FICHA DE TRABALHO N.º 3 – MATEMÁTICA A - 10.º ANO

RADICAIS E POTÊNCIAS DE EXPOENTE RACIONAL

"Conhece a Matemática e dominarás o Mundo."
Galileu Galilei

GRUPO I – ITENS DE ESCOLHA MÚLTIPLA

1. Considere a condição $a(x): \sqrt{10-x} = \sqrt{10} - \sqrt{x}$

Qual das seguintes proposições é falsa?

A $a(0) \Leftrightarrow a(10)$

B $a(5) \Rightarrow a(0)$

C $a(5) \wedge a(10)$

D $a(5) \vee a(0)$

2. Considere as seguintes proposições:

- p: $\dfrac{4}{\sqrt{7}-\sqrt{3}} = \sqrt{10}$
- q: $\sqrt[3]{6} \times \sqrt{3} = \sqrt[6]{4 \times 3^5}$
- r: $\dfrac{\sqrt[6]{\sqrt{\frac{1}{8}}}}{\sqrt{32}} = \dfrac{\sqrt[4]{2}}{8}$

Qual das seguintes proposições é verdadeira?

A $r \Rightarrow p \wedge q$

B $p \wedge r \Leftrightarrow q$

C $p \vee \sim r \Leftrightarrow q$

D $p \vee \sim q \Rightarrow \sim r$

3. Sejam $A = \sqrt[9]{\frac{1}{8}} - 8$, $B = \sqrt[3]{4}$ e $C = 4^{\frac{1}{6}}$. Então $\dfrac{A}{B} - C$ é igual a:

A $\dfrac{1}{2} - 5\sqrt[3]{2}$

B $\dfrac{1}{2} - 3\sqrt[3]{2}$

C $2 - 5\sqrt[3]{2}$

D $2 - 3\sqrt[3]{2}$

4. Qual é a solução da equação $\sqrt{\sqrt{\sqrt[3]{64}}}\,x+16^{0,125}x=1$?

A $\frac{\sqrt{2}}{4}$ **B** $\frac{\sqrt{2}}{2}$ **C** $\frac{\sqrt[4]{2}}{4}$ **D** $\frac{\sqrt{2}}{8}$

5. Sejam $x=\sqrt{a+\sqrt{a}}$ e $y=\sqrt{a-\sqrt{a}}$, com $a>1$. A expressão x^4-y^4 é equivalente a:

A $2\sqrt{a^5}$ **B** $4\sqrt{a^3}$ **C** $4\sqrt{a^5}$ **D** $2\sqrt{a^3}$

6. Seja a um número real positivo.

O valor da expressão $\sqrt[6]{24}\times 2^{\frac{1}{2}}+\sqrt[3]{\sqrt{3}}-\sqrt[6]{\frac{12a^3}{\sqrt{16a^6}}}$ é igual a:

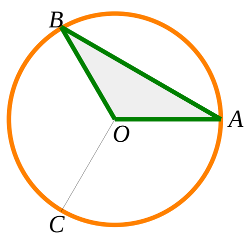
A $2\sqrt[3]{3}$ **B** $3\sqrt[6]{3}$ **C** $3\sqrt[3]{3}$ **D** $2\sqrt[6]{3}$

7. Sejam a e b dois números reais positivos tal que $\frac{\sqrt[5]{a^3b^{\frac{1}{3}}}}{\sqrt[3]{a^2}}\times a^{\frac{1}{15}}$ é solução da equação $x^5-2=0$.

Qual é o valor de b?

A 2 **B** 4 **C** 8 **D** 16

8. Na figura está representada a circunferência centrada em O, de perímetro 2 m, dividida em três sectores circulares de igual amplitude. Na mesma figura, a sombreado, está representado o triângulo $[OAB]$.



Qual é, em m^2, o valor da área do triângulo $[OAB]$?

A $\frac{\sqrt{3}}{2\pi}$ **B** $\frac{\sqrt{3}}{4\pi^2}$ **C** $\frac{\sqrt{3}}{4\pi}$ **D** $\frac{\sqrt{3}}{2\pi^2}$

GRUPO II – ITENS DE RESPOSTA ABERTA

9. Sem usar calculadora, escreva as seguintes fracções com denominador racional e simplifique-as o mais possível.

9.1. $\dfrac{3}{\sqrt{5}}$

9.2. $\sqrt{\dfrac{5}{8}}$

9.3. $\dfrac{\sqrt[4]{4}}{\sqrt[3]{18}}$

9.4. $\dfrac{18}{\sqrt{7}-2}$

9.5. $\dfrac{\sqrt[4]{3}}{\sqrt{18}+\sqrt{8}}$

9.6. $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt[4]{2}-1}$

9.7. $\dfrac{a}{\sqrt{a}-a}$, $a\in\mathbb{R}^+\setminus\{1\}$

9.8. $\dfrac{\sqrt{3a}+\sqrt{a}}{\sqrt{3a}-\sqrt{a}}$, $a>0$

***9.9.** $\dfrac{2\sqrt{2}\left(\sqrt{2}+1\right)}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}$ (apresente o resultado na forma $\left(a+\sqrt{b}\right)\left(-a+\sqrt{c}\right)$, com $a,b,c\in\mathbb{N}$)

***9.10.** $\dfrac{1}{\sqrt{3-\sqrt{8}}}$ (apresente o resultado na forma $a+b\sqrt{c}$, com $a,b,c\in\mathbb{N}$)

10. Simplifique usando as propriedades dos radicais e/ou as propriedades das potências de expoentes racional.

10.1. $8^{\frac{1}{2}}+3\sqrt{128}-2^{\frac{5}{2}}$ (apresente o resultado na forma $a\sqrt[n]{b}$, com $a\in\mathbb{Z}$ e $b,n\in\mathbb{N}$)

10.2. $\dfrac{\sqrt[3]{9}}{\sqrt{6}}\times 2^{\frac{1}{2}}$ (apresente o resultado na forma de potência de base natural)

10.3. $\sqrt[3]{108}+\left(\dfrac{1}{4}\right)^{\frac{1}{6}}+\sqrt[6]{2}\times\left(\left(\dfrac{1}{2}\right)^{-\frac{3}{2}}\right)^{\frac{1}{3}}$ (apresente o resultado na forma $a\sqrt[n]{b}$, com $a\in\mathbb{Z}$ e $b,n\in\mathbb{N}$)

10.4. $\dfrac{\sqrt[8]{128}\times 16^{-\frac{1}{8}}\times\sqrt[4]{2}}{\sqrt{\sqrt{\sqrt[6]{2}}}}$ (apresente o resultado na forma $a\sqrt[n]{b}$, com $a\in\mathbb{Z}$ e $b,n\in\mathbb{N}$)

10.5. $\dfrac{6\sqrt[5]{5}-\sqrt[10]{25}}{\sqrt[3]{5\times\sqrt[5]{5}}}$ (apresente o resultado na forma de potência de base natural)

***10.6.** $\left(\sqrt[3]{3}-3\right)^2+\left(1-\sqrt{3}\right)^2+\left(4-\sqrt{2}\right)\left(4+\sqrt{2}\right)+\sqrt[3]{4\sqrt{3}}\times\sqrt[3]{6}$

11. Sejam x e y dois números reais positivos. Mostre que:

11.1. $\frac{2}{x^{-\frac{1}{8}}} - \sqrt{\sqrt{\sqrt{6561x}}} = -\sqrt[8]{x}$

11.2. $\frac{\sqrt{x\sqrt{y^2}}}{y\sqrt[3]{y^2}} \times x^{\frac{2}{3}} = \frac{x}{y}\sqrt[6]{\frac{x}{y}}$

11.3. $x = 2y \Rightarrow \frac{\sqrt{xy}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}} = \left(2+\sqrt{2}\right)\sqrt{y}$

***11.4.** $\frac{\sqrt[8]{x^3y^7} \times x^{-\frac{1}{4}} \times (xy)^{\frac{2}{3}}}{\sqrt[24]{xy}} = \sqrt[4]{x^3y^6}$

11.5. $0 \le x < y \Rightarrow x^3 < y^3$

11.6. $\sqrt{x+y+\sqrt{4xy}} = \sqrt{x} + \sqrt{y}$

12. Sejam a e b dois números reais positivos. Usando as propriedades do radicais e a definição de potência de expoente racional, mostre que:

12.1. $\frac{a^{\frac{2}{3}} \times a^{-\frac{3}{5}} \times \left(a^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{2}{5}}}{a^{-\frac{1}{3}}} = a^{\frac{8}{15}}$

12.2. $\frac{\left(a^{\frac{3}{4}}\right)^{\frac{5}{6}}}{b^{\frac{2}{3}}} = \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{5}{8}} \times b^{-\frac{1}{24}}$

***12.3.** $m - p = n \Rightarrow a^{\frac{m}{p}} \times a^{\frac{n}{m}} \div \left(a^{\frac{m}{p}}\right)^{\frac{n}{m}} = a^{\frac{m+n}{m}}$, $m, n, p \in \mathbb{N}$

12.4. $3a = 8b \Rightarrow \frac{b^{2,1}}{a^{2,1}} = (0,375)^{2,1}$

13. Sejam a e b dois números reais positivos tais que a é a raiz cúbica de b.

Considere a expressão $A = b^{-\frac{5}{6}} \times \frac{a^{\frac{2}{3}} \times \sqrt[3]{a}}{\sqrt{a^2b}}$.

13.1. Mostre que $A = a^{-4}$.

13.2. Determine a e b de modo que $A = 16$.

***14.** Sejam x e y dois números inteiros positivos. Considere a expressão $A = \frac{2\sqrt[n]{xy}}{\sqrt{\sqrt{x^n}}} \times \frac{1}{x^n\sqrt[6]{y}}$, $n \in \mathbb{N}$.

14.1. Determine n de modo que $A = \frac{2}{x^7\sqrt[3]{x}}$.

14.2. Considere que $y = 1$. Determine x e n de modo que $A = \frac{1}{2}$.

15. Sejam x e y dois números primos. Considere a expressão $E=\dfrac{\sqrt[3]{\sqrt{xy^2}}}{\sqrt{xy^3}\times\sqrt[6]{y}}$.

15.1. Usando as propriedades dos radicais, mostre que $E=\dfrac{1}{y\sqrt[3]{xy}}$.

***15.2.** Determine o valores de x e y tais que $E=\dfrac{\sqrt[3]{36}}{18}$.

16. Seja $a=\dfrac{4\sqrt{5\sqrt{2}}-\sqrt{\sqrt{5}}\times\sqrt[4]{10}}{\sqrt{\sqrt{162}}}$.

16.1. Mostre que $a=\sqrt{5}$.

16.2. Mostre que a e $-a$ são soluções da equação $2x^3+x^2-10x-5=0$.

16.3. Mostre que $1-a$ e $1+a$ são soluções da equação $x^4-12x^2+16=0$.

17. Sejam $a=\dfrac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$ e $b=\dfrac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$.

17.1. Determine, com denominador racional, $\dfrac{a}{b}$.

17.2. Determine, com denominador racional, $(a+b)^2$.

17.3. Verifique que $\dfrac{a}{b}$ é raiz do polinómio $p(x)=x^3-5x^2-2\sqrt{6}x^2$.

18. Considere a condição $a(x)=\dfrac{\sqrt{8x^2}}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}$.

18.1. Mostre que a proposição $\forall x\in\mathbb{R}^+,\ a(x)=x\left(\sqrt{3}-1\right)$ é verdadeira.

18.2. Mostre que a proposição $\forall x\in\mathbb{R},\ a(x)=x\left(\sqrt{3}-1\right)$ é falsa.

18.3. Determine o valor de $x\in\mathbb{R}^+$ tal que $a(x)=2$. (apresente o resultado com denominador racional)

19. Considere as proposições p, q e r tais que:

$$p\colon\ \frac{\sqrt{8}\times 2^{-\frac{1}{3}}}{\sqrt[6]{32}\times\sqrt[3]{2^{-5}}}\in\mathbb{N},\qquad q\colon\ \forall x,y\in\mathbb{R}^+,\ \frac{\sqrt[4]{x^2y}}{\sqrt{x^3\sqrt{y^3}}}=\frac{\sqrt{y}}{xy}\qquad \text{e}\qquad r\colon\ \forall x\in\mathbb{R},\ \sqrt{x^2}=x$$

19.1. Mostre que a proposição r é falsa.

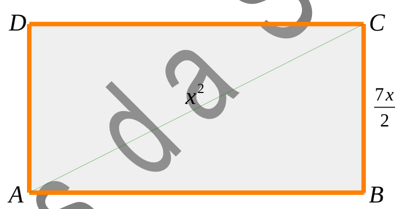
19.2. Indique o valor lógico das seguintes proposições:

a) $p\Rightarrow\sim(\sim r\wedge q)$

b) $(q\Rightarrow r)\Rightarrow p$

***19.3.** Escreva na forma $a+b\sqrt{c}$, com $a,b,c\in\mathbb{Z}$ a expressão $\sqrt{49-12\sqrt{5}}$.

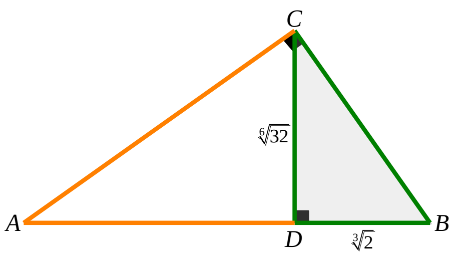
20. Na figura está representado o rectângulo $[ABCD]$ tal que $\overline{AC}=x^2$ e $\overline{BC}=\frac{7x}{2}$, com $x>4$.



20.1. Mostre que $\overline{AB}=\frac{x\sqrt{4x^2-49}}{2}$.

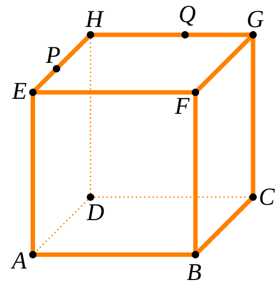
20.2. Sabendo que $x-\frac{7}{2}$ e $x+\frac{7}{2}$ são quadrados perfeitos, determine a área do rectângulo.

21. Na figura estão representados os triângulos $[ABC]$, $[ADC]$ e $[BCD]$, rectângulos, respectivamente, em C, D e D. Tal como a figura sugere, o ponto D pertence ao lado $[AB]$, $\overline{DB}=\sqrt[3]{2}$, $\overline{CD}=\sqrt[6]{32}$ e $\overline{AC}>\overline{BC}$.



Mostre que $\overline{BC}=\sqrt[6]{108}$ e determine a área do triângulo $[ABC]$.

***22.** Na figura está representado o cubo $[ABCDEFGH]$. Os pontos P e Q pertencem, respectivamente, às arestas $[EH]$ e $[GH]$.



22.1. Suponha que que $\overline{AB}=5$ e que $\overline{EP}=\overline{GQ}=2$. Qual é a área do trapézio $[APQC]$?

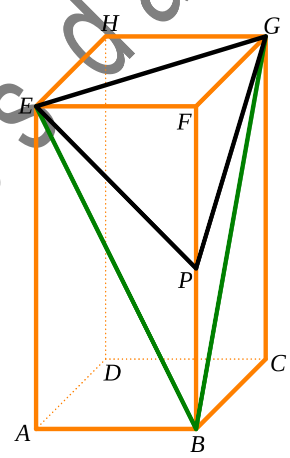
22.2. Suponha que o cubo está inscrito numa esfera com volume igual a 36.

a) Determine área total do cubo.

b) Determine o volume do cubo.

***23.** Na figura está representado o prisma quadrangular $[ABCDEFGH]$.

Sabe-se que $\overline{AB}=\sqrt[5]{a}$, $\overline{BF}=2\overline{AB}$, com $a>0$, e que P é o ponto médio do segmento de recta $[BF]$.



23.1. Mostre que a área do triângulo $[EBG]$ é dada, em função de a, por $\dfrac{3\sqrt[5]{a^2}}{2}$.

23.2. Mostre que a altura do triângulo $[EPG]$ é dada, em função de a, por $\dfrac{\sqrt{6}}{2}\times\sqrt[5]{a}$.

23.2. Determine, em função de a, a altura da pirâmide $[EPGF]$ em relação ao vértice F. (apresente o resultado com um único radical)

SOLUCIONÁRIO

GRUPO I – ITENS DE ESCOLHA MÚLTIPLA

1. C **2.** D **3.** A **4.** A **5.** B **6.** D **7.** C **8.** B

GRUPO II – ITENS DE RESPOSTA ABERTA

9.1. $\frac{3\sqrt{5}}{5}$ **9.2.** $\frac{\sqrt{10}}{4}$ **9.3.** $\frac{\sqrt[6]{18}}{3}$ **9.4.** $12+6\sqrt{7}$

9.5. $\frac{\sqrt[4]{12}}{10}$ **9.6.** $2+\sqrt{2}+\sqrt[4]{8}+\sqrt[4]{32}$ **9.7.** $\frac{\sqrt{a}+a}{1-a}$ **9.8.** $2+\sqrt{3}$

9.9. $\left(1+\sqrt{2}\right)\left(-1+\sqrt{3}\right)$ **9.10.** $1+\sqrt{2}$

10.1. $22\sqrt{2}$ **10.2.** $3^{\frac{1}{6}}$ **10.3.** $\frac{9\sqrt[3]{4}}{2}$ **10.4.** $\sqrt[12]{128}$

10.5. $5^{\frac{4}{5}}$ **10.6.** $\sqrt[3]{9}-6\sqrt[3]{3}+27$

13.2. $a=\frac{1}{2}$ e $b=\frac{1}{8}$

14.1. $n=6$ **14.2.** $x=n=2$

15.2. $x=2$ e $y=3$

17.1. $5+2\sqrt{6}$ **17.2.** 12

18.3. $x=1+\sqrt{3}$

19.2. a) Falsa **19.2.** a) Verdadeira **19.3.** $3\sqrt{5}-2$

20.1. $A_{[ABCD]}=\frac{13125}{2}$

21. $A_{[ABC]}=3\sqrt[6]{2}$

22.1. $12\sqrt{6}$ **22.2.** a) $A_{\text{total}}=\frac{72}{\sqrt[3]{\pi^2}}$ **22.2.** b) $V_{\text{cubo}}=\frac{24\sqrt{3}}{\pi}$

23.3. $\frac{\sqrt[10]{243a^2}}{3}$