1. No instante inicial um corpo encontra-se na origem dos eixos. A sua velocidade em função do tempo (t), expressa em unidades do S.I., é dada por:

$$\vec{v} = (2t^2 + 5t)\hat{\imath} + (2t + 7)\hat{\jmath}$$

a) [*1.5 val.*] Determine vetor aceleração do corpo em função do tempo.

b) [*1.5 val.*] Determine o vetor posição do corpo em função do tempo.

a)

Determine vetor aceleração do corpo em funcão do tempo.

$$\vec{a} = \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}$$

Para a componente $\hat{\mathbf{i}}$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(2t^2 + 5t) = 4t + 5$$

Para a componente $\hat{\mathbf{j}}$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(2t + 7) = 2$$

$$\vec{a} = (4t + 5)\hat{\mathbf{i}} + 2\hat{\mathbf{j}}$$

b)

Determine vetor posição do corpo em funcão do tempo.

$$\vec{r} = \int \vec{v}\ \mathrm{d}t$$

Para a componente $\hat{\mathbf{i}}$

$$\int (2t^2 + 5t)\ \mathrm{d}t = \frac{2}{3}t^3 + \frac{5}{2}t^2 + C_1$$

Para a componente $\hat{\mathbf{j}}$

$$\int (2t + 7)\ \mathrm{d}t = t^2 + 7t + C_2$$

Como se encontra na origem dos eixos então $t = 0$.
Para a componente $\hat{\mathbf{i}}$

$$C_1 = 0$$

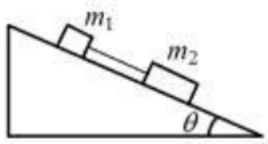
Para a componente $\hat{\mathbf{j}}$

$$C_2 = 0$$

$$\vec{r} = (\frac{2}{3}t^3 + \frac{5}{2}t^2)\hat{\mathbf{i}} + (t^2 + 7t)\hat{\mathbf{j}}$$

3. [*3.0 val.*] Dois blocos de massas m_1=m e m_2=$4m$ ligados por um fio inextensível de massa desprezável deslocam-se ao longo de um plano inclinado, que faz um ângulo θ com a direção horizontal (ver figura).

Os coeficientes de atrito cinético entre os blocos 1 e 2 e o plano inclinado são, respetivamente, μ_1=0.6 e μ_2=0.1. Sabe-se que o fio permanece sempre esticado, sob tensão. Calcule a aceleração dos blocos e a tensão do fio. Exprima os resultados em função da totalidade ou parte dos parâmetros *m*, θ e *g* (ac. da gravidade).



Forças no bloco 1:

$$N_1 = mg\cos\theta$$

$$F_{a1} = \mu_1 N_1 \Leftrightarrow \mu_1 mg\cos\theta$$

$$ma = mg\sin\theta + T - F_{a1} \Leftrightarrow ma = mg\sin\theta + T - \mu_1 mg\cos\theta$$

$$a = g\sin\theta + \frac{T}{m} - \mu_1 g\cos\theta$$

Forças no bloco 2:

$$N_2 = mg\cos\theta$$

$$F_{a2} = \mu_2 N_2 \Leftrightarrow \mu_2 m_2 g\cos\theta$$

$$ma = mg\sin\theta - T - F_{a2} \Leftrightarrow ma = mg\sin\theta - T - \mu_2 mg\cos\theta$$

$$4a = 4g\sin\theta - \frac{T}{m} - 4\mu_2 g\cos\theta$$

Multiplicando a do bloco 1 por 4:

$$4a = 4g\sin\theta + 4\frac{T}{m} - 4\mu_1 g\cos\theta$$

Igualando equações do bloco 1 com a do bloco 2:

$$\cancel{4g\sin\theta} - \frac{T}{m} - 4\mu_2 g\cos\theta = \cancel{4g\sin\theta} + 4\frac{T}{m} - 4\mu_1 g\cos\theta$$

$$-\frac{T}{m} - 4\frac{T}{m} = -4\mu_1 g\cos\theta + 4\mu_2 g\cos\theta$$

$$\frac{5T}{m} = 4\mu_1 g\cos\theta - 4\mu_2 g\cos\theta$$

$$T = \frac{4mg\cos\theta(\mu_1 - \mu_2)}{5}$$

Substituir T em a:

$$a = g\sin\theta + \frac{4\cancel{m}g\cos\theta(\mu_1 - \mu_2)}{5\cancel{m}} - \mu_1 g\cos\theta$$

$$a = g\left(\sin\theta - \mu_1\cos\theta + \frac{4\cos\theta(\mu_1 - \mu_2)}{5}\right)$$

4.[*2.0 val.*] Um balde contendo uma certa massa de água *m* é posto a rodar numa trajetória circular de raio *R* num plano vertical. Determine a expressão da velocidade angular mínima que deve ter o balde para que no ponto de altura máxima a água não caia.

Determine a expressão da velocidade angular mínima que deve ter o balde para que no ponto de altura
$m_{gua} = m$
Raio da trajetória circular R
Força Centrípeta: É a força que mantém o objeto a circular
numa trajetória circular. Atua em direção ao centro.
Força gravítica: Força que atua devido à gravidade na água.

$$F_c = m\omega^2 R$$

$$F_g = mg$$

A força centrípeta necessária para manter a água no balde pois no ponto mais alto água está em risco d

$$m\omega^2 R \geq mg$$

Resolver para ω:

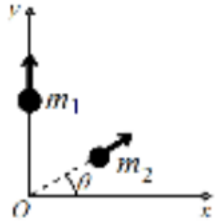
$$\omega^2 R \geq g$$

$$\Leftrightarrow \omega \geq \sqrt{\frac{g}{R}}$$

A velocidade angular necessária para manter a água no balde pois no ponto mais alto água:

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{R}}$$

5. [*1.5 val.*] Um sistema é composto por três partículas com massas m_1=4 kg, m_2=2 kg e m_3=5 kg. A primeira partícula move-se no eixo Oy com velocidade 6 m/s, a segunda move-se com velocidade 8 m/s em módulo, numa direção que faz um ângulo de $\theta = 30º$ com o eixo Ox. Determine o vetor velocidade da terceira partícula, sabendo que o centro de massa do sistema está em repouso.



Determine o vetor velocidade da terceira partícula, sabendo que o centro de massa do sistema está em repouso.

$$m_1 = 4\,\text{kg} \qquad m_2 = 2\,\text{kg} \qquad m_3 = 5\,\text{kg}$$
$$\vec{v_1} = 6\,\text{m}\,\text{s}^{-1}(Oy) \qquad \vec{v_2} = 8\,\text{m}\,\text{s}^{-1}(\theta = 30°)(Ox)$$

O centro de massa é dado por:

$$\vec{v_{cm}} = \frac{m_1\vec{v_1} + m_3\vec{v_3} + m_3\vec{v_3}}{m_1 + m_2 + m_3}$$

Como o centro de massa está em repouso então:

$$\vec{v_{cm}} = 0$$

Conservação do momento linear no eixo Ox:
Conservação do momento linear total no eixo Ox deve ser 0:

$$m_1 v_{1x} + m_2 v_{2x} + m_3 v_{3x} = 0$$

Resolver para v_{3x}:

$$v_{3x} = -\frac{m_2 v_{2x}}{m_3}$$

$$v_{3x} = -\frac{2 \cdot 8\cos(30°)}{5}$$

$$v_{3x} = -\frac{8\sqrt{3}}{5}$$

Conservação do momento linear no eixo Oy:

Conservação do momento linear total no eixo Oy deve ser 0:

$$m_1v_{1x} + m_2v_{2x} + m_3v_{3x} = 0$$

Resolver para v_{3y}:

$$v_{3y} = -\frac{m_1v_{1y} + m_2v_{2y}}{m_3}$$

$$v_{3y} = -\frac{4 \cdot 6 + 2 \cdot 8 \sin(30°)}{5}$$

$$v_{3y} = -\frac{32}{5}$$

$$v_{3y} = -\frac{8\sqrt{3}}{5}\hat{\mathbf{i}} - \frac{32}{5}\hat{\mathbf{j}}$$

6. [*3.0 val.*] Uma nave espacial de massa m_0 desloca-se na ausência de forças externas com uma velocidade constante v_0. Para alterar a direção do movimento liga-se um motor de propulsão instalado na parte lateral da nave, que lança gases com uma velocidade constante $\vec{u}$ em relação à nave e perpendicularmente à direção de deslocamento da nave. Depois da expulsão dos gases a massa da nave passa a valer m. Admita que o intervalo de tempo em que o motor de propulsão está em funcionamento é suficientemente pequeno para poder considerar que $\vec{u}$ é sempre perpendicular à direção de deslocamento inicial da nave. Determine o ângulo que a nova direção de movimento da nave faz com a direção inicial, expresso em função de v_0, u, m e m_0.

Nave de massa m_0 move-se com velocidade constante v_0
Um motor lateral lança gases com velocidade constante $\vec{u}$ em relação à nave e perpendicularmente à dir
Após a libertação dos gases a nave ficou massa m e então perdeu $m_0 - m$.
Como não há forças externas, a quantidade de movimento total do sistema (nave + gases) conserva-se.
Inicialmente:
Nave tem velocidade v_0 na horizontal(em x), não tem velocidade na vertical y e não houve libertação d
Depois:
Nave tem massa m e $\vec{v} = (v_x, v_y)$
Gases têm massa $m_0 - m$, velocidade v_{gases_y} com módulo u
em relação à nave.
Conservação do momento linear
Em x:
Antes:
Total: m_0v_0
Depois:
Nave: mv_x

$$m_0v_0 = mv_x \implies v_x = \frac{m_0v_0}{m}$$

Em y:

Antes:
Total: 0
Depois:
Nave: mv_y
Gases: têm velocidade em relação à nave de $-u$.

$$v_{gases_y} = v_y - u$$

$$v_{gases_y} = \vec{v}_{nave} + \vec{v}_{gases/nave} = v_x\hat{\mathbf{i}} + v_y\hat{\mathbf{j}} - \vec{u}\hat{\mathbf{j}} = v_x\hat{\mathbf{i}} + (v_y - u)\hat{\mathbf{j}}$$

Quantidade de movimento vertical:

$$0 = mv_y + (m_0 - m) \cdot v_{gases_y}$$

$$0 = mv_y + (m_0 - m)(v_y - u)$$

$$0 = mv_y + (m_0 - m)v_y - (m_0 - m)u$$

$$v_y(m + m_0 - m) = (m_0 - m)u$$

$$v_y = \frac{(m_0 - m)u}{m_0}$$

$$\tan\theta = \frac{v_y}{v_x} = \frac{\frac{(m_0-m)u}{m_0}}{\frac{m_0 v_0}{m}}$$

$$\tan\theta = \frac{m(m_0 - m)u}{m_0^2 v_0}$$

$$\theta = \arctan\frac{m(m_0 - m)u}{m_0^2 v_0}$$

7. [*2.0 val.*] A força $\vec{F} = (2xy^2 + 3xz^2)\hat{\mathrm{i}} + (2x^2y + 2y)\hat{\mathrm{j}} + (3x^2z - 2z)\hat{\mathrm{k}}$ (expressa em newton quando x, y e z são expressos em metro) é conservativa? Justifique.

5. A força $\vec{F} = (2xy + z^3)\hat{\mathrm{i}} + x^2\hat{\mathrm{j}} + 3xz^2\hat{\mathrm{k}}$ (expressa em newton quando x, y e z são expressos em metro) é conservativa?

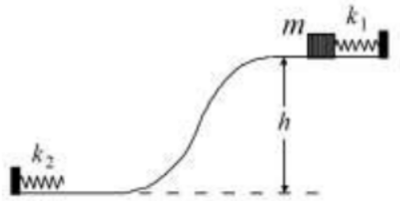
$$\vec{\nabla} \times \vec{F} = 0$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{j}} & \hat{\mathbf{k}} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 2xy^2 + 3xz^2 & 2x^2y + 2y & 3x^2z - 2z \end{vmatrix}$$

$$= (\frac{\partial 3x^2z - 2z}{\partial y} - \frac{\partial 2x^2y + 2y}{\partial z})\hat{\mathbf{i}} + (\frac{\partial 2xy^2 + 3xz^2}{\partial z} - \frac{\partial 3x^2z - 2z}{\partial x})\hat{\mathbf{j}} + (\frac{\partial 2x^2y + 2y}{\partial x} - \frac{\partial 2xy^2 + 3xz^2}{\partial y}) = 0$$

8. [*2.0 val*] A mola 1 de constante elástica k_1 é comprimida da distância x_1 com o corpo de massa m encostado. Depois, o corpo é libertado, percorrendo o percurso mostrado na figura, até embater numa segunda mola de constante elástica k_2.

O desnível entre as posições das duas molas é h. Considerando o atrito desprezável, determine a deformação máxima (x_2) que o corpo provoca na segunda mola, expressa em função de m, h, k_1, k_2, x_1 e g (aceleração da gravidade).



Energia inicial na mola 1.

$$E_{m1} = \frac{1}{2}k_1x_1^2$$

Assim que o corpo de massa m desce, a sua altura diminui e adquire energia potencial.

$$Epg = mgh$$

Quando o corpo atinge a mola 2 o total de energia é a soma da potencial com a da mola.

$$E_{total} = \frac{1}{2}k_1x_1^2 + mgh$$

Energia armazenada na mola 2.

$$E_{m2} = \frac{1}{2}k_2x_2^2$$

Então pela conservação da energia mecânica, quando o corpo atinge a mola 2 a energia total é igual à e

$$\frac{1}{2}k_2x_2^2 = \frac{1}{2}k_1x_1^2 + mgh$$

$$x_2 = \sqrt{\frac{k_1x_1^2 + 2mgh}{k_2}}$$