Proposta de Teste n.º 4

Matemática A – 11.º Ano – Março de 2015

"Conhece a Matemática e dominarás o Mundo."
Galileu Galilei

Grupo I – Itens de Escolha Múltipla

1. Considere a função g, de domínio $\left]-\frac{2\pi}{3},\frac{\pi}{6}\right[$, definida por $g(x)=\operatorname{sen} x$?

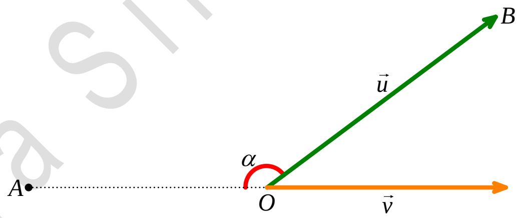
Seja h, a função definida por $h(x)=k-(k+1)g(2x)$, $k\in\mathbb{R}^+$, cujo contradomínio é $]1,7]$. Qual é o valor de k?

A 2 **B** 3 **C** 4 **D** 5

2. Na figura estão representados os vectores $\vec{u}$ e $\vec{v}$, tal que $\|\vec{u}\|=6$ e $\|\vec{v}\|=5$.

Sabe-se que:

- α é a amplitude do ângulo obtuso AOB.
- $\operatorname{sen}\alpha=\frac{3}{5}$



Qual é o valor de $\vec{u}\cdot(2\vec{v}-\vec{u})$?

A -84 **B** 0 **C** 12 **D** 14

3. Considere, num referencial o.n. xOy, os planos α e β, perpendiculares, definidos respectivamente por:

$$\alpha: ax+(a+1)y+(a+1)z=2 \quad \text{e} \quad \beta:(b+1)x-(2b+1)y+(b+1)z=0,\ a,b\in\mathbb{R}$$

Qual das seguintes afirmações é necessariamente verdadeira?

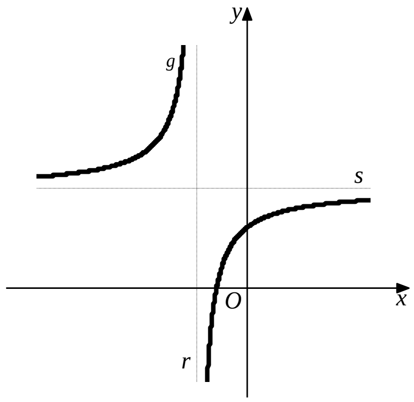
A O ponto de coordenadas (a,b) pertence à bissectriz dos quadrantes ímpares.

B $a=1$ e $b=-1$

C O ponto de coordenadas (a,b) pertence à bissectriz dos quadrantes pares.

D $a=b=1$

4. Na figura está representado em referencial o.n. xOy parte do gráfico da função g, de domínio, $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$, definida por uma expressão do tipo $g(x)=a+\dfrac{c}{x-b}$, com $a,b,c\in\mathbb{R}$ e as rectas r e s, assimptotas do gráfico de g.



Qual das afirmações é verdadeira?

A $a>0$, $b=1$ e $c<0$

B $a>0$, $b=-1$ e $c>0$

C $a<0$, $b=-1$ e $c<0$

D $a>0$, $b=-1$ e $c<0$

5. Seja h a função definida por $h(x)=\dfrac{x^3-x}{ax^4+bx^3+ax+b}$, com $a,b\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

No máximo, quantos zeros tem a função h?

A zero **B** um **C** dois **D** três

GRUPO II – ITENS DE RESPOSTA ABERTA

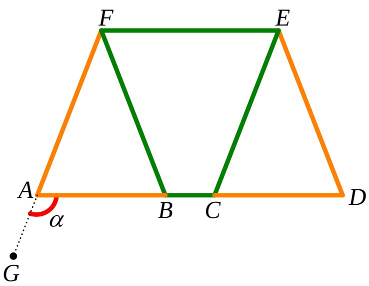
1. Considere a função f, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $f(x)=4\operatorname{sen}x+4\operatorname{sen}x\cos x$.

1.1. Determine as soluções da equação $f(x)=2\operatorname{sen}x$ pertencentes ao intervalo $\left]-\pi,\dfrac{3\pi}{2}\right[$.

1.2. Na figura estão representado dois trapézios isósceles $[ADEF]$ e $[BCEF]$.

Sabe-se que:

- os triângulos $[ABF]$ e $[ABF]$ são isósceles
- $\overline{AF}=\overline{EF}=\overline{DE}=2$



Seja α a amplitude em radianos do ângulo GAB, $\alpha \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}\right]$.

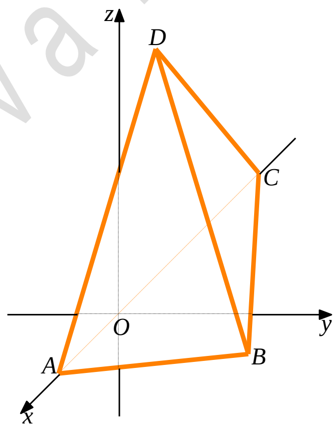
a) Mostre que a área do trapézio $[BCEF]$ é dada em função de α por $f(\alpha)$.

b) Determine $f\left(\frac{\pi}{2}\right)$ e $f\left(\frac{2\pi}{3}\right)$ e interprete geometricamente o resultado obtido no contexto do problema.

c) Para um certo valor de α tem-se $\operatorname{tg}(-\alpha-\pi)=2$. Para esse valor de α determine o valor exacto da área do trapézio $[ADEF]$.

2. Na figura está representada em referencial o.n. $Oxyz$ a pirâmide triangular $[ABCD]$.

Sabe-se que:



- a face $[ABC]$ está contida no plano xOy
- os pontos A e C pertencem ao eixo Ox
- uma equação do plano ABD é $3x+y+z=9$
- uma equação do plano BCD é $x-3y-z=-7$
- o ponto de coordenadas $(-1,-2,-10)$ pertence ao plano ACD

2.1. Escreva as equações cartesianas da recta BD.

2.2. Mostre que uma condição que define o plano ACD é $5y-z=0$.

2.3. Determine o volume da pirâmide $[ABCD]$.

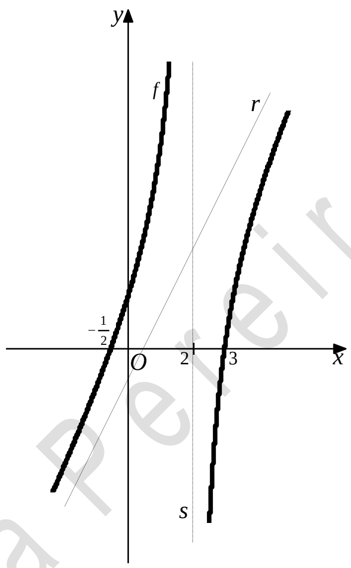
Sugestão: Comece por calcular o valor de $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC}$.

3. Na figura está representado em referencial o.n. xOy parte do gráfico da função f, de domínio $\mathbb{R} \setminus \{d\}$, definida por uma expressão do tipo $f(x)=ax+b+\frac{c}{x+d}$, com $a,b,c,d \in \mathbb{R}$. Considere ainda a função g, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $g(x)=x^2-x$.

Sabe-se que:

- a recta r é assimptota oblíqua do gráfico de f e a recta s, de equação $x=2$, é assimptota vertical do gráfico de f

- o gráfico de f intersecta o eixo Ox nos pontos de coordenadas $\left(-\frac{1}{2},0\right)$ e $(3,0)$



3.1. Determine o conjunto solução da inequação $\left(\frac{g}{f}\right)(x) \geq 0$

3.2. Indique o valor de d e mostre que $a+2b=0$ e que $5b-c=0$.

3.3. A recta r intersecta o eixo Oy no ponto de ordenada -1.

a) Mostre que $f(x)=\frac{2x^2-5x-3}{x-2}$.

b) Determine o valor de $(f-g)(-4)-(f \times g)(5)$.

c) Determine o conjunto solução da inequação $2f(x)<13-x$.

4. Considere as funções h e g, definidas respectivamente por $h(x)=\frac{x^3+1}{x^2-x-2}$ e $g(x)=4-\frac{3}{x-2}$.

4.1. Estude a função h quanto à existência de assimptotas do seu gráfico e, caso seja possível, apresente uma simplificação da sua expressão analítica.

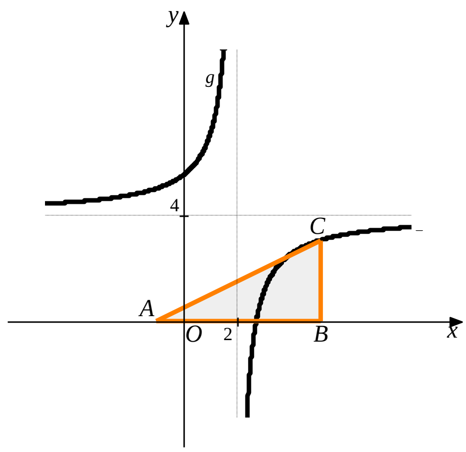
4.2. Indique a assimptotas do gráfico da função f, definida por $f(x)=2-2g(x+1)$.

4.3. Caracterize a função $h+g$. Apresente a expressão analítica de $h+g$ na forma de um polinómio de grau 1.

4.4. Na figura está representado em referencial o.n. xOy parte do gráfico da função g e o triângulo $[ABC]$.

Sabe-se que:

- o ponto A tem coordenadas $(-1,0)$
- o ponto C pertence ao gráfico de g
- o ponto B tem a mesma abcissa que o ponto C



Seja a, a abcissa do ponto C, com $a>3$.

Determine as coordenadas de C de modo que a área do triângulo $[ABC]$ seja igual a 9.

Sugestão: comece que mostrar que a área do triângulo $[ABC]$ é dada em função de a por $\frac{4a^2-7a-11}{2a-4}$.

Solucionário

Grupo I – Itens de escolha múltipla

1. B **2.** C **3.** A **4.** D **5.** C

Grupo II – Itens de resposta aberta

1.1. $\left\{-\frac{2\pi}{3}, 0, \frac{2\pi}{3}, \pi, \frac{4\pi}{3}\right\}$

1.2. $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=2$; Quando $\alpha=\frac{\pi}{2}$ o trapézio $[BCEF]$ transforma-se num quadrado de lado 2 cuja área é 4.

$f\left(\frac{2\pi}{3}\right)=\sqrt{3}$; Quando $\alpha=\frac{\pi}{2}$ os pontos B e C coincidem pelo que o trapézio $[BCEF]$ transforma-se num triângulo equilátero de lado 2 cuja área é $\sqrt{3}$.

1.3. **c)** $\frac{8\sqrt{5}+8}{5}$

2.1. Por exemplo: $x=\frac{y+1}{2}=\frac{10-z}{5}$

2.3. 25

3.1. $\left]-\frac{1}{2}, 0\right] \cup [1,2[\cup]3,+\infty[$

3.2. $d=-2$

3.3. **b)** -238

3.3. **c)** $]-\infty,1[\cup]2,4[$

4.1. $D_h=\mathbb{R}\setminus\{-1,2\}$; $h(x)=\frac{x^2-x+1}{x-2}$; A.V.: $x=2$; A.O.: $y=x+1$, quando $x\to\pm\infty$.

4.2. A.V.: $x=1$; A.H.: $y=-6$, quando $x\to\pm\infty$.

4.3. $D_{h+g}=\mathbb{R}\setminus\{-1,2\}$; $(h+g)(x)=x+5$

4.4. $a=5$; Para $a=5$ as coordenadas do ponto C são $(5,g(5))=(5,3)$.