Exercícios de aplicação **(págs. 107 a 117)**

1.

1.1. $u_{n+1} - u_n = \frac{5(n+1)-1}{2(n+1)+3} - \frac{5n-1}{2n+3} = \frac{5n+5-1}{2n+2+3} - \frac{5n-1}{2n+3} =$

$$= \frac{5n+4}{2n+5} - \frac{5n-1}{2n+3} =$$

$$= \frac{(5n+4)(2n+3)-(5n-1)(2n+5)}{(2n+5)(2n+3)} =$$

$$= \frac{\cancel{10n^2}+15n+8n+12-\cancel{10n^2}-25n+2n+5}{(2n+5)(2n+3)} =$$

$$= \frac{17}{(2n+5)(2n+3)}$$

Como $(2n+5)(2n+3) > 0, \forall n \in \mathbb{N}$ e $17 > 0$, então $\frac{17}{(2n+5)(2n+3)} > 0, \forall n \in \mathbb{N}$.

Logo, (u_n) é crescente.

Como (u_n) é crescente, u_1 é um minorante, isto é, $u_n \geq u_1$.

$u_1 = \frac{4}{5}$

$u_n = \frac{5n-1}{2n+3} = \frac{5}{2} + \frac{-\frac{17}{2}}{2n+3}$

Dado que $\frac{-\frac{17}{2}}{2n+3} < 0$, vem que $u_n < \frac{5}{2}, \forall n \in \mathbb{N}$.

Logo, $\frac{4}{5} \leq u_n \leq \frac{5}{2}$ e, por isso, (u_n) é limitada.

Cálculos auxiliares

$u_1 = \frac{5\times1-1}{2\times1+3} = \frac{4}{5}$

$$\begin{array}{r|l} 5n-1 & 2n+3 \\ \hline -5n-\frac{15}{2} & \frac{5}{2} \\ -\frac{17}{2} & \end{array}$$

1.2. (u_n) é convergente porque é monótona e limitada.

1.3. $\lim u_n = \frac{5}{2}$

2.

2.1. $v_{n+1} - v_n = \frac{6(n+1)^2-4(n+1)}{2(n+1)} - \frac{6n^2-4n}{2n} = \frac{6n^2+12n+6-4n-4}{2(n+1)} - \frac{6n^2-4n}{2n} =$

$$= \frac{6n^2+8n+2}{2(n+1)} - \frac{6n^2-4n}{2n} =$$

$$= \frac{n(6n^2+8n+2)-(6n^2-4n)(n+1)}{2n(n+1)} =$$

$$= \frac{6n^3+8n^2+2n-6n^3-6n^2+4n^2+4n}{2n(n+1)} =$$

$$= \frac{6n^2+6n}{2n(n+1)} =$$

$$= \frac{6n(n+1)}{2n(n+1)} =$$

$$= 3$$

Logo, (v_n) é uma progressão aritmética de razão 3.

2.2. $v_{n+1} - v_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}$ (pela alínea anterior).

Logo, (v_n) é uma sucessão crescente.

LeYa EDUCAÇÃO Daniela Raposo e Luzia Gomes

2.3. $\frac{6n^2-4n}{2n} = 6055 \Leftrightarrow 3n-2 = 6055 \Leftrightarrow 3n = 6057$

$$\Leftrightarrow n = \frac{6057}{3}$$

$$\Leftrightarrow n = 2019$$

6055 é o termo de ordem 2019.

2.4. $\frac{6n^2-4n}{2n} = 3n-2$

$35 < 3n-2 < 92$

$37 < 3n < 94$

$\frac{37}{3} < n < \frac{94}{3}$

$\frac{37}{3} = 12,(3); \frac{94}{3} = 31,(3)$

$v_{13} = 37; v_{31} = 93$

$S = \frac{37+93}{2} \times 19 = 1216$

3.

3.1. $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\frac{u_n}{4}}{u_n} = \frac{u_n}{4u_n} = \frac{1}{4}, \forall n \in \mathbb{N}$

Logo, (u_n) é uma progressão geométrica de razão $\frac{1}{4}$. A afirmação é verdadeira.

3.2. Como $u_1 = -4$ e $r = \frac{1}{4}$, concluímos que (u_n) é uma sucessão crescente.

3.3. $\lim S_n = \lim\left(u_1 \times \frac{1-r^n}{1-r}\right) = \lim\left(-4 \times \frac{1-\left(\frac{1}{4}\right)^n}{1-\frac{1}{4}}\right) = \left(-4 \times \frac{1-0}{\frac{3}{4}}\right) =$

$$= -4 \times \frac{4}{3} = -\frac{16}{3}$$

Este valor representa a soma de todos os termos da sucessão (u_n).

4. Seja $\delta > 0$ um número qualquer:

$|u_n - 3| < \delta \Leftrightarrow \left|\frac{3n}{n+2} - 3\right| < \delta \Leftrightarrow \left|\frac{3n-3n-6}{n+2}\right| < \delta \Leftrightarrow \frac{6}{n+2} < \delta$

$$\Leftrightarrow \frac{n+2}{6} > \frac{1}{\delta}$$

$$\Leftrightarrow n+2 > \frac{6}{\delta}$$

$$\Leftrightarrow n > \frac{6}{\delta} - 2$$

$$\Leftrightarrow n > \frac{6-2\delta}{\delta}$$

Então, a cada $\delta > 0$ corresponde um $p = \frac{6-2\delta}{\delta}$ tal que $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq p \Rightarrow \left|\frac{3n}{n+2} - 3\right| < \delta$, o que prova que $\lim \frac{3n}{n+2} = 3$.

5. $-3, x, y, \ldots$ são os três primeiros termos de uma progressão aritmética, logo $y - x = x + 3$.

$y, x, 1, \ldots$ são os três primeiros termos de uma progressão geométrica, logo $\frac{1}{x} = \frac{x}{y}$.

$$\begin{cases} y - x = x + 3 \\ \frac{1}{x} = \frac{x}{y} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x + 3 \\ y = x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 2x + 3 \\ \_\_\_\_\_ \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 2x - 3 = 0 \\ \_\_\_\_\_ \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4 \times (-3)}}{2} \\ \_\_\_\_\_ \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 9 \end{cases} \vee \underbrace{\begin{cases} x = -1 \\ y = 1 \end{cases}}_{\text{condição impossível, pois } x > 0.}$$

$$\Leftrightarrow x = 3 \ \wedge \ y = 9$$

$-3, \overset{+6}{\curvearrowright} 3, \overset{+6}{\curvearrowright} 9, \ldots$ são os três primeiros termos da progressão aritmética, logo 15 é o quarto termo da progressão aritmética.

$9, \overset{:3}{\curvearrowright} 3, \overset{:3}{\curvearrowright} 1, \ldots$ são os três primeiros termos da progressão geométrica, logo $\frac{1}{3}$ é o quarto termo da progressão geométrica.

6. $\forall n \in \mathbb{N}, v_{n+1} = 5 + v_n$

Logo, (v_n) é uma progressão aritmética de razão 5.

$$\begin{cases} 1085 = \frac{v_1 + v_1 + (n-1) \times 5}{2} \times n \\ v_{10} = v_1 + (10 - 1) \times 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1085 = \frac{2v_1 + 5n - 5}{2} \times n \\ 5 = v_1 + 45 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1085 = \frac{-80 + 5n - 5}{2} \times n \\ v_1 = -40 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1085 = \frac{5n - 85}{2} \times n \\ \_\_\_\_\_ \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2170 = (5n - 85) \times n \\ \_\_\_\_\_ \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2170 = 5n^2 - 85n \\ \_\_\_\_\_ \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 5n^2 - 85n - 2170 = 0 \\ \_\_\_\_\_ \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} n^2 - 17n - 434 = 0 \\ \_\_\_\_\_ \end{cases}$$

$$\overset{n \in \mathbb{N}}{\Leftrightarrow} \begin{cases} n = 31 \\ \_\_\_\_\_ \end{cases}$$

Cálculo auxiliar

$n^2 - 17n - 434 = 0$

$\Leftrightarrow n = \frac{17 \pm \sqrt{(-17)^2 - 4 \times 1 \times (-434)}}{2 \times 1}$

$\Leftrightarrow n = \frac{17 \pm \sqrt{289 + 1736}}{2}$

$\Leftrightarrow n = \frac{17 \pm \sqrt{2025}}{2}$

$\Leftrightarrow n = \frac{17 \pm 45}{2}$

$\Leftrightarrow n = \frac{62}{2} \vee n = \frac{-28}{2}$

$\Leftrightarrow n = 31 \vee n = -14$

Como $n \in \mathbb{N}$, $n = 31$.

Assim, $n = 31$.

LeYa EDUCAÇÃO Daniela Raposo e Luzia Gomes

7.

7.1. $a_{n+1} - a_n = \frac{3}{2-4(n+1)} - \frac{3}{2-4n} = \frac{3}{2-4n-4} - \frac{3}{2-4n} =$

$$= \frac{3}{-2-4n} - \frac{3}{2-4n} =$$

$$= \frac{-3}{2+4n} - \frac{3}{2-4n} =$$

$$= \frac{-3(2-4n)-3(2+4n)}{(2+4n)(2-4n)} =$$

$$= \frac{-6+12n-6-12n}{4-16n^2} =$$

$$= \frac{-12}{4-16n^2} =$$

$$= \frac{12}{16n^2-4}$$

Como $16n^2 - 4 > 0, \forall n \in \mathbb{N}$ e 12 > 0, então $\frac{12}{16n^2-4} > 0, \forall n \in \mathbb{N}$. Logo, (a_n) é crescente.

7.2. Como (a_n) é crescente, a_1 é um minorante, isto é, $a_n \geq a_1$.

$a_1 = -\frac{3}{2}$

$n \geq 1, \forall n \in \mathbb{N}$

$-4n \leq -4, \forall n \in \mathbb{N}$

$2 - 4n \leq -2, \forall n \in \mathbb{N}$

Logo, $2 - 4n < 0, \forall n \in \mathbb{N}$ e $\frac{3}{2-4n} < 0, \forall n \in \mathbb{N}$, isto é, $a_n < 0, \forall n \in \mathbb{N}$.

Assim, $-\frac{3}{2} \leq a_n < 0$ e, por isso, (a_n) é limitada.

8. $c_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{k}{n^2} = 0 + \frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \cdots + \frac{n}{n^2} = \frac{1+2+\cdots+n}{n^2} =$

$$= \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} k}{n^2} =$$

$= \frac{S_n}{n^2}$, S_n progressão aritmética de razão 1.

$$\text{Lim } c_n = \lim \frac{S_n}{n^2} = \lim \frac{\frac{n+1}{2} \times n}{n^2} =$$

$$= \lim \frac{n^2+n}{2n^2} \overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{\cong}$$

$$= \lim \frac{\cancel{n^2}\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\cancel{2}n^2} =$$

$$= \lim \frac{1+\frac{1}{n}}{3} =$$

$$= \frac{1}{2}$$

9.

9.1. $\lim \frac{n^3-4n}{2n^3+n^2+1} \overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=} \lim \frac{\cancel{n^3}\left(1-\frac{4}{n^2}\right)}{\cancel{n^3}\left(2+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^3}\right)} = \frac{1}{2}$

9.2. $\lim \frac{5n^2+n}{n^3+n^2-1} \overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=} \lim \frac{n^2\left(5+\frac{1}{n}\right)}{n^3\left(1+\frac{1}{n}-\frac{1}{n^3}\right)} = \lim \frac{5+\frac{1}{n}}{n\left(1+\frac{1}{n}-\frac{1}{n^3}\right)} = \frac{5}{+\infty} = 0$

9.3. $\lim \frac{-5n^6+n}{n^5+2n^4-n} \overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=} \lim \frac{n^6\left(-5+\frac{1}{n^5}\right)}{n^5\left(1+\frac{2}{n}-\frac{1}{n^4}\right)} = \lim \frac{n\left(-5+\frac{1}{n^5}\right)}{1+\frac{2}{n}-\frac{1}{n^4}} = \frac{-\infty}{1} = -\infty$

9.4. $\lim \frac{-3n^6+n}{-n^5+2n^4-n} \overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=} \lim \frac{-n^6\left(3-\frac{1}{n^5}\right)}{-n^5\left(1-\frac{2}{n}+\frac{1}{n^4}\right)} = \lim \frac{n\left(3-\frac{1}{n^5}\right)}{1-\frac{2}{n}+\frac{1}{n^4}} = \frac{+\infty}{1} = +\infty$

9.5. $\lim \frac{\frac{2}{n^2-n}}{\frac{1}{n^3+n}} = \lim \frac{2n^3+2n}{n^2-n} \overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=} \lim \frac{n^3\left(2+\frac{2}{n^2}\right)}{n^2\left(1-\frac{1}{n}\right)} = \lim \frac{n\left(2+\frac{2}{n^2}\right)}{1-\frac{1}{n}} = \frac{+\infty}{1} = +\infty$

9.6. $\lim \frac{\sqrt{9n^2+3n+1}}{n+4} \overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=} \lim \frac{\sqrt{n^2\left(9+\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}\right)}}{n+4} = \lim \frac{\cancel{n}\sqrt{9+\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}}}{\cancel{n}\left(1+\frac{4}{n}\right)} = \frac{\sqrt{9}}{1} = 3$

9.7. $\lim \frac{\sqrt{4n^2-1}}{n} \overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=} \lim \frac{\sqrt{n^2\left(4-\frac{1}{n}\right)}}{n} = \lim \frac{\cancel{n}\sqrt{4-\frac{1}{n}}}{\cancel{n}} = \sqrt{4} = 2$

9.8. $\lim \frac{n}{1+\sqrt{n+5}} \overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=} \lim \frac{n}{1+\sqrt{n^2\left(\frac{1}{n}+\frac{5}{n^2}\right)}} = \lim \frac{n}{1+n\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{5}{n^2}}} = \lim \frac{\cancel{n}}{\cancel{n}\left(\frac{1}{n}+\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{5}{n^2}}\right)} = \frac{1}{0^+} = +\infty$

9.9. $\lim \left(\sqrt{n-1}-\sqrt{n}\right) \overset{(\infty-\infty)}{=} \lim \frac{\left(\sqrt{n-1}-\sqrt{n}\right)\left(\sqrt{n-1}+\sqrt{n}\right)}{\sqrt{n-1}+\sqrt{n}} = \lim \frac{n-1-n}{\sqrt{n-1}+\sqrt{n}} = \lim \frac{-1}{\sqrt{n-1}+\sqrt{n}} = \frac{-1}{+\infty} = 0$

9.10. $\lim \left(\sqrt{16n^2+9n+1}-4n\right) \overset{(\infty-\infty)}{=} \lim \frac{\left(\sqrt{16n^2+9n+1}-4n\right)\left(\sqrt{16n^2+9n+1}+4n\right)}{\sqrt{16n^2+9n+1}+4n} =$

$$= \lim \frac{16n^2+9n+1-16n^2}{\sqrt{16n^2+9n+1}+4n} =$$

$$= \lim \frac{9n+1}{\sqrt{16n^2+9n+1}+4n} =$$

$$= \lim \frac{n\left(9+\frac{1}{n}\right)}{\sqrt{n^2\left(16+\frac{9}{n}+\frac{1}{n}\right)}+4n} =$$

$$= \lim \frac{\cancel{n}\left(9+\frac{1}{n}\right)}{\cancel{n}\left(\sqrt{16+\frac{9}{n}+\frac{1}{n}}+4\right)} =$$

$$= \frac{9}{\sqrt{16}+4} =$$

$$= \frac{9}{4+4} = \frac{9}{8}$$

9.11. $\lim \frac{9^n}{10^n} \overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=} \lim \left(\frac{9}{10}\right)^n = 0$

9.12. $\lim \left(3^n-\pi^n\right) \overset{(\infty-\infty)}{=} \lim \left[\pi^n\left(\frac{3^n}{\pi^n}-1\right)\right] = \lim \left[\pi^n\left[\left(\frac{3}{\pi}\right)^n-1\right]\right] = +\infty(0-1) = -\infty$

LeYa EDUCAÇÃO Daniela Raposo e Luzia Gomes

10.

10.1. $\begin{cases} a_1 = \frac{3}{2} \\ a_{n+1} = \frac{1}{4}a_n, \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$

10.2. Como $a_{n+1} = \frac{1}{4}a_n, \forall n \in \mathbb{N}$, concluímos que (a_n) é uma progressão geométrica de razão $\frac{1}{4}$.

Logo, $a_n = \frac{3}{2} \times \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$ é uma expressão do termo geral de (a_n).

Exercícios propostos (págs. 118 a 124)

Itens de seleção (págs. 118 e 119)

1. $\lim u_n = \lim\left(3 + \frac{1}{n}\right) = 3$

Logo, (u_n) é uma sucessão convergente.

Opção (C)

2. A opção (A) não é correta. Como $u_1 = -2$, $u_2 = 4$ e $u_3 = -6$, a sucessão (u_n) não é monótona.

$$w_{n+1} - w_n = 2 + \frac{1}{n+1} - \left(2 + \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} =$$

$$= \frac{n - n - 1}{n(n+1)} =$$

$$= \frac{-1}{n(n+1)}$$

Como $n(n+1) > 0, \forall n \in \mathbb{N}$ e $-1 < 0$, então $\frac{-1}{n(n+1)} < 0, \forall n \in \mathbb{N}$. Logo, (w_n) é decrescente e a opção (B) não é a correta. Como $0 < \frac{1}{n} \leq 1$, temos $2 < \frac{1}{n} \leq 3$. Logo, 4 é um majorante de (w_n).

Opção (C)

3. $u_{10} = u_1 + 9r$

$81 = u_1 + 9 \times 5 \Leftrightarrow 81 = u_1 + 45 \Leftrightarrow u_1 = 81 - 45 \Leftrightarrow u_1 = 36$

Opção (B)

4. $t_1 = 1 = 1^2$

$t_2 = 4 = 2^2$

$t_3 = 9 = 3^2$

$t_4 = 16 = 4^2$

…

$t_n = n^2$

Opção (B)

LeYa EDUCAÇÃO Daniela Raposo e Luzia Gomes

5. Uma sucessão é limitada se existe um número real positivo L tal que $\forall n \in \mathbb{N}, |a_n| \leq L$.

Opção (C)

6. $\frac{3n+2}{n+4} = 3 + \frac{-10}{n+4}$

Cálculo auxiliar

$$\begin{array}{r|l} 3n+2 & n+4 \\ \hline -3n-12 & 3 \\ \hline -10 & \end{array}$$

Por um lado:

$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 1$

$n + 4 \geq 5$

$\frac{1}{n+4} \leq \frac{1}{5}$

$\frac{-10}{n+4} \geq -2$

$3 + \frac{-\infty}{n+4} \geq 1$

$u_n \geq 1$

Por outro lado:

$\forall n \in \mathbb{N},\ \frac{-10}{n+4} < 0$

$3 - \frac{-10}{n+4} < 3$

Logo, $1 \leq u_n < 3$.

Opção (B)

7. Como $v_n = -v_{n-1}, n \geq 2$, temos que $v_n + v_{n-1} = 0$. Assim:

$v_2 + v_1 = 0 \iff v_2 = -v_1 \iff v_2 = -1$

Logo, se n é par, $v_n = -1$ e, por isso, $v_{2014} = -1$.

Opção (A)

8. $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{2^{-2(n+1)}}{2^{-2n}} = \frac{2^{-2n-2}}{2^{-2n}} =$

$= 2^{-2n-2-(-2n)} =$

$= 2^{-2n-2+2n} =$

$= 2^{-2} =$

$= \frac{1}{4}$

Opção (D)

9. A soma $1 + \pi + \pi^2 + \cdots + \pi^{2019}$ é uma progressão geométrica de razão π. Assim:

$S_{20} = 1 \times \frac{1-\pi^{2020}}{1-\pi} = \frac{1-\pi^{2020}}{1-\pi}$

Opção (D)

10. Sabemos que (u_n) é uma progressão geométrica de razão r, $u_1 = r$ e $u_1 + u_2 = 20$.

$$u_1 + u_2 = 20 \Leftrightarrow u_1 + u_1 \times r = 20 \Leftrightarrow r + r \times r = 20$$
$$\Leftrightarrow r + r^2 = 20$$
$$\Leftrightarrow r^2 + r - 20 = 0$$
$$\Leftrightarrow r = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \times 1 \times (-20)}}{2 \times 1}$$
$$\Leftrightarrow r = \frac{-1 \pm \sqrt{1+80}}{2}$$
$$\Leftrightarrow r = \frac{-1 \pm 9}{2}$$
$$\Leftrightarrow r = \frac{-1-9}{2} \lor r = \frac{-1+9}{2}$$
$$\Leftrightarrow r = -5 \lor r = 4$$

Como $r > 0, r = 4$.

Opção (B)

11. Sabemos que $1\,300\,000 = 1300$ milhares de habitantes e que $r = 1{,}6\% = 0{,}016$.

$2030 - 2012 = 18$

Logo, $1300 \times 1{,}016^{18}$

Opção (A)

12. $u_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2^n}$

(u_n) é uma progressão geométrica de razão $\frac{1}{2}$.

Assim, $\lim S_n = \lim \left(u_1 \times \frac{1-r^n}{1-r}\right)$.

$$\lim S_n = \lim \left(1 \times \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}}\right) = \lim \left(1 \times \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{\frac{1}{2}}\right) = \frac{1-0}{\frac{1}{2}} = 2$$

Opção (B)

13. $\frac{u_{2014}}{u_{2015}} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{u_{2015}}{u_{2014}} = 2$

(u_n) é uma progressão geométrica de razão $r = 2$.

$S_7 = u_1 \times \frac{1-r^7}{1-r}$, ou seja:

$$381 = u_1 \times \frac{1-2^7}{1-2} \Leftrightarrow 381 = u_1 \times \frac{1-128}{-1} \Leftrightarrow 381 = u_1 \times \frac{-127}{-1}$$
$$\Leftrightarrow 381 = 127u_1$$
$$\Leftrightarrow u_1 = \frac{381}{127}$$
$$\Leftrightarrow u_1 = 3$$

LeYa EDUCAÇÃO Daniela Raposo e Luzia Gomes

Assim, $u_{10} = 3 \times 2^9$.

Opção (C)

14. Como $b_n < 0$ e -1 é um minorante, temos $-1 < b_n < 0$. Logo, $\exists k \in \mathbb{R}^-: \lim b_n = k$.

Opção (D)

15. Como (u_n) é uma progressão aritmética de razão 3, $u_n = u_1 + (n-1)r$. Assim:

$$v_n = 2^{-3u_n} = 2^{-3[u_1+(n-1)r]} =$$
$$= 2^{-3[u_1+(n-1)\times 3]} =$$
$$= 2^{-3(u_1+3n-3)} =$$
$$= 2^{-3u_1-9n+9}$$

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{2^{-3u_1-9(n+1)+9}}{2^{-3u_1-9n+9}} = \frac{2^{-3u_1-9n-9+9}}{2^{-3u_1-9n+9}} =$$
$$= 2^{-3u_1-9n-(-3u_1-9n+9)} =$$
$$= 2^{-3u_1-9n+3u_1+9n-9} =$$
$$= 2^{-9}$$

Logo, (v_n) é uma progressão geométrica de razão 2^{-9}.

Opção (A)

16. $c_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{k}{n^2} = 0 + \frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \cdots + \frac{n}{n^2} =$

$$= \frac{1+2+\cdots+n}{n^2} =$$
$$= \frac{\sum_{k=1}^{n} k}{n^2} =$$
$$= \frac{S_n}{n^2} \quad (S_n \text{ progressão aritmética de razão 1})$$
$$= \frac{\frac{n^2+n}{2}}{n^2} =$$
$$= \frac{n^2+n}{2n^2}$$

$$\lim c_n = \lim \frac{n^2+n}{2n^2} = \lim \frac{n^2\left(1+\frac{1}{n}\right)}{2n^2} =$$
$$= \frac{1}{2}$$

Opção (B)

Itens de construção (págs. 120 a 124)

1.

1.1. $a_n = (-1)^n$

$a_1 = -1$

$a_2 = 1$

$a_3 = -1$

Logo, (a_n) não é monótona.

1.2. $b_n = 4n - 5$

$$b_{n+1} - b_n = 4(n+1) - 5 - (4n-5) = 4n + 4 - 5 - 4n + 5 =$$
$$= 4 \text{ e } 4 > 0$$

Logo, (b_n) é crescente.

1.3. $c_n = \frac{3n+2}{n}$

$$c_{n+1} - c_n = \frac{3(n+1)+2}{n+1} - \frac{3n+2}{n} = \frac{3n+3+2}{n+1} - \frac{3n+2}{n} =$$
$$= \frac{3n+5}{n+1} - \frac{3n+2}{n} =$$
$$= \frac{n(3n+5)-(n+1)(3n+2)}{n(n+1)} =$$
$$= \frac{3n^2+5n-\left(3n^2+2n+3n+2\right)}{n(n+1)} =$$
$$= \frac{3n^2+5n-3n^2-5n-2}{n(n+1)} =$$
$$= \frac{-2}{n(n+1)}$$

Como $n(n+1) > 0, \forall n \in \mathbb{N}$ e $-2 < 0$, então $\frac{-2}{n(n+1)} < 0, \forall n \in \mathbb{N}$. Logo, (c_n) é decrescente.

2.

2.1. $u_n = 2 + \frac{1}{n}$

$0 < \frac{1}{n} \leq 1, \forall n \in \mathbb{N}$

$2 < 2 + \frac{1}{n} \leq 3, \forall n \in \mathbb{N}$

Logo, (u_n) é limitada.

2.2. $v_n = \frac{3n-1}{n} = 3 - \frac{1}{n}$

$0 < \frac{1}{n} \leq 1, \forall n \in \mathbb{N}$

$-1 \leq -\frac{1}{n} < 0, \forall n \in \mathbb{N}$

$2 \leq 3 - \frac{1}{n} < 3, \forall n \in \mathbb{N}$

Logo, (v_n) é limitada.

2.3. $w_n = (-1)^n$

$-1 \leq w_n \leq 1, \forall n \in \mathbb{N}$

Logo, (w_n) é limitada.

3.

3.1. $\lim \left(1 + \frac{3}{n}\right) = 1 + 0 = 1$

3.2. $\lim \left(\frac{4n+7}{1-2n}\right) \overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{\cong} \lim \frac{n\left(4+\frac{7}{n}\right)}{n\left(\frac{1}{n}-2\right)} = \frac{4}{-2} = -2$

3.3. $\lim \frac{n^2+3}{n} \overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{\cong} \lim \frac{n^2\left(1+\frac{3}{n}\right)}{n} = \lim \left[n\left(1+\frac{3}{n}\right)\right] = +\infty(1+0) = +\infty$

3.4. $\lim \frac{n}{n^2+3} \overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{\cong} \lim \frac{n}{n^2\left(1+\frac{3}{n}\right)} = \lim \frac{1}{n\left(1+\frac{3}{n}\right)} = \frac{1}{+\infty(1+0)} = \frac{1}{+\infty} = 0$

3.5. $\lim \frac{4n^2+n}{n^2+3} \overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{\cong} \lim \frac{n^2\left(4+\frac{1}{n}\right)}{n^2\left(1+\frac{3}{n}\right)} = \lim \frac{4+\frac{1}{n}}{1+\frac{3}{n}} = 4$

3.6. $\lim \sqrt{2n^2-4n+3} \overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{\cong} \lim \sqrt{n^2\left(2-\frac{4}{n}+\frac{3}{n^2}\right)} = \lim \left(n\sqrt{2-\frac{4}{n}+\frac{3}{n^2}}\right) = +\infty \times \sqrt{2} = +\infty$

4.

4.1. $u_n = \frac{2}{5}n + 1$

$u_{n+1} - u_n = \frac{2}{5}(n+1) + 1 - \left(\frac{2}{5}n + 1\right) =$

$= \frac{2}{5}n + \frac{2}{5} + 1 - \frac{2}{5}n - 1 = \frac{2}{5}$

Logo, (u_n) é uma progressão aritmética de razão $\frac{2}{5}$.

4.2. $v_n = \frac{2n+1}{n}$

$v_{n+1} - v_n = \frac{2(n+1)+1}{n+1} - \frac{2n+1}{n} = \frac{2n+2+1}{n+1} - \frac{2n+1}{n} =$

$= \frac{2n+3}{n+1} - \frac{2n+1}{n} =$

$= \frac{n(2n+3)-(n+1)(2n+1)}{n(n+1)} =$

$= \frac{2n^2+3n-\left(2n^2+n+2n+1\right)}{n(n+1)} =$

$= \frac{2n^2+3n-2n^2-3n-1}{n(n+1)} =$

$= \frac{-1}{n(n+1)}$

Logo, (v_n) não é uma progressão aritmética.

4.3. $w_n = n^2 + n$

$$w_{n+1} - w_n = (n+1)^2 + n + 1 - (n^2 + n) = n^2 + 2n + 1 + n + 1 - n^2 - n =$$
$$= 2n + 2$$

Logo, (w_n) não é uma progressão aritmética.

4.4. $x_n = \frac{n^2-2n}{n} = \frac{n(n-2)}{n} = n - 2$

$$x_{n+1} - x_n = n + 1 - 2 - (n-2) = n - 1 - n + 2 =$$
$$= 1$$

Logo, (x_n) é uma progressão aritmética de razão 1.

4.5. $y_n = \begin{cases} y_1 = 4 \\ y_{n+1} = y_n - \pi \end{cases}$

$$y_{n+1} = y_n - \pi \Leftrightarrow y_{n+1} - y_n = -\pi$$

Logo, (y_n) é uma progressão aritmética de razão $-\pi$.

5.

5.1. $u_n = 2\pi^n$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{2\pi^{n+1}}{2\pi^n} = \pi^{n+1-n} = \pi$$

Logo, (u_n) é uma progressão geométrica de razão π.

5.2. $v_n = \left(\sqrt{3}\right)^{n-1}$

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{\left(\sqrt{3}\right)^{n+1-1}}{\left(\sqrt{3}\right)^{n-1}} = \frac{\left(\sqrt{3}\right)^{n}}{\left(\sqrt{3}\right)^{n-1}} = \sqrt{3}^{n-n+1} = \sqrt{3}$$

Logo, (v_n) é uma progressão geométrica de razão $\sqrt{3}$.

5.3. $w_n = n^2 + n$

$$\frac{w_{n+1}}{w_n} = \frac{(n+1)^2+n+1}{n^2+n} = \frac{n^2+2n+1+n+1}{n^2+n} = \frac{n^2+3n+2}{n^2+n}$$

Logo, (w_n) não é uma progressão geométrica.

5.4. $x_n = \frac{4^n}{5}$

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{\frac{4^{n+1}}{5}}{\frac{4^n}{5}} = \frac{4^{n+1}}{4^n} = 4^{n+1-n} = 4$$

Logo, (x_n) é uma progressão geométrica de razão 4.

5.5. $y_n = \frac{4}{5^n}$

$$\frac{y_{n+1}}{y_n} = \frac{\frac{4}{5^{n+1}}}{\frac{4}{5^n}} = \frac{5^n}{5^{n+1}} = 5^{n-n-1} = 5^{-1} = \frac{1}{5}$$

Logo, (y_n) é uma progressão geométrica de razão $\frac{1}{5}$.

5.6. $z_n = \frac{2^{n+1}}{3^n}$

$$\frac{z_{n+1}}{z_n} = \frac{\frac{2^{n+1+1}}{3^{n+1}}}{\frac{2^{n+1}}{3^n}} = \frac{2^{n+2}\times 3^n}{2^{n+1}\times 3^{n+1}} = 2^{n+2-n-1}\times 3^{n-n-1} = 2\times 3^{-1} = \frac{2}{3}$$

Logo, (z_n) é uma progressão geométrica de razão $\frac{2}{3}$.

6.

6.1. $u_n = 100 \Leftrightarrow 3n + 9 = 100 \Leftrightarrow 3n = 91$

$$\Leftrightarrow n = \frac{91}{3} \text{ e } \frac{91}{3} \notin \mathbb{N}$$

Logo, 100 não é termo da sucessão.

6.2. $u_p > 400 \Leftrightarrow 3p + 9 > 400 \Leftrightarrow 3p > 391$

$$\Leftrightarrow p > \frac{391}{3}$$

Logo, $p = 131$.

6.3. $u_{n+1} - u_n = 3(n+1) + 9 - (3n+9) = 3n + 3 + 9 - 3n - 9 = 3$

Como $3 > 0$, (u_n) é crescente.

Como $u_{n+1} - u_n = 3$, (u_n) é uma progressão aritmética de razão 3.

6.4. $S_n = 957 \Leftrightarrow \frac{u_1+u_n}{2}\times n = 957 \Leftrightarrow \frac{12+3n+9}{2}\times n = 957$

$$\Leftrightarrow \frac{3n+21}{2}\times n = 957$$

$$\Leftrightarrow (3n+21)\times n = 1914$$

$$\Leftrightarrow 3n^2 + 21n - 1914 = 0$$

$$\Leftrightarrow n = \frac{-21\pm\sqrt{21^2-4\times 3\times(-1914)}}{2\times 3}$$

$$\Leftrightarrow n = \frac{-21\pm\sqrt{441+22\,968}}{6}$$

$$\Leftrightarrow n = \frac{-21\pm\sqrt{23\,409}}{6}$$

$$\Leftrightarrow n = \frac{-21\pm 153}{6}$$

$$\Leftrightarrow n = \frac{-21-153}{6} \ \vee\ n = \frac{-21+153}{6}$$

$$\Leftrightarrow n = -29 \ \vee\ n = 22$$

Como $n \in \mathbb{N}, n = 22$. Assim, é preciso adicionar 21 termos.

7.

7.1. $u_n = 20 \Leftrightarrow \frac{2n-1}{n} = 20 \Leftrightarrow 2n - 1 = 20n \Leftrightarrow 18n = -1$

$$\Leftrightarrow n = -\frac{1}{18} \text{ e } -\frac{1}{18} \notin \mathbb{N}$$

Logo, 20 não é termo da sucessão.

7.2. $u_{n+1} - u_n = \frac{2(n+1)-1}{n+1} - \frac{2n-1}{n} =$

$= \frac{2n+2-1}{n+1} - \frac{2n-1}{n} =$

$= \frac{n(2n+1)-(n+1)(2n-1)}{n(n+1)} =$

$= \frac{2n^2+n-(2n^2-n+2n-1)}{n(n+1)} =$

$= \frac{2n^2+n-2n^2-n+1}{n(n+1)} =$

$= \frac{1}{n(n+1)}$

Como $n(n+1) > 0, \forall n \in \mathbb{N}$ e $1 > 0$, então $\frac{1}{n(n+1)} > 0, \forall n \in \mathbb{N}$.

Logo, (u_n) é crescente.

7.3. (u_n) não é uma progressão aritmética porque $u_{n+1} - u_n$ não é constante.

7.4. $u_n = \frac{2n-1}{n} = 2 - \frac{1}{n}$

Como (u_n) é crescente, u_1 é um minorante, isto é, $u_n \geq u_1$.

$u_1 = 2 - 1 = 1$

Por outro lado:

$\frac{1}{n} > 0, \forall n \in \mathbb{N}$

$-\frac{1}{n} < 0, \forall n \in \mathbb{N}$

$2 - \frac{1}{n} < 2, \forall n \in \mathbb{N}$

Logo, $1 \leq u_n < 2$ e, por isso, (u_n) é limitada.

Minorante: por exemplo, 1.

Majorante: por exemplo, 2.

8. (u_n) é uma progressão aritmética de razão 2, com $u_1 = 10$ e $u_2 = 12$.

Assim:

$u_n = u_1 + (n-1) \times r = 10 + (n-1) \times 2 =$

$= 10 + 2n - 2 =$

$= 2n + 8$

$S_{15} = \frac{u_1 + u_{15}}{2} \times 15$ e $u_{15} = 2 \times 15 + 8 = 38$

Logo:

$S_{15} = \frac{10+38}{2} \times 15 = 24 \times 15 = 360$

O estudante fez 360 exercícios.

9.

9.1. $a_1 = 2$

$a_2 = 6$

$a_3 = 6$

$a_4 = 12$

$a_5 = 10$

Como $a_4 - a_3 = 6 > 0$ e $a_5 - a_4 = -2 < 0$, podemos concluir que (a_n) não é monótona.

9.2. $b_1 = 9$

$b_2 = 4$

$b_3 = 1$

$b_4 = 0$

$b_5 = 1$

Como $b_4 - b_3 = -1 < 0$ e $b_5 - b_4 = 1 > 0$, podemos concluir que (b_n) não é monótona.

9.3. $c_{n+1} - c_n = 3 \times 2^n - 3 \times 2^{n-1} =$

$= 3 \times 2^{n-1}(2-1) =$

$= 3 \times 2^{n-1}$

Como $3 \times 2^{n-1} > 0$, podemos concluir que (c_n) é crescente.

9.4. $d_{n+1} - d_n = \frac{n+1+1}{2(n+1)+1} - \frac{n+1}{2n+1} = \frac{n+2}{2n+3} - \frac{n+1}{2n+1} =$

$= \frac{(n+2)(2n+1)-(n+1)(2n+3)}{(2n+1)(2n+3)} =$

$= \frac{2n^2+n+4n+2-(2n^2+3n+2n+3)}{(2n+1)(2n+3)} =$

$= \frac{2n^2+5n+2-2n^2-5n-3}{(2n+1)(2n+3)} =$

$= \frac{-1}{(2n+1)(2n+3)}$

Como $(2n+1)(2n+3) > 0, \forall n \in \mathbb{N}$ e $-1 < 0$, então $\frac{-1}{(2n+1)(2n+3)} < 0, \forall n \in \mathbb{N}$.

Logo, (d_n) é decrescente.

9.5. $e_{11} - e_{10} = \frac{12}{2} - 10 = 6 - 10 = -4$

Assim, como $e_{11} - e_{10} < 0$ e $e_{10} - e_9 > 0$, podemos concluir que (e_n) não é monótona.

9.6. $f_1 = 4$

$f_2 = 3$

$f_3 = 2$

$f_4 = 1$

$f_5 = 0$

$f_6 = 1$

Como $f_5 - f_4 = -1 < 0$ e $f_6 - f_5 = 1 > 0$, podemos concluir que (f_n) não é monótona.

10.

10.1. $a_n = \frac{n+1}{n+3} = 1 - \frac{2}{n+3}$

Cálculo auxiliar

$$\begin{array}{r|l} n+1 & n+3 \\ \cline{2-2} -n-3 & 1 \\ \hline -2 & \end{array}$$

Por um lado:

$n \geq 1, \forall n \in \mathbb{N}$

$n + 3 \geq 4, \forall n \in \mathbb{N}$

$\frac{1}{n+3} \leq \frac{1}{4}, \forall n \in \mathbb{N}$

$\frac{-2}{n+3} \geq -\frac{1}{2}, \forall n \in \mathbb{N}$

$1 - \frac{2}{n+3} \geq \frac{1}{2}, \forall n \in \mathbb{N}$

Por outro lado:

$\frac{2}{n+3} > 0, \forall n \in \mathbb{N}$

$-\frac{2}{n+3} < 0, \forall n \in \mathbb{N}$

$1 - \frac{2}{n+3} < 0, \forall n \in \mathbb{N}$

$\frac{1}{2} \leq u_n < 0$ e, por isso, (a_n) é limitada.

10.2. $-1 \leq \cos(n) \leq 1 \Leftrightarrow 4 - 1 \leq 4 + \cos(n) \leq 4 + 1 \Leftrightarrow 3 \leq b_n \leq 5, \forall n \in \mathbb{N}$

Logo, (b_n) é limitada.

10.3. $c_{n+1} - c_n = \pi^{-(n+1)} - \pi^{-n} = \pi^{-n-1} - \pi^{-n} =$

$= \pi^{-n-1}(1 - \pi) =$

$= \frac{1-\pi}{\pi^{n+1}}$

Como $\pi^{n+1} > 0, \forall n \in \mathbb{N}$ e $1 - \pi < 0$, então $\frac{1-\pi}{\pi^{n+1}} < 0, \forall n \in \mathbb{N}$. Logo, (c_n) é decrescente.

Como (c_n) é decrescente, c_1 é um majorante, isto é, $c_n \leq c_1$.

$c_1 = \pi^{-1} = \frac{1}{\pi}$

Por outro lado:

$\pi^{-n} = \frac{1}{\pi^n}$

$1 > 0$ e $\pi^n > 0, \forall n \in \mathbb{N}$

Logo, $\frac{1}{\pi^n} > 0, \forall n \in \mathbb{N}$

Assim, $0 < c_n \leq \frac{1}{\pi}, \forall n \in \mathbb{N}$ e, por isso, (c_n) é limitada.

10.4. $d_n = \begin{cases} -\frac{1}{n} & \text{se } n \text{ ímpar} \\ \frac{1}{n} & \text{se } n \text{ par} \end{cases}$

$0 < \frac{1}{n} \leq 1, \forall n \in \mathbb{N}$

$-1 \leq -\frac{1}{n} < 0, \forall n \in \mathbb{N}$

Logo, $-1 \leq d_n \leq 1, \forall n \in \mathbb{N}$ e, por isso, (d_n) é limitada.

11.

11.1. $u_{n+1} - u_n = \frac{4(n+1)}{3(n+1)+2} - \frac{4n}{3n+2} =$

$= \frac{4n+4}{3n+5} - \frac{4n}{3n+2} =$

$= \frac{(4n+4)(3n+2)-4n(3n+5)}{(3n+5)(3n+2)} =$

$= \frac{12n^2+8n+12n+8-12n^2-20n}{(3n+5)(3n+2)} =$

$= \frac{8}{(3n+5)(3n+2)}$

Como $(3n+5)(3n+2) > 0, \forall n \in \mathbb{N}$ e $8 > 0$, então $\frac{8}{(3n+5)(3n+2)} > 0, \forall n \in \mathbb{N}$.

Logo, (u_n) é crescente.

Como (u_n) é crescente, u_1 é um minorante, isto é, $u_n \geq u_1$.

$u_1 = \frac{4\times1}{3\times1+2} = \frac{4}{5}$

Por outro lado:

$\frac{\frac{8}{3}}{3n+2} > 0, \forall n \in \mathbb{N}$

$-\frac{\frac{8}{3}}{3n+2} < 0, \forall n \in \mathbb{N}$

$\frac{4}{3} - \frac{\frac{8}{3}}{3n+2} < \frac{4}{3},$

Logo, $\frac{4}{5} \leq u_n < \frac{4}{3}, \forall n \in \mathbb{N}$ e, por isso, (u_n) é limitada.

Cálculo auxiliar

$$\begin{array}{l|l} 4n & 3n+2 \\ \hline -4n-\frac{8}{3} & \\ \hline -\frac{8}{3} & \end{array}$$

$\frac{4n}{3n+2} = \frac{4}{3} - \frac{\frac{8}{3}}{3n+2}$

11.2. $v_{n+1} - v_n = 1 - \frac{1}{2}(n+1) - \left(1 - \frac{1}{2}n\right) =$

$= 1 - \frac{1}{2}n - \frac{1}{2} - 1 + \frac{1}{2}n =$

$= -\frac{1}{2} < 0$

Logo, (v_n) é decrescente.

Como (v_n) é decrescente, v_1 é um majorante, isto é, $v_n \leq v_1$.

$v_1 = 1 - \frac{1}{2}\times 1 = 1 - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$

$\lim v_n = \lim\left(1 - \frac{1}{2}n\right) = 1 - \infty = -\infty$

Logo, (v_n) não é limitada.

11.3. $w_n = \begin{cases} n & \text{se } n \text{ par} \\ -n & \text{se } n \text{ ímpar} \end{cases}$

$w_1 = -1$

$w_2 = 2$

$w_3 = -3$

Como $w_2 - w_1 > 0$ e $w_3 - w_2 < 0$, podemos concluir que (w_n) não é monótona.

- Se n é par, $\lim (-1)^n n = \lim n = +\infty$.
- Se n é ímpar, $\lim (-1)^n n = \lim\ (-n) = -\infty$.

Logo, (w_n) não é limitada.

11.4. $x_n = \begin{cases} 3 + \frac{1}{n} & \text{se } n \text{ par} \\ 3 - \frac{1}{n} & \text{se } n \text{ ímpar} \end{cases}$

$x_1 = 3 - 1 = 2$

$x_2 = 3 + \frac{1}{2} = \frac{7}{2}$

$x_3 = 3 - \frac{1}{3} = \frac{8}{3}$

Como $x_2 - x_1 > 0$ e $x_3 - x_2 < 0$, podemos concluir que (x_n) não é monótona.

Sabemos que:

$0 < \frac{1}{n} \leq \frac{1}{2}, \forall n \in \mathbb{N}$ e n é par.

$3 < 3 + \frac{1}{n} \leq \frac{7}{2}, \forall n \in \mathbb{N}$ e n é par.

e também que:

$$-1 \leq -\frac{1}{n} < 0, \forall n \in \mathbb{N}$$

$$2 \leq 3 - \frac{1}{n} < 3, \forall n \in \mathbb{N}$$

Logo, $2 \leq x_n < \frac{7}{2}, \forall n \in \mathbb{N}$ e, por isso, (x_n) é limitada.

12.

12.1. $u_{2014} - u_{2015} = 1 - 2\text{sen}\left(\frac{2014\pi}{3}\right) - \left[1 - 2\text{sen}\left(\frac{2015\pi}{3}\right)\right] =$

$= 1 - 2\text{sen}\left(\frac{4\pi}{3}\right) - 1 + 2\text{sen}\left(\frac{5\pi}{3}\right) =$

$= -2\text{sen}\left(\frac{4\pi}{3}\right) + 2\text{sen}\left(\frac{5\pi}{3}\right) =$

$= -2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + 2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) =$

$= \sqrt{3} - \sqrt{3} =$

$= 0$

12.2. $u_n = 1 \Leftrightarrow 1 - 2\text{sen}\left(\frac{n\pi}{3}\right) = 1 \Leftrightarrow -2\text{sen}\left(\frac{n\pi}{3}\right) = 0$

$\Leftrightarrow \text{sen}\left(\frac{n\pi}{3}\right) = 0$

$\Leftrightarrow \frac{n\pi}{3} = k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

$$\Leftrightarrow n\pi = 3k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$$
$$\Leftrightarrow n = 3k,\ k \in \mathbb{Z}$$

Os termos de ordem $n = 3k, k \in \mathbb{Z}$ são iguais a 1.

12.3. $u_1 = 1 - 2\text{sen}\left(\frac{\pi}{3}\right) = 1 - 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 1 - \sqrt{3}$

$u_2 = 1 - 2\text{sen}\left(\frac{2\pi}{3}\right) = 1 - 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 1 - \sqrt{3}$

$u_3 = 1 - 2\text{sen}(\pi) = 1 - 0 = 1$

$u_4 = 1 - 2\text{sen}\left(\frac{4\pi}{3}\right) = 1 - 2 \times \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 1 + \sqrt{3}$

$u_5 = 1 - 2\text{sen}\left(\frac{5\pi}{3}\right) = 1 - 2 \times \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 1 + \sqrt{3}$

$u_6 = 1 - 2\text{sen}(2\pi) = 1 - 0 = 1$

Como $u_3 - u_2 > 0$ e $u_6 - u_5 < 0$, podemos concluir que (u_n) não é monótona.

12.4. $-1 \le \text{sen}\left(\frac{n\pi}{3}\right) \le 1, \forall n \in \mathbb{N} \Leftrightarrow -2 \le -2\text{sen}\left(\frac{n\pi}{3}\right) \le 2, \forall n \in \mathbb{N}$

$$\Leftrightarrow -1 \le 1 - 2\text{sen}\left(\frac{n\pi}{3}\right) \le 3, \forall n \in \mathbb{N}$$
$$\Leftrightarrow -1 \le u_n \le 3, \forall n \in \mathbb{N}$$

Logo, (u_n) é limitada.

13.

13.1. $\lim\left(\frac{2n^5+3n^2}{4n^5+1}\right) \overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{\cong} \lim \frac{\cancel{n^5}\left(2+\frac{3}{n^3}\right)}{\cancel{n^5}\left(4+\frac{1}{n^5}\right)} = \lim \frac{2+\frac{3}{n^3}}{4+\frac{1}{n^5}} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

13.2. $\lim\left(1 + \frac{2+3n^4}{4n+1}\right) = 1 + \lim\left(\frac{2+3n^4}{4n+1}\right) \overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{\cong} 1 + \lim \frac{n^4\left(\frac{2}{n^4}+3\right)}{n\left(4+\frac{1}{n}\right)} = 1 + \lim \frac{n^3\left(\frac{2}{n^4}+3\right)}{4+\frac{1}{n}} = 1 + \frac{+\infty}{4} = +\infty$

13.3. $\lim\left(\frac{1}{n+1}(n^2+2)\right) \overset{(0\times\infty)}{\cong} \lim\left(\frac{n^2+2}{n+1}\right) \overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{\cong} \lim \frac{n^2\left(1+\frac{2}{n^2}\right)}{n\left(1+\frac{1}{n}\right)} = \lim \frac{n\left(1+\frac{2}{n^2}\right)}{1+\frac{1}{n}} = \frac{+\infty}{11} = +\infty$

13.4. $\lim\left(\frac{1}{n^2+3} \div \frac{2}{n}\right) = \lim\left(\frac{n}{2n^2+6}\right) \overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{\cong} \lim \frac{n}{n^2\left(2+\frac{6}{n^2}\right)} = \lim \frac{1}{n\left(2+\frac{6}{n^2}\right)} = \frac{1}{+\infty} = 0$

13.5. $\lim\sqrt{\frac{12n}{n+1}} = \sqrt{\lim\left(\frac{12n}{n+1}\right)} \overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{\cong} \sqrt{\lim\left(\frac{12\cancel{n}}{\cancel{n}\left(1+\frac{1}{n}\right)}\right)} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$

13.6. $\lim\left(n^{2015} - n^2\right) \overset{(\infty-\infty)}{\cong} \lim\left[n^{2015}\left(1 - \frac{1}{n^{2013}}\right)\right] = +\infty(1-0) = +\infty$

13.7. $\lim\left(n^2 - n^{2015}\right) \overset{(\infty-\infty)}{\cong} \lim\left[n^{2015}\left(\frac{1}{n^{2013}} - 1\right)\right] = +\infty(0-1) = -\infty$

13.8. $\lim\left(2 + \frac{(-1)^n}{n}\right) = 2 + \lim \frac{(-1)^n}{n} = 2 + 0 = 2$

13.9. $\lim\left(-n+\frac{(-1)^n}{n}\right)=-\infty+0=-\infty$

13.10. $\lim\left(\sqrt{n^2+1}+\sqrt{n^2+2}\right)=+\infty+\infty=+\infty$

13.11. $\lim\left(\sqrt{n^2+1}-\sqrt{n^2+2}\right)=\lim\frac{\left(\sqrt{n^2+1}-\sqrt{n^2+2}\right)\left(\sqrt{n^2+1}-\sqrt{n^2+2}\right)}{\sqrt{n^2+1}+\sqrt{n^2+2}}=\lim\frac{n^2+1-(n^2+2)}{\sqrt{n^2+1}+\sqrt{n^2+2}}=$

$=\lim\frac{n^2+1-n^2-2}{\sqrt{n^2+1}+\sqrt{n^2+2}}=$

$=\lim\frac{-1}{\sqrt{n^2+1}+\sqrt{n^2+2}}=$

$=\frac{-1}{+\infty}=$

$=0$

13.12. $\lim\left(\frac{1+2^n+3^n}{3^n}\right)=\lim\frac{\cancel{3^n}\left(\frac{1}{3^n}+\left(\frac{2}{3}\right)^n+1\right)}{\cancel{3^n}}=\lim\left[\frac{1}{3^n}+\left(\frac{2}{3}\right)^n+1\right]=0+0+1=1$

13.13. $\lim\left(\frac{\pi^n+4^{n+1}}{3^n}\right)=\lim\left(\frac{\pi^n}{3^n}+\frac{4^{n+1}}{3^n}\right)=\lim\left[\left(\frac{\pi}{3}\right)^n+\left(\frac{4}{3}\right)^n\times 4\right]=+\infty+\infty=+\infty$

13.14. $\lim\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2^n}\right)=\lim\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)=$

$=1-0=$

$=1$

Cálculo auxiliar

$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2^n}$ é a soma dos n termos de uma progressão geométrica de razão $\frac{1}{2}$.

$S_n=u_1\times\frac{1-r^n}{1-r}$

$S_n=\frac{1}{2}\times\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}\times\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{\frac{1}{2}}=1-\left(\frac{1}{2}\right)^n$

13.15. $\lim\left[\left(\sqrt{4n^2-1}-2n\right)\cos(n)\right]=\lim\frac{\left(\sqrt{4n^2-1}-2n\right)\left(\sqrt{4n^2-1}+2n\right)\cos(n)}{\sqrt{4n^2-1}+2n}=$

$=\lim\frac{(4n^2-1-4n^2)\cos(n)}{\sqrt{4n^2-1}+2n}=$

$=\lim\frac{-\cos(n)}{\sqrt{4n^2-1}+2n}=$

$=\lim\frac{-1}{\sqrt{4n^2-1}+2n}\times(+\cos(n))$

Como $-1\leq\cos(n)\leq 1, \forall n\in\mathbb{N}$ e como $\lim\frac{-1}{\sqrt{4n^2-1}+2n}=0$, então, concluímos que $\lim\frac{-\cos(n)}{\sqrt{4n^2-1}+2n}=0$.

13.16. $\lim\left[\left(3+\frac{\sqrt{9n^2-4n+1}}{-n}\right)\operatorname{sen}(n)\right]=0$, pois:

$-1\leq\operatorname{sen}(n)\leq 1, \forall n\in\mathbb{N}$ e:

$\lim\left(3+\frac{\sqrt{9n^2-4n+1}}{-n}\right)=\lim\left(3+\frac{\sqrt{n^2\left(9-\frac{4}{n}+\frac{1}{n^2}\right)}}{-n}\right)=\lim\left(3+\frac{n\sqrt{\left(9-\frac{4}{n}+\frac{1}{n^2}\right)}}{-n}\right)=$

$=\lim\left(3-\sqrt{9-\frac{4}{n}+\frac{1}{n^2}}\right)=$

$=3-\sqrt{9}=$

$=0$

$$-1 \leq -\cos(n) \leq 1 \Leftrightarrow \frac{-1}{\sqrt{4n^2-1}+2n} \leq \frac{\cos(n)}{\sqrt{4n^2-1}+2n} \leq \frac{1}{\sqrt{4n^2-1}+2n}$$

Como $\lim \frac{-1}{\sqrt{4n^2-1}+2n} = \lim \frac{1}{\sqrt{4n^2-1}+2n} = 0$, então, pelo teorema das sucessões enquadradas, concluímos que $\lim \frac{-\cos(n)}{\sqrt{4n^2-1}+2n} = 0$.

14. Sabemos que:

$$u_n = \begin{cases} \pi+1 & \text{se } n \text{ par} \\ \pi-1 & \text{se } n \text{ ímpar} \end{cases}$$

Logo, (u_n) é divergente.

$$v_n = \begin{cases} \pi+1 & \text{se } n \text{ ímpar} \\ \pi-1 & \text{se } n \text{ par} \end{cases}$$

Logo, (v_n) é divergente.

$$u_n \times v_n = \begin{cases} (\pi+1)(\pi-1) & \text{se } n \text{ par} \\ (\pi-1)(\pi+1) & \text{se } n \text{ ímpar} \end{cases} \Leftrightarrow u_n \times v_n = \pi^2 - 1$$

$$\lim(u_n \times v_n) = \lim(\pi^2-1) = \pi^2 - 1$$

Logo, $(u_n \times v_n)$ é convergente.

15.

15.1. Como $u_{n+1} - u_n = -3$, (u_n) é uma progressão aritmética de razão -3.

Assim, $u_n = u_1 + (n-1) \times r$.

$u_n = 4 + (n-1) \times (-3) = 4 - 3n + 3 = -3n + 7$

Como $u_1 > 0$ e $r < 0$, podemos concluir que (u_n) é decrescente.

15.2. Sabemos que $u_{10} = 8$ e $u_{60} = 33$.

$$\begin{cases} u_{10} = 8 \\ u_{60} = 33 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + 9r = 8 \\ u_1 + 59r = 33 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 8 - 9r \\ 8 - 9r + 59r = 33 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \underline{\qquad} \\ 50r = 25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \underline{\qquad} \\ r = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 8 - 9 \times \frac{1}{2} \\ \underline{\qquad} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = \frac{7}{2} \\ r = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Assim:

$$u_n = \frac{7}{2} + (n-1) \times \frac{1}{2} \Leftrightarrow u_n = \frac{7}{2} + \frac{1}{2}n - \frac{1}{2} \Leftrightarrow u_n = \frac{1}{2}n + 3$$

Como $u_1 > 0$ e $r > 0$, podemos concluir que (u_n) é crescente.

16. Sabemos que (u_n) é uma progressão aritmética de razão 4 e $u_1 = 3$.

$$S_n = 465 \Leftrightarrow \frac{u_1+u_n}{2} \times n = 465 \Leftrightarrow \frac{3+4n-1}{2} \times n = 465$$

$$\Leftrightarrow \frac{4n+2}{2} \times n = 465$$

$$\Leftrightarrow \frac{4n^2+2n}{2} = 465$$

Cálculo auxiliar

$u_n = u_1 + (n-1) \times r$

$u_n = 3 + (n-1) \times 4$

$\Leftrightarrow u_n = 3 + 4n - 4$

$\Leftrightarrow u_n = 4n - 1$

LeYa EDUCAÇÃO Daniela Raposo e Luzia Gomes

$\Leftrightarrow 2n^2 + n = 465$

$\Leftrightarrow 2n^2 + n - 465 = 0$

$\Leftrightarrow n = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \times 2 \times (-465)}}{2 \times 2}$

$\Leftrightarrow n = \frac{-1 \pm \sqrt{1+3720}}{4}$

$\Leftrightarrow n = \frac{-1 \pm \sqrt{3721}}{4}$

$\Leftrightarrow n = \frac{-1 \pm 61}{4}$

$\Leftrightarrow n = \frac{-62}{4} \quad \wedge \quad n = \frac{60}{4}$

$\Leftrightarrow n = -\frac{31}{2} \quad \wedge \quad n = 15$

$\Leftrightarrow n = 15$, pois $n \in \mathbb{N}$

17. Sejam $u_n = u_1 + (n-1) \times r_1$ e $v_n = v_1 + (n-1) \times r_2$ duas progressões aritméticas de razões r_1 e r_2, respetivamente e seja $w_n = u_n + v_n$. Assim:

$w_n = u_1 + (n-1) \times r_1 + v_1 + (n-1) \times r_2 =$

$= u_1 + v_1 + (n-1)(r_1 + r_2)$

Seja $w_1 = u_1 + v_1$ e $r_1 + r_2 = r_w$.

Assim, $w_n = w_1 + (n-1)r_w$.

Logo, (w_n) é uma progressão aritmética de razão $r_w = r_1 + r_2$.

18. $v_{n+1} = 5 + v_n \Leftrightarrow v_{n+1} - v_n = 5$

Assim, (v_n)é uma progressão aritmética de razão 5.

Como $v_{10} = 5$, temos:

$v_1 + 9r = 5 \Leftrightarrow v_1 + 9 \times 5 = 5$

$\Leftrightarrow v_1 + 45 = 5$

$\Leftrightarrow v_1 = -40$

$S_m = 1085 \Leftrightarrow \frac{v_1 + v_m}{2} \times m = 1085 \Leftrightarrow \frac{-40+5m-45}{2} \times m = 1085$

$\Leftrightarrow \frac{5m-85}{2} \times m = 1085$

$\Leftrightarrow \frac{5m^2 - 85m}{2} = 1085$

$\Leftrightarrow 5m^2 - 85m = 2170$

$\Leftrightarrow m^2 - 17m - 434 = 0$

$\Leftrightarrow m = \frac{17 \pm \sqrt{(-17)^2 - 4 \times 1 \times (-434)}}{2 \times 1}$

$\Leftrightarrow m = \frac{17 \pm \sqrt{289 + 1736}}{2}$

Cálculo auxiliar

$v_m = v_1 + (m-1) \times r$

$v_m = -40 + (m-1) \times 5$

$\Leftrightarrow v_m = -40 + 5m - 5$

$\Leftrightarrow v_m = 5m - 45$

$$\Leftrightarrow m=\frac{17\pm\sqrt{2025}}{2}$$
$$\Leftrightarrow m=\frac{17\pm 45}{2}$$
$$\Leftrightarrow m=\frac{-28}{2} \quad \wedge \quad m=\frac{62}{2}$$
$$\Leftrightarrow m=-14 \quad \wedge \quad m=31$$
$$\Leftrightarrow m=31, \text{ pois } n\in\mathbb{N}$$

19.

19.1. Como $\frac{v_{n+1}}{v_n}=3$, (v_n) é uma progressão geométrica de razão 3.

Assim:

$v_n=v_1\times r^{n-1}$

$v_n=4\times 3^{n-1}$

Como $v_1>0$ e $r>0$, podemos concluir que (v_n) é crescente.

19.2. Sabemos que $v_3=150$ e $v_7=93\,750$.

$$\begin{cases} v_3=150 \\ v_7=93\,750 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v_1\times r^2=150 \\ v_3\times r^4=93\,750 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overline{} \\ 150r^4=93\,750 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \overline{} \\ r^4=\frac{93\,750}{150} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overline{} \\ r^4=625 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \overline{} \\ r=\pm 5 \end{cases} \underbrace{\Leftrightarrow}_{r<0} \begin{cases} v_1\times(-5)^2=150 \\ r=-5 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} v_1=\frac{150}{25} \\ \underline{} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v_1=6 \\ r=-5 \end{cases}$$

Assim, $v_n=6\times(-5)^{n-1}$.

Como $v_1>0$ e $r<0$, podemos concluir que (v_n) não é monótona.

20. $w_n=\frac{2}{3^n}$

20.1. $\frac{w_{n+1}}{w_n}=\frac{\frac{2}{3^{n+1}}}{\frac{2}{3^n}}=\frac{3^n}{3^{n+1}}=\frac{1}{3}$

Logo, (w_n) é uma progressão geométrica de razão $\frac{1}{3}$.

20.2. $w_{n+1}-w_n=\frac{2}{3^{n+1}}-\frac{2}{3^n}=\frac{2-6}{3^{n+1}}=\frac{-4}{3^{n+1}}$

Como $3^{n+1}>0, \forall n\in\mathbb{N}$ e $-4<0$, então $\frac{-4}{(2n+3)(2n+1)}>0, \forall n\in\mathbb{N}$.

Logo, (w_n) é decrescente.

20.3. $S_n=w_1\times\frac{1-r^n}{1-r}$

$$S_n=\frac{2}{3}\times\frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^n}{1-\frac{1}{3}}=\frac{2}{3}\times\frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^n}{\frac{2}{3}}=1-\left(\frac{1}{3}\right)^n$$

20.4. $\lim S_n = \lim\left[1-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right] = 1 - 0 = 1$

21. Sejam $u_n = u_1 \times r_1^{n-1}$ e $v_n = v_1 \times r_2^{n-1}$ duas progressões geométricas de razões r_1 e r_2, respetivamente, e seja $w_n = u_n \times v_n$.

Assim:

$$w_n = u_1 \times r_1^{n-1} \times v_1 \times r_2^{n-1} =$$
$$= u_1 v_1 \times (r_1 \times r_2)^{n+1}$$

Seja $w_1 = u_1 \times v_1$ e $r_1 \times r_2 = r_w$.

Assim, $w_n = w_1 \times r_w^{n-1}$.

Logo, (w_n) é uma progressão geométrica de razão $r_w = r_1 \times r_2$.

22.

22.1. $P = 2\pi r$

$P_1 = 6\pi$

$P_2 = 3\pi = \frac{1}{2}P_1$

$P_3 = \frac{3}{2}\pi = \frac{1}{2}P_2$

…

Assim, $P_n = \begin{cases} P_1 = 6\pi \\ P_{n+1} = \frac{1}{2}P_n \end{cases},\ n \geq 2.$

Como $P_{n+1} = \frac{1}{2}P_n$, temos $\frac{P_{n+1}}{P_n} = \frac{1}{2}$. Logo, (P_n) é uma progressão geométrica de razão $\frac{1}{2}$.

$P_n = P_1 \times r^{n-1}$

$P_n = 6\pi \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

22.2. $A = \pi r^2$

$A_1 = 9\pi$

$A_2 = \frac{9}{4}\pi = \frac{1}{4}A_1$

$A_3 = \frac{9}{16}\pi = \frac{1}{4}A_2$

…

Assim, $A_n = \begin{cases} A_1 = 9\pi \\ A_{n+1} = \frac{1}{4}A_n \end{cases},\ n \geq 2.$

Como $A_{n+1} = \frac{1}{4}A_n$, temos $\frac{A_{n+1}}{A_n} = \frac{1}{4}$. Logo, (A_n) é uma progressão geométrica de razão $\frac{1}{4}$.

$A_n = A_1 \times r^{n-1}$

$A_n = 9\pi \times \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$

23. $u_n = \sqrt{n^2+1} - n$

$$u_{n+1} - u_n = \sqrt{(n+1)^2+1} - (n+1) - \left(\sqrt{n^2+1} - n\right) =$$
$$= \sqrt{n^2+2n+1} - n - 1 - \sqrt{n^2+1} + n =$$
$$= \sqrt{n^2\left(1+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}\right)} - \sqrt{n^2\left(1+\frac{1}{n^2}\right)} - 1 =$$
$$= n\sqrt{1+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}} - n\sqrt{1+\frac{1}{n^2}} - 1 =$$
$$= n\left(\sqrt{1+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}} - \sqrt{1+\frac{1}{n^2}}\right) - 1$$

Como $\sqrt{1+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}} - \sqrt{1+\frac{1}{n^2}}$ tende para 0, podemos concluir que $u_{n+1} - u_n < 0$, ou seja, (u_n) é decrescente e u_1 é um majorante, isto é, $u_n \leq u_1$.

$u_1 = \sqrt{2} - 1$

$$u_n = \sqrt{n^2+1} - n = \sqrt{n^2\left(1+\frac{1}{n}\right)} - n = n\sqrt{1+\frac{1}{n}} - n =$$
$$= n\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}} - 1\right)$$

$1 + \frac{1}{n} > 1, \forall n \in \mathbb{N}$

$\sqrt{1+\frac{1}{n}} > \sqrt{1}, \forall n \in \mathbb{N}$

$\sqrt{1+\frac{1}{n}} - 1 > 0, \forall n \in \mathbb{N}$

Logo, $u_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}$.

Provámos que $0 < u_n \leq \sqrt{2} - 1$ e, por isso, (u_n) é limitada.

24.

24.1. $C_3 = A_0A_1A_2A_3$

$$C_3 = \sqrt{5} + \frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{\sqrt{5}}{4} = \frac{4\sqrt{5}+2\sqrt{5}+\sqrt{5}}{4} = \frac{7\sqrt{5}}{4}$$

24.2. Como (C_n) é uma progressão geométrica de razão $\frac{1}{2}$, temos:

$$S_n = \sqrt{5} \times \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}} = \sqrt{5} \times \frac{1-\frac{1}{2^n}}{\frac{1}{2}} = 2\sqrt{5}(1-2^{-n}) = 2\sqrt{5} - \sqrt{5} \times 2^{1-n}$$

24.3. $\lim S_n = \lim\left(2\sqrt{5} - \sqrt{5} \times 2^{1-n}\right) = 2\sqrt{5} - \sqrt{5} \times 2^{-\infty} =$

$$= 2\sqrt{5} - 0 =$$
$$= 2\sqrt{5}$$

25.

25.1. $|u_n| < L \Leftrightarrow \left|\frac{3}{2n+1}\right| < L \Leftrightarrow \frac{3}{2n+1} < L$

$$\Leftrightarrow \frac{3}{L} < 2n + 1$$

$$\Leftrightarrow 2n > \frac{3}{L} - 1$$

$$\Leftrightarrow n > \frac{3}{2L} - \frac{1}{2}$$

Por exemplo, se $L = 2$, vem que $n > \frac{3}{4} - \frac{1}{2}$, ou seja, $n > \frac{1}{4}$, que é uma condição universal em $\mathbb{N}$. Logo, a proposição é verdadeira.

25.2. $u_n = \frac{2n+1}{3}$

$\lim \frac{2n+1}{3} = \frac{+\infty}{3} = +\infty$

A proposição é falsa.

26. $u_n = -4 - \frac{1}{n}$

$|u_n| < L \Leftrightarrow \left|-4 - \frac{1}{n}\right| < L \Leftrightarrow 4 + \frac{1}{n} < L$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{n} < L - 4$$

$$\overset{L>4}{\Leftrightarrow} n > \frac{1}{L-4}$$

Por exemplo, se $L = 6$, vem que $n > \frac{1}{2}$, que é uma condição universal em $\mathbb{N}$.

27.

27.1. Seja $\delta > 0$ um número qualquer.

$\left|(-1)^n \frac{1}{n} - 0\right| < \delta \Leftrightarrow |(-1)^n| \times \left|\frac{1}{n}\right| < \delta \Leftrightarrow 1 \times \frac{1}{n} < \delta$

$$\Leftrightarrow n > \frac{1}{\delta}$$

Concluímos então que, para qualquer $\delta > 0$, se considerarmos um número natural$p$, superior a $\frac{1}{\delta}$, se tem $\left|(-1)^n \frac{1}{n} - 0\right| < \delta$, desde que $n \geq p$.

27.2. Dado $L \in \mathbb{R}^+$:

$v_n > L \Leftrightarrow 3n - 2 > L \Leftrightarrow 3n > L + 2 \Leftrightarrow n > \frac{L+2}{3}$

Concluímos então que, para qualquer $L > 0$, se considerarmos um número natural$p$, superior a $\frac{L+2}{3}$, se tem $v_n > L$, desde que $n \geq p$.

28. $\lim b_n = \lim(-a_n) = -\lim a_n = -(-\infty) = +\infty$

LeYa EDUCAÇÃO Daniela Raposo e Luzia Gomes

29. Seja $\delta > 0$ um número qualquer.

$$|c_n - (-1)| < \delta \Leftrightarrow \left|\frac{-n-3}{n+2} + 1\right| < \delta \Leftrightarrow \left|\frac{-n-3+n+2}{n+2}\right| < \delta$$

$$\Leftrightarrow \left|\frac{-1}{n+2}\right| < \delta$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{n+2} < \delta$$

$$\Leftrightarrow n + 2 > \frac{1}{\delta}$$

$$\Leftrightarrow n > \frac{1}{\delta} - 2$$

Concluímos então que, para qualquer $\delta > 0$, se considerarmos um número natural p, superior a $\frac{1}{\delta} - 2$, se tem $|c_n - (-1)| < \delta$, desde que $n \geq p$.

Logo, $\lim c_n = -1$.

30. $151 + 153 + \cdots + 413$

$u_n = 151 + 2(n-1) = 151 + 2n - 2 = 2n + 149$

$2n + 149 = 413 \Leftrightarrow 2n = 264 \Leftrightarrow n = 132$

$S_{132} = \frac{151+413}{2} \times 132 = 282 \times 132 = 37\,224$