Escola Secundária de Paredes

Proposta de Resolução da Ficha Formativa 1

Matemática A

12.º Ano de Escolaridade | outubro de 2022

Turma: $B + C + H$

1. .

1.1. $D_f = \left\{x \in \mathbb{R} : 2x^2 - 3x - 2 \neq 0\right\} = \left\{x \in \mathbb{R} : x \neq -\frac{1}{2} \wedge x \neq 2\right\} = \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{1}{2}; 2\right\}$

Cálculo auxiliar

$$2x^2 - 3x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \times 2 \times (-2)}}{2 \times 2} \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2} \vee x = 2$$

1.2. $f(x) - \frac{x}{2x+1} > 0 \Leftrightarrow \frac{x^2-1}{2x^2-3x-2} - \frac{x}{2x+1} > 0 \Leftrightarrow \frac{x^2-1}{2\left(x+\frac{1}{2}\right)(x-2)} - \frac{x}{2x+1} > 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2-1}{(2x+1)(x-2)} - \frac{x}{2x+1} > 0 \Leftrightarrow \frac{x^2-1}{(2x+1)(x-2)} - \frac{x(x-2)}{(2x+1)(x-2)} > 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2-1-x^2+2x}{(2x+1)(x-2)} > 0 \Leftrightarrow \frac{2x-1}{(2x+1)(x-2)} > 0$$

$\twoheadrightarrow$ **Numerador:**

Zeros: $2x - 1 = 0 \Leftrightarrow 2x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$

Sinal:

$2x - 1 > 0 \Leftrightarrow 2x > 1 \Leftrightarrow x > \frac{1}{2}$

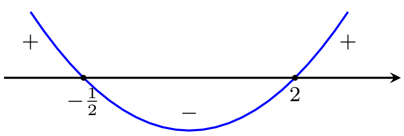
$2x - 1 < 0 \Leftrightarrow 2x < 1 \Leftrightarrow x < \frac{1}{2}$

$\twoheadrightarrow$ **Denominador**

Zeros: $(2x+1)(x-2) = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2} \vee x = 2$

Sinal:

Como se trata de uma função quadrática, estuda-se o sinal pela representação gráfica da parábola



Assim,

$(2x+1)(x-2) > 0 \Leftrightarrow x < -\frac{1}{2} \vee x > 2$

$(2x+1)(x-2) < 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{2} < x < 2$

Quadro de sinais

x	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$		$\frac{1}{2}$		2	$+\infty$
$2x-1$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$(2x+1)(x-2)$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$\frac{2x-1}{(2x+1)(x-2)}$	$-$	$n.d.$	$+$	0	$-$	$n.d.$	$+$

Assim,

$$\frac{2x-1}{(2x+1)(x-2)} > 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2} \vee x > 2$$

Portanto,

$$C.S. = \left]-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right[\cup]2; +\infty[$$

2. $D_g = \{x \in \mathbb{R} : g(x) \neq 0 \wedge x+1 \geq 0\}$

Cálculo auxiliar

- $x+1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -1$
- Sabe-se que o polinómio $-2x^3+5x^2+x-6$ é divisível por $x-2$

Então,

$$-2x^3+5x^2+x-6 = (x-2)Q(x)$$

Pela regra de Ruffini, vem,

$$\begin{array}{c|ccc|c} & -2 & 5 & 1 & -6 \\ 2 & & -4 & 2 & 6 \\ \hline & -2 & 1 & 3 & 0 \end{array}$$

Assim,

$$Q(x) = -2x^2+x+3$$

Logo,

$$-2x^3+5x^2+x-6 = (x-2)(-2x^2+x+3)$$

Assim,

$$g(x) = 0 \Leftrightarrow -2x^3+5x^2+x-6 = 0 \Leftrightarrow (x-2)(-2x^2+x+3) = 0 \Leftrightarrow x-2=0 \vee -2x^2+x+3=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = 2 \vee x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2-4\times(-2)\times 3}}{2\times(-2)} \Leftrightarrow x = 2 \vee x = -1 \vee x = \frac{3}{2}$$

Portanto,

$$D_g = \{x \in \mathbb{R} : g(x) \neq 0 \wedge x+1 \geq 0\} = \left\{x \in \mathbb{R} : x \neq -1 \wedge x \neq \frac{3}{2} \wedge x \neq 2 \wedge x \geq -1\right\} =$$

$$= \left]-1; \frac{3}{2}\right[\cup \left]\frac{3}{2}; 2\right[\cup]2; +\infty[$$

3. .

3.1. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{h(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\dfrac{3x^3+4x^2+2x+1}{x^2-1}}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{3x^3+4x^2+2x+1}{x^3-x} =^{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)} \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^3\left(3+\dfrac{4x^2}{x^3}+\dfrac{2x}{x^3}+\dfrac{1}{x^3}\right)}{x^3\left(1-\dfrac{x}{x^3}\right)} =$

$$= \frac{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(3+\dfrac{4}{x}+\dfrac{2}{x^2}+\dfrac{1}{x^3}\right)}{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-\dfrac{1}{x^2}\right)} = \frac{3+0+0}{1-0} = 3$$

Resposta: (A)

3.2. $\lim\limits_{x\to-1} h(x) = \lim\limits_{x\to-1} \dfrac{3x^3+4x^2+2x+1}{x^2-1} =^{\left(\frac{0}{0}\right)} \lim\limits_{x\to-1} \dfrac{(x+1)(3x^2+x+1)}{(x-1)(x+1)} = \lim\limits_{x\to-1} \dfrac{3x^2+x+1}{x-1} = -\dfrac{3}{2}$

Cálculo auxiliar

Sabe-se que o polinómio $3x^3+4x^2+2x+1$ é divisível por $x+1$

Então,

$3x^3+4x^2+2x+1 = (x+1)Q(x)$

Pela regra de Ruffini, vem,

$$\begin{array}{c|ccc|c} & 3 & 4 & 2 & 1 \\ -1 & & -3 & -1 & -1 \\ \hline & 3 & 1 & 1 & 0 \end{array}$$

Assim,

$Q(x) = 3x^2+x+3$

Logo,

$3x^3+4x^2+2x+1 = (x+1)(3x^2+x+3)$

4. .

4.1. Para existir $\lim\limits_{x\to 2} g(x)$, deve ter-se $\lim\limits_{x\to 2^-} g(x) = \lim\limits_{x\to 2^+} g(x) = g(2)$

Ora,

- $\lim\limits_{x\to 2^-} g(x) = \lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{x^2-4}{x^2-2x} =^{\left(\frac{0}{0}\right)} \lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{(x-2)(x+2)}{x(x-2)} \lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{x+2}{x} = 2$
- $\lim\limits_{x\to 2^-} g(x) = \lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{\sqrt{x+7}+1}{x} = \dfrac{\sqrt{9}+1}{2} = 2$
- $g(2) = \dfrac{\sqrt{2+7}+1}{2} = 2$

Como, $\lim\limits_{x\to 2^-} g(x) = \lim\limits_{x\to 2^+} g(x) = g(2)$, então, existe $\lim\limits_{x\to 2} g(x)$, e o seu valor é 2

4.2. Para toda a sucessão (a_n), tal que $a_n \in \mathbb{D}_{\mathfrak{g}}$ e $\lim a_n = 9$, tem-se,

$\lim f(a_n) = \lim \dfrac{\sqrt{a_n+7}+1}{a_n} = \dfrac{\sqrt{\lim a_n + 7}+1}{\lim a_n} = \dfrac{\sqrt{9+7}+1}{9} = \dfrac{5}{9}$

Assim,

$\lim\limits_{x\to 9} g(x) = \dfrac{5}{9}$

5. Pretende-se determinar as soluções da equação $i(x) = 0$

$i(x) = 0 \Leftrightarrow x + 10 - \sqrt{4-8x} = 0 \wedge 4 - 8x \geq 0 \Leftrightarrow \sqrt{4-8x} = x + 10 \wedge -8x \geq -4$

$\Rightarrow \left(\sqrt{4-8x}\right)^2 = (x+10)^2 \wedge x \leq \frac{4}{8} \Leftrightarrow 4 - 8x = x^2 + 20x + 100 \wedge x \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2 + 28x + 96 = 0 \wedge x \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \frac{-28 \pm \sqrt{28^2 - 4 \times 1 \times 96}}{2 \times 1} \wedge x \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow (x = -24 \vee x = -4) \wedge x \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = -24 \vee x = -4$

Verificação:

- $x = -24 \mapsto -24 + 10 - \sqrt{4 - 8 \times (-24)} = 0$

  $\therefore -14 - \sqrt{196} = 0$

  $\therefore -14 - 14 = 0$

  $\therefore -28 = 0$ (Falso)

  Logo, -24 não é solução da equação dada

- $x = -4 \mapsto -4 + 10 - \sqrt{4 - 8 \times (-4)} = 0$

  $\therefore 6 - \sqrt{36} = 0$

  $\therefore 6 - 6 = 0$

  $\therefore 0 = 0$ (Verdadeiro)

  Logo, -4 é solução da equação dada

Resposta: -4 é o Zero de i

6. .

6.1. Analisando cada uma das afirmações, tem-se,

- A afirmação (I) é falsa, visto que $0 \in D_h$ e $\lim_{x \to 0^-} h(x) = 2$ e $\lim_{x \to 0^+} h(x) = 3$, ou seja, não existe $\lim_{x \to 0} h(x)$
- A afirmação (II) é falsa, visto que $3 \notin D_h$ e $\lim_{x \to 3^-} h(x) = \lim_{x \to 3^+} h(x) = 0$, ou seja, existe $\lim_{x \to 3} h(x)$
- A afirmação (III) é falsa, visto que $-3 \in [-4; -2]$ e é ponto aderente a D_h, e h não é contínua em $x = -3$, dado que não existe $\lim_{x \to -3} h(x)$

  $\lim_{x \to -3^-} h(x) = 1$

  $\lim_{x \to -3^+} h(x) = 1$

  $h(-3) = 3$

Resposta: (D)

6.2. Se $\lim h(u_n) = 2$, então a sucessão (u_n) tem de ser tal que:

- $u_n < 0, \forall n \in \mathbb{N}$
- $\lim u_n = 0^-$

Analisando as opções, verificamos que, para $u_n = -\dfrac{1}{n}$, tem-se:

$u_n < 0, \forall n \in \mathbb{N}$ e $\lim u_n = 0^-$

Resposta: (B)

7. $\lim\limits_{x \to -4} \left[\left(x^4 + 4x^3 - x - 4\right) \times \dfrac{1}{x^2 + 4x} \right] =^{(0\times\infty)} \lim\limits_{x \to -4} \dfrac{x^4 + 4x^3 - x - 4}{x^2 + 4x} =^{\left(\frac{0}{0}\right)} \lim\limits_{x \to -4} \dfrac{(x+4)(x^3-1)}{x(x+4)} =$

$= \lim\limits_{x \to -4} \dfrac{x^3 - 1}{x} = \dfrac{65}{4}$

Cálculo auxiliar

Sabe-se que o polinómio $x^4 + 4x^3 - x - 4$ é divisível por $x + 4$

Então,

$x^4 + 4x^3 - x - 4 = (x+4)Q(x)$

Pela regra de Ruffini, vem,

$$\begin{array}{c|cccc|c} & 1 & 4 & 0 & -1 & -4 \\ -4 & & -4 & 0 & 0 & 4 \\ \hline & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}$$

Assim,

$Q(x) = x^3 - 1$

Logo,

$x^4 + 4x^3 - x - 4 = (x+4)(x^3 - 1)$

Resposta: (A)

8. $-3 \in D_h$

A função h é contínua em $x = -3$, se existir $\lim\limits_{x \to -3} h(x)$, ou seja,

se $\lim\limits_{x \to -3^-} h(x) = \lim\limits_{x \to -3^+} h(x) = h(-3)$

Ora,

- $\lim\limits_{x \to -3^-} h(x) = \lim\limits_{x \to -3^-} \dfrac{\sqrt{1-x} - 2}{3x^2 + 10x + 3} =^{\left(\frac{0}{0}\right)} \lim\limits_{x \to -3^-} \dfrac{(\sqrt{1-x} - 2)(\sqrt{1-x} + 2)}{(x+3)(3x+1)(\sqrt{1-x} + 2)} =$

  $= \lim\limits_{x \to -3^-} \dfrac{(\sqrt{1-x})^2 - 2^2}{(x+3)(3x+1)(\sqrt{1-x} + 2)} = \lim\limits_{x \to -3^-} \dfrac{1 - x - 4}{(x+3)(3x+1)(\sqrt{1-x} + 2)} =$

  $= \lim\limits_{x \to -3^-} \dfrac{-x - 3}{(x+3)(3x+1)(\sqrt{1-x} + 2)} = \lim\limits_{x \to -3^-} \dfrac{-(x+3)}{(x+3)(3x+1)(\sqrt{1-x} + 2)} =$

  $= \lim\limits_{x \to -3^-} \dfrac{-1}{(3x+1)(\sqrt{1-x} + 2)} = \dfrac{1}{32}$

Cálculo auxiliar

Sabe-se que o polinómio $3x^2 + 10x + 3$ é divisível por $x + 3$

Então,

$3x^2 + 10x + 3 = (x + 3)Q(x)$

Pela regra de Ruffini, vem,

$$\begin{array}{c|cc|c} & 3 & 10 & 3 \\ -3 & & -9 & -3 \\ \hline & 3 & 1 & 0 \end{array}$$

Assim,

$Q(x) = 3x + 1$

Logo,

$3x^2 + 10x + 3 = (x + 3)(3x + 1)$

- $\lim\limits_{x\to -3^+} h(x) = \lim\limits_{x\to -3^+} \dfrac{x^2 + 8x + 15}{x^2 + 7x + 12} =^{\left(\frac{0}{0}\right)} \lim\limits_{x\to -3^+} \dfrac{(x + 3)(x + 5)}{(x + 3)(x + 4)} = \lim\limits_{x\to -3^+} \dfrac{x + 5}{x + 4} = 2$

Cálculos auxiliares

Sabe-se que o polinómio $x^2 + 8x + 15$ é divisível por $x + 3$

Então,

$x^2 + 8x + 15 = (x + 3)Q(x)$

Pela regra de Ruffini, vem,

$$\begin{array}{c|cc|c} & 1 & 8 & 15 \\ -3 & & -3 & -15 \\ \hline & 1 & 5 & 0 \end{array}$$

Assim,

$Q(x) = x + 5$

Logo,

$x^2 + 8x + 15 = (x + 3)(x + 5)$

Sabe-se que o polinómio $x^2 + 7x + 12$ é divisível por $x + 3$

Então,

$x^2 + 7x + 12 = (x + 3)Q(x)$

Pela regra de Ruffini, vem,

$$\begin{array}{c|cc|c} & 1 & 7 & 12 \\ -3 & & -3 & -12 \\ \hline & 1 & 4 & 0 \end{array}$$

Assim,

$Q(x) = x + 4$

Logo,

$x^2 + 7x + 12 = (x+3)(x+4)$

- $h(-3) = k^2 + 1$

Como $\lim_{x\to -3^-} h(x) \neq \lim_{x\to -3^+} h(x)$, então, não existe k para o qual a função h é contínua em $x = -3$

9. $D_f = \left\{x \in \mathbb{R} : x^2 - 2 \neq 0\right\} = \left\{x \in \mathbb{R} : x \neq -\sqrt{2} \wedge x \neq \sqrt{2}\right\} = \mathbb{R} \setminus \left\{-\sqrt{2}; \sqrt{2}\right\}$

   Cálculo auxiliar

   $x^2 - 2 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 2 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{2}$

   Por outro lado, sabe-se que 1 é zero do polinómio $-4x^3 + 4x^2 + 8x - 8$

   Então,

   $-4x^3 + 4x^2 + 8x - 8 = (x-1)Q(x)$

   Pela regra de Ruffini, vem,

   $$\begin{array}{c|ccc|c} & -4 & 4 & 8 & -8 \\ 1 & & -4 & 0 & 8 \\ \hline & -4 & 0 & 8 & 0 \end{array}$$

   Assim,

   $Q(x) = -4x^2 + 8$

   Logo,

   $-4x^3 + 4x^2 + 8x - 8 = (x-1)(-4x^2 + 8)$

   Assim,

   $$f(x) = \frac{-4x^3 + 4x^2 + 8x - 8}{x^2 - 2} = \frac{(x-1)(-4x^2+8)}{x^2-2} = \frac{-4(x-1)(x^2-2)}{x^2-2} = -4(x-1) = -4x + 4,$$

   com $x \neq -\sqrt{2} \wedge x \neq \sqrt{2}$

10. .

   10.1. $$\lim_{x\to -\infty} \frac{\sqrt{9x^2+2} - 1}{2x+3} =^{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}= \lim_{x\to -\infty} \frac{\sqrt{x^2\left(9 + \frac{2}{x^2}\right)} - 1}{2x+3} = \lim_{x\to -\infty} \frac{|x|\sqrt{9 + \frac{2}{x^2}} - 1}{x\left(2 + \frac{3}{x}\right)} =$$

   $$= \lim_{x\to -\infty} \frac{x\left(-\sqrt{9 + \frac{2}{x^2}} - \frac{1}{x}\right)}{x\left(2 + \frac{3}{x}\right)} = \lim_{x\to -\infty} \frac{-\sqrt{9 + \frac{2}{x^2}} - \frac{1}{x}}{2 + \frac{3}{x}} = \frac{-\sqrt{9 + \frac{2}{+\infty}} - \frac{1}{-\infty}}{2 + \frac{3}{+\infty}}$$

   $$= \frac{-\sqrt{9+0} + 0}{2+0} = -\frac{3}{2}$$

10.2. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{1+4x^2}-\sqrt{x+4x^2}\right) =^{(\infty-\infty)} \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{1+4x^2}-\sqrt{x+4x^2}\right)\left(\sqrt{1+4x^2}+\sqrt{x+4x^2}\right)}{\sqrt{1+4x^2}+\sqrt{x+4x^2}} =$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{1+4x^2}\right)^2-\left(\sqrt{x+4x^2}\right)^2}{\sqrt{1+4x^2}+\sqrt{x+4x^2}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{1+4x^2-\left(x+4x^2\right)}{\sqrt{1+4x^2}+\sqrt{x+4x^2}} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{1+4x^2-x-4x^2}{\sqrt{1+4x^2}+\sqrt{x+4x^2}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{1-x}{\sqrt{1+4x^2}+\sqrt{x+4x^2}} =^{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)} \lim_{x\to+\infty}\frac{1-x}{\sqrt{x^2\left(4+\frac{1}{x^2}\right)}+\sqrt{x^2\left(4+\frac{x}{x^2}\right)}}$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{1-x}{|x|\sqrt{4+\frac{1}{x^2}}+|x|\sqrt{4+\frac{1}{x}}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{1-x}{x\sqrt{4+\frac{1}{x^2}}+x\sqrt{4+\frac{1}{x}}} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{x\left(-1+\frac{1}{x}\right)}{x\left(\sqrt{4+\frac{1}{x^2}}+\sqrt{4+\frac{1}{x}}\right)} = \lim_{x\to+\infty}\frac{-1+\frac{1}{x}}{\sqrt{4+\frac{1}{x^2}}+\sqrt{4+\frac{1}{x}}} =$$

$$= \frac{-1+\frac{1}{+\infty}}{\sqrt{4+\frac{1}{+\infty}}+\sqrt{4+\frac{1}{+\infty}}} = \frac{-1+0}{\sqrt{4+0}+\sqrt{4+0}} = -\frac{1}{4}$$