9. *(1 valor)* Considere, no espaço euclidiano complexo $\mathbb{C}^3$ munido do produto escalar usual, o operador $S(x,y,z) = (x+iy-z, 2iy+3z, iz)$. Determine o operador S^* e a composição S^*S.

$$S = \begin{bmatrix} 1 & i & -1 \\ 0 & 2i & 3 \\ 0 & 0 & i \end{bmatrix}$$

$$\bar{S} = \begin{bmatrix} 1 & -i & -1 \\ 0 & -2i & 3 \\ 0 & 0 & -i \end{bmatrix}$$

$$S^* = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -i & -2i & 0 \\ -1 & 3 & -i \end{bmatrix}$$

$$S^*S = \begin{bmatrix} 1 & i & -1 \\ -i & 5 & -5i \\ -1 & 5i & 11 \end{bmatrix}$$

10. *(1 valor)* Considere, no espaço euclidiano complexo $\mathbb{C}^2$ munido do produto escalar usual, o operador $T : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ definido por $T(x,y) = (2x - iy, ix + y)$. Determine uns operadores auto-adjuntos X e Y tais que $T = X + iY$.

$$T = \begin{bmatrix} 2 & -i \\ i & 1 \end{bmatrix}$$

$$\bar{T} = \begin{bmatrix} 2 & i \\ -i & 1 \end{bmatrix}$$

$$T^* = \begin{bmatrix} 2 & -i \\ i & 1 \end{bmatrix}$$

$$X = \frac{T + T^*}{2}$$

$$Y = \frac{T - T^*}{2i}$$

$$X = \frac{1}{2}(T + T^*) = \frac{1}{2}(\begin{bmatrix} 2 & -i \\ i & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & -i \\ i & 1 \end{bmatrix}) = \frac{1}{2}(\begin{bmatrix} 4 & -2i \\ 2i & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -i \\ i & 1 \end{bmatrix}$$

$$Y = \frac{1}{2i}(T - T^*) = \frac{1}{2i}(\begin{bmatrix} 2 & -i \\ i & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & -i \\ i & 1 \end{bmatrix}) = \frac{1}{2i}(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

12. *(1 valor)* Calcule valores e vetores próprios da matriz hermítica

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 2i \\ -2i & 0 \end{pmatrix}$$

Valores Próprios:

$$\lambda = 2 \qquad \lambda = -2$$

Vetores Próprios:

$$\begin{bmatrix} i & -i \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

13. *(1 valor)* Considere a matriz C definida no exercício 12. Determine uma matriz unitária U e uma matriz diagonal Λ tais que $C = U\Lambda U^{-1}$.

Valores Próprios:

$$\lambda = 2 \qquad \lambda = -2$$

$$\begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Vetores Próprios:

$$\begin{bmatrix} i & -i \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Lambda = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$U = \begin{bmatrix} \frac{i}{\sqrt{2}} & -\frac{i}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

$$U^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{i}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{i}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

10. *(1 valor)* Determine a matriz que define, relativamente à base canónica, um operador ortogonal $R : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que $R(1,0) = (0,-1)$.

Base canónica $\mathbb{R}^2$:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$R = \begin{bmatrix} 0 & b \\ -1 & d \end{bmatrix}$$

As colunas devem formar uma base ortogonal:

$$R(1,0) = (0,-1) \implies \sqrt{0^2 + (-1)^2} = 1$$

Precisamos de encontrar $R(0,1)$:

$$(0,-1) \cdot (b,d) = 0 \Leftrightarrow d = 0$$

(b,d) tem de ter norma 1:

$$\sqrt{b^2 + 0} = 1 \Leftrightarrow b = \pm 1$$

$$R = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \qquad R = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Diagonalização de matriz
$A = PDP^{-1}$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$P = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot (\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix})^{-1}$$

5. *(2 valores)* Seja $P : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ a projeção ortogonal sobre a reta $y = -2x$ do plano euclidiano. Determine a matriz que representa P na base canónica.

$$v = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$proj_u v = \frac{v \cdot u}{u \cdot u} u$$

$$\frac{u}{||u||} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \\ -\frac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}$$

$$v = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$$v \cdot u = x \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} + y \cdot -\frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{x - 2y}{\sqrt{5}}$$