Funções reais de variável real

Exercícios de aplicação - páginas 139 a 145

1. O gráfico da função f é simétrico relativamente à origem, pelo que a função é ímpar. Assim, a proposição **(I)** é verdadeira.
A função f é bijetiva, pelo que admite função inversa. Assim, a proposição **(II)** é verdadeira.
O gráfico da função g não é simétrico relativamente ao eixo das ordenadas, pelo que a função não é par. Assim, a proposição **(III)** é falsa.
A função f não é injetiva, pelo que não é bijetiva, logo não admite função inversa. Assim, a proposição **(IV)** é falsa.

2.

2.1. Devemos começar por fatorizar a expressão:

$$-x^5 + 2x^4 + 5x^3 - 6x^2 = x^2(-x^3 + 2x^2 + 5x - 6)$$

Como 3 é zero de f, temos:

$$\begin{array}{c|ccc|c} & -1 & 2 & 5 & -6 \\ 3 & & -3 & -3 & 6 \\ \hline & -1 & -1 & 2 & 0 \end{array}$$

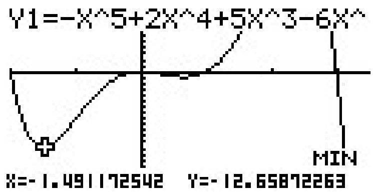
Assim, $-x^3 + 2x^2 + 5x - 6 = (x-3)(-x^2 - x + 2)$.
Resolvendo agora a equação $-x^2 - x + 2 = 0$, obtemos $x = 1 \vee x = -2$.
Temos então que $f(x) = -x^5 + 2x^4 + 5x^3 - 6x^2 = -x^2(x-3)(x-1)(x+2)$
Desta forma, o conjunto dos zeros de f é $\{-2, 0, 1, 3\}$.

2.2. Para determinar a solução da inequação $f(x) < 0$ podemos recorrer a uma tabela de sinais

x	$-\infty$	-2		0		1		3	$+\infty$
$-x^2$	$-$	$-$	$-$	0	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$
$x-3$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$x-1$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$x+2$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$f(x)$	$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$	0	$-$

$f(x) < 0 \Leftrightarrow -2 < x < 0 \vee 0 < x < 1 \vee x > 3$
C.S.$=]-2,0[\cup]0,1[\cup]3,+\infty[$

2.3. Uma vez que o maior zero de f é 3, temos que $A(3,0)$. Com o auxílio da máquina gráfica, podemos verificar que $B(-1,49;\ -12,66)$.



Desta forma, a área do triângulo $[OAB]$ é dada por :

$$\frac{-\text{Ordenada de } B \times \text{Abcissa de } A}{2} \approx 18,99 (2 \text{ c. d.}) u.a.$$

3.

3.1.

$$|3x+2| = 1 \Leftrightarrow 3x+2 = 1 \vee 3x+2 = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{3} \vee x = -1$$

C.S.$= \left\{-1, -\dfrac{1}{3}\right\}$

3.2.

$$|2x-3| \leq 2 \Leftrightarrow 2x-3 \leq 2 \wedge 2x-3 \geq -2 \Leftrightarrow x \leq \frac{5}{2} \wedge x \geq \frac{1}{2}$$

C.S.$= \left[\dfrac{1}{2}, \dfrac{5}{2}\right]$

3.3.

$$\begin{aligned} 2|-x+1| \geq 4 \quad &\Leftrightarrow \quad |-x+1| \geq 2 \Leftrightarrow -x+1 \geq 2 \vee -x+1 \leq -2 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \quad -x \geq 1 \vee -x \leq -3 \Leftrightarrow x \leq -1 \vee x \geq 3 \end{aligned}$$

C.S.$=]-\infty, -1] \cup [3, +\infty[$

3.4.

$$-|2x+5|+1>0 \Leftrightarrow |2x+5|<1 \Leftrightarrow 2x+5<1 \wedge 2x+5>-1 \Leftrightarrow x<-2 \wedge x>-3$$

C.S.$=\,]-3,-2[$

3.5.

$$\begin{aligned} |x+2|>|x-3| &\Leftrightarrow (x+2)^2>(x-3)^2 \Leftrightarrow x^2+4x+4>x^2-6x+9 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 10x>5 \Leftrightarrow x>\frac{1}{2} \end{aligned}$$

C.S.$=\left]\frac{1}{2},+\infty\right[$

4.
4.1.

$$\sqrt{5x-4}=x \Rightarrow 5x-4=x^2 \Leftrightarrow x=1 \vee x=4$$

Verificando, temos que $\sqrt{5\times 1-4}=1$ é uma proposição verdadeira e $\sqrt{5\times 4-4}=4$ também é uma proposição verdadeira.
C.S.$=\{1,4\}$

4.2.

$$\sqrt{x+6}-x=0 \Leftrightarrow \sqrt{x+6}=x \Rightarrow x+6=x^2 \Leftrightarrow x=3 \vee x=-2$$

Verificando, temos que $\sqrt{3+6}-3=0$ é uma proposição verdadeira e $\sqrt{-2+6}-(-2)=0$ é uma proposição falsa.
C.S.$=\{3\}$

4.3.

$$\sqrt{x}+\sqrt{x-3}=3 \Rightarrow x+x-3+2\sqrt{x^2-3x}=9 \Leftrightarrow \sqrt{x^2-3x}=6-x \Rightarrow$$
$$x^2-3x=(6-x)^2 \Leftrightarrow x^2-3x=36+x^2-12x \Leftrightarrow x=4$$

Verificando, temos que $\sqrt{4}+\sqrt{4-3}=3$ é uma proposição verdadeira.

C.S.$=\{4\}$

4.4.

$\sqrt{x-2} < 2 \Rightarrow x-2 < 2^2 \wedge x-2 > -2^2 \Leftrightarrow x < 6 \wedge x > -2$

Por outro lado, a expressão só é válida no seu domínio.
$x-2 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 2$

C.S.$=[2,6[$

5.

$$g(x) = 2x+4 \Leftrightarrow y = 2x+4 \Leftrightarrow x = \frac{y-4}{2}$$

Assim,

$$g^{-1}(x) = \frac{x-4}{2}$$

Resolvendo agora a equação, temos:

$f \circ g^{-1}(x) = 0 \Leftrightarrow g^{-1}(x) = 3 \vee g^{-1}(x) = -3 \Leftrightarrow \dfrac{x-4}{2} = 3 \vee \dfrac{x-4}{2} = -3 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x = 10 \vee x = -2$

C.S.$= \{-2, 10\}$

6.

$g(x) = 0 \Leftrightarrow -f(x-1) = 0 \Leftrightarrow x-1 = -5 \vee x-1 = 3 \Leftrightarrow x = -4 \vee x = 4$

A tabela de sinais de g fica então:

x	$-\infty$	-4		4	$+\infty$
Sinal de g	$-$	0	$+$	0	$-$

7.

$$\begin{aligned} &g(x) = 0 \Leftrightarrow |2f(x)| - 4 = 0 \Leftrightarrow |2f(x)| = 4 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 2f(x) = 4 \vee 2f(x) = -4 \Leftrightarrow f(x) = 2 \vee f(x) = -2 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x = -1 \vee x = 1 \vee x = 3 \vee x = 6 \end{aligned}$$

A tabela de sinais de g fica então:

x	-1		1		3		5		6
Sinal de g	0	$-$	0	$-$	0	$-$	0	$-$	$-$

8.

8.1.

O ponto P é vértice do prisma quadrangular regular, cujas bases são perpendiculares a Oz, pelo que $P(a, a, z)$. Como P também pertence ao plano ABC, temos que $3a + 2a + z = 9$, ou seja, $z = -5a + 9$. O ponto P tem coordenadas $(a, a, -5a + 9)$.

A área das bases é dada por a^2 e a área das faces laterais do prisma é dada por $a \times (9 - 5a) = -5a^2 + 9a$. Assim, a área total da superfície do prisma é dada por $4 \times (-5a^2 + 9a) + 2 \times a^2 = -18a^2 + 36a$, como queríamos demonstrar.

8.2.

A área total da superfície do prisma, A, é dada em função de a através da expressão:

$$A(a) = -18a^2 + 36a = -18a(a - 2)$$

Assim, o gráfico de A é uma parábola com a concavidade voltada para baixo. Desta forma, A é máxima quando a corresponde à abcissa do vértice da parábola, ou seja, para $a = 1$.

8.3.

$$-18a^2 + 36a = 10 \Leftrightarrow a = \frac{1}{3} \vee a = \frac{5}{3}$$

Como a parábola tem a concavidade voltada para baixo

$$-18a^2 + 36a < 10 \Leftrightarrow a < \frac{1}{3} \vee a > \frac{5}{3}$$

Tendo em consideração que $a \in \left]0, \frac{9}{5}\right[$, temos que:

C.S.$= \left]0, \frac{1}{3}\right[\cup \left]\frac{5}{3}, \frac{9}{5}\right[$

9.
9.1.

$$x^2 + x - 6 = 0 \Leftrightarrow x = -3 \vee x = 2$$

$$2 - x^2 = 0 \Leftrightarrow x = -\sqrt{2} \vee x = \sqrt{2}$$

A tabela de sinais é então:

x	$-\infty$	-3		$-\sqrt{2}$		$\sqrt{2}$		2	$+\infty$
x^2+x-6	$+$	0	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$2-x^2$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	0	$-$	$-$	$-$
$\frac{x^2+x-6}{2-x^2}$	$-$	0	$+$	n.d.	$-$	n.d.	$+$	0	$-$

Assim, os zeros de f são -3 e 2.
A função é positiva em $\left]-3, -\sqrt{2}\right[\cup \left]\sqrt{2}, 2\right[$.
A função é negativa em $]-\infty, -3[\cup \left]-\sqrt{2}, \sqrt{2}\right[\cup]2, +\infty[$.

9.2. Comecemos por simplificar a expressão:

$$\frac{1}{x} - \frac{2}{x^2 - 3x} = \frac{x - 3 - 2}{x(x-3)} = \frac{x-5}{x(x-3)}$$

$$x - 5 = 0 \Leftrightarrow x = 5$$

$$x(x-3) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 3$$

A tabela de sinais é então:

x	$-\infty$	0		3		5	$+\infty$
$x-5$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$x(x-3)$	$+$	0	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$\frac{x-5}{x(x-3}$	$-$	n.d.	$+$	n.d.	$-$	0	$+$

Assim, o zero de f é 5.
A função é positiva em $]0, 3[\cup]5, +\infty[$.
A função é negativa em $]-\infty, 0[\cup]3, 5[$.

Exercícios propostos
Itens de seleção - páginas 146 a 151

1. Nas representações I e IV existem valores de x que correspondem a mais do que um valor de y, pelo que não podem representar funções.

Opção (B).

2. A Joana sai de casa, pelo que a distância inicial é 0. Depois, quando se desloca do ponto A ao ponto B, a sua distância aumenta de forma constante. Entre o ponto B e o ponto C, a distância da Joana a sua casa diminui e depois volta a aumentar. O único gráfico que representa todas estas características é o gráfico (D).

Opção (D).

3. A soma das áreas dos quadrados é dada por:

$$x^2 + (8-x)^2 = x^2 + 64 + x^2 - 16x = 2x^2 - 16x + 64$$

Opção (A).

4. A diferença entre o ponto mais distante e o ponto mais próximo é de 20 metros. Assim, a circunferência tem um diâmetro de 20 metros e, consequentemente, um raio de 10 metros.

Opção (B).

5. Se um quadrado tem perímetro p, então o seu lado mede $\frac{p}{4}$. Desta forma, a área do quadrado é dada por:

$$\left(\frac{p}{4}\right)^2 = \frac{p^2}{16}$$

Opção (C).

6. Sabemos que os pontos $A(3,0)$ e $B(1,3)$ pertencem ao gráfico de g. Assim, o declive da reta é dado por:

$$\frac{0-(-5)}{3-(-2)} = 1$$

Além disso, como a reta passa no ponto A, temos que:

$$0 = 3 + b \Leftrightarrow b = -3$$

A função g é então definida pela expressão $g(x) = x - 3$.
Opção (D).

7. Como a abcissa do vértice da parábola não é 0, a função não é par. Como a ordenada do vértice é 3 e o ponto de coordenadas $(-2, -4)$ pertence à parábola, então a função tem a concavidade voltada para baixo, pelo que tem dois zeros, é crescente no intervalo $]-\infty, 1]$ e o seu contradomínio é $]-\infty, 3]$.
Opção (C).

8.

$$-x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 0$$

Opção (B).

9. Se o tempo for inferior ou igual a uma hora, o preço é de 3 euros. Se o tempo é superior a uma hora, o preço é de 3 euros mais $0,1$ euros por cada minuto após os 60.
Opção (C).

10.
Para $x \leq 0$:

$$9 - x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 3 \vee x = -3$$

Assim, -3 é zero de f.

Para $x > 0$:

$$\frac{x^2 - 4}{x + 2} = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4 = 0 \wedge x + 2 \neq 0 \Leftrightarrow x = 2$$

Assim, 2 é zero de f.

Opção (B).

11.

11.1. O gráfico da função definida por $f(x)+\frac{5}{2}$ obtém-se através do gráfico de f por uma translação associada ao vetor $(0,\frac{5}{2})$. Desta forma, a função definida por $f(x)+\frac{5}{2}$ não tem zeros.

Opção (A).

11.2. Pelo gráfico da função, os valores de y que têm exatamente três valores de x que lhes correspondem são os que pertencem ao intervalo $[2,3]$.

Opção (C).

12. A função g não está definida em $x=a$ e $h(a)$ não é máximo nem mínimo de h. As únicas funções com máximo em $x=a$ são as funções f e i.

Opção (B).

13. Para que a função f não tenha zeros, é necessário que o binómio discriminante da equação $f(x)=0$ seja negativo.

$$6^2-4\times 1\times k<0 \Leftrightarrow -4k<-36 \Leftrightarrow k>9$$

Opção (B).

14. Uma função nessas condições deve ter um gráfico obtido a partir do gráfico de f através de uma translação associada ao vetor $(-3,0)$.

Opção (C).

15. O gráfico de g pode ser obtido a partir do gráfico de f através de uma reflexão relativamente ao eixo Ox, seguida de uma translação associada ao vetor $(-2,-2)$.

Opção (D).

16. A função $f\times g$ tem um zero, pelo que a opção (A) é falsa. Temos que $g(-1)=0$ e $f(0)=1$, logo g não é a função inversa de f. O domínio de g é $]-\infty,0[$ e o contradomínio de f é $]0,+\infty[$, donde são diferentes.

Opção (C).

17. Uma vez que a função é estritamente decrescente, não pode ter mais do que um zero, é necessariamente injetiva e não poderá ser uma função par. Assim, as opções (A), (B) e (C) não podem ser falsas.

Opção (D).

18. O domínio da função j é o conjunto-solução da inequação $f(x) \geq 0$.

Opção (D).

19. O vértice desta parábola tem as coordenadas $(-h, k)$. Assim, $h < 0$ e $k > 0$.

Opção (B).

20.

$$D_f = \left\{ x \in \mathbb{R} : \frac{-x+1}{x+2} \geq 0 \wedge x+2 \neq 0 \right\}$$

Considerando a tabela de sinais:

x	$-\infty$	-2		1	$+\infty$
$-x+1$	$+$	$+$	$+$	0	$-$
$x+2$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$\frac{x-1}{x+2}$	$-$	n.d.	$+$	0	$-$

Obtemos:

$$D_f =]-2, 1]$$

Opção (A).

21.

$$-2 \leq x \leq 4 \Leftrightarrow -1 \leq \frac{x}{2} \leq 2 \Leftrightarrow -2 \leq -\frac{x}{2} \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq -\frac{x}{2} + 1 \leq 2$$

$$-1 \leq f(x) \leq 2 \Leftrightarrow -1 \leq f(x-2) \leq 2 \Leftrightarrow -2 \leq -f(x-2) \leq 1 \Leftrightarrow 1 \leq -f(x-2)+3 \leq 4$$

Opção (B).

22.

$$f(g(3)) = f(g(-3)) = f(5) = 9$$

A proposição p é verdadeira.

$$y = 2x - 1 \Leftrightarrow x = \frac{y+1}{2}$$

Assim, a função f^{-1} é definida pela expressão $f^{-1}(x) = \frac{x+1}{2}$.

$$(f^{-1} + f)(3) = \frac{3+1}{2} + 2 \times 3 - 1 = 7$$

A proposição q é falsa.
Opção (D).

23. Para que a função seja crescente em $]1, +\infty[$ é necessário que $b < 0$ e para que a função não tenha zeros nesse intervalo é necessário que $a \leq 0$.
Opção (D).

24.

$$-6 \leq f(x) \leq 5 \Rightarrow 0 \leq |f(x)| \leq 6$$

Opção (A).

25. Como a função é par e $P(a, b)$ pertence ao gráfico de g, então também o ponto de coordenadas $(-a, b)$ pertence ao gráfico de g. Como $b \neq 0$, então o ponto de coordenadas $(-a, -b)$ não poderá pertencer ao gráfico de g.
Opção (C).

26.
26.1. Uma vez que $-1 \notin D_f$ não pode ser zero de $f \times g$. 0 é zero de $f \times g$, pois é zero de f e 2 é zero de $f \times g$, pois é zero de g.
Opção (A).

26.2.

$$(f \circ g)(0) = f(2) = \frac{2}{3} \neq 2$$

Opção (D).

26.3. O gráfico da função $-g$ pode ser obtido a partir do gráfico de g através de uma simetria relativamente ao eixo Ox. Assim, 2 é um maximizante de $-g$.

Opção (C).

27. Se f e g são negativas em todo o seu domínio, então a função $f+g$ tambem é negativa em todo o seu domínio.

Opção (A).

28. Se $x \in [-\infty, -3[$, então $g(x) = -1$ e, portanto, $f(g(x)) = -2$.

Opção (B).

29. A função não é simétrica relativamente ao eixo Oy, pelo que não é uma função par. Além disso, uma vez que existem objetos diferentes com a mesma imagem, a função também não é bijetiva. Desta forma, tanto a proposição p como a proposição q são falsas. A equivalência de duas proposições falsas é verdadeira.

Opção (C).

30.

$$|x^2-1|-1 \geq 0 \Leftrightarrow |x^2-1| \geq 1 \Leftrightarrow x^2-1 \geq 1 \vee x^2-1 \leq -1 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x^2-2 \geq 0 \vee x^2 \leq 0 \Leftrightarrow x \geq \sqrt{2} \vee x \leq -\sqrt{2} \vee x = 0$$

Opção (A).

31. Sabemos que 0 é solução da inequação $f(x) \leq g(x)$, pois $\sqrt[3]{0} = \sqrt{0}$. Assim, a opção (A) é falsa. Sabemos também que, por exemplo, $\frac{1}{2^6}$ não é solução da inequação, pois:

$$\sqrt[3]{\frac{1}{2^6}} = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4}$$

$$\sqrt{\frac{1}{2^6}} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$$

Assim, as opções (B) e (D) são falsas.

Opção (C).

Exercícios de aplicação - páginas 158 a 199

1.

1.1.

Seja f uma função real de variável real definida por $f(x) = \frac{4}{x^2-1}$ e (x_n) uma sucessão qualquer de termos pertencentes a D_f tais que $x_n \to 3$:

$$\lim f(x_n) = \lim \left(\frac{4}{(x_n)^2 - 1} \right) = \frac{4}{(\lim x_n)^2 - 1} = \frac{4}{3^2 - 1} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

Como queríamos demonstrar.

1.2.

Seja f uma função real de variável real definida por $f(x) = 3 + \frac{1}{5x^2+1}$ e (x_n) uma sucessão qualquer de termos pertencentes a D_f tais que $x_n \to -\infty$:

$$\begin{aligned} \lim f(x_n) &= \lim \left(3 + \frac{1}{5(x_n)^2 + 1} \right) = 3 + \frac{1}{5(\lim x_n)^2 + 1} = 3 + \frac{1}{5(-\infty)^2 + 1} = \\ &= 3 + \frac{1}{+\infty + 1} = 3 + 0 = 3 \end{aligned}$$

Como queríamos demonstrar.

1.3.

Seja f uma função real de variável real definida por $f(x) = 4 - \frac{1}{2-x}$ e (x_n) uma sucessão qualquer de termos pertencentes a D_f tais que $x_n \to 2^-$:

$$\begin{aligned} \lim f(x_n) &= \lim \left(4 - \frac{1}{2 - x_n} \right) = 4 - \frac{1}{2 - \lim x_n} = 4 - \frac{1}{2 - 2^-} = \\ &= 4 - \frac{1}{0^+} = 4 - \infty = -\infty \end{aligned}$$

Como queríamos demonstrar.

2.
2.1.

$$\lim u_n = \lim \frac{n+1}{n+2} = \lim \left(1 - \frac{1}{n+2}\right) = 1^-$$

Assim:

$$\lim f(u_n) = +\infty$$

Opção (D).

2.2. Se $v_n \to -\infty$, então $\lim f(v_n) \to -1$.

$$\lim \left(-\sqrt{n} + \frac{1}{n^2}\right) = -\sqrt{+\infty} + \frac{1}{(+\infty)^2} = -\infty + \frac{1}{+\infty} = -\infty + 0 = -\infty$$

Opção (C).

3.
3.1.

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to-\infty} h(x) &= \lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{-x}-1}{x+1} \overset{(\frac{\infty}{\infty})}{=} \lim_{x\to-\infty} \frac{(\sqrt{-x}-1)(\sqrt{-x}+1)}{(x+1)(\sqrt{-x}+1)} = \\
&= \lim_{x\to-\infty} \frac{-x-1}{(x+1)(\sqrt{-x}+1)} = \lim_{x\to-\infty} -\frac{x+1}{(x+1)(\sqrt{-x}+1)} = \\
&= \lim_{x\to-\infty} -\frac{1}{(\sqrt{-x}+1)} = -\frac{1}{(\sqrt{-(-\infty)}+1)} = -\frac{1}{+\infty} = 0
\end{aligned}$$

3.2.

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to+\infty} h(x) &= \lim_{x\to+\infty} \frac{x^3+2x^2+2x+1}{-2x^2-6x-4} \overset{(\frac{\infty}{\infty})}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2\left(x+2+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}{x^2\left(-2-\frac{6}{x}-\frac{4}{x^2}\right)} = \\
&= \lim_{x\to+\infty} \frac{x+2+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}}{-2-\frac{6}{x}-\frac{4}{x^2}} = \frac{+\infty}{-2} = -\infty
\end{aligned}$$

3.3.

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to-1^+} h(x) &= \lim_{x\to-1^+} \frac{x^3+2x^2+2x+1}{-2x^2-6x-4} \overset{(\frac{0}{0})}{=} \lim_{x\to-1^+} \frac{(x+1)(x^2+x+1)}{(x+1)(-2x-4)} = \\
&= \lim_{x\to-1^+} \frac{x^2+x+1}{-2x-4} = -\frac{1}{2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to -1^-} h(x) &= \lim_{x\to -1^-} \frac{\sqrt{-x}-1}{x+1} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x\to -1^-} \frac{(\sqrt{-x}-1)(\sqrt{-x}+1)}{(x+1)(\sqrt{-x}-1)} = \\ &= \lim_{x\to -1^-} -\frac{1}{(\sqrt{-x}+1)} = -\frac{1}{2}\end{aligned}$$

$$h(-1) = -\frac{1}{2}$$

Como $\lim\limits_{x\to -1^-} h(x) = \lim\limits_{x\to -1^+} h(x) = h(-1) = -\frac{1}{2}$, podemos dizer que:

$$\lim_{x\to -1} h(x) = -\frac{1}{2}$$

4.

4.1.

$$\lim_{x\to 4} \frac{x^2-16}{5x-20} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x\to 4} \frac{(x-4)(x+4)}{5(x-4)} = \lim_{x\to 4} \frac{(x+4)}{5} = \frac{8}{5}$$

4.2.

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2+2x-3}{x-1} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x\to 1} \frac{(x+3)(x-1)}{x-1} = \lim_{x\to 1}(x+3) = 4$$

4.3.

$$\lim_{x\to 1} \frac{-2x^2-4x+6}{x-1} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x\to 1} \frac{(-2x-6)(x-1)}{x-1} = \lim_{x\to 1}(-2x-6) = -8$$

4.4.

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2+2x-3}{(x-1)^3} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x\to 1} \frac{(x+3)(x-1)}{(x-1)^3} = \lim_{x\to 1} \frac{x+3}{(x-1)^2} = \frac{4}{0^+} = +\infty$$

4.5.

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2+2x-3}{(x-1)^2} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x\to 1} \frac{(x+3)(x-1)}{(x-1)^2} = \lim_{x\to 1} \frac{x+3}{x-1}$$

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{x+3}{x-1} = \frac{4}{0^+} = +\infty$$

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{x+3}{x-1} = \frac{4}{0^-} = -\infty$$

Como $\lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{x+3}{x-1} \neq \lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{x+3}{x-1}$, temos que o limite $\lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{x+3}{x-1}$ não existe.

4.6.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to -1}\left[(x^3+1)\frac{1}{x+1}\right] &\overset{(0\times\infty)}{=} \lim_{x\to -1} \frac{x^3+1}{x+1} \overset{(\frac{0}{0})}{=} \lim_{x\to -1} \frac{(x^2-x+1)(x+1)}{x+1} = \\ &= \lim_{x\to -1}(x^2-x+1) = 3\end{aligned}$$

4.7.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{x+2}{x^2}} \overset{(\frac{\infty}{\infty})}{=} \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{x(x+2)} \overset{(\frac{0}{0})}{=} \lim_{x\to 0} \frac{x}{x+2} = 0$$

4.8.

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}\right) \overset{(+\infty-\infty)}{=} \lim_{x\to 0} \frac{x-1}{x^2} = \frac{-1}{0^+} = -\infty$$

4.9.

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{x^2+x}{x^3+1} \overset{(\frac{\infty}{\infty})}{=} \lim_{x\to +\infty} \frac{x^2\left(1+\frac{1}{x}\right)}{x^2\left(x+\frac{1}{x^2}\right)} = \lim_{x\to +\infty} \frac{1+\frac{1}{x}}{x+\frac{1}{x^2}} = \frac{1}{+\infty} = 0$$

4.10.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to -\infty} \frac{x^3+3x-1}{-x^2+2} &\overset{(\frac{\infty}{\infty})}{=} \lim_{x\to -\infty} \frac{x^2\left(x+\frac{3}{x}-\frac{1}{x^2}\right)}{x^2\left(-1+\frac{2}{x^2}\right)} = \\ &= \lim_{x\to -\infty} \frac{x+\frac{3}{x}-\frac{1}{x^2}}{-1+\frac{2}{x^2}} = \frac{-\infty}{-1} = +\infty\end{aligned}$$

5.

5.1.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 5} \frac{x-5}{\sqrt{x}-\sqrt{5}} &\overset{(\frac{0}{0})}{=} \lim_{x\to 5} \frac{(x-5)(\sqrt{x}+\sqrt{5})}{(\sqrt{x}-\sqrt{5})(\sqrt{x}+\sqrt{5})} = \\ &= \lim_{x\to 5} \frac{(x-5)(\sqrt{x}+\sqrt{5})}{x-5} = \lim_{x\to 5}(\sqrt{x}+\sqrt{5}) = 2\sqrt{5}\end{aligned}$$

5.2.

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{3x-1}-\sqrt{3x-4}\right)\overset{(+\infty-\infty)}{=}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{3x-1}-\sqrt{3x-4}\right)\left(\sqrt{3x-1}+\sqrt{3x-4}\right)}{\sqrt{3x-1}+\sqrt{3x-4}}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{3x-1-(3x-4)}{\sqrt{3x-1}+\sqrt{3x-4}}=\frac{3}{+\infty}=0$$

5.3.

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2-x+1}}{x}\overset{(+\infty-\infty)}{=}\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2\left(1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}}{x}=$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{|x|\sqrt{1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}}{x}=$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{-x\sqrt{1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}}{x}=$$

$$=\lim_{x\to-\infty}-\sqrt{1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}=-1$$

5.4.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{3x-1}-\sqrt{x-4}}{2x+3}\overset{(+\infty-\infty)}{=}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{(\sqrt{3x-1}-\sqrt{x-4})(\sqrt{3x-1}+\sqrt{x-4})}{(2x+3)(\sqrt{3x-1}+\sqrt{x-4})}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{3x-1-(x-4)}{(2x+3)(\sqrt{3x-1}+\sqrt{x-4})}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x+3}{(2x+3)(\sqrt{3x-1}+\sqrt{x-4})}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{3x-1}+\sqrt{x-4}}=\frac{1}{+\infty}=0$$

5.5.

$$
\begin{aligned}
&\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{3x-1}-\sqrt{x-4}\right)\overset{(+\infty-\infty)}{=}\\
&=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{3x-1}-\sqrt{x-4}\right)\left(\sqrt{3x-1}+\sqrt{x-4}\right)}{\sqrt{3x-1}+\sqrt{x-4}}=\\
&=\lim_{x\to+\infty}\frac{3x-1-(x-4)}{\sqrt{3x-1}+\sqrt{x-4}}=\\
&=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x+3}{\sqrt{3x-1}+\sqrt{x-4}}\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}\\
&=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\left(2+\frac{3}{x}\right)}{|x|\left(\sqrt{\frac{3}{x}-\frac{1}{x^2}}+\sqrt{\frac{1}{x}-\frac{4}{x^2}}\right)}=\\
&=\lim_{x\to+\infty}\frac{2+\frac{3}{x}}{\sqrt{\frac{3}{x}-\frac{1}{x^2}}+\sqrt{\frac{1}{x}-\frac{4}{x^2}}}=\frac{2}{0^+}=+\infty
\end{aligned}
$$

6.

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to-2^-}f(x) &= \lim_{x\to-2^-}\frac{x^3-x+6}{x^2-4}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim_{x\to-2^-}\frac{(x^2-2x+3)(x+2)}{(x-2)(x+2)}=\\
&= \lim_{x\to-2^-}\frac{x^2-2x+3}{x-2}=-\frac{11}{4}
\end{aligned}
$$

$$\lim_{x\to-2^+}f(x)=\lim_{x\to-2^+}(x+k^2-1)=k^2-3$$

$$f(-2)=-2+k^2-1=k^2-3$$

Para que a função seja contínua em $x=-2$, é necessário que:

$$k^2-3=-\frac{11}{4}\Leftrightarrow k^2=\frac{1}{4}\Leftrightarrow k=\frac{1}{2}\vee k=-\frac{1}{2}$$

7.

7.1.

$$\lim_{x\to0^-}g(x)=\lim_{x\to0^-}\frac{5-2x}{x+1}=5$$

$$\lim_{x\to0^+}g(x)=\lim_{x\to0^+}\sqrt{x^2+25}=5$$

$$g(0)=5$$

Como $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} g(x) = g(0)$, a função é contínua em $x=0$.

7.2.

$$\lim_{x\to 1^-} h(x) = \lim_{x\to 1^-} \frac{x^3-6x+5}{x-1} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x\to 1^-} \frac{(x^2+x-5)(x-1)}{x-1} = \lim_{x\to 1^-} (x^2+x-5) = -3$$

$$h(1)=-4$$

Como $\lim\limits_{x\to 1^-} h(x) \neq h(1)$, a função não é contínua em $x=1$.

8.
8.1.
No intervalo $]-\infty,2[$ a função é contínua, por se tratar do quociente entre duas funções contínuas: a função polinomial $x\mapsto x^3-8$ e a função afim $x\mapsto x-2$.

No intervalo $]2,+\infty[$ a função é contínua, pois é a soma de duas funções contínuas: uma que é a composta da função raiz quadrada com uma função polinomial $(x\mapsto \sqrt{x^2+10x+1})$ e a outra que é a função constante $x\mapsto 7$.

Averiguemos agora a continuidade no ponto $x=2$.

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-} \frac{x^3-8}{x-2} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x\to 2^-} \frac{(x^2+2x+4)(x-2)}{x-2} = \lim_{x\to 2^-} (x^2+2x+4) = 12$$

$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+} \sqrt{x^2+10x+1} = 12$$

$$f(2)=12$$

Como $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = f(2)$, a função é contínua em $x=2$.
Assim, a função f é contínua em $\mathbb{R}$.

8.2. Em qualquer ponto do conjunto $]-\infty, 1[\cup]1, +\infty[$ a função é contínua, por se tratar do quociente entre duas funções contínuas: a função afim $x \mapsto x - 1$ e a composta entre a função módulo e uma função afim $(x \mapsto |x-1|)$.

Averiguemos agora a continuidade no ponto $x = 1$.

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} \frac{x-1}{|x-1|} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x\to 1^-} \frac{x-1}{-(x-1)} = \lim_{x\to 1^-} -1 = -1$$

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} \frac{x-1}{|x-1|} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x\to 1^+} \frac{x-1}{x-1} = \lim_{x\to 1^+} 1 = 1$$

Como $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) \neq \lim\limits_{x\to 1^-} f(x)$, a função não é contínua em $x = 1$.

Assim, a função f é contínua em $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.

9.

9.1. A função f é contínua em $\mathbb{R}$, por se tratar de uma função polinomial. Em particular, é contínua em $[-2, -1]$. Como $f(-2) = 27$, $f(-1) = 2$ e $2 < 3 < 27$, pelo teorema de Bolzano-Cauchy, podemos concluir que existe pelo menos um número real $c \in]-2, -1[$ tal que $f(c) = 3$, isto é, a equação $f(x) = 3$ tem pelo menos uma solução no intervalo $]-2, -1[$ e, por conseguinte, tem pelo menos uma solução no intervalo $[-2, -1]$, como queríamos provar.

9.2. A função f é contínua em $\mathbb{R}$, por se tratar de uma função polinomial. Em particular, é contínua em $[-1, 0]$. Como $f(-1) = 2$, $f(0) = -1$, $-1 < 0 < 2$, pelo teorema de Bolzano-Cauchy, podemos concluir que existe pelo menos um número real $c \in]-1, 0[$ tal que $f(c) = 0$, isto é, a equação $f(x) = 0$ tem pelo menos uma solução no intervalo $]-1, 0[$, como queríamos provar.

9.3.

$$f(x) = g(x) \Leftrightarrow f(x) - g(x) = 0$$

A função $f - g$ é contínua em $\mathbb{R}$, por se tratar da diferença entre duas funções contínuas: uma função polinomial e a função raiz quadrada. Em particular, é contínua em $[0, 2]$. Como $(f-g)(0) = -1$, $(f-g)(2) = 9{,}6$ ($1\,c.d.$) e $-1 < 0 < 9{,}6$, pelo teorema de Bolzano-Cauchy, podemos concluir que existe pelo menos um número real $c \in]0, 2[$ tal que $(f-g)(c) = 0$, isto é, a equação $f(x) = g(x)$ tem pelo menos uma solução no intervalo $]0, 2[$, como queríamos provar.

10.
10.1.
No intervalo $]-\infty, 2[$ a função é contínua, por se tratar de uma função polinomial $x \mapsto 3x^3 - x - 1$.

No intervalo $]2, +\infty[$ a função é contínua, por se tratar de uma função polinomial $x \mapsto 3x^2 - 24x$.

Averiguemos agora a continuidade no ponto $x = 2$.

$$\lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2^-} (3x^3 - x - 1) = 21$$

$$\lim_{x \to 2^+} f(x) = \lim_{x \to 2^+} (3x^2 - 24x) = -36$$

Como $\lim_{x \to 2^+} f(x) \neq \lim_{x \to 2^-} f(x)$, a função não é contínua em $x = 2$.
Assim, a função f é contínua em $\mathbb{R} \setminus \{2\}$.

10.2. A função f é contínua em $\mathbb{R} \setminus \{2\}$ e, em particular, é contínua em $[-1, 1]$. Como $f(-1) = -3$, $f(1) = 1$ e $-3 < 0 < 1$, pelo teorema de Bolzano-Cauchy, podemos concluir que existe pelo menos um número real $c \in]-1, 1[$ tal que $f(c) = 0$, isto é, a equação $f(x) = 0$ tem pelo menos uma solução no intervalo $]-1, 1[$. Assim, a proposição é verdadeira.

11.

$$f(x) = f(x+2) \Leftrightarrow f(x) - f(x-2) = 0$$

Seja g a função definida por $g(x) = f(x) - f(x+2)$. A função g é contínua no intervalo $[a, a+2]$, uma vez que é a soma de duas funções contínuas e definidas nesse intervalo. Como $g(a) = f(a) - f(a+2) < 0$, $g(a+2) = f(a+2) - f(a+4) > 0$ e $g(a) < 0 < g(a+2)$, pelo teorema de Bolzano-Cauchy, podemos concluir que existe pelo menos um número real $c \in]a, a+2[$ tal que $g(c) = 0$, isto é, a equação $f(x) = f(x+2)$ tem pelo menos uma solução no intervalo $]a, a+2[$, como queríamos mostrar.

12.
12.1.
Assíntotas verticais:

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} : x - 3 \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{3\}$$

$$\lim_{x \to 3^-} \frac{5x^2 + x}{x - 3} = \frac{48}{0^-} = -\infty$$

Assim, a reta de equação $x = 3$ é assíntota vertical ao gráfico de f.

Assíntotas não verticais:

$$m = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{5x^2 + x}{x^2 - 3x} \overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=} \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2\left(5 + \frac{1}{x}\right)}{x^2\left(1 - \frac{3}{x}\right)} = \lim_{x \to +\infty} \frac{5 + \frac{1}{x}}{1 - \frac{3}{x}} = 5$$

$$\begin{aligned} b = \lim_{x \to +\infty} (f(x) - 5x) &= \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{5x^2 + x}{x - 3} - 5x \right) \overset{(+\infty - \infty)}{=} \\ &= \lim_{x \to +\infty} \frac{16x}{x - 3} = \lim_{x \to +\infty} \frac{16}{1 - \frac{3}{x}} = 16 \end{aligned}$$

Assim, a reta de equação $y = 5x + 16$ é assíntota oblíqua ao gráfico de f quando $x \to +\infty$.

Quando $x \to -\infty$ também se obtém a mesma reta.

12.2.
Assíntotas verticais:

$$D_g = \left\{x \in \mathbb{R} : (x + 1)^2 \neq 0\right\} = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$$

$$\lim_{x \to -1^-} \frac{3x + 1}{(x + 1)^2} = \frac{-2}{0^+} = -\infty$$

Assim, a reta de equação $x = -1$ é assíntota vertical ao gráfico de g.

Assíntotas não verticais:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{3x+1}{(x+1)^2} \stackrel{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{x\left(3+\frac{1}{x}\right)}{x\left(x+2+\frac{1}{x}\right)} = \frac{3}{+\infty} = 0$$

Assim, a reta de equação $y = 0$ é assíntota horizontal ao gráfico de f quando $x \to +\infty$.

Quando $x \to -\infty$ também se obtém a mesma reta.

12.3.

Assíntotas verticais:

$$D_h = \left\{x \in \mathbb{R} : 3x^2 + 1 \neq 0\right\} = \mathbb{R}$$

Assim, não existem assíntotas verticais ao gráfico de h.

Assíntotas não verticais:

$$m = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{3x^2+1}}{x} \stackrel{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{|x|\sqrt{3+\frac{1}{x^2}}}{x} = \lim_{x\to+\infty} \sqrt{3+\frac{1}{x^2}} = \sqrt{3}$$

$$\begin{aligned} b = \lim_{x\to+\infty} \left(f(x) - \sqrt{3}x\right) &= \lim_{x\to+\infty} \left(\sqrt{3x^2+1} - \sqrt{3}x\right) \stackrel{(+\infty-\infty)}{=} \\ &= \lim_{x\to+\infty} \frac{\left(\sqrt{3x^2+1} - \sqrt{3}x\right)\left(\sqrt{3x^2+1} + \sqrt{3}x\right)}{\sqrt{3x^2+1} + \sqrt{3}x} = \\ &= \lim_{x\to+\infty} \frac{3x^2+1-3x^2}{\sqrt{3x^2+1} + \sqrt{3}x} = \frac{1}{+\infty} = 0 \end{aligned}$$

Assim, a reta de equação $y = \sqrt{3}x$ é assíntota oblíqua ao gráfico de f quando $x \to +\infty$.

$$m = \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{3x^2+1}}{x} \stackrel{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=} \lim_{x\to-\infty} \frac{|x|\sqrt{3+\frac{1}{x^2}}}{x} = \lim_{x\to-\infty} -\sqrt{3+\frac{1}{x^2}} = -\sqrt{3}$$

$$\begin{aligned}
b = \lim_{x\to-\infty}\left(f(x)+\sqrt{3}x\right) &= \lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{3x^2+1}+\sqrt{3}x\right) \overset{(+\infty-\infty)}{=} \\
&= \lim_{x\to-\infty}\frac{\left(\sqrt{3x^2+1}+\sqrt{3}x\right)\left(\sqrt{3x^2+1}-\sqrt{3}x\right)}{\sqrt{3x^2+1}-\sqrt{3}x} = \\
&= \lim_{x\to-\infty}\frac{3x^2+1-3x^2}{\sqrt{3x^2+1}-\sqrt{3}x} = \frac{1}{+\infty} = 0
\end{aligned}$$

Assim, a reta de equação $y = -\sqrt{3}x$ é assíntota oblíqua ao gráfico de f quando $x \to -\infty$.

13.

13.1.

$$\lim_{x\to4^-} f(x) = \lim_{x\to4^-}\frac{8-x}{16-x} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$$

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to4^+} f(x) &= \lim_{x\to4^+}\frac{\sqrt{2x+1}-3}{x-4} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x\to4^+} f(x) = \lim_{x\to4^+}\frac{(\sqrt{2x+1}-3)(\sqrt{2x+1}+3)}{(x-4)(\sqrt{2x+1}+3)} \\
&= \lim_{x\to4^+}\frac{2x+1-9}{(x-4)(\sqrt{2x+1}+3)} = \lim_{x\to4^+}\frac{2}{\sqrt{2x+1}+3} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}
\end{aligned}$$

$$f(4) = \frac{1}{3}$$

Como $\lim_{x\to4^+} f(x) = \lim_{x\to4^-} f(x) = f(4)$, a função é contínua em $x = 4$.

13.2.

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to+\infty} f(x) &= \lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{2x+1}-3}{x-4} \overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=} \lim_{x\to+\infty}\frac{(\sqrt{2x+1}-3)(\sqrt{2x+1}+3)}{(x-4)(\sqrt{2x+1}+3)} = \\
&= \lim_{x\to+\infty}\frac{2x+1-9}{(x-4)(\sqrt{2x+1}+3)} = \lim_{x\to+\infty}\frac{2}{\sqrt{2x+1}+3} = \frac{2}{+\infty} = 0
\end{aligned}$$

Assim, a reta de equação $y = 0$ é uma assíntota horizontal ao gráfico de f quando $x \to +\infty$.

14.
14.1.

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-} \sqrt{x^2-5x+6} = 0$$

$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+} \frac{x^3-1}{x^2-1} = \frac{7}{3}$$

Como $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) \neq \lim\limits_{x\to 2^-} f(x)$, a função não é contínua em $x=2$.

14.2.

$$\begin{aligned}
b = \lim_{x\to -\infty} (f(x)+x) &= \lim_{x\to -\infty} (\sqrt{x^2-5x+6}+x) \overset{(+\infty-\infty)}{=} \\
&= \lim_{x\to -\infty} \frac{(\sqrt{x^2-5x+6}+x)(\sqrt{x^2-5x+6}-x)}{\sqrt{x^2-5x+6}-x} = \\
&= \lim_{x\to -\infty} \frac{x^2-5x+6-x^2}{\sqrt{x^2-5x+6}-x} \overset{(\frac{\infty}{\infty})}{=} \\
&= \lim_{x\to -\infty} \frac{-5x+6}{|x|\sqrt{1-\frac{5}{x}+\frac{6}{x^2}}-x} = \\
&= \lim_{x\to -\infty} \frac{x\left(-5+\frac{6}{x}\right)}{x\left(-\sqrt{1-\frac{5}{x}+\frac{6}{x^2}}-1\right)} = \\
&= \lim_{x\to -\infty} \frac{-5+\frac{6}{x}}{-\sqrt{1-\frac{5}{x}+\frac{6}{x^2}}-1} = \\
&= \frac{5}{2}
\end{aligned}$$

Assim, $b = \frac{5}{2}$.

15.

15.1.

$$a'(x) = (x^2 + \sqrt{2}x + 3)' = (x^2)' + (\sqrt{2}x)' + 3' = 2x + \sqrt{2}$$

15.2.

$$\begin{aligned} b'(x) &= \left(x^{2020} + \frac{1}{3}x^3 - x + 2020\right)' = \left(x^{2020}\right)' + \left(\frac{1}{3}x^3\right)' - x' + 2020' = \\ &= 2020x^{2019} + x^2 - 1 \end{aligned}$$

15.3.

$$\begin{aligned} c'(x) &= (5x^3 - x^2 + \sqrt{x} + \pi)' = (5x^3)' - (x^2)' + \sqrt{x}' + \pi' = \\ &= 15x^2 - 2x + \frac{1}{2\sqrt{x}} \end{aligned}$$

15.4.

$$\begin{aligned} d'(x) &= \left((2x^2 - 3)^4\right)' = 4(2x^2 - 3)^3(2x^2 - 3)' = \\ &= 4(2x^2 - 3)^3(4x - 0) = 16x(2x^2 - 3)^3 \end{aligned}$$

15.5.

$$\begin{aligned} e'(x) &= (x^3 \times \sqrt{x})' = \left(x^3\right)' \times \sqrt{x} + (x^3) \times \left(\sqrt{x}\right)' = \\ &= 3x^2\sqrt{x} + \frac{x^3}{2\sqrt{x}} = 3x^2\sqrt{x} + \frac{x^2\sqrt{x}}{2} = \frac{7x^2\sqrt{x}}{2} \end{aligned}$$

15.6.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(\left(2 - \frac{1}{2}x^2\right)\left(3 - x^3\right)\right)' = \\ &= \left(2 - \frac{1}{2}x^2\right)'\left(3 - x^3\right) + \left(2 - \frac{1}{2}x^2\right)\left(3 - x^3\right)' = \\ &= -x\left(3 - x^3\right) - 3x^2\left(2 - \frac{1}{2}x^2\right) = -3x + x^4 - 6x^2 + \frac{3}{2}x^4 = \\ &= -3x - 6x^2 + \frac{5}{2}x^4 \end{aligned}$$

15.7.

$$\begin{aligned} g'(x) &= \left(\frac{2}{x^2}+\frac{1}{x^3}+\frac{1}{2}x^2\right)' = \left(\frac{2}{x^2}\right)' + \left(\frac{1}{x^3}\right)' + \left(\frac{1}{2}x^2\right)' = \\ &= \frac{-4}{x^3} - \frac{3}{x^4} + x \end{aligned}$$

15.8.

$$\begin{aligned} h'(x) &= \left(2\sqrt{x}-\frac{1}{x}\right)' = \left(2\sqrt{x}\right)' - \left(\frac{1}{x}\right)' = \\ &= 2\times\frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{x^2} = \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{x^2} \end{aligned}$$

15.9.

$$\begin{aligned} i'(x) &= \left(\frac{5x}{x-1}\right)' = \frac{(5x)'(x-1)-5x(x-1)'}{(x-1)^2} = \\ &= \frac{5(x-1)-5x\times 1}{(x-1)^2} = \frac{-5}{(x-1)^2} \end{aligned}$$

15.10.

$$\begin{aligned} j'(x) &= \left(\frac{2x-3}{x+1}\right)' = \frac{(2x-3)'(x+1)-(2x-3)(x+1)'}{(x+1)^2} = \\ &= \frac{2(x+1)-(2x-3)\times 1}{(x+1)^2} = \frac{5}{(x+1)^2} \end{aligned}$$

15.11.

$$\begin{aligned} k'(x) &= \left(\frac{x}{x^2+1}\right)' = \frac{x'(x^2+1)-x(x^2+1)'}{(x^2+1)^2} = \\ &= \frac{x^2+1-x\times 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{-x^2+1}{(x^2+1)^2} \end{aligned}$$

15.12.

$$l'(x) = \left(\frac{-2x+10}{3}\right)' = \left(-\frac{2}{3}x\right)' + \left(\frac{10}{3}\right)' = -\frac{2}{3}$$

15.13.

$$\begin{aligned}
m'(x) &= \left(\left(\frac{2x-3}{x^2-4}\right)^3\right)' = 3\left(\frac{2x-3}{x^2-4}\right)^2\left(\frac{2x-3}{x^2-4}\right)' = \\
&= 3\left(\frac{2x-3}{x^2-4}\right)^2 \frac{(2x-3)'(x^2-4)-(2x-3)(x^2-4)'}{(x^2-4)^2} = \\
&= 3\left(\frac{2x-3}{x^2-4}\right)^2 \frac{2(x^2-4)-(2x-3)\times 2x}{(x^2-4)^2} \\
&= 3\left(\frac{2x-3}{x^2-4}\right)^2 \frac{2x^2-8-4x^2+6x}{(x^2-4)^2} \\
&= \frac{3(2x-3)^2(-2x^2+6x-8)}{(x^2-4)^4}
\end{aligned}$$

15.14.

$$\begin{aligned}
n'(x) &= \left(\sqrt[3]{x}-4\sqrt[4]{x}+8x-9\right)' = \left(x^{\frac{1}{3}}-4x^{\frac{1}{4}}+8x-9\right)' = \\
&= \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}-x^{-\frac{3}{4}}+8 = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}-\frac{1}{\sqrt[4]{x^3}}+8
\end{aligned}$$

15.15.

$$\begin{aligned}
o'(x) &= \left(\sqrt{x^2+3}\right)' = \left((x^2+3)^{\frac{1}{2}}\right)' = \frac{1}{2}(x^2+3)^{-\frac{1}{2}}(x^2+3)' = \\
&= \frac{1}{2\sqrt{x^2+3}}(2x+0) = \frac{2x}{2\sqrt{x^2+3}} = \frac{x}{\sqrt{x^2+3}}
\end{aligned}$$

15.16.

$$\begin{aligned}
p'(x) &= \left(\sqrt[3]{2x^4-1}\right)' = \left((2x^4-1)^{\frac{1}{3}}\right)' = \frac{1}{3}(2x^4-1)^{-\frac{2}{3}}(2x^4-1)' = \\
&= \frac{1}{3\sqrt[3]{(2x^4-1)^2}}(8x^3-0) = \frac{8x^3}{3\sqrt[3]{(2x^4-1)^2}}
\end{aligned}$$

15.17.

$$\begin{aligned}
q'(x) &= \left(\sqrt{\frac{2x-1}{3x+1}}\right)' = \left(\left(\frac{2x-1}{3x+1}\right)^{\frac{1}{2}}\right)' = \frac{1}{2}\left(\frac{2x-1}{3x+1}\right)^{-\frac{1}{2}}\left(\frac{2x-1}{3x+1}\right)' = \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{3x+1}{2x-1}\right)^{\frac{1}{2}} \times \frac{2(3x+1)-(2x-1)\times 3}{(3x+1)^2} = \\
&= \sqrt{\frac{3x+1}{2x-1}} \times \frac{5}{2(3x+1)^2}
\end{aligned}$$

16.
16.1.

$$D_f = \mathbb{R}$$

Determinar $f'(x)$:

$$f'(x) = \left(\frac{1}{3}x^3 - \frac{5}{2}x^2 + 6x + 1\right)' = x^2 - 5x + 6$$

Determinar os zeros de f':

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 5x + 6 = 0 \Leftrightarrow x = 2 \vee x = 3$$

Estudar o sinal de f' e a variação de f:

x	$-\infty$	2		3	$+\infty$
Sinal de f'	$+$	0	$-$	0	$+$
Variação de f	$\nearrow$	$\frac{17}{3}$ Máx.	$\searrow$	$\frac{11}{2}$ mín.	$\nearrow$

f é estritamente crescente em $]-\infty, 2]$ e em $[3, +\infty[$.

f é estritamente decrescente em $[2, 3]$.

$\frac{17}{3}$ é máximo relativo em 2.

$\frac{11}{2}$ é mínimo relativo em 3 .

16.2.

$$D_g = \{x \in \mathbb{R} : x - 1 \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{1\}$$

Determinar $g'(x)$:

$$\begin{aligned} g'(x) &= \left(\frac{x+4}{x-1}\right)' = \frac{(x+4)'(x-1) - (x+4)(x-1)'}{(x-1)^2} = \\ &= \frac{x - 1 - (x+4)}{(x-1)^2} = -\frac{5}{(x-1)^2} \end{aligned}$$

Determinar os zeros de g':

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow -\frac{5}{(x-1)^2} = 0$$

É uma condição impossível, pelo que g' não tem zeros.
Estudar o sinal de g' e a variação de g:

x	$-\infty$	2	$+\infty$
Sinal de g'	$-$	n.d.	$-$
Variação de g	$\searrow$	n.d.	$\searrow$

g é estritamente decrescente em $]-\infty, 1[$ e em $]1, +\infty[$.
g não tem extremos.

16.3.

$$D_h = \left\{x \in \mathbb{R} : x^2 + 4 \geq 0\right\} = \mathbb{R}$$

Determinar $h'(x)$:

$$h'(x) = \left(\sqrt{x^2+4}\right)' = \left((x^2+4)^{\frac{1}{2}}\right)' = \frac{1}{2}(x^2+4)^{-\frac{1}{2}}(2x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+4}}$$

Determinar os zeros de h':

$$h'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{2}{\sqrt{x^2+4}} = 0 \Leftrightarrow x = 0 \wedge \sqrt{x^2+4} \neq 0 \Leftrightarrow x = 0$$

Estudar o sinal de h' e a variação de h:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
Sinal de h'	$-$	0	$+$
Variação de h	$\searrow$	2 mín.	$\nearrow$

h é estritamente crescente em $[0, +\infty[$.
h é estritamente decrescente em $]-\infty, 0]$.
2 é mínimo absoluto em 0.

17.
17.1.

$$C(2) = 9,86 \qquad C(20) = 5$$

$$\text{t.v.m.}_{[2,20]} = \frac{5 - 9,86}{20 - 2} = -0,27$$

A cotação diminui, em média, 0, 27 euros por dia, entre o dia 2 e o dia 20.

17.2.

$$\begin{aligned} C'(15) &= \lim_{t\to 15} \frac{C(t) - C(15)}{t - 15} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \\ &= \lim_{t\to 15} \frac{(x-15)(-0,005x^2 + 0,15x - 0,75)}{x - 15} = \\ &= \lim_{t\to 15} (-0,005x^2 + 0,15x - 0,75) = \\ &= 0,375 \end{aligned}$$

No dia 15 a cotação das ações aumentava a uma taxa de 0, 375 euros por dia.

18. A bissetriz dos quadrantes pares tem declive -1. Uma vez que ela é tangente ao gráfico no ponto de abcissa 2, sabemos que $f'(2) = -1$.
Opção (A).

19.
19.1. Uma vez que a função é derivável em $x = 1$ também é contínua em $x = 1$. Assim, $\lim_{x\to 1} f(x) = f(1) = 4$.

19.2. O declive da reta é dado por $f'(1) = 6$. Assim, a equação reduzida da reta é $y = 6x + b$. Como o ponto de coordenadas $(1, 4)$ pertence à reta, vem que $4 = 6 \times 1 + b \Leftrightarrow b = -2$.
Concluímos assim que $y = 6x - 2$ é uma equação da reta tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa 1.

19.3.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x^2-1} &= \lim_{x\to 1}\left(\frac{f(x)-f(1)}{x-1}\times\frac{1}{x+1}\right)=\\ &= f'(1)\times\lim_{x\to 1}\frac{1}{x+1}=6\times\frac{1}{2}=\frac{6}{2}=3\end{aligned}$$

20.
20.1.

$$D_f=\mathbb{R}$$

Determinar $f'(x)$:

$$f'(x)=\left(\frac{x^4}{12}-2x^2+2\right)'=\frac{x^3}{3}-4x$$

Determinar $f''(x)$:

$$f''(x)=\left(\frac{x^3}{3}-4x\right)'=x^2-4$$

Determinar os zeros de f'':

$$f''(x)=0\Leftrightarrow x^2-4=0\Leftrightarrow x=-2\vee x=2$$

Estudar o sinal de f'' e o sentido das concavidades do gráfico de f:

x	$-\infty$	-2		2	$+\infty$
Sinal de f''	$+$	0	$-$	0	$+$
Sentido das concavidades do gráfico de f	$\cup$	$-\frac{14}{3}$ P.I.	$\cap$	$-\frac{14}{3}$ P.I.	$\cup$

O gráfico de f tem a concavidade voltada para cima em $]-\infty,-2]$ e em $[2,+\infty[$.

O gráfico de f tem a concavidade voltada para baixo em $[-2,2]$.

Os pontos de coordenadas $\left(-2,-\frac{14}{3}\right)$ e $\left(2,-\frac{14}{3}\right)$ são pontos de inflexão.

20.2.

$$D_g = \{x \in \mathbb{R} : x+2 \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$$

Determinar $g'(x)$:

$$g'(x) = \left(\frac{x-3}{x+2}\right)' = \frac{(x-3)'(x+2)-(x-3)(x+2)'}{(x+2)^2} = \frac{5}{(x+2)^2}$$

Determinar $g''(x)$:

$$g''(x) = \left(\frac{5}{(x+2)^2}\right)' = \frac{-5\left((x+2)^2\right)'}{(x+2)^4} = \frac{-10(x+2)}{(x+2)^4} = \frac{-10}{(x+2)^3}$$

Determinar os zeros de g'':

$$g''(x) = 0 \Leftrightarrow -10 = 0 \wedge (x+2)^3 \neq 0$$

Como esta é uma condição impossível, a segunda derivada de g não tem zeros.

Estudar o sinal de g'' e o sentido das concavidades do gráfico de g:

x	$-\infty$	-2	$+\infty$
Sinal de g''	$+$	n.d.	$-$
Sentido das concavidades do gráfico de g	$\cup$	n.d.	$\cap$

O gráfico de g tem a concavidade voltada para cima em $]-\infty, -2[$.

O gráfico de g tem a concavidade voltada para baixo em $]-2, +\infty[$.

O gráfico de g não tem pontos de inflexão.

20.3.

$$D_h = \left\{x \in \mathbb{R} : x^2+2 \neq 0\right\} = \mathbb{R}$$

Determinar $h'(x)$:

$$h'(x) = \left(\frac{x^2}{x^2+2}\right)' = \frac{2x(x^2+2)-x^2(2x+0)}{(x^2+2)^2} = \frac{4x}{(x^2+2)^2}$$

Determinar $h''(x)$:

$$\begin{aligned} h''(x) &= \left(\frac{4x}{(x^2+2)^2}\right)' = \frac{4(x^2+2)^2 - 4x \times 2(x^2+2)(2x+0)}{(x^2+2)^4} = \\ &= \frac{4(x^2+2) - 16x^2}{(x^2+2)^3} = \frac{8-12x^2}{(x^2+2)^3} \end{aligned}$$

Determinar os zeros de h'':

$$\begin{aligned} h''(x) &= 0 \Leftrightarrow 8 - 12x^2 = 0 \wedge (x^2+2)^3 \neq 0 \Leftrightarrow x = -\sqrt{\frac{2}{3}} \vee x = \sqrt{\frac{2}{3}} \Leftrightarrow x = \\ &= -\frac{\sqrt{6}}{3} \vee x = \frac{\sqrt{6}}{3} \end{aligned}$$

Estudar o sinal de h'' e o sentido das concavidades do gráfico de h:

x	$-\infty$	$-\frac{\sqrt{6}}{3}$		$\frac{\sqrt{6}}{3}$	$+\infty$
Sinal de h''	$-$	0	$+$	0	$-$
Sentido das concavidades do gráfico de h	$\cap$	$\frac{1}{4}$ P.I.	$\cup$	$\frac{1}{4}$ P.I.	$\cap$

O gráfico de h tem a concavidade voltada para baixo em $]-\infty, -\frac{\sqrt{6}}{3}]$ e em $[\frac{\sqrt{6}}{3}, +\infty[$.

O gráfico de h tem a concavidade voltada para cima em $[-\frac{\sqrt{6}}{3}, \frac{\sqrt{6}}{3}]$.

Os pontos de coordenadas $\left(-\frac{\sqrt{6}}{3}, \frac{1}{4}\right)$ e $\left(\frac{\sqrt{6}}{3}, \frac{1}{4}\right)$ são pontos de inflexão.

21.

21.1.

$$Q'(t) = \left(1 - \frac{3t}{t^2+4}\right)' = -\frac{3(t^2+4) - 3t(2t+0)}{(t^2+4)^2} = -\frac{-3t^2+12}{(t^2+4)^2}$$

$$Q'(3) = -\frac{-3 \times 3^2 + 12}{(3^2+4)^2} \approx 0,09$$

O número de pessoas contagiadas, 3 dias após a descoberta, está a aumentar a uma taxa aproximada de 9 pessoas por dia.

21.2.

Determinar $Q''(t)$:

$$\begin{aligned} Q''(t) &= \left(-\frac{-3t^2+12}{(t^2+4)^2}\right)' = -\frac{-6t(t^2+4)^2-(-3t^2+12)\times 2(t^2+4)\times 2t}{(t^2+4)^4} \\ &= -\frac{-6t(t^2+4)-4t(-3t^2+12)}{(t^2+4)^3} = -\frac{6t(t^2-12)}{(t^2+4)^3} \end{aligned}$$

Determinar os zeros de Q'':

$$Q''(t)=0 \Leftrightarrow -\frac{6t(t^2-12)}{(t^2+4)^3}=0 \Leftrightarrow t=0 \vee t=-2\sqrt{3} \vee t=2\sqrt{3}$$

Estudar o sinal de Q'' e a variação de Q':

t	0		$2\sqrt{3}$	$+\infty$
Sinal de Q''	0	$+$	0	$-$
Variação de Q'	$-\frac{3}{4}$ mín.	$\nearrow$	$\frac{3}{32}$ Máx.	$\searrow$

$2\sqrt{3} \approx 3$

A doença está a alastrar-se mais rapidamente 3 dias após a descoberta.

22.

Uma vez que dispõe de 360 m de cerca, sabemos que o perímetro do campo será 360. Sendo x o comprimento do campo, a área pode ser dada em função de x pela expressão $a(x)=x(180-x)$. Pretendemos maximizar a área, pelo que devemos encontrar o máximo de a.

$$a'(x)=(x(180-x))'=180-x+x\times(-1)=180-2x$$

$$a'(x)=0 \Leftrightarrow 180-2x=0 \Leftrightarrow x=90$$

x	0		90	
Sinal de a'	n.d.	$+$	0	$-$
Variação de a	n.d.	$\nearrow$	8100 Máx.	$\searrow$

Nestas condições, o comprimento e a largura iguais a 90 m são as dimensões do campo com maior área.

23.

Seja r o raio da base e a a altura do cilindro. Como a capacidade da lata deve ser de 4π cm^3, então, temos que:

$$\pi r^2 \times a = 4\pi \Leftrightarrow a = \frac{4}{r^2}$$

O custo total, em unidades de custo, do material da parte lateral é dado pela expressão:

$$2 \times \pi r^2 \times 2 + 2\pi r \times a = 4\pi r^2 + 2\pi r \times \frac{4}{r^2} = 4\pi r^2 + \frac{8\pi}{r}$$

Podemos então afirmar que o custo total c pode ser dado em função do raio da base r pela expressão:

$$c(r) = 4\pi r^2 + \frac{8\pi}{r}$$

Estudemos agora a variação de c.

$$c'(r) = 8\pi r - \frac{8\pi}{r^2}$$

$$c'(r) = 0 \Leftrightarrow 8\pi r - \frac{8\pi}{r^2} = 0 \Leftrightarrow 8\pi r = \frac{8\pi}{r^2} \Leftrightarrow r^3 = 1 \Leftrightarrow r = 1$$

r	0		1	$+\infty$
Sinal de c'	n.d.	$-$	0	$+$
Variação de c	n.d.	$\searrow$	12π mín.	$\nearrow$

Para que o custo seja mínimo, o raio deve ser 1 cm e a altura deve ser 4 cm.

24.
24.1.
Domínio:

$$D_f = \left\{x \in \mathbb{R} : x^2 - 1 \geq 0\right\} =^*]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[$$

Cálculo auxiliar*

$$x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \sqrt{1} \vee x = -\sqrt{1} \Leftrightarrow x = 1 \vee x = -1$$

Zeros de f:

$$\sqrt{x^2 - 1} = 0 \Leftrightarrow x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x = -1 \vee x = 1$$

Assim -1 e 1 são zeros de f.

Intervalos de monotonia e extremos locais e absolutos:

$$f'(x) = \left(\sqrt{x^2 - 1}\right)' = \frac{2x}{2\sqrt{x^2 - 1}} = \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}} = 0 \Leftrightarrow x = 0 \wedge \sqrt{x^2 - 1} \neq 0 \wedge x \in D_f$$

Esta condição é impossível, pelo que a derivada de f não tem zeros.

x	$-\infty$	-1		1	$+\infty$
Sinal de f'	$-$	n.d.	n.d.	n.d.	$+$
Variação de f	$\searrow$	0 mín.	n.d.	0 mín.	$\nearrow$

Desta forma, f é crescente em $[1, +\infty[$ e é decrescente em $]-\infty, -1]$, 0 é mínimo absoluto em -1 e 1.

Sentido das concavidades e pontos de inflexão do gráfico de f:

$$f''(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}} = \frac{\sqrt{x^2 - 1} - x\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}}{x^2 - 1} = \frac{-1}{(x^2 - 1)\sqrt{x^2 - 1}}$$

A segunda derivada de f não tem zeros.

x	$-\infty$	-1		1	$+\infty$
Sinal de f'	$-$	n.d.	n.d.	n.d.	$-$
Sentido da concavidade do gráfico de f	$\cap$	0	n.d.	0	$\cap$

Assim, o gráfico tem a concavidade voltada para baixo em $]-\infty,-1]$ e em $[1,+\infty[$ e não tem pontos de inflexão.

Assíntotas ao gráfico de f:

Uma vez que a função f é contínua em $]-\infty,-1]\cup[1,+\infty[$, não admite assíntotas verticais.

Assíntotas não verticais:

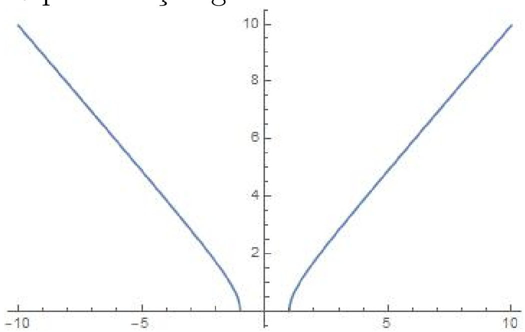
$$m=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}\overset{(\frac{\infty}{\infty})}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{|x|\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}{x}=$$
$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}{x}=\lim_{x\to+\infty}\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}=1$$

$$b=\lim_{x\to+\infty}\left(f(x)-x\right)\overset{(+\infty-\infty)}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2-1}-x\right)\left(\sqrt{x^2-1}+x\right)}{\sqrt{x^2-1}+x}=$$
$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-1-x^2}{\sqrt{x^2-1}+x}=0$$

Assim, a reta de equação $y=x$ é assíntota oblíqua ao gráfico de f quando $x\to+\infty$.

De forma semelhante, provámos que $y=-x$ é assíntota oblíqua ao gráfico de f quando $x\to-\infty$.

Representação gráfica:



24.2.

Domínio:

$$D_g = \left\{x \in \mathbb{R} : x^2 - 9 \neq 0\right\} = \mathbb{R} \setminus \{-3, 3\}$$

Zeros de g:

A função g não tem zeros.

Intervalos de monotonia e extremos locais e absolutos:

$$g'(x) = \left(\frac{1}{x^2 - 9}\right)' = \frac{-2x}{(x^2 - 9)^2}$$

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{-2x}{(x^2 - 9)^2} = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

x	$-\infty$	-3		0		3	$+\infty$
Sinal de g'	$+$	n.d.	$+$	0	$-$	n.d.	$-$
Variação de g	$\nearrow$	n.d.	$\nearrow$	$-\frac{1}{9}$ Máx.	$\searrow$	n.d.	$\searrow$

Desta forma, g é crescente em $]-\infty, -3[$ e em $]-3, 0]$ e é decrescente em $[0, 3[$ e em $]3, +\infty[$, $-\frac{1}{9}$ é máximo relativo em 0.

Sentido das concavidades e pontos de inflexão do gráfico de g:

$$g''(x) = \frac{-2(x^2 - 9)^2 - 2x \times 2(x^2 - 9) \times 2x}{(x^2 - 9)^4} = \frac{6x^2 + 18}{(x^2 - 9)^3}$$

A segunda derivada de f não tem zeros.

x	$-\infty$	-3		3	$+\infty$
Sinal de g'	$+$	n.d.	$-$	n.d.	$+$
Sentido das concavidades do gráfico de g	$\cup$	n.d.	$\cap$	n.d.	$\cup$

Assim, o gráfico tem a concavidade voltada para baixo em $]-3,3[$ e tem a concavidade voltada para cima em $]-\infty,-3[$ e em $]3,+\infty[$ e não tem pontos de inflexão.

Assíntotas ao gráfico de g:

Assíntotas verticais:

$$\lim_{x\to 3^-} g(x) = \frac{1}{0^-} = -\infty$$

$$\lim_{x\to -3^-} g(x) = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

Assim, as retas de equação $x = 3$ e $x = -3$ são assíntotas verticais ao gráfico de g.

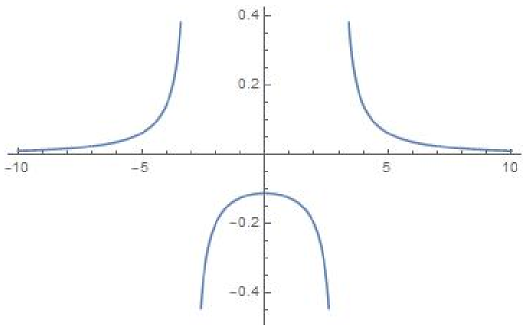
Assíntotas não verticais:

$$\lim_{x\to +\infty} g(x) = \frac{1}{+\infty} = 0$$

$$\lim_{x\to -\infty} g(x) = \frac{1}{+\infty} = 0$$

Assim, a reta de equação $y = 0$ é assíntota horizontal ao gráfico de g.

Representação gráfica:



24.3.
Domínio:

$$D_h = \{x \in \mathbb{R} : x \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

Zeros de h:

$$h(x) = 0 \Leftrightarrow x - \frac{1}{x} = 0 \Leftrightarrow x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \vee x = -1$$

Assim, -1 e 1 são zeros de h.

Intervalos de monotonia e extremos locais e absolutos:

$$h'(x) = \left(x - \frac{1}{x}\right)' = 1 - \frac{-1}{x^2} = 1 + \frac{1}{x^2}$$

A derivada de h não tem zeros.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
Sinal de h'	$+$	n.d.	$+$
Variação de h	$\nearrow$	n.d.	$\nearrow$

Desta forma, h é crescente em $]-\infty, 0[$ e em $]0, +\infty[$ e não tem extremos.

Sentido das concavidades e pontos de inflexão do gráfico de h:

$$h''(x) = \left(1 + \frac{1}{x^2}\right)' = -\frac{2}{x^3}$$

A segunda derivada de f não tem zeros.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
Sinal de h''	$+$	n.d.	$-$
Variação de h	$\cup$	n.d.	$\cap$

Assim, o gráfico tem a concavidade voltada para baixo em $]0,+\infty[$ e tem concavidade voltada para cima em $]-\infty,0[$ e não tem pontos de inflexão.

Assíntotas ao gráfico de h:

Assíntotas verticais:

$$\lim_{x\to 0^-} h(x) = \lim_{x\to 0^-}\left(x-\frac{1}{x}\right) = -\frac{1}{0^-} = +\infty$$

Assim, a reta de equação $x=0$ é assíntota vertical ao gráfico de h.

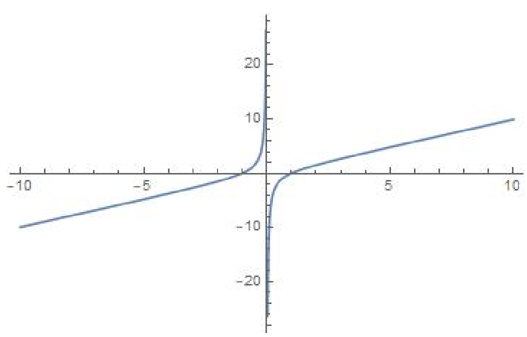
Assíntotas não verticais:

$$m = \lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x}{x}-\frac{1}{x^2}\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(1-\frac{1}{x^2}\right) = 1$$

$$b = \lim_{x\to+\infty}(f(x)-x) = \lim_{x\to+\infty}\left(x-\frac{1}{x}-x\right) = 0$$

Assim, a reta de equação $y=x$ é assíntota oblíqua ao gráfico de h.
Da análise às assíntotas não verticais ao gráfico de h quando $x\to-\infty$, concluímos que não existem mais assíntotas.

Representação gráfica:



25.

25.1.

$$\text{t.v.m.}_{[0,2]} = \frac{p(4)-p(0)}{4-0} = \frac{69-5}{4} = 16$$

A velocidade média da partícula entre os instantes $t=0$ e $t=4$ é 16 cm/s.

25.2.

$$p'(t) = (2t^3 - 4t^2 + 5)' = 6t^2 - 8t \qquad p'(4) = 64$$

A velocidade no instante $t = 4$ é 64 cm/s.

25.3.

$$p''(t) = (6t^2 - 8t)' = 12t - 8$$

$$p''(t) = 0 \Leftrightarrow t = \frac{2}{3}$$

x	0		$\frac{2}{3}$		60
Sinal de p''	$-$	$-$	0	$+$	$+$
Variação de p'	0 Máx.	$\searrow$	$-\frac{8}{3}$ mín.	$\nearrow$	21 120 Máx.

A velocidade decresce em $[0, \frac{2}{3}]$ e cresce em $[\frac{2}{3}, 60]$. A velocidade mínima é atingida em $t = \frac{2}{3}$.

Exercícios propostos

Itens de seleção - páginas 200 a 205

1. Não existe $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$.
Opção (D)

2.
2.1. Nas funções representadas em 1., 2. e 6., temos que $\lim\limits_{x \to a} y = b$.
Opção (C)

2.2. Das funções identificadas na alínea anterior, a não pertence ao domínio da que está representada em 1.
Opção (B)

3.

$$\lim_{x \to 4^-} \frac{x-5}{g(x)} = \frac{-1}{0^+} = -\infty$$

Opção (A)

4. Uma vez que tem uma assíntota horizontal quando $x \to -\infty$, sabemos que

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{h(x)}{x} = 0$$

Opção (B)

5. Como $f'(1) = 3$, sabemos que o declive da reta tangente ao gráfico de f em $x = 1$ é 3.
Opção (D)

6. A função f é uma função afim cuja representação gráfica é uma reta de declive é $\frac{2-0}{0-(-2)} = 1$. Assim, a sua derivada deve ser a função constante definida por $f'(x) = 1$.
Opção (C)

7.

x		-3	
Sinal de f''	$-$	0	$+$
Sentido das concavidades do gráfico de$f$	$\cap$	$f(-3)$ P.I.	$\cup$

Opção (C)

8. Como $f'(x) > 0$, a função deve ser crescente e, como $f''(x) < 0$, o seu gráfico deve ter a concavidade voltada para baixo.
Opção (D)

9.
Como $f'(1) = 3$, então:

$$\lim_{x\to 1} \frac{f(x) - f1x)}{x - 1} = 3$$

Tem-se que:

$$\lim_{x\to 1} \frac{f(1) - f(x)}{x^2 - 1} = \lim_{x\to 1} \left(-\frac{f(x) - f(1)}{x - 1} \times \frac{1}{x + 1} \right) = -\frac{3}{2}$$

Opção (B)

10. Se uma função tem derivada num ponto, então é contínua nesse ponto, pelo que a contrarrecíproca (opção (D)) é verdadeira, já a recíproca desta implicação nem sempre se verifica.
Opção (D)

11. Como a função é par, então o gráfico é simétrico relativamente ao eixo Oy. Uma vez que o declive da reta t é 3, então o declive da reta tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa -4 é -3.
Opção (C)

12. Como a inclinação da reta é 45°, o declive é $\tan 45° = 1$.

$$g'(x) = 2x^2 - 3$$

$$2x^2 - 3 = 1 \Leftrightarrow x = -\sqrt{2} \vee x = \sqrt{2}$$

Opção (B)

13. A função f' é decrescente em $[0,5]$, pelo que a função f'' é negativa em $[0,5]$. Desta forma, a concavidade do gráfico de f está voltada para baixo em $[0,5]$.

Opção (D)

14.

$$(kx^2 + 8x + 1)' = 2kx + 8$$

$$2k \times 1 + 8 = 2 \Leftrightarrow k = -3$$

Opção (B)

15. A reta t é tangente ao gráfico de h no ponto de abcissa 1, pelo que o seu declive é igual a $h'(1)$.

Como $(1, h(1))$ pertence à reta t:

$$h(1) = h'(1) \times 1 + b \Leftrightarrow h(1) = 2h(1) + b \Leftrightarrow b = -h(1)$$

A reta t tem equação $y = 2h(1)x - h(1)$.
Como $0 = 2h(1) \times \frac{1}{2} - h(1) \Leftrightarrow 0 = h(1) - h(1) \Leftrightarrow 0 = 0$ é uma proposição verdadeira, logo o ponto de coordenadas $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ pertence à reta t.

Opção (A)

16.

Como os termos de (x_n) pertencem ao intervalo $]-\infty, 1[$, então

$$\lim x_n = 1^-. \quad \text{Assim,} \quad \lim f(x_n) = 2.$$

Opção (B)

17.

$$\lim a_n = \lim \frac{-4n^2 + 5}{n^2} = \lim \left(-4 + \frac{5}{n^2}\right) = -4^+$$

Desta forma:

$$\lim f(a_n) = -\infty$$

Opção (C)

18.

$$\lim\left(1+\frac{1}{2^n}\right) = 1^+. \qquad \text{Assim,} \quad \lim u_n = 2.$$

Opção (B)

19. Sabemos que $\lim\limits_{x\to-\infty}(f(x)-(-x+2)) = 0$. Assim:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to-\infty}(f(x)-(-x+2)) = 0 \;&\Leftrightarrow\; \lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}(-x+2) \Leftrightarrow\\ &\Leftrightarrow\; \lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty\end{aligned}$$

Opção (C)

20.

Como g é par, a função h definida por $h(x) = \frac{g(x)}{x}$ é ímpar, o que exclui as opções (A) e (C). Por outro lado, g é contínua e $\lim\limits_{x\to 0} g(x) \neq 0$, então $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{g(x)}{x} = +\infty \vee \lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{g(x)}{x} = -\infty$, o que exclui a opção (B).

Opção (D)

21.

Se $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = c$, para algum $c \in \mathbb{R}$, então $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{g(x)}{x^2} = 0$. Como $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{g(x)}{x^2} = k, k \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$, não poderá ser nenhuma das opções (A), (B) e (C).

Opção (D)

22. Como $y = 0$ é assíntota ao gráfico de h quando $x \to -\infty$, tem-se que:

$$\lim_{x\to-\infty} h(x) = 0^-$$

Por outro lado, $y = -x$ é assíntota ao gráfico de h, pelo que:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{h(x)}{x} = -1$$

Conclui-se que:

$$\lim_{x\to+\infty} \left[\frac{1}{h(-x)} \times \frac{h(x)}{x}\right] = \lim_{x\to+\infty} \left[\frac{1}{0^-} \times (-1)\right] = +\infty$$

Opção (A)

23.

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to+\infty} (g(x) - 2x - 1) &= \lim_{x\to+\infty} (g(x) + 4 - 2x - 5) = \\
&= \lim_{x\to+\infty} (g(x-1) + 4 - 2(x-1) - 5) = \\
&= \lim_{x\to+\infty} (h(x) - (2x+3))
\end{aligned}$$

Opção (C)

24.
A função definida por $f(x) = x^2 + 1$ é polinomial de grau par e não tem zeros, pelo que a opção (A) é falsa.

A função definida por $f(x) = x^2 + 1$ é contínua em $[0, 1]$, $f(0) \times f(1) \geq 0$ e f não tem zeros em $]0, 1[$, pelo que a opção (D) é falsa.

A função definida por $f(x) = x^2 - 1$ é contínua em [-2,2], $f(-2) \times f(2) > 0$ e f tem dois zeros em $]-2, 2[$, pelo que a opção (C) é falsa.
Opção (B)

25. Consideremos a função definida por $f(x) = x^2 + 1$ definida no intervalo $[-1, 1]$:

$f(1)$ é um extremo relativo de f e $f'(1) = 2$. Assim, a opção (A) não é necessariamente verdadeira.

$f(1)$ é um extremo relativo de f e a reta de equação $y = 2$ não é tangente ao gráfico de f. Assim, a opção (C) não é necessariamente verdadeira.

$f(0)$ é extremo de f e $(0, f(0))$ não é ponto de inflexão do gráfico de f. Assim, a opção (D) não é necessariamente verdadeira.

Opção (B)

26.

Os zeros da segunda derivada são $-2, -1, 1$ e 2. Porém, a segunda derivada de f apenas muda de sinal nos pontos $x = 1$, $x = -2$ e $x = 2$, pelo que são estes os 3 pontos de inflexão de f.

Opção (B)

27. Uma vez que a função polinomial g tem grau 7, a sua segunda derivada tem grau 5. Assim, sabemos que g'' tem pelo menos um zero, no qual muda de sinal, e que não pode ter mais do que 5.

Opção (C)

Itens de construção - páginas 206 a 216

1.
1.1. Para que $\lim f(x_n) = 0$ basta que $\lim x_n = -\infty$. Assim, o termo geral da sucessão pode ser $x_n = -n + 1$.
1.2. Para que $\lim f(x_n) = 3$ basta que $\lim x_n = 0$. Assim, o termo geral da sucessão pode ser $x_n = \frac{1}{n^2}$.
1.3. Para que $\lim f(x_n) = 2$ basta que $\lim x_n = 1$. Assim, o termo geral da sucessão pode ser $x_n = 1 + \frac{(-1)^n}{n}$.

2.
2.1.
$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -2$$
2.2.
$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = -1$$
2.3.
$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = -1$$
2.4.
$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = 0$$
2.5.
$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = 0$$
2.6.
$$\lim_{x \to 2^-} f(x) = -\infty$$
2.7.
$$\lim_{x \to 2^+} f(x) = +\infty$$
2.8.
$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$$
3.
3.1.
$$\lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2^-} (-2x + 5) = -2 \times 2 + 5 = 1$$

$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^-} \frac{2}{x} = \frac{2}{2} = 1$$

3.2. Para que exista $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$, temos que ter:

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^+} f(x) = f(2)$$

Como pela alínea anterior $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = 1$ e $f(2) = 0$, este limite não existe.

4.

4.1.

$$\lim_{x\to 2}(x^2 - 3x) = 2^2 - 3\times 2 = -2$$

4.2.

$$\lim_{x\to -1} \frac{x^5 + 2x^2}{x+4} = \frac{(-1)^5 + 2(-1)^2}{-1+4} = \frac{1}{3}$$

4.3.

$$\lim_{x\to 2} \frac{1}{(x-2)^2} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

4.4.

$$\lim_{x\to 0} \left(-\frac{1}{3x^4}\right) = -\frac{1}{0^+} = -\infty$$

4.5.

$$\lim_{x\to 0^-} \left(-\frac{1}{3x^5}\right) = -\frac{1}{0^-} = +\infty$$

$$\lim_{x\to 0^+} \left(-\frac{1}{3x^5}\right) = -\frac{1}{0^+} = -\infty$$

Uma vez que

$$\lim_{x\to 0^-} \left(-\frac{1}{3x^5}\right) \neq \lim_{x\to 0^+} \left(-\frac{1}{3x^5}\right)$$

não existe $\lim\limits_{x\to 0} \left(-\frac{1}{3x^5}\right)$.

4.6.

$$\lim_{x\to 5^-} \left(\frac{-2x}{5-x}\right) = \frac{-10}{0^+} = -\infty$$

$$\lim_{x\to 5^+}\left(\frac{-2x}{5-x}\right)=\frac{-10}{0^-}=+\infty$$

Uma vez que

$$\lim_{x\to 5^-}\left(\frac{-2x}{5-x}\right)\neq\lim_{x\to 5^+}\left(\frac{-2x}{5-x}\right)$$

não existe $\lim_{x\to 5}\left(\frac{-2x}{5-x}\right)$.

4.7.

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{2x^2+1}{x^2-1}=\frac{3}{0^-}=-\infty$$

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{2x^2+1}{x^2-1}=\frac{3}{0^+}=+\infty$$

Uma vez que

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{2x^2+1}{x^2-1}\neq\lim_{x\to 1^+}\frac{2x^2+1}{x^2-1}$$

não existe $\lim_{x\to 1}\frac{2x^2+1}{x^2-1}$.

4.8.

$$\lim_{x\to 1}\frac{-x}{(1-x)^2}=\frac{-1}{0^+}=-\infty$$

4.9.

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{5+2x}{-x}=\frac{5}{0^+}=+\infty$$

4.10.

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{5+2x}{-x}=\frac{5}{0^-}=-\infty$$

4.11.

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{5x-2}{x+2}-\frac{x}{x+1}\right)=\frac{-2}{2}-\frac{0}{1}=-1$$

4.12.

$$\lim_{x\to -2^+}\left(\frac{5x-2}{x+2}-\frac{x}{x+1}\right)=\frac{-12}{0^+}-\frac{-2}{-1}=-\infty-2=-\infty$$

4.13.

$$\lim_{x\to -1^-}\left(\frac{5x-2}{x+2}-\frac{x}{x+1}\right)=\frac{-7}{1}-\frac{-1}{0^-}=-7-\infty=-\infty$$

4.14.

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-5x+6}{(x-3)^2}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim_{x\to 3}\frac{(x-3)(x-2)}{(x-3)^2}=\lim_{x\to 3}\frac{x-2}{x-3}$$

$$\lim_{x\to 3^-}\frac{x-2}{x-3}=\frac{1}{0^-}=-\infty$$

$$\lim_{x\to 3^+}\frac{x-2}{x-3}=\frac{1}{0^+}=+\infty$$

Assim, $\lim_{x\to 3}\frac{x^2-5x+6}{(x-3)^2}$ não existe.

5.

5.1.

$$\lim_{x\to+\infty}(x^3+4x-1)=+\infty+\infty-1=+\infty$$

5.2.

$$\lim_{x\to-\infty}(x^3+4x^2-1)\overset{(+\infty-\infty)}{=}\lim_{x\to-\infty}x^3\left(1+\frac{4}{x}-\frac{1}{x^3}\right)=-\infty\times 1=-\infty$$

5.3.

$$\lim_{x\to-\infty}(-3x^3+2x^2-x)\overset{(+\infty-\infty)}{=}\lim_{x\to-\infty}x^3\left(-3+\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}\right)=-\infty\times(-3)=+\infty$$

5.4.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to-\infty}(-2x^5+3x^2-x+3)&\overset{(+\infty-\infty)}{=}\lim_{x\to-\infty}x^5\left(-2+\frac{3}{x^3}-\frac{1}{x^4}+\frac{3}{x^5}\right)=\\&=-\infty\times(-2)=+\infty\end{aligned}$$

6.

6.1.

$$\lim_{x\to+\infty}(x^4-4x^2+1)\overset{(+\infty-\infty)}{=}\lim_{x\to+\infty}x^4\left(1-\frac{4}{x^2}+\frac{1}{x^4}\right)=+\infty\times 1=+\infty$$

6.2.

$$\lim_{x\to-\infty}(6x^3+4x^2-5)\overset{(+\infty-\infty)}{=}\lim_{x\to+\infty}x^3\left(6+\frac{4}{x}-\frac{5}{x^3}\right)=-\infty\times 6=-\infty$$

6.3.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty}\frac{5x-4x^3}{x^3-3x^2+6x-3} &\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=} \lim_{x\to+\infty}\frac{x^3\left(\frac{5}{x^2}-4\right)}{x^3\left(1-\frac{3}{x}+\frac{6}{x^2}-\frac{3}{x^3}\right)}=\\ &= \lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{5}{x^2}-4}{1-\frac{3}{x}+\frac{6}{x^2}-\frac{3}{x^3}}=-4\end{aligned}$$

6.4.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to-\infty}\frac{x^3-4x^4}{10x^3-3x^2-1} &\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=} \lim_{x\to-\infty}\frac{x^4\left(\frac{1}{x}-4\right)}{x^3\left(10-\frac{3}{x}-\frac{1}{x^3}\right)}=\\ &= \lim_{x\to-\infty}\frac{x\left(\frac{1}{x}-4\right)}{10-\frac{3}{x}-\frac{1}{x^3}}=\\ &= \frac{-\infty\times(-4)}{10}=+\infty\end{aligned}$$

6.5.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3-4x^4}{10x^3-3x^2-1} &\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=} \lim_{x\to+\infty}\frac{x^4\left(\frac{1}{x}-4\right)}{x^3\left(10-\frac{3}{x}-\frac{1}{x^3}\right)}=\\ &= \lim_{x\to+\infty}\frac{x\left(\frac{1}{x}-4\right)}{10-\frac{3}{x}-\frac{1}{x^3}}=\\ &= \frac{+\infty\times(-4)}{10}=-\infty\end{aligned}$$

6.6.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty}\frac{-x^3+4x^2-7x-10}{x^5-x} &\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=} \lim_{x\to+\infty}\frac{x^3\left(-1+\frac{4}{x}-\frac{7}{x^2}-\frac{10}{x^3}\right)}{x^5\left(1-\frac{1}{x^4}\right)}=\\ &= \lim_{x\to+\infty}\frac{-1+\frac{4}{x}-\frac{7}{x^2}-\frac{10}{x^3}}{x^2\left(1-\frac{1}{x^4}\right)}=\\ &= \frac{-1}{+\infty\times 1}=0\end{aligned}$$

6.7.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to-\infty}\frac{-x^3+4x^2-7x-10}{x^5-x} &\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=} \lim_{x\to-\infty}\frac{x^3\left(-1+\frac{4}{x}-\frac{7}{x^2}-\frac{10}{x^3}\right)}{x^5\left(1-\frac{1}{x^4}\right)}=\\ &= \lim_{x\to-\infty}\frac{-1+\frac{4}{x}-\frac{7}{x^2}-\frac{10}{x^3}}{x^2\left(1-\frac{1}{x^4}\right)}=\\ &= \frac{-1}{-\infty\times 1}=0\end{aligned}$$

6.8.

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to+\infty}\left(-\frac{x^2-4}{x-1}-x\right) &\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=} \lim_{x\to+\infty}\left(-\frac{x^2-4}{x-1}-\frac{x(x-1)}{x-1}\right)=\\
&= \lim_{x\to+\infty} -\frac{2x^2-x-4}{x-1}\\
&= \lim_{x\to+\infty} -\frac{x^2\left(2-\frac{1}{x}-\frac{4}{x^2}\right)}{x\left(1-\frac{1}{x}\right)}\\
&= \lim_{x\to+\infty} -\frac{x\left(2-\frac{1}{x}-\frac{4}{x^2}\right)}{1-\frac{1}{x}}\\
&= -\frac{+\infty\times 2}{1}=-\infty
\end{aligned}$$

6.9.

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^3}{x^2+4}-\frac{5x^2}{x-2}\right) &\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=} \lim_{x\to+\infty}\frac{x^3(x-2)-5x^2(x^2+4)}{(x^2+4)(x-2)}=\\
&= \lim_{x\to+\infty}\frac{-4x^4-2x^3-20x^2}{x^3-2x^2+4x-8}=\\
&= \lim_{x\to+\infty}\frac{x^4\left(-4-\frac{2}{x}-\frac{20}{x^2}\right)}{x^3\left(1-\frac{2}{x}+\frac{4}{x^2}-\frac{8}{x^3}\right)}=\\
&= \lim_{x\to+\infty}\frac{x\left(-4-\frac{2}{x}-\frac{20}{x^2}\right)}{1-\frac{2}{x}+\frac{4}{x^2}-\frac{8}{x^3}}=\\
&= \frac{+\infty\times(-4)}{1}=-\infty
\end{aligned}$$

6.10.

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x^3+x-1}{x^2+4}-(x+1)^2\right) &\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=} \lim_{x\to-\infty}\frac{x^3+x-1-(x+1)^2(x^2+4)}{x^2+4}\\
&= \lim_{x\to-\infty}\frac{-x^4-x^3-5x^2-7x-5}{x^2+4}\\
&= \lim_{x\to-\infty}\frac{x^4\left(-1-\frac{1}{x}-\frac{5}{x^2}-\frac{7}{x^3}-\frac{5}{x^4}\right)}{x^2\left(1+\frac{4}{x^2}\right)}\\
&= \lim_{x\to-\infty}\frac{x^2\left(-1-\frac{1}{x}-\frac{5}{x^2}-\frac{7}{x^3}-\frac{5}{x^4}\right)}{1+\frac{4}{x^2}}\\
&= \frac{+\infty\times(-1)}{1}=-\infty
\end{aligned}$$

7.

7.1.

$$\lim_{x \to 3^-} f(x) = \lim_{x \to 3^-} (4 - x) = 1$$

$$\lim_{x \to 3^+} f(x) = \lim_{x \to 3^-} (x - 2) = 1$$

$$f(3) = 1$$

Uma vez que $\lim_{x \to 3^-} f(x) = \lim_{x \to 3^+} f(x) = f(3)$, podemos afirmar que f é contínua em $x = 3$.

7.2.

$$\lim_{x \to 1^-} g(x) = \lim_{x \to 1^-} \frac{1 - x^2}{x - 1} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x \to 1} \frac{-(x-1)(x+1)}{x - 1} = \lim_{x \to 1^-} -(x + 1) = -2$$

$$g(1) = 3$$

Uma vez que $\lim_{x \to 1^-} g(x) \neq g(1)$ podemos afirmar que g não é contínua em $x = 1$.

7.3.

$$\lim_{x \to -1^-} h(x) = \lim_{x \to -1^-} (x^2 + 3) = 4$$

$$\lim_{x \to -1^+} h(x) = \lim_{x \to -1^+} \frac{1}{x + 5} = \frac{1}{4}$$

Uma vez que $\lim_{x \to -1^-} h(x) \neq \lim_{x \to -1^+} h(x)$, podemos afirmar que h não é contínua em $x = -1$.

8. A função h é contínua em $\mathbb{R}$, por se tratar de uma função polinomial, em particular, é contínua em $[0, 1]$. Como $h(0) = 0,5$, $h(1) = 3,5$ e $0,5 < 3 < 3,5$, pelo teorema de Bolzano-Cauchy, podemos concluir que existe pelo menos um número real $c \in]0, 1[$ tal que $h(c) = 3$, isto é, em que a bola esteve a 3 metros do chão.

9.

9.1.

$$\lim_{x\to 0} g(x) = 3$$

9.2.

$$\lim_{x\to 2} g(x) = 0$$

9.3.

$$\lim_{x\to 1^+} g(x) = +\infty$$

9.4.

$$\lim_{x\to 1^-} g(x) = +\infty$$

9.5.

$$\lim_{x\to -\infty} g(x) = 2$$

9.6.

$$\lim_{x\to +\infty} \left(g(x) - \left(\frac{1}{2}x - 2 \right) \right) = 0 \ \Leftrightarrow \ \lim_{x\to +\infty} g(x) = \lim_{x\to +\infty} \left(\frac{1}{2}x - 2 \right) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \ \lim_{x\to +\infty} g(x) = +\infty$$

9.7.

$$\lim_{x\to -\infty} \frac{g(x)}{x} = \frac{2}{-\infty} = 0$$

9.8. Como $y = \frac{1}{2}x - 2$ é assíntota ao gráfico de g quando $x \to +\infty$, então:

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{g(x)}{x} = \frac{1}{2}$$

9.9. Como $y = \frac{1}{2}x - 2$ é assíntota ao gráfico de g quando $x \to +\infty$, então:

$$b = \lim_{x\to +\infty} \left(g(x) - \frac{1}{2}x \right) = -2$$

9.10. Como $y = \frac{1}{2}x - 2$ é assíntota ao gráfico de g quando $x \to +\infty$, então:

$$\lim_{x\to +\infty} \left(g(x) - \frac{1}{2}x + 2 \right) = \lim_{x\to +\infty} \left(g(x) - \left(\frac{1}{2}x - 2 \right) \right) = 0$$

10.

10.1.

$$D_f = \mathbb{R}$$

$$f'(x) = (x^2 + 5x + 3)' = 2x + 5$$

$$\begin{aligned} f' : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto 2x + 5 \end{aligned}$$

10.2.

$$D_g = \mathbb{R}$$

$$g'(x) = \left(x^{10} + \frac{1}{2}x^3 - x + \pi\right)' = 10x^9 + \frac{3}{2}x^2 - 1$$

$$\begin{aligned} g' : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto 10x^9 + \frac{3}{2}x^2 - 1 \end{aligned}$$

10.3.

$$D_h = \mathbb{R}$$

$$h'(x) = \left((3x-1)^4 - \pi\right)' = 4(3x-1)^3(3x-1)' = 12(3x-1)^3$$

$$\begin{aligned} h' : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto 12(3x-1)^3 \end{aligned}$$

10.4.

$$D_i = \left\{x \in \mathbb{R} : x^2 \neq 0\right\} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

$$i'(x) = \left(\frac{2}{x^2}\right)' = 2 \times \frac{-2}{x^3} = \frac{-4}{x^3}$$

$$\begin{array}{rcl} i' : \mathbb{R} \setminus \{0\} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{-4}{x^3} \end{array}$$

10.5.

$$D_j = \left\{x \in \mathbb{R} : x^5 \neq 0\right\} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

$$j'(x) = \left(\frac{1}{x^5} + \frac{1}{2}x^2\right)' = \frac{-5}{x^6} + x$$

$$\begin{array}{rcl} j' : \mathbb{R} \setminus \{0\} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & -\dfrac{5}{x^6} + x \end{array}$$

10.6.

$$D_l = \{x \in \mathbb{R} : x \neq 0 \wedge x \geq 0\} =]0, +\infty[$$

$$l'(x) = \left(\frac{1}{x} + \sqrt{x}\right)' = \left(\frac{1}{x} + x^{\frac{1}{2}}\right)' = -\frac{1}{x^2} + \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = -\frac{1}{x^2} + \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$\begin{array}{rcl} l' :]0, +\infty[& \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & -\dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{2\sqrt{x}} \end{array}$$

10.7.

$$D_m = \{x \in \mathbb{R} : x + 1 \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$$

$$m'(x) = \left(\frac{2x-3}{x+1}\right)' = \frac{2(x+1) - (2x-3) \times 1}{(x+1)^2} = \frac{5}{(x+1)^2}$$

$$\begin{array}{rcl} m' : \mathbb{R} \setminus \{-1\} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{5}{(x+1)^2} \end{array}$$

10.8.

$$D_n = \left\{x \in \mathbb{R} : x^2 + 1 \neq 0\right\} = \mathbb{R}$$

$$n'(x) = \left(\frac{x}{x^2+1}\right)' = \frac{x^2 + 1 - x \times 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{1-x^2}{(x^2+1)^2}$$

$$\begin{array}{rcl} n' : \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{1-x^2}{(x^2+1)^2} \end{array}$$

10.9.

$$D_o = \left\{x \in \mathbb{R} : 1 - x^2 \geq 0\right\} = [-1, 1]$$

$$o'(x) = \left(\sqrt{1-x^2}\right)' = \frac{1}{2}(1-x^2)^{-\frac{1}{2}} \times (-2x) = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$D'_o = \left\{x \in \mathbb{R} : 1 - x^2 \geq 0 \wedge \sqrt{1-x^2} \neq 0\right\} =]-1, 1[$$

$$\begin{array}{rcl} o' :]-1, 1[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & -\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}} \end{array}$$

10.10.

$$D_p = \mathbb{R}$$

$$p'(x) = \left(\sqrt[3]{2x^4+10}\right)' = \frac{1}{3}(2x^4+10)^{-\frac{2}{3}} \times (8x^3) = \frac{8x^3}{3\sqrt[3]{(2x^4+10)^2}}$$

$$D'_p = \left\{x \in \mathbb{R} : 3\sqrt[3]{(2x^4+10)^2} \neq 0\right\} = \mathbb{R}$$

$$\begin{aligned} p' : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \frac{8x^3}{3\sqrt[3]{(2x^4+10)^2}} \end{aligned}$$

11. Da análise do gráfico de f, decorre que esta função é decrescente no intervalo $]-\infty, a]$, crescente no intervalo $[a, c]$, voltando a ser decrescente no intervalo $[c, +\infty[$. A função tem um mínimo relativo de abcissa a e um máximo relativo de abcissa c. Logo, f' é negativa em $]-\infty, a[$, positiva em $]a, c[$, voltando a ser negativa em $]c, +\infty[$. Como f' está definida em $\mathbb{R}$, a e c são pontos interiores do domínio de f e $f(a)$ e $f(c)$ são extremos, conclui-se que $f'(a) = 0$ e $f'(c) = 0$. Portanto, o gráfico de f' está representado na figura 3.
O gráfico de f tem a concavidade voltada para cima para x menor do que b, tem concavidade voltada para baixo para x maior do que b e tem um ponto de inflexão de abcissa b. Logo, f'' é positiva para x menor do que b e negativa para x maior do que b. Como f'' está definida em $\mathbb{R}$, b é ponto interior do domínio de f e $(b, f(b))$ é um ponto de inflexão, conclui-se que $f''(b) = 0$. Portanto, o gráfico de f'' está representado na figura 2.

12.

12.1. Vamos inicialmente determinar o instante em que o projétil atinge o solo.

$$h(t) = 0 \Leftrightarrow -4,9t^2 + 120t = 0 \Leftrightarrow t = 0 \vee t = \frac{1200}{49}$$

O projétil atinge o solo no instante 24,5 segundos, aproximadamente.

Para determinarmos a velocidade a que ele atinge o solo, precisamos de determinar a sua derivada.

$$h'(t) = (-4,9t^2 + 120t)' = -9,8t + 120 \qquad h'(24,5) = -120{,}1$$

O projétil atinge o solo a uma velocidade aproximada de 120,1 m/s.

12.2.

$$h'(t) = 0 \Leftrightarrow -9,8t + 120 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{600}{49}$$

t	0		$\frac{600}{49}$		$\frac{1200}{49}$
Sinal de h'	$+$	$+$	0	$-$	$-$
Variação de h	0	$\nearrow$	$734,694$ Máx.	$\searrow$	0

A altura máxima alcançada foi de $734,69$ metros, aproximadamente.

13.
13.1.

$$\text{t.v.m.}_{[1,5]} = \frac{P(5) - P(1)}{5 - 1} = \frac{625 - 29}{4} = 149$$

Entre os dias 1 e 5 a taxa média de variação é de 149 pessoas infetadas por dia.

13.2. Para saber quando se deve considerar que a doença foi erradicada, devemos conhecer os zeros de P.

$$P(d) = 0 \Leftrightarrow 30d^2 - d^3 = 0 \Leftrightarrow d = 0 \vee d = 30$$

Assim, podemos considerar que a doença foi erradicada 30 dias após o seu aparecimento.

Para estudar a sua monotonia, teremos que estudar o sinal da sua derivada.

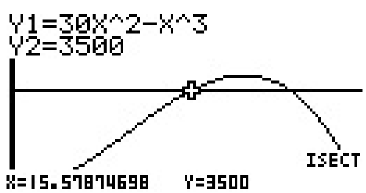
$$P'(d) = (30d^2 - d^3)' = 60d - 3d^2$$

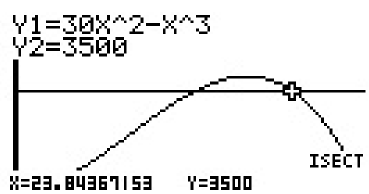
$$P'(d) = 0 \Leftrightarrow 60d - 3d^2 = 0 \Leftrightarrow d = 0 \vee d = 20$$

t	0		20		30
Sinal de P'	0	$+$	0	$-$	$-$
Variação de P	0	$\nearrow$	4000 Máx.	$\searrow$	0

O número de doentes aumentou nos 20 primeiros dias, atingindo um máximo de 4000 pessoas infetadas, tendo diminuído a partir daí. Após 30 dias, a doença foi erradicada.

13.3.





Como podemos ver pelas imagens, o período no qual o número de doentes foi superior a 3500 foi de aproximadamente 8 dias.

14.

14.1.

$$\lim_{x\to -2} \frac{4 - x^2}{x+2} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x\to -2} \frac{(2-x)(2+x)}{x+2} = \lim_{x\to -2}(2-x) = 4$$

14.2.

$$\lim_{x\to 6} \frac{x^2 - 36}{x-6} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x\to 6} \frac{(x-6)(x+6)}{x-6} = \lim_{x\to 6}(x+6) = 12$$

14.3.

$$\lim_{x\to 4} \frac{x^2 - 16}{x-4} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x\to 4} \frac{(x-4)(x+4)}{x-4} = \lim_{x\to 4}(x+4) = 8$$

14.4.

$$\lim_{x\to 3} \frac{x^2 - 2x - 3}{2x^2 - 9x + 9} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x\to 3} \frac{(x-3)(x+1)}{(x-3)(2x-3)} = \lim_{x\to 3} \frac{x+1}{2x-3} = \frac{4}{3}$$

14.5.

$$\lim_{x\to -5} \frac{x^2-3x-10}{x^2-25} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x\to -5} \frac{(x+5)(x-2)}{(x+5)(x-5)} = \lim_{x\to -5} \frac{x-2}{x-5} = \frac{7}{10}$$

14.6.

$$\lim_{x\to -2} \frac{3x^2+x-10}{x^2-5x-14} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x\to -2} \frac{(x+2)(3x-5)}{(x+2)(x-7)} = \lim_{x\to -2} \frac{3x-5}{x-7} = \frac{11}{9}$$

14.7.

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 1^-} \frac{x^3-1}{x^2-2x+1} &\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x\to 1^-} \frac{(x-1)(x^2+x+1)}{(x-1)(x-1)} = \\ &= \lim_{x\to 1^-} \frac{x^2+x+1}{x-1} = \frac{3}{0^-} = -\infty \end{aligned}$$

14.8.

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 1} \frac{x^3-1}{x^4-1} &\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)(x^2+x+1)}{(x-1)(x^3+x^2+x+1)} = \\ &= \lim_{x\to 1} \frac{x^2+x+1}{x^3+x^2+x+1} = \frac{3}{4} \end{aligned}$$

14.9.

$$\lim_{x\to 4^+} \left(\frac{1}{x-4} - \frac{3}{x^2-16}\right) \overset{(+\infty-\infty)}{=} \lim_{x\to 4^+} \frac{x+4-3}{x^2-16} = \frac{5}{0^+} = +\infty$$

14.10.

$$\lim_{x\to -1} \frac{2x+2}{(x+1)^3} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x\to -1} \frac{2(x+1)}{(x+1)^3} = \lim_{x\to -1} \frac{2}{(x+1)^2} = \frac{2}{0^+} = +\infty$$

14.11.

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 2} \frac{2x^3-x^2-5x-2}{2x^2-5x+2} &\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x\to 2} \frac{(x-2)(2x^2+3x+1)}{(x-2)(2x-1)} = \\ &= \lim_{x\to 2} \frac{2x^2+3x+1}{2x-1} = \frac{15}{3} = 5 \end{aligned}$$

14.12.

$$\lim_{x\to 2^-} \left(\frac{1}{x-2} - \frac{x-3}{x^2-3x+2}\right) = \frac{1}{0^-} - \frac{-1}{0^-} = -\infty - \infty = -\infty$$

$$\lim_{x\to 2^+}\left(\frac{1}{x-2}-\frac{x-3}{x^2-3x+2}\right)=\frac{1}{0^+}-\frac{-1}{0^+}=+\infty+\infty=+\infty$$

Assim, não existe $\lim_{x\to 2}\left(\frac{1}{x-2}-\frac{x-3}{x^2-3x+2}\right)$.

14.13.

$$\lim_{x\to 0}\frac{2-\frac{1}{x}}{\frac{2x-1}{x}-4}\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}\lim_{x\to 0}\frac{\frac{2x-1}{x}}{\frac{2x-1-4x}{x}}=\lim_{x\to 0}\frac{2x-1}{-2x-1}=1$$

14.14.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 2}\left((x-2)\left(\frac{1}{x^2-4}-1\right)\right) &\overset{(0\times\infty)}{=} \lim_{x\to 2}\left(\frac{x-2}{x^2-4}-(x-2)\right)\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\\ &= \lim_{x\to 2}\left(\frac{1}{x+2}-(x-2)\right)=\frac{1}{4}\end{aligned}$$

15.

15.1.

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{x^2-2x}{|x|}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim_{x\to 0^-}\frac{x(x-2)}{-x}=\lim_{x\to 0^-}-(x-2)=2$$

15.2.

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{x^2-2x}{|x|}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim_{x\to 0^+}\frac{x(x-2)}{x}=\lim_{x\to 0^+}(x-2)=-2$$

16.

16.1.

$$\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x^3+1}+2}{x-1}=\frac{5}{1}=5$$

16.2.

$$\lim_{x\to 9^-}\frac{10-x}{\sqrt{x}-3}=\frac{1}{0^-}=-\infty$$

16.3.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty}\sqrt{2x^3-10x-7} &\overset{(+\infty-\infty)}{=} \lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^3\left(2-\frac{10}{x^2}-\frac{7}{x^3}\right)}=\\ &= \sqrt{+\infty\times 2}=+\infty\end{aligned}$$

16.4.

$$\lim_{x\to-\infty}\sqrt{3x^4+x-2} \overset{(+\infty-\infty)}{=} \lim_{x\to-\infty}\sqrt{x^4\left(3+\frac{1}{x^3}-\frac{2}{x^4}\right)} =$$
$$= \sqrt{+\infty\times 3} = +\infty$$

16.5.

$$\lim_{x\to-\infty}\sqrt[3]{\frac{2+125x}{1-x}} \overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=} \lim_{x\to-\infty}\sqrt[3]{\frac{x\left(125+\frac{2}{x}\right)}{x\left(-1+\frac{1}{x}\right)}} =$$
$$= \lim_{x\to-\infty}\sqrt[3]{\frac{125+\frac{2}{x}}{-1+\frac{1}{x}}} =$$
$$= \sqrt[3]{-125} = -5$$

16.6.

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{9x^2+7}}{x-2} \overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=} \lim_{x\to-\infty}\frac{|x|\sqrt{9+\frac{7}{x^2}}}{x\left(1-\frac{2}{x}\right)} = \lim_{x\to-\infty}\frac{-x\sqrt{9+\frac{7}{x^2}}}{x\left(1-\frac{2}{x}\right)} =$$
$$= \lim_{x\to-\infty}\frac{-\sqrt{9+\frac{7}{x^2}}}{1-\frac{2}{x}} = -3$$

17.

17.1.

$$\lim_{x\to-1}\sqrt[3]{\frac{x^3+1}{12x^2-12}} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x\to-1}\sqrt[3]{\frac{(x+1)(x^2-x+1)}{(x+1)(12x-12)}} =$$
$$= \lim_{x\to-1}\sqrt[3]{\frac{x^2-x+1}{12x-12}} = \sqrt[3]{\frac{3}{-24}} =$$
$$= \sqrt[3]{\frac{1}{-8}} = -\frac{1}{2}$$

17.2.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0^+}\frac{x^2-x}{\sqrt{x^3+2x}} &\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x\to 0^+}\frac{x(x-1)}{|x|\sqrt{x+\frac{2}{x}}} = \lim_{x\to 0^+}\frac{x(x-1)}{x\sqrt{x+\frac{2}{x}}} = \\ &= \lim_{x\to 0^+}\frac{x-1}{\sqrt{x+\frac{2}{x}}} = \frac{-1}{\sqrt{0+\infty}} = 0\end{aligned}$$

17.3.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0^-}\frac{x^2-x}{\sqrt{x^3-2x}} &\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x\to 0^-}\frac{x(x-1)}{|x|\sqrt{x-\frac{2}{x}}} = \lim_{x\to 0^-}\frac{x(x-1)}{-x\sqrt{x-\frac{2}{x}}} = \\ &= \lim_{x\to 0^-}\frac{-x+1}{\sqrt{x-\frac{2}{x}}} = \frac{1}{\sqrt{0+\infty}} = 0\end{aligned}$$

17.4.

$$\lim_{x\to -3}\frac{x^2+2x-3}{\sqrt{6+2x}} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x\to -3}\frac{(x-1)(x+3)}{\sqrt{2(x+3)}} = \lim_{x\to -3}\frac{(x-1)\sqrt{x+3}}{\sqrt{2}} = 0$$

17.5.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{6-3x}}{x^2-4} &\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{3(2-x)}}{(x-2)(x+2)} = \\ &= \lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{3(2-x)}}{-(2-x)(x+2)} \\ &= \lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{3}}{-\sqrt{x-2}(x+2)} = \\ &= \frac{\sqrt{3}}{0^-} = -\infty\end{aligned}$$

17.6.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{\sqrt{x}-1} &\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)} = \lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(\sqrt{x}+1)}{x-1} = \\ &= \lim_{x\to 1}(\sqrt{x}+1) = 2\end{aligned}$$

17.7.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to5}\frac{2x^2-50}{\sqrt{x}-\sqrt{5}} &\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x\to5}\frac{(2x^2-50)(\sqrt{x}+\sqrt{5})}{(\sqrt{x}-\sqrt{5})(\sqrt{x}+\sqrt{5})} = \\ &= \lim_{x\to5}\frac{(2x+10)(x-5)(\sqrt{x}+\sqrt{5})}{x-5} = \\ &= \lim_{x\to5}\Big((2x+10)(\sqrt{x}+\sqrt{5})\Big) = 40\sqrt{5}\end{aligned}$$

17.8.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to4}\frac{\sqrt{2x+1}-3}{x-4} &\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x\to4}\frac{(\sqrt{2x+1}-3)(\sqrt{2x+1}+3)}{(x-4)(\sqrt{2x+1}+3)} = \\ &= \lim_{x\to4}\frac{2x+1-9}{(x-4)(\sqrt{2x+1}+3)} = \\ &= \lim_{x\to4}\frac{2(x-4)}{(x-4)(\sqrt{2x+1}+3)} = \\ &= \lim_{x\to4}\frac{2}{\sqrt{2x+1}+3} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}\end{aligned}$$

17.9.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty}\left(x-\sqrt{x^2+1}\right) &\overset{(+\infty-\infty)}{=} \lim_{x\to+\infty}\frac{\left(x-\sqrt{x^2+1}\right)\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)}{x+\sqrt{x^2+1}} = \\ &= \lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-x^2-1}{x+\sqrt{x^2+1}} = \\ &= \lim_{x\to+\infty}\frac{-1}{x+\sqrt{x^2+1}} = \frac{-1}{+\infty} = 0\end{aligned}$$

17.10.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x+2}\right) &\overset{(+\infty-\infty)}{=} \lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x+2}\right)\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x+2}\right)}{\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x+2}\right)} = \\ &= \lim_{x\to+\infty}\frac{x+1-x-2}{\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x+2}\right)} = \\ &= \lim_{x\to+\infty}\frac{-1}{\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x+2}\right)} = \frac{-1}{+\infty} = 0\end{aligned}$$

17.11.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{\sqrt{2x-1}-\sqrt{2x+2}} \overset{(+\infty-\infty)}{=} \lim_{x\to+\infty}\frac{x(\sqrt{2x-1}+\sqrt{2x+2})}{(\sqrt{2x-1}-\sqrt{2x+2})(\sqrt{2x-1}+\sqrt{2x+2})} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{x(\sqrt{2x-1}+\sqrt{2x+2})}{2x-1-2x-2} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{x(\sqrt{2x-1}+\sqrt{2x+2})}{-3} = \frac{+\infty}{-3} = -\infty$$

17.12.

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}}{2x-1} \overset{(\frac{\infty}{\infty})}{=} \lim_{x\to-\infty}\frac{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{x\left(2-\frac{1}{x}\right)} = \lim_{x\to-\infty}\frac{-x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{x\left(2-\frac{1}{x}\right)} =$$

$$= \lim_{x\to-\infty}\frac{-\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{2-\frac{1}{x}} = -\frac{1}{2}$$

17.13.

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{16x^2+2x}-x}{x+5} \overset{(+\infty-\infty)}{=} \lim_{x\to-\infty}\frac{|x|\sqrt{16+\frac{2}{x}}-x}{x+5}$$

$$= \lim_{x\to-\infty}\frac{-x\sqrt{16+\frac{2}{x}}-x}{x+5} =$$

$$= \lim_{x\to-\infty}\frac{x\left(-\sqrt{16+\frac{2}{x}}-1\right)}{x\left(1+\frac{5}{x}\right)} =$$

$$= \lim_{x\to-\infty}\frac{-\sqrt{16+\frac{2}{x}}-1}{1+\frac{5}{x}} = -5$$

17.14.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{9x^2-2}}{x} \overset{(\frac{\infty}{\infty})}{=} \lim_{x\to+\infty}\frac{|x|\sqrt{9-\frac{2}{x^2}}}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x\sqrt{9-\frac{2}{x^2}}}{x} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\sqrt{9-\frac{2}{x^2}} = 3$$

17.15.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{1+\sqrt{x+3}} &\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=} \lim_{x\to+\infty}\frac{x}{1+|x|\sqrt{\frac{1}{x}+\frac{3}{x^2}}} = \\ &= \lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x\left(\frac{1}{x}+\sqrt{\frac{1}{x}+\frac{3}{x^2}}\right)} = \\ &= \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\frac{1}{x}+\sqrt{\frac{1}{x}+\frac{3}{x^2}}} = \\ &= \frac{1}{0^+} = +\infty\end{aligned}$$

18. Como $\lim\limits_{x\to-1^+} f(x) = +\infty$, tem-se que $\lim\limits_{x\to-1^+}\left(\frac{1}{f}\right)(x) = \frac{1}{+\infty} = 0^+$, o que permite excluir a opção (A).
Como $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = 0^+$, tem-se que $\lim\limits_{x\to 0^-}\left(\frac{1}{f}\right)(x) = \frac{1}{0^+} = +\infty$, o que permite excluir a opção (C).
Como $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0^-$, tem-se que $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{f}\right)(x) = \frac{1}{0^-} = -\infty$, o que permite excluir a opção (B).
Opção (D).

19.
19.1.

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-}\frac{\sqrt{x^2}}{x} \overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=} \lim_{x\to 0^-}\frac{|x|}{x} = \lim_{x\to 0^-}\frac{-x}{x} = -1$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+}\frac{\sqrt{x^2}}{x} \overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=} \lim_{x\to 0^+}\frac{|x|}{x} = \lim_{x\to 0^+}\frac{x}{x} = 1$$

Como $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) \neq \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$, a função não é contínua em $x = 0$.

19.2.

$$\lim_{x\to 2^-} g(x) = \lim_{x\to 2^-}|x-4| = 2$$

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 2^+} g(x) &= \lim_{x\to 2^+} \frac{x^3-8}{3-\sqrt{2x+5}} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x\to 2^+} \frac{(x^3-8)(3+\sqrt{2x+5})}{(3-\sqrt{2x+5})(3+\sqrt{2x+5})} \\
&= \lim_{x\to 2^+} \frac{(x^3-8)(3+\sqrt{2x+5})}{9-2x-5} = \\
&= \lim_{x\to 2^+} \frac{(x-2)(x^2+2x+4)(3+\sqrt{2x+5})}{-2(x-2)} = \\
&= \lim_{x\to 2^+} \frac{(x^2+2x+4)(3+\sqrt{2x+5})}{-2} = \frac{12\times 6}{-2} = -36
\end{aligned}$$

Como $\lim\limits_{x\to 2^-} g(x) \neq \lim\limits_{x\to 2^+} g(x)$, a função não é contínua em $x=2$.

20.

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to -2^-} f_k(x) &= \lim_{x\to -2^-} \frac{2x^3+2x^2+8}{x^2-4} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x\to -2^-} \frac{(x+2)(2x^2-2x+4)}{(x+2)(x-2)} \\
&= \lim_{x\to -2^-} \frac{2x^2-2x+4}{x-2} = -4
\end{aligned}$$

$$\lim_{x\to -2^+} f_k(x) = \lim_{x\to -2^+} \frac{k-3x}{k} = \frac{k+6}{k}$$

$$f_k(-2) = \frac{k+6}{k}$$

Para que a função seja contínua em $x=-2$:

$$\frac{k+6}{k} = -4 \Leftrightarrow k+6 = -4k \Leftrightarrow 5k = -6 \Leftrightarrow k = -\frac{6}{5}$$

Assim, a função desta família que é contínua em $x=-2$ é definida por:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2x^3+2x^2+8}{x^2-4} & \text{se} \quad x < -2 \\ \frac{2+5x}{2} & \text{se} \quad x \geq -2 \end{cases}$$

21.
21.1.

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{x}{\sqrt{x}} \overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=} \lim_{x\to 0^+} \sqrt{x} = 0$$

$$f(0) = -5$$

Como $\lim_{x\to 0^+} g(x) \neq g(0)$, qualquer função da família é descontínua em $x = 0$.

21.2.

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} \frac{kx-1}{x+2} = \frac{k-1}{3}$$

$$f(1) = 1$$

Para que a função seja contínua à direita de $x = 1$, temos:

$$\frac{k-1}{3} = 1 \Leftrightarrow k = 4$$

Para $k = 4$, a função f é contínua em $]1, +\infty[$, por se tratar do quociente de duas funções contínuas.

Assim, o valor de k para o qual obtemos uma família de funções contínuas em $[1, +\infty[$ é 4.

22.
22.1.

$$\lim_{x\to 3^-} f(x) = \lim_{x\to 3^-} \frac{9}{3-x} = \frac{9}{0^+} = +\infty$$

$$f(3) = 0$$

Como $\lim_{x\to 3^-} f(x) \neq f(3)$, a função f não é contínua em $x = 3$.

$$\lim_{x\to 3^-} f(x) = \lim_{x\to 3^-} \frac{x^2}{x-3} = \frac{9}{0^-} = -\infty$$

$$f(3) = 6$$

Como $\lim_{x\to 3^-} g(x) \neq g(3)$, a função g não é contínua em $x = 3$.

22.2.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 3^-}(f+g)(x) &= \lim_{x\to 3^-}\left(\frac{9}{3-x}+\frac{x^2}{x-3}\right)=\lim_{x\to 3^-}\frac{x^2-9}{x-3}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\\ &= \lim_{x\to 3^-}\frac{(x-3)(x+3)}{x-3}=\lim_{x\to 3^-}(x+3)=6\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 3^+}(f+g)(x) &= \lim_{x\to 3^+}\left(\frac{9}{3-x}+\frac{x^2}{x-3}\right)=\lim_{x\to 3^+}\frac{x^2-9}{x-3}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\\ &= \lim_{x\to 3^+}\frac{(x-3)(x+3)}{x-3}=\lim_{x\to 3^+}(x+3)=6\end{aligned}$$

$$(f+g)(3)=0+6=6$$

Como $\lim\limits_{x\to 3^-}(f+g)(x)=\lim\limits_{x\to 3^+}(f+g)(x)=f(3)$, a função $f+g$ é contínua em $x=3$.

23.
23.1.

$$D_f=\{x\in\mathbb{R}: x^2-2\neq 0\}=\mathbb{R}\setminus\{-\sqrt{2},\sqrt{2}\}$$

A função f é o quociente entre duas funções contínuas: a função constante $x\mapsto 1$ e a função polinomial $x\mapsto x^2-2$.
Assim, a função é contínua em todo o seu domínio.

23.2.

$$\lim_{x\to\sqrt{2}^-} f(x)=\lim_{x\to\sqrt{2}^-}\frac{1}{x^2-2}=\frac{1}{0^-}=-\infty$$

Seja qual for o valor $f(\sqrt{2})$ temos que $\lim\limits_{x\to\sqrt{2}^-} f(x)\neq f(\sqrt{2})$, pelo que não existe qualquer prolongamento de f que seja contínuo em $\mathbb{R}$.

24.

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{\sqrt{x}-2}{x-4}=\frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=f(0)=a$$

Assim, para que a função seja contínua em $x=0$, temos que $a=\dfrac{1}{2}$.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 4^-} f(x) &= \lim_{x\to 4^-} \frac{\sqrt{x}-2}{x-4} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x\to 4^-} \frac{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)}{(x-4)(\sqrt{x}+2)} = \lim_{x\to 4^-} \frac{x-4}{(x-4)(\sqrt{x}+2)}\\ &= \lim_{x\to 4^-} \frac{1}{\sqrt{x}+2} = \frac{1}{4}\end{aligned}$$

$$\lim_{x\to 4^+} f(x) = f(4) = b$$

Assim, para que a função seja contínua em $x = 4$, temos que $b = \dfrac{1}{4}$.

25. A função g é contínua em $\mathbb{R}$, por se tratar de uma função polinomial. Em particular, é contínua em $[-3,-2]$. Como $g(-3) = 38$, $g(-2) = -3$ e $-3 < 0 < 38$, pelo teorema de Bolzano-Cauchy, podemos concluir que existe pelo menos um número real $c \in]-3,-2[$ tal que $g(c) = 0$. Desta forma, a proposição é verdadeira.

26.

26.1.

Assíntotas verticais:

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} : x-2 \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{2\}$$

$$\lim_{x\to 2^-} \frac{3x^2-5x-7}{x-2} = \frac{-7}{0^-} = +\infty$$

A reta de equação $x = 2$ é assíntota vertical ao gráfico de f.

Assíntotas não verticais:

$$\begin{aligned}m = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} &= \lim_{x\to+\infty} \frac{3x^2-5x-7}{x^2-2x} \overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2\left(3-\frac{5}{x}-\frac{7}{x^2}\right)}{x^2\left(1-\frac{2}{x}\right)} =\\ &= \lim_{x\to+\infty} \frac{3-\frac{5}{x}-\frac{7}{x^2}}{1-\frac{2}{x}} = 3\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}b = \lim_{x\to+\infty}(f(x)-3x) &= \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{3x^2-5x-7}{x-2} - 3x\right) \overset{(+\infty-\infty)}{=}\\ &= \lim_{x\to+\infty} \frac{x-7}{x-2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1-\frac{7}{x}}{1-\frac{2}{x}} = 1\end{aligned}$$

Assim, a reta de equação $y = 3x + 1$ é assíntota oblíqua ao gráfico de f quando $x \to +\infty$.

Quando $x \to -\infty$ também se obtém a mesma reta.

26.2.

Assíntotas verticais:

$$D_g = \left\{x \in \mathbb{R} : 2x^2 + 1 \neq 0\right\} = \mathbb{R}$$

O gráfico de g não tem assíntotas verticais.

Assíntotas não verticais:

$$\begin{aligned} m = \lim_{x\to+\infty} \frac{g(x)}{x} &= \lim_{x\to+\infty} \frac{2x^3 - 3x + 1}{2x^3 + x} \overset{(+\infty-\infty)}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{x^3\left(2 - \frac{3}{x^2} + \frac{1}{x^3}\right)}{x^3\left(2 + \frac{1}{x^2}\right)} = \\ &= \lim_{x\to+\infty} \frac{2 - \frac{3}{x^2} + \frac{1}{x^3}}{2 + \frac{1}{x^2}} = 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b = \lim_{x\to+\infty} (g(x) - x) &= \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{2x^3 - 3x + 1}{2x^2 + 1} - x\right) \overset{(+\infty-\infty)}{=} \\ &= \lim_{x\to+\infty} \frac{-4x + 1}{2x^2 + 1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{-4 + \frac{1}{x}}{x\left(2 + \frac{1}{x^2}\right)} = 0 \end{aligned}$$

Assim, a reta de equação $y = x$ é assíntota oblíqua ao gráfico de g quando $x \to +\infty$.

Quando $x \to -\infty$ também se obtém a mesma reta.

26.3.

Assíntotas verticais:

$$D_h = \{x \in \mathbb{R} : |x - 1| \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{1\}$$

$$\lim_{x\to1^-} \frac{x^2}{|x - 1|} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

A reta de equação $x = 1$ é assíntota vertical ao gráfico de h.

Assíntotas não verticais:

$$
\begin{aligned}
m = \lim_{x\to+\infty} \frac{h(x)}{x} &= \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{x|x-1|} \overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{x(x-1)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{x^2-x} \\
&= \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{x^2\left(1-\frac{1}{x}\right)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{1-\frac{1}{x}} = 1
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
b = \lim_{x\to+\infty} (h(x)-x) &= \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{x^2}{|x-1|} - x\right) \overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=} \\
&= \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{x^2}{x-1} - x\right) = \\
&= \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2 - x(x-1)}{x-1} = \\
&= \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{x-1} \overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=} \\
&= \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{x\left(1-\frac{1}{x}\right)} = \\
&= \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{1-\frac{1}{x}} = 1
\end{aligned}
$$

Assim, a reta de equação $y = x + 1$ é assíntota oblíqua ao gráfico de g quando $x \to +\infty$.

$$
\begin{aligned}
m = \lim_{x\to-\infty} \frac{h(x)}{x} &= \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2}{x|x-1|} \overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=} \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2}{-x(x-1)} = \lim_{x\to-\infty} -\frac{x^2}{x^2-x} \\
&= \lim_{x\to-\infty} -\frac{x^2}{x^2\left(1-\frac{1}{x}\right)} = \lim_{x\to-\infty} -\frac{1}{1-\frac{1}{x}} = -1
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}
b = \lim_{x\to-\infty}(h(x)+x) &= \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x^2}{|x-1|}+x\right) \overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=} \\
&= \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x^2}{-(x-1)}+x\right) = \\
&= \lim_{x\to-\infty}\frac{-x^2+x(x-1)}{x-1} = \\
&= \lim_{x\to-\infty}\frac{-x}{x-1} \overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=} \\
&= \lim_{x\to-\infty}\frac{-x}{x\left(1-\frac{1}{x}\right)} = \\
&= \lim_{x\to-\infty}\frac{-1}{1-\frac{1}{x}} = -1
\end{aligned}$$

Assim, a reta de equação $y=-x-1$ é assíntota oblíqua ao gráfico de g quando $x\to-\infty$.

26.4.
Assíntotas verticais:

$$D_i = \left\{x\in\mathbb{R} : x^2-9\geq 0\right\} =]-\infty,-3]\cup[3,+\infty[$$

O gráfico de i não tem assíntotas verticais.

Assíntotas não verticais:

$$\begin{aligned}
m = \lim_{x\to+\infty}\frac{i(x)}{x} &= \lim_{x\to+\infty}\frac{3x+\sqrt{x^2-9}}{x} \overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=} \lim_{x\to+\infty}\frac{3x+|x|\sqrt{1-\frac{9}{x^2}}}{x} \\
&= \lim_{x\to+\infty}\frac{x\left(3+\sqrt{1-\frac{9}{x^2}}\right)}{x} = \lim_{x\to+\infty}\left(3+\sqrt{1-\frac{9}{x^2}}\right) = 4
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
b = \lim_{x\to+\infty}(i(x)-4x) &= \lim_{x\to+\infty}\left(3x+\sqrt{x^2-9}-4x\right) \overset{(+\infty-\infty)}{=} \\
&= \lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2-9}-x\right)\left(\sqrt{x^2-9}+x\right)}{\sqrt{x^2-9}+x} \\
&= \lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-9-x^2}{\sqrt{x^2-9}+x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{-9}{\sqrt{x^2-9}+x} = 0
\end{aligned}
$$

Assim, a reta de equação $y=4x$ é assíntota oblíqua ao gráfico de i quando $x\to+\infty$.

$$
\begin{aligned}
m = \lim_{x\to-\infty}\frac{i(x)}{x} &= \lim_{x\to-\infty}\frac{3x+\sqrt{x^2-9}}{x} \overset{(\frac{\infty}{\infty})}{=} \lim_{x\to-\infty}\frac{3x+|x|\sqrt{1-\frac{9}{x^2}}}{x} \\
&= \lim_{x\to-\infty}\frac{x\left(3-\sqrt{1-\frac{9}{x^2}}\right)}{x} = \lim_{x\to-\infty}\left(3-\sqrt{1-\frac{9}{x^2}}\right) = 2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
b = \lim_{x\to-\infty}(i(x)-2x) &= \lim_{x\to-\infty}\left(3x+\sqrt{x^2-9}-2x\right) \overset{(+\infty-\infty)}{=} \\
&= \lim_{x\to-\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2-9}+x\right)\left(\sqrt{x^2-9}-x\right)}{\sqrt{x^2-9}-x} \\
&= \lim_{x\to-\infty}\frac{x^2-9-x^2}{\sqrt{x^2-9}-x} = \lim_{x\to-\infty}\frac{-9}{\sqrt{x^2-9}-x} = 0
\end{aligned}
$$

Assim, a reta de equação $y=2x$ é assíntota oblíqua ao gráfico de g quando $x\to-\infty$.

27.

27.1. O gráfico de g pode ser obtido a partir do gráfico de f através de uma translação associada ao vetor $(-1,0)$. Assim, $y=-5$ e $y=-3(x+1)+2$, ou seja, $y=-5$ e $y=-3x-1$ são assíntotas ao gráfico de g.

27.2. O gráfico de h pode ser obtido a partir do gráfico de f através de uma reflexão relativamente ao eixo Oy. Assim, $y=-5$ e $y=-3\times(-x)+2$, ou seja, $y=-5$ e $y=3x+2$ são assíntotas ao gráfico de h.

27.3. O gráfico de i pode ser obtido a partir do gráfico de f através de uma reflexão relativamente ao eixo Ox. Assim, $-y = -5$ e $-y = -3x + 2$, ou seja, $y = 5$ e $y = 3x - 2$ são assíntotas ao gráfico de i.

27.4. O gráfico de j pode ser obtido a partir do gráfico de f através de uma reflexão relativamente ao eixo Ox, seguido de uma translação associada ao vetor $(0, 2)$. O resultado da primeira transformação está indicado na alínea anterior. Assim, $y = 5 + 2$ e $y = 3x - 2 + 2$, ou seja, $y = 7$ e $y = 3x$ são assíntotas ao gráfico de j.

28.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(\sqrt{x^2+1} - x\right)' = \frac{1}{2}(x^2+1)^{-\frac{1}{2}} \times (x^2+1)' - 1 = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} - 1 = \\ &= \frac{x - \sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{-\left(\sqrt{x^2+1} - x\right)}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{-f(x)}{\sqrt{x^2+1}} \end{aligned}$$

29.

29.1.

$$(f+g)'(2) = f'(2) + g'(2) = -2 + 1 = -1$$

29.2.

$$(5f)'(2) = 5f'(2) = 5 \times (-2) = -10$$

29.3.

$$(f \times g)'(2) = f'(2)g(2) + f(2)g'(2) = -2 \times (-3) + 4 \times 1 = 10$$

29.4.

$$\left(\frac{1}{f}\right)'(2) = \frac{1' \times f(2) - 1 \times f'(2)}{f^2(2)} = \frac{2}{16} = \frac{1}{8}$$

29.5.

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(2) = \frac{f'(2) \times g(2) - f(2) \times g'(2)}{g^2(2)} = \frac{-2 \times (-3) - 4 \times 1}{9} = \frac{2}{9}$$

29.6.

$$\left(\frac{1}{f+g}\right)'(2) = \frac{1' \times (f+g)(2) - 1 \times (f+g)'(2)}{(f+g)^2(2)} = \frac{0 - 1 \times (-1)}{(4-3)^2} = 1$$

29.7.

$$(g \times g)'(2) = \left(g^2\right)'(2) = 2g(2) \times g'(2) = 2 \times (-3) \times 1 = -6$$

29.8.

$$\begin{aligned}\left(\frac{f}{f+g}\right)'(2) &= \frac{f'(2) \times (f+g)(2) - f(2) \times (f+g)'(2)}{(f+g)^2(2)} = \\ &= \frac{-2 \times (4-3) - 4 \times (-1)}{(4-3)^2} = 2\end{aligned}$$

30.

30.1.

$$f'(x) = \left(\frac{1}{2x-3}\right)' = \frac{-2}{(2x-3)^2} \qquad f'(0) = -\frac{2}{9}$$

O declive da reta é dado por $f'(0) = -\frac{2}{9}$. Assim, a equação reduzida da reta é $y = -\frac{2}{9}x + b$. Como o ponto de coordenadas $(0, f(0))$ pertence à reta, vem que $-\frac{1}{3} = -\frac{2}{9} \times 0 + b \Leftrightarrow b = -\frac{1}{3}$.
Concluímos assim que $y = -\frac{2}{9}x - \frac{1}{3}$ é uma equação da reta tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa 0.

30.2.

$$g'(x) = \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}\right)' = -\frac{1}{x^2} + \frac{2}{x^3} \qquad g'\left(-\frac{1}{2}\right) = -20$$

O declive da reta é dado por $g'\left(-\frac{1}{2}\right) = -20$. Assim, a equação reduzida da reta é $y = -20x + b$. Como o ponto de coordenadas $\left(-\frac{1}{2}, g\left(-\frac{1}{2}\right)\right)$ pertence à reta, vem que $-6 = -20 \times \left(-\frac{1}{2}\right) + b \Leftrightarrow b = -16$.
Concluímos assim que $y = -20x - 16$ é uma equação da reta tangente ao gráfico de g no ponto de abcissa $-\frac{1}{2}$.

30.3.

$$h'(x) = \left(\frac{x+1}{x-1}\right)' = \frac{x - 1 - (x+1)}{(x-1)^2} = \frac{-2}{(x-1)^2} \qquad h'(0) = -2$$

O declive da reta é dado por $h'(0) = -2$. Assim, a equação reduzida da reta é $y = -2x + b$. Como o ponto de coordenadas $(0, h(0))$ pertence à reta, vem que $-1 = -2 \times 0 + b \Leftrightarrow b = -1$.

Concluímos assim que $y = -2x - 1$ é uma equação da reta tangente ao gráfico de h no ponto de abcissa 0.

31.

$$f'(x) = \left(\frac{x}{x+1}\right)' = \frac{1 \times (x+1) - x \times 1}{(x+1)^2} = \frac{1}{(x+1)^2}$$

Para determinar os pontos do gráfico nos quais a reta tangente é paralela à bissetriz dos quadrantes ímpares, $y = x$, devem-se procurar as soluções da equação $f'(x) = 1$.

$$f'(x) = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{(x+1)^2} \Leftrightarrow (x+1)^2 = 1 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = -2$$

Assim, as retas tangentes ao gráfico de f nos pontos $(0, 0)$ e $(-2, 2)$ são paralelas à bissetriz dos quadrantes ímpares.

32.
32.1.

$$D_f = \mathbb{R}$$

Determinar a derivada $f'(x)$:

$$f'(x) = \left(x^3 + 3x^2 - 9x - 10\right)' = 3x^2 + 6x - 9$$

Determinar os zeros de f':

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 + 6x - 9 = 0 \Leftrightarrow x = -3 \vee x = 1$$

Estudar o sinal de f' e a variação de f:

x	$-\infty$	-3		1	$+\infty$
Sinal de f'	$+$	0	$-$	0	$+$
Variação de f	$\nearrow$	17 Máx.	$\searrow$	-15 mín.	$\nearrow$

f é crescente em $]-\infty, -3]$ e em $[1, +\infty[$ e é decrescente em $[-3, 1]$.
17 é máximo em $x = -3$ e -15 é mínimo em $x = 1$.

32.2.

$$D_g = \{x \in \mathbb{R} : x \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

Determinar a derivada $g'(x)$:

$$g'(x) = \left(\frac{x}{4} + \frac{1}{x}\right)' = \frac{1}{4} - \frac{1}{x^2}$$

Determinar os zeros de g':

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{4} - \frac{1}{x^2} = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{4} = \frac{1}{x^2} \Leftrightarrow x = -2 \vee x = 2$$

Estudar o sinal de g' e a variação de g:

x	$-\infty$	-2		0		2	$+\infty$
Sinal de g'	$+$	0	$-$	n.d.	$-$	0	$+$
Variação de g	$\nearrow$	-1 Máx.	$\searrow$	n.d.	$\searrow$	1 mín.	$\nearrow$

g é crescente em $]-\infty, -2]$ e em $[2, +\infty[$ e é decrescente em $[-2, 0[$ e em $]0, 2]$.
-1 é máximo em $x = -2$ e 1 é mínimo em $x = 2$.

32.3.

$$D_h = \left\{x \in \mathbb{R} : x^2 + 1 \neq 0\right\} = \mathbb{R}$$

Determinar a derivada $h'(x)$:

$$h'(x) = \left(\frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}\right)' = \frac{2x \times (x^2 + 1) - (x^2 - 1) \times 2x}{(x^2 + 1)^2} = \frac{4x}{(x^2 + 1)^2}$$

Determinar os zeros de h':

$$h'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{4x}{(x^2 + 1)^2} = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

Estudar o sinal de h' e a variação de h:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
Sinal de h'	$-$	0	$+$
Variação de h	$\searrow$	-1 mín.	$\nearrow$

h é crescente em $[0,+\infty[$ e é decrescente em $]-\infty,0]$.
-1 é mínimo em $x=0$.

32.4.
$$D_i = \{x \in \mathbb{R} : x-8 \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{8\}$$

Determinar a derivada $i'(x)$:

$$i'(x) = \left(\frac{x^3}{x-8}\right)' = \frac{3x^2 \times (x-8) - x^3 \times 1}{(x-8)^2} = \frac{2x^3 - 24x^2}{(x-8)^2}$$

Determinar os zeros de i':

$$i'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{2x^3 - 24x^2}{(x-8)^2} = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 12$$

Estudar o sinal de i' e a variação de i:

x	$-\infty$	0		8		12	$+\infty$
Sinal de i'	$-$	0	$-$	n.d.	$-$	0	$+$
Variação de i	$\searrow$	0	$\searrow$	n.d.	$\searrow$	432 mín.	$\nearrow$

i é crescente em $[12,+\infty[$ e é decrescente em $]-\infty,8[$ e em $]8,12]$.
432 é mínimo em $x=12$.

33. A opção que pode representar a função f é a (III). Podemos excluir a opção (II), pois, por visualização gráfica, as imagens de 1 e de 4 têm sinais contrários. Logo, $f(1) \times f(4) < 0$, o que contraria a condição dada. Excluímos a opção (IV), pois, como f'' está definida em $\mathbb{R}$, em particular f é diferenciável duas vezes e, portanto, é contínua. A opção (I) não respeita o sentido das concavidades do gráfico de f. O sentido das concavidades é obtido pelo estudo do sinal da segunda derivada de f. Como a parte do gráfico de g visualizada está acima do eixo das abcissas, g é contínua e não tem zeros, então $g(x) > 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}$. Assim, o sinal de f'' é dado pelo sinal do fator $x^2 - 5x + 4$. Rejeitamos a opção (I), pois, por exemplo no intervalo $[1,4]$, a concavidade está voltada para cima quando deveria estar voltada para baixo.

34. A opção que pode representar a função h é a opção (I). Podemos excluir a opção (II), pois, nesta, $\lim\limits_{x\to-\infty} h(x) = -1$ e sabe-se que:

$$\lim_{x\to-\infty}(h(x)-1)=0 \Leftrightarrow \lim_{x\to-\infty} h(x)=1$$

Excluimos a opção (III), pois contraria o facto de existir um mínimo relativo em $]a,c[$. Rejeitamos a opção (IV) por não respeitar o sentido das concavidades do gráfico de h. Nesta opção, para $x>b$, o gráfico apresenta a concavidade voltada para baixo. Como uma das condições é $h''(x)>0$ para $x>b$, então o gráfico de h tem que ter a concavidade voltada para cima quando $x>b$.

35. Uma vez que o parque é retangular e a sua área é 5000 m^2, temos que $xy=5000 \Leftrightarrow y=\frac{5000}{x}$. Desta forma, o comprimento da cerca c pode ser escrito em função de x através da expressão $c(x)=x+2\times\frac{5000}{x}=x+\frac{10000}{x}$. Para se determinar o valor de x que permite minimizar o comprimento da cerca vamos estudar o sinal de c'.

$$c'(x)=\left(x+\frac{10000}{x}\right)'=1-\frac{10000}{x^2}$$

$$c'(x)=0 \Leftrightarrow 1-\frac{10000}{x^2}=0 \Leftrightarrow \frac{10000}{x^2}=1 \Leftrightarrow x^2=10000 \Leftrightarrow x=100 \vee x=-100$$

Como $x>0$, temos que $x=100$.

x	0		100	$+\infty$
Sinal de c'	n.d.	$-$	0	$+$
Variação de c	n.d.	$\searrow$	200 mín.	$\nearrow$

Como $x=100$, enão $y=\frac{5000}{x}=\frac{5000}{100}=50$.
A menor quantidade de cerca necessária é 200 metros e o parque deverá ter 100 metros de comprimento e 50 metros de largura.

36. Como $y=-2x+2$ é assíntota ao gráfico de f, sabemos que:

$$\lim_{x\to-\infty}(f(x)+2x-2)=0 \quad \text{e} \lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=-2$$

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to-\infty}\left[f(x)\times\frac{kx^2+x+1}{x^3}\right] &= \lim_{x\to-\infty}\left[\frac{f(x)}{x}\times\frac{kx^2+x+1}{x^2}\right]= \\
&= -2\times\lim_{x\to-\infty}\left[\frac{kx^2+x+1}{x^2}\right]\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=} \\
&= -2\times\lim_{x\to-\infty}\left[\frac{x^2\left(k+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}{x^2}\right]= \\
&= -2\times\lim_{x\to-\infty}\left(k+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)=-2k
\end{aligned}$$

Temos então:

$$\lim_{x\to-\infty}\left[f(x)\times\frac{kx^2+x+1}{x^3}\right]=8\Leftrightarrow -2k=8\Leftrightarrow k=-4$$

37.

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to+\infty}\frac{5g(x)+2x+1}{x}=\frac{9}{2} &\Leftrightarrow \lim_{x\to+\infty}5\frac{g(x)}{x}+\lim_{x\to+\infty}\frac{2x+1}{x}=\frac{9}{2}\Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow 5\lim_{x\to+\infty}\frac{g(x)}{x}+\lim_{x\to+\infty}\left(2+\frac{1}{x}\right)=\frac{9}{2}\Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow 5\lim_{x\to+\infty}\frac{g(x)}{x}+2=\frac{9}{2}\Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow \lim_{x\to+\infty}\frac{g(x)}{x}=\frac{1}{2}
\end{aligned}$$

O declive da assíntota ao gráfico de f é igual a $\frac{1}{2}$.

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to+\infty}\left(g(x)-\frac{x}{2}+\frac{3}{4}\right)=1 &\Leftrightarrow \lim_{x\to+\infty}\left(g(x)-\frac{x}{2}\right)+\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{3}{4}\right)=1\Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow \lim_{x\to+\infty}\left(g(x)-\frac{x}{2}\right)+\frac{3}{4}=1\Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow \lim_{x\to+\infty}\left(g(x)-\frac{x}{2}\right)=\frac{1}{4}
\end{aligned}$$

A ordenada na origem da assíntota ao gráfico de f é $\frac{1}{4}$.

Conclui-se que $y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}$ é uma equação reduzida da assíntota oblíqua ao gráfico da função f.

38.
Declive da reta r:

$$f'(x) = (g(x) + x + 1)' = g'(x) + 1 \qquad f'(a) = g'(a) + 1$$

Ordenada na origem da reta r:

$$f(a) = af'(a) + b_f \Leftrightarrow g(a) + a + 1 = a(g'(a) + 1) + b_f \Leftrightarrow b_f = g(a) - ag'(a) + 1$$

Equação reduzida da reta r:

$$y = (g'(a) + 1)x + g(a) - ag'(a) + 1$$

Declive da reta s:

$$g'(a)$$

Ordenada na origem da reta s:

$$g(a) = ag'(a) + b_g \Leftrightarrow b_g = g(a) - ag'(a)$$

Equação reduzida da reta s:

$$y = g'(a)x + g(a) - ag'(a)$$

Interseção das retas r e s:

$$(g'(a) + 1)x + g(a) - ag'(a) + 1 = g'(a)x + g(a) - ag'(a) \Leftrightarrow x = -1$$

Como se pretendia mostrar.

39. A função f'' é contínua em $\mathbb{R}$ e, em particular, é contínua em $[a, b]$. Como as retas tangentes ao gráfico de f' nos pontos de abcissas a e b são perpendiculares, sabemos que o produto dos seus declives é -1, ou seja, $f''(a) \times f''(b) = -1 < 0$. Assim, pelo corolário do teorema de Bolzano-Cauchy, podemos concluir que existe pelo menos um número real $c \in]a, b[$ tal que $f''(c) = 0$, como queríamos mostrar.

40. O comprimento do cabo pode ser escrito em função de x:
- por terra

$$c_1(x) = 3000 - x$$

- debaixo de água

$$c_2(x) = \sqrt{x^2 + 900^2}$$

Assim, o custo total p do cabo é dado por:

$$p(x) = 4c_1(x) + 5c_2(x) = 4(3000 - x) + 5\sqrt{x^2 + 900^2}$$

$$p'(x) = -4 + 5 \times \frac{1}{2}(x^2 + 900^2)^{-\frac{1}{2}} \times 2x = -4 + \frac{5x}{\sqrt{x^2 + 900^2}}$$

$$\begin{aligned} p'(x) = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad -4 + \frac{5x}{\sqrt{x^2 + 900^2}} = 0 \Leftrightarrow \frac{5x}{4} = \sqrt{x^2 + 900^2} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \quad \frac{25x^2}{16} = x^2 + 900^2 \Leftrightarrow 25x^2 = 16x^2 + 16 \times 900^2 \\ &\Leftrightarrow \quad x^2 = \frac{16 \times 900^2}{9} \Leftrightarrow x = -1200 \vee x = 1200 \end{aligned}$$

x	0		1200		3000
Sinal de p'	$-$	$-$	0	$+$	$+$
Variação de p	16 500	$\searrow$	14 700 mín.	$\nearrow$	$1\,500\sqrt{109}$

De modo a minimizar o custo total do cabo, $x = 1\,200$, ou seja, o cabo deve percorrer 1 800 m por terra e depois passar debaixo de água. Nestas condições, o custo mínimo é 14 700 euros.

41. Consideremos um cilindro com altura a e cuja base tem raio r. Como o cilindro tem volume V_0, tem-se que:

$$\pi r^2 a = V_0 \Leftrightarrow a = \frac{V_0}{\pi r^2}$$

A superfície total das bases é $2 \times \pi r^2$ e a superfície lateral é $2\pi r \times a = 2\pi r \times \frac{V_0}{\pi r^2} = \frac{2V_0}{r}$.

Assim, o custo total c em função do raio da base é dado pela expressão:

$$c(r) = 3 \times 2 \times \pi r^2 + 2 \times \frac{2V_0}{r} = 6\pi r^2 + \frac{4V_0}{r}$$

$$c'(r) = \left(6\pi r^2 + \frac{4V_0}{r}\right)' = 12\pi r - \frac{4V_0}{r^2}$$

$$c'(r) = 0 \Leftrightarrow 12\pi r - \frac{4V_0}{r^2} = 0 \Leftrightarrow 12\pi r = \frac{4V_0}{r^2} \Leftrightarrow r^3 = \frac{4V_0}{12\pi} \Leftrightarrow r = \sqrt[3]{\frac{V_0}{3\pi}}$$

$$\frac{a}{r} = \frac{\frac{V_0}{\pi r^2}}{r} = \frac{\frac{V_0}{\pi\left(\sqrt[3]{\frac{V_0}{3\pi}}\right)^2}}{\sqrt[3]{\frac{V_0}{3\pi}}} = \frac{V_0}{\pi\left(\sqrt[3]{\frac{V_0}{3\pi}}\right)^3} = \frac{V_0}{\pi \times \frac{V_0}{3\pi}} = 3$$

Assim, de modo a minimizar o custo total, a altura do cilindro deve ser o triplo do raio da base.