



---

Matemática A

---

12.º Ano de Escolaridade | outubro de 2022

---

Turma: 12ºB

---

1. .

1.1. .

1.1.1.  $-2 \in D_f$

Para existir  $\lim_{x \rightarrow -2} f(x)$ , deve ter-se  $\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = f(-2)$

Ora,

- $\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = -1$
- $\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = -1$
- $f(-2) = 2$

Como,  $\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) \neq f(-2)$  e  $\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) \neq f(-2)$ , então, não existe  $\lim_{x \rightarrow -2} f(x)$

1.1.2.  $1 \notin D_f$  e é ponto aderente a  $D_f$

Para existir  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ , deve ter-se  $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$

Ora,

- $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 4$
- $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 4$

Como,  $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$ , então, existe  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ , e o seu valor é 4

1.2. Ora,

$$a_n = 2 + \frac{1}{n+1} > 2, \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\lim a_n = \lim \left( 2 + \frac{1}{n+1} \right) = 2^+$$

$$\text{Assim, } \lim f(a_n) = 4$$

**Resposta: (D)**

2. Sabe-se que 3 é zero de  $f$ , então,

$$x^3 - 3x^2 - 2x + 6 = (x - 3)Q(x)$$

Pela regra de Ruffini, vem,

$$\begin{array}{c|ccc|c} 3 & 1 & -3 & -2 & 6 \\ & & 3 & 0 & -6 \\ \hline & 1 & 0 & -2 & 0 \end{array}$$

Assim,

$$Q(x) = x^2 - 2$$

Logo,

$$x^3 - 3x^2 - 2x + 6 = (x - 3)(x^2 - 2)$$

Deste modo,

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{x^3 - 3x^2 - 2x + 6}{4x^2 + 3} = 0 \Leftrightarrow x^3 - 3x^2 - 2x + 6 = 0 \wedge 4x^2 + 3 \neq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x - 3)(x^2 - 2) = 0 \wedge \text{Condição universal} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x - 3 = 0 \vee x^2 - 2 = 0 \Leftrightarrow x - 3 = 0 \vee x^2 = 2 \Leftrightarrow x = 3 \vee x = -\sqrt{2} \vee x = \sqrt{2}$$

Resposta:  $-\sqrt{2}; \sqrt{2}; 3$ , são os zeros de  $f$

$$3. \frac{x^2 - 6x + 9}{x^2 - 3x} = \frac{(x - 3)^2}{x(x - 3)} = \frac{x - 3}{x}, \text{ com } x \neq 0 \wedge x \neq 3$$

**Resposta: (C)**

$$4. -2 \in D_f$$

A função  $f$  é contínua em  $x = -2$ , se existir  $\lim_{x \rightarrow -2} f(x)$ , ou seja,

$$\text{se } \lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = f(-2)$$

Ora,

$$\begin{aligned} \bullet \lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{x^2 + 4x + 4}{2x^2 - 8} = \left(\frac{0}{0}\right) \lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{(x + 2)^2}{2(x - 2)(x + 2)} = \lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{x + 2}{2x - 4} = 0 \\ \bullet \lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -2^+} \left[ \frac{1}{x + 2} \times (x^3 + 3x^2 - 4) \right] = (0 \times \infty) \lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{x^3 + 3x^2 - 4}{x + 2} = \left(\frac{0}{0}\right) \lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{(x + 2)(x^2 + x - 2)}{x + 2} = \\ &= \lim_{x \rightarrow -2^+} (x^2 + x - 2) = 0 \end{aligned}$$

**Cálculo auxiliar**

Sabe-se que  $-2$  é zero do polinómio  $x^3 + 3x^2 - 4$

Então,

$$x^3 + 3x^2 - 4 = (x + 2)Q(x)$$

Pela regra de Ruffini, vem,

$$\begin{array}{c|ccc|c} -2 & 1 & 3 & 0 & -4 \\ & -2 & -2 & & 4 \\ \hline & 1 & 1 & -2 & 0 \end{array}$$

Assim,

$$Q(x) = x^2 + x - 2$$

Logo,

$$x^3 + 3x^2 - 4 = (x + 2)(x^2 + x - 2)$$

$$\bullet f(-2) = \frac{2 - 4k}{7}$$

Assim,  $f$  é contínua em  $x = -2$ , se  $\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = f(-2)$

Ou seja, se,

$$\frac{2 - 4k}{7} = 0 \Leftrightarrow 2 - 4k = 0 \Leftrightarrow 4k = 2 \Leftrightarrow k = \frac{2}{4} \Leftrightarrow k = \frac{1}{2}$$

Resposta: Para  $k = \frac{1}{2}$ , a função  $f$  é contínua em  $x = -2$

$$5. D_g = \{x \in \mathbb{R} : f(x) + 1 \geq 0\} = \{x \in \mathbb{R} : -3 \leq x \leq 3\} = [-3; 3]$$

### Cálculo auxiliar

$$f(x) + 1 \geq 0 \Leftrightarrow 8 - x^2 + 1 \geq 0 \Leftrightarrow 9 - x^2 \geq 0$$

$$\bullet 9 - x^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 9 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{9} \Leftrightarrow x = -3 \vee x = 3$$

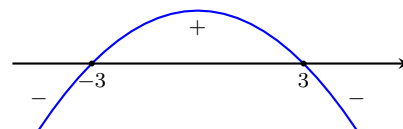
### • Sinal:

Como se trata de uma função quadrática, estuda-se o sinal pela representação gráfica da parábola

Assim,

$$9 - x^2 < 0 \Leftrightarrow x < -3 \vee x > 3$$

$$9 - x^2 > 0 \Leftrightarrow -3 < x < 3$$



**Resposta: (B)**

$$\begin{aligned}
6. \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \left( \sqrt{4x^2 - 2x} + 2x \right) &= (\infty - \infty) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(\sqrt{4x^2 - 2x} + 2x)(\sqrt{4x^2 - 2x} - 2x)}{\sqrt{4x^2 - 2x} - 2x} = \\
&= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(\sqrt{4x^2 - 2x})^2 - (2x)^2}{\sqrt{4x^2 - 2x} - 2x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4x^2 - 2x - 4x^2}{\sqrt{4x^2 - 2x} - 2x} = \\
&= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-2x}{\sqrt{4x^2 - 2x} - 2x} \stackrel{(\infty)}{=} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-2x}{\sqrt{x^2 \left( 4 - \frac{2}{x^2} \right)} - 2x} \\
&= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-2x}{|x| \sqrt{4 - \frac{2}{x^2}} - 2x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-2x}{-x \sqrt{4 - \frac{2}{x^2}} - 2x} = \\
&= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-2x}{-x \left( \sqrt{4 - \frac{2}{x^2}} + 2 \right)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2}{\sqrt{4 - \frac{2}{x^2}} + 2} = \\
&= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2}{\sqrt{4 - \frac{2}{x^2}} + 2} = \frac{2}{\sqrt{4 - \frac{2}{+\infty}} + 2} = \frac{2}{\sqrt{4 - 0} + 2} = \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

7. .

7.1. Para toda a sucessão  $(a_n)$ , tal que  $a_n \in D_f$  e  $\lim a_n = 1$ , tem-se,

$$\lim f(a_n) = \lim \frac{2a_n + 1}{(a_n)^2 - 4} = \frac{2 \times \lim a_n + 1}{(\lim a_n)^2 - 4} = \frac{2 \times 1 + 1}{1^2 - 4} = \frac{3}{-3} = -1$$

Assim,

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = -1$$

$$\begin{aligned}
7.2. \quad f(x) \geq \frac{x}{x+2} &\Leftrightarrow \frac{2x+1}{x^2-4} \geq \frac{x}{x+2} \Leftrightarrow \frac{2x+1}{(x-2)(x+2)} - \frac{x}{x+2} \geq 0 \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow \frac{2x+1}{(x-2)(x+2)} - \frac{x(x-2)}{(x-2)(x+2)} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{2x+1-x(x-2)}{(x-2)(x+2)} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{2x+1-x^2+2x}{(x-2)(x+2)} \geq 0 \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow \frac{-x^2+4x+1}{(x-2)(x+2)} \geq 0
\end{aligned}$$

$\Rightarrow$  **Numerador:**

$$\textbf{Zeros: } -x^2 + 4x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \times (-1) \times 1}}{2 \times (-1)} \Leftrightarrow x = 2 - \sqrt{5} \vee x = 2 + \sqrt{5}$$

**Sinal:**

Como se trata de uma função quadrática, estuda-se o sinal pela representação gráfica da parábola

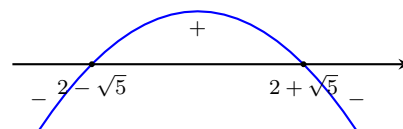
Assim,

$$-x^2 + 4x + 1 < 0 \Leftrightarrow x < 2 - \sqrt{5} \vee x > 2 + \sqrt{5}$$

$$-x^2 + 4x + 1 > 0 \Leftrightarrow 2 - \sqrt{5} < x < 2 + \sqrt{5}$$

$\Rightarrow$  **Denominador**

$$\textbf{Zeros: } (x-2)(x+2) = 0 \Leftrightarrow x-2 = 0 \vee x+2 = 0 \Leftrightarrow x = 2 \vee x = -2$$



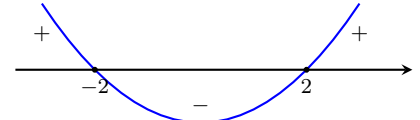
**Sinal:**

Como se trata de uma função quadrática, estuda-se o sinal pela representação gráfica da parábola

Assim,

$$(x-2)(x+2) < 0 \Leftrightarrow -2 < x < 2$$

$$(x-2)(x+2) > 0 \Leftrightarrow x < -2 \vee x > 2$$

**Quadro de sinais**

$x$	$-\infty$	$-2$		$2 - \sqrt{5}$		$2$		$2 + \sqrt{5}$	$+\infty$
$-x^2 + 4x + 1$	-	-	-	0	+	+	+	0	-
$(x-2)(x+2)$	+	0	-	-	-	0	+	+	+
$\frac{-x^2 + 4x + 1}{(x-2)(x+2)}$	-	<i>n.d.</i>	+	0	-	<i>n.d.</i>	+	0	-

Assim,

$$\frac{-x^2 + 4x + 1}{(x-2)(x+2)} \geq 0 \Leftrightarrow -2 < x \leq 2 - \sqrt{5} \vee 2 < x \leq 2 + \sqrt{5}$$

Portanto,

$$C.S. = ]-2; 2 - \sqrt{5}] \cup ]2; 2 + \sqrt{5}]$$

$$7.3. D_g = \{x \in \mathbb{R} : 4 + 2x \geq 0 \wedge \sqrt{4 + 2x} - 4 \neq 0\} = \{x \in \mathbb{R} : x \geq -2 \wedge x \neq 6\} = [-2; 6[ \cup ]6; +\infty[$$

**Cálculo auxiliar**

- $4 + 2x \geq 0 \Leftrightarrow 2x \geq -4 \Leftrightarrow x \geq \frac{-4}{2} \Leftrightarrow x \geq -2$
- $\sqrt{4 + 2x} - 4 = 0 \wedge 4 + 2x \geq 0 \Leftrightarrow \sqrt{4 + 2x} = 4 \wedge x \geq -2$

$$\Rightarrow (\sqrt{4 + 2x})^2 = 4^2 \wedge x \geq -2 \Leftrightarrow 4 + 2x = 16 \wedge x \geq -2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2x = 16 - 4 \wedge x \geq -2 \Leftrightarrow 2x = 12 \wedge x \geq -2 \Leftrightarrow x = 6 \wedge x \geq -2$$

$$\Leftrightarrow x = 6$$

**Verificação:**

$$x = 6 \mapsto \sqrt{4 + 2 \times 6} - 4 = 0$$

$$\therefore \sqrt{16} - 4 = 0$$

$$\therefore 4 - 4 = 0$$

$$\therefore 0 = 0 \text{ (Verdadeiro)}$$

Logo, 6 é solução da equação dada

$$\begin{aligned} 8. \lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt{3x+1}-4}{2x^2-9x-5} &= \left(\frac{0}{0}\right) \lim_{x \rightarrow 5} \frac{(\sqrt{3x+1}-4)(\sqrt{3x+1}+4)}{(x-5)(2x+1)(\sqrt{3x+1}+4)} = \lim_{x \rightarrow 5} \frac{(\sqrt{3x+1})^2 - 4^2}{(x-5)(2x+1)(\sqrt{3x+1}+4)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 5} \frac{3x+1-16}{(x-5)(2x+1)(\sqrt{3x+1}+4)} = \lim_{x \rightarrow 5} \frac{3x-15}{(x-5)(2x+1)(\sqrt{3x+1}+4)} = \lim_{x \rightarrow 5} \frac{3(x-5)}{(x-5)(2x+1)(\sqrt{3x+1}+4)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 5} \frac{3}{(2x+1)(\sqrt{3x+1}+4)} = \frac{3}{88} \end{aligned}$$

### Cálculo auxiliar

Sabe-se que o polinómio  $2x^2 - 9x - 5$  é divisível por  $x - 5$

Então,

$$2x^2 - 9x - 5 = (x - 5)Q(x)$$

Pela regra de Ruffini, vem,

$$\begin{array}{r|rr|r} & 2 & -9 & -5 \\ 5 & & 10 & 5 \\ \hline & 2 & 1 & 0 \end{array}$$

Assim,

$$Q(x) = 2x + 1$$

Logo,

$$2x^2 - 9x - 5 = (x - 5)(2x + 1)$$

**Resposta: (C)**

9. .

$$9.1. D_h = \{x \in \mathbb{R} : f(x) > 0\} = \{x \in \mathbb{R} : x < -3 \vee -1 < x < 3\} = ]-\infty; -3[ \cup ]-1; 3[$$

9.2. Elaborando um quadro de sinal, vem,

$x$	$-\infty$	$-3$		$-1$		$3$	$+\infty$
$f(x)$	$+$	$0$	$-$	$0$	$+$	$0$	$-$
$g(x)$	$+$	$+$	$+$	$0$	$-$	$0$	$+$
$\frac{f(x)}{g(x)}$	$+$	$0$	$-$	$n.d.$	$-$	$n.d.$	$-$

Assim,

$$\frac{f(x)}{g(x)} \leq 0 \Leftrightarrow -3 \leq x \leq -1 \vee -1 < x < 3 \vee x > 3$$

Portanto,

$$C.S. = [-3; -1[ \cup ]-1; 3[ \cup ]3; +\infty[$$