**1.** Os segmentos de reta $[AB]$ e $[BC]$ são lados consecutivos de um hexágono regular de perímetro igual a $k$ unidades de comprimento. Qual é o valor do produto escalar $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CB}$?

(A) $-\frac{k^2}{72}$ (B) $-\frac{k^2}{2}$ (C) $\frac{k^2}{72}$ (D) $\frac{k^2}{2}$

**2.** Na figura 1 está representada, num referencial ortogonal e monométrico $xOy$, uma circunferência que passa nos pontos A, O e B. Sabe-se que:

- $B(5,5)$
- $\|\overrightarrow{OB}\| = 5\|\overrightarrow{OA}\|$
- $[AB]$ é um diâmetro da circunferência

Determina uma equação cartesiana da circunferência de diâmetro $[AB]$.

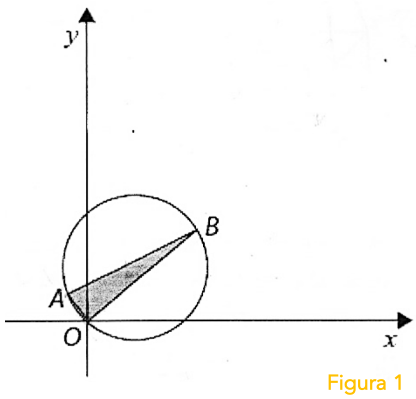

Figura 1

Sugestão: Começa por determinar a equação da reta OA tendo em consideração a sua relação com a reta OB.

**3.** Na figura 2 está representado um trapézio retângulo $[ABCD]$ tal que: $\overline{CD} = 4, \overline{AD} = 3$ e $\overline{EB} = 2$.

Determina o valor exato de $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BD}$.

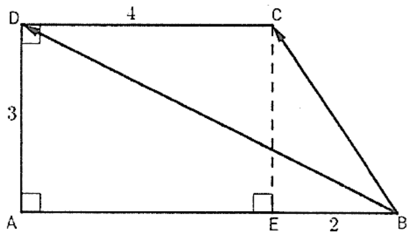

Figura 2

**4.** Na figura 3, está representado, num referencial o.n. $Oxyz$, o cubo $[ABCDEFGH]$ de aresta 5.

Sabe-se que:

- $\overline{AP} = \overline{GR} = \frac{2}{5}\overline{AB}$;
- $Q$ é o ponto médio de $[BC]$ e pertence ao eixo $Oy$;
- os pontos A e D pertencem ao eixo $Ox$.

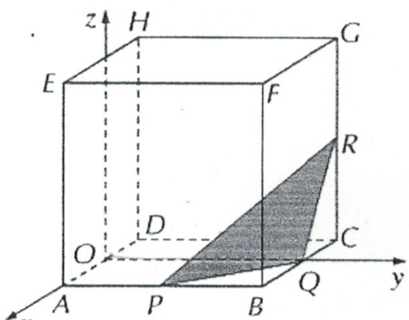

Figura 3

4.1 Determina, em graus e com aproximação às décimas, a amplitude do ângulo $P\hat{Q}R$.

4.2 Determina uma equação cartesiana do plano que passa no vértice G e tem como vetor normal $\overrightarrow{BH}$. Apresenta a equação pedida na forma $ax + by + cz + d = 0$.

**5.** Na figura 4 está representada, em referencial o.n. $xOy$, a circunferência de centro no ponto $A(4,7)$ e que contém o ponto $D(8,10)$.

Sabe-se que:

- [CF] é a corda da circunferência contida no eixo $Oy$;
- [CD] é a corda da circunferência paralela ao eixo $Ox$;
- [AE] é um raio da circunferência, paralelo ao eixo $Oy$;
- [ABCD] é um trapézio retângulo.

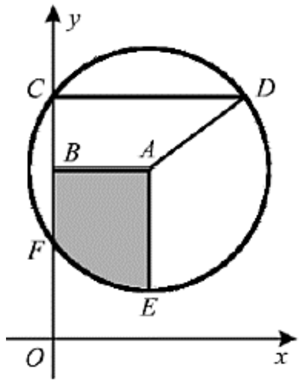

Figura 4

5.1 Determina a área do trapézio [ABCD].

5.2 Determina a equação reduzida da mediatriz do segmento [AD].

5.3 Define, por uma condição:

5.3.1 a região sombreada, incluindo a fronteira.

5.3.2 a equação vetorial da reta FE.

5.3.3 as equações paramétricas da reta FD e verifica se o ponto A pertence a essa reta.

5.3.4 a equação da reta tangente à circunferência no ponto D.

5.4 Indica as coordenadas de um vetor colinear ao vetor $\overrightarrow{AD}$ de norma $\sqrt{8}$ e com sentido oposto.

**6.** Na figura 5 está representado, em referencial ortonormado $Oxyz$, um sólido que pode ser decomposto num cubo e numa pirâmide quadrangular regular. Sabe-se que:

- a origem do referencial é um dos vértices do cubo, o vértice P pertence ao eixo $Ox$ e o vértice R pertence ao eixo $Oy$.
- os vértices da base da pirâmide são os pontos médios dos lados do quadrado [OPQR] .
- o ponto $Q$ tem coordenadas (2,2,0).
- o volume do sólido é igual a 10.

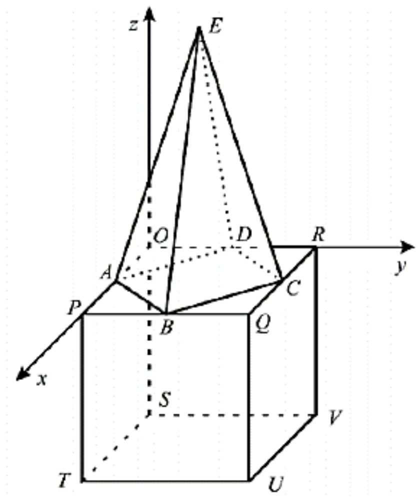

Figura 5

6.1 Determine a cota do ponto E.

6.2 Determine uma equação da superfície esférica que tem centro no ponto T e que contém o ponto C.

6.3 Escreve a equação do plano mediador do segmento [BE].

6.4 Escreve uma equação cartesiana do plano ABE.

6.5 Escreve as equações paramétricas da reta AD.

**7.** Sejam $\vec{a}$ e $\vec{b}$ dois vetores num referencial o.n., tais que $\|\vec{a}\| = \|\vec{b}\| = 5$ e $\mathrm{sen}(\theta) = \frac{7}{25}$, onde $\theta$ é a amplitude do ângulo agudo formado por $\vec{a}$ e $\vec{b}$. Qual é o valor de $\vec{a} \cdot \vec{b}$?

(A) $24$  (B) $7$  (C) $\frac{24}{25}$  (D) $\frac{3\sqrt{2}}{5}$

**8.** Considera num referencial ortonormado $Oxyz$, os planos $\alpha: x + 2y - z + 1 = 0$ e $\beta: -2x - 4y + 2z - 3 = 0$ e a reta $r: (x,y,z) = (0,1,-1) + k\left(-\frac{1}{2}, -1, \frac{1}{2}\right), k \in \mathbb{R}$

8.1 Mostra que os planos são estritamente paralelos.

8.2 Seja $\delta: 4ax - 2y + a^2 z = 1$, com $a \in \mathbb{R}$, um plano.

Determina a de modo que os planos $\beta$ e $\delta$ sejam perpendiculares.

8.3 Mostra que a reta $r$ é perpendicular ao plano $\alpha$.

8.4 Escreve uma equação vetorial da reta $t$ estritamente paralela ao plano $\alpha$, e que contém, o ponto $T(-1,2-1)$.

**9.** Considera, num referencial o.n. $xOy$, as retas $r$ e $s$ definidas, respetivamente, por:

$$r: (x,y) = (1,3) + k(2,0), k \in \mathbb{R} \quad \text{e} \quad s: y = \frac{4}{5}x + 1$$

Qual é o valor da amplitude do ângulo formado pelas duas retas, com arredondamento às unidades?

(A) $43°$  (B) $41°$  (C) $39°$  (D) $37°$

**10.** Na figura 6 ao lado, está representada, num referencial o.n. $Oxyz$, uma pirâmide quadrangular regular $[ABCDV]$.

Os vértices A e C têm coordenadas $(2,1,0)$ e $(0,-1,2)$, respetivamente.

O vértice $V$ tem coordenadas $(3,-1,2)$.

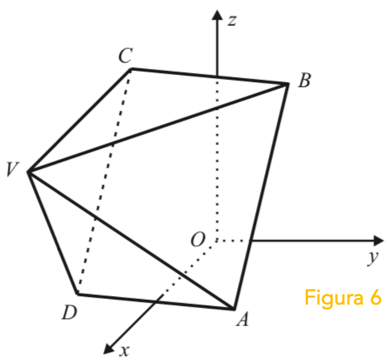

Figura 6

10.1 Determina a amplitude do ângulo $VAC$. Apresenta o resultado em graus, arredondado às unidades.

Se, em cálculos intermédios, procederes a arredondamentos, conserva, no mínimo, duas casas decimais.

10.2 Determina uma equação do plano que contém a base da pirâmide.

Apresente essa equação na forma $a\,x + by + cz + d = 0$.

**11.** Na figura 7 está representado, em referencial o.n. $Oxyz$, o sólido $[ABCDEFGH]$, que pode ser decomposto num cubo e numa pirâmide quadrangular oblíqua. Relativamente à figura sabe-se que:

- o vértice A tem coordenadas $(0,-2,0)$;
- o vértice B pertence ao semieixo positivo $Oy$;
- o vértice C pertence ao semieixo positivo $Ox$;
- o vértice F pertence ao semieixo positivo $Oz$;
- o plano BCF é definido pela equação $3x+2y+3z=6$.

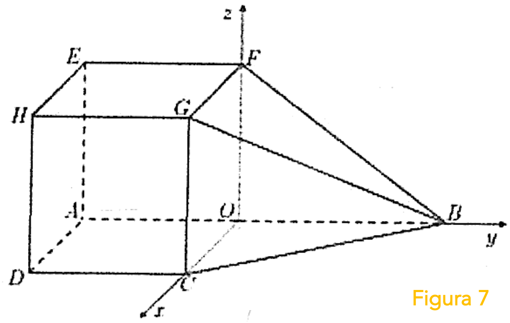

Figura 7

11.1 Escreve uma condição da esfera de centro em A e raio $[BA]$.

11.2 Considera a reta $r$, que passa em O e é perpendicular ao plano BCF. Determina as coordenadas do ponto de interseção da reta $r$ com o plano BCF.

**Sugestão:** Comece por escrever um sistema de equações paramétricas da reta $r$.

11.3 Escreve uma equação do plano paralelo ao plano BCF e que passa em G.

**12.** Considere, num referencial o.n., os vetores $\vec{a}$ e $\vec{b}$. Sabe-se que:

- o ângulo formado pelos vetores é agudo.
- $\|\vec{a}\| = \sqrt{3}$; $\|\vec{b}\| = 4$
- $sen(\vec{a} \,\hat{,}\, \vec{b}) = \frac{\sqrt{3}}{4}$

Qual é o valor do produto escalar $\vec{a} \cdot \vec{b}$?

(A) $\sqrt{39}$ (B) $\sqrt{43}$ (C) $12$ (D) $15$

**13.** Na figura 8 estão representados, num referencial o.n. x0y, os pontos A, B e C. Sabe-se que:

- o ponto A pertence ao semieixo positivo 0y e tem ordenada 5;
- o ponto C tem coordenadas (1,2);
- as retas AC e BC são perpendiculares;
- a reta BC tem inclinação $\alpha$.

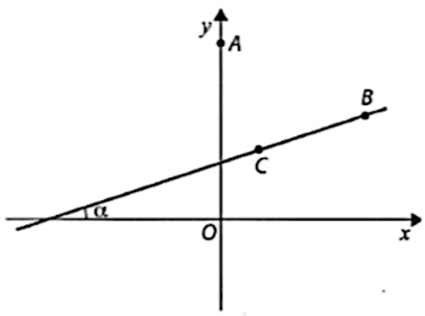

Figura 8

Determina o valor de $\alpha$.

Apresenta o resultado em radianos, arredondado às décimas.

**14.** Na figura 9, está representado, num referencial o.n. $Oxyz$, um paralelepípedo retângulo $[ABCDEFGH]$. Sabe-se que:

- o vértice A pertence ao eixo $Ox$ e o vértice B pertence ao eixo $Oy$;
- o vértice C tem coordenadas $(0, 3, 6)$ e o vértice G tem coordenadas $(6, 11, 0)$;
- o plano $ABC$ é definido pela equação $3x + 4y - 12 = 0$.

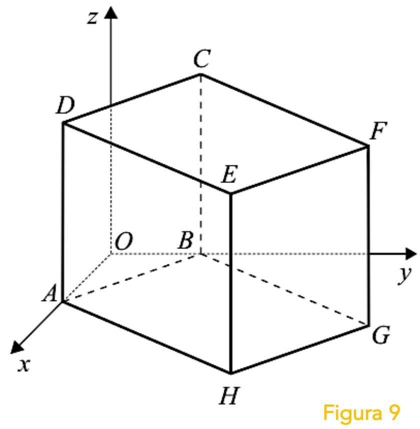

Figura 9

14.1 Determina o volume do paralelepípedo $[ABCDEFGH]$.

14.2 Seja P o ponto de coordenadas $(1, -4, 3)$ e seja $r$ a reta que passa pelo ponto P e é perpendicular ao plano $ABC$. Determina as coordenadas do ponto de interseção da reta $r$ com o plano $ABC$.

**15.** Considere, num referencial o.n. $Oxyz$,

- o plano $\alpha$, de equação $2x + 3y - z - 9 = 0$
- a reta $r$, de equação vetorial $(x, y, z) = (1,2,1) + k(0,1,5), k \in \mathbb{R}$

15.1 Seja A o ponto da reta $r$ cuja ordenada é igual a 4.
Determine uma equação do plano que é paralelo ao plano $\alpha$ e que passa pelo ponto A.
Apresente essa equação na forma $ax + by + cz + d = 0$.

15.2 Seja P o ponto de interseção da reta $r$ com o plano $\alpha$.
Determina as coordenadas do ponto P.

**16.** Considera, num referencial ortogonal e monométrico $Oxyz$, dois pontos P e Q. Sabe-se que:

- o ponto P tem coordenadas $(1 - a, a - 2, \sqrt{5})$, sendo $a$ um número real;
- o ponto Q é o ponto simétrico do ponto P, em relação ao eixo das ordenadas.

16.1 Determina os valores de $a$ para os quais o ponto P pertence à superfície esférica de centro $(1, -4, 0)$ e raio igual a 5.

16.2 Mostra que a área de um quadrado que tenha $[PQ]$ como diagonal é dada, em função de $a$, por $2a^2 - 4a + 12$.

**17.** Seja $m$ um número real e considera, no referencial ortonormado $Oxyz$, os planos $\alpha$ e $\beta$, definidos respetivamente por: $x - y + 2z = 1$ e $mx - z = 3$.

O valor de $m$, para o qual os planos $\alpha$ e $\beta$, são perpendiculares, é:

(A) $-2$ (B) $1$ (C) $-1$ (D) $2$

**18.** Considera, num referencial o.n. $Oxyz$, a reta $r$ e o plano $\alpha$ definidos por:

$$r: (x, y, z) = (1,0,1) + k(-1,2,0), k \in \mathbb{R}. \qquad \alpha: 2x + y = 2$$

Qual das seguintes afirmações é verdadeira?

(A) A reta $r$ está contida no plano $\alpha$.

(B) A reta $r$ é estritamente paralela ao plano $\alpha$.

(C) A reta $r$ é perpendicular ao plano $\alpha$.

(D) A interseção da reta $r$ com o plano $\alpha$ é o ponto de coordenadas $(0,2,0)$.

**19.** Considera, num referencial o.n. $Oxyz$, o ponto $A(1,1,1)$ e o plano $\alpha$ de equação $x + y - 2z = 4$.

19.1 Considera o ponto B pertencente ao plano $xOy$, ao plano $x = 2$ e ao plano $\alpha$, e ainda o ponto C que pertence à reta de equação $x = 2 \wedge z = 1$ e ao plano $\alpha$.

Determina a amplitude de CAB, em radianos.

Apresenta o resultado com arredondamento às centésimas.

19.2 Considera a superfície esférica $S$ de centro em A e raio $\sqrt{6}$.

Averigua se $S$ é tangente ao plano $\alpha$. Se sim, indica as coordenadas do ponto de tangência.

**20.** Na figura 10 está representada num referencial o.n. Oxyz, a pirâmide quadrangular regular [CDEFB].

Sabe-se que:

- o ponto A é o centro da base da pirâmide;
- o plano CDE pode ser definido pela equação $-x + 2y + 2z - 2 = 0$;
- uma equação vetorial da reta BA é: $(x, y, z) = (1, -5, -7) + k(1, -2, -4), k \in \mathbb{R}$

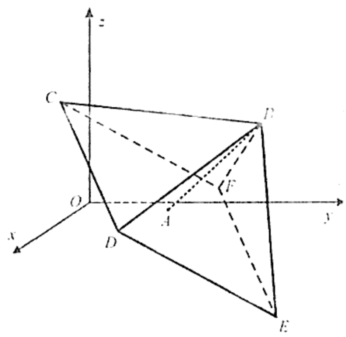


Figura 10

20.1 Seja $r$ a reta definida vetorialmente por $(x, y, z) = (0,6,0) + k(p^2, 0, p), k \in \mathbb{R}$ e $p \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$.

Determina o valor de $p$ de forma que a reta $r$ seja paralela ao plano CDE.

20.2 Determina uma equação cartesiana de um plano perpendicular ao plano CDE e que passa no ponto A.

**21.** Considera, num referencial $Oxyz$, o plano $\alpha$ definido pela equação $x + 2y + 3z = 4$.

Qual das seguintes condições define uma reta paralela ao plano $\alpha$?

(A) $(x, y, z) = (1,0,1) + k(1,2,3), k \in \mathbb{R}$

(B) $(x, y, z) = (1,2,3) + k(3,0,-1), k \in \mathbb{R}$

(C) $(x, y, z) = (1,2,3) + k(1,2,1), k \in \mathbb{R}$

(D) $(x, y, z) = (1,1,1) + k(1,2,3), k \in \mathbb{R}$