Exercício 1

Seja $(u_n)_n$ uma sucessão definida por: $u_n = \frac{2n-3}{3n}$

a)

Estude $(u_n)_n$ quanto à monotonia

$(u_{n+1}) - (u_n) < 0$ é monótona decrescente
$(u_{n+1}) - (u_n) > 0$ é monótona crescente

$$\left[\frac{3n}{3n}\right]\left[\frac{2n-1}{3n+3}\right] - \left[\frac{2n-3}{3n}\right]\left[\frac{3n+3}{3n+3}\right]$$

$$\frac{6n^2-3n}{(3n)(3n+3)} - \frac{6n^2-9n+6n-9}{(3n)(3n+3)}$$

$$\frac{6n^2-3n-6n^2+9n-6n+9}{(3n)(3n+3)}$$

$$\frac{9}{(3n)(3n+3)} > 0, \forall n \in \mathbb{N}$$

u_n é monótona crescente

b)

$(u_n)_n$ é uma sucessão limitada? Justifique.

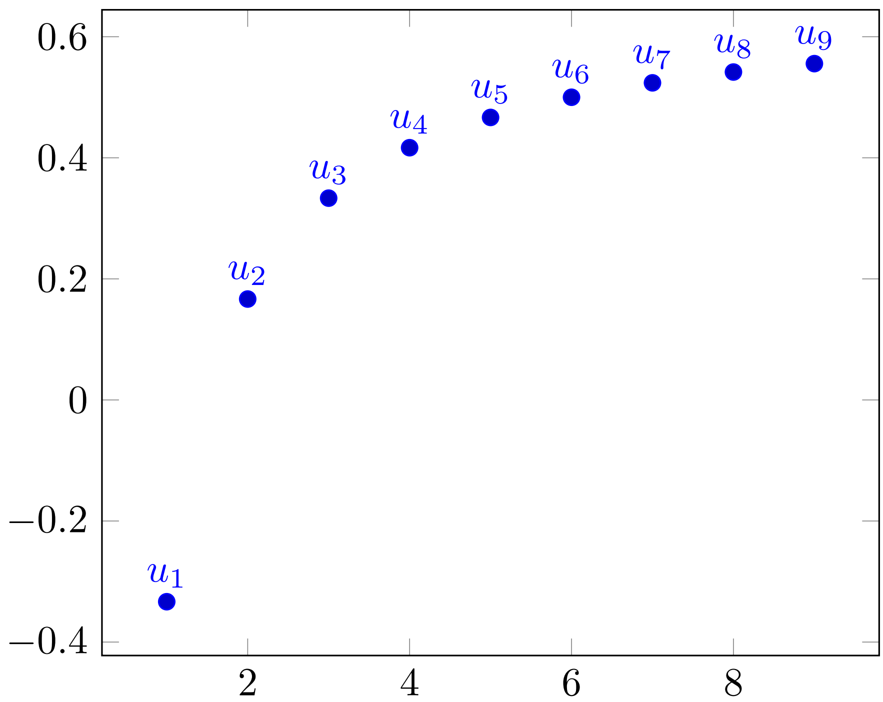
$$\lim_n \frac{2n-3}{3n} = \lim_n \frac{\cancel{n}\left(2-\frac{3}{n}\right)}{\cancel{n}(3)} = \frac{2-\overset{0}{\cancel{\frac{3}{n}}}}{3} = \frac{2}{3}$$

$(u_n)_n$ é convergente pois tende para um número real. Toda a sucessão convergente é limitada.
Como $(u_n)_n$ é crescente sabemos que:

$$\frac{2n-3}{3n} = \frac{2}{3} - \frac{1}{n}$$

$$-\frac{1}{n} < 0, \text{então qualquer termo será sempre inferior a } \frac{2}{3}$$

$$-\frac{1}{3} < u_n < \frac{2}{3}, \forall n \in \mathbb{N}$$



Exercício 2

Considere a sucessão $(a_n)_n$ de termo geral $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$.

a)

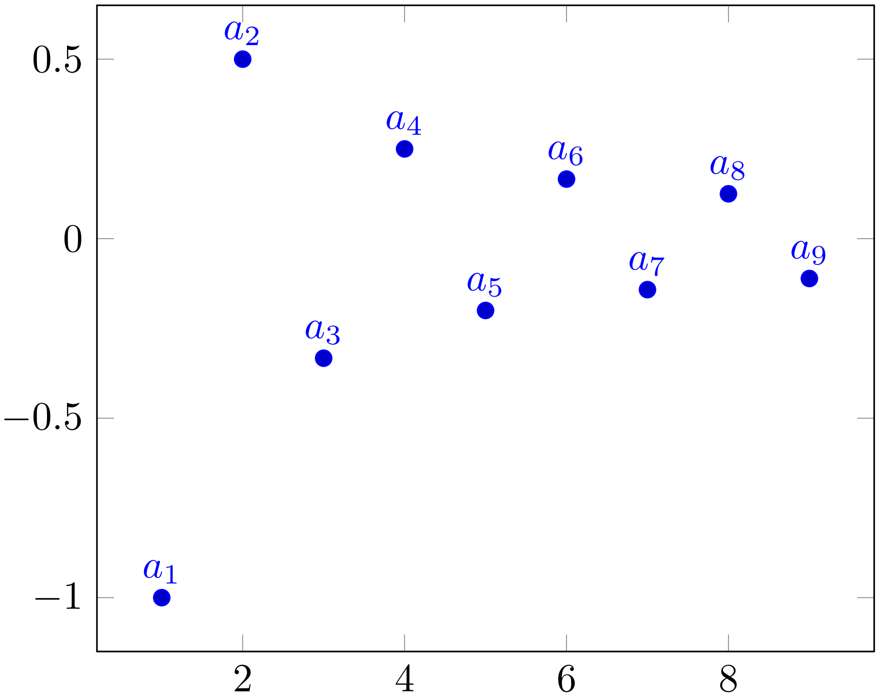
Determine os três primeiros termos da sucessão $(a_n)_n$.

b)

Verifique se $(a_n)_n$ é uma sucessão convergente.

$$\begin{cases} \text{Para n par: } \lim_n \frac{1}{n} = \frac{1}{+\infty} = 0 \\ \text{Para n ímpar: } \lim_n -\frac{1}{n} = \frac{-1}{+\infty} = 0 \end{cases}$$

$(a_n)_n$ é convergente para zero.



Exercício 3

Determine, caso existam, os seguintes limites:

a)

$$\lim_{n} \left(\frac{\sqrt{n^2+1}}{n} \right) \overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}$$

$$\lim_{n} \left(\frac{\cancel{n}\sqrt{1+\cancelto{0}{\frac{1}{n^2}}}}{\cancel{n}(1)} \right)$$

$$= \sqrt{1} = 1$$

b)

$$\lim_{n} \left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n} \right) \overset{\infty - \infty}{=}$$

$$\lim_{n} \left(\frac{\left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right)\left(\sqrt{n+1} + \sqrt{n}\right)}{\left(\sqrt{n+1} + \sqrt{n}\right)} \right)$$

$$\lim_{n} \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \frac{1}{+\infty} = 0$$

c)

$$\lim_n \left(1+\frac{5}{2n}\right)^{2n+1} \overset{1^\infty}{=}$$

$$\lim_n \left(1+\frac{5}{2n}\right)^{2n} \cdot \lim_n \left(1+\frac{5}{2n}\right)$$

$$= e^5 \cdot 1 = e^5$$

Exercício 4

a)

Considere a função real de variável real definida por $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{x-6}$

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0 \wedge x - 6 \neq 0\} = \mathbb{R}^+ \setminus \{6\}$$

b)

Averigue se o ponto de coordenadas $\left(8, \sqrt{2}\right)$ **pertence ao gráfico de** f**.**

$$f\left(8\right) = \frac{\sqrt{8}}{8-6} = \frac{\cancel{2}\sqrt{2}}{\cancel{2}} = \sqrt{2}$$

Logo $\left(8, \sqrt{2}\right)$ pertence a f

Exercício 5

Considere a função real de variável real definida pela expressão $f(x) = (m-3)x^2 - 2x + 1, m \in \mathbb{R} \setminus 3$**. Determine o valor de m de modo que o ponto de coordenadas (-1, 2) pertença ao gráfico de** f**.**

$$f(-1) = 2 \Leftrightarrow m = 2$$

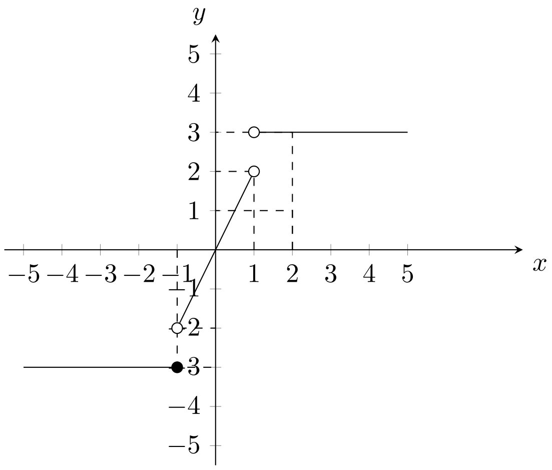
Exercício 6

Considere a função real de domínio $\mathbb{R} \setminus 1$ **definida por:**

$$g(x) = \begin{cases} -3, \text{ se } x \leq -1, \\ 2x, \text{ se } -1 \leq x < 1, \\ 3, \text{ se } x > 1. \end{cases}$$

a)

Represente graficamente a função g. (Nota: não é necessário apresentar cálculos.)



$$D_g = \mathbb{R}$$

$$D'_g = \{-3\} \cup]-2, 2[\cup \{3\}$$

b)

Verifique se a função g é injetiva. Justifique.

A funcão não é injetiva pois há objetos diferentes com imagem igual, por exemplo:

$$-2 \neq -3 \wedge f(-2) = f(-3) = -3$$

c)

Justifique se é verdadeira a seguinte afirmação: "A função g é uma função ímpar."

Exercício 7

Considere a funcão quadrática f, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $f(x) = -2x^2 - 4x + 1$.

a)

Mostre que o vértice da parábola definida pelo gráfico de f é V(-1, 3).

$$f(x) = -2\,(x+1)^2 + 3$$

Logo, o vértice da parábola á V(-1,3)

b)

Indique o contradomínio de f.

$$D'_f =]-\infty, 3]$$

c)

Indique, caso existam, o máximo e o mínimo absoluto de f.

A funcão tem como máximo absoluto 3 mas não tem mínimo absoluto