Escola Secundária de Penafiel

4º Ficha Formativa

Duração da Ficha Formativa: 90 min | março de 2018

Caderno 1 + Caderno 2

12.º Ano de Escolaridade | Turma K-G

Caderno 1

- **Neste Caderno é permitida a utilização de calculadora**

1. Em qual das opções está o valor de k, sendo k um número real e tal que $\lim\left(1+\frac{2}{n+3}\right)^{\frac{n}{2}}=\frac{1}{e^{k^2-2k}}$?

   (A) -1
   (B) 1
   (C) 2
   (D) -2

2. No conjunto de alunos que frequentam o ensino secundário na área de Ciências e Tecnologias de uma escola do norte do país, sabe-se que:

   - 5 em cada 12 dos seus alunos não gosta de Matemática;
   - 50% dos seus alunos gostam de Física e Química;
   - Dos alunos que gostam de Física e Química, uma sexta parte não gosta de Matemática.

   Escolhe-se ao acaso um aluno do grupo de alunos acima referido

   2.1. Determina a probabilidade de o aluno gostar de Matemática ou de Física e Química. Apresenta o resultado na forma de fração irredutível

   2.2. Determina a probabilidade de o aluno gostar de Física e Química sabendo que não gosta de Matemática. Apresenta o resultado na forma de fração irredutível

3. Sabe-se que $\lim\limits_{x\to 0}\frac{2kx}{-e^{x+1}+e}=\frac{\sqrt{e}}{2}$, com $k\in\mathbb{R}$

   Em qual das opções está o valor de k?

   (A) $\frac{e\sqrt{e}}{4}$
   (B) $-\frac{e\sqrt{e}}{4}$
   (C) $-\frac{e\sqrt{e}}{2}$
   (D) $\frac{e\sqrt{e}}{2}$

4. Considera duas retas, r e s, estritamente paralelas

   Na reta s estão marcados três pontos e na reta r estão marcados quatro pontos, como se observa na figura 1
   Quantos triângulos é possível construir com os sete pontos?

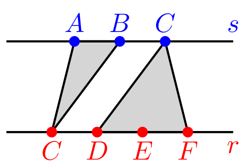

Figura 1

5. Sabendo que $a, b \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$ e que $\log_a(b^2) = \frac{2}{3}$, mostra que $\log_b\left(\frac{1}{\sqrt[4]{b^3 a}}\right) = -\frac{3}{2}$

6. Considera a função f, de domínio $]-\infty;-1[\cup]1;+\infty[$, definida por $f(x) = \log_3(x^2-1) - 1$

   Na figura 2 está representado, num referencial $o.n.$ xOy, parte do gráfico da função f e o trapézio isósceles $[ABCD]$

   Sabe-se que:

   - B e C têm ordenada igual a -1;
   - A e D são os pontos de interseção do gráfico de f com o eixo Ox.

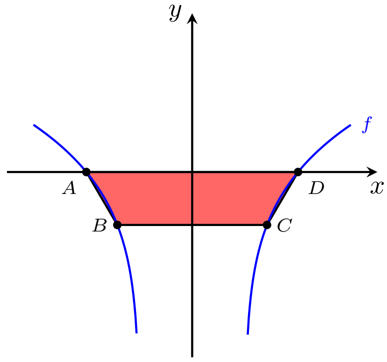

Figura 2

   Determina a área do trapézio $[ABCD]$

7. Na figura 3 está representado, num referencial $o.n.$ xOy, parte do gráfico da função h, de domínio $]-\infty;-1[\cup]1;+\infty[$, definida por $h(x) = \ln(x^2-1) - 1$

   Sabe-se que:

   - as retas t_1 e t_2 são tangentes ao gráfico de h nos pontos P e Q de abcissas $-\sqrt{2}$ e $\sqrt{2}$, respetivamente

   Mostra, analiticamente, que as retas tangentes, t_1 e t_2 se intersetam no ponto $I(0;-5)$.

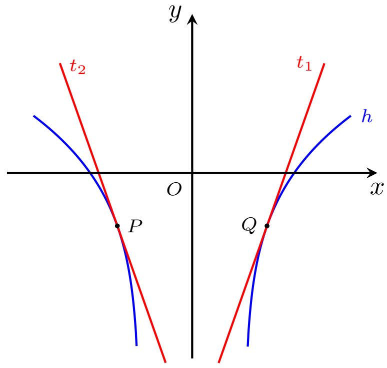

Figura 3

8. A partir do instante em que foi administrada uma medicação por via oral, a quantidade do medicamento existente no sangue (em mg/l) é dada pela fórmula $f(t) = 50(e^{-0.3t} - e^{-2t})$ com t em horas.

   8.1. Qual a quantidade de medicamento existente no organismo ao fim de 2 horas? Apresentar o resultado arredondado às décimas.

   8.2. Sabe-se que a eficácia do tratamento depende da existência de uma quantidade mínima de $5mg/l$ no organismo.
   Utiliza a calculadora gráfica para determinar durante quanto tempo é garantida a quantidade mínima no organismo. Apresenta o resultado em horas arredondado às décimas.

   Nota: Na tua resposta deves:

   - equacionar o problema;
   - representar, em referencial o.n., os gráficos que necessitares para resolver o problema, devidamente identificados;
   - assinalar pontos notáveis;
   - dar a resposta ao problema.

Caderno 2

- **Neste Caderno não é permitida a utilização de calculadora**

---

9. Na figura 4 está representado, num referencial *o.n.* $Oxyz$ parte do gráfico da função g, de domínio $\mathbb{R}$ e definida por $g(x) = e^{-x^2+1} + x^2 - 1$.

Sabe-se que:

- os pontos A, B e C são pontos do gráfico de g onde a função atinge um extremo relativo

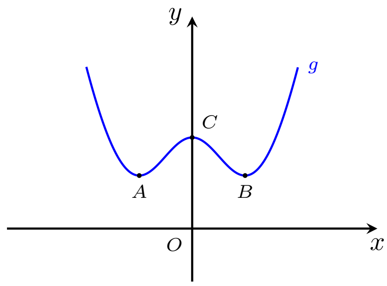

Figura 4

Determina, analiticamente, as coordenadas dos pontos A, B e C, e indica os intervalos de monotonia da função.

10. Considera a função f, de domínio $\mathbb{R}^-$
Sabe-se que a reta de equação $y = -3x + 2$ é assíntota ao gráfico da função f
Qual é o valor de $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{e^{-\ln\left(\frac{1}{x^2}\right)} - f(x)}{x}$?

(A) $-\infty$
(B) $+\infty$
(C) -3
(D) 3

11. Seja f uma função definida por $f(x) = e^{mx+b}$, Com m, b, números reais positivos.

O valor de b para o qual se tem $f'(x) \times \dfrac{f(-x)}{m} = \dfrac{1}{2}$ é:

(A) $-\ln(2)$
(B) $\ln(2)$
(C) $-\ln(\sqrt{2})$
(D) $\ln(\sqrt{2})$

12. Considera a função f, de domínio $\mathbb{R}$, definida por

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^{2x+2} - e^{x+1}}{x+1} + \dfrac{1-e}{e} & se \quad x < -1 \\ \ln\left(e^{\frac{1}{e}}\right) & se \quad x = -1 \\ \dfrac{\ln(x+2)}{x+1} - 1 + \dfrac{1}{e} & se \quad x > -1 \end{cases}$$

Resolve os dois itens seguintes, recorrendo a métodos analíticos

12.1. Averigua se a função f é contínua em $x = -1$

12.2. O gráfico da função f tem uma assintota paralela ao eixo das abcissas quando x tende para $+\infty$. Escreve a sua equação

13. Determina, analiticamente, o conjunto solução da inequação $\log_7(x+2) \geq \log_7(6-2x) - \log_7(x)$

Formulário

Geometria

Comprimento de um arco de circunferência:

αr *(α - amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r - raio)*

área de um polígono regular: *Semiperímetro* $\times$ *Apótema*

área de um setor circular:
$\frac{\alpha r^2}{2}$ *(α- amplitude, em radianos, do ângulo ao centro, r - raio)*

área lateral de um cone: $\pi r g$ *(r - raio da base, g - geratriz)*

área de uma superfície esférica: $4\pi r^2$ *(r - raio)*

Volume da pirâmide: $\frac{1}{3}\times$ *área da base* $\times$ *Altura*

Volume do cone: $\frac{1}{3}\times$ *área da base* $\times$ *Altura*

Volume da esfera: $\frac{4}{3}\pi r^3$ *(r - raio)*

Progressões

Soma dos n primeiros termos de uma progressão (u_n)*:*

Progressão aritmética: $\frac{u_1+u_n}{2}\times n$

Progressão geométrica: $u_1\times\frac{1-r^n}{1-r}$, $r\neq 1$

Trigonometria

$\sin(a+b)=\sin a\cos b+\sin b\cos a$

$\cos(a+b)=\cos a\cos b-\sin a\sin b$

Lei dos senos
$$\frac{\sin\hat{A}}{a}=\frac{\sin\hat{B}}{b}=\frac{\sin\hat{C}}{c}$$

Lei dos cossenos ou Teorema de Carnot

$a^2=b^2+c^2-2bc\cos\hat{A}$

Complexos

$(\rho cis\theta)^n=\rho^n cis(n\theta)$ ou $(\rho e^{i\theta})^n=\rho^n e^{in\theta}$

$\sqrt[n]{\rho cis\theta}=\sqrt[n]{\rho}cis\left(\frac{\theta+2k\pi}{n}\right)$ ou $\sqrt[n]{\rho e^{i\theta}}=\sqrt[n]{\rho}e^{\frac{\theta+2k\pi}{n}}$

$(k\in\{0,\cdots,n-1\}$ e $n\in\mathbb{N})$

Probabilidades

$\mu=p_1x_1+\cdots+p_nx_n$
$\sigma=\sqrt{p_1(x_1-\mu)^2+\cdots+p_n(x_n-\mu)^2}$
Se $X\sim N(\mu,\sigma)$, então:
$P(\mu-\sigma<X<\mu+\sigma)\approx 0.6827$
$P(\mu-2\sigma<X<\mu+2\sigma)\approx 0.9545$
$P(\mu-3\sigma<X<\mu+3\sigma)\approx 0.9973$

Regras de derivação

$(u+v)'=u'+v'$
$(uv)'=u'v+uv'$
$\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-uv'}{v^2}$
$(u^n)'=nu^{n-1}u' \quad (n\in\mathbb{R})$
$(\sin u)'=u'\cos u$
$(\cos u)'=-u'\sin u$
$(\tan u)'=\frac{u'}{\cos^2 u}$
$(e^u)'=u'e^u$
$(a^u)'=u'a^u\ln a \quad (a\in\mathbb{R}^+\backslash\{1\})$
$(\ln u)'=\frac{u'}{u}$
$(\log_a u)'=\frac{u'}{u\ln a} \quad (a\in\mathbb{R}^+\backslash\{1\})$

Limites notáveis

$\lim\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e \quad (n\in\mathbb{N})$
$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$
$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1$
$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0$
$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^p}=+\infty \quad (p\in\mathbb{R})$