1. Matrizes

Exercícios para as aulas

Exercício 1.1 Dê exemplo de uma matriz

a) quadrada de ordem 4 *b)* retangular de ordem 4×3 *c)* retangular de ordem 2×5
d) linha de ordem 1×4 *e)* coluna de ordem 2×1 *f)* diagonal de ordem 5
g) triangular inferior de ordem 4 *h)* triangular superior de ordem 3

Exercício 1.2 Em cada caso, escreva por extenso a matriz quadrada de ordem 4 cujos elementos são:

a) $a_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ se } i = j \\ 0, \text{ se } i \neq j \end{cases}$ *b)* $b_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ se } i \geq j \\ 0, \text{caso contrário} \end{cases}$

c) $c_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ se } i = j \\ -1, \text{ se } |i-j| = 1 \\ 0, \text{caso contrário} \end{cases}$ *d)* $d_{ij} = (-1)^{i+j}(i+j)$.

Exercício 1.3 Sejam A, B, C, D e E matrizes de ordens 2×3, 3×4, 3×5, 2×5 e 3×3, respetivamente. Indique quais das seguintes expressões estão bem definidas e, em caso afirmativo, indique a ordem da matriz resultante.

a) $A + B$ *b)* BA *c)* AB *d)* C^2 *e)* $AC + D$ *f)* AEB

Exercício 1.4 Calcule os produtos

a) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}$ *b)* $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}$ *c)* $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$ *e)* $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 5 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ *f)* $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 & -3 \\ -1 & 2 & 1 \\ 5 & 1 & -5 \end{pmatrix}$

g) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$ *h)* $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ *i)* $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 \end{pmatrix}$

Exercício 1.5 Sejam A e B as matrizes

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

a) Determine a primeira linha da matriz AB.

b) Determine a segunda coluna da matriz BA.

c) Determine a terceira linha da matriz A^2.

Exercício 1.6 Determine todas as matrizes B que comutam com a matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercício 1.7 Seja $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Mostre que, para $n \geq 3$, $A^n = \mathbf{0}_3$.

Exercício 1.8 Considere as matrizes

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} -4 & -3 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}.$$

Verifique que $AB = \mathbf{0}$ e $AC = AD$. Comente os resultados obtidos.

Exercício 1.9 Obtenha uma expressão para $(A+B)^3$, com A e B matrizes quadradas de ordem n. Simplifique a expressão anterior, no caso de A e B serem matrizes comutáveis.

Exercício 1.10 Verifique se existem valores de α e β tais que:

$$\begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & \alpha \\ 1 & -2 & \alpha & \beta \end{pmatrix}.$$

Exercício 1.11 Verifique que

$$8 \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & 4 & 1 \\ 4 & -8 & 4 \\ 1 & 4 & -3 \end{pmatrix}.$$

Exercício 1.12* Sejam A e B matrizes invertíveis.

a) Mostre que $A^{-1} + B^{-1} = A^{-1}(A+B)B^{-1}$.

b) Verifique também que, se $A+B$ é invertível, então $A^{-1}+B^{-1}$ é invertível sendo

$$(A^{-1}+B^{-1})^{-1} = B(A+B)^{-1}A = A(A+B)^{-1}B.$$

Exercício 1.13 Considere as matrizes

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 \\ -2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -3 & 1 & 1 \\ 2 & -4 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1+i & 1 & i \\ 2i & 1 & 1 \\ i & -i & 0 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1+i & 1 & 2i \\ 1 & 1 & -1 \\ -2i & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Determine:

a) $(2A)^T - 3B^T$ *b)* AB *c)* BA *d)* A^TB^T *e)* $(AB)^T$

f) C^* *g)* $\overline{iD}$ *h)* $(iD)^*$ *i)* $\overline{\overline{D}+C}$ *j)* $(\overline{C}D)^*$

Exercício 1.14 Identifique quais das seguintes matrizes são simétricas, antissimétricas, hermíticas ou anti-hermíticas.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1+i \\ 1-i & 3 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} i & 1 \\ -1 & -i \end{pmatrix},$$

$$E = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad F = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}, \quad G = \begin{pmatrix} 0 & 1 & i \\ 1 & 0 & -2 \\ -i & -2 & 1 \end{pmatrix}, \quad H = \begin{pmatrix} 0 & 1-i & 2 \\ -1+i & 0 & -2i \\ -2 & 2i & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercício 1.15 Seja A uma matriz quadrada de ordem n. Mostre que:

*a)** $A + A^T$ é uma matriz simétrica.

b) $A - A^T$ é uma matriz antissimétrica.

c) AA^T e A^TA são matrizes simétricas.

Exercício 1.16 Sejam A e B matrizes hermíticas de ordem n. Mostre que:

a) $A + B$ é uma matriz hermítica.

b) AB é uma matriz hermítica sse $AB = BA$

c) se A é invertível, A^{-1} é hermítica.

d) $A - A^*$, iA e $-iA$ são anti-hermíticas.

e) $AB + BA$ é hermítica e $AB - BA$ é anti-hermítica.

Exercício 1.17 Uma matriz A de ordem n diz-se *ortogonal* se $AA^T = A^TA = I_n$ e diz-se *anti-ortogonal* se $AA^T = A^TA = -I_n$. Mostre que:

*a)** se A e B são matrizes ortogonais, então AB e BA também são matrizes ortogonais.

b) se A e B são matrizes anti-ortogonais, então AB e BA são matrizes ortogonais.

Exercício 1.18* Seja A uma matriz de ordem $n \times n$, com todos os elementos iguais a 1.

a) Verifique que $A^2 = nA$.

b) Mostre que, se $n > 1$, então $(I_n - A)^{-1} = I_n - \frac{1}{n-1}A$.

Exercício 1.19 Uma matriz quadrada A diz-se *idempotente*, se $A^2 = A$.

a) Mostre que a matriz $A = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{pmatrix}$ é idempotente.

b) Seja

$$M = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & 1 & 0 & 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & 0 & 1 & 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{array}\right).$$

Calcule M^2 e M^3, usando o fracionamento indicado para M. A que será igual a matriz M^{300}?

Exercício 1.20 As seguintes matrizes são matrizes em escada? Em caso afirmativo, indique a respetiva característica.

a) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ *b)* $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ *c)* $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ *d)* $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

e) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ *f)* $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ *g)* $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 6 \end{pmatrix}$ *h)* $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Exercício 1.21 Reduza as seguintes matrizes à forma em escada.

$$a)\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & -3 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad b)\begin{pmatrix} 0 & 5 & 1 & -8 \\ 0 & 3 & -3 & 6 \\ 4 & -8 & 12 & 0 \end{pmatrix} \quad c)\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 3 & 4 \\ -6 & -3 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$d)\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad e)\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 3 \\ 2 & 4 & 0 & 4 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 5 & 5 \\ 2 & 4 & 0 & 4 & 4 \end{pmatrix} \quad f)\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & 0 \\ 2 & -2 & -1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Exercício 1.22 Discuta, em função do parâmetro α, a característica de

$$A_\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \alpha \\ 0 & \alpha & \alpha \\ \alpha & -2 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{com } \alpha \in \mathbb{R}.$$

Exercício 1.23 Determine valores de α e β de forma que

$$\operatorname{car}\begin{pmatrix} 1 & -\alpha & 0 \\ 0 & -1 & \beta \\ 1 & 0 & -\beta \end{pmatrix} < 3.$$

Exercício 1.24 Considere novamente as matrizes apresentadas no Exercício 1.20. Identifique quais as matrizes que têm a forma em escada reduzida.

Exercício 1.25 Reduza as matrizes obtidas no Exercício 1.21 à forma em escada reduzida.

Exercício 1.26* Mostre que duas matrizes da mesma ordem são equivalentes por linhas se e só se podem converter-se na mesma forma em escada reduzida.

Exercício 1.27 Verifique se as matrizes

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -2 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

são equivalentes por linhas.

Exercícios suplementares

Exercício 1.28 Mostre que, se A e B são matrizes invertíveis tais que $(AB)^T = A^T B^T$, então

$$(AB)^{-1} = A^{-1}B^{-1}.$$

Exercício 1.29 Seja A uma matriz simétrica de ordem n. Mostre que:

a) se A é invertível, A^{-1} é simétrica.

b) B^TAB é uma matriz simétrica, qualquer que seja a matriz B de ordem n.

c) se B é uma matriz simétrica, então:

i) $A+B$ é uma matriz simétrica.

ii) AB é uma matriz simétrica sse $AB = BA$

Exercício 1.30 Seja A uma matriz de ordem n. Mostre que:

a) $A + A^*$ é uma matriz hermítica.

b) $A - A^*$ é uma matriz anti-hermítica.

c) AA^* e A^*A são matrizes hermíticas.

Exercício 1.31 Indique, justificando, quais das seguintes afirmações são verdadeiras e quais são falsas.

a) A matriz quadrada $A = (a_{ij})$, definida por

$$a_{ij} = \begin{cases} i-j & ,\text{se } i \geq j \\ 0 & ,\text{se } i < j \end{cases}$$

é uma matriz triangular inferior.

b) A matriz

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

é uma matriz ortogonal.

c) Toda a matriz não nula da forma $\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$ é invertível.

d) Seja $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}$. A matriz $A = I_3 - \mathbf{u}\mathbf{u}^T$ é uma matriz simétrica.

e) A única matriz simultaneamente simétrica e antissimétrica é a matriz nula.

f) Toda a matriz simétrica é hermítica.

g) A inversa de uma matriz triangular superior invertível é uma matriz triangular inferior.

Exercício 1.32 Seja A uma matriz de ordem $m \times n$ e sejam $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ as diversas colunas da matriz identidade de ordem n (consideradas como matrizes de ordem $n \times 1$). A que é igual o produto $A\mathbf{e}_j$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$?

Exercício 1.33 Sejam $A, B \in \mathbb{R}^{m \times n}$. Prove que:

a) se $A\mathbf{x} = B\mathbf{x}$ para todo a matriz $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{n \times 1}$, então $A = B$;

b) se $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ para todo a matriz $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{n \times 1}$, então A é a matriz nula.

Sugestão: Use o resultado do exercício anterior.

Exercício 1.34 Discuta, em função do parâmetro real α, a característica da seguinte matriz

$$A_\alpha = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & \alpha^2 & \alpha^3 \\ \alpha & \alpha^2 & \alpha^3 & 1 \\ \alpha^2 & \alpha^3 & 1 & \alpha \\ \alpha^3 & 1 & \alpha & \alpha^2 \end{pmatrix}.$$

Exercício 1.35 Indique, se possível, duas matrizes 2×3, que:

a) tenham a mesma característica, mas não sejam equivalentes por linhas;

b) tenham a mesma característica e com pivôs nas mesmas colunas, mas não sejam equivalentes por linhas.

Exercício 1.36 Considere uma matriz $A = (a_{ij})_{m\times n}$ e uma matriz $B = (b_{ij})_{m\times(n+1)}$ tal que

$$a_{ij} = b_{ij},\ \ i = 1, \ldots, m,\ \ j = 1 \ldots, n.$$

a) Se A tiver a forma em escada, podemos concluir que B também tem essa forma? Justifique.

b) Se B tiver a forma em escada, podemos concluir que A também tem essa forma? Justifique.