1. *(1 valor)* Determine uma equação diferencial linear de segunda ordem que admita como soluções

$$x_+(t) = e^{2t} \qquad \text{e} \qquad x_-(t) = e^{-3t}$$

$$x(t) = c_1 e^{2t} + c_2 e^{-3t}$$

$$(x-2)(x+3) = 0 \Leftrightarrow x^2 + x - 6 = 0$$

$$x'' + x' - 6x = 0$$

2. *(1 valor)* Determine a solução da equação diferencial linear

$$\dot{x} + x = 2e^{-t} \ .$$

com condição inicial $x(0) = 3$.

Calcular solução homogénea:

$$x' + x = 0 \Leftrightarrow x' = -x$$

$$c_1 e^{-t}$$

Conjetura:

$$z = ate^{-t}$$

$$z' = ae^{-t} - ate^{-t}$$

$$ae^{-t} - ate^{-t} + ate^{-t} = 2e^{-t}$$

$$a = 2$$

$$x(t) = c_1 e^{-t} + 2te^{-t}$$

$$x(0) = c_1 = 3$$

Com condições iniciais então $x(t) = (3 + 2t)e^{-t}$

3. *(1 valor)* Determine a solução geral (ou seja, todas as soluções) da equação diferencial linear homogénea

$$\ddot{x} + 6\,\dot{x} + 13\,x = 0\,.$$

Polinómio caraterístico:

$$x^2 + 6x + 13 = 0 \Leftrightarrow x = -3 - 2i \vee x = -3 + 2i$$

$$x(t) = e^{-3t} \left( c_1 \cos(2t) + c_2 \sin(2t) \right)$$

4. *(1 valor)* Determine a solução da equação diferencial linear homogénea do exercício 3 com condições iniciais $x(0) = 0$ e $\dot{x}(0) = 1$.

$$x(0) = c_1 = 0$$

$$x(t) = e^{-3t} c_2 \sin(2t)$$

$$x'(t) = -3e^{-3t} c_2 \sin(2t) + e^{-3t} c_2 \cos(2t)$$

$$x'(0) = 2c_2 = 1 \Leftrightarrow c_2 = \frac{1}{2}$$

$$x(t) = e^{-3t} \frac{1}{2} \sin(2t)$$

5. *(1 valor)* Determine uma solução da equação diferencial linear não homogénea

$$\ddot{x} + 4\,x = 3\,\cos(2t)\,.$$

Calcular solução homogénea:

$$x'' + 4x = 0 \Leftrightarrow x'' = -4x$$

$$c_1 \cos(2t) + c_2 \sin(2t)$$

Conjetura:

$$z = at \sin(2t)$$

$$z' = a \sin(2t) + 2at \cos(2t)$$

$$z'' = 2a \cos(2t) + 2a \cos(2t) - 4at \sin(2t)$$

$$4a \cos(2t) - 4at \sin(2t) + 4at \sin(2t) = 3 \cos(2t) \Leftrightarrow a = \frac{3}{4}$$

$$x(t) = c_1 \cos(2t) + c_2 \sin(2t) + \frac{3}{4} t \sin(2t)$$

6. *(1 valor)* Determine uma base ortonormada do plano $P = \{x + y - z = 0\} \subset \mathbb{R}^3$.

Se $x = 1$ e $y = 1$

$$1 - 1 - z = 0 \Leftrightarrow z = 0$$

$$u_1 = v_1 = (1, 1, 0)$$

Se $x = 0$ e $y = 1$

$$0 - 1 - z = 0 \Leftrightarrow z = -1$$

$$v_2 = (0, 1, -1)$$

$$u_1 \cdot v_2 = (1, 1, 0) \cdot (0, 1, -1) = 1$$

$$||u_1||^2 = (1, 1, 0) \cdot (1, 1, 0) = 2$$

$$proj_{u_1} u_2 = \frac{u_1 \cdot v_2}{||u_1||^2} u_1 = \frac{1}{2}(1, 1, 0) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right)$$

$$u_2 = v_2 - proj_{u_1} u_2 = \frac{u_1 \cdot v_2}{||u_1||^2} u_1 = (0, 1, -1) - \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right) = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -1\right)$$

$$||u_2|| = \sqrt{\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{4}{4}} = \frac{\sqrt{6}}{2}$$

$$||u_1|| = \sqrt{2}$$

$$\frac{u_1}{||u_1||} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$$

$$\frac{u_2}{||u_2||} = \left(-\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{2}{\sqrt{6}}\right)$$

$$\{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right), \left(-\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{2}{\sqrt{6}}\right)\}$$

7. *(1 valor)* Calcule a projeção ortogonal do vetor $\mathbf{v} = (3, 2, 1)$ sobre o plano $P$ definido no exercício 6.

Encontrar dois vetores perpendiculares:

$$\vec{n} = (1, 1, -1)$$

$$\vec{v} = (3, 2, 1)$$

$$v_p = v - proj_n v = \frac{n \cdot v}{||n||^2} n = (3, 2, 1) - \frac{4}{3}(1, 11, -1) = (\frac{5}{3}, \frac{2}{3}, \frac{7}{3})$$

8. *(1 valor)* Calcule a fatorização QR (ou seja, determine uma matriz ortogonal $Q$ e uma matriz triangular superior $R$ tais que $A = QR$) da matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$$

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$u_1 = v_1 = (1, 1)$$

$$u_2 = v_2 - \mathrm{proj}_{u_1} u_2 = u_2 - \frac{\langle u_2, u_1 \rangle}{||u_1||^2} u_1$$

$$\frac{\langle u_2, u_1 \rangle}{||u_1||^2} u_1 = \frac{(1, 1) \cdot (-1, 5)}{2} (1, 1) = (2, 2)$$

$$= (-1, 5) - (2, 2) = (-3, 3)$$

$$||u_1|| = \sqrt{2}, ||u_2|| = 3\sqrt{2}$$

$$q_1 = \frac{u_1}{||u_1||} = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$$

$$q_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

$$q_2 = \frac{u_2}{||u_2||} = (-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$$

$$q_2 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

$$Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

$$R = \begin{pmatrix} \langle u_1, q_1 \rangle & \langle u_2, q_1 \rangle \\ 0 & \langle u_2, q_2 \rangle \end{pmatrix}$$

$$R = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 2\sqrt{2} \\ 0 & 3\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

Método 2:

$$Q^T = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

$$R = Q^T A = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 2\sqrt{2} \\ 0 & 3\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

9. *(1 valor)* Considere, no espaço euclidiano complexo $\mathbb{C}^3$ munido do produto escalar usual, o operador $S(x, y, z) = (x + iy - z, 2iy + 3z, iz)$. Determine o operador $S^*$ e a composição $S^*S$.

$$S = \begin{pmatrix} 1 & i & -1 \\ 0 & 2i & 3 \\ 0 & 0 & i \end{pmatrix}$$

$$\bar{S} = \begin{pmatrix} 1 & -i & -1 \\ 0 & -2i & 3 \\ 0 & 0 & -i \end{pmatrix}$$

$$S^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -i & -2i & 0 \\ -1 & 3 & -i \end{pmatrix}$$

$$S^*S = \begin{pmatrix} 1 & i & -1 \\ -i & 5 & -5i \\ -1 & 5i & 11 \end{pmatrix}$$

10. *(1 valor)* Considere, no espaço euclidiano complexo $\mathbb{C}^2$ munido do produto escalar usual, o operador $T : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ definido por $T(x, y) = (2x - iy, ix + y)$. Determine uns operadores auto-adjuntos $X$ e $Y$ tais que $T = X + iY$.

$$T = \begin{pmatrix} 2 & -i \\ i & 1 \end{pmatrix}$$

$$\bar{T} = \begin{pmatrix} 2 & i \\ -i & 1 \end{pmatrix}$$

$$T^* = \begin{pmatrix} 2 & -i \\ i & 1 \end{pmatrix}$$

$$X = \frac{T+T^*}{2}$$
$$Y = \frac{T-T^*}{2i}$$

$$X = \frac{1}{2}(T+T^*) = \frac{1}{2}(\begin{pmatrix} 2 & -i \\ i & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & -i \\ i & 1 \end{pmatrix}) = \frac{1}{2}(\begin{pmatrix} 4 & -2i \\ 2i & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -i \\ i & 1 \end{pmatrix}$$
$$Y = \frac{1}{2i}(T-T^*) = \frac{1}{2i}(\begin{pmatrix} 2 & -i \\ i & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & -i \\ i & 1 \end{pmatrix}) = \frac{1}{2i}(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

11. *(1 valor)* Determine a matriz que define, relativamente à base canónica, um operador ortogonal $R : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que $R(1,0) = (\sqrt{3}/2, -1/2)$.

Base canónica $\mathbb{R}^2$:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$
$$R = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$$

12. *(1 valor)* Calcule valores e vetores próprios da matriz hermítica

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 2i \\ -2i & 0 \end{pmatrix}$$

Valores Próprios:

$$\lambda = 2 \qquad \lambda = -2$$

Vetores Próprios:

$$\begin{pmatrix} i & -i \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

13. *(1 valor)* Considere a matriz $C$ definida no exercício 12. Determine uma matriz unitária $U$ e uma matriz diagonal $\Lambda$ tais que $C = U\Lambda U^{-1}$.

$$\Lambda = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$
$$U = \begin{pmatrix} \frac{i}{\sqrt{2}} & -\frac{i}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$
$$U^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{i}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{i}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

| Valores Próprios | Ponto Fixo |
|---|---|
| $\mathbb{R}$ $--$ | Nodo estável |
| $\mathbb{R}$ $++$ | Nodo instável |
| $\mathbb{R}$ $+-$ | Sela |
| $\mathbb{C}$ Re$\{-\}$ | Espiral estável |
| $\mathbb{C}$ Re$\{+\}$ | Espiral instável |