José Carlos da Silva Pereira
Explicações de Matemática – Sala de Estudo

Exame Nacional do Ensino Secundário – Matemática A

Prova Modelo n.º 1

12.º Ano de Escolaridade

"Pela evidência intrínseca da sua criação, o Grande Arquitecto do Universo começa agora a parecer um puro Matemático."
Sir James Jeans

Grupo I – Itens de Escolha Múltipla

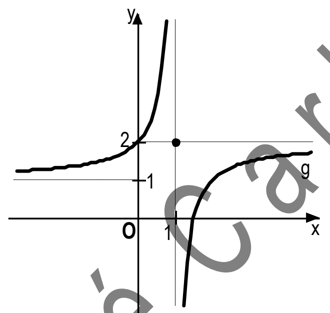
1. Um baralho de cartas completo é constituído por 52 cartas, repartidas por quatro naipes de treze cartas cada: espadas, copas, paus e ouros. Em cada naipe há três figuras. Retiram-se as doze figuras de um baralho completo e colocam-se em fila. Quantas filas diferentes podemos formar de modo que nos extremos fiquem dois Reis?

A $10!$ **B** $4\times3\times10!$ **C** $12!$ **D** $2\times10!$

2. Seja S o espaço de resultados associados a uma certa experiência aleatória. Sejam A, B e C três acontecimentos $(A\subset S,\ B\subset S\ \text{e}\ C\subset S)$. Sabe-se que $P(A\cap B)=P(C)=0{,}2$ e que $A\cap B$ e C são incompatíveis. Qual é o valor de $P\left((A\cap B)\middle|\overline{C}\right)$?

A 0 **B** 0,10 **C** 0,25 **D** 0,4

3. Seja g uma função de domínio IR cujo gráfico se encontra parcialmente representado na figura. Sabe que:



– As rectas de equações $x=1$, $y=1$ e $y=2$ são assimptotas do gráfico de g;

– $g(1)=2$.

Seja (u_n) uma sucessão tal que $\lim g(u_n)=1$. O termo geral de da sucessão (u_n) pode ser:

A $u_n=1+e^{-n}$ **B** $u_n=n+n^2$ **C** $u_n=-\frac{1}{n}$ **D** $u_n=-\ln(n)$

4. Sejam x e y dois números reais positivos tais que $y=\frac{2}{x}$. Qual é o valor exacto de $\log_4\left(\frac{x^3y^3}{4}\right)$?

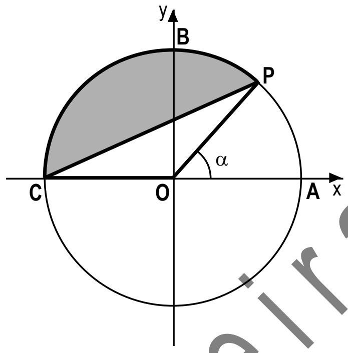
A $-\frac{3}{2}$ **B** $-\frac{1}{2}$ **C** $\frac{1}{2}$ **D** $\frac{3}{2}$

5. Na figura está representada, em referencial o.n. xOy uma circunferência de equação $x^2 + y^2 = 4$.

– Os pontos A, B e C pertencem à circunferência;

– Os pontos A e C pertencem ao eixo Ox e o ponto B ao eixo Oy;

– O ponto O é a origem do referencial.



Considera um ponto P que se desloca sobre o arco ABC e seja α a amplitude, em radianos, do ângulo AOP, $\alpha \in [0, \pi]$.

Qual das seguintes expressões dá a área da região sombreada em função de α?

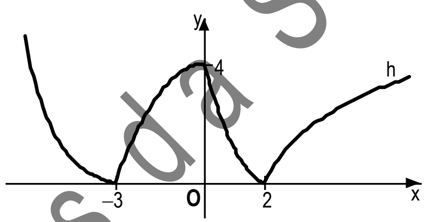
A $\pi - \alpha - \text{tg}\alpha$

B $2 \times (\pi - \alpha - \text{sen}\alpha)$

C $\pi - \alpha - \text{sen}\alpha$

D $2 \times (\pi - \alpha - \text{tg}\alpha)$

6. Seja h uma função cuja representação gráfica é a seguinte:



Qual das seguintes expressões designa um número negativo?

A $h'(-2) \times h''(1)$

B $h(0) + h'(3) \times h''(1)$

C $h(-3) + h''(-3)$

D $h(2) - h'(3) - h''(-4)$

7. Em C, conjunto dos números complexos, considera o complexo $z = 2 - 2\sqrt{3}i$. Um argumento de $\frac{i}{z^2}$ é:

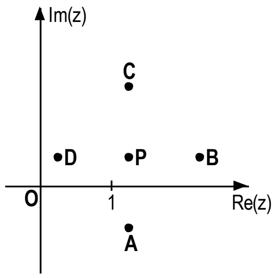
A $-\frac{\pi}{6}$

B $\frac{\pi}{6}$

C $\frac{2}{3}\pi$

D $\frac{7}{6}\pi$

8. Seja P a imagem geométrica do número complexo z. A imagem geométrica do número complexo $z+2i^{11}$ é:



A O ponto A **B** O ponto B **C** O ponto C **D** O ponto D

Grupo II – Itens de Resposta Aberta

1. Em C, conjunto dos números complexos, considera $z_1=\sqrt{3}-i$ e $z_2=2e^{i\frac{5\pi}{12}}$.

1.1 Mostra que o número complexo $\dfrac{z_1\times z_2}{2i}-\sqrt{2}$ é um imaginário puro.

1.2 Seja $z_3=\operatorname{cis}\alpha$ um número complexo. Determina $\alpha\in\left]0,\dfrac{\pi}{2}\right[$ de modo que $\dfrac{(z_3)^2}{z_2}$ seja um número real.

2. Seja S um espaço de resultados associados a uma experiência aleatória. Sejam A e B dois acontecimentos possíveis ($A\subset S$ e $B\subset S$).

2.1 Mostra que $P\left(\overline{A}\cap B\right)=P(B)-P(A)+P\left(A|\overline{B}\right)\times P\left(\overline{B}\right)$.

2.2 Num encontro de professores de Matemática de todo o país, realizado em Fátima, sabe-se que:

– 5 em cada 7 professores não tem um mestrado em Educação;

– 40% dos professores tem um mestrado em Análise;

– Dos professores que não têm mestrado em Análise, a sexta parte têm mestrado em Educação.

Escolhendo aleatoriamente um professor, qual é a probabilidade desse professor não ter mestrado em Educação e ter mestrado em Análise? (Apresenta o resultado na forma de fracção irredutível) **Sugestão: Podes utilizar a igualdade enunciada em 2.1**

3. Um código de um cofre é constituído por 4 algarismos seguidos de 5 letras (Considera 26 letras). Um exemplo de um código deste cofre pode ser **1 0 0 2 A W Z B B**. Escolhendo ao acaso um destes códigos, qual é a probabilidade de ter exactamente dois 6 e as letras todas distintas? (Apresenta o resultado na forma de dizima arredondada às centésimas)

4. Considera uma função f, continua em IR. Sabe-se que:

– f tem um único zero para $x = 1$;

– A recta de equação $y = 2x + 1$ é assimptota do gráfico de f quando $x \to +\infty$ e a recta de equação $y = -3x$ é assimptota do gráfico de f quando $x \to -\infty$.

Seja g uma função definida em $IR \setminus \{1\}$ por $g(x) = \dfrac{x}{f(x)}$. Estuda a função g quanto à existência de assimptotas ao seu gráfico.

5. Considera a função f, definida no intervalo $[4,11]$ por $f(x) = \dfrac{3\cos x + 3e^{-x}}{x}$. **Recorrendo às capacidades gráficas da calculadora** reproduz o gráfico de f na janela de visualização $[4,11] \times [-1,1]$. Com base nesse gráfico resolve o seguinte problema:

*Seja f' a função derivada de f. O conjunto-solução da condição $f'(x) < 0$ é um intervalo aberto $]a,b[$. Determina os valores de **a** e de **b**.*

Justifica a resposta. (Apresenta os resultados arredondados às décimas)

6. Seja g uma função, de domínio $]-2,+\infty[$, cuja sua **derivada** é dada por $g'(x) = 2x^2 - 5\ln(x+2)$, $\forall x \in]-2,+\infty[$.

6.1 Seja r a recta tangente ao gráfico de g no ponto de abcissa -1. A recta r intersecta o eixo Ox num ponto P e o eixo Oy num ponto Q. Sabendo que $g(-1) = 3$, determina a área do triângulo $[OPQ]$, sendo O a origem do referencial.

6.2 Estuda a função g quanto ao sentido das concavidades do seu gráfico e quando à existência de pontos de inflexão.

7. Um certo elemento radioactivo de massa M, em miligramas, desintegra-se segundo a lei $M(t) = a \times e^{-b \times t}$, onde t é o tempo em anos e **a** e **b** são constantes reais positivas.

7.1 Sabendo que a massa inicial deste elemento radioactivo se reduz 80% ao fim de um **século**, determina o valor de **b**. (Apresenta o resultado na forma de dízima arredondada às milésimas)

7.2 Nesta alínea considera $b = 0{,}016$. Mostra que $\dfrac{M(t+10)}{M(t)}$ é constante. Interpreta o resultado no contexto do problema. (Apresenta o resultado na forma de dízima arredondada às centésimas)

Soluções

Grupo I – Itens de Escolha Múltipla

1. B	**2.** C	**3.** D	**4.** C	**5.** B	**6.** D	**7.** D	**8.** A

Grupo II – Itens de Resposta Aberta

1.2 $\frac{5}{24}\pi$

2.2 $\frac{3}{14}$

3. $\approx 0{,}03$

4. A.V.: $x=1$; A.H.: $y=\frac{1}{2}$ quando $x\to+\infty$ e $y=-\frac{1}{3}$ quando $x\to-\infty$

5. $a\approx 6{,}1$ e $b\approx 9{,}3$

6.1 $A_{[OPQ]}=\frac{25}{4}$

6.2 O gráfico de g tem c.v. baixo em $\left]-2,\frac{1}{2}\right]$ e tem c.v. cima em $\left[\frac{1}{2},+\infty\right[$. O gráfico de g tem P.I. para $x=\frac{1}{2}$

7.1 $b\approx 0{,}016$

7.2 $\frac{M(t+10)}{M(t)}=e^{-0{,}16}\approx 0{,}85$; A massa deste elemento radioactivo diminui 15% por década.

Resolução da Prova Modelo n.º 1

Grupo I – Itens de Escolha Múltipla

1. Consideremos o seguinte esquema:

$$\underset{4}{\textbf{Rei}}\ \underbrace{\_\ \_\ \_\ \_\ \_\ \_\ \_\ \_\ \_\ \_}_{10!}\ \underset{3}{\textbf{Rei}}$$

Então o número pedido é $4\times 3\times 10!$ e a resposta correcta é a **B**.

2. Como $A\cap B$ e C são incompatíveis vem que $(A\cap B)\cap C=\varnothing$, assim $(A\cap B)\subset\overline{C}$ e portanto $(A\cap B)\cap\overline{C}=A\cap B$. Logo:

$$P\left((A\cap B)\,|\,\overline{C}\right)=\frac{P\left((A\cap B)\cap\overline{C}\right)}{P\left(\overline{C}\right)}=\frac{P(A\cap B)}{1-P(C)}=\frac{0,2}{1-0,2}=$$
$$=\frac{0,2}{0,8}=0,25$$

A resposta é a **C**.

3. A resposta correcta é a **D**, pois $u_n=-\ln(n)\to-\infty$ e portanto $g(u_n)\to 1$.

4. Como $y=\dfrac{2}{x}$ então $xy=2$. Logo:

$$\log_4\left(\frac{x^3y^3}{4}\right)=\log_4\left(x^3y^3\right)-\underbrace{\log_4 4}_{1}=\log_4\left((xy)^3\right)-1=\log_4 2^3-1$$
$$=\underbrace{\log_4 8}_{\frac{3}{2}}-1=\frac{3}{2}-1=\frac{1}{2}$$

A resposta correcta é a **C**.

Cálculo Auxiliar: $\log_4 8=\dfrac{\log_2 8}{\log_2 4}=\dfrac{\log_2 2^3}{\log_2 2^2}=\dfrac{3}{2}$, ou de uma outra forma, fazendo $\log_4 8=y$ vem:

$$\log_4 8=y\Leftrightarrow 8=4^y\Leftrightarrow 2^3=\left(2^2\right)^y=2^3=2^{2y}\Leftrightarrow 3=2y\Leftrightarrow y=\frac{3}{2}$$

5. $A_{\text{sombreada}}=\dfrac{1}{2}\times A_{\text{círculo}}-A_{\text{sectorAOP}}-A_{[OCP]}=$

$$=\frac{1}{2}\times\pi\times 2^2-\frac{\alpha}{2}\times 2^2-\frac{\cancel{2}\times 2\text{sen}\alpha}{\cancel{2}}=$$
$$=2\pi-2\alpha-2\text{sen}\alpha=2\times(\pi-\alpha-\text{sen}\alpha)$$

A resposta correcta é a **B**.

6. A resposta correcta é a **D**, pois $h(2)=0$, $h'(3)>0$ (A função é crescente em $[2,+\infty[$) e $h''(-4)>0$ (O gráfico de h tem concavidade voltada para cima em $]-\infty-3]$). Logo $\underbrace{h(2)}_{0}-\underbrace{h'(3)}_{>0}-\underbrace{h''(-4)}_{>0}<0$.

7. $|z|=\sqrt{2^2+\left(-2\sqrt{3}\right)^2}=\sqrt{4+12}=\sqrt{16}=4$. Seja θ um argumento de z, assim $\text{tg}\theta=\dfrac{-2\sqrt{3}}{2}=-\sqrt{3}$. Como $\theta\in 4.^{\text{o}}Q$, vem que θ pode ser $-\dfrac{\pi}{3}$. Assim:

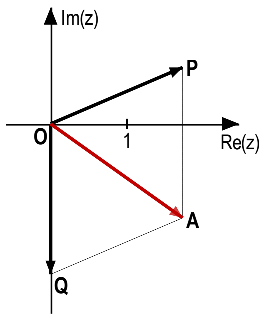
$$\frac{i}{z^2}=\frac{e^{i\frac{\pi}{2}}}{4^2e^{i\left(-\frac{2\pi}{3}\right)}}=\frac{1}{16}e^{i\left(\frac{\pi}{2}+\frac{2\pi}{3}\right)}=\frac{1}{16}e^{i\frac{7\pi}{6}}.$$

Logo, um argumento de $\dfrac{i}{z^2}$ é $\dfrac{7\pi}{6}$, pelo que a resposta correcta é a **D**.

8. Vamos resolver esta questão por dois processos distintos.

1.º Processo: O número complexo z é da forma $z=a+bi$ com $a>1$ e $0<b<1$ (por observação da figura). Como $i^{11}=i^3=-i$ então $z+2i^{11}=a+bi-2i=a+i(b-2)$. Como $b-2<0$, pois $0<b<1\Leftrightarrow -2<b-2<-1$, então a imagem geométrica de $z+2i^{11}$ pertence ao 4.º quadrante.

2.º Processo: Vamos utilizar a Regra do Paralelogramo para resolver esta questão. Seja Q a imagem geométrica do número complexo $2i^{11}=-2i$. Consideremos a figura seguinte:



Pela Regra do Paralelogramo tem-se $\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ}=\overrightarrow{OA}$, então o ponto A é a imagem geométrica do número complexo $z+(-2i)=z+2i^{11}$.

A resposta correcta é a **A**.

Grupo II – Itens de Resposta Aberta

1.

1.1 $\left|z_1\right| = \sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2+\left(-1\right)^2} = \sqrt{3+1} = \sqrt{4} = 2$. Seja θ um argumento de z_1, assim $tg\theta = \frac{-1}{\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$. Como $\theta \in 4.^{\circ}Q$ então θ pode ser $= -\frac{\pi}{6}$, pelo que $z_1 = 2e^{i\left(-\frac{\pi}{6}\right)}$ e portanto:

$$\frac{z_1\times z_2}{2i}-\sqrt{2} = \frac{\cancel{2}e^{i\left(-\frac{\pi}{6}\right)}\times 2e^{i\frac{5\pi}{12}}}{\cancel{2}e^{i\frac{\pi}{12}}}-\sqrt{2} = \frac{2e^{i\left(-\frac{\pi}{6}+\frac{5\pi}{12}\right)}}{e^{i\frac{\pi}{12}}}-\sqrt{2} =$$

$$= \frac{2e^{i\frac{\pi}{4}}}{e^{i\frac{\pi}{12}}}-\sqrt{2} = 2e^{i\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{2}\right)}-\sqrt{2} = 2e^{i\left(-\frac{\pi}{4}\right)}-\sqrt{2} =$$

$$= 2\times\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)-\sqrt{2} = \cancel{\sqrt{2}}-\sqrt{2}i-\cancel{\sqrt{2}} = -\sqrt{2}i$$

e $-\sqrt{2}i$ é um imaginário puro.

1.2 O número complexo $\frac{\left(z_3\right)^2}{z_2}$ é um número real se e só se qualquer seu argumento for da forma $0+k\pi,\quad k\in\mathbb{Z}$. Assim:

$$\frac{\left(z_3\right)^2}{z_2} = \frac{\left(e^{i\alpha}\right)^2}{2e^{i\frac{5\pi}{12}}} = \frac{e^{i(2\alpha)}}{2e^{i\frac{5\pi}{12}}} = \frac{1}{2}e^{i\left(2\alpha-\frac{5\pi}{12}\right)}$$

Logo $2\alpha-\frac{5}{12}\pi = k\pi,\quad k\in\mathbb{Z} \Leftrightarrow 2\alpha = \frac{5}{12}\pi+k\pi,\quad k\in\mathbb{Z} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \alpha = \frac{5}{24}\pi+\frac{k\pi}{2},\quad k\in\mathbb{Z}$$

Para $k=0 \to \alpha = \frac{5}{24}\pi \in \left]0,\frac{\pi}{2}\right[$. Portanto $\alpha = \frac{5}{24}\pi$.

2.

2.1 $P\left(\overline{A}\cap\overline{B}\right) = P\left(\overline{A\cup\overline{B}}\right) = 1-P\left(A\cup\overline{B}\right) =$

$$= 1-\left(P(A)+P\left(\overline{B}\right)-P\left(A\cap\overline{B}\right)\right) =$$

$$= 1-P(A)-P\left(\overline{B}\right)+P\left(A\cap\overline{B}\right) =$$

$$= \cancel{1}-P(A)-\cancel{1}+P(B)+P\left(A\cap\overline{B}\right) =$$

$$\underset{i)}{=} P(B)-P(A)+P\left(A|\overline{B}\right)\times P\left(\overline{B}\right)$$

Q.E.D.

Justificação:

i) $P\left(A|\overline{B}\right) = \frac{P\left(A\cap\overline{B}\right)}{P\left(\overline{B}\right)} \Leftrightarrow P\left(A\cap\overline{B}\right) = P\left(A|\overline{B}\right)\times P\left(\overline{B}\right)$

2.2 Vamos resolver esta questão por dois processos distintos:

1.º Processo: Consideremos os acontecimentos A: «Professor com mestrado em Educação» e B: «Professor com mestrado em Análise». Queremos determinar $P\left(\overline{A}\cap B\right)$. Assim, pelo enunciado tem-se $P(A) = \frac{2}{7}$ (pois $P\left(\overline{A}\right) = \frac{5}{7}$), $P(B) = 0{,}4 = \frac{2}{5}$ e portanto $P\left(\overline{B}\right) = \frac{3}{5}$ e $P\left(A|\overline{B}\right) = \frac{1}{6}$. Logo $P\left(\overline{A}\cap B\right) = \frac{2}{5}-\frac{2}{7}+\frac{1}{6}\times\frac{3}{5} = \frac{3}{14}$.

2.º Processo: Consideremos os acontecimentos A: «Professor com mestrado em Análise» e E: «Professor com mestrado em Educação». Queremos determinar $P\left(\overline{E}\cap A\right)$. Vamos construir uma tabela para responder a esta questão. Do enunciado tem-se $P\left(\overline{E}\right) = \frac{5}{7}$, $P(A) = 0{,}4 = \frac{2}{5}$ e $P\left(E|\overline{A}\right) = \frac{1}{6}$. Assim:

	A	$\overline{A}$	**p.m.**
E	$\frac{13}{70}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{2}{7}$
$\overline{E}$	$\frac{3}{14}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{5}{7}$
p.m.	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{5}$	1

Logo $P\left(\overline{E}\cap A\right) = \frac{3}{14}$.

Justificações:

i) $P\left(E|\overline{A}\right) = \frac{1}{6} \Leftrightarrow \frac{P\left(E\cap\overline{A}\right)}{P\left(\overline{A}\right)} = \frac{1}{6} \Leftrightarrow P\left(E\cap\overline{A}\right) = \frac{1}{6}\times\frac{3}{5} = \frac{1}{10}$

ii) $P\left(E\cap A\right) = \frac{2}{7}-\frac{1}{10} = \frac{13}{70}$

iii) $P\left(\overline{E}\cap A\right) = \frac{2}{5}-\frac{13}{70} = \frac{3}{14}$

iv) $P\left(\overline{E}\cap\overline{A}\right) = \frac{5}{7}-\frac{3}{14} = \frac{1}{2}$

3. O número de casos possíveis é $10^4 \times 26^5$. Para determinarmos o número de casos favoráveis consideremos o seguinte esquema: Se os dois 6 ficarem nas duas primeiras posições temos:

$$\begin{array}{ccccccccc} 6 & 6 & & & \multicolumn{5}{c}{\overbrace{\hphantom{26\quad 25\quad 24\quad 23\quad 22}}^{\textbf{Letras}}} \\ \hline 1 & 1 & 9 & 9 & 26 & 25 & 24 & 23 & 22 \end{array}$$

$$\underbrace{1\quad 1\quad 9\quad 9\quad 26\quad 25\quad 24\quad 23\quad 22}_{9\times 9\times 26\times 25\times 24\times 23\times 22=9^2\times {}^{26}A_5}$$

Os dois números 6 podem ocupar as quatros posições de ${}^4C_2$ maneiras distintas. Logo o número de casos favoráveis é dado por ${}^4C_2\times 9^2\times {}^{26}A_5$ e a probabilidade pedida é $\dfrac{{}^4C_2\times 9^2\times {}^{26}A_5}{10^4\times 26^5}\approx 0{,}03$.

4.

i) Como a função f se anula para $x=1$ então o domínio da função g é $IR\setminus\{1\}$. Assim $\lim\limits_{x\to 1} g(x)=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x}{f(x)}=\dfrac{1}{f(1)}=\dfrac{1}{0}=\infty$.

Logo a recta de equação $x=1$ é assimptota vertical do gráfico de g. Como g é contínua em $IR\setminus\{1\}$, visto ser quociente de funções contínuas no seu domínio, então o gráfico de g não tem mais assimptotas verticais.

ii) Como a recta de equação de equação $y=2x+1$ é assimptota do gráfico de f, quando $x\to+\infty$, então:

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-(2x+1)\right)=0 \text{ e } \lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-2x\right)=1 \\ \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=2 \text{ e } \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}(2x+1)=+\infty \end{cases}$$

Assim:

$$m=\lim_{x\to+\infty}\frac{g(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{x}{f(x)}}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\cancel{x}}{\cancel{x}\times f(x)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{f(x)}=\frac{1}{+\infty}=0$$

$$b=\lim_{x\to+\infty}\left(g(x)-mx\right)=\lim_{x\to+\infty} g(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{f(x)}=\frac{1}{2}$$

Logo a recta de equação $y=\dfrac{1}{2}$ é assimptota horizontal do gráfico de g quando $x\to+\infty$.

iii) Como a recta de equação de equação $y=-3x$ é assimptota do gráfico de f, quando $x\to-\infty$ então:

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to-\infty}\left(f(x)+3x\right)=0 \text{ e } \lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}=-3 \\ \lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}(-3x)=+\infty \end{cases}$$

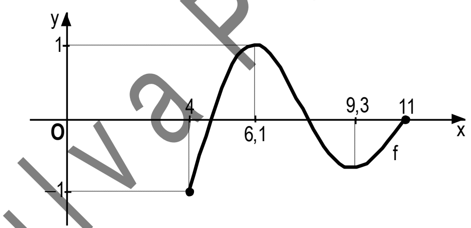
Assim:

$$m=\lim_{x\to-\infty}\frac{g(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\frac{x}{f(x)}}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\cancel{x}}{\cancel{x}\times f(x)}=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{f(x)}=\frac{1}{+\infty}=0$$

$$b=\lim_{x\to-\infty}\left(g(x)-mx\right)=\lim_{x\to-\infty} g(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{f(x)}=-\frac{1}{3}$$

Logo a recta de equação $y=-\dfrac{1}{3}$ é assimptota horizontal do gráfico de g quando $x\to-\infty$.

5. Utilizando o editor de funções da calculadora vamos definir a função $y_1=\dfrac{3\cos x+3e^{-x}}{x}$ na janela $[4,11]\times[-1,1]$. Obtemos:



Temos que $f'(x)<0$ no intervalo onde a função f é decrescente. Assim concluímos que $a\approx 6{,}1$ e $b\approx 9{,}3$.

6.

6.1

i) Sabemos que o declive da recta **r** é dado pela derivada da função g no ponto de abcissa -1. Assim:

$$m_r=g'(-1)=2\times(-1)^2-5\ln(-1+2)=2-5\ln 1=2-5\times 0=2$$

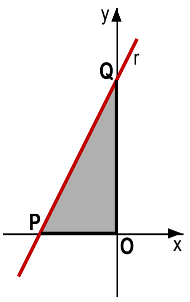
Logo a equação reduzida da recta **r** é da forma $y=2x+b$. Como $g(-1)=3$ quer isto dizer que o ponto de coordenadas $(-1,3)$ pertence ao gráfico de g e também à recta **r**. Substituindo o ponto de coordenadas $(-1,3)$ na equação $y=2x+b$ tem-se:

$$3=2\times(-1)+b\Leftrightarrow 3=-2+b\Leftrightarrow b=5$$

Portanto a equação reduzida da recta **r** é dada por $y=2x+5$.

ii) O ponto P é da forma $(x,0)$ e pertence à recta **r**, substituindo na equação de **r**, y por zero, obtém-se: $0=2x+5\Leftrightarrow x=-\dfrac{5}{2}$. Logo $P\left(-\dfrac{5}{2},0\right)$. Como a ordenada na origem da recta **r** é 5, então o ponto Q tem coordenadas $(0,5)$.

Vamos representar o triângulo $[OPQ]$ num referencial o.n. xOy:



Assim $A_{[OPQ]}=\frac{\overline{OP}\times\overline{OQ}}{2}=\frac{\frac{5}{2}\times 5}{2}=\frac{\frac{25}{2}}{2}=\frac{25}{4}$.

6.2 Vamos começar por determinar a expressão analítica de g'' e os seus zeros.

i) $g''(x)=\left(2x^2-5\ln(x+2)\right)'=4x-5\times\frac{1}{x+2}=\frac{4x^2+8x-5}{x+2}$

ii) $g''(x)=0\Leftrightarrow\frac{4x^2+8x-5}{x+8}=0\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 4x^2+8x-5=0 \quad\wedge\quad x+2\neq 0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left(x=-\frac{5}{2}\quad\vee\quad x=\frac{1}{2}\right)\quad\wedge\quad x\neq -2$$

Fazendo um quadro de sinal vem:

x	-2		$\frac{1}{2}$	$+\infty$
$4x^2+8x-5$	n.d.	$-$	0	$+$
$x+2$	n.d.	$+$	$+$	$+$
$g''(x)$	n.d.	$-$	0	$+$
$g(x)$	n.d.	$\cap$	P.I.	$\cup$

Concluímos então que o gráfico de g tem concavidade voltada para baixo em $\left]-2,\frac{1}{2}\right]$ e tem concavidade voltada para cima em $\left[\frac{1}{2},+\infty\right[$. O gráfico de g tem P.I. para $x=\frac{1}{2}$.

7.

7.1 Se a massa inicial deste elemento radioactivo se reduz 80% ao fim de um século (cem anos), quer isto dizer que passados cem anos a massa inicial tinha-se reduzido **a** 20%. Assim vem:

$$M(100)=0,2\times M(0)\Leftrightarrow \cancel{a}\times e^{-100b}=0,2\times\cancel{a}\times e^{0}\Leftrightarrow e^{-100b}=0,2$$

$$\Leftrightarrow -100b=\ln(0,2)\Leftrightarrow b=\frac{\ln(0,2)}{-100}\approx 0,016$$

7.2 $\frac{M(t+10)}{M(t)}=\frac{\cancel{a}\times e^{-0,016(t+10)}}{\cancel{a}\times e^{-0,016t}}=e^{\cancel{-0,016t}-0,016\times 10+\cancel{0,016t}}=e^{-0,16}\approx 0,85$.

A massa deste elemento radioactivo diminui 15% a cada dez anos, ou seja, a cada década.