Preparação para exame

12.º Ano de Escolaridade | Turma G-K

SUCESSÕES DE NÚMEROS REAIS

A saber...

- Uma sucessão (u_n) é monótona crescente se $u_{n+1} - u_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}$
- Uma sucessão (u_n) é monótona decrescente se $u_{n+1} - u_n < 0, \forall n \in \mathbb{N}$
- Uma sucessão (u_n) é limitada se $\exists m, M \in \mathbb{R} : m \leq u_n \leq M, \forall n \in \mathbb{N}$
  $m \to$ *minorante* ; $M \to$ *majorante*
- Uma sucessão (u_n) é convergente para a $(a \in \mathbb{R})$ se $\forall \delta > 0, \exists p \in \mathbb{N} : n \geq p \Rightarrow |u_n - a| < \delta$
- Teorema: Toda a sucessão monótona e limitada é convergente
- $\lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$; $e \to$ número de Neper
- $\lim \left(1 + \frac{k}{u_n}\right)^{u_n} = e^k$, com $\lim(u_n) = +\infty$ e $k \in \mathbb{R}$
  Dem.:
  $\lim \left(1 + \frac{k}{u_n}\right)^{u_n} = \lim \left(1 + \frac{1}{\frac{u_n}{k}}\right)^{u_n}$
  fazendo $v_n = \frac{u_n}{k}$, vem,
  $\lim \left(1 + \frac{k}{u_n}\right)^{u_n} = \lim \left(1 + \frac{1}{\frac{u_n}{k}}\right)^{u_n} = \lim \left(1 + \frac{1}{v_n}\right)^{kv_n} = \left[\lim \left(1 + \frac{1}{v_n}\right)^{v_n}\right]^k = e^k$

---

1. Considera a sucessão (u_n) definida por $u_n = 1 - \frac{2}{n}$.

   1.1. Determina u_2 , u_{10} e u_{100}, termos da sucessão (u_n).

   1.2. Averigua se $\frac{21}{22}$ é termo da sucessão (u_n).

   1.3. Mostra que a sucessão é monótona crescente.

   1.4. Prova que a sucessão é limitada. Determina um majorante e um minorante do conjunto dos seus termos.

   1.5. Tendo em conta os resultados obtidos nos dois itens anteriores, o que podes dizer quanto à convergência da sucessão?

   1.6. Mostra, pela definição, que $\lim(u_n) = 1$

   1.7. Determina $\lim (u_n)^n$.

2. Determina os seguintes limites:

   2.1. $\lim \left(1 + \frac{3}{n}\right)^{2n}$

   2.2. $\lim \left(1 - \frac{2}{n}\right)^{n+2}$

   2.3. $\lim \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n$

   2.4. $\lim \left(\frac{2n+5}{2n+8}\right)^{2n}$

3. Determina $k \in \mathbb{R}$ de modo que:

   3.1. $\lim \left(1 + \dfrac{k}{n+2}\right)^n = \dfrac{1}{e^2}$

   3.2. $\lim \left(1 - \dfrac{2k+1}{2n}\right)^{\frac{n}{2}} = \sqrt[3]{e^2}$

4. Considera as sucessões (a_n) e (b_n) de termos gerais $a_n = \dfrac{2n+3}{n+1}$ e $b_n = \dfrac{3n+11}{2n+2}$.

   4.1. Mostra que $\dfrac{11}{6}$ é termo da sucessão (b_n).

   4.2. Estuda a monotonia da sucessão (b_n).

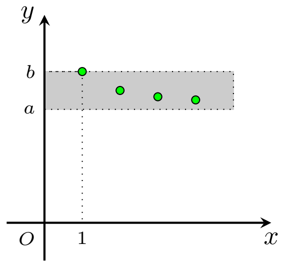
   4.3. Mostra que $2 < a_n \leq \dfrac{5}{2}, \forall n \in \mathbb{N}$.

   4.4. Comenta a afirmação seguinte: "a sucessão (a_n) é limitada".

   4.5. As duas sucessões têm um termo comum. Determina a sua ordem e o seu valor.

5. Considera a sucessão (u_n) de termo geral $u_n = 3 + \dfrac{1}{n}$.

   Na figura ao lado está parte da representação gráfica da sucessão.
   Todos os termos da sucessão situam-se entre a e b.



   5.1. Como se pode observar, b é um majorante e a é um minorante do conjunto dos termos da sucessão. Determina os valores de a e b.

   5.2. Quantos termos são maiores do que $\dfrac{7}{2}$?

6. Considera a sucessão (b_n) definida por $b_n = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{6} + \dfrac{1}{12} + \ldots + \dfrac{1}{n(n+1)}$.
   Utilizando o princípio de indução matemática, prova que $b_n = \dfrac{n}{n+1}$.

7. Considera a sucessão (c_n) definida por $c_1 = 5 \wedge c_{n+1} = \dfrac{c_n + 3}{2}, \forall n \in \mathbb{N}$.
   Utilizando o princípio de indução matemática, prova que $c_n > 3$.

8. Considera a sucessão (d_n) definida por $d_1 = 3 \wedge d_{n+1} = \sqrt{d_n + 2}, \forall n \in \mathbb{N}$.
   Utilizando o princípio de indução matemática, prova que $d_n > 2$.

9. Considera a sucessão (e_n) definida por $e_n = 1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{8} + \ldots + \dfrac{1}{2^{n-1}}$.
   Utilizando o princípio de indução matemática, prova que $e_n = 2 - 2^{1-n}$.

FUNÇÃO EXPONENCIAL E FUNÇÃO LOGARÍTMICA

10. Considera a função bijetiva $f : \mathbb{R} \to]-3; +\infty[$,definida por $f(x) = e^{-2x+1} - 3$ e a função bijetiva $g :]-3; +\infty[\to \mathbb{R}$, definida por $g(x) = \dfrac{1 - \ln(x+3)}{2}$.

    10.1. Determina os zeros de f.

    10.2. Mostra que as funções f e g são funções inversas e indica uma característica dos gráficos das duas funções.

    10.3. Resolve a condição $g(x) > g(x^2)$.

11. Determina o domínio da função f, definida por $f(x) = \dfrac{\ln(x)}{\sqrt[3]{|\ln(x+1)| - 1}}$.

12. Determina o domínio da função g, definida por $g(x) = \dfrac{\sqrt[5]{\ln(x+1) - 2}}{\ln(|x| - 1)}$.