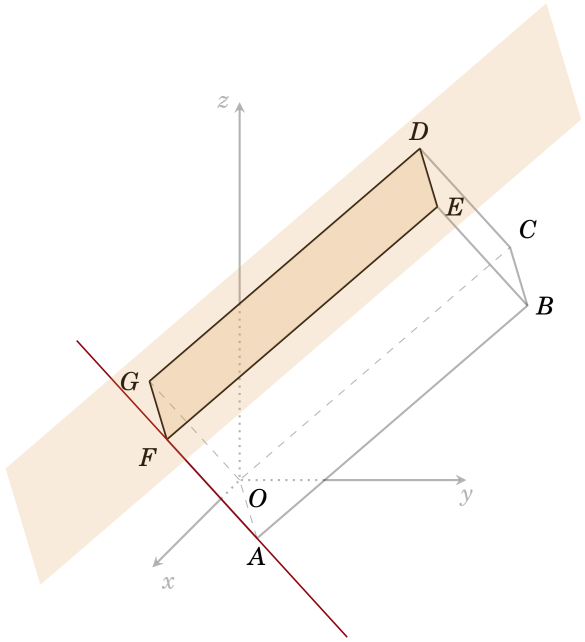
1.

1.1. A face $[DEFG]$ contida no plano pedido e a reta AF estão assinaladas na figura seguinte:



Comecemos por determinar um vetor perpendicular ao plano DEF. Se o vetor $(1,-2,3)$, vetor diretor da reta AF, for perpendicular a FE e a OA, que são dois vetores não colineares, paralelos a DEF então o vetor $(1,-2,3)$ é normal a DEF.

Usaremos o produto escalar entre os vetores $\overrightarrow{OA}$ e $(1,-2,3)$, da reta, nessa verificação.

Precisamos de determinar as coordenadas do ponto A que, por ser um ponto do plano xOy, sabemos ter cota nula, ou seja $A(x_A,y_A,0)$ e como é ponto da reta AF podemos fazer:

$$(x_A,y_A,0)=(3,4,-3)+k(1,-2,3)$$

de onde sai que:

$$\begin{cases} x_A &= 3+k \\ y_A &= 4-2k \\ 0 &= -3+3k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_A &= 4 \\ y_A &= 2 \\ 1 &= k \end{cases}$$

Logo $A(4,2,0)$.

Determinamos agora o vetor $\overrightarrow{OA}$:

$$\overrightarrow{OA}=(4,2,0)-(0,0,0)=(4,2,0)$$

e fazemos o produto escalar entre este e o vetor da reta:

$$(4,2,0)\cdot(1,-2,3)=4\times 1+2\times(-2)+0\times 3=0$$

ou seja, $[OAFG]$é um retângulo e podemos usar o vetor diretor da reta para a equação do plano.

Em $ax+by+cz+d=0$ vamos substituir os valores de a, b e c pelas coordenadas do vetor normal ao plano. Temos, então:

$$x-2y+3z+d=0$$

Determinamos d usando as coordenadas de um ponto do plano para substituirmos x, y e z.
Vamos determinar as coordenadas de F que, para além de estar no plano DEF, pertence também ao plano xOz, ou seja, ao plano de equação $y=0$ e, por isso, podemos escrever que $F(x_F,0,z_F)$. Como F também faz parte da reta AF, tem-se

$$(x_F,0,z_F)=(3,4,-3)+k(1,-2,3)$$

De onde sai que

$$\begin{cases} x_F &= 3+k \\ 0 &= 4-2k \\ z_F &= -3+3k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_F &= 3+k \\ k &= 2 \\ z_F &= -3+3k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_F &= 5 \\ k &= 2 \\ z_F &= 3 \end{cases}$$

Logo $F(5,0,3)$.

Como dissemos anteriormente, vamos substituir estas coordenadas na equação do plano:

$$5-2\times 0+3\times 3+d=0 \Leftrightarrow d=-14$$

Uma equação do plano que contém a face $[DEFG]$ pode ser:

$$x-2y+3z-14=0$$

1.2. Pedem-nos para determinar o valor de $\cos(2\theta)$. Ora:

$$\cos(2\theta)=\cos^2\theta-\operatorname{sen}^2\theta$$

Portanto, se descobrirmos o valor de $\cos\theta$ e de $\operatorname{sen}\theta$, conseguiremos encontrar o valor de $\cos(2\theta)$.
Temos que $A(4,2,0)$, $P(2,-2,2)$ e, obviamente, $O(0,0,0)$.
Daqui podemos determinar os vetores

$$\overrightarrow{AO}=-\overrightarrow{OA}=(-4,-2,0)$$

e

$$\overrightarrow{AP}=(2,-2,2)-(4,2,0)=(-2,-4,2)$$

Fazemos também as normas de cada um destes vetores e o produto escalar entre eles:

$$\|\overrightarrow{AO}\|=\sqrt{(-4)^2+(-2)^2+0^2}=\sqrt{20}$$

$$\|\overrightarrow{AP}\|=\sqrt{(-2)^2+(-4)^2+(2)^2}=\sqrt{24}$$

$$\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{AP}=(-4,-2,0)\cdot(-2,-4,2)=16$$

Com isto, podemos usar a fórmula:

$$\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{AP}=\|\overrightarrow{AO}\|\times\|\overrightarrow{AP}\|\times\cos\theta$$

para determinarmos $\cos\theta$.

$$16=\sqrt{20}\times\sqrt{24}\times\cos\theta\Leftrightarrow\cos\theta=\frac{16}{\sqrt{20}\sqrt{24}}=\frac{2\sqrt{30}}{15}$$

Agora, pela fórmula fundamental da trigonometria:

$$\operatorname{sen}^2\theta+\left(\frac{2\sqrt{30}}{15}\right)^2=1\Leftrightarrow\operatorname{sen}^2\theta=\frac{7}{15}$$

E, assim:

$$\cos(2\theta)=\left(\frac{2\sqrt{30}}{15}\right)^2-\frac{7}{15}=\frac{1}{15}$$

Podíamos ainda resolver este exercício recorrendo à Lei dos cossenos para calcular o valor de $\cos\theta$.
Para isso precisamos de determinar $\overrightarrow{OP}$:

$$\overrightarrow{OP}=P-O=(2,-2,2)-(0,0,0)=(2,-2,2)$$

E ainda a sua norma:

$$\|\overrightarrow{OP}\|=\sqrt{2^2+(-2)^2+2^2}=\sqrt{12}=2\sqrt{3}$$

Aplicando a Lei dos cossenos:

$$\|\overrightarrow{OP}\|^2=\|\overrightarrow{AP}\|^2+\|\overrightarrow{AO}\|^2-2\|\overrightarrow{AP}\|\,\|\overrightarrow{AO}\|\cos\theta$$

ou seja:

$$12=24+20-2\sqrt{24}\sqrt{20}\cos\theta\Leftrightarrow\cos\theta=\frac{2\sqrt{30}}{15}$$

A partir daqui a resolução coincide com a anterior.

2. A soma de todos os elementos da linha n do Triângulo de Pascal é igual a 2^n.

Sejam n e $n+p$ as linhas que estão a ser somadas.

- A soma de todos os elementos da linha n é 2^n.
- A soma de todos os elementos da linha $n+p$ é 2^{n+p}.

Então, atendendo ao enunciado:

$$2^n+2^{n+p}=2080$$

$$\Leftrightarrow 2^n+2^n\times2^p=2080$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{2^n}_{\text{Par}}\underbrace{\left(1+2^p\right)}_{\text{Ímpar}}=2080$$

Fatorizando 2080 ficamos com:

$$2080=2^5\times5\times13$$

A única forma de se ter $2^n\left(1+2^p\right)=2080$ com n e p naturais é tendo $n=5$ e $1+2^p=65$.

$$1+2^p=65$$

$$\Leftrightarrow 2^p=64$$

$$\Leftrightarrow p=6$$

Assim sendo, somaram-se todos os elementos das linhas 5 e 11. A linha 11 tem 12 elementos. Os maiores são ${}^{11}C_5={}^{11}C_6=462$.

Opção: **(B)**

Temos então de encontrar m e n tais que:

$$2^m+2^n=2080$$

Por tentativa e erro, com ajuda da calculadora, rapidamente chegamos a

$$2048+32=2080$$

Como $2048=2^{11}$ e $2^5=32$ então estamos perante as linhas 5 e 11.

Sendo 5 e 11 números ímpares, cada uma destas linhas tem um número par de elementos e, por isso, os dois elementos de maior valor serão os dois centrais. Temos então: ${}^5C_2={}^5C_3=10$ e ${}^{11}C_5={}^{11}C_6=462$.

3. Comecemos por definir os acontecimentos:

H: «O funcionário é homem.»
L: «O funcionário é licenciado.»

Pela informação presente no enunciado, sai que:

- $P(H)=0{,}2$
- $P\left(\overline{L}|\overline{H}\right)=0{,}6$

Daqui podemos tirar mais alguns dados:

$$P\left(\overline{H}\right)=1-P(H)=1-0{,}2=0{,}8$$

$$P\left(\overline{L}|\overline{H}\right)=\frac{P\left(\overline{L}\cap\overline{H}\right)}{P\left(\overline{H}\right)}\Leftrightarrow0{,}6=\frac{P\left(\overline{L}\cap\overline{H}\right)}{0{,}8}$$

$$\Leftrightarrow0{,}6\times0{,}8=P\left(\overline{L}\cap\overline{H}\right)\Leftrightarrow0{,}48=P\left(\overline{L}\cap\overline{H}\right)$$

pelo que podemos concluir também que:

$$P\left(L\cap\overline{H}\right)=P\left(\overline{H}\right)-P\left(\overline{L}\cap\overline{H}\right)=0{,}8-0{,}48=0{,}32$$

Considere-se agora que $\underline{n}$ é o número de mulheres licenciadas e $\underline{m}$ o número de trabalhadores que não são mulheres licenciadas. Então:

$$P\left(L\cap \overline{H}\right)=\frac{n}{n+m} \Leftrightarrow 0{,}32=\frac{n}{n+m}$$
$$\Leftrightarrow 0{,}32\,(n+m)=n$$
$$\Leftrightarrow 0{,}32m=n-0{,}32n$$
$$\Leftrightarrow m=\frac{0{,}68n}{0{,}32}$$
$$\Leftrightarrow m=\frac{17}{8}n$$

Temos agora de considerar o acontecimento:

M: «São escolhidas duas mulheres licenciadas para representar os trabalhadores.»

Temos:

- Casos possíveis: ${}^{n+m}C_2$
- Casos favoráveis: ${}^{n}C_2$

Então:

$$P(M)=\frac{{}^{n}C_2}{{}^{n+m}C_2}=\frac{92}{925}$$

$$\frac{{}^{n}C_2}{{}^{n+m}C_2}=\frac{92}{925}$$

Recordar que $\;{}^{n}C_p=\frac{n!}{p!\,(n-p)!}$

$$\Leftrightarrow \frac{\dfrac{n!}{2!\times(n-2)!}}{\dfrac{(n+m)!}{2!\times(n+m-2)!}}=\frac{92}{925}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\dfrac{n\times(n-1)\times\cancel{(n-2)!}}{2!\times\cancel{(n-2)!}}}{\dfrac{(n+m)\times(n+m-1)\times\cancel{(n+m-2)!}}{2!\times\cancel{(n+m-2)!}}}=\frac{92}{925}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\dfrac{n\times(n-1)}{\cancel{2!}}}{\dfrac{(n+m)\times(n+m-1)}{\cancel{2!}}}=\frac{92}{925}$$

$$\Leftrightarrow \frac{n\times(n-1)}{(n+m)\times(n+m-1)}=\frac{92}{925}$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{\frac{n}{n+m}}_{0{,}32=\frac{8}{25}}\times\frac{n-1}{n+m-1}=\frac{92}{925}$$

Como vimos anteriormente: $\;m=\frac{17}{8}n$

$$\Leftrightarrow \frac{8}{25}\times\frac{n-1}{n+\frac{17}{8}n-1}=\frac{92}{925}$$

$$\Leftrightarrow \frac{n-1}{\frac{25}{8}n-1}=\frac{23}{74}$$

$$\Leftrightarrow 74n-74=\frac{575}{8}n-23$$

$$\Leftrightarrow \frac{17}{8}n=51 \Leftrightarrow n=24$$

Concluímos assim que na empresa trabalham 24 mulheres licenciadas num universo de 75 trabalhadores.

4. No enunciado é-nos dito que:

$$P\left(\overline{A}\right)=0{,}6 \quad \text{e} \quad P(B)=0{,}8$$

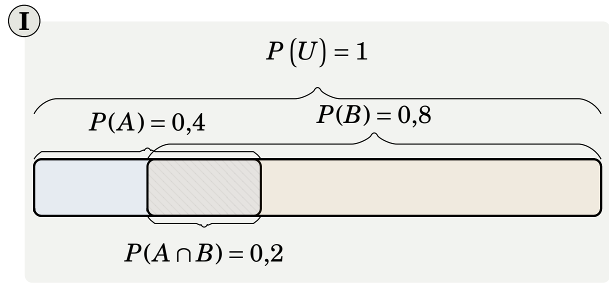
de onde podemos tirar que:

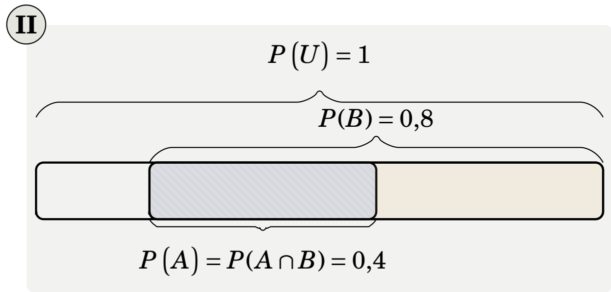
$$P(A)=1-P\left(\overline{A}\right)=1-0{,}6=0{,}4$$

Para avaliarmos os possíveis valores para $P(A|B)$ vamos escrever esta probabilidade como

$$\frac{P(A\cap B)}{P(B)}$$

e começar por enquadrar $P(A\cap B)$.





Na figura **I** está representada a situação em que conseguimos ter a menor interseção possível e na figura **II** temos a situação em que $A\subseteq B$ e, por isso, a maior interseção possível. Assim, ficamos com:

$$0{,}2\le P(A\cap B)\le 0{,}4$$

Dividindo por $P(B)=0{,}8$

$$\frac{0{,}2}{0{,}8}\le\frac{P(A\cap B)}{P(B)}\le\frac{0{,}4}{0{,}8}$$

$$\frac{1}{4}\le P(A|B)\le\frac{1}{2}$$

Opção: (C)

5. Podemos escrever o limite

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{f(x)}$$

como

$$\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{1}{f(x)} \times \operatorname{sen} x\right)$$

Da informação que conseguimos retirar do enunciado e observação da figura podemos concluir que

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$$

e, consequentemente,

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{f(x)} = 0$$

Sabemos também que $\operatorname{sen} x$ é uma função limitada.

Assim, podemos concluir imediatamente que

$$\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{1}{f(x)} \times \operatorname{sen} x\right) = 0$$

ou seja:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{f(x)} = 0$$

Opção: **(B)**

Para determinar o valor deste limite podíamos começar pelo enquadramento:

$$\begin{aligned} -1 &\le \operatorname{sen} x \le 1 \\ \Leftrightarrow \frac{1}{f(x)} &\le \frac{\operatorname{sen} x}{f(x)} \le -\frac{1}{f(x)} \end{aligned}$$

Dividimos tudo por $f(x)$. Atenção que quando $x \to +\infty$ temos $f(x) < 0$

Como

$$\lim_{x\to+\infty} \left(-\frac{1}{f(x)}\right) = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{1}{f(x)}\right) = 0$$

então

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{f(x)} = 0$$

6. Se (u_n) é uma progressão aritmética em que $\ln 2$ e $\ln\left(\frac{2}{3}\right)$ são termos consecutivos então podemos encontrar a razão r de (u_n) fazendo:

$$r = \ln\left(\frac{2}{3}\right) - \ln 2 = \ln 2 - \ln 3 - \ln 2 = -\ln 3$$

Assim

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - u_n = -\ln 3$$

Para (v_n) ser uma progressão geométrica, é necessário que $\frac{v_{n+1}}{v_n}$ não dependa de n.

Vamos usar a definição de (v_n) para determinar a expressão de v_{n+1}.

$$v_{n+1} = 3e^{-2u_{n+1}}$$

$$v_n = 3e^{-2u_n}$$

fazemos a divisão entre estas duas expressões e simplificamos.

$$\begin{aligned} \frac{v_{n+1}}{v_n} &= \frac{\cancel{3}e^{-2u_{n+1}}}{\cancel{3}e^{-2u_n}} \\ &= e^{-2u_{n+1}-(-2u_n)} \\ &= e^{-2(u_{n+1}-u_n)} \\ &= e^{-2\times(-\ln 3)} \\ &= e^{\ln(3^2)} \\ &= 3^2 = 9 \longrightarrow \text{Não depende de } n. \end{aligned}$$

Como visto em cima: $u_{n+1} - u_n = -\ln 3$

Então, como $\forall n \in \mathbb{N}$ temos $\frac{v_{n+1}}{v_n} = 9$ podemos afirmar que (v_n) é uma progressão geométrica com razão igual a 9.

7. Ao observar a forma como as sucessões estão definidas, (v_n) chama a atenção pela presença de $(-1)^n$, que muitas vezes significa que a sucessão não é monótona. Assim, vamos calcular alguns termos desta sucessão e verificar se é esse o caso aqui.

$$v_1 = 4$$

$$v_2 = -\frac{8}{3}$$

$$v_3 = -\frac{16}{9}$$

$$v_4 = -\frac{32}{27}$$

$-\frac{8}{3} - 4 < 0 \Rightarrow$ *decrescimento*

$-\frac{16}{9} - \left(-\frac{8}{3}\right) < 0 \Rightarrow$ *decrescimento*

$-\frac{32}{27} - \left(-\frac{16}{9}\right) > 0 \Rightarrow$ *crescimento*

Assim, concluímos que (v_n) não é monótona e, por isso, a frase:

(v_n) é limitada e monótona.

é falsa.

Opção: **(D)**

8. Começamos por simplificar a expressão:

$$z=\frac{-\underbrace{2\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha}^{\operatorname{sen}(2\alpha)}+\overbrace{\left(\cos^2\alpha-\operatorname{sen}^2\alpha\right)}^{\cos(2\alpha)}i}{\cos\alpha-i\operatorname{sen}\alpha}$$

$$\Leftrightarrow z=\frac{-\operatorname{sen}(2\alpha)+\cos(2\alpha)\,i}{\cos\alpha-i\operatorname{sen}\alpha}$$

$$\Leftrightarrow z=\frac{\left[-\operatorname{sen}(2\alpha)+\cos(2\alpha)\,i\right](\cos\alpha+i\operatorname{sen}\alpha)}{\underbrace{(\cos\alpha-i\operatorname{sen}\alpha)(\cos\alpha+i\operatorname{sen}\alpha)}_{\operatorname{sen}^2\alpha+\cos^2\alpha=1}}$$

$$\Leftrightarrow z=-\operatorname{sen}(2\alpha)\cos\alpha-i\operatorname{sen}(2\alpha)\operatorname{sen}\alpha+$$
$$+i\cos(2\alpha)\cos\alpha-\cos(2\alpha)\operatorname{sen}\alpha$$

$$\Leftrightarrow z=-\overbrace{\left(\operatorname{sen}(2\alpha)\cos\alpha+\cos(2\alpha)\operatorname{sen}\alpha\right)}^{\operatorname{sen}(2\alpha+\alpha)=\operatorname{sen}(3\alpha)}+$$
$$+\underbrace{i\left(\cos(2\alpha)\cos\alpha-\operatorname{sen}(2\alpha)\operatorname{sen}\alpha\right)}_{\cos(2\alpha+\alpha)=\cos(3\alpha)}$$

$$\Leftrightarrow z=-\operatorname{sen}(3\alpha)+i\cos(3\alpha)$$

Como queremos que o afixo de z pertença à bissetriz dos quadrantes pares $(y=-x)$ então:

$$\cos(3\alpha)=-\left(-\operatorname{sen}(3\alpha)\right)$$

$$\Leftrightarrow\cos(3\alpha)=\operatorname{sen}(3\alpha)$$

$$\Leftrightarrow\cos(3\alpha)=\cos\left(\frac{\pi}{2}-3\alpha\right)$$

$$\Leftrightarrow 3\alpha=\frac{\pi}{2}-3\alpha+2k\pi\vee\underbrace{3\alpha=-\left(\frac{\pi}{2}-3\alpha\right)+2k\pi}_{\text{condição impossível}},\ k\in\mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow 6\alpha=\frac{\pi}{2}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow\alpha=\frac{\pi}{12}+\frac{k\pi}{3},\ k\in\mathbb{Z}$$

Vejamos agora, pela substituição de k quais os α que estão no intervalo indicado:

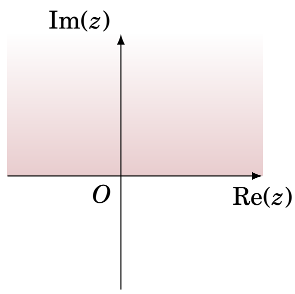
$k=0\implies\alpha=\frac{\pi}{2}\in\left]0,\pi\right[$ $\quad k=1\implies\alpha=\frac{5\pi}{12}\in\left]0,\pi\right[$

$k=2\implies\alpha=\frac{3\pi}{4}\in\left]0,\pi\right[$ $\quad k=3\implies\alpha=\frac{13\pi}{12}\notin\left]0,\pi\right[$

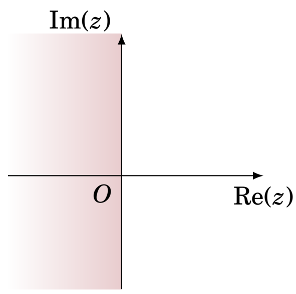
$k=-1\implies\alpha=-\frac{\pi}{4}\notin\left]0,\pi\right[$

Logo $\alpha\in\left\{\frac{\pi}{12},\frac{5\pi}{12},\frac{3\pi}{4}\right\}$.

9. Vamos começar por fazer a representação, plano de Argand, da região correspondente ao conjunto A.

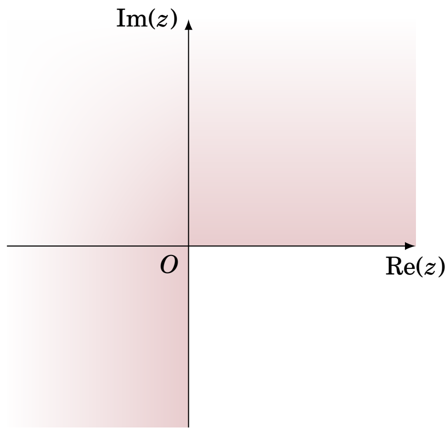


$\operatorname{Im}(z)\geq 0$



$\operatorname{Re}(z)\leq 0$

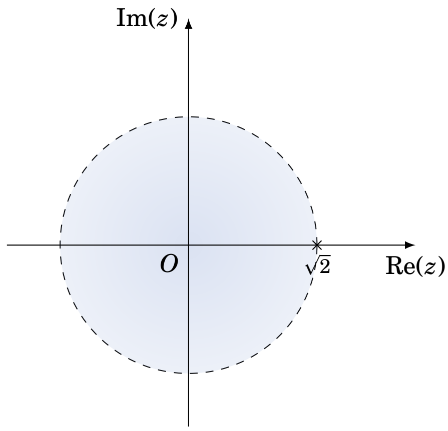
Assim, a condição $\operatorname{Im}(z)\vee\operatorname{Re}(z)$ corresponde a:



Para entendermos a parte $|z|<|1+i|$ temos de saber a que corresponde $|1+i|$.

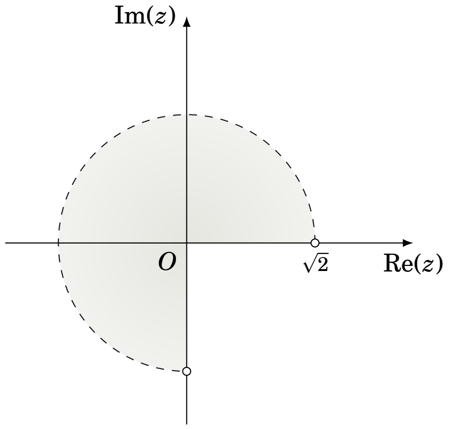
$$|1+i|=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$$

Ficamos com $|z|<\sqrt{2}$, ou seja, queremos considerar todos os pontos que estão a uma distância à origem do referencial inferior a $\sqrt{2}$. Temos, portanto:



Podemos agora representar a região que resulta da conjunção entre as duas condições:

$$\left(\mathrm{Im}(z) \geq 0 \vee \mathrm{Re}(z) \leq 0\right) \wedge |z| < |1+i|$$



Na opção **(A)** temos o número $i^{323} - 2$ que é igual a $-i+1$. No entanto

$$|-i-2| = \sqrt{(-1)^2 + (-2)^2} = \sqrt{5} > \sqrt{2}$$

logo, este número não pertence a A.

Na opção **(B)** temos o número $i(1+i)$ que é igual a $-1+i$. No entanto

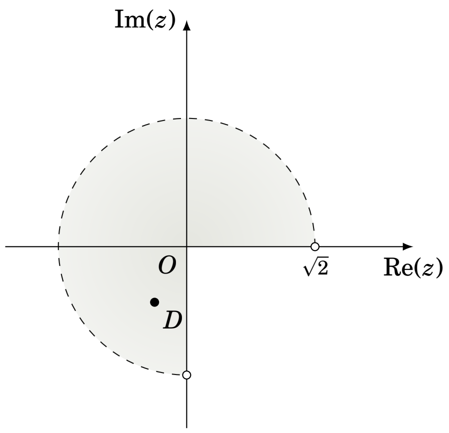
$$|-1+i| = \sqrt{(-1)^2 + (1)^2} = \sqrt{2}$$

portanto, este número também não pertence a A

No caso da opção **(C)**, porque o número está na forma trigonométrica, ainda é mais fácil percebermos que não pode pertencer a A pela mesma razão que a opção anterior: o seu módulo não é inferior a $\sqrt{2}$.

Assim, ficamos com a opção **(D)**, cujo módulo é $\frac{\sqrt{2}}{2}$ e o argumento é $-\frac{2\pi}{3}$.

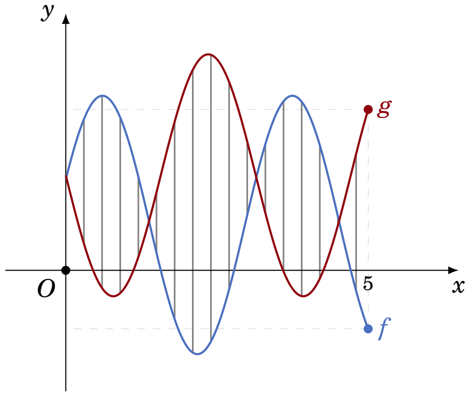
Seja D o afixo do número desta opção.



Opção: **(D)**

10.

10.1. Na figura seguinte apresentam-se parte das representações gráficas das duas funções consideradas no enunciado com $x \in [0,5]$:

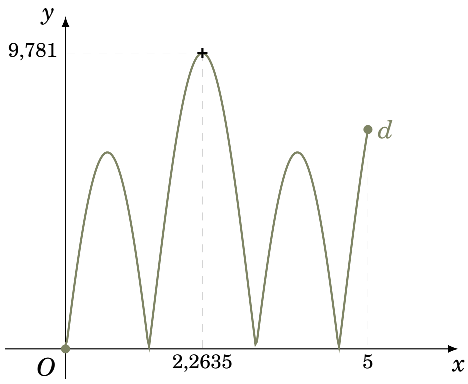


Cada um dos segmentos verticais que se apresentam na figura correspondem a um segmento $[AB]$ com A e B definidos como no enunciado.

Pedem-nos para determinar o máximo absoluto que $\overline{AB}$ toma para valores de $x \in [0,5]$, ou seja, o máximo absoluto da função d que se pode definir do seguinte modo:

$$d(x) = |f(x) - g(x)|, \text{ com } x \in [0,5]$$

Recorremos depois à calculadora para determinarmos o ponto pedido e obtemos:



Assim verificamos que máximo absoluto de d se atinge quando $x \approx 2{,}26$.

Opção: **(B)**

10.2. Seja $P(a, f(a))$. Sendo a reta tangente paralela a t, vamos calcular o declive de t - m_t - e calcular $a \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ tal que $f'(a) = m_t$.

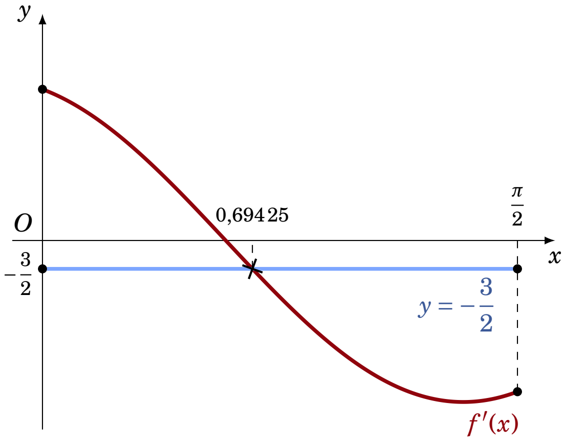
Como

$$2y + 3x + 6 = 0 \Leftrightarrow y = -\frac{3}{2}x - 3$$

concluímos que $m_t = -\frac{3}{2}$.

Recorremos agora às capacidades gráficas da calculadora para representar a derivada de f e resolver a equação

$$f'(a) = -\frac{3}{2}$$



Chegamos a $\alpha \approx 0{,}69$.
Então

$$f(\alpha) = f\left(0{,}69\right) \approx 5{,}71$$

Podemos agora substituir estes valores na equação da reta tangente:

$$y = -\frac{3}{2}x + b$$

e determinar o valor de b pedido.

$$5{,}71 = -\frac{3}{2} \times 0{,}69 + b \Leftrightarrow b = 5{,}71 + 1{,}035 \Leftrightarrow b \approx 6{,}7$$

11. O ponto de tangência é um ponto comum à circunferência e à reta tangente. Quando nos dizem que esse ponto tem abcissa igual a 8 e ordenada positiva então podemos excluir já as opções **(B)** e **(D)** uma vez que nestes casos ao substituirmos x por 8 nas equações das retas obtemos valores negativos para as respetivas ordenadas.

Na opção **(A)**, para $x = 8$ temos:

$$y = -\frac{3}{4} \times 8 + 11 = 5$$

então o ponto da reta com abcissa 8 é $(8,5)$. Vejamos se este ponto pertence à circunferência de equação $x^2 + y^2 - 10x = 0$:

$$8^2 + 5^2 - 10 \times 8 = 0 \Leftrightarrow 9 = 0 \qquad \text{Prop. falsa.}$$

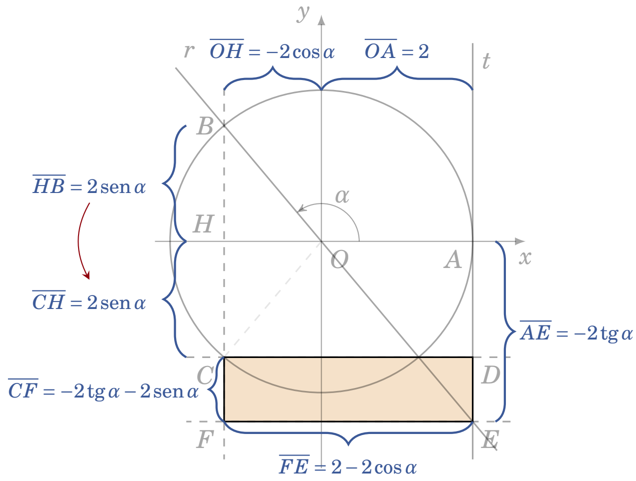
logo não é ponto da circunferência.

Na opção **(C)** temos o ponto $(8,4)$ e se usarmos estes valores para substituir o x e y na equação da circunferência ficamos com:

$8^2 + 4^2 - 10 \times 8 = 0 \Leftrightarrow 0 = 0$ Prop. verdadeira.

Opção: **(C)**

12. Para determinarmos a área do retângulo $[CDEF]$ vamos primeiro colocar alguns comprimentos na figura por forma a termos alguma orientação:



Podemos fazer:

$f(\alpha) = \overline{FE} \times \overline{CF}$

$$\begin{aligned}
&= \left(2 - 2\cos\alpha\right) \times \left(-2\operatorname{tg}\alpha - 2\operatorname{sen}\alpha\right) \\
&= -4\operatorname{tg}\alpha - 4\operatorname{sen}\alpha + 4\cos\alpha\operatorname{tg}\alpha + 4\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha \\
&= -4\operatorname{tg}\alpha - 4\operatorname{sen}\alpha + 4\cancel{\cos\alpha}\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cancel{\cos\alpha}} + 4\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha \\
&= -4\operatorname{tg}\alpha \cancel{-4\operatorname{sen}\alpha} + \cancel{4\operatorname{sen}\alpha} + 4\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha \\
&= -4\operatorname{tg}\alpha + 4\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha \\
&= 4\operatorname{tg}\alpha\left(-1 + \cos^2\alpha\right) \\
&= 4\operatorname{tg}\alpha\left(-\operatorname{sen}^2\alpha\right) \\
&= -4\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}\operatorname{sen}^2\alpha \\
&= -4\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha\frac{\operatorname{sen}^2\alpha}{\cos^2\alpha} \\
&= -2 \times 2\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha\left(\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}\right)^2 \\
&= -2\operatorname{sen}(2\alpha)\operatorname{tg}^2\alpha
\end{aligned}$$

Pela fórmula fundamental da trigonometria

$2\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha = \operatorname{sen}(2\alpha)$

13.

13.1. Em $]1,+\infty[$ a função g está definida como:

$$g(x) = \frac{x^2\ln x - 2}{x}$$

e é válida a simplificação

$$g(x) = x\ln x - \frac{2}{x}$$

Para estudarmos o sentido das concavidades do gráfico da função vamos calcular a segunda derivada de g neste intervalo.

$$\begin{aligned} g'(x) &= \left(x\ln x - \frac{2}{x}\right)' \\ &= x'\ln x + x\left(\ln x\right)' - \left(\frac{2}{x}\right)' \\ &= \ln x + x \times \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2} \\ &= \ln x + 1 + \frac{2}{x^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g''(x) &= \left(\ln x + 1 + \frac{2}{x^2}\right)' \\ &= \left(\ln x\right)' + 1' + \left(\frac{2}{x^2}\right)' \\ &= \underset{\times x^2}{\frac{1}{x}} - \frac{4}{x^3} \\ &= \frac{x^2-4}{x^3} \end{aligned}$$

Calculamos agora os zeros da segunda derivada em busca de candidatos a pontos de inflexão do gráfico de g.

$$\begin{aligned} \frac{x^2-4}{x^4} = 0 &\Leftrightarrow x^2-4=0 \wedge x^3 \neq 0 \\ &\Leftrightarrow \quad x^2 = 4 \quad \wedge\ x \neq 0 \\ &\Leftrightarrow \quad x = \pm 2 \quad \wedge\ x \neq 0 \end{aligned}$$

x	1		2	$+\infty$
x^2-4		$-$	0	$+$
x^3		$+$	8	$+$
$g''(x)$		$-$	0	$+$
$g(x)$		$\frown$	$P.I.$	$\smile$

Temos concavidade voltada para baixo em $]1,2]$ e voltada para cima em $[2,+\infty[$.

Temos também um ponto de inflexão com abcissa 2 e cuja ordenada é:

$$g(2) = \frac{2^2\ln 2 - 2}{2} = 2\ln 2 - 1 = \ln 2^2 - \ln e = \ln\left(\frac{4}{e}\right)$$

Assim, como queríamos mostrar, temos um ponto de inflexão de coordenadas $\left(2, \ln\left(\frac{4}{e}\right)\right)$.

13.2. Sendo g contínua em $]0,+\infty]$ então é contínua em $x=1$ e, se isso acontece, sabemos que

$$\lim_{x\to 1^-} g(x) = \lim_{x\to 1^+} g(x) = g(1)$$

Pela forma como está definida a função

$$\lim_{x\to 1^+} g(x) = \lim_{x\to 1^+} \frac{x^2\ln x - 2}{x} = -2 = g(1)$$

Assim sendo,

$$\underbrace{\lim_{x\to 1^-} \frac{e^{-kx+x}+x-2}{x^2-x}}_{\frac{0}{0}\text{ (ind.)}} = -2$$

$$\Leftrightarrow \lim_{x\to 1^-}\left[\frac{e^{-kx+k}-1}{x(x-1)} + \frac{x-1}{x(x-1)}\right] = -2$$

$$\Leftrightarrow \lim_{x\to 1^-}\left[-\frac{k}{x} \times \frac{e^{-k(x-1)}-1}{-k(x-1)}\right] + \underbrace{\lim_{x\to 1^-} \frac{\cancel{x-1}}{x\cancel{(x-1)}}}_{=1} = -2$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{\lim_{x\to 1^-}\left(-\frac{k}{x}\right)}_{=-k} \times \lim_{x\to 1^-}\left[\frac{e^{-k(x-1)}-1}{-k(x-1)}\right] + 1 = -2$$

$$\Leftrightarrow -k \times \lim_{x\to 1^-}\left[\frac{e^{-k(x-1)}-1}{-k(x-1)}\right] = -3$$

Se $x \to 1^-$ então $-k(x-1) \to 0^{\pm}$ (dependendo do sinal de k)
Seja $y = -k(x-1)$ então $y \to 0^{\pm}$

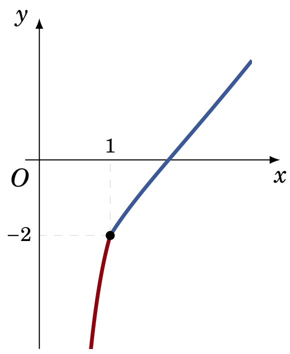
$$\Leftrightarrow -k \underbrace{\lim_{y\to 0^{\pm}} \frac{e^y-1}{y}}_{\text{Limite notável }=1} = -3$$

$$\Leftrightarrow -k \times 1 = -3$$

$$\Leftrightarrow k = 3$$

Opção: (D)

Podíamos também usar a calculadora para representar a função com o k substituído por cada valor presente nas opções. Para $k=3$ ficava:



e, embora sem certezas da continuidade da função, como nos restantes casos essa descontinuidade era evidente, apenas restava esta hipótese como verdadeira.

14. Queremos determinar, em $\mathbb{R}$, o conjunto solução de:

$$e^{\frac{4}{x-2}-2x} \geq a$$

sabendo que $a \in \mathbb{R}^+$ e que $\ln a = 3$.

Temos então:

$$e^{\frac{4}{x-2}-2x} \geq a$$

$D = \mathbb{R} \setminus \{2\}$
Se $\ln a = 3$ então $a = e^3$.

$$\Leftrightarrow e^{\frac{4}{x-2}-2x} \geq e^3$$

$e > 1$

$$\Leftrightarrow \frac{4}{x-2} - 2x \geq 3$$

$$\Leftrightarrow \frac{4}{x-2} - \frac{2x\left(x-2\right)}{x-2} - \frac{3\left(x-2\right)}{x-2} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{4-2x^2+4x-3x+6}{x-2} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{-2x^2+x+10}{x-2} \boxed{\geq 0} \longrightarrow \textit{A considerar para a solução.}$$

- Zeros do numerador

$$-2x^2+x+10=0$$

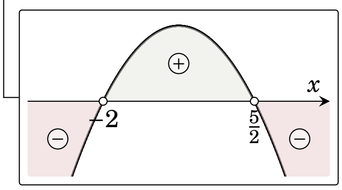
$$\Leftrightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2-4\times\left(-2\right)\times 10}}{2\times\left(-2\right)}$$

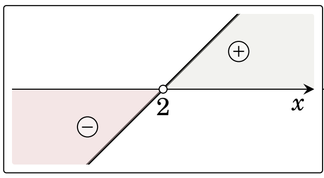
$$\Leftrightarrow x = \frac{5}{2} \vee x = -2$$

- Zeros do denominador

$$x-2=0 \Leftrightarrow x=2$$

x	$-\infty$	-2		2		$\frac{5}{2}$	$+\infty$
$-2x^2+x+10$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$
$x-2$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$\frac{-2x^2+x+10}{x-2}$	$+$	0	$-$	$n.d.$	$+$	0	$-$





Então $S = \left]-\infty,-2\right] \cup \left]2,\frac{5}{2}\right]$.

15. Sejam P e Q os pontos onde a reta t é tangente às funções f e g, respetivamente.

Do ponto Q sabemos ter abcissa igual a $a > 0$ e, portanto, $Q\left(a,\ln a\right)$.

Digamos que a abcissa do ponto P é b, então $P\left(b,e^b\right)$.

Por outro lado, sendo t tangente a g no ponto de abcissa a, o declive da reta t - m_t - é igual a $g'(a)$. Temos que:

$$g'(x) = \left(\ln x\right)' = \frac{1}{x}$$

então

$$m_t = g'(a) = \frac{1}{a} \qquad (\star)$$

Pelas mesmas razões, esse declive também é igual a $f'(b)$. Como $f'(x) = \left(e^x\right)' = e^x$, ficamos com $f'\left(b\right) = e^b$, que conduz à igualdade:

$$e^b = \frac{1}{a}$$

Assim, conseguimos determinar b em função de a:

$$b = \ln\left(\frac{1}{a}\right) = \ln\left(a^{-1}\right) = -\ln(a)$$

Com isto concluímos que $P\left(-\ln a, \frac{1}{a}\right)$.

Usemos os pontos P e Q para determinar uma expressão para o declive de t:

$$m_t = \frac{y_P - y_Q}{x_P - x_Q} = \frac{\frac{1}{a} - \ln(a)}{-\ln(a) - a} \qquad (\star\star)$$

De $(\star)$ e $(\star\star)$ sai:

$$\frac{1}{a} = \frac{\frac{1}{a} - \ln(a)}{-\ln(a) - a}$$

$$\Leftrightarrow -\ln(a) - a = 1 - a\ln(a)$$

$$\Leftrightarrow -\ln(a) + a\ln(a) = 1 + a$$

$$\Leftrightarrow \ln(a)\left(-1+a\right) = 1+a$$

$$\Leftrightarrow \ln(a) = \frac{a+1}{a-1}$$

como se pedia para mostrar.