Recursos para Matemática

Grupo do Facebook

Prova Modelo de Exame Nacional

Matemática A

Prova 635 | Ensino Secundário | Junho 2022

Grupo
Recursos Para Matemática

Duração da Prova: 150 minutos. | Tolerância: 30 minutos. 8 Páginas

A prova inclui 12 itens, devidamente identificados no enunciado por uma moldura que os rodeia, cujas respostas contribuem obrigatoriamente para a classificação final. Dos restantes 6 itens da prova, apenas contribuem para a classificação final os 3 itens cujas respostas obtenham melhor pontuação.

INSTRUÇÕES DE REALIZAÇÃO

- Para cada resposta, identifique o item.
- Utilize apenas caneta ou esferográfica de tinta azul ou preta.
- Não é permitido o uso de corretor. Risque aquilo que pretende que não seja classificado.
- É permitido o uso de régua, compasso, esquadro, transferidor e calculadora gráfica.
- Apresente apenas uma resposta para cada item.
- As cotações dos itens encontram-se no final do enunciado da prova.

- A prova inclui um formulário.
- Nas respostas aos itens de escolha múltipla, selecione a opção correta. Escreva, na folha de respostas, o número do item e a letra que identifica a opção escolhida.
- Nas respostas aos restantes itens, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias. Quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, apresente sempre o valor exato.

Formulário

Geometria

Comprimento de um arco de circunferência:

αr (α - amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r - raio)

Área de um polígono regular: *Semiperímetro* $\times$ *Apótema*

Área de um sector circular:

$\dfrac{\alpha r^2}{2}$ (α - amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r - raio)

Área lateral de um cone: $\pi r g$ (r- raio da base; g - geratriz)

Área de uma superfície esférica: $4\pi r^2$ (r- raio)

Volume de uma pirâmide: $\dfrac{1}{3} \times$ *Área da base* $\times$ *Altura*

Volume de um cone: $\dfrac{1}{3} \times$ *Área da base* $\times$ *Altura*

Volume de uma esfera: $\dfrac{4}{3}\pi r^3$ (r- raio)

Progressões

Soma dos n primeiros termos de uma progressão (u_n):

Progressão aritmética: $\dfrac{u_1 + u_n}{2} \times n$

Progressão geométrica: $u_1 \times \dfrac{1 - r^n}{1 - r}$

Trigonometria

$\operatorname{sen}(a+b) = \operatorname{sen} a \cos b + \operatorname{sen} b \cos a$

$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b$

Complexos

$\left(\rho e^{i\theta}\right)^n = \rho^n e^{in\theta}$

$\sqrt[n]{\rho e^{i\theta}} = \sqrt[n]{\rho}\, e^{i\frac{\theta + 2k\pi}{n}} \quad \left(k \in \{0, \ldots, n-1\} \text{ e } n \in \mathbb{N}\right)$

Regras de derivação

$(u+v)' = u' + v'$

$(uv)' = u'v + uv'$

$\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$

$(u^n)' = n u^{n-1} u' \ (n \in \mathbb{R})$

$(\operatorname{sen} u)' = u' \cos u$

$(\cos u)' = -u' \operatorname{sen} u$

$(\operatorname{tg} u)' = \dfrac{u'}{\cos^2 u}$

$(e^u)' = u' e^u$

$(a^u)' = u' a^u \ln a \quad \left(a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}\right)$

$(\ln u)' = \dfrac{u'}{u}$

$(\log_a u)' = \dfrac{u'}{u \ln a} \quad \left(a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}\right)$

Limites notáveis

$\lim \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n = e \quad (n \in \mathbb{N})$

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x^p} = +\infty \quad (p \in \mathbb{R})$

Roberto Oliveira

1. Considere uma progressão geométrica monótona (a_n).

Sabe-se que $a_2 = 36$ e que $a_4 = 81$.

Qual das seguintes é uma expressão do termo geral de (a_n)?

(A) $16 \times \left(-\dfrac{3}{2}\right)^n$ **(B)** $\dfrac{45}{2}n - 9$ **(C)** $16 \times \left(\dfrac{3}{2}\right)^n$ **(D)** $81 \times \left(\dfrac{2}{3}\right)^n$

Vasco Coelho

2. Relativamente a duas sucessões (a_n) e (b_n) sabe-se que:

- (a_n) é progressão aritmética;
- $a_3 = 18$ e $a_{10} = 39$;
- $b_n = \dfrac{12k - n}{n + k}$, $k \in \mathbb{R}$

Determine k de modo que $a_5 + \ldots + a_{13}$ seja o trigésimo sexto termo de (b_n).

Manuel Gonçalves

3. Na figura 1 está representada uma grelha retangular de 3 por 6.

Pretende-se distribuir dez cartões numerados de 1 a 10 pelas "casas" da grelha de modo a que:

- cada cartão colocado ocupe apenas uma "casa" da grelha;
- uma das linhas fique completamente livre;
- uma das linhas fique ocupada com, exatamente, 6 cartões;
- os cartões em cada linha fiquem todos juntos e encostados a uma das laterais da grelha.

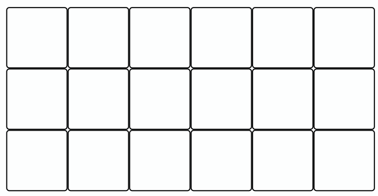

Figura 1

O número de maneiras diferentes de o fazer é?

(A) 29 030 400 **(B)** 43 545 600 **(C)** 21 772 800 **(D)** 311 040

Manuel Gonçalves

4. Seja k o valor do décimo quinto elemento de uma determinada linha do triângulo de Pascal de modo a que o valor do trigésimo sétimo elemento é também igual a k.

Selecionando, ao acaso, 5 elementos da linha seguinte determine a probabilidade de, pelo menos dois deles, serem inferiores a k.

Apresente o resultado em percentagem com arredondamento às centésimas.

Fred CC

5. Numa certa região do país, uma central elétrica distribui eletricidade para as cidades da região.

A distribuição da eletricidade pode, ou não, passar por uma subestação elétrica.

Num certo momento, para uma das cidades da região, A-do-Alentejo, verificou-se que:

- $\frac{3}{5}$ da distribuição da eletricidade passa pela subestação;
- a percentagem de eletricidade que a cidade A-do-Alentejo recebe e não passa na subestação é 12%.

Designe por A o acontecimento «eletricidade recebida pela cidade A-do-Alentejo» e por S o acontecimento «eletricidade que passa pela subestação».

Determine o valor de $P\left(A|S\right)$, de modo a satisfazer as seguintes condições,

$$P\left(\overline{S}|A\right) = P\left(S|\overline{A}\right) \qquad \text{e} \qquad P\left(A|S\right) > 0{,}5$$

Apresente o resultado arredondado às décimas.

Se, em cálculos intermédios, proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, quatro casas decimais.

Antero Neves

6. Na figura 2 podemos visualizar um cubo $[ABCDHEFG]$ e uma pirâmide $[EIJHQ]$ parcialmente inserida no cubo.

Sabe-se que:

- $A(2,-2,0)$, $B(2,2,0)$ e $C(-2,2,0)$;
- I e J são pontos médios de $[BF]$ e $[CG]$, respetivamente;
- o centro da base da pirâmide é a projeção ortogonal do ponto Q no plano EHI;
- o ponto Q pertence ao plano BCG;
- o ponto P é a interseção de QI com FG.

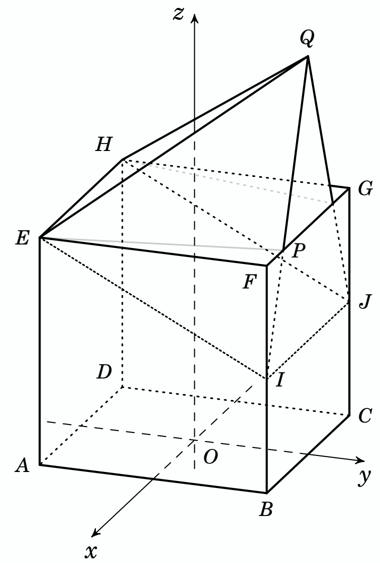

Figura 2

6.1. Qual das seguintes condições define uma superfície esférica com o centro no interior do cubo e que contém os pontos A, C e I?

(A) $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y + 2z = 8$

(B) $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y - 2z = 8$

(C) $x^2 + y^2 + z^2 + 2x + 2y - 6z = 8$

(D) $x^2 + y^2 + z^2 + 4x + 4y - 10z = 8$

6.2. Calcule as coordenadas da projeção ortogonal de P sobre o plano que contém a base da pirâmide.

Antero Neves

7. Na figura 3 estão representados em referencial o.n. xOy, uma circunferência de raio 2 centrada na origem O do referencial, o ângulo α, os pontos A, B e C e o triângulo do qual são vértices e ainda o ponto D.

Sabe-se que:

- α é a amplitude do ângulo DOA e $\alpha \in \left]0, \frac{\pi}{4}\right[$;
- os pontos A, B, C e D situam-se na circunferência;
- o ponto B é simétrico do ponto A relativamente à bissetriz dos quadrantes pares;
- o ponto C pertence ao eixo das ordenadas.
- o ponto D pertence ao semieixo positivo das abcissas.

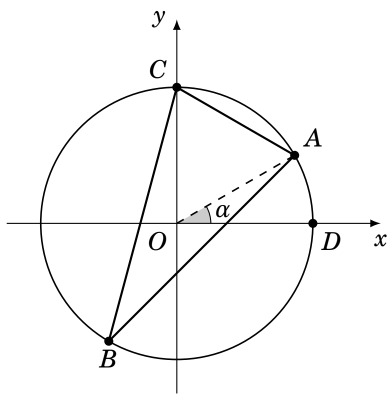

Figura 3

Mostre que a área $A(\alpha)$ do triângulo $[ABC]$ se pode escrever, em função de α como:

$$A(\alpha) = 2\sqrt{2}\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) + 2\cos(2\alpha)$$

Marisa Cardoso

8. Seja f a função de domínio $\mathbb{R}^+$, definida por:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^{3-x} - x + 2}{2x^2 - 18} & \text{se } x > 3 \\ k & \text{se } x = 3 \\ e^{\left[\ln(3-x) - \ln\left(\sqrt{3} - \sqrt{x}\right)\right]} & \text{se } 0 < x < 3 \end{cases}$$

8.1. Mostre que não existe nenhum k, para o qual a função f seja contínua em $x = 3$.

8.2. Mostre que $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{2x\left(f(x) - f(1)\right)}{x^2 - 1} = \dfrac{1}{2}$.

Item extra: Mostre que a taxa média de variação no intervalo $[1,2]$ é igual a $\sqrt{2} - 1$.

Sugestão: Comece por mostrar que para $x \in]0,3[$: $f(x) = \dfrac{3-x}{\sqrt{3} - \sqrt{x}}$.

Carlos Frias

9. Seja f a função, de domínio $\mathbb{R}^+$, definida por $f(x) = x^2 \ln x$.

9.1. Qual das equações seguintes define a reta tangente ao gráfico de f, no ponto de ordenada nula?

(A) $y = 2x - 1$ **(B)** $y = x - 1$ **(C)** $y = x - 2$ **(D)** $y = 2x - 2$

9.2. Considere o triângulo $[OAP]$, sendo:

- O a origem do referencial;
- A o ponto do gráfico de f com ordenada mínima;
- P um ponto do gráfico de f com abcissa maior que 1.

Sabe-se que o triângulo $[OAP]$ é retângulo em A, utilize as potencialidades da sua calculadora para determinar, com aproximação às centésimas, as coordenadas do ponto P.

Na sua resposta, deve:

- determinar, por processos analíticos, as coordenadas do ponto A;
- apresentar uma equação cuja solução corresponda ao resultado pretendido;
- apresentar o(s) gráfico(s) visualizado(s) na calculadora, apresentado o(s) ponto(s) relevante(s) para o problema;
- indicar uma aproximação para as coordenadas do ponto P.

Victor Correira

10. Em $\mathbb{C}$, o conjunto dos números complexos, considera z_1 e z_2 em que $z_1 = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$.

Sabe-se que, no plano complexo, as imagens geométricas de z_1 e de z_2 são vértices consecutivos de um polígono regular com n lados.

Seja w o número complexo tal que $w = \dfrac{z_2}{z_1}$.

Sabendo que w é um imaginário puro, qual o valor de n?

(A) 3 **(B)** 4 **(C)** 5 **(D)** 6

Carlos Paulo Freitas

11. Resolva este item sem recorrer à calculadora, a não ser para eventuais cálculos numéricos.

Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, a condição $|z-2+i| = 3\sqrt{5}$ define, no plano complexo, uma circunferência.

Considere todos os números complexos cujos afixos pertencem a esta circunferência.

Determine qual deles tem maior módulo e qual tem menor módulo.

Apresente esses números complexos na forma $a+bi$, com $a, b \in \mathbb{R}$.

Paulo Conde

12. Considere a função f definida em $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ por:

$$f(x) = \begin{cases} x - x e^{\frac{2}{x}} & \text{se } x < 0 \\ \dfrac{1-\cos x}{x^2} & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

Estude a função f quanto à existência de assíntotas ao seu gráfico paralelas aos eixos coordenados.

Tozé Oliveira

13. Seja f uma função, de domínio $\left]0, \frac{\pi}{2}\right]$, cuja **derivada**, também de domínio $\left]0, \frac{\pi}{2}\right]$, é definida por:

$$f'(x) = \frac{\cos x}{2 - \operatorname{sen} x}.$$

Estude a função f quanto ao sentido das concavidades do seu gráfico e quanto à existência de pontos de inflexão.

Na sua resposta, apresente:

- o(s) intervalo(s) em que o gráfico de f tem concavidade voltada para baixo;
- o(s) intervalo(s) em que o gráfico de f tem concavidade voltada para cima;
- a(s) abcissa(s) do(s) ponto(s) de inflexão do gráfico de f.

Pedro Teixeira

14. Determine, em $\mathbb{R}$, o conjunto-solução da equação:

$$2\ln^2(2x+3) - \ln(2) = 3 + \ln\left(x + \frac{3}{2}\right)$$

José Carlos Pereira

15. Sejam f uma função duas vezes diferenciável em $\mathbb{R}$ e $a \in \mathbb{R}^-$.

Sabe-se que:

- $f(1) = 1$ e $f'(1) = 0$;
- $f''(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

Mostre que a equação $f(x) = f(x+1)$ tem exatamente uma solução em $]a, f(a)[$.

<table>
<tr><td>As pontuações obtidas nas respostas a estes 12 itens da prova contribuem obrigatoriamente para a classificação final.</td><td>1.</td><td>3.</td><td>4.</td><td>6.1.</td><td>6.2.</td><td>8.1.</td><td>8.2.</td><td>9.1.</td><td>9.2.</td><td>10.</td><td>12.</td><td>15.</td><td>Subtotal</td></tr>
<tr><td>Cotação (em pontos)</td><td>12</td><td>12</td><td>14</td><td>12</td><td>14</td><td>14</td><td>14</td><td>12</td><td>14</td><td>12</td><td>14</td><td>14</td><td>158</td></tr>
<tr><td>Destes 6 itens, contribuem para a classificação final da prova os 3 itens cujas respostas obtenham melhor pontuação.</td><td colspan="2">2.</td><td colspan="2">5.</td><td colspan="2">7.</td><td colspan="2">11</td><td colspan="2">13.</td><td colspan="2">14.</td><td>Subtotal</td></tr>
<tr><td>Cotação (em pontos)</td><td colspan="12">3 × 14 pontos</td><td>42</td></tr>
<tr><td colspan="13">Total</td><td>200</td></tr>
</table>

Coordenação
José Carlos Pereira

Paginação
Antero Neves