Funções (12.º ano)

Exponenciais e logaritmos

Exercícios de Provas Nacionais e Testes Intermédios - Propostas de resolução

1. Resolvendo a inequação, temos:

$$e^{-x}(4+e^{2x}) \geq 5 \;\Leftrightarrow\; \frac{1}{e^x} \times (4+e^{2x}) \geq 5 \;\Leftrightarrow\; \frac{4}{e^x} + \frac{e^{2x}}{e^x} \geq 5 \;\Leftrightarrow\; \frac{4}{e^x} + \frac{e^{2x}}{e^x} \geq \frac{5e^x}{e^x} \underset{e^x>0}{\Leftrightarrow}$$

$$\Leftrightarrow 4 + e^{2x} \geq 5e^x \;\Leftrightarrow\; (e^x)^2 - 5e^x + 4 \geq 0$$

Considerando $y = e^x$, temos que: $y^2 - 5y + 4 \geq 0$

Como $y^2 - 5y + 4 = 0 \;\Leftrightarrow\; y = \dfrac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4(1)(4)}}{2 \times 1} \;\Leftrightarrow\; y = 1 \vee y = 4$, e o coeficiente de y^2 é positivo, então: $y^2 - 5y + 4 \geq 0 \;\Leftrightarrow y \leq 1 \vee y \geq 4$

Assim, como $y = e^x$, temos que:

$$e^{-x}(4+e^{2x}) \geq 5 \;\Leftrightarrow e^x \leq 1 \vee e^x > 4 \;\Leftrightarrow x \leq \ln 1 \vee x \geq \ln 4 \;\Leftrightarrow x \leq 0 \vee x \geq \ln 4$$

E como $-2 \leq x \leq 2$, temos que o conjunto dos números reais que verificam a condição dada é:

$$\big(]-\infty,0] \cup [\ln 4,+\infty[\big) \cap [-2,2] = [-2,0] \cup [\ln 4,2]$$

Apresente a sua resposta na forma de intervalo ou de reunião de intervalos de números reais.

Exame – 2021, Ép. especial

2. Como no instante t_1 a temperatura da substância foi 30°C, temos que:

$$T(t_1) = 30 \;\Leftrightarrow\; 20 + 100e^{-k.t_1} = 30 \;\Leftrightarrow\; 100e^{-k.t_1} = 30 - 20 \;\Leftrightarrow\; e^{-k.t_1} = \frac{10}{100} \;\Leftrightarrow\; e^{-k.t_1} = \frac{1}{10} \;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\; \ln\left(\frac{1}{10}\right) = -k.t_1 \;\Leftrightarrow\; k.t_1 = -\ln\left(\frac{1}{10}\right) \;\Leftrightarrow\; k = \frac{-(\ln 1 - \ln 10)}{t_1} \;\Leftrightarrow\; k = \frac{-0 + \ln 10}{t_1} \;\Leftrightarrow\; k = \frac{\ln 10}{t_1}$$

Resposta: **Opção C**

Exame – 2021, 2.ª Fase

3. Determinando o domínio da condição, temos:

$$1-x>0 \wedge 3-2x>0 \Leftrightarrow -x>-1 \wedge -2x>-3 \Leftrightarrow x<1 \wedge x<\frac{3}{2} \Leftrightarrow x<1$$

Resolvendo a equação, temos:

$$x\ln(1-x)-\ln(1-x)=(1-x)\ln(3-2x) \Leftrightarrow \ln(1-x)\big(x-1\big)=-(x-1)\ln(3-2x) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \ln(1-x)=-\frac{(x-1)\ln(3-2x)}{x-1} \wedge \underbrace{x-1\neq 0}_{\text{Cond. universal no domínio}} \Leftrightarrow \ln(1-x)=-\ln(3-2x) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \ln(1-x)+\ln(3-2x)=0 \Leftrightarrow \ln(1-x)+\ln(3-2x)=0 \Leftrightarrow \ln\Big((1-x)(3-2x)\Big)=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (1-x)(3-2x)=e^0 \Leftrightarrow 3-2x-3x+2x^2=1 \Leftrightarrow 2x^2-5x+2=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x=\frac{-(-5)\pm\sqrt{(-5)^2-4(2)(2)}}{2\times 2} \Leftrightarrow x=\frac{1}{2} \vee \underbrace{x=2}_{\text{Cond. impossível no domínio}}$$

C.S.$=\left\{\frac{1}{2}\right\}$

Exame – 2021, 2.ª Fase

4. Resolvendo a equação, temos:

$$\ln\left((1-x)e^{x-1}\right)=x \Leftrightarrow e^x=(1-x)e^{x-1} \Leftrightarrow e^x=(1-x)\times\frac{e^x}{e} \Leftrightarrow \frac{e^x}{e^x}=\frac{1-x}{e} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1=\frac{1-x}{e} \Leftrightarrow e=1-x \Leftrightarrow x=1-e$$

Determinando o domínio da condição, temos:

$$(1-x)e^{x-1}>0 \underset{e^{x-1}>0}{\Leftrightarrow} 1-x>0 \Leftrightarrow -x>-1 \Leftrightarrow x<1$$

Como $1-e<1$, temos que $1-e$ é solução da equação.

C.S.$=\{1-e\}$

Exame – 2021, 1.ª Fase

5. Designando por a e b os dois números reais positivos, e usando as propriedades dos logaritmos, podemos determinar o produto ab:

$$\log_8 a+\log_8 b=\frac{1}{3} \Leftrightarrow \log_8(a\times b)=\frac{1}{3} \Leftrightarrow ab=8^{\frac{1}{3}} \Leftrightarrow ab=\sqrt[3]{8} \Leftrightarrow ab=2$$

Resposta: **Opção A**

Exame – 2020, 2.ª Fase

6.

6.1. Resolvendo a equação dada, para $x \in]-\infty,2]$, temos:

$$f(x) = 2x+1 \Leftrightarrow x+\ln(e^x+1) = 2x+1 \Leftrightarrow \ln(e^x+1) = -x+2x+1 \Leftrightarrow \ln(e^x+1) = x+1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow e^{x+1} = e^x+1 \Leftrightarrow e^x \times e - e^x = 1 \Leftrightarrow e^x(e-1) = 1 \Leftrightarrow e^x = \frac{1}{e-1} \Leftrightarrow x = \ln\left(\frac{1}{e-1}\right)$$

Apresentando a única solução na forma $-\ln k$, $k>0$, vem:

$$\ln\left(\frac{1}{e-1}\right) = \ln\left((e-1)^{-1}\right) = (-1)\ln(e-1) = -\ln(e-1) \quad \left(\text{como } e>1, \text{ então } e-1>0\right)$$

6.2. Resolvendo a equação $y = f(x)-x$ em ordem a x, para determinar a expressão algébrica da função h^{-1}, temos:

$$y = f(x)-x \Leftrightarrow y = x+\ln(e^x+1)-x \Leftrightarrow y = \ln(e^x+1) \Leftrightarrow e^y = e^x+1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow e^y = e^x+1 \Leftrightarrow e^y-1 = e^x \Leftrightarrow \ln(e^y-1) = x$$

Desta forma temos que, para $x \in]-\infty,2]$, $h^{-1}(x) = \ln(e^x-1)$

Resposta: **Opção C**

Exame – 2020, 1.ª Fase

7. Resolvendo a equação, temos:

$$(x-1)\times h(x)+2e^{-x} = 3 \Leftrightarrow (x-1)\times\frac{e^x}{x-1}+2\times\frac{1}{e^x} = 3 \underset{x\neq 1}{\Leftrightarrow} e^x+\frac{2}{e^x}-3 = 0 \Leftrightarrow \frac{(e^x)^2}{e^x}+\frac{2}{e^x}-\frac{3e^x}{e^x} = 0 \underset{e^x\neq 0}{\Leftrightarrow}$$

$$\Leftrightarrow (e^x)^2+2-3e^x = 0 \Leftrightarrow (e^x)^2-3e^x+2 = 0 \Leftrightarrow$$

Fazendo a substituição de variável $y = e^x$, e usando a fórmula resolvente, vem:

$$\Leftrightarrow y^2-3y+2 = 0 \Leftrightarrow y = \frac{3\pm\sqrt{(-3)^2-4(1)(2)}}{2} \Leftrightarrow y = \frac{3\pm\sqrt{9+8}}{2} \Leftrightarrow y = \frac{3\pm 1}{2} \Leftrightarrow y = 1 \vee y = 2$$

Como $y = e^x$, temos que:

$$e^x = 1 \vee e^x = 2 \Leftrightarrow x = \ln 1 \vee x = \ln 2 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = \ln 2$$

C.S.$= \{0, \ln 2\}$

Exame – 2019, 2.ª Fase

8. Usando as propriedades dos logaritmos, temos que:

$$\ln(a^2-b^2)-2\ln(a+b) = \ln(a^2-b^2)-\ln(a+b)^2 = \ln\frac{a^2-b^2}{(a+b)^2} = \ln\frac{(a+b)(a-b)}{(a+b)(a+b)} = \ln\frac{a-b}{a+b}$$

Como $a+b = 2(a-b)$, obtendo o valor da aproximação com a calculadora, temos que:

$$\ln\frac{a-b}{a+b} = \ln\frac{a-b}{2(a-b)} = \ln\frac{1}{2} \approx -0{,}7$$

Resposta: **Opção C**

Exame – 2019, 1.ª Fase

9. Resolvendo a inequação, como $3 = \log_2 8$, temos que:

$$\log_2(x+1) \leq 3 - \log_2(8-x) \Leftrightarrow \log_2(x+1) + \log_2(8-x) \leq 3 \Leftrightarrow \log_2\big((x+1)\times(8-x)\big) \leq \log_2 8 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x+1)(8-x) \leq 8 \Leftrightarrow 8x - x^2 + 8 - x \leq 8 \Leftrightarrow 7x - x^2 \leq 8 - 8 \Leftrightarrow 7x - x^2 \leq 0 \Leftrightarrow x(7-x) \leq 0$$

Mas como a expressão $\log_2(x+1) \leq 3 - \log_2(8-x)$ só está definida se:

$$x+1 > 0 \wedge 8 - x > 0 \Leftrightarrow x > -1 \wedge 8 > x \Leftrightarrow x > -1 \wedge x < 8$$

E como $x(7-x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee 7 - x = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee 7 = x$, podemos estudar o sinal de $x(7-x)$, para os valores de x definidos, recorrendo a uma tabela:

x	-1		0		7		8
x	n.d.	$-$	0	$+$	$+$	$+$	n.d.
$7-x$	n.d.	$+$	$+$	$+$	0	$-$	n.d.
$x(7-x)$	n.d.	$-$	0	$+$	0	$-$	n.d.

Pelo que o conjunto dos números reais que são soluções da inequação é: $]-1,0] \cup [7,8[$

Exame – 2018, 2.ª Fase

10. Considerando a função h, podemos observar que:

$$h(1) = 1 + 1 \Leftrightarrow h(1) = 2 \Leftrightarrow h^{-1}(2) = 1$$

E assim, vem que:

$$\left(f \circ h^{-1}\right)(2) = f\big(h^{-1}(2)\big) = f(1) = \frac{\ln(1^2)+2}{1} = \frac{0+2}{1} = 2$$

Resposta: **Opção C**

Exame – 2018, 2.ª Fase

11. Simplificando a igualdade, vem que:

$$\ln b = 4\ln a \Leftrightarrow \ln b = \ln\left(a^4\right) \Leftrightarrow b = a^4$$

E assim, resolvendo a inequação, temos:

$$a^x \geq b^{\frac{1}{x}} \Leftrightarrow a^x \geq \left(a^4\right)^{\frac{1}{x}} \Leftrightarrow a^x \geq a^{\frac{4}{x}} \underset{a>1}{\Leftrightarrow} x \geq \frac{4}{x} \Leftrightarrow x - \frac{4}{x} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{x^2}{x} - \frac{4}{x} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{x^2-4}{x} \geq 0$$

Determinando as soluções da equação $\dfrac{x^2-4}{x} = 0$, temos:

$$\frac{x^2-4}{x} = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4 = 0 \land x \neq 0 \Leftrightarrow x^2 = 4 \land x \neq 0 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{4} \land x \neq 0 \Leftrightarrow x = -2 \lor x = 2$$

Estudando a variação do sinal de $\dfrac{x^2-4}{x}$, para $x \neq 0$, vem:

x	$-\infty$	-2		0		2	$+\infty$
x^2-4	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
x	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$\frac{x^2-4}{x}$	$-$	0	$+$	n.d.	$-$	0	$+$

Assim, como $a^x \geq b^{\frac{1}{x}} \Leftrightarrow \dfrac{x^2-4}{x} > 0$, para $a > 1$, temos que o conjunto solução de $a^x \geq b^{\frac{1}{x}}$ é:

$$C.S. = [-2{,}0[\cup [2, +\infty[$$

Exame – 2018, 1.ª Fase

12. Usando as propriedades dos logaritmos, temos que:

$$4 + \log_a\left(5^{\ln a}\right) = 4 + \ln a \times (\log_a 5) = 4 + \frac{\log_a a}{\log_a e} \times (\log_a 5) = 4 + \frac{1 \times \log_a 5}{\log_a e} =$$

$$= 4 + \frac{\log_a 5}{\log_a e} = 4 + \ln 5 = \ln\left(e^4\right) + \ln 5 = \ln(e^4 \times 5) = \ln(5e^4)$$

Resposta: **Opção B**

Exame – 2017, Ép. especial

13.

13.1. Como duas horas após o início do processo ($t = 2$), a massa de poluente é metade da existente ao fim de uma hora ($t = 1$), então temos que $p(2) = \frac{p(1)}{2}$

Assim, resolvendo a equação anterior e escrevendo o valor de k forma solicitada, vem:

$$p(2) = \frac{p(1)}{2} \Leftrightarrow 120\,e^{-k\times 2} = \frac{120\,e^{-k\times 1}}{2} \Leftrightarrow \frac{2\times 120}{120} = \frac{e^{-k}}{e^{-2k}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2 = e^{-k-(-2k)} \Leftrightarrow 2 = e^{-k+2k} \Leftrightarrow 2 = e^{k} \Leftrightarrow k = \ln 2$$

13.2. Calculando as imagens dos objetos 0 e 3, temos:

$$p(0) = 120\,e^{-0,7\times 0} = 120\,e^{0} = 120\times 1 = 120$$

$$p(3) = 120\,e^{-0,7\times 3} = 120\,e^{-2,1} \approx 14{,}69$$

E assim, calculando a taxa média de variação da função p no intervalo $[0,3]$ e apresentando o resultado arredondado às unidades, temos

$$TVM_{[0,3]} = \frac{p(3)-p(0)}{3-0} \approx \frac{14{,}69-120}{3} \approx \frac{-105{,}31}{3} \approx -35$$

No contexto da situação descrita, o valor da taxa média de variação significa que nas primeiras 3 horas do processo, a massa de poluente no tanque, decresceu, em média, 35 gramas por hora, aproximadamente.

Exame – 2017, Ép. especial

14. Resolvendo a inequação, temos que:

$$f(x) > 2\ln x \Leftrightarrow \frac{\ln x}{x} > 2\ln x \underset{x>0}{\Leftrightarrow} \ln x > x\times 2\ln x \Leftrightarrow \ln x - x\times 2\ln x > 0 \Leftrightarrow (\ln x)(1-2x) > 0$$

Como o domínio da função é $\mathbb{R}^+$ estudamos o sinal do produto, em $]0,+\infty[$, através de um quadro de variação de sinal, para resolver a inequação:

x	0		$\frac{1}{2}$		1	$+\infty$
$\ln x$	n.d.	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$1-2x$	n.d.	$+$	0	$-$	$-$	$-$
$(\ln x)(1-2x)$	n.d.	$-$	0	$+$	0	$-$

Assim, temos que o conjunto solução da inequação é $\left]\frac{1}{2},1\right[$

Exame – 2017, 2.ª fase

15. Temos que $f(0) = 9 - 2{,}5\left(e^{1-0{,}2\times 0} + e^{0{,}2\times 0-1}\right) = 9 - 2{,}5\left(e^{1} + e^{-1}\right) \approx 1{,}28$

E assim, substituindo o valor aproximado de $f(0)$ na equação $\sqrt{f(0)^2 + x^2} = 2$, vem:

$$\sqrt{1{,}28^2 + x^2} = 2 \underset{1{,}28^2+x^2>0}{\Leftrightarrow} \left(\sqrt{1{,}28^2 + x^2}\right)^2 = 2^2 \underset{1{,}28^2+x^2>0}{\Leftrightarrow} 1{,}28^2 + x^2 = 4 \Leftrightarrow x^2 = 4 - 1{,}28^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 = 2{,}3616 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{2{,}3616}$$

Como $x \in [0{,}7]$, então a solução da equação é $x = \sqrt{2{,}3616} \approx 1{,}5$

Como $\overline{SP}^2 = \overline{OP}^2 + \overline{OS}^2$, e $\overline{OP} = f(0)$ e $\overline{OS} = x$, então temos que $\sqrt{f(0)^2 + x^2}$ é a distância $\overline{SP}$. Assim a solução da equação $\sqrt{f(0)^2 + x^2} = 2$ é a abcissa do ponto S, na posição em que dista duas unidades do ponto P, ou seja, o ponto da superfície do rio que está a 2 metros do topo da parede esquerda que suporta a ponte está a 1,5 metros de distância da base da mesma parede.

Exame – 2017, 1.ª fase

16. Usando a definição de logaritmo, temos que:

$$a = b^3 \Leftrightarrow \log_b a = 3$$

Pelas propriedades operatórias dos logaritmos, vem que:

$$\log_a b + \log_b a = \frac{\log_b b}{\log_b a} + 3 = \frac{1}{3} + 3 = \frac{1}{3} + \frac{9}{3} = \frac{10}{3}$$

Resposta: **Opção C**

Exame – 2016, Ép. especial

17. Pela definição de função composta temos que:

$$(f \circ g)(x) = 0 \Leftrightarrow f\big(g(x)\big) = 0 \Leftrightarrow f(\ln x) = 0$$

Como, pela observação do gráfico, podemos verificar que:

$$f(-1) = 0 \wedge f(1) = 0$$

Desta forma, vem que:

$$(f \circ g)(x) = 0 \Leftrightarrow \ln x = -1 \wedge \ln x = 1 \Leftrightarrow x = e^{-1} \wedge x = e^{1} \Leftrightarrow x = \frac{1}{e} \wedge x = e$$

Resposta: **Opção D**

Exame – 2016, Ép. especial

18.

18.1. De acordo com os dados do enunciado temos que $x = 25$, pelo que a velocidade constante da nave, em quilómetros por segundo, quando termina a queima do combustível é dada por:

$$V(25) = 3\ln\left(\frac{25+300}{25+60}\right) = 3\ln\left(\frac{325}{85}\right) \approx 4{,}02 \text{ km/s}$$

Assim, como a relação entre o tempo (t), a distância (d) e a velocidade (V), em segundos, arredondada às unidades, é:

$$V = \frac{d}{t} \Leftrightarrow t = \frac{d}{V}$$

Temos que para viajar 200 quilómetros $(d = 200)$ a esta velocidade $(V = 4{,}02)$, o tempo necessário é:

$$t = \frac{200}{4{,}02} \approx 50 \text{ s}$$

18.2. Pretende-se determinar o valor de x associado ao valor de $V = 3$, ou seja, a solução da equação $V(x) = 3$

Resolvendo a equação, e arredondando o resultado às unidades, vem que:

$$V(x) = 3 \Leftrightarrow 3\ln\left(\frac{x+300}{x+60}\right) = 3 \Leftrightarrow \ln\left(\frac{x+300}{x+60}\right) = \frac{3}{3} \Leftrightarrow \ln\left(\frac{x+300}{x+60}\right) = 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{x+300}{x+60} = e^1 \underset{x\neq -60}{\Leftrightarrow} x+300 = e(x+60) \Leftrightarrow x+300 = ex+60e \Leftrightarrow x-ex = 60e-300 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x(1-e) = 60e-300 \Leftrightarrow x = \frac{60e-300}{1-e} \Rightarrow x \approx 80 \text{ milhares de toneladas}$$

Exame – 2016, Ép. especial

19. Simplificando a expressão da inequação, temos que:

$$g(0)\times g(k) < 0 \Leftrightarrow \ln(0+k)\times\ln(k+k) < 0 \Leftrightarrow \ln k \times \ln(2k) < 0$$

Atendendo a que:

- $\ln k = 0 \Leftrightarrow k = e^0 \Leftrightarrow k = 1$
- $\ln(2k) = 0 \Leftrightarrow 2k = e^0 \Leftrightarrow 2k = 1 \Leftrightarrow k = \frac{1}{2}$

Como k é um número real positivo ($k \in]0,+\infty[$) estudamos o sinal do produto, em $]0,+\infty[$, através de um quadro de variação de sinal, para resolver a inequação:

k	0		$\frac{1}{2}$		1	$+\infty$
$\ln k$	n.d.	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$\ln(2k)$	n.d.	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$g(0)\times g(k)$	n.d.	$+$	0	$-$	0	$+$

Pelo que se concluí que se $g(0)\times g(k) < 0$, então $k \in \left]\frac{1}{2},1\right[$

Exame – 2016, Ép. especial

20. Usando as propriedades dos logaritmos, temos que:

$$\log_a\left(ab^3\right) = \log_a a + \log_a\left(b^3\right) = 1 + 3\log_a b$$

E assim, vem que:

$$\log_a\left(ab^3\right) = 5 \Leftrightarrow 1+3\log_a b = 5 \Leftrightarrow \log_a b = \frac{5-1}{3} \Leftrightarrow \log_a b = \frac{4}{3}$$

Logo, vem que:

$$\log_b a = \frac{\log_a a}{\log_a b} = \frac{1}{\log_a b} = \frac{1}{\frac{4}{3}} = \frac{3}{4}$$

Resposta: **Opção B**

Exame – 2016, 2.ª Fase

21. Temos que $x = 0{,}003$ e como o empréstimo será pago em prestações mensais de 24 euros então $p = 24$

Substituindo estes valores na expressão conhecida, e resolvendo a equação, vem:

$$24 = \frac{600(0{,}003)}{1 - e^{-n\times 0{,}003}} \underset{(1)}{\Leftrightarrow} 24 - 24e^{-0{,}003n} = 1{,}8 \Leftrightarrow -24e^{-0{,}003n} = 1{,}8 - 24 \Leftrightarrow e^{-0{,}003n} = \frac{-22{,}2}{-24} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow e^{-0{,}003n} = 0{,}925 \Leftrightarrow -0{,}003n = \ln 0{,}925 \Leftrightarrow n = \frac{\ln 0{,}925}{-0{,}003}$$

(1) Como $n \in \mathbb{N}, n \neq 0$, então $1 - e^{-0{,}003n} \neq 0$

Como $\dfrac{\ln 0{,}925}{-0{,}003} \approx 26$, concluímos que o José irá demorar 26 meses a pagar o empréstimo.

Exame – 2016, 2.ª Fase

22. Determinando o declive da reta que contém os pontos de abcissas $-a$ e a, vem que:

$$m = \frac{f(a) - f(-a)}{a - (-a)} = \frac{\ln\left(\frac{a-1}{a+1}\right) - \ln\left(\frac{-a-1}{-a+1}\right)}{a+a} = \frac{\ln\left(\frac{a-1}{a+1}\right) - \ln\left(\frac{-(a+1)}{-(a-1)}\right)}{2a} =$$

$$= \frac{\ln\left(\frac{a-1}{a+1}\right) - \ln\left(\frac{a+1}{a-1}\right)}{2a} = \frac{\ln\left(\frac{a-1}{a+1}\right) - \ln\left(\left(\frac{a-1}{a+1}\right)^{-1}\right)}{2a} = \frac{\ln\left(\frac{a-1}{a+1}\right) - (-1)\ln\left(\frac{a-1}{a+1}\right)}{2a} =$$

$$= \frac{\ln\left(\frac{a-1}{a+1}\right) + \ln\left(\frac{a-1}{a+1}\right)}{2a} = \frac{2\ln\left(\frac{a-1}{a+1}\right)}{2a} = \frac{\ln\left(\frac{a-1}{a+1}\right)}{a} = \frac{f(a)}{a}$$

Logo a equação da reta é da forma $y = \dfrac{f(a)}{a} \times x + b$

Como o ponto de coordenadas $\big(a,f(a)\big)$ pertence à reta, podemos substituir estas coordenadas e o valor do declive, na expressão geral de uma reta, para determinar o valor da ordenada na origem:

$$f(a) = \frac{f(a)}{a} \times a + b \Leftrightarrow f(a) = f(a) + b \Leftrightarrow f(a) - f(a) = b \Leftrightarrow 0 = b$$

Como a ordenada na origem é zero, podemos concluir que a reta passa na origem do referencial.

Exame – 2016, 1.ª Fase

23. Como o ponto P pertence ao gráfico de f, substituindo as suas coordenadas na expressão algébrica da função, temos que

$$8 = e^{a\ln 2} \Leftrightarrow 8 = \left(e^{\ln 2}\right)^a \Leftrightarrow 8 = 2^a \Leftrightarrow a = \log_2 8 \Leftrightarrow a = 3$$

Resposta: **Opção C**

Exame – 2015, Ép. especial

24.

24.1. Calculando as imagens dos objetos 20 e 10, temos

$$N(20) = \frac{200}{1+50e^{-0{,}25\times 20}} = \frac{200}{1+50e^{-5}} \approx 149{,}60$$

$$N(10) = \frac{200}{1+50e^{-0{,}25\times 10}} = \frac{200}{1+50e^{-2{,}5}} \approx 39{,}18$$

E assim, calculando a taxa média de variação da função N no intervalo $[10,20]$ e apresentando o resultado arredondado às unidades, temos

$$TVM_{[10,20]} = \frac{N(20)-N(10)}{20-10} \approx \frac{149{,}60-39{,}18}{10} \approx \frac{110{,}42}{10} \approx 11{,}042 \approx 11$$

No contexto da situação descrita, o valor da taxa média de variação significa que entre os anos de 1900 e 2000 o número de habitantes, da região do globo em causa, cresceu em média aproximadamente 11 milhões em cada década.

24.2. Resolvendo em ordem a t, temos:

$$N = \frac{200}{1+50e^{-0{,}25t}} \Leftrightarrow 1+50e^{-0{,}25t} = \frac{200}{N} \Leftrightarrow 50e^{-0{,}25t} = \frac{200}{N} - 1 \Leftrightarrow 50e^{-0{,}25t} = \frac{200}{N} - \frac{N}{N} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 50e^{-0{,}25t} = \frac{200-N}{N} \Leftrightarrow e^{-0{,}25t} = \frac{200-N}{50N} \Leftrightarrow -0{,}25t = \ln\left(\frac{200-N}{50N}\right) \Leftrightarrow t = \frac{\ln\left(\frac{200-N}{50N}\right)}{-0{,}25} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow t = -\frac{1}{0{,}25}\ln\left(\frac{200-N}{50N}\right) \Leftrightarrow t = -\frac{1}{\frac{25}{100}}\ln\left(\frac{200-N}{50N}\right) \Leftrightarrow t = -\frac{100}{25}\ln\left(\frac{200-N}{50N}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow t = -4\ln\left(\frac{200-N}{50N}\right) \Leftrightarrow t = \ln\left(\frac{200-N}{50N}\right)^{-4} \Leftrightarrow t = \ln\left(\frac{50N}{200-N}\right)^{4}$$

Exame – 2015, Ép. especial

25. Usando as propriedades dos logaritmos, temos que

$$\log_a\left(a^2 b\right) = \log_a(a^2) + \log_a b = 2\log_a a + \frac{\log_b b}{\log_b a} = 2\times 1 + \frac{1}{\frac{1}{3}} = 2+3 = 5$$

Resposta: **Opção D**

Exame – 2015, 2.ª Fase

26. Para $x \in]-\infty,3]$, $f(x) = 1 + xe^x$, logo, vem que

$$f(x) - 2x > 1 \Leftrightarrow 1 + xe^x - 2x > 1 \Leftrightarrow xe^x - 2x > 0 \Leftrightarrow x(e^x-2) > 0$$

Determinando as soluções da equação $x(e^x-2)=0$, temos:

$$x(e^x-2)=0 \Leftrightarrow x=0 \vee e^x-2=0 \Leftrightarrow x=0 \vee e^x=2 \Leftrightarrow x=0 \vee x=\ln 2$$

Estudando a variação do sinal de $x(e^x-2)$, em $]-\infty,3]$, vem:

x	$-\infty$	0		$\ln 2$		3
x	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$
e^x-2	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$
$x(e^x-2)$	$+$	0	$-$	0	$+$	$+$

Assim, como $f(x) - 2x > 1 \Leftrightarrow x(e^x-2) > 0$, temos que o conjunto solução de $f(x)-2x>1$ é

$$C.S. =]-\infty,0[\, \cup\,]\ln 2,3]$$

Exame – 2015, 2.ª Fase

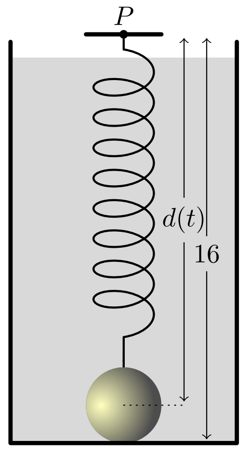
27. Usando as propriedades dos logaritmos, temos que

$$\log_3\left(\frac{3^k}{9}\right) = \log_3(3^k) - \log_3 9 = k \times \log_3 3 - 2 = k - 2$$

Resposta: **Opção B**

Exame – 2015, 1.ª Fase

28. A distância do centro da esfera ao ponto P, no momento em que se inicia o movimento, em centímetros, é



$$d(0) = 10 + (5-0)e^{-0,05\times 0} = 10 + (5)e^0 = 10 + 5 \times 1 = 15$$

Como, no momento em que se inicia o movimento, o ponto da esfera mais afastado do ponto P está a 16 cm (do ponto P), o raio da esfera, em centímetros, é

$$r = 16 - d(0) = 16 - 15 = 1$$

Pelo que, calculando o volume da esfera em cm^3, e arredondado o resultado às centésimas, temos

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}\pi \times 1^3 = \frac{4\pi}{3} \approx 4{,}19$$

Exame – 2015, 1.ª Fase

29. Como $10^2 = 100 \Leftrightarrow \log_{10} 100 = 2$, usando as propriedades dos logaritmos, temos que

$$\log(100b) = \log 100 + \log b = 2 + 2014 = 2016$$

Resposta: **Opção A**

Teste Intermédio 12.º ano – 30.04.2014

30. Simplificando a condição $\ln(e^{-x} - a) \leq 0$, como a função logarítmica tem imagens não positivas para $x \in]0,1]$, temos:

$$\ln(e^{-x} - a) \leq 0 \;\Leftrightarrow\; 0 < e^{-x} - a \leq 1 \;\Leftrightarrow\; e^{-x} - a > 0 \;\wedge\; e^{-x} - a \leq 1 \;\Leftrightarrow\; e^{-x} > a \;\wedge\; e^{-x} \leq 1 + a \;\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\; -x > \ln(a) \;\wedge\; -x \leq \ln(1+a) \;\Leftrightarrow\; x < -\ln(a) \;\wedge\; x \geq -\ln(1+a)$$

Assim, $S = [-\ln(1+a), -\ln(a)[$

Resposta: **Opção B**

Exame – 2013, Ép. especial

31. Usando as propriedades dos logaritmos, temos que

$$\log_a\left(a^5 \times \sqrt[3]{b}\right) + a^{\log_a b} = \log_a\left(a^5\right) + \log_a \sqrt[3]{b} + b = 5 + \log_a\left(b^{\frac{1}{3}}\right) + b =$$

$$= 5 + \frac{1}{3}\log_a b + b = 5 + \frac{1}{3} \times 3 + b = 5 + 1 + b = 6 + b$$

Resposta: **Opção A**

Exame – 2013, 2.ª Fase

32. Usando as propriedades dos logaritmos, e sabendo que $log_a b = 2$, temos que

$$\log_b a + \log_a \sqrt{b} = \frac{\log_a a}{\log_a b} + \log_a\left(b^{\frac{1}{2}}\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\log_a b = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times 2 = \frac{1}{2} \times 3 = \frac{3}{2}$$

Resposta: **Opção D**

Teste Intermédio 12.º ano – 28.02.2013

33.

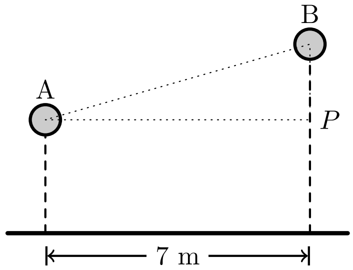
33.1. Designando por A o centro do balão A, por B o centro do balão B e por P um ponto com a mesma altura do balão A, situado na perpendicular ao solo em que está o balão B, temos que o triângulo $[ABP]$ é retângulo em P, e pretendemos calcular $\overline{AB}$

Assim, temos que $\overline{AP} = 7$ e $\overline{BP} = b(5) - a(5)$

Calculado $b(5)$ e $a(5)$, temos

$$b(5) = 6e^{-0,06\times 5} - 0,02 \times 5 + 2 = 6e^{-0,3} - 0,1 + 2 \approx 6,345$$

$$a(5) = e^{-0,03\times 5} - 0,02 \times 5 + 3 = e^{-0,15} - 0,1 + 3 \approx 3,761$$



E assim, vem que

$$\overline{BP} = b(5) - a(5) \approx 2,584$$

E assim, recorrendo ao Teorema de Pitágoras, vem $\overline{AB}^2 = \overline{AP}^2 + \overline{BP}^2$:

$$\overline{AB}^2 = 7^2 + 2,584^2 \Leftrightarrow \overline{AB}^2 = 55,677 \Rightarrow \overline{AB} = \sqrt{55,677} \Rightarrow \overline{AB} \approx 7,5 \text{ m}$$

33.2. Calculando o tempo decorrido entre o instante inicial e o instante em que os centros dos dois balões estavam à mesma distância do solo, em segundos, temos:

$$a(t) = b(t) \Leftrightarrow e^{-0,03t} - 0,02t + 3 = 6e^{-0,06t} - 0,02t + 2 \Leftrightarrow e^{-0,03t} + 3 = 6e^{-0,06t} + 2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow e^{-0,03t} - 6e^{-0,06t} + 3 - 2 = 0 \Leftrightarrow e^{-0,03t} - 6e^{2\times(-0,03t)} + 1 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow e^{-0,03t} - 6\left(e^{-0,03t}\right)^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow -6\left(e^{-0,03t}\right)^2 + e^{-0,03t} + 1 = 0 \Leftrightarrow$$

Fazendo a substituição de variável $y = e^{-0,03t}$, e usando a fórmula resolvente, vem:

$$\Leftrightarrow -6y^2 + y + 1 = 0 \Leftrightarrow y = \frac{-1 \pm \sqrt{(1)^2 - 4(-6)(1)}}{2(-6)} \Leftrightarrow y = \frac{-1 \pm \sqrt{1+24}}{-12} \Leftrightarrow y = \frac{-1 \pm \sqrt{25}}{-12} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y = \frac{-1 \pm 5}{-12} \Leftrightarrow y = \frac{-6}{-12} \vee y = \frac{4}{-12} \Leftrightarrow y = \frac{1}{2} \vee y = -\frac{1}{3}$$

Como $y = e^{-0,03t}$, temos que:

$$e^{-0,03t} = \frac{1}{2} \vee e^{-0,03t} = -\frac{1}{3}$$

E como a equação $e^{-0,03t} = -\frac{1}{3}$ é impossível, podemos determinar única solução da equação:

$$e^{-0,03t} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow -0,03t = \ln\left(\frac{1}{2}\right) \Leftrightarrow t = \frac{\ln 1 - \ln 2}{-0,03} \Leftrightarrow t = \frac{0 - \ln 2}{-0,03} \Leftrightarrow t = \frac{\ln 2}{0,03}$$

Assim, arredondado o resultado às unidades, temos $t \approx 23$ s

Teste Intermédio 12.º ano – 28.02.2013

34. Como

$$\log_a \sqrt{c} = 3 \Leftrightarrow \log_a (c)^{\frac{1}{2}} = 3 \Leftrightarrow \frac{1}{2}\log_a c = 3 \Leftrightarrow \log_a c = 6$$

e $\log_a b = c$, usando as propriedades dos logaritmos, temos que

$$\log_a \sqrt{b \times c} = \log_a (b \times c)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\log_a (b \times c) = \frac{1}{2}\left(\log_a b + \log_a c\right) = \frac{1}{2}(c+6) = \frac{c+6}{2} = \frac{c}{2} + 3$$

Resposta: **Opção C**

Exame – 2012, Ép. especial

35. Resolvendo a equação $f(x)=0$, temos que

$$e^{x-2}-\frac{4e^{-x}+4}{e^2}=0 \Leftrightarrow \frac{e^2\times e^{x-2}}{e^2}-\frac{4e^{-x}+4}{e^2}=0 \Leftrightarrow \frac{e^2\times e^{x-2}}{e^2}-\frac{4e^{-x}+4}{e^2}=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{e^x}{e^2}-\frac{4e^{-x}+4}{e^2}=0 \Leftrightarrow \frac{e^x}{e^2}-\frac{4e^{-x}+4}{e^2}=0 \Leftrightarrow \frac{e^x-4e^{-x}-4}{e^2}=0 \underset{e^2\neq 0}{\Leftrightarrow} e^x-4e^{-x}-4=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow e^x-4\times\frac{1}{e^x}-4=0 \Leftrightarrow \frac{e^x\times e^x}{e^x}-\frac{4}{e^x}-\frac{4e^x}{e^x}=0 \underset{e^x\neq 0}{\Leftrightarrow} (e^x)^2-4e^x-4=0 \Leftrightarrow$$

Fazendo a substituição de variável $y=e^x$, e usando a fórmula resolvente, vem:

$$\Leftrightarrow y^2-4y-4=0 \Leftrightarrow y=\frac{4\pm\sqrt{(-4)^2-4(1)(-4)}}{2} \Leftrightarrow y=\frac{4\pm\sqrt{16+16}}{2} \Leftrightarrow y=\frac{4\pm\sqrt{32}}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y=\frac{4\pm 4\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow y=2+2\sqrt{2} \vee y=2-2\sqrt{2}$$

Como $y=e^x$, temos que:

$$e^x=2+2\sqrt{2} \vee e^x=2-2\sqrt{2}$$

E como $2-2\sqrt{2}<0$, a equação $e^x=2-2\sqrt{2}$ é impossível, pelo que podemos determinar o valor do único zero da função f:

$$e^x=2+2\sqrt{2} \Leftrightarrow x=\ln(2+2\sqrt{2})$$

Exame – 2012, 1.ª Fase

36. Usando as propriedades dos logaritmos, e como $b=a^\pi \Leftrightarrow \log_a b=\pi$, temos que

$$\log_a\left(a^{12}\times b^{100}\right)=\log_a\left(a^{12}\right)+\log_a\left(b^{100}\right)=12\times\log_a(a)+100\times\log_a(b)=12\times 1+100\times\pi=12+100\pi\approx 326$$

Resposta: **Opção B**

Teste Intermédio 12.º ano – 24.05.2012

37.

37.1. Como $f(x)=2+\log_3 x$, então

$$f(x)\geq 4+\log_3(x-8) \Leftrightarrow 2+\log_3 x\geq 4+\log_3(x-8) \Leftrightarrow \log_3 x\geq 4-2+\log_3(x-8) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \log_3 x\geq 2+\log_3(x-8) \Leftrightarrow \log_3 x\geq \log_3 9+\log_3(x-8) \Leftrightarrow \log_3 x\geq\log_3\big(9\times(x-8)\big) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x\geq 9\times(x-8) \Leftrightarrow x\geq 9x-72 \Leftrightarrow x-9x\geq -72 \Leftrightarrow -8x\geq -72 \Leftrightarrow 8x\leq 72 \Leftrightarrow x\leq 9$$

Mas como $\log_3(x)$ só está definido para $x>0$, então a expressão $2+\log_3 x\geq 4+\log_3(x-8)$ só está definida se $x>0 \wedge x-8>0$, ou seja, se $x>0 \wedge x>8$

Pelo que a condição $f(x)\geq 4+\log_3(x-8)$ é verdadeira para os valores de x tais que $x\leq 9 \wedge x>8$, ou seja, no intervalo

$$]-\infty,9]\cap]8,+\infty[=]8,9]$$

37.2. Calculando o valor de $f(36^{1000})-f(4^{1000})$, temos que

$$f(36^{1000})-f(4^{1000})=2+\log_3\left(36^{1000}\right)-\Big(2+\log_3\left(4^{1000}\right)\Big)=2+1000\log_3(36)-2-1000\log_3(4)=$$

$$=1000\log_3(36)-1000\log_3(4)=1000\Big(\log_3(36)-\log_3(4)\Big)=1000\log_3\frac{36}{4}=$$

$$=1000\log_3 9=1000\times 2=2000$$

Teste Intermédio 12.º ano – 13.03.2012

38. Calculando o número de frangos infetados no instante em que o vírus foi detetado ($x = 0$), temos:

$$f(0) = \frac{200}{1+3\times 2^{3-0,1(0)}} = \frac{200}{1+3\times 2^{3}} = \frac{200}{1+3\times 8} = \frac{200}{1+24} = \frac{200}{25} = 8$$

O número de dias passados, em que o número de frangos infetados era dez vezes maior ($10 \times 8 = 80$), é a solução da equação $f(x) = 80$:

$$f(x) = 80 \Leftrightarrow \frac{200}{1+3\times 2^{3-0,1x}} = 80 \Leftrightarrow \frac{200}{80} = 1+3\times 2^{3-0,1x} \Leftrightarrow 2{,}5-1 = 3\times 2^{3-0,1x} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1{,}5}{3} = 2^{3-0,1x} \Leftrightarrow 0{,}5 = 2^{3-0,1x} \Leftrightarrow \log_2 0{,}5 = 3-0{,}1x \Leftrightarrow \log_2 \frac{1}{2} = 3-0{,}1x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \log_2 2^{-1} = 3-0{,}1x \Leftrightarrow -1-3 = -0{,}1x \Leftrightarrow -4 = -\frac{1}{10}x \Leftrightarrow 40 = x$$

Ou seja, desde que o vírus foi detetado, até que o número de frangos infetados fosse dez vezes maior, passaram 40 dias.

Teste Intermédio 12.º ano – 13.03.2012

39.

39.1. Sabendo que $M = 7{,}1$, podemos calcular a energia sísmica irradiada, substituindo o valor dado em $M = \frac{2}{3}\log_{10}(E) - 2{,}9$:

$$7{,}1 = \frac{2}{3}\log_{10}(E) - 2{,}9 \Leftrightarrow \frac{(7{,}1+2{,}9)\times 3}{2} = \log_{10}(E) \Leftrightarrow \log_{10}(E) = 15 \Leftrightarrow E = 10^{15}$$

Como a relação entre o momento sísmico e a energia libertada é $E = M_0 \times 1{,}6 \times 10^{-5}$, substituindo o valor de E nesta expressão, vem:

$$10^{15} = M_0 \times 1{,}6\times 10^{-5} \Leftrightarrow \frac{10^{15}}{1{,}6\times 10^{-5}} = M_0 \Leftrightarrow M_0 = 0{,}625\times 10^{15}\times 10^{5} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow M_0 = 6{,}25\times 10^{-1}\times 10^{20} \Leftrightarrow M_0 = 6{,}25\times 10^{19}$$

39.2. Sabemos que $M_1 - M_2 = \frac{2}{3}$.
Sejam E_1 a energia sísmica irradiada pelo sismo de magnitude M_1 e E_2 a energia sísmica irradiada pelo sismo de magnitude M_2.
Assim, temos que $M_1 = \frac{2}{3}\log_{10}(E_1) - 2{,}9$ e $M_2 = \frac{2}{3}\log_{10}(E_2) - 2{,}9$, pelo que
$M_1 - M_2 = \frac{2}{3}\log_{10}(E_1) - 2{,}9 - \left(\frac{2}{3}\log_{10}(E_2) - 2{,}9\right)$
Logo:

$$\frac{2}{3}\log_{10}(E_1) - 2{,}9 - \left(\frac{2}{3}\log_{10}(E_2) - 2{,}9\right) = \frac{2}{3} \Leftrightarrow \frac{2}{3}\log_{10}(E_1) - 2{,}9 - \frac{2}{3}\log_{10}(E_2) + 2{,}9 = \frac{2}{3} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{3}\log_{10}(E_1) - \frac{2}{3}\log_{10}(E_2) = \frac{2}{3} \Leftrightarrow \frac{2}{3}\Big(\log_{10}(E_1) - \log_{10}(E_2)\Big) = \frac{2}{3} \Leftrightarrow \log_{10}(E_1) - \log_{10}(E_2) = 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \log_{10}\left(\frac{E_1}{E_2}\right) = 1 \Leftrightarrow \frac{E_1}{E_2} = 10^{1} \Leftrightarrow E_1 = 10\times E_2$$

Assim, a energia sísmica irradiada pelo sismo de magnitude M_1 é dez vezes superior à energia sísmica irradiada pelo sismo de magnitude M_2.

Exame – 2011, Prova especial

40. Como a máquina agrícola funcionou durante 20 minutos e, nesse período de tempo, consumiu 2 litros de combustível, logo a quantidade de combustível que existia no depósito no momento inicial era a quantidade medida ao fim de 20 minutos acrescida dos 2 litros consumidos, ou seja,

$$Q(0) = Q(20) + 2 \Leftrightarrow Q(0) - Q(20) = 2$$

Logo, determinando o valor de k, temos que

$$Q(0) - Q(20) = 2 \Leftrightarrow 12 + \log_3(81 - k \times 0^2) - \left(12 + \log_3(81 - k \times 20^2)\right) = 2 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 12 + \log_3(81 - 0) - 12 - \log_3(81 - 400k) = 2 \Leftrightarrow \log_3(81) - \log_3(81 - 400k) = 2 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 4 - \log_3(81 - 400k) = 2 \Leftrightarrow -\log_3(81 - 400k) = 2 - 4 \Leftrightarrow \log_3(81 - 400k) = 2 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 3^2 = 81 - 400k \Leftrightarrow 400k = 81 - 3^2 \Leftrightarrow k = \frac{72}{400} \Leftrightarrow k = \frac{9}{50}$$

Exame – 2011, Ép. especial

41.

41.1. Começamos por calcular o número de nenúfares, às zero horas do dia 1 de Março de 2010, no lago A, ou seja, aos zero dias:

$$N_A(0) = \frac{120}{1 + 7 \times e^{-0,2\times 0}} = \frac{120}{1 + 7 \times e^0} = \frac{120}{1 + 7 \times 1} = \frac{120}{8} = 15$$

Calculando o número aproximado de nenúfares, no lago A, 7 dias depois, temos:

$$N_A(7) = \frac{120}{1 + 7 \times e^{-0,2\times 7}} = \frac{120}{1 + 7 \times e^{-1,4}} \approx 44{,}02$$

Assim temos que o aumento do número de nenúfares, no lago A, nos primeiros 7 dias, arredondado às unidades é

$$N_A(7) - N_A(0) \approx 44{,}02 - 15 \approx 29 \text{ nenúfares}$$

41.2. O número de dias necessários, após as zero horas do dia 1 de Março de 2010, para que o número de nenúfares existentes no lago A seja igual ao número de nenúfares existentes no lago B é a solução da equação $N_A(t) = N_B(t)$:

$$N_A(t) = N_B(t) \Leftrightarrow \frac{120}{1 + 7 \times e^{-0,2t}} = \frac{150}{1 + 50 \times e^{-0,4t}} \Leftrightarrow 120\left(1 + 50 \times e^{-0,4t}\right) = 150\left(1 + 7 \times e^{-0,2t}\right) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 120 + 6000 \times e^{-0,4t} = 150 + 1050 \times e^{-0,2t} \Leftrightarrow 6000 \times e^{-0,4t} - 1050 \times e^{-0,2t} + 120 - 150 = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 6000 \times \left(e^{-0,2t}\right)^2 - 1050 \times e^{-0,2t} - 30 = 0 \Leftrightarrow$$

Fazendo a substituição de variável $y = e^{-0,2t}$, e usando a fórmula resolvente, vem:

$$\Leftrightarrow 6000y^2 - 1050y - 30 = 0 \Leftrightarrow y = \frac{1050 \pm \sqrt{(-1050)^2 - 4(6000)(-30)}}{2(6000)} \Leftrightarrow y = \frac{1050 \pm 1350}{12\,000} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow y = -\frac{1}{40} \vee y = \frac{1}{5}$$

Como $y = e^{-0,2t}$, temos que:

$$e^{-0,2t} = -\frac{1}{40} \vee e^{-0,2t} = \frac{1}{5}$$

E como a equação $e^{-0,2t} = -\frac{1}{40}$ é impossível, podemos determinar única solução da equação:

$$e^{-0,2t} = \frac{1}{5} \Leftrightarrow -0{,}2t = \ln\left(\frac{1}{5}\right) \Leftrightarrow t = \frac{\ln 1 - \ln 5}{-0{,}2} \Leftrightarrow t = \frac{0 - \ln 5}{-0{,}2} \Leftrightarrow t = \frac{\ln 5}{0{,}2}$$

Assim, arredondando o resultado às unidades, temos $t \approx 8$ dias

Exame – 2011, 2.ª Fase

42. Resolvendo a equação $\dfrac{f(x)}{x} = e^x - \dfrac{2}{3}$, no intervalo $[1, +\infty[$, temos que

$$\frac{f(x)}{x} = e^x - \frac{2}{3} \Leftrightarrow \frac{xe^{-x} + 2x}{x} = e^x - \frac{2}{3} \Leftrightarrow \frac{x(e^{-x} + 2)}{x} = e^x - \frac{2}{3} \underset{x>1}{\Leftrightarrow} e^{-x} + 2 = e^x - \frac{2}{3} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{e^x} - e^x + 2 + \frac{2}{3} = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{e^x} - e^x + \frac{6}{3} + \frac{2}{3} = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{e^x} - e^x + \frac{8}{3} = 0 \Leftrightarrow \frac{3}{3e^x} - \frac{3e^x \times e^x}{3e^x} + \frac{8e^x}{3e^x} = 0 \underset{3e^x \neq 0}{\Leftrightarrow}$$

$$\Leftrightarrow 3 - 3(e^x)^2 + 8e^x = 0 \Leftrightarrow -3(e^x)^2 + 8e^x + 3 = 0 \Leftrightarrow$$

Fazendo a substituição de variável $y = e^x$, e usando a fórmula resolvente, vem:

$$\Leftrightarrow -3y^2 + 8y + 3 = 0 \Leftrightarrow y = \frac{-8 \pm \sqrt{8^2 - 4(-3)(3)}}{2(-3)} \Leftrightarrow y = \frac{-8 \pm \sqrt{64 + 36}}{-6} \Leftrightarrow y = \frac{-8 \pm \sqrt{100}}{-6} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y = \frac{-8 \pm 10}{-6} \Leftrightarrow y = \frac{2}{-6} \lor y = \frac{-18}{-6} \Leftrightarrow y = -\frac{1}{3} \lor y = 3 \Leftrightarrow$$

Como $y = e^x$, temos que:

$$\Leftrightarrow \underbrace{e^x = -\frac{1}{3}}_{\text{Eq. Imp.}} \lor e^x = 3 \Leftrightarrow x = \ln 3$$

Assim, a única solução da equação, em $[1, +\infty[$, é $\ln 3$

Teste Intermédio 12.º ano – 26.05.2011

43. Como o ponto P pertence ao gráfico da função f e tem ordenada $\dfrac{1}{2}$, então podemos calcular a sua abcissa recorrendo à expressão algébrica da função f:

$$f(x) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \log_9(x) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = 9^{\frac{1}{2}} \Leftrightarrow x = \sqrt{9} \Leftrightarrow x = 3$$

Resposta: **Opção C**

Teste Intermédio 12º ano – 19.01.2011

44. Resolvendo a inequação, temos

$$\log_3(7x + 6) \geq 2 + \log_3(x) \Leftrightarrow \log_3(7x + 6) \geq \log_3 9 + \log_3(x) \Leftrightarrow \log_3(7x + 6) \geq \log_3 (9 \times x) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 7x + 6 \geq 9x \Leftrightarrow 7x - 9x \geq -6 \Leftrightarrow -2x \geq -6 \Leftrightarrow 2x \leq 6 \Leftrightarrow x \leq \frac{6}{2} \Leftrightarrow x \leq 3$$

Mas como $\log_3(x)$ só está definido para $x > 0$, então a expressão $\log_3(7x+6) \geq 2+\log_3(x)$ só está definida se $x > 0 \land 7x + 6 > 0$, ou seja, se $x > 0 \land x > -\dfrac{6}{7}$, ou mais simplesmente, se $x > 0$

Pelo que a condição é verdadeira $\log_3(7x + 6) \geq 2 + \log_3(x)$ para os valores de x tais que $x \leq 3 \land x > 0$, ou seja, no intervalo

$$]-\infty,3] \cap]0, +\infty[=]0,3]$$

Teste Intermédio 12.º ano – 19.01.2011

45.

45.1. Como $k=\frac{1}{2}$ e $p=1$, o número, em milhares, de pessoas que estavam infetadas com a doença, nesta região, t anos após o início de 1960 é

$$I(t)=\frac{3e^{\frac{1}{2}t}}{1+1\times e^{\frac{1}{2}t}}=\frac{3e^{\frac{t}{2}}}{1+e^{\frac{t}{2}}}$$

E o ano em que o número de pessoas infetadas, nesta região atingiu os 2500, ou seja, os 2,5 milhares é a solução da equação

$$I(t)=2{,}5$$

Assim, resolvendo a equação, temos

$$I(t)=2{,}5 \;\Leftrightarrow\; \frac{3e^{\frac{t}{2}}}{1+e^{\frac{t}{2}}}=2{,}5 \underset{1+e^{\frac{t}{2}}>0}{\Leftrightarrow} 3e^{\frac{t}{2}}=2{,}5\left(1+e^{\frac{t}{2}}\right) \;\Leftrightarrow\; 3e^{\frac{t}{2}}=2{,}5+2{,}5e^{\frac{t}{2}} \;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\; 3e^{\frac{t}{2}}-2{,}5e^{\frac{t}{2}}=2{,}5 \;\Leftrightarrow\; 0{,}5e^{\frac{t}{2}}=2{,}5 \;\Leftrightarrow\; e^{\frac{t}{2}}=\frac{2{,}5}{0{,}5} \;\Leftrightarrow\; e^{\frac{t}{2}}=5 \;\Leftrightarrow\; \frac{t}{2}=\ln 5 \;\Leftrightarrow\; t=2\ln 5$$

Logo, como $2\ln 5\approx 3{,}219$ e $1960+3{,}219\approx 1963$, temos que o número de pessoas infetadas, nesta região, atingiu os 2500 no ano de 1963

45.2. Como, nesta região, em 1961, ou seja 1 ano após o início de 1960 ($t=1$), se constatou que havia um milhar de pessoas infetadas ($I=1$), então temos que

$$I(1)=1$$

Logo, substituindo na expressão da função I, resolvendo em ordem a k e escrevendo o resultado na forma $k=-\ln(A+pB)$, vem que

$$I(1)=1 \;\Leftrightarrow\; 1=\frac{3e^{k\times 1}}{1+pe^{k\times 1}} \;\Leftrightarrow\; 1=\frac{3e^{k}}{1+pe^{k}} \underset{1+pe^k\neq 0}{\Leftrightarrow} 1+pe^k=3e^k \;\Leftrightarrow\; 1=3e^k-pe^k \;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\; 1=e^k\,(3-p) \;\Leftrightarrow\; \frac{1}{3-p}=e^k \;\Leftrightarrow\; k=\ln\left(\frac{1}{3-p}\right) \;\Leftrightarrow\; k=\ln 1-\ln(3-p) \;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\; k=0-\ln(3-p) \;\Leftrightarrow\; k=-\ln(3-p)$$

Teste Intermédio 12.º ano – 19.01.2011

46. Resolvendo a equação, temos:

$$f(x)=2 \;\Leftrightarrow\; \ln(-3x)=2 \;\Leftrightarrow\; -3x=e^2 \;\Leftrightarrow\; x=\frac{e^2}{-3} \;\Leftrightarrow\; x=-\frac{1}{3}e^2$$

Resposta: **Opção C**

Exame – 2010, Ép. especial

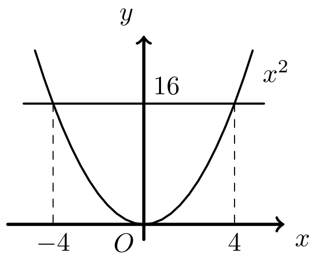
47. Temos que

$$h(-4) = ln\left((-4)^2 + 1\right) = \ln(16+1) = \ln(17)$$

Assim, resolvendo a inequação, em $]-\infty, 0]$, temos :

$$h(x) > h(-4) \Leftrightarrow \ln\left(x^2+1\right) > \ln(17) \Leftrightarrow x^2 + 1 > 17 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 > 17 - 1 \Leftrightarrow x^2 > 16 \Leftrightarrow x < -4 \ \vee \ x > 4$$



Como o domínio de valência da inequação é $]-\infty, 0]$, o conjunto solução é

$$]-\infty, 0] \cap \Big(]-\infty, -4[\cup]4, +\infty[\Big) =]-\infty, -4[$$

Exame – 2010, Ép. especial

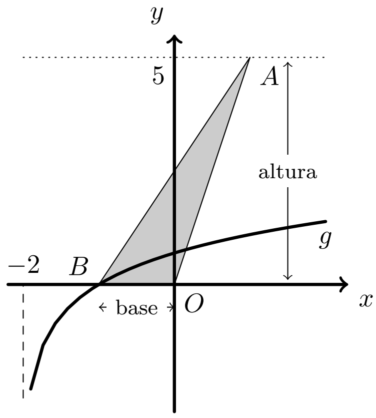
48. Como o ponto B é o ponto de intersecção do gráfico da função g com o eixo das abcissas, podemos determinar a sua abcissa, calculando o zero da função g:

$$g(x) = 0 \Leftrightarrow \ln(x+2) = 0 \Leftrightarrow x + 2 = e^0 \Leftrightarrow x = 1 - 2 \Leftrightarrow x = -1$$

E assim, considerando o lado $[OB]$ do triângulo como a base, a altura será a ordenada do ponto A, (independentemente da sua abcissa), pelo que a área do triângulo é:

$$A_{[OAB]} = \frac{\overline{OB} \times y_A}{2} = \frac{|x_B| \times y_A}{2} = \frac{1 \times 5}{2} = \frac{5}{2}$$

Resposta: **Opção A**



Exame – 2010, 1.ª Fase

49.

49.1. Aplicando as regras operatórias dos logaritmos, vem que, para qualquer valor de $t \in [0{,}5]$:

$$N(t) = 8\log_4(3t+1)^3 - 8\log_4(3t+1) = 8 \times 3\log_4(3t+1) - 8\log_4(3t+1) =$$

$$= 24\log_4(3t+1) - 8\log_4(3t+1) = 16\log_4(3t+1)$$

49.2. Como $N(t)$ é o número de bilhetes vendidos, em centenas, t horas após o início da venda, e 2400 bilhetes são 24 centenas de bilhetes, o tempo necessário para vender 2400 bilhetes é a solução da equação $N(t) = 24$:

$$N(t) = 24 \Leftrightarrow 16\log_4(3t+1) = 24 \Leftrightarrow \log_4(3t+1) = \frac{24}{16} \Leftrightarrow \log_4(3t+1) = \frac{3}{2} \Leftrightarrow 3t + 1 = 4^{\frac{3}{2}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3t + 1 = \sqrt{4^3} \Leftrightarrow 3t + 1 = \sqrt{64} \Leftrightarrow 3t + 1 = 8 \Leftrightarrow 3t = 8 - 1 \Leftrightarrow t = \frac{7}{3}$$

Escrevendo o resultado em horas e minutos, temos que $t = \frac{7}{3} = 2 + \frac{1}{3}$, e como $\frac{1}{3}$ de hora são 20 minutos, temos que serão necessárias 2 horas e 20 minutos para que sejam vendidos 2400 bilhetes.

Exame – 2010, 1.ª Fase

50. Os zeros da função g são as soluções da equação $g(x)=0$, que pertencem ao domínio de g
Assim, temos que:

$$g(x)=0 \Leftrightarrow x+\ln(f(x)-3)=0 \Leftrightarrow x+\ln\left(3+4x^2e^{-x}-3\right)=0 \Leftrightarrow x+\ln\left(4x^2\times e^{-x}\right)=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x+\ln\left(4x^2\right)+\ln\left(e^{-x}\right)=0 \Leftrightarrow x+\ln\left(4x^2\right)+(-x)=0 \Leftrightarrow \ln\left(4x^2\right)=0 \Leftrightarrow 4x^2=e^0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4x^2=1 \Leftrightarrow x^2=\frac{1}{4} \Leftrightarrow x=\pm\sqrt{\frac{1}{4}} \Leftrightarrow x=\frac{1}{2} \lor x=-\frac{1}{2}$$

Como o domínio da função g é $\mathbb{R}\setminus\{0\}$, então o conjunto dos zeros da função é $\left\{-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right\}$

Teste Intermédio 12.º ano – 19.05.2010

51. Usando as propriedades dos logaritmos, temos que:

$$\log_5\left(\frac{5^{1000}}{25}\right)=\log_5\left(5^{1000}\right)-\log_5 25=1000-\log_5\left(5^2\right)=1000-2=998$$

Resposta: **Opção D**

Teste Intermédio 12.º ano – 15.03.2010

52.

52.1. Supondo que $k=10$, temos que:

$$f(t)=\frac{10}{3-2e^{-0,13t}}$$

Assim, como $f(t)$ é o número de coelhos, em milhares, t semanas após a deteção da doença, a solução da equação $f(t)=9$ é o número t de semanas após a deteção da doença em que existiam 9 milhares de coelhos.
Resolvendo a equação temos que:

$$f(t)=9 \Leftrightarrow \frac{10}{3-2e^{-0,13t}}=9 \Leftrightarrow \frac{10}{9}=3-2e^{-0,13t} \Leftrightarrow 2e^{-0,13t}=3-\frac{10}{9} \Leftrightarrow 2e^{-0,13t}=\frac{27}{9}-\frac{10}{9} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2e^{-0,13t}=\frac{17}{9} \Leftrightarrow e^{-0,13t}=\frac{17}{18} \Leftrightarrow -0,13t=\ln\left(\frac{17}{18}\right) \Leftrightarrow t=\frac{\ln\left(\frac{17}{18}\right)}{-0,13}$$

Logo, o número de coelhos existentes na região é igual a 9000 ao fim de $\frac{\ln\left(\frac{17}{18}\right)}{-0,13}\approx 0,4397$ semanas.

Como cada semana tem 7 dias, o número de coelhos existentes na região é igual a 9000 ao fim de $0,4397\times 7\approx 3$ dias.

52.2. O número de coelhos no início da primeira semana ($t = 0$), é dado por $f(0)$ e no final da primeira semana ($t = 1$) é dado por $f(1)$

Como durante a primeira semana, morreram dois mil coelhos (2 milhares) e não nasceu nenhum, sabemos que

$$f(1) = f(0) - 2$$

Como

- $f(0) = \dfrac{k}{3 - 2e^{-0,13\times 0}} = \dfrac{k}{3 - 2\times 1} = \dfrac{k}{1} = k$
- $f(1) = \dfrac{k}{3 - 2e^{-0,13\times 1}} = \dfrac{k}{3 - 2e^{-0,13}}$

Assim, resolvendo a equação para determinar o valor k, vem:

$$f(1) = f(0) - 2 \Leftrightarrow \frac{k}{3 - 2e^{-0,13}} = k - 2$$

Considerando a aproximação $3 - 2e^{-0,13} \approx 1{,}2438$ vem:

$$\frac{k}{1{,}2438} = k - 2 \Leftrightarrow k = 1{,}2438k - 2 \times 1{,}2438 \Leftrightarrow 2{,}4876 = k(1{,}2438 - 1) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2{,}4876 = k(1{,}2438 - 1) \Leftrightarrow \frac{2{,}4876}{0{,}2438} = k$$

Arredondando o valor de k às décimas, temos que $k \approx 10{,}2$

Teste Intermédio 12.º ano – 15.03.2010

53. Temos que:

$$b = a^2 \underset{a>1}{\Leftrightarrow} a = \sqrt{b} \Leftrightarrow a = b^{\frac{1}{2}}$$

Assim, usando as propriedades dos logaritmos, vem que:

$$1 + \log_b a = 1 + \log_b \left(b^{\frac{1}{2}}\right) = 1 + \frac{1}{2} = \frac{2}{2} + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

Resposta: **Opção D**

Exame – 2009, Ép. especial

54. Como a abcissa do ponto P é positiva, porque este se deslocar sobre o semieixo positivo das abcissas, então podemos considerar a base do triângulo o lado $[OP]$ e a sua medida é a abcissa do ponto P, pelo que $\overline{OP} = x$

Como relativamente à base $[OP]$, a altura é o lado $[PA]$, e a medida da altura é a ordenada do ponto A, temos que $\overline{PA} = f(x) = e^x$

Assim, a área do triângulo $[OAP]$ em função de x (abcissa do ponto P) é:

$$A_{[OAP]} = \frac{\overline{OP} \times \overline{PA}}{2} = \frac{x \times f(x)}{2} = \frac{x.e^x}{2}$$

Resposta: **Opção B**

Exame – 2009, Ép. especial

55.

55.1. Como $M_1 = 0{,}67 \log E_1 - 3{,}25$ e $M_2 = 0{,}67 \log E_2 - 3{,}25$, temos que

$$M_1 - M_2 = 1 \Leftrightarrow 0{,}67 \log E_1 - 3{,}25 - (0{,}67 \log E_2 - 3{,}25) = 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 0{,}67 \log E_1 - 3{,}25 - 0{,}67 \log E_2 + 3{,}25 = 1 \Leftrightarrow 0{,}67 \log E_1 - 0{,}67 \log E_2 = 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 0{,}67(\log E_1 - \log E_2) = 1 \Leftrightarrow \log E_1 - \log E_2 = \frac{1}{0{,}67} \Leftrightarrow \log \frac{E_1}{E_2} = \frac{1}{0{,}67} \Leftrightarrow \frac{E_1}{E_2} = 10^{\frac{1}{0{,}67}}$$

E assim temos que $\frac{E_1}{E_2} \approx 31$

Assim, no contexto da situação descrita, como $M_1 - M_2 = 1$ e $\frac{E_1}{E_2} \approx 31 \Leftrightarrow E_1 \approx 31E_2$, temos que para quaisquer dois sismos cujas magnitudes tenham a diferença de uma unidade (na escala de Richter) a energia libertada (em joules) pela sismo de maior magnitude é aproximadamente 31 vezes superior à que é libertada pelo sismo de menor magnitude.

55.2. Como o sismo teve magnitude 4,7, na escala de Richter, vem que $M = 4{,}7$

E assim, substituindo o valor de M na expressão $M = 0{,}67 \log E - 3{,}25$, e calculando o valor de E, vem:

$$4{,}7 = 0{,}67 \log E - 3{,}25 \Leftrightarrow 4{,}7 + 3{,}25 = 0{,}67 \log E \Leftrightarrow \frac{7{,}95}{0{,}67} \log E \Leftrightarrow E = 10^{\frac{7{,}95}{0{,}67}}$$

Assim, a energia libertada nesse sismo, em notação científica, foi de, aproximadamente 7×10^{11} joules

Exame – 2009, Ép. especial

56. Calculando as imagens das abcissas dos pontos indicados em cada uma das opções pela função f, temos:

- $f(-1) = e^{-1+1} = e^0 = 1$
- $f(\ln 2) = e^{\ln 2 + 1} = e^{\ln 2} \times e^1 = 2 \times e = 2e$
- $f(\ln 5) = e^{\ln 5 + 1} = e^{\ln 5} \times e^1 = 2 \times e = 5e$
- $f(-2) = e^{-2+1} = e^{-1} = \frac{1}{e}$

Pelo que podemos verificar que, de entre os pontos apresentados, o ponto de coordenadas $(\ln 2, 2e)$ é o único que pertence ao gráfico de f

Resposta: **Opção B**

Exame – 2009, 2.ª Fase

57. Calculando a área afetada quando a doença foi detetada ($t = 0$), e a área afetada uma semana depois ($t = 1$), temos:

$$A(0) = 2 - 0 + 5 \ln(0 + 1) = 2 + 5 \times 0 = 2$$

$$A(1) = 2 - 1 + 5 \ln(1 + 1) = 1 + 5 \ln(2)$$

Assim, o aumento da área afetada registado na primeira semana, em hectares, arredondado às centésimas é de

$$A(1) - A(0) = 1 + 5 \ln(2) - 2 = 5 \ln(2) - 1 \approx 2{,}47 \text{ ha}$$

Exame – 2009, 2.ª Fase

58. Usando as propriedades das potências e dos logaritmos, temos que:

$$e^{4\ln x} - 10^{2\log x} = e^{\ln x^4} - 10^{\log x^2} = x^4 - x^2$$

Resposta: **Opção C**

Exame – 2009, 1.ª Fase

59. Como os domínios de f e g são, respetivamente $]1,+\infty[$ e $]-\infty,2[$, então a condição $f(x) \geq 1 + h(x)$ está definida em

$$]1,+\infty[\cap]-\infty,2[=]1,2[$$

Assim, vem que:

$$f(x) \geq 1 + h(x) \Leftrightarrow \log_2(x-1) \geq 1 + \log_2(2-x) \Leftrightarrow \log_2(x-1) \geq \log_2 2 + \log_2(2-x) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \log_2(x-1) \geq \log_2\left(2 \times (2-x)\right) \Leftrightarrow \log_2(x-1) \geq \log_2(4-2x) \Leftrightarrow$$

(como $\log_2 x$ é crescente no seu domínio)

$$\Leftrightarrow x - 1 \geq 4 - 2x \Leftrightarrow x + 2x \geq 4 + 1 \Leftrightarrow 3x \geq 5 \Leftrightarrow x \geq \frac{5}{3}$$

Como $f(x) \geq 1 + h(x)$ está definida em $]1,2[$, o conjunto solução é

$$\left[\frac{5}{3},+\infty\right[\cap]1,2[=\left[\frac{5}{3},2\right[$$

Exame – 2009, 1.ª Fase

60. Usando as propriedades dos logaritmos temos que:

$$\log_a x = 1 + 5\log_a y \Leftrightarrow \log_a x = \log_a a + \log_a y^5 \Leftrightarrow \log_a x = \log_a\left(a \times y^5\right) \Rightarrow x = ay^5$$

Resposta: **Opção A**

Teste Intermédio 12.º ano – 27.05.2009

61. Como

- $x - 1 > 0 \Leftrightarrow x > 1$
- $13 - x > 0 \Leftrightarrow -x > -13 \Leftrightarrow x < 13$

Então os valores de x para os quais a inequação está definida são:

$$]1,+\infty[\cap]-\infty,13[=]1,13[$$

E, resolvendo a inequação, vem que:

$$\log_2(x-1)+\log_2(13-x)\leq 5 \Leftrightarrow \log_2\big((x-1)\times(13-x)\big)\leq \log_2 2^5 \Leftrightarrow$$

(como $\log_2 x$ é crescente no seu domínio)

$$\Leftrightarrow (x-1)\times(13-x)\leq 2^5 \Leftrightarrow 13x-x^2-13+x\leq 32 \Leftrightarrow -x^2+14x-13-32\leq 0 \Leftrightarrow -x^2+14x-45\leq 0 \Leftrightarrow$$

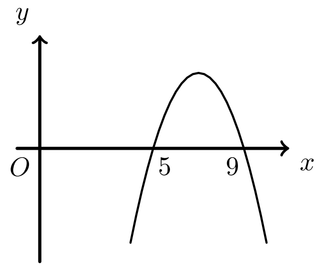
$$\Leftrightarrow (x-5)(x-9)\leq 0 \Leftrightarrow x\leq 5 \vee x\geq 9$$

Cálculos auxiliares:

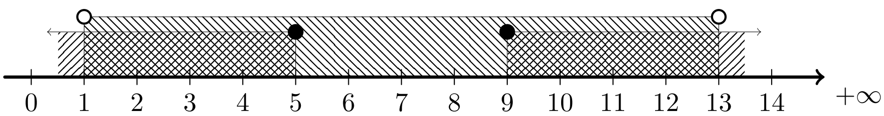
$$-x^2+14x-45=0 \Leftrightarrow x=\frac{-14\pm\sqrt{14^2-4(-1)(-45)}}{2(-1)} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x=\frac{-14\pm\sqrt{16}}{-2} \Leftrightarrow x=\frac{-14+4}{-2} \vee x=\frac{-14-4}{-2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x=5 \vee x=9$$



Como a inequação está definida para $x\in]1,13[$, representando a interseção dos conjuntos, temos:



E assim, o conjunto solução da inequação é

$$]1,5]\cup[9,13[$$

Teste Intermédio 12.º ano – 11.03.2009

62.

62.1. Escrevendo os dados apresentados com recurso à função descrita, temos que:

- A massa de *carbono-14* presente no fóssil, mil anos depois de um certo instante inicial, era de 2,91g, significa que
$$m(1) = 2{,}91$$
- A massa de *carbono-14* presente no fóssil, dois mil anos depois do mesmo instante inicial, era de 2,58g, significa que
$$m(2) = 2{,}58$$

Assim, temos que:
$$ae^{b\times 1} = 2{,}91 \text{ e que } ae^{b\times 2} = 2{,}58$$

Como o valor de a é o mesmo (porque é a massa da substância no referido instante inicial), então como:
$$a = \frac{2{,}91}{e^b} \text{ e como } a = \frac{2{,}58}{e^{2b}}$$

Calculando o valor de b e arredondando o resultado às centésimas, vem que:
$$\frac{2{,}91}{e^b} = \frac{2{,}58}{e^{2b}} \Leftrightarrow \frac{e^{2b}}{e^b} = \frac{2{,}58}{2{,}91} \Leftrightarrow e^{2b-b} = \frac{2{,}58}{2{,}91} \Leftrightarrow e^b = \frac{2{,}58}{2{,}91} \Leftrightarrow b = \ln\left(\frac{2{,}58}{2{,}91}\right) \Rightarrow b \approx -0{,}12$$

Utilizando o valor de b para determinar o valor de a, ou seja, a massa de *carbono-14* que existia no fóssil, no referido instante inicial, e arredondando o resultado final às centésimas, temos:
$$m(1) = 2{,}91 \Leftrightarrow ae^b = 2{,}91 \Rightarrow ae^{-0{,}120} \approx 2{,}91 \Rightarrow a \times 0{,}887 \approx 2{,}91 \Rightarrow a \approx \frac{2{,}91}{0{,}887} \Rightarrow a \approx 3{,}28 \text{ g}$$

62.2. Considerando $b = -0{,}43$ temos que:
$$\frac{m(t+1{,}6)}{m(t)} = \frac{ae^{-0{,}43(t+1{,}6)}}{ae^{-0{,}43t}} = \frac{e^{-0{,}43(t+1{,}6)}}{e^{-0{,}43t}} = e^{-0{,}43(t+1{,}6)-(-0{,}43t)} = e^{-0{,}43t-0{,}688+0{,}43t} = e^{-0{,}688}$$

Assim, temos que $\frac{m(t+1{,}6)}{m(t)}$ é constante e o valor dessa constante, arredondado às décimas, é
$$e^{-0{,}688} \approx 0{,}5$$

E assim temos que:
$$\frac{m(t+1{,}6)}{m(t)} \approx 0{,}5 \Leftrightarrow m(t+1{,}6) \approx 0{,}5\, m(t)$$

o que significa que a passagem de 1,6 milhares de anos, ou seja, 1600 anos, implica uma diminuição da massa de *radio-266* para metade.

Teste Intermédio 12.º ano – 11.03.2009

63. Usando as propriedades dos logaritmos temos que:
$$x.\ln\left(e^e\right) = x.e\ln e = x.e \times 1 = ex$$

Resposta: **Opção A**

Exame – 2008, Ép. especial

64. Equacionado o problema e resolvendo a equação, vem:

$$T(t) = 36 \Leftrightarrow 25 + 48e^{-0{,}05t} = 36 \Leftrightarrow 48e^{-0{,}05t} = 36 - 25 \Leftrightarrow e^{-0{,}05t} = \frac{11}{48} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -0{,}05t = \ln\frac{11}{48} \Leftrightarrow t = \frac{\ln\frac{11}{48}}{-0{,}05} \Rightarrow t \approx 29{,}4661$$

Assim temos que o tempo corresponde a 29,4661 minutos, aproximadamente. E como cada minuto tem 60 segundos, fazendo a conversão de 0,4661 minutos para segundos, vem

$$0{,}4661 \times 60 = 27{,}9660 \approx 28 \text{ s}$$

Pelo que se concluí que demorou 29 minutos e 28 segundos, após o início do arrefecimento, para que a temperatura da água atingisse os 36º Celsius.

Exame – 2008, Ép. especial

65. Como o ponto $P(1{,}3)$ pertence ao gráfico da função, substituindo as coordenadas na expressão algébrica da função, e resolvendo a equação, podemos determinar o valor de a:

$$3 = 2^{a\times 1} - 1 \Leftrightarrow 3 + 1 = 2^a \Leftrightarrow 4 = 2^a \Leftrightarrow a = \log_2 4 \Leftrightarrow a = 2$$

Resposta: **Opção A**

Exame – 2008, 2.ª Fase

66. Determinando a massa inicial da amostra da substância radioativa, ou seja a massa ao fim de zero horas $(t = 0)$, vem que:

$$M(0) = 15 \times e^{-0{,}02\times 0} = 15 \times e^0 = 15 \times 1 = 15$$

Assim, equacionado o problema e resolvendo a equação vem:

$$M(t) = \frac{15}{2} \Leftrightarrow 15 \times e^{-0{,}02t} = \frac{15}{2} \Leftrightarrow e^{-0{,}02t} = \frac{15}{2\times 15} \Leftrightarrow e^{-0{,}02t} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -0{,}02t = \ln\frac{1}{2} \Leftrightarrow t = \frac{\ln\frac{1}{2}}{-0{,}02} \Rightarrow t \approx 34{,}657$$

Assim temos que o tempo corresponde a 34,657 horas, aproximadamente. E como cada hora tem 60 minutos, fazendo a conversão de 0,657 horas para minutos, vem

$$0{,}657 \times 60 = 39{,}420 \approx 39 \text{ min}$$

Pelo que se concluí ao fim de 34 horas e 39 minutos a massa inicial da amostra da substância radioativa se reduz a metade.

Exame – 2008, 2.ª Fase

67. Usando as propriedades dos logaritmos temos que:

$$2\log_a\left(a^{\frac{1}{3}}\right) = 2 \times \frac{1}{3}\log_a a = \frac{2}{3}\log_a a = \frac{2}{3} \times 1 = \frac{2}{3}$$

Resposta: **Opção D**

Exame – 2008, 1.ª Fase

68. Equacionado o problema e resolvendo a equação, vem:

$$N(t) = 1000 \Leftrightarrow \frac{2000}{1+199e^{-0,01t}} = 1000 \Leftrightarrow \frac{2000}{1000} = 1+199e^{-0,01t} \Leftrightarrow 2-1 = 199e^{-0,01t} \Leftrightarrow \frac{1}{199} = e^{-0,01t} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -0,01t = \ln\frac{1}{199} \Leftrightarrow t = \frac{\ln\frac{1}{199}}{-0,01} \Rightarrow t \approx 529,330$$

Assim, podemos observar que ao fim de 529 dias ainda a associação ainda não contava com 1000 associados e que este número foi atingido durante o 530º dia.

Exame – 2008, 1.ª Fase

69. Usando as propriedades dos logaritmos temos que:

$$\log_a 3 + 2\log_a 5 = \log_a 3 + \log_a \left(5^2\right) = \log_a \left(3\times 5^2\right) = \log_a (3\times 25) = \log_a 75$$

Resposta: **Opção C**

Teste Intermédio 12.º ano – 29.04.2008

70.

70.1. Supondo que foram introduzidos 100 peixes no lago, temos que:

$$f(0) = 100 \Leftrightarrow \frac{2000}{1+ke^{-0,13\times 0}} = 100 \Leftrightarrow \frac{2000}{1+ke^{0}} = 100 \Leftrightarrow \frac{2000}{1+k\times 1} = 100 \Leftrightarrow 2000 = 100\,(1+k) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2000 = 100+100k \Leftrightarrow 2000-100 = 100k \Leftrightarrow \frac{1900}{100} = k \Leftrightarrow 19 = k$$

70.2. O número de anos que decorre até que o número de peixes no lago atinge o meio milhar (500), é a solução da equação $f(t) = 500$
Assim, considerando $k = 24$, resolvendo a equação e apresentando o resultado arredondado às unidades, temos que:

$$f(t) = 500 \Leftrightarrow \frac{2000}{1+24e^{-0,13t}} = 500 \Leftrightarrow 2000 = 500\left(1+24e^{-0,13t}\right) \Leftrightarrow 2000 = 500+12000e^{-0,13t} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2000-500 = 12000e^{-0,13t} \Leftrightarrow \frac{1500}{12000} = e^{-0,13t} \Leftrightarrow \frac{1}{8} = e^{-0,13t} \Leftrightarrow -0,13t = \ln\left(\frac{1}{8}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -0,13t = \ln 1 - \ln 8 \Leftrightarrow -0,13t = -\ln 8 \Leftrightarrow t = \frac{-\ln 8}{-0,13} \Leftrightarrow t = \frac{\ln 8}{0,13} \Rightarrow t \approx 16$$

Teste Intermédio 12.º ano – 29.04.2008

71. Usando as propriedades dos logaritmos, vem que:

$$\log_5(x) = \pi - 1 \Leftrightarrow x = 5^{\pi-1} \Leftrightarrow 5\times x = 5\times 5^{\pi-1} \Leftrightarrow 5x = 5^{1+\pi-1} \Leftrightarrow 5x = 5^{\pi}$$

Resposta: **Opção C**

Teste Intermédio 12.º ano – 17.01.2008

72.

72.1. Como o número de indivíduos que existiam no instante inicial é a, então r vezes o número de indivíduos que existiam no instante inicial é $r \times a$

Por outro lado a população de indivíduos ao fim de n dias é $P(n) = ae^{kn}$

Assim, temos que:

$$r \times a = ae^{kn} \Leftrightarrow r = \frac{ae^{kn}}{a} \Leftrightarrow r = e^{kn} \Leftrightarrow kn = \ln(r) \Leftrightarrow k = \frac{\ln(r)}{n}$$

72.2. Como no instante inicial em cada colónia foram colocadas 500 bactérias temos que $a = 500$, e decorrido exatamente um dia, a estirpe A estava reduzida a 250 indivíduos, pelo que $P(1) = 250$

Assim, resolvendo a equação podemos calcular o valor de k_A , com quatro casas decimais:

$$P(1) = 250 \Leftrightarrow 500e^{k_A \times 1} = 250 \Leftrightarrow e^{k_A} = \frac{250}{500} \Leftrightarrow e^{k_A} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow k_A = \ln\left(\frac{1}{2}\right) \Rightarrow k_A \approx -0{,}6931$$

Relativamente à estirpe B, como após seis dias a população era de 1000 indivíduos, temos que $P(6) = 1000$

Assim, resolvendo a equação podemos calcular o valor de k_B, com quatro casas decimais:

$$P(6) = 1000 \Leftrightarrow 500e^{k_B \times 6} = 1000 \Leftrightarrow e^{6k_B} = \frac{1000}{500} \Leftrightarrow e^{6k_B} = 2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 6k_B = \ln(2) \Leftrightarrow k_B = \frac{\ln(2)}{6} \Rightarrow k_B \approx 0{,}1155$$

Teste Intermédio 12.º ano – 17.01.2008

73. As abcissas dos pontos de interseção do gráfico de f com o eixo Ox são as soluções da equação $f(x) = 0$. Resolvendo a equação, temos que:

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow 1 - \ln\left(x^2\right) = 0 \Leftrightarrow 1 = \ln\left(x^2\right) \Leftrightarrow x^2 = e^1 \Leftrightarrow x^2 = e \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{e}$$

Assim, temos que as coordenadas dos pontos de interseção do gráfico de f com o eixo Ox são:

$$\left(-\sqrt{e}{,}0\right) \text{ e } \left(\sqrt{e}{,}0\right)$$

Exame – 2007, 2.ª Fase

74. Resolvendo a inequação temos que:

$$\ln(x) - \ln\left(e^{\frac{1}{3}}\right) > 0 \Leftrightarrow \ln(x) > \ln\left(e^{\frac{1}{3}}\right) \Leftrightarrow x > e^{\frac{1}{3}} \Leftrightarrow x > \sqrt[3]{e}$$

Como $\sqrt[3]{e} \approx 1{,}4$, temos que, de entre as opções apresentadas, o único valor possível para x é 2

Resposta: **Opção D**

Exame – 2007, 1.ª fase

75. Calculando a intensidade da luz solar à superfície da água, ou seja a zero metros de profundidade temos:

$$I(0) = ae^{-b \times 0} = ae^0 = a \times 1 = a$$

Como a 20 metros de profundidade, a intensidade da luz solar era metade da sua intensidade à superfície da água, temos que $I(20) = \frac{I(0)}{2}$

Resolvendo a equação, e apresentando o resultado arredondado às centésimas, vem que:

$$I(20) = \frac{I(0)}{2} \Leftrightarrow ae^{-b \times 20} = \frac{a}{2} \Leftrightarrow e^{-20b} = \frac{a}{2a} \underset{a \neq 0}{\Leftrightarrow} e^{-20b} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow -20b = \ln\left(\frac{1}{2}\right) \Leftrightarrow b = \frac{\ln\left(\frac{1}{2}\right)}{-20} \Rightarrow b \approx 0{,}03$$

Exame – 2007, 1.ª Fase

76. Resolvendo a inequação, temos que:

$$e^{-x} > \frac{1}{e} \Leftrightarrow \frac{1}{e^x} > \frac{1}{e} \underset{(1)}{\Leftrightarrow} e > e^x \Leftrightarrow e^1 > e^x \underset{(2)}{\Leftrightarrow} 1 > x \Leftrightarrow x < 1$$

(1) $e^x > 0, \forall x \in \mathbb{R}$

(2) e^x é crescente no seu domínio

Escrevendo as soluções na forma de intervalo de números reais temos: $]-\infty,1[$

Resposta: **Opção B**

Teste Intermédio 12.º ano – 15.03.2007

77. Usando as propriedades dos logaritmos, vem que:

$$\log_a \left(a \times \sqrt[3]{a}\right) = \log_a a + \log_a \sqrt[3]{a} = 1 + \log_a \left(a^{\frac{1}{3}}\right) = 1 + \frac{1}{3}\log_a a = 1 + \frac{1}{3} \times 1 = \frac{3}{3} + \frac{1}{3} = \frac{4}{3}$$

Resposta: **Opção B**

Teste Intermédio 12.º ano – 15.03.2007

78.

78.1. Substituindo na equação o valor do pH por 7,4, resolvendo a equação e apresentando o resultado na forma solicitada, temos:

$$7{,}4 = -\log(x) \Leftrightarrow -7{,}4 = \log(x) \Leftrightarrow x = 10^{-7{,}4} \Rightarrow x \approx 4 \times 10^{-8} \text{ mol/dm}^3$$

78.2. Designando por l a concentração de iões H_3O^+ no leite, temos que:

- o pH do leite é $-\log(l)$
- a concentração de iões H_3O^+ no café é $3l$
- o pH do café é $-\log(3l)$

Assim a diferença entre o pH do leite e o pH do café é:

$$-\log(l) - \big(-\log(3l)\big)$$

Simplificando a expressão e apresentando o resultado arredondado às décimas, vem:

$$-\log(l) - \big(-\log(3l)\big) = -\log(l) + \log(3l) = \log(3l) - \log(l) = \log\frac{3l}{l} = \log 3 \approx 0{,}5$$

Teste Intermédio 12.º ano – 15.03.2007

79. Como o ponto A é o ponto de interseção do gráfico de f com o eixo Ox, então resolvendo a equação $f(x) = 0$, temos:

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow e^x - c = 0 \Leftrightarrow e^x = c \Leftrightarrow x = \ln c$$

E assim, o ponto A tem coordenadas $A(\ln c,0)$

Como o ponto B é o ponto de interseção do gráfico de f com o eixo Oy, então calculando $f(0)$ temos:

$$f(0) = e^0 - c = 1 - c$$

E assim, o ponto B tem coordenadas $B(0,1-c)$

Determinando o declive da reta AB recorrendo às coordenadas dos pontos A e B, vem:

$$m_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{1-c-0}{0-\ln c} = \frac{1-c}{-\ln c}$$

Como o declive da reta AB é $c-1$, estabelecendo a igualdade e resolvendo a equação, temos:

$$m_{AB} = c-1 \Leftrightarrow \frac{1-c}{-\ln c} = c-1 \Leftrightarrow \frac{1-c}{-(c-1)} = \ln c \Leftrightarrow \frac{1-c}{1-c} = \ln c \Leftrightarrow 1 = \ln c \Leftrightarrow c = e^1 \Leftrightarrow c = e$$

Teste Intermédio 12.º ano – 15.03.2007

80. Como o ponto $(0,2)$ pertence ao gráfico de f, temos que $f(0) = 2$, e assim vem que:

$$f(0) = 2 \Leftrightarrow a^0 + b = 2 \Leftrightarrow 1 + b = 2 \Leftrightarrow b = 2 - 1 \Leftrightarrow b = 1$$

Como o ponto $(1,3)$ pertence ao gráfico de f, temos que $f(1) = 3$, e como $b = 1$ vem que:

$$f(1) = 3 \Leftrightarrow a^1 + b = 3 \Leftrightarrow a + 1 = 3 \Leftrightarrow a = 3 - 1 \Leftrightarrow a = 2$$

Resposta: **Opção A**

Exame – 2006, 2.ª Fase

81. Usando as propriedades dos logaritmos, vem que:

$$h(x) = \frac{\ln\left(\sqrt{e^x}\right)}{2} = \frac{\ln\left(e^{\frac{x}{2}}\right)}{2} = \frac{\frac{x}{2}\ln(e)}{2} = \frac{\frac{x}{2}\times 1}{2} = \frac{x}{4}$$

Resposta: **Opção C**

Exame – 2006, 1.ª fase

82. Como o triângulo $[OPQ]$ é isósceles, então a abcissa do Q é o dobro da abcissa do ponto P, pelo que a abcissa do ponto Q é $2x$

Como o ponto P pertence ao gráfico de f, então a ordenada de P é $f(x) = e^{-x}$

Considerando o lado $[OQ]$ como a base do triângulo, temos que a área do triângulo $[OPQ]$ é:

$$A(x) = \frac{2x \times e^{-x}}{2} = xe^{-x}$$

Exame – 2006, 1.ª fase

83. Resolvendo a equação temos:

$$e^{x-2} = \frac{1}{\sqrt{e}} \Leftrightarrow e^{x-2} = \frac{1}{e^{\frac{1}{2}}} \Leftrightarrow \Leftrightarrow e^{x-2} = e^{-\frac{1}{2}} \Leftrightarrow x - 2 = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2} + 2 \Leftrightarrow x = \frac{3}{2}$$

Resposta: **Opção B**

Teste Intermédio 12.º ano – 17.03.2006

84. Resolvendo a inequação, temos que:

$$\log_3(1-x) \leq 1 \Leftrightarrow \log_3(1-x) \leq \log_3 3 \underset{(1)}{\Leftrightarrow} 1-x \leq 3 \wedge 1-x > 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -x \leq 3-1 \wedge -x > -1 \Leftrightarrow x \geq -2 \wedge x < 1$$

(1) $\log_3 x$ é crescente no seu domínio e só está definida para valores positivos

Escrevendo as soluções na forma de intervalo de números reais temos: $[-2,1[$

Resposta: **Opção A**

Teste Intermédio 12.º ano – 17.03.2006

85. Podemos determinar a ordenada do ponto A, calculando a imagem de zero pela função f:

$$y_A = f(0) = e^0 = 1$$

Como $\overline{AC} = \overline{OA}$, então a ordenada do ponto C é o dobro da ordenada do ponto A:

$$y_C = 2 \times y_A = 2 \times 1 = 2$$

Pelo que, podemos calcular a ordenada do ponto E, ou seja, a medida da base do triângulo:

$$\ln x = 2 \Leftrightarrow x = e^2$$

Como a abcissa do ponto B é:

$$\ln x = 0 \Leftrightarrow x = e^0 \Leftrightarrow x = 1$$

Logo a ordenada do ponto D é:

$$y_D = f(1) = e^1 = e$$

Desta forma, a altura do triângulo (relativamente ao lado $[CE]$) é:

$$y_D - y_C = e - 2$$

E assim, a área do triângulo é:

$$A_{[CDE]} = \frac{x_E \times (y_D - y_C)}{2} = \frac{e^2(e-2)}{2}$$

Resposta: **Opção D**

Teste Intermédio 12.º ano – 17.03.2006

86. Como x é o preço de venda ao público, em euros, de 1 litro de azeite, e por cada litro de azeite vendido a empresa tem uma despesa de 3 euros, então o lucro obtido por cada litro de azeite é $x-3$

Assim, o lucro obtido ($L(x)$) será o produto do lucro obtido por litro de azeite ($x-3$), pela quantidade de litros de azeite vendida ($V(x)$):

$$L(x) = (x-3) \times V(x) = (x-3)e^{14-x}$$

Teste Intermédio 12.º ano – 17.03.2006

87. Usando a definição e as propriedades dos logaritmos, temos que:

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1-\ln\left(\frac{1}{2}\right)}{\frac{1}{2}} = \frac{1-(\ln 1 - \ln 2)}{\frac{1}{2}} = \frac{1-(0-\ln 2)}{\frac{1}{2}} = \frac{1+\ln 2}{\frac{1}{2}} = 2(1+\ln 2) =$$

$$= 2 + 2\ln 2 = \ln\left(e^2\right) + \ln\left(2^2\right) = \ln\left(e^2 \times 2^2\right) = \ln\left(4e^2\right)$$

Teste Intermédio 12.º ano – 17.03.2006

88.

88.1. Relativamente ao planeta Úrano, temos que:

- Como $t = 84$, então, vem que:
$$2\ln(84) = k + 3\ln(d_U)$$
- Como a distância média de Úrano ao Sol (d_U) é o dobro da distância média de Saturno ao Sol (d_S), ou seja:
$$d_U = 2d_S$$

Logo, temos que:

$$2\ln(84) = k + 3\ln(2d_S) \Leftrightarrow 2\ln(84) = k + 3\left(\ln(2) + \ln(d_S)\right) \Leftrightarrow 2\ln(84) - k - 3\ln(2) = 3\ln(d_S)$$

Assim, calculando o tempo, em anos, que demora o planeta Saturno a realizar uma translação completa em torno do Sol (t_S) e apresentando o resultado arredondado às décimas, temos:

$$2\ln(t_S) = k + 3\ln(d_S) \Leftrightarrow 2\ln(t_S) = k + 2\ln(84) - k - 3\ln(2) \Leftrightarrow \ln(t_S) = \frac{2\ln(84) - 3\ln(2)}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ln(t_S) \approx 3{,}391 \Rightarrow t_S \approx e^{3{,}391} \Rightarrow t_S \approx 29{,}7$$

88.2. Como, no caso da Terra, $t = 1$ e $d = 149{,}6$, determinando o valor de k, e apresentando o resultado arredondado às unidades, vem que:

$$2\ln(1) = k + 3\ln(149{,}6) \Leftrightarrow 2 \times 0 = k + 3\ln(149{,}6) \Leftrightarrow -3\ln(149{,}6) = k \Rightarrow k \approx -15$$

Exame – 2005, Ép. especial (cód. 435)

89. Recorrendo à definição de taxa de variação média de uma função num intervalo, e das propriedades dos logaritmos:

$$TVM_{[1,3]}h(x) = \frac{h(3) - h(1)}{3 - 1} = \frac{2(3) + 10\ln(1 - 0{,}1 \times 3) - \big(2(1) + 10\ln(1 - 0{,}1 \times 1)\big)}{2} =$$

$$= \frac{6 + 10\ln(1 - 0{,}3) - \big(2 + 10\ln(1 - 0{,}1)\big)}{2} = \frac{6 + 10\ln(0{,}7) - 2 - 10\ln(0{,}9)}{2} =$$

$$= \frac{6 - 2 + 10\big(\ln(0{,}7) - \ln(0{,}9)\big)}{2} = \frac{4 + 10\left(\ln\left(\frac{0{,}7}{0{,}9}\right)\right)}{2} = 2 + 5\left(\ln\left(\frac{0{,}7}{0{,}9}\right)\right) =$$

$$= \ln\left(e^2\right) + 5 \times \ln\left(\frac{7}{9}\right) = \ln\left(e^2\right) + \ln\left(\left(\frac{7}{9}\right)^5\right) = \ln\left[e^2\left(\frac{7}{9}\right)^5\right]$$

Exame – 2005, 2.ª Fase (cód. 435)

90. Relativamente à base $[OB]$, a altura é o segmento $[BA]$, e assim temos que a medida da altura é a abcissa do ponto A e a medida da base é a ordenada do ponto A:

- $\overline{BA} = x_A = 3$
- $\overline{OB} = y_A = f(3) = \log_2(3 + 1) = \log_2(4) = 2$

Pelo que a área do triângulo $[ABO]$ é:

$$A_{[ABO]} = \frac{\overline{BA} \times \overline{OB}}{2} = \frac{3 \times 2}{2} = 3$$

Resposta: **Opção C**

Exame – 2005, 1.ª fase (cód. 435)

91. A população de aves que existia no início de 1970, ou seja zero anos após o início de 1970 é:

$$P(0) = 5{,}2 \times 10^7 \times e^{(N-M)\times 0} = 5{,}2 \times 10^7 \times e^0 = 5{,}2 \times 10^7 \times 1 = 5{,}2 \times 10^7$$

Como no início de 2000 tinham passado exatamente $2000 - 1970 = 30$ anos, e a população era metade da que existia no início de 1970, então temos que:

$$P(30) = \frac{5{,}2 \times 10^7}{2}$$

Como a *taxa de natalidade* é 7,56, podemos determinar a *taxa de mortalidade* (M), e arredondar o valor às centésimas:

$$5{,}2 \times 10^7 \times e^{(7{,}56-M)\times 30} = \frac{5{,}2 \times 10^7}{2} \Leftrightarrow e^{(7{,}56-M)\times 30} = \frac{5{,}2 \times 10^7}{2 \times 5{,}2 \times 10^7} \Leftrightarrow e^{(7{,}56-M)\times 30} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \ln(0{,}5) = 30(7{,}56 - M) \Leftrightarrow \frac{\ln(0{,}5)}{30} = 7{,}56 - M \Leftrightarrow M = 7{,}56 - \frac{\ln(0{,}5)}{30} \Leftarrow M \approx 7{,}58$$

Exame – 2005, 1.ª Fase (cód. 435)

92. Relativamente à base $[RQ]$, cuja medida é igual à abcissa do ponto Q, a altura é a diferença das ordenadas dos pontos Q e P, e assim temos que as medidas da da base (b) e das altura(h), são:

- $b = x_Q = 9a$
- $h = y_Q - y_P = f(9a) - f(a) = \log_3(9a) - \log_3(a) = \log_3\left(\frac{9a}{a}\right) = \log_3(9) = 2$

Pelo que a área do triângulo $[PQR]$ é:

$$A_{[PQR]} = \frac{b \times h}{2} = \frac{9a \times 2}{2} = 9a$$

Resposta: **Opção B**

Exame – 2004, Ép. especial (cód. 435)

93. Usando a definição de logaritmo, temos que:

$$\log_p 16 = 4 \Leftrightarrow p^4 = 16 \underset{p>0}{\Rightarrow} p = \sqrt[4]{16} \Leftrightarrow p = 2$$

Resposta: **Opção C**

Exame – 2004, 2.ª Fase (cód. 435)

94. Usando a definição e as propriedades dos logaritmos, e como $\log_2 a = \frac{1}{5}$, temos que:

$$\log_2\left(\frac{a^5}{8}\right) = \log_2\left(a^5\right) - \log_2(8) = 5 \times \log_2(a) - \log_2(8) = 5 \times \frac{1}{5} - 3 = 1 - 3 = -2$$

Resposta: **Opção B**

Exame – 2004, 1ª Fase (cód. 435)

95. O parâmetro a corresponde a uma translação vertical do gráfico da função definida por $g(x) = e^x$, e como a assintota horizontal do gráfico de f é $y = -1$ (e a do gráfico de g é $y = 0$), então temos que:

$$a = -1$$

Como o gráfico contém o ponto de coordenadas $(0{,}1)$, substituindo as coordenadas do ponto na expressão $f(x) = -1 + be^x$, podemos calcular o valor de b:

$$1 = -1 + be^0 \Leftrightarrow 1 + 1 = b \times 1 \Leftrightarrow 2 = b$$

Resposta: **Opção A**

Exame – 2003, Prova para militares (cód. 435)

96. Como a função logarítmica só está definida para valores positivos do argumento do logaritmo, temos que o domínio da função g é o conjunto (ou qualquer subconjunto deste):

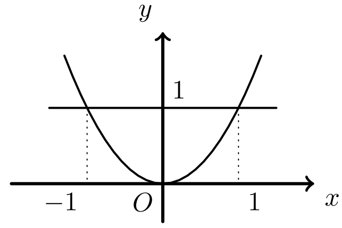
$$\{x \in \mathbb{R} : 1 - x^2 > 0\}$$

Assim, resolvendo a inequação, temos:

$$1 - x^2 > 0 \Leftrightarrow -x^2 > -1 \Leftrightarrow x^2 < 1 \Leftrightarrow x > -1 \vee x < 1$$

Cálculos auxiliares:

$$x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{1} \Leftrightarrow x = 1 \vee x = -1$$



Pelo que, o conjunto solução da inequação (e o domínio da função), é: $]-1,1[$

Resposta: **Opção B**

Exame – 2003, 2.ª fase (cód. 435)

97.

97.1. Como, no modelo, o valor de t é o número de anos decorridos após 1864, no início de 2003 decorreram $2003 - 1864 = 139$ anos, pelo que no final de 2003 decorreram $2003 - 1864 + 1 = 140$ anos.

E assim, substituindo o valor $t = 140$, na expressão do modelo, podemos calcular a população de Portugal Continental no final do ano de 2003, e arredondar o resultado às décimas:

$$p(140) = 3{,}5 + \frac{6{,}8}{1 + 12{,}8e^{-0{,}036\times 140}} \approx 9{,}8 \text{ milhões de habitantes}$$

97.2. Vamos primeiro determinar o número de anos após 1864 em que a população de Portugal Continental foi de 3,7 milhões de habitantes:

$$p(t) = 3{,}7 \Leftrightarrow 3{,}5 + \frac{6{,}8}{1 + 12{,}8e^{-0{,}036t}} = 3{,}7 \Leftrightarrow \frac{6{,}8}{1 + 12{,}8e^{-0{,}036t}} = 3{,}7 - 3{,}5 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{6{,}8}{0{,}2} = 1 + 12{,}8e^{-0{,}036t} \Leftrightarrow 34 = 1 + 12{,}8e^{-0{,}036t} \Leftrightarrow \frac{34-1}{12{,}8} = e^{-0{,}036t} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -0{,}036t = \ln\left(\frac{33}{12{,}8}\right) \Leftrightarrow t = \frac{\ln\left(\frac{33}{12{,}8}\right)}{-0{,}036} \Rightarrow t \approx -26{,}307$$

Como $t = 0$ corresponde ao início do ano 1864, então o ano em que população de Portugal Continental foi de 3,7 milhões de habitantes aconteceu mais de 26 anos anos, ou seja, 27 anos antes, nomeadamente no ano de $1864 - 27 = 1837$

Exame – 2003, 2.ª Fase (cód. 435)

98.

98.1. Como x é a distância à parede A, então para $x = 0$ a altura da rampa é a altura da parede A. Calculando a altura da rampa, em metros, arredondado às décimas, para $x = 0$, temos:

$$h(0) = 15 - 4\ln(-0^2 + 10 \times 0 + 11) = 15 - 4\ln(11) \approx 5{,}4 \text{ m}$$

98.2. Recorrendo às propriedades dos logaritmos, temos que:

- $h(5-x) = 15-4\ln\big(-(5-x)^2+10(5-x)+11\big) = 15-4\ln\big(-(25-10x+x^2)+50-10x+11\big) =$ $= 15-4\ln\big(-25+10x-x^2+61-10x\big) = 15-4\ln\big(-x^2+36\big)$
- $h(5+x) = 15-4\ln\big(-(5+x)^2+10(5+x)+11\big) = 15-4\ln\big(-(25+10x+x^2)+50+10x+11\big) =$ $= 15-4\ln\big(-25-10x-x^2+61+10x\big) = 15-4\ln\big(-x^2+36\big)$

Pelo que podemos concluir que $h(5-x) = h(5+x)$, o que, no contexto da situação descrita significa que a altura da rampa em dois pontos equidistantes do ponto central - situado a 5 metros da parede A ($x=5$) - é igual.

Exame – 2003, 1.ª fase - 2.ª chamada (cód. 435)

99. Como o tempo ”uma hora e trinta minutos da tarde”corresponde ao valor $t = 13{,}5$, então, calculando o nível de poluição e apresentando o resultado arredondado às décimas, temos:

$$P(13{,}5) = 1 - \frac{\ln(13{,}5+1)}{13{,}5+1} \approx 0{,}8 \text{ mg/l}$$

Exame – 2003, 1ª fase - 1ª chamada (cód. 435)

100. Usando as propriedades dos logaritmos, e como $\ln(1) = 0$, temos que:

$$\ln a = -\ln b \Leftrightarrow \ln a + \ln b = 0 \Leftrightarrow \ln(a \times b) = \ln(1) \Leftrightarrow a \times b = 1$$

Resposta: **Opção C**

Exame – 2002, Prova para militares (cód. 435)

101. Como $g(\pi) = 2\operatorname{sen}\pi - \cos\pi = 2\times 0 - (-1) = 1$, resolvendo a equação e apresentando a solução na forma solicitada, vem que:

$$f(x) = g(\pi) \Leftrightarrow \frac{1}{3} + 2e^{1-x} = 1 \Leftrightarrow 2e^{1-x} = 1 - \frac{1}{3} \Leftrightarrow 2e^{1-x} = \frac{2}{3} \Leftrightarrow e^{1-x} = \frac{2}{3\times 2} \Leftrightarrow e^{1-x} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \ln\left(\frac{1}{3}\right) = 1 - x \Leftrightarrow x = 1 - \ln\left(\frac{1}{3}\right) \Leftrightarrow x = \ln e - \ln\left(\frac{1}{3}\right) \Leftrightarrow x = \ln\left(\frac{e}{\frac{1}{3}}\right) \Leftrightarrow x = \ln(3e)$$

Exame – 2002, 2.ª Fase (cód. 435)

102.

102.1. Usando as propriedades dos logaritmos, temos que:

$$N = 10\log_{10}(10^{12}I) = 10\big(\log_{10}(10^{12}) + \log_{10}(I)\big) = 10\times\log_{10}(10^{12}) + 10\log_{10}(I) =$$

$$= 10\times 12\times\log_{10}(10) + 10\log_{10}(I) = 120\times 1 + 10\log_{10}(I) = 120 + 10\log_{10} I$$

102.2. Recorrendo à igualdade anterior e, identificando que $N = 140$, podemos determinar o valor de I, correspondente, em watt por metro quadrado:

$$140 = 120 + 10\log_{10} I \Leftrightarrow 140 - 120 = 10\log_{10} I \Leftrightarrow \frac{20}{10} = \log_{10} I \Leftrightarrow 2 = \log_{10} I \Leftrightarrow I = 10^2 \Leftrightarrow I = 100$$

Exame – 2002, 1.ª fase - 2.ª chamada (cód. 435)

103.

103.1. Como o tempo é medido em horas, quinze minutos corresponde a $t = \frac{1}{4}$, pelo que o valor da concentração do antibiótico no sangue da Ana, quinze depois minutos de ela o ter tomado, arredondado às centésimas é:

$$A\left(\frac{1}{4}\right) = 4\left(\frac{1}{4}\right)^3 e^{-\frac{1}{4}} \approx 0{,}05 \text{ mg/l}$$

103.2. Os instantes em que as concentrações são iguais são as soluções da equação $A(t) = C(t)$.
Assim, resolvendo a equação, temos:

$$A(t) = C(t) \Leftrightarrow 4t^3e^{-t} = 2t^3e^{-0,7t} \Leftrightarrow 4t^3e^{-t} - 2t^3e^{-0,7t} = 0 \Leftrightarrow 2t^3\left(2e^{-t} - e^{-0,7t}\right) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2t^3 = 0 \vee 2e^{-t} - e^{-0,7t} = 0 \Leftrightarrow t^3 = 0 \vee 2e^{-t} = e^{-0,7t} \Leftrightarrow t = 0 \vee 2 = \frac{e^{-0,7t}}{e^{-t}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow t = 0 \vee 2 = e^{-0,7t-(-t)} \Leftrightarrow t = 0 \vee 2 = e^{0,3t} \Leftrightarrow t = 0 \vee 0,3t = \ln 2 \Leftrightarrow t = 0 \vee t = \frac{\ln 2}{0,3}$$

Logo, para além do instante $t = 0$ (correspondente ao instante em que as duas pessoas tomam o medicamento) a concentração volta a ser igual no instante $t = \frac{\ln 2}{0,3} \approx 2,310$. E como cada hora tem 60 minutos, fazendo a conversão de 0,310 horas para minutos, vem:

$$0,310 \times 60 \approx 19 \text{ min}$$

Pelo que se concluí a concentração do medicamento, no sangue da Ana e do Carlos, volta a ser igual ao fim de 2 horas e 19 minutos depois da toma simultânea.

Exame – 2002, 1.ª fase - 1.ª chamada (cód. 435)

104. O tempo necessário para a temperatura do pudim seja igual a doze graus é a solução da equação $f(t) = 12$.
Resolvendo a equação, para valores de $t < 60$, vem:

$$f(t) = 12 \Leftrightarrow 20 + 80 \times 2^{-0,05t} = 12 \Leftrightarrow 80 \times 2^{-0,05t} = 12 - 20 \Leftrightarrow 80 \times 2^{-0,05t} = 12 - 20 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2^{-0,05t} = -\frac{8}{80} \Leftrightarrow 2^{-0,05t} = -0,1 \Leftrightarrow -0,05t = \log_2(-0,1) \text{ Equação impossível}$$

Resolvendo a equação, para valores de $t \geq 60$, vem:

$$f(t) = 12 \Leftrightarrow 6 + 24 \times 2^{-0,05(t-60)} = 12 \Leftrightarrow 24 \times 2^{-0,05(t-60)} = 12 - 6 \Leftrightarrow 2^{-0,05(t-60)} = \frac{6}{24} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2^{-0,05(t-60)} = \frac{1}{4} \Leftrightarrow -0,05(t-60) = \log_2\left(\frac{1}{4}\right) \Leftrightarrow t - 60 = \frac{\log_2(1) - \log_2(4)}{-0,05} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow t = \frac{0-2}{-\frac{5}{100}} + 60 \Leftrightarrow t = \frac{2 \times 100}{5} + 60 \Leftrightarrow t = 40 + 60 \Leftrightarrow t = 100 \text{ min}$$

Desta forma, a única solução da equação $f(t) = 12$ é $t = 100$, o que significa que demora 100 minutos para que a temperatura do pudim fique igual a doze graus. Assim, como o pudim esteve uma hora a arrefecer na bancada (60 min), o pudim deve ficar no frigorífico durante $100 - 60 = 40$

minutos. Exame – 2001, Prova para militares (cód. 435)

105. Usando as propriedades dos logaritmos e das potências, temos que:

$$3y = \log_2 x \Leftrightarrow x = 2^{3y} \Leftrightarrow x = 2^{3y} \Leftrightarrow x = \left(2^3\right)^y \Leftrightarrow x = 8^y$$

Resposta: **Opção A**

Exame – 2001, Ép. especial (cód. 435)

106.

106.1. Usando as propriedades das potências, verificamos que $\dfrac{A(t+1)}{A(t)}$ é constante, porque:

$$\frac{A(t+1)}{A(t)} = \frac{16e^{0,1(t+1)}}{16e^{0,1t}} = \frac{e^{0,1t+0,1}}{e^{0,1t}} = \frac{e^{0,1t} \times e^{0,1}}{e^{0,1t}} = e^{0,1} \approx 1{,}1$$

No contexto da situação descrita, temos que a razão das áreas das manchas observadas com uma diferença de uma hora é 1,1, ou seja, a cada hora a mancha aumenta 0,1 vezes a sua área, o que significa que a mancha aumenta 10% a cada hora.

$$\frac{A(t+1)}{A(t)} \approx 1{,}1 \Leftrightarrow A(t+1) \approx 1{,}1 \times A(t) \Leftrightarrow A(t+1) \approx A(t) + 0{,}1 \times A(t)$$

106.2. Como a mancha de crude é circular, com um raio de sete quilómetros, a área da mancha é:

$$A_M = \pi \times 7^2 = 49\pi$$

Determinando o tempo a que corresponde este valor da área, temos:

$$A(t) = 49\pi \ \Leftrightarrow\ 16e^{0,1t} = 49\pi \ \Leftrightarrow\ e^{0,1t} = \frac{49\pi}{16} \ \Leftrightarrow\ 0{,}1t = \ln\left(\frac{49\pi}{16}\right) \ \Leftrightarrow\ t = \frac{\ln\left(\frac{49\pi}{16}\right)}{0{,}1} \ \Rightarrow\ t \approx 22{,}640$$

Como cada hora tem 60 minutos, fazendo a conversão de 0,640 horas para minutos, vem:

$$0{,}640 \times 60 \approx 38 \text{ min}$$

Assim, temos que a mancha de crude atingirá a costa às 22 horas e 38 minutos do dia seguinte ao acidente.

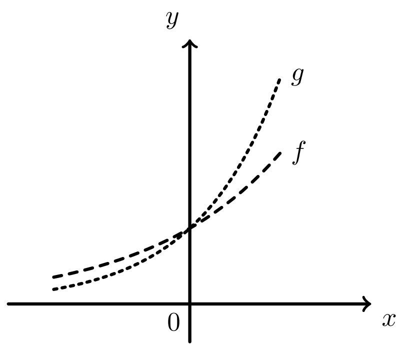
Exame – 2001, 2.ª Fase (cód. 435)

107. Temos que:

- Por exemplo, para $x = -1$ temos que $2^{(} - 1) > 3^{(} - 1) \Leftrightarrow \dfrac{1}{2} > \dfrac{1}{3}$, existe pelo menos um valor de $x \in \mathbb{R}^-$ que é solução da inequação $f(x) > g(x)$
- Por exemplo, para $x = 1$ temos que $2^1 < 3^1 \Leftrightarrow 2 < 3$, existe pelo menos um valor de $x \in \mathbb{R}^+$ que não é solução da inequação $f(x) > g(x)$

Assim, como identificamos uma solução da inequação, podemos garantir que é possível e como identificamos um valor de $x \in \mathbb{R}^+$ podemos garantir que o conjunto solução não é $\mathbb{R}$, nem é $\mathbb{R}^+$, pelo que de, entre as opções apresentadas, podemos concluir que o conjunto solução é $\mathbb{R}^-$

Em alternativa, podemos recorrer à representação gráfica das duas funções para verificar que as ordenadas dos pontos do gráfico de f são superiores às ordenadas dos pontos do gráfico de g para valores negativos de x, como se pode observar na figura ao lado.



Resposta: **Opção B**

Exame – 2001, 1.ª fase - 2.ª chamada (cód. 435)

108.

108.1. Como a altura do Ricardo é $A = 1{,}4$, determinando o peso correspondente, e apresentando o resultado em quilogramas, arredondado às unidades.vem:

$$A(p) = 1{,}4 \Leftrightarrow -0{,}52 + 0{,}55\ln p = 1{,}4 \Leftrightarrow 0{,}55\ln p = 1{,}4 + 0{,}52 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \ln p = \frac{1{,}92}{0{,}55} \Leftrightarrow p = e^{\frac{1{,}92}{0{,}55}} \Rightarrow p \approx 33 \text{ kg}$$

108.2. Recorrendo às propriedades dos logaritmos podemos verificar que $A(2p) - A(p)$ é constante porque:

$$A(2p) - A(p) = -0{,}52 + 0{,}55\ln(2p) - \big(-0{,}52 + 0{,}55\ln p\big) = -0{,}52 + 0{,}55\ln(2p) + 0{,}52 - 0{,}55\ln p =$$

$$= 0{,}55\ln(2p) - 0{,}55\ln p = 0{,}55\big(\ln(2p) - \ln p\big) = 0{,}55\ln\left(\frac{2p}{p}\right) = 0{,}55\ln 2 \approx 0{,}38$$

No contexto da situação descrita, o valor da constante calculada significa que a diferença entre as alturas de duas crianças do sexo masculino, cujos pesos sejam o dobro um do outro, é de 0,38 metros, ou seja, segundo este modelo, a duplicação do peso de uma criança do sexo masculino corresponde um crescimento de 38 centímetros.

Exame – 2001, 1.ª fase - 2.ª chamada (cód. 435)

109. Usando as propriedades das potências e a definição de logaritmo, temos que:

$$e^{2\ln a} = \left(e^{\ln a}\right)^2 = a^2$$

Resposta: **Opção D**

Exame – 2001, 1ª fase - 1ª chamada (cód. 435)

110.

110.1. Como a altitude do cume do Pico é 2350 metros, ou seja, 2,35 quilómetros, então, calculando a pressão atmosférica, em quilopascal, de acordo com o modelo, e arredondado o valor obtido às unidades, temos:

$$P(2{,}35) = 101e^{-0{,}12\times 2{,}35} \approx 76 \text{ kPa}$$

110.2. Resolvendo a equação, e arredondado a solução às décimas, vem que:

$$P(h+x) = \frac{1}{2}P(h) \Leftrightarrow 101e^{-0{,}12(h+x)} = \frac{1}{2}\times 101e^{-0{,}12h} \Leftrightarrow \frac{101e^{-0{,}12h-0{,}12x}}{101e^{-0{,}12h}} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{e^{-0{,}12h-0{,}12x}}{e^{-0{,}12h}} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow e^{-0{,}12h-0{,}12x-(-0{,}12h)} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow e^{-0{,}12x} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -0{,}12x = \ln\left(\frac{1}{2}\right) \Leftrightarrow x = \frac{\ln\left(\frac{1}{2}\right)}{-0{,}12} \Rightarrow x \approx 5{,}8$$

No contexto da situação descrita, $P(h+5{,}8) \approx \frac{1}{2}P(h)$ significa que para um acréscimo de 5,8 km de altitude a pressão atmosférica correspondente se reduz para metade.

Exame – 2000, 2.ª fase (cód. 435)

111. Resolvendo a equação, temos que:

$$\ln[f(x)] = x \Leftrightarrow \ln\left(\frac{e^x}{x-1}\right) = x \Leftrightarrow \ln(e^x) - \ln(x-1) = x \Leftrightarrow x - \ln(x-1) = x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x - x = \ln(x-1) \Leftrightarrow 0 = \ln(x-1) \Leftrightarrow x - 1 = e^0 \Leftrightarrow x - 1 = 1 \Leftrightarrow x = 2$$

Exame – 2000, 1.ª fase - 2.ª chamada (cód. 435)

112. A abcissa do ponto P, é a solução da equação $f(x) = \frac{1}{3}$:

$$f(x) = \frac{1}{3} \Leftrightarrow \log_8 x = \frac{1}{3} \Leftrightarrow x = 8^{\frac{1}{3}} \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{8} \Leftrightarrow x = 2$$

Resposta: **Opção D**

Exame – 2000, 1.ª fase - 1.ª chamada (cód. 435)

113. Sabendo que $\log_a b = c$, e recorrendo às propriedades dos logaritmos, temos que:

$$\log_a(ab) = \log_a(a) + \log_a(b) = 1 + c$$

Resposta: **Opção A**

Exame – 2000, Prova modelo (cód. 435)

114. Como o gráfico de f interseta o eixo Oy no ponto de ordenada 2, ou seja no ponto de coordenadas (0,2), substituindo as coordenadas do ponto na expressão algébrica da função f, podemos calcular o valor de a:

$$f(0) = 2 \Leftrightarrow e^{0+a} = 2 \Leftrightarrow e^a = 2 \Leftrightarrow a = \ln 2$$

Resposta: **Opção A**

Exame – 2000, Prova para militares (cód. 135)

115. Usando as propriedades dos logaritmos e das potências, temos que:

$$g(x) = \log_2\left(2.\sqrt[3]{x}\right) = \log_2(2) + \log_2\left(\sqrt[3]{x}\right) = 1 + \log_2\left(x^{\frac{1}{3}}\right) = 1 + \frac{1}{3} \times \log_2 x = \frac{3}{3} + \frac{\log_2 x}{3} = \frac{3 + \log_2 x}{3}$$

Resposta: **Opção C**

Exame – 1999, Prova modelo (cód. 135)

116. Como o momento em que o pára-quedas se abre, corresponde a zero segundos após a abertura do pára-quedas, então calculando a distância, em metros, ao solo no momento da abertura do pára-quedas, temos:

$$d(0) = 840 - 6(0) + 25e^{-1,7(0)} = 840 + 25e^0 = 840 + 25 \times 1 = 865 \text{ m}$$

Como a distância ao solo no momento do salto é de 1500 metros, a distância percorrida em queda livre, ou seja, entre o salto do helicóptero e a abertura do pára-quedas é:

$$1500 - 865 = 635 \text{ m}$$

Exame – 1998, Prova para militares (cód. 135)

117.

117.1. Como o valor da magnitude é 8,6 ($M = 8{,}6$), determinando o valor correspondente da energia total libertada, em Joule, vem que:

$$\log_{10} E = 5{,}24 + 1{,}44 \times 8{,}6 \Leftrightarrow \log_{10} E = 17{,}624 \Leftrightarrow E = 10^{17{,}624} \Rightarrow E \approx 4{,}2 \times 10^{17} J$$

117.2. Como cinco vezes a energia total libertada pelo terremoto de Lisboa de 1755 é

$$5 \times 4{,}2 \times 10^{17} = 2{,}1 \times 10^{18}$$

ou seja $E = 2{,}1 \times 10^{18}$, determinando o valor correspondente da da magnitude, e apresentando o resultado na forma de dízima, arredondado às décimas, temos:

$$\log_{10}\left(2{,}1 \times 10^{18}\right) = 5{,}24 + 1{,}44M \Leftrightarrow \log_{10}(2{,}1) + \log_{10}\left(10^{18}\right) = 5{,}24 + 1{,}44M \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \log_{10}(2{,}1) + 18 = 5{,}24 + 1{,}44M \Leftrightarrow \log_{10}(2{,}1) + 18 - 5{,}24 = 1{,}44M \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\log_{10}(2{,}1) + 12.76}{1{,}44} = M \Rightarrow M \approx 9{,}1$$

Exame – 1998, 2.ª fase (cód. 135)

118.

118.1. Usando as propriedades dos logaritmos, temos que:

$$f(x) = \log_2(8x^2) - \log_2 x = \log_2(8) + \log_2(x^2) - \log_2 x = 3 + \log_2\left(\frac{x^2}{x}\right) = 3 + \log_2(x)$$

118.2. A abcissa do ponto do gráfico de f que tem ordenada 8 é a solução da equação $f(x) = 8$. Usando a expressão algébrica anterior, e resolvendo a equação, vem que:

$$f(x) = 8 \Leftrightarrow 3 + \log_2(x) = 8 \Leftrightarrow \log_2(x) = 8 - 3 \Leftrightarrow \log_2(x) = 5 \Leftrightarrow x = 2^5 \Leftrightarrow x = 32$$

Exame – 1998, 1.ª fase - 1.ª chamada (cód. 135)

119. Calculando a ordenada do ponto do gráfico de f, cuja abcissa é e, temos que:

$$f(e) = \ln(3e) = \ln 3 + \ln e = \ln 3 + 1 = 1 + \ln 3$$

Resposta: **Opção B**

Exame – 1998, Prova modelo (cód. 135)

120. Como o primeiro poste está a zero metros dele próprio, a sua altura é dada por:

$$f(0) = 5\left(e^{1-0{,}1\times 0} + e^{0{,}1\times 0-1}\right) = 5\left(e^1 + e^{-1}\right) = 5\left(e + \frac{1}{e}\right)$$

Analogamente, como o segundo poste está a 30 metros do primeiro poste, a sua altura é dada por:

$$f(30) = 5\left(e^{1-0{,}1\times 30} + e^{0{,}1\times 30-1}\right) = 5\left(e^{-2} + e^2\right) = 5\left(\frac{1}{e^2} + e^2\right)$$

E assim, calculando a diferença, em metros, das alturas dos dois postes, e apresentando o resultado na forma de dízima, com aproximação às décimas, temos:

$$f(30) - f(0) = 5\left(\frac{1}{e^2} + e^2\right) - 5\left(e + \frac{1}{e}\right) \approx 22{,}2 \text{ m}$$

Exame – 1998, Prova modelo (cód. 135)

121.

121.1. O valor inicial da atividade, corresponde a $t = 0$, pelo que o valor de R correspondente é:

$$R(0) = A \times e^{-B\times 0} = A \times e^0 = A \times 1 = A$$

Desta forma, metade do valor inicial é $\dfrac{A}{2}$ e o valor de t correspondente é a solução da equação:

$$R(t) = \frac{A}{2} \Leftrightarrow A \times e^{-Bt} = \frac{A}{2} \Leftrightarrow e^{-Bt} = \frac{A}{A\times 2} \Leftrightarrow e^{-Bt} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow -Bt = \ln\left(\frac{1}{2}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -Bt = \ln 1 - \ln 2 \Leftrightarrow -Bt = 0 - \ln 2 \Leftrightarrow t = \frac{-\ln 2}{-B} \Leftrightarrow t = \frac{\ln 2}{B}$$

121.2. Pelo cálculo do item anterior, sabemos que o valor inicial da atividade é o valor de A, pelo que, para esta substância temos que:

$$A = 28$$

Substituindo os valores de $A = 28$, $t = 1$ e $R = 26$, na expressão dada, determinamos o valor de B:

$$26 = 28 \times e^{-B\times 1} \Leftrightarrow \frac{26}{28} = e^{-B} \Leftrightarrow \frac{13}{14} = e^{-B} \Leftrightarrow -B = \ln\left(\frac{13}{14}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -B = \ln 13 - \ln 14 \Leftrightarrow B = \ln 14 - \ln 13$$

Exame – 1997, 2.ª fase (cód. 135)