Proposta de Teste Intermédio n.º 2

Matemática A – 11.º Ano

"A Matemática é o alfabeto com o qual Deus escreveu o Universo."
Galileu Galilei

Grupo I – Itens de Escolha Múltipla

1. Sejam α, β e θ três números reais tais que $\alpha+\beta=\frac{\pi}{2}$, $\alpha+\theta=\pi$ e $\operatorname{tg}\alpha=2$.

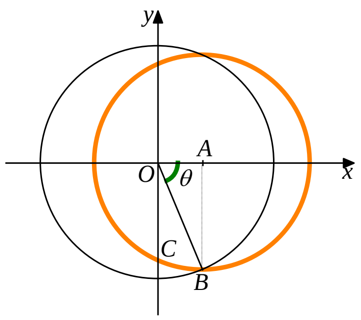
Qual é o valor de $\operatorname{sen}^2(\beta-2\theta)+\cos^2(2\beta+\alpha)$?

A 0 **B** $\frac{1}{5}$ **C** $\frac{2}{5}$ **D** 1

2. Na figura está representado num referencial o.n. xOy um círculo trigonométrico centrado na origem e uma circunferência centrada em A e que contém o ponto B.

Sabe-se que:

- o ponto C pertence ao eixo Oy e à circunferência de centro em A e que contém o ponto B;
- θ é a amplitude em radianos do ângulo AOB, com $\theta\in\left]-\frac{\pi}{2},-\frac{\pi}{4}\right[$.



Qual é, em função de θ, a ordenada do ponto C?

A $\cos\theta-\operatorname{sen}\theta$ **B** $-\sqrt{2\operatorname{sen}^2\theta-1}$

C $-\sqrt{1+2\cos^2\theta}$ **D** $-\sqrt{1-\cos^2\theta}$

3. Considere as rectas r e s definidas por:

$$r:(x,y,z)=(2-2k,k,1+k),\ k\in\mathbb{R} \qquad \text{e} \qquad s:-2x-4=2z-6\ \wedge\ y=2$$

Qual é a amplitude do ângulo formado pelas rectas r e s?

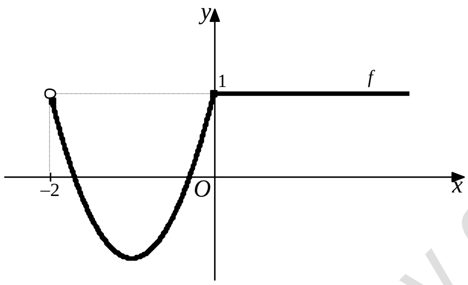
A 30° **B** 45° **C** 60° **D** 150°

Exercício Extra: Mostre que as rectas r e s definem um plano e escreva uma equação que o defina.

4. Sejam $\vec{u}$ e $\vec{v}$ dois vectores não nulos tais que $\|\vec{u}+\vec{v}\|=\sqrt{10}$, $\|\vec{u}\|=k$, $\|\vec{v}\|=2k-1$ e $\vec{u}\perp\vec{v}$, com $k\in\mathbb{R}$. Então pode afirmar-se que:

A $k=-1 \quad \vee k=\frac{9}{5}$ **B** $k=\frac{9}{5}$ **C** $k=\frac{9}{4}$ **D** $k=2$

5. Considere as funções f e g de domínios $]-2,+\infty[$ e $\mathbb{R}\setminus\{1\}$, respectivamente. O gráfico da função f está parcialmente representado no referencial o.n. xOy da figura e a função g é definida por $g(x)=x-\frac{2}{x-1}$.



Considere as seguintes afirmações:

I. $D_{\frac{f}{g}}=]-2+\infty[\setminus\{-1,1,2\}$ **II.** $(f+g)(3)=2$

III. $(f\circ g)(-1)<1$ **IV.** $D_{g\circ f}=]-2,0[$

Quais são as afirmações verdadeiras?

A **I**, **III** e **IV** **B** **II** e **III** **C** **I** e **IV** **D** Apenas **I**

Exercício Extra: Considere a função h, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $h(x)=x^2+3x$. Determine o conjunto-solução das seguintes inequações:

a) $(g\times h)(x)\geq 0$

b) $(f\circ h)(x)<1$

GRUPO II – ITENS DE RESPOSTA ABERTA

1. Na figura está representado um trapézio isósceles $[ABCD]$.

Sabe-se que:

- $\overline{DE} = k$ e $\overline{CD} = 2\overline{DE}$, com $k > 0$;
- α é a amplitude, em radianos, do ângulo CDA (ângulo externo), com $\alpha \in \left]\pi, \frac{3\pi}{2}\right[$.

1.1. Mostre que o perímetro do trapézio $[ABCD]$ é dado em função de α por $p(\alpha) = 2k\left(2 + \frac{\cos\alpha - 1}{\operatorname{sen}\alpha}\right)$.

1.2. Supondo que $\operatorname{tg}(\alpha + \pi) = \frac{3}{4}$ e que o perímetro do trapézio $[ABCD]$ é 20, qual é o valor de k?

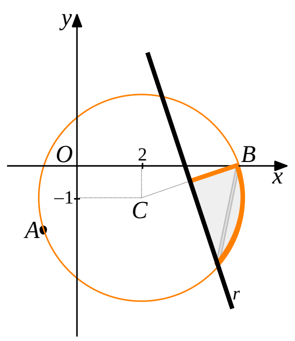
1.3. Determine o valor de $\alpha \in \left]\pi, \frac{3\pi}{2}\right[$ de modo que a área do trapézio $[ABCD]$ seja igual a $k^2\left(2 + \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$.

1.4. Admita que $\operatorname{sen}\alpha = -\frac{3\sqrt{13}}{13}$. Mostre que $\overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{FD} = \frac{k^2}{3}$.

2. Determine os valores reais de k que verificam a condição:

$$6\operatorname{sen} x = k^2 \cos(x + \pi) - k\operatorname{sen}\left(x - \frac{\pi}{2}\right) \quad \wedge \quad x \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right[$$

3. Na figura estão representadas, num referencial o.n. xOy, uma circunferência centrada no ponto $C(2,-1)$ que contém os pontos $A(-1,-2)$ e B e a recta r, mediatriz do segmento de recta $[CB]$. O ponto B também pertence ao eixo Ox.



3.1. Mostre que as coordenadas do ponto B são $(5,0)$ e verifique que $[AB]$ é um diâmetro da circunferência.

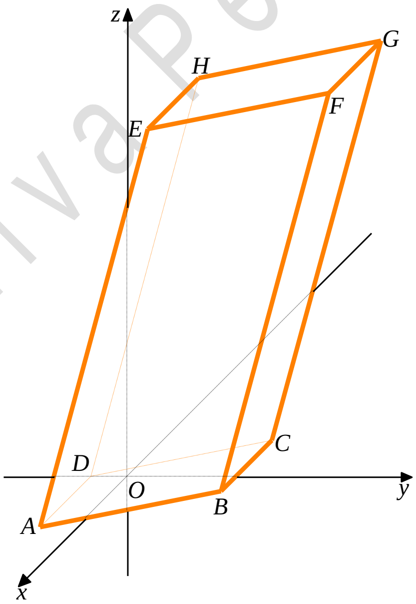
3.2. Escreva a equação reduzida da recta r e indique a sua inclinação. (Apresente o resultado em graus, arredondado às decimas)

3.3. Sejam P um ponto pertencente à recta r e D o ponto de coordenadas $(-2,4)$. Determine as coordenadas de P de modo que as rectas DP e BC sejam paralelas.

3.4. Escreva uma condição que defina a região sombreada da figura, incluindo a fronteira, e mostre que a sua área é igual a $5\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{4}\right)$.

4. Na figura está representado num referencial o.n. $Oxyz$ ou prisma não recto $[ABCDEFGH]$.

Sabe-se que:



- a face $[DCGH]$ está contida no plano yOz;
- as faces $[ABCD]$ e $[EFGH]$ são rectângulos e são paralelas;
- uma equação do plano ABC é $y-5z=-1$;
- uma equação vectorial da recta BH é:

$$(x,y,z)=(8,6,-9)+k(-4,-2,10),\quad k\in\mathbb{R}$$

- uma condição que define a recta AG é $-\frac{x}{4}=\frac{y-7}{8}=\frac{z-12}{12}$

4.1. Mostre que uma equação do plano DBF é $13x-11y+3z=11$.

4.2. Usando o produto escalar, escreva uma equação da superfície esférica de diâmetro $[AH]$. (Apresenta a equação na forma $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=r^2$, com $a,b,c,r\in\mathbb{R}$)

4.3. Determine o volume do prisma $[ABCDEFGH]$.

Sugestão: Comece por determinar uma condição que defina a recta perpendicular ao plano ABC que contém o ponto G.

4.4. Seja $P(x,y,z)$ um ponto do espaço e considere a condição definida por $\left(\overrightarrow{AP}-\overrightarrow{AB}\right)\cdot\left(\overrightarrow{EG}+\overrightarrow{FB}\right)=0$.

a) Usando exclusivamente cálculo vectorial, identifique, justificando, o lugar geométrico dos pontos P do espaço que satisfazem a condição dada.

b) Escreva uma equação cartesiana do lugar geométrico dos pontos P do espaço que satisfazem a condição dada.

5. Uma empresa de carpintaria produz roupeiros e cozinhas. Diariamente dispõe de pelo menos 150 horas de mão-de-obra, sendo que a produção de um roupeiro necessita de duas horas de mão-de-obra e a produção de uma cozinha necessita de oito horas. Por razões logísticas, diariamente, o número de cozinhas produzidas não pode ser superior ao número de roupeiros e número total de roupeiros e cozinhas produzidos não pode ser superior a 90. Além disso, diariamente, a empresa só dispõe de material para construir no máximo 65 roupeiros.

A empresa lucra com cada roupeiro 200 euros e com cada cozinha 350 euros.

Supondo que toda a produção é escoada, quantos roupeiros e quantas cozinhas deve produzir a empresa para que o lucro diário seja máximo? Indique o valor desse lucro.

6. Considere as funções f e g definidas por $f(x)=\dfrac{2x^3+6x^2+5x+2}{x^2+x-2}$ e $g(x)=1+\dfrac{1}{x-1}$.

6.1. Determine D_{f+g} e estude a função $f+g$ quando à existência de assimptotas do seu gráfico. Caso existam, indica as suas equações.

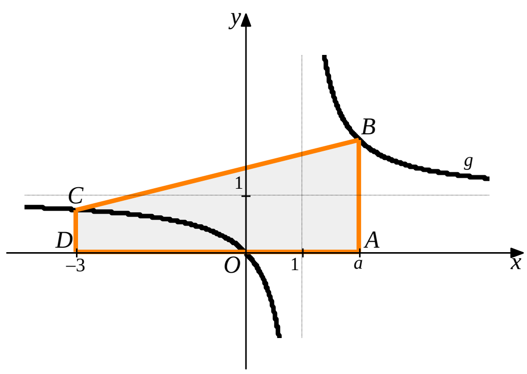
6.2. Mostre que $(f+g)(x)=2x+5+\dfrac{6}{x-1}$, $\forall x \in D_{f+g}$.

6.3. Sem recorrer à calculadora, resolva a inequação $2g(x)\geq x^2$. (Apresente o conjunto solução na forma de intervalo, ou união de intervalos)

6.4. Na figura estão representados num referencial o.n. xOy, parte do gráfico da função g e um trapézio $[ABCD]$.

Sabe-se que:

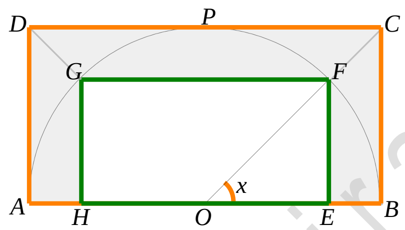
- o ponto C pertence ao gráfico de g e o ponto D pertence ao eixo Ox e têm ambos abcissa -3;
- o ponto B pertence ao gráfico de g e o ponto A pertence ao eixo Ox e têm ambos abcissa a, com $a>1$;
- o ponto B desloca-se no primeiro quadrante, sobre o gráfico de g. O ponto A acompanha o seu movimento de modo que o segmento de recta $[AB]$ é sempre paralelo ao eixo Oy.



Recorrendo exclusivamente a cálculos analíticos, determine os valores de a para os quais a área do trapézio $[ABCD]$ é igual a $\dfrac{55}{8}$.

7. Na figura estão representados os rectângulos $[ABCD]$ e $[EFGH]$ e uma semi-circunferência centrada no ponto O e raio 2 inscrita no rectângulo $[ABCD]$.

Sabe-se que:



- os pontos F e G pertencem à semi-circunferência;
- o ponto F desloca-se sobre o arco BP, nunca coincidindo com o ponto B nem com o ponto P.
- os pontos E, G e H acompanham o movimento do ponto F de modo que $[EFGH]$ é sempre um rectângulo;
- O é o ponto médio dos segmentos de reta $[AB]$ e $[EH]$.

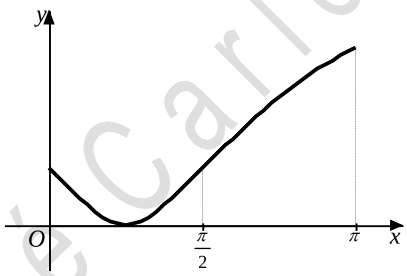
7.1. Seja x a amplitude, em radianos do ângulo EOF e considere nesta alínea que $x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$.

Recorrendo à calculadora, determine para que valores de x a área da região sombreada da figura é superior a 5. Explique como procedeu; na sua explicação deve reproduzir o(s) gráfico(s) obtido(s), bem como as coordenadas de alguns pontos relevantes. (Apresente os resultados arredondados às centésimas)

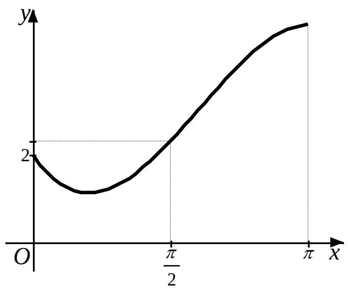
Sugestão: Comece por mostrar que a área da região sombreada da figura é dada por $8 - 8\operatorname{sen} x \cos x$.

7.2. Considere agora a função f que para cada $x \in [0, \pi]$ faz corresponder a distância do ponto F ao ponto C. Em qual das opções seguintes pode estar representado o gráfico da função f ?

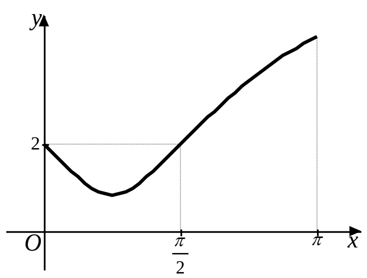
A



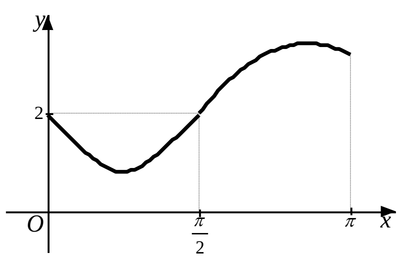
B



C



D



Numa pequena composição, explique as razões que o levam a rejeitar os outros três gráficos. Apresente três razões, uma por cada gráfico rejeitado.

Solucionário

Grupo I – Itens de escolha múltipla

1. C **2.** B **3.** A **Exercício Extra:** $x+y+z=3$ **4.** B **5.** C

Exercício Extra: **a)** $[-3,-1]\cup[0,1[\cup[2,+\infty[$ **b)** $]-3,-2[\cup]-1,0[$

Grupo II – Itens de resposta aberta

1.2. $k=2$ **1.3.** $\alpha=\frac{4\pi}{3}$

2. $k\in[-2,3]$

3.2 $y=-3x+10$; $\approx 108,4^{\circ}$ **3.3.** $P\left(\frac{8}{5},\frac{26}{5}\right)$

3.4. $(x-2)^2+(y+1)^2\leq 10 \quad \wedge \quad y\geq -3x+10 \quad \wedge \quad y\leq \frac{1}{3}x-\frac{5}{3}$

4.2. $(x-2)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2+\left(z-\frac{11}{2}\right)^2=\frac{73}{2}$ **4.3.** $V_{[ABCDEFGH]}=208$

4.4. **a)** Plano perpendicular a $\overrightarrow{EC}$ que contém o ponto B. **4.4.** **b)** $2x-y+5z=9$

5. A empresa deve produzir diariamente 45 roupeiros e 45 cozinhas tendo um lucro máximo de 24 750 euros.

6.1. $D_{f+g}=D_f\cap D_g=\mathbb{R}\setminus\{-2,1\}$; A.V.: $x=1$; A.O.: $y=2x+5$

6.3. $[-1,0]\cup]1,2]$ **6.4.** $a=2 \quad \vee \quad a=\frac{23}{7}$

7.1. $8-8\operatorname{sen}x\cos x>5 \Leftrightarrow x\in\left]0,a\right[\cup\left]b,\frac{\pi}{2}\right[$, com $a\approx 0,42$ e $b\approx 1,15$ **7.2.** C