MathSuccess
Explicações de Matemática

Funções Exponenciais

Matemática A | 12.º Ano

"Conhece a Matemática e dominarás o Mundo."
Galileu Galilei

1. Para certos valores reais não nulos de $a \in \mathbb{R}$, a função f, de domínio $\mathbb{R}$ definida por $f(x)=\left(8^a-1\right)^x$ é uma função exponencial.

1.1. Qual é o valor de a de modo que o ponto de coordenadas $(2,9)$ pertença ao gráfico de f ?

A $\frac{1}{3}$ **B** $\frac{2}{3}$ **C** 1 **D** $\frac{4}{3}$

1.2. Quais são os valores de a para os quais a função f é estritamente decrescente?

A $\left]-\infty,\frac{1}{3}\right[$

B $\left]\frac{1}{3},+\infty\right[$

C $\left]0,\frac{1}{3}\right[$

D $\left]\frac{1}{3},3\right[$

1.3. Considere $a=1$.

Determine o conjunto solução de cada uma das seguintes equações:

a) $f\left(x+\frac{1}{4}\right)=\dfrac{\sqrt[4]{343}}{49^{-2x^2-x+\frac{1}{2}}}$

b) $f(x)\times 243=3^{x-3}\times f(8)$

c) $7f(x)+49f(-x)=344$

d) $49^{\frac{3x}{2}}-f(2x)-f(x+1)+7=0$

Sugestão: 1 é solução da equação $x^3-x^2-7x+7=0$

1.4. Considere $a = \frac{2}{3}$.

Determine o conjunto solução de cada uma das seguintes inequações:

a) $f(x) \leq 27 \times \sqrt{3^{x-1}}$

b) $9f(x^2) - 27^{x+2} > 0$

c) $f(2x+3) + f(2x-2) \geq 81^x + 3$

d) $8f(x) - 6^x + 9 \times 2^x < 72$

2. Sejam f e h duas funções deriváveis em $\mathbb{R}$ tais que:

- a recta de equação $3y + 2x = 1$ é tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa 2
- $h(x) = \frac{x}{e^x}$

2.1. Qual é o valor de $(h \circ f)'(2)$?

A $-\frac{4e}{3}$ **B** $-\frac{2e}{3}$ **C** $-\frac{4}{3e}$ **D** $-\frac{2}{3e}$

2.2. Qual é o valor de $\lim\limits_{x \to 2} \frac{f(x)+1}{e^{x-1} - e}$?

A $-\frac{4e}{3}$ **B** $-\frac{2e}{3}$ **C** $-\frac{4}{3e}$ **D** $-\frac{2}{3e}$

2.3. Determine o valor dos seguintes limites:

a) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sqrt{e^{-3x+2}} - e}{3e^{3-x} + h(-3)}$

b) $\lim\limits_{x \to 3} \frac{\frac{h(2x)}{x} - 2e^{-6}}{x^2 - 4x + 3}$

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\left(\frac{e^{3x+2}}{x^5 - x} - x \right) h(x) \right)$

d) $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{x^3 + x}{h(x)}$

2.4. Determine, por definição, $h'(-2)$ e escreva a equação reduzida da recta tangente ao gráfico de h no ponto de abcissa -2.

2.5. Estude a função h quanto ao sentido das concavidades e à existência de pontos de inflexão do seu gráfico.

3. Considere a função h, de domínio $\mathbb{R}$ definida por $h(x)=x^2e^{3-x^2}$.

3.1. Seja k um número positivo tal que $\ln k<2$.

Mostre que a equação $h(x)=x+k$ é possível em $[-1,0]$.

3.2. Mostre que $h'(x)=2xe^{3-x^2}(1-x^2)$ e estude a função h quanto à monotonia e a existência de extremos relativos.

3.3. Determine o valor de $\lim\limits_{x\to\sqrt{3}}\dfrac{h(x)-x^4+6}{x^2-3}$

F I M

Solucionário

1.1. B

1.2. C

1.3. a) $\left\{-\frac{1}{2},\frac{1}{4}\right\}$

1.3. b) $\{8\}$

1.3. c) $\{-1,2\}$

1.3. d) $\left\{0,\frac{1}{2}\right\}$

1.4. a) $]-\infty,5]$

1.4. b) $]-\infty,-1[\,\cup\,]4,+\infty[$

1.4. c) $\left[-1,\frac{3}{2}\right]$

1.4. d) $]-\infty,2[\,\cup\,]3,+\infty[$

1.2. a) A

1.2. b) D

2.1. A

2.2. D

2.3. a) $\dfrac{1}{2e^2}$

2.3. b) $-\dfrac{2}{e^6}$

2.3. c) $+\infty$

2.3. d) 0

2.4. $h'(-2)=3e^2$; $y=3e^2x+4e^2$

2.5. O gráfico de h tem a concavidade voltada para baixo em $]-\infty,2]$, tem a concavidade voltada para cima em $[2,+\infty[$ e tem um ponto de inflexão em $x=2$.

3.2. A função h é decrescente em $[-1,0]$ e em $[1,+\infty[$, é crescente em $]-\infty,-1]$ e em $[0,1]$, tem mínimo relativo em $x=0$ e tem um máximo relativo em $x=-1$ e em $x=1$.

3.3. -8