= \lim \left(3 + \frac{1}{5(x_n)^2 + 1} \right) = 3 + \frac{1}{5(\lim x_n)^2 + 1} = 3 + \frac{1}{5(-\infty)^2 + 1} = \\ &= 3 + \frac{1}{+\infty + 1} = 3 + 0 = 3 \end{aligned}$$

Como queríamos demonstrar.

1.3.

Seja f uma função real de variável real definida por $f(x) = 4 - \frac{1}{2-x}$ e (x_n) uma sucessão qualquer de termos pertencentes a D_f tais que $x_n \rightarrow 2^-$:

$$\begin{aligned} \lim f(x_n) &= \lim \left(4 - \frac{1}{2 - x_n} \right) = 4 - \frac{1}{2 - \lim x_n} = 4 - \frac{1}{2 - 2^-} = \\ &= 4 - \frac{1}{0^+} = 4 - \infty = -\infty \end{aligned} \quad (-9)$$

Como queríamos demonstrar.

2.

2.1.

$$\lim u_n = \lim \frac{n+1}{n+2} = \lim \left(1 - \frac{1}{n+2}\right) = 1^-$$

Assim

$$\lim f(u_n) = +\infty$$

Opção (D).

2.2. Se $v_n \rightarrow -\infty$ então $\lim f(v_n) \rightarrow -1$.

$$\lim \left(-\sqrt{n} + \frac{1}{n^2}\right) = -\sqrt{+\infty} + \frac{1}{(+\infty)^2} = -\infty + \frac{1}{+\infty} = -\infty + 0 = -\infty$$

Opção (C).

3.

3.1.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{-x} - 1}{x + 1} \stackrel{(\frac{\infty}{\infty})}{=} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(\sqrt{-x} - 1)(\sqrt{-x} + 1)}{(x + 1)(\sqrt{-x} + 1)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x - 1}{(x + 1)(\sqrt{-x} + 1)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} -\frac{x + 1}{(x + 1)(\sqrt{-x} + 1)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} -\frac{1}{(\sqrt{-x} + 1)} = -\frac{1}{(\sqrt{-(-\infty)} + 1)} = -\frac{1}{+\infty} = 0 \end{aligned}$$

3.2.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 + 2x^2 + 2x + 1}{-2x^2 - 6x - 4} \stackrel{(\frac{\infty}{\infty})}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 \left(x + 2 + \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}\right)}{x^2 \left(-2 - \frac{6}{x} - \frac{4}{x^2}\right)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + 2 + \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}}{-2 - \frac{6}{x} - \frac{4}{x^2}} = \frac{+\infty}{-2} = -\infty \end{aligned}$$

3.3.

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow -1^+} h(x) &= \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x^3 + 2x^2 + 2x + 1}{-2x^2 - 6x - 4} \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{(x+1)(x^2+x+1)}{(x+1)(-2x-4)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x^2+x+1}{-2x-4} = -\frac{1}{2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow -1^-} h(x) &= \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{\sqrt{-x}-1}{x+1} \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{(\sqrt{-x}-1)(\sqrt{-x}+1)}{(x+1)(\sqrt{-x}-1)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow -1^-} -\frac{1}{(\sqrt{-x}+1)} = -\frac{1}{2}\end{aligned}$$

$$h(-1) = -\frac{1}{2}$$

Como $\lim_{x \rightarrow -1^-} h(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} h(x) = h(-1) = -\frac{1}{2}$ podemos dizer que

$$\lim_{x \rightarrow -1} h(x) = -\frac{1}{2}$$

4.

4.1.

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 16}{5x - 20} \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(x-4)(x+4)}{5(x-4)} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(x+4)}{5} = \frac{8}{5}$$

4.2.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 2x - 3}{x - 1} \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x+3)(x-1)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} (x+3) = 4$$

4.3.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{-2x^2 - 4x + 6}{x - 1} \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(-2x-6)(x-1)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} (-2x-6) = -8$$

4.4.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 2x - 3}{(x-1)^3} \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x+3)(x-1)}{(x-1)^3} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+3}{(x-1)^2} = \frac{4}{0^+} = +\infty$$

4.5.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 2x - 3}{(x - 1)^2} \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x + 3)(x - 1)}{(x - 1)^2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x + 3}{x - 1}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x + 3}{x - 1} = \frac{4}{0^+} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x + 3}{x - 1} = \frac{4}{0^-} = -\infty$$

Como $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x + 3}{x - 1} \neq \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x + 3}{x - 1}$ temos que o limite $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x + 3}{x - 1}$ não existe.

4.6.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -1} \left[(x^3 + 1) \frac{1}{x + 1} \right] &\stackrel{(0 \times \infty)}{=} \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + 1}{x + 1} \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x^2 - x + 1)(x + 1)}{x + 1} = \\ &= \lim_{x \rightarrow -1} (x^2 - x + 1) = 3 \end{aligned}$$

4.7.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{x+2}{x^2}} \stackrel{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x(x+2)} \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x+2} = 0$$

4.8.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} \right) \stackrel{(+\infty - \infty)}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - 1}{x^2} = \frac{-1}{0^+} = -\infty$$

4.9.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + x}{x^3 + 1} \stackrel{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 \left(1 + \frac{1}{x}\right)}{x^2 \left(x + \frac{1}{x^2}\right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 + \frac{1}{x}}{x + \frac{1}{x^2}} = \frac{1}{+\infty} = 0$$

4.10.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3 + 3x - 1}{-x^2 + 2} &\stackrel{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 \left(x + \frac{3}{x} - \frac{1}{x^2}\right)}{x^2 \left(-1 + \frac{2}{x^2}\right)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x + \frac{3}{x} - \frac{1}{x^2}}{-1 + \frac{2}{x^2}} = \frac{-\infty}{-1} = +\infty \end{aligned}$$

5.

5.1.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 5} \frac{x-5}{\sqrt{x}-\sqrt{5}} &\stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x \rightarrow 5} \frac{(x-5)(\sqrt{x}+\sqrt{5})}{(\sqrt{x}-\sqrt{5})(\sqrt{x}+\sqrt{5})} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 5} \frac{(x-5)(\sqrt{x}+\sqrt{5})}{x-5} = \lim_{x \rightarrow 5} (\sqrt{x}+\sqrt{5}) = 2\sqrt{5} \end{aligned}$$

5.2.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{3x-1} - \sqrt{3x-4}) &\stackrel{(+\infty-\infty)}{=} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{3x-1} - \sqrt{3x-4})(\sqrt{3x-1} + \sqrt{3x-4})}{\sqrt{3x-1} + \sqrt{3x-4}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x-1-(3x-4)}{\sqrt{3x-1} + \sqrt{3x-4}} = \frac{3}{+\infty} = 0 \end{aligned}$$

5.3.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2-x+1}}{x} &\stackrel{(+\infty-\infty)}{=} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2\left(1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}}{x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{|x|\sqrt{1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}}{x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x\sqrt{1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}}{x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} -\sqrt{1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}} = -1 \end{aligned}$$

5.4.

$$\begin{aligned}
 & \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{3x-1} - \sqrt{x-4}}{2x+3} \stackrel{(+\infty-\infty)}{=} \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{3x-1} - \sqrt{x-4})(\sqrt{3x-1} + \sqrt{x-4})}{(2x+3)(\sqrt{3x-1} + \sqrt{x-4})} = \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x-1 - (x-4)}{(2x+3)(\sqrt{3x-1} + \sqrt{x-4})} = \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x+3}{(2x+3)(\sqrt{3x-1} + \sqrt{x-4})} = \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{3x-1} + \sqrt{x-4}} = \frac{1}{+\infty} = 0
 \end{aligned}$$

5.5.

$$\begin{aligned}
 & \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{3x-1} - \sqrt{x-4}) \stackrel{(+\infty-\infty)}{=} \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{3x-1} - \sqrt{x-4})(\sqrt{3x-1} + \sqrt{x-4})}{\sqrt{3x-1} + \sqrt{x-4}} = \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x-1 - (x-4)}{\sqrt{3x-1} + \sqrt{x-4}} = \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x+3}{\sqrt{3x-1} + \sqrt{x-4}} \stackrel{(\frac{\infty}{\infty})}{=} \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x(2 + \frac{3}{x})}{|x| \left(\sqrt{\frac{3}{x} - \frac{1}{x^2}} + \sqrt{\frac{1}{x} - \frac{4}{x^2}} \right)} = \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 + \frac{3}{x}}{\sqrt{\frac{3}{x} - \frac{1}{x^2}} + \sqrt{\frac{1}{x} - \frac{4}{x^2}}} = \frac{2}{0^+} = +\infty
 \end{aligned}$$

6.

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{x^3 - x + 6}{x^2 - 4} \stackrel{(\frac{0}{0})}{=} \lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{(x^2 - 2x + 3)(x + 2)}{(x - 2)(x + 2)} = \\
 &= \lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{x^2 - 2x + 3}{x - 2} = -\frac{11}{4}
 \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2^+} (x + k^2 - 1) = k^2 - 3$$

$$f(-2) = -2 + k^2 - 1 = k^2 - 3$$

Para que a função seja contínua em $x = -2$ é necessário que:

$$k^2 - 3 = -\frac{11}{4} \Leftrightarrow k^2 = \frac{1}{4} \Leftrightarrow k = \frac{1}{2} \vee k = -\frac{1}{2}$$

7.

7.a)

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{5 - 2x}{x + 1} = 5$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x^2 + 25} = 5$$

$$g(0) = 5$$

Como $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} g(x) = g(0)$ a função é contínua em $x = 0$.

7.b)

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} h(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^3 - 6x + 5}{x - 1} \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{(x^2 + x - 5)(x - 1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} (x^2 + x - 5) = -3$$

$$h(1) = -4$$

Como $\lim_{x \rightarrow 1^-} h(x) \neq h(1)$ a função não é contínua em $x = 1$.

8.

8.1.

No intervalo $] -\infty, 2[$ a função é contínua por se tratar do quociente entre duas funções contínuas: a função polinomial $x \mapsto x^3 - 8$ e a função afim $x \mapsto x - 2$.

No intervalo $]2, +\infty[$ a função é contínua pois é a soma de duas funções contínuas: uma que é a composta da função raiz quadrada com uma função polinomial ($x \mapsto \sqrt{x^2 + 10x + 1}$) e a outra que é a função constante $x \mapsto 7$.

Averiguemos agora a continuidade no ponto $x = 2$.

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x^3 - 8}{x - 2} \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{(x^2 + 2x + 4)(x - 2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^-} (x^2 + 2x + 4) = 12$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \sqrt{x^2 + 10x + 1} = 12$$

$$f(2) = 12$$

Como $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = f(2)$ a função é contínua em $x = 2$.

Assim, a função f é contínua em \mathbb{R} .

8.2. Em qualquer ponto do conjunto $] - \infty, 1[\cup]1, +\infty[$ a função é contínua por se tratar do quociente entre duas funções contínuas: a função afim $x \mapsto x - 1$ e a composta entre a função módulo e uma função afim ($x \mapsto |x - 1|$).

Averiguemos agora a continuidade no ponto $x = 1$.

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x - 1}{|x - 1|} \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x - 1}{-(x - 1)} = \lim_{x \rightarrow 1^-} -1 = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x - 1}{|x - 1|} \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} 1 = 1$$

Como $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$ a função não é contínua em $x = 1$.

Assim, a função f é contínua em $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.

9.

9.1. A função f é contínua em \mathbb{R} , por se tratar de uma função polinomial. Em particular é contínua em $[-2, -1]$. Como $f(-2) = 27$, $f(-1) = 2$ e $2 < 3 < 27$, pelo teorema de Bolzano-Cauchy, podemos concluir que existe pelo menos um número real $c \in] - 2, -1[$ tal que $f(c) = 3$, isto é, a equação $f(x) = 3$ tem pelo menos uma solução no intervalo $] - 2, -1[$ e, por conseguinte, tem pelo menos uma solução no intervalo $[-2, -1]$, como queríamos provar.

9.2. A função f é contínua em \mathbb{R} , por se tratar de uma função polinomial. Em particular é contínua em $[-1, 0]$. Como $f(-1) = 2$, $f(0) = -1$, $-1 < 0 < 2$, pelo teorema de Bolzano-Cauchy, podemos concluir que existe pelo menos um número real $c \in] - 1, 0[$ tal que $f(c) = 0$, isto é, a equação $f(x) = 0$ tem pelo menos uma solução no intervalo $] - 1, 0[$, como queríamos provar.

9.3.

$$f(x) = g(x) \Leftrightarrow f(x) - g(x) = 0$$

A função $f - g$ é contínua em \mathbb{R} , por se tratar da diferença entre duas funções contínuas: uma função polinomial e a função raiz quadrada. Em particular é contínua em $[0, 2]$. Como $(f - g)(0) = -1$, $(f - g)(2) = 9.6$ (1C.D.) e $-1 < 0 < 9.6$, pelo teorema de Bolzano-Cauchy, podemos concluir que existe pelo menos um número real $c \in]0, 2[$ tal que $(f - g)(c) = 0$, isto é, a equação $f(x) = g(x)$ tem pelo menos uma solução no intervalo $]0, 2[$, como queríamos provar.

10.

10.1.

No intervalo $] - \infty, 2[$ a função é contínua por se tratar de uma função polinomial $x \mapsto 3x^3 - x - 1$.

No intervalo $]2, +\infty[$ a função é contínua por se tratar de uma função polinomial $x \mapsto 3x^2 - 24x$.

Averiguemos agora a continuidade no ponto $x = 2$.

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (3x^3 - x - 1) = 21$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} (3x^2 - 24x) = -36$$

Como $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$ a função não é contínua em $x = 2$.

Assim, a função f é contínua em $\mathbb{R} \setminus \{2\}$.

10.2. A função f é contínua em $\mathbb{R} \setminus \{2\}$ e, em particular, é contínua em $[-1, 1]$. Como $f(-1) = -3$, $f(1) = 1$, $-3 < 0 < 1$, pelo teorema de Bolzano-Cauchy, podemos concluir que existe pelo menos um número real $c \in]-1, 1[$ tal que $f(c) = 0$, isto é, a equação $f(x) = 0$ tem pelo menos uma solução no intervalo $] - 1, 1[$. Assim a proposição é verdadeira.

10.3. A função f é contínua em $\mathbb{R} \setminus \{2\}$ e, em particular, é contínua em $[3, 5]$. Assim, pelo teorema de Weierstrass, a restrição de f ao intervalo $[3, 5]$ tem um máximo e um mínimo absolutos.

11.

$$f(x) = f(x+2) \Leftrightarrow f(x) - f(x-2) = 0$$

Seja g a função definida por $g(x) = f(x) - f(x+2)$. A função g é contínua no intervalo $[a, a+2]$, uma vez que é a soma de duas funções contínuas e definidas nesse intervalo. Como $g(a) = f(a) - f(a+2) < 0$, $g(a+2) = f(a+2) - f(a+4) > 0$ e $g(a) < 0 < g(a+2)$, pelo teorema de Bolzano-Cauchy, podemos concluir que existe pelo menos um número real $c \in]a, a+2[$ tal que $g(c) = 0$, isto é, a equação $f(x) = f(x+2)$ tem pelo menos uma solução no intervalo $]a, a+2[$. Como queríamos mostrar.

12.

12.1.

Assíntotas verticais:

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} : x - 3 \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{3\}$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{5x^2 + x}{x - 3} = \frac{48}{0^-} = -\infty$$

Assim, a reta de equação $x = 3$ é assíntota vertical ao gráfico de f .

Assíntotas não verticais:

$$m = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5x^2 + x}{x^2 - 3x} \stackrel{(\frac{\infty}{\infty})}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 \left(5 + \frac{1}{x}\right)}{x^2 \left(1 - \frac{3}{x}\right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5 + \frac{1}{x}}{1 - \frac{3}{x}} = 5$$

$$\begin{aligned} b &= \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - 5x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{5x^2 + x}{x - 3} - 5x \right) \stackrel{(+\infty - \infty)}{=} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{16x}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{16}{1 - \frac{3}{x}} = 16 \quad (-44) \end{aligned}$$

Assim, a reta de equação $y = 5x + 16$ é assíntota oblíqua ao gráfico de f quando $x \rightarrow +\infty$.

Quando $x \rightarrow -\infty$ também se obtém a mesma reta.

12.2.

Assíntotas verticais:

$$D_g = \{x \in \mathbb{R} : (x+1)^2 \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{3x+1}{(x+1)^2} = \frac{-2}{0^+} = -\infty$$

Assim, a reta de equação $x = -1$ é assíntota vertical ao gráfico de g .

Assíntotas não verticais:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x+1}{(x+1)^2} \stackrel{(\frac{\infty}{\infty})}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x(3+\frac{1}{x})}{x(x+2+\frac{1}{x})} = \frac{3}{+\infty} = 0$$

Assim, a reta de equação $y = 0$ é assíntota horizontal ao gráfico de f quando $x \rightarrow +\infty$.

Quando $x \rightarrow -\infty$ também se obtém a mesma reta.

12.3.

Assíntotas verticais:

$$D_h = \{x \in \mathbb{R} : 3x^2 + 1 \neq 0\} = \mathbb{R}$$

Assim, não existem assíntotas verticais ao gráfico de h .

Assíntotas não verticais:

$$m = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{3x^2+1}}{x} \stackrel{(\frac{\infty}{\infty})}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{|x|\sqrt{3+\frac{1}{x^2}}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{3+\frac{1}{x^2}} = \sqrt{3}$$

$$\begin{aligned} b &= \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - \sqrt{3}x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{3x^2+1} - \sqrt{3}x) \stackrel{(+\infty-\infty)}{=} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{3x^2+1} - \sqrt{3}x)(\sqrt{3x^2+1} + \sqrt{3}x)}{\sqrt{3x^2+1} + \sqrt{3}x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2+1-3x^2}{\sqrt{3x^2+1} + \sqrt{3}x} = \frac{1}{+\infty} = 0 \end{aligned}$$

Assim, a reta de equação $y = \sqrt{3}x$ é assíntota oblíqua ao gráfico de f quando $x \rightarrow +\infty$.

$$m = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{3x^2 + 1}}{x} \stackrel{(\frac{\infty}{\infty})}{=} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{|x|\sqrt{3 + \frac{1}{x^2}}}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} -\sqrt{3 + \frac{1}{x^2}} = -\sqrt{3}$$

$$\begin{aligned} b &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(f(x) + \sqrt{3}x \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\sqrt{3x^2 + 1} + \sqrt{3}x \right) \stackrel{(+\infty - \infty)}{=} \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(\sqrt{3x^2 + 1} + \sqrt{3}x)(\sqrt{3x^2 + 1} - \sqrt{3}x)}{\sqrt{3x^2 + 1} - \sqrt{3}x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^2 + 1 - 3x^2}{\sqrt{3x^2 + 1} - \sqrt{3}x} = \frac{1}{+\infty} = 0 \end{aligned}$$

Assim, a reta de equação $y = -\sqrt{3}x$ é assíntota oblíqua ao gráfico de f quando $x \rightarrow -\infty$.

13.

13.1.

$$\lim_{x \rightarrow 4^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 4^-} \frac{8 - x}{16 - x} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 4^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 4^+} \frac{\sqrt{2x + 1} - 3}{x - 4} \stackrel{(\frac{0}{0})}{=} \lim_{x \rightarrow 4^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 4^+} \frac{(\sqrt{2x + 1} - 3)(\sqrt{2x + 1} + 3)}{(x - 4)(\sqrt{2x + 1} + 3)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 4^+} \frac{2x + 1 - 9}{(x - 4)(\sqrt{2x + 1} + 3)} = \lim_{x \rightarrow 4^+} \frac{2}{\sqrt{2x + 1} + 3} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

$$f(4) = \frac{1}{3}$$

Como $\lim_{x \rightarrow 4^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 4^-} f(x) = f(4)$ a função é contínua em $x = 4$.

13.2.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{2x + 1} - 3}{x - 4} \stackrel{(\frac{\infty}{\infty})}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{2x + 1} - 3)(\sqrt{2x + 1} + 3)}{(x - 4)(\sqrt{2x + 1} + 3)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x + 1 - 9}{(x - 4)(\sqrt{2x + 1} + 3)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{\sqrt{2x + 1} + 3} = \frac{2}{+\infty} = 0 \end{aligned}$$

Assim, a reta de equação $y = 0$ é uma assíntota horizontal ao gráfico de f quando $x \rightarrow +\infty$.

14.

14.1.

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \sqrt{x^2 - 5x + 6} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^3 - 1}{x^2 - 1} = \frac{7}{3}$$

Como $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$ a função não é contínua em $x = 2$.

14.2.

$$\begin{aligned} b = \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) + x) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 - 5x + 6} + x) \stackrel{(+\infty - \infty)}{=} \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(\sqrt{x^2 - 5x + 6} + x)(\sqrt{x^2 - 5x + 6} - x)}{\sqrt{x^2 - 5x + 6} - x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - 5x + 6 - x^2}{\sqrt{x^2 - 5x + 6} - x} \stackrel{(\frac{\infty}{\infty})}{=} \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-5x + 6}{|x| \sqrt{1 - \frac{5}{x} + \frac{6}{x^2}} - x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x(-5 + \frac{6}{x})}{x(-\sqrt{1 - \frac{5}{x} + \frac{6}{x^2}} - 1)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-5 + \frac{6}{x}}{-\sqrt{1 - \frac{5}{x} + \frac{6}{x^2}} - 1} = \\ &= \frac{5}{2} \end{aligned}$$

Assim, $b = \frac{5}{2}$.

15.

15.1.

$$a'(x) = (x^2 + \sqrt{2}x + 3)' = (x^2)' + (\sqrt{2}x)' + 3' = 2x + \sqrt{2}$$

15.2.

$$\begin{aligned} b'(x) &= \left(x^{2020} + \frac{1}{3}x^3 - x + 2020 \right)' = (x^{2020})' + \left(\frac{1}{3}x^3 \right)' - x' + 2020' = \\ &= 2020x^{2019} + x^2 - 1 \end{aligned}$$

15.3.

$$\begin{aligned} c'(x) &= (5x^3 - x^2 + \sqrt{x} + \pi)' = (5x^3)' - (x^2)' + \sqrt{x}' + \pi' = \\ &= 15x^2 - 2x + \frac{1}{2\sqrt{x}} \end{aligned}$$

15.4.

$$\begin{aligned} d'(x) &= ((2x^2 - 3)^4)' = 4(2x^2 - 3)^3(2x^2 - 3)' = \\ &= 4(2x^2 - 3)^3(4x - 0) = 16x(2x^2 - 3)^3 \end{aligned}$$

15.5.

$$\begin{aligned} e'(x) &= (x^3 \times \sqrt{x})' = (x^3)' \times \sqrt{x} + (x^3) \times (\sqrt{x})' = \\ &= 3x^2\sqrt{x} + \frac{x^3}{2\sqrt{x}} = 3x^2\sqrt{x} + \frac{x^2\sqrt{x}}{2} = \frac{7x^2\sqrt{x}}{2} \end{aligned}$$

15.6.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(\left(2 - \frac{1}{2}x^2 \right) (3 - x^3) \right)' = \\ &= \left(2 - \frac{1}{2}x^2 \right)' (3 - x^3) + \left(2 - \frac{1}{2}x^2 \right) (3 - x^3)' = \\ &= -x(3 - x^3) - 3x^2 \left(2 - \frac{1}{2}x^2 \right) = -3x + x^4 - 6x^2 + \frac{3}{2}x^4 = \\ &= -3x - 6x^2 + \frac{5}{2}x^4 \end{aligned}$$

15.7.

$$\begin{aligned} g'(x) &= \left(\frac{2}{x^2} + \frac{1}{x^3} + \frac{1}{2}x^2 \right)' = \left(\frac{2}{x^2} \right)' + \left(\frac{1}{x^3} \right)' + \left(\frac{1}{2}x^2 \right)' = \\ &= \frac{-4}{x^3} - \frac{3}{x^4} + x \end{aligned}$$

15.8.

$$\begin{aligned} h'(x) &= \left(2\sqrt{x} - \frac{1}{x}\right)' = (2\sqrt{x})' - \left(\frac{1}{x}\right)' = \\ &= 2 \times \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{x^2} = \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{x^2} \end{aligned} \quad (-75)$$

15.9.

$$\begin{aligned} i'(x) &= \left(\frac{5x}{x-1}\right)' = \frac{(5x)'(x-1) - 5x(x-1)'}{(x-1)^2} = \\ &= \frac{5(x-1) - 5x \times 1}{(x-1)^2} = \frac{-5}{(x-1)^2} \end{aligned} \quad (-75)$$

15.10.

$$\begin{aligned} j'(x) &= \left(\frac{2x-3}{x+1}\right)' = \frac{(2x-3)'(x+1) - (2x-3)(x+1)'}{(x+1)^2} = \\ &= \frac{2(x+1) - (2x-3) \times 1}{(x+1)^2} = \frac{5}{(x+1)^2} \end{aligned} \quad (-75)$$

15.11.

$$\begin{aligned} k'(x) &= \left(\frac{x}{x^2+1}\right)' = \frac{x'(x^2+1) - x(x^2+1)'}{(x^2+1)^2} = \\ &= \frac{x^2+1 - x \times 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{-x^2+1}{(x^2+1)^2} \end{aligned}$$

15.12.

$$l'(x) = \left(\frac{-2x+10}{3}\right)' = \left(-\frac{2}{3}x\right)' + \left(\frac{10}{3}\right)' = -\frac{2}{3}$$

15.13.

$$\begin{aligned}
 m'(x) &= \left(\left(\frac{2x-3}{x^2-4} \right)^3 \right)' = 3 \left(\frac{2x-3}{x^2-4} \right)^2 \left(\frac{2x-3}{x^2-4} \right)' = \\
 &= 3 \left(\frac{2x-3}{x^2-4} \right)^2 \frac{(2x-3)'(x^2-4) - (2x-3)(x^2-4)'}{(x^2-4)^2} = \\
 &= 3 \left(\frac{2x-3}{x^2-4} \right)^2 \frac{2(x^2-4) - (2x-3) \times 2x}{(x^2-4)^2} = \\
 &= 3 \left(\frac{2x-3}{x^2-4} \right)^2 \frac{2x^2 - 8 - 4x^2 + 6x}{(x^2-4)^2} = \\
 &= \frac{3(2x-3)^2(-2x^2 + 6x - 8)}{(x^2-4)^4}
 \end{aligned}$$

15.14.

$$\begin{aligned}
 n'(x) &= (\sqrt[3]{x} - 4\sqrt[4]{x} + 8x - 9)' = \left(x^{\frac{1}{3}} - 4x^{\frac{1}{4}} + 8x - 9 \right)' = \\
 &= \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} - x^{-\frac{3}{4}} + 8 = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} - \frac{1}{\sqrt[4]{x^3}} + 8
 \end{aligned}$$

15.15.

$$\begin{aligned}
 o'(x) &= \left(\sqrt{x^2+3} \right)' = \left((x^2+3)^{\frac{1}{2}} \right)' = \frac{1}{2}(x^2+3)^{-\frac{1}{2}}(x^2+3)' = \\
 &= \frac{1}{2\sqrt{x^2+3}}(2x+0) = \frac{2x}{2\sqrt{x^2+3}} = \frac{x}{\sqrt{x^2+3}}
 \end{aligned}$$

15.16.

$$\begin{aligned}
 p'(x) &= \left(\sqrt[3]{2x^4-1} \right)' = \left((2x^4-1)^{\frac{1}{3}} \right)' = \frac{1}{3}(2x^4-1)^{-\frac{2}{3}}(2x^4-1)' = \\
 &= \frac{1}{3\sqrt[3]{(2x^4-1)^2}}(8x^3-0) = \frac{8x^3}{3\sqrt[3]{(2x^4-1)^2}}
 \end{aligned}$$

15.17.

$$\begin{aligned}
 q'(x) &= \left(\sqrt{\frac{2x-1}{3x+1}} \right)' = \left(\left(\frac{2x-1}{3x+1} \right)^{\frac{1}{2}} \right)' = \frac{1}{2} \left(\frac{2x-1}{3x+1} \right)^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{2x-1}{3x+1} \right)' = \\
 &= \frac{1}{2} \left(\frac{3x+1}{2x-1} \right)^{\frac{1}{2}} \times \frac{2(3x+1) - (2x-1) \times 3}{(3x+1)^2} = \\
 &= \sqrt{\frac{3x+1}{2x-1}} \times \frac{5}{2(3x+1)^2}
 \end{aligned}$$

16.

16.1.

$$D_f = \mathbb{R}$$

Determina $f'(x)$:

$$f'(x) = \left(\frac{1}{3}x^3 - \frac{5}{2}x^2 + 6x + 1 \right)' = x^2 - 5x + 6$$

Determina os zeros de f' :

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 5x + 6 = 0 \Leftrightarrow x = 2 \vee x = 3$$

Estuda o sinal de f' e a variação de f :

x		2		3	
Sinal de f'	+	0	-	0	+
Variação de f	\nearrow	$\frac{17}{3}$ Máx	\searrow	$\frac{11}{3}$ Mín	\nearrow

f é estritamente crescente em $] - \infty, 2]$ e em $[3, +\infty[$.

f é estritamente decrescente em $[2, 3]$.

$\frac{17}{3}$ é máximo relativo em 2.

$\frac{11}{3}$ é mínimo relativo em 3.

16.2.

$$D_g = \{x \in \mathbb{R} : x - 1 \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{1\}$$

Determina $g'(x)$:

$$\begin{aligned} g'(x) &= \left(\frac{x+4}{x-1} \right)' = \frac{(x+4)'(x-1) - (x+4)(x-1)'}{(x-1)^2} = \\ &= \frac{x-1 - (x+4)}{(x-1)^2} = -\frac{5}{(x-1)^2} \end{aligned}$$

Determina os zeros de g' :

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow -\frac{5}{(x-1)^2} = 0$$

É uma condição impossível, pelo que g' não tem zeros.
Estuda o sinal de g' e a variação de g :

x		2	
Sinal de g'	—	n.d.	—
Variação de g	\searrow	n.d.	\searrow

g é estritamente decrescente em $] - \infty, 1[$ e em $]1, +\infty[$.
 g não tem extremos.

16.3.

$$D_h = \{x \in \mathbb{R} : x^2 + 4 \geq 0\} = \mathbb{R}$$

Determina $h'(x)$:

$$h'(x) = \left(\sqrt{x^2 + 4}\right)' = \left((x^2 + 4)^{\frac{1}{2}}\right)' = \frac{1}{2}(x^2 + 4)^{-\frac{1}{2}}(2x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 4}}$$

Determina os zeros de h' :

$$h'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{2}{\sqrt{x^2 + 4}} = 0 \Leftrightarrow x = 0 \wedge \sqrt{x^2 + 4} \neq 0 \Leftrightarrow x = 0$$

Estuda o sinal de h' e a variação de h :

x		0	
Sinal de h'	—	0	+
Variação de h	\searrow	2 Mín	\nearrow

h é estritamente crescente em $[0, +\infty[$.

h é estritamente decrescente em $] - \infty, 0]$.

2 é mínimo absoluto em 0 .

17.

17.1.

$$C(2) = 9,86 \quad C(20) = 5$$

$$\text{t.v.m.}_{[2,20]} = \frac{5 - 9,86}{20 - 2} = -0,27$$

A cotação diminui, em média, 0,27 euros por dia, entre o dia 2 e o dia 20.

17.2.

$$\begin{aligned} C'(15) &= \lim_{t \rightarrow 15} \frac{C(t) - C(15)}{t - 15} \left(\frac{0}{0} \right) \\ &= \lim_{t \rightarrow 15} \frac{(x - 15)(-0,005x^2 + 0,15x - 0,75)}{x - 15} = \\ &= \lim_{t \rightarrow 15} (-0,005x^2 + 0,15x - 0,75) = \\ &= 0,375 \end{aligned}$$

No dia 15 a cotação das ações aumentava a uma taxa de 0,375 euros por dia.

18. A bissetriz dos quadrantes pares tem declive -1 . Uma vez que ela é tangente ao gráfico no ponto de abcissa 2 sabemos que $f'(2) = -1$. Opção (A).

19.

19.1. Uma vez que ela é derivável em $x = 1$ também é contínua em $x = 1$. Assim $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1) = 4$

19.2. O declive da reta é dado por $f'(1) = 6$. Assim, a equação reduzida da reta é $y = 6x + b$. Como o ponto de coordenadas $(1, 4)$ pertence à reta, vem que: $4 = 6 \times 1 + b \Leftrightarrow b = -2$.

Concluimos assim que $y = 6x - 2$ é uma equação da reta tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa 1.

19.3.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x^2 - 1} &= \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{f(x) - f(1)}{x - 1} \times \frac{1}{x + 1} \right) = \\ &= f'(1) \times \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x + 1} = 6 \times \frac{1}{2} = \frac{6}{2} = 3 \end{aligned}$$

20.

20.1.

$$D_f = \mathbb{R}$$

Determinar $f'(x)$:

$$f'(x) = \left(\frac{x^4}{12} - 2x^2 + 2 \right)' = \frac{x^3}{3} - 4x$$

Determinar $f''(x)$:

$$f''(x) = \left(\frac{x^3}{3} - 4x \right)' = x^2 - 4$$

Determinar os zeros de f'' :

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow x = -2 \vee x = 2$$

Estudar o sinal de f'' e o sentido das concavidades do gráfico de f :

x		-2		2	
Sinal de f''	+	0	-	0	+
Sentido das concavidades do gráfico de f	\cup	$-\frac{14}{3}$ P.I.	\cap	$-\frac{14}{3}$ P.I.	\cup

O gráfico de f tem a concavidade voltada para cima em $] -\infty, -2]$ e em $[2, +\infty[$.

O gráfico de f tem a concavidade voltada para baixo em $[-2, 2]$.

Os pontos de coordenadas $(-2, -\frac{14}{3})$ e $(2, -\frac{14}{3})$ são pontos de inflexão.

20.2.

$$D_g = \{x \in \mathbb{R} : x + 2 \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$$

Determinar $g'(x)$:

$$g'(x) = \left(\frac{x-3}{x+2} \right)' = \frac{(x-3)'(x+2) - (x-3)(x+2)'}{(x+2)^2} = \frac{5}{(x+2)^2}$$

Determinar $g''(x)$:

$$g''(x) = \left(\frac{5}{(x+2)^2} \right)' = \frac{-5((x+2)^2)'}{(x+2)^4} = \frac{-10(x+2)}{(x+2)^4} = \frac{-10}{(x+2)^3}$$

Determinar os zeros de g'' :

$$g''(x) = 0 \Leftrightarrow -10 = 0 \wedge (x+2)^3 \neq 0$$

Como esta é uma condição impossível, a segunda derivada de g não tem zeros.

Estudar o sinal de g'' e o sentido das concavidades do gráfico de g :

x		-2	
Sinal de g''	$+$	n.d.	$-$
Sentido das concavidades do gráfico de g	\cup	n.d.	\cap

O gráfico de g tem a concavidade voltada para cima em $] - \infty, -2[$.

O gráfico de g tem a concavidade voltada para baixo em $] -2, +\infty[$.

O gráfico de g não tem pontos de inflexão.

20.3.

$$D_h = \{x \in \mathbb{R} : x^2 + 2 \neq 0\} = \mathbb{R}$$

Determinar $h'(x)$:

$$h'(x) = \left(\frac{x^2}{x^2 + 2} \right)' = \frac{2x(x^2 + 2) - x^2(2x + 0)}{(x^2 + 2)^2} = \frac{4x}{(x^2 + 2)^2}$$

Determinar $h''(x)$:

$$\begin{aligned} h''(x) &= \left(\frac{4x}{(x^2 + 2)^2} \right)' = \frac{4(x^2 + 2)^2 - 4x \times 2(x^2 + 2)(2x + 0)}{(x^2 + 2)^4} = \\ &= \frac{4(x^2 + 2) - 16x^2}{(x^2 + 2)^3} = \frac{8 - 12x^2}{(x^2 + 2)^3} \end{aligned}$$

Determinar os zeros de h'' :

$$\begin{aligned} h''(x) = 0 &\Leftrightarrow 8 - 12x^2 = 0 \wedge (x^2 + 2)^3 \neq 0 \Leftrightarrow x = -\sqrt{\frac{2}{3}} \vee x = \sqrt{\frac{2}{3}} \Leftrightarrow x = \\ &= -\frac{\sqrt{6}}{3} \vee x = \frac{\sqrt{6}}{3} \end{aligned}$$

Estudar o sinal de h'' e o sentido das concavidades do gráfico de h :

x		$-\frac{\sqrt{6}}{3}$		$\frac{\sqrt{6}}{3}$	
Sinal de h''	$-$	0	$+$	0	$-$
Sentido das concavidades do gráfico de h	\cap	$\frac{1}{4}$ P.I.	\cup	$\frac{1}{4}$ P.I.	\cap

O gráfico de h tem a concavidade voltada para baixo em $] -\infty, -\frac{\sqrt{6}}{3}]$ e em $[\frac{\sqrt{6}}{3}, +\infty[$.

O gráfico de h tem a concavidade voltada para cima em $[-\frac{\sqrt{6}}{3}, \frac{\sqrt{6}}{3}]$.

Os pontos de coordenadas $(-\frac{\sqrt{6}}{3}, \frac{1}{4})$ e $(\frac{\sqrt{6}}{3}, \frac{1}{4})$ são pontos de inflexão.

21.

21.1.

$$Q'(t) = \left(1 - \frac{3t}{t^2 + 4}\right)' = -\frac{3(t^2 + 4) - 3t(2t + 0)}{(t^2 + 4)^2} = -\frac{-3t^2 + 12}{(t^2 + 4)^2}$$

$$Q'(3) = -\frac{-3 \times 3^2 + 12}{(3^2 + 4)^2} \simeq 0,09$$

O número de pessoas contagiadas 3 dias após a descoberta está a aumentar a uma taxa aproximada de 9 pessoas por dia.

21.2.

Determinar $Q''(t)$:

$$\begin{aligned} Q''(t) &= \left(-\frac{-3t^2 + 12}{(t^2 + 4)^2}\right)' = -\frac{-6t(t^2 + 4)^2 - (-3t^2 + 12) \times 2(t^2 + 4) \times 2t}{(t^2 + 4)^4} \\ &= -\frac{-6t(t^2 + 4) - 4t(-3t^2 + 12)}{(t^2 + 4)^3} = -\frac{6t(t^2 - 12)}{(t^2 + 4)^3} \end{aligned}$$

Determinar os zeros de Q'' :

$$Q''(t) = 0 \Leftrightarrow -\frac{6t(t^2 - 12)}{(t^2 + 4)^3} = 0 \Leftrightarrow t = 0 \vee t = -2\sqrt{3} \vee t = 2\sqrt{3}$$

Estudar o sinal de Q'' e a variação de Q' :

t	0		$2\sqrt{3}$	
Sinal de Q''	0	+	0	-
Variação de Q'	$-\frac{3}{4}$ Mín	\nearrow	$\frac{3}{32}$ Máx	\searrow

$$2\sqrt{3} \simeq 3$$

A doença está a alastrar-se mais rapidamente 3 dias após a descoberta.

22.

Uma vez que dispõe de 360 m de cerca, sabemos que o perímetro do campo será 360. Sendo x o comprimento do campo, a área pode ser dada em função de x pela expressão: $a(x) = x(180 - x)$. Pretendemos maximizar a área, pelo que devemos encontrar o máximo de a .

$$a'(x) = (x(180 - x))' = 180 - x + x \times (-1) = 180 - 2x$$

$$a'(x) = 0 \Leftrightarrow 180 - 2x = 0 \Leftrightarrow x = 90$$

x	0		90	
Sinal de a'	n.d.	+	0	-
Variação de a	n.d.	\nearrow	8100 Máx	\searrow

Nestas condições, o comprimento e a largura iguais a 90 m são as dimensões do campo com maior área.

23.

Seja r o raio da base e a a altura do cilindro. Como a capacidade da lata deve ser de $4\pi \text{ cm}^3$ então temos que:

$$\pi r^2 \times a = 4\pi \Leftrightarrow a = \frac{4}{r^2}$$

O custo total, em unidades de custo, do material da parte lateral é dado pela expressão:

$$2 \times \pi r^2 \times 2 + 2\pi r \times a = 4\pi r^2 + 2\pi r \times \frac{4}{r^2} = 4\pi r^2 + \frac{8\pi}{r}$$

Podemos então afirmar que o custo total c pode ser dado em função do raio da base r pela expressão:

$$c(r) = 4\pi r^2 + \frac{8\pi}{r}$$

Estudemos agora a variação de c .

$$c'(r) = 8\pi r - \frac{8\pi}{r^2}$$

$$c'(r) = 0 \Leftrightarrow 8\pi r - \frac{8\pi}{r^2} = 0 \Leftrightarrow 8\pi r = \frac{8\pi}{r^2} \Leftrightarrow r^3 = 1 \Leftrightarrow r = 1$$

r	0		1	
Sinal de c'	n.d.	−	0	+
Variação de c	n.d.	↘	12π Mín	↗

Para que o custo seja mínimo o raio deve ser 1 cm e a altura deve ser 4 cm.

24.

24.1.

Domínio:

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} : x^2 - 1 \geq 0\} =]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[$$

C. A.*

$$x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \sqrt{1} \vee x = -\sqrt{1} \Leftrightarrow x = 1 \vee x = -1$$

Zeros de f :

$$\sqrt{x^2 - 1} = 0 \Leftrightarrow x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x = -1 \vee x = 1$$

Assim -1 e 1 são zeros de f .

Intervalos de monotonia e extremos locais e absolutos:

$$f'(x) = \left(\sqrt{x^2 - 1}\right)' = \frac{2x}{2\sqrt{x^2 - 1}} = \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}} = 0 \Leftrightarrow x = 0 \wedge \sqrt{x^2 - 1} \neq 0 \wedge x \in D_f$$

Esta condição é impossível, pelo que a derivada de f não tem zeros.

x		-1		1	
Sinal de f'	-	n.d.	n.d.	n.d.	+
Variação de f	\searrow	0 Mín	n.d.	0 Mín	\nearrow

Desta forma, f é crescente em $[1, +\infty[$ e decrescente em $] - \infty, -1]$ e 0 é mínimo absoluto em -1 e 1.

Sentido das concavidades e pontos de inflexão do gráfico de f :

$$f''(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}} = \frac{\sqrt{x^2 - 1} - x \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}}}{x^2 - 1} = \frac{-1}{(x^2 - 1)\sqrt{x^2 - 1}}$$

A segunda derivada de f não tem zeros.

x		-1		1	
Sinal de f'	-	n.d.	n.d.	n.d.	-
Sentido da concavidade do gráfico de f	\cap	0	n.d.	0	\cap

Assim, o gráfico tem a concavidade voltada para baixo em $] - \infty, -1]$ e em $[1, +\infty[$ e não tem pontos de inflexão.

Assíntotas ao gráfico de f :

Uma vez que a função f é contínua em $] - \infty, -1] \cup [1, +\infty[$, não admite assíntotas verticais.

Assíntotas não verticais:

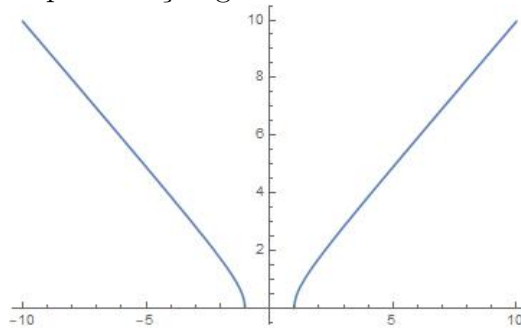
$$\begin{aligned} m &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x} \stackrel{(\frac{\infty}{\infty})}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{|x| \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}}}{x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}} = 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b &= \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x) \stackrel{(+\infty - \infty)}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{x^2 - 1} - x)(\sqrt{x^2 - 1} + x)}{\sqrt{x^2 - 1} + x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 1 - x^2}{\sqrt{x^2 - 1} + x} = 0 \end{aligned} \quad (-108)$$

Assim, a reta de equação $y = x$ é assíntota oblíqua ao gráfico de f quando $x \rightarrow +\infty$.

De forma semelhante provamos que $y = -x$ é assíntota oblíqua ao gráfico de f quando $x \rightarrow -\infty$.

Representação gráfica:



24.2.

Domínio:

$$D_g = \{x \in \mathbb{R} : x^2 - 9 \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{-3, 3\}$$

Zeros de g :

A função g não tem zeros.

Intervalos de monotonia e extremos locais e absolutos:

$$g'(x) = \left(\frac{1}{x^2 - 9} \right)' = \frac{-2x}{(x^2 - 9)^2}$$

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{-2x}{(x^2 - 9)^2} = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

x		-3		0		3	
Sinal de g'	+	n.d.	+	0	-	n.d.	-
Variação de g	\nearrow	n.d.	\nearrow	$-\frac{1}{9}$ Máx	\searrow	n.d.	\searrow

Desta forma, g é crescente em $] - \infty, -3[$ e em $] - 3, 0]$ e decrescente em $[0, 3[$ e em $]3, +\infty[$. $-\frac{1}{9}$ é máximo relativo em 0.

Sentido das concavidades e pontos de inflexão do gráfico de g :

$$g''(x) = \frac{-2(x^2 - 9)^2 - 2x \times 2(x^2 - 9) \times 2x}{(x^2 - 9)^4} = \frac{6x^2 + 18}{(x^2 - 9)^3}$$

A segunda derivada de f não tem zeros.

x		-3		3	
Sinal de g'	+	n.d.	-	n.d.	+
Sentido da concavidade do gráfico de g	\cup	n.d.	\cap	n.d.	\cup

Assim, o gráfico tem a concavidade voltada para baixo em $] - 3, 3[$ e tem concavidade voltada para cima em $] - \infty, -3[$ e em $]3, +\infty[$ e não tem pontos de inflexão.

Assíntotas ao gráfico de g :

Assíntotas verticais:

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} g(x) = \frac{1}{0^-} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -3^-} g(x) = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

Assim, as retas de equação $x = 3$ e $x = -3$ são assíntotas verticais ao gráfico de g .

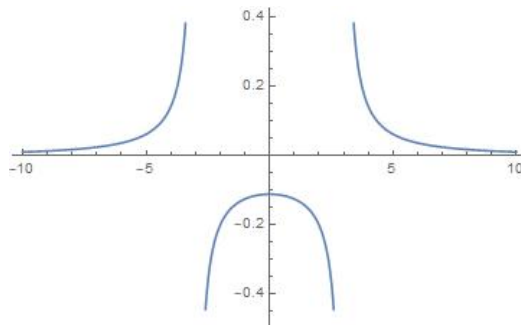
Assíntotas não verticais:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \frac{1}{+\infty} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \frac{1}{+\infty} = 0$$

Assim, a reta de equação $y = 0$ é assíntota horizontal ao gráfico de g .

Representação gráfica:



24.3.

Domínio:

$$D_h = \{x \in \mathbb{R} : x \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

Zeros de h :

$$h(x) = 0 \Leftrightarrow x - \frac{1}{x} = 0 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x = 1 \vee x = -1$$

Assim, -1 e 1 são zeros de h .

Intervalos de monotonia e extremos locais e absolutos:

$$h'(x) = \left(x - \frac{1}{x}\right)' = 1 - \frac{-1}{x^2} = 1 + \frac{1}{x^2}$$

A derivada de h não tem zeros.

x		0	
Sinal de h'	+	n.d.	+
Variação de h	↗	n.d.	↗

Desta forma, h é crescente em $] - \infty, 0[$ e em $]0, +\infty[$ e não tem extremos.

Sentido das concavidades e pontos de inflexão do gráfico de h :

$$h''(x) = \left(1 + \frac{1}{x^2}\right)' = -\frac{2}{x^3}$$

A segunda derivada de f não tem zeros.

x		0	
Sinal de h''	+	n.d.	-
Variação de h	\cup	n.d.	\cap

Assim, o gráfico tem a concavidade voltada para baixo em $]0, +\infty[$ e tem concavidade voltada para cima em $] - \infty, 0[$ e não tem pontos de inflexão.

Assíntotas ao gráfico de h :

Assíntotas verticais:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} h(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(x - \frac{1}{x}\right) = -\frac{1}{0^-} = +\infty$$

Assim, a reta de equação $x = 0$ é assíntota vertical ao gráfico de h .

Assíntotas não verticais:

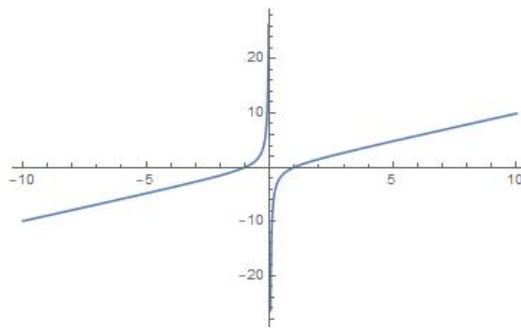
$$m = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x}{x} - \frac{1}{x^2}\right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{x^2}\right) = 1$$

$$b = \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x - \frac{1}{x} - x \right) = 0$$

Assim, a reta de equação $y = x$ é assíntota oblíqua ao gráfico de h .

Da análise às assíntotas não verticais ao gráfico de h quando $x \rightarrow -\infty$ concluímos que não existem mais assíntotas.

Representação gráfica:



25.

25.1.

$$\text{t.v.m.}_{[0,2]} = \frac{p(4) - p(0)}{4 - 0} = \frac{69 - 5}{4} = 16$$

A velocidade média da partícula entre os instantes $t = 0$ e $t = 4$ é 16cm/s.

25.2.

$$p'(t) = (2t^3 - 4t^2 + 5)' = 6t^2 - 8t \quad p'(4) = 64$$

A velocidade no instante $t = 4$ é 64 cm/s.

25.3.

$$p''(t) = (6t^2 - 8t)' = 12t - 8$$

$$p''(t) = 0 \Leftrightarrow t = \frac{2}{3}$$

x	0		$\frac{2}{3}$		60
Sinal de p''	—	—	0	+	+
Variação de p'	0 Máx	\searrow	$-\frac{8}{3}$ Mín	\nearrow	21120 Máx

A velocidade decresce em $[0, \frac{2}{3}]$ e cresce em $[\frac{2}{3}, 60]$. A velocidade mínima é atingida em $t = \frac{2}{3}$ e nesse instante a aceleração é 0 cm/s^2 .

Exercícios propostos

Itens de seleção - páginas 226 a 231

1. Não existe $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$.

Opção (D)

2.

2.1. Nas funções representadas em 1., 2. e 6. temos que $\lim_{x \rightarrow a} y = b$.

Opção (C)

2.2. Das funções identificadas na alínea anterior, a não pertence ao domínio da que está representada em 1.

Opção (B)

3.

$$\lim_{x \rightarrow 4^-} \frac{x-5}{g(x)} = \frac{-1}{0^+} = -\infty$$

Opção (A)

4. Uma vez que tem uma assíntota horizontal quando $x \rightarrow -\infty$ sabemos que

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{h(x)}{x} = 0$$

Opção (B)

5. Como $f'(1) = 3$ sabemos que o declive da reta tangente ao gráfico de f em $x = 1$ é 3.

Opção (D)

6. A função f é uma função afim cuja representação gráfica é uma reta de declive é $\frac{2-0}{0-(-2)} = 1$. Assim, a sua derivada deve ser a função constante definida por $f'(x) = 1$.

Opção (C)

7.

x		-3	
Sinal de f''	-	0	+
Sentido da concavidade do gráfico de f	\cap	$f(-3)$ P.I.	\cup

Opção (C)

8. Como $f'(x) > 0$, a função deve ser crescente e, como $f''(x) < 0$, o seu gráfico deve ter concavidade voltada para baixo.

Opção (D)

9.

Como $f'(1) = 3$ então

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = 3$$

Tem-se que

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(1) - f(x)}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \left(-\frac{f(x) - f(1)}{x - 1} \times \frac{1}{x + 1} \right) = -\frac{3}{2}$$

Opção (B)

10. Se uma função tem derivada num ponto então é contínua nesse ponto, pelo que a contrarrecíproca (opção (D)) é verdadeira, já recíproca desta implicação nem sempre se verifica.

Opção (D)

11. Como a função é par então o gráfico é simétrico relativamente ao eixo Oy . Uma vez que o declive da reta t é 3 então o declive da reta tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa -4 é -3 .

Opção (C)

12. Como a inclinação da reta é 45° o declive é $\tan 45^\circ = 1$.

$$g'(x) = 2x^2 - 3$$

$$2x^2 - 3 = 1 \Leftrightarrow x = -\sqrt{2} \vee x = \sqrt{2}$$

Opção (B)

13. A função f' é decrescente em $[0, 5]$ pelo que a função f'' é negativa em $[0, 5]$. Desta forma a concavidade do gráfico de f está voltada para baixo em $[0, 5]$.

Opção (D)

14.

$$(kx^2 + 8x + 1)' = 2kx + 8$$

$$2k \times 1 + 8 = 2 \Leftrightarrow k = -3$$

Opção (B)

15. A reta t é tangente ao gráfico de h no ponto de abcissa 1, pelo que o seu declive é igual a $h'(1)$.

Como $(1, h(1))$ pertence à reta t ,

$$h(1) = h'(1) \times 1 + b \Leftrightarrow h(1) = 2h(1) + b \Leftrightarrow b = -h(1)$$

A reta t tem de equação $y = 2h(1)x - h(1)$.

Como $0 = 2h(1) \times \frac{1}{2} - h(1) \Leftrightarrow 0 = h(1) - h(1) \Leftrightarrow 0 = 0$ é uma porposição verdadeira, o ponto de coordenadas $(\frac{1}{2}, 0)$ pertence à reta t .

Opção (A)

16.

Como os termos de (x_n) pertencem ao intervalo $] -\infty, 1[$

$$\lim x_n = 1^-. \quad \text{Assim} \quad \lim f(x_n) = 2$$

Opção (B)

17.

$$\lim a_n = \lim \frac{-4n^2 + 5}{n^2} = \lim \left(-4 + \frac{5}{n^2} \right) = -4^+$$

Desta forma

$$\lim f(a_n) = -\infty$$

Opção (C)

18.

$$\lim \left(1 + \frac{1}{2^n} \right) = 1^+. \quad \text{Assim} \quad \lim u_n = 2$$

Opção (B)

19. Sabemos que $\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - (-x + 2)) = 0$. Assim,

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - (-x + 2)) = 0 &\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (-x + 2) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty \end{aligned}$$

Opção (C)

20.

Como g é par, a função h definida por $h(x) = \frac{g(x)}{x}$ é ímpar, o que exclui as opções (A) e (C). Por outro lado, g é contínua e $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) \neq 0$ então

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{g(x)}{x} = +\infty \vee \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{g(x)}{x} = -\infty, \text{ o que exclui a opção (B).}$$

Opção (D)

21.

Se $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = c$ para algum $c \in \mathbb{R}$ então $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{x^2} = 0$. Como $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{x^2} = k, k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, não poderá ser nenhuma das opções (A), (B) e (C).

Opção (D)

22. Como $y = 0$ é assíntota ao gráfico de h quando $x \rightarrow -\infty$, tem-se que

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = 0^-$$

Por outro lado, $y = -x$ é assíntota ao gráfico de h , pelo que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{h(x)}{x} = -1$$

Conclui-se que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{1}{h(-x)} \times \frac{h(x)}{x} \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{1}{0^-} \times (-1) \right] = +\infty$$

Opção (A)

23.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} (g(x) - 2x - 1) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} (g(x) + 4 - 2x - 5) = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} (g(x-1) + 4 - 2(x-1) - 5) = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} (h(x) - (2x+3)) \end{aligned}$$

Opção (C)

24.

A função definida por $f(x) = x^2 + 1$ é polinomial de grau par e não tem zeros, pelo que a opção (A) é falsa.

A função definida por $f(x) = x^2 + 1$ é contínua em $[0, 1]$, $f(0) \times f(1) \geq 0$ e f não tem zeros em $]0, 1[$, pelo que a opção (D) é falsa.

A função definida por $f(x) = x^2 - 1$ é contínua em $[-2, 2]$, $f(-2) \times f(2) > 0$ e f tem dois zeros em $] - 2, 2[$, pelo que a opção (C) é falsa.

Opção (B)

25. Consideremos a função definida por $f(x) = x^2 + 1$ definida no intervalo $[-1, 1]$:

$f(1)$ é um extremo relativo de f e $f'(1) = 2$, assim a opção (A) não é necessariamente verdadeira.

$f(1)$ é um extremo relativo de f e a reta de equação $y = 2$ não é tangente ao gráfico de f . Assim, a opção (C) não é necessariamente verdadeira.

$f(0)$ é extremo de f e $(0, f(0))$ não é ponto de inflexão do gráfico de f . Assim, a opção (D) não é necessariamente verdadeira.

Opção (B)

26.

Os zeros da segunda derivada são $-2, -1, 1$ e 2 . Porém, a segunda derivada de f apenas muda de sinal nos pontos $x = 1$, $x = -2$ e $x = 2$. Pelo que são estes os 3 pontos de inflexão de f .

Opção (B)

27. Uma vez que a função polinomial g tem grau 7 a sua segunda derivada tem grau 5. Assim, sabemos que g'' tem pelo menos um zero, no qual muda de sinal, e que não pode ter mais do que 5.

Opção (C)

Itens de construção - páginas 232 a 242

1.

1.1. Para que $\lim f(x_n) = 0$ basta que $\lim x_n = -\infty$. Assim, o termo geral da sucessão pode ser $x_n = -n + 1$.

1.2. Para que $\lim f(x_n) = 3$ basta que $\lim x_n = 0$. Assim, o termo geral da sucessão pode ser $x_n = \frac{1}{n^2}$.

1.3. Para que $\lim f(x_n) = 2$ basta que $\lim x_n = 1$. Assim, o termo geral da sucessão pode ser $x_n = 1 + \frac{(-1)^n}{n}$.

2.

2.1.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -2$$

2.2.

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -1$$

2.3.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -1$$

2.4.

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 0$$

2.5.

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 0$$

2.6.

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = -\infty$$

2.7.

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = +\infty$$

2.8.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$$

3.

3.1.

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (-2x + 5) = -2 \times 2 + 5 = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{2}{x} = \frac{2}{2} = 1$$

3.2. Para que exista $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ temos que ter

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = f(2)$$

Como pela alínea anterior $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 1$ e $f(2) = 0$ este limite não existe.

4.

4.1.

$$\lim_{x \rightarrow 2} (x^2 - 3x) = 2^2 - 3 \times 2 = -2$$

4.2.

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^5 + 2x^2}{x + 4} = \frac{(-1)^5 + 2(-1)^2}{-1 + 4} = \frac{1}{3}$$

4.3.

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{(x - 2)^2} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

4.4.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(-\frac{1}{3x^4} \right) = -\frac{1}{0^+} = -\infty$$

4.5.

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \left(-\frac{1}{3x^5} \right) = -\frac{1}{0^-} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(-\frac{1}{3x^5} \right) = -\frac{1}{0^+} = -\infty$$

Uma vez que

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \left(-\frac{1}{3x^5} \right) \neq \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(-\frac{1}{3x^5} \right)$$

não existe $\lim_{x \rightarrow 0} \left(-\frac{1}{3x^5} \right)$.

4.6.

$$\lim_{x \rightarrow 5^-} \left(\frac{-2x}{5 - x} \right) = \frac{-10}{0^+} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 5^+} \left(\frac{-2x}{5-x} \right) = \frac{-10}{0^-} = +\infty$$

Uma vez que

$$\lim_{x \rightarrow 5^-} \left(\frac{-2x}{5-x} \right) \neq \lim_{x \rightarrow 5^+} \left(\frac{-2x}{5-x} \right)$$

não existe $\lim_{x \rightarrow 5} \left(\frac{-2x}{5-x} \right)$.

4.7.

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{2x^2 + 1}{x^2 - 1} = \frac{3}{0^-} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2x^2 + 1}{x^2 - 1} = \frac{3}{0^+} = +\infty$$

Uma vez que

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{2x^2 + 1}{x^2 - 1} \neq \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2x^2 + 1}{x^2 - 1}$$

não existe $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2 + 1}{x^2 - 1}$.

4.8.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{-x}{(1-x)^2} = \frac{-1}{0^+} = -\infty$$

4.9.

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{5+2x}{-x} = \frac{5}{0^+} = +\infty$$

4.10.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{5+2x}{-x} = \frac{5}{0^-} = -\infty$$

4.11.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{5x-2}{x+2} - \frac{x}{x+1} \right) = \frac{-2}{2} - \frac{0}{1} = -1$$

4.12.

$$\lim_{x \rightarrow -2^+} \left(\frac{5x-2}{x+2} - \frac{x}{x+1} \right) = \frac{-12}{0^+} - \frac{-2}{-1} = -\infty - 2 = -\infty$$

4.13.

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} \left(\frac{5x-2}{x+2} - \frac{x}{x+1} \right) = \frac{-7}{1} - \frac{-1}{0^-} = -7 - \infty = -\infty$$

4.14.

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 5x + 6}{(x - 3)^2} \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x - 3)(x - 2)}{(x - 3)^2} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x - 2}{x - 3}$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{x - 2}{x - 3} = \frac{1}{0^-} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{x - 2}{x - 3} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

Assim, $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 5x + 6}{(x - 3)^2}$ não existe.

5.

5.1.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^3 + 4x - 1) = +\infty + \infty - 1 = +\infty$$

5.2.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3 + 4x^2 - 1) \stackrel{(+\infty - \infty)}{=} \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 \left(1 + \frac{4}{x} - \frac{1}{x^3}\right) = -\infty \times 1 = -\infty$$

5.3.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (-3x^3 + 2x^2 - x) \stackrel{(+\infty - \infty)}{=} \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 \left(-3 + \frac{2}{x} - \frac{1}{x^2}\right) = -\infty \times (-3) = +\infty$$

5.4.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} (-2x^5 + 3x^2 - x + 3) &\stackrel{(+\infty - \infty)}{=} \lim_{x \rightarrow -\infty} x^5 \left(-2 + \frac{3}{x^3} - \frac{1}{x^4} + \frac{3}{x^5}\right) \\ &= -\infty \times (-2) = +\infty \end{aligned}$$

6.

6.1.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^4 - 4x^2 + 1) \stackrel{(+\infty - \infty)}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} x^4 \left(1 - \frac{4}{x^2} + \frac{1}{x^4}\right) = +\infty \times 1 = +\infty$$

6.2.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (6x^3 + 4x^2 - 5) \stackrel{(+\infty - \infty)}{=} \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 \left(6 + \frac{4}{x} - \frac{5}{x^3}\right) = -\infty \times 6 = -\infty$$

6.3.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5x - 4x^3}{x^3 - 3x^2 + 6x - 3} &\stackrel{(\frac{\infty}{\infty})}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 \left(\frac{5}{x^2} - 4 \right)}{x^3 \left(1 - \frac{3}{x} + \frac{6}{x^2} - \frac{3}{x^3} \right)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{5}{x^2} - 4}{1 - \frac{3}{x} + \frac{6}{x^2} - \frac{3}{x^3}} = -4 \end{aligned}$$

6.4.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3 - 4x^4}{10x^3 - 3x^2 - 1} &\stackrel{(\frac{\infty}{\infty})}{=} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^4 \left(\frac{1}{x} - 4 \right)}{x^3 \left(10 - \frac{3}{x} - \frac{1}{x^3} \right)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x \left(\frac{1}{x} - 4 \right)}{10 - \frac{3}{x} - \frac{1}{x^3}} = \\ &= \frac{-\infty \times (-4)}{10} = +\infty \end{aligned}$$

6.5.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 - 4x^4}{10x^3 - 3x^2 - 1} &\stackrel{(\frac{\infty}{\infty})}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^4 \left(\frac{1}{x} - 4 \right)}{x^3 \left(10 - \frac{3}{x} - \frac{1}{x^3} \right)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \left(\frac{1}{x} - 4 \right)}{10 - \frac{3}{x} - \frac{1}{x^3}} = \\ &= \frac{+\infty \times (-4)}{10} = -\infty \end{aligned}$$

6.6.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x^3 + 4x^2 - 7x - 10}{x^5 - x} &\stackrel{(\frac{\infty}{\infty})}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 \left(-1 + \frac{4}{x} - \frac{7}{x^2} - \frac{10}{x^3} \right)}{x^5 \left(1 - \frac{1}{x^4} \right)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-1 + \frac{4}{x} - \frac{7}{x^2} - \frac{10}{x^3}}{x^2 \left(1 - \frac{1}{x^4} \right)} = \\ &= \frac{-1}{+\infty \times 1} = 0 \end{aligned}$$

6.7.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x^3 + 4x^2 - 7x - 10}{x^5 - x} &\stackrel{(\frac{\infty}{\infty})}{=} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3 \left(-1 + \frac{4}{x} - \frac{7}{x^2} - \frac{10}{x^3} \right)}{x^5 \left(1 - \frac{1}{x^4} \right)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-1 + \frac{4}{x} - \frac{7}{x^2} - \frac{10}{x^3}}{x^2 \left(1 - \frac{1}{x^4} \right)} = \\ &= \frac{-1}{-\infty \times 1} = 0 \end{aligned}$$

6.8.

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-\frac{x^2 - 4}{x - 1} - x \right) &\stackrel{(\infty)}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-\frac{x^2 - 4}{x - 1} - \frac{x(x - 1)}{x - 1} \right) = \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} -\frac{2x^2 - x - 4}{x - 1} \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} -\frac{x^2 \left(2 - \frac{1}{x} - \frac{4}{x^2} \right)}{x \left(1 - \frac{1}{x} \right)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} -\frac{x \left(2 - \frac{1}{x} - \frac{4}{x^2} \right)}{1 - \frac{1}{x}} \\
 &= -\frac{+\infty \times 2}{1} = -\infty
 \end{aligned}$$

6.9.

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^3}{x^2 + 4} - \frac{5x^2}{x - 2} \right) &\stackrel{(\infty)}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3(x - 2) - 5x^2(x^2 + 4)}{(x^2 + 4)(x - 2)} = \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-4x^4 - 2x^3 - 20x^2}{x^3 - 2x^2 + 4x - 8} = \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^4 \left(-4 - \frac{2}{x} - \frac{20}{x^2} \right)}{x^3 \left(1 - \frac{2}{x} + \frac{4}{x^2} - \frac{8}{x^3} \right)} = \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \left(-4 - \frac{2}{x} - \frac{20}{x^2} \right)}{1 - \frac{2}{x} + \frac{4}{x^2} - \frac{8}{x^3}} = \\
 &= \frac{+\infty \times (-4)}{1} = -\infty
 \end{aligned}$$

6.10.

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x^3 + x - 1}{x^2 + 4} - (x + 1)^2 \right) &\stackrel{(\infty)}{=} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3 + x - 1 - (x + 1)^2(x^2 + 4)}{x^2 + 4} \\
 &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x^4 - x^3 - 5x^2 - 7x - 5}{x^2 + 4} \\
 &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^4 \left(-1 - \frac{1}{x} - \frac{5}{x^2} - \frac{7}{x^3} - \frac{5}{x^4} \right)}{x^2 \left(1 + \frac{4}{x^2} \right)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 \left(-1 - \frac{1}{x} - \frac{5}{x^2} - \frac{7}{x^3} - \frac{5}{x^4} \right)}{1 + \frac{4}{x^2}} \\
 &= \frac{-\infty \times (-1)}{1} = +\infty
 \end{aligned}$$

7.

7.1.

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} (4 - x) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} (x - 2) = 1$$

$$f(3) = 1$$

Uma vez que $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = f(3)$ podemos afirmar que f é contínua em $x = 3$.

7.2.

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1 - x^2}{x - 1} \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-(x - 1)(x + 1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} -(x + 1) = -2$$

$$g(1) = 3$$

Uma vez que $\lim_{x \rightarrow 1^-} g(x) \neq g(1)$ podemos afirmar que g não é contínua em $x = 1$.

7.3.

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} h(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} (x^2 + 3) = 4$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} h(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{1}{x + 5} = \frac{1}{4}$$

Uma vez que $\lim_{x \rightarrow -1^-} h(x) \neq \lim_{x \rightarrow -1^+} h(x)$ podemos afirmar que h não é contínua em $x = -1$.

8. A função h é contínua em \mathbb{R} por se tratar de uma fune, em particular, é contínua em $[0, 1]$. Como $h(0) = 0,5$, $h(1) = 3,5$ e $0,5 < 3 < 3,5$, pelo teorema de Bolzano-Cauchy, podemos concluir que existe pelo menos um número real $c \in]0, 1[$ tal que $h(c) = 3$, isto é, em que a bola esteve a 3 metros do chão.

9.

9.1.

$$\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 3$$

9.2.

$$\lim_{x \rightarrow 2} g(x) = 0$$

9.3.

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} g(x) = +\infty$$

9.4.

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} g(x) = +\infty$$

9.5.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = 2$$

9.6.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(g(x) - \left(\frac{1}{2}x - 2 \right) \right) = 0 &\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2}x - 2 \right) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty \end{aligned}$$

9.7.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{g(x)}{x} = \frac{2}{-\infty} = 0$$

9.8. Como $y = \frac{1}{2}x - 2$ é assíntota ao gráfico de g quando $x \rightarrow +\infty$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{x} = \frac{1}{2}$$

9.9. Como $y = \frac{1}{2}x - 2$ é assíntota ao gráfico de g quando $x \rightarrow +\infty$

$$b = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(g(x) - \frac{1}{2}x \right) = -2$$

9.10. Como $y = \frac{1}{2}x - 2$ é assíntota ao gráfico de g quando $x \rightarrow +\infty$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(g(x) - \frac{1}{2}x + 2 \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(g(x) - \left(\frac{1}{2}x - 2 \right) \right) = 0$$

10.

10.1.

$$D_f = \mathbb{R}$$

$$f'(x) = (x^2 + 5x + 3)' = 2x + 5$$

$$\begin{aligned} f' : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto 2x + 5 \end{aligned}$$

10.2.

$$D_g = \mathbb{R}$$

$$g'(x) = \left(x^{10} + \frac{1}{2}x^3 - x + \pi \right)' = 10x^9 + \frac{3}{2}x^2 - 1$$

$$\begin{aligned} g' : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto 10x^9 + \frac{3}{2}x^2 - 1 \end{aligned}$$

10.3.

$$D_h = \mathbb{R}$$

$$h'(x) = ((3x - 1)^4 - \pi)' = 4(3x - 1)^3(3x - 1)' = 12(3x - 1)^3$$

$$\begin{aligned} h' : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto 12(3x - 1)^3 \end{aligned}$$

10.4.

$$D_i = \{x \in \mathbb{R} : x^2 \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

$$i'(x) = \left(\frac{2}{x^2}\right)' = 2 \times \frac{-2}{x^3} = \frac{-4}{x^3}$$

$$\begin{aligned} i' : \mathbb{R} \setminus \{0\} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \frac{-4}{x^3} \end{aligned}$$

10.5.

$$D_j = \{x \in \mathbb{R} : x^5 \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

$$j'(x) = \left(\frac{1}{x^5} + \frac{1}{2}x^2\right)' = \frac{-5}{x^6} + x$$

$$\begin{aligned} j' : \mathbb{R} \setminus \{0\} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto -\frac{5}{x^6} + x \end{aligned}$$

10.6.

$$D_l = \{x \in \mathbb{R} : x \neq 0 \wedge x \geq 0\} =]0, +\infty[$$

$$l'(x) = \left(\frac{1}{x} + \sqrt{x}\right)' = \left(\frac{1}{x} + x^{\frac{1}{2}}\right)' = -\frac{1}{x^2} + \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = -\frac{1}{x^2} + \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$\begin{aligned} l' :]0, +\infty[&\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto -\frac{1}{x^2} + \frac{1}{2\sqrt{x}} \end{aligned}$$

10.7.

$$D_m = \{x \in \mathbb{R} : x + 1 \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$$

$$m'(x) = \left(\frac{2x-3}{x+1} \right)' = \frac{2(x+1) - (2x-3) \times 1}{(x+1)^2} = \frac{5}{(x+1)^2}$$

$$\begin{aligned} m' : \mathbb{R} \setminus \{-1\} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \frac{5}{(x+1)^2} \end{aligned}$$

10.8.

$$D_n = \{x \in \mathbb{R} : x^2 + 1 \neq 0\} = \mathbb{R}$$

$$n'(x) = \left(\frac{x}{x^2+1} \right)' = \frac{x^2+1 - x \times 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{1-x^2}{(x^2+1)^2}$$

$$\begin{aligned} n' : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \frac{1-x^2}{(x^2+1)^2} \end{aligned}$$

10.9.

$$D_o = \{x \in \mathbb{R} : 1 - x^2 \geq 0\} = [-1, 1]$$

$$o'(x) = \left(\sqrt{1-x^2} \right)' = \frac{1}{2}(1-x^2)^{-\frac{1}{2}} \times (-2x) = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$D'_o = \left\{ x \in \mathbb{R} : 1 - x^2 \geq 0 \wedge \sqrt{1-x^2} \neq 0 \right\} =]-1, 1[$$

$$\begin{aligned} o' :]-1, 1[&\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \end{aligned}$$

10.10.

$$D_p = \mathbb{R}$$

$$p'(x) = \left(\sqrt[3]{2x^4 + 10} \right)' = \frac{1}{3}(2x^4 + 10)^{-\frac{2}{3}} \times (8x^3) = \frac{8x^3}{3\sqrt[3]{(2x^4 + 10)^2}}$$

$$D'_p = \left\{ x \in \mathbb{R} : 3\sqrt[3]{(2x^4 + 10)^2} \neq 0 \right\} = \mathbb{R}$$

$$\begin{aligned} p' : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \frac{8x^3}{3\sqrt[3]{(2x^4 + 10)^2}} \end{aligned}$$

11. Da análise do gráfico de f , decorre que esta função é crescente no intervalo $] - \infty, a]$, crescente no intervalo $[a, c]$, voltando a ser decrescente no intervalo $[c, +\infty[$. A função tem um mínimo relativo de abcissa a e um máximo relativo de abcissa c . Logo, f' é negativa em $] - \infty, a]$, positiva em $]a, c]$, voltando a ser negativa em $]c, +\infty[$. Como f' está definida em \mathbb{R} , a e c são pontos interiores do domínio de f e $f(a)$ e $f(b)$ são extremos, conclui-se que $f'(a) = 0$ e $f'(b) = 0$. Portanto, o gráfico de f' está representado na figura 3.

O gráfico de f tem concavidade voltada para cima para x menor do que b , tem concavidade voltada para baixo para x maior do que b e tem um ponto de inflexão de abcissa b . Logo, f'' é positiva para x menor do que b e negativa para x maior do que b . Como f'' está definida em \mathbb{R} , b é ponto interior do domínio de f e $(b, f(b))$ é ponto de inflexão, conclui-se que $f''(b) = 0$. Portanto, o gráfico de f'' está representado na figura 2.

12.

12.1. Vamos inicialmente determinar o instante em que o projétil atinge o solo.

$$h(t) = 0 \Leftrightarrow -4,9t^2 + 120t = 0 \Leftrightarrow t = 0 \vee t = \frac{1200}{49}$$

O projétil atinge o solo no instante 24,5 segundos, aproximadamente.

Para determinarmos a velocidade a que ele atinge o solo precisamos de determinar a sua derivada.

$$h'(t) = (-4,9t^2 + 120t)' = -9,8t + 120 \quad h'(24,5) = -120,1$$

O projétil atinge o solo a uma velocidade aproximada de 120,1 m/s.

12.2.

$$h'(t) = 0 \Leftrightarrow -9,8t + 120 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{600}{49}$$

t	0		$\frac{600}{49}$		$\frac{1200}{49}$
Sinal de h'	+	+	0	-	-
Variação de h	0	\nearrow	734,694 Máx	\searrow	0

A altura máxima alcançada foi de 734,69 metros, aproximadamente.

12.3.

$$h''(t) = (-9,8t + 120)' = -9,8$$

A aceleração a num instante arbitrário t é dada por $a(t) = -9,8 \text{ m/s}^2$.

13.

13.1.

$$\text{t.v.m.}_{[1,5]} = \frac{P(5) - P(1)}{5 - 1} = \frac{625 - 29}{4} = 149$$

Entre os dias 1 e 5 a taxa média de variação é de 149 pessoas infetadas por dia.

13.2. Para saber quando se deve considerar que a doença foi erradicada devemos conhecer os zeros de P .

$$P(d) = 0 \Leftrightarrow 30d^2 - d^3 = 0 \Leftrightarrow d = 0 \vee d = 30$$

Assim podemos considerar que a doença foi erradicada 30 dias após o seu aparecimento.

Para estudar a sua monotonia teremos que estudar o sinal da sua derivada.

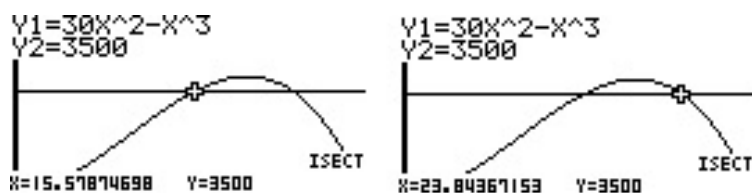
$$P'(d) = (30d^2 - d^3)' = 60d - 3d^2$$

$$P'(d) = 0 \Leftrightarrow 60d - 3d^2 = 0 \Leftrightarrow d = 0 \vee d = 20$$

t	0		20		30
Sinal de P'	0	+	0	-	-
Variação de P	0	\nearrow	4000 Máx	\searrow	0

O número de doentes aumentou nos 20 primeiros dias, atingindo um máximo de 4000 pessoas infetadas, tendo diminuído a partir daí. Após 30 dias, a doença foi erradicada.

13.3.



Como podemos ver pelas imagens o período no qual o número de doentes foi superior a 3500 foi de aproximadamente 8 dias.

14.

14.1.

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{4 - x^2}{x + 2} \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x \rightarrow -2} \frac{(2 - x)(2 + x)}{x + 2} = \lim_{x \rightarrow -2} (2 - x) = 4$$

14.2.

$$\lim_{x \rightarrow 6} \frac{x^2 - 36}{x - 6} \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x \rightarrow 6} \frac{(x - 6)(x + 6)}{x - 6} = \lim_{x \rightarrow 6} (x + 6) = 12$$

14.3.

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 16}{x - 4} \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(x - 4)(x + 4)}{x - 4} = \lim_{x \rightarrow 4} (x + 4) = 8$$

14.4.

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 2x - 3}{2x^2 - 9x + 9} \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x - 3)(x + 1)}{(x - 3)(2x - 3)} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x + 1}{2x - 3} = \frac{4}{3}$$

14.5.

$$\lim_{x \rightarrow -5} \frac{x^2 - 3x - 10}{x^2 - 25} \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x \rightarrow -5} \frac{(x + 5)(x - 2)}{(x + 5)(x - 5)} = \lim_{x \rightarrow -5} \frac{x - 2}{x - 5} = \frac{7}{10}$$

14.6.

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{3x^2 + x - 10}{x^2 - 5x - 14} \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x \rightarrow -2} \frac{(x + 2)(3x - 5)}{(x + 2)(x - 7)} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{3x - 5}{x - 7} = \frac{11}{9}$$

14.7.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^3 - 1}{x^2 - 2x + 1} &\stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{(x - 1)(x^2 + x + 1)}{(x - 1)(x - 1)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2 + x + 1}{x - 1} = \frac{3}{0^-} = -\infty \end{aligned}$$

14.8.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{x^4 - 1} &\stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x - 1)(x^2 + x + 1)}{(x - 1)(x^3 + x^2 + x + 1)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + x + 1}{x^3 + x^2 + x + 1} = \frac{3}{4} \end{aligned}$$

14.9.

$$\lim_{x \rightarrow 4^+} \left(\frac{1}{x - 4} - \frac{3}{x^2 - 16} \right) \stackrel{(+\infty - \infty)}{=} \lim_{x \rightarrow 4^+} \frac{x + 4 - 3}{x^2 - 16} = \frac{5}{0^+} = +\infty$$

14.10.

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x + 2}{(x + 1)^3} \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x \rightarrow -1} \frac{2(x + 1)}{(x + 1)^3} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{2}{(x + 1)^2} = \frac{2}{0^+} = +\infty$$

14.11.

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^3 - x^2 - 5x - 2}{2x^2 - 5x + 2} &\stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(2x^2 + 3x + 1)}{(x-2)(2x-1)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^2 + 3x + 1}{2x-1} = \frac{15}{3} = 5\end{aligned}$$

14.12.

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \left(\frac{1}{x-2} - \frac{x-3}{x^2-3x+2} \right) = \frac{1}{0^-} - \frac{-1}{0^-} = -\infty - \infty = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \left(\frac{1}{x-2} - \frac{x-3}{x^2-3x+2} \right) = \frac{1}{0^+} - \frac{-1}{0^+} = +\infty + \infty = +\infty$$

Assim, não existe $\lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{1}{x-2} - \frac{x-3}{x^2-3x+2} \right)$.

14.13.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 - \frac{1}{x}}{\frac{2x-1}{x} - 4} \stackrel{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{2x-1}{x}}{\frac{2x-1-4x}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x-1}{-2x-1} = 1$$

14.14.

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 2} \left((x-2) \left(\frac{1}{x^2-4} - 1 \right) \right) &\stackrel{(0 \times \infty)}{=} \lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{x-2}{x^2-4} - (x-2) \right) \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{1}{x+2} - (x-2) \right) = \frac{1}{4}\end{aligned}$$

15.

15.1.

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^2 - 2x}{|x|} \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x(x-2)}{-x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} -(x-2) = 2$$

15.2.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2 - 2x}{|x|} \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x(x-2)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x-2) = -2$$

16.

16.1.

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x^3 + 1} + 2}{x - 1} = \frac{5}{1} = 5$$

16.2.

$$\lim_{x \rightarrow 9^-} \frac{10 - x}{\sqrt{x} - 3} = \frac{1}{0^-} = -\infty$$

16.3.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{2x^3 - 10x - 7} &\stackrel{(+\infty - \infty)}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^3 \left(2 - \frac{10}{x^2} - \frac{7}{x^3} \right)} = \\ &= \sqrt{+\infty \times 2} = +\infty \end{aligned}$$

16.4.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{3x^4 + x - 2} &\stackrel{(+\infty - \infty)}{=} \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{x^4 \left(3 + \frac{1}{x^3} - \frac{2}{x^4} \right)} = \\ &= \sqrt{+\infty \times 3} = +\infty \end{aligned}$$

16.5.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt[3]{\frac{2 + 125x}{1 - x}} &\stackrel{(\frac{\infty}{\infty})}{=} \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt[3]{\frac{x \left(125 + \frac{2}{x} \right)}{x \left(-1 + \frac{1}{x} \right)}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt[3]{\frac{125 + \frac{2}{x}}{-1 + \frac{1}{x}}} = \\ &= \sqrt[3]{-125} = -5 \end{aligned}$$

16.6.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{9x^2 + 7}}{x - 2} &\stackrel{(\frac{\infty}{\infty})}{=} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{|x| \sqrt{9 + \frac{7}{x^2}}}{x \left(1 - \frac{2}{x} \right)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x \sqrt{9 + \frac{7}{x^2}}}{x \left(1 - \frac{2}{x} \right)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-\sqrt{9 + \frac{7}{x^2}}}{1 - \frac{2}{x}} = -3 \end{aligned}$$

17.

17.1.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -1} \sqrt[3]{\frac{x^3 + 1}{12x^2 - 12}} &\stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x \rightarrow -1} \sqrt[3]{\frac{(x+1)(x^2 - x + 1)}{(x+1)(12x - 12)}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow -1} \sqrt[3]{\frac{x^2 - x + 1}{12x - 12}} = \sqrt[3]{\frac{3}{-24}} = \\ &= \sqrt[3]{-\frac{1}{8}} = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

17.2.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2 - x}{\sqrt{x^3 + 2x}} &\stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x(x-1)}{|x|\sqrt{x + \frac{2}{x}}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x(x-1)}{x\sqrt{x + \frac{2}{x}}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x-1}{\sqrt{x + \frac{2}{x}}} = \frac{-1}{\sqrt{0 + \infty}} = 0 \end{aligned}$$

17.3.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^2 - x}{\sqrt{x^3 - 2x}} &\stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x(x-1)}{|x|\sqrt{x - \frac{2}{x}}} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x(x-1)}{-x\sqrt{x - \frac{2}{x}}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-x+1}{\sqrt{x - \frac{2}{x}}} = \frac{1}{\sqrt{0 + \infty}} = 0 \end{aligned}$$

17.4.

$$\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2 + 2x - 3}{\sqrt{6 + 2x}} \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x \rightarrow -3} \frac{(x-1)(x+3)}{\sqrt{2(x+3)}} = \lim_{x \rightarrow -3} \frac{(x-1)\sqrt{x+3}}{\sqrt{2}} = 0$$

17.5.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{6-3x}}{x^2-4} &\stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{3(2-x)}}{(x-2)(x+2)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{3(2-x)}}{-(2-x)(x+2)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{3}}{-\sqrt{x-2}(x+2)} = \\ &= \frac{\sqrt{3}}{0^-} = -\infty \end{aligned}$$

17.6.

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{\sqrt{x}-1} &\stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(\sqrt{x}+1)}{x-1} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} (\sqrt{x}+1) = 2\end{aligned}$$

17.7.

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 5} \frac{2x^2-50}{\sqrt{x}-\sqrt{5}} &\stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x \rightarrow 5} \frac{(2x^2-50)(\sqrt{x}+\sqrt{5})}{(\sqrt{x}-\sqrt{5})(\sqrt{x}+\sqrt{5})} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 5} \frac{(2x+10)(x-5)(\sqrt{x}+\sqrt{5})}{x-5} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 5} \left((2x+10)(\sqrt{x}+\sqrt{5}) \right) = 40\sqrt{5}\end{aligned}$$

17.8.

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{2x+1}-3}{x-4} &\stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(\sqrt{2x+1}-3)(\sqrt{2x+1}+3)}{(x-4)(\sqrt{2x+1}+3)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{2x+1-9}{(x-4)(\sqrt{2x+1}+3)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{2(x-4)}{(x-4)(\sqrt{2x+1}+3)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{2}{\sqrt{2x+1}+3} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}\end{aligned}$$

17.9.

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x - \sqrt{x^2+1} \right) &\stackrel{(+\infty-\infty)}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x - \sqrt{x^2+1})(x + \sqrt{x^2+1})}{x + \sqrt{x^2+1}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - x^2 - 1}{x + \sqrt{x^2+1}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-1}{x + \sqrt{x^2+1}} = \frac{-1}{+\infty} = 0\end{aligned}$$

17.10.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{x+1} - \sqrt{x+2} \right) &\stackrel{(+\infty-\infty)}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{x+1} - \sqrt{x+2})(\sqrt{x+1} + \sqrt{x+2})}{(\sqrt{x+1} + \sqrt{x+2})} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+1-x-2}{(\sqrt{x+1} + \sqrt{x+2})} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-1}{(\sqrt{x+1} + \sqrt{x+2})} = \frac{-1}{+\infty} = 0 \end{aligned}$$

17.11.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\sqrt{2x-1} - \sqrt{2x+2}} &\stackrel{(+\infty-\infty)}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x(\sqrt{2x-1} + \sqrt{2x+2})}{(\sqrt{2x-1} - \sqrt{2x+2})(\sqrt{2x-1} + \sqrt{2x+2})} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x(\sqrt{2x-1} + \sqrt{2x+2})}{2x-1-2x-2} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x(\sqrt{2x-1} + \sqrt{2x+2})}{-3} = \frac{+\infty}{-3} = -\infty \end{aligned}$$

17.12.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{2x-1} &\stackrel{(\frac{\infty}{\infty})}{=} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{x\left(2-\frac{1}{x}\right)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{x\left(2-\frac{1}{x}\right)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{2-\frac{1}{x}} = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

17.13.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{16x^2+2x}-x}{x+5} &\stackrel{(+\infty-\infty)}{=} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{|x|\sqrt{16+\frac{2}{x}}-x}{x+5} \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x\sqrt{16+\frac{2}{x}}-x}{x+5} = \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x\left(-\sqrt{16+\frac{2}{x}}-1\right)}{x\left(1+\frac{5}{x}\right)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-\sqrt{16+\frac{2}{x}}-1}{1+\frac{5}{x}} = -5 \end{aligned}$$

17.14.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{9x^2 - 2}}{x} &\stackrel{(\infty)}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{|x|\sqrt{9 - \frac{2}{x^2}}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x\sqrt{9 - \frac{2}{x^2}}}{x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{9 - \frac{2}{x^2}} = 3 \end{aligned}$$

17.15.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{1 + \sqrt{x + 3}} &\stackrel{(\infty)}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{1 + |x|\sqrt{\frac{1}{x} + \frac{3}{x^2}}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x \left(\frac{1}{x} + \sqrt{\frac{1}{x} + \frac{3}{x^2}} \right)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\frac{1}{x} + \sqrt{\frac{1}{x} + \frac{3}{x^2}}} = \\ &= \frac{1}{0^+} = +\infty \end{aligned}$$

18. Como $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = +\infty$, tem-se que $\lim_{x \rightarrow -1^+} \left(\frac{1}{f} \right)(x) = \frac{1}{+\infty} = 0^+$, o que permite excluir a opção (A).

Como $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 0^+$, tem-se que $\lim_{x \rightarrow 0^-} \left(\frac{1}{f} \right)(x) = \frac{1}{0^+} = +\infty$, o que permite excluir a opção (C).

Como $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0^-$, tem-se que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{f} \right)(x) = \frac{1}{0^-} = -\infty$, o que permite excluir a opção (B).

A opção correta é a opção (D).

19.

19.1.

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sqrt{x^2}}{x} \stackrel{(\infty)}{=} \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-x}{x} = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{x^2}}{x} \stackrel{(\infty)}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{x} = 1$$

Como $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ a função não é contínua em $x = 0$.

19.2.

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} |x - 4| = 2$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2^+} g(x) &= \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^3 - 8}{3 - \sqrt{2x + 5}} \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{(x^3 - 8)(3 + \sqrt{2x + 5})}{(3 - \sqrt{2x + 5})(3 + \sqrt{2x + 5})} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{(x^3 - 8)(3 + \sqrt{2x + 5})}{9 - 2x - 5} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{(x - 2)(x^2 + 2x + 4)(3 + \sqrt{2x + 5})}{-2(x - 2)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{(x^2 + 2x + 4)(3 + \sqrt{2x + 5})}{-2} = \frac{12 \times 6}{-2} = -36 \end{aligned}$$

Como $\lim_{x \rightarrow 2^-} g(x) \neq \lim_{x \rightarrow 2^+} g(x)$ a função não é contínua em $x = 2$.

20.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -2^-} f_k(x) &= \lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{2x^3 + 2x^2 + 8}{x^2 - 4} \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{(x + 2)(2x^2 - 2x + 4)}{(x + 2)(x - 2)} \\ &= \lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{2x^2 - 2x + 4}{x - 2} = -4 \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow -2^+} f_k(x) = \lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{k - 3x}{k} = \frac{k + 6}{k}$$

$$f_k(-2) = \frac{k + 6}{k}$$

Para que a função seja contínua em $x = -2$:

$$\frac{k + 6}{k} = -4 \Leftrightarrow k + 6 = -4k \Leftrightarrow 5k = -6 \Leftrightarrow k = -\frac{6}{5}$$

Assim a função desta família que é contínua em $x = -2$ é definida por:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2x^3 + 2x^2 + 8}{x^2 - 4} & \text{se } x < -2 \\ \frac{2 + 5x}{2} & \text{se } x \geq -2 \end{cases}$$

21.

21.1.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{\sqrt{x}} \stackrel{(\frac{\infty}{\infty})}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x} = 0$$

$$f(0) = -5$$

Como $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) \neq g(0)$, qualquer função da família é descontínua em $x = 0$.

21.2.

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{kx - 1}{x + 2} = \frac{k - 1}{3}$$

$$f(1) = 1$$

Para que a função seja contínua à direita de $x = 1$ temos:

$$\frac{k - 1}{3} = 1 \Leftrightarrow k = 4$$

Para $k = 4$ a função f é contínua em $]1, +\infty[$ por se tratar do quociente de duas funções contínuas.

Assim, o valor de k para o qual obtemos uma família de funções contínuas em $[1, +\infty[$ é 4.

22.

22.1.

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{9}{3 - x} = \frac{9}{0^+} = +\infty$$
$$f(3) = 0$$

Como $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) \neq f(3)$, a função f não é contínua em $x = 3$.

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{x^2}{x - 3} = \frac{9}{0^-} = -\infty$$
$$f(3) = 6$$

Como $\lim_{x \rightarrow 3^-} g(x) \neq g(3)$, a função g não é contínua em $x = 3$.

22.2.

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 3^-} (f + g)(x) &= \lim_{x \rightarrow 3^-} \left(\frac{9}{3-x} + \frac{x^2}{x-3} \right) = \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{x^2 - 9}{x-3} \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \\ &= \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{(x-3)(x+3)}{x-3} = \lim_{x \rightarrow 3^-} (x+3) = 6\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 3^+} (f + g)(x) &= \lim_{x \rightarrow 3^+} \left(\frac{9}{3-x} + \frac{x^2}{x-3} \right) = \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{x^2 - 9}{x-3} \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \\ &= \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{(x-3)(x+3)}{x-3} = \lim_{x \rightarrow 3^+} (x+3) = 6\end{aligned}$$

$$(f + g)(3) = 0 + 6 = 6$$

Como $\lim_{x \rightarrow 3^-} (f + g)(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} (f + g)(x) = f(3)$, a função $f + g$ é contínua em $x = 3$.

23.

23.1.

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} : x^2 - 2 \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{-\sqrt{2}, \sqrt{2}\}$$

A função f é o quociente entre duas funções contínuas: a função constante $x \mapsto 1$ e a função polinomial $x \mapsto x^2 - 2$.

Assim, a função é contínua em todo o seu domínio.

23.2.

$$\lim_{x \rightarrow \sqrt{2}^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow \sqrt{2}^-} \frac{1}{x^2 - 2} = \frac{1}{0^-} = -\infty$$

Seja qual for o valor $f(\sqrt{2})$ temos que $\lim_{x \rightarrow \sqrt{2}^-} f(x) \neq f(\sqrt{2})$, pelo que não existe qualquer prolongamento de f que seja contínuo em \mathbb{R} .

24.

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{x} - 2}{x - 4} = \frac{1}{2} \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) &= f(0) = a\end{aligned}$$

Assim, para que a função seja contínua em $x = 0$ temos que $a = \frac{1}{2}$.

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow 4^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 4^-} \frac{\sqrt{x} - 2}{x - 4} \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x \rightarrow 4^-} \frac{(\sqrt{x} - 2)(\sqrt{x} + 2)}{(x - 4)(\sqrt{x} + 2)} = \lim_{x \rightarrow 4^-} \frac{x - 4}{(x - 4)(\sqrt{x} + 2)} \\
&= \lim_{x \rightarrow 4^-} \frac{1}{\sqrt{x} + 2} = \frac{1}{4} \\
\lim_{x \rightarrow 4^+} f(x) &= f(4) = b
\end{aligned} \tag{-235}$$

Assim, para que a função seja contínua em $x = 4$ temos que $b = \frac{1}{4}$.

25. A função g é contínua em \mathbb{R} , por se tratar de uma função polinomial. Em particular é contínua em $[-3, -2]$. Como $g(-3) = 38$, $g(-2) = -3$ e $-3 < 0 < 38$, pelo teorema de Bolzano-Cauchy, podemos concluir que existe pelo menos um número real $c \in]-3, -2[$ tal que $g(c) = 0$. Desta forma, a proposição é verdadeira.

26.

26.1.

Assíntotas verticais:

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} : x - 2 \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{2\}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{3x^2 - 5x - 7}{x - 2} = \frac{-7}{0^-} = +\infty$$

A reta de equação $x = 2$ é assíntota vertical ao gráfico de f .

Assíntotas não verticais:

$$\begin{aligned}
m &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2 - 5x - 7}{x^2 - 2x} \stackrel{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 \left(3 - \frac{5}{x} - \frac{7}{x^2}\right)}{x^2 \left(1 - \frac{2}{x}\right)} = \\
&= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3 - \frac{5}{x} - \frac{7}{x^2}}{1 - \frac{2}{x}} = 3
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
b &= \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - 3x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{3x^2 - 5x - 7}{x - 2} - 3x \right) \stackrel{(+\infty - \infty)}{=} \\
&= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x - 7}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - \frac{7}{x}}{1 - \frac{2}{x}} = 1
\end{aligned}$$

Assim, a reta de equação $y = 3x + 1$ é assíntota oblíqua ao gráfico de f quando $x \rightarrow +\infty$.

Quando $x \rightarrow -\infty$ também se obtém a mesma reta.

26.2.

Assíntotas verticais:

$$D_g = \{x \in \mathbb{R} : 2x^2 + 1 \neq 0\} = \mathbb{R}$$

O gráfico de g não tem assíntotas verticais.

Assíntotas não verticais:

$$\begin{aligned} m = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{x} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^3 - 3x + 1}{2x^3 + x} \stackrel{(+\infty-\infty)}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 \left(2 - \frac{3}{x^2} + \frac{1}{x^3}\right)}{x^3 \left(2 + \frac{1}{x^2}\right)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 - \frac{3}{x^2} + \frac{1}{x^3}}{2 + \frac{1}{x^2}} = 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b = \lim_{x \rightarrow +\infty} (g(x) - x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2x^3 - 3x + 1}{2x^2 + 1} - x \right) \stackrel{(+\infty-\infty)}{=} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-4x + 1}{2x^2 + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-4 + \frac{1}{x}}{x \left(2 + \frac{1}{x^2}\right)} = 0 \end{aligned}$$

Assim, a reta de equação $y = x$ é assíntota oblíqua ao gráfico de g quando $x \rightarrow +\infty$.

Quando $x \rightarrow -\infty$ também se obtém a mesma reta.

26.3.

Assíntotas verticais:

$$D_h = \{x \in \mathbb{R} : |x - 1| \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{1\}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2}{|x - 1|} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

A reta de equação $x = 1$ é assíntota vertical ao gráfico de h .

Assíntotas não verticais:

$$\begin{aligned} m = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{h(x)}{x} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x|x-1|} \stackrel{(\frac{\infty}{\infty})}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x(x-1)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x^2 - x} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x^2(1 - \frac{1}{x})} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{1 - \frac{1}{x}} = 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b = \lim_{x \rightarrow +\infty} (h(x) - x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2}{|x-1|} - x \right) \stackrel{(\frac{\infty}{\infty})}{=} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2}{x-1} - x \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - x(x-1)}{x-1} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x-1} \stackrel{(\frac{\infty}{\infty})}{=} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x(1 - \frac{1}{x})} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{1 - \frac{1}{x}} = 1 \end{aligned}$$

Assim, a reta de equação $y = x + 1$ é assíntota oblíqua ao gráfico de g quando $x \rightarrow +\infty$.

$$\begin{aligned} m = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{h(x)}{x} &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{x|x-1|} \stackrel{(\frac{\infty}{\infty})}{=} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{-x(x-1)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} -\frac{x^2}{x^2 - x} \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} -\frac{x^2}{x^2(1 - \frac{1}{x})} = \lim_{x \rightarrow -\infty} -\frac{1}{1 - \frac{1}{x}} = -1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 b = \lim_{x \rightarrow -\infty} (h(x) + x) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x^2}{|x-1|} + x \right) \stackrel{(\frac{\infty}{\infty})}{=} \\
 &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x^2}{-(x-1)} + x \right) = \\
 &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x^2 + x(x-1)}{x-1} = \\
 &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x}{x-1} \stackrel{(\frac{\infty}{\infty})}{=} \\
 &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x}{x \left(1 - \frac{1}{x}\right)} = \\
 &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-1}{1 - \frac{1}{x}} = -1
 \end{aligned}$$

Assim, a reta de equação $y = -x - 1$ é assíntota oblíqua ao gráfico de g quando $x \rightarrow -\infty$.

26.4.

Assíntotas verticais:

$$D_i = \{x \in \mathbb{R} : x^2 - 9 \geq 0\} =]-\infty, -3] \cup [3, +\infty[$$

O gráfico de i não tem assíntotas verticais.

Assíntotas não verticais:

$$\begin{aligned}
 m = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{i(x)}{x} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x + \sqrt{x^2 - 9}}{x} \stackrel{(\frac{\infty}{\infty})}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x + |x|\sqrt{1 - \frac{9}{x^2}}}{x} \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \left(3 + \sqrt{1 - \frac{9}{x^2}}\right)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(3 + \sqrt{1 - \frac{9}{x^2}}\right) = 4
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 b = \lim_{x \rightarrow +\infty} (i(x) - 4x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(3x + \sqrt{x^2 - 9} - 4x \right)^{(+\infty - \infty)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{x^2 - 9} - x)(\sqrt{x^2 - 9} + x)}{\sqrt{x^2 - 9} + x} \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 9 - x^2}{\sqrt{x^2 - 9} + x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-9}{\sqrt{x^2 - 9} + x} = 0
 \end{aligned}$$

Assim, a reta de equação $y = 4x$ é assíntota oblíqua ao gráfico de i quando $x \rightarrow +\infty$.

$$\begin{aligned}
 m = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{i(x)}{x} &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x + \sqrt{x^2 - 9}}{x} \stackrel{(\infty)}{=} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x + |x|\sqrt{1 - \frac{9}{x^2}}}{x} \\
 &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x \left(3 - \sqrt{1 - \frac{9}{x^2}} \right)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(3 - \sqrt{1 - \frac{9}{x^2}} \right) = 2
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 b = \lim_{x \rightarrow -\infty} (i(x) - 2x) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(3x + \sqrt{x^2 - 9} - 2x \right)^{(+\infty - \infty)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(\sqrt{x^2 - 9} + x)(\sqrt{x^2 - 9} - x)}{\sqrt{x^2 - 9} - x} \\
 &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - 9 - x^2}{\sqrt{x^2 - 9} - x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-9}{\sqrt{x^2 - 9} - x} = 0
 \end{aligned}$$

Assim, a reta de equação $y = 2x$ é assíntota oblíqua ao gráfico de g quando $x \rightarrow -\infty$.

27.

27.1. O gráfico de g pode ser obtido a partir do gráfico de f através de uma translação associada ao vetor $(-1, 0)$. Assim, $y = -5$ e $y = -3(x+1)+2$, ou seja, $y = -5$ e $y = -3x - 1$ são assíntotas ao gráfico de g .

27.2. O gráfico de h pode ser obtido a partir do gráfico de f através de uma reflexão relativamente ao eixo Oy . Assim, $y = -5$ e $y = -3 \times (-x) + 2$, ou seja, $y = -5$ e $y = 3x + 2$ são assíntotas ao gráfico de h .

27.3. O gráfico de i pode ser obtido a partir do gráfico de f através de uma reflexão relativamente ao eixo Ox . Assim, $-y = -5$ e $-y = -3x + 2$, ou seja, $y = 5$ e $y = 3x - 2$ são assíntotas ao gráfico de i .

27.4. O gráfico de j pode ser obtido a partir do gráfico de f através de uma reflexão relativamente ao eixo Ox seguido de uma translação associada ao vetor $(0, 2)$. O resultado da primeira transformação está indicado na alínea anterior. Assim, $y = 5 + 2$ e $y = 3x - 2 + 2$, ou seja, $y = 7$ e $y = 3x$ são assíntotas ao gráfico de j .

28.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(\sqrt{x^2 + 1} - x \right)' = \frac{1}{2}(x^2 + 1)^{-\frac{1}{2}} \times (x^2 + 1)' - 1 = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} - 1 = \\ &= \frac{x - \sqrt{x^2 + 1}}{\sqrt{x^2 + 1}} = \frac{-(\sqrt{x^2 + 1} - x)}{\sqrt{x^2 + 1}} = \frac{-f(x)}{\sqrt{x^2 + 1}} \end{aligned}$$

29.

29.1.

$$(f + g)'(2) = f'(2) + g'(2) = -2 + 1 = -1$$

29.2.

$$(5f)'(2) = 5f'(2) = 5 \times (-2) = -10$$

29.3.

$$(f \times g)'(2) = f'(2)g(2) + f(2)g'(2) = -2 \times (-3) + 4 \times 1 = 10$$

29.4.

$$\left(\frac{1}{f} \right)'(2) = \frac{1' \times f(2) - 1 \times f'(2)}{f^2(2)} = \frac{2}{16} = \frac{1}{8}$$

29.5.

$$\left(\frac{f}{g} \right)'(2) = \frac{f'(2) \times g(2) - f(2) \times g'(2)}{g^2(2)} = \frac{-2 \times (-3) - 4 \times 1}{9} = \frac{2}{9}$$

29.6.

$$\left(\frac{1}{f + g} \right)'(2) = \frac{1' \times (f + g)(2) - 1 \times (f + g)'(2)}{(f + g)^2(2)} = \frac{0 - 1 \times (-1)}{(4 - 3)^2} = 1$$

29.7.

$$(g \times g)'(2) = (g^2)'(2) = 2g(2) \times g'(2) = 2 \times (-3) \times 1 = -6$$

29.8.

$$\begin{aligned} \left(\frac{f}{f+g}\right)'(2) &= \frac{f'(2) \times (f+g)(2) - f(2) \times (f+g)'(2)}{(f+g)^2(2)} = \\ &= \frac{-2 \times (4-3) - 4 \times (-1)}{(4-3)^2} = 2 \end{aligned}$$

30.**30.1.**

$$f'(x) = \left(\frac{1}{2x-3}\right)' = \frac{-2}{(2x-3)^2} \quad f'(0) = -\frac{2}{9}$$

O declive da reta é dado por $f'(0) = -\frac{2}{9}$. Assim, a equação reduzida da reta é $y = -\frac{2}{9}x + b$. Como o ponto de coordenadas $(0, f(0))$ pertence à reta, vem que: $-\frac{1}{3} = -\frac{2}{9} \times 0 + b \Leftrightarrow b = -\frac{1}{3}$. Concluimos assim que $y = -\frac{2}{9}x - \frac{1}{3}$ é uma equação da reta tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa 0.

30.2.

$$g'(x) = \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}\right)' = -\frac{1}{x^2} + \frac{2}{x^3} \quad g'\left(-\frac{1}{2}\right) = -20$$

O declive da reta é dado por $g'\left(-\frac{1}{2}\right) = -20$. Assim, a equação reduzida da reta é $y = -20x + b$. Como o ponto de coordenadas $\left(-\frac{1}{2}, g\left(-\frac{1}{2}\right)\right)$ pertence à reta, vem que: $-6 = -20 \times \left(-\frac{1}{2}\right) + b \Leftrightarrow b = -16$. Concluimos assim que $y = -20x - 16$ é uma equação da reta tangente ao gráfico de g no ponto de abcissa $-\frac{1}{2}$.

30.3.

$$h'(x) = \left(\frac{x+1}{x-1}\right)' = \frac{x-1 - (x+1)}{(x-1)^2} = \frac{-2}{(x-1)^2} \quad h'(0) = -2$$

O declive da reta é dado por $h'(0) = -2$. Assim, a equação reduzida da reta é $y = -2x + b$. Como o ponto de coordenadas $(0, h(0))$ pertence à reta, vem que: $-1 = -2 \times 0 + b \Leftrightarrow b = -1$.

Concluimos assim que $y = -2x - 1$ é uma equação da reta tangente ao gráfico de h no ponto de abcissa 0.

31.

$$f'(x) = \left(\frac{x}{x+1} \right)' = \frac{1 \times (x+1) - x \times 1}{(x+1)^2} = \frac{1}{(x+1)^2}$$

Para determinar os pontos do gráfico nos quais a reta tangente é paralela à bissetriz dos quadrantes ímpares, $y = x$, devem-se procurar as soluções da equação $f'(x) = 1$.

$$f'(x) = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{(x+1)^2} \Leftrightarrow (x+1)^2 = 1 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = -2$$

Assim, as retas tangentes ao gráfico de f nos pontos $(0, 0)$ e $(-2, -2)$ são paralelas à bissetriz dos quadrantes ímpares.

32.

32.1.

$$D_f = \mathbb{R}$$

Determinar a derivada $f'(x)$:

$$f'(x) = (x^3 + 3x^2 - 9x - 10)' = 3x^2 + 6x - 9$$

Determinar os zeros de f' :

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 + 6x - 9 = 0 \Leftrightarrow x = -3 \vee x = 1$$

Estudar o sinal de f' e a variação de f :

x		-3		1	
Sinal de f'	+	0	-	0	+
Variação de f	\nearrow	17 Máx	\searrow	-15 Mín	\nearrow

f é crescente em $] -\infty, -3]$ e em $[1, +\infty[$ e é decrescente em $[-3, 1]$.

17 é máximo em $x = -3$ e -15 é mínimo em $x = 1$.

32.2.

$$D_g = \{x \in \mathbb{R} : x \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

Determinar a derivada $g'(x)$:

$$g'(x) = \left(\frac{x}{4} + \frac{1}{x} \right)' = \frac{1}{4} - \frac{1}{x^2}$$

Determinar os zeros de g' :

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{4} - \frac{1}{x^2} = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{4} = \frac{1}{x^2} \Leftrightarrow x = -2 \vee x = 2$$

Estudar o sinal de g' e a variação de g :

x		-2		0		2	
Sinal de g'	+	0	-	n.d.	-	0	+
Variação de g	\nearrow	-1 Máx	\searrow	n.d.	\searrow	1 Mín	\nearrow

g é crescente em $] -\infty, -2]$ e em $[2, +\infty[$ e é decrescente em $[-2, 0[$ e em $]0, 2]$.

-1 é máximo em $x = -2$ e 1 é mínimo em $x = 2$.

32.3.

$$D_h = \{x \in \mathbb{R} : x^2 + 1 \neq 0\} = \mathbb{R}$$

Determinar a derivada $h'(x)$:

$$h'(x) = \left(\frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} \right)' = \frac{2x \times (x^2 + 1) - (x^2 - 1) \times 2x}{(x^2 + 1)^2} = \frac{4x}{(x^2 + 1)^2}$$

Determinar os zeros de h' :

$$h'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{4x}{(x^2 + 1)^2} = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

Estudar o sinal de h' e a variação de h :

x		0	
Sinal de h'	-	0	+
Variação de h	\searrow	-1 Mín	\nearrow

h é crescente em $[0, +\infty[$ e decrescente em $] - \infty, 0]$.
 1 é mínimo em $x = 0$.

32.4.

$$D_i = \{x \in \mathbb{R} : x - 8 \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{8\}$$

Determinar a derivada $i'(x)$:

$$i'(x) = \left(\frac{x^3}{x-8} \right)' = \frac{3x^2 \times (x-8) - x^3 \times 1}{(x-8)^2} = \frac{2x^3 - 24x^2}{(x-8)^2}$$

Determinar os zeros de i' :

$$i'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{2x^3 - 24x^2}{(x-8)^2} = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 12$$

Estudar o sinal de i' e a variação de i :

x		0		8		12	
Sinal de i'	—	0	—	n.d.	—	0	+
Variação de i	\searrow	0	\searrow	n.d.	\searrow	432 Mín	\nearrow

i é crescente em $[12, +\infty[$ e decrescente em $] - \infty, 8[$ e em $]8, 12]$.
 432 é mínimo em $x = 12$.

33. A opção que pode representar a função f é a (III). Podemos excluir a opção (II) pois, por visualização gráfica, as imagens de 1 e de 4 têm sinais contrários. Logo, $f(1) \times f(4) < 0$, o que contraria a condição dada. Excluimos a opção (IV) pois, como f'' está definida em \mathbb{R} , em particular f é diferenciável duas vezes e, portanto, é contínua. A opção (I) não respeita o sentido das concavidades do gráfico de f . O sentido das concavidades é obtido pelo estudo do sinal da segunda derivada de f . Como a parte do gráfico de g visualizada está acima do eixo das abcissas, g é contínua e não tem zeros, então $g(x) > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Assim, o sinal de f'' é dado pelo sinal do fator $x^2 - 5x + 4$. Rejeitamos a opção (I) pois, por exemplo no intervalo $[1, 4]$, a concavidade está voltada para cima quando deveria estar voltada para baixo.

34. A opção que pode representar a função h é a opção (I). Podemos excluir a opção (II) pois, nesta, $\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = -1$ e sabe-se que

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (h(x) - 1) = 0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = 1$$

Excluimos a opção (III) pois contraria o facto de existir um mínimo relativo em $]a, c[$. Rejeitamos a opção (IV) por não respeitar o sentido das concavidades do gráfico de h . Nesta opção, para $x > b$, o gráfico apresenta a concavidade voltada para baixo. Como uma das condições é $h''(x) > 0$ para $x > b$, então o gráfico de h tem que ter a concavidade voltada para cima quando $x > b$.

35. Uma vez que o parque é retangular e a sua área é 5000 m^2 , temos que $xy = 5000 \Leftrightarrow y = \frac{5000}{x}$. Desta forma o comprimento da cerca c pode ser escrito em função de x através da expressão $c(x) = x + 2 \times \frac{5000}{x} = x + \frac{10000}{x}$. Para se determinar o valor de x que permite minimizar o comprimento da cerca vamos estudar o sinal de c' .

$$c'(x) = \left(x + \frac{10000}{x} \right)' = 1 - \frac{10000}{x^2}$$

$$c'(x) = 0 \Leftrightarrow 1 - \frac{10000}{x^2} = 0 \Leftrightarrow \frac{10000}{x^2} = 1 \Leftrightarrow x^2 = 10000 \Leftrightarrow x = 100 \vee x = -100$$

Como $x > 0$ temos que $x = 100$.

x	0		100	
Sinal de c'	n.d.	—	0	+
Variação de c	n.d.	\searrow	200 Mín	\nearrow

Como $x = 100$ então $y = \frac{5000}{x} = \frac{5000}{100} = 50$.

A menor quantidade de cerca necessária é 200m e o parque deverá ter 100 metros de comprimento e 50 metros de largura.

36. Como $y = -2x + 2$ é assíntota ao gráfico de f sabemos que

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) + 2x - 2) = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = -2.$$

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[f(x) \times \frac{kx^2 + x + 1}{x^3} \right] &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\frac{f(x)}{x} \times \frac{kx^2 + x + 1}{x^2} \right] = \\
 &= -2 \times \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\frac{kx^2 + x + 1}{x^2} \right] = \left(\frac{\infty}{\infty} \right) \\
 &= -2 \times \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\frac{x^2 \left(k + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} \right)}{x^2} \right] = \\
 &= -2 \times \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(k + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} \right) = -2k
 \end{aligned}$$

Temos então:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left[f(x) \times \frac{kx^2 + x + 1}{x^3} \right] = 8 \Leftrightarrow -2k = 8 \Leftrightarrow k = -4$$

37.

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5g(x) + 2x + 1}{x} = \frac{9}{2} &\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} 5 \frac{g(x)}{x} + \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x + 1}{x} = \frac{9}{2} \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow 5 \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{x} + \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(2 + \frac{1}{x} \right) = \frac{9}{2} \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow 5 \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{x} + 2 = \frac{9}{2} \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{x} = \frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

O declive da assíntota ao gráfico de f é igual $\frac{1}{2}$.

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(g(x) - \frac{x}{2} + \frac{3}{4} \right) = 1 &\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(g(x) - \frac{x}{2} \right) + \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{3}{4} \right) = 1 \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(g(x) - \frac{x}{2} \right) + \frac{3}{4} = 1 \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(g(x) - \frac{x}{2} \right) = \frac{1}{4}
 \end{aligned}$$

A ordenada na origem da assíntota ao gráfico de f é $\frac{1}{4}$.

Conclui-se que $y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}$ é uma equação reduzida da assíntota oblíqua ao gráfico de da função f .

38.

Declive da reta r :

$$f'(x) = (g(x) + x + 1)' = g'(x) + 1 \quad f'(a) = g'(a) + 1$$

Ordenada na origem da reta r :

$$f(a) = af'(a) + b_f \Leftrightarrow g(a) + a + 1 = a(g'(a) + 1) + b_f \Leftrightarrow b_f = g(a) - ag'(a) + 1$$

Equação reduzida da reta r :

$$y = (g'(a) + 1)x + g(a) - ag'(a) + 1$$

Declive da reta s :

$$g'(a)$$

Ordenada na origem da reta s :

$$g(a) = ag'(a) + b_g \Leftrightarrow b_g = g(a) - ag'(a)$$

Equação reduzida da reta s :

$$y = g'(a)x + g(a) - ag'(a)$$

Interseção das retas r e s :

$$(g'(a) + 1)x + g(a) - ag'(a) + 1 = g'(a)x + g(a) - ag'(a) \Leftrightarrow x = -1$$

Como se pretendia mostrar.

39. A função f'' é contínua em \mathbb{R} e, em particular, é contínua em $[a, b]$. Como as retas tangentes ao gráfico de f' nos pontos de abcissas a e b são perpendiculares, sabemos que o produto dos seus declives é -1 , ou seja, $f''(a) \times f''(b) = -1 < 0$. Assim, pelo corolário do teorema de Bolzano-Cauchy, podemos concluir que existe pelo menos um número real $c \in]a, b[$ tal que $f'''(c) = 0$, como queríamos mostrar.

40. O comprimento do cabo pode ser escrito em função de x :

- por terra

$$c_1(x) = 3000 - x$$

- debaixo de água

$$c_2(x) = \sqrt{x^2 + 900^2}$$

Assim, o custo total p do cabo é dado por:

$$p(x) = 4c_1(x) + 5c_2(x) = 4(3000 - x) + 5\sqrt{x^2 + 900^2}$$

$$p'(x) = -4 + 5 \times \frac{1}{2}(x^2 + 900^2)^{-\frac{1}{2}} \times 2x = -4 + \frac{5x}{\sqrt{x^2 + 900^2}}$$

$$\begin{aligned} p'(x) = 0 &\Leftrightarrow -4 + \frac{5x}{\sqrt{x^2 + 900^2}} = 0 \Leftrightarrow \frac{5x}{4} = \sqrt{x^2 + 900^2} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \frac{25x^2}{16} = x^2 + 900^2 \Leftrightarrow 25x^2 = 16x^2 + 16 \times 900^2 \\ &\Leftrightarrow x^2 = \frac{16 \times 900^2}{9} \Leftrightarrow x = -1200 \vee x = 1200 \end{aligned}$$

x	0		1200		3000
Sinal de p'	-	-	0	+	+
Variação de p	16500	\searrow	14700 Mín	\nearrow	$1500\sqrt{109}$

De modo a minimizar o custo total do cabo, $x = 1200$, ou seja, o cabo deve percorrer 1800 m por terra e depois passar debaixo de água. Nestas condições o custo mínimo é 14700 euros.

41. Consideremos um cilindro com altura a e cuja base tem raio r . Como o cilindro tem volume V_0 tem-se que:

$$\pi r^2 a = V_0 \Leftrightarrow a = \frac{V_0}{\pi r^2}$$

A superfície total das bases é $2 \times \pi r^2$ e a superfície lateral é $2\pi r \times a = 2\pi r \times \frac{V_0}{\pi r^2} = \frac{2V_0}{r}$

Assim, o custo total c em função do raio da base é dado pela expressão:

$$c(r) = 3 \times 2 \times \pi r^2 + 2 \times \frac{2V_0}{r} = 6\pi r^2 + \frac{4V_0}{r}$$

$$c'(r) = \left(6\pi r^2 + \frac{4V_0}{r}\right)' = 12\pi r - \frac{4V_0}{r^2}$$

$$c'(r) = 0 \Leftrightarrow 12\pi r - \frac{4V_0}{r^2} = 0 \Leftrightarrow 12\pi r = \frac{4V_0}{r^2} \Leftrightarrow r^3 = \frac{4V_0}{12\pi} \Leftrightarrow r = \sqrt[3]{\frac{V_0}{3\pi}}$$

$$\frac{a}{r} = \frac{\frac{V_0}{\pi r^2}}{r} = \frac{\frac{V_0}{\pi \left(\sqrt[3]{\frac{V_0}{3\pi}}\right)^2}}{\sqrt[3]{\frac{V_0}{3\pi}}} = \frac{V_0}{\pi \left(\sqrt[3]{\frac{V_0}{3\pi}}\right)^3} = \frac{V_0}{\pi \times \frac{V_0}{3\pi}} = 3$$

Assim, de modo a minimizar o custo total, a altura deve ser o triplo do raio da base.