ESCOLA SECUNDÁRIA DE PAREDES

Proposta de Resolução do 4º Teste de Avaliação

Matemática A

12.º Ano de Escolaridade | maio de 2021

Turma: 12ºJ

1. .

   1.1. $f(x) = 3x + 1 + \dfrac{1}{e^{2x}} = 3x + 1 + e^{-2x}$

   $f'(x) = \left(3x + 1 + e^{-2x}\right)' = 3 + 0 + (-2x)'e^{-2x} = 3 - 2e^{-2x}$

   Seja t a reta tangente

   Assim,

   $m_t = f'(0) = 3 - 2e^{-2\times 0} = 3 - 2e^0 = 3 - 2 = 1$

   Assim,

   $t: y = x + b, b \in \mathbb{R}$

   $f(0) = 3 \times 0 + 1 + e^{-2\times 0} = 0 + 1 + e^0 = 2$

   Como o ponto $(0; 2)$ pertence à reta, resulta,

   $2 = 0 + b \Leftrightarrow b = 2$

   Logo, a equação reduzida da reta tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa zero é $y = x + 2$
   Resposta:

   Versão 1: (C)

   Versão 2: (B)

   1.2. $f(x) = 3x + 1 + \dfrac{1}{e^{2x}} = 3x + 1 + e^{-2x}$

   $f'(x) = \left(3x + 1 + e^{-2x}\right)' = 3 + 0 + (-2x)'e^{-2x} = 3 - 2e^{-2x}$

   Zeros de $f'(x)$

   $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3 - 2e^{-2x} = 0 \Leftrightarrow -2e^{-2x} = -3 \Leftrightarrow e^{-2x} = \dfrac{3}{2} \Leftrightarrow -2x = \ln\left(\dfrac{3}{2}\right) \Leftrightarrow x = -\dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{3}{2}\right)$

   Sinal de $f'(x)$

   $f'(x) > 0 \Leftrightarrow 3 - 2e^{-2x} > 0 \Leftrightarrow -2e^{-2x} > -3 \Leftrightarrow e^{-2x} < \dfrac{3}{2} \Leftrightarrow -2x < \ln\left(\dfrac{3}{2}\right) \Leftrightarrow x > -\dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{3}{2}\right)$

   $f'(x) < 0 \Leftrightarrow 3 - 2e^{-2x} < 0 \Leftrightarrow -2e^{-2x} < -3 \Leftrightarrow e^{-2x} > \dfrac{3}{2} \Leftrightarrow -2x > \ln\left(\dfrac{3}{2}\right) \Leftrightarrow x < -\dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{3}{2}\right)$

Quadro de sinal de $f'(x)$

x	$-\infty$	$-\frac{1}{2}\ln\left(\frac{3}{2}\right)$	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	$-\frac{3}{2}\ln\left(\frac{3}{2}\right)+\frac{5}{2}$	$\nearrow$

$$f\left(-\frac{1}{2}\ln\left(\frac{3}{2}\right)\right)=3\times\left(-\frac{1}{2}\ln\left(\frac{3}{2}\right)\right)+1+\frac{1}{e^{2\left(-\frac{1}{2}\ln\left(\frac{3}{2}\right)\right)}}=-\frac{3}{2}\ln\left(\frac{3}{2}\right)+1+\frac{1}{e^{-\ln\left(\frac{3}{2}\right)}}=$$

$$=-\frac{3}{2}\ln\left(\frac{3}{2}\right)+1+\frac{1}{e^{\ln\left(\frac{2}{3}\right)}}=-\frac{3}{2}\ln\left(\frac{3}{2}\right)+1+\frac{1}{\frac{2}{3}}=-\frac{3}{2}\ln\left(\frac{3}{2}\right)+1+\frac{3}{2}=-\frac{3}{2}\ln\left(\frac{3}{2}\right)+\frac{5}{2}$$

A função f é decrescente em $\left]-\infty;-\frac{1}{2}\ln\left(\frac{3}{2}\right)\right[$, e é crescente em $\left]-\frac{1}{2}\ln\left(\frac{3}{2}\right);+\infty\right[$

Atinge o valor mínimo absoluto $-\frac{3}{2}\ln\left(\frac{3}{2}\right)+\frac{5}{2}$ para $x=-\frac{1}{2}\ln\left(\frac{3}{2}\right)$

2. $g(x)=\ln(x)$

   $A(2a;0)$; $B(4a;0)$; $C(4a;g(4a))$; $D(2a;g(2a))$

   $g(2a)=\ln(2a)$

   $g(4a)=\ln(4a)$

   Assim,

   $C(4a;\ln(4a))$

   $D(2a;\ln(2a))$

   Portanto,

   $$A_{[ABCD]}=\frac{(\overline{AD}+\overline{BC})\times\overline{AB}}{2}=\frac{(\ln(2a)+\ln(4a))\times 2a}{2}=\frac{\ln(2a\times 4a)\times 2a}{2}=\ln(8a^2)\times a=a\ln(8a^2)$$

3. $f(x)=\ln(x+1)$

   $$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(x+1)-0}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(x+1)}{x}=\lim_{y\to 0}\frac{y}{e^y-1}=\frac{1}{\lim\limits_{y\to 0}\frac{e^y-1}{y}}=\frac{1}{1}=1$$

   Fez-se a mudança de variável

   $y=\ln(x+1)\Leftrightarrow x+1=e^y\Leftrightarrow x=e^y-1$

   Se $x\to 0$, então, $y\to 0$

   Aplicou-se o limite notável $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1$

4. $e^x-1-2e^{-x}=0\Leftrightarrow e^x-1-\frac{2}{e^x}=0\Leftrightarrow\frac{(e^x)^2-e^x-2}{e^x}=0\Leftrightarrow(e^x)^2-e^x-2=0\wedge e^x\neq 0\Leftrightarrow$

   $\Leftrightarrow(e^x)^2-e^x-2=0\wedge$ Condição universal $\Leftrightarrow(e^x)^2-e^x-2=0$

fazendo a mudança de variável $y = e^x$, vem,

$y^2 - y - 2 = 0 \Leftrightarrow y = \dfrac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \times 1 \times (-2)}}{2 \times 1} \Leftrightarrow y = -1 \vee y = 2$

Como $y = e^x$, resulta,

$e^x = -1 \vee e^x = 2 \Leftrightarrow$ Equação impossível $\vee x = \ln(2)$

$C.S. = \{\ln(2)\}$

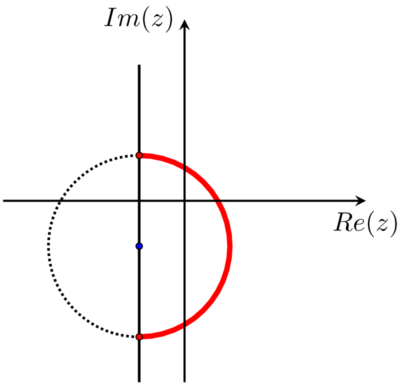
5. .

5.1. $w_1 = -1 + i\cos(\pi) = -1 - i$

$|z - w_1| = 2 \wedge Re(z) \geq -1 \Leftrightarrow |z - (-1 - i)| = 2 \wedge Re(z) \geq -1$

$|z - (-1 - i)| = 2 \mapsto$ Circunferência de centro em $P_1(-1; -1)$, afixo do número complexo $w_1 = -1 - i$, e de raio 2

$Re(z) \geq -1 \mapsto$ Semiplano fechado à direita da reta de equação $x = -1$



Comprimento da semicircunferência: $\pi \times 2 = 2\pi$ $u.c.$

5.2. $w_2 = \sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}$

$\overline{w_2} = \sqrt{2}e^{i\left(-\frac{3\pi}{4}\right)}$
$i \times \overline{w_2} = e^{i\frac{\pi}{2}}\sqrt{2}e^{i\left(-\frac{3\pi}{4}\right)} = \sqrt{2}e^{i\left(\frac{\pi}{2}-\frac{3\pi}{4}\right)} = \sqrt{2}e^{i\left(-\frac{\pi}{4}\right)}$

Seja $z = |z|e^{i\theta}$

$z^2 = |z|^2e^{i(2\theta)}$

$\overline{z} = |z|e^{i(-\theta)}$

Assim,

$z^2 - i \times \overline{w_2} \times \overline{z} = 0 \Leftrightarrow z^2 = i \times \overline{w_2} \times \overline{z} \Leftrightarrow |z|^2e^{i(2\theta)} = \sqrt{2}e^{i\left(-\frac{\pi}{4}\right)} \times |z|e^{i(-\theta)} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow |z|^2e^{i(2\theta)} = \sqrt{2} \times |z|e^{i\left(-\theta-\frac{\pi}{4}\right)} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow |z|^2 = \sqrt{2} \times |z| \wedge 2\theta = -\theta - \frac{\pi}{4} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow |z|^2 - \sqrt{2} \times |z| = 0 \wedge 2\theta + \theta = -\frac{\pi}{4} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow |z|\left(|z| - \sqrt{2}\right) = 0 \wedge 3\theta = -\frac{\pi}{4} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left(|z| = 0 \vee |z| - \sqrt{2} = 0\right) \wedge \theta = \dfrac{-\frac{\pi}{4} + k2\pi}{3}, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left(|z| = 0 \vee |z| = \sqrt{2}\right) \wedge \theta = \dfrac{-\frac{\pi}{4} + k2\pi}{3}, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$

Soluções da equação

Se $|z| = 0$, então $z_0 = 0$

Se $|z| = \sqrt{2}$

$k = 0 \mapsto z_1 = \sqrt{2}e^{i\left(-\frac{\pi}{12}\right)}$

$k = 1 \mapsto z_2 = \sqrt{2}e^{i\left(\frac{7\pi}{12}\right)}$

$k = 2 \mapsto z_3 = \sqrt{2}e^{i\left(\frac{15\pi}{12}\right)} = \sqrt{2}e^{i\left(-\frac{3\pi}{4}\right)}$

$k = 3 \mapsto z_4 = \sqrt{2}e^{i\left(\frac{23\pi}{12}\right)} = \sqrt{2}e^{i\left(-\frac{\pi}{12}\right)}$

$k = -1 \mapsto z_4 = \sqrt{2}e^{i\left(-\frac{9\pi}{12}\right)} = \sqrt{2}e^{i\left(-\frac{3\pi}{4}\right)}$

$C.S. = \left\{0; \sqrt{2}e^{i\left(-\frac{\pi}{12}\right)}; \sqrt{2}e^{i\left(\frac{7\pi}{12}\right)}; \sqrt{2}e^{i\left(-\frac{3\pi}{4}\right)};\right\}$

5.3. $w_1 = -1 + i\cos(\pi) = -1 - i$

$|w_1| = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$

Seja $\theta = Arg(w_1)$

$\tan(\theta) = \dfrac{-1}{-1}$ e $\theta \in 3Q$

$\tan(\theta) = 1$ e $\theta \in 3Q$

Logo, $\theta = \dfrac{5\pi}{4}$

Portanto, $w_1 = \sqrt{2}e^{i\,\frac{5\pi}{4}}$

Sabe-se que $w_2 = \sqrt{2}e^{i\,\frac{3\pi}{4}}$

Os argumentos destes dois números complexos estão em progressão aritmética de razão $\dfrac{2\pi}{n}$

Assim,

$\dfrac{3\pi}{4} + \dfrac{2\pi}{n} = \dfrac{5\pi}{4} \Leftrightarrow \dfrac{2\pi}{n} = \dfrac{5\pi}{4} - \dfrac{3\pi}{4} \Leftrightarrow \dfrac{2\pi}{n} = \dfrac{2\pi}{4} \Leftrightarrow n = 4$

Resposta:

Versão 1: (A)

Versão 2: (C)

6. Fazendo um esquema

   $\underline{M_1M_2M_3M_4M_5M_6M_7M_8}$ $\quad$ $\underline{F_1F_2F_3F_4}$ $\quad$ $\underline{B_1B_2B_3}$
   Os três blocos podem permutar entre si de 3! maneiras distintas

   Para cada uma dessas maneiras, os livros de Matemática podem permutar entre si de 8! maneiras distintas, os livros de Física podem permutar entre si de 4! maneiras distintas, e os livros de Biologia podem permutar entre si de 3! maneiras distintas

   Assim, a Maria pode dispor os livros na prateleira de $3! \times 8! \times 4! \times 3! = 8! \times 4! \times (3!)^2$ maneiras distintas

   Resposta:

   Versão 1: (D)

   Versão 2: (C)

7. Fazendo um esquema

   $- \quad 4 \quad - \quad - \quad 4 \quad 4$

   Escolher as três posições para os quatros: o número de maneiras distintas de fazer essa escolha é igual a ${}^6C_3$

   Para cada uma destas maneiras, os restantes três dígitos podem ser preenchidos de 9^3 maneiras distintas

   Assim, existem ${}^6C_3 \times 9^3 = 14580$ códigos que têm exatamente três quatros

8. Fazendo um esquema

   $\bullet \quad - \quad \bullet \quad - \quad \bullet \quad - \quad \bullet \quad - \quad \bullet \quad - \quad \bullet$

   Legenda:

   lugares dos rapazes: $-$

   lugares possíveis das raparigas: $\bullet$

   ${}^6C_3$ é o núemro de maneiras de colocar as três raparigas nos seis lugares possíveis

   Para cada uma destas maneiras, as três raparigas podem permutar de lugar entre si de 3! maneiras distintas e os cinco rapazes podem permutar de lugar entre si de 5! maneiras distintas

   Portanto, os oito amigos podem dispor-se lado a lado, de ${}^6C_3 \times 3! \times 5! = 14400$ maneiras distintas

9. Seja n o número da linha

   Sabe-se que a soma dos três primeiros elementos com os três últimos elementos dessa linha é igual a 422

   Então,

   $${}^nC_0 +^n C_1 +^n C_2 +^n C_{n-2} +^n C_{n-1} +^n C_n = 422 \Leftrightarrow 2 \times ({}^nC_0 +^n C_1 +^n C_2) = 422 \Leftrightarrow$$

   $$\Leftrightarrow^n C_0 +^n C_1 +^n C_2 = 211 \Leftrightarrow 1 + n + \frac{n!}{2!(n-2)!} = 211 \Leftrightarrow n + \frac{n(n-1)(n-2)!}{2(n-2)!} = 210 \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow n + \frac{n(n-1)}{2} = 210 \Leftrightarrow 2n + n(n-1) = 420 \Leftrightarrow n^2 + n - 420 = 0 \Leftrightarrow n = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \times 1 \times (-420)}}{2 \times 1} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow n = -21 \vee n = 20$

Como $n \geq 2$, então, $n = 20$

A soma de todos os elementos da linha anterior é igual a $2^{19} = 524288$

Resposta:

Versão 1: (D)

Versão 2: (A)

10. Desenvolvendo $(\sqrt{x} + \sqrt{y})^{10}$, vem,

$(\sqrt{x} + \sqrt{y})^{10} =$
$= \sum_{p=0}^{10} \left[{}^{10}C_p \times (\sqrt{x})^{10-p} \times \left(\sqrt{y}\right)^p \right] =$
$= \sum_{p=0}^{10} \left[{}^{10}C_p \times x^{10-p} \times \left(x^{\frac{1}{2}}\right)^{10-p} \times \left(y^{\frac{1}{2}}\right)^p \right] =$
$= \sum_{p=0}^{10} \left[{}^{10}C_p \times x^{10-p} \times x^{\frac{10-p}{2}} \times y^{\frac{p}{2}} \right]$

Como um dos termos deste desenvolvimento é da forma ax^2y^3

Vem,

$\frac{10-p}{2} = 2 \wedge \frac{p}{2} = 3 \wedge 0 \leq p \leq 10 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 10 - p = 4 \wedge p = 6 \wedge 0 \leq p \leq 10 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -p = 4 - 10 \wedge p = 6 \wedge 0 \leq p \leq 10 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow p = 6 \wedge p = 6 \wedge 0 \leq p \leq 10 \Leftrightarrow$

Logo, $p = 6$

Assim,

$a =^{10} C_6 = 210$