Exame final nacional de Matemática A (2023, 2.ª fase)

Proposta de resolução

1. Calculando os valores dos limites das sucessões, temos que:

   - $\lim\left(1-\frac{2}{n}\right)^n = \lim\left(1+\frac{(-2)}{n}\right)^n = e^{-2}$
   - $\lim\left(-\frac{n^2+1}{n}\right) = -\lim\frac{n^2+1}{n} = -\lim\frac{n^2}{n} = -\lim n = -\infty$
   - $\lim\frac{4n+3}{3n+4} = \lim\frac{4n}{3n} = \lim\frac{4}{3} = \frac{4}{3}$
   - $\lim\frac{(-1)^n}{n} = 0$, porque:
     - Se n é par, temos que: $\lim\frac{(-1)^n}{n} = \lim\frac{1}{n} = \frac{1}{+\infty} = 0$
     - Se n é ímpar, temos que: $\lim\frac{(-1)^n}{n} = \lim\frac{-1}{n} = -\frac{1}{+\infty} = 0$

   Resposta: **Opção D**

2. Para cada triângulo da sequência (à exceção do primeiro), o comprimento dos lados é metade do comprimento dos lados do triângulo do termo anterior da sequência. Assim, também o perímetro de cada triângulo (P_n) é metade do perímetro do triângulo anterior da sequência P_{n-1}, ou seja:

$$P_n = \frac{P_{n-1}}{2} \Leftrightarrow P_n = \frac{1}{2}\times P_{n-1}$$

   Ou seja, a sucessão dos perímetros (P_n) é uma progressão geométrica de razão $\frac{1}{2}$, e cujo o primeiro termo é $P_1 = 3\times\overline{AB} = 3\times 1 = 3$.

   Assim, a soma dos perímetros dos n triângulos da sequência, é:

$$S_n = 3\times\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}} = 3\times\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{\frac{1}{2}} = \frac{3}{\frac{1}{2}}\times\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right) = 6\times\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right) = 6-6\times\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

   Como, para $n\in\mathbb{N}$, $\left(\frac{1}{2}\right)^n > 0$, então $6\times\left(\frac{1}{2}\right)^n > 0$, pelo que $6-6\times\left(\frac{1}{2}\right)^n < 6$, ou seja, a soma dos perímetros dos n triângulos da sequência é inferior a 6.

3. Selecionando 2 das 6 posições do número em que vão figurar os 2 cincos, temos ${}^6C_2$ alternativas diferentes, porque não interessa a ordem, visto que as duas posições se destinam a números iguais. E por cada uma destes alternativas, existem ${}^8A'_4 = 8^4$ ordenações possíveis dos restantes 8 algarismos disponíveis para as 4 posições disponíveis considerando eventualmente a repetição,

   Assim, os números que se podem considerar, nas condições do enunciado são:

$$^6C_2 \times 8^4 = 61\,440$$

   Resposta: **Opção B**

4. Observando que $P\Big(\left(A \cup \overline{B}\right)|B\Big) = \dfrac{P\Big(\left(A \cup \overline{B}\right) \cap B\Big)}{P(B)}$, temos:

   - $\left(A \cup \overline{B}\right) \cap B = (A \cap B) \cup \left(\overline{B} \cap B\right) = (A \cap B) \cup \emptyset = A \cap B$
   - $P(A) = 1 - P\left(\overline{A}\right) = 1 - 0{,}6 = 0{,}4$
   - Como A e B são equiprováveis $P(B) = P(A) = 0{,}4$ e $P\left(\overline{B}\right) = P\left(\overline{A}\right) = 0{,}6$;
   - $P\left(A \cup \overline{B}\right) = P(A) + P\left(\overline{B}\right) - P\left(A \cap \overline{B}\right) \Leftrightarrow 0{,}7 = 0{,}4 + 0{,}6 - P\left(A \cap \overline{B}\right) \Leftrightarrow P\left(A \cap \overline{B}\right) = 1 - 0{,}7 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow P\left(A \cap \overline{B}\right) = 0{,}3$
   - $P\left(A \cap \overline{B}\right) = P(A) - P(A \cap B) \Leftrightarrow 0{,}3 = 0{,}4 - P(A \cap B) \Leftrightarrow P(A \cap B) = 0{,}4 - 0{,}3 \Leftrightarrow P(A \cap B) = 0{,}1$

   E assim, o valor de $P\Big(\left(A \cup \overline{B}\right)|B\Big)$, na forma de fração irredutível, é:

$$P\Big(\left(A \cup \overline{B}\right)|B\Big) = \frac{P\Big(\left(A \cup \overline{B}\right) \cap B\Big)}{P(B)} = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0{,}1}{0{,}4} = \frac{1}{4}$$

5. Relativamente à probabilidade de selecionar dois vértices do mesmo hexágono, sabemos que:

   - o número de pontos vértices na composição de ordem n é $6n + 1$, correspondendo aos 6 vértices de cada um dos n hexágonos acrescido do ponto V, pelo que o número de casos possíveis é:

$$^{6n+1}C_2 = \frac{(6n+1)!}{2!(6n+1-2)!} = \frac{(6n+1) \times 6n \times (6n-1)!}{2!(6n-1)!} = \frac{36n^2 + 6n}{2} = 18n^2 + 3n$$

   - como existem ${}^6C_2$ pares de pontos em cada um dos n hexágonos, o número de casos favoráveis é:

$$^6C_2 \times n = 15n$$

   Assim, como $n \in \mathbb{N}$, temos que:

$$\frac{{}^6C_2 \times n}{{}^{6n+1}C_2} = \frac{5}{49} \Leftrightarrow \frac{15n}{18n^2 + 3n} = \frac{5}{49} \Leftrightarrow \frac{15n}{n(18n+3)} = \frac{5}{49} \Leftrightarrow \frac{15}{18n+3} = \frac{5}{49} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 735 = 90n + 15 \Leftrightarrow 735 - 15 = 90n \Leftrightarrow \frac{720}{90} = n \Leftrightarrow n = 8$$

   Ou seja, para a probabilidade indicada, a composição tem 8 hexágonos.

6. Substituindo as coordenadas dos pontos na expressão algébrica da função, temos que:

- $f(1) = 5 \Leftrightarrow a + e^{b\times 1} = 5 \Leftrightarrow a = 5 - e^b$
- $f(2) = 7 \Leftrightarrow a + e^{b\times 2} = 7 \Leftrightarrow a = 7 - e^{2b}$

Ou seja:

$$5 - e^b = 7 - e^{2b} \Leftrightarrow e^{2b} - e^b - 2 = 0 \Leftrightarrow \left(e^b\right)^2 - e^b - 2 = 0$$

Considerando $y = e^b$, temos que:

$$y^2 - y - 2 = 0 \Leftrightarrow y = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4(1)(-2)}}{2\times 1} \Leftrightarrow y = -1 \vee y = 2$$

Assim, como $y = e^b$, temos que:

- $\underbrace{e^b = -1}_{\text{Cond. impossível}} \vee e^b = 2 \Leftrightarrow b = \ln 2$
- $a = 5 - e^b = 5 - 2 = 3$

7. Calculando o valor do limite, temos:

$\lim\limits_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(2x)}{x} = \frac{\operatorname{sen} 0}{0} = \frac{0}{0}$ (Indeterminação)

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(2x)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{2\times \operatorname{sen}(2x)}{2x} = 2 \times \underbrace{\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(2x)}{2x}}_{\text{Lim. Notável}} = 2\times 1 = 2$$

Resposta: **Opção D**

8.

8.1. As coordenadas do centro da superfície esférica, ou seja, do ponto médio do segmento $[AG]$, são:

$$\left(\frac{4+12}{2}, \frac{0+\frac{13}{2}}{2}, \frac{0+2}{2}\right) = \left(8, \frac{13}{4}, 1\right)$$

e o raio da superfície esférica, ou seja, metade do diâmetro, é:

$$\frac{\overline{AG}}{2} = \frac{\sqrt{(12-4)^2 + \left(\frac{13}{2} - 0\right)^2 + (2-0)^2}}{2} = \frac{\sqrt{64 + \frac{169}{4} + 4}}{2} = \frac{\sqrt{\frac{441}{4}}}{2} = \frac{\frac{21}{2}}{2} = \frac{21}{4}$$

Assim, a superfície esférica é definida por:

$$(x-8)^2 + \left(y - \frac{13}{4}\right)^2 + (z-1)^2 = \left(\frac{21}{4}\right)^2 \Leftrightarrow (x-8)^2 + \left(y - \frac{13}{4}\right)^2 + (z-1)^2 = \frac{441}{16}$$

Resposta: **Opção A**

8.2. Como o prisma é reto, as arestas laterais são perpendiculares às bases do prisma, pelo que a reta EL (que contém uma aresta lateral) é perpendicular ao plano ABF (que contém uma das bases). Assim, observando que o vetor diretor da reta EL também é um vetor normal do plano ABF, temos que uma equação deste plano é da forma:

$$3x + 4y + d = 0$$

E como o ponto A pertence ao plano, substituindo as suas coordenadas na equação anterior, obtemos o valor do parâmetro d:

$$3(4) + 4(0) + d = 0 \Leftrightarrow 12 + d = 0 \Leftrightarrow d = -12$$

Ou seja, uma equação do plano ABF é $3x + 4y - 12 = 0$.

Como as retas EL e FG são paralelas (porque contém arestas laterais de um prisma reto), então o vetor diretor diretor do reta EL também é um vetor diretor da reta FG, pelo que, recorrendo ao ponto G, obtemos uma equação vetorial da reta FG:

$$(x,y,z) = \left(12\,, \frac{13}{2}\,, 2\right) + k(3,4,0),\, k \in \mathbb{R}$$

E assim, um ponto genérico desta reta, tem coordenadas: $\left(12 + 3k\,, \frac{13}{2} + 4k\,, 2\right)$

Como o ponto F é a interseção da reta FG com o plano ABF, substituindo as coordenadas do ponto genérico da reta FG na equação do plano ABF, obtemos o valor de k, correspondente ao ponto F:

$$3(12+3k)+4\left(\frac{13}{2} + 4k\right)-12 = 0 \Leftrightarrow 36+9k+26+16k-12 = 0 \Leftrightarrow 25k = -50 \Leftrightarrow k = -\frac{50}{25} \Leftrightarrow k = -2$$

Desta forma, temos que as coordenadas do ponto F são:

$$\left(12 + 3(-2)\,, \frac{13}{2} + 4(-2)\,, 2\right) = \left(12 - 6\,, \frac{13}{2} - 8\,, 2\right) = \left(6\,, \frac{13}{2} - \frac{16}{2}\,, 2\right) = \left(6\,, -\frac{3}{2}\,, 2\right)$$

9. Designado por d a abcissa do ponto D, ou seja, $\overline{OD} = d$, temos que:

- $D(d,0)$
- $C\left(0,\overline{OC}\right) = \left(0,\frac{\overline{OA}}{4}\right) = \left(0,\frac{3\overline{OD}}{4}\right) = \left(0,\frac{3d}{4}\right)$
- $E\left(\overline{CE},\overline{OC}\right) = \left(\overline{CB} - \overline{EB},\frac{3d}{4}\right) = \left(\overline{OA} - \overline{OD},\frac{3d}{4}\right) = \left(3d - d,\frac{3d}{4}\right) = \left(2d,\frac{3d}{4}\right)$
- $\overrightarrow{DC} = C - D = \left(0,\frac{3d}{4}\right) - (d,0) = \left(-d,\frac{3d}{4}\right)$
- $\overrightarrow{DE} = E - D = \left(2d,\frac{3d}{4}\right) - (d,0) = \left(d,\frac{3d}{4}\right)$

Assim, calculando o produto escalar com as coordenadas dos vetores, temos:

$$\overrightarrow{DC} \cdot \overrightarrow{DE} = -7 \Leftrightarrow \left(-d,\frac{3d}{4}\right) \cdot \left(d,\frac{3d}{4}\right) = -7 \Leftrightarrow -d^2 + \frac{9d^2}{16} = -7 \Leftrightarrow -\frac{16d^2}{16} + \frac{9d^2}{16} = -7 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -\frac{7d^2}{16} = -7 \Leftrightarrow d^2 = \frac{7 \times 16}{7} \Leftrightarrow d^2 = 16 \Leftrightarrow d = \pm\sqrt{16} :\Leftrightarrow d = \pm 4$$

Como o ponto D pertence ao semieixo positivo Ox, então $d > 0$, ou seja $d = 4$.

E assim, vem que: $\overline{OA} = 3 \times \overline{OD} = 3 \times d = 3 \times 4 = 12$

10. Temos que:

- pela observação do referencial **I**, podemos concluir que $\lim\limits_{x\to 0^-} g(x) < 0$, e como a função é diferenciável, então é contínua, em particular em $x = 0$, logo $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} g(x) = g(0)$, pelo que $g(0) > 0$ o que é incompatível com a segunda condição definida ($g(0) < 0$) pelo que no referencial **I** não está representado parte do gráfico da função g;
- pela observação do referencial **II**, podemos concluir que a função é crescente no intervalo $]-\infty,-1[$, ou seja, $g'(x) > 0, \forall x \in]-\infty,-1[$ o que é incompatível com a terceira condição definida ($g'(x) < 0, \forall x \in]-\infty,-1[$) pelo que no referencial **II** não está representado parte do gráfico da função g;
- pela observação do referencial **III**, podemos concluir que $\lim\limits_{x\to -1^+} g(x) = -\infty$, e como a função é par, então $\lim\limits_{x\to 1^-} g(x) = \lim\limits_{x\to -1^+} g(x) = -\infty$, o que é incompatível com a primeira condição definida ($\lim\limits_{x\to 1^-} g(x) = +\infty$) pelo que no referencial **III** também não está representado parte do gráfico da função g.

11. Temos que:

- como o ponto A pertence ao semieixo imaginário positivo, o seu afixo é da forma $z_1 = \rho e^{i\left(\frac{\pi}{2}\right)} (\rho \in \mathbb{R}^+)$;
- como o triângulo $[ABC]$ é equilátero e inscrito numa circunferência centrada na origem, o afixo do ponto B é da forma $z_2 = \rho e^{i\left(\frac{\pi}{2}+\frac{2\pi}{3}\right)} = \rho e^{i\left(\frac{3\pi}{6}+\frac{4\pi}{6}\right)} = \rho e^{i\left(\frac{7\pi}{6}\right)} \ (\rho \in \mathbb{R}^+)$;

E assim, temos que:

$$z_1^2 \times z_2 = \left(\rho e^{i\left(\frac{\pi}{2}\right)}\right)^2 \times \rho e^{i\left(\frac{7\pi}{6}\right)} = \rho^2 e^{i\left(2\times\frac{\pi}{2}\right)} \times \rho e^{i\left(\frac{7\pi}{6}\right)} = \rho^3 e^{i\left(\pi+\frac{7\pi}{6}\right)} = \rho^3 e^{i\left(\frac{13\pi}{6}\right)} = \rho^3 e^{i\left(\frac{13\pi}{6}-2\pi\right)} = \rho^3 e^{i\left(\frac{\pi}{6}\right)}$$

Ou seja, $0 < \operatorname{Arg}(z_1^2 \times z_2) < \frac{\pi}{2}$, pelo que o afixo de $z_1^2 \times z_2$ pertence ao primeiro quadrante.

Resposta: **Opção A**

12. Observando que:

- podemos escrever $-1-\sqrt{3}i$ na forma trigonométrica ($\rho e^{i\theta}$):
  - $\rho = |-1-\sqrt{3}i| = \sqrt{(-1)^2 + \left(-\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{1+3} = \sqrt{4} = 2$
  - $\operatorname{tg}\theta = \frac{-\sqrt{3}}{-1} = \sqrt{3}$; como $\operatorname{sen}\theta < 0$ e $\cos\theta < 0$, θ é um ângulo do 3º quadrante, logo $\theta = \pi + \frac{\pi}{3} = \frac{4\pi}{3}$

  Pelo que $-1-\sqrt{3}i = 2e^{i\left(\frac{4\pi}{3}\right)}$;

- como $i^{11} = i^{4\times 2+3} = i^3 = -i$, então $2i^{11} = 2(-i) = -2i = 2e^{i\left(\frac{3\pi}{2}\right)}$.

Assim, simplificando a expressão de z, temos que:

$$z = \frac{2i^{11}e^{i\alpha}}{-1-\sqrt{3}i} = \frac{2e^{i\left(\frac{3\pi}{2}\right)} \times e^{i\alpha}}{2e^{i\left(\frac{4\pi}{3}\right)}} = \frac{2\times 1}{2} e^{i\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha-\frac{4\pi}{3}\right)} = e^{i\left(\frac{9\pi}{6}+\alpha-\frac{8\pi}{6}\right)} = e^{i\left(\frac{\pi}{6}+\alpha\right)}$$

Como $\operatorname{Re} z = -\operatorname{Im} z$, e o afixo de z pertence ao 4.º quadrante, então $\operatorname{Arg} z = \frac{7\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$, ou seja, para $k \in \mathbb{Z}$:

$$\frac{\pi}{6} + \alpha = \frac{7\pi}{4} + 2k\pi \Leftrightarrow \alpha = \frac{7\pi}{4} - \frac{\pi}{6} + 2k\pi \Leftrightarrow \alpha = \frac{27\pi}{12} - \frac{2\pi}{12} + 2k\pi \Leftrightarrow \alpha = \frac{19\pi}{12} + 2k\pi$$

Como $\alpha \in [o,2\pi[$, então $\alpha = \frac{19\pi}{12}$.

13. Como $p(j)$ é o valor da prestação mensal a pagar, em função da taxa de juro anual aplicada, j, a duplicação da taxa de juro corresponde a $2j$ e o correspondente aumento da prestação mensal em 120 euros pode ser representado por $p(j) + 120$, ou seja, temos que a taxa de juro inicial é a solução da equação:

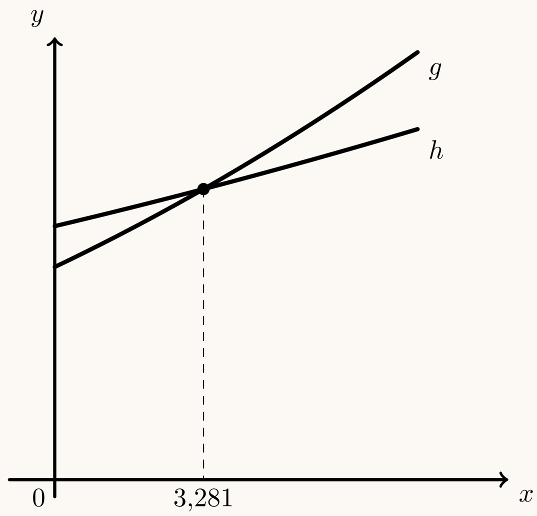
$$p(2j) = p(j) + 120$$

Assim, inserindo na calculadora a função $f(x) = \dfrac{62{,}5x}{1 - \left(1 + \dfrac{x}{1200}\right)^{-120}}$, determinamos o valor de do juro inicial como a abcissa do ponto de interseção das funções:

- $g(x) = f\,(2x)$
- $h(x) = f(x) + 120$

Representando na calculadora as funções g e h, numa janela compatível com o domínio da função, obtemos o gráfico representado na figura ao lado.

Recorrendo à função da calculadora para determinar valores aproximados das coordenadas dos pontos de interseção dos dois gráficos, obtemos valores aproximados às milésimas da abcissa do ponto de interseção dos dois gráficos, $x \approx 3{,}281$ a que corresponde a taxa de juro inicial de 3,281%, aproximadamente.



14.

14.1. Como a função é contínua em $]0, +\infty[$ (porque resulta de operações entre funções contínuas), a reta de equação $x = 0$ é a única reta vertical que pode ser assíntota do gráfico de f, o que pode ser confirmado porque:

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} \frac{\ln x + 2x}{x} = \frac{\ln(0^+) + 2(0^+)}{0^+} = \frac{-\infty + 0}{0^+} = \frac{-\infty}{0^+} = -\infty$$

Para determinar a equação da assíntota horizontal, ou seja, como o domínio de f é $]0, +\infty[$, vamos calcular $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x + 2x}{x} = \frac{\ln(+\infty) + 2(+\infty)}{+\infty} = \frac{+\infty + \infty}{+\infty} = \frac{+\infty}{+\infty} \text{ (indeterminação)}$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x + 2x}{x} = \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{\ln x}{x} + \frac{2x}{x}\right) = \underbrace{\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x}}_{\text{Lim. Notável}} \lim_{x \to +\infty} 2 = 0 + 2 = 2$$ Logo, podemos concluir que a reta de equação $y = 2$ é a única assíntota horizontal do gráfico de f.

14.2. Começamos por determinar a expressão da derivada da função f:

$$f'(x) = \left(\frac{\ln x + 2x}{x}\right)' = \left(\frac{\ln x}{x} + \frac{2x}{x}\right)' = \left(\frac{\ln x}{x}\right)' + (2)' = \frac{(\ln x)' \times x - (x)' \times \ln x}{x^2} + 0 =$$

$$= \frac{\frac{(x)'}{x} \times x - 1 \times \ln x}{x^2} = \frac{\frac{1}{x} \times x - \ln x}{x^2} = \frac{1 - \ln x}{x^2}$$

Calculando os zeros da derivada da função f, temos:

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1 - \ln x}{x^2} = 0 \underset{x>0}{\Rightarrow} 1 - \ln x = 0 \Leftrightarrow 1 = \ln x \Leftrightarrow x = e^1 \Leftrightarrow x = e$$

Estudando a variação do sinal da derivada e relacionando com a monotonia da função, vem:

x	0		0	$+\infty$
$1 - \ln x$	n.d.	$+$	0	$-$
x^2	n.d.	$+$	$+$	$+$
f'	n.d.	$+$	0	$-$
f	n.d.	$\nearrow$	Máx.	$\searrow$

Assim, podemos concluir que a função f:

- é crescente no intervalo $]0,e]$;
- é decrescente no intervalo $[e,+\infty[$;
- tem um máximo relativo que é:

$$f(e) = \frac{\ln e + 2e}{e} = \frac{\ln e}{e} + \frac{2e}{e} = \frac{1}{e} + 2$$

15. Como a reta AB é tangente à semicircunferência no ponto T, e o segmento de reta $[OT]$ é um raio, então as retas AB e OT são perpendiculares, pelo que os triângulos $[OTA]$ e $[OTB]$ são retângulos em T, cujas hipotenusas são, respetivamente, os lados $[OA]$ e $[OB]$.

Como $\overline{OT} = 2$ e $T\hat{O}B = \frac{\pi}{2} - \alpha$, recorrendo à definição de cosseno, temos:

- $\cos\alpha = \frac{\overline{OT}}{\overline{OA}} \Leftrightarrow \cos\alpha = \frac{2}{\overline{OA}} \Leftrightarrow \overline{OA} = \frac{2}{\cos\alpha}$
- $\cos T\hat{O}B = \frac{\overline{OT}}{\overline{OB}} \Leftrightarrow \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \frac{2}{\overline{OB}} \Leftrightarrow \overline{OB} = \frac{2}{\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)} = \frac{2}{\operatorname{sen}\alpha}$

Assim, determinando a área do triângulo, vem:

$$A_{[ABC]} = \frac{2 \times \overline{OA} \times \overline{OB}}{2} = \overline{OA} \times \overline{OB} = \frac{2}{\cos\alpha} \times \frac{2}{\operatorname{sen}\alpha} = \frac{4}{\operatorname{sen}\alpha.\cos\alpha} = \frac{2 \times 4}{2 \times \operatorname{sen}\alpha.\cos\alpha} = \frac{8}{\operatorname{sen}(2\alpha)}$$

16. Designando por a a abcissa dos pontos P e Q , determinamos as equações das retas s e t:

- $P\left(a, \dfrac{k}{a}\right)$
- $f'(x) = \dfrac{(k)' \times x - (x)' \times k}{x^2} = \dfrac{0-k}{x^2} = -\dfrac{k}{x^2}$
- $m_s = f'(a) = -\dfrac{k}{a^2}$

  $y_P = -\dfrac{k}{a^2} \times x_P + b \Leftrightarrow \dfrac{k}{a} = -\dfrac{k}{a^2} \times a + b \Leftrightarrow \dfrac{k}{a} = -\dfrac{k}{a} + b \Leftrightarrow \dfrac{k}{a} + \dfrac{k}{a} = b \Leftrightarrow \dfrac{2k}{a} = b$
- $s : y = -\dfrac{k}{a^2}x + \dfrac{2k}{a}$

- $Q\left(a, -\dfrac{k}{a}\right)$
- $g'(x) = -\dfrac{(k)' \times x - (x)' \times k}{x^2} = -\dfrac{0-k}{x^2} = \dfrac{k}{x^2}$
- $m_t = g'(a) = \dfrac{k}{a^2}$

  $y_Q = \dfrac{k}{a^2} \times x_Q + b \Leftrightarrow -\dfrac{k}{a} = \dfrac{k}{a^2} \times a + b \Leftrightarrow -\dfrac{k}{a} = \dfrac{k}{a} + b \Leftrightarrow -\dfrac{k}{a} - \dfrac{k}{a} = b \Leftrightarrow -\dfrac{2k}{a} = b$
- $t : y = \dfrac{k}{a^2}x - \dfrac{2k}{a}$

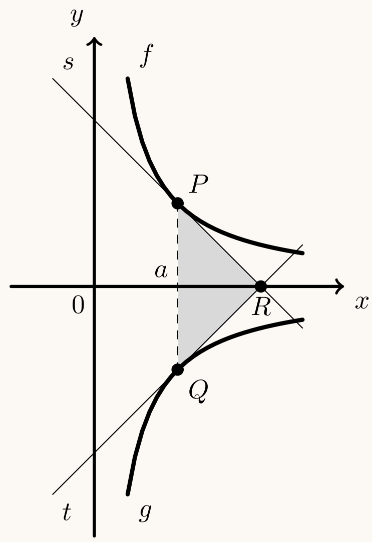
Determinando as coordenadas do ponto R, temos: $\begin{cases} y = -\dfrac{k}{a^2}x + \dfrac{2k}{a} \\ \\ y = \dfrac{k}{a^2}x - \dfrac{2k}{a} \end{cases}$

Ou seja a abcissa do ponto R, é:

$$\frac{k}{a^2}x - \frac{2k}{a} = -\frac{k}{a^2}x + \frac{2k}{a} \Leftrightarrow \frac{k}{a^2}x + \frac{k}{a^2}x = \frac{2k}{a} + \frac{2k}{a} \Leftrightarrow \frac{2kx}{a^2} = \frac{4k}{a} \Leftrightarrow \frac{2kx}{k} = \frac{4a^2}{a} \Leftrightarrow 2x = 4ax = 2a$$

E a ordenada do ponto R é:

$$y_R = \frac{k}{a^2}x_R - \frac{2k}{a} = \frac{k}{a^2} \times 2a - \frac{2k}{a} = \frac{k}{a^2} \times 2a - \frac{2k}{a} = \frac{2k}{a} - \frac{2k}{a} = 0$$



Assim, considerando $[PQ]$ como a base do triângulo $[PQR]$, temos:

$$\overline{PQ} = x_P + |x_Q| = \frac{k}{a} + \left|-\frac{k}{a}\right| = \frac{2k}{a}$$

E a medida da altura correspondente é:

$$x_R - a = 2a - a = a$$

Logo, a área do triângulo $[PQR]$ é:

$$A_{[PQR]} = \frac{\overline{PQ} \times (x_R - a)}{2} = \frac{\frac{2k}{a} \times a}{2} = \frac{2k}{2} = k$$