Ficha de Trabalho n.º 8 – Matemática A – 10.º Ano

Funções Reais de Variável Real

Função Composta e Função Inversa; Generalidades; Monotonia, Extremos e Concavidades

"Conhece a Matemática e dominarás o Mundo."
Galileu Galilei

1. Considere as funções $f:\{-2,-1,0,1,2\}\rightarrow\{0,1,2,3,4\}$ definida por $f(x)=x^2$, $g:\{a,b,c\}\rightarrow\{a,b,c\}$ tal que $g(a)=b$, $g(b)=c$ e $g(c)=a$, com $a,b,c\in\mathbb{R}$ e $h:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$ definida por $h(x)=2x+4$.

1.1. Defina em extensão o conjunto G_f e justifique que f não é injectiva nem sobrejectiva.

1.2. Mostre que g admite inversa e caracterize-a, designando por g^{-1} a sua inversa.

1.3. Mostre que h admite inversa e caracterize-a, designando por h^{-1} a sua inversa.

1.4. Determine:

a) $(f\circ h)(-3)$ **b)** $g^{-1}(b)$ **c)** $(h^{-1}\circ f)(2)$

d) $(g\circ g^{-1})(c)$ **e)** $h^{-1}(10)$, sem utilizar a expressão analítica de h^{-1}.

1.5. Determine $D_{f\circ h}$ e caracterize por meio de uma tabela a função $f\circ h$.

1.6. Seja $f|_A : A\rightarrow B$. Indique um conjunto $A\subset\{-2,-1,0,1,2\}$, com o maior número possível de elementos, e um conjunto B de modo que $f|_A$ seja bijectiva.

2. Sejam f e g duas funções de domínio $\mathbb{R}$.

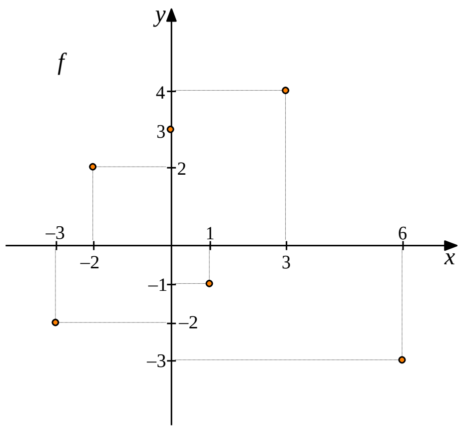
Sabe-se que:

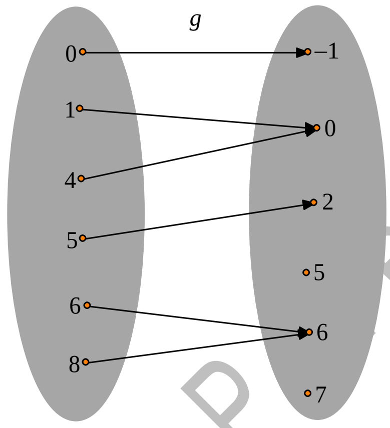
- a função f é bijectiva e o ponto de coordenadas $(2,5)$ pertence ao seu gráfico
- a função g é afim os pontos de coordenadas $(0,-5)$ e $(4,1)$ pertencem ao seu gráfico

Qual é o valor de $(g\circ f^{-1})(5)$?

[A] -2 **[B]** -1 **[C]** 1 **[D]** 2

3. Considere as funções $f:\{-3,-2,0,1,3,6\}\to\{-3,-2,-1,2,3,4\}$ definida graficamente e g, de domínio $\{0,1,4,5,6,8\}$, definida por um diagrama.





3.1. Indique o contradomínio da função g e justifique que g não é injectiva nem sobrejectiva.

3.2. Mostre que a função f admite inversa.

3.3. Determine $D_{f\circ g}$ e caracterize $f\circ g$ recorrendo a uma tabela.

3.4. Determine, caso exista:

a) $f^{-1}(3)$

b) $(f\circ f)(6)$

c) $(g\circ f^{-1})(-1)$

d) $(f\circ g\circ f)(3)$

3.5. Represente graficamente a função f^{-1}, função inversa de f.

3.6. Resolva em $\mathbb{R}$ as seguintes condições:

a) $(g\circ f)(x)=0$

b) $f(2x)<0$

c) $(f\circ f)(x)\geq 0$

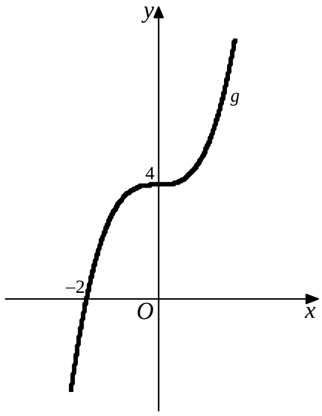
4. Seja g uma função bijectiva tal que o ponto de coordenadas $(3,-2)$ pertence ao seu gráfico.

Considere a função h, definida por $h(x)=g(x-1)+2$.

Qual dos pontos seguintes pertence necessariamente ao gráfico da função h^{-1}, função inversa de h?

A $(0,2)$ **B** $(0,4)$ **C** $(4,0)$ **D** $(-2,3)$

5. Na figura está representado, num referencial o.n. xOy, parte do gráfico de uma função g, polinomial de grau 3, de domínio $\mathbb{R}$ e estritamente crescente em que -2 é o seu único zero.



5.1. Qual é o valor de $(g \circ g)(-2)$?

A 1 **B** 2 **C** 3 **D** 4

5.2. Seja h a função definida por $h(x) = \sqrt{2-x}+1$. Qual é o valor de $(h \circ g^{-1})(0)$? (g^{-1} designa a função inversa de g)

A 1 **B** 2 **C** 3 **D** 4

5.3. Qual das seguintes funções pode ser ímpar?

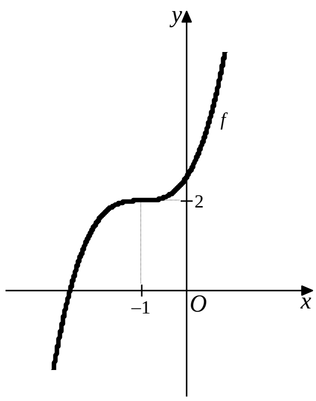
A $g(|x|)$ **B** $g(x-2)$

C $g(x)-4$ **D** $g(x-2)-4$

5.4. Na figura está representado em referencial o.n. xOy, parte do gráfico da função f, de domínio $\mathbb{R}$.

A função f é definida por $f(x) = g(x+a)-b$, com $a,b \in \mathbb{R}$.

Quais são os valores de a e de b?



A $a=-1$ e $b=2$ **B** $a=1$ e $b=2$

C $a=-1$ e $b=-2$ **D** $a=1$ e $b=-2$

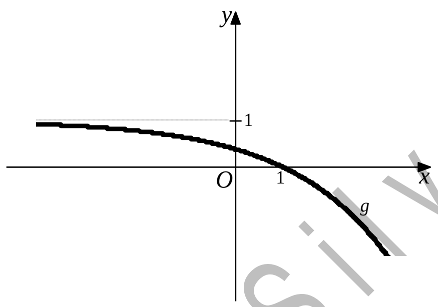
6. Seja g uma função de domínio $\mathbb{R}$ tal que o ponto de coordenadas $(-3,-5)$ pertence ao seu gráfico.

Considere a função h, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $h(x)=2-3|g(x-1)|$.

Qual dos seguintes pontos pertence necessariamente ao gráfico de h?

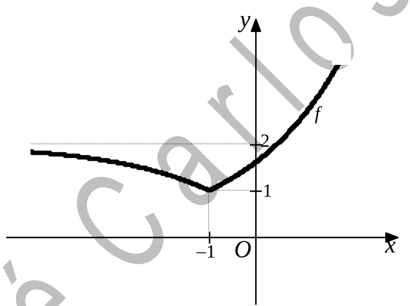
A $(-2,-13)$ **B** $(-4,17)$ **C** $(-2,17)$ **D** $(-4,-13)$

7. Na figura está representada em referencial o.n. $Oxyz$ parte do gráfico de uma função g de domínio $\mathbb{R}$. Tal como a figura sugere, o gráfico de g intersecta o eixo Ox no ponto de abcissa 1.

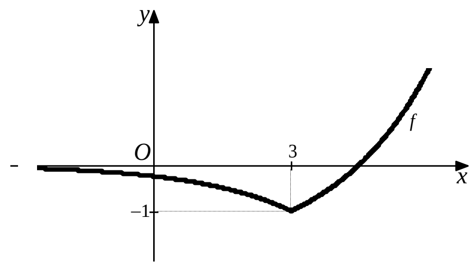


Em qual das seguintes opções pode estar representado o gráfico da função f definida por $f(x)=|g(x-2)|-1$?

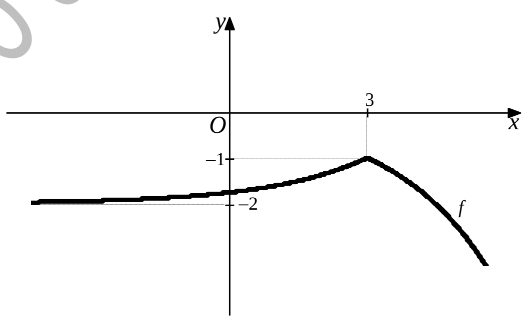
A



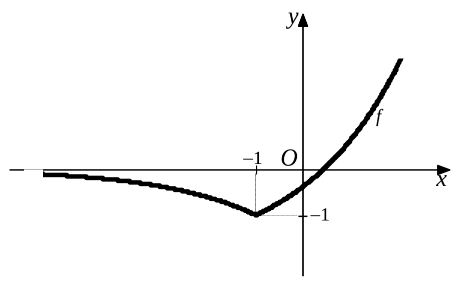
B



C



D



8. Considere uma função f, de domínio $\mathbb{R}$. Sabe-se que a função f é ímpar e tem exactamente três zeros

8.1. Qual das seguintes pode ser a expressão analítica da função f?

A $x^4 - x^2$ **B** $x^3 - x$ **C** $x^6 - x^3$ **D** x^5

Numa pequena composição indique a opção correcta e apresente, para cada uma das restantes opções, uma razão para a rejeitar.

8.2. Seja g uma função de domínio $\mathbb{R}$, par.

Mostre que a função h, também de domínio $\mathbb{R}$, definida por $h(x) = x\left(f(x) + xg(x)\right)$ é par.

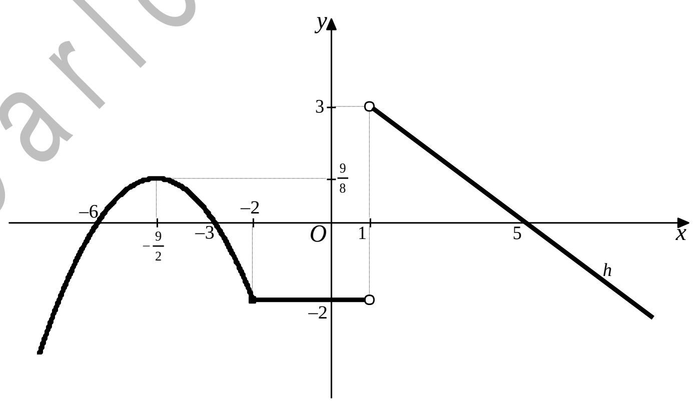
8.3. Considere agora que um dos zeros da função f é o 3. Quais são os zeros das funções i, j e m, definidas por:

a) $i(x) = f(x+2)$ **b)** $j(x) = f\left(-\dfrac{x}{4}\right)$ **c)** $m(x) = f(|x|)$

8.4. Suponha agora que o contradomínio da função f é $]-4,4[$.

Qual é o contradomínio da função t, definida por $t(x) = 2 + \dfrac{2|f(x-3)|}{3}$?

9. Considera a função h, de domínio $\mathbb{R} \setminus \{1\}$, cujo gráfico está parcialmente representado na figura seguinte.



9.1. Determine os valores reais de x de modo que $h(x) \times h(6) \le 0$.

9.2. Estude a função h quanto à monotonia e à existência de extremos relativos e absolutos. Caso existam, indique-os.

9.3. Indique, justificando, o valor lógico das seguintes proposições.

a) A função h é contínua em todo o seu domínio.

b) $\forall a,b \in \mathbb{R}\setminus\{1\},\ a \neq b \Rightarrow h(a) \neq h(b)$

c) $\exists x \in]-1,0[: (h \circ h)(x) = -2$

9.4. Determine os valores reais de k para os quais a equação $h(x) - k = 0$ tem exactamente duas soluções.

9.5. Indique o domínio e o contradomínio da função g, definida por $g(x) = 2 - 3h\left(\frac{x}{3}\right)$.

9.6. Considere a função $h|_{]1,+\infty[} :]1,+\infty[\to]-\infty,3[$ cujo gráfico é uma semi-recta. Designe-a por g.

a) Mostre que $g(x) = -\frac{3x-15}{4}$.

b) Mostre que a função g é bijectiva e conclua que admite inversa.

c) Sem determinar a expressão analítica da função inversa de g, determine, $g^{-1}(2)$.

d) Caracterize a função g^{-1}.

e) Seja f a função de domínio $\mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^5 - x^3 + 1$.

Determine o domínio da função $g \circ f$.

10. Sejam f e g duas uma funções de domínio $\mathbb{R}$ tais que f é ímpar e g é definida por $g(x) = x^3 f(x)$.

10.1. Mostre que o ponto de coordenadas $(0,0)$ pertence ao gráfico de f.

10.2. Mostre que a função g é par.

10.3. Na figura seguinte apresenta-se parte da tabela de variação do sinal da função g:

$-\infty$	-3		-1		0
$-$	0	$-$	0	$+$	2

Qual é o conjunto solução da equação $g(x) + |g(x)| = 0$?

11. Considere a função g, de domínio $\mathbb{R}$ e cuja tabela de variação da monotonia se apresenta a seguir:

x	$-\infty$	0		2	$+\infty$
$g(x)$	$\nearrow$	0	$\searrow$	-2	$\nearrow$

11.1. Qual das seguintes afirmações não é necessariamente verdadeira?

A g é crescente em $]-\infty,0[$ e em $]2,+\infty[$.

B g tem pelo menos um zero.

C -2 é um mínimo da função g.

D g é decrescente em $]0,2[$.

11.2. Considere agora que a função g é contínua em todo o seu domínio.

Quais são os extremos da função f definida por $f(x)=1-3g(2x)$?

A 1 e 7

B -1 e 0

C 0 e 1

D -5 e -2

12. Seja f uma função de domínio $\mathbb{R}$ tal que $f(-2)=3$ e $f(4)=9$.

Sabe-se que o gráfico de f tem a concavidade voltada para cima no intervalo $[-2,4]$.

Qual das seguintes afirmações é necessariamente verdadeira?

A $\forall x\in[-2,4],\ f(x)+x+5\leq 0$

B $\forall x\in[-2,4],\ f(x)-x-5\leq 0$

C $\forall x\in[-2,4],\ f(x)+x+5\geq 0$

D $\forall x\in[-2,4],\ f(x)-x-5\geq 0$

13. Considere a função h, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $h(x)=(k^3-3k+1)x-(k^2-2)x+3$, com $k\in\mathbb{R}$.

13.1. Para que valores reais de k a função h é estritamente crescente?

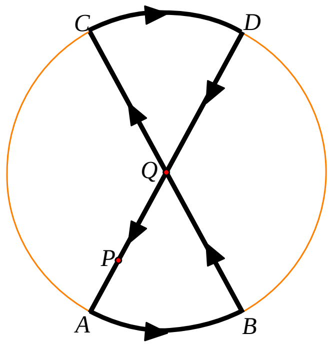
13.2. Mostre que h nunca pode ser uma função ímpar.

13.3. Indique o valor lógico da proposição, $\exists k\in\mathbb{R}:\ f$ é uma função par.

13.4. Para $k=2$ considere a função f, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $f(x)=(h(x)+a)x^n$, com n natural e par e $a\in\mathbb{R}$. Determine a de modo que a função f seja ímpar.

14. Na figura está representada uma circunferência de centro em Q e raio 2.

Os arcos AB e CD têm o mesmo comprimento que o raio da circunferência.

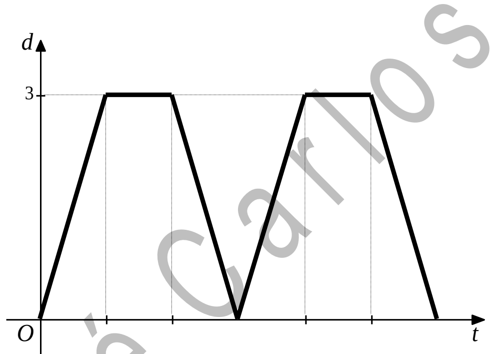


Considere que um ponto P, partindo de Q, se desloca a uma velocidade constante ao longo percurso sugerido pelas setas: de Q para A, seguindo pelo arco AB, em seguida de B para C, depois pelo arco CD e terminando em Q.

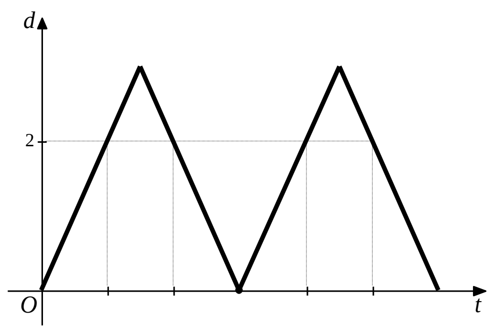
Seja d a função que dá a distância do ponto P ao ponto Q em função do tempo t, onde $t=0$ é o instante em que o ponto P inicia o movimento.

Numa pequena composição indique a opção onde pode estar representado o gráfico da função d e apresente, para cada uma das restantes opções, uma razão para rejeitar o gráfico dessa opção.

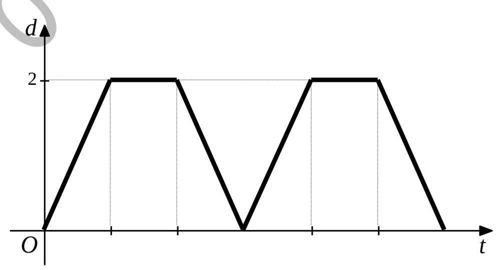
A



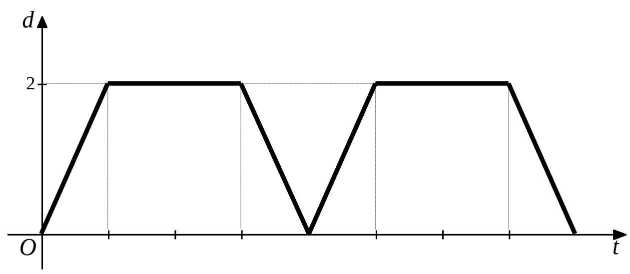
B



C



D



15. Para cada $m \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ e $b \in \mathbb{R}$, considere a função g, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $g(x) = mx + b$.

15.1. Mostre que g é bijectiva.

15.2. Mostre que se a função g coincidir com a sua inversa, então $m = -1 \vee m = 1$.

15.3. Admita que $g(x) = g^{-1}(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Sabendo que o gráfico g^{-1} de intersecta o eixo Oy no ponto de ordenada 3, determine m e b.

15.4. Considere $m = 2$ e $b = 0$ e seja h a função de domínio $\mathbb{R}$ definida por $h(x) = -(g(x))^2$.

a) Determine o valor de $\dfrac{g(x_2) - g(x_1)}{x_2 - x_1}$, para quaisquer $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ e distintos. Justifique que a função g é estritamente crescente em $\mathbb{R}$.

b) Mostre que a função h não é injectiva.

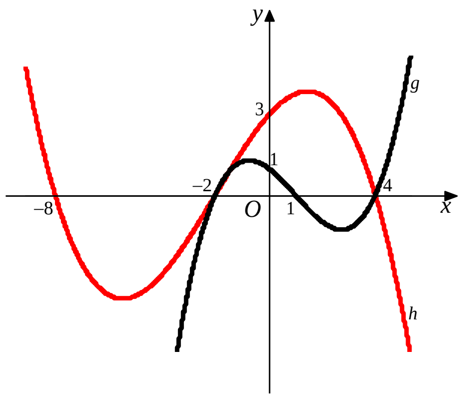
c) Mostre que o gráfico da função h tem a concavidade voltada para baixo em $\mathbb{R}$.

Adaptado de dois exercícios do manual "Dimensões 10" da Editora Santillana

16. Na figura estão representados em referencial o.n. xOy parte dos gráficos das funções g e h, ambas de domínio $\mathbb{R}$.

Sabe-se que:

- o gráfico de g intersecta o eixo Ox nos pontos de abcissa -2, 1 e 4
- o gráfico de g intersecta o eixo Oy no ponto de ordenada 1
- o gráfico de h intersecta o eixo Ox nos pontos de abcissa -8, -2 e 4
- o gráfico de h intersecta o eixo Oy no ponto de ordenada 3



16.1. Qual é o valor de $(g \circ h)(-8)$?

A 0 **B** 1 **C** 3 **D** 5

16.2. A função h é definida por $h(x)=ag(bx)$, com $a,b\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

Quais são os valores de a e de b?

A $a=3$ e $b=-\frac{1}{2}$

B $a=3$ e $b=\frac{1}{2}$

C $a=\frac{1}{3}$ e $b=-2$

D $a=-3$ e $b=-\frac{1}{2}$

17. Sejam f uma função afim de domínio $\mathbb{R}$ tais que $f(-2)=6$ e $f(6)=-6$, g a função inversa de f e a função h, de domínio $[1,+\infty[$, definida por $h(x)=\sqrt{2x-2}$.

17.1. Qual é o valor de $(f\circ f)(-2)+(g\circ h)(19)$?

A -12

B -8

C -6

D 0

17.2. Qual é o domínio da função $h\circ f$?

A $\left[\frac{4}{3},+\infty\right[$

B $[2,+\infty[$

C $\left]-\infty,\frac{4}{3}\right]$

D $]-\infty,2]$

17.3. Qual das seguintes é a expressão analítica da função g, função inversa de f?

A $g(x)=-\frac{3x}{2}+3$

B $g(x)=-\frac{2x}{3}+2$

C $g(x)=\frac{3x}{2}+9$

D $g(x)=\frac{2x}{3}-6$

17.4. Seja t a função de domínio $\mathbb{R}$ definida por $t(x)=|f(x)|$

Qual das seguintes afirmações é verdadeira?

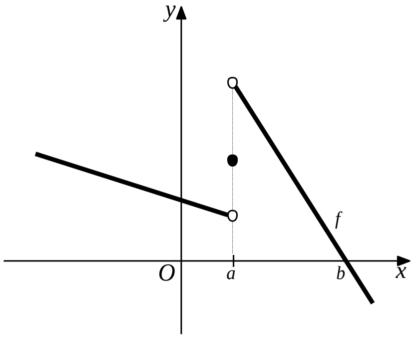
A A função t tem máximo absoluto em $x=2$.

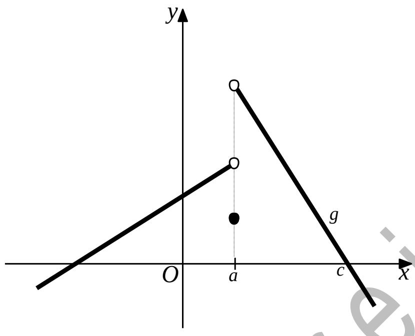
B A função t tem máximo absoluto em $x=-6$.

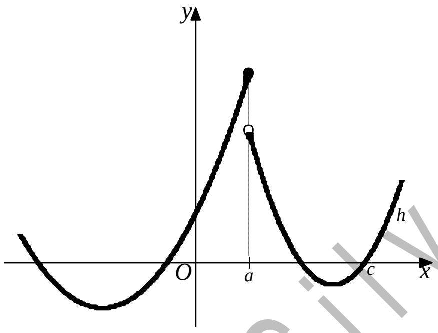
C A função t tem mínimo absoluto em $x=-6$.

D A função t tem mínimo absoluto em $x=2$.

18. Nas figuras estão representadas em referencial o.n. xOy as funções f, g e h, todas de domínio $\mathbb{R}$.







18.1. Quais das três funções tem um extremo relativo no ponto de abcissa a?

A Apenas h **B** f e g **C** g e h **D** f, g e h

18.2. O gráfico da função h é composto por partes de duas parábolas.

Considere as seguintes afirmações:

I. O gráfico da função h tem a concavidade voltada para cima em $\mathbb{R}$.

II. Em $]-\infty, a]$ o gráfico da função h tem a concavidade voltada para cima.

Quais das afirmações são verdadeiras?

A Nenhuma **B** **I** **C** **II** **D** **I** e **II**.

18.3. Qual das seguintes afirmações é necessariamente falsa?

A $(f \circ h)(-a) > 0$ **B** $(h \circ g)(c) > 0$

C $(g \circ h)(a) < 0$ **D** $(g \circ f)(b) < 0$

19. Considere a função f, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $f(x) = kx^2$, com $k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Sejam A, B e C os pontos de abcissas a, b e c, respectivamente, com $a < b < c$, pertencentes ao gráfico de f tais que $m_{AB} < m_{BC}$, onde m_{AB} designa o declive da recta AB e m_{BC} designa o declive da recta BC.

19.1. Qual das seguintes afirmações é necessariamente verdadeira?

A $k > 0$ **B** $k = 7$ **C** $k < 0$ **D** $k = 2$

19.2. Considere $a = -1$, $b = 3$ e $m_{AB} = 14$. Qual é o valor de k?

A 5 **B** 6 **C** 7 **D** 8

20. Considere as funções $f : \{-4, -2, 0, 4, 6\} \to \{-1, 0, 1, 2, 4\}$ tais que $G_f = \{(-4,0), (-2,-1), (0,1), (4,2), (6,4)\}$ e a função g, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $g(x) = x^2 - x$

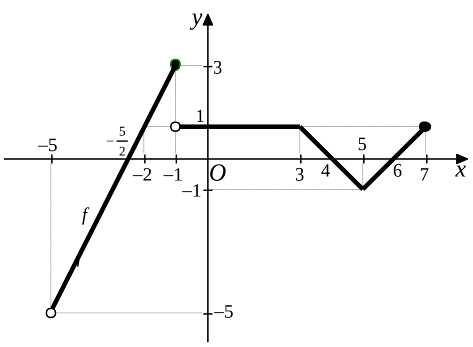
20.1. Qual das seguintes afirmações é verdadeira?

A $f^{-1}(0) - f(6) = 0$ **B** $(f \circ f)(6) = 2f(0)$

C $(g \circ f^{-1})(0) = 0$ **D** $\left| f^{-1}(-1) \right| = -g(-1)$

20.2. Determine o conjunto solução da equação $(f \circ g)(x) = 4$.

21. Na figura, está representada em referencial o.n. xOy o gráfico da função f de domínio $]-5, 7]$.



21.1. Construa a tabela de variação da monotonia da função f.

21.2. Qual é o contradomínio da função g, definida por $g(x) = \left| 2(f(x) - 1) \right|$?

21.3. Considere a função h, definida por $h(x) = -2f\left(\frac{2x}{3}\right)$.

a) Determine os zeros da função h.

b) Estude a função h quanto à existência de extremos relativos e absolutos. Caso existam, indique-os.

21.4. O ponto de coordenadas $(6,2)$ não pertence ao gráfico da função:

A $f\left(\frac{x}{2}\right)+1$ **B** $f(x-1)+3$ **C** $f\left(-\frac{x}{6}\right)-2$ **D** $f(x-8)+1$

21.5. Considere a função t, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $t(x) = 2x-3$

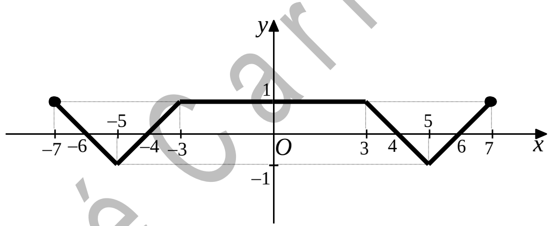
Determine o conjunto solução da equação $(t \circ f)(x) = -1$.

21.6. Caracterize a função j, função inversa da função da função $f\big|_{]-5,-1]} :]-5,-1] \to]-5,3]$.

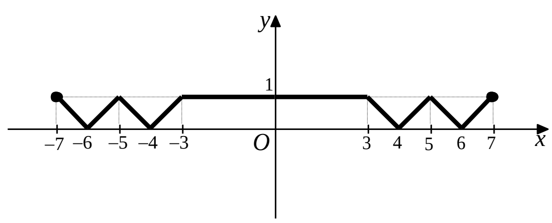
21.7. Considere a função i, definida por $i(x) = \left| f(|x|) \right|$.

Numa pequena composição indique a opção onde pode estar representado o gráfico da função j e apresente, para cada uma das restantes opções, uma razão para rejeitar o gráfico dessa opção.

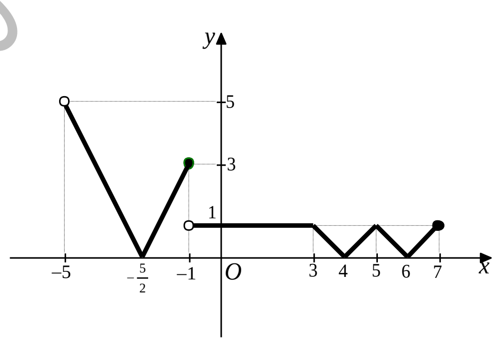
A



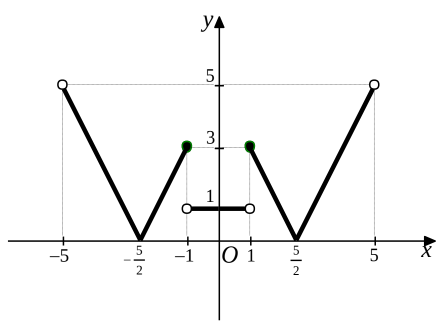
B



C



D



Solucionário

1.1. $G_f = \{(-2,4),(-1,1),(0,0),(1,1),(2,4)\}$; $f(-1) = f(1) = 1$ e $-1 \neq 1 \Rightarrow f$ não é injectiva; $D'_f = \{0,1,4\} \neq B \Rightarrow f$ não é sobrejectiva

1.2. $g^{-1} : \{a,b,c\} \to \{a,b,c\}$ tal que $g^{-1}(b) = a$, $g^{-1}(c) = b$ e $g^{-1}(a) = c$.

1.3. $h^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $h^{-1}(x) = \frac{x}{2} - 2$.

1.4. **a)** 4

1.4. **b)** a

1.4. **c)** 0

1.4. **d)** c

1.4. **e)** 3

1.5.

x	-3	$-\frac{5}{2}$	-2	$-\frac{3}{2}$	-1
$(f \circ h)(x)$	4	1	0	1	4

$$D_{f \circ h} = \left\{-3, -\frac{5}{2}, -2, -\frac{3}{2}, -1\right\}$$

1.6. Por exemplo $A = \{0,1,2\}$ e $B = \{0,1,4\}$

2. A

3.1. $D'_g = \{-1,0,2,6\} \neq \{-1,0,2,5,6,7\} \Rightarrow g$ não é sobrejectiva; $g(1) = g(4) = 0$ e $1 \neq 4 \Rightarrow g$ não é injectiva

3.2. f é bijectiva, isto é, é injectiva e sobrejectiva. Logo, f admite inversa.

3.3.

x	1	4	6	8
$(f \circ g)(x)$	3	3	-3	-3

$$D_{f \circ g} = \{1,4,6,8\}$$

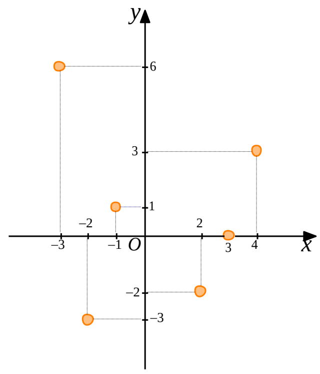
3.4. **a)** 0

3.4. -2

3.4. **c)** 0

3.4. **d)** 3

3.5.



3.6. **a)** $\{3\}$

3.6. **b)** $\left\{-\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, 3\right\}$

3.6. **a)** $\{-3,0\}$

4. B

5.1. D

5.2. C

5.3. C

5.4. B

6. A

7. B

8.1. B

8.3. **a)** $\{-5,-2,1\}$

8.3. **b)** $\{-12,0,12\}$

8.3. **c)** $\{-3,0,3\}$

8.4. $\left[2, \frac{14}{3}\right[$

9.1. $[-6,-3]\cup]1,5]$

9.2. A função h é estritamente crescente em $\left]-\infty,-\frac{9}{2}\right]$; é estritamente decrescente em $\left[-\frac{9}{2},-2\right]$ e em $]1,+\infty[$; é constante em $[-2,1[$. $\frac{9}{8}$ é um máximo relativo em $x=-\frac{9}{2}$; -2 é um máximo relativo para todo o $x\in]-2,1[$; -2 é um mínimo relativo para todo o $x\in[-2,1[$. A função h não tem extremos absolutos.

9.3. **a)** Verdadeira

9.3. **b)** Falsa. Por exemplo, $-6\neq-3$ mas $h(-6)=h(-3)=0$; h não é injectiva.

9.3. **c)** Verdadeira. $h\left(h\left(-\frac{1}{2}\right)\right)=h(-2)=-2$

9.4. $k\in]-\infty,-2[\cup\left\{\frac{9}{8}\right\}$

9.5. $D_g=\mathbb{R}\setminus\{3\}$; $D'_g=]-7,+\infty[$

9.6. **c)** $\frac{7}{3}$

9.6. **d)** $g^{-1}:]-\infty,3[\to]1,+\infty[$ tal que $g^{-1}(x)=-\frac{4x}{3}+5$

9.6. **e)** $]-1,0[\cup]1,+\infty[$

10.3. $]-\infty,-1]\cup[1,+\infty[$

11.1. C

11.2. A

12. B

13.1. $k\in]-\sqrt{3},1[\cup]\sqrt{3},+\infty[$

13.2. $h(0)=3\neq0$. Se uma função afim é ímpar, então o seu gráfico contém o ponto de coordenadas $(0,0)$. Logo, h nunca pode ser ímpar.

13.3. Verdadeira

13.4. $a=-3$

14. C

15.3. $m=-1$ e $b=3$

15.4. **a)** 2

15.4. **b)** $h(-1)=h(1)=-4$ e $-1\neq1\Rightarrow h$ não é injectiva

16.1. B

16.2. A

17.1. B

17.2. C

17.3. B

17.4. D

18.1. C

18.2. C

18.3. D

19.1. A

19.2. C

20.1. B

20.2. $\{-2,3\}$

21.1.

x	-5		-1		3		5		7
$f(x)$	n.d.	$\nearrow$	3	$\rightarrow$	1	$\searrow$	-1	$\nearrow$	1

21.2. $[0,12[$

21.3. **a)** $\left\{-\frac{15}{4},6,9\right\}$

21.3. **b)** -6 é um mínimo absoluto em $x=-\frac{3}{2}$; -2 é um mínimo relativo para todo o $x\in\left]-\frac{3}{2},\frac{9}{2}\right]\cup\left\{\frac{21}{2}\right\}$; -2 é um máximo relativo para todo o $x\in\left]-\frac{3}{2},\frac{9}{2}\right[$; 2 é um máximo relativo em $x=\frac{15}{2}$

21.4. C

21.5. $x\in]-1,3]\cup\{-2,7\}$

21.6. $j:]-5,3]\to]-5,-1]$ tal que $j(x)=\frac{x}{2}-\frac{5}{2}$.

21.7. B