



Ficha Prática nº. 6:

Tema: Primitivas – Regras de Primitivação, Substituições, Primitivação por Partes.

1. Calcule as seguintes primitivas:

- | | | |
|-------------------------------------|---|---|
| a) $\int x^3 dx$ | h) $\int \frac{3x}{\sqrt[5]{1+5x^2}} dx$ | n) $\int 2^x dx$ |
| b) $\int 4x^3 - 3x^2 + 5 dx$ | i) $\int \frac{-2}{x^3 - 3x^2 + 3x - 1} dx$ | o) $\int 2\cos(2x) dx$ |
| c) $\int (x^2 + 1)^3 dx$ | j) $\int \frac{2}{x} dx$ | p) $\int \sin\left(\frac{x}{3}\right) dx$ |
| d) $\int \frac{1}{(x+1)^2} dx$ | k) $\int (x+3)^{-1} dx$ | q) $\int \frac{\arctg(x)}{1+x^2} dx$ |
| e) $\int (x^2 + 2)^3 \cdot 2x dx$ | l) $\int \frac{\ln(x)}{x} dx$ | r) $\int \frac{4}{\sqrt{1-x^2}} dx$ |
| f) $\int (x^3 + 1)^4 \cdot x^2 dx$ | m) $\int e^{2x} dx$ | |
| g) $\int \frac{1}{\sqrt[3]{5x}} dx$ | | |

2. Determina as seguintes primitivas:

- a) $\int \frac{x+1}{\sqrt{x}} dx$, fazendo a substituição $x = t^2$;
- b) $\int \frac{\ln(x)}{x} dx$, fazendo a substituição $\ln(x) = t$;

3. Calcula os seguintes integrais, utilizando a técnica de primitivação por substituição, se necessário:

- | | |
|--|---|
| a) $\int \sqrt{2x+1} dx$ | d) $\int \frac{1}{\sqrt{-x^2 + 3x + 1}} dx$ |
| b) $\int \frac{3^x - 3^{-x}}{3^x + 3^{-x}} dx$ | |
| c) $\int \frac{2x}{(x^2 + 2)\sqrt{x^4 + 4x^2 + 3}} dx$ | |

4. Calcule as seguintes primitivas, utilizando a primitivação por partes:

- | | | |
|----------------------------|-------------------------------------|------------------------------|
| a) $\int x e^x dx$ | f) $\int \frac{x \ln(x+1)}{1+x} dx$ | j) $\int \sin^2(x) dx$ |
| b) $\int e^{x^2} x^3 dx$ | g) $\int \frac{\ln^2(x)}{x^2} dx$ | k) $\int (x^2+1) \cos(x) dx$ |
| c) $\int \ln(x) dx$ | h) $\int \sin(\ln(x)) dx$ | l) $\int \arctg(x) dx$ |
| d) $\int \ln^2(x) dx$ | i) $\int x \sin(x) dx$ | m) $\int e^x \cos(x) dx$ |
| e) $\int x \sqrt{2-3x} dx$ | | |

5. Determine a função f definida em \mathbb{R}^+ que verifica as condições $f'(x) = 4x \ln(x)$ e $f(1) = 2$.

Tema: Primitivas – Primitivação de funções racionais.

6. Calcule os seguintes integrais de funções racionais:

- | | | |
|--|--|--|
| a. $\int \frac{1}{x^2-9} dx$ | b. $\int \frac{5x-12}{x(x-4)} dx$ | c. $\int \frac{x+2}{3x^2-12x+12} dx$ |
| d. $\int \frac{-15x^2+50x-25}{3x^3-4x} dx$ | e. $\int \frac{x^4}{x^4-1} dx$ | f. $\int \frac{x^3+x^2+x+3}{x^4+2x^2-3} dx$ |
| g. $\int \frac{x^4}{2x^3-4x^2+8x-16} dx$ | h. $\int \frac{2x^4-2x^3+6x^2-5x+1}{x^3-x^2+x-1} dx$ | i. $\int \frac{x^4+8x^2}{2x^3-2x^2+18x-18} dx$ |
| j. $\int \frac{x^5}{2x+1} dx$ | k. $\int \frac{2x^3}{(x^2+1)^2} dx$ | l. $\int \frac{t+1}{t^4+t^2} dt$ |
| m. $\int \frac{x+1}{x(x^2-2x+2)} dx$ | n. $\int \frac{x^4}{(x-1)(x+1)(x+2)} dx$ | o. $\int \frac{x^2+1}{12+3x^2} dx$ |

7. Determine a primitiva da função $f(x) = \frac{3}{9x^2+6x+2}$ que toma o valor $\frac{5\pi}{4}$, para $x = 0$.

8. Determine a função f tal que $f''(x) = \frac{8}{(x+1)^3}$, $f'(1) = -1$ e $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$.

Tema: Primitivas – Primitivação de funções trigonométricas. Substituições trigonométricas.

9. Calcule os integrais das seguintes funções trigonométricas:

a) $\int \cos\left(\frac{x}{5}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{x}{5}\right) dx$

b) $\int \operatorname{sen}^2(x) \cos(x) dx$

c) $\int \operatorname{tg}(2x) dx$

d) $\int x \cot g(x^2) dx$

e) $\int \frac{\cos^2(x)}{\operatorname{sen}^4(x)} dx$

f) $\int \operatorname{cosec}\left(\frac{x}{3}\right) dx$

g) $\int \frac{\operatorname{sen}(x) + \cos(x)}{\cos(x)} dx$

h) $\int \frac{\sec(\sqrt{x})}{(\sqrt{x})} dx$

i) $\int \operatorname{sen}^2(5x) dx$

j) $\int \cos^3(x) dx$

k) $\int \sec^3(x) dx$

l) $\int \operatorname{sen}^2(x) \cos^3(x) dx$

m) $\int \operatorname{sen}^4(3x) \cos^5(3x) dx$

n) $\int \operatorname{sen}^3\left(\frac{x}{2}\right) \cos^5\left(\frac{x}{2}\right) dx$

o) $\int \operatorname{sen}^2(2x) \cos^4(2x) dx$

p) $\int \operatorname{sen}^2(x) \cos^2(x) dx$

q) $\int \operatorname{tg}^3(2x) \sec(2x) dx$

r) $\int \operatorname{sen}(3x) \operatorname{sen}(2x) dx$

s) $\int \operatorname{sen}(3x) \cos(5x) dx$

t) $\int \cos(4x) \cos(2x) dx$

u) $\int \sqrt{\operatorname{sen}(x)} \cos(x) dx$

v) $\int \operatorname{tg}^5(x) dx$

w) $\int \sqrt{1 - \cos(x)} dx$

x) $\int (1 + \cos(3x))^{\frac{3}{2}} dx$

y) $\int \frac{1}{\sqrt{1 - \operatorname{sen}(2x)}} dx$

z) $\int \operatorname{tg}^3(3x) \sec^4(3x) dx$

α) $\int \frac{\operatorname{sen} x}{\cos^3 x} dx$

β) $\int \frac{\operatorname{sen}^2 x}{\cos x} dx$

10. Calcule as seguintes primitivas, utilizando as substituições trigonométricas, sempre que necessário:

a) $\int \frac{1}{x^2 \sqrt{x^2 - 4}} dx$

b) $\int \frac{1}{x^2 \sqrt{x^2 + 9}} dx$

c) $\int \frac{1}{x^2 \sqrt{4 - x^2}} dx$

d) $\int \sqrt{x^2 + 5} dx$

e) $\int \frac{1}{(9 - x^2)^{\frac{3}{2}}} dx$

f) $\int \frac{1}{1 + \operatorname{sen} x} dx$

g) $\int \frac{x^2}{\sqrt{x^2 - 4}} dx$

h) $\int \frac{\sqrt{9 - 4x^2}}{x} dx$

i) $\int \frac{\sqrt{25 - x^2}}{x} dx$

$$\begin{array}{lll} \text{j.) } \int \frac{1 + \operatorname{sen}(x)}{1 + \cos(x)} dx & \text{k.) } \int \frac{1}{x^2 \sqrt{9 - 2x^2}} dx & \text{l.) } \int \frac{x^3}{(\sqrt{1 - x^2})^3} dx \\ \text{m.) } \int x^2 \sqrt{2 - x^2} dx & & \end{array}$$

11. Calcule os integrais das seguintes funções usando o método que achar mais conveniente.

$$\begin{array}{lll} \text{a.) } \int \frac{x}{\sqrt{3 - x^2}} dx & \text{b.) } \int \frac{1}{e^x + 1} dx & \text{c.) } \int \frac{x + 3}{x^2 \sqrt{3 + 2x}} dx \\ \text{d.) } \int \frac{1}{e^{2x} - 2e^x} dx & \text{e.) } \int \frac{\arccos\left(\frac{x}{2}\right)}{\sqrt{4 - x^2}} dx & \text{f.) } \int (x^2 + 1)^{-\frac{3}{2}} dx \\ \text{g.) } \int \arcsin^2(x) dx & \text{h.) } \int \frac{e^x}{\sqrt{1 - e^{2x}}} dx & \text{i.) } \int \frac{7^x}{7^x - 7^{-x}} dx \\ \text{j.) } \int \frac{3x^2 + 5x}{x^3 + x^2 - x - 1} dx & \text{k.) } \int \sin^3(x) \cdot \sec^2(x) dx & \text{l.) } \int \frac{x \arctan(x)}{\sqrt{1 + x^2}} dx \\ \text{m.) } \int \frac{1}{(x^2 - 4x + 4)(x^2 - 4x + 5)} dx & \text{n.) } \int \frac{x^2 + 3}{(x + 1)^4} dx & \text{o.) } \int \frac{\cos(\pi x)}{e^x} dx \\ \text{p.) } \int \frac{1 + \sin(x)}{\sin(x) + \sin(x) \cos(x)} dx & \text{q.) } \int \frac{x^2}{\sqrt{1 + x^2}} dx & \text{r.) } \int \frac{3 - 2x}{5x^2 + 7} dx \\ \text{s.) } \int \frac{3 - 4x}{(1 - 2\sqrt{x})^2} dx & \text{t.) } \int x \ln\left(\frac{1 - x}{1 + x}\right) dx & \text{u.) } \int \frac{1}{e^x + 4e^{-x}} dx \\ \text{v.) } \int \frac{1}{x \ln x \cdot \ln(\ln x)} dx & \text{w.) } \int \sin^5(x) dx & \text{x.) } \int \frac{x + 5}{x + 4} (x + 2)^{-\frac{1}{2}} dx \\ \text{y.) } \int e^{x^3} \left(\frac{1}{3} + x^3\right) dx & \text{z.) } \int \sqrt{1 + e^x} dx & \end{array}$$

Sugestões para mais exercícios:

Sebenta de exercícios: exercícios 101, 102 e 103 do capítulo 3.