CADERNO 1

1. .

1.1. P2001/2002

P(sair face nacional)$= \dfrac{1}{2}$
P(sair face europeia)$= \dfrac{1}{2}$
Portanto,

$$P(pedida) = {}^{20}C_{10} \times \left(\frac{1}{2}\right)^{10} \times \left(\frac{1}{2}\right)^{10} \approx 0.18$$

Resposta:(C)

1.2. PMC2015

O período do oscilador é $\tau = \dfrac{45}{4} - \dfrac{21}{4} = \dfrac{24}{4} = 6$
assim, $\dfrac{2\pi}{\alpha} = 6 \Leftrightarrow \alpha = \dfrac{2\pi}{6} \Leftrightarrow \alpha = \dfrac{\pi}{3}$
e a frequência é $f = \dfrac{1}{\tau} = \dfrac{1}{6}$

Resposta:(C)

2. .

2.1. Determinemos uma equação do plano ABC
Um vetor normal ao plano poderá ser um vetor diretor da reta que contém a altura da pirâmide, ou seja, poderá ser $\overrightarrow{a} = (0; 6; 6)$
assim, $ABC : 0x + 6y + 6z + d = 0, d \in \mathbb{R}$
Como $T\left(1, \dfrac{1}{2}; \dfrac{3}{2}\right)$ é um ponto deste plano, vem,

$6 \times \dfrac{1}{2} + 6 \times \dfrac{3}{2} + d = 0 \Leftrightarrow 3 + 9 + d = 0 \Leftrightarrow d = -12$
Logo, $ABC : 6y + 6z - 12 = 0$, ou seja, $ABC : y + z - 2 = 0$

Determinemos, agora o ponto S, de interseção deste plano com a reta que contém a altura da pirâmide

Ora, um ponto genérico da reta é $(2; -2 + 6k; -2 + 6k), k \in \mathbb{R}$
Assim, substituindo na equação do plano, vem,

$ABC : -2 + 6k - 2 + 6k - 2 = 0 \Leftrightarrow 12k - 6 = 0 \Leftrightarrow k = \dfrac{1}{2}$
Portanto,

$S\left(2;-2+6\times\frac{1}{2};-2+6\times\frac{1}{2}\right)$, ou seja, $S\,(2;1;1)$

Ora, $\overline{BC}=\overline{AD}=4$

Determinemos a medida do lado $[AB]$ da base da pirâmide

$\overline{BS}=\sqrt{(0-2)^2+(0-1)^2+(2-1)^2}=\sqrt{6}$
Logo, $\overline{BD}=2\sqrt{6}$
Aplicando o Teorema de Pitágoras ao triângulo retângulo $[ABD]$
vem,

$\overline{BD}^2=\overline{AB}^2+\overline{AD}^2 \Leftrightarrow \overline{AB}^2=(2\sqrt{6})^2-4^2 \Leftrightarrow \overline{AB}^2=24-16 \Leftrightarrow \overline{AB}^2=8 \Leftrightarrow \overline{AB}=\pm\sqrt{8}$,
e $\overline{AB}>0$, logo, $\overline{AB}=2\sqrt{2}$

A medida da altura da pirâmide é $\overline{VS}=\sqrt{(2-2)^2+(4-1)^2+(4-1)^2}=\sqrt{18}=3\sqrt{2}$

Assim,

$V_{pir\hat{a}mide}=\frac{1}{3}\times\overline{BC}\times\overline{AB}\times\overline{VS}=\frac{1}{3}\times 4\times 2\sqrt{2}\times 3\sqrt{2}=16\ u.v.$

2.2. A condição $\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{CP}=0$ define a superfície esférica de diâmetro $[AC]$

2.3. O número de casos possíveis é igual a 8^5, pois temos oito cores disponíveis para colorir cinco faces da pirâmide
Quanto ao número de casos favoráveis: Para colorir duas faces opostas, com a mesma cor, temos oito cores disponíveis. Escolhida essa cor, as restantes faces podem ser coloridas de ${}^7A_3$ maneiras distintas. Tendo em conta que temos dois pares de faces opostas, então, o número de casos favoráveis é igual a $8\times{}^7A_3\times 2$
Assim, $P(pedida)=\frac{8\times{}^7A_3\times 2}{8^5}=\frac{105}{1024}$

3. .

3.1. A Ana tem oito escolhas para se sentar à mesa. Para cada uma dessas escolhas, o Pedro só tem um escolha, dado que tem de ficar sentado em frente da Ana. Assim a Ana e o Pedro podem sentar-se um em frente ao outro de oito maneiras distintas. Para cada uma destas maneiras, os restantes oito amigos podem sentar-se de 8! maneiras distintas
Resumindo, os dez elementos podem sentar-se à mesa de $8\times 8!=322560$ maneiras distintas
Resposta:(A)

3.2. Sejam os acontecimentos

A: "ser mulher"
B: "ter mota própria"

Dos dados, tem-se,

$P(A)=\frac{1}{5}$
$P(\overline{A})=1-P(A)=1-\frac{1}{5}=\frac{4}{5}$
$P(B\mid A)=\frac{1}{4}$
$P(\overline{B}\mid\overline{A})=\frac{1}{4}$

Pretende-se o valor de $P(\overline{A}\mid B)$

Ora,

$P(B \mid A) = \frac{1}{4} \Leftrightarrow \frac{P(B \cap A)}{P(A)} = \frac{1}{4} \Leftrightarrow P(B \cap A) = \frac{1}{4} \times P(A) \Leftrightarrow P(B \cap A) = \frac{1}{4} \times \frac{1}{5} \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow P(B \cap A) = \frac{1}{20}$

$P(\overline{B} \mid \overline{A}) = \frac{1}{4} \Leftrightarrow \frac{P(\overline{B} \cap \overline{A})}{P(\overline{A})} = \frac{1}{4} \Leftrightarrow P(\overline{B} \cap \overline{A}) = \frac{1}{4} \times P(\overline{A}) \Leftrightarrow P(\overline{B \cup A}) = \frac{1}{4} \times \frac{4}{5} \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 1 - P(B \cup A) = \frac{1}{5} \Leftrightarrow 1 - [P(B) + P(A) - P(B \cap A)] = \frac{1}{5} \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 1 - P(B) - P(A) + P(B \cap A) = \frac{1}{5} \Leftrightarrow 1 - P(B) - \frac{1}{5} + \frac{1}{20} = \frac{1}{5} \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow -P(B) + \frac{4}{5} + \frac{1}{20} = \frac{1}{5} \Leftrightarrow P(B) = \frac{4}{5} + \frac{1}{20} - \frac{1}{5} \Leftrightarrow P(B) = \frac{13}{20}$

Portanto,

$$P(\overline{A} \mid B) = \frac{P(\overline{A} \cap B)}{P(B)} = \frac{P(B) - P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{13}{20} - \frac{1}{20}}{\frac{13}{20}} = \frac{12}{13}$$

4. $f(0) = e^0 + 0^2 = 1$, logo, $A(0;1)$
$f(1) = e^{-1} + 1^2 = \frac{1}{e} + 1$, logo, $B\left(1; \frac{1}{e} + 1\right)$

$f'(x) = \left(e^{-x} + x^2\right)' = -e^{-x} + 2x$
logo, $f'(c) = -e^{-c} + 2c$ é o declive da reta tangente ao gráfico no ponto C

$m_{AB} = \frac{f(1) - f(0)}{1 - 0} = \frac{\frac{1}{e} + 1 - 1}{1} = \frac{1}{e}$, é o declive da reta secante AB
Assim, deverá ter-se,

$f'(c) = m_{AB}$

Portanto, vem,

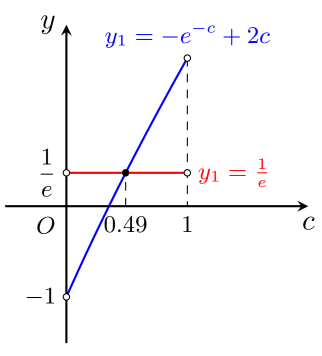
$-e^{-c} + 2c = \frac{1}{e}$

Inserir as funções:
$y_1 = -e^{-c} + 2c$
$y_2 = \frac{1}{e}$

Desenhar os gráficos das duas funções

Procurar a abcissa do ponto de interseção dos dois gráficos

Tem-se, $c \approx 0.49$



5. $w=2\sin(\alpha)+2i\cos(\alpha)=2\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)+2i\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=2e^{i\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)}$
   então,
   $iw^3=e^{i\frac{\pi}{2}}\times\left[2e^{i\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)}\right]^3=e^{i\frac{\pi}{2}}\times 2^3\times e^{i\left(\frac{3\pi}{2}-3\alpha\right)}=8e^{i\left(\frac{3\pi}{2}+\frac{3\pi}{2}-3\alpha\right)}=8e^{i(2\pi-3\alpha)}=$
   $=8\cos(2\pi-3\alpha)+8i\sin(2\pi-3\alpha)=8\cos(3\alpha)-8i\sin(3\alpha)$

   iw^3 é solução da condição Re(z)=Im(z), se e só se,

   $8\cos(3\alpha)=-8\sin(3\alpha)\Leftrightarrow\cos(3\alpha)=\cos\left(\frac{\pi}{2}+3\alpha\right)\Leftrightarrow$
   $\Leftrightarrow 3\alpha=\frac{\pi}{2}+3\alpha+2k\pi\vee 3\alpha=-\frac{\pi}{2}-3\alpha+2k\pi, k\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow$
   $\Leftrightarrow$ equação impossível $\vee 6\alpha=-\frac{\pi}{2}+2k\pi, k\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow\alpha=-\frac{\pi}{12}+\frac{1}{3}k\pi, k\in\mathbb{Z}$

   Atribuindo valores a k

   $k=0\twoheadrightarrow\alpha=-\frac{\pi}{12}\notin\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$

   $k=1\twoheadrightarrow\alpha=-\frac{\pi}{12}+\frac{\pi}{3}=\frac{3\pi}{12}=\frac{\pi}{4}\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$

   $k=2\twoheadrightarrow\alpha=-\frac{\pi}{12}+\frac{2\pi}{3}=\frac{7\pi}{12}\notin\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$

   Logo, $\alpha=\frac{\pi}{4}$

   Resposta:(B)

6. Seja r a razão da progressão geométrica
   Então,
   $r^3=\frac{a_7}{a_4}\Leftrightarrow r^3=\frac{131072}{256}\Leftrightarrow r^3=512\Leftrightarrow r=\sqrt[3]{512}\Leftrightarrow r=8$
   Logo, a razão da progressão geométrica é 8

   $r^6=\frac{a_7}{a_1}\Leftrightarrow 8^6=\frac{131072}{a_1}\Leftrightarrow 262144=\frac{131072}{a_1}\Leftrightarrow a_1=\frac{131072}{262144}\Leftrightarrow a_1=\frac{1}{2}$

   Assim,

   $S_n=\frac{585}{2}\Leftrightarrow\frac{1}{2}\times\frac{1-8^n}{1-8}=\frac{585}{2}\Leftrightarrow\frac{1}{2}\times\frac{8^n-1}{7}=\frac{585}{2}\Leftrightarrow 8^n-1=7\times 585\Leftrightarrow 8^n-1=4095\Leftrightarrow$
   $\Leftrightarrow 8^n=4096\Leftrightarrow 8^n=8^4\Leftrightarrow n=4\in\mathbb{N}$

   Logo, $n=4$

7. Comecemos por determinar o raio do círculo
   $\overline{AE}=\sqrt{(-7+2\sqrt{3}+7)^2+(4-2)^2}=\sqrt{12+4}=4$
   A condição que define o círculo é $|z-(-7+2i)|\leq 4$, ou seja, $|z+7-2i|\leq 4$

   O semiplano é definido por $y\geq 4$, ou ainda, Im(z) ≥ 4

   Assim, a condição que define a região colorida é $|z+7-2i|\leq 4\wedge$ Im(z) ≥ 4
   Resposta:(C)

CADERNO 2

8. .

8.1. P2001/2002

Ora,

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+a+b+\frac{1}{3}=1\wedge b=3a \Leftrightarrow \frac{11}{12}+a+3a=1\wedge b=3a \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 4a=1-\frac{11}{12}\wedge b=3a \Leftrightarrow 4a=\frac{1}{12}\wedge b=3a \Leftrightarrow a=\frac{1}{48}\wedge b=3a \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow a=\frac{1}{48}\wedge b=3\times\frac{1}{48} \Leftrightarrow a=\frac{1}{48}\wedge b=\frac{1}{16}$$

Logo, $P(X=3)=\dfrac{1}{16}$

Resposta:(D)

8.2. PMC2015

$$9x^2+16y^2=144 \Leftrightarrow \frac{9x^2}{144}+\frac{16y^2}{144}=1 \Leftrightarrow \frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$$

Assim,
$a^2=16 \Leftrightarrow a=\pm 4$, e como $a>0$, vem, $a=4 \twoheadrightarrow$ medida do semieixo maior
$b^2=9 \Leftrightarrow b=\pm 3$, e como $b>0$, vem, $b=3 \twoheadrightarrow$ medida do semieixo menor

$a^2=b^2+c^2 \Leftrightarrow 16=9+c^2 \Leftrightarrow 16-9=c^2 \Leftrightarrow c=\pm\sqrt{7}$,
e como $c>0$, vem, $c=\sqrt{7} \twoheadrightarrow$ medida da semidistância focal

Portanto,
$A(4;0)$, $B(0;3)$, $D(0;-3)$ e $C(-\sqrt{7};0)$

Logo,
$A_{[ABCD]}=2\times\dfrac{\overline{AC}\times\overline{OB}}{2}=(4+\sqrt{7})\times 3=(12+3\sqrt{7})\ u.a.$

Resposta:(D)

9. $$w=\frac{(1-i)\times i^{19}}{1+\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)^5}=\frac{(1-i)\times i^{4\times4+3}}{1+(0+i)^5}=\frac{(1-i)\times i^3}{1+i^5}=\frac{(1-i)\times(-i)}{1+i^{1\times4+1}}=$$
$$=\frac{-i+i^2}{1+i}=\frac{-1-i}{1+i}=\frac{-(1+i)}{1+i}=-1$$

Logo, $w=e^{i\pi}$

Assim, tem-se que o afixo de w situa-se numa circunferência de centro na origem e raio 1
Portanto, como o hexágono está inscrito nessa circunferência, a medida do seu lado é igual ao raio, ou seja, é igual a um
Resumindo,
o perímetro do hexágono é igual a 6 $u.c.$

10. .

10.1. P2001/2002

Um vetor diretor da reta r é $\overrightarrow{r} = (2;3;0)$ e um vetor normal ao plano α é $\overrightarrow{\alpha} = (2;0;3)$

Ora,

$\overrightarrow{r} \cdot \overrightarrow{\alpha} = 2 \times 2 + 3 \times 0 + 0 \times 3 = 4 \neq 0$, logo a reta, não é paralela ao plano nem está contida no plano

Existirá $k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, tal que $\overrightarrow{r} = k\overrightarrow{\alpha}$?

$\overrightarrow{r} = k\overrightarrow{\alpha} \Leftrightarrow (2;3;0) = k \times (2;0;3) \Leftrightarrow (2;3;0) = (2k;0;3k) \Leftrightarrow 2 = 2k \wedge 3 = 0k \wedge 0 = 3k \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow k = 1 \wedge 3 = 0k \wedge k = 0$
Este sistema é impossível, logo os vetores $\overrightarrow{\alpha}$ e $\overrightarrow{r}$ não são colineares, o que faz com que a reta r não seja perpendicular ao plano α

Portanto, a reta é oblíqua ao plano

Resposta:(B)

10.2. PMC2015

$f(-1) = \arcsin\left(-1 - \frac{-1}{2}\right) + 2\arccos(-1) = \arcsin\left(-1 + \frac{1}{2}\right) + 2\pi = \arcsin\left(-\frac{1}{2}\right) + 2\pi =$
$= -\frac{\pi}{6} + 2\pi = \frac{11\pi}{6}$
Resposta:(B)

11. Calculemos a função derivada de f

$f'(x) = \left[35 - 5\left(e^{0.03x} + e^{-0.03x}\right)\right]' = 0 - 5 \times \left(e^{0.03x} + e^{-0.03x}\right)' = -5 \times \left(0.03e^{0.03x} - 0.03e^{-0.03x}\right) =$
$= -5 \times \left(0.03e^{0.03x} - 0.03e^{-0.03x}\right)$

Determinemos os zeros de f'

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow -5 \times \left(0.03e^{0.03x} - 0.03e^{-0.03x}\right) = 0 \Leftrightarrow 0.03e^{0.03x} - 0.03e^{-0.03x} = 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 0.03e^{0.03x} = 0.03e^{-0.03x} \Leftrightarrow e^{0.03x} = e^{-0.03x} \Leftrightarrow 0.03x = -0.03x \Leftrightarrow 0.03x + 0.03x = 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 0.06x = 0 \Leftrightarrow x = 0$

Sinal de f'

$f'(x) > 0 \Leftrightarrow -5 \times \left(0.03e^{0.03x} - 0.03e^{-0.03x}\right) > 0 \Leftrightarrow 0.03e^{0.03x} - 0.03e^{-0.03x} < 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 0.03e^{0.03x} < 0.03e^{-0.03x} \Leftrightarrow e^{0.03x} < e^{-0.03x} \Leftrightarrow 0.03x < -0.03x \Leftrightarrow 0.03x + 0.03x < 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 0.06x < 0 \Leftrightarrow x < 0$

$f'(x) < 0 \Leftrightarrow -5 \times \left(0.03e^{0.03x} - 0.03e^{-0.03x}\right) < 0 \Leftrightarrow 0.03e^{0.03x} - 0.03e^{-0.03x} > 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 0.03e^{0.03x} > 0.03e^{-0.03x} \Leftrightarrow e^{0.03x} > e^{-0.03x} \Leftrightarrow 0.03x > -0.03x \Leftrightarrow 0.03x + 0.03x > 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 0.06x > 0 \Leftrightarrow x > 0$

Quadro de sinal de f' variação de f

x	x_1		0		x_2
$f'(x)$	\\\	$+$	0	$-$	\\\
$f(x)$	\\\	$\nearrow$	25	$\searrow$	\\\

$f(0)=35-5\left(e^0+e^0\right)=35-10=25$
x_1e x_2 são as abcissas dos pontos A e B, onde o arco da ponte toca no rio

A altura do arco é máxima quando $x=0$

12. o ponto de coordenadas $\left(e+1;\dfrac{e+2}{e+1}\right)$ pertence ao gráfico de g, se e só se, $g(e+1)=\dfrac{e+2}{e+1}$

$g(e+1)=\dfrac{e+2}{e+1}\Leftrightarrow e^{\ln(e+1+a)-\ln(e+1)}=\dfrac{e+2}{e+1}\Leftrightarrow e^{\ln\left(\frac{e+1+a}{e+1}\right)}=\dfrac{e+2}{e+1}\Leftrightarrow \dfrac{e+1+a}{e+1}=\dfrac{e+2}{e+1}\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow e+1+a=e+2\Leftrightarrow a=1$

Resposta:(A)

13. .

13.1. $0\in D_h$ e é ponto aderente de D_h

A função h é contínua em $x=0$, se existir $\lim\limits_{x\to 0}h(x)$, ou seja, se $\lim\limits_{x\to 0^-}h(x)=h\left(0\right)$ e $\lim\limits_{x\to 0^+}h(x)=h\left(0\right)$

Ora,

$$\lim_{x\to 0^-}h(x)=\lim_{x\to 0^-}\frac{e^x-1}{1-e^{2x}}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim_{x\to 0^-}\frac{\dfrac{e^x-1}{x}}{-\dfrac{e^{2x}-1}{x}}=-\frac{\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{e^x-1}{x}}{2\times\lim\limits_{2x\to 0^-}\dfrac{e^{2x}-1}{2x}}=$$
$$=-\frac{1}{2\times 1}=-\frac{1}{2}$$

Utilizou-se o limite notável $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x}=1$

$$\lim_{x\to 0^+}h(x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{1-\sqrt{x+1}}{x}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim_{x\to 0^+}\frac{(1-\sqrt{x+1})(1+\sqrt{x+1})}{x(1+\sqrt{x+1})}=$$
$$=\lim_{x\to 0^+}\frac{1-(\sqrt{x+1})^2}{x(1+\sqrt{x+1})}=\lim_{x\to 0^+}\frac{1-|x+1|}{x(1+\sqrt{x+1})}=\lim_{x\to 0^+}\frac{1-(x+1)}{x(1+\sqrt{x+1})}=\lim_{x\to 0^+}\frac{1-x-1}{x(1+\sqrt{x+1})}=$$
$$=\lim_{x\to 0^+}\frac{-x}{x(1+\sqrt{x+1})}=-\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{1+\sqrt{x+1}}=-\frac{1}{2}$$

$h\left(0\right)=-\dfrac{1}{2}$

Como, $\lim\limits_{x\to 0^-}h(x)=h\left(0\right)$ e $\lim\limits_{x\to 0^+}h(x)=h\left(0\right)$, então, existe $\lim\limits_{x\to 0}h(x)$

Logo, a função h é contínua em $x=0$

13.2. Calculemos $\lim_{x\to+\infty} h(x)$

$$\lim_{x\to+\infty} h(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{1-\sqrt{x+1}}{x} =^{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)} \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} - \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x+1}}{x} = \frac{1}{+\infty} - \lim_{x\to+\infty} \sqrt{\frac{x+1}{x^2}} =$$
$$= 0 - \lim_{x\to+\infty} \sqrt{\frac{x}{x^2} + \frac{1}{x^2}} = -\sqrt{\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} + \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^2}} = -\sqrt{\frac{1}{+\infty} + \frac{1}{+\infty}} = -\sqrt{0+0} = 0$$

Logo, a reta de equação $y = 0$ é assintota horizontal ao gráfico de h, quando $x \to +\infty$

Portanto, $b = 0$

14. $f'(x) = \left(\ln(x^2)\right)' = \frac{2x}{x^2} = \frac{2}{x}$

Assim,

$f'(a) = \frac{2}{a} > 0$, visto que $a > 0$

$f''(x) = \left(\frac{2}{x}\right)' = \frac{2' \times x - 2 \times x'}{x^2} = -\frac{2}{x^2}$

$f''(a) = -\frac{2}{a^2} < 0$, visto que $a > 0$

Por outro lado sabemos, por observação do gráfico da função g, que,

$g(a) < 0$; $g'(a) < 0$ e $g''(a) > 0$

Portanto

(A) $f'(a) \times g''(a) > 0$, é proposição verdadeira
(B) $f'(a) \times g'(a) < 0$, é proposição verdadeira
(C) $f''(a) + g(a) < 0$, é proposição verdadeira
(D) $f''(a) - g''(a) > 0$, é proposição falsa

Resposta:(D)

15. $\lim_{x\to0} \frac{\sin(2x)\cos(2x)}{f(x)-2} =^{\left(\frac{0}{0}\right)} \lim_{x\to0} \frac{\sin(2x)}{f(x)-2} \times \lim_{x\to0}(\cos(2x)) = \lim_{x\to0} \frac{2 \times \frac{\sin(2x)}{2x}}{\frac{f(x)-f(0)}{x}} \times 1 =$

$$= 2 \times \frac{\lim_{2x\to0} \frac{\sin(2x)}{2x}}{\lim_{x\to0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0}} = 2 \times \frac{1}{\frac{1}{2}} = 4$$

Utilizou-se o limite notável $\lim_{x\to0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$

Outro processo

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(2x)\cos(2x)}{f(x)-2} =^{\left(\frac{0}{0}\right)} \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}\times 2\sin(2x)\cos(2x)}{f(x)-2} = \frac{1}{2}\times\lim_{x\to 0}\frac{\sin(2\times 2x)}{f(x)-2} = \frac{1}{2}\times\lim_{x\to 0}\frac{\sin(4x)}{f(x)-2} =$$
$$= \frac{1}{2}\times\lim_{x\to 0}\frac{4\times\frac{\sin(4x)}{4x}}{\frac{f(x)-f(0)}{x}} = \frac{1}{2}\times 4\times\frac{\lim\limits_{4x\to 0}\frac{\sin(4x)}{4x}}{\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}} = 2\times\frac{1}{\frac{1}{2}} = 4$$

Utilizou-se o limite notável $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x} = 1$

16. Como o ponto C tem a mesma abcissa do ponto B e a mesma ordenada do ponto A, então o triângulo $[ABC]$ é retângulo em C

Ora,
$f(a) = \ln(a)$
$f(2a) = \ln(2a)$

A área do triângulo $[ABC]$ é dada por
$$A_{[ABC]} = \frac{\overline{AC}\times\overline{BC}}{2} = \frac{|2a-a|\times|f(2a)-f(a)|}{2} = \frac{a\times|\ln(2a)-\ln(a)|}{2} = \frac{a\times|\ln(2)+\ln(a)-\ln(a)|}{2} =$$
$$= \frac{a\times|\ln(2)|}{2} = \frac{a\ln(2)}{2}$$

Então,

$$A_{[ABC]} = \ln(2)a^2 \Leftrightarrow \frac{a\ln(2)}{2} = \ln(2)a^2 \Leftrightarrow \frac{a}{2} = a^2 \Leftrightarrow 2a^2 - a = 0 \Leftrightarrow a(2a-1) = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow a = 0 \vee 2a - 1 = 0 \Leftrightarrow a = 0 \vee a = \frac{1}{2}$$

Como $a > 0$, vem, $a = \frac{1}{2}$