

Teste Intermédio de Matemática A

Versão 1

Teste Intermédio

Matemática A

Versão 1

Duração do Teste: 90 minutos | 28.02.2013

12.º Ano de Escolaridade

Na sua folha de respostas, indique de forma legível a versão do teste.

- Os cinco itens deste grupo são de escolha múltipla. Em cada um deles, são indicadas quatro opções, das quais só uma está correta.
- Escreva na sua folha de respostas apenas o número de cada item e a letra correspondente à opção que selecionar para responder a esse item.
- Não apresente cálculos, nem justificações.
- Se apresentar mais do que uma opção, a resposta será classificada com zero pontos, o mesmo acontecendo se a letra transcrita for ilegível.
- **1.** Os três irmãos Andrade e os quatro irmãos Martins vão escolher, de entre eles, dois elementos de cada família para um jogo de matraquilhos, de uma família contra a outra.

De quantas maneiras pode ser feita a escolha dos jogadores de modo que o Carlos, o mais velho dos irmãos da família Andrade, seja um dos escolhidos?

(A) 8

(B) 12

(C) 16

- **(D)** 20
- **2.** Seja X uma variável aleatória com distribuição normal de valor médio μ e desvio padrão σ $(X \sim N(\mu, \sigma))$ Sabe-se que:
 - $\mu = 5$
 - P(4,7 < X < 5) < 0.3

Qual dos números seguintes pode ser o valor de σ ?

(A) 0,1

(B) 0.2

(C) 0.3

- **(D)** 0.4
- **3.** Para certos valores de a e de b (a > 1 e b > 1), tem-se $\log_a b = 2$ Qual é, para esses valores de a e de b, o valor de $\log_b a + \log_a \sqrt{b}$?
 - (A) $\frac{1}{2} + \sqrt{2}$

(B) $-2 + \sqrt{2}$

(C) $\frac{1}{2}$

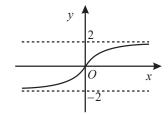
(D) $\frac{3}{2}$

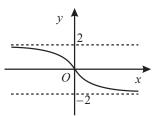
4. Seja (u_n) a sucessão definida por $u_n = 2 + \frac{1}{n}$

De uma certa função f, sabe-se que $\lim f(u_n) = +\infty$

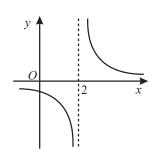
Em qual das seguintes opções pode estar representada parte do gráfico da função f ?

(A)

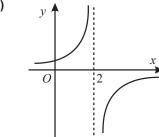




(C)



(D)



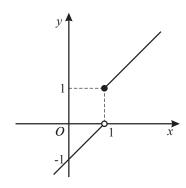
5. Considere a função f, de domínio \mathbb{R} , definida por $f(x) = \begin{cases} \frac{e^{x-1}-1}{x-1} & \text{se } x < 1 \\ \ln x & \text{se } x \ge 1 \end{cases}$

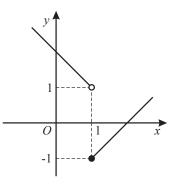
Seja g uma outra função, de domínio $\,\mathbb{R}\,$

Sabe-se que a função $f \times g$ é contínua no ponto 1

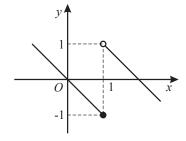
Em qual das seguintes opções pode estar representada parte do gráfico da função $\,g\,?\,$

(A)

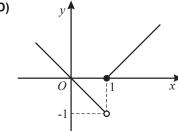




(C)



(D)



GRUPO II

Nas respostas aos itens deste grupo, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias.

Atenção: quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, apresente sempre o valor exato.

- 1. Relativamente a uma turma de 12.º ano, sabe-se que:
 - o número de rapazes é igual ao número de raparigas;
 - $\frac{3}{4}$ dos alunos pretendem frequentar um curso da área de saúde e os restantes alunos pretendem frequentar um curso da área de engenharia;
 - dos alunos que pretendem frequentar um curso da área de engenharia, dois em cada sete são raparigas.
 - **1.1.** Escolhe-se, ao acaso, uma rapariga da turma.

Qual é a probabilidade de essa rapariga pretender frequentar um curso da área de saúde? Apresente o resultado na forma de fração irredutível.

1.2. Escolhem-se, ao acaso, dois alunos da turma para estarem presentes nas comemorações do aniversário da escola.

Sabe-se que a probabilidade de esses dois alunos serem rapazes é $\frac{13}{54}$

Seja n o número de rapazes da turma.

Determine o valor de n

Para resolver este problema, percorra as seguintes etapas:

- equacione o problema;
- resolva a equação, sem utilizar a calculadora.
- 2. Seja Ω o espaço de resultados associado a uma experiência aleatória.

Sejam A e B dois acontecimentos $(A \subset \Omega \in B \subset \Omega)$.

Sabe-se que:

- P(A) = 0.3
- $P(\overline{B}) = 0.6$
- $P(\overline{A} \cap \overline{B}) = 0.4$

Averigue se os acontecimentos A e B são independentes.

3. Seja
$$f$$
 a função, de domínio \mathbb{R} , definida por $f(x) = \begin{cases} \frac{3x+3}{\sqrt{x^2+9}} & \text{se } x \leq 4 \\ \frac{\ln(3x-11)}{x-4} & \text{se } x > 4 \end{cases}$

Resolva os itens 3.1. e 3.2., recorrendo a métodos analíticos, sem utilizar a calculadora.

- **3.1.** Averigue se existe $\lim_{x \to 4} f(x)$
- **3.2.** O gráfico da restrição da função f ao intervalo $]-\infty,4]$ tem uma assíntota horizontal. Determine uma equação dessa assíntota.
- **3.3.** Considere, num referencial o.n. xOy, o triângulo [OPQ] tal que:
 - ullet o ponto P é o ponto de intersecção do gráfico da função f com o eixo das ordenadas;
 - $\bullet\,$ o ponto Q é o ponto do gráfico da função f que tem abcissa positiva e ordenada igual à ordenada do ponto P

Determine um valor aproximado da área do triângulo [OPQ], recorrendo à calculadora gráfica.

Na sua resposta, deve:

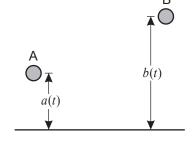
- ullet reproduzir, num referencial, o gráfico da função f para $x \in [0,10]$
- desenhar o triângulo [OPQ]
- indicar a abcissa do ponto $\, O \,$ arredondada às milésimas;
- apresentar a área do triângulo [OPQ] arredondada às centésimas.

Nota – Sempre que, nos cálculos intermédios, proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, três casas decimais.

4. Considere que dois balões esféricos, que designamos por balão A e por balão B, se deslocam na atmosfera, por cima de um solo plano e horizontal.

Num determinado instante, é iniciada a contagem do tempo. Admita que, durante o primeiro minuto imediatamente a seguir a esse instante, as distâncias, medidas em metros, do centro do balão A ao solo e do centro do balão B ao solo são dadas, respetivamente, por

$$a(t) = e^{-0.03t} - 0.02t + 3$$
 e $b(t) = 6e^{-0.06t} - 0.02t + 2$



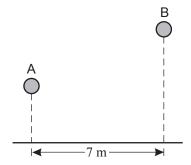
A variável t designa o tempo, medido em segundos, que decorre desde o instante em que foi iniciada a contagem do tempo $(t \in [0,60])$.

Resolva os dois itens seguintes sem utilizar a calculadora, a não ser para efetuar eventuais cálculos numéricos.

Sempre que, nos cálculos intermédios, proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, três casas decimais.

4.1. Determine a distância entre o centro do balão A e o centro do balão B, cinco segundos após o início da contagem do tempo, sabendo que, nesse instante, a distância entre as projeções ortogonais dos centros dos balões no solo era 7 metros.

Apresente o resultado em metros, arredondado às décimas.



4.2. Sabe-se que, alguns segundos após o início da contagem do tempo, os centros dos dois balões estavam à mesma distância do solo.

Determine quanto tempo decorreu entre o instante inicial e o instante em que os centros dos dois balões estavam à mesma distância do solo.

Apresente o resultado em segundos, arredondado às unidades.

FIM

COTAÇÕES

GRUPO I

| 1 | 10 pontos | |
|-------------------------------------|-----------|------------|
| 2 | 10 pontos | |
| 3 | 10 pontos | |
| 4 | 10 pontos | |
| 5 | 10 pontos | |
| | | 50 pontos |
| | | |
| GRUPO II | | |
| 1. | | |
| 1.1. | 20 pontos | |
| 1.2. | 20 pontos | |
| 2 | 20 pontos | |
| 3. | | |
| 3.1 | 15 pontos | |
| 3.2. | 15 pontos | |
| 3.3. | 20 pontos | |
| 4. | | |
| 4.1. | 20 pontos | |
| 4.2. | 20 pontos | |
| _ | | 150 pontos |
| | | |
| TOTAL | | 200 pontos |
| : - : · · · · · · · · · · · · · · · | | |