Preparação para exame

12.º Ano de Escolaridade | Turma G-K

FUNÇÃO EXPONENCIAL/ FUNÇÃO LOGARÍTMICA

1. .

1.1. $f(1) = e^{-2\times 1+1} + e = e^{-1} + e = \dfrac{1}{e} + e$

$g(1+e) = \dfrac{1-\ln(1+e-e)}{2} = \dfrac{1-\ln(1)}{2} = \dfrac{1}{2}$

Logo, $f(1) + g(1+e) = \dfrac{1}{e} + e + \dfrac{1}{2} = \dfrac{2e^2+e+2}{2e}$

1.2. $f^{-1}\left(\dfrac{1}{e^3}+e\right) = x$, então, $f(x) = \dfrac{1}{e^3} + e$

$f(x) = e^3 + e \Leftrightarrow e^{-2x+1} + e = \dfrac{1}{e^3} + e \Leftrightarrow e^{-2x+1} = e^{-3} \Leftrightarrow -2x+1 = -3 \Leftrightarrow -2x = -4 \Leftrightarrow x = 2$

Logo, $f^{-1}\left(\dfrac{1}{e^3}+e\right) = 2$

1.3. $e^{-2x+1} > 0, \forall x \in \mathbb{R}$
$\therefore e^{-2x+1} + e > e, \forall x \in \mathbb{R}$
$\therefore f(x) > e, \forall x \in D_f$

Logo, $D'_f =]e; +\infty[$

1.4. $D_f = \mathbb{R}$ e $D'_f =]e; +\infty[$
Logo, $D_{f^{-1}} =]e; +\infty[$ e $D'_{f^{-1}} = \mathbb{R}$

Quanto à expressão analítica

$y = f(x) \Leftrightarrow y = e^{-2x+1} + e \Leftrightarrow y - e = e^{-2x+1} \Leftrightarrow -2x+1 = \ln(y-e) \Leftrightarrow -2x = \ln(y-e) - 1 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 2x = 1 - \ln(y-e) \Leftrightarrow x = \dfrac{1-\ln(y-e)}{2}$

Logo,
$f^{-1} :]e; +\infty[\to \mathbb{R}$, tal que, $f^{-1}(x) = \dfrac{1-\ln(x-e)}{2}$

Portanto, $f^{-1}(x) = g(x)$

1.5. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(e^{-2x+1} + e\right) = e^{-\infty} + e = \dfrac{1}{e^{+\infty}} + e = \dfrac{1}{+\infty} + e = 0 + e = e$

A reta de equação $y = e$ é assíntota não vertical ao gráfico da função quando $x \to +\infty$.

1.6. $\lim\limits_{x\to e^+} g(x) = \lim\limits_{x\to e^+} \dfrac{1-\ln(x-e)}{2} = \dfrac{1-\ln(0^+)}{2} = \dfrac{1-(-\infty)}{2} = +\infty$

A reta de equação $x = e$ é assíntota vertical ao gráfico da função g

2. A(s) abcissa(s) do(s) ponto(s) de interseção dos gráficos das funções dadas, são as soluções da equação $g(x) = h(x)$.

$$g(x) = h(x) \Leftrightarrow -2 \times 3^x = -1 - \frac{1}{3^x} \Leftrightarrow -2 \times 3^x + 1 + \frac{1}{3^x} = 0 \Leftrightarrow \frac{-2 \times (3^x)^2 + 3^x + 1}{e^x} = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow -2 \times (3^x)^2 + 3^x + 1 = 0 \wedge 3^x \neq 0 \Leftrightarrow -2 \times (3^x)^2 + 3^x + 1 = 0$$

Fazendo, $y = 3^x$, vem,

$$-2y^2 + y + 1 = 0 \Leftrightarrow y = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \times (-2) \times 1}}{2 \times (-2)} \Leftrightarrow y = -\frac{1}{2} \vee y = 1$$

Assim, tem-se que

$$3^x = -\frac{1}{2} \vee 3^x = 1 \Leftrightarrow \text{equação impossível} \vee 3^x = 1 \Leftrightarrow 3^x = 3^0 \Leftrightarrow x = 0$$
$C.S. = \{0\}$
a abcissa do ponto de interseção dos gráficos das funções dadas é 0
$g(0) = -2 \times 3^0 = -2 \times 1 = -2$
Logo, o ponto de interseção dos dois gráficos tem coordenadas $(0; -2)$

3. .

3.1. $D_f = D_g = \mathbb{R}$

$$g(x) \geq -f(x) \Leftrightarrow \left(\frac{1}{e}\right)^{3x-2e} + e \geq -(-e^{x+e} - e) \Leftrightarrow \left(\frac{1}{e}\right)^{3x-2e} + e \geq e^{x+e} + e \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{e}\right)^{3x-2e} \geq e^{x+e} \Leftrightarrow e^{-3x+2e} \geq e^{x+e} \Leftrightarrow -3x + 2e \geq x + e \Leftrightarrow -3x - x \geq e - 2e \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow -4x \geq -e \Leftrightarrow x \leq \frac{e}{4}$$
$$C.S. = \left]-\infty; \frac{e}{4}\right]$$

3.2. f é função injetiva se e só se, $\forall x_1, x_2 \in D_f, x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$

Demonstração por contrarrecíproco

$$f(x_1) = f(x_2) \Leftrightarrow -e^{x_1+e} - e = -e^{x_2+e} - e \Leftrightarrow -e^{x_1+e} = -e^{x_2+e} \Leftrightarrow e^{x_1+e} = e^{x_2+e} \Leftrightarrow$$
$\Leftrightarrow x_1 + e = x_2 + e \Leftrightarrow x_1 = x_2$, c.q.d

Logo, f é função injetiva

3.3. f é estritamente decrescente se e só se, $\forall x_1, x_2 \in D_f, x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$

Demonstração por contrarrecíproco

$$f(x_1) \leq f(x_2) \Leftrightarrow -e^{x_1+e} - e \leq -e^{x_2+e} - e \Leftrightarrow -e^{x_1+e} \leq -e^{x_2+e} \Leftrightarrow e^{x_1+e} \geq e^{x_2+e} \Leftrightarrow$$
$\Leftrightarrow x_1 + e \geq x_2 + e \Leftrightarrow x_1 \geq x_2$, c.q.d

Logo, f é estritamente decrescente

3.4. Determinemos a função de derivada de f e a função derivada de g

$$f'(x) = (-e^{x+e} - e)' = -(x+e)' \times e^{x+e} - 0 = -e^{x+e}$$

$$g'(x) = \left[\left(\frac{1}{e}\right)^{3x-2e} + e\right]' = \left(e^{-3x+2e} + e\right)' = (-3x+2e)' \times e^{-3x+2e} + 0 = -3 \times e^{-3x+2e}$$

Assim,

$$f'(x) = \frac{1}{3}g'(x) \Leftrightarrow -e^{x+e} = -\frac{1}{3} \times 3 \times e^{-3x+2e} \Leftrightarrow e^{x+e} = e^{-3x+2e} \Leftrightarrow e^{x+e} = e^{-3x+2e} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x + e = -3x + 2e \Leftrightarrow x + 3x = 2e - e \Leftrightarrow 4x = e \Leftrightarrow x = \frac{e}{4}.$$

3.5. Já vimos que $f'(x) = -e^{x+e}$

Determinemos a função segunda derivada de f

$$f''(x) = [f'(x)] = (-e^{x+e})' = -(x+e)' \times e^{x+e} = -e^{x+e}$$

Ora, f' não tem zeros e $f'(x) < 0, \forall x \in \mathbb{R}$
Logo, o gráfico da função f tem a concavidade voltada para baixo em todo o seu domínio.

3.6. $h'(x) = \left(e^{-x-1} - e\right)' = (-x+1)' \times e^{-x-1} - 0 = -e^{-x-1}$
Assim, $h'(-1) = -e^{-(-1)-1} = -e^{1-1} = -e^0 = -1$

Portanto,

$$\lim_{x\to -1} \frac{3+3x}{h(x)-h(-1)} = \lim_{x\to -1} \frac{3(x+1)}{h(x)-h(-1)} = 3\times \lim_{x\to -1} \frac{x+1}{h(x)-h(-1)} = 3\times \lim_{x\to -1} \frac{1}{\frac{h(x)-h(-1)}{x+1}} =$$
$$= \frac{3}{\lim\limits_{x\to -1} \frac{h(x)-h(-1)}{x+1}} = \frac{3}{\lim\limits_{x\to -1} \frac{h(x)-h(-1)}{x-(-1)}} = \frac{3}{h'(-1)} = \frac{3}{-1} = -3$$

3.7. .

- o ponto A é o ponto de interseção do gráfico da função h com o eixo Ox

  Então, determinemos a solução da equação $h(x) = 0$

  $h(x) = 0 \Leftrightarrow e^{-x-1} - e = 0 \Leftrightarrow e^{-x-1} = e \Leftrightarrow -x - 1 = 1 \Leftrightarrow x = -2$

  Assim, $\overline{OA} = 2$

- o ponto B é o ponto de interseção do gráfico da função h com o eixo Oy;
  Assim, $h(0) = e^{-0-1} - e = e^{-1} - e = \frac{1}{e} - e = \frac{1-e^2}{e}$
  Logo, $\overline{OB} = \left|\ \frac{1-e^2}{e}\ \right| = \frac{e^2-1}{e}$, dado que $\frac{1-e^2}{e} < 0$

Deste modo, tem-se que $A_{[ABO]} = \frac{\overline{OA} \times \overline{OB}}{2} = \frac{2 \times \frac{e^2-1}{e}}{2} = \frac{e^2-1}{e}$