Primitivas Imediatas	**Primitivas Quase Imediatas**
$\int x^{\alpha}dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$	$\int f(x)^{\alpha} f'(x)dx = \frac{f(x)^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$
$\int e^{x}dx = e^{x} + C$	$\int e^{f(x)} f'(x)dx = e^{f(x)} + C$
$\int a^{x}\ln a dx = a^{x} + C$	$\int a^{f(x)} f'(x)\ln a dx = a^{f(x)} + C$
$\int \frac{1}{x}dx = \ln\lvert x\rvert + C$	$\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \ln\lvert f(x)\rvert + C$
$\int \frac{1}{x\ln a}dx = \log_a\lvert x\rvert + C$	$\int \frac{f'(x)}{f(x)\ln a}dx = \log_a\lvert f(x)\rvert + C$
$\int \cos x dx = \sin x + C$	$\int \cos[f(x)]f'(x)dx = \sin[f(x)] + C$
$\int \sin x dx = -\cos x + C$	$\int \sin[f(x)]f'(x)dx = -\cos[f(x)] + C$
$\int \frac{1}{cos^2 x}dx = \tan x + C$	$\int \frac{f'(x)}{cos^2[f(x)]}dx = \tan[f(x)] + C$

Funções Elementares	**Funções Compostas**
$(x^{\alpha})' = \alpha x^{\alpha-1}$	$[f(x)^{\alpha}] = \alpha f(x)^{\alpha-1} f'(x)$
$(e^{x})' = e^{x}$	$[e^{f(x)}]' = e^{x} f'(x)$
$(a^{x})' = a^{x}\ln a$	$[a^{f(x)}]' = a^{f(x)} f'(x)\ln a$
$(\ln x)' = \frac{1}{x}$	$[\ln f(x)]' = \frac{f'(x)}{f(x)}$
$(\log_a x)' = \frac{1}{x\ln a}$	$[\log_a f(x)]' = \frac{f'(x)}{f(x)\ln a}$
$(\tan x)' = \frac{1}{cos^2 x}$	$[\tan f(x)]' \frac{f'(x)}{cos^2[f(x)]}$
$(\tanh x)' = \frac{1}{cosh^2 x}$	$[\tanh f(x)]' \frac{f'(x)}{cos^2 h[f(x)]}$

Linearidade da Derivada	**Linearidade da Primitiva**
$f(x) \pm g(x)]' = f'(x) \pm g'(x)$	$\int [f(x) + g(x)]dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$
$[cf(x)]' = cf'(x)$	$\int cf(x)dx = c\int f(x)dx$

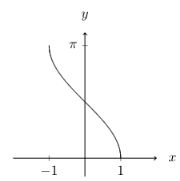
Derivada do Produto e do Quociente **Primitivação por Partes**

$(fg)' = f'g + fg'$ $\quad (\frac{f}{g})' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$ $\quad \int [f(x)+g(x)]dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$

A função $\cos(x)$ **é estritamente decrescente em** $[0, \pi]$ **e estritamente crescente em** $[\pi, 2\pi]$

$$f(x) = \cos(x) : \mathbb{R} \to [-1, 1] \qquad g(x) = f(x)_{|[0,\pi]} \to [-1, 1]$$

A função $\arccos(x)$ **é contínua e estritamente decrescente. É**



derivável em $]-1, 1[$

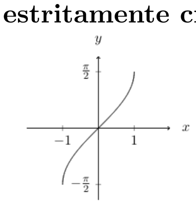
$$f(x) = \arccos(x) : [-1, 1] \to [0, \pi]$$

$$\arccos'(x) : -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}(-1 < x < 1)$$

A função $\sin(x)$ **é estritamente crescente em** $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ **e estritamente decrescente em** $[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$

$$f(x) = \sin(x) : \mathbb{R} \to [-1, 1] \qquad g(x) = f(x)_{|[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]} \to [-1, 1]$$

A função $\arcsin(x)$ **é contínua e estritamente crescente. É derivável**

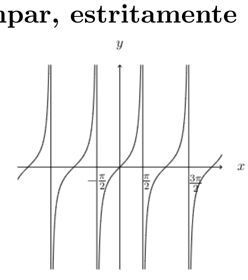


em $]-1, 1[$

$$f(x) = \arcsin(x) : [-1, 1] \to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$$

$$\arcsin'(x) : \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}(-1 < x < 1)$$

A função $\tan(x)$ **é ímpar, estritamente crescente em** $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$

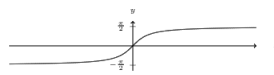


$$f(x) = \tan(x) : \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi | k \in \mathbb{Z}\} \qquad g(x) = f(x)_{|]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[} \to \mathbb{R}$$

A função $\arctan(x)$ é derivável e estritamente crescente

$$f(x) = \arctan(x) : \mathbb{R} \to]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$$

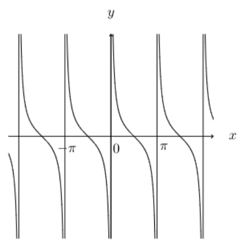
$$\arctan'(x) : \frac{1}{1+x^2} (x \in \mathbb{R})$$



$$f(x) = \text{arccot}(x) :]0, \pi[\to \mathbb{R}$$

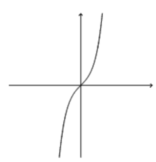
A função $\cot(x)$ é ímpar, estritamente decrescente em $]0, \pi[$

$$f(x) = \cot(x) : \mathbb{R} \setminus \{k\pi | k \in \mathbb{Z}\} \qquad g(x) = f(x)_{|]0,\pi[} \to \mathbb{R}$$



$$f(x) = \text{arccot}(x) :]0, \pi[\to \mathbb{R}$$

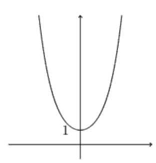
A função $\sinh(x)$ é ímpar, contínua e estritamente crescente.



$$f(x) = \sinh(x) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

$$f(x) = \sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

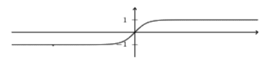
A função $\cosh(x)$ é par, contínua e estritamente decrescente em $]-\infty, 0]$, e estritamente crescente em $[0, +\infty[$ e imagem $[1, +\infty[$



$$f(x) = \cosh(x) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

$$f(x) = \cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

A função $\tanh(x)$ é ímpar, contínua e estritamente crescente. A imagem é $]-1, 1[$



$$f(x) = \tanh(x) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

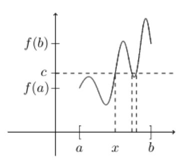
$$\cosh x + \sinh x = e^x \qquad \cosh^2 x - \sinh^2 x = 1 \qquad \cosh(x+y) = \cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y$$

$$\sinh(x+y) = \sinh x \cosh y + \cosh x \sinh y \qquad 1 - \tanh^2 x = \frac{1}{\cosh^2 x}$$

Teorema do valor intermédio

Teorema

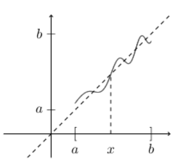
Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função contínua e c um real compreendido entre $f(a)$ e $f(b)$. Então existe pelo menos um $x \in [a, b]$ tal que $f(x) = c$.



Teorema do valor intermédio

Corolário 2: Teorema do ponto fixo

Seja $f : [a, b] \to [a, b]$ uma função contínua. Então existe pelo menos um $x \in [a, b]$ tal que $f(x) = x$.



A segunda regra de l'Hospital aplica-se a cálculos de limites que apresentam uma indeterminação do tipo $\frac{\infty}{\infty}$:

Teorema

Sejam $f, g :]a, b[\to \mathbb{R}$ duas funções deriváveis tais que para todo o $x \in]a, b[$, $g(x) \neq 0$ e $g'(x) \neq 0$ ($a \in \mathbb{R}$ ou $a = -\infty$, $b \in \mathbb{R}$ ou $b = +\infty$). Se

$$\begin{cases} \bullet \ \lim_{x \to a} g(x) = \infty \\ \bullet \ \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} \quad \text{existe (finito ou infinito),} \end{cases}$$

então $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

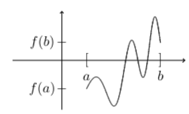
Nota

As duas regras de l'Hospital permanecem válidas se substituirmos $x \to a$ por $x \to b$. Por conseguinte, as regras permanecem válidas se considerarmos domínios da forma $]c, a[\cup]a, b[$.

Teorema do valor intermédio

Corolário 1: Teorema de Bolzano

Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função contínua tal que $f(a)f(b) \leq 0$. Então existe pelo menos um $x \in [a, b]$ tal que $f(x) = 0$.



Exemplo

A função $f : [-1, 0] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^7 + x + 1$ admite um zero. Com efeito, $f(-1) = -1$ e $f(0) = 1$. Como f é contínua e $f(-1)$ e $f(0)$ têm sinais opostos, pelo Teorema de Bolzano, existe $x \in [-1, 0]$ tal que $f(x) = 0$.

Teorema

Seja f uma função bijectiva definida num intervalo I. Se f for derivável em $x \in I$ e $f'(x) \neq 0$, então a função inversa f^{-1} é derivável em $y = f(x)$ e

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}.$$

Nota

A fórmula para a derivada da função inversa pode ser encontrada derivando a relação $f(f^{-1}(y)) = y$:

$$\begin{aligned} (f(f^{-1}(y)))' &= y' \\ f'(f^{-1}(y))(f^{-1})'(y) &= 1 \\ (f^{-1})'(y) &= \frac{1}{f'(f^{-1}(y))} \end{aligned}$$

A primeira regra de l'Hospital aplica-se a cálculos de limites que apresentam uma indeterminação do tipo $\frac{0}{0}$:

Teorema

Sejam $f, g :]a, b[\to \mathbb{R}$ duas funções deriváveis tais que para todo o $x \in]a, b[$, $g(x) \neq 0$ e $g'(x) \neq 0$ ($a \in \mathbb{R}$ ou $a = -\infty$, $b \in \mathbb{R}$ ou $b = +\infty$). Se

$$\begin{cases} \bullet \ \lim_{x \to a} f(x) = 0 \\ \bullet \ \lim_{x \to a} g(x) = 0 \\ \bullet \ \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} \quad \text{existe (finito ou infinito),} \end{cases}$$

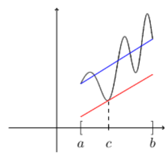
então $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

Teorema de Rolle

Seja f contínua em $[a,b]$ e derivável em $]a,b[$. Se $f(a)=f(b)$, então existe pelo menos um $c\in]a,b[$ tal que $f'(c)=0$.

Teorema de Lagrange

Se f for contínua em $[a,b]$ e derivável em $]a,b[$, então existe pelo menos um $c\in]a,b[$ tal que $f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.



Corolário 1

Seja f contínua em $[a,b]$ e derivável em $]a,b[$. Se $f'(x)=0$ para todo o $x\in]a,b[$, então f é constante em $[a,b]$.

Nota

Se $f\colon D\to\mathbb{R}$ é constante, então $f'=0$. Com efeito, para qualquer $a\in D$,

$$f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{f(a)-f(a)}{x-a}=0.$$

Corolário 2

Seja f contínua em $]a,b[$ e seja $c\in]a,b[$. Se f é derivável em $]a,b[\setminus\{c\}$ e se existe um número real L tal que $\lim\limits_{x\to c}f'(x)=L$, então f é derivável em c e $f'(c)=L$.

Funções compostas

Proposição 2

Sejam E um conjunto não majorado, $f:D\to E$ e $g:E\to F$ duas funções e a um ponto de acumulação de D. Suponhamos que $\lim\limits_{y\to+\infty}g(y)$ existe (finito ou infinito) e que $\lim\limits_{x\to a}f(x)=+\infty$. Então

$$\lim_{x\to a}g(f(x))=\lim_{y\to+\infty}g(y).$$

Exemplo

Temos $\lim\limits_{x\to 0}2^{\frac{1}{x^2}}=\lim\limits_{y\to+\infty}2^y=+\infty$.

Funções compostas

Proposição 1

Sejam D um conjunto não majorado e $f:D\to E$ e $g:E\to F$ duas funções.

(a) Seja $L\in E$ tal que $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=L$. Se g for contínua em L, então $\lim\limits_{x\to+\infty}g(f(x))=g(L)$.

(b) Se $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$, então $\lim\limits_{x\to+\infty}g(f(x))=\lim\limits_{y\to+\infty}g(y)$.

(c) Se $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=-\infty$, então $\lim\limits_{x\to+\infty}g(f(x))=\lim\limits_{y\to-\infty}g(y)$.

Exemplos

(i) Como $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$ e sen é contínua, $\lim\limits_{x\to+\infty}\operatorname{sen}\frac{1}{x}=\operatorname{sen}0=0$.

(ii) Como $\lim\limits_{x\to+\infty}-x=-\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty}2^{-x}=\lim\limits_{y\to-\infty}2^y=0$.

Funções compostas

Sejam $f\colon A\to B$ e $g\colon B\to C$ duas funções, a um ponto de acumulação de A e b um ponto de acumulação de B tais que

- $b\notin B$;
- $\lim\limits_{x\to a}f(x)=b$;
- $\lim\limits_{y\to b}g(y)=+\infty\ (-\infty)$.

Então $\lim\limits_{x\to a}g(f(x))=+\infty\ (-\infty)$.

Exemplo

Pretende-se calcular $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\log_2\cos x$. Consideremos as funções $f\colon]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[\to]0,+\infty[$, $f(x)=\cos x$ e $g\colon]0,+\infty[\to\mathbb{R}$, $g(y)=\log_2 y$ e os pontos de acumulação $\frac{\pi}{2}$ de $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$ e 0 de $]0,+\infty[$. Como $0\notin]0,+\infty[$, $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\cos x=0$ e $\lim\limits_{y\to 0}\log_2 y=-\infty$, temos

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\log_2\cos x=-\infty.$$

Composição de funções

Sejam X, Y e Z subconjuntos de $\mathbb{R}$ e $f:X\to Y$ e $g:Y\to Z$ duas funções. A função $g\circ f:X\to Z$ definida por

$$(g\circ f)(x)=g(f(x))$$

denomina-se *função composta* de g e f.

Exemplo

Consideremos a função $f:\mathbb{R}\to[0,+\infty[$ dada por $f(x)=x^2$ e a função $g:[0,+\infty[\to\mathbb{R}$ dada por $g(y)=\sqrt{y}$. A função composta $g\circ f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ é dada por

$$(g\circ f)(x)=\sqrt{x^2}=|x|.$$