CADERNO 1

1. .

1.1. P2001/2002

Consideremos:
D : "prego defeituoso"
$\overline{D}$ "prego não defeituoso"
Seja X a variável aleatória: "número de pregos defeituosos num caixa"
$P(D) = 7\% = 0.07$
$P(\overline{D}) = 1 - P(D) = 1 - 0.07 = 0.93$
Trata-se de uma distribuição binomial $B(500; 0.07)$

Pretende-se $P(X = 10)$

$P(X = 10) =^{500} C_{10} \times 0.07^{10} \times 0.93^{490} \approx 2.5 \times 10^{-7}$

Resposta:(D)

1.2. PMC2015

Primeiro processo

$$\lim \sqrt[n]{11^n + 12^n + 13^n} = \lim \sqrt[n]{13^n\left(\frac{11^n}{13^n} + \frac{12^n}{13^n} + 1\right)} = \lim \sqrt[n]{13^n} \times \lim \sqrt[n]{\left(\frac{11}{13}\right)^n + \left(\frac{12}{13}\right)^n + 1} =$$
$$= \lim(13) \times \sqrt[n]{\lim\left(\frac{11}{13}\right)^n + \lim\left(\frac{12}{13}\right)^n + \lim(1)} = 13 \times \sqrt[n]{0 + 0 + 1} = 13$$

Segundo processo
Recorrendo ao Teorema das Sucessões Enquadradas

$\sqrt[n]{13^n} \leq \sqrt[n]{11^n + 12^n + 13^n} \leq \sqrt[n]{13^n + 13^n + 13^n}, \forall n \in \mathbb{N}$
Ora,
$\lim\left(\sqrt[n]{13^n}\right) = \lim(13) = 13$

$$\lim\left(\sqrt[n]{13^n + 13^n + 13^n}\right) = \lim\left(\sqrt[n]{3 \times 13^n}\right) = \lim\left(\sqrt[n]{13^n}\right) \times \lim\left(\sqrt[n]{3}\right) =$$
$$= \lim(13) \times \lim\left(3^{\frac{1}{n}}\right) = 13 \times 3^{\lim \frac{1}{n}} = 13 \times 13^0 = 13 \times 1 = 13$$

Então, pelo Teorema das Sucessões Enquadradas, tem-se que $\lim \sqrt[n]{11^n + 12^n + 13^n} = 13$
Resposta:(C)

2. Como se pretende a probabilidade de saírem dois e só dois cartões com a cor azul, então podem ocorrer os seguintes casos:

   - Cartão azul + cartão azul + cartão vermelho
   - Cartão azul + cartão vermelho + cartão azul
   - Cartão vermelho + cartão azul + cartão azul

   Assim, a probabilidade pedida é igual a
   $P = \frac{6\times 5\times 4}{10\times 9\times 8} + \frac{6\times 4\times 5}{10\times 9\times 8} + \frac{4\times 6\times 5}{10\times 9\times 8} = 3\times \frac{6\times 5\times 4}{10\times 9\times 8} = \frac{360}{720} = \frac{1}{2}$
   Resposta:(D)

3. $P(A\cap\overline{B}) = 0.1 \Leftrightarrow P(A)-P(A\cap B) = 0.1 \Leftrightarrow 0.2-P(A\cap B) = 0.1 \Leftrightarrow\Leftrightarrow -P(A\cap B) = 0.1-0.2 \Leftrightarrow$
   $\Leftrightarrow P(A\cap B) = 0.1$

   $P(A\cup B) = p \Leftrightarrow P(A)+P(B)-P(A\cap B) = p \Leftrightarrow 0.2+P(B)-0.1 = p \Leftrightarrow P(B) = p-0.1$
   Assim,

   $P(B\mid\overline{A}) = \frac{3}{8} \Leftrightarrow \frac{P(\overline{A}\cap B)}{P(\overline{A})} = \frac{3}{8} \Leftrightarrow \frac{P(B)-P(B\cap A)}{0.8} = \frac{3}{8} \Leftrightarrow \frac{p-0.1-0.1}{0.8} = \frac{3}{8} \Leftrightarrow$
   $\Leftrightarrow \frac{p-0.2}{0.8} = \frac{3}{8} \Leftrightarrow p-0.2 = \frac{3}{8}\times 0.8 \Leftrightarrow p-0.2 = 0.3 \Leftrightarrow p = 0.5$

4. Na caixa estão dezassete bolas, e como se retiram de uma só vez duas bolas, então o número de casos possíveis é igual a ${}^{17}C_2$
   Quanto ao número de casos favoráveis: Pretende-se que o produto dos números das duas bolas seja par, então podem ocorrer os seguintes casos:

   - duas bolas com número par
     O número de maneiras distintas de tal ocorrer é dado por ${}^{11}C_2$
   - um bola com número par + uma bola com número ímpar
     O número de maneiras distintas de tal ocorrer é dado por ${}^{11}C_1 \times^{6} C_1$

   Segundo a lei de Laplace, a probabilidade de um acontecimento é dado pelo quociente entre o número de casos favoráveis a esse acontecimento e o número de casos possíveis, quando estes são todos equiprováveis
   Assim, a probabilidade pedida é dada por $P = \frac{{}^{11}C_2 +^{11} C_1 \times^{6} C_1}{{}^{17}C_2}$

5. $A(2\cos(\alpha); 2\sin(\alpha))$, com $\cos(\alpha) > 0$ e $\sin(\alpha) > 0$

   Assim,

   $\overline{OB} = 2\cos(\alpha)$
   $\overline{BC} = 2\cos(\alpha)$
   $\overline{OA} = \overline{AC} = 2$

Portanto, o perímetro do triângulo $[OAC]$, é dada, em função de α, por
$f(\alpha) = \overline{OA} + \overline{AC} + \overline{OC} = 2 + 2 + 4\cos(\alpha) = 4 + 4\cos(\alpha)$, com $\alpha \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[$

Resposta:(A)

6. Determinação do ponto A

$f(x) = 0 \Leftrightarrow -3^x + 9 = 0 \Leftrightarrow 3^x = 9 \Leftrightarrow 3^x = 3^2 \Leftrightarrow x = 2$

Logo, $A(2;0)$

Determinação do ponto B

$g(x) = 0 \Leftrightarrow -3^{-x-1} + 9 = 0 \Leftrightarrow 3^{-x-1} = 9 \Leftrightarrow 3^{-x+1} = 3^2 \Leftrightarrow -x-1 = 2 \Leftrightarrow x = -3$

Logo, $B(-3;0)$

Determinação do ponto C

$f(x) = g(x) \Leftrightarrow -3^x + 9 = -3^{-x-1} + 9 \Leftrightarrow 3^x + 9 = 3^{-x-1} \Leftrightarrow x = -x-1 \Leftrightarrow -2x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}$
$f\left(-\frac{1}{2}\right) = -3^{-\frac{1}{2}} + 9 = -\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{2}} + 9 = -\frac{1}{\sqrt{3}} + 9 = -\frac{\sqrt{3}}{3} + 9 = \frac{27-\sqrt{3}}{3}$
Logo, $C\left(-\frac{1}{2}; \frac{27-\sqrt{3}}{3}\right)$

Assim,
Medida da base do triângulo: $\overline{AB} = |2-(-3)| = 5$
Medida da altura do triângulo: $|ordenadadeC| = \frac{27-\sqrt{3}}{3}$

Portanto a área do triângulo é igual a

$$A_{[ABC]} = \frac{\overline{AB} \times |ordenadadeC|}{2} = \frac{5 \times \frac{27-\sqrt{3}}{3}}{2} = \frac{135-5\sqrt{3}}{6} \ u.a.$$

7. **7.1.** A reta r é da forma $y = mx + b, m, b \in \mathbb{R}$

   Ora,

   $$\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{e^{\frac{x}{2}} - \frac{x}{2e}}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{e^{\frac{x}{2}}}{x} - \lim_{x\to-\infty} \frac{\frac{x}{2e}}{x} = \frac{e^{-\infty}}{-\infty} - \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{2e} = 0 - \frac{1}{2e} = -\frac{1}{2e}$$
   Logo, $m = -\frac{1}{2e}$

   $$\lim_{x\to-\infty} \left[f(x) - \left(-\frac{1}{2e}x\right)\right] = \lim_{x\to-\infty} \left(e^{\frac{x}{2}} - \frac{x}{2e} + \frac{x}{2e}\right) = \lim_{x\to-\infty} \left(e^{\frac{x}{2}}\right) = e^{-\infty} = 0$$
   Logo, $b = 0$

   Portanto, a equação reduzida da reta r é $y = -\frac{1}{2e}x$

Nota: Em alternativa poder-se-ia verificar que:
$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}\left(e^{\frac{x}{2}} - \frac{x}{2e}\right) = e^{-\infty} - 0 = 0$

Portanto a reta de equação $y = -\frac{1}{2e}x$ é assíntota ao gráfico de f, quando $x \to -\infty$

7.2. .

O ponto A tem coordenadas $(0; f(0))$, ou seja $A(0;1)$
O ponto B tem coordenadas $(0;2e)$, ou seja $B(0;2e)$
Determinemos as coordenadas do ponto C
Inserir as funções $y_1 = e^{\frac{x}{2}} - \frac{x}{2e}$ e $y_2 = 2e$
Ajustar a janela de visualização: $[-1;6]\times[-1;8]$

Desenhar os gráficos e o triângulo $[ABC]$

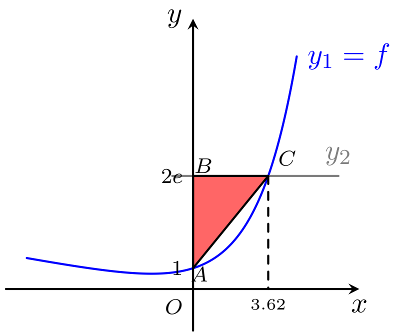

Figura 1

Procurar as coordenadas do ponto de interseção dos dois gráficos que tem abcissa positiva

O ponto C tem coordenadas $(3.62, 2e)$

Calcular a área do triângulo $[ABC]$
$A_{[ABC]} = \frac{\overline{AB}\times\overline{BC}}{2} \approx \frac{(2e-1)\times 3.62}{2}$
Ou seja, $A_{[ABC]} \approx 8.03\ u.a.$

7.3. A função primeira derivada é

$$f'(x) = \left(e^{\frac{x}{2}} - \frac{x}{2e}\right)' = \frac{1}{2}\times e^{\frac{x}{2}} - \frac{1}{2e} = \frac{1}{2}e^{\frac{x}{2}} - \frac{1}{2e}$$

A função segunda derivada é

$$f''(x) = \left(\frac{1}{2}e^{\frac{x}{2}} - \frac{1}{2e}\right)' = \frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times e^{\frac{x}{2}} - 0 = \frac{1}{4}e^{\frac{x}{2}}$$

Assim,

$$\frac{1}{2}f'(a) - f''(a) + \frac{1}{4e} = \frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{2}e^{\frac{a}{2}} - \frac{1}{2e}\right) - \frac{1}{4}e^{\frac{a}{2}} + \frac{1}{4e} = \frac{1}{2}\times\frac{1}{2}e^{\frac{a}{2}} - \frac{1}{2}\times\frac{1}{2e} - \frac{1}{4}e^{\frac{a}{2}} + \frac{1}{4e} =$$
$$= \frac{1}{4}e^{\frac{a}{2}} - \frac{1}{4e} - \frac{1}{4}e^{\frac{a}{2}} + \frac{1}{4e} = 0$$

8. A condição na variável complexa que define o conjunto representado é
$1 < |z| < 2 \wedge 0 < Arg(z) < \frac{\pi}{4}$

Resposta: (A)

CADERNO 2

9. .

9.1. P2001/2002

Seja X a variável aleatória de valor médio 50 e valor de desvio-padrão 4

Ora,

Sabemos que:

$P(46 < X < 50) = P(50 < X < 54)$

e

$P(42 < X < 46) = P(54 < X < 58)$

Então, tem-se que, $P(X > 55) > P(X < 40)$

Logo, $P(B) > P(A)$

Resposta: (B)

9.2. PMC2015

Seja $x = \arcsin\left(\frac{1}{3}\right)$, com $x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$

Assim, pretendemos determinar o valor de $\cos(x)$

De $x = \arcsin\left(\frac{1}{3}\right)$, resulta, $\sin(x) = \frac{1}{3}$

De $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$, vem,

$$\left(\frac{1}{3}\right)^2 + \cos^2(x) = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{9} + \cos^2(x) = 1 \Leftrightarrow \cos^2(x) = 1 - \frac{1}{9} \Leftrightarrow \cos^2(x) = \frac{8}{9} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cos(x) = \pm\sqrt{\frac{8}{9}} \Leftrightarrow \cos(x) = \pm\frac{\sqrt{8}}{3} \Leftrightarrow \cos(x) = \pm\frac{2\sqrt{2}}{3},$$

como $x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, tem-se que $\cos(x) = \frac{2\sqrt{2}}{3}$

Logo, $\cos\left(\arcsin\left(\frac{1}{3}\right)\right) = \frac{2\sqrt{2}}{3}$

Resposta: (D)

10. .

10.1. $z_1 = -2 + 2i^{41} = -2 + 2i^{4\times 10+1} = -2 + 2i$

e

$$z_2 = \frac{\sqrt{2}}{e^{i\left(-\frac{\pi}{4}\right)}} = \frac{\sqrt{2}e^{i(0)}}{e^{i\left(-\frac{\pi}{4}\right)}} = \sqrt{2}e^{i\left(0+\frac{\pi}{4}\right)} = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}} = \sqrt{2} \times \left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) =$$

$$= \sqrt{2} \times \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right) = 1 + i$$

Então,

$$a\overline{z_1} - i(z_2)^2 = \frac{b}{i^3} \Leftrightarrow a \times \overline{-2+2i} - i(1+i)^2 = \frac{b}{-i} \Leftrightarrow a \times (-2-2i) - i(1+2i+i^2) = \frac{bi}{(-i)\times i} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -2a - 2ai - i(1 + 2i - 1) = \frac{bi}{1} \Leftrightarrow -2a - 2ai - 2i^2 = bi \Leftrightarrow -2a - 2ai + 2 = bi \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -2a + 2 - 2ai = bi \Leftrightarrow -2a + 2 = 0 \wedge -2a = b \Leftrightarrow -2a = -2 \wedge -2a = b \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a = 1 \wedge -2a = b \Leftrightarrow a = 1 \wedge b = -2$$

10.2. $z_2 = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$

Então,
$(z_2)^n = \left(\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}\right)^n = \left(\sqrt{2}\right)^n e^{i\frac{n\pi}{4}}$

Para que $(z_2)^n$ seja um número real positivo, deverá ter-se, $\frac{n\pi}{4} = 2k\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$

$\frac{n\pi}{4} = 2k\pi \Leftrightarrow n\pi = 8k\pi \Leftrightarrow n = 8k$, com $k \in \mathbb{Z}$

Como $n \in \mathbb{N}$, então, k tem de pertencer a $\mathbb{Z}^+$

Assim,
para $k = 1$, vem $n = 8$
para $k = 2$, vem $n = 16$
para $k = 3$, vem $n = 24$
$\vdots$

Portanto, o menor valor de $n \in \mathbb{N}$, para o qual $(z_2)^n$ é um número real positivo é 8

11. .

11.1. Pretende-se resolver a equação $f(t) = 40$

$f(t) = 40 \Leftrightarrow 15 + 65e^{-0.02t} = 40 \Leftrightarrow 65e^{-0.02t} = 40 - 15 \Leftrightarrow 65e^{-0.02t} = 25 \Leftrightarrow e^{-0.02t} = \frac{25}{65} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow e^{-0.02t} = \frac{5}{13} \Leftrightarrow -0.02t = \ln\left(\frac{5}{13}\right) \Leftrightarrow t = \frac{\ln\left(\frac{5}{13}\right)}{-0.02} \Leftrightarrow t \approx 47.8$

O Rodrigo vai ter de esperar, aproximadamente, 47.8 minutos, para ir para a cama

11.2. Determinemos $\lim_{t\to+\infty} f(t)$

$\lim_{t\to+\infty} f(t) = \lim_{t\to+\infty} \left(15 + 65e^{-0.02t}\right) = 15 + 65e^{-\infty} = 15 + \frac{65}{e^{+\infty}} = 15 + \frac{65}{+\infty} = 15 + 0 = 15$

A temperatura ambiente do quarto é de $15°C$

12. Um vetor normal do plano α de equação $2k^2x + 2y - 2z - 1 = 0$ é $\overrightarrow{\alpha} = (2k^2; 2; -2)$ e um vetor normal do plano β de equação $2x + 4z - 3 = 0$ é $\overrightarrow{\beta} = (2; 0; 4)$

Os planos α e β são perpendiculares, se, e só se, $\overrightarrow{\alpha} \cdot \overrightarrow{\beta} = 0$

Assim,

$\overrightarrow{\alpha} \cdot \overrightarrow{\beta} = 0 \Leftrightarrow (2k^2; 2; -2) \cdot (2; 0; 4) = 0 \Leftrightarrow 2k^2 \times 2 + 2 \times 0 - 2 \times 4 = 0 \Leftrightarrow 4k^2 - 8 = 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 4k^2 = 8 \Leftrightarrow k^2 = 2 \Leftrightarrow k = \pm\sqrt{2} \Leftrightarrow k = -\sqrt{2} \vee k = \sqrt{2}$

Resposta: (A)

13. $(\sqrt{x}+\sqrt{y})^{10}=\sum\limits_{k=0}^{10}\left[{}^{10}C_k(\sqrt{x})^{10-k}(\sqrt{y})^k\right]=\sum\limits_{k=0}^{10}\left[{}^{10}C_k\left(x^{\frac{1}{2}}\right)^{10-k}\left(y^{\frac{1}{2}}\right)^k\right]=\sum\limits_{k=0}^{10}\left[{}^{10}C_kx^{5-\frac{k}{2}}y^{\frac{k}{2}}\right]$

Como há um termo da forma ax^3y^2, então, deverá ter-se $5-\dfrac{k}{2}=3\wedge\dfrac{k}{2}=2$

$5-\dfrac{k}{2}=3\wedge\dfrac{k}{2}=2\Leftrightarrow 10-k=6\wedge k=4\Leftrightarrow 6=6\wedge k=4$

Logo, $k=4\in\mathbb{N}$

Portanto, o coeficiente deste termo é $a={}^{10}C_4$

Resposta: (B)

14. .

14.1. O domínio da função f é $D_f=]-1;+\infty[$

Determinemos a função derivada de f

$f'(x)=(\ln(x+1)+x)'=\dfrac{(x+1)'}{x+1}+1=\dfrac{1}{x+1}+1=\dfrac{x+2}{x+1}$, com $x\in]-1;+\infty[$

Zeros de f'

$f'(x)=0\Leftrightarrow\dfrac{x+2}{x+1}=0\Leftrightarrow x+2=0\wedge x+1\neq 0\Leftrightarrow x=-2\wedge x\neq -1$
como $x\in]-1;+\infty[$, tem-se que f' não tem zeros

Sinal de f'

$f'(x)=\dfrac{x+2}{x+1}>0,\forall x\in]-1;+\infty[$

logo, a função f é estritamente crescente em todo o seu domínio

14.2. $m_r=f'(e-1)=\dfrac{e-1+2}{e-1+1}=\dfrac{e+1}{e}\twoheadrightarrow$ declive da reta r

Determinemos as coordenadas do ponto I

$f(e-1)=\ln(e-1+1)+e-1=\ln(e)+e-1=1+e-1=e$

Logo, $I(e-1;e)$

A equação da reta tangente r é da forma $y=\dfrac{e+1}{e}x+b, b\in\mathbb{R}$

Determinemos o valor de b tendo em conta que a reta passa no ponto I

Então,

$e=\dfrac{e+1}{e}\times(e-1)+b\Leftrightarrow e=\dfrac{(e+1)(e-1)}{e}+b\Leftrightarrow e=\dfrac{e^2-1}{e}+b\Leftrightarrow b=e-\dfrac{e^2-1}{e}\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow b=\dfrac{e^2-e^2+1}{e}\Leftrightarrow b=\dfrac{1}{e}$

Concluindo, tem-se que a equação da reta tangente r é $y=\frac{e+1}{e}x+\frac{1}{e}$

Resposta: (C)

14.3. $f(x-1)=\ln(x-1+1)+x-1=\ln(x)+x-1$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x+2}{2}\times\frac{1}{(f(x-1)-x+1)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x+2}{2}\times\frac{1}{\ln(x)+x-1-x+1}=$$
$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x+2}{2}\times\frac{1}{\ln(x)}=\frac{1}{2}\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x+2}{x}\times\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{\ln(x)}=$$
$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{e^x}{x}+\frac{2}{x}\right)\times\frac{1}{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln(x)}{x}}=\frac{1}{2}\left(\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x}+\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{x}\right)\times\frac{1}{0^+}=$$
$$=\frac{1}{2}(+\infty+0)\times(+\infty)=+\infty$$

15. $\lim(a_n)=\frac{1}{e^{k+1}}\Leftrightarrow\lim\left(\frac{2n+3}{2n-2}\right)^n=\frac{1}{e^{k+1}}\Leftrightarrow\lim\left(\frac{2n\left(1+\frac{3}{2n}\right)}{2n\left(1-\frac{2}{2n}\right)}\right)^n=\frac{1}{e^{k+1}}\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow\frac{\lim\left(1+\frac{3}{2n}\right)^n}{\lim\left(1-\frac{1}{n}\right)^n}=\frac{1}{e^{k+1}}\Leftrightarrow\frac{\lim\left(1+\frac{\frac{3}{2}}{n}\right)^n}{\lim\left(1+\frac{-1}{n}\right)^n}=\frac{1}{e^{k+1}}\Leftrightarrow\frac{e^{\frac{3}{2}}}{e^{-1}}=\frac{1}{e^{k+1}}\Leftrightarrow e^{\frac{3}{2}+1}=e^{-k-1}\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow e^{\frac{5}{2}}=e^{-k-1}\Leftrightarrow -k-1=\frac{5}{2}\Leftrightarrow k=-1-\frac{5}{2}\Leftrightarrow k=-\frac{7}{2}$$

16. $\frac{\pi}{2}\in D_h$ e é ponto aderente de D_h

A função h é contínua em $x=\frac{\pi}{2}$, se existir $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}h(x)$, ou seja, se $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-}h(x)=h\left(\frac{\pi}{2}\right)$ e $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^+}h(x)=h\left(\frac{\pi}{2}\right)$

Ora,

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}h(x)=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\frac{1-e^{x-\frac{\pi}{2}}}{(\pi-2x)\cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right)}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\frac{e^{x-\frac{\pi}{2}}-1}{2\left(x-\frac{\pi}{2}\right)}\times\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\frac{1}{\cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right)}=$$
$$=\frac{1}{2}\times\lim_{x-\frac{\pi}{2}\to0^-}\frac{e^{x-\frac{\pi}{2}}-1}{x-\frac{\pi}{2}}\times\frac{1}{1}=\frac{1}{2}\times1\times1=\frac{1}{2}$$

Utilizou-se o limite notável $\lim\limits_{x\to0}\frac{e^x-1}{x}=1$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^+}h(x)=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^+}\left[\ln\left(e^{\cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right)}+1-e\right)-\frac{2k}{3}\right]=\ln(e+1-e)-\frac{2k}{3}=\ln(1)-\frac{2k}{3}=$$
$$=0-\frac{2k}{3}=-\frac{2k}{3}$$

$h\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{1}{2}$

Para que a função h seja contínua em $x=\frac{\pi}{2}$ deverá ter-se

$-\frac{2k}{3}=\frac{1}{2}\Leftrightarrow 2k=-\frac{3}{2}\Leftrightarrow k=-\frac{3}{4}$