Exame Nacional do Ensino Secundário – Matemática A

Prova Modelo n.º 4

12.º Ano de Escolaridade

José Carlos da Silva Pereira
Explicações de Matemática – Sala de Estudo

"Um matemático é um homem cego, numa sala às escuras, à procura de um gato preto, que não se encontra lá."
Charles Darwin

Grupo I – Itens de Escolha Múltipla

1. Considera três números naturais **a**, **b** e **c** tais que $a = {}^{2008}C_{100}$, $b = {}^{2008}C_{101}$ e $c = {}^{2009}C_{101}$. Então, o valor de $a + 2b - c$ é igual a:

A ${}^{2008}C_{100}$ **B** ${}^{2008}C_{101}$ **C** ${}^{2009}C_{100}$ **D** ${}^{2009}C_{101}$

2. Um dado, equilibrado, com as faces numeradas de 1 a 6 é lançado quatro vezes. Qual é a probabilidade de sair faces com os mesmos números apenas nos dois primeiros lançamentos?

A $\frac{5}{54}$ **B** $\frac{5}{9}$ **C** $\frac{25}{36}$ **D** $\frac{25}{216}$

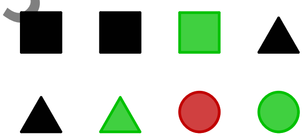
3. Em cada uma das opções seguintes estão representadas oito figuras, círculos, quadrados ou triângulos que estão pintados de preto, encarnado ou verde. Para cada uma das opções considera a experiência que consiste em escolher uma das oito figuras. Considera os acontecimentos:

X: «A figura escolhida é um triângulo»

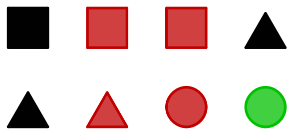
Y: «A figura escolhida é preta»

Em qual das opções se tem $P\left(X \middle| \overline{Y}\right) = \frac{1}{4}$

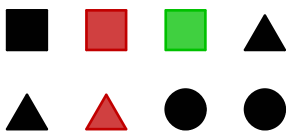
A



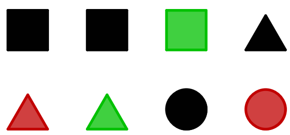
B



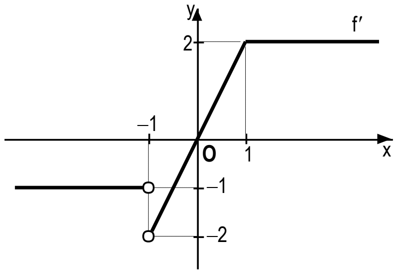
C



D

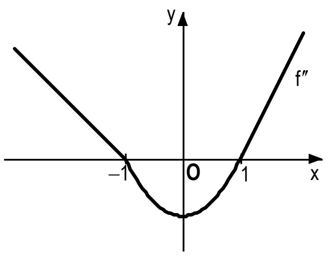


4. Considera uma função f de domínio IR. Na figura está representado parte do gráfico da função f', **primeira derivada** de f:

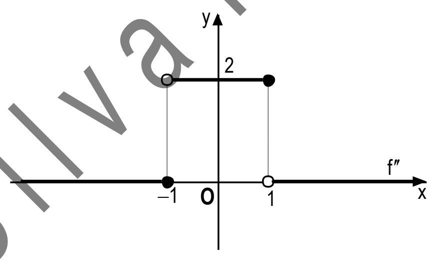


Em qual das figuras seguintes pode estar parte da representação gráfica de f'', **segunda derivada** de f?

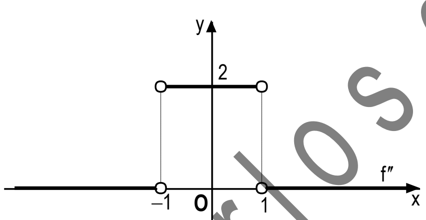
A



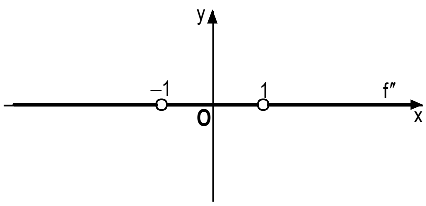
B



C

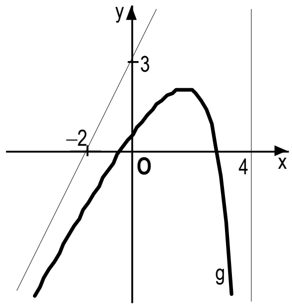


D



5. Na figura está parte da representação gráfica de uma função g de domínio $]-\infty,4[$. Na figura também estão também representadas duas rectas que são assimptotas do gráfico de g, uma oblíqua e outra vertical.

Qual é o valor de $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{e^x - x}{g(x)}$?



A 0

B $+\infty$

C $-\infty$

D $-\dfrac{2}{3}$

6. Considera um número $a \in IR^+ \setminus \{0\}$ tal que $\log_a x = 2$ e um número real positivo, **b**, tal que $\sqrt{b} = x$, com $x \in IR^+$. Qual das seguintes afirmações é **falsa**?

A $a^2 = \sqrt{b}$ **B** $a^4 = b$ **C** $\frac{b}{a} = x$ **D** $a \times b = \sqrt{x^5}$

7. Em C, conjunto dos números complexos, considera um número complexo $z = a + bi$, em que $a < 0$ e $b > 0$. Qual dos números seguintes pode representar $-\overline{z}$, **simétrico do conjugado** de z?

A $2e^{i\frac{\pi}{7}}$ **B** $2e^{i\frac{6\pi}{7}}$ **C** $2e^{i\frac{8\pi}{7}}$ **D** $2e^{i\frac{13\pi}{7}}$

8. Em C, conjunto dos números complexos, considera um número complexo $w = 2 - i + xi$, com $x \in IR$. O valor real de x para o qual a imagem geométrica de $w - 2\overline{w}$ pertence à bissectriz dos quadrantes pares é:

A $-\frac{5}{3}$ **B** $-\frac{1}{3}$ **C** $\frac{1}{3}$ **D** $\frac{5}{3}$

GRUPO II – ITENS DE RESPOSTA ABERTA

1. Seja C o conjunto dos números complexos e i a unidade imaginária.

1.1 Considera o número complexo $w = 2\operatorname{cis}\frac{7}{8}\pi$. Determina o menor natural **n** de modo que $\left(\frac{w}{i}\right)^n$ seja um número real negativo.

1.2 Sejam z_1, z_2 e z_3 três números complexos, cujas imagens geométricas, A, B e C, respectivamente, pertencem à região do plano complexo, definido pela condição $|z| = 2$. Sabe-se que:

– O ponto A pertence ao primeiro quadrante e à bissectriz dos quadrantes ímpares e o ponto C pertence ao semi-eixo real positivo;

– $z_2 = z_1 \times i^{54}$.

1.2.1 Representa no plano complexo o triângulo $[ABC]$ e determina a sua área.

1.2.2 Sem recorrer à calculadora, determina $-z_1 \times z_2 - 2z_3$, apresenta o resultado na forma trigonométrica.

2. Numa escola de Lisboa, no ano de 2003, sabe-se que:

– 3 em cada 5 alunos realizaram o Exame Nacional de Matemática;

– Dos alunos que realizaram o Exame Nacional de Matemática, 35% também realizaram o Exame Nacional de Física;

– Dos alunos que não realizaram o Exame Nacional de Matemática, 90% também não realizaram o Exame Nacional de Física.

Escolhe-se ao acaso um aluno dessa escola que realizou o Exame Nacional de Física. Qual é a probabilidade de não ter realizado o Exame Nacional de Matemática? (Apresenta o resultado na forma de percentagem)

3. Numa caixa estão 12 bolas, três numeradas com o número 1, três numeradas com o número 2, quatro numeradas com o número 3 e duas numeradas com o número 4. Retiram-se da caixa, simultaneamente e ao acaso, três bolas. Qual é a probabilidade da soma ser 7? Uma das respostas possíveis a este problema é:

$$\frac{4\times {}^{3}C_2 + 3\times {}^{4}C_2 + 3\times 3\times 2}{{}^{12}C_3}$$

Numa pequena composição, explica porquê. A composição deve incluir:

– Uma referência à Regra de Laplace;

– Uma explicação do número de casos possíveis;

– Uma explicação do número de casos favoráveis.

4. Seja S o espaço de resultados associado a uma experiência aleatória. Sejam A e B dois acontecimentos $(A\subset S \quad e \quad B\subset S)$, ambos de probabilidade não nula. Mostra que:

$$1-P\left(\overline{A}\middle|\overline{B}\right)=P\left(A\middle|\overline{B}\right)$$

5. Considera uma função g, de domínio IR, definida por:

$$g(x)=\begin{cases} 2x+\dfrac{\ln(x-1)}{x} & \text{se} \quad x>1 \\ 0 & \text{se} \quad x=1 \\ \dfrac{\cos x}{x+1} & \text{se} \quad x<1 \end{cases}$$

Estuda a função g quanto à existência de assimptotas do seu gráfico e escreve as suas equações, caso existam.

6. Considera uma função f, de domínio $[0,\pi]$, cuja sua **derivada** também está definida em $[0,\pi]$ por $f'(x)=\operatorname{sen}x+\cos x$. **Recorrendo à calculadora gráfica** reproduz o gráfico de f'. Considera:

– O ponto A pertencente ao gráfico de f' em que a ordenada é igual ao quadrado da abcissa;

– O ponto B, pertencente ao gráfico de f', cuja abcissa é o único maximizante de f.

Representa o triângulo $[AOB]$, sendo O a origem do referencial, e determina a sua área. (Apresenta o resultado arredondado às centésimas. Indica as coordenadas dos pontos, também arredondadas às centésimas)

7. Considera a função g definida em IR por $g(x)=x+2x^2e^{4-x}$

7.1 Mostra que $g''(x)=e^{4-x}\left(2x^2-8x+4\right)$ e estuda o gráfico de g quanto ao sentido das concavidades e existência de pontos de inflexão.

7.2 Mostra que no intervalo $\left[\frac{1}{4},1\right]$, existe pelo menos um ponto cuja sua imagem por, meio da função g, é 10.

8. A energia E, libertada por um sismo, medido em Joules, e a sua magnitude M, na escala de Richter, estão relacionados pela equação:

$$\log E=a+b\times M,\quad a,b\in IR$$

8.1 Nesta alínea considera $a=5{,}5$ e $b=1{,}5$. No sudoeste asiático, no ano de 2005, ocorreu um sismo de magnitude 9,1 na escala de Richter. Qual foi a energia libertada por esse sismo?

8.2 Sabe-se que a energia libertada por um sismo de magnitude 8 é de $5{,}8\times10^{16}$ Joules, sendo este valor 21000 vezes maior do que a energia libertada por um sismo de magnitude 5. Determina os valores de **a** e **b**. (Apresenta os resultados aproximados às centésimas. Nos eventuais cálculos intermédios utiliza pelo menos quatro casas decimais)

Soluções

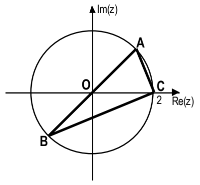
Grupo I – Itens de Escolha Múltipla

1. B	**2.** A	**3.** A	**4.** C	**5.** D	**6.** C	**7.** A	**8.** D

Grupo II – Itens de Resposta Aberta

1.1 $n = 8$

1.2.1



$A_{[ABC]} = 2\sqrt{2}$

1.2.2 $4\sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}$

2. 16%

5. A.V.: $x = 1$; A.H.: $y = 0$ ($x \to -\infty$); A.O.: $y = 2x$ ($x \to +\infty$)

6. $A_{[AOB]} \approx 1{,}56$

7.1 O gráfico de g tem c.v. baixo em $\left[2-\sqrt{2}, 2+\sqrt{2}\right]$ e tem c.v. cima $\left]-\infty, 2-\sqrt{2}\right]$ e em $\left[2+\sqrt{2}, +\infty\right[$. O gráfico de g tem P.I. para $x = 2 \pm \sqrt{2}$

8.1 $E = 10^{19{,}15} \approx 1{,}41 \times 10^{19}$ Joules

8.2 $a = 5{,}24$ e $b = 1{,}44$

Resolução da Prova Modelo n.º 4

Grupo I – Itens de Escolha Múltipla

1. $a+2b-c={}^{2008}C_{100}+2\times{}^{2008}C_{101}-{}^{2009}C_{101}\,{}^{2009}C_{101}=$

$$=\underbrace{{}^{2008}C_{100}+{}^{2008}C_{101}}_{{}^{2009}C_{101}}+{}^{2008}C_{101}-{}^{2009}C_{101}=$$

$$=\cancel{{}^{2009}C_{101}}+{}^{2008}C_{101}-\cancel{{}^{2009}C_{101}}={}^{2008}C_{101}$$

A resposta correcta é a **B**.

2. O número de casos possíveis é 6^4, porque em cada um dos quatro lançamentos pode sair cada uma das seis faces do cubo. O número de casos favoráveis é dado por $6\times1\times5\times4$, pois pretende-se que apenas que os números saídos nos dois primeiros lançamentos sejam iguais, sendo os restantes distintos. Assim a probabilidade pedida é $\frac{6\times1\times5\times4}{6^4}=\frac{5}{54}$. A resposta correcta é a **A**.

3. $P\left(X|\overline{Y}\right)$ designa a probabilidade da figura escolhida ser um triângulo sabendo que a figura escolhida não é preta. Como $P\left(X|\overline{Y}\right)=\frac{1}{4}$ pretendemos determinar a opção onde um quarto das figuras que não estão pintadas de preto sejam triângulos. Esta condição só é verificada pela opção A. A resposta correcta é a **A**.

4. A função f'' é a função derivada da função f'. A função f' não está definida no ponto de abcissa -1 e não é derivável no ponto de abcissa 1 (ponto anguloso), portanto podemos eliminar as opções A e B. Como a função f' é constante em $\left]-\infty,-1\right]$ e em $\left[1,+\infty\right[$ então a função f'' é nula no intervalo $\left]-\infty,-1\right[$ e no intervalo $\left]1,+\infty\right[$. Como a função f' é crescente em $\left]-1,1\right]$ então a função f'' é positiva no intervalo $\left]-1,1\right[$, assim eliminamos a resposta D e a resposta correcta é a **C**.

5. Os pontos A e B de coordenadas $\left(-2,0\right)$ e $\left(0,3\right)$ pertencem à assimptota do gráfico da função g. O vector director dessa recta é dado por $\overrightarrow{AB}=B-A=\left(2,3\right)$ e o seu declive é $\frac{3}{2}$ e portanto $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{g(x)}{x}=\frac{3}{2}$. Assim:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{e^x-x}{g(x)}\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{e^x}{g(x)}-\frac{x}{g(x)}\right)=\frac{e^{-\infty}}{-\infty}-\frac{2}{3}=\frac{0}{-\infty}-\frac{2}{3}=$$

$$=0-\frac{2}{3}=-\frac{2}{3}$$

A resposta correcta é a **D**.

6.

i) Tem-se $\log_a x=2\Leftrightarrow x=a^2$ e como $\sqrt{b}=x$ então $a^2=\sqrt{b}$ e consequentemente $a^4=b$. Assim as respostas A e B são **verdadeiras**.

ii) Tem-se $x=a^2\underset{a>0}{\Leftrightarrow}a=\sqrt{x}$ e $\sqrt{b}=x\Leftrightarrow b=x^2$. Então $\frac{b}{a}=\frac{x^2}{\sqrt{x}}=x^{2-\frac{1}{2}}=x^{\frac{3}{2}}=\sqrt{x^3}$ e $a\times b=\sqrt{x}\times x^2=x^{\frac{1}{2}+2}=x^{\frac{5}{2}}=\sqrt{x^5}$.

Assim a resposta C é **falsa** e a resposta D é **verdadeira**.

A resposta correcta é a **C**.

7. Tem-se $-\overline{z}=-\left(a-bi\right)=-a+bi$. Como $a<0$ então $-a>0$, assim $\text{Re}\left(-\overline{z}\right)>0$ e $\text{Im}\left(-\overline{z}\right)>0$ e portanto a imagem geométrica do número complexo $-\overline{z}$ pertence ao 1.º quadrante. Concluímos então que o número complexo $-\overline{z}$ só pode ser representado por $2e^{i\frac{\pi}{7}}$. A resposta correcta é a **A**.

8. A imagem geométrica do número complexo $w-2\overline{w}$ pertence à bissectriz dos quadrantes pares se e só se $\text{Im}\left(w-2\overline{w}\right)=-\text{Re}\left(w-2\overline{w}\right)$. Assim:

$$\text{Im}\left(w-2\overline{w}\right)=-\text{Re}\left(w-2\overline{w}\right)\Leftrightarrow 3x-3=2\Leftrightarrow 3x=5\Leftrightarrow x=\frac{5}{3}$$

A resposta correcta é a **D**.

Cálculos Auxiliares:

i) $w=2-i+xi=2+\left(x-1\right)i$

ii) $w-2\overline{w}=2+\left(x-1\right)i-2\times\left(2-\left(x-1\right)i\right)=$

$$=2+\left(x-1\right)i-4+\left(2x-2\right)i=-2+\left(x-1+2x-2\right)i=$$

$$=-2+\left(3x-3\right)i$$

Grupo II – Itens de Resposta Aberta

1.

1.1 O número complexo $\left(\frac{w}{i}\right)^n$ é um número real negativo se e só se qualquer seu argumento for da forma $\pi+2k\pi,\quad k\in\mathbb{Z}$. Assim:

$$\left(\frac{w}{i}\right)^n=\left(\frac{2e^{i\frac{7\pi}{8}}}{e^{i\frac{\pi}{2}}}\right)^n=\left(2e^{i\left(\frac{7\pi}{8}-\frac{\pi}{2}\right)}\right)^n=\left(2e^{i\frac{3\pi}{8}}\right)^n=2^n 2e^{i\frac{3n\pi}{8}}$$

Logo $\frac{3n\pi}{8}=\pi+2k\pi,\quad k\in Z \Leftrightarrow 3n\pi=8\pi+16k\pi,\quad k\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 3n=8+16k,\quad k\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow n=\frac{8}{3}+\frac{16k}{3},\quad k\in\mathbb{Z}$$

Para $k=0\rightarrow n=\frac{8}{3}\notin\mathbb{N}$

Para $k=1\rightarrow n=\frac{8}{3}+\frac{16}{3}=\frac{24}{3}=8\in\mathbb{N}$

Portanto $n=8$.

1.2

1.2.1

i) Os pontos A, B e C pertencem à região do plano complexo definido pela condição $|z|=2$, então $|z_1|=|z_2|=|z_3|=2$. Além disso o ponto A pertence ao primeiro quadrante é à bissectriz dos quadrantes ímpares e o ponto C pertence ao semi-eixo positivo real, logo $z_1=2e^{i\frac{\pi}{4}}$ e $z_3=2e^{i(0)}=2$.

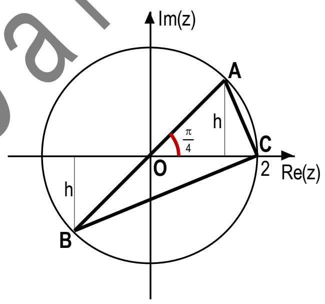
ii) $i^{54}=i^2=-1$, então $z_2=-z_1=2\text{cis}\left(\frac{\pi}{4}+\pi\right)=2\text{cis}\frac{5}{4}\pi$, ou seja, o número complexo z_2 é o simétrico do número complexo z_1.

Representação no plano complexo do triângulo $[ABC]$ e cálculo da sua área.

$$A_{[ABC]}=2\times A_{[AOC]}=$$

$$=\cancel{2}\times\frac{\overline{OC}\times h}{\cancel{2}}=$$

$$=2\sqrt{2}$$



Cálculo Auxiliar:

$$\text{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{h}{2}\Leftrightarrow h=2\text{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right)=\cancel{2}\times\frac{\sqrt{2}}{\cancel{2}}\Leftrightarrow h=\sqrt{2}$$

1.2.2 $-z_1\times z_2-2z_3=-2e^{i\frac{\pi}{4}}\times 2e^{i\frac{5\pi}{4}}-2\times 2=$

$$=2e^{i\left(\frac{\pi}{4}+\pi\right)}\times 2e^{i\frac{5\pi}{4}}-4=$$

$$=2e^{i\frac{5\pi}{4}}\times 2e^{i\frac{5\pi}{4}}-4=2e^{i\left(\frac{5\pi}{4}+\frac{5\pi}{4}\right)}-4=$$

$$=4e^{i\frac{5\pi}{2}}-4=4e^{i\frac{\pi}{2}}-4=-4+4i$$

Escrevendo o número $-4+4i$ na forma trigonométrica, tem-se:

$|-4+4i|=\sqrt{(-4)^2+4^2}=\sqrt{16+16}=\sqrt{32}=4\sqrt{2}$. Seja θ o argumento do número complexo $-4+4i$, assim $\text{tg}\theta=\frac{4}{-4}=-1$.

Como $\theta\in 2.^{\text{o}}Q$ então θ pode ser $-\frac{\pi}{4}+\pi=\frac{3}{4}\pi$, pelo que $-4+4i=4\sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}$.

2. Consideremos os acontecimentos M: «O aluno realizou o exame nacional de Matemática» e F: «O aluno realizou o exame nacional de Física». Queremos determinar $P\left(\overline{M}\middle|F\right)$. Vamos construir uma tabela para responder a esta questão. Do enunciado tem-se $P(M)=\frac{3}{5}=0,6$, $P(F|M)=0,35$ e $P\left(\overline{F}\middle|\overline{M}\right)=0,9$. Assim:

	M	$\overline{M}$	**p.m.**
F	0,21	0,04	0,25
$\overline{F}$	0,39	0,36	0,75
p.m.	0,6	0,4	1

Logo $P\left(\overline{M}\middle|F\right)=\frac{P\left(\overline{M}\cap F\right)}{P(F)}=\frac{0,04}{0,25}=0,16=16\%$.

Justificações:

i) $P(F|M)=0,35\Leftrightarrow\frac{P(F\cap M)}{P(M)}=0,35\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow P(F\cap M)=0,35\times 0,6=0,21$$

ii) $P\left(\overline{F}\middle|\overline{M}\right)=0,9\Leftrightarrow\frac{P\left(\overline{F}\cap\overline{M}\right)}{P\left(\overline{M}\right)}=0,9\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow P\left(\overline{F}\cap\overline{M}\right)=0,9\times 0,4=0,36$$

iii) $P\left(\overline{F}\cap M\right)=0,6-0,21=0,39$

iv) $P\left(\overline{M}\cap F\right)=0{,}4-0{,}36=0{,}04$

3. O número de casos possíveis é dado por ${}^{12}C_3$ (das 12 bolas que estão na caixa escolhemos três). Para que a soma dos números das três bolas extraídas seja 7, temos de considerar três casos: Extrair uma bola com o número 3 e duas bolas com o número 2, o número de maneiras de o fazer é ${}^{4}C_1\times{}^{3}C_2=4\times{}^{3}C_2$ (das quatro bolas numeradas com o número 3 escolhemos uma e das três bolas numeradas com o número 2 escolhemos duas); Retirar uma bola com o número 1 e duas bolas com o número 3, o número de maneiras de o fazer é ${}^{3}C_1\times{}^{4}C_2=3\times{}^{4}C_2$ (das três bolas numeradas com o número 1 escolhemos uma e das quatro bolas numeradas com o número 3 escolhemos duas); Extrair uma bola com o número 1, uma com o número 2 e uma com o número 4, o número de maneiras de o fazer é ${}^{3}C_1\times{}^{3}C_1\times{}^{2}C_1=3\times3\times2$ (das três bolas numeradas com o número 1 escolhemos uma, das três bolas numeradas com o número 2 escolhemos uma e das duas bolas numeradas com o número 4 escolhemos uma). Logo o número de casos favoráveis é $4\times{}^{3}C_2+3\times{}^{4}C_2+3\times3\times2$. Pela Regra de Laplace a probabilidade de um acontecimento é o quociente entre o número de casos favoráveis e o número de casos possíveis, quando estes são equiprováveis. Assim a probabilidade pedida é dada por $\dfrac{4\times{}^{3}C_2+3\times{}^{4}C_2+3\times3\times2}{{}^{12}C_3}$.

4. $$1-P\left(\overline{A}\middle|\overline{B}\right)=1-\frac{P\left(\overline{A}\cap\overline{B}\right)}{P\left(\overline{B}\right)}\underset{\text{i)}}{=}\frac{P\left(\overline{B}\right)-P\left(\overline{A\cup B}\right)}{P\left(\overline{B}\right)}=$$

$$=\frac{\cancel{1}-P(B)-\cancel{1}+P(A\cup B)}{P\left(\overline{B}\right)}=$$

$$=\frac{\cancel{-P(B)}+P(A)+\cancel{P(B)}-P(A\cap B)}{P\left(\overline{B}\right)}=$$

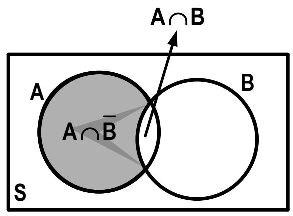
$$=\frac{P(A)-P(A\cap B)}{P\left(\overline{B}\right)}\underset{\text{ii)}}{=}\frac{P\left(A\cap\overline{B}\right)}{P\left(\overline{B}\right)}=P\left(A\middle|\overline{B}\right)$$

Q.E.D.

Justificações:

i) Por De Morgan $\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$.

ii)



$$P\left(A\cap\overline{B}\right)=P(A)-P(A\cap B)$$

5. O domínio da função g é IR. A função g é contínua para $x<1$ e para $x>1$. Logo o gráfico de função g só pode ter assimptota vertical em $x=1$, pois é o único ponto onde a função g pode ser descontínua. Assim:

i) $$\lim_{x\to1^+}g(x)=\lim_{x\to1^+}\left(2x+\frac{\ln(x-1)}{x}\right)=2+\frac{\ln\left(0^+\right)}{1}=2+\frac{-\infty}{1}=-\infty$$

Logo a recta de equação $x=1$ é assimptota vertical do gráfico de g. Como a função g é contínua em $IR\setminus\{1\}$ então o gráfico de g não tem mais assimptotas verticais.

ii) Quando $x\to+\infty$ tem-se:

$$m=\lim_{x\to+\infty}\frac{g(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2\cancel{x}}{\cancel{x}}+\frac{\ln(x-1)}{x^2}\right)=2+\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(x-1)}{x^2}=$$

$$=2+\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\ln(x-1)}{x}\times\frac{1}{x}\right)=2+\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}\times\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=$$

$$=2-0\times\frac{1}{+\infty}=2-0\times0=2$$

$$b=\lim_{x\to+\infty}\left(g(x)-mx\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\cancel{2x}+\frac{\ln(x-1)}{x}-\cancel{2x}\right)=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(x\left(1-\frac{1}{x}\right)\right)}{x}=\underbrace{\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}}_{\text{Limite notável}}+\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(1-\frac{1}{x}\right)}{x}=0+\frac{\ln 1}{+\infty}=0$$

Logo a recta de equação $y=2x$ é assimptota oblíqua do gráfico de g quando $x\to+\infty$.

iii) Quando $x\to-\infty$ tem-se:

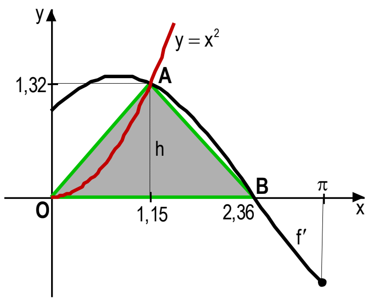
$$m=\lim_{x\to-\infty}\frac{g(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\cos x}{x^2+x}=\lim_{x\to-\infty}\left(\underbrace{\frac{1}{x^2+x}}_{\text{Infinitésimo}}\times\underbrace{\cos x}_{\text{Função limitada}}\right)=0$$

$$b=\lim_{x\to-\infty}\left(g(x)-mx\right)=\lim_{x\to-\infty}\frac{\cos x}{x+1}=\lim_{x\to-\infty}\left(\underbrace{\frac{1}{x+1}}_{\text{Infinitésimo}}\times\underbrace{\cos x}_{\text{Função limitada}}\right)=0$$

Logo a recta de equação $y=0$ é assimptota horizontal do gráfico de g quando $x\to-\infty$.

Nota: Se f e g forem duas funções reais de variável real tais que $\lim\limits_{x\to a} f(x)=0$ (f é um infinitésimo em a) e g é uma função limitada então $\lim\limits_{x\to a} f(x)\times g(x)=0$.

6. Utilizando o editor de funções da calculadora vamos definir as funções $y_1=f'(x)=\operatorname{sen}x+\cos x$ e $y_2=x^2$ na janela $[0,\pi]\times[-1,2]$. Obtemos:



Logo $A_{[AOB]}=\dfrac{\overline{OB}\times h}{2}=\dfrac{2,36\times 1,32}{2}\approx 1,56$.

Nota: A função f', função derivada de f, tem um único zero em $x=a\approx 2,36$ e nesse ponto muda de sinal, de positiva para negativa, logo a função f tem um máximo relativo em $x=a\approx 2,36$, ou seja, $a\approx 2,36$ é o único maximizante da função f. Portanto $a\approx 2,36$ é a abcissa do ponto B.

7.

7.1 Vamos começar por determinar a expressão analítica de g'' e os seus zeros.

i) $g'(x)=\left(x+2x^2e^{4-x}\right)'=1+4xe^{4-x}-2x^2e^{4-x}=$

$=1+e^{4-x}\times\left(4x-2x^2\right)$

$g''(x)=\left(1+e^{4-x}\times\left(4x-2x^2\right)\right)'=$

$=-e^{4-x}\times\left(4x-2x^2\right)+e^{4-x}\times(4-4x)=$

$=e^{4-x}\times\left(2x^2-8x+4\right)$

ii) $g''(x)=0\Leftrightarrow e^{4-x}\times\left(2x^2-8x+4\right)=0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \underbrace{e^{4-x}=0}_{\text{Eq. impossível}} \vee \; 2x^2-8x+4=0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x=\dfrac{8\pm\sqrt{(-8)^2-4\times 2\times 4}}{2\times 2}\Leftrightarrow x=\dfrac{8\pm\sqrt{32}}{4}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x=\dfrac{8\pm 4\sqrt{2}}{4}\Leftrightarrow x=2-\sqrt{2} \;\vee\; x=2+\sqrt{2}$

Fazendo um quadro de sinal vem:

x	$-\infty$	$2-\sqrt{2}$		$2+\sqrt{2}$	$+\infty$
e^{4-x}	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$2x^2-8x+4$	$+$	0	$-$	0	$+$
$g''(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$g(x)$	$\cup$	P.I.	$\cap$	P.I.	$\cup$

Concluímos então que o gráfico de g tem concavidade voltada para baixo em $\left[2-\sqrt{2},2+\sqrt{2}\right]$ e tem concavidade voltada para cima em $\left]-\infty,2-\sqrt{2}\right]$ e em $\left[2+\sqrt{2},+\infty\right[$. O gráfico de g tem P.I. para $x=2-\sqrt{2}$ e para $x=2+\sqrt{2}$.

7.2

i) A função g é contínua em IR pois é soma de duas funções contínuas em IR ($y=x$ é continua em IR porque é função polinomial e $y=2x^2e^{4-x}$ é produto entre a função $y=2x^2$, polinomial, continua em IR e a função $y=e^{4-x}$ composta entre a função $y=e^x$, exponencial, continua em IR, e a função $y=4-x$, polinomial, contínua em IR) Logo g é contínua em $\left[\frac{1}{4},1\right]\subset IR$.

ii) $g\left(\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{4}+2\times\left(\frac{1}{4}\right)^2\times e^{4-\frac{1}{4}}=\frac{1}{4}+\frac{1}{8}\times e^{\frac{15}{4}}\approx 5,57$

iii) $g(1)=1+2\times 1^2\times e^{4-1}=1+2e^3\approx 41,17$

Como g é contínua em $\left[\frac{1}{4},1\right]$ e como $g\left(\frac{1}{4}\right)<10<g(1)$ então pelo Teorema de Bolzano $\exists x_0\in\left]\frac{1}{4},1\right[: g(x_0)=10$.

8.

8.1 Como $a=5,5$, $b=1,5$ e $M=9,1$ então vem:

$\log E=5,5+1,5\times 9,1\Leftrightarrow \log E=19,15\Leftrightarrow E=10^{19,15}\approx 1,41\times 10^{19}$

Logo, a energia libertada por um sismo de magnitude 9,1 na escala de Richter é, aproximadamente, $1,41\times 10^{19}$ Joules .

8.2 Se E_8 for a energia libertada por um sismo de magnitude 8 e E_5 a energia libertada por um sismo de magnitude 5 então:

$$E_8 = 21000 \times E_5 \Leftrightarrow E_5 = \frac{E_8}{21000} \Leftrightarrow E_5 = \frac{5{,}8 \times 10^{16}}{21000}$$

Assim:

$$\begin{cases} \log\left(5{,}8 \times 10^{16}\right) = a + 8b \\ \log\left(\dfrac{5{,}8 \times 10^{16}}{21000}\right) = a + 5b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 16{,}7634 = a + 8b \\ 12{,}4412 = a + 5b \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 16{,}7634 - 8b \\ 12{,}4412 = 16{,}7634 - 8b + 5b \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \text{———} \\ 8b - 5b = 16{,}7634 - 12{,}4412 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \text{———} \\ 3b = 4{,}3222 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 16{,}7634 - 8 \times 1{,}4407 \\ b = \dfrac{4{,}3222}{3} = 1{,}4407 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \approx 5{,}24 \\ b \approx 1{,}44 \end{cases}$$