Exame final nacional de Matemática A **(2023, Época especial)**

Proposta de resolução

1. Analisando a monotonia de cada uma das sucessões, temos:

   - $a_n = (n-5)^2$: Como $a_4 = 1$; $a_5 = 0$ e $a_6 = 1$, temos que $a_4 > a_5$ e $a_5 < a_6$, então a sucessão não é monótona;
   - $b_n = \frac{(-1)^n}{n+3}$: Como $a_1 = -\frac{1}{4}$; $a_2 = \frac{1}{5}$ e $a_3 = -\frac{1}{6}$, temos que $a_1 < a_2$ e $a_2 > a_3$, então a sucessão não é monótona;
   - $c_n = (-2)^n$: Como $a_1 = -2$; $a_2 = 4$ e $a_3 = -8$, temos que $a_1 < a_2$ e $a_2 > a_3$, então a sucessão não é monótona;
   - $d_n = \frac{1}{n}$:

     $$d_{n+1} - d_n = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} = \frac{n}{n^2+n} - \frac{n+1}{n^2+n} = \frac{n-n-1}{n^2+n} = -\frac{1}{n^2+n}$$

     Como $n \in \mathbb{N}$, então $n^2+n > 0$,logo $d_{n+1} - d_n < 0, \forall n \in \mathbb{N}$, ou seja, a sucessão é monótona (decrescente).

   Resposta: **Opção D**

2. Temos que:

   - sequência dos raios das semicircunferências: $r_n = 2^{n-1}$;
   - sequência dos comprimentos das semicircunferências (semiperímeros das circunferências):

     $$c_n = \frac{2 \times \pi \times r_n}{2} = \pi \times 2^{n-1}$$

   Como os termos da sequência dos comprimentos das semicircunferências é uma progressão geométrica de razão 2, e cujo primeiro termo é $c_1 = \pi \times 2^0 = \pi$, então o comprimento total das 25 semicircunferências é a soma dos 25 primeiros termos da sequência:

   $$S_{25} = \pi \times \frac{1-2^{25}}{1-2} = \pi \times 33\,554\,431 \approx 1{,}0541 \times 10^8 \text{ cm} \approx 1054 \text{ km}$$

3. Como $P\left(A \cap \overline{B}\right) = P(A \setminus B) = P(A) - P(A \cap B) = 0{,}5$, então:

   $$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \Leftrightarrow P(A \cup B) = P(B) + P(A) - P(A \cap B) \Leftrightarrow$$

   $$\Leftrightarrow 0{,}8 = P(B) + 0{,}5 \Leftrightarrow 0{,}3 = P(B)$$

   Resposta: **Opção B**

4.

4.1. Como os 9 bombons vão ser colocados em 9 compartimentos, existem ${}^9C_4$ formas de colocar os 4 amêndoa, e por cada uma destas formas existem ${}^5C_2$ formas de colocar os 2 de avelã nos restantes 5 compartimentos, e ainda ${}^3C_3$ formas de colocar os 3de noz, nos restantes três compartimentos, sendo esta última, uma forma única de colocar os bombons de noz.
Desta forma o número de casos possíveis é ${}^9C_4 \times^5 C_2 \times^3 C_3 =^9 C_4 \times^5 C_2$.

Para que uma linha fique preenchida só com bombons de amêndoa, para os restantes 6 compartimentos devemos selecionar 1 para colocar o de amêndoa restante $({}^6C_1)$, 2 dos 5 compartimentos restantes para os de avelã $({}^5C_2)$ e os restantes serão preenchidos com os de noz.
Como qualquer uma das 3 linhas pode ser a que será ocupada pelos bombons de amêndoa, o número de casos favoráveis é $3 \times^6 C_1 \times^5 C_2 \times^3 C_3 = 3 \times^6 C_1 \times^5 C_2$.

Assim, recorrendo à regra de LaPlace, a probabilidade na forma de fração irredutível, é:

$$\frac{3 \times^6 C_1 \times^5 C_2}{{}^9C_4 \times^5 C_2} = \frac{1}{7}$$

4.2. No contexto da situação descrita $A \cap \overline{B}$ representa o acontecimento: «o primeiro bombom ter recheio de frutos secos e o segundo não ter recheio de frutos secos», pelo que $P\left(C|A \cap \overline{B}\right)$ é a probabilidade de que o terceiro bombom tenha recheio de caramelo, sabendo que o primeiro tinha de frutos secos e o segundo de caramelo.
Como na primeira extração existiam 9 bombons com recheio de frutos secos e 22 de caramelo, na segunda extração deverão existir 8 de frutos secos e 22 de caramelo e na terceira extração deverão existir 8 de frutos secos e 21 de caramelo.

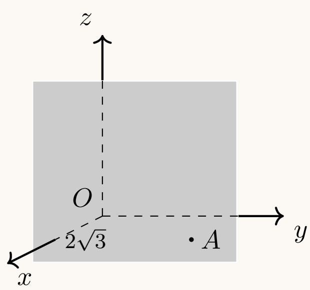
$$\boxed{\begin{matrix}9\text{ FS}\\22\text{ C}\end{matrix}} \xrightarrow[\text{1 FS}]{\text{1.ª Ext.}} \boxed{\begin{matrix}8\text{ FS}\\22\text{ C}\end{matrix}} \xrightarrow[\text{1 C}]{\text{2.ª Ext.}} \boxed{\begin{matrix}8\text{ FS}\\21\text{ C}\end{matrix}} \xrightarrow[\text{1 C}]{\text{3.ª Ext.}}$$

Assim, como sabendo que o acontecimento representado por $A \cap \overline{B}$ ocorreu, para a probabilidade $P\left(C|A \cap \overline{B}\right)$, existem na terceira extração 21 bombons de caramelo, ou seja, 21 casos favoráveis; num total de $8 + 21 = 29$ bombons, ou seja, 29 pelo que, recorrendo à Regra de LaPlace, temos:

$$P\left(C|A \cap \overline{B}\right) = \frac{21}{29}$$

5.

5.1. Como um vetor diretor diretor da reta que contém o eixo Ox é $\overrightarrow{u} = (1,0,0)$ e para que um plano seja perpendicular a uma reta, o vetor normal do plano deve ser colinear com o vetor normal da reta, de entre as equações apresentadas, podemos identificar a que representa um plano cujo vetor normal é colinear com o vetor $\overrightarrow{u}$:



- $z = 0$, vetor normal: $\overrightarrow{v_A} = (0,0,1)$ e $(0,0,1) \neq k(1,0,0)$,$\forall k \in \mathbb{R}$
- $y = 6$, vetor normal: $\overrightarrow{v_B} = (0,6,0)$ e $(0,6,0) \neq k(1,0,0)$,$\forall k \in \mathbb{R}$
- $x = 2\sqrt{3}$, vetor normal: $\overrightarrow{v_C} = (2\sqrt{3},0,0)$ e $(2\sqrt{3},0,0) = 2\sqrt{3}(1,0,0)$
- $x + y + z = 0$, vetor normal: $\overrightarrow{v_D} = (1,1,1)$ e $(1,1,1) \neq k(1,0,0)$,$\forall k \in \mathbb{R}$

Resposta: **Opção C**

5.2. Como o ponto B pertence ao plano mediador do segmento de reta $[OA]$, designado por M o ponto médio de $[OA]$, temos que $[BM]$ é a altura do triângulo $[OAB]$ relativa à base $[OA]$.

Assim temos que:

- $\overline{OA} = \sqrt{\left(2\sqrt{3}-0\right)^2 + (6-0)^2 + (0-0)^2} = \sqrt{4\times 3+36+0} = \sqrt{48} = 4\sqrt{3}$
- $M = \left(\frac{x_A+x_O}{2}, \frac{y_A+y_O}{2}, \frac{z_A+z_O}{2}\right) = \left(\frac{2\sqrt{3}+0}{2}, \frac{6+0}{2}, \frac{0+0}{2}\right) = \left(\sqrt{3},3,0\right)$

A equação do plano mediador de $[OA]$ (ao qual pertence o ponto B), é:

$$(x-0)^2+(y-0)^2+(z-0)^2 = (x-2\sqrt{3})^2+(y-6)^2+(z-0)^2 \Leftrightarrow x^2+y^2 = x^2-4x\sqrt{3}+12+y^2-12y+36 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 0 = -4x\sqrt{3}+12-12y+36 \Leftrightarrow 4x\sqrt{3}+12y-48=0 \Leftrightarrow \sqrt{3}x+3y-12=0$$

Como o ponto B pertence à reta AB, então as suas coordenadas são da forma: $B(\sqrt{3}k,16-5k,0)$ pelo que podemos determinar o valor de k, substituindo as coordenadas no plano mediador de $[OA]$:

$$\sqrt{3}\times\sqrt{3}k+3(16-5k)-12=0 \Leftrightarrow 3k+48-15k-12=0 \Leftrightarrow 36=12k \Leftrightarrow \frac{250}{12}=k \Leftrightarrow k=3$$

Desta forma temos que:

- $B\left(\sqrt{3}\times 3,16-5\times 3,0\right) = \left(3\sqrt{3},16-15,0\right) = \left(3\sqrt{3},1,0\right)$
- $\overline{BM} = \sqrt{\left(3\sqrt{3}-\sqrt{3}\right)^2+(1-3)^2+(0-0)^2} = \sqrt{\left(2\sqrt{3}\right)^2+(-2)^2} = \sqrt{4\times 3+4} = \sqrt{16} = 4$

E assim, vem que:

$$V_{[OABCDE]} = A_{[OAB]}\times\overline{OD} = \frac{\overline{OA}\times\overline{BM}}{2}\times\overline{OD} = \frac{4\sqrt{3}\times 4}{2}\times 5 = 2\sqrt{3}\times 4\times 5 = 40\sqrt{3}$$

6. Designando por P o ponto pertencente ao segmento de reta $[AB]$ com ordenada igual à do ponto C, temos que $[CP]$ é a altura do triângulo $[ABC]$, relativamente à base $[AB]$, e assim, vem que:

- $\overline{AB} = \operatorname{tg}\alpha$
- $\operatorname{tg}^2\alpha+1 = \frac{1}{\cos^2\alpha} \Leftrightarrow \overline{AB}^1+1 = \frac{1}{\left(\frac{1}{3}\right)^2} \Leftrightarrow \overline{AB}^2 = \frac{1}{\frac{1}{9}}-1 \Leftrightarrow \overline{AB}^2 = 9-1 \Leftrightarrow \overline{AB} = \sqrt{8} \Leftrightarrow \overline{AB} = 2\sqrt{2}$
- $\overline{CP} = x_A - x_C = 1-\cos\alpha = 1-\frac{1}{3} = \frac{2}{3}$

E assim, a área do triângulo $[ABC]$, é:

$$A_{[ABC]} = \frac{\overline{AB}\times\overline{CP}}{2} = \frac{2\sqrt{2}\times\frac{2}{3}}{2} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

7.

7.1. Como o domínio de f é $\mathbb{R}\backslash\{0\}$, para que exista $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$, então tem que se verificar $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$

Assim, temos que:

- $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} \left(\ln\left(2-e^{-x}\right)+x+2\right) = \ln(2-e^0)+0+2 = \ln(2-1)+2 = \ln 1+2 = 0+2 = 2$
- $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{\operatorname{sen}(ax)}{e^x-1} = \dfrac{\operatorname{sen}(a\times 0)}{e^0-1} = \dfrac{\operatorname{sen} 0}{1-1} = \dfrac{0}{0}$ (Indeterminação)

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{\operatorname{sen}(ax)}{e^x-1} = \lim_{x\to 0^-}\left(\frac{\operatorname{sen}(ax)}{e^x-1}\times\frac{ax}{ax}\right) = \lim_{x\to 0^-}\left(\frac{\operatorname{sen}(ax)}{ax}\times\frac{ax}{e^x-1}\right) =$$

(considerando $y = ax$, temos que se $x\to 0^-$, então $y\to 0^-$, porque $a>0$)

$$= \underbrace{\lim_{y\to 0^-}\frac{\operatorname{sen} y}{y}}_{\text{Lim. Notável}} \times \lim_{x\to 0^-}\left(a\times\frac{x}{e^x-1}\right) = 1\times\lim_{x\to 0^-} a\times\lim_{x\to 0^-}\frac{x}{e^x-1} = a\times\lim_{x\to 0^-}\frac{1}{\frac{e^x-1}{x}} =$$

$$= a\times\frac{\lim\limits_{x\to 0^-} 1}{\underbrace{\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{e^x-1}{x}}_{\text{Lim. Notável}}} = a\times\frac{1}{1} = a$$

Logo, determinando o valor de a, vem: $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} f(x) \Leftrightarrow 2 = a$

7.2. Como o gráfico de f, admite uma assíntota oblíqua quando $x\to+\infty$, podemos determinar o declive da assíntota:

$$m = \lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(2-e^{-x}\right)+x+2}{x} = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\ln\left(2-e^{-x}\right)}{+}\frac{x}{x}+\frac{2}{x}\right) =$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x}\times\ln\left(2-e^{-x}\right)+1+\frac{2}{x}\right) = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\times\lim_{x\to+\infty}\left(\ln\left(2-e^{-x}\right)\right)+\lim_{x\to+\infty}1+\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{x} =$$

$$= \frac{1}{+\infty}\times\ln(2-e^{\infty})+1+\frac{2}{+\infty} = 0\times\ln(2-1)+1+0 = 0\times\ln 1+1 = 0\times 0+1 = 0+1 = 1$$

Calculando o valor da ordenada na origem, temos que:

$$b = \lim_{x\to+\infty}\left(f(x)-mx\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(f(x)-1\times x\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(\ln\left(2-e^{-x}\right)+x+2-x\right) =$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\left(\ln\left(2-e^{-x}\right)+2\right) = \ln\left(2-e^{-\infty}\right)+2 = \ln(2-e^0)+2 = \ln(2+0)+2 = \ln 2+2$$

Desta forma a equação reduzida da assíntota oblíqua do gráfico de h, quando $x\to+\infty$, é:

$$y = 1\times x+\ln 2+2 \Leftrightarrow y = x+\ln 2+2$$

8. Recorrendo às propriedades dos logaritmos, temos que:

$$\log_a\left(\frac{b}{a}\right) = 2 \Leftrightarrow \log_a b-\log_a a = 2 \Leftrightarrow \log_a b-1 = 2 \Leftrightarrow \log_a b = 2+1 \Leftrightarrow \log_a b = 3$$

E assim:

$$\log_a\left(\sqrt{a^3}\times b^2\right) = \log_a\sqrt{a^3}+\log_a b^2 = \log_a(a)^{\frac{3}{2}}+2\log_a b = \frac{3}{2}\times\log_a a+2\times 3 = \frac{3}{3}\times 1+6 = \frac{3}{2}+\frac{12}{2} = \frac{15}{2}$$

Resposta: **Opção B**

9.

9.1. Começamos por determinar a expressão da derivada da função g:

$$g'(x) = (e^x \cos x)' = (e^x)' \times \cos x + e^2 \times (\cos x)' = e^x \cos x e^x(-\operatorname{sen} x) = e^x(\cos x - \operatorname{sen} x)$$

Calculando os zeros da derivada da função g, temos:

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow e^x(\cos x - \operatorname{sen} x) = 0 \Leftrightarrow \underbrace{e^x = 0}_{\text{Cond. impossível}} \vee \cos x = \operatorname{sen} x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cos x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} - x + 2k\pi \vee x = -\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x + x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \vee x = -\frac{\pi}{2} + x + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \vee \underbrace{0x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi}_{\text{Cond. impossível}}, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Assim, como o domínio de g é $[0,\pi[$, a única solução da equação é $x = \frac{\pi}{4}$, $(k = 0)$.

Estudando a variação do sinal da derivada e relacionando com a monotonia da função, vem:

x	0		$\frac{\pi}{4}$		π
e^x	+	+	+	+	n.d.
$\cos x - \operatorname{sen} x$	+	+	0	−	n.d.
g'	+	+	0	−	n.d.
g	min.	$\nearrow$	Máx.	$\searrow$	n.d.

Assim, podemos concluir que a função f:

- é crescente no intervalo $\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$;
- é decrescente no intervalo $\left[\frac{\pi}{4},\pi\right[$;
- tem um mínimo relativo que é: $g(0) = e^0(cos(0)) = 1 \times 1 = 1$;
- tem um máximo relativo que é: $g\left(\frac{\pi}{4}\right) = e^{\frac{\pi}{4}}(cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = e^{\frac{\pi}{4}} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{e^{\frac{\pi}{4}}\sqrt{2}}{2}$.

9.2. A abcissa dos pontos do gráficos da função g com a ordenada igual à abcissa são soluções da equação

$$g(x) = x \Leftrightarrow g(x) - x = 0$$

Assim vamos mostrar que a função $h(x) = g(x) - x$ tem pelo menos um zero no intervalo $\left]\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{2}\right[$.

Como a função g, e também a função h resultam de operações sucessivas de funções contínuas em $[0,\pi[$, são contínuas neste intervalo, e em particular no intervalo $\left[\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{2}\right]$.

Como $h\left(\frac{\pi}{2}\right) < 0 < h\left(\frac{\pi}{3}\right)$, então, podemos concluir, pelo Teorema de Bolzano, que existe $c \in \left]\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{2}\right[$ tal que $h(c) = 0$, ou seja, que existe, pelo menos, uma solução da equação $h(x) = g(x) - x$ no intervalo $\left]\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{2}\right[$, isto é, que existe, pelo menos, um ponto do gráfico de g cuja ordenada é igual à abcissa, neste intervalo.

C.A.

$$h\left(\frac{\pi}{3}\right) = e^{\frac{\pi}{3}} \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) - \frac{\pi}{3} \approx 0{,}38$$

$$h\left(\frac{\pi}{2}\right) = e^{\frac{\pi}{2}} \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) - \frac{\pi}{2} \approx -1{,}57$$

10. Como $e^x > 0$ e $e^{-x} > 0$, então $e^x + e^{-x} \neq 0, \forall x \in \mathbb{R}$, pelo que resolvendo a equação, temos:

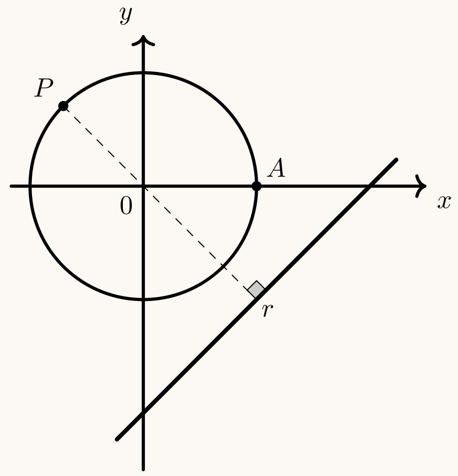
$$\frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow 3\left(e^x - e^{-x}\right) = e^x + e^{-x} \Leftrightarrow 3e^x - 3e^{-x} - e^x - e^{-x} = 0 \Leftrightarrow 2e^x - 4e^{-x} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2e^x - 4 \times \frac{1}{e^x} = 0 \Leftrightarrow 2e^x \times \frac{e^x}{e^x} - \frac{4}{e^x} = 0 \Leftrightarrow \frac{2(e^x)^2 - 4}{e^x} = 0 \Leftrightarrow 2e^{2x} - 4 = 0 \land \underbrace{e^x \neq 0}_{\text{Cond. universal}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2e^{2x} = 4 \Leftrightarrow e^{2x} = 2 \Leftrightarrow 2x = \ln 2 \Leftrightarrow x = \frac{\ln 2}{2}$$

C.S.$= \left\{\frac{\ln 2}{2}\right\}$

11. Observando que a diferença entre a distância máxima e a distância mínima corresponde ao diâmetro, a, da circunferência, temos que:

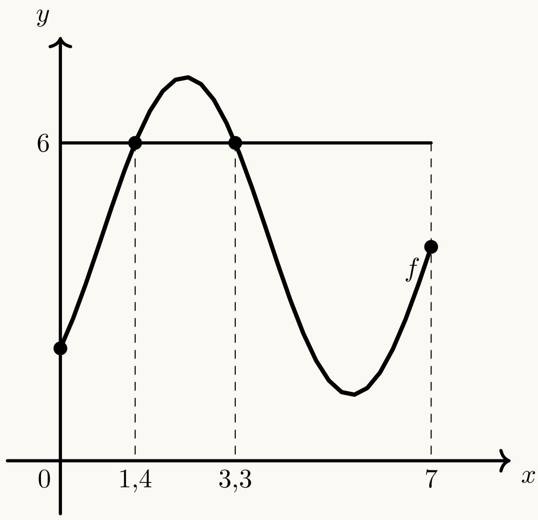


$$a = 3\sqrt{2} + 3 - (3\sqrt{2} - 3) = 3\sqrt{2} + 3 - 3\sqrt{2} + 3 = 3 + 3 = 6$$

Assim, os dois instantes em que a distância do ponto P à reta r é igual ao diâmetro da circunferência, são as soluções da equação

$$d(t) = a \Leftrightarrow d(t) = 6$$

Desta forma, visualizando na calculadora gráfica o gráfico da função $f(x) = \frac{3\sqrt{2}}{2}(2 + \operatorname{sen} x - \cos x)$, e a reta horizontal de equação $y = 6$, para $0 < x < 7$, reproduzido na figura ao lado, e usando a função da calculadora para determinar valores aproximados das coordenadas do ponto de interseção de dois gráficos, obtemos o valor aproximado (às décimas) das abcissas dos pontos de interseção, a que correspondem os dois instantes em que a distância do ponto P à reta r é igual ao diâmetro da circunferência:



$$t_1 \approx 1{,}4\text{s e } t_2 \approx 3{,}3\text{s}$$

12. Como $\operatorname{Arg}(z) = \frac{\pi}{7}$, considerando $\rho = |z|$, temos que $z = \rho e^{i\frac{\pi}{7}}$.

Como $2i = 2e^{i\frac{\pi}{2}}$, então:

$$2iz = 2i \times z = 2e^{i\frac{\pi}{2}} \times \rho e^{i\frac{\pi}{7}} = 2\rho e^{i\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{7}\right)} = 2\rho e^{i\left(\frac{7\pi}{14} + \frac{2\pi}{14}\right)} = 2\rho e^{i\frac{9\pi}{14}}$$

Ou seja, $\operatorname{Arg}(2iz) = \frac{9\pi}{14}$.

Resposta: **Opção B**

13. Escrevendo z_2 na forma trigonométrica ($\rho e^{i\theta}$) temos:

   - $\rho = |z| = \sqrt{(-1)^2 + (-\sqrt{3})^2} = \sqrt{1+3} = \sqrt{4} = 2$
   - $\operatorname{tg}\theta = \frac{-\sqrt{3}}{-1} = \sqrt{3}$; como $\operatorname{sen}\theta < 0$ e $\cos\theta < 0$, θ é um ângulo do 3º quadrante, logo $\theta = \pi + \frac{\pi}{3} = \frac{4\pi}{3}$

   Logo $z_2 = 2e^{i\frac{4\pi}{3}}$.

   Como $i^{23} = i^{4\times5+3} = i^3 = -i$, escrevendo $z_1 + i^{23}$ na forma trigonométrica, vem:

$$z_1 + i^{23} = -5i - i = -6i = 6e^{i\frac{3\pi}{2}}$$

   Assim, simplificando a expressão de w, temos que:

$$w = \frac{z_1 + i^{23}}{z_2^n} = \frac{6e^{i\frac{3\pi}{2}}}{\left(2e^{i\frac{4\pi}{3}}\right)^n} = \frac{6e^{i\frac{3\pi}{2}}}{2^n e^{i\left(n\times\frac{4\pi}{3}\right)}} = \frac{6}{2^n}e^{i\left(\frac{3\pi}{2}-\frac{4n\pi}{3}\right)}$$

   Como w é um imaginário puro se $\operatorname{Arg} w = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$, temos que, para $k \in \mathbb{Z}$:

$$\operatorname{Arg} w = \frac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow \frac{3\pi}{2} - \frac{4n\pi}{3} = \frac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow \frac{9\pi}{6} - \frac{8n\pi}{6} = \frac{3\pi}{6} + \frac{6k\pi}{6} \Leftrightarrow 9\pi - 8n\pi = 3\pi + 6k\pi \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 9\pi - 3\pi - 8n\pi = 6k\pi \Leftrightarrow 6\pi - 8n\pi = 6k\pi \Leftrightarrow 2\pi(3-4n) = 6k\pi \Leftrightarrow \frac{2\pi(3-4n)}{6\pi} = k \Leftrightarrow \frac{3-4n}{3} = k$$

   Como $n \in \mathbb{N}$, o menor valor de n que corresponde a um valor inteiro de k é 3:

   - $n = 1 \rightarrow k = \frac{3-4(1)}{3} = -\frac{1}{3}$
   - $n = 2 \rightarrow k = \frac{3-4(2)}{3} = -\frac{5}{3}$
   - $n = 3 \rightarrow k = \frac{3-4(3)}{3} = -\frac{9}{3} = -3$

14. Designando por m e n as abcissas dos pontos A e B, temos que as respetivas coordenadas e as do ponto médio são:

    - $A\big(m,h(m)\big) = (m,am^2)$
    - $B\big(n,h(n)\big) = (n,an^2)$
    - $M\left(\dfrac{m+n}{2},\dfrac{am^2+an^2}{2}\right)$

    Como a derivada da função h é $h'(x) = \big(ax^2\big)' = 2ax$, os declives das retas tangentes ao gráfico de h, nos pontos A e B, são:

    - $m_A = h'(m) = 2am$
    - $m_B = h'(n) = 2an$

    E assim, designado por podemos determinar uma expressão para a ordenada da origem para cada uma das equações da retas, substituindo a expressão do declive e das coordenadas dos pontos de tangência:

    - $y = m_A \times x + b_A \Leftrightarrow am^2 = 2am \times m + b_A \Leftrightarrow am^2 - 2am^2 = b_A \Leftrightarrow -am^2 = b_A$
    - $y = m_B \times x + b_B \Leftrightarrow an^2 = 2an \times n + b_B \Leftrightarrow an^2 - 2an^2 = b_B \Leftrightarrow -2an^2 = b_B$

    Ou seja as equações das retas tangentes nos pontos A e B, são, respetivamente, $y = 2max - am^2$ e $y = 2nax - an^2$, pelo que a abcissa do ponto de interseção das retas é a solução da equação:

    $$2max - am^2 = 2nax - an^2 \Leftrightarrow \frac{2max - am^2}{a} = \frac{2nax - an^2}{a} \Leftrightarrow$$

    $$\Leftrightarrow 2mx - m^2 = 2nx - n^2 \Leftrightarrow 2mx - 2nx = m^2 - n^2 \Leftrightarrow x(2m - 2n) = m^2 - n^2 \Leftrightarrow$$

    $$\Leftrightarrow x = \frac{(n-m)(n+m)}{2(m-n)} \Leftrightarrow x = \frac{n+m}{2}$$

    Como as abcissas do ponto médio e do ponto de interseção das tangentes são iguais, logo, o ponto de interseção das tangentes pertence à reta vertical que contém o ponto médio.