Ficha de Trabalho n.º 2 – Matemática A – 10.º Ano

Conjuntos e Condições

Proposta de Resolução

"Conhece a Matemática e dominarás o Mundo."
Galileu Galilei

Grupo I – Itens de Escolha Múltipla

1. Tem-se que:

▪ $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$ e π são número irracionais. Logo, as proposições $p\left(\sqrt{2}\right)$, $p\left(\sqrt{3}\right)$, $p\left(\sqrt{5}\right)$ e $p(\pi)$ são verdadeiras.

▪ 2, $\sqrt{(-3)^2}=3$ e $-\sqrt{4}=-2$ são números racionais. Logo, as proposições $p(2)$, $p\left(\sqrt{(-3)^2}\right)$ e $p\left(-\sqrt{4}\right)$ são falsas.

Sabe-se que: a **equivalência** entre duas proposições é **verdadeira** se e somente se as duas tiverem o mesmo valor lógico; a **implicação** entre duas proposições é **falsa** se e somente se o antecedente for uma proposição verdadeira e o consequente for uma proposição falsa; a **conjunção** entre duas condições é **verdadeira** se e somente se ambas forem verdadeiras; a **disjunção** entre duas proposições é falsa se e somente se ambas forem falsas.

Portanto, as proposições $\underbrace{p(2)}_{F}\Leftrightarrow\underbrace{p\left(\sqrt{2}\right)}_{V}$, $\underbrace{p\left(\sqrt{2}\right)}_{V}\Rightarrow\underbrace{p\left(\sqrt{(-3)^2}\right)}_{F}$ e $\underbrace{\sim p(\pi)}_{F}\wedge\underbrace{p\left(\sqrt{3}\right)}_{V}$ são falsas e a proposição $\underbrace{p\left(-\sqrt{4}\right)}_{F}\vee\underbrace{p\left(\sqrt{5}\right)}_{V}$ é verdadeira.

Resposta: D

2. Tem-se que:

$$p(x)\wedge q(x)\Leftrightarrow\frac{x^2-1}{2}\le x\left(\frac{x}{2}+1\right)\quad\wedge\quad 6(x-2)<3x+3\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\cancel{\frac{x^2}{2}}-\frac{1}{2}\le\cancel{\frac{x^2}{2}}+x\quad\wedge\quad 6x-12<3x+3$$

$$\Leftrightarrow-\frac{1}{2}\le x\quad\wedge\quad 6x-3x<3+12$$

$$\Leftrightarrow x\ge-\frac{1}{2}\quad\wedge\quad 3x<15\Leftrightarrow x\ge-\frac{1}{2}\quad\wedge\quad x<5$$

Logo, o valores de x que que transformam a condição $p(x)\wedge q(x)$ numa proposição verdadeira são todos os números reais maiores ou iguais a $-\frac{1}{2}$ e todos os números reais inferiores a 5. Ou seja, são todos os números reais pertencentes ao intervalo $\left[-\frac{1}{2},5\right[$.

Resposta: B

3. A proposição p: "Não existem números reais cujo seu cubo seja -1" pode ser interpretada como p: Qualquer que seja o número real, o seu cubo não é igual a -1 . Portanto, simbolicamente, a proposição p pode ser escrita da seguinte forma, $p:\forall\, x\in\mathbb{R},\ x^3\neq-1$.

Resposta: C

4. Tem-se que:

$$\sim p: \exists\, x \in \mathbb{R}: \sim\left(x<-2 \Rightarrow x^2+x<2\right) \Leftrightarrow \exists\, x \in \mathbb{R}: \sim\left(\sim(x<-2) \ \vee\ x^2+x<2\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \exists\, x \in \mathbb{R}: \sim\left(\sim(x<-2)\right) \ \wedge\ \sim\left(x^2+x<2\right)$$

$$\Leftrightarrow \exists\, x \in \mathbb{R}: x<-2 \ \wedge\ x^2+x \geq 2$$

Resposta: A

5. Tem-se que:

- $\frac{-4(x+1)}{3}<3+\frac{3-x}{2} \Leftrightarrow -8(x+1)<18+9-3x \Leftrightarrow -8x-8+3x<27 \Leftrightarrow -5x<35 \Leftrightarrow x>-7$. Logo, $A=\left]-7,+\infty\right[$.

- $|x| \geq 10 \Leftrightarrow x \geq 10 \ \vee\ x \leq -10$. Logo, $B=\left]-\infty,-10\right] \cup \left[10,+\infty\right[$ e consequentemente, $\bar{B}=\left]-10,10\right[$.

Portanto, $A \cap \bar{B}=\left]-7,10\right[$.

Por outro lado, $\left(x^2-100\right)\left(x^2-108\right)=0 \Leftrightarrow x^2-100=0 \ \vee\ x^2-108=0 \Leftrightarrow x^2=100 \ \vee\ x^2=108 \Leftrightarrow x=\pm\sqrt{100} \ \vee\ x=\pm\sqrt{108} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow x=\pm 10 \ \vee\ x=\pm\sqrt{108}$$

Logo, as soluções da equação $\left(x^2-100\right)\left(x^2-108\right)=0$ são $-\sqrt{108}$, -10, 10 e $\sqrt{108}$. No entanto, ao conjunto C pertencem apenas as soluções inteiras desta equação, ou seja, -10 e 10. Portanto, $C=\{-10,10\}$.

$\therefore\ \left(A \cap \bar{B}\right) \cup C=\left]-7,10\right[\cup \{-10,10\}=\left]-7,10\right] \cup \{-10\}$.

Resposta: B

6. U é o conjunto de todos os números naturais inferiores a 36, isto é:

$$U=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,14,15,16,17,18,19,20,21,22,23,24,25,26,27,28,29,30,31,32,33,34,35\}$$

Assim:

- A é conjunto de todos os elementos de U cuja raiz quadrada é um número natural. Esses elementos são 1, 4, 9, 16 e 25.

Logo, $A=\{1,4,9,16,25\}$

- B é conjunto de todos os elementos de U que são múltiplos de 4. Esses elementos são 4, 8, 12, 16, 20, 24, 28 e 32.

Logo, $B=\{4,8,12,16,20,24,28,32\}$

Portanto:

- $A \cap B=\{1,4,9,16,25\} \cap \{4,8,12,16,20,24,28,32\}=\{4,16\}$

- $B \setminus A=\{4,8,12,16,20,24,28,32\} \setminus \{1,4,9,16,25\}=\{8,12,20,24,28,32\}$

Resposta: C

7. Tem-se que:

$$x^3 = x \vee x^4 = 16 \Leftrightarrow x^3 - x = 0 \vee x = \pm\sqrt[4]{16} \Leftrightarrow x\left(x^2 - 1\right) = 0 \vee x = \pm 2 \Leftrightarrow x = 0 \vee x^2 - 1 = 0 \vee x = \pm 2$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \vee x^2 = 1 \vee x = \pm 2 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = \pm\sqrt{1} \vee x = \pm 2 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = \pm 1 \vee x = \pm 2$$

Logo, as soluções da condição $x^3 = x \vee x^4 = 16$ são -2, -1, 0, 1 e 2. No entanto, ao conjunto A pertencem apenas as soluções racionais não positivas, ou seja, -2, -1 e 0. Portanto, $A = \{-2, -1, 0\}$.

Resposta: D

8. Tem-se que:

- $3x + 2 = 0 \Leftrightarrow 3x = -2 \Leftrightarrow x = -\frac{2}{3}$

- $6x - \frac{6}{x} = 5 \underset{\substack{\times x \\ x \neq 0}}{\Leftrightarrow} 6x^2 - 6 = 5x \Leftrightarrow 6x^2 - 5x - 6 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{5 \pm \sqrt{(-5)^2 - 4 \times 6 \times (-6)}}{2 \times 6} \Leftrightarrow x = -\frac{2}{3} \vee x = \frac{3}{2}$

Portanto, a proposição $a\left(-\frac{2}{3}\right)$ é verdadeira e a proposição $a(k)$ é falsa para todo o $k \in \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{2}{3}, 0\right\}$; as proposições $b\left(-\frac{2}{3}\right)$ e $b\left(\frac{3}{2}\right)$ são verdadeiras e a proposição $b(k)$ só falsa para todo $k \in \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{2}{3}, 0, \frac{3}{2}\right\}$.

Uma condição $p(x)$ é universal num universo U quando se transforma numa proposição verdadeira, sempre que se substitui a variável x por elementos de U, isto é, a condição $p(x)$ é universal num universo U se e somente se a proposição $\forall x \in U$, $p(x)$ for verdadeira.

Assim:

A A condição $a(x) \Leftrightarrow b(x)$ não é universal, pois para $x = \frac{3}{2}$ a proposição $\underset{F}{a\left(\frac{3}{2}\right)} \Leftrightarrow \underset{V}{b\left(\frac{3}{2}\right)}$ é falsa.

B A condição $b(x) \Rightarrow a(x)$ não é universal, pois para $x = \frac{3}{2}$ a proposição $\underset{V}{b\left(\frac{3}{2}\right)} \Rightarrow \underset{F}{a\left(\frac{3}{2}\right)}$ é falsa.

C A condição $\sim b(x) \Rightarrow \sim a(x)$ é universal, pois:

- se $x = -\frac{2}{3}$, a proposição $\underbrace{\sim b\left(-\frac{2}{3}\right)}_{F} \Rightarrow \underbrace{\sim a\left(-\frac{2}{3}\right)}_{F}$ é verdadeira.

- se $x = \frac{3}{2}$, a proposição $\underbrace{\sim b\left(\frac{3}{2}\right)}_{F} \Rightarrow \underbrace{\sim a\left(\frac{3}{2}\right)}_{V}$ é verdadeira.

- se $x = k$, com $k \in \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{2}{3}, 0, \frac{3}{2}\right\}$, as proposições $\sim a(k)$ e $\sim b(k)$ são verdadeiras e portanto a proposição $\sim b(k) \Rightarrow \sim a(k)$ é verdadeira.

Logo, a proposição $\forall x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$, $\sim b(x) \Rightarrow \sim a(x)$ é verdadeira e portanto a condição $\sim b(x) \Rightarrow \sim a(x)$ é universal.

D A condição $\sim a(x) \Rightarrow b(x)$ não é universal, pois, por exemplo, para $x=1$ a proposição $\underbrace{\sim a(1)}_{V} \Rightarrow \underset{F}{b(1)}$ é falsa.

Resposta: C

9. A proposição falsa é a da opção **C.** De facto:

$$x^3-16x=0 \Leftrightarrow x(x^2-16)=0 \Leftrightarrow x=0 \;\vee\; x^2-16=0 \Leftrightarrow x=0 \;\vee\; x^2=16 \Leftrightarrow x=0 \;\vee\; x=\pm\sqrt{16} \Leftrightarrow x=0 \;\vee\; x=\pm 4$$

Portanto, o conjunto solução desta equação é $\{-4,0,4\}$. Nenhuma das soluções da equação pertente ao conjunto S, pelo que a proposição $\exists\, x \in S : x^3-16x=0$, ou seja, não é verdade que exista pelo menos um $x \in S$ tal que $x^3-16x=0$.

Resposta: C

Grupo II – Itens de Resposta Aberta

10.

10.1.

▪ A proposição p é falsa, pois, por exemplo, se $x=0,5$ ($0,5 \in \mathbb{R}$) tem-se que $0,5=0,5$, mas $0,5 \notin \mathbb{Z}$. Portanto não é verdade que para todo o $x \in \mathbb{R}$ se tenha $x=x \;\wedge\; x \in \mathbb{Z}$.

▪ A proposição q é verdadeira. É verdade que existe pelo menos um $x \in \mathbb{R}$ tal que $x=x \;\wedge\; x \in \mathbb{Z}$. Por exemplo, se $x=1$ ($1 \in \mathbb{R}$) tem-se que $1=1$ e que $1 \in \mathbb{Z}$.

10.2. Tem-se que:

▪ $x \neq x \Leftrightarrow x<x \;\vee\; x>x$, isto é, x é diferente de x se e somente se x é inferior a x ou se x é superior a x.

▪ se $x \in \mathbb{R}$ e $x \notin \mathbb{Z}$, então, $x \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$

Assim, a proposição $\sim p$ fica:

$$\sim(\forall\, x \in \mathbb{R}, x=x \;\wedge\; x \in \mathbb{Z}) \Leftrightarrow \exists\, x \in \mathbb{R} : \sim(x=x \;\wedge\; x \in \mathbb{Z}) \Leftrightarrow \exists\, x \in \mathbb{R} : x \neq x \;\vee\; x \notin \mathbb{Z} \Leftrightarrow \exists\, x \in \mathbb{R} : (x<x \;\vee\; x<x) \;\vee\; x \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$$

10.3.

▪ A condição $a(x): x=x \;\wedge\; x \in \mathbb{Z}$ é universal em $\mathbb{Z}$, pois a proposição $\forall\, x \in \mathbb{Z},\; x=x \;\wedge\; x \in \mathbb{Z}$ é verdadeira. Ou seja, é verdade que todos os números inteiros são iguais a si próprios e são números inteiros. Como $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$, então a proposição $a(x)$ também é universal em $\mathbb{N}$.

▪ A condição $a(x): x=x \;\wedge\; x \in \mathbb{Z}$ é possível não universal em $\mathbb{Q}$ e em $\mathbb{R}$. De facto, por um lado $0,5 \in \mathbb{Q}$ e $0,5 \in \mathbb{R}$ e a proposição $a(0,5): \underbrace{0,5=0,5}_{V} \;\wedge\; \underbrace{0,5 \in \mathbb{Z}}_{F}$ é falsa. Por outro lado $1 \in \mathbb{Q}$ e $1 \in \mathbb{R}$ e a proposição $a(1): \underset{V}{1=1} \;\wedge\; \underset{V}{1 \in \mathbb{Z}}$ é verdadeira. Ou seja, substituindo a variável por $0,5$ obtém-se uma proposição falsa e substituindo a variável por 1 obtém-se uma proposição verdadeira.

▪ A condição $a(x): x=x \;\wedge\; x \in \mathbb{Z}$ é impossível em $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$, pois a proposição $\exists\, x \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q} : x=x \;\wedge\; x \in \mathbb{Z}$ é falsa. Ou seja, não existe nenhum número irracional que seja igual a si próprio e que seja inteiro.

11.

11.1. Tem-se que $\sim q : \sim\left(\exists\, n \in \mathbb{N} : n^2 + n \text{ é ímpar }\right) \Leftrightarrow \forall\, n \in \mathbb{N},\ n^2 + n \text{ não é ímpar} \Leftrightarrow \forall\, n \in \mathbb{N},\ n^2 + n \text{ é par}$.

Em linguagem corrente, fica, por exemplo: "A soma de todo o número natural com o seu quadrado é um número par."

11.2. Seja n um número natural. Tem-se que, $n^2 + n = n(n+1)$. Assim:

- se n é par, então, $n+1$ é impar e portanto $n^2 + n = n(n+1)$ é par, pois o produto de um número par por um número ímpar é um número par.

- se n é ímpar, então, $n+1$ é par e portanto $n^2 + n = n(n+1)$ é par.

Logo, para todo o n natural, $n^2 + n$ é par. Portanto, a proposição $\exists\, n \in \mathbb{N} : n^2 + n \text{ é ímpar}$ é falsa, pois não existe pelo menos um número natural n tal que $n^2 + n$ seja ímpar.

11.3. Já vimos na alínea anterior que a proposição q é falsa. Tem-se que:

- a proposição p é falsa, pois se $n = 1$, então, $1^4\left(1^2 + 2\right) = 1 \times 3 = 3$ e 3 é um número ímpar. Portanto é falso que para todo o número natural n, $n^4\left(n^2 + 2\right)$ seja um número par.

- a proposição r é verdadeira, pois se $n = 2$, então, $\frac{2^2 + 2 \times 2}{2 + 6} = \frac{8}{8} = 1$ e $1 \in \mathbb{Z}$. Portanto é verdadeiro que existe pelo menos um número natural n tal que $\frac{n^2 + 2n}{n + 6} \in \mathbb{Z}$.

$\therefore$ a proposição p é falsa, a proposição q é falsa e a proposição r é verdadeira.

a) As proposições p e q são falsas. Logo, a proposição $p \wedge q$ também é falsa. Assim, a proposição $p \wedge q \Rightarrow r$ é verdadeira, pois a implicação entre duas proposições é falsa se e somente se a proposição antecedente for verdadeira e a proposição consequente for falsa.

b) As proposições p e q são falsas. Logo, a proposição $p \Rightarrow q$ é verdadeira. Como a proposição r é verdadeira, então, a proposição $p \Rightarrow q \Rightarrow r$ é verdadeira (a implicação entre duas proposições é falsa se e somente se a proposição antecedente for verdadeira e a proposição consequente for falsa).

c) A proposição p é falsa, consequentemente, a proposição $\sim p$. Logo, a proposição $\sim p \vee q$ é verdadeira, pois a disjunção entre duas proposições é falsa se e somente se ambas forem falsas.

Como a proposição r é verdadeira e a proposição q é falsa, a proposição $r \Rightarrow q$ é falsa, pois a implicação entre duas proposições é falsa se e somente se a proposição antecedente for verdadeira e a proposição consequente for falsa.

Assim, como a proposição $\sim p \vee q$ é verdadeira e a proposição $r \Rightarrow q$ é falsa, a proposição $\sim p \vee q \wedge (r \Rightarrow q)$ é falsa, pois a conjunção entre duas proposição é verdadeira se e somente se ambas forem verdadeiras.

d) A equivalência entre duas proposições é verdadeira se e somente se as duas tiverem o mesmo valor lógico. Assim, como a proposição p é falsa e a proposição r é verdadeira, a proposição $p \Leftrightarrow r$ é falsa.

12.

12.1. Tem-se que:

▪ $|x|-x=0 \Leftrightarrow |x|=x \Leftrightarrow x\geq 0$ (a distância à origem de um número real é igual a si próprio se e somente se esse número não for negativo).

Logo, $A=[0,+\infty[$.

▪ $2x-1\leq 3 \Leftrightarrow 2x\leq 4 \Leftrightarrow x\leq 2$. Logo $B=[0,2]$, pois se $x\in A$ então $x\geq 0$.

▪ $\sim(3x-1\leq 2) \Leftrightarrow 3x-1>2 \Leftrightarrow 3x>3 \Leftrightarrow x>1$. Assim:

$$\sim(3x-1\leq 2)\ \wedge\ 8-2(x+1)\geq 0 \Leftrightarrow x>1\ \wedge\ 8-2x-2\geq 0 \Leftrightarrow x>1\ \wedge\ -2x\geq -6 \Leftrightarrow x>1\ \wedge\ x\leq 3$$

Logo, $C=]1,3]$.

a) $B\cap C=[0,2]\cap]1,3]=]1,2]$

b) Tem-se que $C\setminus B=]1,3]\setminus[0,2]=]2,3]$ e que $\bar{A}=]-\infty,0[$. Assim, $(C\setminus B)\cup\bar{A}=]2,3]\cup]-\infty,0[=]-\infty,0[\cup]2,3]$.

c) Tem-se que $B\cup C=[0,2]\cup]1,3]=[0,3]$. Logo, $\overline{B\cup C}=]-\infty,0[\cup]3,+\infty[$.

Assim, $\overline{B\cup C}\cap A=(]-\infty,0[\cup]3,+\infty[)\cap[0,+\infty[=]3,+\infty[$.

12.2.

a) Existe pelo menos um elemento de C cujo seu quadrado é igual a si próprio.

b)

▪ Tem-se que $\mathbb{N}\subset A$. Logo, se $x\in\mathbb{N}\Rightarrow x\in A$, ou seja, todos os números naturais são elementos de A. Portanto, a proposição p é verdadeira.

▪ Tem-se que $x^2=x \Leftrightarrow x^2-x=0 \Leftrightarrow x(x-1)=0 \Leftrightarrow x=0\ \vee\ x-1=0 \Leftrightarrow x=0\ \vee\ x=1$, ou seja, os únicos números reais cujo seu quadrado é igual a si próprios são o 0 e o 1. Mas $0\notin C$ e $1\notin C$ e portanto, não existe pelo menos $x\in C$ tal que $x^2=x$. Assim, a proposição q é falsa.

▪ A proposição $p\Rightarrow q$ é falsa, visto que a proposição p é verdadeira e a proposição q é falsa. A proposição $p\Leftrightarrow\sim q$ é verdadeira, visto que as proposições p e $\sim q$ têm o mesmo valor lógico, neste caso, são ambas verdadeiras. Assim, $(p\Rightarrow q)\vee(p\Leftrightarrow\sim q)$ é verdadeira, pois a disjunção de duas proposições é falsa se e somente se ambas forem falsas.

c) Tem-se que se $x\in\mathbb{N}$ e $x\notin A$, então, $x\in\mathbb{N}\setminus A$.

Assim, a proposição $\sim p$ fica $\sim(\forall\, x\in\mathbb{N}, x\in A) \Leftrightarrow \exists\, x\in\mathbb{N}:\sim(x\in A) \Leftrightarrow \exists\, x\in\mathbb{N}: x\notin A \Leftrightarrow \exists\, x\in\mathbb{N}: x\in\mathbb{N}\setminus A$.

12.3. Tem-se, $\frac{2x+3}{3}\geq\frac{x+2}{2}\ \wedge\ |x|<2 \Leftrightarrow 4x+\cancel{6}\geq 3x+\cancel{6}\ \wedge\ -2<x<2 \Leftrightarrow x\geq 0\ \wedge\ -2<x<2$. Logo, o conjunto solução da condição $a(x)$ é $[0,+\infty[\cap]-2,2[=[0,2[$. A condição $a(x)$ é possível não universal em B, pois $[0,2[\cap B\neq\varnothing$, mas $[0,2[\neq B$. Neste caso tem-se $[0,2[\subset B$.

Outra maneira de verificar que a condição $a(x)$ é possível não universal:

Por um lado $1 \in B$ e a proposição $a(1): \underbrace{1 \geq 0}_{V} \wedge \underbrace{-2 < 1 < 2}_{V}$ é verdadeira. Por outro lado $2 \in B$ e a proposição $a(2): \underbrace{2 \geq 0}_{V} \wedge \underbrace{-2 < 2 < 2}_{F}$ é Falsa. Ou seja, substituindo a variável por 1 obtém-se uma proposição verdadeira e substituindo a variável por 2 obtém-se uma proposição falsa, pelo que a condição $a(x)$ é possível não universal em B.

13.

13.1. Seja n um número natural. Tem-se que $n^2 + 3n + 3 = n(n+3) + 3$. Assim:

▪ se n é par, então, $n+3$ é impar e portanto $n(n+3)$ é par, pois o produto de um número par por um número ímpar é um número par. Logo, $n^2 + 3n + 3 = n(n+3) + 3$ é ímpar, pois a soma de um número par por um número ímpar é um número ímpar.

▪ se n é ímpar, então, $n+3$ é par e portanto $n(n+3)$ é par. Logo, $n^2 + 3n + 3 = n(n+3) + 3$ é ímpar.

Logo, para todo o n natural, $n^2 + 3n + 3$ é um número ímpar.

13.2.

a) Pretende-se mostra por contra-recíproca que se $n^2 + 6n$ é um número ímpar, então n é um número ímpar.

A contra-recíproca é "se n não é um número ímpar, então, $n^2 + 6n$ não é um número ímpar", ou seja, "se n é um número par, então, $n^2 + 6n$ é um número par".

Seja n um número par. Então, n pode ser escrito na forma $n = 2k$, com $k \in \mathbb{N}$. Assim:

$$n^2 + 6n = (2k)^2 + 6 \times 2k = 4k^2 + 12k = 2(2k^2 + 6k)$$

Tem-se que $2k^2 + 6k$ é um número natural, pois k é um número natural. Portanto, $2(2k^2 + 6k)$ é um número par e consequentemente, $n^2 + 6n$ é um número par.

Logo, por contra-recíproca, está provado que "se $n^2 + 6n$ é um número ímpar, então n é um número ímpar".

b) Seja $n \in \mathbb{N}$. Suponhamos, com vista a um absurdo, que $n^2 + 6n$ é um número ímpar e que n não é um número ímpar, isto é, que n é um número par.

Então, n pode ser escrito na forma $n = 2k$, com $k \in \mathbb{N}$. Assim:

$$n^2 + 6n = (2k)^2 + 6 \times 2k = 4k^2 + 12k = 2(2k^2 + 6k)$$

Tem-se que $2k^2 + 6k$ é um número natural, pois k é um número natural. Portanto, $2(2k^2 + 6k)$ é um número par e consequentemente, $n^2 + 6n$ é um número par, o que é absurdo, pois, por hipótese, $n^2 + 6n$ é um número ímpar.

13.2.

a) Pretende-se mostra por contra-recíproca que se n não é um múltiplo de 9, então, n não é um múltiplo de 63.

A contra-recíproca é "se n é um múltiplo de 63, então, n é um múltiplo de 9.

Seja n um múltiplo de 63. Então, n pode ser escrito na forma $n=63k$, com $k\in\mathbb{N}$. Assim, $n=63k=(9\times7)k=9\times(7k)$.

Tem-se que $7k$ é um número natural, pois k é um número natural. Portanto, $9\times(7k)$ é um múltiplo de 9 e consequentemente, n é um múltiplo de 9.

Logo, por contra-recíproca, está provado que "se n não é um múltiplo de 9, então, n não é um múltiplo de 63".

b) Seja $n\in\mathbb{N}$. Suponhamos, com vista a um absurdo, que n não é um múltiplo de 9 e que n é um múltiplo de 63.

Então, n pode ser escrito na forma $n=63k$, com $k\in\mathbb{N}$. Assim, $n=63k=(9\times7)k=9\times(7k)$.

Tem-se que $7k$ é um número natural, pois k é um número natural. Portanto, $9\times(7k)$ é um múltiplo de 9 e consequentemente, n é um múltiplo de 9, o que é absurdo, pois, por hipótese, n não é um múltiplo de 9.

14.

14.1. Tem-se que:

$$\sim(\forall x,\ p(x)\Rightarrow q(x))\Leftrightarrow\sim(\forall x,\sim p(x)\vee q(x))\Leftrightarrow\exists x,\sim(\sim p(x)\vee q(x))\Leftrightarrow\exists x,\sim(\sim p(x))\wedge\sim q(x)\Leftrightarrow\exists x,\ p(x)\wedge\sim q(x)$$

14.2. Tem-se que:

$$(\forall x,\ p(x)\Rightarrow q(x))\Leftrightarrow\forall x,\sim p(x)\vee q(x)\Leftrightarrow\forall x,\ q(x)\vee\sim p(x)\Leftrightarrow\forall x,\sim(\sim q(x))\vee\sim p(x)\Leftrightarrow(\forall x,\sim q(x)\Rightarrow\sim p(x))$$

15.

15.1. Tem-se que:

$$\left(\forall n\in\mathbb{N},\ n^4+n^2-n>270\Rightarrow n>4\right)\Leftrightarrow\left(\forall n\in\mathbb{N},\sim(n>4)\Rightarrow\sim\left(n^4+n^2-n>270\right)\right)\Leftrightarrow\left(\forall n\in\mathbb{N},\ n\le4\Rightarrow n^4+n^2-n\le270\right)$$

15.2. Vamos usar a contra-recíproca da proposição p para provar a sua veracidade. A contra-recíproca da proposição p é:

$$\forall n\in\mathbb{N},\ n\le4\Rightarrow n^4+n^2-n\le270$$

Seja $n\in\mathbb{N}$ e $n\le4$, isto é, $n\in\{1,2,3,4\}$. Assim:

- se $n=1$, então, $n^4+n^2-n=1^4+1^2-1=1\le270$
- se $n=2$, então, $n^4+n^2-n=2^4+2^2-2=18\le270$
- se $n=3$, então, $n^4+n^2-n=3^4+3^2-3=87\le270$
- se $n=4$, então, $n^4+n^2-n=4^4+4^2-4=268\le270$

Logo, é verdade que para todo o natural n menor ou igual a 4 se tem $n^4+n^2-n\le270$.

$\therefore$ A proposição $p:\left(\forall n\in\mathbb{N},\ n^4+n^2-n>270\Rightarrow n>4\right)\Leftrightarrow\left(\forall n\in\mathbb{N},\ n\le4\Rightarrow n^4+n^2-n\le270\right)$ é verdadeira.

15.3. Tem-se que, $\sim p : \sim\left(\forall\, n \in \mathbb{N},\, n^4 + n^2 - n > 270 \Rightarrow n > 4\right) \Leftrightarrow \exists\, n \in \mathbb{N} : \sim\left(\sim\left(n^4 + n^2 - n > 270\right) \vee n > 4\right) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \exists\, n \in \mathbb{N} : \sim\left(\sim\left(n^4 + n^2 - n > 270\right)\right) \wedge \sim\left(n > 4\right)$$

$$\Leftrightarrow \exists\, n \in \mathbb{N} : n^4 + n^2 - n > 270 \wedge n \leq 4$$

16.

16.1. A proposição q é falsa. Por exemplo, $\sqrt{2}$ é um número irracional e $\left(\sqrt{2}\right)^2 = 2$ é um número racional. Assim, a proposição $q \Rightarrow q$ é verdadeira, pois o consequente e o antecedente são o mesmo. Consequentemente, a proposição $\sim\left(q \Rightarrow q\right)$ é falsa. Como a proposição q é falsa, a proposição $\sim\left(q \Rightarrow q\right) \vee q$ é falsa, pois a disjunção entre duas proposições é falsa se e somente se ambas as proposições forem falsas.

16.2. A proposição q: “Não existem números irracionais cujo quadrado seja um número racional” pode ser interpretada como q: Qualquer que seja o número irracional, o seu quadrando não é um número racional. Portanto, simbolicamente, a proposição q pode ser escrita da seguinte forma, $q : \forall\, x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q},\ x^2 \notin Q$.

17.

17.1. Tem-se que:

▪ $x^2 + x = 6 \Leftrightarrow x^2 + x - 6 = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \times 1 \times (-6)}}{2 \times 1} \Leftrightarrow x = -3 \vee x = 2$. Logo, o conjunto solução da condição $p(x)$ é $\{-3, 2\}$. Portanto as proposições $p(-3)$ e $p(2)$ são verdadeiras e a proposição $p(k)$ é falsa, para qualquer $k \in \mathbb{R} \setminus \{-3, 2\}$.

▪ o conjunto solução da condição $q(x)$ é $\{2\}$. Portanto a proposição $q(2)$ é verdadeira e a proposição $q(k)$ é falsa, para qualquer $k \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$.

a) Tem-se que:

▪ se $x = -3$, a proposição $\underbrace{p(-3)}_{V} \vee \underbrace{\sim q(-3)}_{V}$ é verdadeira.

▪ se $x = 2$, a proposição $\underbrace{p(2)}_{V} \vee \underbrace{\sim q(2)}_{F}$ é verdadeira.

▪ se $x = k$, com $k \in \mathbb{R} \setminus \{-3, 2\}$, a proposição $\underbrace{p(k)}_{F} \vee \underbrace{\sim q(k)}_{V}$ é verdadeira.

Logo, a proposição $\forall\, x \in \mathbb{R},\ p(x) \vee \sim q(x)$ é verdadeira e portanto a condição $p(x) \vee \sim q(x)$ é universal em $\mathbb{R}$.

Outra resolução: o conjunto solução da condição $p(x)$ é $\{-3, 2\}$. O conjunto solução da condição $q(x)$ é $\{2\}$, pelo que o conjunto solução da condição $\sim q(x)$ é $\mathbb{R} \setminus \{2\}$. Logo, o conjunto solução da condição $p(x) \vee \sim q(x)$ é $\{-3, 2\} \cup \mathbb{R} \setminus \{2\} = \mathbb{R}$. Portanto, a condição $p(x) \vee \sim q(x)$ é universal em $\mathbb{R}$.

b) Tem-se que:

▪ se $x=-3$, a proposição $\underbrace{p(-3)}_{V} \Leftrightarrow \underbrace{q(-3)}_{F}$ é falsa.

▪ se $x=2$, a proposição $\underbrace{p(2)}_{V} \Leftrightarrow \underbrace{q(2)}_{V}$ é verdadeira.

Logo, proposição $p(x) \Leftrightarrow q(x)$ é possível não universal em $\mathbb{R}$.

c) Tem-se que:

▪ se $x=-3$, a proposição $\underbrace{\sim p(-3)}_{F} \wedge \underbrace{q(-3)}_{F}$ é falsa.

▪ se $x=2$, a proposição $\underbrace{\sim p(2)}_{F} \wedge \underbrace{q(2)}_{V}$ é falsa.

▪ se $x=k$, com $k \in \mathbb{R}\setminus\{-3,2\}$, a proposição $\underbrace{\sim p(k)}_{V} \wedge \underbrace{q(k)}_{F}$ é falsa.

Logo, a proposição $\exists x \in \mathbb{R}: \sim p(x) \wedge q(x)$ é falsa e portanto a condição $\sim p(x) \wedge q(x)$ é impossível em $\mathbb{R}$.

Outra resolução: o conjunto solução da condição $p(x)$ é $\{-3,2\}$, pelo que o conjunto solução da condição $\sim p(x)$ é $\mathbb{R}\setminus\{-3,2\}$. O conjunto solução da condição $q(x)$ é $\{2\}$. Logo, o conjunto solução da condição $\sim p(x) \wedge q(x)$ é $\mathbb{R}\setminus\{-3,2\} \cap \{2\} = \varnothing$. Portanto, a condição $\sim p(x) \wedge q(x)$ é impossível em $\mathbb{R}$.

d) Tem-se que:

▪ se $x=-3$, a proposição $\underbrace{p(-3)}_{V} \Rightarrow \underbrace{q(-3)}_{F}$ é falsa.

▪ se $x=2$, a proposição $\underbrace{p(2)}_{V} \Rightarrow \underbrace{q(2)}_{V}$ é verdadeira.

Logo, proposição $p(x) \Rightarrow q(x)$ é possível não universal em $\mathbb{R}$.

e) Tem-se que:

▪ se $x=-3$, a proposição $\underbrace{q(-3)}_{F} \Rightarrow \underbrace{\sim p(-3)}_{F}$ é verdadeira.

▪ se $x=2$, a proposição $\underbrace{q(2)}_{V} \Rightarrow \underbrace{\sim p(2)}_{F}$ é falsa.

Logo, proposição $q(x) \Rightarrow \sim p(x)$ é possível não universal em $\mathbb{R}$.

f) Tem-se que:

▪ se $x=-3$, a proposição $\underbrace{\sim q(-3)}_{V} \Rightarrow \underbrace{p(-3)}_{V}$ é verdadeira.

▪ se $x=1$, a proposição $\underbrace{\sim q(1)}_{V} \Rightarrow \underbrace{p(1)}_{F}$ é falsa.

Logo, proposição $\sim q(x) \Rightarrow p(x)$ é possível não universal em $\mathbb{R}$.

g) Tem-se que, $(\forall x \in \mathbb{R}, \sim p(x) \Rightarrow \sim q(x)) \Leftrightarrow (\forall x \in \mathbb{R}, \sim(\sim p(x)) \vee \sim q(x)) \Leftrightarrow (\forall x \in \mathbb{R}, p(x) \vee \sim q(x))$. Já vimos na alínea a) que esta proposição é verdadeira. Portanto, a condição $\sim p(x) \Rightarrow \sim q(x)$ é universal em $\mathbb{R}$.

h) Tem-se que:

▪ se $x=-3$, a proposição $\underbrace{\left(\overbrace{\underbrace{p(-3)}_{V} \vee \underbrace{q(-3)}_{F}}^{V}\right) \wedge \underbrace{q(-3)}_{F}}_{F} \Leftrightarrow \underbrace{\sim q(-3)}_{V}$ é falsa.

▪ se $x=2$, a proposição $\underbrace{\left(\overbrace{\underbrace{p(2)}_{V} \vee \underbrace{q(2)}_{V}}^{V}\right) \wedge \underbrace{q(2)}_{V}}_{V} \Leftrightarrow \underbrace{\sim q(2)}_{F}$ é falsa.

▪ se $x=k$, com $k \in \mathbb{R} \setminus \{-3, 2\}$, a proposição $\underbrace{\left(\overbrace{\underbrace{p(k)}_{F} \vee \underbrace{q(k)}_{F}}^{F}\right) \wedge \underbrace{q(k)}_{F}}_{F} \Leftrightarrow \underbrace{\sim q(k)}_{V}$ é falsa.

Logo, a proposição $\exists x \in \mathbb{R} : (p(x) \vee q(x)) \wedge q(x) \Leftrightarrow \sim q(x)$ é falsa e portanto a condição $(p(x) \vee q(x)) \wedge q(x) \Leftrightarrow \sim q(x)$ é impossível em $\mathbb{R}$.

Outra maneira: seja $i(x)$ uma condição impossível em $\mathbb{R}$. Assim, vem:

$$(p(x) \vee q(x)) \wedge q(x) \Leftrightarrow (p(x) \vee q(x)) \wedge (i(x) \vee q(x)) \Leftrightarrow q(x) \vee (p(x) \wedge i(x)) \Leftrightarrow q(x) \vee i(x) \Leftrightarrow q(x)$$

Portanto, a condição $(p(x) \vee q(x)) \wedge q(x)$ é equivalente à condição $q(x) \Leftrightarrow \sim q(x)$. Esta condição é impossível em $\mathbb{R}$, visto que uma condição não pode ser equivalente á sua negação.

17.2. Para $x \in \mathbb{R}^+$, tem-se:

$$\underbrace{x^2 + x = 6}_{p(x)} \Leftrightarrow x^2 + x - 6 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \times 1 \times (-6)}}{2 \times 1} \Leftrightarrow x = -3 \ \vee \ x = 2 \underset{x \in \mathbb{R}^+}{\Leftrightarrow} \underbrace{x = 2}_{q(x)}$$

Logo, para todo o $x \in \mathbb{R}^+$, tem-se $p(x) \Leftrightarrow q(x)$. Portanto, a proposição $\forall x \in \mathbb{R}^+, \ p(x) \Leftrightarrow q(x)$ é verdadeira.

17.3.

a) A proposição $\exists\, x \in \mathbb{Z}^- : p(x) \Leftrightarrow \exists\, x \in \mathbb{Z}^- : x^2 + x = 6$ é verdadeira, pois $-3 \in \mathbb{Z}^-$ e $(-3)^2 + (-3) = 9 - 3 = 6$.

b) A proposição $\forall\, x \in \mathbb{Q}, \sim p(x) \Leftrightarrow \forall\, x \in \mathbb{Q}, x^2 + x \neq 6$ é falsa, pois $-3 \in \mathbb{Q}$ e $(-3)^2 + (-3) = 9 - 3 = 6$.

c) Tem-se que:

▪ se $x = 2$, a proposição $\underset{V}{p(2)} \Rightarrow \underset{V}{q(2)}$ é verdadeira.

▪ se $x = k$, com $k \in \mathbb{N} \setminus \{2\}$, a proposição $\underset{F}{p(k)} \Rightarrow \underset{F}{q(k)}$ é verdadeira.

Logo, para todo o $x \in \mathbb{N}$, tem-se $p(x) \Rightarrow q(x)$. Portanto, a proposição $\forall\, x \in \mathbb{N},\ p(x) \Rightarrow q(x)$ é verdadeira.

d) As duas soluções da condição $p(x)$ são racionais e a solução da condição $q(x)$ é racional.

Logo, se $x = k$, com $k \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, as proposições $p(k)$ e $q(k)$ são falsas e portanto a proposição $p(k) \Leftrightarrow q(k)$ é verdadeira.

Logo, para todo o $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, tem-se $p(x) \Leftrightarrow q(x)$. Portanto, a proposição $\forall\, x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q},\ p(x) \Leftrightarrow q(x)$ é verdadeira.

17.4. A condição $r(x)$ é impossível em $\mathbb{N}$. Portanto, se $x = n$, com $n \in \mathbb{N}$, a proposição $r(n)$ é falsa e consequentemente, a proposição $\sim r(n)$ é verdadeira. Assim:

▪ a condição $\sim r(x) \Rightarrow q(x)$ não é universal em $\mathbb{N}$, pois, por exemplo, se $x = 3$, a proposição $\underbrace{\sim r(3)}_{V} \Rightarrow \underset{F}{q(3)}$ é falsa;

▪ a condição $r(x) \vee q(x)$ não é universal em $\mathbb{N}$, pois, por exemplo, se $x = 3$, a proposição $\underset{F}{r(3)} \vee \underset{F}{q(3)}$ é falsa.

▪ a condição $r(x) \wedge p(x)$ não é universal em $\mathbb{N}$, pois, por exemplo, se $x = 3$, a proposição $\underset{F}{r(3)} \wedge \underset{F}{p(3)}$ é falsa.

A resposta correcta é a B.