SUCESSÕES DE NÚMEROS REAIS

1. .

1.1. $u_2 = 1 - \frac{2}{2} = 1 - 1 = 0$

$u_{10} = 1 - \frac{2}{10} = 1 - \frac{1}{5} = \frac{4}{5}$

$u_{100} = 1 - \frac{2}{100} = 1 - \frac{1}{50} = \frac{49}{50}$

1.2. $\exists n \in \mathbb{N} : u_n = \frac{21}{22}$?

$u_n = \frac{21}{22} \Leftrightarrow 1 - \frac{2}{n} = \frac{21}{22} \Leftrightarrow 1 - \frac{2}{n} - \frac{21}{22} = 0 \Leftrightarrow -\frac{2}{n} + \frac{1}{22} = 0 \Leftrightarrow \frac{-44+n}{22n} = 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow -44 + n = 0 \wedge 22n \neq 0 \Leftrightarrow n = 44 \in \mathbb{N}$

logo, $\frac{21}{22}$ é termo da sucessão (u_n).

1.3. $u_{n+1} - u_n = 1 - \frac{2}{n+1} - \left(1 - \frac{2}{n}\right) = \frac{2}{n} - \frac{2}{n+1} = \frac{2(n+1) - 2n}{n(n+1)} = \frac{2n+2-2n}{n(n+1)} =$
$= \frac{2}{n(n+1)} > 0, \forall n \in \mathbb{N}$

Logo, a sucessão (u_n) é monótona crescente.

1.4. Já se provou que a sucessão é monótona crescente, então o primeiro termo é um minorante do conjunto dos termos da sucessão. Ou seja, $u_1 \leq u_n, \forall n \in \mathbb{N}$

Ora, $u_1 = 1 - \frac{2}{1} = -1$

Portanto, $-1 \leq u_n, \forall n \in \mathbb{N}$

Por outro lado, $u_n = 1 - \frac{2}{n} < 1, \forall n \in \mathbb{N}$

Assim, tem-se, $-1 \leq u_n < 1, \forall n \in \mathbb{N}$

Logo, a sucessão (u_n) é limitada
-1 é um minorante e 1 é um majorante do conjunto dos termos da sucessão (u_n)

Outro processo

$n \geq 1, \forall n \in \mathbb{N}$
$\therefore \frac{1}{n} \leq 1, \forall n \in \mathbb{N}$

Por outro lado, a sucessão de termo geral $\frac{1}{n}$ tem os termos todos positivos, assim,

$0 < \frac{1}{n} \leq 1, \forall n \in \mathbb{N}$
$\therefore -1 \leq -\frac{1}{n} < 0, \forall n \in \mathbb{N}$

$\therefore -2 \leq -\dfrac{2}{n} < 0, \forall n \in \mathbb{N}$
$\therefore -2+1 \leq 1-\dfrac{2}{n} < 0+1, \forall n \in \mathbb{N}$
$\therefore -1 \leq u_n < 1, \forall n \in \mathbb{N}$
Logo, a sucessão (u_n) é limitada
-1 é um minorante e 1 é um majorante do conjunto dos termos da sucessão (u_n)

1.5. Toda a sucessão monótona e limitada é convergente, pelo que a sucessão (u_n) é convergente.

1.6. A sucessão (u_n) é convergente para 1 se $\forall \delta > 0, \exists p \in \mathbb{N} : n \geq p \Rightarrow |u_n - 1| < \delta$
Seja $\delta > 0$
$|u_n - 1| < \delta \Leftrightarrow |1-\dfrac{2}{n}-1| < \delta \Leftrightarrow |-\dfrac{2}{n}| < \delta \Leftrightarrow \dfrac{2}{n} < \delta \Leftrightarrow \dfrac{n}{2} > \dfrac{1}{\delta} \Leftrightarrow n > \dfrac{2}{\delta}$

Assim, basta tomar para p o menor número natural que satisfaz a condição $p > \dfrac{2}{\delta}$
Logo, $\lim(u_n) = 1$

1.7. $\lim (u_n)^n = \lim\left(1-\dfrac{2}{n}\right)^n = \lim\left(1+\dfrac{-2}{n}\right)^n = e^{-2} = \dfrac{1}{e^2}$

2. .

2.1. $\lim\left(1+\dfrac{3}{n}\right)^{2n} = \lim\left(1+\dfrac{3\times 2}{2n}\right)^{2n} = \lim\left(1+\dfrac{6}{2n}\right)^{2n} = e^6$

Outro processo

$$\lim\left(1+\frac{3}{n}\right)^{2n} = \left[\lim\left(1+\frac{3}{n}\right)^{n}\right]^2 = (e^3)^2 = e^6$$

2.2. $\lim\left(1-\dfrac{2}{n}\right)^{n+2} = \lim\left[\left(1-\dfrac{2}{n}\right)^{n}\times\left(1-\dfrac{2}{2}\right)^{n}\right] = \lim\left(1+\dfrac{-2}{n}\right)^{n}\times\lim\left(1-\dfrac{2}{n}\right)^{2} =$
$= e^{-2}\times\left(1-\dfrac{2}{+\infty}\right)^2 = e^{-2}\times(1+0)^2 = e^{-2} = \dfrac{1}{e^2}$

2.3. $\lim\left(1-\dfrac{1}{n^2}\right)^{n} = \lim\left[\left(1-\dfrac{1}{n}\right)\times\left(1+\dfrac{1}{n}\right)\right]^{n} = \lim\left(1+\dfrac{-1}{n}\right)^{n}\times\lim\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n} =$
$= e^{-1}\times e = e^0 = 1$

Outro processo

$$\lim\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^{n} = \lim\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^{n^2\times\frac{1}{n}} = \left[\lim\left(1+\frac{-1}{n^2}\right)^{n^2}\right]^{\lim\frac{1}{n}} = \left(e^{-1}\right)^0 = 1$$

2.4. $\lim\left(\dfrac{2n+5}{2n+8}\right)^{2n} = \lim\left(\dfrac{2n\left(1+\dfrac{5}{2n}\right)}{2n\left(1+\dfrac{8}{2n}\right)}\right)^{2n} = \dfrac{\left(1+\dfrac{5}{2n}\right)^{2n}}{\left(1+\dfrac{8}{2n}\right)^{2n}} = \dfrac{e^5}{e^8} = e^{5-8} = e^{-3} = \dfrac{1}{e^3}$

3. .

3.1. $\lim\left(1+\dfrac{k}{n+2}\right)^{n} = \dfrac{1}{e^2} \Leftrightarrow \lim\left[\left(1+\dfrac{k}{n+2}\right)^{n+2}\times\left(1+\dfrac{k}{n+2}\right)^{-2}\right] = \dfrac{1}{e^2} \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \lim\left(1+\dfrac{k}{n+2}\right)^{n+2}\times\lim\left(1+\dfrac{k}{n+2}\right)^{-2} = \dfrac{1}{e^2} \Leftrightarrow e^k\times(1+0)^{-2} = \dfrac{1}{e^2} \Leftrightarrow e^k = e^{-2} \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow k = -2$

3.2. $\lim\left(1-\dfrac{2k+1}{2n}\right)^{\frac{n}{2}}=\sqrt[3]{e^2}\Leftrightarrow \lim\left(1-\dfrac{2k+1}{2n}\right)^{\frac{2n}{4}}=\sqrt[3]{e^2}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left[\lim\left(1+\dfrac{-2k-1}{2n}\right)^{2n}\right]^{\frac{1}{4}}=\sqrt[3]{e^2}\Leftrightarrow \left(e^{-2k-1}\right)^{\frac{1}{4}}=\sqrt[3]{e^2}\Leftrightarrow e^{\frac{-2k-1}{4}}=e^{\frac{2}{3}}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \dfrac{-2k-1}{4}=\dfrac{2}{3}\Leftrightarrow -6k-3=8\Leftrightarrow -6k=11\Leftrightarrow k=-\dfrac{11}{6}$

4. .

4.1. $\exists n\in\mathbb{N}: b_n=\dfrac{11}{6}$?

$b_n=\dfrac{11}{6}\Leftrightarrow \dfrac{3n+11}{2n+2}=\dfrac{11}{6}\Leftrightarrow \dfrac{3n+11}{2n+2}-\dfrac{11}{6}=0\Leftrightarrow \dfrac{18n+66-22n-22}{12n+12}=0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \dfrac{-4n+44}{12n+12}=0\Leftrightarrow -4n+44=0\wedge 12n+12\neq 0\Leftrightarrow n=11\in\mathbb{N}$

logo, $\dfrac{11}{6}$ é termo da sucessão (b_n).

4.2. $b_{n+1}-b_n=\dfrac{3(n+1)+11}{2(n+1)+2}-\dfrac{3n+11}{2n+2}=\dfrac{3n+3+11}{2n+2+2}-\dfrac{3n+11}{2n+2}=\dfrac{3n+14}{2n+4}-\dfrac{3n+11}{2n+2}=$

$=\dfrac{(3n+14)(2n+2)-(2n+4)(3n+11)}{(2n+4)(2n+2)}=\dfrac{6n^2+6n+28n+28-6n^2-22n-12n-44}{(2n+4)(2n+2)}=$

$=-\dfrac{16}{(2n+4)(2n+2)}=-\dfrac{4}{(n+2)(n+1)}<0,\forall n\in\mathbb{N}$

Logo, a sucessão (b_n) é monótona decrescente.

4.3. Ora, $a_n=\dfrac{2n+3}{n+1}=\dfrac{2n+2+1}{n+1}=\dfrac{2(n+1)+1}{n+1}=\dfrac{2(n+1)}{n+1}+\dfrac{1}{n+1}=2+\dfrac{1}{n+1}$

$n\geq 1,\forall n\in\mathbb{N}$

$\therefore n+1\geq 2,\forall n\in\mathbb{N}$

$\therefore \dfrac{1}{n+1}\leq\dfrac{1}{2},\forall n\in\mathbb{N}$

Por outro lado, a sucessão de termo geral $\dfrac{1}{n+1}$ tem os termos todos positivos, assim,

$0<\dfrac{1}{n+1}\leq\dfrac{1}{2},\forall n\in\mathbb{N}$

$\therefore 2<2+\dfrac{1}{n+1}\leq 2+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3},\forall n\in\mathbb{N}$

$\therefore 2<\dfrac{2n+3}{n+1}\leq\dfrac{5}{2},\forall n\in\mathbb{N}$

$\therefore 2<a_n\leq\dfrac{5}{2},\forall n\in\mathbb{N}\leq\dfrac{5}{2},\forall n\in\mathbb{N}$, c.q.d.

4.4. A afirmação é verdadeira, pois como o conjunto dos termos da sucessão admite majorante $\left(\dfrac{5}{2}\right)$ e minorante (2), a sucessão é limitada.

4.5. $\exists n\in\mathbb{N}: a_n=b_n$?

$a_n=b_n\Leftrightarrow \dfrac{2n+3}{n+1}=\dfrac{3n+11}{2n+2}\Leftrightarrow \dfrac{2n+3}{n+1}=\dfrac{3n+11}{2(n+1)}=0\Leftrightarrow \dfrac{4n+6-3n-11}{2n+2}=0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \dfrac{n-5}{2n+2}=0\Leftrightarrow n-5=0\wedge 2n+2\neq 0\Leftrightarrow n=5\in\mathbb{N}$

logo, as duas sucessões têm um termo comum, é o quinto termo.

$a_5=\dfrac{2\times 5+3}{5+1}=\dfrac{13}{6}$

$b_5=\dfrac{3\times 5+11}{2\times 5+2}=\dfrac{26}{12}=\dfrac{13}{6}$

5. .

5.1. $n \geq 1, \forall n \in \mathbb{N}$
$\therefore \frac{1}{n} \leq 1, \forall n \in \mathbb{N}$
Por outro lado, a sucessão de termo geral $\frac{1}{n}$ tem os termos todos positivos, assim,
$0 < \frac{1}{n} \leq 1, \forall n \in \mathbb{N}$
$\therefore 3 < 3 + \frac{1}{n} \leq 3 + 1, \forall n \in \mathbb{N}$
$\therefore 3 < 3 + \frac{1}{n} \leq 4, \forall n \in \mathbb{N}$
$\therefore 3 < u_n \leq 4, \forall n \in \mathbb{N}$
Logo, a sucessão (u_n) é limitada
3 é um minorante e 4 é um majorante do conjunto dos termos da sucessão (u_n)

5.2. $u_n > \frac{7}{2} \Leftrightarrow 3 + \frac{1}{n} > \frac{7}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{n} > \frac{7}{2} - 3 \Leftrightarrow \frac{1}{n} > \frac{7-6}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{n} > \frac{1}{2} \Leftrightarrow n < 2$
Apenas o primeiro termo é superior a $\frac{7}{2}$.
Resposta: Há apenas um termo da sucessão maior do que $\frac{7}{2}$

6. Seja $P(n) : b_n = \frac{n}{n+1}$
(i)
$n = 1 \rightarrow b_1 = \frac{1}{1+1}$
$\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ (verdadeiro)
Logo $P(1)$ é verdadeira

(ii) $P(n)$ é hereditária

Hipótese de indução: $P(n)$ é verdadeira, isto é, $b_n = \frac{n}{n+1}$

Tese de indução: $P(n+1)$ é verdadeira(?), isto é, $b_{n+1} = \frac{n+1}{n+2}$

Demonstração

$$b_{n+1} = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} = b_n + \frac{1}{(n+1)(n+2)} =$$
$$= \frac{n}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{n(n+2)+1}{(n+1)(n+2)} = \frac{n^2+2n+1}{(n+1)(n+2)} = \frac{(n+1)^2}{(n+1)(n+2)} = \frac{n+1}{n+2}, \text{ c.q.d.}$$

Logo, $P(n)$ é hereditária, isto é, $P(n) \Rightarrow P(n+1)$

Conclusão:
Como $P(1)$ é verdadeira e $P(n)$ é hereditária, então, $P(n)$ é universal, isto é, $P(n)$ é verdadeira para todo o número natural.

7. Seja $P(n) : c_n > 3$
   (i)
   $n = 1 \to c_1 > 3$
   $5 > 3$ (verdadeiro)

   Logo $P(1)$ é verdadeira

   (ii) $P(n)$ é hereditária

   Hipótese de indução: $P(n)$ é verdadeira, isto é, $c_n > 3$

   Tese de indução: $P(n+1)$ é verdadeira(?), isto é, $c_{n+1} > 3$

   Demonstração
   Por hipótese sabemos que $c_n > 3$
   Então, tem-se

   $c_n > 3$
   $\therefore c_n + 3 > 3 + 3$
   $\therefore c_n + 3 > 6$
   $\therefore \dfrac{c_n + 3}{2} > 2$
   $\therefore c_{n+1} > 3$, c.q.d.

   Logo, $P(n)$ é hereditária, isto é, $P(n) \Rightarrow P(n+1)$

   Conclusão:
   Como $P(1)$ é verdadeira e $P(n)$ é hereditária, então, $P(n)$ é universal, isto é, $P(n)$ é verdadeira para todo o número natural.

8. Seja $P(n) : d_n > 2$
   (i)
   $n = 1 \to d_1 > 2$
   $3 > 2$ (verdadeiro)

   Logo $P(1)$ é verdadeira

   (ii) $P(n)$ é hereditária

   Hipótese de indução: $P(n)$ é verdadeira, isto é, $d_n > 2$

   Tese de indução: $P(n+1)$ é verdadeira(?), isto é, $d_{n+1} > 2$

   Demonstração
   Por hipótese sabemos que $d_n > 2$
   Então, tem-se

   $d_n > 2$
   $\therefore d_n + 2 > 2 + 2$
   $\therefore d_n + 2 > 4$
   $\therefore \sqrt{d_n + 2} > \sqrt{4}$
   $\therefore d_{n+1} > 2$, c.q.d.

Logo, $P(n)$ é hereditária, isto é, $P(n) \Rightarrow P(n+1)$

Conclusão:
Como $P(1)$ é verdadeira e $P(n)$ é hereditária, então, $P(n)$ é universal, isto é, $P(n)$ é verdadeira para todo o número natural.

9. Seja $P(n): e_n = 2 - 2^{1-n}$
(i)
$n = 1 \to e_1 = 2 - 2^{1-1}$
$1 = 2 - 1$
$1 = 1$ (verdadeiro)
Logo $P(1)$ é verdadeira

(ii) $P(n)$ é hereditária

Hipótese de indução: $P(n)$ é verdadeira, isto é, $e_n = 2 - 2^{1-n}$

Tese de indução: $P(n+1)$ é verdadeira(?), isto é, $e_{n+1} = 2 - 2^{-n}$

Demonstração

$$e_{n+1} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots + \frac{1}{2^{n-1}} + \frac{1}{2^n} = e_n + \frac{1}{2^n} =$$
$$= 2 - 2^{1-n} + \frac{1}{2^n} = 2 - \frac{1}{2^{n-1}} + \frac{1}{2^n} = 2 - \frac{2}{2^n} + \frac{1}{2^n} = 2 - \frac{2-1}{2^n} = 2 - \frac{1}{2^n} = 2 - 2^{-n}, \text{ c.q.d.}$$

Logo, $P(n)$ é hereditária, isto é, $P(n) \Rightarrow P(n+1)$

Conclusão:
Como $P(1)$ é verdadeira e $P(n)$ é hereditária, então, $P(n)$ é universal, isto é, $P(n)$ é verdadeira para todo o número natural.

10. .

10.1. $f(x) = 0 \Leftrightarrow e^{-2x+1} - 3 = 0 \Leftrightarrow e^{-2x+1} = 3 \Leftrightarrow -2x + 1 = \ln 3 \Leftrightarrow -2x + 1 = \ln 3 - 1 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x = \dfrac{1 - \ln 3}{2}$
$C.S. = \left\{ \dfrac{1 - \ln 3}{2} \right\}$

10.2. $D_f = \mathbb{R} = D'_{f^{-1}} = D'_g$

$D'_f =]-3; +\infty[= D_{f^{-1}} = D_g$

$y = f(x) \Leftrightarrow y = e^{-2x+1} - 3 \Leftrightarrow e^{-2x+1} = y + 3 \Leftrightarrow -2x + 1 = \ln(y+3) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow -2x + 1 = \ln(y+3) - 1 \Leftrightarrow x = \dfrac{1 - \ln(y+3)}{2}$

Então, $f^{-1}(x) = \dfrac{1 - \ln(x+3)}{2} = g(x)$

Logo, as funções f e g são funções inversas. Os gráficos destas duas funções são simétricos em relação à bissetriz dos quadrantes ímpares.

10.3. $g(x) > g(x^2) \Leftrightarrow \dfrac{1-\ln(x+3)}{2} > \dfrac{1-\ln(x^2+3)}{2} \wedge x+3>0 \wedge x^2+3>0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 1-\ln(x+3) > 1-\ln(x^2+3) \wedge x>-3 \Leftrightarrow -\ln(x+3) > -\ln(x^2+3) \wedge x>-3 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \ln(x+3) < \ln(x^2+3) \wedge x>-3 \Leftrightarrow x+3 < x^2+3 \wedge x>-3 \Leftrightarrow x < x^2 \wedge x > -3 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x^2 - x > 0 \wedge x>-3 \Leftrightarrow (x<0 \vee x>1) \wedge x>-3 \Leftrightarrow -3<x<0 \vee x>1$

$C.S. =]-3;0[\cup]1;+\infty[$

Cálculos auxiliares

$x^2 - x = 0 \Leftrightarrow x(x-1) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x-1 = 0 \Leftrightarrow x=0 \vee x=1$

11. $D_f = \{x \in \mathbb{R} : x > 0 \wedge x+1>0 \wedge |\ln(x+1)| - 1 \neq 0\} =$
$= \{x \in \mathbb{R} : x>0 \wedge x>-1 \wedge \sim (|\ln(x+1)| = 1)\} = \{x \in \mathbb{R} : x > 0 \wedge \sim (|\ln(x+1)| = 1)\}$

Cálculos auxiliares

$|\ln(x+1)| = 1 \Leftrightarrow \ln(x+1) = -1 \vee \ln(x+1) = 1 \Leftrightarrow x+1 = e^{-1} \vee x+1 = e \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x = \dfrac{1}{e} - 1 \vee x = e-1 \Leftrightarrow x = \dfrac{1-e}{e} \vee x = e-1$
Assim, tem-se que,
$D_f = \{x \in \mathbb{R} : x > 0 \wedge \sim (|\ln(x+1)| = 1)\} = \{x \in \mathbb{R} : x > 0 \wedge x \neq \dfrac{1-e}{e} \wedge x \neq e-1\} =$
$=]0; e-1[\cup]e-1;+\infty[$

12. $D_g = \{x \in \mathbb{R} : x+1 > 0 \wedge |x| - 1 > 0 \wedge \ln(|x|-1) \neq 0\} =$
$= \{x \in \mathbb{R} : x > -1 \wedge |x| > 1 \wedge \sim (\ln(|x|-1) = 0)\}$

Cálculos auxiliares

$|x| > 1 \Leftrightarrow x < -1 \vee x > 1$

$\ln(|x|-1) = 0 \Leftrightarrow |x| - 1 = 1 \wedge |x| > 1 \Leftrightarrow |x| = 2 \wedge (x < -1 \vee x > 1) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow (x = -2 \vee x = 2) \wedge (x < -1 \vee x > 1) \Leftrightarrow x = -2 \vee x = 2$

então,

$D_g = \{x \in \mathbb{R} : x > -1 \wedge |x| > 1 \wedge \sim (\ln(|x|-1) = 0)\} =$
$= \{x \in \mathbb{R} : x > -1 \wedge (x < -1 \vee x > 1) \wedge x \neq -2 \wedge x \neq 2\} = \{x \in \mathbb{R} : x > 1 \wedge x \neq 2\} =]1;2[\cup]2;+\infty[$