

Geometria (10.º ano)

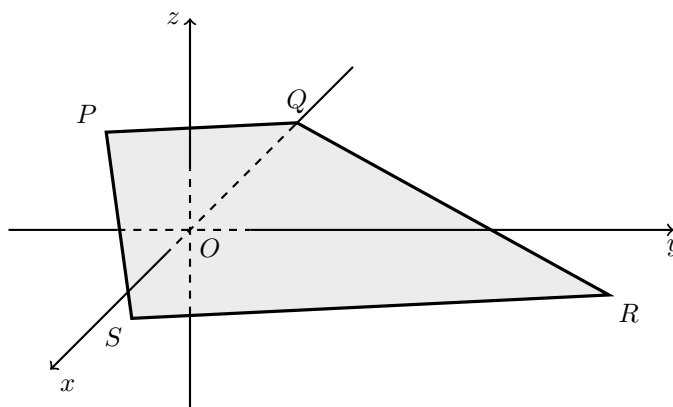
Circunferências, círculos, superfícies esféricas e esferas

Exercícios de Provas Nacionais e Testes Intermédios



1. Na figura ao lado, está representado, num referencial o.n. $Oxyz$, um trapézio $[PQRS]$, de bases $[PQ]$ e $[RS]$, em que o lado $[PS]$ é perpendicular às bases.

Tem-se $P(1, -1, 2)$, $Q(-2, 1, 1)$ e $R(-5, 5, -3)$



Qual das condições seguintes define a superfície esférica de centro no ponto R e que passa no ponto Q ?

(A) $(x - 5)^2 + (y + 5)^2 + (z - 3)^2 = 59$

(B) $(x - 5)^2 + (y + 5)^2 + (z - 3)^2 = 41$

(C) $(x + 5)^2 + (y - 5)^2 + (z + 3)^2 = 41$

(D) $(x + 5)^2 + (y - 5)^2 + (z + 3)^2 = 59$

Exame – 2021, 2.ª Fase

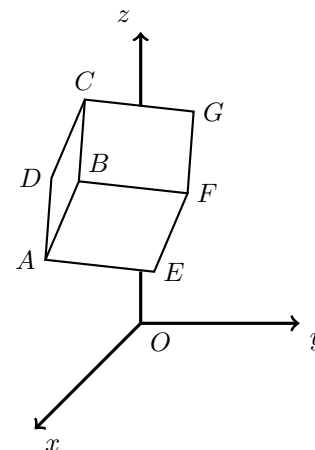
2. Na figura ao lado, está representado, num referencial o.n. $Oxyz$, o cubo $[ABCDEFGH]$ (o ponto H não está representado na figura).

Sabe-se que:

- o ponto A tem coordenadas $(7,1,4)$
- o ponto G tem coordenadas $(5,3,6)$

Resolva o item seguinte sem recorrer à calculadora.

Determine a equação reduzida da superfície esférica que passa nos oito vértices do cubo.



Exame – 2020, 2.^a Fase

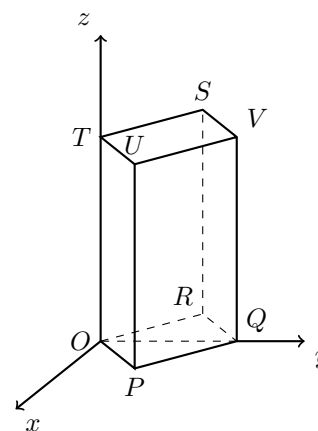
3. Na figura ao lado, está representado, num referencial o.n. $Oxyz$, o prisma quadrangular regular $[OPQRSTUV]$

Sabe-se que:

- a face $[OPQR]$ está contida no plano xOy
- o vértice Q pertence ao eixo Oy e o vértice T pertence ao eixo Oz
- o plano STU tem equação $z = 3$

Seja T' o simétrico do ponto T , relativamente à origem do referencial.

Escreva uma equação da superfície esférica de diâmetro $[TT']$



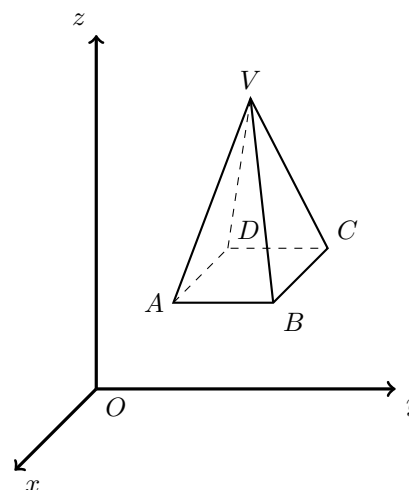
Exame – 2017, 1.^a Fase

4. Na figura ao lado, está representada, num referencial o.n. $Oxyz$, uma pirâmide quadrangular regular $ABCDV$

Sabe-se que:

- a base $[ABCD]$ da pirâmide é paralela ao plano xOy
- o ponto A tem coordenadas $(-1,1,1)$
- o ponto C tem coordenadas $(-3,3,1)$

Escreva uma condição que defina a superfície esférica de centro no ponto A e que é tangente ao plano xOy



Exame – 2016, 1.^a Fase



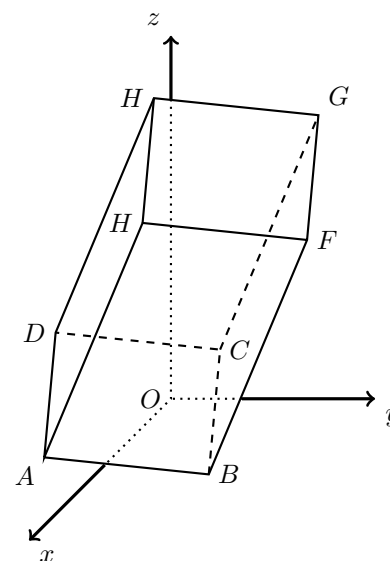
5. Considere, num referencial o.n. $Oxyz$, os pontos $A(0,0,2)$ e $B(4,0,0)$. Determine uma equação cartesiana que defina a superfície esférica da qual o segmento de reta $[AB]$ é um diâmetro.

Exame – 2015, 1.^a Fase

6. Na figura ao lado, está representado, em referencial o.n. $Oxyz$, o prisma quadrangular regular $[ABCDEFGH]$

As coordenadas dos pontos A , B e G são $(11, -1, 2)$, $(8, 5, 0)$ e $(6, 9, 15)$, respectivamente.

Escreva uma equação que defina a superfície esférica com centro no ponto A e que passa no ponto B



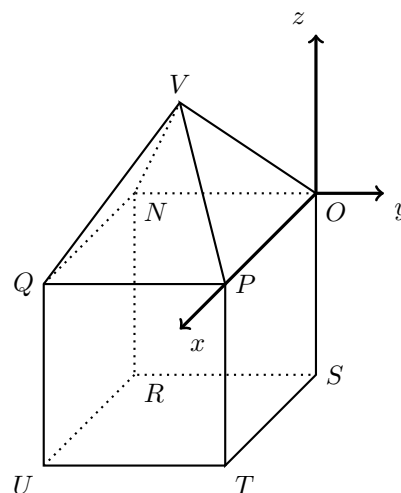
Teste Intermédio 10.º ano – 06.05.2011

7. Na figura ao lado, está representado, em referencial o.n. $Oxyz$, o poliedro $[VNOPQRST]$, que se pode decompor num cubo e numa pirâmide quadrangular regular.

Sabe-se que:

- a base da pirâmide coincide com a face superior do cubo e está contida no plano xOy
- o ponto P pertence ao eixo Ox
- o ponto U tem coordenadas $(4, -4, -4)$

Escreva uma condição cartesiana que defina a superfície esférica de centro em U e que passa no ponto T



Teste Intermédio 11.º ano – 27.01.2011



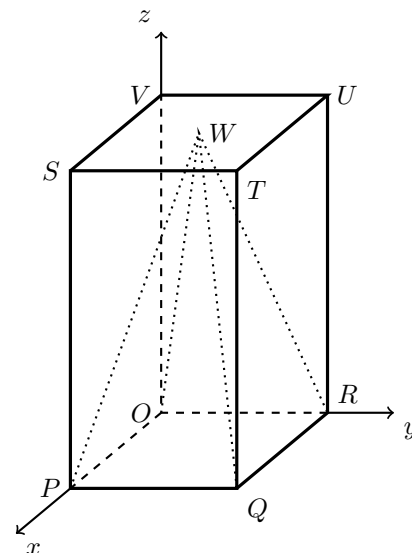
8. Na figura ao lado, estão representados, num referencial o.n. $Oxyz$, um prisma quadrangular regular e uma pirâmide.

A base da pirâmide, $[OPQR]$, está contida no plano xOy e coincide com a base inferior do prisma.

O ponto W , vértice da pirâmide, coincide com o centro da base superior, $[STUV]$, do prisma.

O ponto P tem coordenadas $(5,0,0)$.

Defina, por uma condição, a superfície esférica de centro no ponto Q e que passa no ponto O



Teste Intermédio 10.º ano – 05.05.2010

9. Considere, num referencial o.n. xOy , a circunferência de equação $(x-1)^2 + (y-3)^2 = 16$

Qual das equações seguintes define uma recta tangente a esta circunferência?

- (A) $x = -3$ (B) $x = 1$ (C) $y = -4$ (D) $y = 1$

Teste Intermédio 10.º ano – 29.01.2010

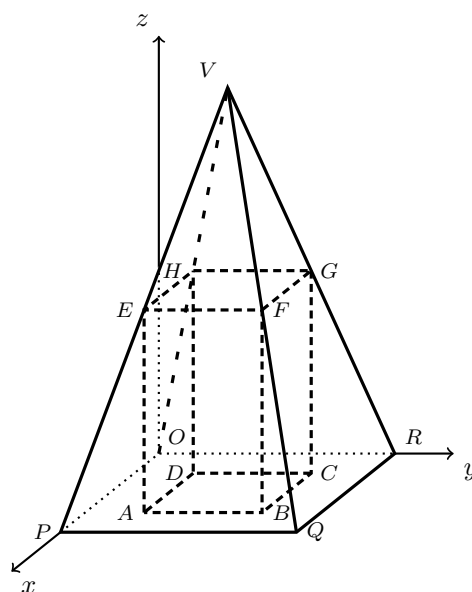
10. Na figura ao lado, estão representados, num referencial o.n. $Oxyz$, a pirâmide quadrangular regular $[VOPQR]$ e o prisma quadrangular regular $[ABCDEFGH]$

Sabe-se que:

- os vértices P e R da pirâmide pertencem aos eixos ordenados Ox e Oy , respetivamente;
- uma das bases do prisma está contida na base da pirâmide e cada vértice da outra base pertence a uma aresta da pirâmide.

Sabe-se que $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y - 8z = 0$ é uma equação da superfície esférica que tem centro no ponto V e que contém os quatro vértices da base da pirâmide $[VOPQR]$

Calcule o volume da pirâmide $[VOPQR]$



Teste Intermédio 10.º ano – 29.01.2010

11. Num referencial o.n. $Oxyz$, a condição $x^2 + y^2 + (z-2)^2 \leq 4$ define uma esfera. Qual das equações seguintes define um plano que divide essa esfera em dois sólidos com o mesmo volume?

- (A) $x = 0$ (B) $x = 1$ (C) $x = 2$ (D) $x = 3$

Teste Intermédio 10.º ano – 28.01.2009



12. Considere, num referencial o. n. $Oxyz$, a superfície esférica de equação $x^2 + y^2 + (z - 2)^2 = 4$

A intersecção desta superfície com o plano xOy é

- (A) o conjunto vazio (B) um ponto (C) uma circunferência (D) um círculo

Teste Intermédio 11.º ano – 29.01.2009

13. Na figura está representado, em referencial o.n. $Oxyz$, um sólido que pode ser decomposto num cubo e numa pirâmide quadrangular regular.

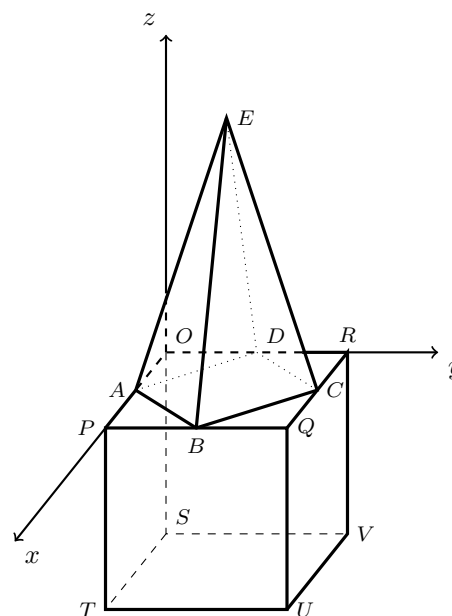
A origem do referencial é um dos vértices do cubo, o vértice P pertence ao eixo Ox e o vértice R pertence ao eixo Oy .

Os vértices da base da pirâmide são os pontos médios dos lados do quadrado $[OPQR]$.

O ponto Q tem coordenadas $(2,2,0)$.

O volume do sólido é igual a 10

Determine uma equação da superfície esférica que tem centro no ponto T e que contém o ponto C .



Teste Intermédio 10.º ano – 28.01.2009

14. Considere, num referencial o.n. $Oxyz$, as superfícies esféricas definidas pelas equações

$$x^2 + (y - 2)^2 + z^2 = 2 \quad \text{e} \quad x^2 + (y - 3)^2 + z^2 = 2$$

A intersecção destas superfícies esféricas é ...

- (A) um ponto. (B) uma circunferência.
(C) o conjunto vazio. (D) um segmento de reta.

Exame – 2001, Prova de reserva (cód. 135)



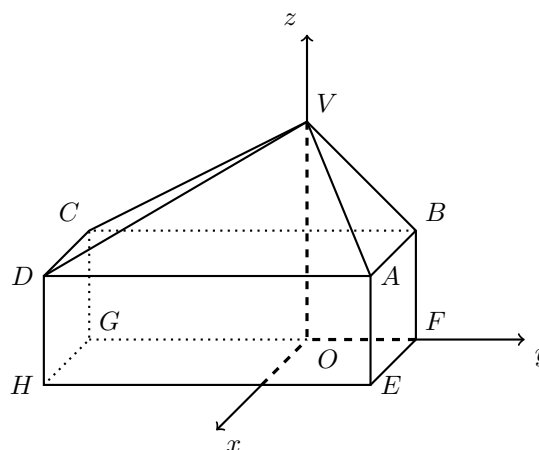
15. Na figura ao lado está representado, em referencial o.n. $Oxyz$, um sólido formado por um paralelepípedo retângulo $[ABCDEFGH]$ e uma pirâmide $[ABCDV]$.

A base $[EFGH]$ do paralelepípedo está contida no plano xOy e a base da pirâmide $[ABCD]$ coincide com a face superior do paralelepípedo.

A aresta $[GV]$ está contida no eixo Oy .

Uma equação da superfície esférica com centro $A(1,1,1)$ e que contém G é $(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 11$

Verifique que o ponto H tem coordenadas $(1, -2, 0)$



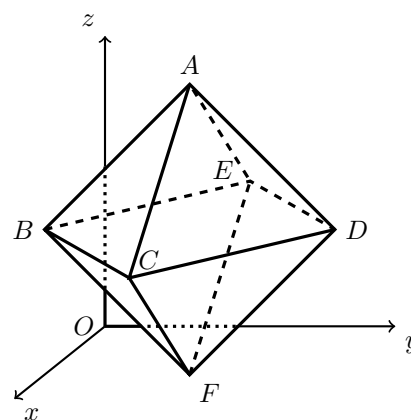
Exame – 2001, Prova de reserva (cód. 135)

16. Na figura ao lado está representado, em referencial o.n. $Oxyz$, um octaedro $[ABCDEFGH]$

Sabe-se que:

- o vértice B tem coordenadas $(1,0,1)$
- o vértice E tem coordenadas $(0,1,1)$
- o vértice F pertence ao plano xOy
- o vértice A tem coordenadas $(1,1,2)$

Determine uma equação da superfície esférica que contém os seis vértices do octaedro.



Exame – 2001, 2.ª fase (cód. 135)

17. Considere, em referencial o.n. $Oxyz$, a superfície esférica centrada na origem do referencial e cuja interseção com o plano de equação $z = 3$ é uma circunferência de perímetro 8π

Qual das seguintes é uma equação desta superfície esférica?

- (A) $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ (B) $x^2 + y^2 + z^2 = 16$ (C) $x^2 + y^2 + z^2 = 25$ (D) $x^2 + y^2 + z^2 = 36$

Exame – 2001, 1.ª fase - 2.ª chamada (cód. 135)

18. Qual das seguintes equações define, num referencial o.n. $Oxyz$, uma superfície esférica tangente aos planos de equações $x = 4$ e $y = 0$?

- (A) $(x-2)^2 + (y-2)^2 + z^2 = 4$ (B) $(x-2)^2 + (y-2)^2 + z^2 = 16$
 (C) $x^2 + y^2 + (z-2)^2 = 4$ (D) $(x-2)^2 + y^2 + z^2 = 16$

Exame – 2001, 1.ª fase - 1.ª chamada (cód. 135)



19. Num referencial o.n. $Oxyz$, considere os planos definidos pelas equações $z = 1$ e $z = 5$

Qual das equações seguintes define uma superfície esférica tangente aos dois planos?

- (A) $x^2 + y^2 + (z - 3)^2 = 25$ (B) $x^2 + y^2 + (z - 4)^2 = 25$
 (C) $x^2 + y^2 + (z - 3)^2 = 4$ (D) $x^2 + y^2 + (z - 4)^2 = 4$

Exame – 2001, Prova Modelo (cód. 135)

Exame – 2000, 2.^a Fase (cód. 135)

20. Considere, num referencial o.n. $Oxyz$, a superfície esférica S , de equação $(x - 2)^2 + (y - 2)^2 + (z - 2)^2 = 2$

Qual das equações seguintes define um plano cuja intersecção com a superfície esférica não é vazia?

- (A) $x = -1$ (B) $x = 0$ (C) $x = 3$ (D) $x = 4$

Exame – 2000, Prova 2 para Militares (cód. 135)

Exame – 2000, Prova de reserva (cód. 135)

21. Num referencial o. n. $Oxyz$, qual das seguintes equações define uma superfície esférica tangente ao plano yOz ?

- (A) $(x - 2)^2 + y^2 + z^2 = 1$ (B) $(x - 2)^2 + y^2 + z^2 = 2$
 (C) $(x - 2)^2 + y^2 + z^2 = 4$ (D) $(x - 2)^2 + y^2 + z^2 = 9$

Exame – 2000, Época Especial (setembro) (cód. 135)

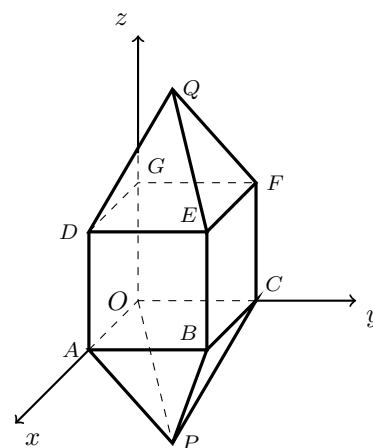
Exame – 1999, Prova de reserva (cód. 135) (adaptado)

22. Na figura ao lado está representado um poliedro num referencial o.n. $Oxyz$

Sabe-se que:

- o vértice O do poliedro é a origem do referencial;
- o vértice E do poliedro tem coordenadas $(2, 2, 2)$;
- a altura de cada uma das pirâmides é igual ao comprimento da aresta do cubo.

Justifique que o ponto F não pertence à superfície esférica de diâmetro $[PQ]$



Exame – 2000, 1.^a fase - 1.^a chamada (cód. 135)

23. Considere, num referencial o.n. $Oxyz$, as superfícies esféricas de equações

$$x^2 + y^2 + (z - 10)^2 = 9 \quad \text{e} \quad x^2 + y^2 + (z - 4)^2 = 9$$

A intersecção das duas superfícies esféricas é

- (A) um ponto. (B) uma circunferência.
 (C) uma superfície esférica. (D) o conjunto vazio.

Exame – 1999, Prova para Militares (cód. 135)



24. Considere, num referencial o.n. $Oxyz$, a esfera ε definida pela condição

$$x^2 + (y - 7)^2 + z^2 \leq 9$$

Qual das afirmações seguintes é verdadeira?

(A) Na esfera ε existem pontos do eixo Ox

(B) Na esfera ε existem pontos do eixo Oy

(C) O ponto $(7,7,0)$ pertence à esfera ε

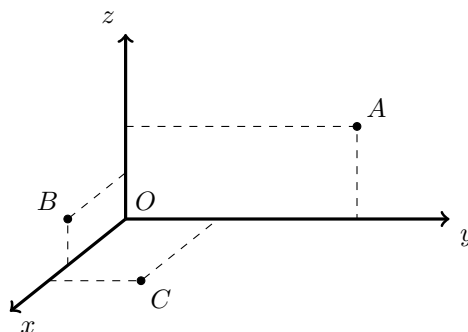
(D) O ponto $(0,0,7)$ pertence à esfera ε

Exame – 1999, Época Especial (cód. 135)

25. Na figura seguinte estão representados três pontos, em referencial o.n. $Oxyz$

Sabe-se que:

- o ponto A tem coordenadas $(0,5,2)$
- o ponto B pertence ao plano xOz
- o ponto C pertence ao plano xOy
- a reta BC tem equação vetorial $(x,y,z) = (5,4,-1) + k(1,2,-1)$, $k \in \mathbb{R}$



Considere a superfície esférica de centro em A , cuja intersecção com o plano xOy é uma circunferência de raio 3

Determine uma equação dessa superfície esférica.

Exame – 1999, 2.ª fase (cód. 135)

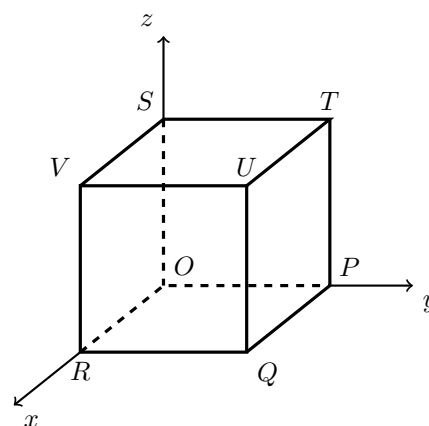
26. Na figura ao lado está representado um cubo, em referencial o.n. $Oxyz$

Sabe-se que:

- a face $[OPQR]$ está contida no plano xOy
- a face $[OSVR]$ está contida no plano xOz
- a face $[OSTP]$ está contida no plano yOz
- o volume do cubo é 27

Determine uma equação da superfície esférica tal que:

- o centro é o simétrico do ponto U , em relação ao plano xOy
- o ponto Q pertence a essa superfície esférica



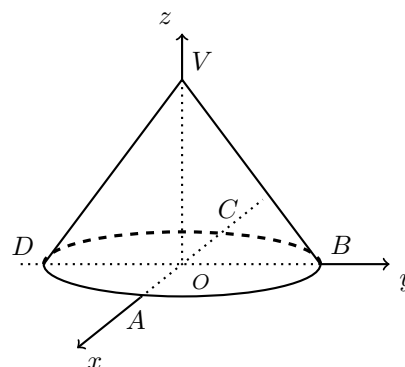
Exame – 1999, 1.ª fase - 2.ª chamada (cód. 135)



27. Na figura seguinte está representado, em referencial o.n. $Oxyz$, um cone de revolução.

Sabe-se que:

- A base do cone está contida no plano xOy e tem o seu centro na origem do referencial
- $[AC]$ e $[BD]$ são diâmetros da base
- O ponto A pertence ao semieixo positivo Ox
- O ponto B pertence ao semieixo positivo Oy
- O vértice V pertence ao semieixo positivo Oz
- O comprimento do raio da base é 3 e a altura do cone é 4



Determine uma condição que defina a esfera cujo centro é o ponto V e cuja intersecção com o plano xOy é a base do cone.

Exame – 1999, 1.^a fase - 1.^a chamada (cód. 135)

28. Num referencial o.n. $Oxyz$, considere:

- a esfera definida pela condição $x^2 + y^2 + z^2 \leq 25$
- o plano de equação $z = 4$

Qual é a área da intersecção da esfera com o plano?

- (A) π (B) 3π (C) 6π (D) 9π

Exame – 1999, Prova Modelo (cód. 135)

29. Num referencial o.n. $Oxyz$, considere:

- o plano α , de equação $y = 4$
- a superfície esférica E de equação $x^2 + (y - 2)^2 + z^2 = 4$

A intersecção da superfície esférica E com o plano α é

- (A) um ponto
- (B) uma circunferência de raio 1
- (C) uma circunferência de raio 2
- (D) o conjunto vazio

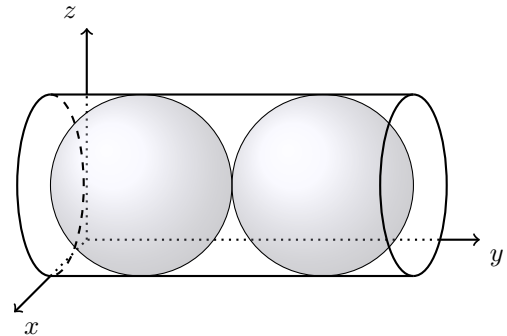
Exame – 1998, Prova de reserva (cód. 135)



30. Na figura abaixo está representada, em referencial o.n. $Oxyz$, uma caixa cilíndrica construída num material de espessura desprezável.

A caixa contém duas bolas encostadas uma à outra e às bases da caixa cilíndrica.

- O cilindro tem uma das bases no plano xOz
- O centro dessa base é o ponto de coordenadas $(3,0,3)$
- A outra base está contida no plano de equação $y = 12$
- As bolas são esferas de raio igual a 3
- Os diâmetros das esferas e das bases do cilindro são iguais



Justifique que a superfície esférica correspondente à bola mais afastada do plano tem centro no ponto $(3,9,3)$ e que o ponto $(1,8,1)$ pertence a essa superfície esférica.

Exame – 1998, 1.ª fase - 2.ª chamada (cód. 135)

31. Na figura ao lado está representado um cubo, em referencial o.n. $Oxyz$

O vértice O coincide com a origem do referencial.

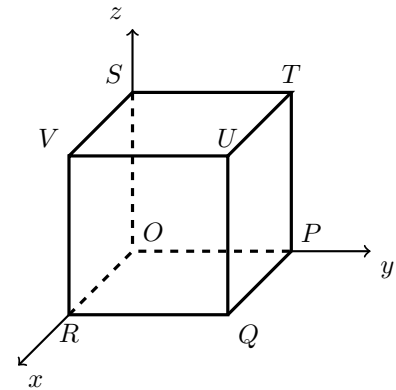
O vértice R pertence ao semieixo positivo Ox

O vértice P pertence ao semieixo positivo Oy

O vértice S pertence ao semieixo positivo Oz

A abscissa do ponto R é 2

Mostre que o raio da superfície esférica que contém os oito vértices do cubo é $\sqrt{3}$ e determine uma equação dessa superfície esférica.



Exame – 1998, Prova Modelo (cód. 135)

32. Num referencial o.n. $Oxyz$ uma esfera tem centro no ponto $C(2,3,4)$ e é tangente ao plano xOy . Uma condição que define a esfera é:

(A) $x^2 + y^2 + z^2 \leq 4^2$

(B) $(x - 2)^2 + (y - 3)^2 + (z - 4)^2 \leq 2^2$

(C) $(x - 2)^2 + (y - 3)^2 + (z - 4)^2 \leq 3^2$

(D) $(x - 2)^2 + (y - 3)^2 + (z - 4)^2 \leq 4^2$

Exame – 1997, Prova para militares (cód. 135)

33. Num referencial o.n. $Oxyz$, a intersecção das superfícies esféricas definidas pelas equações

$$x^2 + y^2 + z^2 = 4 \quad \text{e} \quad x^2 + y^2 + z^2 = 9 \quad \text{é}$$

(A) um ponto.

(B) uma superfície esférica.

(C) uma circunferência.

(D) o conjunto vazio.

Exame – 1997, 2.ª fase (cód. 135)

