Escola Secundária de Penafiel

Ficha de Trabalho nº 4

Preparação para exame

12.º Ano de Escolaridade | Turma G-K

GEOMETRIA NO ESPAÇO (Revisões) - CÁLCULO COMBINATÓRIO

1. Considera num referencial ortonormado $Oxyz$, os planos $\alpha : x+2y-z+1=0$ e $\beta : -2x-4y+2z-3=0$, e as retas $r : (x;y;z)=(0;1;-1)+k\left(-\frac{1}{2};-1;\frac{1}{2}\right), k \in \mathbb{R}$.

   1.1. Mostra que os planos são estritamente paralelos.

   1.2. Seja $\delta : 4ax-2y+a^2z=1$, com $a \in \mathbb{R}$, um plano. Determina a de modo que os planos β e δ sejam perpendiculares.

   1.3. Mostra que a reta r é perpendicular ao plano α.

   1.4. Escreve uma equação vetorial da reta t estritamente paralela ao plano α, e que contém o ponto $T(-1,2;-1)$.

2. No referencial ortonormado, $Oxyz$, está representado um tronco de pirâmide, como o que se apresenta na figura.

Sabe-se que:

- a face $[AOEC]$ está contida no plano xOz;
- a face $[ABO]$ está contida no plano xOy;
- a face $[OBDE]$ está contida no plano yOz;
- $\overline{OA}=\overline{OB}=4;\overline{OE}=5$;
- o volume da pirâmide que deu origem ao tronco de pirâmide representado é igual $\frac{80}{3}$ unidades cúbicas.

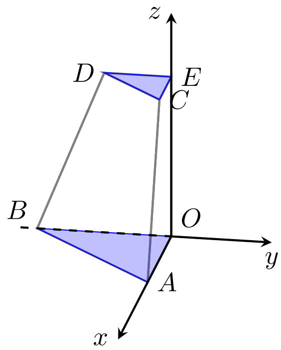

Figura 1

   2.1. Determina a área do triângulo $[CDE]$

   2.2. Determina o volume do sólido representado.

   2.3. Indica as coordenadas da projeção do ponto D no plano xOy.

   2.4. Escreve uma equação vetorial da reta BD.

   2.5. Indica a equação do plano que contém a face $[CDE]$.

   2.6. Escreve a equação da superfície esférica de centro no ponto médio de $[AB]$, e de raio $||\overrightarrow{CD}||$.

   2.7. Pretende-se numerar as faces do sólido com números como os do conjunto $P=\{1;2;3;4;5;6;7;8;9\}$. De quantas maneiras distintas se podem numerar as faces do sólido,

      2.7.1. se não houver restrições?

      2.7.2. se as duas bases do sólido só podem ser numeradas com números primos, e não há faces numeradas com o mesmo número.

      2.7.3. se as duas bases do sólido só podem ser numeradas com números pares, e não há faces numeradas com o mesmo número.

      2.7.4. se as bases do sólido são numeradas com os números 1 e 2, e não há faces numeradas com o mesmo número.

      2.7.5. se os números 5 e 7 têm necessariamente de ser utilizados, e não há faces numeradas com o mesmo número.

   2.8. Com todos os vértices do sólido, quantos triângulos se podem desenhar na figura de modo que um vértice pertença a uma das bases do sólido e os outros dois pertençam à outra base.

3. Na turma do Rodrigo há 13 raparigas e 17 rapazes.
Durante a aula de Educação Física, o professor disse aos alunos que ia formar uma equipa de dez alunos para representarem a turma num torneio de basquetebol da escola.

3.1. Quantas equipas pode o professor formar se:

3.1.1. o Rodrigo entra, necessariamente, na equipa.
3.1.2. o Pedro, a Maria e a Beatriz, que são alunos da turma e atletas federados, fazem parte da equipa.
3.1.3. a Inês e a Marta, que são alunas da turma, não fazem parte da equipa.
3.1.4. na sua constituição houver tantos rapazes como raparigas.
3.1.5. na sua constituição houver mais rapazes do que raparigas.

3.2. No final da aula o professor disse aos alunos que já tinha selecionado a equipa. Os alunos escolhidos foram: Rodrigo, Pedro, Maria, Beatriz, Ricardo, António, Manuel, Gonçalo, Jorge e João.
Por fim, o professor pediu aos alunos selecionados para se colocarem em fila, pois iria tirar uma fotografia da equipa.

3.2.1. Determina o número de fotografias distintas que o professor pode tirar se:

3.2.1.1. as duas raparigas ficarem uma em cada extremo.
3.2.1.2. os elementos do mesmo sexo ficarem juntos.
3.2.1.3. os rapazes ficarem juntos.

3.2.2. O número de fotografias distintas que o professor pode tirar de modo que as duas raparigas não fiquem juntas pode ser dado por:

Resposta A: ${}^{9}C_2 \times 2! \times 8!$ **Resposta B:** $10! - 9! \times 2!$

Numa pequena composição (cinco a dez linhas), explica cada uma das respostas.

4. Numa caixa há quatro bolas brancas, três pretas e três azuis.

Extraem-se, sucessivamente e sem reposição, as dez bolas que se encontram na caixa, e colocam-se em fila sobre uma mesa, formando desta forma, uma sequência de cores.
Nota: As bolas da mesma cor não distinguem.

Determina o número de sequências que se podem constituir se:

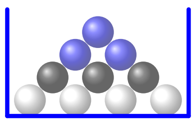

Figura 2

4.1. não houver restrições.

4.2. as bolas azuis saem todas seguidas logo no início da extração.

4.3. as bolas brancas saem todas seguidas.

4.4. as bolas saem agrupadas por cores.

5. Numa certa linha do triângulo de Pascal, a soma dos seus elementos é igual a 2048.

5.1. Quanto elementos tem essa linha do triângulo de Pascal?

5.2. Determina a soma dos três últimos elementos da linha seguinte.

5.3. Determina o maior elemento da linha anterior.

6. Considera o desenvolvimento de $\left(-\frac{1}{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^{12}$, com $x > 0$.

6.1. Determina, caso exista, o coeficiente do termo de grau quatro do desenvolvimento.

6.2. Determina o termo médio do desenvolvimento.