Escola Secundária de Paredes

Ficha de Trabalho 7

Matemática A

12.º Ano de Escolaridade • Turma: $B + C + H$

Aula de Preparação Para Exame

fevereiro de 2023

1. Seja (P_n) a sucessão dos comprimentos dos n arcos

   Ora,

   $$P_1 = \frac{2\pi \times r}{4} = \pi r \times \frac{1}{2}$$

   $$P_2 = \frac{2\pi \times \frac{r}{2}}{4} = \frac{\pi r}{4} = \pi r \times \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

   $$P_3 = \frac{2\pi \times \frac{r}{4}}{4} = \frac{\pi r}{8} = \pi r \times \left(\frac{1}{2}\right)^3$$

   $$P_4 = \frac{2\pi \times \frac{r}{8}}{4} = \frac{\pi r}{16} = \pi r \times \left(\frac{1}{2}\right)^4$$

   Mantendo-se a regularidade, tem-se, $P_n = \pi r \times \left(\frac{1}{2}\right)^n$

   Os comprimentos dos arcos estão em progressão geométrica de razão $\frac{1}{2}$

   Assim,

   $$S_n = P_1 + P_2 + P_3 + \cdots + P_n = \pi r \times \frac{1}{2} \times \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \frac{1}{2}} = \pi r \times \frac{1}{2} \times \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{\frac{1}{2}} = \pi r \times \left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right]$$

   Portanto, $S = \lim S_n = \lim \left[\pi r \times \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right)\right] = \pi r \times (1 - 0) = \pi r$

   Resposta: (B)

2. Como, $\frac{2}{e^{-2}}$, $\frac{a}{16}$ e $512e^{10}$, com $a \in \mathbb{R}$, são três termos consecutivos de uma progressão geométrica (a_n) de razão positiva,

   Então, vem,

   $$\frac{\frac{a}{16}}{\frac{2}{e^{-2}}} = \frac{512e^{10}}{\frac{a}{16}} \Leftrightarrow \left(\frac{a}{16}\right)^2 = 1024e^{12} \Leftrightarrow a^2 = 16^2 \times 1024e^{12} \Leftrightarrow a^2 = 262144e^{12} \Leftrightarrow$$

   $$\Leftrightarrow a = \pm\sqrt{262144e^{12}} \Leftrightarrow a = \pm 512e^6$$

   Como a razão da progressão geométrica é positiva, então $a > 0$, logo $a = 512e^6$

Assim,

$$\frac{a}{16} = \frac{512e^6}{16} = 32e^6$$

Seja r, a razão da progressão geométrica

$$r = \frac{512e^{10}}{32e^6} = 16e^4$$

Assim,

$$a_5 = a_1 \times r^4 = \frac{e^{-14}}{32768} \times \left(16e^4\right)^4 = \frac{e^{-14}}{32768} \times 16^4 e^{16} = \frac{e^{-14}}{32768} \times 65536e^{16} = 2e^2$$

$$a_6 = a_5 \times r = 2e^2 \times 16e^4 = 32e^6$$

$$a_7 = a_6 \times r = 32e^6 \times 16e^4 = 512e^{10}$$

Portanto,

$$a_5 \times a_6 \times a_7 = 2e^2 \times 32e^6 \times 512e^{10} = 32768e^{18}$$

3. Seja $r > 0$, a razão da progressão geométrica (a_n)

   Então,

   $a_2 = a_1 \times r$, ou seja, $r = \frac{a_2}{a_1} = \frac{x}{x^2} = \frac{1}{x}$

   $a_3 = a_2 \times r$, ou seja, $r = \frac{a_3}{a_2} = \frac{\log(x)}{x}$

   Assim, resulta

   $$\frac{\log(x)}{x} = \frac{1}{x} \Leftrightarrow \log(x) = 1 \Leftrightarrow x = 10$$

   Deste modo,

   $$a_1 = 10^2 = 100$$

   $$r = \frac{1}{10}$$

   Determinemos o termo geral da progressão geométrica (a_n)

   $$a_n = a_1 \times r^{n-1}$$

   Assim,

   $$a_n = 100 \times \left(\frac{1}{10}\right)^{n-1} = 10^2 \times 10^{-n+1} = 10^{2-n+1} = 10^{-n+3}$$

   Procuremos $n \in \mathbb{N}$, de modo que $a_n = 10^{-10}$

   $$a_n = 10^{-10} \Leftrightarrow 10^{-n+3} = 10^{-10} \Leftrightarrow -n+3 = -10 \Leftrightarrow -n = -13 \Leftrightarrow n = 13 \in \mathbb{N}$$

   Logo, 10^{-10} é termo da sucessão (a_n), é o termo de ordem treze

4. Ora, $u_n = \frac{2n+1}{n+2} = \frac{2n+4-3}{n+2} = \frac{2(n+2)-3}{n+2} = \frac{2(n+2)}{n+2} - \frac{3}{n+2} = 2 - \frac{3}{n+2}$

   $n \geq 1, \forall n \in \mathbb{N}$
   $\therefore n+2 \geq 3, \forall_{n\in\mathbb{N}}$
   $\therefore \frac{1}{n+2} \leq \frac{1}{3}, \forall_{n\in\mathbb{N}}$
   Por outro lado, a sucessão de termo geral $\frac{1}{n+2}$ tem os termos todos positivos, assim,
   $0 < \frac{1}{n+2} \leq \frac{1}{3}, \forall_{n\in\mathbb{N}}$
   $\therefore 0 > -\frac{1}{n+2} \geq -\frac{1}{3}, \forall_{n\in\mathbb{N}}$
   $\therefore -\frac{1}{3} \leq -\frac{1}{n+2} < 0, \forall_{n\in\mathbb{N}}$
   $\therefore -1 \leq -\frac{3}{n+2} < 0, \forall_{n\in\mathbb{N}}$
   $\therefore 2-1 \leq 2-\frac{3}{n+2} < 0+2, \forall_{n\in\mathbb{N}}$
   $\therefore 1 \leq 2-\frac{3}{n+2} < 2, \forall_{n\in\mathbb{N}}$
   $\therefore 1 \leq u_n < 2, \forall_{n\in\mathbb{N}}$ c.q.d.

   Como o conjunto dos termos da sucessão (u_n) admite majorante (2) e minorante (1), a sucessão é limitada

5. Sabe-se que:

   - A e B são pontos do gráfico da função f e têm ordenada $\ln(3)$
   - C e D são os pontos de interseção do gráfico da função f com o eixo Ox

   $f(x) = 0 \Leftrightarrow \ln(x^2-1) = 0 \wedge x^2-1 > 0 \Leftrightarrow x^2-1 = e^0 \wedge (x < -1 \vee x > 1) \Leftrightarrow$

   $\Leftrightarrow x^2-1 = 1 \wedge (x < -1 \vee x > 1) \Leftrightarrow x^2 = 2 \wedge (x < -1 \vee x > 1) \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{2} \wedge (x < -1 \vee x > 1) \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{2}$

   Logo, $C(-\sqrt{2}; 0)$ e $D(\sqrt{2}; 0)$

   $f(x) = \ln 3 \Leftrightarrow \ln(x^2-1) = \ln 3 \wedge x^2-1 > 0 \Leftrightarrow x^2-1 = 3 \wedge (x < -1 \vee x > 1) \Leftrightarrow$

   $\Leftrightarrow x^2 = 4 \wedge (x < -1 \vee x > 1) \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{4} \wedge (x < -1 \vee x > 1) \Leftrightarrow x = \pm 2$

   Logo, $A(2; \ln 3)$ e $B(-2; \ln 3)$

   Assim,

   $\overline{AB} = |2-(-2)| = 4$

   $\overline{CD} = |\sqrt{2}-(-\sqrt{2})| = 2\sqrt{2}$

   Portanto,

   $A_{[ABCD]} = \frac{\overline{AB}+\overline{CD}}{2} \times |Ordenada \quad de \quad A| = \frac{4+2\sqrt{2}}{2} \times |\ln 3| = \left(2+\sqrt{2}\right) \times \ln 3 \; u.a.$

6. Pontos B e C

$f(0)=e^0=1$

Logo, $B(0;1)$

$g(0)=3e^0+2=5$

Logo, $C(0;5)$

Ponto A

$f(x)=g(x)\Leftrightarrow e^x=3e^{-x}+2\Leftrightarrow e^x-3e^{-x}-2=0\Leftrightarrow e^x-\dfrac{3}{e^x}-2=0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \dfrac{(e^x)^2-3-2e^x}{e^x}=0\Leftrightarrow \dfrac{(e^x)^2-2e^x-3}{e^x}=0\Leftrightarrow (e^x)^2-2e^x-3=0\wedge e^x\neq 0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (e^x)^2-2e^x-3=0\wedge$ Condição universal $\Leftrightarrow (e^x)^2-2e^x-3=0$

Fazendo a mudança de variável $y=e^x$, vem,

$y^2-2y-3=0\Leftrightarrow y=\dfrac{-(-2)\pm\sqrt{(-2)^2-4\times 1\times(-3)}}{2\times 1}\Leftrightarrow y=3\vee y=-1$

Como, $y=e^x$, vem,

$e^x=3\vee e^x=-1\Leftrightarrow x=\ln 3\vee$ Equação impossível $\Leftrightarrow x=\ln 3$

Logo, $A\left(\ln 3; f(\ln 3)\right)$

Ora,

$f(\ln 3)=e^{\ln 3}=3$

Logo, $A(\ln 3;3)$

Assim,

$\overline{BC}=|5-1|=4$

Portanto,

$A_{[ABC]}=\dfrac{\overline{BC}\times|Abcissa\quad de\quad A|}{2}=\dfrac{4\times|\ln 3|}{2}=\dfrac{4\ln 3}{2}=2\ln 3\ u.a.$

7. Domínio de f

$D_f = \{x \in \mathbb{R} : x+1 > 0 \wedge x-e > 0 \wedge 1 - |\ln(x-e)| > 0\} = \{x \in \mathbb{R} : x > -1 \wedge x > e \wedge 1 - |\ln(x-e)| > 0\} =$

$= \left\{x \in \mathbb{R} : \dfrac{e^2+1}{e} < x < 2e\right\} = \left]\dfrac{e^2+1}{e}; 2e\right[$

Cálculos auxiliares

$1 - |\ln(x-e)| > 0 \Leftrightarrow |\ln(x-e)| < 1 \wedge x-e > 0 \Leftrightarrow (\ln(x-e) > -1 \wedge \ln(x-e) < 1) \wedge x > e \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x - e > e^{-1} \wedge x - e < e \wedge x > e \Leftrightarrow x > e + e^{-1} \wedge x < 2e \wedge x > e \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x > e + \dfrac{1}{e} \wedge x < 2e \wedge x > e \Leftrightarrow x > \dfrac{e^2+1}{e} \wedge x < 2e \wedge x > e \Leftrightarrow \dfrac{e^2+1}{e} < x < 2e$