Ficha de Trabalho n.º 6 – Matemática A – 10.º Ano

Geometria Analítica no Espaço

Algumas Resoluções

"Conhece a Matemática e dominarás o Mundo."
Galileu Galilei

11.3. Tem-se que $C(-2,3,-2)$. Logo, $Q(-2,-7,-2)$.

Como o ponto P pertence à recta $FB: x=2 \ \wedge \ y=3$, as suas coordenadas são da forma $P(2,3,z)$, $z \in \mathbb{R}$

Assim:

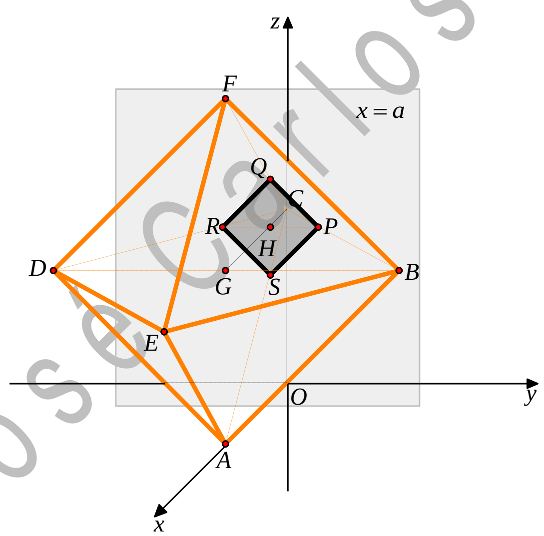
$$d(P,Q)=6\sqrt{5} \Leftrightarrow \underbrace{\left(\sqrt{(2+2)^2+(3+7)^2+(z+2)^2}\right)^2}_{>0} = \underbrace{\left(6\sqrt{5}\right)^2}_{>0} \Leftrightarrow 16+100+(z+2)^2 = 36\times 5 \Leftrightarrow$$

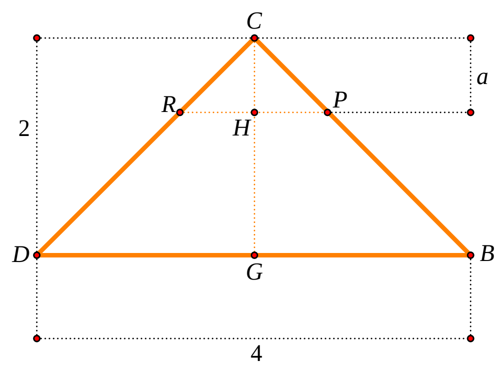
$$\Leftrightarrow (z+2)^2 = 180-116 \Leftrightarrow (z+2)^2 = 64 \Leftrightarrow z+2=\pm\sqrt{64} \Leftrightarrow z+2=-8 \ \vee \ z+2=8$$

$$\Leftrightarrow z=-10 \ \vee \ z=6$$

Logo, $P(2,3,-10)$ ou $P(2,3,6)$.

12.4. Sabe-se que $A(2,0,0)$, $B(2,2,2)$, $C(0,0,2)$, $D(2,-2,2)$, $E(4,0,2)$, $F(2,0,4)$ e $G(2,0,2)$. Considere as seguintes figuras:





Seja $a \in [0,2]$. A secção definida no octaedro pela intersecção pelo plano de equação $x=a$ é o quadrado $[PQRS]$.

Assim, pretende-se determinar $a \in [0,2]$ de modo que o volume do sólido $[ABEDFPQRS]$ seja o dobro do volume da pirâmide $[PQRSC]$. Portanto, o volume da pirâmide $[PQRSC]$ tem de ser igual a um terço do volume do octaedro.

Tem-se, $A_{octaedro} = 2\times V_{[BCDEF]} = 2\times\frac{1}{3}\times A_{[BCDE]}\times\overline{FG} = \frac{2}{3}\times A_{[BCDE]}\times\overline{GF} \underset{i)}{=} \frac{2}{3}\times\frac{\overline{BD}\times\overline{CE}}{\cancel{2}}\times\cancel{2} = \frac{2}{3}\times4\times4 = \frac{32}{3}$

i) Podemos calcular a área do quadrado $[BCDE]$ usando a fórmula da área de um losango, $\frac{diagonal\ maior\times diagonal\ menor}{2}$. O quadrado é um losango também.

Portanto, pretende-se determinar $a\in[0,2]$ tal que:

$$V_{[PQRSC]} = \frac{1}{3}\times V_{octaedro} \Leftrightarrow \frac{\cancel{1}}{\cancel{3}}\times A_{[PQRS]}\times\overline{CH} = \frac{\cancel{1}}{\cancel{3}}\times\frac{32}{3} = \frac{\overline{PR}\times\overline{QS}}{2}\times a = \frac{32}{3}$$

Os triângulos $[BCD]$ e $[PCR]$ são semelhantes pois têm dois ângulos iguais: o ângulo BCD é comum e os ângulos CRP e CDB têm a mesma amplitude porque são ângulos de lados paralelos. Logo:

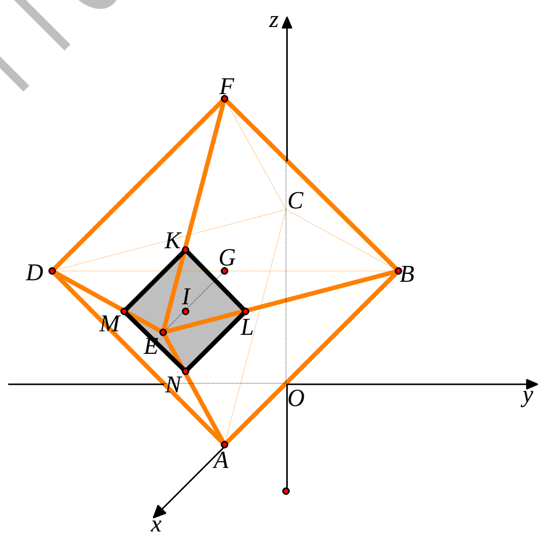
$$\frac{\overline{BD}}{\overline{PR}} = \frac{\overline{CG}}{\overline{CH}} \Leftrightarrow \frac{4}{\overline{PR}} = \frac{2}{a} \Leftrightarrow 2\overline{PR} = 4a \Leftrightarrow \overline{PR} = 2a \Rightarrow \overline{QS} = 2a \text{, pois } \overline{PR} = \overline{QS}$$

Assim,

$$\frac{\overline{PR}\times\overline{QS}}{2}\times a = \frac{32}{3} \Leftrightarrow \frac{\cancel{2}a\times2a}{\cancel{2}}\times a = \frac{32}{3} \Leftrightarrow 2a^3 = \frac{32}{3} \Leftrightarrow a^3 = \frac{16}{3} \Leftrightarrow a = \sqrt[3]{\frac{16}{3}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a = \frac{\sqrt[3]{2^4}}{\sqrt[3]{3}} \Leftrightarrow a = \frac{2\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{3}}\times\frac{\sqrt[3]{3^2}}{\sqrt[3]{3^2}} \Leftrightarrow a = \frac{2\sqrt[3]{2\times3^2}}{\sqrt[3]{3^3}} \Leftrightarrow a = \frac{2\sqrt[3]{18}}{3}$$

No entanto existe outro valor de a de modo que o plano de equação $x = a$ que divide o sólido da forma pretendida. Esse valor de a pertence ao intervalo $[2,4]$:



Assim, o outro valor de a que satisfaz o problema é de tal forma que a pirâmide $[KLMNE]$ é igual à pirâmide $[PQRSC]$, pelo que $\overline{EI} = \overline{CH} = \frac{2\sqrt[3]{18}}{3}$. Logo, o outro valor de a é $4-\overline{IE} = 4-\frac{2\sqrt[3]{18}}{3}$.

$$\therefore\ a=\frac{2\sqrt[3]{18}}{3} \quad \vee \quad a=4-\frac{2\sqrt[3]{18}}{3}.$$