Prova-Modelo de Exame de Matemática A – 12.º ano – Proposta de resolução

1.

1.1. Opção (B)

A superfície esférica de centro em H e tangente ao plano xOz tem raio igual à ordenada de H, ou seja, 3.

Assim, a superfície esférica de centro em H e tangente ao plano xOz pode ser definida por:

$$(x-9)^2+(y-3)^2+(z-17)^2=9$$

1.2. A altura do prisma relativamente à base $[ABCD]$ pode ser dada pela distância entre D e H.

Determinemos as coordenadas do ponto D.

D é a interseção da reta DH com o plano ABC.

$$DH:(x,y,z)=(9,3,17)+k(2,3,6), k\in \text{IR}$$

$(9+2k,3+3k,17+6k)$, com $k\in \text{IR}$, são as coordenadas de um ponto genérico da reta DH.

Substituindo na equação cartesiana do plano ABC, tem-se:

$$2(9+2k)+3(3+3k)+6(17+6k)-31=0$$
$$\Leftrightarrow 18+4k+9+9k+102+36k-31=0$$
$$\Leftrightarrow 49k=-98$$
$$\Leftrightarrow k=-2$$

$k=-2 \rightsquigarrow (9+2\times(-2),3+3\times(-2),17+6\times(-2))$

Logo, $D=(5,-3,5)$.

$$h=d(D,H)=\sqrt{(9-5)^2+(3+3)^2+(17-5)^2}=$$
$$=\sqrt{16+36+144}=$$
$$=\sqrt{196}=$$
$$=14$$

Assim, a altura do prisma relativamente à base $[ABCD]$ é 14 unidades de comprimento.

2. Consideremos os acontecimentos:

I: "Ter idade inferior a 45 anos."

O: "Fazer compras *online*."

Pelos dados do enunciado, sabe-se que:

- $P(I)=0{,}4=\frac{2}{5}$
- $P\left(O|\,\overline{I}\right)=\frac{2}{9}$
- $P\left(\overline{O}\cap I\right)=0{,}1=\frac{1}{10}$

Pretende-se determinar o valor de $P(I|O)$.

Assim:

	I	$\overline{I}$	
O	$\frac{3}{10}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{13}{30}$
$\overline{O}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{7}{15}$	$\frac{17}{30}$
	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{5}$	1

Cálculos auxiliares

- $P(O|\overline{I}) = \frac{2}{9} \Leftrightarrow \frac{P(O \cap \overline{I})}{P(\overline{I})} = \frac{2}{9} \Leftrightarrow P(O \cap \overline{I}) = \frac{2}{9} \times \frac{3}{5}$
  $\Leftrightarrow P(O \cap \overline{I}) = \frac{2}{15}$
- $P(O \cap I) = \frac{2}{5} - \frac{1}{10} = \frac{3}{10}$
- $P(O) = \frac{3}{10} + \frac{2}{15} = \frac{13}{30}$

Logo, $P(I|O) = \frac{P(I \cap O)}{P(O)} = \frac{\frac{3}{10}}{\frac{13}{30}} = \frac{90}{130} = \frac{9}{13}$.

3. Opção (B)

Tem-se que:

$$\lim(u_n) = \lim\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{2n} = \lim\left(\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right)^2 =$$

$$= \left(\underbrace{\lim\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n}_{\text{limite notável}}\right)^2 =$$

$$= e^2$$

Assim:

$$\lim f(u_n) = \lim_{x \to e^2} \log(x) = \log(e^2) = 2\log e =$$

$$= 2 \times \frac{\ln e}{\ln 10} =$$

$$= 2 \times \frac{1}{\ln 10} =$$

$$= \frac{2}{\ln 10}$$

4. Sabemos que (a_n) é uma progressão aritmética, que $a_1 + a_2 + \cdots + a_{50} = 662{,}5$ e que $a_{51} + a_{52} + \cdots + a_{100} = 1912{,}5$.

Assim, tem-se que:

$$\begin{cases} \frac{a_1 + a_{50}}{2} \times 50 = 662{,}5 \\ \frac{a_{51} + a_{100}}{2} \times 50 = 1912{,}5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 + a_{50} = 26{,}5 \\ a_{51} + a_{100} = 76{,}5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 + (a_1 + 49r) = 26{,}5 \\ (a_1 + 50r) + (a_1 + 99r) = 76{,}5 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2a_1 + 49r = 26{,}5 \\ 2a_1 + 149r = 76{,}5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a_1 = 26{,}5 - 49r \\ 26{,}5 - 49r + 149r = 76{,}5 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \overline{} \\ 100r = 50 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a_1 = 26{,}5 - \frac{49}{2} \\ r = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2a_1 = 2 \\ \_\_\_\_\_\_ \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = 1 \\ r = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Logo, $a_1 = b_1 = 1$ e a razão de ambas as progressões (a_n) e (b_n) é $\frac{1}{2}$.

Assim, $S_n = \frac{1-r^n}{1-r} \times b_1 = \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}} \times 1$ e $\lim S_n = \lim \left(\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{\frac{1}{2}} \times 1 \right) = \frac{1-0}{\frac{1}{2}} = 2$.

5. O número de casos possíveis é igual a $6 \times {}^6C_2 \times 4 \times {}^3C_3$.

- 6 é o número de posições distintas onde pode ser colocado o zero (uma vez que o número tem sete algarismos, logo não pode começar por zero);
- ${}^6C_2$ é o número de maneiras distintas de escolher duas posições para os algarismos cinco, depois de colocado o zero;
- 4 é o número de posições distintas para colocar o algarismo seis, depois de colocados o zero e os dois algarismos cinco;
- ${}^3C_3 = 1$ é o número de maneiras de colocar os três algarismos oito nas três posições restantes.

O número de casos favoráveis é igual a $5 \times 4 \times {}^3C_3 + {}^5C_2 \times {}^3C_3 + 5 \times 4 \times {}^3C_3 + 5 \times 4 \times {}^3C_3$, pois existem quatro casos mutuamente exclusivos.

Caso 1: _5_ __ __ __ __ __ _0_ $5 \times 4 \times {}^3C_3$

Caso 2: _6_ __ __ __ __ __ _0_ ${}^5C_2 \times {}^3C_3$

Caso 3: _5_ __ __ __ __ __ _5_ $5 \times 4 \times {}^3C_3$

Caso 4: _6_ __ __ __ __ __ _5_ $5 \times 4 \times {}^3C_3$

Logo, a probabilidade pedida é igual a:

$$\frac{5 \times 4 \times {}^3C_3 + {}^5C_2 \times {}^3C_3 + 5 \times 4 \times {}^3C_3 + 5 \times 4 \times {}^3C_3}{6 \times {}^6C_2 \times 4 \times {}^3C_3} = \frac{20 + 10 + 20 + 20}{360} = \frac{70}{360} = \frac{7}{36}$$

6. Opção (A)

$$\overrightarrow{CB} \cdot \left(\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{AE}\right) = \overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{CD} + \underbrace{\overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{AE}}_{\overrightarrow{CB} \perp \overrightarrow{AE}} =$$

$$= \left\|\overrightarrow{CB}\right\| \times \left\|\overrightarrow{CD}\right\| \times \cos\left(\widehat{\overrightarrow{CB}\ \overrightarrow{CD}}\right) + 0 =$$

$$= r \times r \times \cos(\pi - \beta) =$$

$$= \frac{\sqrt{41}}{2} \times \frac{\sqrt{41}}{2} \times \cos\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) =$$

$$= \frac{41}{4} \times \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) =$$

$$= -\frac{41\sqrt{3}}{8}$$

Cálculos auxiliares

Seja r o raio da circunferência e β a amplitude do ângulo *ACD:*

- $r = \left\|\overrightarrow{CB}\right\| = \left\|\overrightarrow{CD}\right\| = \frac{\left\|\overrightarrow{AB}\right\|}{2} = \frac{\sqrt{(-4)^2 + 5^2}}{2} = \frac{\sqrt{16+25}}{2} = \frac{\sqrt{41}}{2}$
- $A_{\text{setor circular}} = \frac{\beta \times \left(\frac{\sqrt{41}}{2}\right)^2}{2} = \frac{41}{8}\beta$

Logo:

$\frac{41\pi}{48} = \frac{41}{8}\beta \Leftrightarrow \beta = \frac{8}{48}\pi \Leftrightarrow \beta = \frac{\pi}{6}$

7. $f'(x) = (\cos x + \operatorname{sen} x)' = -\operatorname{sen} x + \cos x$

$g'(x) = (x^2)' = 2x$

Consideremos a função h, definida em $\mathbb{R}$, por $h(x) = f'(x) - g'(x) = -\operatorname{sen} x + \cos x - 2x$.

h é contínua, por se tratar da soma de funções contínuas.

Em particular, h é contínua em h.

$h(0) = -\operatorname{sen} 0 + \cos 0 - 2 \times 0 = 1$

$h\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) - 2 \times \frac{\pi}{2} = -1 - \pi$

$h\left(\frac{\pi}{2}\right) < 0 < h(0)$

Logo, pelo Teorema de Bolzano-Cauchy, concluímos que:

$\exists\, c \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[: h(c) = 0$, ou seja:

$\exists\, c \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[: f'(c) - g'(c) = 0$, isto é:

$\exists\, c \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[: f'(c) = g'(c)$

Provámos, assim, que existe pelo menos um $c \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ tal que a reta tangente ao gráfico de f em c é paralela à reta tangente ao gráfico de g em c.

8. Opção (D)

Seja h a função, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $h(x) = \frac{x}{e^{2x}}$.

$h'(x) = \frac{(x)' \times e^{2x} - x \times \left(e^{2x}\right)'}{(e^{2x})^2} = \frac{e^{2x} - x \times 2e^{2x}}{(e^{2x})^2} = \frac{e^{2x}(1-2x)}{(e^{2x})^2} = \frac{1-2x}{e^{2x}}$

$D_{h'} = \mathbb{R}$

Sabe-se que existe um $a \in \mathbb{R}$ tal que $\lim\limits_{x \to a} \frac{xe^{-2x} - ae^{-2a}}{x-a} = 0$, isto é, $\lim\limits_{x \to a} \frac{h(x)-h(a)}{x-a} = 0$.

Como h admite derivada finita em todos os pontos do seu domínio, pois $D_{h'} = \mathbb{R}$, então $\lim\limits_{x \to a} \frac{h(x)-h(a)}{x-a} = h'(a)$.

Assim, $h'(a) = 0$.

$$h'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1-2x}{e^{2x}} = 0 \Leftrightarrow 1 - 2x = 0 \wedge e^{2x} \neq 0$$

$$\Leftrightarrow -2x = -1$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$$

Logo, pretendemos a equação reduzida da reta tangente ao gráfico de h em $x = \frac{1}{2}$, que será do tipo $y = 0x + b$, isto é, $y = b$.

Como o ponto de coordenadas $\left(\frac{1}{2}, h\left(\frac{1}{2}\right)\right) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2e}\right)$ pertence à reta, vem que $\frac{1}{2e} = b$.

Logo, a equação reduzida da reta tangente ao gráfico de h em $x = a$ é $y = \frac{1}{2e}$.

9. $D = \mathrm{IR}$

Em IR: $\ln(e^{2x}+4) = x + \ln(4) \Leftrightarrow \ln(e^{2x}+4) - \ln(4) = x$

$$\Leftrightarrow \ln\left(\frac{e^{2x}+4}{4}\right) = \ln(e^x)$$

$$\Leftrightarrow \frac{e^{2x}+4}{4} = e^x$$

$$\Leftrightarrow e^{2x} - 4e^x + 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow e^x = \frac{4 \pm \sqrt{16-4\times 1\times 4}}{2}$$

$$\Leftrightarrow e^x = 2$$

$$\Leftrightarrow x = \ln(2)$$

$\mathrm{C.S.} = \{\ln(2)\}$

10.

10.1. g é contínua em $x=0$ se e só se existir $\lim\limits_{x\to 0} g(x)$, isto é, $\lim\limits_{x\to 0^-} g(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} g(x) = g(0)$.

- $\lim\limits_{x\to 0^-} g(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}{e^{2x}-1} = \lim\limits_{x\to 0^-} \frac{\mathrm{sen}x}{e^{2x}-1} = \lim\limits_{x\to 0^-} \left(\frac{\mathrm{sen}x}{e^x-1} \times \frac{1}{e^x+1}\right) =$

$$= \lim_{x\to 0^-} \frac{\frac{\mathrm{sen}x}{x}}{\frac{e^x-1}{x}} \times \lim_{x\to 0^-} \frac{1}{e^x+1} =$$

$$= \frac{\lim\limits_{x\to 0^-} \frac{\mathrm{sen}x}{x}}{\lim\limits_{x\to 0^-} \frac{e^x-1}{x}} \times \frac{1}{2} =$$

$$= \frac{1}{1} \times \frac{1}{2} =$$

$$= \frac{1}{2}$$

- $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} \left(\frac{1}{2} + x\ln(x)\right) = \frac{1}{2} + \lim\limits_{x\to 0^+} (x\ln(x)) =$

$$= \frac{1}{2} + \lim_{y\to +\infty} \left(\frac{1}{y} \times \ln\left(\frac{1}{y}\right)\right) =$$

$$= \frac{1}{2} + \lim_{y\to +\infty} \frac{-\ln y}{y} =$$

$$= \frac{1}{2} - \underbrace{\lim_{y\to +\infty} \frac{\ln(y)}{y}}_{\text{limite notável}} =$$

$$= \frac{1}{2} - 0 =$$

$$= \frac{1}{2}$$

- $g(0) = \frac{1}{2}$

  Logo, g é contínua em $x = 0$.

10.2. Em $]0, +\infty[$: $g(x) = \frac{1}{2} + x\ln(x)$

$$g'(x) = 1 \times \ln(x) + x \times \frac{1}{x} = \ln(x) + 1$$

$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \ln(x) + 1 = 0 \Leftrightarrow \ln(x) = -1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{e}$

x	0		$\frac{1}{e}$	$+\infty$
Sinal de g'		$-$	0	$+$
Variação de g		$\searrow$	$g\left(\frac{1}{e}\right)$ mín.	$\nearrow$

g é estritamente decrescente em $\left]0, \frac{1}{e}\right]$ e estritamente crescente em $\left[\frac{1}{e}, +\infty\right[$.

$g\left(\frac{1}{e}\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{e}\ln\left(\frac{1}{e}\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{e} = \frac{e-2}{2e}$

$\frac{e-2}{2e}$ é mínimo relativo em $\frac{1}{e}$.

11. Seja $z = |z|e^{i\theta}$.

$$z^2 = -\bar{z} \Leftrightarrow \left(|z|e^{i\theta}\right)^2 = -\left(\overline{|z|e^{i\theta}}\right) \Leftrightarrow |z|^2 e^{i(2\theta)} = -\left(|z|e^{i(-\theta)}\right)$$

$$\Leftrightarrow |z|^2 e^{i(2\theta)} = |z|e^{i(-\theta+\pi)}$$

$$\Leftrightarrow |z|^2 = |z| \wedge 2\theta = -\theta + \pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow |z|^2 - |z| = 0 \wedge 3\theta = \pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

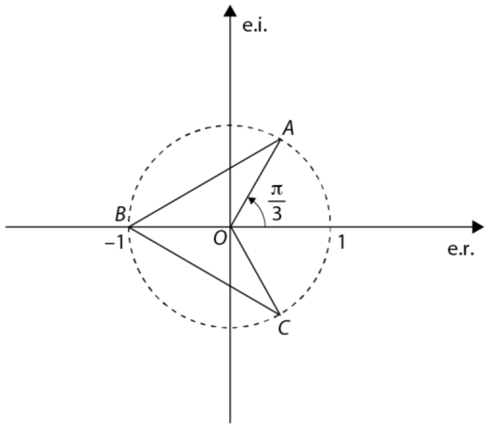
$$\Leftrightarrow |z|(|z| - 1) = 0 \wedge \theta = \frac{\pi}{3} + \frac{2k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow |z| = 0 \vee \left(|z| = 1 \wedge \theta = \frac{\pi}{3} + \frac{2k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}\right)$$

$$\Leftrightarrow z = 0 \vee \left(|z| = 1 \wedge \theta = \frac{\pi}{3} + \frac{2k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}\right)$$

$k = 0 \rightsquigarrow 1e^{i\frac{\pi}{3}}$ $\quad k = 1 \rightsquigarrow 1e^{i\pi}$ $\quad k = 2 \rightsquigarrow 1e^{i\frac{5\pi}{3}}$

$\text{C.S.} = \left\{0, e^{i\frac{\pi}{3}}, e^{i\pi}, e^{i\frac{5\pi}{3}}\right\}$



$A\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right), \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)$

$A\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

$B(-1,0)$

$C\left(\cos\left(\frac{5\pi}{3}\right), \operatorname{sen}\left(\frac{5\pi}{3}\right)\right)$

$C\left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

$$A_{[OABC]} = 2 \times A_{[OAB]} = 2 \times \frac{1 \times \frac{\sqrt{3}}{2}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ u.a.}$$

12. $|z+i|^2+|z-i|^2 \leq 20 \Leftrightarrow (z+i)\left(\overline{z+i}\right)+(z-i)\left(\overline{z-i}\right) \leq 20$

$$\Leftrightarrow (z+i)\left(\bar{z}+\bar{i}\right)+(z-i)\left(\bar{z}-\bar{i}\right) \leq 20$$

$$\Leftrightarrow (z+i)(\bar{z}-i)+(z-i)(\bar{z}+i) \leq 20$$

$$\Leftrightarrow z\bar{z}-iz+i\bar{z}-i^2+z\bar{z}+iz-i\bar{z}-i^2 \leq 20$$

$$\Leftrightarrow |z|^2+1+|z|^2+1 \leq 20$$

$$\Leftrightarrow 2|z|^2 \leq 18$$

$$\Leftrightarrow |z|^2 \leq 9$$

$$\Leftrightarrow |z| \leq 3$$

Logo, o afixo de z pertence ao círculo de centro na origem e raio igual a 3.

13.

13.1. Opção (C)

$A_{[ABC]}=\frac{\overline{AB}\times \overline{B'C}}{2}$, sendo B' a projeção ortogonal de B sobre DC.

$A\left(\cos(\pi-\alpha), \operatorname{sen}(\pi-\alpha)\right)=(-\cos\alpha, \operatorname{sen}\alpha)$

Como $A \in 2.^\circ$ Q e $\alpha \in \left]\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right[$:

$\overline{AB}=\cos\alpha$

$\overline{B'C}=\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{sen}\alpha$

$$A_{[ABC]}=\frac{\cos\alpha\,(\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{sen}\alpha)}{2}=\frac{\cos\alpha\left(\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}-\operatorname{sen}\alpha\right)}{2}=$$

$$=\frac{\operatorname{sen}\alpha-\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha}{2}=$$

$$=\frac{\operatorname{sen}\alpha-\frac{1}{2}sen(2\alpha)}{2}=$$

$$=\frac{f(\alpha)}{2}$$

13.2. Pretende-se determinar os valores de x tais que $f(x)=g(x)$:

$$\operatorname{sen}x-\frac{1}{2}\operatorname{sen}(2x)=2\operatorname{sen}x \Leftrightarrow \operatorname{sen}x-\frac{1}{2}\times 2\operatorname{sen}x\cos x=2\operatorname{sen}x$$

$$\Leftrightarrow \operatorname{sen}x-\operatorname{sen}x\cos x-2\operatorname{sen}x=0$$

$$\Leftrightarrow -\operatorname{sen}x-\operatorname{sen}x\cos x=0$$

$$\Leftrightarrow -\operatorname{sen}x\,(1+\cos x)=0$$

$$\Leftrightarrow -\operatorname{sen}x=0 \quad \vee \quad 1+\cos x=0$$

$$\Leftrightarrow \operatorname{sen}x=0 \quad \vee \quad \cos x=-1$$

$$\Leftrightarrow x=k\pi \quad \vee \quad x=\pi+2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow x=k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$$

14. Assíntotas horizontais:

Como o domínio da função h é $\mathbb{R}^-$, calculemos o limite quando $x \to -\infty$:

$$\lim_{x\to-\infty} h(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{\ln(-x) - x + e^x}{x} = \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{\ln(-x)}{x} - \frac{x}{x} + \frac{e^x}{x}\right) =$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{\ln(-x)}{x} - 1 + \lim_{x\to-\infty} \frac{e^x}{x} =$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{\ln(-x)}{-x} \times (-1) - 1 + \frac{e^{-\infty}}{+\infty} =$$

Considerando a mudança de variável $y = -x$, vem que:

$$= -\underbrace{\lim_{y\to+\infty} \frac{\ln(y)}{y}}_{\text{limite notável}} - 1 + \frac{0}{+\infty} =$$

$$= 0 - 1 + 0 =$$

$$= -1$$

A reta de equação $y = -1$ é assíntota horizontal ao gráfico de h quando $x \to -\infty$.

Assíntotas verticais:

Como a função h é contínua em todo o seu domínio $\mathbb{R}^-$, apenas a reta de equação $x = 0$ pode ser assíntota vertical ao gráfico da função h.

$$\lim_{x\to 0^-} h(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{\ln(-x) - x + e^x}{x} = \frac{\ln(0^+) - 0 + e^0}{0^-} = \frac{-\infty - 0 + 1}{0^-} = \frac{-\infty}{0^-} = +\infty$$

A reta de equação $x = 0$ é assíntota vertical ao gráfico de h.

15. $f(x) = g(x) \Leftrightarrow e^a x^2 + x + 1 = \ln(a)x + a$

$\Leftrightarrow e^a x^2 + (1 - \ln(a))x + 1 - a = 0$

A equação de 2.º grau acima tem uma única solução se e só se $(1 - \ln(a))^2 - 4e^a(1 - a) = 0$.

Utilizando as capacidades gráficas da calculadora e usando x como variável independente, tem-se:

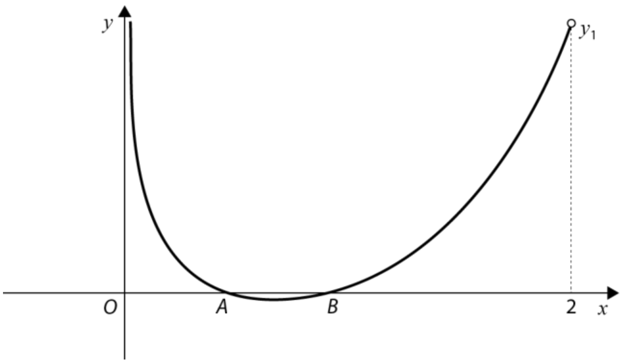
$$y_1 = (1 - \ln(x))^2 - 4e^x(1 - x)$$

$A(0{,}41; 0)$

$B(0{,}86; 0)$

$a \approx 0{,}41$

$a \approx 0{,}86$



Os valores de a, com arredondamento às centésimas, são $0{,}41$ e $0{,}86$.