16/11/2018 1º Teste Algebra Linear e Geometria Analítica EE

1. *(2 valores)* Sejam $A = (1, 2, 3)$ e $B = (3, 2, 1)$. Calcule as componentes de $3A - 5B$ e o produto escalar $A \cdot B$.

$$3(1, 2, 3) - 5(3, 2, 1) = (-12, -4, 4)$$

2. *(2 valores)* Sejam $A = (2, 1)$ e $B = (1, 3)$. Mostre que todo vetor $V = (\alpha, \beta)$ pode ser expresso na forma $V = xA + yB$, com x e y coeficientes reais. Determine x e y em função de α e β.

$$(\alpha, \beta) = x(2, 1) + y(1, 3)$$

$$\alpha = 2x + y \Leftrightarrow y = \alpha - 2x \Leftrightarrow y = \alpha - 2(\frac{3\alpha - \beta}{5}) \Leftrightarrow y = \frac{2\beta - \alpha}{5}$$

Substituindo:

$$\beta = x + 3y \Leftrightarrow x + 3(\alpha - 2x) \Leftrightarrow x = \frac{3\alpha - \beta}{5}$$

3. *(2 valores)* Sejam $A = (2, 1, -1)$ e $B = (1, -1, 2)$. Determine, se existir, um vetor não nulo C tal que $A \cdot C = B \cdot C = 0$.

Método 1:

$$A \cdot C = 0 \qquad B \cdot C = 0$$

$$(2, 1, -1) \cdot (x, y, z) = 2x + y - z = 0 \Leftrightarrow y = z - 2x \Leftrightarrow y = -5x$$

$$(1, -1, 2) \cdot (x, y, z) = x - y + 2z = 0$$

Substituindo:

$$x - z + 2x + 2z = 0 \Leftrightarrow z = -3x$$

$$C = (x, -5x, -3x)$$

Se x = 1

$$C = (1, -5, -3)$$

Método 2:

$$C = A \times B$$

$$A \times B = \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{\imath}} & \hat{\mathbf{\jmath}} & \hat{\mathbf{k}} \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = \hat{\mathbf{\imath}} - 5\hat{\mathbf{\jmath}} - 3\hat{\mathbf{k}}$$

4. *(2 valores)* Sejam $V = (1, 2, 2)$ e $R = (3, -4, 5)$. Determine um escalar $t \in \mathbb{R}$ tal que $R = tV + W$ com W ortogonal a V.

$$R \cdot V - tV \cdot V = 0 \Leftrightarrow R \cdot V = tV \cdot V \Leftrightarrow t = \frac{(R \cdot V)}{||v||^2} = \frac{(3, -4, 5) \cdot (1, 2, 2)}{(1, 2, 2) \cdot (1, 2, 2)} = \frac{5}{9}$$

4/1/2019 2º Teste Algebra Linear e Geometria Analítica EE

1. *(2 valores)* Seja $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ a transformação linear definida por $L(x, y, z) = (x - z, 0, x - y)$. Determine o espaço nulo, a imagem, a nulidade e a ordem.

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \leftrightarrow R_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \leftarrow -R_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Calcular Núcleo e Imagem da Matriz:

$$x - z = 0 \qquad -y + z = 0$$

$$x = y = z$$

$$Nuc(L) = \{(x, x, x) \,|x \in \mathbb{R}\} = span(1, 1, 1)$$

$$u = x - z \qquad v = -y + z$$

Nulidade é 1.

$$Im(L) = \{(u, 0, v)\} = span = \{(1, 0, 0), (0, 0, 1)\}$$

A imagem é o plano $y = 0$

Ordem é 2.

2. *(2 valores)* Seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ a transformação linear definida por $T(x, y, z) = (x+y+z, y, z)$. Determine se T é invertível. Caso afirmativo, determine a transformação inversa.

É invertível, e a inversa é $T^{-1}(x, y, z) = (x - y - z, y, z)$.

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$det(T) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

Método 1:

$T^{-1} = \frac{1}{det(T)}\text{adj(T)}$

Matriz dos cofatores de T:

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$C^T = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Adj(T) $= C^T$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Método 2:

$AA^{-1} = A^{-1}A = I$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_1 \leftarrow -R_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_1 \leftarrow -R_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$