ESCOLA SECUNDÁRIA DE PENAFIEL

Ficha de Trabalho nº 20

Preparação para exame

12.º Ano de Escolaridade | Turmas G-K

Observação: Os itens assinalados com * são de dificuldade acima da média

1. Na figura 1 está representada a função f , definida por $f(x) = \dfrac{\pi}{4} + \arcsin\left(-\dfrac{x}{2}\right)$.

   Sabe-se que:

   - A é o ponto de interseção do gráfico de f com o eixo das ordenadas;
   - B é o ponto do gráfico de f com ordenada $\dfrac{5\pi}{12}$.

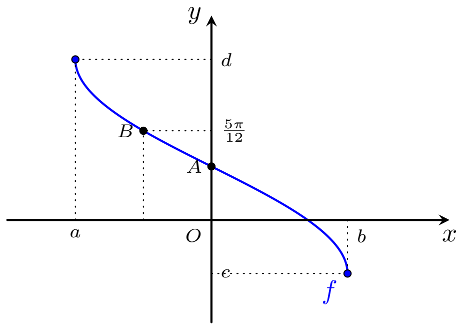

Figura 1

   1.1. Determina o domínio e o contradomínio da função f e indica os valores de a, b, c e d

   1.2. Determina as coordenadas dos pontos A e B assinalados no gráfico

   1.3. Sabendo que $\tan(x) = \dfrac{4}{3}$, com $x \in \left]0; \dfrac{\pi}{2}\right[$, determina o valor exato de $\cos(x + f(0))$

   1.4. Determina $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{f(-3x) - \frac{\pi}{4}}{2x}$

2. Determina $\lim \dfrac{(n+1)! - n!}{n!(n+2)}$

3. Mostra, recorrendo ao método de indução matemática, que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(1+2i) = n^2 + 2n$

4. Observa que:

   $1 = 2 - 1$

   $1 + \dfrac{1}{2} = 2 - \dfrac{1}{2}$

   $1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{4} = 2 - \dfrac{1}{4}$

   $1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{8} = 2 - \dfrac{1}{8}$

   $1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{8} + \dfrac{1}{16} = 2 - \dfrac{1}{16}$

   Admitindo que se mantém a regularidade, conjetura acerca da expressão (igualdade) geral, e demonstra-a por indução matemática

5. Considera a sucessão (v_n) definida por recorrência, $v_1 = 4 \wedge v_{n+1} = 3 + \dfrac{1}{2}v_n, \forall n \in \mathbb{N}$
   Utilizando o método de indução matemática, mostra que:

   5.1. (v_n) é estritamente crescente

   5.2. $v_n < 6, \forall n \in \mathbb{N}$

6. Considera a sucessão (z_n) definida por recorrência, $z_1 = 1 \wedge z_{n+1} = 1 + \frac{1}{2}z_n, \forall n \in \mathbb{N}$

   Utilizando o método de indução matemática, mostra que $z_n = 2 - \frac{1}{2^{n-1}}, \forall n \in \mathbb{N}$

7. ** Considera a sucessão $u_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i(i+2)} + \left(\frac{n^6-2}{n^6}\right)^{n^3}$

   7.1. Mostra, recorrendo ao método de indução matemática, que $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i(i+2)} = \frac{3}{4} - \frac{2n+3}{2(n+1)(n+2)}$

   7.2. Mostra que $\lim(u_n) = \frac{7}{4}$

8. ** Recordando que ${}^nC_k = \frac{{}^nA_k}{k!} = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{k!}$, prova que $\lim \frac{{}^nC_k}{n^k} = \frac{1}{k!}$

9. ** Seja (u_n) a sucessão definida por $u_n = {}^{n+k}C_k$, com $k \leq n$

   Mostra que $\lim \left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)^{2n} = e^{2k}$

10. * Mostra que $\lim \left[(1+n^2)^{\frac{n^2}{2}} n^{-n^2}\right] = \sqrt{e}$

11. * Considera a sucessão (u_n) definida por $u_n = \frac{n!}{n^n}$. Determina o número real k tal que $\lim \frac{u_{n+1}}{u_n} \times k = \frac{2}{e^2}$

12. Sabendo que $\frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6}$, calcula o valor exato de $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$

13. Sabendo que $\sin\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{4}{5} \wedge \pi < x < \frac{3\pi}{2}$, calcula o valor exato de $\cos(x) - \sin(x)$

14. Mostra que $2\sin^2\left(\frac{x}{4}\right) = 1 - \cos\left(\frac{x}{2}\right), \forall x \in \mathbb{R}$

15. Mostra que $\sin(4x) = 4\sin(x)\cos^3(x) - 4\cos(x)\sin^3(x)$

16. Resolve, em $\mathbb{R}$, as equações seguintes:

    16.1. $\sin(x)\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{8}\right)\cos(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

    16.2. $\cos(2x) + 3\cos(x) + 2 = 0$

    16.3. $\sin(x) + 2\sin\left(\frac{x}{2}\right) = 0$

    16.4. $-\sqrt{3}\sin(x) + \cos(x) = 0$

    16.5. $\sin(x) - \cos(x) = 1$

17. Prova que $\sin(a+b)\sin(a-b) = \sin^2(a) - \sin^2(b)$

18. Mostra que: "Se a, b, c são as amplitudes dos ângulos internos de um triângulo $[ABC]$, então, $\cos^2\left(\frac{a}{2}\right) + \cos^2\left(\frac{b+c}{2}\right) = 1$"

19. No referencial ortonormado xOy, da figura 2, está representada uma elipse de focos F_1 e F_2, tal que $\overline{PF_1} + \overline{PF_2} = 8$, sendo P um ponto qualquer da elipse.

    Sabe-se que:

    - B é o ponto de interseção da elipse com o eixo das ordenadas;
    - B tem ordenada positiva.

    Em qual das opções está o valor de $\overline{BF_2}$?

    (A) 2 (B) $\sqrt{8}$ (C) 3 (D) 4

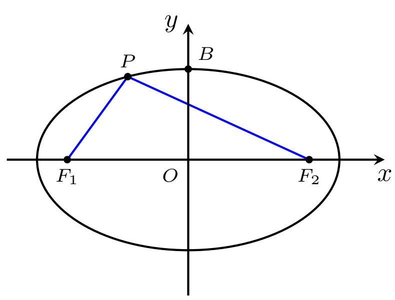

Figura 2

20. Considera as funções g e h, reais, de variável real, de domínio $\mathbb{R}^+$, definidas por

$g(x) = x^2 \left(\ln(x) - \dfrac{3}{2}\right)$ e $h(x) = \dfrac{g(x)}{x^3}$

20.1. Prova que a equação $g(x) = 15$ tem pelo menos uma solução no intervalo $]6;7[$

20.2. Mostra que $g'(x) = 2x\ln(x) - 2x$ e indica os intervalos de monotonia e os extremos da função

20.3. Estuda a função h quanto à existência de assíntotas não verticais ao seu gráfico. Caso existam, escreve a sua equação

21. Considera, num referencial o.n. xOy

A curva C_1, que representa graficamente a função f, de domínio $[0;2]$, definida por $f(x) = e^x + 4x$
A reta r, de equação $y = 3e$
A curva C_2, que representa graficamente a função g, de domínio $]0;2]$, definida por $g(x) = \dfrac{1}{\ln(x+1)}$

Recorrendo às capacidades gráficas da tua calculadora, visualiza as curvas C_1 e C_2 e a reta r
Reproduz, na tua folha de teste, o referencial, as curvas e a reta r
Assinala os pontos A, B e C, em que:

- A é o ponto de interseção da curva C_1 com a reta r
- B é o ponto de interseção da curva C_2 com a reta r
- C é o ponto de interseção das curvas C_1 e C_2

Relativamente a estes pontos, indica, com duas casas decimais, as suas coordenadas, que deves determinar com recurso à calculadora
Desenha o triângulo $[ABC]$ e determina a sua área. Apresenta o resultado arredondado às décimas

22. Para cada número natural m, considera a função h definida em $\mathbb{R}^+$ por $h(x) = \ln(x^m)$
Prova que se $h'(x) = h(x)$, então $x\ln(x) = 1$

23. Seja b um número real não nulo e f, a função, de domínio $\mathbb{R}$, definida por

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{9-9x}{e^{x-1}-1} & se \quad x \neq 1 \\ -\dfrac{1}{b^2} & se \quad x = 1 \end{cases}$$

Determina o(s) valor(es) de b de modo que a função f seja contínua para $x = 1$

24. Numa prateleira de uma perfumaria encontram-se três frascos de perfume da marca A, três frascos da marca B e quatro frascos da marca C, todos distintos entre si. Sabendo que foram todos dispostos em fila de forma aleatória, qual é a probabilidade de terem ficado agrupados por marca?
Apresenta o resultado sob a forma de fração irredutível

25. Na figura 3 estão duas caixas A e B. Na caixa A estão três bolas brancas e três bolas pretas e na caixa B estão sete bolas brancas e três bolas pretas.

Considera a experiência que consiste em retirar duas bolas da caixa A, colocá-las na caixa B e seguidamente retirar uma bola da caixa B.

Sejam X e Y os acontecimentos:
X: "as bolas retiradas da caixa A são da mesma cor"
Y: " a bola retirada da caixa B é preta "
Sem aplicares a fórmula de probabilidade condicionada, indica o valor de $P(\overline{Y}|\overline{X})$.
Numa pequena composição justifica a tua resposta, começando por explicares o significado de $P(\overline{Y}|\overline{X})$ no contexto da situação descrita, e fazendo referência:

- à Lei de Laplace;
- ao número de casos possíveis;
- ao número de casos favoráveis.

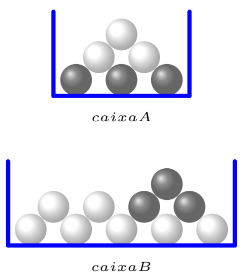

Figura 3

26. De uma certa linha do triângulo de Pascal, sabe-se que o produto do segundo elemento com o penúltimo é 225
Qual é o maior elemento da linha anterior?
(A) 12870
(B) 11440
(C) 3432
(D) 3003

27. Considera a função g, de domínio $\mathbb{R}^+$

Sabe-se que:

- $\lim\limits_{x\to+\infty}[g(x)-2x+1]=0$

Qual é o valor de $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2\ln(x)+g(x)}{2x}$?
(A) 1
(B) -1
(C) $+\infty$
(D) $-\infty$

28. Seja $b>1$ e $k\in\mathbb{R}^+$. A expressão $\log_b\left(\dfrac{b^5}{\sqrt{k}}\right)$ é igual a:
(A) $\dfrac{10}{\log_b(k)}$
(B) $\dfrac{2b}{\log_b(k)}$
(C) $5-\dfrac{1}{2}\log_b(k)$
(D) $b-\dfrac{1}{2}\log_b(k)$

29. Considera as funções f e g, de domínio $\mathbb{R}$, definidas por $f(x)=7^x$ e $g(x)=\left(\dfrac{1}{7}\right)^x$
Qual é o conjunto solução da inequação $f(x)<g(x)$?
(A) $\mathbb{R}$
(B) $\mathbb{R}^-$
(C) $\mathbb{R}^+$
(D) $\{\}$

30. Considera a função f, de domínio $]-\infty;e[$, definida por:

$$f(x)=\begin{cases} e^x-x-6 & se \quad x<0 \\ -5 & se \quad x=0 \\ \dfrac{1}{1-\ln(x)}-5 & se \quad 0<x<e \end{cases}$$

30.1. Estuda a função f quanto à continuidade no ponto $x=0$
30.2. Estuda a função f quanto à existência de assíntotas ao gráfico paralelas aos eixos coordenados
30.3. Mostra que a função $g(x)=f(x)+2$ tem pelo menos um zero no intervalo $]-4,-3[$
Nota: sempre que procederes a arredondamentos, conserva, no mínimo, três casas decimais

31. Considera a função f, real, de variável real, definida por $f(x)=x-1+e^{-\frac{x}{2}}$

31.1. Indica os intervalos de monotonia e os extremos da função
31.2. Escreve a equação reduzida da reta tangente ao gráfico da função no ponto de abcissa 0
31.3. Prova que o gráfico da função admite uma assíntota oblíqua quando $x\to+\infty$, e escreve a sua equação
31.4. Sendo $f'(x)$ e $f''(x)$, respetivamente, primeira e a segunda derivada de f, prova que $2f''(x)+f'(x)=1$

32. Considera a função g, real, de variável real, definida por $g(x) = \ln(2e^{-x} + e^{x} - 3)$
Determina, sob a forma de intervalo de números reais, o domínio da função g

33. Na figura 4 estão representados, em referencial o.n. xOy, parte do gráfico da função g, definida por

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{\ln(x+1)}{x} & se \quad -1 < x < 0 \\ 1 & se \quad x = 0 \\ x + 1 + \dfrac{2x}{e^{x}} & se \quad x > 0 \end{cases}$$ e duas retas r e s

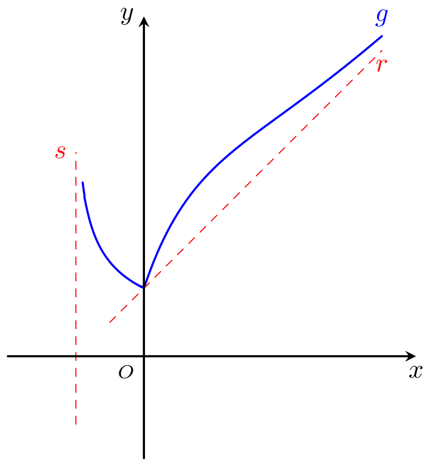

Figura 4

Sabe-se que:

- a reta s é assíntota vertical ao gráfico da função g
- a reta r é assíntota oblíqua ao gráfico da função g, quando $x \to +\infty$

33.1. Escreve as equações das retas r e s, assíntotas ao gráfico da função g

33.2. Estuda a continuidade da função g

33.3. Escreve a equação da reta tangente ao gráfico da função g no ponto de abcissa 1

33.4. Mostra que o ponto de coordenadas $\left(2; \dfrac{3e^2+4}{e^2}\right)$ é ponto de inflexão do gráfico da função g

34. Na figura 5 está representada, num referencial o. n. $Oxyz$, uma pirâmide quadrangular regular $[ABCDV]$

Sabe-se que:

- A é o ponto de coordenadas $(5, 1, -2)$
- a base $[ABCD]$ da pirâmide está contida no plano $z = -2$
- o ponto P é a projeção ortogonal de V no plano $z = -2$
- a área da base $[ABCD]$ é 16
- o volume da pirâmide $[ABCDV]$ é 32

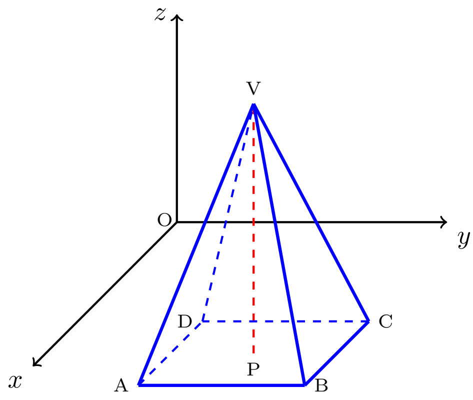

Figura 5

34.1. Determina as coordenadas do ponto V

34.2. Determina uma equação cartesiana do plano mediador do segmento de reta $[AV]$

34.3. Pretende-se colorir as suas cinco faces, e para o efeito, estão disponíveis cinco cores distintas.
Determina a probabilidade de apenas duas das faces terem a mesma cor.
Apresenta o resultado na forma de dízima.

35. Seja g uma função de domínio $\mathbb{R}^-$

Sabe-se que $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{g(x)-\ln(-x)}{3x} = 2$

Qual das equações seguintes pode definir uma assintota do gráfico da função g?

(A) $y = 6x$ (B) $y = \dfrac{1}{6}x$ (C) $y = -6x$ (D) $y = \dfrac{1}{3}x$

36. Seja a um número real positivo

Considera a função f, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $f(x) = e^{a\sin(x)}$

Seja s a reta tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa $\dfrac{\pi}{6}$

Sabe-se que o declive da reta s é igual a $\sqrt{3}a$. Determina o valor de a

37. Na figura 6 encontra-se parte da representação gráfica da função f, de domínio $\mathbb{R}$, e uma reta r secante ao gráfico da função nos pontos A e B

Sabe-se que:

- a reta r é paralela à reta tangente ao gráfico da função no ponto de abcissa -1
- O gráfico de f e a reta r intersetam-se no ponto A, de coordenadas $(0, e+1)$
- o ponto C é o ponto de interseção da reta r com o eixo Ox e tem abcissa $-e-1$

Qual é o valor de $\lim\limits_{x\to-1} \dfrac{2x^2+2x}{-f(x)+f(-1)}$?

(A) -2 (B) 2 (C) -1 (D) 1

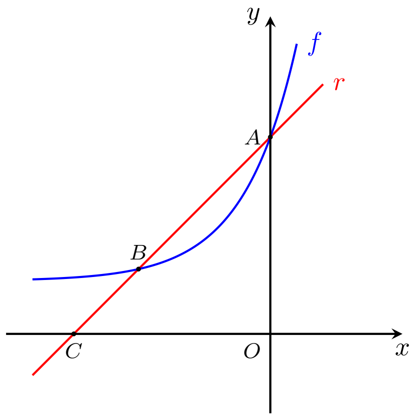

Figura 6

38. Seja f, a função real de variável real, definida por $f(x) = \dfrac{x}{e^{-\frac{1}{x}}}$

Mostra, pela definição, que $f'(1) = 0$

39. Considera o desenvolvimento da expressão algébrica $(3x-2)^{11}$.

39.1. Mostra que há um termo da forma ax^8 no desenvolvimento e determina-o

39.2. Determina o termo independente do desenvolvimento

40. Na figura 7 está representada, num referencial o.n. xOy, a elipse de equação $\dfrac{x^2}{16} + \dfrac{y^2}{9} = 1$.

Sabe-se que:

- os pontos A, B, C e D são os pontos de interseção da elipse com os eixos Ox e Oy.

Qual é a semidistância focal?

(A) $\sqrt{7}$ (B) $2\sqrt{7}$ (C) 4 (D) 5

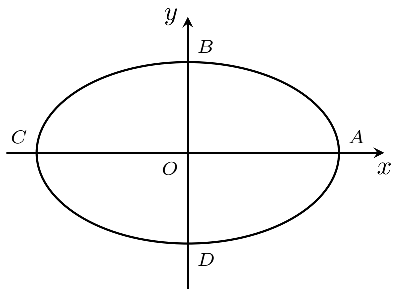

Figura 7

41. Prova que $\cos\left(\arcsin\left(\dfrac{1}{5}\right)\right) = \dfrac{2\sqrt{6}}{5}$

42. Na figura 8 está representado, num referencial ortonormado xOy, o triângulo $[ABC]$ inscrito numa circunferência

Sabe-se que:

- C é o ponto de coordenadas $(0, -2)$
- x é a amplitude do ângulo POA, com $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$, sendo P um ponto do semieixo positivo Ox
- o ponto B é o simétrico do ponto A relativamente ao eixo Oy

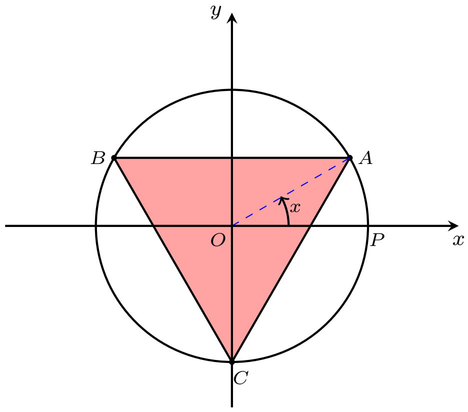

Figura 8

42.1. Mostra que, em função de x, a área do triângulo $[ABC]$ é dada por $A(x) = 4\cos(x) + 2\sin(2x)$

42.2. Determina o valor de x para o qual a área do triângulo $[ABC]$ é máxima

42.3. Para um certo valor de $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$, sabe-se que $\tan x = \frac{4}{3}$

Determina o valor exato da área do triângulo $[ABC]$

43. Considera a função g, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $g(x) = e^{\frac{1}{x}} + k$, com $k \in \mathbb{R}$.
Indica o valor de $\lim\limits_{x \to 2} \frac{2g(x) - 2g(2)}{x - 2}$

(A) $-\frac{\sqrt{e}}{4}$

(B) $\frac{\sqrt{e}}{4}$

(C) $-\frac{\sqrt{e}}{2}$

(D) $\frac{\sqrt{e}}{2}$

44. Seja f a função real de variável real definida por $f(x) = xe^{1-2x} - 1$

44.1. Determina os intervalos de monotonia e os extremos, caso existam, da função f

44.2. O gráfico da função f tem uma assíntota horizontal de equação $y = b$, quando $x \to +\infty$
Determina b

45. Considera a função f, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $f(x) = e^x - e^a x$, com $a \in \mathbb{R}$.
Sabendo que $\lim\limits_{x \to 1} \frac{1 - x}{f(x) - f(1)} = \frac{1}{1 - e}$, qual é o valor de a?

(A) 3

(B) 2

(C) 1

(D) 0

46. Seja $u_n = \left(1 - \frac{1}{2^2}\right)\left(1 - \frac{1}{3^2}\right)\left(1 - \frac{1}{4^2}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$, com $n > 1$

Mostra, por indução matemática, que $u_n = \frac{n+1}{2n}$

47. Considera a função f, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $f(x) = 2\sin(2x - \pi)$
Na figura 9 encontra-se representado parte do gráfico da função f e um paralelogramo $[OABC]$

Sabe-se que:

- O e B são pontos de interseção do gráfico com o eixo Ox
- A é ponto do gráfico onde a função atinge o valor máximo
- C é ponto do gráfico onde a função atinge o valor mínimo

Numa das opções está o valor exato da área do paralelogramo $[OABC]$
Em qual delas?

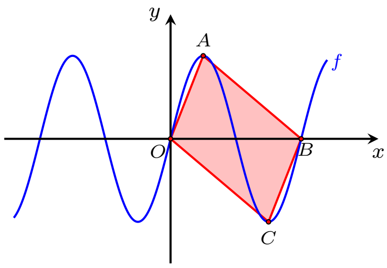

Figura 9

(A) $\dfrac{\pi}{2}$
(B) 2π
(C) π
(D) $\dfrac{\pi}{4}$

48. Na figura 10 está representado, em referencial ortonormado xOy, o pentágono $[ABCDE]$

Sabe-se que:

- a circunferência está centrada na origem O e tem raio 2
- os pontos C e D pertencem à circunferência e são simétricos em relação ao eixo das abcissas
- os pontos B e E pertencem ao eixo Oy e são simétricos em relação ao eixo das abcissas
- o ponto A é o ponto de interseção da circunferência com o semieixo positivo Ox

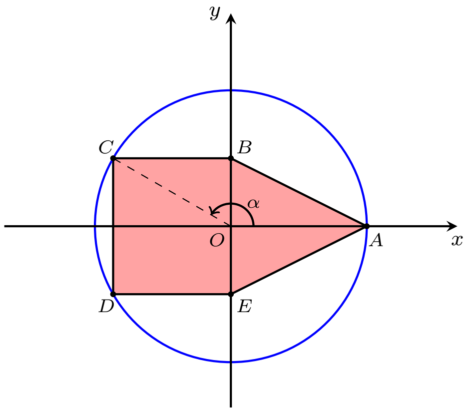

Figura 10

Tal como a figura sugere, o ponto C pertence ao segundo quadrante e o ângulo AOC de amplitude α, em radianos, tem por lado origem o semieixo positivo Ox e lado extremidade a semirreta $\dot{O}C$, com $\alpha \in \left]\dfrac{\pi}{2}; \pi\right[$

48.1. Mostra que a expressão que representa, em função de α, a área do pentágono $[ABCDE]$ é $A(\alpha) = 4\sin\alpha - 4\sin(2\alpha)$

48.2. Para um certo valor de $\alpha \in \left]\dfrac{\pi}{2}; \pi\right[$, sabe-se que $\tan\alpha = -\dfrac{\sqrt{5}}{2}$

Determina o valor exato da área do pentágono $[ABCDE]$

48.3. Determina o valor de $\alpha \in \left]\dfrac{\pi}{2}; \pi\right[$ para o qual a área do pentágono $[ABCDE]$ é igual a $-8\sin(2\alpha)$

49. Seja f a função, de domínio $\mathbb{R}$, cujo gráfico está parcialmente representado na figura 11

Sabe-se que -2 e 5 são os únicos zeros de f

Seja g a função, de domínio $]-\infty; 0[$, definida por $g(x) = \ln(-2x)$

Qual é o domínio da função $(g \circ f)(x)$?

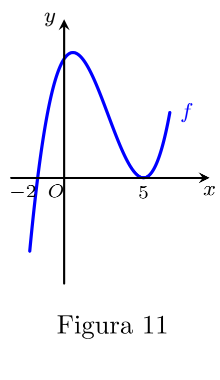

Figura 11