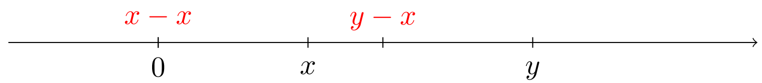
Limites e continuidade

Distância



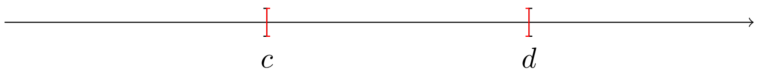
$$\begin{aligned}\text{distância entre } x \text{ e } y &= \text{distância entre } x-x \text{ e } y-x\\ &= \text{distância entre } 0 \text{ e } y-x\\ &= |y-x| = |x-y|\end{aligned}$$

Pontos de acumulação

Um número real a diz-se *ponto de acumulação* de um conjunto $D \subset \mathbb{R}$ se para todo o $\delta > 0$ existe um elemento $x \in D$ tal que $0 < |x-a| < \delta$.

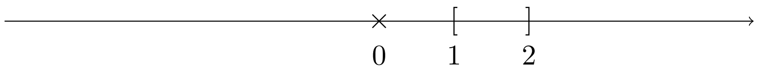
Exemplos

(i)



Os pontos de acumulação de um intervalo aberto $]c, d[$ são os elementos do intervalo fechado $[c, d]$.

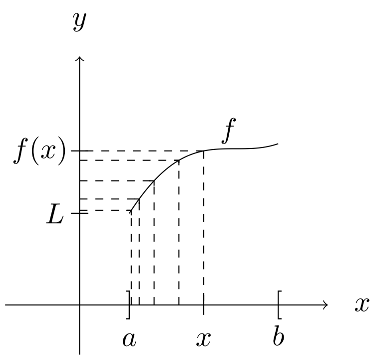
(ii)



0 não é ponto de acumulação do conjunto $\{0\} \cup [1, 2]$.

Limite de uma função num ponto de acumulação

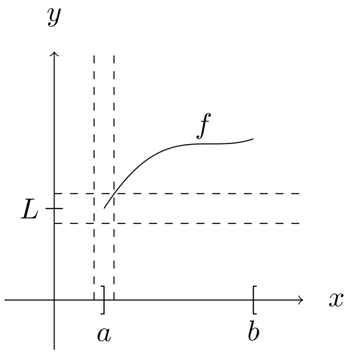
Considerações intuitivas



f tende para L quando x tende para a, $\lim_{x\to a} f(x) = L$

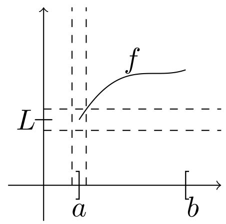
Limite de uma função num ponto de acumulação

Considerações intuitivas



A distância entre $f(x)$ e L fica tão pequena quanto se queira desde que x é suficientemente perto de a

Limite de uma função num ponto de acumulação



Definição

Sejam $f\colon D \to E$ uma função, $a \in \mathbb{R}$ um ponto de acumulação de D e L um número real. Dizemos que f *tende para* L *quando* x *tende para* a se

$$\forall\, \varepsilon > 0\; \exists\, \delta > 0\; \forall\, x \in D \setminus \{a\} : |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon.$$

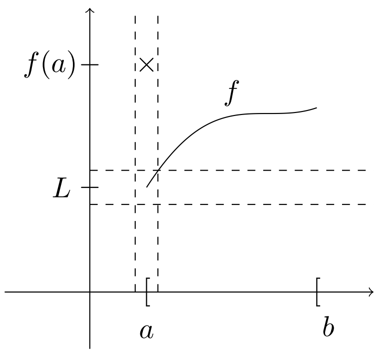
O número L diz-se *limite de* f *quando* x *tende para* a e escrevemos

$$\lim_{x \to a} f(x) = L.$$

Limite de uma função num ponto de acumulação

Nota

Se f estiver definido em a, o valor $f(a)$ não é considerado no cálculo do limite.



$$\lim_{x \to a} f(x) = L \neq f(a)$$

Exemplos

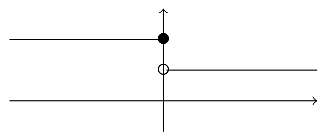
(i) Consideremos a função $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 3x + 1$. Tem-se

$$\lim_{x \to 1} (3x + 1) = 4.$$

(ii) A função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x > 0, \\ 2 & x \leq 0 \end{cases}$$

não admite limite em 0.



(iii) Para a função $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ definida como em (ii),

$$\lim_{x \to 0} f(x) = 1.$$

Propriedades do limite

Proposição

Sejam $f : D \to E$ uma função e $a \in \mathbb{R}$ um ponto de acumulação de D. Se o limite de f quando x tende para a existir, então é único.

Proposição

Sejam $f : D \to \mathbb{R}$ e $g : D \to \mathbb{R}$ duas funções e $a \in \mathbb{R}$ um ponto de acumulação de D. Suponhamos que $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$ e $\lim\limits_{x\to a} g(x) = M$. Então

(a) $\lim\limits_{x\to a}(f(x) + g(x)) = L + M$;

(b) $\forall\, c \in \mathbb{R} : \lim\limits_{x\to a} cf(x) = cL$;

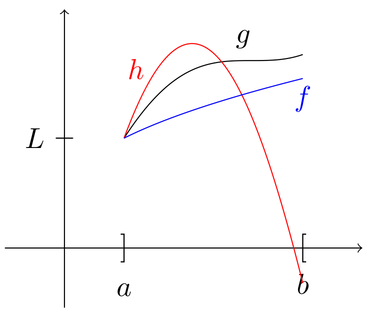
(c) $\lim\limits_{x\to a} f(x)g(x) = LM$;

(d) *se* $M \neq 0$ *e* $\forall\, x \in D : g(x) \neq 0$, *então* $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{L}{M}$.

Exemplos

- $\lim\limits_{x\to a} x = a$, pela definição (com $\delta = \varepsilon$)
- $\lim\limits_{x\to a} x^2 = a^2$, por (c)
- $\lim\limits_{x\to a} x^3 = a^3$, por (c)
- $\lim\limits_{x\to a} x^n = a^n$, por (c) sucessivamente
- $\lim\limits_{x\to a} 3x^4 = 3a^4$, por (b)
- $\lim\limits_{x\to a} 3x^4 + 2x^5 = 3a^4 + 2a^5$, por (a)
- se p é um polinómio, $\lim\limits_{x\to a} p(x) = p(a)$
- $\lim\limits_{x\to 2} \frac{3x^2}{x^2+1} = \frac{12}{5}$, por (d)
- $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x-1}$ é uma indeterminação $\frac{0}{0}$! Levantar a indeterminação: Para $x \neq 1$,
$$\frac{x^2-1}{x-1} = \frac{(x+1)(x-1)}{x-1} = x + 1.$$
Logo $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1} x + 1 = 2$.

Teorema do confronto



Teorema

Sejam $f, g, h : D \to \mathbb{R}$ três funções e $a \in \mathbb{R}$ um ponto de acumulação de D. Suponhamos que existe $r > 0$ tal que

$$\forall\, x \in D \setminus \{a\} : |x - a| < r \Rightarrow f(x) \leq g(x) \leq h(x).$$

Nestas condições, se $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L = \lim\limits_{x\to a} h(x)$, então $\lim\limits_{x\to a} g(x) = L$.

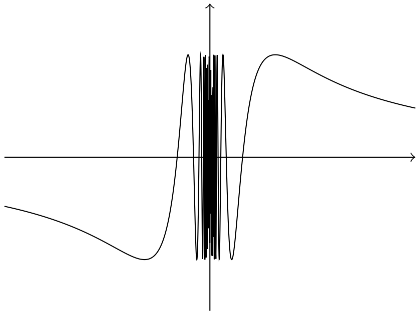
Teorema do confronto

Corolário

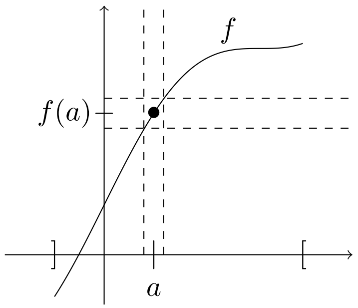
Sejam $f, g : D \to \mathbb{R}$ duas funções e $a \in \mathbb{R}$ um ponto de acumulação de D. Se f for limitada e $\lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$, então $\lim\limits_{x\to a} f(x)g(x) = 0$.

Exemplo

Tem-se $\lim\limits_{x\to 0} x\mathrm{sen}\left(\frac{1}{x}\right) = 0$ pois $|\mathrm{sen}\left(\frac{1}{x}\right)| \leq 1$ e $\lim\limits_{x\to 0} x = 0$. Nota-se que $\lim\limits_{x\to 0} \mathrm{sen}\left(\frac{1}{x}\right)$ não existe.



Continuidade



Definição

Sejam $f : D \to E$ uma função e $a \in D$. Dizemos que f é *contínua em a* se

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists \delta > 0\, \forall x \in D \quad |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$

A função f diz-se *contínua* se f for contínua em todo o ponto do seu domínio.

Continuidade

Exemplo

Para cada conjunto $D \subset \mathbb{R}$, a função $f : D \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x$ é contínua.

Proposição

Sejam $f : D \to E$ uma função e $a \in D$ um ponto de acumulação de D. Então f é contínua em a se e só se $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$.

Proposição

Sejam $f : D \to \mathbb{R}$ e $g : D \to \mathbb{R}$ duas funções contínuas em $a \in D$ e $c \in \mathbb{R}$ uma constante. Então as funções $f + g$, cf e fg são contínuas em a. Se $g(x) \neq 0$ para todo o $x \in D$, então a função $\frac{f}{g}$ é contínua em a.

Exemplos de funções contínuas

1. Toda a função polinomial é contínua.
2. Toda a função racional é contínua.
3. Para todo o número natural $n > 0$, a função $[0, +\infty[\to \mathbb{R}$ definida por $x \mapsto \sqrt[n]{x}$ é contínua.
4. Para todo o $r \in \mathbb{R}$, a função $f :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^r$ é contínua.
5. A função módulo $|\ | : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é contínua.
6. As funções trigonométricas sen, $\cos$, tg e cotg são contínuas.
7. Para qualquer número real $a > 0$, a função exponencial $\mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto a^x$ é contínua.
8. Para qualquer número real $a > 1$, a função logarítmica $]0, +\infty[\to \mathbb{R}, x \mapsto \log_a x$ é contínua.

Funções compostas

Proposição

Sejam $f\colon D \to E$ e $g\colon E \to F$ duas funções. Sejam $a \in \mathbb{R}$ um ponto de acumulação de D e $L \in E$ tais que $\lim_{x\to a} f(x) = L$. Se g for contínua em L, então $\lim_{x\to a} g(f(x)) = g(L)$.

Corolário

Sejam $f\colon D \to E$ e $g\colon E \to F$ duas funções contínuas (em $a \in D$). Então a função composta $g \circ f\colon D \to F$ é contínua (em $a \in D$).

Exemplo

$\lim_{x\to 0} \cos\left(x\mathrm{sen}\,\frac{1}{x}\right) = ?$

Temos $\cos\left(x\mathrm{sen}\,\frac{1}{x}\right) = g(f(x))$ com

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{R}\setminus\{0\} \to \mathbb{R}, &\qquad f(x) = x\mathrm{sen}\,\tfrac{1}{x} \\ g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, &\qquad g(y) = \cos y \end{aligned}$$

Vimos que $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$ (Teorema do confronto). Como g é contínua em 0,

$$\lim_{x\to 0} \cos\left(x\mathrm{sen}\,\tfrac{1}{x}\right) = \cos 0 = 1.$$

Nota

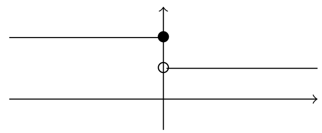
A função $h(x) = \cos\left(x\mathrm{sen}\,\frac{1}{x}\right)$ não está definida em 0. Como $\lim_{x\to 0} h(x)$ existe, podemos *prolongar* h *por continuidade* em 0, definindo $h(0) = \lim_{x\to 0} h(x) = 1$. O *prolongamento* de h definido desta forma é automaticamente contínua em 0.

Limites laterais

Exemplo introdutivo

Consideremos a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x > 0, \\ 2 & x \leq 0. \end{cases}$$



$\lim_{x\to 0} f(x)$ não existe, mas existem os limites laterais à esquerda e à direita de f em 0.

Limites laterais

Seja $f : D \to E$ uma função.

Definição

Seja $a \in \mathbb{R}$ um ponto de acumulação do conjunto

$$A = D \cap]a, +\infty[= \{x \in D \,|\, x > a\}.$$

O limite $\lim_{x\to a} f|_A(x)$, quando existe, denomina-se *limite lateral à direita de f em a* e é denotado por $\lim_{x\to a^+} f(x)$.

Seja $b \in \mathbb{R}$ um ponto de acumulação do conjunto

$$B = D \cap] -\infty, b[= \{x \in D \,|\, x < b\}.$$

O limite $\lim_{x\to b} f|_B(x)$, quando existe, denomina-se *limite lateral à esquerda de f em b* e é denotado por $\lim_{x\to b^-} f(x)$.

Limites laterais

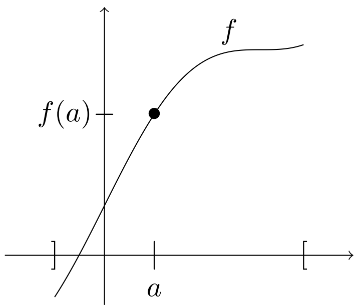
Proposição

Seja $a \in \mathbb{R}$ ao mesmo tempo um ponto de acumulação do conjunto $D \cap]a, +\infty[$ e do conjunto $D \cap] -\infty, a[$. Então f tende para o número real L quando x tende para a se e só se os limites laterais $\lim_{x\to a^+} f(x)$ e $\lim_{x\to a^-} f(x)$ existem e são iguais a L.

Corolário

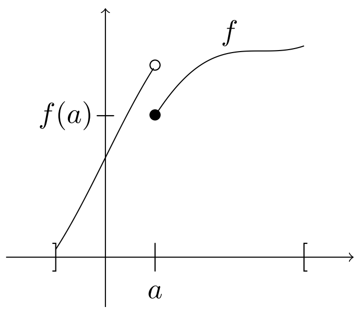
Seja $a \in D$ ao mesmo tempo um ponto de acumulação do conjunto $D \cap]a, +\infty[$ e do conjunto $D \cap] -\infty, a[$. Então f é contínua em a se e só se os limites laterais $\lim_{x\to a^+} f(x)$ e $\lim_{x\to a^-} f(x)$ existem e são iguais a $f(a)$.

Limites laterais



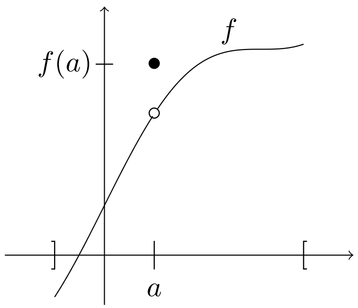
f é contínua em a. Os limites laterais existem em a e são iguais a $f(a)$.

Limites laterais



f não é contínua em a. Os limites laterais existem em a mas não são iguais.

Limites laterais

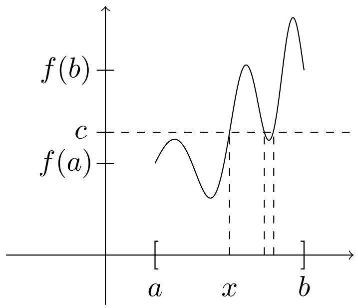


f não é contínua em a. Os limites laterais existem em a e são iguais, mas não são iguais a $f(a)$.

Teorema do valor intermédio

Teorema

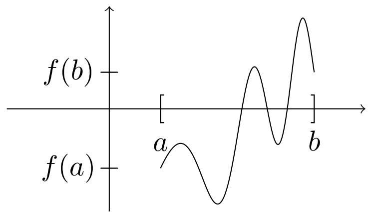
Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função contínua e c um real compreendido entre $f(a)$ e $f(b)$. Então existe pelo menos um $x \in [a, b]$ tal que $f(x) = c$.



Teorema do valor intermédio

Corolário 1: Teorema de Bolzano

Seja $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ uma função contínua tal que $f(a)f(b) \leq 0$. Então existe pelo menos um $x \in [a,b]$ tal que $f(x) = 0$.



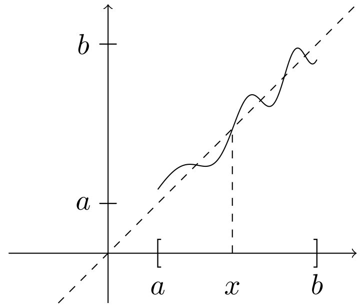
Exemplo

A função $f\colon [-1,0] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^7 + x + 1$ admite um zero. Com efeito, $f(-1) = -1$ e $f(0) = 1$. Como f é contínua e $f(-1)$ e $f(0)$ têm sinais opostos, pelo Teorema de Bolzano, existe $x \in [-1,0]$ tal que $f(x) = 0$.

Teorema do valor intermédio

Corolário 2: Teorema do ponto fixo

Seja $f : [a,b] \to [a,b]$ uma função contínua. Então existe pelo menos um $x \in [a,b]$ tal que $f(x) = x$.



Teorema de Weierstrass

Teorema

Seja $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ uma função contínua. Então existem $x_0, x_1 \in [a,b]$ tais que, para todo o $x \in [a,b]$, $f(x_0) \leq f(x) \leq f(x_1)$.