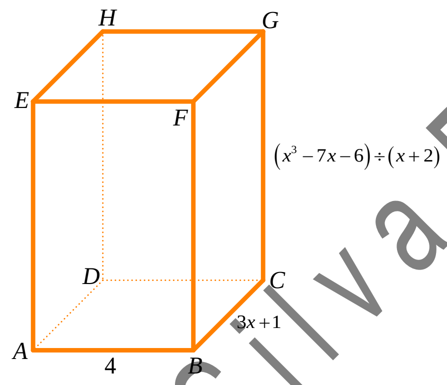
Ficha de Trabalho n.º 4 – Matemática A – 10.º Ano

Polinómios

"Conhece a Matemática e dominarás o Mundo."
Galileu Galilei

Grupo I – Itens de Escolha Múltipla

1. Na figura está representado um paralelepípedo $[ABCDEFGH]$.



Tal como a figura sugere, $\overline{AB}=4$, $\overline{BC}=3x+1$ e $\overline{CG}=\left(x^3-7x-6\right)\div\left(x+2\right)$, com $x>3$.

O volume do paralelepípedo é dado, em função de x, por:

A $12x^3+12x^2-36x-36$ **B** $12x^3-20x^2-44x-12$

C $3x^3-5x^2-11x-3$ **D** $12x^3-36x^2+12$

2. Sejam A, B e C três polinómios de graus n, p e q, respectivamente, com $0<q<p<n$ tais que o polinómio $A\times B$ é divisível por C.

Qual é o grau do polinómio $\left(A\times B\right)\div C$?

A $n+p+q$ **B** $n-p+q$

C $n+p-q$ **D** $n-p-q$

3. Considere o polinómio $p(x)=x^{12}-2x^3+1$. Qual é o resto da divisão inteira de p por $2x+\sqrt[3]{24}$?

A 76 **B** 79 **C** 85 **D** 88

4. Seja k um número real tal que o polinómio p, definido por $p(x)=k^2x^4-4kx^3+3x-2$ é sempre de grau 4.

Qual é o valor de k de modo que o resto da divisão inteira de p por $x-2$ seja 4?

A 0 **B** 1 **C** 2 **D** 3

5. Sejam a e b dois números reais distintos e S o conjunto de todos os polinómios de grau três em que a e b são as suas duas únicas raízes.

Qual das seguintes proposições é falsa?

A $\forall p \in S,\ p$ é divisível por $(x-a)^2(x-b)$

B $\forall p \in S,\ p$ é divisível por $(x-a)(x-b)$

C $\forall p \in S,\ p$ é divisível por $x-a$

D $\forall p \in S,\ p$ é divisível por $x-b$

6. Seja p um polinómio de grau 4 tais que:

- $p(-1)=p(1)=p(2)=0$
- 2 é raiz de multiplicidade 2
- o resto da divisão inteira de p por $x-3$ é 16

Qual é a expressão analítica do polinómio p?

A $x^4-4x^3+3x^2+4x-4$

B $2x^4-8x^3+6x^2+8x-8$

C $x^4-3x^3+x^2+3x-2$

D $2x^3-4x^2-2x+4$

7. Sejam a e b dois números reais tais que o polinómio $p(x)=-x^3+ax^2-3bx+9$ é divisível por $x+3$.

Qual é o valor de $(a+b)^3$?

A -64 **B** -27 **C** 27 **D** 64

8. Considere o polinómio p definido por $p(x)=m(x-x^3)+n(x^2-1)$, com $m,n\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$ e $m\neq n$.

Qual das seguintes afirmações é falsa?

A p é divisível por $x-1$

B p é divisível por $x+1$

C p é divisível por $n-mx$

D p é divisível por $m-nx$

9. Considere o polinómio p definido por $p(x)=kx^{2n}-x^{2n}+x^2+3$, com $k\in\mathbb{R}\setminus\{0,1\}$ e $n\in\mathbb{N}$.

Qual é o valor de n de modo que o resto da divisão inteira de p por $x+2$ seja igual a $64k-57$?

A 1 **B** 3 **C** 4 **D** 6

10. Considere o polinómio p definido por $p(x)=-2x^{2n+1}-6x^{n+3}-x^n+1$, $n\in\mathbb{N}$.

Qual pode ser o resto da divisão inteira de p por $x+1$?

A -2 **B** -1 **C** 9 **D** 10

11. Considere um polinómio p tais que o resto da divisão inteira de p por $x-4$ é 2 e o resto da divisão inteira de p por $x+2$ é 1.

Qual é o resto da divisão inteira de p por $(x-4)(x+2)$?

A $\frac{x}{3}+\frac{5}{3}$ **B** $\frac{4x}{3}+\frac{1}{6}$ **C** $\frac{5x}{3}+\frac{1}{3}$ **D** $\frac{x}{6}+\frac{4}{3}$

12. Sejam a e b dois números reais e A, B e C três polinómios definidos por:

$$A(x)=x^5+ax^4-bx^3+ax^2+bx-2b,\qquad B(x)=x^3+a\qquad \text{e}\qquad C(x)=x^2+(b-a)x-b$$

Sabe-se que $A=B\times C$. Quais podem ser o valores de a e de b?

A $a=2$ e $b=2$

B $a=4$ e $b=2$

C $a=2$ e $b=4$

D $a=4$ e $b=4$

13. Qual é o conjunto solução da inequação $x^5 > 4x^3$?

A $]-\infty,-2[\cup]0,2[$

B $]-2,0[\cup]2,+\infty[$

C $]-\infty,0[\cup]2,+\infty[$

D $]0,2[$

14. Considere um polinómio p, de grau 2, tal que $p(x)<0 \Leftrightarrow -3<x<2$.

Qual é o conjunto solução da inequação $\left(-2x^2-8x+10\right)\times p(x)\le 0$?

A $[-5,-3]\cup[1,2]$

B $]-\infty,-3]\cup[-1,2]\cup[5,+\infty[$

C $]-\infty,-5]\cup[-3,1]\cup[2,+\infty[$

D $[-3,-1]\cup[2,5]$

GRUPO II – ITENS DE RESPOSTA ABERTA

15. Considere o polinómio p definido por $p(x)=-2x^3+4x^2-x+2$.

15.1. Utilizando a regra de Ruffini, determine o quociente e o resto da divisão de p pelo polinómio $3x-4$.

***15.2.** Utilizando a regra de Ruffini, determine o quociente e o resto da divisão de p pelo polinómio x^2-9.

15.3. Verifique se 2 é raiz de multiplicidade 2 de p e decomponha-o num produto de polinómios irredutíveis.

15.4. Resolva a inequação $p(x)>0$

15.5. Resolva em a inequação $p(x)\le 2-3x$.

16. Seja p o polinómio cujo quociente e o resto da divisão inteira por x^2+1 é, respectivamente, $2x+17$ e $17x-31$.

16.1. Calcule $p(-7)$ e interprete o resultado obtido.

16.2. Determine os zeros de p e decomponha-o num produto polinómios irredutíveis.

16.3. Resolva a inequação $p(x)\le 0$.

16.4. Determine o conjunto solução da inequação $p(x)\times\left(9-x^2\right)>0$.

17. Considere o polinómio p definido por $p(x)=3x^3+2x^2-7x+2$.

17.1. Utilizando a regra de Ruffini, determine o quociente e o resto da divisão de p pelo polinómio $2x+6$.

17.2. Mostre que o resto da divisão inteira de p por $x+2$ é zero, determine os zeros de p e decomponha-o num produto de polinómios irredutíveis.

17.3. Resolva a inequação $p(x)>0$.

***17.4.** Considere o polinómio q definido por $q(x)=x^2+11x+18$. Sabe-se que o resto da divisão inteira de p e q por $x+1$ é igual.

Qual é o conjunto solução da inequação $p(x)\geq q(x)$?

18. Sejam m e n dois números reais não nulos. Considere o polinómios A, B e C definidos por:

$$A(x)=2x^4-mx^3+nx^2+mx-n-2,\qquad B(x)=x^2-1\quad \text{e}\quad C(x)=2x^2-\frac{nx}{2}+4m$$

18.1. Utilizando o método dos coeficientes indeterminados, determine m e n de modo que $A(x)=B(x)\times C(x)$.

18.2. Considere agora que o resto da divisão inteira de A por $2x-1$ é $-\frac{15}{8}$.

a) Mostre que $m=2n$.

b) Sabe-se também que 1 é raiz de multiplicidade 2 do polinómio A. Mostre que $m=8$ e $n=4$.

c) Decomponha A num produto de polinómios irredutíveis.

d) Resolva a inequação $A(x)<0$.

18.3. Determine $B(x)$ e $C(x)$ de modo que $A(x)=xB(x)+x^2B(x)+C(x)$, sendo B um polinómio de grau 2 e C um polinómio de grau inferior a 2.

18.4. Determine o conjunto solução da equação $A(x)=-8x(x^2-x-1)$.

19. Seja B um polinómio de grau 3. Sabe-se que o gráfico de B intersecta o eixo Ox nos pontos de abcissas -2, 1 e 3 e o eixo Oy no ponto de ordenada -1.

19.1. Determine o conjunto solução da inequação $2B(x)-B(x)(x^2-x)\geq 0$.

19.2. Escreva a expressão analítica do polinómio B, apresentando-a na forma reduzida e ordenada.

20. Considere o polinómio p definido por $p(x)=x^4-5x^2+4$.

20.1. Determine os zeros de p.

20.2. Resolva a inequação $p(x)\leq 0$.

20.3. Seja q o polinómio definido por $q(x)=x(x^2-2x+1)-\left(\sqrt{2}x-\sqrt{2}\right)^2$.

O polinómio $p\times q$ pode ser escrito na forma $(x-a)^m(x-b)^n(x+a)^p(x+b)^p$, com $a,b\in\mathbb{R}$, $a<b$ e $m,n,p\in\mathbb{N}$.

Determine a, b, m, n e p.

21. Sejam a e b dois números reais. Considere os polinómios p e q definidos por:

$$p(x)=x^3+x^2-bx+b^3 \quad \text{e} \quad q(x)=-x^3-x^2-ax+a^3$$

***21.1.** Seja $a>b$. Sabe-se que:

- o resto da divisão inteira do polinómio p por $x-a$ é 6
- o resto da divisão inteira do polinómio q por $x+b$ é 2

Qual é o valor de $a-b$?

21.2. Suponha que o resto da divisão inteira de p e q por x é igual.

Qual é o conjunto solução da inequação $p(x)-q(x)\leq 0$?

22. Considere o polinómio q definido por $q(x)=2x^{n+3}-x^n+x^{2n-1}-2$, com $n\in\mathbb{N}$.

22.1. Determine o resto da divisão inteira de q por $x+1$, no caso de n ser par.

22.2. Considere $n=1$.

a) Decomponha q num produto de polinómios irredutíveis.

b) Resolva a inequação $q(x)\geq 0$.

23. Considere um polinómio B de grau 3.

Sabe-se que B é divisível por $-x^2-3$ e que o resto da divisão inteira de B por $2x-2$ e por $x+5$ é -20 e 28, respectivamente.

23.1. Mostre que B é divisível por $x+4$ e escreva a sua expressão analítica, apresentando-a na forma reduzida e ordenada.

23.2. Seja C um polinómio de grau 4 com três zeros, um deles o 1, tal que $C(x)<0 \Leftrightarrow x<-2 \ \vee \ x>5$.

Determine o conjunto solução da inequação $B(x)\times C(x)<0$.

***24**. Considere o polinómio p, definido por $p(x)=2x^4+7x^3-9x$.

24.1. Sem determinar todos os zeros de p, decomponha-o num produto de polinómios irredutíveis.

Sugestão: coloque x em evidência e repare que $2x^3+7x^2-9=2x^3+6x^2+x^2-9$.

24.2. Determine $A(x)$ e $B(x)$ de modo que $p(x)=(3x^2-1)A(x)+B(x)$, sendo A um polinómio de grau 2 e B um polinómio de grau inferior a 2.

Resolva o exercício por dois métodos distintos, sendo um deles o método dos coeficientes indeterminados.

24.3. Resolva a inequação $p(x)\geq 4x^2+18x+18$.

Sugestão: decomponha $4x^2+18x+18$ num produto de polinómios irredutíveis.

***25.** Sejam p um polinómio de grau n, com $n\in\mathbb{N}$, e a, b e c três números reais distintos, raízes do polinómio p, de multiplicidades n_1, n_2 e n_3, respectivamente, com $n_1,n_2,n_3\in\mathbb{N}$.

25.1. Considere $n=9$, $n_1=2$ e $n_2=3$.

Indique, justificando, o(s) valor(es) que n_3, multiplicidade de c, pode tomar, quando:

a) não há restrições além das do enunciado.

b) p é divisível por x^3+1 e $c\neq -1$.

c) a, b e c são as únicas raízes reais de p.

d) p é divisível por x^3 e a, b e c são números reais não nulos.

25.2. Considere agora que $p(x) = -3x^7 - 27x^6 - 60x^5 + 36x^4 + 111x^3 - 81x^2 + 168x - 144$.

Sabe-se que $a = -4$ e $b = 1$, eventualmente com multiplicidades superiores a 1.

a) Determine o valor de c e decomponha p num produto de polinómios irredutíveis.

b) Determine o conjunto solução da inequação $p(x) \leq 0$.

***26.** O sinal de um polinómio p, de grau 3, é dado pela tabela seguinte:

x	$-\infty$	a		0		b	$+\infty$
$p(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$

Considere o polinómio q, definido por $q(x) = x^2 - x - 6$.

Sabe-se que o conjunto solução da condição da inequação $p(x) \times q(x) \geq 0$ é $]-\infty, 0] \cup [1, 3]$.

26.1. Mostre que $a = -2$ e $b = 1$.

26.2. Decomponha o polinómio $B = p \times q$ num produto de polinómios irredutíveis, tendo em conta que o resto da divisão inteira de B por $2x - 4$ é 128.

***27.** Considere o polinómio p, definido por $p(x) = x^{2n+1} - x^{2n} - x + 1$, com $n \in \mathbb{N}$.

27.1. Determine o valor de $n \in \mathbb{N}$ de modo que $p(2) + p(-2) = -510$.

27.2. Mostre que $p(x) = (x-1)(x^n - 1)(x^n + 1)$.

27.3. Considere que n é um número natural par.

Determine o conjunto solução da inequação $p(x) \leq 0$.

Adaptado do Caderno de Apoio do 10.º Ano

28. Considere os polinómios A, B e C tais que:

- $A(x) = 2x^5 - 6x^4 - 8x^3 - 16x^2 + 48x + 64$
- $B(x) = x^4 - x^3 - 2x^2$
- C é um polinómio de grau 4, cujos seus zeros são -3, -1, 2 e 5 e o resto da divisão inteira por $x - 1$ é 8.

***28.1.** Decomponha o polinómio A num produto de polinómios irredutíveis.

Sugestão: repare que $2x^5-6x^4-8x^3=2x^3\left(x^2-3x-4\right)$.

28.2. Resolva a inequação $B\left(x\right)<0$. Apresente o resultado na forma de intervalo ou união de intervalos de números reias.

28.3. Escreva a expressão analítica de C, apresentando-a na forma reduzida e ordenada.

28.4. Determine os zeros do polinómio $A\times B\times C$, indicando as respectivas multiplicidades.

***28.5.** Determine o conjunto solução da inequação $C\left(x\right)\geq B\left(x\right)$.

Solucionário

Grupo I – Itens de Escolha Múltipla

1.	B	**2.**	C	**3.**	D	**4.**	C	**5.**	A	**6.**	B	**7.**	A
8.	D	**9.**	B	**10.**	A	**11.**	D	**12.**	C	**13.**	B	**14.**	C

Grupo II – Itens de Resposta Aberta

15.1. Quociente: $-\frac{2x^2}{3}+\frac{4x}{9}+\frac{7}{27}$; Resto: $\frac{82}{27}$

15.2. Quociente: $-2x+4$; Resto: $-19x+38$

15.3. 2 não é raiz de raiz de multiplicidade 2 de p; $p\left(x\right)=\left(x-2\right)\left(-2x^2-1\right)$

15.4. $\left]-\infty,2\right[$

15.5. $\left[1-\sqrt{2},0\right]\cup\left[1+\sqrt{2},+\infty\right[$

16.1. $p\left(-7\right)=0$; -7 é raiz de p, ou seja, $p\left(x\right)$ é divisível por $x+7$.

16.2. $p\left(x\right)=2\left(x+7\right)\left(x+2\right)\left(x-\frac{1}{2}\right)$

16.3. $\left]-\infty,-7\right]\cup\left[-2,\frac{1}{2}\right]$

16.4. $\left]-\infty,-7\right[\cup\left]-3,-2\right[\cup\left]\frac{1}{2},3\right[$

17.1. Quociente: $\frac{3x^2}{2}-\frac{7x}{2}+7$; Resto: -40

17.2. Zeros de p: $\left\{-2,\frac{1}{3},1\right\}$; $p\left(x\right)=3\left(x+2\right)\left(x-\frac{1}{3}\right)\left(x-1\right)$

17.3. $\left]-2,\frac{1}{3}\right[\cup\left]1,+\infty\right[$

17.4. $\left[-2,-1\right]\cup\left[\frac{8}{3},+\infty\right[$

18.1. $m=1$ e $n=2$

18.2. **c)** $A\left(x\right)=2\left(x-1\right)^2\left(x+1\right)\left(x-3\right)$

18.2. **d)** $\left]-1,3\right[\setminus\left\{1\right\}$

18.3. $B\left(x\right)=2x^2-10x+14$; $C\left(x\right)=-6x-6$

18.4. $\left\{-\sqrt{3},\sqrt{3}\right\}$

19.1. $\left[-2,-1\right]\cup\left[1,2\right]\cup\left[3,+\infty\right[$

19.2. $B\left(x\right)=-\frac{x^3}{6}+\frac{x^2}{3}+\frac{5x}{6}-1$

20.1. Zeros de p: $\left\{-2,-1,1,2\right\}$

20.2. $\left[-2,-1\right]\cup\left[1,2\right]$

20.3. $a=1$, $b=2$, $m=3$, $n=2$ e $p=1$

21.1. 2

21.2. $]-\infty,-1]\cup\{0\}$

22.1. -6

22.2. **a)** $q(x)=2(x-1)(x+1)(x^2+1)$

22.2. **b)** $]-\infty,-1]\cup[1,+\infty[$

23.1. $B(x)=-x^3-4x^2-3x-12$

23.2. $]-\infty,-4[\cup]-2,1[\cup]1,5[$

24.1. $A(x)=2x(x-1)(x+3)\left(x+\frac{3}{2}\right)$

24.2. $A(x)=\frac{2x^2}{3}+\frac{7x}{3}+\frac{2}{9}$; $B(x)=-\frac{20x}{3}+\frac{2}{9}$

24.3. $]-\infty,-3]\cup\left[-\frac{3}{2},-1\right]\cup[2,+\infty[$

25.1. **a)** 1, 2, 3 ou 4

25.1. **b)** 1 ou 2

25.1. **a)** 2 ou 4

25.1. **a)** 1

25.2. **a)** $c=-3$; $p(x)=-3(x+4)^2(x-1)^2(x+3)(x^2+1)$

25.2. **b)** $[-3,+\infty[\cup\{-4\}$

26.2. $B(x)=-4x(x-1)(x-3)(x+2)^2$

27.1. $n=4$

27.2. $]-\infty,-1]\cup\{1\}$

28.1. $A(x)=2(x+1)(x-2)(x-4)(x^2+2x+4)$

28.2. $]-1,0[\cup]0,2[$

28.3. $C(x)=\frac{x^4}{4}-\frac{3x^3}{4}-\frac{15x^2}{4}+\frac{19x}{4}+\frac{15}{2}$

28.4. Zeros de $A\times B\times C$: -1 e 2 ambas de multiplicidade 3; 0 de multiplicidade 2; -3 , 4 e 5 as três de multiplicidade 2.

28.5. $[-1,2]$