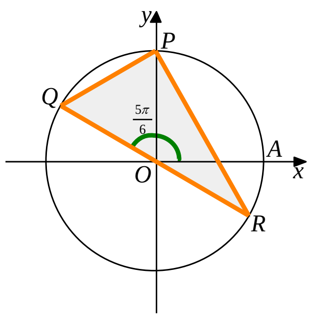
Proposta de Teste Intermédio n.º 1

Matemática A – 11.º Ano

"A Matemática é a rainha das ciências."
Carl Gauss

Grupo I – Itens de Escolha Múltipla

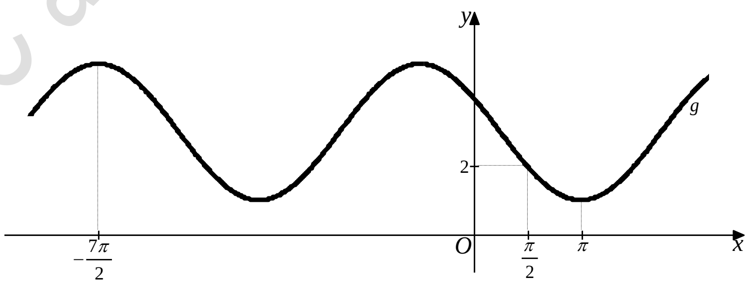
1. Na figura estão representados uma circunferência de equação $x^2+y^2=r^2$, com $r\in\mathbb{R}$ e o triângulo $[PQR]$.



O ponto A pertence à circunferência e ao eixo Ox. Os pontos Q e R pertencem à circunferência e são simétricos relativamente à origem do referencial. A amplitude do arco APQ é $\frac{5\pi}{6}$. Qual é, em função de r, a área do triângulo $[PQR]$?

A $\sqrt{3}r^2$ **B** $\frac{r^2}{2}$ **C** $\frac{\sqrt{3}r^2}{2}$ **D** r^2

2. Na figura está representado num referencial o.n. xOy, parte do gráfico da função g, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $g(x)=3+a\cos\left(bx+\frac{\pi}{3}\right)$, com $a,b\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$.



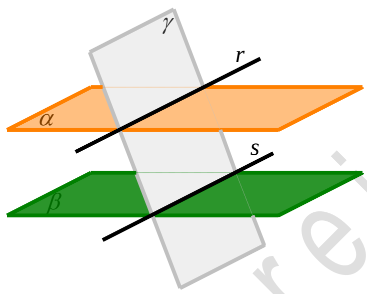
Tal como a figura sugere, o ponto de coordenadas $\left(\frac{\pi}{2},2\right)$ pertence ao gráfico de g, um dos minimizantes da função é π e um dos maximizantes é $-\frac{7\pi}{2}$. Quais são os valores de a e de b?

A $a=2$ e $b=-\frac{2}{3}$ **B** $a=-2$ e $b=-\frac{2}{3}$ **C** $a=-2$ e $b=\frac{2}{3}$ **D** $a=2$ e $b=\frac{2}{3}$

3. Na figura estão representados três planos, α, β e γ, definidos respectivamente por, $a^2x+y+z=ax$, $2x+y=-2-z$ e $x+a(y+z)=0$, com $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Sabe-se que:

- os planos α e β são estritamente paralelos;
- o plano γ intersecta os planos α e β sobre duas rectas paralelas, r e s (α e γ intersectam-se sobre r e β e γ intersectam-se sobre s);
- γ não é perpendicular nem a α e nem a β.



Qual é o valor de a?

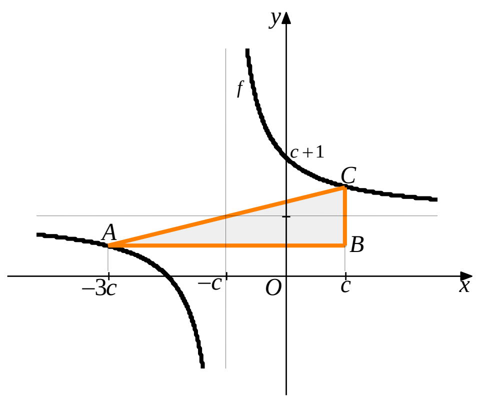
A -1 **B** 1 **C** 2 **D** 3

Exercício Extra: Escreva as equações cartesianas da recta s.

4. Na figura está representado num referencial o.n. xOy, parte do gráfico da função f, de domínio $\mathbb{R} \setminus \{-c\}$, definida por uma expressão do tipo $f(x)=a+\dfrac{b}{x+c}$, com $a,b,c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ e o triângulo $[ABC]$.

Sabe-se que:

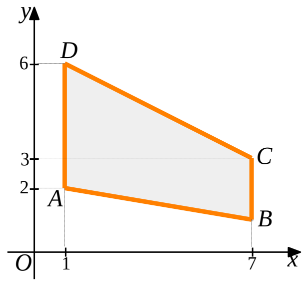
- as rectas de equação $x=-c$ e $y=c$ são assimptotas do gráfico de f;
- os pontos A e C pertencem ao gráfico de f e têm abcissa $-3c$ e c, respectivamente;
- o gráfico de f intersecta o eixo Oy no ponto de ordenada $c+1$;
- o triângulo é rectângulo em B.



Qual é a área do triângulo $[ABC]$ em função de c?

A c **B** $2c$ **C** $3c$ **D** $4c$

5. A região admissível D, representada na figura, é a região admissível de um problema de Programação Linear cuja função objectivo é $z = x + 2y$. Pretende-se maximizar esta função objectivo.



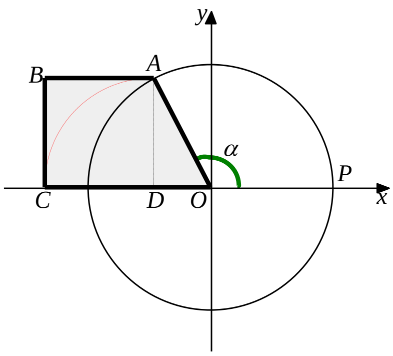
Sabendo que este problema só admite soluções (x, y), com $x, y \in \mathbb{Z}$, quantas são as soluções óptimas deste problema?

A quatro **B** três **C** duas **D** uma

Grupo II – Itens de Resposta Aberta

1. Na figura estão representados em referencial o.n. xOy uma circunferência definida pela equação $4x^2 + 4y^2 = 1$ e um trapézio $[OABC]$.

Sabe-se que:



- o ponto A desloca-se sobre a circunferência, no segundo quadrante (incluindo apenas o eixo Oy). O ponto D acompanha o movimento de A, de modo que $[AD]$ é sempre paralelo a Oy;
- o ponto C pertence ao eixo Ox e o segmento de recta $[BC]$ é perpendicular ao eixo Ox;
- o arco de circunferência AC está centrado em D.
- α é a amplitude, em radianos, do ângulo POA, com $\alpha \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right[$.

Seja f a função de domínio $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right[$ definida por $f(x) = \dfrac{2\operatorname{sen}^2 x - \operatorname{sen} x \cos x}{8}$.

1.1. Mostre que área do trapézio $[OABC]$ é dada, em função de α, por $f(\alpha)$. Determine $f\left(\frac{\pi}{2}\right)$ e interpreta geometricamente o resultado obtido.

1.2. Seja $\theta \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right[$ tal que $f(\theta) - \dfrac{\operatorname{sen}^2\theta}{4} = \dfrac{1}{24}$. Determine o valor de $(\operatorname{sen}\theta - \cos\theta)^6$.

1.3. Considere $\alpha = \frac{2\pi}{3}$. Determine as coordenadas do ponto de intersecção da recta tangente à circunferência no ponto A com o eixo Ox.

2. Seja g uma função do tipo $g(x) = \frac{Ax^2 + Bx + C}{Dx + E}$, com A, B, C, D e E, constantes reais não nulas.

Sabe-se que:

- O gráfico de g tem uma assimptota vertical e uma assimptota oblíqua;
- α é a amplitude da inclinação da assimptota oblíqua de tal modo que $5\operatorname{sen}\alpha = 2\sqrt{5}$ e $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$. O ponto de coordenadas $(3,-5)$ pertence à assimptota;
- os pontos de coordenadas $(0,-2)$, $(2,0)$ pertencem ao gráfico de g.

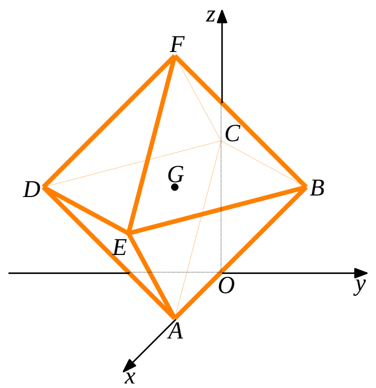
2.1. Mostre que $g(x) = \frac{-2x^2 + 3x + 2}{x - 1}$.

2.2. Sem recorrer à calculadora, resolva a inequação $g(x) - 2x > 8$. (Apresente o conjunto solução na forma de intervalo, ou união de intervalos)

3. Na figura está representado, num referencial o.n. $Oxyz$, um octaedro.

Sabe-se que:

- o quadrado $[ACFE]$ está contida no plano xOz;
- o ponto A pertence ao eixo Ox;
- o ponto C pertence ao eixo Oz;
- o ponto G é o centro do octaedro;
- os vértices do octaedro pertencem à superfície esférica de equação:



$$x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 4z + 4 = 0$$

Seja r a recta definida pela condição $\frac{x-2}{3} = \frac{4-z}{4} \quad \wedge \quad y = 2$

3.1. Escreva uma equação do plano ABE.

3.2. Determine as coordenadas do ponto de intersecção do plano ABE com a recta r. Caso não tenha feito a alínea anterior, considere que ABE: $x+y-z=2$.

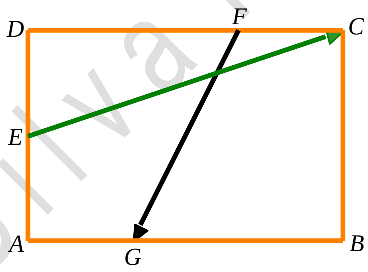
3.3. Sejam T um ponto pertencente ao eixo Oy com a mesma ordenada de B e Q um ponto que se desloca sobre a recta r. Quais são as coordenadas de Q de modo que o triângulo $[TQF]$ seja rectângulo em Q?

3.4. Para um certo valor de $\alpha \in \left]\pi, \frac{3\pi}{2}\right[$ o ponto P de coordenadas $\left(2\cos^2\alpha, \operatorname{sen}\alpha, 2\operatorname{sen}\alpha\right)$ pertence ao plano ABE. Determina o valor de α e indique os valores numéricos das coordenadas do ponto P. Caso não tenha feito a alínea 3.1., considere que ABE: $x+y-z=2$.

4. Na figura está representado um rectângulo $[ABCD]$.

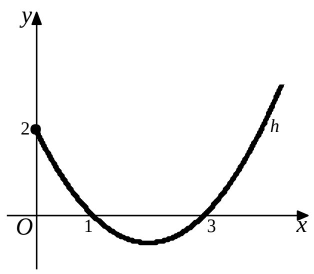
Sabe-se que:

- E é o ponto médio do lado $[AD]$;
- $\overline{AD} = \frac{2}{3}\overline{CD}$
- $\overline{CD} = 3\overline{CF}$
- $\overline{AG} = \overline{CF}$



Mostre que $\overrightarrow{EC} \cdot \overrightarrow{FG} = -5\overline{CF}^2$.

5. Considere as funções f, g e h tais que, f tem domínio $\mathbb{R}\setminus\{-1,1\}$ e é definida por $f(x) = \frac{1}{x^2-1}$, g tem domínio $\mathbb{R}$ e é definida por $g(x) = x^3 + x^2 - 2x$ e h tem domínio $[0,+\infty[$ e o seu gráfico encontra-se parcialmente representado na figura seguinte:



5.1. Determine o valor de $(f-g)(-2) + (f \circ h)(0)$.

5.2. Caracterize a função $f \times g$ e escreva as equações das assimptotas do seu gráfico. (Apresente a expressão analítica de $f \times g$ na forma mais simplificada possível)

5.3. Resolva a inequação $\left(\frac{h}{f}\right)(x) \leq 0$. (Apresente o conjunto solução na forma de intervalo, ou união de intervalos)

5.4. Determine o domínio da função $h \circ g$.

5.5. Determine o conjunto solução da equação $(h \circ f)(x) = 0$

Solucionário

Grupo I – Itens de escolha múltipla

1. C **2.** D **3.** C **Ex. Extra:** $x = -\frac{4}{3} \wedge y = -z + \frac{2}{3}$ **4.** B **5.** A

Grupo II – Itens de resposta aberta

1.1. $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{4}$. Quando $\alpha = \frac{\pi}{2}$ o trapézio transforma-se num quadrado de lado $\frac{1}{2}$, cuja área é $\frac{1}{4}$. **1.2.** $\frac{125}{27}$

1.3. $(-1,0)$

2.2. $]-\infty,-2[\cup \left]1,\frac{5}{4}\right[$

3.1. $x + y - z = 2$ **3.2.** $\left(\frac{20}{7}, 2, \frac{20}{7}\right)$ **3.3.** $Q(2,2,4)$ ou $Q\left(\frac{16}{5}, 2, \frac{12}{5}\right)$

3.4. $\alpha = \frac{7\pi}{6}$; $\left(\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, -1\right)$

5.1. $\frac{2}{3}$ **5.2.** $D_{f \times g} = \mathbb{R} \setminus \{-1,1\}$; $(f \times g)(x) = \frac{x^2 + 2x}{x+1}$; A.V.: $x = -1$; A.O.: $y = x + 1$

5.3. $[0,1[\cup]1,3]$ **5.4.** $[-2,0] \cup [1,+\infty[$ **5.5.** $\left\{-\sqrt{2}, -\frac{2\sqrt{3}}{3}, \frac{2\sqrt{3}}{3}, \sqrt{2}\right\}$