Ficha de Trabalho n.º 7 – Matemática A – 10.º Ano

Cálculo Vectorial no Espaço

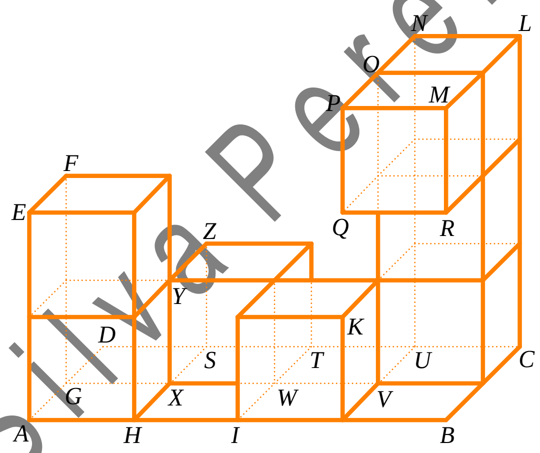
"Conhece a Matemática e dominarás o Mundo."
Galileu Galilei

Grupo I – Itens de Escolha Múltipla

1. Na figura estão representados oito cubos.

Sabe-se que:

- $[ABCD]$ é um rectângulo dividido em oito quadrados
- as faces de quatro dos cubos coincidem exactamente um desses quadrados.
- os restantes quatro cubos têm pelo menos uma face em comum com outro cubo.
- $\vec{u} = \overrightarrow{AH}$, $\vec{v} = \overrightarrow{AG}$ e $\vec{w} = \overrightarrow{AE}$



1.1. O vector $\overrightarrow{GW} - \overrightarrow{LI} + \overrightarrow{ND}$ pode ser representado por:

A $\vec{u} + \vec{w}$ **B** $\vec{u} + \vec{v}$ **C** $\vec{u} + 2\vec{v}$ **D** $\vec{v} + \vec{w}$

1.2. Quais são os valores de α, β, λ de modo que $\alpha\vec{u} + \beta\vec{v} + \lambda\vec{w} = \overrightarrow{XP}$?

A $\alpha = 2$, $\beta = -1$ e $\lambda = \frac{3}{2}$ **B** $\alpha = 1$, $\beta = 0$ e $\lambda = \frac{3}{2}$

C $\alpha = 2$, $\beta = 1$ e $\lambda = 2$ **D** $\alpha = 2$, $\beta = -1$ e $\lambda = 3$

1.3. Suponha agora que a figura está representada num referencial o.n. $\left(Y, \overrightarrow{DA}, \overrightarrow{AI}, \overrightarrow{AE}\right)$.

Quais são as coordenadas do ponto B ?

A $(1,3,-1)$ **B** $\left(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ **C** $(-1,3,-1)$ **D** $\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right)$

2. Num referencial o.n. $(O,\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3)$, considere os vectores não nulos $\vec{u}\left(3k,k^2-4,k+4\right)$ e $\vec{v}=2\vec{e}_1+k\,\vec{e}_3$, com $k\in\mathbb{R}$.

Os vectores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são colineares se:

A $k=-2$ **B** $k=-\dfrac{4}{3}$ **C** $k=\dfrac{4}{3}$ **D** $k=2$

3. Num referencial o.n. $(O,\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3)$, considere os vectores não nulos $\vec{u}\left(k^2-1,k,k\right)$ e $\vec{v}=2\vec{e}_1+k\vec{e}_2+\vec{e}_3$, com $k\in\mathbb{R}$.

3.1. Sabe-se que se $k=-2$, então $\|\vec{u}-\vec{v}\|^2=10$.

Quais são os restantes valores não nulos de k de modo que $\|\vec{u}-\vec{v}\|^2=10$?

A $-1-\sqrt{2}$ e $-1+\sqrt{2}$ **B** $1-\sqrt{2}$ e $1+\sqrt{2}$

C $-1-\sqrt{3}$ e $-1+\sqrt{3}$ **D** $1-\sqrt{3}$ e $1+\sqrt{3}$

3.2. A recta AB, com $A(1,0,-2)$ e $B(7,4,2)$ tem a mesma direcção que o vector $\vec{u}$.

Quais são os valores de k?

A $k=\dfrac{1}{2}\ \vee\ k=2$ **B** $k=-2\ \vee\ k=\dfrac{1}{2}$

C $k=-\dfrac{1}{2}\ \vee\ k=2$ **D** $k=-2\ \vee\ k=-\dfrac{1}{2}$

4. Num referencial o.n. $Oxyz$ a superfície esférica definida por $x^2+(y+2)^2+(z-1)^2=6$ e o ponto $A(a,a,a)$, com $a\in\mathbb{R}^+$, pertencente à superfície esférica.

4.1. Qual das seguintes pode ser uma equação vectorial da recta que contêm um diâmetro da superfície esférica e o ponto A?

A $(x,y,z)=(0,-2,1)+k(-1,-7,2)$, $k\in\mathbb{R}$ **B** $(x,y,z)=(-1,-7,2)+k(0,-2,1)$, $k\in\mathbb{R}$

C $(x,y,z)=(-1,-1,-1)+k(1,-1,2)$, $k\in\mathbb{R}$ **D** $(x,y,z)=(1,-1,2)+k(-1,-1,-1)$, $k\in\mathbb{R}$

4.2. Seja B o ponto da superfície esféria diametralmente oposto ao ponto A.

Quais são as coordenadas do ponto B ?

A $(-3,1,-5)$ **B** $\left(-\frac{1}{3},-\frac{13}{3},\frac{5}{3}\right)$ **C** $\left(-\frac{2}{3},-\frac{20}{3},\frac{7}{3}\right)$ **D** $(1,-3,3)$

4.3. Considere a recta s definida pelo seguinte sistema de equação paramétricas:

$$x=-2+k \ \wedge \ y=-4+k \ \wedge \ z=3 \, , \ k\in\mathbb{R}$$

A recta s intersecta a superfície esférica nos pontos P e Q. Qual é o valor de $d(P,Q)$?

A 1 **B** $\sqrt{2}$ **C** $2\sqrt{2}$ **D** 4

5. Sejam a e b dois números reais não nulos e as rectas r e s, paralelas, definidas por:

$r:(x,y,z)=(2+ka^2,1+ak,4k)\, , \ k\in\mathbb{R}$ e $s: x=1+ak \ \wedge \ y=-2+kb^3 \ \wedge \ z=ak \, , \ k\in\mathbb{R}$

Quais podem ser os valores de a e de b?

A $a=2$ e $b=2$ **B** $a=2$ e $b=1$ **C** $a=-2$ e $b=-1$ **D** $a=1$ e $b=1$

6. Considere num referencial o.n. $Oxyz$, a recta r definida por $(x,y,z)=(1,2,-2)+k(0,3,0)\, , \ k\in\mathbb{R}$.

6.1. Qual das seguintes afirmações é falsa?

A A recta r é paralela ao eixo Oy.

B A recta r intersecta o plano xOz no ponto de coordenadas $(1,0,-2)$.

C A recta r é perpendicular ao eixo Oz.

D A recta r é perpendicular ao plano xOy.

6.2. Qual das seguintes condições também define uma recta paralela a r que contém o ponto $C(-3,1,5)$?

A $x=-3 \ \wedge \ y=1$ **B** $x=-3 \ \wedge \ z=5$ **C** $y=1 \ \wedge \ z=5$ **D** $x=5 \ \wedge \ z=-3$

7. Considere a recta t definida por $(x,y,z)=(-1,3,0)+k(2,5,-3),\ k\in\mathbb{R}$ e o plano α, paralelo a yOz, que contém o ponto de coordenadas $(-2,0,3)$.

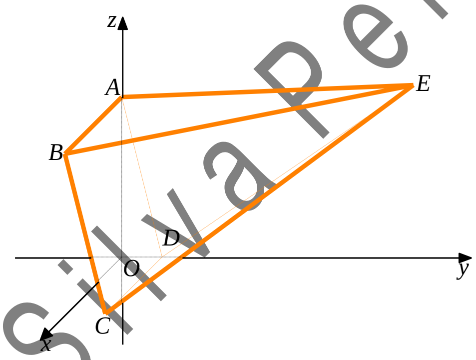
Quais são as coordenadas do ponto de intersecção da recta t com o plano α?

A $\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right)$ **B** $\left(0,\frac{11}{2},-\frac{3}{2}\right)$ **C** $\left(-2,-\frac{9}{2},-\frac{9}{2}\right)$ **D** $\left(-2,\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right)$

8. Na figura está representada em referencial o.n. $Oxyz$ a pirâmide $[ABCDE]$.

Sabe-se que:

- o ponto B pertence ao plano xOz
- o pontos D pertence ao eixo Oy
- $\overrightarrow{BE}(-3,8,1)$ e $\overrightarrow{DE}(1,7,5)$



Quais são as coordenadas do ponto B?

A $(3,0,4)$ **B** $(2,0,2)$ **C** $(3,0,3)$ **D** $(4,0,4)$

Grupo II – Itens de Resposta Aberta

9. Num referencial o.n. $(O,\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3)$, considere os vectores $\vec{u}(1,-3,2)$ e $\vec{v}=2k\vec{e}_1-k\vec{e}_2-\vec{e}_3$, e os pontos $P(1,-2,0)$ e $Q(k,k,k-1)$, com $k\in\mathbb{R}$.

9.1. Determine k de modo que:

a) $\left\|\overrightarrow{PQ}+\vec{v}\right\|=3$.

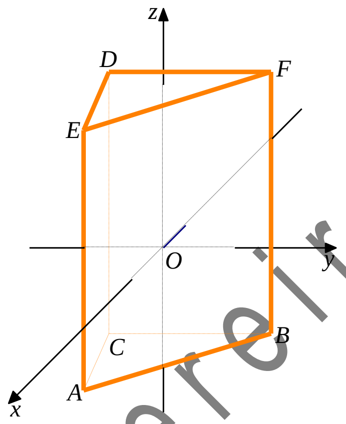
b) $\vec{v}-\vec{u}+3\overrightarrow{QP}=\left(k^2,k^2+1,-3k\right)$

c) o vector $\overrightarrow{PQ}+\vec{u}$ seja colinear com o vector $\vec{w}(1,-3,5)$.

9.2. Considere $k=-1$. Determine o valor lógico da seguinte proposição:

$$\exists\alpha,\beta\in\mathbb{R}:\ \alpha\vec{u}+\beta\vec{v}=\overrightarrow{PQ}$$

10. Na figura está representado num referencial o.n. $Oxyz$ uma prisma triangular $[ABCDEF]$.



Sabe-se que:

- a base $[ABC]$ está contida no plano de equação $z=-3$ e a base $[DEF]$ está contida no plano de equação $z=5$
- a face $[BFDC]$ é paralela ao plano yOz
- $\left\|\overrightarrow{BD}\right\|=\sqrt{89}$
- uma equação vectorial da recta AF é $(x,y,z)=(-6,7,13)+k(-5,4,8),\ k\in\mathbb{R}$

10.1. Mostre que as coordenadas do ponto A são $(4,-1,-3)$, que as do ponto F são $(-1,3,5)$ e determine as coordenadas dos restantes vértices do prisma.

10.2. Escreva uma equação vectorial da recta EB e determine sua a intersecção com o plano xOz.

10.3. Determine:

a) um sistema de equações paramétricas que defina a recta AB.

b) uma equação vectorial da aresta $[DF]$.

c) o plano mediador do segmento de recta $[AF]$. Apresente-a na forma $ax+by+cz=d$, com $a,b,c,d\in\mathbb{R}$.

10.4. Determine as coordenadas de um vector $\vec{v}$ colinear com $\overrightarrow{AD}$ e de norma 30.

10.5. Considere os pontos $P(-5,-2,1)$ e $T(-1,3,1)$. Sabe-se que o ponto T pertence ao plano AEF e que o vector $\overrightarrow{PT}$ é perpendicular ao plano AEF.

a) Mostre que uma equação do plano AEF é $4x+5y=11$.

b) Seja r a recta que contém o ponto de coordenadas $(1,1,3)$ e é paralela ao eixo Ox.

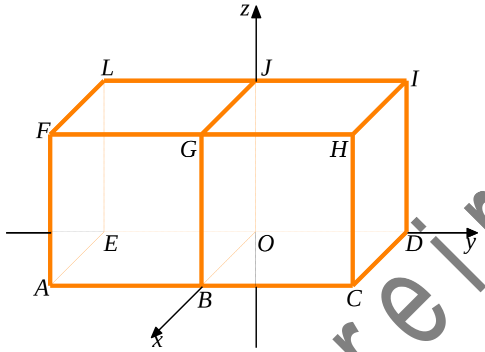
Determine as coordenadas do ponto de intersecção do plano AEF com a recta r.

10.6. Considere um novo prisma semelhante ao prisma $[ABCDEF]$. Sabe-se que a área da base do novo prisma é igual a 50. Qual é o volume do novo prisma?

11. Na figura estão representados em referencial o.n. $Oxyz$ dois cubos $[ABOEFGJL]$ e $[BCDOGHIJ]$ de aresta 4.

Sabe-se que:

- o ponto B pertence ao eixo Ox;
- os pontos D e E pertencem ao eixo Oy;
- o ponto J pertence ao eixo Oz.



11.1. Determine uma equação do plano BEG.

Sugestão: Tenha em conta que BEG é o plano mediador de um segmento de recta cujos extremos são vértices de um dos cubos da figura.

11.2. Escreva uma equação vectorial da recta paralela a AH que contém o ponto $A-2\overrightarrow{BC}+\frac{1}{4}\overrightarrow{AI}$.

11.3. Considere os pontos X, Y e Z definidos por:

- $X=L+\overrightarrow{JC}-\frac{1}{2}\overrightarrow{CA}$
- $Y=O+\overrightarrow{DG}+\overrightarrow{FD}$
- $Z=D-\overrightarrow{FC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{EA}$

Usando cálculo vectorial represente os pontos X, Y e Z e determine a área do triângulo $[XYZ]$.

11.4. Determine uma condição que defina uma esfera tangente aos planos xOy, yOz, CDI e AEL.

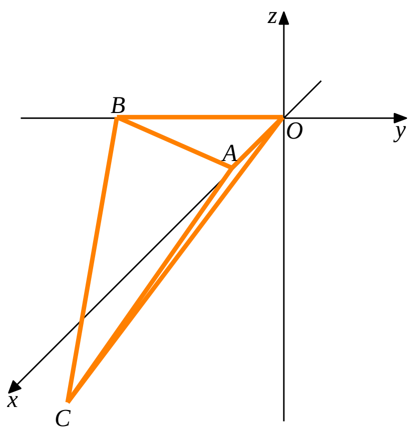
12. Na figura está representada a pirâmide $[OABC]$

Sabe-se que:

- o ponto A pertence ao eixo Ox e $B(0,-3,0)$
- uma equação vectorial da recta AC é:

$$(x,y,z)=(3,14,20)+k(-1,7,10),\ k\in\mathbb{R}$$

- $\overrightarrow{BC}(6,-4,-10)$



12.1. Escreva um sistema de equações paramétricas da recta BC.

12.2. Determine o ponto de intersecção da recta BC com o plano xOz.

12.3. Mostre que $A(5,0,0)$ e $C(6,-7,-10)$.

12.4. Considere a esfera $\mathcal{E}$ centrada em C cujo ponto A pertence à superfície esférica que a limita.

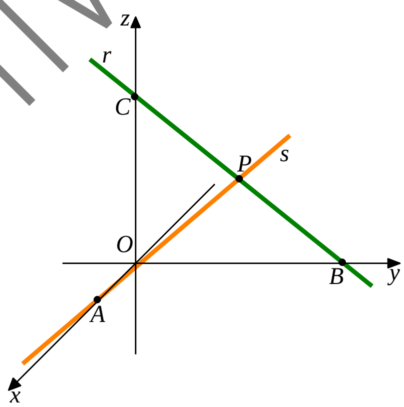
a) Mostre que uma condição de define e esfera $\mathcal{E}$ é $x^2+y^2+z^2-12x+14y+20z+35\leq 0$.

b) Determine o perímetro e a área da secção definida na esfera pela intersecção segundo o plano AOB.

12.5. Determine o volume da pirâmide $[OABC]$.

13. Na figura estão representadas em referencial o.n. $Oxyz$ as rectas r e s.

Sabe-se que:



- a recta r é definida pelo sistema de equações paramétricas:

$$x=0 \ \wedge\ y=-10+5k \ \wedge\ z=16-4k\ ,\ k\in\mathbb{R}$$

- uma equação vectorial da recta s é:

$$(x,y,z)=(5,0,0)+k(-5,5,4),\ k\in\mathbb{R}$$

- a recta s intersecta o eixo Ox no ponto A
- a recta r intersecta o eixo Oy no ponto B e o eixo Oz no ponto C
- as rectas r e s intersectam-se no ponto P de ordenada 5.

13.1. Seja α o plano mediador do segmento de recta $[AC]$. Mostre que o plano α não intersecta o eixo Oy.

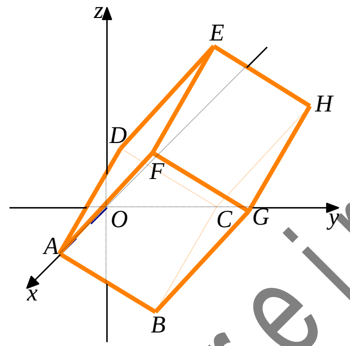
13.2. Determine as coordenadas um vector colinear com o vector $\overrightarrow{AP}$ de norma $\sqrt{11}$.

13.3. Escreva um sistema de equações paramétricas que defina a recta OP e determine as coordenadas do ponto de intersecção da recta OP com o plano mediador do segmento de recta $[AB]$.

13.4. Determine o volume da pirâmide $[ABPO]$.

14. Considera, num referencial o.n. $Oxyz$, o prisma recto $[ABCDEFGH]$.

Sabe-se que:



- o ponto A pertence ao eixo Ox, o ponto C ao eixo Oy e $D(1,1,3)$
- $\overrightarrow{AC}(-6,5,0)$
- $\overrightarrow{BH}\left(0,7,\frac{28}{3}\right)$

14.1. Utilizando as letras da figura, determina:

a) $A-\overrightarrow{CH}+\overrightarrow{AE}$

b) $\overrightarrow{AB}+2\times\left(\overrightarrow{AF}-\frac{1}{2}\overrightarrow{DE}\right)+\overrightarrow{GD}$

14.2. Escreva uma equação vectorial da recta paralela a AE que contém o ponto D e determine as coordenadas do ponto de intersecção dessa recta com o plano xOy.

14.3. Mostre que $A(6,0,0)$, $C(0,5,0)$ e que $G\left(10,10,\frac{10}{3}\right)$.

14.4. Escreva uma condição que defina:

a) a recta paralela ao eixo Oy que contém o ponto F.

b) o plano perpendicular à recta definida por $(x,y,z)=(0,-1,3k)$, $k\in\mathbb{R}$ que contém o ponto G.

c) o plano paralelo ao plano yOz que contém o ponto H.

14.5. Considere o vector $\vec{u}\left(\lambda-7,\lambda^2-3,3\lambda^2-9\right)$, $\lambda\in\mathbb{R}$

Determine λ de modo que $\vec{u}$ seja colinear com $\overrightarrow{DG}-\overrightarrow{AH}$ e que $\|\vec{u}\|=\sqrt{35}$.

14.6. Escreva uma condição de defina a superfície esférica que contém todos os vértices do prisma.

Exercício adaptado de um exercício do meu livro "Preparar o Exame 2016 – Matemática A" da Raiz Editora

F I M

Solucionário

Grupo I – Itens de Escolha Múltipla

1.1. C	**1.2.** A	**1.3.** D	**2.** D	**3.1.** B	**3.2.** C	**4.1.** A
4.2. B	**4.3.** C	**5.** B	**6.1.** D	**6.2.** B	**7.** D	**8.** D

Grupo II – Itens de Resposta Aberta

9.1. a) $k=0 \vee k=1$ **9.1.** b) $k=-2$ **9.1.** c) $k=\frac{1}{4}$ **9.2.** Proposição Falsa

10.1. $B(-1,3,-3)$; $C(-1,-2,-3)$; $D(-1,-2,5)$; $E(4,-1,5)$ **10.2.** $(x,y,z)=(-1,3,-3)+k(-5,4,-8)$, $k\in\mathbb{R}$; $\left(\frac{11}{4},0,3\right)$

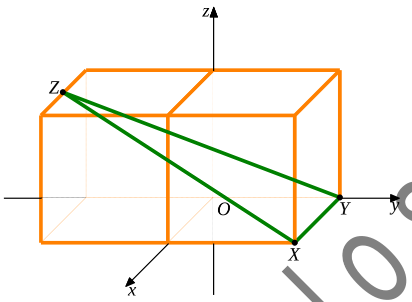
10.3. a) $x=4-5k \wedge y=-1+4k \wedge z=-3$, $k\in\mathbb{R}$ **10.3.** b) $(x,y,z)=(-1,-2,5)+k(0,5,0)$, $k\in[0,1]$

10.3. c) $-10x+8y+16z=9$ **10.4.** $\vec{v}=\left(-5\sqrt{10},-\sqrt{10},8\sqrt{10}\right)$ ou $\vec{v}=\left(5\sqrt{10},\sqrt{10},-8\sqrt{10}\right)$ **10.5.** b) $\left(\frac{3}{2},1,3\right)$

10.6. $V_{novo\ prisma}=800$

11.1. $x-y=4$ **11.2.** $(x,y,z)=(3,-10,1)+k(0,8,4)$, $k\in\mathbb{R}$

11.3.



$A_{[XYZ]}=8\sqrt{5}$

11.4. Por exemplo: $(x-4)^2+y^2+(z-4)^2\le 16$

12.1. $x=6k \wedge y=-3-4k \wedge z=-10k$, $k\in\mathbb{R}$ **12.2.** $\left(-\frac{9}{2},0,\frac{15}{2}\right)$

12.4. b) $A_{\text{Secção}}=50\pi$; $P_{\text{Secção}}=10\sqrt{2}\pi$ **12.5.** $V_{[OABC]}=25$

13.2. $\left(-\frac{5\sqrt{6}}{6},\frac{5\sqrt{6}}{6},\frac{2\sqrt{6}}{3}\right)$ ou $\left(\frac{5\sqrt{6}}{6},-\frac{5\sqrt{6}}{6},-\frac{2\sqrt{6}}{3}\right)$ **13.3.** $x=0 \wedge y=5k \wedge z=4k$, $k\in\mathbb{R}$; $\left(0,-\frac{8}{3},-\frac{32}{15}\right)$

14.1. a) D **14.1.** b) $\overrightarrow{AD}$

14.2. $(x,y,z)=(1,1,3)+k\left(0,7,\frac{28}{3}\right)$, $k\in\mathbb{R}$; $\left(1,-\frac{5}{4},0\right)$ **14.4.** a) $x=11 \wedge z=\frac{19}{3}$ **14.4.** b) $z=\frac{10}{3}$

14.4. c) $x=5$ **14.5.** $\lambda=2$ **14.6.** $\left(x-\frac{11}{2}\right)^2+\left(y-\frac{11}{2}\right)^2+\left(z-\frac{19}{6}\right)^2=\frac{1459}{36}$