Escola Secundária de Francisco Franco
Matemática A – 12.º ano

Funções reais de variável real

FUNÇÕES CONTÍNUAS

1) Função contínua num ponto

Dada uma função *f*, real de variável real, de domínio D_f e um ponto *a* de D_f, diz-se que:

- ***f* é contínua em *a*** se existir $\lim\limits_{x\to a} f(x)$, isto é,

  $\boxed{f \text{ é contínua em } a \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)}$

- ***f* é descontínua em *a*** se não for contínua em *a* ;

- ***f* é contínua num conjunto $A \subset D_f$** se *f* for contínua em todos os pontos de *A*;

- ***f* é contínua** se for contínua em D_f .

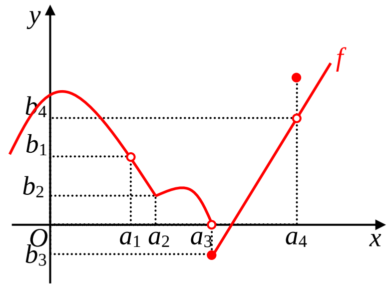
2) Operações com funções contínuas

- Dadas duas funções reais de variável real *f* e *g* contínuas em $a \in D_f \cap D_g$, são também contínuas em *a* as funções:

  $f+g$, $f-g$, $f\times g$ e $\frac{f}{g}$ (se $g(a)\neq 0$)

- São contínuas, nos seus domínios, as funções polinomiais, racionais, as de potências de expoente racional, as funções trigonométricas (funções seno, cosseno e tangente) e as funções exponenciais e as funções logarítmicas.

Nota:
Considera o gráfico a seguir da função *f* de domínio $\mathbb{R}\setminus\{a_1\}$.



Assim:

- $\lim\limits_{x\to a_1} f(x) = b_1$ mas não faz sentido falar em continuidade em a_1;
- *f* é contínua em a_2 porque existe $\lim\limits_{x\to a_2} f(x)$ $\left(\lim\limits_{x\to a_2} f(x) = b_2\right)$;
- *f* é descontínua em a_3 porque não existe $\lim\limits_{x\to a_3} f(x)$ (já que se tem $\underbrace{\lim\limits_{x\to a_3^-} f(x)}_{0} \neq \underbrace{\lim\limits_{x\to a_3^+} f(x)}_{b_3}$);
- *f* é descontínua em a_4 porque não existe $\lim\limits_{x\to a_4} f(x)$ (já que se tem $\underbrace{\lim\limits_{x\to a_4} f(x)}_{b_4} \neq f(a_4)$).

Exercício resolvido 1

Considera a função *f*, de domínio $\mathbb{R}$, definida por

$$f(x) = \begin{cases} 5-x^2 & \text{se } x\leq 3 \\ \dfrac{2x-6}{9-x^2} & \text{se } x>3 \end{cases}.$$

1.1. Justifica que *f* não é contínua em 3.
1.2. Estuda a continuidade de *f* em $\mathbb{R}$.

Resolução

1.1. $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 3}(5-x^2) = 5-3^2 = -4 = f(3)$

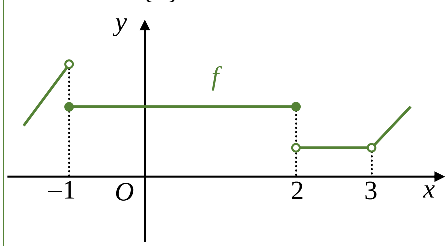
$$\lim_{x\to 3^+} f(x) = \lim_{x\to 3}\frac{2x-6}{9-x^2} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x\to 3}\frac{2(x-3)}{(3-x)(3+x)} = \lim_{x\to 3}\frac{-2\cancel{(3-x)}}{\cancel{(3-x)}(3+x)} = \frac{-2}{3+3} = -\frac{1}{3} \neq f(3)$$

Dado que $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x) = f(3) \neq \lim\limits_{x\to 3^+} f(x)$, *f* não é contínua em 3 $\boxed{\text{QED}}$

1.2. *f* é contínua em $]-\infty,3[$ por estar definida por uma função polinomial (quadrática) e é contínua em $]3,+\infty[$ por estar definida por uma função racional. Como *f* é descontínua em 3, conclui-se que <u>*f* é contínua em $\mathbb{R}\setminus\{3\}$</u>.

Exercício proposto 1

Considera, no referencial o.n. *xOy* a seguir, parte do gráfico da função *f*, de domínio $\mathbb{R}\setminus\{3\}$.



Qual é a afirmação falsa?

(A) $\lim\limits_{x\to -1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^-} f(x)$

(B) Existe $\lim\limits_{x\to 3} f(x)$.

(C) *f* é contínua em $[-1,2]$.

(D) *f* é descontínua em 2.

Exercício resolvido 2

Para um certo número real k, é contínua a função g, de domínio $\mathbb{R}^+$, definida por $g(x)=\begin{cases} k+5 & \text{se } x=0 \\ \frac{x}{\sqrt{3x}}-5 & \text{se } x>0 \end{cases}$.

Calcula k.

Resolução

g é continua em 0, logo $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x)=g(0)$

Ora, $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\frac{x}{\sqrt{3x}}-5\right)\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\sqrt{x}\cancel{\sqrt{x}}}{\sqrt{3}\cancel{\sqrt{x}}}-5=\frac{0}{\sqrt{3}}-5=-5$

$\therefore k+5=-5 \Leftrightarrow k=\boxed{-10}$

Exercício resolvido 3

Seja k um número real não nulo e sejam f e g as funções, de domínios, respetivamente, $\mathbb{R}\setminus\{-2\}$ e $\mathbb{R}$, definidas por

$$f(x)=\begin{cases} \frac{4-\sqrt{-8x}}{x^2-3x-10} & \text{se } x<-2 \\ \frac{x^3+8}{kx+2k} & \text{se } x>-2 \end{cases} \quad \text{e} \quad g(x)=\begin{cases} f(x) & \text{se } x\neq -2 \\ -\frac{1}{7} & \text{se } x=-2 \end{cases}.$$

3.1. Sabendo que existe $\lim\limits_{x\to -2} f(x)$, determina k.

3.2. A função g é contínua no ponto de abcissa -2?

Resolução

3.1. Se $\lim\limits_{x\to -2} f(x)$ existe, então $\lim\limits_{x\to -2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to -2^+} f(x)$ (pois $-2\notin D_f$).

$$\lim_{x\to -2^-} f(x)=\lim_{x\to -2}\frac{4-\sqrt{-8x}}{x^2-3x-10}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to -2}\left(\frac{4-\sqrt{-8x}}{x^2-3x-10}\times\frac{4+\sqrt{-8x}}{4+\sqrt{-8x}}\right)$$

$$=\lim_{x\to -2}\frac{4^2-(-8x)}{(x+2)(x-5)(4+\sqrt{-8x})}=\lim_{x\to -2}\frac{8\cancel{(2+x)}}{\cancel{(x+2)}(x-5)(4+\sqrt{-8x})}$$

$$=\frac{\cancel{8}}{-2-5(\cancel{4+\sqrt{16}})}=-\frac{1}{7}$$

$$\begin{array}{r|rrr} & 1 & -3 & -10 \\ -2 & & -2 & 10 \\ \hline & 1 & -5 & \boxed{0} \end{array}$$

$$\lim_{x\to -2^+} f(x)=\lim_{x\to -2}\frac{x^3+8}{kx+2k}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to -2}\frac{\cancel{(x+2)}(x^2-2x+4)}{k\cancel{(x+2)}}$$

$$=\frac{4+4+4}{k}=\frac{12}{k}$$

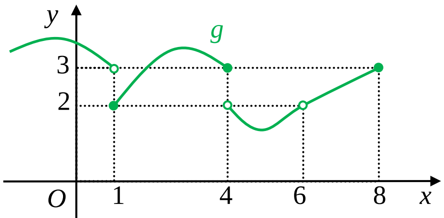
$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 0 & 0 & 8 \\ -2 & & -2 & 4 & -8 \\ \hline & 1 & -2 & 4 & \boxed{0} \end{array}$$

$\therefore \frac{12}{k}=-\frac{1}{7}\Leftrightarrow k=\boxed{-84}$

3.2. Atendendo a que $\lim\limits_{x\to -2} g(x)=-\frac{1}{7}=g(-2)$, conclui-se que <u>$g$ é contínua em 2</u>.

Exercício proposto 2

No referencial o.n. xOy a seguir, encontra-se parte do gráfico da função g, de domínio $]-\infty,8]\setminus\{6\}$.



Indica, justificando, o valor lógico das seguintes proposições.

i) $\lim\limits_{x\to 1^+} g(x)=\lim\limits_{x\to 4^-} g(x)$

ii) $\lim\limits_{x\to 1^-} g(x)=g(4)$

iii) g é contínua em 6

iv) g é contínua em 8

v) g é contínua no seu domínio.

vi) g é contínua em $[1,4]$.

vii) g é contínua em $]4,6[$.

Exercício proposto 3

Estuda as funções seguintes quanto à continuidade no seu domínio.

3.1. $f(x)=\begin{cases} \operatorname{sen}\frac{2x}{3} & \text{se } x\neq\pi \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \text{se } x=\pi \end{cases}$

3.2. $g(x)=\begin{cases} \frac{x^3-5x^2-x+5}{x-1} & \text{se } x<1 \\ x^3-9 & \text{se } x\geq 1 \end{cases}$

3.3. $h(x)=\begin{cases} \frac{2x^2-12x+18}{15-5x} & \text{se } x<3 \\ 0 & \text{se } x=3 \\ \frac{x-3}{\sqrt{x^3-27}} & \text{se } x>3 \end{cases}$

Exercício proposto 4

Estuda a continuidade das funções nos pontos relevantes.

4.1. $f(x)=\begin{cases} \frac{x^2-2x-3}{4\sqrt{x+1}-8} & \text{se } x>3 \\ 4 & \text{se } x=3 \\ \frac{144x-24x^2-8x^3}{81-9x^2} & \text{se } x<3 \end{cases}$

4.2. $g(x)=\begin{cases} \frac{4-\sqrt{8-4x}}{12+10x-x^3} & \text{se } x>-2 \\ \frac{2}{3x-1} & \text{se } x\leq -2 \end{cases}$

4.3. $h(x)=\begin{cases} \frac{2x^3-2x}{x^4+x^3+x^2+x} & \text{se } x<-1 \\ 2\cos(\pi x) & \text{se } x\geq -1 \end{cases}$

4.4. $i(x)=\begin{cases} \frac{1}{x-2}-\frac{2}{x^2-2x} & \text{se } x\neq 2 \\ \frac{1}{2} & \text{se } x=2 \end{cases}$

4.5. $f(x)=\begin{cases} \frac{4x^3-8x-16}{4-x^2} & \text{se } x<2 \\ -10 & \text{se } x=2 \\ \frac{x-2}{5-\sqrt{x+23}} & \text{se } x>2 \end{cases}$

Exercício proposto 5

Determina o valor de k de modo que sejam contínuas as funções seguintes nos pontos indicados.

5.1. $f(x)=\begin{cases} 3-x^3 & \text{se } x<2 \\ 4x+k & \text{se } x\geq 2 \end{cases}$ em $x=2$;

5.2. $g(x)=\begin{cases} \frac{5kx^2-5k}{x+1} & \text{se } x<-1 \\ \sqrt{x+5} & \text{se } x\geq -1 \end{cases}$ em $x=-1$

<u>Soluções</u>: 1. C 2. FVFVFFV 3. $\mathbb{R}\setminus\{\pi\}$; $\mathbb{R}$; $\mathbb{R}$ 4. é; não é; é; é; é 5. -13; -1/5

O professor: Roberto Oliveira