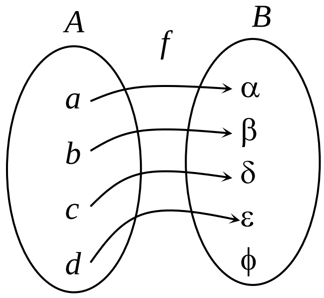
Escola Secundária de Francisco Franco
Matemática A – 11.º ano

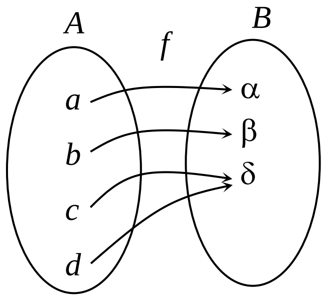
Funções reais de variável real

FUNÇÕES INJETIVAS, FUNÇÕES SOBREJETIVAS, FUNÇÕES BIJETIVAS FUNÇÃO INVERSA

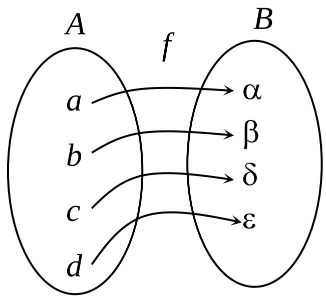
1) Dados os conjuntos A e B e a função f: $A \to B$, diz-se que f é uma:



- **<u>função injetiva</u>** se a objetos diferentes de A correspondem imagens diferentes em B, isto é,
  f é injetiva se e só se $\forall\, x_1, x_2 \in A,\ x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$
  Portanto,
  f é **injetiva** se e só se $\forall\, x_1, x_2 \in A,\ f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$



- **<u>função sobrejetiva</u>** se, para todo o elemento y de B, existir um elemento x de A tal que $y = f(x)$, isto é, f é sobrejetiva se o seu contradomínio coincidir com o conjunto de chegada.
  Portanto,
  f é **sobrejetiva** se e só se $\forall\, y \in B, \exists\, x \in A:\ f(x) = y$



- **<u>função bijetiva</u>** se f for injetiva e sobrejetiva, isto é, se para todo o elemento y de B, existir um só elemento x de A tal que $y = f(x)$.
  Portanto,
  f é **bijetiva** se e só se $\forall\, y \in B, \exists^1\, x \in A:\ f(x) = y$

Observação: se $A, B \subset \mathbb{R}$, f é uma <u>função real de variável real</u> (f.r.v.r.).

<u>Exercício resolvido 1</u>

Considera a função polinomial $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = x^3 - 5$.

Mostra que f é uma função:
1.1. injetiva;
1.2. sobrejetiva;
1.3. bijetiva.

<u>Resolução</u>

1.1. Sejam $x_1, x_2 \in D_f$ tais que $f(x_1) = f(x_2)$.

$\therefore\ x_1^3 \cancel{-5} = x_2^3 \cancel{-5} \Leftrightarrow x_1^3 = x_2^3 \Leftrightarrow x_1 = x_2$, logo,

$\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R},\ f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$

$\therefore$ f é uma função injetiva c.q.m.

1.2. Seja $y \in \mathbb{R}$ tal que $y = f(x) \to x^3 - 5 = y \Leftrightarrow x^3 = y + 5 \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{y+5}$

$\therefore\ \forall y \in \mathbb{R}, \exists x \in \mathbb{R}: y = f(x)$ (e esse n.º é $\sqrt[3]{y+5}$)

$\therefore$ f é uma função sobrejetiva c.q.m.

1.3. f é uma função bijetiva porque é injetiva e sobrejetiva.

<u>Exercício proposto 1</u>

Considera as funções

$f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 6x + 2$;

$g:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $g(x) = \frac{1-3x}{8}$;

$h:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $h(x) = \frac{3x^3+4}{2}$;

$i:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $i(x) = 5 - \frac{x^3}{4}$;

$j:[0,+\infty[\to [-1,+\infty[$ definida por $j(x) = x^2 - 1$;

$k:[-3,+\infty[\to [0,+\infty[$ definida por $k(x) = (x+3)^2$.

Mostra que as funções dadas são:
1.1. injetivas;
1.2. sobrejetivas;
1.3. bijetivas.

Exercício resolvido 2

Considera a função $g : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$, definida por $g(x) = x^2 + 2$.

Mostra que g é uma função injetiva mas não bijetiva.

Resolução

Sejam $x_1, x_2 \in D_g$ tais que $g(x_1) = g(x_2)$.

$\therefore x_1^2 \cancel{+2} = x_2^2 \cancel{+2} \Leftrightarrow x_1^2 = x_2^2 \Leftrightarrow x_1 = x_2$ pois $x_1, x_2 \in [0,+\infty[$.

$\therefore \forall x_1, x_2 \in [0,+\infty[, g(x_1) = g(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$, logo g é uma função injetiva c.q.m.

Dado que $x^2 \geq 0 \Leftrightarrow x^2 + 2 \geq 2 \Leftrightarrow g(x) \geq 2$, conclui-se que

$D_g' = [2,+\infty[\neq \mathbb{R}$ (ie, o contradomínio de g é diferente do conjunto de chegada).

$\therefore$ g não é sobrejetiva pelo que também não é bijetiva c.q.m.

Nota também se podia dizer que g não é sobrejetiva porque, por exemplo, $0 \in \mathbb{R}$ mas $0 \notin D_g'$.

Exercício resolvido 3

Seja h a função definida em $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ por $h(x) = 7 - 2x^3$. Mostra que h é uma função bijetiva.

Resolução

Seja $y \in \mathbb{R}$ tal que $y = h(x)$

$\therefore 7 - 2x^3 = y \Leftrightarrow -2x^3 = -7 + y \Leftrightarrow x^3 = \frac{7-y}{2} \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{\frac{7-y}{2}} \to$ solução única

$\therefore \forall y \in \mathbb{R}, \exists^1 x \in \mathbb{R} : y = h(x)$, pelo que h é uma função bijetiva c.q.m.

Exercício proposto 2

Estuda a injetividade, a sobrejetividade e a bijetividade das funções seguintes.

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 9 - 2x$

$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $g(x) = 4 - x^2$

$h : [0,+\infty[\to]-\infty, 4]$ definida por $h(x) = 4 - x^2$

$i : \mathbb{R} \to [5,+\infty[$ definida por $i(x) = (x-5)^2 + 5$

$j : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $j(x) = \frac{8x-1}{5}$

$k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $k(x) = \frac{(x-4)^3}{3} - 2$

$l : [-3,+\infty[\to [1,+\infty[$ definida por $l(x) = (x+3)^2 + 1$

$m : \mathbb{R} \setminus \{4\} \to \mathbb{R} \setminus \{3\}$ definida por $m(x) = \frac{3x-2}{x-4}$

$n : \mathbb{R} \setminus \{-2\} \to \mathbb{R} \setminus \{2\}$ definida por $n(x) = \frac{4x-1}{2x+4}$

$o : \mathbb{R} \setminus \{5\} \to \mathbb{R}$ definida por $o(x) = 1 + \frac{2}{5-x}$

Exercício proposto 3

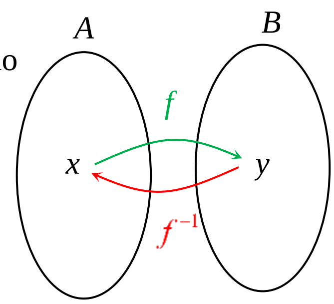
Seja f a função, definida em $\mathbb{R}$ por $f(x) = ax + b$, com $a \neq 0$. Prova que f é bijetiva.

Exercício proposto 4

Seja g a função, definida em $\mathbb{R}$ por $g(x) = ax^3 + b$, com $a \neq 0$. Prova que g é bijetiva.

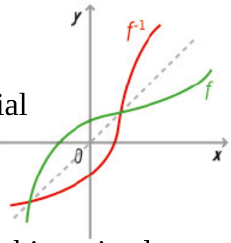
2) Dados os conjuntos A e B e a função bijetiva f: $A \to B$, designa-se por **função inversa** de f a função $f^{-1} : B \to A$ tal que,

$\forall y \in B, f^{-1}(y) = x_y$, onde x_y é o único elemento de A tal que $f(x_y) = y$.



$$\begin{aligned} f^{-1} : B &\to A \\ x &\mapsto f^{-1}(x) \end{aligned}$$

Observação: Num plano munido de um referencial cartesiano, os gráficos cartesianos das funções f e f^{-1} são a imagem um do outro pela reflexão axial de eixo de equação $y = x$, isto é, ambos os gráficos são simétricos em relação à bissetriz dos quadrantes ímpares.



Exercício resolvido 4

É dada a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = x^3 + 8$. Mostra que f é uma função bijetiva e caracteriza a sua inversa.

Resolução

Seja $y \in \mathbb{R}$ tal que $y = f(x)$

$\therefore x^3 + 8 = y \Leftrightarrow x^3 = y - 8 \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{y-8} \to$ solução única, logo f é uma função bijetiva c.q.m.

Caracterização da inversa: $\boxed{\begin{aligned} f^{-1} : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \sqrt[3]{x-8} \end{aligned}}$

Exercício proposto 5

Das funções indicadas no exercício proposto 2, indica as que admitem inversa e caracteriza-as.

Mais exercícios:

Soluções: 2. bij; não inj, não sobrej; bij; não inj; bij; bij; bij; bij; não sobrej 5. $f^{-1}(x)=(9-x)/2$; $h^{-1}(x)=\sqrt{4-x}$; $j^{-1}(x)=(5x+1)/8$; $k^{-1}(x)=\sqrt[3]{3x+6}+4$; $l^{-1}(x)=\sqrt{x-1}-3$

O professor: Roberto Oliveira