Tópicos de Matemática II – 2018- 2019
1º Teste – Tópicos de resolução

Exercício 1

a) $u_1=-5; u_2=\frac{5}{2}; u_3=-\frac{5}{3}; u_4=\frac{5}{4}$. Como, por exemplo, $u_1<u_2$ e $u_2>u_3$, a sucessão não é monótona.

b) $u_n=\begin{cases}\frac{5}{n} & se \;\; n \; é \;\; par\\ -\frac{5}{n} & se \;\; n \;\; é \;\; ímpar\end{cases}$

- $\lim_n \frac{5}{n}=\frac{5}{(+\infty)}=0$
- $\lim_n \left(-\frac{5}{n}\right)=\frac{-5}{(+\infty)}=0$

Logo, $(u_n)_n$ é convergente, pois tende para um número real (zero).

c) $(u_n)_n$ é convergente e qualquer sucessão convergente é, necessariamente, uma sucessão limitada.
Logo, $(u_n)_n$ é uma sucessão limitada.

Nota: $-5\le u_n\le\frac{5}{2}$, $\forall n\in IN$.

Exercício 2

$$v_{n+1}-v_n=\frac{2(n+1)}{n+1+3}-\frac{2n}{n+3}=\frac{2n+2}{n+4}-\frac{2n}{n+3}=\frac{2n^2+2n+6n+6-2n^2-8n}{(n+3)(n+4)}=\frac{6}{(n+3)(n+4)}>0, \forall n\in IN$$

Logo, $(v_n)_n$ é monótona (estritamente) crescente.

Exercício 3

a) $\lim_n \frac{2n}{\sqrt{n^2\left(1+\frac{1}{n^2}\right)}}=\lim_n \frac{2n}{n\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}}=\lim_n \frac{2}{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}}=\frac{2}{\sqrt{1+0}}=2$

b) $\lim_n \frac{\left(\sqrt{n+10}-\sqrt{n}\right)\left(\sqrt{n+10}+\sqrt{n}\right)}{\sqrt{n+10}+\sqrt{n}}=\lim_n \frac{n+10-n}{\sqrt{n+10}+\sqrt{n}}=\lim_n \frac{10}{\sqrt{n+10}+\sqrt{n}}=\frac{10}{(+\infty)}=0$

c) $\left[\lim_n \left(1+\frac{10}{n}\right)^n\right]^{\frac{1}{2}}=\left(e^{10}\right)^{\frac{1}{2}}=e^5$

Exercício 4

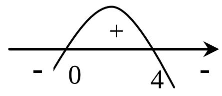
$D_f=\{x\in IR: x+5\ge 0 \wedge x\ne 0\}=[-5,+\infty[\setminus\{0\}$

Exercício 5

a) Abcissa do vértice: $-\frac{b}{2a} = -\frac{2}{2\left(-\frac{1}{2}\right)} = 2$; ordenada do vértice: $f\left(2\right) = -\frac{1}{2}\times 4+4=2$.

Coordenadas do vértice: $\left(2,2\right)$; equação do eixo de simetria da parábola: $x=2$.

b) $f\left(x\right)<0 \Leftrightarrow -\frac{1}{2}x^2+2x<0 \Leftrightarrow -x^2+4x<0$



Cálculo auxiliar: $-x^2+4x = 0 \Leftrightarrow x\left(-x+4\right)=0 \Leftrightarrow x=0 \vee x=4$

Logo: $f\left(x\right)<0 \Leftrightarrow x\in \left]-\infty,0\right[\cup\left]4,+\infty\right[$

Exercício 6

a)

	1	0	-7	-6
-1		-1	1	6
	1	-1	-6	0 = Resto

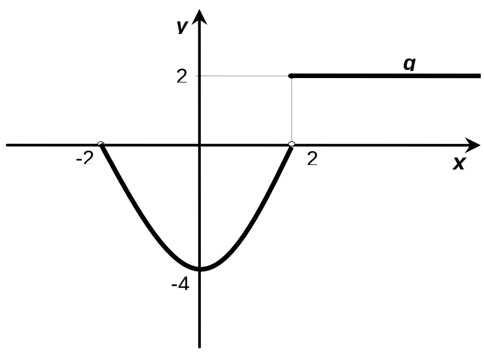
Logo: $p(x)=\left[x-(-1)\right]\left(x^2-x-6\right)=(x+1)\left(x^2-x-6\right)$

b) Cálculo auxiliar: $x^2-x-6 = 0 \Leftrightarrow x=\frac{1\pm 5}{2} \Leftrightarrow x=-2 \vee x=3$

x	$-\infty$	-2		-1		3	$+\infty$
$x+1$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
x^2-x-6	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$p\left(x\right)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

C.S. = $\left]-\infty,-2\right]\cup\left[-1,3\right]$

Exercício 7



b) $D'_f = \left[-4,0\right[\cup\left\{2\right\}$.

c) A afirmação é falsa, pois existem objetos diferentes com a mesma imagem; por exemplo $g\left(2\right)=g\left(3\right)=2$.