

Geometria (11.º ano)  
**Trigonometria**

Exercícios de Provas Nacionais e Testes Intermédios



1. Na figura seguinte, está representado, num referencial o.n.  $xOy$ , o arco de circunferência  $AB$ , contido no primeiro quadrante do plano cartesiano, cujo centro é a origem do referencial e cujo raio é igual a  $r$  ( $r > 0$ ).

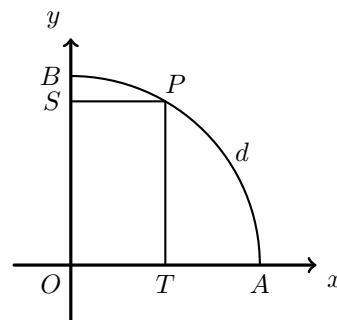
O ponto  $A$  pertence ao eixo  $Ox$  e o ponto  $B$  pertence ao eixo  $Oy$

Seja  $P$  um ponto do arco  $AB$ , distinto de  $A$  e de  $B$ , e seja  $d$  o comprimento do arco  $AP$

O ponto  $S$  pertence ao eixo das ordenadas e tem ordenada igual à do ponto  $P$ . O ponto  $T$  pertence ao eixo das abcissas e tem abcissa igual à do ponto  $P$

Mostre que uma expressão que dá o valor de  $\overline{BS} + \overline{TA}$ , em função de  $d$  e de  $r$ , é

$$r \left( 2 - \sin \left( \frac{d}{r} \right) - \cos \left( \frac{d}{r} \right) \right)$$



Exame – 2021, Ép. especial

2. Sabe-se que  $\sin \left( \alpha - \frac{\pi}{2} \right) = -\frac{1}{5}$  e que  $\alpha \in \left] 0, \frac{\pi}{2} \right[$

Determine, sem recorrer à calculadora, o valor de  $\operatorname{tg}(\pi - \alpha) + 2 \cos \left( -\frac{7\pi}{2} + \alpha \right)$

Apresente o resultado na forma  $\frac{a\sqrt{b}}{c}$ ,  $a \in \mathbb{Z}$ ,  $b \in \mathbb{N}$  e  $c \in \mathbb{N}$

Exame – 2021, 2.ª Fase

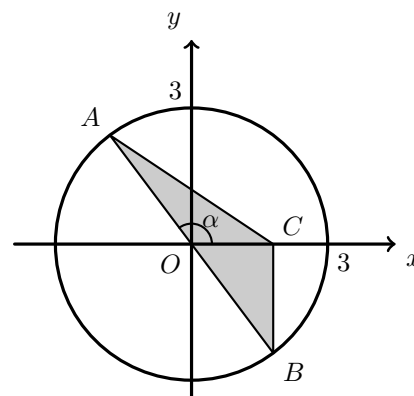
3. Na figura ao lado, estão representados, num referencial o.n.  $xOy$ , a circunferência de centro em  $O$  e raio 3 e o triângulo  $[ABC]$

Sabe-se que:

- o segmento de reta  $[AB]$  é um diâmetro da circunferência;
- $\alpha$  é a inclinação da reta  $AB$ ,  $\left(\alpha \in \left] \frac{\pi}{2}, \pi \right[ \right)$ ;
- o ponto  $C$  pertence ao semieixo positivo  $Ox$
- a reta  $BC$  é paralela ao eixo  $Oy$

Mostre que a área do triângulo  $[ABC]$  é dada pela expressão

$$-9 \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha$$



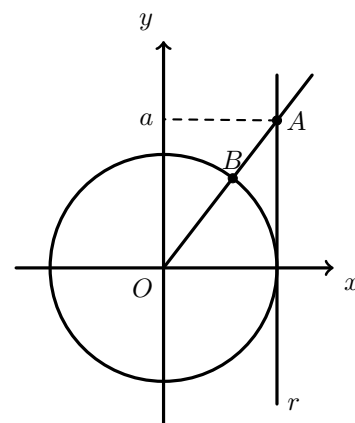
Exame – 2021, 1.ª Fase

4. Na figura ao lado, estão representados, num referencial o.n.  $xOy$ , a circunferência trigonométrica, a reta  $r$  de equação  $x = 1$ , e um ponto  $A$ , de ordenada  $a$  ( $a > 1$ ), pertencente à reta  $r$

Está também representada a semirreta  $\vec{OA}$ , que intersecta a circunferência trigonométrica no ponto  $B$

Qual das expressões seguintes dá, em função de  $a$ , a abscissa do ponto  $B$ ?

- (A)  $\frac{1}{\sqrt{a^2 + 1}}$       (B)  $\sqrt{a^2 + 1}$   
 (C)  $\frac{1}{\sqrt{a^2 - 1}}$       (D)  $\sqrt{a^2 - 1}$



Exame – 2020, 1.ª Fase

5. Qual é o valor de  $\operatorname{sen} \left( 3 \arccos \frac{1}{2} \right)$  ?

- (A)  $\frac{\sqrt{3}}{2}$       (B)  $\frac{\sqrt{2}}{2}$       (C) 0      (D) 1

Exame – 2019, 2.ª Fase

6. Qual é a solução da equação  $2 \cos x + 1 = 0$  no intervalo  $[-\pi, 0]$  ?

- (A)  $-\frac{5\pi}{6}$       (B)  $-\frac{2\pi}{3}$       (C)  $-\frac{\pi}{3}$       (D)  $-\frac{2\pi}{6}$

Exame – 2019, 1.ª Fase



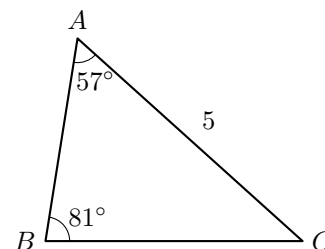
7. Na figura ao lado, está representado um triângulo  $[ABC]$

Sabe-se que:

- $\overline{AC} = 5$
- $\hat{BAC} = 57^\circ$
- $\hat{ABC} = 81^\circ$

Qual é o valor de  $\overline{AB}$ , arredondado às centésimas ?

- (A) 3,31      (B) 3,35      (C) 3,39      (D) 3,43



Exame – 2018, 2.ª Fase

8. Qual é o valor de  $\arcsen(1) + \arccos\left(-\frac{1}{2}\right)$ ?

- (A)  $\frac{7\pi}{6}$       (B)  $\frac{\pi}{6}$       (C)  $\frac{3\pi}{4}$       (D)  $\frac{\pi}{4}$

Exame – 2018, 1.ª Fase

9. Na figura ao lado, está representada uma circunferência de centro no ponto  $O$  e raio 1

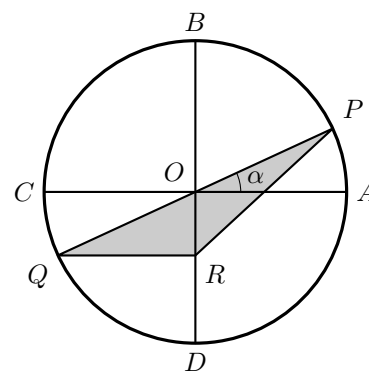
Sabe-se que:

- os diâmetros  $[AC]$  e  $[BD]$  são perpendiculares;
- o ponto  $P$  pertence ao arco  $AB$
- $[PQ]$  é um diâmetro da circunferência;
- o ponto  $R$  pertence a  $[OD]$  e é tal que  $[QR]$  é paralelo a  $[AC]$

Seja  $\alpha$  a amplitude, em radianos, do ângulo  $AOP$   $\left(\alpha \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[ \right)$ ;

Qual das seguintes expressões dá a área do triângulo  $[PQR]$ , representado a sombreado, em função de  $\alpha$  ?

- (A)  $\frac{\sin \alpha \cos \alpha}{4}$       (B)  $\frac{\sin \alpha \cos \alpha}{2}$       (C)  $2 \sin \alpha \cos \alpha$       (D)  $\sin \alpha \cos \alpha$



Exame – 2016, 2.ª Fase (adaptado)



10. Na figura ao lado, estão representados o círculo trigonométrico e um trapézio retângulo  $[OPQR]$

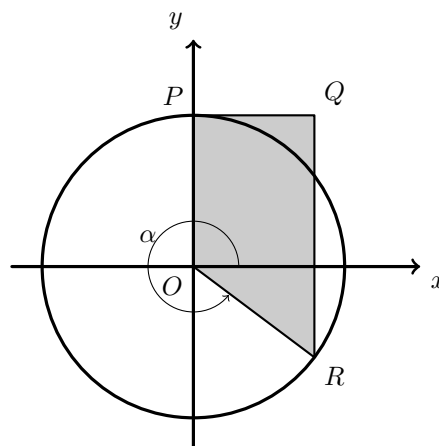
Sabe-se que:

- o ponto  $P$  tem coordenadas  $(0,1)$
- o ponto  $R$  pertence ao quarto quadrante e à circunferência.

Seja  $\alpha$  a amplitude de um ângulo orientado cujo lado origem é o semieixo positivo  $Ox$  e cujo lado extremidade é a semirreta  $\vec{OR}$

Qual das expressões seguintes dá a área do trapézio  $[OPQR]$ , em função de  $\alpha$ ?

- (A)  $\frac{\cos \alpha}{2} + \sin \alpha \cos \alpha$       (B)  $\frac{\cos \alpha}{2} - \sin \alpha \cos \alpha$
- (C)  $\cos \alpha + \frac{\sin \alpha \cos \alpha}{2}$       (D)  $\cos \alpha - \frac{\sin \alpha \cos \alpha}{2}$



Exame – 2016, 1.ª Fase

11. Na figura ao lado, está representado o círculo trigonométrico.

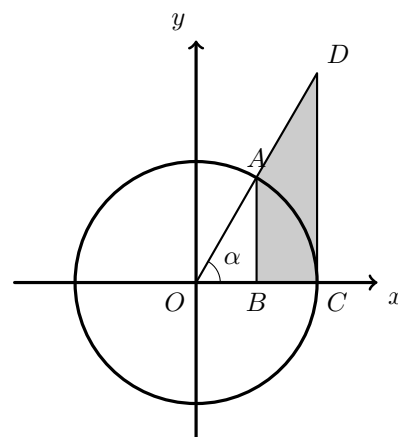
Sabe-se que:

- o ponto  $A$  pertence ao primeiro quadrante e à circunferência;
- o ponto  $B$  pertence ao eixo  $Ox$
- o ponto  $C$  tem coordenadas  $(1,0)$
- o ponto  $D$  pertence à semirreta  $\vec{OA}$
- os segmentos de reta  $[AB]$  e  $[DC]$  são paralelos ao eixo  $Oy$

Seja  $\alpha$  a amplitude do ângulo  $COD$  ( $\alpha \in ]0, \frac{\pi}{2}[$ )

Qual das expressões seguintes dá a área do quadrilátero  $[ABCD]$ , representado a sombreado, em função de  $\alpha$ ?

- (A)  $\operatorname{tg} \alpha - \sin \alpha \cos \alpha$       (B)  $\frac{\operatorname{tg} \alpha - \sin \alpha \cos \alpha}{2}$
- (C)  $\frac{\operatorname{tg} \alpha}{2} - \sin \alpha \cos \alpha$       (D)  $\operatorname{tg} \alpha - \frac{\sin \alpha \cos \alpha}{2}$



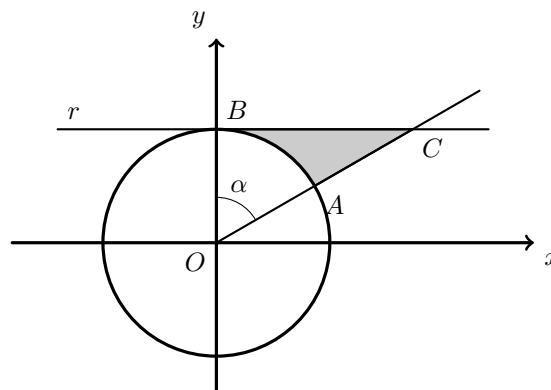
Exame – 2015, 1.ª Fase (adaptado)



12. Na figura ao lado, estão representadas, num referencial o.n.  $xOy$ , a circunferência de centro  $O$  e a reta  $r$

Sabe-se que:

- os pontos  $A$  e  $B$  pertencem à circunferência;
- o ponto  $B$  tem coordenadas  $(0,1)$
- a reta  $r$  é tangente à circunferência no ponto  $B$
- o ponto  $C$  é o ponto de interseção da reta  $r$  com a semirreta  $\vec{OA}$
- $\alpha$  é a amplitude, em radianos, do ângulo  $AOB$ , com  $\alpha \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$



Qual das expressões seguintes representa, em função de  $\alpha$ , a área da região a sombreado?

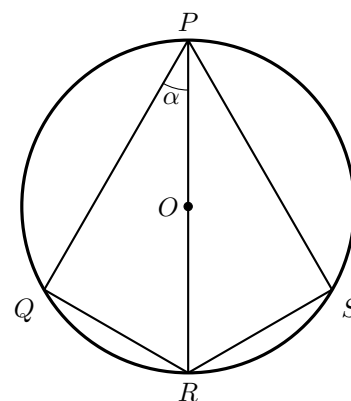
- (A)  $\frac{\sin \alpha - \alpha}{2}$       (B)  $\frac{\operatorname{tg} \alpha - \alpha}{2}$       (C)  $\frac{\operatorname{tg} \alpha}{2}$       (D)  $\frac{\alpha}{2}$

Exame – 2014, Ép. especial

13. Na figura ao lado, estão representados uma circunferência de centro  $O$  e raio 2 e os pontos  $P$ ,  $Q$ ,  $R$  e  $S$

Sabe-se que:

- os pontos  $P$ ,  $Q$ ,  $R$  e  $S$  pertencem à circunferência;
- $[PR]$  é um diâmetro da circunferência;
- $\overline{PQ} = \overline{PS}$
- $\alpha$  é a amplitude, em radianos, do ângulo  $QPR$
- $\alpha \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$



- 13.1. Mostre que a área do quadrilátero  $[PQRS]$ , é dada em função de  $\alpha$ , pela expressão

$$16 \sin \alpha \cos \alpha$$

- 13.2. Para um certo número real  $\theta$ , com  $\theta \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ , tem-se que  $\operatorname{tg} \theta = 2\sqrt{2}$

Determine o valor exato da área do quadrilátero  $[PQRS]$  correspondente ao número real  $\theta$ , recorrendo a métodos analíticos, sem utilizar a calculadora.

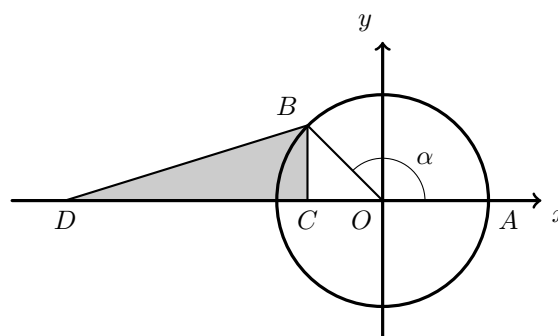
Exame – 2014, 2.ª Fase (adaptado)



14. Na figura seguinte, está representada, num referencial o.n.  $xOy$ , uma circunferência de centro  $O$  e raio 1

Sabe-se que:

- os pontos  $A$  e  $B$  pertencem à circunferência;
- o ponto  $A$  tem coordenadas  $(1,0)$
- os pontos  $B$  e  $C$  têm a mesma abscissa;
- o ponto  $C$  tem ordenada zero;
- o ponto  $D$  tem coordenadas  $(-3,0)$
- $\alpha$  é a amplitude, em radianos, do ângulo  $AOB$ , com  $\alpha \in \left] \frac{\pi}{2}, \pi \right[$



Qual das expressões seguintes representa, em função de  $\alpha$ , a área do triângulo  $[BCD]$  ?

- (A)  $\frac{1}{2}(-3 - \sin \alpha) \cos \alpha$       (B)  $\frac{1}{2}(-3 + \sin \alpha) \cos \alpha$
- (C)  $\frac{1}{2}(3 + \cos \alpha) \sin \alpha$       (D)  $\frac{1}{2}(3 - \cos \alpha) \sin \alpha$

Exame – 2014, 1.ª Fase

15. Qual das expressões seguintes designa um número real positivo, para qualquer  $x$  pertencente ao intervalo  $\left] \pi, \frac{3\pi}{2} \right[$  ?

- (A)  $\sin x + \cos x$       (B)  $\frac{\cos x}{\operatorname{tg} x}$       (C)  $\operatorname{tg} x - \sin x$       (D)  $\sin x \times \operatorname{tg} x$

Teste Intermédio 11.º ano – 11.03.2014

16. Considere, em  $\mathbb{R}$ , a equação trigonométrica  $\sin x = 0,3$

Quantas soluções tem esta equação no intervalo  $[-20\pi, 20\pi[$  ?

- (A) 20      (B) 40      (C) 60      (D) 80

Teste Intermédio 11.º ano – 11.03.2014



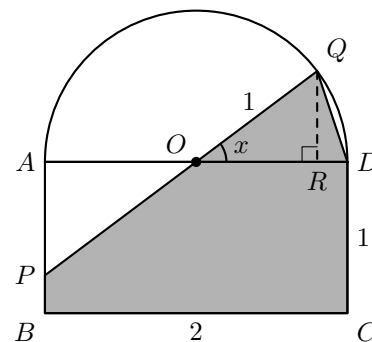
17. Na figura ao lado, estão representados:

- o retângulo  $[ABCD]$ , em que  $\overline{DC} = 1$  e  $\overline{BC} = 2$
- o ponto  $O$ , ponto médio do segmento  $[AD]$
- uma semicircunferência de centro no ponto  $O$  e raio 1

Considere que um ponto  $P$  se desloca ao longo do segmento de reta  $AB$ , nunca coincidindo com  $A$ , mas podendo coincidir com  $B$

Para cada posição do ponto  $P$ , seja  $Q$  o ponto de intersecção da reta  $PO$  com a semicircunferência.

Seja  $x$  a amplitude, em radianos, do ângulo  $DOQ$   $\left(x \in \left]0, \frac{\pi}{4}\right]\right)$



Resolva os dois itens seguintes **sem recorrer à calculadora**.

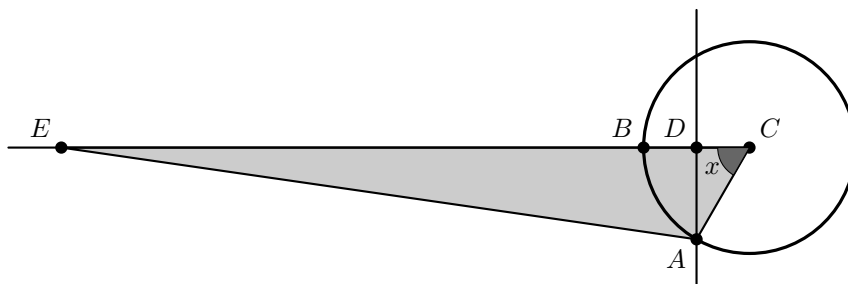
17.1. Mostre que a área do polígono  $[BCDQP]$ , representado a sombreado, é dada, em função de  $x$ , por  $2 - \frac{\operatorname{tg} x}{2} + \frac{\operatorname{sen} x}{2}$

17.2. Para uma certa posição do ponto  $P$ , tem-se  $\cos\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) = -\frac{3}{5}$

Determine, para essa posição do ponto  $P$ , a área do polígono  $[BCDQP]$   
 Apresente o resultado na forma de fração irredutível.

Teste Intermédio 11.º ano – 11.03.2014

18. Na figura ao lado, estão representados a circunferência de centro no ponto  $C$  e de raio 1, a semirreta  $\dot{CB}$ , a reta  $AD$  e o triângulo  $[ACE]$



Sabe-se que:

- os pontos  $A$  e  $B$  pertencem à circunferência;
- os pontos  $D$  e  $E$  pertencem à semirreta  $\dot{CB}$
- a reta  $AD$  é perpendicular à semirreta  $\dot{CB}$
- o ponto  $A$  desloca-se sobre a circunferência, e os pontos  $D$  e  $E$  acompanham esse movimento de modo que  $\overline{DE} = 6$
- $x$  é a amplitude, em radianos, do ângulo  $ACB$
- $x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$

Mostre que a área do triângulo  $[ACE]$  é dada, em função de  $x$ , por  $\frac{\operatorname{sen} x(6 + \cos x)}{2}$

Exame – 2013, Ép. especial (adaptado)

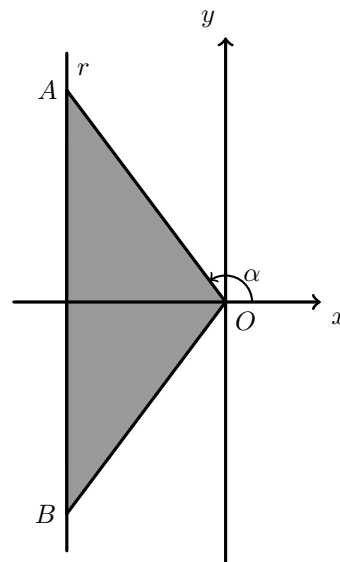


19. Na figura ao lado, estão representados, num referencial o.n.  $xOy$ , o triângulo  $[OAB]$  e a reta  $r$

Sabe-se que:

- a reta  $r$  é definida por  $x = -3$
- o ponto  $A$  pertence à reta  $r$  e tem ordenada positiva;
- o ponto  $B$  é o simétrico do ponto  $A$  em relação ao eixo  $Ox$
- $\alpha$  é a amplitude, em radianos, do ângulo cujo lado origem é o semieixo positivo  $Ox$  e cujo lado extremidade é a semirreta  $\vec{OA}$
- $\alpha \in \left] \frac{\pi}{2}, \pi \right[$

Mostre que o perímetro do triângulo  $[OAB]$  é dado, em função de  $\alpha$ , pela expressão  $-6 \operatorname{tg} \alpha - \frac{6}{\cos \alpha}$



Exame – 2013, 2.ª Fase (adaptado)

20. Considere o intervalo  $\left[ \frac{5\pi}{6}, \frac{4\pi}{3} \right]$

Qual das equações seguintes **não** tem solução neste intervalo?

- (A)  $\cos x = -0,5$       (B)  $\sin x = -0,5$       (C)  $\cos x = -0,9$       (D)  $\sin x = -0,9$

Teste Intermédio 11.º ano – 6.03.2013





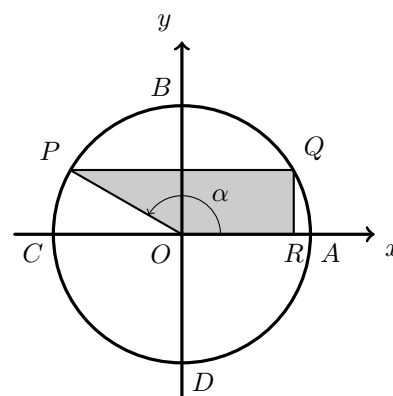
21. Na figura ao lado, está representado, num referencial o.n.  $xOy$ , o círculo trigonométrico.

Os pontos  $A, B, C$  e  $D$  são os pontos de intersecção da circunferência com os eixos do referencial.

Considere que um ponto  $P$  se desloca ao longo do arco  $BC$ , nunca coincidindo com  $B$  nem com  $C$

Para cada posição do ponto  $P$ , seja  $Q$  o ponto do arco  $AB$  que tem ordenada igual à ordenada do ponto  $P$  e seja  $R$  o ponto do eixo  $Ox$  que tem abscissa igual à abscissa do ponto  $Q$

Seja  $\alpha$  a amplitude, em radianos, do ângulo orientado que tem por lado origem o semieixo positivo  $Ox$  e por lado extremidade a semirreta  $\vec{OP}$ ,  $\left(\alpha \in \left] \frac{\pi}{2}, \pi \right[ \right)$



Resolva os itens seguintes, sem recorrer à calculadora.

21.1. Mostre que a área do trapézio  $[OPQR]$  é dada por  $-\frac{3}{2} \sin \alpha \cos \alpha$

21.2. Para uma certa posição do ponto  $P$ , a reta  $OP$  intersecta a reta de equação  $x = 1$  num ponto de ordenada  $-\frac{7}{24}$

Determine, para essa posição do ponto  $P$ , a área do trapézio  $[OPQR]$   
Apresente o resultado na forma de fração irredutível.

Teste Intermédio 11.º ano – 6.03.2013

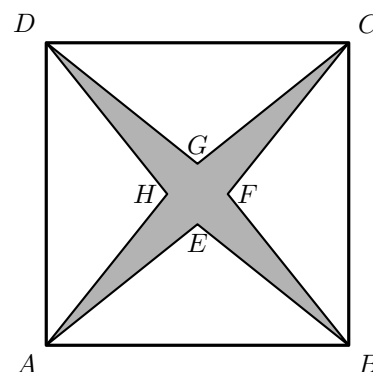
22. Na figura ao lado, está representado o quadrado  $[ABCD]$

Sabe-se que:

- $\overline{AB} = 4$
- $\overline{AE} = \overline{AH} = \overline{BE} = \overline{BF} = \overline{CF} = \overline{CG} = \overline{DG} = \overline{DH}$
- $x$  é a amplitude, em radianos, do ângulo  $EAB$
- $x \in \left] 0, \frac{\pi}{4} \right[$

Mostre que a área da região sombreada é dada, em função de  $x$ , por

$$16(1 - \operatorname{tg} x)$$

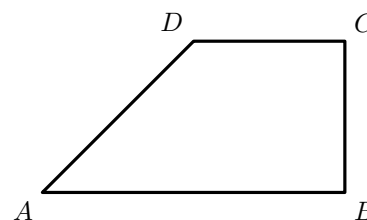


Exame – 2012, 2.ª Fase

23. Na figura ao lado, está representado um trapézio retângulo  $[ABCD]$

Sabe-se que:

- $\overline{BC} = 1$
- $\overline{CD} = 1$
- $\alpha$  é a amplitude, em radianos, do ângulo  $ADC$
- $\alpha \in \left] \frac{\pi}{2}, \pi \right[$



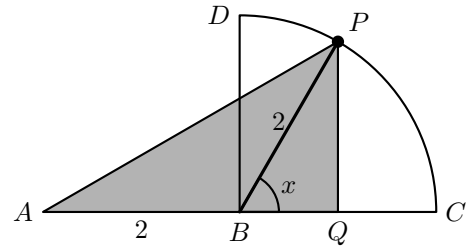
Mostre, recorrendo a métodos exclusivamente analíticos, que o perímetro do trapézio  $[ABCD]$  é dado, em função de  $\alpha$ , por  $3 + \frac{1 - \cos \alpha}{\sin \alpha}$

Exame – 2012, 1.ª Fase



24. Relativamente à figura ao lado, sabe-se que:

- o segmento de reta  $[AC]$  tem comprimento 4
- o ponto  $B$  é o ponto médio de  $[AC]$
- o segmento de reta  $[BD]$  é perpendicular a  $[AC]$
- o arco de circunferência  $CD$  tem centro em  $B$



Admita que um ponto  $P$  se desloca ao longo do arco  $CD$ , nunca coincidindo com  $C$  nem com  $D$ , e que um ponto  $Q$  se desloca ao longo do segmento de reta  $[BC]$  de tal forma que  $[PQ]$  é sempre perpendicular a  $[BC]$

Para cada posição do ponto  $P$ , seja  $x$  a amplitude, em radianos, do ângulo  $CBP$

Mostre que a área do triângulo  $[APQ]$  é dada por  $2 \sin x (1 + \cos x)$   $\left(x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[\right]$

Teste Intermédio 12.º ano – 24.05.2012 (adaptado)

25. Seja  $\theta$  um número real. Sabe-se que  $\theta$  é uma solução da equação  $\sin x = -\frac{1}{3}$

Qual das expressões seguintes designa uma solução da equação  $\sin x = \frac{1}{3}$  ?

- (A)  $\pi - \theta$       (B)  $\pi + \theta$       (C)  $\frac{\pi}{2} - \theta$       (D)  $\frac{\pi}{2} + \theta$

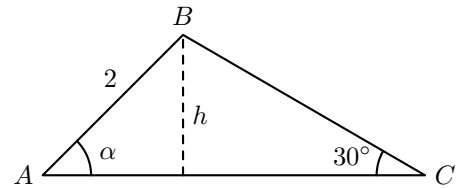
Teste Intermédio 11.º ano – 9.02.2012

26. Considere o triângulo  $[ABC]$  representado na figura seguinte.

Sabe-se que:

- $\overline{AB} = 2$
- $\hat{ACB} = 30^\circ$

Seja  $\alpha = \hat{BAC}$



Qual das expressões seguintes representa  $\overline{BC}$ , em função de  $\alpha$  ?

- (A)  $4 \sin \alpha$       (B)  $6 \sin \alpha$       (C)  $4 \cos \alpha$       (D)  $6 \cos \alpha$

Teste Intermédio 11.º ano – 9.02.2012



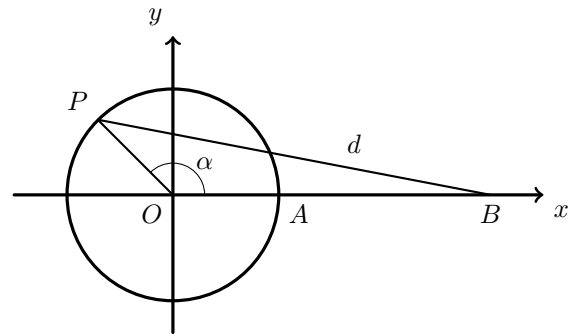
27. Na figura seguinte, está representado, num referencial o.n.  $xOy$ , o círculo trigonométrico.

Sabe-se que:

- o ponto  $A$  tem coordenadas  $(1,0)$
- o ponto  $B$  tem coordenadas  $(3,0)$

Considere que um ponto  $P$  se move sobre a circunferência.

Para cada posição do ponto  $P$ , seja  $d = \overline{PB}$  e seja  $\alpha \in [0, 2\pi[$ , a amplitude, em radianos, do ângulo orientado cujo lado origem é o semieixo positivo  $Ox$  e cujo lado extremidade é a semirreta  $\vec{OP}$



Resolva os itens seguintes **sem recorrer à calculadora**.

27.1. Mostre que  $d^2 = 10 - 6 \cos \alpha$

**Sugestão:** Exprima as coordenadas do ponto  $P$  em função de  $\alpha$  e utilize a fórmula da distância entre dois pontos.

27.2. Resolva os dois itens seguintes tendo em conta que  $d^2 = 10 - 6 \cos \alpha$

27.2.1. Determine os valores de  $\alpha \in [0, 2\pi[$ , para os quais  $d^2 = 7$

27.2.2. Para um certo valor de  $\alpha$  pertencente ao intervalo  $[0, \pi]$ , tem-se  $\operatorname{tg} \alpha = -\sqrt{35}$   
Determine  $d$ , para esse valor de  $\alpha$

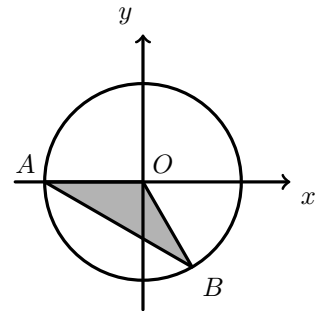
Teste Intermédio 11.º ano – 9.02.2012

28. Na figura ao lado, estão representados, num referencial o. n.  $xOy$ , uma circunferência e o triângulo  $[OAB]$

Sabe-se que:

- $O$  é a origem do referencial;
- a circunferência tem centro no ponto  $O$  e raio 1
- $A$  é o ponto de coordenadas  $(-1, 0)$
- $B$  pertence à circunferência e tem ordenada negativa;
- o ângulo  $AOB$  tem amplitude igual a  $\frac{2\pi}{3}$  radianos.

Qual é a área do triângulo  $[OAB]$ ?



- (A)  $\frac{\sqrt{3}}{4}$       (B)  $\frac{\sqrt{1}}{2}$       (C)  $\frac{\sqrt{1}}{4}$       (D)  $\sqrt{3}$

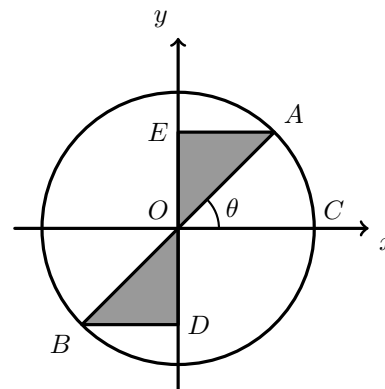
Exame – 2011, Ép. especial



29. Na figura ao lado, está representado, num referencial o. n.  $xOy$ , um círculo trigonométrico.

Sabe-se que:

- $C$  é o ponto de coordenadas  $(1,0)$
- Os pontos  $D$  e  $E$  pertencem ao eixo  $Oy$
- $[AB]$  é um diâmetro do círculo trigonométrico
- as retas  $EA$  e  $BD$  são paralelas ao eixo  $Ox$
- $\theta$  é a amplitude do ângulo  $COA$
- $\theta \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$



Qual das expressões seguintes dá a o perímetro da região sombreada na figura anterior?

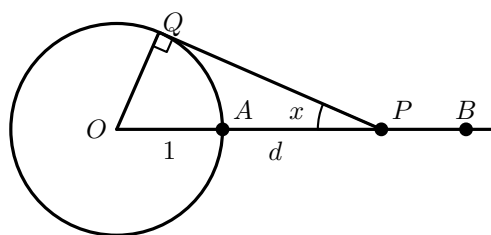
- (A)  $2(\cos \theta + \sin \theta)$       (B)  $\cos \theta + \sin \theta$       (C)  $2(1 + \cos \theta + \sin \theta)$       (D)  $1 + \cos \theta + \sin \theta$

Exame – 2011, 2.ª Fase

30. Na figura ao lado, está representada uma circunferência de centro no ponto  $O$  e raio 1

Sabe-se que:

- o ponto  $A$  pertence à circunferência;
- os pontos  $O$ ,  $A$ , e  $B$  são colineares;
- o ponto  $A$  está entre o ponto  $O$  e o ponto  $B$
- o ponto  $P$  desloca-se ao longo da semirreta  $\overrightarrow{AB}$ , nunca coincidindo com o ponto  $A$
- $d$  é a distância do ponto  $A$  ao ponto  $P$
- para cada posição do ponto  $P$ , o ponto  $Q$  é um ponto da circunferência tal que a reta  $PQ$  é tangente à circunferência;
- $x$  é a amplitude, em radianos, do ângulo  $OPQ$  ( $x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ )



Sem recorrer à calculadora, mostre que  $d = \frac{1 - \sin x}{\sin x}$

Teste Intermédio 12.º ano – 26.05.2011

31. Determine o valor de  $3 - \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha}$  sabendo que  $\alpha \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$  e que  $\cos \left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) = -\frac{4}{5}$

Resolva este item **sem recorrer à calculadora**.

Teste Intermédio 11.º ano – 24.05.2011

32. Considere, em  $\mathbb{R}$ , a equação trigonométrica  $\cos x = 0,9$

Em qual dos intervalos seguintes esta equação **não** tem solução?

- (A)  $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$       (B)  $[0, \pi]$       (C)  $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right]$       (D)  $\left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$

Teste Intermédio 11.º ano – 27.01.2011



33. Na figura ao lado, está representado o círculo trigonométrico.

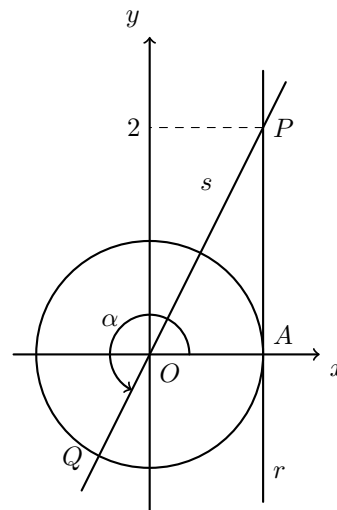
Sabe-se que:

- a reta  $r$  é tangente à circunferência no ponto  $A(1,0)$
- a reta  $s$  passa na origem do referencial e intersecta a reta  $r$  no ponto  $P$ , cuja ordenada é 2
- o ponto  $Q$ , situado no terceiro quadrante, pertence à reta  $s$

Seja  $\alpha$  a amplitude, em **radianos**, do ângulo orientado, assinalado na figura, que tem por lado origem o semieixo positivo  $Ox$  e por lado extremidade a semirreta  $\vec{OQ}$

Qual é o valor de  $\alpha$ , arredondado às centésimas?

- (A) 4,23      (B) 4,25      (C) 4,27      (D) 4,29



Teste Intermédio 11.º ano – 27.01.2011

34. Sejam  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $\theta$  três números reais.

Sabe-se que:

- $\alpha \in \left]0, \frac{\pi}{4}\right[$
- $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$
- $\alpha + \theta = 2\pi$

Qual das expressões seguintes é equivalente a  $\sin \alpha + \sin \beta + \sin \theta$  ?

- (A)  $2 \sin \alpha + \cos \alpha$       (B)  $2 \sin \alpha - \cos \alpha$       (C)  $-\cos \alpha$       (D)  $\cos \alpha$

Teste Intermédio 11.º ano – 27.01.2011



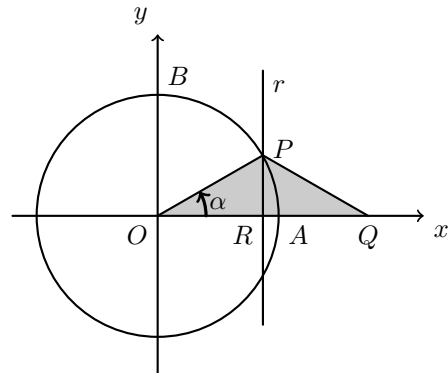
35. Na figura seguinte, está representada, em referencial o.n.  $xOy$ , a circunferência de centro em  $O$  e raio 5

Os pontos  $A$  e  $B$  são os pontos de intersecção da circunferência com os semieixos positivos  $Ox$  e  $Oy$ , respetivamente.

Considere que um ponto  $P$  se desloca ao longo do arco  $AB$ , nunca coincidindo com o ponto  $A$ , nem com o ponto  $B$

Para cada posição do ponto  $P$ , sabe-se que:

- o ponto  $Q$  é o ponto do eixo  $Ox$  tal que  $\overline{PO} = \overline{PQ}$
- a reta  $r$  é a mediatriz do segmento  $[OQ]$
- o ponto  $R$  é o ponto de intersecção da reta  $r$  com o eixo  $Ox$
- $\alpha$  é a amplitude, em radianos, do ângulo  $AOP$  ( $\alpha \in ]0, \frac{\pi}{2}[$ )



Seja  $f$  a função, de domínio  $]0, \frac{\pi}{2}[$ , definida por  $f(x) = 25 \sin x \cos x$

Resolva os itens seguintes **sem recorrer à calculadora**.

- 35.1. Mostre que a área do triângulo  $[OPQ]$  é dada por  $f(\alpha)$
- 35.2. Determine o valor de  $\alpha$ , pertencente ao intervalo  $]0, \frac{\pi}{2}[$ , para o qual se tem  $f(\alpha) = 25 \cos^2 \alpha$
- 35.3. Seja  $\theta$  um número real, pertencente ao intervalo  $]0, \frac{\pi}{2}[$ , tal que  $f(\theta) = 5$   
Determine o valor de  $(\sin \theta + \cos \theta)^2$

Teste Intermédio 11.º ano – 27.01.2011

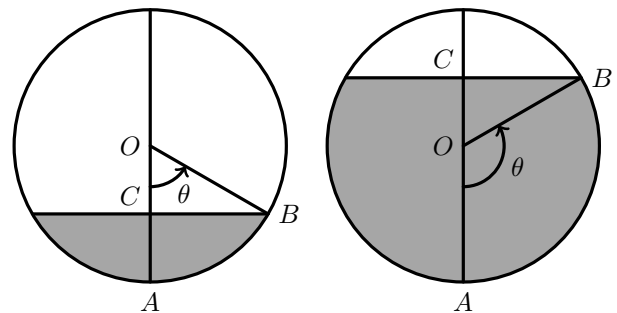
36. Um depósito de combustível tem a forma de uma esfera.

As figuras seguintes representam dois cortes do mesmo depósito, com alturas de combustível distintas. Os cortes são feitos por um plano vertical que passa pelo centro da esfera.

Sabe-se que:

- o ponto  $O$  é o centro da esfera;
- a esfera tem 6 metros de diâmetro;
- a amplitude  $\theta$ , em radianos, do arco  $AB$  é igual à amplitude do ângulo ao centro  $AOB$  correspondente

A altura  $\overline{AC}$ , em metros, do combustível existente no depósito é dada, em função de  $\theta$ , por  $h$ , de domínio  $[0, \pi]$



Resolva os itens seguintes, recorrendo a métodos exclusivamente analíticos.

- 36.1. Mostre que  $h(\theta) = 3 - 3 \cos(\theta)$ , para qualquer  $\theta \in ]0, \pi[$
- 36.2. Resolva a condição  $h(\theta) = 3$ ,  $\theta \in ]0, \pi[$   
Interprete o resultado obtido no contexto da situação apresentada.

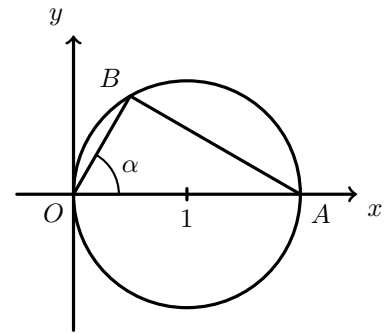
Exame – 2010, 2.ª Fase



37. Na figura ao lado, estão representados, num referencial o.n.  $xOy$ , uma circunferência e o triângulo  $[OAB]$ .

Sabe-se que:

- a circunferência tem diâmetro  $[OA]$ ;
- o ponto  $A$  tem coordenadas  $(2, 0)$ ;
- o vértice  $O$  do triângulo  $[OAB]$  coincide com a origem do referencial;
- o ponto  $B$  desloca-se ao longo da semicircunferência superior.



Para cada posição do ponto  $B$ , seja  $\alpha$  a amplitude do ângulo  $AOB$ , com  $\alpha \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$

Mostre, recorrendo a métodos exclusivamente analíticos, que o perímetro do triângulo  $[OAB]$  é dado, em função de  $\alpha$ , por  $2(1 + \cos \alpha + \sin \alpha)$

Exame – 2010, 1.ª Fase

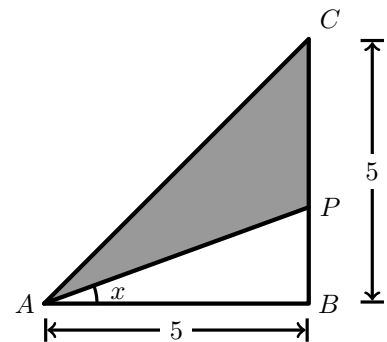
38. Na figura ao lado, está representado um triângulo retângulo  $[ABC]$ , cujos catetos  $[AB]$  e  $[BC]$ , medem 5 unidades.

Considere que um ponto  $P$  se desloca sobre o cateto  $[BC]$ , nunca coincidindo com nem  $B$  com  $C$

Para cada posição do ponto  $P$ , seja  $x$  a amplitude, em radianos, do ângulo  $BAP$   $\left(x \in \left]0, \frac{\pi}{4}\right[\right)$

Mostre, **usando exclusivamente métodos analíticos**, que para cada valor de  $x$ , o **perímetro** do triângulo  $[APC]$  é dado por

$$\frac{5}{\cos x} - 5 \operatorname{tg} x + \sqrt{50} + 5$$



Teste Intermédio 12.º ano – 19.05.2010

39. Considere, num referencial o.n.  $Oxyz$ , a superfície esférica  $E$ , de equação

$$x^2 + y^2 + (z - 2)^2 = 4$$

Para um certo valor de  $\alpha$  pertencente ao intervalo  $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ , o ponto  $P$ , de coordenadas  $(\operatorname{tg} \alpha, \operatorname{sen} \alpha, 2 + \cos \alpha)$ , pertence à superfície esférica  $E$

Determine os valores numéricos das coordenadas do ponto  $P$

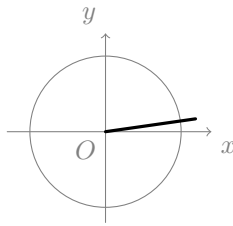
Teste Intermédio 11.º ano – 6.05.2010



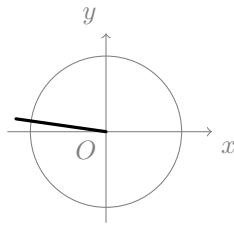
40. Em cada uma das figuras seguintes, está representado, no círculo trigonométrico, a traço grosso, o lado extremidade de um ângulo cujo lado origem é o semieixo positivo  $Ox$

Em qual das figuras esse ângulo pode ter 3 radianos de amplitude?

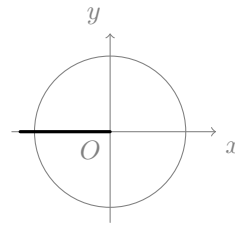
(A)



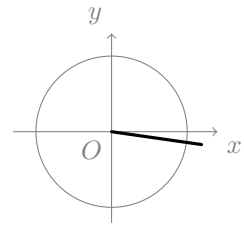
(B)



(C)



(D)



Teste Intermédio 11.º ano – 27.01.2010

41. Considere a equação trigonométrica  $\sin x = 0,1$

Em qual dos intervalos seguintes esta equação **não** tem solução?

(A)  $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

(B)  $[0, \pi]$

(C)  $\left[0, \frac{\pi}{6}\right]$

(D)  $\left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right]$

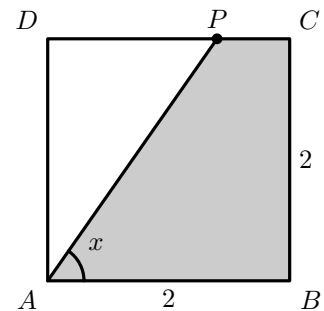
Teste Intermédio 11.º ano – 27.01.2010

42. Na figura ao lado, está representado o quadrado  $[ABCD]$  de lado 2

Considere que um ponto  $P$  se desloca ao longo do lado  $[CD]$ , nunca coincidindo com o ponto  $C$ , nem com o ponto  $D$

Para cada posição do ponto  $P$ , seja  $x$  a amplitude, em radianos, do ângulo  $BAP$   $\left(x \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]\right)$

Resolva os três itens seguintes, **sem recorrer à calculadora**, a não ser para efetuar eventuais cálculos numéricos.



42.1. Mostre que a área da região sombreada é dada por  $4 - \frac{2}{\tan x}$

42.2. Determine o valor de  $x$  para o qual a área da região sombreada é  $\frac{12 - 2\sqrt{3}}{3}$

42.3. Para um certo valor de  $x$ , sabe-se que  $\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -\frac{15}{17}$   
Determine, para esse valor de  $x$ , a área da região sombreada.

Teste Intermédio 11.º ano – 27.01.2010



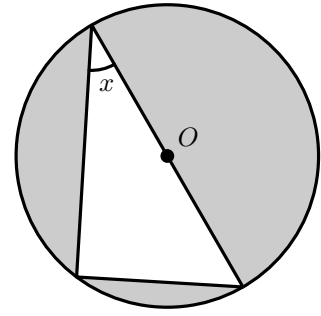


43. Na figura ao lado, está representado um triângulo inscrito numa circunferência de centro  $O$  e raio igual a 1.

Um dos lados do triângulo é um diâmetro da circunferência.

Qual das expressões seguintes representa, em função de  $x$ , a área da parte sombreada?

- (A)  $\pi - 2 \sin x \cos x$       (B)  $\frac{\pi}{2} - 2 \sin x \cos x$   
 (C)  $\pi - \sin x \cos x$       (D)  $\pi - \frac{\sin x \cos x}{2}$



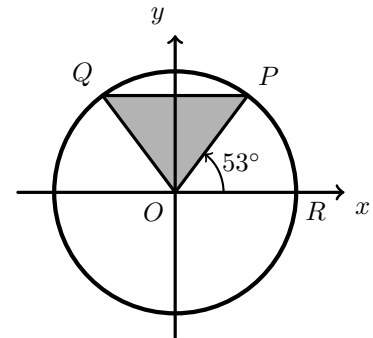
Exame – 2009, 1.ª Fase (adaptado)

44. Na figura ao lado está representado o círculo trigonométrico.

Os pontos  $P$  e  $Q$  pertencem à circunferência, sendo  $PQ$  a reta paralela ao eixo  $Ox$ . O ponto  $R$  pertence ao eixo  $Ox$ . O ângulo  $ROP$  tem  $53^\circ$  de amplitude.

Qual é o perímetro do triângulo  $[OPQ]$  (valor aproximado às décimas) ?

- (A) 3,2      (B) 3,4      (C) 3,6      (D) 3,8



Teste Intermédio 11.º ano – 7.05.2009

45. A Inês olhou para o seu relógio quando este marcava 10 h e 45 min. Passado algum tempo, ao ver novamente as horas, a Inês concluiu que o ponteiro dos minutos tinha rodado  $-3\pi$  radianos.

Que horas marcava o relógio da Inês, neste último instante?

- (A) 11 h e 15 min      (B) 11 h e 45 min      (C) 12 h e 15 min      (D) 13 h e 45 min

Teste Intermédio 11.º ano – 7.05.2009

46. Considere a equação trigonométrica  $\cos x = -0,3$

Num dos intervalos seguintes, esta equação tem **apenas uma** solução. Em qual deles?

- (A)  $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$       (B)  $[0, \pi]$       (C)  $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$       (D)  $\left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$

Teste Intermédio 11.º ano – 29.01.2009



47. Na figura ao lado estão representados, em referencial o.n.  $xOy$ :

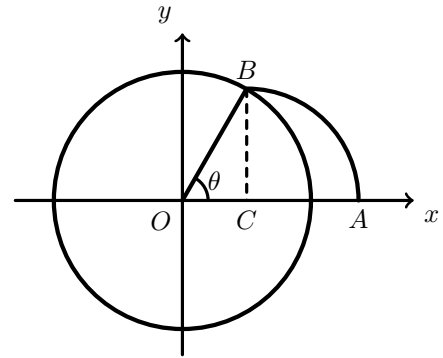
- o círculo trigonométrico
- o raio  $[OB]$  deste círculo
- o arco de circunferência  $AB$ , de centro no ponto  $C$

Tal como a figura sugere, o ponto  $B$  pertence ao primeiro quadrante, os pontos  $A$  e  $C$  pertencem ao eixo  $Ox$  e a reta  $BC$  é perpendicular a este eixo.

Seja  $\theta$  a amplitude do ângulo  $AOB$

Qual é a abcissa do ponto  $A$ ?

- (A)  $1 + \sin \theta$       (B)  $1 + \cos \theta$       (C)  $\cos \theta + \sin \theta$       (D)  $1 + \cos \theta + \sin \theta$



Teste Intermédio 11.º ano – 29.01.2009

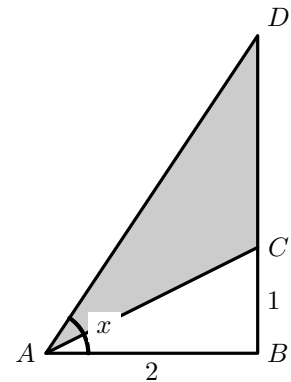
48. Relativamente à figura ao lado, sabe-se que:

- o triângulo  $[ABD]$  é retângulo
- o ponto  $C$  pertence ao cateto  $[BD]$
- $x$  designa a amplitude, em radianos, do ângulo  $BAD$
- $\overline{AB} = 2$  e  $\overline{BC} = 1$

48.1. Mostre que a área do triângulo  $[ACD]$  é dada por  $2 \operatorname{tg} x - 1$

48.2. Determine o valor de  $x$  para o qual a área do triângulo  $[ACD]$  é igual a 1

48.3. Sabendo que  $\sin\left(\frac{\pi}{2} + a\right) = \frac{5}{13}$  e que  $a \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ , determine o valor de  $2 \operatorname{tg} a - 1$



Teste Intermédio 11.º ano – 29.01.2009

49. Na figura ao lado está representado, em referencial o.n.  $xOy$ , um arco de circunferência  $AB$ , de centro na origem do referencial e raio igual a 1

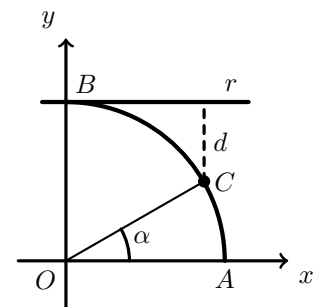
A reta  $r$  tem equação  $y = 1$

O ponto  $C$  pertence ao arco  $AB$

Seja  $\alpha$  a amplitude do ângulo  $AOC$

Qual das expressões seguintes dá a distância  $d$  do ponto  $C$  à reta  $r$ ?

- (A)  $1 + \sin \alpha$       (B)  $1 - \sin \alpha$       (C)  $1 + \cos \alpha$       (D)  $1 - \cos \alpha$



Teste Intermédio 11.º ano – 6.05.2008

50. Seja  $x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$

Qual das expressões seguintes designa um número positivo?

- (A)  $\cos(\pi - x)$       (B)  $\sin(\pi - x)$       (C)  $\cos\left(\frac{3\pi}{2} - x\right)$       (D)  $\sin\left(\frac{3\pi}{2} - x\right)$

Teste Intermédio 11.º ano – 6.05.2008

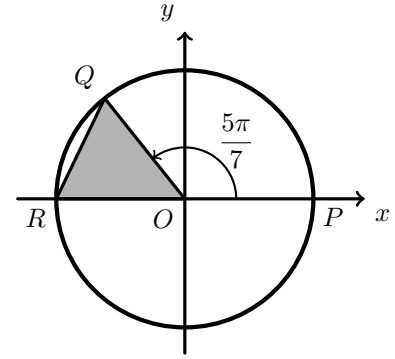


51. Na figura ao lado está representado o círculo trigonométrico.

Tal como a figura sugere,  $O$  é a origem do referencial,  $Q$  pertence à circunferência,  $P$  é o ponto de coordenadas  $(1,0)$  e  $R$  é o ponto de coordenadas  $(-1,0)$

A amplitude, em radianos, do ângulo  $POQ$  é  $\frac{5\pi}{7}$

Qual é o valor, arredondado às centésimas, da área do triângulo  $[OQR]$ ?

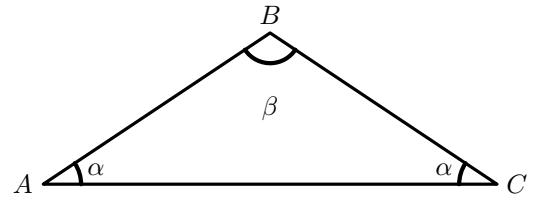


- (A) 0,39      (B) 0,42      (C) 0,46      (D) 0,49

Teste Intermédio 12.º ano – 29.04.2008

52. Na figura está representado um triângulo  $[ABC]$  com dois ângulos de amplitude  $\alpha$  e um ângulo de amplitude  $\beta$

Qual das igualdades seguintes é verdadeira, para qualquer triângulo nestas condições?



- (A)  $\cos \beta = \sin(2\alpha)$       (B)  $\cos \beta = \cos(2\alpha)$       (C)  $\cos \beta = -\sin(2\alpha)$       (D)  $\cos \beta = -\cos(2\alpha)$

Teste Intermédio 11.º ano – 24.01.2008

53. Seja  $\theta$  um valor pertencente ao intervalo  $\left] \frac{\pi}{2}, \pi \right[$

Qual das expressões seguintes designa um número real positivo?

- (A)  $\cos \theta - \sin \theta$       (B)  $\sin \theta \times \cos \theta$       (C)  $\sin \theta \times \operatorname{tg} \theta$       (D)  $\sin \theta - \operatorname{tg} \theta$

Teste Intermédio 11.º ano – 24.01.2008

54. Considere a equação  $1 + 3 \operatorname{tg}(2x) = 4$

Qual dos seguintes valores é solução desta equação?

- (A)  $-\frac{\pi}{8}$       (B)  $\frac{3\pi}{8}$       (C)  $\frac{5\pi}{8}$       (D)  $\frac{7\pi}{8}$

Teste Intermédio 11.º ano – 24.01.2008



55. Na figura seguinte estão representadas, em referencial o.n.  $xOy$ , uma reta e uma circunferência com centro na origem e raio igual a 5

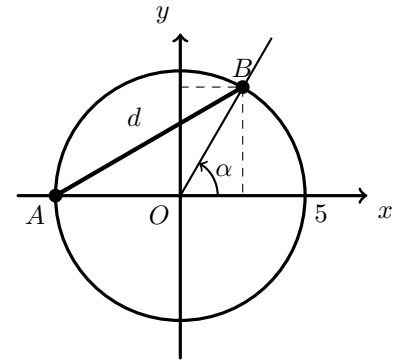
Os pontos  $A$  e  $B$  pertencem à circunferência.

O ponto  $A$  também pertence ao eixo das abscissas.

Admita que o ponto  $B$  se desloca ao longo da circunferência, no primeiro quadrante.

Para cada posição do ponto  $B$ , seja  $\alpha$  a amplitude do ângulo orientado cujo lado origem é o semieixo positivo  $Ox$  e cujo lado extremidade é a semirreta  $\vec{OB}$

Seja  $d$  o comprimento do segmento  $[AB]$



55.1. Mostre que  $d^2 = 50 + 50 \cos \alpha$

55.2. Para uma certa posição do ponto  $B$ , tem-se  $\operatorname{tg} \alpha = \sqrt{24}$

Sem recorrer à calculadora, determine, para este caso, o valor de  $d$

Teste Intermédio 11.º ano – 24.01.2008

56. Indique as soluções da equação  $5 + 2 \cos x = 6$  que pertencem ao intervalo  $]0, 2\pi[$

(A)  $\frac{\pi}{3}$  e  $\frac{4\pi}{3}$       (B)  $\frac{\pi}{3}$  e  $\frac{5\pi}{3}$       (C)  $\frac{\pi}{6}$  e  $\frac{7\pi}{6}$       (D)  $\frac{\pi}{6}$  e  $\frac{11\pi}{6}$

Teste Intermédio 11.º ano – 10.05.2007

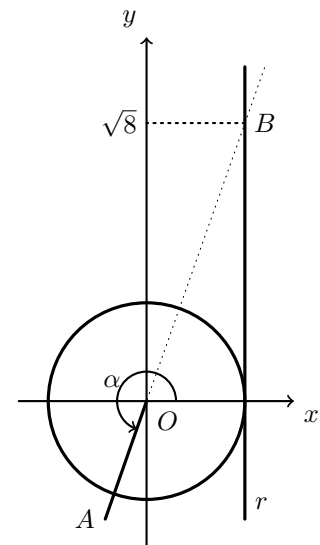
57. Na figura junta estão representados, em referencial o.n.  $xOy$ :

- o círculo trigonométrico
- a reta  $r$ , de equação  $x = 1$
- o ângulo, de amplitude  $\alpha$ , que tem por lado origem o semieixo positivo  $Ox$  e por lado extremidade a semirreta  $\vec{OA}$
- o ponto  $B$ , intersecção do prolongamento da semirreta  $\vec{OA}$  com a reta  $r$

Como a figura sugere, a ordenada de  $B$  é  $\sqrt{8}$

Sem recorrer à calculadora, determine o valor de

$$5 \operatorname{sen} \left( \frac{\pi}{2} + \alpha \right) + 2 \cos(3\pi - \alpha)$$



Teste Intermédio 11.º ano – 10.05.2007



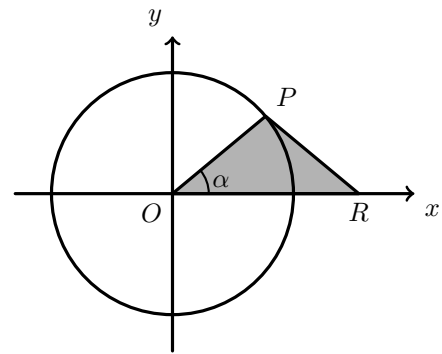
58. Na figura seguinte está representado o círculo trigonométrico e um triângulo  $[OPR]$

O ponto  $P$  desloca-se ao longo da circunferência, no primeiro quadrante.

O ponto  $Q$  desloca-se ao longo do eixo  $Ox$ , de tal modo que o triângulo  $[OPR]$  é sempre isósceles.

Sendo  $\alpha$  a amplitude, em radianos, do ângulo  $ROP$ , qual das expressões seguintes dá a **área** do triângulo  $[OPR]$ , em função de  $\alpha$  ?

- (A)  $\sin \alpha \cdot \cos \alpha$  (B)  $2 \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha$   
 (C)  $\frac{1 + \sin \alpha \cdot \cos \alpha}{2}$  (D)  $\frac{(1 + \cos \alpha) \cdot \sin \alpha}{2}$



Teste Intermédio 11.º ano – 19.05.2006

59. Da amplitude  $\alpha$  de um certo ângulo orientado sabe-se que  $\cos \alpha < 0$  e  $\operatorname{tg} \alpha > 0$

Qual das expressões seguintes dá o valor de  $\sin \alpha$  ?

- (A)  $\sqrt{1 - \cos^2 \alpha}$  (B)  $-\sqrt{1 - \cos^2 \alpha}$  (C)  $\sqrt{1 + \cos^2 \alpha}$  (D)  $-\sqrt{1 + \cos^2 \alpha}$

Teste Intermédio 11.º ano – 19.05.2006

60. Sabe-se que  $\beta \in \mathbb{R}$  é uma solução da equação  $\sin x = \frac{1}{5}$

Qual das expressões seguintes designa uma solução da equação  $\cos x = -\frac{1}{5}$ ?

- (A)  $\pi + \beta$  (B)  $\frac{\pi}{2} + \beta$  (C)  $-\beta$  (D)  $\frac{\pi}{2} - \beta$

Teste Intermédio 11.º ano – 19.05.2006

61. Na figura ao lado está representado o círculo trigonométrico.

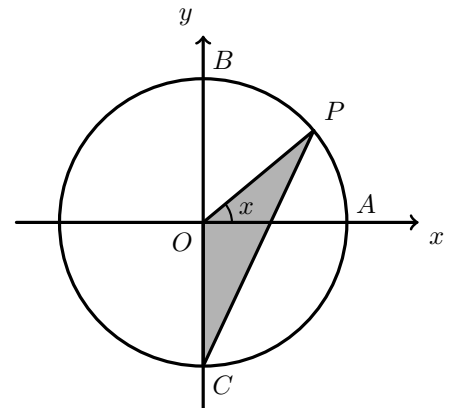
Os pontos  $A$ ,  $B$  e  $C$  têm coordenadas  $(1,0)$ ,  $(0,1)$  e  $(0,-1)$ , respetivamente.

O Ponto  $P$  desloca-se ao longo do arco  $AB$ , nunca coincidindo com o ponto  $B$ .

Para cada posição do ponto  $P$ , seja  $x$  a amplitude do ângulo  $AOP$ , e seja  $f(x)$  a área do triângulo  $[OPC]$ .

Qual das expressões seguintes define a função  $f$  ?

- (A)  $\frac{\sin x}{2}$  (B)  $\frac{\cos x}{2}$   
 (C)  $\frac{\sin x + \cos x}{2}$  (D)  $\frac{\sin x \cdot \cos x}{2}$

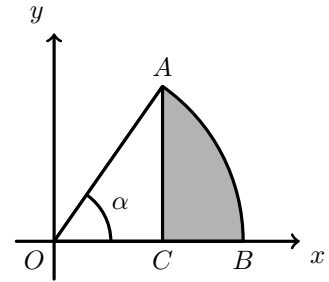


Exame – 2006, Ép. especial



62. Na figura ao lado está representado, em referencial o.n.  $xOy$ , um arco  $AB$ , que está contido na circunferência de equação  $x^2 + y^2 = 1$ . O ponto  $C$  pertence ao eixo  $Ox$  e o segmento de reta  $[AC]$  é perpendicular a este eixo.  $\alpha$  é a amplitude, em radianos, do ângulo  $AOB$ . Qual é a expressão que dá o perímetro da região sombreada, em função de  $\alpha$ ?

- (A)  $\pi \times \alpha + \sin \alpha + \cos \alpha$       (B)  $\pi \times \alpha + \sin \alpha + 1 - \cos \alpha$   
(C)  $1 + \alpha - \sin \alpha + \cos \alpha$       (D)  $1 + \alpha + \sin \alpha - \cos \alpha$



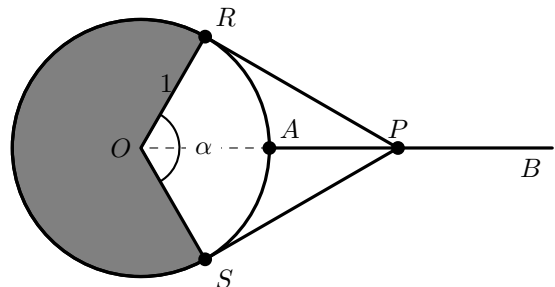
Exame – 2006, 2.ª Fase

63. Na figura ao lado, estão representadas uma semirreta  $\overrightarrow{AB}$  e uma circunferência de centro  $O$  e de raio 1 (os pontos  $O$ ,  $A$  e  $B$  são colineares; o ponto  $A$  pertence à circunferência).

Considere que o ponto  $P$  se desloca ao longo da semirreta  $\overrightarrow{AB}$ , nunca coincidindo com o ponto  $A$ . Os pontos  $R$  e  $S$  acompanham o movimento do ponto  $P$ , de tal forma que as retas  $PR$  e  $PS$  são sempre tangentes à circunferência, nos pontos  $R$  e  $S$ , respetivamente.

Seja  $\alpha$  a amplitude, em radianos, do ângulo  $SOR$  ( $\alpha \in ]0, \pi[$ )

Mostre que a área do **quadrilátero**  $[ORPS]$  é dada, em função de  $\alpha$ , por  $\text{tg} \left( \frac{\alpha}{2} \right)$



Exame – 2005, Ép. especial (cód. 435)

64. Na figura ao lado está representada uma circunferência com centro no ponto  $O$  e **raio 3**. Os diâmetros  $[EF]$  e  $[GH]$  são perpendiculares.

Considere que o ponto  $B$  se desloca sobre o arco  $FG$ .

Os pontos  $A$ ,  $C$  e  $D$  acompanham o movimento do ponto  $B$ , de tal forma que:

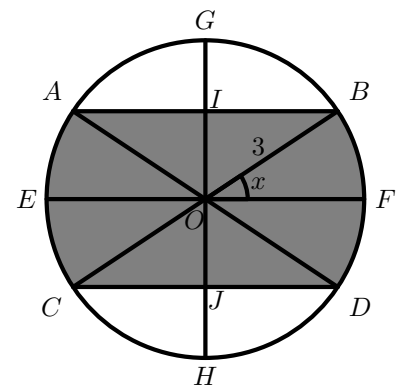
- as cordas  $[AB]$  e  $[CD]$  permanecem paralelas a  $[EF]$ ;
- $[AD]$  e  $[BC]$  são sempre diâmetros da circunferência

Os pontos  $I$  e  $J$  também acompanham o mesmo movimento, de tal forma que são sempre os pontos de interseção de  $[GH]$  com  $[AB]$  e  $[CD]$ , respetivamente.

Para cada posição do ponto  $B$ , seja  $x$  a amplitude, em radianos, do ângulo  $FOB$ ,  $\left( x \in \left[ 0, \frac{\pi}{2} \right] \right)$

Mostre que a área da região sombreada é dada, em função de  $x$  por  $18(x + \sin x \cdot \cos x)$

Sugestão: use a decomposição sugerida na figura.



Exame – 2005, 1.ª Fase (cód. 435)



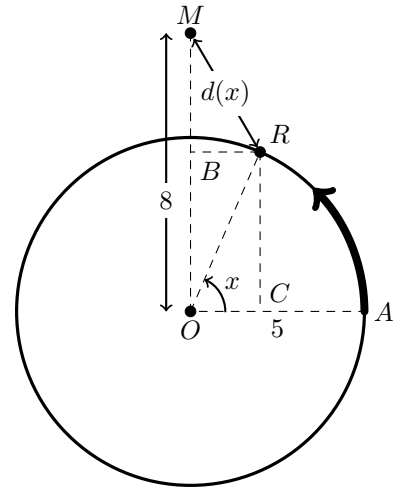
65. A Rita foi andar num carrossel. A figura ao lado ilustra a situação. Em cada volta, que se inicia no ponto  $A$ , a Rita descreve uma circunferência com 5 metros de raio, centrada no ponto  $O$ , rodando no sentido indicado na figura.

A mãe da Rita ficou a observá-la de um ponto  $M$ , situado à distância de 8 metros de  $O$  e tal que o ângulo  $AOM$  é reto.

Para cada posição  $R$ , da Rita, fica determinado um ângulo de amplitude  $x$ , medida em radianos, que tem como lado origem a semirreta  $OA$  e como lado extremidade a semirreta  $OR$ .

Mostre que, para cada valor de  $x$ , a distância  $d(x)$ , da Rita à mãe, é dada, em metros, por

$$\sqrt{89 - 80 \sin x}$$



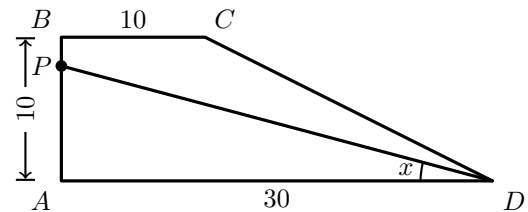
Exame – 2003, Prova para militares (cód. 435)

66. Na figura ao lado está representado um trapézio retângulo  $[ABCD]$ , cujas bases têm 10 e 30 unidades de comprimento e a altura tem 10 unidades de comprimento. Considere que um ponto  $P$  se desloca sobre o segmento  $[AB]$ .

Para cada posição do ponto  $P$ , seja  $x$  a amplitude, em radianos, do ângulo  $PDA$ .

Pretende-se determinar o valor de  $x$  para o qual o segmento  $[PD]$  divide o trapézio em duas figuras com a mesma área.

Qual das equações seguintes traduz este problema?



- (A)  $\frac{30^2 \sin x}{2} = 100$                       (B)  $\frac{30^2 \operatorname{tg} x}{2} = 100$   
 (C)  $\frac{30 \times 10 \sin x}{4} = 150$                       (D)  $\frac{30 \times 10 \operatorname{tg} x}{4} = 150$

Exame – 2003, 2.ª Fase (cód. 435)

67. Considere  $\theta \in \mathbb{R}$ . Sabendo que  $\operatorname{tg} \theta = \frac{1}{2}$ , **sem recorrer à calculadora**, calcule o valor de  $2 - 5 \sin^2 \theta$

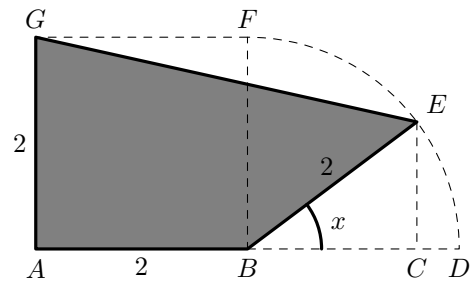
Exame – 2003, 1.ª fase - 2.ª chamada (cód. 435) (adaptado)



68. Na figura ao lado está representado a sombreado um polígono  $[ABEG]$ .

Tem-se que:

- $[ABFG]$  é um quadrado de lado 2
- $FD$  é um arco de circunferência de centro em  $B$ ; o ponto  $E$  move-se ao longo desse arco; em consequência, o ponto  $C$  desloca-se sobre o segmento  $[BD]$ , de tal forma que se tem sempre  $[EC] \perp [BD]$
- $x$  designa a amplitude, em radianos, do ângulo  $CBE$  ( $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ )



- 68.1. Mostre que a área do polígono  $[ABEG]$  é dada, em função de  $x$ , por  $2(1 + \sin x + \cos x)$  (Sugestão: pode ser-lhe útil considerar o trapézio  $[ACEG]$ )
- 68.2. Determine a área do trapézio para  $x = 0$  e para  $x = \frac{\pi}{2}$ . Interprete geometricamente cada um dos valores obtidos.

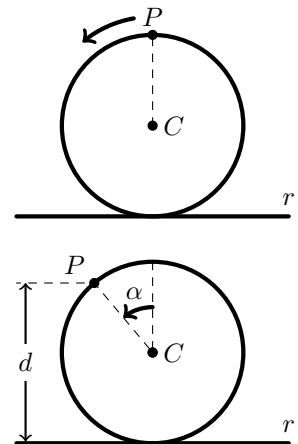
Exame – 2003, 1.ª fase - 1.ª chamada (cód. 435)

69. Considere uma circunferência de centro  $C$  e raio 1, tangente a uma reta  $r$ . Um ponto  $P$  começa a deslocar-se sobre a circunferência, no sentido indicado na figura. Inicialmente, o ponto  $P$  encontra-se à distância de duas unidades da reta  $r$ .

Seja  $d$  a distância de  $P$  a  $r$ , após uma rotação de amplitude  $\alpha$ .

Qual das igualdades seguintes é verdadeira para qualquer número real positivo  $\alpha$ ?

- (A)  $d = 1 + \cos \alpha$       (B)  $d = 2 + \sin \alpha$   
 (C)  $d = 1 - \cos \alpha$       (D)  $d = 2 - \sin \alpha$



Exame – 2002, 2.ª fase (cód. 435)

70. Na figura ao lado estão representados, em referencial o. n.  $xOy$ , o círculo trigonométrico e um triângulo  $[OAB]$ .

Os pontos  $A$  e  $B$  pertencem à circunferência.

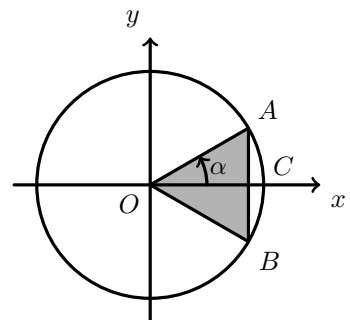
O segmento  $[AB]$  é perpendicular ao semieixo positivo  $Ox$ .

O ponto  $C$  é o ponto de interseção da circunferência com o semieixo positivo  $Ox$ .

Seja  $\alpha$  a amplitude do ângulo  $COA$   $\alpha \in ]0, \frac{\pi}{2}[$

Qual das expressões seguintes dá a área do triângulo  $[OAB]$ , em função de  $\alpha$ ?

- (A)  $\sin \alpha \cdot \cos \alpha$       (B)  $\frac{\operatorname{tg} \alpha \cdot \cos \alpha}{2}$   
 (C)  $\operatorname{tg} \alpha \cdot \sin \alpha$       (D)  $\frac{\operatorname{tg} \alpha \cdot \sin \alpha}{2}$



Exame – 2002, 1.ª fase - 2.ª chamada (cód. 435)



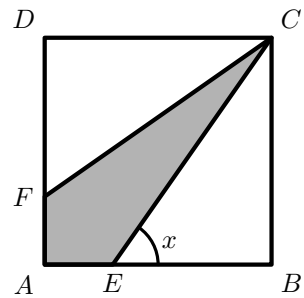


71. Na figura ao lado está representado um quadrado  $[ABCD]$  de lado 1.

O ponto  $E$  desloca-se sobre o lado  $[AB]$  e o ponto  $F$  desloca-se sobre o lado  $[AD]$ , de tal forma que se tem sempre  $\overline{AE} = \overline{AF}$ .

Para cada posição do ponto  $E$ , seja a  $x$  amplitude do ângulo  $BEC$   $\left(x \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]\right)$

Recorrendo a métodos exclusivamente analíticos, mostre que o **perímetro** do quadrilátero  $[CEAF]$  é dado, em função de  $x$ , por  $2 - \frac{2}{\operatorname{tg} x} + \frac{2}{\operatorname{sen} x}$



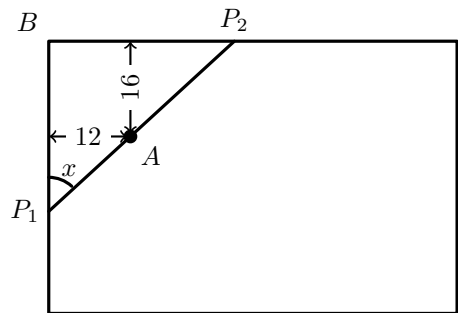
Exame – 2002, 1.ª fase - 1.ª chamada (cód. 435)

72. Na figura ao lado está representado um lago artificial de forma retangular.

Pretende-se construir uma ponte, ligando duas margens do lago, entre os pontos  $P_1$  e  $P_2$ , tal como a figura ilustra.

A ponte tem um ponto de apoio  $A$ , situado a 12 m de uma das margens e a 16 m da outra.

Seja  $x$  a amplitude do ângulo  $P_2P_1B$ .



72.1. Mostre que o comprimento da ponte, em metros, é dado por  $\frac{16 \operatorname{sen} x + 12 \cos x}{\operatorname{sen} x \cdot \cos x}$

72.2. Considerando que a localização de  $P_1$  e  $P_2$  pode variar, determine o comprimento da ponte para o qual se tem  $\overline{BP_1} = \overline{BP_2}$

Apresente o resultado em metros, arredondado às décimas.

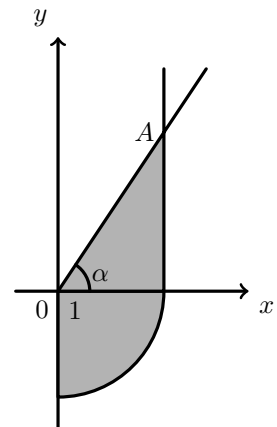
Exame – 2001, Ép. especial (cód. 435)

73. Na figura ao lado estão representados, em referencial o.n.  $xOy$ :

- um quarto de círculo, de centro na origem e raio 1
- uma semirreta paralela ao eixo  $Oy$ , com origem no ponto  $(1,0)$
- um ponto  $A$ , pertencente a esta semirreta
- um ângulo de amplitude  $\alpha$ , cujo lado origem é o semieixo positivo  $Ox$  e cujo lado extremidade é a semirreta  $\hat{O}A$

Qual das expressões seguintes dá a área da região sombreada, em função de  $\alpha$ ?

- (A)  $\frac{\pi}{4} + \frac{\operatorname{tg} \alpha}{2}$       (B)  $\frac{\pi}{4} + \frac{2}{\operatorname{tg} \alpha}$       (C)  $\pi + \frac{\operatorname{tg} \alpha}{2}$       (D)  $\pi + \frac{2}{\operatorname{tg} \alpha}$



Exame – 2001, 1.ª fase - 2.ª chamada (cód. 435)



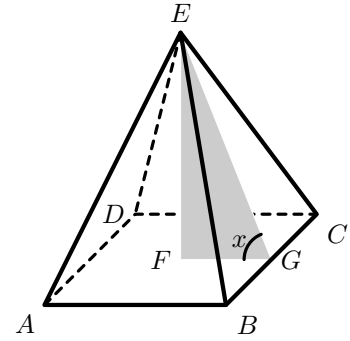
74. Na figura ao lado está representada uma pirâmide quadrangular regular.

Sabe-se que:

- a base da pirâmide tem centro  $F$  e lado 2
- $G$  é o ponto médio da aresta  $BC$
- $x$  designa a amplitude do ângulo  $FGE$

Mostre que a área total da pirâmide é dada, em função de  $x$ , por

$$\frac{4 \cos x + 4}{\cos x} \quad \left( x \in \left] 0, \frac{\pi}{2} \right[ \right)$$

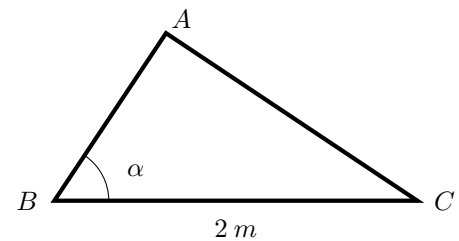


Exame – 2001, 1.ª fase - 1.ª chamada (cód. 435)

75. Na figura ao lado está representado um triângulo retângulo  $[ABC]$ , cuja hipotenusa mede  $2m$ .

Qual das expressões seguintes dá a área (em  $m^2$ ) do triângulo  $[ABC]$ , em função da amplitude,  $\alpha$ , do ângulo  $ABC$ ?

- (A)  $2 \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha$       (B)  $2 \cdot \sin \alpha \cdot \operatorname{tg} \alpha$   
 (C)  $4 \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha$       (D)  $4 \cdot \sin \alpha \cdot \operatorname{tg} \alpha$



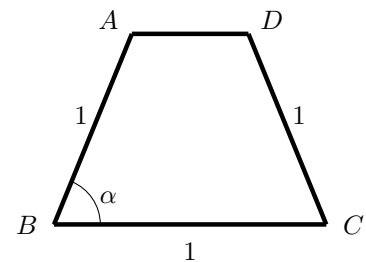
Exame – 2000, Prova para militares (cód. 135)

76. Na figura ao lado está representado o trapézio isósceles  $[ABCD]$  (os lados  $[AD]$  e  $BC$  são paralelos).

Tem-se que:

- $\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CD} = 1$
- $\overline{AD} \leq 1$

Seja  $\alpha$  a amplitude do ângulo  $ABC$ ,  $\alpha \in \left] \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2} \right]$



76.1. Mostre que, para cada  $\alpha \in \left] \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2} \right]$ , a área do trapézio é igual a  $(\sin \alpha)(1 - \cos \alpha)$

76.2. Determine a área do trapézios para  $\alpha = \frac{\pi}{2}$  e interprete geometricamente o resultado obtido, caracterizando o quadrilátero que se obtém neste caso.

Exame – 1999, Prova modelo (cód. 135) (adaptado)

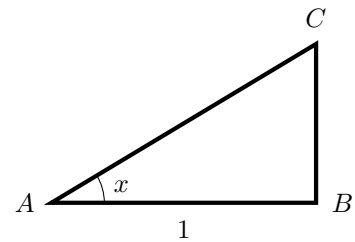


77. Considere um triângulo retângulo  $[ABC]$ , cujos catetos são  $[AB]$  e  $[BC]$ . Admita que se tem  $\overline{AB} = 1$  e que  $x$  designa a amplitude do ângulo  $BAC$ .

77.1. Mostre que o perímetro do triângulo  $[ABC]$  é dado, para cada valor de  $x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ , por

$$\frac{1 + \operatorname{sen} x + \cos x}{\cos x}$$

77.2. Seja  $\alpha \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$  tal que  $\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\frac{3}{5}$ . Determine o valor do perímetro do triângulo  $[ABC]$  para este valor de  $\alpha$ .



Exame – 1998, Prova para militares (cód. 135)

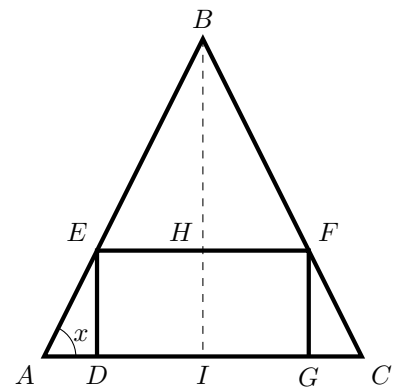
78. Na figura ao lado

- o triângulo  $[ABC]$  é isósceles ( $\overline{AB} = \overline{BC}$ )
- $[DEFG]$  é um retângulo
- $\overline{DG} = 2$
- $\overline{DE} = 1$
- $x$  designa a amplitude do ângulo  $BAC$

Mostre que a área do triângulo  $[ABC]$  é dada por

$$2 + \operatorname{tg} x + \frac{1}{\operatorname{tg} x} \quad \left(x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[\right)$$

(Nota: Pode ser-lhe útil reparar que  $\widehat{BEF} = \widehat{BAC}$ )



Exame – 1998, 2.ª fase (cód. 135)

79. A figura ao lado representa um canteiro de forma circular com 5 m de raio.

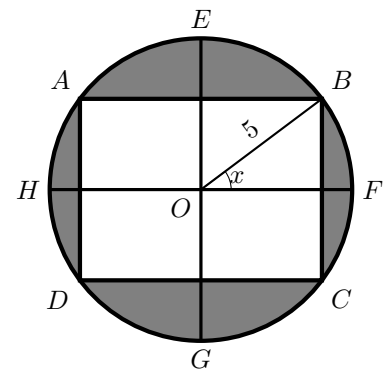
O canteiro tem uma zona retangular, que se destina à plantação de flores, e uma zona relvada, assinalada a sombreado na figura.

Os vértices  $A$ ,  $B$ ,  $C$  e  $D$  do retângulo pertencem à circunferência que limita o canteiro.

Na figura também estão assinalados:

- dois diâmetros da circunferência,  $[EG]$  e  $[HF]$ , que contêm os pontos médios dos lados do retângulo
- o centro  $O$  da circunferência
- o ângulo  $BOF$ , de amplitude  $x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$

Mostre que a área (em  $m^2$ ) da zona relvada é dada por  $25(\pi - 4 \operatorname{sen} x \cdot \cos x)$

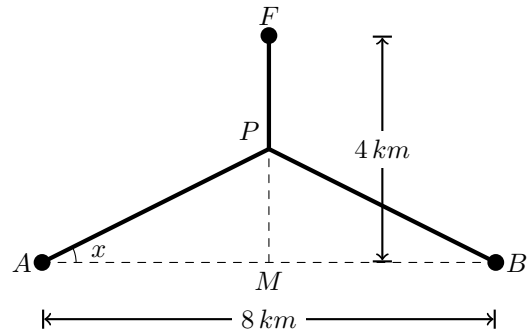


Exame – 1998, 1.ª fase - 2.ª chamada (cód. 135)



80. Duas povoações,  $A$  e  $B$ , distanciadas  $8\text{ km}$  uma da outra estão a igual distância de uma fonte de abastecimento de água, localizada em  $F$ .

Pretende-se construir uma canalização ligando a fonte às duas povoações, como se indica na figura ao lado. A canalização é formada por três canos: um que vai da fonte  $F$  até um ponto  $P$  e dois que partem de  $P$ , um para  $A$  e outro para  $B$ . O ponto  $P$  está a igual distância de  $A$  e de  $B$ .



Tem-se ainda que

- o ponto  $M$ , ponto médio de  $[AB]$ , dista  $4\text{ km}$  de  $F$ ;
- $x$  é amplitude do ângulo  $PAM$  ( $x \in [0, \frac{\pi}{4}]$ )

- 80.1. Tomando para unidade o quilómetro, mostre que o comprimento total da canalização é dado por

$$4 + \frac{8 - 4 \sin x}{\cos x}$$

(Sugestão: Comece por mostrar que  $\overline{PA} = \frac{4}{\cos x}$  e que  $\overline{FP} = 4 - 4 \tan x$ )

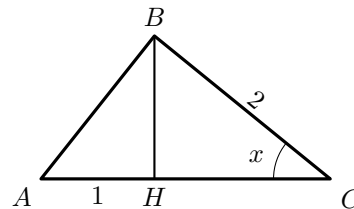
- 80.2. Calcule o comprimento total da canalização para  $x = 0$  e interprete o resultado obtido, referindo a forma da canalização e consequente comprimento.

Exame – 1988, 1.ª fase - 1.ª chamada (cód. 135)

81. Na figura seguinte está representado um triângulo  $[ABC]$ .

Sabe-se que:

- $x$  é a amplitude do ângulo  $BCA$ ;
- $\overline{BC} = 2$
- $[BH]$  é a altura relativa ao vértice  $B$ ;
- $\overline{AH} = 1$



Mostre que a área de um triângulo  $[ABC]$  é dada, para cada valor de  $x \in ]0, \frac{\pi}{2}[$ , por  $\sin x(1 + 2 \cos x)$

Exame – 1998, Prova modelo (cód. 135) (adaptado)

