

Exercício 1

Seja $(u_n)_n$ uma sucessão definida por: $u_n = \frac{2n-3}{3n}$

a)

Estude $(u_n)_n$ quanto à monotonia

$(u_{n+1}) - (u_n) < 0$ é monótona decrescente

$(u_{n+1}) - (u_n) > 0$ é monótona crescente

$$\begin{aligned} & \left[\frac{3n}{3n} \right] \left[\frac{2n-1}{3n+3} \right] - \left[\frac{2n-3}{3n} \right] \left[\frac{3n+3}{3n+3} \right] \\ & \frac{6n^2 - 3n}{(3n)(3n+3)} - \frac{6n^2 - 9n + 6n - 9}{(3n)(3n+3)} \\ & \frac{6n^2 - 3n - 6n^2 + 9n - 6n + 9}{(3n)(3n+3)} \\ & \frac{9}{(3n)(3n+3)} > 0, \forall n \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

u_n é monótona crescente

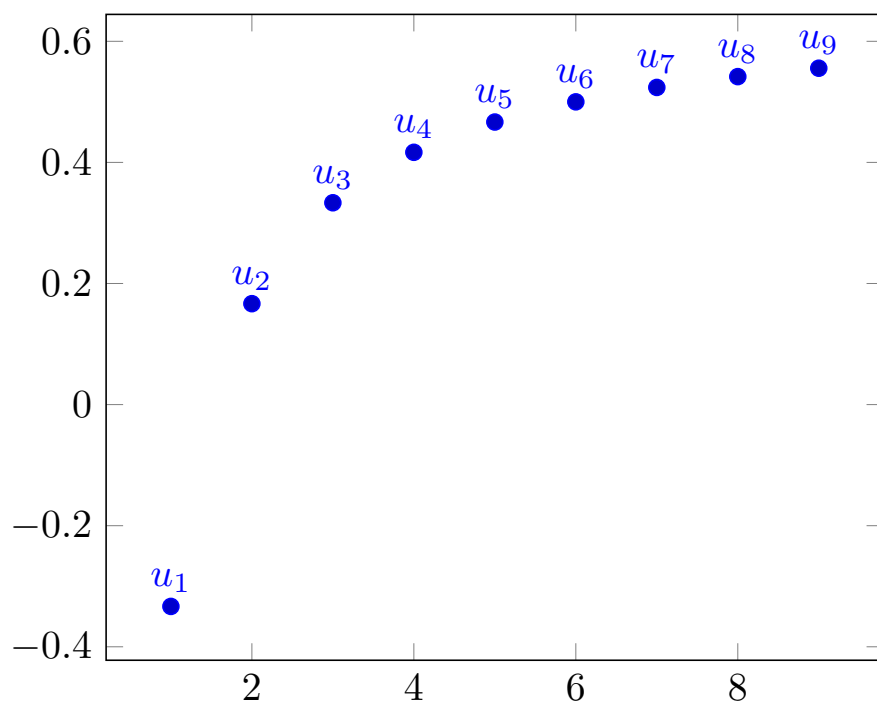
b)

$(u_n)_n$ é uma sucessão limitada? Justifique.

$$\lim_n \frac{2n-3}{3n} = \lim_n \frac{\cancel{n}(2 - \frac{3}{\cancel{n}})}{\cancel{n}(3)} = \frac{2 - \overset{0}{\cancel{\frac{3}{n}}}}{3} = \frac{2}{3}$$

$(u_n)_n$ é convergente pois tende para um número real. Toda a sucessão convergente é limitada. Como $(u_n)_n$ é crescente sabemos que:

$$\begin{aligned} \frac{2n-3}{3n} &= \frac{2}{3} - \frac{1}{n} \\ -\frac{1}{n} &< 0, \text{ então qualquer termo será sempre inferior a } \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} &< u_n < \frac{2}{3}, \forall n \in \mathbb{N} \end{aligned}$$



Exercício 2

Considere a sucessão $(a_n)_n$ de termo geral $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$.

a)

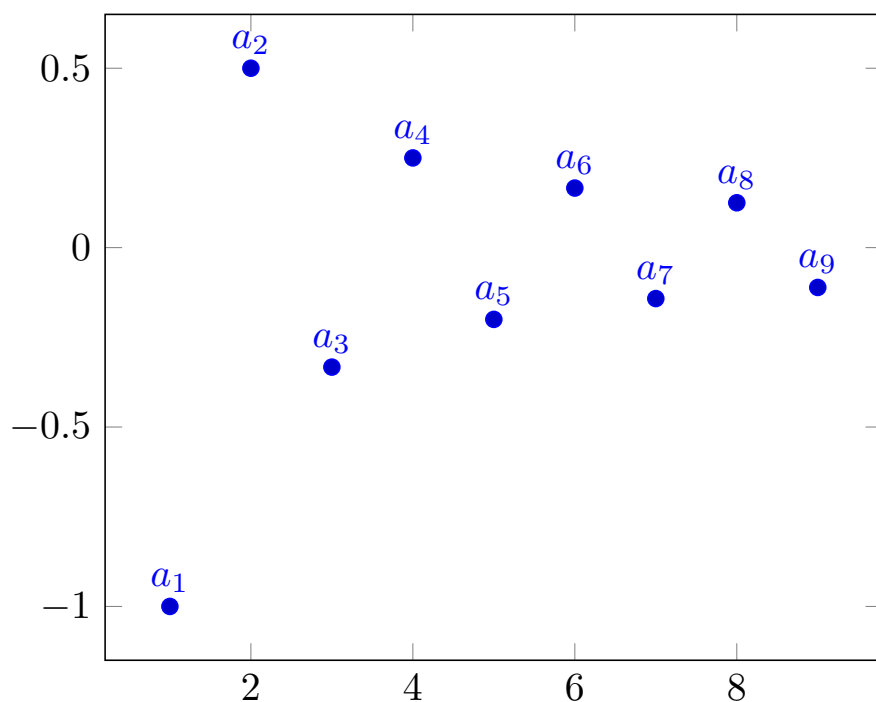
Determine os três primeiros termos da sucessão $(a_n)_n$.

b)

Verifique se $(a_n)_n$ é uma sucessão convergente.

$$\begin{cases} \text{Para } n \text{ par: } \lim_n \frac{1}{n} = \frac{1}{+\infty} = 0 \\ \text{Para } n \text{ ímpar: } \lim_n -\frac{1}{n} = \frac{-1}{+\infty} = 0 \end{cases}$$

$(a_n)_n$ é convergente para zero.



Exercício 3

Determine, caso existam, os seguintes limites:

a)

$$\lim_n \left(\frac{2n}{\sqrt{n^2 + 1}} \right) \stackrel{||\infty||}{=} \lim_n \left(\frac{\mathcal{N}(2)}{\mathcal{N}\sqrt{1 + \frac{1}{\mathcal{N}^2}}} \right) \stackrel{0}{=} \frac{2}{\sqrt{1}} = 2$$

b)

$$\lim_n (\sqrt{n+10} - \sqrt{n}) \stackrel{\infty-\infty}{=} \lim_n \left(\frac{(\sqrt{n+10} - \sqrt{n})(\sqrt{n+10} + \sqrt{n})}{(\sqrt{n+10} + \sqrt{n})} \right)$$

$$\lim_n \frac{10}{\sqrt{n+10} + \sqrt{n}} = \frac{10}{+\infty} = 0$$

c)

$$\begin{aligned}\lim_n \left(1 + \frac{10}{n}\right)^{\frac{n}{2}} &\stackrel{1^\infty}{=} \\ \left[\lim_n \left(1 + \frac{10}{n}\right)^n\right]^{\frac{1}{2}} & \\ = [e^{10}]^{\frac{1}{2}} &= e^5\end{aligned}$$

Exercício 4

Considere a função real de variável real definida por $f(x) = \frac{\sqrt{x+5}}{x}$

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} : x + 5 \geq 0 \wedge x \neq 0\} = [-5, +\infty[\setminus \{0\}$$

Exercício 5

Considere a função quadrática f , $f(x) = \frac{\sqrt{x+5}}{x}$

a)

b)

Averigue se o ponto de coordenadas $(8, \sqrt{2})$ pertence ao gráfico de f .

$$f(8) = \frac{\sqrt{8}}{8-6} = \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$$

Logo $(8, \sqrt{2})$ pertence a f

Considere a função real de variável real definida pela expressão $f(x) = (m-3)x^2 - 2x + 1, m \in \mathbb{R} \setminus 3$. Determine o valor de m de modo que o ponto de coordenadas $(-1, 2)$ pertença ao gráfico de f .

$$f(-1) = 2 \Leftrightarrow m = 2$$

Exercício 6

Considere a função polinomial definida em \mathbb{R} por $p(x) = x^3 - 7x - 6$.

a)

Mostre, usando a regra de Ruffini, que $p(x) = (x+1)(x^2 - x - 6)$, para qualquer $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{array}{r|rrrr} -1 & 1 & 0 & -7 & -6 \\ & & -1 & 1 & 6 \\ \hline & 1 & -1 & -6 & 0 \end{array}$$

Logo, $(x+1)(x^2 - x - 6)$

b)

Determine, sob a forma de intervalo ou união de intervalos, o conjunto de números reais que verificam a condição $p(x) \leq 0$.

$$(x+1)(x^2-x-6) \leq 0$$

x	$-\infty$	-2		-1		3	$+\infty$
$x+1$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
x^2-x-6	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$(x+1)(x^2-x-6)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

Decrescente

Decrescente

$$C.S. =]-\infty, -2] \cup [-1, 3]$$

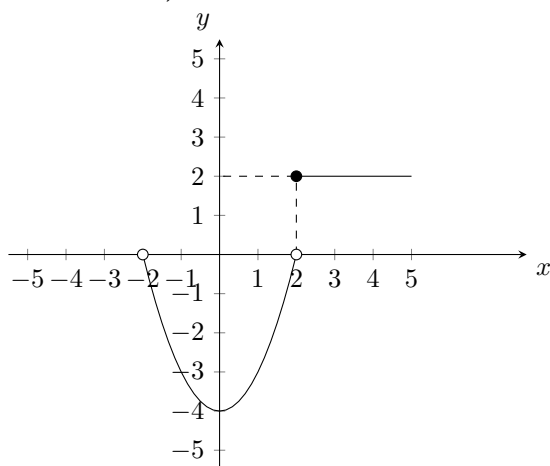
Exercício 7

Considere a função real de domínio $\mathbb{R} \setminus 1$ definida por:

$$g(x) = \begin{cases} x^2 - 4, & \text{se } -2 < x < 2, \\ 2, & \text{se } x \geq 2. \end{cases}$$

a)

Represente graficamente a função g . (Nota: não é necessário apresentar cálculos.)



$$D_g =]-2, +\infty[$$

$$D'_g = [-4, 0[\cup \{2\}$$

b)

Verifique se a função g é injetiva. Justifique.

A função não é injetiva pois há objetos diferentes com imagem igual, por exemplo:

$$-2 \neq -3 \wedge f(-2) = f(-3) = -3$$

c)

Justifique se é verdadeira a seguinte afirmação: "A função g é uma função ímpar."

Exercício 7

Considere a função quadrática *itf*, de domínio \mathbb{R} , definida por $f(x) = -2x^2 - 4x + 1$.

a)

Mostre que o vértice da parábola definida pelo gráfico de f é $V(-1, 3)$.

$$f(x) = -2(x+1)^2 + 3$$

Logo, o vértice da parábola é $V(-1, 3)$

b)

Indique o contradomínio de f .

$$D'_f =]-\infty, 3]$$

c)

Indique, caso existam, o máximo e o mínimo absoluto de f .

A função tem como máximo absoluto 3 mas não tem mínimo absoluto

