

Prova-Modelo de Exame

Matemática A

Duração da Prova: 150 minutos. | Tolerância: 30 minutos.

12.º Ano de Escolaridade

A prova inclui 12 itens, devidamente identificados no enunciado, cujas respostas contribuem obrigatoriamente para a classificação final. Dos restantes 6 itens da prova, apenas contribuem para a classificação final os 3 itens cujas respostas obtenham melhor pontuação.

Para cada resposta, identifique o item.

Utilize apenas caneta ou esferográfica de tinta azul ou preta.

Não é permitido o uso de corretor. Risque aquilo que pretende que não seja classificado.

É permitido o uso de régua, compasso, esquadro, transferidor e calculadora gráfica.

Apresente apenas uma resposta para cada item.

As cotações dos itens encontram-se no final do enunciado da prova.

A prova inclui um formulário.

Nas respostas aos itens de escolha múltipla, selecione a opção correta. Escreva, na folha de respostas, o número do item e a letra que identifica a opção escolhida.

Nas respostas aos restantes itens, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias. Quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, apresente sempre o valor exato.

Formulário

Geometria

Comprimento de um arco de circunferência

αr (α – amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r – raio)

Área de um polígono regular: Semiperímetro \times Apótema

Área de um setor circular:

$$\frac{\alpha r^2}{2} \quad (\alpha - \text{amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; } r - \text{raio})$$

Área lateral de um cone: $\pi r g$ (r – raio da base; g – geratriz)

Área de uma superfície esférica: $4 \pi r^2$ (r – raio)

Volume de uma pirâmide: $\frac{1}{3} \times \text{Área da base} \times \text{Altura}$

Volume de um cone: $\frac{1}{3} \times \text{Área da base} \times \text{Altura}$

Volume de uma esfera: $\frac{4}{3} \pi r^3$ (r – raio)

Progressões

Soma dos n primeiros termos de uma progressão (u_n) :

Progressão aritmética: $\frac{u_1 + u_n}{2} \times n$

Progressão geométrica: $u_1 \times \frac{1 - r^n}{1 - r}$

Trigonometria

$$\sin(a + b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$$

$$\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$$

Complexos

$$(\rho e^{i\theta})^n = \rho^n e^{in\theta}$$

$$\sqrt[n]{\rho e^{i\theta}} = \sqrt[n]{\rho} e^{i\frac{\theta + 2k\pi}{n}} \quad (k \in \{0, \dots, n-1\} \text{ e } n \in \mathbb{N})$$

Regras de derivação

$$(u + v)' = u' + v'$$

$$(uv)' = u'v + uv'$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

$$(u^n)' = n u^{n-1} u' \quad (n \in \mathbb{R})$$

$$(\sin u)' = u' \cos u$$

$$(\cos u)' = -u' \sin u$$

$$(\operatorname{tg} u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$$

$$(e^u)' = u' e^u$$

$$(a^u)' = u' a^u \ln a \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$$

$$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$$

$$(\log_a u)' = \frac{u'}{u \ln a} \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$$

Limites notáveis

$$\lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e \quad (n \in \mathbb{N})$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^p} = +\infty \quad (p \in \mathbb{R})$$

- * 1. Considere todos os números naturais de cinco algarismos que se podem formar.

Destes números, quantos têm exatamente dois algarismos ímpares e iguais?

(A) 2500 (B) 3000 (C) 5500 (D) 6250

2. Seja Ω , conjunto finito, o espaço amostral associado a uma certa experiência aleatória.

Sejam A e B dois acontecimentos possíveis ($A \subset \Omega$ e $B \subset \Omega$).

Mostre que:

$$P(\bar{A} | B) \times P(B) + P(A) - P(B) = 1 - P(\bar{A} \cup B)$$

- * 3. Uma escola secundária tem apenas duas turmas de 12.º ano: o 12X e o 12Y.

Sabe-se que as duas turmas têm o mesmo número de alunos.

Os alunos dessas turmas estão a organizar a viagem de finalistas e ficou decidido que têm de escolher entre apenas dois destinos para essa viagem: Algarve ou Sul de Espanha.

Escolhe-se, ao acaso, um aluno de 12.º ano dessa escola.

Sabe-se que:

- a probabilidade de o aluno preferir como destino o Algarve é 64%;
- um quarto dos alunos que preferem como destino o Algarve é da turma X.

Determine a probabilidade de o aluno escolhido não preferir como destino o Algarve nem ser da turma X. Apresente o resultado na forma de percentagem.

4. Seja f a função, de domínio \mathbb{R} , definida por:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin\left(x - \frac{1}{2}\right)}{-2x^2 + 3x - 1} - \ln 6 & \text{se } x < \frac{1}{2} \\ \ln(e^{4x} - 6) & \text{se } x \geq \frac{1}{2} \end{cases}$$

Resolva os itens 4.1. e 4.2. sem recorrer à calculadora.

- * 4.1. Averigue se a função f é contínua em $x = \frac{1}{2}$.

- 4.2. Em $\left[\frac{1}{2}, +\infty\right]$ o gráfico de f tem um ponto em que a ordenada é o dobro da abcissa.

Determine as coordenadas desse ponto.

5. Seja g a função, de domínio $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, definida por:

$$g(x) = \begin{cases} \frac{e^x - 1}{x} & \text{se } x < 0 \\ x \ln\left(\frac{1}{x}\right) & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

* 5.1. Sabe-se que a reta tangente ao gráfico de g no ponto de abscissa -1 é paralela à reta de equação $y = kx$. Qual é o valor de k ?

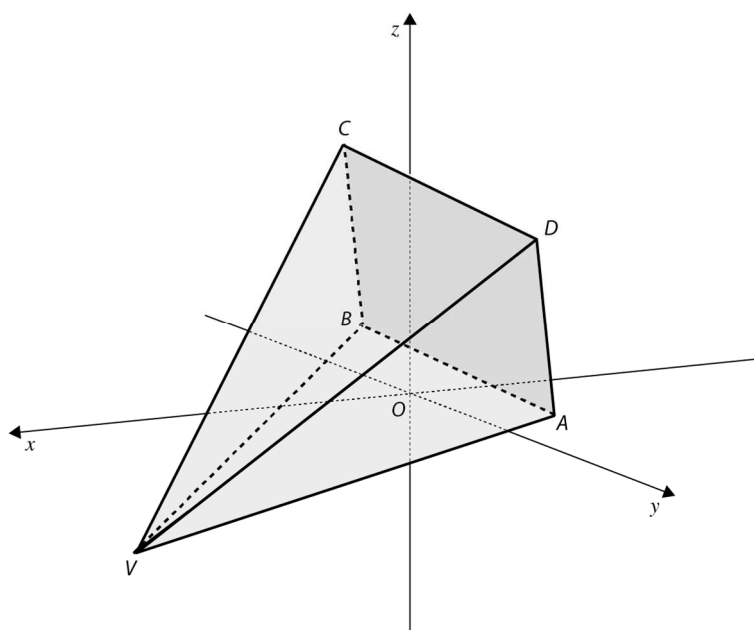
- (A) e^{-1} (B) $1 - e^{-1}$ (C) $1 - e^{-2}$ (D) $1 - 2e^{-1}$

5.2. Estude, sem recorrer à calculadora, a função g quanto à existência de assíntotas verticais e horizontais ao seu gráfico e, caso estas existam, escreva as respectivas equações.

* 5.3. Estude, sem recorrer à calculadora, a função g quanto à monotonia e quanto à existência de extremos relativos, no intervalo $]0, +\infty[$, e determine esses extremos, caso existam. Na sua resposta, apresente o(s) intervalo(s) de monotonia.

6. Na figura está representada, num referencial o.n. $Oxyz$, a pirâmide regular de base quadrada $[ABCD]$ e vértice V . Sabe-se que:

- o plano ABC é definido por $6x + 2y - 3z = -2$;
- o plano CDV é definido por $2x + 2y + 3z = 34$;
- o plano ADV é definido por $6x - 26y + 11z = -142$;
- o ponto B tem coordenadas $(1, -1, 2)$.



* 6.1. Qual das seguintes equações define um plano perpendicular aos planos ABC e CDV e que passa no ponto B ?

- (A) $3x - 6y + 2z + 13 = 0$ (B) $6x - 12y + 4z - 26 = 0$
(C) $x + 3y + 4z - 6 = 0$ (D) $3x + 3y - 4z + 8 = 0$

* 6.2. Determine a área da base da pirâmide, sem recurso à calculadora, a não ser para efetuar eventuais cálculos numéricos.

7. Considere, num referencial o.n. Oxy , a circunferência de equação $x^2 + 6x + y^2 - 2y = 15$.

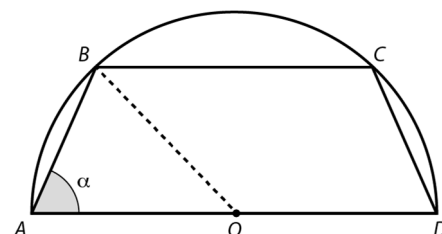
Seja t a reta tangente à circunferência no ponto $T(-6, -3)$.

Determine as coordenadas do ponto da reta t que está mais próximo da origem do referencial.

* 8. Na figura está representada a semicircunferência de centro O e diâmetro $[AD]$ e o trapézio isósceles $[ABCD]$ inscrito na semicircunferência.

Sabe-se que $\overline{AD} = 10$ cm.

Seja $\alpha \in \left] \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2} \right[$ a amplitude, em radianos, do ângulo OAB .



Mostre que a área do trapézio $[ABCD]$, em centímetros quadrados, é dada, para cada valor de α , pela expressão:

$$25\sin(2\alpha) - \frac{25}{2}\sin(4\alpha)$$

* 9. Seja f a função real de variável real, de domínio \mathbb{R}^+ , definida por $f(x) = \frac{1}{x - \ln x}$.

Seja a um número real positivo e sejam A e B os pontos do gráfico da função f de abscissas a e $2a$, respetivamente, tais que o segmento de reta $[AB]$ é diagonal de um quadrado cujos lados são paralelos aos eixos coordenados.

Determine, recorrendo às capacidades gráficas da calculadora, o valor de a , sabendo que esse valor existe e é único. Na sua resposta:

- equacione o problema;
- reproduza, num referencial, o(s) gráfico(s) da(s) função(ões) visualizado(s) na calculadora que lhe permite(m) resolver a equação e apresente a(s) coordenada(s) do(s) ponto(s) relevante(s) arredondadas às milésimas;
- apresente o valor de a arredondado às milésimas.

* 10. Seja $a \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$.

Considere a sucessão convergente (u_n) definida por $u_n = \left(\frac{n+a}{n}\right)^n$.

Em relação a uma certa função f , sabe-se que $\lim f(u_n) = a$.

Em qual das opções seguintes pode estar definida uma expressão analítica de f ?

- (A) $f(x) = ax$ (B) $f(x) = \ln x$ (C) $f(x) = a + \frac{1}{x}$ (D) $f(x) = a \ln x$

11. Seja (a_n) uma progressão geométrica crescente cujo primeiro termo é 2.

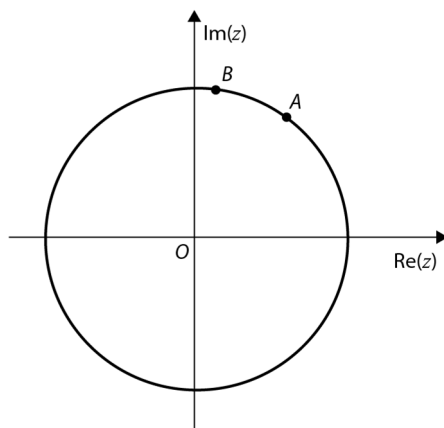
Sabe-se que a_1 , a_2 e $a_3 - 2$ são três termos consecutivos de uma progressão aritmética.

Sem recorrer à calculadora, a não ser para efetuar eventuais cálculos numéricos, averigue se 256 é um termo da progressão geométrica (a_n) .

12. Seja \mathbb{C} o conjunto dos números complexos.

*** 12.1.** Na figura estão representados, numa circunferência centrada na origem, os pontos A e B , vértices consecutivos de um polígono regular. Os vértices desse polígono são os afijos das raízes de índice n de um certo número complexo w .

Sabe-se ainda que o ponto A é o afixo do número complexo $z = 3 + 4i$ e que o comprimento do arco AB é igual a $\frac{5\pi}{6}$.



As coordenadas do ponto B são:

(A) $\left(\frac{3\sqrt{3}-4}{2}, \frac{3+4\sqrt{3}}{2}\right)$

(B) $\left(\frac{4\sqrt{3}-3}{2}, \frac{4+3\sqrt{3}}{2}\right)$

(C) $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{7\sqrt{2}}{2}\right)$

(D) $\left(\frac{3\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{73}}{2}\right)$

12.2. Seja α um número real tal que $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$.

Sejam $z = 6e^{i\alpha}$ e $w = \frac{1}{3}e^{i\alpha}$.

Sabe-se que $\operatorname{Re}(z \times w) = \frac{1}{4}$.

Sem recorrer à calculadora, determine z na forma algébrica.

- * 13. Seja k um número real não nulo e seja f a função definida por $f(x) = kx^2$.

Considere dois pontos do gráfico de f , A e B , sendo A o de menor abcissa.

Considere, também, o ponto desse gráfico em que a reta tangente ao gráfico é paralela à reta AB .

Mostre que, para qualquer valor de k , as abcissas dos três pontos são termos consecutivos de uma progressão aritmética.

FIM

COTAÇÕES

As pontuações obtidas nas respostas a estes 12 itens da prova contribuem obrigatoriamente para a classificação final.	1.	3.	4.1.	5.1.	5.3.	6.1.	6.2.	8.	9.	10.	12.1.	13.	Subtotal
Cotação (em pontos)	12	14	14	12	14	12	14	14	14	12	12	14	158
Destes 6 itens, contribuem para a classificação final da prova os 3 itens cujas respostas obtenham melhor pontuação.	2.	4.2.	5.2.	7.	11.	12.2.	Subtotal						
Cotação (em pontos)	3 × 14 pontos												42
TOTAL													200

Prova-Modelo de Exame de Matemática A – 12.º ano – Proposta de resolução

1. Opção (C)

Consideremos dois tipos de casos que se excluem mutuamente: começar em ímpar ou começar em par.

$$\underbrace{\frac{i}{5}} \times \underbrace{\frac{i}{1}} \times \underbrace{\frac{p}{5}} \times \underbrace{\frac{p}{5}} \times \underbrace{\frac{p}{5}} \times \underbrace{{}^4C_1}_{\substack{\text{número de maneiras} \\ \text{de colocar o ímpar} \\ \text{que não na} \\ \text{posição inicial}}} +$$

$$+ \underbrace{\frac{\overset{2,4,6,8}{\tilde{p}}}{4}} \times \underbrace{\frac{i}{5}} \times \underbrace{\frac{i}{1}} \times \underbrace{\frac{p}{5}} \times \underbrace{\frac{p}{5}} \times \underbrace{{}^4C_2}_{\substack{\text{número de maneiras} \\ \text{de escolher 2 posições} \\ \text{das 4 possíveis para} \\ \text{colocar os ímpares}}}$$

$$\begin{aligned} & 5^4 \times {}^4C_1 + 4 \times 5^3 \times {}^4C_2 = \\ & = 2500 + 3000 = \\ & = 5500 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2. P(\bar{A}|B) \times P(B) + P(A) - P(B) &= \frac{P(\bar{A} \cap B)}{P(B)} \times P(B) + P(A) - P(B) = \\ &= P(B \cap \bar{A}) + P(A) - P(B) = \\ &= P(B) - P(A \cap B) + P(A) - P(B) = \\ &= P(A) - P(A \cap B) = \\ &= P(A \cap \bar{B}) = \\ &= P(\overline{A \cup B}) = \\ &= 1 - P(A \cup B) \end{aligned}$$

3. Consideremos os acontecimentos:

X : “O aluno é da turma X .”

A : “O aluno prefere como destino o Algarve.”

Sabemos que:

- $P(X) = P(Y) = 0,5$
- $P(A) = 0,64$
- $P(X|A) = \frac{1}{4} = 0,25$

Pretende-se determinar $P(\bar{A} \cap \bar{X})$.

Tem-se que:

$$\begin{aligned} P(X|A) = 0,25 &\Leftrightarrow \frac{P(X \cap A)}{P(A)} = 0,25 \\ &\Leftrightarrow P(X \cap A) = 0,25 \times 0,64 \\ &\Leftrightarrow P(X \cap A) = 0,16 \end{aligned}$$

Assim:

$$\begin{aligned} P(\overline{A} \cap \overline{X}) &= P(\overline{A \cup X}) = 1 - P(A \cup X) = \\ &= 1 - P(A) - P(X) + P(A \cap X) = \\ &= 1 - 0,64 - 0,5 + 0,16 = \\ &= 0,02 \end{aligned}$$

$$P(\overline{A} \cap \overline{X}) = 2\%$$

4.

4.1 Para f ser contínua em $x = \frac{1}{2}$ terá de existir $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} f(x)$, isto é, $\lim_{x \rightarrow (\frac{1}{2})^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow (\frac{1}{2})^-} f(x) = f\left(\frac{1}{2}\right)$:

$$\bullet f\left(\frac{1}{2}\right) = \ln\left(e^{4 \times \frac{1}{2}} - 6\right) = \ln(e^2 - 6) = \lim_{x \rightarrow (\frac{1}{2})^+} f(x)$$

$$\begin{aligned} \bullet \lim_{x \rightarrow (\frac{1}{2})^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow (\frac{1}{2})^-} \left(\frac{\sin\left(x - \frac{1}{2}\right)}{-2x^2 + 3x - 1} - \ln 6 \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow (\frac{1}{2})^-} \frac{\sin\left(x - \frac{1}{2}\right)}{-2\left(x - \frac{1}{2}\right)(x-1)} - \ln 6 = \\ &= \lim_{x \rightarrow (\frac{1}{2})^-} \frac{\sin\left(x - \frac{1}{2}\right)}{x - \frac{1}{2}} \times \lim_{x \rightarrow (\frac{1}{2})^-} \frac{1}{-2(x-1)} - \ln 6 = \end{aligned}$$

Cálculo auxiliar

$$\begin{aligned} -2x^2 + 3x - 1 &= 0 \Leftrightarrow x = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \times (-2) \times (-1)}}{2 \times (-2)} \\ &\Leftrightarrow x = \frac{-3 \pm \sqrt{9-8}}{-4} \\ &\Leftrightarrow x = \frac{-3+1}{-4} \vee x = \frac{-3-1}{-4} \\ &\Leftrightarrow x = \frac{1}{2} \vee x = 1 \\ -2x^2 + 3x - 1 &= -2\left(x - \frac{1}{2}\right)(x-1) \end{aligned}$$

Considerando a mudança de variável $x - \frac{1}{2} = y$, $x \rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^- \Rightarrow y \rightarrow 0^-$:

$$\begin{aligned} &= \lim_{\underbrace{y \rightarrow 0^-}_{\text{limite notável}}} \frac{\sin y}{y} \times \frac{1}{-2\left(\frac{1}{2}-1\right)} - \ln 6 = \\ &= 1 \times 1 - \ln 6 = \\ &= 1 - \ln 6 \end{aligned}$$

Como $1 - \ln 6 = \ln e - \ln 6 = \ln\left(\frac{e}{6}\right)$, é diferente de $\ln(e^2 - 6)$, tem-se que

$$\lim_{x \rightarrow (\frac{1}{2})^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow (\frac{1}{2})^+} f(x).$$

Conclui-se, então, que f não é contínua em $x = \frac{1}{2}$.

4.2 Em $\left[\frac{1}{2}, +\infty\right[$:

$$f(x) = 2x$$

$$\begin{aligned}\ln(e^{4x} - 6) = 2x &\Leftrightarrow e^{4x} - 6 = e^{2x} \\ &\Leftrightarrow e^{4x} - e^{2x} - 6 = 0 \\ &\Leftrightarrow (e^{2x})^2 - e^{2x} - 6 = 0\end{aligned}$$

Considerando a mudança de variável $y = e^{2x}$:

$$\begin{aligned}y^2 - y - 6 = 0 &\Leftrightarrow y = \frac{1 \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \times 1 \times (-6)}}{2 \times 1} \Leftrightarrow y = \frac{1 \pm \sqrt{25}}{2} \\ &\Leftrightarrow y = \frac{1+5}{2} \vee y = \frac{1-5}{2} \\ &\Leftrightarrow y = 3 \vee y = -2\end{aligned}$$

Assim:

$$e^{2x} = 3 \vee \underbrace{e^{2x} = -2}_{\text{equação impossível}} \Leftrightarrow 2x = \ln 3 \Leftrightarrow x = \frac{\ln 3}{2} \in \left[\frac{1}{2}, +\infty\right[$$

O ponto do gráfico em que a ordenada é o dobro da abcissa tem coordenadas $\left(\frac{\ln 3}{2}, f\left(\frac{\ln 3}{2}\right)\right) = \left(\frac{\ln 3}{2}, \ln 3\right)$.

Cálculo auxiliar

$$\begin{aligned}f\left(\frac{\ln 3}{2}\right) &= \ln\left(e^{\frac{4\ln 3}{2}} - 6\right) = \ln(e^{2\ln 3} - 6) = \\ &= \ln(e^{\ln 9} - 6) = \\ &= \ln(9 - 6) = \\ &= \ln 3\end{aligned}$$

5.

5.1 Opção (D)

O declive da reta tangente ao gráfico de g no ponto de abcissa -1 é $g'(-1)$. Como a reta é paralela à reta de equação $y = kx$, então $k = g'(-1)$.

Em $]-\infty, 0[$, tem-se que:

$$\begin{aligned}g'(x) &= \left(\frac{e^x - 1}{x}\right)' = \frac{(e^x - 1)' \times x - (e^x - 1) \times x'}{x^2} = \\ &= \frac{e^x \times x - (e^x - 1) \times 1}{x^2} = \\ &= \frac{e^x \times x - e^x + 1}{x^2} =\end{aligned}$$

Assim:

$$k = g'(-1) = \frac{e^{-1} \times (-1) - e^{-1} + 1}{(-1)^2} = \frac{-e^{-1} - e^{-1} + 1}{1} = 1 - 2e^{-1}$$

5.2 Assíntotas verticais

A função g é contínua em $]-\infty, 0[$ e em $]0, +\infty[$, logo a reta de equação $x = 0$ é a única candidata a assíntota vertical ao gráfico de g :

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(x \ln\left(\frac{1}{x}\right)\right) = 0^+ \times \ln\left(\frac{1}{0^+}\right) = 0^+ \times \ln(+\infty) = 0 \times \infty \text{ (indeterminação)}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(x \ln\left(\frac{1}{x}\right)\right) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln\left(\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}} =$$

Considerando a mudança de variável $\frac{1}{x} = y$, $x \rightarrow 0^+ \Rightarrow y \rightarrow +\infty$:

$$\begin{aligned}
&= \lim_{\substack{y \rightarrow +\infty \\ \text{limite notável}}} \frac{\ln y}{y} = \\
&= 0
\end{aligned}$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0^-} g(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0^- \\ \text{limite notável}}} \left(\frac{e^x - 1}{x} \right) = 1$$

O gráfico de g não tem assíntotas verticais.

Assíntotas horizontais

$$\begin{aligned}
\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x \ln \left(\frac{1}{x} \right) \right) = +\infty \times \ln \left(\frac{1}{+\infty} \right) \\
&= +\infty \times \ln(0^+) = \\
&= +\infty \times (-\infty) = \\
&= -\infty
\end{aligned}$$

O gráfico de g não apresenta assíntotas horizontais quando $x \rightarrow +\infty$.

$$\bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{e^x - 1}{x} \right) = \frac{e^{-\infty} - 1}{-\infty} = \frac{0 - 1}{-\infty} = \frac{-1}{-\infty} = 0$$

A reta de equação $y = 0$ é assíntota horizontal ao gráfico de g quando $x \rightarrow -\infty$.

5.3 Em $]0, +\infty[$:



$$\begin{aligned}
g'(x) &= \left(x \ln \left(\frac{1}{x} \right) \right)' = \\
&= x' \times \ln \left(\frac{1}{x} \right) + x \times \left(\ln \left(\frac{1}{x} \right) \right)' = \\
&= 1 \times \ln \left(\frac{1}{x} \right) + x \times \frac{\left(\frac{1}{x} \right)'}{\frac{1}{x}} = \\
&= \ln \left(\frac{1}{x} \right) + x \times \frac{-\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x}} = \\
&= \ln \left(\frac{1}{x} \right) + x \times \left(-\frac{1}{x} \right) = \\
&= \ln \left(\frac{1}{x} \right) - 1
\end{aligned}$$

$$g'(x) = 0$$

$$\ln \left(\frac{1}{x} \right) - 1 = 0 \Leftrightarrow \ln \left(\frac{1}{x} \right) = 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{x} = e$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{1}{e} \quad \text{e} \quad \frac{1}{e} \in]0, +\infty[$$

x	0		$\frac{1}{e}$	$+\infty$
Sinal de g'	n.d.	+	0	-
Variação de g	n.d.		$g\left(\frac{1}{e}\right)$ Máx.	

Cálculos auxiliares

$$g'(e) = \ln\left(\frac{1}{e}\right) - 1 = \ln(e^{-1}) - 1 = -1 - 1 = -2 < 0$$

$$g'\left(\frac{1}{2e}\right) = \ln\left(\frac{1}{\frac{1}{2e}}\right) - 1 = \ln(2e) - 1 = \ln 2 + \ln e - 1 = \ln 2 + 1 - 1 = \ln 2 > 0$$

$$g\left(\frac{1}{e}\right) = \frac{1}{e} \ln\left(\frac{1}{\frac{1}{e}}\right) = \frac{1}{e} \ln(e) = \frac{1}{e} \times 1 = \frac{1}{e}$$

g é crescente em $]0, \frac{1}{e}[$ e é decrescente em $\left]\frac{1}{e}, +\infty\right[$; $\frac{1}{e}$ é um máximo (absoluto) para $x = \frac{1}{e}$.

6. $ABC: 6x + 2y - 3z = -2$

um vetor normal a $ABC: \vec{n}(6, 2, -3)$

$CDV: 2x + 2y + 3z = 34$

um vetor normal a $CDV: \vec{m}(2, 2, 3)$

$ADV: 6x - 26y + 11z = -142$

$B(1, -1, 2)$

6.1 Opção (B)

Se dois planos são perpendiculares, então os respectivos vetores normais também o são. Vamos, então, determinar um vetor, não nulo, que seja simultaneamente perpendicular a \vec{n} e a \vec{m} :

$$\begin{aligned} \begin{cases} (a, b, c) \cdot (6, 2, -3) = 0 \\ (a, b, c) \cdot (2, 2, 3) = 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} 6a + 2b - 3c = 0 \\ 2a + 2b + 3c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6a + 2b = 3c \\ 3c = -2a - 2b \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 6a + 2b = -2a - 2b \\ \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 8a = -4b \\ \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} a = -\frac{1}{2}b \\ 3c = -2\left(-\frac{1}{2}b\right) - 2b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\frac{1}{2}b \\ 3c = b - 2b \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} a = -\frac{1}{2}b \\ 3c = -b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\frac{1}{2}b \\ c = -\frac{1}{3}b \end{cases} \end{aligned}$$

$$\left(-\frac{1}{2}b, b, -\frac{1}{3}b\right), \text{ com } b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

$$b = 6 \hookrightarrow (-3, 6, -2)$$

Um plano perpendicular aos planos ABC e CDV é da forma $-3x + 6y - 2z + d = 0$.

Como $B(1, -1, 2)$ pertence ao plano, vem que:

$$-3 - 6 - 4 + d = 0 \Leftrightarrow d = 13$$

Logo, um plano perpendicular aos planos ABC e CDV , e que passa em B pode ser definido por:

$$-3x + 6y - 2z + 13 = 0 \Leftrightarrow 6x - 12y + 4z - 26 = 0$$

6.2 AD é a interseção dos planos ABC e ADV .

$$\begin{aligned} \begin{cases} 6x + 2y - 3z = -2 \\ 6x - 26y + 11z = -142 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} 6x = -2 - 2y + 3z \\ -2 - 2y + 3z - 26y + 11z = -142 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{1}{3} - \frac{1}{3}y + \frac{1}{2}z \\ -2y - 26y + 3z + 11z = -140 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{1}{3} - \frac{1}{3}y + \frac{1}{2}z \\ -28y = -14z - 140 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{1}{3} - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}z + 5\right) + \frac{1}{2}z \\ y = \frac{1}{2}z + 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{1}{3} - \frac{1}{6}z - \frac{5}{3} + \frac{1}{2}z \\ y = \frac{1}{2}z + 5 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 + \frac{1}{3}z \\ y = \frac{1}{2}z + 5 \end{cases} \end{aligned}$$

$\left(-2 + \frac{1}{3}z, 5 + \frac{1}{2}z, z\right)$, com $z \in \mathbb{R}$ é um ponto genérico da reta AD .

$$AD: (x, y, z) = (-2, 5, 0) + k\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{2}, 1\right), k \in \mathbb{R}$$

D é a interseção da reta AD com o plano CDV .

$$D\left(-2 + \frac{1}{3}k, 5 + \frac{1}{2}k, k\right), \text{ com } k \in \mathbb{R}$$

$$2\left(-2 + \frac{1}{3}k\right) + 2\left(5 + \frac{1}{2}k\right) + 3k = 34 \Leftrightarrow -4 + \frac{2}{3}k + 10 + k + 3k = 34$$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{3}k + \frac{3}{3}k + \frac{9}{3}k = 28$$

$$\Leftrightarrow \frac{14}{3}k = 28$$

$$\Leftrightarrow k = 6$$

$$D\left(-2 + \frac{6}{3}, 5 + \frac{6}{2}, 6\right)$$

$$D(0, 8, 6)$$

$$\overline{BD} = \sqrt{(0-1)^2 + (8+1)^2 + (6-2)^2} = \sqrt{1+81+16} = \sqrt{98}$$

$$\overline{BD}^2 = l^2 + l^2 \Leftrightarrow 98 = 2l^2 \Leftrightarrow 49 = l^2$$

$$A_{\text{base}} = 49 \text{ u.a.}$$

$$7. x^2 + 6x + y^2 - 2y = 15 \Leftrightarrow x^2 + 6x + 9 + y^2 - 2y + 1 = 15 + 9 + 1$$

$$\Leftrightarrow (x+3)^2 + (y-1)^2 = 25$$

Seja C o centro da circunferência: $C(-3, 1)$

Seja $P(x, y)$ um ponto genérico da reta tangente à circunferência no ponto T :

$$\overrightarrow{CT} \cdot \overrightarrow{TP} = 0 \Leftrightarrow (-3, -4) \cdot (x+6, y+3) = 0 \Leftrightarrow -3x - 18 - 4y - 12 = 0$$

$$\Leftrightarrow -4y = 3x + 30$$

$$\Leftrightarrow y = -\frac{3}{4}x - \frac{15}{2}$$

O ponto da reta t que está mais próximo da origem do referencial é a projeção ortogonal de O sobre a reta t . Consideremos a reta perpendicular a t e que passa em O , definida por $y = \frac{4}{3}x$.

Determinemos a interseção desta reta com a reta t :

$$\begin{cases} y = \frac{4}{3}x \\ y = -\frac{3}{4}x - \frac{15}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{3}{4}x - \frac{15}{2} = \frac{4}{3}x \\ \underline{\hspace{1cm}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -9x - 90 = 16x \\ \underline{\hspace{1cm}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -25x = 90 \\ \underline{\hspace{1cm}} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{18}{5} \\ y = -\frac{3}{4} \times \left(-\frac{18}{5}\right) - \frac{15}{2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{18}{5} \\ y = -\frac{24}{5} \end{cases}$$

As coordenadas são $\left(-\frac{18}{5}, -\frac{24}{5}\right)$.

8. Seja P a projeção ortogonal de B sobre $[AD]$.

$$A_{[ABCD]} = \frac{\overline{AD} + \overline{BC}}{2} \times \overline{BP} = \frac{10 + 2 \times \overline{OP}}{2} \times \overline{BP}$$

Cálculos auxiliares

O triângulo $[AOB]$ é isósceles:

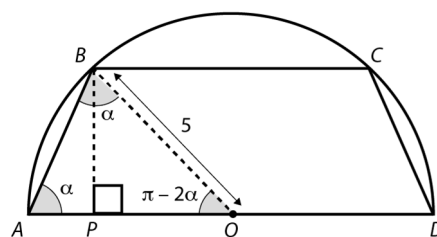
$$\overline{OA} = \overline{OB} = \text{raio} = 5$$

$$\alpha = \angle OAB = \angle OBA$$

$$\angle AOB = \pi - \alpha - \alpha = \pi - 2\alpha$$

$$\sin(\pi - 2\alpha) = \frac{\overline{BP}}{5} \Leftrightarrow \sin(2\alpha) = \frac{\overline{BP}}{5} \Leftrightarrow \overline{BP} = 5 \sin(2\alpha)$$

$$\cos(\pi - 2\alpha) = \frac{\overline{OP}}{5} \Leftrightarrow -\cos(2\alpha) = \frac{\overline{OP}}{5} \Leftrightarrow \overline{OP} = -5 \cos(2\alpha)$$



Assim:

$$\begin{aligned} A_{[ABCD]} &= \frac{10 + 2 \times \overline{OP}}{2} \times \overline{BP} = \frac{10 + 2 \times (-5 \cos(2\alpha))}{2} \times 5 \sin(2\alpha) = \\ &= \frac{10 - 10 \cos(2\alpha)}{2} \times 5 \sin(2\alpha) = \\ &= (5 - 5 \cos(2\alpha)) \times 5 \sin(2\alpha) = \\ &= 25 \sin(2\alpha) - 25 \cos(2\alpha) \sin(2\alpha) = \\ &= 25 \sin(2\alpha) - \frac{25}{2} \times \underbrace{2 \sin(2\alpha) \cos(2\alpha)}_{\sin(2 \times 2\alpha)} = \\ &= 25 \sin(2\alpha) - \frac{25}{2} \times \sin(4\alpha) \end{aligned}$$

9. $f(x) = \frac{1}{x - \ln x}$ $D_f = \mathbb{R}^+$

$A(a, f(a))$, ou seja, $A\left(a, \frac{1}{a - \ln a}\right)$.

$B(2a, f(2a))$, ou seja, $B\left(2a, \frac{1}{2a - \ln(2a)}\right)$.

O declive da reta AB é igual a $\frac{f(2a) - f(a)}{2a - a} = \frac{\frac{1}{2a - \ln(2a)} - \frac{1}{a - \ln a}}{a}$.

$[AB]$ é uma diagonal de um quadrado de lados paralelos aos eixos coordenados se:

$$\frac{\frac{1}{2a - \ln(2a)} - \frac{1}{a - \ln a}}{a} = 1 \quad \vee \quad \frac{\frac{1}{2a - \ln(2a)} - \frac{1}{a - \ln a}}{a} = -1$$

isto é:

$$\left| \frac{\frac{1}{2a - \ln(2a)} - \frac{1}{a - \ln a}}{a} \right| = 1$$

ou seja:

$$\frac{\left| \frac{1}{2a - \ln(2a)} - \frac{1}{a - \ln a} \right|}{a} = 1, \text{ pois } a \in \mathbb{R}^+.$$

Utilizando x como variável independente:

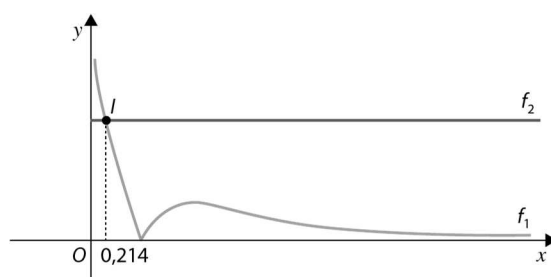
$$\frac{\left| \frac{1}{2x - \ln(2x)} - \frac{1}{x - \ln x} \right|}{x} = 1$$

Recorrendo às capacidades gráficas da calculadora:

$$f_1(x) = \frac{\left| \frac{1}{2x - \ln(2x)} - \frac{1}{x - \ln x} \right|}{x}$$

$$f_2(x) = 1$$

$$x > 0$$



Logo, $a \approx 0,214$.

10. Opção (B)

$$u_n = \left(\frac{n+a}{n}\right)^n = \left(1 + \frac{a}{n}\right)^n$$

$$\lim u_n = \lim \left(1 + \frac{a}{n}\right)^n = e^a$$

$$\text{Assim, } \lim_{x \rightarrow e^a} f(x) = a.$$

- (A) $\lim_{x \rightarrow e^a} f(x) = \lim_{x \rightarrow e^a} (ax) = ae^a$ (falso)
- (B) $\lim_{x \rightarrow e^a} f(x) = \lim_{x \rightarrow e^a} \ln x = \ln(e^a) = a$ (verdadeiro)
- (C) $\lim_{x \rightarrow e^a} f(x) = \lim_{x \rightarrow e^a} \left(a + \frac{1}{x}\right) = a + \frac{1}{e^a}$ (falso)
- (D) $\lim_{x \rightarrow e^a} f(x) = \lim_{x \rightarrow e^a} (a \ln x) = a \ln(e^a) = a^2$ (falso)

11. $a_1 = 2$ e (a_n) é uma progressão geométrica crescente, logo, $r > 1$.

a_1 , a_2 , $a_3 - 2$ são termos consecutivos de uma progressão aritmética.

$$a_2 - a_1 = a_3 - 2 - a_2 \Leftrightarrow a_2 - 2 = a_3 - 2 - a_2$$

$$\Leftrightarrow 2a_2 = a_3$$

Por outro lado:

$a_2 = a_1 \times r = 2r$, onde r é a razão da progressão geométrica.

$$a_3 = a_1 \times r^2 = 2r^2$$

Logo:

$$2 \times 2r = 2r^2 \Leftrightarrow 4r - 2r^2 = 0 \Leftrightarrow r(4 - 2r) = 0$$

$$\Leftrightarrow r = 0 \quad \vee \quad 4 = 2r$$

$$\Leftrightarrow r = 0 \quad \vee \quad r = 2$$

Como $r > 1$, então $r = 2$.

Assim, $a_n = a_1 \times r^{n-1} = 2 \times 2^{n-1} = 2^n$.

Deste modo:

$$2^n = 256 \Leftrightarrow 2^n = 2^8 \Leftrightarrow n = 8$$

Assim, conclui-se que 256 é o 8.º termo.

12.

12.1 Opção (A)

$$|z| = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$$

Logo, 5 é o raio da circunferência de centro na origem e que passa em A e B .

Como o comprimento do arco AB é $\frac{5\pi}{6}$, tem-se:

$$\frac{5\pi}{6} = \alpha \times 5 \Leftrightarrow \alpha = \frac{\pi}{6}$$

Então, $\frac{2\pi}{n} = \frac{\pi}{6}$, logo $n = 12$.

Seja z_B o número complexo cujo afixo é B .

$$\begin{aligned} z_B &= z \times e^{i\frac{\pi}{6}} = (3 + 4i) \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right) = (3 + 4i) \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \right) = \\ &= \frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i + 2\sqrt{3}i + 2i^2 = \\ &= -2 + \frac{3}{2}\sqrt{3} + i \left(\frac{3}{2} + 2\sqrt{3} \right) = \end{aligned}$$

$$= \frac{3\sqrt{3}-4}{2} + i \frac{3+4\sqrt{3}}{2}$$

Assim, as coordenadas de B são $\left(\frac{3\sqrt{3}-4}{2}, \frac{3+4\sqrt{3}}{2}\right)$.

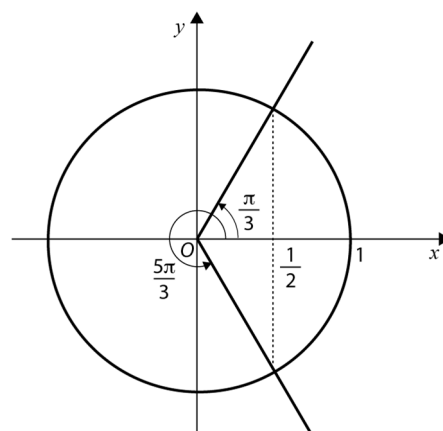
$$\begin{aligned} 12.2 \quad \operatorname{Re}(z \times w) &= \frac{1}{4} \Leftrightarrow \operatorname{Re}\left(6e^{i\alpha} \times \frac{1}{3}e^{i\alpha}\right) = \frac{1}{4} \\ &\Leftrightarrow \operatorname{Re}\left(6 \times \frac{1}{3}e^{i(\alpha+\alpha)}\right) = \frac{1}{4} \\ &\Leftrightarrow \operatorname{Re}(2e^{i(2\alpha)}) = \frac{1}{4} \\ &\Leftrightarrow \operatorname{Re}(2\cos(2\alpha) + 2\operatorname{sen}(2\alpha)i) = \frac{1}{4} \\ &\Leftrightarrow 2\cos(2\alpha) = \frac{1}{4} \\ &\Leftrightarrow \cos(2\alpha) = \frac{1}{8} \\ &\Leftrightarrow \cos^2\alpha - \operatorname{sen}^2\alpha = \frac{1}{8} \\ &\Leftrightarrow \cos^2\alpha - (1 - \cos^2\alpha) = \frac{1}{8} \\ &\Leftrightarrow 2\cos^2\alpha - 1 = \frac{1}{8} \\ &\Leftrightarrow 2\cos^2\alpha = \frac{9}{8} \\ &\Leftrightarrow \cos^2\alpha = \frac{9}{16} \Leftrightarrow \cos\alpha = \pm \frac{3}{4} \end{aligned}$$

Como $\alpha \in \left]\pi, \frac{3\pi}{2}\right[$, $\cos\alpha = -\frac{3}{4}$.

Assim, $\operatorname{sen}^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha = 1 - \frac{9}{16} = \frac{7}{16}$, então $\operatorname{sen}\alpha = \pm \frac{\sqrt{7}}{4}$.

Como $\alpha \in \left]\pi, \frac{3\pi}{2}\right[$, $\operatorname{sen}\alpha = -\frac{\sqrt{7}}{4}$.

$$z = 6e^{i\alpha} \Leftrightarrow z = 6(\cos\alpha + i\operatorname{sen}\alpha) = 6 \times \left(-\frac{3}{4}\right) + 6 \times \left(-\frac{\sqrt{7}}{4}\right)i = -\frac{9}{2} - \frac{3\sqrt{7}}{2}i$$



13. Como os pontos A e B pertencem ao gráfico de f , sendo A o de menor abcissa, então $A(a, ka^2)$ e $B(b, kb^2)$, com $a < b$.

Seja $C(c, kc^2)$, o ponto desse gráfico em que a reta tangente ao gráfico é paralela à reta AB .

Seja t a reta tangente ao gráfico de f no ponto C e m_t o seu declive.

Tem-se que $m_t = f'(c)$ e $m_t = m_{AB}$.

$f'(x) = 2kx$, logo $f'(c) = 2kc$.

$$m_{AB} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \frac{kb^2 - ka^2}{b - a} = \frac{k(b^2 - a^2)}{b - a} = \frac{k(b - a)(b + a)}{b - a} = k(b + a)$$

$$m_t = f'(c) = 2kc$$

Assim:

$$k(b+a) = 2kc \stackrel{k \neq 0}{\Leftrightarrow} b+a = 2c \Leftrightarrow c = \frac{b+a}{2}$$

Provemos agora que:

i. $a < c < b$

$$a < b \Leftrightarrow a + a < b + a \Leftrightarrow \frac{a+a}{2} < \frac{b+a}{2} \Leftrightarrow a < c$$

$$a < b \Leftrightarrow a + b < b + b \Leftrightarrow \frac{a+b}{2} < \frac{b+b}{2} \Leftrightarrow c < b$$

ii. $c - a = b - c$

$$c - a = \frac{b+a}{2} - a = \frac{b-a}{2}$$

$$b - c = b - \frac{b+a}{2} = \frac{b-a}{2}$$

Logo, para qualquer valor de k , as abcissas dos três pontos são termos consecutivos de uma progressão aritmética.