Preparação para exame

12.º Ano de Escolaridade | Turmas G-K

PROBABILIDADES E CÁLCULO COMBINATÓRIO

1. 1.1. Para colocar as fichas verdes temos $^9C_3$ maneiras diferentes de o fazer. Colocadas as fichas verdes, sobram seis lugares para as amarelas, que podem ser colocadas de $^6C_2$ maneiras distintas. Colocadas as fichas amarelas, sobram quatro lugares para as quatro fichas brancas, que têm apenas uma possibilidade de colocação, ou seja, $^4C_4$.
   O número de sequências que se podem constituir é igual a $^9C_3 \times ^6C_2 \times ^4C_4 = 1260$.
   Um outro processo: $\dfrac{9!}{3! \times 2! \times 4!} = 1260$

   1.2. Se as fichas verdes saem todas seguidas logo no início da sequência, então temos uma única maneira de as colocar. Colocadas as ficha verdes, sobram seis lugares para as amarelas, que podem ser colocadas de $^6C_2$. Colocadas as amarelas, restam quatro lugares para as quatro brancas, que têm apenas uma possibilidade de colocação, ou seja, $^4C_4$.
   O número de sequências que se podem constituir é igual a $^6C_4 \times ^4C_4 = 15$.
   Um outro processo: $\dfrac{6!}{2! \times 4!} = 15$

   1.3. Se a sequência começa pela ficha amarela e termina com a outra ficha amarela, estas duas fichas têm apenas uma posição possível. Colocadas as fichas amarelas, temos $^7C_3$ maneiras distintas de colocar as fichas verdes. Colocadas as fichas verdes, sobram quatro lugares para as fichas brancas, que têm apenas uma posição possível $^4C_4$. O número de sequências que se podem constituir é igual a $^7C_3 \times ^4C_4 = 35$
   Um outro processo: $\dfrac{7!}{3! \times 4!} = 35$
   Este é o número de casos favoráveis.
   O número de casos possíveis já foi calculado no item 1.1. ou seja, é: $^9C_3 \times ^6C_2 \times ^4C_4 = 1260$.
   Assim, a probabilidade pedida é igual a $P = \dfrac{^7C_3 \times ^4C_4}{^9C_3 \times ^6C_2 \times ^4C_4} = \dfrac{35}{1260} = \dfrac{1}{36}$.
   ou ainda:
   $$P = \frac{\dfrac{7!}{3! \times 4!}}{\dfrac{9!}{3! \times 2! \times 4!}} = \frac{35}{1260} = \frac{1}{36}.$$

2. Número de rapazes: $0.3 \times 200 = 60$
   Número de raparigas: $200 - 60 = 140$

   Quanto ao número de casos possíveis: temos 200 alunos e vamos escolher, ao acaso e simultaneamente, seis. Esta escolha pode ser feita de $^{200}C_6$ maneiras distintas.
   Quanto ao número de casos favoráveis: queremos que a comissão tenha alunos dos dois sexos e com mais rapazes do que raparigas e ainda que a Joana faça parte dessa comissão, então há dois casos a considerar:

   4 rapazes + 1 rapariga + Joana
   5 rapazes + Joana

   - Quanto ao primeiro caso, dos 60 rapazes escolho 4, e o número de maneiras distintas de fazer esta escolha é dado por $^{60}C_4$; das raparigas só preciso escolher uma de um total de

139, já que a Joana já está escolhida, e as diferentes maneiras de o fazer é dado por ${}^{139}C_1$. Assim, podemos formar ${}^{60}C_4 \times^{139} C_1$ comissões distintas.

- Quanto ao segundo caso, dos 60 rapazes escolho 5 e das raparigas só se escolhe a Joana. Esta escolha pode ser feita de ${}^{60}C_5 \times 1$ maneiras distintas.

Então o número de maneiras de a comissão ser constituída por alunos dos dois sexos, mais rapazes do que raparigas e a Joana ser um dos elementos escolhidos é dado por
${}^{60}C_4 \times^{139} C_1 +^{60} C_5 \times 1 = 139 \times^{60} C_4 +^{60} C_5$

Segundo a lei de Laplace, a probabilidade de um acontecimento é dado pelo quociente entre o número de casos favoráveis a esse acontecimento e o número de casos possíveis, quando estes são todos equiprováveis. Assim, uma resposta ao problema é

$\dfrac{139 \times^{60} C_4 +^{60} C_5}{{}^{200}C_6}$

TRIGONOMETRIA

1. .

   1.1. $\sin\beta = \frac{a}{4} \Leftrightarrow a = 4\sin\beta$
   $\cos\beta = \frac{b}{4} \Leftrightarrow b = 4\cos\beta$
   $A_{sombreada} = 2 \times A_{[OPQ]} = 2 \times \dfrac{2b \times a}{2} = 8\cos\beta \cdot 4\sin\beta = 32\sin\beta \cdot \cos\beta$

   1.2. de $2tg(\pi - \beta) + tg(\pi + \beta) = -\frac{1}{3}$, resulta que $-2tg(\beta) + tg(\beta) = -\frac{1}{3} \Leftrightarrow tg(\beta) = \frac{1}{3}$
   de $1 + tg^2\beta = \dfrac{1}{\cos^2\beta}$, resulta que
   $1 + \left(\dfrac{1}{3}\right)^2 = \dfrac{1}{\cos^2\beta} \Leftrightarrow \dfrac{10}{9} = \dfrac{1}{\cos^2\beta} \Leftrightarrow \cos^2\beta = \dfrac{9}{10} \Leftrightarrow \cos\beta = \pm\sqrt{\dfrac{9}{10}}$, e $\beta \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[$, logo,
   $\cos\beta = \dfrac{3\sqrt{10}}{10}$
   de $tg\beta = \dfrac{\sin\beta}{\cos\beta}$ resulta que $\sin\beta = tg\beta \times \cos\beta = \dfrac{1}{3} \times \dfrac{3\sqrt{10}}{10} = \dfrac{\sqrt{10}}{10}$
   sendo assim, tem-se que
   $A_{sombreada} = 32\sin\beta \cdot \cos\beta = 32 \times \dfrac{\sqrt{10}}{10} \times \dfrac{3\sqrt{10}}{10} = 96 \times \dfrac{1}{10} = \dfrac{48}{5}$

2. .

   2.1. O ponto P tem coordenadas $P = (\cos x; \sin x) = \left(\dfrac{4}{5}; \sin x\right)$
   ou seja, $\cos x = \dfrac{4}{5}$.
   então, de $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ resulta que
   $\sin^2 x + \left(\dfrac{4}{5}\right)^2 = 1 \Leftrightarrow \sin^2 x = 1 - \dfrac{16}{25} \Leftrightarrow \sin^2 x = \dfrac{9}{25} \Leftrightarrow \sin x = \pm\sqrt{\dfrac{9}{25}}$,
   com $x \in 4^\circ$ Quadrante
   então tem-se que, $\sin x = -\dfrac{3}{5}$
   Daqui resulta que $P(\cos x; \sin x) = \left(\dfrac{4}{5}; -\dfrac{3}{5}\right)$

   2.2. O ponto T tem coordenadas $P(1; tgx)$
   de $tgx = \dfrac{\sin x}{\cos x}$ resulta que $tgx = \dfrac{-\frac{3}{5}}{\frac{4}{5}} = -\dfrac{3}{4}$

Daqui resulta que $P(1;tgx)=\left(1;-\dfrac{3}{4}\right)$

A ordenada do ponto T é $-\dfrac{3}{4}$

2.3. $\dfrac{tg(5\pi+x)}{\sin\left(\dfrac{5\pi}{2}-x\right)\cdot\cos\left(\dfrac{3\pi}{2}+x\right)}=\dfrac{tgx}{\cos x\cdot\sin x}=\dfrac{\frac{\sin x}{\cos x}}{\cos x\cdot\sin x}=\dfrac{1}{\cos^2 x}=\dfrac{1}{\frac{16}{25}}=\dfrac{25}{16}$

3. .

$\cos x=\dfrac{1-2m^2}{3}\wedge x\in\left]\frac{\pi}{2};\pi\right]$ é possível se
$-1\leq\cos x<0$
ou seja
$-1\leq\dfrac{1-2m^2}{3}<0\Leftrightarrow\dfrac{1-2m^2}{3}\geq-1\wedge\dfrac{1-2m^2}{3}<0\Leftrightarrow 1-2m^2\geq-3\wedge 1-2m^2<0\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 4-2m^2\geq 0\wedge 1-2m^2<0\Leftrightarrow$
Cálculos auxiliares
$4-2m^2=0\Leftrightarrow m=\pm\sqrt{2}$
então
$4-2m^2\geq 0\Leftrightarrow-\sqrt{2}\leq m\leq\sqrt{2}$
$1-2m^2=0\Leftrightarrow m=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$
então
$1-2m^2<0\Leftrightarrow m<-\frac{\sqrt{2}}{2}\vee m>\frac{\sqrt{2}}{2}$
então, de $4-2m^2\geq 0\wedge 1-2m^2<0$
resulta que $m\in\left(\left[-\sqrt{2};-\frac{\sqrt{2}}{2}\right[\cup\left]\frac{\sqrt{2}}{2};\sqrt{2}\right]\right)$

4. .

4.1. $g\left(\dfrac{\pi}{9}\right)=\sqrt{3}-4\sin\left(3\times\dfrac{\pi}{9}\right)=\sqrt{3}-4\sin\left(\dfrac{\pi}{3}\right)=\sqrt{3}-4\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=-\sqrt{3}.$

4.2. $-1\leq\sin(3x)\leq 1,\forall x\in D_g$
$\therefore 4\geq-4\sin(3x)\geq-4,\forall x\in D_g$
$\therefore -4\leq-4\sin(3x)\leq 4,\forall x\in D_g$
$\therefore -4+\sqrt{3}\leq\sqrt{3}-4\sin(3x)\leq 4+\sqrt{3},\forall x\in D_g$
$\therefore -4+\sqrt{3}\leq g(x)\leq 4+\sqrt{3},\forall x\in D_g$
logo, $D'_g=[-4+\sqrt{3};4+\sqrt{3}]$

4.3. Seja τ o período positivo mínimo da função g.
Então,
$g(x+\tau)=g(x),\forall x,x+\tau\in D_g$ e daqui resulta que
$\sqrt{3}-4\sin(3(x+\tau))=\sqrt{3}-4\sin(3x)$
$\therefore\sin(3x+3\tau)=\sin(3x)$
atendendo a que a função seno admite $2\pi rad$ como período positivo mínimo, tem-se que $3\tau=2\pi\Leftrightarrow\tau=\dfrac{2\pi}{3}$. Ou seja, a função g admite $\dfrac{2\pi}{3}$ como período positivo mínimo. Portanto, a afirmação é falsa.

4.4. $g(0)=\sqrt{3}-4\sin(3\times 0)=\sqrt{3}-4\times 0=\sqrt{3}$

$g(x)=3g(0)\Leftrightarrow\sqrt{3}-4\sin(3x)=3\sqrt{3}\Leftrightarrow\sin(3x)=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow\sin(3x)=\sin\left(-\dfrac{\pi}{3}\right)\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 3x=-\dfrac{\pi}{3}+k2\pi\vee 3x=\pi+\dfrac{\pi}{3}+k2\pi,k\in\mathbb{Z}$
$\Leftrightarrow x=-\dfrac{\pi}{9}+k\dfrac{2\pi}{3}\vee x=\dfrac{4\pi}{9}+k\dfrac{2\pi}{3},k\in\mathbb{Z}$
Procuremos as soluções que pertencem ao intervalo $\left[-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right]$
$k=0\rightarrow x=-\dfrac{\pi}{9}\vee x=\dfrac{4\pi}{9}$

$k=1 \to x=-\frac{\pi}{9}+\frac{2\pi}{3} \vee x=\frac{4\pi}{9}+\frac{2\pi}{3}$
$\to x=\frac{5\pi}{9} \vee x=\frac{10\pi}{9}$
$k=-1 \to x=-\frac{\pi}{9}-\frac{2\pi}{3} \vee x=\frac{4\pi}{9}-\frac{2\pi}{3}$
$\to x=-\frac{7\pi}{9} \vee x=-\frac{2\pi}{9}$
$k=-2 \to x=-\frac{\pi}{9}-\frac{4\pi}{3} \vee x=\frac{4\pi}{9}-\frac{4\pi}{3}$
$\to x=-\frac{13\pi}{9} \vee x=-\frac{8\pi}{9}$

Podemos concluir que o conjunto solução da equação é $\left\{-\frac{2\pi}{9};-\frac{\pi}{9};\frac{4\pi}{9}\right\}$

5. Determinemos as coordenadas do ponto A
$f(0)=1-2\cos(0)=1-2\times 1=-1$
Logo, $A(0,f(0))=(0;-1)$
Determinemos as abcissas dos pontos B e C
$-1 \leq \cos(2x) \leq 1, \forall x \in D_f$
$\therefore -1 \leq -\cos(2x) \leq 1, \forall x \in D_f$
$\therefore -2 \leq -2\cos(2x) \leq 2, \forall x \in D_f$
$\therefore 1-2 \leq 1-2\cos(2x) \leq 1+2, \forall x \in D_f$
$\therefore -1 \leq 1-2\cos(2x) \leq 3, \forall x \in D_f$
$\therefore -1 \leq f(x) \leq 3, \forall x \in D_f$
Logo, $D'_f=[-1;3]$
O valor máximo da função é 3.
$f(x)=3 \Leftrightarrow 1-2\cos(2x)=3 \Leftrightarrow 2\cos(2x)=-2 \Leftrightarrow \cos(2x)=-1 \Leftrightarrow \cos(2x)=\cos(\pi) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 2x=\pi+k2\pi, k\in\mathbb{Z} \Leftrightarrow x=\frac{\pi}{2}+k\pi, k\in\mathbb{Z}$
Sabe-se que $x\in[-\pi;\pi]$
Se $k=0 \to x=\frac{\pi}{2}$
Se $k=-1 \to x=-\frac{\pi}{2}$
Logo, $B\left(-\frac{\pi}{2};3\right)$ e $C\left(\frac{\pi}{2};3\right)$
A altura do triângulo é igual a $1+3=4$
E sendo assim $A_{[ABC]}=\frac{\overline{BC}\times 4}{2}=\frac{\left|\frac{\pi}{2}-\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right|\times 4}{2}=\frac{4\pi}{2}=2\pi$ u.a.

6. .

6.1. $f(0)=\sqrt{2}-2\sin^2(2\times 0)=\sqrt{2}-2\sin^2(0)=\sqrt{2}-0=\sqrt{2}$
$g\left(\frac{\pi}{8}\right)=4\cos\left(2\times\frac{\pi}{8}\right)=4\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)=4\times\frac{\sqrt{2}}{2}=2\sqrt{2}$
Então,
$f(0)-\frac{1}{2}g\left(\frac{\pi}{8}\right)=\sqrt{2}-\frac{1}{2}\times 2\sqrt{2}=0.$

6.2. $-1 \leq \cos(2x) \leq 1, \forall x \in D_g$
$\therefore 4 \geq -4\cos(2x) \geq -4, \forall x \in D_g$
$\therefore -4 \leq -4\cos(2x) \leq 4, \forall x \in D_g$
$\therefore -4 \leq g(x) \leq 4, \forall x \in D_g$
logo, $D`_g=[-4;4]$

6.3. $0 \leq \sin^2(2x) \leq 1, \forall x \in D_f$
$\therefore -2 \leq -2\sin^2(2x) \leq 0, \forall x \in D_f$
$\therefore \sqrt{2}-2 \leq \sqrt{2}-2\sin^2(2x) \leq \sqrt{2}, \forall x \in D_f$
$\therefore \sqrt{2}-2 \leq g(x) \leq \sqrt{2}, \forall x \in D_f$
logo, $D`_f=[\sqrt{2}-2;\sqrt{2}]$

6.4. $f(x+2\pi) = \sqrt{2} - 2\sin^2[2(x+\pi)] = \sqrt{2} - 2\sin^2(2x+2\pi) = \sqrt{2} - 2[\sin(2x+2\pi)]^2 = \sqrt{2} - 2[\sin(2x)]^2 =$
$= \sqrt{2} - 2\sin^2(2x) = f(x), \forall x \in D_f$
Logo a função f admite π como período.

6.5. Seja τ o período positivo mínimo da função g
então,
$g(x+\tau) = g(x) \Leftrightarrow 4\cos[2(x+\tau)] = 4\cos(2x) \Leftrightarrow \cos(2x+2\tau) = \cos(2x)$
Atendendo à periodicidade da função cosseno, como 2π é o período positivo mínimo, vem,
$2\tau = 2\pi \Leftrightarrow \tau = \pi$
Ou seja, a função g admite π como período positivo mínimo.

6.6. Seja τ o período positivo mínimo da função h
então,
$h(x+\tau) = h(x) \Leftrightarrow \tan\left(\frac{x+\tau}{4}\right) = \tan\left(\frac{x}{4}\right) \Leftrightarrow \tan\left(\frac{x}{4} + \frac{\tau}{4}\right) = \tan\left(\frac{x}{4}\right)$
Atendendo à periodicidade da função tangente, como π é o período positivo mínimo, vem,
$\frac{\tau}{4} = \pi \Leftrightarrow \tau = 4\pi$
Ou seja, a função h admite 4π como período positivo mínimo.

6.7. .

- $f(-x) = \sqrt{2} - 2\sin^2[2(-x)] = \sqrt{2} - 2[\sin(-2x)]^2 = \sqrt{2} - 2[-\sin(2x)]^2 = \sqrt{2} - 2[\sin(2x)]^2 = \sqrt{2} - 2\sin^2(2x) = f(x), \forall x, -x \in D_f$.
  A função f é par.
  O gráfico da função f é simétrico em relação ao eixo Oy.
- $g(-x) = 4\cos(2(-x)) = 4\cos(-2x) = 4\cos(2x) = g(x), \forall x, -x \in D_g$.
  A função g é par.
  O gráfico da função g é simétrico em relação ao eixo Oy.
- $h(-x) = \tan\left(\frac{-x}{4}\right) = \tan\left(-\frac{x}{4}\right) = -\tan\left(\frac{x}{4}\right) = -h(x), \forall x, -x \in D_h$.
  A função h é ímpar.
  O gráfico da função h é simétrico em relação à origem do referencial.

6.8. $\sin^2(2\alpha) + \cos^2(2\alpha) = 1$
$\left(-\frac{12}{13}\right)^2 + \cos^2(2\alpha) = 1 \Leftrightarrow \frac{144}{169} + \cos^2(2\alpha) = 1 \Leftrightarrow \cos^2(2\alpha) = 1 - \frac{144}{169} + \Leftrightarrow \cos^2(2\alpha) = \frac{25}{169} \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \cos(2\alpha) = \pm\sqrt{\frac{25}{169}} \Leftrightarrow \cos(2\alpha) = \pm\frac{5}{13}$, como $\alpha \in \left]-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right[$ então, $2\alpha \in \left]-\frac{\pi}{2}; \pi\right[$, e $\sin(2\alpha) < 0$, logo, $\cos(2\alpha) = \frac{5}{13}$

Assim, $\tan(2\alpha) = \frac{\sin(2\alpha)}{\cos(2\alpha)} = \frac{-\frac{12}{13}}{\frac{5}{13}} = -\frac{12}{5}$

$g(\alpha) = 4\cos(2\alpha) = 4 \times \frac{5}{13} = \frac{20}{13}$; $\qquad h(8\alpha) = \tan\left(\frac{8\alpha}{4}\right) = \tan(2\alpha) = -\frac{12}{5}$

Portanto, $\frac{g(\alpha)}{h(8\alpha)} = \frac{\frac{20}{13}}{-\frac{12}{5}} = -\frac{100}{156} = -\frac{25}{39}$