Preparação para exame

12.º Ano de Escolaridade | Turma G-K

SUCESSÕES DE NÚMEROS REAIS

A saber...

- Uma sucessão (u_n) é monótona crescente se $u_{n+1} - u_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}$
- Uma sucessão (u_n) é monótona decrescente se $u_{n+1} - u_n < 0, \forall n \in \mathbb{N}$
- Uma sucessão (u_n) é limitada se $\exists m, M \in \mathbb{R} : m \leq u_n \leq M, \forall n \in \mathbb{N}$
  $m \rightarrow minorante$; $M \rightarrow majorante$
- Uma sucessão (u_n) é convergente para a $(a \in \mathbb{R})$ se $\forall \delta > 0, \exists p \in \mathbb{N} : n \geq p \Rightarrow |u_n - a| < \delta$
- Teorema: Toda a sucessão monótona e limitada é convergente
- **Teoremas de comparação e de enquadramento**
  - Se (a_n) e (b_n) são duas sucessões de números reais tais que, $\lim(a_n) = +\infty$, e a partir de uma certa ordem, $b_n \geq a_n$, então, $\lim(b_n) = +\infty$
  - Se (a_n) e (b_n) são duas sucessões de números reais tais que, $\lim(a_n) = -\infty$, e a partir de uma certa ordem, $b_n \leq a_n$, então, $\lim(b_n) = -\infty$
  - Sejam (a_n) e (b_n) duas sucessões de números reais tais que, $\lim(a_n) = \lim(b_n) = l$, e seja (c_n) uma sucessão de números reais, tal que, a partir de uma certa ordem, $a_n \leq c_n \leq b_n$, então, $\lim(c_n) = l$

1. Considera a sucessão (u_n) definida por $u_n = 1 - \dfrac{2}{n}$.

   1.1. Prova que a sucessão é limitada. Determina um majorante e um minorante do conjunto dos seus termos.

   1.2. Mostra, pela definição, que $\lim(u_n) = 1$

2. Considera as sucessões (a_n) e (b_n) de termos gerais $a_n = \dfrac{2n+3}{n+1}$ e $b_n = 2n + 1$.

   2.1. Mostra que $2 < a_n \leq \dfrac{5}{2}, \forall n \in \mathbb{N}$.

   2.2. Comenta a afirmação seguinte: "a sucessão (a_n) é limitada".

   2.3. Determina $\lim (a_n)^n$.

   2.4. Mostra, pela definição, que $\lim(b_n) = +\infty$.

   2.5. Relativamente a uma sucessão (c_n), sabe-se que $c_n \geq b_n, \forall n > 55$. O que podes afirmar quanto ao $\lim(c_n)$?

3. Mostra, recorrendo ao teorema das sucessões enquadradas, que:

   3.1. $\lim \left(\dfrac{2n+3}{4n+2}\right)^n = 0$

   3.2. $\lim \dfrac{3\cos(4n)+1}{2n^2+4} = 0$

   3.3. $\lim \sqrt[n]{5^n + 6^n + 7^n + 8^n} = 8$

   3.4. $\lim \displaystyle\sum_{p=1}^{2n} \frac{6n+1}{\sqrt{4n^4+p}} = 6$

FUNÇÕES REAIS DE VARIÁVEL REAL - TAXA MÉDIA DE VARIAÇÃO - TAXA DE VARIAÇÃO - DERIVADA

A saber...

- Seja f uma função real de variável real, e $[a;b]$ um intervalo do seu domínio
  A taxa média de variação da função f no intervalo $[a;b]$ é igual a
  $$t.m.v_{[a;b]} = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$
- Seja f uma função real de variável real, e a um ponto do seu domínio
  A derivada da função f no ponto a é igual a
  $$f'(a) = \lim_{h\mapsto 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$
  ou
  $$f'(a) = \lim_{x\mapsto a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$
- Seja f uma função real de variável real, e $I(a;f(a))$ um ponto do seu gráfico
  O declive m_t da reta tangente (t), ao gráfico da função, no ponto I, é igual a $f'(a)$
- Regras de derivação:
  - $k'=0$, sendo k uma constante
  - $x'=1$
  - $(f+g)'=f'+g'$
  - $(f\times g)'=f'\times g+g'\times f$
  - $\left(\frac{f}{g}\right)'=\frac{f'\times g-f\times g'}{g^2}$, $g(x)\neq 0$
  - $\left(\frac{1}{x}\right)'=-\frac{1}{x^2}$
  - $(x^n)'=n\times x^{n-1}$

---

4. Considera a função g, real de variável real, definida por $g(x)=2x^2-4x$.

   4.1. Determina a taxa média de variação da função no intervalo $[1;2]$.

   4.2. Determina a taxa média de variação da função no intervalo $[-2;0]$.

   4.3. Geometricamente, o que representa o valor encontrado no item anterior?

5. Usando as regras de derivação, escreve a expressão da função derivada de cada uma das funções seguintes:

   5.1. $f(x)=2x^3-4x^2-5x+4$

   5.2. $f(x)=\frac{1-x}{1+x}$

   5.3. $f(x)=\frac{x^3-1}{1+2x}$

6. Considera a função f, real de variável real, definida por $f(x)=\frac{-x^2+x-1}{2x}$, com $x\neq 0$.

   6.1. Escreve a equação da reta tangente ao gráfico da função no ponto de abcissa -1.

   6.2. Faz o estudo da monotonia e determina, caso existem, os extremos da função.

7. Relativamente a uma função f, sabe-se que

   $$\lim_{h\mapsto 0} \frac{f(-1+h)-f(-1)}{h}=2$$

   Escreve a equação reduzida da reta tangente ao gráfico da função f no ponto $T(-1;2)$.

TRIGONOMETRIA

8. Na figura está representado, em referencial o.n. xOy, a circunferência de centro O e raio 4.

Sabe-se que:

- P e B são os pontos de interseção da circunferência com os semieixos positivos Ox e Oy, respetivamente;
- E é o ponto de interseção da circunferência com os semieixo negativo Oy;
- o ponto A desloca-se ao longo do arco PB, nunca coincidindo com o ponto P nem com o ponto B;
- os pontos C, D, e F, acompanham o movimento do ponto A, de tal modo que se tem sempre, , $[AF]//[CD]$; $[AC]//[DF]$; $[AC]\perp Oy$ e $[AF]\perp Ox$;
- x é a amplitude, em radianos, do ângulo POA, $\left(x \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[\right)$.

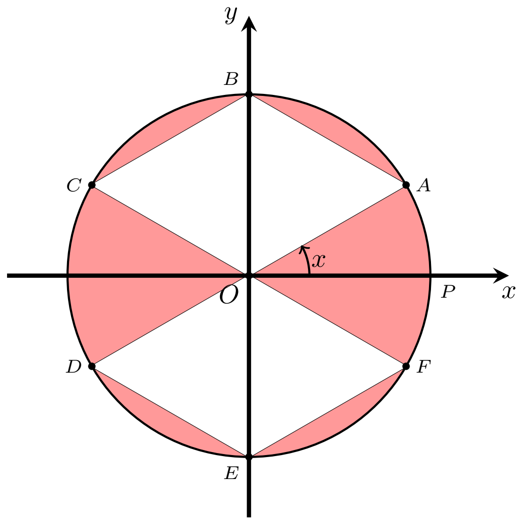


Figura 1

Resolve os três primeiros itens sem recorreres à calculadora.

8.1. Mostra que a área da região sombreada, é dada, em função de x, por $A(x) = 16\pi - 32\cos(x)$.

8.2. Sabendo que $\alpha \in \left]0; \dfrac{\pi}{2}\right[$ e que $tg(\pi - \alpha) = -\dfrac{2}{3}$, determina o valor exato de $A(\alpha)$.

8.3. Determina $x \in \left]0; \dfrac{\pi}{2}\right[$ tal que $A(x) = 16\pi - 16\sqrt{3}$

8.4. Recorrendo às potencialidades da calculadora gráfica, resolve o seguinte problema: "Qual ou quais os valores de x para os quais a área sombreada é igual a 8π unidades de área".
Apresenta o resultado arredondado às décimas.

9. Resolve, em $\mathbb{R}$, as equações seguintes:

9.1. $\sin(x) - \sin(x)\cos(x) = 0$

9.2. $\sin^4(x) - \cos^4(x) = 0$

10. Considera a função f, real de variável real, definida por $f(x) = \sqrt{2} - 2\cos\left(\dfrac{2x}{3}\right)$.

10.1. Mostra que a função f é par.

10.2. Determina o período positivo mínimo da função f.

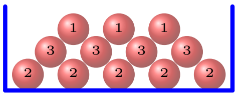
10.3. Determina o contradomínio da função f.

PROBABILIDADES E CÁLCULO COMBINATÓRIO

11. Uma caixa contém doze bolas, indistinguíveis ao tato: três bolas com o número 1, cinco bolas com o número 2 e quatro bolas com o número 3. Retiram-se, da caixa, três bolas ao acaso. Qual a probabilidade de a soma dos números saídos ser igual a cinco?

    Uma resposta correta para este problema é: $\dfrac{{}^3C_2 \times 4 +^5 C_2 \times 3}{{}^{12}C_3}$

    Numa pequena composição, explica esta resposta.
    Deves organizar a tua composição de acordo com os seguintes tópicos:
    Referência à regra de Laplace;
    Explicação do número de casos possíveis;
    Explicação do número de casos favoráveis.



12. O quarto elemento de uma certa linha do Triângulo de Pascal é 19600. A soma dos quatro primeiros elementos dessa linha é 20876.
    Qual é o terceiro elemento da linha seguinte?

13. A soma de todos os elementos das n primeiras linhas do Triângulo de Pascal é 16383.

    13.1. Quantas linhas foram adicionadas?

    13.2. Qual é o penúltimo número da linha seguinte à última que foi adicionada?

14. Considera a expressão algébrica $\left(\sqrt[8]{x^2} - \dfrac{1}{\sqrt{y}}\right)^{12}$, $y > 0$.

    14.1. Haverá algum termo de grau três na incógnita x, no desenvolvimento $\left(\sqrt[8]{x^2} - \dfrac{1}{\sqrt{y}}\right)^{12}$? Caso exista, determina-o.

    14.2. Determina o termo médio do desenvolvimento de $\left(\sqrt[8]{x^2} - \dfrac{1}{\sqrt{y}}\right)^{12}$

15. Considera o desenvolvimento de $\left(\dfrac{x^9}{y^2} - \dfrac{\sqrt[6]{y}}{x}\right)^n$ com $n \in \mathbb{N}_0$. Um dos termos deste desenvolvimento é igual a $15x^{-5}y^{\frac{1}{3}}$. Determina n.