

Funções (12.º ano)

Limites e continuidade

Exercícios de Provas Nacionais e Testes Intermédios - Propostas de resolução



1. Com o decorrer do tempo, ou seja, quando $t \rightarrow +\infty$, o número de bactérias vivas existentes no tubo é dado por:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} N(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} (N_0 e^{1,08t - 0,3t^2}) = \lim_{t \rightarrow +\infty} N_0 \times \lim_{t \rightarrow +\infty} e^{1,08t - 0,3t^2} = N_0 \times e^{-\infty} = N_0 \times 0 = 0$$

Resposta: **Opção D**

Exame – 2021, Ép. especial

2. Determinando os limites laterais, temos:

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(\frac{x^3 - x}{x^2 - x} + k \right) = \frac{0}{0} + k \text{ (Indeterminação)}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(\frac{x^3 - x}{x^2 - x} + k \right) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(\frac{x(x^2 - 1)}{x(x - 1)} + k \right) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(\frac{x^2 - 1}{x - 1} + k \right) = \frac{0 - 1}{0 - 1} + k = 1 + k$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (2 + x \ln x) = 2 + 0 \times (-\infty) \text{ (Indeterminação)}$$

(considerando $y = \frac{1}{x}$, temos $x = \frac{1}{y}$ e se $x \rightarrow 0^+$, então $y \rightarrow +\infty$)

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) &= \lim_{y \rightarrow +\infty} \left(2 + \frac{1}{y} \ln \frac{1}{y} \right) = \lim_{y \rightarrow +\infty} \left(2 + \frac{\ln \frac{1}{y}}{y} \right) = \lim_{y \rightarrow +\infty} \left(2 + \frac{\ln 1 - \ln y}{y} \right) = \\ &= \lim_{y \rightarrow +\infty} \left(2 + \frac{0 - \ln y}{y} \right) = \lim_{y \rightarrow +\infty} \left(2 - \frac{\ln y}{y} \right) = \lim_{y \rightarrow +\infty} 2 - \underbrace{\lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{\ln y}{y}}_{\text{Lim. Notável}} = 2 - 0 = 2 \end{aligned}$$

Como $0 \notin D_g$, e existe $\lim_{x \rightarrow 0} g(x)$, então os limites laterais são iguais, o que permite determinar o valor de k :

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) \Leftrightarrow 1 + k = 2 \Leftrightarrow k = 2 - 1 \Leftrightarrow k = 1$$

Exame – 2021, 2.ª Fase

3. Para averiguar se a função f é contínua em $x = 1$, temos que verificar se $f(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$

- $f(1) = -1^2(1 + 2 \ln 1) = -(1 + 2 \times 0) = -1$
- $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (-x^2(1 + 2 \ln x)) = -(1^-)^2(1 + 2 \ln 1^-) = -1$
- $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{5 - 5e^{x-1}}{x^2 + 3x - 4} = \frac{5 - 5e^{1^+-1}}{(1^+)^2 + 3(1^+) - 4} = \frac{5 - 5 \times 1}{1 + 3 - 4} = \frac{0}{0}$ (Indeterminação)

(como $x^2 + 3x - 4 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \vee x = -4$ então $x^2 + 3x - 4 = (x - 1)(x + 4)$)

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{5 - 5e^{x-1}}{x^2 + 3x - 4} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{5(1 - e^{x-1})}{(x - 1)(x + 4)} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{-5(e^{x-1} - 1)}{(x - 1)(x + 4)} =$$

(considerando $y = x - 1$, temos $x = y + 1$ e se $x \rightarrow 1^+$, então $y \rightarrow 0^+$)

$$= \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{-5(e^y - 1)}{y(y + 1 + 4)} = \lim_{y \rightarrow 0^+} \left(\frac{(e^y - 1)}{y} \times \frac{-5}{y + 5} \right) = \underbrace{\lim_{y \rightarrow 0^+} \left(\frac{e^y - 1}{y} \right)}_{\text{Lim. Notável}} \times \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{-5}{y + 5} = 1 \times \frac{-5}{5} = -1$$

Como $f(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$, então a função f é contínua em $x = 1$

Exame – 2021, 1.ª Fase

4. Como a função é contínua em \mathbb{R} , também é contínua em $x = 1$, pelo que

$$g(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} g(x)$$

Como $\lim_{x \rightarrow 1^+} g(x) = g(1) = 1^2 - 10 + 8 \ln 1 = 1 - 10 + 8 \times 0 = -9 + 0 = -9$, calculando $\lim_{x \rightarrow 1^-} g(x)$, temos:

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2 - x}{k - kx} = \frac{1^2 - 1}{k - k \times 1} = \frac{0}{k - k} = \frac{0}{0} \text{ (Indeterminação)}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2 - x}{k - kx} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x(x - 1)}{k(1 - x)} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{-x(-(x - 1))}{k(1 - x)} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{-x(1 - x)}{k(1 - x)} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{-x}{k} = -\frac{1}{k}$$

Assim, como $f(1) = -9$, e f é contínua, temos que:

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = f(1) \Leftrightarrow -9 = -\frac{1}{k} \Leftrightarrow k = \frac{1}{9}$$

Resposta: **Opção D**

Exame – 2020, Ép. especial



5. Como a função é contínua em \mathbb{R} , também é contínua em $x = 1$, pelo que

$$f(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$$

Como $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = f(1) = k$, calculando $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$, temos:

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x-1}{x^2+x-2} = \frac{1-1}{1+1-2} = \frac{0}{0} \text{ (Indeterminação)}$$

Verificando que $x^2 + x - 2 = (x+2)(x-1)$, usando, por exemplo, a fórmula resolvente, temos:

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x-1}{x^2+x-2} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x-1}{(x+2)(x-1)} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{x+2} = \frac{1}{1+2} = \frac{1}{3}$$

Assim, como $f(1) = k$, e f é contínua, temos que $f(1) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) \Leftrightarrow k = \frac{1}{3}$

Resposta: **Opção C**

Exame – 2019, Ép. especial

6. Como a função é contínua em \mathbb{R} , também é contínua em $x = 1$, pelo que

$$f(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$$

Temos que $f(1) = \log_3 k$

E calculando $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$ e $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$, vem:

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2-1}{x-1} = \frac{1^2-1}{1-1} = \frac{0}{0} \text{ (Indeterminação)}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2-1}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} (x+1) = 1+1 = 2$$

Como $f(1) = \lim_{x \rightarrow 1} f(x)$, podemos calcular o valor de k :

$$\log_3 k = 2 \Leftrightarrow k = 3^2 \Leftrightarrow k = 9$$

Resposta: **Opção D**

Exame – 2019, 2.^a Fase

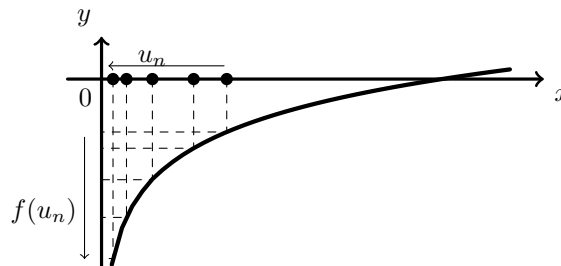


7. Como $\lim u_n = \lim \frac{n}{e^n} = \lim \frac{1}{\frac{e^n}{n}} = \frac{\lim 1}{\underbrace{\lim \frac{e^n}{n}}_{\text{Lim. Notável}}} = \frac{1}{+\infty} = 0^+$, então:

$$\lim f(u_n) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (\ln x) = \ln(0^+) = -\infty$$

Graficamente, na figura ao lado, estão representados alguns termos de (u_n) como objetos, e alguns termos da sucessão das imagens $f(u_n)$, que tendem para $-\infty$, quando o valor de n aumenta.

Resposta: **Opção A**



Exame – 2016, 2.^a Fase

8. Calculando o valor do limite, em função de n , vem que:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{600x}{1 - e^{-nx}} = \frac{600(0)}{1 - e^{-n(0)}} = \frac{0}{1 - e^0} = \frac{0}{1 - 1} = \frac{0}{0} \text{ (Indeterminação)}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{600x}{1 - e^{-nx}} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{-n}{-n} \times \frac{600x}{1 - e^{-nx}} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{600}{-n} \times \frac{-nx}{1 - e^{-nx}} \right) =$$

(fazendo $y = -nx$, temos que se $x \rightarrow 0$, então $y \rightarrow 0$)

$$= \lim_{y \rightarrow 0} \left(\frac{600}{-n} \times \frac{y}{1 - e^y} \right) = \lim_{y \rightarrow 0} \left(\frac{600}{-n} \times \frac{y}{-(e^y - 1)} \right) = \lim_{y \rightarrow 0} \left(\frac{600}{n} \times \frac{y}{e^y - 1} \right) =$$

$$= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{600}{n} \times \frac{600}{n} \times \lim_{y \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{e^y - 1}{y}} = \frac{600}{n} \times \frac{\lim_{y \rightarrow 0} 1}{\underbrace{\lim_{y \rightarrow 0} \frac{e^y - 1}{y}}_{\text{Lim. Notável}}} = \frac{600}{n} \times \frac{1}{1} = \frac{600}{n}$$

Desta forma, se $x \rightarrow 0$, o que corresponde a uma taxa de juro arbitrariamente próxima de zero, então a prestação mensal será arbitrariamente próxima de $\frac{600}{n}$ o que corresponde a pagar o montante do empréstimo (600 euros) em n parcelas iguais, durante n meses.

Exame – 2016, 2.^a Fase



9. Calculando o valor do limite, temos que:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow a} \frac{ae^{x-a} - a}{x^2 - a^2} &= \frac{ae^{a-a} - a}{a^2 - a^2} = \frac{a \times e^0 - a}{a - a} = \frac{a \times 1 - a}{a - a} = \frac{0}{0} \text{ (Indeterminação)} \\ \lim_{x \rightarrow a} \frac{ae^{x-a} - a}{x^2 - a^2} &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{a(e^{x-a} - 1)}{(x-a)(x+a)} = \lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{a}{x+a} \times \frac{e^{x-a} - 1}{x-a} \right) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{a}{x+a} \times \lim_{x \rightarrow a} \frac{e^{x-a} - 1}{x-a} = \\ &\text{(fazendo } y = x - a, \text{ temos que se } x \rightarrow a, \text{ então } y \rightarrow 0) \\ &= \frac{a}{a+a} \times \underbrace{\lim_{y \rightarrow 0} \left(\frac{e^y - 1}{y} \right)}_{\text{Lim. Notável}} = \frac{a}{2a} \times 1 = \frac{1}{2} \times 1 = \frac{1}{2}\end{aligned}$$

Resposta: **Opção B**

Exame – 2016, 1.ª Fase

10. Como a função é contínua em \mathbb{R} , também é contínua em $x = 0$, pelo que

$$f(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$$

Temos que $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = f(0) = 2 + e^{0+k} = 2 + e^k$

E calculando $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$, vem

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2x + \ln(x+1)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{2x}{x} + \frac{\ln(x+1)}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(2 + \frac{\ln(x+1)}{x} \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} 2 + \underbrace{\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(x+1)}{x}}_{\text{Lim. Notável}} = 2 + 1 = 3\end{aligned}$$

Assim, como $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0)$, vem que

$$2 + e^k = 3 \Leftrightarrow e^k = 3 - 2 \Leftrightarrow e^k = 1 \Leftrightarrow k = \ln 1 \Leftrightarrow k = 0$$

Resposta: **Opção A**

Exame – 2015, 2.ª Fase

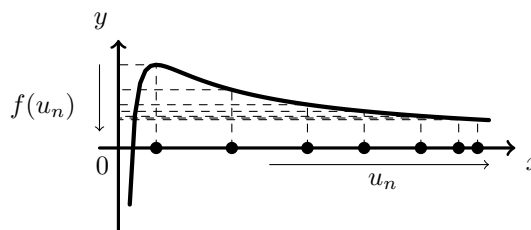


11. Como $\lim u_n = \lim (n^2) = (+\infty)^2 = +\infty$, então

$$\lim f(u_n) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{x} + \frac{\ln x}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} + \underbrace{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x}}_{\text{Lim. Notável}} = \frac{1}{+\infty} + 0 = 0 + 0 = 0$$

Graficamente, na figura ao lado, estão representados alguns termos de (u_n) como objetos, e alguns termos da sucessão das imagens $f(u_n)$, que tendem para zero, quando o valor de n aumenta.

Resposta: **Opção A**



Exame – 2015, 1.^a fase



12. Para averiguar se a função f é contínua em $x = 4$, temos que verificar se $f(4) = \lim_{x \rightarrow 4^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 4^+} f(x)$

- $f(4) = \ln(2e^4 - e^4) = \ln(e^4) = 4 \ln e = 4 \times 1 = 4$
- $\lim_{x \rightarrow 4^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 4^+} (\ln(2e^x - e^4)) = \ln(2e^4 - e^4) = 4$
- $\lim_{x \rightarrow 4^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 4^-} \left(\frac{e^{x-4} - 3x + 11}{4 - x} \right) = \frac{e^{4-4} - 3(4) + 11}{4 - 4} = \frac{e^1 - 12 + 11}{4 - 4} = \frac{0}{0}$ (Indeterminação)

$$\lim_{x \rightarrow 4^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 4^-} \left(\frac{e^{x-4} - 3x + 11}{4 - x} \right) = \lim_{x \rightarrow 4^-} \left(\frac{e^{x-4} - 3x + 11}{-(-4 + x)} \right) = \lim_{x \rightarrow 4^-} \left(\frac{e^{x-4} - 3x + 11}{-(x - 4)} \right) =$$

(fazendo $y = x - 4$, temos $x = y + 4$ e se $x \rightarrow 4^-$, então $y \rightarrow 0^-$)

$$\begin{aligned} &= \lim_{y \rightarrow 0^-} \left(\frac{e^y - 3(y + 4) + 11}{-y} \right) = \lim_{y \rightarrow 0^-} \left(\frac{e^y - 3y - 12 + 11}{-y} \right) = \lim_{y \rightarrow 0^-} \left(\frac{e^y - 3y - 1}{-y} \right) = \\ &= \lim_{y \rightarrow 0^-} \left(\frac{e^y - 1}{-y} + \frac{-3y}{-y} \right) = \lim_{y \rightarrow 0^-} \left(\frac{e^y - 1}{-y} \right) + \lim_{y \rightarrow 0^-} \left(\frac{-3y}{-y} \right) = - \underbrace{\lim_{y \rightarrow 0^-} \left(\frac{e^y - 1}{y} \right)}_{\text{Lim. Notável}} + \lim_{y \rightarrow 0^-} 3 = -1 + 3 = 2 \end{aligned}$$

Como $\lim_{x \rightarrow 4^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 4^+} f(x)$, não existe $\lim_{x \rightarrow 4} f(x)$, pelo que a função f não é contínua em $x = 4$

Exame – 2014, 1.ª Fase

13. Sabemos que $f(0) = \ln k$

Calculando $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$ temos:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{3x}{1 - e^{2x}} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\frac{2 \times 3x}{2}}{-(e^{2x} - 1)} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(-\frac{3}{2} \times \frac{2x}{e^{2x} - 1} \right) = \\ &= -\frac{3}{2} \times \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{2x}{e^{2x} - 1} = -\frac{3}{2} \times \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{\frac{e^{2x} - 1}{2x}} = -\frac{3}{2} \times \frac{1}{\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^{2x} - 1}{2x}} = \end{aligned}$$

(se $y = 2x$, como $x \rightarrow 0^-$ então $y \rightarrow 0^-$)

$$= -\frac{3}{2} \times \frac{1}{\underbrace{\lim_{y \rightarrow 0^-} \frac{e^y - 1}{y}}_{\text{Lim. Notável}}} = -\frac{3}{2} \times \frac{1}{1} = -\frac{3}{2}$$

Assim, para que $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = f(0)$, temos que:

$$-\frac{3}{2} = \ln k \Leftrightarrow k = e^{-\frac{3}{2}}$$

Exame – 2013, Ép. especial



14. Como a função é contínua, é contínua no seu domínio, logo também é contínua em $x = 0$, pelo que

$$f(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$$

Temos que $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = f(0) = \ln(k - 0) = \ln k$

E calculando $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$, vem

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(2e^x + \frac{1}{\ln x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (2e^x) + \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{\ln x} \right) = 2e^{0^+} + \frac{1}{-\infty} = 2 \times 1 + 0 = 2$$

Assim, como $f(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$, vem que

$$\ln k = 2 \Leftrightarrow k = e^2$$

Resposta: **Opção B**

Teste Intermédio 12.º ano – 24.05.2013

15. Como a função $f \times g$ é contínua no ponto de abscissa 1, temos que

$$(f \times g)(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (f \times g)(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (f \times g)(x)$$

- $(f \times g)(1) = f(1) \times g(1) = \ln 1 \times g(1) = 0 \times g(1) = 0$
- $\lim_{x \rightarrow 1^+} (f \times g)(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (f(x) \times g(x)) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) \times \lim_{x \rightarrow 1^+} g(x) = \ln 1^+ \times \lim_{x \rightarrow 1^+} g(x) = 0 \times \lim_{x \rightarrow 1^+} g(x)$

Como em nenhuma das opções $\lim_{x \rightarrow 1^+} g(x) = \pm\infty$, vem que

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} (f \times g)(x) = 0 \times \lim_{x \rightarrow 1^+} g(x) = 0$$

- $\lim_{x \rightarrow 1^-} (f \times g)(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (f(x) \times g(x)) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) \times \lim_{x \rightarrow 1^-} g(x)$

Calculando $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$ vem

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \left(\frac{e^{x-1} - 1}{x - 1} \right) = \frac{e^0 - 1}{1^- - 1} = \frac{0}{0} \text{ (Indeterminação)}$$

(se $y = x - 1$, como $x \rightarrow 1^-$ então $y \rightarrow 0^-$)

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \left(\frac{e^{x-1} - 1}{x - 1} \right) = \underbrace{\lim_{y \rightarrow 0^-} \left(\frac{e^y - 1}{y} \right)}_{\text{Lim. Notável}} = 1$$

Assim vem que

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} (f \times g)(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (f(x) \times g(x)) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) \times \lim_{x \rightarrow 1^-} g(x) = 1 \times \lim_{x \rightarrow 1^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} g(x)$$

Como $(f \times g)(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (f \times g)(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (f \times g)(x)$, então $\lim_{x \rightarrow 1^-} g(x) = 0$ e a única opção que verifica esta condição é a opção (A).

Resposta: **Opção A**

Teste Intermédio 12.º ano – 28.02.2013



16. Temos que $\lim_{x \rightarrow 4} f(x)$ existe, se

$$\lim_{x \rightarrow 4^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 4^+} f(x)$$

Calculando os limites laterais, temos:

$$\begin{aligned} \bullet \lim_{x \rightarrow 4^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 4^-} \frac{3x+3}{\sqrt{x^2+9}} = \frac{3(4^-)+3}{\sqrt{(4^-)^2+9}} = \frac{12+3}{\sqrt{16+9}} = \frac{15}{\sqrt{25}} = \frac{15}{5} = 3 \\ \bullet \lim_{x \rightarrow 4^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 4^+} \frac{\ln(3x-11)}{x-4} = \frac{\ln(3(4^+)-11)}{4^+-4} = \frac{\ln 1}{0^+} = \frac{0}{0^+} \text{ (Indeterminação)} \end{aligned}$$

(se $y = x - 4$ então $y + 4 = x$, como $x \rightarrow 4^+$ então $y \rightarrow 0^+$)

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 4^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 4^+} \frac{\ln(3x-11)}{x-4} = \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{\ln(3(y+4)-11)}{y} = \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{\ln(3y+12-11)}{y} = \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{\ln(3y+1)}{y} = \\ &= \lim_{y \rightarrow 0^+} \left(\frac{\ln(3y+1)}{y} \times \frac{3}{3} \right) = \lim_{y \rightarrow 0^+} \left(\frac{\ln(3y+1)}{3y} \times 3 \right) = \underbrace{\lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{\ln(3y+1)}{3y}}_{\text{Lim. Notável}} \times \lim_{y \rightarrow 0^+} 3 = 1 \times 3 = 3 \end{aligned}$$

Assim temos que $\lim_{x \rightarrow 4^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 4^+} f(x)$, pelo que existe $\lim_{x \rightarrow 4} f(x)$

Teste Intermédio 12.º ano – 28.02.2013

17. Temos que $f(0) = 1 - e^{k+1}$

Calculando $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$, vem

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 - e^{4x}}{x} = \frac{1 - e^{4(0^+)}}{0^+} = \frac{1 - 1}{0} = \frac{0}{0} \text{ (Indeterminação)} \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 - e^{4x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-(-1 + e^{4x})}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{4}{4} \times \frac{-(e^{4x} - 1)}{x} \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(-4 \times \frac{(e^{4x} - 1)}{4x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (-4) \times \underbrace{\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(e^{4x} - 1)}{4x}}_{\text{Lim. Notável}} = -4 \times 1 = -4 \end{aligned}$$

Como se pretende que $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0)$, vem

$$-4 = 1 - e^{k+1} \Leftrightarrow e^{k+1} = 1 + 4 \Leftrightarrow e^{k+1} = 5 \Leftrightarrow k + 1 = \ln 5 \Leftrightarrow k = -1 + \ln 5$$

Exame – 2012, 2.ª Fase



18. Como a função é contínua em \mathbb{R} , também é contínua em $x = a$, pelo que

$$f(a) = \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$$

Pela observação do gráfico da função g , temos que

$$f(a) = g(a) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} g(x) = 2$$

E calculando $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$, vem

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^-} \log_3 \left(-x - \frac{1}{3} \right) = \log_3 \left(-a - \frac{1}{3} \right)$$

Como $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = f(a)$, temos que

$$\log_3 \left(-a - \frac{1}{3} \right) = 2 \Leftrightarrow -a - \frac{1}{3} = 3^2 \Leftrightarrow -a = 9 + \frac{1}{3} \Leftrightarrow -a = \frac{27}{3} + \frac{1}{3} \Leftrightarrow -a = \frac{28}{3} \Leftrightarrow a = -\frac{28}{3}$$

Resposta: **Opção A**

Exame – 2012, 1.ª Fase

19. Para averiguar se a função f é contínua em $x = 2$, temos que verificar se $f(2) = \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$

- $f(2) = 3e^2 + \ln(2 - 1) = 3e^2 + \ln(1) = 3e^2 + 0 = 3e^2$
- $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} (3e^x + \ln(x - 1)) = 3e^2 + \ln(2 - 1) = 3e^2$
- $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{xe^x - 2e^2}{x - 2} = \frac{2e^2 - 2e^2}{2 - 2} = \frac{0}{0}$ (Indeterminação)

(fazendo $y = x - 2$, temos $x = y + 2$ e se $x \rightarrow 2^-$, então $y \rightarrow 0^-$)

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 2^-} \left(\frac{xe^x - 2e^2}{x - 2} \right) = \lim_{y \rightarrow 0^-} \left(\frac{(y+2)e^{y+2} - 2e^2}{y} \right) = \lim_{y \rightarrow 0^-} \left(\frac{(y+2)e^y \times e^2 - 2e^2}{y} \right) = \\ &= \lim_{y \rightarrow 0^-} \left(\frac{ye^y \times e^2 + 2e^y \times e^2 - 2e^2}{y} \right) = \lim_{y \rightarrow 0^-} \left(\frac{ye^y \times e^2 + 2e^2(e^y - 1)}{y} \right) = \\ &= \lim_{y \rightarrow 0^-} \left(\frac{ye^y \times e^2}{y} \right) + \lim_{y \rightarrow 0^-} \left(\frac{2e^2(e^y - 1)}{y} \right) = \lim_{y \rightarrow 0^-} (e^y \times e^2) + \lim_{y \rightarrow 0^-} \left(2e^2 \times \frac{e^y - 1}{y} \right) = \\ &= e^0 \times e^2 + 2e^2 \times \underbrace{\lim_{y \rightarrow 0^-} \left(\frac{e^y - 1}{y} \right)}_{\text{Lim. Notável}} = 1 \times e^2 + 2e^2 \times 1 = e^2 + 2e^2 = 3e^2 \end{aligned}$$

Como $f(2) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$, então a função f é contínua em $x = 2$

Teste Intermédio 12.º ano – 24.05.2012



20. Como a função g é contínua para $x = 0$, então $g(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} g(x)$

$$\bullet \text{ Como } \lim_{x \rightarrow 0^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^{2x} - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(\frac{2}{2} \times \frac{e^{2x} - 1}{x} \right) = 2 \times \underbrace{\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^{2x} - 1}{2x}}_{\text{Lim. Notável}} = 2 \times 1 = 2$$

Então, como $g(0) = \alpha$, vem que

$$g(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} g(x) \Leftrightarrow \alpha = 2$$

$$\bullet \text{ Como } \lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\beta - \frac{\ln(x+1)}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \beta - \underbrace{\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(x+1)}{x}}_{\text{Lim. Notável}} = \beta - 1$$

Então, como $g(0) = \alpha = 2$ e , vem que

$$g(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) \Leftrightarrow 2 = \beta - 1 \Leftrightarrow 2 + 1 = \beta \Leftrightarrow 3 = \beta$$

Resposta: **Opção B**

Teste Intermédio 12.º ano – 13.03.2012

21. Sabendo que f é contínua em $x = 1$, temos que $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1)$, e mais especificamente que $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = f(1)$

Como $f(1) = -1 + \ln 1 = -1 + 0 = -1$, vamos calcular $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$ para determinar o valor de k :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \left(k + \frac{1 - e^{x-1}}{x-1} \right) = \lim_{x \rightarrow 1^-} k + \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1 - e^{x-1}}{x-1} = k + \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{-(e^{x-1} - 1)}{x-1} = \\ &= k - \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{e^{x-1} - 1}{x-1} \stackrel{(1)}{=} k - \underbrace{\lim_{y \rightarrow 0^-} \frac{e^y - 1}{y}}_{\text{Lim. Notável}} = k - 1 \end{aligned}$$

(1) Se $y = x - 1$, então como $x \rightarrow 1^-$, logo $y \rightarrow 0^-$

Assim, como f é contínua em $x = 1$ temos que $f(1) = k - 1$, ou seja

$$-1 = k - 1 \Leftrightarrow k = 0$$

Exame – 2011, Prova especial

22. Sabendo que f é contínua em $x = -1$, temos que $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = f(-1)$

Calculando $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$ vem:

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1} \left(\frac{x+1}{1 - e^{x+1}} + 1 \right) = \frac{-1+1}{1 - e^{-1+1}} + 1 = \frac{0}{0} + 1 \text{ (Indeterminação)}$$

(fazendo $y = x + 1$, temos que se $x \rightarrow -1$, então $y \rightarrow 0$)

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -1} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -1^+} \left(\frac{x+1}{1 - e^{x+1}} \right) + \lim_{x \rightarrow -1} 1 = \lim_{y \rightarrow 0} \left(\frac{y}{1 - e^y} \right) + 1 = \lim_{y \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\frac{1 - e^y}{y}} \right) + 1 = \\ &= \frac{\lim_{y \rightarrow 0} 1}{\lim_{y \rightarrow 0} \frac{-(1 - e^y)}{y}} + 1 = \frac{1}{-\lim_{y \rightarrow 0} \frac{e^y - 1}{y}} + 1 = \frac{1}{-1} + 1 = -1 + 1 = 0 \end{aligned}$$

Lim. Notável

Assim, como $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = f(-1)$ e $f(-1) = a + 2$, podemos determinar o valor de a :

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = f(-1) \Leftrightarrow a + 2 = 0 \Leftrightarrow a = -2$$

Exame – 2011, Ép. especial



23. Para averiguar se a função h é contínua em $x = 0$, temos que verificar se $h(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} h(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} h(x)$

- $h(0) = 3 \ln(0^2 + 1) = 3 \ln(1) = 3 \times 0 = 0$
- $\lim_{x \rightarrow 0^-} h(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (3 \ln(x^2 + 1)) = 3 \ln((0^-)^2 + 1) = 3 \ln(0 + 1) = 3 \ln(1) = 3 \times 0 = 0$
- $\lim_{x \rightarrow 0^+} h(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{2x} - e^x}{x} = \frac{e^0 - e^0}{0} = \frac{0}{0}$ (Indeterminação)

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} h(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{2x} - e^x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{x+x} - e^x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^x \times e^x - e^x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^x(e^x - 1)}{x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} e^x \times \underbrace{\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^x - 1}{x}}_{\text{Lim. Notável}} = e^0 \times 1 = 1 \times 1 = 1 \end{aligned}$$

Como $\lim_{x \rightarrow 0^+} h(x) \neq \lim_{x \rightarrow 0^-} h(x)$, então a função h não é contínua em $x = 0$

Exame – 2010, Ép. especial

24. Como $\lim_{x \rightarrow +\infty} (h(x) - 2x) = 0$, temos que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (h(x) - 2x) = 0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) - \lim_{x \rightarrow +\infty} (2x) = 0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (2x) \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} (h(x)) = +\infty$$

Como a função h é par, temos que, para qualquer $x \in \mathbb{R}$, $f(-x) = f(x)$ e assim,

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = +\infty$$

Resposta: **Opção A**

Exame – 2010, 2.ª Fase

25. Calculando $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{ax} - 1}{ax^2 + a^2x}$, vem:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{ax} - 1}{ax^2 + a^2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{ax} - 1}{ax(x + a)} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{e^{ax} - 1}{ax} \times \frac{1}{x + a} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{ax} - 1}{ax} \times \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x + a} =$$

(fazendo $y = ax$, temos que se $x \rightarrow 0$, então $y \rightarrow 0$)

$$= \underbrace{\lim_{y \rightarrow 0} \frac{e^y - 1}{y}}_{\text{Lim. Notável}} \times \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x + a} = 1 \times \frac{1}{0 + a} = \frac{1}{a}$$

Resposta: **Opção A**

Teste Intermédio 12.º ano – 19.05.2010

26. Para averiguar se a função f é contínua em $x = 2$, temos que verificar se $f(2) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$

- $f(2) = 2 \times e^{-2} + 2 + 1 = \frac{2}{e^2} + 3$
- $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} (xe^{-x} + x + 1) = 2 \times e^{-2} + 2 + 1 = \frac{2}{e^2} + 3$
- $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x - 2}{x - \sqrt{2x}} = \frac{2 - 2}{2 - \sqrt{4}} = \frac{0}{0}$ (Indeterminação)

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{(x - 2)(x + \sqrt{2x})}{(x - \sqrt{2x})(x + \sqrt{2x})} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{(x - 2)(x + \sqrt{2x})}{x^2 - (\sqrt{2x})^2} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{(x - 2)(x + \sqrt{2x})}{x^2 - 2x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{(x - 2)(x + \sqrt{2x})}{x(x - 2)} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x + \sqrt{2x}}{x} = \frac{2 + \sqrt{2 \times 2}}{2} = \frac{2 + 2}{2} = 2 \end{aligned}$$

Como $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$, então a função f não é contínua em $x = 2$

Teste Intermédio 12.º ano – 15.03.2010



27. Como a função h , é definida em \mathbb{R}^+ por operações sucessivas de funções contínuas neste intervalo, então f é contínua para $x > 0$
De forma análoga, temos que h é contínua para $x < 0$, porque é definida, neste intervalo, por operações sucessivas de funções contínuas em \mathbb{R}^-

Assim, resta averiguar se a função h é contínua para $x = 0$, ou seja, temos que verificar se

$$h(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} h(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} h(x)$$

- $h(0) = 2$
 - $\lim_{x \rightarrow 0^+} h(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (\sqrt{x^2 + 4} - x) = \sqrt{0^2 + 4} - 0 = \sqrt{4} = 2$
 - $\lim_{x \rightarrow 0^-} h(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^{2x} - 1}{x} = \frac{e^0 - 1}{0} = \frac{0}{0}$ (Indeterminação)
- $$\lim_{x \rightarrow 0^-} h(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^{2x} - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{2(e^{2x} - 1)}{2 \times x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} 2 \times \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^{2x} - 1}{2x} = 2 \times \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^{2x} - 1}{2x} =$$
- (fazendo $y = 2x$, temos que se $x \rightarrow 0^-$, então $y \rightarrow 0^-$)

$$= 2 \times \underbrace{\lim_{y \rightarrow 0^-} \frac{e^y - 1}{y}}_{\text{Lim. Notável}} = 2 \times 1 = 2$$

Como $h(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} h(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} h(x)$, a função h é contínua em $x = 0$, e como é contínua em \mathbb{R}^- e em \mathbb{R}^+ , temos que é contínua em \mathbb{R}

Exame – 2009, 2.ª Fase

28. Calculando $\lim_{t \rightarrow +\infty} C(t)$ temos que:

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow +\infty} C(t) &= \lim_{t \rightarrow +\infty} (2te^{-0,3t}) = 2(+\infty) \times e^{-0,3(+\infty)} = +\infty \times e^{-\infty} = +\infty \times 0^+ \text{ (Indeterminação)} \\ \lim_{t \rightarrow +\infty} C(t) &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{2t}{e^{0,3t}} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{0,3 \times 2t}{0,3 \times e^{0,3t}} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{0,3} \times \frac{0,3t}{e^{0,3t}} \right) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{2}{0,3} \times \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{0,3t}{e^{0,3t}} = \\ &\text{(fazendo } y = 0,3t, \text{ temos que se } t \rightarrow +\infty, \text{ então } y \rightarrow +\infty) \\ &= \frac{2}{0,3} \times \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{y}{e^y} = \frac{2}{0,3} \times \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{1}{\frac{e^y}{y}} = \frac{2}{0,3} \times \frac{1}{\underbrace{\lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{e^y}{y}}_{\text{Lim. Notável}}} = \frac{2}{0,3} \times \frac{1}{+\infty} = \frac{2}{0,3} \times 0^+ = 0 \end{aligned}$$

Como $C(t)$ é a concentração do medicamento no sangue e t é o tempo decorrido após o medicamento ter sido ministrado, então $\lim_{t \rightarrow +\infty} C(t) = 0$ significa, que a um período de tempo arbitrariamente grande ($t \rightarrow +\infty$), corresponde uma concentração de 0 mg/l de medicamento no sangue do Fernando, ou seja, com o passar do tempo, o medicamento tende a desaparecer do sangue do Fernando.

Exame – 2009, 1.ª Fase



29. Para averiguar se a função g é contínua em $x = 1$, temos que verificar se $g(1) = \lim_{x \rightarrow 1^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} g(x)$

- $g(1) = 2$
 - $\lim_{x \rightarrow 1^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (2x + \ln(1 + x - x^2)) = 2(1) + \ln(1 + 1 - 1^2) = 2 + \ln(1) = 2 + 0 = 2$
 - $\lim_{x \rightarrow 1^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x-1}{\sqrt{x}-1} = \frac{1-1}{\sqrt{1}-1} = \frac{0}{0}$ (Indeterminação)
- $$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^+} g(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(x-1)(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(x-1)(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x})^2 - 1^2} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(x-1)(\sqrt{x}+1)}{x-1} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^+} (\sqrt{x}+1) = \sqrt{1}+1 = 1+1 = 2 \end{aligned}$$

Como $g(1) = \lim_{x \rightarrow 1^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} g(x)$, então, podemos concluir que a função g é contínua em $x = 1$

Teste Intermédio 12.º ano – 27.05.2009

30. Como a função é contínua em \mathbb{R} , também é contínua em $x = a$, pelo que

$$g(a) = \lim_{x \rightarrow a^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} g(x)$$

Como

$$g(a) = \lim_{x \rightarrow a^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} (x^2 - x - 3) = a^2 - a + 3$$

e como

$$\lim_{x \rightarrow a^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow a^-} (x^2 - 2x) = a^2 - 2a$$

Então, como a função é contínua, vem que:

$$\lim_{x \rightarrow a^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow a^-} g(x) \Leftrightarrow a^2 - a + 3 = a^2 - 2a \Leftrightarrow -a + 3 = -2a \Leftrightarrow 2a - a = -3 \Leftrightarrow a = -3$$

Resposta: **Opção A**

Teste Intermédio 12.º ano – 11.03.2009

31. Como

$$T(0) = 25 + 48e^{-0,05 \times 0} = 25 + 48e^0 = 25 + 48 \times 1 = 73$$

Então sabemos que zero minutos após o início do arrefecimento, ou seja, quando se interrompeu o processo de aquecimento, a temperatura da água era de 73 graus Celsius.

Como

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} T(t) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} (25 + 48e^{-0,05 \times t}) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (25) + \lim_{x \rightarrow +\infty} (48e^{-0,05 \times t}) = \\ &= 25 + 48 \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-0,05 \times t} = 25 + 48 \times e^{-0,05 \times +\infty} = 25 + 48 \times e^{-\infty} = 25 + 48 \times 0^+ = 25 \end{aligned}$$

Então sabemos que um aumento arbitrariamente grande do tempo corresponde a uma temperatura de 25 graus Celsius, ou seja, com o passar do tempo a água vai arrefecer até aos 25 graus.

Exame – 2008, Ép. especial



32. Calculando $N(0)$ temos que:

$$N(0) = \frac{2000}{1 + 199e^{-0,01 \times 0}} = \frac{2000}{1 + 199e^0} = \frac{2000}{1 + 199 \times 1} = \frac{2000}{200} = 10$$

Como $N(0) = 10$, então o número de sócios da associação, zero dias após a constituição era de 10, ou seja, a associação foi constituída com 10 sócios.

Calculando $\lim_{x \rightarrow +\infty} N(t)$ temos que:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} N(t) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2000}{1 + 199e^{-0,01t}} = \frac{2000}{1 + 199e^{-0,01 \times (+\infty)}} = \frac{2000}{1 + 199e^{-\infty}} = \frac{2000}{1 + 199 \times 0^+} = 2000$$

Como $\lim_{x \rightarrow +\infty} N(t) = 2000$ então, a um aumento arbitrário do valor de t corresponde um valor de N aproximadamente de 2000, ou seja, com o passar do tempo o número de sócios da associação aproxima-se indefinidamente de 2000.

Exame – 2008, 1.ª Fase

33. Para mostrar que a função f é contínua em $x = 0$, temos que mostrar que $f(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$

- $f(0) = 2 - 0 + \ln(1 + 3 \times 0) = 2 + \ln 1 = 2 + 0 = 2$
 - $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (2 - x + \ln(1 + 3x)) = 2 - 0^+ + \ln(1 + 3 \times 0^+) = 2 + \ln 1 = 2 + 0 = 2$
 - $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^x - 1 + x}{x} = \frac{e^{0^-} - 1 + 0^-}{0^-} = \frac{1 - 1}{0^-} = \frac{0}{0^-}$ (Indeterminação)
- $$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(\frac{e^x - 1}{x} + \frac{x}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(\frac{e^x - 1}{x} + 1 \right) = \underbrace{\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^x - 1}{x}}_{\text{Lim. Notável}} + \lim_{x \rightarrow 0^-} 1 = 1 + 1 = 2$$

Como $f(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$, então, podemos concluir que a função f é contínua em $x = 0$

Teste Intermédio 12.º ano – 29.04.2008

34. Pela observação do gráfico podemos verificar que $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) < 0$ e que $\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) > 0$, pelo que podemos

garantir que $\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{1}{f(x)} < 0$ e que $\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{1}{f(x)} > 0$

Assim temos que:

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{1}{f(x)} \neq \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{1}{f(x)}$$

Ou seja, que não existe $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{1}{f(x)}$

Resposta: **Opção D**

Exame – 2007, 2.ª fase

35. Calculando o valor do limite, temos:

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{1}{4 - x^2} = \frac{\lim_{x \rightarrow 2^+} 1}{\lim_{x \rightarrow 2^+} (4 - x^2)} = \frac{1}{4 - (2^+)^2} = \frac{1}{4 - 4^+} = \frac{1}{0^-} = -\infty$$

Resposta: **Opção D**

Exame – 2007, 1.ª fase



36. Para averiguar se a função f é contínua em $x = 0$, temos que verificar se $f(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$

- $f(0) = 2$
- $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^2 + 2x}{x^3 + x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x(x+2)}{x(x^2+1)} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(\frac{x}{x} \times \frac{x+2}{x^2+1} \right) = 1 \times \frac{0^- + 2}{(0^-)^2 + 1} = \frac{2}{1} = 2$
- $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{3x^2 - x \ln(x+1)}{x^2} = \frac{3 \times (0^+)^2 - 0^+ \times \ln(0^+ + 1)}{(0^+)^2} = \frac{0}{0}$ (Indeterminação)
- $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{3x^2}{x^2} - \frac{x \ln(x+1)}{x^2} \right) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(3 - \frac{\ln(x+1)}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0^+} 3 - \underbrace{\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(x+1)}{x}}_{\text{Lim. Notável}} = 3 - 1 = 2$

Como $f(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$, então, podemos concluir que a função f é contínua em $x = 0$

Teste Intermédio 12.º ano – 15.03.2007

37. Para estudar a continuidade da função g no ponto de abcissa zero, temos que comparar os valores de $g(0)$, de $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x)$ e de $\lim_{x \rightarrow 0^-} g(x)$

- $g(0) = 2$
- $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2x+1}{x} = \frac{2 \times 0^+ + 1}{0^+} = \frac{1}{0^+} = +\infty$
- $\lim_{x \rightarrow 0^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^x - 1}{2x} = \frac{e^{0^-} - 1}{2 \times 0^-} = \frac{1 - 1}{0} = \frac{0}{0}$ (Indeterminação)
- $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(\frac{1}{2} \times \frac{e^x - 1}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{2} \times \underbrace{\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^x - 1}{x}}_{\text{Lim. Notável}} = \frac{1}{2} \times 1 = \frac{1}{2}$

Como $g(0) \neq \lim_{x \rightarrow 0^-} g(x)$, então a função g é descontínua à direita de zero e como $g(0) \neq \lim_{x \rightarrow 0^+} g(x)$, então a função g também é descontínua à esquerda de zero.

Resposta: **Opção D**

Exame – 2006, Ép. especial

38. Pela observação dos gráficos, podemos verificar que:

- $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = k, \quad k \in]2, +\infty[$
- $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = -\infty$

E assim, temos que:

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)}{\lim_{x \rightarrow 1^+} g(x)} = \frac{k}{-\infty} = 0$$

Resposta: **Opção A**

Exame – 2006, 2.ª Fase



39. Como nos primeiros cinco minutos a água esteve a aquecer ao lume, a função que modela a variação da temperatura em função do tempo, é crescente para $t \in]0,5[$. Como o gráfico da função a é parte de uma reta de declive negativo, para $t \in]0,5[$, esta não é a função que modela a situação descrita, porque descreve uma diminuição dos valores da temperatura nos primeiros cinco minutos.

De acordo com a função b , temos que:

- $b(5) = 12(5 + 21) = 12 \times 6 = 72$
- $\lim_{t \rightarrow 5^+} c(t) = \lim_{t \rightarrow 5^+} (24 + 70e^{-0,04(t-5)}) = 24 + 70 \times e^{-0,04 \times (5-5)} = 24 + 60 \times e^0 = 24 + 70 \times 1 = 94$

Ou seja, como a temperatura varia de forma contínua, e a função b não é contínua para $t = 5$, então, esta função não modela a situação descrita, porque:

$$b(5) \neq \lim_{t \rightarrow 5^+} b(t)$$

De acordo com a função c , temos que:

- $c(0) = 14(0 + 1) = 14 \times 1 = 14$
- $\lim_{t \rightarrow +\infty} c(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} (24 + 60e^{-0,04(t-5)}) = 24 + 60 \times e^{-0,04 \times (+\infty-5)} = 24 + 60 \times e^{-\infty} = 24 + 0^+ = 24$

O que significa que, de acordo com este modelo, a temperatura da água tende, com o passar do tempo, ($\lim_{t \rightarrow +\infty} c(t)$) não tende a igualar a temperatura ambiente, que é igual à temperatura da água, no instante em que começou a ser aquecida ($c(0)$). Ou seja, a função c não modela a situação descrita, porque:

$$c(0) \neq \lim_{t \rightarrow +\infty} c(t)$$

Assim, temos que a função que pode modelar a relação entre a temperatura da água e o tempo t , é a função d

Teste Intermédio 12.º ano – 17.03.2006

40. Sabendo que f é contínua, em particular é contínua em $x = 0$, pelo que $f(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$

Fazendo os cálculos, vem que:

- $f(0) = k + \sin 0 = k + 0 = k$
 - $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (k + \sin x) = k + \sin 0^- = k + 0^- = k$
 - $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{3x + \ln(1+x)}{x} = \frac{3 \times 0^+ + \ln(1+0^+)}{0^+} = \frac{0 + \ln 1}{0} = \frac{0}{0}$ (Indeterminação)
- $$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{3x}{x} + \frac{\ln(1+x)}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(3 + \frac{\ln(x+1)}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0^+} 3 + \underbrace{\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(x+1)}{x}}_{\text{Lim. Notável}} = 3 + 1 = 4$$

Assim, como $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 4$ e a função é contínua, temos que $f(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$, ou seja:

$$k = 4$$

Resposta: **Opção D**

Exame – 2005, Ép. especial



41. Como $N < M$, então $N - M < 0$, e assim temos que:

$$\begin{aligned}\lim_{t \rightarrow +\infty} P(t) &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \left(5,2 \times 10^7 \times e^{(N-M)t} \right) = \lim_{t \rightarrow +\infty} (5,2 \times 10^7) \times \lim_{t \rightarrow +\infty} e^{(N-M)t} = \\ &= 5,2 \times 10^7 \times e^{(N-M) \times (+\infty)} = 5,2 \times 10^7 \times e^{-\infty} = 5,2 \times 10^7 \times 0^+ = 0\end{aligned}$$

Assim temos que, se $N < M$ então $\lim_{t \rightarrow +\infty} P(t) = 0$, o que, no contexto do problema, significa que se a taxa de natalidade for menor que a taxa de mortalidade, para valores arbitrariamente grandes do tempo a população das aves tende para zero, ou seja, se nascem menos aves do que as que morrem, com o passar do tempo a população das aves tende a extinguir-se.

Exame – 2005, 1.ª Fase

42. Como a função f é contínua no intervalo $] -\infty, 0[$, porque resulta de operações entre funções contínuas neste intervalo, e o denominador não se anula para os valores de x deste intervalo; e também é contínua no intervalo $]0, +\infty[$, porque também resulta de operações entre funções contínuas neste intervalo, e o denominador não se anula para os valores de x deste intervalo; resta averiguar a continuidade para $x = 0$

Para averiguar se a função f é contínua em $x = 0$, temos que verificar se $f(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$

- $f(0) = \frac{3 \times 0 + 2}{2 \times 0 + 2} = \frac{2}{2} = 1$
- $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{3x + 2}{2x + 2} = \frac{\lim_{x \rightarrow 0^+} (3x + 2)}{\lim_{x \rightarrow 0^+} (2x + 2)} = \frac{3 \times 0^+ + 2}{2 \times 0^+ + 2} = \frac{2}{2} = 1$
- $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \underbrace{\frac{e^x - 1}{x}}_{\text{Lim. Notável}} = 1$

Como $f(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$, então, podemos concluir que a função f é contínua em $x = 0$. Como f também é contínua em \mathbb{R}^- e em \mathbb{R}^+ , então «a função f é contínua em \mathbb{R} .».

Exame – 2004, Ép. especial

43. Sabendo que g é contínua, em particular é contínua em $x = 0$, pelo que $g(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} g(x)$

Fazendo os cálculos, vem que:

- $g(0) = k + \cos 0 = k + 1$
- $\lim_{x \rightarrow 0^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (k + \cos x) = k + \cos 0^- = k + 1$
- $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(1+x)}{x} = \frac{\ln(1+0^+)}{0^+} = \frac{\ln 1}{0} = \frac{0}{0}$ (Indeterminação)

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \underbrace{\frac{\ln(x+1)}{x}}_{\text{Lim. Notável}} = 1$$

Assim, como $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = 1$ e a função é contínua, temos que: $g(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} g(x)$, pelo que podemos calcular o valor de k :

$$g(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) \Leftrightarrow k + 1 = 1 \Leftrightarrow k = 0$$

Resposta: **Opção B**

Exame – 2004, 1.ª Fase



44. Como a função f é par e a reta de equação $y = 0$ é assintota do seu gráfico, então, como a observação do gráfico sugere, temos que: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0^+$ E assim, vem que:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{f(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow +\infty} 1}{\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

Resposta: **Opção C**

Exame – 2004, 1.ª Fase

45. Aplicando as propriedades dos logaritmos e calculando o valor do limite, temos:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - \ln x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\ln \left(x + \frac{1}{x} \right) - \ln x \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\ln \left(\frac{x + \frac{1}{x}}{x} \right) \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\ln \left(\frac{x}{x} + \frac{1}{x^2} \right) \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\ln \left(1 + \frac{1}{x^2} \right) \right) = \ln \left(1 + \frac{1}{+\infty} \right) = \ln(1 + 0^+) = \ln(1) = 0 \end{aligned}$$

Exame – 2003, Prova para militares

46. Calculando o valor do limite, temos que:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\log_2 x}{e^x - 1} = \frac{\log_2 0^+}{e^{0^+} - 1} = \frac{-\infty}{1^+ - 1} = \frac{-\infty}{0^+} = -\infty$$

Resposta: **Opção C**

Exame – 2003, 1.ª fase - 2.ª chamada

47. Sabendo que f é contínua, em particular é contínua em $t = 60$, pelo que $f(60) = \lim_{x \rightarrow 60^-} f(t) = \lim_{x \rightarrow 60^+} f(t)$, e mais especificamente $f(60) = \lim_{x \rightarrow 60^-} f(t)$

Fazendo os cálculos, vem que:

$$\begin{aligned} \bullet f(60) &= 6 + A \times 2^{-0,05(60-60)} = 6 + A \times 2^{-0,05 \times 0} = 6 + A \times 2^0 = 6 + A \times 1 = 6 + A \\ \bullet \lim_{t \rightarrow 60^-} f(t) &= \lim_{t \rightarrow 60^-} (20 + 80 \times 2^{-0,05t}) = 20 + 80 \times 2^{-0,05 \times 60} = 20 + 80 \times 2^{-3} = \\ &= 20 + 80 \times \frac{1}{2^3} = 20 + \frac{80}{8} = 20 + 10 = 30 \end{aligned}$$

Assim, como $\lim_{x \rightarrow 60^-} f(t) = f(60)$, podemos provar que $A = 24$:

$$f(60) = \lim_{x \rightarrow 60^-} f(t) \Leftrightarrow 6 + A = 30 \Leftrightarrow A = 30 - 6 \Leftrightarrow A = 24$$

Exame – 2001, Prova para militares

48. Sabendo que f é contínua, em particular é contínua em $x = 0$, pelo que $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0)$

Fazendo os cálculos, vem que:

$$\begin{aligned} \bullet f(0) &= 0 \\ \bullet \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) &= 0 \\ \bullet \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} (\ln(x + k)) = \ln(0 + k) = \ln k \end{aligned}$$

Assim, como $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \ln k$ e como a função é contínua, ou seja $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0)$, podemos calcular o valor de k :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0) \Leftrightarrow \ln k = 0 \Leftrightarrow k = e^0 \Leftrightarrow k = 1$$

Resposta: **Opção C**

Exame – 2001, 2.ª Fase



49. Para estudar a continuidade da função h no ponto de abscissa zero, temos que comparar os valores de $h(0)$, de $\lim_{x \rightarrow 0^+} h(x)$ e de $\lim_{x \rightarrow 0^-} h(x)$

- $h(0) = 2$
- $\lim_{x \rightarrow 0^-} h(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (1 + e^x) = 1 + e^{0^+} = 1 + 1 = 2$
- $\lim_{x \rightarrow 0^+} h(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (3x + 2) = 3 \times 0^+ + 2 = 0 + 2 = 2$

Como $h(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} h(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} h(x)$, então a função h é contínua no ponto de abscissa zero.

Resposta: **Opção A**

Exame – 2001, 1.ª fase - 2.ª chamada

50. Pela observação do gráfico, podemos verificar que a função f é contínua à esquerda do ponto de abscissa 4, e descontínua à direita, ou seja:

$$\lim_{x \rightarrow 4^-} f(x) = f(4) \text{ e } \lim_{x \rightarrow 4^+} f(x) \neq f(4)$$

Resposta: **Opção B**

Exame – 2000, 1.ª fase - 2.ª chamada

51. Pela observação do gráfico, podemos verificar que:

- $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = 0^+$
- $\lim_{x \rightarrow 3^-} g(x) = k, k \in \mathbb{R}^+$

E assim, calculando o valor do limite, temos que:

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{g(x)}{f(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow 3^-} g(x)}{\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x)} = \frac{k}{0^+} = +\infty \quad k > 0$$

Resposta: **Opção D**

Exame – 1999, 1.ª fase - 2.ª chamada (prog. antigo)

