Recursos para Matemática
Grupo do Facebook

Prova Modelo de Exame Nacional
Matemática A
Prova 635 | Ensino Secundário | Junho 2021

Duração da Prova: 150 minutos. | Tolerância: 30 minutos. 8 Páginas

- Utilize apenas caneta ou esferográfica de tinta azul ou preta.
- Não é permitido o uso de corretor. Risque aquilo que pretende que não seja classificado.
- É permitido o uso de régua, compasso, esquadro e transferidor.
- Apresente apenas uma resposta para cada item.
- As cotações dos itens encontram-se no final da prova.

- A prova inclui um formulário.
- Nas respostas aos itens de escolha múltipla, selecione a opção correta. Escreva, na folha de respostas, o número do item e a letra que identifica a opção escolhida.
- Nas respostas aos restantes itens, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias. Quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, apresente sempre o valor exato.

- Itens cujas respostas contribuem obrigatoriamente para a classificação final:

1.1., 1.2., 3., 4., 6., 8., 10.1., 10.2., 13.1., 13.2. e 15.

Estes itens estão assinalados no enunciado através de uma moldura que os rodeia.

- Dos restantes 7 itens da prova, apenas contribuem para a classificação final os 4 itens cujas respostas obtenham melhor pontuação.

Formulário

Geometria

Comprimento de um arco de circunferência:

αr (α - amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r - raio)

Área de um polígono regular: *Semiperímetro* $\times$ *Apótema*

Área de um sector circular:

$\frac{\alpha r^2}{2}$ (α - amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r - raio)

Área lateral de um cone: $\pi r g$ (r- raio da base; g - geratriz)

Área de uma superfície esférica: $4\pi r^2$ (r- raio)

Volume de uma pirâmide: $\frac{1}{3} \times \text{Área da base} \times \text{Altura}$

Volume de um cone: $\frac{1}{3} \times \text{Área da base} \times \text{Altura}$

Volume de uma esfera: $\frac{4}{3}\pi r^3$ (r- raio)

Progressões

Soma dos n primeiros termos de uma progressão (u_n):

Progressão aritmética: $\frac{u_1 + u_n}{2} \times n$

Progressão geométrica: $u_1 \times \frac{1 - r^n}{1 - r}$

Trigonometria

$\operatorname{sen}(a + b) = \operatorname{sen} a \cos b + \operatorname{sen} b \cos a$

$\cos(a + b) = \cos a \cos b - \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b$

Complexos

$\left(\rho e^{i\theta}\right)^n = \rho^n e^{in\theta}$

$\sqrt[n]{\rho e^{i\theta}} = \sqrt[n]{\rho}\, e^{i\frac{\theta + 2k\pi}{n}} \quad \left(k \in \{0, \ldots, n-1\} \text{ e } n \in \mathbb{N}\right)$

Regras de derivação

$(u + v)' = u' + v'$

$(uv)' = u'v + uv'$

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$

$\left(u^n\right)' = n u^{n-1} u' \ (n \in \mathbb{R})$

$(\operatorname{sen} u)' = u' \cos u$

$(\cos u)' = -u' \operatorname{sen} u$

$(\operatorname{tg} u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$

$\left(e^u\right)' = u' e^u$

$\left(a^u\right)' = u' a^u \ln a \quad \left(a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}\right)$

$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$

$(\log_a u)' = \frac{u'}{u \ln a} \quad \left(a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}\right)$

Limites notáveis

$\lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e \quad (n \in \mathbb{N})$

$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$

$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^p} = +\infty \quad (p \in \mathbb{R})$

Carlos Frias

1. Na figura 1 encontra-se representado em referencial o.n. $Oxyz$ um prisma reto $[OABCDEFG]$.

Sabe-se que:

- O é a origem do referencial;
- A pertence ao plano xOy;
- F pertence ao plano xOz;
- a base $[OAFG]$ é um paralelogramo;
- a reta AF pode ser definida vetorialmente por: $(x,y,z)=(3,4,-3)+k(1,-2,3),\ k\in\mathbb{R}$

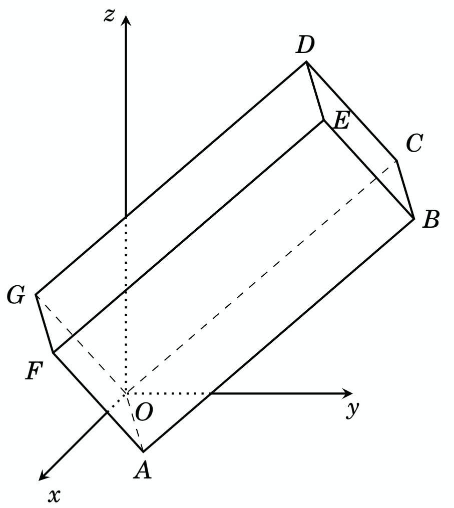

Figura 1

Resolva os itens seguintes por processos analíticos.

1.1. Defina por uma equação o plano que contém a face $[DEFG]$.

Apresente a equação na forma $ax+by+cz+d=0$, com $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.

1.2. Sejam $P(2,-2,2)$ um ponto e θ a amplitude do ângulo OAP.

Determine o valor de $\cos(2\theta)$.

Paulo Conde

2. A soma de todos os elementos de duas linhas completas do Triângulo de Pascal é 2080.

De entre os elementos dessas duas linhas, qual é o que tem maior valor?

(A) 210 **(B)** 462 **(C)** 792 **(D)** 924

João Ferreira

3. Relativamente aos funcionários de uma empresa, sabe-se que:

- 20% são homens;
- 60% das mulheres não são licenciadas.

Para representarem os trabalhadores numa reunião da direção, o diretor de recursos humanos da empresa selecionou, aleatoriamente, dois funcionários da empresa.

Sabendo que a probabilidade de esses dois funcionários serem mulheres licenciadas é de $\frac{92}{925}$, determine quantas mulheres licenciadas trabalham na empresa.

José Nuno Cunha

4. Seja E o espaço amostral associado a uma certa experiência aleatória e sejam A e B dois acontecimentos ($A \subset E$ e $B \subset E$) tais que $P(\overline{A})=0{,}6$ e $P(B)=0{,}8$.

O valor de $P(A|B)$ pertence necessariamente a um dos seguintes intervalos. Qual?

(A) $\left[\frac{1}{8},\frac{1}{4}\right]$ **(B)** $\left[\frac{1}{5},\frac{2}{5}\right]$ **(C)** $\left[\frac{1}{4},\frac{1}{2}\right]$ **(D)** $\left[\frac{1}{2},1\right]$

Roberto Oliveira

5. Na figura 2 está representada parte do gráfico da função f, de domínio $\mathbb{R}^+$, juntamente com uma das suas assíntotas, paralela à bissetriz dos quadrantes pares.

Indique o valor de $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\operatorname{sen} x}{f(x)}$.

(A) -1

(B) 0

(C) $+\infty$

(D) $-\infty$

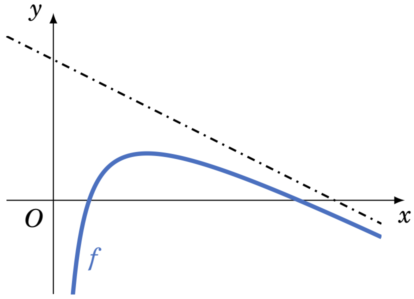

Figura 2

Marisa Cardoso

6. Seja (u_n) uma progressão aritmética tal que $\ln 2$ e $\ln\left(\dfrac{2}{3}\right)$ são dois termos consecutivos de (u_n).

Mostre que a sucessão (v_n), definida por $v_n = 3e^{-2u_n}$ é uma progressão geométrica, indicando a sua razão.

Manuel Gonçalves

7. Considera as sucessões (u_n) e (v_n) definidas por:

$$u_n = \begin{cases} \dfrac{n}{2}+3 & \text{se } n<12 \\[2mm] \dfrac{5-3n}{n+1} & \text{se } n\geq 12 \end{cases} \qquad \text{e} \qquad v_n : \begin{cases} v_1 = 4 \\ v_{n+1} = \dfrac{-2v_n}{(-1)^n\times 3} \end{cases}, n\in\mathbb{N}$$

Qual das seguintes afirmações é **falsa**?

(A) ambas as sucessões são limitadas.

(B) ambas as sucessões são convergentes.

(C) (u_n) é limitada mas não monótona.

(D) (v_n) é limitada e monótona.

Tozé Oliveira

8. Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números dos complexo, considere

$$z = \frac{-2\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha + \left(\cos^2\alpha - \operatorname{sen}^2\alpha\right)i}{\cos\alpha - i\operatorname{sen}\alpha}, \text{ com } \alpha\in\left]0,\pi\right[.$$

Determine os valores de α de modo que o afixo de z pertença à bissetriz dos quadrantes pares.

Carla Pacheco

9. Considere em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, o conjunto A, definido por:

$$A = \left\{z\in\mathbb{C} : \left(\operatorname{Im}(z)\geq 0 \vee \operatorname{Re}(z)\leq 0\right) \wedge |z| < \left|1+i\right|\right\}$$

Qual dos números pertence ao conjunto A?

(A) $i^{323}-2$

(B) $i(1+i)$

(C) $\sqrt{2}e^{i\left(-\frac{\pi}{4}\right)}$

(D) $\dfrac{1}{\sqrt{2}e^{i\frac{2\pi}{3}}}$

Valter Carlos

10. Considere as funções f e g definidas por

$$f(x) = 3\cos^2 x + 4\,\text{sen}\,(2x) \quad \text{e} \quad g(x) = \pi - 4\,\text{sen}\,(2x)$$

10.1. Considera a reta r de equação $x = k$, com $k \in [0,5]$.
Sejam A e B os pontos de interseção da reta r com os gráficos de f e de g, respetivamente.
Seja d a função que a cada valor k faz corresponder o valor de $\overline{AB}$.
O valor de k, aproximado às centésimas, para o qual a função d atinge o máximo absoluto é:

(A) 0,69 **(B)** 2,26 **(C)** 3,83 **(D)** 9,78

10.2. Considere a função f definida em $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.
Seja P um ponto do gráfico de f e seja t a reta tangente ao gráfico de f no ponto P.
Sabe-se que a reta t é paralela à reta de equação $2y+3x+6=0$ e que o valor da sua ordenada na origem é b.

Determine, **recorrendo às capacidades gráficas da calculadora**, o valor de b, arredondado às décimas, sabendo-se que este valor existe e é único.

Não justifique a validade do resultado obtido na calculadora.
Na resposta:

- apresente uma equação que permita determina a abcissa do ponto P;
- reproduza, num referencial, o(s) gráfico(s) da(s) função(ões) visualizado(s) na calculado que permite(m) resolver a equação e apresenta a abcissa do ponto P arredondada às centésimas;
- determine, arredondada às centésimas, a ordenada do ponto P;
- apresente o valor de b, arredondado às décimas.

Luís Malheiro

11. Num referencial o.n. xOy, considere a reta r tangente à circunferência definida por $x^2+y^2-10x=0$ num ponto de abcissa 8 e de ordenada positiva.

Qual a equação reduzida da reta r?

(A) $y = -\frac{3}{4}x + 11$ **(B)** $y = \frac{3}{4}x - 10$ **(C)** $y = -\frac{3}{4}x + 10$ **(D)** $y = \frac{3}{4}x - 11$

Lara Reis

12. Na figura 3, está representada, em referencial o.n. xOy, uma circunferência de centro no ponto O e raio 2. Sabe-se que:

- os pontos A, B e C pertencem à circunferência;
- os pontos O, B e E pertencem à reta r;
- os pontos A, D e E pertencem à reta t;
- a reta t é vertical e tangente à circunferência no ponto $A(2,0)$;
- o ponto C é simétrico do ponto B em relação ao eixo Ox;
- α é a amplitude, em radianos, do ângulo AOB;
- $\alpha \in \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right[$;

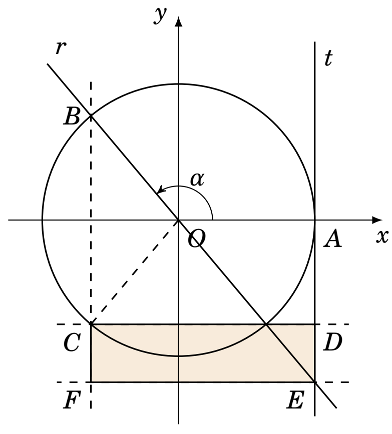

Figura 3

Mostra que a área do retângulo $[CDEF]$ pode ser dada, em função de α, pela seguinte expressão:

$$f(\alpha) = -2\,\text{sen}\,(2\alpha)\,\text{tg}^2\,\alpha$$

José Carlos Pereira

13. Considere a função g, contínua em $]0,+\infty[$, definida por:

$$g(x)=\begin{cases}\dfrac{e^{-kx+k}+x-2}{x^2-x} & \text{se } 0<x<1\\[2ex] \dfrac{x^2\ln x-2}{x} & \text{se } x\geq 1\end{cases}$$

13.1. Estude, no intervalo $]1,+\infty[$, o gráfico da função g quanto ao sentido das concavidades e mostre que tem um ponto de inflexão de coordenadas $\left(2,\ln\left(\dfrac{4}{e}\right)\right)$.

13.2. Qual é o valor de k?

(A) -1 **(B)** 1 **(C)** 2 **(D)** 3

José Carlos Pereira

14. Seja a um número real positivo tal que $\ln a=3$.

Determine, em $\mathbb{R}$, o conjunto solução da inequação

$$e^{\frac{4}{x-2}-2x}\geq a$$

Carlos Frias

15. Na figura 4 encontram-se parcialmente representados, em referencial o.n. xOy, os gráficos de duas funções f e g, de domínios $\mathbb{R}$ e $\mathbb{R}^+$, respetivamente, definidas por $f(x)=e^x$ e $g(x)=\ln x$ e ainda uma reta t.

Tal como a figura sugere:

- a reta t é tangente ao gráfico de g num ponto de abcissa a, com $a>1$;
- a reta t é também tangente ao gráfico de f num ponto de abcissa negativa.

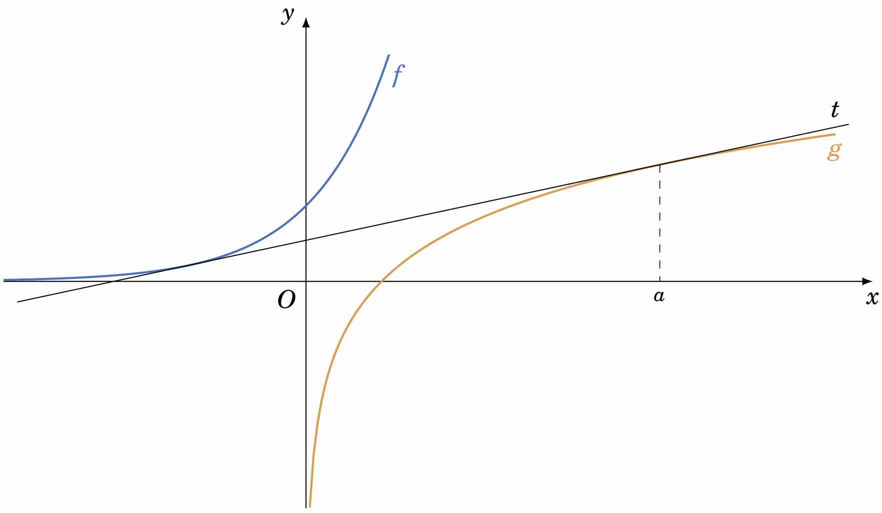

Figura 4

Prove, por processos analíticos, que:

$$\ln a=\frac{a+1}{a-1}$$

As pontuações obtidas nas respostas a estes 11 itens da prova contribuem obrigatoriamente para a classificação final.	**1.1.**	**1.2.**	**3.**	**4.**	**6.**	**8.**	**10.1.**	**10.2.**	**13.1.**	**13.2.**	**15.**	**Subtotal**
Cotação (em pontos)	12	14	12	14	12	12	14	14	12	14	14	144
Destes 7 itens, contribuem para a classificação final da prova os 4 itens cujas respostas obtenham melhor pontuação.	**2.**	**5.**	**7**	**9.**	**11.**	**12.**	**14.**					**Subtotal**
Cotação (em pontos)	4×14 pontos											56
Total												200

Coordenação
José Carlos Pereira

Paginação
Antero Neves