Escola Secundária de Paredes

Ficha de Trabalho 12

Matemática A

12.º Ano de Escolaridade • Turma: $B + C + H$

Aula de Apoio

abril de 2023

Números complexos - Funções trigonométricas, exponenciais, logarítmicas, reais, de variável real

1. Seja $\mathbb{C}$, o conjunto dos números complexos e sejam $z_1 = 2 - 2i^{17}$ e $z_2 = e^{i\frac{\pi}{6}}$, dois números complexos

   1.1. Representa o número complexo z_1 na forma trigonométrica

   1.2. Representa o número complexo $\frac{z_2^3}{z_1}$ na forma trigonométrica e na forma algébrica

   1.3. Resolve, em $\mathbb{C}$, a equação $z^4 + z_1 = 0$, e faz a interpretação geométrica das soluções

   Apresenta as soluções na forma trigonométrica

   1.4. Resolve, em $\mathbb{C}$, a equação $\overline{z}z^3 = i\overline{z_2}$

   Apresenta as soluções na forma trigonométrica

2. Seja $\mathbb{C}$, o conjunto dos números complexos e seja z_1 um número complexo

   Sabe-se que o afixo P_1 do número complexo z_1 tem parte real negativa e coeficiente da parte imaginária positiva

   Diz, justificando, em que quadrante se situa o afixo P_2 do número complexo iz_1

3. Considera a função h, real, de variável real, definida analiticamente por $h(x) = -2\sin(2x + \pi)$

   Na Figura 1 encontra-se representada parte do gráfico da função h e um triângulo $[OAB]$

   Sabe-se que:

   - O e A são pontos de interseção do gráfico com o eixo Ox
   - B é ponto do gráfico onde a função atinge o valor máximo

   Numa das opções está o valor exato da área do triângulo $[OAB]$

   Em qual delas?

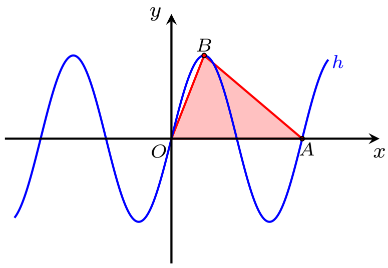

Figura 1

(A) π (B) $\frac{\pi}{4}$ (C) $\frac{\pi}{2}$ (D) $\frac{3\pi}{2}$

4. Na Figura 2 estão representados:

- parte do gráfico da função f, real, de variável real, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $f(x) = 2^{-x+1}$
- um triângulo isósceles $[OPQ]$

Sabe-se que:

- $\overline{PO} = \overline{PQ}$
- O é a origem do referencial
- Q pertence ao eixo das abcissas

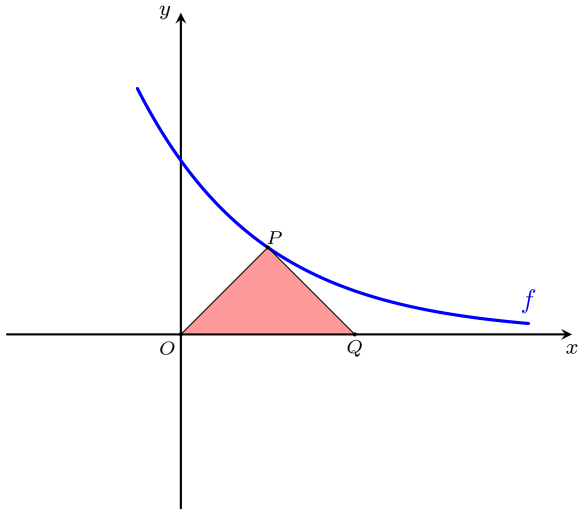

Figura 2

Considera que o ponto P pertence ao gráfico da função f e se desloca no primeiro quadrante

O ponto Q acompanha o movimento do ponto P, deslocando-se ao longo do eixo das abcissas de tal modo que $\overline{PO}$ permanece sempre igual a $\overline{PQ}$

Seja A a função, de domínio $\mathbb{R}^+$, que faz corresponder, à abcissa x do ponto P a área do triângulo $[OPQ]$

Resolve os itens seguintes, recorrendo exclusivamente a métodos analíticos

4.1. Mostra que, para cada $x \in \mathbb{R}^+$, se tem $A(x) = \dfrac{x}{2^{x-1}}$

4.2. Determina os valores de x que satisfazem a condição $f(x) > \dfrac{1}{8^{-x}}$

Apresenta o resultado na forma de intervalo de números reais

5. Seja f uma função real, de variável real, de domínio $\mathbb{R}^+$

Sabe-se que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x) + \ln x}{5x} = 1$

Qual das equações seguintes pode definir uma assintota do gráfico da função f?

(A) $y = \dfrac{1}{5}x$ (B) $y = 5x$ (C) $y = \dfrac{2}{5}x$ (D) $y = -5x$

6. Considera, para um certo número real k, a função h, real, de variável real, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $h(x) = ke^x$

O teorema de Bolzano-Cauchy garante que a função h interseta a bissetriz dos quadrantes pares num ponto de abcissa pertencente ao intervalo $]0, 1[$

A qual dos intervalos seguintes pode pertencer k?

(A) $\left]-e, -\dfrac{1}{e}\right[$ (B) $\left]-\dfrac{1}{e}, 0\right[$ (C) $\left]0, \dfrac{1}{e}\right[$ (D) $\left]\dfrac{1}{e}, 1\right[$

7. Calcula $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{x^2 + x}{\sqrt{1 - \cos(2x)}}$