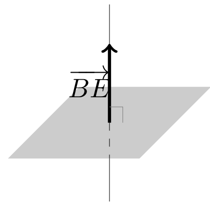
Geometria (11.º ano)

Equações de retas e planos

Exercícios de Provas Nacionais e Testes Intermédios - Propostas de resolução

1. Como o plano α é perpendicular à reta BE, o vetor $\overrightarrow{BE} = (-1{,}6{,}2)$ é um vetor normal do plano, pelo que a equação do plano é da forma:



$$-x + 6y + 2z + d = 0$$

E como o ponto de coordenadas $(1{,}0{,}1)$ pertence ao plano, podemos determinar o valor do parâmetro d, substituindo as coordenadas, na equação anterior:

$$-1+6(0)+2(1)+d = 0+d = 0 \Leftrightarrow -1+0+2+d = 0 \Leftrightarrow 1+d = 0 \Leftrightarrow d = -1$$

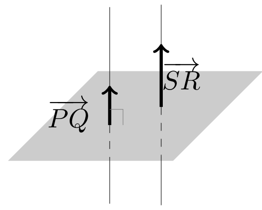
E assim, uma equação do plano α, é:

$$-x + 6y + 2z - 1 = 0 \Leftrightarrow x - 6y - 2z + 1 = 0$$

Resposta: **Opção C**

Exame – 2021, Ép. especial

2. Como $[PQRS]$ é um trapézio de bases $[PQ]$ e $[RS]$, as retas PQ e RS são paralelas. Assim, o plano perpendicular à reta RS também é perpendicular à reta PQ, pelo que o vetor $\overrightarrow{PQ}$ é um vetor normal do plano pretendido.



$$\overrightarrow{PQ} = Q - P = (-2{,}1{,}1) - (1{,}-1{,}2) = (-2-1{,}1-(-1){,}1-2) = (-3{,}2{,}-1)$$

Logo a equação do plano é da forma:

$$-3x + 2y - z + d = 0$$

E como o ponto P pertence ao plano, podemos determinar o valor do parâmetro d, substituindo as coordenadas, na equação anterior:

$$-3(1) + 2(-1) - (2) + d = 0 \Leftrightarrow -3 - 2 - 2 + d = 0 \Leftrightarrow -7 + d = 0 \Leftrightarrow d = 7$$

E assim, plano perpendicular à reta RS e que contém o ponto P, é:

$$-3x + 2y - z + 7 = 0$$

Exame – 2021, 2.ª Fase

3.

3.1. Como se pretende identificar uma reta perpendicular à reta EF, e os respetivos vetores diretores são perpendiculares, calculamos os produtos escalares entre os vetores diretores das retas de cada uma das hipóteses o vetor diretor da reta EF para encontrar um produtos escalares nulos e assim identificar direções perpendiculares à reta EF:

- $(-3,-2,2).(2,-3,0) = -3 \times 2 + (-2) \times (-3) + 2 \times 0 = -6 + 6 + 0 = 0$
- $(-3,-2,2).(0,3,-3) = -3 \times 0 + (-2) \times 3 + 2 \times (-3) = 0 - 6 - 6 = -12$
- $(-3,-2,2).(0,3,3) = -3 \times 0 + (-2) \times 3 + 2 \times 3 = 0 - 6 + 6 = 0$
- $(-3,-2,2).(2,0,-3) = -3 \times 2 + (-2) \times 0 + 2 \times (-3) = -6 + 0 - 6 = -12$

Assim, temos que apenas as retas cujas equações são apresentadas nas opções (A) e (C) são perpendiculares à reta EF, pelo que resta verificar a qual das duas retas pertence o ponto E, substituindo as suas coordenadas em cada uma das equações:

- $(7,2,15) = (7,-3,3) + k(2,-3,0) \Leftrightarrow \begin{cases} 7 = 7 + 2k \\ 2 = -3 - 3k \\ 15 = 3 + 0 \end{cases}$ (condição impossível)
- $(7,2,15) = (7,-10,3) + k(0,3,3) \Leftrightarrow \begin{cases} 7 = 7 + 0 \\ 2 = -10 + 3k \\ 15 = 3 + 3k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 7 = 7 \\ 12 = 3k \\ 12 = 3k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 7 = 7 \\ 4 = k \\ 4 = k \end{cases}$

Ou seja, $(7,2,15) = (7,-10,3) + 4(0,3,3)$, pelo que o ponto E pertence à reta definida pela equação $(x,y,z) = (7,-10,3) + k(0,3,3), k \in \mathbb{R}$

Resposta: **Opção C**

3.2. Como as diagonais de faces opostas de começamos por determinar a equação do plano ABG, para determinar a ordenada do ponto B:

Como $[ABCDEFGH]$ é um paralelepípedo retângulo e a reta EF é perpendicular ao plano ABG, então o vetor diretor da reta ($\vec{u} = (-3, -2{,}2)$), é também um vetor normal do plano, pelo que a equação do plano ABG é da forma:

$$-3x - 2y + 2z + d = 0$$

Como são conhecidas as coordenadas do ponto G ((6,10,13), podemos determinar o valor de d, substituindo as coordenadas na equação anterior:

$$-3(6) - 2(10) + 2(13) + d = 0 \Leftrightarrow -18 - 20 + 26 + d = 0 \Leftrightarrow d = 12$$

Assim temos que a equação do plano ABG é $-3x - 2y + 2z + 12 = 0$ e como o ponto B pertence ao eixo Oy tem abcissa e cota nulas, pelo que a sua ordenada pode ser obtida a partir da equação do plano ABG:

$$-3(0) - 2y + 2(0) + 12 = 0 \Leftrightarrow -2y + 12 = 0 \Leftrightarrow 12 = 2y \Leftrightarrow \frac{12}{2} = y \Leftrightarrow 6 = y$$

Como as arestas paralelas de faces opostas de um paralelepípedo retângulo são congruentes, podemos calcular a medida do raio da superfície esférica:

$$r = \overline{BD} = \overline{GE} = \sqrt{(7-6)^2 + (2-10)^2 + (15-13)^2} = \sqrt{1^2 + (-8)^2 + 2^2} = \sqrt{1 + 64 + 4} = \sqrt{69}$$

Assim, temos que a equação reduzida da superfície esférica de centro no ponto $B(0{,}6{,}0)$ e que passa no ponto D, é:

$$(x-0)^2 + (y-6)^2 + (z-0)^2 = \left(\sqrt{69}\right)^2 \Leftrightarrow x^2 + (y-6)^2 + z^2 = 69$$

Exame – 2021, 1.ª Fase

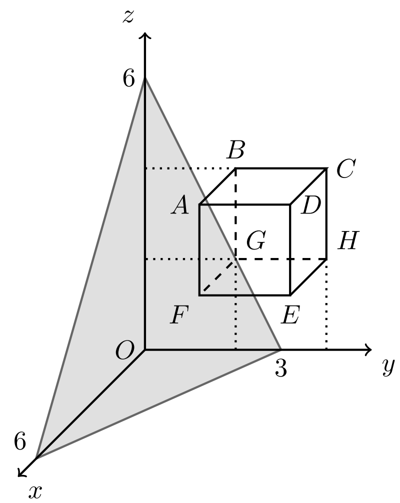
4. Determinando as coordenadas do ponto E, temos:

$$E = B + \overrightarrow{BE} = (0{,}2{,}4) + (2{,}2{,}-2) = (2{,}4{,}2)$$

Como a reta OE é perpendicular ao plano α, um vetor diretor da reta também é um vetor normal do plano, ou seja, o vetor $\overrightarrow{OE}$ (que tem as mesmas coordenadas que o ponto E), é um vetor normal do plano α, e assim a sua equação é da forma:

$$2x + 4y + 2z + d = 0$$

Como a aresta $[BG]$ é paralela ao eixo Oz e a medida da aresta do cubo é 2, temos que as coordenadas do ponto G são $(0{,}2{,}2)$, e como o ponto G pertence ao plano α, podemos determinar o valor do parâmetro d, substituindo as coordenadas, na equação anterior:



$$2(0)+4(2)+2(2)+d = 0 \Leftrightarrow 0+8+4+d = 0 \Leftrightarrow 12+d = 0 \Leftrightarrow d = -12$$

E assim, uma equação do plano α, é:

$$2x + 4y + 2z - 12 = 0 \Leftrightarrow x + 2y + z - 6 = 0$$

Desta forma podemos determinar as coordenadas dos pontos do plano que intersetam os eixos coordenados:

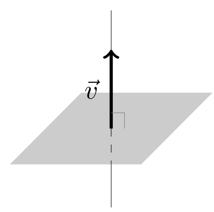
- Ponto P ($y = 0 \wedge z = 0$): $x + 2(0) + (0) - 6 = 0 \Leftrightarrow x = 6$
- Ponto Q ($x = 0 \wedge z = 0$): $0+2y+(0)-6 = 0 \Leftrightarrow 2y = 6 \Leftrightarrow y = 3$
- Ponto R ($y = 0 \wedge z = 0$): $0 + 2(0) + z - 6 = 0 \Leftrightarrow z = 6$

Desta forma a pirâmide $[OPQR]$ pode ser entendida como uma pirâmide cuja base é um triângulo retângulo cujos catetos medem 6 e 3 unidades e cuja altura é 6, ou seja:

$$V_{[OPQR]} = \frac{1}{3} \times A_{[OPQ]} \times \overline{OR} = \frac{1}{3} \times \frac{\overline{OP} \times \overline{OQ}}{2} \times \overline{OR} = \frac{1}{3} \times \frac{3 \times 6}{2} \times 6 = 3 \times 6 = 18$$

Exame – 2020, Ép. especial

5. Como o plano EFG é perpendicular à reta AE, o vetor diretor da reta ($\vec{v} = (3,-6,2)$) é um vetor normal do plano, assim a equação do plano é da forma:



$$3x - 6y + 2z + d = 0$$

E como o ponto G pertence ao plano, podemos determinar o valor do parâmetro d, substituindo as coordenadas, na equação anterior:

$$3(5) - 6(3) + 2(6) + d = 0 \Leftrightarrow 15 - 18 + 12 + d = 0 \Leftrightarrow 9 + d = 0 \Leftrightarrow d = -9$$

E assim, uma equação do plano EFG, é:

$$3x - 6y + 2z - 9 = 0$$

Exame – 2020, 2.ª Fase

6.

6.1. Determinando as coordenadas dos pontos A e B, com recurso à equação que define o plano ABC, temos:

- Como o ponto A pertence ao eixo Ox, tem ordenada e cota nulas, e assim, a sua abcissa é:

$$3x + 4(0) + 4(0) - 12 = 0 \Leftrightarrow 3x + 0 + 0 = 12 \Leftrightarrow x = \frac{12}{3} \Leftrightarrow x = 4$$

- Como o ponto B pertence ao eixo Oy, tem abcissa e cota nulas, e assim, a sua ordenada é:

$$3(0) + 4y + 4(0) - 12 = 0 \Leftrightarrow 0 + 4y + 0 = 12 \Leftrightarrow y = \frac{12}{4} \Leftrightarrow y = 3$$

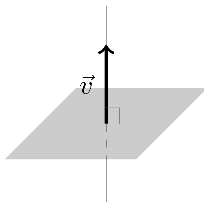
Assim, as coordenadas dos pontos A e B são, respetivamente, (4,0,0) e (0,3,0) e a distância $\overline{AB}$, ou seja, a altura do cilindro, é:

$$\overline{AB} = \sqrt{(0-4)^2 + (3-0)^2 + (0-0)^2} = \sqrt{(-4)^2 + 3^2} = \sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5$$

Como o volume do cilindro (V_C) é igual a 10π podemos determinar $\overline{BC}$, ou seja, a medida do raio da base do cilindro:

$$V_C = \pi \times \overline{BC}^2 \times \overline{AB} \Leftrightarrow 10\pi = \pi \times \overline{BC}^2 \times 5 \Leftrightarrow \frac{10\pi}{5\pi} = \overline{BC}^2 \Leftrightarrow \overline{BC}^2 = 2 \underset{\overline{BC}>0}{\Leftrightarrow} \overline{BC} = \sqrt{2}$$

6.2. Designado por Q o ponto do plano ABC que se encontra mais próximo do ponto P, então a reta PQ é perpendicular ao plano ABC, pelo que o vetor normal do plano ABC ($\overrightarrow{v} = (3,4,4)$)é também um vetor diretor da reta PQ. Assim, temos que uma equação vetorial da reta PQ, é:



$$(x,y,z) = P + \lambda\overrightarrow{v}, \lambda \in \mathbb{R} \Leftrightarrow (x,y,z) = (3,5,6) + \lambda(3,4,4), \lambda \in \mathbb{R}$$

Assim, as coordenadas de todos os pontos da reta PQ, e em particular o ponto do ponto Q, para $\lambda \in \mathbb{R}$, são da forma:

$$(x,y,z) = (3,5,6) + \lambda(3,4,4) = (3 + 3\lambda, 5 + 4\lambda, 6 + 4\lambda)$$

Como o ponto Q pertence ao plano ABC podemos determinar o valor de λ substituindo as coordenadas genéricas do ponto, na equação do plano:

$$3(3+3\lambda) + 4(5+4\lambda) + 4(6+4\lambda) - 12 = 0 \Leftrightarrow 9 + 9\lambda + 20 + 16\lambda + 24 + 16\lambda - 12 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 41\lambda = 12 - 9 - 20 - 24 \Leftrightarrow 41\lambda = -41 \Leftrightarrow \lambda = -\frac{41}{41} \Leftrightarrow \lambda = -1$$

Desta forma temos que as coordenadas do ponto Q são:

$$\big(3 + 3(-1), 5 + 4(-1), 6 + 4(-1)\big) = (3-3, 5-4, 6-4) = (0,1,2)$$

Exame – 2020, 1.ª Fase

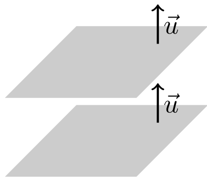
7.

7.1. Substituindo o valor da ordenada do ponto A, $y_A = 4$ na equação da reta r, podemos calcular o valor de k, e depois, o valor da cota do ponto de interseção:

$$\begin{cases} x = 1 + 0k \\ y = 2 + k \\ z = 1 + 5k \end{cases} \underset{y=4}{\Leftrightarrow} \begin{cases} x = 1 \\ 4 = 2 + k \\ z = 1 + 5k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ 2 = k \\ z = 1 + 5 \times 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ k = 2 \\ z = 1 + 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ k = 2 \\ z = 11 \end{cases}$$

Ou seja, as coordenadas do ponto A são $(1,4,11)$

Observando a equação do plano α podemos verificar que $\vec{u} = (2,3,-1)$ é um vetor normal do plano α, e também de todos os planos paralelos ao plano α, cujas equações são da forma:



$$2x + 3y - z + d = 0$$

Como as coordenadas do ponto A são $(1,4,11)$, e este pertence ao plano pretendido, podemos determinar o valor do parâmetro d, substituindo estas coordenadas, na equação anterior:

$$2(1) + 3(4) - 11 + d = 0 \Leftrightarrow 2 + 12 - 11 + d = 0 \Leftrightarrow 3 + d = 0 \Leftrightarrow d = -3$$

Logo, uma equação do plano que é paralelo ao plano α e que passa pelo ponto A é:

$$2x + 3y - z - 3 = 0$$

7.2. As coordenadas de todos os pontos da reta r, e em particular o ponto de interseção da reta r com o plano α, para $k \in \mathbb{R}$, são da forma:

$$(x,y,z) = (1,2,1) + k(0,1,5) = (1 + 0 \times k \ , \ 2 + 1 \times k \ , \ 1 + 5 \times k) = (1 \ , \ 2 + k \ , \ 1 + 5k)$$

Como o ponto de interseção da pertence ao plano α podemos determinar o valor de k substituindo as coordenadas genéricas do ponto, na equação do plano:

$$2(1) + 3(2 + k) - (1 + 5k) - 9 = 0 \Leftrightarrow 2 + 6 + 3k - 1 - 5k - 9 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2 + 6 + 3k - 1 - 5k - 9 = 0 \Leftrightarrow -2k - 2 = 0 \Leftrightarrow -2k = 2 \Leftrightarrow k = \frac{2}{-2} \Leftrightarrow k = -1$$

Desta forma temos que as coordenadas do ponto de interseção da reta r com o plano α, ou seja as coordenadas do ponto P, são:

$$\big(1 \ , \ 2 + (-1) \ , 1 + 5(-1)\big) = (1,1,-4)$$

Exame – 2019, Ép. especial

8.

8.1. Como $[ABCDEFGH]$ é um paralelepípedo e os pontos A, B e G pertencem ao plano xOy (porque têm todos cota nula), então a reta CB é paralela ao eixo Oz, e o ponto B tem abcissa e ordenada, respetivamente iguais às do ponto C e cota nula (porque pertence ao eixo Oy, ou seja, as coordenadas do ponto B são $(0,3,0)$

Como o ponto A pertence ao eixo Ox tem ordenada e cota nulas, e como pertence ao plano ABC, podemos determinar a sua abcissa substituindo o valor da ordenada na equação do plano:

$$3x + 4(0) - 12 = 0 \Leftrightarrow 3x + 0 = 12 \Leftrightarrow x = \frac{12}{3} \Leftrightarrow x = 4$$

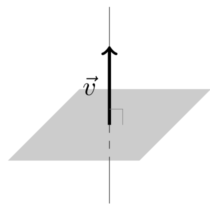
Assim, temos que as coordenadas do ponto A são $(4,0,0)$, e, calculando a distância entre dois pontos, temos que o volume do paralelepípedo, é:

$$V_{[ABCDEFGH]} = \overline{AB} \times \overline{BG} \times \overline{BC} =$$

$$= \sqrt{(4-0)^2 + (0-3)^2 + (0-0)^2} \times \sqrt{(0-6)^2 + (3-11)^2 + (0-0)^2} \times \sqrt{(0-0)^2 + (3-3)^2 + (0-6)^2} =$$

$$= \sqrt{16+9} \times \sqrt{36+64} \times \sqrt{36} = \sqrt{25} \times \sqrt{100} \times 6 = 5 \times 10 \times 6 = 300$$

8.2. Como a reta r é perpendicular ao plano ABC, vetor normal do plano ($\vec{v} = (3,4,0)$) é um vetor diretor da reta, e assim, considerando as coordenadas do ponto P, temos que uma equação vetorial da reta r é:



$$(x,y,z) = (1,-4,3) + \lambda(3,4,0),\ \lambda \in \mathbb{R}$$

Assim, as coordenadas de todos os pontos da reta r, e em particular o ponto de interseção da reta r com o plano ABC, para $\lambda \in \mathbb{R}$, são da forma:

$$(x,y,z) = (1,-4,3) + \lambda(3,4,0) = (1 + 3\lambda, -4 + 4\lambda, 3 + 0 \times \lambda) = (1 + 3\lambda, -4 + 4\lambda, 3)$$

Como o ponto de interseção pertence ao plano ABC podemos determinar o valor de λ substituindo as coordenadas genéricas do ponto, na equação do plano:

$$3(1 + 3\lambda) + 4(-4 + 4\lambda) - 12 = 0 \Leftrightarrow 3 + 9\lambda - 16 + 16\lambda - 12 = 0 \Leftrightarrow 25\lambda = -3 + 16 + 12 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 25\lambda = 25 \Leftrightarrow \lambda = \frac{25}{25} \Leftrightarrow \lambda = 1$$

Desta forma temos que as coordenadas do ponto de interseção da reta r com o plano ABC são:

$$\big(1 + 3 \times 1 - 4 + 4 \times 1,3\big) = (1 + 3, -4 + 4,3) = (4,0,3)$$

Exame – 2019, 2.ª Fase

9. Como a pirâmide é quadrangular regular, considerando M o ponto centro da base, ou seja o ponto médio do segmento $[AC]$, temos que o vetor $\overrightarrow{MV}$ é perpendicular ao plano que contém a base, ou seja, é um vetor normal do plano que contém a base da pirâmide.

   Determinando as coordenadas do ponto M, temos:

   $$\left(\frac{x_A+x_C}{2},\frac{y_A+y_C}{2}+\frac{z_A+z_C}{2}\right)=\left(\frac{2+0}{2},\frac{1+(-1)}{2}+\frac{0+2}{2}\right)=(1{,}0{,}1)$$

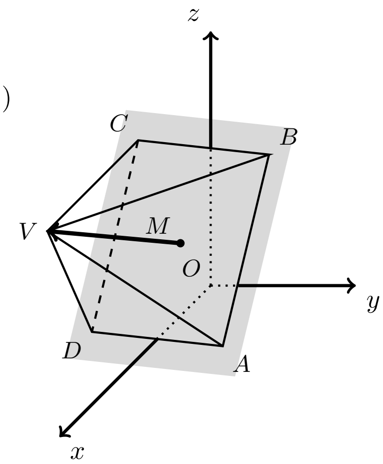
   Calculando as coordenadas do vetor $\overrightarrow{MV}$, temos:

   $$\overrightarrow{MV}=V-M=(3,-1{,}2)-(1{,}0{,}1)=(2,-1{,}1)$$

   Desta forma, a equação do plano é da forma:

   $$2x-y+z+d=0$$

   E como o ponto A pertence ao plano, podemos determinar o valor do parâmetro d, substituindo as coordenadas, na equação anterior:



   $$2(2)-1+0+d=0 \Leftrightarrow 4-1+d=0 \Leftrightarrow 3+d=0 \Leftrightarrow d=-3$$

   E assim, a equação do plano é:

   $$2x-y+z-3=0$$

   Exame – 2019, 1.ª Fase

10. Como o ponto P tem abcissa 1 ($x_P=1$), e ordenada 3 ($y_P=3$), substituindo estas coordenadas na equação da superfície esférica, calculamos a cota (z_P):

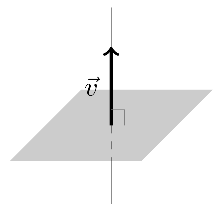
   $$(x_P-1)^2+(y_P-2)^2+(z_P+1)^2=10 \Leftrightarrow (1-1)^2+(3-2)^2+(z_P+1)^2=10 \Leftrightarrow 0^2+1^2+(z_P+1)^2=10 \Leftrightarrow$$

   $$\Leftrightarrow (z_P+1)^2=10-1 \Leftrightarrow z_P+1=\pm\sqrt{9} \Leftrightarrow z_P=-1\pm 3 \Leftrightarrow z_P=-4 \vee z_P=2$$

   Como a cota do ponto P é negativa, as coordenadas do ponto P são $(1{,}3,-4)$

   Como o plano é perpendicular à reta r, vetor diretor da reta ($\vec{v}=(4{,}1,-2)$) é um vetor normal do plano, e assim a equação do plano é da forma:

   $$4x+y-2z+d=0$$



   E como o ponto P pertence ao plano, podemos determinar o valor do parâmetro d, substituindo as coordenadas, na equação anterior:

   $$4(1)+3-2(-4)+d=0 \Leftrightarrow 4+3+8+d=0 \Leftrightarrow 15+d=0 \Leftrightarrow d=-15$$

   E assim, uma equação do plano que passa no ponto P e é perpendicular à reta r, é:

   $$4x+y-2z-15=0$$

   Exame – 2018, 2.ª Fase

11. Como o plano PQR tem equação $2x + 3y - z - 15 = 0$, um vetor normal do plano é $\vec{u} = (2,3, -1)$
Como o prisma é regular então as arestas laterais são perpendiculares ao plano das bases, ou seja, a reta PS é perpendicular ao plano PQR, e assim, o vetor normal do plano da base é também um vetor diretor da reta PS, pelo que, considerando as coordenadas do ponto $S(14,5,0)$, temos que uma equação vetorial da reta PS é:

$$(x,y,z) = (14,5,0) + \lambda(2,3, -1), \lambda \in \mathbb{R}$$

Assim, as coordenadas de todos os pontos da reta PS, e em particular o ponto P, para $\lambda \in \mathbb{R}$, são da forma:

$$(x,y,z) = P + \lambda\vec{u} = (14,5,0) + \lambda(2,3, -1) = (14 + 2\lambda,5 + 3\lambda, -\lambda)$$

Como o ponto P pertence ao plano PQR podemos determinar o valor de λ substituindo as coordenadas genéricas do ponto, na equação do plano:

$$2(14 + 2\lambda) + 3(5 + 3\lambda) - (-\lambda) - 15 = 0 \Leftrightarrow 28 + 4\lambda + 15 + 9\lambda + \lambda - 15 = 0 \Leftrightarrow 28 + 14\lambda = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 14\lambda = -28 \Leftrightarrow \lambda = \frac{-28}{14} \Leftrightarrow \lambda = -2$$

Desta forma temos que as coordenadas do ponto P são:

$$\big(14 + 2(-2),5 + 3(-2), -(-2)\big) = (14 - 4,5 - 6,2) = (10, -1,2)$$

Assim, calculado a distância entre os pontos P e S, temos:

$$\overline{PS} = \sqrt{(14 - 10)^2 + (5 - (-1))^2 + (0 - 2)^2} = \sqrt{4^2 + 6^2 + (-2)^2} = \sqrt{16 + 36 + 4} = \sqrt{56}$$

Assim, calculando a área lateral, ou seja, das 6 faces laterais, e arredondando o resultado às décimas, temos:

$$A_{\text{lateral}} = 6 \times \overline{PQ} \times \overline{PS} = 6 \times 4 \times \sqrt{56} = 24\sqrt{56} \approx 179,6$$

Exame – 2018, 1.ª Fase

12. Como a base inferior do cilindro está contida no plano xOy então os centros das duas bases têm abcissas e ordenadas iguais. Como a cota do centro A é zero e a altura é 3, então as coordenadas do ponto C são $(1,2,3)$
Assim, calculando as coordenadas do vetor $\overrightarrow{BC}$, temos:

$$\overrightarrow{BC} = C - B = (1,2,3) - (1,3,0) = (0, -1,3)$$

E assim, uma equação vetorial da reta com a direção do vetor $\overrightarrow{BC}$ e que contenha o ponto B, ou seja, a reta BC, é:

$$(x,y,z) = (1,3,0) + k(0, -1,3),k \in \mathbb{R}$$

O ponto de intersecção da reta BC com o plano xOz é o ponto da reta BC que tem ordenada nula, como todos os restantes pontos do plano xOz.
Assim, substituindo $y = 0$ na equação da reta, podemos calcular de k, e depois, o valor da cota do ponto de interseção:

$$\begin{cases} x = 1 + 0k \\ y = 3 - k \\ z = 0 + 3k \end{cases} \underset{y=0}{\Leftrightarrow} \begin{cases} x = 1 \\ 0 = 3 - k \\ z = 3k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ k = 3 \\ z = 3 \times 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ k = 3 \\ z = 9 \end{cases}$$

Ou seja as coordenadas do ponto de interseção da reta BC com o plano xOz são $(1,0,9)$

Exame – 2017, Ép. especial

13. Sabemos que:
    - ponto A pertence ao plano xOy, pelo que tem cota nula ($z_A = 0$)
    - a aresta $[DA]$ pertence ao plano xOy e é perpendicular ao eixo Oy, pelo que a ordenada do ponto A é igual à ordenada do ponto D ($y_A = y_D = 4$)

    Assim, substituindo os valores da ordenada e da cota do ponto A na equação do plano ACG, podemos calcular o valor da abcissa (x_A):

$$x_A + y_A - z_A - 6 = 0 \Leftrightarrow x_A + 4 + 0 - 6 = 0 \Leftrightarrow x_A - 2 = 0 \Leftrightarrow x_A = 2$$

Exame – 2017, 2.ª Fase

14. Como o ponto Q pertence ao eixo Oy tem abcissa e cota nulas, e como pertence ao plano PQV de equação $x + y = 2$, substituindo o valor da abcissa podemos calcular o valor da ordenada:

$$0 + y_Q = 2 \Leftrightarrow y_Q = 2$$

Assim, verificando que o ponto T tem coordenadas (0,0,3), calculamos as coordenadas do vetor $\overrightarrow{TQ}$:

$$\overrightarrow{TQ} = Q - T = (0,2,0) - (0,0,3) = (0,2,-3)$$

Assim, considerando $\overrightarrow{TQ}$ é um vetor diretor da reta TQ e que o ponto Q pertence à reta, temos que uma equação vetorial da reta é:

$$(x,y,z) = (0,2,0) + \lambda(0,2,-3), \lambda \in \mathbb{R}$$

Exame – 2017, 1.ª Fase

15.

15.1. Como o plano OFB é definido pela equação $3x + 3y - z = 0$, então o vetor $\vec{v} = (3,3,-1)$ é um vetor normal do plano OFB, e também de todos os planos paralelos a este plano.
Como a reta AF é paralela ao eixo Oz, então as abcissas e ordenadas dos pontos A e F são iguais, pelo que as coordenadas do ponto F são da forma $F(0,2,z_F)$, e como o ponto F pertence ao plano OFB, podemos determinar a sua cota, recorrendo à equação do plano:

$$3(0) + 3(2) - z_F = 0 \Leftrightarrow 0 + 6 = z_F \Leftrightarrow 6 = z_F$$

Como o ponto D tem a mesma cota do ponto F e a base do prisma é um quadrado paralelo ao plano xOy, pela observação da figura, temos que $x_D = -y_F$ e as coordenadas do ponto D são $D(-2,0,6)$
Finalmente, como o plano paralelo ao plano OFB que contém o ponto D tem uma equação da forma $3x + 3y - z + d = 0$, substituindo as coordenadas do ponto D, podemos determinar o valor de d:

$$3(-2) + 3(0) - 6 + d = 0 \Leftrightarrow -6 + 0 - 6 + d = 0 \Leftrightarrow d = 12$$

E assim, a equação do plano é:

$$3x + 3y - z + 12 = 0$$

15.2. Como o ponto B tem a mesma cota do ponto A e a base do prisma é um quadrado contido no plano xOy, pela observação da figura, temos que $x_B = -y_A$ e as coordenadas do ponto B são $D(-2,2,0)$
Desta forma, um vetor diretor da reta OB é

$$\overrightarrow{OB} = B - O = (-2,2,0) - (0,0,0) = (-2,2,0)$$

E uma equação vetorial da reta OB é:

$$(x,y,z) = (0,0,0) + \lambda(-2,2,0), \lambda \in \mathbb{R}$$

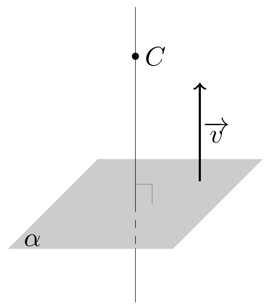
Exame – 2016, Ép. especial

16. Como um vetor normal de um plano define uma direção perpendicular ao plano, um destes vetores é também um vetor diretor de qualquer reta perpendicular ao plano.

    Assim, como $\overrightarrow{v} = (3,2,4)$ é um vetor normal do plano α, também é um vetor diretor da reta perpendicular ao plano α e que contém o ponto $C(2,1,4)$

    Assim, uma equação vetorial da reta, é:

$$(x,y,z) = (2,1,4) + \lambda(3,2,4), \lambda \in \mathbb{R}$$



Exame – 2016, 2.ª Fase

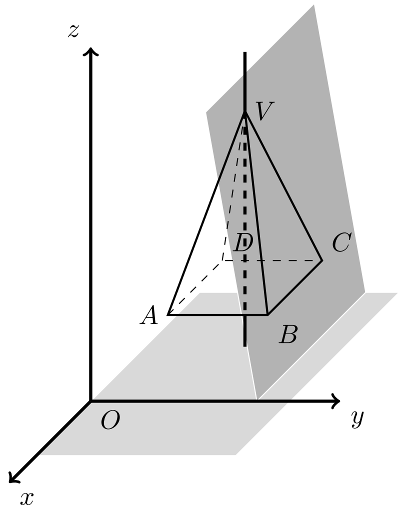
17. As coordenadas do ponto V podem ser determinadas pela interseção do plano BCV e da reta perpendicular à base da pirâmide que contém a projeção vertical do ponto V no plano xOy
    Esta reta pode ser definida como a interseção dos planos mediadores dos segmentos $[AB]$ e $[BC]$:

$$x = -2 \wedge y = 2$$

    E assim, fazendo a substituição na equação do plano BCV, calculamos a cota do ponto V:

$$3(2) + z = 10 \Leftrightarrow z = 10 - 6 \Leftrightarrow z = 4$$

    Ou seja, as coordenadas do ponto V são $(-2,2,4)$



Exame – 2016, 1.ª Fase

18. Como a reta OP é perpendicular ao plano β, qualquer vetor com a direção da reta (e em particular o $\overrightarrow{OP}$) e o vetor normal do plano $\vec{u}$ são colineares.

    Temos que $\vec{u} = (2,-1,1)$ e $\overrightarrow{OP} = P - O = (-2,1,3a) - (0,0,0) = (-2,1,3a)$

    Como os vetores são colineares, temos que $\overrightarrow{OP} = \lambda\vec{u}, \lambda \in \mathbb{R}$

$$(-2,1,3a) = \lambda(2,-1,1) \Leftrightarrow -2 = 2\lambda \wedge 1 = -1\lambda \wedge 3a = \lambda \Leftrightarrow -1\lambda \wedge -1 = \lambda \wedge a = \frac{\lambda}{3}$$

    Logo, temos que:

$$a = \frac{-1}{3} \Leftrightarrow a = -\frac{1}{3}$$

Exame – 2015, Ép. especial

19.

19.1. Como a pirâmide que integra o sólido é regular, a projeção ortogonal do vértice V no plano da base coincide com o centro geométrico da base, V pertence ao plano de equação $x = 1$ e $y = 1$, ou seja tem de coordendas $(1,1,k), k \in \mathbb{R}$

Como o ponto V também pertence ao plano de equação $6x + z - 12 = 0$, podemos calcular a cota do ponto fazendo a substituição $x = 1$, na equação deste plano:

$$6(1) + z - 12 = 0 \Leftrightarrow 6 + z = 12 \Leftrightarrow z = 12 - 6 \Leftrightarrow z = 6$$

Assim, temos temos que as coordenadas do ponto V são $(1,1,6)$

19.2. Como se pretende escrever uma equação de um plano perpendicular à reta OR, o vetor $\overrightarrow{OR}$ é um vetor normal do plano. Como O é a origem do referencial, as coordenadas do vetor $\overrightarrow{OR}$, coincidem com as do ponto R, ou seja

$$\overrightarrow{OR} = (2,2,2)$$

Assim, temos que a equação do plano pretendido pode ser da forma $2x + 2y + 2z + d = 0$
Como o ponto P pertence ao eixo Ox e o cubo tem aresta 2, temos que as suas coordenadas são $P(2,0,0)$.
Para determinar o valor de d, na equação do anterior, substituímos as coordenadas do ponto P, porque as estas verificam a equação do plano, porque o ponto pertence ao plano:

$$2(2) + 2(0) + 2(0) + d = 0 \Leftrightarrow 4 + 0 + 0 + d = 0 \Leftrightarrow d = -4$$

Pelo que, uma equação cartesiana do plano que passa no ponto P e é perpendicular à reta OR é

$$2x + 2y + 2z - 4 = 0$$

Ou, simplificando, $x + y + z - 2 = 0$

Exame – 2015, 2.ª Fase

20. Pela observação da equação do plano α, temos que um vetor normal é $\vec{u} = (1, -2,1)$
Assim, um plano paralelo ao plano α, pode ser definido à custa de um qualquer vetor colinear com $\vec{u}$, e em particular, à custa do mesmo vetor, pelo que uma equação de um plano paralelo a α é

$$x - 2y + z + d = 0, \ (d \in \mathbb{R})$$

Como se pretende que o plano contenha o ponto $A(0,0,2)$, substituindo as coordenadas do ponto A na expressão anterior, vem

$$0 - 2(0) + 2 + d = 0 \Leftrightarrow 2 = d \Leftrightarrow d = -2$$

pelo que uma equação do plano que passa no ponto A e é paralelo ao plano α, é

$$x - 2y + z - 2 = 0$$

Exame – 2015, 1.ª Fase

21. Os planos definidos pelas equações das opções (C) e (D) não contêm o ponto A, porque substituindo as coordenadas do ponto nas equações, obtemos proposições falsas:
(C) $2(1) - 3(0) + (3) = 0 \Leftrightarrow 2 - 0 + 3 = 0 \Leftrightarrow 5 = 0$ e (D) $3(1) + 2(0) = 0 \Leftrightarrow 3 + 0 = 0 \Leftrightarrow 3 = 0$

O plano definido pela equação da opção (A) não é perpendicular ao plano α, porque os respetivos vetores normais $\overrightarrow{v_\alpha} = (3,2,0)$ e $\overrightarrow{v_A} = (3,2,0)$ são colineares, ou seja, os planos são paralelos e não perpendiculares.

O plano definido pela equação da opção (B) é perpendicular ao plano α, porque os respetivos vetores normais $\overrightarrow{v_\alpha} = (3,2,0)$ e $\overrightarrow{v_B} = (2,-3,-1)$ têm um produto escalar nulo, ou seja são perpendiculares, assim, como os planos:

$$\overrightarrow{v_\alpha}.\overrightarrow{v_B} = (3,2,0).(2,-3,-1) = 3 \times 2 + 2(-3) + 0(-1) = 6 - 6 + 0 = 0$$

e este plano contém o ponto A, porque com a substituição das coordenadas deste ponto, obtemos uma proposição verdadeira:

$$2(1) - 3(0) - 3 + 1 = 0 \Leftrightarrow 2 - 0 - 3 + 1 = 0 \Leftrightarrow 0 = 0$$

Resposta: **Opção B**

Exame – 2014, 2.ª Fase

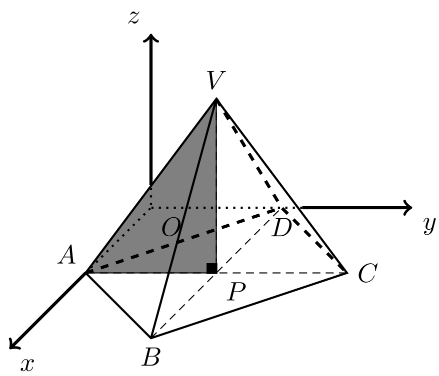
22.

22.1. Como o vértice V tem abcissa e ordenada iguais a 6, então $\overline{AP} = 6$ e a base da pirâmide pertence ao plano xOy e é perpendicular à altura da pirâmide, então a cota é a medida do outro cateto do triângulo $[APV]$, retângulo em P, cuja hipotenusa mede 10 ($\overline{AV} = 10$)

Assim, calculando a cota do vértice V ($z_V = \overline{PV}$), temos:

$$\overline{PV}^2 + \overline{AP}^2 = \overline{AV}^2 \Leftrightarrow \overline{PV}^2 + 6^2 = 10^2 \Leftrightarrow \overline{PV}^2 = 100 - 36 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \overline{PV}^2 = 64 \Leftrightarrow \overline{PV} = \pm\sqrt{64} \underset{\overline{PV}>0}{\Rightarrow} \overline{PV} = 8$$



22.2. O ponto B tem de coordenadas $(12,6,0)$ e o ponto V, $(6,6,8)$, pelo que as coordenadas do ponto M são:

$$\left(\frac{12+6}{2}, \frac{6+6}{2}, \frac{8+0}{2}\right) = \left(\frac{18}{2}, \frac{12}{2}, \frac{8}{2}\right) = (9,6,4)$$

Como o ponto C tem coordenadas $(6,12,0)$, calculando as coordenadas do vetor $\overrightarrow{CM}$, temos:

$$\overrightarrow{CM} = M - C = (9,6,4) - (6,12,0) = (3,-6,4)$$

E assim, uma equação vetorial da reta com a direção do vetor $\overrightarrow{CM}$ e que contenha o ponto C, ou seja, a reta CM, é:

$$(x,y,z) = (6,12,0) + k(3,-6,4), k \in \mathbb{R}$$

22.3. Como o ponto D tem coordenadas (0,6,0), calculando as coordenadas do vetor $\overrightarrow{DV}$, temos:

$$\overrightarrow{DV} = V - D = (6{,}6{,}8) - (0{,}6{,}0) = (6{,}0{,}8)$$

E assim, uma equação cartesiana do plano que é perpendicular à aresta $[DV]$, é da forma

$$6x + 0y + 8z + d = 0 \Leftrightarrow 6x + 8z + d = 0$$

Desta forma, podemos determinar o valor do parâmetro d, substituindo as coordenadas do ponto P, ou seja, as coordenadas (6,6,0) na equação anterior, garantindo que a equação representa um plano que contém o ponto P:

$$6(6) + 8(0) + d = 0 \Leftrightarrow 36 + 0 + d = 0 \Leftrightarrow d = -36$$

Logo, uma equação cartesiana do plano que passa no ponto P e que é perpendicular à aresta $[DV]$, é:

$$6x + 8z - 36 = 0 \Leftrightarrow 6x + 8z = 36$$

Teste Intermédio 12.º ano – 30.04.2014

23. Como dois planos paralelos admitem o mesmo vetor normal, temos que qualquer plano definido por uma equação da forma $x + y + 2z = d, d \in \mathbb{R}$ é paralelo ao plano ABC

Desta forma, podemos determinar o valor do parâmetro d, substituindo as coordenadas do ponto D na equação anterior, garantindo que a equação representa um plano que contém o ponto D:

$$1 + 2 + 2 \times 3 = d \Leftrightarrow 3 + 6 = d \Leftrightarrow d = 9$$

Logo, uma equação cartesiana do plano que passa no ponto D e que é paralelo ao plano ABC, é:

$$x + y + 2z = 9$$

Teste Intermédio 11.º ano – 11.03.2014

24.

24.1. Como o plano FGH contém as arestas $[FG]$ e $[GH]$ do cubo, que são perpendiculares à aresta $[FA]$, então o vetor $\overrightarrow{FA}$ é um vetor normal do plano FGH, e assim, uma equação cartesiana do plano que é perpendicular à aresta $[FA]$, é da forma

$$2x + 3y + 6z + d = 0$$

Desta forma, podemos determinar o valor do parâmetro d, substituindo as coordenadas do ponto F, na equação anterior, porque o plano FGH contém o ponto F:

$$2(1) + 3(3) + 6(-4) + d = 0 \Leftrightarrow 2 + 9 - 24 + d = 0 \Leftrightarrow d = 24 - 11 \Leftrightarrow d = 13$$

Logo, uma equação cartesiana do plano FGH é:

$$2x + 3y + 6z + 13 = 0$$

24.2. Como o plano HCD é perpendicular à reta EF, o vetor $\vec{u} = (6,2,-3)$, vetor normal do plano é um vetor diretor da reta, ou seja, a reta EF é definida pela equação vetorial $(x,y,z) = F + k\vec{u}, k \in \mathbb{R}$
Assim, todos os pontos da reta EF, e em particular o ponto E, para $k \in \mathbb{R}$, são da forma:

$$(x,y,z) = F + k\vec{u} = (1,3,-4) + k(6,2,-3) = (1+6k,3+2k,-4-3k)$$

Como todos os pontos do plano HCD, e em particular o ponto E, verificam a equação $6x + 2y - 3z + 25 = 0$, podemos calcular o valor de k relativo à forma genérica dos pontos da reta EF:

$$6(1+6k) + 2(3+2k) - 3(-4-3k) + 25 = 0 \Leftrightarrow 6 + 36k + 6 + 4k + 12 + 9k + 25 = 0 \Leftrightarrow$$

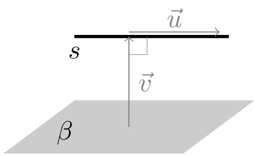
$$\Leftrightarrow 36k + 4k + 9k = -25 - 12 - 6 - 6 \Leftrightarrow 49k = -49 \Leftrightarrow k = -\frac{49}{49} \Leftrightarrow k = -1$$

E assim, considerando $k = -1$ na forma genérica dos pontos da reta EF, obtemos as coordenadas do ponto E:

$$E = F - \vec{u} = (1,3,-4) - (6,2,-3) = (-5,1,-1)$$

Teste Intermédio 11.º ano – 06.03.2013

25. Como um vetor normal do plano β tem a direção perpendicular ao plano, e o vetor diretor da reta s tem a direção da reta, então se a reta s é paralela ao plano β, o vetor normal do plano e o vetor diretor da reta devem ser perpendiculares, ou seja, o produto escalar deve ser nulo.



Assim, identificando as coordenadas do vetor diretor da reta s, $\vec{u} = (1,1,-1)$, e do vetor normal do plano β, $\vec{v} = (3,3,a)$, temos que o valor de a, para o qual a reta s é paralela ao plano β, é:

$$\vec{u} \,.\, \vec{v} = 0 \Leftrightarrow (1,1,-1) \,.\, (3,3,a) = 0 \Leftrightarrow 1 \times 3 + 1 \times 3 + (-1) \times a = 0 \Leftrightarrow 3 + 3 - a = 0 \Leftrightarrow 6 = a$$

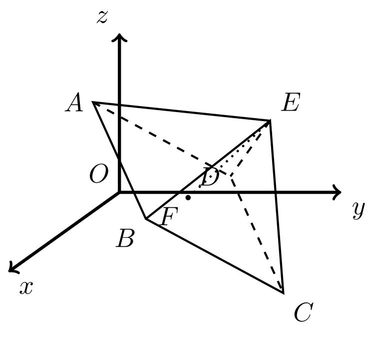
Resposta: **Opção D**

Teste Intermédio 11.º ano – 09.02.2012

26. Como o plano que contém a base é perpendicular à altura, temos que o plano ABC é perpendicular à reta FE, ou seja, o vetor $\overrightarrow{FE}$ é um vetor normal do plano ABC

Assim, o plano ABC é definido por uma equação da forma

$$-x + 2y + 2z + d = 0$$



E podemos determinar o valor do parâmetro d, substituindo as coordenadas do ponto F, na equação anterior, porque o plano ABC contém o ponto F:

$$-(-2) + 2(1) + 2(-1) + d = 0 \Leftrightarrow 2 + 2 - 2 + d = 0 \Leftrightarrow d = -2$$

Desta forma, temos que o plano ABC pode ser definido pela equação

$$-x + 2y + 2z - 2 = 0 \Leftrightarrow x - 2y - 2z + 2 = 0$$

Teste Intermédio 11.º ano – 09.02.2012

27.

27.1. Qualquer plano paralelo ao plano QTV pode ser definido pelo mesmo vetor normal, pelo que a equação cartesiana que o define é da forma:

$$5x + 2y + 2z = d$$

Como o plano deve conter a origem do referencial, podemos determinar o valor do parâmetro d, substituindo as coordenadas da origem, na equação anterior:

$$5(0) + 2(0) + 2(0) = d \Leftrightarrow 0 = d$$

E assim a equação que define o plano paralelo ao plano QTV e passa na origem do referencial é:

$$5x + 2y + 2z = 0$$

27.2. Como a projeção vertical do vértice V sobre a base da pirâmide é o ponto de coordenadas $(2,-2,0)$, a altura do prisma é a cota do vértice V, e pode ser calculada substituindo a abcissa e a ordenada na equação do plano QTV:

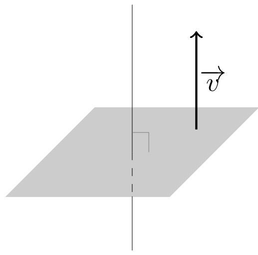
$$5(2) + 2(-2) + 2z = 12 \Leftrightarrow 10 - 4 + 2z = 12 \Leftrightarrow 2z = 12 - 10 + 4 \Leftrightarrow z = \frac{6}{2} \Leftrightarrow z = 3$$

Desta forma o volume do poliedro $[VNOPQURST]$, pode ser calculado como a soma do volume de um cubo de lado 4, e uma pirâmide quadrangular cujo lado da base é 4 e a altura é 3:

$$V_{[VNOPQURST]} = x_U^3 + \frac{1}{3} \times x_U^2 \times z_V = 4^3 + \frac{4^2 \times 3}{3} = 64 + 16 = 80$$

Teste Intermédio 11.º ano – 27.01.2011

28. Como o ponto A pertence ao eixo Ox, tem ordenada e cota nulas, pelo que a abcissa pode ser calculada substituindo estas coordenadas na equação do plano ABC:



$$6x + 3(0) + 4(0) = 12 \Leftrightarrow 6x + 0 + 0 = 12 \Leftrightarrow x = \frac{12}{6} \Leftrightarrow x = 2$$

Desta forma as coordenadas do ponto A são $(2,0,0)$ e como a reta r é perpendicular ao plano ABC, então o vetor normal do plano, $\vec{v} = (6,3,4)$, é também o vetor diretor da reta.
E assim, uma equação vetorial da reta r é:

$$(x,y,z) = A + k\,.\,\vec{v}, k \in \mathbb{R} \Leftrightarrow (x,y,z) = (2,0,0) + k(6,3,4), k \in \mathbb{R}$$

Teste Intermédio 11.º ano – 06.05.2010

29.

29.1. Como o ponto A pertence ao eixo Ox, tem ordenada e cota nulas, pelo que a abcissa pode ser calculada substituindo estas coordenadas na equação do plano ADV:

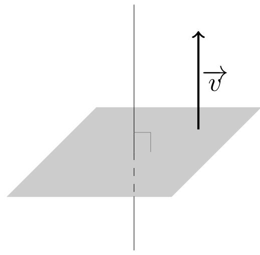
$$6x + 18(0) - 5(0) = 24 \Leftrightarrow 6x + 0 - 0 = 24 \Leftrightarrow x = \frac{24}{6} \Leftrightarrow x = 4$$

Desta forma as coordenadas do ponto A são $(4,0,0)$ e assim podemos calcular a medida do lado da base da pirâmide:

$$\overline{AB} = \sqrt{(5-4)^2 + (3-0)^2 + (0-0)^2} = \sqrt{1+9+0} = \sqrt{10}$$

Como o ponto V tem cota 6 que é a altura da pirâmide, então o volume é:

$$V_{[ABCDV]} = \frac{1}{3} \times \overline{AB}^2 \times z_V = \frac{\left(\sqrt{10}\right)^2 \times 6}{3} = 10 \times 2 = 20$$



29.2. Como a reta r é perpendicular ao plano ADV, então o vetor normal do plano, $\vec{v} = (6{,}18{,}-5)$, é também o vetor diretor da reta, e como a reta contém o ponto $S(-1{,}-15{,}5)$, então uma condição vetorial da reta r é:

$$(x{,}y{,}z) = (-1{,}-15{,}5) + \lambda(6{,}18{,}-5),\ \lambda \in \mathbb{R}$$

Verificando se existe um valor de λ que seja compatível com as coordenadas do ponto B, temos que:

$$\begin{cases} 5 = -1 + 6\lambda \\ 3 = -15 + 18\lambda \\ 0 = 5 - 5\lambda \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{5+1}{6} = \lambda \\ \dfrac{3+15}{18} = \lambda \\ 5\lambda = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{6}{6} = \lambda \\ \dfrac{18}{18} = \lambda \\ \lambda = \dfrac{5}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 = \lambda \\ 1 = \lambda \\ \lambda = 1 \end{cases}$$

Logo, podemos concluir que as coordenadas do ponto B satisfazem a condição da reta r, ou seja, o ponto B pertence à reta r

Teste Intermédio 11.º ano – 27.01.2010

30.

30.1. Como a base do prisma é um quadrado em que um dos vértices coincide com a origem e os vértices adjacentes estão sobre os semieixos positivos Ox e Oy, então a abcissa e a ordenada do ponto P são iguais.
Designado por a, a abcissa do ponto P, temos que a área da base do prisma é:

$$A = a \times a = a^2$$

A altura do prisma é a cota do ponto P, que pode ser determinada substituindo na equação do plano ABC a abcissa e a ordenada por a:

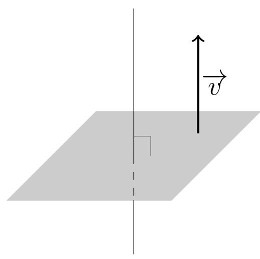
$$a + 2a + 3z_P = 9 \Leftrightarrow 3a + 3z_P = 9 \Leftrightarrow z_P = \frac{9-3a}{3} \Leftrightarrow z_P = 3 - a$$

Desta forma o volume do prisma é dado por:

$$V = A \times z_P = a^2 \times (3-a) = 3a^2 - a^3$$

30.2. Como o ponto A pertence ao eixo Ox, tem ordenada e cota nulas, pelo que a abcissa pode ser calculada substituindo estas coordenadas na equação do plano ABC:

$$x + 2(0) + 3(0) = 9 \Leftrightarrow x + 0 + 0 = 9 \Leftrightarrow x = 9$$



Desta forma as coordenadas do ponto A são $(9{,}0{,}0)$ e como a reta r é perpendicular ao plano ABC, então o vetor normal do plano, $\vec{v} = (1{,}2{,}3)$, é também o vetor diretor da reta.
E assim, uma equação vetorial da reta r é:

$$(x{,}y{,}z) = A + \lambda\,.\,\vec{v},\ \lambda \in \mathbb{R} \Leftrightarrow (x{,}y{,}z) = (9{,}0{,}0) + \lambda(1{,}2{,}3),\ \lambda \in \mathbb{R}$$

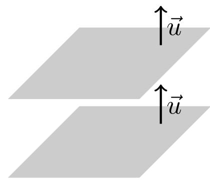
Teste Intermédio 11.º ano – 07.05.2009

31.

31.1. Como o plano γ é paralelo ao plano α, o vetor normal do plano α, $\vec{u} = (1,2,-2)$ também é um vetor normal do plano γ, pelo que este plano é definido por uma equação da forma:

$$x + 2y - 2z = d$$

Como as coordenadas do ponto V são $(1,2,6)$, e o ponto V pertence ao plano γ, podemos determinar o valor do parâmetro d, substituindo estas coordenadas, na equação anterior:



$$1 + 2(2) - 2(6) = d \Leftrightarrow 1 + 4 - 12 = d \Leftrightarrow d = -7$$

E assim, uma equação que define o plano paralelo ao plano QTV e passa na origem do referencial é:

$$x + 2y - 2z = -7$$

31.2. Se os planos α e β são perpendiculares, então os respetivos vetores normais também são perpendiculares.
Assim, identificando os dois vetores normais $\vec{u} = (1,2,-2)$ e $\vec{v} = (2,-1,1)$ e calculando o produto escalar, temos:

$$\vec{u} \, . \, \vec{v} = (1,2,-2) \, . \, (2,-1,1) = 1 \times 2 + 2 \times (-1) + (-2) \times 1 = 2 - 2 - 2 = -2$$

Desta forma, como $\vec{u} \, . \, \vec{v} \neq 0$, podemos concluir que os planos α e β não são perpendiculares.

Teste Intermédio 11.º ano – 29.01.2009

32. Como $x = 1$, a abcissa de A é x e o vértice A tem sempre abcissa igual à ordenada, então as coordenadas do ponto A são $(1,1,0)$
Como a pirâmide é regular e o vértice está sobre o eixo Oz, então o ponto B é simétrico do ponto A relativamente ao plano yOz, ou seja, as coordenadas do ponto B são $(-1,1,0)$
Como o ponto E pertence ao semieixo positivo Oz, tem abcissa e ordenada nulas e a cota c verifica a condição $x + c = 6$, ou seja, $1 + c = 6 \Leftrightarrow c = 5$, pelo que as coordenadas do ponto E são $(0,0,5)$

Para determinar uma equação do plano ABE, vamos determinar as coordenadas de dois vetores, não colineares, do plano ABE:

$$\overrightarrow{AB} = B - A = (-1,1,0) - (1,1,0) = (-2,0,0)$$

$$\overrightarrow{AE} = E - A = (0,0,5) - (1,1,0) = (-1,-1,5)$$

Podemos agora determinar as coordenadas de um vetor perpendicular aos dois vetores do plano ($\vec{u} = (a,b,c)$), que é um vetor normal do plano ABE:

$$\begin{cases} (a,b,c).(-2,0,0) = 0 \\ \\ (a,b,c).(-1,-1,5) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2a = 0 \\ \\ -a - b + 5c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ \\ 5c = b \end{cases}$$

Assim temos que qualquer vetor normal ao plano ABE é da forma $\vec{u} = (0,5c,c) \, , c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ Ou seja, concretizando um valor para c, por exemplo, $c = 1$, vem $\vec{u} = (0,5,1)$, pelo que a equação do plano ABE é da forma:

$$5y + z = d$$

E recorrendo às coordenadas do ponto A que pertence ao plano ABE, podemos determinar o valor do parâmetro d, substituindo estas coordenadas, na equação anterior:

$$5(1) + 0 = d \Leftrightarrow d = 5$$

E assim, uma equação do plano ABE é $5y + z = 5$

Teste Intermédio 11.º ano – 06.05.2008

33. Identificando os vetores normais do plano α ($\vec{u} = (1,1,-1)$) e do plano β ($\vec{v} = (2,2,-2)$) e observando que $\vec{v} = 2\vec{u}$, ou seja, que os vetores normais dos dois planos são colineares, podemos afirmar que os planos são paralelos.

Assim, se os planos forem estritamente paralelos, não têm qualquer ponto em comum, e por isso, a intersecção dos planos α e β é o conjunto vazio; ou, em alternativa, se tiverem, pelo menos um ponto m comum, os planos são coincidentes e a sua interseção é um plano.

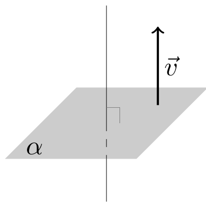
Considerando, por exemplo o ponto de coordenadas (1,0,0), podemos verificar que pertence ao plano α, porque $1 + 0 - 0 = 1$, mas não pertence ao plano β porque $2(1) + 2(0) - 2(0) \neq 1$, e assim, o que nos permite afirmar que os dois planos são estritamente paralelos e, por isso, a intersecção dos planos α e β é o conjunto vazio.

Resposta: **Opção A**

Teste Intermédio 11.º ano – 24.01.2008

34. De acordo com a sugestão, começamos por determinar a equação do plano α
Como o plano é perpendicular à reta, então o vetor diretor da reta, $\vec{v} = (1,0,2)$, é também o vetor normal do plano, pelo que a equação do plano α é da forma:

$$x + 2z = d$$



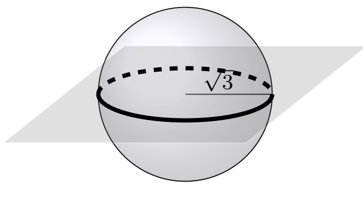
E recorrendo às coordenadas do ponto $P(0,4,3)$ que pertence ao plano, podemos determinar o valor do parâmetro d, substituindo estas coordenadas, na equação anterior:

$$0 + 2(3) = d \Leftrightarrow d = 6$$

E assim, uma equação do plano α é $x + 2z = 6$

Ainda de acordo com a sugestão, podemos verificar que o centro da esfera pertence ao plano α, porque as suas coordenadas $(-2,1,4)$ verificam a equação do plano $-2 + 2(4) = 6$

Como o centro da esfera pertence ao plano α, a interseção da esfera com o plano é um círculo de raio igual ao da esfera.



Observando a equação da esfera podemos verificar que o raio da esfera (e do círculo) é $\sqrt{3}$, pelo que a área da secção é:

$$A_\circ = \pi r^2 \Leftrightarrow \pi \times \left(\sqrt{3}\right)^2 = 3\pi$$

Teste Intermédio 11.º ano – 10.05.2007

35. Como a base $[EFGH]$ do paralelepípedo está contida no plano xOy e a aresta $[GF]$ está contida no eixo Oy, então a aresta $[GH]$ é perpendicular ao eixo Oy e assim as coordenadas do ponto G são $(0, -2{,}0)$

Para determinar uma equação do plano AGH, vamos determinar as coordenadas de dois vetores, não colineares, do plano AGH:

$$\overrightarrow{GH} = H - G = (1, -2,0) - (0, -2,0) = (1-0, -2-(-2), 0-0) = (1,0,0)$$

$$\overrightarrow{GA} = A - G = (1,1,1) - (1, -2,0) = (1-1, 1-(-2), 1-0) = (0,3,1)$$

Podemos agora determinar as coordenadas de um vetor perpendicular aos dois vetores do plano ($\vec{u} = (a,b,c)$), que é um vetor normal do plano AGH:

$$\begin{cases} (a,b,c).(1,0,0) = 0 \\ \\ (a,b,c).(0,3,1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ \\ 3b + c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ \\ c = -3b \end{cases}$$

Assim temos que qualquer vetor normal ao plano AGH é da forma $\vec{u} = (0,b, -3b)\,, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ Ou seja, concretizando um valor para b, por exemplo, $b = 1$, vem $\vec{u} = (0,1, -3)$, pelo que a equação do plano ABE é da forma:

$$y - 3z + d = 0$$

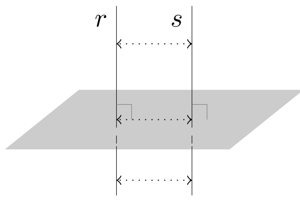
E recorrendo às coordenadas do ponto G que pertence ao plano AGH, podemos determinar o valor do parâmetro d, substituindo estas coordenadas, na equação anterior:

$$-2 - 3(0) + d = 0 \;\Leftrightarrow\; d = 2$$

E assim, uma equação do plano AGH é $y - 3z + 2 = 0$

Exame – 2001, Prova de reserva (cód. 135)

36. Como as duas retas são perpendiculares ao mesmo plano, são paralelas entre si, e portanto, complanares, não concorrentes e não perpendiculares.



Resposta: **Opção C**

Exame – 2001, Ép. especial (cód. 135)

37. Observando as opções apresentadas, podemos excluir as opções (B) e (D), porque os vetores normais de cada um dos planos apresentados não é colinear com o vetor normal do plano α

Como o ponto $(0,1,2)$ pertence ao plano β, substituindo as coordenadas do ponto em cada uma das restantes opções opções, podemos verificar que uma equação deste plano é a opção (C), porque $-0 - 2(1) + 2 = 0$ e não a opção (A) porque $0 + 2(1) - 2 \neq 1$

Resposta: **Opção C**

Exame – 2001, 2.ª fase (cód. 135)

38. Como três dos vértices do cubo estão sobre os eixos coordenados, pela observação da figura podemos concluir que a face $[OEFG]$ pertence ao plano xOy

Como o ponto H é o centro da face $[OGFE]$, o vértice O é a origem do referencial e as arestas $[OE]$ e $[OG]$ pertencem aos eixos Ox e Oy, respetivamente, então a abcissa e a ordenada do ponto H são iguais e o seu valor numérico é igual a metade do comprimento da aresta do cubo $\left(\frac{\overline{OE}}{2}\right)$.

Assim, temos que as coordenadas do ponto H são $\left(\frac{\overline{OE}}{2},\frac{\overline{OE}}{2},0\right)$, e, substituindo na equação do plano temos:

$$\frac{\overline{OE}}{2}+\frac{\overline{OE}}{2}=10 \Leftrightarrow 2\times\frac{\overline{OE}}{2}=10 \Leftrightarrow \overline{OE}=10$$

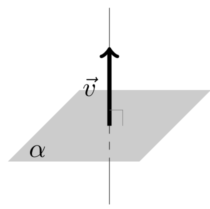
Resposta: **Opção B**

Exame – 2001, 1.ª fase - 1.ª chamada (cód. 135)

39.

39.1. Como a altura da pirâmide é perpendicular à base, então a reta dada é perpendicular ao plano da base, pelo que o vetor diretor da reta, $\vec{v}=(6,-8,0)$, é também um vetor normal do plano, e assim a equação do plano é da forma:

$$6x-8y=d$$



E como a origem pertence ao plano da base, podemos determinar o valor do parâmetro d, substituindo as coordenadas, na equação anterior:

$$6(0)-8(0)=d \Leftrightarrow d=0$$

Logo, escrevendo e simplificando uma equação do plano que contém a base da pirâmide, temos:

$$6x-8y=0 \Leftrightarrow 3x-4y=0$$

39.2. O ponto de coordenadas $(4,3,5)$ pertence à reta que contém a altura porque as suas coordenadas verificam a equação vetorial da reta, para $k-\frac{1}{2}$:

$$(4,3,5)=(7,-1,5)+k(6,-8,0) \Leftrightarrow (4,3,5)=(7+6k,-1-8k,5) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4=7+6k \\ 3=-1-8k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4-7=6k \\ 3+1=-8k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{-3}{6}=k \\ \frac{4}{-8}=k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{1}{2}=k \\ -\frac{1}{2}=k \end{cases}$$

Cumulativamente o ponto de coordenadas $(4,3,5)$ também pertence ao plano que contém a base, porque as suas coordenadas verificam a equação do plano:

$$3(4)-4(3)=0 \Leftrightarrow 0=0$$

E assim temos que o ponto de coordenadas $(4,3,5)$ pertence à reta que contém a altura da pirâmide e também à base, pelo que é o centro da base, porque a pirâmide é regular.

Exame – 2001, Prova Modelo (cód. 135)
Exame – 2000, 2.ª Fase (cód. 135)

40.

40.1. Como a reta OT é perpendicular ao plano ABC, o vetor normal do plano ($\vec{v} = (2,3,1)$) é também um vetor diretor da reta.
Como a reta contém a origem do referencial, podemos definir a reta OT pela condição:

$$(x,y,z) = (0,0,0) + \lambda(2,3,1),\ \lambda \in \mathbb{R}$$

Como o ponto R tem ordenada 6, e o plano RQT é paralelo ao plano xOz, então o plano RQT é definido pela equação $y = 6$, pelo que a ordenada do ponto T é 6

Assim, substituindo o valor da ordenada na condição anterior, podemos calcular o valor de λ associado ao ponto T, e depois as restantes coordenadas do ponto:

$$\begin{cases} x = 0 + 2\lambda \\ y = 0 + 3\lambda \\ z = 0 + \lambda \end{cases} \underset{y=6}{\Leftrightarrow} \begin{cases} x = 2\lambda \\ 6 = 3\lambda \\ z = \lambda \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \times 2 \\ \dfrac{6}{3} = \lambda \\ z = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ 2 = \lambda \\ z = 2 \end{cases}$$

Logo, o ponto T tem coordenadas $(4,6,2)$

40.2. Como o plano deve ser paralelo ao plano ABC, o vetor normal do plano ABC ($\vec{v} = (2,3,1)$) é também um vetor normal deste plano, pelo que a sua equação é da forma:

$$2x + 3y + z = d$$

Como o ponto Q pertence ao plano xOy, tem cota nula, e as restantes coordenadas iguais ao ponto T, ou seja, o ponto Q tem coordenadas $(4,6,0)$, e assim podemos determinar o valor do parâmetro d, substituindo estas coordenadas, na equação anterior:

$$2(4) + 3(6) + 0 = d \Leftrightarrow 8 + 18 = d \Leftrightarrow d = 26$$

E assim, uma equação do plano que é paralelo ao plano ABC e que contém o ponto Q, é:

$$2x + 3y + z = 26$$

Exame – 2000, Prova 2 para Militares (cód. 135)

41. Escrevendo a condição dada na forma equivalente

$$(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 5^2 \ \wedge \ x - y + 0z = 0$$

Podemos observar que a condição define o conjunto de pontos na interseção da superfície esférica de centro no ponto de coordenadas $(1,1,1)$ e raio 5, com o plano que contém a origem e tem como vetor normal o vetor $\vec{v} = (1,-1,0)$

Podemos ainda observar que o centro da circunferência pertence ao plano, porque a abcissa e a ordenada são iguais, pelo que a interseção da superfície esférica com o plano é uma circunferência de raio 5.

Resposta: **Opção A**

Exame – 2000, Prova para Militares (cód. 135)
Exame – 2000, Ép. Especial (cód. 135)

42. O vértice do cone é o ponto da reta r que está sobre o eixo Ox, ou seja o ponto da reta r com ordenada e cota nulas.
A partir da equação vetorial da reta, podemos determinar o valor de k associado à ordenada nula, e depois, o valor correspondente da abcissa:

$$(x,y,x) = (0,3,0) + k(3, -1,0), k \in \mathbb{R}$$

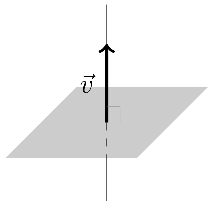
$$y = 3 + k(-1) \Leftrightarrow y = 3 - k \underset{y=0}{\Rightarrow} 0 = 3 - k \Leftrightarrow k = 3$$

$$x = 0 + k(3) \Leftrightarrow x = 3k \underset{k=3}{\Rightarrow} x = 3 \times 3 \Leftrightarrow x = 9$$

Como todos os pontos da reta r têm cota nula ($z = 0 + 0k$), então o vértice do cone é o ponto de coordenadas $(9,0,0)$

Como o plano é perpendicular à reta r, vetor diretor da reta ($\vec{v} = (3, -1,0)$) é um vetor normal do plano, e assim a equação do plano é da forma:

$$3x - y = d$$



E como o vértice do cone pertence ao plano, podemos determinar o valor do parâmetro d, substituindo as coordenadas, na equação anterior:

$$3(9) - (0) = d \Leftrightarrow d = 27$$

E assim, uma equação do plano que contém o vértice do cone e é perpendicular à reta r, é $3x - y = 27$

Exame – 2000, Ép. Especial (cód. 135)
Exame – 2000, Prova para Militares (cód. 135)

43. Como o ponto B pertence ao eixo yOz então tem abcissa nula; como a base da pirâmide é paralela ao plano xOy, o ponto B tem cota igual ao ponto A e como o ponto D pertence ao plano xOz então o ponto B tem também ordenada igual ao ponto A, ou seja, as coordenadas do ponto B são (0,8,7)
Da mesma forma, nas condições do enunciado podemos verificar que o ponto V tem coordenadas (4,4,0)

Como o plano α é paralelo ao plano AVB, então um vetor normal do plano AVB também é vetor normal do plano α, pelo que, para determinar um vetor normal do plano α, vamos determinar as coordenadas de dois vetores, não colineares, do plano AVB:

$$\overrightarrow{BA} = A - B = (8,8,7) - (0,8,7) = (8,0,0)$$

$$\overrightarrow{VA} = A - V = (8,8,7) - (4,4,0) = (4,4,7)$$

Podemos agora determinar as coordenadas de um vetor perpendicular aos dois vetores do plano ($\vec{v} = (a,b,c)$), que é um vetor normal do plano α:

$$\begin{cases} (a,b,c).(8,0,0) = 0 \\ (a,b,c).(4,4,7) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 8a = 0 \\ 4a + 4b + 7c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ 7c = -4b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ c = -\frac{4}{7}b \end{cases}$$

Assim temos que qualquer vetor normal ao plano α é da forma $\vec{v} = \left(0,b, -\frac{4}{7}b\right), b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$
Ou seja, concretizando um valor para b, por exemplo, $b = 7$, vem $\vec{v} = (0,7, -4)$
Desta forma, temos que uma equação do plano α é da forma

$$7y - 4z = d$$

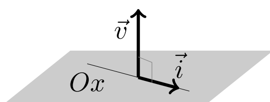
E recorrendo às coordenadas do ponto $E(4,4,7)$ (que pertence ao plano α), podemos determinar o valor do parâmetro d, substituindo estas coordenadas, na equação anterior:

$$7(4) - 4(7) = d \Leftrightarrow 28 - 28 = d \Leftrightarrow d = 0$$

Pelo que uma equação do plano α, é $7y - 4z = 0$

Assim, para mostrar que o eixo Ox pertence ao plano temos que verificar que:

- o vetor diretor do eixo Ox ($\vec{i} = (1,0,0)$) é perpendicular ao vetor normal do plano α, o que é observado porque o produto escalar dos dois vetores é nulo:
$$\vec{v}\,.\,\vec{i} = (0,7, -4)\,.\,(1,0,0) = 0 + 0 + 0 = 0$$

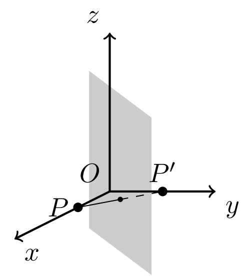


- um ponto do eixo Ox, por exemplo a origem, também pertence ao plano α, o que é observado porque ao substituir as coordenadas do ponto na equação do plano α, obtemos uma proposição verdadeira:

$$7(0) - 4(0) = 0 \Leftrightarrow 0 = 0$$

Exame – 2000, Ép. Especial (setembro) (cód. 135)
Exame – 1999, Prova de reserva (cód. 135)

44. Observando a equação do plano ($x = y$) podemos verificar que contém todos os pontos com abcissa igual à ordenada, incluindo a origem e todos os pontos do eixo Oz (que têm abcissa e ordenadas nulas, portanto iguais), ou seja, que é o plano bissetor do primeiro octante que contém o eixo Oz

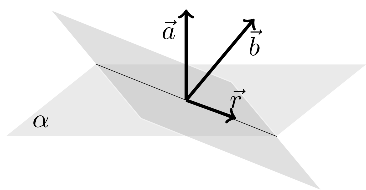


Assim, o simétrico de qualquer ponto do eixo Ox, como o ponto P, relativamente a este plano bissetor é um ponto do eixo Oy, com ordenada igual à abcissa do ponto simétrico, ou seja o simétrico do ponto $P(1,0,0)$ é o ponto $P'(0,1,0)$

Resposta: **Opção D**

Exame – 2000, 1.ª fase - 2.ª chamada (cód. 135)

45. Como a reta pertence ao plano α, então o vetor diretor da reta, $\vec{r}$, é perpendicular ao vetor normal deste plano, o vetor $\vec{a}$



Como a reta pertence ao plano β, então o vetor diretor da reta, $\vec{r}$, é perpendicular ao vetor normal deste plano, o vetor $\vec{b}$

Resposta: **Opção D**

Exame – 2000, 1.ª fase - 2.ª chamada (cód. 135)

46. Como a reta r é a intersecção dos dois planos, se um ponto pertencer à reta r, então pertence também aos dois planos, ou seja, as suas coordenadas verificam as equações dos dois planos.

Assim, designado por α o plano de equação $x - y + 3z = 1$ e por β o plano de equação $x + y - 7x = 7$ e analisando as opções apresentadas, podemos verificar que:

- o ponto $(5,5,0)$ não pertence ao plano α, porque $5 - 5 + 3(5) \neq 1$, logo não pertence à reta r
- o ponto $(1,0,0)$ não pertence ao plano β, porque $1 + 0 - 7(0) \neq 7$, logo não pertence à reta r
- o ponto $(0,0,-1)$ não pertence ao plano α, porque $0 - 0 + 3(-1) \neq 1$, logo não pertence à reta r
- o ponto $(4,3,0)$ pertence ao plano α, porque $4 - 3 + 3(0) = 1$, e também pertence ao plano β, porque $3 + 4 - 7(0) = 7$; logo este ponto pertence à reta r

Resposta: **Opção D**

Exame – 1999, Prova para Militares (cód. 135)

47. Como se o projétil seguir uma trajetória retilínea, o alvo é atingido, então os pontos A, B e C são colineares, pelo que não definem um plano.
Para determinar uma equação do plano ABO, vamos determinar as coordenadas de dois vetores, não colineares, do plano ABO:

$$\overrightarrow{OA} = A - O = (2,3,10) - (0,0,0) = (2,3,10)$$

$$\overrightarrow{AB} = B - A = (10,13,25) - (2,3,10) = (8,10,15)$$

Podemos agora determinar as coordenadas de um vetor perpendicular aos dois vetores do plano ($\vec{u} = (a,b,c)$), que é um vetor normal do plano ABE:

$$\begin{cases} (a,b,c).(2,3,10) = 0 \\ \\ (a,b,c).(8,10,15) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a + 3b + 10c = 0 \\ \\ 8a + 10b + 15c = 0 \end{cases}$$

Considerando, sem perda de generalidade, que $c = 1$, temos:

$$\begin{cases} 2a + 3b + 10 = 0 \\ \\ 8a + 10b + 15 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a = -3b - 10 \\ \\ 8a + 10b + 15 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 8a = -12b - 40 \\ \\ 8a + 10b + 15 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 8a = -12b - 40 \\ \\ -12b - 40 + 10b + 15 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 8a = -12b - 40 \\ \\ -2b - 25 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 8a = -6 \times 2b - 40 \\ \\ -25 = 2b \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 8a = -6(-25) - 40 \\ \\ -\dfrac{25}{2} = b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 8a = 150 - 40 \\ \\ -\dfrac{25}{2} = b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \dfrac{110}{8} \\ \\ -\dfrac{25}{2} = b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \dfrac{55}{4} \\ \\ -\dfrac{25}{2} = b \end{cases}$$

Assim temos que um vetor normal ao plano ABO é $\vec{u} = \left(\dfrac{55}{4}, -\dfrac{25}{2}, 1\right)$, e também o vetor $4\vec{u} = (55, -50,4)$ pelo que a equação do plano ABO é da forma:

$$55x - 50y + 4z = d$$

E recorrendo às coordenadas do ponto O que pertence ao plano ABO, podemos determinar o valor do parâmetro d, substituindo estas coordenadas, na equação anterior:

$$-5(0) + 0 = d \Leftrightarrow d = 0$$

E assim, uma equação do plano ABO, é $55x - 50y + 4z = 0$

Finalmente podemos provar que o ponto C pertence ao plano ABO, substituindo as coordenadas do ponto na equação do plano e verificando que se obtém uma proposição verdadeira:

$$55 \times 98 - 50 \times 123 + 4 \times 190 = 0 \Leftrightarrow 5390 - 6150 + 760 = 0 \Leftrightarrow 0 = 0$$

Para averiguar se o plano ABO é perpendicular ao plano xOy, calculamos o produto escalar dos respetivos vetores normais ($4\vec{u} = (55, -50,4)$ e $\vec{v} = (0,0,1)$):

$$(55, -50,4) \,.\, (0,0,1) = 55 \times 0 - 50 \times 0 + 4 \times 1 = 0 - 0 + 4 = 4$$

Como o produto escalar dos vetores normais dos planos não é nulo, os planos não são perpendiculares.

Exame – 1999, Prova para Militares (cód. 135)

48. Como $[AE]$ é uma aresta do cubo, perpendicular à face $[ABCD]$, temos que o vetor $\overrightarrow{AE}$ é um vetor normal do plano que contém a face.

$$\overrightarrow{AE} = E - A = (1,2,-3) - (3,5,3) = (1-3,2-5,-3-3) = (-2,-3,-6)$$

Assim, a equação do plano que contém a face $[ABCD]$ é da forma:

$$-2x - 3y - 6z = d$$

E recorrendo às coordenadas do ponto A que pertence ao plano, podemos determinar o valor do parâmetro d, substituindo estas coordenadas, na equação anterior:

$$-2(3) - 3(5) - 6(3) = d \Leftrightarrow -6 - 15 - 18 = d \Leftrightarrow -39 = d$$

E assim, uma equação do plano que contém a face $[ABCD]$ é:

$$-2x - 3y - 6z = -39 \Leftrightarrow 2x + 3y + 6z = 39$$

Assim, como o ponto P pertence ao eixo Oz tem abcissa e ordenada nulas e a cota pode ser calculada substituindo as coordenadas conhecidas na equação anterior:

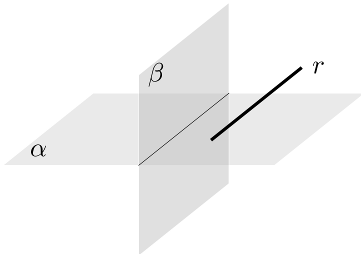
$$2(0) + 3(0) + 6z = 39 \Leftrightarrow z = \frac{39}{6} \Leftrightarrow z = \frac{13}{2}$$

Logo, as coordenadas do ponto P são $\left(0,0,\frac{13}{2}\right)$

Exame – 1999, Época Especial (cód. 135)

49. Se uma reta r é paralela à reta de interseção dos planos α e β, como a reta de interseção está contida no plano β, então a reta r é paralela ao plano β

Resposta: **Opção B**



Exame – 1999, 1.ª fase - 2.ª chamada (cód. 135)

50.

50.1. Como a face $[OPQR]$ está contida no plano xOy, o ponto Q tem cota nula e como o cubo tem as arestas $[OR]$ sobre o eixo Ox e $[OP]$ sobre o eixo Oy, então a abcissa e a ordenada do ponto Q são iguais, ou seja, as suas coordenadas são da forma $(a,a,0)$, em que a é a medida da aresta do cubo.

Substituindo na equação do plano VTQ, podemos calcular o valor de a:

$$a + a + 0 = 6 \Leftrightarrow 2a = 6 \Leftrightarrow a = \frac{6}{2} \Leftrightarrow a = 3$$

E assim, vem que o volume do cubo é:

$$V = a^3 = 3^3 = 27$$

50.2. Como o plano α é paralelo ao plano VTQ, o vetor normal do plano VTQ, $\vec{u} = (1,1,1)$ é também um vetor normal do plano α, pelo que a respetiva equação é da forma:

$$x + y + z = d$$

Como a medida da aresta do cubo é 6, e a aresta $[OS]$ está sobre o semieixo positivo Oz, então as coordenadas do ponto S são $(0,0,6)$
Como o ponto S pertence ao plano α, podemos determinar o valor do parâmetro d, substituindo as coordenadas deste ponto, na equação anterior:

$$0 + 0 + 6 = d \Leftrightarrow d = 6$$

E assim, uma equação do plano α é $x + y + z = 6$

Como a medida da aresta do cubo é 6, e a aresta $[OR]$ está sobre o semieixo positivo Ox, então as coordenadas do ponto R são $(6,0,0)$ e como a aresta $[OP]$ está sobre o semieixo positivo Oy, então as coordenadas do ponto P são $(0,6,0)$
Podemos assim concluir que o ponto R pertence ao plano α, porque as suas coordenadas verificam a equação do plano $(6 + 0 + 0 = 6)$ e que o ponto P também pertence ao plano α, porque as suas coordenadas também verificam a equação do plano $(0 + 6 + 0 = 6)$.
Desta forma como os pontos R e P pertencem ao plano α, então a reta RP pertence ao plano α

Exame – 1999, 1.ª fase - 2.ª chamada (cód. 135)

51. Como o ponto A pertence ao semieixo positivo Ox então tem ordenada e cota nulas, e como pertence ao plano ABV então as suas coordenadas verificam a equação do plano, pelo que podemos calcular o valor da abcissa substituindo o valor da ordenada e da cota, na equação do plano:

$$4x + 4(0) + 3(0) = 12 \Leftrightarrow 4x = 12 \Leftrightarrow x = \frac{12}{4} \Leftrightarrow x = 3$$

De forma análoga, como o ponto V pertence ao semieixo positivo Oz pelo que tem abcissa e ordenada nulas, e calculando o valor da cota, temos:

$$4(0) + 4(0) + 3z = 12 \Leftrightarrow 3z = 12 \Leftrightarrow z = \frac{12}{3} \Leftrightarrow z = 4$$

Assim, como o ponto O é a origem do referencial, temos que o raio da base do cone é $\overline{OA} = 3$ e a altura do cone é $\overline{OV} = 4$

Exame – 1999, 1.ª fase - 1.ª chamada (cód. 135)

52. Observando que um vetor normal do plano α é o vetor $\vec{u} = (1,1,0)$ e que um vetor normal do plano xoy, ou seja do plano de equação $z = 0$, é o vetor $\vec{v} = (0,0,1)$ podemos verificar que os vetores normais são perpendiculares, porque:

$$\vec{u} \, . \, \vec{v} = (1,1,0) \, . \, (0,0,1) = 1 \times 0 + 1 \times 0 + 0 \times 1 = 0 + 0 + 0 = 0$$

Então podemos concluir que o plano α é perpendicular ao plano xOy

Resposta: **Opção B**

Exame – 1999, Prova Modelo (cód. 135)

53. Como as retas AB e BC se intersectam (no ponto B) e não são coincidentes (pela observação da figura), então podemos concluir que são complanares e definem o plano ABC

Os pontos A, B e C pertencem ao plano definido pela equação $x + 2y + 6z = 10$, porque as suas coordenadas verificam a equação do plano:

- ponto A: $10 + 2(0) + 6(0) = 10 \Leftrightarrow 10 = 10$
- ponto B: $0 + 2(2) + 6(1) = 10 \Leftrightarrow 4 + 6 = 10 \Leftrightarrow 10 = 10$
- ponto C: $0 + 2(5) + 6(0) = 10 \Leftrightarrow 10 = 10$

Como os três pontos não são colineares definem um único plano e como os três pontos pertencem ao plano definido pela equação $x + 2y + 6z = 10$, então esta equação define o plano α

Exame – 1999, Prova Modelo (cód. 135)

54.

54.1. Como o ponto A pertence ao semieixo positivo Ox então tem ordenada e cota nulas, e como pertence ao plano ABP então as suas coordenadas verificam a equação do plano, pelo que podemos calcular o valor da abcissa substituindo o valor da ordenada e da cota, na equação do plano:

$$2x + 2(0) + 0 = 6 \Leftrightarrow 2x = 6 \Leftrightarrow x = \frac{6}{2} \Leftrightarrow x = 3$$

De forma análoga, como o ponto B pertence ao semieixo positivo Oy tem abcissa e cota nulas, e calculando o valor da ordenada, temos:

$$2(0) + 2y + 0 = 6 \Leftrightarrow 2y = 6 \Leftrightarrow y = \frac{6}{2} \Leftrightarrow y = 3$$

Ainda de forma similar, como o ponto P pertence ao semieixo positivo Oz tem abcissa e ordenada nulas, e calculando o valor da cota, temos:

$$2(0) + 2(0) + z = 6 \Leftrightarrow z = 6$$

Assim temos que o lado da base da pirâmide é:

$$\overline{AB} = \sqrt{(3-0)^2 + (0-3)^2 + (0-0)^2} = \sqrt{9+9+0} = \sqrt{18}$$

E assim, o volume da pirâmide é:

$$V_{[ABCDP]} = \frac{1}{3} \times \overline{AB}^2 \times \overline{OP} = \frac{\left(\sqrt{18}\right)^2 \times 6}{3} = 18 \times 2 = 36$$

54.2. Para determinar um vetor normal do plano ABP, vamos determinar as coordenadas de dois vetores, não colineares, deste plano:

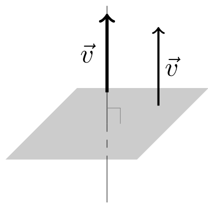
$$\overrightarrow{AP} = P - A = (0,0,6) - (3,0,0) = (-3,0,6)$$

$$\overrightarrow{BP} = P - B = (0,0,6) - (0,3,0) = (0,-3,6)$$

Podemos agora determinar as coordenadas de um vetor perpendicular aos dois vetores do plano ($\vec{v} = (a,b,c)$), que é um vetor normal do plano ABP:

$$\begin{cases} (a,b,c).(-3,0,6) = 0 \\ (a,b,c).(0,-3,6) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3a + 6c = 0 \\ -3b + 6c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6c = 3a \\ 6c = 3b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \dfrac{6c}{3} \\ b = \dfrac{6c}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2c \\ b = 2c \end{cases}$$

Assim temos que qualquer vetor normal ao plano ABP é da forma $\vec{v} = (2c,2c,c)\,, c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$
Ou seja, concretizando um valor para c, por exemplo, $c = 1$, vem $\vec{v} = (2,2,1)$



Observando que um vetor diretor da reta é $\vec{v} = (2,2,1)$, podemos concluir que a reta é perpendicular ao plano ABP, porque o vetor diretor da reta é colinear com o vetor normal do plano.

Exame – 1998, Prova para militares (cód. 135)

55.

55.1. O ponto P é o único ponto que pertence simultaneamente aos planos OPQ, PQV e OPV. Assim temos que o ponto P tem coordenadas (2,2,2) porque estas coordenadas verificam as coordenadas dos três planos:

- plano OPQ: $2-2=0$
- plano PQV: $2+2+2=6$
- plano OPV: $2+2-2(2)=0$

Da mesma forma, o ponto Q é o único ponto que pertence simultaneamente aos planos OPQ, PQV e xOy. Assim temos que o ponto Q tem coordenadas (3,3,0) porque estas coordenadas verificam as coordenadas dos três planos:

- plano OPQ: $3-3=0$
- plano PQV: $3+3+0=6$
- plano xOy, ou seja o plano de equação $z=0$: $0=0$

55.2. Para determinar um vetor normal do plano OPQ, vamos determinar as coordenadas de dois vetores, não colineares, deste plano:

$$\overrightarrow{OP} = P - O = (2{,}2{,}2) - (0{,}0{,}0) = (2{,}2{,}2)$$
$$\overrightarrow{OQ} = Q - O = (3{,}3{,}0) - (0{,}0{,}0) = (3{,}3{,}0)$$

Podemos agora determinar as coordenadas de um vetor perpendicular aos dois vetores do plano ($\vec{v} = (a,b,c)$), que é um vetor normal do plano OPQ:

$$\begin{cases} (a,b,c).(2,2,2) = 0 \\ (a,b,c).(3,3,0) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a+2b+2c=0 \\ 3a+3b=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b+c=0 \\ a+b=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -b+b+c=0 \\ a=-b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c=0 \\ a=-b \end{cases}$$

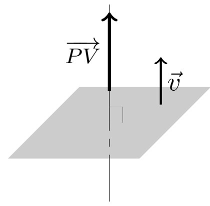
Assim temos que qualquer vetor normal ao plano OPQ é da forma $\vec{v} = (-b,b,0)\,, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

Ou seja, concretizando um valor para b, por exemplo, $b=1$, vem $\vec{v} = (-1,1,0)$

Calculando as coordenadas de um vetor diretor da reta PV, temos:

$$\overrightarrow{PV} = V - P = (0{,}4{,}2) - (2{,}2{,}2) = (-2{,}2{,}0)$$

Assim, como o vetor diretor da reta é colinear com o vetor normal do plano, porque $\overrightarrow{PV} = 2\vec{v}$, então podemos concluir que reta PV é perpendicular ao plano OPQ



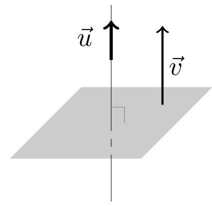
Exame – 1998, Prova de reserva (cód. 135)

56. Para provar que a reta AB pertence ao plano de equação $x+2y-z=5$ é suficiente provar que os pontos A e B pertencem ao plano.
Podemos provar que os pontos pertencem ao plano mostrando que as coordenadas dos dois pontos verificam a equação do plano:

- ponto A: $5+2(0)-0=5$
- ponto B: $0+2(3)-1=5$

Exame – 1998, 2.ª fase (cód. 135)

57. Observando que o vetor normal do plano α ($\vec{v} = (2{,}2{,}2)$) e o vetor diretor da reta r ($\vec{u} = (1{,}1{,}1)$) são colineares, porque $\vec{v} = 2\vec{u}$, então podemos concluir que reta r é perpendicular ao plano α



Resposta: **Opção A**

Exame – 1998, 1.ª fase - 2.ª chamada (cód. 135)

58. Designando por C o centro da superfície esférica e por T o ponto de tangência, temos que o vetor $\overrightarrow{TC}$ é um vetor normal do plano tangente, porque o plano é perpendicular à reta que contém o raio $[TC]$
Assim, as coordenadas do vetor normal do plano são:

$$\overrightarrow{TC} = C - T = (3,9,3) - (1,8,1) = (2,1,2)$$

Pelo que uma equação do plano tangente à superfície esférica é da forma: $2x + y + 2z = d$

E recorrendo às coordenadas do ponto T que pertence ao plano, podemos determinar o valor do parâmetro d, substituindo estas coordenadas, na equação anterior:

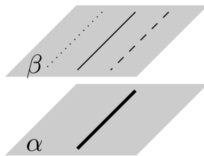
$$2(1) + 8 + 2(1) = d \Leftrightarrow 2 + 8 + 2 = d \Leftrightarrow 12 = d$$

E assim, uma equação do plano que contém a face $[ABCD]$ é: $2x + y + 2z = 12$

Exame – 1998, Prova Modelo (cód. 135)

59. Analisando cada uma das afirmações apresentadas temos que:

- No plano α existem retas com direções diferentes, por exemplo perpendiculares entre si, e também no plano β existem retas perpendiculares entre si, pelo que uma reta do plano α não é paralela a duas retas do plano β que não sejam paralelas entre si.
- Se os planos α e β são estritamente paralelos, pelo que não têm qualquer ponto em comum. Assim, uma reta contida no plano α não tem qualquer ponto em comum com o plano β, ou seja uma reta contida no plano α não interseta o plano β
- Todas as retas perpendiculares ao plano α são também perpendiculares a todos os planos paralelos ao plano α, e em particular são todas perpendiculares ao plano β
- Existem, contidas no plano β, infinitas retas paralelas entre si. Assim, considerando uma reta do plano α e uma paralela, contida no plano β, a reta do plano α é paralela a uma infinidade de retas do plano β



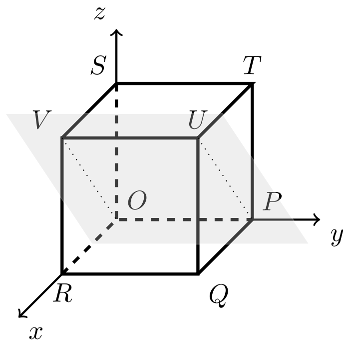
Resposta: **Opção D**

Exame – 1998, Prova Modelo (cód. 135)

60. Observando que o ponto O também pertence ao plano PUV, e que, como a abcissa do ponto R é 2, então:

- como a face quadrada $[ORVS]$ pertence ao plano xOz então as coordenadas do ponto V são (2,0,2)
- como a face quadrada $[OPTS]$ pertence ao plano yOz então as coordenadas do ponto P são (0,2,0)

Assim, os vetores $\overrightarrow{OV} = (2{,}0{,}2)$ e $\overrightarrow{OP} = (0{,}2{,}0)$ são dois vetores do plano PUV



Podemos agora determinar as coordenadas de um vetor perpendicular aos dois vetores do plano ($\vec{v} = (a,b,c)$), que é um vetor normal do plano PUV:

$$\begin{cases} (a,b,c).(2,0,2) = 0 \\ \\ (a,b,c).(0,2,0) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a + 2c = 0 \\ \\ 2b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a = -2c \\ \\ b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -c \\ \\ b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -a = c \\ \\ b = 0 \end{cases}$$

Assim temos que qualquer vetor normal ao plano PUV é da forma $\vec{v} = (a,0,-a)\,, a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

Ou seja, concretizando um valor para a, por exemplo, $a = 1$, vem $\vec{v} = (1,0,-1)$
Pelo que uma equação do plano PUV é da forma: $x - z = d$

E recorrendo às coordenadas do ponto O que pertence ao plano, podemos determinar o valor do parâmetro d, substituindo estas coordenadas, na equação anterior: $0 + 0 = d \Leftrightarrow 0 = d$

E assim, uma equação do plano PUV é: $x - z = 0$

Exame – 1998, Prova Modelo (cód. 135)

61. Como o ponto O pertence ao plano OEH, e como a face quadrada $[OFGE]$ pertence ao plano xOy então as coordenadas do ponto E são (4,0,0)
E assim, os vetores $\overrightarrow{OE} = (4{,}0{,}0)$ e $\overrightarrow{OH} = (2{,}2{,}6)$ são dois vetores do plano OEH

Podemos agora determinar as coordenadas de um vetor perpendicular aos dois vetores do plano ($\vec{v} = (a,b,c)$), que é um vetor normal do plano OEH:

$$\begin{cases} (a,b,c).(4,0,0) = 0 \\ \\ (a,b,c).(2,2,6) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4a+ = 0 \\ \\ 2a + 2b + 6c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ \\ 2b = -6c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ \\ b = -3c \end{cases}$$

Assim temos que qualquer vetor normal ao plano OEH é da forma $\vec{v} = (0,-3c,c)\,, c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

Ou seja, concretizando um valor para c, por exemplo, $c = 1$, vem $\vec{v} = (0,-3,1)$
Pelo que uma equação do plano OEH é da forma: $-3y + z = d$

E recorrendo às coordenadas do ponto O que pertence ao plano, podemos determinar o valor do parâmetro d, substituindo estas coordenadas, na equação anterior: $-3(0) + 0 = d \Leftrightarrow 0 = d$

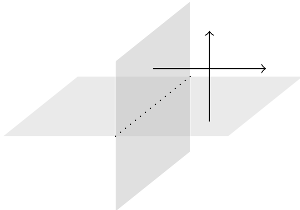
E assim, uma equação do plano OEH é: $-3y + z = 0$

Exame – 1997, Prova para militares (cód. 135)

62. Identificando os dois vetores normais em cada opção e calculando o produto escalar, temos:

- $\vec{a_1} \, . \, \vec{a_2} = (1,1,0) \, . \, (1,1,0) = 1 + 1 + 0 = 2$
- $\vec{b_1} \, . \, \vec{b_2} = (-1,1,-1) \, . \, (3,2,2) = -3 + 2 - 2 = -3$
- $\vec{c_1} \, . \, \vec{c_2} = (1,-1,0) \, . \, (0,0,1) = 0 + 0 + 0 = 0$
- $\vec{d_1} \, . \, \vec{d_2} = (2,2,1) \, . \, (1,0,-3) = 2 + 0 - 3 = -1$

Como dois planos são perpendiculares se os respetivos vetores normais tiverem direções perpendiculares, ou seja, se o produto escalar for nulo, então, de entre as opções apresentadas, apenas na opção (C) está definido um par de planos perpendiculares.



Resposta: **Opção C**

Exame – 1997, 2.ª fase (cód. 135)

63. Como os pontos Q, R e V definem uma face lateral da pirâmide, não são colineares, pelo que, para provar que o plano QRV é definido pela equação $3y + z = 6$, é suficiente verificar que as coordenadas dos três pontos verificam a equação do plano:

- o ponto Q pertence ao plano, porque: $3(2) + 0 = 6$
- o ponto R é simétrico do ponto Q relativamente ao eixo yOz, pelo que tem as mesmas ordenada e cota e abcissa simétrica, ou seja, tem coordenadas $(-2,2,0)$, e assim também pertence ao plano porque: $3(2) + 0 = 6$
- o ponto V pertence ao eixo Oz tem abcissa e ordenada nulas e como tem cota 6, as suas coordenadas são $(0,0,6)$, logo também pertence ao plano porque: $3(0) + 6 = 6$

Exame – 1997, 1.ª fase - 2.ª chamada (cód. 135)

64. Verificando que um vetor normal do plano α é $\vec{u} = (1,-1,1)$ e que o vetor normal do plano β é $\vec{v} = (2,2,2)$, podemos que concluir que:

- como os vetores não são perpendiculares, porque o produto escalar não é nulo ($\vec{u} \, . \, \vec{v} = (1,-1,1) \, . \, (2,2,2) = 2 - 2 + 2 = 2$) então os planos α e β não são perpendiculares
- como os vetores não são colineares porque $\vec{u} \neq \lambda\vec{v}, \forall\lambda \in \mathbb{R}$, então os planos não são paralelos nem coincidentes

Assim, podemos concluir que os planos α e β são planos concorrentes não perpendiculares.

Resposta: **Opção C**

Exame – 1997, 1.ª fase - 1.ª chamada (cód. 135)

65. como o ponto B pertence ao eixo Oy tem abcissa e cota nulas e como $[BC]$ é um diâmetro da base e ponto C tem coordenadas $(0,-5{,}0)$, então o ponto B tem de coordenadas $(0{,}5{,}0)$
Como o ponto D pertence à reta que contém o ponto B e é paralela ao eixo Oz então tem a abcissa e ordenada iguais às do ponto B, pelo que as suas coordenadas são da forma $(0{,}5{,}d)$, $d \in \mathbb{R}^+$

Determinando as coordenadas de dois vetores, não colineares, do plano ABD, temos:

$$\overrightarrow{BA} = A - B = (4{,}3{,}0) - (0{,}5{,}0) = (4,-2{,}0)$$

$$\overrightarrow{BD} = D - B = (0{,}5{,}d) - (0{,}5{,}0) = (0{,}0{,}d),\ d \in \mathbb{R}^+$$

Calculando as coordenadas do vetor $\overline{AC}$, temos:

$$\overline{AC} = C - A = (0,-5{,}0) - (4{,}3{,}0) = (-4,-8{,}0)$$

E assim, temos que $\overrightarrow{AC}$ é um vetor perpendicular ao plano ABD, porque é perpendicular a dois vetores não colineares deste plano, ($\overrightarrow{BA}$ e $\overrightarrow{BD}$), porque os produtos escalares são nulos:

$$\overrightarrow{AC} \,.\, \overrightarrow{BA} = (-4,-8{,}0) \,.\, (4,-2{,}0) = -4 \times 4 + (-8) \times (-2) + 0 \times 0 = -12 + 16 + 0 = 0$$

$$\overrightarrow{AC} \,.\, \overrightarrow{BD} = (-4,-8{,}0) \,.\, (0{,}0{,}d) = -4 \times 04 + (-8) \times 0 + 0 \times d = 0 + 0 + 0 = 0$$

Como o plano ABD é perpendicular ao vetor $\overrightarrow{AC}$, então este vetor é um vetor normal do plano, pelo que a equação do plano é da forma: $-4x - 8y = k$

E recorrendo às coordenadas do ponto B que pertence ao plano, podemos determinar o valor do parâmetro k, substituindo estas coordenadas, na equação anterior:

$$-4(0) - 8(5) = k \ \Leftrightarrow\ -40 = k$$

E assim, uma equação do plano que contém a face ABD é:

$$-4x - 8y = -40 \ \Leftrightarrow\ x + 2y = 10$$

Exame – 1997, 1.ª fase - 1.ª chamada (cód. 135)