ESCOLA SECUNDÁRIA DE PENAFIEL

Ficha Formativa nº 1
Proposta de resolução

Preparação para o 1º Teste de Avaliação

12.º Ano de Escolaridade | Turma F

1. (C)
$$P((\overline{A}\cup B)|(A\cup B))=\frac{P((\overline{A}\cup B)\cap(A\cup B))}{P(A\cup B)}=\frac{P((\overline{A}\cap A)\cup B)}{P(A)+P(B)}=\frac{P(\varnothing\cup B)}{P(A)+P(B)}=$$
$$=\frac{P(B)}{P(A)+P(B)}=\frac{1-\frac{7}{8}}{\frac{1}{4}+1-\frac{7}{8}}=\frac{\frac{1}{8}}{\frac{3}{8}}=\frac{1}{3}$$

2. (A)
Seja $\overrightarrow{\alpha}=(1;-2;0)$, um vetor normal ao plano α
Para que a reta seja perpendicular ao plano α , o seu vetor diretor terá de ser colinear com o vetor normal ao plano. Um vetor diretor da reta da opção (A) é $(1;-2;0)$,que é colinear com o vetor normal ao plano. Esta reta é perpendicular ao plano.

3. (D)
Determinemos as coordenadas do ponto A
Como A está situado no eixo Ox, as suas coordenadas são do tipo $(x;0)$, com $x\in\mathbb{R}$.
O ponto A é ponto da circunferência, então, tem-se $(x-2)^2+0^2=16\Leftrightarrow(x-2)^2=16\Leftrightarrow x-2=\pm4\Leftrightarrow x-2=-4\vee x-2=4\Leftrightarrow x=-2\vee x=6$. Como a abcissa de A é positiva, vem, $A(6;0)$
Quanto à reta r
o seu declive é $m_r=tg(135°)=-1$
então, $r:y=-x+b$
como a reta "passa no ponto A", resulta que
$0=-6+b\Leftrightarrow b=6$
Logo, $r:y=-x+6$
Assim, a condição que define a região colorida de cinzento é $(x-2)^2+y^2\leq16\wedge y\geq-x+6$

4. (C)
Na caixa existem dez bolas no total.
se, se pretende que saiam duas bolas da mesma cor, então, as duas bolas podem ser brancas, ou cinzentas ou pretas. Assim, e como não há reposição da primeira bola extraída, resulta
$P=\frac{4\times3}{10\times9}+\frac{3\times2}{10\times9}+\frac{3\times2}{10\times9}=\frac{12+6+6}{90}=\frac{24}{90}=\frac{4}{15}$

5. (B)
O número de casos possíveis é igual a 10^4, uma vez que para o primeiro dígito existem dez opções (números de 0 a 9). Fixado esse dígito, para o segundo dígito voltam a haver dez opções (números de 0 a 9). Para os terceiro e quarto dígitos, o raciocínio é semelhante.
Quanto ao número de casos favoráveis:
Se pretendemos que seja escolhido um código cujo número é capicua, então, para o primeiro dígito há dez escolhas (número de 0 a 9). Fixado esse dígito, para o último dígito só há uma escolha (uma vez que tem de ser igual ao primeiro dígito). Fixados o primeiro e último dígitos, para o segundo dígito há há dez escolhas (número de 0 a 9) e para o terceiro só há uma escolha (uma vez que tem de ser igual ao segundo dígito). Resumindo, existem 10^2 casos favoráveis.
Assim, a probabilidade é $P=\frac{10^2}{10^4}=\frac{1}{10^2}=\frac{1}{100}$

6. (A)
   Os rapazes têm de ficar entre as raparigas. Assim, dos quatro lugares disponíveis $\bullet M \bullet M \bullet M \bullet$ tem de se escolher dois, e essa escolha pode ser feita de ${}^4C_2$ maneiras distintas. Para cada uma destas maneiras, os rapazes permutam entre si de si de 2! maneiras distintas e as raparigas também permutam entre si de 3!. Logo, os cinco amigos podem sentar-se de ${}^4C_2 \times 2! \times 3!$ maneiras distintas

7. .
   Primeira parte:
   $P(B) - P(\overline{A} \cap B) - P(A|\overline{B}) \times P(B) = 0$
   $\Leftrightarrow P(B) - [P(B) - P(A \cap B)] - \dfrac{P(A \cap \overline{B})}{P(\overline{B})}) \times P(B) = 0$
   $\Leftrightarrow P(A \cap B) = \dfrac{P(A \cap \overline{B})}{P(\overline{B})}) \times P(B) \Leftrightarrow$
   $P(A \cap B) \times P(\overline{B}) = P(A \cap \overline{B}) \times P(B) \Leftrightarrow$
   $P(A \cap B) \times [1 - P(B)] = [P(A) - P(A \cap B)] \times P(B) \Leftrightarrow$
   $P(A \cap B) - P(A \cap B)P(B) = P(A)P(B) - P(A \cap B) \times P(B) \Leftrightarrow$
   $P(A \cap B) = P(A)P(B)$
   Ou seja, os acontecimentos A e B são independentes.

   Segunda parte:
   Por hipótese, os acontecimentos A e B são independentes, ou seja, verifica-se que
   $P(A \cap B) = P(A)P(B)$
   Assim,
   $P(B) - P(\overline{A} \cap B) - P(A|\overline{B}) \times P(B) =$
   $= P(B) - [P(B) - P(A \cap B)] - \dfrac{P(A \cap \overline{B})}{P(\overline{B})} \times P(B) =$
   $= P(A \cap B) - \dfrac{P(A) - P(A \cap B)}{P(\overline{B})} \times P(B) =$
   $= P(A)P(B) - \dfrac{P(A) - P(A)P(B)}{P(\overline{B})} \times P(B) =$
   $= P(A)P(B) - \dfrac{P(A)(1 - P(B)}{P(\overline{B})} \times P(B) =$
   $= P(A)P(B) - \dfrac{P(A)P(\overline{B})}{P(\overline{B})} \times P(B) =$
   $= P(A)P(B) - P(A)P(B) = 0$ c.q.d.

8. 8.1. O número de casos possíveis é igual a 6!. Com efeito, temos seis amigos que vão ocupar seis lugares num banco do jardim. Trata-se de calcular as permutações de seis.
   Quanto ao número de casos favoráveis:
   Para a Vera só há dois lugares possíveis (extremos do banco). Imaginemos que a Vera está sentada num dos extremos. Os restantes cinco amigos sentam-se nos restantes cinco lugares vagos de 5! maneiras distintas. Resumindo, o número de casos favoráveis é igual a $2 \times 5!$
   A probabilidade pedida é igual a $P = \dfrac{2 \times 5!}{6!} = \dfrac{1}{3}$

   8.2. O número de casos possíveis é igual a 6!. Com efeito, temos seis amigos que vão ocupar seis lugares num banco do jardim. Trata-se de calcular as permutações de seis.
   Quanto ao número de casos favoráveis:
   Como se pretende que a Vera e o Tiago fiquem juntos (um ao lado do outro), então imaginemos que os dois formam um bloco. Assim, este bloco mais os quatro restantes amigos constituem cinco blocos. Estes cinco blocos podem permutar entre si de 5! maneiras distintas, e para cada uma destas permutações, a Vera e o Tiago podem permutar de lugar entre si de duas maneiras distintas (2!).
   Resumindo, o número de casos favoráveis é igual a $2! \times 5!$
   A probabilidade pedida é igual a $P = \dfrac{2! \times 5!}{6!} = \dfrac{1}{3}$

9. 9.1. Como se pretende que as bolas brancas saiam todas seguidas, então o número de sequências distintas, nestas condições, é dado por $8! \times 5!$. na realidade, podemos pensar que as bolas brancas funcionam como um bloco, e assim, há oito blocos para permutar, o que pode ocorrer de 8! maneiras distintas. Para cada uma destas maneiras, as bolas brancas, por sua vez, podem permutar entre si dentro do bloco,de 5! maneiras distintas. Resumindo,existem $8! \times 5! = 4838400$ sequências distintas.

   9.2. Se vão ser extraídas todas as bolas, uma a uma, e colocadas em fila, sendo as bolas todas distintas, então o número de sequências diferentes que se podem constituir é dado por (5+3+4)!=12!. Este número é o número de casos possíveis da experiência.
   Quanto ao número de casos favoráveis: Queremos que as bolas cinzentas saiam todas seguidas, e por ordem crescente de numeração, no início da sequência, então o número de sequências distintas, nestas condições é dado por 9!. Com efeito, como se quer que as bolas cinzentas saiam todas por ordem crescente e logo no início da extração, então só há uma maneira de saída das bolas cinzentas. extraídas as bolas cinzentas, as restantes nove bolas podem ser extraídas de 9! maneiras distintas. Este número é o número de casos favoráveis.
   Portanto,
   $P = \frac{9!}{12!} = \frac{362880}{479001600} \approx 0.0(75)\%$.

   9.3. Quanto ao número de casos favoráveis: Pretende-se que as bolas numeradas com número ímpar (que são sete) saiam todas seguidas e no fim da extração, então o número de sequências distintas, nestas condições é dado por $5! \times 7!$. E este número é o número de casos favoráveis.
   Portanto,
   $P = \frac{5! \times 7!}{12!} = \frac{604800}{479001600} \approx 0.(13)\%$.

10. Sejam os acontecimentos:
   A: O aluno inscreve-se em Matemática III
   B: O aluno inscreve-se em Econometria
   Dos dados sabe-se que:
   $P(A \cap B) = 0.16$
   $P(\overline{A}|B) = \frac{5}{9}$
   $P(\overline{A}|\overline{B}) = \frac{2}{5}$

   10.1. Ora,
   $$P(\overline{A}|B) = \frac{5}{9} \Leftrightarrow \frac{P(\overline{A} \cap B)}{P(B)} = \frac{5}{9} \Leftrightarrow \frac{P(B) - P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{5}{9} \Leftrightarrow \frac{P(B) - \frac{4}{25}}{P(B)} = \frac{5}{9} \Leftrightarrow$$
   $9P(B) - \frac{36}{25} = 5P(B) \Leftrightarrow 4P(B) = \frac{36}{25} \Leftrightarrow P(B) = \frac{9}{25}$
   A probabilidade de o aluno se ter inscrito em Econometria é $\frac{9}{25} = 36\%$

   10.2. Pretende-se $P(B|A)$
   $$P(\overline{A}|\overline{B}) = \frac{2}{5} \Leftrightarrow \frac{P(\overline{A} \cap \overline{B})}{P(\overline{B})} = \frac{2}{5} \Leftrightarrow \frac{P(\overline{A \cup B})}{1 - P(B)} = \frac{2}{5} \Leftrightarrow$$
   $$\Leftrightarrow \frac{1 - P(A \cup B)}{1 - P(B)} = \frac{2}{5} \Leftrightarrow \frac{1 - [P(A) + P(B) - P(A \cap B)]}{1 - P(B)} = \frac{2}{5} \Leftrightarrow$$
   $$\Leftrightarrow \frac{1 - P(A) - P(B) + P(A \cap B)}{1 - P(B)} = \frac{2}{5} \Leftrightarrow \frac{1 - P(A) - \frac{9}{5} + \frac{4}{25}}{1 - \frac{9}{25}} = \frac{2}{5} \Leftrightarrow$$
   $$\Leftrightarrow \frac{-P(A) + \frac{4}{5}}{\frac{16}{25}} = \frac{2}{5} \Leftrightarrow -P(A) + \frac{4}{5} = \frac{2}{5} \times \frac{16}{25} \Leftrightarrow P(A) = \frac{4}{5} - \frac{16}{125} \Leftrightarrow P(A) = \frac{68}{125}$$

Ora,

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{4}{25}}{\frac{68}{125}} = \frac{5}{17}$$

A probabilidade de o aluno se ter inscrito em Econometria, dado que se inscreveu em matemática III é igual a $\frac{5}{17} \approx 29\%$

10.3. Pretende-se $P(A \cap \overline{B})$
$P(A \cap \overline{B}) = P(A) - P(A \cap B) = 54.4\% - 16\% = 38.4\%$

10.4. Pretende-se $P(A \cup B)$
$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{68}{125} + \frac{9}{25} - \frac{4}{16} = \frac{93}{125} = 74.4\%$

11. $P((B \cap C)|A)$ significa a probabilidade de a segunda bola retirada ter cor cinzenta e ter número par, sabendo que a primeira bola retirada é branca.
Como foi retirada uma bola e não há reposição, existem 19 bolas possíveis para a segunda extração. Assim, o número de casos possíveis é igual a 19;
Por outro lado, como a bola retirada é branca, continuam na caixa as 10 bolas cinzentas, numeradas de 11 a 20, das quais existem cinco com número par;
Assim, de acordo com a Regra de Laplace, a probabilidade de um acontecimento é o quociente entre o número de casos favoráveis e o número de casos possíveis, quando estes são todos equiprováveis, vem que $P((B \cap C)|A) = \frac{5}{19}$.

12. .

12.1. Seja $B(x, 0; 0)$
Como $B \in r$, então
$\frac{2-x}{2} = \frac{0}{2} \wedge \frac{2-x}{2} = -0 \Leftrightarrow \frac{2-x}{2} = 0 \wedge \frac{2-x}{2} = 0 \Leftrightarrow 2-x=0 \wedge 2-x=0 \Leftrightarrow x = 2$
então, $B(2,0;0)$. e sendo assim, $A(0,2;0)$; $C(4,2;0)$; $D(2,4;0)$ e $V(2,2;-4)$
O ponto $T\left(\frac{2+2}{2}; \frac{0+2}{2}; \frac{0-4}{2}\right) = (2;1;-2)$
$\overrightarrow{AT} = T - A = (2;1;-2) - (0,2;0) = (2;-1,-2)$
Portanto, uma condição cartesiana da reta AT : $\frac{x-2}{2} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z+2}{-2}$

12.2. Seja M o ponto médio da aresta $[BD]$
$M\left(\frac{2+2}{2}; \frac{0+4}{2}; \frac{0+0}{2}\right) = (2,2,0)$
$\overrightarrow{AV} = V - A = (2;2;-4) - (0,2;0) = (2;0,-4)$
$r = ||\overrightarrow{AV}|| = \sqrt{2^2 + 0^2 + (-4)^2} = \sqrt{20}$
A equação da superfície esférica é $(x-2)^2 + (y-2)^2 + (z-0)^2 = (\sqrt{20})^2$
ou seja, $(x-2)^2 + (y-2)^2 + z^2 = 20$

12.3. $\overrightarrow{r} = (-2;2;-1)$ é um vetor diretor da reta r.
Como a reta r é perpendicular ao plano ADV, então um vetor normal ao plano poderá ser $(-2;2;-1)$ então, $ADV : -2x + 2y - z + d = 0$
determinemos d tendo em conta que o plano contém o ponto $A(0;2;0)$
então, $-2 \times 0 + 2 \times 2 - 0 + d = 0 \Leftrightarrow d = -4$
logo, $ADV : -2x + 2y - z - 4 = 0$

12.4. Para numerar a base da pirâmide temos duas escolhas (com o 2 ou com o 16); para cada uma destas hipóteses, as faces laterais podem ser numeradas de ${}^6A_4$ maneiras distintas. Com efeito, para a primeira face lateral a numerar existem seis números possíveis (excluiu-se o

2 e o 16). Escolhido o número dessa face, para a segunda face já só há cinco opções (pois não se podem repetir números). Fixados os números das duas primeiras faces a numerar, para a terceira face já só restam quatro números. E, por fim, para a última face a numerar só existem três números disponíveis.
Então, pode-se numerar as faces da pirâmide de $2 \times {}^6A_4 = 2 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 = 720$ maneiras distintas.