2º Teste de Avaliação

Matemática A

12.º Ano de Escolaridade | Turma: B

Duração do Teste de Avaliação: 90 minutos | dezembro de 2022

Versão 2

Nome ______________________ **Nº.** ______

Instruções gerais

- Não é permitido o uso de corretor
- É permitido o uso de calculadora
- Para responderes aos itens de escolha múltipla, assinala de forma inequívoca, a opção escolhida, escrevendo a letra correspondente **Não apresentes cálculos nem justificações** neste tipo de itens

1. **(20 pontos)** Seja h, a função real, de variável real, definida por $h(x) = \dfrac{1}{x-4}$

   Escreve a equação reduzida da reta tangente ao gráfico de h no ponto de abcissa 2

2. Sejam f e g, duas funções reais, de variável real, definidas, respetivamente, por $f(x) = \sqrt{2x^2+1} + \sqrt{2}x$

   e $g(x) = \begin{cases} \dfrac{-4x^2+20x-16}{(-9x+36)(12-x)} & se \quad x < 4 \\ k^2 - \dfrac{5}{6} & se \quad x = 4 \\ \dfrac{4\sqrt{x+5}-12}{x^2-4x} & se \quad x > 4 \end{cases}$, com $k \in \mathbb{R}$

   2.1. **(20 pontos)** Averigua, analiticamente, se existe algum $k \in \mathbb{R}$, para o qual a função g é contínua no ponto $x = 4$

   2.2. **(20 pontos)** Determina, analiticamente e caso exista, a equação da assíntota ao gráfico da função f quando $x \to -\infty$

3. **(10 pontos)** No referencial ortonormado da figura 1 encontra-se parte da representação gráfica da função f, de domínio $\mathbb{R}^+$, e uma reta r tangente ao gráfico da função no ponto B de abcissa 4

   Sabe-se que:

   - o ponto A, de coordenadas $(0, 8)$, pertence à reta r
   - o ponto C é o ponto de interseção da reta r com o eixo Ox e tem abcissa 8

   Qual é o valor de $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{f(x)-f(4)}{x^2-16}$?

   (A) $\dfrac{1}{8}$ (B) $-\dfrac{1}{8}$ (C) $\dfrac{1}{4}$ (D) $-\dfrac{1}{4}$

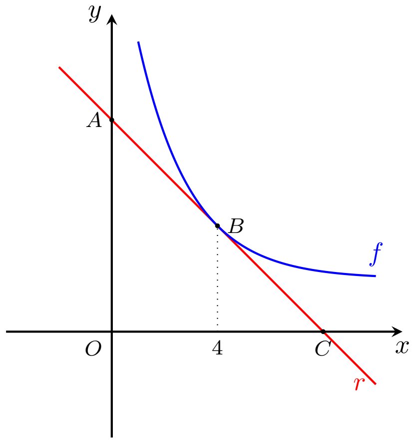

Figura 1

4. **(20 pontos)** Seja f, a função real, de variável real, contínua em $[-1;3]$

Sabe-se que:

$f(-1) = k^2 - 1$ e $f(3) = 2 - 3k$, com $k \in \mathbb{R}$

Determina os valores de k de modo que a função f tenha pelo menos um zero no intervalo $]-1;3[$

5. **(10 pontos)** Sejam f e g, duas funções reais, de variável real

No referencial ortonormado da figura 2 encontra-se parte da representação gráfica da função f, de domínio $[0;+\infty[$, e uma reta r tangente ao gráfico da função no ponto A

Sabe-se que:

- o ponto A tem abcissa 2
- a reta r tem equação $x - 2y + 4 = 0$
- a função g é definida por $g(x) = x^3 - 3x^2$

Qual é o valor de $\left(\dfrac{f}{g}\right)'(2)$?

(A) $-\dfrac{5}{4}$ (B) $\dfrac{1}{8}$ (C) $\dfrac{5}{4}$ (D) $-\dfrac{1}{8}$

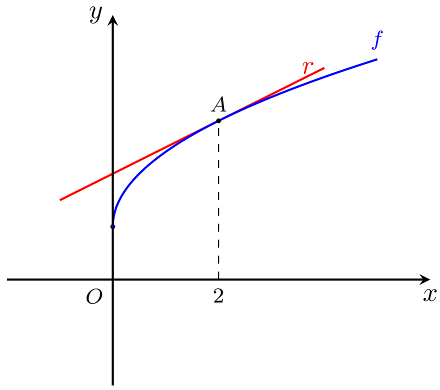

Figura 2

6. **(10 pontos)** Seja f, a função real, de variável real, de domínio $\mathbb{R}^+$, definida por $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{x}$

Em qual das opções está a expressão algébrica da função derivada de f?

(A) $-\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ (B) $\dfrac{1}{2x\sqrt{x}}$ (C) $-\dfrac{1}{2x\sqrt{x}}$ (D) $\dfrac{2}{x\sqrt{x}}$

7. **(20 pontos)** Seja f, a função real, de variável real, definida por $f(x) = bx^2 + c$, com $b, c \in \mathbb{R}$ e $b \neq 0$

Mostra, pela definição de derivada num ponto, que $f'(a) = 2ab$, $\forall a \in \mathbb{R}$

8. **(10 pontos)** Seja f, uma função real de variável real, de domínio $\mathbb{R}$

Sabe-se que:

- $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 5$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) - 5x + 4] = 0$

Em qual das opções está o valor de $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x-1}{f(x)}$?

(A) $\dfrac{1}{5}$

(B) 5

(C) 4

(D) $\dfrac{1}{4}$

9. Considera a função g, real de variável real, definida por $g(x) = -\dfrac{1}{12}x^3 + x + 3$

No referencial ortonormado da figura 3 estão representados parte do gráfico da função g, e duas retas paralelas, r e s

Sabe-se que:

- a reta r é tangente ao gráfico da função no ponto T de abcissa a, com $a < 0$
- a reta s é tangente ao gráfico da função no ponto S de abcissa b, com $b > 0$

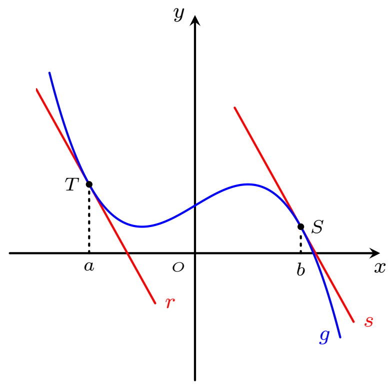

Figura 3

9.1. **(20 pontos)** Estuda, analiticamente, a função g quanto à monotonia e quanto à existência de extremos

Na tua resposta, apresenta o(s) intervalo(s) de monotonia

9.2. **(20 pontos)** Mostra, analiticamente, que $a = -b$

10. **(20 pontos)** Seja h, a função real, de variável real, definida por $h(x) = \dfrac{1}{x^2 - 2x}$

Resolve, em $\mathbb{R}$, e analiticaamente, a condição $h(x) \geq \dfrac{x}{x-2}$

Apresenta o conjunto solução sob a forma de intervalo ou reunião de intervalos de números reais

FIM

Formulário

Regras de derivação

$(u+v)' = u' + v'$

$(uv)' = u'v + uv'$

$\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$

$(u^n)' = nu^{n-1}u' \quad (n \in \mathbb{R})$

$(\sqrt[n]{u})' = \dfrac{u'}{n\sqrt[n]{u^{n-1}}}$