Proposta de Resolução da Ficha 4

Matemática A

12.º Ano de Escolaridade | outubro de 2022

Turma: $B + C + H$

Aula de Preparação Para Exame

1. .

1.1. Determinemos as coordenadas do ponto C

Sabe-se que $C(0; y; 0)$, com $y \in \mathbb{R}$

Como o ponto C pertence ao plano ABC, vem,

$2 \times 0 + y + 0 - 1 = 0 \Leftrightarrow y - 1 = 0 \Leftrightarrow y = 1$

Logo, $C(0; 1; 0)$

$\overrightarrow{BC} = C - B = (0; 1; 0) - (-2; 3; 2) = (0 - (-2); 1 - 3; 0 - 2) = (2; -2; -2)$

Portanto,

$||\overrightarrow{BC}|| = \sqrt{2^2 + (-2)^2 + (-2)^2} = \sqrt{4 + 4 + 4} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$

Resposta: (D)

1.2. Um vetor normal ao plano ABE é colinear com o vetor $\overrightarrow{BC}$

$\overrightarrow{BC} = (2; -2; -2)$

Portanto, $\overrightarrow{\alpha}(2; -2; -2)$ é um vetor normal al plano ABE

Uma equação cartesiana deste plano ABE é $2x - 2y - 2z + d = 0, d \in \mathbb{R}$

Como o ponto $A(-2; 0; 5)$ é ponto deste plano, resulta,

$2 \times (-2) - 2 \times 0 - 2 \times 5 + d = 0 \Leftrightarrow -4 - 0 - 10 + d = 0 \Leftrightarrow -14 + d = 0 \Leftrightarrow d = 14$

Portanto, uma equação cartesiana do plano ABE é $2x - 2y - 2z + 14 = 0$, ou seja, $x - y - z + 7 = 0$

2. .

2.1. Seja $A(0; y; 0)$, com $y \in \mathbb{R}$ e $B(x; 0; 0)$, com $x \in \mathbb{R}$

Assim,

$3x + 0 + 0 - 12 = 0 \Leftrightarrow x = 4$

Logo, $B(4; 0; 0)$

$0 + 4y + 0 - 12 = 0 \Leftrightarrow y = 3$

Logo, $A(0;3;0)$

Medida da altura do cilindro: $\overline{AB} = \sqrt{(4-0)^2+(0-3)^2+(0-0)^2} = 5$

Área da base do cilindro: πr^2, com $r = \overline{BC}$

Como o volume do cilindro é 10π, vem,

$\pi r^2 \times \overline{AB} = 10\pi \Leftrightarrow 5r^2 = 10 \Leftrightarrow r^2 = 2 \Leftrightarrow r = \pm\sqrt{2}$, com $r > 0$

Logo, $\overline{BC} = \sqrt{2}$

2.2. Seja P', a projeção ortogonal do ponto P sobre o plano ABC

Determinemos uma equação vetorial da reta PP'

Um vetor diretor desta reta poderá ser o vetor normal ao plano ABC

Assim vem,

$(x;y;z) = (3;5;6) + k(3;4;4), k \in \mathbb{R}$

Um ponto genérico desta reta é $(3+3k;5+4k;6+4k), k \in \mathbb{R}$

Ora,

$3\times(3+3k)+4\times(5+4k)+4\times(6+4k)-12 = 0 \Leftrightarrow 9+9k+20+16k+24+16k-12 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 41k+41 = 0 \Leftrightarrow k = -1$

Portanto, $P'(3-3;5-4;6-4)$, ou seja, $P'(0;1;2)$

3. Um vetor normal ao plano poderá ser um vetor diretor da reta AE, dado que a reta AE é perpendicular ao plano EFG

Assim, $\overrightarrow{\alpha}(3;-6;2) \mapsto$ vetor normal ao plano EFG

Portanto,

$EFG: 3x-6y+2z+d = 0, d \in \mathbb{R}$

Como G é ponto do plano EFG, resulta que,

$3\times 5 - 6\times 3 + 2\times 6 + d = 0 \Leftrightarrow 15-18+12+d = 0 \Leftrightarrow d = -9$

Concluindo,

$EFG: 3x-6y+2z-9 = 0$

4. .

4.1. Um vetor diretor da reta EF é $(-3;-2,2)$

Assim, um vetor diretor da reta pedida será $(0;2,2)$, ou ainda, $(0;3,3)$, dado que os vetores das duas retas têm de ser perpendiculares

Portanto, uma equação vetorial da reta pedida poderá ser $(x;y;z) = (7;-10;3) + k(0;3,3), k \in \mathbb{R}$

Falta apenas verificar se o ponto E é ponto desta reta

Ora, $E(7;2;15)$

Então,

$(7;2;15) = (7;-10;3) + k(0;3,3) \Leftrightarrow 7 = 7 + 0 \wedge 2 = -10 + 3k \wedge 15 = 3 + 3k \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 7 = 7(V) \wedge 3k = 12 \wedge k = 12 \Leftrightarrow 7 = 7(V) \wedge k = 4 \wedge k = 4$

Logo, E é ponto da reta da opção C

Resposta: (C)

4.2. Determinemos uma equação do plano ABG

Um vetor normal ao plano ABG terá de ser coliner com o vetor diretor da reta EF

Então, sendo $\overrightarrow{\alpha}$ um vetor normal ao plano ABG, tem-se que $\overrightarrow{\alpha}(-3;-2;2)$

Assim, uma equação cartesiana do plano é $-3x - 2y + 2z + d = 0, d \in \mathbb{R}$

Como o plano "Passa"em G, tem-se,

$-3 \times 6 - 2 \times 10 + 2 \times 13 + d = 0 \Leftrightarrow -18 - 20 + 26 + d = 0 \Leftrightarrow d = 12$

Logo, $ABG : -3x - 2y + 2z + 12 = 0$

O ponto $B(0;y;0)$ é ponto do plano ABG, então,

$-0 - 2y + 0 + 12 = 0 \Leftrightarrow y = 6$, logo, $B(0;6;0)$