OmegaMat

Exame Modelo X de Matemática A

Duração do Exame: 150 **minutos** + 30 **minutos de tolerância** | **junho de 2020**

12.º Ano de Escolaridade

Utiliza apenas caneta ou esferográfica de tinta azul ou preta

É permitido o uso de calculadora

Não é permitido o uso de corretor. Risca o que pretendes que não seja classificado

Para cada resposta identifica o item

Apresenta as tuas respostas de forma legível

Apresenta apenas uma resposta para cada item

A prova apresenta um formulário na página 2

As cotações dos itens encontram-se na página 7

Na resposta aos itens de seleção (escolha múltipla), seleciona a resposta correta. Escreve na folha de respostas o número do item e a letra que identifica a opção escolhida.

Na resposta aos restantes itens, apresenta o teu raciocínio de forma clara, indicando todos os cálculos que tiveres de efetuar e todas as justificações necessárias. Quando, para um resultado, não é pedida aproximação apresenta sempre o valor exato.

NOTA

⋇ Itens cujas respostas contribuem obrigatoriamente para a classificação final:

9, 11, 12.1 e 12.2

Estes itens estão assinalados no enunciado a cor azul e em itálico

⋇ Dos restantes 14 itens da prova, apenas contribuem para a classificação final os 8 itens cujas respostas obtenham melhor pontuação

Formulário

Geometria

Comprimento de um arco de circunferência:

αr *(α - amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r - raio)*

área de um polígono regular: *Semiperímetro* $\times$ *Apótema*

área de um setor circular:

$\frac{\alpha r^2}{2}$ *(α- amplitude, em radianos, do ângulo ao centro, r - raio)*

área lateral de um cone: $\pi r g$ *(r - raio da base, g - geratriz)*

área de uma superfície esférica: $4\pi r^2$ *(r - raio)*

Volume da pirâmide: $\frac{1}{3}\times$ *área da base* $\times$ *Altura*

Volume do cone: $\frac{1}{3}\times$ *área da base* $\times$ *Altura*

Volume da esfera: $\frac{4}{3}\pi r^3$ *(r - raio)*

Progressões

Soma dos n primeiros termos de uma progressão (u_n):

Progressão aritmética: $\frac{u_1 + u_n}{2} \times n$

Progressão geométrica: $u_1 \times \frac{1 - r^n}{1 - r}$, $r \neq 1$

Trigonometria

$\sin(a + b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$

$\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$

Complexos

$(|z|e^{i\theta})^n = |z|^n e^{i(n\theta)}$

$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|}e^{i\left(\frac{\theta+2k\pi}{n}\right)}$, $k \in \{0; 1; 2; ...; n-1\}$ e $n \in \mathbb{N}$

Regras de derivação

$(u + v)' = u' + v'$

$(uv)' = u'v + uv'$

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$

$(u^n)' = nu^{n-1}u' \quad (n \in \mathbb{R})$

$(\sin u)' = u' \cos u$

$(\cos u)' = -u' \sin u$

$(\tan u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$

$(e^u)' = u'e^u$

$(a^u)' = u'a^u \ln a \quad (a \in \mathbb{R}^+\backslash\{1\})$

$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$

$(\log_a u)' = \frac{u'}{u \ln a} \quad (a \in \mathbb{R}^+\backslash\{1\})$

Limites notáveis

$\lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e \quad (n \in \mathbb{N})$

$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

$\lim_{x\to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

$\lim_{x\to +\infty} \frac{e^x}{x^p} = +\infty \quad (p \in \mathbb{R})$

1. Seja $\mathbb{C}$, o conjunto dos números complexos e seja $z = \sqrt{2} - \sqrt{2}i$, um número complexo

1.1. Prova que o afixo do número complexo z^{8n+1} pertence ao conjunto $A = \{w \in \mathbb{C} : Re(w) = Im(\overline{w})\}$, para todo o número natural n

1.2. Em qual das opções estão os valores de a e b, $\in \mathbb{R}$, para os quais, z é solução da equação

$$w^2 + aw + \sqrt{2}b = 0$$

(A) $a = -2\sqrt{2}$ e $b = 2\sqrt{2}$
(B) $a = 2\sqrt{2}$ e $b = -2\sqrt{2}$
(C) $a = -2\sqrt{2}$ e $b = -2\sqrt{2}$
(D) $a = 2\sqrt{2}$ e $b = 2\sqrt{2}$

2. Considera um tabuleiro com dezasseis casas (quadrado dividido em dezasseis quadrados)
Pretende-se colocar nove cartões no tabuleiro, um e um só, em cada casa, sendo quatro vermelhos, numerados de um a quatro, e cinco azuis, numerados de cinco a nove

2.1. De quantas maneiras distintas se podem colocar os cartões no tabuleiro?

Numa das opções está a resposta a esta questão
Em qual delas?

(A) 4151347200
(B) 34594560
(C) 1441440
(D) 172972800

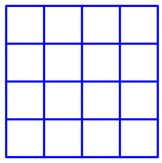

Figura 1

2.2. Determina a probabilidade de os quatro cantos do tabuleiro ficarem preenchidos só com cartões vermelhos

3. Considera a função f, de domínio $\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$, definida por $f(x) = \dfrac{4x\cos(x) - 2\sin(x)}{\cos(x)}$

No referencial cartesiano xOy, da figura 2, estão representados parte do gráfico da função f, e as suas assíntotas verticais

3.1. Mostra, analiticamente, que o gráfico da função f tem duas assíntotas verticais e escreve as suas equações

3.2. Estuda a função f quanto à monotonia e existência de extremos relativos

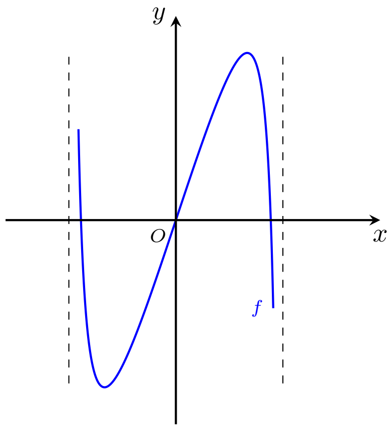

Figura 2

4. Considera a função g, de domínio $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, definida por $g(x) = \begin{cases} \dfrac{-x+\ln(-x+1)}{x} & se \quad x<0 \\ \dfrac{xe^x - x + x^2}{x^2} & se \quad x>0 \end{cases}$

No referencial cartesiano xOy, da figura 3, está representado parte do gráfico da função g, e estão assinalados dois valores a e b, no eixo das ordenadas

4.1. Mostra, analiticamente, que o gráfico da função g tem uma assíntota não vertical quando $x \to -\infty$ e escreve a sua equação

4.2. Mostra, analiticamente, que $b = -a$

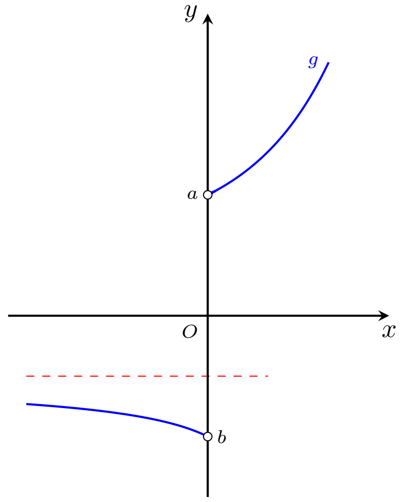

Figura 3

5. Na figura 4 está representada a pirâmide $[ABCDV]$, quadrangular regular reta
Sabe-se que:

- a base $[ABCD]$ é um quadrado de lado l, com $l > 0$
- o ponto U é o centro da base da pirâmide
- T é o ponto médio da aresta $[BC]$
- x é amplitude do ângulo UTV
- $x \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[$

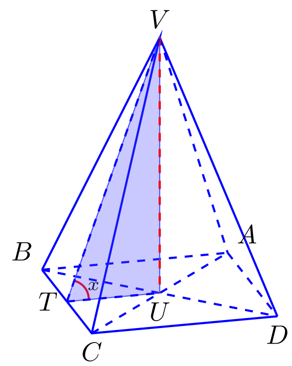

Figura 4

Em qual das opções está a expressão, em função de x e de l, da área da superfície da pirâmide?

(A) $l + \dfrac{l}{\cos(x)}$

(B) $l^2 + \dfrac{l^2}{\sin(x)}$

(C) $l^2 + \dfrac{l^2}{\cos(x)}$

(D) $l^2 + \dfrac{l^2}{4\cos(x)}$

6. Relativamente a uma turma de 12° ano da Escola Secundária de Arribas de Cima, sabe-se que:

- $\frac{2}{5}$ dos alunos são raparigas
- $\frac{4}{5}$ dos alunos estão inscritos no clube de leitura da Biblioteca
- $\frac{1}{5}$ das raparigas não estão inscritos no clube de leitura da Biblioteca

Determina a probabilidade de um aluno dessa turma, escolhido ao acaso, ser rapaz, sabendo que está inscrito no clube de leitura da Biblioteca

Apresenta o resultado na forma de fração irredutível

7. Considera a função h, de domínio $]e;+\infty[$, definida por $h(x)=\ln(x-e)$
No referencial cartesiano xOy, da figura 5, está representado parte do gráfico da função h, e estão assinalados dois pontos $A(a;h(a))$ e $B(b;h(b))$ no gráfico

Sabe-se que:

- $b>a$
- $h(b)=h(a)+\ln(2)$
- o declive da reta AB é $m_{AB}=\dfrac{\ln(\sqrt{2})}{e}$

Mostra que a equação reduzida da reta tangente ao gráfico de h no ponto A é $y=\dfrac{1}{2e}x+\ln(2)-\dfrac{1}{2}$

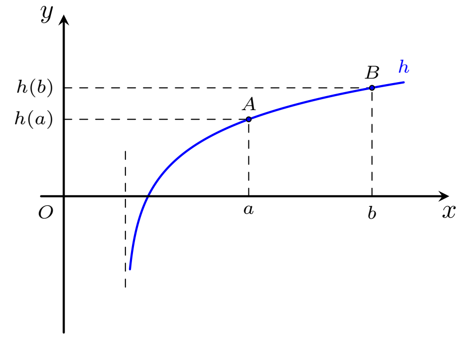

Figura 5

8. Seja f, uma função real de variável de domínio $\mathbb{R}^+$, e seja g, a função real de variável real, definida em $\mathbb{R}^+$ por $g(x)=\dfrac{f^3(x)+e^{3x}}{x^2}$

No referencial cartesiano xOy, da figura 6, estão representados parte do gráfico da função f, e da sua assíntota não vertical

Sabe-se que a assíntota ao gráfico de f interseta o eixo Ox no ponto de abcissa $\dfrac{1}{2}$, e interseta o eixo Oy, no ponto de ordenada -1

Em qual das opções está o valor de $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{g(x)}{x}$?

(A) 8

(B) -8

(C) 0

(D) $+\infty$

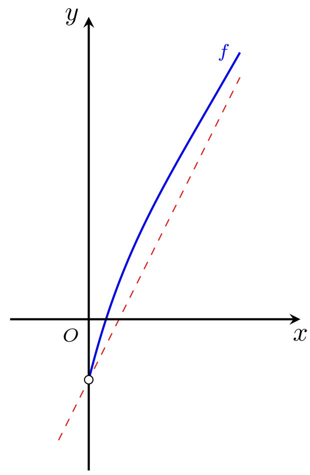

Figura 6

9. Na figura 7 está representado, em referencial cartesiano xOy, parte do gráfico de uma função f, real de variável real, de domínio $\mathbb{R}$
Seja (x_n), uma sucessão de valores do domínio da função f

Sabe-se que:

- *a,b,c,d são números reais,*tais que $a>b>c>d$
- $\lim f(x_n)=a$

Em qual das opções pode estar a sucessão (x_n)?

(A) $x_n=e-\dfrac{1}{\sqrt{\ln(n+1)+1}}$

(B) $x_n=1-\dfrac{2}{\sqrt{e^n+1}}$

(C) $x_n=e+\ln(e)-\dfrac{\sqrt{n}}{n}$

(D) $x_n=e+1+\dfrac{n}{e^n}$

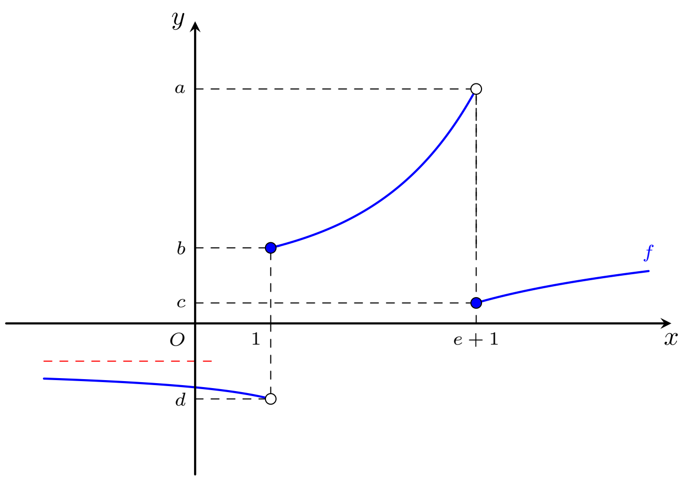

Figura 7

10. Considera, num referencial *o.n.*, $Oxyz$, o sólido que pode ser decomposto em duas pirâmides quadrangulares regulares retas, $[ABCDV]$ e $[EFGHV]$, que se encontra representado na figura 8

Sabe-se que:

- o ponto A pertence ao eixo Ox
- o ponto D pertence ao eixo Oy
- os pontos A, B, C e D, são as projeções ortogonais dos pontos E, F, G e H, respetivamente, sobre o plano xOy
- a base da pirâmide $[ABCDV]$ está contida no plano xOy
- a base da pirâmide $[EFGHV]$ está contida num plano paralelo ao plano xOy
- a abcissa do ponto A é igual à ordenada do ponto D
- as duas pirâmides têm a mesma altura
- uma equação vetorial da reta AG é

$(x; y; z) = (3; -6; -9) + k(0; 2; 3), k \in \mathbb{R}$

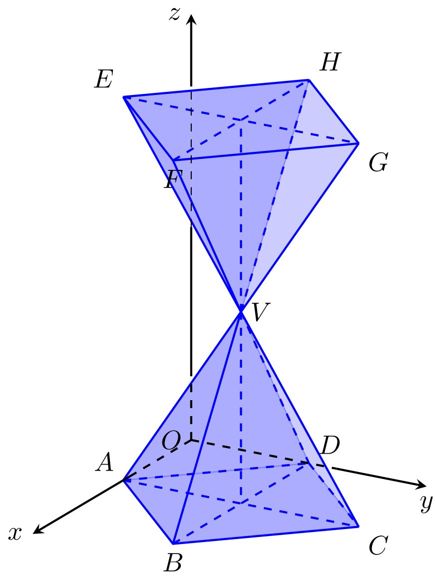

Figura 8

10.1. Determina o volume do sólido

10.2. Sabe-se que uma equação cartesiana do plano ABV é $-3x + 3y - 2z + 9 = 0$

Escreve uma equação cartesiana de um plano α, perpendicular ao plano ABV e que contém o ponto V
Escreve a equação na forma $ax + by + cz + d = 0$, com $a, b, c, d \in \mathbb{R}$

11. *Sabe-se que* $\frac{2}{e^{-2}}$, $\frac{a}{16}$ *e* $512e^{10}$, *com* $a \in \mathbb{R}$, *são três termos consecutivos de uma progressão geométrica* (a_n) *de razão positiva*

Determina o valor de a, *e calcula o produto dos termos,* a_5, a_6 *e* a_7, *da progressão geométrica* (a_n), *sabendo que* $a_1 = \frac{e^{-14}}{32768}$

12. *Seja* f, *a função real de variável real, definida por,* $f(x) = \begin{cases} \frac{\ln(-2x+2) - \ln(-x) - 1}{x} & se \quad x < 0 \\ 2 & se \quad x = 0 \\ \frac{x^3 e^{-2x} + ax}{2x} & se \quad x > 0 \end{cases}$,

com $a \in \mathbb{R}$

12.1. *Determina os zeros da função* f *no intervalo* $]-\infty; 0[$

12.2. *Determina o valor de* a, *de modo que* $\lim_{x \to +\infty} f(x) = -1$

COTAÇÕES

As pontuações obtidas nas respostas a estes 4 itens da prova contribuem obrigatoriamente para a classificação final					
Itens	9.	11.	12.1	12.2	Subtotal
Cotação (Pontos)	16	20	20	16	72

Destes 14 itens da prova, contribuem para a classificação final da prova os 8 itens cujas respostas obtenham melhor pontuação															
Itens	1.1	1.2	2.1	2.2	3.1	3.2	4.1	4.2	5	6	7	8	10.1	10.2	Subtotal
Cotação (Pontos)	8×16 Pontos														128

PÁGINA EM BRANCO