Escola Secundária de Penafiel

# Ficha de Trabalho nº 6

**Preparação para exame**

**12.º Ano de Escolaridade** | Turmas G-K

## PROBABILIDADES E CÁLCULO COMBINATÓRIO

1. Numa caixa estão três fichas verdes, duas amarelas e quatro brancas. Vão ser retiradas as fichas, uma a uma, e colocadas em fila numa mesa.
   As fichas da mesma cor não se distinguem.

   1.1. Quantas sequências se podem construir se não houver qualquer restrição?
   1.2. Quantas sequências se podem construir se as fichas verdes saem todas seguidas no início da sequência?
   1.3. De todas as sequências que se podem construir, escolhe-se uma ao caso. Qual é a probabilidade de a sequência escolhida iniciar com uma ficha amarela e terminar também com uma ficha amarela?

2. Numa escola do distrito de Santarém foi realizado um estudo com todos os alunos do 12º.ano, com o objetivo de saber em que cursos superiores pretendiam ingressar. Sabe-se que participaram no referido estudo 200 alunos, sendo 30% do sexo masculino. Pretende-se escolher ao acaso seis alunos para formar uma comissão que vai organizar esse estudo. Qual é a probabilidade dessa comissão ser constituída por alunos dos dois sexos, mais rapazes do que raparigas e a Joana, que é uma aluna da escola, ser um dos elementos escolhidos?

   Uma resposta possível a este problema é $\dfrac{139 \times^{60} C_4 +^{60} C_5}{^{200}C_6}$

   Numa pequena composição, explica porquê.

   Deves organizar a tua composição de acordo com os seguintes tópicos:

   Explicação do número de casos possíveis;
   Explicação do número de casos favoráveis.
   Referência à Lei de Laplace;

## TRIGONOMETRIA

1. Na figura 1 está representado, em referencial o.n. $xOy$, a circunferência de centro O e raio 4.

   Sabe-se que:

   - A e C são os pontos de interseção da circunferência com os semieixos positivos $Ox$ e $Oy$, respetivamente;
   - O ponto P desloca-se ao longo do arco AC, nunca coincidindo com o ponto A nem com o ponto C;
   - Os pontos Q, R e S, acompanham o movimento do ponto P, de tal modo que se tem sempre, $[PS]//[QR]$ ; $[PQ]//[RS]$ ; $[PS]\perp[AB]$ e $[PQ]\perp[CD]$;
   - $\beta$ é a amplitude, em radianos, do ângulo $AOP$, $\left(\beta \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[\right)$.

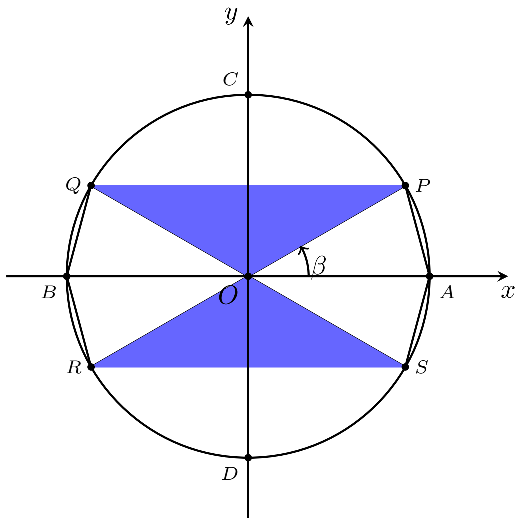


Figura 1

**Resolve os itens seguintes sem recorreres à calculadora.**

1.1. Mostra que a área da região sombreada, é dada, em função de $\beta$, por $A(\beta) = 32 \sin\beta \cdot \cos\beta$.

1.2. Sabendo que $\beta \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[$ e que $2tg(\pi - \beta) + tg(\pi + \beta) = -\frac{1}{3}$, determina o valor exato de $A(\beta)$.

2. Na figura 2 está representado o círculo trigonométrico e nele o ângulo de amplitude $x$.

Sabe-se que:

- a reta $r$ é tangente à circunferência no ponto de coordenadas $(1; 0)$;
- o ponto $P$ pertence à circunferência;
- o ponto $T$ é o ponto de interseção da reta $OP$ com a reta $r$;
- a abcissa do ponto $P$ é $\frac{4}{5}$.

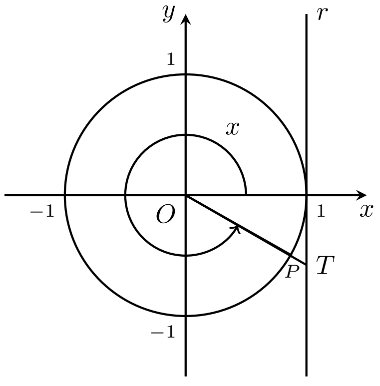


Figura 2

2.1. Determina as coordenadas do ponto $P$.

2.2. Determina a ordenada do ponto $T$.

2.3. Mostra que $\dfrac{tg(5\pi + x)}{\sin\left(\frac{5\pi}{2} - x\right) \cdot \cos\left(\frac{3\pi}{2} + x\right)} = \dfrac{25}{16}$.

3. Determina os valores de $m$ para os quais a condição $\cos x = \dfrac{1 - 2m^2}{3} \wedge x \in \left]\frac{\pi}{2}; \pi\right]$ é possível.

4. Considera, em $\mathbb{R}$, a função $g$, definida por $g(x) = \sqrt{3} - 4\sin(3x)$.

4.1. Determina o valor exato de $g\left(\frac{\pi}{9}\right)$.

4.2. Determina o contradomínio da função $g$.

4.3. Indica, justificando, se é verdadeira ou falsa, a afirmação: "a função $g$ admite $\frac{8\pi}{3}$ como período positivo mínimo".
**Nota:** Uma função $f$ admite $\tau$ como período, se, e somente se, $f(x + \tau) = f(x), \forall x, x + \tau \in D_f$

4.4. Resolve, em $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, a equação $g(x) = 3g(0)$.

5. Na figura 3 está representado, num referencial o.n. $xOy$, o gráfico da função $f$, definida em $[-\pi; \pi]$, por $f(x) = 1 - 2\cos(2x)$ e o triângulo $[ABC]$.

Sabe-se que:

- $A$ é ponto de interseção do gráfico de $f$ com o eixo $Oy$
- $B$ é ponto do gráfico onde a função $f$ atinge o seu valor máximo.
- $C$ é ponto do gráfico onde a função $f$ atinge o seu valor máximo.

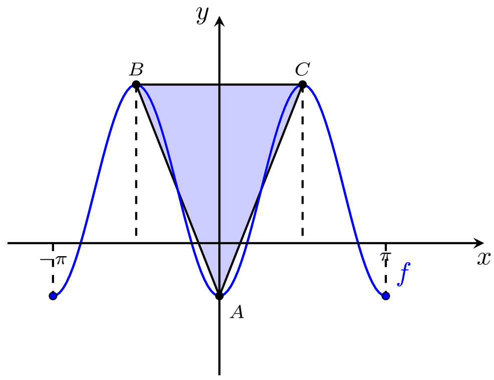


Figura 3

**Sem recorreres à calculadora gráfica**, Determina o valor exato da área do triângulo $[ABC]$.

**Sugestão de resolução:**

Na tua resolução deves:

- Determinar a ordenada do ponto $A$
- Determinar as abcissas dos pontos $B$ e $C$

6. Sejam $f$, $g$ e $h$, as funções definidas,respetivamente, por $f(x) = \sqrt{2} - 2\sin^2(2x)$, $g(x) = 4\cos(2x)$ e $h(x) = \tan\left(\frac{x}{4}\right)$.

   6.1. Mostra que $f(0) - \frac{1}{2}g\left(\frac{\pi}{8}\right) = 0$.

   6.2. Mostra que o contradomínio da função $g$ é $[-4; 4]$.

   6.3. Mostra que o contradomínio da função $f$ é $[\sqrt{2} - 2; \sqrt{2}]$.

   6.4. Mostra que a função $f$ admite $2\pi$ como período.

   6.5. Determina o período positivo mínimo da função $g$.

   6.6. Determina o período positivo mínimo da função $h$.

   6.7. Mostra que as funções $f$ e $g$ são pares e a função $h$ é ímpar.

   6.8. Sabe-se que $\alpha \in \left]-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right[$ e que $\sin(2\alpha) = -\frac{12}{13}$.

   Determina o valor exato de $\frac{g(\alpha)}{h(8\alpha)}$.