Funções (12.º ano)

Exponenciais e logaritmos - Resolução gráfica de equações

Exercícios de Provas Nacionais e Testes Intermédios

1. Para conhecer a variação do número de bactérias de uma determinada estirpe, colocou-se num tubo de ensaio fechado, com alguns nutrientes, um certo número de bactérias dessa estirpe.

   Admita que, nessas condições, o número, N, em milhares, de bactérias vivas existentes no tubo, t horas após a sua colocação nesse tubo, é dado por

   $$N(t) = N_0 e^{1{,}08t - 0{,}3t^2}$$

   em que N_0 representa a dimensão, em milhares, da população inicial.

   Considere $N_0 = 1{,}63$

   Num certo instante, t_1 , havia, no tubo de ensaio, mais meio milhar de bactérias vivas do que uma hora antes desse instante.

   Determine, recorrendo à calculadora, o valor de t_1 , sabendo que este valor existe e é único.

   Apresente o resultado em horas e minutos (minutos arredondados às unidades).

   Não justifique a validade do resultado obtido na calculadora.

   Na sua resposta:

   – apresente uma equação que lhe permita resolver o problema;

   – reproduza, num referencial, o(s) gráfico(s) da(s) função(ões) visualizado(s) na calculadora que lhe permite(m) resolver a equação, e apresente as coordenadas do(s) ponto(s) relevante(s)arredondadas às milésimas.

Exame – 2021, Ép. especial

2. Num laboratório cuja temperatura ambiente é constante, aqueceu-se uma substância até atingir uma certa temperatura, superior à temperatura ambiente, e, a seguir, deixou-se arrefecer essa substância durante uma hora.

   Admita que a temperatura dessa substância, em graus Celsius, t minutos após o início do arrefecimento, é dada por

   $$T(t) = 20 + 100e^{-kt}, \; 0 \leq t \leq 60$$

   em que k é uma constante real positiva.

   Considere $k = 0{,}04$

   Sabe-se que, durante os primeiros t_2 minutos, a taxa média de variação da função T foi igual a $-2{,}4$

   Determine, recorrendo às capacidades gráficas da calculadora, o valor de t_2 , sabendo que esse valor existe e é único.

   Apresente o resultado em minutos e segundos (segundos arredondados às unidades).

   Não justifique a validade do resultado obtido na calculadora.

   Na sua resposta:

   - apresente uma equação que lhe permita resolver o problema;
   - reproduza, num referencial, o(s) gráfico(s) da(s) função(ões) visualizado(s) na calculadora que lhe permite(m) resolver a equação, e apresente a(s) abcissa(s) do(s) ponto(s) relevante(s) arredondada(s) às milésimas.

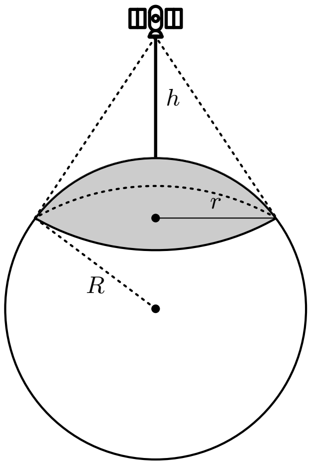
   Se, nos cálculos intermédios, proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, três casas decimais.

   Exame – 2021, 2.ª Fase

3. Os satélites artificiais são utilizados para diversos fins e a altitude a que são colocados depende do fim a que se destinam.

   Admita que a Terra é uma esfera.

   A figura ao lado apresenta um esquema em que se pode observar a superfície terrestre coberta por um satélite, quando este se encontra numa certa posição.



   Nesta figura,

   - R é o raio, em quilómetros, da Terra;
   - h é a altitude, em quilómetros, do satélite ($h > 0$)
   - r é o raio, em quilómetros, da base da calote esférica cuja superfície é coberta pelo satélite ($0 < r < R$)
   - as grandezas h e r podem relacionar-se por meio da igualdade

   $$r = \frac{R}{h+R}\sqrt{h^2 + 2hR}$$

   Sabe-se que, para cada posição do satélite, a percentagem da área da superfície terrestre coberta pelo satélite é dada por $50\left(1 - \sqrt{1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2}\right)$

   Considere que o raio da Terra é 6400 km Determine, recorrendo às capacidades gráficas da calculadora, a percentagem da área da superfície terrestre coberta por um satélite se a altitude deste for igual ao raio da base da respetiva calote esférica.

   Apresente o resultado arredondado às unidades.

   Não justifique a validade do resultado obtido na calculadora.

   Na sua resposta:

   – apresente uma equação que lhe permita resolver o problema;

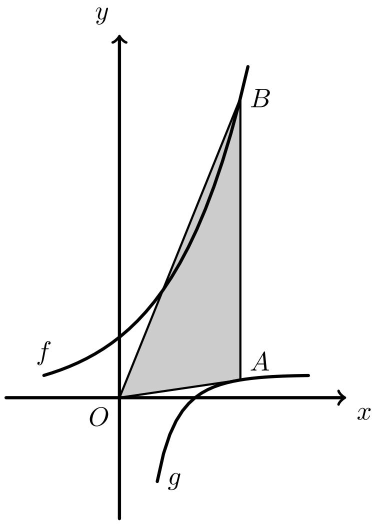
   – reproduza, num referencial, o(s) gráfico(s) da(s) função(ões) visualizado(s) na calculadora que lhe permite(m) resolver a equação e apresente as coordenadas do(s) ponto(s) relevante(s) arredondadas às centésimas;

   – apresente o valor pedido arredondado às unidades.

   Se, nos cálculos intermédios, proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, duas casas decimais.

Exame – 2020, 2.ª fase

4. Na figura ao lado, estão representadas, em referencial o.n. xOy,



- parte do gráfico da função f, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $f(x) = e^x$
- parte do gráfico da função g, de domínio $\mathbb{R}^+$, definida por $g(x) = \dfrac{\ln x}{x}$

Considere que um ponto A se desloca no primeiro quadrante sobre o gráfico da função g. Para cada posição do ponto A, seja B o ponto do gráfico da função f cuja abcissa é igual a do ponto A

Seja a $(a > 1)$ a abcissa comum dos pontos A e B

Determine, recorrendo às capacidades gráficas da calculadora, o valor de a para o qual a área do triângulo $[OAB]$ é igual a 5, sabendo-se que esse valor existe e é único.

Não justifique a validade do resultado obtido na calculadora.

Na sua resposta:

– apresente uma equação que lhe permita resolver o problema;
– reproduza, num referencial, o(s) gráfico(s) da(s) função(ões) visualizado(s) na calculadora que lhe permite(m) resolver a equação;
– apresente o valor de a arredondado às décimas.

Exame – 2019, Ép. especial

5. O nível, N, de um som, medido em decibéis, é função da sua intensidade, I, medida em microwatt por metro quadrado $\mu W/m^2$, de acordo com a igualdade

$$N = 60 + 10\log_{10} I, \text{ com } I > 0$$

Relativamente ao som de um certo despertador, sabe-se que, aumentando a sua intensidade em 150 $\mu W/m^2$, o seu nível passa a ser 1,4% do quadrado do nível inicial.

Determine, recorrendo à calculadora gráfica, o valor da intensidade inicial do som desse despertador, sabendo-se que pertence ao intervalo [20,80] e que, neste intervalo, esse valor é único.

Não justifique a validade do resultado obtido na calculadora.

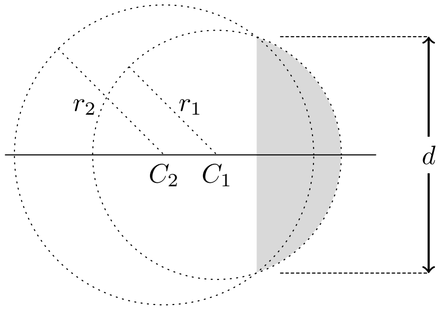
Na sua resposta:

– apresente uma equação que lhe permita resolver o problema;
– reproduza o(s) gráfico(s) da(s) função(ões) visualizado(s) na calculadora que lhe permite(m) obter o valor pedido;
– apresente esse valor em $\mu W/m^2$, arredondado às unidades.

Exame – 2019, 2.ª Fase

6. Uma lente de contacto é um meio transparente limitado por duas faces, sendo cada uma delas parte de uma superfície esférica. Na figura ao lado, pode observar-se uma lente de contacto.

Na figura ao lado, está representado um corte longitudinal de duas superfícies esféricas, uma de centro C_1 e raio r_1 e outra de centro C_2 e raio r_2, com $r_2 > r_1$, que servem de base à construção de uma lente de contacto, representada a sombreado na figura.



Seja $x = \overline{C_1C_2}$

Sabe-se que o diâmetro, d, da lente é dado por

$$\frac{\sqrt{\left[(r_1+r_2)^2 - x^2\right]\left[x^2 - (r_1 - r_2)^2\right]}}{x}\text{, com } r_2 - r_1 < x < \sqrt{{r_2}^2 - {r_1}^2}$$

Uma lente de contacto foi obtida a partir de duas superfícies esféricas com 7 mm e 8 mm de raio, respetivamente.

O diâmetro dessa lente excede em 9 mm a distância, x, entre os centros das duas superfícies esféricas.

Determine, recorrendo às capacidades gráficas da calculadora, o valor de x, sabendo-se que esse valor é único no intervalo $\left]r_2 - r_1\, , \sqrt{{r_2}^2 - {r_1}^2}\right[$

Não justifique a validade do resultado obtido na calculadora.

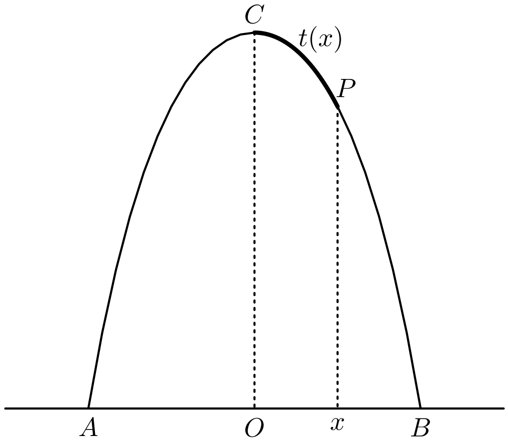
Na sua resposta:

- apresente uma equação que lhe permita resolver o problema;
- reproduza, num referencial, o(s) gráfico(s) da(s) função(ões) visualizado(s) na calculadora que lhe permite(m) resolver a equação;
- apresente o valor pedido em milímetros, arredondado às décimas.

Exame – 2019, 1.ª Fase

7. Na cidade de Saint Louis, nos Estados Unidos, existe um monumento em forma de arco conhecido como Portal do Oeste. No ponto mais elevado desse arco, encontra-se um miradouro ao qual se acede por um ascensor.

   A figura seguinte, à esquerda, é uma fotografia dessa estrutura, e a figura da direita representa um esquema do arco.



Relativamente à figura da direita, sabe-se que:

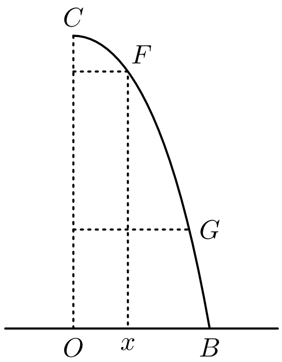
- os pontos A e B representam a intersecção do arco com o solo;
- o ponto O é o ponto médio de $[AB]$
- o ponto C representa o miradouro, e a reta OC é um eixo de simetria do arco.

Considere a reta AB como um eixo orientado da esquerda para a direita, com origem no ponto O e em que uma unidade corresponde a um metro.
Admita que o ascensor se está a deslocar no arco CB, do miradouro C para o ponto B
Para cada ponto P, de abcissa x, situado no arco CB, o tempo que o ascensor demora a percorrer o arco CP é dado, em minutos, por

$$t(x) = 0,,34\left(e^{0,0257x} - e^{-0,0257x}\right), \text{ com } x \in [0,96]$$

Num certo instante, o ascensor encontra-se num ponto F (não coincidente com o ponto C), a uma certa distância da reta OC. Passado algum tempo, o ascensor encontra-se num ponto G

A figura ao lado ilustra a situação.



Sabe-se que:

- a distância do ponto G à reta OC é igual ao triplo da distância do ponto F à mesma reta;
- o tempo que o ascensor demora a percorrer o arco que vai de F até G é igual ao triplo do tempo que demora a percorrer o arco que vai de C até F

Determine, recorrendo à calculadora gráfica, a distância, x, em metros, do ponto F à reta OC

Na sua resposta:

– equacione o problema;
– reproduza, num referencial, o(s) gráfico(s) da(s) função(ões) visualizado(s) na calculadora que lhe permite(m) resolver a equação;
– apresente o valor da distância pedida arredondado às décimas.

Exame – 2018, Ép. especial

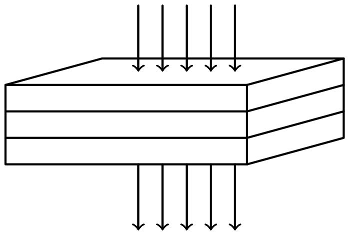
8. Um feixe de luz incide perpendicularmente sobre um conjunto de três placas sobrepostas, homogéneas e iguais, feitas de um material transparente. A figura seguinte ilustra a situação.

Admita que a potência, L, da luz transmitida, após atravessar o conjunto de placas, é dada por

$$L = I(1-R)^6\, e^{-3\lambda}$$

em que:

- I é a potência da luz incidente;
- R é o coeficiente de reflexão do material $(0 < R < 1)$
- λ é o coeficiente de absorção do material, por centímetro $(\lambda > 0)$



Relativamente ao material de que as placas são feitas, sabe-se que o coeficiente de reflexão, R, e o coeficiente de absorção, λ, têm o mesmo valor numérico.

Sabe-se ainda que a potência da luz transmitida é igual a metade da potência da luz incidente.

Determine, recorrendo à calculadora gráfica, o valor comum dos coeficientes de absorção e de reflexão do material, sabendo-se que esse valor existe e é único.

Não justifique a validade do resultado obtido na calculadora.

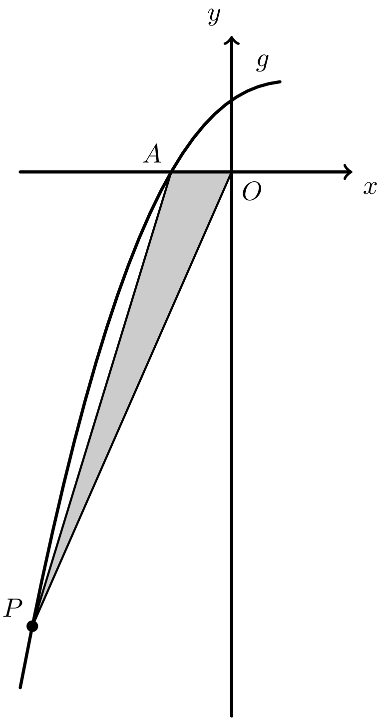
Na sua resposta:

- equacione o problema;
- reproduza, num referencial, o(s) gráfico(s) da(s) função(ões) visualizado(s) na calculadora que lhe permite(m) resolver a equação;
- apresente o valor pedido arredondado às milésimas.

Exame – 2018, 1.ª Fase

9. Seja g a função, de domínio $\mathbb{R}$, definida por

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{1-x^2}{1-e^{x-1}} & \text{se } x < 1 \\ 2 & \text{se } x = 1 \\ 3 + \dfrac{\operatorname{sen}(x-1)}{1-x} & \text{se } x > 1 \end{cases}$$



Na figura ao lado, estão representados, num referencial o.n. xOy, parte do gráfico da função g e um triângulo OAP

Sabe-se que:

- o ponto A é o ponto de abcissa negativa que é a intersecção do gráfico da função g com o eixo das abcissas;
- o ponto P é um ponto do gráfico da função g, de abcissa e ordenada negativas;
- a área do triângulo $[OAP]$ é igual a 5

Determine, recorrendo à calculadora gráfica, a abcissa do ponto P
Apresente o valor obtido arredondado às décimas.

Na sua resposta:

– determine analiticamente a abcissa do ponto A
– equacione o problema;
– reproduza, num referencial, o(s) gráfico(s) da(s) função(ões) visualizado(s) na calculadora que lhe permite(m) resolver a equação.

Exame – 2017, 1.ª Fase

10. Seja f a função, de domínio $\mathbb{R}_0^+$, definida por $f(x) = x^2 e^{1-x}$

Considere, num referencial o.n. xOy, três pontos, A, B e C, tais que:

- os pontos A e B pertencem ao gráfico da função f
- a abcissa do ponto B é maior do que a abcissa do ponto A
- os pontos A e B têm a mesma ordenada, a qual é igual a 1,2
- o ponto C pertence ao eixo Ox e tem abcissa igual à do ponto B

Determine, recorrendo à calculadora gráfica, a área do quadrilátero $[OABC]$, sendo O a origem do referencial. Na sua resposta:

- reproduza, num referencial, o gráfico da função f no intervalo $[0,5]$
- apresente o desenho do quadrilátero $[OABC]$
- indique as abcissas dos pontos A e B arredondadas às milésimas;
- apresente a área do quadrilátero arredondada às centésimas.

Exame – 2015, Ép. especial

11. Considere a função g, de domínio $\mathbb{R}^+$, definida por $g(x) = \dfrac{1 + \ln x}{x^2}$

Considere, num referencial o.n. xOy, a representação gráfica da função g, os pontos A e B, e a reta r de equação $y = mx$, com $m < 0$
Sabe-se que:

- os pontos A e B pertencem ao gráfico da função g
- a abcissa do ponto A é o zero da função g
- o ponto B é o ponto de interseção da reta r com o gráfico da função g
- a área do triângulo $[OAB]$ é igual a 1

Determine a abcissa do ponto B, recorrendo à calculadora gráfica.
Na sua resposta, deve:

– equacionar o problema;

– reproduzir, num referencial, o gráfico da função ou os gráficos das funções visualizados, devidamente identificados;

– indicar a abcissa do ponto A e a abcissa do ponto B com arredondamento às centésimas.

Exame – 2014, Ép. especial

12. Considere, num referencial o.n. xOy, a representação gráfica da função f, de domínio $[0,10]$, definida por $f(x) = -e^{\frac{x}{2}} + x^2 + 8$, e dois pontos A e B

Sabe-se que:

- o ponto A é o ponto de intersecção do gráfico da função f com o eixo das ordenadas;
- o ponto B pertence ao gráfico da função f e tem abcissa positiva;
- a reta AB tem declive -2

Determine a abcissa do ponto B, recorrendo à calculadora gráfica.

Na sua resposta, deve:

- equacionar o problema;

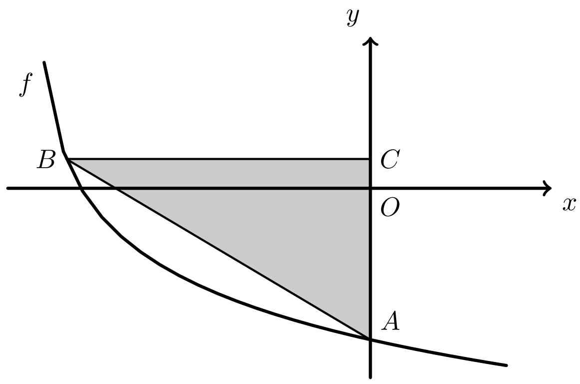
- reproduzir, num referencial, o gráfico da função ou os gráficos das funções que tiver necessidade de visualizar na calculadora, devidamente identificados;

- indicar o valor da abcissa do ponto B com arredondamento às centésimas.

Exame – 2014, 2.ª Fase

13. Considere a função f, de domínio $]-e^2, +\infty[$, definida por $f(x) = -\ln(x + e^2)$

Na figura ao lado, estão representados, num referencial o.n. xOy, parte do gráfico da função f e o triângulo $[ABC]$



Sabe-se que:

- o ponto A tem coordenadas $(0, -2)$
- o ponto B pertence ao gráfico da função f e tem abcissa negativa;
- o ponto C pertence ao eixo Oy e tem ordenada igual à do ponto B
- a área do triângulo $[ABC]$ é igual a 8

Determine a abcissa do ponto B, recorrendo à calculadora gráfica.

Na sua resposta, deve:

– escrever uma expressão da área do triângulo $[ABC]$ em função da abcissa do ponto B

– equacionar o problema;

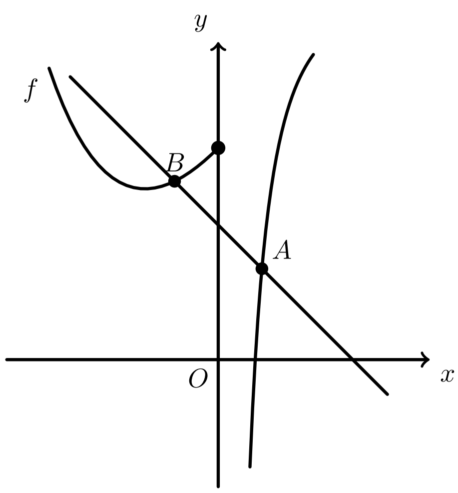
– reproduzir, num referencial, o gráfico da função ou os gráficos das funções visualizados, devidamente identificados;

– indicar a abcissa do ponto B com arredondamento às centésimas.

Exame – 2014, 1.ª Fase

14. Seja f a função, de domínio $\mathbb{R}$, definida por

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 1 + e^{-x} & \text{se } x \leq 0 \\ \dfrac{3x + \ln x}{x} & \text{se } x > 0 \end{cases}$$



Na figura ao lado, estão representados, num referencial o.n. xOy, parte do gráfico da função f, os pontos A e B, ambos pertencentes ao gráfico de f, e a reta AB

Sabe-se que:

- a reta AB é paralela à bissetriz dos quadrantes pares;
- os pontos A e B têm abcissas simétricas;
- a abcissa do ponto A pertence ao intervalo $]0,1[$

Seja a a abcissa do ponto A
Determine o valor de a, recorrendo à calculadora gráfica.
Na sua resposta, deve:

- equacionar o problema;
- reproduzir, num referencial, o gráfico da função ou os gráficos das funções que visualizar na calculadora, devidamente identificado(s);
- indicar o valor de a, com arredondamento às milésimas.

Teste Intermédio 12.º ano – 30.04.2014

15. Considere, num referencial o.n. xOy, a representação gráfica da função f, de domínio $[-1, 2]$ definida por $f(x) = -x - 3^{1+\ln(x^2+1)}$, o ponto A de coordenadas $(2, 0)$ e um ponto P que se desloca ao longo do gráfico da função f
Existe uma posição do ponto P para a qual a área do triângulo $[AOP]$ é mínima.
Determine a área desse triângulo, recorrendo à calculadora gráfica.
Na sua resposta, deve:

- reproduzir o gráfico da função ou os gráficos das funções que tiver necessidade de visualizar na calculadora, devidamente identificado(s), incluindo o referencial;
- indicar o valor da área do triângulo $[AOP]$ com arredondamento às centésimas.

Exame – 2013, 2.ª Fase

16. Considere a função f, de domínio $\mathbb{R} \setminus 0$, definida por

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^{x-1}}{e^{4x-1}} & \text{se } x < 0 \\ \\ x \ln x & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

Resolva, recorrendo à calculadora gráfica.
Considere, num referencial o.n. xOy, a representação gráfica da função g, de domínio $\mathbb{R}^+$, definida por $g(x) = f(x) - x + \ln^2 x$
Sabe-se que:

- A é o ponto de coordenadas (2,0)
- B é o ponto de coordenadas (5,0)
- P é um ponto que se desloca ao longo do gráfico da função g

Para cada posição do ponto P, considere o triângulo $[ABP]$
Determine as abcissas dos pontos P para os quais a área do triângulo $[ABP]$ é 1
Na sua resposta, deve:

- equacionar o problema;
- reproduzir o gráfico da função ou os gráficos das funções que tiver necessidade de visualizar na calculadora, devidamente identificado(s), incluindo o referencial;
- indicar as abcissas dos pontos P com arredondamento às centésimas.

Exame – 2013, 1.ª Fase

17. Seja f a função, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $f(x) = \begin{cases} \dfrac{3x+3}{\sqrt{x^2+9}} & \text{se } x \leq 4 \\ \\ \dfrac{\ln(3x-11)}{x-4} & \text{se } x > 4 \end{cases}$

Considere, num referencial o.n. xOy, o triângulo $[OPQ]$ tal que:

- o ponto P é o ponto de intersecção do gráfico da função f com o eixo das ordenadas;
- o ponto Q é o ponto do gráfico da função f que tem abcissa positiva e ordenada igual à ordenada do ponto P

Determine um valor aproximado da área do triângulo $[OPQ]$, recorrendo à calculadora gráfica.
Na sua resposta, deve:

- reproduzir, num referencial, o gráfico da função f para $x \in [0{,}10]$
- desenhar o triângulo $[OPQ]$
- indicar a abcissa do ponto Q arredondada às milésimas;
- apresentar a área do triângulo $[OPQ]$ arredondada às centésimas.

Nota – Sempre que, nos cálculos intermédios, proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, três casas decimais.

Teste Intermédio 12.º ano – 28.02.2013

18. Considere, num referencial o. n. xOy, o gráfico da função f, de domínio $\mathbb{R}^+$, definida por

$$f(x) = e^{0,1x} + \ln(3x+1)$$

Seja P um ponto do gráfico de f
A distância do ponto P à origem é igual a 2
Determine a abcissa do ponto P, recorrendo à calculadora gráfica.

Na sua resposta, deve:

- equacionar o problema;
- reproduzir o gráfico da função ou os gráficos das funções que tiver necessidade de visualizar na calculadora, devidamente identificado(s), incluindo o referencial;
- indicar a abcissa do ponto P com arredondamento às centésimas.

Exame – 2012, Ép. especial

19. Considere a função f, de domínio $[-7{,}0[$, definida por

$$f(x) = e^x + \ln(x^2) + 3$$

Sejam A e B os pontos de intersecção do gráfico de f com a bissetriz dos quadrantes pares, e seja d a distância entre os pontos A e B
Determine d, recorrendo à calculadora gráfica.
Na sua resposta, deve:

- reproduzir o gráfico da função ou os gráficos das funções que tiver necessidade de visualizar na calculadora, devidamente identificado(s), incluindo o referencial;
- assinalar os pontos A e B
- indicar as coordenadas dos pontos A e B com arredondamento às centésimas;
- apresentar o valor de d com arredondamento às centésimas.

Exame – 2012, 2.ª Fase

20. Considere a função f, de domínio $\mathbb{R}$, e a função g, de domínio $]0, +\infty[$, definidas por

$$f(x) = e^{x-2} - \frac{4e^{-x}+4}{e^2} \quad \text{e} \quad g = -\ln(x) + 4$$

Considere ainda, num referencial o. n. xOy, os gráficos das funções f e g e o triângulo $[OAB]$
Sabe-se que:

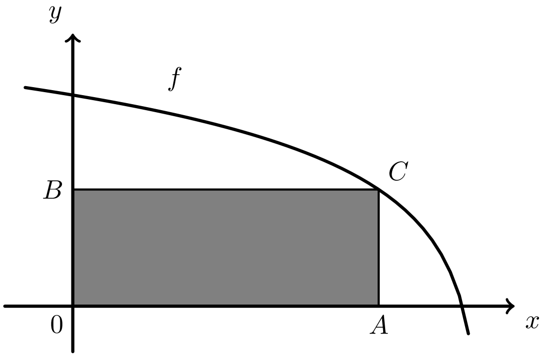
- O é a origem do referencial;
- A e B são pontos do gráfico de f
- a abcissa do ponto A é o zero da função f
- o ponto B é o ponto de intersecção do gráfico da função f com o gráfico da função g

Determine a área do triângulo $[OAB]$, recorrendo à calculadora gráfica. Na sua resposta, deve:

- reproduzir os gráficos das funções f e g, devidamente identificados, incluindo o referencial;
- assinalar os pontos A e B
- indicar a abcissa do ponto A e as coordenadas do ponto B com arredondamento às centésimas;
- apresentar o valor da área pedida com arredondamento às décimas.

Exame – 2012, 1.ª Fase

21. Na figura ao lado, está representada, num referencial o. n. xOy, parte do gráfico da função f, de domínio $]-\infty,6[$, definida por $f(x) = 2 + 15\ln\left(3 - \frac{1}{2}x\right)$
Considere que um ponto C se desloca ao longo do gráfico de f, e que C tem coordenadas positivas.
Para cada posição do ponto C, considere o retângulo $[OACB]$, em que o ponto A pertence ao eixo das abcissas e o ponto B pertence ao eixo das ordenadas.



Determine, recorrendo à calculadora gráfica, a abcissa do ponto A para a qual a área do retângulo $[OACB]$ é máxima.
Na sua resposta, deve:

- escrever a expressão que dá a área do retângulo $[OACB]$ em função da abcissa do ponto A;
- reproduzir o gráfico da função ou os gráficos das funções que tiver necessidade de visualizar na calculadora, devidamente identificado(s), incluindo o referencial;
- indicar a abcissa do ponto A com arredondamento às centésimas.

Exame – 2011, Prova especial

22. Considere a função f , de domínio $\mathbb{R}$, definida por $f(x) = \begin{cases} \dfrac{3}{x-1} & \text{se } x < 1 \\ \\ \dfrac{2+\ln x}{x} & \text{se } x \geq 1 \end{cases}$

Existem dois pontos no gráfico de f cujas ordenadas são o cubo das abcissas.
Determine as coordenadas desses pontos recorrendo à calculadora gráfica.
Na sua resposta deve:

- equacionar o problema;
- reproduzir o gráfico da função ou os gráficos das funções que tiver necessidade de visualizar na calculadora, devidamente identificado(s), incluindo o referencial;
- assinalar esses pontos;
- indicar as coordenadas desses pontos com arredondamento às centésimas.

Exame – 2011, 1.ª fase

23. Considere a função f, de domínio $]0,+\infty[$, definida por

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^x - 3x}{x} & \text{se } 0 < x \leq 2 \\ \\ \dfrac{1}{5}x - \ln x & \text{se } x > 2 \end{cases}$$

Determine a área do triângulo $[ABC]$, recorrendo às capacidades gráficas da sua calculadora.
Sabe-se que:

- A, B e C são pontos do gráfico da função f
- A e B são os pontos cujas abcissas são as soluções, no intervalo $]0,2]$, da equação $f(x) = f(15)$
- C é o ponto cuja ordenada é o mínimo da função f, no intervalo $]0,2]$, e cuja abcissa pertence ao intervalo $]0,2]$

Na sua resposta, deve:

- reproduzir o gráfico da função, ou os gráficos das funções, que tiver necessidade de visualizar na calculadora, devidamente identificado(s), incluindo o referencial;
- indicar as coordenadas dos pontos A, B e C, com arredondamento às centésimas;
- apresentar o resultado pedido, com arredondamento às décimas.

Exame – 2010, 2.ª Fase

24. Seja f a função, de domínio $\mathbb{R}^+$, definida por $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x-2}{x-\sqrt{2x}} & \text{se } 0 < x < 2 \\ \\ xe^{-x} + x + 1 & \text{se } x \geq 2 \end{cases}$

Seja g a função, de domínio $\mathbb{R}^+$, definida por $g(x) = 3 + \ln(x)$ A equação $f(x) = g(x)$ tem exatamente duas soluções.
Determine essas soluções, **utilizando as capacidades gráficas da sua calculadora**.
Apresente as soluções arredondadas às centésimas.
Apresente os gráficos que obteve na calculadora e assinale os pontos relevantes.

Teste Intermédio 12.º ano – 15.03.2010

25. Considere a função g, de domínio $\mathbb{R}^+$, definida por $g(x) = e^{2x} + \ln x$
O gráfico de g contém um único ponto A com abcissa pertencente ao intervalo $]0, 2]$ e cuja ordenada é igual ao dobro da abcissa.
Traduza esta situação por meio de uma equação.
Resolva a equação, **recorrendo às capacidades gráficas da sua calculadora**.
Indique as coordenadas do ponto A, com aproximação às décimas.
Reproduza, na folha de respostas, o gráfico, ou os gráficos, visualizado(s) na calculadora, devidamente identificado(s), incluindo o referencial.
Assinale o ponto A em que se baseou para dar a sua resposta.

Exame – 2009, 1.ª Fase

26. Considere a função g, de domínio $\left[-\frac{1}{2}, +\infty\right[$, definida por

$$g(x) = \begin{cases} 2x + \ln(1 + x - x^2) & \text{se } -\frac{1}{2} \leq x < 1 \\ 2 & \text{se } x = 1 \\ \dfrac{x-1}{\sqrt{x}-1} & \text{se } x > 1 \end{cases}$$

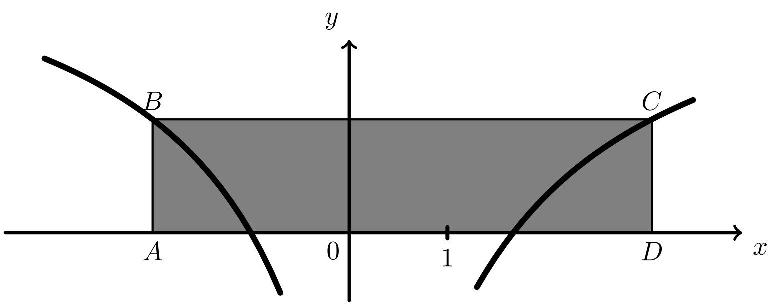
Recorrendo às capacidades gráficas da sua calculadora, determine o valor de x pertencente ao intervalo $\left[-\frac{1}{2}, 1\right[$ tal que $g(x) = -2 + g(4)$.
Indique o valor pedido arredondado às décimas e apresente o(s) gráfico(s) visualizado(s) na calculadora.

Teste Intermédio 12.º ano – 27.05.2009

27. Seja f a função de domínio $\mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{3x^2 - 3}{x^2 - 2x + 1} & \text{se } x < 1 \\ \ln(x) - e^{1-x} & \text{se } x \geq 1 \end{cases}$$

Na figura ao lado está representada, em referencial o.n. xOy, parte do gráfico da função f



O retângulo $[ABCD]$ tem dois vértices no eixo Ox, estando os outros dois no gráfico de f. O ponto A tem abcissa -2.
Determine a área do retângulo $[ABCD]$.

Nota: Na resolução deste problema vai necessitar de determinar a abcissa do ponto C.
Para tal, utilize as capacidades gráficas da sua calculadora.
Reproduza na sua folha de prova a parte do gráfico de f que visualizou, bem como a reta BC. Assinale também o ponto C e apresente a sua abcissa arredondada às centésimas.

Apresente a área pedida igualmente arredondada às centésimas.

Teste Intermédio 12.º ano – 11.03.2009

28. Considere a função f, de domínio $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, definida por $f(x) = \dfrac{e^x}{x}$.
No intervalo $]0,5]$, a reta de equação $y = 6$ interseta o gráfico da função f nos pontos A e B.
Determine a distância de A a B, com aproximação às décimas, **recorrendo às capacidades gráficas da sua calculadora**.
Apresente o gráfico, ou os gráficos, em que se baseou para dar a sua resposta, assinalando os pontos A e B e indicando as suas coordenadas com aproximação às décimas.

Exame – 2008, Ép. especial

29. Considere a função f, de domínio $\left]-\dfrac{1}{2}, +\infty\right[$, definida por $f(x) = \dfrac{\ln(2x+1)}{2x+1}$, e a função g, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $g(x) = x - 2$ (ln designa logaritmo de base e).
Indique as soluções inteiras da inequação $f(x) > g(x)$, **recorrendo às capacidades gráficas da sua calculadora**.
Para resolver esta inequação, percorra os seguintes passos:

- visualize as curvas representativas dos gráficos das duas funções;
- reproduza, na sua folha de respostas, o referencial e as curvas visualizadas na calculadora;
- assinale, ainda, os pontos A e B, de intersecção dos gráficos das duas funções, indicando as suas coordenadas, com aproximação às décimas.

Exame – 2008, 2.ª Fase

30. Considere, num referencial ortonormado xOy, os gráficos das funções f e g, de domínio $[0,3]$, definidas por $f(x) = \ln(x+2)$ e $g(x) = e - e^{x-1}$ (ln designa logaritmo de base e).
Determine a **área de um triângulo** $[OAB]$, com aproximação às décimas, **recorrendo às capacidades gráficas da sua calculadora**.
Para construir o triângulo $[OAB]$, percorra os seguintes passos:

- visualize as curvas representativas dos gráficos das duas funções, **no domínio indicado**;
- reproduza, na sua folha de respostas, o referencial e as curvas visualizadas na calculadora;
- assinale, ainda:
  - a origem O do referencial;
  - o ponto A de interseção do gráfico das duas funções, indicando as suas coordenadas, com aproximação às décimas;
  - o ponto B de interseção do gráfico da função g com o eixo Ox.

Exame – 2008, 1.ª Fase

31. Admita que uma certa população de seres vivos evolui de acordo com a seguinte **lei**: o número de indivíduos da população, t dias após um certo instante inicial, é dado aproximadamente por

$$P(t) = ae^{kt} \qquad \left(t \in \mathbb{R}_+^0\right)$$

em que

- a é o número de indivíduos da população no instante inicial ($a > 0$)
- k é uma constante real

Admita que, às zero horas do dia 1 do corrente mês, se iniciou, em laboratório, uma cultura de bactérias, em pequena escala, na qual se juntaram 500 indivíduos de uma estirpe A e 500 indivíduos de uma estirpe B.
Sabe-se que

- no caso da estirpe A, o valor da constante k_A, com quatro casas decimais, é $k_A = -0{,}6931$
- no caso da estirpe B, o valor da constante k_B, com quatro casas decimais, é $k_B = 0{,}1155$

Nunca foram introduzidos mais indivíduos destas duas estirpes nesta cultura.
Quer a estirpe A, quer a estirpe B, evoluíram de acordo com a acima lei referida.
Durante a primeira semana, houve um momento em que o **número total** de indivíduos destas duas estirpes, existentes na cultura, atingiu o valor mínimo.
Utilizando os valores de k_a e de k_b e recorrendo às capacidades gráficas da sua calculadora, determine **o dia e a hora** em que tal aconteceu (hora arredondada às unidades).
Apresente, na sua resposta:

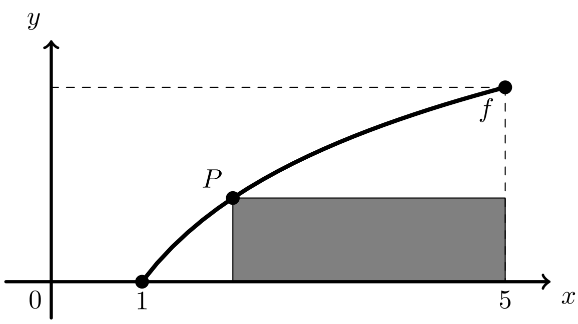
- a expressão da função que dá o número total de indivíduos destas duas estirpes, existentes na cultura, em função do tempo;
- o gráfico dessa função, para $t \in [0{,}7]$, no qual deve estar devidamente assinalado o ponto necessário à resolução do problema;
- a coordenada relevante desse ponto, arredondada às milésimas.

Teste Intermédio 12.º ano – 17.01.2008

32. Seja f a função, de domínio $[1{,}5]$, definida por $f(x) = \ln x$
(ln designa logaritmo na base e)

Na figura ao lado está representado, em referencial ortonormado xOy, o gráfico da função f.

Considere que um ponto P se desloca ao longo do gráfico de f. Para cada posição do ponto P, considere o retângulo em que um dos lados está contido no eixo Ox, outro na reta de equação $x = 5$ e os outros dois nas retas vertical e horizontal que passam pelo ponto P.



Exprima a área do retângulo em função da abcissa de P, e, recorrendo à calculadora gráfica, determine a abcissa de P (aproximada às centésimas) para a qual a área do retângulo é máxima. Apresente os elementos recolhidos na utilização da calculadora:

- o gráfico obtido;
- o ponto de ordenada máxima e respetivas coordenadas.

Exame – 2007, 1.ª Fase

33. Considere, num referencial o. n. xoy,

- a curva C, que representa graficamente a função f, de domínio $[0,1]$, definida por $f(x) = e^x + 3x$
- a reta r, de equação $y = 5$

Recorrendo às capacidades gráficas da sua calculadora, visualize a curva C e a reta r, na janela $[0,1] \times [0,7]$ (janela em que $x \in [0,1]$ e $y \in [0,7]$).
Reproduza, na sua folha de teste, o referencial, a curva C e a reta r, visualizados na calculadora.
Assinale ainda os pontos O, P e Q, em que:

- O é a origem do referencial;
- P é o ponto de coordenadas $(0,e)$;
- Q é o ponto de interseção da curva C com a reta r; relativamente a este ponto, indique, com duas casas decimais, a sua abcissa, que deve determinar com recurso à calculadora.

Desenhe o triângulo $[OPQ]$ e **determine a sua área**. Apresente o resultado final arredondado às décimas.
Se, em cálculos intermédios, proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, duas casas decimais.

Teste Intermédio 12.º ano – 15.03.2007

34. Um estudo de mercado, encomendado por uma empresa de venda de produtos alimentares, concluiu que a quantidade de azeite *Azeitona do Campo*, vendida num mês por essa empresa, depende do lucro obtido, de acordo com a função

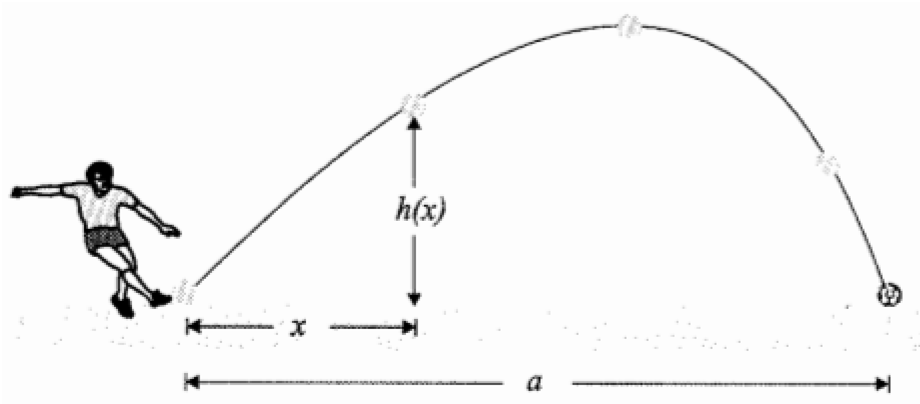
$$L(x) = (x - 3)e^{14-x}$$

sendo x o preço de venda ao público, em euros, de 1 litro desse azeite e $L(x)$ o lucro mensal da empresa (em euros), resultante da venda do azeite.
Utilize a calculadora para resolver **graficamente** o seguinte problema:
Entre que valores deve variar o preço de um litro de azeite de venda ao público para que o lucro mensal seja superior a dezasseis mil e quinhentos euros?
Apresente os valores em euros, arredondados aos cêntimos (de euro).
Apresente na sua resposta os elementos recolhidos na utilização da calculadora: gráficos e coordenadas relevantes de alguns pontos.

Teste Intermédio 12.º ano – 17.03.2006

35. Na figura ao lado está representada a trajetória de uma bola de futebol, depois de ter sido pontapeada por um jogador de da seleção portuguesa, durante um treino de preparação para o EURO-2004.

Designou-se por a a distância, em metros, entre o ponto onde a bola foi pontapeada e o ponto onde ela caiu.



Considere a função h definida em $[0,a]$ por:

$h(x) = 2x + 10\ln(1 - 0{,}1x)$ (ln designa logaritmo de base e)

Admita que $h(x)$ é a distância, em metros, da bola ao solo, no momento em que a sua projeção no solo se encontra a x metros do local onde foi pontapeada.

Recorrendo à calculadora, determine o valor de a, arredondado às centésimas.
Explique como procedeu, apresentando todos os elementos recolhidos na utilização da calculadora.

Exame – 2005, 2.ª Fase (cód. 435)

36. No início de 1972, havia quatrocentos lobos num determinado parque natural.
As medidas de proteção a lobos fizeram com que o referido número aumentasse continuamente. Os recursos do parque permitem que o número de lobos cresça até bastante perto de um milhar, mas não permitem que esse valor seja ultrapassado.
Nestas condições, apenas uma das expressões seguintes pode definir a função P que dá o número aproximado de lobos existentes no parque natural, t anos após o início de 1972.

(A) $\dfrac{1000}{1+e^{-0{,}5t}}$ **(B)** $\dfrac{1000}{1+1{,}5e^{-0{,}5t}}$ **(C)** $\dfrac{1200}{1+2e^{-t}}$ **(D)** $1000 - \dfrac{600(t^3+1)}{e^t}$

Qual é a expressão correta? Numa pequena composição, com cerca de dez linhas, explique as razões que o levariam a rejeitar as outras três opções (**apresente três razões diferentes, uma por cada opção rejeitada**).
Nota: poder-lhe-à ser útil recorrer às capacidades gráficas da sua calculadora. **Se o fizer, deve reproduzir o(s) gráfico(s) obtido(s)**.

Exame – 2005, 2.ª Fase (cód. 435)

37. Considere a função f, de domínio $\mathbb{R}^+$, definida por $f(x) = \dfrac{e^x - 1}{x}$

O conjunto solução da inequação $f(x) \leq 3 + \ln x$ é um intervalo fechado $[a,b]$ (ln designa logaritmo de base e).
Recorrendo à sua calculadora, determine, **graficamente**, valores para a e b, arredondados às centésimas.
Nota: apresente, na sua resposta, os elementos recolhidos na utilização da calculadora, nomeadamente, o **gráfico** ou **gráficos** obtido(s), bem como coordenadas relevantes de alguns pontos.

Exame – 2004, 2.ª Fase (cód. 435)

38. Considere as funções $f : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ e $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, definidas por:

$f(x) = \ln x$ (ln designa logaritmo de base e)

$g(x) = x^2 - 3$

Utilizando as capacidades gráficas da sua calculadora, investigue se todo o número x do intervalo $[0{,}1; 1{,}8]$ é solução da inequação $f(x) > g(x)$. Indique a conclusão a que chegou e explique como procedeu. Deverá incluir na sua explicação os gráficos obtidos na sua calculadora.

Exame – 2002, Prova para militares (cód. 435)

39. Doses terapêuticas iguais de um certo antibiótico são administradas, pela primeira vez, a duas pessoas: a Ana e o Carlos.
Admita que, durante as doze primeiras horas após a tomada simultânea do medicamento pela Ana e pelo Carlos, as concentrações de antibiótico, medidas em miligramas por litro de sangue, são dadas, respetivamente, por

$$A(t) = 4t^3 e^{-t} \qquad \text{e} \qquad C(t) = 2t^3 e^{-0{,}7t}$$

A variável t designa o tempo, medido em **horas**, que decorre desde o instante em que o medicamento é tomado ($t \in [0{,}12]$).
Considere as seguintes questões:

1. *Quando a concentração ultrapassa 7,5 miligramas por litro de sangue, o medicamento pode ter efeitos secundários indesejáveis. Esta situação ocorrerá, neste caso, com alguma destas duas pessoas? Caso afirmativo, com quem? E em quantos miligramas por litro o referido limiar será ultrapassado?*

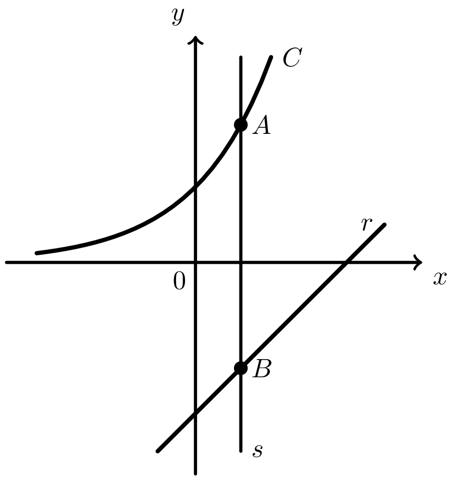
2. *Depois de atingir o nível máximo, a concentração começa a diminuir. Quando fica inferior a 1 miligrama por litro de sangue, é necessário tomar nova dose do medicamento. Quem deve tomá-la em primeiro lugar, a Ana ou o Carlos? E quanto tempo antes do outro?*

Utilize as capacidades gráficas da sua calculadora para investigar estas duas questões.
Numa pequena composição, com cerca de dez linhas, explicite as conclusões a que chegou, justificando-as devidamente. Apresente, na sua resposta, os elementos recolhidos na utilização da calculadora: gráficos e coordenadas de alguns pontos (coordenadas arredondadas às décimas).

Exame – 2002, 1.ª fase - 1.ª chamada (cód. 435)

40. Na figura ao lado estão representadas, em referencial o. n. xOy

- uma curva C, gráfico da função f, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $f(x) = e^x$
- uma reta r, gráfico da função g, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $g(x) = x - 2$
- uma reta s paralela ao eixo Oy



Sejam A e B os pontos de interseção da reta s com a curva C e com a reta r, respetivamente.
Imagine que a reta s se desloca, mantendo-se sempre paralela ao eixo Oy.
Os pontos A e B acompanham, naturalmente, o deslocamento da reta s.

Seja x a abcissa do ponto A.

Recorrendo à calculadora, determine $x \in [0{,}2]$ tal que $\overline{AB} = 5$. Apresente o resultado aproximado às décimas. Explique como procedeu (na sua explicação, deve incluir o gráfico, ou gráficos, que considerou para resolver esta questão).

Exame – 2001, Ép. especial (cód. 435)

41. Considere a função f, de domínio $\mathbb{R}^+$, definida por $f(x) = 3x - 2\ln x$ (ln designa o logaritmo de base e).
O gráfico de f contém um único ponto cuja ordenada é o quadrado da abcissa.
Recorrendo à calculadora, determine um valor aproximado para a abcissa desse ponto (apresente o resultado arredondado às décimas).
Explique como procedeu (na sua explicação, deve incluir o gráfico, ou gráficos, que considerou para resolver esta questão).

Exame – 2001, 1.ª fase - 1.ª chamada (cód. 435)

42. Um laboratório farmacêutico lançou no mercado um novo analgésico: o *AntiDor*.
A concentração deste medicamento, em decigramas por litro de sangue, t horas após ter sido administrado a uma pessoa, é dado por

$$c(t) = t^2 e^{-0,6t} \qquad (t \geq 0)$$

O mesmo laboratório realizou uma campanha de promoção deste medicamento, baseado no *slogan*:
≪ ***AntiDor - Ação rápida e prolongada!***≫
Numa breve composição, comente o *slogan*, tendo em conta que:

- para a maioria das dores, o *AntiDor* só produz efeito se a sua concentração for superior a 1 decigrama por litro de sangue;
- de acordo com uma associação de defesa do consumidor, um bom analgésico deve começar a produzir efeito, no máximo, meia hora após ter sido tomado, e a sua ação deve permanecer durante, pelo menos, cinco horas (após ter começado a produzir efeito).

Nota: na resolução deste item, deve utilizar as capacidades gráficas da sua calculadora e enriquecer a sua composição com o traçado de um ou mais gráficos.

Exame – 2000, Prova modelo (cód. 435)

43. Um paraquedista salta de um helicóptero. Ao fim de algum tempo, o paraquedas abre.
Admita que a distância (em metros) a que o paraquedista se encontra do solo, t segundos **após a abertura do paraquedas**, é dada por

$$d(t) = 840 - 6t + 25e^{-1,7t}$$

Utilize a calculadora para determinar, com aproximação ao segundo, quanto tempo, após a abertura do paraquedas, demora o paraquedista a atingir o solo. Explique como procedeu.

Exame – 1998, Prova para militares (cód. 135)