Primitivas Imediatas **Primitivas Quase Imediatas**

$$\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \qquad \int f(x)^\alpha f'(x)dx = \frac{f(x)^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$$

$$\int e^x dx = e^x + C \qquad \int e^{f(x)} f'(x)dx = e^{f(x)} + C$$

$$\int a^x \ln a dx = a^x + C \qquad \int a^{f(x)} f'(x) \ln a dx = a^{f(x)} + C$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln |x| + C \qquad \int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln |f(x)| + C$$

$$\int \frac{1}{x \ln a} dx = \log_a |x| + C \qquad \int \frac{f'(x)}{f(x) \ln a} dx = \log_a |f(x)| + C$$

$$\int \sin [f(x)] f'(x)dx = -\cos [f(x)] + C \qquad \int \cos [f(x)] f'(x)dx = \sin [f(x)] + C$$

$$\int \frac{1}{cos^2 x} dx = \tan x + C \qquad \int \frac{f'(x)}{cos^2[f(x)]} dx = \tan [f(x)] + C$$

Funções Elementares **Funções Compostas**

$$(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1} \qquad [f(x)^\alpha] = \alpha f(x)^{\alpha-1} f'(x)$$

$$(e^x)' = e^x \qquad [e^{f(x)}]' = e^x f'(x)$$

$$(a^x)' = a^x \ln a \qquad [a^{f(x)}]' = a^{f(x)} f'(x) \ln a$$

$$(\ln x)' = \frac{1}{x} \qquad [\ln f(x)]' = \frac{f'(x)}{f(x)}$$

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a} \qquad [\log_a f(x)]' = \frac{f'(x)}{f(x) \ln a}$$

$$(\tan x)' = \frac{1}{cos^2 x} \qquad [\tan f(x)]' \frac{f'(x)}{cos^2[f(x)]}$$

$$(\tanh x)' = \frac{1}{cosh^2 x} \qquad [\tanh f(x)]' \frac{f'(x)}{cos^2 h[f(x)]}$$

Primitivação por Partes

$$\int f'g = dx = \int f(x)dx, landscape + \int g(x)dx$$

A função $\cos(x)$ é estritamente decrescente em $[0, \pi]$ e estritamente crescente em $[\pi, 2\pi]$

$$f(x) = \cos(x) : \mathbb{R} \to [-1, 1] \qquad g(x) = f(x)_{|[0,\pi]} \to [-1, 1]$$

A função $\arccos(x)$ é contínua e estritamente decrescente. É derivável em $]-1, 1[$,landscape

$$f(x) = \arccos(x) : [-1, 1] \to [0, \pi]$$

$$\arccos'(x) : -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}(-1 < x < 1)$$

A função $\sin(x)$ é estritamente crescente em $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ e estritamente decrescente em $[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$

$$f(x) = \sin(x) : \mathbb{R} \to [-1, 1] \qquad g(x) = f(x)_{|[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]} \to [-1, 1]$$

A função $\arcsin(x)$ é contínua e estritamente crescente. É derivável em $]-1, 1[$

$$f(x) = \arcsin(x) : [-1, 1] \to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$$

$$\arcsin'(x) : \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}(-1 < x < 1)$$

A função $\tan(x)$ é ímpar, estritamente crescente em $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$

$$f(x) = \tan(x) : \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi | k \in \mathbb{Z}\} \qquad g(x) = f(x)_{|]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[} \to \mathbb{R}$$

A função $\arctan(x)$ é derivável e estritamente crescente

$$f(x) = \arctan(x) : \mathbb{R} \to]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$$

$$\arctan'(x) : \frac{1}{1+x^2}(x \in \mathbb{R})$$

$$f(x) = \text{arccot}(x) :]0, \pi[\to \mathbb{R}$$

A função $\cot(x)$ é ímpar, estritamente decrescente em $]0, \pi[$

$$f(x) = \cot(x) : \mathbb{R} \setminus \{k\pi | k \in \mathbb{Z}\} \qquad g(x) = f(x)_{|]0,\pi[} \to \mathbb{R}$$

$$f(x) = \text{arccot}(x) :]0, \pi[\to \mathbb{R}$$

Sejam $f : D \to E$ uma função e $x_0 \in D$ tal que a n-ésima derivada de f existe em x_0. O polinómio

$$\begin{aligned} P(x) &= f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 \\ &\quad + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n \end{aligned}$$

A fórmula de Taylor-Young de ordem 3 para a função $x \mapsto e^x$ à volta de 0 é

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + x^3\varepsilon(x), \quad \lim_{x\to 0}\varepsilon(x) = 0.$$

$$f(x) = P(x) + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}.$$

Aplicação ao cálculo de valores aproximados

Pretende-se mostrar que $0,095$ é um valor arredondado de $\ln 1,1$, isto é que

$$0,0945 \leq \ln 1,1 < 0,0955.$$

Consideremos a função f definida por $f(x) = \ln(1 + x)$. Temos

$$f'(x) = \frac{1}{1+x}, \quad f''(x) = -\frac{1}{(1+x)^2}, \quad f'''(x) = \frac{2}{(1+x)^3}$$

e

$$f(0) = 0, \quad f'(0) = 1, \quad f''(0) = -1.$$

A fórmula de Taylor-Lagrange de ordem 2 para f à volta de 0 é então

$$\ln(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{2x^3}{3!(1+c)^3}, \quad 0 < c < x \text{ ou } x < c < 0.$$

Tomando $x = 0,1$ vem

$$\begin{aligned} \ln 1,1 &= 0,1 - 0,005 + \frac{2 \times 0,001}{3!(1+c)^3} \\ &= 0,095 + \frac{0,001}{3(1+c)^3}, \quad 0 < c < 0,1. \end{aligned}$$

Aplicação ao cálculo de valores aproximados

Basta mostrar que $-0,0005 < \ln 1,1 - 0.095 < 0,0005$, ou seja

$$|\ln 1,1 - 0,095| < 0,0005.$$

Temos

$$\begin{aligned}
|\ln 1,1 - 0,095| &= \left|\frac{0,001}{3(1+c)^3}\right| \\
&= \frac{0,001}{3(1+c)^3} \qquad \text{(pois } c > 0\text{)} \\
&< \frac{0,001}{3(1+0)^3} \qquad \text{(pois } c > 0\text{)} \\
&= \frac{0,001}{3} \\
&< \frac{0,001}{2} \\
&= 0,0005.
\end{aligned}$$

Como calculado no exercício 38.a)

$$\cos x = \underbrace{1 - \frac{x^2}{2}}_{P(x)} + \underbrace{\frac{\operatorname{sen} c}{6} x^3}_{R(x)}, \quad \text{para algum } c \text{ entre } 0 \text{ e } x.$$

Portanto: $\cos(0.2) = \underbrace{P(0.2)}_{\text{estimativa}} + \underbrace{R(0.2)}_{\text{Resto}}$

$$P(0.2) = 1 - \frac{0.2^2}{2} = 1 - \frac{1}{2}\,\frac{4}{100} = 1 - \frac{2}{100} = 1 - 0.02 = 0.98$$

$$R(0.2) = \frac{\operatorname{sen} c}{6}\, 0.2^3 = \frac{\operatorname{sen} c}{6}\,\frac{8}{1000} = \operatorname{sen} c\ \frac{4}{3}\, 10^{-3}$$

$$|R(0.2)| = |\operatorname{sen} c|\ \frac{4}{3} \times 10^{-3} < 5 \times 10^{-3} \Rightarrow -5\times10^{-3} < R(0.2) < 5 \times 10^{-3}$$

Logo: $\cos(0.2) = 0.98$ calculado com erro inferior a 5×10^{-3}
ou seja com duas casas decimais corretas

Ratio test if there's factorials or powers and it's not a rational function

Root I do less often only if everything is raised to k or n

Seja f contínua em $[a, +\infty[$. Definimos o *integral impróprio de f em* $[a, +\infty[$ por

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{t \to +\infty} \int_a^t f(x)\,dx$$

Seja f contínua em $]-\infty, a]$. Definimos o *integral impróprio de f em* $]-\infty, a]$ por

$$\int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx = \lim_{t\to-\infty} \int_{t}^{a} f(x)\,dx$$

Seja f contínua em $\mathbb{R}$. Definimos o *integral impróprio de f em* $\mathbb{R}$ por

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{+\infty} f(x)\,dx$$

desde que ambos os integrais do 2° membro sejam convergentes.

Seja $f\ :]a, b] \to E$ contínua e não limitada. Definimos o *integral impróprio de f* por

$$\int_{a}^{b} f(x)\,dx = \lim_{t\to a^+} \int_{t}^{b} f(x)\,dx$$

Seja $f\ :\ [a, b[\to E$ contínua e não limitada. Definimos o *integral impróprio de f* por

$$\int_{a}^{b} f(x)\,dx = \lim_{t\to b^-} \int_{a}^{t} f(x)\,dx$$

(i) $\displaystyle\int_{1}^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}\,dx$ *é convergente para* $\alpha > 1$ *e divergente para* $\alpha \leq 1$.

(ii) $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} e^{-\alpha x}\,dx$ *é convergente para* $\alpha > 0$ *e divergente para* $\alpha \leq 0$.

Assim, se $|q| < 1$,

$$\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \lim_{n\to\infty} \frac{1-q^{n+1}}{1-q} = \frac{1}{1-q}.$$

Se $|q| \geq 1$, a série geométrica é divergente.

$$\sum_{k=r}^{\infty} a_k = \sum_{k=r}^{l-1} a_k + \sum_{k=l}^{\infty} a_k.$$

A série $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{1}{k^\alpha}$, onde α é um numéro real dado, denomina-se *série harmónica* de ordem α.

Para $\alpha > 1$, a série harmónica é convergente. Para $\alpha \leq 1$,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha} = +\infty.$$

Pela regra de Leibniz, a série $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^\kappa}{k}$ é convergente, pois a sucessão $\left(\frac{1}{k}\right)_{k\geq 1}$ tende para 0 de maneira monótona.

(a) Consideremos a função exponencial $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = e^x$. A série de Taylor de f a volta de $x_0 = 0$ é

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}.$$

Para $x \geq 0$, sejam $\alpha = 1$ e $C = e^x$. Tem-se $C \geq 1$ e então $C^n \geq C$. Para $0 \leq t \leq x$,

$$|f^{(n)}(t)| = e^t \leq e^x = C \leq C^n = \alpha C^n.$$

Para $x < 0$, sejam $\alpha = 1$ e $C = 1$. Então, para $x \leq t \leq 0$,

$$|f^{(n)}(t)| = e^t \leq 1 = \alpha C^n.$$

Segue-se que, para todo o $x \in \mathbb{R}$,

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}.$$

Exemplos

(b) Consideremos a função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \cos x$. A série de Taylor de f à volta de 0 é

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}.$$

Tomando $\alpha = C = 1$ tem-se $|f^{(n)}(t)| \leq \alpha C^n$ para todo o t entre x e 0. Logo

$$\cos x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}$$

para todo o $x \in \mathbb{R}$.

(c) Do mesmo modo, para todo o $x \in \mathbb{R}$,

$$\operatorname{sen} x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}.$$

3 possibilities when $\sum c_n(x-a)^n$ converges:

- $|x-a| < R$ (radius of convergence)
  I (interval of convergence)
- $x = a \leftarrow R = 0$, $I = \{a\}$
- x is any real number $\leftarrow R = \infty$, $I = (-\infty, \infty)$

57. $\frac{\;}{dx^3} + 6\frac{\;}{dx^2} - 15\frac{\;}{dx} - 100y = 0$

$\cos x + c_3 \sin x)$

61. $y'' - 3y' - 18y = 0$ 63. $y''' - 7y'' = 0$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^k} x^k$$

$$\left(\frac{x}{k}\right)^k$$

We require $\left|\frac{x}{k}\right| < 1$

$\Rightarrow \quad |x| < k$

$-k < x < k$

But $k \to \infty$ so always true

$\Rightarrow -\infty < x < \infty$

$R: \infty$

Check w/ root test!

$$\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{\left|\frac{x}{k}\right|^k}$$

$$= \lim_{k\to\infty} \left|\frac{x}{k}\right| = 0 < 1 \quad \forall x$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \underbrace{k^k x^k}$$

$$\downarrow$$

$$(xk)^k$$

$$\Downarrow$$

$$r = xk$$

Geometric: $\sum_{k=0}^{\infty} a \cdot r^k$

converges if $|r|$

We need $|r| = |xk| < 1$

But $k = 0, 1, 2, \ldots \to \infty$

So only true if $x = 0$

ROC $= 0$

IOC: $\{0\}$

ROC $= 0$

IOC: $\{0\}$

Root Test:

$$\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|}$$

$$= \lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{|k^k x^k|} = \lim_{k\to\infty} |xk| = |x| \lim_{k\to\infty} k = \infty$$

never < 1

$\implies$ ROC $= 0$ etc.

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^k}{\sqrt{k}}$$

Método I

$x = 1$: $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k}}$ diverge — série harmónica c

$\Rightarrow$ o raio de convergência é no máximo 1

$x = -1$: $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}}$ converge — critério de Leibn

$\Rightarrow$ o raio de convergência é pelo menos 1

Portanto $r = 1$

Podemos concluir que a série converge sse $x \in [-1,1[$

Aplicando o critério da razão:

Seja $p_k = \dfrac{x^k}{\sqrt{k}}$ e seja $\ell = \lim\limits_{k \to +\infty} \left| \dfrac{p_{k+1}}{p_k} \right|$

$$\ell = \lim_{k \to +\infty} \left| \frac{\dfrac{x^{k+1}}{\sqrt{k+1}}}{\dfrac{x^k}{\sqrt{k}}} \right| = \lim_{k \to +\infty} \frac{\sqrt{k}\,|x|^{k+1}}{\sqrt{k+1}\,|x|^k}$$

$$= \lim_{k \to +\infty} \sqrt{\frac{k}{k+1}}\,|x| = |x|$$

Segundo o critério da razão:

- a série converge se $|x| < 1$
- a série diverge se $|x| > 1$
- nada se pode concluir para $x = 1$ ou $x = -1$

Para $x = \pm 1$ fazemos o estudo separadamente (ver

c) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} k^k x^k$

Critério da Raiz:

$$\ell = \lim_{k \to +\infty} \sqrt[k]{|k^k x^k|} = \lim_{k \to +\infty} k|x| = \begin{cases} 0, & \text{s} \\ +\infty, & \end{cases}$$

Logo a série converge apenas para $x = 0$ e $R = 0$.

d) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k^k}$

Critério da raiz:

$$\ell = \lim_{k \to +\infty} \sqrt[k]{\left|\frac{x^k}{k^k}\right|} = \lim_{k \to +\infty} \frac{|x|}{k} = 0 \quad \forall$$

Logo a série converge $\forall x \in \mathbb{R}$ e $R = +\infty$