Proposta de Resolução da Ficha de Trabalho 5

Matemática A

12.º Ano de Escolaridade | Turma: J

1. A função g é contínua em $[-2;-1]$, pois trata-se de uma função polinomial

   $g(-2) = -(-2)^3 + 10 \times (-2) + 2 = 8 - 20 + 2 = -10$

   $g(-1) = -(-1)^3 + 10 \times (-1) + 2 = 1 - 10 + 2 = -7$

   Logo, $g(-2) < -8 < g(-1)$

   Como a função g é contínua em $[-2;-1]$ e $g(-2) < -8 < g(-1)$, então, pelo Teorema de Bolzano-Cauchy, $\exists c \in]-2;-1[: g(c) = -8$

   Ou seja, a equação $g(x) = -8$ tem solução no intervalo $]-2;-1[$

2. A afirmação é falsa
   Se escolher $k \in]3;4[$, a equação $f(x) = k$ não tem solução no intervalo $]1;5[$

   Tal facto ocorre porque a função f é descontínua no intervalo $]1;5[$

3. A função f é contínua em $\left[\frac{3}{2};\frac{5}{2}\right]$, pois trata-se de uma função polinomial

   $f\left(\frac{3}{2}\right) = \left(\frac{3}{2}\right)^3 - 6 \times \left(\frac{3}{2}\right)^2 + 11 \times \frac{3}{2} - 6 = 0.375 > 0$

   $f\left(\frac{5}{2}\right) = \left(\frac{5}{2}\right)^3 - 6 \times \left(\frac{5}{2}\right)^2 + 11 \times \frac{5}{2} - 6 = -0.375 < 0$

   Logo, $f\left(\frac{3}{2}\right) \times f\left(\frac{5}{2}\right) < 0$

   Como a função f é contínua em $\left[\frac{3}{2};\frac{5}{2}\right]$ e $f\left(\frac{3}{2}\right) \times f\left(\frac{5}{2}\right) < 0$, então, pelo Corolário do Teorema de Bolzano-Cauchy, $\exists c \in \left]\frac{3}{2};\frac{5}{2}\right[: f(c) = 0$

   Ou seja, a função f tem pelo menos um zero no intervalo $\left]\frac{3}{2};\frac{5}{2}\right[$

4. Consideremos a função g, definida por $g(x) = f(x) - x$

   A função g é contínua em $[1;2]$, pois trata-se da diferença de funções contínuas

   Ora,

   $f(1) = 1^3 - 3 \times 1 + 1 = 1 - 3 + 1 = -1$

   $f(2) = 2^3 - 3 \times 2 + 1 = 8 - 6 + 1 = 3$

Assim,

$g(1) = f(1) - 1 = -1 - 1 = -2 < 0$

$g(2) = f(2) - 2 = 3 - 2 = 1 > 0$

Logo, $g(1) \times g(2) < 0$

Como a função g é contínua em $[1;2]$ e $g(1) \times g(2) < 0$, então, pelo Corolário do Teorema de Bolzano-Cauchy, $\exists c \in]1;2[: g(c) = 0$

Isto é, $\exists c \in]1;2[: f(c) - c = 0$

Ou seja, a equação $f(x) = x$ tem solução no intervalo $]1;2[$

5. Os gráficos de f e de g, intersetam-se em pelo menos um ponto de abcissa no intervalo $]2;3[$, se a equação $f(x) = g(x)$ tiver pelo menos uma solução no intervalo $]2;3[$

   Consideremos a função g, definida por $h(x) = f(x) - g(x)$

   A função h é contínua em $[2;3]$, pois trata-se da diferença de funções contínuas

   Ora,

   $f(2) = 2 \times 2^3 - 4 \times 2 - 6 = 16 - 8 - 6 = 2$

   $f(3) = 2 \times 3^3 - 4 \times 3 - 6 = 54 - 12 - 6 = 36$

   $g(2) = -2 + 6 = 4$

   $g(3) = -3 + 6 = 3$

   Assim,

   $h(2) = f(2) - g(2) = 2 - 4 = -2 < 0$

   $h(3) = f(3) - g(3) = 36 - 3 = 33 > 0$

   Logo, $h(2) \times h(3) < 0$

   Como a função h é contínua em $[2;3]$ e $h(2) \times h(3) < 0$, então, pelo Corolário do Teorema de Bolzano-Cauchy, $\exists c \in]2;3[: h(c) = 0$

   Isto é, $\exists c \in]2;3[: f(c) - g(c) = 0$

   Ou seja, a equação $f(x) = g(x)$ tem solução no intervalo $]2;3[$

   Portanto, os gráficos de f e de g, intersetam-se em pelo menos um ponto de abcissa no intervalo $]2;3[$

6. A função f é contínua em $[-m; m]$, pois trata-se de uma função polinomial

   $f(-m) = -(-m)^3 + 2m^2 \times (-m)^2 - 2 \times (-m) - 2m^2 = m^3 + 2m^4 + 2m - 2m^4 = m^3 + 2m$

   $f(m) = -m^3 + 2m^2 \times m^2 - 2 \times m - 2m^2 = -m^3 + 2m^4 - 2m - 2m^4 = -m^3 - 2m$

   Verificamos que $f(-m)$ e $f(m)$ têm sinais contrários

   Logo, $f(-m) \times f(m) < 0$

   Como a função f é contínua em $[-m; m]$ e $f(-m) \times f(m) < 0$, então, pelo Corolário do Teorema de Bolzano-Cauchy, $\exists c \in \left]-m; m\right[: f(c) = 0$

   Ou seja, a função f tem pelo menos um zero no intervalo $\left]-m; m\right[$

7. A função g é contínua em $[-3; -2]$, pois trata-se de soma de funções contínuas

   $g(-3) = (-3)^3 + 2 \times f(-3) = -27 + 2 \times 8 = -27 + 16 = -11$

   $g(-2) = (-2)^3 + 2 \times f(-2) = -8 + 2 \times 1 = -8 + 2 = -6$

   Logo, $g(-3) < -8 < g(-2)$

   Como a função g é contínua em $[-3; -2]$ e $g(-3) < -8 < g(-2)$, então, pelo Teorema de Bolzano-Cauchy, $\exists c \in \left]-3; -2\right[: g(c) = 0$

   Ou seja, a equação $g(x) = -8$ é possível no intervalo $\left]-3; -2\right[$

8. Por hipótese, a função f é contínua no intervalo $[2; 4]$

   Assim, se $f(2) \times f(4) < 0$, o Corolário do Teorema de Bolzano-Cauchy garante que a função f tem pelo menos um zero no intervalo $\left]2; 4\right[$

   Determinemos k, de modo que $f(2) \times f(4) < 0$

   $f(2) \times f(4) < 0 \Leftrightarrow (2k + 2)(1 - k) < 0$

   Ora:

   - $2k + 2 = 0 \Leftrightarrow 2k = -2 \Leftrightarrow k = -1$

   - $2k + 2 > 0 \Leftrightarrow 2k > -2 \Leftrightarrow k > -1$

   - $2k + 2 < 0 \Leftrightarrow 2k < -2 \Leftrightarrow k < -1$

   - $1 - k = 0 \Leftrightarrow k = 1$

   - $1 - k > 0 \Leftrightarrow -k > -1 \Leftrightarrow k < 1$

   - $1 - k < 0 \Leftrightarrow -k < -1 \Leftrightarrow k > 1$

Elaborando um quadro de sinal

x	$-\infty$	-1		1	$+\infty$
$2k+2$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$1-k$	$+$	$+$	$+$	0	$-$
$(2k+2)(1-k)$	$-$	0	$+$	0	$-$

Concluindo,

$f(2) \times f(4) < 0 \Leftrightarrow (2k+2)(1-k) < 0 \Leftrightarrow k < -1 \vee k > 1$

Logo, $k \in (]-\infty; -1[\cup]1; +\infty[)$

9. A função g é contínua em $[1;3]$, pois trata-se de diferença de funções contínuas

$g\,(1) = -f(1) + 1^2 = -f(1) + 1$

Como o contradomínio da função f é $[4;5]$, tem-se,

$4 \leq f(1) \leq 5$

$\therefore -5 \leq -f(1) \leq -4$

$\therefore -5 + 1 \leq -f(1) + 1 \leq -4 + 1$

$\therefore -4 \leq -f(1) + 1 \leq -3$

$\therefore -4 \leq g(1) \leq -3$

Ou seja, $g(1) < 0$

De igual modo,

$g\,(3) = -f(3) + 3^2 = -f(3) + 9$

Como o contradomínio da função f é $[4;5]$, tem-se,

$4 \leq f(3) \leq 5$

$\therefore -5 \leq -f(3) \leq -4$

$\therefore -5 + 9 \leq -f(3) + 9 \leq -4 + 9$

$\therefore 4 \leq -f(3) + 9 \leq 5$

$\therefore 4 \leq g(3) \leq 5$

Ou seja, $g(3) > 0$

Logo, $g\,(1) \times g\,(3) < 0$

Como a função g é contínua em $[1;3]$ e $g\,(1) \times g\,(3) < 0$, então, pelo Corolário do Teorema de Bolzano-Cauchy, $\exists c \in]1;3[: g(c) = 0$

Ou seja, a função g tem pelo menos um zero no intervalo $]1;3[$