Matemática- 2022

Exame- Tópicos de resolução

Universidade do Minho
DMA

Exercício 1 $5\sqrt{3}-5+3-4\sqrt{3}+4=\sqrt{3}+2$

Exercício 2 $\dfrac{27^{-1}\times 3^2}{9^2}=\dfrac{(3^3)^{-1}\times 3^2}{(3^2)^2}=\dfrac{3^{-3}\times 3^2}{3^4}=\dfrac{3^{-1}}{3^4}=3^{-5}=\dfrac{1}{3^5}$

Exercício 3

a) $(x^2-1)(x+2)=0 \Leftrightarrow x^2-1=0 \vee x+2=0 \Leftrightarrow x^2=1 \vee x=-2 \Leftrightarrow$
$x=1 \vee x=-1 \vee x=-2$

$S=\{-2,-1,1\}$.

b) $|2x-1|=1 \Leftrightarrow 2x-1=1 \vee 2x-1=-1 \Leftrightarrow 2x=2 \vee 2x=0 \Leftrightarrow x=1 \vee x=0$

$S=\{1,0\}$.

Exercício 4 a) $2\overrightarrow{v}-\overrightarrow{a}=2(-\frac{3}{2},-1)-(-1,2)=(-3,-2)-(-1,2)=(-2,-4)$

b) $\|\overrightarrow{v}\|=\sqrt{(-\frac{3}{2})^2+(-1)^2}=\sqrt{\frac{9}{4}+1}=\frac{\sqrt{13}}{2}$

Exercício 5

$x^2-6x+y^2+2y=-1 \Leftrightarrow x^2-6x+9+y^2+2y+1=-1+1+9 \Leftrightarrow (x-3)^2+(y+1)^2=9$

Coordenadas do centro: $(3,-1)$

Raio: 3.

Exercício 6 $-2\sin x=2 \Leftrightarrow \sin x=-1 \Leftrightarrow x=-\frac{\pi}{2}+2k\pi,\quad k\in\mathbb{Z}$.

Exercício 7 $y'=\left[(2x-3)^3\right]'=3(2x-3)^2(2x-3)'=3(2x-3)^2 2=6(2x-3)^2=24x^2-72x+54$

Exercício 8 a) $-y = 3x - 5 \Leftrightarrow y = -3x + 5$

declive da reta r: $m_r = -3$

Por exemplo: $\overrightarrow{r} = (1, -3)$.

ou

vetor perpendicular à reta r: $(-3, -1)$.

vetor diretor da reta r, por exemplo: $\overrightarrow{r} = (1, -3)$.

b) $d_{P,r} = \dfrac{|-3 \cdot 1 - 0 + 5|}{\sqrt{(-3)^2 + (-1)^2}} = \dfrac{|-3+5|}{\sqrt{10}} = \dfrac{|2|}{\sqrt{10}} = \dfrac{2 \cdot \sqrt{10}}{\sqrt{10} \cdot \sqrt{10}} = \dfrac{2 \cdot \sqrt{10}}{10} = \dfrac{\sqrt{10}}{5}$.

Exercício 9 $D = \{x \in \mathbb{R} : x - 1 > 0 \wedge 5 - x > 0\} = \{x \in \mathbb{R} : x > 1 \wedge x < 5\} =]1, 5[$

$\log(x-1) \geq \log(5-x) \wedge x \in D \Leftrightarrow x - 1 \geq 5 - x \wedge x \in D \Leftrightarrow 2x \geq 6 \wedge x \in D \Leftrightarrow x \geq 3 \wedge x \in D$

$S = [3, 5[$.

Exercício 10 $\frac{x^2+3x}{x^2-9} = 0 \Leftrightarrow x^2 + 3x = 0 \wedge x^2 - 9 \neq 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x(x+3) = 0 \wedge x \neq 3 \wedge x \neq -3 \Leftrightarrow (x = 0 \vee x = -3) \wedge x \neq 3 \wedge x \neq -3$

$S = \{0\}$.

Exercício 11 a) $u_{n+1} - u_n = \dfrac{(n+1) - 3}{2(n+1)} - \dfrac{n-3}{2n}$

$$= \frac{n-2}{2(n+1)} - \frac{n-3}{2n}$$
$$= \frac{n^2 - 2n - (n^2 + n - 3n - 3)}{2n(n+1)}$$
$$= \frac{3}{2(n+1)n}$$

Assim, $u_{n+1} - u_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}$, pelo que se conclui que $(u_n)_n$ é monótona, estritamente crescente.

b) $\lim u_n = \lim \dfrac{n-3}{2n} = \lim \dfrac{n(1 - \frac{3}{n})}{2n} = \lim \dfrac{1 - \frac{3}{n}}{2} = \dfrac{1}{2}$

Então $(u_n)_n$ é uma sucessão convergente pois tende para um número real.

Toda a sucessão convergente é limitada.

$(u_n)_n$ é uma sucessão limitada.

Exercício 12 a) $\lim_n \dfrac{(\sqrt{n-1}-\sqrt{n+2})(\sqrt{n-1}+\sqrt{n+2})}{\sqrt{n-1}+\sqrt{n+2}} = \lim_n \dfrac{n-1-n-2}{\sqrt{n-1}+\sqrt{n+2}}$
$= -\dfrac{3}{+\infty} = 0$

b) $\lim_n \left(\dfrac{n-1}{n+3}\right)^{2n} = \lim_n \left(\dfrac{n(1-\frac{1}{n})}{n(1+\frac{3}{n})}\right)^{2n} = \lim_n \left(\dfrac{(1-\frac{1}{n})}{(1+\frac{3}{n})}\right)^{2n} = \dfrac{(\lim_n (1-\frac{1}{n})^n)^2}{(\lim_n (1+\frac{3}{n})^n)^2} =$
$= \left(\dfrac{e^{-1}}{e^3}\right)^2 = \left(e^{-1-3}\right)^2 = e^{-8} = \dfrac{1}{e^8}$

Exercício 13 a) $D_f = \{x \in \mathbb{R} : x-2 \geq 0 \wedge x-5 \neq 0\} = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 2 \wedge x \neq 5\}$
$= [2, +\infty[\setminus \{5\}$

b) $f(6) = \dfrac{\sqrt{6-2}}{6-5} = \dfrac{\sqrt{4}}{1} = 2$

Logo o ponto $(6, 2)$ pertence ao gráfico da função.

Exercício 14 a) $D_f = \{x \in \mathbb{R} : x+5 > 0\} = \{x \in \mathbb{R} : x > -5\} =]-5, +\infty[$

$D'_f = \mathbb{R}$

b) $D'_{f^{-1}} = D_f =]-5, +\infty[$

$D_{f^{-1}} = D'_f = \mathbb{R}$

$y = 5 - \ln(x+5) \Leftrightarrow y - 5 = -\ln(x+5) \Leftrightarrow -y + 5 = \ln(x+5) \Leftrightarrow e^{-y+5} - 5 = x$

$$\begin{array}{rccl} f^{-1}: & \mathbb{R} & \to &]-5, +\infty[\\ & x & \mapsto & e^{-x+5} - 5 \end{array}$$