Ficha de Trabalho n.º 2 – Matemática A – 10.º Ano

Conjuntos e Condições

"Conhece a Matemática e dominarás o Mundo."
Galileu Galilei

Grupo I – Itens de Escolha Múltipla

1. Considere a condição $p(x)$: x é um número irracional.

Qual das seguintes proposições é verdadeira?

A $p(2) \Leftrightarrow p\left(\sqrt{2}\right)$

B $p\left(\sqrt{2}\right) \Rightarrow p\left(\sqrt{(-3)^2}\right)$

C $\sim p(\pi) \wedge p\left(\sqrt{3}\right)$

D $p\left(-\sqrt{4}\right) \vee p\left(\sqrt{5}\right)$

2. Considere, em $\mathbb{R}$, as condições $p(x)$ e $q(x)$ definidas por:

$$p(x): \frac{x^2-1}{2} \leq x\left(\frac{x}{2}+1\right) \quad \text{e} \quad q(x): 6(x-2) < 3x+3$$

Quais são os valores reais de x que transformam a condição $p(x) \wedge q(x)$ numa proposição verdadeira?

A $\left[\frac{1}{2}, 3\right[$

B $\left[-\frac{1}{2}, 5\right[$

C $\left[\frac{1}{2}, 5\right[$

D $\left[-\frac{1}{2}, 3\right[$

3. Considere a seguinte proposição:

p: Não existem números reais cujo seu cubo seja -1

Qual das seguintes expressões traduz em linguagem a proposição p?

A $\exists\, x \in \mathbb{R}: x^3 \neq -1$

B $\forall\, x \in \mathbb{R},\ x^3 = -1$

C $\forall\, x \in \mathbb{R},\ x^3 \neq -1$

D $\exists\, x \in \mathbb{R}: x^3 = -1$

4. Considere a proposição p: $\forall\, x \in \mathbb{R},\ x < -2 \Rightarrow x^2 + x < 2$.

Qual é a expressão que representa a proposição $\sim p$?

A $\exists\, x \in \mathbb{R} : x < -2 \quad \wedge \quad x^2 + x \geq 2$

B $\exists\, x \in \mathbb{R} : x < -2 \quad \vee \quad x^2 + x \geq 2$

C $\exists\, x \in \mathbb{R} : x \geq -2 \quad \wedge \quad x^2 + x \geq 2$

D $\forall\, x \in \mathbb{R},\ x < -2 \quad \wedge \quad x^2 + x \geq 2$

5. Considere os conjuntos A, B e C, definidos por:

- $A = \left\{ x \in \mathbb{R} : \dfrac{-4(x+1)}{3} < 3 + \dfrac{3-x}{2} \right\}$
- $B = \left\{ x \in \mathbb{R} : |x| \geq 10 \right\}$
- $C = \left\{ x \in \mathbb{Z} : (x^2 - 100)(x^2 - 108) = 0 \right\}$

Qual dos seguintes pode definir o conjunto $\left(A \cap \overline{B}\right) \cup C$?

A $[10, +\infty[\cup \{-10\}$

B $]-7, 10] \cup \{-10\}$

C $[10, +\infty[\cup \left\{-\sqrt{108}, -10\right\}$

D $]-7, 10] \cup \left\{-\sqrt{108}, -10, \sqrt{108}\right\}$

6. Seja U o conjunto dos números naturais inferiores a 36. Considere os seguintes conjuntos:

$$A = \left\{ x \in U : \sqrt{x} \in \mathbb{N} \right\} \quad \text{e} \quad B = \left\{ x \in U : x \text{ é múltiplo de } 4 \right\}$$

Em qual das opções estão representados em extensão os conjuntos $A \cap B$ e $B \setminus A$?

A $A \cap B = \{4, 16, 36\}$; $B \setminus A = \{8, 12, 20, 24, 28, 32\}$

B $A \cap B = \{4, 16\}$; $B \setminus A = \{1, 9, 25\}$

C $A \cap B = \{4, 16\}$; $B \setminus A = \{8, 12, 20, 24, 28, 32\}$

D $A \cap B = \{4, 16, 36\}$; $B \setminus A = \{1, 9, 25\}$

7. Considere o conjunto A definido por $A=\{x\in\mathbb{Q}_0^- : x^3=x \ \vee \ x^4=16\}$.

Em qual das opções está representado o conjunto A em extensão?

A $\varnothing$

B $\{-2,-1\}$

C $\{-2,-1,0,1,2\}$

D $\{-2,-1,0\}$

8. Considere, em $\mathbb{R}\setminus\{0\}$, as seguintes condições:

$$a(x): 3x+2=0 \qquad \text{e} \qquad b(x): 6x-\frac{6}{x}=5$$

Qual das seguintes condições é universal?

A $a(x)\Leftrightarrow b(x)$

B $b(x)\Rightarrow a(x)$

C $\sim b(x)\Rightarrow \sim a(x)$

D $\sim a(x)\Rightarrow b(x)$

9. Considere o conjunto S, definido em extensão por $S=\{8, 64, 512, 4096\}$.

Qual das seguintes proposições é falsa?

A $\forall\, x\in S,\ x$ é uma potência de 2

B $\exists\, x\in S:\ x$ é um quadrado perfeito

C $\exists\, x\in S: x^3-16x=0$

D $\forall\, x\in S, \sqrt[3]{x}\in\mathbb{N}$

GRUPO II – ITENS DE RESPOSTA ABERTA

10. Considere as proposições p e q tais que:

$$p: \forall\, x\in\mathbb{R},\ x=x \ \wedge \ x\in\mathbb{Z} \qquad \text{e} \qquad q: \exists\, x\in\mathbb{R}: x=x \ \wedge \ x\in\mathbb{Z}$$

10.1 Indique, justificando, o valor lógico das proposições p e q. No caso de alguma ser falsa, indique um contra-exemplo.

10.2. Sem utilizar os símbolos $\neq$, $\notin$ e $\sim$, escreva em linguagem simbólica $\sim p$.

10.3. Indique, justificando, em qual dos universos, $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ e $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ a condição $a(x): x=x \ \wedge \ x\in\mathbb{Z}$ é universal, possível mas não universal e impossível.

11. Considere as proposições p, q e r tais que:

$p: \forall n \in \mathbb{N},\ n^4\left(n^2+2\right)$ é par, $q: \exists n \in \mathbb{N}: n^2+n$ é ímpar e $r: \exists n \in \mathbb{N}: \dfrac{n^2+2n}{n+6} \in \mathbb{Z}$

11.1. Escreva em linguagem corrente a proposição $\sim q$.

11.2. Mostre que a proposição q é falsa.

11.3. Qual é o valor lógico das seguintes proposições:

a) $p \wedge q \Rightarrow r$

b) $p \Rightarrow q \Rightarrow r$

c) $\sim p \vee q \wedge (r \Rightarrow q)$

d) $p \Leftrightarrow r$

12. Considere os conjuntos A, B e C definidos por:

$A = \{x \in \mathbb{R}: |x| - x = 0\}$, $B = \{x \in A: 2x - 1 \leq 3\}$ e $C = \{x \in \mathbb{R}: \sim(3x - 1 \leq 2) \ \wedge \ 8 - 2(x+1) \geq 0\}$

12.1. Determine, na forma de intervalo ou união de intervalos, os conjuntos:

a) $B \cap C$

b) $(C \setminus B) \cup \bar{A}$

c) $\overline{B \cup C} \cap A$

12.2. Considere as proposições p e q tais que $p: \forall x \in \mathbb{N},\ x \in A$ e $q: \exists x \in C: x^2 = x$.

a) Escreva em linguagem corrente a proposição q.

b) Qual é o valor lógico das proposições p, q e $(p \Rightarrow q) \vee (p \Leftrightarrow \sim q)$?

c) Sem utilizar o símbolo $\notin$, escreva em linguagem simbólica $\sim p$.

12.3. Considere a condição $a(x): \dfrac{2x+3}{3} \geq \dfrac{x+2}{2} \quad \wedge \quad |x| < 2$. Determine o conjunto solução da condição $a(x)$ e classifique-a no universo B.

13. Seja n um número natural.

13.1. Mostre que n^2+3n+3 é um número ímpar.

13.2. Mostre que se n^2+6n é um número ímpar, então, n é um número ímpar:

a) por contra-recíproca.

b) por absurdo.

13.3. Mostre que se n não é um múltiplo de 9, então, não é um múltiplo de 63:

a) por contra-recíproca.

b) por absurdo.

14. Sejam $p(x)$ e $q(x)$ duas condições. Mostre que:

14.1. $\sim\left(\forall x, p(x)\Rightarrow q(x)\right)\Leftrightarrow\left(\exists x, p(x)\wedge\sim q(x)\right)$

14.2. $\left(\forall x, p(x)\Rightarrow q(x)\right)\Leftrightarrow\left(\forall x, \sim q(x)\Rightarrow\sim p(x)\right)$

15. Considere a proposição $p:\forall n\in\mathbb{N},\ n^4+n^2-n>270\Rightarrow n>4$.

15.1. Escreva a contra-recíproca da proposição p.

15.2. Mostre que a proposição p é verdadeira.

15.3. Escreva uma expressão que defina $\sim p$.

16. Considere a seguinte proposição:

q: Não existem números irracionais cujo quadrado seja um número racional

16.1. Indique o valor lógico da proposição $\sim(q\Rightarrow q)\vee q$.

16.2. Usando quantificadores, escreva uma expressão que traduza em linguagem simbólica a proposição q.

17. Considere as seguintes condições:

$$p(x): x^2 + x = 6 \qquad \text{e} \qquad q(x): x = 2$$

17.1. Em $\mathbb{R}$, indique se as seguintes condições são universais, possíveis não universais ou impossíveis:

a) $p(x) \vee \sim q(x)$

b) $p(x) \Leftrightarrow q(x)$

c) $\sim p(x) \wedge q(x)$

d) $p(x) \Rightarrow q(x)$

e) $q(x) \Rightarrow \sim p(x)$

f) $\sim q(x) \Rightarrow p(x)$

g) $\sim p(x) \Rightarrow \sim q(x)$

h) $(p(x) \vee q(x)) \wedge q(x) \Leftrightarrow \sim q(x)$

17.2. Mostre que é verdadeira a proposição $\forall\, x \in \mathbb{R}^+,\ p(x) \Leftrightarrow q(x)$.

17.3. Indique o valor lógico das seguintes proposições. Nas falsas, apresente um contra-exemplo:

a) $\exists\, x \in \mathbb{Z}^- : p(x)$

b) $\forall\, x \in \mathbb{Q},\ \sim p(x)$

c) $\forall\, x \in \mathbb{N},\ p(x) \Rightarrow q(x)$

d) $\forall\, x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q},\ p(x) \Leftrightarrow q(x)$

17.4. Seja $r(x)$ uma condição impossível em $\mathbb{N}$. Qual das seguintes condições é universal em $\mathbb{N}$?

A $\sim r(x) \Rightarrow q(x)$

B $p(x) \Rightarrow \sim r(x)$

C $r(x) \vee q(x)$

D $r(x) \wedge p(x)$

Numa pequena composição indique a opção correcta e explique as razões que o levam a rejeitar as restantes opções. Apresente três razões, uma por cada opção rejeitada.

18. Em $\mathbb{N}$, considere os conjuntos A, B e C definidos por:

- $A = \{x \in \mathbb{N} : x \text{ é um múltiplo de } 5\}$
- $B = \{x \in \mathbb{N} : x \text{ é par}\}$
- $C = \{x \in \mathbb{N} : x \text{ é um múltiplo de } 10\}$

18.1. Mostre que:

a) $C \subset B$

b) $A \not\subset B$.

c) $C = A \cap B$.

18.2. Considere a condição $a(x): x(x+1) \leq x^2 + \dfrac{2(x+3)}{3} \quad \wedge \quad \sim\left(|x+2| \leq 1\right)$.

a) Determine em $\mathbb{R}$ o conjunto solução da condição $a(x)$.

b) Classifique a condição $a(x)$ em B e em C.

18.3. Indique, justificando, o valor lógico das seguintes proposições:

a) $\forall x,\ x \in A \cup B \Rightarrow x \in C$

b) $\exists x: x \in \overline{A} \Rightarrow x \notin C$

c) $\forall x,\ x \in A \cap \overline{B} \Rightarrow x \in \overline{C}$

d) $\exists x: x \in C \ \wedge\ x \in \overline{B}$

19. Sejam U o conjunto dos números naturais inferiores a 16 e A, B e C três subconjuntos de U.

Sabe-se que:

- $U \setminus (A \cup B \cup C) = \{2, 4, 14\}$
- $A \cup B = \{1, 3, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 12, 15\}$
- $A \cap B = \{3, 15\}$
- $A \setminus B = \{6, 9, 12\}$
- $(A \cup B) \cap \overline{C} = \{1, 7, 12, 15\}$

19.1. Escreva em compreensão o conjunto A.

19.2. Escreva em extensão os conjuntos:

a) B

b) $\overline{C}$

c) $(A \cup C) \setminus B$

d) $C \setminus B$

e) $\left(\overline{B \cup C}\right) \cup A$

f) $A \cap B \cap C$

19.3. Considere os conjuntos X e Y definidos por $X = A \cup B$ e $Y = \{x \in U : x \text{ é ímpar inferior a } 11\}$. Indique, justificando, o valor lógico das seguintes proposições:

a) $\forall x,\ x \in Y \Rightarrow x \in X$

b) $\forall x,\ x \in Y \setminus B \Rightarrow x = 9$

c) $\exists x : x \in X \setminus Y \ \wedge \ x \text{ é primo}$

19.4. Considere as condições $a(n) : n^2 - 2^n > 0$ e $b(n) : n^2 - n + 17 \text{ é primo}$.

Classifique em U as seguintes condições:

a) $a(n)$

b) $b(n)$

c) $a(n) \wedge \sim b(n)$

d) $b(n) \Rightarrow a(n)$

Números primos até 300: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97, 101, 103, 107, 109, 113, 127, 131, 137, 139, 149, 151, 157, 163, 167, 173, 179, 181, 191, 193, 197, 199, 211, 223, 227, 229, 233, 239, 241, 251, 257, 263, 269, 271, 277, 281, 283, 293.

20. Seja P o universo de todos os polígonos.

20.1. Considere as seguintes proposições:

$a(x) : x \text{ é um quadrado}$, $\quad b(x) : x \text{ é regular}$ $\quad$ e $\quad c(x) : x \text{ é um pentágono}$

a) Usando pelo menos uma das condições, escreva, simbolicamente, uma condição universal em P.

b) Indique, justificando, o valor lógico da proposição $\forall x \in P,\ \sim a(x) \vee b(x)$.

c) Sem usar os símbolos $\Rightarrow$ e $\vee$ escreva a negação da proposição $\forall x \in P,\ a(x) \wedge b(x) \Rightarrow c(x)$.

20.2. Considere a proposição p definida por:

p: Não existem polígonos com pelo menos dois lados distintos, que sejam regulares

a) Usando quantificadores, escreva uma expressão que traduza em linguagem simbólica a proposição p.

b) Mostre, por absurdo, que a proposição p é verdadeira.

***21.** Classifique, em $\mathbb{R}$, a seguintes condições:

21.1. $p(x):\left(\forall a\in\mathbb{R},\ a\left(x^3+8\right)=0\right)\Rightarrow x+2=0$

21.2. $q(x):\forall a\in\mathbb{R},\ a\left(x^3+8\right)=0\Rightarrow x+2=0$

21.3. $r(x):\exists\, a\in\mathbb{R}:a\left(x^3+8\right)=0\Rightarrow x+2=0$

21.4. $s(x):\left(\exists\, a\in\mathbb{R}:a\left(x^3+8\right)=0\right)\Rightarrow x+2=0$

Adaptado de um exercício do manual "Dimensões 10" da Editora Santillana

Solucionário

Grupo I – Itens de Escolha Múltipla

1.	D	**2.**	B	**3.**	C	**4.**	A	**5.**	B
6.	C	**7.**	D	**8.**	C	**9.**	C		

Grupo II – Itens de Resposta Aberta

10.1. A proposição p é falsa; por exemplo se $x=0{,}5$, $0{,}5=0{,}5$, mas $0{,}5\notin\mathbb{Z}$. A proposição q é verdadeira.

10.2. $\sim p:\exists\, x\in\mathbb{R}:(x<x\ \vee\ x>x)\ \vee\ x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$

10.3. Universal em $\mathbb{N}$ e em $\mathbb{Z}$; possível mas não universal em $\mathbb{Q}$ e em $\mathbb{R}$; impossível em $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$.

11.1. Por exemplo: "A soma de todo o número natural com o seu quadrado é um número par."

11.3. **a)** Verdadeira

11.3. **b)** Verdadeira

11.3. **c)** Falsa

11.3. **d)** Falsa

12.1. **a)** $]1,2]$

12.1. **b)** $]-\infty,0[\,\cup\,]2,3]$

12.1. **c)** $]3,+\infty[$

12.2. **a)** Existe pelo menos um elemento de C cujo seu quadrado é igual a si próprio.

12.2. **b)** p é verdadeira, q é falsa e $(p\Rightarrow q)\vee(p\Leftrightarrow\sim q)$ é verdadeira.

12.2. **c)** $\sim p:\exists\, x\in\mathbb{N}:x\in\mathbb{N}\setminus A$

12.3. $C.S.=[0,2[$; Condição possível não universal em B, pois $[0,2[\,\cap B\neq\varnothing$, mas $[0,2[\,\neq B$. Neste caso tem-se $[0,2[\,\subset B$.

15.1. $\forall\, n\in\mathbb{N},\ n\le 4\Rightarrow n^4+n^2-n\le 270$

15.3. $\exists\, n\in\mathbb{N}:n^4+n^2-n>270\ \wedge\ n\le 4$

16.1. Falsa

16.2. $\forall\, x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q},\ x^2\notin\mathbb{Q}$

17.1. **a)** Universal

17.1. **b)** Possível não universal

17.1. **c)** Impossível

17.1. **d)** Possível não universal

17.1. **e)** Possível não universal **17.1.** **f)** Possível não universal **17.1.** **g)** Universal **17.1.** **h)** Impossível

17.3. **a)** Verdadeira **17.3.** **b)** Falsa **17.3.** **c)** Verdadeira **17.3.** **d)** Verdadeira

17.4. B

18.2. **a)** $]-\infty,-3[\cup]-1,6]$ **18.2.** **b)** Possível não universal em B; impossível em C.

18.3. **a)** Falsa **18.3.** **b)** Verdadeira **18.3.** **c)** Verdadeira **18.3.** **d)** Falsa

19.1. Por exemplo, $A=\{x\in U: x \text{ é múltiplo de } 3\}$ **19.2.** **a)** $B=\{1,3,5,7,8,10,15\}$

19.2. **b)** $\overline{C}=\{1,2,4,7,12,14,15\}$ **19.2.** **c)** $(A\cup C)\setminus B=\{6,9,11,12,13\}$

19.2. **d)** $C\setminus B=\{6,9,11,13\}$ **19.2.** **e)** $\left(\overline{B\cup C}\right)\cup A=\{2,3,4,6,9,12,14,15\}$ **19.2.** **f)** $A\cap B\cap C=\{3\}$

19.3. **a)** Verdadeira **19.3.** **b)** Verdadeira **19.3.** **c)** Falsa

19.4. **a)** Possível não universal **19.4.** **b)** Universal **19.4.** **c)** Impossível **19.4.** **d)** Possível não universal

20.1. **a)** $c(x)\Rightarrow \sim a(x)$ **20.1.** **b)** Verdadeira **20.1.** **c)** $\exists\, x\in P: a(x)\wedge b(x)\wedge \sim c(x)$

20.2. **a)** $\forall\, x\in P,\ x \text{ tem pelo menos dois lados distintos} \Rightarrow x \text{ não é regular}$

21.2. **a)** Universal **21.2.** **a)** Possível não universal **21.2.** **c)** Universal **21.2.** **b)** Possível não universal