OmegaMat

Exame Modelo XI de Matemática A

Duração do Exame: 150 **minutos** + 30 **minutos de tolerância** | **setembro de 2020**

12.º Ano de Escolaridade

Utiliza apenas caneta ou esferográfica de tinta azul ou preta

É permitido o uso de calculadora

Não é permitido o uso de corretor. Risca o que pretendes que não seja classificado

Para cada resposta identifica o item

Apresenta as tuas respostas de forma legível

Apresenta apenas uma resposta para cada item

A prova apresenta um formulário na página 2

As cotações dos itens encontram-se na página 7

Na resposta aos itens de seleção (escolha múltipla), seleciona a resposta correta. Escreve na folha de respostas o número do item e a letra que identifica a opção escolhida

Na resposta aos restantes itens, apresenta o teu raciocínio de forma clara, indicando todos os cálculos que tiveres de efetuar e todas as justificações necessárias Quando, para um resultado, não é pedida aproximação apresenta sempre o valor exato

NOTA

⋇ Itens cujas respostas contribuem obrigatoriamente para a classificação final:

5, 6.1, 6.2 e 11

Estes itens estão assinalados no enunciado a cor azul e em itálico

⋇ Dos restantes 14 itens da prova, apenas contribuem para a classificação final os 8 itens cujas respostas obtenham melhor pontuação

Formulário

Geometria

Comprimento de um arco de circunferência:

αr *(α - amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r - raio)*

área de um polígono regular: *Semiperímetro* $\times$ *Apótema*

área de um setor circular:

$\frac{\alpha r^2}{2}$ *(α- amplitude, em radianos, do ângulo ao centro, r - raio)*

área lateral de um cone: $\pi r g$ *(r - raio da base, g - geratriz)*

área de uma superfície esférica: $4\pi r^2$ *(r - raio)*

Volume da pirâmide: $\frac{1}{3}\times$ *área da base* $\times$ *Altura*

Volume do cone: $\frac{1}{3}\times$ *área da base* $\times$ *Altura*

Volume da esfera: $\frac{4}{3}\pi r^3$ *(r - raio)*

Progressões

Soma dos n primeiros termos de uma progressão (u_n):

Progressão aritmética: $\frac{u_1 + u_n}{2} \times n$

Progressão geométrica: $u_1 \times \frac{1 - r^n}{1 - r}$, $r \neq 1$

Trigonometria

$\sin(a + b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$

$\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$

Complexos

$(|z|e^{i\theta})^n = |z|^n e^{i(n\theta)}$

$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|} e^{i\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right)}$, $k \in \{0; 1; 2; ...; n-1\}$ e $n \in \mathbb{N}$

Regras de derivação

$(u + v)' = u' + v'$

$(uv)' = u'v + uv'$

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$

$(u^n)' = nu^{n-1}u' \quad (n \in \mathbb{R})$

$(\sin u)' = u' \cos u$

$(\cos u)' = -u' \sin u$

$(\tan u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$

$(e^u)' = u'e^u$

$(a^u)' = u'a^u \ln a \quad (a \in \mathbb{R}^+ \backslash \{1\})$

$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$

$(\log_a u)' = \frac{u'}{u \ln a} \quad (a \in \mathbb{R}^+ \backslash \{1\})$

Limites notáveis

$\lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e \quad (n \in \mathbb{N})$

$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^p} = +\infty \quad (p \in \mathbb{R})$

1. Seja f, a função real de variável real, definida em $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, por $f(x) = \dfrac{e^{x+1} - e}{x}$

   Seja (a_n), a sucessão de números reais, de termo geral $a_n = 1 - \left(1 - \dfrac{1}{n^2}\right)^n$

   Em qual das opções está o valor de $\lim(f(a_n))$?

   (A) 0

   (B) e

   (C) 1

   (D) $-e$

2. O Rodrigo, a Marta, o Luís e a Ana, estão a participar num jogo de cartas
   Neste jogo, em cada jogada, apenas um jogador recebe quatro cartas de um baralho constituído por cinquenta e duas cartas (distribuídas por quatro naipes: copas, ouros, paus e espadas. Em cada naipe há treze cartas)
   Na jogada seguinte, baralham-se novamente as cinquenta e duas cartas e o segundo jogador recebe quatro cartas. E assim sucessivamente, até completarem vinte jogadas (cinco jogadas por cada jogador)
   O objetivo é obter um trio em cada jogada

   Ganha quem obtiver mais trios em vinte jogadas (cinco jogadas por jogador)
   Neste jogo, entende-se por trio: três cartas com o mesmo valor facial (três *ases*, ou três *reis*, etc), e uma quarta carta diferente
   Receber quatro cartas com o mesmo valor facial não é considerado ter recebido um trio

   Exemplo de trio

   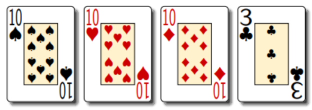

   Figura 1

   2.1. Na primeira jogada o Rodrigo recebeu as quatro cartas e verificou que tinha um trio

   Em qual das opções está o número de combinações de cartas que o Rodrigo pode ter recebido?

   (A) 1920 (B) 11520 (C) 2496 (D) 14976

   2.2. Na segunda jogada a Marta recebeu as quatro cartas e verificou que tinha um par (duas cartas com o mesmo valor facial)
   Qual é a probabilidade de ter recebido um às, dois reis e uma dama?
   Apresenta o valor sob a forma de fração irredutível

3. Numa caixa A estão dez bolas, sendo, seis azuis e quatro vermelhas, e numa caixa B estão n bolas vermelhas e nove bolas azuis

   Considera a experiência aleatória que consiste em retirar uma bola da caixa A, colocar na caixa B e em seguida, retirar, de uma só vez, duas bolas da caixa B e registar a sua cor

   Sejam A e B, os acontecimentos seguintes:

   A : A bola retirada da caixa A é vermelha

   B : As bolas retiradas da caixa B são vermelhas

   Sabe-se que $P(B \mid \overline{A}) = \dfrac{1}{8}$

   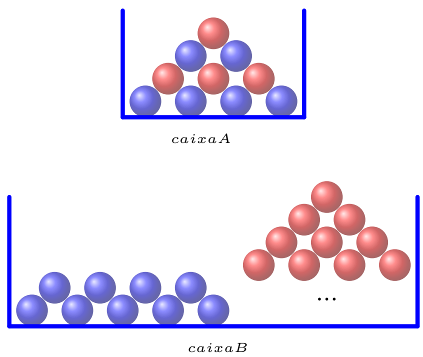

   Figura 2

   Sem recorreres à fórmula da probabilidade condicionada, diz, em qual das opções está o valor de n, número de bolas vermelhas que estavam inicialmente na caixa B

   (A) 9

   (B) 8

   (C) 7

   (D) 6

4. Considera as funções f e g, definidas em $]0;2\pi[$, por $f(x)=e^{\sin(x)}$ e $g(x)=e^{\sin(2x)}$, respetivamente

4.1. Na figura 3, estão representados, em referencial o.n xOy, os gráficos das funções f e g, e os respetivos pontos de interseção, A, B e C

Determina, analiticamente, as abcissas, a, b e c, dos pontos de interseção, A, B e C

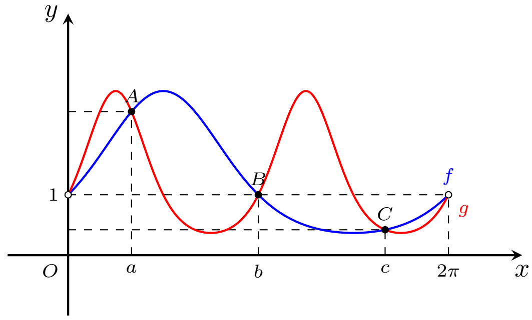

Figura 3

4.2. Para certos valores de $a \in]0;2\pi[$, a reta tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa a é perpendicular à reta tangente ao gráfico de g no ponto de abcissa a
Recorrendo às potencialidades da calculadora gráfica, determina o(s) valor(es) de a

Na tua resposta:

- apresenta uma equação que te permita resolver o problema
- reproduz, num referencial, o(s) gráfico(s) da(s) função(ões) visualizado(s) na calculadora que te permite(m) resolver a equação e apresenta as coordenadas do(s) ponto(s) relevante(s) arredondadas às centésimas
- apresenta o valor pedido, arredondado às centésimas
  Se, nos cálculos intermédios, procederes a arredondamentos, conserva, no mínimo, duas casas decimais

5. Considera a sucessão de números reais (u_n), de termo geral $u_n = \dfrac{2n+1}{n+2}$

Mostra que a sucessão (u_n) é limitada

6. Considera, num plano munido de um referencial ortonormado xOy, a circunferência trigonométrica, como se observa na figura 4

Sabe-se que:

- *os pontos A, B, C, D, E, F e G, pertencem à circunferência*
- *os pontos E e G são pontos de interseção da circunferência trigonométrica com o eixo Ox*
- *os pontos F e H são pontos de interseção da circunferência trigonométrica com o eixo Oy*
- *os pontos A e B são simétricos em relação ao eixo Oy*
- *os pontos C e D são simétricos em relação ao eixo Oy*
- *os pontos A e D são simétricos em relação ao eixo Ox*
- *os pontos B e C são simétricos em relação ao eixo Ox*
- *o ponto B move-se no segundo quadrante, e os pontos A, C e D, acompanham esse movimento*
- *$E\hat{O}B = x$, com $x \in \left]\dfrac{\pi}{2};\pi\right[$*

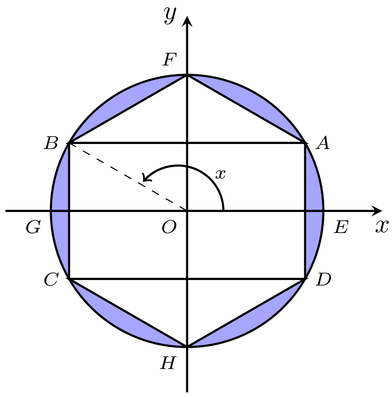

Figura 4

6.1. *Mostra que a área A, da região colorida da figura, é dada, em função de x, por*

$$A(x) = \pi + 2\cos(x) + \sin(2x)$$

6.2. *Determina $\lim\limits_{x\to\pi^-} A(x)$, e interpreta geometricamente esse valor, no contexto do problema*

7. Na figura 5 está representado, num referencial ortonormado $Oxyz$, um octaedro $[CABDEF]$

Sabe-se que:

- os vértices A, B e C, pertencem, respetivamente, aos semieixos positivos das abcissas, das ordenadas e das cotas
- os vértices D, E e F, pertencem, respetivamente, aos semieixos negativos das abcissas, das ordenadas e das cotas
- o centro do octaedro é a origem do referencial
- as faces do octaedro são triângulos equiláteros
- o ponto A tem coordenadas $(a;0;0)$, com $a>0$

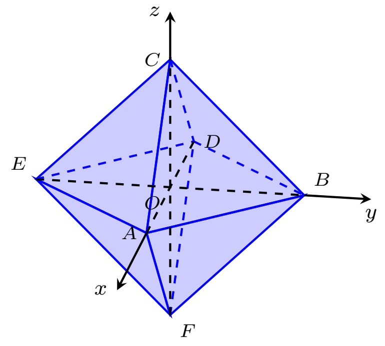

Figura 5

Seja $P(x;y;z)$, um ponto do espaço
A condição $\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{BP}=0$ define um conjunto de pontos do espaço

Em qual das opções está uma equação, na forma reduzida, deste conjunto de pontos?

(A) $x^2+\left(y-\frac{a}{2}\right)^2+\left(z-\frac{a}{2}\right)^2=\frac{a^2}{2}$

(B) $\left(x-\frac{a}{2}\right)^2+y^2+\left(z-\frac{a}{2}\right)^2=\frac{a^2}{2}$

(C) $\left(x-\frac{a}{2}\right)^2+\left(y-\frac{a}{2}\right)^2+z^2=\frac{a^2}{2}$

(D) $\left(x-\frac{a}{2}\right)^2+\left(y-\frac{a}{2}\right)^2+z^2=\frac{a^2}{4}$

8. Seja g, a função real de variável real, definida em $\mathbb{R}^+$, por $g(x)=2\ln(x)-x^2$, e seja a função f, real de variável real, de domínio $\mathbb{R}$

Na figura 6, está representado, em referencial ortonormado xOy, parte do gráfico da função f, e uma reta r, assíntota ao seu gráfico

Sabe-se que a reta r interseta o eixo Ox no ponto de abcissa 1 e interseta o eixo Oy no ponto de ordenada 1

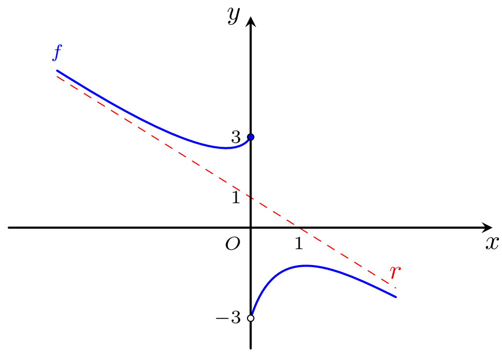

Figura 6

8.1. Em qual das opções está o valor de $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x}{f(x)}$?

(A) -2
(B) -1
(C) 0
(D) $-\frac{1}{2}$

8.2. Estuda a função g quanto à monotonia e determina, caso existam, os extremos relativos

Na tua resposta apresenta o(s) intervalo(s) de monotonia

9. Seja $\mathbb{C}$, o conjunto dos números complexos

9.1. Seja $z = e^{i\left(\frac{\pi}{4}\right)}$, um número complexo

Sabe-se que $w = z^{-2} \times \overline{z} \times (-z)$ é também um número complexo

O menor valor de $n \in \mathbb{N}$ para o qual w^n é um número real, é

(A) 4
(B) 3
(C) 2
(D) 1

9.2. Seja z um número complexo

Os afixos das soluções da equação $z^4 - 16 = 0$ são vértices de um polígono

Em qual das opções está o valor da área desse polígono?

(A) 4 (B) 6 (C) 8 (D) 10

10. Seja f, a função real de variável real, definida por, $f(x) = \begin{cases} \dfrac{xe^{x+1}}{2\sin(x)} & se \quad x < 0 \\ e^k & se \quad x = 0 \\ \dfrac{e^{x+1} - e}{\sqrt{x^3 + 4x^2}} & se \quad x > 0 \end{cases}$,

com $k \in \mathbb{R}$

10.1. Averigua se existe um valor k, para o qual a função f é contínua no ponto $x = 0$

10.2. Averigua, analiticamente, se o gráfico da função f admite assíntota horizontal quando $x \to +\infty$

11. Considera a reta r de equação vetorial $(x; y) = (1; -2) + k(-2; \sqrt{3}), k \in \mathbb{R}$

Determina, com aproximação às décimas, a inclinação da reta r, e escreve a equação reduzida da reta r

12. Seja g, a função real de variável real, definida em $\mathbb{R}$, por $g(x) = 2x + e^{-x}$

Na figura 7, está representado, em referencial ortonormado xOy, parte do gráfico da função g, uma reta r, assíntota ao gráfico da função quando $x \to +\infty$, e uma reta t, tangente ao gráfico de g no ponto A de abcissa -2

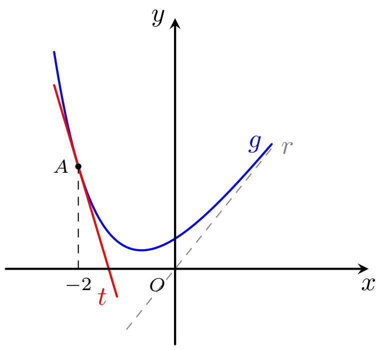

Figura 7

Em qual das opções está a equação reduzida da reta tangente t?

(A) $y = (2 - e^2)x + e^2$
(B) $y = (2 - e^2)x - e^2$
(C) $y = (2 + e^2)x + 3e^2$
(D) $y = (2 + e^2)x - 3e^2$

COTAÇÕES

As pontuações obtidas nas respostas a estes 4 itens da prova contribuem obrigatoriamente para a classificação final					
Itens	5.	6.1	6.2	11	Subtotal
Cotação (Pontos)	20	20	16	16	72

Destes 14 itens da prova, contribuem para a classificação final da prova os 8 itens cujas respostas obtenham melhor pontuação															
Itens	1	2.1	2.2	3	4.1	4.2	7	8.1	8.2	9.1	9.2	10.1	10.2	12	Subtotal
Cotação (Pontos)	8×16 Pontos														128

PÁGINA EM BRANCO