Escola
Secundária de
Paredes

Proposta de Resolução da Ficha Formativa

Matemática A

12.º Ano de Escolaridade | novembro de 2020

Turma: 12ºJ

1. .

1.1. Ora,

Sabemos que as retas de equações $x = -1$ e $y = 1$, são assíntotas ao gráfico da função f

Então,

$f(x) = 1 + \frac{b}{x+1}$, com $b \in \mathbb{R}$

Como o gráfico da função passa na origem, tem-se,

$f(0) = 0 \Leftrightarrow 1 + \frac{b}{0+1} = 0 \Leftrightarrow 1 + b = 0 \Leftrightarrow b = -1$

Portanto, $f(x) = 1 - \frac{1}{x+1}$

Resposta: (C)

1.2. Pelo item anterior, tem-se que $f(x) = 1 - \frac{1}{x+1}$

Assim,

$$f(x+2) \leq 1 + \frac{1}{9-x^2} \Leftrightarrow 1 - \frac{1}{x+2+1} \leq 1 + \frac{1}{9-x^2} \Leftrightarrow -\frac{1}{x+3} \leq \frac{1}{9-x^2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{x+3} - 1 + \frac{1}{9-x^2} \leq 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{x+3} + 1 + \frac{1}{x^2-9} \leq 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{x+3} + 1 + \frac{1}{(x-3)(x+3)} \leq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{-(x-3)+1}{(x-3)(x+3)} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{-x+3+1}{(x-3)(x+3)} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{-x+4}{(x-3)(x+3)} \leq 0$$

$\twoheadrightarrow$ **Nmerador**

Zeros: $-x + 4 = 0 \Leftrightarrow x = 4$

Sinal:

$-x + 4 < 0 \Leftrightarrow -x < -4 \Leftrightarrow x > 4$

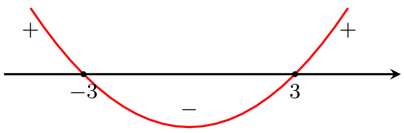
$-x + 4 > 0 \Leftrightarrow -x > -4 \Leftrightarrow x < 4$

$\twoheadrightarrow$ **Denominador**

Zeros: $(x+3)(x-3) = 0 \Leftrightarrow x + 3 = 0 \vee x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = -3 \vee x = 3$

Sinal:

Como se trata de uma função quadrática, estuda-se o sinal pela representação gráfica da parábola



Assim,

$(x+3)(x-3) > 0 \Leftrightarrow x < -3 \vee x > 3$

$(x+3)(x-3) < 0 \Leftrightarrow -3 < x < 3$

Tabela de sinais

x	$-\infty$	-3		3		4	$+\infty$
$-x+4$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	0	$-$
$(x+3)(x-3)$	$+$	0	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$\dfrac{-x+4}{(x-3)(x+3)}$	$+$	$n.d.$	$-$	$n.d.$	$+$	0	$-$

Concluindo:

O conjunto solução da condição é, $C.S. =]-3;3[\cup [4;+\infty[$

2. Ora,

$$g(x) = \frac{4x+3}{x+3} = \frac{4x+12-9}{x+3} = \frac{4(x+3)-9}{x+3} = \frac{4(x+3)}{x+3} - \frac{9}{x+3} = 4 - \frac{9}{x+3}$$

Assim,

A reta de equação $x = -3$ é assíntota vertical ao gráfico de g e a reta de equação $y = 4$ é assíntota horizontal ao gráfico de g

Nota:

$\lim\limits_{x\to -3^-} g(x) = +\infty$
$\lim\limits_{x\to -3^+} g(x) = -\infty$
$\lim\limits_{x\to +\infty} g(x) = 4$
$\lim\limits_{x\to -\infty} g(x) = 4$

3. .

$D_h = \mathbb{R}$

Assíntotas verticais

$$\lim_{x\to -2^-} h(x) = \lim_{x\to -2^-} \frac{-x+1}{x+2} = \frac{3}{0^-} = -\infty$$

$$\lim_{x\to -2^-} h(x) = \lim_{x\to -2^+} \frac{2x-1}{x+3} = -5$$

A reta de equação $x = -2$ é assíntota vertical ao gráfico de h

Assíntotas horizontais

Quando $x \mapsto +\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} h(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{2x-1}{x+3} \stackrel{(\frac{\infty}{\infty})}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{x\left(2-\frac{1}{x}\right)}{x\left(1+\frac{3}{x}\right)} = \frac{\lim_{x\to+\infty}\left(2-\frac{1}{x}\right)}{\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{3}{x}\right)} = \frac{2-0}{1+0} = 2$$

Logo, a reta de equação $y = 2$ é assíntota horizontal ao gráfico de h, quando $x \mapsto +\infty$

Quando $x \mapsto -\infty$

$$\lim_{x\to-\infty} h(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{-x+1}{x+2} \stackrel{(\frac{\infty}{\infty})}{=} \lim_{x\to-\infty} \frac{x\left(-1+\frac{1}{x}\right)}{x\left(1+\frac{2}{x}\right)} = \frac{\lim_{x\to-\infty}\left(-1+\frac{1}{x}\right)}{\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)} = \frac{-1+0}{1+0} = -1$$

Logo, a reta de equação $y = -1$ é assíntota horizontal ao gráfico de h, quando $x \mapsto -\infty$

4. .

4.1. $2 \in D_f$

A função f é contínua em $x = 2$, se existir $\lim_{x\to 2} f(x)$, ou seja,

se $\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^+} f(x) = f(2)$

Ora,

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-} \frac{\sqrt{3}x^2 - 3\sqrt{3}x + 2\sqrt{3}}{3x^2-6x} \stackrel{(\frac{0}{0})}{=} \sqrt{3} \times \lim_{x\to 2^-} \frac{x^2-3x+2}{3x^2-6x} = \sqrt{3} \times \lim_{x\to 2^-} \frac{(x-2)(x-1)}{3x(x-2)} =$$

$$= \sqrt{3} \times \lim_{x\to 2^-} \frac{x-1}{3x} = \frac{\sqrt{3}}{6}$$

Cálculos auxiliares

$x^2 - 3x + 2 = (x-2) \times Q(x)$

Pela regra de Ruffini

$$\begin{array}{c|cc|c} & 1 & -3 & 2 \\ 2 & & 2 & -2 \\ \hline & 1 & -1 & 0 \end{array}$$

Logo, $Q(x) = x - 1$

$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+} \frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{3}}{x-2} \stackrel{(\frac{0}{0})}{=} \lim_{x\to 2^+} \frac{(\sqrt{x+1}-\sqrt{3})(\sqrt{x+1}+\sqrt{3})}{(x-2)(\sqrt{x+1}+\sqrt{3})} = \lim_{x\to 2^+} \frac{(\sqrt{x+1})^2-(\sqrt{3})^2}{(x-2)(\sqrt{x+1}+\sqrt{3})} =$$

$$= \lim_{x\to 2^+} \frac{|x+1|-3}{(x-2)(\sqrt{x+1}+\sqrt{3})} = \lim_{x\to 2^+} \frac{x+1-3}{(x-2)(\sqrt{x+1}+\sqrt{3})} = \lim_{x\to 2^+} \frac{x-2}{(x-2)(\sqrt{x+1}+\sqrt{3})} =$$

$$= \lim_{x\to 2^+} \frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{3}} = \frac{1}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{6}$$

$$f(2) = \frac{1-3k}{2}$$

Ora, a função f é contínua em $x = 2$, se, $\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^+} f(x) = f(2)$

Então, deverá ter-se,

$$\frac{1-3k}{2}=\frac{\sqrt{3}}{6}\Leftrightarrow 1-3k=\frac{\sqrt{3}}{3}\Leftrightarrow -3k=-1+\frac{\sqrt{3}}{3}\Leftrightarrow k=\frac{1}{3}-\frac{\sqrt{3}}{9}$$

Portanto, a função f é contínua em $x=2$, se $k=\frac{1}{3}-\frac{\sqrt{3}}{9}$

4.2. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{3}}{x-2}=^{(\frac{\infty}{\infty})}\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\frac{\sqrt{x+1}}{x}-\frac{\sqrt{3}}{x}}{\frac{x}{x}-\frac{2}{x}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{\frac{x+1}{x^2}}-\frac{\sqrt{3}}{x}}{1-\frac{2}{x}}=$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{\frac{x}{x^2}+\frac{1}{x^2}}-\frac{\sqrt{3}}{x}}{1-\frac{2}{x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}-\frac{\sqrt{3}}{x}}{1-\frac{2}{x}}=\frac{0}{1}=0$$

Logo a reta de equação $y=0$ é assíntota ao gráfico de f quando $x\mapsto+\infty$

4.3. A assíntota ao gráfico de f é da forma $y=mx+b$, com $m,b\in\mathbb{R}$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{\sqrt{3}x^2-3\sqrt{3}x+2\sqrt{3}}{3x^2-6x}}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{3}x^2-3\sqrt{3}x+2\sqrt{3}}{3x^3-6x^2}=^{(\frac{\infty}{\infty})}$$

$$=\sqrt{3}\times\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2\left(1-\frac{3x}{x^2}+\frac{2}{x^2}\right)}{x^3\left(3-\frac{6x^2}{x^3}\right)}=\sqrt{3}\times\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2}{x^3}\times\frac{\lim\limits_{x\to-\infty}\left(1-\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}\right)}{\lim\limits_{x\to-\infty}\left(3-\frac{6}{x}\right)}=$$

$$=\sqrt{3}\times\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x}\times\frac{\lim\limits_{x\to-\infty}\left(1-\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}\right)}{\lim\limits_{x\to-\infty}\left(3-\frac{6}{x}\right)}=\sqrt{3}\times 0\times\frac{1-0+0}{3-0}=0$$

Logo, $m=0$

$$\lim_{x\to-\infty}(f(x)-0x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{3}x^2-3\sqrt{3}x+2\sqrt{3}}{3x^2-6x}=^{(\frac{\infty}{\infty})}\sqrt{3}\times\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2\left(1-\frac{3x}{x^2}+\frac{2}{x^2}\right)}{x^2\left(3-\frac{6x}{x^2}\right)}=$$

$$=\sqrt{3}\times\frac{\lim\limits_{x\to-\infty}\left(1-\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}\right)}{\lim\limits_{x\to-\infty}\left(3-\frac{6}{x}\right)}=\sqrt{3}\times\frac{\lim\limits_{x\to-\infty}\left(1-\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}\right)}{\lim\limits_{x\to-\infty}\left(3-\frac{6}{x}\right)}=\sqrt{3}\times\frac{1-0+0}{3-0}=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

Logo, $b=\frac{\sqrt{3}}{3}$

Portanto, a reta de equação $y=\frac{\sqrt{3}}{3}$ é assíntota ao gráfico de f quando $x\mapsto-\infty$

5. A função g é contínua em $[8;9]$, pois trata-se de uma diferença de funções contínuas

$g(8)=-\sqrt{8+2}-\sqrt{8}=-\sqrt{10}-\sqrt{8}\approx-5.99$

$g(9)=-\sqrt{9+2}-\sqrt{9}=-\sqrt{11}-3\approx-6.32$

Logo, $g(9)<-6<g(8)$

Como a função g é contínua em $[8;9]$ e $g(9)<-6<g(8)$, então, pelo Teorema de Bolzano-Cauchy, $\exists c\in]8;9[: g(c)=-6$

Ou seja, a equação $g(x)=-6$ é possível no intervalo $]8;9[$

6. .

   6.1. $t.m.v_{[-4;-1]} = \dfrac{h(-1)-h(-4)}{-1-(-4)} = \dfrac{3-0}{-1+4} = 1$

   Reposta: (A)

   6.2. $t.m.v_{[-1;3]} = -1 \Leftrightarrow \dfrac{h(3)-h(-1)}{3-(-1)} = -1 \Leftrightarrow \dfrac{h(3)-3}{4} = -1 \Leftrightarrow h(3)-3 = -4 \Leftrightarrow h(3) = -4+3 \Leftrightarrow h(3) = -1$

7. Seja g, a função real de variável real, definida por $g(x) = f(x+a) - f(x)$

   A função g é contínua em $[-a;0]$, pois trata-se da diferença de duas funções contínuas

   $g\,(-a) = f(-a+a) - f(-a) = f(0) - f(a)$, visto que f é função par, logo, $f(-a) = f(a)$

   $g\,(0) = f(0+a) - f(0) = f(a) - f(0)$

   Verificamos que $g(-a)$ e $g(0)$ têm sinais contrários

   Logo, $g\,(-a) \times g\,(0) < 0$

   Como a função g é contínua em $[-a;0]$ e $g\,(-a) \times g\,(0) < 0$, então, pelo Corolário do Teorema de Bolzano-Cauchy, $\exists c \in \left]-a;0\right[: g(c) = 0$

   Ou seja, $\exists c \in \left]-a;0\right[: f(c+a) = f(c)$

   Portanto, a equação $f(x+a) = f(x)$ tem pelo menos uma solução em $\left]-a;0\right[$

8. Determinemos o declive da reta tangente

   $$m_t = f'(-3) = \lim_{x\to -3} \frac{f(x)-f(-3)}{x-(-3)} = \lim_{x\to -3} \frac{\sqrt{1-x}+1-3}{x+3} =^{\left(\frac{0}{0}\right)} \lim_{x\to -3} \frac{(\sqrt{1-x}-2)(\sqrt{1-x}+2)}{(x+3)(\sqrt{1-x}+2)} =$$
   $$= \lim_{x\to -3} \frac{(\sqrt{1-x})^2-2^2}{(x+3)(\sqrt{1-x}+2)} = \lim_{x\to -3} \frac{|1-x|-4}{(x+3)(\sqrt{1-x}+2)} = \lim_{x\to -3} \frac{1-x-4}{(x+3)(\sqrt{1-x}+2)} =$$
   $$= \lim_{x\to -3} \frac{-x-3}{(x+3)(\sqrt{1-x}+2)} = -\lim_{x\to -3} \frac{1}{\sqrt{1-x}+2} = -\frac{1}{4}$$

   Cálculo auxiliar:

   $f(-3) = \sqrt{1-(-3)} + 1 = 3$

   Logo, $t : y = -\dfrac{1}{4}x + b,\ b \in \mathbb{R}$

   Como, $(-3;3)$ é ponto do gráfico da função f, resulta,

   $3 = -\dfrac{1}{4} \times (-3) + b \Leftrightarrow 3 - \dfrac{3}{4} = b \Leftrightarrow \dfrac{9}{4} = b$

   Concluindo, a reta tangente tem equação reduzida $t : y = -\dfrac{1}{4}x + \dfrac{9}{4}$

9. Ora, $D_f = \mathbb{R}$

   Seja $a \in D_f$

   $$f'(a) = \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim_{x\to a} \frac{mx+b-(ma+b)}{x-a} = \lim_{x\to a} \frac{mx-ma}{x-a} =^{\left(\frac{0}{0}\right)} \lim_{x\to a} \frac{m(x-a)}{x-a} = \lim_{x\to a}(m) = m$$

   Logo, $f' : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$, tal que $f'(x) = m$

10. A equação da assíntota é da forma $y = mx + b$, $m, b \in \mathbb{R}$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{g(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x + 1 + \dfrac{1}{\sqrt{-x}+\sqrt{-x-2}}}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{x} + \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x} + \lim_{x\to-\infty} \frac{\dfrac{1}{\sqrt{-x}+\sqrt{-x-2}}}{x} =$$

$$= \lim_{x\to-\infty}(1) + \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x} + \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x(\sqrt{-x}+\sqrt{-x-2})} = 1 + 0 + 0 = 1$$

Logo, $m = 1$

$$\lim_{x\to-\infty}[g(x) - x] = \lim_{x\to-\infty}\left(x + 1 + \frac{1}{\sqrt{-x}+\sqrt{-x-2} - x}\right) = \lim_{x\to-\infty}\left(1 + \frac{1}{\sqrt{-x}+\sqrt{-x-2}}\right) = 1 + 0 = 1$$

Logo, $b = 1$

Portanto, a reta de equação $y = x + 1$ é assíntota ao gráfico de g quando $x \mapsto -\infty$

Nota: Poderíamos resolver pelo seguinte processo (bem mais simples)

De $g(x) = x + 1 + \dfrac{1}{\sqrt{-x}+\sqrt{-x-2}}$, resulta, $g(x) - (x+1) = \dfrac{1}{\sqrt{-x}+\sqrt{-x-2}}$

Como, $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{1}{\sqrt{-x}+\sqrt{-x-2}}\right) = \dfrac{1}{+\infty} = 0$, então, também,

$\lim\limits_{x\to-\infty}[g(x) - (x+1)] = 0$

Portanto, a reta de equação $y = x + 1$ é assíntota ao gráfico de g quando $x \mapsto -\infty$