Escola Secundária de Francisco Franco

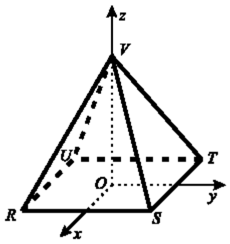
Matemática A (Aprendizagens Essenciais) – 11.º ano

Exercícios saídos em exames nacionais e em testes intermédios (desde 2006)
GEOMETRIA ANALÍTICA

1. Na figura está representado um rectângulo [ABCD]. Mostre que $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ é igual a $\overline{AB}^2$

Teste intermédio 2006

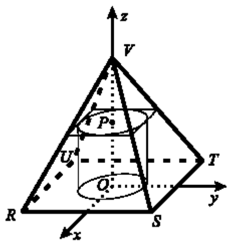
2. Na figura está representada, em referencial o.n. Oxyz, uma pirâmide regular. Sabe-se que:



• a base [RSTU] é um quadrado de área 4 com centro na origem do referencial;
• a aresta [RS] é paralela ao eixo Oy;
• o vértice V tem coordenadas (0,0,2).

a) Mostre que a recta definida pela condição $x=0 \wedge y=2z$ é perpendicular ao plano STV e escreva uma equação deste plano.

b) Considere agora um ponto P que se desloca ao longo do segmento [OV], nunca coincidindo com o ponto O, nem com o ponto V.



Para cada posição do ponto P considere o cilindro tal que:
• a base inferior do cilindro tem centro na origem do referencial e está contida no plano xOy;
• a base superior do cilindro tem centro no ponto P e está inscrita no quadrado que é a secção produzida na pirâmide pelo plano paralelo ao plano xOy que passa no ponto P.

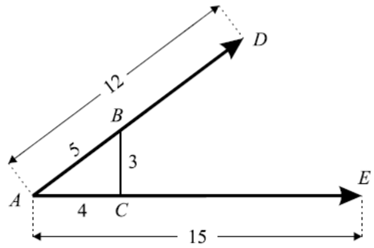
Seja *z* a cota do ponto P e seja *f* a função que dá o volume do cilindro, em função de *z*.

b_1) Justifique que o domínio da função *f* é o intervalo]0,2[e que $f(z) = \pi\left(\frac{z^3}{4} - z^2 + z\right)$

b_2) Considere o seguinte problema: *Entre que valores deve variar a cota do ponto P de tal modo que o volume do cilindro seja superior à quinta parte do volume da pirâmide*?
Traduza o problema por meio de uma inequação e, utilizando a sua calculadora, resolva-a graficamente.
Apresente os valores pedidos arredondados às milésimas. Apresente na sua resposta os elementos recolhidos na utilização da calculadora: gráficos e coordenadas relevantes de alguns pontos.

Teste intermédio 2006

3. Na figura estão representados dois vectores, $\overrightarrow{AD}$ e $\overrightarrow{AE}$, de normas 12 e 15, respectivamente.



No segmento de recta [AD] está assinalado um ponto B. No segmento de recta [AE] está assinalado um ponto C. O triângulo [ABC] é rectângulo e os seus lados têm 3, 4 e 5 unidades de comprimento. Indique o valor do produto escalar $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AE}$

(A) 108 (B) 128 (C) 134 (D) 144

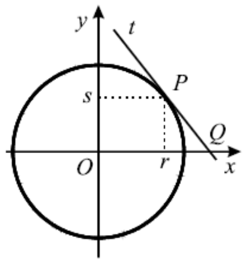
Teste intermédio 2007

4. Considere, em referencial o.n. Oxyz, o ponto P(0,4,3). Seja α o plano que contém o ponto P e é perpendicular à recta de equação vectorial $(x,y,z)=(0,1,-3)+k(1,0,2),\ k\in\mathbb{R}$. Determine a área da secção produzida pelo plano α na esfera definida pela condição $(x+2)^2+(y-1)^2+(z-4)^2\leq 3$.

***Sugere-se que**:*
• *Determine uma equação do plano α.*
• *Mostre que o centro da esfera pertence ao plano α.*
• *Atendendo ao ponto anterior, determine a área da secção.*

Teste intermédio 2007

5. Considere um ponto P, do primeiro quadrante (eixos não incluídos), pertencente à circunferência de centro na origem e raio 1.



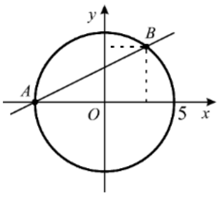
Sejam (r,s) as coordenadas do ponto P. Seja t a recta tangente à circunferência no ponto P. Seja Q o ponto de intersecção da recta t com o eixo Ox. Prove que a abcissa do ponto Q é $\frac{1}{r}$

Teste intermédio 2007

6. Num referencial o. n. *Oxyz*, sejam α e β os planos definidos pelas equações: α: $x+y-z=1$ e β: $2x+2y-2z=1$. A intersecção dos planos α e β é
(A) o conjunto vazio (B) um ponto
(C) uma recta (D) um plano

1.º Teste intermédio 2008

7. Na figura estão representadas, em referencial o. n. *xOy*, uma recta *AB* e uma circunferência com centro na origem e raio igual a 5. Os pontos *A* e *B* pertencem à circunferência. O ponto *A* também pertence ao eixo das abcissas. Admitindo que o declive da recta *AB* é igual ½, resolva as três alíneas seguintes:



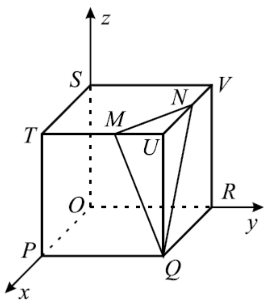
a). Mostre que uma equação da recta *AB* é $x-2y+5=0$

b) Mostre que o ponto *B* tem coordenadas (3,4)

c) Seja *C* o ponto de coordenadas (–3,16). Verifique que o triângulo [*ABC*] é rectângulo em *B*.

1.º Teste intermédio 2008

8. Na figura está representado, em referencial o. n. *Oxyz*, um cubo [*OPQRSTUV*] de aresta 5. O vértice O do cubo coincide com a origem do referencial. Os vértices *P*, *R* e *S* do cubo pertencem aos semieixos positivos *Ox*, *Oy* e *Oz*, respectivamente. O triângulo escaleno [*MNQ*] é a secção produzida no cubo pelo plano α de equação $10x+15y+6z=125$



a) Escreva uma condição que defina a recta que passa por *U* e é perpendicular ao plano α

b) Seja β a amplitude, em <u>graus</u>, do ângulo *MQN*. Determine β. Apresente o resultado arredondado às unidades. Se, em cálculos intermédios, proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, três casas decimais.

<u>Sugestão</u>: comece por determinar as coordenadas dos pontos *M* e *N*

1.º Teste intermédio 2008

9. Considere, num referencial o.n. *Oxyz*, a recta *r* definida por $(x,y,z)=(1,2,3)+k(0,0,1), k\in\mathbb{R}$

Qual das condições seguintes define uma recta paralela à recta *r*?

(A) $(x,y,z)=(1,2,3)+k(0,1,0), k\in\mathbb{R}$

(B) $(x,y,z)=(0,0,1)+k(1,2,3), k\in\mathbb{R}$

(C) $x=2\wedge y=1$

(D) $x=2\wedge z=1$

2.º Teste intermédio 2008

10. Considere, num referencial o. n. *Oxyz*, a superfície esférica de equação $x^2+y^2+(z-2)^2=4$
A intersecção desta superfície com o plano *xOy* é
(A) o conjunto vazio (B) um ponto
(C) uma circunferência (D) um círculo

1.º Teste intermédio 2009

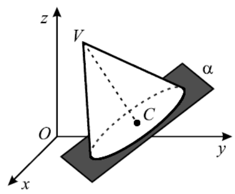
11. Considere, num referencial o. n. *xOy*, a recta *r* de equação $y=-\frac{1}{2}x+\frac{3}{5}$. Seja *s* a recta perpendicular a *r* que passa no ponto de coordenadas (1,4). Qual é a equação reduzida da recta *s*?

(A) $y=2x+2$ (B) $y=-2x+6$

(C) $y=-2x+\frac{5}{3}$ (D) $y=2x+\frac{3}{5}$

1.º Teste intermédio 2009

12. Na figura está representado, em referencial o. n. *Oxyz*, um cone de revolução. Sabe-se que:



- a base do cone está contida no plano α de equação $x+2y-2z=11$
- o vértice *V* do cone tem coordenadas (1,2,6)
- o ponto *C* é o centro da base do cone

a) Determine uma equação do plano γ que contém o vértice do cone e que é paralelo ao plano α

b) Seja β o plano definido pela equação $2x-y+z=3$. Averigúe se os planos α e β são perpendiculares.

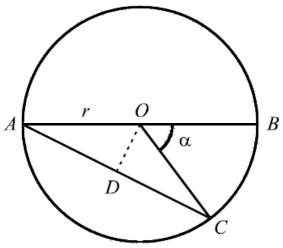
c) Seja *W* o ponto simétrico do ponto *V*, em relação ao plano *xOy*. Indique as coordenadas do ponto *W* e escreva uma condição que defina o segmento de recta [*VW*].

d) Sabendo que o raio da base do cone é igual a 3, determine o volume do cone.

<u>Sugestão</u>: comece por escrever uma condição que defina a recta que contém o vértice do cone e que é perpendicular ao plano α e utilize-a para determinar as coordenadas do ponto *C*.

1.º Teste intermédio 2009

13. Na figura está representada uma circunferência de centro *O* e raio *r*.



Sabe-se que:
• [*AB*] é um diâmetro da circunferência
• O ponto *C* pertence à circunferência
• α é a amplitude do ângulo *COB*
• [*OD*]é perpendicular a [*AC*]

Prove que_ $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 4r^2 \cos^2(\frac{\alpha}{2})$

<u>Sugestão</u>
Percorra as seguintes etapas:
• *Justifique que o triângulo [OAC]é isósceles*
• *Justifique que* $\overline{AC} = 2\overline{AD}$
• *Justifique que a amplitude do ângulo CAB é* $\frac{\alpha}{2}$
• *Escreva* $\overline{AD}$*, em função de* $\frac{\alpha}{2}$ *e de* r
• *Conclua que* $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 4r^2 \cos^2(\frac{\alpha}{2})$

1.º Teste intermédio 2009

14. Seja [*AB*] o diâmetro de uma esfera de centro *C* e raio 5. Qual é o valor do produto escalar $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB}$?
(A) –25 (B) $-5\sqrt{2}$ (C) $5\sqrt{2}$ (D) 25

2.º Teste intermédio 2009

15. Considere, num referencial o.n. *xOy*, as rectas *r* e *s*, definidas, respectivamente, por:

$r : (x, y) = (1, 3) + k(2, 0), k \in \mathbb{R}$ $\qquad s : y = \frac{4}{5}x + 1$

Qual é a amplitude, em graus, do ângulo destas duas rectas (valor arredondado às unidades)?
(A) 37° (B) 39° (C) 41° (D) 43°

1.º Teste intermédio 2010

16. Considere, num referencial o.n. *xOy*, a recta *r* e o plano α, definidos, respectivamente, por:

$r : \frac{x}{3} = \frac{y}{2} = z$ $\qquad \alpha : y - 2z = 0$

Qual é a intersecção da recta *r* com o plano α?
(A) É o ponto (3,2,0) (B) É o ponto (0,0,0)
(C) É a recta *r* (D) É o conjunto vazio.

1.º Teste intermédio 2010

17. Na figura 2, está representada, num referencial o.n. *xOy*, a circunferência de equação

$(x-3)^2 + (y-1)^2 = 25$

O ponto *C* é o centro da circunferência.

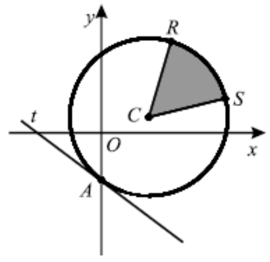


Figura 2

a) O ponto *A*, de coordenadas (0,–3), pertence à circunferência. A recta *t* é tangente à circunferência no ponto *A*. Determine a equação reduzida da recta *t*

b) *R* e *S* são dois pontos da circunferência. A área da região sombreada é $\frac{25\pi}{6}$. Determine o valor do produto escalar $\overrightarrow{CR} \cdot \overrightarrow{CS}$

1.º Teste intermédio 2010

18. Na figura 3, está representada, num referencial o.n. *Oxyz*, uma pirâmide quadrangular regular [ABCDV] cuja base está contida no plano *xOy*.

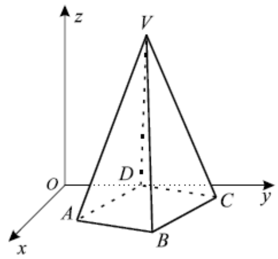


Figura 3

Sabe-se que:
• o ponto *D* pertence ao eixo *Oy*
• o ponto *A* tem coordenadas (3,2,0)
• o ponto *V* pertence ao plano de equação *z* = 6
• $6x + 18y - 5z = 54$ é uma equação do plano *DAV*
• $18x - 6y - 5z = -18$ é uma equação do plano *DCV*

a) Determine o volume da pirâmide.
b) Determine as coordenadas do ponto *V* , <u>sem recorrer à calculadora</u>.
c) Seja *S* o ponto de coordenadas (–15,8,5). Seja *r* a recta que contém o ponto *S* e é perpendicular ao plano *DCV*. Averigúe se a recta *r* contém o ponto *A*

1.º Teste intermédio 2010

19. Seja [AB] um diâmetro de uma esfera de centro C e raio 4. Qual é o valor do produto escalar $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB}$?
(A) 16 (B) –16 (C) $4\sqrt{2}$ (D) $-4\sqrt{2}$

2.º Teste intermédio 2010

20. Na figura 4, está representada, num referencial o.n. *xOy*, parte de um plano ABC. Cada um dos pontos A, B e C pertence a um eixo coordenado. O plano ABC é definido pela equação
$6x + 3y + 4z = 12$

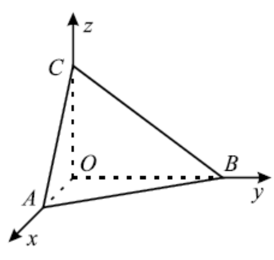


Figura 4

Seja *r* a recta que passa no ponto A e é perpendicular ao plano ABC.
Determine uma equação vectorial da recta *r*

2.º Teste intermédio 2010

21. Considere, num referencial o.n. *Oxyz*, a superfície esférica E, de equação $x^2 + y^2 + (z-2)^2 = 4$. Para um certo valor de α pertencente ao intervalo $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, o ponto P, de coordenadas (tgα,senα,2+cosα), pertence à superfície esférica E. Determine os valores numéricos das coordenadas do ponto P.

2.º Teste intermédio 2010

22. De um triângulo isósceles [ABC] sabe-se que:
• os lados iguais são [AB] e [AC], tendo cada um deles 8 unidades de comprimento;
• cada um dos dois ângulos iguais tem 30º de amplitude.
Qual é o valor do produto escalar $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$?
(A) $-32\sqrt{3}$ (B) –32 (C) 64 (D) $64\sqrt{3}$

1.º Teste intermédio 2011

23. Na Figura 3, está representada, em referencial o.n. *xOy* , a circunferência de centro em O e raio 5. Os pontos A e B são os pontos de intersecção da circunfe-rência com os semieixos positivos Ox e Oy, respectivamente. Considere que um ponto P se desloca ao longo do arco AB, nunca coincidindo com o ponto A, nem com o ponto B. Para cada posição do ponto P, sabe-se que:

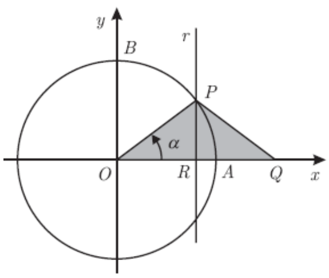


Figura 3

• o ponto Q é o ponto do eixo Ox tal que $\overline{PO} = \overline{PQ}$
• a recta r é a mediatriz do segmento [OQ]
• o ponto R é o ponto de intersecção da recta r com o eixo Ox
• α é a amplitude, em radianos, do ângulo AOP $\left(\alpha \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[\right)$

Seja *f* a função, de domínio $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, definida por
f(*x*) = 25 sen*x* cos*x*
Resolva os itens seguintes <u>sem recorrer à calculadora</u>.
a) Mostre que a área do triângulo [OPQ] é dada por *f*(α)
b) Determine o valor de α, pertencente ao intervalo $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, para o qual se tem *f* (α) = 25 cos²α
c) Seja θ um número real, pertencente ao intervalo $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$,
tal que *f* (θ) = 5. Determine o valor de $(\text{sen}\theta + \cos\theta)^2$
d) Considere agora o caso em que a abcissa do ponto P é 3. Determine a equação reduzida da recta tangente à circunferência no ponto P

1.º Teste Intermédio 2011

24. Na Figura 4, está representado, em referencial o.n. Oxyz , o poliedro [VNOPQURST], que se pode decompor num cubo e numa pirâmide quadrangular regular. Sabe-se que:

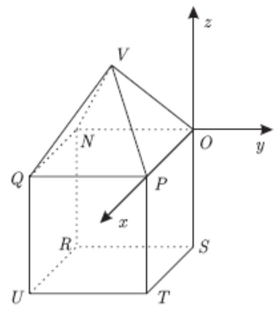


Figura 4

• a base da pirâmide coincide com a face superior do cubo e está contida no plano xOy
• o ponto P pertence ao eixo Ox
• o ponto U tem coordenadas (4, –4, –4)
• o plano QTV é definido pela equação 5x+2y+2z=12
a) Para cada um dos seguintes conjuntos de pontos, escreva uma <u>condição cartesiana</u> que o defina.
a_1) Plano paralelo ao plano QTV e que passa na origem do referencial.
a_2) Plano perpendicular à recta QN e que passa no ponto V
a_3) Recta perpendicular ao plano QTV e que passa no ponto U
a_4) Superfície esférica de centro em U e que passa no ponto T
b) Considere um ponto A, com a mesma abcissa e com a mesma ordenada do ponto U. Sabe-se que $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OT} = 8$. Determine a cota do ponto A
c) Determine o volume do poliedro [VNOPQURST]

1.º Teste Intermédio 2011

25. Na Figura 5, está representado o quadrado [ABCD]. Sabe-se que:
• o ponto I é o ponto médio do lado [DC]
• o ponto J é o ponto médio do lado [BC]
Prove que

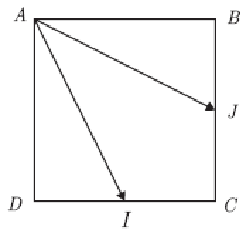


Figura 5

$$\overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{AJ} = \left\|\overrightarrow{AB}\right\|^2$$

Sugestão: comece por exprimir cada um dos vectores $\overrightarrow{AI}$ e $\overrightarrow{AJ}$ como soma de dois vectores.

1.º Teste Intermédio 2011

26. Considere, num referencial o.n. Oxyz, a recta r definida por (x, y, z) = (3, 4, 5) + k(1, 0, 0), k $\in\mathbb{R}$.

Qual das condições seguintes define uma recta paralela à recta r?

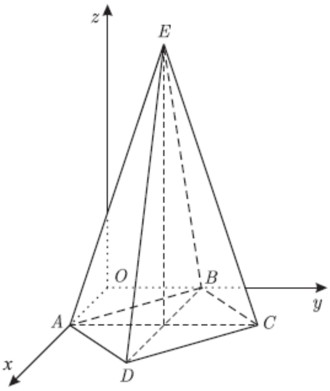
(A) $y=5 \wedge z=6$ (B) $x=3 \wedge y=4$

(C) $(x,y,z)=(1,0,0)+k(3,4,5), k \in \mathbb{R}$

(D) $(x,y,z)=(3,4,5)+k(0,1,0), k \in \mathbb{R}$

2.º Teste Intermédio 2011

27. Na figura, está representada, num referencial o.n. Oxyz, uma pirâmide quadrangular regular [ABCDE] cuja base está contida no plano xOy.



Sabe-se que:

• o vértice A tem coordenadas (1,0,0)
• o vértice B tem coordenadas (0,1,0)
• o plano DCE é perpendicular à recta definida pela condição $\frac{x}{3}=\frac{y}{3}=z$. Determine o volume da pirâmide.

Nota – Pode ser-lhe útil determinar uma equação do plano DCE

2.º Teste Intermédio 2011

28. Num referencial o.n. xOy, considere a circunferência definida por $x^2 + y^2 = 5$. A reta r é tangente à circunferência no ponto de coordenadas (1, 2). Qual é o declive da reta r ?

(A) –2 (B) $-\frac{1}{2}$ (C) $\frac{1}{2}$ (D) 2

Teste Intermédio 2012

29. Seja *a* um número real. Considere, num referencial o.n. Oxyz, a reta s e o plano β definidos, respetivamente, por $(x,y,z)=(-1,0,3)+k(1,1,-1), k \in \mathbb{R}$ e $3x + 3y + az = 1$.

Sabe-se que a reta s é paralela ao plano β. Qual é o valor de *a* ?

(A) –3 (B) 1 (C) 3 (D) 6

Teste Intermédio 2012

30. Na Figura 4, está representada, num referencial o.n. Oxyz , a pirâmide quadrangular regular [ABCDE]

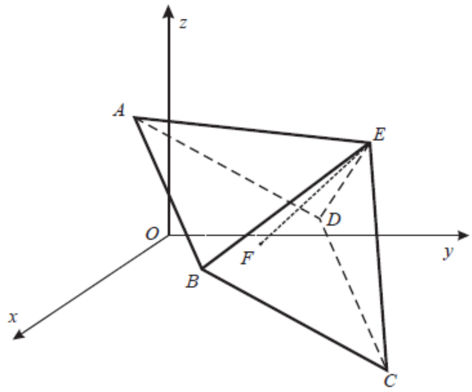


Figura 4

Seja F o centro da base da pirâmide. Sabe-se que:

• o ponto F tem coordenadas (–2,1,–1)
• o vetor $\overrightarrow{FE}$ tem coordenadas (–1,2,2)
• a reta EA é definida pela condição $(x,y,z)=(-3,3,1)+k(1,-5,1), k \in \mathbb{R}$

a) Escreva uma condição cartesiana que defina a reta EA

Nota – Não necessita de apresentar cálculos.

b) Mostre que o plano ABC pode ser definido pela equação x - 2y - 2z + 2 = 0

c) Sabe-se que a condição $\begin{cases} x-y=-6 \\ y-z=2 \end{cases}$ define a reta ED. Determine, sem recorrer à calculadora, as coordenadas do ponto D.

Teste Intermédio 201

31. No referencial o.n. xOy da Figura 6, estão representados o quadrado [OABC] e o retângulo [OPQR]. Os pontos A e P pertencem ao semieixo positivo Ox e os pontos C e R pertencem ao semieixo positivo Oy. O ponto Q pertence ao interior do quadrado [OABC].

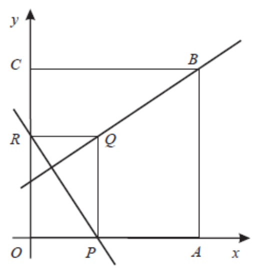


Figura 6

Sabe-se que:

• $\overline{OA}=a$
• $\overline{OP}=b$
• $\overline{RC}=b$

Prove que as retas QB e RP são perpendiculares.

Teste Intermédio 2012

32. Num referencial o.n. Oxyz, considere um ponto P que tem ordenada igual a -4 e cota igual a 1. Considere também o vetor $\vec{u}$ de coordenadas (2, 3,

6). Sabe-se que os vetores $\overrightarrow{OP}$ e $\vec{u}$ são perpendiculares. Qual é a abcissa do ponto P ?
(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4

Teste Intermédio 2013

33. Considere, num referencial o.n. Oxyz, a reta definida por $\begin{cases} x = y \\ z = 2 \end{cases}$. Qual das equações seguintes define um plano perpendicular a esta reta?
(A) $x + y - z = 5$ (B) $x + y + 2z = 5$
(C) $x - y = 5$ (D) $x + y = 5$

Teste Intermédio 2013

34. Na Figura 2, está representado, num referencial o.n. Oxyz , o cubo [ABCDEFGH] (o ponto E não está representado na figura).

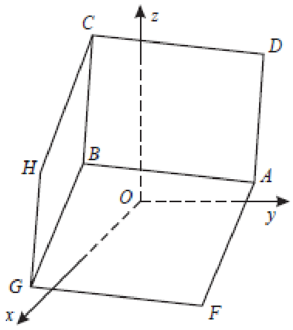


Figura 2

Sabe-se que:
- o ponto F tem coordenadas (1, 3,–4)
- o vetor $\overrightarrow{FA}$ tem coordenadas (2,3,6)

a) Escreva uma condição cartesiana que defina cada um dos seguintes conjuntos de pontos.
a1) Plano FGH
a2) Reta AF
a3) Superfície esférica de centro no ponto F à qual pertence o ponto G.
b) Sabe-se ainda que a equação $6x + 2y - 3z + 25 = 0$ define o plano HCD. Determine, sem recorrer à calculadora, as coordenadas do ponto E (vértice do cubo, não representado na figura).

Teste Intermédio 2013

35. Na Figura 4, está representado um quadrado [ABCD] de lado igual a 4. Admita que o ponto E pertence ao segmento [AB] e que o triângulo [ADE] tem área igual a 6. Determine o valor exato de $\overrightarrow{ED} \cdot \overrightarrow{DC}$, sem recorrer à calculadora.

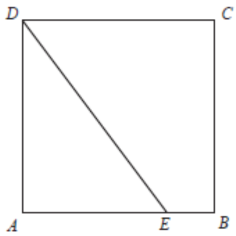


Figura 4

Teste Intermédio 2013

36. Na Figura 4, está representada, num referencial o.n. Oxyz, parte do plano ABC, de equação $x + y + 2z = 12$

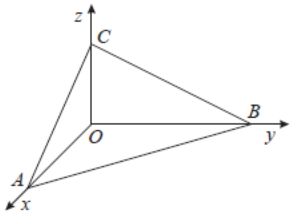


Figura 4

Tal como a figura sugere, A, B e C são os pontos de intersecção deste plano com os eixos coordenados.

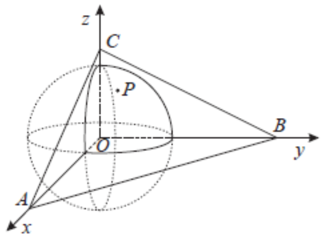


Figura 5

a) Determine uma equação cartesiana do plano que passa no ponto D(1,2,3) e é paralelo ao plano ABC
b) Seja M o ponto médio do segmento de reta [AC]. Determine uma condição cartesiana da reta MB
c) O plano ABC é tangente, num ponto P, a uma esfera centrada na origem do referencial, tal como se ilustra na Figura 5.
Determine o valor exato do volume dessa esfera.
Nota: Tenha em conta que a reta OP é perpendicular ao plano ABC

Teste Intermédio 2014

37. Na Figura 6, está representado um triângulo equilátero [ABC]. Seja *a* o comprimento de cada um dos lados do triângulo. Seja M o ponto médio do lado [BC]. Mostre que

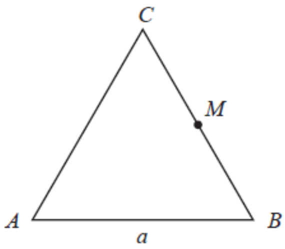


Figura 6

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AM} = \frac{3a^2}{4}$$

Teste Intermédio 2014

38. Na Figura 3, está representada, num referencial o.n. Oxyz, uma pirâmide quadrangular regular [ABCDV], cuja base está contida no plano xOy e cujo vértice V tem cota positiva. O ponto P é o centro da base da pirâmide. Admita que:

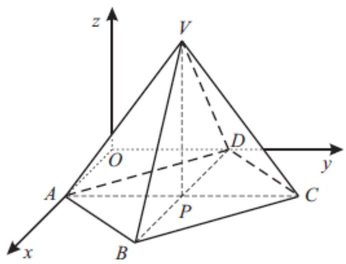


Figura 3

- $\overline{AV} = 10$

• o vértice A pertence ao eixo Ox e tem abcissa igual a 6
• o vértice V tem abcissa e ordenada iguais a 6
a) Mostre que o vértice V tem cota igual a 8
b) Seja M o ponto médio da aresta [BV]. Determine uma condição cartesiana que defina a reta CM
c) Determine uma equação cartesiana do plano que passa no ponto P e que é perpendicular à aresta [DV]

2.º Teste Intermédio de 12.º - 2014

39. Considere, num referencial o.n. Oxyz, o plano α, definido por 4x − z + 1 = 0. Seja r uma reta perpendicular ao plano α. Qual das condições seguintes pode definir a reta r ?

(A) $\frac{x}{4} = y \wedge z = -1$ (B) $x = 4 \wedge z = -1$

(C) $x - 3 = \frac{z}{4} \wedge y = 0$ (D) $\frac{x-3}{4} = -z \wedge y = 1$

(Exame de Matemática A 1.ª fase - 2014

40. Na Figura 4, está representado, num referencial o.n. Oxyz, o cubo [OABCDEFG], de aresta 3

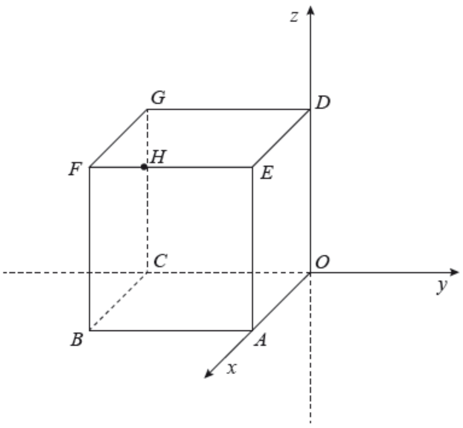


Figura 4

Sabe-se que:
• o ponto A pertence ao semieixo positivo Ox
• o ponto C pertence ao semieixo negativo Oy
• o ponto D pertence ao semieixo positivo Oz
• o ponto H tem coordenadas (3, –2, 3)

Seja α a amplitude, em radianos, do ângulo AHC.
Determine o valor exato de $\text{sen}^2\alpha$, sem utilizar a calculadora.

Exame de Matemática A 1.ª fase - 2014

41. Considere, num referencial o.n. Oxyz, o ponto A, de coordenadas (1, 0, 3), e o plano α, definido por 3x + 2y − 4 = 0. Seja β um plano perpendicular ao plano α e que passa pelo ponto A. Qual das condições seguintes pode definir o plano β ?

(A) 3x + 2y − 3 = 0 (B) 2x − 3y − z + 1 = 0
(C) 2x − 3y + z = 0 (D) 3x + 2y = 0

Exame de Matemática A 2.ª fase - 2014

42. Na Figura 4, está representado um pentágono regular [ABCDE]. Sabe-se que $\overline{AB} = 1$. Mostre que

$$\frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}}{\|\overrightarrow{AD}\|} = 1 - 2\,\text{sen}^2\left(\frac{\pi}{5}\right)$$

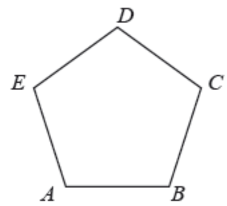


Figura 4

Nota: use a igualdade $\cos(2\alpha)=\cos^2(\alpha)-\text{sen}^2(\alpha)$

Adaptado do Exame de Matemática A 2.ª fase - 2014

43. Considere, num referencial o.n. Oxyz, o ponto A, de coordenadas (2,0,3), e o plano α, definido por x − y − 2z = 3. Seja r a reta perpendicular ao plano α que passa pelo ponto A. Qual das condições seguintes pode definir a reta r ?

(A) x + 2 = z + 1 ∧ y = 0 (B) $-x + 5 = y + 3 = \frac{z+3}{2}$

(C) $\frac{x-1}{2} = \frac{z+2}{3} \wedge y = -1$ (D) x − 2 = − y = z − 3

Exame de Matemática A fase especial - 2014

44. Na Figura 3, está representada, num referencial o.n. Oxyz, a pirâmide [ABCOD]. Sabe-se que:
• o ponto A pertence ao semieixo positivo Ox
• os pontos A e B têm igual abcissa;
• o ponto B pertence ao plano xOy e tem ordenada –3

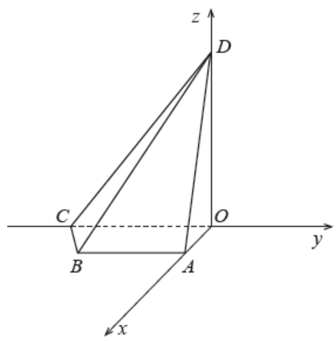


Figura 3

• o ponto C pertence ao semieixo negativo Oy
• o ponto D pertence ao semieixo positivo Oz
• a reta AD é definida por $\frac{x-3}{3} = -\frac{z}{5} \wedge y = 0$
• $\left\|\overrightarrow{CD}\right\|^2 = 41$

Determine as coordenadas de um vetor normal ao plano que contém a face [BCD], recorrendo a métodos analíticos, sem utilizar a calculadora.

Exame de Matemática A fase especial - 2014

45. Na Figura 2, está representado, num referencial o.n. xOy , um triângulo equilátero [ABC]. Sabe-se que:

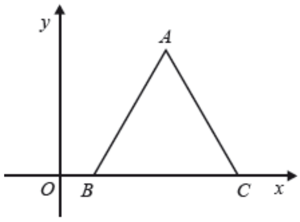


Figura 2

• o ponto A tem ordenada positiva;
• os pontos B e C pertencem ao eixo Ox
• o ponto B tem abcissa 1 e o ponto C tem abcissa maior do que 1. Qual é a equação reduzida da reta AB ?

(A) $y=\sqrt{2}x-\sqrt{2}$ **(B)** $y=\sqrt{2}x+\sqrt{2}$

(C) $y=\sqrt{3}x+\sqrt{3}$ **(D)** $y=\sqrt{3}x-\sqrt{3}$

Exame de Matemática A 1.ª fase - 2015

46. Considere, num referencial o.n. Oxyz, os pontos A(0,0,2) e B(4,0,0)
a) Considere o plano α de equação $x - 2y + z + 3 = 0$. Escreva uma equação do plano que passa no ponto A e é paralelo ao plano α
b) Determine uma equação cartesiana que defina a superfície esférica da qual o segmento de reta [AB] é um diâmetro.
c) Seja P o ponto pertencente ao plano xOy tal que:
• a sua abcissa é igual à abcissa do ponto B
• a sua ordenada é positiva;
• $B\hat{A}P = \frac{\pi}{3}$
Determine a ordenada do ponto P

Exame de Matemática A 1.ª fase - 2015

47. Considere, num referencial o.n. xOy , a circunferência definida pela equação $x^2 + (y - 1)^2 = 2$. Esta circunferência intersecta o eixo Ox em dois pontos. Destes pontos, seja A o que tem abcissa positiva. Seja r a reta tangente à circunferência no ponto A. Qual é a equação reduzida da reta r ?
(A) $y = x + 1$ (B) $y = x - 1$
(C) $y = 2x + 2$ (D) $y = 2x - 2$

Exame de Matemática A 2.ª fase - 2015

48. Na Figura 3, está representado, num referencial o.n. Oxyz, o poliedro [NOPQRSTUV] que se pode decompor num cubo e numa pirâmide quadrangular regular. Sabe-se que:
• o vértice P pertence ao eixo Ox
• o vértice N pertence ao eixo Oy
• o vértice T pertence ao eixo Oz
• o vértice R tem coordenadas (2, 2, 2)
• o plano PQV é definido pela equação $6x + z - 12 = 0$

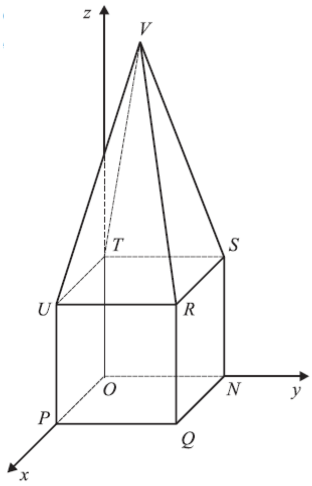


Figura 3

a) Determine as coordenadas do ponto V
b) Escreva uma equação cartesiana do plano que passa no ponto P e é perpendicular à reta OR
c) Seja A um ponto pertencente ao plano QRS
Sabe-se que:
• o ponto A tem cota igual ao cubo da abcissa;
• os vetores $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{TQ}$ são perpendiculares.
Determine a abcissa do ponto A, recorrendo à calculadora gráfica. Na sua resposta:
• equacione o problema;
• reproduza, num referencial, o(s) gráfico(s) da(s) função(ões) que visualizar na calculadora e que lhe permite(m) resolver a equação, devidamente identificado(s) (sugere-se a utilização da janela de visualização em que $x \in [-4, 4]$ e $y \in [-2, 7]$);
• apresente a abcissa do ponto A arredondada às centésimas.

Exame de Matemática A 2.ª fase - 2015

49. Os segmentos de reta [AB] e [BC] são lados consecutivos de um hexágono regular de perímetro 12. Qual é o valor do produto escalar $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}$?
(A) –3 (B) –2 (C) 2 (D) 3

Exame de Matemática A fase especial - 2015

50. Considere, num referencial o.n. Oxyz, o plano β definido pela condição $2x - y + z - 4 = 0$
a) Considere o ponto $P(-2,1, 3a)$, sendo a um certo número real. Sabe-se que a reta OP é perpendicular ao plano β, sendo O a origem do referencial. Determine o valor de a
b) Considere o ponto A(1, 2, 3). Seja B o ponto de intersecção do plano β com o eixo Ox. Seja C o simétrico do ponto B relativamente ao plano yOz. Determine a amplitude do ângulo BAC. Apresente o resultado em graus, arredondado às unidades.

c) Determine uma equação da superfície esférica de centro na origem do referencial, que é tangente ao plano β. Na resolução deste item, tenha em conta que o raio relativo ao ponto de tangência é perpendicular ao plano β

Exame de Matemática A fase especial - 2015

51. Na Figura 2, está representado um triângulo isósceles [ABC]. Sabe-se que:

- $\overline{AB} = \overline{BC} = \sqrt{2}$
- $B\hat{A}C = 75°$

Qual é o valor do produto escalar $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}$?

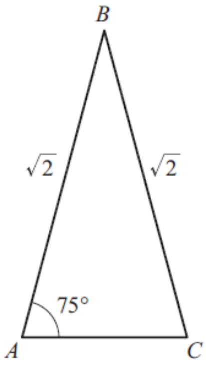


Figura 2

(A) $\sqrt{2}$

(B) $2\sqrt{2}$

(C) $\sqrt{3}$

(D) $2\sqrt{3}$

Exame de Matemática A 1.ª fase - 2016

52. Na Figura 3, está representada, num referencial o.n. Oxyz , uma pirâmide quadrangular regular [ABCDV]. Sabe-se que:

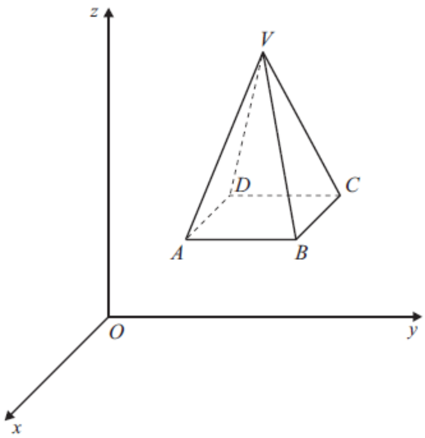


Figura 3

- a base [ABCD] da pirâmide é paralela ao plano xOy
- o ponto A tem coordenadas $(-1,1,1)$
- o ponto C tem coordenadas $(-3,3,1)$
- o plano BCV é definido pela equação $3y+z-10=0$

a) Escreva uma condição que defina a superfície esférica de centro no ponto A e que é tangente ao plano xOy

b) Determine as coordenadas do ponto V

c) Seja α o plano perpendicular à reta AC e que passa no ponto P(1,-2,-1). A intersecção dos planos α e BCV é uma reta. Escreva uma equação vetorial dessa reta.

Exame de Matemática A 1.ª fase - 2016

53. Considere, num referencial o.n. xOy, o quadrado definido pela condição $0 \le x \le 4 \wedge 1 \le y \le 5$. Qual das condições seguintes define a circunferência inscrita neste quadrado?

(A) $(x-4)^2+(y-5)^2=16$ (B) $(x-4)^2+(y-5)^2=4$

(C) $(x-2)^2+(y-3)^2=4$ (D) $(x-2)^2+(y-3)^2=16$

Exame de Matemática A 2.ª fase - 2016

54. Considere, num referencial o.n. Oxyz, o plano α definido pela equação $3x+2y+4z-12=0$

a) Seja C o ponto de coordenadas (2,1,4). Escreva uma equação vetorial da reta perpendicular ao plano α que passa no ponto C

b) Seja D o ponto de coordenadas (4,2,2). Determine as coordenadas do ponto de intersecção da reta OD com o plano α

c) Sejam A e B os pontos pertencentes ao plano α, tais que A pertence ao semieixo positivo Ox e B pertence ao semieixo positivo Oy. Seja P um ponto com cota diferente de zero e que pertence ao eixo Oz. Justifique, recorrendo ao produto escalar de vetores, que o ângulo APB é agudo.

Exame de Matemática A 2.ª fase - 2016

55. Considere, num referencial o.n. xOy, os pontos A(-1,3) e B(2,4). Qual das seguintes equações define uma reta paralela à reta AB ?

(A) $y=-\frac{1}{3}x$ (B) $y=\frac{1}{3}x$ (C) $y=3x$ (D) $y=-3x$

(Exame de Matemática A fase especial - 2016)

56. Na Figura 2, está representado, num referencial o.n. Oxyz, o prisma quadrangular regular [OABCDEFG]. Sabe-se que:

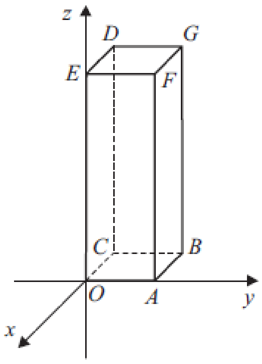


Figura 2

- os pontos C, A e E pertencem aos eixos coordenados Ox, Oy e Oz, respetivamente;
- o ponto A tem coordenadas (0,2,0)
- o plano OFB é definido pela equação $3x+3y-z=0$

a) Determine uma equação do plano paralelo ao plano
OFB que passa no ponto D

b) Defina a reta OB por uma condição cartesiana.

c) Seja P o ponto de cota igual a 1 que pertence à aresta [BG]. Seja R o simétrico do ponto P relativamente à origem. Determine a amplitude do ângulo RAP. Apresente o resultado em graus, arredondado às unidades.
Se, em cálculos intermédios, proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, duas casas decimais.

Exame de Matemática A fase especial - 2016

57. Considere, num referencial o.n. xOy, uma reta r de inclinação α. Sabe-se que $\cos\alpha = -\frac{1}{\sqrt{5}}$. Qual pode ser a equação reduzida da reta r ?
(A) y = −5x (B) y = 4x (C) y = −2x (D) y = 3x

Exame de Matemática A 1.ª fase - 2017

58. Na Figura 2, está representado, num referencial o.n. Oxyz, o prisma quadrangular regular [OPQRSTUV].

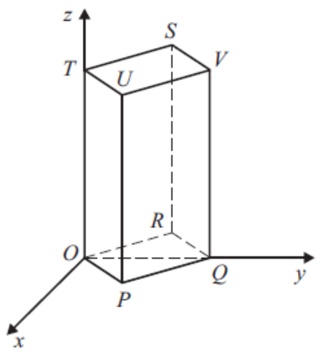


Figura 2

Sabe-se que:
• a face [OPQR] está contida no plano xOy
• o vértice Q pertence ao eixo Oy e o vértice T pertence ao eixo Oz
• o plano STU tem equação z = 3

a) Seja T’ o simétrico do ponto T , relativamente à origem do referencial. Escreva uma equação da superfície esférica de diâmetro [TT’]
b) Determine o valor do produto escalar $\overrightarrow{UP} \cdot \overrightarrow{RS}$
c) Uma equação do plano PQV é x + y = 2. Determine uma condição cartesiana que defina a reta TQ

Exame de Matemática A 1.ª fase - 2017

59. Considere, num referencial o.n. xOy, a região definida pela condição

$$(x+1)^2 + (y+1)^2 \leq 1 \quad \wedge \quad x + y + 2 \geq 0$$

Qual é o perímetro dessa região?
(A) π + 1 (B) $\frac{\pi}{2} + 1$ (C) π + 2 (D) $\frac{\pi}{2} + 2$

Exame de Matemática A 2.ª fase - 2017

60. Na Figura 3, está representado, num referencial o.n. Oxyz, o cubo [ABCDEFGH]

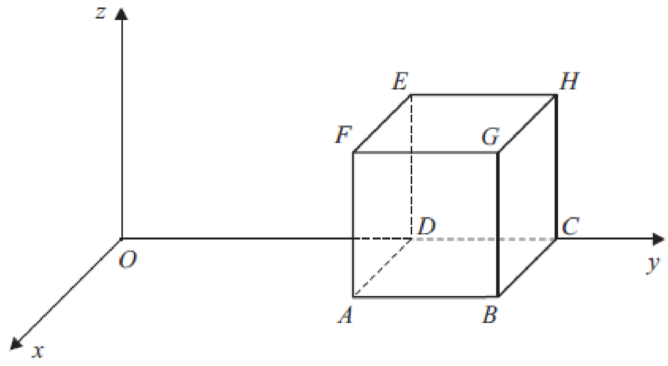


Figura 3

Sabe-se que:
• a face [ABCD] está contida no plano xOy
• a aresta [CD] está contida no eixo Oy
• o ponto D tem coordenadas (0, 4, 0)
• o plano ACG é definido pela equação x + y − z − 6 = 0

a) Verifique que o vértice A tem abcissa igual a 2
b) Seja r a reta definida pela condição x − 1 = 1 − y = z. Determine as coordenadas do ponto de intersecção da reta r com o plano ACG
c) Seja P o vértice de uma pirâmide regular de base [EFGH]. Sabe-se que:
• a cota do ponto P é superior a 2
• o volume da pirâmide é 4

Determine a amplitude do ângulo OGP. Apresente o resultado em graus, arredondado às unidades. Se, em cálculos intermédios, proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, duas casas decimais.

Exame de Matemática A 2.ª fase - 2017

61. Considere, num referencial o.n. xOy, dois pontos distintos, R e S. Seja A o conjunto dos pontos P desse plano que verificam a condição $\overrightarrow{PR} \cdot \overrightarrow{PS} = 0$. Qual das seguintes afirmações é verdadeira?
(A) O conjunto A é a mediatriz do segmento de reta [RS]
(B) O conjunto A é o segmento de reta [RS]
(C) O conjunto A é o triângulo [ROS]
(D) O conjunto A é a circunferência de diâmetro [RS]

Exame de Matemática A fase especial - 2017

62. Na Figura 3, está representado, num referencial o.n. Oxyz, um cilindro de revolução de altura 3

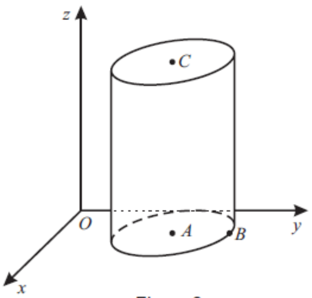


Figura 3

Sabe-se que:

• o ponto A tem coordenadas (1, 2, 0) e é o centro da base inferior do cilindro, a qual está contida no plano xOy

• o ponto B tem coordenadas (1, 3, 0) e pertence à circunferência que delimita a base inferior do cilindro;

• o ponto C é o centro da base superior do cilindro.

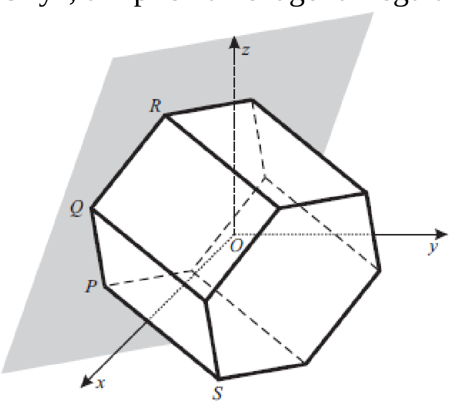
a) Determine a área da secção produzida no cilindro pelo plano de equação x = 1

b) Determine as coordenadas do ponto de intersecção da reta BC com o plano xOz

c) Seja α o plano que passa no ponto A e que é perpendicular à reta r definida pela condição x = y = 1 − z. Seja P o ponto desse plano de abcissa e ordenada iguais a 2. Determine a amplitude do ângulo POC. Apresente o resultado em graus, arredondado às unidades. Se, em cálculos intermédios, proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, duas casas decimais.

Exame de Matemática A fase especial - 2017

63. Na figura, está representado, num referencial o.n. Oxyz, um prisma hexagonal regular.



Sabe-se que:

• [PQ] e [QR] são arestas de uma das bases do prisma;

• $\overline{PQ} = 4$

a) Determine o produto escalar $\overrightarrow{QP} \cdot \overrightarrow{QR}$

b) Sabe-se ainda que:

• o plano PQR tem equação 2x + 3y − z − 15 = 0

• uma das arestas laterais do prisma é o segmento de reta [PS], em que S é o ponto de coordenadas (14,5,0). Determine a área lateral do prisma. Apresente o resultado arredondado às décimas. Se, em cálculos intermédios, proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, três casas decimais.

Exame de Matemática A 1.ª fase - 2018

64. Considere, num referencial o.n. Oxyz, a superfície esférica de equação

$$(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z+1)^2 = 10$$

a) Seja P o ponto da superfície esférica de abcissa 1, ordenada 3 e cota negativa. Seja r a reta de equação vetorial $(x,y,z) = (-1,0,3) + k(4,1,-2),\ k \in \mathbb{R}$

Determine uma equação do plano que passa no ponto P e é perpendicular à reta r. Apresente essa equação na forma ax + by + cz + d = 0.

b) Seja C o centro da superfície esférica e seja A o simétrico do ponto C relativamente ao plano xOy. Determine a amplitude do ângulo AOC. Apresente o resultado em graus, arredondado às unidades. Se, em cálculos intermédios, proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, duas casas decimais.

Exame de Matemática A 2.ª fase - 2018

65. Considere, num referencial o.n. xOy, a circunferência centrada na origem do referencial e que passa no ponto A(2,1). Seja r a reta tangente à circunferência no ponto A. Qual é a ordenada na origem da reta r ?

(A) 4 (B) 5 (C) 6 (D) 7

Exame de Matemática A 2.ª fase - 2018

66. Considere, num referencial o.n. Oxyz, a superfície esférica de equação $x^2 + y^2 + z^2 = 3$ e o ponto P de coordenadas (1,1,1), pertencente a essa superfície esférica.

a) Seja $\vec{u} = -2\overrightarrow{OP}$ e seja $Q = P + \vec{u}$. Determine as coordenadas do ponto Q e refira, no contexto do problema, o significado de [PQ]

b) Seja R o ponto de intersecção da superfície esférica com o semieixo negativo das ordenadas. Determine a amplitude do ângulo ROP. Apresente o resultado em graus, arredondado às unidades.

Exame de Matemática A fase especial - 2018

67. Para um certo número real *a*, diferente de zero, são paralelas as retas r e s, definidas, num referencial

o.n. xOy, pelas condições r: $ax + 2y + 1 = 0$ e s: $(x,y) = (1,1) + k(a\ ,\ 2a)$, $k\in\mathbb{R}$. Qual é o valor de a ?

(A) −4 (B) 2 (C) −2 (D) 4

68. Seja m um número real pertencente ao intervalo]0,1[, e seja a um número real positivo. Na Figura 4, estão representadas as retas r e s, que passam na origem do referencial e que têm declives m e $\frac{1}{m}$, respetivamente. Estão também representados os pontos P e Q, pertencentes ao primeiro quadrante. O ponto P pertence à reta r, e o ponto Q pertence à reta s. Sabe-se que o ponto P tem abcissa a e que $\overline{OP} = \overline{OQ}$. Mostre que a área do triângulo [OPQ] é dada por $\frac{a^2}{2}(1-m^2)$

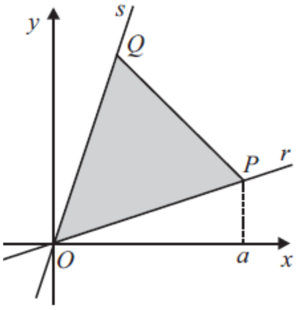


Figura 4

Exame de Matemática A fase especial - 2018

69. Na figura, está representada, num referencial o.n. Oxyz, uma pirâmide quadrangular regular [ABCDV].

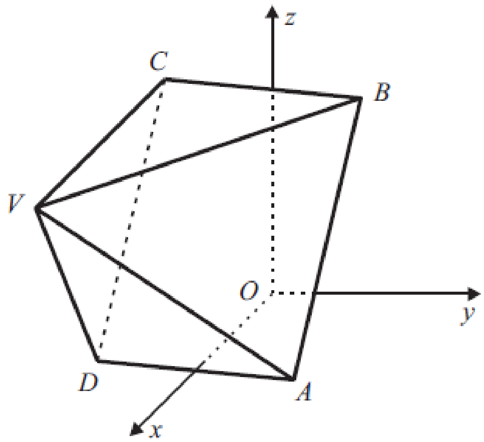


Figura 1

Os vértices A e C têm coordenadas (2,1,0) e (0,−1,2), respetivamente. O vértice V tem coordenadas (3,−1,2).

a) Determine a amplitude do ângulo VAC. Apresente o resultado em graus, arredondado às unidades. Se, em cálculos intermédios, proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, duas casas decimais.

b) Determine uma equação do plano que contém a base da pirâmide. Apresente essa equação na forma ax+ by + cz + d = 0.

Exame de Matemática A 1.ª fase - 2019

70. Na Figura 1, está representado, num referencial o.n. Oxyz, um paralelepípedo retângulo [ABCDEFGH].

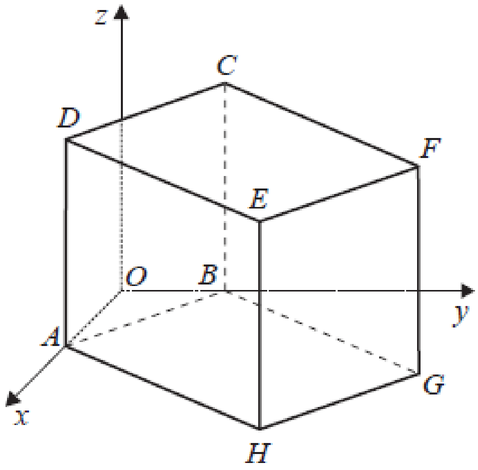


Figura 1

Sabe-se que:

• o vértice A pertence ao eixo Ox e o vértice B pertence ao eixo Oy

• o vértice C tem coordenadas (0,3,6) e o vértice G tem coordenadas (6,11,0)

• o plano ABC é definido pela equação 3x+ 4y-12=0

a) Determine o volume do paralelepípedo [ABCDEFGH].

b) Seja P o ponto de coordenadas (1,− 4,3), e seja r a reta que passa pelo ponto P e é perpendicular ao plano ABC. Determine as coordenadas do ponto de intersecção da reta r com o plano ABC.

Exame de Matemática A 2.ª fase - 2019

71. Considere, num referencial o.n. Oxyz,

• o plano α de equação $2x + 3y - z - 9 = 0$;

• a reta r, de equação vetorial $(x,y,z) = (1,2,1) + k(0,1,5),\ k\in\mathbb{R}$.

a) Seja A o ponto da reta r cuja ordenada é igual a 4. Determine uma equação do plano que é paralelo ao plano α e que passa pelo ponto A. Apresente essa equação na forma $ax + by + cz + d = 0$

b) Seja P o ponto de interseção da reta r com o plano α. Determine as coordenadas do ponto P.

Exame de Matemática A fase especial - 2019

72. Na Figura 1, está representado, num referencial o.n. Oxyz, um cilindro reto.

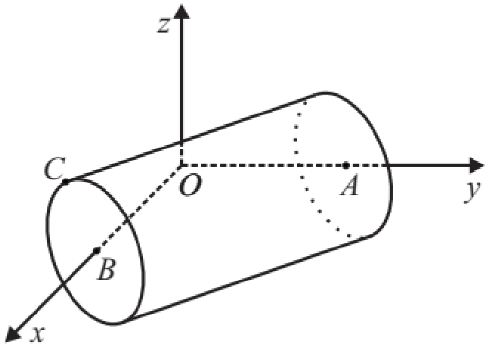


Figura 1

Sabe-se que:

- o ponto A pertence ao eixo Oy e é o centro de uma das bases do cilindro, e o ponto B pertence ao eixo Ox e é o centro da outra base;
- o ponto C pertence à circunferência de centro B que delimita uma das bases do cilindro;
- o plano ABC é definido pela equação 3x+4y+4z-12=0. Resolva os itens a) e b) sem recorrer à calculadora.

a) Determine $\overline{BC}$, sabendo que o volume do cilindro é igual a 10π.

b) Seja P o ponto de coordenadas (3,5,6). Determine as coordenadas do ponto do plano ABC que se encontra mais próximo do ponto P

Exame de Matemática A 1.ª fase - 2020

73. Na Figura 2, estão representados, num referencial o.n. xOy, os pontos S, T e U e a reta r de equação y=2x+4. Sabe-se que:

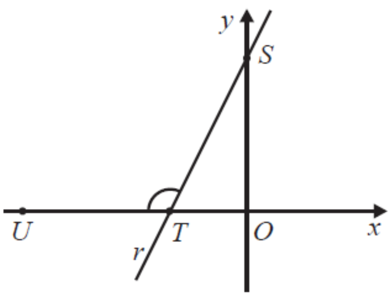


Figura 2

- os pontos S e T são, respetivamente, os pontos de intersecção da reta r com os eixos Oy e Ox
- o ponto U pertence ao eixo Ox e tem abcissa inferior à do ponto T

Qual dos valores seguintes é o valor, aproximado às centésimas, da amplitude, em radianos, do ângulo STU?

(A) 4,25 (B) 2,68 (C) 2,03 (D) 1,82

Exame de Matemática A 1.ª fase - 2020

74. Na Figura 1, está representado, num referencial o.n. Oxyz, o cubo [ABCDEFGH] (o ponto H não está representado na figura). Sabe-se que:

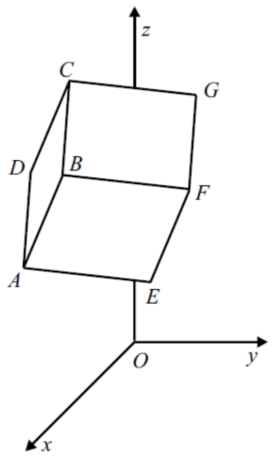


Figura 1

- o ponto A tem coordenadas (7,1,4)
- o ponto G tem coordenadas (5,3,6)
- a reta AE é definida pela equação vetorial (x,y,z)=(7,1,4)-k(3,-6,2), k∈ℝ. Resolva os itens a) e b) sem recorrer à calculadora.

a) Determine uma equação do plano EFG. Apresente essa equação na forma ax+by+ cz+d=0.

b) Determine a equação reduzida da superfície esférica que passa nos oito vértices do cubo.

Exame de Matemática A 2.ª fase - 2020

75. Na Figura 1, está representado, num referencial o.n. Oxyz, um cubo [ABCDEFGH] em que cada aresta é paralela a um dos eixos coordenados. Sabe-se que:

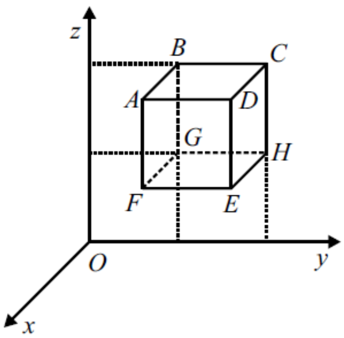


Figura 1

- o vértice B tem coordenadas (0, 2, 4)
- o vetor BE tem coordenadas (2, 2, −2)
- a aresta [BG] é paralela ao eixo Oz

a) Determine a amplitude do ângulo OBE. Apresente o resultado em graus, arredondado às unidades. Se, em cálculos intermédios, proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, três casas decimais.

b) Seja α o plano que passa por G e é perpendicular à reta OE. Sejam P, Q e R os pontos de α que pertencem aos eixos coordenados. Determine o volume da pirâmide [OPQR].

Exame de Matemática A fase especial - 2020

76. Na Figura 2, está representado, num referencial o.n. xOy, um hexágono regular [MNPQRS] centrado na origem.

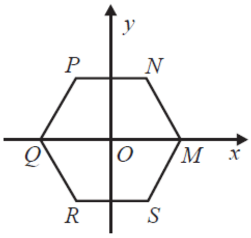


Figura 2

Sabe-se que o vértice M tem coordenadas (1,0) e que o vértice N pertence ao primeiro quadrante. Qual é a equação reduzida da reta MN?

(A) $y=-\sqrt{3}\,x+\sqrt{3}$ **(B)** $y=-\sqrt{3}\,x+\sqrt{6}$

(C) $y=-x+2$ **(D)** $y=-x+1$

Exame de Matemática A fase especial - 2020

77. Na Figura 1, está representado, num referencial o.n. Oxyz, um paralelepípedo retângulo [ABCDEFGH].
Sabe-se que:
- o vértice A pertence ao eixo Ox e o vértice B pertence ao eixo Oy
- as coordenadas dos vértices E e G são (7, 2,15) e (6,10,13), respetivamente;
- a reta EF é definida pela equação

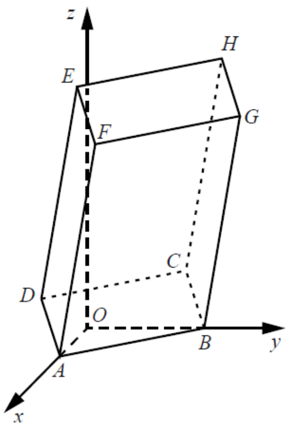


Figura 1

(x, y, z)=(1,-2,19)+ k(-3,-2, 2), k∈ ℝ

a) Qual das equações seguintes define uma reta perpendicular à reta EF e que passa no ponto E?

(A) $(x,\,y,\,z)=(7,-3,3)+k(2,-3,0),\ \ k\in\mathbb{R}$

(B) $(x,\,y,\,z)=(7,2,15)+k(0,3,-3),\ \ k\in\mathbb{R}$

(C) $(x,\,y,\,z)=(7,-10,3)+k(0,3,3),\ \ k\in\mathbb{R}$

(D) $(x,\,y,\,z)=(7,2,15)+k(2,0,-3),\ \ k\in\mathbb{R}$

b) Determine, sem recorrer à calculadora, a equação reduzida da superfície esférica de centro no ponto B e que passa no ponto D.

Exame de Matemática A 1.ª fase - 2021

78. Na Figura 1, está representado, num referencial o.n. Oxyz, um trapézio [PQRS], de bases [PQ] e [RS], em que o lado [PS] é perpendicular às bases. Tem-se P(1,−1,2), Q(−2,1,1) e R(−5, 5, −3).

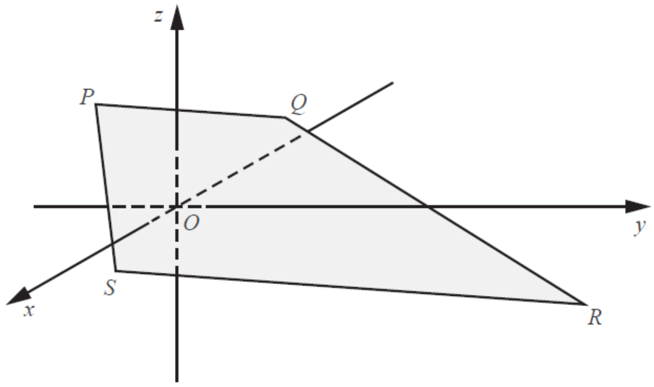


Figura 1

a) Qual das condições seguintes define a superfície esférica de centro no ponto R e que passa no ponto Q?

(A) $(x-5)^2+(y+5)^2+(z-3)^2=59$

(B) $(x-5)^2+(y+5)^2+(z-3)^2=41$

(C) $(x+5)^2+(y-5)^2+(z+3)^2=41$

(D) $(x+5)^2+(y-5)^2+(z+3)^2=59$

b) Determine uma equação do plano perpendicular à reta RS e que passa no ponto P Apresente essa equação na forma ax+by+cz +d = 0.

Exame de Matemática A 2.ª fase - 2021

79. Na Figura 1, está representada, num referencial o.n. Oxyz, a pirâmide regular de base quadrada [ABCD] e vértice E.

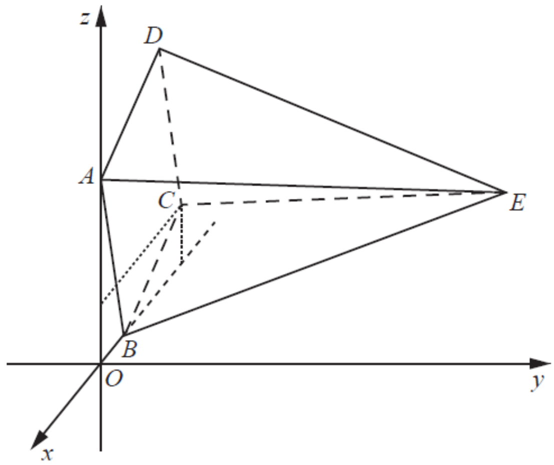


Figura 1

Sabe-se que:
- a base da pirâmide está contida no plano xOz
- o vértice A pertence ao semieixo positivo Oz e o vértice B pertence ao semieixo negativo Ox
- o vértice E tem coordenadas (−2, 6, 2)
- o vetor $\overrightarrow{BE}$ tem coordenadas (−1, 6, 2)
- o volume da pirâmide é 20

a) Seja α o plano perpendicular à reta BE e que passa no ponto de coordenadas (1,0,1). Qual das equações seguintes é uma equação do plano α?

(A) $-x+6y+2z=0$ **(B)** $x+6y+2z-3=0$

(C) $x-6y-2z+1=0$ **(D)** $2x-y+4z-5=0$

b) Determine, sem recorrer à calculadora, as coordenadas do vetor $\overrightarrow{AB}$.

Exame de Matemática A fase especial - 2021

80. Na Figura 2, está representado, em referencial o.n. Oxyz , um cone reto de vértice V e base de centro no ponto A.

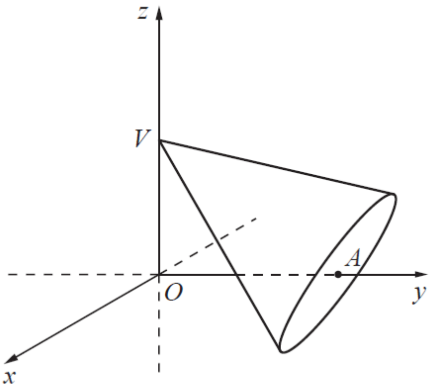


Figura 2

Sabe-se que:
• o ponto V pertence ao eixo Oz, e o ponto A pertence ao eixo Oy;
• a base do cone tem raio 3 e está contida no plano definido por 4y–3z = 16.

a) Qual das seguintes equações define um plano perpendicular ao plano que contém a base do cone e que passa no ponto de coordenadas (1,2,–1)?

(A) $4y-3z=11$ **(B)** $3x+4y+z=10$

(C) $3y+4z=8$ **(D)** $x+3y+4z=3$

b) Resolva este item sem recorrer à calculadora. Determine o volume do cone.

Exame de Matemática A 1.ª fase - 2022

81. Na Figura 3, está representada, em referencial o.n. Oxy , a circunferência de equação $(x+2)^2+(y-1)^2=9$. O ponto C é o centro da circunferência. A e B são dois pontos da circunferência. O arco de circunferência AB tem comprimento 2π. Determine o valor do produto escalar $\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}$.

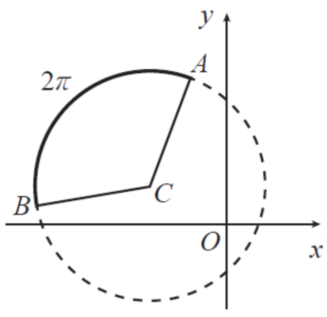


Figura 3

Exame de Matemática A 1.ª fase - 2022

82. Na Figura 1, está representado o cubo [ABCDEFGH]. Fixado um determinado referencial o.n. Oxyz , tem-se: A(-2,5,0), B(1,-1,2) e C(3,2,8).

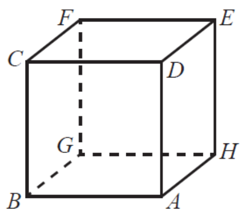


Figura 1

a) Qual é o valor de $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{HE}$?
(A) - 49 (B) 0 (C) 7 (D) 49

b) Resolva este item sem recorrer à calculadora. Sabe-se que o vértice E do cubo pertence à reta definida pela equação

$$(x,y,z)=(0,0,3)+k(1,-1,-1),\quad k\in\mathbb{R}$$

Determine as coordenadas do vértice E .

Exame de Matemática A 2.ª fase - 2022

83. Resolva este item sem recorrer à calculadora. Na Figura 2, estão representadas, em referencial o.n. Oxy , as retas r e s. A reta r é definida pela equação $y=\frac{\sqrt{3}}{2}x+1$. A reta s passa pela origem do referencial e tem inclinação α. O ponto A é o ponto de intersecção da reta r com o eixo Ox. O ponto B é o ponto de intersecção das duas retas. Sabe-se que $\cos\alpha=\frac{1}{2}$. Determine a área do triângulo [AOB].

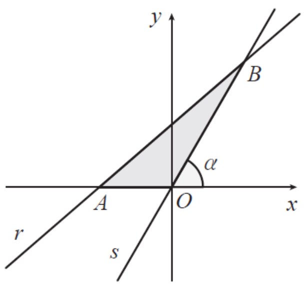


Figura 2

Exame de Matemática A 2.ª fase - 2022

84. Na Figura 1, está representado, em referencial o.n. Oxyz, o prisma hexagonal reto [ABCDEFGHIJKL], cujas bases são hexágonos regulares. Sabe-se que:
• os vértices A e B pertencem ao semieixo positivo Ox , e o vértice F pertence ao semieixo positivo Oy;
• o plano BCJ é definido pela equação $3x-\sqrt{3}y-6=0$;

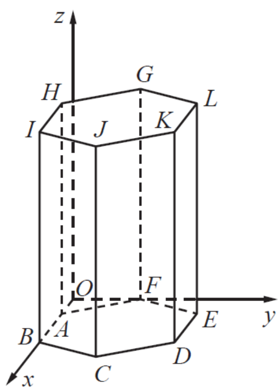


Figura 1

• o centro do prisma, ponto equidistante de todos os seus vértices, é o ponto $M\left(\frac{4}{3}, \frac{2\sqrt{3}}{3}, 2\right)$.

a) Qual das seguintes equações define o plano que contém a face [GHIJKL] ?

(A) $z=2$ **(B)** $z=4$

(C) $x=\frac{4}{3}$ **(D)** $x=\frac{8}{3}$

b) Determine, sem recorrer à calculadora, uma equação cartesiana do plano LEF. Apresente a equação na forma $ax+by+cz+d=0$, em que a , b , c e d são números reais.

Exame de Matemática A fase especial - 2022

85. Na Figura 3, estão representadas, em referencial o.n. Oxy, parte do gráfico de uma função, h , e uma reta, s .

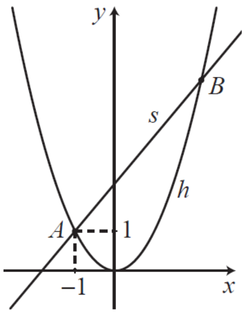


Figura 3

Sabe-se que:

• a função h, de domínio $\mathbb{R}$, é definida por $h(x)=x^2$;

• a reta s tem declive positivo, m , e intersecta o gráfico da função h nos pontos A e B;

• o ponto A tem coordenadas (−1,1).

a) Qual das expressões seguintes representa a ordenada na origem da reta s ?

(A) m + 1 (B) m + 2 (C) $(m+1)^2$ (D) $(m+2)^2$

b) Sabe-se que as coordenadas do ponto B são da forma $(m+1, (m+1)^2)$. Considere o ponto C , projeção ortogonal do ponto B sobre o eixo Oy. Determine, recorrendo às capacidades gráficas da calculadora, o valor de m para o qual a área do triângulo [ABC] é igual a 4, sabendo-se que existe e é único. Apresente o valor de m arredondado às centésimas. Não justifique a validade do resultado obtido na calculadora. Na sua resposta:

— apresente uma equação que lhe permita obter o valor de m ;

— reproduza, num referencial, o(s) gráfico(s) da(s) função(ões) visualizado(s) na calculadora que lhe permite(m) resolver a equação e apresente a(s) abcissa(s) do(s) ponto(s) relevante(s) arredondada(s) às milésimas.

Exame de Matemática A fase especial - 2022

86. Na Figura 2, está representado, em referencial o.n. Oxyz, o prisma triangular reto [OABCDE], de bases [ABC] e [OED].

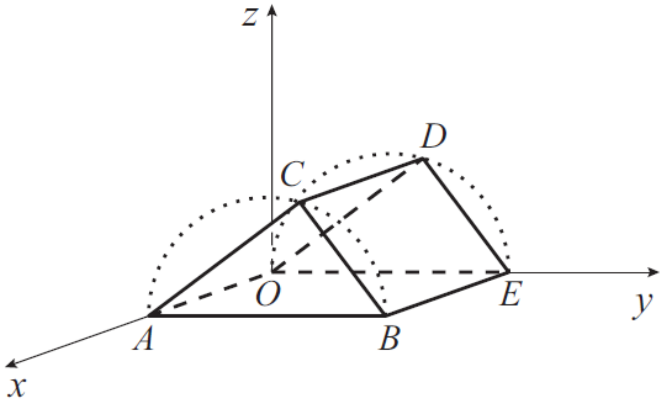


Figura 2

Sabe-se que:

• as bases do prisma estão inscritas em semicircunferências, respetivamente, de diâmetros [AB] e [OE];

• os vértices A e E do prisma pertencem, respetivamente, aos semieixos positivos Ox e Oy ;

• $\overline{OE}=12{,}5$;

• a reta AC é definida pela equação vetorial $(x, y, z)=(10, 0, 0)+k(0, 4, 3)$, $k \in \mathbb{R}$

a) Qual das seguintes equações vetoriais define a reta OD ?

(A) $(x, y, z)=(0, 6, 8)+k\left(0, 2, \frac{3}{2}\right)$, $k \in \mathbb{R}$

(B) $(x, y, z)=(0, -4, -3)+k\left(0, 2, \frac{3}{2}\right)$, $k \in \mathbb{R}$

(C) $(x, y, z)=(0, -4, -3)+k(0, 3, -4)$, $k \in \mathbb{R}$

(D) $(x, y, z)=(0, 6, 8)+k(0, 3, -4)$, $k \in \mathbb{R}$

b) Resolva este item sem recorrer à calculadora. Determine as coordenadas do ponto C.

Exame de Matemática A 1.ª fase - 2023

87. Na Figura 3, está representado, em referencial o.n. Oxyz , o prisma hexagonal reto [ABCDEFGHIJKL], de bases [ABCDEF] e [GHIJKL].

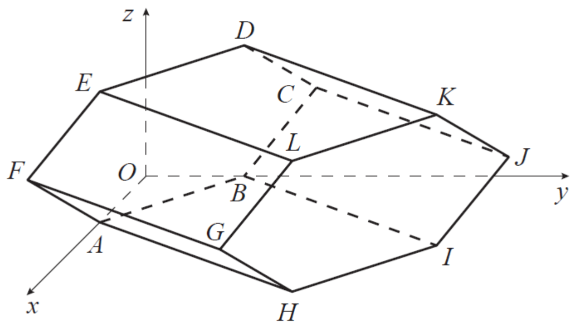


Figura 3

Sabe-se que:

• as coordenadas dos vértices A e G do prisma são, respetivamente, (4,0,0) e $\left(12, \frac{13}{2}, 2\right)$;

• a reta EL é definida pela equação vetorial

$$(x, y, z) = (-2, -8, 4) + k(3, 4, 0), \quad k \in \mathbb{R}$$

a) Qual das seguintes equações define a superfície esférica de diâmetro [AG] ?

(A) $(x-8)^2 + \left(y - \frac{13}{4}\right)^2 + (z-1)^2 = \frac{441}{16}$

(B) $(x-8)^2 + \left(y - \frac{13}{4}\right)^2 + (z-1)^2 = \frac{441}{4}$

(C) $(x-4)^2 + y^2 + z^2 = \frac{441}{16}$

(D) $(x-4)^2 + y^2 + z^2 = \frac{441}{4}$

b) Resolva este item sem recorrer à calculadora. Determine as coordenadas do vértice F do prisma.

Exame de Matemática A 2.ª fase - 2023

88. Na Figura 4, está representado, em referencial o.n. Oxy , o retângulo [OABC].

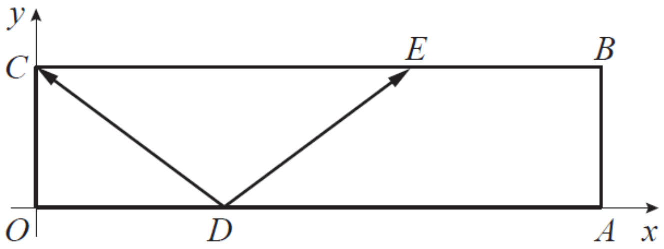


Figura 4

Sabe-se que:

• o ponto A pertence ao semieixo positivo Ox ;

• o ponto C pertence ao semieixo positivo Oy ;

• o ponto D pertence ao segmento de reta [OA] ;

• o ponto E pertence ao segmento de reta [CB] ;

• $\overline{EB} = \overline{OD} = \frac{\overline{OA}}{3}$;

• $\overline{OC} = \frac{\overline{OA}}{4}$;

• $\overrightarrow{DC} \cdot \overrightarrow{DE} = -7$.

Determine $\overline{OA}$.

Exame de Matemática A 2.ª fase - 2023

89. Na Figura 3, está representado, em referencial o.n. Oxyz, o prisma triangular reto [OABCDE] , de bases [OAB] e [CDE]. Sabe-se que:

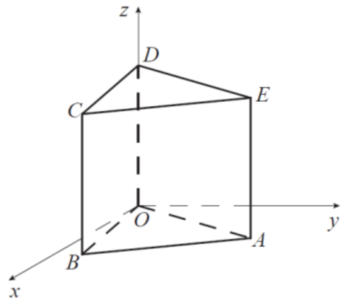


Figura 3

• as coordenadas do ponto A são $(2\sqrt{3}, 6, 0)$;

• o ponto B pertence ao plano mediador do segmento de reta [OA] ;

• a reta AB é definida pela equação vetorial

$$(x, y, z) = (0, 16, 0) + k(\sqrt{3}, -5, 0), \quad k \in \mathbb{R}$$

• o ponto D pertence ao eixo Oz e tem cota 5 .

a) Qual das seguintes equações define o plano que passa no ponto A e é perpendicular ao eixo Ox ?

(A) $z=0$ **(B)** $y=6$ **(C)** $x=2\sqrt{3}$ **(D)** $x+y+z=0$

b) Resolva este item sem recorrer à calculadora. Determine o volume do prisma [OABCDE] .

Exame de Matemática A fase especial - 2023

90. Na Figura 4, estão representados, em referencial o.n. Oxy , a circunferência trigonométrica, o triângulo [ABC] e a reta de equação x=1. Sabe-se que:

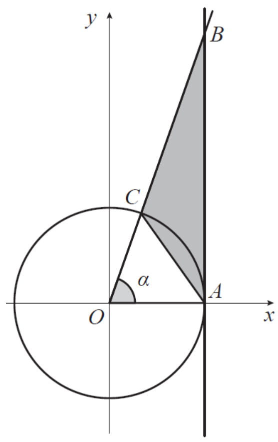


Figura 4

• o ponto A tem coordenadas (1,0);

• o port B pertence à reta de equação x=1;

• C é o ponto de intersecção da semirreta $\dot{O}B$ com a circunferência trigonométrica;

• $A\hat{O}B = \alpha$, $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ e $\cos \alpha = \frac{1}{3}$.

Determine a área do triângulo [ABC].

Exame de Matemática A fase especial - 2023

Soluções:

2. $2y+z=2$; 0,213 e 1,268 3. D 4. 3π 6. A 8. $(x-5)/10=(y-5)/15=(z-5)/6$; 37° 9. C 10. B 11. A
18. D 12. $x+2y-2z+7=0$; não; $x=1 \wedge y=2 \wedge -6 \leq z \leq 6$; 18π 14. A 15. B 16. C 17. $y=-3/4\ x-3$; 25/2 18. 20; (2,4,6); sim
19. B 20. $(x,y,z)=(2,0,0)+k(6,3,4)$, $k \in R$ 21. $(\sqrt{3}, \sqrt{3}/2, 5/2)$ 22. B 23. $\pi/4$; 7/5; $-3/4\ x+25/4$
24. $5x+2y+2z=0$; $x=2$; $(x-4)/5=(y+4)/2=(z+4)/2$; $(x-4)^2+(y+4)^2+(z+4)^2=16$; 2; 80 26. A 27. 2 28. B 29. D
30. $(x+3)/1=(y-3)/(-5)=(z-1)/1$; $(-6,0,-2)$ 32. C 33. D 34. $x+3y+6z+13=0$; $(x-1)/2=(y-3)/3=(z+4)/6$; $(x-1)^2+(y-3)^2+(z+4)^2=49$; $(-5,1,-1)$ 35. -12 36. $x+y+2z=9$; $x/-6=(y-12)/12=z/-3$; $4/3\ \pi\ \sqrt{(24)^3}$
38. $(x-6)/3=(y-12)/-6=z/4$; $3x+4z=18$ 39. D 40. 198/247 41. B 43. B 44. $(-5,15,-12)$ 45. D
46. $x-2y+z-2=0$; $(x-2)^2+y^2+(z-1)^2=5$; $2\sqrt{15}$ 47. B 48. (1,1,6); $x+y+z-2=0$; 1,52 49. B 50. -1/3; 55°; $x^2+y^2+z^2=8/3$ 51. C 52. $(x+1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=1$; $(-2,2,4)$; $(x,y,z)=(3,0,10)+k(1,1,-3)$ 53. C 54. $(x,y,z)=(2,1,4)+k(3,2,4)$; (2,1,1) 55. B 56. $3x+3y-z+12=0$; $-x/2=y/2 \wedge z=0$ 57. C 58. $x^2+y^2+z^2=9$; -9; $x=0 \wedge y/2=(z-3)/-3$ 59. C
60. (-3,5,-4); 85° 61. D 62. 6; (1,0,9); 37° 63. -8; 179,6 64. $4x+y-2z-15=0$; 48 65. B
66. (-1,-1,-1), diámetro; 125° 67. A 69. 55°; $2x-y+z-3=0$ 70. 300; (4,0,3) 71. $2x+3y-z-3=0$; (1,1,-4)
72. $\sqrt{2}$; (0,1,2) 73. C 74. $3x-6y+2z-9=0$; $(x-6)^2+(y-2)^2+(z-5)^2=3$ 75. 75°; 18 76. A 77. C; $x^2+(y-6)^2+z^2=69$
78. C; $-3x+2y-z+7=0$ 79. C; (-1,0,-3) 80. D; 15π 81. -9/2 82. B; (-6,6,9) 83. $2/\sqrt{3}$ 84. B; $3x-\sqrt{3}y+2=0$
85. A; 1,17 86. B; (10,8.6) 87. A; (6,-3/2,2) 88. 12 89. C; $40\sqrt{3}$ 90. $2\sqrt{2}/3$

O professor: Roberto Oliveira