Escola Secundária de Francisco Franco

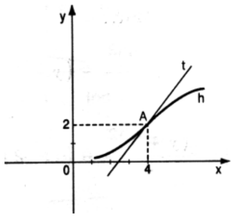
Matemática A (Aprendizagens Essenciais) – 12.º ano

Exercícios saídos em testes intermédios e em exames nacionais (desde 1996)

Tema III: FUNÇÕES REAIS DE VARIÁVEL REAL

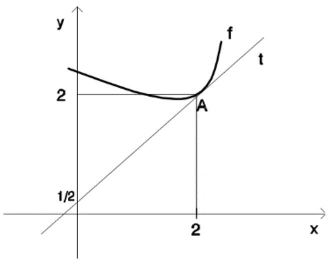
Parte 2 – Derivadas, Bolzano

1. A recta t é tangente ao gráfico da função polinomial h no ponto A de abcissa 4. A 2.ª derivada de h, no ponto 4:
(A) É 2 (B) É 1/2
(C) Não existe (D) É 0.



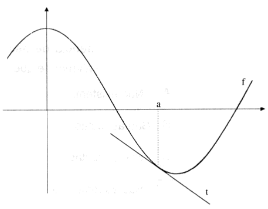
Exame Nacional 1996, 1.ª chamada

2. A recta t é tangente ao gráfico da função f no ponto A de abcissa 2. A derivada de f no ponto 2 é:
(A) 1 (B) 2
(C) ½ (D) 3/4



Exame Nacional 1996, 2.ª chamada

3. A recta t é tangente ao gráfico de f no ponto (a,f(a)). Sabendo que f admite 1.ª e 2.ª derivadas no ponto a, então podemos concluir que:
(A) f '(a) . f "(a)>0 (B) f(a) . f "(a)>0
(C) f '(a) . f "(a)<0 (D) f(a) . f '(a)<0



Exame Nacional 1996, 2.ª fase

4. Uma nódoa circular de tinta é detectada sobre um tecido. O comprimento, em centímetros, do raio dessa nódoa, t segundos após ter sido detectada, é dado por $r(t)=\frac{1+4t}{2+t}$ (t≥0).

a) Calcule r(0) e $\lim_{t\to+\infty} r(t)$ e diga qual é o significado físico desses valores.

b) Esboce o gráfico de f, tendo já em conta que, no domínio indicado, a função r tem 1.ª derivada positiva e 2.ª derivada negativa.

c) Diga qual é o significado do limite $\lim_{t\to0^+}\frac{r(t)-r(0)}{t}$ e determine-o.

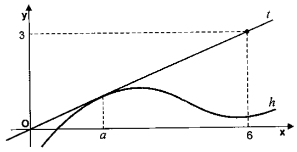
d) Calcule, com aproximação à décima de segundo, o instante t para o qual a área da nódoa é igual a 30 cm^2. (Nota: sempre que, nos cálculos intermédios, proceder a arredondamentos, conserve no mínimo 2 casas decimais).

Prova modelo 1997

5. Seja g a função definida em R por g(x)=x^5-x+1. O Teorema de Bolzano permite-nos afirmar que a equação g(x)=8 tem pelo menos uma solução no intervalo
(A)]-1,0[(B)]0,1[(C)]1,2[(D)]2,3[

Exame Nacional 1997, 1.ª chamada

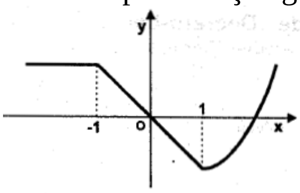
6. Na figura junta está a representação gráfica de uma função h e de uma recta t, tangente ao gráfico de h no ponto de abcissa a.



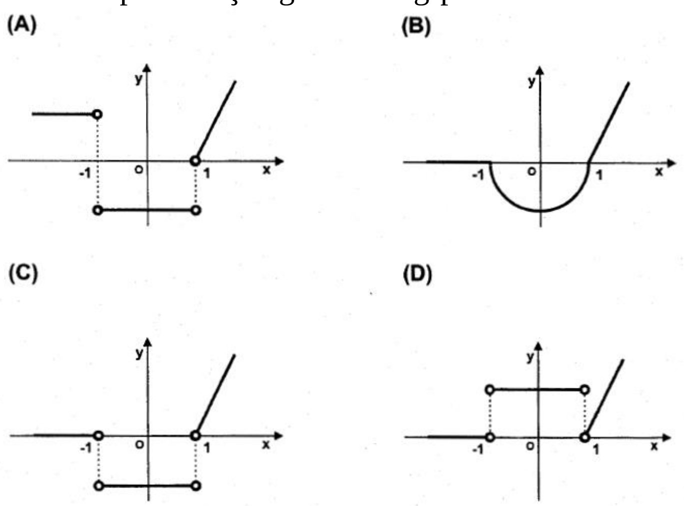
A recta t passa pela origem do referencial e pelo ponto de coordenadas (6,3). O valor de h'(a) é
(A) -1/2 (B) 1/6 (C) 1/3 (D) 1/2

Exame Nacional 1997, 1.ª chamada

7. Se a representação gráfica de uma função g é

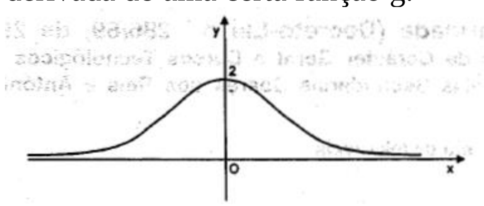


então a representação gráfica de g´pode ser

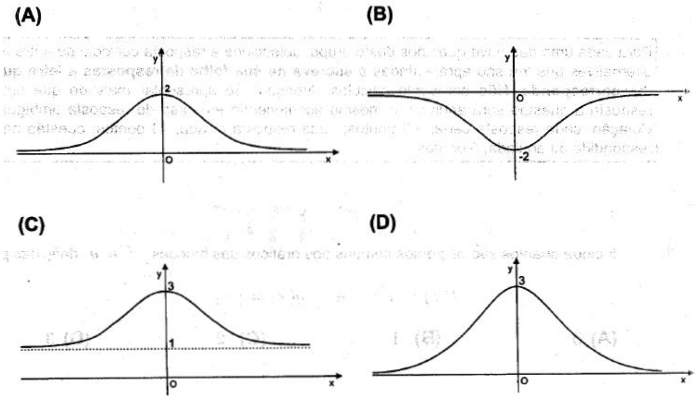


Exame Nacional 1997, 2.ª chamada

8. Na figura está uma representação gráfica de g', derivada de uma certa função g.

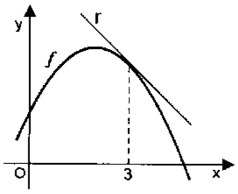


A função h é definida por h(x)=g(x)+1. Nestas condições, uma representação gráfica de h', derivada de h, pode ser



Exame Nacional 1997, 2.ª fase

9. Na figura estão representadas: parte do gráfico de uma função diferenciável em ℝ; uma recta r tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa 3. O valor de f ’(3), derivada da função f no ponto 3, pode ser igual a



(A) -1 (B) 0 (C) 1/f(3) (D) 1

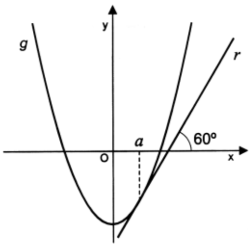
Exame Nacional 1998-1.ª chamada

10. Um projéctil é lançado verticalmente de baixo para cima. Admita que a sua altitude h (em metros), t segundos após ter sido lançado, é dada pela expressão $h(t)=100t-5t^2$. Qual é a velocidade (em metros por segundo) do projéctil, dois segundos após o lançamento?

(A) 80 (B) 130 (C) 170 (D) 230

Exame Nacional 1998, 2.ª fase

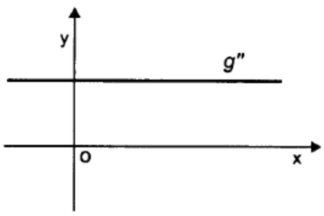
11. Na figura estão representadas: parte do gráfico da função g, de domínio R, definida por $g(x)=\sqrt{3}\,x^2-1$; uma recta r tangente ao gráfico de g, no ponto de abcissa *a*. A inclinação da recta r é 60°. Indique o valor de *a*.



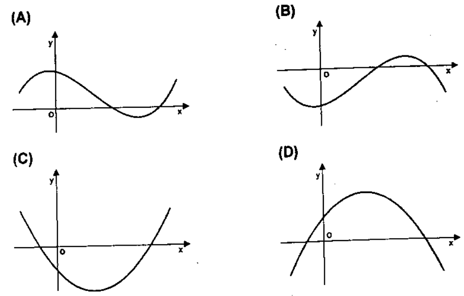
(A) $\sqrt{3}/4$ (B) $\sqrt{3}/2$ (C) 1/3 (D) 1/2

Exame Nacional 1999, 1.ª chamada

12. Na figura a seguir está representado o gráfico de g’’, 2.ª derivada de uma certa função g.

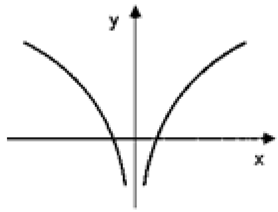


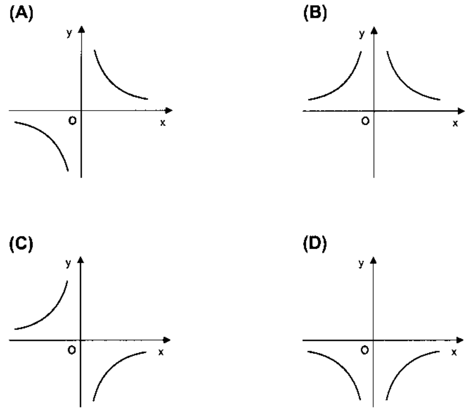
Qual dos gráficos seguintes pode ser o da função g?



Prova modelo 2000

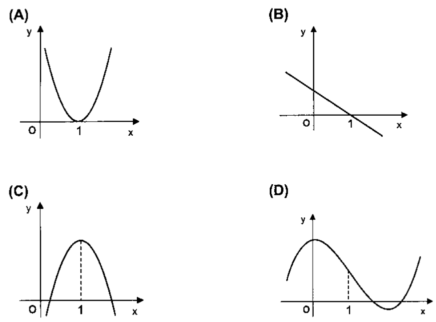
13. Na figura está parte da representação gráfica da função g, de domínio R\{0}. Qual das figuras seguintes poderá ser parte da representação gráfica da função g', derivada de g?





Exame Nacional 2000, 1.ª chamada

14. Seja g uma função cujo gráfico tem um ponto de inflexão de abcissa 1. Qual dos seguintes gráficos poderá ser o da 2.ª derivada de g?



Exame Nacional 2000, 2.ª chamada

15. A recta de equação y=x é tangente ao gráfico de uma certa função f, no ponto de abcissa 0. Qual das seguintes expressões pode definir a função f?

(A) x^2+x (B) x^2+2x (C) x^2+2x+1 (D) x^2+x+1

Exame Nacional 2001, 1.ª chamada

16. De uma função f, contínua no intervalo [1,3], sabe-se que f(1)=7 e f(3)=4. Qual das afirmações seguintes é necessariamente verdadeira?

(A) A função f tem pelo menos um zero no intervalo [1,3]

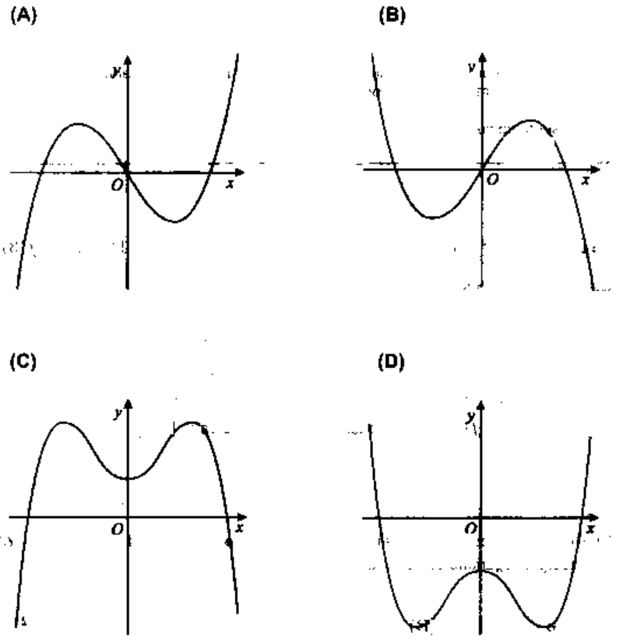
(B) A função f não tem zeros no intervalo [1,3]

(C) A equação f(x)=5 tem pelo menos uma solução no intervalo [1,3]

(D) A equação f(x)=5 não tem solução no intervalo [1,3]

Exame Nacional 2001, 1.ª chamada

17. Seja g uma função, de domínio $\mathbb{R}$, tal que a sua 2.ª derivada é definida por $g''(x)=1-x^2$. Em qual das figuras seguintes poderá estar parte da representação gráfica da função g?



Exame Nacional 2001, 1.ª chamada

18. Seja f uma função tal que a sua derivada, no ponto 3, é igual a 4. Indique o valor de $\lim_{x\to 3}\frac{f(x)-f(3)}{x^2-9}$

(A) 2/3 (B) 3/2 (C) 4 (D) 0

Exame Nacional 2001, 2.ª fase

19. De uma função g, contínua em $\mathbb{R}$, sabe-se que: 1 é zero de g; g(3)>0. prove que a equação $g(x)=\frac{g(3)}{2}$ tem, pelo menos, 1 solução no intervalo]1,3[

Exame Nacional 2001, 2.ª fase

20. Seja f uma função de domínio [0,+∞[. Na figura 1 está parte da representação gráfica da função f ’ e, na figura 2, parte da representação gráfica da função f ´´, respectivamente primeira e segunda derivadas de f .

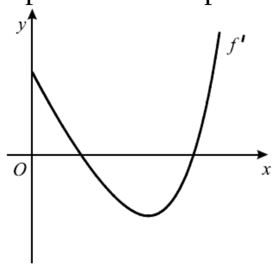


Figura 1

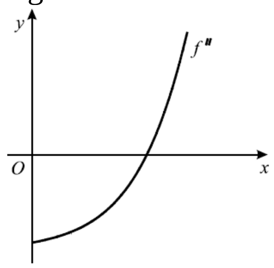
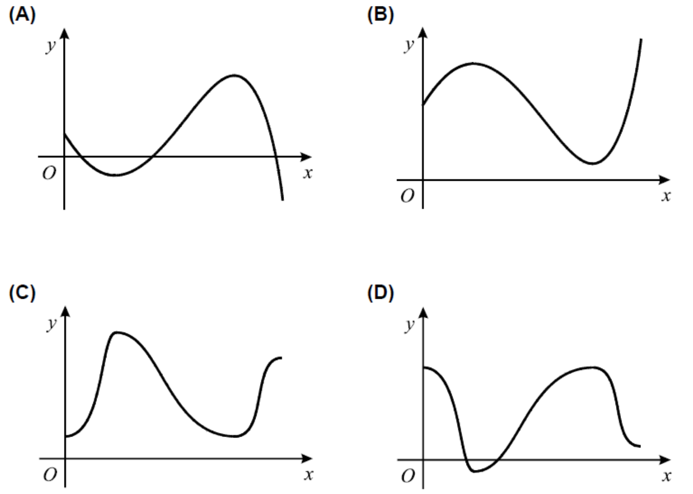


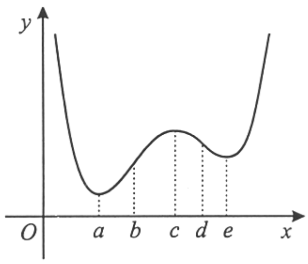
Figura 2

Em qual das figuras seguintes pode estar parte da representação gráfica da função f ?



Exame Nacional 2001, militares

21. Na figura junta está representada parte do gráfico de uma função f, de domínio $\mathbb{R}$. Numa das alternativas seguintes estão os quadros de sinais de f´ e de f´´. Em qual delas?



(A)

x		a		c		e	
$f'(x)$	+	0	−	0	+	0	−

x		b		d	
$f''(x)$	+	0	−	0	+

(B)

x		a		c		e	
$f'(x)$	+	0	−	0	+	0	−

x		b		d	
$f''(x)$	−	0	+	0	−

(C)

x		a		c		e	
$f'(x)$	−	0	+	0	−	0	+

x		b		d	
$f''(x)$	+	0	−	0	+

(D)

x		a		c		e	
$f'(x)$	−	0	+	0	−	0	+

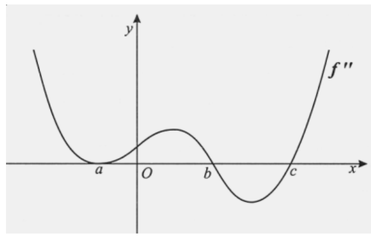
x		b		d	
$f''(x)$	−	0	+	0	−

Exame Nacional 2002, 1.ª chamada

22. Seja f uma função contínua, de domínio [0,5] e contradomínio [3,4]. Seja g a função, de domínio [0,5], definida por g(x)=f(x)-x. Prove que a função g tem, pelo menos, um zero.

Exame Nacional 2002, 2.ª chamada

23. Seja f uma função de domínio R. Na figura está representada parte do gráfico de f´´, 2ª derivada da função



f. Relativamente ao gráfico da <u>função f</u>, qual das afirmações seguintes é verdadeira?
(A) O ponto de abcissa *a* é um ponto de inflexão.
(B) O ponto de abcissa *c* é um ponto de inflexão.
(C) A concavidade está voltada para baixo no intervalo [0,b]
(D) A concavidade está sempre voltada para cima

Exame Nacional 2002, 2.ª fase

24. Uma nova empresa de refrigerantes pretende lançar no mercado embalagens de sumo de fruta, com capacidade de <u>2 litros</u>. Por questões de *marketing*, as embalagens deverão ter a forma de um <u>prisma quadrangular regular</u>.

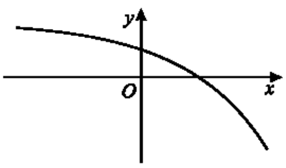
a) Mostre que a área total da embalagem é dada por $A(x) = \frac{2x^3 + 8}{x}$ (x é o comprimento da aresta da base, em dm)
<u>Nota</u>: recorde que 1 litro=1 dm^3
b) Utilizando métodos exclusivamente analíticos, mostre que existe um valor x para o qual a área total da embalagem é mínima e determine-o.

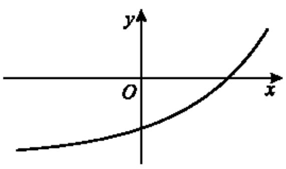
Exame Nacional 2002, 2.ª fase

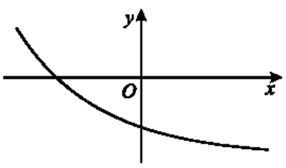
25. Seja f uma função de domínio R, com derivada finita em todos os pontos do domínio, e <u>crescente</u>. Sejam a e b 2 quaisquer n.ºs reais. Considere as rectas r e s, tangentes ao gráfico de f nos pontos de abcissas a e b, respectivamente. Prove que as rectas r e s <u>não</u> podem ser perpendiculares.

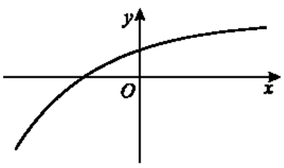
Exame Nacional 2002, 2.ª fase

26. Seja f uma função de domínio ℝ. Sabe-se que a primeira e a segunda derivadas de f são negativas em ℝ. Em qual das figuras seguintes pode estar representada parte do gráfico da função f?

(A)


(B)


(C)


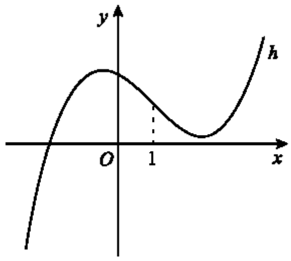
(D)


Exame Nacional 2003, 1.ª chamada

27. Prove que, para qualquer função quadrática g , existe um e um só ponto do gráfico onde a recta tangente é paralela à bissectriz dos quadrantes ímpares.

Exame Nacional 2003, 1.ª chamada

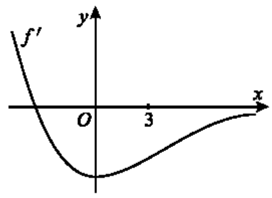
28. Na figura junta está parte da representação gráfica de uma função polinomial h. O ponto de abcissa 1 é o único ponto de inflexão de h. Qual das expressões seguintes pode definir h'', <u>segunda derivada</u> da função h?



(A) $(x-1)^2$ (B) $(1+x)^2$ (C) x-1 (D) 1-x

Exame Nacional 2004, 1.ª fase

29. Seja f uma função de domínio ℝ, com derivada finita em todos os pontos do seu domínio. Na figura junta encontra-se parte do gráfico de f ', função derivada de f. Sabe-se ainda que f(0)=2.



Qual pode ser o valor de f(3)?
(A) 1 (B) 2 (C) 5 (D) 7

Exame Nacional 2004, 2.ª fase

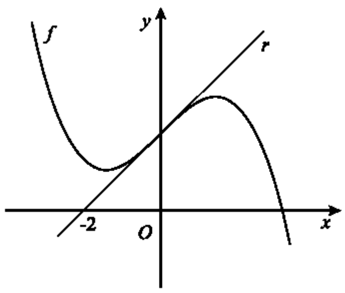
30. Considere, para cada $\alpha \in]0,1[$, a função, de <u>domínio</u> $\mathbb{R}^+$, definida por $f(x)=x^\alpha$. Prove que, qualquer que seja o valor de $\alpha \in]0,1[$, o gráfico da função f tem a concavidade voltada para baixo.

Exame Nacional 2004, 2.ª fase

31. De uma função f, contínua em ℝ, sabe-se que f(3)=8 e f(7)=1. Qual das afirmações seguintes é necessariamente verdadeira?
(A) 1≤f(6)≤8 (B) A função f não tem zeros em [3,7]
(C) f(4)>f(5) (D) 2 pertence ao contradomínio de f

Exame Nacional 2005, 2.ª fase

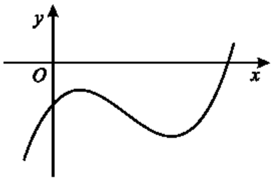
32. Na figura está representada parte do gráfico de uma função polinomial *f*. Tal como a figura sugere, o gráfico de *f* tem a concavidade voltada para cima em]–∞,0] e voltada para baixo em [0,+∞[. A recta *r*, tangente ao gráfico de *f* no ponto de abcissa 0, é paralela à bissectriz dos quadrantes ímpares e intersecta o eixo *Ox* no ponto de abcissa –2. Sabendo que *f'* e *f''* designam, respectivamente, a primeira e a segunda derivadas de *f*, indique o valor de $f(0)+f'(0)+f''(0)$



(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4

Exame Nacional 2006, 1.ª fase

33. Na figura junta está parte do gráfico de uma função h, de domínio $\mathbb{R}$. Sejam h' e h'' a primeira e a segunda derivadas de h, respectivamente. Admita que estas duas funções também têm domínio $\mathbb{R}$. Qual das expressões seguintes designa um número positivo?



(A) $h(0) + h''(0)$ (B) $h(0) - h'(0)$
(C) $h'(0) - h''(0)$ (D) $h'(0) \times h''(0)$

Exame Nacional 2006, 2.ª fase

34. Seja $f : [0,2] \to \mathbb{R}$ uma função contínua tal que $f(0)=f(2)=0$ e $f(1)>0$. Prove que existe pelo menos um número real c no intervalo $]0,1[$ tal que $f(c)=f(c+1)$.
Sugestão: considere a função $g: [0,1] \to \mathbb{R}$, definida por $g(x)=f(x) - f(x+1)$

Exame Nacional 2006, 2.ª fase

35. Na figura 1 está representada parte do gráfico de uma função h, de domínio $\mathbb{R}_0^+$. Em cada uma das figuras abaixo está representada parte do gráfico de uma função de domínio $\mathbb{R}_0^+$. Uma das funções representadas é h', primeira derivada de h, e a outra é h'', segunda derivada de h.

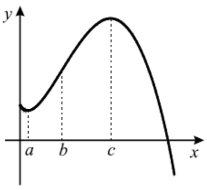


Figura 1

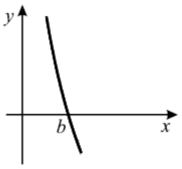


Figura 2

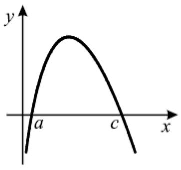


Figura 3

Numa pequena composição, explique em qual das figuras está representado o gráfico da primeira derivada e em qual está representado o gráfico da segunda derivada. Na sua composição, deve referir-se à variação de sinal das funções h' e h'', relacionando-a com características da função h (monotonia e sentido das concavidades do seu gráfico).

Exame Nacional 2007, 2.ª fase

36. Seja f uma função de domínio $\mathbb{R}$, contínua no intervalo $[-2,2]$. Tem-se $f(-2)=1$ e $f(2)=3$. Indique qual das expressões seguintes define uma função g, de domínio $\mathbb{R}$, para a qual o Teorema de Bolzano garante a existência de pelo menos um zero no intervalo $]-2,2[$

(A) $g(x) = x + f(x)$ (B) $g(x) = x - f(x)$
(C) $g(x) = x^2 + f(x)$ (D) $g(x) = x^2 - f(x)$

2.º teste intermédio 2008

37. A figura 2 representa parte do gráfico de uma função f de domínio $\mathbb{R}$. Em qual das figuras seguintes pode estar parte da representação gráfica de f', derivada de f?

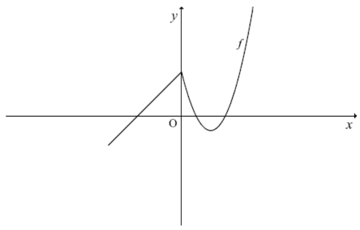
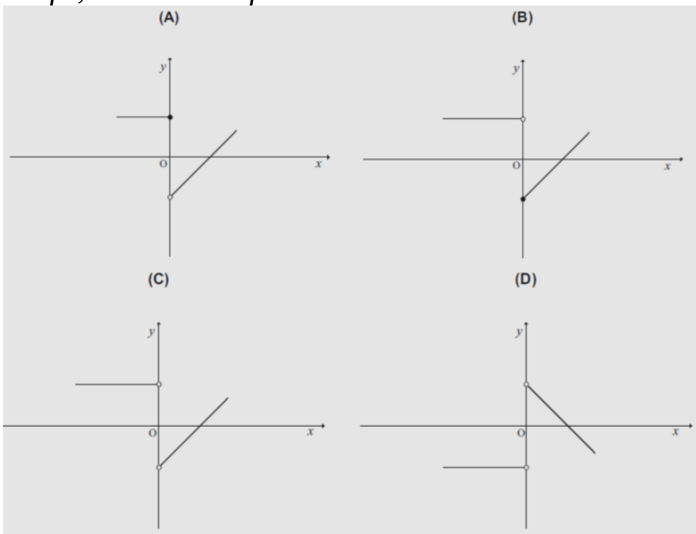


Fig. 2



Exame Nacional 2008, 1.ª fase

38. De uma função f de domínio $[1,2]$ sabe-se que:
- f é contínua em todo o seu domínio
- $\forall x \in [1,2],\ f(x) < 0$
- $f(1) = 3f(2)$

Seja g a função de domínio $[1,2]$ definida por
$g(x) = 2f(x) - f(1)$
Prove que a função g tem pelo menos um zero.

2.º teste intermédio 2009

39. Seja f a função, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $f(x) = x^2 + 1$. Seja g a função cujo gráfico é a recta representada na figura 1. Seja $h = f + g$. Seja h' a função derivada da função h. O gráfico da função h' é uma recta. Sejam m e b respectivamente, o declive e a ordenada na origem desta recta. Qual das afirmações seguintes é verdadeira?

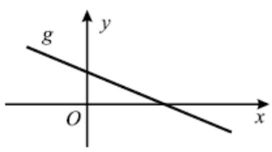


Figura 1

(A) $m>0$ e $b>0$ (B) $m>0$ e $b<0$ (C) $m<0$ e $b>0$ (D) $m<0$ e $b<0$

3.º Teste intermédio 2009

40. Na figura 2, está representada parte do gráfico de uma função f', derivada de f, ambas de domínio $\mathbb{R}$, em que o eixo Ox é uma assimptota do gráfico de f'. Seja a função g, de domínio $\mathbb{R}$, definida por

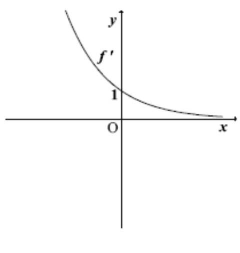
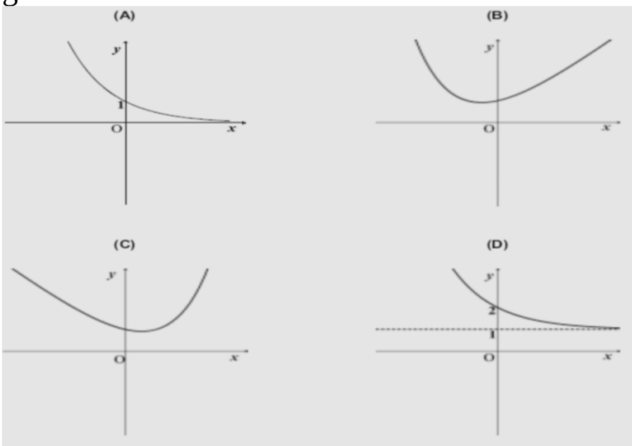


Fig. 2

$g(x) = f(x) + x$. Qual das figuras seguintes pode representar parte do gráfico da função g ′, derivada de g ?



Exame Nacional 2009, 2.ª fase

41. Na figura 1, está parte da representação gráfica de uma função polinomial *f*. O ponto de abcissa 2 é o único ponto de inflexão do gráfico da função *f*. Qual das expressões seguintes pode definir f'', <u>segunda derivada</u> da função *f* ?

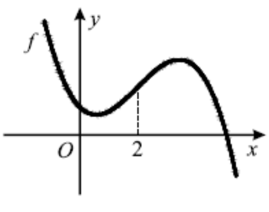


Figura 1

(A) $(x-2)^2$ (B) $(2+x)^2$ (C) $2-x$ (D) $x-2$

2.º teste intermédio 2010

42. Na Figura 1, está representada, num referencial o.n. xOy, parte do gráfico da função f', primeira derivada de *f*. Seja $a \in \mathbb{R}^+$ um ponto do domínio de f, tal que $f'(a) = 0$. Qual das afirmações seguintes é verdadeira?

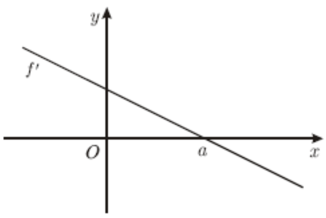


Figura 1

(A) A função *f* tem um mínimo para *x* = *a*
(B) A função *f* tem um ponto de inflexão para *x* = *a*
(C) A função *f* é crescente em]0, *a*[
(D) A função *f* é decrescente em $\mathbb{R}$

Exame Nacional 2010, 2.ª fase

43. Na Figura 1, está representada, num referencial o.n. xOy, parte do gráfico da função derivada, f', de uma função *f*.

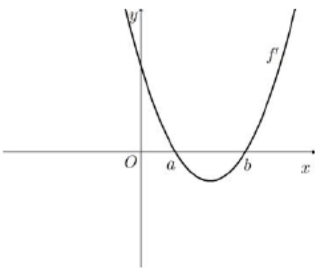
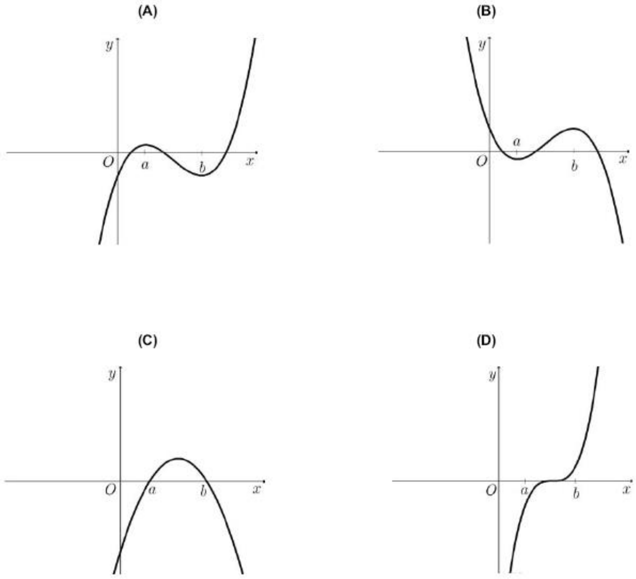


Figura 1

Em qual das figuras seguintes pode estar representada parte do gráfico da função *f* ?



Exame Nacional 2010, época especial

44. Seja *f* uma função, de domínio $\mathbb{R}$, contínua no intervalo [−1,4]. Tem-se *f*(−1)=3 e *f*(4)=9. Em qual das opções seguintes está definida uma função *g*, de domínio $\mathbb{R}$, para a qual o teorema de Bolzano garante a existência de pelo menos um zero no intervalo]−1,4[?

(A) $g(x)= 2x + f(x)$ (B) $g(x)= 2x - f(x)$
(C) $g(x)= x^2 + f(x)$ (D) $g(x)= x^2 - f(x)$

2.º teste intermédio 2011

45. Na Figura 1, está o gráfico de uma função *f* cujo domínio é o intervalo]1,3[. A função *f* tem primeira derivada e segunda derivada finitas em todos os pontos do seu domínio. Seja $x \in]1,3[$. Qual das afirmações seguintes é verdadeira?

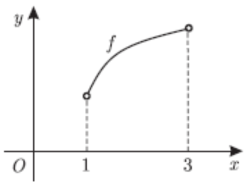


Figura 1

(A) $f'(x) > 0 \wedge f''(x) > 0$ (B) $f'(x) < 0 \wedge f''(x) > 0$
(C) $f'(x) > 0 \wedge f''(x) < 0$ (D) $f'(x) < 0 \wedge f''(x) < 0$

2.º teste intermédio 2011

46. Na Figura 2, está representada, num referencial o. n. xOy , parte do gráfico de uma função polinomial f de grau 3, de domínio $\mathbb{R}$

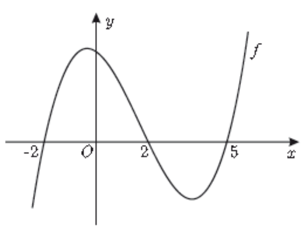


Figura 2

Sabe-se que:
• -2, 2 e 5 são zeros de f
• f′ representa a função derivada de f
Qual das afirmações seguintes é verdadeira?

(A) $f'(0) \times f'(6) = 0$ (B) $f'(-3) \times f'(6) < 0$
(C) $f'(-3) \times f'(0) > 0$ (D) $f'(0) \times f'(6) < 0$

Exame Nacional 2011, 1.ª fase

47. Na Figura 6, está representada, num referencial o. n. xOy , parte do gráfico da função g. Sabe-se que:

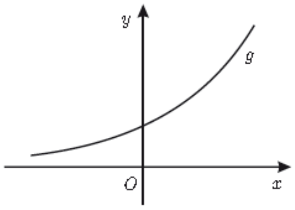
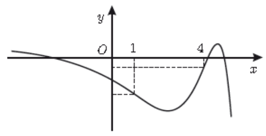


Figura 6

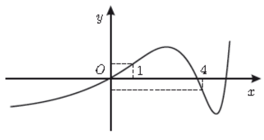
- g é uma função contínua em $\mathbb{R}$
- g não tem zeros
- a segunda derivada, f ´´, de uma certa função f tem domínio $\mathbb{R}$ e é definida por $f''(x) = g(x) \times (x^2 - 5x + 4)$
- f (1) × f (4) > 0

Apenas uma das opções seguintes pode representar a função f

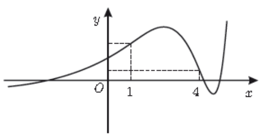
I



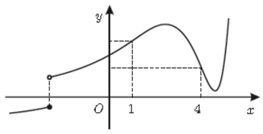
II



III



IV



Elabore uma composição na qual:
- indique a opção que pode representar f
- apresente as razões que o levam a rejeitar as restantes opções

Apresente três razões, uma por cada gráfico rejeitado.

Exame Nacional 2011, 1.ª fase

48. Na Figura 1, está representada, num referencial o. n. xOy , parte do gráfico de uma função polinomial f , de grau 4. Qual das expressões seguintes pode definir a função f ″, segunda derivada de f ?

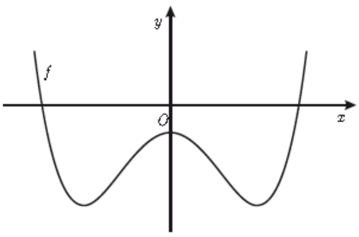


Figura 1

(A) $(x-3)^2$ (B) $(x+3)^2$
(C) $9-x^2$ (D) x^2-9

Exame Nacional 2011, 2.ª fase

49. Sejam f e g duas funções deriváveis em $\mathbb{R}$. Sabe-se que:
- $f(1) = f'(1) = 1$
- $g(x) = (2x-1) \times f(x)$, para todo o valor real de x

Qual é a equação reduzida da recta tangente ao gráfico de g no ponto de abcissa 1 ?

(A) y = 3x – 2 (B) y = 3x + 4
(C) y = 2x – 1 (D) y =–3x + 2

Exame Nacional 2011, época especial 1.ª fase

50. Na Figura 1, está representada, num referencial o. n. xOy , parte do gráfico de uma função h′, primeira derivada de h. Em qual das opções seguintes pode estar representada parte do gráfico da função h ?

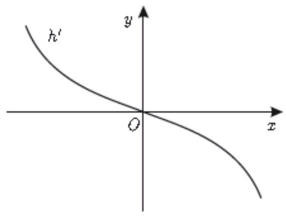
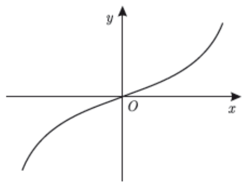
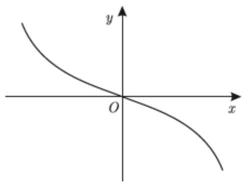


Figura 1

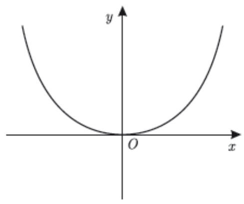
(A)



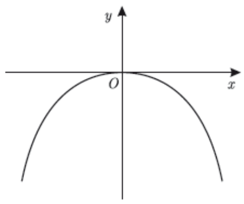
(B)



(C)



(D)



Exame Nacional 2011, época especial 1.ª fase

51. Para um certo número real a, seja a função f , de domínio $\mathbb{R}$, definida por f(x) = ax^2 – 1. Na Figura 1, está representada, num referencial o. n. xOy, parte do gráfico da função f´´, segunda derivada da função f. Qual dos valores seguintes pode ser o valor de a ?

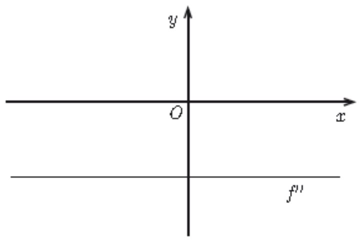


Figura 1

(A) 0 (B) π (C) 3 (D) -3

Exame Nacional 2011, época especial

52. Relativamente a duas funções, f e g, sabe-se que:
- têm domínio [2, 3]
- são funções contínuas
- $f(2) - g(2) > 0$ e $f(3) - g(3) < 0$

Qual das afirmações seguintes é necessariamente verdadeira?

(A) Os gráficos de f e g intersectam-se em pelo menos um ponto.
(B) A função $f - g$ é crescente.
(C) Os gráficos de f e g não se intersectam.
(D) A função $f - g$ é decrescente.

2.º teste intermédio 2012

53. Na Figura 2, está representada, num referencial o.n. xOy, parte do gráfico de uma função f , de domínio $\mathbb{R}$

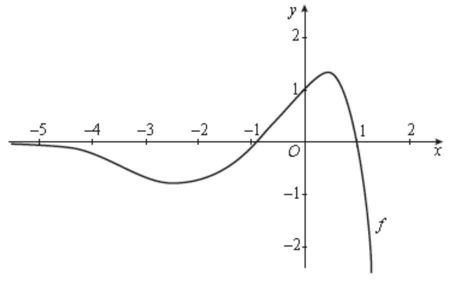


Figura 2

Sejam $f\,'$ e $f\,''$, de domínio $\mathbb{R}$, a primeira derivada e a segunda derivada de f, respetivamente. Qual dos valores seguintes pode ser positivo?

(A) $f\,'(1)$ (B) $f\,'(-3)$ (C) $f\,'(-3)$ (D) $f\,''(1)$

Exame Nacional 2012, 1.ª fase

54. Na Figura 1, está representada, num referencial o. n. xOy, parte do gráfico de $h\,''$, segunda derivada de uma função h, de domínio $\mathbb{R}$.

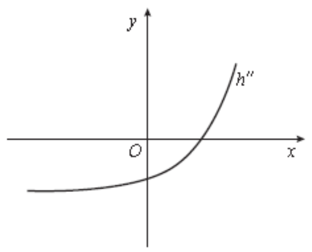
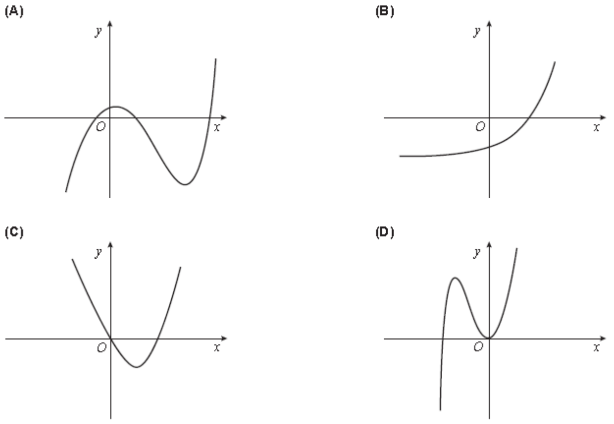


Figura 1

Em qual das opções seguintes pode estar representada parte do gráfico da função h ?

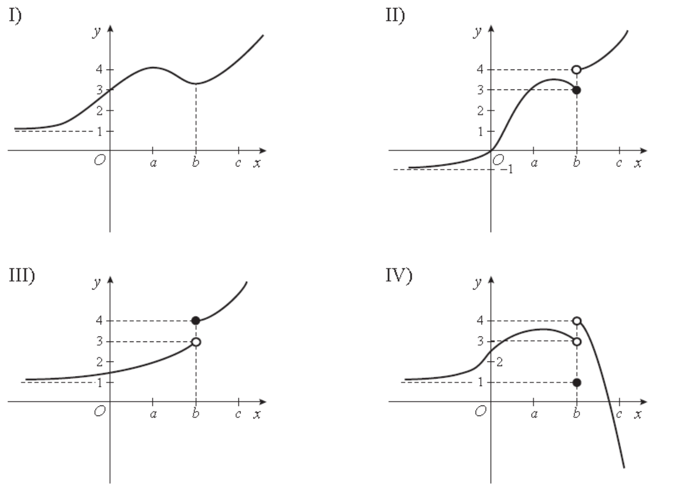


Exame Nacional 2012, época especial

55. Considere, num referencial o. n. xOy, o gráfico de uma função h, de domínio $\mathbb{R}$. Sabe-se que:

- a, b e c são números reais positivos e $a < b < c$
- h tem um mínimo relativo em $]a, c[$
- h é crescente em $]-\infty, 0[$
- $\lim\limits_{x\to -\infty} (h(x) - 1) = 0$
- a segunda derivada, $h\,''$, da função h é tal que $h\,''(x) > 0$ para $x > b$

Apenas uma das opções seguintes pode representar uma parte do gráfico da função h



Elabore uma composição na qual:

- indique a opção que pode representar h
- apresente três razões para rejeitar as restantes opções, uma por cada opção rejeitada.

Exame Nacional 2012, época especial

56. Considere, para um certo número real a positivo, uma função f , contínua, de domínio $[-a, a]$. Sabe-se que $f(-a) = f(a)$ e $f(a) > f(0)$. Mostre que a condição $f(x) = f(x + a)$ tem, pelo menos, uma solução em $]-a, 0[$.

Exame Nacional 2013 (1.ª fase)

57. Sejam f ´ e f ´´, de domínio $\mathbb{R}$, a primeira derivada e a segunda derivada de uma função f , respetivamente. Sabe-se que:

- a é um número real;
- P é o ponto do gráfico de f de abcissa a
- $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = 0$
- $f\,''(a) = -2$

Qual das afirmações seguintes é necessariamente verdadeira?

(A) a é um zero da função f

(B) f (a) é um máximo relativo da função f

(C) f (a) é um mínimo relativo da função f

(D) P é ponto de inflexão do gráfico da função f

Exame Nacional 2013, 2.ª fase

58. Na Figura 2, está representada, num referencial ortogonal xOy, parte do gráfico de uma função polinomial g, de grau 3. Seja f uma função, de domínio $\mathbb{R}$, que verifica a condição $f(x) = g(x - 3)$. Em qual das opções seguintes pode estar representada

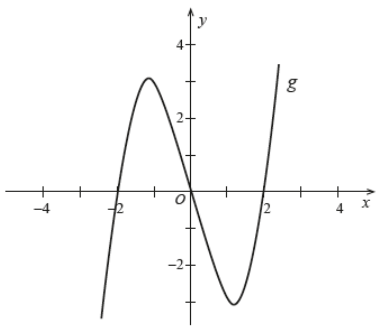
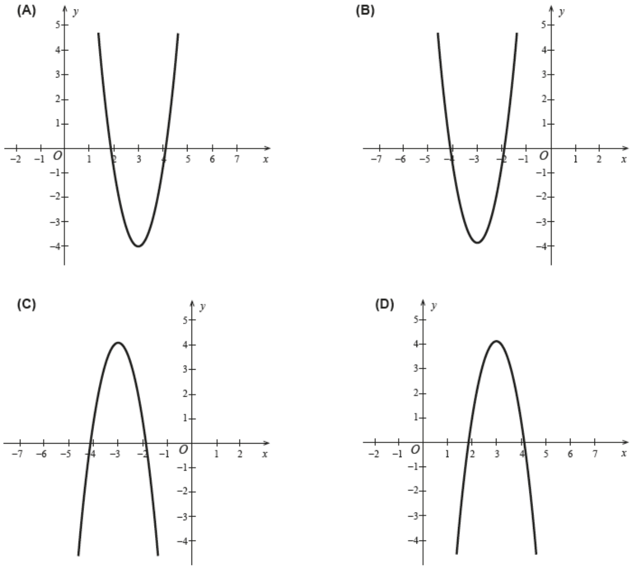


Figura 2

parte do gráfico da função f ´, primeira derivada da função f ?



Exame Nacional 2013, 2.ª fase

59. Seja f uma função cuja derivada, f ´, de domínio ℝ, é dada por $f\,'(x) = (4+x)^2$. Qual das afirmações seguintes é verdadeira?

(A) O gráfico da função f tem a concavidade voltada para cima em ℝ

(B) A função f tem um máximo relativo em x = -4

(C) O gráfico da função f não tem pontos de inflexão.

(D) O gráfico da função f tem um ponto de inflexão de coordenadas (-4, f (-4))

Exame Nacional 2013. época especial

60. Na Figura 2, está representada, num referencial ortogonal xOy, parte do gráfico da função g´´, segunda derivada de uma função g. Em qual das opções seguintes pode estar representada parte do gráfico da função g ?

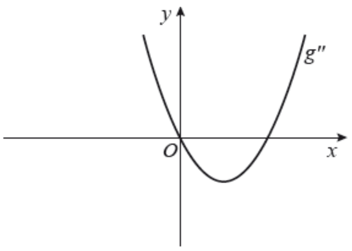
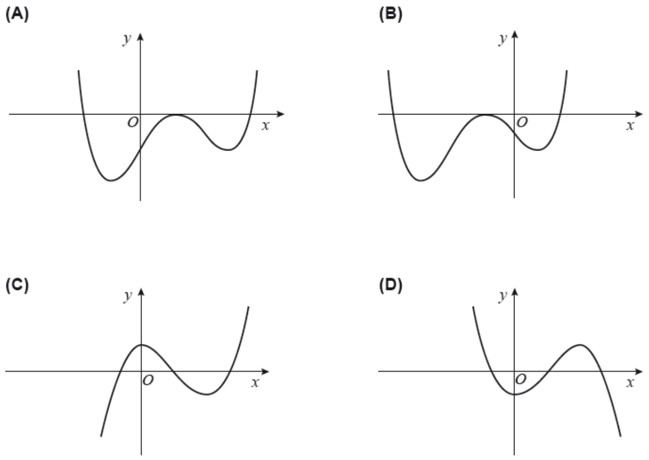
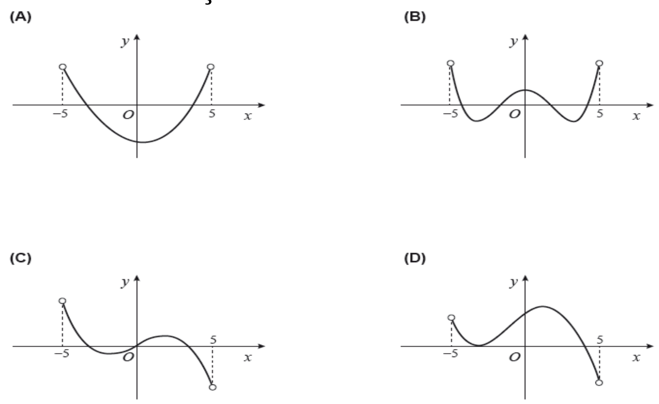


Figura 2



Exame Nacional 2014, 2.ª fase

61. Seja f uma função de domínio]-5, 5[. Sabe-se que o gráfico da função f tem exatamente dois pontos de inflexão. Em qual das opções seguintes pode estar representado o gráfico da função f ´´ , segunda derivada da função f ?



Exame Nacional 2014, época especial

62. Considere uma função f , de domínio ℝ. Sabe-se que:

- a reta de equação x = 0 é assíntota do gráfico da função f
- f (-3)× f (5)< 0
- $\lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ existe e é positivo, para qualquer número real x não nulo;
- $\lim\limits_{x \to -\infty} (f(x) - 2x) = 0$

Considere as afirmações seguintes.

I) O teorema de Bolzano permite garantir, no intervalo [-3,5], a existência de, pelo menos, um zero da função f

II) O gráfico da função f admite uma assíntota horizontal quando x tende para -∞

III) A função f é crescente em]0, +∞[

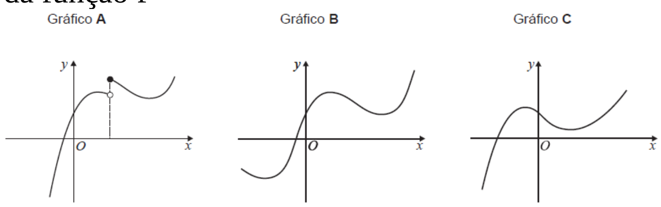
Elabore uma composição, na qual indique, justificando, se cada uma das afirmações é verdadeira ou falsa. Na sua resposta, apresente três razões diferentes, uma para cada afirmação.

Exame Nacional 2014, época especial

63. Seja f :ℝ → ℝ uma função tal que:

- f tem derivada finita em todos os pontos do seu domínio;
- f ‘(0)>0
- f ’’(x)<0, para qualquer x ∈]−∞, 0[

Nenhum dos gráficos a seguir apresentados é o gráfico da função f



Elabore uma composição na qual apresente, para cada um dos gráficos, uma razão pela qual esse gráfico não pode ser o gráfico da função f

Exame Nacional 2015, 2.ª fase

64. Seja f uma função de domínio ℝ. Sabe-se que

f '(2) = 6. Qual é o valor de $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{f(x) - f(2)}{x^2 - 2x}$?

(A) 3 (B) 4 (C) 5 (D) 6

Exame Nacional 2015, época especial

65. Na Figura 1, está representada, num referencial o.n. xOy, parte do gráfico de uma função polinomial f

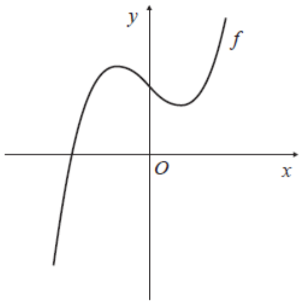
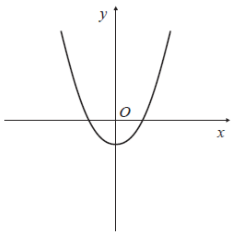


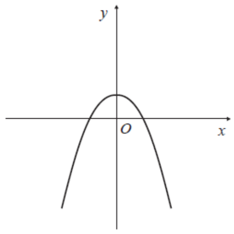
Figura 1

Em qual das opções seguintes pode estar representada parte do gráfico da função f '', segunda derivada da função f ?

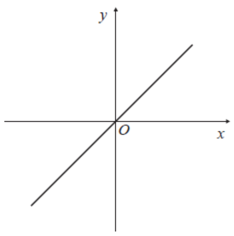
(A)



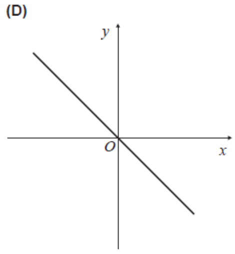
(B)



(C)



(D)



Exame Nacional 2015, época especial

66. Seja g uma função contínua, de domínio ℝ, tal que:

• para todo o número real x, (gog)(x)=x
• para um certo número real a, tem-se g(a)>a+1

Mostre que a equação g(x)=x+1 é possível no intervalo]a,g(a)[

Exame Nacional 2016, 2.ª fase

67. Na Figura 1, está representada, num referencial o.n. xOy, parte do gráfico de uma função polinomial f. Sabe-se que o único ponto de inflexão do gráfico de f tem abcissa 0. Seja f '' a segunda derivada da função f. Qual das afirmações seguintes é verdadeira?

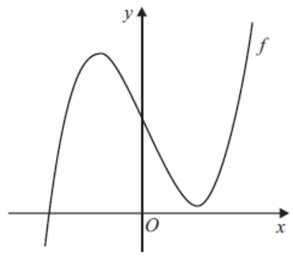


Figura 1

(A) f ''(1) + f ''(2)<0 (B) f ''(−2) + f ''(−1)>0
(C) f ''(−1) × f ''(−2)<0 (D) f ''(1) × f ''(2)>0

Exame Nacional 2017, 1.ª fase

68. Seja f : ℝ⁺→ ℝ⁺ uma função tal que f '(x)<0, para qualquer número real positivo x. Considere, num referencial o.n. xOy,

• um ponto P, de abcissa a, pertencente ao gráfico de f
• a reta r, tangente ao gráfico de f no ponto P
• o ponto Q, ponto de intersecção da reta r com o eixo Ox

Sabe-se que $\overline{OP} = \overline{PQ}$.

Determine o valor de $f'(a) + \dfrac{f(a)}{a}$

Exame Nacional 2017, 1.ª fase

69. De uma função f , de domínio ℝ, com derivada finita em todos os pontos do seu domínio, sabe-se que $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2 - 2x}{f(x) - f(2)} = 4$. Qual é o valor de f '(2) ?

(A) $-\frac{1}{2}$ (B) $-\frac{1}{4}$ (C) $\frac{1}{2}$ (D) $\frac{1}{4}$

Exame Nacional 2017, 2.ª fase

70. Seja f uma função de domínio ℝ. A tabela de variação de sinal da função f '', segunda derivada de f, é a seguinte.

x	$-\infty$	-10		0		10	$+\infty$
f''	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

Seja g a função definida por g(x) = − f(x – 5). Em qual dos intervalos seguintes o gráfico de g tem concavidade voltada para baixo?

(A)]−15, −5[(B)]0,10[(C)]−5, 5[(D)]5,15[

Exame Nacional 2017, 2.ª fase

71. Na Figura 1, está representada, num referencial o.n. xOy, parte do gráfico de uma função f, polinomial do terceiro grau. Tal como a figura sugere, a função f tem um máximo relativo para x = − 2 e tem um mínimo relativo para x = 2. A origem do referencial é ponto de inflexão do gráfico de f. Sejam f ' e f " a primeira e a segunda derivadas da função f , respetivamente. Qual é o conjunto solução da condição

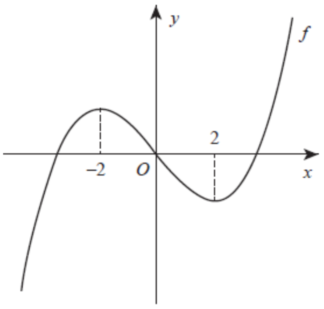


Figura 1

$f'(x) \times f''(x) \geq 0$?

(A) $[-2,0] \cup [2,+\infty[$ **(B)** $]-\infty,-2] \cup [0,2]$

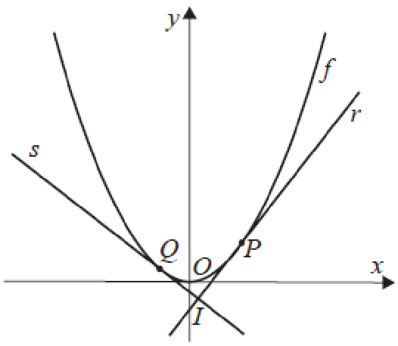
(C) $]-\infty,0] \cup [2,+\infty[$ **(D)** $]-\infty,-2] \cup [0,+\infty[$

Exame Nacional 2017, época especial

72. Seja g uma função real, de domínio [0,1]. Sabe-se que a função g não tem mínimo. Qual das afirmações seguintes é necessariamente verdadeira?
(A) A função g não tem zeros.
(B) A função g não é limitada.
(C) A função g não tem máximo.
(D) A função g não é contínua.

Exame Nacional 2018, época especial

73. Na figura, está representado o gráfico da função f, definida, em ℝ , por f (x) = x^2.



Considere que um ponto P, de abcissa positiva, se desloca sobre o gráfico da função f. Para cada posição do ponto P, seja:
• r a reta tangente ao gráfico de f nesse ponto;
• s a reta perpendicular a r e tangente ao gráfico de f
• Q o ponto de tangência da reta s com o gráfico de f
• I o ponto de intersecção das retas r e s
Mostre que, qualquer que seja a abcissa do ponto P, a ordenada do ponto I é sempre igual a –1/4.
Sugestão: Designe a abcissa do ponto P por *a*.

Exame Nacional 2019, 2.ª fase

74. Sejam f e g as funções, de domínio ℝ, definidas, respetivamente, por f(x)=x^2 e g(x)=cos x

a) Qual é o declive da reta tangente ao gráfico da função fog no ponto de abcissa π/4?
(A) −2 (B) −1 (C) 1 (D) 2
b) Mostre, recorrendo ao teorema de Bolzano-Cauchy, que a equação f(x) = g(x) tem, pelo menos, uma solução no intervalo]0,π/3[.

Exame Nacional 2020, 2.ª fase

75. Na Figura 4, estão representadas, em referencial o.n. xOy, partes dos gráficos das funções f e g, ambas de domínio ℝ, definidas, respetivamente, por

$f(x) = 2x^2$ e

$g(x) = -(x-1)^2$ e a única reta não horizontal que é tangente, simultaneamente, ao gráfico de f e ao gráfico de g. Seja A o ponto de tangência dessa reta com o gráfico de f e seja B o ponto de tangência dessa mesma reta com o gráfico de g. Determine, sem recorrer à calculadora, as abcissas dos pontos A e B.

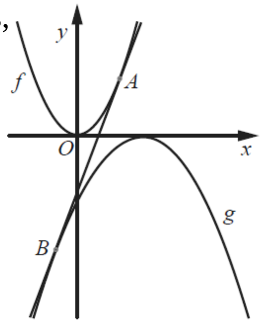


Figura 4

Exame Nacional 2021, época especial

76. Seja k um número real não nulo, e seja f a função definida, em ℝ$^+$, por $f(x) = \frac{k}{x}$. Considere dois pontos do gráfico de f, A e B, sendo A o de menor abcissa. Considere, também, o ponto desse gráfico em que a reta tangente ao gráfico é paralela à reta AB. Mostre que, para qualquer valor de k, as abcissas dos três pontos são termos consecutivos de uma progressão geométrica.

Exame Nacional 2022, 1.ª fase

77. Seja *a* um número real. Considere a função polinomial definida, em ℝ, por $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + ax^2 + a^2x + \sqrt{2}$. Mostre que, para qualquer valor de *a*, a função não tem extremos.

Exame Nacional 2022, 2.ª fase

78. Considere, num referencial o.n. Oxy , o gráfico da função f, de domínio ℝ, definida por $f(x) = x^2$, e uma reta r , não vertical, que passa no ponto de coordenadas (0,1). Sejam A e B os pontos de intersecção da reta r com o gráfico da função f. Mostre que o ângulo convexo AOB é um ângulo reto.

Exame Nacional 2022, 2.ª fase

79. Sejam f e g funções duas vezes diferenciáveis, de domínios ℝ e]0,+∞[, respetivamente, e seja r a reta de equação y=2x-1. Sabe-se que:

• a reta r é tangente ao gráfico de g no ponto de abcissa 1 ;

• $\lim_{x\to+\infty}(f(x)-2x+1)=0$;

• nos respetivos domínios, o gráfico de f tem concavidade voltada para cima e o gráfico de g tem concavidade voltada para baixo.

Considere as proposições seguintes.

I. O gráfico da função f admite uma assíntota horizontal quando x tende para +∞.

II. $\lim_{x\to 1} g(x)=2$.

III. $f''(x)<g''(x)\,,\ \forall\, x\in\,]0,+\infty[$.

Justifique que as proposições I, II e III são falsas. Na sua resposta, apresente, para cada uma das proposições, uma razão que justifique a sua falsidade.

Exame Nacional 2023, 1.ª fase

80. Sejam a e b números reais, não nulos, tais que a reta de equação y=*a*x-*b* é tangente ao gráfico da função f , de domínio ℝ, definida por $f(x)=ax^2+bx$.

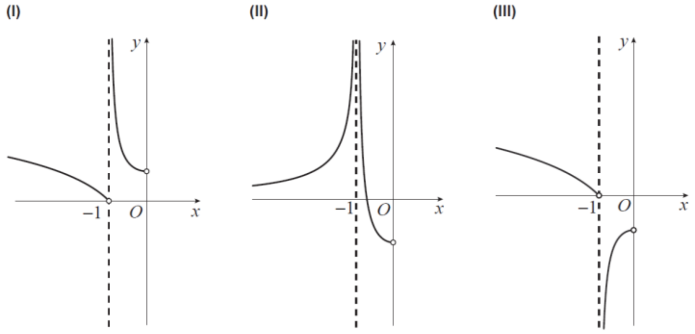
Determine as coordenadas do ponto de tangência.

Exame Nacional 2023, 1.ª fase

81. Seja g uma função par, diferenciável, de domínio $\mathbb{R}\setminus\{-1,1\}$, tal que:

- $\lim_{x\to 1^-} g(x)=+\infty$;
- $g(0)<0$;
- $g'(x)<0\,,\ \forall\, x\in\,]-\infty,-1[$

Em cada um dos referenciais o.n. Oxy seguintes, I, II e III, estão representadas parte do gráfico de uma função e a assíntota a esse gráfico, de equação x=-1.



Justifique que em nenhum dos referenciais, I, II e III, pode estar representada parte do gráfico da função g em $]-\infty,0[\setminus\{-1\}$. Na sua resposta, apresente, para cada um dos referenciais, uma razão que justifique a impossibilidade de nele estar representada parte do gráfico da função g em $]-\infty,0[\setminus\{-1\}$.

Exame Nacional 2023, 2.ª fase

82. Considere as funções f e g , de domínio]0,+∞[, definidas por $f(x)=\frac{k}{x}$ e por $g(x)=-\frac{k}{x}$ com k>0.

Considere ainda:

• dois pontos P e Q, com a mesma abcissa, pertencentes, respetivamente, ao gráfico da função f e ao gráfico da função g ;

• a reta s, tangente ao gráfico da função f no ponto P ;

• a reta t, tangente ao gráfico da função g no ponto Q ;

• o ponto R, ponto de intersecção das retas s e t .

Mostre que, qualquer que seja a abcissa dos pontos P e Q , a área do triângulo [PQR] é igual a k.

Exame Nacional 2023, 2.ª fase

83. Considere uma função, h , de domínio ℝ, definida por h(x)=ax^2 , com a≠0, e dois pontos, A e B, do seu gráfico. Mostre que o ponto de intersecção das retas tangentes ao gráfico de h nos pontos A e B pertence à reta vertical que contém o ponto médio do segmento de reta [AB] .

Exame Nacional 2023, época especial

Soluções:

1. D	2. D	3. C	4. 0,5 e 4; 7/4; 5,7			5. C	6. D	7. C	8. A	9. A	10. A	11. D	12. C	13. A
14. B	15. A	16. C	17. C	18. A	20. B	21. C	23. B	24. $\sqrt[3]{2}$	26. A	28. C	29. A	31. D	32. C	33. C
35. 3 e 2		36. A	37. C	39. B	40. D	41. C	42. C	43. A	44. D	45. C	46. D	47. III	48. D	49. A
50. D	51. D	52. A	53. C	54. A	55. I	57. B	58. A	59. D	60. A	61. A	62. FFV		64. A	65. C
67. D	68. 0	69. C	70. C	71. A	72. D	74. B	75. 2/3 e -1/3		80. (1,0)					

O professor: Roberto Oliveira