Exercícios de aplicação **(págs. 51 a 57)**

1.

1.1. $(A \cap \bar{B}) \cup (A \cap B) = A \cap (\bar{B} \cup B) = A \cap U = A$

1.2. $(A \cap \bar{B}) \cup (\bar{A} \cap B) \cup (\bar{A} \cap \bar{B}) = (A \cap \bar{B}) \cup [\bar{A} \cap (B \cup \bar{B})] =$

$= (A \cap \bar{B}) \cup (\bar{A} \cap U) =$

$= (A \cap \bar{B}) \cup \bar{A} =$

$= (\bar{A} \cup A) \cap (\bar{A} \cup \bar{B}) =$

$= U \cap (\bar{A} \cup \bar{B}) =$

$= \bar{A} \cup \bar{B} =$

$= \overline{A \cap B}$

1.3. $\overline{(\bar{A} \cap B) \cup (\bar{A} \cap \bar{B})} = \overline{(\bar{A} \cap B)} \cap \overline{(\bar{A} \cap \bar{B})} = (A \cup \bar{B}) \cap (A \cup B) =$

$= A \cup (\bar{B} \cap B) =$

$= A \cup \emptyset =$

$= A$

2. ${}^{4}C_1 + {}^{4}C_2 + {}^{4}C_3 + {}^{4}C_4 = 4 + 6 + 4 + 1 = 15$

3.

3.1. ${}^{28}A_3 = 19\,656$

3.2. ${}^{28}C_4 = 20\,475$

3.3. ${}^{28}A_2 \times {}^{26}C_3 = 1\,965\,600$

4.

4.1. $14! = 87\,178\,291\,200$

4.2. $6! \times 9! = 261\,273\,600$

4.3. $9! \times 5! \times 2 = 87\,091\,200$

4.4. $9 \times 8 \times 12! = 34\,488\,115\,200$

4.5. $14! - 13! \times 2 = 74\,724\,249\,600$

5. $\frac{11!}{3! \times 2! \times 2! \times 2!} = 831\,600$

6. $\underbrace{9 \times 8 \times 7}_{\text{terminados em zero}} + \underbrace{8 \times 8 \times 7 \times 4}_{\text{não terminados em zero}} = 504 + 1792 = 2296$

LeYa EDUCAÇÃO Daniela Raposo e Luzia Gomes

7. Para $n \geq 2$:

$$^{n}C_2 = 3n-5 \Leftrightarrow \frac{n!}{(n-2)!\times 2!} = 3n-5 \Leftrightarrow \frac{n(n-1)}{2} = 3n-5$$

$$\Leftrightarrow n(n-1) = 2(3n-5)$$

$$\Leftrightarrow n^2 - n = 6n - 10$$

$$\Leftrightarrow n^2 - 7n + 10 = 0$$

$$\Leftrightarrow n = \frac{7 \pm \sqrt{(-7)^2 - 4\times 1\times 10}}{2\times 1}$$

$$\Leftrightarrow n = 2 \ \vee \ n = 5$$

$\text{C. S.} = \{2, 5\}$

8. Para $n \geq 2$:

$$^{n}C_0 \times {}^{n}C_1 \times {}^{n}C_2 = 10n \Leftrightarrow 1\times n \times \frac{n!}{(n-2)!\times 2!} = 10n \Leftrightarrow n \times n \times (n-1) = 20n$$

$$\Leftrightarrow n^3 - n^2 - 20n = 0$$

$$\Leftrightarrow n(n^2 - n - 20) = 0$$

$$\Leftrightarrow n = 0 \ \vee \ n = \frac{1 \pm \sqrt{(-1)^2 - 4\times 1\times(-20)}}{2\times 1}$$

$$\Leftrightarrow n = 0 \ \vee \ n^2 - n - 20 = 0$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{n = 0}_{\notin \mathbb{N}} \ \vee \ n = 5 \ \vee \ \underbrace{n = -4}_{\notin \mathbb{N}}$$

Logo, $n = 5$.

Assim, $2^5 = 32$.

9. Para $n \geq 2$:

$$^{n}C_0 + {}^{n}C_1 + {}^{n}C_2 = 5152 \Leftrightarrow 1 + n + \frac{n!}{(n-2)!\times 2!} = 5152 \Leftrightarrow 1 + n + \frac{n(n-1)}{2} = 5152$$

$$\Leftrightarrow 2 + 2n + n^2 - n = 10\,304$$

$$\Leftrightarrow n^2 + n - 10\,302 = 0$$

$$\Leftrightarrow n = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4\times 1\times(-10\,302)}}{2\times 1}$$

$$\Leftrightarrow n = 101 \ \vee \ \underbrace{n = -102}_{\notin \mathbb{N}}$$

Portanto, $n = 101$ e a linha seguinte é a 102 e o antepenúltimo elemento é $^{102}C_{100} = 5151$.

10. $^{n}C_7 = {}^{n}C_8$ linha 15

O maior elemento da linha seguinte, linha 16 é $^{16}C_8 = 12\,870$.

11. Tem-se que:

$0 \leq p+1 \leq 26 \ \wedge \ 0 \leq p^2 - p \leq 26 \ \wedge \ p \in \mathbb{Z}$, isto é,

$-1 \leq p \leq 25 \ \wedge \ \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{105}}{2} \leq p \leq 0 \ \vee \ 1 \leq p \leq \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{105}}{2}\right) \ \wedge \ p \in \mathbb{Z}$, ou seja,

$p \in \{-1,0,1,2,3,4,5\}$

$$\begin{aligned} {}^{26}C_{p+1} = {}^{26}C_{p^2-p} &\Leftrightarrow p+1 = p^2 - p \ \vee \ p+1 = 26 - (p^2 - p) \\ &\Leftrightarrow -p^2 + 2p + 1 = 0 \ \vee \ p + 1 = 26 - p^2 + p \\ &\Leftrightarrow p = 1 + \sqrt{2} \ \vee \ p = 1 - \sqrt{2} \ \vee \ p^2 = 25 \\ &\Leftrightarrow p = 1 + \sqrt{2} \ \vee \ p = 1 - \sqrt{2} \ \vee \ p = -5 \ \vee \ p = 5 \end{aligned}$$

Como $p \in \{-1,0,1,2,3,4,5\}$, então $\text{C.S.} = \{5\}$.

Cálculos auxiliares

$p^2 - p = 0 \Leftrightarrow p(p-1) = 0 \Leftrightarrow p = 0 \ \vee \ p = 1$, logo $p^2 - p \geq 0 \Leftrightarrow p \leq 0 \ \vee \ p \geq 1$

$p^2 - p - 26 = 0 \Leftrightarrow p = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4 \times (-26)}}{2} \Leftrightarrow p = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{105}}{2}$, logo $p^2 - p - 26 \leq 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{105}}{2} \leq p \leq \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{105}}{2}$

Assim, $0 \leq p^2 - p \leq 26 \Leftrightarrow \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{105}}{2} \leq p \leq 0 \ \vee \ 1 \leq p \leq \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{105}}{2}$.

12. ${}^{10}C_p \ (x^2)^{10-p} \times \left(-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^p$

Assim, temos:

$$x^{20-2p} \times \left(\frac{1}{x^{\frac{1}{2}}}\right)^p \times (-1)^p = x^{20-2p} \times \left(x^{-\frac{1}{2}}\right)^p \times (-1)^p =$$
$$= x^{20-\frac{5}{2}p} \times (-1)^p$$

Logo:

$$20 - \frac{5}{2}p = 0 \Leftrightarrow -\frac{5}{2}p = -20 \Leftrightarrow p = 8$$

${}^{10}C_p \ (x^2)^{10-p} \times \left(-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^p$, ou seja, ${}^{10}C_8 \ = 45$.

13. $\left(1 + \frac{3}{n}\right)^n = {}^nC_0 \times 1^n \times \left(\frac{3}{n}\right)^0 + {}^nC_1 \times 1^{n-1} \times \frac{3}{n} + {}^nC_2 \times 1^{n-2} \times \left(\frac{3}{n}\right)^2 + \cdots + {}^nC_n \times 1^0 \times \left(\frac{3}{n}\right)^n =$

$$= 1 + n \times \frac{3}{n} + \frac{n(n-1)}{2} \times \frac{9}{n^2} + \cdots + \left(\frac{3}{n}\right)^n =$$
$$= 1 + 3 + \frac{9 \times (n-1)}{2n} + \cdots + \left(\frac{3}{n}\right)^n =$$
$$= 4 + \frac{9n-9}{2n} + \cdots + \left(\frac{3}{n}\right)^n$$

Assim, $\left(1 + \frac{3}{n}\right)^n > 6 \Leftrightarrow 4 + \frac{9n-9}{2n} + \cdots + \left(\frac{3}{n}\right)^n > 6$.

Dado que $4+\frac{9n-9}{2n}+\cdots+\left(\frac{3}{n}\right)^n$ é a soma de $n+1$ parcelas positivas, para provar o pretendido, basta provar que $4+\frac{9n-9}{2n}>6$.

$$4+\frac{9n-9}{2n}>6 \Leftrightarrow \frac{9n-9}{2n}>2 \Leftrightarrow 9n-9>4n$$
$$\Leftrightarrow 5n>9$$
$$\Leftrightarrow n>\frac{9}{5}$$

Como, por hipótese, $n \geq 2$, provámos o que se pretendia.

Exercícios propostos **(págs. 58 a 65)**

Itens de seleção **(págs. 58 a 60)**

1. $\overbrace{\underbrace{\_\_ \ \_\_}_{2!}}^{\text{VOGAIS}} \quad \overbrace{\underbrace{\_\_ \ \_\_ \ \_\_}_{3!}}^{\text{CONSOANTES}} = 2! \times 3!$

Opção (B)

2. ${}^{8}C_4$ é o número de conjuntos com 4 lâmpadas que se podem formar dispondo de um conjunto de 8 lâmpadas.

Opção (C)

3. ${}^{50}C_2 \times {}^{20}C_1 = {}^{50}C_2 \times 20$

Opção (D)

4. $\underbrace{\underset{3}{\_M\_} \times \underbrace{\underset{5}{\_\_} \times \underset{4}{\_\_} \times \underset{3}{\_\_} \times \underset{2}{\_\_} \times \underset{1}{\_\_}}_{\text{os restantes 5 amigos}} \times \underset{2}{\_M\_}} = {}^{3}A_2 \times 5!$

Opção (B)

5. $\underbrace{\underset{4}{\_J_1\_} \times \underset{4}{\_J_2\_} \times \underset{4}{\_J_3\_} \times \underset{4}{\_J_4\_} \times \underset{4}{\_J_5\_} \times \underset{4}{\_J_6\_}} = {}^{4}A'_6 = 4^6$

Opção (A)

6. Linha seguinte, $n = 12$, logo o seu maior elemento é ${}^{12}C_6 = 924$.

Opção (C)

7. Os dois últimos elementos são iguais aos dois primeiros.

$^{n}C_0 + {}^{n}C_1 = 20 \Leftrightarrow 1 + n = 20 \Leftrightarrow n = 19$

A linha 18 é a linha anterior. Assim, o produto do 3.º pelo 4.º da linha anterior é $^{18}C_2 \times {}^{18}C_3$.

Opção (D)

8. $\underbrace{\_P_1\_ \quad \_P_2\_ \quad \_P_3\_ \quad \_P_4\_ \quad \_P_5}_{2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2} = 2^5$

Opção (A)

9. $\frac{(n-1)!}{n!-(n-1)!} = \frac{(n-1)!}{n\times(n-1)!-(n-1)!} = \frac{(n-1)!}{(n-1)!(n-1)} =$

$= \frac{1}{n-1}$

Opção (A)

10. Para cada um dos dez utensílios há 5 possibilidades (5^{10}).

Opção (C)

11. $^{10}C_3 \times {}^{12}C_5 \times 8!$

Opção (C)

12. $^{n}C_2 = 190 \Leftrightarrow \frac{n!}{(n-2)!\times 2!} = 190 \Leftrightarrow n(n-1) = 380$

$\Leftrightarrow n^2 - n - 380 = 0$

$\Leftrightarrow n = \frac{1 \pm \sqrt{(-1)^2 - 4\times 1\times(-380)}}{2\times 1}$

$\Leftrightarrow n = 20 \quad \vee \quad n = -19$

$n = 20$, ou seja, 20 pessoas.

Opção (B)

13. $9\times 8\times 7 + 9\times 8\times 7 + 9\times 8\times 7 + 5\times 8\times 7 = 1792$

Opção (C)

14. $2^n = 4096 \Leftrightarrow 2^n = 2^{12} \Leftrightarrow n = 12$

Logo, na linha seguinte tem-se $n = 13$ e o 3.º elemento é $^{13}C_2$.

Opção (D)

15. ${}^nC_0 + {}^nC_1 + {}^nC_{n-1} + {}^nC_n = 20 \Leftrightarrow 1 + n + n + 1 = 20$

$\Leftrightarrow 2n + 2 = 20$

$\Leftrightarrow 2n = 18$

$\Leftrightarrow n = 9$

O 6.º elemento da linha $n = 9$ é ${}^9C_5 = 126$.

Opção (B)

16. ${}^{11}C_4 \times {}^7C_5 \times 3 \times 3 = {}^{11}C_4 \times {}^7C_5 \times 3^2$

Opção (C)

17. $\underbrace{999^6}_{{}^6C_0\times 999^6\times 1^0} + \underbrace{6\times 999^5}_{{}^6C_1\times 999^5\times 1^1} + \underbrace{15\times 999^4}_{{}^6C_2\times 999^4\times 1^2} + \underbrace{20\times 999^3}_{{}^6C_3\times 999^3\times 1^3} + \underbrace{15\times 999^2}_{{}^6C_4\times 999^2\times 1^4} + \underbrace{6\times 999^1}_{{}^6C_5\times 999^1\times 1^5} + \underbrace{1}_{{}^6C_6\times 999^6\times 1^6} =$

$= (1 + 999)^6 =$

$= 1000^6 =$

$= (10^3)^6 =$

$= 10^{18}$

Opção (C)

18. $\underbrace{\cos^4 x}_{{}^4C_0\times\cos^4 x\times 1^0} + \underbrace{4\cos^3 x}_{{}^4C_1\times\cos^3 x\times 1^1} + \underbrace{6\cos^2 x}_{{}^4C_2\times\cos^2 x\times 1^2} + \underbrace{4\cos x}_{{}^4C_3\times\cos x\times 1^3} + \underbrace{1}_{{}^4C_4\times\cos^0 x\times 1^4} = 0$

$\Leftrightarrow (1 + \cos x)^4 = 0$

$\Leftrightarrow 1 + \cos x = 0$

$\Leftrightarrow \cos x = -1$

$\Leftrightarrow \cos x = \cos \pi$

$\Leftrightarrow x = \pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$

Opção (B)

19. ${}^nC_3 = \frac{n!}{(n-3)!3!} = \frac{n(n-1)(n-2)}{6}$

Opção (A)

20. O número de diagonais de um polígono convexo de n lados é dado por ${}^nC_2 - n$, onde ${}^nC_2$ é o número de segmentos de reta que se podem construir com os n vértices do polígono e n é o número de lados do polígono.

Assim:

$$ {}^{n}C_2 - n = 77 \Leftrightarrow \frac{n!}{(n-2)!2!} - n = 77 \Leftrightarrow \frac{n(n-1)}{2} - n = 77 $$

$$ \Leftrightarrow n(n-1) - 2n = 154 $$

$$ \Leftrightarrow n^2 - n - 2n - 154 = 0 $$

$$ \Leftrightarrow n^2 - 3n - 154 = 0 $$

$$ \Leftrightarrow n = \frac{3 \pm \sqrt{(-3)^2 - 4\times 1\times(-154)}}{2\times 1} $$

$$ \Leftrightarrow n = 14 \vee n = -11 $$

Opção (D)

21. Lançando os três dados, podem formar-se ${}^{6}C_3$ conjuntos compostos por 3 algarismos diferentes e cada um destes conjuntos pode ser representado apenas de uma maneira, considerando os algarismos dispostos por ordem crescente.

Opção (B)

22. $7 \times 7 \times 7 \times 7 \times 7 = 7^5$

Opção (B)

23. Número de peças que se podem formar com um número de pontos diferente em cada uma das partes: ${}^{n+1}C_2$

Número de peças que se podem formar com o mesmo número de pontos nas duas partes da peça: $(n+1)$

O número total é:

$$ {}^{n+1}C_2 + (n+1) = \frac{(n+1)\times n}{2} + (n+1) \times 2 = \frac{(n+1)\times n + 2\times(n+1)}{2} = $$

$$ = \frac{(n+1)\times(n+2)}{2} $$

Opção (C)

24. ${}^{4}C_2 \times {}^{3}C_1 + {}^{4}C_1 \times {}^{3}C_2 = 30$

Opção (A)

25. ${}^{13}C_P(\sqrt{5x})^{13-p}\left(-\frac{y}{3}\right)^P$

Assim, temos:

$$ \left[(5x)^{\frac{1}{2}}\right]^{13-p} \times (-1)^p \times \left(\frac{y}{3}\right)^P = (5x)^{\frac{13}{2}-\frac{p}{2}} \times (-1)^p \times \frac{y^p}{3^p} $$

Logo:

$$\frac{13}{2}-\frac{p}{2}=3\ \wedge\ p=7 \Leftrightarrow 13-6=p\ \ \wedge\ p=7$$
$$\Leftrightarrow 7=p$$

$$^{13}C_7\left(\sqrt{5x}\right)^6\left(-\frac{y}{3}\right)^7={}^{13}C_7\times\left(5^{\frac{1}{2}}\right)^6\times\left(x^{\frac{1}{2}}\right)^6\times\left(-\frac{1}{3}\right)^7\times y^7=$$
$$={}^{13}C_7\times 5^3\times x^3\times\left(-\frac{1}{2187}\right)\times y^7=$$
$$={}^{13}C_7\times 5^3\times\left(-\frac{1}{3}\right)^7 x^3y^7$$

Opção (B)

26. $(2x+3y)^{15}=\sum_{p=0}^{15}{}^{15}C_p\times(2x)^{15-p}\times(3y)^p=$

$=\sum_{p=0}^{15}{}^{15}C_p\times 2^{15-p}\times 3^p\times x^{15-p}\times y^p$

A soma dos coeficientes dos termos deste desenvolvimento é, então, $\sum_{p=0}^{15}{}^{15}C_p\times 2^{15-p}\times 3^p$, que é igual a $(2+3)^{15}=5^{15}$.

Opção (B)

Itens de construção (págs. 61 a 65)

1.

1.1. $(\overline{A\cap B})\cup\bar{\bar{A}}\underbrace{=}_{\substack{\text{Lei de De Morgan e}\\\text{propriedade do complementar}\\\text{de um conjunto}}}(\bar{A}\cup\bar{B})\cup A=$

$\underbrace{=}_{\substack{\text{Propriedade associativa}\\\text{e comutativa da reunião}}}(\bar{A}\cup A)\cup\bar{B}=$

$\underbrace{=}_{\substack{\text{Propriedade do complementar}\\\text{de um conjunto}}}U\cup\bar{B}=$

$\underbrace{=}_{\substack{\text{Elemento absorvente}\\\text{da reunião}}}U$

1.2. $(A\cap\bar{B})\cup(A\cap B)\underbrace{=}_{\substack{\text{Propriedade distributiva}\\\text{da interseção em relação à reunião}}}A\cap(\bar{B}\cup B)=$

$\underbrace{=}_{\substack{\text{Propriedade do complementar}\\\text{de um conjunto}}}A\cap U=$

$\underbrace{=}_{\substack{\text{Elemento neutro}\\\text{da interseção}}}A$

1.3. $(A \cap \bar{B}) \cup (A \cap B) \cup (\bar{A} \cap B) \underbrace{=}_{\substack{\text{Propriedade distributiva} \\ \text{da interseção em relação à reunião}}} [A \cap (\bar{B} \cup B)] \cup (\bar{A} \cap B) =$

$\underbrace{=}_{\substack{\text{Propriedade do complementar} \\ \text{de um conjunto}}} (A \cap U) \cup (\bar{A} \cap B) =$

$\underbrace{=}_{\substack{\text{Elemento neutro} \\ \text{da interseção}}} A \cup (\bar{A} \cap B) =$

$\underbrace{=}_{\substack{\text{Propriedade distributiva} \\ \text{da reunião em relação à interseção}}} (A \cup \bar{A}) \cap (A \cup B) =$

$\underbrace{=}_{\substack{\text{Propriedade do complementar} \\ \text{de um conjunto}}} U \cap (A \cup B) =$

$\underbrace{=}_{\substack{\text{Elemento neutro} \\ \text{da interseção}}} A \cup B$

2. $3 \times 2 = 6$

3. $4 \times 3 \times 3 \times 3 = 108$

4. $26 \times 26 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 = 26^2 \times 10^4 = 6\,760\,000$

5. $5^{10} = 9\,765\,625$

6. $3 \times 3 \times 2 = 18$

7. $9 \times 9 \times 8 \times 7 = 4536$

8. $8 \times 8 \times 5 = 320$

9. $3 \times 4 \times 4 \times 4 \times 1 = 192$

10. $5 \times 5 = 25$

11.

11.1. $8! = 40\,320$

11.2. ${}^{8}A_5 = 6720$

11.3. ${}^{8}C_5 \times 5! = 6720 = {}^{8}A_5$

12.

12.1. $5! = 120$

12.2. $7! = 5040$

12.3. $\frac{6!}{2!} = 360$

12.4. $\frac{9!}{2!3!} = 30\,240$

13. ${}^7C_4 - {}^5C_2 \times {}^2C_2 = 35 - 10 = 25$ ou ${}^2C_1 \times {}^5C_3 + {}^5C_4 = 2 \times 10 + 5 = 25$

14. ${}^5C_2$ corresponde ao número de maneiras de escolher dois dos cinco lugares onde podem ficar os símbolos ☺, que são iguais. Por cada uma destas maneiras, existem 3! formas de colocar os três símbolos diferentes nos três lugares restantes. Assim, ${}^5C_2 \times 3!$ é uma resposta correta à questão. ${}^5A_3$ é também uma resposta correta, já que corresponde ao número de maneiras de escolher de forma ordenada três posições para os três símbolos diferentes. Por cada uma destas maneiras, só há uma forma de colocar os dois símbolos iguais nos dois lugares que restam.

15. $2^8 = 2^n \Leftrightarrow n = 8$

${}^8C_4 = 70$

16. ${}^nC_0 \times {}^nC_1 = 15 \Leftrightarrow 1 \times n = 15 \Leftrightarrow n = 15$

${}^{15}C_7 = 6435$ e ${}^{15}C_8 = 6435$

17.

17.1. $(x+4)^5 = {}^5C_0x^5 \times 4^0 + {}^5C_1x^4 \times 4^1 + {}^5C_2x^3 \times 4^2 + {}^5C_3x^2 \times 4^3 + {}^5C_4x \times 4^4 +$

$+ {}^5C_5x^0 \times 4^5 = x^5 + 20x^4 + 160x^3 + 640x^2 + 1280x + 1024$

17.2. $\left(x+\sqrt{3}\right)^7 = {}^7C_0x^7\sqrt{3}^0 + {}^7C_1x^6\sqrt{3} + {}^7C_2x^5\sqrt{3}^2 + {}^7C_3x^4\sqrt{3}^3 + {}^7C_4x^3\sqrt{3}^4 +$

$+ {}^7C_5x^2\sqrt{3}^5 + {}^7C_6x\sqrt{3}^6 + {}^7C_7x^0\sqrt{3}^7 = x^7 + 7\sqrt{3}x^6 + 63x^5 + 105\sqrt{3}x^4 + 315x^3 +$

$+189\sqrt{3}x^2 + 189x + 27\sqrt{3}$

17.3. $\left(\frac{x}{4}-2\right)^5 = {}^5C_0\left(\frac{x}{4}\right)^5 \times (-2)^0 + {}^5C_1\left(\frac{x}{4}\right)^4(-2)^1 + {}^5C_2\left(\frac{x}{4}\right)^3(-2)^2 + {}^5C_3\left(\frac{x}{4}\right)^2(-2)^3 +$

$+ {}^5C_4\left(\frac{x}{4}\right)^1(-2)^4 + {}^5C_5\left(\frac{x}{4}\right)^0(-2)^5 = \frac{1}{1024}x^5 - \frac{5}{128}x^4 + \frac{5}{8}x^3 - 5x^2 + 20x - 32$

18.

18.1. $\overline{A \cup (B \cap \bar{A})} = \bar{A} \cap \left(\overline{B \cap \bar{A}}\right) = \bar{A} \cap (\bar{B} \cup A) =$

$= (\bar{A} \cap \bar{B}) \cup (\bar{A} \cap A) =$

$= (\bar{A} \cap \bar{B}) \cup \emptyset =$

$= \bar{A} \cap \bar{B} =$

$= \bar{A} \setminus B$

18.2. $B \cup (\overline{A \cup B}) = B \cup (\bar{A} \cap \bar{B}) = (B \cup \bar{A}) \cap (B \cup \bar{B}) =$

$= (B \cup \bar{A}) \cap U =$

$= B \cup \bar{A} =$

$= \overline{\bar{B} \cap A} =$

$= \left(\overline{A \setminus B}\right)$

18.3. $[(\overline{A \cap B}) \cap B] \cup (A \cap B) = [(\bar{A} \cup \bar{B}) \cap B] \cup (A \cap B) =$

$= \left[(\bar{A} \cap B) \cup \left(\underbrace{\bar{B} \cap B}_{\emptyset}\right)\right] \cup (A \cap B) =$

$= (\bar{A} \cap B) \cup (A \cap B) =$

$= B \cap (\bar{A} \cup A) =$

$= B \cap U =$

$= B$

19. Construindo um diagrama de árvore e considerando os acontecimentos *A*: "o jogador A ganha o jogo" e *B*: "o jogador B ganha o jogo", o torneio pode desenrolar-se de 14 maneiras diferentes: *AA*, *BB*, *ABB*, *BAA*, *ABAA*, *BABB*, *ABABB*, *BABAA*, *ABABAA*, *BABABB*, *ABABABA*, *ABABABB*, *BABABAA* e *BABABAB*.

20.

20.1. $6 \times 5 \times 4 = {}^6A_3 = 120$

20.2.

a) $3 \times 2 \times 1 = 6$

b) $6 \times 1 \times 4 = 24$

c) $6 \times 4 \times 2 = 48$

21. $\underbrace{\_\ \ \_\ \ \_0\_}_{\underbrace{9\ \times\ 8\ \times\ 1}_{\text{terminados em zero}}}$ ou $\underbrace{\_\ \ \_\ \ \_2,4,6,8\_}_{\underbrace{8\ \times\ 8\ \times\ 4}_{\text{não terminados em zero}}} = 328$

22.

22.1. $2^6 = 64$

22.2. ${}^6C_2 = 15$

22.3. $1 + 4 + {}^4C_2 + {}^4C_3 + 1 = 16$

23. $n! - (n-2)! = n(n-1)(n-2)! - (n-2)! =$

$= (n-2)!\,[n(n-1) - 1] =$

$= (n-2)!\,(n^2 - n - 1) =$

$= (n^2 - n - 1)(n-2)!$ c.q.m.

24. $\underbrace{{}^{15}C_2 \times 2}_{\substack{\text{n.º total de maneiras}\\ \text{de se sentarem sem restrições}}} - \underbrace{2 \times 14}_{\substack{\text{n.º de maneiras de se sentarem}\\ \text{lado a lado em lugares consecutivos}}} = 182$

25. ${}^nA_4 = {}^nC_5 \Leftrightarrow \frac{n!}{(n-4)!} = \frac{n!}{(n-5)!5!} \Leftrightarrow (n-4)! = (n-5)!\,5!$

$\Leftrightarrow \frac{(n-4)!}{(n-5)!} = 120$

$\Leftrightarrow \frac{(n-4)(n-5)!}{(n-5)!} = 120$

$\Leftrightarrow n - 4 = 120$

$\Leftrightarrow n = 124$

26.

26.1. $2 \times 1 \times 8! = 80\,640$

26.2. $10! - 9! \times 2 = 2\,903\,040$

26.3. $6! \times 5! = 86\,400$

26.4. $3! \times 5! \times 3! \times 2! = 8640$

26.5. Os livros das três disciplinas ficarem juntos: 8640

Apenas os livros de lógica e probabilidades juntos: $7! \times 3! \times 2! - 8640 = 51\,840$

Apenas os livros de álgebra e probabilidades juntos: $5! \times 5! \times 2! - 8640 = 20\,160$

Apenas os livros de álgebra e lógica juntos: $4! \times 5! \times 3! - 8640 = 8640$

Apenas os livros de álgebra juntos: $6! \times 5! - 8640 - 20160 - 8640 = 48\,960$

Apenas os livros de lógica juntos: $8! \times 3! - 8640 - 51840 - 8640 = 172\,800$

Apenas os livros de probabilidades juntos: $9! \times 2! - 8640 - 51840 - 20160 = 645\,120$

$10! - 8640 - 51\,840 - 20\,160 - 8640 - 48\,960 - 172\,800 - 645\,120 = 2\,672\,640$

Daniela Raposo e Luzia Gomes

27. ${}^{n}C_3 - {}^{5}C_3 + 1$

28.

28.1. ${}^{9}C_5 = 126$

28.2. ${}^{5}C_2 \times 1 \times {}^{3}C_1 = 30$

28.3. ${}^{5}C_1 + {}^{4}C_1 \times {}^{4}C_1 + {}^{5}C_2 \times {}^{3}C_1 + {}^{6}C_3 \times {}^{2}C_1 - {}^{5}C_2 \times {}^{2}C_1 + {}^{7}C_4 - {}^{5}C_2 \times {}^{2}C_2 = 96$

29. $p \times {}^{n}C_p = n \times {}^{n-1}C_{p-1} \Leftrightarrow p \times \frac{n!}{(n-p)!p!} = n \times \frac{(n-1)!}{(n-1-p+1)!(p-1)!}$

$$\Leftrightarrow p \times \frac{n!}{(n-p)!\,p!} = \frac{n(n-1)!}{(n-p)!\,(p-1)!}$$

$$\Leftrightarrow \frac{p \times n!}{(n-p)!\,p(p-1)!} = \frac{n!}{(n-p)!\,(p-1)!}$$

$$\Leftrightarrow \frac{n!}{(n-p)!\,(p-1)!} = \frac{n!}{(n-p)!\,(p-1)!}$$

30. Existem ${}^{36}C_6$ maneiras diferentes de escolher os seis compartimentos onde vão ser colocadas as seis cápsulas pretas (dado que as cápsulas pretas são indistinguíveis, não interessa a ordem pela qual ficam dispostas na caixa). Para cada seleção destes compartimentos, existem ${}^{30}C_5$maneiras diferentes de colocar as cinco cápsulas vermelhas nos trinta compartimentos que sobram (dado que as cápsulas vermelhas são indistinguíveis, não interessa a ordem pela qual ficam dispostas na caixa). E, por cada uma destas maneiras, existem ${}^{25}C_4$maneiras diferentes de selecionar os quatro compartimentos onde vão ser colocadas as cápsulas roxas de entre os vinte e cinco compartimentos disponíveis (dado que as cápsulas roxas são indistinguíveis, não interessa a ordem pela qual ficam dispostas na caixa). E, por cada uma destas maneiras, existem ${}^{21}A_5$ maneiras diferentes de colocar as cinco cápsulas de cores diferentes (amarela, rosa, azul, verde e dourada) nos vinte e um compartimentos restantes (dado que estas cápsulas são distintas, interessa a ordem pela qual ficam dispostas na caixa). Logo, existem ${}^{36}C_6 \times {}^{30}C_5 \times {}^{25}C_4 \times {}^{21}A_5$maneiras diferentes de colocar as vinte cápsulas na caixa.

31.

31.1. ${}^{50}C_{2n} = {}^{50}C_{n+5} \Leftrightarrow 2n = n + 5 \;\vee\; 2n = 50 - (n+5) \Leftrightarrow n = 5 \;\vee\; 2n = 50 - n - 5$

$$\Leftrightarrow n = 5 \;\vee\; 3n = 45$$

$$\Leftrightarrow n = 5 \;\vee\; n = 15$$

$\text{C.S.} = \{5, 15\}$

31.2. ${}^{35}C_{3n} = {}^{35}C_{n-9} \Leftrightarrow 3n = n - 9 \ \lor \ 3n = 35 - (n - 9) \Leftrightarrow 2n = -9 \ \lor \ 3n = 35 - n + 9$

$\Leftrightarrow n = -4{,}5 \ \lor \ 4n = 44$

$\Leftrightarrow n = -4{,}5 \ \lor \ n = 11$

Como $n \in$ IN, então C. S. $= \{11\}$.

31.3. $\underbrace{{}^{n-1}C_2 + {}^{n-1}C_3}_{{}^{n}C_3} + {}^{n}C_4 + {}^{n+1}C_5 + {}^{n+2}C_6 = {}^{20}C_6 \Leftrightarrow \underbrace{{}^{n}C_3 + {}^{n}C_4} + {}^{n+1}C_5 + {}^{n+2}C_6 = {}^{20}C_6$

$\Leftrightarrow \underbrace{{}^{n+1}C_4 + {}^{n+1}C_5} + + {}^{n+2}C_6 = {}^{20}C_6$

$\Leftrightarrow \underbrace{{}^{n+2}C_5 + {}^{n+2}C_6} = {}^{20}C_6$

$\Leftrightarrow {}^{n+3}C_6 = {}^{20}C_6$

$\Leftrightarrow n + 3 = 20$

$\Leftrightarrow n = 17$

31.4. ${}^{10}C_5 + {}^{9}C_4 + {}^{8}C_3 + {}^{7}C_2 + {}^{6}C_1 + 1 = {}^{11}C_n \Leftrightarrow 252 + 126 + 56 + 21 + 6 + 1 = {}^{11}C_n$

$\Leftrightarrow 462 = {}^{11}C_n$

Como $0 \leq n \leq 1$ e ${}^{11}C_5 = {}^{11}C_6 = 462$, então $n = 5 \ \lor \ n = 6$.

C. S. $= \{5, 6\}$

32.

32.1. $(x - 2)^5 = x^5 - 10x^4 + 40x^3 + 96x - 33$

$\Leftrightarrow x^5 + 5x^4 \times (-2) + 10x^3(-2)^2 + 10x^2(-2)^3 + 5x(-2)^4 + (-2)^5 = x^5 - 10x^4 + 40x^3 + 96x - 33$

$\Leftrightarrow x^5 - 10x^4 + 40x^3 - 80x^2 + 80x - 32 = x^5 - 10x^4 + 40x^3 + 96x - 33$

$\Leftrightarrow -80x^2 + 80x - 96x - 32 + 33 = 0$

$\Leftrightarrow -80x^2 - 16x + 1 = 0$

$\Leftrightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{(-16)^2 - 4 \times (-80) \times 1}}{2 \times (-80)}$

$\Leftrightarrow x = \frac{1}{20} \ \lor \ x = -\frac{1}{4}$

C. S. $= \left\{-\frac{1}{4}, \frac{1}{20}\right\}$

32.2. $\left(\sqrt{x} - x\right)^4 = -4x^2\sqrt{x} - 4x^3\sqrt{x}$

$\Leftrightarrow \left(\sqrt{x}\right)^4 + 4\left(\sqrt{x}\right)^3(-x) + 6\left(\sqrt{x}\right)^2(-x)^2 + 4\sqrt{x}(-x)^3 + (-x)^4 = -4x^2\sqrt{x} - 4x^3\sqrt{x}$

$\Leftrightarrow x^2 - 4x^2\sqrt{x} + 6x^3 - 4\sqrt{x} \times x^3 + x^4 = -4x^2\sqrt{x} - 4x^3\sqrt{x}$

$\Leftrightarrow x^4 + 6x^3 + x^2 = 0$

$\Leftrightarrow x^2(x^2 + 6x + 1) = 0$

$\Leftrightarrow x^2 = 0 \ \lor \ x = \frac{-6 \pm \sqrt{6^2 - 4 \times 1 \times 1}}{2 \times 1}$

$\Leftrightarrow x = 0 \ \vee \ x = -3 + 2\sqrt{2} \ \vee \ x = -3 - 2\sqrt{2}$

$\text{C.S.} = \left\{-3 - 2\sqrt{2}, -3 + 2\sqrt{2}, 0\right\}$

33. $\underbrace{9! \times 2!}_{\substack{\text{n.º de casos em que Brasil e} \\ \text{Portugal estão juntos}}} - \underbrace{8! \times 2! \times 2!}_{\substack{\text{n.º de casos em que Brasil e} \\ \text{Portugal estão juntos e Cuba} \\ \text{e Estados Unidos também estão juntos}}} = 564\,480$

$\underbrace{\underbrace{\_BP\_}_{2!} \ \_ \ \_ \ \_ \ \_ \ \_ \ \_ \ \_ \ \_}_{9!} \qquad \underbrace{\underbrace{\_BP\_}_{2!} \ \_ \ \_ \ \_ \ \underbrace{\_CEU\_}_{2!} \ \_ \ \_ \ \_ \ \_}_{8!}$

34.

34.1. $\underbrace{\_\alpha\_ \ \ \_\beta\_ \ \ \_\gamma\_ \ \ \_\delta\_ \ \ \_\epsilon\_}_{8 \times 8 \times 8 \times 8 \times 8}$

$8^5 = 32\,768$

34.2. $\underbrace{\_\alpha\_ \ \ \_\beta\_ \ \ \_\gamma\_ \ \ \_\delta\_ \ \ \_\epsilon\_}_{1 \times 8 \times 8 \times 8 \times 8}$

$8^4 = 4096$

34.3. $\underbrace{\_\alpha\_ \ \ \_\beta\_ \ \ \_\gamma\_ \ \ \_\delta\_ \ \ \_\epsilon\_}_{8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4}$

${}^{8}A_5 = 6720$

35. $\frac{(n+2)!+(n+1)\times(n-1)!}{(n+1)\times(n-1)!} = \frac{(n+2)(n+1)n(n-1)!+(n+1)(n-1)!}{(n+1)(n-1)!} =$

$= \frac{(n+1)(n-1)![n(n+2)+1]}{(n+1)(n-1)!} =$

$= n^2 + 2n + 1 =$

$= (n+1)^2$

36. $8 \times 7! + 2 \times 7 \times 7! + 3 \times 6 \times 7! + 4 \times 5 \times 7! + 5 \times 4 \times 7! + 6 \times 3 \times 7! + 7 \times 2 \times 7! + 8 \times 7! =$

$= 604\,800$

ou:

${}^{10}C_3 \times 7!$, em que ${}^{10}C_3$ é o número de maneiras de escolher 3 lugares consecutivos ou não, de entre os 10 possíveis para o "2", o "5" e o "3". Por cada uma destas maneiras, só há uma forma de o "5" ficar à direita do "2" e à esquerda do "3". Depois de escolhidas estas 3 posições, os restantes 7 cartões têm 7! formas de serem colocados.

37.

37.1. $6! = 720$

37.2. $6 \times 5 = 30$ (número de maneiras de numerar o que considerarmos como “bases” do dado cúbico), já que se o dado tiver as faces indistinguíveis entre si, o que tornará um dado diferente do outro é a numeração que se encontra, por exemplo, nas faces opostas.)

38. A resposta correta é a (IV).

Dos 18 quadrados disponíveis, vamos selecionar sete para dispor as sete peças brancas e indistinguíveis. Portanto, temos ${}^{18}C_7$ maneiras de o fazer. Por cada uma destas maneiras, como nos restam 11 quadrados para colocar as três peças azuis, que são diferentes entre si, temos ${}^{11}A_3$ maneiras de o fazer.

39. $\frac{150\times149\times\ldots\times101}{50\times49\times\ldots\times1} = \frac{{}^{150}A_{50}}{50!} =$

$= \frac{\frac{150!}{(150-50)!}}{50!} =$

$= \frac{150!}{100!50!} =$

$= {}^{150}C_{50}$, o que corresponde a um número inteiro, já que corresponde ao número de subconjuntos com 50 elementos que se podem formar de um conjunto com 150 elementos.

40. O produto de p números naturais pode ser dado por ${}^{n}A_p$. Assim:

$\frac{{}^{n}A_p}{p!} = \frac{\frac{n!}{(n-p)!}}{p!} =$

$= \frac{n!}{(n-p)!p!} =$

$= {}^{n}C_p$, o que representa um número inteiro, já que corresponde ao número de subconjuntos com p elementos de um conjunto com n elementos.

Logo, fica provado que ${}^{n}A_p$ é divisível por $p!$.

41. Desde que iniciamos o percurso em A, temos 2 hipóteses para continuar o caminho: primeiro podemos optar pela direita ou pela esquerda; depois, em cada interseção de estradas, podemos optar por ir em frente ou para cima/baixo. De A a B existem $2 \times 2^{10} = 2048$ caminhos.

42. Espadas (E)   Rei (R)   Não Dama ($\overline{D}$)

(Rei de Espadas, Rei (não Espadas), Não Dama) ou (Dama de Espadas, Rei, Não Dama) ou (Espadas (não Rei e não Dama), Rei, Não Dama).

$1 \times 3 \times 46 \quad + \quad 1 \times 4 \times 47 \quad + \quad 11 \times 4 \times 46 \quad = \; 2350$

43. $x \times (x-1) \times (x-1) \times (x-2)$

44.

44.1. $\left(\frac{1}{x} + x\sqrt{x}\right)^{10}$

Os termos deste desenvolvimento são da forma:

$$^{10}C_p (x^{-1})^{10-p} x^p \left(x^{\frac{1}{2}}\right)^p = {}^{10}C_p x^{-10+p} x^p \times x^{\frac{p}{2}} =$$

$$= {}^{10}C_p x^{-10+p+p+\frac{p}{2}} =$$

$$= {}^{10}C_p x^{\frac{5p}{2}-10}$$

$\frac{5p}{2} - 10 = 0 \Leftrightarrow 5p = 20 \Leftrightarrow p = 4$

$T_5 = {}^{10}C_4 x^0 = 210$

44.2. $\left(\frac{1}{x} - x^3\right)^{18}$

Os termos deste desenvolvimento são da forma:

$$^{18}C_p (x^{-1})^{18-p} (-x^3)^p = {}^{18}C_p x^{-18+p} x^{3p} \times (-1)^p =$$

$$= {}^{18}C_p x^{-18+4p} \times (-1)^p$$

$-18 + 4p = 0 \Leftrightarrow 4p = 18 \Leftrightarrow p = \frac{9}{2}$

Como $p \notin \mathrm{IN}_0$, não existe termo independente de x.

44.3. $\left(\frac{y}{\sqrt{x}} - \frac{x}{y^3}\right)^{24}$

Os termos deste desenvolvimento são da forma:

$$^{24}C_p \left(\frac{y}{\sqrt{x}}\right)^{24-p} \left(-\frac{x}{y^3}\right)^p = {}^{24}C_p y^{24-p} \left(x^{-\frac{1}{2}}\right)^{24-p} \left(\frac{-1}{y^3}\right)^p x^p =$$

$$= {}^{24}C_p \times y^{24-p} \times x^{-12+\frac{p}{2}} \times x^p \left(-\frac{1}{y^3}\right)^p =$$

$$= {}^{24}C_p \times y^{24-p} \times \left(-\frac{1}{y^3}\right)^p \times x^{-12+\frac{3}{2}p}$$

Logo:

$-12 + \frac{3}{2}p = 0 \Leftrightarrow \frac{3}{2}p = 12 \Leftrightarrow p = 8$

Assim, ${}^{24}C_8 y^{16} \left(-\frac{1}{y^3}\right)^8 = {}^{24}C_8 \frac{y^{16}}{y^{24}} = 735\,471 y^{-8}$.

45. Se o desenvolvimento tem 13 termos, então $n = 12$ e os termos do desenvolvimento são da forma ${}^{12}C_p (3x^2)^{12-p} \times 2^p$. Assim, $(x^2)^{12-p} = x^{24-2p}$.

$24 - 2p = 4 \Leftrightarrow 24 - 4 = 2p \Leftrightarrow 20 = 2p \Leftrightarrow p = 10$

Logo, ${}^{12}C_{10} (3x^2)^{12-10} \times 2^{10} = {}^{12}C_{10} \times 3^2 \times x^4 \times 2^{10} = 608\,256 x^4$.

46.

46.1. $\sum_{k=0}^{n} {}^nC_k 2^k = \sum_{k=0}^{n} {}^nC_k \times 2^k \times 1^{n-k} =$

$= (2+1)^n =$

$= 3^n$

46.2. $\sum_{k=0}^{n} {}^nC_k = {}^nC_0 + {}^nC_1 + {}^nC_2 + \cdots {}^nC_n =$

$= {}^nC_0 \times 1^n \times 1^0 + {}^nC_1 \times 1^{n-1} \times 1^1 + {}^nC_2 \times 1^{n-2} \times 1^2 + \cdots + {}^nC_n \times 1^0 \times 1^n =$

$= (1+1)^n =$

$= 2^n$

46.3. $\sum_{k=0}^{n} {}^nC_k (-1)^k = \sum_{k=0}^{n} {}^nC_k \times 1^{n-k} \times (-1)^k =$

$= (1-1)^n =$

$= 0$

47.

47.1. Um conjunto com n elementos admite como subconjuntos o conjunto vazio e ele próprio. Temos ainda todos os conjuntos formados por um único elemento, por dois elementos, por três elementos e assim sucessivamente. Assim, o número de subconjuntos é igual a:

${}^nC_0 + {}^nC_1 + {}^nC_2 + \cdots {}^nC_n =$

$= {}^nC_0 \times 1^n \times 1^0 + {}^nC_1 \times 1^{n-1} \times 1^1 + {}^nC_2 \times 1^{n-2} \times 1^2 + \cdots + {}^nC_n \times 1^0 \times 1^n =$

$$= \sum_{k=0}^{n} {}^nC_k 1^{n-k} 1^k =$$

$= (1+1)^n =$

$= 2^n$

47.2. Observe-se que:

$(1-1)^n = \sum_{k=0}^{n} {}^nC_k \times 1^{n-k} \times (-1)^k =$ (sem perda de generalidade, caso n seja par ou ímpar)

$\Leftrightarrow 0 = {}^nC_0 - {}^nC_1 + {}^nC_2 - {}^nC_3 + \cdots + {}^nC_n$

$$\Leftrightarrow \underbrace{{}^nC_1 + {}^nC_3 + \cdots}_{\substack{\text{número total de subconjuntos} \\ \text{com um número ímpar de elementos}}} = \underbrace{{}^nC_0 + {}^nC_2 + \cdots}_{\substack{\text{número total de subconjuntos} \\ \text{com um número par de elementos}}}$$

Exercícios de aplicação **(págs. 69 a 79)**

1. Sejam:

A – conjunto dos alunos que estudam Espanhol.

B – conjunto dos alunos que estudam Francês.

C – conjunto dos alunos que estudam Inglês.

Número de alunos que estudam apenas Espanhol e Francês: 24 – 10 = 14

Número de alunos que estudam apenas Francês e Inglês: 28 – 10 = 18

Número de alunos que estudam apenas Espanhol e Inglês: 26 – 10 = 16

Número de alunos que estudam apenas Espanhol: 105 – 14 – 10 – 16 = 65

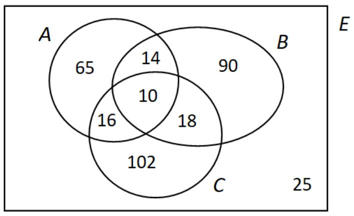
Número de alunos que estudam apenas Francês: 132 – 14 – 10 – 18 = 90

Número de alunos que estudam apenas Inglês: 146 – 16 – 10 – 18 = 102

Número de alunos que não estudam Espanhol, nem Francês, nem Inglês:

340 – 65 – 14 – 90 – 16 – 10 – 18 – 102 = 25

Assim, temos:



1.1. P(“estudar apenas Espanhol”) = $\frac{65}{340} = \frac{13}{68}$

1.2. P(“estudar Francês ou Inglês”) = $\frac{14+90+16+10+18+102}{340} = \frac{250}{340} = \frac{25}{34}$

1.3. P(“não estudar Espanhol, nem Francês, nem Inglês”) = $\frac{25}{340} = \frac{5}{68}$

2. Número de casos possíveis: $52 \times 51 = 2652$

2.1. A – sair ás

$\underline{A}\ \underline{\overline{A}}$ ou $\underline{\overline{A}}\ \underline{A}$

$4 \times 48 \quad + \quad 48 \times 4 \quad = 384$ (número de casos favoráveis)

P(“sair um e um só ás”) = $\frac{4 \times 48 + 48 \times 4}{2652} = \frac{384}{2652} = \frac{32}{221}$

2.2. D – sair dama

$\underline{D}\ \underline{D}$

$4 \times 3 = 12$ (número de casos favoráveis)

P(“saírem duas damas”) = $\frac{4 \times 3}{2652} = \frac{12}{2652} = \frac{1}{221}$

2.3. *F* – sair figura

$\underline{\overline{F}}\ \underline{\overline{F}}$

$40 \times 39 = 1640$ (número de casos favoráveis)

P("não sair nenhuma figura") = $\frac{40 \times 39}{2652} = \frac{1560}{2652} = \frac{10}{17}$

2.4. *F* – sair figura

$\underline{F}\ \underline{\overline{F}}$ ou $\underline{\overline{F}}\ \underline{F}$ ou $\underline{\overline{F}}\ \underline{\overline{F}}$

$12 \times 40 + 40 \times 12 + 40 \times 39 = 2520$ (número de casos favoráveis)

P("não saírem ambas figuras") = $\frac{12 \times 40 + 40 \times 12 + 40 \times 39}{2652} = \frac{2520}{2652} = \frac{210}{221}$

3. Número de casos possíveis: $52 \times 52 = 2704$

3.1. *A* – sair ás

$\underline{A}\ \underline{\overline{A}}$ ou $\underline{\overline{A}}\ \underline{A}$

$4 \times 48 + 48 \times 4 = 384$ (número de casos favoráveis)

P("sair um e um só ás") = $\frac{4 \times 48 + 48 \times 4}{2704} = \frac{384}{2704} = \frac{24}{169}$

3.2. *D* – sair dama

$\underline{D}\ \underline{D}$

$4 \times 4 = 16$ (número de casos favoráveis)

P("saírem duas damas") = $\frac{4 \times 4}{2704} = \frac{16}{2704} = \frac{1}{169}$

3.3. *F* – sair figura

$\underline{\overline{F}}\ \underline{\overline{F}}$

$40 \times 40 = 1600$ (número de casos favoráveis)

P("não sair nenhuma figura") = $\frac{40 \times 40}{2704} =$

$= \frac{1600}{2704} =$

$= \frac{100}{169}$

3.4. *F* – sair figura

$\underline{F}\ \underline{\overline{F}}$ ou $\underline{\overline{F}}\ \underline{F}$ ou $\underline{\overline{F}}\ \underline{\overline{F}}$

$12 \times 40 + 40 \times 12 + 40 \times 40 = 2560$ (número de casos favoráveis)

P("não saírem ambas figuras") = $\frac{12 \times 40 + 40 \times 12 + 40 \times 40}{2704} =$

$= \frac{2560}{2704} =$

$= \frac{160}{169}$

4.

4.1. $P(A \cup B) + P(\bar{A}) + P(\bar{B}) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) + P(\bar{A}) + P(\bar{B}) =$

$= P(A) + P(\bar{A}) + P(B) + P(\bar{B}) - P(A \cap B) =$

$= 1 + 1 - P(A \cap B) =$

$= 1 + P(\overline{A \cap B}) =$

$= 1 + P(\bar{A} \cup \bar{B})$

4.2. $P(A \mid B) \leq 1 + \frac{P(A)}{P(B)} \Leftrightarrow \frac{P(A \cap B)}{P(B)} - \frac{P(A)}{P(B)} \leq 1 \Leftrightarrow P(A \cap B) - P(A) \leq P(B)$

$\Leftrightarrow -P(A) - P(B) + P(A \cap B) \leq 0$

$\Leftrightarrow P(A) + P(B) - P(A \cap B) \geq 0$

$\Leftrightarrow P(A \cup B) \geq 0$, que é uma condição universal.

Assim, pelas sucessivas equivalências, ficou provado o pretendido.

5.

5.1. Sabemos que:

$P(\bar{A} \cap \bar{B}) = 0{,}4 \Leftrightarrow P(\overline{A \cup B}) = 0{,}4 \Leftrightarrow 1 - P(A \cup B) = 0{,}4$

$\Leftrightarrow P(A \cup B) = 1 - 0{,}4$

$\Leftrightarrow P(A \cup B) = 0{,}6$

Como $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$, vem que:

$0{,}6 = P(A) + 0{,}5 - P(A \cap B) \Leftrightarrow P(A) - P(A \cap B) = 0{,}6 - 0{,}5$

$\Leftrightarrow P(A) - P(A \cap B) = 0{,}1$

$\Leftrightarrow P\left(A \cap \bar{B}\right) = 0{,}1$

5.2. Sabemos que:

$$P(A \cap B) = \frac{0{,}16}{P(\bar{A} \cup \bar{B})} \Leftrightarrow P(A \cap B) = \frac{0{,}16}{P(\overline{A \cap B})}$$

$$\Leftrightarrow P(A \cap B)[1 - P(A \cap B)] = 0{,}16$$

$$\Leftrightarrow P(A \cap B) - \left(P(A \cap B)\right)^2 - 0{,}16 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(P(A \cap B)\right)^2 - P(A \cap B) + 0{,}16 = 0$$

$$\Leftrightarrow P(A \cap B) = \frac{1 \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \times 1 \times 0{,}16}}{2 \times 1}$$

$$\Leftrightarrow P(A \cap B) = 0{,}2 \quad \vee \quad P(A \cap B) = 0{,}8$$

Como $P(B) = 0{,}7$, então $P(A \cap B)$ não pode ser superior. Assim, $P(A \cap B) = 0{,}2$.

Como $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$, tem-se que:

$$\frac{9}{4}P(A) = P(A) + 0{,}7 - 0{,}2 \Leftrightarrow \frac{5}{4}P(A) = 0{,}5 \Leftrightarrow P(A) = \frac{2}{5}$$

$$\Leftrightarrow P(A) = 0{,}4$$

6.

6.1. $P(B) \times P(A|B) + \left(1 - P(\bar{A}|\bar{B})\right)\left(1 - P(B)\right) = P(B) \times \frac{P(A \cap B)}{P(B)} + \left(1 - \frac{P(\bar{A} \cap \bar{B})}{P(\bar{B})}\right) \times P(\bar{B}) =$

$= P(A \cap B) + P(\bar{B}) - P(\overline{A \cup B}) =$

$= P(A \cap B) + 1 - P(B) - (1 - P(A \cup B)) =$

$= P(A \cap B) + 1 - P(B) - 1 + P(A \cup B) =$

$= P(A \cap B) - P(B) + P(A) + P(B) - P(A \cap B) =$

$= P(A)$

6.2. Sejam:

A: "O convidado é natural da cidade do Porto".

B: "O convidado é do sexo masculino".

Tem-se que:

- $P(B) = 0{,}6$
- $P(A|B) = 0{,}3$
- $P(\bar{A}|\bar{B}) = \frac{1}{5} = 0{,}2$

Substituindo na igualdade 6.1:

$0{,}6 \times 0{,}3 + (1 - 0{,}2)(1 - 0{,}6) = P(A) \Leftrightarrow 0{,}18 + 0{,}8 \times 0{,}4 = P(A)$

$\Leftrightarrow P(A) = 0{,}18 + 0{,}32$

$\Leftrightarrow P(A) = 0{,}5$

Logo, a probabilidade de ter sido escolhida uma pessoa natural da cidade do Porto é 50%.

7. Sejam:

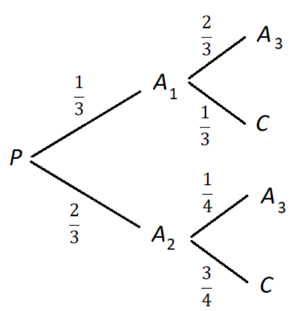
A_1: "Os montanhistas passaram a noite no abrigo A_1".

A_2: "Os montanhistas passaram a noite no abrigo A_2".

A_3: "Os montanhistas passaram a noite no abrigo A_3".

C: "Os montanhistas subiram diretamente ao cume".

Utilizando um diagrama em árvore, temos:



7.1. $P(A_3) = \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} + \frac{2}{3} \times \frac{1}{4} =$

$$= \frac{2}{9} + \frac{1}{6} =$$

$$= \frac{7}{18}$$

7.2. $P(A_2|C) = \frac{P(A_2 \cap C)}{P(C)} =$

$$= \frac{\frac{2}{3} \times \frac{3}{4}}{\frac{1}{3} \times \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \times \frac{3}{4}} =$$

$$= \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{9} + \frac{1}{2}} =$$

$$= \frac{1}{2} \div \frac{11}{18} =$$

$$= \frac{9}{11}$$

8.

8.1.

Soma 9	Soma 9	Soma 9	Soma 9
8 1			
✓ 1	6 1	4 1	2 1

A face simétrica à face numerada com o número 8 tem de ficar numerada com o número 1.

As restantes seis faces formam três pares, em que uma das faces do par é numerada aleatoriamente e a outra face do par é numerada com o único número cuja soma com o anterior é 9. Assim, existem $6 \times 4 \times 2 = 48$ maneiras de numerar as restantes sete faces do octaedro.

8.2. O número de casos possíveis é o número de maneiras de escolher três vértices distintos, de entre os seis vértices do octaedro regular, ou seja, ${}^{6}C_3$.

Para que os três vértices escolhidos definam um plano perpendicular ao plano xOz, podem ser escolhidos três dos quatro vértices pertencentes ao plano ABC (plano xOy), o que pode ser feito de ${}^{4}C_3$ maneiras diferentes, ou então podem ser escolhidos três dos quatro vértices pertencentes ao plano EBF (plano yOz), o que também pode ser feito de ${}^{4}C_3$ maneiras diferentes. Assim, o número de casos favoráveis é, então, ${}^{4}C_3 + {}^{4}C_3 = 2 \times {}^{4}C_3$.

De acordo com a regra de Laplace, a probabilidade de um acontecimento é dada pelo quociente entre o número de casos favoráveis e o número de casos possíveis, quando estes são equiprováveis e em número finito. Logo, a probabilidade pedida é $\frac{2 \times {}^{4}C_3}{{}^{6}C_3}$.

9.

9.1. 1 – *P*(nenhum dos gémeos ser escolhido) $= 1 - \frac{{}^{15}C_3 \times {}^{11}C_3}{{}^{16}C_3 \times {}^{12}C_3} = 1 - \frac{455 \times 165}{560 \times 220} =$

$$= 1 - \frac{75\,075}{123\,200} =$$

$$= \frac{48\,125}{123\,200} =$$

$$= \frac{25}{64}$$

9.2. $\underline{\ 9\ }\ \underline{\ 1\ }\ \underline{\quad}\ \underline{\quad}\ \underline{\quad}\ \underline{\quad}\ \underline{\quad}\ \underline{\quad}\ \underline{\quad}$

$^7C_2 \times 9^5 = 1\,240\,029$

Exercícios propostos **(págs. 80 a 96)**

Itens de seleção **(págs. 80 a 84)**

1. Se A e B são acontecimentos contrários, $A \cap B = \emptyset$ e $A \cup B = E$.

Como $A \cap B = \emptyset$, A e B são acontecimentos incompatíveis.

Opção (C)

2. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Assim:

$$\frac{7}{12} = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - P(A \cap B) \Leftrightarrow P(A \cap B) = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{7}{12}$$

$$\Leftrightarrow P(A \cap B) = \frac{4+3-7}{12}$$

$$\Leftrightarrow P(A \cap B) = 0, \text{ isto é, } A \cap B = \emptyset.$$

Logo, A e B são incompatíveis.

Opção (B)

3. Número de casos possíveis: 7 + 3 = 10

Número de casos favoráveis: 7

Logo, $P = \frac{7}{10}$.

Opção (A)

4. Organizando a informação numa tabela, temos:

	Masculino	**Feminino**	**Total**
Com açúcar	15	35	50
Sem açúcar	5	25	30
Total	20	60	80

Assim, a probabilidade pedida é $\frac{35}{80} = \frac{7}{16}$.

Opção (A)

5. A probabilidade de o 1º semáforo não estar vermelho é 1 – 0,3 = 0,7.

A probabilidade de o 2º semáforo não estar vermelho é 1 – 0,4 = 0,6.

Assim, a probabilidade pedida é $0{,}7 \times 0{,}6 = 0{,}42$.

Opção (D)

6. Número de casos possíveis: ${}^{40}C_6$

O número de maneiras de escolher exatamente duas cartas de ouros e a dama de copas é: ${}^{10}C_2 \times {}^{1}C_1 \times {}^{29}C_3$

Logo, a probabilidade pedida é $\frac{{}^{10}C_2 \times {}^{1}C_1 \times {}^{29}C_3}{{}^{40}C_6} = \frac{{}^{10}C_2 \times {}^{29}C_3}{{}^{40}C_6}$.

Opção (D)

7. Número de casos possíveis: ${}^{5}C_1 \times {}^{5}C_1 = 5 \times 5 = 25$

Número de casos favoráveis: 5

Logo, a probabilidade pedida é $\frac{5}{25} = \frac{1}{5}$.

Opção (A)

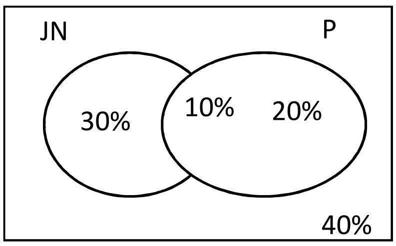
8. Número de casos possíveis: ${}^{6}C_2$

Número de casos favoráveis: 12 (arestas do octaedro)

Logo, a probabilidade pedida é $\frac{12}{{}^{6}C_2} = \frac{12}{15} = \frac{4}{5}$.

Opção (B)

9.



30% + 10% + 20% = 60%

Assim, a probabilidade de comprar pelo menos um dos jornais é 60% = 0,6 = $\frac{3}{5}$.

Opção (C)

10. Seja *X*: "as calças são de criança" e *B*: "as calças são do modelo B".

O número de calças do modelo B é 210 (150 + 60 = 210) e desses 60 são crianças. Assim: $P(X \mid B) = \frac{60}{210} = \frac{2}{7}$.

Opção (B)

11. Sabemos que $P(C \cup D) = P(C) + P(D) - P(C \cap D)$.

$P(C \cup D) = 0{,}2 + 0{,}6 - P(C \cap D) \Leftrightarrow P(C \cup D) = 0{,}8 - P(C \cap D)$

Como $0 \leq P(C \cap D) \leq 0{,}2$, temos $0 \geq -P(C \cap D) \geq -0{,}2 \Leftrightarrow 0{,}8 \geq 0{,}8 - P(C \cap D) \geq 0{,}6$.

Logo, $0{,}6 \leq P(C \cup D) \leq 0{,}8$.

Opção (C)

12. $P(\bar{B}) = 1 - P(B)$

Como $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$, temos:

$$0{,}6 = 2P(B) + P(B) - 0{,}2 \Leftrightarrow 3P(B) = 0{,}6 + 0{,}2 \Leftrightarrow 3P(B) = 0{,}8$$

$$\Leftrightarrow 3P(B) = \frac{8}{10}$$

$$\Leftrightarrow P(B) = \frac{8}{30}$$

$$\Leftrightarrow P(B) = \frac{4}{15}$$

Assim, $P(\bar{B}) = 1 - \frac{4}{15} = \frac{11}{15}$.

Opção (C)

13. $P(\bar{A} \mid B)$ é a probabilidade de não sair ficha triangular, sabendo que saiu ficha com um número menor que 6. Como saiu um número menor que 6, há cinco casos possíveis; 1, 2, 3, 4, 5 e destes há duas fichas quadradas (números 2 e 4) e três fichas triangulares (números 1, 3 e 5). Assim, a probabilidade de não sair ficha triangular é $\frac{2}{5}$.

Opção (B)

14. $P(\bar{A} \cap (A \cup B) = P\big((\bar{A} \cap A) \cup (\bar{A} \cap B)\big) =$

$$= P(\emptyset \cup (\bar{A} \cap B)) =$$

$$= P(\bar{A} \cap B) =$$

$$= P(B) - P(A \cap B)$$

Como $B \subset A$, $P(A \cap B) = P(B)$.

Logo, $P(B) - P(A \cap B) = P(B) - P(B) = 0$.

Opção (C)

LeYa EDUCAÇÃO Daniela Raposo e Luzia Gomes

15. $P(A|\ B)$ significa a probabilidade de a soma dos números saídos ser um múltiplo de 4, sabendo que os números saídos eram ambos pares. Se os números saídos eram ambos pares, temos 6 (2×3) casos possíveis. Destes 6 casos, em 3 deles a soma dos números saídos é um múltiplo de 4:

2 + 2 = 4

2 + 6 = 8

4 + 4 = 8

Assim, $P(A|\ B) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.

Opção (B)

16. Sabemos que $P(\text{“rapaz”}) = \frac{1}{2} P(\text{“rapariga”})$.

Como $P(\text{“rapaz”}) + P(\text{“rapariga”}) = 1$, temos:

$\frac{1}{2} P(\text{“rapariga”}) + P(\text{“rapariga”}) = 1 \Leftrightarrow \frac{3}{2} P(\text{“rapariga”}) = 1 \Leftrightarrow P(\text{“rapariga”}) = \frac{2}{3}$

Assim, $P(\text{“rapaz”}) = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$ e $P(\text{“dois rapazes”}) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{9}$.

Opção (A)

17. Sabemos que:

- $P(\bar{A}) = \frac{3}{4} \Leftrightarrow 1 - P(A) = \frac{3}{4} \Leftrightarrow P(A) = 1 - \frac{3}{4}$

$$\Leftrightarrow P(A) = \frac{1}{4}$$

- $P(\bar{A} \cup \bar{B}) = \frac{5}{6} \Leftrightarrow P(\overline{A \cap B}) = \frac{5}{6} \Leftrightarrow 1 - P(A \cap B) = \frac{5}{6}$

$$\Leftrightarrow P(A \cap B) = 1 - \frac{5}{6}$$

$$\Leftrightarrow P(A \cap B) = \frac{1}{6}$$

- A e B são acontecimentos independentes, ou seja, $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$.

  Assim:

$$\frac{1}{6} = \frac{1}{4} \times P(B) \Leftrightarrow \frac{1}{6} = \frac{1}{4} \times P(B) \Leftrightarrow P(B) = \frac{4}{6}$$

$$\Leftrightarrow P(B) = \frac{2}{3}$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \Leftrightarrow P(A \cup B) = \frac{1}{4} + \frac{2}{3} - \frac{1}{6}$$

$$\Leftrightarrow P(A \cup B) = \frac{3+8-2}{12}$$

$$\Leftrightarrow P(A \cup B) = \frac{9}{12}$$

$$\Leftrightarrow P(A \cup B) = \frac{3}{4}$$

Opção (C)

18. Número de passageiros que não validaram o bilhete: $\frac{1}{8} \times 200 = \frac{200}{8} = 25$

Número de casos possíveis: ${}^{200}C_8$

Número de casos favoráveis: ${}^{25}C_1 \times {}^{175}C_7$

Logo, a probabilidade pedida é $\frac{{}^{25}C_1 \times {}^{175}C_7}{{}^{200}C_8}$.

Opção (B)

19. Número de casos possíveis: 10^4 = 10 000

Número de casos favoráveis: 9 × 4 = 40

Logo, a probabilidade pedida é $\frac{36}{10\,000} = 0{,}0036$.

Opção (A)

20. Número de casos possíveis: ${}^{6}C_2$

Número de casos favoráveis: 12 (número de arestas do octaedro)

Logo, a probabilidade pedida é $\frac{12}{15} = \frac{4}{5}$.

Opção (C)

21. Número de casos possíveis: ${}^{8}C_2$

Número de casos favoráveis: ${}^{8}C_2$ (quaisquer dois vértices escolhidos pertencem a faces opostas)

Logo, a probabilidade pedida é $\frac{{}^{8}C_2}{{}^{8}C_2} = 1$.

Opção (B)

22. A superfície esférica de equação $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ tem centro (0, 0, 0) e raio 2.

Assim, os pontos de interseção da circunferência com os eixos coordenados são (–2, 0, 0), (2, 0, 0), (0, –2, 0), (0, 2, 0), (0, 0, –2) e (0, 0, 2).

O número de casos possíveis é ${}^{6}C_3$.

Um plano paralelo à reta definida por $x = -1 \wedge z = -1$ é um plano definido por três dos quatro pontos pertencentes a xOy ou por três dos quatro pontos pertencentes a yOz.

Assim, o número de casos favoráveis é ${}^{4}C_3 + {}^{4}C_3$.

Logo, a probabilidade pedida é $\frac{{}^{4}C_3 + {}^{4}C_3}{{}^{6}C_3} = \frac{4+4}{20} = \frac{8}{20} = \frac{2}{5}$.

Opção (B)

23. Número de casos possíveis: ${}^{6}C_3$

Um plano perpendicular ao plano de equação $z = 5$ é o plano *ABD* ou o plano *AEC*.

Assim, o número de casos favoráveis é ${}^{4}C_3 + {}^{4}C_3$.

Logo, a probabilidade pedida é $\frac{{}^{4}C_3 + {}^{4}C_3}{{}^{6}C_3} = \frac{4+4}{20} = \frac{8}{20} = \frac{2}{5}$.

Opção (C)

24. Como o penúltimo elemento da linha é 41, temos *n* = 41. Esta linha tem 42 elementos.

Assim, o número de casos possíveis é ${}^{42}C_2$ e o número de casos favoráveis é 21 (42 : 2 = 21).

Logo, a probabilidade pedida é $\frac{21}{{}^{42}C_2}$.

Opção (D)

25.

10 bolas azuis	*n* bolas azuis
Caixa A 25 bolas	Caixa B 20 bolas

P("pelo menos uma bola não é azul") = 0,7 ⇔ 1 – *P*("saírem duas bolas azuis") = 0,7

⇔ *P*("saírem duas bolas azuis") = 1 – 0,7

⇔ *P*("saírem duas bolas azuis") = 0,3

Assim:

$$\frac{10}{25} \times \frac{n}{20} = 0{,}3 \Leftrightarrow \frac{10n}{500} = \frac{3}{10}$$
$$\Leftrightarrow \frac{n}{50} = \frac{3}{10}$$
$$\Leftrightarrow n = \frac{150}{10}$$
$$\Leftrightarrow n = 15$$

Opção (C)

26. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$$\frac{19}{24} = P(A) + P(B) - \frac{1}{8} \Leftrightarrow P(A) + P(B) = \frac{19}{24} + \frac{1}{8}$$
$$\Leftrightarrow P(A) + P(B) = \frac{22}{24}$$
$$\Leftrightarrow P(A) + P(B) = \frac{11}{12}$$

Como *A* e *B* são acontecimentos independentes, então $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$.

Assim:

- $P(A) \times P(B) = \frac{1}{8}$

- $P(A) = \frac{11}{12} - P(B)$

Então:

$$\left[\frac{11}{12} - P(B)\right] \times P(B) = \frac{1}{8} \Leftrightarrow \frac{11}{12} \times P(B) - [P(B)]^2 = \frac{1}{8}$$

$$\Leftrightarrow 22P(B) - 24[P(B)]^2 = 3$$

$$\Leftrightarrow 24[P(B)]^2 - 22P(B) + 3 = 0$$

Cálculo auxiliar

Seja $x = P(B)$. Temos:

$$24x^2 - 22x + 3 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{22 \pm \sqrt{(-22)^2 - 4 \times 24 \times 3}}{2 \times 24}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{22 \pm \sqrt{484 - 288}}{48}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{22 \pm \sqrt{196}}{48}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{22 \pm 14}{48}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{8}{48} \vee x = \frac{36}{48}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{1}{6} \vee x = \frac{3}{4}$$

$$\Leftrightarrow P(B) = \frac{1}{6} \vee P(B) = \frac{3}{4}$$

- Se $P(B) = \frac{1}{6}$, então $P(A) = \frac{11}{12} - \frac{1}{6} = \frac{9}{12} = \frac{3}{4}$.
- Se $P(B) = \frac{3}{4}$, então $P(A) = \frac{11}{12} - \frac{3}{4} = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$.

Como A é mais provável que B, então $P(A) \geq P(B)$, logo $P(A) = \frac{3}{4}$ e $P(B) = \frac{1}{6}$.

Opção (B)

27. Seja A um acontecimento impossível e B um acontecimento qualquer.

Se A e B são acontecimentos independentes, então $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$.

Como A é um acontecimento impossível, então $P(A) = 0$.

Assim, qualquer que seja o acontecimento B, $P(A) \times P(B) = 0$.

Por outro lado, sendo A um acontecimento impossível, $A \cap B = \emptyset$ e, por isso, $P(A \cap B) = 0$.

Podemos, então, concluir que o acontecimento impossível é independente de qualquer outro.

Opção (D)

28. Número de casos possíveis: ${}^{10}C_2$

Para que os dois vértices escolhidos definam uma reta perpendicular ao eixo Oz, são dois vértices pertencentes ao plano ABC ou dois vértices pertencentes ao plano GHI.

Assim, o número de casos favoráveis é ${}^{5}C_2 + {}^{5}C_2$.

Logo, a probabilidade pedida é $\frac{{}^5C_2 + {}^5C_2}{{}^{10}C_2} = \frac{10+10}{45} = \frac{20}{45} = \frac{4}{9}$.

Opção (A)

29. A superfície esférica de equação $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ tem centro (0, 0, 0) e raio 1.

Assim, os pontos de interseção da circunferência com os eixos coordenados são (–1, 0, 0), (1, 0, 0), (0, –1, 0), (0, 1, 0), (0, 0, –1) e (0, 0, 1).

O número de casos possíveis é ${}^6C_3$.

Escolhendo três destes pontos, há oito maneiras de eles definirem triângulos equiláteros.

Assim, a probabilidade de o triângulo definido pelos três pontos não ser equilátero é:

$$1 - \frac{8}{{}^6C_3} = 1 - \frac{8}{20} = \frac{12}{20} = \frac{3}{5}$$

Opção (D)

Itens de construção (págs. 85 a 96)

1. $P(\bar{A}) = \frac{5}{8} \Leftrightarrow 1 - P(A) = \frac{5}{8} \Leftrightarrow P(A) = 1 - \frac{5}{8}$

$$\Leftrightarrow P(A) = \frac{3}{8}$$

1.1. Sabe-se que $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

Assim:

$$\frac{7}{8} = \frac{3}{8} + P(B) - \frac{1}{4} \Leftrightarrow P(B) = \frac{7}{8} - \frac{3}{8} + \frac{1}{4} \Leftrightarrow P(B) = \frac{7-3+2}{8}$$

$$\Leftrightarrow P(B) = \frac{6}{8}$$

$$\Leftrightarrow P(B) = \frac{3}{4}$$

1.2. Sabe-se que $P(A \cap \bar{B}) = P(A) - P(A \cap B)$.

Assim, $P(A \cap \bar{B}) = \frac{3}{8} - \frac{1}{4} = \frac{3-2}{8} = \frac{1}{8}$.

1.3. $P(\bar{B}|A) = \frac{P(\bar{B} \cap A)}{P(A)}$

Assim, $P(\bar{B}|A) = \frac{\frac{1}{8}}{\frac{3}{8}} = \frac{1}{3}$.

2. $P(\bar{A}) = 0{,}6 \Leftrightarrow 1 - P(A) = 0{,}6$

$$\Leftrightarrow P(A) = 1 - 0{,}6$$

$$\Leftrightarrow P(A) = 0{,}4$$

$$P(\overline{A \cup B}) = 0{,}4 \Leftrightarrow 1 - P(A \cup B) = 0{,}4$$

$$\Leftrightarrow P(A \cup B) = 1 - 0{,}4$$

$$\Leftrightarrow P(A \cup B) = 0{,}6$$

2.1.

a) Sabe-se que $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

Assim:

$$0{,}6 = 0{,}4 + 0{,}3 - P(A \cap B) \Leftrightarrow P(A \cap B) = 0{,}4 + 0{,}3 - 0{,}6$$
$$\Leftrightarrow P(A \cap B) = 0{,}1$$

b) $P(B|A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)}$

Assim, $P(B|A) = \frac{0{,}1}{0{,}4} = 0{,}25$.

c) Sabe-se que $P(A \cap \bar{B}) = P(A) - P(A \cap B)$.

Assim, $P(A \cap \bar{B}) = 0{,}4 - 0{,}1 = 0{,}3$.

2.2. Dois acontecimentos A e B são independentes se $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$.

$P(A \cap B) = 0{,}1$

$P(A) \times P(B) = 0{,}4 \times 0{,}3 = 0{,}12$

Assim, $P(A \cap B) \neq P(A) \times P(B)$ e, por isso, os acontecimentos A e B não são independentes.

2.3. Dois acontecimentos A e B são incompatíveis se $A \cap B = \emptyset$, ou seja, se $P(A \cap B) = 0$.

Sabe-se que $P(\bar{A} \cap \bar{B}) = P(\overline{A \cup B}) = 0{,}4$.

Assim, $P(\bar{A} \cap \bar{B}) \neq 0$ e, por isso, $\bar{A}$ e $\bar{B}$ não são incompatíveis.

3.

3.1. $P(B \backslash A) - P(A \backslash B) = P(B) - P(A \cap B) - [P(A) - P(A \cap B)] =$

$= P(B) - P(A \cap B) - P(A) + P(A \cap B) =$

$= P(B) - P(A)$

3.2. $P(A \cap B) - P(\bar{A} \cap \bar{B}) = P(A \cap B) - P(\overline{A \cup B}) =$

$= P(A \cap B) - [1 - P(A \cup B)] =$

$= P(A \cap B) - 1 + P(A \cup B) =$

$= P(A \cap B) - 1 + P(A) + P(B) - P(A \cap B) =$

$= P(A) - 1 + P(B) =$

$= P(A) - [1 - P(B)] =$

$= P(A) - P(\bar{B})$

3.3. $P(\bar{A} \cup \bar{B}) + P(B) = P(\overline{A \cap B}) + P(B) =$

$= 1 - P(A \cap B) + P(B) =$

$= 1 - [P(A) + P(B) - P(A \cup B)] + P(B) =$

$= 1 - P(A) - P(B) + P(A \cup B) + P(B) =$

$= P(\bar{A}) + P(A \cup B)$

3.4. $2P(\bar{A}) - P(B) - P(\bar{A} \cup \bar{B}) = 2[1 - P(A)] - P(B) - P(\overline{A \cap B}) =$

$= 2 - 2P(A) - P(B) - [1 - P(A \cap B)] =$

$= 2 - 2P(A) - P(B) - 1 + P(A \cap B) =$

$= 1 - P(A) - P(A) - P(B) + P(A \cap B) =$

$= P(\bar{A}) - [P(A) + P(B) - P(A \cap B)] =$

$= P(\bar{A}) - P(A \cup B)$

3.5. $P\left(\overline{\bar{A} \cap \bar{B}}\right) - P(A) = P\left(\overline{\overline{A \cup B}}\right) - P(A) =$

$= P(A \cup B) - P(A) =$

$= P(A) + P(B) - P(A \cap B) - P(A) =$

$= P(B) - P(A \cap B) =$

$= P(B \backslash A)$

3.6. $P(A) - P(\bar{B}) + P(\bar{A}) \times P(\bar{B}) = P(A) - [1 - P(B)] + [1 - P(A)] \times [1 - P(B)] =$

$= P(A) - 1 + P(B) + 1 - P(B) - P(A) + P(A) \times P(B) =$

$= P(A) \times P(B)$

3.7. $P(B) - P(\bar{A}) + P(\bar{A} \cap \bar{B}) = P(B) - [1 - P(A)] + P(\overline{A \cup B}) =$

$= P(B) - 1 + P(A) + 1 - P(A \cup B) =$

$= P(B) + P(A) - [P(A) + P(B) - P(A \cap B)] =$

$= P(B) + P(A) - P(A) - P(B) + P(A \cap B) =$

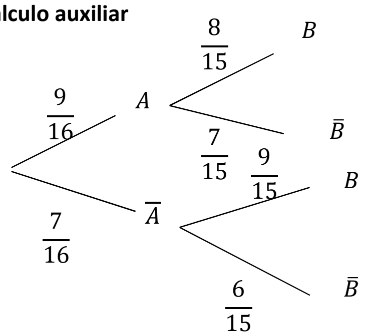
$= P(A \cap B) =$

$= P\left(\overline{\overline{A \cap B}}\right) =$

$= P\left(\overline{\bar{A} \cup \bar{B}}\right)$

4. $P(A) = \frac{9}{16}$ e $P\left(\bar{A}\right) = \frac{7}{16}$

Cálculo auxiliar



4.1. $P(B|A) = \frac{8}{15}$

4.2. $P(\bar{B}|A) = \frac{7}{15}$

4.3. $P(B|\bar{A}) = \frac{9}{15} = \frac{3}{5}$

4.4. $P(\bar{B}|\bar{A}) = \frac{6}{15} = \frac{2}{5}$

4.5. $P(B) = \frac{9}{16} \times \frac{8}{15} + \frac{7}{16} \times \frac{9}{15} = \frac{9}{30} + \frac{63}{240} =$

$= \frac{3}{10} + \frac{21}{80} =$

$= \frac{24+21}{80} =$

$= \frac{45}{80} =$

$= \frac{9}{16}$

5. Seja *A*: "a máquina 1 avaria" e *B*: "a máquina 2 avaria".

Sabemos que $P(A) = 0{,}003$, $P(B) = 0{,}005$ e $P(B|A) = 0{,}4$.

5.1. $P(B|A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)}$

Assim:

$$0{,}4 = \frac{P(A \cap B)}{0{,}003} \Leftrightarrow P(A \cap B) = 0{,}4 \times 0{,}003 \Leftrightarrow P(A \cap B) = 0{,}0012$$

5.2. $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} =$

$= \frac{0{,}0012}{0{,}005} =$

$= 0{,}24$

6.

6.1. Número de casos possíveis: ${}^{30}C_{10}$

Número de casos favoráveis: ${}^{25}C_{10}$

Logo, a probabilidade pedida é $\frac{{}^{25}C_{10}}{{}^{30}C_{10}} = \frac{3\,268\,760}{30\,045\,015} = \frac{2584}{23\,751}$.

6.2. Número de casos possíveis: ${}^{30}C_{10}$

Número de casos favoráveis: ${}^{5}C_5 \times {}^{25}C_5$

Logo, a probabilidade pedida é $\frac{{}^{5}C_5 \times {}^{25}C_5}{{}^{30}C_{10}} = \frac{{}^{25}C_5}{{}^{30}C_{10}} = \frac{53\,130}{30\,045\,015} = \frac{2}{1131}$.

6.3. Número de casos possíveis: ${}^{30}C_{10}$

Número de casos favoráveis: ${}^{5}C_1 \times {}^{25}C_9$

Logo, a probabilidade pedida é $\frac{{}^{5}C_1 \times {}^{25}C_9}{{}^{30}C_{10}} = \frac{5 \times {}^{25}C_9}{{}^{30}C_{10}} = \frac{10\,214\,875}{30\,045\,015} = \frac{8075}{23\,751}$.

6.4. $P = 1 - P($"não ter economistas"$)$

$P = 1 - \frac{2584}{23\,751} = \frac{21\,167}{23\,751}$

7. Número de casos possíveis: ${}^{5}C_3$

Número de casos favoráveis (número de maneiras de obter as notas de 5, 50 e 500 euros): 1

Logo, a probabilidade pedida é $\frac{1}{{}^{5}C_3} = \frac{1}{10}$.

8.

8.1.

a) ${}^{14}C_9 \times {}^{6}C_0 = 2002 \times 1 = 2002$

b) ${}^{14}C_7 \times {}^{6}C_2 + {}^{14}C_8 \times {}^{6}C_1 + {}^{14}C_9 = 3432 \times 15 + 3003 \times 6 + 2002 =$

$$= 51\,480 + 18\,018 + 2002 =$$
$$= 71\,500$$

8.2. Número de casos possíveis: ${}^{20}C_9$

Número de casos favoráveis: $1 \times 1 \times {}^{18}C_7 = {}^{18}C_7$

Logo, a probabilidade pedida é $\frac{{}^{18}C_7}{{}^{20}C_9} = \frac{31\,824}{167\,960} = \frac{18}{95}$.

8.3. Número de casos possíveis: 10!

Número de casos favoráveis: $5 \times 2! \times 8!$

Logo, a probabilidade pedida é $\frac{5\times 2!\times 8!}{10!} = \frac{5\times 2\times 8!}{10\times 9\times 8!} = \frac{1}{9}$.

9.

9.1.

a) A probabilidade pedida é $\frac{2}{10} = \frac{1}{5}$.

b) Número de casos possíveis: $10 \times 10 = 100$

Número de casos favoráveis: 12

- há 2×2 maneiras de sair duas vezes o setor com o zero;
- se não sair o setor com o zero, há 8×1 maneiras de obter soma zero.

Logo, a probabilidade pedida é $\frac{12}{100} = \frac{3}{25}$.

9.2. Se *P*("obter setor marcado com 100") = x, então *P*("obter qualquer um dos outros setores") = $2x$.

Temos, então:

$9 \times 2x + x = 1 \Leftrightarrow 18x + x = 1 \Leftrightarrow 19x = 1$

$$\Leftrightarrow x = \frac{1}{19}$$

Assim, *P*("obter setor marcado com 100") = $\frac{1}{19}$ e *P*("obter qualquer um dos outros setores") = $\frac{2}{19}$.

Logo, *P*("obter pontuação positiva") = *P*("obter 100 ou 10 ou 40 ou 50") = $\frac{1}{19} + 3 \times \frac{2}{19} = \frac{7}{19}$.

10. Sejam os acontecimentos *A*: "sair face com algarismo par" e *B*: "sair face com algarismo primo".

Sabemos que $A = \{2, 4, 6\}$, $B = \{2, 3, 5\}$ e $A \cap B = \{2\}$.

Dois acontecimentos *A* e *B* são incompatíveis se $A \cap B = \{\ \}$. Como $A \cap B = \{2\}$, $A \cap B \neq \{\ \}$ e, por isso, os acontecimentos *A* e *B* não são incompatíveis. Assim, o Miguel não tem razão.

Dois acontecimentos são independentes se $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$. Como $P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$, $P(B) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ e $P(A \cap B) = \frac{1}{6}$, temos $P(A) \times P(B) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$.

Concluímos, então, que $P(A \cap B) \neq P(A) \times P(B)$ e, por isso, *A* e *B* não são independentes.

Assim, a Filipa não tem razão e, portanto, nenhum dos dois irmãos tem razão.

11. Na série de jogos A B A, o Vasco ganha o torneio em duas situações:

1. ganha – ganha – termina o torneio

2. perde – ganha – ganha

Na situação 1, o Vasco ganha a A e depois ganha a B. Assim, $P = \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{2}{9}$.

Na situação 2, o Vasco perde com A, ganha a B e ganha a A. Assim, $P = \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{4}{27}$.

Logo, a probabilidade de o Vasco ganhar a série de jogos A B A é:

$$P = \frac{2}{9} + \frac{4}{27} = \frac{6}{27} + \frac{4}{27} = \frac{10}{27}$$

Na série de jogos B A B, o Vasco ganha o torneio em duas situações:

1. ganha – ganha – termina o torneio

2. perde – ganha – ganha

Na situação 1, o Vasco ganha a B e depois ganha a A. Assim, $P = \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{2}{9}$.

Na situação 2, o Vasco perde com B, ganha a A e ganha a B. Assim, $P = \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{2}{27}$.

Logo, a probabilidade de o Vasco ganhar a série de jogos B A B é:

$$P = \frac{2}{9} + \frac{4}{27} = \frac{6}{27} + \frac{2}{27} = \frac{8}{27}$$

Podemos, então, concluir que a série A B A é mais favorável, pois a probabilidade de ganhar é $\frac{10}{27}$, enquanto que a probabilidade de ganhar a série B A B é $\frac{8}{27}$.

12. Sabemos que $P(A|B) = P(B|A)$.

Assim:

$$\frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} \Leftrightarrow P(B) = P(A)$$

Logo, $P(A) = P(B) = \frac{1}{3}$.

Por outro lado, como A e B são independentes, $P(A \cap B) = P(A) \times P(B) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{9}$.

12.1. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{9} =$

$= \frac{3+3-1}{9} =$

$= \frac{5}{9}$

12.2. $P(\bar{B} \cap A) = P(A) - P(A \cap B) = \frac{1}{3} - \frac{1}{9} =$

$= \frac{3-1}{9} =$

$= \frac{2}{9}$

13.

13.1. $1 - P(A) \times P(B|\, A) = 1 - P(A) \times \frac{P(A \cap B)}{P(A)} =$

$= 1 - P(A \cap B) =$

$= P(\overline{A \cap B}) =$

$= P(\bar{A} \cup \bar{B})$

13.2. $P(\bar{A}) - P(B) + P(A|B) \times P(B) = 1 - P(A) - P(B) + \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \times P(B) =$

$= 1 - P(A) - P(B) + P(A \cap B) =$

$= 1 - [P(A) + P(B) - P(A \cap B)] =$

$= 1 - P(A \cup B) =$

$= P(\overline{A \cup B}) =$

$= P(\bar{A} \cap \bar{B})$

13.3. $P[(\bar{A} \cap B)|B] = \frac{P((\bar{A} \cap B) \cap B)}{P(B)} =$

$= \frac{P(\bar{A} \cap B \cap B)}{P(B)} =$

$= \frac{P(\bar{A} \cap B)}{P(B)} =$

$= \frac{P(B) - P(A \cap B)}{P(B)} =$

$= 1 - \frac{P(A \cap B)}{P(B)} =$

$= 1 - P(A|B)$

13.4. $P\left[\left(\overline{A \cap \bar{B}}\right)\middle|A\right] - P(B|A) = \frac{P\left(\left(\overline{A \cap \bar{B}}\right) \cap A\right)}{P(A)} - \frac{P(B \cap A)}{P(A)} = \frac{P((\bar{A} \cup B) \cap A)}{P(A)} - \frac{P(B \cap A)}{P(A)} =$

$= \frac{P[(\bar{A} \cap A) \cup (B \cap A]}{P(A)} - \frac{P(B \cap A)}{P(A)} =$

$= \frac{P(\emptyset \cup (B \cap A))}{P(A)} - \frac{P(B \cap A)}{P(A)} =$

$= \frac{P(B \cap A)}{P(A)} - \frac{P(B \cap A)}{P(A)} =$

$= 0$

13.5. $P(A|B) + P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} + \frac{P(B \cap A)}{P(A)} =$

$= \frac{P(A) \times P(A \cap B) + P(B) \times P(A \cap B)}{P(A) \times P(B)} =$

$= \frac{P(A \cap B) \times [P(A) + P(B)]}{P(A) \times P(B)} =$

$= P(A \cap B) \times \frac{P(A) + P(B)}{P(A) \times P(B)}$

13.6. $P(\bar{A}) + P(B) \times [P(A|B) - 1] = 1 - P(A) + P(B) \times \left[\frac{P(A \cap B)}{P(B)} - 1\right] =$

$$= 1 - P(A) + P(B) \times \frac{P(A \cap B) - P(B)}{P(B)} =$$
$$= 1 - P(A) + P(A \cap B) - P(B) =$$
$$= 1 - [P(A) + P(B) - P(A \cap B)] =$$
$$= 1 - P(A \cup B) =$$
$$= P(\overline{A \cup B}) =$$
$$= P(\bar{A} \cap \bar{B})$$

14.

14.1. $P(B|A) \leq 1 + \frac{1-P(\overline{B})}{1-P(\overline{A})} \Leftrightarrow \frac{P(B\cap A)}{P(A)} \leq 1 + \frac{P(B)}{P(A)},\ \ P(A) > 0$

$\Leftrightarrow P(B \cap A) \leq P(A) + P(B)$

$\Leftrightarrow P(A) + P(B) - P(B \cap A) \geq 0$

$\Leftrightarrow P(A \cup B) \geq 0$, que é uma condição universal, logo, pelas sucessivas equivalências, tem-se que $P(B|A) \leq\ 1 + \frac{1-P(\overline{B})}{1-P(\overline{A})}$ é também uma proposição verdadeira.

14.2. $1 - P(B|A) \times P(A) \geq P(B \cap \overline{A}) \Leftrightarrow 1 - \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \times P(A) \geq P(B) - P(A \cap B)$

$\Leftrightarrow 1 - P(A \cap B) \geq P(B) - P(A \cap B)$

$\Leftrightarrow 1\ \geq P(B)$, que é uma condição universal, logo, pelas sucessivas equivalências, tem-se que $1 - P(B|A) \times P(A) \geq P(B \cap \overline{A})$ é também uma proposição verdadeira.

15. $P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$

Sabemos que $P(B) = 2P(A)$ e que $P(A \cup B) = 3P(A \cap B)$.

Assim, como $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$, temos:

$3P(A \cap B) = P(A) + 2P(A) - P(A \cap B) \Leftrightarrow 4P(A \cap B) = 3P(A)$

$\Leftrightarrow P(A \cap B) = \frac{3}{4}P(A)$

Logo, $P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{3}{4}P(A)}{P(A)} = \frac{3}{4}$.

16. Sabemos que $P(A \cup \bar{B}) = 0{,}85$. Então:

$1 - P(A \cup \bar{B}) = 1 - 0{,}85 \Leftrightarrow P(\overline{A \cup \bar{B}}) = 0{,}15 \Leftrightarrow P(\bar{A} \cap B) = 0{,}15$

$\Leftrightarrow P(B) - P(A \cap B) = 0{,}15$

$\Leftrightarrow 0{,}6 - P(A \cap B) = 0{,}15$

$\Leftrightarrow P(A \cap B) = 0{,}6 - 0{,}15$

$\Leftrightarrow P(A \cap B) = 0{,}45$

Para que A e B sejam independentes, $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$. Assim:

$0{,}45 = P(A) \times 0{,}6 \Leftrightarrow P(A) = \frac{0{,}45}{0{,}6}$

$\Leftrightarrow P(A) = 0{,}75$

17. A e $\bar{A}$ são independentes $\Leftrightarrow P(A \cap \bar{A}) = P(A) \times P(\bar{A}) \Leftrightarrow P(A) + P(\bar{A}) - P(A \cup \bar{A}) = P(A) \times P(\bar{A})$

$\Leftrightarrow P(A) + 1 - P(A) - P(E) = P(A) \times P(\bar{A})$

$\Leftrightarrow 1 - P(E) = P(A) \times P(\bar{A})$

$\Leftrightarrow 1 - 1 = P(A) \times P(\bar{A})$

$\Leftrightarrow P(A) \times P(\bar{A}) = 0$

$\Leftrightarrow P(A) = 0 \ \vee P(\bar{A}) = 0$

$\Leftrightarrow P(A) = 0 \ \vee 1 - P(A) = 0$

$\Leftrightarrow P(A) = 0 \ \vee P(A) = 1$

$\Leftrightarrow A = \emptyset \ \vee A = E$

18. $1 + P(A) \times P(\bar{B}) < P(A) + P(\bar{A} \cup \bar{B}) \Leftrightarrow 1 + P(A) \times [1 - P(B)] < P(A) + P(\overline{A \cap B})$

$\Leftrightarrow 1 + P(A) - P(A) \times P(B) < P(A) + 1 - P(A \cap B)$

$\Leftrightarrow -P(A) \times P(B) < -P(A \cap B)$

$\Leftrightarrow P(A \cap B) < P(A) \times P(B)$

$\Leftrightarrow \frac{P(A \cap B)}{P(B)} < P(A)$

$\Leftrightarrow P(A|B) < P(A)$

$\Leftrightarrow P(A) > P(A|B)$

19.

19.1. $P(\bar{A}) + P(A \cup B) = 1 - P(A) + P(A \cup B) = 1 - P(A) + P(A) + P(B) - P(A \cap B) =$

$= 1 + P(B) - P(A \cap B) =$

$= P(B) + 1 - P(A \cap B) =$

$= P(B) + P(\overline{A \cap B}) =$

$= P(B) + P(\bar{A} \cup \bar{B})$

19.2. Sejam os acontecimentos *A*: "o aluno faz o exame de Física e Química" e *B*: "o aluno faz o exame de Biologia e Geologia".

Sabemos que $P(A) = 70\%$, $P(B) = 75\%$ e $P(A \cup B) = 85\%$.

Pela alínea anterior, $P(\bar{A}) + P(A \cup B) = P(B) + P(\bar{A} \cup \bar{B})$.

Assim:

$P(\bar{A} \cup \bar{B}) = P(\bar{A}) + P(A \cup B) - P(B) =$

$= 30\% + 85\% - 75\% =$

$= 40\%$

20.

20.1. $P(A|\bar{B})=\frac{P(A\cap\bar{B})}{P(\bar{B})}=$

$$=\frac{P(A)+P(\bar{B})-P(A\cup\bar{B})}{P(\bar{B})}=$$

$$=1+\frac{P(A)-P(A\cup\bar{B})}{P(\bar{B})}=$$

$$=1+\frac{1-P(\bar{A})-P(A\cup\bar{B})}{P(\bar{B})}=$$

$$=1+\frac{1-P(A\cup\bar{B})-P(\bar{A})}{P(\bar{B})}=$$

$$=1+\frac{P(\overline{A\cup\bar{B}})-P(\bar{A})}{P(\bar{B})}=$$

$$=1+\frac{P(\bar{A}\cap B)-P(\bar{A})}{P(\bar{B})}=$$

20.2. Sejam os acontecimentos *A*: “não voltar a candidatar-se ao ensino superior no próximo ano” e *B*: “escolher o curso de Gestão como primeira opção”.

Pretende-se saber $P(B\cap\overline{A})$.

Sabemos que $P(\bar{A})=0{,}65=\frac{13}{20}$, $P(\bar{B})=0{,}6=\frac{3}{5}$ e $P(A|\bar{B})=\frac{1}{12}$.

Pela alínea anterior, $P(A|\bar{B})=1+\frac{P(\bar{A}\cap B)-P(\bar{A})}{P(\bar{B})}$.

Assim:

$$\frac{1}{12}=1+\frac{P(\bar{A}\cap B)-\frac{13}{20}}{\frac{3}{5}}\Leftrightarrow\frac{1}{12}=1+\frac{5}{3}P(\bar{A}\cap B)-\frac{5}{3}\times\frac{13}{20}$$

$$\Leftrightarrow\frac{5}{3}P(\bar{A}\cap B)=\frac{1}{6}$$

$$\Leftrightarrow P(\bar{A}\cap B)=\frac{1}{6}\times\frac{3}{5}$$

$$\Leftrightarrow P(\bar{A}\cap B)=\frac{1}{10}$$

Logo, a probabilidade pedida é igual a $\frac{1}{10}=0{,}1$.

21. No contexto da situação descrita, $P(B|\bar{A})$ é a probabilidade de sair ficha com vogal na segunda extração, sabendo que não saiu ficha azul na primeira extração. Sabemos que ocorreu $\bar{A}$, ou seja, não saiu ficha azul na primeira extração das fichas. Assim, na primeira extração saiu uma ficha vermelha, com uma vogal. Após a primeira extração, ficaram no saco 25 fichas, das quais quatro têm vogais. Assim, o número de casos possíveis é 25 e o número de casos favoráveis é 4. De acordo com a regra de Laplace, a probabilidade de um acontecimento é dada pelo quociente entre o número de casos favoráveis e o número de casos possíveis, quando estes são equiprováveis e em número finito. Logo, a probabilidade pedida é $\frac{4}{25}$.

22. Sabemos que $P(B|A) = \frac{2}{5}$, ou seja, a probabilidade de o segundo berlinde extraído ser azul, sabendo que o primeiro berlinde extraído foi verde é $\frac{2}{5}$.

Seja x o número total de berlindes. Como o saco tem seis berlindes azuis, no momento da segunda extração, temos:

$$\frac{2}{5} = \frac{6}{x-1} \Leftrightarrow \frac{2}{5} = \frac{6}{x-1} \Leftrightarrow 2x - 2 = 30$$
$$\Leftrightarrow 2x = 32$$
$$\Leftrightarrow x = 16$$

Podemos, então, concluir que o número de berlindes verdes no saco era $n = 16 - 6 = 10$.

23. Sejam os acontecimentos T: "o aluno pertence à tuna" e I: "o aluno toca um instrumento".

Sabemos que $P(T) = \frac{1}{4}$, $P(I) = \frac{1}{2}$ e $P(T|I) = \frac{1}{3}$.

23.1.

a) $P(T \cap I) = P(I) \times P(T|I) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$

b) $P(\bar{T} \cap \bar{I}) = P(\overline{T \cup I}) = 1 - P(T \cup I) =$

$$= 1 - [P(T) + P(I) - P(T \cap I)] =$$
$$= 1 - \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2} - \frac{1}{6}\right) =$$
$$= 1 - \frac{7}{12} =$$
$$= \frac{5}{12}$$

23.2. $P(\bar{T}|I) = \frac{P(\bar{T} \cap I)}{P(I)} = \frac{P(I) - P(T \cap I)}{P(I)} =$

$$= \frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{6}}{\frac{1}{2}} =$$
$$= \frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}} =$$
$$= \frac{2}{3}$$

23.3. Os acontecimentos T e I são independentes se $P(T \cap I) = P(T) \times P(I)$.

Sabemos que $P(T \cap I) = \frac{1}{6}$.

$P(T) \times P(I) = \frac{1}{4} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$

Assim, $P(T \cap I) \neq P(T) \times P(I)$ e, por isso, os acontecimentos "tocar um instrumento" e "pertencer à tuna" não são independentes.

24. Considera os acontecimentos *C*: "chover" e *V*: "vencer".

Sabemos que $P(\bar{C}) = \frac{3}{10}$, $P(V|\bar{C}) = \frac{3}{8}$ e $P(V|C) = \frac{3}{11}$.

24.1. $P(V) = P(V \cap C) + P(V \cap \bar{C})$

$P(V|C) = \frac{3}{11} \Leftrightarrow \frac{P(V \cap C)}{P(C)} = \frac{3}{11}$

$\Leftrightarrow P(V \cap C) = \frac{3}{11} \times \left(1 - \frac{3}{10}\right)$

$\Leftrightarrow P(V \cap C) = \frac{3}{11} \times \frac{7}{10}$

$\Leftrightarrow P(V \cap C) = \frac{21}{110}$

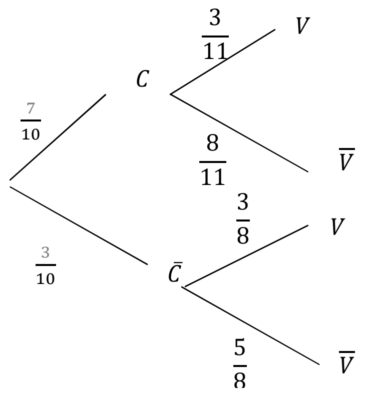
$P(V|\bar{C}) = \frac{3}{8} \Leftrightarrow \frac{P(V \cap \bar{C})}{P(\bar{C})} = \frac{3}{8}$

$\Leftrightarrow P(V \cap \bar{C}) = \frac{3}{8} \times \frac{3}{10}$

$\Leftrightarrow P(V \cap \bar{C}) = \frac{9}{80}$

Assim, $P(V) = \frac{21}{110} + \frac{9}{80} = \frac{168}{880} + \frac{99}{880} = \frac{267}{880}$.

Cálculo auxiliar



24.2. $P(C|V) = \frac{P(C \cap V)}{P(V)} = \frac{\frac{21}{110}}{\frac{267}{880}} = \frac{21 \times 880}{267 \times 110} = \frac{56}{89}$

25. Sabemos que:

Tanque 1	Tanque 2	Tanque 3
7 trutas 3 robalos	5 trutas 2 robalos	4 trutas 4 robalos
10 peixes	7 peixes	8 peixes

25.1. Sejam os acontecimentos A: "o peixe retirado é uma truta" e T_k: "o peixe é retirado do tanque k", $k \in \{1, 2, 3\}$.

a) $P(A \cap T_1) = \frac{1}{3} \times \frac{7}{10} = \frac{7}{30}$

b) $P(A) = \frac{1}{3} \times \frac{7}{10} + \frac{1}{3} \times \frac{5}{7} + \frac{1}{3} \times \frac{4}{8} =$

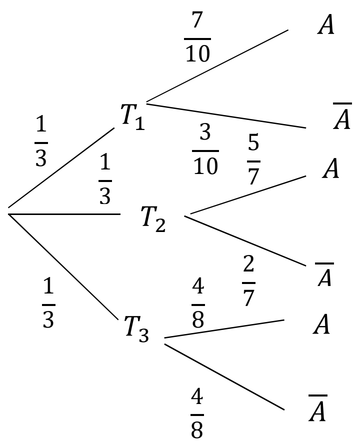
$= \frac{7}{30} + \frac{5}{21} + \frac{1}{6} =$

$= \frac{49+50+35}{210} =$

$= \frac{134}{210} =$

$= \frac{67}{105}$

Cálculo auxiliar



25.2. $P(T1|A) = \frac{P(A \cap T1)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{3} \times \frac{7}{10}}{\frac{67}{105}} =$

$= \frac{\frac{7}{30}}{\frac{67}{105}} =$

$= \frac{147}{402} =$

$= \frac{49}{134}$

26. Sejam os acontecimentos:

- C: "o cliente pediu chá"
- T: "o cliente pediu uma fatia de tarte"

Sabemos que $P(C) = 0{,}7$, $P(C \cap T) = 0{,}5$ e $P(\bar{C} \cap \bar{T}) = 0{,}15$.

26.1. Pretende-se determinar o valor de $P(T \cap \bar{C})$:

$$P(\bar{C} \cap \bar{T}) = 0{,}15 \Leftrightarrow P(\overline{C \cup T}) = 0{,}15$$
$$\Leftrightarrow 1 - P(C \cup T) = 0{,}15$$
$$\Leftrightarrow P(C \cup T) = 1 - 0{,}15$$
$$\Leftrightarrow P(C \cup T) = 0{,}85$$

Como $P(C \cup T) = P(C) + P(T) - P(C \cap T)$, temos:

$$0{,}85 = 0{,}7 + P(T) - 0{,}5 \Leftrightarrow P(T) = 0{,}85 - 0{,}7 + 0{,}5$$
$$\Leftrightarrow P(T) = 0{,}65$$

Assim:

$$P(T \cap \bar{C}) = P(T) - P(T \cap C) = 0{,}65 - 0{,}5 = 0{,}15$$

Cálculo auxiliar

	C	$\bar{C}$	
T	0,5	0,15	0,65
$\bar{T}$	0,2	0,15	0,35
	0,7	0,3	1

26.2. $P(C|T) = \frac{P(C \cap T)}{P(T)} = \frac{0{,}5}{0{,}65} \approx 0{,}77 = 77\%$

26.3. No contexto da situação descrita, $P\big(C|(A \cap B)\big)$ é a probabilidade de o recheio da tarte conter apenas frutos vermelhos, sabendo que saiu um papel com morango e um papel com amora.

Se já saiu um papel com morango e um papel com amora, basta que saia um papel com framboesa para que o recheio da tarte contenha apenas frutos vermelhos.

Como os papéis são extraídos sem reposição e na terceira extração existem cinco papéis no saco e apenas um deles tem escrito framboesa, então a probabilidade pretendida é $\frac{1}{5}$.

27.

27.1. $P = \frac{1}{6} \times \left(1 - \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{6} \times \frac{3}{4} = \frac{3}{24} = \frac{1}{8}$

27.2. $P = 1 - P($"não sair face três nos dois dados"$) = 1 - \frac{5}{6} \times \frac{3}{4} =$

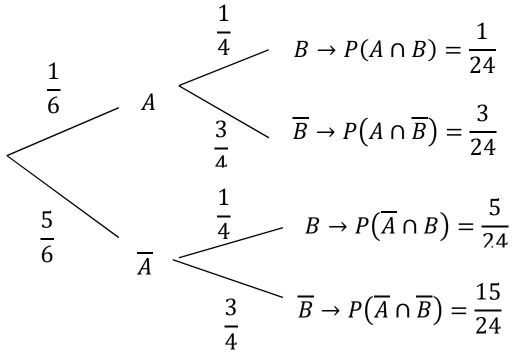
$$= 1 - \frac{15}{24} =$$
$$= \frac{9}{24} =$$
$$= \frac{3}{8}$$

27.3. Sejam os acontecimentos A: "sair face 3 no dado equilibrado" e B: "sair face 3 no dado viciado".

Sabemos que $P(A) = \frac{1}{6}$, $P(B) = \frac{1}{4}$ e A e B são acontecimentos independentes, ou seja, $P(A \cap B) = P(A) \times P(B) = \frac{1}{24}$.

Organizando a informação numa tabela ou, se preferirmos, podemos organizar num diagrama em árvore, temos:

	B	$\bar{B}$	**Total**
A	$\frac{1}{24}$	$\frac{3}{24}$	$\frac{1}{6}$
$\bar{A}$	$\frac{5}{24}$		$\frac{5}{6}$
Total	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$	1



A probabilidade pedida é igual a $\frac{\frac{5}{24}+\frac{3}{24}}{\frac{5}{24}+\frac{1}{24}+\frac{3}{24}} = \frac{\frac{8}{24}}{\frac{9}{24}} = \frac{8}{9}$.

28. Como A e B são acontecimentos independentes, $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$.

28.1. $P(A \cap \bar{B}) = P(A) - P(A \cap B) =$

$= P(A) - P(A) \times P(B) =$ (pois A e B são acontecimentos independentes)

$= P(A) \times [1 - P(B)] =$

$= P(A) \times P(\bar{B})$

Logo, A e $\bar{B}$ são acontecimentos independentes.

28.2. $P(\bar{A} \cap B) = P(B) - P(A \cap B) =$

$= P(B) - P(A) \times P(B) =$ (pois A e B são acontecimentos independentes)

$= P(B) \times [1 - P(A)] =$

$= P(B) \times P(\bar{A})$

Logo, $\bar{A}$ e B são acontecimentos independentes.

28.3. $P(\bar{A} \cap \bar{B}) = P(\overline{A \cup B}) =$

$= 1 - P(A \cup B) =$

$= 1 - [P(A) + P(B) - P(A \cap B)] =$

$= 1 - P(A) - P(B) + P(A \cap B) =$

$= 1 - P(A) - P(B) + P(A) \times P(B) =$ (pois A e B são acontecimentos independentes)

$= P(\bar{A}) - P(B) \times [1 - P(A)] =$

$= P(\bar{A}) - P(B) \times P(\bar{A}) =$

$= P(\bar{A}) \times [1 - P(B)] =$

$= P(\bar{A}) \times P(\bar{B})$

Logo, $\bar{A}$ e $\bar{B}$ são acontecimentos independentes.

29.

29.1. $^9C_6 \times {}^7C_4 \times {}^4C_2 + {}^9C_6 \times {}^7C_5 \times {}^4C_1 = 84 \times 35 \times 6 + 84 \times 21 \times 4 =$

$= 17\,640 + 7056 =$

$= 24\,696$

29.2. $\underbrace{\overbrace{\_\ \_\ \_\ \_\ \_}^{\text{Óleos}}}_{5!}\quad \underbrace{\overbrace{\_\ \_\ \_\ \_}^{\text{Serigrafias}}}_{4!}\quad \underbrace{\overbrace{\_\ \_\ \_\ \_}^{\text{Aguarelas}}}_{3!} = 5! \times 4! \times 3! \times 3!$

$$\frac{5! \times 3! \times 4! \times 3!}{12!} = \frac{5! \times 6 \times 24 \times 6}{12 \times 11 \times 10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5!} = \frac{1}{4620}$$

30. Sejam os acontecimentos *F*: "a pessoa escolhida é um fumador" e *C*: "a pessoa escolhida contraiu cancro".

Sabemos que:

- $P(F) = 0{,}35$
- $P(C|F) = 0{,}4$
- $P(C|\overline{F}) = 0{,}004$

30.1. Organizando a informação numa tabela, temos:

	F	$\overline{F}$	**Total**
C	0,14	0,0026	0,1426
$\overline{C}$	0,21	0,6474	0,8574
Total	0,35	0,65	1

Cálculos auxiliares

- $(C \cap F) = 0{,}35 \times 0{,}4 = 0{,}14$
- $P(C \cap \overline{F}) = 0{,}65 \times 0{,}004 = 0{,}0026$

$$P(F|C) = \frac{P(F \cap C)}{P(C)} = \frac{0{,}14}{0{,}1426} =$$

$$= \frac{1400}{1426} =$$

$$= \frac{700}{713}$$

30.2. Sabemos que $\#F = 0{,}35 \times 200 = 70$.

Assim, a probabilidade pedida é $\frac{^{70}C_{10} \times {}^{130}C_{30}}{^{200}C_{40}} \approx 0{,}05$.

31.

31.1.

a) $\underline{E}\ \underline{M}\ \underbrace{\_\ \_\ \_\ \_\ \_}_{5!}$ ou $\underbrace{\_\ \_\ \_\ \_\ \_}_{5!}\ \underline{E}\ \underline{M}$

5! + 5! = 120 + 120 = 240

b)

$$\overbrace{E\ M}^{2!}\ \overbrace{F_1 F_2 F_3}^{3!}\ \_\_\ \_\_$$
$$\underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{4!}$$

$2! \times 3! \times 4! = 2 \times 6 \times 24 = 288$

31.2.

a) $P = \frac{2}{7!} = \frac{2}{5040} = \frac{1}{2520}$

b) $\underbrace{E\ F_1\ M}_{2!}\ \underbrace{\_\_\ \_\_\ \_\_\ \_\_}_{4!}$

$P = \frac{5 \times 2! \times 4!}{7!} = \frac{240}{5040} = \frac{1}{21}$

32.

32.1. ${}^{13}C_8 = 1287$

32.2.

a) A probabilidade pedida é $\frac{{}^{12}C_7}{{}^{13}C_8} = \frac{792}{1287} = \frac{8}{13}$.

b) A probabilidade pedida é:

$$1 - P(\text{"nenhum dos dois fazer parte do grupo"}) = 1 - \frac{{}^{11}C_8}{{}^{13}C_8} =$$
$$= 1 - \frac{165}{1287} =$$
$$= \frac{1122}{1287} =$$
$$= \frac{34}{39}$$

32.3. A probabilidade pedida é $\frac{7 \times 2 \times 6!}{8!} = \frac{14 \times 6!}{8 \times 7 \times 6!} = \frac{14}{56} = \frac{1}{4}$.

32.4. A probabilidade pedida é:

$$1 - P(\text{"de se sentarem um em frente ao outro"}) = 1 - \frac{4 \times 2! \times 6!}{8!} =$$
$$= 1 - \frac{8 \times 6!}{8 \times 7 \times 6!} =$$
$$= 1 - \frac{1}{7} =$$
$$= \frac{6}{7}$$

33.

33.1. Números naturais menores do que 2000 com um algarismo: 9

Números naturais menores do que 2000 com dois algarismos: 9×9

Números naturais menores do que 2000 com três algarismos: $9 \times 9 \times 8$

Números naturais menores do que 2000 com quatro algarismos: $1 \times 9 \times 8 \times 7$

Assim, temos 9 + 81 + 648 + 504 = 1242.

33.2. Números pares menores do que 2000 com um algarismo: 4

Números pares menores do que 2000 com dois algarismos: $9 \times 1 + 8 \times 4 = 41$

Números pares menores do que 2000 com três algarismos: $9 \times 8 \times 1 + 8 \times 8 \times 4 = 328$

Números pares menores do que 2000 com quatro algarismos:

$1 \times 8 \times 7 \times 1 + 1 \times 8 \times 7 \times 4 = 280$

Assim, temos 4 + 41 + 328 + 280 = 653.

A probabilidade pedida é $\frac{653}{1242} \approx 0{,}53$.

33.3. Número de elementos de A inferiores a 999: 9 + 81 + 648 = 738

$$1 - P(\text{"nenhum número maior do que 999"}) = 1 - \frac{^{738}C_4}{^{1242}C_4} = 1 - 0{,}1243 \approx 0{,}88$$

34.

34.1. $3! \times 3! \times 2! = 72$

A probabilidade pedida é $\frac{72}{6!} = \frac{72}{720} = \frac{1}{10}$.

34.2. $^nC_2 = 105 \Leftrightarrow \frac{n!}{2!(n-2)!} = 105 \Leftrightarrow \frac{n \times (n-1) \times (n-2)!}{2 \times (n-2)!} = 105$

$$\Leftrightarrow \frac{n \times (n-1)}{2} = 105$$

$$\Leftrightarrow n \times (n-1) = 210$$

$$\Leftrightarrow n^2 - n - 210 = 0$$

$$\Leftrightarrow n = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4 \times 1 \times (-210)}}{2}$$

$$\Leftrightarrow n = \frac{1 \pm \sqrt{841}}{2}$$

$$\Leftrightarrow n = \frac{1-29}{2} \vee n = \frac{1+29}{2}$$

$$\Leftrightarrow n = \frac{-28}{2} \vee n = \frac{30}{2}$$

$$\Leftrightarrow n = -14 \vee n = 15$$

Como n é um número natural, $n = 15$.

35.

35.1. Número de casos favoráveis: 6×2 (cada uma das seis faces tem duas diagonais)

Número de casos possíveis: $^6C_1 \times {}^6C_1$

Assim, a probabilidade pedida é $\frac{6 \times 2}{^6C_1 \times {}^6C_1} = \frac{12}{6 \times 6} = \frac{12}{36} = \frac{1}{3}$.

35.2. A face [*ABCDEF*] tem $n+6$ pontos. Fixando o ponto *A*, temos $n+5$ pontos. Assim:

$$\frac{{}^{n+5}C_2}{{}^{n+6}C_3}=\frac{\frac{(n+5)!}{2!(n+3!)}}{\frac{(n+6)!}{3!(n+3!)}}=\frac{6(n+5)!}{2(n+6)!}=\frac{6(n+5)!}{2(n+6)(n+5)!}=\frac{3}{n+6}$$

Como $\frac{3}{n+6}=\frac{1}{4}$, temos $n+6=12 \Leftrightarrow n=6$.

36.

36.1. $\overbrace{\underline{\ \downarrow\ }\ C\ \underline{\ \downarrow\ }\ C\ \underline{\ \downarrow\ }\ C\ \underline{\ \downarrow\ }\ C\ \underline{\ \downarrow\ }}^{\text{5 espaços criados onde se pode colocar as 3 vogais}}$

Número de casos favoráveis: $3!\times {}^{11}A_4 \times {}^{5}C_3$

Número de casos possíveis: ${}^{7}C_3 \times 3! \times {}^{11}A_4$

Assim, a probabilidade pedida é $\frac{3!\times {}^{11}A_4\times {}^{5}C_3}{{}^{7}C_3\times 3!\times {}^{11}A_4}=\frac{47\,5200}{1\,663\,200}=\frac{2}{7}$.

36.2. Número de casos favoráveis: $14\times {}^{4}C_3$

Número de casos possíveis: ${}^{14}C_3$

Assim, a probabilidade pedida é $\frac{14\times {}^{4}C_3}{{}^{14}C_3}=\frac{56}{364}=\frac{2}{13}$.

36.3. Número de casos favoráveis: $3\times {}^{4}C_3$ (para que os vértices definam um plano que produza uma secção que seja um quadrado, têm de pertencer aos planos *AMF*, *AMC* ou *FCE*).

Número de casos possíveis: ${}^{6}C_3$

Assim, a probabilidade pedida é $\frac{3\times {}^{4}C_3}{{}^{6}C_3}=\frac{3\times 4}{20}=\frac{3}{5}$.

36.4. Número de casos favoráveis: $3^6\times {}^{8}C_2\times {}^{6}C_3\times 3^3$

Número de casos possíveis: 5^{14}

Assim, a probabilidade pedida é $\frac{3^6\times {}^{8}C_2\times {}^{6}C_3\times 3^3}{5^{14}}\approx 0{,}0018$.

37.

37.1.

a) Números primos que ainda falta utilizar: 3, 5, 7, 11 e 13 para 5 faces quadradas

$5!\times {}^{7}A_7=120\times 5040=604\,800$

b) 1 ímpar: $\underbrace{\underbrace{\underline{2}\ \underline{p}\ \underline{p}\ \underline{p}\ \underline{p}\ \underline{i}}_{1\times 6\times 5\times 4\times 3\times 6\times 5}}_{\text{faces quadradas}} \times \underbrace{\underbrace{\underline{\Delta}\ \underline{\ }\ \underline{\ }\ \underline{\ }\ \underline{\ }\ \underline{\ }\ \underline{\ }}_{7!}}_{\text{faces triangulares}}$

3 ímpares: $\underbrace{\underbrace{\underline{2}\ \underline{p}\ \underline{p}\ \underline{i}\ \underline{i}\ \underline{i}}_{1\times 6\times 5\times 6\times 5\times 4}}_{\text{faces quadradas}} \times {}^{5}C_3 \times \underbrace{\underbrace{\underline{\Delta}\ \underline{\ }\ \underline{\ }\ \underline{\ }\ \underline{\ }\ \underline{\ }\ \underline{\ }}_{7!}}_{\text{faces triangulares}}$

5 ímpares: $\underbrace{\underbrace{\underline{2}\ \underline{i}\ \underline{i}\ \underline{i}\ \underline{i}\ \underline{i}}_{1\times 6\times 5\times 4\times 3\times 2}}_{\text{faces quadradas}} \times \underbrace{\underbrace{\underline{\Delta}\ \underline{\ }\ \underline{\ }\ \underline{\ }\ \underline{\ }\ \underline{\ }\ \underline{\ }}_{7!}}_{\text{faces triangulares}}$

Número total de casos: 239 500 800

37.2. Número de casos favoráveis: ${}^{14}C_4 \times {}^{14}A_{10}$

Número de casos possíveis: 15^{14}

A probabilidade pedida é $\frac{{}^{14}C_4 \times {}^{14}A_{10}}{15^{14}} \approx 0{,}000\,12$

37.3. O número de segmentos de reta que unem dois vértices do sólido é ${}^{12}C_2$. Como o sólido tem 24 arestas e 12 diagonais faciais (2 diagonais por cada face quadrada), o número de diagonais espaciais é:

${}^{12}C_2 - 24 - 12 = 66 - 24 - 12 = 30$

38.

38.1. Número de casos favoráveis: 1 (a reta definida por $x = 1 \wedge y = 2$ é uma reta com a direção do eixo Oz, logo, só escolhendo os vértices A e F, temos uma reta paralela, como se pretende.)

Número de casos possíveis: ${}^{6}C_2$

Assim, a probabilidade pedida é $\frac{1}{{}^{6}C_2} = \frac{1}{15}$.

38.2. $X = \{A, B, F, D\}$ e $Y = \{A, B, C\}$

Temos, então, $P(X) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$ e $P(Y) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.

Como $X \cap Y = \{A, B\}$, temos que $P(X \cap Y) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$.

$P(X) \times P(Y) = \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{3}$

Assim, $P(X \cap Y) = P(X) \times P(Y)$ e, por isso, os acontecimentos X e Y são independentes.

38.3. Como uma face já tem o número 1, há dois tipos de casos:

$\underbrace{\underline{1}}_{1} \times \underbrace{\underline{i}\ \underline{i}\ \underline{i}}_{3!} \times \underbrace{\underline{\ }\ \underline{\ }\ \underline{\ }\ \underline{\ }}_{4!}$ ou $\underbrace{\underline{1}}_{1} \times \underbrace{\underline{i}\ \underline{i}\ \underline{p}}_{3\times2\times4} \times 3 \times \underbrace{\underline{\ }\ \underline{\ }\ \underline{\ }\ \underline{\ }}_{4!}$

$3! \times 4! + {}^{3}A_2 \times {}^{4}A_1 \times 3 \times 4! = 1872$

39.

39.1. Ponto genérico da reta: $P(1 + 2k, 3, 4 - k), k \in \mathbb{R}$

Para que os pontos da reta tenham coordenadas inteiras, a variar apenas entre 1 e 6 (inclusive), tem que:

$$1 \leq 1 + 2k \leq 6 \ \wedge\ 1 \leq 4 - k \leq 6 \ \wedge\ k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow 0 \leq 2k \leq 5 \ \wedge\ -3 \leq -k \leq 2 \ \wedge\ k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq k \leq \frac{5}{2} \ \wedge\ -2 \leq k \leq 3 \ \wedge\ k \in \mathbb{Z}$$

Logo, $k \in \{0, 1, 2\}$.

- Se $k = 0, P(1, 3, 4)$
- Se $k = 1, P(3, 3, 3)$
- Se $k = 2, P(5, 3, 2)$

LeYa EDUCAÇÃO Daniela Raposo e Luzia Gomes

Número de casos possíveis: $6 \times 6 \times 6 = 216$

Número de casos favoráveis: 3

Logo, a probabilidade pedida é $\frac{3}{216} = \frac{1}{72}$.

39.2. A reta que passa no ponto $A(2, 3, -1)$ e tem a direção do vetor $\vec{v}(0, 0, 1)$ é a reta de equação $(x, y, z) = (2, 3, -1) + k(0, 0, 1), k \in \mathbb{R}$.

Ponto genérico: $(2, 3, -1 + k)$, $k \in \mathbb{R}$

Utilizando o mesmo raciocínio da alínea anterior, temos seis pontos pertencentes à reta, pois:

$1 \leq -1 + k \leq b \ \wedge \ k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow 2 \leq k \leq 7 \ \wedge \ k \in \mathbb{Z}$

Logo, $k \in \{2, 3, 4, 5, 6, 7\}$.

Assim, a probabilidade pedida é $\frac{6}{216} = \frac{1}{36}$.

39.3. $x + y + z - 9 = 0 \Leftrightarrow x + y + z = 9$

Assim, procuramos os pontos cuja soma das coordenadas é igual a 9. Nesta experiência, existem 25 pontos nestas condições.

- Com 3 iguais: 1
- Com 2 iguais e um diferente: 3 + 3 = 6 casos
- Com 3 diferentes: 3! + 3! + 3! = 18 casos

Logo, a probabilidade pedida é $\frac{25}{216}$.

39.4. A reta r tem equação $(x, y, z) = (1, 4, 5) + k(0, -1, 1), k \in \mathbb{R}$ e a reta s tem equação $(x, y, z) = (1, 4, 5) + k(1, -2, 1), k \in \mathbb{R}$.

Procuramos a equação do plano α definido pelas duas retas:

$$\begin{cases} (x, y, z)(0, -1, 1) = 0 \\ (x, y, z)(1, -2, 1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -y + z = 0 \\ x - 2y + z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = z \\ x - 2z + z = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = z \\ x = z \end{cases}$$

$(z, z, z) = z(1, 1, 1)$

Assim, a equação do plano α é do tipo $x + y + z + d = 0$.

Como o ponto de coordenadas $(1, 4, 5)$ pertence ao plano, temos:

$1 + 4 + 5 + d = 0 \Leftrightarrow d = -10$

Logo, α: $x + y + z = 10$.

Nesta experiência, existem 27 pontos que pertencem ao plano:

- Com 3 diferentes:

(1, 3, 6) → 3!

(1, 4, 5) → 3!

(2, 3, 5) → 3!

- Com 2 iguais e um diferente:

$(2, 4, 4) \rightarrow 3$

$(2, 2, 6) \rightarrow 3$

$(3, 3, 4) \rightarrow 3$

Logo, a probabilidade pedida é $\frac{27}{216} = \frac{1}{8}$.

40. $P(A|B) = P(A|\bar{B}) \Leftrightarrow \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A \cap \bar{B})}{P(\bar{B})}$

$$\Leftrightarrow \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A) - P(A \cap B)}{1 - P(B)}$$

$$\Leftrightarrow P(A \cap B) \times [1 - P(B)] = P(B) \times [P(A) - P(A \cap B)]$$

$$\Leftrightarrow P(A \cap B) - P(A \cap B) \times P(B) = P(B) \times P(A) - P(B) \times P(A \cap B)$$

$$\Leftrightarrow P(A \cap B) = P(B) \times P(A)$$

Como $P(A \cap B) = P(B) \times P(A)$, concluímos que os acontecimentos A e B são independentes.

41.

41.1. Número de casos possíveis: $\underbrace{\_A\_ \quad \_B\_ \quad \_C\_}_{24 \ \times \ 23 \ \times \ 22}$

Número de casos favoráveis: $\underbrace{\_\text{Carro}\_ \quad \_\text{Bicicleta ou relógio}\_ \quad \_\text{Qualquer}\_}_{4 \ \times \ 20 \ \times \ 22}$

A probabilidade pedida é $\frac{4 \times 20 \times 22}{24 \times 23 \times 22} = \frac{10}{69}$.

41.2. Número de casos possíveis: $\underbrace{\_A\_ \quad \_B\_ \quad \_C \text{ (carro)}\_}_{23 \ \times \ 22 \ \times \ 4}$

Número de casos favoráveis: $\underbrace{\_\text{Carro}\_ \quad \_\text{Carro}\_ \quad \_\text{Carro}\_}_{3 \ \times \ 2 \ \times \ 4}$

A probabilidade pedida é $\frac{3 \times 2 \times 4}{23 \times 22 \times 4} = \frac{3}{253}$.

41.3. Número de casos possíveis: $\underbrace{\_A\_ \quad \_B\_ \quad \_C \text{ (carro)}\_}_{24 \ \times \ 23 \ \times \ 22}$

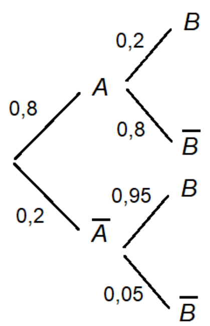
Número de casos favoráveis:

Ou ganha só uma rapariga um carro ou ganham ambas as raparigas um carro:

$$4 \times \underbrace{\_A\_ \quad \_B\_ \quad \_C\_}_{22 \ \times \ 20} \times 2 \quad + \quad \underbrace{\_A\_ \quad \_B\_ \quad \_C\_}_{4 \ \times \ 22 \ \times \ 3}$$

A probabilidade pedida é $\frac{4 \times 22 \times 20 \times 2 + 4 \times 22 \times 3}{24 \times 23 \times 22} = \frac{43}{138}$.

42. Sejam os acontecimentos A: "o Sr. Dalton responde a verdade" e B: "o detetor de mentiras diagnostica mentira". Sabemos que $P(A) = 0{,}8$, $P(B|A) = 0{,}2$ e $P(B|\bar{A}) = 0{,}95$.



$$P(\bar{A}|B) = \frac{P(\bar{A} \cap B)}{P(B)} = \frac{0{,}2 \times 0{,}95}{0{,}8 \times 0{,}2 + 0{,}2 \times 0{,}95} =$$

$$= \frac{19}{35} \approx 54\%$$

43.

4 bolas pretas *n* - 4 bolas brancas	*n* - 4 bolas pretas 4 bolas brancas
Caixa A	Caixa B

43.1. *P*(“bola retirada da caixa B ser branca”) =

= *P*(“bola retirada da caixa A ser preta2) + *P*(“bola retirada da caixa A ser branca”) =

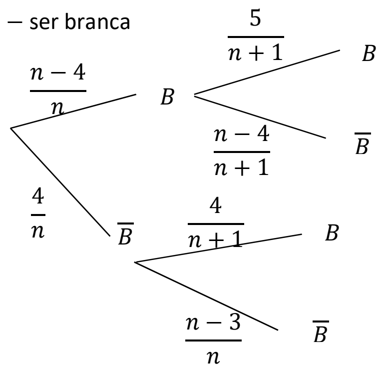
$= \frac{4}{n} \times \frac{4}{n+1} + \frac{n-4}{n} \times \frac{5}{n+1} =$

$= \frac{16}{n(n+1)} + \frac{5n-20}{n(n+1)} =$

$= \frac{5n-4}{n(n+1)}$

Cálculo auxiliar

B — ser branca



43.2. $\frac{\frac{16}{n(n+1)}}{\frac{5n-4}{n(n+1)}} = \frac{16}{5n-4}$

44. A — ser primo

$A = \{2, 3, 5, 7, 11\}$ e $\bar{A} = \{1, 4, 6, 8, 9, 10, 12\}$

$P(A) = \frac{5}{12}$ e $P(\bar{A}) = \frac{7}{12}$

44.1. $P(\text{"sair 4 primos seguidos"}) = \left(\frac{5}{12}\right)^4 = 0{,}030$

44.2. $\left(\frac{5}{12}\right)^4 + \left(\frac{7}{12}\right)^4 = 0{,}030 + 0{,}116 = 0{,}146$

44.3. Se existirem três movimentos no mesmo sentido, o quarto movimento finaliza o jogo ou regride para a segunda casa a contar da casa de partida. Assim, o quinto movimento não se faz ou avança para a terceira casa. Podemos, então, concluir que *P* = 0.

44.4. Seja *B*: “são necessários mais de seis movimentos para acabar o jogo”.

$P(B) = 1 - P(B) = 1 - P(\text{"serem necessários menos de 6 ou 6"})$

D D D D

$\frac{5}{12} \times \frac{5}{12} \times \frac{5}{12} \times \frac{5}{12}$

E E E E

$\frac{7}{12} \times \frac{7}{12} \times \frac{7}{12} \times \frac{7}{12}$

D D D E D D

$\frac{5}{12} \times \frac{5}{12} \times \frac{5}{12} \times \frac{7}{12} \times \frac{5}{12} \times \frac{5}{12} \times 4$

E E E D E E

$\frac{7}{12} \times \frac{7}{12} \times \frac{7}{12} \times \frac{5}{12} \times \frac{7}{12} \times \frac{7}{12} \times 4$

Assim, $P(B) = 1 - \left(\frac{5}{12}\right)^4 - \left(\frac{5}{12}\right)^5 \times \frac{7}{12} \times 4 - \left(\frac{7}{12}\right)^4 - \left(\frac{7}{12}\right)^5 \times \frac{5}{12} \times 4 = 0{,}712.$

45.

45.1. No contexto da situação descrita, $P(B|\bar{A})$ é a probabilidade de as bolas retiradas da caixa serem da mesma cor, sabendo que a carta retirada do baralho não é de copas. Dado que a carta retirada do baralho não é de copas, adiciona-se à caixa uma bola de cor verde, pelo que a caixa fica com cinco bolas brancas e quatro bolas verdes, num total de nove bolas. Retiramos, então, duas bolas dessas nove e queremos determinar a probabilidade de elas serem da mesma cor, ou seja, serem as duas bolas brancas ou serem as duas bolas verdes, casos que se excluem mutuamente.

Existem ${}^9C_2$ maneiras diferentes de tirar simultaneamente duas bolas de entre as nove. Por isso, o número de casos possíveis é ${}^9C_2$. Existem ${}^5C_2$ maneiras diferentes de tirar simultaneamente duas bolas brancas e ${}^4C_2$ maneiras diferentes de tirar simultaneamente duas bolas verdes. Por isso, o número de casos favoráveis é ${}^5C_2 + {}^4C_2$.

Assim, a probabilidade pedida é $\frac{{}^5C_2+{}^4C_2}{{}^9C_2} = \frac{4}{9}$.

45.2. $\frac{\frac{1}{4}\times\frac{6}{9}\times\frac{5}{8}}{\frac{1}{4}\times\frac{6}{9}\times\frac{5}{8}+\frac{3}{4}\times\frac{3}{9}\times\frac{3}{8}} = \frac{\frac{30}{288}}{\frac{90}{288}} =$

$= \frac{30}{90} =$

$= \frac{1}{3}$

46.

46.1.

a) $\frac{6}{{}^{12}C_2} = \frac{6}{66} = \frac{1}{11}$

b) $\frac{{}^6C_2+{}^6C_2}{{}^{12}C_2} = \frac{15+15}{66} = \frac{30}{66} = \frac{5}{11}$

c) $\frac{6\times2+9\times2\times 2}{{}^{12}C_2} =$ (há 6 faces retangulares e cada uma tem 2 diagonais e há 2 faces hexagonais e cada uma tem 9 diagonais)

$= \frac{30}{66} = \frac{5}{11}$

46.2. ${}^4A_2 \times {}^6A_6 = 12 \times 720 = 8640$

46.3. ${}^8C_2 \times {}^8C_1 \times {}^7A_6 = 28 \times 8 \times 5040 = 1\,128\,960$

47. De acordo com a regra de Laplace, a probabilidade de um acontecimento é igual ao quociente entre o número de casos favoráveis a esse acontecimento e o número de casos possíveis, quando estes são todos equiprováveis.

Vejamos o número de casos possíveis:

Pretendemos colocar as vinte e oito peças em quatro filas horizontais, cada uma com sete peças, e o número total de maneiras de o fazer é igual ao número de configurações visuais distintas que se podem obter com a colocação das peças.

${}^{28}C_8$ é o número de modos distintos de escolher quais as posições que vão tomar as oito peças azuis. Por cada um destes modos, existe apenas um modo de colocar as vinte peças vermelhas nas vinte posições restantes $\left({}^{20}C_{20}\right)$.

O número de casos possíveis é, então, ${}^{28}C_8 \times {}^{20}C_{20} = 3\,108\,105$.

Vejamos agora o número de casos favoráveis:

Pretende-se preencher uma fila horizontal toda com peças azuis, o que pode ser feito apenas de quatro modos. Depois de escolhida a fila horizontal e de preenchida com peças azuis (o que pode ser feito apenas de quatro modos distintos, já que o que interessa contabilizar são configurações visuais distintas), sobra-nos uma peça azul e vinte vermelhas para colocar nas vinte e uma posições restantes. Assim, a peça azul pode ser colocada de vinte e um modos distintos $\left({}^{21}C_1\right)$ e, por cada um destes modos, só existe um modo de colocar as vinte peças vermelhas nas vinte posições restantes $\left({}^{20}C_{20}\right)$. Assim, o número de casos favoráveis é $4 \times {}^{21}C_1 \times {}^{20}C_{20} = 84$.

Daqui se conclui que a probabilidade pedida é $\frac{84}{3\,108\,105} = \frac{4}{148\,005}$.