Prova-Modelo de Exame de Matemática A – 12.º ano – Proposta de resolução

1. Opção (C)

Consideremos dois tipos de casos que se excluem mutuamente: começar em ímpar ou começar em par.

$$\underbrace{\_i\_}_{5} \times \underbrace{\_i\_}_{1} \times \underbrace{\_p\_}_{5} \times \underbrace{\_p\_}_{5} \times \underbrace{\_p\_}_{5} \times \underbrace{{}^4C_1}_{\substack{\text{número de maneiras}\\ \text{de colocar o ímpar}\\ \text{que não na}\\ \text{posição inicial}}} +$$

$$+ \underbrace{\overbrace{p}^{2,4,6,8}}_{4} \times \underbrace{\_i\_}_{5} \times \underbrace{\_i\_}_{1} \times \underbrace{\_p\_}_{5} \times \underbrace{\_p\_}_{5} \times \underbrace{{}^4C_2}_{\substack{\text{número de maneiras}\\ \text{de escolher 2 posições}\\ \text{das 4 possíveis para}\\ \text{colocar os ímpares}}}$$

$5^4 \times {}^4C_1 + 4 \times 5^3 \times {}^4C_2 =$

$= 2500 + 3000 =$

$= 5500$

2. $P(\overline{A} | B) \times P(B) + P(A) - P(B) = \frac{P(\overline{A} \cap B)}{P(B)} \times P(B) + P(A) - P(B) =$

$= P(B \cap \overline{A}) + P(A) - P(B) =$

$= P(B) - P(A \cap B) + P(A) - P(B) =$

$= P(A) - P(A \cap B) =$

$= P(A \cap \overline{B}) =$

$= P\left(\overline{\overline{A} \cup B}\right) =$

$= 1 - P(\overline{A} \cup B)$

3. Consideremos os acontecimentos:

X: "O aluno é da turma *X*."

A: "O aluno prefere como destino o Algarve."

Sabemos que:

- $P(X) = P(Y) = 0{,}5$
- $P(A) = 0{,}64$
- $P(X|A) = \frac{1}{4} = 0{,}25$

Pretende-se determinar $P(\overline{A} \cap \overline{X})$.

Tem-se que:

$$P(X|A) = 0{,}25 \Leftrightarrow \frac{P(X \cap A)}{P(A)} = 0{,}25$$

$$\Leftrightarrow P(X \cap A) = 0{,}25 \times 0{,}64$$

$$\Leftrightarrow P(X \cap A) = 0{,}16$$

Assim:

$$P\left(\overline{A} \cap \overline{X}\right) = P\left(\overline{A \cup X}\right) = 1 - P(A \cup X) =$$

$$= 1 - P(A) - P(X) + P(A \cap X) =$$

$$= 1 - 0{,}64 - 0{,}5 + 0{,}16 =$$

$$= 0{,}02$$

$$P\left(\overline{A} \cap \overline{X}\right) = 2\%$$

4.

4.1 Para f ser contínua em $x = \frac{1}{2}$ terá de existir $\lim\limits_{x \to \frac{1}{2}} f(x)$, isto é, $\lim\limits_{x \to \left(\frac{1}{2}\right)^+} f(x) = \lim\limits_{x \to \left(\frac{1}{2}\right)^-} f(x) = f\left(\frac{1}{2}\right)$:

- $f\left(\frac{1}{2}\right) = \ln\left(e^{4 \times \frac{1}{2}} - 6\right) = \ln(e^2 - 6) = \lim\limits_{x \to \left(\frac{1}{2}\right)^+} f(x)$

- $\lim\limits_{x \to \left(\frac{1}{2}\right)^-} f(x) = \lim\limits_{x \to \left(\frac{1}{2}\right)^-} \left(\frac{\operatorname{sen}\left(x - \frac{1}{2}\right)}{-2x^2 + 3x - 1} - \ln 6\right) =$

$$= \lim_{x \to \left(\frac{1}{2}\right)^-} \frac{\operatorname{sen}\left(x - \frac{1}{2}\right)}{-2\left(x - \frac{1}{2}\right)(x-1)} - \ln 6 =$$

$$= \lim_{x \to \left(\frac{1}{2}\right)^-} \frac{\operatorname{sen}\left(x - \frac{1}{2}\right)}{x - \frac{1}{2}} \times \lim_{x \to \left(\frac{1}{2}\right)^-} \frac{1}{-2(x-1)} - \ln 6 =$$

Cálculo auxiliar

$$-2x^2 + 3x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \times (-2) \times (-1)}}{2 \times (-2)}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-3 \pm \sqrt{9-8}}{-4}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-3+1}{-4} \quad \vee \quad x = \frac{-3-1}{-4}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{1}{2} \quad \vee \quad x = 1$$

$$-2x^2 + 3x - 1 = -2\left(x - \frac{1}{2}\right)(x - 1)$$

Considerando a mudança de variável $x - \frac{1}{2} = y$, $x \to \left(\frac{1}{2}\right)^- \Rightarrow y \to 0^-$:

$$= \underbrace{\lim_{y \to 0^-} \frac{\operatorname{sen} y}{y}}_{\text{limite notável}} \times \frac{1}{-2\left(\frac{1}{2} - 1\right)} - \ln 6 =$$

$$= 1 \times 1 - \ln 6 =$$

$$= 1 - \ln 6$$

Como $1 - \ln 6 = \ln e - \ln 6 = \ln\left(\frac{e}{6}\right)$, é diferente de $\ln(e^2 - 6)$, tem-se que

$\lim\limits_{x \to \left(\frac{1}{2}\right)^-} f(x) \neq \lim\limits_{x \to \left(\frac{1}{2}\right)^+} f(x)$.

Conclui-se, então, que f não é contínua em $x = \frac{1}{2}$.

4.2 Em $\left[\frac{1}{2}, +\infty\right[$:

$$f(x) = 2x$$

$\ln(e^{4x}-6)=2x \Leftrightarrow e^{4x}-6=e^{2x}$

$\Leftrightarrow e^{4x}-e^{2x}-6=0$

$\Leftrightarrow (e^{2x})^2-e^{2x}-6=0$

Considerando a mudança de variável $y=e^{2x}$:

$$y^2-y-6=0 \Leftrightarrow y=\frac{1\pm\sqrt{(-1)^2-4\times1\times(-6)}}{2\times1} \Leftrightarrow y=\frac{1\pm\sqrt{25}}{2}$$

$$\Leftrightarrow y=\frac{1+5}{2} \quad \vee \quad y=\frac{1-5}{2}$$

$$\Leftrightarrow y=3 \quad \vee \quad y=-2$$

Assim:

$$e^{2x}=3 \quad \vee \quad \underbrace{e^{2x}=-2}_{\text{equação impossível}} \Leftrightarrow 2x=\ln 3 \Leftrightarrow x=\frac{\ln 3}{2}\in\left[\frac{1}{2},+\infty\right[$$

O ponto do gráfico em que a ordenada é o dobro da abcissa tem coordenadas $\left(\frac{\ln 3}{2}, f\left(\frac{\ln 3}{2}\right)\right)=\left(\frac{\ln 3}{2},\ln 3\right)$.

Cálculo auxiliar

$$f\left(\frac{\ln 3}{2}\right)=\ln\left(e^{\frac{4\ln 3}{2}}-6\right)=\ln\left(e^{2\ln 3}-6\right)=$$
$$=\ln\left(e^{\ln 9}-6\right)=$$
$$=\ln(9-6)=$$
$$=\ln 3$$

5.

5.1 Opção (D)

O declive da reta tangente ao gráfico de g no ponto de abcissa -1 é $g'(-1)$. Como a reta é paralela à reta de equação $y=kx$, então $k=g'(-1)$.

Em $]-\infty,0[$, tem-se que:

$$g'(x)=\left(\frac{e^x-1}{x}\right)'=\frac{(e^x-1)'\times x-(e^x-1)\times x'}{x^2}=$$
$$=\frac{e^x\times x-(e^x-1)\times 1}{x^2}=$$
$$=\frac{e^x\times x-e^x+1}{x^2}=$$

Assim:

$$k=g'(-1)=\frac{e^{-1}\times(-1)-e^{-1}+1}{(-1)^2}=\frac{-e^{-1}-e^{-1}+1}{1}=1-2e^{-1}$$

5.2 Assíntotas verticais

A função g é contínua em $]-\infty,0[$ e em $]0,+\infty[$, logo a reta de equação $x=0$ é a única candidata a assíntota vertical ao gráfico de g:

- $\lim\limits_{x\to0^+} g(x)=\lim\limits_{x\to0^+}\left(x\ln\left(\frac{1}{x}\right)\right)=0^+\times\ln\left(\frac{1}{0^+}\right)=0^+\times\ln(+\infty)=0\times\infty$ (indeterminação)

  $\lim\limits_{x\to0^+}\left(x\ln\left(\frac{1}{x}\right)\right)=\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\ln\left(\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}=$

  Considerando a mudança de variável $\frac{1}{y}=y$, $x\to0^+\Rightarrow y\to+\infty$:

$$= \underbrace{\lim_{y\to+\infty} \frac{\ln y}{y}}_{\text{limite notável}} =$$

$$= 0$$

- $\lim\limits_{x\to 0^-} g(x) = \underbrace{\lim_{x\to 0^-} \left(\frac{e^x - 1}{x}\right)}_{\text{limite notável}} = 1$

  O gráfico de g não tem assíntotas verticais.

Assíntotas horizontais

- $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(x \ln\left(\frac{1}{x}\right)\right) = +\infty \times \ln\left(\frac{1}{+\infty}\right)$

  $= +\infty \times \ln(0^+) =$

  $= +\infty \times (-\infty) =$

  $= -\infty$

  O gráfico de g não apresenta assíntotas horizontais quando $x \to +\infty$.

- $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \left(\frac{e^x - 1}{x}\right) = \frac{e^{-\infty}-1}{-\infty} = \frac{0-1}{-\infty} = \frac{-1}{-\infty} = 0$

  A reta de equação $y = 0$ é assíntota horizontal ao gráfico de g quando $x \to -\infty$.

5.3 Em $]0, +\infty[$:

$g'(x) = \left(x \ln\left(\frac{1}{x}\right)\right)' =$

$= x' \times \ln\left(\frac{1}{x}\right) + x \times \left(\ln\left(\frac{1}{x}\right)\right)' =$

$= 1 \times \ln\left(\frac{1}{x}\right) + x \times \frac{\left(\frac{1}{x}\right)'}{\frac{1}{x}} =$

$= \ln\left(\frac{1}{x}\right) + x \times \frac{-\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x}} =$

$= \ln\left(\frac{1}{x}\right) + x \times \left(-\frac{1}{x}\right) =$

$= \ln\left(\frac{1}{x}\right) - 1$

$g'(x) = 0$

$\ln\left(\frac{1}{x}\right) - 1 = 0 \Leftrightarrow \ln\left(\frac{1}{x}\right) = 1$

$\Leftrightarrow \frac{1}{x} = e$

$\Leftrightarrow x = \frac{1}{e}$ e $\frac{1}{e} \in]0, +\infty[$

x	0		$\frac{1}{e}$	$+\infty$
Sinal de g'	n.d.	$+$	0	$-$
Variação de g	n.d.	$\nearrow$	$g\left(\frac{1}{e}\right)$ Máx.	$\searrow$

Cálculos auxiliares

$g'(e) = \ln\left(\frac{1}{e}\right) - 1 = \ln(e^{-1}) - 1 = -1 - 1 = -2 < 0$

$g'\left(\frac{1}{2e}\right) = \ln\left(\frac{1}{\frac{1}{2e}}\right) - 1 = \ln(2e) - 1 = \ln 2 + \ln e - 1 = \ln 2 + 1 - 1 = \ln 2 > 0$

$g\left(\frac{1}{e}\right) = \frac{1}{e}\ln\left(\frac{1}{\frac{1}{e}}\right) = \frac{1}{e}\ln(e) = \frac{1}{e} \times 1 = \frac{1}{e}$

g é crescente em $\left]0, \frac{1}{e}\right[$ e é decrescente em $\left]\frac{1}{e}, +\infty\right[$; $\frac{1}{e}$ é um máximo (absoluto) para $x = \frac{1}{e}$.

6. $ABC: 6x + 2y - 3z = -2$ um vetor normal a $ABC: \vec{n}(6, 2, -3)$

$CDV: 2x + 2y + 3z = 34$ um vetor normal a $CDV: \vec{m}(2, 2, 3)$

$ADV: 6x - 26y + 11z = -142$ $B(1, -1, 2)$

6.1 Opção (B)

Se dois planos são perpendiculares, então os respetivos vetores normais também o são. Vamos, então, determinar um vetor, não nulo, que seja simultaneamente perpendicular a $\vec{n}$ e a $\vec{m}$:

$$\begin{cases} (a,b,c).(6,2,-3) = 0 \\ (a,b,c).(2,2,3) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6a + 2b - 3c = 0 \\ 2a + 2b + 3c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6a + 2b = 3c \\ 3c = -2a - 2b \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 6a + 2b = -2a - 2b \\ \_\_\_\_\_\_ \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 8a = -4b \\ \_\_\_\_\_\_ \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = -\frac{1}{2}b \\ 3c = -2\left(-\frac{1}{2}b\right) - 2b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\frac{1}{2}b \\ 3c = b - 2b \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = -\frac{1}{2}b \\ 3c = -b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\frac{1}{2}b \\ c = -\frac{1}{3}b \end{cases}$$

$\left(-\frac{1}{2}b, b, -\frac{1}{3}b\right)$, com $b \in \mathrm{IR}\backslash\{0\}$

$b = 6 \curvearrowright (-3, 6, -2)$

Um plano perpendicular aos planos ABC e CVD é da forma $-3x + 6y - 2z + d = 0$.

Como $B(1, -1{,}2)$ pertence ao plano, vem que:

$-3 - 6 - 4 + d = 0 \Leftrightarrow d = 13$

Logo, um plano perpendicular aos planos ABC e CDV, e que passa em B pode ser definido por:

$-3x + 6y - 2z + 13 = 0 \Leftrightarrow 6x - 12y + 4z - 26 = 0$

6.2 AD é a interseção dos planos ABC e ADV.

$$\begin{cases} 6x+2y-3z=-2 \\ 6x-26y+11z=-142 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6x=-2-2y+3z \\ -2-2y+3z-26y+11z=-142 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=-\frac{1}{3}-\frac{1}{3}y+\frac{1}{2}z \\ -2y-26y+3z+11z=-140 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overline{} \\ -28y=-14z-140 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=-\frac{1}{3}-\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}z+5\right)+\frac{1}{2}z \\ y=\frac{1}{2}z+5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-\frac{1}{3}-\frac{1}{6}z-\frac{5}{3}+\frac{1}{2}z \\ \underline{} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=-2+\frac{1}{3}z \\ y=\frac{1}{2}z+5 \end{cases}$$

$\left(-2+\frac{1}{3}z, 5+\frac{1}{2}z, z\right)$, com $z \in \mathrm{IR}$ é um ponto genérico da reta AD.

$AD: (x,y,z)=(-2,5,0)+k\left(\frac{1}{3},\frac{1}{2},1\right), k \in \mathrm{IR}$

D é a interseção da reta AD com o plano CDV.

$D\left(-2+\frac{1}{3}k, 5+\frac{1}{2}k, k\right)$, com $k \in \mathrm{IR}$

$$2\left(-2+\frac{1}{3}k\right)+2\left(5+\frac{1}{2}k\right)+3k=34 \Leftrightarrow -4+\frac{2}{3}k+10+k+3k=34$$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{3}k+\frac{3}{3}k+\frac{9}{3}k=28$$

$$\Leftrightarrow \frac{14}{3}k=28$$

$$\Leftrightarrow k=6$$

$D\left(-2+\frac{6}{3}, 5+\frac{6}{2}, 6\right)$

$D(0,8,6)$

$\overline{BD}=\sqrt{(0-1)^2+(8+1)^2+(6-2)^2}=\sqrt{1+81+16}=\sqrt{98}$

$\overline{BD}^2=l^2+l^2 \Leftrightarrow 98=2l^2 \Leftrightarrow 49=l^2$

$A_{\text{base}}=49$ u.a.

7. $x^2+6x+y^2-2y=15 \Leftrightarrow x^2+6x+9+y^2-2y+1=15+9+1$

$$\Leftrightarrow (x+3)^2+(y-1)^2=25$$

Seja C o centro da circunferência: $C(-3,1)$

Seja $P(x,y)$ um ponto genérico da reta tangente à circunferência no ponto T:

$\overrightarrow{CT}.\overrightarrow{TP}=0 \Leftrightarrow (-3,-4).(x+6,y+3)=0 \Leftrightarrow -3x-18-4y-12=0$

$$\Leftrightarrow -4y=3x+30$$

$$\Leftrightarrow y=-\frac{3}{4}x-\frac{15}{2}$$

O ponto da reta t que está mais próximo da origem do referencial é a projeção ortogonal de O sobre a reta t. Consideremos a reta perpendicular a t e que passa em O, definida por $y = \frac{4}{3}x$. Determinemos a interseção desta reta com a reta t:

$$\begin{cases} y = \frac{4}{3}x \\ y = -\frac{3}{4}x - \frac{15}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{3}{4}x - \frac{15}{2} = \frac{4}{3}x \\ \_\_\_\_\_\_\_\_ \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -9x - 90 = 16x \\ \_\_\_\_\_\_\_\_ \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -25x = 90 \\ \_\_\_\_\_\_\_\_ \end{cases}$$

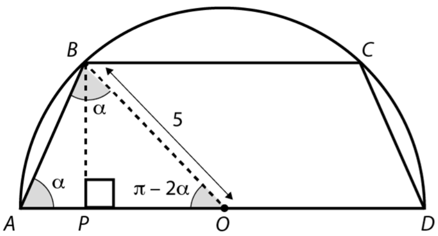
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{18}{5} \\ y = -\frac{3}{4} \times \left(-\frac{18}{5}\right) - \frac{15}{2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{18}{5} \\ y = -\frac{24}{5} \end{cases}$$

As coordenadas são $\left(-\frac{18}{5}, -\frac{24}{5}\right)$.

8. Seja P a projeção ortogonal de B sobre $[AD]$.

$$A_{[ABCD]} = \frac{\overline{AD} + \overline{BC}}{2} \times \overline{BP} = \frac{10 + 2 \times \overline{OP}}{2} \times \overline{BP}$$



Cálculos auxiliares

O triângulo $[AOB]$ é isósceles:

$\overline{OA} = \overline{OB} = \text{raio} = 5$

$\alpha = O\hat{A}B = O\hat{B}A$

$A\hat{O}B = \pi - \alpha - \alpha = \pi - 2\alpha$

$\text{sen}\,(\pi - 2\alpha) = \frac{\overline{BP}}{5} \Leftrightarrow \text{sen}\,(2\alpha) = \frac{\overline{BP}}{5} \Leftrightarrow \overline{BP} = 5\text{sen}\,(2\alpha)$

$\cos(\pi - 2\alpha) = \frac{\overline{OP}}{5} \Leftrightarrow -\cos(2\alpha) = \frac{\overline{OP}}{5} \Leftrightarrow \overline{OP} = -5\cos\,(2\alpha)$

Assim:

$$\begin{aligned} A_{[ABCD]} &= \frac{10 + 2 \times \overline{OP}}{2} \times \overline{BP} = \frac{10 + 2 \times (-5\cos\,(2\alpha))}{2} \times 5\,\text{sen}\,(2\alpha) = \\ &= \frac{10 - 10\cos(2\alpha)}{2} \times 5\,\text{sen}\,(2\alpha) = \\ &= \left(5 - 5\cos\,(2\alpha)\right) \times 5\,\text{sen}\,(2\alpha) = \\ &= 25\,\text{sen}\,(2\alpha) - 25\cos\,(2\alpha)\,\text{sen}\,(2\alpha) = \\ &= 25\,\text{sen}\,(2\alpha) - \frac{25}{2} \times \underbrace{2\,\text{sen}\,(2\alpha)\cos\,(2\alpha)}_{\text{sen}\,(2 \times 2\alpha)} = \\ &= 25\,\text{sen}\,(2\alpha) - \frac{25}{2} \times \text{sen}\,(4\alpha) \end{aligned}$$

9. $f(x)=\frac{1}{x-\ln x}$ $\qquad\qquad D_f=\mathbb{R}^+$

$A\big(a, f(a)\big)$, ou seja, $A\left(a, \frac{1}{a-\ln a}\right)$.

$B\big(2a, f(2a)\big)$, ou seja, $B\left(2a, \frac{1}{2a-\ln(2a)}\right)$.

O declive da reta AB é igual a $\frac{f(2a)-f(a)}{2a-a}=\frac{\frac{1}{2a-\ln(2a)}-\frac{1}{a-\ln a}}{a}$.

$[AB]$ é uma diagonal de um quadrado de lados paralelos aos eixos coordenados se:

$$\frac{\frac{1}{2a-\ln(2a)}-\frac{1}{a-\ln a}}{a}=1 \ \vee \ \frac{\frac{1}{2a-\ln(2a)}-\frac{1}{a-\ln a}}{a}=-1$$

isto é:

$$\left|\frac{\frac{1}{2a-\ln(2a)}-\frac{1}{a-\ln a}}{a}\right|=1$$

ou seja:

$$\frac{\left|\frac{1}{2a-\ln(2a)}-\frac{1}{a-\ln a}\right|}{a}=1, \text{ pois } a\in\mathbb{R}^+.$$

Utilizando x como variável independente:

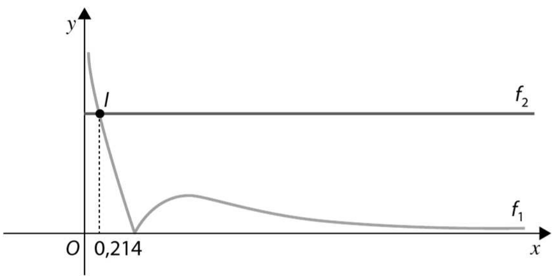
$$\frac{\left|\frac{1}{2x-\ln(2x)}-\frac{1}{x-\ln x}\right|}{x}=1$$

Recorrendo às capacidades gráficas da calculadora:

$f_1(x)=\frac{\left|\frac{1}{2x-\ln(2x)}-\frac{1}{x-\ln x}\right|}{x}$

$f_2(x)=1$

$x>0$



Logo, $a\approx 0{,}214$.

10. Opção (B)

$u_n=\left(\frac{n+a}{n}\right)^n=\left(1+\frac{a}{n}\right)^n$

$\lim u_n=\lim\left(1+\frac{a}{n}\right)^n=e^a$

Assim, $\lim\limits_{x\to e^a} f(x)=a$.

(A) $\lim\limits_{x\to e^a} f(x) = \lim\limits_{x\to e^a}(ax) = ae^a$ (falso)

(B) $\lim\limits_{x\to e^a} f(x) = \lim\limits_{x\to e^a}\ln x = \ln(e^a) = a$ (verdadeiro)

(C) $\lim\limits_{x\to e^a} f(x) = \lim\limits_{x\to e^a}\left(a+\frac{1}{x}\right) = a+\frac{1}{e^a}$ (falso)

(D) $\lim\limits_{x\to e^a} f(x) = \lim\limits_{x\to e^a}(a\ln x) = a\ln(e^a) = a^2$ (falso)

11. $a_1 = 2$ e (a_n) é uma progressão geométrica crescente, logo, $r > 1$.

a_1 , a_2 , $a_3 - 2$ são termos consecutivos de uma progressão aritmética.

$a_2 - a_1 = a_3 - 2 - a_2 \Leftrightarrow a_2 - 2 = a_3 - 2 - a_2$

$\Leftrightarrow 2a_2 = a_3$

Por outro lado:

$a_2 = a_1 \times r = 2r$, onde r é a razão da progressão geométrica.

$a_3 = a_1 \times r^2 = 2r^2$

Logo:

$2 \times 2r = 2r^2 \Leftrightarrow 4r - 2r^2 = 0 \Leftrightarrow r(4-2r) = 0$

$\Leftrightarrow r = 0 \ \vee \ 4 = 2r$

$\Leftrightarrow r = 0 \ \vee \ r = 2$

Como $r > 1$, então $r = 2$.

Assim, $a_n = a_1 \times r^{n-1} = 2 \times 2^{n-1} = 2^n$.

Deste modo:

$2^n = 256 \Leftrightarrow 2^n = 2^8 \Leftrightarrow n = 8$

Assim, conclui-se que 256 é o 8.º termo.

12.

12.1 Opção (A)

$|z| = \sqrt{3^2+4^2} = \sqrt{25} = 5$

Logo, 5 é o raio da circunferência de centro na origem e que passa em A e B.

Como o comprimento do arco AB é $\frac{5\pi}{6}$, tem-se:

$\frac{5\pi}{6} = \alpha \times 5 \Leftrightarrow \alpha = \frac{\pi}{6}$

Então, $\frac{2\pi}{n} = \frac{\pi}{6}$, logo $n = 12$.

Seja z_B o número complexo cujo afixo é B.

$z_B = z \times e^{i\frac{\pi}{6}} = (3+4i)\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\,\mathrm{sen}\frac{\pi}{6}\right) = (3+4i)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right) =$

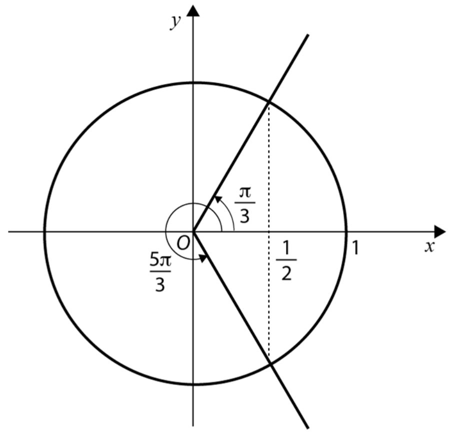
$= \frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i + 2\sqrt{3}i + 2i^2 =$

$= -2 + \frac{3}{2}\sqrt{3} + i\left(\frac{3}{2}+2\sqrt{3}\right) =$

$= \frac{3\sqrt{3}-4}{2} + i\,\frac{3+4\sqrt{3}}{2}$

Assim, as coordenadas de B são $\left(\frac{3\sqrt{3}-4}{2}, \frac{3+4\sqrt{3}}{2}\right)$.

12.2 $\text{Re}(z \times w) = \frac{1}{4} \Leftrightarrow \text{Re}\left(6e^{i\alpha} \times \frac{1}{3}e^{i\alpha}\right) = \frac{1}{4}$



$\Leftrightarrow \text{Re}\left(6 \times \frac{1}{3}e^{i(\alpha+\alpha)}\right) = \frac{1}{4}$

$\Leftrightarrow \text{Re}\left(2e^{i(2\alpha)}\right) = \frac{1}{4}$

$\Leftrightarrow \text{Re}(2\cos(2\alpha) + 2\text{sen}(2\alpha)i) = \frac{1}{4}$

$\Leftrightarrow 2\cos(2\alpha) = \frac{1}{4}$

$\Leftrightarrow \cos(2\alpha) = \frac{1}{8}$

$\Leftrightarrow \cos^2\alpha - \text{sen}^2\alpha = \frac{1}{8}$

$\Leftrightarrow \cos^2\alpha - (1 - \cos^2\alpha) = \frac{1}{8}$

$\Leftrightarrow 2\cos^2\alpha - 1 = \frac{1}{8}$

$\Leftrightarrow 2\cos^2\alpha = \frac{9}{8}$

$\Leftrightarrow \cos^2\alpha = \frac{9}{16} \Leftrightarrow \cos\alpha = \pm\frac{3}{4}$

Como $\alpha \in \left]\pi, \frac{3\pi}{2}\right[$, $\cos\alpha = -\frac{3}{4}$.

Assim, $\text{sen}^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha = 1 - \frac{9}{16} = \frac{7}{16}$, então $\text{sen}\,\alpha = \pm\frac{\sqrt{7}}{4}$.

Como $\alpha \in \left]\pi, \frac{3\pi}{2}\right[$, $\text{sen}\,\alpha = -\frac{\sqrt{7}}{4}$.

$$z = 6e^{i\alpha} \Leftrightarrow z = 6(\cos\alpha + i\text{sen}\alpha) = 6 \times \left(-\frac{3}{4}\right) + 6 \times \left(-\frac{\sqrt{7}}{4}\right)i = -\frac{9}{2} - \frac{3\sqrt{7}}{2}i$$

13. Como os pontos A e B pertencem ao gráfico de f, sendo A o de menor abcissa, então $A(a, ka^2)$ e $B(b, kb^2)$, com $a < b$.

Seja $C(c, kc^2)$, o ponto desse gráfico em que a reta tangente ao gráfico é paralela à reta AB.

Seja t a reta tangente ao gráfico de f no ponto C e m_t o seu declive.

Tem-se que $m_t = f'(c)$ e $m_t = m_{AB}$.

$f'(x) = 2kx$, logo $f'(c) = 2kc$.

$$m_{AB} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \frac{kb^2 - ka^2}{b - a} = \frac{k(b^2 - a^2)}{b - a} = \frac{k(b-a)(b+a)}{b - a} = k(b + a)$$

$m_t = f'(c) = 2kc$

Assim:

$k(b+a) = 2kc \overset{k \neq 0}{\Leftrightarrow} b + a = 2c \Leftrightarrow c = \frac{b+a}{2}$

Provemos agora que:

i. $a < c < b$

$$a < b \Leftrightarrow a + a < b + a \Leftrightarrow \frac{a+a}{2} < \frac{b+a}{2} \Leftrightarrow a < c$$

$$a < b \Leftrightarrow a + b < b + b \Leftrightarrow \frac{a+b}{2} < \frac{b+b}{2} \Leftrightarrow c < b$$

ii. $c - a = b - c$

$$c - a = \frac{b+a}{2} - a = \frac{b-a}{2}$$

$$b - c = b - \frac{b+a}{2} = \frac{b-a}{2}$$

Logo, para qualquer valor de k, as abcissas dos três pontos são termos consecutivos de uma progressão aritmética.