4. Espaços vetoriais

Exercícios para as aulas

Exercício 4.1 Verifique que o conjunto $\mathcal{P}_n(x)$ dos polinómios na variável x de grau menor ou igual a n com coeficientes reais, algebrizado por meio da adição de polinómios e da multiplicação de um polinómio por um número real, é um espaço vetorial real.

Exercício 4.2 Considere o conjunto $C([a,b])$ das funções reais de variável real contínuas em $[a,b]$. Se $f, g \in C([a,b])$ considere definida a soma $f+g$ por

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x), \qquad x \in [a,b].$$

Se $\alpha \in \mathbb{R}$ e $f \in C([a,b])$ considere $\alpha\, f$ definida por

$$(\alpha\, f)(x) = \alpha\, f(x), \qquad x \in [a,b].$$

Prove que $C([a,b])$ é um espaço vetorial real para as operações acima definidas.

Exercício 4.3 Mostre que se U é um subespaço vetorial de um espaço vetorial V então $\mathbf{0}_V \in U$.

Exercício 4.4 Verifique se os seguintes conjuntos são subespaços vetoriais do espaço vetorial V indicado.

a) $V = \mathbb{R}^2, \quad S = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x_1 = x_2\}$.

b) $V = \mathbb{R}^2, \quad T = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x_1 \geq 0\}$.

c) $V = \mathbb{R}^3, \quad U = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x_3 = 0\}$.

Exercício 4.5 Prove que o conjunto formado pelas matrizes reais simétricas de ordem n é um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^{n\times n}$.

Exercício 4.6 Seja $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ e $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$, $\mathbf{b} \neq \mathbf{0}$. Mostre que:

a) O conjunto das soluções do sistema homogéneo $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ é um subespaço de $\mathbb{R}^n$.
(Recorde o Exercício 2.10.)

b) O conjunto das soluções do sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ não é um subespaço de $\mathbb{R}^n$.

Exercício 4.7 Indique, sem efetuar quaisquer cálculos, quais dos seguintes conjuntos são subespaços do espaço V indicado.

a) $V = \mathbb{R}^3, \quad U_1 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$;

b) $V = \mathbb{R}^3, \quad U_2 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1 + x_2 + x_3 = 1\}$;

c) $V = \mathbb{R}^4, \quad U_3 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : x_1 = x_2 \text{ e } x_3 = x_4\}$;

d) $V = \mathbb{R}^4, \quad U_4 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : x_1 = x_2 + x_3 \text{ e } x_4 = 5\}$.

Exercício 4.8 Identifique o subespaço de $\mathbb{R}^3$ gerado pelos vetores:

a) $\mathbf{u}_1 = (1, 0, 0)$ e $\mathbf{u}_2 = (0, 1, 1)$.

b) $\mathbf{v}_1 = (1, 2, 1), \mathbf{v}_2 = (2, -1, -3)$ e $\mathbf{v}_3 = (0, 1, 1)$.

c) $\mathbf{w}_1 = (1, 1, 1), \mathbf{w}_2 = (2, 1, 1)$ e $\mathbf{w}_3 = (0, 1, 3)$

Exercício 4.9 Identifique o seguinte subespaço de $\mathbb{R}^{2\times 2}$:

$$S = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\rangle .$$

Exercício 4.10 Sejam $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ vetores de um espaço vetorial V e $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \neq 0$. Prove que:

*a)** $\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n \rangle = \langle \alpha\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n \rangle$.

b) $\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n \rangle = \langle \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n \rangle$.

Exercício 4.11 Considere os vetores de $\mathbb{R}^2$, $\mathbf{v}_1 = (1, 0)$ e $\mathbf{v}_2 = (1, 1)$.

a) Escreva $\mathbf{v} = (3, -1)$ como combinação linear de $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$.

b) Mostre que $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$ são linearmente independentes.

c) Verifique que qualquer vetor $\mathbf{x} = (a, b) \in \mathbb{R}^2$ pode ser escrito como combinação linear de $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$.

Exercício 4.12 Verifique se são linearmente independentes os vetores de $\mathbb{R}^3$ apresentados em seguida. No caso de serem linearmente dependentes escreva um deles como combinação linear dos restantes.

a) $(1, 0, 0), (0, 1, 0), (1, -1, 1)$.

b) $(1, 0, 1), (0, 1, 0), (1, -1, 1)$.

Exercício 4.13 Sejam $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ vetores de um espaço vetorial V e $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \neq 0$. Mostre que, se $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \ldots, \mathbf{v}_n$ são vetores linearmente independentes (dependentes), então:

*a)** $\alpha\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \ldots, \mathbf{v}_n$ também são linearmente independentes (dependentes);

b) $\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ também são linearmente independentes (dependentes).

Exercício 4.14 Determine uma base e a dimensão dos subespaços apresentados nos Exercícios 4.4 e 4.7.

Exercício 4.15 Determine uma base e a dimensão dos seguintes subespaços de $\mathbb{R}^4$:

a) $U = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \ : \ x_1 + x_2 = x_3 + x_4 \}$;

b) $W = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \ : \ x_1 = x_2 = x_3 \}$.

Exercício 4.16 Apresente uma base e indique a dimensão dos subespaços de $\mathbb{R}^{2\times 2}$ formado pelas matrizes:

a) Simétricas de ordem 2.

b) Triangulares superiores de ordem 2.

c) Diagonais de ordem 2.

Exercício 4.17* Seja V um espaço vetorial de dimensão n. Mostre que:

a) Se $V = \langle \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n \rangle$, então $(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n)$ é uma base de V.

b) Se $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$ são vetores de V linearmente independentes, então $(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n)$ é uma base de V.

Exercício 4.18* Seja V um espaço vetorial e $(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n)$ uma sua base. Mostre que qualquer vetor $\mathbf{v} \in V$ se escreve, de forma única, como combinação linear dos vetores $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$.

Observação: Os coeficientes da combinação linear são chamados as *coordenadas* do vetor em relação a essa base.

Exercício 4.19 *a)* Determine as coordenadas do vetor $\mathbf{x} = (1, -4, 2)$ em relação à base canónica de $\mathbb{R}^3$.

b) Sejam $\mathbf{u}_1 = (1, 0, 0)$, $\mathbf{u}_2 = (1, -1, 0)$, e $\mathbf{u}_3 = (1, 0, -1)$. Mostre que $(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3)$ é uma base de $\mathbb{R}^3$. Determine as coordenadas de vetor $\mathbf{x}$, dado na alínea anterior, relativamente a esta base.

Exercício 4.20 *a)* No espaço $\mathcal{P}_2(x)$, determine as coordenadas, na base $(1, x, x^2)$, de

$$p(x) = 1 - 4x + 2x^2.$$

b) Considere os polinómios definidos por

$$p_1(x) = 1, \quad p_2(x) = 1 - x, \quad p_3(x) = 1 - x^2,$$

Mostre que (p_1, p_2, p_3) é uma base de $\mathcal{P}_2(x)$. Determine as coordenadas do polinómio p, dado na alínea anterior, relativamente a esta base.

Exercício 4.21 *a)* Mostre que os vetores $\mathbf{u}_1 = (1, 0)$, $\mathbf{u}_2 = (1, 1)$ e $\mathbf{u}_3 = (0, -1)$ constituem um sistema de geradores de $\mathbb{R}^2$.

b) Retire vetores, entre os dados, para obter uma base de $\mathbb{R}^2$.

Exercício 4.22 Determine os valores de k para os quais $((1, 0, 2), (-1, 2, -3), (-1, 4, k))$ é uma base de $\mathbb{R}^3$.

Exercício 4.23 Determine uma base do subespaço de $\mathbb{R}^3$, $U = \langle (1, 0, 1), (2, 2, 4), (0, 0, 1), (1, 2, 3) \rangle$.

Exercício 4.24 Seja $U = \{(3a + b, 2a - b, a + 2b) : a, b \in \mathbb{R}\}$.

a) Verifique que U é um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^3$.

b) Determine uma base de U.

c) Determine α de modo que o vetor $(2, 3, \alpha)$ pertença a U.

Exercício 4.25 Seja $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + 2y + z = 0\}$.

a) Verifique que S é um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^3$.

b) Determine uma base de S.

c) Determine $\alpha \in \mathbb{R}$ de modo que $S = \langle (1, 0, -1), (-1, 1, \alpha) \rangle$.

Exercício 4.26 Determine a dimensão e indique uma base para o espaço das colunas e para o espaço das linhas de cada uma das seguintes matrizes.

a) $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ b) $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

c) $C = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ d) $D = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ e) $E = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -6 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$

Exercício 4.27 Determine a dimensão e indique uma base para o núcleo de cada uma das matrizes do exercício anterior.

Exercício 4.28* Construa uma matriz cujo espaço nulo seja gerado pelo vetor $(2, 0, 1)$.

Exercício 4.29* Existe alguma matriz A tal que $(1, 1, 1) \in \mathcal{L}(A)$ e $(1, 0, 0) \in \mathcal{N}(A)$?

Exercício 4.30 Considere a matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & 0 \\ 2 & -2 & -1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

a) Calcule a nulidade e a característica de A.

b) Determine bases para o espaço das colunas de A e para o espaço nulo de A.

c) Indique uma solução do sistema de equações lineares $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, onde $\mathbf{b} = (1\ 0\ 2\ -1\ 0)^T$. (Note que $\mathbf{b}$ é a primeira coluna de A.)

Exercícios suplementares

Nas questões **4.31** a **4.39**, indique, a(s) alínea(s) correta(s).

Exercício 4.31 Os seguintes subconjuntos de $\mathbb{R}^4$ são subespaços vetoriais de $\mathbb{R}^4$.

a) $A_1 = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : x - y = 2\}$.

b) $A_2 = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : z = x + 2y$ e $w = x - 3y\}$.

c) $A_3 = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : x = 0$ e $y = -w\}$.

d) $A_4 = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : x = y = 0\}$.

e) $A_5 = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : x = 1,\ y = 0,\ x + w = 1\}$.

f) $A_6 = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : x > 0$ e $y < 0\}$.

Exercício 4.32 Os seguintes subconjuntos de $\mathbb{R}^{n\times n}$ são subespaços vetoriais de $\mathbb{R}^{n\times n}$.

a) O conjunto de todas as matrizes invertíveis de ordem n.

b) O conjunto de todas as matrizes diagonais de ordem n.

c) O conjunto de todas as matrizes triangulares superiores de ordem n.

d) O conjunto de todas as matrizes singulares de ordem n.

Exercício 4.33 Os seguintes vetores geram $\mathbb{R}^3$.

a) $(1,-1,2),\ (0,1,1)$.

b) $(1,2,-1),\ (6,3,0),\ (4,1,1),\ (-1,1,1)$.

c) $(2,2,3),\ (-1,-2,1),\ (0,1,0)$.

d) $(1,1,-1),\ (1,0,3),\ (-1,-2,5)$.

Exercício 4.34 Os seguintes polinómios geram $\mathcal{P}_2(x)$.

a) $x^2+1,\ x^2+x,\ x+1$.

b) $x^2+1,\ x^2+x$.

c) $x^2+2,\ 2x^2-x+1,\ x+2,\ x^2+x+4$.

d) $x^2-3x+2,\ x^2-1$.

Exercício 4.35 Os seguintes vetores de $\mathbb{R}^3$ são linearmente dependentes.

a) $(1,2,-1),\ (3,2,5)$.

b) $(4,2,1),\ (2,6,-5),\ (1,-2,3)$.

c) $(1,1,0),\ (0,2,3),\ (1,2,3),\ (3,6,6)$.

d) $(1,2,3),\ (1,1,1),\ (1,0,1)$.

Exercício 4.36 Os seguintes vetores de $\mathcal{P}_2(x)$ são linearmente dependentes.

a) $x^2+1,\ x-2,\ x+3$.

b) $2x^2+1,\ x^2+3,\ x$.

c) $3x+1,\ 3x^2+1,\ 2x^2+x+1$.

d) $x^2-4,\ 5x^2-5x-6,\ 3x^2-5x+2,\ 2x-1$.

Exercício 4.37 Os seguintes vetores de $\mathbb{R}^{2\times 2}$ são linearmente dependentes.

a) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$.

b) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

c) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercício 4.38 Os seguintes vetores de $\mathbb{R}^3$ formam uma base de $\mathbb{R}^3$.

a) $(1,2,0),\ (0,1,-1)$.

b) $(1,1,-1),\ (2,3,4),\ (1,-2,3),\ (2,1,1)$.

c) $(1,1,0),\ (0,2,3),\ (-2,0,3)$.

d) $(3,2,2),\ (-1,2,1),\ (0,1,0)$.

Exercício 4.39 Os seguintes vetores de $\mathcal{P}_2(x)$ formam uma base de $\mathcal{P}_2(x)$.

a) $-x^2+x+2,\ 2x^2+2x+3,\ 4x^2-1$.

b) $2x^2+1,\ x^2+3$.

c) $x^2+1,\ 3x^2+1,\ 2x^2+x+1,\ 3x^2-5x+2$.

d) $3x^2+2x+1,\ x^2+x+1,\ x^2+1$.

Nas questões **4.40** a **4.46**, indique, para cada alínea, se a afirmação é verdadeira (V) ou falsa (F).

Exercício 4.40 Seja V um espaço vetorial real.

	V	F
a) Se $(\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\cdots,\mathbf{v}_n)$ é uma base de V, então $(3\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\cdots,\mathbf{v}_n)$ também é uma base de V.	○	○
b) Se $V=\langle\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\cdots,\mathbf{v}_n\rangle$, então dim $V=n$.	○	○
c) Se $(\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\cdots,\mathbf{v}_n)$ é uma base de V, então o vetor nulo não pode escrever-se como combinação linear dos vetores $\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\cdots,\mathbf{v}_n$.	○	○
d) Se dim $V=n$ e $\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\cdots,\mathbf{v}_n$ são vetores de V linearmente independentes, então $(\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\cdots,\mathbf{v}_n)$ é uma base de V.	○	○

Exercício 4.41 Seja V um espaço vetorial real de dimensão n.

	V	F
a) Se $V=\langle\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\cdots,\mathbf{v}_n\rangle$, então $(\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\cdots,\mathbf{v}_n)$ é uma base de V.	○	○
b) Se $(\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\cdots,\mathbf{v}_n)$ é uma base de V, então $(\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\cdots,\mathbf{v}_1+\mathbf{v}_n)$ também é uma base de V.	○	○
c) Quaisquer $n-1$ vetores de V são linearmente independentes.	○	○
d) O conjunto $T=\{\alpha\mathbf{v}_1+\beta\mathbf{v}_2:\alpha,\beta\in\mathbb{R},\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2\in V\}$ é um subespaço vetorial de V.	○	○

Exercício 4.42 Seja $S=\langle(1,0,1),(1,2,1),(3,4,3)\rangle$. Então:

	V	F
a) $S=\mathbb{R}^3$.	○	○
b) $S=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x=z\}$.	○	○
c) $(2,3,4)\in S$.	○	○
d) os vetores $(-2,4,-2)$ e $(-2,0,-2)$ constituem uma base de S.	○	○

Exercício 4.43 Seja $T = \langle (1,1,0,0), (1,0,-1,0), (1,1,1,1) \rangle$. Então:

	V	F
a) $T = \mathbb{R}^3$.	○	○
b) $T = \{(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4 : a = b - c + d\}$.	○	○
c) $(0,0,0,0) \in T$.	○	○
d) $((1,1,0,0), (1,0,-1,0), (0,0,1,1))$ é uma base de T.	○	○

Exercício 4.44 Seja A uma matriz de ordem 4×5.

	V	F
a) As colunas de A são linearmente dependentes.	○	○
b) O sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ tem solução única.	○	○
c) car $A \leq 4$.	○	○
d) A dimensão do núcleo de A é 2.	○	○

Exercício 4.45 Seja $S = \{(\alpha+\beta, \alpha-\beta, 2\alpha) : \ \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$.

	V	F
a) $S = \{(x,y,x) \in \mathbb{R}^3 : x + y - z = 0\}$.	○	○
b) $(1,1,1) \in S$.	○	○
c) $S = \langle (1,-1,0), (1,1,2), (1,0,1) \rangle$.	○	○
d) S é um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^3$ de dimensão 2.	○	○

Exercício 4.46 Considere as matrizes

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 5 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

	V	F
a) B pode obter-se por operações elementares sobre as linhas de A.	○	○
b) $((1,1,2,0), (1,2,3,1), (1,4,5,5))$ é uma base do espaço das colunas de A.	○	○
c) $((1,1,1,1), (1,2,3,4), (2,3,4,5))$ é uma base do espaço das linhas de A.	○	○
d) $(-1,1,-1,1) \in \mathcal{N}(A)$.	○	○