Matemática- 2021

1º Teste- Tópicos de resolução

Universidade do Minho
DMA

Exercício 1

a) $A = \{1, 2, 3\}$.

b) $B \cup C =]-\infty, -1[\cup]-1, +\infty[$.

Exercício 2

$9a^2 - 12a + 4 - 9a^2 + 3a - 4 = -9a$.

Exercício 3

a) $x(3x^2 - 9) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee 3x^2 - 9 = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x^2 = 3 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = \sqrt{3} \vee x = -\sqrt{3}$

$S = \{-\sqrt{3}, 0, \sqrt{3}\}$.

b) $x^2 - 5x + 6 = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{5 \pm \sqrt{25 - 24}}{2} \Leftrightarrow x = \dfrac{5 \pm \sqrt{1}}{2} \Leftrightarrow x = \dfrac{5+1}{2} \vee x = \dfrac{5-1}{2} \Leftrightarrow$ $x = 3 \vee x = 2$

$S = \{2, 3\}$.

c) $|x - 7| = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x - 7 = \frac{1}{2} \vee x - 7 = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow 2x = 14 + 1 \vee 2x = 14 - 1 \Leftrightarrow x = \frac{15}{2} \vee x = \frac{13}{2}$

$S = \{\frac{15}{2}, \frac{13}{2}\}$.

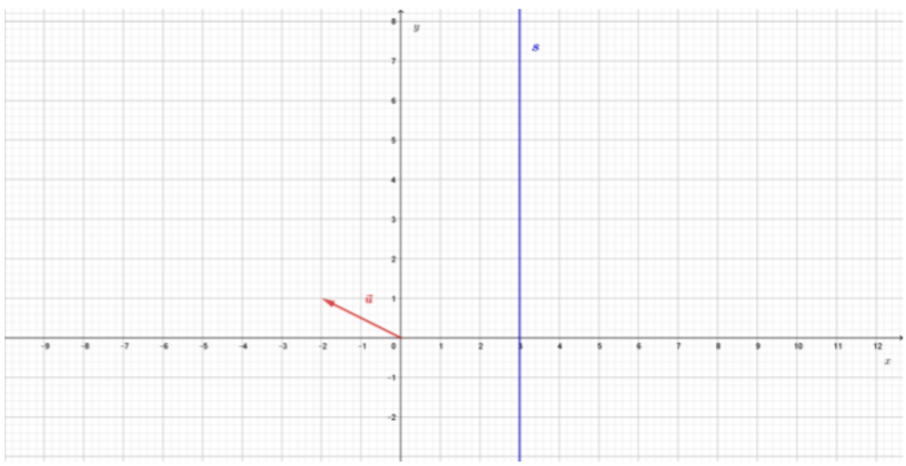
Exercício 4

$\dfrac{1 - 3x}{4} \leq \dfrac{4}{4} - \dfrac{2x + 6}{4} \Leftrightarrow 1 - 3x \leq 4 - 2x - 6 \Leftrightarrow -3x + 2x \leq 4 - 1 - 6 \Leftrightarrow -x \leq -3$

$\Leftrightarrow x \geq 3$

$S = [3, +\infty[$.

Exercício 5 a)



b) $\overrightarrow{AB} = (\frac{1}{2}, 0) - (-\frac{7}{2}, 3) = (\frac{8}{2}, -3) = (4, -3)$

$\|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{4^2 + 3^2} = \sqrt{25} = 5.$

c) $\overrightarrow{u} = (1, 2).$

Exercício 6 a) $\overrightarrow{r} = (2, -1).$

b) $r : \frac{1}{2}x + y - 3 = 0 \Leftrightarrow x + 2y - 6 = 0$

$d_{P,r} = \frac{|2+2\times(-2)-6|}{\sqrt{1^2+2^2}} = \frac{|-8|}{\sqrt{5}} = \frac{8}{\sqrt{5}} = \frac{8\sqrt{5}}{5}.$

c) Um vetor diretor da reta r: $\overrightarrow{r} = (2, -1).$

Um vetor diretor da reta perpendicular a r: $\overrightarrow{s} = (1, 2).$

Uma equação cartesiana da reta: $\frac{x-2}{1} = \frac{y+2}{2}.$

Exercício 7 a) Centro: $(2, 1)$ e raio $\sqrt{3}$.

b) $-y = -2x - 5 \Leftrightarrow y = 2x + 5$

A reta p tem declive 2 e retas paralelas têm o mesmo declive. Assim $(1, 2)$ é um vetor diretor de q e de p.
Uma equação vetorial da reta q: $(x, y) = (2, 1) + k(1, 2), k \in \mathbb{R}$

ou

$(2, -1)$ vetor perpendicular a p.
$(1, 2)$ vetor diretor da reta q e de p.

Uma equação vetorial da reta q: $(x, y) = (2, 1) + k(1, 2), k \in \mathbb{R}$.

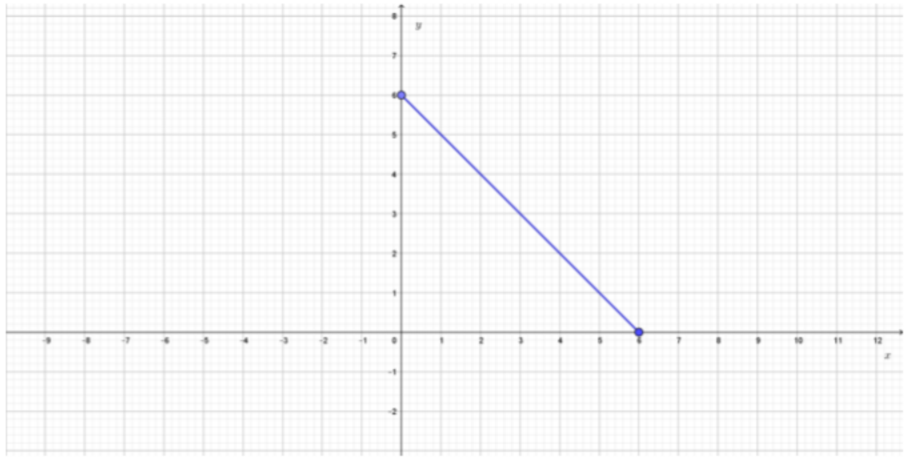
Exercício 8

$$x^2 - 8x + 16 + y^2 - 2y + 1 = 16 + 1 + 1 \Leftrightarrow (x-4)^2 + (y-1)^2 = 18$$

Coordenadas do centro: $(4, 1)$

Raio: $\sqrt{18}$.

Exercício 9



Exercício 10 a) $2\sin x = 2$

$\Leftrightarrow \sin x = \frac{2}{2}$

$\Leftrightarrow \sin x = 1$

$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$

b) $-2\cos x = \sqrt{3}$

$\Leftrightarrow \cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\Leftrightarrow x = \pi - \frac{\pi}{6} + 2k\pi \vee x = \pi + \frac{\pi}{6} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$

$\Leftrightarrow x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \vee x = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$

Exercício 11 $\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{3\pi}{2}$ e $\sin\theta > 0$ logo θ é um ângulo do 2º quadrante. Então $\cos\theta < 0$.

De $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$, vem

$$(\tfrac{1}{3})^2 + \cos^2\theta = 1 \Leftrightarrow \cos^2\theta = 1 - \tfrac{1}{9} \Leftrightarrow \cos^2\theta = \tfrac{8}{9} \Leftrightarrow \cos\theta = \pm\sqrt{\tfrac{8}{9}}$$

Como $\cos\theta < 0$, então $\cos\theta = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$.

Exercício 12 $\cos^2\theta - \sin^2\theta - 2\cos^2\theta = -\cos^2 x - \sin^2 x = -(\cos^2 x + \sin^2 x) = -1.$