Preparação para exame

12.º Ano de Escolaridade | Turma G-K

FUNÇÕES REAIS DE VARIÁVEL REAL

1. As equações das assíntotas não verticais são da forma $y = mx + b, m, b \in \mathbb{R}$

   Quando $x \to +\infty$

   $$\lim_{x \mapsto +\infty} \frac{g(x)}{x} = \lim_{x \mapsto +\infty} \frac{\sqrt{x^2-1}}{x} = \lim_{x \mapsto +\infty} \frac{\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x^2}} = \lim_{x \mapsto +\infty} \sqrt{\frac{x^2-1}{x^2}} = \sqrt{\lim_{x \mapsto +\infty} \frac{x^2-1}{x^2}} = \sqrt{\lim_{x \mapsto +\infty} \left(1 - \frac{1}{x^2}\right)} = \sqrt{1} = 1$$

   Logo, $m = 1$

   $$\lim_{x \mapsto +\infty} [g(x) - x] = \lim_{x \mapsto +\infty} (\sqrt{x^2-1} - x) = \lim_{x \mapsto +\infty} \frac{(\sqrt{x^2-1} - x)(\sqrt{x^2-1} + x)}{\sqrt{x^2-1} + x} = \lim_{x \mapsto +\infty} \frac{|x^2-1| - x^2}{\sqrt{x^2-1} + x} =$$
   $$= \lim_{x \mapsto +\infty} \frac{(x^2-1) - x^2}{\sqrt{x^2-1} + x} = - \lim_{x \mapsto +\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2-1} + x} = -\frac{1}{+\infty} = 0$$

   Logo, $b = 0$

   Então, a reta de equação $y = x$ é assíntota não vertical ao gráfico da função, quando $x \to +\infty$

   Quando $x \to -\infty$

   $$\lim_{x \mapsto -\infty} \frac{g(x)}{x} = \lim_{x \mapsto -\infty} \frac{\sqrt{x^2-1}}{x} = \lim_{x \mapsto -\infty} \frac{\sqrt{x^2-1}}{-\sqrt{x^2}} = - \lim_{x \mapsto -\infty} \sqrt{\frac{x^2-1}{x^2}} = -\sqrt{\lim_{x \mapsto -\infty} \frac{x^2-1}{x^2}} =$$
   $$= -\sqrt{\lim_{x \mapsto +\infty} \left(1 - \frac{1}{x^2}\right)} = -\sqrt{1} = -1$$

   Logo, $m = -1$

   $$\lim_{x \mapsto -\infty} [g(x) + x] = \lim_{x \mapsto -\infty} (\sqrt{x^2-1} + x) = \lim_{x \mapsto -\infty} \frac{(\sqrt{x^2-1} + x)(\sqrt{x^2-1} - x)}{\sqrt{x^2-1} - x} = \lim_{x \mapsto -\infty} \frac{|x^2-1| - x^2}{\sqrt{x^2-1} - x} =$$
   $$= \lim_{x \mapsto -\infty} \frac{(x^2-1) - x^2}{\sqrt{x^2-1} - x} = - \lim_{x \mapsto -\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2-1} - x} = -\frac{1}{+\infty} = 0$$

   Logo, $b = 0$

   Então, a reta de equação $y = -x$ é assíntota não vertical ao gráfico da função, quando $x \to -\infty$

   Nota: em alternativa, poder-se-ia provar que a função é par e portanto, o gráfico é simétrico em relação ao eixo das ordenadas, fazendo com que a reta de equação $y = -x$ seja uma reflexão de eixo Oy da reta de equação $y = x$.

Ora, as retas de equações $y = x$ e $y = -x$ intersetam-se na origem do referencial. c.q.d.

2. Função f

- Domínio: $D_f = \{x \in \mathbb{R} : x + 1 \neq 0\} = \{x \in \mathbb{R} : x \neq -1\} = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$
- Interseção com os eixos

  (i) Com o eixo Oy

  $f(0) = \dfrac{2 \times 0^2 - 4}{0 + 1} = -4$
  O gráfico da função f interseta o eixo Oy no ponto $(0; -4)$

  (ii) Com o eixo Ox

  $f(x) = 0 \Leftrightarrow \dfrac{2x^2 - 4}{x + 1} = 0 \Leftrightarrow 2x^2 - 4 = 0 \wedge x + 1 \neq 0 \Leftrightarrow x^2 = 2 \wedge x \neq -1 \Leftrightarrow$
  $\Leftrightarrow x = \pm\sqrt{2} \wedge x \neq -1 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{2}$

  O gráfico da função f interseta o eixo Ox nos pontos $(-\sqrt{2}; 0)$ e $(\sqrt{2}; 0)$
- Sinal:

x	$-\infty$	$-\sqrt{2}$		-1		$\sqrt{2}$	$+\infty$
$2x^2 - 4$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$x + 1$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$f(x)$	$-$	0	$+$	$n.d.$	$-$	0	$+$

  A função toma sinal positivo em $]-\sqrt{2}; -1[\cup]\sqrt{2}; +\infty[$
  A função toma sinal negativo em $]-\infty; -\sqrt{2}[\cup]-1; \sqrt{2}[$

- Paridade:
  $f(-x) = \dfrac{2(-x)^2 - 4}{-x + 1} = \dfrac{2x^2 - 4}{-x + 1}$
  $f(-x) \neq f(x), \forall x, -x \in D_f$, logo a função não é par
  $f(-x) \neq -f(x), \forall x, -x \in D_f$, logo a função não é ímpar
  Concluindo, a função é nem par nem ímpar
- Assíntotas:

  Assíntotas verticais

  $\lim\limits_{x \mapsto -1^+} f(x) = \lim\limits_{x \mapsto -1^+} \dfrac{2x^2 - 4}{x + 1} = \dfrac{-2}{0^+} = -\infty$
  A reta de equação $x = -1$ é assíntota vertical ao gráfico da função

  $\lim\limits_{x \mapsto -1^-} f(x) = \lim\limits_{x \mapsto -1^-} \dfrac{2x^2 - 4}{x + 1} = \dfrac{-2}{0^-} = +\infty$
  A reta de equação $x = -1$ é assíntota vertical ao gráfico da função

  Não existem mais assíntotas verticais ao gráfico da função porque a função é contínua em $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$

Assíntotas não verticais

Quando $x \to +\infty$

$$\lim_{x \mapsto +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \mapsto +\infty} \frac{\frac{2x^2-4}{x+1}}{x} = \lim_{x \mapsto +\infty} \frac{2x^2-4}{x^2+x} = \lim_{x \mapsto +\infty} \frac{x^2\left(2-\frac{4}{x^2}\right)}{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)} =$$

$$= \frac{\lim_{x \mapsto +\infty}\left(2-\frac{4}{x^2}\right)}{\lim_{x \mapsto +\infty}\left(1+\frac{1}{x^2}\right)} = 2$$

Logo, $m = 2$

$$\lim_{x \mapsto +\infty}[f(x)-x] = \lim_{x \mapsto +\infty}\left(\frac{2x^2-4}{x+1}-2x\right) = \lim_{x \mapsto +\infty}\frac{2x^2-4-2x^2-2x}{x+1} = \lim_{x \mapsto +\infty}\frac{-4-2x}{x+1} =$$

$$= \lim_{x \mapsto +\infty}\frac{x\left(-2-\frac{4}{x}\right)}{x\left(1+\frac{1}{x}\right)} = \frac{\lim_{x \mapsto +\infty}\left(-2-\frac{4}{x}\right)}{\lim_{x \mapsto +\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)} = -2$$

Logo, $b = -2$

Então, a reta de equação $y = 2x - 2$ é assíntota não vertical do gráfico da função, quando $x \to +\infty$

Quando $x \to -\infty$

$$\lim_{x \mapsto -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \mapsto -\infty} \frac{\frac{2x^2-4}{x+1}}{x} = \lim_{x \mapsto -\infty} \frac{2x^2-4}{x^2+x} = \lim_{x \mapsto -\infty} \frac{x^2\left(2-\frac{4}{x^2}\right)}{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)} =$$

$$= \frac{\lim_{x \mapsto -\infty}\left(2-\frac{4}{x^2}\right)}{\lim_{x \mapsto -\infty}\left(1+\frac{1}{x^2}\right)} = 2$$

Logo, $m = 2$

$$\lim_{x \mapsto -\infty}[f(x)-x] = \lim_{x \mapsto -\infty}\left(\frac{2x^2-4}{x+1}-2x\right) = \lim_{x \mapsto -\infty}\frac{2x^2-4-2x^2-2x}{x+1} = \lim_{x \mapsto -\infty}\frac{-4-2x}{x+1} =$$

$$= \lim_{x \mapsto -\infty}\frac{x\left(-2-\frac{4}{x}\right)}{x\left(1+\frac{1}{x}\right)} = \frac{\lim_{x \mapsto -\infty}\left(-2-\frac{4}{x}\right)}{\lim_{x \mapsto -\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)} = -2$$

Logo, $b = -2$

Então, a reta de equação $y = 2x - 2$ é assíntota não vertical do gráfico da função, quando $x \to -\infty$

- Monotonia e extremos:

$$f'(x) = \left(\frac{2x^2-4}{x+1}\right)' =$$
$$= \frac{(2x^2-4)' \times (x+1) - (2x^2-4) \times (x+1)'}{(x+1)^2} = \frac{4x \times (x+1) - (2x^2-4) \times 1}{4x^2} =$$
$$= \frac{4x^2+4x-2x^2+4}{(x+1)^2} = \frac{2x^2+4x+4}{(x+1)^2}, \text{ com } x \neq -1$$

Determinemos os zeros da função derivada

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \dfrac{2x^2+4x+4}{(x+1)^2} = 0 \Leftrightarrow 2x^2+4x+4 = 0 \wedge x+1 \neq 0 \Leftrightarrow x^2+2x+2 = 0 \wedge x \neq -1$

A equação é impossível

Não existem zeros para a função derivada

Sinal da função derivada

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$2x^2+4x+4$	$+$	$+$	$+$
$(x+1)^2$	$+$	0	$+$
$f'(x)$	$+$	$n.d.$	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	$n.d.$	$\nearrow$

A função f é estritamente crescente em $]-\infty; -1[$ e em $]-1; +\infty[$. Não existem extremos da função.

- Concavidades e pontos de inflexão:

$$f''(x) = [f'(x)]' = \left(\frac{2x^2+4x+4}{(x+1)^2}\right)' =$$
$$= \frac{(2x^2+4x+4)' \times (x+1)^2 - (2x^2+4x+4) \times \left[(x+1)^2\right]'}{\left[(x+1)^2\right]^2} =$$
$$= \frac{(4x+4)(x+1)^2 - (2x^2+4x+4) \times 2(x+1)(x+1)'}{(x+1)^4} =$$
$$= \frac{(4x+4)(x+1)^2 - 2(2x^2+4x+4)(x+1)}{(x+1)^4} =$$
$$= \frac{(x+1)[4(x+1)^2 - 2(2x^2+4x+4)]}{(x+1)^4} =$$
$$= \frac{4x^2+8x+4-4x^2-8x-8}{(x+1)^3} = -\frac{4}{(x+1)^3}, \text{ com } x \neq -1$$

Determinemos os zeros da função segunda derivada

$f''(x) = 0 \Leftrightarrow -\dfrac{4}{(x+1)^3} = 0$

A equação é impossível

Não existem zeros para a função segunda derivada

Sinal da função segunda derivada

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$x+1$	$-$	0	$+$
$f''(x)$	$+$	$n.d.$	$-$
$f(x)$	$\cup$	$n.d.$	$\cap$

O gráfico da função f tem a concavidade voltada para cima em $]-\infty; -1[$ tem a concavidade voltada para baixo em $]-1; +\infty[$. Não existem pontos de inflexão do gráfico da função.

- Contradomínio: $D'_f = \mathbb{R}$

- Esboço do gráfico

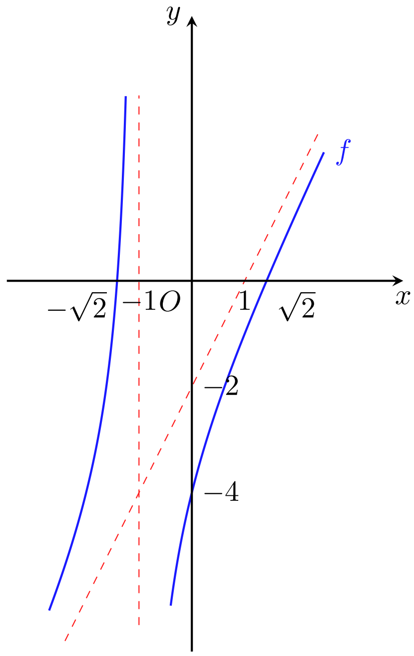

Figura 1

Função g

- Domínio: $D_g = \{x \in \mathbb{R} : 4 - x^2 \geq 0\} = \{x \in \mathbb{R} : -2 \leq x \leq 2\} = [-2; 2]$
  Cálculos auxiliares

  $4 - x^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 4 \Leftrightarrow x = -2 \vee x = 2$

- Interseção com os eixos

  (i) Com o eixo Oy

  $g(0) = \sqrt{4 - 0^2} = 2$
  O gráfico da função g interseta o eixo Oy no ponto $(0; 2)$

  (ii) Com o eixo Ox

  $g(x) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{4 - x^2} = 0 \Leftrightarrow 4 - x^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 4 \Leftrightarrow x = -2 \vee x = 2$

  O gráfico da função g interseta o eixo Ox nos pontos $(-2; 0)$ e $(2; 0)$

- Sinal:

  A função toma sinal positivo em $]-2; 2[$

- Paridade:
  $g(-x) = \sqrt{4 - (-x)^2} = \sqrt{4 - x^2} = g(x), \forall x, -x \in D_g$, logo a função é par
  O gráfico é simétrico em relação ao eixo das ordenadas.

- Assíntotas:

  Assíntotas verticais
  Não existem assíntotas verticais ao gráfico da função porque a função é contínua em $[-2;2]$

  Assíntotas não verticais
  Não existem assíntotas não verticais ao gráfico da função porque o domínio da função é $[-2;2]$

- Monotonia e extremos:

  $$g'(x)=\left(\sqrt{4-x^2}\right)'=\frac{(4-x^2)'}{2\sqrt{4-x^2}}=\frac{-2x}{2\sqrt{4-x^2}}=-\frac{x}{\sqrt{4-x^2}}, \text{ com } x\in]-2;2[$$

  Determinemos os zeros da função derivada
  $g'(x)=0\Leftrightarrow -\frac{x}{\sqrt{4-x^2}}=0\Leftrightarrow -x=0\wedge 4-x^2>0\Leftrightarrow x=0\wedge -2<x<2\Leftrightarrow x=0$

  Sinal da função derivada

x	-2		0		$+2$
$-x$	2	$+$	0	$-$	-2
$\sqrt{4-x^2}$	0	$+$	2	$+$	0
$g'(x)$	$n.d$	$+$	0	$-$	$n.d.$
$g(x)$	0	$\nearrow$	2	$\searrow$	0

  $g(0)=\sqrt{4-0^2}=2$

  A função g é estritamente crescente em $]-2;0[$ e é estritamente decrescente em $]0;2[$. A função atinge o valor máximo 2 para $x=0$.

- Concavidades e pontos de inflexão:

  $$g''(x)=[g'(x)]'=\left(-\frac{x}{\sqrt{4-x^2}}\right)'=-\frac{x'\times\sqrt{4-x^2}-x\times\left(\sqrt{4-x^2}\right)'}{\left(\sqrt{4-x^2}\right)^2}=$$
  $$=-\frac{1\times\sqrt{4-x^2}-x\times\left(-\frac{x}{\sqrt{4-x^2}}\right)}{|4-x^2|}=-\frac{\sqrt{4-x^2}+\frac{x^2}{\sqrt{4-x^2}}}{4-x^2}=-\frac{|4-x^2|+x^2}{(4-x^2)\sqrt{4-x^2}}=$$
  $$=-\frac{4-x^2+x^2}{(4-x^2)\sqrt{4-x^2}}=-\frac{4}{(4-x^2)\sqrt{4-x^2}}, \text{ com } -2<x<2$$

  Determinemos os zeros da função segunda derivada
  $g''(x)=0\Leftrightarrow -\frac{4}{(4-x^2)\sqrt{4-x^2}}=0$
  A equação é impossível
  Não existem zeros para a função segunda derivada

  Sinal da função segunda derivada

x	-2		$+2$
$4-x^2$	0	$+$	0
$-\sqrt{4-x^2}$	0	$-$	0
$g''(x)$	$n.d$	$-$	$n.d.$
$g(x)$	0	$\cap$	0

  O gráfico da função g tem a concavidade voltada para baixo em $]-2;2[$. Não existem pontos de inflexão do gráfico da função.

- Contradomínio: $D'_g = [0;2]$

- Esboço do gráfico

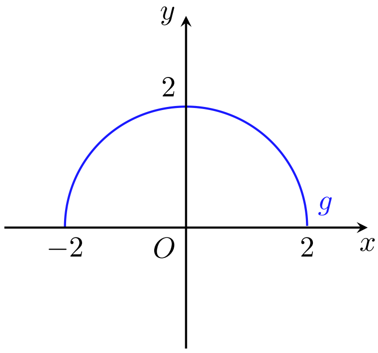

Figura 2