TESTE N.º 3 – Proposta de resolução

1.

1.1. Consideremos os seguintes acontecimentos:

V: "praticar voleibol" F: "praticar futebol"

Sabemos que:

- $P(\overline{V}) = 2P(F)$
- $P(V|F) = \frac{1}{3}$
- $P(V \cup F) = 6P(V \cap F)$

Então:

- $P(\overline{V}) = 2P(F) \Leftrightarrow 1 - P(V) = 2P(F) \Leftrightarrow P(V) = 1 - 2P(F)$
- $P(V|F) = \frac{1}{3} \Leftrightarrow \frac{P(V \cap F)}{P(F)} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow P(V \cap F) = \frac{1}{3}P(F)$
- $P(V \cup F) = 6P(V \cap F) \Leftrightarrow P(V) + P(F) - P(V \cap F) = 6P(V \cap F)$

$$\Leftrightarrow \underbrace{P(V)}_{1-2P(F)} + P(F) - 7\underbrace{P(V \cap F)}_{\frac{1}{3}P(F)} = 0$$

$$\Leftrightarrow 1 - 2P(F) + P(F) - \frac{7}{3}P(F) = 0$$

$$\Leftrightarrow -\frac{10}{3}P(F) = -1$$

$$\Leftrightarrow P(F) = \frac{3}{10}$$

$$\Leftrightarrow P(F) = 0{,}3$$

Logo, a probabilidade de o atleta escolhido praticar futebol é igual a $0{,}3$.

1.2. Seja n o número total de atletas desse clube.

Seja m o número de atletas desse clube que praticam futebol.

O número de comissões constituídas por dois atletas desse clube é igual a ${}^{n}C_2$.

O número de comissões constituídas por dois atletas praticantes de futebol que não incluem o Sérgio é igual a ${}^{m-1}C_2$.

Como sabemos que a probabilidade de a comissão ser constituída por dois atletas praticantes de futebol e não incluir o Sérgio é igual a $\frac{11}{156}$, então:

$$\frac{{}^{m-1}C_2}{{}^{n}C_2} = \frac{11}{156} \Leftrightarrow \frac{\frac{(m-1)(m-2)}{2}}{\frac{n(n-1)}{2}} = \frac{11}{156}$$

$$\Leftrightarrow \frac{(m-1)(m-2)}{n(n-1)} = \frac{11}{156}$$

Cálculos auxiliares

$${}^{m-1}C_2 = \frac{(m-1)!}{2!(m-3)!} = \frac{(m-1)(m-2)(m-3)!}{2(m-3)!} = \frac{(m-1)(m-2)}{2}$$

$${}^{n}C_2 = \frac{n!}{2!(n-2)!} = \frac{n(n-1)(n-2)!}{2(n-2)!} = \frac{n(n-1)}{2}$$

$\Leftrightarrow 156(m-1)(m-2) = 11n(n-1)$

$\Leftrightarrow 156(m^2 - 3m + 2) = 11(n^2 - n)$

Sabe-se que, escolhido ao acaso um atleta deste clube, a probabilidade de ele praticar futebol é igual a $0{,}3$. Então, $0{,}3n$ representa o número de atletas desse clube que praticam futebol, isto é, $m = 0{,}3n$:

$\Leftrightarrow 156(0{,}09n^2 - 0{,}9n + 2) = 11n^2 - 11n$

$\Leftrightarrow 14{,}04n^2 - 140{,}4n + 312 - 11n^2 + 11n = 0$

$\Leftrightarrow 3{,}04n^2 - 129{,}4n + 312 = 0$

$\Leftrightarrow n = \frac{129{,}4 \pm \sqrt{(-129{,}4)^2 - 4 \times 3{,}04 \times 312}}{6{,}08}$

$\Leftrightarrow n = \frac{129{,}4 \pm 113{,}8}{6{,}08}$

$\Leftrightarrow n = 40 \ \vee \ n = \frac{15{,}6}{6{,}08}$

Como $n \in \mathbb{N}$, então $n = 40$.

1.3. Opção (A)

A expressão que dá o número de maneiras distintas de distribuir os quinze elementos da comitiva pelos quinze lugares disponíveis, de modo que os condutores sejam os dois treinadores e que o dirigente vá no automóvel, é $2 \times {}^{12}C_3 \times 4! \times {}^{9}A_9$.

2 é o número de maneiras distintas de escolher, dos dois treinadores, quem vai a conduzir o automóvel e quem vai conduzir a carrinha.

Como o dirigente vai no automóvel, então teremos que escolher 3 jogadores, de entre os 12 disponíveis. Assim, ${}^{12}C_3$ é o número de modos distintos de escolher quais os 3 jogadores que, juntamente com o dirigente, ocuparão os 4 lugares (de não condutor) do automóvel e $4!$ é o número de modos de trocar os 4 lugares entre si.

Finalmente, restam 9 jogadores para serem distribuídos pelos 9 lugares (de não condutor) da carrinha, o que pode ser feito de ${}^{9}A_9$ maneiras distintas.

2. Opção (A)

$$\lim u_n = \lim \frac{-n+3}{\sqrt{n}} \overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=} \lim \frac{(-n+3)\sqrt{n}}{\left(\sqrt{n}\right)^2} = \lim \frac{n\left(-1+\frac{3}{n}\right)\sqrt{n}}{n} =$$

$$= \lim \left(\left(-1 + \frac{3}{n}\right)\sqrt{n}\right) = (-1+0) \times (+\infty) = -\infty$$

Assim, $\lim g(u_n) = \lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = -2$.

3.

3.1. f é contínua em $x = 1$ sse existir $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$, isto é, $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = f(1)$.

- $$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} \frac{x-1}{\sqrt{x^2+x+2}-2x} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x\to 1^-} \frac{(x-1)\left(\sqrt{x^2+x+2}+2x\right)}{\left(\sqrt{x^2+x+2}-2x\right)\left(\sqrt{x^2+x+2}+2x\right)} =$$
$$= \lim_{x\to 1^-} \frac{(x-1)\left(\sqrt{x^2+x+2}+2x\right)}{x^2+x+2-4x^2} =$$
$$= \lim_{x\to 1^-} \frac{(x-1)\left(\sqrt{x^2+x+2}+2x\right)}{-3x^2+x+2} =$$
$$= \lim_{x\to 1^-} \frac{(x-1)\left(\sqrt{x^2+x+2}+2x\right)}{(x-1)(-3x-2)} =$$
$$= \lim_{x\to 1^-} \frac{\sqrt{x^2+x+2}+2x}{-3x-2} =$$
$$= \frac{\sqrt{4}+2}{-3-2}0$$
$$= -\frac{4}{5}$$

Cálculo auxiliar

	-3	1	2
1		-3	-2
	-3	-2	$0 = R$

$-3x^2 + x + 2 = (x-1)(-3x-2)$

- $$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} \frac{3x^3-x^2-3x+1}{-2x^2-x+3} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x\to 1^+} \frac{(x-1)(3x^2+2x-1)}{(x-1)(-2x-3)} =$$
$$= \lim_{x\to 1^+} \frac{3x^2+2x-1}{-2x-3} =$$
$$= \frac{3+2-1}{-2-3} =$$
$$= -\frac{4}{5}$$

Cálculos auxiliares

	3	-1	-3	1
1		3	2	-1
	3	2	-1	$0 = R$

$3x^3 - x^2 - 3x + 1 = (x-1)(3x^2+2x-1)$

	-2	-1	3
1		-2	-3
	-2	-3	$0 = R$

$-2x^2 - x + 3 = (x-1)(-2x-3)$

- $f(1) = -\frac{4}{5}$

Logo, f é contínua em $x = 1$.

3.2. $$\lim_{x\to -\infty} f(x) = \lim_{x\to -\infty} \frac{x-1}{\sqrt{x^2+x+2}-2x} = \lim_{x\to -\infty} \frac{x-1}{\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}\right)}-2x} =$$
$$= \lim_{x\to -\infty} \frac{x-1}{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}}-2x} = \lim_{x\to -\infty} \frac{x-1}{-x\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}}-2x} = \lim_{x\to -\infty} \frac{x\left(1-\frac{1}{x}\right)}{x\left(-\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}}-2\right)} =$$
$$= \lim_{x\to -\infty} \frac{1-\frac{1}{x}}{-\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}}-2} = \frac{1}{-\sqrt{1}-2} = -\frac{1}{3}$$

A reta de equação $y = -\frac{1}{3}$ é assíntota horizontal ao gráfico de f quando $x \to -\infty$.

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{3x^3 - x^2 - 3x + 1}{-2x^2 - x + 3} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^3\left(3 - \frac{1}{x} - \frac{3}{x^2} + \frac{1}{x^3}\right)}{x^2\left(-2 - \frac{1}{x} + \frac{3}{x^2}\right)} =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{x\left(3 - \frac{1}{x} - \frac{3}{x^2} + \frac{1}{x^3}\right)}{-2 - \frac{1}{x} + \frac{3}{x^2}} = = \frac{+\infty \times 3}{-2} = -\infty$$

Como o valor obtido não é um número real, o gráfico de f não admite assíntota horizontal quando $x \to +\infty$.

4. Opção (B)

$$\lim_{x \to 2} \frac{g(x) - g(2)}{x^2 - 2x} = 5 \Leftrightarrow \lim_{x \to 2} \frac{g(x) - g(2)}{x\,(x-2)} = 5 \Leftrightarrow \lim_{x \to 2} \frac{1}{x} \times \lim_{x \to 2} \frac{g(x) - g(2)}{x - 2} = 5$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} \times \lim_{x \to 2} \frac{g(x) - g(2)}{x - 2} = 5$$

$$\Leftrightarrow \lim_{x \to 2} \frac{g(x) - g(2)}{x - 2} = 10$$

Seja m_t o declive da reta t. Como $m_t = \lim_{x \to 2} \frac{g(x) - g(2)}{x - 2}$, tem-se que $m_t = 10$. Uma reta perpendicular à reta t tem declive $-\frac{1}{m_t}$, ou seja, $-\frac{1}{10}$.

Assim, a equação reduzida da reta pretendida é da forma $y = -\frac{1}{10}x + b$.

Como a função é diferenciável em todos os pontos do seu domínio, então é contínua em todos os pontos do seu domínio, em particular em $x = 2$. Logo, $\lim_{x \to 2} g(x) = g(2)$.

Como $\lim_{x \to 2} g(x) = 3$, então A tem coordenadas $(2, 3)$.

Assim.

$$3 = -\frac{1}{10} \times 2 + b \Leftrightarrow b = 3 + \frac{1}{5}$$

$$\Leftrightarrow b = \frac{16}{5}$$

A equação reduzida da reta que passa em A e é perpendicular à reta t é $y = -\frac{1}{10}x + \frac{16}{5}$.

5. Opção (D)

$${}^nC_1 - {}^nC_{n-1} + {}^nC_{34} - {}^nC_{56} = 0 \Leftrightarrow n - n + {}^nC_{34} - {}^nC_{56} = 0$$

$$\Leftrightarrow {}^nC_{34} = {}^nC_{56}$$

Logo, $n = 34 + 56 = 90$.

Assim, o produto do segundo elemento pelo antepenúltimo elemento da linha $n = 90$ é:

${}^{90}C_1 \times {}^{90}C_{88} = 90 \times 4005 = 360\,450$

6.

6.1. Opção (C)

$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = f(0)$

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+}(2\text{sen}^2\, x + 1) = 2\times 0 + 1 = 1$

Como os limites laterais são ambos números reais, pode concluir-se que a reta de equação $x = 0$ não é assíntota vertical do gráfico da função f.

$\lim\limits_{x\to\left(-\frac{\pi}{2}\right)^+} f(x) = \lim\limits_{x\to\left(-\frac{\pi}{2}\right)^+} \text{tg}\, x\ \text{sen}\, x = (-\infty)\times(-1) = +\infty$

A reta de equação $x = -\frac{\pi}{2}$ é assíntota vertical ao gráfico da função f, e é única, pois a função f é contínua em $\left]-\frac{\pi}{2}, 0\right[$ e em $]0, +\infty[$.

6.2. Em $]0, \pi[$, tem-se que:

$$f'(x) = (2\text{sen}^2\, x + 1)' = 2\times 2\text{sen}x \times (\text{sen}\, x)' =$$
$$= 2\times 2\text{sen}x\times\cos x =$$
$$= 2\text{sen}(2x)$$

$$f''(x) = \left(2\text{sen}\,(2x)\right)' = 2\times 2\cos(2x) =$$
$$= 4\cos(2x)$$

$f''(x) = 0$

$4\cos(2x) = 0 \Leftrightarrow \cos(2x) = 0$

$\Leftrightarrow 2x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k\in\mathbb{Z}$

$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}, k\in\mathbb{Z}$

Em $]0, \pi[$, os zeros de f'' são $\frac{\pi}{4}$ e $\frac{3\pi}{4}$.

x	0		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{3\pi}{4}$		π
Sinal de f''		+	0	−	0	+	
Sentido das concavidades do gráfico de f		∪	P.I.	∩	P.I.	∪	

Cálculos auxiliares

$f''\left(\frac{\pi}{6}\right) = 4\cos\left(\frac{2\pi}{6}\right) = 4\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = 4 \times \frac{1}{2} = 2 > 0$

$f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 4\cos\left(\frac{2\pi}{2}\right) = 4\cos(\pi) = 4 \times (-1) = -4 < 0$

$f''\left(\frac{5\pi}{6}\right) = 4\cos\left(\frac{10\pi}{6}\right) = 4\cos\left(\frac{5\pi}{3}\right) = 4 \times \frac{1}{2} = 2 > 0$

$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2\,\mathrm{sen}^2\left(\frac{\pi}{4}\right) + 1 = 2 \times \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + 1 = 2$

$f\left(\frac{3\pi}{4}\right) = 2\,\mathrm{sen}^2\left(\frac{3\pi}{4}\right) + 1 = 2 \times \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + 1 = 2$

O gráfico da função f tem a concavidade voltada para cima em $\left]0, \frac{\pi}{4}\right]$ e em $\left[\frac{3\pi}{4}, \pi\right[$ e a concavidade voltada para baixo em $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right]$.

Os pontos de inflexão são os pontos de coordenadas $\left(\frac{\pi}{4}, 2\right)$ e $\left(\frac{3\pi}{4}, 2\right)$.

7. Provar que a equação $f(x) = f(x+3)$ tem, pelo menos, uma solução no intervalo $]a, a+3[$ é equivalente a provar que $f(x) - f(x+3) = 0$ tem, pelo menos, uma solução no intervalo $]a, a+3[$.

Consideremos a função g, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $g(x) = f(x) - f(x+3)$.

- g é contínua em $[a, a+3]$, por se tratar da diferença entre duas funções contínuas.
- $g(a) = f(a) - f(a+3) = 0 - f(a+3) =$

$$= -\underbrace{f(a+3)}_{<0} > 0$$

$g(a+3) = f(a+3) - f\big((a+3)+3\big) = f(a+3) - f(a+6) =$

$$= f(a+3) - 0 =$$

$$= f(a+3) < 0$$

Assim, $g(a+3) < 0 < g(a)$.

Logo, pelo teorema de Bolzano-Cauchy, concluímos que:

$$\exists c \in \,]a, a+3[: g(c) = 0$$

isto é:

$$\exists c \in \,]a, a+3[: f(c) - f(c+3) = 0 \Leftrightarrow \exists c \in \,]a, a+3[: f(c) = f(c+3)$$

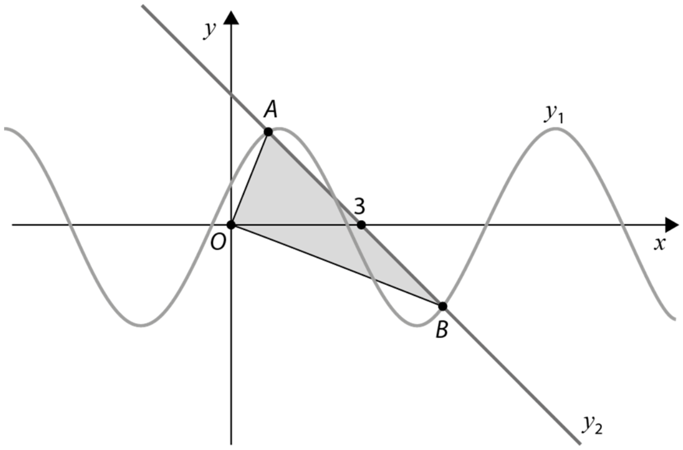
8. $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{xg(x)+x^2-3x}{x} = 0 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} (g(x)+x-3) = 0 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} \left(g(x)-(-x+3)\right) = 0$

Logo, a reta de equação $y=-x+3$ é assíntota oblíqua ao gráfico de g quando $x\to+\infty$. Ou seja, a reta r é definida por $y=-x+3$.

Recorrendo às capacidades gráficas da calculadora, tem-se:

$y_1 = 2\text{sen}(x)+\cos(x)$

$y_2 = -x+3$



$A(a_1, a_2)$

$B(b_1, b_2)$

$a_1 \approx 0{,}84$ e $a_2 \approx 2{,}16$

$b_1 \approx 4{,}85$ e $b_2 \approx -1{,}85$

Cálculo auxiliar

$-x+3=0 \Leftrightarrow x=3$

Seja C a interseção da reta r com o eixo Ox. Para determinar a área do triângulo $[OAB]$, vamos decompô-lo em dois triângulos de base $[OC]$. Tem-se que $\overline{OC}=3$.

$$A_{[OAB]} = \frac{3\times 2{,}16}{2} + \frac{3\times|-1{,}85|}{2} \approx 6{,}02$$

9. Seja A o ponto de tangência da reta t com o gráfico de f e seja B o ponto de tangência da reta t com o gráfico de g.

$A(a, a^2)$

$B\left(b, \frac{1}{b}\right)$, $b\neq 0$

$f'(x) = 2x$

$g'(x) = -\frac{1}{x^2}$

Como a reta tangente ao gráfico de f em A e a reta tangente ao gráfico de g em B são a mesma reta, concluímos que $f'(a)=g'(b)$. Assim:

$f'(a)=g'(b) \Leftrightarrow 2a = -\frac{1}{b^2} \Leftrightarrow a = -\frac{1}{2b^2}$

Então, $A\left(-\frac{1}{2b^2}, \frac{1}{4b^4}\right)$.

Vamos então determinar o declive da reta AB, em função de b, através das coordenadas dos pontos A e B:

$$m_{AB} = \frac{\frac{1}{b}-\frac{1}{4b^4}}{b+\frac{1}{2b^2}} = \frac{\frac{4b^3-1}{4b^4}}{b+\frac{1}{2b^2}} = \frac{\frac{4b^3-1}{4b^4}}{\frac{2b^3+1}{2b^2}} =$$

$$= \frac{2b^2(4b^3-1)}{4b^4(2b^3+1)} =$$

$$= \frac{4b^3-1}{2b^2(2b^3+1)}$$

Por outro lado, como a reta AB é a reta tangente ao gráfico de g, no ponto B, então o seu declive é igual a $g'(b)$, ou seja, $m_{AB} = -\frac{1}{b^2}$.

Então:

$$\frac{4b^3-1}{2b^2(2b^3+1)} = -\frac{1}{b^2} \Leftrightarrow \frac{4b^3-1}{2(2b^3+1)} = -1$$

$$\Leftrightarrow 4b^3 - 1 = -2(2b^3+1)$$

$$\Leftrightarrow 4b^3 - 1 = -4b^3 - 2$$

$$\Leftrightarrow 8b^3 = -1$$

$$\Leftrightarrow b^3 = -\frac{1}{8}$$

$$\Leftrightarrow b = -\frac{1}{2}$$

$$m_{AB} = -\frac{1}{b^2} = -\frac{1}{\frac{1}{4}} = -4$$

$t: y = -4x + d$

Como o ponto $B\left(-\frac{1}{2}, -2\right)$ pertence à reta, então:

$$-2 = -4\left(-\frac{1}{2}\right) + d \Leftrightarrow -2 = 2 + d \Leftrightarrow -4 = d$$

A equação reduzida da reta t é $y = -4x - 4$.