Folha 13 - Limites de funções reais de variável real

1. Definição de limite de uma função num ponto

Seja $f\colon D \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função real de variável real e a um ponto de acumulação, finito ou infinito, do seu domínio.

Nota: m número a diz-se *ponto de acumulação* de um conjunto C se e só se em qualquer *vizinhança* de centro a (intervalo da forma $]a-\delta, a+\delta[$, com $\delta > 0$) existe pelo menos um elemento de C diferente de a.

Definição 1 (segundo Heine) *Diz-se que ℓ (finito ou infinito) é o limite de $f(x)$ quando x tende para a e escreve-se* $\lim_{x\to a} f(x) = \ell$

se e só se a toda a sucessão de valores de x do domínio de f convergente para a (sendo esses valores diferentes de a), corresponde uma sucessão de valores de f convergente para ℓ.

Exemplo 1 *Consideremos, em $\mathbb{R}$, a função definida por* $f(x) = \frac{3x}{x^2+4}$ *e vamos mostrar, a partir da definição, que* $\lim_{x\to 1} f(x) = \frac{3}{5}$.

Seja $(x_n)_n$ uma qualquer sucessão de valores de x convergente para 1 por valores diferentes de 1, a que corresponde a sucessão $(y_n)_n$ de valores da função

$$\lim y_n = \lim \frac{3x_n}{x_n^2+4} = \frac{3\lim x_n}{(\lim x_n)^2+4} = \frac{3\times 1}{1^2+4} = \frac{3}{5},$$

Logo, dado que $(x_n)_n$ é uma sucessão qualquer tal que $\lim x_n = 1$, temos $\lim_{x\to 1} f(x) = \frac{3}{5}$.

Exemplo 2 *Vamos provar, a partir da definição, que* $\lim_{x\to +\infty} \frac{1}{x+3} = 0$.

Como o domínio da função é $\mathbb{R}\setminus\{-3\}$, $+\infty$ é um ponto de acumulação desse domínio.

Seja $(x_n)_n$ uma qualquer sucessão de valores de x do domínio da função, convergente para $+\infty$.

Então, $\lim \frac{1}{x_n+3} = 0$ *e, consequentemente,* $\lim_{x\to +\infty} \frac{1}{x+3} = 0$.

Como $-\infty$ é também ponto de acumulação do domínio da função, podemos falar do limite quando x tende para $-\infty$ e, de forma análoga, provamos igualmente que $\lim_{x\to -\infty} \frac{1}{x+3} = 0$.

2. Limites laterais

Seja $f\colon D \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função real de variável real e a um ponto de acumulação finito de D.

Definição 2 *Diz-se que ℓ é o limite lateral de $f(x)$ à esquerda de a e escreve-se* $\lim_{x\to a^-} f(x) = \ell$ *se e só se a toda a sucessão de valores de x do domínio de f convergente para a (sendo esses valores menores do que a), corresponde uma sucessão de valores de f convergente para ℓ.*

Definição 3 *Diz-se que ℓ é o limite lateral de $f(x)$ à direita de a e escreve-se* $\lim_{x\to a^+} f(x) = \ell$ *se e só se a toda a sucessão de valores de x do domínio de f convergente para a (sendo esses valores maiores do que a), corresponde uma sucessão de valores de f convergente para ℓ.*

Teorema 1 *Tem-se $\ell = \lim\limits_{x\to a} f(x)$ se e só se existem e são iguais a ℓ os correspondentes limites laterais, isto é,*

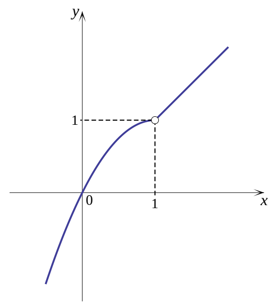
$$\lim_{x\to a} f(x) = \ell \iff \left(\lim_{x\to a^+} f(x) = \ell \quad \text{e} \quad \lim_{x\to a^-} f(x) = \ell\right).$$

Exemplo 3

Seja g a função definida, em $]-\infty, 1[\cup]1, +\infty[$ por

$$g(x) = \begin{cases} -x^2 + 2x & \text{se } x < 1 \\ x & \text{se } x > 1 \end{cases}$$

O número 1 é ponto de acumulação do domínio D_g embora $1 \notin D_g$. Como $\lim\limits_{x\to 1^+} g(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} g(x) = 1$, concluímos que $\lim_{x\to 1} g(x) = 1$.



3. Propriedades dos limites

Dos vários teoremas sobre limites de sucessões deduzem-se diretamente teoremas análogos para os limites de funções reais de variável real.

- **Unicidade do limite** Quando x tende para a, f não pode convergir simultaneamente para dois limites distintos .

- **Limite de uma constante** O limite de uma função constante é a própria constante.

  Sejam f e g duas funções reais de variável real e b e c números reais.

- **Limite de uma soma**

  Se $\lim_{x\to a} f(x) = b$ e $\lim_{x\to a} g(x) = c$, então $\lim_{x\to a} \left[f(x) + g(x)\right] = b + c$.

  Temos o quadro seguinte para a finito ou infinito (note-se que, no caso em que as funções tendem uma para $+\infty$ e a outra para $-\infty$, o limite da soma $f(x) + g(x)$ apresenta-se como uma indeterminação $\boxed{\infty - \infty}$).

$\lim\limits_{x\to a} f(x)$	b	b	b	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim\limits_{x\to a} g(x)$	c	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{x\to a} \left[f(x) + g(x)\right]$	$b + c$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	?

- **Limite de um produto**

  Se $\lim_{x\to a} f(x) = b$ e $\lim_{x\to a} g(x) = c$, então $\lim_{x\to a} \left[f(x) \cdot g(x)\right] = b \cdot c$.

  Temos o quadro seguinte para a finito ou infinito (no caso de uma das funções tender para zero e a outra para $+\infty$ ou $-\infty$, o limite do produto apresenta-se como uma indeterminação $\boxed{0 \times \infty}$).

$\lim\limits_{x\to a} f(x)$	b	$b > 0$		$b = 0$	$b < 0$		$+\infty$		$-\infty$
$\lim\limits_{x\to a} g(x)$	c	$+\infty$	$-\infty$	$\pm\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{x\to a} \left[f(x) \cdot g(x)\right]$	$b \cdot c$	$+\infty$	$-\infty$	?	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$

- **Limite de um quociente**

  Se $\lim_{x\to a} f(x) = b$ e $\lim_{x\to a} g(x) = c$, em que $c \neq 0$, então $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{b}{c}$.

  Este resultado generaliza-se ao caso de limites infinitos de acordo com o quadro seguinte (sendo a finito ou infinito): Aqui aparecem mais dois símbolos de indeterminação: $\boxed{\frac{0}{0}}$ e $\boxed{\frac{\infty}{\infty}}$.

$\lim\limits_{x\to a} f(x)$	b	$+\infty$			$-\infty$			$b \neq 0$	b	0	$\pm\infty$
$\lim\limits_{x\to a} g(x)$	$c \neq 0$	$c > 0$	$c = 0$	$c < 0$	$c > 0$	$c = 0$	$c < 0$	0	$\pm\infty$	0	$\pm\infty$
$\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)}$	$\frac{b}{c}$	$+\infty$	$\pm\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$\pm\infty$	$+\infty$	$\pm\infty$	0	?	?

- **Limite de uma raiz**

  Se $\lim_{x\to a} f(x) = b$ e $p \in \mathbb{N}$, então $\lim_{x\to a} \sqrt[p]{f(x)} = \sqrt[p]{b}$, admitindo que se tem $f(x) \geq 0$, $\forall x \in D_f$, no caso de de p ser par.

- **Limite da potenciação**

  Considerando a operação de potenciação $f(x)^{g(x)}$ nos pontos onde é válida, se $\lim_{x\to a} f(x) = b$ e $\lim_{x\to a} g(x) = c$, então $\lim_{x\to a} f(x)^{g(x)} = b^c$.

Exemplo 4

$$\lim_{x\to 1} \left(4x^3 + 3x + 1\right) = 4\left(\lim_{x\to 1} x\right)^3 + 3\left(\lim_{x\to 1} x\right) + \lim_{x\to 1} 1 = 4 \times 1 + 3 \times 1 + 1 = 8.$$

$$\lim_{x\to -1^+} \frac{x}{x+1} = \frac{\lim\limits_{x\to -1^+} x}{\lim\limits_{x\to -1^+} (x+1)} = \frac{-1}{-1^+ + 1} = \frac{-1}{0^+} = -\infty$$

$$\lim_{x\to +\infty} (3x^2 + 5) = 3\left(\lim_{x\to +\infty} x\right)^2 + \lim_{x\to +\infty} 5 = 3 \times (+\infty) + 5 = +\infty.$$

$$\lim_{x\to -\infty} (2x^3 + 7) = 2\left(\lim_{x\to -\infty} x\right)^3 + \lim_{x\to -\infty} 7 = 2 \times (-\infty) + 7 = -\infty.$$

4. Indeterminações

Nos casos em que, por aplicação direta dos resultados sobre limites, somos conduzidos aos símbolos

$$\infty - \infty, \quad 0 \times \infty, \quad \frac{0}{0} \text{ e } \frac{\infty}{\infty},$$

a que se chama *símbolos de indeterminação*, temos de seguir outro caminho para procurar, se existir, o limite. Vamos considerar dois casos: x tende para a (finito) e x tende para $+\infty$ ou $-\infty$.

4.1 $x \longrightarrow a$ (finito) : muitas das indeterminações podem reduzir-se a uma indeterminação do tipo $\boxed{\frac{0}{0}}$.

Exemplo 5 *No limite que abaixo se apresenta, aplicando diretamente o resultado do limite do quociente, somos conduzidos a* $\frac{0}{0}$. *O número* 1 *anula ambos os termos da fração e a indeterminação levanta-se simplificando a fração*

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x\to 1} \frac{(x+1)(x-1)}{x-1} = \lim_{x\to 1} (x+1) = 2.$$

Exemplo 6 *No limite que abaixo se apresenta, o número 1 anula o numerador e o denominador da fração, o que significa que ambos os termos são divisíveis por $x-1$. Efetuando a divisão pela regra de Ruffini,*

Numerador

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & -3 & 4 & -2 \\ 1 & & 1 & -2 & 2 \\ \hline & 1 & -2 & 2 & 0 \end{array}$$

Denominador

$$\begin{array}{c|ccc} & 1 & -3 & 2 \\ 1 & & 1 & -2 \\ \hline & 1 & -2 & 0 \end{array}$$

Assim,

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^3-3x^2+4x-2}{x^2-3x+2}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x^2-2x+2)}{(x-1)(x-2)}.$$

Como o limite se calcula quando $x \longrightarrow 1$ por valores diferentes de 1, $x-1\neq 0$, temos, portanto,

$$\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x^2-2x+2)}{(x-1)(x-2)}=\lim_{x\to 1}\frac{x^2-2x+2}{x-2}=\frac{1-2+2}{1-2}=-1.$$

Exemplo 7

$$\lim_{x\to 9}\frac{\sqrt{x}-3}{x-9} \qquad \left(\frac{0}{0}\right).$$

Multiplicando ambos os termos por $\sqrt{x}+3$, vem

$$\lim_{x\to 9}\frac{\sqrt{x}-3}{x-9}=\lim_{x\to 9}\frac{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+3)}{(x-9)(\sqrt{x}+3)}=\lim_{x\to 9}\frac{x-9}{(x-9)(\sqrt{x}+3)}=\lim_{x\to 9}\frac{1}{\sqrt{x}+3}=\frac{1}{6}.$$

Exemplo 8

$$\lim_{x\to -1^+}\left(\frac{1}{x^2-1}+\frac{1}{x+1}\right) \qquad (\infty-\infty).$$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to -1^+}\left(\frac{1}{x^2-1}+\frac{1}{x+1}\right) &= \lim_{x\to -1^+}\left[\frac{1+x-1}{x^2-1}\right]\\ &= \lim_{x\to -1^+}\left[\frac{x}{x^2-1}\right]=\frac{-1}{0^-}=+\infty.\end{aligned}$$

4.2 $x \longrightarrow +\infty$ ou $x \longrightarrow -\infty$: muitas das indeterminações podem reduzir-se a uma indeterminação do tipo $\boxed{\dfrac{\infty}{\infty}}$.

Exemplo 9 *Calcular os seguintes limites:*

(a) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty}\frac{x^2+7x+1}{3x^2+6x+2} \qquad \left(\frac{\infty}{\infty}\right);$

(b) $\displaystyle\lim_{x\to -\infty}\left[\frac{1}{2x}\cdot(x^2+1)\right] \qquad (0\times\infty);$

(c) $\displaystyle\lim_{x\to -\infty}\frac{\frac{4x}{x^2+1}}{\frac{x^2}{2x^4+1}} \qquad \left(\frac{0}{0}\right);$

(d) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty}\left(\sqrt{x}-x\right) \qquad (\infty-\infty);$

(a) Dividindo ambos os membros da fração por x^2, vem

$$\lim_{x\to +\infty}\frac{x^2+7x+1}{3x^2+6x+2}=\lim_{x\to +\infty}\frac{1+\frac{7}{x}+\frac{1}{x^2}}{3+\frac{6}{x}+\frac{1}{x^2}}=\frac{1+0+0}{3+0+0}=\frac{1}{3}.$$

(b) $$\lim_{x\to-\infty}\left[\frac{1}{2x}\cdot(x^2+1)\right]=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2+1}{2x}=\lim_{x\to-\infty}\left[\frac{x}{2}+\frac{1}{2x}\right]=-\infty+0=-\infty.$$

(c) $$\lim_{x\to-\infty}\frac{\dfrac{4x}{x^2+1}}{\dfrac{x^2}{2x^4+1}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{8x^5+4x}{x^4+x^2}=\lim_{x\to-\infty}\frac{8x+\dfrac{4}{x^3}}{1+\dfrac{1}{x^2}}=\frac{-\infty+0}{1+0}=-\infty.$$

(d) Pondo em evidência x, vem

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x}-x\right)=\lim_{x\to+\infty}\left[x\left(\frac{\sqrt{x}}{x}-1\right)\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[x\left(\sqrt{\frac{1}{x}}-1\right)\right]=+\infty\times(0-1)=-\infty.$$

Alguns limites de relevo

Apresentamos agora resultados úteis sobre alguns limites importantes.

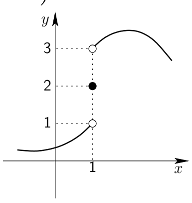
$$\boxed{\lim_{x\to0}\frac{\operatorname{sen}x}{x}=1}\qquad\boxed{\lim_{x\to1}\frac{\ln x}{x-1}=1}\qquad\boxed{\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^p}=+\infty,\qquad p\in\mathbb{R}}$$

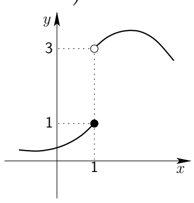
$$\boxed{\lim_{x\to0}\frac{e^x-1}{x}=1}\qquad\boxed{\lim_{x\to0^+}x\ln x=0.}\qquad\boxed{\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0}$$

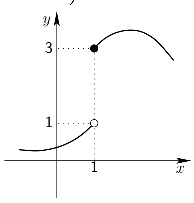
Exercícios Propostos

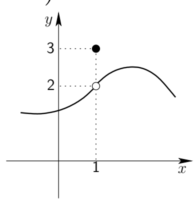
Exercício 1 Para cada uma das alíneas seguintes, indique:

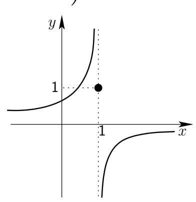
i) $\lim_{x\to1^-}f(x)$; ii) $\lim_{x\to1^+}f(x)$; iii) $f(1)$.

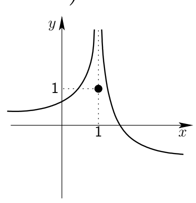
a)


b)


c)


d)


e)


f)


Exercício 2 Sendo a função h definida, em $\mathbb{R}$, por $h(x)=\begin{cases}2x & \text{se } x\geq 3\\ x^2-3 & \text{se } x<3,\end{cases}$

Calcule

$\lim_{x\to5}h(x)$; $\lim_{x\to-\infty}h(x)$; $\lim_{x\to3^-}h(x)$ e $\lim_{x\to3^+}h(x)$. Diga se existe $\lim_{x\to3}h(x)$.

Exercício 3 Calcule, se existirem, os seguintes limites:

a) $\displaystyle\lim_{x\to3^-}\frac{x^2}{x-3}$

b) $\displaystyle\lim_{x\to-1^+}\frac{4x-3}{x+1}$

c) $\displaystyle\lim_{x\to0^+}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}\right)$

d) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{5x^3+8x^2}{3x^4-16x^2}$

e) $\displaystyle\lim_{x\to2}\frac{x^3-5x^2+8x-4}{x^3-3x^2+4}$

f) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{2x^2+5x}{3x+2-4x^2}$

g) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{x^3+9}$

h) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}\right)$

i) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}e^{-2x}$

j) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{2^x}{3^x}$