Preparação para exame

12.º Ano de Escolaridade | Turma G-K

FUNÇÃO EXPONENCIAL

1. .

1.1. Determinemos as coordenadas dos vértices do triângulo

Ponto C

$f(0)=\dfrac{1}{e^{0^2-2}}-e=\dfrac{1}{e^{-2}}-e=e^2-e.$
Logo, $C(0;e^2-e)$

Pontos A e B

Determinemos os zeros da função f

$f(x)=0\Leftrightarrow \dfrac{1}{e^{x^2-2}}-e=0\Leftrightarrow e^{-x^2+2}=e\Leftrightarrow -x^2+2=1\Leftrightarrow -x^2=-1\Leftrightarrow x^2=1\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x=-1\vee x=1.$

Logo, $A(-1;0)$ e $B(1;0)$

Assim,

$\overline{AB}=|1-(-1)|=|2|=2$
$\overline{OC}=|e^2-e|=e^2-e$

Portanto, $A_{[ABC]}=\dfrac{\overline{AB}\times\overline{OC}}{2}=\dfrac{2\times(e^2-e)}{2}=e^2-e\ u.a.$

1.2. Determinemos a função derivada de f

$f'(x)=\left(\dfrac{1}{e^{x^2-2}}-e\right)'=\left(e^{-x^2+2}-e\right)'=(-x^2+2)'e^{-x^2+2}=-2xe^{-x^2+2}.$

Zeros de f'

$f'(x)=0\Leftrightarrow -2xe^{-x^2+2}=0-2x=0\vee e^{-x^2+2}=0\Leftrightarrow x=0\vee$ equação impossível $\Leftrightarrow x=0.$

Quadro de sinal Sinal de f'

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$-2x$	$+$	0	$-$
e^{-x^2+2}	$+$	$+$	$+$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\nearrow$	e^2-e	$\searrow$

$$f(0) = \frac{1}{e^{0^2-2}} - e = \frac{1}{e^{-2}} - e = e^2 - e.$$

Logo, a função f é estritamente crescente em $\mathbb{R}^-$ e é estritamente decrescente em $\mathbb{R}^+$.

1.3. Determinemos a função segunda derivada de f

$$f''(x) = (f'(x))' = \left(-2xe^{-x^2+2}\right)' = (-2x)'e^{-x^2+2} - 2x \times \left(e^{-x^2+2}\right)' =$$
$$= -2e^{-x^2+2} - 2x \times \left(-2xe^{-x^2+2}\right) = -2e^{-x^2+2} + 4x^2 \times e^{-x^2+2} = (4x^2-2)e^{-x^2+2}.$$

Zeros de f''

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow (4x^2-2)e^{-x^2+2} \Leftrightarrow 4x^2 - 2 = 0 \vee e^{-x^2+2} = 0 \Leftrightarrow 4x^2 = 2 \vee \text{ equação impossível}$$
$$\Leftrightarrow x^2 = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{\frac{1}{2}} \Leftrightarrow x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Quadro de sinal Sinal de f''

x	$-\infty$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$		$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$+\infty$
$4x^2-2$	$+$	0	$-$	0	$+$
e^{-x^2+2}	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$f''(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\cup$	$e(\sqrt{e}-1)$	$\cap$	$e(\sqrt{e}-1)$	$\cup$

$$f\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = e^{-\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+2} - e = e^{-\frac{1}{2}+2} - e = e^{\frac{3}{2}} - e = e\sqrt{e} - e = e(\sqrt{e}-1).$$
$$f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = e^{-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+2} - e = e^{-\frac{1}{2}+2} - e = e^{\frac{3}{2}} - e = e\sqrt{e} - e = e(\sqrt{e}-1).$$

O gráfico da função f tem a concavidade voltada para cima em $\left]-\infty; -\frac{\sqrt{2}}{2}\right[$ e em $\left]\frac{\sqrt{2}}{2}; +\infty\right[$, tem a concavidade voltada para baixo em $\left]-\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right[$.

$\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}; e(\sqrt{e}-1)\right)$ e $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}; e(\sqrt{e}-1)\right)$, são pontos de inflexão do gráfico da função f

2. $1 \in D_g$ e é ponto aderente de D_g

g é contínua em $x = 1$, se e só se existe $\lim_{x\to 1} g(x)$

$$\lim_{x\to 1^-} g(x) = \lim_{x\to 1^-} \frac{e - ex}{1 - e^{x-1}} = \lim_{x\to 1^-} \frac{-e(x-1)}{-\left(e^{x-1}-1\right)} = e \times \lim_{x\to 1^-} \frac{x-1}{e^{x-1}-1} = e \times \frac{1}{\lim_{x-1\to 0^-} \frac{e^{x-1}-1}{x-1}} =$$
$$= e \times \frac{1}{1} = e$$

Utilizou-se o limite notável $\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

$$\lim_{x\to 1^+} g(x) = \lim_{x\to 1^+} \frac{ex^2 - e}{2x - 2} = \lim_{x\to 1^+} \frac{e(x^2-1)}{2(x-1)} = \frac{e}{2} \times \lim_{x\to 1^+} \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} = \frac{e}{2} \times \lim_{x\to 1^+} (x+1) =$$
$$= \frac{e}{2} \times 2 = e$$

$g(1) = e^{\ln a} = a$

Assim, resulta,

$\lim\limits_{x \to 1^+} g(x) = g(1) \wedge \lim\limits_{x \to 1^-} g(x) = g(1) \Leftrightarrow a = e$

3. $f(0) = e^{a \times 0} + ea = e^0 + ea = 1 + ea$
   Então o ponto de tangência tem coordenadas $(0; 1 + ea)$

   O declive da reta tangente r é dado por $m_r = \dfrac{1 + ea - 0}{0 - (1 - e)} = \dfrac{1 + ea}{e - 1}$
   Por outro lado, tem-se que $m_r = f'(0)$

   Ora,

   $f'(x) = (e^{ax} + ea)' = ae^{ax}$
   Assim, $f'(0) = ae^{a \times 0} = ae^0 = a \times 1 = a$

   Logo, tem-se,

   $m_r = f'(0) \Leftrightarrow \dfrac{1 + ea}{e - 1} = a \Leftrightarrow 1 + ea = ea - a \Leftrightarrow a = -1$

FUNÇÃO LOGARÍTMICA

4. .

   4.1. $\log_3(81) = \log_3\left(3^4\right) = 4$

   $\log_2(32) = \log_2\left(2^5\right) = 5$

   então,
   $\log_3(81) - \log_2(32) = 4 - 5 = -1$

   4.2. $\log_5(125) = \log_5\left(5^3\right) = 3$

   $\log(0.0001) = \log\left(10^{-4}\right) = -4$

   Então,
   $\log_5(125) + 2\log(0.0001) = 3 - 8 = -5$

   4.3. $\log_4\left(\dfrac{1}{64}\right) = \log_4\left(\dfrac{1}{4^3}\right) = \log_4\left(4^{-3}\right) = -3$

   $\log_2(64) = \log_2\left(2^6\right) = 6$

   Então,

   $$\frac{\log_4\left(\dfrac{1}{64}\right)}{\log_2(64)} = \frac{-3}{6} = -\frac{1}{2}$$

5. .

5.1. $D_g = \{x \in \mathbb{R} : x+1 > 0\} = \{x \in \mathbb{R} : x > -1\} =]-1; +\infty[$

5.2. $g(x) = 0 \Leftrightarrow \ln(x+1) - 1 = 0 \wedge x > -1 \Leftrightarrow \ln(x+1) = 1 \wedge x > -1 \Leftrightarrow x+1 = e \wedge x > -1 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x = e-1 \wedge x > -1 \Leftrightarrow x = e-1.$
A função g tem um único zero, que é $e-1$

5.3. $D_g =]-1; +\infty[= D'_{g^{-1}}$

$y = g(x) \Leftrightarrow y = \ln(x+1) - 1 \Leftrightarrow y+1 = \ln(x+1) \Leftrightarrow x+1 = e^{y+1} \Leftrightarrow x = e^{y+1} - 1$
Logo, $g^{-1}(x) = e^{x+1} - 1$

$D_{f^{-1}} = \mathbb{R}$

Assim, $g^{-1} : \mathbb{R} \to]-1; +\infty[$, tal que $g^{-1}(x) = e^{x+1} - 1$

6. .

6.1. $\log_2(4-x) - 4 = 0 \Leftrightarrow \log_2(4-x) = 4 \wedge 4 - x > 0 \Leftrightarrow 4 - x = 2^4 \wedge x < 4 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 4 - x = 16 \wedge x < 4 \Leftrightarrow x = -12$
$C.S. = \{-12\}$

6.2. $x^2 \log(x-2) = log(x-2) \Leftrightarrow x^2 \log(x-2) - log(x-2) = 0 \wedge x - 2 > 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow (x^2-1)\log(x-2) = 0 \wedge x > 2 \Leftrightarrow (x^2 - 1 = 0 \vee \log(x-2) = 0) \wedge x > 2 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow (x = -1 \vee x = 1 \vee x - 2 = 1) \wedge x > 2 \Leftrightarrow (x = -1 \vee x = 1 \vee x = 3) \wedge x > 2 \Leftrightarrow x = 3$
$C.S. = \{3\}$

6.3. $\ln^2(x+1) - \ln(x+1) = 2 \Leftrightarrow [\ln(x+1)]^2 - \ln(x+1) - 2 = 0 \wedge x + 1 > 0$
Fazendo a mudança de variável, $y = \ln(x+1)$, vem,

$$y^2 - y - 2 = 0 \Leftrightarrow y = \frac{1 \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \times 1 \times (-2)}}{2 \times 1} \Leftrightarrow y = -1 \vee y = 2$$

Então,

$(\ln(x+1) = -1 \vee \ln(x+1) = 2) \wedge x > -1 \Leftrightarrow (x+1 = e^{-1} \vee x+1 = e^2) \wedge x > -1 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow (x = \frac{1}{e} - 1 \vee x = e^2 - 1) \wedge x > -1 \Leftrightarrow (x = \frac{1-e}{e} \vee x = e^2 - 1) \wedge x > -1 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x = \frac{1-e}{e} \vee x = e^2 - 1$
$C.S. = \left\{\frac{1-e}{e}; e^2 - 1\right\}$

6.4. $\log_2(4x - x^2) = 2 + \log_2(x+1) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \log_2(4x - x^2) = \log_2(2^2) + \log_2(x+1) \wedge 4x - x^2 > 0 \wedge x + 1 > 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \log_2(4x - x^2) = \log_2(4) + log_2(x+1) \wedge x(4-x) > 0 \wedge x > -1 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \log_2(4x - x^2) = \log_2(4(x+1)) \wedge 0 < x < 4 \wedge x > -1 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 4x - x^2 = 4x + 4 \wedge 0 < x < 4 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x^2 = -4 \wedge 0 < x < 4 \Leftrightarrow$ equação impossível $\wedge 0 < x < 4$
$C.S. = \{\}$

7. .

7.1. $1+\log_4(2x+1)>0 \Leftrightarrow \log_4(2x+1)>-1 \wedge 2x+1>0 \Leftrightarrow 2x+1>4^{-1} \wedge x>-\dfrac{1}{2} \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 2x>\dfrac{1}{4}-1 \wedge x>-\dfrac{1}{2} \Leftrightarrow x>-\dfrac{3}{8} \wedge x>-\dfrac{1}{2} \Leftrightarrow x>-\dfrac{3}{8}$
$C.S.=\left]-\dfrac{3}{8};+\infty\right[$

7.2. $2\log(x)\leq \log(10x+20)-1 \Leftrightarrow 2\log(x)\leq \log(10x+20)-\log(10) \wedge x>0 \wedge 10x+20>0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \log(x^2)\leq \log\left(\dfrac{10x+20}{10}\right) \wedge x>0 \wedge x>-2 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \log(x^2)\leq \log(x+2) \wedge x>0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x^2\leq x+2 \wedge x>0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x^2-x-2\leq 0 \wedge x>0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow (-1\leq x\leq 2) \wedge x>0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 0<x\leq 2$
$C.S.=]0;2]$

Cálculos auxiliares

$x^2-x-2=0 \Leftrightarrow x=\dfrac{1\pm\sqrt{(-1)^2-4\times 1\times(-2)}}{2\times 1} \Leftrightarrow x=-1 \vee x=2$

7.3. $\log_2(1-|x-1|)\geq 1 \Leftrightarrow 1-|x-1|\geq 2 \wedge 1-|x-1|>0 \Leftrightarrow |x-1|\leq -1 \wedge |x-1|<1 \Leftrightarrow$
condição impossível
$C.S.=\{\}$

7.4. $\log_2(3x+1)-\log_2(x)\geq 1+\log_2(x+2) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \log_2(3x+1)-\log_2(x)\geq 1+\log_2(x+2) \wedge 3x+1>0 \wedge x>0 \wedge x+2>0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \log_2\left(\dfrac{3x+1}{x}\right)\geq \log_2(2)+log_2(x+2) \wedge x>-\dfrac{1}{3} \wedge x>0 \wedge x>-2 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \log_2\left(\dfrac{3x+1}{x}\right)\geq \log_2(2(x+2)) \wedge x>0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \dfrac{3x+1}{x}\geq 2x+4 \wedge \wedge x>0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \dfrac{3x+1-2x^2-4x}{x}\geq 0 \wedge x>0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \dfrac{-2x^2-x+1}{x}\geq 0 \wedge x>0 \Leftrightarrow$

Cálculos auxiliares:

Numerador:
Zeros
$-2x^2-x+1=0 \Leftrightarrow x=\dfrac{1\pm\sqrt{(-1)^2-4\times(-2)\times 1}}{2\times(-2)} \Leftrightarrow x=\dfrac{1}{2} \vee x=-1$

x	$-\infty$	-1		0		$\frac{1}{2}$	$+\infty$
$-2x^2-x+1$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$
x	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$\dfrac{-2x^2-x+1}{x}$	$+$	0	$-$	$n.d.$	$+$	0	$-$

Assim,

$\dfrac{-2x^2-x+1}{x} \geq 0 \wedge x > 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \left(x \leq -1 \vee 0 < x \leq \dfrac{1}{2}\right) \wedge x > 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 0 < x \leq \dfrac{1}{2}$
$C.S. = \left]0; \dfrac{1}{2}\right]$

8. .

8.1. $D_f = \{x \in \mathbb{R} : 1 + \ln(x) \geq 0 \wedge 1 - \ln(x+1) \neq 0 \wedge x > 0 \wedge x + 1 > 0\}$

Cálculos auxiliares:

$1 - \ln(x+1) = 0 \Leftrightarrow \ln(x+1) = 1 \Leftrightarrow x + 1 = e \Leftrightarrow x = e - 1$

$1 + \ln(x) \geq 0 \wedge 1 - \ln(x+1) \neq 0 \wedge x > 0 \wedge x + 1 > 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \ln(x) \geq -1 \wedge x \neq e - 1 \wedge x > 0 \wedge x > -1 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x \geq e^{-1} \wedge x \neq e - 1 \wedge x > 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x \geq \dfrac{1}{e} \wedge x \neq e - 1$
$D_f = \left[\dfrac{1}{e}; e-1\right[\cup \left]e-1; +\infty\right[$

8.2. $D_f = \{x \in \mathbb{R} : \log_3(x^2 - 2x) - 1 \geq 0 \wedge x^2 - 2x > 0\}$

Cálculos auxiliares:

$x^2 - 2x = 0 \Leftrightarrow x(x-2) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 2$

$\log_3(x^2 - 2x) - 1 \geq 0 \wedge x^2 - 2x > 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \log_3(x^2 - 2x) \geq 1 \wedge (x < 0 \vee x > 2) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x^2 - 2x \geq 3 \wedge (x < 0 \vee x > 2) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x^2 - 2x - 3 \geq 0 \wedge (x < 0 \vee x > 2) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow (x \leq -1 \vee x \geq 3) \wedge (x < 0 \vee x > 2) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x \leq -1 \vee x \geq 3$

$x^2 - 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \times 1 \times (-3)}}{2 \times 1} \Leftrightarrow x = -1 \vee x = 3$

Assim,

$D_f = \{x \in \mathbb{R} : \log_3(x^2 - 2x) - 1 \geq 0 \wedge x^2 - 2x > 0\} =]-\infty; -1] \cup [3; +\infty[$

9. .

Determinemos as coordenadas dos vértices do trapézio

Ponto C
$f(x) = 0 \Leftrightarrow \ln(x+2) = 0 \wedge x + 2 > 0 \Leftrightarrow x + 2 = 1 \wedge x > -2 \Leftrightarrow x = -1 \wedge x > -2 \Leftrightarrow x = -1$
Logo, $C(-1; 0)$

Ponto D
$g(x) = 0 \Leftrightarrow -\ln\left(\dfrac{x}{3}\right) = 0 \Leftrightarrow \dfrac{x}{3} = e^0 \wedge x > 0$

$\Leftrightarrow \frac{x}{3} = 1 \wedge x > 0 \Leftrightarrow x = 3 \wedge x > 0 \Leftrightarrow x = 3$
Logo, $D(3;0)$

Ponto A
$f(x) = g(x) \Leftrightarrow \ln(x+2) = -\ln\left(\frac{x}{3}\right) \wedge x + 2 > 0 \wedge \frac{x}{3} > 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \ln(x+2) + \ln\left(\frac{x}{3}\right) = 0 \wedge x > -2 \wedge x > 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow ln\left(\frac{x(x+2)}{3}\right) = 0 \wedge x > 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \frac{x(x+2)}{3} = e^0 \wedge x > 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \frac{x^2+2x}{3} = 1 \wedge x > 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \frac{x^2+2x}{3} - 1 = 0 \wedge x > 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \frac{x^2+2x-3}{3} = 0 \wedge x > 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x^2 + 2x - 3 = 0 \wedge x > 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \times 1 \times (-3)}}{2 \times 1} \wedge x > 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow (x = -3 \vee x = 1) \wedge x > 0 \Leftrightarrow x = 1$

$f(1) = \ln(1+2) = \ln(3)$

Logo, $A(1;\ln(3))$ e $B(0;\ln(3))$

A área do trapézio é igual a $A_{[ABCD]} = \frac{\overline{AB} + \overline{CD}}{2} \times \overline{OB} = \frac{1+4}{2} \times \ln(3) = \frac{5}{2}\ln(3)$