Escola Secundária de Francisco Franco

Matemática A (Aprendizagens Essenciais) – 12.º ano

Exercícios saídos em testes intermédios e em exames nacionais (desde 2006)

Tema V: FUNÇÕES EXPONENCIAIS E FUNÇÕES LOGARÍTMICAS

1. Seja (x_n) a sucessão de termo geral $x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$. Seja (y_n) a sucessão de termo geral $y_n = 1+\ln(x_n)$. Qual é o valor de $\lim y_n$?

(A) 2 (B) 3 (C) $1+e$ (D) $2+e$

2.º teste intermédio 2006

2. Indique o número real que é solução da equação $e^{x-2} = \frac{1}{\sqrt{e}}$

(A) $\frac{1}{2}$ (B) $\frac{3}{2}$ (C) $\frac{5}{2}$ (D) $\frac{7}{2}$

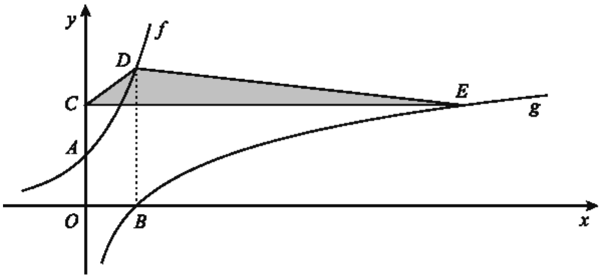
2.º teste intermédio 2006

3. Indique o conjunto dos números reais que são soluções da inequação $\log_3(1-x)\leq 1$

(A) $[-2,1[$ (B) $[-1,2[$ (C) $]-\infty,-2]$ (D) $[-2,+\infty[$

2.º teste intermédio 2006

4. Na figura abaixo estão representadas, em referencial o. n. xOy: parte do gráfico da função f, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $f(x)=e^x$; parte do gráfico da função g, de domínio $\mathbb{R}^+$, definida por $g(x)=\ln x$. O ponto A é o ponto de intersecção do gráfico de f com o eixo Oy e o ponto B é o ponto de intersecção do gráfico de g com o eixo Ox.



Na figura está também representado um triângulo [CDE]. O ponto C pertence ao eixo Oy, o ponto D pertence ao gráfico de f e o ponto E pertence ao gráfico de g. Sabe-se ainda que:

a recta BD é paralela ao eixo Oy e a recta CE é paralela ao eixo Ox; $\overline{AC} = \overline{OA}$. Qual é a área do triângulo [CDE]?

(A) $\frac{(e-1)\ln 2}{2}$ (B) $\frac{(e^2-1)\ln 2}{2}$ (C) $\frac{e(e-2)}{2}$ (D) $\frac{e^2(e-2)}{2}$

2.º teste intermédio 2006

5. Um estudo de mercado, encomendado por uma empresa de venda de produtos alimentares, concluiu que a quantidade de azeite *Azeitona do Campo*, vendida num mês por essa empresa, depende do preço de venda ao público, de acordo com a função $V(x) = e^{14-x}$ sendo x o preço de venda ao público, em euros, de 1 litro desse azeite e $V(x)$ a quantidade vendida num mês (medida em litros).

a) A empresa tem um conjunto de despesas (compra ao produtor, empacotamento, publicidade, transportes, etc.) com a compra e a venda do azeite. Sabendo que cada litro de azeite vendido acarreta à empresa uma despesa total de 3 euros, justifique que o lucro mensal da empresa (em euros), resultante da venda do azeite, é dado por $L(x) = (x-3)e^{14-x}$

b) Utilize a calculadora para resolver graficamente o seguinte problema:

Entre que valores deve variar o preço de um litro de azeite de venda ao público para que o lucro mensal seja superior a dezasseis mil e quinhentos euros? Apresente os valores em euros, arredondados aos cêntimos (de euro).

Apresente na sua resposta os elementos recolhidos na utilização da calculadora: gráficos e coordenadas relevantes de alguns pontos.

2.º teste intermédio 2006

6. Considere a função f, de domínio $]0,+\infty[$, definida por $f(x)=\frac{1-\ln x}{x}$. Sem recorrer à calculadora, resolva as duas alíneas seguintes.

a) Mostre que $f\left(\frac{1}{2}\right)=\ln(4e^2)$

b) Estude a função f quanto à existência de assimptotas do seu gráfico, paralelas aos eixos coordenados.

2.º teste intermédio 2006

7. Com o objectivo de estudar as leis do aquecimento e do arrefecimento, realizou-se, num laboratório de Física, a seguinte experiência: aqueceu-se ao lume uma certa quantidade de água, durante cinco minutos; passado este tempo, apagou-se o lume e deixou-se a água a arrefecer. A temperatura da água foi sendo medida, ao longo do decorrer da experiência. Admita que: neste laboratório, a temperatura ambiente é constante; a temperatura da água, no instante em que começou a ser aquecida, era igual à temperatura ambiente; depois de se ter apagado o lume, a temperatura da água tende, com o passar do tempo, a igualar a temperatura ambiente. Em resultado da experiência, concluiu-se que a relação entre a temperatura da água e o tempo t, contado em minutos, a partir do instante em que se colocou a água ao lume, é modelada por uma, e uma só, das quatro funções, a, b, c e d, definidas a seguir:

$$a(t) = \begin{cases} 24 - 2t & se\ 0 \le t \le 5 \\ 24 - 10\, e^{-0{,}04\,(t-5)} & se\ t > 5 \end{cases}$$

$$b(t) = \begin{cases} 12\,(t+2) & se\ 0 \le t \le 5 \\ 24 + 70\, e^{-0{,}04\,(t-5)} & se\ t > 5 \end{cases}$$

$$c(t) = \begin{cases} 14\,(t+1) & se\ 0 \le t \le 5 \\ 24 + 60\, e^{-0{,}04\,(t-5)} & se\ t > 5 \end{cases}$$

$$d(t) = \begin{cases} 12\,(t+2) & se\ 0 \le t \le 5 \\ 24 + 60\, e^{-0{,}04\,(t-5)} & se\ t > 5 \end{cases}$$

Qual das quatro funções é a correcta? Numa pequena composição, explique porque não pode ser nenhuma das outras três, indicando, para cada uma delas, uma razão pela qual a rejeita, explicando a sua inadequação, relativamente à situação descrita.

2.º teste intermédio 2006

8. De uma função g, de domínio $]0,+\infty[$, sabe-se que: não tem zeros; a recta de equação $y=x+2$ é assimptota do seu gráfico. Seja h a função de domínio $]0,+\infty[$, definida por $h(x)=\frac{x^2}{g(x)}$. Prove que a recta de equação $y=x-2$ é assimptota do gráfico de h.

2.º teste intermédio 2006

9. Seja g a função definida em $\mathbb{R}$ por $g(x)=\frac{e^x+5}{2+\cos x}$. Considere a sucessão de termo geral $u_n = \frac{n+1}{n^2}$. Indique o valor de $\lim\limits_{n\to+\infty} g(u_n)$

(A) 4 (B) 3 (C) 2 (D) 1

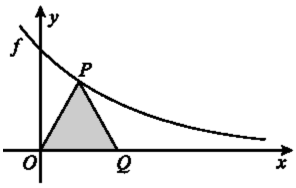
Exame Nacional 2006 (1.ª fase)

10. Seja h a função, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $h(x)=\frac{\ln(\sqrt{e^x})}{2}$. Qual das seguintes expressões pode também definir h?

(A) $\sqrt{x}$ (B) $\frac{x}{2}$ (C) $\frac{x}{4}$ (D) $\frac{\sqrt{x}}{2}$

Exame Nacional 2006 (1.ª fase)

11. Na figura estão representados: parte do gráfico da função f de domínio $\mathbb{R}$, definida por $f(x)=e^{-x}$; um triângulo <u>isósceles</u> [OPQ] ($\overline{PO}=\overline{PQ}$), em que:



• O é a origem do referencial;
• P é um ponto do gráfico de f;
• Q pertence ao eixo das abcissas.

Considere que o P ponto se desloca no primeiro quadrante (eixos não incluídos), ao longo do gráfico de f. O ponto Q acompanha o movimento do ponto P, deslocando-se ao longo do eixo das abcissas, de tal modo que $\overline{PO}$ permanece sempre igual a $\overline{PQ}$. Seja A a função, de domínio $\mathbb{R}^+$, que faz corresponder, à abcissa x do ponto P, a área do triângulo [OPQ].

a) Mostre que, para cada $x \in \mathbb{R}^+$, se tem $A(x)=xe^{-x}$

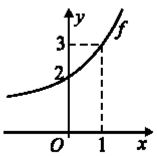
b) <u>Sem recorrer à calculadora</u>, estude a função A quanto à monotonia e conclua qual é o valor máximo que a área do triângulo [OPQ] pode assumir.

Exame Nacional 2006 (1.ª fase)

12. Considere a função f definida no intervalo [1,2] por $f(x) = \cos(x-1) + \ln x$. Para um certo valor real positivo a e para um certo valor real b, a função g, definida no intervalo [1,2] por $g(x) = af(x) + b$, tem por contradomínio o intervalo [4,5]. Utilizando as capacidades gráficas da sua calculadora, determine os valores de a e de b, arredondados às centésimas. Explique como procedeu. Na sua explicação, deve incluir o gráfico, ou gráficos, que tenha visualizado na calculadora, bem como coordenadas relevantes de algum, ou alguns, pontos. Sempre que, em valores intermédios, proceder a arredondamentos, conserve um mínimo de três casas decimais.

Exame Nacional 2006 (1.ª fase)

13. Sejam a e b dois números reais positivos. Na figura está parte do gráfico de uma função f, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $f(x)=a^x + b$. Tal como a figura sugere, os pontos (0,2) e (1,3) pertencem ao gráfico de f. Quais são os valores de a e de b?



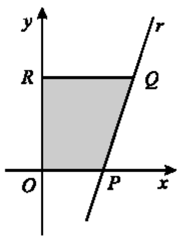
(A) $a = 2$ e $b = 1$ (B) $a = 2$ e $b = 3$
(C) $a = 3$ e $b = 2$ (D) $a = 3$ e $b = 1$

Exame Nacional 2006 (2.ª fase)

14. Seja f a função, de domínio $]1,+\infty[$, definida por $f(x)= x + x\ln(x-1)$. <u>Sem recorrer à calculadora</u>, resolva as duas alíneas seguintes:

a) Estude a função quanto à existência de assimptotas do seu gráfico.

b) Na figura estão representados, em referencial o.n. xOy, uma recta r e um trapézio [OPQR].



• Q tem abcissa 2 e pertence ao gráfico de f (o qual não está representado na figura); • r é tangente ao gráfico de f no ponto Q;
• P é o ponto de intersecção da recta r com o eixo Ox;
• R pertence ao eixo Oy e tem ordenada igual à do ponto Q. Determine a área do trapézio [OPQR].

Apresente o resultado na forma de fracção irredutível.

Exame Nacional 2006 (2.ª fase)

15. Seja f : [0,2]→ℝ uma função contínua tal que $f(0)=f(2)=0$ e $f(1)>0$. Prove que existe pelo menos um número real c no intervalo]0,1[tal que $f(c)=f(c+1)$.
Sugestão: considere a função g: [0,1]→ℝ, definida por $g(x)=f(x) - f(x+1)$

Exame Nacional 2006 (2.ª fase)

16. Indique o conjunto dos números reais que são soluções da inequação $e^{-x} > \frac{1}{e}$

(A)]–∞,–1[(B)]– ∞,1[(C)]–1,+ ∞[(D)]1,+ ∞[

2.º teste intermédio 2007

17. Seja a um número real maior do que 1. Indique o valor de $\log_a(a \times \sqrt[3]{a})$

(A) 5/4 (B) 4/3 (C) 5/3 (D) 3/2

2.º teste intermédio 2007

18. Considere a função f, de domínio ℝ, definida por

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2+2x}{x^3+x} & se \;\; x<0 \\ 2 & se \;\; x=0 \\ \dfrac{3x^2 - x\ln(x+1)}{x^2} & se \;\; x>0 \end{cases}$$

Utilizando métodos exclusivamente analíticos, averigúe se a função f é contínua em $x = 0$. Justifique a sua resposta.

2.º teste intermédio 2007

19. A acidez de uma solução é medida pelo valor do seu *pH*, que é dado por $pH = -\log_{10}(x)$ onde x designa a concentração de iões H_3O^+ , medida em mol/dm^3. Sem recorrer à calculadora, a não ser para efectuar eventuais cálculos numéricos, resolva as duas alíneas seguintes:

a) Admita que o *pH* do sangue arterial humano é 7,4. Qual é a concentração (em mol/dm^3) de iões H_3O^+, no sangue arterial humano? Escreva o resultado em notação científica, isto é, na forma $a \times 10^b$, com b inteiro e a entre 1 e 10. Apresente o valor de a arredondado às unidades.

b) A concentração de iões H_3O^+ no café é tripla da concentração de iões H_3O^+ no leite. Qual é a diferença entre o *pH* do leite e o *pH* do café? Apresente o resultado arredondado às décimas.

Sugestão: comece por designar por l a concentração de iões H_3O^+ no leite e por exprimir, em função de l, a concentração de iões H_3O^+ no café.

2.º teste intermédio 2007

20. Considere, num referencial o. n. xOy, • a curva C, que representa graficamente a função f, de domínio [0,1] definida por $f(x) = e^x + 3x$; • a recta r, de equação $y = 5$

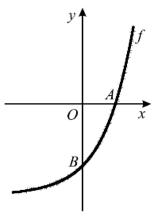
a) Sem recorrer à calculadora, justifique que a recta r intersecta a curva C em pelo menos um ponto.

b) Recorrendo às capacidades gráficas da sua calculadora, visualize a curva C e a recta r, na janela [0,1]×[0,7] (janela em que $x \in [0,1]$ e $y \in [0,7]$). Reproduza, na sua folha de teste, o referencial, a curva C e a recta r, visualizados na calculadora. Assinale ainda os pontos O, P e Q, em que:

- O é a origem do referencial;
- P é o ponto de coordenadas (0,e);
- Q é o ponto de intersecção da curva C com a recta r ; relativamente a este ponto, indique, com duas casas decimais, a sua abcissa, que deve determinar com recurso à calculadora. Desenhe o triângulo [OPQ] e determine a sua área. Apresente o resultado final arredondado às décimas. Se, em cálculos intermédios, proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, duas casas decimais.

2.º teste intermédio 2007

21. Seja c um número real maior do que 1. Na figura está representada uma parte do gráfico da função f, de domínio ℝ, definida por $f(x) = e^x - c$.



Tal como a figura sugere:

- A é o ponto de intersecção do gráfico de f com o eixo Ox
- B é o ponto de intersecção do gráfico de f com o eixo Oy

Mostre que: Se o declive da recta AB é $c - 1$, então $c = e$

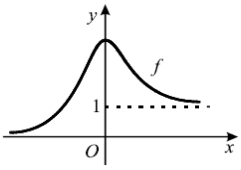
2.º teste intermédio 2007

22. Sabendo que $\ln(x) - \ln(e^{1/3}) > 0$, um valor possível para x é

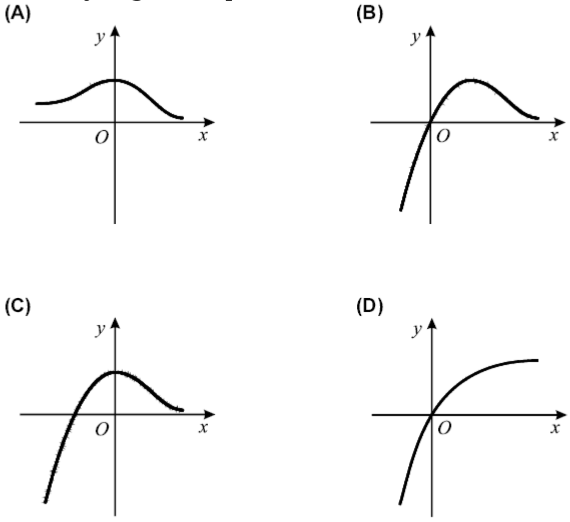
(A) 0 (B) –1 (C) 1 (D) 2

Exame Nacional 2007 (1.ª fase)

23. Na figura está parte da representação gráfica de uma função f, de domínio ℝ. Tal como a figura sugere, o eixo Ox e a recta de equação $y = 1$ são assimptotas do gráfico de f. Seja g a função, de domínio ℝ, definida por $g(x) = \ln[f(x)]$. Numa das

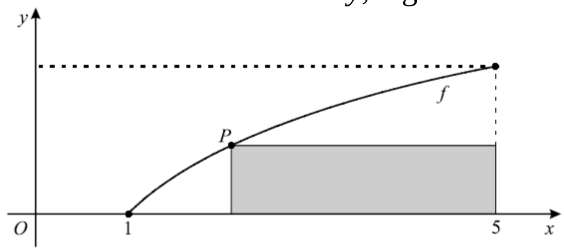


opções seguintes está parte da representação gráfica da função *g*. Em qual delas?



Exame Nacional 2007 (1.ª fase)

24. Seja *f* a função, de domínio [1,5], definida por $f(x) = \ln x$. Na figura está representado, em referencial ortonormado *xOy*, o gráfico da função *f*.



Considere que um ponto P se desloca ao longo do gráfico de *f*. Para cada posição do ponto P, considere o rectângulo em que um dos lados está contido no eixo *Ox*, outro na recta de equação $x = 5$ e os outros dois nas rectas vertical e horizontal que passam pelo ponto P. Exprima a área do rectângulo em função da abcissa de P, e, recorrendo à calculadora gráfica, determine a abcissa de P (aproximada às centésimas) para a qual a área do rectângulo é máxima. Apresente os elementos recolhidos na utilização da calculadora: - o gráfico obtido; - o ponto de ordenada máxima e respectivas coordenadas.

Exame Nacional 2007 (1.ª fase)

25. Admita que a intensidade da luz solar, *x* metros abaixo da superfície da água, é dada, numa certa unidade de medida, por $I(x) = ae^{-bx} \quad (x \geq 0)$. *a* e *b* são constantes positivas que dependem do instante e do local onde é efectuada a medição. Sempre que se atribui um valor a *a* e um valor a *b*, obtemos uma função de domínio $\mathbb{R}_0^+$

a) Medições efectuadas, num certo instante e em determinado local do oceano Atlântico, mostraram que, a 20 metros de profundidade, a intensidade da luz solar era metade da sua intensidade à superfície da água. Determine o valor de *b*, para esse instante e local. Apresente o resultado arredondado às centésimas.

b) Considere agora $b = 0,05$ e $a = 10$. Estude essa função quanto à monotonia e existência de assimptotas do seu gráfico. Interprete os resultados obtidos no contexto da situação descrita.

Exame Nacional 2007 (1.ª fase)

26. Considere as funções *f* e *g*, definidas em $\mathbb{R}$ por $f(x) = e^{x-1}$ e $g(x) = \operatorname{sen} x$. Considere ainda a função *h*, definida em $\mathbb{R}$ por $h(x) = f'(x) - g'(x)$. Sem recorrer à calculadora, a não ser para efectuar eventuais cálculos numéricos, resolva os dois itens seguintes:

a) Mostre que a função *h* tem, pelo menos, um zero no intervalo $]0, \frac{\pi}{2}[$

b) Tendo em conta a), justifique que existe $a \in]0, \frac{\pi}{2}[$ tal que as rectas tangentes aos gráficos de *f* e *g*, nos pontos de abcissa *a*, são paralelas.

Exame Nacional 2007 (1.ª fase)

27. Considere a função *g*, definida no intervalo]1,7[por $g(x) = \frac{\operatorname{sen} x + \ln x}{x}$. <u>Recorrendo às capacidades gráficas da calculadora</u>, visualize o gráfico da função *g* e reproduza-o na sua folha de prova. <u>Com base nesse gráfico</u> e utilizando as ferramentas adequadas da sua calculadora, resolva o seguinte problema: *Seja g' a função derivada de g. O conjunto solução da inequação* $g'(x) < 0$ *é um intervalo aberto]a,b[. Determine os valores de a e de b. Apresente os resultados arredondados às centésimas.* Justifique a sua resposta.

Exame Nacional 2007 (2.ª fase)

28. Considere a função *f*, de domínio $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, definida por $f(x) = 1 - \ln(x^2)$. <u>Recorrendo a métodos exclusivamente analíticos</u>:

a) Determine os pontos de intersecção do gráfico de *f* com o eixo *Ox*

b) Estude a função quanto à monotonia e à existência de extremos relativos.

Exame Nacional 2007 (2.ª fase)

29. De um número real *x* sabe-se que $\log_5(x) = \pi - 1$. Indique o valor de $5x$

(A) $25^{\pi-1}$ (B) $5^{\pi-1}$ (C) 5^{π} (D) $5(\pi-1)^5$

1.º teste intermédio 2008

30. Admita que uma certa população de seres vivos evolui de acordo com a seguinte lei: o número de indivíduos da população, t dias após um certo instante inicial, é dado aproximadamente por $P(t) = ae^{kt}$ $(t \in \mathbb{R}_0^+)$ em que

• a é o número de indivíduos da população no instante inicial (a>0)
• k é uma constante real

a) Seja r um número real positivo. Considere que, ao fim de n dias, contados a partir do instante inicial, o número de indivíduos da população é igual a r vezes o número de indivíduos que existiam no referido instante inicial. Mostre que se tem $k = \frac{\ln(r)}{n}$

b) Admita que, às zero horas do dia 1 do corrente mês, se iniciou, em laboratório, uma cultura de bactérias, em pequena escala, na qual se juntaram
• 500 indivíduos de uma estirpe A
• 500 indivíduos de uma estirpe B

Nunca foram introduzidos mais indivíduos destas duas estirpes nesta cultura. As condições da cultura são desfavoráveis para a estirpe A, mas são favoráveis para a estirpe B. De facto,
• decorrido exactamente um dia, a estirpe A estava reduzida a 250 indivíduos
• decorridos exactamente seis dias, a estirpe B tinha alcançado 1000 indivíduos

b_1) Quer a estirpe A, quer a estirpe B, evoluíram de acordo com a lei acima referida. No entanto, o valor da constante k para a estirpe A é diferente do valor dessa constante para a estirpe B. Utilizando a igualdade da alínea a), verifique que:
• no caso da estirpe A, o valor da constante k, com quatro casas decimais, é $k_A = -0{,}6931$
• no caso da estirpe B, o valor da constante 5, com quatro casas decimais, é $k_B = 0{,}1155$

b_2) Durante a primeira semana, houve um momento em que o número total de indivíduos destas duas estirpes, existentes na cultura, atingiu o valor mínimo. Utilizando os valores k_A e k_B referidos na alínea anterior e recorrendo às capacidades gráficas da sua calculadora, determine o dia e a hora em que tal aconteceu (hora arredondada às unidades). Apresente, na sua resposta:
• a expressão da função que dá o número total de indivíduos destas duas estirpes, existentes na cultura, em função do tempo;
• o gráfico dessa função, para $t \in [0,7]$ no qual deve estar devidamente assinalado o ponto necessário à resolução do problema;
• a coordenada relevante desse ponto, arredondada às milésimas.

1.º teste intermédio 2008

31. Seja a um número real maior do que 1. Indique qual das expressões seguintes é igual a $\log_a 3 + 2\log_a 5$

(A) $\log_a 30$ (B) $\log_a 40$ (C) $\log_a 75$ (D) $\log_a 100$

2.º teste intermédio 2008

32. Num lago onde não havia peixes, introduziram-se, num determinado momento, alguns peixes. Admita que, t anos depois, o número de peixes existentes no lago é dado aproximadamente por $f(t) = \frac{2000}{1+ke^{-0{,}13t}}$ onde k designa um número real.

a) Determine o valor de k, supondo que foram introduzidos 100 peixes no lago.

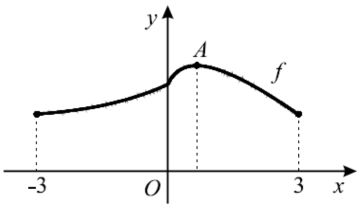
b) Admita agora que k = 24. Sem recorrer à calculadora, a não ser para efectuar cálculos numéricos, resolva o seguinte problema:
Ao fim de quantos anos o número de peixes no lago atinge o meio milhar? Apresente o resultado arredondado às unidades.
Nota: se, em cálculos intermédios, proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, três casas decimais.

2.º teste intermédio 2008

33. Seja f a função de domínio $[-3,3]$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{e^x - 1 + x}{x} & \text{se } -3 \le x < 0 \\ 2 - x + \ln(1+3x) & \text{se } 0 \le x \le 3 \end{cases}$$

Na figura está representado o gráfico da função f



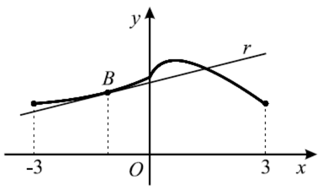
Tal como a figura sugere:
• A é o ponto do gráfico de f de ordenada máxima
• a abcissa do ponto A é positiva

a) Utilizando métodos exclusivamente analíticos, resolva as duas alíneas seguintes:

a_1) Determine a abcissa do ponto A.

a_2) Mostre que, tal como a figura sugere, f é contínua no ponto 0.

b) Na figura está novamente representado o gráfico de f, no qual se assinalou um ponto B, no segundo quadrante.



A recta r é tangente ao gráfico de f, no ponto B. Considere o seguinte problema: Determinar a abcissa do ponto B, sabendo que a recta r tem declive 0,23. Traduza este problema por meio de uma equação e, recorrendo à calculadora, resolva-a graficamente, encontrando assim um valor aproximado da abcissa do ponto *B*. Pode realizar algum trabalho analítico antes de recorrer à calculadora. Reproduza na sua folha de prova o(s) gráfico(s) obtido(s) na calculadora e apresente o valor pedido arredondado às centésimas.

2.º teste intermédio 2008

34. Seja *a* um número real maior do que 1. Qual dos seguintes valores é igual a $2\log_a(a^{1/3})$?

(A) $-\frac{2}{3}$ (B) $-\frac{1}{3}$ (C) $\frac{1}{3}$ (D) $\frac{2}{3}$

Exame Nacional 2008 (1.ª fase)

35. Considere, num referencial ortonormado *xOy*, os gráficos das funções *f* e *g* , de domínio [0,3], definidas por $f(x)=\ln(x+2)$ e $g(x)=e-e^{x-1}$ (ln designa logaritmo de base e). Determine a área de um triângulo [*OAB*], com aproximação às décimas, recorrendo às capacidades gráficas da sua calculadora. Para construir o triângulo [*OAB*], percorra os seguintes passos:

• visualize as curvas representativas dos gráficos das duas funções, no domínio indicado;

• reproduza, na sua folha de respostas, o referencial e as curvas visualizadas na calculadora;

• assinale, ainda:

– a origem *O* do referencial; – o ponto *A* de intersecção do gráfico das duas funções, indicando as suas coordenadas, com aproximação às décimas; – o ponto *B* de intersecção do gráfico da função *g* com o eixo *Ox*.

Exame Nacional 2008 (1.ª fase)

36. Seja h a função de domínio $]-1,+\infty[$, definida por $h(x)=4-x+\ln(x+1)$. Resolva, usando métodos analíticos, os dois itens seguintes.

Nota: A calculadora pode ser utilizada em eventuais cálculos intermédios; sempre que proceder a arredondamentos, use, pelo menos, duas casas decimais.

a) Estude a função *h*, quanto à monotonia, no seu domínio. Indique os intervalos de monotonia e, se existir algum extremo relativo, determine-o.

b) Justifique, aplicando o Teorema de Bolzano, que a função *h* tem, pelo menos, um zero no intervalo $]5,6[$.

Exame Nacional 2008 (1.ª fase)

37. Num determinado dia, um grupo de amigos decidiu formar uma associação desportiva. Admita que, *t* dias após a constituição da associação, o número de sócios é dado, aproximadamente, por: $N(t)=\frac{2000}{1+199e^{-0,01t}}, t\geq 0$. Resolva, usando métodos analíticos, os dois itens seguintes.

Nota: A calculadora pode ser utilizada em eventuais cálculos intermédios; sempre que proceder a arredondamentos, use aproximações às milésimas.

a) Determine $N(0)$ e $\lim\limits_{x\to+\infty} N(t)$. Interprete os valores obtidos, no contexto do problema.

b) Ao fim de quantos dias se comemorou a inscrição do sócio número 1000?

Exame Nacional 2008 (1.ª fase)

38. Seja *f* a função de domínio $[-\pi,+\infty[$, definida por:

$$f(x)=\begin{cases} e^{-4x+1} & \text{se } x\geq 0 \\ \dfrac{3\,\text{sen}(x)}{x^2} & \text{se } -\pi\leq x<0 \end{cases}$$

Estude a função *f* quanto à existência de assimptotas do seu gráfico, paralelas aos eixos coordenados, escrevendo as suas equações, caso existam.

Exame Nacional 2008 (1.ª fase)

39. Sabe-se que o ponto P(1,3) pertence ao gráfico da função $f(x)=2^{ax}-1, a\in\mathbb{R}$. Qual é o valor de *a*?

(A) 2 (B) 1 (C) 0 (D) −2

Exame Nacional 2008 (2.ª fase)

40. Considere a função *f*, de domínio $]-\frac{1}{2},+\infty[$, definida por $f(x)=\frac{\ln(2x+1)}{2x+1}$, e a função g, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $g(x)=x-2$. Indique as soluções inteiras da inequação $f(x)>g(x)$, recorrendo às capacidades gráficas da sua calculadora. Para resolver esta inequação, percorra os seguintes passos:

• visualize as curvas representativas dos gráficos das duas funções;

• reproduza, na sua folha de respostas, o referencial e as curvas visualizadas na calculadora;

• assinale, ainda, os pontos *A* e *B*, de intersecção dos gráficos das duas funções, indicando as suas coordenadas, com aproximação às décimas.

Exame Nacional 2008 (2.ª fase)

41. A massa de uma substância radioactiva diminui com a passagem do tempo. Supõe-se que, para uma amostra de uma determinada substância, a massa, em gramas, ao fim de *t* horas de observação, é dada pelo modelo matemático $M(t)=15\times e^{-0,02t}, t\geq 0$. Resolva, usando métodos analíticos, os dois itens que se seguem.

Nota: A calculadora pode ser utilizada em eventuais cálculos intermédios; sempre que proceder a arredondamentos, use três casas decimais.

a) Ao fim de quanto tempo se reduz a metade a massa inicial da amostra da substância radioactiva? Apresente o resultado em horas e minutos, estes arredondados às unidades.

b) Utilize o Teorema de Bolzano para justificar que houve, pelo menos, um instante, entre as 2 horas e 30 minutos e as 4 horas após o início da observação, em que a massa da amostra da substância radioactiva atingiu os 14 gramas.

Exame Nacional 2008 (2.ª fase)

42. Para todo o $x \in \mathbb{R}$, qual das seguintes expressões é equivalente a $x \cdot \ln(e^e)$?

(A) ex (B) e^x (C) e^{ex} (D) $x+e$

Exame Nacional 2008 (época especial)

43. Considere a função *f*, de domínio $\mathbb{R}\backslash\{0\}$, definida por $f(x) = \frac{e^x}{x}$.

a) Determine, recorrendo exclusivamente a métodos analíticos, a equação reduzida da recta tangente ao gráfico da função *f* no ponto de abcissa 2.

b) No intervalo]0, 5], a recta de equação $y = 6$ intersecta o gráfico da função *f* nos pontos A e B. Determine a distância de A a B, com aproximação às décimas, recorrendo às capacidades gráficas da sua calculadora. Apresente o gráfico, ou os gráficos, em que se baseou para dar a sua resposta, assinalando os pontos A e B e indicando as suas coordenadas com aproximação às décimas.

Exame Nacional 2008 (época especial)

44. Considere a função *f*, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $f(x) = \ln(x^2+1)$ (ln designa logaritmo de base *e*). Estude, recorrendo exclusivamente a métodos analíticos, a função *f* quanto à monotonia e à existência de extremos relativos, indicando os intervalos de monotonia e os valores dos extremos relativos, caso existam.

Exame Nacional 2008 (época especial)

45. Aqueceu-se água num recipiente, durante um determinado tempo, num local onde a temperatura ambiente é constante e igual a 25º Celsius. Interrompeu-se o processo de aquecimento, e nesse instante, a água começou a arrefecer. O arrefecimento da água segue a Lei do arrefecimento de Newton, de acordo com o modelo matemático: $T(t) = 25 + 48e^{-0{,}05t}$, em que $T(t)$ representa a temperatura da água em graus Celsius, *t* minutos após o início do arrefecimento. Resolva, recorrendo exclusivamente a métodos analíticos, os dois itens seguintes.

a) Determine $T(0)$ e $\lim_{t \to +\infty} T(t)$. Interprete os valores obtidos, no contexto do problema.

b) Determine ao fim de quanto tempo, após o início do arrefecimento, a temperatura da água atinge os 36º Celsius. Apresente o resultado em minutos e segundos, com estes arredondados às unidades.

Nota: A calculadora pode ser utilizada em eventuais cálculos numéricos; sempre que proceder a arredondamentos, use quatro casas decimais.

Exame Nacional 2008 (época especial)

46. Na figura 1 está representado o gráfico de uma função *f*, de domínio $\mathbb{R}^+$. Tal como a figura sugere, a recta de equação y=1 é assimptota do gráfico de *f*. Indique o valor de $\lim_{x \to +\infty} [\frac{\ln x}{x} - f(x)]$

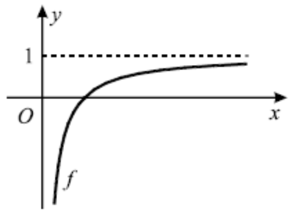


Figura 1

(A) –1 (B) 0 (C) 1 (D) +∞

2.º teste intermédio 2009

47. Determine, sem recorrer à calculadora, o conjunto dos números reais que são soluções da inequação $\log_2(x-1) + \log_2(13-x) \leq 5$. Apresente a sua resposta na forma de união de intervalos de números reais.

2.º teste intermédio 2009

48. Quando uma substância radioactiva se desintegra, a sua massa, medida em gramas, varia de acordo com uma função do tipo $m(t) = ae^{bt}, t \geq 0$, em que a variável *t* designa o tempo, medido em milénios, decorrido desde um certo instante inicial. A constante real *b*, depende da substância e a constante real *a* é a massa da substância no referido instante inicial. Resolva as alíneas seguintes sem recorrer à calculadora, a não ser para efectuar cálculos numéricos.

a) O *carbono-14* é uma substância radioactiva utilizada na datação de fósseis em que esteja presente. Relativamente a um certo fóssil, sabe-se que:

• a massa de *carbono-14* nele presente, mil anos depois de um certo instante inicial, era de 2,91 g

• a massa de *carbono-14* nele presente, dois mil anos depois do mesmo instante inicial, era de 2,58 g

Tendo em conta estes dados, determine:

• o valor da constante *b*, para o *carbono-14*;

• a massa de *carbono-14* que existia no fóssil, no referido instante inicial.

Apresente os dois valores arredondados às centésimas.
Nota: se, em cálculos intermédios, proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, três casas decimais.

b) O *rádio-226* é outra substância radioactiva. Em relação ao *rádio-226*, sabe-se que $b = -0{,}43$. Verifique que, quaisquer que sejam os valores de a e de t, $\frac{m(t+1{,}6)}{m(t)}$ é constante. Determine o valor dessa constante, arredondado às décimas, e interprete esse valor, no contexto da situação descrita.

2.º teste intermédio 2009

49. Seja f a função de domínio $\mathbb{R}$ definida por

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{3x^2-3}{x^2-2x+1} & \text{se } x<1\\ \ln(x)-e^{1-x} & \text{se } x\geq 1\end{cases}$$

a) Sem recorrer à calculadora, estude a função f quanto à existência de assimptotas do seu gráfico, paralelas aos eixos coordenados. Indique uma equação para cada assimptota encontrada.

b) Na figura 2 está representada, em referencial o.n. xOy, parte do gráfico da função f. O rectângulo $[ABCD]$ tem dois vértices no eixo Ox, estando os outros dois no gráfico de f. O ponto A tem abcissa -2.

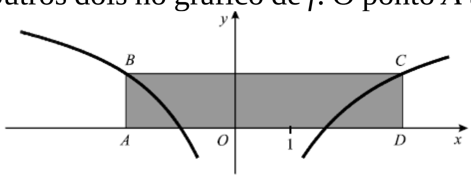


Figura 2

Determine a área do rectângulo $[ABCD]$.
Nota: Na resolução deste problema vai necessitar de determinar a abcissa do ponto C. Para tal, utilize as capacidades gráficas da sua calculadora. Reproduza na sua folha de prova a parte do gráfico de f que visualizou, bem como a recta BC. Assinale também o ponto C e apresente a sua abcissa arredondada às centésimas. Apresente a área pedida igualmente arredondada às centésimas.

2.º teste intermédio 2009

50. Sejam a, x e y três números reais tais que $\log_a x = 1+5\log_a y$. Qual das igualdades seguintes é necessariamente verdadeira?
(A) $x=ay^5$ (B) $x=5ay$ (C) $x=5y$ (D) $x=y^5$

3.º teste intermédio 2009

51. De uma função f, de domínio $\mathbb{R}$, sabe-se que a sua derivada, f', é definida por $f' = (2x+4)e^x$. Resolva os dois itens seguintes, sem recorrer à calculadora.

a) Seja A o ponto de intersecção do gráfico de f com o eixo das ordenadas. Sabe-se que a ordenada deste ponto é igual a 1. Determine a equação reduzida da recta tangente ao gráfico de f no ponto A.

b) Estude a função f quanto ao sentido das concavidades do seu gráfico e quanto à existência de pontos de inflexão.

3.º teste intermédio 2009

52. Considere a função g, de domínio $\left[-\frac{1}{2},+\infty\right[$, definida por

$$g(x)=\begin{cases}2x+\ln(1+x-x^2) & se\ \ -\frac{1}{2}\leq x<1\\ 2 & se\ \ x=1\\ \dfrac{x-1}{\sqrt{x}-1} & se\ \ x>1\end{cases}$$

a) Verifique se a função g é contínua em $x = 1$, sem recorrer à calculadora.

b) Recorrendo às capacidades gráficas da sua calculadora, determine o valor de x pertencente ao intervalo $\left[-\frac{1}{2},1\right[$ tal que $g(x)=-2+g(4)$. Indique o valor pedido arredondado às décimas e apresente o(s) gráfico(s) visualizado(s) na calculadora.

3.º teste intermédio 2009

53. Sejam a, b, c, e d as funções reais de variável real definidas por: $a(x)=3+\ln x$, $b(x)=e^x$, $c(x)=10senx$ e $d(x)=2+tgx$. Considere que o domínio de cada uma das quatro funções é o conjunto dos números reais para os quais tem significado a expressão que a define. Qual é a função cujo gráfico tem mais do que uma assimptota?
(A) A função a (B) A função b
(C) A função c (D) A função d

3.º teste intermédio 2009

54. Seja x um número real positivo. Qual das expressões seguintes é igual a $e^{4\ln x}-10^{2\log x}$?
(A) $\ln x^4-\log x^2$ (B) x^4+x^2 (C) x^4-x^2 (D) $\dfrac{\ln x^4}{\log x^2}$

Exame Nacional 2009 (1.ª fase)

55. Para um certo número real positivo k , é contínua a função f, de domínio R, definida por

$$f(x)=\begin{cases}\log_2(k+x) & \text{se } x\geq 0\\ \dfrac{sen(2x)}{x} & \text{se } x<0\end{cases}$$

Qual é o valor de k?
(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4

Exame Nacional 2009 (1.ª fase)

56. Considere a função g , de domínio $\mathbb{R}^+$, definida por $g(x)=e^{2x}+\ln x$.

a) Mostre, recorrendo a métodos exclusivamente analíticos, que a função g tem, pelo menos, um zero no intervalo]0,1 ; 0,3 [.

Nota: A calculadora pode ser utilizada em eventuais cálculos numéricos.

b) O gráfico de g contém um único ponto A com abcissa pertencente ao intervalo]0,2] e cuja ordenada é igual ao dobro da abcissa. Traduza esta situação por meio de uma equação. Resolva a equação, recorrendo às capacidades gráficas da sua calculadora. Indique as coordenadas do ponto A, com aproximação às décimas. Reproduza, na folha de respostas, o gráfico, ou os gráficos, visualizado(s) na calculadora, devidamente identificado(s), incluindo o referencial. Assinale o ponto A em que se baseou para dar a sua resposta.

Exame Nacional 2009 (1.ª fase)

57. Sejam as funções f e h, de domínios]1, +∞[e]–∞, 2[, respectivamente, definidas por f (x) = $\log_2(x-1)$ e por h(x) = $\log_2(2-x)$. Determine, recorrendo a métodos exclusivamente analíticos, o conjunto solução da condição f (x) ≥ 1 + h(x). Apresente o resultado sob a forma de intervalo real.

Exame Nacional 2009 (1.ª fase)

58. Num certo dia, o Fernando esteve doente e tomou, às 9 horas da manhã, um medicamento cuja concentração C(t) no sangue, em mg/l, t horas após o medicamento ter sido ministrado, é dada por $C(t) = 2te^{-0,3t}$ (t≥0). Resolva, recorrendo a métodos exclusivamente analíticos, os dois itens seguintes.

a) Calcule $\lim\limits_{t\to+\infty} C(t)$ e interprete esse valor no contexto da situação apresentada.

b) Determine a que horas se verificou a concentração máxima. Apresente o resultado em horas e minutos, arredondando estes às unidades.

Nota: A calculadora pode ser utilizada em eventuais cálculos numéricos; sempre que proceder a arredondamentos, use três casas decimais.

Exame Nacional 2009 (1.ª fase)

59. Seja a função f, de domínio ℝ, definida por $f(x) = e^{x+1}$. Qual dos pontos seguintes pertence ao gráfico de f ?

(A) (–1, 0) (B) (ln 2, 2e) (C) (ln 5, 6) (D) (–2, e)

Exame Nacional 2009 (2.ª fase)

60. Considere a função h, de domínio ℝ, definida por

$$h(x) = \begin{cases} \sqrt{x^2+4} - x & \text{se } x > 0 \\ 2 & \text{se } x = 0 \\ \dfrac{e^{2x}-1}{x} & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

Resolva, recorrendo a métodos exclusivamente analíticos, os dois itens seguintes.

a) Estude a continuidade de h no domínio ℝ.

b) Estude a função h quanto à existência de assimptotas do seu gráfico paralelas aos eixos coordenados e, caso existam, escreva as suas equações.

Exame Nacional 2009 (2.ª fase)

61. Numa certa zona de cultivo, foi detectada uma doença que atinge as culturas. A área afectada pela doença começou por alastrar durante algum tempo, tendo depois começado a diminuir. Admita que a área, em hectares, afectada pela doença, é dada, em função de t , por A(t) = 2 – t + 5 ln(t + 1) sendo t (0 ≤t< 16) o tempo, em semanas, decorrido após ter sido detectada essa doença. Resolva, recorrendo a métodos exclusivamente analíticos, os dois itens seguintes.

a) Quando a doença foi detectada, já uma parte da área de cultivo estava afectada. Passada uma semana, a área de cultivo afectada pela doença aumentou. De quanto foi esse aumento? Apresente o resultado em hectares, arredondado às centésimas.

b) Determine a área máxima afectada pela doença. Apresente o resultado em hectares, arredondado às centésimas.

Nota: A calculadora pode ser utilizada em eventuais cálculos numéricos; sempre que proceder a arredondamentos, use duas casas decimais.

Exame Nacional 2009 (2.ª fase)

62. Sejam a e b dois números reais superiores a 1 e tais que b = a^2 . Qual dos valores seguintes é igual a 1 + $\log_b a$?

(A) $\frac{2}{3}$ (B) $\frac{3}{4}$ (C) $\frac{4}{3}$ (D) $\frac{3}{2}$

Exame Nacional 2009 (época especial)

63. Na figura 1, está representada parte do gráfico da função f, de domínio ℝ, definida por f(x)=e^x. Considere um ponto, P, a deslocar-se sobre o semieixo positivo das abcissas. Seja A o ponto

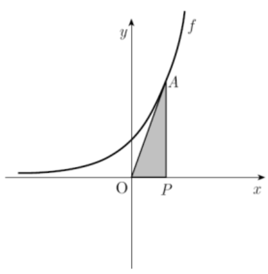


Fig. 1

pertencente ao gráfico da função que tem a mesma abcissa que o ponto P. Para cada posição do ponto P, define-se um triângulo [OAP]. Qual das expressões seguintes representa, em função de x (abcissa do ponto P), a área do triângulo [OAP]?

(A) xe^x (B) $\frac{xe^x}{2}$ (C) $\frac{x+e^x}{2}$ (D) e^x

Exame Nacional 2009 (época especial)

64. Considere a função g , de domínio $\mathbb{R}$, definida por $g(x) = \frac{e^x+3}{e^x}$. Estude, <u>recorrendo a métodos exclusivamente analíticos</u>, a função g, quanto à existência de assimptotas do seu gráfico e, caso existam, escreva as suas equações.

Exame Nacional 2009 (época especial)

65. Admita que a magnitude, M, de um sismo é dada, na escala de Richter, por $M = 0{,}67\log E - 3{,}25$ sendo E a energia, em joules, libertada por esse sismo. Resolva, <u>recorrendo exclusivamente a métodos analíticos</u>, os dois itens seguintes.
<u>Nota</u>: A calculadora pode ser utilizada em eventuais cálculos numéricos; sempre que proceder a arredondamentos, use duas casas decimais.

a) Sejam E_1 e E_2 as energias libertadas por dois sismos de magnitudes M_1 e M_2 , respectivamente. Determine $\frac{E_1}{E_2}$, com aproximação às unidades, sabendo que $M_1 - M_2 = 1$. Interprete o valor obtido no contexto da situação apresentada.

b) O sismo que ocorreu nos Açores, no dia 1 de Abril de 2009, teve magnitude 4,7, na escala de Richter. Qual foi a energia libertada nesse sismo? Escreva o resultado em notação científica, isto é, na forma $a \times 10^b$, sendo b um número inteiro, e *a* um número entre 1 e 10. Apresente o valor de *a* arredondado às unidades.

Exame Nacional 2009 (época especial)

66. Seja a função *f*, de domínio $[0,\pi[$, definida por $f(x) = e^x \cdot \cos x$.

a) Estude, <u>recorrendo exclusivamente a métodos analíticos</u>, a função *f*, quanto à monotonia e quanto à existência de extremos relativos, indicando os intervalos de monotonia e, caso existam, os extremos relativos.

b) Determine, recorrendo às capacidades gráficas da sua calculadora, um valor, aproximado às décimas, da área do trapézio [OABC], em que:
• O é a origem do referencial;
• A é o ponto de intersecção do gráfico da função *f* com o eixo O*y*;
• B é o ponto do gráfico de *f*, tal que a recta AB é paralela ao eixo O*x*;
• C é o ponto de intersecção do gráfico da função *f* com o eixo O*x*.

Reproduza, na folha de respostas, o gráfico visualizado na calculadora, incluindo o referencial. Desenhe o trapézio [OABC] , assinalando os pontos que representam os seus vértices.
<u>Nota</u>: Nas coordenadas dos vértices em que é necessário fazer arredondamentos, utilize duas casas decimais.

Exame Nacional 2009 (época especial)

67. Qual é o valor de $\log_5\left(\frac{5^{1000}}{25}\right)$?

(A) 40 (B) 500 (C) 975 (D) 998

1.º teste intermédio 2010

68. Seja *g* a função, de domínio $[0,+\infty[$, definida por

$$g(x) = \begin{cases} 3^x - \sqrt{x} & se \quad 0 \le x < 2 \\ x - 5 + \log_2(x-1) & se \quad x \ge 2 \end{cases}$$

Em qual dos intervalos seguintes o Teorema de Bolzano permite garantir a existência de pelo menos um zero da função *g*?

(A)]0,1[(B)]1,3[(C)]3,5[(D)]5,9[

1.º teste intermédio 2010

69. Na figura 1, está representada parte do gráfico de uma função *f*, de domínio $\mathbb{R}^+$. Tal como a figura sugere, a recta de equação *y* = 1 é assimptota do gráfico de *f*. Indique o valor de $\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{\ln(x)}{x} - f(x)\right]$

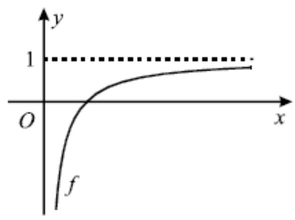


Figura 1

(A) –1 (B) 0 (C) 1 (D) +∞

1.º teste intermédio 2010

70. Seja *f* a função, de domínio $\mathbb{R}^+$, definida por

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x-2}{x-\sqrt{2x}} & se \quad 0 < x < 2 \\ x e^{-x} + x + 1 & se \quad x \ge 2 \end{cases}$$

Resolva, <u>usando exclusivamente métodos analíticos</u>, os itens a) e b)

a) Averigúe se a função *f* é contínua em *x* = 2

b) O gráfico da função *f* tem uma assimptota oblíqua. Determine a equação reduzida dessa assimptota.

c) Seja g a função, de domínio $\mathbb{R}^+$, definida por $g(x) = 3 + \ln(x)$. A equação $f(x) = g(x)$ tem exactamente duas soluções. Determine essas soluções, utilizando as capacidades gráficas da sua calculadora. Apresente as soluções arredondadas às centésimas. Apresente os gráficos que obteve na calculadora e assinale os pontos relevantes.

1.º teste intermédio 2010

71. Numa certa região, uma doença está a afectar gravemente os coelhos que lá vivem. Em consequência dessa doença, o número de coelhos existentes nessa região está a diminuir. Admita que o número, em milhares, de coelhos que existem nessa região, *t* semanas após a doença ter sido detectada, é dado aproximadamente por $f(t) = \frac{k}{3-2e^{-0,13t}}$. ($k$ designa um número real positivo). Resolva, usando exclusivamente métodos analíticos, os dois itens seguintes.

Nota: a calculadora pode ser utilizada em cálculos numéricos; sempre que, em cálculos intermédios, proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, quatro casas decimais.

a) Suponha que $k = 10$. Ao fim de quantos dias, após a doença ter sido detectada, é que o número de coelhos existentes na referida região é igual a 9000?

b) Admita agora que o valor de k é desconhecido. Sabe-se que, durante a primeira semana após a detecção da doença, morreram dois mil coelhos e não nasceu nenhum. Determine o valor de k, arredondado às décimas.

1.º teste intermédio 2010

72. Seja a um número real diferente de zero. Qual é o valor de $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^{ax}-1}{ax^2+a^2x}$?

(A) $\frac{1}{a}$ (B) $\frac{1}{2a}$ (C) 0 (D) $+\infty$

2.º teste intermédio 2010

73. Considere a função *f*, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $f(x) = 3 + 4x^2e^{-x}$. Resolva os itens seguintes, usando exclusivamente métodos analíticos.

a) Mostre que o gráfico da função *f* tem uma única assimptota e escreva uma equação dessa assimptota.

b) Mostre que a função *f* tem um único mínimo relativo e determine-o.

c) Seja g a função, de domínio $\mathbb{R}\setminus\{0\}$, definida por $g(x) = x + \ln[f(x) - 3]$. Determine os zeros da função g

2.º teste intermédio 2010

74. Na Figura 1, está representada, num referencial o.n. xOy, parte do gráfico de uma função afim *f*, de domínio $\mathbb{R}$. Seja *h* a função definida por $h(x) = f(x) + e^x$. Em qual das opções seguintes pode estar representada parte do gráfico da função h'', segunda derivada de *h* ?

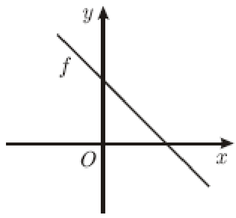
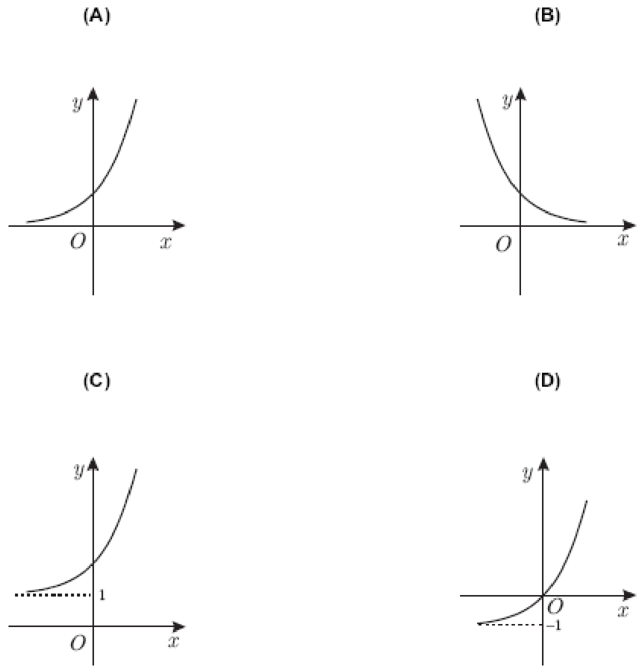


Figura 1



Exame Nacional 2010 (1.ª fase)

75. Seja g a função, de domínio $]-2,+\infty[$, definida por $g(x) = \ln(x+2)$. Considere, num referencial o.n. xOy, um triângulo [OAB] tal que:

- O é a origem do referencial;
- A é um ponto de ordenada 5;
- B é o ponto de intersecção do gráfico da função g com o eixo das abcissas.

Qual é a área do triângulo [OAB]?

(A) $\frac{5}{2}$ (B) $\frac{1}{2}$ (C) $\frac{5\ln 2}{2}$ (D) $\frac{\ln 2}{2}$

Exame Nacional 2010 (1.ª fase)

76. Na Internet, no dia 14 de Outubro de 2009, pelas 14 horas, colocaram-se à venda todos os bilhetes de um espectáculo. O último bilhete foi vendido cinco horas após o início da venda. Admita que, t horas após o início da venda, o número de bilhetes vendidos, em centenas, é dado, aproximadamente, por $N(t) = 8\log_4(3t+1)^3 - 8\log_4(3t+1), t \in [0,5]$

Resolva os dois itens seguintes, recorrendo a métodos exclusivamente analíticos.

a) Mostre que $N(t) = 16\log_4(3t+1)$, para qualquer $t \in [0,5]$

b) Determine quanto tempo foi necessário para vender 2400 bilhetes. Apresente o resultado em horas e minutos. Se utilizar a calculadora em eventuais cálculos numéricos, sempre que proceder a arredondamentos, use três casas decimais, apresentando os minutos arredondados às unidades.

Exame Nacional 2010 (1.ª fase)

77. Considere uma função *f*, de domínio]0, 3[, cuja derivada *f* ′, de domínio]0, 3[, é definida por $f'(x) = e^x - \frac{1}{x}$. Estude a função *f* quanto à monotonia e quanto à existência de extremos relativos, recorrendo às capacidades gráficas da sua calculadora. Na sua resposta, deve:

• reproduzir o gráfico da função, ou os gráficos das funções, que tiver necessidade de visualizar na calculadora, devidamente identificado(s), incluindo o referencial;

• indicar os intervalos de monotonia da função *f*;

• assinalar e indicar as coordenadas dos pontos relevantes, com arredondamento às centésimas.

Exame Nacional 2010 (1.ª fase)

78. Considere a função *f*, de domínio]–∞,2π], definida por

$$f(x) = \begin{cases} ax + b + e^x & \text{se } x \leq 0 \\ \dfrac{x - \operatorname{sen}(2x)}{x} & \text{se } 0 < x \leq 2\pi \end{cases} \qquad \text{com } a, b \in \mathbb{R}$$

Resolva os dois itens seguintes, recorrendo a métodos exclusivamente analíticos.

a) Prove que a recta de equação $y = ax + b$, com $a \neq 0$, é uma assimptota oblíqua do gráfico de *f*

b) Determine o valor de *b*, de modo que *f* seja contínua em x = 0

Exame Nacional 2010 (1.ª fase)

79. Considere a função *g*, de domínio ℝ, definida por

$$g(x) = \begin{cases} e^x & \text{se } x \leq 0 \\ \ln x & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

Considere a sucessão de termo geral $u_n = \frac{1}{n}$

Qual é o valor de $\lim\limits_{n\to+\infty} g(u_n)$?

(A) +∞ (B) 1 (C) 0 (D) –∞

Exame Nacional 2010 (2.ª fase)

80. Considere a função *f*, de domínio]0, +∞[, definida por

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^x - 3x}{x} & \text{se } 0 < x \leq 2 \\ \dfrac{1}{5}x - \ln x & \text{se } x > 2 \end{cases}$$

Resolva os itens a) e b), recorrendo a métodos exclusivamente analíticos.

a) Estude a função *f* quanto à existência de assimptotas oblíquas.

b) Mostre que a função *f* tem um extremo relativo no intervalo]2, +∞[

c) Determine a área do triângulo [ABC], recorrendo às capacidades gráficas da sua calculadora.

Sabe-se que:

• A, B e C são pontos do gráfico da função *f*

• A e B são os pontos cujas abcissas são as soluções, no intervalo]0, 2], da equação *f*(*x*) = *f*(15)

• C é o ponto cuja ordenada é o mínimo da função *f*, no intervalo]0, 2] , e cuja abcissa pertence ao intervalo]0, 2]

Na sua resposta, deve:

• reproduzir o gráfico da função, ou os gráficos das funções, que tiver necessidade de visualizar na calculadora, devidamente identificado(s), incluindo o referencial;

• indicar as coordenadas dos pontos A, B e C, com arredondamento às centésimas;

• apresentar o resultado pedido, com arredondamento às décimas.

Exame Nacional 2010 (2.ª fase)

81. Considere a função *f*, de domínio ℝ, definida por $f(x) = -x + e^{2x^3-1}$. Resolva os dois itens seguintes, recorrendo a métodos exclusivamente analíticos.

a) Mostre que *f*(*x*) = 1,5 tem, pelo menos, uma solução em]–2,–1[. Se utilizar a calculadora em eventuais cálculos numéricos, sempre que proceder a arredondamentos, use três casas decimais.

b) Determine a equação reduzida da recta tangente ao gráfico de *f* no ponto de abcissa *x* = 0

Exame Nacional 2010 (2.ª fase)

82. Considere a função *f*, de domínio $\mathbb{R}^-$, definida por $f(x) = \ln(-3x)$. Qual é a solução da equação *f* (*x*) = 2 ?

(A) $\frac{1}{2}e^3$ (B) $-\frac{1}{2}e^3$ (C) $-\frac{1}{3}e^2$ (D) $\frac{1}{3}e^2$

Exame Nacional 2010 (época especial)

83. Considere a função h, de domínio $\mathbb{R}^+$, e a recta de equação $y = -4$, assimptota do gráfico de h. Qual é o valor de $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln\left(\frac{1}{2x}\right)}{h(x)}$?

(A) $-\infty$ (B) $+\infty$ (C) -4 (D) 0

Exame Nacional 2010 (época especial)

84. Considere a função h, de domínio $\mathbb{R}$, definida por

$$h(x) = \begin{cases} \dfrac{e^{2x} - e^{x}}{x} & \text{se } x > 0 \\ \ln(x^2 + 1) & \text{se } x \leq 0 \end{cases}$$

Resolva os dois itens seguintes, recorrendo a métodos exclusivamente analíticos.

a) Estude a continuidade da função h em $x = 0$

b) Resolva, no intervalo $]-\infty,0]$, a inequação $h(x)>h(-4)$

Exame Nacional 2010 (época especial)

85. Considere a função f, de domínio $]0,\pi[$, definida por $f(x) = \ln x \times \cos x$. Sabe-se que:

• O é a origem do referencial;

• A é o ponto de intersecção do gráfico da função f com o eixo Ox, que se situa mais próximo da origem O;

• B é o ponto de intersecção do gráfico da função f com a recta bissectriz dos quadrantes pares.

Determine a área do triângulo [OAB], recorrendo às capacidades gráficas da sua calculadora. Na sua resposta, deve:

• reproduzir o gráfico da função, ou os gráficos das funções, que tiver necessidade de visualizar na calculadora, devidamente identificado(s), incluindo o referencial;

• indicar as coordenadas dos pontos A e B, arredondando às milésimas as coordenadas do ponto B ;

• desenhar o triângulo [OAB], assinalando os pontos que representam os seus vértices;

• apresentar o resultado pedido, com arredondamento às centésimas.

Exame Nacional 2010 (época especial)

86. Na Figura 1, está parte da representação gráfica da função f , de domínio $\mathbb{R}^+$, definida por $f(x) = \log_9(x)$. P é o ponto do gráfico de f que tem ordenada $\frac{1}{2}$. Qual é a abcissa do ponto P ?

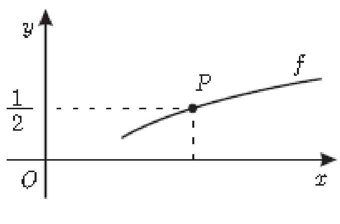


Figura 1

(A) $\frac{3}{2}$ (B) 2 (C) 3 (D) $\frac{9}{2}$

1.º teste intermédio 2011

87. Determine, sem recorrer à calculadora, o conjunto dos números reais que são soluções da inequação $\log_3(7x+6) \geq 2 + \log_3(x)$. Apresente a sua resposta usando a notação de intervalos de números reais.

1.º teste intermédio 2011

88. Na década de sessenta do século passado, uma doença infecciosa atacou a população de algumas regiões do planeta. Admita que, ao longo dessa década, e em qualquer uma das regiões afectadas, o número, em milhares, de pessoas que estavam infectadas com a doença, t anos após o início de 1960, é dado, aproximadamente, por $I(t) = \dfrac{3e^{kt}}{1+pe^{kt}}$ em que k e p são parâmetros reais. Resolva os dois itens seguintes sem recorrer à calculadora, a não ser para efectuar cálculos numéricos.

a) Admita que, para uma certa região, $k = \frac{1}{2}$ e $p =$

1. Determine o ano em que o número de pessoas que estavam infectadas, nessa região, atingiu 2500.

Nota – Sempre que, nos cálculos intermédios, proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, três casas decimais.

b) Numa outra região, constatou-se que havia um milhar de pessoas que estavam infectadas no início de 1961. Qual é, para este caso, a relação entre k e p? Apresente a sua resposta na forma $k = -\ln(A + Bp)$, em que A e B são números reais.

1.º teste intermédio 2011

89. Seja f a função, de domínio $\mathbb{R}^+$, definida por

$$f(x) = \begin{cases} 2 + \dfrac{\operatorname{sen}(x-1)}{e\,x - e} & \text{se } 0 < x < 1 \\ x\,e^{-x} + 2x & \text{se } x \geq 1 \end{cases}$$

Resolva os três itens seguintes sem recorrer à calculadora.

a) Averigúe se a função f é contínua em $x = 1$

b) O gráfico da função f tem uma assimptota oblíqua. Determine a equação reduzida dessa assimptota.

c) Resolva, no intervalo $[1,+\infty[$, a equação $\dfrac{f(x)}{x} = e^x - \dfrac{2}{3}$

2.º teste intermédio 2011

90. Seja *f* a função, de domínio]0,3[, definida por $f(x) = x\ln x + sen(2x)$. O ponto A pertence ao gráfico da função *f*. Sabe-se que a recta tangente ao gráfico da função *f* no ponto A tem declive 3. Determine a abcissa do ponto A. Na resolução deste item deve:
• traduzir o problema por uma equação;
• resolver graficamente essa equação, recorrendo à calculadora;
• indicar o valor pedido arredondado às centésimas.
Deve reproduzir e identificar o gráfico, ou os gráficos, que tiver necessidade de visualizar na calculadora, incluindo o referencial, e deve assinalar, no(s) gráfico(s), o(s) ponto(s) relevante(s).

2.º teste intermédio 2011

91. Seja f uma função de domínio [0,+∞[, definida por

$$f(x) = \begin{cases} 2^x - 9 & \text{se } 0 \le x < 5 \\ \dfrac{1-e^x}{x} & \text{se } x \ge 5 \end{cases}$$

Em qual dos intervalos seguintes o teorema de Bolzano permite garantir a existência de, pelo menos, um zero da função f ?
(A)]0, 1[(B)]1, 4[(C)]4, 6[(D)]6, 7[

Exame Nacional 2011 (1.ª fase)

92. Num museu, a temperatura ambiente em graus centígrados, *t* horas após as zero horas do dia 1 de Abril de 2010, é dada, aproximadamente, por $T(t) = 15 + 0{,}1t^2e^{-0{,}15t}$ com $t \in [0,20]$. Determine o instante em que a temperatura atingiu o valor máximo recorrendo a métodos exclusivamente analíticos. Apresente o resultado em horas e minutos, apresentando os minutos arredondados às unidades. Se utilizar a calculadora em eventuais cálculos numéricos, sempre que proceder a arredondamentos, use três casas decimais.

Exame Nacional 2011 (1.ª fase)

93. Considere a função f , de domínio ℝ, definida por

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{3}{x-1} & \text{se } x < 1 \\ \dfrac{2+\ln x}{x} & \text{se } x \ge 1 \end{cases}$$

a) O gráfico de f admite uma assimptota horizontal. Seja P o ponto de intersecção dessa assimptota com a recta tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa *e*. Determine as coordenadas do ponto P recorrendo a métodos exclusivamente analíticos.

b) Existem dois pontos no gráfico de f cujas ordenadas são o cubo das abcissas. Determine as coordenadas desses pontos recorrendo à calculadora gráfica. Na sua resposta, deve:
• equacionar o problema;
• reproduzir o gráfico da função ou os gráficos das funções que tiver necessidade de visualizar na calculadora, devidamente identificado(s), incluindo o referencial;
• assinalar esses pontos;
• indicar as coordenadas desses pontos com arredondamento às centésimas.

Exame Nacional 2011 (1.ª fase)

94. Para um certo número real positivo, k, a função g definida em ℝ por

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen} x}{3x} & \text{se } x > 0 \\ \ln(k-x) & \text{se } x \le 0 \end{cases}$$ é contínua.

Qual é o valor de k ?
(A) $\sqrt[3]{e}$ (B) e^3 (C) $\frac{e}{3}$ (D) $3e$

Exame Nacional 2011 (2.ª fase)

95. Na estufa de um certo jardim botânico, existem dois lagos aquecidos, o lago A e o lago B. Às zero horas do dia 1 de Março de 2010, cada lago recebeu uma espécie diferente de nenúfares, a saber, *Victoria amazonica* e *Victoria cruziana*. $N_A(t)$ é o número aproximado de nenúfares existentes no lago A, *t* dias após as zero horas do dia 1 de Março de 2010. Esses nenúfares são da espécie *Victoria amazonica* e desenvolvem-se segundo o modelo $N_A(t) = \dfrac{120}{1+7\times e^{0{,}2t}}$ com $t \ge 0$. $N_B(t)$ é o número aproximado de nenúfares existentes no lago B, *t* dias após as zero horas do dia 1 de Março de 2010. Esses nenúfares são da espécie *Victoria cruziana* e desenvolvem-se segundo o modelo $N_B(t) = \dfrac{150}{1+50\times e^{0{,}4t}}$ com $t \ge 0$. Resolva os dois itens seguintes recorrendo a métodos exclusivamente analíticos.

a) Como foi referido, às zero horas do dia 1 de Março de 2010, o lago A recebeu um certo número de nenúfares da espécie *Victoria amazonica*. Decorridos 7 dias, esse número aumentou. Determine de quanto foi esse aumento. Apresente o resultado com arredondamento às unidades.

b) Determine quantos dias foram necessários, após as zero horas do dia 1 de Março de 2010, para que o número de nenúfares existentes no lago A fosse igual ao número de nenúfares existentes no lago B. Apresente o resultado com arredondamento às unidades.

Exame Nacional 2011 (2.ª fase)

96. Considere a função f , de domínio [0, +∞[, definida por

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{e^{2x}-1}{x-2} & \text{se } 0\leq x<2\\[2ex] \dfrac{x+1}{\ln(x+1)} & \text{se } x\geq 2\end{cases}$$

Resolva os três itens seguintes recorrendo a métodos exclusivamente analíticos.

a) Estude f quanto à existência de assimptotas verticais do seu gráfico.

b) Mostre, sem resolver a equação, que f (x) = -3 tem, pelo menos, uma solução em $]0,\frac{1}{2}[$

c) Estude f quanto à monotonia em]2, +∞[

Exame Nacional 2011 (2.ª fase)

97. Considere a função *f*, de domínio $]0,\frac{\pi}{2}[$, definida por *f* (x) = $e^{2x}+\cos x-2x^2$. Sabe-se que:

• B é um ponto do gráfico de *f*

• a recta de equação *y* = 8*x* é paralela à recta tangente ao gráfico de *f* no ponto B

Determine, recorrendo à calculadora gráfica, a abcissa do ponto B

Na sua resposta, deve:

• equacionar o problema;

• reproduzir o gráfico da função ou os gráficos das funções que tiver necessidade de visualizar na calculadora, devidamente identificado(s), incluindo o referencial;

• indicar a abcissa do ponto B com arredondamento às centésimas.

Exame Nacional 2011 (2.ª fase)

98. Considere a função f , de domínio]0, +∞[, definida por

$$f(x)=\begin{cases}e^{x}-1 & \text{se } 0<x\leq 2\\[1ex] \dfrac{4}{x}+1 & \text{se } x>2\end{cases}$$

Seja (u_n) uma sucessão de números reais, de termos positivos, tal que limf(u_n) = 3. Qual das expressões seguintes pode definir o termo geral da sucessão (u_n)?

(A) $2-\frac{1}{n}$ (B) $2+\frac{1}{n}$ (C) $3-\frac{1}{n}$ (D) $3+\frac{1}{n}$

Exame Nacional 2011 (época especial-1.ª fase)

99. O momento sísmico, M_0, é uma medida da quantidade total de energia que se transforma durante um sismo. Só uma pequena fracção do momento sísmico é convertida em energia sísmica irradiada, *E*, que é a que os sismógrafos registam. A energia sísmica irradiada é estimada, em Joules, por $E=M_0\times 1,6\times 10^{-5}$. A magnitude, *M*, de um sismo é estimada por $M=\frac{2}{3}\log_{10}(E)-2,9$. Resolva os dois itens seguintes recorrendo a métodos exclusivamente analíticos.

a) Admita que um sismo que ocorreu no Haiti, em 2010, teve magnitude 7,1. Determine o momento sísmico, M_0 , para esse sismo. Escreva o resultado na forma $a\times 10^n$, com *n* inteiro relativo e com *a* entre 1 e 10

b) Sejam M_1 e M_2 as magnitudes de dois sismos. Mostre que, se a diferença entre a magnitude M_1 e a magnitude M_2 é igual a $\frac{2}{3}$, então a energia sísmica irradiada por um dos sismos é dez vezes superior à energia sísmica irradiada pelo outro sismo.

Exame Nacional 2011 (época especial-1.ª fase)

100. Considere a função f, de domínio ℝ, definida por

$$f(x)=\begin{cases}k+\dfrac{1-e^{x-1}}{x-1} & \text{se } x<1\\[2ex] -x+\ln x & \text{se } x\geq 1\end{cases}$$

(*k* designa um número real)

Resolva os dois itens seguintes recorrendo a métodos exclusivamente analíticos.

a) Determine k , sabendo que f é contínua em x = 1

b) Considere, agora, *k* = 3. Estude a função f quanto à existência de assimptotas horizontais do gráfico de f

Exame Nacional 2011 (época especial-1.ª fase)

101. Na Figura 5, está representada, num referencial o. n. xOy, parte do gráfico da função f , de domínio]–∞, 6[, definida por $f(x)=2+15\ln(3-\frac{1}{2}x)$.

Considere que um ponto C se desloca ao longo do gráfico de f , e que C tem coordenadas positivas. Para cada posição do ponto C, considere o rectângulo [OACB], em que o ponto A pertence ao eixo das abcissas e o ponto B pertence ao eixo das ordenadas.

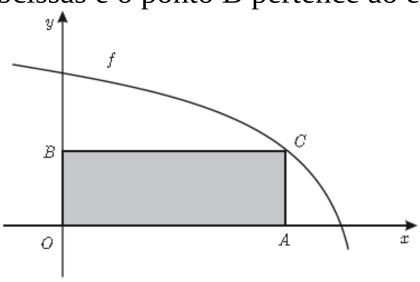


Figura 5

Determine, recorrendo à calculadora gráfica, a abcissa do ponto A para a qual a área do rectângulo [OACB] é máxima.

Na sua resposta, deve:
• escrever a expressão que dá a área do rectângulo [OACB] em função da abcissa do ponto A;
• reproduzir o gráfico da função ou os gráficos das funções que tiver necessidade de visualizar na calculadora, devidamente identificado(s), incluindo o referencial;
• indicar a abcissa do ponto A com arredondamento às centésimas.

Exame Nacional 2011 (época especial-1.ª fase)

102. Para um certo valor real de *k*, admita que a quantidade de combustível, em litros, existente no depósito de uma certa máquina agrícola, *t* minutos após ter começado a funcionar, é dada aproximadamente por $Q(t) = 12 + \log_3(81 - kt^2)$ com $t \in [0,20]$. Considere que essa máquina agrícola funcionou durante 20 minutos e que, nesse período de tempo, consumiu 2 litros de combustível. Determine o valor de *k* recorrendo a métodos exclusivamente analíticos.

Exame Nacional 2011 (época especial)

103. Considere a função f , de domínio $\mathbb{R}$, definida por

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x+1}{1-e^{x+1}} + 1 & \text{se } x \neq -1 \\ a+2 & \text{se } x = -1 \end{cases}$$

(*a* é um número real.)
Resolva os dois itens seguintes recorrendo a métodos exclusivamente analíticos.

a) Determine *a* sabendo que f é contínua em x = –1

b) Seja f ´ a primeira derivada de f. Mostre, sem resolver a equação, que $f'(x) = \frac{1}{4}$ tem, pelo menos, uma solução em]0, 1[. Se utilizar a calculadora em eventuais cálculos numéricos, sempre que proceder a arredondamentos, use duas casas decimais.

Exame Nacional 2011 (época especial)

104. Considere a sucessão (u_n), definida por $u_n = (1 + \frac{1}{n})^n$. Seja *f* uma função contínua, de domínio $\mathbb{R}^+$. Sabe-se que lim *f* (u_n) =0. Qual das seguintes expressões pode definir a função *f* ?

(A) 1 − ln x (B) 1 + ln x

(C) x − ln x (D) x + ln x

1.º teste intermédio 2012

105. Para um certo valor de α e para um certo valor de β, é <u>contínua</u> no ponto 0 a função *g*, definida por

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{e^{2x}-1}{x} & \text{se } x < 0 \\ \alpha & \text{se } x = 0 \\ \beta - \dfrac{\ln(1+x)}{x} & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

Qual é esse valor de α e qual é esse valor de β ?

(A) α = 1 e β = 2 (B) α = 2 e β = 3

(C) α = 1 e β = 3 (D) α = 2 e β = 1

1.º teste intermédio 2012

106. Seja f a função, de domínio $\mathbb{R}^+$, definida por $f(x)=2 + \log_3 x$. Resolva os três itens seguintes sem recorrer à calculadora.

a) Determine o conjunto dos números reais para os quais se tem $f(x) \geq 4 + \log_3 (x-8)$. Apresente a sua resposta na forma de intervalo de números reais.

b) Determine o valor de $f(36^{1000}) - f(4^{1000})$

c) Seja *g* a função, de domínio $\mathbb{R}^+$, definida por $g(x) = x+f(x)$. Mostre que $\exists c \in]1,3[: g(c) = 5$

1.º teste intermédio 2012

107. Um vírus atacou os frangos de um aviário. Admita que *x* dias após o instante em que o vírus foi detetado, o número de frangos infetados é dado aproximadamente por $f(x) = \dfrac{200}{1+3\times 2^{3-0,1x}}$ (considere que *x* = 0 corresponde ao instante em que o vírus foi detetado). Resolva os dois itens seguintes <u>sem recorrer à calculadora</u>, a não ser para efetuar cálculos numéricos.

a) No instante em que o vírus foi detetado, já existiam frangos infetados. Passados alguns dias, o número de frangos infetados era dez vezes maior. Quantos dias tinham passado?

b) Para tentar verificar se um frango está infetado, o veterinário aplica um teste que ou dá positivo ou dá negativo. Sabe-se que:
• quando o frango está infetado, a probabilidade de o teste dar positivo é 96%
• quando o frango não está infetado, a probabilidade de o teste dar negativo é 90%

Trinta dias após o instante em que o vírus foi detetado, existiam no aviário 450 frangos não infetados. Nesse dia, de entre todos os frangos do aviário (infetados e não infetados), o veterinário escolheu, ao acaso, um frango e aplicou-lhe o teste. O teste deu negativo. Qual é a probabilidade de o frango escolhido não estar infetado? Apresente o resultado na forma de dízima, arredondado às milésimas.

1.º teste intermédio 2012

108. Para cada valor de k, a expressão

$$f(x)=\begin{cases} k+xe^x & \text{se } x\le 0 \\ \dfrac{2x+\ln x}{x} & \text{se } x>0 \end{cases}$$

define uma função, de domínio $\mathbb{R}$, cujo gráfico tem:

• uma assíntota horizontal, quando $x \to +\infty$
• uma assíntota horizontal, quando $x \to -\infty$
Existe um valor de k para o qual as duas assíntotas são coincidentes, ficando assim o gráfico de *f* com uma única assíntota horizontal. Determine esse valor de k , sem recorrer à calculadora.

1.º teste intermédio 2012

109. Seja *a* um número real maior do que 1 e seja $b = a^{\pi}$. Qual é o valor, arredondado às unidades, de $\log_a (a^{12} \times b^{100})$?
(A) 138 (B) 326 (C) 1238 (D) 3770

2.º teste intermédio 2012

110. De uma certa função *f* sabe-se que:
• o seu domínio é $]1, +\infty[$
• a sua derivada é dada por $f'(x) = x^2 - 4x + \frac{9}{2} - 4\ln(x-1)$

a) Na Figura 3, estão representadas:
• parte do gráfico da função *f*
• a reta *r* que é tangente ao gráfico da função *f* no ponto A, de abcissa 2
• a reta *s* que é tangente ao gráfico da função f no ponto B

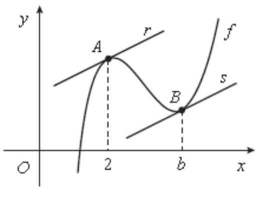


Figura 3

As retas *r* e *s* são paralelas. Seja b a abcissa do ponto B.
Determine, recorrendo à calculadora gráfica, o valor de b. Na sua resposta, deve:
• equacionar o problema;
• reproduzir e identificar o(s) gráfico(s) que tiver necessidade de visualizar na calculadora para resolver graficamente a equação;
• assinalar o ponto relevante para a resolução do problema;
• apresentar o valor de b arredondado às centésimas.

b) Tal como a figura sugere, o gráfico da função *f* tem um ponto de inflexão. Determine a abcissa desse ponto, recorrendo a métodos exclusivamente analíticos.

2.º teste intermédio 2012

111. Seja *f* a função de domínio $\mathbb{R}$ definida por

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{xe^x-2e^2}{x-2} & \text{se } x<2 \\ 3e^x+\ln(x-1) & \text{se } x\ge 2 \end{cases}$$

Averigue se a função *f* é contínua em *x* = 2

2.º teste intermédio 2012

112. Seja *f* uma função de domínio $\mathbb{R}$, definida por $f(x) = e^x - 3$. Em qual dos intervalos seguintes o teorema de Bolzano permite afirmar que a equação $f(x) = -x - \frac{3}{2}$ tem, pelo menos, uma solução?

(A) $]0, \frac{1}{5}[$ (B) $]\frac{1}{5}, \frac{1}{4}[$ (C) $]\frac{1}{4}, \frac{1}{3}[$ (D) $]\frac{1}{3}, 1[$

Exame Nacional 2012 (1.ª fase)

113. Na Figura 1, está representada, num referencial o.n. xOy, parte do gráfico de uma função *g*, de domínio $[a, +\infty[$, com $a < -\frac{1}{3}$. Para esse valor de *a*, a função *f* , contínua em $\mathbb{R}$, é definida por

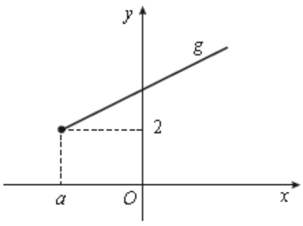


Figura 1

$$f(x)=\begin{cases} \log_3\left(-x-\dfrac{1}{3}\right) & \text{se } x<a \\ g(x) & \text{se } x\ge a \end{cases}$$

Qual é o valor de *a* ?

(A) $-\frac{28}{3}$ (B) $-\frac{25}{3}$ (C) $-\frac{19}{3}$ (D) $-\frac{8}{3}$

Exame Nacional 2012 (1.ª fase)

114. Considere a função *f* , de domínio $\mathbb{R}$, e a função *g*, de domínio $]0,+\infty[$, definidas por $f(x) = e^{x-2} - \frac{4e^{-x}+4}{e^2}$ e $g(x) = -\ln x + 4$

a) Mostre que $\ln(2+2\sqrt{2})$ é o único zero da função *f* , recorrendo a métodos exclusivamente analíticos.

b) Considere, num referencial o. n. xOy , os gráficos das funções *f* e *g* e o triângulo [OAB]. Sabe-se que:
• O é a origem do referencial;
• A e B são pontos do gráfico de *f*
• a abcissa do ponto A é o zero da função *f*
• o ponto B é o ponto de intersecção do gráfico da função *f* com o gráfico da função *g*
Determine a área do triângulo [OAB], recorrendo à calculadora gráfica. Na sua resposta, deve:
• reproduzir os gráficos das funções *f* e *g* , devidamente identificados, incluindo o referencial;

• assinalar os pontos A e B
• indicar a abcissa do ponto A e as coordenadas do ponto B com arredondamento às centésimas;
• apresentar o valor da área pedida com arredondamento às décimas.

Exame Nacional 2012 (1.ª fase)

115. Considere a função f , de domínio $\mathbb{R}$, definida por

$$f(x)=\begin{cases} x\ln(x+1)-x\ln(x)+3x & \text{se } x>0 \\ x\,e^{1-x} & \text{se } x\leq 0 \end{cases}$$

Resolva os itens seguintes, recorrendo a métodos exclusivamente analíticos.

a) Estude a função f quanto à existência de assíntotas não verticais do seu gráfico.

b) Determine a equação reduzida da reta tangente ao gráfico da função f no ponto de abcissa $x = -1$

Exame Nacional 2012 (1.ª fase)

116. Na Figura 2, está representada, num referencial o.n. xOy , parte do gráfico da função f , de domínio $]-6, +\infty[$, definida por $f(x) = \ln(\frac{x}{3}+2)$. Sabe-se que:

• a reta r é tangente ao gráfico da função f no ponto de abcissa a

• a inclinação da reta r é, em radianos, $\frac{\pi}{4}$

Qual é o valor de a ?

(A) -4 (B) $-\frac{9}{2}$ (C) $-\frac{11}{2}$ (D) -5

Exame Nacional 2012 (2.ª fase)

117. Considere a função f , de domínio $[-7, 0[$, definida por $f(x) = e^x + \ln(x^2) + 3$. Sejam A e B os pontos de intersecção do gráfico de f com a bissetriz dos quadrantes pares, e seja d a distância entre os pontos A e B. Determine d, recorrendo à calculadora gráfica. Na sua resposta, deve:
• reproduzir o gráfico da função ou os gráficos das funções que tiver necessidade de visualizar na calculadora, devidamente identificado(s), incluindo o referencial;
• assinalar os pontos A e B
• indicar as coordenadas dos pontos A e B com arredondamento às centésimas;
• apresentar o valor de d com arredondamento às centésimas.

Exame Nacional 2012 (2.ª fase)

118. Considere a função f , de domínio R, definida por

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen} x}{1-\sqrt{1-x^3}} & \text{se } x<0 \\ 1-e^{k+1} & \text{se } x=0 \\ \dfrac{1-e^{4x}}{x} & \text{se } x>0 \end{cases} \qquad \text{com } k\in\mathbb{R}$$

Resolva os itens seguintes, recorrendo a métodos exclusivamente analíticos.

a) Determine k, de modo que $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = f(0)$

b) Estude a função f quanto à existência de assíntotas verticais do seu gráfico.

c) Seja g uma função, de domínio $\mathbb{R}^+$, cuja derivada, g' , de domínio $\mathbb{R}^+$, é dada por $g'(x) = f(x) - \frac{1}{x}$.

Estude a função g quanto ao sentido das concavidades do seu gráfico e quanto à existência de pontos de inflexão.

Exame Nacional 2012 (2.ª fase)

119. Sejam f e g funções de domínio $]0, +\infty[$. Sabe-se que:
• a reta de equação y = 3 é assíntota horizontal do gráfico de f
• f não tem zeros;
• $g(x) = \frac{e^{-x}-3}{f(x)}$

Qual das opções seguintes define uma assíntota horizontal do gráfico de g ?

(A) y = 3 (B) y = e (C) y = 0 (D) y = −1

Exame Nacional 2012 (época especial)

120. Sejam a, b e c três números tais que $a \in]1,+\infty[$, $b \in \mathbb{R}^+$ e $c \in \mathbb{R}^+$. Sabe-se que $\log_a b = c$ e que $\log_a \sqrt{c} = 3$. Qual das expressões seguintes é equivalente a $\log_a \sqrt{b\times c}$?

(A) c + 3 (B) c − 3 (C) $\frac{c}{2}+3$ (D) $\frac{c}{2}-3$

Exame Nacional 2012 (época especial)

121. Admita que a concentração de um produto químico na água, em gramas por litro, t minutos após a sua colocação na água, é dada, aproximadamente, por $C(t) = 0,5t^2 \times e^{-0,1t}$ com $t \geq 0$. Resolva os itens seguintes, recorrendo a métodos exclusivamente analíticos.

a) Mostre que, durante os primeiros 15 minutos após a colocação desse produto químico na água, houve, pelo menos, um instante em que a concentração do produto foi 13 gramas por litro. Se utilizar a calculadora em eventuais cálculos numéricos, sempre que proceder a arredondamentos, use três casas decimais.

b) Determine o valor de t para o qual a concentração desse produto químico na água é máxima.

Exame Nacional 2012 (época especial)

122. Considere, num referencial o. n. xOy, o gráfico da função f , de domínio $\mathbb{R}^+$, definida por

$f(x) = e^{0,1x} + \ln(3x+1)$

Seja P um ponto do gráfico de f. A distância do ponto P à origem é igual a 2. Determine a abcissa do ponto P, recorrendo à calculadora gráfica. Na sua resposta, deve:

• equacionar o problema;

• reproduzir o gráfico da função ou os gráficos das funções que tiver necessidade de visualizar na calculadora, devidamente identificado(s), incluindo o referencial;

• indicar a abcissa do ponto P com arredondamento às centésimas.

Exame Nacional 2012 (época especial)

123. Considere as funções f e g, de domínio $\mathbb{R}$, definidas, respetivamente, por

$$f(x) = -x + \operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right) \quad \text{e} \quad g(x) = \begin{cases} \dfrac{f(x)}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ e^k - 1 & \text{se } x = 0 \end{cases} \quad \text{com } k \in \mathbb{R}$$

Resolva os itens seguintes, recorrendo a métodos exclusivamente analíticos.

a) Determine k de modo que a função g seja contínua.

b) Determine, em $]-2\pi, 5\pi[$, as soluções da equação

$2f'(x) = (f(x) + x)^2 - 1$

Exame Nacional 2012 (época especial)

124. Para certos valores de a e de b ($a > 1$ e $b > 1$), tem-se $\log_a b = 2$. Qual é, para esses valores de a e de b, o valor de $\log_b a + \log_a \sqrt{b}$?

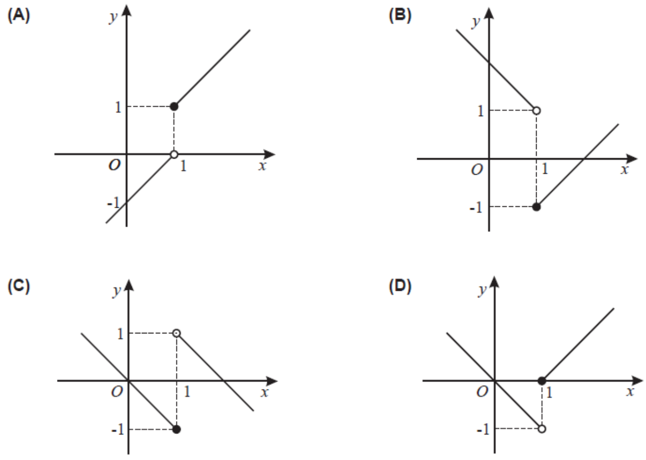
(A) $\frac{1}{2} + \sqrt{2}$ (B) $-2 + \sqrt{2}$ (C) $\frac{1}{2}$ (D) $\frac{3}{2}$

1.º teste intermédio 2013

125. Considere a função f , de domínio $\mathbb{R}$, definida por

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^{x-1} - 1}{x-1} & \text{se } x < 1 \\ \ln x & \text{se } x \geq 1 \end{cases}$$

Seja g uma outra função, de domínio $\mathbb{R}$. Sabe-se que a função f × g é contínua no ponto 1. Em qual das seguintes opções pode estar representada parte do gráfico da função g ?



1.º teste intermédio 2013

126. Seja f a função, de domínio R, definida por

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{3x+3}{\sqrt{x^2+9}} & \text{se } x \leq 4 \\ \dfrac{\ln(3x-11)}{x-4} & \text{se } x > 4 \end{cases}$$

Resolva os itens a) e b), recorrendo a métodos analíticos, sem utilizar a calculadora.

a) Averigue se existe $\lim_{x \to 4} f(x)$

b) O gráfico da restrição da função f ao intervalo $]-\infty, 4]$ tem uma assíntota horizontal. Determine uma equação dessa assíntota.

c) Considere, num referencial o.n. xOy, o triângulo [OPQ] tal que:

• o ponto P é o ponto de intersecção do gráfico da função f com o eixo das ordenadas;

• o ponto Q é o ponto do gráfico da função f que tem abcissa positiva e ordenada igual à ordenada do ponto P.

Determine um valor aproximado da área do triângulo [OPQ], recorrendo à calculadora gráfica. Na sua resposta, deve:

• reproduzir, num referencial, o gráfico da função f para $x \in [0,10]$

• desenhar o triângulo [OPQ]

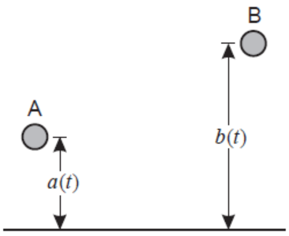
• indicar a abcissa do ponto Q arredondada às milésimas;

• apresentar a área do triângulo [OPQ] arredondada às centésimas.

Nota – Sempre que, nos cálculos intermédios, proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, três casas decimais.

1.º teste intermédio 2013

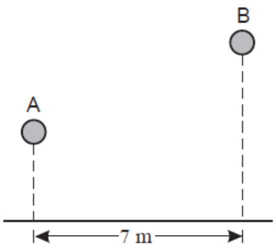
127. Considere que dois balões esféricos, que designamos por balão A e por balão B, se deslocam na atmosfera, por cima de um solo plano e horizontal. Num determinado instante, é iniciada a contagem do tempo. Admita que, durante o primeiro minuto imediatamente a seguir a esse instante, as distâncias, medidas em metros, do centro do balão A ao solo e do centro do balão B ao solo são dadas, respetivamente, por



$a(t) = e^{-0,03t} - 0,02t + 3$ e $b(t) = 6e^{-0,06t} - 0,02t + 2$

A variável t designa o tempo, medido em segundos, que decorre desde o instante em que foi iniciada a contagem do tempo ($t \in [0,60]$). Resolva os dois itens seguintes sem utilizar a calculadora, a não ser para efetuar eventuais cálculos numéricos. Sempre que, nos cálculos intermédios, proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, três casas decimais.

a) Determine a distância entre o centro do balão A e o centro do balão B, cinco segundos após o início da contagem do tempo, sabendo que, nesse instante, a distância entre as projeções ortogonais dos centros dos balões no solo era 7 metros. Apresente o resultado em metros, arredondado às décimas.



Determine quanto tempo decorreu entre o instante inicial e o instante em que os centros dos dois balões estavam à mesma distância do solo. Apresente o resultado em segundos, arredondado às unidades.

1.º teste intermédio 2013

128. Para um certo número real k, positivo, seja f a função, de domínio $]-\infty,1[$, definida por

$$f(x)=\begin{cases}\ln(k-x) & \text{se } x \le 0\\ 2e^x+\dfrac{1}{\ln x} & \text{se } 0<x<1\end{cases}$$

Sabe-se que f é contínua. Qual é o valor de k ?

(A) ln2 (B) e^2 (C) ln3 (D) e^3

2.º teste intermédio 2013

129. Seja f a função, de domínio $\mathbb{R}^+$, definida por $f(x) = x^a + a^2 \ln x$ (a é um número real maior do que 1), e seja r a reta tangente ao gráfico da função f no ponto de abcissa a. Qual é o declive da reta r ?

(A) $a^{a-1} + a^2$ (B) $a^a + a^2$ (C) $a^{a-1} + a$ (D) $a^a + a$

2.º teste intermédio 2013

130. Seja f uma função de domínio $\mathbb{R}$ e seja f ´´ a segunda derivada da função f. Sabe-se que f ´´ tem domínio $\mathbb{R}$ e é definida por $f''(x) = e^{-x}x^2(x-1)$. Qual das afirmações seguintes é verdadeira?

(A) O gráfico da função f tem exatamente quatro pontos de inflexão.
(B) O gráfico da função f tem exatamente três pontos de inflexão.
(C) O gráfico da função f tem exatamente dois pontos de inflexão.
(D) O gráfico da função f tem exatamente um ponto de inflexão.

2.º teste intermédio 2013

131. Seja f a função, de domínio $\mathbb{R}$, definida por

$$f(x)=\begin{cases}3x+1-xe^x & \text{se } x<0\\ x+\cos x & \text{se } x\ge 0\end{cases}$$

Resolva os dois itens seguintes recorrendo a métodos analíticos, sem utilizar a calculadora.

a) Determine $f'\left(\frac{\pi}{2}\right)$ recorrendo à definição de derivada de uma função num ponto.

b) O gráfico da função f tem uma assíntota oblíqua quando $x \to -\infty$. Determine a equação reduzida dessa assíntota.

2.º teste intermédio 2013

132. Seja a um número real tal que a > e. Seja g a função, de domínio $\mathbb{R}^+$, definida por g(x) = $a\,x + \ln x$.

Mostre que a função g tem, pelo menos, um zero no intervalo $\left]\frac{1}{a},\frac{1}{e}\right[$.

2.º teste intermédio 2013

133. Seja f uma função de domínio $\mathbb{R}^+$. Sabe-se que $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x+f(x)}{3x}=1$. Qual das equações seguintes pode definir uma assíntota do gráfico da função f ?

(A) $y=\frac{1}{3}x$ (B) $y=\frac{2}{3}x$ (C) y = x (D) y = 3x

Exame Nacional 2013 (1.ª fase)

134. Considere, para um certo número real a superior a 1, as funções f e g, de domínio $\mathbb{R}$, definidas por $f(x)=a^x$ e $g(x)=a^{-x}$. Considere as afirmações seguintes.

I) Os gráficos das funções f e g não se intersectam.
II)– As funções f e g são monótonas crescentes.
III) $f'(-1)-g'(1)=\dfrac{2\ln a}{a}$

Qual das opções seguintes é a correta?

(A) II e III são verdadeiras.
(B) I é falsa e III é verdadeira.
(C) I é verdadeira e III é falsa.
(D) II e III são falsas.

Exame Nacional 2013 (1.ª fase)

135. Considere a função f , de domínio $\mathbb{R}\backslash\{0\}$, definida por

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{e^x-1}{e^{4x}-1} & \text{se} \quad x<0\\ x\ln(x) & \text{se} \quad x>0\end{cases}$$

Resolva os itens a) e b), recorrendo a métodos analíticos, sem utilizar a calculadora.

a) Estude a função f quanto à existência de assíntotas verticais do seu gráfico.

b) Seja g a função, de domínio $\mathbb{R}^+$, definida por $g(x) = f(x) - x + \ln^2 x$. Estude a função g quanto à monotonia e quanto à existência de extremos relativos em $]0, e]$

Resolva o item c), recorrendo à calculadora gráfica.

c) Considere, num referencial o.n. xOy, a representação gráfica da função g, de domínio $\mathbb{R}^+$, definida por $g(x) = f(x) - x + \ln^2 x$. Sabe-se que:

- A é o ponto de coordenadas (2, 0)
- B é o ponto de coordenadas (5, 0)
- P é um ponto que se desloca ao longo do gráfico da função g

Para cada posição do ponto P, considere o triângulo [ABP]. Determine as abcissas dos pontos P para os quais a área do triângulo [ABP] é 1. Na sua resposta, deve:

- equacionar o problema;
- reproduzir o gráfico da função ou os gráficos das funções que tiver necessidade de visualizar na calculadora, devidamente identificado(s), incluindo o referencial;
- indicar as abcissas dos pontos P com arredondamento às centésimas.

Exame Nacional 2013 (1.ª fase)

136. Na Figura 2 , está representada, num referen-cial ortogonal xOy, parte do gráfico de uma função polinomial f de grau 3. Sabe-se que:

- -1 e 2 são os únicos zeros da função f

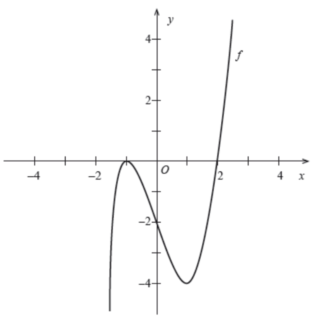
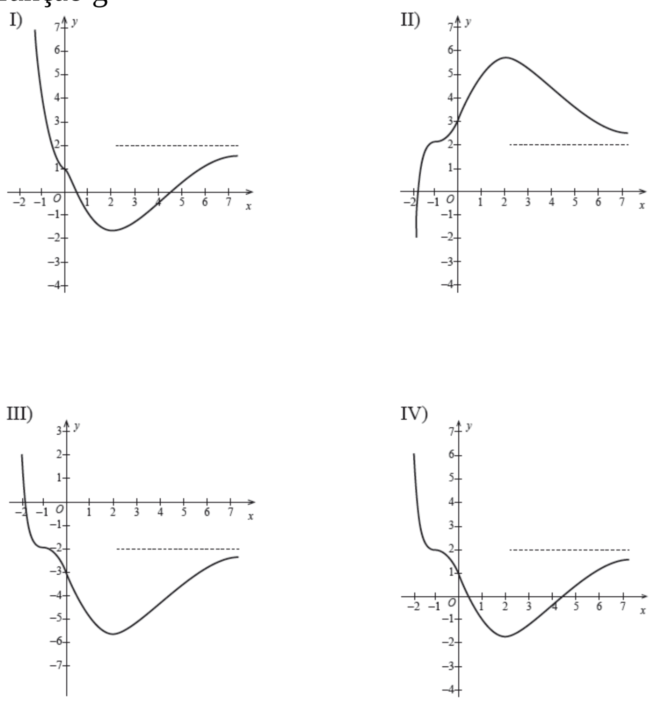


Figura 2

- g ′, a primeira derivada de uma certa função g, tem domínio $\mathbb{R}$ e é definida por $g'(x) = f(x)\times e^{-x}$
- $\lim\limits_{x\to+\infty}[g(x)-2]=0$

Apenas uma das opções seguintes pode representar a função g



Nota – Em cada uma das opções estão representadas parte do gráfico de uma função e, a tracejado, uma assíntota desse gráfico.

Elabore uma composição na qual:

- identifique a opção que pode representar a função g
- apresente as razões para rejeitar as restantes opções.

Apresente três razões diferentes, uma por cada gráfico rejeitado.

Exame Nacional 2013 (1.ª fase)

137. Sejam a e b dois números reais tais que $1 < a < b$ e $\log_a b = 3$. Qual é, para esses valores de a e de b, o valor de $\log_a\left(a^5 \times \sqrt[3]{b}\right) + a^{\log_a b}$?

(A) $6 + b$ (B) $8 + b$ (C) $6 + a^b$ (D) $8 + a^b$

Exame Nacional 2013 (2.ª fase)

138. Seja f uma função de domínio $[-e,1]$. Sabe-se que:

- f é contínua no seu domínio;
- f (–e) = 1
- f (1) = e

Qual das afirmações seguintes é necessariamente verdadeira?

(A) A equação $f(x) - 1 = 0$ tem pelo menos uma solução em $]-e,1[$

(B) A equação $f(x) = e$ tem pelo menos uma solução em $]-e,1[$

(C) A equação f (x) = 0 tem pelo menos uma solução em $]-e,1[$

(D) A equação f (x) $= \frac{e}{2}$ tem pelo menos uma solução em $]-e,1[$

Exame Nacional 2013 (2.ª fase)

139. Seja g uma função, de domínio $\mathbb{R}^+$, cuja derivada, g ´, de domínio $\mathbb{R}^+$, é dada por g ´(x) = $\ln(e^x + 6e^{-x} + 4x)$. Estude a função g quanto ao sentido das concavidades do seu gráfico e quanto à existência de pontos de inflexão, recorrendo a métodos analíticos, sem utilizar a calculadora.

Exame Nacional 2013 (2.ª fase)

140. Considere, num referencial o.n. xOy, a representação gráfica da função f, de domínio $[-1, 2]$, definida por $f(x) = -x - 3^{1+\ln(x^2+1)}$, o ponto A de coordenadas (2, 0) e um ponto P que se desloca ao longo do gráfico da função f. Existe uma posição do ponto P para a qual a área do triângulo [AOP] é mínima. Determine a área desse triângulo, recorrendo à calculadora gráfica. Na sua resposta, deve:

• reproduzir o gráfico da função ou os gráficos das funções que tiver necessidade de visualizar na calculadora, devidamente identificado(s), incluindo o referencial;

• indicar o valor da área do triângulo [AOP] com arredondamento às centésimas.

Exame Nacional 2013 (2.ª fase)

141. Considere a função f , de domínio $\mathbb{R}$, definida por

$$f(x) = \begin{cases} x\,e^{3+x} + 2x & \text{se} \quad x \leq 1 \\ \dfrac{1-\sqrt{x}+\operatorname{sen}(x-1)}{1-x} & \text{se} \quad x > 1 \end{cases}$$

Resolva os dois itens seguintes recorrendo a métodos analíticos, sem utilizar a calculadora.

a) Averigue se a função f é contínua em x = 1

b) Mostre que o gráfico da função f admite uma assíntota oblíqua quando x tende para $-\infty$

Exame Nacional 2013 (2.ª fase)

142. Seja a um número real positivo. Considere o conjunto S = $\{x \in \mathbb{R}: \ln(e^{-x} - a) \leq 0\}$. Qual dos conjuntos seguintes é o conjunto S ?

(A) $]-\ln(1+a), -\ln a[$ (B) $[-\ln(1+a), -\ln a[$

(C) $]-\infty \ln(1+a)]$ (D) $[-\ln(1+a), +\infty[$

Exame Nacional 2013 (época especial)

143. Considere, para um certo número real k positivo, a função f , de domínio $\mathbb{R}$, definida por

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{3x}{1-e^{2x}} & \text{se } x < 0 \\ \ln k & \text{se } x = 0 \\ \dfrac{x}{2} - \ln\left(\dfrac{6x}{x+1}\right) & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

Resolva os itens seguintes, recorrendo a métodos analíticos, sem utilizar a calculadora.

a) Determine k de modo que $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = f(0)$

b) Mostre que $\ln(\frac{\sqrt{e}}{3})$ é um extremo relativo da função f no intervalo $]0, +\infty[$

Exame Nacional 2013 (época especial)

144. Considere a função f, de domínio $]0,\pi[$, definida por f(x) = ln x + cos x – 1. Sabe-se que:

• A é um ponto do gráfico de f

• a reta tangente ao gráfico de f, no ponto A, tem inclinação $\frac{\pi}{4}$ radianos. Determine a abcissa do ponto A, recorrendo à calculadora gráfica. Na sua resposta, deve:

• equacionar o problema;

• reproduzir o gráfico da função ou os gráficos das funções que tiver necessidade de visualizar na calculadora, devidamente identificado(s), incluindo o referencial;

• indicar a abcissa do ponto A com arredondamento às centésimas.

Exame Nacional 2013 (época especial)

145. Seja b um número real. Sabe-se que log b = 2014. Qual é o valor de log (100b)?

(A) 2016 (B) 2024 (C) 2114 (D) 4028

2.º teste intermédio 2014

146. Na Figura 1, está representada parte do gráfico de uma função h, de domínio $\mathbb{R}\backslash\{1,e\}$.

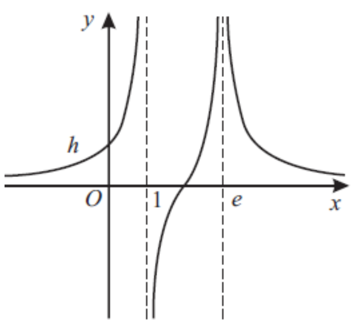


Figura 1

Tal como a figura sugere, as retas de equações y = 0, x = 1 e x = e são as assíntotas do gráfico da função h. Seja (x_n) uma sucessão tal que lim h(x_n) = $+\infty$. Qual das expressões seguintes não pode ser termo geral da sucessão (x_n) ?

(A) $(1+\frac{1}{n})^n$ (B) $(1+\frac{1}{n})^3$

(C) $1-\frac{1}{n}$ (D) $e+\frac{1}{n}$

2.º teste intermédio 2014

147. Seja f uma função, de domínio $\mathbb{R}^+$, com derivada finita em todos os pontos do seu domínio. A sua derivada, f ‘, é definida por $f'(x)=\frac{1}{2}x^2-\ln x$. Quantos pontos de inflexão tem o gráfico da função f?

(A) Zero. (B) Um. (C) Dois. (D) Três.

2.º teste intermédio 2014

148. Seja f a função, de domínio R, definida por

$$f(x)=\begin{cases} 2x+1+e^{-x} & \text{se } x\leq 0 \\ \dfrac{3x+\ln x}{x} & \text{se } x>0 \end{cases}$$

Resolva os itens a) e b) recorrendo a métodos analíticos, sem utilizar a calculadora.

a) Seja t a reta tangente ao gráfico da função f no ponto de abcissa 1. Determine a equação reduzida da reta t.

b) Estude a função f quanto à existência de assíntotas do seu gráfico. Na sua resposta, deve:

• mostrar que existe uma única assíntota vertical e escrever uma equação dessa assíntota;

• mostrar que existe uma assíntota horizontal quando $x\to+\infty$ e escrever uma equação dessa assíntota;

• mostrar que não existe assíntota não vertical quando $x\to-\infty$

c) Na Figura 2, estão representados, num referencial o.n. xOy, parte do gráfico da função f , os pontos A e B, ambos pertencentes ao gráfico de f , e a reta AB.

Sabe-se que:

• a reta AB é paralela à bissetriz dos quadrantes pares; os pontos A e B têm abcissas simétricas;

• a abcissa do ponto A pertence ao intervalo]0,1[

Seja *a* a abcissa do ponto A. Determine o valor de a, recorrendo à calculadora gráfica. Na sua resposta, deve:

• equacionar o problema;

• reproduzir, num referencial, o gráfico da função ou os gráficos das funções que visualizar na calculadora, devidamente identificado(s);

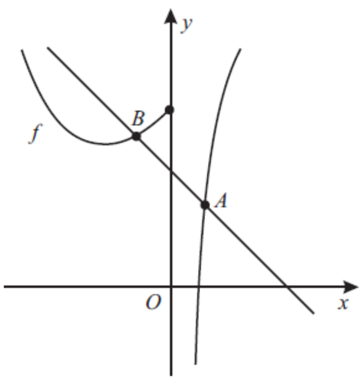


Figura 2

• indicar o valor de *a*, com arredondamento às milésimas.

2.º teste intermédio 2014

149. Numa certa escola, eclodiu uma epidemia de gripe que está a afetar muitos alunos. Admita que o número de alunos com gripe, t dias após as zero horas de segunda-feira da próxima semana, é dado aproximadamente por

$$f(t)=(4t+2)\,e^{3{,}75-t}, \quad \text{para } t\in[0,6]$$

Como, por exemplo, f(1,5) ≈ 76, pode concluir-se que 76 alunos dessa escola estarão com gripe às 12 horas de terça-feira da próxima semana.

a) Resolva este item recorrendo a métodos analíticos, sem utilizar a calculadora. Estude a função f quanto à monotonia e conclua em que dia da próxima semana, e a que horas desse dia, será máximo o número de alunos com gripe.

b) Nessa escola, há 300 alunos. Às 18 horas de quinta-feira da próxima semana, vão ser escolhidos aleatoriamente 3 alunos, de entre os 300 alunos da escola, para responderem a um inquérito. Qual é a probabilidade de pelo menos um dos alunos escolhidos estar com gripe? Apresente o resultado na forma de dízima, com arredondamento às centésimas.

2.º teste intermédio 2014

150. Seja f a função, de domínio $\mathbb{R}^+$, definida por $f(x)=e^{\frac{1}{x}}-3$. Considere a sucessão de números reais (x_n) tal que $x_n=\frac{1}{\sqrt{n}}$. Qual é o valor de $\lim\frac{2}{f(x_n)}$?

(A) $-\infty$ (B) $-e$ (C) 0 (D) $+\infty$

Exame Nacional 2014 (1.ª fase)

151. Considere, para um certo número real k, a função f, de domínio $\mathbb{R}$, definida por f (x) = k e^x + x.

O teorema de Bolzano garante que a função f tem, pelo menos, um zero no intervalo]0,1[. A qual dos intervalos seguintes pode pertencer k ?

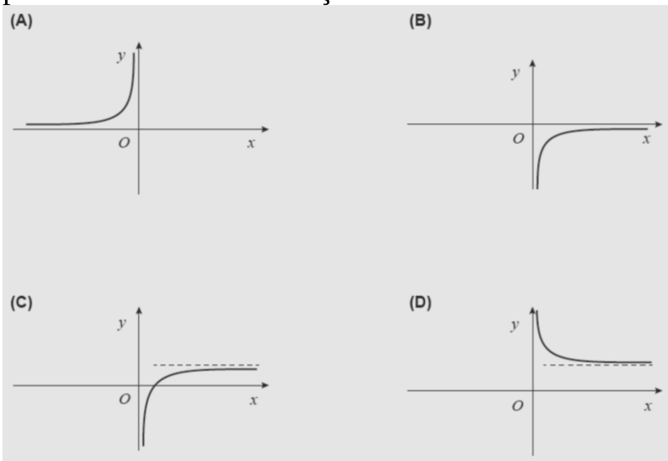
(A) $\left]-e,-\frac{1}{e}\right[$ **(B)** $\left]-\frac{1}{e},0\right[$

(C) $\left]0,\frac{1}{e}\right[$ **(D)** $\left]\frac{1}{e},1\right[$

Exame Nacional 2014 (1.ª fase)

152. Considere, para um certo número real *a* positivo, a função f , de domínio $\mathbb{R}^+$, definida por

$f(x) = a + \ln\frac{a}{x}$. Em qual das opções seguintes pode estar representada parte do gráfico da função f ‘, primeira derivada da função f ?



Exame Nacional 2014 (1.ª fase)

153. Considere a função f , de domínio ℝ, definida por

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{e^{x-4}-3x+11}{4-x} & \text{se } x<4\\ \ln\left(2e^{x}-e^{4}\right) & \text{se } x\geq 4\end{cases}$$

Resolva os itens seguintes, recorrendo a métodos analíticos, sem utilizar a calculadora.

a) Averigue se a função f é contínua em x = 4

b) O gráfico da função f tem uma assíntota oblíqua quando x tende para +∞, de equação y = x + b, com b ∈ ℝ. Determine b

Exame Nacional 2014 (1.ª fase)

154. Considere a função f, de domínio $]-e^2, +\infty[$, definida por $f(x) = -\ln(x + e^2)$. Na Figura 5, estão representados, num referencial o. n. xOy, parte do gráfico da função f e o triângulo [ABC]

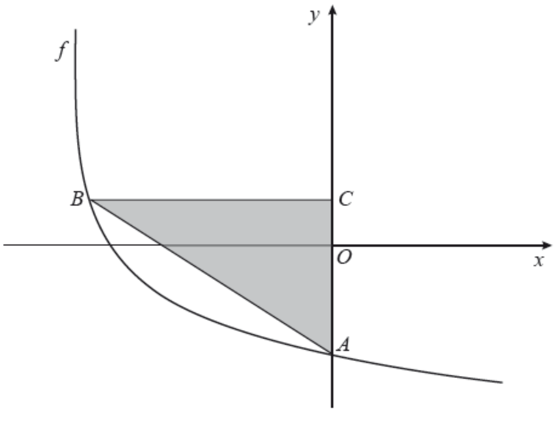


Figura 5

Sabe-se que:

• o ponto A tem coordenadas (0, -2)

• o ponto B pertence ao gráfico da função f e tem abcissa negativa;

• o ponto C pertence ao eixo Oy e tem ordenada igual à do ponto B

• a área do triângulo [ABC] é igual a 8

Determine a abcissa do ponto B, recorrendo à calculadora gráfica. Na sua resposta, deve:

– escrever uma expressão da área do triângulo [ABC] em função da abcissa do ponto B

– equacionar o problema;

– reproduzir, num referencial, o gráfico da função ou os gráficos das funções visualizados, devidamente identificados;

– indicar a abcissa do ponto B com arredondamento às centésimas.

Exame Nacional 2014 (1.ª fase)

155. Seja g uma função, de domínio $]-\infty, e[$, definida por g(x) = ln (e – x). Considere a sucessão estritamente crescente de termo geral $x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$.

Qual é o valor de lim $g(x_n)$?

(A) +∞ (B) *e* (C) 1 (D) –∞

Exame Nacional 2014 (2.ª fase)

156. Considere as funções f e g, de domínio]-∞, 0[, definidas por $f(x) = x - 1 + \frac{\ln(-x)}{x}$ e $g(x)=-x+f(x)$.

Resolva os itens seguintes, recorrendo a métodos analíticos, sem utilizar a calculadora.

a) Estude a função f quanto à existência de assíntotas do seu gráfico e, caso existam, indique as suas equações.

b) Mostre que a condição $f(x) = -e$ tem, pelo menos, uma solução em $]-e, -1[$

c) Estude a função g quanto à monotonia e quanto à existência de extremos relativos. Na sua resposta, deve indicar o(s) intervalo(s) de monotonia e, caso existam, os valores de x para os quais a função g tem extremos relativos.

Exame Nacional 2014 (2.ª fase)

157. Considere, num referencial o.n. xOy, a representação gráfica da função f, de domínio [0,10], definida por

$$f(x) = -e^{\frac{x}{2}} + x^2 + 8$$

e dois pontos A e B. Sabe-se que:

• o ponto A é o ponto de intersecção do gráfico da função f com o eixo das ordenadas;

• o ponto B pertence ao gráfico da função f e tem abcissa positiva;

• a reta AB tem declive -2

Determine a abcissa do ponto B, recorrendo à calculadora gráfica. Na sua resposta, deve:
— equacionar o problema;
— reproduzir, num referencial, o gráfico da função ou os gráficos das funções que tiver necessidade de visualizar na calculadora, devidamente identificados;
— indicar o valor da abcissa do ponto B com arredondamento às centésimas.

Exame Nacional 2014 (2.ª fase)

158. Na Figura 6, está representada, num referencial o.n. xOy, parte do gráfico de uma função polinomial f , de grau 3. Sabe-se que:

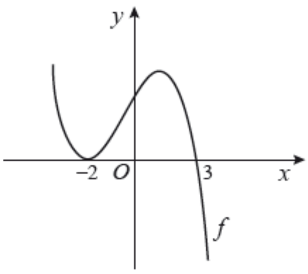


Figura 6

• -2 e 3 são os únicos zeros da função f
• a função f tem um extremo relativo em x = −2
• h', primeira derivada de uma função h, tem domínio ℝ e é definida por

$h'(x) = \frac{f(x)}{e^{2x}}$

• $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = 3$

Considere as afirmações seguintes.
I) A função h tem dois extremos relativos.
II) h''(−2) = 0
III) y + 3 = 0 é uma equação da assíntota do gráfico da função h quando x tende para +∞
Elabore uma composição, na qual indique, justificando, se cada uma das afirmações é verdadeira ou falsa. Na sua resposta, apresente três razões diferentes, uma para cada afirmação.

Exame Nacional 2014 (2.ª fase)

159. Seja f a função, de domínio ℝ\{0}, definida por $f(x) = \frac{x-1}{e^x-1}$. Considere a sucessão de números reais (x_n) tal que $x_n = -\frac{1}{n}$. Qual é o valor de lim f(x_n) ?

(A) -∞ (B) 0 (C) 1 (D) +∞

Exame Nacional 2014 (época especial)

160. Considere a função g, de domínio $\mathbb{R}^+$, definida por $g(x) = \frac{1+\ln x}{x^2}$

a) Estude a função g quanto à monotonia e quanto à existência de extremos relativos, recorrendo a métodos analíticos, sem utilizar a calculadora. Na sua resposta, deve indicar o(s) intervalo(s) de monotonia e, caso existam, os valores de x para os quais a função g tem extremos relativos.

b) Considere, num referencial o.n. xOy, a representação gráfica da função g, os pontos A e B, e a reta r de equação y = mx, com m <0. Sabe-se que:
• os pontos A e B pertencem ao gráfico da função g
• a abcissa do ponto A é o zero da função g
• o ponto B é o ponto de intersecção da reta r com o gráfico da função g
• a área do triângulo [OAB] é igual a 1
Determine a abcissa do ponto B, recorrendo à calculadora gráfica. Na sua resposta, deve:
— equacionar o problema;
— reproduzir, num referencial, o gráfico da função ou os gráficos das funções visualizados, devidamente identificados;
— indicar a abcissa do ponto A e a abcissa do ponto B com arredondamento às centésimas.

Exame Nacional 2014 (época especial)

161. Considere, para um certo número real k, a função f , de domínio]−∞,*e*[, definida por

$$f(x) = \begin{cases} x\,e^{x-2} & \text{se } x \le 2 \\ \dfrac{\operatorname{sen}(2-x)}{x^2+x-6} + k & \text{se } 2 < x < e \end{cases}$$

Resolva os itens seguintes, recorrendo a métodos analíticos, sem utilizar a calculadora.

a) Determine k, de modo que a função f seja contínua em x = 2

b) Estude a função f quanto à existência de assíntota horizontal do seu gráfico e, caso exista, indique uma equação dessa assíntota.

Exame Nacional 2014 (época especial)

162. Qual das seguintes expressões é, para qualquer número real k, igual a $\log_3\left(\frac{3^k}{9}\right)$?

(A) $\frac{k}{2}$ (B) k – 2 (C) $\frac{k}{9}$ (D) k – 9

Exame Nacional 2015 (1.ª fase)

163. Considere a função f , de domínio $\mathbb{R}^+$, definida por $f(x) = \frac{1+\ln x}{x}$. Considere a sucessão de termo geral $u_n = n^2$. Qual é o valor de lim f (u_n)?

(A) 0 (B) 1 (C) *e* (D) +∞

Exame Nacional 2015 (1.ª fase)

164. Na Figura 3, está representado um recipiente cheio de um líquido viscoso. Tal como a figura ilustra, dentro do recipiente, presa à sua base, encontra-se uma esfera. Essa esfera está ligada a um ponto P por uma mola esticada. Num certo instante,

a esfera é desprendida da base do recipiente e inicia um movimento vertical. Admita que, t segundos após esse instante, a distância, em centímetros, do centro da esfera ao ponto P é dada por

$d(t) = 10 + (5 - t)e^{-0,05t} \quad (t \geq 0)$

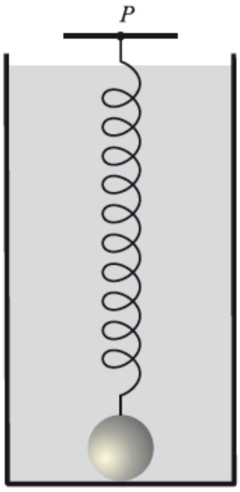


Figura 3

a) Sabe-se que a distância do ponto P à base do recipiente é 16cm. Determine o volume da esfera. Apresente o resultado em cm3, arredondado às centésimas.

b) Determine o instante em que a distância do centro da esfera ao ponto P é mínima, recorrendo a métodos analíticos, sem utilizar a calculadora.

Exame Nacional 2015 (1.ª fase)

165. Seja f a função, de domínio ℝ, definida por

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^x - \sqrt{e}}{2x-1} & \text{se } x < \dfrac{1}{2} \\ (x+1)\ln x & \text{se } x \geq \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

Resolva os itens a) e b) recorrendo a métodos analíticos, sem utilizar a calculadora.

a) Averigue da existência de assíntotas verticais do gráfico da função f

b) Estude a função f quanto ao sentido das concavidades do seu gráfico e quanto à existência de pontos de inflexão, no intervalo $\left]\frac{1}{2}, +\infty\right[$. Na sua resposta, apresente:

• o(s) intervalo(s) em que o gráfico de f tem concavidade voltada para baixo;

• o(s) intervalo(s) em que o gráfico de f tem concavidade voltada para cima;

• as coordenadas do(s) ponto(s) de inflexão do gráfico de f

c) Mostre que a equação f (x) = 3 é possível em]1, *e*[e, utilizando a calculadora gráfica, determine a única solução desta equação, neste intervalo, arredondada às centésimas. Na sua resposta:

• recorra ao teorema de Bolzano para provar que a equação f(x) = 3 tem, pelo menos, uma solução no intervalo]1, *e*[

• reproduza, num referencial, o(s) gráfico(s) da(s) função(ões) que visualizar na calculadora, devidamente identificado(s);

• apresente a solução pedida.

Exame Nacional 2015 (1.ª fase)

166. Para certos valores de a e de b (a>1 e b>1), tem-se $\log_b a = \frac{1}{3}$. Qual é, para esses valores de a e de b, o valor de $\log_a (a^2 b)$?

(A) $\frac{2}{3}$ (B) $\frac{5}{3}$ (C) 2 (D) 5

Exame Nacional 2015 (2.ª fase)

167. Para um certo número real k, é contínua em ℝ a função f definida por

$$f(x) = \begin{cases} 2 + e^{x+k} & \text{se } x \leq 0 \\ \dfrac{2x + \ln(x+1)}{x} & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

Qual é o valor de k ?

(A) 0 (B) 1 (C) ln2 (D) ln 3

Exame Nacional 2015 (2.ª fase)

168. Seja f a função, de domínio ℝ, definida por

$$f(x) = \begin{cases} 1 + xe^x & \text{se } x \leq 3 \\ \ln(x-3) - \ln(x) & \text{se } x > 3 \end{cases}$$

Resolva os itens a), b) e c), recorrendo a métodos analíticos, sem utilizar a calculadora.

a) Estude a função f quanto à existência de assíntotas horizontais do seu gráfico.

b) Resolva, em]−∞, 3], a condição f (x) − 2x >1. Apresente o conjunto solução, usando a notação de intervalos de números reais.

c) Determine a equação reduzida da reta tangente ao gráfico da função f no ponto de abcissa 4

Exame Nacional 2015 (2.ª fase)

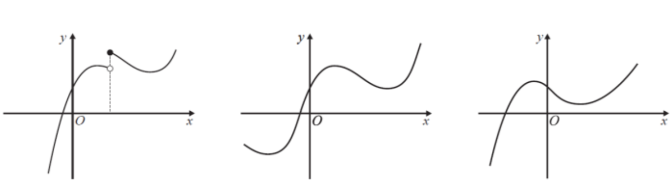
169. Seja f :ℝ→ ℝ uma função tal que:

• f tem derivada finita em todos os pontos do seu domínio;

• $f'(0)>0$

• $f''(0)<0$, para qualquer $x \in]-\infty,0[$

Nenhum dos gráficos a seguir apresentados é o gráfico da função f



Elabore uma composição na qual apresente, para cada um dos gráficos, uma razão pela qual esse gráfico não pode ser o gráfico da função f.

Exame Nacional 2015 (2.ª fase)

170. Seja a um número real. Seja a função f, de domínio $\mathbb{R}^+$, definida por $f(x) = e^{a \ln x}$. Considere, num referencial o.n. xOy, o ponto P(2,8). Sabe-se que o ponto P pertence ao gráfico de f
Qual é o valor de a ?
(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4

Exame Nacional 2015 (época especial)

171. Admita que, ao longo dos séculos XIX, XX e XXI, o número de habitantes, N, em milhões, de uma certa região do globo é dado aproximadamente por

$$N = \frac{200}{1+50e^{-0,25t}} \quad (t \geq 0)$$

em que t é o tempo medido em décadas e em que o instante t = 0 corresponde ao final do ano 1800.

a) Determine a taxa média de variação da função N no intervalo [10, 20]. Apresente o resultado arredondado às unidades. Interprete o resultado, no contexto da situação descrita.

b) Mostre que

$$t = \ln\left(\frac{50N}{200-N}\right)^4$$

Exame Nacional 2015 (época especial)

172. Seja f a função, de domínio $\mathbb{R}_0^+$, definida por

$$f(x) = x^2 e^{1-x}$$

Resolva os itens a) e b) recorrendo a métodos analíticos, sem utilizar a calculadora.

a) Estude a função f quanto à existência de assíntota horizontal.

b) Estude a função f quanto à monotonia e quanto à existência de extremos relativos.

c) Considere, num referencial o.n. xOy, três pontos, A, B e C, tais que:
• os pontos A e B pertencem ao gráfico da função f
• a abcissa do ponto B é maior do que a abcissa do ponto A
• os pontos A e B têm a mesma ordenada, a qual é igual a 1,2
• o ponto C pertence ao eixo Ox e tem abcissa igual à do ponto B

Determine, recorrendo à calculadora gráfica, a área do quadrilátero [OABC], sendo O a origem do referencial.
Na sua resposta:
— reproduza, num referencial, o gráfico da função f no intervalo [0, 5]
— apresente o desenho do quadrilátero [OABC]
— indique as abcissas dos pontos A e B arredondadas às milésimas;
— apresente a área do quadrilátero arredondada às centésimas.

Exame Nacional 2015 (época especial)

173. Seja a um número real diferente de 0. Qual é o valor de $\lim\limits_{x\to a} \frac{ae^{x-a}-a}{x^2-a^2}$?

(A) $\frac{1}{4}$ (B) $\frac{1}{2}$ (C) 1 (D) 2

Exame Nacional 2016 (1.ª fase)

174. Seja f uma função de domínio $\mathbb{R}^-$. Sabe-se que:

• $\lim\limits_{x\to -\infty} \frac{f(x)+e^x-x}{x} = 1$
• o gráfico de f tem uma assíntota oblíqua.

Qual é o declive dessa assíntota?
(A) −2 (B) −1 (C) 1 (D) 2

Exame Nacional 2016 (1.ª fase)

175. Seja f uma função, de domínio $\mathbb{R}$, cuja derivada, f', de domínio $\mathbb{R}$, é dada por $f(x)=e^x(x^2+x+1)$. Resolva os itens a) e b) recorrendo a métodos analíticos, sem utilizar a calculadora.

a) Sejam p e q dois números reais tais que

$$p = \lim_{x\to -1} \frac{f(x)-f(-1)}{x+1} \quad \text{e} \quad q = -\frac{1}{p}$$

Determine o valor de q e interprete geometricamente esse valor.

b) Estude a função f quanto ao sentido das concavidades do seu gráfico e quanto à existência de pontos de inflexão. Na sua resposta, apresente:
– o(s) intervalo(s) em que o gráfico de f tem concavidade voltada para baixo;
– o(s) intervalo(s) em que o gráfico de f tem concavidade voltada para cima;
– a(s) abcissa(s) do(s) ponto(s) de inflexão do gráfico de f

Exame Nacional 2016 (1.ª fase)

176. Considere a função f, de domínio $]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[$, definida por $f(x) = \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$

Resolva os itens a) e b) recorrendo a métodos analíticos, sem utilizar a calculadora.

a) Estude a função f quanto à existência de assíntotas verticais do seu gráfico.

b) Seja a um número real maior do que 1. Mostre que a reta secante ao gráfico de f nos pontos de abcissas a e $-a$ passa na origem do referencial.

Exame Nacional 2016 (1.ª fase)

177. Para certos valores de a e de b ($a>1$ e $b>1$), tem-se $\log_a(ab^3)=5$. Qual é, para esses valores de a e de b, o valor de $\log_b a$?

(A) $\frac{5}{3}$ **(B)** $\frac{3}{4}$ **(C)** $\frac{3}{5}$ **(D)** $\frac{1}{3}$

Exame Nacional 2016 (2.ª fase)

178. Considere a função f, de domínio $\mathbb{R}^+$, definida por $f(x)=\ln(x)$. Considere a sucessão de termo geral $u_n=\frac{n}{e^n}$. Qual é o valor de $\lim f(u_n)$?

(A) $-\infty$ (B) 0 (C) e (D) $+\infty$

Exame Nacional 2016 (2.ª fase)

179. O José e o António são estudantes de Economia. O José pediu emprestados 600 euros ao António para comprar um computador, tendo-se comprometido a pagar o empréstimo em prestações mensais sujeitas a um certo juro. Para encontrarem as condições de pagamento do empréstimo, os dois colegas adaptaram uma fórmula que tinham estudado e estabeleceram um contrato. Nesse contrato, a prestação mensal p, em euros, que o José tem de pagar ao António é dada por $p=\frac{600x}{1-e^{-nx}} \quad (x>0)$ em que n é o número de meses em que o empréstimo será pago e x é a taxa de juro mensal. Resolva os itens a) e b) recorrendo a métodos analíticos. Na resolução do item a), pode utilizar a calculadora para efetuar eventuais cálculos numéricos.

a) O José e o António acordaram que a taxa de juro mensal seria 0,3% (x=0,003). Em quantos meses será pago o empréstimo, sabendo-se que o José irá pagar uma prestação mensal de 24 euros? Apresente o resultado arredondado às unidades. Se, em cálculos intermédios, proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, cinco casas decimais.

b) Determine $\lim_{x\to 0}\frac{600x}{1-e^{-nx}}$, em função de n, e interprete o resultado no contexto da situação descrita.

Exame Nacional 2016 (2.ª fase)

180. Seja f a função, de domínio $\left]-\frac{\pi}{2},+\infty\right[$, definida por

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{2+\operatorname{sen}x}{\cos x} & \text{se } -\dfrac{\pi}{2}<x\leq 0\\ x-\ln x & \text{se } x>0\end{cases}$$

Resolva os itens a) e b) recorrendo a métodos analíticos, sem utilizar a calculadora.

a) Estude a função f quanto à existência de assíntota oblíqua do seu gráfico.

b) Estude a função f quanto à monotonia e quanto à existência de extremos relativos, no intervalo $\left]-\frac{\pi}{2},0\right[$

c) Seja r a reta tangente ao gráfico da função f no ponto de abcissa $\frac{1}{2}$. Além do ponto de tangência, a reta r intersecta o gráfico de f em mais dois pontos, A e B, cujas abcissas pertencem ao intervalo $\left]-\frac{\pi}{2},0\right[$ (considere que o ponto A é o de menor abcissa). Determine analiticamente a equação reduzida da reta r e, utilizando a calculadora gráfica, obtenha as abcissas dos pontos A e B. Apresente essas abcissas arredondadas às centésimas. Na sua resposta, reproduza, num referencial, o gráfico da função ou os gráficos das funções que visualizar na calculadora e que lhe permite(m) resolver o problema.

Exame Nacional 2016 (2.ª fase)

181. Sejam a e b dois números reais superiores a 1, tais que $a=b^3$. Qual dos valores seguintes é igual a $\log_a b+\log_b a$?

(A) $\frac{4}{3}$ (B) 1 (C) $\frac{10}{3}$ (D) 3

Exame Nacional 2016 (época especial)

182. Seja f a função, de domínio $[-3,3]$, cujo gráfico está representado na Figura 1. Tal como a figura sugere, todos os objetos inteiros têm imagens inteiras. Seja g a função, de domínio $\mathbb{R}^+$, definida por $g(x)=\ln x$. Quais são as soluções da equação $(f\circ g)(x)=0$?

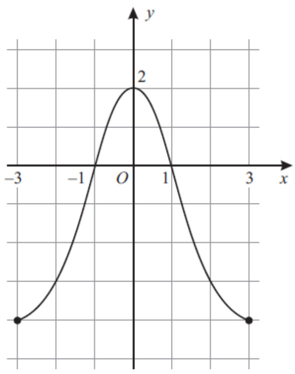


Figura 1

(A) $\frac{1}{e}\,;\,e^2$ **(B)** $e\,;\,e^2$

(C) $1\,;\,e$ **(D)** $\frac{1}{e}\,;\,e$

Exame Nacional 2016 (época especial)

183. O movimento de uma nave espacial é um movimento de propulsão provocado pela libertação de gases resultantes da queima e explosão de combustível. Um certo tipo de nave tem por função o transporte de carga destinada ao abastecimento de uma estação espacial. Designemos por x a massa, em milhares de toneladas, da carga transportada por uma nave desse tipo e por V a velocidade, em quilómetro por segundo, que essa mesma nave atinge no instante em que termina a queima do combustível. Considere

que V é dada, em função de x, por
$V(x)=3\ln\left(\frac{x+300}{x+60}\right) \quad (x\geq 0)$
Nos itens a) e b), a calculadora só pode ser utilizada em cálculos numéricos; sempre que proceder a arredondamentos, use duas casas decimais.

a) Admita que uma nave do tipo referido transporta uma carga de 25 mil toneladas. Determine quanto tempo demora essa nave a percorrer 200 quilómetros a partir do instante em que termina a queima do combustível, sabendo que a velocidade da nave se mantém constante a partir desse instante. Apresente o resultado em segundos, arredondado às unidades.

b) Determine qual deve ser a massa da carga transportada por uma dessas naves, de modo que atinja, após a queima da totalidade do combustível, uma velocidade de 3 quilómetros por segundo. Apresente o resultado em milhares de toneladas, arredondado às unidades.

Exame Nacional 2016 (época especial)

184. Seja f a função, de domínio $\left]-\frac{3\pi}{2},+\infty\right[$, definida por

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{4}x^2+\cos x & \text{se } -\frac{3\pi}{2}<x<0\\ \ln\left(e^x+x\right) & \text{se } x\geq 0\end{cases}$$

Resolva os itens a) e b) recorrendo a métodos analíticos, sem utilizar a calculadora.

a) Determine $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-x]$. Interprete o valor obtido em termos de assíntotas do gráfico de f.

b) Estude a função f quanto ao sentido das concavidades e quanto à existência de pontos de inflexão do seu gráfico, no intervalo $\left]-\frac{3\pi}{2},0\right[$. Na sua resposta, indique:
– o(s) intervalo(s) em que o gráfico de f tem concavidade voltada para baixo;
– o(s) intervalo(s) em que o gráfico de f tem concavidade voltada para cima;
– a(s) abcissa(s) do(s) ponto(s) de inflexão do gráfico de f

c) Na Figura 3, estão representados:
• parte do gráfico da função f
• um ponto A, pertencente ao gráfico de f, de abcissa *a*
• a reta t, tangente ao gráfico da função f no ponto A

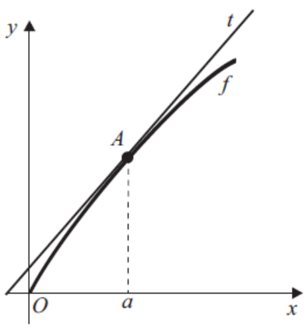


Figura 3

Sabe-se que:
• $a\in]0,1[$
• a reta t tem declive igual a 1,1

Determine, recorrendo à calculadora gráfica, a abcissa do ponto A. Na sua resposta:
– equacione o problema;
– reproduza, num referencial, o(s) gráfico(s) da(s) função(ões) que visualizar na calculadora, que lhe permite(m) resolver a equação;
– apresente a abcissa do ponto A arredondada às centésimas.

Exame Nacional 2016 (época especial)

185. Seja k um número real positivo. Considere a função g, de domínio]–k,+∞[, definida por g(x)=ln(x+k). Mostre que:
se $g(0)\times g(k)<0$, então $k\in\left]\frac{1}{2},1\right[$
Na resolução deste item, não utilize a calculadora.

Exame Nacional 2016 (época especial)

186. Na Figura 3, está representada uma secção de uma ponte pedonal que liga as duas margens de um rio. A ponte, representada pelo arco PQ, está suportada por duas paredes, representadas pelos segmentos de reta [OP] e [RQ]. A distância entre as duas paredes é 7 metros. O segmento de reta [OR] representa a superfície da água do rio.

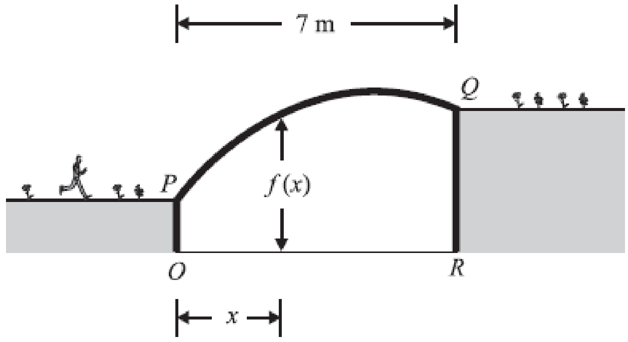


Figura 3

Considere a reta OR como um eixo orientado da esquerda para a direita, com origem no ponto O e em que uma unidade corresponde a 1 metro. Para cada ponto situado entre O e R, de abcissa x, a distância na vertical, medida em metros, desse
ponto ao arco PQ é dada por
$f(x)=9-2{,}5\left(e^{1-0{,}2x}+e^{0{,}2x-1}\right)$, com $x\in[0,7]$

Resolva os itens a) e b) recorrendo a métodos analíticos; utilize a calculadora apenas para efetuar eventuais cálculos numéricos.

a) Seja S o ponto pertencente ao segmento de reta [OR] cuja abcissa x verifica a equação $\sqrt{\left(f(0)\right)^2+x^2}=2$. Resolva esta equação, apresentando a solução arredondada às décimas, e interprete essa solução no contexto da situação descrita. Se, em cálculos intermédios, proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, duas casas decimais.

b) O clube náutico de uma povoação situada numa das margens do rio possui um barco à vela. Admita que, sempre que esse barco navega no rio, a distância do ponto mais alto do mastro à superfície da água é 6 metros. Será que esse barco, navegando no rio, pode passar por baixo da ponte? Justifique a sua resposta.

Exame Nacional 2017 (1.ª fase)

187. Seja g a função, de domínio R, definida por

$$g(x)=\begin{cases}\dfrac{1-x^2}{1-e^{x-1}} & \text{se } x<1\\ 2 & \text{se } x=1\\ 3+\dfrac{\operatorname{sen}(x-1)}{1-x} & \text{se } x>1\end{cases}$$

Resolva os itens a) e b) recorrendo a métodos analíticos, sem utilizar a calculadora.

a) Estude a função g quanto à continuidade no ponto 1

b) Resolva, no intervalo]4, 5[, a equação g(x) = 3

c) Na Figura 4, estão representados, num referencial o.n. xOy, parte do gráfico da função g e um triângulo [OAP].

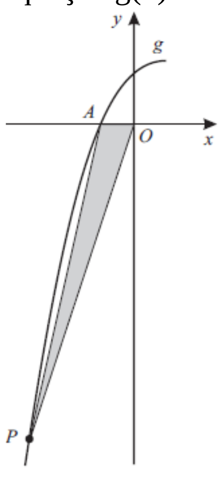


Figura 4

Sabe-se que:

- o ponto A é o ponto de abcissa negativa que é a intersecção do gráfico da função g com o eixo das abcissas;
- o ponto P é um ponto do gráfico da função g, de abcissa e ordenada negativas;
- a área do triângulo [OAP] é igual a 5

Determine, recorrendo à calculadora gráfica, a abcissa do ponto P

Apresente o valor obtido arredondado às décimas.

Na sua resposta:

— determine analiticamente a abcissa do ponto A

— equacione o problema;

— reproduza, num referencial, o(s) gráfico(s) da(s) função(ões) visualizado(s) na calculadora que lhe permite(m) resolver a equação.

Exame Nacional 2017 (1.ª fase)

188. Considere a função f, de domínio $\mathbb{R}^+$, definida por $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$ Resolva os itens a), b) e c) recorrendo a métodos analíticos, sem utilizar a calculadora.

a) Estude a função f quanto à existência de assíntotas do seu gráfico paralelas aos eixos coordenados.

b) Resolva a inequação f (x)>2 ln x. Apresente o conjunto solução usando a notação de intervalos de números reais.

c) Para um certo número real k, a função g, de domínio $\mathbb{R}^+$, definida por $g(x)=\dfrac{k}{x}+f(x)$, tem um extremo relativo para x = 1. Determine esse número k

Exame Nacional 2017 (2.ª fase)

189. Num jardim, uma criança está a andar num baloiço cuja cadeira está suspensa por duas hastes rígidas. Atrás do baloiço, há um muro que limita esse jardim. A Figura 4 esquematiza a situação. O ponto P representa a posição da cadeira.

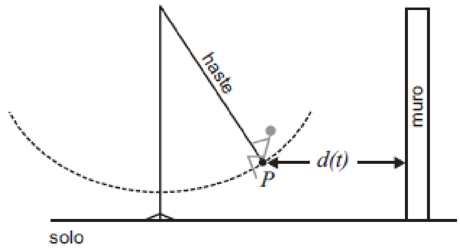


Figura 4

Num determinado instante, em que a criança está a dar balanço, é iniciada a contagem do tempo. Doze segundos após esse instante, a criança deixa de dar balanço e procura parar o baloiço arrastando os pés no chão. Admita que a distância, em decímetros, do ponto P ao muro, t segundos após o instante inicial, é dada por

$$d(t)=\begin{cases}30+t\operatorname{sen}(\pi t) & \text{se } 0\le t<12\\ 30+12e^{12-t}\operatorname{sen}(\pi t) & \text{se } t\ge 12\end{cases}$$

(o argumento da função seno está expresso em radianos)

a) Determine, recorrendo à calculadora gráfica, o número de soluções da equação d(t) = 27 no intervalo [0,6], e interprete o resultado no contexto da situação descrita. Na sua resposta, reproduza, num referencial, o(s) gráfico(s) da(s) função(ões) visualizado(s) na calculadora que lhe permite(m) resolver o problema.

b) Admita que, no instante em que é iniciada a contagem do tempo, as hastes do baloiço estão na vertical e que a distância do ponto P ao chão, nesse instante, é 4 dm. Treze segundos e meio após o instante inicial, a distância do ponto P ao chão é 4,2 dm. Qual é o comprimento da haste? Apresente o resultado em decímetros, arredondado às unidades. Se, em cálculos intermédios, proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, duas casas decimais.

Exame Nacional 2017 (2.ª fase)

190. Seja a um número real superior a 1. Qual é o valor de $4+\log_a\left(5^{\ln a}\right)$?

(A) $\ln(10e)$ (B) $\ln(5e^4)$ (C) $\ln(5e^2)$ (D) $\ln(20e)$

Exame Nacional 2017 (época especial)

191. Pretende-se eliminar um poluente diluído na água de um tanque de um viveiro. Para tal, é escoada água por um orifício na base do tanque e, em simultâneo, é vertida no tanque água não poluída, de tal modo que a quantidade total de água no tanque se mantém. Admita que a massa, p, de poluente, medida em gramas, t horas após o início do processo, é, para um certo número real positivo k, dada por $p(t)=120\,e^{-kt}\quad(t\geq 0)$. Resolva os itens a) e b) recorrendo exclusivamente a métodos analíticos. Na resolução do item b), pode utilizar a calculadora para efetuar eventuais cálculos numéricos.

a) Determine o valor de k, sabendo que, duas horas após o início do processo, a massa de poluente é metade da existente ao fim de uma hora. Apresente o resultado na forma ln a, com $a>1$.

b) Admita agora que k = 0,7. Determine a taxa média de variação da função p no intervalo [0,3] e interprete o resultado obtido no contexto da situação descrita. Apresente o valor da taxa média de variação arredondado às unidades. Se, em cálculos intermédios, proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, duas casas decimais.

Exame Nacional 2017 (época especial)

192. Seja f a função, de domínio $]1-\pi, +\infty[$, definida por

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{2x-2}{\operatorname{sen}(x-1)} & \text{se} \quad 1-\pi<x<1\\ 2 & \text{se} \quad x=1\\ e^{-2x+4}+\ln(x-1) & \text{se} \quad x>1\end{cases}$$

Resolva os itens a) e b) recorrendo exclusivamente a métodos analíticos, sem utilizar a calculadora.

a) Indique, justificando, se a seguinte afirmação é verdadeira ou é falsa. «A função f é contínua à esquerda no ponto 1, mas não é contínua à direita nesse ponto.»

b) Escreva a equação reduzida da reta tangente ao gráfico da função f no ponto de abcissa $1-\frac{\pi}{2}$

c) O gráfico da função f tem um único ponto de inflexão, cuja abcissa pertence ao intervalo]1, 2[. Determine, recorrendo à calculadora gráfica, a abcissa desse ponto.

Na sua resposta:

• reproduza, num referencial, o(s) gráfico(s) da(s) função(ões) visualizado(s) na calculadora que lhe permite(m) resolver o problema;

• apresente a abcissa do ponto de inflexão arredondada às centésimas.

Exame Nacional 2017 (época especial)

193. Um feixe de luz incide perpendicularmente sobre um conjunto de três placas sobrepostas, homogéneas e iguais, feitas de um material transparente. A Figura 3 ilustra a situação. Admita que a potência, L, da luz transmitida, após atravessar o conjunto de placas, é dada por

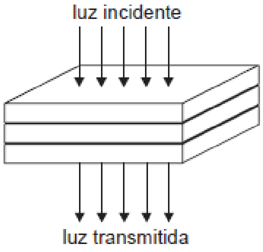


Figura 3

$L=I(1-R)^6e^{-3\lambda}$ em que:

• I é a potência da luz incidente;

• R é o coeficiente de reflexão do material ($0<R<1$)

• λ é o coeficiente de absorção do material, por centímetro ($\lambda>0$)

Relativamente ao material de que as placas são feitas, sabe-se que o coeficiente de reflexão, R, e o coeficiente de absorção, λ, têm o mesmo valor numérico. Sabe-se ainda que a potência da luz transmitida é igual a metade da potência da luz incidente. Determine, recorrendo à calculadora gráfica, o valor comum dos coeficientes de absorção e de reflexão do material, sabendo-se que esse valor existe e é único. Não justifique a validade do resultado obtido na calculadora. Na sua resposta:

— equacione o problema;

— reproduza, num referencial, o(s) gráfico(s) da(s) função(ões) visualizado(s) na calculadora que lhe permite(m) resolver a equação;

— apresente o valor pedido arredondado às milésimas.

Exame Nacional 2018 (1.ª fase)

194. Seja k um número real. Considere a sucessão convergente (u_n) definida por $u_n=\left(\frac{n+k}{n}\right)^n$. Sabe-se que o limite de (u_n) é solução da equação $\ln\left(\frac{x}{e}\right)=3$. Qual é o valor de k ?

(A) $\frac{1}{4}$ (B) 3 (C) $\frac{1}{3}$ (D) 4

Exame Nacional 2018 (1.ª fase)

195. Sejam a e b números reais superiores a 1 tais que $\ln b = 4\ln a$. Determine o conjunto dos números reais que são soluções da inequação $a^x \geq b^{\frac{1}{x}}$ Apresente a resposta usando a notação de intervalos de números reais.

Exame Nacional 2018 (1.ª fase)

196. Seja g a função, de domínio $]-\infty,\pi]$, definida por

$$g(x)=\begin{cases} \dfrac{e^{2x}-1}{4x} & \text{se } x<0 \\ \dfrac{1}{2-\operatorname{sen}(2x)} & \text{se } 0\leq x\leq \pi \end{cases}$$

a) Qual das afirmações seguintes é verdadeira?
(A) A função g não tem zeros.
(B) A função g tem um único zero.
(C) A função g tem exatamente dois zeros.
(D) A função g tem exatamente três zeros.

b) Averigue se a função g é contínua no ponto 0. Justifique a sua resposta.

c) Estude a função g quanto à monotonia no intervalo $]0,\pi]$ e determine, caso existam, os extremos relativos.

Exame Nacional 2018 (1.ª fase)

197. Na Figura 5, está representada, num referencial o.n. xOy, parte do gráfico da função h, de domínio $\mathbb{R}^+$, definida por $h(x)=\dfrac{\ln x}{x}$. Para cada número real a pertencente ao intervalo $\left[\frac{1}{2},1\right]$, sejam P e Q os pontos do gráfico da função h de abcissas a e $2a$, respetivamente. Tal como a figura sugere, a reta PQ define, com os eixos coordenados, um triângulo retângulo. Mostre que existe, pelo menos, um número real a pertencente ao intervalo $\left[\frac{1}{2},1\right]$ para o qual esse triângulo é isósceles.

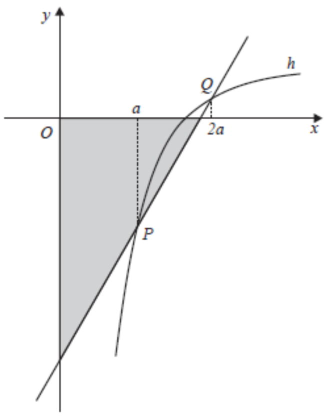


Figura 5

Sugestão: comece por identificar o valor do declive da reta PQ para o qual o triângulo é isósceles.

Exame Nacional 2018 (1.ª fase)

198. Qual é o valor do limite da sucessão de termo geral $\left(\dfrac{n+5}{n+1}\right)^{\frac{n}{2}}$?

(A) $+\infty$ (B) 1 (C) e^4 (D) e^2

Exame Nacional 2018 (2.ª fase)

199. Determine o conjunto dos números reais que são soluções da inequação

$$\log_2(x+1)\leq 3-\log_2(8-x)$$

Apresente a resposta usando a notação de intervalos de números reais.

Exame Nacional 2018 (2.ª fase)

200. Seja f a função, de domínio $\mathbb{R}$, definida por

$$f(x)=\begin{cases} 3+\dfrac{e^x}{1-x} & \text{se } x<1 \\ \dfrac{\ln(x^2)+2}{x} & \text{se } x\geq 1 \end{cases}$$

a) Determine f ’(0), recorrendo à definição de derivada de uma função num ponto.

b) Estude a função f quanto à existência de assíntotas horizontais do seu gráfico.

c) Seja h a função, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $h(x)=x+1$. Qual é o valor de $(f\circ h^{-1})(2)$?
(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3

Exame Nacional 2018 (2.ª fase)

201. Na cidade de Saint Louis, nos Estados Unidos, existe um monumento em forma de arco conhecido como Portal do Oeste. No ponto mais elevado desse arco, encontra-se um miradouro ao qual se acede por um ascensor. A Figura 1 é uma fotografia dessa estrutura, e a Figura 2 representa um esquema do arco.


Figura 1

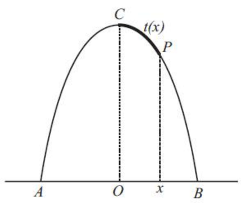


Figura 2

Relativamente à Figura 2, sabe-se que:
• os pontos A e B representam a intersecção do arco com o solo;
• o ponto O é o ponto médio de [AB]
• o ponto C representa o miradouro, e a reta OC é um eixo de simetria do arco.

Considere a reta AB como um eixo orientado da esquerda para a direita, com origem no ponto O e em que uma unidade corresponde a um metro. Admita que o ascensor se está a deslocar no arco CB, do miradouro C para o ponto B. Para cada ponto P, de abcissa x, situado no arco CB, o tempo que o ascensor demora a percorrer o arco CP é dado, em minutos, por $t(x) = 0{,}34(e^{0{,}0257x} - e^{-0{,}0257x})$, com $x \in [0,96]$. Num certo instante, o ascensor encontra-se num ponto F (não coincidente com o ponto C), a uma certa distância da reta OC. Passado algum tempo, o ascensor encontra-se num ponto G. A Figura 3 ilustra a situação. Sabe-se que:

• a distância do ponto G à reta OC é igual ao triplo da distância do ponto F à mesma reta;

• o tempo que o ascensor demora a percorrer o arco que vai de F até G é igual ao triplo do tempo que demora a percorrer o arco que vai de C até F.

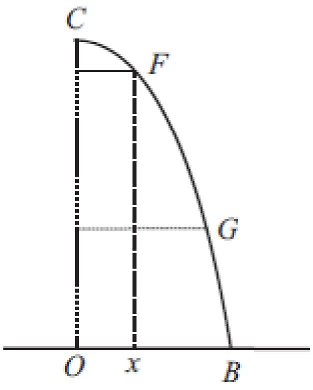


Figura 3

Determine, recorrendo à calculadora gráfica, a distância, x, em metros, do ponto F à reta OC. Na sua resposta:

— equacione o problema;

— reproduza, num referencial, o(s) gráfico(s) da(s) função(ões) visualizado(s) na calculadora que lhe permite(m) resolver a equação;

— apresente o valor da distância pedida arredondado às décimas.

Exame Nacional 2018 (época especial)

202. Qual é o valor do limite da sucessão $\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{2n}$?

(A) 1 (B) e (C) e^2 (D) $+\infty$

Exame Nacional 2018 (época especial)

203. Considere a função f, de domínio $\mathbb{R}^+$, definida por $f(x) = x^3 + 6 \ln x$. Estude a função f quanto ao sentido das concavidades do seu gráfico e quanto à existência de pontos de inflexão.

Na sua resposta, apresente:

— o(s) intervalo(s) em que o gráfico de f tem concavidade voltada para baixo;

— o(s) intervalo(s) em que o gráfico de f tem concavidade voltada para cima;

— as coordenadas do(s) ponto(s) de inflexão do gráfico de f

Exame Nacional 2018 (época especial)

204. Seja h a função, de domínio $\left[-\frac{\pi}{3}, +\infty\right[$, definida por

$$h(x) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen}^2 x}{\operatorname{sen}(x^2)} & \text{se} \quad -\dfrac{\pi}{3} \le x < 0 \\ \dfrac{e^x}{x+1} & \text{se} \quad x \ge 0 \end{cases}$$

a) Mostre que a função h é contínua no ponto 0

b) Estude a função h quanto à existência de assíntotas do seu gráfico.

c) Qual das seguintes afirmações é verdadeira?

(A) A função h é estritamente decrescente em $[0, +\infty[$

(B) A função h é estritamente crescente em $[0, +\infty[$

(C) A função h tem um máximo para x = 1

(D) A função h tem um mínimo para x = 1

Exame Nacional 2018 (época especial)

205. Qual é o limite da sucessão de termo geral $\left(\frac{n-2}{n}\right)^{3n}$?

(A) $\frac{1}{e^3}$ (B) e^3 (C) $\frac{1}{e^6}$ (D) e^6

Exame Nacional 2019 (1.ª fase)

206. Sejam *a* e b dois números reais positivos tais que a>b. Sabe-se que $a+b=2(a-b)$. Qual é o valor, arredondado às décimas, de $\ln(a^2-b^2)-2\ln(a+b)$?

(A) 0,7 (B) 1,4 (C) −0,7 (D) −1,4

Exame Nacional 2019 (1.ª fase)

207. Seja f a função, de domínio $\mathbb{R}$, definida por

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1-\cos x}{x} & \text{se} \quad x < 0 \\ 0 & \text{se} \quad x = 0 \\ \dfrac{x}{x - \ln x} & \text{se} \quad x > 0 \end{cases}$$

a) Determine a equação reduzida da reta tangente ao gráfico da função f no ponto de abcissa 1.

b) Averigue se a função f é contínua no ponto 0. Justifique a sua resposta.

Exame Nacional 2019 (1.ª fase)

208. Seja g a função, de domínio $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ definida por

$$g(x) = \frac{e^{-x}}{x}.$$

a) Estude a função g quanto à monotonia e determine, caso existam, os extremos relativos.

b) Seja h a função, de domínio $\mathbb{R}^+$, definida por $h(x)=g(x)+2x-\dfrac{1}{\sqrt{x}}$. Sabe-se que o gráfico da função h tem uma assíntota oblíqua.
Qual é o declive dessa assíntota?
(A) 1 (B) 2 (C) *e* (D) e^2

Exame Nacional 2019 (1.ª fase)

209. O nível, N, de um som, medido em decibéis, é função da sua intensidade, I , medida em microwatt por metro quadrado ($\mu W/m^2$), de acordo com a igualdade $N=60+10\log_{10} I$, com $I>0$
Relativamente ao som de um certo despertador, sabe-se que, aumentando a sua intensidade em 150 $\mu W/m^2$, o seu nível passa a ser 1,4% do quadrado do nível inicial. Determine, recorrendo à calculadora gráfica, o valor da intensidade inicial do som desse despertador, sabendo-se que pertence ao intervalo [20,80] e que, neste intervalo, esse valor é único. Não justifique a validade do resultado obtido na calculadora. Na sua resposta:
— apresente uma equação que lhe permita resolver o problema;
— reproduza o(s) gráfico(s) da(s) função(ões) visualizado(s) na calculadora que lhe permite(m) obter o
valor pedido;
— apresente esse valor em $\mu W/m^2$, arredondado às unidades.

Exame Nacional 2019 (2.ª fase)

210. Para um certo número real k , é contínua em $\mathbb{R}$ a função f, definida por
$$f(x)=\begin{cases}\log_3 k & \text{se } x=1\\ \dfrac{x^2-1}{x-1} & \text{se } x\neq 1\end{cases}$$
Qual é o valor de k ?
(A) 5 (B) 6 (C) 8 (D) 9

Exame Nacional 2019 (2.ª fase)

211. Qual é, para qualquer número real positivo *a*, o limite da sucessão $\left(\dfrac{n+\ln a}{n}\right)^{n+2}$?

(A) a^2 (B) $2a$ (C) a (D) $\sqrt{a}$

Exame Nacional 2019 (2.ª fase)

212. Considere a função h, de domínio $\mathbb{R}\backslash\{1\}$, definida por $h(x)=\dfrac{e^x}{x-1}$

a) Estude a função h quanto à existência de assíntotas do seu gráfico paralelas aos eixos coordenados e, caso existam, escreva as suas equações.

b) Resolva, em $\mathbb{R}\backslash\{1\}$, a equação $(x-1)\times h(x)+2e^{-x}=3$

Exame Nacional 2019 (2.ª fase)

213. Na Figura 2, estão representadas, em referencial o.n. xOy,

- parte do gráfico da função f, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $f(x)=e^x$
- parte do gráfico da função g, de domínio $\mathbb{R}^+$, definida por $g(x)=\dfrac{\ln x}{x}$

Considere que um ponto A se desloca no primeiro quadrante sobre o gráfico da função g. Para cada posição do ponto A, seja B o ponto do gráfico da função f cuja abcissa é igual à do ponto A

Seja a $(a>1)$ a abcissa comum dos pontos A e B

Determine, recorrendo às capacidades gráficas da calculadora, o valor de a para o qual a área do triângulo $[OAB]$ é igual a 5, sabendo-se que esse valor existe e é único.

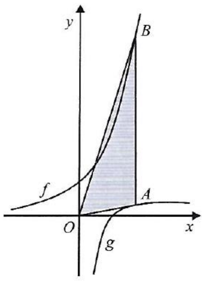


Figura 2

Não justifique a validade do resultado obtido na calculadora.

Na sua resposta:
- apresente uma equação que lhe permita resolver o problema;
- reproduza, num referencial, o(s) gráfico(s) da(s) função(ões) visualizado(s) na calculadora que lhe permite(m) resolver a equação;
- apresente o valor de a arredondado às décimas.

Exame Nacional 2019 (época especial)

214. Considere a função f de domínio $\mathbb{R}^+$, definida por f(x)=ln*x*. Seja (u_n) a sucessão de termo geral $u_n=\left(\dfrac{n+2}{n}\right)^{\frac{n}{4}}$. Qual é o valor de lim f(u_n)?

(A) 4 **(B)** 2 **(C)** $\frac{1}{2}$ **(D)** $\frac{1}{4}$

Exame Nacional 2019 (época especial)

215. Seja g a função, de domínio $\mathbb{R}$, definida por
$$g(x)=\begin{cases}x\ln(1-x) & \text{se } x\leq 0\\ \dfrac{1-3x}{1-e^{-x}} & \text{se } x>0\end{cases}$$

a) Qual é o declive da reta tangente ao gráfico de g no ponto de abcissa –1?

(A) $0{,}5+\ln 2$ **(B)** $-0{,}5+\ln 2$

(C) $0{,}5-\ln 2$ **(D)** $-0{,}5-\ln 2$

b) O gráfico de g tem uma assíntota oblíqua, quando $x \to +\infty$. Determine a equação reduzida dessa assíntota.

Exame Nacional 2019 (época especial)

216. Considere a sucessão (u_n) de termo geral $u_n = \frac{8n-4}{n+1}$. Seja f a função, de domínio $]-\infty,8[$, definida por $f(x)=\log_2(8-x)$. A que é igual $\lim f(u_n)$?
(A) $-\infty$ (B) 0 (C) 1 (D) $+\infty$

Exame Nacional 2020 (1.ª fase)

217. Seja f a função definida em $]-\infty,2]$ por $f(x)=x+\ln(e^x+1)$. Resolva os itens a) e b) sem recorrer à calculadora.
a) O gráfico de f tem uma assíntota oblíqua. Determine uma equação dessa assíntota.
b) A equação $f(x)=2x+1$ tem uma única solução. Determine essa solução e apresente-a na forma $-\ln k$, com $k > 0$.
c) Seja h a função definida em $]-\infty,2]$ por $h(x)=f(x)-x$. Qual das expressões seguintes pode ser a expressão analítica da função h^{-1}, função inversa de h ?
(A) $e^x - 1$ (B) $1 - e^x$ (C) $\ln(e^x - 1)$ (D) $\ln(1 - e^x)$

Exame Nacional 2020 (1.ª fase)

218. Seja g a função, de domínio $\mathbb{R}$, definida por

$$g(x)=\begin{cases} 1+\dfrac{\operatorname{sen} x}{1-e^x} & \text{se } x<0 \\ 0 & \text{se } x=0 \\ x^2\ln x & \text{se } x>0 \end{cases}$$

Resolva os itens a) e b) sem recorrer à calculadora.
a) Averigue se a função g é contínua em $x = 0$.
b) Estude a função g quanto à monotonia em $]0,+\infty[$ e determine, caso existam, os extremos relativos. Na sua resposta, apresente o(s) intervalo(s) de monotonia.

Exame Nacional 2020 (1.ª fase)

219. Seja h a função, de domínio $]-\infty,4[$, definida por

$$h(x)=\begin{cases} 1+x\,e^{x-1} & \text{se } x\le 1 \\ \dfrac{\sqrt{x}-1}{\operatorname{sen}(x-1)} & \text{se } 1<x<4 \end{cases}$$

Resolva os itens a) e b) sem recorrer à calculadora.
a) Averigue se a função h é contínua em $x = 1$
b) Mostre que o gráfico da função h tem uma assíntota horizontal e apresente uma equação dessa assíntota.

Exame Nacional 2020 (2.ª fase)

220. Seja f uma função, de domínio $]0,+\infty[$, cuja derivada, f´, de domínio $]0,+\infty[$, é dada por

$$f'(x)=\frac{2+\ln x}{x}$$

a) Resolva este item sem recorrer à calculadora. Estude a função f quanto ao sentido das concavidades do seu gráfico e quanto à existência de pontos de inflexão.
Na sua resposta, apresente:
— o(s) intervalo(s) em que o gráfico de f tem concavidade voltada para baixo;
— o(s) intervalo(s) em que o gráfico de f tem concavidade voltada para cima;
— a(s) abcissa(s) do(s) ponto(s) de inflexão do gráfico de f
b) Qual é o valor de $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-f(1)}{1-x^2}$?
(A) -2 (B) -1 (C) 0 (D) 2

Exame Nacional 2020 (2.ª fase)

221. Seja f a função, de domínio $\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$, definida por $f(x)=\dfrac{e^{2x}-1}{\operatorname{tg} x}$. Mostre que o gráfico da função f não tem assíntotas.

Exame Nacional 2020 (época especial)

222. Para um certo número real k , seja g a função, de domínio $\mathbb{R}$, definida por

$$g(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2-x}{k-kx} & \text{se } x<1 \\ x^2-10+8\ln x & \text{se } x\ge 1 \end{cases}$$

a) Sabe-se que g é contínua no ponto 1. Qual é o valor de k ?
(A) 1/6 (B) 1/7 (C) 1/8 (D) 1/9
b) Estude, sem recorrer à calculadora, a função g quanto ao sentido das concavidades do seu gráfico e quanto à existência de pontos de inflexão no intervalo $]1,+\infty[$. Na sua resposta, apresente:
— o(s) intervalo(s) em que o gráfico de g tem concavidade voltada para baixo;
— o(s) intervalo(s) em que o gráfico de g tem concavidade voltada para cima;
— a(s) abcissa(s) do(s) ponto(s) de inflexão do gráfico de g , caso este(s) exista(m).
c) Mostre, recorrendo a métodos exclusivamente analíticos, que a função g tem, pelo menos, um zero no intervalo $]\sqrt{e},e[$.

Exame Nacional 2020 (época especial)

223. Seja f a função, de domínio $]0,+\infty[$, definida por

$$f(x)=\begin{cases} -x^2(1+2\ln x) & \text{se} \quad 0<x\leq 1 \\ \dfrac{5-5e^{x-1}}{x^2+3x-4} & \text{se} \quad x>1 \end{cases}$$

Resolva os itens a) e b) sem recorrer à calculadora.

a) Averigue se a função f é contínua em x = 1

b) Estude, no intervalo]0,1[, a função f quanto à monotonia e quanto à existência de extremos relativos, e determine, caso existam, esses extremos. Na sua resposta, apresente o(s) intervalo(s) de monotonia.

Exame Nacional 2021 (1.ª fase)

224. Resolva este item sem recorrer à calculadora.

Seja h a função, de domínio $\mathbb{R}^+$, definida por

$$h(x)=\frac{x^3}{2x^2-\ln x}$$ Estude a função h quanto à existência de assíntota oblíqua ao seu gráfico e, caso esta exista, escreva a sua equação reduzida.

Exame Nacional 2021 (1.ª fase)

225. Determine, sem recorrer à calculadora, os números reais que são solução da equação $\ln\left((1-x)e^{x-1}\right)=x$

Exame Nacional 2021 (1.ª fase)

226. Seja f a função, de domínio $\mathbb{R}$, definida por

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{x-e^{-x}}{x} & \text{se} \quad x<0 \\ \dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x+1}-3 & \text{se} \quad x\geq 0 \end{cases}$$

Resolva os itens a) e b) sem recorrer à calculadora.

a) Estude a função f quanto à existência de assíntotas horizontais ao seu gráfico e, caso estas existam, escreva as respetivas equações.

b) Determine a equação reduzida da reta tangente ao gráfico da função f no ponto de abcissa −2.

Exame Nacional 2021 (2.ª fase)

227. Num laboratório cuja temperatura ambiente é constante, aqueceu-se uma substância até atingir uma certa temperatura, superior à temperatura ambiente, e, a seguir, deixou-se arrefecer essa substância durante uma hora. Admita que a temperatura dessa substância, em graus Celsius, t minutos após o início do arrefecimento, é dada por

$T(t)=20+100e^{-kt}, \quad 0\leq t\leq 60$ em que k é uma constante real positiva.

a) Durante o arrefecimento, houve um instante t_1 em que a temperatura da substância foi 30 ºC. Qual é o valor de k ?

(A) $\ln\left(\frac{10}{t_1}\right)$ **(B)** $t_1-\ln 10$ **(C)** $\frac{\ln 10}{t_1}$ **(D)** $t_1+\ln 10$

b) Considere k = 0,04. Sabe-se que, durante os primeiros t2 minutos, a taxa média de variação da função T foi igual a −2,4. Determine, recorrendo às capacidades gráficas da calculadora, o valor de t_2, sabendo que esse valor existe e é único. Apresente o resultado em minutos e segundos (segundos arredondados às unidades). Não justifique a validade do resultado obtido na calculadora. Na sua resposta:

— apresente uma equação que lhe permita resolver o problema;

— reproduza, num referencial, o(s) gráfico(s) da(s) função(ões) visualizado(s) na calculadora que lhe permite(m) resolver a equação, e apresente a(s) abcissa(s) do(s) ponto(s) relevante(s) arredondada(s) às milésimas.

Se, nos cálculos intermédios, proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, três casas decimais.

Exame Nacional 2021 (2.ª fase)

228. Resolva este item sem recorrer à calculadora.
Considere, para um certo número real k, a função g, de domínio $\mathbb{R}\backslash\{0\}$, definida por

$$g(x)=\begin{cases} \dfrac{x^3-x}{x^2-x}+k & \text{se} \quad x<0 \\ 2+x\ln x & \text{se} \quad x>0 \end{cases}$$

Sabe-se que existe $\lim\limits_{x\to 0} g(x)$ Determine o valor de k.

Exame Nacional 2021 (2.ª fase)

229. Determine, sem recorrer à calculadora, os números reais que são solução da equação

$$x\ln(1-x)-\ln(1-x)=(1-x)\ln(3-2x)$$

Exame Nacional 2021 (2.ª fase)

230. Seja f a função, de domínio $\mathbb{R}$, definida por

$$f(x)=\begin{cases} x-2+\ln(3-2x) & \text{se} \quad x\leq 1 \\ \dfrac{\operatorname{sen}(x-1)}{1-x^2}+k & \text{se} \quad x>1 \end{cases}$$

(k é um número real)

Resolva os itens a) e b) sem recorrer à calculadora.

a) Determine k , sabendo que a função f é contínua em x = 1

b) Estude, no intervalo $]-\infty,1[$, a função f quanto à monotonia e quanto à existência de extremos relativos, e determine, caso existam, esses extremos. Na sua resposta, apresente o(s) intervalo(s) de monotonia.

Exame Nacional 2021 (época especial)

231. Seja g a função, de domínio $]0,\pi/2[$ definida por

$$g(x)=\log_2(1-\cos x)+\log_2(1+\cos x)+2\log_2(2\cos x)$$

Mostre que $g(x)=2\log_2(\text{sen}(2x))$

Exame Nacional 2021 (época especial)

232. Para conhecer a variação do número de bactérias de uma determinada estirpe, colocou-se num tubo de ensaio fechado, com alguns nutrientes, um certo número de bactérias dessa estirpe. Admita que, nessas condições, o número, N, em milhares, de bactérias vivas existentes no tubo, t horas após a sua colocação nesse tubo, é dado por

$$N(t)=N_0\,e^{1{,}08t-0{,}3t^2}$$

em que N_0 representa a dimensão, em milhares, da população inicial.

a) Com o decorrer do tempo, para que tende o número de bactérias vivas existentes no tubo?

(A) $+\infty$ (B) $0{,}78N_0$ (C) N_0 (D) 0

b) Considere $N_0 = 1{,}63$. Num certo instante, t_1, havia, no tubo de ensaio, mais meio milhar de bactérias vivas do que uma hora antes desse instante. Determine, recorrendo à calculadora, o valor de t_1, sabendo que este valor existe e é único. Apresente o resultado em horas e minutos (minutos arredondados às unidades). Não justifique a validade do resultado obtido na calculadora. Na sua resposta:

— apresente uma equação que lhe permita resolver o problema;

— reproduza, num referencial, o(s) gráfico(s) da(s) função(ões) visualizado(s) na calculadora que lhe permite(m) resolver a equação, e apresente as coordenadas do(s) ponto(s) relevante(s) arredondadas às milésimas.

Exame Nacional 2021 (época especial)

233. Seja f a função, de domínio $\mathbb{R}$, definida por

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-4}{x^2-5x+6} & \text{se } x\le 1\\[2ex] \dfrac{x-1}{e^{x-2}} & \text{se } x>1\end{cases}$$

Estude, sem recorrer à calculadora, a função f quanto à existência de assíntotas horizontais ao seu gráfico e, caso existam, escreva as suas equações.

Exame Nacional 2021 (época especial)

234. Determine, sem recorrer à calculadora, o conjunto dos números reais que verificam a condição

$$e^{-x}\left(4+e^{2x}\right)\ge 5 \ \wedge\ -2\le x\le 2$$

Apresente a sua resposta na forma de intervalo ou de reunião de intervalos de números reais.

Exame Nacional 2021 (época especial)

235. Seja f a função, de domínio $\mathbb{R}\backslash\{-2\}$, definida por

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{e^{2-x}}{x+2} & \text{se } x<-2 \vee x\ge 2\\[2ex] \dfrac{\text{sen}(x-2)}{x^2-4} & \text{se } -2<x<2\end{cases}$$

Resolva os itens sem recorrer à calculadora.

a) Averigue se a função f é contínua em x = 2 .

b) Estude a função f quanto à monotonia e quanto à existência de extremos relativos, no intervalo $]-\infty,-2[$, e determine esses extremos, caso existam. Na sua resposta, apresente o(s) intervalo(s) de monotonia.

Exame Nacional 2022 (1.ª fase)

236. Na Figura 4, está representado um cabo suspenso pelas suas extremidades em dois postes iguais, distanciados 10 metros entre si. Os postes estão instalados perpendicularmente ao solo, num terreno plano e horizontal. O ponto do cabo mais próximo do solo é equidistante dos dois postes.

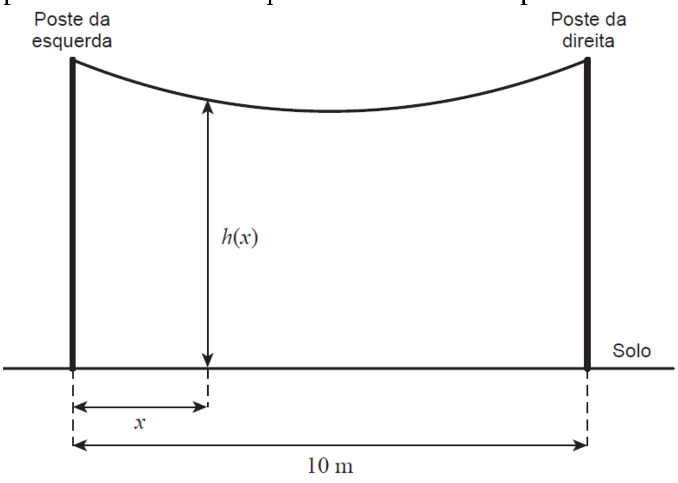


Figura 4

Seja h a função, de domínio [0,10] , definida por

$$h(x)=6{,}3\left(e^{\frac{x-5}{12{,}6}}+e^{\frac{5-x}{12{,}6}}\right)-7{,}6$$

. Admita que h(x) é a altura, relativamente ao solo, em metros, de um ponto do cabo situado a x metros do poste da esquerda.

a) Qual é a distância, arredondada às décimas de metro, da base do poste da esquerda ao ponto do cabo que está mais próximo do solo?

(A) 7,1 m (B) 7,3 m (C) 7,6 m (D) 7,8 m

b) Para um ponto do cabo situado a d metros do poste da esquerda, verifica-se que, diminuindo 50% essa distância, a altura, relativamente ao solo, diminui 30 centímetros. Determine, recorrendo à calculadora, o valor de d , sabendo-se que este valor existe e é único. Apresente o resultado arredondado às décimas de metro. Não justifique a validade do resultado obtido na calculadora. Na sua resposta:

— apresente uma equação que lhe permita resolver o problema;

— reproduza, num referencial, o(s) gráfico(s) da(s) função(ões) visualizado(s) na calculadora que lhe permite(m) resolver a equação e apresente a(s) coordenada(s) do(s) ponto(s) relevante(s) arredondada(s) às centésimas.

Exame Nacional 2022 (1.ª fase)

237. Resolva este item sem recorrer à calculadora. Seja g a função, de domínio]1,+∞[, definida por $g(x)=5x-3\ln(x-1)$. Estude a função g quanto à existência de assíntotas verticais e de assíntotas oblíquas ao seu gráfico e, caso existam, escreva as respetivas equações.

Exame Nacional 2022 (1.ª fase)

238. Resolva este item sem recorrer à calculadora. Determine os números reais que são solução da equação $(e^x-1)\ln(5-2x)+e^x\ln(3-x)=\ln(3-x)$

Exame Nacional 2022 (1.ª fase)

239. Resolva este item sem recorrer à calculadora. Seja f a função, de domínio ℝ, definida por

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1-\cos x}{x} & \text{se} \quad x<0\\ \ln\sqrt{e+x} & \text{se} \quad x\geq 0\end{cases}$$

Averigue se a função f é contínua em x = 0 .

Exame Nacional 2022 (2.ª fase)

240. Seja g uma função derivável, de domínio $]-\infty,\pi[\setminus\{0\}$, cuja derivada, g' , é dada por

$$g'(x)=\begin{cases}3e^{2x}-7e^x & \text{se} \quad x<0\\ x+2\cos^2 x & \text{se} \quad 0<x<\pi\end{cases}$$

Resolva os itens sem recorrer à calculadora.

a) Estude a função g quanto ao sentido das concavidades do seu gráfico e quanto à existência de pontos de inflexão, no intervalo]0,π[. Na sua resposta, apresente:

– o(s) intervalo(s) em que o gráfico de g tem concavidade voltada para baixo;

– o(s) intervalo(s) em que o gráfico de g tem concavidade voltada para cima;

– a(s) abcissa(s) do(s) ponto(s) de inflexão do gráfico de g.

b) Considere, em referencial o.n. Oxy , o gráfico da função g. Determine, no intervalo]–∞,0[, a abcissa do ponto do gráfico da função g em que a reta tangente ao gráfico da função é paralela à reta de equação y=-2x .

Exame Nacional 2022 (2.ª fase)

241. Resolva este item sem recorrer à calculadora. Seja h a função, de domínio]0,+∞[, definida por $h(x)=\dfrac{e^x+\ln x}{e^x-1}$. Estude a função h quanto à existência de assíntotas ao seu gráfico paralelas aos eixos coordenados e, caso estas existam, escreva as respetivas equações.

Exame Nacional 2022 (2.ª fase)

242. Seja k um número natural. Qual é o limite da sucessão (u_n) definida por $u_n=\left(\dfrac{n+k}{n}\right)^n$?

(A) 1 (B) $+\infty$ (C) e^k (D) e^{-k}

Exame Nacional 2022 (época especial)

243. Seja f a função, de domínio ℝ, definida por

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{3x}{e^{5x}-1} & \text{se} \quad x\neq 0\\ \dfrac{3}{5} & \text{se} \quad x=0\end{cases}$$

Averigue, sem recorrer à calculadora, se a função f é contínua em x = 0.

Exame Nacional 2022 (época especial)

244. Seja g a função, de domínio ℝ, definida por $g(x)=\ln(1+e^x)-x$. Resolva os itens sem recorrer à calculadora.

a) O gráfico de g tem uma assíntota oblíqua, quando x tende para -∞, e tem uma assíntota horizontal, quando x tende para +∞. Determine uma equação de cada uma dessas assíntotas.

b) Num referencial o.n. Oxy , seja r a reta tangente ao gráfico de g no ponto de abcissa 0. Sejam A e B os pontos de intersecção da reta r com os eixos coordenados. Mostre que a área do triângulo [OAB] é igual a $(\ln 2)^2$.

Exame Nacional 2022 (época especial)

245. Seja g uma função, de domínio $\mathbb{R}^+$, cuja derivada, de domínio $\mathbb{R}^+$, é definida por $g'(x)=\dfrac{x-e^{3x}}{x}$. Estude, sem recorrer à calculadora, a função g quanto ao sentido das concavidades do seu gráfico e quanto à existência de pontos de inflexão.
Na sua resposta, apresente:
— o(s) intervalo(s) em que o gráfico de g tem concavidade voltada para baixo;
— o(s) intervalo(s) em que o gráfico de g tem concavidade voltada para cima;
— a(s) abcissa(s) do(s) ponto(s) de inflexão do gráfico de g.

Exame Nacional 2022 (época especial)

246. Determine, sem recorrer à calculadora, o conjunto dos números reais que são solução da equação $\frac{1}{2}\log_2(9x+1)=\log_2(6x)$

Exame Nacional 2022 (época especial)

247. Seja k um número real positivo. Considere a função f, de domínio]0,+∞[, definida por $f(x)=\sqrt{kx}-\ln(kx)$. Determine, sem recorrer à calculadora, o contradomínio da função f.

Exame Nacional 2022 (época especial)

248. Qual é o limite da sucessão de termo geral $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{2n}$?

(A) 1 **(B)** $2e$ **(C)** e^2 **(D)** $+\infty$

Exame Nacional 2023 (1.ª fase)

249. Resolva este item sem recorrer à calculadora.
Seja f uma função diferenciável, de domínio $\mathbb{R}$, cuja derivada, f ‘, é dada por $f'(x)=-2xe^{1-x^2}$ Estude a função f quanto ao sentido das concavidades do seu gráfico e quanto à existência de pontos de inflexão.
Na sua resposta, apresente:
– o(s) intervalo(s) em que o gráfico de f tem concavidade voltada para baixo;
– o(s) intervalo(s) em que o gráfico de f tem concavidade voltada para cima;
– a(s) abcissa(s) do(s) ponto(s) de inflexão do gráfico de f , caso este(s) exista(m).

Exame Nacional 2023 (1.ª fase)

250. Considere a função g, de domínio $\mathbb{R}$, definida por

$$g(x)=\begin{cases}\dfrac{4x-4}{e^{x-1}-1} & \text{se } x<1\\[2ex] 7\times 3^{x-1}-3 & \text{se } x\geq 1\end{cases}$$

Resolva os itens a) e b) sem recorrer à calculadora.

a) Averigue se a função g é contínua em x = 1 .

b) Resolva, no intervalo [1,+∞[, a equação $\log_3(g(x))=x+\log_3 2$.

Exame Nacional 2023 (1.ª fase)

251. Uma empresa está a desenvolver um programa de testes para melhorar a propulsão de foguetes.
Os foguetes utilizados partem do solo e seguem uma trajetória vertical. Em relação a um dos modelos de foguete utilizados, admita que, após o lançamento e até se esgotar o combustível, a sua distância ao solo, a , em metros, é dada, a cada instante t , em segundos, por
$a(t)=100\left[t+(10-t)\ln\left(1-\frac{t}{10}\right)\right]-4{,}9t^2$, com $t\in[0,8]$
Determine, utilizando a calculadora gráfica, o instante a partir do qual, durante 3 segundos, esse foguete percorre 25 metros. Apresente o resultado em segundos, arredondado às décimas. Não justifique a validade do resultado obtido na calculadora. Na sua resposta:
– apresente uma equação que lhe permita resolver o problema;
– represente, num referencial, o(s) gráfico(s) da(s) função(ões) visualizado(s) na calculadora e assinale o(s) ponto(s) relevante(s), que lhe permitem resolver a equação.

Exame Nacional 2023 (1.ª fase)

252. Seja (u_n) uma sucessão tal que $\lim u_n = 0$. Qual das expressões seguintes pode ser termo geral de (u_n)?

(A) $\left(1-\frac{2}{n}\right)^n$ **(B)** $-\frac{n^2+1}{n}$ **(C)** $\frac{4n+3}{3n+4}$ **(D)** $\frac{(-1)^n}{n}$

Exame Nacional 2023 (2.ª fase)

253. Seja f uma função, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $f(x)=a+e^{bx}$, em que *a* e b são números reais.

Sabendo que o gráfico da função f contém os pontos de coordenadas (1,5) e (2,7), determine os valores de *a* e de b.

Exame Nacional 2023 (2.ª fase)

254. Para fazer obras de remodelação das instalações, uma pequena empresa pretende pedir um empréstimo a um banco, a pagar em prestações mensais iguais. De acordo com a proposta do banco, o valor da prestação mensal a pagar, p , em euros, é dado, em função da taxa de juro anual aplicada, j , em percentagem, pela expressão $p(j)=\dfrac{62{,}5j}{1-\left(1+\dfrac{j}{1200}\right)^{-120}}$, com $j>0$, com j>0. Sabe-se que, no caso de a taxa de juro anual inicial duplicar, a prestação mensal aumentará 120 euros. Determine, utilizando a calculadora gráfica, a taxa de juro anual inicial. Apresente o resultado em percentagem, arredondado às milésimas. Na sua resposta:

– apresente uma equação que lhe permita resolver o problema;

– represente, num referencial, o(s) gráfico(s) da(s) função(ões) visualizado(s) na calculadora e assinale o(s) ponto(s) relevante(s), que lhe permitem resolver a equação.

Exame Nacional 2023 (2.ª fase)

255. Considere a função f, de domínio]0,+∞[, definida por $f(x)=\dfrac{\ln x+2x}{x}$. Resolva os itens a) e b) sem recorrer à calculadora.

a) O gráfico da função f admite uma assíntota vertical e uma assíntota horizontal. Determine uma equação de cada uma dessas assíntotas.

b) Estude a função f quanto à monotonia e quanto à existência de extremos relativos e determine esses extremos, caso existam. Na sua resposta, apresente o(s) intervalo(s) de monotonia da função f.

Exame Nacional 2023 (2.ª fase)

256. Considere a função f, de domínio ℝ\{0}, definida, para um certo $a\in\mathbb{R}^+$, por

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\operatorname{sen}(ax)}{e^x-1} & \text{se } x<0\\[2ex] \ln\left(2-e^{-x}\right)+x+2 & \text{se } x>0\end{cases}$$

Resolva os itens a) e b) sem recorrer à calculadora.

a) Determine o valor de *a* para o qual existe $\lim\limits_{x\to0} f(x)$.

b) O gráfico de f admite uma assíntota oblíqua quando x tende para +∞. Determine uma equação dessa assíntota.

Exame Nacional 2023 (época especial)

257. Para certos valores de *a* e de b (*a*>1 e b>1), tem-se $\log_a\left(\frac{b}{a}\right)=2$. Qual é o valor de $\log_a\left(\sqrt{a^3}\times b^2\right)$?

(A) $\frac{13}{2}$ (B) $\frac{15}{2}$ (C) $\frac{19}{2}$ (D) $\frac{21}{2}$

Exame Nacional 2023 (época especial)

258. Considere a função g, de domínio [0,π[, definida por $g(x)=e^x\cos x$.

a) Resolva este item sem recorrer à calculadora. Estude a função g quanto à monotonia e quanto à existência de extremos relativos, e determine esses extremos, caso existam. Na sua resposta, apresente o(s) intervalo(s) de monotonia da função g .

b) Resolva este item sem recorrer à calculadora, exceto em eventuais cálculos numéricos. Mostre, recorrendo ao teorema de Bolzano-Cauchy, que existe, pelo menos, um ponto do gráfico de g cuja ordenada é igual à abcissa, no intervalo $\left]\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{2}\right[$.

Exame Nacional 2023 (época especial)

259. Resolva, em ℝ, a equação $\dfrac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}=\dfrac{1}{3}$

Exame Nacional 2023 (época especial)

Soluções:

1. A 2. B 3.A 4. D 5. 3,42 e 4,96 6. x=0 e y=0 7. d 9. C 10. C 11. 1/*e* 12. 3,37 e 0,63
13. A 14. x=1; 10/3 16. B 17. B 18. é cont. 19. 4×10^{-8} e 0,5 20. 1,2 22. D 23. C 24. 2,57
25. 0,03; *I* decresc.; assimp. *y*=0 27. 1,36 e 4,61 28. (√*e*,0) e (-√*e*,0); *f* não tem extremos 29. C 30. 5h, dia3
31. C 32. 19; 16 33. 2/3; –1,23 34. D 35. 1,2 36. 4 37. 10 e 2000; 529 ou 530 38. x=0; y=0
39. A 40. 0, 1 e 2 41. 34h39min 42. A 43. $y=-e^2/4\,x+e^2$; 2,6 44. 0 45. 73 e 25; 29’28’’ 46. A

47.]1,5]∪[9,13[48. 3,28 e -0,12; 0,5 49. x=1 e y=3; 5,08 50. A 51. y=4x+1; -3 52. É; 0,4
53. B 54. C 55. D 56. (0,3;0,6) 57. [5/3,2[58. 0; 12h20’ 59. B 60. É cont; y=0 61. 2,47; 6,05
62. D 63. B 64. y=1 65. 31; 7×10^{11} 66. 1; 1,4 67. D 68. C 69. A 70. Não; y=x+1; 0,72 e 2,91
71. 3; 10,2 72. A 73. y=3; 3; -1/2 e ½ 74. A 75. A 76. 2h20’ 77. 0,57 78. –2 79. D
80. Não há; para x=5; 0,4 81. y=–x+1/e 82. C 83. B 84. Não cont.;]–∞,–4[85. 0,27 86. C 87.]0,3]
88. 1963; k=–ln(3–p) 89. É; y=2x; ln3 90. 2,63 91. B 92. 13h20 93. (5e/2,0);(-1,12;-1,41) e (1,22;1,80)
94. A 95. 29; 8 96. Não há; crescente 97. 0,91 98. B 99. $6{,}25\times10^{19}$ 100. 0; y=3 101. 2,47
102. 0,18 103. -2 104. A 105. B 106.]8,9]; 2000 107. 40; 0,995 108. 2 109. B 110. 4,14; 3 111. É
112. B 113. A 114. 2,2 115. y=3x+1; $y=2e^2x+e^2$ 116. D 117. 9,46 118. ln5–1; x=0; ¼ 119. D
120. C 121. 20 122. 0,48 123. -ln2; 0 e 4 124. D 125. A 126. 3; y=-3; 2,95 127. 7,5; 23 128. B
129. D 130. D 131. 0; y=3x+1 133. D 134. B 135. Não tem; min=–1 e max=1; 0,31 e 0,61 e 1,56 e 2,52 136. IV
137. A 138. D 139. ln(-2+ √19) 140. 2,92 141. Não ; y=2x 142. B 143. $e^{-3/2}$ 144. 0,63 145. A
146. B 147. B 148. y=x+2; x=0 e y=3; 0,413 149. 12h de 2.ªf; 0,16 150. C 151. B 152. B 153. Não; ln2
154. -6,71 155. D 156. x=0 e y=x-1; -e 157. 9,35 158. FVF 159. D 160. $e^{-1/2}$; 5,41
161. 11/5; y=0 162. B 163. A 164. 4,19; 25 165. Não tem; (1,0); 2,41 166. D 167. A
168. y=1 e y=0;]-∞,0[∪]ln2,3]; y=3/4 x-3-ln4 170. A 171. 11 172. y=0; 0 e 2; 2,92 173. B 174. D
175. –e; –2 e –1 176. x=–1 e x=1 177. B 178. A 179. 26; 600/n 180. Não tem; -π/6; -1,19 e -0,17 181. C 182. D
183. 50; 80 184. 0; -π/3; 0,72 186. 1,5; não 187. É; x=1+π; -3,3 188. x=0 e y=0;]1/2,1[; 1 189. 4; 18
190. B 191. ln2; -35 192. V; y=-2x+2; 1,23 193. 0,075 194. D 195. [-2,0[∪[2,+∞[196. A; sim; 1/3, ½ e 1
198. D 199.]-1,0]∪[7,8[200. 2; y=3 e y=0; C 201. 18,7 202. C 203. 1 204. Não tem; B
205. C 206. C 207. y=x; é 208. –e; B 209. 50 210. D 211. C 212. x=1 e y=0; 0 e ln2 213. 1,8
214. C 215. A; y=-3x+1 216. A 217. y=x; x=-ln(e-1); C 218. cont.; -1/(2e) 219. Não; y=1 220. 1/e; B
222. D; 2 223. cont.; $1/e^2$ 224. y=1/2 x 225. 1-e 226. y=-2; $y=-e^2/4\ x+1$ 227. C; 28’9’’ 228. 1
229. x=1/2 230. -1/2; -3/2+ln2 232. D; 2h5’ 233. y=1 e y=0 234. x∈[−2,0]∪[ln 4,2] 235. cont.; $-e^5$
236. A; 7,9 237. x=1 238. {0,2} 239. Não 240. π/12 e 5π/12; -ln3 241. x=0 e y=1 242. C
243. sim 244. y=-x; y=0 245. 1/3 246. {1/3} 247. [2-ln4,+∞[248. C 249. -√2/2 e √2/2
250. É; x=2 251. 1,8 252. D 253. 3 e ln2 254. 3,281 255. x=0 e y=2; 1/e+2 256. 2; y=x+ln2+2
257. B 258. 1 e √2/2 $e^{\wedge\pi/4}$ 259. x=ln2/2

O professor: Roberto Oliveira