

SPM@TESTES

Teste de Matemática

2023

10.º ano de Escolaridade

Duração da Prova: 90 minutos. | Tolerância: 30 minutos.

(cinco páginas)

VERSÃO 1

Para cada resposta, identifique o grupo e o item.

Apresente as suas respostas de forma legível.

As cotações dos itens encontram-se no final do enunciado da prova.

Na resposta aos itens de **escolha múltipla**, selecione a opção correta. Escreva, na folha de respostas, o número do item e a letra que identifica a opção escolhida.

Na resposta aos restantes itens, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias.



1. Seja f a função definida, em \mathbb{R} , por $f(x) = 3x^2 - 6x + 4$.

1.1. Represente $f(x)$ na forma $a(x - b)^2 + c$.

1.2. Determine a equação reduzida da reta que intersesta o gráfico de f no ponto de abscissa $\sqrt{2}$ e no ponto de abscissa $-\sqrt{2}$.

2. Seja h a função definida, no intervalo $[-2, 4]$, por $h(x) = x^2 - 4x - 5$.

Os valores do maximizante e do minimizante de h , correspondentes ao máximo e ao mínimo absolutos são, respetivamente:

- (A) $x = 4$ e $x = -2$ (B) $x = 4$ e $x = 0$ (C) $x = -2$ e $x = 2$ (D) $x = -2$ e $x = 1$

3. Na Figura 1 estão representadas duas circunferências concêntricas, num referencial ortonormado Oxy .

Sabe-se que:

- $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 9$ é uma equação da circunferência menor;
- A reta AB é tangente à circunferência menor no ponto que tem a mesma ordenada que o respetivo centro;
- Os pontos A e B pertencem à circunferência maior e $\overline{AB} = 8$.

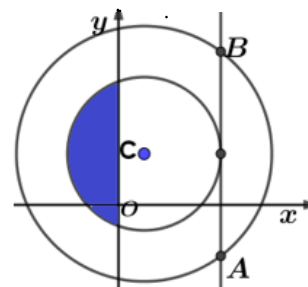


Figura 1

3.1. Determine as abscissas dos pontos da circunferência menor cuja ordenada é $2 + 2\sqrt{2}$.

3.2. Determine uma equação cartesiana da circunferência maior.

3.3. Qual das seguintes equações define uma reta que tem pontos em comum com a região sombreada na figura?

- (A) $x = 1$ (B) $x = -1$ (C) $y = -2$ (D) $y = 5$

4. No referencial ortonormado Oxy da *Figura 2* estão representados os gráficos das funções reais de variável real f , g e h .

Quais as expressões analíticas que podem definir cada uma das funções f , g e h ?

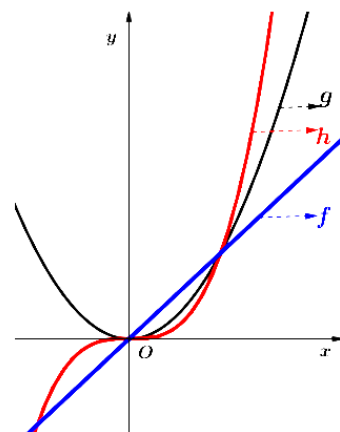


Figura 2

(A) $f(x) = x^2$, $g(x) = x$, $h(x) = x^3$

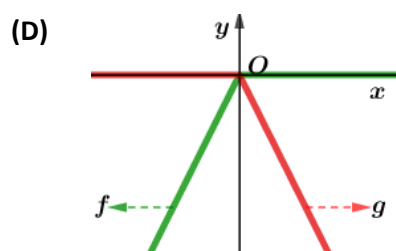
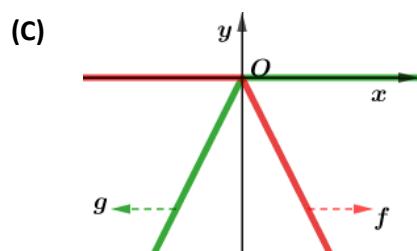
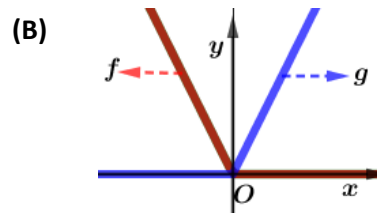
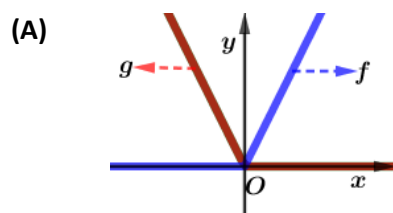
(B) $f(x) = x^2$, $g(x) = x^3$, $h(x) = x$

(C) $f(x) = x$, $g(x) = x^2$, $h(x) = x^3$

(D) $f(x) = x$, $g(x) = x^3$, $h(x) = x^2$

5. Sejam f e g as funções definidas, em \mathbb{R} , por $f(x) = |x| + x$ e $g(x) = |x| - x$.

Qual dos referenciais Oxy , ortonormados, pode representar os gráficos das funções f e g ?



6. No referencial ortonormado Oxy da *Figura 3* está representado parte do gráfico de uma função quadrática que traduz o problema seguinte:

A partir de um determinado ponto A da parede de um lago, situado a 2 metros de altura, pretende-se lançar um jacto de água que descreva um arco de parábola e que atinja uma altura máxima de 3 metros a uma distância de 1 metro da parede $[OA]$.

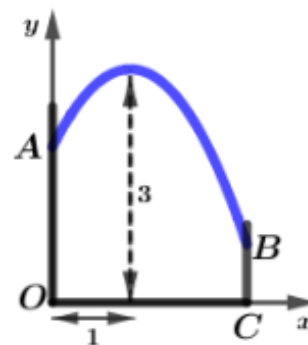


Figura 3

Para que a água caia dentro do lago construiu-se um muro $[CB]$, com C a uma distância de 2,5 metros do ponto O . Mostre que fazendo $\overline{BC} = 1$ metro é possível atingir esse objetivo.

7. Num referencial ortonormado Oxy considere-se a reta s de equação $y = 3x + 2$ e a reta t de equação $y = 2x + 1$.

Considere ainda os pontos $P(0,4)$ e $A(3,11)$.

7.1. Mostre que o ponto P não pertence a nenhuma das retas, mas o ponto A pertence à reta s .

7.2. Para um determinado ponto B da reta t , $\overrightarrow{PB} = k \overrightarrow{PA}$, $k \in \mathbb{R}$.

Determine as coordenadas do ponto B e o valor de k .

8. Na *Figura 4*, está representado num referencial o.n. $Oxyz$, um cubo $[ABCDEFGO]$.

Sabe-se que:

- A face $[OABE]$ está contida no plano xOy ;
- As coordenadas dos vértices G e A são $(0,0,5)$ e $(3,4,0)$, respetivamente;
- O ponto B pertence à reta de equação vetorial $(x,y,z) = (1,4,1) + k(2,-3,1)$, $k \in \mathbb{R}$

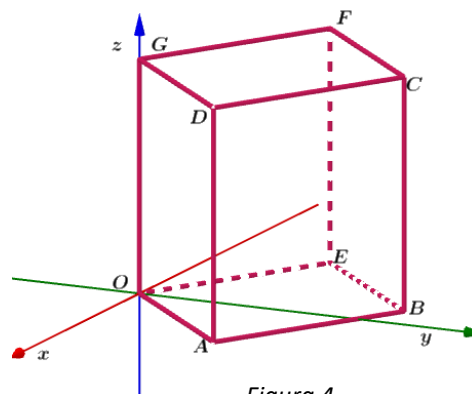


Figura 4

8.1. Qual das equações seguintes define um plano que contém a aresta $[DA]$?

- (A) $x = 1$ (B) $x = 2$ (C) $x = 3$ (D) $x = 4$

8.2. Determine as coordenadas do centro da face $[ABCD]$.

9. Considere o polinómio $P(x) = (x - 2)^2(x^2 + 1)$.

9.1. Seja f a função definida, em \mathbb{R} , pelo polinómio dado.

Elabore um quadro de sinais para a função f .

Com base no quadro, poderá concluir que existe pelo menos um extremo para f ? Justifique e, caso exista, identifique-o.

9.2. O polinómio $P(x)$ é divisível pelo polinómio:

(A) $x^2 - 4x + 4$

(B) $x + 2$

(C) $x + 1$

(D) x

10. Na Figura 5, encontra-se representado, num referencial $o.n. Oxy$, parte do gráfico da função h definida, em \mathbb{R} , por $h(x) = |x + 2| - 2$.

A abscissa do ponto B é o minimizante da função.

10.1. Resolva a equação $h(x) = 0$.

10.2. Determine a área do triângulo $[ABO]$.

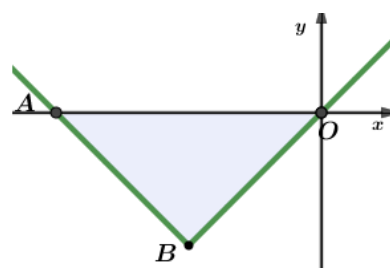


Figura 5

FIM

Questão	1.1	1.2	2.	3.1	3.2	3.3	4.	5.	6.	7.1	7.2	8.1	8.2	9.1	9.2	10.1	10.2	TOTAL
Cotação	14	13	8	14	13	8	8	8	14	14	14	8	14	14	8	14	14	200

SPM@TESTES

Teste de Matemática

2023

10.º ano de Escolaridade

Duração da Prova: 90 minutos. | Tolerância: 30 minutos.

(cinco páginas)

VERSÃO 2

Para cada resposta, identifique o grupo e o item.

Apresente as suas respostas de forma legível.

As cotações dos itens encontram-se no final do enunciado da prova.

Na resposta aos itens de **escolha múltipla**, selecione a opção correta. Escreva, na folha de respostas, o número do item e a letra que identifica a opção escolhida.

Na resposta aos restantes itens, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias.



1. Seja f a função definida, em \mathbb{R} , por $f(x) = 3x^2 - 6x + 4$.

1.1. Represente $f(x)$ na forma $a(x - b)^2 + c$.

1.2. Determine a equação reduzida da reta que intersesta o gráfico de f no ponto de abscissa $\sqrt{2}$ e no ponto de abscissa $-\sqrt{2}$.

2. Seja h a função definida, no intervalo $[-2, 4]$, por $h(x) = x^2 - 4x - 5$.

Os valores do maximizante e do minimizante de h , correspondentes ao máximo e ao mínimo absolutos são, respetivamente:

(A) $x = 4$ e $x = -2$ (B) $x = 4$ e $x = 0$ (C) $x = -2$ e $x = 1$ (D) $x = -2$ e $x = 2$

3. Na Figura 1 estão representadas duas circunferências concêntricas, num referencial ortonormado Oxy .

Sabe-se que:

- $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 9$ é uma equação da circunferência menor;
- A reta AB é tangente à circunferência menor no ponto que tem a mesma ordenada que o respetivo centro;
- Os pontos A e B pertencem à circunferência maior e $\overline{AB} = 8$.

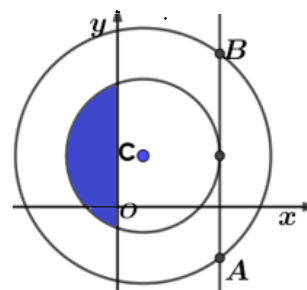


Figura 1

3.1. Determine as abscissas dos pontos da circunferência menor cuja ordenada é $2 + 2\sqrt{2}$.

3.2. Determine uma equação cartesiana da circunferência maior.

3.3. Qual das seguintes equações define uma reta que tem pontos em comum com a região sombreada na figura?

(A) $x = -1$ (B) $x = 1$ (C) $y = -2$ (D) $y = 5$

4. No referencial ortonormado Oxy da *Figura 2* estão representados os gráficos das funções reais de variável real f , g e h .

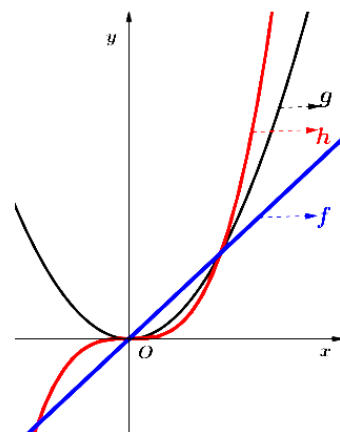


Figura 2

(A) $f(x) = x^2$, $g(x) = x$, $h(x) = x^3$

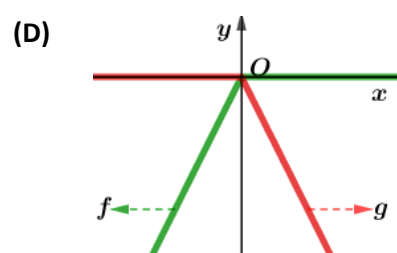
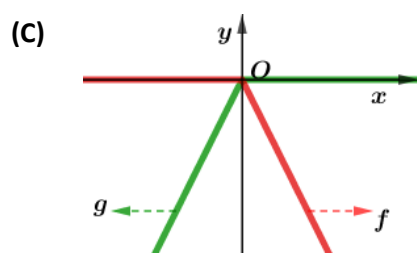
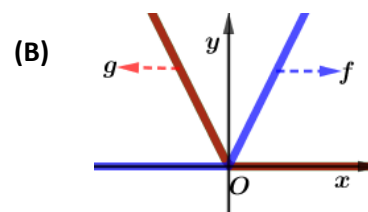
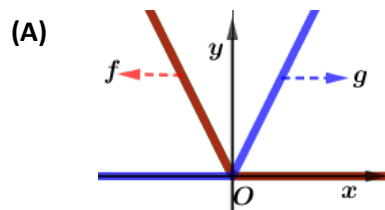
(B) $f(x) = x$, $g(x) = x^2$, $h(x) = x^3$

(C) $f(x) = x^2$, $g(x) = x^3$, $h(x) = x$

(D) $f(x) = x$, $g(x) = x^3$, $h(x) = x^2$

5. Sejam f e g as funções definidas, em \mathbb{R} , por $f(x) = |x| + x$ e $g(x) = |x| - x$.

Qual dos referenciais Oxy , ortonormados, pode representar os gráficos das funções f e g ?



6. No referencial ortonormado Oxy da *Figura 3* está representado parte do gráfico de uma função quadrática que traduz o problema seguinte:

A partir de um determinado ponto A da parede de um lago, situado a 2 metros de altura, pretende-se lançar um jacto de água que descreva um arco de parábola e que atinja uma altura máxima de 3 metros a uma distância de 1 metro da parede $[OA]$.

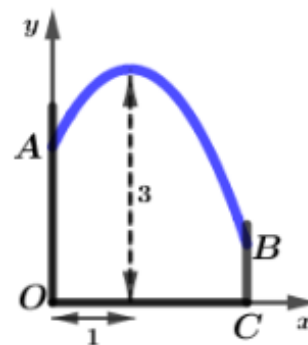


Figura 3

Para que a água caia dentro do lago construiu-se um muro $[CB]$, com C a uma distância de 2,5 metros do ponto O . Mostre que fazendo $\overline{BC} = 1$ metro é possível atingir esse objetivo.

7. Num referencial ortonormado Oxy considere-se a reta s de equação $y = 3x + 2$ e a reta t de equação $y = 2x + 1$.

Considere ainda os pontos $P(0,4)$ e $A(3,11)$.

7.1. Mostre que o ponto P não pertence a nenhuma das retas, mas o ponto A pertence à reta s .

7.2. Para um determinado ponto B da reta t , $\overrightarrow{PB} = k \overrightarrow{PA}$, $k \in \mathbb{R}$.

Determine as coordenadas do ponto B e o valor de k .

8. Na *Figura 4*, está representado num referencial o.n. $Oxyz$, um cubo $[ABCDEFGO]$.

Sabe-se que:

- A face $[OABE]$ está contida no plano xOy ;
- As coordenadas dos vértices G e A são $(0,0,5)$ e $(3,4,0)$, respetivamente;
- O ponto B pertence à reta de equação vetorial $(x,y,z) = (1,4,1) + k(2,-3,1)$, $k \in \mathbb{R}$

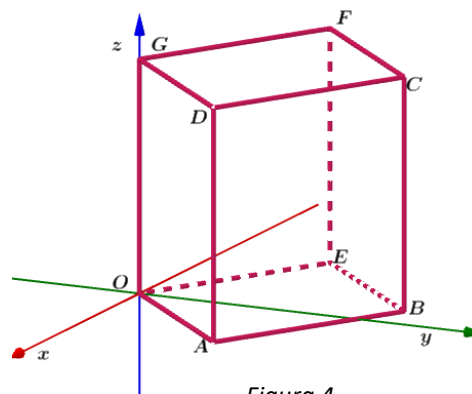


Figura 4

8.1. Qual das equações seguintes define um plano que contém a aresta $[DA]$?

(A) $x = 4$

(B) $x = 3$

(C) $x = 2$

(D) $x = 1$

8.2. Determine as coordenadas do centro da face $[ABCD]$.

9. Considere o polinómio $P(x) = (x - 2)^2(x^2 + 1)$.

9.1. Seja f a função definida, em \mathbb{R} , pelo polinómio dado.

Elabore um quadro de sinais para a função f .

Com base no quadro, poderá concluir que existe pelo menos um extremo para f ? Justifique e, caso exista, identifique-o.

9.2. O polinómio $P(x)$ é divisível pelo polinómio:

(A) x

(B) $x + 1$

(C) $x + 2$

(D) $x^2 - 4x + 4$

10. Na Figura 5, encontra-se representado, num referencial Oxy , parte do gráfico da função h definida, em \mathbb{R} , por $h(x) = |x + 2| - 2$.

A abscissa do ponto B é o minimizante da função.

10.1. Resolva a equação $h(x) = 0$.

10.2. Determine a área do triângulo $[ABO]$.

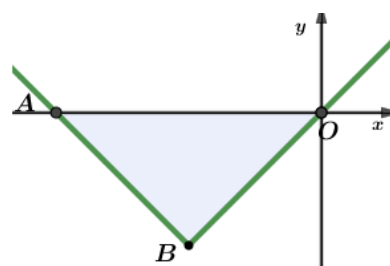


Figura 5

FIM

Questão	1.1	1.2	2.	3.1	3.2	3.3	4.	5.	6.	7.1	7.2	8.1	8.2	9.1	9.2	10.1	10.2	TOTAL
Cotação	14	13	8	14	13	8	8	8	14	14	14	8	14	14	8	14	14	200