Exercícios de aplicação (págs. 19 a 25)

1.

1.1. $x^2+y^2+4x-10y+20=0 \Leftrightarrow x^2+4x+4+y^2-10y+25=-20+4+25$

$$\Leftrightarrow (x+2)^2+(y-5)^2=9$$

Centro da circunferência: $C(-2,5)$

Raio: $r=\sqrt{9}=3$

Uma condição que define o conjunto de pontos a sombreado é:

$$(x+2)^2+(y-5)^2\le 9 \ \wedge\ x\ge -2 \ \wedge\ y\le 5$$

1.2. $\begin{cases} y=-x \\ x^2+y^2+4x-10y+20=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overline{\qquad\qquad} \\ x^2+(-x)^2+4x-10\times(-x)+20=0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \overline{\qquad\qquad} \\ 2x^2+14x+20=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \overline{\qquad\qquad} \\ x^2+7x+10=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \overline{\qquad\qquad} \\ x=\frac{-7\pm\sqrt{49-4\times10}}{2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \overline{\qquad\qquad} \\ x=\frac{-7\pm3}{2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y=2 \\ x=-2 \end{cases} \vee \begin{cases} y=5 \\ x=-5 \end{cases}$$

Os pontos de interseção são, então, $P_1(-2,2)$ e $P_2(-5,5)$.

1.3.

a) Seja M o ponto médio de $[AB]$:

$$M=\left(\frac{-2-\frac{1}{3}}{2},\frac{1+3}{2}\right)=\left(-\frac{7}{6},2\right)$$

A equação vetorial pretendida é $(x,y)=\left(-\frac{7}{6},2\right)+k(0,1),k\in\mathbb{R}$.

b) $\overrightarrow{AB}=B-A=\left(-\frac{1}{3},3\right)-(-2,1)=\left(-\frac{1}{3}+2,3-1\right)=\left(\frac{5}{3},2\right)$

Para ser colinear com $\overrightarrow{AB}$ é da forma $k\overrightarrow{AB}$, isto é, $\left(\frac{5}{3}k,2k\right),k\in\mathbb{R}$.

Para que tenha norma $\sqrt{61}$:

$$\sqrt{\left(\frac{5}{3}k\right)^2+(2k)^2}=\sqrt{61}\Leftrightarrow \frac{25}{9}k^2+4k^2=61$$

$$\Leftrightarrow \frac{61}{9}k^2=61$$

$$\Leftrightarrow k^2=9$$

$$\Leftrightarrow k=3 \ \vee\ k=-3$$

Para que o vetor tenha sentido contrário ao de $\overrightarrow{AB}$, tem-se que $k=-3$.

Assim, o vetor nas condições pretendidas tem coordenadas $(-5,-6)$.

2.

2.1. $4x + y - 2z + d = 0$

Como passa no ponto (1, 3, -4), tem-se:

$4 \times 1 + 3 - 2 \times (-4) + d = 0 \Leftrightarrow 15 + d = 0 \Leftrightarrow d = -15$

Uma equação cartesiana do plano pretendido é $4x + y - 2z - 15 = 0$

2.2. $\overrightarrow{AB} = B - A = (-5,2,0) - (-6,1,1) = (1,1,-1)$

$\overrightarrow{AC} = C - A = (3,1,-2) - (-6,1,1) = (9,0,-3)$

$\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$ não são colineares.

$$\begin{cases}(a,b,c)\cdot(1,1,-1) = 0\\(a,b,c)\cdot(9,0,-3) = 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a + b - c = 0\\9a - 3c = 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\overline{\qquad\qquad}\\9a = 3c\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a + b - 3a = 0\\c = 3a\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}b = 2a\\c = 3a\end{cases}$$

$\vec{n}(a, 2a, 3a)$, com $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

Se $a = 1$, então $\vec{n}(1,2,3)$

$ABC: x + 2y + 3z + d = 0.$

O ponto $A(-6,1,1) \in ABC$, logo:

$-6 + 2 \times 1 + 3 \times 1 + d = 0 \Leftrightarrow d = 1$

Uma equação cartesiana do plano pretendido é $x + 2y + 3z + 1 = 0$.

2.3. As retas r e s são concorrentes, pois os seus vetores diretores não são colineares e ambos contém o ponto de coordenadas (3, -1, -1). Por conseguinte, definem um plano.

$$\begin{cases}(a,b,c)\cdot(-5,1,2) = 0\\(a,b,c)\cdot(-5,2,2) = 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}-5a + b + 2c = 0\\-5a + 2b + 2c = 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}b = 5a - 2c\\-5a + 2(5a - 2c) + 2c = 0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\overline{\qquad\qquad}\\5a - 2c = 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}b = 5a - 2 \times \frac{5}{2}a\\c = \frac{5}{2}a\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}b = 0\\c = \frac{5}{2}a\end{cases}$$

$\vec{n}\left(a, 0, \frac{5}{2}a\right)$, com $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

Se $a = 2$, $\vec{n}(2,0,5)$, então $\alpha: 2x + 5z + d = 0$.

O ponto $(3,-1,-1) \in \alpha$, logo:

$2 \times 3 + 5 \times (-1) + d = 0 \Leftrightarrow d = -1$

Uma equação cartesiana do plano α é $2x + 5z - 1 = 0$.

2.4. Seja $A(-1,1,3)$ um ponto da reta r e $B(-2,-4,1)$ um ponto da reta s.

Os vetores diretores da reta r e da reta s são colineares.

Averiguemos se o ponto de coordenadas $(-1,1,3)$, que pertence à reta r, também pertence a reta s: $(-1,1,3) = (-2,-4,1) + k(-1,1,1)$

$$\begin{cases}-1 = -2 - k\\1 = -4 + k\\3 = 1 + k\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}k = -1\\k = 5\\k = 2\end{cases}$$, que é uma condição impossível.

Logo, o ponto $(-1,1,3)$ não pertence à reta s.

Assim, as retas *r* e *s* são estritamente paralelas. Por conseguinte, definem um plano.

$\overrightarrow{AB} = B - A = (-2,-4,1) - (-1,1,3) = (-1,-5,-2)$

$\begin{cases} (a,b,c)\cdot(-1,-5,-2) = 0 \\ (a,b,c)\cdot(-1,1,1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -a-5b-2c = 0 \\ -a+b+c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -b-c-5b-2c = 0 \\ b+c = a \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} -6b-3c = 0 \\ \_\_\_\_\_\_ \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -6b = 3c \\ \_\_\_\_ \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = -2b \\ b-2b = a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = -2b \\ a = -b \end{cases}$

$\vec{n}(-b,b,-2b)$, com $b \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$

Se $b = 1$, $\vec{n}(-1,1,-2)$.

Logo, $\alpha: -x+y-2z+d = 0$.

O ponto $A(-1,1,3) \in \alpha$, logo:

$-(-1)+1-2\times 3+d = 0 \Leftrightarrow -4+d = 0 \Leftrightarrow d = 4$

Uma equação cartesiana do plano α é $-x+y-2z+4 = 0$

2.5. $(6,-2,-3) = (8,-1,-2)+k(1,2,3) \Leftrightarrow \begin{cases} 6 = 8+k \\ -2 = -1+2k \\ -3 = -2+3k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2 = k \\ -\frac{1}{2} = k \\ -\frac{1}{3} = k \end{cases}$, que é uma condição impossível.

Logo, o ponto *A* não pertence à reta *r*.

Assim, o ponto *A* e a reta *r* definem um plano.

Para determinar um vetor normal ao plano, precisamos de dois vetores não colineares do plano. Assim, vamos considerar o ponto $P(8,-1,-2)$ da reta r e o ponto $A(6,-2,-3)$ do plano para determinar o vetor $\overrightarrow{AP}$.

Cálculo auxiliar

$\overrightarrow{AP} = P - A = (2,1,1)$

$\begin{cases} (a,b,c)\cdot(1,2,3) = 0 \\ (a,b,c)\cdot(2,1,1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+2b+3c = 0 \\ 2a+b+c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -2b-3c \\ 2\times(-2b-3c)+b+c = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \overline{\qquad\qquad} \\ -4b-6c+b+c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overline{\qquad\qquad} \\ -3b-5c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overline{\qquad\qquad} \\ b = -\frac{5c}{3} \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a = -2\times\left(-\frac{5}{3}c\right)-3c \\ \_\_\_\_\_\_ \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{3}c \\ b = -\frac{5c}{3} \end{cases}$

$\vec{n}(\frac{1}{3}c, -\frac{5c}{3}, c)$, com $c \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$

Se $c = 3$, $\vec{n}(1,-5,3)$.

Assim, $\alpha: x-5y+3z+d = 0$.

Cálculo auxiliar

Como o ponto *A* pertence ao plano, temos:

$6-5\times(-2)+3\times(-3)+d = 0 \Leftrightarrow 6+10-9+d = 0 \Leftrightarrow d = -7$

Uma equação cartesiana do plano pretendido é $x-5y+3z-7 = 0$.

3. A partir da equação vetorial da reta *r*, podemos concluir que qualquer ponto desta reta é do tipo $(2+k, 1-k, 0)$, com $k \in \mathbb{R}$. A partir da equação vetorial da reta s, podemos concluir que qualquer ponto desta reta é do tipo $(-1-2\lambda, 1-\lambda, -1-\lambda)$, com $\lambda \in \mathbb{R}$.

Uma vez que procuramos um ponto que pertença às retas *r* e *s*, então as suas coordenadas têm de obedecer às condições das duas retas em simultâneo.

$$\begin{cases} 2+k=-1-2\lambda \\ 1-k=1-\lambda \\ 0=-1-\lambda \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k=-1+2-2 \\ \_\_\_\_\_\_\_\_ \\ \lambda=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k=-1 \\ 0=0 \\ \lambda=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k=-1 \\ \lambda=-1 \end{cases}$$

Assim, substituindo k por -1 no ponto genérico da reta *r* ou substituindo λ por -1 no ponto genérico da reta *s*, obtemos as coordenadas do ponto de interseção das duas retas:

$(2+(-1), 1-(-1), 0) = (1,2,0)$

4. A partir da equação vetorial da reta *r*, concluímos que qualquer ponto desta reta é do tipo $(3+2k, -2, 2+3k)$, com $k \in \mathbb{R}$.

Uma vez que procuramos um ponto da reta *r* e do plano α, as coordenadas deste ponto têm de obedecer às condições da reta *r* e do plano α em simultâneo. Logo:

$$\begin{aligned} 2(3+2k)-(-2)+3(2+3k)=1 &\Leftrightarrow 6+4k+2+6+9k=1 \\ &\Leftrightarrow 13k=-13 \\ &\Leftrightarrow k=-1 \end{aligned}$$

O ponto de interseção da reta *r* com o plano α tem coordenadas:

$\big(3+2\times(-1), -2, 2+3(-1)\big) = (1,-2,-1)$

5. Uma equação vetorial da reta *AE* é:

$$(x,y,z) = (3,6,2) + k(2,3,6), k \in \mathbb{R}$$

Um ponto genérico desta reta é $(3+2k, 6+3k, 2+6k)$, com $k \in \mathbb{R}$.

Determinemos a interseção da reta *AE* com o plano *FGH* (isto é, o ponto *E*):

$$\begin{aligned} 2(3+2k)+3(6+3k)+6(2+6k)+13=0 &\Leftrightarrow 6+4k+18+9k+12+36k+13=0 \\ &\Leftrightarrow 49k+49=0 \\ &\Leftrightarrow k=-1 \end{aligned}$$

As coordenadas do ponto *E* são:

$\big(3+2\times(-1), 6+3\times(-1), 2+6\times(-1)\big) = (1,3,-4)$

$\overrightarrow{AE} = E - A = (1,3,-4)-(3,6,2) = ((-2,-3,-6)$

$\|\overrightarrow{AE}\| = \sqrt{(-2)^2+(-3)^2+(-6)^2} = \sqrt{49} = 7$

O volume do cubo é $V = 7^3 = 343 \text{ u.v.}$

6.

6.1. Sejam $\vec{n}_\alpha(2,-3,4)$ e $\vec{n}_\beta(-4,6,-8)$ os vetores normais aos planos α e β, respetivamente.

$\frac{2}{-4}=\frac{-3}{6}=\frac{4}{-8}=-\frac{1}{2}$

Logo, $\vec{n}_\alpha$ e $\vec{n}_\beta$ são vetores colineares.

$\begin{cases}2x-3y+4z+1=0\\ -4x+6y-8z=1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}2x-3y+4z=-1\\ 2x-3y+4z=-\frac{1}{2}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}-\frac{1}{2}=-1\\ \_\_\_\_\_\_\end{cases}$ que é um sistema impossível.

Portanto, os planos α e β são paralelos, em sentido estrito e a sua interseção é o conjunto vazio.

6.2. $-4x+6y-8z-2=0 \Leftrightarrow \frac{-4x}{-2}+\frac{6y}{-2}-\frac{8z}{-2}-\frac{2}{-2}=0 \Leftrightarrow 2x-3y+4z+1=0$

Assim, outra equação cartesiana de β é $2x-3y+4z+1=0$.

Portanto, os planos são coincidentes e a sua interseção é o próprio plano α ou o plano β.

6.3. Sejam $\vec{n}_\alpha(0,3,1)$ e $\vec{n}_\beta(-1,1,0)$ os vetores normais aos planos α e β, respetivamente.

Como $\frac{0}{-1}\neq\frac{3}{1}$, os vetores $\vec{n}_\alpha$ e $\vec{n}_\beta$ não são colineares e, portanto, os planos são concorrentes.

$\begin{cases}3y+z-10=0\\ -x+y=-3\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}z=-3y+10\\ -x=-y-3\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}z=-3y+10\\ x=y+3\end{cases}$

Assim, o ponto genérico desta reta é do tipo $(y+3,y,-3y+10)$, com $y\in\mathbb{R}$.

$(y+3,y,-3y+10)=(3,0,10)+y(1,1,-3), y\in\mathbb{R}$

Assim, a partir do ponto genérico, obtemos a equação vetorial da reta que resulta da interseção dos planos α e β:

$$(x,y,z)=(3,0,10)+k(1,1,-3), k\in\mathbb{R}$$

Exercícios propostos **(págs. 26 a 42)**

Itens de seleção **(págs. 26 a 32)**

1. O declive da reta referida é $m=\frac{3\sqrt{3}}{3}=\sqrt{3}$.

Uma equação reduzida desta reta é da forma $y=\sqrt{3}x+b$.

Como $A\in r$, então:

$1=\sqrt{3}\times 3+b \Leftrightarrow 1-3\sqrt{3}=b$

Assim, $y=\sqrt{3}x+1-3\sqrt{3}$.

Seja α a inclinação da reta r. Então, $\text{tg}\alpha=\sqrt{3}$. Logo, $\alpha=\text{tg}^{-1}(\sqrt{3})$, ou seja, $\alpha=60°$.

Opção (C)

2. O declive da reta r é $-\frac{1}{3}$. Logo, o declive da reta s, que é perpendicular à reta r, é 3. Assim, a equação reduzida da reta r é da forma $y = 3x + b$. Como o ponto de coordenadas $(1{,}2)$ pertence à reta s, tem-se $2 = 3 \times 1 + b \Leftrightarrow b = -1$. Logo, $s\colon y = 3x - 1$.

Opção (B)

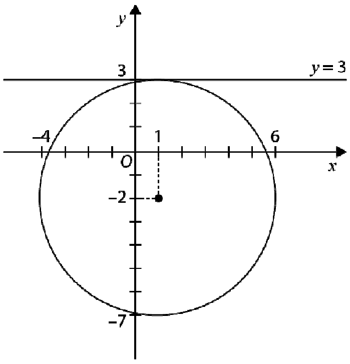
3. O declive da reta de equação $y = 2x + 5$ é 2, pelo que o declive de uma reta que lhe seja perpendicular é $-\frac{1}{2}$. Na opção (A), temos $y + \frac{1}{2}x - \sqrt{3} = 0 \Leftrightarrow y = -\frac{1}{2}x + \sqrt{3}$.

Opção (A)

4. A circunferência representada na figura tem centro no ponto de coordenadas $(4, 2)$ e raio 2. Assim, uma equação dessa circunferência é $(x-4)^2 + (y-2)^2 = 4$, o que excluiu as opções (B) e (C). As retas p e r representadas na figura são perpendiculares, pelo que o produto dos seus declives é igual a -1. Assim, excluiu-se a opção (A).

Opção (D)

5.



Opção (D)

6. $(\vec{v} - \vec{u}) \cdot \vec{u} = \vec{v} \cdot \vec{u} - \vec{u} \cdot \vec{u} = 0 - \|\vec{u}\|^2 = -\|\vec{u}\|^2$

Opção (C)

7. *EHB* e *ADE* são dois planos concorrentes. Os pontos *A* e *E* são pontos dos dois planos. A reta *AE* é a interseção dos dois planos.

Opção (C)

8. Um plano perpendicular ao eixo das abcissas é da forma $x = k, k \in \mathbb{R}$. Se este plano passa no ponto *A*, então a equação do plano é $x = 1$.

Opção (A)

LeYa EDUCAÇÃO Daniela Raposo e Luzia Gomes

9. $\|\vec{u}\| = \sqrt{3^2 + 0^2 + (-1)^2} = \sqrt{10}$

$\overrightarrow{AB} = (3,0,-1) - (2,-4,-4) = (1,4,3)$

$\frac{1}{2}\|\overrightarrow{AB}\| = \frac{1}{2}\sqrt{1^2 + 4^2 + 3^2} = \frac{1}{2}\sqrt{26}$

Logo, $\|\vec{u}\| \neq \frac{1}{2}\|\overrightarrow{AB}\|$, o que significa que a proposição p é falsa.

$\frac{3}{1} \neq \frac{0}{4}$, logo $\vec{u}$ e $\overrightarrow{AB}$ não são colineares e a proposição q é falsa.

$\vec{u} \cdot \overrightarrow{AB} = 3 \times 1 + 0 \times 4 + (-1) \times 3 = 3 - 3 = 0$, ou seja, os vetores $\vec{u}$ e $\overrightarrow{AB}$ são perpendiculares e a proposição r é verdadeira.

Opção (D)

10. A reta s tem como vetor diretor, por exemplo, o vetor de coordenadas $(0,0,1)$. Portanto, esta reta é paralela ao eixo das cotas e contém o ponto de coordenadas $(4,5,6)$.

Logo, $x = 4 \ \wedge \ y = 5$ é uma condição que também define a reta s.

Opção (A)

11. $(x, y, z) = (-5,1,2) + k(3,1,-4), k \in \mathbb{R} \ \wedge \ y = 0$, logo,

$$\begin{cases} x = -5 + 3k \\ y = 1 + k \\ z = 2 - 4k \\ y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \underline{\qquad\qquad} \\ 0 = 1 + k \\ \underline{\qquad\qquad} \\ \underline{\qquad\qquad} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \underline{\qquad} \\ k = -1 \\ \underline{\qquad} \\ \underline{\qquad} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -5 + 3 \times (-1) \\ \underline{\qquad\qquad} \\ z = 2 - 4 \times (-1) \\ \underline{\qquad\qquad} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -8 \\ \underline{\qquad} \\ z = 6 \\ y = 0 \end{cases}$$

$(-8,0,6)$ é o ponto de interseção da reta r com o plano xOz.

Opção (C)

12. Como p e q são proposições verdadeiras, $p \wedge \sim q$ é uma proposição falsa.

Opção (C)

13. $\vec{r}(1,2)$ e $\vec{s}(a,-2)$ são vetores diretores das retas r e s, respetivamente. Assim:

$\frac{a}{1} = \frac{-2}{2} \Leftrightarrow a = -1$

Opção (A)

14. $r: y = ax - 2$

$\vec{s} = (2,-3)$

Logo, $m_s = -\frac{3}{2}$. Assim, $a = \frac{2}{3}$.

Opção (D)

15. O ponto B tem coordenadas $(6, 3)$.

Uma vez que a circunferência tem raio 3, o ponto C tem coordenadas $(3, 0)$.

A mediatriz do segmento de reta $[BC]$ é o lugar geométrico dos pontos do plano equidistantes do ponto B e do ponto C.

Portanto, um ponto P de coordenadas (x, y) pertence à mediatriz do segmento de reta $[BC]$ se e só se $\overline{PB} = \overline{PC}$.

$$\overline{PB} = \overline{PC} \Leftrightarrow \sqrt{(x-6)^2 + (y-3)^2} = \sqrt{(x-3)^2 + (y-0)^2}$$
$$\Leftrightarrow (x-6)^2 + (y-3)^2 = (x-3)^2 + y^2$$
$$\Leftrightarrow x^2 - 12x + 36 + y^2 - 6y + 9 = x^2 - 6x + 9 + y^2$$
$$\Leftrightarrow -12x + 36 - 6y = -6x$$
$$\Leftrightarrow -6y = 12x - 6x - 36$$
$$\Leftrightarrow -6y = 6x - 36$$
$$\Leftrightarrow y = -x + 6$$

Opção (B)

16. O centro da circunferência é a origem do referencial.

Seja T o ponto de tangência.

$\overrightarrow{OT} = (3,4)$, pelo que o declive da reta OT é igual a $\frac{4}{3}$.

Uma reta que seja tangente à circunferência no ponto T é perpendicular à reta OT e tem declive igual a $-\frac{3}{4}$.

Opção (D)

17. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 18 \Leftrightarrow \|\overrightarrow{AB}\| \times \|\overrightarrow{AC}\| \times \cos(60°) = 18 \Leftrightarrow x \times x \times \frac{1}{2} = 18$
$$\Leftrightarrow x^2 = 36$$

Logo, $x = 6$, ou seja, a medida do lado do triângulo é 6.

Assim, o seu perímetro é $3 \times 6 = 18$.

Opção (A)

18. $\overrightarrow{RS} \cdot \overrightarrow{TO} = \|\overrightarrow{RS}\| \times \|\overrightarrow{TO}\| \times \cos(120°) = a \times a \times \left(-\frac{1}{2}\right) =$
$$= -\frac{a^2}{2}$$

Opção (C)

19. A reta tangente à circunferência de centro C no ponto A é o lugar geométrico dos pontos $P(x, y)$ do plano tais que $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{AP} = 0$.

Opção (B)

20. $k^2 - 1 = 0 \ \wedge \ k^2 - k = 0 \Leftrightarrow k^2 = 1 \ \wedge \ k(k-1) = 0$

$$\Leftrightarrow \ (k = 1 \ \vee \ k = -1) \wedge \ (k = 0 \ \vee \ k = 1)$$

$$\Leftrightarrow k = 1$$

Portanto, $k = 1$.

Opção (C)

21. Um vetor diretor da reta r é $\vec{r}\left(2, -1, \frac{1}{8}\right)$.

$$\left(2, -1, \frac{1}{8}\right) \cdot (16, -8, 1) = 2 \times 16 + (-1) \times (-8) + \frac{1}{8} \times 1 =$$

$$= 32 + 8 + \frac{1}{8} =$$

$$= \frac{321}{8}$$

Ou seja, a reta r não é perpendicular à reta definida por $(x, y, z) = k(16, -8, 1), k \in \mathbb{R}$.

$$\frac{2}{16} = \frac{-1}{-8} = \frac{\frac{1}{8}}{1} = \frac{1}{8}$$

Averiguemos se o ponto $(-1, 3, 0)$ pertence à reta definida por $(x, y, z) = k(16, -8, 1), k \in \mathbb{R}$.

$(-1, 3, 0) = k(16, -8, 1) \Leftrightarrow \begin{cases} -1 = 16k \\ 3 = -8k \\ 0 = k \end{cases}$, que é uma condição impossível, logo, o ponto $(-1, 3, 0)$ não pertence à reta.

Logo, a reta r é estritamente paralela à reta definida por $(x, y, z) = k(16, -8, 1), k \in \mathbb{R}$..

Opção (B)

22. Um vetor diretor da reta r é $\vec{r}(2, \frac{5}{3}, 0)$, que não é colinear com o vetor de coordenadas $(2, 5, 0)$.

Logo, este não é um vetor diretor da reta r. Um vetor normal ao plano α é $\vec{n}(6, 5, 0)$, que não é colinear com o vetor de coordenadas $(6, 5, -4)$. Assim, este não é um vetor normal ao plano α.

$$\vec{r} \cdot \vec{n} = 2 \times 6 + \frac{5}{3} \times 5 + 0 \times 0 = \frac{61}{3}$$

Logo, os vetores $\vec{r}$ e $\vec{n}$ não são perpendiculares e, portanto, a reta r não é estritamente paralela ao plano α. Uma vez que $\frac{2}{6} = \frac{\frac{5}{3}}{5} = \frac{1}{3}$, então $\vec{r}$ é colinear com $\vec{n}$.

Logo, a reta r é perpendicular ao plano α.

Opção (D)

23. $x^2+y^2+4y+4+z^2-6z+9 \leq -7+4+9 \Leftrightarrow x^2+(y+2)^2+(z-3)^2 \leq 6$

Esta expressão representa uma esfera de centro $(0,-2,3)$ e $r=\sqrt{6}$.

Opção (B)

24. $x^2+y^2+z^2=25 \ \wedge \ z=3 \Leftrightarrow x^2+y^2+3^2=25 \ \wedge \ z=3$

$$\Leftrightarrow x^2+y^2=16 \ \wedge \ z=3$$

O perímetro é $2 \times \pi \times 4 = 8\pi$.

Opção (B)

25. Um vetor normal ao plano de equação $z=-1$ é, por exemplo, $\vec{a}=(0,0,1)$ e um vetor normal ao plano yOz é, por exemplo, $\vec{b}=(1,0,0)$. Como estes vetores não são colineares, os planos não são (estritamente) paralelos. Por conseguinte, a afirmação C é falsa.

Opção (C)

26. Como $y=-2$ e $y=4$ são planos tangentes à esfera, então esta esfera tem diâmetro igual a 6 unidades de comprimento. Por conseguinte, a ordenada do centro da esfera é igual a 1. Das quatro opções apresentadas, a única que verifica tal condição é a opção (B).

Opção (B)

27. $\vec{n}_\alpha(2,4,-1)$ e $\vec{n}_\beta(2,k-1,-1)$ são dois vetores normais aos planos α e β, respetivamente.

$\vec{n}_\alpha \cdot \vec{n}_\beta = 0 \Leftrightarrow (2,4,-1)\cdot(2,k-1,-1)=0 \Leftrightarrow 4+4(k-1)+1=0$

$$\Leftrightarrow 4+4k-4+1=0$$

$$\Leftrightarrow 4k=-1$$

$$\Leftrightarrow k=-\frac{1}{4}$$

Opção (B)

28. Um vetor normal ao plano dado é $\vec{n}(1,-2,0)$.

$(3,2,1)\cdot(1,-2,0)=3-4=-1$

$\left(3,\frac{2}{3},-5\right)\cdot(1,-2,0)=3-\frac{4}{3}=\frac{5}{3}$

$(4,5,0)\cdot(1,-2,0)=4-10=-6$

$(0,0,1)\cdot(1,-2,0)=0+0+0=0$

Opção (D)

29. Um vetor normal ao plano α é $\vec{n}(3,1-1)$.

Um vetor diretor da reta r é $\vec{r}(1,0,3)$.

$\vec{n}\cdot\vec{r} = 3+0-3=0$

O ponto de coordenadas $(-2,2,1)$ é um ponto da reta r.

Averiguemos se pertence ao plano α:

$3\times(-2)+2-1=-5 \Leftrightarrow -5=-5$ é uma proposição verdadeira.

Portanto, $(-2,2,1)\in$ α.

Logo, r está contida em α.

Opção (B)

30. Sabemos que $A(11,-1,2)$,$B(13,2,8)$ e $E(8,5,0)$. Então:

$F = B+\overrightarrow{AE} = (13,2,8)+(-3,6,-2)=(10,8,6)$

$$\underbrace{r}_{\text{raio da superfície esférica}} = \overline{FG} = \overline{AB} = \sqrt{(13-11)^2+(2+1)^2+(8-2)^2} =$$

Cálculo auxiliar

$\overrightarrow{AE} = E - A = (8,5,0)-(11,-1,2) =$

$= (-3,6,-2)$

$$= \sqrt{4+9+36} =$$
$$= \sqrt{49} =$$
$$= 7$$

Logo, uma condição que define a superfície esférica de centro *F* e que passa em *G* é:

$(x-10)^2+(y-8)^2+(z-6)^2 = 4$

$\Leftrightarrow x^2-20x+100+y^2-16y+64+z^2-12z+36=49$

$\Leftrightarrow x^2-20x+y^2-16y+z^2-12z=49-100-64-36$

$\Leftrightarrow x^2-20x+y^2-16y+z^2-12z=-151$

Opção (A)

31. $\|\vec{u}+\vec{v}\| = \sqrt{\|\vec{u}+\vec{v}\|^2} = \sqrt{(\vec{u}+\vec{v})\cdot(\vec{u}+\vec{v})} =$

$$= \sqrt{\vec{u}\cdot\vec{u}+2\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{v}\cdot\vec{v}} =$$
$$= \sqrt{\|\vec{u}\|^2+2\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\cos(\widehat{\vec{u},\vec{v}})+\|\vec{v}\|^2} =$$
$$= \sqrt{3^2+2\times3\times4\times\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)+4^2} =$$
$$= \sqrt{9+24\times\frac{1}{2}+16} =$$
$$= \sqrt{37}$$

$\|\vec{u}-\vec{v}\| = \sqrt{\|\vec{u}-\vec{v}\|^2} = \sqrt{(\vec{u}-\vec{v})\cdot(\vec{u}-\vec{v})} =$

$$= \sqrt{\vec{u}\cdot\vec{u}-2\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{v}\cdot\vec{v}} =$$

$$= \sqrt{\|\vec{u}\|^2 - 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \|\vec{v}\|^2} =$$

$$= \sqrt{9 - 2 \times 3 \times 4 \times \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + 16} =$$

$$= \sqrt{9 - 24 \times \frac{1}{2} + 16} =$$

$$= \sqrt{13}$$

Opção (A)

32. $\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right) \cdot \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BC} = l \times l \times \cos(120°) + l \times l \times \cos(60°) =$

$$= -\frac{l^2}{2} + \frac{l^2}{2} =$$

$$= 0$$

Opção (D)

33. $x^2 - 10x + y^2 = -25 \Leftrightarrow x^2 - 10x + 25 + y^2 = -25 + 25 \Leftrightarrow (x-5)^2 + y^2 = 0$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(x-5)^2 + y^2} = 0$$

Portanto, a condição representa o ponto de coordenadas (5, 0).

Opção (B)

34. Seja $T(x, y)$ um ponto da reta t.

$\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{PT} = 0 \Leftrightarrow (a, b) \cdot (x - a, y - b) = 0 \Leftrightarrow ax - a^2 + by - b^2 = 0$

$$\Leftrightarrow by = -ax + a^2 + b^2$$

$$\Leftrightarrow y = -\frac{a}{b}x + \frac{a^2+b^2}{b}$$

Tendo em conta que a circunferência representada tem centro na origem e raio 1, tem-se que $a = \cos\alpha$ e $b = \operatorname{sen}\alpha$, onde α representa a inclinação da reta OP e, então,

$a^2 + b^2 = \cos^2\alpha + \operatorname{sen}^2\alpha = 1$. Assim, $y = -\frac{a}{b}x + \frac{1}{b}$ é a equação reduzida da reta t.

A ordenada do ponto Q é 0 e o ponto Q pertence à reta t. Logo:

$0 = -\frac{a}{b}x + \frac{1}{b} \Leftrightarrow 0 = -ax + 1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{a}$

Opção (A)

35. Seja $\alpha = \widehat{\left(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}\right)}$.

$\frac{3\pi}{2\pi} = \frac{\frac{\pi}{4}}{\alpha} \Leftrightarrow \alpha = \frac{\pi}{4} \times \frac{2}{3} \Leftrightarrow \alpha = \frac{\pi}{6}$

Assim, $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = \sqrt{3} \times \sqrt{3} \times \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{3\sqrt{3}}{2}$.

Opção (C)

36. $\vec{r}(2,3,4)$ é um vetor diretor da reta r e $\vec{n}_\beta(3,-2,0)$ é um vetor normal do plano β.

$\vec{r}\cdot\vec{n}_\beta = 2\times 3 + 3\times(-2) + 4\times 0 = 6 - 6 = 0$

Como o vetor diretor da reta r e o vetor normal ao plano β são perpendiculares, então, ou a reta é paralela (em sentido estrito) ao plano ou a reta está contida no plano.

O ponto de coordenadas $(0,0,0)$ pertence à reta r.

Vejamos se também pertence ao plano β:

$3\times 0 - 2\times 0 = 0 \Leftrightarrow 0 = 0$

O ponto de coordenadas $(0,0,0)$ também pertence ao plano β, logo a reta r está contida no plano β.

Opção (C)

37. $\begin{cases}(a^2-a, a^2-2, a-1)\cdot(0,-1,2)=0\\(a^2-a, a^2-2, a-1)\cdot(-1,0,2)=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}-a^2+2+2a-2=0\\-a^2+a+2a-2=0\end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases}-a^2+2a=0\\-a^2+3a-2=0\end{cases}$

Cálculo auxiliar

$-a^2+3a-2=0 \Leftrightarrow a=\dfrac{-3\pm\sqrt{9-4\times(-1)\times(-2)}}{2\times(-1)} \Leftrightarrow a=\dfrac{-3\pm 1}{-2} \Leftrightarrow a=2 \vee a=1$

$\Leftrightarrow (-a(a-2)=0) \wedge (a=2 \vee a=1)$

$\Leftrightarrow (a=0 \vee a=2) \wedge (a=2 \vee a=1)$

$\Leftrightarrow a=2$

Logo, $a=2$.

Opção (D)

38. Sejam $\vec{r}(-2,1,0)$ e $\vec{s}(1,-1,1)$ dois vetores diretores das retas r e s, respetivamente.

Como $\frac{-2}{1}\neq\frac{1}{-1}$, as retas não são paralelas.

$\vec{r}\cdot\vec{s} = -2\times 1 + 1\times(-1) + 0\times 1 = -2-1 = -3 \neq 0$, logo as retas não são perpendiculares.

Um ponto genérico da reta r é $(3-2\lambda, 1+\lambda, -3)$, com $\lambda\in\mathbb{R}$.

$(3-2\lambda, 1+\lambda, -3) = (2,1,-2) + k(1,-1,1) \Leftrightarrow \begin{cases}3-2\lambda=2+k\\1+\lambda=1-k\\-3=-2+k\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\lambda=1\\\lambda=1\\-1=k\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\lambda=1\\k=-1\end{cases}$

Quando $\lambda=1$, temos $(3-2\times 1, 1+1, -3) = (1,2,-3)$, que é o ponto de interseção das retas r e s.

Logo, as retas r e s são concorrentes, mas não perpendiculares.

Opção (A)

Itens de construção (págs. 33 a 42)

1. $(\vec{u}-\vec{v})\cdot(\vec{u}+\vec{v})=19 \Leftrightarrow \vec{u}\cdot\vec{u}-\ \vec{v}\cdot\vec{v}=19 \Leftrightarrow \|\vec{u}\|^2-\|\vec{v}\|^2=19$

$\Leftrightarrow 10^2-\|\vec{v}\|^2=19$

$\Leftrightarrow \|\vec{v}\|^2=100-19$

$\Leftrightarrow \|\vec{v}\|^2=81$

Logo, $\|\vec{v}\|=\sqrt{81}=9$.

2.

2.1. $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{MP}=0$, sendo *M* o ponto médio do segmento de reta [*AB*], representa a mediatriz do segmento de reta [*AB*].

2.2. $\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{BP}=0$ representa a circunferência de diâmetro [*AB*].

2.3. $\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{BP}\leq 0$ representa o círculo de diâmetro [*AB*].

2.4. $\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AB}=0$ representa a reta tangente à circunferência de centro em *B* e raio $\overline{AB}$ no ponto *A* ou a reta perpendicular ao segmento de reta [*AB*] que passa em *A.*

3.

3.1. $m_r=\frac{3}{4}$ e $m_s=-\frac{3}{4}$

Como não têm o mesmo declive, então as duas retas são concorrentes.

3.2. Uma equação reduzida da reta s é $y=-\frac{3}{4}x+b$.

Como o ponto (1, 2) pertence à reta, tem-se:

$2=-\frac{3}{4}\times 1+b \Leftrightarrow 2+\frac{3}{4}=b \Leftrightarrow b=\frac{11}{4}$

Assim, $y=-\frac{3}{4}x+\frac{11}{4}$.

3.3. A reta s tem declive $m_s=-\frac{3}{4}$.

O declive de uma reta perpendicular à reta s é igual a $\frac{4}{3}$.

Como a reta passa na origem do referencial, então a sua equação reduzida é $y=\frac{4}{3}x$.

3.4. O ponto de interseção da reta com o eixo das ordenadas é $\left(0,-\frac{7}{4}\right)$.

O ponto de interseção da reta com o eixo das abcissas é $\left(\frac{7}{3},0\right)$.

Cálculo auxiliar
$0=\dfrac{3}{4}x-\dfrac{7}{4} \Leftrightarrow \dfrac{7}{4}=\dfrac{3}{4}x \Leftrightarrow 7=3x \Leftrightarrow x=\dfrac{7}{3}$

3.5. $y=\frac{3}{4}x-\frac{7}{4}$

$5p=\frac{3}{4}\times 10-\frac{7}{4} \Leftrightarrow 5p=\frac{30}{4}-\frac{7}{4} \Leftrightarrow 5p=\frac{23}{4} \Leftrightarrow p=\frac{23}{20}$

4.

4.1. Circunferência de centro $(2,-3)$ e raio 5.

4.2. Círculo de centro $(1,0)$ e raio $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

4.3. Exterior da circunferência de centro $(0,-1)$ e raio $2\sqrt{3}$.

4.4. Coroa circular de centro $(0,0)$, sendo 2 o raio da circunferência externa e $\sqrt{2}$ o raio da circunferência interna.

4.5. Circunferência de centro $(0,0)$ e raio 4.

4.6. $x^2 - 2x + 1 + y^2 + 8y + 16 = -8 + 1 + 16 \Leftrightarrow (x-1)^2 + (y+4)^2 = 9$

Circunferência de centro $(1,-4)$ e de raio 3.

4.7. $2x^2 - 2x + 2y^2 + 2y = 7 \Leftrightarrow x^2 - x + y^2 + y = \frac{7}{2}$

$$\Leftrightarrow x^2 - x + \frac{1}{4} + y^2 + y + \frac{1}{4} = \frac{7}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}$$

$$\Leftrightarrow \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 = 4$$

Circunferência de centro $\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ e raio 2.

4.8. $x^2 + y^2 - \frac{2}{3}y \leq 1 \Leftrightarrow x^2 + y^2 - \frac{2}{3}y + \frac{1}{9} \leq 1 + \frac{1}{9}$

$$\Leftrightarrow (x-0)^2 + \left(y - \frac{1}{3}\right)^2 \leq \frac{10}{9}$$

Círculo de centro $\left(0, \frac{1}{3}\right)$ e raio $\frac{\sqrt{10}}{3}$.

5.

5.1. $x^2 + 2x + y^2 - 10y = -16 \Leftrightarrow x^2 + 2x + 1 + y^2 - 10y + 25 = -16 + 1 + 25$

$$\Leftrightarrow (x+1)^2 + (y-5)^2 = 10$$

Circunferência de centro $(-1,5)$ e raio $\sqrt{10}$.

5.2. O ponto A' tem coordenadas (2, 3).

$(2+1)^2 + (3-5)^2 = 10 \Leftrightarrow 9 + 4 = 10 \Leftrightarrow 13 = 10$, que é uma proposição falsa.

Logo, A' não pertence à circunferência.

5.3. $\begin{cases} x^2 + y^2 + 2x - 10y + 16 = 0 \\ x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2 - 10y + 16 = 0 \\ x = 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 8 \\ x = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} y = 2 \\ x = 0 \end{cases}$$

Cálculo auxiliar

$y^2 - 10y + 16 = 0 \Leftrightarrow y = \frac{10 \pm \sqrt{100 - 4 \times 16}}{2}$

$\Leftrightarrow y = \frac{10 \pm 6}{2}$

$\Leftrightarrow y = 8 \ \vee \ y = 2$

Os pontos de interseção da circunferência com o eixo das ordenadas são os pontos de coordenadas $(0,2)$ e $(0,8)$.

5.4. $\sqrt{(x-2)^2 + (y+3)^2} = \sqrt{(x+1)^2 + (y-4)^2}$

$$\Rightarrow x^2 - 4x + 4 + y^2 + 6y + 9 = x^2 + 2x + 1 + y^2 - 8y + 16$$

$$\Leftrightarrow 6y + 8y = 4x + 2x - 4 - 9 + 1 + 16$$

$$\Leftrightarrow 14y = 6x + 4$$
$$\Leftrightarrow y = \frac{6}{14}x + \frac{4}{14}$$
$$\Leftrightarrow y = \frac{3}{7}x + \frac{2}{7}$$

6. $\begin{cases} (x, y, 1) \cdot (6,4,0) = 0 \\ (x, y, 1) \cdot \left(1,0,-\frac{1}{2}\right) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6x + 4y = 0 \\ x - \frac{1}{2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6 \times \frac{1}{2} + 4y = 0 \\ x = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4y = -3 \\ x = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -\frac{3}{4} \\ x = \frac{1}{2} \end{cases}$

Assim, $x = \frac{1}{2}$ e $y = -\frac{3}{4}$.

7.

7.1. Plano mediador do segmento de reta $[AB]$.

7.2. Superfície esférica de diâmetro $[AB]$.

7.3. Esfera de diâmetro $[AB]$.

7.4. Plano tangente à superfície esférica de centro em *B* e raio $\overline{AB}$ no ponto *A* ou plano perpendicular ao segmento de reta $[AB]$ que passa em *A*.

8.

8.1. $(x, y, z) = (1,2,3) + k(4,5,6), k \in \mathbb{R}$

8.2. $(x, y, z) = (1,2,3) + k(4,5,0), k \in \mathbb{R}$

8.3. $(x, y, z) = (1,2,3) + k(1,0,1), k \in \mathbb{R}$

8.4. $(x, y, z) = (1,2,3) + k(0,0,1), k \in \mathbb{R}$

8.5. $(x, y, z) = (1,2,3) + k(-3,-1,7), k \in \mathbb{R}$

9.

9.1. $4x + 5y + 6z + d = 0$

Como o ponto $A(1, 2, 3)$ pertence ao plano, então:

$4 \times 1 + 5 \times 2 + 6 \times 3 + d = 0 \Leftrightarrow d = -32$

Uma equação cartesiana do plano pretendido é $4x + 5y + 6z - 32 = 0$.

9.2. $\overrightarrow{AB} = B - A = (0,2,4) - (1,2,3) = (-1,0,1)$

$\overrightarrow{AC} = C - A = (1,0,0) - (1,2,3) = (0,-2,-3)$

$\begin{cases} (a, b, c) \cdot (-1,0,1) = 0 \\ (a, b, c) \cdot (0,-2,-3) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -a + c = 0 \\ -2b - 3c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = a \\ -2b - 3a = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = a \\ b = -\frac{3}{2}a \end{cases}$

$\vec{n}(a, -\frac{3}{2}a, a)$, com $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

Se $a = 2$, $\vec{n}(2, -3, 2)$

$2x-3y+2z+d=0$

Como $C(1{,}0{,}0)$ pertence ao plano, então:

$2+d=0 \Leftrightarrow d=-2$

Uma equação cartesiana do plano pretendido é $2x-3y+2z-2=0$.

9.3. $8x+3z+d=0$

Como $A(1{,}2{,}3)$ pertence ao plano, então:

$8\times 1+3\times 3+d=0 \Leftrightarrow d=-17$

Uma equação cartesiana do plano pretendido é $8x+3z-17=0$.

9.4. $\vec{n}\left(\sqrt{2},1,-1\right)$

$\sqrt{2}x+y-z+d=0$

Como $A(1{,}2{,}3)$ pertence ao plano, então:

$\sqrt{2}\times 1+2-3+d=0 \Leftrightarrow d=-\sqrt{2}+1$

Uma equação cartesiana do plano pretendido é $\sqrt{2}x+y-z-\sqrt{2}+1=0$.

9.5. $y+d=0$

Como $A(1{,}2{,}3)$ pertence ao plano, então:

$2+d=0 \Leftrightarrow d=-2$

Uma equação cartesiana do plano pretendido é $y-2=0 \Leftrightarrow y=2$.

10.

10.1. $(x,y,z)=(1,-2{,}3)+k(-2,-1{,}4), k\in\mathbb{R}$

10.2. $(0,-1{,}5)=(1,-2{,}3)+k(-2,-1{,}4), k\in\mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} 0=1-2k \\ -1=-2-k \\ 5=3+4k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k=\frac{1}{2} \\ k=-1 \\ - \end{cases}$

Logo, o ponto não pertence à reta.

10.3. $\left(2k,-\frac{3}{2},k\right)=(1,-2{,}3)+\lambda(-2,-1{,}4), \lambda\in\mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} 2k=1-2\lambda \\ -\frac{3}{2}=-2-\lambda \\ k=3+4\lambda \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} - \\ \lambda=-\frac{1}{2} \\ k=3+4\times\left(-\frac{1}{2}\right) \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} - \\ - \\ k=1 \end{cases}$

Assim, $k=1$.

10.4. $-2x-y+4z+d=0$

Como $A(1{,}2{,}3)$ pertence ao plano, então:

$-2\times 1-(-2)+4\times 3+d=0 \Leftrightarrow d=-12$

Uma equação cartesiana do plano pretendido é $-2x-y+4z-12=0$.

11. $IJK: x + y + z = 2$

Uma vez que o centro do cubo é a origem do referencial e que o ponto K pertence ao plano xOy, então $K(x, x, 0)$, sendo x um número real.

Como Kpertence ao plano IJK, então:

$x + y + 0 = 2 \Leftrightarrow x = 1$

Logo, $K(1,1,0)$.

Conclui-se também que a aresta do cubo é 2 e que $D(1, -1, 1)$.

Assim, o plano paralelo a IJK e que passa em D é da forma $x + y + z = d$.

Como D pertence a esse plano:

$1 - 1 + 1 = d \Leftrightarrow d = 1$

A equação cartesiana pedida é $x + y + z = 1$.

12.

12.1. $a^3 + \frac{a^2 \times a}{3} = 288 \Leftrightarrow \frac{4}{3}a^3 = 288 \Leftrightarrow a^3 = 216 \Leftrightarrow a = \sqrt[3]{216} \Leftrightarrow a = 6$

$N(6,0,0)$; $Q(6,6,0)$; $P(0,6,0)$; $O(0,0,0)$; $R(6,0,6)$; $U(6,6,6)$; $T(0,6,6)$; $S(0,0,6)$; $M(3,3,6)$; $V(3,3,12)$

12.2. $\overrightarrow{RV} = V - R = (3,3,12) - (6,0,6) = (-3,3,6)$

$\overrightarrow{UV} = V - U = (3,3,12) - (6,6,6) = (-3,-3,6)$

$\overrightarrow{RV} \cdot \overrightarrow{UV} = (-3,3,6) \cdot (-3,-3,6) = 9 - 9 + 36 = 36$

$\|\overrightarrow{RV}\| = \sqrt{9 + 9 + 36} = \sqrt{54} = 3\sqrt{6}$

$\|\overrightarrow{UV}\| = \sqrt{9 + 9 + 36} = \sqrt{54} = 3\sqrt{6}$

Então:

$$\cos\left(\widehat{\overrightarrow{RV}, \ \overrightarrow{UV}}\right) = \frac{36}{3\sqrt{6} \times 3\sqrt{6}} \Leftrightarrow \cos\left(\widehat{\overrightarrow{RV}, \ \overrightarrow{UV}}\right) = \frac{2}{3}$$

$$\Leftrightarrow \left(\widehat{\overrightarrow{RV}, \ \overrightarrow{UV}}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{2}{3}\right)$$

$$\Leftrightarrow \left(\widehat{\overrightarrow{RV}, \ \overrightarrow{UV}}\right) \approx 48{,}2°$$

12.3. $RV: (x, y, z) = (6,0,6) + k(-3,3,6), k \in \mathbb{R}$

12.4. $MT = T - M = (0,6,6) - (3,3,6) = (-3,3,0)$

$(x, y, z) = (6,6,6) + k(-3,3,0), k \in \mathbb{R}$

12.5. $\overrightarrow{SR} = R - S = (6,0,6) - (0,0,6) = (6,0,0)$

$\overrightarrow{SV} = V - S = (3,3,12) - (0,0,6) = (3,3,6)$

$$\begin{cases} (a,b,c) \cdot (6,0,0) = 0 \\ (a,b,c) \cdot (3,3,6) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6a = 0 \\ 3a + 3b + 6c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ 3b = -6c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = -2c \end{cases}$$

$\vec{n}(0, -2c, c)$, com $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

Se $c = 1$, então $\vec{n}(0, -2, 1)$.

$-2y + z + d = 0$

Como $S(0,0,6)$ pertence ao plano, então:

$-2 \times 0 + 6 + d = 0 \Leftrightarrow d = -6$

Assim, o plano pode ser definido por $-2y + z - 6 = 0$, como queríamos demonstrar.

12.6. $A'(6, -1, 1)$

$-2 \times (-1) + 1 - 6 = 0 \Leftrightarrow -3 = 0$, que é uma proposição falsa.

Logo, A' não pertence ao plano *RSV*.

12.7. $\overrightarrow{RP} \cdot \overrightarrow{TP} = 0 \Leftrightarrow (x-6, y, z-6) \cdot (x, y-6, z-6) = 0$

$\Leftrightarrow x(x-6) + y(y-6) + (z-6)^2 = 0$

$\Leftrightarrow x^2 - 6x + y^2 - 6y + z^2 - 12z + 36 = 0$

$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 - 6x - 6y - 12z + 36 = 0$

13.

13.1.

a) $a^2 + 2^2 = 4^2 \Leftrightarrow a^2 = 12 \Leftrightarrow a = \sqrt{12}, a > 0 \Leftrightarrow a = 2\sqrt{3}$

Uma condição que define a reta *DC* é $y = 2\sqrt{3}$.

b) Uma condição que define o segmento de reta [*DC*] é $y = 2\sqrt{3} \ \wedge \ 2 \leq x \leq 6$.

c) Uma condição que define o conjunto de pontos equidistantes de *C* e de *D* é $x = 4$.

d) Uma condição que define o conjunto de pontos que distam três unidades de *A* é

$(x-4)^2 + y^2 = 9$.

e) $A(4,0)$ e $D(2, 2\sqrt{3})$

$m_{AD} = \frac{2\sqrt{3}}{-2} \Leftrightarrow m_{AD} = -\sqrt{3}$

O declive da reta perpendicular a AD que passa na origem do referencial é $m = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Assim, uma condição que define a reta perpendicular a AD que passa na origem do referencial é $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x$.

13.2.

a) $\overrightarrow{OD} \cdot \overrightarrow{OB} = 4 \times 8 \times \cos(60°) = 16$

b) $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{AD} = 4 \times 4 \times \cos(120°) = -8$

c) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = 4 \times 4 \times \cos(180°) = -16$

13.3. $\overrightarrow{PD} \cdot \overrightarrow{PA} = 0$ representa a circunferência de diâmetro $[AD]$.

Seja h a altura do triângulo $[OAD]$. Pelo Teorema de Pitágoras:

$4^2 = 2^2 + h^2 \Leftrightarrow h^2 = 12 \Leftrightarrow h = \sqrt{12}, h > 0$

Logo, $h = 2\sqrt{3}$. Por outro lado, $D(2{,}2\sqrt{3})$.

$$\overrightarrow{PD} \cdot \overrightarrow{PA} = 0 \Leftrightarrow \left(2 - x, 2\sqrt{3} - y\right) \cdot (4 - x, -y) = 0$$
$$\Leftrightarrow 8 - 2x - 4x + x^2 - 2\sqrt{3}y + y^2 = 0$$
$$\Leftrightarrow x^2 - 6x + y^2 - 2\sqrt{3}y = -8$$
$$\Leftrightarrow x^2 - 6x + 9 + y^2 - 2\sqrt{3}y + 3 = -8 + 9 + 3$$
$$\Leftrightarrow (x-3)^2 + \left(y - \sqrt{3}\right)^2 = 4$$

14.

14.1. $\overrightarrow{BC} = C - B = (0,2) - (3{,}0) = (-3{,}2)$

Seja $\vec{u}$ um vetor colinear com $\overrightarrow{BC}$, de norma $\sqrt{26}$.

$\vec{u} = k\overrightarrow{BC} \Leftrightarrow \vec{u} = k(-3{,}2) \Leftrightarrow \vec{u} = (-3k, 2k), k \in \mathbb{R}$

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{26} \Leftrightarrow \sqrt{(-3k)^2 + (2k)^2} = \sqrt{26} \Leftrightarrow \sqrt{9k^2 + 4k^2} = \sqrt{26}$$
$$\Leftrightarrow \sqrt{13k^2} = \sqrt{26}$$
$$\Leftrightarrow \sqrt{13}|k| = \sqrt{26}$$
$$\Leftrightarrow |k| = \frac{\sqrt{26}}{\sqrt{13}}$$
$$\Leftrightarrow |k| = \sqrt{2}$$
$$\Leftrightarrow k = \sqrt{2} \ \lor \ k = -\sqrt{2}$$

Se $k = \sqrt{2}$, então $\vec{u}\left(-3\sqrt{2}, 2\sqrt{2}\right)$.

14.2. $A = C + \overrightarrow{BC} = (0,2) + (-3,2) = (-3,4)$

Como $m_{BC} = -\frac{2}{3}$, então $m_t = \frac{3}{2}$.

O ponto $A(-3{,}4)$ pertence à reta t, logo:

$4 = \frac{3}{2} \times (-3) + b \Leftrightarrow 4 + \frac{9}{2} = b \Leftrightarrow b = \frac{17}{2}$

A equação reduzida da reta t é $y = \frac{3}{2}x + \frac{17}{2}$.

14.3. $x^2 + (y-2)^2 \geq 13 \ \land \ y \leq \frac{3}{2}x + \frac{17}{2} \ \land \ y \leq -\frac{2}{3}x + 2 \ \land \ y \geq 0$

Cálculo auxiliar

$\left\|\overrightarrow{BC}\right\| = \sqrt{(-3)^2 + 2^2} = \sqrt{13}$

14.4. $\text{tg}\left(O\hat{C}B\right) = \frac{3}{2}$

Logo, $O\hat{C}B \approx 56{,}31°$

Portanto, o ângulo suplementar de $O\hat{C}B$ tem amplitude $180° - 56{,}31° = 123{,}69°$.

$\frac{13\pi}{360°} = \frac{x}{123{,}69°} \Leftrightarrow x \approx 14{,}03 \text{ u.a.}$

15.

15.1. $\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{BP}=0 \Leftrightarrow (x-0,y-1)\cdot(x-6,y-5)=0$

$\Leftrightarrow x^2-6x+y^2-5y-y+5=0$

$\Leftrightarrow x^2-6x+y^2-6y=-5$

$\Leftrightarrow x^2-6x+9+y^2-6y+9=-5+9+9$

$\Leftrightarrow (x-3)^2+(y-3)^2=13$, que é a equação pedida.

15.2. *C* e *D* são pontos da forma $(x,0)$, uma vez que pertencem ao eixo das abcissas.

Substituindo na equação da circunferência de diâmetro [*AB*]:

$(x-3)^2+(0-3)^2=12 \Leftrightarrow (x-3)^2=4$

$\Leftrightarrow x-3=-2 \lor x-3=2$

$\Leftrightarrow x=1 \lor x=5$

Assim, $C(1,0)$ e $D(5,0)$.

15.3. Seja *M* o centro da circunferência de diâmetro $[AB]$; $M(3,3)$

$\overrightarrow{MC}\cdot\overrightarrow{CP}=0 \Leftrightarrow (1-3,0-3)\cdot(x-1,y-0)=0$

$\Leftrightarrow (-2,-3)\cdot(x-1,y)=0$

$\Leftrightarrow -2x+2-3y=0$

$\Leftrightarrow 3y=-2x+2$

$\Leftrightarrow y=-\frac{2}{3}x+\frac{2}{3}$, que é a equação reduzida da reta tangente à circunferência de diâmetro [*AB*] em *C*.

$\overrightarrow{MD}\cdot\overrightarrow{DP}=0 \Leftrightarrow (5-3,0-3)\cdot(x-5,y-0)=0$

$\Leftrightarrow (2,-3)\cdot(x-5,y)=0$

$\Leftrightarrow 2x-10-3y=0$

$\Leftrightarrow 3y=2x-10$

$\Leftrightarrow y=\frac{2}{3}x-\frac{10}{3}$, que é a equação reduzida da reta tangente à circunferência de diâmetro [*AB*] em *D*.

15.4.

a) $(x-3)^2+(y-3)^2\geq 13 \land y\geq -\frac{2}{3}x+\frac{2}{3} \land y\geq \frac{2}{3}x-\frac{10}{3}$

b) Seja *I* o ponto de interseção das retas tangentes à circunferência de diâmetro [*AB*] em *C* e *D*.

$$\begin{cases} y=-\frac{2}{3}x+\frac{2}{3} \\ y=\frac{2}{3}x-\frac{10}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overline{} \\ -\frac{2}{3}x+\frac{2}{3}=\frac{2}{3}x-\frac{10}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overline{} \\ 4x=12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=-\frac{4}{3} \\ x=3 \end{cases}$$

Então, $I\left(3,-\frac{4}{3}\right)$.

Seja *M* o centro da circunferência de diâmetro [*AB*]: $M(3,3)$

$\overline{IM}=3+\frac{4}{3}=\frac{13}{3}$

Por outro lado, $\overline{CD} = 4$.

A área do quadrilátero [M*CID*] é dada por:

$$A_{[MCID]} = A_{[CDM]} + A_{[CDI]} = \frac{\overline{CD} \times \text{ordenada de } M}{2} + \frac{\overline{CD} \times |\text{ordenada de } I|}{2} =$$

$$= \frac{4\times3}{2} + \frac{4\times\frac{4}{3}}{2} =$$

$$= 6 + \frac{8}{3} =$$

$$= \frac{26}{3}$$

A área do setor circular de centro *M* e arco *BD* é igual a $\frac{\alpha\times r^2}{2}$, sendo α a amplitude, em radianos, do ângulo ao centro *CMD* e *r* o raio da circunferência:

$$A_{\text{setor circular}} = \frac{\alpha \times 13}{2} \approx \frac{1{,}176 \times 13}{2} = \frac{15{,}288}{2}$$

Cálculos auxiliares

Cálculo de α:

$\cos\alpha = \frac{\overrightarrow{MC}.\overrightarrow{MD}}{\|\overrightarrow{MC}\|\|\overrightarrow{MD}\|} \Leftrightarrow \cos\alpha = \frac{5}{13}$

- $\overrightarrow{MC} = (1,0) - (3,3) = (-2,-3)$
- $\|\overrightarrow{MC}\| = \sqrt{13}$
- $\overrightarrow{MD} = (5,0) - (3,3) = (2,-3)$
- $\|\overrightarrow{MD}\| = \sqrt{13}$
- $\overrightarrow{MC}.\overrightarrow{MD} = -2 \times 2 - 3 \times (-3) = -4 + 9 = 5$

Assim, $\alpha = \cos^{-1}\left(\frac{5}{13}\right) \Leftrightarrow \alpha \approx 1{,}176$

A área da região a sombreado é igual à diferença entre a área do quadrilátero [*MCDI*] e a área do setor circular:

$\frac{26}{3} - \frac{15{,}288}{2} \approx 1{,}02$ u.a.

16. $A_{[ABC]} = \frac{\overline{AC}\times h}{2}$

$\overrightarrow{AC} = C - A = (3,2) - (-1,-1) = (4,3)$

$\|\overrightarrow{AC}\| = \sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5$

$AC: y = \frac{3}{4}x + b$

Como o ponto $A(-1,-1)$ pertence à reta AC, vem que:

$-1 = -\frac{3}{4} + b \Leftrightarrow -1 + \frac{3}{4} = b \Leftrightarrow -\frac{1}{4} = b$

$AC: y = \frac{3}{4}x - \frac{1}{4}$

Seja r a reta que passa em *B* e é perpendicular a *AC*:

$r\colon y=-\frac{4}{3}x+b$

Como o ponto $B(2, 4)$ pertence à reta r, vem que:

$4=-\frac{4}{3}\times 2+b \Leftrightarrow 4+\frac{8}{3}=b \Leftrightarrow \frac{20}{3}=b$

$r\colon y=-\frac{4}{3}x+\frac{20}{3}$

Determinemos as coordenadas do ponto I, interseção da reta r com a reta AC:

$$\begin{cases} y=-\frac{4}{3}x+\frac{20}{3} \\ y=\frac{3}{4}x-\frac{1}{4}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{3}{4}x-\frac{1}{4}=-\frac{4}{3}x+\frac{20}{3} \\ \_\_\_\_\_\_\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 9x-3=-16x+80 \\ \_\_\_\_\_\_\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 25x=83 \\ \_\_\_\_\_\_\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{83}{25} \\ y=\frac{3}{4}\times\frac{83}{25}-\frac{1}{4}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{83}{25} \\ y=\frac{56}{25}\end{cases}$$

$I\left(\frac{83}{25},\frac{56}{25}\right)$

$$h=d(I,B)=\sqrt{\left(\frac{83}{25}-2\right)^2+\left(\frac{56}{25}-4\right)^2}=\sqrt{\left(\frac{33}{25}\right)^2+\left(-\frac{44}{25}\right)^2}=$$

$$=\sqrt{\frac{1089}{625}+\frac{1936}{625}}=\frac{\sqrt{3025}}{25}=\sqrt{\frac{3025}{625}}=\frac{55}{25}=\frac{11}{5}$$

$A_{[ABC]}=\frac{5\times\frac{11}{5}}{2}=\frac{11}{2}$ u.a.

17. $x^2+4x+y^2-8y=0 \Leftrightarrow x^2+4x+4+y^2-8y+16=20$

$$\Leftrightarrow (x+2)^2+(y-4)^2=20$$

Equação reduzida da reta r:

$y=\frac{1}{2}x+b$

$6=\frac{1}{2}\times 2+b \Leftrightarrow 6=1+b \Leftrightarrow b=5$

Assim, $y=\frac{1}{2}x+5$.

Equação reduzida da reta AO:

$C(-2,4) \qquad m_{OA}=m_{OC}=\frac{4}{-2}=-2$

$y=-2x$

$(x+2)^2+(y-4)^2\leq 20 \ \wedge\ y\geq -2x \ \wedge\ y\geq \frac{1}{2}x+5 \ \wedge\ x\leq 0$

18. $\frac{\sqrt{2}\times h}{2}=4 \Leftrightarrow \sqrt{2}h=8 \Leftrightarrow h=\frac{8}{\sqrt{2}}$

$$\Leftrightarrow h=\frac{8\sqrt{2}}{2}$$

$$\Leftrightarrow h=4\sqrt{2}$$

Logo, $b=-4\sqrt{2}$.

$y = mx - 4\sqrt{2}$

$m = \frac{0-(-4\sqrt{2})}{-\sqrt{2}-0} = \frac{4\sqrt{2}}{-\sqrt{2}} = -4$

A equação pedida é $y = -4x - 4\sqrt{2}$.

19. $x^2 + 12x + y^2 - 2y = -k \Leftrightarrow x^2 + 12x + 36 + y^2 - 2y + 1 = -k + 36 + 1$

$\Leftrightarrow (x+6)^2 + (y-1)^2 = -k + 37$

Para definir uma circunferência teremos que ter $-k + 37 > 0$, isto é, $k < 37$.

Logo, p é uma proposição verdadeira, q é uma proposição falsa e r é uma proposição verdadeira.

20.

20.1. Como $\frac{1}{2} \neq \frac{2}{1}$, os vetores $\vec{r}$ e $\vec{s}$ não são colineares.

Por outro lado, $(1,0,-1)$ pertence às duas retas, ou seja, r e s são retas concorrentes e, por conseguinte, definem um plano.

20.2. $\begin{cases}(a,b,c)\cdot(1,2,-1)=0\\(a,b,c)\cdot(2,1-2)=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a+2b-c=0\\2a+b-2c=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a=-2b+c\\2(-2b+c)+b-2c=0\end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases}-\\-4b+2c+b-2c=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a=c\\b=0\end{cases}$

$\vec{n}(c,0,c)$, com $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

Se $c = 1$, então $\vec{n}(1,0,1)$.

O plano definido pelas retas r e s é da forma $x + z + d = 0$.

$1 + (-1) + d = 0 \Leftrightarrow d = 0$

O plano definido pelas retas r e s pode ser definido por $x + z = 0$.

Como os vetores normais dos planos são colineares, então os planos ou são coincidentes ou são estritamente paralelos. Averiguemos se se intersetam:

$\begin{cases}x+z=0\\x+z=2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}2=0\\\_\_\_\end{cases}$, que é condição impossível.

Logo, a plano definido por $x + z = 0$ é estritamente paralelo ao plano definido por $x + z = 2$.

21.

21.1. O ponto *A* pertence ao plano xOy, pelo que $A(x,y,0)$, onde x e y representam números reais positivos.

Uma vez que o triângulo $[OAB]$ é equilátero, tem-se $\overline{OA} = \overline{OB}$ e $\overline{BA} = \overline{OB}$.

Como *B* pertence à reta *BD* (reta paralela a Oz) e ao eixo Oy, tem-se que as suas coordenadas são (0,4,0) e, então, $\overline{OB} = 4$.

Assim:

$$\begin{cases} \overline{OA} = \overline{OB} \\ \overline{BA} = \overline{OB} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x^2+y^2+0^2} = 4 \\ \sqrt{x^2+(y-4)^2+0^2} = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2 = 16 \\ x^2+y^2-8y+16 = 16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{———} \\ 16-8y = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \text{———} \\ y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+4 = 16 \\ \text{———} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 12 \\ \text{———} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2\sqrt{3} \\ y = 2 \end{cases} \vee \begin{cases} x = -2\sqrt{3} \\ y = 2 \end{cases}$$

Logo, $A(2\sqrt{3}, 2, 0)$.

21.2. $E(0,0,6)$

$\overrightarrow{EA} = A - E = (2\sqrt{3}, 2{,}0) - (0{,}0{,}6) = (2\sqrt{3}, 2, -6), k \in \mathbb{R}$

Logo, uma equação vetorial da reta *AE* é:

$$(x,y,z) = (0{,}0{,}6) + k(-2\sqrt{3}, -2{,}6), k \in \mathbb{R}$$

21.3. $\overrightarrow{AB} = B - A = (0{,}4{,}0) - (2\sqrt{3}, 2{,}0) = (-2\sqrt{3}, 2{,}0)$

Logo, uma equação vetorial da reta *AB* é:

$$(x,y,z) = (0{,}4{,}0) + k(-2\sqrt{3}, 2{,}0), k \in \mathbb{R}$$

21.4. $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AB} = (-2\sqrt{3}, -2{,}6) \cdot (-2\sqrt{3}, 2{,}0) = 12 - 4 + 0 = 8$

$\|\overrightarrow{AE}\| = \sqrt{\left(-2\sqrt{3}\right)^2 + (-2)^2 + 6^2} = \sqrt{12+4+36} = \sqrt{52}$

$\|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{\left(-2\sqrt{3}\right)^2 + 2^2 + 0^2} = \sqrt{12+4+0} = 4$

$\cos\left(\widehat{\overrightarrow{AE}\ \overrightarrow{AB}}\right) = \frac{8}{\sqrt{52} \times 4}$

Logo, $\left(\widehat{\overrightarrow{AE}\ \overrightarrow{AB}}\right) \approx 73{,}9°$.

21.5. $\overrightarrow{AE} = (-2\sqrt{3}, -2{,}6)$ e $\overrightarrow{AB} = (-2\sqrt{3}, 2{,}0)$ são dois vetores não colineares do plano *ABE* e $(2\sqrt{3}, 2{,}0)$ é um ponto do plano.

Seja $\vec{u}(a,b,c)$ um vetor não nulo, simultaneamento perpendicular aos vetores $\overrightarrow{AE}$ e $\overrightarrow{AB}$.

$$\begin{cases} \vec{u} \cdot \overrightarrow{AE} = 0 \\ \vec{u} \cdot \overrightarrow{AB} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a,b,c) \cdot (-2\sqrt{3}, -2{,}6) = 0 \\ (a,b,c) \cdot (-2\sqrt{3}, 2{,}0) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2\sqrt{3}a - 2b + 6c = 0 \\ -2\sqrt{3}a + 2b = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -2\sqrt{3}a - 2\sqrt{3}a + 6c = 0 \\ b = \sqrt{3}a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6c = 4\sqrt{3}a \\ b = \sqrt{3}a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = \frac{2\sqrt{3}a}{3} \\ b = \sqrt{3}a \end{cases}$$

Assim, $\vec{u}\left(a, \sqrt{3}a, \frac{2\sqrt{3}a}{3}\right), a \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$.

Por exemplo, se $a = 3$, obtém-se $\vec{u}(3{,}3\sqrt{3}, 2\sqrt{3})$.

Uma equação cartesiana do plano *ABE é:*

$3(x - 2\sqrt{3}) + 3\sqrt{3}(y-2) + 2\sqrt{3}z = 0$, isto é, $3x + 3\sqrt{3}y + 2\sqrt{3}z - 12\sqrt{3} = 0$

21.6. Um vetor diretor da reta é um vetor normal ao plano *ABE*, por exemplo, o vetor de coordenadas $\left(1,\sqrt{3},\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$.

Assim, uma equação vetorial da reta perpendicular ao plano *ABE* e que contém o ponto *O* é:

$$(x,y,z)=(0,0,0)+k\left(1,\sqrt{3},\frac{2\sqrt{3}}{3}\right),k\in\mathbb{R}$$

21.7. O lugar geométrico dos pontos $P(x,y,z)$ que satisfazem a condição $\overrightarrow{BE}\cdot\overrightarrow{MP}=0$ é o plano mediador do segmento de reta $[BE]$.

$\overrightarrow{BE}=(0,0,6)-(0,4,0)=(0,-4,6)$

$M=\left(\frac{0+0}{2},\frac{0+4}{2},\frac{6+0}{2}\right)=(0,2,3)$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{BE}\cdot\overrightarrow{MP}=0 \Leftrightarrow (0,-4,6)\cdot(x,y-2,z-3)=0 &\Leftrightarrow -4y+8+6z-18=0\\ &\Leftrightarrow -4y+6z-10=0\\ &\Leftrightarrow -2y+3z-5=0\end{aligned}$$

22.

22.1. $\overline{AD}=\sqrt{2^2+2^2}=\sqrt{4+4}=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$

22.2. $A(2,0,0); B(4,2,0); C(2,4,0); D(0,2,0); E\left(2,0,2\sqrt{2}\right); F\left(4,2,2\sqrt{2}\right); G\left(2,4,2\sqrt{2}\right); H\left(0,2,2\sqrt{2}\right)$

22.3.

a) $(x,y,z)=(4,2,0)+k\left(-1,1,\sqrt{2}\right),k\in\mathbb{R}$

b) $(x,y,z)=\left(0,2,2\sqrt{2}\right)+k(1,0,0),k\in\mathbb{R}$

c) $(x,y,z)=(0,0,0)+k(-2,2,0),k\in\mathbb{R}$

22.4.

a) $y=2$

b) $\overrightarrow{CE}=\left(2,0,2\sqrt{2}\right)-(2,4,0)=\left(0,-4,2\sqrt{2}\right)$

$\overrightarrow{CF}=\left(4,2,2\sqrt{2}\right)-(2,4,0)=\left(2,-2,2\sqrt{2}\right)$

$$\begin{cases}(a,b,c)\cdot\left(0,-4,2\sqrt{2}\right)=0\\(a,b,c)\cdot\left(2,-2,2\sqrt{2}\right)=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-4b+2\sqrt{2}c=0\\2a-2b+2\sqrt{2}c=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}b=\frac{\sqrt{2}}{2}c\\2a-2\times\frac{\sqrt{2}}{2}c+2\sqrt{2}c=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}-\\2a=-\sqrt{2}c\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}b=\frac{\sqrt{2}}{2}c\\a=-\frac{\sqrt{2}}{2}c\end{cases}$$

$\vec{n}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}c,\frac{\sqrt{2}}{2}c,c\right)$, com $c\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$

Se $c=-\sqrt{2}$, então $\vec{n}\left(1,-1,-\sqrt{2}\right)$.

$EFC: x-y-\sqrt{2}z+d=0$

Como C pertence ao plano, então:

$2-4+d=0 \Leftrightarrow d=2$

$EFC: x-y-\sqrt{2}z+2=0$

c) $\overrightarrow{FG}=(-2,2,0)$

A equação pedida é $-2x+2y=0$.

23. $\overrightarrow{AB}=B-A=\left(0,1,\frac{5}{2}\right)-(0,0,2)=\left(0,1,\frac{1}{2}\right)$

$\overrightarrow{AC}=C-A=(6,6,2)-(0,0,2)=(6,6,0)$

$\begin{cases}(a,b,c)\cdot\left(0,1,\frac{1}{2}\right)=0\\(a,b,c)\cdot(6,6,0)=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}b+\frac{1}{2}c=0\\6a+6b=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}c=-2b\\a=-b\end{cases}$

$\vec{n}(-b,b,-2b)$, com $b \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$

Se $b=1$, então $\vec{n}(-1,1,-2)$.

$ABC: -x+y-2z+d=0$

$-2\times 2+d=0 \Leftrightarrow d=4$

$ABC: -x+y-2z+4=0$

$-m+m-2m+4=0 \Leftrightarrow -2m+4=0 \Leftrightarrow -2m=-4 \Leftrightarrow m=2$

24.

24.1. $\begin{cases}(a,b,c)\cdot(0,1,4)=0\\(a,b,c)\cdot(1,0,2)=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}b+4c=0\\a+2c=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}b=-4c\\a=-2c\end{cases}$

$\vec{n}(-2c,-4c,c)$, com $c \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$

Se $c=-1$, então $\vec{n}(2,4,-1)$.

$2x+4y-z+d=0$

$-4+d=0 \Leftrightarrow d=4$

$2x+4y-z+4=0 \Leftrightarrow 2x+4y-z=-4$, como queríamos demonstrar.

24.2. Um ponto genérico da reta r é $\left(1+\frac{1}{4}k, 2+\frac{1}{2}k, 2+k\right)$.

$$2\left(1+\frac{1}{4}k\right)+4\left(2+\frac{1}{2}k\right)-(2+k)=-4 \Leftrightarrow 2+\frac{1}{2}k+8+2k-2-k=-4$$

$$\Leftrightarrow \frac{3}{2}k=-12$$

$$\Leftrightarrow k=-8$$

$\left(1+\frac{1}{4}(-8), 2+\frac{1}{2}(-8), 2+(-8)\right)=(-1,-2,-6)$

25.

25.1. Um ponto genérico da reta r é $(1-2k, 3k, -7+4k), k \in \mathbb{R}$.

$4\times 3k-3(-7+4k)=1 \Leftrightarrow 12k+21-12k=1 \Leftrightarrow 21=1$, que é uma proposição falsa.

A reta r e o plano α não se intersetam. A reta é paralela ao plano.

25.2. Um ponto genérico da reta r é $(1+2k, -2-3k, k), k \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} 2(1+2k)\text{—}2-3k-k=6 &\Leftrightarrow 2+4k+2+3k-k=6 \\ &\Leftrightarrow 6k=2 \\ &\Leftrightarrow k=\tfrac{1}{3} \end{aligned}$$

$$(x,y,z)=(1,-2{,}0)+\tfrac{1}{3}(2,-3{,}1) \Leftrightarrow \begin{cases} x=1+2\times\frac{1}{3} \\ y=-2-3\times\frac{1}{3} \\ z=\frac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{5}{3} \\ y=-3 \\ z=\frac{1}{3} \end{cases}$$

A reta e o plano intersetam-se no ponto de coordenadas $\left(\frac{5}{3},-3,\frac{1}{3}\right)$.

26.

26.1. A reta *EV* é perpendicular ao plano *ABC*, pelo que um vetor normal a este plano é um vetor diretor da reta. Um vetor normal ao plano *ABC* e um vetor da reta *EV* é $\vec{n}(-1{,}6{,}1)$.

Assim, uma equação vetorial que defina a reta *EV* é:

$$(x,y,z)=\left(-1,\frac{19}{2},4\right)+k(-1{,}6{,}1), k \in \mathbb{R}$$

26.2. O ponto *E* é o ponto de interseção da reta *EV* com o plano *ABC*.

Os pontos da reta *EV* são da forma $\left(-1-k,\frac{19}{2}+6k,4+k\right)$, sendo k um número real.

Substituindo na equação do plano *ABC*:

$$\begin{aligned} -(-1-k)+6\left(\tfrac{19}{2}+6k\right)+(4+k)+14=0 &\Leftrightarrow 1+k+57+36k+4+k+14=0 \\ &\Leftrightarrow 38k=-76 \\ &\Leftrightarrow k=-2 \end{aligned}$$

Então, o ponto *E* tem coordenadas $\left(-1+2,\frac{19}{2}-12{,}4-2\right)=\left(1,-\frac{5}{2},2\right)$.

26.3. Seja $\vec{n}(a,b,c)$ um vetor não nulo normal ao plano cuja equação se pretende encontrar.

Tem-se que $\vec{n}(-1{,}6{,}1)=0$, sendo $(-1{,}6{,}1)$ um vetor normal ao plano *ABC*, e que $\vec{n}\left(1,\frac{25}{2},2\right)=0$, onde $\left(1,\frac{25}{2},2\right)$ é um vetor diretor da reta *VA*.

Assim:

$$\begin{cases} (a,b,c)\cdot(-1{,}6{,}1)=0 \\ (a,b,c)\cdot\left(1,\frac{25}{2},2\right)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -a+6b+c=0 \\ a+\frac{25}{2}b+2c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=6b+c \\ 6b+c+\frac{25}{2}b+2c=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \rule{3cm}{0.4pt} \\ 12b+2c+25b+4c=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \rule{3cm}{0.4pt} \\ 37b+6c=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a=6\times\left(-\frac{6}{37}\right)c+c \\ b=-\frac{6}{37}c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=\frac{1}{37}c \\ b=-\frac{6}{37}c \end{cases}$$

LeYa EDUCAÇÃO Daniela Raposo e Luzia Gomes

Assim, $\vec{n}\left(\frac{1}{37}c, -\frac{6}{37}c, c\right), c \in \mathbb{R}$.

Por exemplo, se $c = -37$, obtém-se $\vec{n}(-1, 6, -37)$.

Então, $\vec{n}(-1, 6, -37)$ é um vetor normal ao plano perpendicular a *ABC* e que contém a reta *VA*.

Como $V\left(-1, \frac{19}{2}, 4\right)$ é um ponto deste plano:

$$-1(x+1) + 6\left(y - \frac{19}{2}\right) - 37(z-4) = 0 \Leftrightarrow -x - 1 + 6y - 57 - 37z + 148 = 0$$

$$\Leftrightarrow -x + 6y - 37z + 90 = 0$$

26.4. $\begin{cases} -x + 6y + z + 14 = 0 \\ -x + 6y - 37z + 90 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6y + z + 14 = x \\ -6y - z - 14 + 6y - 37z + 90 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} - \\ -38z + 76 = 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 6y + 16 \\ z = 2 \end{cases}$$

Um ponto genérico da reta de interseção dos dois planos é $(6y + 16, y, 2)$, com $y \in \mathbb{R}$.

$(6y + 16, y, 2) = (16, 0, 2) + y(6, 1, 0)$, com $y \in \mathbb{R}$

A equação pedida é:

$$(x, y, z) = (16, 0, 2) + k(6, 1, 0), k \in \mathbb{R}$$

27. $\overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{DA} \cdot \left(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD}\right) = \overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{AD} =$

$$= x \times \left\|\overrightarrow{BA}\right\| \times \cos(90°) + x \times x \times \cos(180°) =$$

$$= -x^2$$

28. $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AN} = \left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM}\right) \cdot \left(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DN}\right) =$

$$= \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{DN} + \overrightarrow{BM} \cdot \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BM} \cdot \overrightarrow{DN} =$$

$$= \left\|\overrightarrow{AB}\right\| \times \frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{AB}\right\| \cos(90°) + \left\|\overrightarrow{AB}\right\| \times \frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{AB}\right\| \cos(0°) + \frac{1}{4}\left\|\overrightarrow{AB}\right\| \times \frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{AB}\right\| \cos(0°) +$$

$$+ \frac{1}{4}\left\|\overrightarrow{AB}\right\| \times \frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{AB}\right\| \cos(90°) =$$

$$= 0 + \frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{AB}\right\|^2 + \frac{1}{8}\left\|\overrightarrow{AB}\right\|^2 + 0 =$$

$$= \frac{5}{8}\left\|\overrightarrow{AB}\right\|^2$$

29. $\left\|\vec{a} + \vec{b}\right\| = \sqrt{\left\|\vec{a} + \vec{b}\right\|^2} = \sqrt{\left(\vec{a} + \vec{b}\right) \cdot \left(\vec{a} + \vec{b}\right)} =$

$$= \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a} + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{b}} =$$

$$= \sqrt{6^2 + 2 \times 0 + 3^2} =$$

$$= \sqrt{45} =$$

$$= 3\sqrt{5}$$

$$\|\vec{a}-\vec{b}\| = \sqrt{\|\vec{a}-\vec{b}\|^2} = \sqrt{(\vec{a}-\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b})} =$$
$$= \sqrt{\vec{a}\cdot\vec{a} - 2\vec{a}\cdot\vec{b} + \vec{b}\cdot\vec{b}} =$$
$$= \sqrt{6^2 - 2\times 0 + 3^2} =$$
$$= \sqrt{45} =$$
$$= 3\sqrt{5}$$

30. $\overline{AC}^2 = \overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AC} = \left(\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{BA}\right)\cdot\left(\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{BA}\right) =$

Cálculo auxiliar
$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BA}$

$$= \overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BC} - 2\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BA} =$$
$$= \left\|\overrightarrow{BC}\right\|^2 + \left\|\overrightarrow{BA}\right\|^2 - 2\left\|\overrightarrow{BC}\right\|\left\|\overrightarrow{BA}\right\| \cos\left(\widehat{\overrightarrow{BC},\ \overrightarrow{BA}}\right) =$$
$$= \overline{BC}^2 + \overline{BA}^2 - 2\overline{BC}\times\overline{BA}\times\cos\left(\widehat{\overrightarrow{BC},\ \overrightarrow{BA}}\right)$$

31. $\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DB}$

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DB}$

Assim:

$$\overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{AB} = \left(\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DB}\right)\cdot\left(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DB}\right) =$$
$$= \overrightarrow{CD}\cdot\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CD}\cdot\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DB}\cdot\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DB}\cdot\overrightarrow{DB} =$$
$$= \overline{CD}\times\overline{AD}\times\cos(180°) + \overline{CD}\times\overline{DB}\times\cos(90°) + \overline{DB}\times\overline{AD}\times\cos(90°) +$$
$$+ \overline{DB}\times\overline{DB}\times\cos(0°) =$$
$$= -\overline{DA}\times\overline{DC} + 0 + 0 + \overline{BD}^2 =$$
$$= -\overline{DA}\times\overline{DC} + \overline{BD}^2$$

Uma vez que [*ABC*] é um triângulo retângulo em *B*, tem-se:

$\overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{AB} = \overline{CA}\times\overline{CB}\cos(90°) = 0$

Logo:

$-\overline{DA}\times\overline{DC} + \overline{BD}^2 = 0 \Leftrightarrow \overline{DA}\times\overline{DC} = \overline{BD}^2$

32. O declive da reta de equação $y = -\frac{3}{4}x - \frac{13}{4}$ é $-\frac{3}{4}$, pelo que um seu vetor diretor é, por exemplo, $\vec{r} = (4,-3)$.

Seja $\vec{u}(a,b)$o vetor com origem em *T* e extremidade no centro de uma circunferência nas condições do enunciado.

$$\begin{cases} \vec{r}\cdot\vec{u}=0 \\ \|\vec{u}\|=10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (4,-3)\cdot(a,b)=0 \\ \sqrt{a^2+b^2}=10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4a-3b=0 \\ a^2+b^2=100 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=\frac{3}{4}b \\ \frac{9}{16}b^2+b^2=100 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a=\frac{3}{4}b \\ b^2=64 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=6 \\ b=8 \end{cases} \vee \begin{cases} a=6 \\ b=-8 \end{cases}$$

Assim, os centros das circunferências são os pontos de coordenadas:

$(-3,-1)+(6,8)=(3,7)$ e $(-3,-1)+(-6,-8)=(-9,-9)$

33. Sejam *r*, *s* e *t*, respetivamente, as retas definidas no enunciado:

$r\cap s$:

$\frac{2}{3}x-\frac{5}{3}=2x-\frac{1}{3} \Leftrightarrow 2x-5=6x-1 \Leftrightarrow 4x=-4 \Leftrightarrow x=-1$

$y=\frac{2}{3}\times(-1)-\frac{5}{3}=-\frac{7}{3}$

$A\left(-1,-\frac{7}{3}\right)$

$r\cap t$:

$\frac{2}{3}x-\frac{5}{3}=-\frac{2}{3}x+5 \Leftrightarrow -2x-5=-2x+15 \Leftrightarrow 4x=20 \Leftrightarrow x=5$

$y=\frac{2}{3}\times 5-\frac{5}{3}=\frac{5}{3}$

$B\left(5,\frac{5}{3}\right)$

$s\cap t$:

$2x-\frac{1}{3}=-\frac{2}{3}x+5 \Leftrightarrow 6x-1=-2x+15 \Leftrightarrow 8x=16 \Leftrightarrow x=2$

$y=2\times 2-\frac{1}{3}=\frac{11}{3}$

$C\left(2,\frac{11}{3}\right)$

Pretende-se determinar a área do triângulo [*ABC*].

$\overline{AB}=\sqrt{(5+1)^2+\left(\frac{5}{3}+\frac{7}{3}\right)^2}=\sqrt{36+16}=\sqrt{52}$

Seja *h* a altura do triângulo [*ABC*] relativa ao vértice *C*.

h é a distância entre o ponto *C* e a reta *AB* = *r*.

Seja *u* a reta perpendicular a *r* que passa em *C*.

$u\colon y=-\frac{3}{2}x+b$

Como *C* pertence à reta *u:*

$\frac{11}{3}=-\frac{3}{2}\times 2+b \Leftrightarrow b=\frac{20}{3}$

Logo, $u\colon y=-\frac{3}{2}x+\frac{20}{2}$.

$r \cap u$:

$\frac{2}{3}x - \frac{5}{3} = -\frac{3}{2}x + \frac{20}{3} \Leftrightarrow \frac{13}{6}x = \frac{25}{3} \Leftrightarrow 13x = 50 \Leftrightarrow x = \frac{50}{13}$

$y = \frac{2}{3} \times \frac{50}{13} - \frac{5}{3} = \frac{35}{39}$

$D\left(\frac{50}{13}, \frac{35}{39}\right)$

$$h = \overline{CD} = \sqrt{\left(\frac{50}{13} - 2\right)^2 + \left(\frac{35}{39} - \frac{11}{3}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{24}{13}\right)^2 + \left(-\frac{36}{13}\right)^2} =$$

$$= \sqrt{\frac{576}{169} + \frac{1296}{169}} =$$

$$= \sqrt{\frac{144}{13}}$$

Logo, a área do triângulo [*ABC*] é dada por $\frac{\sqrt{52} \times \sqrt{\frac{144}{13}}}{2} = 12$ u.a.

34. Seja *r* a reta perpendicular à reta de equação $y = \frac{3}{2}x - 6$ e que passa no ponto *A.*

$r\colon y = -\frac{2}{3}x + b$

Como *A* pertence a *r*:

$-5 = -\frac{2}{3} \times 2 + b \Leftrightarrow b = -\frac{11}{3}$

Então, $r\colon y = -\frac{2}{3}x - \frac{11}{3}$.

Seja *B* o ponto de interseção da reta *r* com a reta definida no enunciado.

$\frac{3}{2}x - 6 = -\frac{2}{3}x - \frac{11}{3} \Leftrightarrow \frac{13}{6}x = \frac{7}{3} \Leftrightarrow x = \frac{14}{13}$

$y = \frac{3}{2} \times \frac{14}{13} - 6 = -\frac{57}{13}$

Logo, $B\left(\frac{14}{13}, -\frac{57}{13}\right)$.

A distância do ponto $A(2, -5)$ à reta de equação $y = \frac{3}{2}x - 6$ é igual a $\overline{AB}$.

$$\overline{AB} = \sqrt{\left(\frac{14}{13} - 2\right)^2 + \left(-\frac{57}{13} + 5\right)^2} = \sqrt{\left(-\frac{12}{13}\right)^2 + \left(\frac{8}{13}\right)^2} =$$

$$= \sqrt{\frac{144}{169} + \frac{64}{169}} =$$

$$= \frac{\sqrt{208}}{13} =$$

$$= \frac{4\sqrt{13}}{13}$$

35. $\|\vec{u}\| = 1 \Leftrightarrow \sqrt{a^2+b^2+c^2} = 1 \Leftrightarrow a^2+b^2+c^2 = 1$

$\vec{u}\cdot\vec{v} = (a,b,c)\cdot(1,1,1) = a+b+c$

$\|\vec{v}\| = \sqrt{1^2+1^2+1^2} = \sqrt{3}$

Logo:

$\vec{u}\cdot\vec{v} = \|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) \Leftrightarrow a+b+c = \sqrt{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow a+b+c = \frac{3}{2}$

$\vec{u}\cdot\vec{w} = (a,b,c)\cdot(1,0,1) = a+c$

$\|\vec{w}\| = \sqrt{1^2+0^2+1^2} = \sqrt{2}$

Logo:

$\vec{u}\cdot\vec{w}=\|\vec{u}\|\|\vec{w}\|\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \Leftrightarrow a+c = \sqrt{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow a+c = 1$

Assim, tem-se:

$$\begin{cases} a^2+b^2+c^2 = 1 \\ a+b+c = \frac{3}{2} \\ a+c = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (1-c)^2+b^2+c^2 = 1 \\ 1-c+b+c = \frac{3}{2} \\ a = 1-c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1-2c+c^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2+c^2 = 1 \\ b = \frac{1}{2} \\ \_\_\_\_\_\_ \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2c^2-2c+\frac{1}{4} = 0 \\ \_\_\_\_\_\_ \\ \_\_\_\_\_\_ \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = \frac{2\mp\sqrt{4-2}}{4} \\ \_\_\_\_\_\_ \\ \_\_\_\_\_\_ \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = \frac{1}{2}+\frac{1}{4}\sqrt{2} \\ b = \frac{1}{2} \\ a = \frac{1}{2}-\frac{1}{4}\sqrt{2} \end{cases} \vee \begin{cases} c = \frac{1}{2}-\frac{1}{4}\sqrt{2} \\ b = \frac{1}{2} \\ a = \frac{1}{2}+\frac{1}{4}\sqrt{2} \end{cases}$$

Assim, os vetores $\vec{u}$ nas condições do enunciado são:

$\vec{u} = \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\sqrt{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}-\frac{1}{4}\sqrt{2}\right)$ e $\vec{u} = \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\sqrt{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}+\frac{1}{4}\sqrt{2}\right)$

36. Um vetor normal ao plano de equação $4x-3y+12z = 6$ é, por exemplo, $\vec{n}(4,-3,12)$.

A reta perpendicular ao plano e que contém o ponto *A* pode ser definida por:

$$(x,y,z) = (1,4,2) + +k(4,-3,12), k \in \mathbb{R}$$

Um ponto genérico da reta é do tipo $(1+4k, 4-3k, 2+12k), k \in \mathbb{R}$.

Substituindo as coordenadas na equação do plano vem:

$$4(1+4k)-3(4-3k)+12(2+12k) = 6 \Leftrightarrow 4+16k-12+9k+24+144k = 6$$

$$\Leftrightarrow 169k = -10$$

$$\Leftrightarrow k = -\frac{10}{169}$$

As coordenadas do ponto de interseção da reta com o plano são:

$\left(1-\frac{40}{169}, 4+\frac{12}{169}, 2-\frac{120}{169}\right) = \left(\frac{129}{169}, \frac{706}{169}, \frac{218}{169}\right)$

A distância entre o ponto *A* e o plano é dada por:

$$\sqrt{\left(1-\frac{129}{169}\right)^2+\left(4-\frac{706}{169}\right)^2+\left(2-\frac{218}{169}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{40}{169}\right)^2+\left(\frac{30}{169}\right)^2+\left(\frac{120}{169}\right)^2} =$$

$$= \sqrt{\frac{16900}{169^2}} =$$

$$= \sqrt{\frac{100}{169}} =$$

$$= \frac{10}{13}$$

37. Para se saber a medida do raio da superfície esférica é necessário determinar a distância entre o seu centro e o plano α. O plano α é definido por $2x + y + z - 3 = 0$, logo um vetor normal ao plano α é, por exemplo, $\vec{n}(2,1,1)$.

A reta perpendicular ao plano α e que contém o ponto *C* tem a seguinte equação vetorial:

$$(x, y, z) = (-1,0,4) + k(2,1,1), k \in \mathbb{R}$$

Assim, os pontos da reta são da forma $(-1 + 2k, k, 4 + k), k \in \mathbb{R}$.

Substituindo na equação do plano:

$2(-1 + 2k) + k + 4 + k - 3 = 0 \Leftrightarrow -2 + 4k + k + 4 + k - 3 = 0 \Leftrightarrow 6k = 1 \Leftrightarrow k = \dfrac{1}{6}$

Logo, o ponto de interseção da reta com o plano tem coordenadas $\left(-1 + \frac{2}{6}, \frac{1}{6}, 4 + \frac{1}{6}\right) = \left(-\frac{2}{3}, \frac{1}{6}, \frac{25}{6}\right)$.

Assim, a distância entre o ponto *C* e o plano é dada por:

$\sqrt{\left(-1 + \frac{2}{3}\right)^2 + \left(0 - \frac{1}{6}\right)^2 + \left(4 + \frac{25}{6}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{9} + \frac{1}{36} + \frac{1}{36}} = \sqrt{\frac{1}{6}}$

Logo, o raio da superfície esférica é $\sqrt{\frac{1}{6}}$ e a sua equação é $(x + 1)^2 + y^2 + (z - 4)^2 = \frac{1}{6}$.

38. Um vetor diretor da reta s é $\vec{s}(-5, p, 0)$. Um vetor normal ao plano α é $\vec{n}(1, p, -1)$.

Para que a interseção da reta com o plano seja um conjunto vazio, a reta tem de ser (estritamente) paralela ao plano, ou seja, estes dois vetores têm de ser perpendiculares e qualquer ponto da reta s não pode pertencer ao plano α.

$\vec{r} \cdot \vec{n} = 0 \Leftrightarrow (-5, p, 0) \cdot (1, p, -1) = 0 \Leftrightarrow -5 + p^2 = 0 \Leftrightarrow p = \sqrt{5} \vee p = -\sqrt{5}$

- $p = \sqrt{5}$

$s: x = 1 - 5k \;\wedge\; y = 2 + \sqrt{5}k \;\wedge\; z = 3, k \in \mathbb{R}$

$\alpha: x + \sqrt{5}y - z = 1$

$(1, 2, 3)$ pertence a α?

$1 + 2\sqrt{5} - 3 = 1$

$2\sqrt{5} - 2 = 1$, que é uma proposição verdadeira.

Logo, $(1, 2, 3)$ não pertence a α e a reta s é estritamente paralela a α.

- $p = -\sqrt{5}$

$s: x = 1 - 5k \;\wedge\; y = 2 - \sqrt{5}k \;\wedge\; z = 3, k \in \mathbb{R}$

$\alpha: x - \sqrt{5}y - z = 1$

$(1, 2, 3)$ pertence a α?

$1 - 2\sqrt{5} - 3 = 1$

$-2\sqrt{5} - 2 = 1$, que é uma proposição falsa.

Logo, $(1, 2, 3)$ não pertence a α e a reta s é estritamente paralela a α.

A interseção da reta s com o plano α é o conjunto vazio para $p \in \{-\sqrt{5}, \sqrt{5}\}$

39. $\overrightarrow{XY} = (-x_1, y_1, 0)$ e $\overrightarrow{XZ} = (-x_1, 0, z_1)$

Seja $\vec{n}(a, b, c)$ um vetor perpendicular a $\overrightarrow{XY}$ e a $\overrightarrow{XZ}$:

$$\begin{cases} (a, b, c) \cdot (-x_1, y_1, 0) = 0 \\ (a, b, c) \cdot (-x_1, 0, z_1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -ax_1 + by_1 = 0 \\ -ax_1 + z_1 c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = \frac{x_1}{y_1} a \\ c = \frac{x_1}{z_1} a \end{cases}$$

$\vec{n}\left(a, \frac{x_1}{y_1} a, \frac{x_1}{z_1} a\right)$, com $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

Se $a = \frac{1}{x_1}$, por exemplo, então $\vec{n}\left(\frac{1}{x_1}, \frac{1}{y_1}, \frac{1}{z_1}\right)$.

O plano XYZ pode ser definido por $\frac{x}{x_1} + \frac{y}{y_1} + \frac{z}{z_1} + d = 0$

$X(x_1, 0{,}0)$ pertence ao plano. Assim:

$\frac{x_1}{x_1} + d = 0 \Leftrightarrow 1 + d = 0 \Leftrightarrow d = -1$

O plano pretendido pode ser definido por $\frac{x}{x_1} + \frac{y}{y_1} + \frac{z}{z_1} - 1 = 0$, como queríamos mostrar.

40. $\vec{n}_{ABC}\left(15{,}12, \frac{11}{2}\right)$

$ABC: 15x + 12y + \frac{11}{2} z + d = 0$

Como o ponto de coordenadas $\left(2, \frac{15}{6}, 0\right)$ pertence ao plano *ABC*, vem que:

$15 \times 2 + 12 \times \frac{15}{6} + d = 0 \Leftrightarrow 30 + 30 + d = 0 \Leftrightarrow d = -60$

$ABC: 15x + 12y + \frac{11}{2} z - 60 = 0$

Um ponto genérico da reta *OC* é $(2 - k, 2 - k, 12 - 6k)$, com $k \in \mathbb{R}$.

C é o ponto de interseção da reta *OC* com o plano *ABC*.

Determinemos *C*:

$15(2 - k) + 12(2 - k) + \frac{11}{2}(12 - 6k) - 60 = 0$

$\Leftrightarrow 30 - 15k + 24 - 12k + 66 - 33k - 60 = 0$

$\Leftrightarrow -60k + 60 = 0$

$\Leftrightarrow k = 1$

Logo, $C(1{,}1{,}6)$.

$A(x,0,0)$ pertence ao plano *ABC*. Assim:

$15x - 60 = 0 \Leftrightarrow x = 4 \qquad A(4,0,0)$

$B(0,y,0)$ pertence ao plano ABC. Assim:

$12y - 60 = 0 \Leftrightarrow y = 5 \qquad B(0,5,0)$

O volume da pirâmide é:

$$V = \frac{\frac{4\times 5}{2}\times 6}{3} = 20 \text{ u.v.}$$

41. $A(a,0,0), C(0,a,0), V\left(\frac{a}{2},\frac{a}{2},3a\right)$, com $a \in \mathbb{R}^+$

$\overrightarrow{AC} = (-a,a,0)$

$\overrightarrow{AV} = \left(-\frac{a}{2},\frac{a}{2},3a\right)$

$\|\overrightarrow{AC}\| = \sqrt{(-a)^2 + a^2 + 0^2} = \sqrt{2a^2} = \sqrt{2}|a| = \sqrt{2}a$

$\|\overrightarrow{AV}\| = \sqrt{\left(-\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 + 3a^2} = \sqrt{\frac{19}{2}}|a| = \sqrt{\frac{19}{2}}a$

$\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AV} = \frac{a^2}{2} + \frac{a^2}{2} + 0 = a^2$

$V\hat{A}C = \left(\widehat{\overrightarrow{AV}, \overrightarrow{AC}}\right)$

$\cos\left(\widehat{\overrightarrow{AV}, \overrightarrow{AC}}\right) = \frac{a^2}{\sqrt{2}a \times \sqrt{\frac{19}{2}}a} \Leftrightarrow \cos\left(\widehat{\overrightarrow{AV}, \overrightarrow{AC}}\right) = \frac{1}{\sqrt{19}} \Leftrightarrow \cos\left(\widehat{\overrightarrow{AV}, \overrightarrow{AC}}\right) = \frac{\sqrt{19}}{9}$

Logo, $V\hat{A}C \approx 76{,}74°$.

42.

42.1. $\overrightarrow{AB} = (2,4,1) - (1,3,2) = (1,1,-1)$

$\overrightarrow{AB}$ é perpendicular a $\overrightarrow{BC}$, pois o triângulo [*ABC*] é retângulo em *B*, por estar inscrito numa semicircunferência.

$\overrightarrow{AB}$ é perpendicular a $\overrightarrow{CD}$, pois *CD* é perpendicular ao plano que contém a base do cilindro.

Logo, $\overrightarrow{AB}$ é um vetor normal ao plano *BCD.*

Assim, uma equação cartesiana do plano *BCD* pode ser:

$$1(x-2) + 1(y-4) - (z-1) = 0 \Leftrightarrow x - 2 + y - 4 - z + 1 = 0$$
$$\Leftrightarrow x + y - z - 5 = 0$$

42.2. $\overrightarrow{CD}$ é um vetor normal ao plano *ABC* e, como tal, é colinear com (0,1,1).

Assim, $\overrightarrow{CD} = (0,k,k)$, para algum *k* real.

Como a altura do cilindro é $2\sqrt{2}$, tem-se:

$$\|\overrightarrow{CD}\| = 2\sqrt{2} \Leftrightarrow \sqrt{0^2 + k^2 + k^2} = \sqrt{8} \Leftrightarrow 2k^2 = 8 \Leftrightarrow k = 2 \ \vee \ k = -2$$

Logo, $\overrightarrow{CD} = (0,2,2)$, de acordo com a figura.

Um ponto da base superior do cilindro é:

$A + \overrightarrow{CD} = (1,3,2) + (0,2,2) = (1,5,4)$

Como a base superior do cilindro é paralela ao plano *BCD*, então um vetor normal a este plano é também um vetor normal ao plano que contém essa base.

Assim, (0,1,1) é um vetor normal ao plano que contém a base superior do cilindro.

Tem-se então que uma equação da base superior do cilindro é:

$$0(x-1) + 1(y-5) + 1(z-4) = 0 \Leftrightarrow y - 5 + z - 4 = 0$$
$$\Leftrightarrow y + z - 9 = 0$$

42.3. $\begin{cases} y + z = 5 \\ 16x - 5y + 11z = 23 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 5 - z \\ 16x - 5(5-z) + 11z = 23 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \_\_\_\_\_\_ \\ 16x - 25 + 5z + 11z = 23 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \_\_\_\_\_\_ \\ 16x + 16z = 48 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \_\_\_\_\_\_ \\ x + z = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 5 - z \\ x = 3 - z \end{cases}$$

Assim, os pontos que pertencem à interseção dos dois planos são os pontos da forma $(3 - z, 5 - z, z), z \in \mathbb{R}$.

Mas, $(3 - z, 5 - z, z) = (3,5,0) + z(-1,-1,1), z \in \mathbb{R}$.

Logo, uma equação vetorial da reta de interseção dos dois planos é:

$$(x, y, z) = (3,5,0) + k(-1,-1,1), k \in \mathbb{R}.$$

43.

43.1. Sabemos que [ABCD] é um quadrado. Seja *M* o ponto médio de [*AC*].

$M = \left(\frac{0+1}{2}, \frac{0+0}{2}, \frac{1+0}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\right)$

Uma vez que a reta *BD* é paralela ao eixo Oy e que *M* é um ponto desta reta, então a sua equação vetorial é $(x, y, z) = \left(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\right) + k(0,1,0), k \in \mathbb{R}$.

Assim, as coordenadas do ponto *B* são da forma $\left(\frac{1}{2}, y, \frac{1}{2}\right)$ e as coordenadas do ponto *D* são da forma $\left(\frac{1}{2}, -y, \frac{1}{2}\right)$, sendo y um número real positivo.

$$\|\overrightarrow{AC}\| = \|\overrightarrow{BD}\| \Leftrightarrow \sqrt{1^2 + 0^2 + (-1)^2} = \sqrt{0^2 + (-2y)^2 + 0^2} \Leftrightarrow \sqrt{2} = \sqrt{4y^2}$$
$$\Leftrightarrow 4y^2 = 2$$
$$\Leftrightarrow y^2 = \frac{1}{2}$$

Cálculos auxiliares

$\overrightarrow{AC} = C - A = (1,0,0) - (0,0,1) = (1,0,-1)$

$\overrightarrow{BD} = D - B = \left(\frac{1}{2}, -y, \frac{1}{2}\right) - \left(\frac{1}{2}, y, \frac{1}{2}\right) = (0, -2y, 0)$

Como $y > 0$, então $y = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Logo, $B\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2}\right)$ e $D\left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

43.2. E é o ponto médio de [*AC*], logo, $E\left(\frac{1}{2},0,\frac{1}{2}\right)$.

A reta *EV* é perpendicular ao plano *ABC*.

Vamos determinarum vetor $\vec{n}$ normal ao plano *ABC*:

$$\begin{cases}(a,b,c).\overrightarrow{AC}=0\\(a,b,c).\overrightarrow{BD}=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(a,b,c).(1{,}0,-1)=0\\(a,b,c).\left(0,-\sqrt{2},0\right)=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a-c=0\\-\sqrt{2}b=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=c\\b=0\end{cases}$$

$\vec{n}(a,0,a)$, com $a\in\mathbb{R}\backslash\{0\}$

Se $a=1$, por exemplo, então $\vec{n}(1{,}0{,}1)$.

Assim, uma equação vetorial da reta EV pode ser:

$$(x,y,z)=\left(\frac{1}{2},0,\frac{1}{2}\right)+k(1{,}0{,}1),k\in\mathbb{R}$$

43.3. Sabemos que o vetor de coordenadas (1,0,1) é normal ao plano *ABC*, logo também é normal a qualquer plano que lhe seja paralelo.

Assim, uma equação do plano paralelo a *ABC* que contém o ponto *V* é do tipo $x+z+d=0$.

Determinemos as coordenadas de *V*:

$$V_{\text{pirâmide}}=\sqrt{2}\Leftrightarrow\frac{1}{3}A_b\times h=\sqrt{2}\Leftrightarrow\frac{1}{3}\left\|\overrightarrow{AB}\right\|^2\times h=\sqrt{2}\Leftrightarrow\frac{1}{3}\times 1\times h=\sqrt{2}\Leftrightarrow h=3\sqrt{2}$$

Cálculos auxiliares

$$\overrightarrow{AB}=B-A=\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{1}{2}\right)-(0{,}0{,}1)=\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{1}{2}\right)$$

$$\left\|\overrightarrow{AB}\right\|=\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}}=\sqrt{1}=1$$

$$\left\|\overrightarrow{EV}\right\|=3\sqrt{2}\Leftrightarrow\sqrt{k^2+k^2}=3\sqrt{2}\Leftrightarrow 2k^2=18\Leftrightarrow 2k^2=9\Leftrightarrow k=\pm 3$$

Cálculo auxiliar

$$\overrightarrow{EV}=k(1{,}0{,}1),k\in\mathbb{R}=$$
$$=(k,0,k),k\in\mathbb{R}$$

$$\overrightarrow{EV}=(3{,}0{,}3)$$

$$V=E+\overrightarrow{EV}=\left(\frac{1}{2},0,\frac{1}{2}\right)+(3{,}0{,}3)=\left(\frac{7}{2}0,\frac{7}{2}\right)$$

Como *V* pertence ao plano, vem que:

$$\frac{7}{2}+\frac{7}{2}+d=0\Leftrightarrow 7+d=0\Leftrightarrow d=-7$$

Assim, uma equação do plano pretendida é $x+z-7=0$.