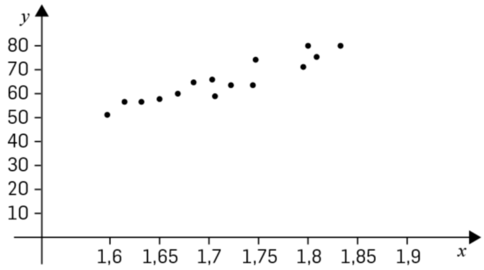
Exercícios de aplicação **(págs. 377 a 382)**

1.

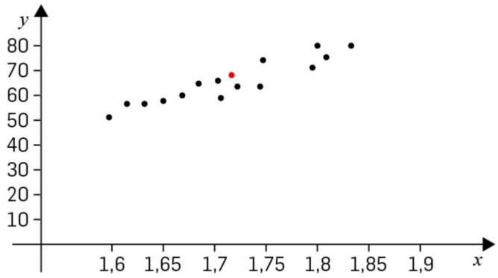
1.1.



1.2. Esta representação sugere a existência de correlação linear positiva.

1.3. $\bar{x} \approx 1{,}729$ e $\bar{y} \approx 67{,}533$

1.4.



1.5. $y = 101{,}524x - 108{,}035$

2. $y = 1{,}2x + 4$

$r \approx 0{,}77$

3.

3.1. $r \approx 0{,}95$

Como o valor de *r* é positivo e muito próximo de 1, estamos perante uma associação linear positiva forte.

3.2. $y = 0{,}71x + 147{,}07$

Exercícios propostos **(págs. 384 a 388)**

Itens de seleção **(págs. 384 e 385)**

1. $\{1, 1, 1, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 3, 4, 4, 5\}$

A moda é 3.

A mediana é 3.

LeYa EDUCAÇÃO Daniela Raposo e Luzia Gomes

$\bar{x} = \frac{3+6+12+8+5}{13} = \frac{34}{13}$

Opção (C)

2. $d_1 = x_1 - \bar{x}$

$d_1 = 12 - 13{,}5 = -1{,}5$

$d_2 = 1{,}1$

$d_3 = x_3 - \bar{x}$

Como $\sum d_i = 0$, temos:

$d_1 + d_2 + d_3 = 0 \Leftrightarrow -1{,}5 + 1{,}1 + d_3 = 0 \Leftrightarrow d_3 = 0{,}4$

Opção (A)

3. Por observação das nuvens de pontos, podemos referir que no gráfico (I) há fracos indícios de associação linear positiva. No gráfico (II) há associação linear negativa forte e no gráfico (III) existe associação linear negativa. Assim, ao gráfico (I) corresponde *r* = 0,25, ao gráfico (II) corresponde *r* = –0,9 e ao gráfico (III) corresponde *r* = –1.

Opção (B)

4. Se todos os valores da distribuição forem multiplicados por 2, a média e o desvio-padrão duplicam. Assim, temos $\bar{x} = 3$ e $s = 0{,}4$.

Opção (B)

5. A opção (A) não é a correta, uma vez que $s_A < s_B$.

A opção (B) não é a correta, uma vez que $s_B = s_C$.

A opção (C) é a correta, uma vez que $s_C > s_A$.

A opção (D) não é a correta, uma vez que aumentar um valor a todos os alunos não altera o desvio-padrão.

Opção (C)

6. $0{,}25 \times 1500 = 375$

Opção (A)

7. $\bar{y} = 5 \times \bar{x} - 2 = 5 \times 3 - 2 = 13$

$s_y = 5 \times s_x = 5 \times 1{,}5 = 7{,}5$

Opção (B)

8. A afirmação (I) é falsa, uma vez que o diagrama (I) apresenta indícios de associação linear positiva e o diagrama (II) apresenta indícios de associação linear negativa.

As afirmações (II) e (III) são verdadeiras.

Opção (D)

9.

$$a = \frac{\sum_{i=1}^{10} x_i y_i - 10\bar{x}\bar{y}}{SS_x}$$

$$SS_x = \sum_{i=1}^{10}(x_i - \bar{x})^2 \Leftrightarrow 75 = \sum_{i=1}^{10}(x_i - \bar{x})^2$$

$$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{10}(x_i - \bar{x})^2 = \sqrt{75}$$

$$r = \frac{\sum_{i=1}^{10}(x_i - \bar{x})^2 - 10\bar{x}\bar{y}}{\sqrt{SS_x \cdot SS_y}} \Leftrightarrow -0{,}78 = \frac{\sqrt{75} - 10\bar{x}\bar{y}}{\sqrt{75 \times 144}}$$

Cálculo auxiliar

$$s_y = \sqrt{\frac{SS_y}{n-1}} \Leftrightarrow 4 = \sqrt{\frac{SS_y}{9}}$$

$$\Leftrightarrow 16 = \frac{SS_y}{9}$$

$$\Leftrightarrow SS_y = 144$$

$$\Leftrightarrow -9{,}36\sqrt{75} = \sqrt{75} - 10\bar{x}\bar{y}$$

$$\Leftrightarrow 10\bar{x}\bar{y} = 10{,}36\sqrt{75}$$

$$a = \frac{\sum_{i=1}^{10} x_i y_i - 10\bar{x}\bar{y}}{SS_x} = \frac{\sqrt{75} - 10{,}36\sqrt{75}}{75} = -\frac{9{,}36\sqrt{75}}{75} \approx -1{,}1$$

Opção (A)

10.

$$\sum_{i=1}^{4} x_i = 4 \times 15{,}25 = 61$$

$$\frac{61+2x}{6} = 15{,}5 \Leftrightarrow 61 + 2x = 93$$

$$\Leftrightarrow 2x = 93 - 61$$

$$\Leftrightarrow 2x = 32$$

$$\Leftrightarrow x = 16$$

Opção (C)

LeYa EDUCAÇÃO Daniela Raposo e Luzia Gomes

11. Como $4 = \bar{x} - 3s_x$, a proporção de elementos da amostra inferiores a 4 ou superiores a 16 é inferior a $\frac{1}{3^2} \approx 11{,}11\%$.

Assim, existem no máximo aproximadamente $11{,}11\%$ dos dados inferiores a 4.

Opção (C)

12. Sendo $r\colon y = ax + b$ a reta dos mínimos quadrados, o ponto de coordenadas $(\bar{x}, \bar{y})$ pertence à reta. Assim, $4 = 6a + b$.

Por outro lado, como o desvio vertical do ponto $P(3; 6{,}5)$ é $0{,}5$, temos:

$e_i = y_i - ax_i - b \Leftrightarrow 0{,}5 = 6{,}5 - 3a - b \Leftrightarrow 3a + b = 6$

Então:

$$\begin{cases} 6a + b = 4 \\ 3a + b = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 4 - 6a \\ 3a + 4 - 6a = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \\ -3a = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \\ a = -\frac{2}{3} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b = 4 - 6 \times \left(-\frac{2}{3}\right) \\ a = -\frac{2}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 8 \\ a = -\frac{2}{3} \end{cases}$$

Logo, $y = -\frac{2}{3}x + 8$.

Opção (A)

13. Como o desvio vertical do ponto $P_1(2, 7)$ é $0{,}2$ e o desvio vertical do ponto $P_2(5, 9)$ é 0, temos:

$$\begin{cases} 0{,}2 = 7 - 2a - b \\ 0 = 9 - 5a - b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -2a + 6{,}8 \\ b = 9 - 5a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 9 - 5a = -2a + 6{,}8 \\ \underline{\qquad} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3a = 2{,}2 \\ \underline{\qquad} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{2{,}2}{3} \\ \underline{\qquad} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{11}{15} \\ \underline{\qquad} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \underline{\qquad} \\ b = 9 - 5 \times \frac{11}{15} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \underline{\qquad} \\ b = 9 - \frac{55}{15} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \underline{\qquad} \\ b = 9 - \frac{11}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \underline{\qquad} \\ b = \frac{16}{3} \end{cases}$$

Assim, a equação reduzida da reta dos mínimos quadrados é $y = \frac{11}{15}x + \frac{16}{3}$.

Logo, o desvio vertical do ponto $P_{11}(8; 10{,}5)$ é:

$$e_{11} = 10{,}5 - 8 \times \frac{11}{15} - \frac{16}{3} \Leftrightarrow e_{11} = 10{,}5 - \frac{88}{15} - \frac{80}{15} \Leftrightarrow e_{11} = 10{,}5 - \frac{168}{15}$$

$$\Leftrightarrow e_{11} = \frac{105}{10} - \frac{56}{5}$$

$$\Leftrightarrow e_{11} = \frac{105 - 112}{10}$$

$$\Leftrightarrow e_{11} = \frac{-7}{10}$$

$$\Leftrightarrow e_{11} = -0{,}7$$

Opção (C)

Itens de construção (págs. 386 a 388)

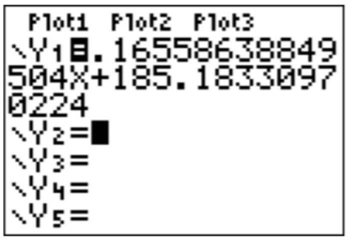
1.

1.1. Introduzindo os valores nas listas da calculadora, obtém-se $r \approx 0{,}9$. Como o valor de r é positivo e muito próximo de 1, estamos perante uma associação linear positiva forte.

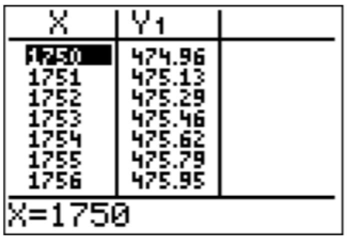
1.2.

a) A partir dos dados inseridos nas listas da calculadora, obtém-se $a \approx 0{,}1656$ e $b \approx 185{,}1833$.

b) Utilizando a reta de regressão obtida com os valores da alínea anterior, temos:



Consultando a tabela correspondente, verificamos que, para $x = 1750$, temos $y = 474{,}96$.



Assim, podemos estimar que o valor das despesas mensais com a alimentação de um agregado familiar cujo rendimento mensal é 1750 €, é 475 €.

2.

2.1. $\bar{x} = \frac{40 \times 12 + 42 \times 13 + 46 \times 14 + 22 \times 15 + 20 \times 16 + 23 \times 17 + 15 \times 18}{208} = \frac{2981}{208} \approx 14{,}33$

$SS_x = (12 - 14{,}33)^2 \times 40 + (13 - 14{,}33)^2 \times 42 + (14 - 14{,}33)^2 \times 46 + (15 - 14{,}33)^2 \times 22 + (16 - 14{,}33)^2 \times 20 + (17 - 14{,}33)^2 \times 23 + (18 - 14{,}33)^2 \times 15 =$

$= 728{,}1112$

$s_x^2 = \frac{SS_x}{207} = \frac{728{,}1112}{207}$

$s_x = \sqrt{\frac{728{,}1112}{207}} \approx 1{,}88$

2.2. $]\bar{x} - s, \bar{x} + s[\; = \;]14{,}33 - 1{,}88; 14{,}33 + 1{,}88[\; = \;]12{,}45; 16{,}21[$

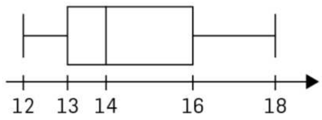
Assim:

$\frac{42+46+22+20}{208} = \frac{130}{208} = 62{,}5\%$

2.3. $P_{25} = \frac{x_{(52)} + x_{(53)}}{2} = 13$

$P_{50} = \frac{x_{(104)} + x_{(105)}}{2} = 14$

$P_{75} = \frac{x_{(156)}+x_{(157)}}{2} = 16$



3.

3.1.

Peso (em kg)	Número de crianças	Frequência relativa	Frequência relativa acumulada (%)
$[5, 10[$	40	$\frac{40}{140}$	$\frac{40}{140} \approx 29\%$
$[10, 15[$	22	$\frac{22}{140}$	$\frac{62}{140} \approx 44\%$
$[15, 20[$	36	$\frac{36}{140}$	$\frac{98}{140} = 70\%$
$[20, 25[$	30	$\frac{30}{140}$	$\frac{128}{140} \approx 91\%$
$[25, 30[$	12	$\frac{12}{140}$	$\frac{140}{140} = 100\%$

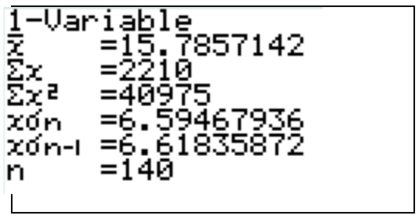
3.2. Classe modal: $[5, 10[$

Classe mediana (classe a que pertence o Q_2): $[15, 20[$

Classe a que pertence o Q_1: $[5, 10[$

Classe a que pertence o Q_3: $[20, 25[$

3.3. Introduzindo os valores nas listas da calculadora, obtém-se:



Assim, $\bar{x} = 15{,}8$ e $s = 6{,}6$.

4.

4.1.

5	6	7	7	8	9	11	12
12	13	15	16	17	18	18	19
20	21	22	23	29	32	35	36
37	41	44	44	45	49	62	65

Daniela Raposo e Luzia Gomes

$P_{25} = \frac{12 + 12}{2} = 12$

$P_{50} = \frac{19 + 20}{2} = 19{,}5$

$P_{75} = \frac{36 + 37}{2} = 36{,}5$

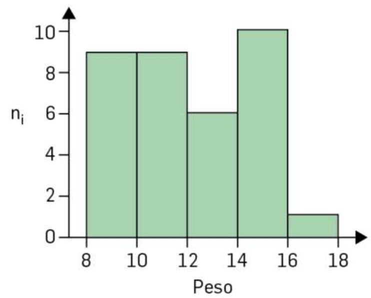
4.2. Como 30% dos percursos corresponde a P_{70} e $\frac{70 \times 32}{100} = 22{,}4$, temos $P_{70} = x_{23}$.

Logo, o percurso com menor duração dos 30% de maior duração é $x_{24} = 36$.

5.

5.1. Agrupando os dados em classes de amplitude 2, obtemos:

Classes	n_i
$[8, 10[$	9
$[10, 12[$	9
$[12, 14[$	6
$[14, 16[$	10
$[16, 18[$	1
	35



5.2. Tem-se $n = 35, h = 2$.

- $P_{10} = 8{,}8$

  $\frac{10 \times 35}{100} = 3{,}5$ e $9 > 3{,}5$

  $9(y - 8) = \frac{10 \times 2 \times 35}{100} \Leftrightarrow y = \frac{79}{9}$

  $y \approx 8{,}8$

- $P_{15} = 9{,}2$

  $\frac{15 \times 35}{100} = 5{,}25$ e $9 > 5{,}25$

  $9(y - 8) = \frac{15 \times 2 \times 35}{100} \Leftrightarrow y = \frac{55}{6}$

  $y \approx 9{,}2$

- $P_{50} = 11{,}9$

  $\frac{50 \times 35}{100} = 17{,}5$ e $9 < 17{,}5$ e $18 > 17{,}5$

  $9 \times 2 + 9(y - 10) = \frac{50 \times 2 \times 35}{100} \Leftrightarrow y = \frac{107}{9}$

  $y \approx 11{,}9$

- $P_{75} = 14{,}5$

  $\frac{75 \times 35}{100} = 26{,}25$ e $9 + 9 + 6 < 26{,}25$ e $9 + 9 + 6 + 6 > 26{,}25$

$$9 \times 2 + 9 \times 2 + 6 \times 2 + 10(y - 14) = \frac{75 \times 2 \times 35}{100} \Leftrightarrow y = \frac{289}{20}$$

$y \approx 14{,}5$

- $P_{85} = 15{,}2$

$\frac{85 \times 35}{100} = 29{,}75$ e $9 + 9 + 6 < 29{,}75$ e $9 + 9 + 6 + 10 > 29{,}75$

$$9 \times 2 + 9 \times 2 + 6 \times 2 + 10(y - 14) = \frac{85 \times 2 \times 35}{100} \Leftrightarrow y = \frac{303}{20}$$

$y \approx 15{,}2$

5.3. Sabemos que $P_k = 11{,}4 = x_{15}$. Assim, temos:

$\frac{k \times 35}{100} = 15 \Leftrightarrow 35k = 1500 \Leftrightarrow k = \frac{1500}{35}$

$\Leftrightarrow k \approx 43$

5.4. Como $P_{75} = x_{27}$, concluímos que há 26 crianças com peso inferior ao percentil 75.

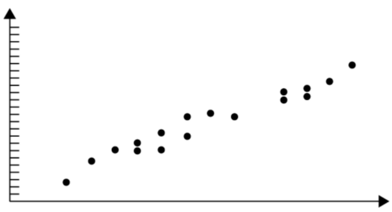
5.5. Como 20% dos pesos mais baixos corresponde a P_{20}, temos $\frac{20 \times 35}{100} = 7$ e $P_{20} = \frac{x_7 + x_8}{2}$.

Logo, o peso mais elevado dos 20% mais baixos é $x_7 = 9{,}6$.

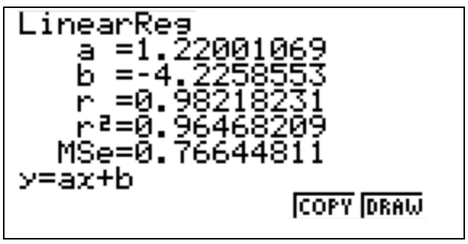
5.6. Se compararmos os percentis obtidos na alínea 5.2. com os estabelecidos pela OMS, podemos verificar que P_{10} e P_{15} estão abaixo dos valores estabelecidos, enquanto que P_{50} e P_{85} estão acima. Podemos, então, dizer que nesta amostra existem mais valores nos extremos do que o estabelecido pela OMS.

6.

6.1.



Utilizando a calculadora, obtemos:



Logo, $y = 1{,}22x - 4{,}23$ e $r = 0{,}98$.

6.2. Se $x = 15$, temos:

$y = 1{,}22 \times 15 - 4{,}23 \Leftrightarrow y = 18{,}3 - 4{,}23 \Leftrightarrow y \approx 14{,}1$

R.: 14,1 valores

Daniela Raposo e Luzia Gomes

7. $s_y^2 = \frac{SS_y}{n-1} =$

$$= \frac{\sum_{i=1}^{10}(y_i - \bar{y})^2}{n-1} =$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^{10}(kx_i - k\bar{x})^2}{n-1} =$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^{10}k^2(x_i - \bar{x})^2}{n-1} =$$

$$= \frac{k^2\sum_{i=1}^{10}(x_i - \bar{x})^2}{n-1} =$$

$= k^2\,\frac{SS_x}{n-1} =$

$= k^2 s_x^2$

8. Sabemos que $\bar{y} = 2{,}625$. Assim:

$$\frac{2+3+y_3+3}{4} = 2{,}625 \Leftrightarrow \frac{8+y_3}{4} = 2{,}625 \Leftrightarrow 8 + y_3 = 10{,}5$$

$$\Leftrightarrow y_3 = 10{,}5 - 8$$

$$\Leftrightarrow y_3 = 2{,}5$$

Sabemos que $-0{,}25 = 2{,}625 - 0{,}25\bar{x}$.

Assim:

$$-0{,}25 = 2{,}625 - 0{,}25\bar{x} \Leftrightarrow 0{,}25\bar{x} = 2{,}625 + 0{,}25 \Leftrightarrow \bar{x} = \frac{2{,}875}{0{,}25}$$

$$\Leftrightarrow \bar{x} = 11{,}5$$

$\bar{x} = 11{,}5 \Leftrightarrow \frac{10+11+x_3+13}{4} = 11{,}5 \Leftrightarrow x_3 = 12$

Logo, $(x_3, y_3) = (12; 2{,}5)$.

9.

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) = \sum_{i=1}^{n}(x_i y_i - x_i\bar{y} - \bar{x}y_i + \bar{x}\,\bar{y}) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} x_i y_i - n\bar{x}\,\bar{y} - n\bar{x}\,\bar{y} + n\bar{x}\,\bar{y} =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} x_i y_i - n\bar{x}\,\bar{y}$$

LeYa EDUCAÇÃO Daniela Raposo e Luzia Gomes