

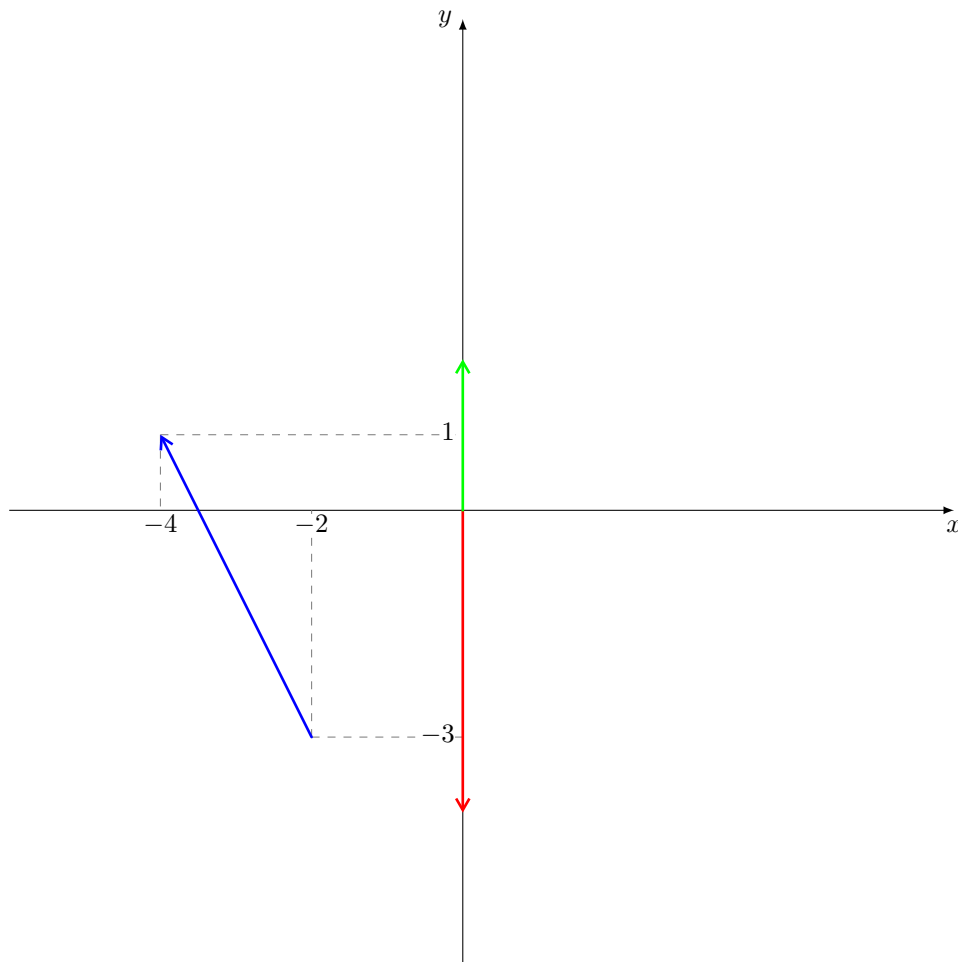
Exercício 1

Sejam a e b números reais. Simplifique a seguinte expressão:

$$(a - b)(a + b) + b(b + 2) - 2b.$$

$$a^2 - b^2 + b^2 + 2b - 2b = a^2$$

Exercício 2



Exercício 5

Considere a reta r definida por $r : 2x - y + 3 = 0$ e o ponto $P(1, 1)$.

a)

Escreva a equação reduzida da reta q que é perpendicular a r e que passa no ponto P .

b)

Determine a distância do ponto P à reta r .

Exercício 6

Determine uma expressão geral das soluções reais da equação $-2 \sin x - \sqrt{2} = 0$

$$-2 \sin x - \sqrt{2} = 0$$

$$\Leftrightarrow \sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Leftrightarrow \sin x = \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)$$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \vee x = \pi - \frac{\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \vee x = \frac{5\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Exercício 7

Mostre, no domínio em que a expressão é válida, que:

$$\frac{\sin x \cdot \cos x}{\tan x} = \cos^2 x$$

$$\frac{\sin x \cdot \cos x}{\tan x} = \frac{\sin x \cdot \cos x}{\frac{\sin x}{\cos x}} = \frac{\cancel{\sin x} \cdot \cos^2 x}{\cancel{\sin x}} = \cos^2 x$$

Como queríamos demonstrar.

Exercício 8

Resolva, em \mathbb{R} , a seguinte inequação fracionária: $\frac{-x+1}{x^2+1} \geq 0$.
C.A.

$$-x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

$$\underbrace{x^2 + 1 = 0}_{\text{Impossível}}$$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$-x + 1$	$+$	0	$-$
$x^2 + 1$	$+$	$+$	$+$
$\frac{-x+1}{x^2+1}$	$+$	0	$-$

Crescente

$$C.S =] - \infty, 1]$$

Exercício 9

Seja $(u_n)_n$ uma sucessão definida por: $u_n = 1 + \frac{n+1}{n}$

a)

Verifique se $\frac{11}{5}$ é um dos termos de $(u_n)_n$

$$1 + \frac{n+1}{n} = \frac{11}{5}$$

$$n = 5 \in \mathbb{N}$$

b)

Estude $(u_n)_n$ quanto à monotonia

$(u_{n+1}) - (u_n) < 0$ é monótona decrescente

$(u_{n+1}) - (u_n) > 0$ é monótona crescente

$$\left[\frac{n}{n} \right] \left[\frac{2n+3}{n+1} \right] - \left[\frac{2n+1}{n} \right] \left[\frac{n+1}{n+1} \right]$$

$$\frac{2n^2 + 3n}{(n+1)(n)} - \frac{2n^2 + 2n + n + 1}{(n+1)(n)}$$

$$\frac{2n^2 + 3n - 2n^2 - 2n - n - 1}{(n+1)(n)}$$

$$\frac{-1}{(n+1)(n)} < 0, \forall n \in \mathbb{N}$$

u_n é monótona decrescente

c)

Diga, justificando, se $(u_n)_n$ é uma sucessão convergente e se é uma sucessão limitada.

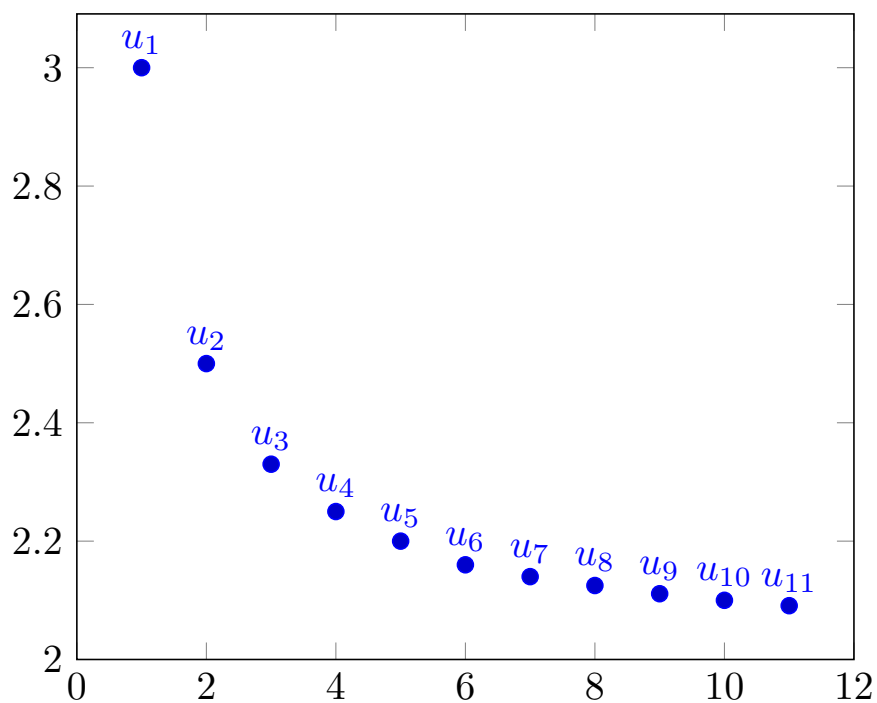
$$\lim_n 1 + \frac{n+1}{n} = \lim_n 1 + \lim_n \frac{\cancel{\mathcal{N}}(1 + \frac{1}{\cancel{n}})}{\cancel{\mathcal{N}}(1)} = 1 + \frac{1 + \overset{0}{\cancel{\frac{1}{n}}}}{1} = 2$$

$(u_n)_n$ é convergente pois tende para um número real. Toda a sucessão convergente é limitada. Como $(u_n)_n$ é decrescente sabemos que:

$$1 + \frac{n+1}{n}$$

$$\frac{n+1}{n} > 0$$

$$2 < u_n \leq 3, \forall n \in \mathbb{N}$$



Exercício 10

Determine, caso existam, os seguintes limites:

a)

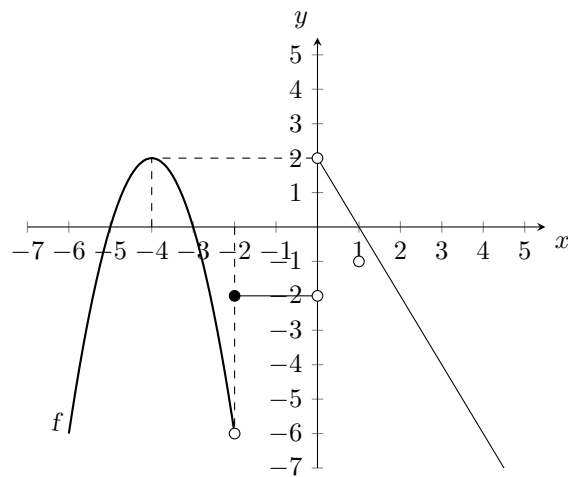
$$\begin{aligned} \lim_n \frac{2n-5}{\sqrt{4n^2+1}} &\stackrel{\frac{\infty}{\infty}}{=} \\ \lim_n \frac{2 + \frac{-5}{n}}{\sqrt{4 + \frac{1}{n^2}}} &\stackrel{0}{=} \\ &= \frac{2}{\sqrt{4+0}} = 1 \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} \lim_n \left(\frac{n+1}{n-2} \right)^{3n} &\stackrel{1^\infty}{=} \\ &= \lim_n \left(\frac{1 + \frac{1}{n}}{1 - \frac{2}{n}} \right)^{3n} \\ &= \left[\frac{\lim_n \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n}{\lim_n \left(1 - \frac{2}{n} \right)^n} \right]^3 \\ &= \left[\frac{e^1}{e^{-2}} \right]^3 \\ &= e^9 \end{aligned}$$

Exercício 11

Na figura está representada parte de um gráfico de uma função f de domínio $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.



Indique:

a)

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -2$$

b)

$$\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = -6$$

c)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$$

Exercício 12

Considere a função real, de variável real, definida por $f(x) = 10 - 2^{x-1}$.

a)

Determine o domínio e o contradomínio da função f .

$$D_f = \mathbb{R}$$

$$D'_f = 10 - 2^{x-1} < 10 =] - \infty, 10[$$

b)

Caracterize a função inversa da função f .

$$f^{-1} = \log_2(10 - x) + 1$$

$$f^{-1} :] - \infty, 10[\rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \log_2(10 - x) + 1$$

c)

Resolva em \mathbb{R} a seguinte equação: $f(x) = -6$.

$$10 - 2^{x-1} = -6$$

$$\Leftrightarrow 2^{x-1} = 2^4$$

$$\Leftrightarrow x = 5$$

Exercício 13

Considere a função f definida por $f(x) = -\frac{x^4}{4} + 2x^2$. Determine, na forma reduzida, a equação da reta tangente ao gráfico de f no ponto de abscissa 1.

$$f'(1) = 4x - x^3 = 3$$

$$f(1) = -\frac{1^4}{4} + 2 \cdot 1^2 = \frac{7}{4}$$

$$y - f(1) = f'(1) \cdot (x - 1)$$

$$\Leftrightarrow y - \frac{7}{4} = 3x - 3$$

$$\Leftrightarrow y = 3x - \frac{5}{4}$$