

9. (1 valor) Considere, no espaço euclidiano complexo \mathbb{C}^3 munido do produto escalar usual, o operador $S(x, y, z) = (x + iy - z, 2iy + 3z, iz)$. Determine o operador S^* e a composição S^*S .

$$S = \begin{bmatrix} 1 & i & -1 \\ 0 & 2i & 3 \\ 0 & 0 & i \end{bmatrix}$$

$$\bar{S} = \begin{bmatrix} 1 & -i & -1 \\ 0 & -2i & 3 \\ 0 & 0 & -i \end{bmatrix}$$

$$S^* = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -i & -2i & 0 \\ -1 & 3 & -i \end{bmatrix}$$

$$S^*S = \begin{bmatrix} 1 & i & -1 \\ -i & 5 & -5i \\ -1 & 5i & 11 \end{bmatrix}$$

10. (1 valor) Considere, no espaço euclidiano complexo \mathbb{C}^2 munido do produto escalar usual, o operador $T : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$ definido por $T(x, y) = (2x - iy, ix + y)$. Determine uns operadores auto-adjuntos X e Y tais que $T = X + iY$.

$$T = \begin{bmatrix} 2 & -i \\ i & 1 \end{bmatrix}$$

$$\bar{T} = \begin{bmatrix} 2 & i \\ -i & 1 \end{bmatrix}$$

$$T^* = \begin{bmatrix} 2 & -i \\ i & 1 \end{bmatrix}$$

$$X = \frac{T + T^*}{2}$$

$$Y = \frac{T - T^*}{2i}$$

$$X = \frac{1}{2}(T + T^*) = \frac{1}{2}\left(\begin{bmatrix} 2 & -i \\ i & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & -i \\ i & 1 \end{bmatrix}\right) = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 4 & -2i \\ 2i & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -i \\ i & 1 \end{bmatrix}$$

$$Y = \frac{1}{2i}(T - T^*) = \frac{1}{2i}\left(\begin{bmatrix} 2 & -i \\ i & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & -i \\ i & 1 \end{bmatrix}\right) = \frac{1}{2i}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

12. (1 valor) Calcule valores e vetores próprios da matriz hermitica

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 2i \\ -2i & 0 \end{pmatrix}$$

Valores Próprios:

$$\lambda = 2 \quad \lambda = -2$$

Vetores Próprios:

$$\begin{bmatrix} i & -i \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

13. (1 valor) Considere a matriz C definida no exercício 12. Determine uma matriz unitária U e uma matriz diagonal Λ tais que $C = U\Lambda U^{-1}$.

Valores Próprios:

$$\lambda = 2 \quad \lambda = -2$$

$$\begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Vetores Próprios:

$$\begin{bmatrix} i & -i \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Lambda = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$U = \begin{bmatrix} \frac{i}{\sqrt{2}} & -\frac{i}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

$$U^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{i}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{i}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$