1.

1.1. Da sucessão (u_n) sabemos que:

- é uma progressão aritmética, logo

$$u_n = u_1 + r(n-1) \quad \text{ou} \quad u_n = u_k + r(n-k)$$

- $u_4 + u_5 + \ldots + u_{13} = S_{13} - S_3 = -55$
- $u_9 = -7$

Vamos tentar encontrar a razão de (u_n).

Com u_9 podemos escrever:

$$u_n = -7 + r(n-9)$$

Do segundo ponto sai:

$$S_{13} - S_3 = -55$$

$$\Leftrightarrow \frac{u_1 + u_{13}}{2} \times 13 - \frac{u_1 + u_3}{2} \times 3 = -55$$

Conseguimos calcular, em função de r, os termos que surgem na expressão.

$$u_1 = -7 + r(1-9) = -7 - 8r$$
$$u_{13} = -7 + r(13-9) = -7 + 4r$$
$$u_3 = -7 + r(3-9) = -7 - 6r$$

$$\Leftrightarrow \frac{\overbrace{-7-8r}^{u_1} + \overbrace{(-7)+4r}^{u_{13}}}{2} \times 13 - \frac{\overbrace{-7-8r}^{u_1} + \overbrace{(-7)-6r}^{u_3}}{2} \times 3 = -55$$

$$\Leftrightarrow \frac{-14-4r}{2} \times 13 - \frac{-14-14r}{2} \times 3 = -55$$

$$\Leftrightarrow -91 - 26r - (-21 - 21r) = -55$$

$$\Leftrightarrow -70 - 5r = -55$$

$$\Leftrightarrow -5r = 15$$

$$\Leftrightarrow r = -3$$

Assim, porque $r < 0$, a progressão é monótona decrescente e, por isso, **(A)** é falsa.

$$u_1 = -7 + (-3)(1-9) = 17$$

$$u_{12} = -7 + (-3)(12-9) = -16$$

$$S_{12} = \frac{u_{12} + u_1}{2} \times 12 = \frac{-16+17}{2} \times 12 = 6 > 0$$

Logo, nem sempre temos a soma dos termos inferior a zero quando $n > 11$ e, portanto, **(B)** é falsa.

$$u_1 = -7 + (-3)(1-9) = 17$$

$$u_{20} = -7 + (-3)(20-9) = -40$$

$$S_{20} = \frac{u_{20} + u_1}{2} \times 20 = \frac{-40+17}{2} \times 20 = -230$$

Ou seja, **(C)** é verdadeira.

Confirmemos apenas que **(D)** é falsa:

$$u_{15} = -7 + (-3)(15-9) = -25 \neq -28.$$

Opção: **(C)**

1.2. Sabendo que (v_n) é progressão geométrica estritamente crescente e que u_8 e u_{12} são os seus dois primeiros termos, vamos determiná-los para, posteriormente, conseguirmos calcular a razão de (v_n).

$$u_8 = -7 + (-3)(8-9) = -4$$

$$u_{12} = -7 + (-3)(12-9) = -16$$

Como (v_n) é crescente então $v_1 = -16$ e $v_2 = -4$. Podemos agora calcular a razão de (v_n):

$$r = \frac{v_2}{v_1} = \frac{-4}{-16} = \frac{1}{4}$$

Recordemos agora a expressão do termo geral de uma progressão geométrica:

$$v_n = v_k \times r^{n-k}$$

se $k = 1$ temos

$$v_n = v_1 \times r^{n-1}$$

Como

$$v_1 = -16 = -2^4$$

e

$$r = \frac{1}{4} = \frac{1}{2^2} = 2^{-2}$$

ficamos com:

$$v_n = -2^4 \times \left(2^{-2}\right)^{n-1} = -2^4 \times 2^{-2n+2} = -2^{6-2n}$$

Comparando esta expressão com a que é dada no enunciado, $v_n = -2^{k-2n}$, concluímos que $k = 6$.

2. Vamos começar por definir o acontecimento:

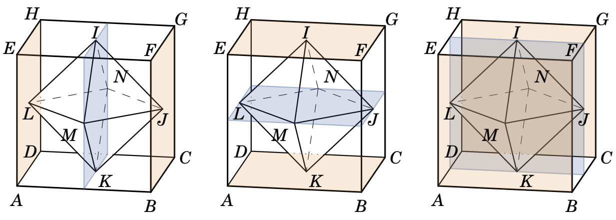
A: «Os dois conjuntos de vértices definem planos paralelos ou coincidentes.»

É importante notar que se escolhermos três vértices do cubo nunca teremos três pontos colineares, ou seja, define-se sempre um plano. Isto é válido também para o octaedro.

Assim, para os casos possíveis, temos:

Dos oito vértices do cubo escolhemos três. ⟷ $^8C_3 \times {}^6C_3$ ⟷ Dos seis vértices do octaedro escolhemos três.

Já no que a casos favoráveis diz respeito, precisamos considerar algumas situações:



Número de planos definidos no octaedro.

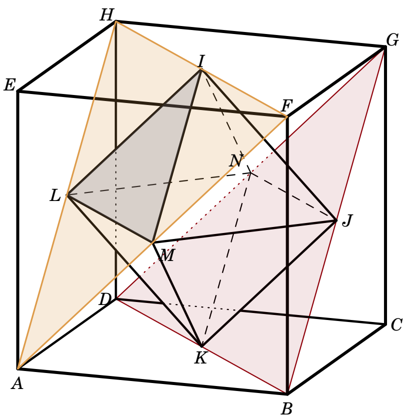
Número de faces do cubo paralelas ao plano definido pelos vértices do octaedro.

$$3 \times {}^4C_3 \times 2 \times {}^4C_3$$

Formas de escolher 3 vértices do octaedro de entre os 4 disponíveis para cada plano.

Formas de escolher 3 vértices de uma face do cubo paralela ao plano definido no octaedro.

Para além destes, temos para cada uma das oito faces do octaedro, uma situação como a que se apresenta de seguida:



em que se verifica a existência de dois planos, um paralelo e outro coincidente com o plano que contém a face de referência. Assim, serão mais 16 casos favoráveis a acrescentar aos anteriores.

Com isto, chegamos a:

$$P(A) = \frac{3 \times {}^4C_3 \times 2 \times {}^4C_3 + 16}{{}^8C_3 \times {}^6C_3} = \frac{1}{10} = 0{,}1$$

3. Temos à disposição todos os algarismos, 0 a 9, e queremos formar um número com seis deles. Por exemplo, de:

$\boxed{0}\ \boxed{1}\ \boxed{2}\ \boxed{3}\ \boxed{4}\ \boxed{5}\ \boxed{6}\ \boxed{7}\ \boxed{8}\ \boxed{9}$

podemos fazer a escolha

$\boxed{7}\ \boxed{3}\ \boxed{2}\ \boxed{5}\ \boxed{8}\ \boxed{1}$

esta dá origem a dois números que verificam o exigido, ordenação crescente ou decrescente dos seis dígitos:

$\boxed{1}\ \boxed{2}\ \boxed{3}\ \boxed{5}\ \boxed{7}\ \boxed{8}$

e

$\boxed{8}\ \boxed{7}\ \boxed{5}\ \boxed{3}\ \boxed{2}\ \boxed{1}$

No entanto, nem todas as escolhas geram dois números com seis algarismos, por exemplo, na escolha:

$\boxed{8}\ \boxed{0}\ \boxed{2}\ \boxed{3}\ \boxed{1}\ \boxed{5}$

temos

$\boxed{0}\ \boxed{1}\ \boxed{2}\ \boxed{3}\ \boxed{5}\ \boxed{8}$

e

$\boxed{8}\ \boxed{5}\ \boxed{3}\ \boxed{2}\ \boxed{1}\ \boxed{0}$

sendo que o primeiro destes não tem seis, mas sim cinco algarismos: 12358, não sendo, por isso, uma opção válida. Convém aqui realçar que o segundo tem de terminar, forçosamente, com o algarismo 0.

Pelo que vimos, vamos contabilizar os números desta forma:

Quando o zero não é escolhido podemos considerar as duas formas de ordenação.

$$^9C_6 \times 2 + {}^9C_5$$

Formas de escolher seis algarismos de entre nove porque excluímos a hipótese de 0 fazer parte do grupo de algarismos escolhidos.

Formas de escolher cinco algarismos de entre nove, uma vez que o 0 já foi escolhido e ocupa a posição das unidades.

$$^9C_6 \times 2 + {}^9C_5 = 294$$

Opção: **(B)**

4. Para determinarmos o valor de $P\left(B|A\right)$ podemos começar por escrever esta expressão de outra forma:

$$P\left(B|A\right)=\frac{P\left(B\cap A\right)}{P\left(A\right)}$$
$$=\frac{P\left(A\cap B\right)}{\frac{3}{4}}$$

$A\cap B=B\cap A$. Do enunciado sabemos que $P\left(A\right)=\frac{3}{4}$.

Vamos agora descobrir o valor de $P\left(A\cap B\right)$:

$$P\left(A\middle|\left(B\cup\overline{A}\right)\right)=\frac{1}{3}$$

Aplicação da fórmula: $P\left(A|B\right)=\frac{P\left(A\cap B\right)}{P\left(B\right)}$

$$\Leftrightarrow\frac{P\left(A\cap\left(B\cup\overline{A}\right)\right)}{P\left(B\cup\overline{A}\right)}=\frac{1}{3}$$

Propriedade distributiva de $\cap$ relativamente a $\cup$.

$$\Leftrightarrow\frac{P\left(\left(A\cap B\right)\cup\left(\overbrace{A\cap\overline{A}}^{\emptyset}\right)\right)}{P\left(B\cup\overline{A}\right)}=\frac{1}{3}$$

$\emptyset$ é elemento neutro de $\cup$.

$$\Leftrightarrow P\left(A\cap B\right)=\frac{1}{3}P\left(B\cup\overline{A}\right)$$

$$\Leftrightarrow P\left(A\cap B\right)=\frac{1}{3}\left[P\left(B\right)+P\left(\overline{A}\right)-P\left(B\cap\overline{A}\right)\right]$$

$$\Leftrightarrow P\left(A\cap B\right)=\frac{1}{3}\left[P\left(B\right)+\left(1-P\left(A\right)\right)-\left(P\left(B\right)-P\left(B\cap A\right)\right)\right]$$

$$\Leftrightarrow P\left(A\cap B\right)=\frac{1}{3}\left[\cancel{P\left(B\right)}+1-\overbrace{P\left(A\right)}^{\frac{3}{4}}-\cancel{P\left(B\right)}+P\left(B\cap A\right)\right]$$

$$\Leftrightarrow P\left(A\cap B\right)=\frac{1}{3}\left[\frac{1}{4}+P\left(B\cap A\right)\right]$$

$$\Leftrightarrow P\left(A\cap B\right)=\frac{1}{12}+\frac{1}{3}P\left(B\cap A\right)$$

$$\Leftrightarrow P\left(A\cap B\right)-\frac{1}{3}P\left(B\cap A\right)=\frac{1}{12}$$

$$\Leftrightarrow\frac{2}{3}P\left(B\cap A\right)=\frac{1}{12}$$

$$\Leftrightarrow P\left(B\cap A\right)=\frac{1}{8}$$

Voltando ao cálculo inicial:

$$P\left(B|A\right)=\frac{P\left(A\cap B\right)}{\frac{3}{4}}=\frac{\frac{1}{8}}{\frac{3}{4}}=\frac{1}{6}$$

5. Começamos por fazer a substituição de n por $+\infty$ e obtemos:

$$\lim\left(2n\left(\ln\left(n^2+3n+2\right)-\ln\left(n^2+2n\right)\right)\right)$$
$$=+\infty\left(\ln(+\infty)-\ln(+\infty)\right)$$
$$=+\infty(\overbrace{+\infty-\infty}^{\text{Ind.}})$$

Chegados a uma indeterminação, vamos tentar resolver o limite doutra forma, começando por aplicar a propriedade

$$\log_c a-\log_c b=\log_c\left(\frac{a}{b}\right)$$

$$=\lim\left[2n\left(\ln\frac{n^2+3n+2}{n^2+2n}\right)\right]$$
$$=\lim\left[\ln\left(\left(\frac{n^2+3n+2}{n^2+2n}\right)^{2n}\right)\right]$$
$$=\ln\left[\lim\left(\left(\frac{n^2+3n+2}{n^2+2n}\right)^{2n}\right)\right]$$

$b\log_c a=\log_c a^b$

Como:

$$\begin{array}{r|l} n^2+3n+2 & n^2+2n \\ \cline{2-2} -n^2-2n & 1 \\ \hline n+2 & \end{array}$$

então $\frac{n^2+3n+2}{n^2+2n}=1+\frac{n+2}{n^2+2n}=1+\frac{\cancel{n+2}}{n\left(\cancel{n+2}\right)}=1+\frac{1}{n}$

$$=\ln\left[\left(\lim\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)^2\right]$$
$$=\ln e^2=2$$

Limite notável: $\lim\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e$

6. Visto que A é a imagem geométrica de uma solução da equação dada, vamos começar por resolver essa equação.

$$z^2-8z+25=0\Leftrightarrow z=\frac{-(-8)\pm\sqrt{(-8)^2-4\times1\times25}}{2}$$

$$\Leftrightarrow z=\frac{8\pm\sqrt{-36}}{2}$$

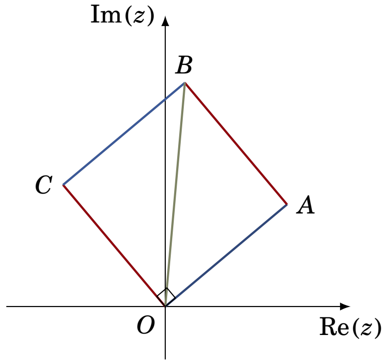
$$\Leftrightarrow z=\frac{8\pm6i}{2}$$

$-36=36\times i^2=(6i)^2$

$$\Leftrightarrow z=4\pm3i$$
$$\Rightarrow z_A=4+3i$$

Como A está no primeiro quadrante, então o número do qual é afixo tem parte real e parte imaginária positiva.

Atentando na figura:



verificamos que podemos calcular o número do qual C é imagem geométrica multiplicando z_A por i uma vez que isso resulta numa rotação de centro em O e ângulo $+90°$.

$$z_C = z_A \times i = (4+3i) \times i = -3+4i$$

outra coisa que se observa é que $z_B = z_A + z_C$, então:

$$z_B = 4+3i+(-3+4i) = 1+7i$$

$\boxed{\text{Opção: } \textbf{(C)}}$

Outra forma de resolver esta questão passa por determinar $|z_A|$, depois de resolver a equação, de modo calcular o comprimento do lado do quadrado $[OABC]$:

$$|z_A| = \sqrt{4^2+3^2} = 5$$

logo, $\overline{OB} = 5\sqrt{2} = z_B$

Determinando o módulo de cada opção presente (usando a calculadora por uma questão de rapidez), verificamos que isso só acontece na opção **(C)**.

7. Para resolver este problema é vantajoso escrever os dois números - z_1 e z_2 - de uma forma simplificada.

Para z_1:

Seja $w = 1+\sqrt{3}i$.

$$|w| = \sqrt{1^2+\sqrt{3}^2} = \sqrt{4} = 2$$

Seja θ um argumento de w. Como $\mathrm{Re}(w) = 1 > 0$ e $\mathrm{Im}(w) = \sqrt{3} > 0$ então $\theta \in$ 1.º quadrante.

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{\sqrt{3}}{1} \quad \wedge \theta \in \text{ 1.º Q}$$

$$\Leftrightarrow \quad \operatorname{tg}\theta = \operatorname{tg}\frac{\pi}{3} \quad \wedge \theta \in \text{ 1.º Q}$$

$$\Leftrightarrow \theta = \frac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \wedge \theta \in \text{ 1.º Q}$$

Vamos considerar $\theta = \dfrac{\pi}{3}$.

Ficamos com:

$$w = 2e^{i\left(\frac{\pi}{3}\right)}$$

Quanto ao denominador de z_1, fazemos:

$$-8e^{i\pi}i^{2015}$$

$$= -8e^{i\pi} \times (-i)$$

$i^{2015} = i^{2012} \times i^3$, 2012 é divisível por 4, logo $i^{2012} = 1$ e $i^3 = -i$

$$= 8e^{i\pi} \times i$$

$$= 8e^{i\left(\frac{3\pi}{2}\right)}$$

a multiplicação por i corresponde a um aumento de $\frac{\pi}{2}$ no argumento.

Ficamos, então, com:

$$z_1 = \frac{\left(2e^{i\frac{\pi}{3}}\right)^5}{8e^{i\left(\frac{3\pi}{2}\right)}} = \frac{32e^{i\left(\frac{5\pi}{3}\right)}}{8e^{i\left(\frac{3\pi}{2}\right)}} = 4e^{i\left(\frac{\pi}{6}\right)}$$

Para z_2:

$$4\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{6}\right) + 4i\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)$$

$$= 4\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)$$

$\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{6}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$

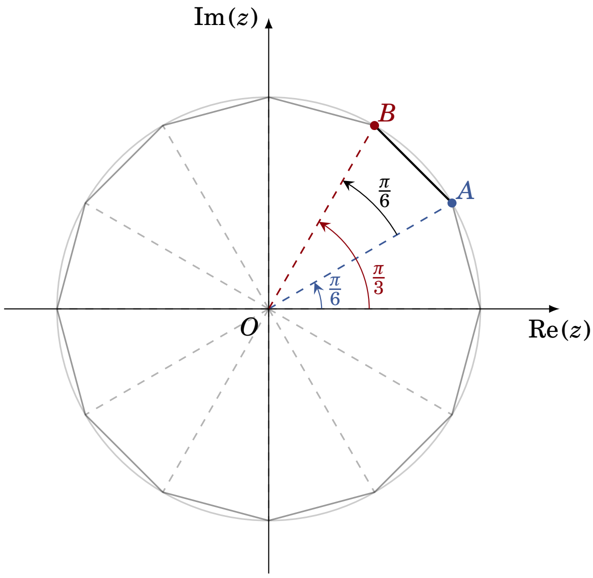
$\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3}\right)$

$$= 4e^{i\left(\frac{\pi}{3}\right)}$$

$\cos\alpha + i\operatorname{sen}\alpha = e^{i\alpha}$

Sendo o segmento de reta $[AB]$ um dos lados do polígono cujos vértices são os afixos das raízes de índice n de um número complexo, então A e B são vértices consecutivos e por isso a diferença entre os seus argumentos permite-nos saber em quantas partes dividimos 2π e, em consequência disso, saber o número de vértices e o valor de n.

Vejamos a seguinte ilustração da situação presente:



Temos $\dfrac{\pi}{3} - \dfrac{\pi}{6} = \dfrac{\pi}{6}$ então $\dfrac{2\pi}{\frac{\pi}{6}} = \dfrac{12\pi}{\pi} = 12.$

Logo, $n = 12$.

8. Como r passa pela origem sabemos que a sua equação é do tipo $y = mx$. A inclinação α de r é dada, logo podemos calcular o valor do declive:

$$m = \operatorname{tg} \alpha$$

Assim, como $\operatorname{tg} \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3}$, ficamos com:

$$r : y = \frac{\sqrt{3}}{3} x$$

O ponto A que pertence a r tem ordenada $2\sqrt{3}$ então facilmente determinamos a sua abcissa:

$$2\sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}}{3} x \Leftrightarrow x = 6$$

Tendo em conta que r é uma reta tangente à circunferência no ponto A, sabemos que é perpendicular a AC e o seu declive é

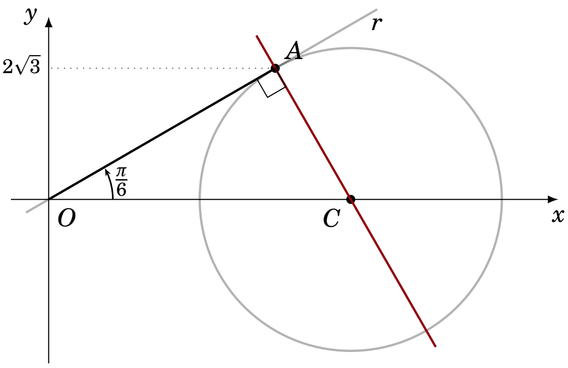
$$m_{AC} = -\frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{3}} = -\sqrt{3}$$

Com este declive e o ponto A determinamos a abcissa de C que tem ordenada nula:

$$0 - 2\sqrt{3} = -\sqrt{3}(x - 6) \Leftrightarrow -8\sqrt{3} = -\sqrt{3}x \Leftrightarrow x = 8$$

Ou seja, $C(8,0)$.

Nas opções já nos apresentam equações de circunferências na forma $(x - x_c)^2 + (y - y_c)^2 = r^2$ então podemos **descartar (A)** e **(C)** pois o centro tem outras coordenadas.



Para determinarmos o comprimento do raio $[AC]$ fazemos:

$$\overline{AC} = \sqrt{(8-6)^2 + \left(0 - 2\sqrt{3}\right)^2}$$

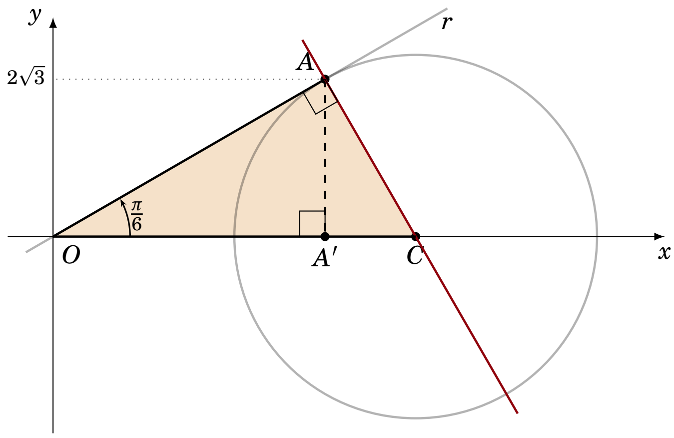
$$\Leftrightarrow \overline{AC} = \sqrt{4 + 12} = 4$$

Ou seja, a equação da circunferência é:

$$(x - 8)^2 + y^2 = 4^2$$

Opção: **(D)**

Podemos abordar o problema de outra forma, tendo em consideração alguns pontos mencionados na resolução anterior, podemos construir a seguinte imagem:



$[AOA']$ é um triângulo retângulo então podemos determinar o comprimento $\overline{OA}$ fazendo:

$$\operatorname{sen} \frac{\pi}{6} = \frac{2\sqrt{3}}{\overline{OA}} \qquad \operatorname{sen} \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} = \frac{2\sqrt{3}}{\overline{OA}}$$

$$\Leftrightarrow \overline{OA} = 4\sqrt{3}$$

Sabemos que $[AOC]$ também é um triângulo retângulo:

$$\operatorname{tg} \frac{\pi}{6} = \frac{\overline{AC}}{4\sqrt{3}} \qquad \operatorname{tg} \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{\overline{AC}}{4\sqrt{3}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{4\cancel{\sqrt{3}\sqrt{3}}}{\cancel{3}} = \overline{AC}$$

$$\Leftrightarrow \overline{AC} = 4$$

Podemos **descartar** as opções **(A)** e **(B)**.

Por outro lado,

$$\overline{OC}^2 = \overline{AO}^2 + \overline{AC}^2$$

$$\overline{OC} = \sqrt{\left(4\sqrt{3}\right)^2 + 4^2}, \quad \overline{OC} \geq 0$$

$$\overline{OC} = 8$$

Então o centro da circunferência é $C(8,0)$.

Assim, a circunferência tem equação $(x - 8)^2 + y^2 = 4^2$

9. Para resolver a inequação, vamos começar por determinar o domínio - D - onde a desigualdade é válida.

$$D = \left\{x \in \mathbb{R} : 5e^{2x} - 1 > 0 \land 1 - e^x > 0\right\}$$

$5e^{2x} - 1 > 0 \Leftrightarrow e^{2x} > \frac{1}{5}$

$\ln x$ é uma função crescente

$\Leftrightarrow \ln\left(e^{2x}\right) > \ln\left(\frac{1}{5}\right)$

$\Leftrightarrow 2x > \ln\left(5^{-1}\right)$

$\Leftrightarrow 2x > -\ln 5$

$\Leftrightarrow x > -\frac{\ln 5}{2}$

$1 - e^x > 0 \Leftrightarrow -e^x > -1$

$\Leftrightarrow e^x < 1$

$\ln x$ é uma função crescente

$\Leftrightarrow \ln\left(e^x\right) < \ln 1$

$\Leftrightarrow x < 0$

$$D = \left]-\frac{\ln 5}{2}, 0\right[$$

Em D temos:

$\ln\left(5e^{2x} - 1\right) \le x + \ln\left(1 - e^x\right)$

$\Leftrightarrow \ln\left(5e^{2x} - 1\right) \le \ln\left(e^x\right) + \ln\left(1 - e^x\right)$

$\Leftrightarrow \ln\left(5e^{2x} - 1\right) \le \ln\left(e^x\left(1 - e^x\right)\right)$

$\ln x$ é uma função crescente

$\Leftrightarrow 5e^{2x} - 1 \le e^x\left(1 - e^x\right)$

$\Leftrightarrow 5e^{2x} - 1 \le e^x - e^{2x}$

$\Leftrightarrow 6e^{2x} - e^x - 1 \le 0$

$\Leftrightarrow 6\left(e^x\right)^2 - e^x - 1 \le 0$

Seja $e^x = y$

$\Leftrightarrow 6y^2 - y - 1 \le 0$

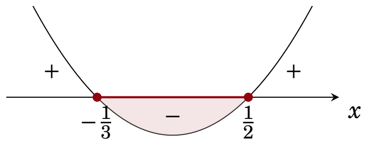
Vamos calcular os zeros de $6y^2 - y - 1$:

$6y^2 - y - 1 = 0$

$\Leftrightarrow y = \frac{1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \times 6 \times (-1)}}{2 \times 6}$

$\Leftrightarrow y = \frac{1}{2} \lor y = -\frac{1}{3}$

Fazemos agora o esboço:



então

$y \ge -\frac{1}{3} \land y \le \frac{1}{2}$

$y = e^x$

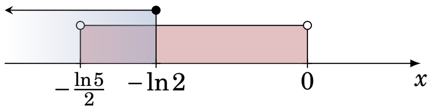
$\Leftrightarrow \underbrace{e^x \ge -\frac{1}{3}}_{\text{Cond. Universal}} \land e^x \le \frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow e^x \le \frac{1}{2}$

$\ln x$ é uma função crescente.

$\Leftrightarrow \ln e^x \le \ln\left(\frac{1}{2}\right)$

$\Leftrightarrow x \le -\ln 2$



$$S = \left]-\frac{\ln 5}{2}, \ln 2\right]$$

10.

10.1. Se B pertence a Oy então $B\left(0, y_B, 0\right)$. Mas B também pertence ao plano $2x + 3y - 6 = 0$ então:

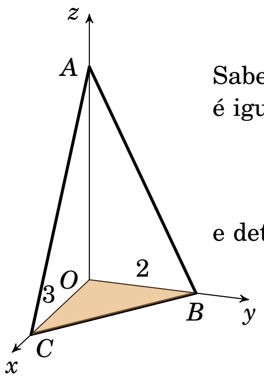
$$2 \times 0 + 3 \times y_B - 6 = 0 \Leftrightarrow y_B = 2$$

O ponto C pertence a O_x então $C\left(x_C, 0, 0\right)$, tal como B também pertence ao plano $2x + 3y - 6 = 0$, aplicando um raciocínio análogo, chegamos a $x_C = 3$.

Temos agora que:

$$B(0,2,0) \quad \text{e} \quad C(3,0,0)$$

Podemos agora determinar a área da base da pirâmide $[OABC]$



$$A_{[OBC]} = \frac{2 \times 3}{2} = 3$$

Sabe-se que o volume da pirâmide é igual a 4. Aplicamos a fórmula

$$V_{[OABC]} = \frac{1}{3} \times A_{[OBC]} \times \overline{OA}$$

e determinarmos a sua altura:

$$4 = \frac{1}{3} \times 3 \times \overline{OA} \Leftrightarrow 4 = \overline{OA}$$

Assim, concluímos que $A(0,0,4)$.

Os pontos A, B e C não são colineares, logo, definem um plano. Para mostrarmos que o plano ABC pode ser definido pela expressão:

$$4x+6y+3z-12=0$$

vamos substituir x, y e z da expressão pelas coordenadas de cada um dos três pontos e ver se a proposição resultante é verdadeira.

Para A:

$$4\times 0+6\times 0+3\times 4-12=0$$
$$12-12=0$$
$$0=0 \text{ (Prop. verdadeira)}$$

então A pertence a $4x+6y+3z-12=0$.

Para B:

$$4\times 0+6\times 2+3\times 0-12=0$$
$$12-12=0$$
$$0=0 \text{ (Prop. verdadeira)}$$

então B pertence a $4x+6y+3z-12=0$.

Para C:

$$4\times 3+6\times 0+3\times 0-12=0$$
$$12-12=0$$
$$0=0 \text{ (Prop. verdadeira)}$$

então C pertence a $4x+6y+3z-12=0$.

Logo, o plano ABC é definido por $4x+6y+3z-12=0$.

10.2. Uma condição que define a superfície esférica pode ser do tipo:

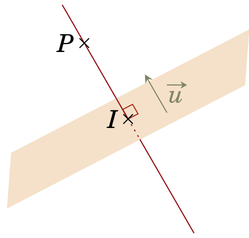
$$(x-x_c)^2+(y-y_c)^2+(z-z_c)^2=r^2$$

Como o centro é dado, então podemos escrever já:

$$\left(x-(-1)\right)^2+\left(y-(-8)\right)^2+(z-1)^2=r^2$$

Para encontrarmos o raio precisamos de calcular qual a distância de P ao plano ABC que, por 10.1, sabemos ter equação

$$4x+6y+3z-12=0$$



Vamos definir a equação de uma reta perpendicular ao plano que passe em P e determinar a interseção dela com o plano. Sendo perpendicular ao plano, podemos usar o vetor do plano como vetor diretor da reta, ficamos com:

$$(x,y,z)=(-1,-8,1)+k\,(4,6,3),\ k\in\mathbb{R}$$

De onde podemos tirar o ponto genérico

$$(-1+4k,-8+6k,1+3k) \qquad (\star)$$

Substituindo estas expressões na equação do plano, vamos determinar qual o valor de k que permite encontrar o ponto que pertence à reta e ao plano.

$$4(-1+4k)+6(-8+6k)+3(1+3k)-12=0$$
$$\Leftrightarrow -4+16k-48+36k+3+9k-12=0$$
$$\Leftrightarrow -61+61k=0$$
$$\Leftrightarrow k=1$$

Seja I o ponto que pertence à reta e ao plano, então, usando $k=1$ em $(\star)$:

$$I\,(3,-2,4)$$

E o raio da superfície esférica é:

$$\overline{PI}=\sqrt{(-1-3)^2+\left(-8-(-2)\right)+(1-4)^2}=\sqrt{61}$$

A condição para a superfície esférica indicada é:

$$(x+1)^2+(y+8)^2+(z-1)^2=61$$

11. É-nos pedido para mostrar que o gráfico de f tem duas assíntotas e que ambas são horizontais. Comecemos por testar a existência de assíntotas verticais que, a haver, pelo que nos é dito sobre o domínio da função - $\mathbb{R}$ - e pela forma como esta está definida, será $x=0$ e apenas para $x\to 0^+$.

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln(2x+1)}{x}=\frac{0}{0}\text{ (ind.)}$$

> Seja $y=\ln(2x+1)\Leftrightarrow e^y=2x+1\Leftrightarrow \frac{e^y-1}{2}=x$.
> $x\to 0^+\Rightarrow \ln(2x+1)\to 0^+$ ou seja $y\to 0^+$.

$$\lim_{y\to 0^+}\frac{y}{\frac{e^y-1}{2}}=2\lim_{y\to 0^+}\frac{y}{e^y-1}=2\Bigg[\underbrace{\lim_{y\to 0^+}\frac{e^y-1}{y}}_{\text{Lim. notável }=1}\Bigg]^{-1}=2\in\mathbb{R}$$

Logo $x=0$ não é uma assintota vertical.

No caso das assíntotas não verticais, temos um máximo de duas.

Vamos calcular assíntotas horizontais, uma vez que são essas que nos interessam e, se forem duas, fica demonstrado o que se pretende.

Para $x \to +\infty$:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(2x+1)}{x} = \frac{+\infty}{+\infty} \text{ (ind.)}$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(2x+1)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{\ln(2x+1)}{2x+1}}{\frac{x}{2x+1}}$$

$$= \frac{\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln(2x+1)}{2x+1}}{\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x}{2x+1}}$$

Seja $y = 2x+1$. Como $x \to +\infty$ então $2x+1 \to +\infty$ Portanto, $y \to +\infty$.

$$= \frac{\lim\limits_{y\to+\infty} \frac{\ln(y)}{y}}{\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x}{2x+1}}$$

$$\underbrace{\lim_{y\to+\infty} \frac{\ln(y)}{y}}_{\text{Lim. Notável} = 0}$$

$$= \frac{0}{\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\cancel{x}}{2\cancel{x}}}$$

$$= \frac{0}{\frac{1}{2}} = 0$$

Assim sendo, $y = 0$ é assintota horizontal ao gráfico de f quando $x \to +\infty$.

Para $x \to -\infty$:

$$\lim_{x\to-\infty} \left(2e^x \cos(x) + 1\right) = \lim_{x\to-\infty} \left(2e^x \cos x\right) + \underbrace{\lim_{x\to-\infty} 1}_{=1}$$

$$= \underbrace{2\overbrace{\lim_{x\to-\infty} (e^x)}^{e^{-\infty}=0} \times \lim_{x\to-\infty} \overbrace{\cos x}^{\text{Função limitada}}}_{=0} + 1$$

$$= 1$$

Temos, então, que $y = 1$ é uma assintota horizontal ao gráfico de f quando $x \to -\infty$;

Fica assim mostrado o que se pretendia.

12. Para determinarmos o valor de a precisamos de calcular os pontos de inflexão do gráfico da função g e, para isso, os zeros da segunda derivada desta função.

Primeira derivada de g:

$$g'(x) = \left(x^2 - 2e^{x+1}\right)'$$
$$= \left(x^2\right)' - 2\left(e^{x+1}\right)'$$
$$= 2x - 2(x+1)' e^{x+1}$$
$$= 2x - 2e^{x+1}$$

Segunda derivada de g:

$$g''(x) = \left(2x - 2e^{x+1}\right)'$$
$$= (2x)' - 2\left(e^{x+1}\right)'$$
$$= 2 - 2(x+1)' e^{x+1}$$
$$= 2 - 2e^{x+1}$$

Zeros da segunda derivada de g:

$$2 - 2e^{x+1} = 0 \Leftrightarrow -2e^{x+1} = -2 \Leftrightarrow e^{x+1} = 1$$

$$\Leftrightarrow \ln\left(e^{x+1}\right) = \ln 1 \Leftrightarrow x+1 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = -1$$

Do enunciado depreende-se que o gráfico de g tem um e só um ponto de inflexão então, porque temos apenas um zero da segunda derivada de g, esse ponto tem abcissa igual ao zero que determinámos, ou seja, $a = -1$.

Para chegarmos à equação reduzida da reta tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa -1, precisamos do declive - $f'(-1)$ - e de um ponto dessa reta.

Quanto ao declive:

$$f'(x) = \left(2\ln(x+3) + x + 1\right)' = 2\left(\ln(x+3)\right)' + x' + 1'$$

$$= 2\frac{(x+3)'}{x+3} + 1 = 2 \times \frac{1}{x+3} + 1 = \frac{2}{x+3} + 1$$

Então $f'(-1) = 2$.

O ponto a usar será o ponto de tangência que pertence tanto à reta quanto à função: $\left(-1, f(-1)\right)$.

$$f(-1) = 2\ln(-1+3) + (-1) + 1 = 2\ln 2$$

Assim, podemos escrever:

$$y - 2\ln 2 = \underbrace{2}_{f'(-1)}\left(x - (-1)\right)$$

$$y = 2x + 2 + 2\ln 2$$

$$2 + 2\ln 2 = \ln e^2 + \ln 2^2 = \ln\left(e^2 \times 4\right) = \ln\left(4e^2\right)$$

$$y = 2x + \ln\left(4e^2\right)$$

A equação reduzida da reta tangente ao gráfico de f no ponto indicado é:

$$y = 2x + \ln\left(4e^2\right)$$

13.

13.1. Se $f(x)=\dfrac{\cos(x)}{4-\operatorname{sen}(x)}$ podemos escrever:

$$\begin{aligned}
f(2\beta) &= \frac{\cos(2\beta)}{4-\operatorname{sen}(2\beta)} && \begin{array}{l} \cos(2\beta)=\cos^2\beta-\operatorname{sen}^2\beta \\ \operatorname{sen}(2\beta)=2\operatorname{sen}\beta\cos\beta \end{array}\\
&= \frac{\cos^2\beta-\operatorname{sen}^2\beta}{4-2\operatorname{sen}\beta\cos\beta} && \textit{Dividindo tudo por } \cos^2\beta\\
&= \frac{1-\operatorname{tg}^2\beta}{\dfrac{4}{\cos^2\beta}-2\operatorname{tg}\beta}\\
&= \frac{1-\operatorname{tg}^2\beta}{4\dfrac{1}{\cos^2\beta}-2\operatorname{tg}\beta} && 1+\operatorname{tg}^2\beta=\frac{1}{\cos^2\beta}\\
&= \frac{1-\operatorname{tg}^2\beta}{4\left(1+\operatorname{tg}^2\beta\right)-2\operatorname{tg}\beta}
\end{aligned}$$

Como $\operatorname{tg}\beta=2$, ficamos com:

$$\frac{1-2^2}{4\left(1+2^2\right)-2\times 2}=-\frac{3}{16}$$

Opção: (A)

13.2. No enunciado podemos ler:

O gráfico da função $\overbrace{f \text{ tem um ponto}}^{(x,f(x))}$ pertencente ao intervalo $[0,\pi]$, tal que quando $\underbrace{\text{se adiciona 2 à sua abcissa}}_{(x+2,f(x+2))}$ $\underbrace{\text{a sua ordenada dobra}}_{(x+2,2f(x))}$.

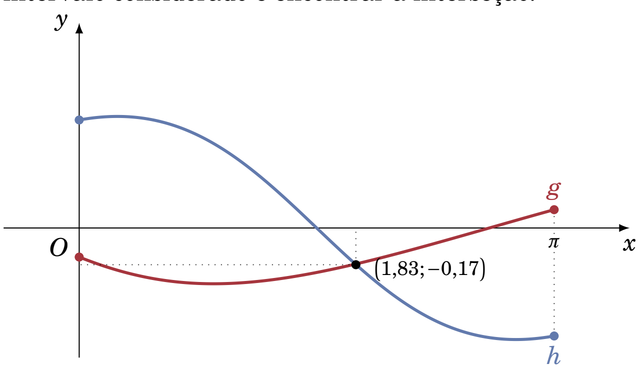
Para resolver o problema precisamos da solução da equação:

$$f(x+2)=2f(x)$$

Vamos considerar:

- $g(x)=f(x+2)=\dfrac{\cos(x+2)}{4-\operatorname{sen}(x+2)}$
- $h(x)=2f(x)=2\times\dfrac{\cos(x)}{4-\operatorname{sen}(x)}$

e fazer a representação gráfica destas duas funções no intervalo considerado e encontrar a interseção.



O ponto pretendido tem coordenadas $\left(1{,}83;f(1{,}83)\right)$, ou seja, $(1{,}83;-0.08)$.

14. Para estudar a monotonia da função vamos analisar o sinal da sua derivada. Começamos por determinar g':

$$g'(x)=\left(\frac{\ln\left(x^2\right)}{x}\right)'=\frac{\left[\ln\left(x^2\right)\right]'\cdot x-\ln\left(x^2\right)\cdot x'}{x^2}$$

$$=\frac{\frac{2x}{x^2}\cdot x-\ln\left(x^2\right)\cdot x'}{x^2}=\frac{2-\ln\left(x^2\right)}{x^2}$$

e agora os seus zeros:

$$\begin{aligned}
\frac{2-\ln\left(x^2\right)}{x^2}=0 &\Leftrightarrow 2-\ln\left(x^2\right)=0\wedge x^2\neq 0\\
&\Leftrightarrow \ln\left(x^2\right)=2\wedge x\neq 0\\
&\Leftrightarrow x^2=e^2\wedge x\neq 0\\
&\Leftrightarrow (x=e\vee x=-e)\wedge x\neq 0
\end{aligned}$$

x	$-\infty$	$-e$		0		e	$+\infty$
$g'(x)$	$-$	0	$+$		$+$	0	$-$
$g(x)$	↘	Min.	↗		↗	Max.	↘

A função é monótona decrescente em $]-\infty,-e]$ e em $]e,+\infty]$ e é monótona crescente em $[-e,0[$ e em $[0,e[$.

- $g(-e)=\dfrac{\ln\left[(-e)^2\right]}{-e}=-\dfrac{2}{e}$
- $g(e)=\dfrac{\ln e^2}{e}=\dfrac{2}{e}$

Tem um mínimo relativo em $x=-e$ com valor $-\dfrac{2}{e}$ e um máximo relativo em $x=e$ igual a $\dfrac{2}{e}$.

15. Em primeiro lugar, vamos analisar a informação que encontramos no enunciado:

- $b>a\Leftrightarrow a-b<0$;
- $g(a)=b$;
- $(g\circ g)(a)=a\Leftrightarrow g\left(g(a)\right)=a\Leftrightarrow g\left(b\right)=a$.

Vejamos agora em que podemos transformar a expressão $\dfrac{t.m.v._{(f,[a;b])}}{t.m.v._{(g,[a;b])}}$.

$$\frac{t.m.v._{(f,[a;b])}}{t.m.v._{(g,[a;b])}}=\frac{\dfrac{f\left(b\right)-f(a)}{b-a}}{\dfrac{g\left(b\right)-g(a)}{b-a}}=\frac{f\left(b\right)-f(a)}{g\left(b\right)-g(a)}$$

Queremos mostrar que existe uma reta tangente ao gráfico da função f com este declive, ou seja,

$$\exists c\in\mathbb{R}: f'(c)=\frac{f\left(b\right)-f(a)}{g\left(b\right)-g(a)}$$

Vamos também escrever a expressão

$$f'(x) \times \left[(g \circ g)(x) - g(x)\right] + f(x) > (f \circ g)(x)$$

de outra forma:

$$f'(x)\left[g(g(x)) - g(x)\right] + f(x) > f(g(x))$$

Para $x = a$:

$$f'(a)\left[\overbrace{g(g(a))}^{a} - \overbrace{g(a)}^{b}\right] + f(a) > f\left(\overbrace{g(a)}^{b}\right)$$

$$\Leftrightarrow f'(a)(a-b) > f(b) - f(a)$$

Dividimos por: $a - b < 0$

$$\Leftrightarrow \frac{f'(a)\cancel{(a-b)}}{\cancel{(a-b)}} < \frac{f(b) - f(a)}{(a-b)}$$

$$\Leftrightarrow f'(a) < \frac{f(b) - f(a)}{a-b}$$

$$\Leftrightarrow f'(a) < \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$$

Para $x = b$:

$$f'(b)\left[\overbrace{g(g(b))}^{b} - \overbrace{g(b)}^{a}\right] + f(b) > f\left(\overbrace{g(b)}^{a}\right)$$

$$\Leftrightarrow f'(b)(b-a) > f(a) - f(b)$$

Dividimos por: $b - a > 0$

$$\Leftrightarrow \frac{f'(b)\cancel{(b-a)}}{\cancel{(b-a)}} > \frac{f(a) - f(b)}{(b-a)}$$

$$\Leftrightarrow f'(b) > \frac{f(a) - f(b)}{b-a}$$

$$\Leftrightarrow f'(b) > \frac{f(a) - f(b)}{g(a) - g(b)}$$

$$\Leftrightarrow f'(b) > \frac{-\left(f(b) - f(a)\right)}{-\left(g(b) - g(a)\right)}$$

$$\Leftrightarrow f'(b) > \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$$

Como f' é uma função contínua em $\mathbb{R}$ é contínua, em particular, no intervalo $[a,b]$ e temos

- $f'(a) < \dfrac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$
- $f'(b) > \dfrac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$

então, pelo teorema de Bolzano-Cauchy, podemos afirmar que:

$$\exists c \in \left]a,b\right[: f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{t.m.v._{(f,[a;b])}}{t.m.v._{(g,[a;b])}}.$$