Resolução das Questões 4 e 5

Questão 4

Uma partícula move-se na direção sul-norte, na latitude $\lambda = 45°$. Deseja-se calcular:

a) Vetor aceleração centrífuga

A aceleração centrífuga é dada por:

$$\vec{a}_{\text{centrífuga}} = \vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{r})$$

Sabemos que:

- $\vec{\Omega}$ tem direção do eixo de rotação da Terra (do sul para o norte), com módulo Ω.
- O vetor posição $\vec{r}$ faz um ângulo $\lambda = 45°$ com o plano equatorial.

Seja o sistema de eixos da figura, com:

$$\vec{\Omega} = \Omega(\cos\lambda\,\hat{z} + \sin\lambda\,\hat{y})$$
$$\vec{r} = R\hat{r} = R\hat{x}$$

Aplicando o vetor duplo:

$$\vec{a}_c = \vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{r}) = -\Omega^2 R\cos^2\lambda\,\hat{x} - \Omega^2 R\cos\lambda\sin\lambda\,\hat{y}$$

Resultado:

$$\boxed{\vec{a}_{\text{centrífuga}} = -\Omega^2 R\cos^2\lambda\,\hat{x} - \Omega^2 R\cos\lambda\sin\lambda\,\hat{y}}$$

Para $\lambda = 45°$, temos $\cos\lambda = \sin\lambda = \frac{1}{\sqrt{2}}$, então:

$$\vec{a}_{\text{centrífuga}} = -\Omega^2 R\left(\frac{1}{2}\hat{x} + \frac{1}{2}\hat{y}\right)$$

—

b) Vetor aceleração de Coriolis

A aceleração de Coriolis é:

$$\vec{a}_{\text{Coriolis}} = -2\vec{\Omega} \times \vec{v}$$

Sabemos que $\vec{v}$ está no plano xOy, e se move na direção sul-norte, ou seja, $\vec{v} = v\,\hat{y}$.
Como $\vec{\Omega} = \Omega(\cos\lambda\,\hat{z} + \sin\lambda\,\hat{y})$, então:

$$\vec{a}_{\text{Coriolis}} = -2\Omega(\cos\lambda\,\hat{z} + \sin\lambda\,\hat{y}) \times v\hat{y} = -2\Omega v\cos\lambda\,(\hat{z} \times \hat{y})$$

Como $\hat{z} \times \hat{y} = -\hat{x}$, temos:

$$\vec{a}_{\text{Coriolis}} = 2\Omega v\cos\lambda\,\hat{x}$$

Substituindo $\cos\lambda = \frac{1}{\sqrt{2}}$ para $\lambda = 45°$:

$$\boxed{\vec{a}_{\text{Coriolis}} = \sqrt{2}\Omega v\,\hat{x}}$$

—

Questão 5

A partícula de massa m está sob ação de uma força central atrativa de módulo Kr^3. Seu momento angular é L.

a) Determinar a energia potencial efetiva

A força é:

$$F(r) = -Kr^3 \Rightarrow U(r) = -\int F(r)\,dr = \int Kr^3\,dr = \frac{K}{4}r^4 + C$$

Como $U = 0$ na origem, temos:

$$U(r) = \frac{K}{4}r^4$$

A energia potencial efetiva é:

$$U_{\text{efetiva}}(r) = \frac{K}{4}r^4 + \frac{L^2}{2mr^2}$$

b) Determinar o raio da órbita circular

Para órbita circular, a força centrípeta é fornecida pela força central:

$$\frac{\mathrm{d}U_{\text{efetiva}}}{\mathrm{d}r} = 0 \Rightarrow Kr^3 - \frac{L^2}{mr^3} = 0 \Rightarrow Kr^6 = \frac{L^2}{m} \Rightarrow r = \left(\frac{L^2}{Km}\right)^{1/6}$$

$$\boxed{r = \left(\frac{L^2}{Km}\right)^{1/6}}$$