Exercícios de aplicação **(págs. 333 a 355)**

1. $z = \frac{k+2i}{1+ki} = \frac{(k+2i)(1-ki)}{(1+ki)(1-ki)} =$

$= \frac{k-k^2i+2i-2ki^2}{1-(ki)^2} =$

$= \frac{k+2k+(2-k^2)i}{1+k^2} =$

$= \frac{3k}{1+k^2} + \frac{2-k^2}{1+k^2}i$

Para que z seja um imaginário puro $\mathrm{Re}(z) = 0 \ \wedge \ \mathrm{Im}(z) \neq 0$.

Assim:

$\frac{3k}{1+k^2} = 0 \ \wedge \ \frac{2-k^2}{1+k^2} \neq 0 \Leftrightarrow 3k = 0 \ \wedge \ 2 - k^2 \neq 0$

$\Leftrightarrow k = 0 \ \wedge \ k^2 \neq 2$

$\Leftrightarrow k = 0 \ \wedge \ k \neq -\sqrt{2} \ \wedge \ k \neq \sqrt{2}$

$\Leftrightarrow k = 0$

2.

2.1. $2 + \frac{2\sqrt{3}-\sqrt{3}i^{13}}{1+2i} = 2 + \frac{2\sqrt{3}-\sqrt{3}i}{1+2i} =$

$= 2 + \frac{(2\sqrt{3}-\sqrt{3}i)(1-2i)}{(1+2i)(1-2i)} =$

$= 2 + \frac{2\sqrt{3}-4\sqrt{3}i-\sqrt{3}i+2\sqrt{3}i^2}{1-4i^2} =$

$= 2 + \frac{2\sqrt{3}-5\sqrt{3}i-2\sqrt{3}}{1+4} =$

$= 2 + \frac{-5\sqrt{3}i}{5} =$

$= 2 - \sqrt{3}i$

Cálculo auxiliar

$$\begin{array}{r|l} 13 & 4 \\ \hline 1 & 3 \end{array}$$

2.2. $\frac{(2-i)^2+1+i}{1-2i} + 3i^{-21} + 1 = \frac{4-4i+i^2+1+i}{1-2i} + 3i^3 + 1 =$

$= \frac{4-3i-1+1}{1-2i} + 3 \times (-i) + 1 =$

$= \frac{(4-3i)(1+2i)}{(1-2i)(1+2i)} - 3i + 1 =$

$= \frac{4+8i-3i-6i^2}{1-4i^2} - 3i + 1 =$

$= \frac{4+5i+6}{1+4} - 3i + 1 =$

$= \frac{10+5i}{5} - 3i + 1 =$

$= 2 + i - 3i + 1 =$

$= 3 - 2i$

Cálculo auxiliar

$-21 = -24 + 3$

LeYa EDUCAÇÃO Daniela Raposo e Luzia Gomes

3.

3.1. Seja $z = 5$.

Atendendo à representação geométrica de z, temos que:

- o módulo de z é 5;
- um argumento de z é, por exemplo, 0.

Assim, $z = 5e^{i0}$.

3.2. Seja $z = -3$.

Atendendo à representação geométrica de z, temos que:

- o módulo de z é 3;
- um argumento de z é, por exemplo, π.

Assim, $z = 3e^{i\pi}$.

3.3. Seja $z = 4i$.

Atendendo à representação geométrica de z, temos que:

- o módulo de z é 4;
- um argumento de z é, por exemplo, $\frac{\pi}{2}$.

Assim, $z = 4e^{i\frac{\pi}{2}}$.

3.4. Seja $z = -11i$.

Atendendo à representação geométrica de z, temos que:

- o módulo de z é 11;
- um argumento de z é, por exemplo, $-\frac{\pi}{2}$.

Assim, $z = 11e^{i\left(-\frac{\pi}{2}\right)}$.

3.5. Seja $z = \sqrt{3} + i$.

- $|z| = \sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2 + 1^2} = \sqrt{3+1} = \sqrt{4} = 2$
- Seja θ um argumento de z. Como o afixo de z está no 1º quadrante, concluímos que θ pertence ao 1º quadrante.

  $\text{tg}\,\theta = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \ \wedge \ \theta \in 1º\,Q$

  Então, podemos concluir que $\theta = \frac{\pi}{6}$, por exemplo.

Assim, $z = 2e^{i\frac{\pi}{6}}$.

3.6. Seja $z = -2 + 2i$.

- $|z| = \sqrt{(-2)^2 + 2^2} = \sqrt{4+4} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$
- Seja θ um argumento de z. Como o afixo de z está no 2º quadrante, concluímos que θ pertence ao 2º quadrante.

$\text{tg}\,\theta = \frac{2}{-2} = -1 \ \wedge\ \theta \in 2º\text{ Q}$

Então, podemos concluir que $\theta = \frac{3\pi}{4}$, por exemplo.

Assim, $z = 2\sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}$.

3.7. Seja $z = -3i - \sqrt{3} = -\sqrt{3} - 3i$.

- $|z| = \sqrt{\left(-\sqrt{3}\right)^2 + (-3)^2} = \sqrt{3+9} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$
- Seja θ um argumento de z. Como o afixo de z está no 3º quadrante, concluímos que θ pertence ao 3º quadrante.

  $\text{tg}\,\theta = \frac{-3}{-\sqrt{3}} = \frac{3\sqrt{3}}{3} = \sqrt{3} \ \wedge\ \theta \in 3º\text{ Q}$

  Então, podemos concluir que $\theta = \frac{4\pi}{3}$, por exemplo.

Assim, $z = 2\sqrt{3}e^{i\frac{4\pi}{3}}$.

3.8. Seja $z = \sqrt{6} - 3\sqrt{2}i$.

- $|z| = \sqrt{\left(\sqrt{6}\right)^2 + \left(-3\sqrt{2}\right)^2} = \sqrt{6+18} = \sqrt{24} = 2\sqrt{6}$
- Seja θ um argumento de z. Como o afixo de z está no 4º quadrante, concluímos que θ pertence ao 4º quadrante.

  $\text{tg}\,\theta = \frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{6}} = \frac{3}{\sqrt{3}} = \frac{3\sqrt{3}}{3} = \sqrt{3} \ \wedge\ \theta \in 4º\text{ Q}$

  Então, podemos concluir que $\theta = -\frac{\pi}{3}$, por exemplo.

Assim, $z = 2\sqrt{6}e^{i\left(-\frac{\pi}{3}\right)}$.

4.

4.1. $e^{i0} = \cos(0) + i\text{sen}(0) = 1 + 0 = 1$

4.2. $5e^{i(-15\pi)} = 5[\cos(-15\pi) + i\text{sen}(-15\pi)] = 5[\cos(\pi) + i\text{sen}(\pi)] =$
$= 5[(-1) + 0] =$
$= -5$

4.3. $2e^{i\frac{5\pi}{2}} = 2\left[\cos\left(\frac{5\pi}{2}\right) + i\text{sen}\left(\frac{5\pi}{2}\right)\right] = 2\left[\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i\text{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right)\right] =$
$= 2(0 + i) =$
$= 2i$

4.4. $2e^{i\frac{3\pi}{2}} = 2\left[\cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) + i\text{sen}\left(\frac{3\pi}{2}\right)\right] = 2(0 - i) = -2i$

4.5. $2e^{i\frac{7\pi}{6}} = 2\left[\cos\left(\frac{7\pi}{6}\right) + i\text{sen}\left(\frac{7\pi}{6}\right)\right] = 2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right) = -\sqrt{3} - i$

4.6. $-6e^{i\frac{2\pi}{3}} = -6\left[\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i\text{sen}\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right] = -6\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = 3 - 3\sqrt{3}i$

4.7. $\overline{4e^{i\frac{5\pi}{3}}} = 4e^{i\left(-\frac{5\pi}{3}\right)} = 4\left[\cos\left(-\frac{5\pi}{3}\right) + i\text{sen}\left(-\frac{5\pi}{3}\right)\right] = 4\left[\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\text{sen}\left(\frac{\pi}{3}\right)\right] =$

$= 4\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) =$

$= 2 + 2\sqrt{3}i$

4.8. $\overline{-\frac{1}{2}e^{i\frac{2\pi}{3}}} = -\frac{1}{2}e^{i\left(-\frac{2\pi}{3}\right)} = -\frac{1}{2}\left[\cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right) + i\text{sen}\left(-\frac{2\pi}{3}\right)\right] =$

$= -\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) =$

$= \frac{1}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4}i$

5.

5.1. $\bar{z} = \overline{3e^{i\frac{3\pi}{8}}} = 3e^{i\left(-\frac{3\pi}{8}\right)}$

$-z = 3e^{i\left(\pi+\frac{3\pi}{8}\right)} = 3e^{i\frac{11\pi}{8}}$

5.2. $\bar{z} = \overline{-4e^{i\frac{13\pi}{7}}} = -4e^{i\left(-\frac{13\pi}{7}\right)} = -4e^{i\left(\frac{\pi}{7}\right)} = 4e^{i\left(\pi+\frac{\pi}{7}\right)} = 4e^{i\frac{8\pi}{7}}$

$-z = 4e^{i\frac{13\pi}{7}}$

5.3. $z = \sqrt{3}\cos\alpha - i\sqrt{3}\text{sen}\alpha = \sqrt{3}(\cos\alpha - i\text{sen}\alpha) =$

$= \sqrt{3}\big(\cos\alpha + i\text{sen}(-\alpha)\big) =$

$= \sqrt{3}\big(\cos(-\alpha) + i\text{sen}(-\alpha)\big) =$

$= \sqrt{3}e^{i(-\alpha)}$

$\bar{z} = \sqrt{3}e^{i\alpha}$

$-z = \sqrt{3}e^{i(\pi-\alpha)}$

5.4. $z = \text{sen}\alpha - i\cos\alpha = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) - i\text{sen}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) =$

$= \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) + i\text{sen}\left(-\frac{\pi}{2} + \alpha\right) =$

$= \cos\left(-\frac{\pi}{2} + \alpha\right) + i\text{sen}\left(-\frac{\pi}{2} + \alpha\right) =$

$= e^{i\left(-\frac{\pi}{2} + \alpha\right)}$

$\bar{z} = e^{i\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)}$

$-z = e^{i\left(\pi - \frac{\pi}{2} + \alpha\right)} = e^{i\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)}$

6.

6.1. $\frac{2+3i+i^{31}-2\left(e^{i\frac{\pi}{7}}\right)^{21}}{1-2i} - 2 = \frac{2+3i+i^{3}-2e^{i3\pi}}{1-2i} - 2 = \frac{2+3i-i-2(\cos(3\pi)+i\text{sen}(3\pi))}{1-2i} - 2 =$

$= \frac{2+2i-2(-1+0)}{1-2i} - 2 =$

$$= \frac{2+2i+2}{1-2i} - 2 =$$
$$= \frac{(4+2i)(1+2i)}{(1-2i)(1+2i)} - 2 =$$
$$= \frac{4+8i+2i+4i^2}{1-4i^2} - 2 =$$
$$= \frac{4+10i-4}{1+4} - 2 =$$
$$= \frac{10i}{5} - 2 =$$
$$= -2+2i$$

Seja $z = -2 + 2i$.

- $|z| = \sqrt{(-2)^2 + 2^2} = \sqrt{4+4} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$
- Seja θ um argumento de z. Como o afixo de z está no 2º quadrante, concluímos que θ pertence ao 2º quadrante.

  $\operatorname{tg}\theta = \frac{2}{-2} = -1 \;\wedge\; \theta \in 2º\text{ Q}$

  Então, podemos concluir que $\theta = \frac{3\pi}{4}$, por exemplo.

Assim, $z = 2\sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}$.

6.2. $-z_2 + (z_1)^2 = e^{i\left(\pi + \frac{\pi}{7}\right)} + (2+3i)^2 = e^{i\left(\frac{8\pi}{7}\right)} + 4 + 12i + 9i^2 =$

$$= \cos\left(\frac{8\pi}{7}\right) + i\operatorname{sen}\left(\frac{8\pi}{7}\right) + 4 + 12i - 9 =$$
$$= \cos\left(\frac{8\pi}{7}\right) + i\operatorname{sen}\left(\frac{8\pi}{7}\right) - 5 + 12i =$$
$$= \left(\cos\left(\frac{8\pi}{7}\right) - 5\right) + \left(\operatorname{sen}\left(\frac{8\pi}{7}\right) + 12\right)i$$

7.

7.1. Seja $z = -2 + 2i$.

- $|z| = \sqrt{(-2)^2 + 2^2} = \sqrt{4+4} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$
- Seja θ um argumento de z. Como o afixo de z está no 2º quadrante, concluímos que θ pertence ao 2º quadrante.

  $\operatorname{tg}\theta = \frac{2}{-2} = -1 \;\wedge\; \theta \in 2º\text{ Q}$

  Então, $\theta = \frac{3\pi}{4}$, por exemplo.

  Assim, $z = 2\sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}$.

  Logo:

$$\left(\frac{4\sqrt{2}e^{i\frac{5\pi}{6}}}{-2+2i}\right)^n = \left(\frac{4\sqrt{2}\times e^{i\frac{5\pi}{6}}}{2\sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}}\right)^n = \left(\frac{2\times e^{i\frac{5\pi}{6}}}{e^{i\frac{3\pi}{4}}}\right)^n = \left(2e^{i\frac{5\pi}{6} - i\frac{3\pi}{4}}\right)^n =$$
$$= \left(2e^{i\left(\frac{5\pi}{6} - \frac{3\pi}{4}\right)}\right)^n = \left(2e^{i\frac{\pi}{12}}\right)^n = 2^n e^{in\frac{\pi}{12}}$$

Para que $2^n e^{in\frac{\pi}{12}}$ seja um imaginário puro, o seu argumento deve ser da forma $\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Assim:

$$n\frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow n = \frac{\pi}{2} \times \frac{12}{\pi} + k\pi \times \frac{12}{\pi}, k \in \mathbb{Z}$$
$$\Leftrightarrow n = 6 + 12k, k \in \mathbb{Z}$$

- Se $k = 0, n = 6$.
- Se $k = 1, n = 18$.
- Se $k = -1, n = -6$ e $-6 \notin \mathbb{N}$.

Logo, $n = 6$.

7.2. $\left(\left(-\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\overline{\left(-\sqrt{6} + \sqrt{2}i\right)}\right)^n = \left(\left(-\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\left(-\sqrt{6} - \sqrt{2}i\right)\right)^n$

Seja $z_1 = -\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$.

- $|z_1| = \sqrt{\left(-\frac{3}{2}\right)^2 + \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{9}{4} + \frac{3}{4}} = \sqrt{\frac{12}{4}} = \sqrt{3}$
- Seja θ_1 um argumento de z_1. Como o afixo de z_1 está no 3º quadrante, concluímos que θ_1 pertence ao 3º quadrante.

  $\operatorname{tg} \theta_1 = \frac{-\frac{\sqrt{3}}{2}}{-\frac{3}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \quad \wedge \quad \theta_1 \in 3º\text{ Q}$

  Então, $\theta_1 = \frac{7\pi}{6}$, por exemplo.

Assim, $z_1 = \sqrt{3}e^{i\frac{7\pi}{6}}$.

Seja $z_2 = -\sqrt{6} - \sqrt{2}i$.

- $|z_2| = \sqrt{\left(-\sqrt{6}\right)^2 + \left(-\sqrt{2}\right)^2} = \sqrt{6+2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$
- Seja θ_2 um argumento de z_2. Como o afixo de z_2 está no 3º quadrante, concluímos que θ_2 pertence ao 3º quadrante.

  $\operatorname{tg} \theta_2 = \frac{-\sqrt{2}}{-\sqrt{6}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \quad \wedge \quad \theta_2 \in 3º\text{ Q}$

  Então, $\theta_2 = \frac{7\pi}{6}$, por exemplo.

Assim, $z_2 = 2\sqrt{2}e^{i\frac{7\pi}{6}}$.

Logo:

$$\left(\left(-\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\left(-\sqrt{6} - \sqrt{2}i\right)\right)^n = \left(\sqrt{3}e^{i\frac{7\pi}{6}} \times 2\sqrt{2}e^{i\frac{7\pi}{6}}\right)^n = \left(2\sqrt{6}e^{i\left(\frac{7\pi}{6}+\frac{7\pi}{6}\right)}\right)^n =$$
$$= \left(2\sqrt{6}e^{i\frac{7\pi}{3}}\right)^n = \left(2\sqrt{6}\right)^n e^{in\frac{7\pi}{3}}$$

Para que $z = \left(2\sqrt{6}\right)^n e^{in\frac{7\pi}{3}}$ seja um número real negativo, o seu argumento deve ser da forma $k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Assim:

$n\frac{7\pi}{3} = k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow n = k\pi \times \frac{3}{7\pi}, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow n = \frac{3k}{7}, k \in \mathbb{Z}$

- Se $k = 0, n = 0$ e $0 \notin \mathbb{N}$.
- …
- Se $k = 7, n = 3$.
- Se $k = -1, n = -\frac{3}{7}$ e $-\frac{3}{7} \notin \mathbb{N}$.

Logo, $n = 3$.

8.

8.1. $z_1 = -2 - 2\sqrt{3}i$

- $|z_1| = \sqrt{(-2)^2 + \left(-2\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{4+12} = \sqrt{16} = 4$
- Seja θ_1 um argumento de z_1. Como o afixo de z_1 está no 3º quadrante, concluímos que θ_1 pertence ao 3º quadrante.

  $\text{tg}\ \theta_1 = \frac{-2\sqrt{3}}{-2} = \sqrt{3} \ \wedge \ \theta_1 \in 3º\ \text{Q}$

  Então, $\theta_1 = \frac{4\pi}{3}$, por exemplo.

Assim, $z_1 = 4e^{i\frac{4\pi}{3}}$.

$z_3 = \cos\alpha + i\,\text{sen}\,\alpha = e^{i\alpha}$

Assim:

$$z_1 \times z_2 \times z_3 = 4e^{i\frac{4\pi}{3}} \times 5e^{i\frac{5\pi}{4}} \times e^{i\alpha} = 4 \times 5e^{i\left(\frac{4\pi}{3}+\frac{5\pi}{4}+\alpha\right)} =$$
$$= 20e^{i\left(\frac{31\pi}{12}+\alpha\right)}$$

8.2. $z_1 \times z + i^{2019} = 0 \Leftrightarrow \left(-2-2\sqrt{3}i\right) \times z + i^3 = 0$

$$\Leftrightarrow z = \frac{-i}{-2-2\sqrt{3}i}$$
$$\Leftrightarrow z = \frac{-i}{2+2\sqrt{3}i}$$
$$\Leftrightarrow z = \frac{-i(2-2\sqrt{3}i)}{(2+2\sqrt{3}i)(2-2\sqrt{3}i)}$$
$$\Leftrightarrow z = \frac{-2i+2\sqrt{3}i^2}{4-12i^2}$$
$$\Leftrightarrow z = \frac{-2\sqrt{3}-2i}{16}$$
$$\Leftrightarrow z = -\frac{\sqrt{3}}{8} - \frac{1}{8}i$$

Cálculo auxiliar

$$\begin{array}{r|l} 2019 & 4 \\ \cline{2-2} 019 & 504 \\ 3 & \end{array}$$

$i^{2019} = i^3 = -i$

8.3. $\frac{z_2}{z_3} = \frac{5e^{i\frac{5\pi}{4}}}{e^{i\alpha}} = 5e^{i\left(\frac{5\pi}{4}-\alpha\right)}$

Para que o afixo de $\frac{z_2}{z_3}$ pertença à bissetriz dos quadrantes pares, o seu argumento é da forma $\frac{3\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Assim:

$$\frac{5\pi}{4} - \alpha = \frac{3\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \alpha = \frac{5\pi}{4} - \frac{3\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$
$$\Leftrightarrow \alpha = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

9.

9.1. $z - 1 = 2iz + i \Leftrightarrow z - 2iz = 1 + i \Leftrightarrow (1-2i)z = 1 + i$

$$\Leftrightarrow z = \frac{1+i}{1-2i}$$
$$\Leftrightarrow z = \frac{(1+i)(1+2i)}{(1-2i)(1+2i)}$$
$$\Leftrightarrow z = \frac{1+2i+i+2i^2}{1-4i^2}$$
$$\Leftrightarrow z = \frac{1+3i-2}{1+4}$$
$$\Leftrightarrow z = \frac{-1+3i}{5}$$
$$\Leftrightarrow z = -\frac{1}{5} + \frac{3}{5}i$$

C.S. $= \left\{-\frac{1}{5} + \frac{3}{5}i\right\}$

9.2. $z^3 - 2z^2 + 2z = 0 \Leftrightarrow z(z^2 - 2z + 2) = 0 \Leftrightarrow z = 0 \ \vee \ z^2 - 2z + 2 = 0$

$$\Leftrightarrow z = 0 \ \vee \ z = \frac{2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 8}}{2}$$
$$\Leftrightarrow z = 0 \ \vee \ z = \frac{2 \pm \sqrt{-4}}{2}$$
$$\Leftrightarrow z = 0 \ \vee \ z = \frac{2 \pm 2i}{2}$$
$$\Leftrightarrow z = 0 \ \vee \ z = 1 - i \ \vee \ z = 1 + i$$

C.S. $= \{0, 1+i, 1-i\}$

10.

10.1. Utilizando a regra de Ruffini, temos:

	1	$-1-2i$	-3	$-1+2i$
i		i	$1-i$	$1-2i$
	1	$-1-i$	$-2-i$	0

Assim:

$$z^3 + (-1-2i)z^2 - 3z - 1 + 2i = (z - i)(z^2 + (-1-i)z - 2 - i)$$

LeYa EDUCAÇÃO Daniela Raposo e Luzia Gomes

Logo:

$$z^3+(-1-2i)z^2-3z-1+2i=0 \Leftrightarrow (z-i)(z^2+(-1-i)z-2-i)=0$$

$$\Leftrightarrow z-i=0 \ \vee \ z^2+(-1-i)z-2-i=0$$

$$\Leftrightarrow z=i \ \vee \ z=\frac{1+i\pm\sqrt{(-1-i)^2-4(-2-i)}}{2}$$

$$\Leftrightarrow z=i \ \vee \ z=\frac{1+i\pm\sqrt{1+2i+i^2+8+4i}}{2}$$

$$\Leftrightarrow z=i \ \vee \ z=\frac{1+i\pm\sqrt{1+6i-1+8}}{2}$$

$$\Leftrightarrow z=i \ \vee \ z=\frac{1+i\pm\sqrt{8+6i}}{2}$$

Cálculo auxiliar

As duas raízes quadradas de $8+6i$ são os valores de $z=a+bi$ tais que:

$z^2=8+6i \Leftrightarrow 8+6i=(a+bi)^2 \Leftrightarrow 8+6i=a^2+2abi+(bi)^2 \Leftrightarrow 8+6i=a^2-b^2+2abi$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 8=a^2-b^2 \\ 6=2ab \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 8=a^2-\left(\frac{3}{a}\right)^2 \\ b=\frac{3}{a} \end{cases}, a\neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a^4-8a^2-9=0 \\ \underline{\qquad\quad} \end{cases}, a\neq 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a^2=\frac{8\pm\sqrt{64+36}}{2} \\ \underline{\qquad\quad} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2=\frac{8\pm 10}{2} \\ \underline{\qquad\quad} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2=9 \ \vee \ a^2=-1 \\ \underline{\qquad\quad} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=3 \\ b=1 \end{cases} \vee \begin{cases} a=-3 \\ b=-1 \end{cases}$$

Assim, $z=3+i \ \vee \ z=-3-i$.

Então:

$$z=i \ \vee \ z=\frac{1+i\pm\sqrt{8+6i}}{2} \Leftrightarrow z=i \ \vee \ z=\frac{1+i+3+i}{2} \ \vee \ z=\frac{1+i-3-i}{2}$$

$$\Leftrightarrow z=i \ \vee \ z=\frac{4+2i}{2} \ \vee \ z=\frac{-2}{2}$$

$$\Leftrightarrow z=i \ \vee \ z=2+i \ \vee \ z=-1$$

C.S. $=\{-1,i,2+i\}$

10.2. Utilizando a regra de Ruffini, temos:

	1	$-3-i$	$6+2i$	$-12-4i$	$8+8i$
$2i$		$2i$	$-2-6i$	$8+8i$	$-8-8i$
	1	$-3+i$	$4-4i$	$-4+4i$	0
$-2i$		$-2i$	$-2+6i$	$4-4i$	
	1	$-3-i$	$2+2i$	0	

Assim:

$$z^4+(-3-i)z^3+(6+2i)z^2+(-12-4i)z+8+8i=$$
$$=(z-2i)(z+2i)(z^2+(-3-i)z+2+2i)$$

Logo:

$$z^4+(-3-i)z^3+(6+2i)z^2+(-12-4i)z+8+8i=0$$

$$\Leftrightarrow (z-2i)(z+2i)(z^2+(-3-i)z+2+2i)=0$$

$$\Leftrightarrow z-2i=0 \ \vee \ z+2i=0 \ \vee \ z^2+(-3-i)z+2+2i=0$$

$$\Leftrightarrow z=2i \ \vee \ z=-2i \ \vee \ z=\frac{3+i\pm\sqrt{(-3-i)^2-4(2+2i)}}{2}$$

$$\Leftrightarrow z = 2i \ \vee \ z = -2i \ \vee \ z = \frac{3+i\pm\sqrt{9+6i+i^2-8-8i}}{2}$$
$$\Leftrightarrow z = 2i \ \vee \ z = -2i \ \vee \ z = \frac{3+i\pm\sqrt{9-2i-1-8}}{2}$$
$$\Leftrightarrow z = 2i \ \vee \ z = -2i \ \vee \ z = \frac{3+i\pm\sqrt{-2i}}{2}$$

Cálculo auxiliar

$\sqrt{-2i} = \sqrt{2e^{i\frac{3\pi}{2}}} = \sqrt{2}e^{i\frac{\frac{3\pi}{2}+2k\pi}{2}}, k \in \{0,1\}$

Se $k = 0, z_0 = \sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}} = \sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) + i\text{sen}\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right] = \sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i\right) = -1+i$

Se $k = 1, z_1 = \sqrt{2}e^{i\frac{7\pi}{4}} = \sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{7\pi}{4}\right) + i\text{sen}\left(\frac{7\pi}{4}\right)\right] = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i\right) = 1-i$

Então:

$$z = 2i \ \vee \ z = -2i \ \vee \ z = \frac{3+i\pm\sqrt{-2i}}{2} \Leftrightarrow z = 2i \ \vee \ z = -2i \ \vee \ z = \frac{3+i+1-i}{2} \ \vee \ z = \frac{3+i-1+i}{2}$$
$$\Leftrightarrow z = 2i \ \vee \ z = -2i \ \vee \ z = \frac{4}{2} \ \vee \ z = \frac{2+2i}{2}$$
$$\Leftrightarrow z = 2i \ \vee \ z = -2i \ \vee \ z = 2 \ \vee \ z = 1+i$$

C.S. $= \{-2i, 2i, 1+i, 2\}$

11. Utilizando a regra de Ruffini, temos:

	1	$1-i$	$-2i$	$-2-2i$
$-1+i$		$-1+i$	0	$2+2i$
	1	0	$-2i$	0

Assim:

$$z^3+(1-i)z^2-2iz-(2+2i) = (z+1-i)(z^2-2i)$$

Logo:

$$z^3+(1-i)z^2-2iz-(2+2i) = 0 \Leftrightarrow (z+1-i)(z^2-2i) = 0$$
$$\Leftrightarrow z+1-i = 0 \ \vee \ z^2-2i = 0$$
$$\Leftrightarrow z = -1+i \ \vee \ z^2 = 2i$$

Cálculo auxiliar

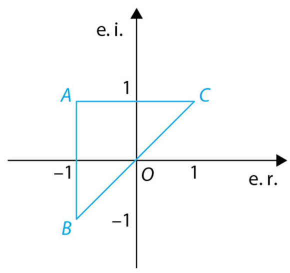
As soluções da equação $z^2 = 2i$ são as raízes quadradas de $2i$:

$\sqrt{2i} = \sqrt{2e^{i\frac{\pi}{2}}} = \sqrt{2}e^{i\frac{\frac{\pi}{2}+2k\pi}{2}}, k \in \{0,1\}$

Se $k = 0, z_0 = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}} = \sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\text{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right)\right] = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i\right) = 1+i$

Se $k = 1, z_1 = \sqrt{2}e^{i\frac{5\pi}{4}} = \sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{5\pi}{4}\right) + i\text{sen}\left(\frac{5\pi}{4}\right)\right] = \sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i\right) = -1-i$

Então, $z = -1+i \ \vee \ z = 1+i \ \vee \ z = -1-i$.



Sejam A, B e C os afixos de $z_1 = -1+i$, $z_2 = -1-i$ e $z_3 = 1+i$, respetivamente.

$A_{[ABC]} = \frac{\overline{AC}\times\overline{AB}}{2}$, ou seja, $A_{[ABC]} = \frac{2\times 2}{2} = 2$.

12. Seja $z=\sqrt{2}+\sqrt{2}i$.

- $|z|=\sqrt{\left(\sqrt{2}\right)^2+\left(\sqrt{2}\right)^2}=\sqrt{2+2}=\sqrt{4}=2$
- Seja θ um argumento de z. Como o afixo de z está no 1º quadrante, concluímos que θ pertence ao 1º quadrante.

  $\text{tg}\,\theta=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=1 \ \wedge \ \theta\in 1º\text{ Q}$

  Então, podemos concluir que $\theta=\frac{\pi}{4}$, por exemplo.

Assim, $z=2e^{i\frac{\pi}{4}}$.

Logo, $\sqrt[3]{z}=\sqrt[3]{2e^{i\frac{\pi}{4}}}=\sqrt[3]{2}e^{i\frac{\frac{\pi}{4}+2k\pi}{3}}$, $k\in\{0,1,2\}$.

- Se $k=0$, $z_0=\sqrt[3]{2}e^{i\frac{\pi}{12}}$.
- Se $k=1$, $z_1=\sqrt[3]{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}$.
- Se $k=2$, $z_2=\sqrt[3]{2}e^{i\frac{17\pi}{12}}$.

C.S. $=\left\{\sqrt[3]{2}e^{i\frac{\pi}{12}},\sqrt[3]{2}e^{i\frac{3\pi}{4}},\sqrt[3]{2}e^{i\frac{17\pi}{12}}\right\}$

13.

13.1. $$z=3+\frac{-\sqrt{3}+2\sqrt{3}i^{-3}}{2+i}=3+\frac{-\sqrt{3}+2\sqrt{3}i}{2+i}=3+\frac{\left(-\sqrt{3}+2\sqrt{3}i\right)(2-i)}{(2+i)(2-i)}=$$
$$=3+\frac{-2\sqrt{3}+\sqrt{3}i+4\sqrt{3}i-2\sqrt{3}i^2}{4-i^2}=$$
$$=3+\frac{-2\sqrt{3}+5\sqrt{3}i+2\sqrt{3}}{5}=$$
$$=3+\frac{5\sqrt{3}i}{5}=$$
$$=3+\sqrt{3}i$$

- $|z|=\sqrt{3^2+\left(\sqrt{3}\right)^2}=\sqrt{9+3}=\sqrt{12}=2\sqrt{3}$
- Seja θ um argumento de z. Como o afixo de z está no 1º quadrante, concluímos que θ pertence ao 1º quadrante.

  $\text{tg}\,\theta=\frac{\sqrt{3}}{3} \ \wedge \ \theta\in 1º\text{ Q}$

  Então, podemos concluir que $\theta=\frac{\pi}{6}$, por exemplo.

Assim, $z=2\sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{6}}$. O afixo de z pertence ao 1.º quadrante e os argumentos das raízes consecutivas de w diferem $\frac{2\pi}{4}$ entre si e têm o mesmo módulo.

Assim, a raiz de ordem 4 de w pertencente ao 2º quadrante é $2\sqrt{3}e^{i\left(\frac{\pi}{6}+\frac{2\pi}{4}\right)}=2\sqrt{3}e^{i\frac{2\pi}{3}}$.

13.2. Como z é uma raiz de ordem 4 de w, tem-se que $w = z^4$.

$$w = \left(2\sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{6}}\right)^4 \Leftrightarrow w = \left(2\sqrt{3}\right)^4 e^{i4\times\frac{\pi}{6}} \Leftrightarrow w = 144e^{i\frac{2\pi}{3}}$$

13.3. Os afixos das raízes de ordem 4 de w são os vértices de um quadrado de lado l cuja diagonal tem comprimento igual a $2|z| = 4\sqrt{3}$.

Assim, pelo teorema de Pitágoras:

$$l^2 + l^2 = \left(4\sqrt{3}\right)^2 \Leftrightarrow 2l^2 = 48 \Leftrightarrow l^2 = 24$$

Logo, a área do quadrado é 24.

13.4. Sejam z, z_1, z_2 e z_3 as raízes (consecutivas) de w.

Os afixos de z e z_2 são simétricos em relação à origem do referencial. Logo, $z = -z_2$.

Do mesmo modo, $z_1 = -z_3$.

Assim, $z + z_1 + z_2 + z_3 = -z_2 - z_3 + z_2 + z_3 = 0$.

14.

14.1. $z^4 + 16 = 0 \Leftrightarrow z^4 = -16 \Leftrightarrow z^4 = 16e^{i\pi}$

$$\Leftrightarrow z = \sqrt[4]{16}e^{i\frac{\pi+2k\pi}{4}}, k \in \{0,1,2,3\}$$

$$\Leftrightarrow z = 2e^{i\frac{\pi+2k\pi}{4}}, k \in \{0,1,2,3\}$$

- Se $k = 0, z_0 = 2e^{i\frac{\pi}{4}}$.
- Se $k = 1, z_1 = 2e^{i\frac{3\pi}{4}}$.
- Se $k = 2, z_2 = 2e^{i\frac{5\pi}{4}}$.
- Se $k = 3, z_3 = 2e^{i\frac{7\pi}{4}}$.

C.S. $= \left\{2e^{i\frac{\pi}{4}}, 2e^{i\frac{3\pi}{4}}, 2e^{i\frac{5\pi}{4}}, 2e^{i\frac{7\pi}{4}}\right\}$

14.2. $z^3 + 27e^{i\frac{\pi}{3}} = 0 \Leftrightarrow z^3 = -27e^{i\frac{\pi}{3}} \Leftrightarrow z^3 = 27e^{i\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right)}$

$$\Leftrightarrow z = \sqrt[3]{27}e^{i\frac{\frac{4\pi}{3}+2k\pi}{3}}, k \in \{0,1,2\}$$

$$\Leftrightarrow z = 3e^{i\frac{\frac{4\pi}{3}+2k\pi}{3}}, k \in \{0,1,2\}$$

- Se $k = 0, z_0 = 3e^{i\frac{4\pi}{9}}$.
- Se $k = 1, z_1 = 3e^{i\frac{10\pi}{9}}$.
- Se $k = 2, z_2 = 3e^{i\frac{16\pi}{9}}$.

C.S. $= \left\{3e^{i\frac{4\pi}{9}}, 3e^{i\frac{10\pi}{9}}, 3e^{i\frac{16\pi}{9}}\right\}$

14.3. Seja $z = re^{i\theta}$.

$$|z|z^2 + 8i = 0 \Leftrightarrow r\left(re^{i\theta}\right)^2 + 8e^{i\frac{\pi}{2}} = 0 \Leftrightarrow r \times r^2 e^{i(2\theta)} = -8e^{i\frac{\pi}{2}}$$

$$\Leftrightarrow r^3 e^{i(2\theta)} = 8e^{i\left(\pi + \frac{\pi}{2}\right)}$$

$$\Leftrightarrow r^3 e^{i(2\theta)} = 8e^{i\frac{3\pi}{2}}$$

$$\Leftrightarrow r^3 = 8 \ \wedge \ 2\theta = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow r = 2 \ \wedge \ \theta = \frac{3\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

- Para $k = 0, \theta = \frac{3\pi}{4}$.
- Para $k = 1, \theta = \frac{7\pi}{4}$.

Assim:

$$z_1 = 2e^{i\frac{3\pi}{4}} = 2\left[\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) + i\,\text{sen}\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right] = 2\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right) = -\sqrt{2} + \sqrt{2}i$$

$$z_2 = 2e^{i\frac{7\pi}{4}} = 2\left[\cos\left(\frac{7\pi}{4}\right) + i\,\text{sen}\left(\frac{7\pi}{4}\right)\right] = 2\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i\right) = \sqrt{2} - \sqrt{2}i$$

C.S. $= \left\{-\sqrt{2} + \sqrt{2}i, \sqrt{2} - \sqrt{2}i \ \right\}$

14.4. Seja $z = re^{i\theta}$ e seja $z_1 = 1 + \sqrt{3}i$.

- $|z_1| = \sqrt{1^2 + \left(\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{1+3} = \sqrt{4} = 2$
- Seja θ_1 um argumento de z_1. Como o afixo de z_1 está no 1º quadrante, concluímos que θ_1 pertence ao 1º quadrante.

  $\text{tg}\,\theta_1 = \frac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3} \ \wedge \ \theta_1 \in 1º\,Q$

  Então, podemos concluir que $\theta_1 = \frac{\pi}{3}$, por exemplo.

Assim, $z_1 = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$.

Temos então:

$$z^2 = \left(1 + \sqrt{3}i\right)\bar{z} \Leftrightarrow \left(re^{i\theta}\right)^2 = 2e^{i\frac{\pi}{3}} \times \overline{re^{i\theta}} \Leftrightarrow r^2 e^{i(2\theta)} = 2e^{i\frac{\pi}{3}} \times re^{i(-\theta)}$$

$$\Leftrightarrow r^2 e^{i(2\theta)} = 2re^{i\left(\frac{\pi}{3} - \theta\right)}$$

$$\Leftrightarrow r^2 e^{i(2\theta)} - 2re^{i\left(\frac{\pi}{3} - \theta\right)} = 0$$

$$\Leftrightarrow r\left[re^{i(2\theta)} - 2e^{i\left(\frac{\pi}{3} - \theta\right)}\right] = 0$$

$$\Leftrightarrow r = 0 \ \vee \ re^{i(2\theta)} - 2e^{i\left(\frac{\pi}{3} - \theta\right)} = 0$$

$$\Leftrightarrow r = 0 \ \vee \ re^{i(2\theta)} = 2e^{i\left(\frac{\pi}{3} - \theta\right)}$$

$$\Leftrightarrow r = 0 \ \vee \ \left(r = 2 \ \wedge \ 2\theta = \frac{\pi}{3} - \theta + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\right)$$

$$\Leftrightarrow r = 0 \ \vee \ \left(r = 2 \ \wedge \ 3\theta = \frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\right)$$

$$\Leftrightarrow r = 0 \ \vee \ \left(r = 2 \ \wedge \ \theta = \frac{\pi}{9} + \frac{2k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}\right)$$

Se $r = 0$, então $z = 0$.

Se $r = 2$, temos:

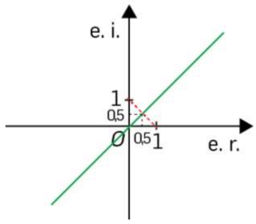
- Para $k = 0, \theta = \frac{\pi}{9}$.
- Para $k = 1, \theta = \frac{7\pi}{9}$.
- Para $k = 2, \theta = \frac{13\pi}{9}$.

Assim, $z_1 = 2e^{i\frac{\pi}{9}}$, $z_2 = 2e^{i\frac{7\pi}{9}}$ e $z_3 = 2e^{i\frac{13\pi}{9}}$.

C.S. $= \left\{0, 2e^{i\frac{\pi}{9}}, 2e^{i\frac{7\pi}{9}}, 2e^{i\frac{13\pi}{9}}\right\}$

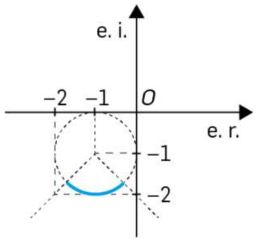
15.

15.1. $\left|\frac{z-1}{z-i}\right| = 1 \Leftrightarrow |z-1| = |z-i|$

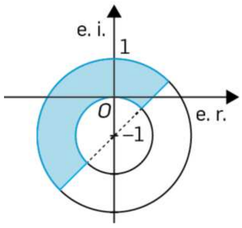


15.2. $-\frac{3\pi}{4} \leq \operatorname{Arg}(z+1+i) \leq -\frac{\pi}{4} \;\wedge\; |z+1+i| = 1$

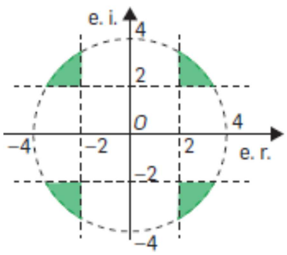
$\Leftrightarrow\; -\frac{3\pi}{4} \leq \operatorname{Arg}\big(z-(-1-i)\big) \leq -\frac{\pi}{4} \;\wedge\; |z-(-1-i)| = 1$



15.3. $1 \leq |z+i| \leq 2 \;\wedge\; \operatorname{Im}(z) \geq \operatorname{Re}(z) - 1 \Leftrightarrow 1 \leq |z-(-i)| \leq 2 \;\wedge\; \operatorname{Im}(z) \geq \operatorname{Re}(z) - 1$



15.4. $|\operatorname{Re}(z)| > 2 \;\wedge\; |\operatorname{Im}(z)| > 2 \;\wedge\; |z| < 4$



16.

16.1. $|z-2i| \leq 2 \ \wedge \ \left(\frac{\pi}{2} \leq \operatorname{Arg}(z-2i) \leq \frac{3\pi}{4} \ \vee \ -\frac{\pi}{2} \leq \operatorname{Arg}(z-2i) \leq -\frac{\pi}{4}\right)$

16.2. $|z-2-3i| \leq \sqrt{13} \ \wedge \ |z| \geq |z-2-3i|$

17.

17.1. $w = \frac{x+yi+1}{x+yi-2i} = \frac{x+1+yi}{x+(y-2)i} = \frac{[(x+1)+yi][x-(y-2)i]}{[x+(y-2)i][x-(y-2)i]} =$

$$= \frac{x(x+1)-(x+1)(y-2)i+xyi-y(y-2)i^2}{x^2-(y-2)^2i^2} =$$

$$= \frac{x^2+x-(xy-2x+y-2)i+xyi+y(y-2)}{x^2+(y-2)^2} =$$

$$= \frac{x^2+x+(-xy+2x-y+2)i+xyi+y^2-2y}{x^2+(y-2)^2} =$$

$$= \frac{x^2+x+y^2-2y+(-xy+2x-y+2+xy)i}{x^2+(y-2)^2} =$$

$$= \frac{x^2+x+y^2-2y}{x^2+(y-2)^2} + \frac{(2x-y+2)i}{x^2+(y-2)^2}$$

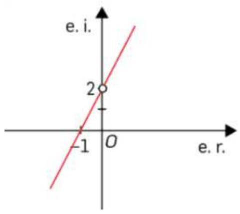
Assim, $\operatorname{Re}(w) = \frac{x^2+x+y^2-2y}{x^2+(y-2)^2}$ e $\operatorname{Im}(w) = \frac{2x-y+2}{x^2+(y-2)^2}i$, com $(x,y) \neq (0,2)$.

17.2. w é um número real se $\frac{2x-y+2}{x^2+(y-2)^2} = 0$.

$\frac{2x-y+2}{x^2+(y-2)^2} = 0 \Leftrightarrow 2x-y+2 = 0$, com $(x,y) \neq (0,2)$

$\Leftrightarrow y = 2x+2 = 0$, com $(x,y) \neq (0,2)$

Os afixos destes pontos pertencem à reta de equação $y = 2x+2$, exceto o ponto de coordenadas $(0,2)$.



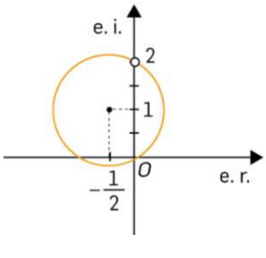
17.3. w é um imaginário puro se $\frac{x^2+x+y^2-2y}{x^2+(y-2)^2} = 0$.

$\frac{x^2+x+y^2-2y}{x^2+(y-2)^2} = 0 \Leftrightarrow x^2+x+y^2-2y = 0$, com $(x,y) \neq (0,2)$

$\Leftrightarrow x^2+x+\left(\frac{1}{2}\right)^2+y^2-2y+1 = \frac{1}{4}+1$, com $(x,y) \neq (0,2)$

$\Leftrightarrow \left(x+\frac{1}{2}\right)^2+(y-1)^2 = \frac{5}{4}$, com $(x,y) \neq (0,2)$

Os afixos destes pontos pertencem à circunferência de centro $\left(-\frac{1}{2},1\right)$ e raio $\frac{\sqrt{5}}{2}$, exceto o ponto de coordenadas $(0,2)$.



Exercícios propostos (págs. 356 a 368)

Itens de seleção (págs. 356 a 358)

1. Se o afixo de z é um ponto do 2º quadrante, o afixo de $w = 4z$ também pertence ao 2º quadrante, já que se $z = re^{i\theta}$, então $4z = 4re^{i\theta}$ e θ pertence ao 2º quadrante.

Opção (B)

2.

2.1. Seja z o número complexo cujo afixo é o ponto A. Como o raio da circunferência é 2, $|z| = 2$.

Um argumento de z é $\theta = \frac{\pi}{2} - \frac{2\pi}{5} = \frac{\pi}{10}$.

Assim, $z = 2e^{i\frac{\pi}{10}}$.

Opção (D)

2.2. Como os afixos das raízes de ordem n são os vértices de um pentágono, então $n = 5$.

Como z é uma raiz de ordem 5 de w,então $w = z^5$ e:

$$\begin{aligned} w = \left(2e^{i\frac{\pi}{10}}\right)^5 &\Leftrightarrow w = 2^5 e^{i\frac{5\pi}{10}} \\ &\Leftrightarrow w = 32e^{i\frac{\pi}{2}} \\ &\Leftrightarrow w = 32i \end{aligned}$$

Opção (B)

3. $(2-3i)^2 = 2^2 - 12i + (3i)^2 = 4 - 12i - 9 = -5 - 12i$

$(-2-3i)^2 = (-2)^2 + 12i + (3i)^2 = 4 + 12i - 9 = -5 + 12i$

$(-2+3i)^2 = (-2)^2 - 12i + (3i)^2 = 4 - 12i - 9 = -5 - 12i$

$(2+3i)^2 = 2^2 + 12i + (3i)^2 = 4 + 12i - 9 = -5 + 12i$

$(2-3i)^{-1} = \frac{1}{2-3i} = \frac{2+3i}{(2-3i)(2+3i)} = \frac{2+3i}{4-9i^2} = \frac{2}{13} + \frac{3}{13}i$

A opção correta é a (B), pois $(2-3i)^2 = (-2+3i)^2$.

Opção (B)

4. $|z + 3 - 3i| \leq 2 \Leftrightarrow |z - (-3+3i)| \leq 2$

Assim, a condição define um círculo de centro no afixo de $z_1 = -3 + 3i$, ou seja, de centro no ponto de coordenadas $(-3, 3)$ e raio 2.

Opção (B)

5. $z = i + i^2 + i^3 + i^4 = i - 1 - i + 1 = 0$

Opção (A)

6. $\frac{-z \times (\bar{z})^5 \times |z|}{e^{i\frac{\pi}{3}}} = \frac{2e^{i\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right)} \times \left[2e^{i\left(-\frac{\pi}{3}\right)}\right]^5 \times \left|2e^{i\frac{\pi}{3}}\right|}{e^{i\frac{\pi}{3}}} = \frac{2e^{i\frac{4\pi}{3}} \times 32e^{i\left(-\frac{5\pi}{3}\right)} \times 2}{e^{i\frac{\pi}{3}}} =$

$= \frac{128e^{i\left(\frac{4\pi}{3} - \frac{5\pi}{3}\right)}}{e^{i\frac{\pi}{3}}} =$

$= 128e^{i\left(\frac{4\pi}{3} - \frac{5\pi}{3} - \frac{\pi}{3}\right)} =$

$= 128e^{i\left(-\frac{2\pi}{3}\right)}$

Assim, o argumento positivo mínimo do número complexo dado é $-\frac{2\pi}{3} + 2\pi = \frac{4\pi}{3}$.

Opção (D)

7. A opção (A) não é a correta, pois:

$i^{4n} + i^{4n+1} = i^{4n+2} + i^{4n+3} \Leftrightarrow 1 + i^1 = i^2 + i^3 \Leftrightarrow 1 + i = -1 - i$ (proposição falsa)

A opção (C) não é a correta, pois $\frac{i}{|i|} = 1 \Leftrightarrow \frac{i}{1} = 1 \Leftrightarrow i = 1$ (proposição falsa).

A opção (D) não é a correta, pois $\text{Arg}(i) = \pi \Leftrightarrow \frac{\pi}{2} = \pi$ (proposição falsa).

A opção correta é a (B), pois $\frac{1}{i^3} = \overline{-i} \Leftrightarrow \frac{1}{-i} = i \Leftrightarrow -\frac{i}{i^2} = i \Leftrightarrow i = i$ (proposição verdadeira).

Opção (B)

8. Seja $z = a + bi$, com $a > 0$ e $b > 0$.

Seja $w = \frac{z}{i} + \bar{z} = \frac{a+bi}{i} + a - bi = \frac{-ai-bi^2}{i^2} + a - bi = -ai + b + a - bi = (a + b) - (a + b)i$.

Assim, como $a > 0$ e $b > 0$, temos que:

- $a + b > 0$, isto é, $\text{Re}(w) > 0$;
- $-(a + b) < 0$, isto é, $\text{Im}(w) < 0$.

Logo, o afixo de w pertence ao 4º Q.

Além disso, $\text{tg}\ \theta = \frac{-(a+b)}{a+b} = -1$, isto é, $\theta = -\frac{\pi}{4}$, por exemplo.

Concluímos assim que o afixo de w pertence à bissetriz dos quadrantes pares.

Logo, é o ponto *E*.

Opção (D)

9. $(1 + i)^3 = (1 + i)^2(1 + i) = (1 + 2i + i^2)(1 + i) =$

$= 2i(1 + i) =$

$= 2i + 2i^2 =$

$= -2 + 2i$

Opção (C)

10. O comprimento do arco AB é dado por αr, sendo α a amplitude do ângulo ao centro correspondente e r o raio da circunferência de centro na origem, ou seja, $r = \overline{OA}$.

Como $[AB]$ é um dos lados de um polígono regular cujos vértices são os afixos das raízes de ordem 7 de um número complexo, então o polígono é um heptágono regular e podemos concluir que $\alpha = \frac{2\pi}{7}$ e que $r = \sqrt[7]{128} = 2$ (já que o módulo das raízes de ordem 7 do complexo $128e^{i\frac{\pi}{4}}$ é dado por $\sqrt[7]{128}$). Assim, o comprimento do arco AB é $\alpha r = \frac{2\pi}{7} \times 2 = \frac{4\pi}{7}$.

Opção (A)

11. Sabemos que os argumentos das n raízes de um número complexo se encontram em progressão aritmética de razão $\frac{2\pi}{n}$. Assim, sendo $3e^{i\frac{\pi}{4}}$ e $3e^{i\left(-\frac{\pi}{128}\right)}$ duas raízes consecutivas de um mesmo número complexo, tem-se que:

$$\frac{\pi}{4} - \left(-\frac{\pi}{28}\right) = \frac{2\pi}{n} \Leftrightarrow \frac{7\pi+\pi}{28} = \frac{2\pi}{n} \Leftrightarrow 8\pi n = 56 \Leftrightarrow n = 7$$

Opção (B)

12. O domínio plano representado é a parte da circunferência de centro $(0, -2)$ e raio 2 situada à esquerda da reta vertical $\mathrm{Re}(z) = 1$.

Assim, temos:

$\mathrm{Re}(z) < 1 \ \wedge \ |z - (-2i)| = 2$

$\Leftrightarrow \mathrm{Im}(iz) < 1 \ \wedge \ |z + 2i| = 2$

Opção (A)

Cálculo auxiliar

$z = a + bi$

$$\begin{aligned}\mathrm{Im}(iz) = \mathrm{Im}\big(i(a+bi)\big) &= \mathrm{Im}(ai + bi^2) = \\ &= \mathrm{Im}(-b + ai) = \\ &= a = \\ &= \mathrm{Re}(z)\end{aligned}$$

13. Seja $z = a + bi$, com $a > 0$ e $b > 0$.

$$(a+bi) \times \left(-2 + \frac{i}{2}\right) = -2a + \frac{a}{2}i - 2bi + \frac{bi^2}{2} = \underbrace{\left(-2a - \frac{b}{2}\right)}_{<0} + \underbrace{\left(\frac{a}{2} - 2b\right)}_{<0 \text{ (pois não se verifica que } a > 4b)} i$$

Opção (B)

14. $z = i + i^2 + i^3 + i^4 + i^5 + i^6 + i^7 + i^8 + \ldots + i^{2015} =$

$= i + i^2 + i^3 + i^4 + i + i^2 + i^3 + i^4 + \ldots + i + i^2 + i^3 =$

$= i - 1 - i + 1 + i - 1 - i + 1 + \ldots + i - 1 - i =$

$= (i - 1 - i + 1) \times 503 + i - 1 - i =$

$= 0 + i - 1 - i =$

$= -1$

Opção (B)

Cálculo auxiliar

$$\begin{array}{r|l} 2015 & 4 \\ \hline 015 & 503 \\ 3 & \end{array}$$

$i + i^2 + i^3 + i^4 = i - 1 - i + 1 = 0$

LeYa EDUCAÇÃO Daniela Raposo e Luzia Gomes

15. Seja $z_1 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$.

- $|z_1| = \sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}} = 1$
- Seja θ_1 um argumento de z_1. Como o afixo de z_1 está no 2º quadrante, concluímos que θ_1 pertence ao 2º quadrante.

  $\text{tg}\ \theta_1 = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{-\frac{1}{2}} = -\sqrt{3} \ \wedge\ \theta_1 \in 2º\ Q$

  Então, $\theta_1 = \frac{2\pi}{3}$, por exemplo.

Assim, $z_1 = e^{i\frac{2\pi}{3}}$.

Seja $z_2 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$.

- $|z_2| = \sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}} = 1$
- Seja θ_2 um argumento de z_2. Como o afixo de z_2 está no 3º quadrante, concluímos que θ_2 pertence ao 3º quadrante.

  $\text{tg}\ \theta_2 = \frac{-\frac{\sqrt{3}}{2}}{-\frac{1}{2}} = \sqrt{3} \ \wedge\ \theta_2 \in 3º\ Q$

  Então, $\theta_2 = \frac{4\pi}{3}$, por exemplo.

Assim, $z_2 = e^{i\frac{4\pi}{3}}$.

Então:

$$\left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)^{3n} + \left(\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\right)^{3n} = \left(e^{i\frac{2\pi}{3}}\right)^{3n} + \left(e^{i\frac{4\pi}{3}}\right)^{3n} = e^{i3n\times\frac{2\pi}{3}} + e^{i3n\times\frac{4\pi}{3}} =$$
$$= e^{i2n\pi} + e^{i4n\pi} =$$
$$= 1 + 1 = 2$$

Opção (C)

16. $$\left(\frac{\cos\theta - i\,\text{sen}\,\theta}{\text{sen}\,\theta + i\cos\theta}\right)^5 = \left(\frac{\cos(-\theta) + i\cos(-\theta)}{\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) + i\,\text{sen}\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)}\right)^5 = \left(\frac{e^{i(-\theta)}}{e^{i\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)}}\right)^5 =$$
$$= \left(e^{i\left(-\theta - \frac{\pi}{2} + \theta\right)}\right)^5 =$$
$$= \left(e^{i\left(-\frac{\pi}{2}\right)}\right)^5 =$$
$$= e^{i\left(-\frac{5\pi}{2}\right)} =$$
$$= -i$$

Opção (B)

LeYa EDUCAÇÃO Daniela Raposo e Luzia Gomes

17. $|w| = |z| = \sqrt{\left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{3}{5}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{9} + \frac{9}{25}} = \sqrt{\frac{106}{225}} = \frac{\sqrt{106}}{15}$

Seja $z = |z|e^{i\theta}$.

Como $|w| = |z|$ e $\operatorname{Arg}(w) = 3\operatorname{Arg}(z)$, podemos concluir que $w = |z|e^{i(3\theta)}$.

Assim, $\frac{w}{z} = \frac{|z|e^{i(3\theta)}}{|z|e^{i\theta}} = e^{i(2\theta)}$.

Logo, $|z|^2 \times \frac{w}{z} = \frac{106}{225}e^{i(2\theta)} = \frac{106}{225}\,[\cos(2\theta) + i\,\operatorname{sen}(2\theta)]$.

Assim, $\operatorname{Im}\left(|z|^2 \times \frac{w}{z}\right) = \frac{106}{225}\,\operatorname{sen}(2\theta)$.

Como $z = \frac{1}{3} + \frac{3}{5}i$, então $\operatorname{tg}\theta = \frac{\frac{3}{5}}{\frac{1}{3}} = \frac{9}{5}$.

Sabemos que $1 + \operatorname{tg}^2\theta = \frac{1}{\cos^2\theta}$. Assim:

$$1 + \left(\frac{9}{5}\right)^2 = \frac{1}{\cos^2\theta} \Leftrightarrow 1 + \frac{81}{25} = \frac{1}{\cos^2\theta} \Leftrightarrow \frac{106}{25} = \frac{1}{\cos^2\theta}$$
$$\Leftrightarrow \cos^2\theta = \frac{25}{106}$$
$$\Leftrightarrow \cos\theta = \frac{5\sqrt{106}}{106}, \text{ porque } \theta \in 1º\text{ Q.}$$

Sabemos que $\operatorname{sen}^2\theta = 1 - \cos^2\theta$. Assim:

$$\operatorname{sen}^2\theta = 1 - \frac{25}{106} \Leftrightarrow \operatorname{sen}^2\theta = \frac{81}{106} \Leftrightarrow \operatorname{sen}\theta = \frac{9\sqrt{106}}{106}, \text{ porque } \theta \in 1º\text{ Q.}$$

Logo:

$$\operatorname{Im}\left(|z|^2 \times \frac{w}{z}\right) = \frac{106}{225}\,\operatorname{sen}(2\theta) = \frac{106}{225} \times 2\operatorname{sen}(\theta)\cos(\theta) =$$
$$= \frac{106}{225} \times 2 \times \frac{9\sqrt{106}}{106} \times \frac{5\sqrt{106}}{106} =$$
$$= \frac{90}{225} =$$
$$= \frac{2}{5}$$

Opção (D)

18. Seja $z = \sqrt{3} - i$.

- $|z| = \sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2 + (-1)^2} = \sqrt{3+1} = 2$
- Seja θ um argumento de z. Como o afixo de z está no 4º quadrante, concluímos que θ pertence ao 4º quadrante.

  $\operatorname{tg}\theta = \frac{-1}{\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3} \ \wedge \ \theta \in 4º\text{ Q}$

  Então, $\theta = -\frac{\pi}{6}$, por exemplo.

Assim, $z = 2e^{i\left(-\frac{\pi}{6}\right)}$.

Então, $\left(\sqrt{3} - i\right)^k = \left(2e^{i\left(-\frac{\pi}{6}\right)}\right)^k = 2^k e^{i\left(-\frac{k\pi}{6}\right)}$.

Para que $2^k e^{i\left(-\frac{k\pi}{6}\right)}$ represente um número real positivo, o seu argumento deve ser da forma $2\lambda\pi, \lambda \in \mathbb{Z}$.

Assim:

$-\frac{k\pi}{6} = 2\lambda\pi, \lambda \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow k = -12\lambda,\ \lambda \in \mathbb{Z}$

- Se $\lambda = 0, k = 0$, mas $0 \notin \mathbb{Z}^+$.
- Se $\lambda = 1, k = -12$, mas $-12 \notin \mathbb{Z}^+$.
- Se $\lambda = -1, k = 12$.

Logo, $k = 12$.

Opção (D)

Itens de construção (págs. 359 a 368)

1.

1.1. $z + w = 2 - 3i + (-4 + 5i) = 2 - 3i - 4 + 5i = -2 + 2i$

1.2. $3w - 2z = 3(-4 + 5i) - 2(2 - 3i) = -12 + 15i - 4 + 6i = -16 + 21i$

1.3. $z \times w = (2 - 3i)(-4 + 5i) = -8 + 10i + 12i - 15i^2 = -8 + 22i + 15 = 7 + 22i$

1.4. $\frac{1}{z} = \frac{1}{2-3i} = \frac{2+3i}{(2-3i)(2+3i)} = \frac{2+3i}{4-9i^2} = \frac{2+3i}{4+9} = \frac{2}{13} + \frac{3}{13}i$

1.5. $\frac{z}{w} = \frac{2-3i}{-4+5i} = \frac{(2-3i)(-4-5i)}{(-4+5i)(-4-5i)} = \frac{-8-10i+12i+15i^2}{16-25i^2} =$

$= \frac{-8+2i-15}{16+25} = \frac{-23+2i}{41} = -\frac{23}{41} + \frac{2}{41}i$

1.6. $\frac{-i}{\bar{z}} = \frac{-i}{2+3i} = \frac{-i(2-3i)}{(2+3i)(2-3i)} = \frac{-2i+3i^2}{4-9i^2} =$

$= \frac{-3-2i}{4+9} = -\frac{3}{13} - \frac{2}{13}i$

1.7. $\frac{2i}{z-w} = \frac{2i}{2-3i-(-4+5i)} = \frac{2i}{2-3i+4-5i} = \frac{2i}{6-8i} =$

$= \frac{2i(6+8i)}{(6-8i)(6+8i)} = \frac{12i+16i^2}{36-64i^2} =$

$= \frac{12i-16}{36+64} = -\frac{16}{100} + \frac{12}{100}i =$

$= -\frac{4}{25} + \frac{3}{25}i$

1.8. Por 1.1., $z + w = -2 + 2i$.

Assim:

$(z + w)^2 = (-2 + 2i)^2 = 4 - 8i + 4i^2 = -8i$

1.9. $z^3+w^2=(2-3i)^3+(-4+5i)^2=$

$=(2-3i)^2(2-3i)+(-4+5i)^2=$

$=(4-12i+9i^2)(2-3i)+16-40i+25i^2=$

$=(4-12i-9)(2-3i)+16-40i-25=$

$=(-5-12i)(2-3i)-9-40i=$

$=-10+15i-24i+36i^2-9-40i=$

$=-10+15i-24i-36-9-40i=$

$=-55-49i$

1.10. $\frac{i^{10}-2w}{5i^5}=\frac{i^2-2(-4+5i)}{5i}=$

$=\frac{-1+8-10i}{5i}=\frac{7-10i}{5i}=$

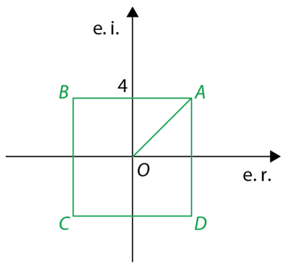
$=\frac{-5i(7-10i)}{5i(-5i)}=\frac{-35i+50i^2}{-25i^2}=$

$=\frac{-50-35i}{25}=-\frac{50}{25}-\frac{35}{25}i=$

$=-2-\frac{7}{5}i$

2. Como $P=32$, temos que $l=\overline{AB}=8$. Assim, $A(4,4)$.

Logo, $z=4+4i$.



3. Seja $z=a+bi$.

3.1. $\frac{z+\bar{z}}{2}=\frac{a+bi+a-bi}{2}=\frac{2a}{2}=a=\text{Re}(z)$

3.2. $\frac{z-\bar{z}}{2i}=\frac{a+bi-(a-bi)}{2i}=\frac{a+bi-a+bi}{2i}=\frac{2bi}{2i}=b=\text{Im}(z)$

3.3. $z=\bar{z} \Leftrightarrow a+bi=a-bi \Leftrightarrow bi=-bi$

$\Leftrightarrow 2bi=0$

$\Leftrightarrow b=0$

Isto é, z é um número real.

3.4. Se z é um imaginário puro, então $z=bi$, com $b\neq 0$. Logo:

$-\bar{z}=-\overline{bi}=-(-bi)=bi=z$

4.

4.1. $2e^{i\frac{\pi}{2}}=2\left[\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)+i\text{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right)\right]=2(0+i)=2i$

4.2. $\sqrt{2}e^{i\left(-\frac{\pi}{4}\right)}=\sqrt{2}\left[\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+i\text{sen}\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right]=\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)=1-i$

4.3. $e^{i\frac{\pi}{6}} = \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + i\text{sen}\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$

4.4. $3e^{i\frac{5\pi}{3}} = 3\left[\cos\left(\frac{5\pi}{3}\right) + i\text{sen}\left(\frac{5\pi}{3}\right)\right] = 3\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = \frac{3}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{2}i$

4.5. $5e^{i0} = 5[\cos(0) + i\text{sen}(0)] = 5(1+0) = 5$

4.6. $5e^{i\frac{\pi}{2}} = 5\left[\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i\text{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right)\right] = 5(0+i) = 5i$

4.7. $5e^{i\pi} = 5[\cos(\pi) + i\text{sen}(\pi)] = 5(-1+0) = -5$

4.8. $5e^{i\frac{3\pi}{2}} = 5\left[\cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) + i\text{sen}\left(\frac{3\pi}{2}\right)\right] = 5(0-i) = -5i$

4.9. $\frac{1}{4}e^{i\frac{7\pi}{2}} = \frac{1}{4}\left[\cos\left(\frac{7\pi}{2}\right) + i\text{sen}\left(\frac{7\pi}{2}\right)\right] = \frac{1}{4}(0-i) = -\frac{1}{4}i$

4.10. $\frac{1}{2} + e^{i\left(-\frac{\pi}{3}\right)} = \frac{1}{2} + \cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\text{sen}\left(-\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i = 1 - \frac{\sqrt{3}}{2}i$

5.

5.1. Seja $z = 2i$.

Atendendo à representação geométrica de z, temos que:

- o módulo de z é 2;
- um argumento de z é, por exemplo, $\frac{\pi}{2}$.

Assim, $z = 2e^{i\frac{\pi}{2}}$.

5.2. Seja $z = -10i$.

Atendendo à representação geométrica de z, temos que:

- o módulo de z é 10;
- um argumento de z é, por exemplo, $\frac{3\pi}{2}$.

Assim, $z = 10e^{i\frac{3\pi}{2}}$.

5.3. Seja $z = 2013$.

Atendendo à representação geométrica de z, temos que:

- o módulo de z é 2013;
- um argumento de z é, por exemplo, 0.

Assim, $z = 2013e^{i0}$.

5.4. Seja $z = -3\sqrt{2}$.

Atendendo à representação geométrica de z, temos que:

- o módulo de z é $3\sqrt{2}$;
- um argumento de z é, por exemplo, π.

Assim, $z = 3\sqrt{2}e^{i\pi}$.

5.5. Seja $z = 1 + i$.

- $|z| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$
- Seja θ um argumento de z. Como o afixo de z está no 1º quadrante, concluímos que θ pertence ao 1º quadrante.

  $\operatorname{tg}\theta = \frac{1}{1} = 1 \ \wedge \ \theta \in 1º\,Q$

  Então, podemos concluir que $\theta = \frac{\pi}{4}$, por exemplo.

Assim, $z = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$.

5.6. Seja $z = 1 - i$.

- $|z| = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$
- Seja θ um argumento de z. Como o afixo de z está no 4º quadrante, concluímos que θ pertence ao 4º quadrante.

  $\operatorname{tg}\theta = \frac{-1}{1} = -1 \ \wedge \ \theta \in 4º\,Q$

  Então, podemos concluir que $\theta = -\frac{\pi}{4}$, por exemplo.

Assim, $z = \sqrt{2}e^{i\left(-\frac{\pi}{4}\right)}$.

5.7. Seja $z = -\frac{1}{5} - \frac{1}{5}i$.

- $|z| = \sqrt{\left(-\frac{1}{5}\right)^2 + \left(-\frac{1}{5}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{25} + \frac{1}{25}} = \sqrt{\frac{2}{25}} = \frac{\sqrt{2}}{5}$
- Seja θ um argumento de z. Como o afixo de z está no 3º quadrante, concluímos que θ pertence ao 3º quadrante.

  $\operatorname{tg}\theta = \frac{-\frac{1}{5}}{-\frac{1}{5}} = 1 \ \wedge \ \theta \in 3º\,Q$

  Então, podemos concluir que $\theta = \frac{5\pi}{4}$, por exemplo.

Assim, $z = \frac{\sqrt{2}}{5}e^{i\frac{5\pi}{4}}$.

5.8. Seja $z = 1 - \sqrt{3}i$.

- $|z| = \sqrt{1^2 + \left(-\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{1+3} = \sqrt{4} = 2$
- Seja θ um argumento de z. Como o afixo de z está no 4º quadrante, concluímos que θ pertence ao 4º quadrante.

  $\operatorname{tg}\theta = \frac{-\sqrt{3}}{1} = -\sqrt{3} \ \wedge \ \theta \in 4º\,Q$

  Então, podemos concluir que $\theta = -\frac{\pi}{3}$, por exemplo.

Assim, $z = 2e^{i\left(-\frac{\pi}{3}\right)}$.

5.9. Seja $z = -\sqrt{2} - \sqrt{6}i$.

- $|z| = \sqrt{\left(-\sqrt{2}\right)^2 + \left(-\sqrt{6}\right)^2} = \sqrt{2+6} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$
- Seja θ um argumento de z. Como o afixo de z está no 3º quadrante, concluímos que θ pertence ao 3º quadrante.

  $\operatorname{tg}\theta = \frac{-\sqrt{6}}{-\sqrt{2}} = \sqrt{3} \;\wedge\; \theta \in 3º\text{ Q}$

  Então, podemos concluir que $\theta = \frac{4\pi}{3}$, por exemplo.

Assim, $z = 2\sqrt{2}e^{i\frac{4\pi}{3}}$.

5.10. Seja $z = -\sqrt{3} + i$.

- $|z| = \sqrt{\left(-\sqrt{3}\right)^2 + 1^2} = \sqrt{3+1} = \sqrt{4} = 2$
- Seja θ um argumento de z. Como o afixo de z está no 2º quadrante, concluímos que θ pertence ao 2º quadrante.

  $\operatorname{tg}\theta = \frac{1}{-\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3} \;\wedge\; \theta \in 2º\text{ Q}$

  Então, podemos concluir que $\theta = \frac{5\pi}{6}$, por exemplo.

Assim, $z = 2e^{i\frac{5\pi}{6}}$.

6.

6.1. $\bar{z} = \overline{3e^{i\frac{\pi}{5}}} = 3e^{i\left(-\frac{\pi}{5}\right)}$ $-z = -3e^{i\frac{\pi}{5}} = 3e^{i\left(\pi+\frac{\pi}{5}\right)} = 3e^{i\frac{6\pi}{5}}$ $\frac{1}{z} = \frac{1}{3}e^{i\left(-\frac{\pi}{5}\right)}$

6.2. Seja $z = 1 + i$.

- $|z| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$
- Seja θ um argumento de z. Como o afixo de z está no 1º quadrante, concluímos que θ pertence ao 1º quadrante.

  $\operatorname{tg}\theta = \frac{1}{1} = 1 \;\wedge\; \theta \in 1º\text{ Q}$

  Então, podemos concluir que $\theta = \frac{\pi}{4}$, por exemplo.

Assim, $z = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$.

Logo:

$\bar{z} = \overline{\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}} = \sqrt{2}e^{i\left(-\frac{\pi}{4}\right)}$ $-z = \sqrt{2}e^{i\left(\pi+\frac{\pi}{4}\right)} = \sqrt{2}e^{i\frac{5\pi}{4}}$ $\frac{1}{z} = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{i\left(-\frac{\pi}{4}\right)} = \frac{\sqrt{2}}{2}e^{i\left(-\frac{\pi}{4}\right)}$

6.3. Seja $z = 5$.

Atendendo à representação geométrica de z, temos que:

- o módulo de z é 5;

Daniela Raposo e Luzia Gomes

- um argumento de z é, por exemplo, 0.

Assim, $z = 5e^{i0}$.

Logo:

$\bar{z} = \overline{5e^{i0}} = 5e^{i0}$ $\qquad -z = 5e^{i\pi}$ $\qquad \frac{1}{z} = \frac{1}{5}e^{i0}$

6.4. Seja $z = i$.

Atendendo à representação geométrica de z, temos que:

- o módulo de z é 1;
- um argumento de z é, por exemplo, $\frac{\pi}{2}$.

Assim, $z = e^{i\frac{\pi}{2}}$.

Logo:

$\bar{z} = \overline{e^{i\frac{\pi}{2}}} = e^{i\left(-\frac{\pi}{2}\right)}$ $\qquad -z = e^{i\left(\pi+\frac{\pi}{2}\right)} = e^{i\left(\frac{3\pi}{2}\right)}$ $\qquad \frac{1}{z} = e^{i\left(-\frac{\pi}{2}\right)}$

7.

7.1. $\frac{(2+i)^2+1+6i^{35}}{1+2i} = \frac{4+4i+i^2+1+6i^3}{1+2i} = \frac{4+4i+6(-i)}{1+2i} =$

$$= \frac{4+4i-6i}{1+2i} =$$
$$= \frac{(4-2i)(1-2i)}{(1+2i)(1-2i)} =$$
$$= \frac{4-8i-2i+4i^2}{1-4i^2} =$$
$$= \frac{4-10i-4}{1+4} =$$
$$= -\frac{10i}{5} =$$
$$= -2i$$

7.2. $\frac{(1+2i)(3+i)-i^6+i^7}{3i} = \frac{3+i+6i+2i^2-i^2+i^3}{3i} = \frac{3+7i-2+1-i}{3i} =$

$$= \frac{2+6i}{3i} =$$
$$= \frac{(2+6i)(-3i)}{-9i^2} =$$
$$= \frac{-6i-18i^2}{9} =$$
$$= \frac{18-6i}{9} =$$
$$= 2 - \frac{2}{3}i$$

7.3. $\frac{2(1-i)-i^{18}-3}{1-2i} = \frac{2-2i-i^2-3}{1-2i} = \frac{-2i}{1-2i} =$

$$= \frac{-2i(1+2i)}{(1-2i)(1+2i)} =$$
$$= \frac{-2i-4i^2}{1-4i^2} =$$

$$= \frac{4-2i}{1+4} =$$

$$= \frac{4}{5} - \frac{2}{5}i$$

7.4. $\frac{3-2i+(3-2i)^2+2i^{43}}{8e^{i\frac{3\pi}{2}}} = \frac{3-2i+9-12i+4i^2+2i^3}{8\left[\cos\left(\frac{3\pi}{2}\right)+i\operatorname{sen}\left(\frac{3\pi}{2}\right)\right]} = \frac{3-2i+9-12i-4-2i}{8(0-i)} =$

$$= \frac{8-16i}{-8i} =$$

$$= \frac{8i(8-16i)}{-64i^2} =$$

$$= \frac{64i-128i^2}{64} =$$

$$= \frac{128+64i}{64} =$$

$$= 2+i$$

7.5. $\frac{\left(\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}\right)^4+4i}{i} = \frac{4e^{i\frac{4\pi}{4}}+4i}{i} = \frac{4e^{i\pi}+4i}{i} =$

$$= \frac{4[\cos(\pi)+i\operatorname{sen}(\pi)]+4i}{i} =$$

$$= \frac{4(-1+0)+4i}{i} =$$

$$= \frac{-4+4i}{i} =$$

$$= \frac{(-4+4i)(-i)}{-i^2} =$$

$$= \frac{4i-4i^2}{1} =$$

$$= 4+4i$$

7.6. $\frac{3-i\left(e^{i\frac{\pi}{7}}\right)^7}{2-i} = \frac{3-ie^{i\frac{7\pi}{7}}}{2-i} = \frac{3-ie^{i\pi}}{2-i} =$

$$= \frac{3-i[\cos(\pi)+i\operatorname{sen}(\pi)]}{2-i} =$$

$$= \frac{3-i(-1+0)}{2-i} =$$

$$= \frac{3+i}{2-i} =$$

$$= \frac{(3+i)(2+i)}{(2-i)(2+i)} =$$

$$= \frac{6+3i+2i+i^2}{4-i^2} =$$

$$= \frac{6+5i-1}{4+1} =$$

$$= \frac{5+5i}{5} =$$

$$= 1+i$$

7.7. $\frac{\left(e^{i\frac{\pi}{7}}\right)^7+(2+i)^3}{4e^{i\frac{3\pi}{2}}} = \frac{e^{i\frac{7\pi}{7}}+(2+i)(2+i)^2}{4\left[\cos\left(\frac{3\pi}{2}\right)+i\operatorname{sen}\left(\frac{3\pi}{2}\right)\right]} = \frac{e^{i\pi}+(2+i)(4+4i+i^2)}{4(0-i)} =$

$$= \frac{[\cos(\pi)+i\operatorname{sen}(\pi)]+(2+i)(3+4i)}{-4i} =$$

$$= \frac{(-1+0)+6+8i+3i+4i^2}{-4i} =$$

$$= \frac{-1+6+11i-4}{-4i} =$$

$$= \frac{(1+11i)(4i)}{-16i^2} =$$

$$= \frac{4i+44i^2}{16} =$$

$$= \frac{-44+4i}{16} =$$

$$= -\frac{44}{16} + \frac{4}{16}i =$$

$$= -\frac{11}{4} + \frac{1}{4}i$$

7.8. Seja $z = 1 + i$.

- $|z| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$
- Seja θ um argumento de z. Como o afixo de z está no 1º quadrante, concluímos que θ pertence ao 1º quadrante.

  $\text{tg}\ \theta = \frac{1}{1} = 1 \ \wedge \ \theta \in 1º\ \text{Q}$

  Então, podemos concluir que $\theta = \frac{\pi}{4}$, por exemplo.

Assim, $z = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$.

Logo:

$$\frac{(1+i)\left(\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{12}}\right)-2}{\sqrt{3}e^{i\left(-\frac{\pi}{2}\right)}} = \frac{\left(\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}\right)\left(\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{12}}\right)-2}{\sqrt{3}\left[\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)+i\text{sen}\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right]} = \frac{2e^{i\frac{4\pi}{12}}-2}{\sqrt{3}(0-i)} =$$

$$= \frac{2e^{i\frac{\pi}{3}}-2}{-\sqrt{3}i} =$$

$$= \frac{2\left[\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)+i\text{sen}\left(\frac{\pi}{3}\right)\right]-2}{-\sqrt{3}i} =$$

$$= \frac{2\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)-2}{-\sqrt{3}i} =$$

$$= \frac{1+\sqrt{3}i-2}{-\sqrt{3}i} =$$

$$= \frac{-1+\sqrt{3}i}{-\sqrt{3}i} =$$

$$= \frac{(-1+\sqrt{3}i)(\sqrt{3}i)}{-\sqrt{3}i(\sqrt{3}i)} =$$

$$= \frac{-\sqrt{3}i+3i^2}{-3i^2} =$$

$$= \frac{-3-\sqrt{3}i}{3} =$$

$$= -1 - \frac{\sqrt{3}}{3}i$$

8. Seja $z = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$.

- $|z| = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}} = \sqrt{1} = 1$

- Seja θ um argumento de z. Como o afixo de z está no 1º quadrante, concluímos que θ pertence ao 1º quadrante.

  $\text{tg}\,\theta = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = 1 \ \wedge \ \theta \in 1º\text{ Q}$

  Então, podemos concluir que $\theta = \frac{\pi}{4}$, por exemplo.

Assim, $z = e^{i\frac{\pi}{4}}$.

Logo:

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right)^{2020} = \left(e^{i\frac{\pi}{4}}\right)^{2020} = e^{i\frac{2020\pi}{4}} =$$
$$= e^{i505\pi} = e^{i\pi} =$$
$$= \cos(\pi) + i\text{sen}(\pi) =$$
$$= -1 + 0 =$$
$$= -1$$

9.

9.1. $(\bar{z})^2 + \sqrt{3} \times i^{35} = \left(\sqrt{3} + i\right)^2 + \sqrt{3} \times i^3 = 3 + 2\sqrt{3}i + i^2 + \sqrt{3} \times (-i) =$
$$= 3 + 2\sqrt{3}i - 1 - \sqrt{3}i =$$
$$= 2 + \sqrt{3}i$$

9.2. $2a(\sqrt{3} - i) + bi = \sqrt{3} \Leftrightarrow 2\sqrt{3}a - 2ai + bi = \sqrt{3} \Leftrightarrow 2\sqrt{3}a + (-2a + b)i = \sqrt{3}$
$$\Leftrightarrow 2\sqrt{3}a = \sqrt{3} \ \wedge \ -2a + b = 0$$
$$\Leftrightarrow a = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} \ \wedge \ b = 2a$$
$$\Leftrightarrow a = \frac{1}{2} \ \wedge \ b = 1$$

10.

10.1. $iz - 5i = 1 \Leftrightarrow iz = 1 + 5i \Leftrightarrow z = \frac{1+5i}{i}$
$$\Leftrightarrow z = \frac{(1+5i)(-i)}{-i^2}$$
$$\Leftrightarrow z = \frac{-i-5i^2}{1}$$
$$\Leftrightarrow z = 5 - i$$

C.S. $= \{5 - i\}$

10.2. $(z-i)(1+i)=1+2i \Leftrightarrow z-i=\frac{1+2i}{1+i} \Leftrightarrow z=\frac{1+2i}{1+i}+i$

$\Leftrightarrow z=\frac{(1+2i)(1-i)}{(1+i)(1-i)}+i$

$\Leftrightarrow z=\frac{1-i+2i-2i^2}{1-i^2}+i$

$\Leftrightarrow z=\frac{1+i+2}{2}+i$

$\Leftrightarrow z=\frac{3}{2}+\frac{1}{2}i+i$

$\Leftrightarrow z=\frac{3}{2}+\frac{3}{2}i$

C.S. $=\left\{\frac{3}{2}+\frac{3}{2}i\right\}$

10.3. $\frac{1}{z}-1+3i=0 \Leftrightarrow \frac{1}{z}=1-3i \Leftrightarrow z=\frac{1}{1-3i}$

$\Leftrightarrow z=\frac{1+3i}{(1-3i)(1+3i)}$

$\Leftrightarrow z=\frac{1+3i}{1-9i^2}$

$\Leftrightarrow z=\frac{1+3i}{1+9}$

$\Leftrightarrow z=\frac{1}{10}+\frac{3}{10}i$

C.S. $=\left\{\frac{1}{10}+\frac{3}{10}i\right\}$

10.4. $\bar{z}-2=i-3z \Leftrightarrow \overline{x+yi}-2=i-3(x+yi) \Leftrightarrow x-yi-2=i-3x-3yi$

$\Leftrightarrow 4x+2yi=2+i$

$\Leftrightarrow \begin{cases}4x=2\\2y=1\end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases}x=\frac{1}{2}\\y=\frac{1}{2}\end{cases}$

C.S. $=\left\{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i\right\}$

10.5. $z+\frac{4}{z+2i}=2i \Leftrightarrow z(z+2i)+4=2i(z+2i) \wedge \ z+2i\neq 0$

$\Leftrightarrow z^2+2zi+4=2zi+4i^2 \ \wedge \ z\neq -2i$

$\Leftrightarrow z^2+2zi-2zi=-4-4 \ \wedge \ z\neq -2i$

$\Leftrightarrow z^2=-8 \ \wedge \ z\neq -2i$

$\Leftrightarrow z=\pm\sqrt{8}i \wedge \ z\neq -2i$

$\Leftrightarrow z=\pm 2\sqrt{2}i$

C.S. $=\left\{-2\sqrt{2}i, 2\sqrt{2}i\right\}$

10.6. $(z-1+i)^2+i(z-1+i)^3=0 \Leftrightarrow (z-1+i)^2[1+i(z-1+i)]=0$

$\Leftrightarrow z-1+i=0 \ \vee \ 1+i(z-1+i)=0$

$\Leftrightarrow z=1-i \ \vee \ 1+zi-i+i^2=0$

$$\Leftrightarrow z = 1 - i \ \lor \ zi - i = 0$$
$$\Leftrightarrow z = 1 - i \ \lor \ (z-1)i = 0$$
$$\Leftrightarrow z = 1 - i \ \lor \ z = 1$$

C.S. $= \{1 - i, 1\}$

10.7. $2z^2 + 5 = 0 \Leftrightarrow z^2 = -\frac{5}{2} \Leftrightarrow z = \pm\sqrt{\frac{5}{2}}\,i$

$$\Leftrightarrow z = \frac{\sqrt{10}}{2}i \quad \lor \ z = -\frac{\sqrt{10}}{2}i$$

C.S. $= \left\{\frac{\sqrt{10}}{2}i, -\frac{\sqrt{10}}{2}i\right\}$

10.8. $5z^2 - z + 1 = 0 \Leftrightarrow z = \frac{1 \pm i\sqrt{4\times5\times1-(-1)^2}}{2\times5} \Leftrightarrow z = \frac{1 \pm i\sqrt{19}}{10}$

$$\Leftrightarrow z = \frac{1}{10} + \frac{\sqrt{19}}{10}i \ \lor \ z = \frac{1}{10} - \frac{\sqrt{19}}{10}i$$

C.S. $= \left\{\frac{1}{10} + \frac{\sqrt{19}}{10}i, \frac{1}{10} - \frac{\sqrt{19}}{10}i\right\}$

10.9. $-3z^2 + z - 1 = 0 \Leftrightarrow z = \frac{-1 \pm i\sqrt{4\times(-3)\times(-1)-1^2}}{2\times(-3)} \Leftrightarrow z = \frac{-1 \pm i\sqrt{11}}{-6}$

$$\Leftrightarrow z = \frac{1}{6} + \frac{\sqrt{11}}{6}i \ \lor \ z = \frac{1}{6} - \frac{\sqrt{11}}{6}i$$

C.S. $= \left\{\frac{1}{6} + \frac{\sqrt{11}}{6}i, \frac{1}{6} - \frac{\sqrt{11}}{6}i\right\}$

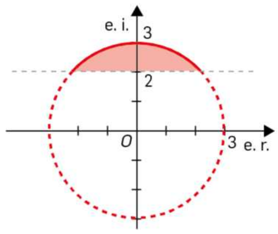
10.10. $3z^2 + z + 1 = 0 \Leftrightarrow z = \frac{-1 \pm i\sqrt{4\times3\times1-1^2}}{2\times3} \Leftrightarrow z = \frac{-1 \pm i\sqrt{11}}{6}$

$$\Leftrightarrow z = -\frac{1}{6} + \frac{\sqrt{11}}{6}i \ \lor \ z = -\frac{1}{6} - \frac{\sqrt{11}}{6}i$$

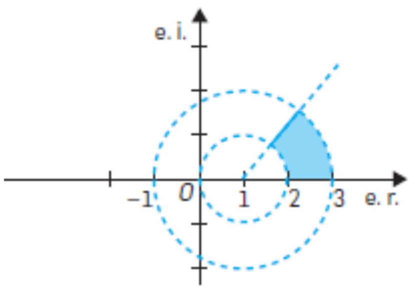
C.S. $= \left\{-\frac{1}{6} + \frac{\sqrt{11}}{6}i, -\frac{1}{6} - \frac{\sqrt{11}}{6}i\right\}$

11.

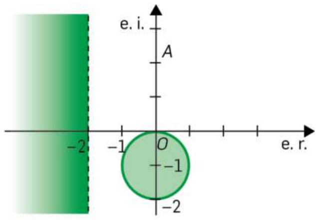
11.1. $|z| \leq 3 \ \land \mathrm{Im}(z) \geq 2$



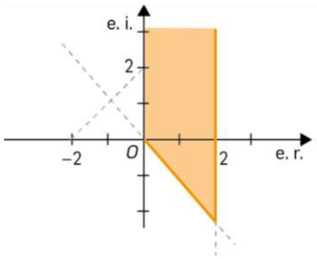
11.2. $1 < |z-1| < 2 \ \land \ 0 \leq \mathrm{Arg}\,(z-1) \leq \frac{\pi}{4}$



11.3. $|z+i| \leq 1 \;\vee\; \text{Re}(z)+1 < -1 \Leftrightarrow |z-(-i)| \leq 1 \;\vee\; \text{Re}(z) < -2$



11.4. $|z-2i| \leq |z+2| \;\wedge\; 0 \leq \text{Re}(z) \leq 2$



12.

12.1. $|z-1-2i| \leq 3 \;\wedge\; 0 \leq \text{Arg}\,(z-1-2i) \leq \frac{\pi}{4}$

12.2. $\text{Im}(z) \leq 2 \;\wedge\; \frac{\pi}{3} \leq \text{Arg}\,(z) \leq \pi - \frac{\pi}{6} \Leftrightarrow \text{Im}(z) \leq 2 \;\wedge\; \frac{\pi}{3} \leq \text{Arg}\,(z) \leq \frac{5\pi}{6}$

13.

13.1. Seja $z = 1 - i$.

- $|z| = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$
- Seja θ um argumento de z. Como o afixo de z está no 4º quadrante, concluímos que θ pertence ao 4º quadrante.

  $\text{tg}\,\theta = \frac{-1}{1} = -1 \;\wedge\; \theta \in$ 4º Q

  Então, podemos concluir que $\theta = -\frac{\pi}{4}$, por exemplo.

Assim, $z = \sqrt{2}e^{i\left(-\frac{\pi}{4}\right)}$.

$z \times w = \sqrt{2}e^{i\left(-\frac{\pi}{4}\right)} \times \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}} = 2e^{i\left(-\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4}\right)} = 2e^{i0} = 2$

$|z|^2 = \left(\sqrt{2}\right)^2 = 2$

Logo, $z \times w = |z|^2$.

13.2. $\left(\frac{w}{z}\right)^n = \left(\frac{\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2}e^{i\left(-\frac{\pi}{4}\right)}}\right)^n = \left(e^{i\left(\frac{2\pi}{4}\right)}\right)^n =$

$= e^{i\left(\frac{n\pi}{2}\right)} =$

$= \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) + i\,\text{sen}\left(\frac{n\pi}{2}\right)$

14.

14.1. $z_1 = \frac{-1+i}{4i^8} = \frac{-1+i}{4\times 1} = -\frac{1}{4} + \frac{1}{4}i$

- $|z_1| = \sqrt{\left(-\frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{1}{4}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{16} + \frac{1}{16}} = \sqrt{\frac{2}{16}} = \frac{\sqrt{2}}{4}$
- Seja θ_1 um argumento de z_1. Como o afixo de z_1 está no 2º quadrante, concluímos que θ_1 pertence ao 2º quadrante.

  $\text{tg}\,\theta_1 = \frac{\frac{1}{4}}{-\frac{1}{4}} = -1 \;\wedge\; \theta_1 \in 2º\text{ Q}$

  Então, podemos concluir que $\theta_1 = \frac{3\pi}{4}$, por exemplo.

Assim, $z_1 = \frac{\sqrt{2}}{4} e^{i\frac{3\pi}{4}}$.

$z_2 = -3 + i^{1000} = -3 + i^0 = -3 + 1 = -2$

Cálculo auxiliar	
1000	4
0	250

- $|z_2| = 2$
- um argumento de z_2 é, por exemplo, π.

Assim, $z_2 = 2e^{i\pi}$.

Seja $z_3 = z_1 \times z_2 = \frac{\sqrt{2}}{4} e^{i\frac{3\pi}{4}} \times 2e^{i\pi} = \frac{\sqrt{2}}{2} e^{i\frac{7\pi}{4}}$.

14.2. $az^4 + bz^{-2} = 8i$

Se z_1 é solução da equação, temos:

$$a\left(\frac{\sqrt{2}}{4} e^{i\frac{3\pi}{4}}\right)^4 + b\left(\frac{\sqrt{2}}{4} e^{i\frac{3\pi}{4}}\right)^{-2} = 8i$$

$$\Leftrightarrow a\left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right)^4 e^{i3\pi} + b\left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right)^{-2} e^{i\left(-\frac{3\pi}{2}\right)} = 8i$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{64}a[\cos(3\pi) + i\text{sen}\,(3\pi)] + 8b\left[\cos\left(-\frac{3\pi}{2}\right) + i\text{sen}\,\left(-\frac{3\pi}{2}\right)\right] = 8i$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{64}a(-1+0) + 8b(0+i) = 8i$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{64}a + 8bi = 8i$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{1}{64}a = 0 \\ 8b = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 1 \end{cases}$$

15.

15.1. $$\left[\frac{4e^{i\frac{\pi}{6}} + 8e^{i\frac{5\pi}{6}}}{\sqrt{24}[(2+i)^3 - 3 - 10i]}\right]^{12} = \left[\frac{4\left[\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + i\text{sen}\,\left(\frac{\pi}{6}\right)\right] + 8\left[\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) + i\text{sen}\,\left(\frac{5\pi}{6}\right)\right]}{2\sqrt{6}[(2+i)(4+4i+i^2) - 3 - 10i]}\right]^{12} = \left[\frac{4\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) + 8\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)}{2\sqrt{6}[(2+i)(3+4i) - 3 - 10i]}\right]^{12} =$$

$$= \left[\frac{2\sqrt{3} + 2i - 4\sqrt{3} + 4i}{2\sqrt{6}(6 + 8i + 3i + 4i^2 - 3 - 10i)}\right]^{12} =$$

$$= \left[\frac{-2\sqrt{3} + 6i}{2\sqrt{6}(6 + 11i - 4 - 3 - 10i)}\right]^{12} =$$

$$= \left[\frac{2(-\sqrt{3}+3i)}{2\sqrt{6}(-1+i)}\right]^{12} =$$

$$= \left[\frac{-\sqrt{3}+3i}{\sqrt{6}(-1+i)}\right]^{12} =$$

$$= \left[\frac{-\sqrt{3}+3i}{-\sqrt{6}+\sqrt{6}i}\right]^{12}$$

Seja $z_1 = -\sqrt{3} + 3i$.

- $|z_1| = \sqrt{\left(-\sqrt{3}\right)^2 + 3^2} = \sqrt{3+9} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$
- Seja θ_1 um argumento de z_1. Como o afixo de z_1 está no 2º quadrante, concluímos que θ_1 pertence ao 2º quadrante.

  $\text{tg}\ \theta_1 = \frac{3}{-\sqrt{3}} = -\frac{3\sqrt{3}}{3} = -\sqrt{3} \ \wedge \ \theta_1 \in 2º\ Q$

  Então, $\theta_1 = \frac{2\pi}{3}$, por exemplo.

Assim, $z_1 = 2\sqrt{3}e^{i\frac{2\pi}{3}}$.

Seja $z_2 = -\sqrt{6} + \sqrt{6}i$.

- $|z_2| = \sqrt{\left(-\sqrt{6}\right)^2 + \left(\sqrt{6}\right)^2} = \sqrt{6+6} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$
- Seja θ_2 um argumento de z_2. Como o afixo de z_2 está no 2º quadrante, concluímos que θ_2 pertence ao 2º quadrante.

  $\text{tg}\ \theta_2 = \frac{\sqrt{6}}{-\sqrt{6}} = -1 \ \wedge \ \theta_2 \in 2º\ Q$

  Então, $\theta_2 = \frac{3\pi}{4}$, por exemplo.

Assim, $z_2 = 2\sqrt{3}e^{i\frac{3\pi}{4}}$.

Logo:

$$\left[\frac{-\sqrt{3}+3i}{-\sqrt{6}+\sqrt{6}i}\right]^{12} = \left[\frac{2\sqrt{3}e^{i\frac{2\pi}{3}}}{2\sqrt{3}e^{i\frac{3\pi}{4}}}\right]^{12} = \left[e^{i\left(\frac{2\pi}{3}-\frac{3\pi}{4}\right)}\right]^{12} =$$

$$= \left[e^{i\left(-\frac{\pi}{12}\right)}\right]^{12} =$$

$$= e^{i(-\pi)} =$$

$$= -1$$

15.2. $$\frac{\overline{18\sqrt{2}e^{i\left(-\frac{22\pi}{24}\right)}}}{(1+i)^3+4e^{i(-7\pi)}+4e^{i\left(-\frac{3\pi}{2}\right)}} = \frac{18\sqrt{2}e^{i\left(\frac{22\pi}{24}\right)}}{(1+2i+i^2)(1+i)+4(-1)+4\times i} = \frac{18\sqrt{2}e^{i\left(\frac{11\pi}{12}\right)}}{2i(1+i)-4+4i} =$$

$$= \frac{18\sqrt{2}e^{i\left(\frac{11\pi}{12}\right)}}{2i+2i^2-4+4i} =$$

$$= \frac{18\sqrt{2}e^{i\left(\frac{11\pi}{12}\right)}}{-6+6i}$$

Seja $z = -6 + 6i$.

- $|z| = \sqrt{(-6)^2 + 6^2} = \sqrt{36 + 36} = \sqrt{72} = 6\sqrt{2}$
- Seja θ um argumento de z. Como o afixo de z está no 2º quadrante, concluímos que θ pertence ao 2º quadrante.

  $\text{tg}\,\theta = \frac{6}{-6} = -1 \;\;\wedge\;\; \theta \in 2º\,Q$

  Então, podemos concluir que $\theta = \frac{3\pi}{4}$, por exemplo.

Assim, $z = 6\sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}$.

Logo:

$$\frac{18\sqrt{2}e^{i\left(\frac{11\pi}{12}\right)}}{-6+6i} = \frac{18\sqrt{2}e^{i\left(\frac{11\pi}{12}\right)}}{6\sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}} = 3e^{i\left(\frac{11\pi}{12}-\frac{3\pi}{4}\right)} =$$

$$= 3e^{i\left(\frac{2\pi}{12}\right)} =$$

$$= 3e^{i\frac{\pi}{6}} =$$

$$= 3\left[\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + i\text{sen}\left(\frac{\pi}{6}\right)\right] =$$

$$= 3\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) =$$

$$= \frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i$$

15.3. $$\left[\frac{-2e^{i\left(-\frac{7\pi}{33}\right)}\times e^{i\left(-\frac{4\pi}{33}\right)}+\sqrt{2}e^{i\frac{25\pi}{3}}\times\overline{\sqrt{8}e^{i7\pi}}}{\sqrt{12}e^{i\frac{\pi}{8}}}\right]^{12} = \left[\frac{-2e^{i\left(-\frac{11\pi}{33}\right)}+\sqrt{2}e^{i\frac{25\pi}{3}}\times\sqrt{8}e^{i(-7\pi)}}{\sqrt{12}e^{i\frac{\pi}{8}}}\right]^{12} =$$

$$= \left[\frac{-2e^{i\left(-\frac{\pi}{3}\right)}+4e^{i\left(\frac{25\pi}{3}-7\pi\right)}}{\sqrt{12}e^{i\frac{\pi}{8}}}\right]^{12} =$$

$$= \left[\frac{-2e^{i\left(-\frac{\pi}{3}\right)}+4e^{i\frac{4\pi}{3}}}{\sqrt{12}e^{i\frac{\pi}{8}}}\right]^{12} =$$

$$= \left[\frac{-2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+i\text{sen}\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)+4\left(\cos\left(\frac{4\pi}{3}\right)+i\text{sen}\left(\frac{4\pi}{3}\right)\right)}{\sqrt{12}e^{i\frac{\pi}{8}}}\right]^{12} =$$

$$= \left[\frac{-2\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)+4\left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)}{\sqrt{12}e^{i\frac{\pi}{8}}}\right]^{12} =$$

$$= \left[\frac{-1+\sqrt{3}i-2-2\sqrt{3}i}{\sqrt{12}e^{i\frac{\pi}{8}}}\right]^{12} =$$

$$= \left(\frac{-3-\sqrt{3}i}{\sqrt{12}e^{i\frac{\pi}{8}}}\right)^{12}$$

Seja $z = -3 - \sqrt{3}i$.

- $|z| = \sqrt{(-3)^2 + \left(-\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{9+3} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$

- Seja θ um argumento de z. Como o afixo de z está no 3º quadrante, concluímos que θ pertence ao 3º quadrante.

  $\operatorname{tg}\theta = \frac{-\sqrt{3}}{-3} = \frac{\sqrt{3}}{3} \quad \wedge \quad \theta \in 3^{\text{º}}\,\text{Q}$

  Então, $\theta = \frac{7\pi}{6}$.

Assim, $z = 2\sqrt{3}e^{i\frac{7\pi}{6}}$.

Logo:

$$\left(\frac{-3-\sqrt{3}i}{\sqrt{12}e^{i\frac{\pi}{8}}}\right)^{12} = \left(\frac{2\sqrt{3}e^{i\frac{7\pi}{6}}}{2\sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{8}}}\right)^{12} = \left(e^{i\left(\frac{7\pi}{6}-\frac{\pi}{8}\right)}\right)^{12} =$$

$$= \left(e^{i\frac{25\pi}{24}}\right)^{12} =$$

$$= e^{i\frac{25\pi}{2}} =$$

$$= e^{i\frac{\pi}{2}} =$$

$$= i$$

16.

16.1. $\frac{\bar{z}+i}{\bar{z}-2} = \frac{x-yi+i}{x-yi-2} = \frac{x+(1-y)i}{(x-2)-yi} =$

$$= \frac{[x+(1-y)i][(x-2)+yi]}{[(x-2)-yi][(x-2)+yi]} =$$

$$= \frac{x(x-2)+xyi+(x-2)(1-y)i+y(1-y)i^2}{(x-2)^2-(yi)^2} =$$

$$= \frac{x(x-2)+xyi+(x-2)(1-y)i-y(1-y)}{(x-2)^2+y^2} =$$

$$= \frac{x(x-2)-y(1-y)+xyi+(x-2)(1-y)i}{(x-2)^2+y^2} =$$

$$= \frac{x(x-2)-y(1-y)}{(x-2)^2+y^2} + \frac{xy+(x-2)(1-y)}{(x-2)^2+y^2}i$$

Se $\frac{\bar{z}+i}{\bar{z}-2}$ é um número real, então $\operatorname{Im}\left(\frac{\bar{z}+i}{\bar{z}-2}\right) = 0$. Assim:

$$\frac{xy+(x-2)(1-y)}{(x-2)^2+y^2} = 0 \ \wedge \ (x-2)^2+y^2 \neq 0 \Leftrightarrow xy+(x-2)(1-y) = 0 \ \wedge \ (x-2)^2+y^2 \neq 0$$

$$\Leftrightarrow xy + x - xy - 2 + 2y = 0$$

$$\Leftrightarrow 2y = -x + 2$$

$$\Leftrightarrow y = -\frac{1}{2}x + 1$$

16.2. Pela alínea anterior, sabemos que $\frac{\bar{z}+i}{\bar{z}-2} = \frac{x(x-2)-y(1-y)}{(x-2)^2+y^2} + \frac{xy+(x-2)(1-y)}{(x-2)^2+y^2}i$.

Se $\frac{\bar{z}+i}{\bar{z}-2}$ é um imaginário puro, então $\operatorname{Re}\left(\frac{\bar{z}+i}{\bar{z}-2}\right) = 0 \ \wedge \ \operatorname{Im}\left(\frac{\bar{z}+i}{\bar{z}-2}\right) \neq 0$. Assim:

$$\frac{x(x-2)-y(1-y)}{(x-2)^2+y^2} = 0 \Leftrightarrow x(x-2)-y(1-y) = 0 \ \wedge \ (x-2)^2+y^2 \neq 0$$

$$\Leftrightarrow x^2-2x-y+y^2 = 0 \ \wedge \ (x-2)^2+y^2 \neq 0$$

$$\Leftrightarrow (x^2 - 2x + 1) + \left(y^2 - y + \frac{1}{4}\right) = 1 + \frac{1}{4}$$

$$\Leftrightarrow (x-1)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{5}{4}$$

16.3. $5z^2 + 3z\bar{z} + 20i = 5(x+yi)^2 + 3(x+yi)(x-yi) + 20i =$

$= 5(x^2 + 2xyi + (yi)^2) + 3(x^2 - (yi)^2) + 20i =$

$= 5(x^2 + 2xyi - y^2) + 3(x^2 + y^2) + 20i =$

$= 5x^2 + 10xyi - 5y^2 + 3x^2 + 3y^2 + 20i =$

$= 8x^2 - 2y^2 + (10xy + 20)i$

Se $5z^2 + 3z\bar{z} + 20i$ é um número real, então $\mathrm{Im}(5z^2 + 3z\bar{z} + 20i) = 0$, isto é,

$10xy + 20 = 0 \Leftrightarrow xy = -2$.

16.4. Pela alínea anterior sabemos que $5z^2 + 3z\bar{z} + 20i = 8x^2 - 2y^2 + (10xy + 20)i$.

Se $5z^2 + 3z\bar{z} + 20i$ é um imaginário puro, então $\mathrm{Re}(5z^2 + 3z\bar{z} + 20i) = 0 \ \wedge$

$\mathrm{Im}(\ 5z^2 + 3z\bar{z} + 20i) \neq 0$. Assim:

$8x^2 - 2y^2 = 0 \Leftrightarrow 2y^2 = 8x^2 \Leftrightarrow y^2 = 4x^2$

$\Leftrightarrow y = \pm\sqrt{4x^2}$

$\Leftrightarrow y = 2x \ \vee \Leftrightarrow y = -2x$

17. $\frac{w}{z} = \frac{e^{i3\alpha}}{e^{i\alpha}} = e^{i2\alpha} = \cos(2\alpha) + i\,\mathrm{sen}(2\alpha)$

Como $\mathrm{Re}\left(\frac{w}{z}\right) = -\frac{1}{9}$, então:

$\cos(2\alpha) = -\frac{1}{9} \Leftrightarrow \cos^2\alpha - \mathrm{sen}^2\alpha = -\frac{1}{9}$

$\Leftrightarrow \cos^2\alpha - (1 - \cos^2\alpha) = -\frac{1}{9}$

$\Leftrightarrow 2\cos^2\alpha - 1 = -\frac{1}{9}$

$\Leftrightarrow 2\cos^2\alpha = \frac{8}{9}$

$\Leftrightarrow \cos^2\alpha = \frac{4}{9}$

$\Leftrightarrow \cos\alpha = \pm\frac{2}{3}$

Logo, $\cos\alpha = -\frac{2}{3}$, pois $\alpha \in 3^{\text{o}}$ Q.

Como $\mathrm{sen}^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha$, temos:

$\mathrm{sen}^2\alpha = 1 - \frac{4}{9} \Leftrightarrow \mathrm{sen}^2\alpha = \frac{5}{9} \Leftrightarrow \mathrm{sen}\,\alpha = \pm\frac{\sqrt{5}}{3}$

Logo, $\mathrm{sen}\,\alpha = -\frac{\sqrt{5}}{3}$, pois $\alpha \in 3^{\text{o}}$ Q.

Assim, $z = e^{i\alpha} = \cos\alpha + i\,\mathrm{sen}\,\alpha = -\frac{2}{3} - \frac{\sqrt{5}}{3}i$.

18.

18.1. Seja $z_1 = -3 + \sqrt{3}i$.

- $|z_1| = \sqrt{(-3)^2 + \left(\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{9+3} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$
- Seja θ_1 um argumento de z_1. Como o afixo de z_1 está no 2º quadrante, concluímos que θ_1 pertence ao 2º quadrante.

  $\operatorname{tg}\theta_1 = \frac{\sqrt{3}}{-3} = -\frac{\sqrt{3}}{3} \;\wedge\; \theta_1 \in 2^{\text{o}}\text{ Q}$

  Então, $\theta_1 = \frac{5\pi}{6}$, por exemplo.

Assim, $z_1 = 2\sqrt{3}e^{i\frac{5\pi}{6}}$.

Seja $z_2 = -2 - 2\sqrt{3}i$.

- $|z_2| = \sqrt{(-2)^2 + \left(-2\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{4+12} = \sqrt{16} = 4$
- Seja θ_2 um argumento de z_2. Como o afixo de z_2 está no 3º quadrante, concluímos que θ_2 pertence ao 3º quadrante.

  $\operatorname{tg}\theta_2 = \frac{-2\sqrt{3}}{-2} = \sqrt{3} \;\wedge\; \theta_2 \in 3^{\text{o}}\text{ Q}$

  Então, $\theta_2 = \frac{4\pi}{3}$ por exemplo.

Assim, $z_2 = 4e^{i\frac{4\pi}{3}}$.

Logo:

$$\left(\frac{-3+\sqrt{3}i}{-2-2\sqrt{3}i}\right)^n = \left(\frac{2\sqrt{3}e^{i\frac{5\pi}{6}}}{4e^{i\frac{4\pi}{3}}}\right)^n = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}e^{i\left(\frac{5\pi}{6}-\frac{4\pi}{3}\right)}\right)^n =$$

$$= \left(\frac{\sqrt{3}}{2}e^{i\left(-\frac{3\pi}{6}\right)}\right)^n =$$

$$= \left(\frac{\sqrt{3}}{2}e^{i\left(-\frac{\pi}{2}\right)}\right)^n =$$

$$= \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n e^{i\left(-\frac{n\pi}{2}\right)}$$

Para que $z = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n e^{i\left(-\frac{n\pi}{2}\right)}$ seja um imaginário puro, um seu argumento deve ser da forma $\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Assim:

$$-\frac{n\pi}{2} = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow n\pi = -\pi - 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow n = -1 - 2k, k \in \mathbb{Z}$$

- Se $k = 0, n = -1$ e $-1 \notin \mathbb{N}$.
- Se $k = 1, n = -3$ e $-3 \notin \mathbb{N}$.
- Se $k = -1, n = 1$.

Logo, $n = 1$.

18.2. $\left(3e^{i\frac{\pi}{4}} \times \overline{2e^{i\frac{\pi}{8}}}\right)^n = \left(3e^{i\frac{\pi}{4}} \times 2e^{i\left(-\frac{\pi}{8}\right)}\right)^n = \left(6e^{i\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{8}\right)}\right)^n =$

$= \left(6e^{i\frac{\pi}{8}}\right)^n =$

$= 6^n e^{i\frac{n\pi}{8}}$

Para que $z = 6^n e^{i\frac{n\pi}{8}}$ seja um número real, um seu argumento deve ser da forma $k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Assim:

$-\frac{n\pi}{8} = k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow n\pi = -8k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow n = -8k, k \in \mathbb{Z}$

- Se $k = 0, n = 0$ e $0 \notin \mathbb{N}$.
- Se $k = 1, n = -8$ e $-8 \notin \mathbb{N}$.
- Se $k = -1, n = 8$.

Logo, $n = 8$.

19. Seja $z = |z|e^{i\theta}$ e $-2i = 2e^{i\left(\frac{3\pi}{2}\right)}$

$-2iz = 2e^{i\left(\frac{3\pi}{2}\right)} \times |z|e^{i\theta} =$

$= 2|z|e^{i\left(\frac{3\pi}{2}+\theta\right)}$

Para que o afixo deste número complexo pertença ao 3º quadrante e à bissetriz dos quadrantes ímpares, um seu argumento tem de ser da forma $\frac{5\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

$\frac{3\pi}{2} + \theta = \frac{5\pi}{4} \Leftrightarrow \theta = \frac{5\pi}{4} - \frac{3\pi}{2} \Leftrightarrow \theta = -\frac{\pi}{4}$, por exemplo.

20. Seja $z_1 = -1 + \sqrt{3}i$.

- $|z_1| = \sqrt{(-1)^2 + \left(\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{1+3} = \sqrt{4} = 2$
- Seja θ_1 um argumento de z_1. Como o afixo de z_1 está no 2º quadrante, concluímos que θ_1 pertence ao 2º quadrante.

  $\text{tg}\, \theta_1 = \frac{\sqrt{3}}{-1} = -\sqrt{3} \ \wedge \ \theta_1 \in 2^{\text{º}}\, \text{Q}$

  Então, $\theta_1 = \frac{2\pi}{3}$, por exemplo.

Assim, $z_1 = 2e^{i\frac{2\pi}{3}}$.

$z = \left(3e^{i\alpha}\right)^4 \times \left(-1+\sqrt{3}i\right) = 3^4 e^{i4\alpha} \times 2e^{i\frac{2\pi}{3}} =$

$= 162e^{i\left(4\alpha+\frac{2\pi}{3}\right)}$

Como z é um imaginário puro, um seu argumento é da forma $\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

$4\alpha + \frac{2\pi}{3} = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$, com $\frac{\pi}{4} < \alpha < \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow 4\alpha = \frac{\pi}{2} - \frac{2\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

$$\Leftrightarrow 4\alpha = -\frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow \alpha = -\frac{\pi}{24} + k\frac{\pi}{4}, k \in \mathbb{Z}$$

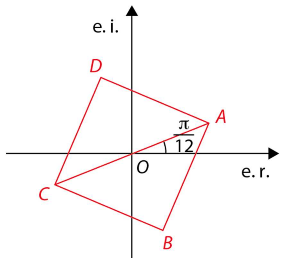
- Se $k = 0, \alpha = -\frac{\pi}{24}$ e $-\frac{\pi}{24} \notin \left]\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right[$.
- Se $k = 1, \alpha = -\frac{\pi}{24} + \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{24} \notin \left]\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right[$.
- Se $k = 2, \alpha = -\frac{\pi}{24} + \frac{2\pi}{4} = \frac{11\pi}{24} \in \left]\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right[$.

Assim, $\alpha = \frac{11\pi}{24}$.

21.

21.1. Sejam A, B, C e D os afixos de $z, -iz, -z$ e iz. Então, $[ABCD]$ é um quadrado. Seja l o quadrado de $[ABCD]$.

Sabemos que $l = \sqrt{36} = 6$.



$|z| = \frac{1}{2}\overline{AC}$

$\overline{AC}^2 = 6^2 + 6^2 \Leftrightarrow \overline{AC} = 6\sqrt{2}$

Assim, $|z| = \frac{1}{2} \times 6\sqrt{2} = 3\sqrt{2}$.

Como $\text{Arg}(z) = \frac{\pi}{12}$, então $z = 3\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{12}}$.

21.2. $\overrightarrow{OD} \cdot \overrightarrow{OE} = \|\overrightarrow{OD}\| \times \|\overrightarrow{OE}\| \times \cos\left(\widehat{\overrightarrow{OD}, \overrightarrow{OE}}\right)$

$$-iz = e^{i\frac{3\pi}{2}} \times 3\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{12}} = 3\sqrt{2}e^{i\left(\frac{3\pi}{2}+\frac{\pi}{12}\right)} =$$
$$= 3\sqrt{2}e^{i\frac{19\pi}{12}}$$

Assim:

$$\overline{-iz} = \overline{3\sqrt{2}e^{i\frac{19\pi}{12}}} = 3\sqrt{2}e^{i\left(-\frac{19\pi}{12}\right)} =$$
$$= 3\sqrt{2}e^{i\left(\frac{5\pi}{12}\right)}$$

Sabemos que D é o afixo de iz e $\text{Arg}(iz) = \frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{2} = \frac{7\pi}{12}$.

Assim, sendo α o ângulo formado por $\overrightarrow{OD}$ e $\overrightarrow{OE}$, $\alpha = \frac{7\pi}{12} - \frac{5\pi}{12} = \frac{\pi}{6}$.

Logo:

$$\overrightarrow{OD} \cdot \overrightarrow{OE} = \|\overrightarrow{OD}\| \times \|\overrightarrow{OE}\| \times \cos\left(\widehat{\overrightarrow{OD}, \overrightarrow{OE}}\right) = |iz| \times |\overline{-iz}| \times \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) =$$
$$= 3\sqrt{2} \times 3\sqrt{2} \times \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) =$$
$$= 18 \times \frac{\sqrt{3}}{2} =$$
$$= 9\sqrt{3}$$

22. Seja $z = re^{i\theta}$.

Sabemos que o comprimento do arco é dado por αr, sendo α o ângulo ao centro correspondente e r o raio da circunferência.

Assim, temos $\frac{2\pi}{3} = \frac{\pi}{3} r \Leftrightarrow r = 2$, ou seja, $|z| = 2$.

$\text{Arg}(z) = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} \times \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6} = \frac{2\pi}{6} = \frac{\pi}{3}$

Logo:

$$z = 2e^{i\frac{\pi}{3}} = 2\left[\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\,\text{sen}\left(\frac{\pi}{3}\right)\right] =$$

$$= 2\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i\right) =$$

$$= 1 + \sqrt{3}i$$

Então, $\bar{z} = 1 - \sqrt{3}i$.

23.

23.1. $z_1 = \frac{i^1+i^2+i^3+i^4+i^5+i^6+i^7-\sqrt{3}i}{i^8} = \frac{i-1-i+1+i-1-i-\sqrt{3}i}{1} =$

$$= -1 - \sqrt{3}i$$

- $|z_1| = \sqrt{(-1)^2 + \left(-\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{1+3} = \sqrt{4} = 2$
- Seja θ_1 um argumento de z_1. Como o afixo de z_1 está no 3º quadrante, concluímos que θ_1 pertence ao 3º quadrante.

  $\text{tg}\,\theta_1 = \frac{-\sqrt{3}}{-1} = \sqrt{3} \ \wedge \ \theta_1 \in 3º\text{ Q}$

  Então, $\theta_1 = \frac{4\pi}{3}$, por exemplo.

Assim, $z_1 = 2e^{i\frac{4\pi}{3}}$.

$z_2 = 1 - \sqrt{3}i$

- $|z_2| = \sqrt{1^2 + \left(-\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{1+3} = \sqrt{4} = 2$
- Seja θ_2 um argumento de z_2. Como o afixo de z_2 está no 4º quadrante, concluímos que θ_2 pertence ao 4º quadrante.

  $\text{tg}\,\theta_2 = \frac{-\sqrt{3}}{1} = -\sqrt{3} \ \wedge \ \theta_2 \in 4º\text{ Q}$

  Então, $\theta_2 = \frac{5\pi}{3}$, por exemplo.

Assim, $z_2 = 2e^{i\frac{5\pi}{3}}$.

23.2. $\frac{5\pi}{3} - \frac{4\pi}{3} = \frac{\pi}{3}$

Os argumentos de duas raízes consecutivas índice n de um número complexo encontram-se em progressão arimética de razão $\frac{2\pi}{n}$. Assim:

$\frac{2\pi}{n} = \frac{\pi}{3} \Leftrightarrow n = \frac{6\pi}{\pi} = 6$

$z = \left(2e^{i\frac{4\pi}{3}}\right)^6 = 2^6 e^{i\frac{24\pi}{3}} = 64e^{i8\pi} = 64$

24.

24.1. Utilizando a regra de Ruffini, temos:

	1	$-2\sqrt{3}-2i$	$4+4\sqrt{3}i$	$-8i$
$2i$		$2i$	$-4\sqrt{3}i$	$8i$
	1	$-2\sqrt{3}$	4	0

Assim:

$z^3 - 2(\sqrt{3}+i)z^2 + 4(1+\sqrt{3}i)z - 8i = (z-2i)(z^2 - 2\sqrt{3}z + 4)$

24.2. $P(z) = 0 \Leftrightarrow (z-2i)(z^2-2\sqrt{3}z+4) = 0 \Leftrightarrow z - 2i = 0 \ \vee \ z^2 - 2\sqrt{3}z + 4 = 0$

$\Leftrightarrow z = 2i \ \vee \ z = \frac{2\sqrt{3} \pm i\sqrt{4\times1\times4-(2\sqrt{3})^2}}{2\times1}$

$\Leftrightarrow z = 2i \ \vee \ z = \frac{2\sqrt{3}\pm i\sqrt{16-12}}{2}$

$\Leftrightarrow z = 2i \ \vee \ z = \frac{2\sqrt{3}\pm i\sqrt{4}}{2}$

$\Leftrightarrow z = 2i \ \vee \ z = \frac{2\sqrt{3}\pm 2i}{2}$

$\Leftrightarrow z = 2i \ \vee \ z = \sqrt{3} - i \ \vee \ z = \sqrt{3} + i$

Seja $z_1 = 2i$.

- $|z_1| = 2$
- Um argumento de z_1 é, por exemplo, $\frac{\pi}{2}$.

Assim, $z_1 = 2e^{i\frac{\pi}{2}}$.

Seja $z_2 = \sqrt{3} - i$.

- $|z_2| = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1^2} = \sqrt{3+1} = \sqrt{4} = 2$
- Seja θ_2 um argumento de z_2. Como o afixo de z_2 está no 4º quadrante, concluímos que θ_2 pertence ao 4º quadrante.

  $\text{tg}\,\theta_2 = \frac{-1}{\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3} \ \wedge \ \theta_2 \in 4º\text{ Q}$

  Então, $\theta_2 = -\frac{\pi}{6}$, por exemplo.

Assim, $z_2 = 2e^{i\left(-\frac{\pi}{6}\right)}$.

Seja $z_3 = \sqrt{3} + i$

- $|z_3| = \sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2 + 1^2} = \sqrt{3+1} = \sqrt{4} = 2$
- Seja θ_3 um argumento de z_3. Como o afixo de z_3 está no 1º quadrante, concluímos que θ_3 pertence ao 1º quadrante.

  $\operatorname{tg} \theta_3 = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \ \wedge \ \theta_3 \in 1º\text{ Q}$

  Então, $\theta_3 = \frac{\pi}{6}$, por exemplo.

Assim, $z_3 = 2e^{i\frac{\pi}{6}}$.

Logo, C.S. $= \left\{2e^{i\frac{\pi}{2}}, 2e^{i\frac{\pi}{6}}, 2e^{i\left(-\frac{\pi}{6}\right)}\right\}$.

25. $z = \frac{1+\mu i}{1-\mu i}, \mu \in \mathbb{R}$

Seja $w = 1 + \mu i = |w|e^{i\theta}$.

Então, $\frac{w}{\overline{w}} = \frac{|w|e^{i\theta}}{|w|e^{i(-\theta)}} = e^{i2\theta}$.

Logo, $|z| = 1$.

26.

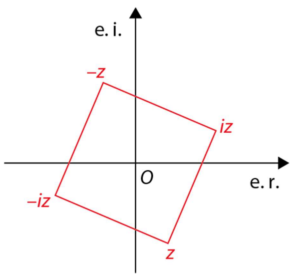
26.1. As raízes de ordem quatro de w são $z, -iz, -z$ e iz, pois sabemos que os afixos das 4 raízes quartas de um número complexo são vértices de um quadrado centrado na origem.

Assim, como $z = 2 - 5i$, temos:

$-iz = -i(2-5i) = -2i + 5i^2 = -5 - 2i$

$-z = -(2-5i) = -2 + 5i$

$iz = i(2-5i) = 2i - 5i^2 = 5 + 2i$



26.2. $w = z^4 \Leftrightarrow w = (2-5i)^4 \Leftrightarrow w = [(2-5i)^2]^2$

$\Leftrightarrow w = (4 - 20i + 25i^2)^2$

$\Leftrightarrow w = (-21 - 20i)^2$

$\Leftrightarrow w = 441 + 840i + 400i^2$

$\Leftrightarrow w = 41 + 840i$

27.

27.1. $\frac{(z_1)^5 + 2z_2 + 4\sqrt{3}}{i^{2018}} = \frac{\left(4e^{i\frac{\pi}{10}}\right)^5 + 2(-2\sqrt{3} - 2i) + 4\sqrt{3}}{i^2} = \frac{4^5 e^{i\frac{\pi}{2}} - 4\sqrt{3} - 4i + 4\sqrt{3}}{-1} =$

$= -(1024i - 4i) =$

$= -1020i$, que é, de facto, um imaginário puro.

Cálculo auxiliar

$$\begin{array}{r|l} 2018 & 4 \\ \hline 2 & 504 \end{array}$$

27.2. $z^4 = z_2 \Leftrightarrow z^4 = -2\sqrt{3} - 2i$

$z_2 = -2\sqrt{3} - 2i$

- $|z_2| = \sqrt{\left(-2\sqrt{3}\right)^2 + (-2)^2} = \sqrt{12+4} = \sqrt{16} = 4$
- Seja θ_1 um argumento de z_2. Como o afixo de z_2 está no 3º quadrante, concluímos que θ_1 pertence ao 3º quadrante.

  $\operatorname{tg} \theta_1 = \frac{-2}{-2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \ \wedge \ \theta_1 \in 3º\ \mathrm{Q}$

  Então, $\theta_1 = \frac{7\pi}{6}$, por exemplo.

Assim, $z_2 = 4e^{i\frac{7\pi}{6}}$.

Pretende-se então determinar as 4 raízes quartas de z_2.

Logo:

$$z^4 = 4e^{i\frac{7\pi}{6}} \Leftrightarrow z = \sqrt[4]{4e^{i\frac{7\pi}{6}}} \Leftrightarrow z = \sqrt[4]{4}e^{i\left(\frac{\frac{7\pi}{6}+2k\pi}{4}\right)}, k \in \{0,1,2,3\}$$

$$\Leftrightarrow z = \sqrt{2}e^{i\left(\frac{\frac{7\pi}{6}+2k\pi}{4}\right)}, k \in \{0,1,2,3\}$$

- Se $k = 0$, $z_0 = \sqrt{2}e^{i\frac{7\pi}{24}}$.
- Se $k = 1$, $z_1 = \sqrt{2}e^{i\frac{19\pi}{24}}$.
- Se $k = 2$, $z_2 = \sqrt{2}e^{i\frac{31\pi}{24}}$.
- Se $k = 3$, $z_3 = \sqrt{2}e^{i\frac{43\pi}{24}}$.

C.S.$= \left\{\sqrt{2}e^{i\frac{7\pi}{24}}, \sqrt{2}e^{i\frac{19\pi}{24}}, \sqrt{2}e^{i\frac{31\pi}{24}}, \sqrt{2}e^{i\frac{43\pi}{24}}\right\}$

27.3. Como se trata de um hexágono regular, a amplitude de cada ângulo ao centro definido pelos vértices do hexágono é $\frac{2\pi}{6} = \frac{\pi}{3}$. Assim, as raízes de ordem n de w são:

$4e^{i\frac{\pi}{10}}$

$4e^{i\left(\frac{\pi}{10}+\frac{\pi}{3}\right)} = 4e^{i\frac{13\pi}{30}}$

$4e^{i\left(\frac{13\pi}{30}+\frac{\pi}{3}\right)} = 4e^{i\frac{23\pi}{30}}$

$4e^{i\left(\frac{23\pi}{30}+\frac{\pi}{3}\right)} = 4e^{i\frac{33\pi}{30}} = 4e^{i\frac{11\pi}{10}}$

$4e^{i\left(\frac{11\pi}{10}+\frac{\pi}{3}\right)} = 4e^{i\frac{43\pi}{30}}$

$4e^{i\left(\frac{43\pi}{30}+\frac{\pi}{3}\right)} = 4e^{i\frac{53\pi}{30}}$

$w = z_1^6 = \left(4e^{i\frac{\pi}{10}}\right)^6 = 4^6 e^{i\frac{6\pi}{10}} = 4096e^{i\frac{3\pi}{5}}$.

28.

28.1. Como os vértices do hexágono são os afixos das raízes de ordem n de z, então $n=6$ e a amplitude de cada ângulo ao centro definido pelos vértices do hexágono é $\frac{2\pi}{6}=\frac{\pi}{3}$.

Assim, as raízes de ordem 6 de z, são:

$z_1=3e^{i\frac{\pi}{4}}$

$z_2=3e^{i\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{3}\right)}=3e^{i\frac{7\pi}{12}}$

$z_3=3e^{i\left(\frac{7\pi}{12}+\frac{\pi}{3}\right)}=3e^{i\frac{11\pi}{12}}$

$z_4=3e^{i\left(\frac{11\pi}{12}+\frac{\pi}{3}\right)}=3e^{i\frac{15\pi}{12}}=3e^{i\frac{5\pi}{4}}$

$z_5=3e^{i\left(\frac{5\pi}{4}+\frac{\pi}{3}\right)}=3e^{i\frac{19\pi}{12}}$

$z_6=3e^{i\left(\frac{19\pi}{12}+\frac{\pi}{3}\right)}=3e^{i\frac{23\pi}{12}}$

28.2. $z=z_1^6=\left(3e^{i\frac{\pi}{4}}\right)^6=3^6e^{i\frac{6\pi}{4}}=$

$=729e^{i\frac{3\pi}{2}}=$

$=729\times(-i)=$

$=-729i$

28.3. $|z|<3\ \wedge\ \frac{7\pi}{12}\leq \operatorname{Arg}(z)\leq\frac{11\pi}{12}$

29. 1º processo

Sabemos que $w=iz=|z|e^{i\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)}$.

Assim, como $\frac{\pi}{2}=\frac{2\pi}{4}$, podemos concluir que $n=4$.

Logo, os pontos *A* e *B* são vértices de um quadrado cuja diagonal tem comprimento igual a $2|z|$.

Então, pelo teorema de Pitágoras, temos:

$\overline{AB}^2=|z|^2+|z|^2 \Leftrightarrow \overline{AB}=\sqrt{2|z|^2}$

$\Leftrightarrow \overline{AB}=|z|\sqrt{2}$

2º processo

$\overline{AB}=|z-w|=|z-iz|=$

$=|z(1-i)|=$

$=|z|\times|1-i|=$

$=|z|\times\sqrt{1^2+(-1)^2}=$

$=\sqrt{2}\times|z|$

30. Os argumentos das raízes índice n de um número complexo encontram-se em progressão aritmética de razão $\frac{2\pi}{n}$. Assim:

$\frac{17\pi}{10}-\frac{\pi}{5}=\frac{2\pi}{n}\times k, k\in\mathbb{Z} \Leftrightarrow \frac{3\pi}{2}=\frac{2\pi k}{n} \Leftrightarrow n=\frac{4k}{3}$

Para que $n\in\mathbb{N}, k=3$ e $n=4$

$k=6$ e $n=8$

Como $n<8$, vem que $n=4$.

$z=\left(\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{5}}\right)^4=4e^{i\frac{4\pi}{5}}$

31.

31.1. $z+\frac{1}{z}+1=0 \Leftrightarrow z^2+1+z=0$

$\Leftrightarrow z^2+z+1=0$

$\Leftrightarrow z=\frac{-1\pm i\sqrt{4\times1\times1-1^2}}{2\times1}$

$\Leftrightarrow z=\frac{-1\pm i\sqrt{3}}{2}$

$\Leftrightarrow z=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i \ \vee \ z=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$

C.S. $=\left\{-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i,-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right\}$

31.2. $z^4-2z^2=15 \Leftrightarrow z^4-2z^2-15=0$

$\Leftrightarrow z^2=\frac{2\pm\sqrt{(-2)^2-4\times1\times(-15)}}{2}$

$\Leftrightarrow z^2=\frac{2\pm\sqrt{4+60}}{2}$

$\Leftrightarrow z^2=\frac{2\pm8}{2}$

$\Leftrightarrow z^2=-3 \ \vee \ z^2=5$

$\Leftrightarrow z=\sqrt{3}i \ \vee \ z=-\sqrt{3}i \ \vee \ z=-\sqrt{5} \ \vee \ z=\sqrt{5}$

C.S. $=\left\{\sqrt{3}i,-\sqrt{3}i,\sqrt{5},-\sqrt{5}\right\}$

31.3. Utilizando a regra de Ruffini, temos:

$$\begin{array}{c|cccc}
 & 1 & -8+i & 17-8i & 17i \\
-i & & -i & 8i & -17i \\
\hline
 & 1 & -8 & 17 & \boxed{0}
\end{array}$$

Assim:

$z^3+(-8+i)z^2+(17-8i)z+17i=(z+i)(z^2-8z+17)$

Logo:

$z^3+(-8+i)z^2+(17-8i)z+17i=0 \Leftrightarrow (z+i)(z^2-8z+17)=0$

$$\Leftrightarrow z+i=0 \;\vee\; z^2-8z+17=0$$

$$\Leftrightarrow z=-i \;\vee\; z=\frac{8\pm i\sqrt{4\times1\times17-(-8)^2}}{2}$$

$$\Leftrightarrow z=-i \;\vee\; z=\frac{8\pm i\sqrt{68-64}}{2}$$

$$\Leftrightarrow z=-i \;\vee\; z=\frac{8\pm i\sqrt{4}}{2}$$

$$\Leftrightarrow z=-i \;\vee\; z=4+i \;\vee\; z=4-2i$$

C.S. $=\{4+i, 4-i, -i\}$

31.4. $z^2-4\bar{z}-5=0 \Leftrightarrow (x+yi)^2-4(x-yi)-5=0$

$$\Leftrightarrow x^2+2xyi+(yi)^2-4x+4yi-5=0$$

$$\Leftrightarrow x^2-y^2-4x-5+2xyi+4yi=0$$

$$\Leftrightarrow x^2-y^2-4x-5+(2xy+4y)i=0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2-y^2-4x-5=0 \\ 2xy+4y=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \{2y(x+2)=0$$

$$\Leftrightarrow \{2y=0 \;\vee\; \{x+2=0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2-4x-5=0 \\ y=0 \end{cases} \vee \begin{cases} 4-y^2+8-5=0 \\ x=-2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=-1 \\ y=0 \end{cases} \vee \begin{cases} x=5 \\ y=0 \end{cases} \vee \begin{cases} y^2=7 \\ x=-2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=-1 \\ y=0 \end{cases} \vee \begin{cases} x=5 \\ y=0 \end{cases} \vee \begin{cases} y=\pm\sqrt{7} \\ x=-2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=-1 \\ y=0 \end{cases} \vee \begin{cases} x=5 \\ y=0 \end{cases} \vee \begin{cases} y=\sqrt{7} \\ x=-2 \end{cases} \vee \begin{cases} y=-\sqrt{7} \\ x=-2 \end{cases}$$

Cálculo auxiliar

$$x^2-4x-5=0$$

$$\Leftrightarrow x=\frac{4\pm\sqrt{(-4)^2-4\times1\times(-5)}}{2}$$

$$\Leftrightarrow x=\frac{4\pm\sqrt{16+20}}{2}$$

$$\Leftrightarrow x=\frac{4\pm\sqrt{36}}{2}$$

$$\Leftrightarrow x=\frac{4\pm6}{2}$$

$$\Leftrightarrow x=-1 \;\vee\; x=5$$

Assim:

$z=-1 \;\vee\; z=5 \;\vee\; z=-2+\sqrt{7}i \;\vee\; z=-2-\sqrt{7}i$

C.S. $=\{-1, 5, -2-\sqrt{7}i, -2+\sqrt{7}i\}$

32.

32.1. $z^3+8e^{i\frac{2\pi}{3}}=0 \Leftrightarrow z^3=-8e^{i\frac{2\pi}{3}} \Leftrightarrow z=\sqrt[3]{-8e^{i\frac{2\pi}{3}}} \Leftrightarrow z=\sqrt[3]{8e^{i\left(\pi+\frac{2\pi}{3}\right)}}$

$$\Leftrightarrow z=\sqrt[3]{8e^{i\frac{5\pi}{3}}}$$

$$\Leftrightarrow z=\sqrt[3]{8}\,e^{i\frac{\frac{5\pi}{3}+2k\pi}{3}}, k\in\{0,1,2\}$$

$$\Leftrightarrow z=2e^{i\frac{\frac{5\pi}{3}+2k\pi}{3}}, k\in\{0,1,2\}$$

- Se $k=0, z_0=2e^{i\frac{5\pi}{9}}$.

- Se $k=1$, $z_1=2e^{i\frac{11\pi}{9}}$.
- Se $k=2$, $z_2=2e^{i\frac{17\pi}{9}}$.

C.S. $=\left\{2e^{i\frac{5\pi}{9}}, 2e^{i\frac{11\pi}{9}}, 2e^{i\frac{17\pi}{9}}\right\}$

32.2. $z-\frac{2i}{z}=0 \Leftrightarrow z^2-2i=0 \ \wedge\ z\neq 0 \Leftrightarrow z^2=2i \wedge\ z\neq 0$

$$\Leftrightarrow z^2=2e^{i\frac{\pi}{2}}$$

$$\Leftrightarrow z=\sqrt{2e^{i\frac{\pi}{2}}}$$

$$\Leftrightarrow z=\sqrt{2}e^{i\frac{\frac{\pi}{2}+2k\pi}{2}}, k\in\{0,1\}$$

- Se $k=0$, $z_0=\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$.
- Se $k=1$, $z_1=\sqrt{2}e^{i\frac{5\pi}{4}}$.

C.S. $=\left\{\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}, \sqrt{2}e^{i\frac{5\pi}{4}}\right\}$

32.3. $z^4\times\overline{e^{i\frac{\pi}{6}}}=4i \Leftrightarrow z^4\times e^{i\left(-\frac{\pi}{6}\right)}=4e^{i\frac{\pi}{2}} \Leftrightarrow z^4=\frac{4e^{i\frac{\pi}{2}}}{e^{i\left(-\frac{\pi}{6}\right)}}$

$$\Leftrightarrow z^4=4e^{i\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{6}\right)}$$

$$\Leftrightarrow z^4=4e^{i\frac{2\pi}{3}}$$

$$\Leftrightarrow z=\sqrt[4]{4e^{i\frac{2\pi}{3}}}$$

$$\Leftrightarrow z=\sqrt{2}e^{i\frac{\frac{2\pi}{3}+2k\pi}{4}}, k\in\{0,1,2,3\}$$

- Se $k=0$, $z_0=\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{6}}$.
- Se $k=1$, $z_1=\sqrt{2}e^{i\frac{2\pi}{3}}$.
- Se $k=2$, $z_2=\sqrt{2}e^{i\frac{7\pi}{6}}$.
- Se $k=3$, $z_3=\sqrt{2}e^{i\frac{5\pi}{3}}$.

C.S. $=\left\{\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{6}}, \sqrt{2}e^{i\frac{2\pi}{3}}, \sqrt{2}e^{i\frac{7\pi}{6}}, \sqrt{2}e^{i\frac{5\pi}{3}}\right\}$

32.4. Seja $z=re^{i\theta}$.

$$z^3\times\bar{z}=81i \Leftrightarrow \left(re^{i\theta}\right)^3\times\left(re^{i(-\theta)}\right)=81i \Leftrightarrow r^3e^{i3\theta}\times re^{i(-\theta)}=81e^{i\frac{\pi}{2}}$$

$$\Leftrightarrow r^4e^{i(3\theta-\theta)}=81e^{i\frac{\pi}{2}}$$

$$\Leftrightarrow r^4=81 \ \wedge\ 2\theta=\frac{\pi}{2}+2k\pi, k\in\mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow r=\sqrt[4]{81} \ \wedge\ \theta=\frac{\pi}{4}+k\pi, k\in\mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow r=3 \ \wedge\ \theta=\frac{\pi}{4}+k\pi, k\in\mathbb{Z}$$

- Se $k = 0, z_1 = 3e^{i\frac{\pi}{4}}$.
- Se $k = 1, z_2 = 3e^{i\frac{5\pi}{4}}$.
- Se $k = 2, z_3 = 3e^{i\left(\frac{\pi}{4}+2\pi\right)} = z_1$.

C.S. $= \left\{3e^{i\frac{\pi}{4}},\ 3e^{i\frac{5\pi}{4}}\right\}$

32.5. Seja $z = |z|e^{i\theta}$.

$$8z^2\bar{z} = \frac{1}{i} \Leftrightarrow 8\left(|z|e^{i\theta}\right)^2|z|e^{i(-\theta)} = e^{i\left(-\frac{\pi}{2}\right)} \Leftrightarrow 8|z|^2e^{i(2\theta)}|z|e^{i(-\theta)} = e^{i\left(-\frac{\pi}{2}\right)}$$

$$\Leftrightarrow |z|^3e^{i\theta} = \frac{1}{8}e^{i\left(-\frac{\pi}{2}\right)}$$

$$\Leftrightarrow |z|^3 = \frac{1}{8} \ \wedge \ \theta = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow |z| = \frac{1}{2} \ \wedge \ \theta = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Logo, $z = \frac{1}{2}e^{i\left(-\frac{\pi}{2}\right)}$.

C.S. $= \left\{\frac{1}{2}e^{i\left(-\frac{\pi}{2}\right)}\right\}$

32.6. Seja $z = |z|e^{i\theta}$.

$$z^4 = \bar{z}i \Leftrightarrow \left(|z|e^{i\theta}\right)^4 = |z|e^{i(-\theta)}e^{i\frac{\pi}{2}} \Leftrightarrow |z|^4e^{i(4\theta)} = |z|e^{i\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} |z|^4 = |z| \\ 4\theta = \frac{\pi}{2} - \theta + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} |z|^4 - |z| = 0 \\ 5\theta = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} |z|(|z|^3 - 1) = 0 \\ \theta = \frac{\pi}{10} + \frac{2k\pi}{5}, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} |z| = 0 \ \vee |z| = 1 \\ \theta = \frac{\pi}{10} + \frac{2k\pi}{5}, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Se $|z| = 0, z = 0$.

Se $|z| = 1$, temos:

- Para $k = 0, \theta_1 = \frac{\pi}{10}$.
- Para $k = 1, \theta_2 = \frac{\pi}{2}$.
- Para $k = 2, \theta_3 = \frac{9\pi}{10}$.
- Para $k = 3, \theta_4 = \frac{13\pi}{10}$.
- Para $k = 4, \theta_5 = \frac{17\pi}{10}$.

C.S. $= \left\{0, e^{i\frac{\pi}{10}}, e^{i\frac{\pi}{2}}, e^{i\frac{9\pi}{10}}, e^{i\frac{13\pi}{10}}, e^{i\frac{17\pi}{10}}\right\}$

32.7. $z^5 = 81z \Leftrightarrow z^5 - 81z = 0 \Leftrightarrow z(z^4 - 81) = 0$

$\Leftrightarrow z = 0 \ \vee \ z^4 = 81$

$\Leftrightarrow z = 0 \ \vee \ z = \sqrt[4]{81e^{i0}}$

$\Leftrightarrow z = 0 \ \vee \ z = \sqrt[4]{81}e^{i\left(\frac{0+2k\pi}{4}\right)}, k \in \{0,1,2,3\}$

$\Leftrightarrow z = 0 \ \vee \ z = 3e^{i\frac{2k\pi}{4}}, k \in \{0,1,2,3\}$

$\Leftrightarrow z = 0 \ \vee \ z = 3e^{i\frac{k\pi}{2}}, k \in \{0,1,2,3\}$

- Se $k = 0, z_0 = 3e^{i0} = 3$.
- Se $k = 1, z_1 = 3e^{i\frac{\pi}{2}} = 3i$.
- Se $k = 2, z_2 = 3e^{i\pi} = -3$.
- Se $k = 3, z_3 = 3e^{i\frac{3\pi}{2}} = -3i$.

C.S. $= \{0, 3, 3i, -3, -3i\}$

32.8. $z^3 = -\sqrt{3}z - iz \Leftrightarrow z^3 + (\sqrt{3} + i)z = 0 \Leftrightarrow z[z^2 + (\sqrt{3} + i)] = 0$

$\Leftrightarrow z = 0 \ \vee \ z^2 = -\sqrt{3} - i$

Seja $z_1 = -\sqrt{3} - i$.

- $|z_1| = \sqrt{\left(-\sqrt{3}\right)^2 + (-1)^2} = \sqrt{3+1} = \sqrt{4} = 2$
- Seja θ_1 um argumento de z_1. Como o afixo de z_1 está no 3º quadrante, concluímos que θ_1 pertence ao 3º quadrante.

  $\text{tg}\,\theta_1 = \frac{-1}{-\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \ \wedge \ \theta_1 \in 3º\,\text{Q}$

  Então, $\theta_1 = \frac{7\pi}{6}$, por exemplo.

Assim, $z_1 = 2e^{i\frac{7\pi}{6}}$.

Logo:

$z = 0 \ \vee \ z^2 = -\sqrt{3} - i \Leftrightarrow z = 0 \ \vee \ z^2 = 2e^{i\frac{7\pi}{6}}$

$\Leftrightarrow z = 0 \ \vee \ z = \sqrt{2}e^{i\frac{\frac{7\pi}{6}+2k\pi}{2}}, k \in \{0,1\}$

- Se $k = 0, z_0 = \sqrt{2}e^{i\frac{7\pi}{12}}$.
- Se $k = 1, z_1 = \sqrt{2}e^{i\frac{19\pi}{12}}$.

C.S. $= \left\{0, \sqrt{2}e^{i\frac{7\pi}{12}}, \sqrt{2}e^{i\frac{19\pi}{12}}\right\}$

33.

33.1. $\text{Re}(z - iz) \geq 2 \ \ \wedge \ \ |z| \leq 2$

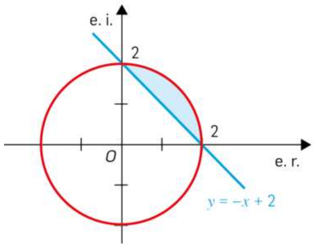
Cálculo auxiliar

$\text{Re}(z - iz) \geq 2 \Leftrightarrow \text{Re}(x + yi - i(x + yi)) \geq 2 \Leftrightarrow \text{Re}(x + yi - ix - yi^2) \geq 2$

$\Leftrightarrow \text{Re}(x + y + (y - x)i) \geq 2$

$\Leftrightarrow x + y \geq 2$

$\Leftrightarrow y \geq -x + 2$



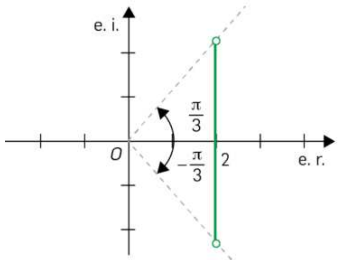
33.2. $|\text{Arg}(z)| < \frac{\pi}{3} \ \wedge \ \text{Im}(iz) = 2 \Leftrightarrow -\frac{\pi}{3} < \text{Arg}(z) < \frac{\pi}{3} \ \wedge \ \text{Im}(iz) = 2$

Cálculo auxiliar

$\text{Im}(iz) = 2 \Leftrightarrow \text{Im}(i(x + yi)) = 2 \Leftrightarrow \text{Im}(ix + yi^2) = 2$

$\Leftrightarrow \text{Im}(-y + ix) = 2$

$\Leftrightarrow x = 2$



33.3. $|z + 4i| = |z - 4| \ \wedge \ z \cdot \bar{z} + 16e^{i\pi} < 0$

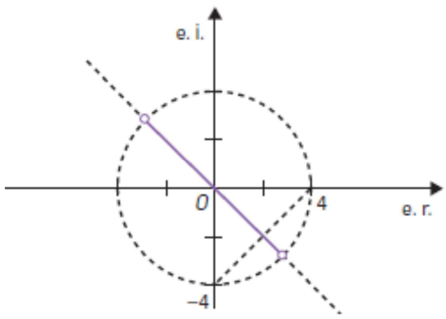
Cálculo auxiliar

$z \cdot \bar{z} + 16e^{i\pi} < 0 \Leftrightarrow |z|e^{i\theta} \cdot |z|e^{i(-\theta)} < -16e^{i\pi} \Leftrightarrow |z|^2 e^{i0} < 16e^{i(\pi + \pi)}$

$\Leftrightarrow |z|^2 e^{i0} < 16e^{i(2\pi)}$

$\Leftrightarrow |z|^2 < 16$

$\Leftrightarrow |z| < 4$



33.4. $z + \bar{z} \leq -z \cdot \bar{z} \ \wedge \ |\text{Re}(z)| \leq 1 \ \wedge \ \frac{\pi}{2} < \text{Arg}(z) \leq \pi$

$\Leftrightarrow z + \bar{z} \leq -z \cdot \bar{z} \ \wedge \ -1 \leq \text{Re}(z) \leq 1 \ \wedge \ \frac{\pi}{2} < \text{Arg}(z) \leq \pi$

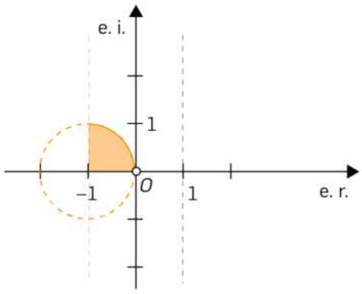
Cálculo auxiliar

$z+\bar{z} \leq -z \cdot \bar{z} \Leftrightarrow x+yi+x-yi \leq -(x+yi)(x-yi) \Leftrightarrow 2x \leq -(x^2+y^2)$

$\Leftrightarrow x^2+y^2+2x \leq 0$

$\Leftrightarrow x^2+2x+1+y^2 \leq 1$

$\Leftrightarrow (x+1)^2+y^2 \leq 1$



34.

34.1. $|z+2i| \leq 2 \ \wedge \ \frac{\pi}{4} \leq \operatorname{Arg}(z+4i) \leq \frac{3\pi}{4}$

34.2. $(-1 < \operatorname{Re}(z) < 3) \ \wedge \ \left[0 \leq \operatorname{Arg}(z-1-2i) \leq \frac{\pi}{4} \ \vee \ \pi \leq \operatorname{Arg}(z-1-2i) \leq \frac{5\pi}{4}\right]$

34.3. $|z| < 3 \ \wedge \ \frac{\pi}{2} \leq \operatorname{Arg}(z) \leq \frac{9\pi}{10}$

Cálculo auxiliar

Sejam z_0 e z_1 duas raízes consecutivas de $z = 243e^{i\theta}$ (ordem 5) e A e B os seus afixos, respetivamente.

Logo:

$z_0 = \sqrt[5]{243}e^{i\frac{\pi}{2}} = 3e^{i\frac{\pi}{2}}$

$z_1 = \sqrt[5]{243}e^{i\left(\frac{\pi}{2}+\frac{2\pi}{5}\right)} = 3e^{i\frac{9\pi}{10}}$

34.4. $|z-4-4i| \leq 4 \ \wedge \ \operatorname{Im}(z) \leq \operatorname{Re}(z)+4 \ \wedge \ \operatorname{Im}(z) \geq \operatorname{Re}(z)-4$

35.

35.1. $\sqrt[3]{z} = z_1$

$z_1 = 2+\sqrt{3}i+i^{4n+2014}, n \in \mathbb{N} \Leftrightarrow z_1 = 2+\sqrt{3}i+i^2$

$\Leftrightarrow z_1 = 1+\sqrt{3}i$

Cálculo auxiliar

$i^{4n+2014} = i^{4n} \times i^{2014} = 1 \times i^2$

$$\begin{array}{r|l} 2014 & 4 \\ \hline 2 & 503 \end{array}$$

- $|z_1| = \sqrt{1^2+\left(\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{1+3} = \sqrt{4} = 2$
- Seja θ_1 um argumento de z_1. Como o afixo de z_1 está no 1º quadrante, concluímos que θ_1 pertence ao 1º quadrante.

  $\operatorname{tg} \theta_1 = \frac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3} \ \wedge \ \theta_1 \in 1º\text{ Q}$

  Então, $\theta_1 = \frac{\pi}{3}$, por exemplo.

Assim, $z_1 = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$.

Como z_1 é uma raiz de ordem 3 de z, então $z = {z_1}^3$

$$z=\left(2e^{i\frac{\pi}{3}}\right)^3 \Leftrightarrow z=2^3e^{i\frac{3\pi}{3}} \Leftrightarrow z=8e^{i\pi}$$

$$\Leftrightarrow z=8(\cos\pi+i\operatorname{sen}\pi)$$

$$\Leftrightarrow z=8(-1+0i)$$

$$\Leftrightarrow z=-8+0i$$

35.2. A condição $|z-z_2|\leq 1$ define, no plano complexo, o círculo de centro no ponto C e raio 1, incluindo a circunferência. Assim, pode rejeitar-se a opção (III).

A condição $\frac{\pi}{2}\leq \operatorname{Arg}(z)\leq 2\pi$ define, no plano complexo, a reunião dos 2º, 3º e 4º quadrantes, incluindo os eixos do referencial. Assim, pode rejeitar-se a opção (I).

A condição $|z|\geq|z-z_2|$ define, no plano complexo, o semiplano definido pela mediatriz do segmento de reta $[OC]$ e que contém o ponto C. Assim, pode rejeitar-se a opção (II).

Portanto, a opção correta é a (IV).

GAVE

36.

36.1. Sejam $z=x+yi$ e $z'=x'+y'i$.

Sabemos que:

- $\operatorname{Re}(z+z')=1 \Leftrightarrow \operatorname{Re}(x+yi+x'+y'i)=1 \Leftrightarrow \operatorname{Re}\big((x+x')+(y+y')i\big)=1$

  $\Leftrightarrow x+x'=1$

- $z-z'$ é um número real, ou seja:

  $\operatorname{Im}(z-z')=0 \Leftrightarrow \operatorname{Im}(x+yi-x'-y'i)=0 \Leftrightarrow \operatorname{Im}\big((x-x')+(y-y')i\big)=0$

  $\Leftrightarrow y-y'=0$

- $(x+yi)(x'+y'i)=-16+2i \Leftrightarrow xx'+xy'i+x'yi+yy'i^2=-16+2i$

  $\Leftrightarrow xx'-yy'+(xy'+x'y)i=-16+2i$

  $\Leftrightarrow xx'-yy'=-16 \;\wedge\; xy'+x'y=2$

Assim, temos:

$$\begin{cases} x+x'=1 \\ y-y'=0 \\ xx'-yy'=-16 \\ xy'+x'y=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x'=1-x \\ y'=y \\ x(1-x)-y\times y=-16 \\ x\times y+(1-x)y=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overline{} \\ \overline{} \\ x(1-x)-y\times y=-16 \\ x\times y+(1-x)y=2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \overline{} \\ \overline{} \\ x-x^2-y^2=-16 \\ xy+y-xy=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overline{y'=2} \\ -x^2+x-4=-16 \\ y=2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \overline{y'=2} \\ -x^2+x+12=0 \\ y=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x'=4 \\ y'=2 \\ x=-3 \\ y=2 \end{cases} \vee \begin{cases} x'=-3 \\ y'=2 \\ x=4 \\ y=2 \end{cases}$$

Cálculo auxiliar

$-x^2+x+12=0$

$\Leftrightarrow x=\frac{-1\pm\sqrt{1^2-4\times(-1)\times 12}}{2\times(-1)}$

$\Leftrightarrow x=\frac{-1\pm\sqrt{1+48}}{-2}$

$\Leftrightarrow x=\frac{-1\pm 7}{-2}$

$\Leftrightarrow x=-3 \;\vee\; x=4$

Assim, $z=-3+2i$ e $z'=4+2i$ ou $z=4+2i$ e $z'=-3+2i$.

36.2. Sejam $z = x + yi$ e $z' = x' + y'i$.

Sabemos que:

- $z + z' = 3 + i \Leftrightarrow x + yi + x' + y'i = 3 + i$
$$\Leftrightarrow x + x' + (y + y')i = 3 + i$$
$$\Leftrightarrow x + x' = 3 \ \wedge \ y + y' = 1$$
- $\mathrm{Re}(z) = 2 \Leftrightarrow x = 2$
- $\frac{x+yi}{x'+y'i}$ é um imaginário puro, ou seja:

$$\mathrm{Re}\left(\frac{x+yi}{x'+y'i}\right) = 0 \Leftrightarrow \mathrm{Re}\left(\frac{(x+yi)(x'-y'i)}{(x'+y'i)(x'-y'i)}\right) = 0 \Leftrightarrow \mathrm{Re}\left(\frac{xx'-xy'i+x'yi-yy'i^2}{(x')^2-(y'i)^2}\right) = 0$$
$$\Leftrightarrow \mathrm{Re}\left(\frac{xx'+yy'-xy'i+x'yi}{(x')^2+(y')^2}\right) = 0$$
$$\Leftrightarrow \frac{xx'+yy'}{(x')^2+(y')^2} = 0$$

Assim, temos:

$$\begin{cases} x + x' = 3 \\ y + y' = 1 \\ x = 2 \\ \frac{xx'+yy'}{(x')^2+(y')^2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = 3 - 2 \\ y' = 1 - y \\ x = 2 \\ \text{——} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = 1 \\ \text{——} \\ \text{——} \\ \frac{2\times 1+y(1-y)}{(-1)^2+(1-y)^2} = 0 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} \text{——} \\ \text{——} \\ \text{——} \\ \frac{2+y-y^2}{1+(1-y)^2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{——} \\ \text{——} \\ \text{——} \\ y^2 - y - 2 = 0 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x' = 1 \\ y' = 2 \\ x = 2 \\ y = -1 \end{cases} \vee \begin{cases} x' = 1 \\ y' = -1 \\ x = 2 \\ y = 2 \end{cases}$$

Cálculo auxiliar

$$y^2 - y + 2 = 0$$
$$\Leftrightarrow y = \frac{1 \pm \sqrt{(-1)^2 - 4\times 1\times(-2)}}{2}$$
$$\Leftrightarrow y = \frac{1\pm\sqrt{1+8}}{2}$$
$$\Leftrightarrow y = \frac{1\pm 3}{2}$$
$$\Leftrightarrow y = -1 \ \vee \ y = 2$$

Assim, $z = 2 - i$ e $z' = 1 + 2i$ ou $z = 2 + 2i$ e $z' = 1 - i$.

37. Sejam $z_1 = x_1 + y_1 i$ e $z_2 = x_2 + y_2 i$.

37.1. 1º processo

$$\bar{z}_1 z_2 - z_1 \bar{z}_2 = (x_1 - y_1 i)(x_2 + y_2 i) - (x_1 + y_1 i)(x_2 - y_2 i) =$$
$$= x_1x_2 + x_1y_2 i - x_2y_1 i + y_1y_2 - (x_1x_2 - x_1y_2 i + x_2y_1 i + y_1y_2) =$$
$$= x_1x_2 + x_1y_2 i - x_2y_1 i + y_1y_2 - x_1x_2 + x_1y_2 i - x_2y_1 i - y_1y_2 =$$
$$= x_1y_2 i - x_2y_1 i + x_1y_2 i - x_2y_1 i =$$
$$= 2x_1y_2 i - 2x_2y_1 i =$$
$$= 2(x_1y_2 - x_2y_1)i$$

$$2\mathrm{Im}(\bar{z}_1 z_2)i = 2\mathrm{Im}[(x_1 - y_1 i)(x_2 + y_2 i)]i =$$
$$= 2\mathrm{Im}(x_1x_2 + x_1y_2 i - x_2y_1 i + y_1y_2)i =$$
$$= 2\mathrm{Im}[(x_1x_2 + y_1y_2) + (x_1y_2 - x_2y_1)i]i =$$

$= 2(x_1y_2 - x_2y_1)i$

Assim, $\bar{z}_1z_2 - z_1\bar{z}_2 = 2\mathrm{Im}(\bar{z}_1z_2)i$.

2º processo

Propriedade: $\frac{z-\bar{z}}{2i} = \mathrm{Im}(z)$

Assim:

$\frac{\overline{z_1}z_2-\overline{\overline{z_1}z_2}}{2i} = \mathrm{Im}(\overline{z_1}z_2) \Leftrightarrow \overline{z_1}z_2 - z_1\overline{z_2} = 2\mathrm{Im}(\overline{z_1}z_2)i$

37.2. 1º processo

$\bar{z}_1z_2 + z_1\bar{z}_2 = (x_1 - y_1i)(x_2 + y_2i) + (x_1 + y_1i)(x_2 - y_2i) =$

$= x_1x_2 + x_1y_2i - x_2y_1i + y_1y_2 + x_1x_2 - x_1y_2i + x_2y_1i + y_1y_2 =$

$= 2x_1x_2 + 2y_1y_2$

Logo, $\bar{z}_1z_2 + z_1\bar{z}_2$ é um número real.

2º processo

Propriedade: $\frac{z+\bar{z}}{2} = \mathrm{Re}(z)$

Assim:

$\overline{z_1}z_2 + \overline{\overline{z_1}z_2} = 2\mathrm{Re}(\overline{z_1}z_2) \Leftrightarrow \overline{z_1}z_2 + z_1\overline{z_2}$ é um número real.

37.3. 1º processo

$(\bar{z}_1 + z_2)(z_1 + \bar{z}_2) =$

$= (x_1 - y_1i + x_2 + y_2i)(x_1 + y_1i + x_2 - y_2i) =$

$= [(x_1 + x_2) + (-y_1 + y_2)i][(x_1 + x_2) + (y_1 - y_2)i] =$

$= (x_1 + x_2)^2 + (x_1 + x_2)(y_1 - y_2)i + (x_1 + x_2)(-y_1 + y_2)i + i^2(-y_1 + y_2)(y_1 - y_2) =$

$= (x_1 + x_2)^2 + (x_1 + x_2)(y_1 - y_2)i - (x_1 + x_2)(y_1 - y_2)i + (y_1 - y_2)(y_1 - y_2) =$

$= (x_1 + x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2$

$|z_1|^2 + |z_2|^2 + 2\mathrm{Re}(z_1z_2) =$

$= \left(\sqrt{(x_1)^2 + (y_1)^2}\right)^2 + \left(\sqrt{(x_2)^2 + (y_2)^2}\right)^2 + 2\mathrm{Re}[(x_1 + y_1i)(x_2 + y_2i)] =$

$= (x_1)^2 + (y_1)^2 + (x_2)^2 + (y_2)^2 + 2\mathrm{Re}(x_1x_2 + x_1y_2i + x_2y_1i - y_1y_2) =$

$= (x_1)^2 + (y_1)^2 + (x_2)^2 + (y_2)^2 + 2(x_1x_2 - y_1y_2) =$

$= (x_1)^2 + (y_1)^2 + (x_2)^2 + (y_2)^2 + 2x_1x_2 - 2y_1y_2 =$

$= (x_1)^2 + 2x_1x_2 + (x_2)^2 + (y_1)^2 + (y_2)^2 - 2y_1y_2 =$

$= (x_1 + x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2$

Logo, $(\bar{z}_1 + z_2)(z_1 + \bar{z}_2) = |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2\mathrm{Re}(z_1z_2)$.

2º processo

Propriedade: $\mathrm{Re}(z) = \frac{z+\bar{z}}{2} \Leftrightarrow z + \bar{z} = \mathrm{Re}(z)$

$(\bar{z}_1 + z_2)(z_1 + \bar{z}_2) = \bar{z}_1z_1 + \bar{z}_1\bar{z}_2 + z_2z_1 + z_2\bar{z}_2 =$

$$= z_1\bar{z}_1 + z_1 z_2 + \overline{z_1 z_2} + z_2\bar{z}_2 =$$
$$= |z_1|^2 + 2\mathrm{Re}(z_1 z_2) + |z_2|^2$$

37.4. 1º processo

$$|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 =$$
$$= |x_1 + y_1 i + x_2 + y_2 i|^2 + |x_1 + y_1 i - x_2 - y_2 i|^2 =$$
$$= |(x_1 + x_2) + (y_1 + y_2)i|^2 + |(x_1 - x_2) + (y_1 - y_2)i|^2 =$$
$$= \left(\sqrt{(x_1 + x_2)^2 + (y_1 + y_2)^2}\right)^2 + \left(\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}\right)^2 =$$
$$= (x_1 + x_2)^2 + (y_1 + y_2)^2 + (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 =$$
$$= x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 + y_1^2 + 2y_1y_2 + y_2^2 + x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2 + y_1^2 + 2y_1y_2 + y_2^2 =$$
$$= 2x_1^2 + 2x_2^2 + 2y_1^2 + 2y_2^2 =$$
$$= 2(x_1^2 + x_2^2) + 2(y_1^2 + y_2^2) =$$
$$= 2|z_1|^2 + 2|z_2|^2$$

2º processo

$$|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = (z_1 + z_2) \times \left(\overline{z_1 + z_2}\right) + (z_1 - z_2) \times \left(\overline{z_1 - z_2}\right) =$$
$$= (z_1 + z_2) \times (\overline{z_1} + \overline{z_2}) + (z_1 - z_2) \times (\overline{z_1} - \overline{z_2}) =$$
$$= z_1\overline{z_1} + z_1\overline{z_2} + \overline{z_1}z_2 + z_2\overline{z_2} + z_1\overline{z_1} - z_1\overline{z_2} - \overline{z_1}z_2 + z_2\overline{z_2} =$$
$$= |z_1|^2 + |z_2|^2 + |z_1|^2 + |z_2|^2 =$$
$$= 2|z_1|^2 + 2|z_2|^2$$

37.5. 1º processo

$$|z_1 + 1|^2 = 2|z_1|^2 \Leftrightarrow |x_1 + y_1 i + 1|^2 = 2|x_1 + y_1 i|^2$$
$$\Leftrightarrow |x_1 + 1 + y_1 i|^2 = 2|x_1 + y_1 i|^2$$
$$\Leftrightarrow \left(\sqrt{(x_1 + 1)^2 + {y_1}^2}\right)^2 = 2\left(\sqrt{{x_1}^2 + {y_1}^2}\right)^2$$
$$\Leftrightarrow (x_1 + 1)^2 + {y_1}^2 = 2({x_1}^2 + {y_1}^2)$$
$$\Leftrightarrow x_1^2 + 2x_1 + 1 + {y_1}^2 = 2{x_1}^2 + 2{y_1}^2$$
$$\Leftrightarrow -x_1^2 + 2x_1 - {y_1}^2 = -1$$
$$\Leftrightarrow x_1^2 - 2x_1 + {y_1}^2 = 1$$
$$\Leftrightarrow x_1^2 - 2x_1 + 1 + {y_1}^2 = 1 + 1$$
$$\Leftrightarrow (x_1 - 1)^2 + {y_1}^2 = 2$$
$$\Leftrightarrow |z_1 - 1|^2 = 2$$

2º processo

$$|z_1 + 1|^2 = 2|z_1|^2 \Leftrightarrow (z_1 + 1)\left(\overline{z_1 + 1}\right) = 2z_1\overline{z_1} \Leftrightarrow (z_1 + 1)(\overline{z_1} + 1) = 2z_1\overline{z_1}$$
$$\Leftrightarrow z_1\overline{z_1} + z_1 + \overline{z_1} + 1 = 2z_1\overline{z_1}$$
$$\Leftrightarrow z_1\overline{z_1} - z_1 - \overline{z_1} - 1 = 0$$
$$\Leftrightarrow z_1\overline{z_1} - z_1 - \overline{z_1} + 1 = 2$$

$$\Leftrightarrow z_1(\overline{z_1}-1)-(\overline{z_1}-1)=2$$
$$\Leftrightarrow (\overline{z_1}-1)-(z_1-1)=2$$
$$\Leftrightarrow (\overline{z_1-1})-(z_1-1)=2$$
$$\Leftrightarrow |z_1-1|=2$$

38. Seja $z=a+bi$.

$$\frac{z}{\bar{z}}=\frac{a+bi}{a-bi}=\frac{(a+bi)^2}{(a-bi)(a+bi)}=$$
$$=\frac{a^2+2abi-b^2}{a^2+b^2}=$$
$$=\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}+\frac{2ab}{a^2+b^2}i$$

Assim:

$$\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}+\frac{2ab}{a^2+b^2}i=c+di\Leftrightarrow\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}=c\ \wedge\ \frac{2ab}{a^2+b^2}=d$$

Logo:

$$c^2+d^2=\left(\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}\right)^2+\left(\frac{2ab}{a^2+b^2}\right)^2=\frac{a^4-2a^2b^2+b^4+4a^2b^2}{(a^2+b^2)^2}=$$
$$=\frac{a^4+2a^2b^2+b^4}{(a^2+b^2)^2}=$$
$$=\frac{\left(a^2+b^2\right)^2}{(a^2+b^2)^2}=$$
$$=1$$

39.

39.1. 1º processo

Seja $z=x+yi$.

$$\bar{z}+z^{-1}=x-yi+\frac{1}{x+yi}=\frac{(x+yi)(x-yi)+1}{x+yi}=$$
$$=\frac{x^2+y^2+1}{x+yi}=$$
$$=\frac{\left(x^2+y^2+1\right)(x-yi)}{(x+yi)(x-yi)}=$$
$$=\frac{x^3+xy^2+x-x^2yi+y^3i-yi}{x^2+y^2}=$$
$$=\frac{x^3+xy^2+x}{x^2+y^2}+\frac{-x^2y+y^3-y}{x^2+y^2}i$$

$$\bar{z}\times\frac{|z|^2+1}{|z|^2}=(x-yi)\times\frac{x^2+y^2+1}{x^2+y^2}=\frac{(x-yi)\left(x^2+y^2+1\right)}{x^2+y^2}=$$
$$=\frac{x^3+xy^2+x-x^2yi-y^3i-yi}{x^2+y^2}=$$

$$= \frac{x^3+xy^2+x}{x^2+y^2} + \frac{-x^2y-y^3-y}{x^2+y^2}\, i$$

Logo, $\bar{z} + z^{-1} = \bar{z} \times \frac{|z|^2+1}{|z|^2}$.

2º processo

$$\bar{z} + z^{-1} = \bar{z} + \frac{1}{z} = \frac{z\times\bar{z}+1}{z} =$$
$$= \frac{|z|^2+1}{z} =$$
$$= \frac{(|z|^2+1)\times\bar{z}}{z\times\bar{z}} =$$
$$= \bar{z} \times \frac{|z|^2+1}{|z|^2}$$

39.2. 1º processo

Seja $z = |z|e^{i\theta}$.

$$\left|\frac{2z}{|z|} - \frac{3i|z|}{\bar{z}}\right| = \left|\frac{2|z|e^{i\theta}}{|z|} - \frac{3e^{i\frac{\pi}{2}}|z|}{|z|e^{i(-\theta)}}\right| =$$
$$= \left|2e^{i\theta} - 3e^{i\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)}\right| =$$
$$= \left|2(\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta) - 3\left[\cos\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right) + i\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)\right]\right| =$$
$$= |2\cos\theta + 2i\operatorname{sen}\theta + 3\operatorname{sen}\theta - 3i\cos\theta| =$$
$$= |2\cos\theta + 3\operatorname{sen}\theta + (2\operatorname{sen}\theta - 3\cos\theta)i| =$$
$$= \sqrt{(2\cos\theta + 3\operatorname{sen}\theta)^2 + (2\operatorname{sen}\theta - 3\cos\theta)^2} =$$
$$= \sqrt{4\cos^2\theta + 12\cos\theta\operatorname{sen}\theta + 9\operatorname{sen}^2\theta + 4\operatorname{sen}^2\theta - 12\cos\theta\operatorname{sen}\theta + 9\cos^2\theta} =$$
$$= \sqrt{13\cos^2\theta + 13\operatorname{sen}^2\theta} =$$
$$= \sqrt{13(\cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta)} =$$
$$= \sqrt{13\times 1} = \sqrt{13}$$

2º processo

$$\left|\frac{2z}{|z|} - \frac{3i|z|}{\bar{z}}\right| = \left|\frac{2z\bar{z}-3i|z|^2}{|z|\times\bar{z}}\right| = \left|\frac{2|z|^2-3i|z|^2}{|z|\times\bar{z}}\right| =$$
$$= \left|\frac{|z|^2\times(2-3i)}{|z|\times\bar{z}}\right| =$$
$$= \left|\frac{|z|\times(2-3i)}{\bar{z}}\right| =$$
$$\underbrace{=}_{|z|=|\bar{z}|} \frac{|z|\times|2-3i|}{|\bar{z}|} =$$
$$= |2-3i| =$$
$$= \sqrt{2^2+(-3)^2} =$$
$$= \sqrt{13}$$

40. 1º processo

Seja $z = x + yi$.

$$|z-i|^2 = |x+yi-i|^2 = |x+(y-1)i|^2 =$$
$$= \left(\sqrt{x^2+(y-1)^2}\right)^2 =$$
$$= x^2+(y-1)^2 =$$
$$= x^2+y^2-2y+1 =$$
$$= |z|^2 - 2\text{Im}(z) + 1 =$$
$$= |z|^2 + 1 - 2\text{Im}(z)$$

2º processo

$$|z-i|^2 = (z-i)\left(\overline{z-i}\right) = (z-i)\times(\bar{z}+i) =$$
$$= z\bar{z} + iz - i\bar{z} - i^2 =$$
$$= |z|^2 + i(z-\bar{z}) + 1 =$$
$$= |z|^2 + 1 - 2\text{Im}(z)$$

Cálculo auxiliar

Propriedade:

$\frac{z-\bar{z}}{2i} = \text{Im}(z) \Leftrightarrow z-\bar{z} = 2\text{Im}(z)i$

$\Leftrightarrow \text{i}(z-\bar{z}) = 2\text{Im}(z)i^2$

$\Leftrightarrow \text{i}(z-\bar{z}) = -2\text{Im}(z)$

41. $z^{-1} - w^{-1} = \frac{1}{z} - \frac{1}{w} = \frac{1}{|z|^2}\bar{z} - \frac{1}{|w|^2}\bar{w} =$

$$= \frac{1}{|z|^2}\bar{z} - \frac{1}{\frac{|z|^2}{4}}\bar{w} =$$
$$= \frac{1}{|z|^2}\bar{z} - \frac{4}{|z|^2}\bar{w} =$$
$$= \frac{1}{|z|^2}(\bar{z} - 4\bar{w}) =$$
$$= \frac{1}{|z|^2}\left(\overline{z-4w}\right)$$

42. Sabemos que $z_1 = |z_1|e^{i\alpha} = e^{i\alpha}$ e que $z_2 = |z_2|e^{i\beta} = e^{i\beta}$.

$$\frac{(z_1+z_2)^2}{z_1z_2} = \frac{z_1^2+2z_1z_2+z_2^2}{z_1z_2} = \frac{z_1^2+z_2^2}{z_1z_2} + \frac{2z_1z_2}{z_1z_2} =$$
$$= \frac{e^{i(2\alpha)}+e^{i(2\beta)}}{e^{i\alpha}e^{i\beta}} + 2 =$$
$$= \frac{e^{i(2\alpha)}+e^{i(2\beta)}}{e^{i(\alpha+\beta)}} + 2 =$$
$$= \frac{\left[e^{i(2\alpha)}+e^{i(2\beta)}\right]e^{i(-\alpha-\beta)}}{e^{i(\alpha+\beta)}e^{i(-\alpha-\beta)}} + 2 =$$
$$= \frac{e^{i(\alpha-\beta)}+e^{i(\beta-\alpha)}}{e^{i0}} + 2 =$$
$$= e^{i(\alpha-\beta)} + e^{i(\beta-\alpha)} + 2 =$$
$$= \cos(\alpha-\beta) + i\,\text{sen}(\alpha-\beta) + \cos(\beta-\alpha) + i\,\text{sen}(\beta-\alpha) + 2 =$$
$$= [\cos(\alpha-\beta)+\cos(\beta-\alpha)] + i[\text{sen}(\alpha-\beta)+\text{sen}(\beta-\alpha)] + 2 =$$
$$= (\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha-\beta)) + i\big(\text{sen}(\alpha-\beta) - \text{sen}(\alpha-\beta)\big) + 2 =$$

$= 2\cos(\alpha - \beta) + 2$ é um número real.

Como $-1 \leq \cos(\alpha - \beta) \leq 1$, temos:

$-1 \leq \cos(\alpha - \beta) \leq 1 \Leftrightarrow -2 \leq 2\cos(\alpha - \beta) \leq 2 \Leftrightarrow 0 \leq 2\cos(\alpha - \beta) + 2 \leq 4$

Logo, $\frac{(z_1+z_2)^2}{z_1 z_2}$ é um número real pertencente ao intervalo $[0, 4]$.

43.

43.1. Se w e $\frac{1}{w}$ são raízes de um número complexo z, então temos que $z = w^n$ e $z = \left(\frac{1}{w}\right)^n$.

Logo:

$$w^n = \left(\frac{1}{w}\right)^n \Leftrightarrow w^n = \frac{1}{w^n} \Leftrightarrow (w^n)^2 = 1$$
$$\Leftrightarrow w^n = \pm 1$$
$$\Leftrightarrow w^n = -1 \ \vee \ w^n = 1$$

isto é, $z = 1 \ \vee \ z = -1$.

43.2. Se w e $\overline{w}$ são raízes de um número complexo z, então temos que $z = w^n$ e $z = \overline{w}^n$.

Logo:

$$w^n = \overline{w}^n \Leftrightarrow |w|e^{i\theta} = |w|e^{i(-\theta)} \Leftrightarrow \theta = -\theta + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$
$$\Leftrightarrow 2\theta = 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$
$$\Leftrightarrow \theta = k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Assim, podemos concluir que $z \in \mathbb{R}$.

43.3. $\overline{w} = 2 \times \frac{1}{w} \Leftrightarrow \overline{w} \times w = 2 \Leftrightarrow |w|^2 = 2$

$$\Leftrightarrow |w| = \sqrt{2}$$

Como $|z| = \sqrt{2}$ define a circunferência de centro $(0, 0)$ e raio $\sqrt{2}$, podemos concluir que o afixo de w pertence a esta circunferência.

43.4. Seja $w = x + yi$ e seja $z = w + \frac{i|w|^2}{w}$.

$$z = w + \frac{i|w|^2}{w} = x + yi + \frac{i(x^2+y^2)}{x+yi} = x + yi + \frac{i(x^2+y^2)(x-yi)}{(x+yi)(x-yi)} =$$
$$= x + yi + \frac{i(x^2+y^2)(x-yi)}{x^2+y^2} =$$
$$= x + yi + i(x - yi) =$$
$$= x + yi + xi + y =$$
$$= x + y + (x + y)i$$

Como Re(z) = Im(z), então o afixo de $z = w + \frac{i|w|^2}{w}$ pertence à bissetriz dos quadrantes ímpares.

44.

44.1. $z_1 = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}i}{2} = \frac{\sqrt{6}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i$

- $|z_1| = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right)^2 + \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{6}{4}+\frac{2}{4}} = \frac{\sqrt{8}}{2} = \frac{2\sqrt{2}}{2}$
- Seja θ_1 um argumento de z_1. Como o afixo de z_1 está no 4º quadrante, concluímos que θ_1 pertence ao 4º quadrante.

  $\operatorname{tg} \theta_1 = \frac{\frac{-\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{6}}{2}} = \frac{-\sqrt{2}}{\sqrt{6}} = -\frac{1}{\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3} \ \wedge \ \theta_1 \in 4º\text{ Q}$

  Então, $\theta_1 = -\frac{\pi}{6}$, por exemplo.

Assim, $z_1 = \sqrt{2}e^{i\left(-\frac{\pi}{6}\right)}$.

Seja $z_2 = 1 - i$.

- $|z_2| = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$
- Seja θ_2 um argumento de z_2. Como o afixo de z_2 está no 4º quadrante, concluímos que θ_2 pertence ao 4º quadrante.

  $\operatorname{tg} \theta_2 = \frac{-1}{1} = -1 \ \wedge \ \theta_2 \in 4º\text{ Q}$

  Então, podemos concluir que $\theta_2 = -\frac{\pi}{4}$, por exemplo.

Assim, $z_2 = \sqrt{2}e^{i\left(-\frac{\pi}{4}\right)}$.

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\sqrt{2}e^{i\left(-\frac{\pi}{6}\right)}}{\sqrt{2}e^{i\left(-\frac{\pi}{4}\right)}} = e^{i\left(-\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{4}\right)} = e^{i\frac{\pi}{12}}$$

44.2.
$$\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{6}\right) =$$
$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{1}{2} =$$
$$= \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

$$\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{12}\right) = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6}\right) = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) - \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{6}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) =$$
$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2} =$$
$$= \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

Assim, podemos concluir que $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ e que $\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$.

44.3.
$$\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)\cos x + \left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)\operatorname{sen} x = 2 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\cos x + \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\operatorname{sen} x = \frac{2}{4}$$
$$\Leftrightarrow \cos\left(\frac{\pi}{12}\right)\cos x + \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{12}\right)\operatorname{sen} x = \frac{1}{2}$$
$$\Leftrightarrow \cos\left(\frac{\pi}{12} - x\right) = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\pi}{12} - x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \ \vee \ \frac{\pi}{12} - x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi \ \vee \ x = \frac{5\pi}{12} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

C.S. $= \left\{-\frac{\pi}{4} + 2k\pi, \frac{5\pi}{12} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$

45. $z^5 + z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = 0 \Leftrightarrow z^4(z+1) + z^2(z+1) + (z+1) = 0$

$$\Leftrightarrow (z+1)(z^4 + z^2 + 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow z + 1 = 0 \ \vee \ z^4 + z^2 + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow z = -1 \ \vee \ z^2 = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4 \times 1 \times 1}}{2}$$

$$\Leftrightarrow z = -1 \ \vee \ z^2 = \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2}$$

$$\Leftrightarrow z = -1 \ \vee \ z^2 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \ \vee \ z^2 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

Cálculos auxiliares

$z_1 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$	$z_2 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$
$\lvert z_1 \rvert = \sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = 1$	$\lvert z_2 \rvert = \sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = 1$
$\operatorname{tg} \theta_1 = \frac{-\frac{\sqrt{3}}{2}}{-\frac{1}{2}} = \sqrt{3} \ \wedge \ \theta_1 \in 3º\text{ Q}$	$\operatorname{tg} \theta_2 = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{-\frac{1}{2}} = \sqrt{3} \ \wedge \ \theta_2 \in 2º\text{ Q}$
$\theta_1 = \frac{4\pi}{3}$	$\theta_2 = \frac{2\pi}{3}$

$$\Leftrightarrow z = e^{i\pi} \ \vee \ z^2 = e^{i\frac{4\pi}{3}} \ \vee \ z^2 = e^{i\frac{2\pi}{3}}$$

$$\Leftrightarrow z = e^{i\pi} \ \vee \ z = e^{i\frac{\frac{4\pi}{3} + 2k\pi}{2}} \ \vee \ z = e^{i\frac{\frac{2\pi}{3} + 2k\pi}{2}}, k \in \{0, 1\}$$

$$\Leftrightarrow z = e^{i\pi} \ \vee \ z = e^{i\frac{2\pi}{3}} \ \vee \ z = e^{i\frac{5\pi}{3}} \ \vee \ z = e^{i\frac{\pi}{3}} \ \vee \ z = e^{i\frac{4\pi}{3}}$$

C.S. $= \left\{e^{i\frac{\pi}{3}}, e^{i\frac{2\pi}{3}}, e^{i\pi}, e^{i\frac{4\pi}{3}}, e^{i\frac{5\pi}{3}}\right\}$

46. $\sqrt[n]{1e^{i0}} = \sqrt[n]{1}e^{i\frac{2k\pi}{n}}, k \in \{0, 1, \dots, n-1\} = e^{i\frac{2k\pi}{n}}, k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$

Os argumentos das raízes de ordem n estão em progressão aritmética de razão $\frac{2\pi}{n}$.

Assim:

$$e^{i0} \times e^{i\frac{2\pi}{n}} \times e^{i\frac{4\pi}{n}} \times \dots \times e^{i\frac{2(n-1)\pi}{n}} = e^{i\overbrace{\left(0 + \frac{2\pi}{n} + \frac{4\pi}{n} + \dots + \frac{2(n-1)\pi}{n}\right)}^{\text{soma de } n \text{ termos de uma progressão aritmética}}} = e^{i\left(\frac{0 + \frac{2(n-1)\pi}{n}}{2} \times n\right)} =$$

$$= e^{i\pi(n-1)} =$$

$$= \left(e^{i\pi}\right)^{n-1} =$$

$$= (-1)^{n-1}$$

47. As n raízes de ordem n de $re^{i\theta}$ estão em progressão geométrica de razão $e^{i\frac{2\pi}{n}}$.

Aplicando a fórmula que dá a soma de n termos de uma progressão geométrica de 1.º termo u_1 e razão $e^{i\frac{2\pi}{n}}$, temos:

$$u_1 \times \frac{1-\left(e^{i\frac{2\pi}{n}}\right)^n}{1-e^{i\frac{2\pi}{n}}} = u_1 \times \frac{1-\overbrace{e^{i2\pi}}^{1}}{1-e^{i\frac{2\pi}{n}}} = \frac{0}{1-e^{i\frac{2\pi}{n}}} = 0$$

48. Seja $z_1 = |r|e^{i\theta}$ uma das raízes de ordem 3 do número complexo z.

Então, $z = (z_1)^3 = r^3 e^{i(3\theta)}$.

Seja w_1 a raiz de ordem 3 do número complexo w, tal que o afixo de w_1 está no lado do triângulo maior oposto ao afixo de z_1.

Então, $w_1 = \frac{r}{2} e^{i(\theta+\pi)}$.

Assim:

$$w = (w_1)^3 = \left(\frac{r}{2} e^{i(\theta+\pi)}\right)^3 =$$
$$= \left(\frac{r}{2}\right)^3 e^{i(\theta+\pi)\times 3} =$$
$$= \frac{r^3}{8} e^{i(3\theta+3\pi)} =$$
$$= \frac{r^3}{8} e^{i(3\theta+\pi)} =$$
$$= \frac{1}{8} r^3 e^{i(3\theta)} \times e^{i\pi} =$$
$$= \frac{1}{8} \times z \times (-1) =$$
$$= -\frac{z}{8}$$