Primitivas Imediatas	Primitivas Quase Imediatas
$\int x^{\alpha}dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}+C$	$\int f(x)^{\alpha}f'(x)dx = \frac{f(x)^{\alpha+1}}{\alpha+1}+C$
$\int e^x dx = e^x + C$	$\int e^{f(x)}f'(x)dx = e^{f(x)} + C$
$\int a^x \ln a dx = a^x + C$	$\int a^{f(x)}f'(x)\ln a dx = a^{f(x)} + C$
$\int \frac{1}{x}dx = \ln\|x\| + C$	$\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \ln\|f(x)\| + C$
$\int \frac{1}{x\ln a}dx = \log_a\|x\| + C$	$\int \frac{f'(x)}{f(x)\ln a}dx = \log_a\|f(x)\| + C$
$\int \sin[f(x)]f'(x)dx = -\cos[f(x)]+C$	$\int \cos[f(x)]f'(x)dx = \sin[f(x)]+C$
$\int \frac{1}{cos^2 x}dx = \tan x + C$	$\int \frac{f'(x)}{cos^2[f(x)]}dx = \tan[f(x)] + C$

Funções Elementares	Funções Compostas
$(x^{\alpha})' = \alpha x^{\alpha-1}$	$[f(x)^{\alpha}] = \alpha f(x)^{\alpha-1}f'(x)$
$(e^x)' = e^x$	$[e^{f(x)}]' = e^x f'(x)$
$(a^x)' = a^x \ln a$	$[a^{f(x)}]' = a^{f(x)}f'(x)\ln a$
$(\ln x)' = \frac{1}{x}$	$[\ln f(x)]' = \frac{f'(x)}{f(x)}$
$(\log_a x)' = \frac{1}{x\ln a}$	$[\log_a f(x)]' = \frac{f'(x)}{f(x)\ln a}$
$(\tan x)' = \frac{1}{cos^2 x}$	$[\tan f(x)]'\frac{f'(x)}{cos^2[f(x)]}$
$(\tanh x)' = \frac{1}{cosh^2 x}$	$[\tanh f(x)]'\frac{f'(x)}{cos^2 h[f(x)]}$

Primitivação por Partes

$$\int f'g = dx = \int f(x)dx, landscape + \int g(x)dx$$

A função $\cos(x)$ é estritamente decrescente em $[0,\pi]$ e estritamente crescente em $[\pi, 2\pi]$

$$f(x) = \cos(x) : \mathbb{R} \to [-1,1] \qquad g(x) = f(x)_{|[0,\pi]} \to [-1,1]$$

A função $\arccos(x)$ é contínua e estritamente decrescente. É derivável em $]-1,1[$,landscape

$$f(x) = \arccos(x) : [-1,1] \to [0,\pi]$$

$$\arccos'(x) : -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}(-1<x<1)$$

A função $\sin(x)$ é estritamente crescente em $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ e estritamente decrescente em $[\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}]$

$$f(x) = \sin(x) : \mathbb{R} \to [-1,1] \qquad g(x) = f(x)_{|[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]} \to [-1,1]$$

A função $\arcsin(x)$ é contínua e estritamente crescente. É derivável em $]-1,1[$

$$f(x) = \arcsin(x) : [-1,1] \to [-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$$

$$\arcsin'(x) : \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}(-1<x<1)$$

A função $\tan(x)$ é ímpar, estritamente crescente em $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$

$$f(x) = \tan(x) : \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2}+k\pi \| k\in\mathbb{Z}\} \qquad g(x) = f(x)_{|]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[} \to \mathbb{R}$$

A função $\arctan(x)$ é derivável e estritamente crescente

$$f(x) = \arctan(x) : \mathbb{R} \to]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$$

$$\arctan'(x) : \frac{1}{1+x^2}(x\in\mathbb{R})$$

$$f(x) = \operatorname{arccot}(x) :]0,\pi[\to \mathbb{R}$$

A função $\cot(x)$ é ímpar, estritamente decrescente em $]0,\pi[$

$$f(x) = \cot(x) : \mathbb{R} \setminus \{k\pi \| k\in\mathbb{Z}\} \qquad g(x) = f(x)_{|]0,\pi[} \to \mathbb{R}$$

$$f(x) = \operatorname{arccot}(x) :]0,\pi[\to \mathbb{R}$$

Sejam $f : D \to E$ uma função e $x_0 \in D$ tal que a n-ésima derivada de f existe em x_0. O polinómio

$$P(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

A fórmula de Taylor-Young de ordem 3 para a função $x \mapsto e^x$ à volta de 0 é

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + x^3\varepsilon(x), \quad \lim_{x\to 0}\varepsilon(x) = 0.$$

$$f(x) = P(x) + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}.$$

Aplicação ao cálculo de valores aproximados

Pretende-se mostrar que $0,095$ é um valor arredondado de $\ln 1,1$, isto é que

$$0,0945 \le \ln 1,1 < 0,0955.$$

Consideremos a função f definida por $f(x) = \ln(1+x)$. Temos

$$f'(x) = \frac{1}{1+x}, \quad f''(x) = -\frac{1}{(1+x)^2}, \quad f'''(x) = \frac{2}{(1+x)^3}$$

e

$$f(0) = 0, \quad f'(0) = 1, \quad f''(0) = -1.$$

A fórmula de Taylor-Lagrange de ordem 2 para f à volta de 0 é então

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{2x^3}{3!(1+c)^3}, \quad 0<c<x \text{ ou } x<c<0.$$

Tomando $x = 0,1$ vem

$$\begin{aligned}\ln 1,1 &= 0,1 - 0,005 + \frac{2\times 0,001}{3!(1+c)^3}\\ &= 0,095 + \frac{0,001}{3(1+c)^3}, \quad 0<c<0,1.\end{aligned}$$

Aplicação ao cálculo de valores aproximados

Basta mostrar que $-0,0005 < \ln 1,1 - 0.095 < 0,0005$, ou seja

$$|\ln 1,1 - 0,095| < 0,0005.$$

Temos

$$\begin{aligned}|\ln 1,1 - 0,095| &= \left|\frac{0,001}{3(1+c)^3}\right|\\ &= \frac{0,001}{3(1+c)^3} \quad (\text{pois } c>0)\\ &< \frac{0,001}{3(1+0)^3} \quad (\text{pois } c>0)\\ &= \frac{0,001}{3}\\ &< \frac{0,001}{2}\\ &= 0,0005.\end{aligned}$$

Como calculado no exercício 38.a)

$\cos x = \underbrace{1 - \frac{x^2}{2}}_{P(x)} + \underbrace{\frac{\operatorname{sen} c}{6}x^3}_{R(x)}$, para algum c entre 0 e x.

Portanto: $\cos(0.2) = \underbrace{P(0.2)}_{\text{estimativa}} + \underbrace{R(0.2)}_{\text{Resto}}$

$P(0.2) = 1 - \frac{0.2^2}{2} = 1 - \frac{1}{2}\frac{4}{100} = 1 - \frac{2}{100} = 1 - 0.02 = 0.98$

$R(0.2) = \frac{\operatorname{sen} c}{6}0.2^3 = \frac{\operatorname{sen} c}{6}\frac{8}{1000} = \operatorname{sen} c \, \frac{4}{3} 10^{-3}$

$|R(0.2)| = |\operatorname{sen} c| \frac{4}{3}\times 10^{-3} < 5\times 10^{-3} \Rightarrow -5\times 10^{-3} < R(0.2) <$

Logo: $\cos(0.2) = 0.98$ calculado com erro inferior a 5×10^{-3}
ou seja com duas casas decimais corr

Ratio test if there's factorials or powers and it's not a rational function

Root I do less often only if everything is raised to k or n

Seja f contínua em $[a,+\infty[$. Definimos o *integral impróprio de f em* $[a,+\infty[$ por

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{t\to+\infty}\int_a^t f(x)\,dx$$

Seja f contínua em $]-\infty,a]$. Definimos o *integral impróprio de f em* $]-\infty,a]$ por

$$\int_{-\infty}^a f(x)\,dx = \lim_{t\to-\infty}\int_t^a f(x)\,dx$$

Seja f contínua em $\mathbb{R}$. Definimos o *integral impróprio de f em $\mathbb{R}$* por

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{+\infty} f(x)\,dx$$

desde que ambos os integrais do 2º membro sejam convergentes.

Seja $f :]a,b] \to E$ contínua e não limitada. Definimos o *integral impróprio de f* por

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{t\to a^+}\int_t^b f(x)\,dx$$

Seja $f : [a,b[\to E$ contínua e não limitada. Definimos o *integral impróprio de f* por

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{t\to b^-}\int_a^t f(x)\,dx$$

(i) $\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^{\alpha}}\,dx$ *é convergente para $\alpha > 1$ e divergente para $\alpha \le 1$.*

(ii) $\int_0^{+\infty} e^{-\alpha x}\,dx$ *é convergente para $\alpha > 0$ e divergente para $\alpha \le 0$.*

Assim, se $|q| < 1$,

$$\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \lim_{n\to\infty}\frac{1-q^{n+1}}{1-q} = \frac{1}{1-q}.$$

Se $|q| \ge 1$, a série geométrica é divergente.

$$\sum_{k=r}^{\infty} a_k = \sum_{k=r}^{l-1} a_k + \sum_{k=l}^{\infty} a_k.$$

A série $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^{\alpha}}$, onde α é um número real dado, denomina-se *série harmónica* de ordem α.

Para $\alpha > 1$, a série harmónica é convergente. Para $\alpha \le 1$,

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^{\alpha}} = +\infty.$$

Pela regra de Leibniz, a série $\sum_{k\ge 1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k}$ é convergente, pois a sucessão $\left(\frac{1}{k}\right)_{k\ge 1}$ tende para 0 de maneira monótona.

(a) Consideremos a função exponencial $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = e^x$. A série de Taylor de f à volta de $x_0 = 0$ é

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!}.$$

Para $x \ge 0$, sejam $\alpha = 1$ e $C = e^x$. Tem-se $C \ge 1$ e então $C^n \ge C$. Para $0 \le t \le x$,

$$|f^{(n)}(t)| = e^t \le e^x = C \le C^n = \alpha C^n.$$

Para $x < 0$, sejam $\alpha = 1$ e $C = 1$. Então, para $x \le t \le 0$,

$$|f^{(n)}(t)| = e^t \le 1 = \alpha C^n.$$

Segue-se que, para todo o $x \in \mathbb{R}$,

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!}.$$

Exemplos

(b) Consideremos a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \cos x$. A série de Taylor de f à volta de 0 é

$$\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{x^{2k}}{(2k)!}.$$

Tomando $\alpha = C = 1$ tem-se $|f^{(n)}(t)| \le \alpha C^n$ para todo o t entre x e 0. Logo

$$\cos x = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{x^{2k}}{(2k)!}$$

para todo o $x \in \mathbb{R}$.

(c) Do mesmo modo, para todo o $x \in \mathbb{R}$,

$$\operatorname{sen} x = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}.$$

3 possibilities when $\sum c_n(x-a)^n$ converges:

- $|x-a| < R$ (radius of convergence) I (interval of convergence)
- $x = a \leftarrow R = 0$, $I = \{a\}$
- x is any real number $\leftarrow R = \infty$, $I = (-\infty,\infty)$

57. $\ldots + 6\ldots - 15\ldots - 100y = 0$

$\ldots \cos x + c_3 \sin x)$

61. $y'' - 3y' - 18y = 0$ 63. $y''' - 7y'' = 0$

$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^k}x^k$

$\left(\frac{x}{k}\right)^k$

We require $\left|\frac{x}{k}\right| < 1$

$\Rightarrow |x| < k$

$-k < x < k$

But $k \to \infty$ so always true

$\Rightarrow -\infty < x < \infty$

$R: \infty$

Check w/ root test!

$\lim_{k\to\infty}\sqrt[k]{\left|\frac{x}{k}\right|^k}$

$= \lim_{k\to\infty}\left|\frac{x}{k}\right| = 0 < 1 \quad \forall x$

$\sum_{k=0}^{\infty} k^k x^k$

$(xk)^k$

$r = xk$

Geometric: $\sum_{k=0}^{\infty}$

We need $|r| = |xk| < 1$

But $k = 0, 1, 2, \ldots \to \infty$

So only true if $x = 0$

ROC $= 0$

IOC: $\{0\}$

ROC: = 0

IOC: $\{0\}$

Root Test:

$$\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|}$$

$$= \lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{|k^k x^k|} = \lim_{k\to\infty} |xk| = |x$$

never < 1

$\Rightarrow$ ROC $= 0$ etc.

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^k}{\sqrt{k}}$$

Método I

$x = 1$: $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k}}$ diverge — sé

$\Rightarrow$ o raio de convergência é

$x = -1$: $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}}$ converge — c

$\Rightarrow$ o raio de convergência é p

Portanto $r = 1$

Podemos concluir que a série converge s

Aplicando o critério da razão:

Seja $p_k = \dfrac{x^k}{\sqrt{k}}$ e seja $l = \lim\limits_{k\to +}$

$$l = \lim_{k\to+\infty} \left| \frac{\frac{x^{k+1}}{\sqrt{k+1}}}{\frac{x^k}{\sqrt{k}}} \right| = \lim_{k\to+\infty}$$

$$= \lim_{k\to+\infty} \sqrt{\frac{k}{k+1}}\, |x| = |x|$$

Segundo o critério da razão:

- a série converge se $|x| < 1$
- a série diverge se $|x| > 1$
- nada se pode concluir para $x =$

Para $x = \pm 1$ fazemos o estudo separo

c) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} k^k x^k$

Critério da raiz:

$$l = \lim_{k\to+\infty} \sqrt[k]{|k^k x^k|} = \lim_{k\to+\infty} k|x|$$

Logo a série converge apenas para $x =$

d) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k^k}$

Critério da raiz:

$$l = \lim_{k\to+\infty} \sqrt[k]{\left|\frac{x^k}{k^k}\right|} = \lim_{k\to+\infty} \frac{|x}{k}$$

Logo a série converge $\forall x \in \mathbb{R}$ e R