1. • $i^{9-16n} = \frac{i^9}{i^{16n}} = \frac{i^{2\times4+1}}{i^{4\times4n+0}} = \frac{i^1}{i^0} = i$

• $|-1-\sqrt{3}i| = \sqrt{(-1)^2+(-\sqrt{3})^2} = 2$ Seja θ $\arg(-1-\sqrt{3}i) \Rightarrow \operatorname{tg}\theta = \frac{-\sqrt{3}}{-1} = \sqrt{3}$ $\therefore \theta = \frac{4\pi}{3}$

• $(z\times i^{9-16n})^2 = \left(\frac{\operatorname{sen}\alpha - i\cos\alpha}{\operatorname{cis}(3\alpha)\times 2\operatorname{cis}\frac{4\pi}{3}} \times i\right)^2 = \left(\frac{i\operatorname{sen}\alpha - i^2\cos\alpha}{2\operatorname{cis}\left(\frac{4\pi}{3}+3\alpha\right)}\right)^2 = \left(\frac{\operatorname{cis}\alpha}{2\operatorname{cis}\left(\frac{4\pi}{3}+3\alpha\right)}\right)^2$

$= \left(\frac{1}{2}\operatorname{cis}\left(\alpha - \frac{4\pi}{3} - 3\alpha\right)\right)^2 = \frac{1}{4}\operatorname{cis}\left(-4\alpha - \frac{8\pi}{3} + 2\pi\right) = \frac{1}{4}\operatorname{cis}\left(-4\alpha - \frac{2\pi}{3}\right)$

$\therefore -4\alpha - \frac{2\pi}{3} = \pi + 2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$

$\Leftrightarrow \alpha = \frac{-5\pi}{12} - \frac{k\pi}{2},\ k\in\mathbb{Z}$

se $k=-1 \longrightarrow \pi/12$ ✗

se $k=-2 \longrightarrow 7\pi/12$ ✓

2. $|z-w|^2 = |z|^2 - 2\operatorname{Re}(\bar{z}\times w) + |w|^2$

Seja $z = a+bi$, $w = c+di$; $|z|^2 = a^2+b^2$, $|w|^2 = c^2+d^2$

$|z-w|^2 = |a+bi-c-di|^2 = |a-c+i(b-d)|^2 = \left(\sqrt{(a-c)^2+(b-d)^2}\right)^2 = a^2 - 2ac + c^2 + b^2 - 2bd + d^2$

$= \underbrace{a^2+b^2}_{|z|^2} - 2\underbrace{(ac+bd)}_{\operatorname{Re}(\bar{z}\times w)} + \underbrace{c^2+d^2}_{|w|^2} = |z|^2 - 2\operatorname{Re}(\bar{z}w) + |w|^2$

• $\bar{z}\times w = (a-bi)(c+di)$

$= ac + adi - cbi - dbi^2$

$= ac + bd + i(ad-cb)$

$\operatorname{Re}(\bar{z}w) = ac+bd$

3.1 $\frac{(1-P(\bar{A}|\bar{B}))\times(1-P(B))}{P(A\cap B)} = \frac{\left(1 - \frac{P(\bar{A}\cap\bar{B})}{P(\bar{B})}\right)\times P(\bar{B})}{P(A\cap B)} = \frac{P(\bar{B}) - P(\bar{A}\cap\bar{B})}{P(A\cap B)}$

$= \frac{P(\bar{B}) - P(\overline{A\cup B})}{P(A\cap B)} = \frac{\cancel{1} - P(B) - \cancel{1} + P(A\cup B)}{P(A\cap B)} = \frac{-\cancel{P(B)} + P(A) + \cancel{P(B)} - P(A\cap B)}{P(A\cap B)}$

$= \frac{P(A\cap\bar{B})}{P(A\cap B)} = \frac{P(A\cap\bar{B})}{P(A\cap B)} = \frac{\frac{P(\bar{B}\cap A)}{P(A)}}{\frac{P(A\cap B)}{P(A)}} = \frac{P(\bar{B}|A)}{P(B|A)}$

3.2 P "gosta de música pop"
R "gosta de música rock"

	P	$\bar{P}$	
R	0,1	0,05	0,15
$\bar{R}$	0,35	0,5	0,85
	0,45	0,55	1

$P(P) = 3P(R)$

$P(P\cap R) = 0{,}1$

$P(P|R) = \frac{2}{3} \Leftrightarrow \frac{P(P\cap R)}{P(R)} = \frac{2}{3} \Leftrightarrow 0{,}1 = P(R)\times\frac{2}{3} \Leftrightarrow P(R) = \frac{3}{2}\times 0{,}1 \Leftrightarrow P(R) = 0{,}15$

Logo $P(P) = 3\times 0{,}15 = 0{,}45$

$P(\bar{R}|\bar{P}) = \frac{P(\bar{R}\cap\bar{P})}{P(\bar{P})} = \frac{0{,}5}{0{,}55} = \frac{10}{11}$

4.1 $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$

Assíntotas verticais:

$\cdot \lim_{x\to -2} f(x) = \lim_{x\to -2}\left(\frac{4-x^2}{1-e^{-2x-4}} - 1\right) = -1 + \lim_{x\to -2} \frac{(2-x)(2+x)}{1-e^{-2(x+2)}}$

$= -1 + \lim_{x\to -2} \frac{2-x}{-1} \times \lim_{x\to -2} \frac{x+2}{e^{-2(x+2)}-1} \underset{y=x+2}{=} -1 + \frac{4}{-1} \times \lim_{y\to 0} \frac{-2y}{e^{-2y}-1} \times \frac{1}{2} =$

↳ se $y\to 0$ então $-2y \to 0$

$= -1 - 4 \times 1 \times (-1/2) = 1$

$\lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x} = 1 \Rightarrow \lim_{x\to 0} \frac{x}{e^x-1}$

$\therefore$ A reta de equação $x=-2$ não é A.V do gráfico de f

$\cdot \lim_{x\to 0^-} f(x) = \frac{4-0^2}{1-e^{-2\times 0-4}} - 1 = \frac{4}{1-e^{-4}} - 1$

$\cdot \lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+}(\ln^2 x - \ln x) = (-\infty)^2 - (-\infty) = +\infty + \infty = +\infty$ AV: $x=0$

Como f é contínua em $\mathbb{R}\setminus\{-2, 0\}$, então o seu gráfico não tem mais A.V

Assíntotas horizontais:

$\lim_{x\to -\infty} f(x) = \lim_{x\to -\infty}\left(\frac{4-x^2}{1-e^{-2x-4}} - 1\right) \underset{\substack{y=-x \Leftrightarrow x=-y \\ y\to +\infty}}{=} -1 + \lim_{y\to +\infty} \frac{4-(-y)^2}{1-e^{2y-4}} = -1 + \lim_{y\to +\infty} \frac{4-y^2}{1-e^{2y}\times e^{-4}}$

$= -1 + \lim_{y\to +\infty} \frac{y^2\left(\frac{4}{y^2}-1\right)}{e^{2y}\left(\frac{1}{e^{2y}} - e^{-4}\right)} = -1 + \lim_{y\to +\infty} \frac{y^2}{(e^2)^y} \times \lim_{y\to +\infty} \frac{\frac{4}{y^2}-1}{\frac{1}{e^{2y}} - e^{-4}}$

$e^2 > 0$

$\lim_{x\to +\infty} \frac{a^x}{x^p} = +\infty \Rightarrow \lim_{x\to +\infty} \frac{x^p}{a^x} = 0$

$= -1 + 0 \times \frac{\frac{4}{+\infty} - 1}{\frac{1}{e^{+\infty}} - e^{-4}} = -1 + 0 \times \frac{0-1}{\frac{1}{+\infty} - e^{-4}} = -1 + 0 \times \frac{-1}{0-e^{-4}} = -1 + 0 = -1$

AH: $y=1$ qnd $x\to -\infty$

$\cdot \lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty}(\ln^2 x - \ln x) \overset{\infty-\infty}{=} \lim_{x\to +\infty}(\ln x(\ln x - 1)) = \ln(+\infty) \times (\ln(+\infty) - 1)$

$= +\infty \times (+\infty - 1) = +\infty \times (+\infty) = +\infty$ Qnd $x\to +\infty$, o gráfico de f não tem A.V

4.2 Para $x \in \mathbb{R}^+$, $f(x) = \ln^2 x - \ln x$

$\cdot f'(x) = 2\ln x \times (\ln x)' - \frac{1}{x} = 2\ln x \times \frac{1}{x} - \frac{1}{x} = \frac{2\ln x - 1}{x}$

$\cdot f''(x) = \frac{\left(2\times\frac{1}{x}\right).x - (2\ln x - 1).1}{x^2} = \frac{2 - 2\ln x + 1}{x^2} = \frac{3-2\ln x}{x}$

$\cdot f''(x) = 0 \Leftrightarrow 3 - 2\ln x = 0 \wedge x^2 \neq 0 \Leftrightarrow \ln x = 3/2 \wedge x \neq 0 \Leftrightarrow x = e^{3/2} \wedge x \neq 0$
$\Leftrightarrow x = \sqrt{e^3} \wedge x \neq 0$

x	0		$\sqrt{e^3}$	$+\infty$
$f''(x)$	n.d	$+$	0	$-$
$f(x)$	n.d	$\cup$	P.I	$\cap$

Em $\mathbb{R}^+$, o gráfico de f tem a concavidade voltada para baixo em $[\sqrt{e^3}, +\infty[$, e tem a conc. voltada para cima $]0, \sqrt{e^3}]$ e tem P.I. em $x = \sqrt{e^3}$

4.3 i) Para $x \in \mathbb{R}^+$, $f(x) = 2 \Leftrightarrow \ln^2 x - \ln x = 2 \Leftrightarrow \ln^2 x - \ln x - 2 = 0$

Seja $y = \ln x$, vem $y^2 - y - 2 = 0 \Leftrightarrow y = \dfrac{1 \pm \sqrt{(-1)^2 - 4\times1\times(-2)}}{2\times1} \Leftrightarrow y = -2 \vee y = 1$

$\Leftrightarrow \ln x = 2 \vee \ln x = -1 \Leftrightarrow x = e^2 \vee x = e^{-1}$

$\therefore A(e^2, 2)$ e $B(e^{-1}, 2)$

ii) $A_{[ABP]} = \dfrac{\overline{AB} \times h}{2}$

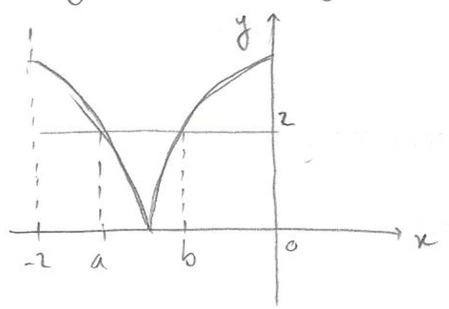
$\overline{AB} = e^2 - e^{-1}$

$h = \left|\dfrac{4-x^2}{1-e^{-2x-4}} - 1 - 2\right| = \left|\dfrac{4-x^2}{1-e^{-2x-4}} - 3\right|$

$\therefore A_{[ABP]} = \dfrac{e^2 - e^{-1}}{2} \times \left|\dfrac{4-x^2}{1-e^{-2x-4}} - 3\right|$

Pretende-se determinar $x \in]-2, 0]$, tal que $A_{[ABP]} = 2$

Definir $y_1 = A(x)$ e $y_2 = 2$ na janela $[-2, 0] \times [0, 4]$



$A(x) = 2 \Leftrightarrow x = a \vee x = b$

com $a \simeq -1{,}72 \vee b \simeq -0{,}92$

5. $\cdot\, f(1) = 0$ e $(2, 2e-2) \in$ gráfico de $f \Rightarrow f(2) = 2e - 2$

$\cdot\, t$ contém os pontos $(1, 0)$ e $(0, -2)$

logo $m_t = \dfrac{2-0}{0-1} = 2$ $\quad\therefore t: y = 2x - 2$ portanto $f'(1) = 2$

(A) $g(1) = e^{1-1} \times (f(1) + 1) = e^0 (0+1) = 1$

$g'(x) = e^{x-1} \times (f(x) + 1) + e^{x-1} \cdot f'(x)$

$g'(1) = e^{1-1} \times f(1) + 1) + e^{1-1} \times f'(-1) = e^0 \times (0+1) + e^0 \times 2 = 3$

$\therefore$ A equação reta tangente ao gráfico de g em $x = 1$ é:

$y - g(1) = g'(1)(x-1) \Leftrightarrow y - 1 = 3(x-1) \Leftrightarrow y = 3x - 3 + 1 \Leftrightarrow y = 3x - 2$

$\therefore$ A é verdadeira, sempre!

(B) g é a soma e o produto de funções contínuas em $\mathbb{R}$ logo é contínua em $\mathbb{R}$ e portanto é contínua em $[1, 2] \subset \mathbb{R}$

$g(1) = 1 < e$

$g(2) = e^{2-1} \times (f(2) + 1) = e \times (2e - 2 + 1) = e(2e-1) > e$

Logo, como $g(1) < e < g(2)$, pelo teorema de Bolzano $\exists c \in]1, 2[: g(c) = e$

$\therefore$ B é sempre verdadeira

(C) h é contínua em $]1,2]$

$\cdot\ h(1) = 3\times g(1) = 3\times 1 = 3$ h não é contínua em $[1,2]$

$\cdot \lim\limits_{x\to 1^+} h(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{2\ln x}{x-1} = 2\lim\limits_{y\to 0^+} \dfrac{\ln(y+1)}{y} = 2\times 1 = 2$

$y = x-1 \Leftrightarrow x = y+1$
$y \to 0^+$

$h(2) = \dfrac{2\ln 2}{2-1} = \dfrac{2\ln 2}{1} \simeq 1,38$

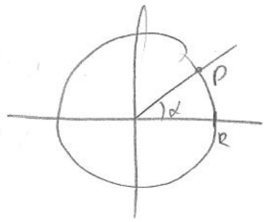
Apesar de $h(2) < \frac{5}{2} < h(1)$, h não é contínua em $[1,2]$, logo o Teorema de Bolzano, não garante a existência de uma solução de equação $h(x) = 5/2$ em $[1,2]$

(D) $\lim\limits_{x\to -\infty} h(x) = \lim\limits_{x\to -\infty} 3g(x) = 3\lim\limits_{x\to -\infty} \left(e^{x-1}\times (f(x)+1)\right) = 3e^{-\infty}\times(-2+1) = 3\times 0\times -1 = 0$

$\therefore\ y=0$ é A.H do gráfico de h, qud $x\to -\infty$ $\therefore$ D é sempre verdadeira

RESPOSTA: C

6.1 $A_{[OAB]} = \dfrac{\overline{OB}\times\overline{AC}}{2} = \dfrac{(\overline{OC} + \overset{\overline{AC}}{\frown}\!\!\!\!\overline{BC})\times\overline{AC}}{2} = \dfrac{(\overline{OC}+\overline{AC})\,\overline{AC}}{2}$ (*)



$P(R\cos\alpha,\ R\,\text{sen}\,\alpha)$

Tem-se para $A(\underbrace{\cos\alpha}_{<0}, \underbrace{\text{sen}\,\alpha}_{>0})$, pois $\alpha \in]\frac{\pi}{2}, \pi[$

Logo $\overline{OC} = -\cos\alpha$ e $\overline{AC} = \text{sen}\,\alpha$

INTERPRETAÇÃO GEOMÉTRICA

$g(\frac{\pi}{2}) = \dfrac{\text{sen}^2(\frac{\pi}{2}) - \text{sen}(\frac{\pi}{2})\times\cos(\frac{\pi}{2})}{2} = \dfrac{1^2 - 1\times 0}{2} = \dfrac{1}{2}$

Qud $\alpha = \frac{\pi}{2}$, o triângulo [OAB] é retângulo e isósceles. A medida dos seus catetos é 1 e a sua área é $\frac{1\times 1}{2} = \frac{1}{2}$

(*) $= \dfrac{\text{sen}^2\alpha - \cos\alpha\,\text{sen}\,\alpha}{2} = \dfrac{\text{sen}^2\alpha - \cos\alpha\,\text{sen}\,\alpha}{2}$

6.2 $\cdot\ g'(\alpha) = \frac{1}{2}\left(2\,\text{sen}\,\alpha\cos\alpha - [(-\text{sen}\,\alpha)\,\text{sen}\,\alpha + \cos\alpha\cos\alpha]\right)$

$= \frac{1}{2}\left(\text{sen}(2\alpha) - \underbrace{(-\text{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha)}_{\cos(2\alpha)}\right) = \dfrac{\text{sen}(2\alpha) - \cos(2\alpha)}{2}$

$g'(\alpha) = 0 \Leftrightarrow \text{sen}(2\alpha) - \cos(2\alpha) = 0 \Leftrightarrow \text{sen}(2\alpha) = \cos(2\alpha)$

$\Leftrightarrow 2\alpha = \frac{\pi}{4} + k\pi,\ k\in\mathbb{Z} \Leftrightarrow \alpha = \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2},\ k\in\mathbb{Z}$

$k=0 \to \alpha = \pi/8$

$k=1 \to \alpha = \pi/8 + \pi/2 = 5\pi/8$ ✓

α	0		$\frac{5\pi}{8}$		$\frac{\pi}{2}$
$g'(\alpha)$	n.d	+	0	−	n.d
$g(\alpha)$	n.d	↗	máx	↘	n.d

A área de [OAB] é máxima se $\alpha = \frac{5\pi}{8}$

7. i) $A \in xoy$ e tem ordenada -2

logo $A(x, -2, 0)$ e $A \in ABG$

$5x - 2 \times (-2) = 24 \Leftrightarrow 5x =$

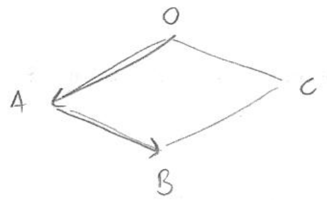
$\therefore A(4, -2, 0)$

ii) $C \in xoy \Rightarrow C(x, y, 0)$ e $C \in CG$

$(x, y, 0) = (-2, 7, -4) + k(4, -2, 4),\ k \in \mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 + 4k \\ y = 7 - 2k \\ 0 = -4 + 4k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 5 \\ k = 1 \end{cases} \quad \therefore C(2, 5, 0)$$

iii)



$\vec{OB} = \vec{OA} + \vec{OC} \Leftrightarrow \vec{OB} = (4, -2, 0) - (2, 5, 0) = (6, 3, 0)$

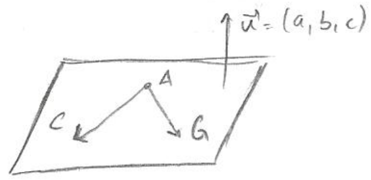
logo se $\vec{OB} = (6, 3, 0)$ então $B(6, 3, 0)$

Assim, $G(6, 3, z)$ e $G \in CG$:

$$(6, 3, z) = (-2, 7, -4) + k(4, -2, 4),\ k \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} 6 = -2 + 4k \\ 3 = 7 - 2k \\ z = -4 + 4k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = 2 \\ k = 2 \\ z = 4 \end{cases}$$

$\therefore G(6, 3, 4)$

iv)



$$\begin{cases} \vec{u} \cdot \vec{AC} = 0 \\ \vec{u} \cdot \vec{AG} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2a + 7b = 0 \\ 2a + 5b + 4c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{7}{2}b \\ 7b + 5b + 4c = 0 \end{cases}$$

$\vec{AC} = C - A = (-2, 7, 0)$

$\vec{AG} = G - A = (2, 5, 4)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{7}{2}b \\ c = -3b \end{cases}$$

$\therefore \vec{u}\left(\frac{7}{2}b, b, -3b\right),\ b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

Fazendo $b = 2 \rightarrow \vec{u}(7, 2, -6)$

$\therefore ACG: 7(x-4) + 2(y+2) - 6(z-0) = 0 \Leftrightarrow 7x + 2y - 6z = 24$