Tópicos de Matemática II - 2016/ 2017
1º Teste – Tópicos de resolução

Exercício 1

a) $u_{n+1} - u_n = \dfrac{3}{2+5(n+1)} - \dfrac{3}{2+5n} = \dfrac{3}{7+5n} - \dfrac{3}{2+5n} = \dfrac{-15}{(7+5n)(2+5n)} < 0, \forall n \in IN$

Logo, $(u_n)_n$ é monótona (estritamente) decrescente.

b) $\lim\limits_n u_n = \dfrac{3}{(+\infty)} = 0$. $(u_n)_n$ é convergente pois tende para um número real.

Exercício 2

$$a_n = \begin{cases} \dfrac{1}{n+4} & se \;\; n \; é \; par \\ \dfrac{-1}{n+4} & se \;\; n \;\; é \; ímpar \end{cases}$$

- $\lim\limits_n \dfrac{1}{n+4} = \dfrac{1}{(+\infty)} = 0$
- $\lim\limits_n \dfrac{-1}{n+4} = \dfrac{-1}{(+\infty)} = 0$

Logo, a sucessão $(a_n)_n$ é convergente (para zero) e, sendo convergente, é necessariamente limitada.

Nota: Pode também verificar-se que $-\dfrac{1}{5} \leq a_n \leq \dfrac{1}{6}, \forall n \in IN$.

Exercício 3

a) $$\lim_n \frac{\sqrt{n^2\left(1+\frac{1}{n^2}\right)}}{n\left(3-\frac{2}{n}\right)} = \lim_n \frac{n\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}}{n\left(3-\frac{2}{n}\right)} = \lim_n \frac{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}}{3-\frac{2}{n}} = \frac{\sqrt{1+0}}{3-0} = \frac{1}{3}$$

b) $$\lim_n \frac{\left(2n-\sqrt{2+4n^2}\right)\left(2n+\sqrt{2+4n^2}\right)}{2n+\sqrt{2+4n^2}} = \lim_n \frac{4n^2-2-4n^2}{2n+\sqrt{2+4n^2}} = \lim_n \frac{-2}{2n+\sqrt{2+4n^2}} =$$

$$= \frac{-2}{(+\infty)} = 0 .$$

c) $$\lim_n \left(1+\frac{3}{n}\right)^{2n} = \left(\lim_n \left(1+\frac{3}{n}\right)^{n}\right)^2 = \left(e^3\right)^2 = e^6$$

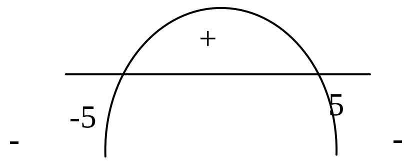
Uma outra resolução poderia ser: $\lim_n \left(1+\frac{3}{n}\right)^{2n} = \lim_n \left(1+\frac{6}{2n}\right)^{2n} = e^6$

Exercício 4

a) $D_f = \{x \in IR : -x^2+25 \geq 0 \wedge x-5 \neq 0\}$

Cálculos auxiliares:

- $x-5=0 \Leftrightarrow x=5$
- $-x^2+25=0 \Leftrightarrow x^2=25 \Leftrightarrow x=\pm 5$



$-x^2+25 \geq 0 \Leftrightarrow x \in [-5,5]$

Logo: $D_f = [-5,5] \setminus \{5\} = [-5,5[$

Exercício 5

i) $-3, -1$ e 5 **ii)** e **iii)** Por ex: $]-4, -3[$ **iv)** 4 **v)** $\{-2\} \cup]0, 2]$

Exercício 6

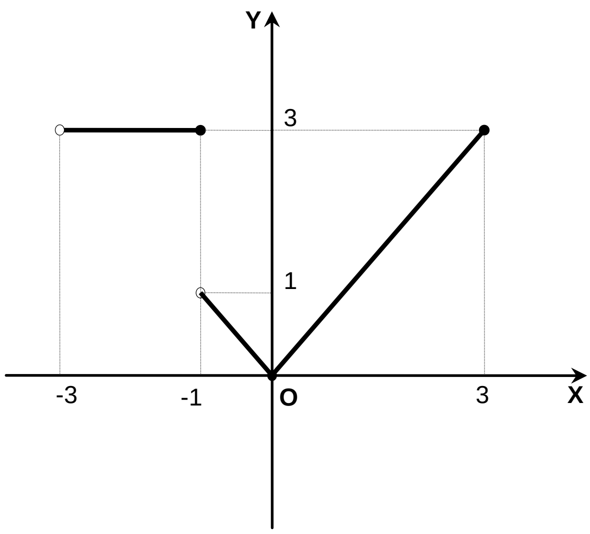
a) Abcissa do vértice: $-\frac{b}{2a} = -\frac{4}{2(-2)} = 1$

Ordenada do vértice: $f(1) = -2 \times 1^2 + 4 \times 1 - 4 = -2$

Logo, o vértice da parábola tem coordenadas $(1, -2)$ e o seu eixo de simetria tem equação $x = 1$.

b) A parábola representativa do gráfico de f tem concavidade "voltada para baixo" e a ordenada do seu vértice é -2 ; logo: $D'_f =]-\infty, -2]$.

Exercício 7



Exercício 8

$x^3 - 6x \leq 0 \Leftrightarrow x\left(x^2 - 6\right) \leq 0$

Cálculo auxiliar: $x^2 - 6 = 0 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{6}$

x	$-\infty$	$-\sqrt{6}$		0		$\sqrt{6}$	$+\infty$
x	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$x^2 - 6$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$x\left(x^2 - 6\right)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

C.S. = $\left]-\infty, -\sqrt{6}\right] \cup \left[0, \sqrt{6}\right]$

Exercício 9

$-2x^2 + 4x = k \Leftrightarrow -2x^2 + 4x - k = 0$

Para que esta equação tenha duas soluções distintas:

$4^2 - 4\times(-2)\times(-k) > 0 \Leftrightarrow -8k > -16 \Leftrightarrow k < 2 \Leftrightarrow k \in \left]-\infty, 2\right[$

Nota: a parábola representativa do gráfico de f tem concavidade "voltada para baixo" e pode verificar-se que a ordenada do seu vértice é 2. Assim sendo, qualquer reta horizontal de equação $y = k$, com $k \in \left]-\infty, 2\right[$, interseta essa parábola em dois pontos distintos.