Exercícios de aplicação (págs. 20 a 27)

1.

1.1. $x^2+y^2+4x-10y+20=0 \Leftrightarrow x^2+4x+4+y^2-10y+25=-20+4+25$

$$\Leftrightarrow (x+2)^2+(y-5)^2=9$$

Centro da circunferência: $C(-2,5)$

Raio: $r=\sqrt{9}=3$

Uma condição que define o conjunto de pontos a sombreado é:

$$(x+2)^2+(y-5)^2 \leq 9 \ \wedge \ x \geq -2 \ \wedge \ y \leq 5$$

1.2. Quando $y=-x$, vem que:

$$x^2+y^2+4x-10y+20=0 \Leftrightarrow x^2+(-x)^2+4x-10\times(-x)+20=0$$

$$\Leftrightarrow x^2+x^2+4x+10x+20=0$$

$$\Leftrightarrow 2x^2+14x+20=0$$

$$\Leftrightarrow x^2+7x+10=0$$

$$\Leftrightarrow x=\frac{-7\pm\sqrt{7^2-4\times1\times10}}{2\times1}$$

$$\Leftrightarrow x=\frac{-7\pm\sqrt{9}}{2}$$

$$\Leftrightarrow x=\frac{-7+3}{2} \ \vee \ x=\frac{-7-3}{2}$$

$$\Leftrightarrow x=-2 \ \vee \ x=-5$$

Os pontos de interseção são, então, $P_1(-2,2)$ e $P_2(-5,5)$.

1.3.

a) Seja M o ponto médio de $[AB]$: $M=\left(\frac{-2-\frac{1}{3}}{2},\frac{1+3}{2}\right)=\left(-\frac{7}{6},2\right)$

A equação vetorial pretendida é $(x,y)=\left(-\frac{7}{6},2\right)+k(0,1), k \in \mathbb{R}$.

b) $\overrightarrow{AB}=B-A=\left(-\frac{1}{3},3\right)-(-2,1)=\left(-\frac{1}{3}+2,3-1\right)=\left(\frac{5}{3},2\right)$

Para ser colinear com $\overrightarrow{AB}$ é da forma $k\overrightarrow{AB}$, isto é, $\left(\frac{5}{3}k,2k\right), k \in \mathbb{R}$.

Para que tenha norma $\sqrt{61}$:

$$\sqrt{\left(\frac{5}{3}k\right)^2+(2k)^2}=\sqrt{61} \Leftrightarrow \frac{25}{9}k^2+4k^2=61 \Leftrightarrow \frac{61}{9}k^2=61$$

$$\Leftrightarrow k^2=9$$

$$\Leftrightarrow k=3 \ \vee \ k=-3$$

Para que o vetor tenha sentido contrário ao de $\overrightarrow{AB}$, tem-se que $k=-3$.

Assim, o vetor nas condições pretendidas tem coordenadas $(-5,-6)$.

LeYa EDUCAÇÃO Daniela Raposo e Luzia Gomes

2. $2a = 26 \Leftrightarrow a = 13$

$2c = 10 \Leftrightarrow c = 5$

$b = \sqrt{13^2 - 5^2} = \sqrt{169 - 25} = \sqrt{144} = 12$

Portanto, a equação cartesiana da elipse é $\frac{x^2}{169} + \frac{y^2}{144} = 1$.

Logo:

$\frac{y^2}{144} = 1 \Leftrightarrow y^2 = 144 \Leftrightarrow y = \pm 12$

Os pontos de intersecção da elipse com o eixo Oy são $(0, 12)$ e $(0, -12)$.

3.

3.1. $4x + y - 2z + d = 0$

Como passa no ponto (1, 3, −4), tem-se:

$4 \times 1 + 3 - 2 \times (-4) + d = 0 \Leftrightarrow 15 + d = 0 \Leftrightarrow d = -15$

Uma equação cartesiana do plano pretendido é $4x + y - 2z - 15 = 0$

3.2. $\overrightarrow{AB} = B - A = (-5,2,2) - (-6,1,1) = (1,1,-1)$

$\overrightarrow{AC} = C - A = (3,1,-2) - (-6,1,1) = (9,0,-3)$

$\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$ não são colineares.

$$\begin{cases} (a,b,c) \cdot (1,1,-1) = 0 \\ (a,b,c) \cdot (9,0,-3) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + b - c = 0 \\ 9a - 3c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overline{\qquad\qquad} \\ 9a = 3c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + b - 3a = 0 \\ c = 3a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 2a \\ c = 3a \end{cases}$$

$\vec{n}(a, 2a, 3a)$, com $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

Se $a = 1$, então $ABC: x + 2y + 3z + d = 0$.

O ponto $A(-6,1,1) \in ABC$, logo:

$-6 + 2 \times 1 + 3 \times 1 + d = 0 \Leftrightarrow d = 1$

Uma equação cartesiana do plano pretendido é $x + 2y + 3z + 1 = 0$.

3.3. As retas *r* e *s* são concorrentes. Por conseguinte, definem um plano.

$$\begin{cases} (a,b,c) \cdot (-5,1,2) = 0 \\ (a,b,c) \cdot (-5,2,2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -5a + b + 2c = 0 \\ -5a + 2b + 2c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 5a - 2c \\ -5a + 2(5a - 2c) + 2c = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \overline{\qquad\qquad} \\ 5a - 2c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 5a - 2 \times \frac{5}{2}a \\ c = \frac{5}{2}a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 0 \\ c = \frac{5}{2}a \end{cases}$$

$\vec{n}\left(a, 0, \frac{5}{2}a\right)$, com $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

Se $a = 2$, $\vec{n}(2,0,5)$, então $\alpha: 2x + 5z + d = 0$.

O ponto $(3, -1, -1) \in \alpha$, logo:

$2 \times 3 + 5 \times (-1) + d = 0 \Leftrightarrow d = -1$

Uma equação cartesiana do plano α é $2x + 5z - 1 = 0$.

Daniela Raposo e Luzia Gomes

3.4. Seja $A(-1,1,3)$ um ponto da reta *r* e $B(-2,-4,1)$ um ponto da reta *s*.

As retas *r* e *s* são paralelas. Por conseguinte, definem um plano.

$\overrightarrow{AB}=B-A=(-2,-4,1)-(-1,1,3)=(-1,-5,-2)$

$$\begin{cases}(a,b,c)\cdot(-1,-5,-2)=0\\(a,b,c)\cdot(-1,1,1)=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-a-5b-2c=0\\-a+b+c=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-b-c-5b-2c=0\\b+c=a\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}-6b-3c=0\\\underline{\qquad\quad}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-6b=3c\\\underline{\qquad}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}c=-2b\\b-2b=a\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}c=-2b\\a=-b\end{cases}$$

$\vec{n}(-b,b,-2b)$, com $b\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$

Se $b=1$, $\vec{n}(-1,1,-2)$.

Logo, α: $-x+y-2z+d=0$.

O ponto $A(-1,1,3)\in$ α, logo:

$-(-1)+1-2\times 3+d=0\Leftrightarrow -4+d=0\Leftrightarrow d=4$

Uma equação cartesiana do plano α é $-x+y-2z+4=0$

3.5. $\begin{cases}6=8+k\\-2=-1+2k\\-3=-2+3k\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-2=k\\-\frac{1}{2}=k\\-\frac{1}{3}=k\end{cases}$

Logo, o ponto *A* não pertence à reta *r*.

Assim, o ponto *A* e a reta *r* definem um plano.

$$\begin{cases}(a,b,c)\cdot(1,2,3)=0\\(a,b,c)\cdot(2,1,1)=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a+2b+3c=0\\2a+b+c=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=-2b-3c\\2\times(-2b-3c)+b+c=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\underline{\qquad\qquad}\\-4b-6c+b+c=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\underline{\qquad\qquad}\\-3b-5c=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\underline{\qquad\qquad}\\b=-\frac{5c}{3}\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}a=-2\times\left(-\frac{5}{3}c\right)-3c\\\underline{\qquad\qquad\qquad}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=\frac{1}{3}c\\b=-\frac{5c}{3}\end{cases}$$

$\vec{n}(\frac{1}{3}c,-\frac{5c}{3},c)$, com $c\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$

Se $c=3$, $\vec{n}(1,-5,3)$.

Assim, α: $x-5y+3z+d=0$.

Cálculo auxiliar
Como o ponto *A* pertence ao plano, temos:
$6-5\times(-2)+3\times(-3)+d=0\Leftrightarrow 6+10-9+d=0\Leftrightarrow d=-7$

Uma equação cartesiana do plano pretendido é $x-5y+3z-7=0$.

4. A partir da equação vetorial da reta *r*, podemos concluir que qualquer ponto desta reta é do tipo $(2+k,1-k,0)$, com $k\in\mathbb{R}$.

Uma vez que procuramos um ponto que pertença às retas *r* e *s*, então as suas coordenadas têm de obedecer às condições das duas retas em simultâneo.

Assim, vamos substituir x, y e z no sistema de equações paramétricas da reta *s* pelas coordenadas do ponto genérico da reta *r*:

$$\begin{cases} 2+k=-1-2\lambda \\ 1-k=1-\lambda \\ 0=-1-\lambda \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k=-1+2-2 \\ \_\_\_\_\_\_\_\_ \\ \lambda=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k=-1 \\ \_\_\_\_ \\ \lambda=-1 \end{cases}$$

Assim, substituindo *k* por -1 no ponto genérico da reta *r* ou substituindo λ por -1 no sistema de equações paramétricas da reta *s*, obtemos as coordenadas do ponto de interseção das duas retas: $(2+(-1), 1-(-1), 0) = (1,2,0)$.

5. A partir da equação vetorial da reta *r*, concluímos que qualquer ponto desta reta é do tipo $(3+2k, -2, 2+3k)$, com $k \in \mathbb{R}$. Uma vez que procuramos um ponto da reta *r* e do plano α, as coordenadas deste ponto têm de obedecer às condições da reta *r* e do plano α em simultâneo. Logo:

$$2(3+2k)-(-2)+3(2+3k)=1 \Leftrightarrow 6+4k+2+6+9k=1 \Leftrightarrow 13k=-13$$
$$\Leftrightarrow k=-1$$

O ponto de intersecção da reta *r* com o plano α é $\left(3+2\times(-1), -2, 2+3(-1)\right) = (1,-2,-1)$.

6. Uma equação vetorial da reta *AE* é $(x,y,z)=(3,6,2)+k(2,3,6), k \in \mathbb{R}$.

Um ponto genérico desta reta é $(3+2k, 6+3k, 2+6k)$, com $k \in \mathbb{R}$.

$$2(3+2k)+3(6+3k)+6(2+6k)+13=0 \Leftrightarrow 6+4k+18+9k+12+36k+13=0$$
$$\Leftrightarrow 49k+49=0$$
$$\Leftrightarrow k=-1$$

As coordenadas do ponto *E* são $\left(3+2\times(-1), 6+3\times(-1), 2+6\times(-1)\right) = (1,3,-4)$.

$\overrightarrow{AE} = E - A = (1,3,-4)-(3,6,2) = ((-2,-3,-6)$

$\|\overrightarrow{AE}\| = \sqrt{(-2)^2+(-3)^2+(-6)^2} = \sqrt{49} = 7$

O volume do cubo é $V = 7^3 = 343$ u. v.

7.

7.1. Sejam $\vec{n}_\alpha(2,-3,4)$ e $\vec{n}_\beta(-4,6,-8)$ os vetores normais aos planos α e β, respetivamente.

$$\frac{2}{-4} = \frac{-3}{6} = \frac{4}{-8} = -\frac{1}{2}$$

Logo, $\vec{n}_\alpha$ e $\vec{n}_\beta$ são vetores colineares.

$$-4x+6y-8z-1=0 \Leftrightarrow \frac{-4x}{-2}+\frac{6y}{-2}-\frac{8z}{-2}-\frac{1}{-2}=0 \Leftrightarrow 2x-3y+4z+\frac{1}{2}=0$$

Assim, outra equação cartesiana de β é $2x-3y+4z+\frac{1}{2}=0$.

Portanto, os planos α e β são paralelos, em sentido estrito e a sua interseção é o conjunto vazio.

7.2. $-4x+6y-8z-2=0 \Leftrightarrow \frac{-4x}{-2}+\frac{6y}{-2}-\frac{8z}{-2}-\frac{2}{-2}=0 \Leftrightarrow 2x-3y+4z+1=0$

Assim, outra equação cartesiana de β é $2x-3y+4z+1=0$.

Portanto, os planos são coincidentes e a sua interseção é o próprio plano α ou β.

7.3. Sejam $\vec{n}_\alpha(0,3,1)$ e $\vec{n}_\beta(-1,1,0)$ os vetores normais aos planos α e β, respetivamente.

Como $\frac{0}{-1} \neq \frac{3}{1}$, os vetores $\vec{n}_\alpha$ e $\vec{n}_\beta$ não são colineares e, portanto, os planos são concorrentes.

$\begin{cases} 3y+z-10=0 \\ -x+y=-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z=-3y+10 \\ -x=-y-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z=-3y+10 \\ x=y+3 \end{cases}$

Assim, o ponto genérico desta reta é do tipo $(y+3, y, -3y+10)$, com $y \in \mathbb{R}$.

$(y+3, y, -3y+10) = (3,0,10) + y(1,1,-3), y \in \mathbb{R}$

Assim, a partir do ponto genérico, obtemos a equação vetorial da reta que resulta da interseção dos planos α e β:

$$(x,y,z) = (3,0,10) + k(1,1,-3), k \in \mathbb{R}$$

Exercícios propostos (págs. 28 a 44)

Itens de seleção (págs. 28 a 34)

1. O declive da reta referida é $m = \frac{3\sqrt{3}}{3} = \sqrt{3}$.

Uma equação reduzida desta reta é da forma $y = \sqrt{3}x + b$. Como $A \in r$, então:

$1 = \sqrt{3} \times 3 + b \Leftrightarrow 1 - 3\sqrt{3} = b$

Assim, $y = \sqrt{3}x + 1 - 3\sqrt{3}$.

Seja α a inclinação da reta r. Então, $\text{tg}\alpha = \sqrt{3}$. Logo, $\alpha = \text{tg}^{-1}(\sqrt{3})$, ou seja, $\alpha = 60°$.

Opção (C)

2. O declive da reta r é $-\frac{1}{3}$. Logo, o declive da reta s, que é perpendicular à reta r, é 3. Assim, a equação reduzida da reta r é da forma $y = 3x + b$. Como o ponto de coordenadas $(1,2)$ pertence à reta s, tem-se:

$2 = 3 \times 1 + b \Leftrightarrow b = -1$

Logo, $s: y = 3x - 1$.

Opção (B)

3. O declive da reta de equação $y = 2x + 5$ é 2, pelo que o declive de uma reta que lhe seja perpendicular é $-\frac{1}{2}$. Na opção (A), temos $y + \frac{1}{2}x - \sqrt{3} = 0 \Leftrightarrow y = -\frac{1}{2}x + \sqrt{3}$.

Opção (A)

4. A circunferência representada na figura tem centro no ponto de coordenadas $(4, 2)$ e raio 2. Assim, uma equação dessa circunferência é $(x-4)^2+(y-2)^2=4$, o que excluiu as opções (B) e (C).

As retas p e r representadas na figura são perpendiculares, pelo que o produto dos seus declives é igual a -1. Assim, excluiu-se a opção (A).

Opção (D)

5. Basta construir, num referencial o.n. Oxy uma circunferência de centro $(1,-2)$ e raio 5.

Opção (D)

6. $(\vec{v}-\vec{u})\cdot\vec{u}=\vec{v}\cdot\vec{u}-\vec{u}\cdot\vec{u}=0-\|\vec{u}\|^2=-\|\vec{u}\|^2$

Opção (C)

7. $2c=10\Leftrightarrow c=5$ $\qquad\qquad$ $2a=12\Leftrightarrow a=6$

Logo, $b^2=6^2-5^2=36-25=11$. Daqui, vem que $a^2=36$ e $b^2=11$.

Opção (D)

8. **Opção (C)** (conclusão a partir da imagem que ilustra o enunciado.)

9. Um plano perpendicular ao eixo das abcissas é da forma $x=k, k\in\mathbb{R}$. Se este plano passa no ponto *A*, então a equação do plano é $x=1$.

Opção (A)

10. $\|\vec{u}\|=\sqrt{3^2+0^2+(-1)^2}=\sqrt{10}$

$\overrightarrow{AB}=(3,0,-1)-(2,-4,-4)=(1,4,3)$ $\qquad\qquad$ $\frac{1}{2}\|\overrightarrow{AB}\|=\frac{1}{2}\sqrt{1^2+4^2+3^2}=\frac{1}{2}\sqrt{26}$

Logo, $\|\vec{u}\|\neq\frac{1}{2}\|\overrightarrow{AB}\|$, o que significa que a proposição p é falsa.

$\frac{3}{1}\neq\frac{0}{4}\neq\frac{-1}{3}$, logo $\vec{u}$ e $\overrightarrow{AB}$ não são colineares e a proposição q é falsa.

$\vec{u}\cdot\overrightarrow{AB}=3\times 1+0\times 4+(-1)\times 3=3-3=0$, ou seja, os vetores $\vec{u}$ e $\overrightarrow{AB}$ são perpendiculares e a proposição r é verdadeira.

Opção (D)

11. A reta s tem como vetor diretor o vetor de coordenadas $(0,0,1)$. Portanto, esta reta é paralela ao eixo das cotas e contém o ponto de coordenadas $(4,5,6)$.

Logo, $x=4\ \wedge\ y=5$ é uma condição que também define a reta s.

Opção (A)

12. $\begin{cases} x=-5+3k \\ y=1+k \\ z=2-4k \\ y=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} --- \\ 0=1+k \\ --- \\ --- \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} --- \\ k=-1 \\ --- \\ --- \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-5+3\times(-1) \\ --- \\ z=2-4\times(-1) \\ --- \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-8 \\ --- \\ z=6 \\ y=0 \end{cases}$

$(-8,0,6)$ é o ponto de interseção da reta r com o plano xOz.

Opção (C)

13. Como p e q são proposições verdadeiras, $p \wedge \sim q$ é uma proposição falsa.

Opção (C)

14. $\vec{r}(1,2)$ e $\vec{s}(a,-2)$ são vetores diretores das retas r e s, respetivamente. Assim:

$\frac{a}{1}=\frac{-2}{2} \Leftrightarrow a=-1$

Opção (A)

15. $r\colon y=ax-2$ $\vec{s}=(2,-3)$

Logo, $m_s=-\frac{3}{2}$. Assim, $a=\frac{2}{3}$.

Opção (D)

16. O ponto B tem coordenadas $(6,3)$. Uma vez que a circunferência tem raio 3, o ponto C tem coordenadas $(3,0)$. A mediatriz do segmento de reta $[BC]$ é o lugar geométrico dos pontos do plano equidistantes do ponto B e do ponto C. Portanto, um ponto P de coordenadas (x,y) pertence à mediatriz do segmento $[BC]$ se e só se $\overline{PB}=\overline{PC}$.

$$\begin{aligned}\overline{PB}=\overline{PC} &\Leftrightarrow \sqrt{(x-6)^2+(y-3)^2}=\sqrt{(x-3)^2+(y-0)^2} \\ &\Leftrightarrow (x-6)^2+(y-3)^2=(x-3)^2+y^2 \\ &\Leftrightarrow x^2-12x+36+y^2-6y+9=x^2-6x+9+y^2 \\ &\Leftrightarrow -12x+36-6y=-6x \\ &\Leftrightarrow -6y=12x-6x-36 \\ &\Leftrightarrow -6y=6x-36 \\ &\Leftrightarrow y=-x+6\end{aligned}$$

Opção (B)

17. O centro da circunferência é a origem do referencial. Seja *T* o ponto de tangência.

$\overrightarrow{OT}=(3,4)$, pelo que o declive da reta OT é igual a $\frac{4}{3}$. Uma reta que seja tangente à circunferência no ponto *T* é perpendicular à reta OT e tem declive igual a $-\frac{3}{4}$.

Opção (D)

Daniela Raposo e Luzia Gomes

18. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 18 \Leftrightarrow \|\overrightarrow{AB}\| \times \|\overrightarrow{AC}\| \times \cos 60° = 18 \Leftrightarrow x \times x \times \frac{1}{2} = 18 \Leftrightarrow x^2 = 36$

Logo, $x = 6$, ou seja, a medida do lado do triângulo é 6.

Assim, o seu perímetro é $3 \times 6 = 18$.

Opção (A)

19. $\overrightarrow{RS} \cdot \overrightarrow{TO} = \|\overrightarrow{RS}\| \times \|\overrightarrow{TO}\| \times \cos 120° = a \times a \times \left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{a^2}{2}$

Opção (C)

20. A reta tangente à circunferência de centro *C* no ponto *A* é o lugar geométrico dos pontos $P(x, y)$ do plano tais que $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{AP} = 0$.

Opção (B)

21. $x^2 + y^2 = 8 \wedge \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{8} = 1 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 8 \wedge \frac{x^2}{16} + \frac{2y^2}{8 \times 2} = 1$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 = 8 \wedge \frac{x^2 + y^2 + y^2}{16} = 1$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 = 8 \wedge \frac{8 + y^2}{16} = 1$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 = 8 \wedge 8 + y^2 = 16$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 = 8 \wedge y^2 = 8$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 = 8 \wedge y = \pm 2\sqrt{2}$$

Opção (D)

22. $k^2 - 1 = 0 \wedge k^2 - k = 0 \Leftrightarrow k = \pm 1 \wedge (k = 0 \vee k = 1)$

Portanto, $k = 1$.

Opção (C)

23. Um vetor diretor da reta r é $\vec{r}\left(2, -1, \frac{1}{8}\right)$.

$$\left(2, -1, \frac{1}{8}\right) \cdot (16, -8, 1) = 2 \times 16 + (-1) \times (-8) + \frac{1}{8} \times 1 = 32 + 8 + \frac{1}{8} =$$

$$= \frac{321}{8}$$

Ou seja, a reta r não é perpendicular à reta definida por $(x, y, z) = k(16, -8, 1), k \in \mathbb{R}$.

$$\frac{2}{16} = \frac{-1}{-8} = \frac{\frac{1}{8}}{1} = \frac{1}{8}$$

Logo, a reta r é paralela à reta definida por $(x, y, z) = k(16, -8, 1), k \in \mathbb{R}$..

Opção (B)

LeYa EDUCAÇÃO Daniela Raposo e Luzia Gomes

24. Um vetor diretor da reta r é $\vec{r}(2,\frac{5}{3},0)$, que não é colinear com o vetor de coordenadas $(2,5,0)$.

Logo, este não é um vetor diretor da reta r.

Um vetor normal ao plano α é $\vec{n}(6,5,0)$, que não é colinear com o vetor de coordenadas $(6,5,-4)$. Assim, este não é um vetor normal ao plano α.

$$\vec{r}\cdot\vec{n} = 2\times 6 + \frac{5}{3}\times 5 + 0\times 0 = \frac{61}{3}$$

Logo, os vetores $\vec{r}$ e $\vec{n}$ não são perpendiculares e, portanto, a reta r não é estritamente paralela ao plano α. Uma vez que $\frac{2}{6} = \frac{\frac{5}{3}}{5} = \frac{1}{3}$, então $\vec{r}$ é colinear com $\vec{n}$. Logo, a reta r é perpendicular ao plano α.

Opção (D)

25. $x^2 + y^2 + 4y + 4 + z^2 - 6z + 9 \leq -7 + 4 + 9 \Leftrightarrow x^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 \leq 6$

Esta expressão representa uma esfera de centro $(0,-2,3)$ e $r = \sqrt{6}$.

Opção (B)

26. $x^2 + y^2 + z^2 = 25 \ \wedge\ z = 3 \Leftrightarrow x^2 + y^2 + 3^2 = 25 \ \wedge\ z = 3 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 16 \ \wedge\ z = 3$

O perímetro é $2\times\pi\times 4 = 8\pi$.

Opção (B)

27. Um vetor normal ao plano de equação $z = -1$ é, por exemplo, $\vec{n} = (0,0,1)$ e um vetor normal ao plano yOz é, por exemplo, $\vec{n} = (1,0,0)$. Como estes vetores não são colineares, os planos não são paralelos. Por conseguinte, a afirmação C é falsa.

Opção (C)

28. Como $y = -2$ e $y = 4$ são planos tangentes à esfera, então esta esfera tem diâmetro igual a 6 unidades de comprimento. Por conseguinte, a ordenada do centro da esfera é igual a 1. Das quatro opções apresentadas, a única que verifica tal condição é a opção (B).

Opção (B)

29. $\vec{n}_\alpha(2,4,-1)$ e $\vec{n}_\beta(2,k-1,-1)$ são dois vetores normais aos planos α e β, respetivamente.

$$\begin{aligned}\vec{n}_\alpha\cdot\vec{n}_\beta = 0 \Leftrightarrow (2,4,-1)\cdot(2,k-1,-1) = 0 &\Leftrightarrow 4 + 4(k-1) + 1 = 0\\ &\Leftrightarrow 4 + 4k - 4 + 1 = 0\\ &\Leftrightarrow 4k = -1\\ &\Leftrightarrow k = -\frac{1}{4}\end{aligned}$$

Opção (B)

Daniela Raposo e Luzia Gomes

30. Um vetor normal ao plano dado é $\vec{n}(1,-2,0)$.

$(3,2,1)\cdot(1,-2,0)=3-4=-1$

$\left(3,\frac{2}{3},-5\right)\cdot(1,-2,0)=3-\frac{4}{3}=\frac{5}{3}$

$(4,5,0)\cdot(1,-2,0)=4-10=-6$

$(0,0,1)\cdot(1,-2,0)=0+0+0=0$

Opção (D)

31. Um vetor normal ao plano α é $\vec{n}(3,1-1)$.

Um vetor diretor da reta r é $\vec{r}(1,0,3)$.

$\vec{n}\cdot\vec{r}=3+0-3=0$

$(-2,2,1)$ é um ponto da reta r.

$3\times(-2)+2-1=-5 \Leftrightarrow -5=-5$ é uma proposição verdadeira.

Portanto, $(-2,2,1)\in\alpha$.

Logo, r está contida em α.

Opção (B)

32. Conhecemos os seguintes pontos: $A(11,-1,2)$,$B(13,2,8)$ e $E(8,5,0)$

O comprimento da aresta é:

$\overline{AB}=\sqrt{(13-11)^2+(2-(-1))^2+(8-2)^2}=\sqrt{4+9+36}=\sqrt{49}=7$

$F=B+\overrightarrow{AE}=(13,2,8)+(-3,6,-2)=(10,8,6)$

$x^2-20x+100+y^2-16y+64+z^2-12z+36=-151+100+64+36$

$\Leftrightarrow (x-10)^2+(y-8)^2+(z-6)^2=49$

Opção (A)

33. $\|\vec{u}+\vec{v}\|=\sqrt{\|\vec{u}+\vec{v}\|^2}=\sqrt{(\vec{u}+\vec{v})\cdot(\vec{u}+\vec{v})}=$

$=\sqrt{\vec{u}\cdot\vec{u}+2\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{v}\cdot\vec{v}}=$

$=\sqrt{\|\vec{u}\|^2+2\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\cos(\widehat{\vec{u},\vec{v}})+\|\vec{v}\|^2}=$

$=\sqrt{3^2+2\times3\times4\times\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)+4^2}=$

$=\sqrt{9+24\times\frac{1}{2}+16}=$

$=\sqrt{13}$

Opção (A)

34. $\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)\cdot\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BC}=l\times l\times\cos 120°+l\times l\times\cos 60°=$

$$=-\frac{l^2}{2}+\frac{l^2}{2}=$$

$$=0$$

Opção (D)

35. $x^2-10x+y^2=-25\Leftrightarrow x^2-10x+25+y^2=-25+25$

$$\Leftrightarrow (x-5)^2+y^2=0$$

Portanto, a condição representa um ponto.

Opção (B)

36. Seja $T(x,y)$ um ponto da reta t.

$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{PT}=0\Leftrightarrow (a,b)\cdot(x-a,y-b)=0\Leftrightarrow ax-a^2+by-b^2=0$

$$\Leftrightarrow by=-ax+a^2+b^2$$

$$\Leftrightarrow y=-\frac{a}{b}x+\frac{a^2+b^2}{b}$$

Tendo em conta que a circunferência representada tem centro na origem e raio 1, tem-se que $a=\cos\alpha$ e $b=\operatorname{sen}\alpha$, onde α representa a inclinação da reta OP e, então,

$a^2+b^2=\cos^2\alpha+\operatorname{sen}^2\alpha=1.$

Assim, $y=-\frac{a}{b}x+\frac{1}{b}$ é a equação reduzida da reta t.

A ordenada do ponto Q é 0 e o ponto Q pertence à reta t. Logo:

$0=-\frac{a}{b}x+\frac{1}{b}\Leftrightarrow 0=-ax+1\Leftrightarrow x=\frac{1}{a}$

Opção (A)

37. Sabemos que $\overline{PA}+\overline{PB}=20$.

Portanto, $2a=20$, sendo a o semieixo maior da elipse.

Logo, o conjunto dos pontos P do plano que verificam a condição $\overline{PA}+\overline{PB}=20$ é a elipse de focos A e B e eixo maior 20.

Opção (C)

38. Seja $\alpha=\overrightarrow{CA}\hat{,}\overrightarrow{CB}$.

$\frac{3\pi}{2\pi}=\frac{\frac{\pi}{4}}{\alpha}\Leftrightarrow\alpha=\frac{\pi}{4}\times\frac{2}{3}\Leftrightarrow\alpha=\frac{\pi}{6}$

Assim, $\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}=\sqrt{3}\times\sqrt{3}\times\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{3\sqrt{3}}{2}$.

Opção (C)

39. $\vec{r}(2,3,4)$ é um vetor diretor da reta r e $\vec{n}_\beta(3,-2,0)$ é um vetor normal do plano β.

$\vec{r} \cdot \vec{n}_\beta = 2 \times 3 + 3 \times (-2) + 4 \times 0 = 6 - 6 = 0$

Como o vetor diretor da reta r e o vetor normal ao plano β são perpendiculares, então ou a reta é paralela (em sentido estrito) ao plano ou a reta está contida no plano. O ponto de coordenadas $(0,0,0)$ pertence à reta r. Vejamos se também pertence ao plano β:

$3 \times 0 - 2 \times 0 = 0 \Leftrightarrow 0 = 0$

O ponto de coordenadas $(0,0,0)$ também pertence ao plano β, logo a reta r está contida no plano β.

Opção (C)

40. $\begin{cases}(a^2-a, a^2-2, a-1)\cdot(0,-1,2)=0\\(a^2-a, a^2-2, a-1)\cdot(-1,0,2)=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}-a^2+2+2a-2=0\\-a^2+a+2a-2=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}-a^2+2a=0\\-a^2+3a-2=0\end{cases}$

Cálculo auxiliar

$-a^2+3a-2=0 \Leftrightarrow a = \frac{-3 \pm \sqrt{9-4\times(-1)\times(-2)}}{2\times(-1)} \Leftrightarrow a = \frac{-3\pm 1}{-2} \Leftrightarrow a = 2 \vee a = 1$

$\Leftrightarrow \begin{cases}a(-a+2)=0\\a=2 \ \vee \ a=1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a=0 \ \vee \ a=2\\a=2 \ \vee \ a=1\end{cases}$

Logo, $a = 2$.

Opção (D)

41. Sejam $\vec{r}(-2,1,0)$ e $\vec{s}(1,-1,1)$ dois vetores diretores das retas r e s, respetivamente.

Como $\frac{-2}{1} \neq \frac{1}{-1}$, as retas não são paralelas.

$\vec{r}\cdot\vec{s} = -2\times 1 + 1\times(-1) + 0\times 1 = -2 - 1 = -3 \neq 0$, logo as retas não são perpendiculares.

Um ponto genérico da reta r é $(3-2\lambda, 1+\lambda, -3)$.

$(3-2\lambda, 1+\lambda, -3) = (2,1,-2) + k(1,-1,1) \Leftrightarrow \begin{cases}3-2\lambda = 2+k\\1+\lambda = 1-k\\-3 = -2+k\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}---\\\lambda = 1\\-1 = k\end{cases}$

Quando $\lambda = 1$, temos $(3-2\times 1, 1+1, -3) = (1,2,-3)$, que é o ponto de interseção das retas r e s. Logo, as retas r e s são concorrentes, mas não perpendiculares.

Opção (A)

Itens de construção (págs. 35 a 44)

1. $(\vec{u}-\vec{v})\cdot(\vec{u}+\vec{v}) = 19 \Leftrightarrow \vec{u}\cdot\vec{u} - \vec{v}\cdot\vec{v} = 19 \Leftrightarrow \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2 = 19$

$\Leftrightarrow 10^2 - \|\vec{v}\|^2 = 19$

$\Leftrightarrow \|\vec{v}\|^2 = 100 - 19$

$\Leftrightarrow \|\vec{v}\|^2 = 81$

Logo, $\|\vec{v}\| = \sqrt{81} = 9$.

LeYa EDUCAÇÃO Daniela Raposo e Luzia Gomes

2.

2.1. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{MP} = 0$, sendo *M* o ponto médio do segmento de reta [*AB*], representa a mediatriz do segmento de reta [*AB*].

2.2. $\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{BP} = 0$ representa a circunferência de diâmetro [*AB*].

2.3. $\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{BP} \leq 0$ representa o círculo de diâmetro [*AB*].

2.4. $\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$ representa a reta tangente à circunferência de centro *B* e raio $\overline{AB}$ no ponto *A* ou a reta perpendicular ao segmento de reta [*AB*] que passa em *A.*

3.

3.1. $m_r = \frac{3}{4}$ e $m_s = -\frac{3}{4}$

Como não têm o mesmo declive, então as duas retas são concorrentes.

3.2. Uma equação reduzida da reta s é $y = -\frac{3}{4}x + b$.

Como o ponto (1, 2) pertence à reta, tem-se:

$2 = -\frac{3}{4} \times 1 + b \Leftrightarrow 2 + \frac{3}{4} = b \Leftrightarrow b = \frac{11}{4}$

Assim, $y = -\frac{3}{4}x + \frac{11}{4}$.

3.3. A reta s tem declive $m_s = -\frac{3}{4}$.

O declive de uma reta perpendicular à reta s é igual a $\frac{4}{3}$.

Como a reta passa na origem do referencial, então a sua equação reduzida é $y = \frac{4}{3}x$.

3.4. O ponto de interseção da reta com o eixo das ordenadas é $\left(0, -\frac{7}{4}\right)$.

O ponto de interseção da reta com o eixo das abcissas é $\left(\frac{7}{3}, 0\right)$.

Cálculo auxiliar

$0 = \frac{3}{4}x - \frac{7}{4} \Leftrightarrow \frac{7}{4} = \frac{3}{4}x \Leftrightarrow 7 = 3x \Leftrightarrow x = \frac{7}{3}$

3.5. $y = \frac{3}{4}x - \frac{7}{4}$

$5p = \frac{3}{4} \times 10 - \frac{7}{4} \Leftrightarrow 5p = \frac{30}{4} - \frac{7}{4} \Leftrightarrow 5p = \frac{23}{4} \Leftrightarrow p = \frac{23}{20}$

4.

4.1. Circunferência de centro $C(-2{,}3)$ e raio 5.

4.2. Círculo de centro $C(1{,}0)$ e raio $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

4.3. Exterior da circunferência de centro $C(0, -1)$ e raio $2\sqrt{3}$.

4.4. Coroa circular de centro $C(0,0)$, sendo 2 o raio da circunferência externa e $\sqrt{2}$ o raio da circunferência interna.

4.5. Circunferência de centro $C(0,0)$ e raio 4.

4.6. Elipse de eixo maior 8, de eixo menor 6 e com focos de coordenadas $(-\sqrt{7},0)$ e $(\sqrt{7},0)$.

4.7. Elipse de eixo maior $4\sqrt{5}$, de eixo menor $2\sqrt{11}$ e com focos de coordenadas $(0,-3)$ e $(0,3)$.

4.8. Circunferência de centro $C(1,-4)$ e de raio 3.

4.9. Circunferência de centro $C\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)$ e raio 2.

4.10. Círculo de centro $C\left(0,\frac{1}{3}\right)$ e raio $\frac{\sqrt{10}}{3}$.

4.11. Elipse de eixo maior 12, de eixo menor 10 e com focos de coordenadas $\left(-\sqrt{11},0\right)$ e $\left(\sqrt{11},0\right)$.

4.12. Elipse de eixo maior $4\sqrt{2}$, de eixo menor 4 e com focos de coordenadas $(-2,0)$ e $(2,0)$.

5.

5.1. $x^2+2x+y^2-10y=-16 \Leftrightarrow x^2+2x+1+y^2-10y+25=-16+1+25$

$$\Leftrightarrow (x+1)^2+(y-5)^2=10$$

Circunferência de centro $(-1,5)$ e raio $\sqrt{10}$.

5.2. O ponto A' tem coordenadas (2, 3).

$(2+1)^2+(3-5)^2=10 \Leftrightarrow 9+4=10 \Leftrightarrow 13=10$, que é uma proposição falsa.

Logo, A' não pertence à circunferência.

5.3. $\begin{cases} x^2+y^2+2x-10y+16=0 \\ x=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2-10y+16=0 \\ x=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=8 \ \vee \ y=2 \\ x=0 \end{cases}$

Os pontos de interseção da circunferência com o eixo das ordenadas são os pontos de coordenadas $(0,2)$ e $(0,8)$.

5.4. $\sqrt{(x-2)^2+(y+3)^2}=\sqrt{(x+1)^2+(y-4)^2}$

$$\Rightarrow x^2-4x+4+y^2+6y+9=x^2+2x+1+y^2-8y+16$$
$$\Leftrightarrow 6y+8y=4x+2x-4-9+1+16$$
$$\Leftrightarrow 14y=6x+4$$
$$\Leftrightarrow y=\frac{6}{14}x+\frac{4}{14}$$
$$\Leftrightarrow y=\frac{3}{7}x+\frac{2}{7}$$

6. $\begin{cases} (x,y,1)\cdot(6,4,0)=0 \\ (x,y,1)\cdot\left(1,0,-\frac{1}{2}\right)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6x+4y=0 \\ x-\frac{1}{2}=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6\times\frac{1}{2}+4y=0 \\ x=\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4y=-3 \\ x=\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=-\frac{3}{4} \\ x=\frac{1}{2} \end{cases}$

Assim, $x=\frac{1}{2}$ e $y=-\frac{3}{4}$.

7.

7.1. Plano mediador do segmento de reta $[AB]$.

7.2. Superfície esférica de diâmetro $[AB]$.

7.3. Esfera de diâmetro $[AB]$.

7.4. Plano tangente à superfície esférica de centro em *B* e raio $\overline{AB}$ no ponto *A* ou plano perpendicular ao segmento de reta $[AB]$ que passa em *A*.

8.

8.1. $(x, y, z) = (1,2,3) + k(4,5,6), k \in \mathbb{R}$

8.2. $(x, y, z) = (1,2,3) + k(4,5,0), k \in \mathbb{R}$

8.3. $(x, y, z) = (1,2,3) + k(1,0,1), k \in \mathbb{R}$

8.4. $(x, y, z) = (1,2,3) + k(0,0,1), k \in \mathbb{R}$

8.5. $(x, y, z) = (1,2,3) + k(-3,-1,7), k \in \mathbb{R}$

9.

9.1. $4x + 5y + 6z + d = 0$

Como o ponto $A(1, 2, 3)$ pertence ao plano, então:

$4 \times 1 + 5 \times 2 + 6 \times 3 + d = 0 \Leftrightarrow d = -32$

Uma equação cartesiana do plano pretendido é $4x + 5y + 6z - 32 = 0$.

9.2. $\overrightarrow{AB} = B - A = (0,2,4) - (1,2,3) = (-1,0,1)$

$\overrightarrow{AC} = C - A = (1,0,0) - (1,2,3) = (0,-2,-3)$

$$\begin{cases} (a,b,c) \cdot (-1,0,1) = 0 \\ (a,b,c) \cdot (0,-2,-3) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -a + c = 0 \\ -2b - 3c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = a \\ -2b - 3a = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = a \\ b = -\frac{3}{2}a \end{cases}$$

$\vec{n}(a, -\frac{3}{2}a, a)$, com $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

Se $a = 2$, $\vec{n}(2, -3, 2)$

$2x - 3y + 2z + d = 0$

Como $C(1,0,0)$ pertence ao plano, então:

$2 + d = 0 \Leftrightarrow d = -2$

Uma equação cartesiana do plano pretendido é $2x - 3y + 2z - 2 = 0$.

9.3. $8x + 3z + d = 0$

Como $A(1,2,3)$ pertence ao plano, então:

$8 \times 1 + 3 \times 3 + d = 0 \Leftrightarrow d = -17$

Uma equação cartesiana do plano pretendido é $8x + 3z - 17 = 0$.

9.4. $\vec{n}\left(\sqrt{2},1,-1\right)$

$\sqrt{2}x+y-z+d=0$

Como $A(1,2,3)$ pertence ao plano, então:

$\sqrt{2}\times 1+2-3+d=0 \Leftrightarrow d=-\sqrt{2}+1$

Uma equação cartesiana do plano pretendido é $\sqrt{2}x+y-z-\sqrt{2}+1=0$.

9.5. $y+d=0$

Como $A(1,2,3)$ pertence ao plano, então:

$2+d=0 \Leftrightarrow d=-2$

Uma equação cartesiana do plano pretendido é $y-2=0 \Leftrightarrow y=2$.

10.

10.1. $(x,y,z)=(1,-2,3)+k(-2,-1,4), k\in\mathbb{R}$

10.2. $(0,-1,5)=(1,-2,3)+k(-2,-1,4), k\in\mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} 0=1-2k \\ -1=-2-k \\ 5=3+4k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k=\frac{1}{2} \\ k=-1 \\ - \end{cases}$

Logo, o ponto não pertence à reta.

10.3. $\left(2k,-\frac{3}{2},k\right)=(1,-2,3)+\lambda(-2,-1,4), \lambda\in\mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} 2k=1-2\lambda \\ -\frac{3}{2}=-2-\lambda \\ k=3+4\lambda \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} - \\ \lambda=-\frac{1}{2} \\ k=3+4\times\left(-\frac{1}{2}\right) \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} - \\ - \\ k=1 \end{cases}$

Assim, $k=1$.

10.4. $-2x-y+4z+d=0$

Como $A(1,2,3)$ pertence ao plano, então:

$-2\times 1-(-2)+4\times 3+d=0 \Leftrightarrow d=-12$

Uma equação cartesiana do plano pretendido é $-2x-y+4z-12=0$.

11. $IJK: x+y+z=2$

Uma vez que o centro do cubo é a origem do referencial e que o ponto K pertence ao plano xOy, então $K(x,x,0)$, sendo x um número real. Como Kpertence ao plano IJK, então:

$x+y+0=2 \Leftrightarrow x=1$

Logo, $K(1,1,0)$. Conclui-se também que a aresta do cubo é 2 e que $D(1,-1,1)$.

Assim, o plano paralelo a IJK e que passa em *D* é da forma $x+y+z=d$.

Como *D* pertence a esse plano: $1-1+1=d \Leftrightarrow d=1$

A equação cartesiana pedida é $x+y+z=1$.

12.

12.1. $a^3 + \frac{a^2 \times a}{3} = 288 \Leftrightarrow \frac{4}{3}a^3 = 288 \Leftrightarrow a^3 = 216 \Leftrightarrow a = \sqrt[3]{216} \Leftrightarrow a = 6$

$N(6,0,0)$; $Q(6,6,0)$; $P(0,6,0)$; $O(0,0,0)$; $R(6,0,6)$; $U(6,6,6)$; $T(0,6,6)$; $S(0,0,6)$; $M(3,3,6)$; $V(3,3,12)$

12.2. $\overrightarrow{RV} = V - R = (3,3,12) - (6,0,6) = (-3,3,6)$

$\overrightarrow{UV} = V - U = (3,3,12) - (6,6,6) = (-3,-3,6)$

$\overrightarrow{RV} \cdot \overrightarrow{UV} = (-3,3,6) \cdot (-3,-3,6) = 9 - 9 + 36 = 36$

$\|\overrightarrow{RV}\| = \sqrt{9+9+36} = \sqrt{54} = 3\sqrt{6}$

$\|\overrightarrow{UV}\| = \sqrt{9+9+36} = \sqrt{54} = 3\sqrt{6}$

Seja α o ângulo formado pelos dois vetores. Então:

$\alpha = \cos^{-1}\left(\frac{36}{3\sqrt{6} \times 3\sqrt{6}}\right) \approx 48{,}2°$

12.3. RV: $\begin{cases} x = 6 - 3k \\ y = 3k \\ z = 6 + 6k \end{cases}, k \in \mathbb{R}$

12.4. $MT = T - M = (0,6,6) - (3,3,6) = (-3,3,0)$

$\begin{cases} x = 6 - 3k \\ y = 6 + 3k \\ z = 6 \end{cases}, k \in \mathbb{R}$

12.5. $\overrightarrow{SR} = R - S = (6,0,6) - (0,0,6) = (6,0,0)$

$\overrightarrow{SV} = V - S = (3,3,12) - (0,0,6) = (3,3,6)$

$\begin{cases} (a,b,c) \cdot (6,0,0) = 0 \\ (a,b,c) \cdot (3,3,6) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6a = 0 \\ 3a + 3b + 6c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ 3b = -6c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = -2c \end{cases}$

$\vec{n}(0,-2c,c)$, com $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

Se $c = 1$, então $\vec{n}(0,-2,1)$.

$-2y + z + d = 0$

Como $S(0,0,6)$ pertence ao plano, então:

$-2 \times 0 + 6 + d = 0 \Leftrightarrow d = -6$

Assim, o plano pode ser definido por $-2y + z - 6 = 0$, como queríamos demonstrar.

12.6. $A'(6,-1,1)$

$-2 \times (-1) + 1 - 6 = 0 \Leftrightarrow -3 = 0$, que é uma proposição falsa.

Logo, A' não pertence ao plano *RSV*.

12.7. $\overrightarrow{RP} \cdot \overrightarrow{TP} = 0 \Leftrightarrow (x-6, y, z-6) \cdot (x, y-6, z-6) = 0$

$\Leftrightarrow x(x-6) + y(y-6) + (z-6)^2 = 0$

$\Leftrightarrow x^2 - 6x + y^2 - 6y + z^2 - 12z + 36 = 0$

$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 - 6x - 6y - 12z + 36 = 0$

Daniela Raposo e Luzia Gomes

13.

13.1.

a) $a^2 + 2^2 = 4^2 \Leftrightarrow a^2 = 12 \Leftrightarrow a = \sqrt{12}, a > 0 \Leftrightarrow a = 2\sqrt{3}$

Uma condição que define a reta *DC* é $y = 2\sqrt{3}$.

b) Uma condição que define o segmento de reta [*DC*] é $y = 2\sqrt{3} \ \wedge \ 2 \leq x \leq 6$.

c) Uma condição que define o conjunto de pontos equidistantes de *C* e de *D* é $x = 4$.

d) Uma condição que define o conjunto de pontos que distam três unidades de *A* é

$(x-4)^2 + y^2 = 9$.

e) $A(4,0)$ e $D\left(2, 2\sqrt{3}\right)$

$m_{AD} = \frac{2\sqrt{3}}{-2} \Leftrightarrow m_{AD} = -\sqrt{3}$

O declive da reta perpendicular a AD que passa na origem do referencial é $m = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Assim, uma condição que define a reta perpendicular a AD que passa na origem do referencial é $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x$.

f) $2a = 12 \Leftrightarrow a = 6$

$c = 4$

$b^2 = 6^2 - 4^2 = 36 - 16 = 20$

Assim, uma condição que define o pretendido é $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{20} = 1$.

13.2.

a) $\overrightarrow{OD} \cdot \overrightarrow{OB} = 4 \times 8 \times \cos 60° = 16$

b) $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{AD} = 4 \times 4 \times \cos 120° = -8$

c) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = 4 \times 4 \times \cos 180° = -16$

13.3. $\overrightarrow{PD} \cdot \overrightarrow{PA} = 0$ representa a circunferência de diâmetro $[AD]$.

Seja h a altura do triângulo $[OAD]$. Pelo Teorema de Pitágoras:

$4^2 = 2^2 + h^2 \Leftrightarrow h^2 = 12 \Leftrightarrow h = \sqrt{12}, h > 0$

Logo, $h = 2\sqrt{3}$.

Por outro lado, $D\left(2, 2\sqrt{3}\right)$.

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{PD} \cdot \overrightarrow{PA} = 0 &\Leftrightarrow \left(2 - x, 2\sqrt{3} - y\right) \cdot (4 - x, -y) = 0 \\
&\Leftrightarrow 8 - 2x - 4x + x^2 - 2\sqrt{3}y + y^2 = 0 \\
&\Leftrightarrow x^2 - 6x + y^2 - 2\sqrt{3}y = -8 \\
&\Leftrightarrow x^2 - 6x + 9 + y^2 - 2\sqrt{3}y + 3 = -8 + 9 + 3 \\
&\Leftrightarrow (x-3)^2 + \left(y - \sqrt{3}\right)^2 = 4
\end{aligned}$$

Daniela Raposo e Luzia Gomes

14.

14.1. $\overrightarrow{BC} = C - B = (0,2) - (3,0) = (-3,2)$

Seja $\vec{u}$ um vetor colinear com $\overrightarrow{BC}$, de norma $\sqrt{26}$.

$\vec{u} = k\overrightarrow{BC} \Leftrightarrow \vec{u} = k(-3,2) \Leftrightarrow \vec{u} = (-3k, 2k)$

$\|\vec{u}\| = \sqrt{26} \Leftrightarrow \sqrt{(-3k)^2 + (2k)^2} = \sqrt{26}$

$\Leftrightarrow \sqrt{9k^2 + 4k^2} = \sqrt{26}$

$\Leftrightarrow \sqrt{13k^2} = \sqrt{26}$

$\Leftrightarrow \sqrt{13}|k| = \sqrt{26}$

$\Leftrightarrow |k| = \frac{\sqrt{26}}{\sqrt{13}}$

$\Leftrightarrow |k| = \sqrt{2}$

$\Leftrightarrow k = \sqrt{2} \ \vee \ k = -\sqrt{2}$

Se $k = \sqrt{2}$, então $\vec{u}\left(-3\sqrt{2}, 2\sqrt{2}\right)$.

14.2. $A = C + \overrightarrow{BC} = (0,2) + (-3,2) = (-3,4)$

Como $m_{BC} = -\frac{2}{3}$, então $m_t = \frac{3}{2}$.

O ponto $A(-3,4)$ pertence à reta t, logo:

$4 = \frac{3}{2} \times (-3) + b \Leftrightarrow 4 + \frac{9}{2} = b \Leftrightarrow b = \frac{17}{2}$

A equação reduzida da reta t é $y = \frac{3}{2}x + \frac{17}{2}$.

14.3. $x^2 + (y-2)^2 \geq 13 \ \wedge \ y \leq \frac{3}{2}x + \frac{17}{2} \ \wedge \ y \leq -\frac{2}{3}x + 2 \ \wedge \ y \geq 0$

> **Cálculo auxiliar**
>
> $\|\overrightarrow{BC}\| = \sqrt{(-3)^2 + 2^2} = \sqrt{13}$

14.4. $\operatorname{tg}\left(O\hat{C}B\right) = \frac{3}{2}$

Logo, $O\hat{C}B \approx 56{,}31°$

Portanto, o ângulo suplementar de $O\hat{C}B$ tem amplitude $180° - 56{,}31° = 123{,}69°$.

$\frac{13\pi}{360°} = \frac{x}{123{,}69°} \Leftrightarrow x \approx 14{,}03 \text{ u.a.}$

15.

15.1. $\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{BP} = 0 \Leftrightarrow (x-0, y-1) \cdot (x-6, y-5) = 0$

$\Leftrightarrow x^2 - 6x + y^2 - 5y - y + 5 = 0$

$\Leftrightarrow x^2 - 6x + y^2 - 6y = -5$

$\Leftrightarrow x^2 - 6x + 9 + y^2 - 6y + 9 = -5 + 9 + 9$

$\Leftrightarrow (x-3)^2 + (y-3)^2 = 13$, que é a equação pedida.

15.2. *C* e *D* são pontos da forma $(x, 0)$, uma vez que pertencem ao eixo das abcissas.

Substituindo na equação da circunferência de diâmetro [*AB*]:

$$(x-3)^2+(0-3)^2=12 \Leftrightarrow (x-3)^2=4 \Leftrightarrow x-3=-2 \vee x-3=2$$
$$\Leftrightarrow x=1 \vee x=5$$

Assim, $C(1{,}0)$ e $D(5{,}0)$.

15.3. Seja *M* o centro da circunferência de diâmetro $[AB]$; $M(3,3)$

$$\overrightarrow{MC}\cdot\overrightarrow{CP}=0 \Leftrightarrow (1-3{,}0-3)\cdot(x-1,y-0)=0$$
$$\Leftrightarrow (-2,-3)\cdot(x-1,y)=0$$
$$\Leftrightarrow -2x+2-3y=0$$
$$\Leftrightarrow 3y=-2x+2$$

$\Leftrightarrow y=-\frac{2}{3}x+\frac{2}{3}$, que é a equação reduzida da reta tangente à circunferência de diâmetro [*AB*] em *C*.

$$\overrightarrow{MD}\cdot\overrightarrow{DP}=0 \Leftrightarrow (5-3,0-3)\cdot(x-5,y-0)=0$$
$$\Leftrightarrow (2,-3)\cdot(x-5,y)=0$$
$$\Leftrightarrow 2x-10-3y=0$$
$$\Leftrightarrow 3y=2x-10$$

$\Leftrightarrow y=\frac{2}{3}x-\frac{10}{3}$, que é a equação reduzida da reta tangente à circunferência de diâmetro [*AB*] em *D*.

15.4.

a) $(x-3)^2+(y-3)^2\geq 13 \wedge y\geq -\frac{2}{3}x+\frac{2}{3} \wedge y\geq \frac{2}{3}x-\frac{10}{3}$

b) Seja *I* o ponto de interseção das retas tangentes à circunferência de diâmetro [*AB*] em *C* e *D.*

$$\begin{cases} y=-\frac{2}{3}x+\frac{2}{3} \\ y=\frac{2}{3}x-\frac{10}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overline{\qquad\qquad} \\ -\frac{2}{3}x+\frac{2}{3}=\frac{2}{3}x-\frac{10}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overline{\qquad} \\ 4x=12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=-\frac{4}{3} \\ x=3 \end{cases}$$

Então, $I\left(3,-\frac{4}{3}\right)$.

Seja *M* o centro da circunferência de diâmetro [*AB*]: $M(3{,}3)$

$$\overline{IM}=3+\frac{4}{3}=\frac{13}{3}$$

Por outro lado, $\overline{CD}=4$.

A área do losango [*CIDM*] é, então, $\frac{\frac{13}{3}\times 4}{2}=\frac{26}{3}$.

Um vetor diretor da reta tangente à circunferência no ponto *C*(3,2) e um vetor diretor da reta tangente à circunferência no ponto *D* é, por exemplo (−3,2).

$$\|(3{,}2)\|=\sqrt{3^2+2^2}=\sqrt{13}=\|(-3{,}2)\|$$
$$(3{,}2)\cdot(-3{,}2)=-9+4=5$$

Assim, o ângulo formado pelas duas retas é dado por:

$$\alpha = \cos^{-1}\left(\frac{|-5|}{\sqrt{13}\times\sqrt{13}}\right) \approx 67{,}380°$$

A área *a* do setor circular de centro *M* e arco *BD* é dada por:

$\frac{13\pi}{360°} = \frac{a}{67{,}380°}$, ou seja, $a \approx 7{,}644$.

Logo, a área da região sombreada é, aproximadamente, $\frac{26}{3} - 7{,}644 \approx 1{,}02$ u.a.

16. $\overrightarrow{AB} = B - A = (2{,}4) - (-1,-1) = (3{,}5)$

$\|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{3^2+5^2} = \sqrt{9+25} = \sqrt{34}$

$\overrightarrow{AC} = C - A = (3{,}2) - (-1,-1) = (4{,}3)$

$\|\overrightarrow{AC}\| = \sqrt{4^2+3^2} = \sqrt{25} = 5$

$\overrightarrow{CB} = B - C = (2{,}4) - (3{,}2) = (-1{,}2)$

$\|\overrightarrow{CB}\| = \sqrt{(-1)^2+2^2} = \sqrt{5}$

$B\hat{A}C = \cos^{-1}\left(\frac{3\times 4+5\times 3}{\sqrt{34}\times\sqrt{25}}\right) \approx 22{,}166°$

$\sin(22{,}166) = \frac{a}{\sqrt{34}} \Leftrightarrow a = \sqrt{34}\times\sin(22{,}166) \Leftrightarrow a \approx 2{,}2$

$A_{[ABC]} = \frac{5\times 2{,}2}{2} = \frac{11}{2}$ u. a.

17. $x^2+4x+y^2-8y=0 \Leftrightarrow x^2+4x+4+y^2-8y+16=20 \Leftrightarrow (x+2)^2+(y-4)^2=20$

Equação reduzida da reta *r*:

$y = \frac{1}{2}x + b$

$6 = \frac{1}{2}\times 2 + b \Leftrightarrow 6 = 1 + b \Leftrightarrow b = 5$

Assim, $y = \frac{1}{2}x + 5$.

Equação reduzida da reta *AO*:

$y = -2x$

$(x+2)^2+(y-4)^2 \leq 20 \ \wedge\ y \geq -2x \ \wedge\ y \geq \frac{1}{2}x + 5 \ \wedge\ x \leq 0$

18. $\frac{\sqrt{2}\times h}{2} = 4 \Leftrightarrow \sqrt{2}h = 8 \Leftrightarrow h = \frac{8}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow h = \frac{8\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow h = 4\sqrt{2}$

Logo, $b = -4\sqrt{2}$.

$y = mx - 4\sqrt{2}$

$m = \frac{0-(-4\sqrt{2})}{-\sqrt{2}-0} = \frac{4\sqrt{2}}{-\sqrt{2}} = -4$

A equação pedida é $y = -4x - 4\sqrt{2}$.

19.

19.1. Se a distância focal é 6, então $c = 3$. Por outro lado, $2a = 10 \Leftrightarrow a = 5$.

$b^2 = 5^2 - 3^2 = 25 - 9 = 16$

A equação pedida é $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$.

19.2. $\frac{8^2}{a^2} + \frac{3^2}{25} = 1 \Leftrightarrow \frac{64}{a^2} = 1 - \frac{9}{25} \Leftrightarrow \frac{64}{a^2} = \frac{16}{25} \Leftrightarrow a^2 = \frac{64 \times 25}{16} \Leftrightarrow a^2 = 100$

A equação pedida é $\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{25} = 1$.

19.3. $\frac{c}{b} = \frac{4}{5} \Leftrightarrow b = \frac{5}{4}c$

Como $c = 8$, então $b = \frac{5}{4} \times 8 = 10$.

$a^2 = 10^2 - 8^2 = 100 - 64 = 36$

A equação pedida é $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{100} = 1$.

19.4. $\begin{cases} \frac{(-1)^2}{a^2} + \frac{2^2}{b^2} = 1 \\ \frac{2^2}{a^2} + \frac{0^2}{b^2} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} - \\ \frac{4}{a^2} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} - \\ a^2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{4} + \frac{4}{b^2} = 1 \\ - \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{4}{b^2} = \frac{3}{4} \\ - \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b^2 = \frac{16}{3} \\ - \end{cases}$

A equação pedida é $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{\frac{16}{3}} = 1$.

20. $x^2 + 12x + y^2 - 2y = -k \Leftrightarrow x^2 + 12x + 36 + y^2 - 2y + 1 = -k + 36 + 1$

$\Leftrightarrow (x+6)^2 + (y-1)^2 = -k + 37$

20.1. $(p \vee q) \wedge r \Leftrightarrow (\mathrm{V} \vee \mathrm{F}) \wedge \mathrm{V} \Leftrightarrow \mathrm{V} \wedge \mathrm{V} \Leftrightarrow \mathrm{V}$

20.2. $\sim p \wedge q \Rightarrow r \Leftrightarrow \mathrm{F} \wedge \mathrm{F} \Longrightarrow \mathrm{V} \Leftrightarrow \mathrm{F} \Rightarrow \mathrm{V} \Leftrightarrow \mathrm{V}$

20.3. $\sim p \wedge (q \Longrightarrow r) \Leftrightarrow \mathrm{F} \wedge \mathrm{V} \Leftrightarrow \mathrm{F}$

20.4. $(r \vee p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow [(\mathrm{V} \vee \mathrm{V}) \Leftrightarrow \mathrm{F}] \Leftrightarrow (\mathrm{V} \Leftrightarrow \mathrm{F}) \Leftrightarrow \mathrm{F}$

21.

21.1. Como $\frac{1}{2} \neq \frac{2}{1}$, os vetores $\vec{r}$ e $\vec{s}$ não são colineares. Por outro lado, $(1,0,-1)$ pertence às duas retas, ou seja, r e s são retas concorrentes e, por conseguinte, definem um plano.

21.2. $\begin{cases} (a,b,c) \cdot (1,2,-1) = 0 \\ (a,b,c) \cdot (2,1-2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + 2b - c = 0 \\ 2a + b - 2c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -2b + c \\ 2(-2b + c) + b - 2c = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} - \\ -4b + 2c + b - 2c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = c \\ b = 0 \end{cases}$

$\vec{n}(c, 0, c)$, com $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

Se $c = 1$,então $\vec{n}(1,0,1)$.

O plano definido pelas retas r e s é da forma $x + z + d = 0$.

$1 + (-1) + d = 0 \Leftrightarrow d = 0$

O plano de equação $x + z = 0$ é paralelo ao plano de equação $x + z = 2$.

22.

22.1. O ponto *A* pertence ao plano Oxy, pelo que $A(x, y, 0)$, onde x e y representam números reais positivos.

Uma vez que o triângulo $[OAB]$ é equilátero, tem-se $\overline{OA} = \overline{OB}$ e $\overline{BA} = \overline{OB}$.

Como *B* pertence à reta *BD* (reta paralela a Oz) e ao eixo Oy, tem-se que as suas coordenadas são (0,4,0) e, então, $\overline{OB} = 4$. Assim:

$$\begin{cases} \overline{OA} = \overline{OB} \\ \overline{BA} = \overline{OB} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x^2 + y^2 + 0^2} = 4 \\ \sqrt{x^2 + (y-4)^2 + 0^2} = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 16 \\ x^2 + y^2 - 8y + 16 = 16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \_\_\_\_\_\_ \\ 16 - 8y = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \_\_\_\_\_\_ \\ y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 4 = 16 \\ \_\_\_\_\_\_ \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 12 \\ \_\_\_\_\_\_ \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2\sqrt{3} \\ y = 2 \end{cases} \vee \begin{cases} x = -2\sqrt{3} \\ y = 2 \end{cases}$$

Logo, $A(2\sqrt{3}, 2, 0)$.

22.2. $E(0, 0, 6)$

$\overrightarrow{EA} = A - E = (2\sqrt{3}, 2,0) - (0,0,6) = (2\sqrt{3}, 2, -6), k \in \mathbb{R}$

Logo, uma equação vetorial da reta *AE* é:

$$(x, y, z) = (0,0,6) + k(-2\sqrt{3}, -2,6), k \in \mathbb{R}$$

22.3. $\overrightarrow{AB} = B - A = (0,4,0) - (2\sqrt{3}, 2,0) = (-2\sqrt{3}, 2,0)$

Logo, um sistema de equações paramétricas da reta *AB* é:

$$\begin{cases} x = -2\sqrt{3}k \\ y = 4 + 2k \\ z = 0 \end{cases}, k \in \mathbb{R}.$$

22.4. $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AB} = (-2\sqrt{3}, -2,6) \cdot (-2\sqrt{3}, 2,0) = 12 - 4 + 0 = 8$

$\|\overrightarrow{AE}\| = \sqrt{(-2\sqrt{3})^2 + (-2)^2 + 6^2} = \sqrt{12 + 4 + 36} = \sqrt{52}$

$\|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{(-2\sqrt{3})^2 + 2^2 + 0^2} = \sqrt{12 + 4 + 0} = 4$

$\cos(\overrightarrow{AE}, \hat{} \ \overrightarrow{AB}) = \frac{|8|}{\sqrt{52} \times 4}$

Logo, $(\overrightarrow{AE}, \hat{} \ \overrightarrow{AB}) \approx 73{,}9°$.

22.5. $\overrightarrow{EA} = (2\sqrt{3}, 2, -6)$ e $\overrightarrow{AB} = (-2\sqrt{3}, 2,0)$ são dois vetores não colineares do plano *ABE* e $(2\sqrt{3}, 2,0)$ é um ponto do plano.

Assim, uma equação vetorial do plano *ABE* é:

$$(x, y, z) = (2\sqrt{3}, 2,0) + k(-2\sqrt{3}, 2,0) + \lambda(2\sqrt{3}, 2, -6), k, \lambda \in \mathbb{R}$$

22.6. Seja $\vec{u}(a,b,c)$ um vetor não nulo, simultaneamento perpendicular aos vetores $\overrightarrow{AE}$ e $\overrightarrow{AB}$.

$$\begin{cases}\vec{u}\cdot\overrightarrow{AE}=0\\ \vec{u}\cdot\overrightarrow{AB}=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(a,b,c)\cdot\left(-2\sqrt{3},-2,6\right)=0\\ (a,b,c)\cdot\left(-2\sqrt{3},2,0\right)=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-2\sqrt{3}a-2b+6c=0\\ -2\sqrt{3}a+2b=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}-2\sqrt{3}a-2\sqrt{3}a+6c=0\\ b=\sqrt{3}a\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}6c=4\sqrt{3}a\\ b=\sqrt{3}a\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}c=\frac{2\sqrt{3}a}{3}\\ b=\sqrt{3}a\end{cases}$$

Assim, $\vec{u}\left(a,\sqrt{3}a,\frac{2\sqrt{3}a}{3}\right), a\in\mathbb{R}$.

Por exemplo, se $a = 1$, obtém-se $\vec{u}\left(1,\sqrt{3},\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$.

Um vetor diretor da reta é um vetor normal ao plano *ABE*, por exemplo, o vetor de coordenadas $\left(1,\sqrt{3},\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$.

Assim, uma equação vetorial da reta perpendicular ao plano *ABE* e que contém o ponto *O* é:

$$(x,y,z)=(0,0,0)+k\left(1,\sqrt{3},\frac{2\sqrt{3}}{3}\right), k\in\mathbb{R}$$

22.7. O lugar geométrico dos pontos $P(x,y,z)$ que satisfazem a condição $\overrightarrow{BE}\cdot\overrightarrow{MP}=0$ é o plano mediador do segmento de reta [*BE*].

$\overrightarrow{BE}=(0,0,6)-(0,4,0)=(0,-4,6)$

$M=\left(\frac{0+0}{2},\frac{0+4}{2},\frac{6+0}{2}\right)=(0,2,3)$

$$\overrightarrow{BE}\cdot\overrightarrow{MP}=0\Leftrightarrow(0,-4,6)\cdot(x,y-2,z-3)=0\Leftrightarrow-4y+8+6z-18=0$$
$$\Leftrightarrow-4y+6z-10=0$$
$$\Leftrightarrow-2y+3z-5=0$$

23.

23.1. $\overline{AD}=\sqrt{2^2+2^2}=\sqrt{4+4}=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$

23.2. $A(2,0,0); B(4,2,0); C(2,4,0); D(0,2,0); E\left(2,0,2\sqrt{2}\right); F\left(4,2,2\sqrt{2}\right); G\left(2,4,2\sqrt{2}\right); H\left(0,2,2\sqrt{2}\right)$

23.3.

a) $(x,y,z)=(4,2,0)+k\left(-1,1,\sqrt{2}\right), k\in\mathbb{R}$

b) $(x,y,z)=\left(0,2,2\sqrt{2}\right)+k(1,0,0), k\in\mathbb{R}$

c) $(x,y,z)=(0,0,0)+k(-2,2,0), k\in\mathbb{R}$

23.4.

a) $y=2$

b) $\overrightarrow{CE}=\left(2,0,2\sqrt{2}\right)-(2,4,0)=\left(0,-4,2\sqrt{2}\right)$

$\overrightarrow{CF}=\left(4,2,2\sqrt{2}\right)-(2,4,0)=\left(2,-2,2\sqrt{2}\right)$

$$\begin{cases}(a,b,c)\cdot\left(0,-4,2\sqrt{2}\right)=0\\ (a,b,c)\cdot\left(2,-2,2\sqrt{2}\right)=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-4b+2\sqrt{2}c=0\\ 2a-2b+2\sqrt{2}c=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}b=\frac{\sqrt{2}}{2}c\\ 2a-2\times\frac{\sqrt{2}}{2}c+2\sqrt{2}c=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} - \\ 2a = -\sqrt{2}c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = \frac{\sqrt{2}}{2}c \\ a = -\frac{\sqrt{2}}{2}c \end{cases}$$

$\vec{n}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}c, \frac{\sqrt{2}}{2}c, c\right)$, com $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

Se $c = -\sqrt{2}$, então $\vec{n}\left(1, -1, -\sqrt{2}\right)$.

$EFC: x - y - \sqrt{2}x + d = 0$

Como *C* pertence ao plano, então:

$2 - 4 + d = 0 \Leftrightarrow d = 2$

$EFC: x - y - \sqrt{2}x + 2 = 0$

c) $\overrightarrow{FG} = (-2,2,0)$

A equação pedida é $-2x + 2y = 0$.

24. $\overrightarrow{AB} = B - A = \left(0,1,\frac{5}{2}\right) - (0,0,2) = \left(0,1,\frac{1}{2}\right)$

$\overrightarrow{AC} = C - A = (6,6,2) - (0,0,2) = (6,6,0)$

$$\begin{cases} (a,b,c)\cdot\left(0,1,\frac{1}{2}\right) = 0 \\ (a,b,c)\cdot(6,6,0) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b + \frac{1}{2}c = 0 \\ 6a + 6b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = -2b \\ a = -b \end{cases}$$

$\vec{n}(-b, b, -2b)$, com $b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

Se $b = 1$, então $\vec{n}(-1,1,-2)$.

$ABC:\ -x + y - 2z + d = 0$

$-2 \times 2 + d = 0 \Leftrightarrow d = 4$

$ABC:\ -x + y - 2z + 4 = 0$

$$\begin{aligned} -m + m - 2m + 4 = 0 &\Leftrightarrow -2m + 4 = 0 \\ &\Leftrightarrow -2m = -4 \\ &\Leftrightarrow m = 2 \end{aligned}$$

25.

25.1. $\begin{cases} (a,b,c)\cdot(0,1,4) = 0 \\ (a,b,c)\cdot(1,0,2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b + 4c = 0 \\ a + 2c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -4c \\ a = -2c \end{cases}$

$\vec{n}(-2c, -4c, c)$, com $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

Se $c = -1$, então $\vec{n}(2,4,-1)$.

$2x + 4y - z + d = 0$

$-4 + d = 0 \Leftrightarrow d = 4$

$2x + 4y - z + 4 = 0 \Leftrightarrow 2x + 4y - z = -4$, como queríamos demonstrar.

25.2. Um ponto genérico da reta r é $\left(1+\frac{1}{4}k, 2+\frac{1}{2}k, 2+k\right)$.

$$2\left(1+\frac{1}{4}k\right)+4\left(2+\frac{1}{2}k\right)-(2+k)=-4 \Leftrightarrow 2+\frac{1}{2}k+8+2k-2-k=-4$$
$$\Leftrightarrow \frac{3}{2}k=-12$$
$$\Leftrightarrow k=-8$$

$$\left(1+\frac{1}{4}(-8), 2+\frac{1}{2}(-8), 2+(-8)\right)=(-1,-2,-6)$$

26.

26.1. Um ponto genérico da reta r é $(1-2k, 3k, -7+4k)$.

$4\times 3k-3(-7+4k)=1 \Leftrightarrow 12k+21-12k=1 \Leftrightarrow 21=1$, que é uma proposição falsa.

A reta r e o plano α não se intersetam. A reta é paralela ao plano.

26.2. $2(1+2k)-(-2-3k)-k=6 \Leftrightarrow 2+4k+2+3k-k=6 \Leftrightarrow 6k=2 \Leftrightarrow k=\frac{1}{3}$

$$\begin{cases} x=1+2\times\frac{1}{3} \\ y=-2-3\times\frac{1}{3} \\ z=\frac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{5}{3} \\ y=-3 \\ z=\frac{1}{3} \end{cases}$$

A reta e o plano intersetam-se no ponto de coordenadas $\left(\frac{5}{3}, -3, \frac{1}{3}\right)$.

27.

27.1. A reta *EV* é perpendicular ao plano *ABC*, pelo que um vetor normal a este plano é um vetor diretor da reta. Um vetor normal ao plano *ABC* e um vetor da reta *EV* é $\vec{n}(-1,6,1)$.

Assim, uma equação vetorial que defina a reta *EV* é $(x,y,z)=\left(-1,\frac{19}{2},4\right)+k(-1,6,1), k\in\mathbb{R}$.

27.2. O ponto *E* é o ponto de interseção da reta *EV* com o plano *ABC*.

Os pontos da reta *EV* são da forma $\left(-1-k, \frac{19}{2}+6k, 4+k\right)$, sendo *k* um número real.

Substituindo na equação do plano *ABC*:

$$-(-1-k)+6\left(\frac{19}{2}+6k\right)+(4+k)+14=0 \Leftrightarrow 1+k+57+36k+4+k+14=0$$
$$\Leftrightarrow 38k=-76$$
$$\Leftrightarrow k=-2$$

Então, o ponto *E* tem coordenadas $\left(-1+2, \frac{19}{2}-12, 4-2\right)=\left(1,-\frac{5}{2},2\right)$.

27.3. Seja $\vec{n}(a,b,c)$ um vetor não nulo normal ao plano cuja equação se pretende encontrar. Tem-se que $\vec{n}(-1,6,1)=0$, sendo $(-1,6,1)$ um vetor normal ao plano *ABC*, e que $\vec{n}\left(1,\frac{25}{2},2\right)=0$, onde $\left(1,\frac{25}{2},2\right)$ é um vetor diretor da reta *VA*.

LeYa EDUCAÇÃO Daniela Raposo e Luzia Gomes

Assim:

$$\begin{cases}(a,b,c)\cdot(-1,6,1)=0\\ (a,b,c)\cdot\left(1,\frac{25}{2},2\right)=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-a+6b+c=0\\ a+\frac{25}{2}b+2c\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=6b+c\\ 6b+c+\frac{25}{2}b+2c=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\rule{3cm}{0.4pt}\\ 12b+2c+25b+4c=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\rule{3cm}{0.4pt}\\ 37b+6c=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}a=6\times\left(-\frac{6}{37}\right)c+c\\ b=-\frac{6}{37}c\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=\frac{1}{37}c\\ b=-\frac{6}{37}c\end{cases}$$

Assim, $\vec{n}\left(\frac{1}{37}c,-\frac{6}{37}c,c\right)$, $c\in\mathbb{R}$.

Por exemplo, se $c=-37$, obtém-se $\vec{n}(-1,6,-37)$. Então $\vec{n}(-1,6,-37)$ é um vetor normal ao plano perpendicular a *ABC* e que contém a reta *VA.*

Como $v\left(-1,\frac{19}{2},4\right)$ é um ponto deste plano:

$$-1(x+1)+6\left(y-\frac{19}{2}\right)-37(z-4)=0\Leftrightarrow -x-1+6y-57-37z+148=0$$

$$\Leftrightarrow -x+6y-37z+90=0$$

27.4. $\begin{cases}-x+6y+z+14=0\\ -x+6y-37z+90=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}6y+z+14=x\\ -6y-z-14+6y-37z+90=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-\\ -38z+76=0\end{cases}$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x=6y+16\\ z=2\end{cases}$$

Um ponto genérico da reta de interseção dos dois planos é $(6y+16,y,2)$.

$(6y+16,y,2)=(16,0,2)+y(6,1,0)$

A equação pedida é $(x,y,z)=(16,0,2)+k(6,1,0), k\in\mathbb{R}$.

28.

$$\overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{DA}\cdot\left(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AD}\right)=\overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{AD}=$$

$$=x\times\left\|\overrightarrow{BA}\right\|\times\cos 90°+x\times x\times\cos 180°=$$

$$=-x^2$$

29. $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AN}=\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BM}\right)\cdot\left(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DN}\right)=$

$$=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{DN}+\overrightarrow{BM}\cdot\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BM}\cdot\overrightarrow{DN}=$$

$$=\left\|\overrightarrow{AB}\right\|\times\frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{AB}\right\|\cos 90°+\left\|\overrightarrow{AB}\right\|\times\frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{AB}\right\|\cos 0°+\frac{1}{4}\left\|\overrightarrow{AB}\right\|\times\frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{AB}\right\|\cos 0°+$$

$$+\frac{1}{4}\left\|\overrightarrow{AB}\right\|\times\times\frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{AB}\right\|\cos 90°=$$

$$=0+\frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{AB}\right\|^2+\frac{1}{8}\left\|\overrightarrow{AB}\right\|^2+0=\frac{5}{8}\left\|\overrightarrow{AB}\right\|^2$$

30. $\|\vec{a}+\vec{b}\| = \sqrt{(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}+\vec{b})} = \sqrt{\vec{a}\cdot\vec{a}+2\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{b}} =$

$= \sqrt{6^2+2\times 0+3^2} =$

$= \sqrt{45} =$

$= 3\sqrt{5}$

$\|\vec{a}-\vec{b}\| = \sqrt{(\vec{a}-\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b})} = \sqrt{\vec{a}\cdot\vec{a}-2\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{b}} =$

$= \sqrt{6^2+2\times 0+3^2} =$

$= \sqrt{45} =$

$= 3\sqrt{5}$

31. $\overline{AC}^2 = \overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AC} = (\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{BA})\cdot(\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{BA}) =$

Cálculo auxiliar

$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BC}-\overrightarrow{BA}$

$= \overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BC} - 2\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BA} =$

$= \|\overrightarrow{BC}\|^2 + \|\overrightarrow{BA}\|^2 - 2\|\overrightarrow{BC}\|\|\overrightarrow{BA}\|\ \cos(\overrightarrow{BC}, \widehat{\ }\ \overrightarrow{BA}) =$

$= \overline{BC}^2 + \overline{BA}^2 - 2\overline{BC}\times\overline{BA}\times\cos(\overrightarrow{BC}, \widehat{\ }\ \overrightarrow{BA})$

32. $\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DB}$

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DB}$

Assim:

$\overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{AB} = (\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DB})\cdot(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DB}) =$

$= \overrightarrow{CD}\cdot\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CD}\cdot\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DB}\cdot\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DB}\cdot\overrightarrow{DB} =$

$= \overline{CD}\times\overline{AD}\times\cos 180° + \overline{CD}\times\overline{DB}\times\cos 90° + \overline{DB}\times\overline{AD}\times\cos 90° +$

$+ \overline{DB}\times\overline{DB}\times\cos 0° =$

$= -\overline{DA}\times\overline{DC} + 0 + 0 + \overline{BD}^2 =$

$= -\overline{DA}\times\overline{DC} + \overline{BD}^2$

Uma vez que $[ABC]$ é um triângulo retângulo em B, tem-se:

$\overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{AB} = \overline{CA}\times\overline{CB}\cos 90° = 0$

Logo:

$-\overline{DA}\times\overline{DC} + \overline{BD}^2 = 0 \Leftrightarrow \overline{DA}\times\overline{DC} = \overline{BD}^2$

Daniela Raposo e Luzia Gomes

33. O declive da reta de equação $y = -\frac{3}{4}x - \frac{13}{4}$ é $-\frac{3}{4}$, pelo que um seu vetor diretor é, por exemplo, $\vec{r} = (4, -3)$.

Seja $\vec{u}(a, b)$o vetor com origem em *T* e extremidade no centro de uma circunferência nas condições do enunciado.

$$\begin{cases} \vec{r} \cdot \vec{u} = 0 \\ \|\vec{u}\| = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (4, -3) \cdot (a, b) = 0 \\ \sqrt{a^2 + b^2} = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4a - 3b = 0 \\ a^2 + b^2 = 100 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{3}{4}b \\ \frac{9}{16}b^2 + b^2 = 100 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{3}{4}b \\ b^2 = 64 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 6 \\ b = 8 \end{cases} \vee \begin{cases} a = 6 \\ b = -8 \end{cases}$$

Assim, os centros das circunferências são os pontos de coordenadas:

(−3, −1) + (6, 8) = (3, 7) e (−3, −1) + (−6, −8) = (−9, −9)

34. Sejam *r*, *s* e *t*, respetivamente, as retas definidas no enunciado:

$r \cap s$:

$\frac{2}{3}x - \frac{5}{3} = 2x - \frac{1}{3} \Leftrightarrow 2x - 5 = 6x - 1 \Leftrightarrow 4x = -4 \Leftrightarrow x = -1$

$y = \frac{2}{3} \times (-1) - \frac{5}{3} = -\frac{7}{3}$

$A\left(-1, -\frac{7}{3}\right)$

$r \cap t$:

$\frac{2}{3}x - \frac{5}{3} = -\frac{2}{3}x + 5 \Leftrightarrow -2x - 5 = -2x + 15 \Leftrightarrow 4x = 20 \Leftrightarrow x = 5$

$y = \frac{2}{3} \times 5 - \frac{5}{3} = \frac{5}{3}$

$B\left(5, \frac{5}{3}\right)$

$s \cap t$:

$2x - \frac{1}{3} = -\frac{2}{3}x + 5 \Leftrightarrow 6x - 1 = -2x + 15 \Leftrightarrow 8x = 16 \Leftrightarrow x = 2$

$y = 2 \times 2 - \frac{1}{3} = \frac{11}{3}$

$C\left(2, \frac{11}{3}\right)$

Pretende-se determinar a área do triângulo [*ABC*].

$\overline{AB} = \sqrt{(5+1)^2 + \left(\frac{5}{3} + \frac{7}{3}\right)^2} = \sqrt{36 + 16} = \sqrt{52}$

Seja *h* a altura do triângulo [*ABC*] relativa ao vértice *C*.

h é a distância entre o ponto *C* e a reta *AB* = *r*.

Seja *u* a reta perpendicular a *r* que passa em *C*.

$u: y = -\frac{3}{2}x + b$

Como *C* pertence à reta *u:*

$\frac{11}{3} = -\frac{3}{2} \times 2 + b \;\Leftrightarrow b = \frac{20}{3}$

Logo, $u: y = -\frac{3}{2}x + \frac{20}{2}$.

$r \cap u$:

$\frac{2}{3}x - \frac{5}{3} = -\frac{3}{2}x + \frac{20}{3} \Leftrightarrow \frac{13}{6}x = \frac{25}{3} \Leftrightarrow 13x = 50 \Leftrightarrow x = \frac{50}{13}$

$y = \frac{2}{3} \times \frac{50}{13} - \frac{5}{3} = \frac{35}{39}$

$D\left(\frac{50}{13}, \frac{35}{39}\right)$

$$h = \overline{CD} = \sqrt{\left(\frac{50}{13} - 2\right)^2 + \left(\frac{35}{39} - \frac{11}{3}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{24}{13}\right)^2 + \left(-\frac{36}{13}\right)^2} =$$

$$= \sqrt{\frac{576}{169} + \frac{1296}{169}} =$$

$$= \sqrt{\frac{144}{13}}$$

Logo, a área do triângulo [*ABC*] é dada por $\frac{\sqrt{52} \times \sqrt{\frac{144}{13}}}{2} = 12$ u.a.

35. Seja *r* a reta perpendicular à reta de equação $y = \frac{3}{2}x - 6$ e que passa no ponto *A.*

$r: y = -\frac{2}{3}x + b$

Como *A* pertence a *r*:

$-5 = -\frac{2}{3} \times 2 + b \Leftrightarrow b = -\frac{11}{3}$

Então, $r: y = -\frac{2}{3}x - \frac{11}{3}$.

Seja *B* o ponto de interseção da reta *r* com a reta definida no enunciado.

$\frac{3}{2}x - 6 = -\frac{2}{3}x - \frac{11}{3} \Leftrightarrow \frac{13}{6}x = \frac{7}{3} \Leftrightarrow x = \frac{14}{13}$

$y = \frac{3}{2} \times \frac{14}{13} - 6 = -\frac{57}{13}$

Logo, $B\left(\frac{14}{13}, -\frac{57}{13}\right)$.

A distância do ponto *A*(2, −5) à reta de equação $y = \frac{3}{2}x - 6$ é igual a $\overline{AB}$.

$$\overline{AB} = \sqrt{\left(\frac{14}{13} - 2\right)^2 + \left(-\frac{57}{13} + 5\right)^2} = \sqrt{\left(-\frac{12}{13}\right)^2 + \left(\frac{8}{13}\right)^2} =$$

$$= \sqrt{\frac{144}{169} + \frac{64}{169}} = \frac{\sqrt{208}}{13} = \frac{4\sqrt{13}}{13}$$

Daniela Raposo e Luzia Gomes

36. $\frac{x^2}{16}+\frac{(2x+b)^2}{4}=1 \Leftrightarrow x^2+4(2x+b)^2=16 \Leftrightarrow x^2+4(2x+b)^2-16=0$

$$\Leftrightarrow x^2+4(4x^2+4xb+b^2)-16=0$$
$$\Leftrightarrow x^2+16x^2+16xb+4b^2-16=0$$
$$\Leftrightarrow 17x^2+16bx+4b^2-16=0$$

Igualemos o binómio discriminante a zero.

$a'=17 \qquad b'=16b \qquad c'=4b^2-16$

$(16b)^2-4\times 17\times(4b^2-16)=0 \Leftrightarrow 256b^2-68(4b^2-16)=0$

$$\Leftrightarrow 256b^2-272b^2+1088=0$$
$$\Leftrightarrow -16b^2+1088=0$$
$$\Leftrightarrow b^2=\frac{-1088}{-16}$$
$$\Leftrightarrow b^2=68$$
$$\Leftrightarrow b=2\sqrt{17} \ \vee \ b=-2\sqrt{17}$$

A reta interseta a elipse em apenas um ponto para $b\in\{-2\sqrt{17},2\sqrt{17}\}$.

37. $\|\vec{u}\|=1 \Leftrightarrow \sqrt{a^2+b^2+c^2}=1 \Leftrightarrow a^2+b^2+c^2=1$

$\vec{u}\cdot\vec{v}=(a,b,c)\cdot(1,1,1)=a+b+c$

$\|\vec{v}\|=\sqrt{1^2+1^2+1^2}=\sqrt{3}$

Logo:

$\vec{u}\cdot\vec{v}=\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) \Leftrightarrow a+b+c=\sqrt{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow a+b+c=\frac{3}{2}$

$\vec{u}\cdot\vec{w}=(a,b,c)\cdot(1,0,1)=a+c$

$\|\vec{w}\|=\sqrt{1^2+0^2+1^2}=\sqrt{2}$

Logo:

$\vec{u}\cdot\vec{w}=\|\vec{u}\|\|\vec{w}\|\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \Leftrightarrow a+c=\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{2}}{3} \Leftrightarrow a+c=1$

Assim, tem-se:

$$\begin{cases} a^2+b^2+c^2=1 \\ a+b+c=\frac{3}{2} \\ a+c=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (1-c)^2+b^2+c^2=1 \\ 1-c+b+c=\frac{3}{2} \\ a=1-c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1-2c+c^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2+c^2=1 \\ b=\frac{1}{2} \\ \underline{\qquad\qquad} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2c^2-2c+\frac{1}{4}=0 \\ \underline{\qquad\qquad} \\ \underline{\qquad\qquad} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c=\frac{2\mp\sqrt{4-2}}{4} \\ \underline{\qquad\qquad} \\ \underline{\qquad\qquad} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\sqrt{2} \\ b=\frac{1}{2} \\ a=\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\sqrt{2} \end{cases} \vee \begin{cases} c=\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\sqrt{2} \\ b=\frac{1}{2} \\ a=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\sqrt{2} \end{cases}$$

Assim, os vetores $\vec{u}$ nas condições do enunciado são:

$\vec{u}=\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\sqrt{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\sqrt{2}\right)$ e $\vec{u}=\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\sqrt{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\sqrt{2}\right)$

38. Um vetor normal ao plano de equação $4x-3y+12z=6$ é, por exemplo, $\vec{n}(4,-3,12)$.

A reta perpendicular ao plano e que contém o ponto *A* tem as seguintes equações cartesianas:

$$\frac{x-1}{4}=\frac{y-4}{-3}=\frac{z-2}{12}$$

As coordenadas do ponto de interseção desta reta com o plano dado são:

$$\begin{cases}4x-3y+12z=6\\ \frac{x-1}{4}=\frac{y-4}{-3}\\ \frac{y-4}{-3}=\frac{z-2}{12}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\_\_\_\_\_\_\_\_\\ -3x+3=4y-16\\ -4y+16=z-2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}4\left(-\frac{4}{3}y+\frac{19}{3}\right)-3y+12(-4y+18)=6\\ x=-\frac{4}{3}y+\frac{19}{3}\\ z=-4y+18\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}-\frac{16}{3}y+\frac{76}{3}-3y-48y+216=6\\ \_\_\_\_\_\_\_\_\\ \_\_\_\_\_\_\_\_\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}169y=706\\ \_\_\_\_\_\_\_\_\\ \_\_\_\_\_\_\_\_\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}y=\frac{706}{169}\\ x=\frac{129}{169}\\ z=\frac{218}{169}\end{cases}$$

Logo, o ponto de interseção da reta com o plano tem coordenadas $\left(\frac{129}{169},\frac{706}{169},\frac{218}{169}\right)$.

A distância entre o ponto *A* e o plano é dada por:

$$\sqrt{\left(1-\frac{129}{169}\right)^2+\left(4-\frac{706}{169}\right)^2+\left(2-\frac{218}{169}\right)^2}=\sqrt{\left(\frac{40}{169}\right)^2+\left(\frac{30}{169}\right)^2+\left(\frac{120}{169}\right)^2}=$$

$$=\sqrt{\frac{16900}{169^2}}=$$

$$=\sqrt{\frac{100}{169}}=$$

$$=\frac{10}{13}$$

39. Para se saber a medida do raio da superfície esférica é necessário determinar a distância entre o seu centro e o plano α. O plano α é definido por $2x+y+z-3=0$, logo um vetor normal ao plano α é, por exemplo, $\vec{n}(2,1,1)$.

A reta perpendicular ao plano α e que contém o ponto *C* tem a seguinte equação vetorial:

$$(x,y,z)=(-1,0,4)+k(2,1,1), k\in\mathbb{R}$$

Assim, os pontos da reta são da forma $(-1+2k,k,4+k), k\in\mathbb{R}$.

Substituindo na equação do plano:

$$2(-1+2k)+k+4+k-3=0 \Leftrightarrow -2+4k+k+4+k-3=0 \Leftrightarrow 6k=1 \Leftrightarrow k=\frac{1}{6}$$

Logo, o ponto de interseção da reta com o plano tem coordenadas $\left(-1+\frac{2}{6},\frac{1}{6},4+\frac{1}{6}\right)=\left(-\frac{2}{3},\frac{1}{6},\frac{25}{6}\right)$.

Assim, a distância entre o ponto *C* e o plano é dada por:

$$\sqrt{\left(-1+\frac{2}{3}\right)^2+\left(0-\frac{1}{6}\right)^2+\left(4+\frac{25}{6}\right)^2}=\sqrt{\frac{1}{9}+\frac{1}{36}+\frac{1}{36}}=\sqrt{\frac{1}{6}}$$

Logo, o raio da superfície esférica é $\sqrt{\frac{1}{6}}$ e a sua equação é $(x+1)^2+y^2+(z-4)^2=\frac{1}{6}$.

40. Um vetor diretor da reta s é $\vec{s}(-5,p,0)$. Um vetor normal ao plano α é $\vec{n}(1,p,-1)$.

Para que a interseção da reta com o plano seja um conjunto vazio, a reta tem de ser (estritamente) paralela ao plano, ou seja, estes dois vetores têm de ser perpendiculares.

$\vec{r}\cdot\vec{n}=0 \Leftrightarrow (-5,p,0)\cdot(1,p,-1)=0 \Leftrightarrow -5+p^2=0 \Leftrightarrow p=\sqrt{5}\ \vee\ p=-\sqrt{5}$

$p\in\{-\sqrt{5},\sqrt{5}\}$

41. $\overrightarrow{XY}=(-x_1,y_1,0)$ e $\overrightarrow{XZ}=(-x_1,0,z_1)$

$$\begin{cases}(a,b,c)\cdot(-x_1,y_1,0)=0\\(a,b,c)\cdot(-x_1,0,z_1)=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-ax_1+by_1=0\\-ax_1+z_1c=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}b=\frac{x_1}{y_1}a\\c=\frac{x_1}{z_1}a\end{cases}$$

$\vec{n}\left(a,\frac{x_1}{y_1}a,\frac{x_1}{z_1}a\right)$, com $a\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$

Se $a=1$, então $\vec{n}\left(1,\frac{x_1}{y_1},\frac{x_1}{z_1}\right)$.

$x+\frac{x_1}{y_1}y+\frac{x_1}{z_1}z+d=0 \Leftrightarrow \frac{x}{x_1}+\frac{y}{y_1}+\frac{z}{z_1}+d=0$

$X(x_1,0,0)$ pertence ao plano. Assim:

$\frac{x_1}{x_1}+d=0 \Leftrightarrow 1+d=0 \Leftrightarrow d=-1$

O plano pretendido é $\frac{x}{x_1}+\frac{y}{y_1}+\frac{z}{z_1}-1=0$, como queríamos mostrar.

42. $\vec{n}_{ABC}\left(15,12,\frac{11}{2}\right)$

$ABC: 15x+12y+\frac{11}{2}z+d=0$

$15\times 2+12\times\frac{15}{6}+d=0 \Leftrightarrow 30+30+d=0 \Leftrightarrow d=-60$

$ABC: 15x+12y+\frac{11}{2}z-60=0$

Um ponto genérico da reta indicada no enunciado é $(2-k,2-k,12-6k)$.

C é o ponto de interseção da reta *OC* com o plano *ABC*.

$15(2-k)+12(2-k)+\frac{11}{2}(12-6k)-60=0$

$\Leftrightarrow 30-15k+24-12k+66-33k-60=0$

$\Leftrightarrow -60k+60=0$

$\Leftrightarrow k=1$

Logo, $C(1,1,6)$.

$A(x,0,0)$ pertence ao plano *ABC*. Assim:

$15x-60=0 \Leftrightarrow x=4 \qquad A(4,0,0)$

$B(0,y,0)$ pertence ao plano ABC. Assim:

$12y-60=0 \Leftrightarrow y=5 \qquad B(0,5,0)$

O volume da pirâmide é:

$$V = \frac{\frac{4\times5}{2}\times6}{3} = 20 \text{ u.v.}$$

43. De acordo com a sugestão do enunciado, $A(a,0,0), C(0,a,0), V\left(\frac{a}{2},\frac{a}{2},3a\right)$.

$\overrightarrow{AC} = (-a,a,0)$

$\overrightarrow{AV} = \left(-\frac{a}{2},\frac{a}{2},3a\right)$

$\left\|\overrightarrow{AC}\right\| = \sqrt{(-a)^2 + a^2 + 0^2} = \sqrt{2a^2} = \sqrt{2}a$

$\left\|\overrightarrow{AV}\right\| = \sqrt{\left(-\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 + 3a^2} = \sqrt{\frac{19}{2}}a$

$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AV} = \frac{a^2}{2} + \frac{a^2}{2} + 0 = a^2$

Seja α a amplitude do ângulo que uma aresta lateral faz com a diagonal da base concorrente com ela.

$\cos\alpha = \frac{a^2}{\sqrt{2}a\times\sqrt{\frac{19}{2}}a} = \frac{a^2}{\sqrt{19a^2}} = \frac{1}{\sqrt{19}}$

Assim, $\alpha \approx 76{,}74°$.

44.

44.1. $\overrightarrow{AB} = (2,4,1) - (1,3,2) = (1,1,-1)$

O triângulo [*ABC*] é retângulo em *B*, por estar inscrito numa semicircunferência, logo o vetor $\overrightarrow{AB}$ é normal ao plano *BCD*. Então, como *B* pertence ao plano *BCD* e $\overrightarrow{AB}$ é um vetor normal a este plano, uma equação cartesiana do plano *BCD* é:

$1(x-2) + 1(y-4) - 1(z-1) = 0 \Leftrightarrow x - 2 + y - 4 - z + 1 = 0 \Leftrightarrow x + y - z - 5 = 0$

44.2. $\overrightarrow{CD}$ é um vetor normal ao plano *ABC* e, como tal, é colinear com (0,1,1), que é um vetor colinear a este plano. Assim, $\overrightarrow{CD} = (0,k,k)$, para algum *k* real. Como a altura do cilindro é $2\sqrt{2}$, tem-se:

$\left\|\overrightarrow{CD}\right\| = 2\sqrt{2} \Leftrightarrow \sqrt{0^2 + k^2 + k^2} = \sqrt{8} \Leftrightarrow 2k^2 = 8 \Leftrightarrow k = 2 \ \vee \ k = -2$

Logo, $\overrightarrow{CD} = (0,2,2)$, de acordo com a figura.

Um ponto da base superior do cilindro é:

$A + \overrightarrow{CD} = (1,3,2) + (0,2,2) = (1,5,4)$

Como a base superior do cilindro é paralela ao plano *BCD*, então um vetor normal a este plano é também um vetor normal ao plano que contém essa base. Assim, (0,1,1) é um vetor normal ao plano que contém a base superior do cilindro.

Tem-se então que uma equação da base superior do cilindro é:

$0(x-1) + 1(y-5) + 1(z-4) = 0 \Leftrightarrow y - 5 + z - 4 = 0 \Leftrightarrow y + z - 9 = 0$

44.3. $\begin{cases} y+z=5 \\ 16x-5y+11z=23 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=5-z \\ 16x-5(5-z)+11z=23 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{———} \\ 16x-25+5z+11z=23 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \text{———} \\ 16x+16z=48 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{———} \\ x+z=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=5-z \\ x=3-z \end{cases}$

Assim, os pontos que pertencem à interseção dos dois planos são os pontos da forma $(3-z, 5-z, z), z \in \mathbb{R}$. Mas, $(3-z, 5-z, z) = (3,5,0) + z(-1,-1,1), z \in \mathbb{R}$.

Logo, uma equação vetorial da reta de interseção dos dois planos é:

$$(x,y,z) = (3,5,0) + k(-1,-1,1), k \in \mathbb{R}.$$

45.

45.1. Seja *M* o ponto médio de [*AC*].

$M = \left(\frac{0+1}{2}, \frac{0+0}{2}, \frac{1+0}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\right)$

Uma vez que a reta *BD* é paralela ao eixo Oy e que *M* é um ponto desta reta, então a sua equação vetorial é $(x,y,z) = \left(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\right) + k(0,1,0), k \in \mathbb{R}$.

Assim, as coordenadas do ponto *B* são da forma $\left(\frac{1}{2}, y, \frac{1}{2}\right)$ e as coordenadas do ponto *D* são da forma $\left(\frac{1}{2}, -y, \frac{1}{2}\right)$, sendo y um número real positivo.

$\|\overrightarrow{AC}\| = \|\overrightarrow{BD}\| \Leftrightarrow \sqrt{1^2+0^2+(-1)^2} = \sqrt{0^2+(-2y)^2+0^2} \Leftrightarrow \sqrt{2} = \sqrt{4y^2}$

$\Leftrightarrow 4y^2 = 2$

$\Leftrightarrow y^2 = \frac{1}{2}$

Como $y > 0$, então $y = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Logo, $B\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2}\right)$ e $D\left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

45.2. $E = M = \left(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\right)$

$\begin{cases} \overrightarrow{EV} \cdot \overrightarrow{AC} = 0 \\ \overrightarrow{EV} \cdot \overrightarrow{DB} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left(x-\frac{1}{2}, y, z-\frac{1}{2}\right) \cdot (1,0,-1) = 0 \\ \left(x-\frac{1}{2}, y, z-\frac{1}{2}\right) \cdot \left(0, \sqrt{2}, 0\right) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-\frac{1}{2}-z+\frac{1}{2}=0 \\ \sqrt{2}y=0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x-z=0 \\ y=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=z \\ y=0 \end{cases}$, que são as equações cartesianas da reta *EV*.

Um sistema de equações paramétricas da reta EV é $\begin{cases} x=k \\ y=0 \\ z=k \end{cases}, k \in \mathbb{R}$.

45.3. A reta *EV* é perpendicular ao plano *ABC*. Logo, qualquer vetor diretor da reta é normal ao plano.

Assim, o vetor (1,0,1) é normal ao plano *ABC* e, consequentemente, é normal a qualquer plano que lhe seja paralelo.

Como o ponto *V* pertence à reta *EV*, tem-se que $V(a,0,a), a \in \mathbb{R}^+$, de acordo com a figura.

$$V_{\text{pirâmide}} = \sqrt{2} \Leftrightarrow \frac{1}{3} \times 1 \times 1 \times \overline{EV} = \sqrt{2} \Leftrightarrow \overline{EV} = 3\sqrt{2}$$

$$\sqrt{\left(a-\frac{1}{2}\right)^2 + 0^2 + \left(a-\frac{1}{2}\right)^2} = 3\sqrt{2} \Leftrightarrow 2\left(a-\frac{1}{2}\right)^2 = 18 \Leftrightarrow \left(a-\frac{1}{2}\right) = 9$$

$$\Leftrightarrow a - \frac{1}{2} = 3 \vee a - \frac{1}{2} = -3$$

$$\Leftrightarrow a = \frac{7}{2} \vee a = -\frac{5}{2}$$

Como $a \in \mathbb{R}^+$, então $V\left(\frac{7}{2}, 0, \frac{7}{2}\right)$.

Assim, uma equação do plano paralelo a *ABC* que contém *V* é:

$$1\left(x-\frac{7}{2}\right) + 0(y-0) + 1\left(z-\frac{7}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow x - \frac{7}{2} + z - \frac{7}{2} = 0 \Leftrightarrow x + z = 7$$