Escola Secundária de Paredes

# Proposta de Resolução da Ficha Formativa

**Matemática A**

**12.º Ano de Escolaridade** | outubro de 2020

**Turma: 12ºJ**

1. Ora,

$D_f = \left\{x \in \mathbb{R} : x^3 + 3x^2 - 4 \neq 0\right\}$

Sabe-se que 1 anula o polinómio $x^3 + 3x^2 - 4$

Então,

$x^3 + 3x^2 - 4 = (x-1)Q(x)$

Pela regra de Ruffini, vem,

$$\begin{array}{c|ccc|c} & 1 & 3 & 0 & -4 \\ 1 & & 1 & 4 & 4 \\ \hline & 1 & 4 & 4 & 0 \end{array}$$

Assim,

$Q(x) = x^2 + 4x + 4$

LOgo,

$x^3 + 3x^2 - 4 = (x-1)(x^2 + 4x + 4)$

Portanto,

$x^3 + 3x^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow (x-1)(x^2+4x+4) = 0 \Leftrightarrow x - 1 = 0 \vee x^2 + 4x + 4 = 0 \Leftrightarrow x - 1 = 0 \vee (x+2)^2 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = 1 \vee x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \vee x = -2$

Concluindo,

$D_f = \left\{x \in \mathbb{R} : x^3 + 3x^2 - 4 \neq 0\right\} = \mathbb{R} \setminus \{-2; 1\}$

2. .

2.1. $g(x) = 0 \Leftrightarrow \dfrac{x+4}{x^2 - x} - \dfrac{x+1}{x-1} = 0 \Leftrightarrow \dfrac{x+4}{x(x-1)} - \dfrac{x+1}{x-1} = 0 \Leftrightarrow \dfrac{x+4-x(x+1)}{x(x-1)} = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \dfrac{-x^2 - x + x + 4}{x(x-1)} = 0 \Leftrightarrow \dfrac{-x^2+4}{x(x-1)} = 0 \Leftrightarrow -x^2 + 4 = 0 \wedge x(x-1) \neq 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2 = 4 \wedge x \neq 0 \wedge x - 1 \neq 0 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{4} \wedge x \neq 0 \wedge x \neq 1 \Leftrightarrow x = \pm 2 \wedge x \neq 0 \wedge x \neq 1 \Leftrightarrow x = \pm 2$

**Cálculo auxiliar:**

$x(x-1) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 1$

Zeros de $g$ : $-2$ e $2$

2.2. Pelo item anterior, tem-se que $g(x) = \dfrac{-x^2+4}{x(x-1)}$

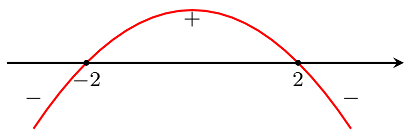
O domínio da função $g$ é, $D_g = \{x \in \mathbb{R} : x(x-1) \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{0; 1\}$

$\twoheadrightarrow$ **Nmerador**

**Zeros:** $-x^2+4=0 \Leftrightarrow x^2=4 \Leftrightarrow x=\pm 2 \Leftrightarrow x=-2 \vee x=2$

**Sinal:**

Como se trata de uma função quadrática, estuda-se o sinal
pela representação gráfica da parábola




Assim,

$-x^2+4>0 \Leftrightarrow -2<x<2$

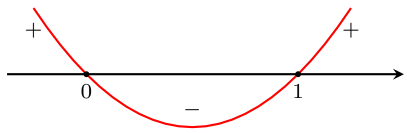
$-x^2+4<0 \Leftrightarrow x<-2 \vee x>2$

$\twoheadrightarrow$ **Denominador**

**Zeros:** $x(x-1)=0 \Leftrightarrow x=0 \vee x-1=0 \Leftrightarrow x=0 \vee x=1$

**Sinal:**

Como se trata de uma função quadrática, estuda-se o sinal
pela representação gráfica da parábola




Assim,

$x^2-x>0 \Leftrightarrow x<0 \vee x>1$

$x^2-x<0 \Leftrightarrow 0<x<1$

**Tabela de sinais**

| $x$ | $-\infty$ | $-2$ | | $0$ | | $1$ | | $2$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $-x^2+4$ | $-$ | $0$ | $+$ | $+$ | $+$ | $+$ | $+$ | $0$ | $-$ |
| $x(x-1)$ | $+$ | $+$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | $+$ | $+$ |
| $g(x)$ | $-$ | $0$ | $+$ | $s.s.$ | $-$ | $s.s.$ | $+$ | $0$ | $-$ |

**Concluindo:**

$g(x)<0 \Leftrightarrow x \in ]-\infty; -2[ \cup ]0; 1[ \cup ]2; +\infty[$
$g(x)>0 \Leftrightarrow x \in ]-2; 0[ \cup ]1; 2[$

3. Como, $(x_n)$, é uma sucessão de valores do domínio de $h$, tal que $\lim h(x_n) = 3$

Então, a sucessão $(x_n)$ deve ser tal que:

$x_n < -1, \forall n \in \mathbb{N}$ e $\lim(x_n) = -1$

Analisando cada uma das opções, tem-se,

$(A)$

$x_n = -1 + \dfrac{1}{n+1} > -1, \forall n \in \mathbb{N}$ e $\lim(x_n) = -1 + \dfrac{1}{+\infty} = -1$

$(B)$

$$x_n = x_n = 1 - \frac{2}{n^2+2} < 1, \forall n \in \mathbb{N} \text{ e } \lim(x_n) = 1 - \frac{2}{+\infty} = 1$$

$(C)$

$$x_n = \frac{-n-5}{n+3} = -\frac{n+5}{n+3} = -\frac{n+3+2}{n+3} = -\frac{n+3}{n+3} - \frac{2}{n+3} = -1 - \frac{2}{n+3} < -1, \forall n \in \mathbb{N}$$

e $\lim(x_n) = -1 - \frac{2}{+\infty} = -1$

$(D)$

$$x_n = \frac{-2n+3}{2n+1} = -\frac{2n-3}{2n+1} = -\frac{2n+1-4}{2n+1} = -\frac{2n+1}{2n+1} - \frac{-4}{2n+1} = -1 + \frac{4}{2n+1} > -1, \forall n \in \mathbb{N}$$

e $\lim(x_n) = -1 + \frac{4}{+\infty} = -1$

**Resposta: (C)**

4. .

4.1. $\lim\limits_{x\to 4} \frac{-x^2+16}{x^2-4x} =^{\left(\frac{0}{0}\right)} \lim\limits_{x\to 4} \frac{(4-x)(4+x)}{x(x-4)} = \lim\limits_{x\to 4} \frac{-(x-4)(4+x)}{x(x-4)} = -\lim\limits_{x\to 4} \frac{4+x}{x} = -\frac{8}{4} = -2$

4.2. $\lim\limits_{x\to -3^-} \frac{x^2+3x}{x^2+6x+9} =^{\left(\frac{0}{0}\right)} \lim\limits_{x\to -3^-} \frac{x(x+3)}{(x+3)^2} = \lim\limits_{x\to -3^-} \frac{x}{x+3} = \frac{-3}{0^-} = +\infty$

4.3. $\lim\limits_{x\to -\infty} \frac{2x^4+4x-5}{x^2+x+1} =^{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)} \lim\limits_{x\to -\infty} \frac{x^4\left(2+\frac{4x}{x^4}-\frac{5}{x^4}\right)}{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)} = \lim\limits_{x\to -\infty}(x^2) \times \frac{\lim\limits_{x\to -\infty}\left(2+\frac{4}{x^3}-\frac{5}{x^4}\right)}{\lim\limits_{x\to -\infty}\left(1+\frac{1}{x^2}\right)} =$

$= +\infty \times \frac{2+0-0}{1+0} = +\infty$

5. $\lim\limits_{x\to -\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x} =^{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)} \lim\limits_{x\to -\infty} \frac{\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}}{x} = \lim\limits_{x\to -\infty} \frac{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{x} =$

$= \lim\limits_{x\to -\infty} \frac{-x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{x} = -\lim\limits_{x\to -\infty} \sqrt{1+\frac{1}{x^2}} = -\sqrt{\lim\limits_{x\to -\infty}\left(1+\frac{1}{x^2}\right)} = -1$

**Resposta: (B)**

6. $\lim\limits_{x\to 1} g(x) = \lim\limits_{x\to 1} \frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{2}}{x-1} =^{\left(\frac{0}{0}\right)} \lim\limits_{x\to 1} \frac{\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{2}\right)}{(x-1)\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{2}\right)} =$

$= \lim\limits_{x\to 1} \frac{\left(\sqrt{x+1}\right)^2-\left(\sqrt{2}\right)^2}{(x-1)\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{2}\right)} = \lim\limits_{x\to 1} \frac{|x+1|-2}{(x-1)\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{2}\right)} = \lim\limits_{x\to 1} \frac{x+1-2}{(x-1)\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{2}\right)} =$

$= \lim\limits_{x\to 1} \frac{x-1}{(x-1)\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{2}\right)} = \lim\limits_{x\to 1} \frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{2}} = \frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4}$

7. $-1 \in D_h$

A função $h$ é contínua em $x = -1$, se existir $\lim\limits_{x \to -1} h(x)$, ou seja,

se $\lim\limits_{x \to -1^-} h(x) = \lim\limits_{x \to -1^+} h(x) = h(-1)$

Ora,

$$\lim_{x \to -1^-} h(x) = \lim_{x \to -1^-} \frac{-x^2+x+2}{x^3+x^2-4x-4} = \lim_{x \to -1^-} \frac{(x+1)(-x+2)}{(x+1)(x^2-4)} = \lim_{x \to -1^-} \frac{-x+2}{x^2-4} = \frac{3}{-3} = -1$$

**Cálculos auxiliares**

$$-x^2+x+2=0 \Leftrightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \times (-1) \times 2}}{2 \times (-1)} \Leftrightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{9}}{-2} \Leftrightarrow x = \frac{-1 \pm 3}{-2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-1-3}{-2} \vee x = \frac{-1+3}{-2} \Leftrightarrow x = \frac{-4}{-2} \vee x = \frac{2}{-2} \Leftrightarrow x = 2 \vee x = -1$$

$x^3 + x^2 - 4x - 4 = (x+1) \times Q(x)$

Pela regra de Ruffini

$$\begin{array}{c|ccc|c} & 1 & 1 & -4 & -4 \\ -1 & & -1 & 0 & 4 \\ \hline & 1 & 0 & -4 & 0 \end{array}$$

Logo, $Q(x) = x^2 - 4$

Assim, $x^3 + x^2 - 4x - 4 = (x+1) \times (x^2-4)$

$$\lim_{x \to -1^+} h(x) = \lim_{x \to -1^+} \frac{-8+4\sqrt{x+5}}{x^2+x} = 4 \times \lim_{x \to -1^+} \frac{(\sqrt{x+5}-2)(\sqrt{x+5}+2)}{x(x+1)(\sqrt{x+5}+2)} = 4 \times \lim_{x \to -1^+} \frac{(\sqrt{x+5})^2 - 2^2}{x(x+1)(\sqrt{x+5}+2)} =$$

$$= 4 \times \lim_{x \to -1^+} \frac{|x+5|-4}{x(x+1)(\sqrt{x+5}+2)} = 4 \times \lim_{x \to -1^+} \frac{x+5-4}{x(x+1)(\sqrt{x+5}+2)} = 4 \times \lim_{x \to -1^+} \frac{x+1}{x(x+1)(\sqrt{x+5}+2)} =$$

$$= 4 \times \lim_{x \to -1^+} \frac{1}{x(\sqrt{x+5}+2)} = 4 \times \frac{1}{-1(\sqrt{-1+5}+2)} = 4 \times \frac{1}{-1 \times 4} = -1$$

$$h(-2) = \frac{k+2}{3}$$

Ora, a função $h$ é contínua em $x = -1$, se, $\lim\limits_{x \to -1^-} h(x) = \lim\limits_{x \to -1^+} h(x) = h(-1)$

Então, deverá ter-se,

$$\frac{k+2}{3} = -1 \Leftrightarrow k+2 = -3 \Leftrightarrow k = -3-2 \Leftrightarrow k = -5$$

Portanto, a função $h$ é contínua em $x = -1$, se $k = -5$