☐ ENGFIS ☐ FIS Nome N^o

Instruções: responda e justifique brevemente as suas respostas nesta folha.

1. (1 valor) Determine uma equação diferencial linear de segunda ordem que admita como soluções

$$x_{+}(t) = e^{2t}$$

$$x_{+}(t) = e^{2t}$$
 e $x_{-}(t) = e^{-3t}$

2. (1 valor) Determine a solução da equação diferencial linear

$$\dot{x} + x = 2e^{-t} .$$

com condição inicial x(0) = 3.

3. (1 valor) Determine a solução geral (ou seja, todas as soluções) da equação diferencial linear homogénea

$$\ddot{x} + 6\dot{x} + 13x = 0$$
.

4. (1 valor) Determine a solução da equação diferencial linear homogénea do exercício 3 com condições iniciais x(0) = 0 e $\dot{x}(0) = 1$.

5. (1 valor) Determine uma solução da equação diferencial linear não homogénea

$$\ddot{x} + 4x = 3\cos(2t).$$

6. (1 valor) Determine uma base ortonormada do plano $P=\{x+y-z=0\}\subset \mathbb{R}^3.$

7. (1 valor) Calcule a projeção ortogonal do vetor ${\bf v}=(3,2,1)$ sobre o plano P definido no exercício 6.

8. (1 valor) Calcule a fatorização QR (ou seja, determine uma matriz ortogonal Q e uma matriz triangular superior R tais que A=QR) da matriz

$$A = \left(\begin{array}{cc} 1 & -1 \\ 1 & 5 \end{array}\right)$$

9. (1 valor) Considere, no espaço euclidiano complexo \mathbb{C}^3 munido do produto escalar usual, o operador S(x,y,z) = (x+iy-z,2iy+3z,iz). Determine o operador S^* e a composição S^*S .

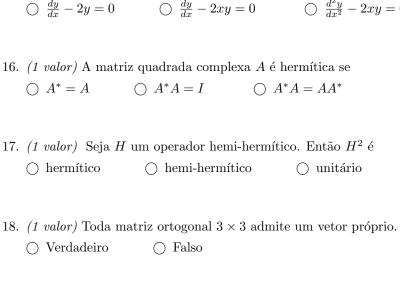
10. (1 valor) Considere, no espaço euclidiano complexo \mathbb{C}^2 munido do produto escalar usual, o operador $T:\mathbb{C}^2\to\mathbb{C}^2$ definido por T(x,y)=(2x-iy,ix+y). Determine uns operadores auto-adjuntos X e Y tais que T=X+iY.

11. (1 valor) Determine a matriz que define, relativamente à base canónica, um operador ortogonal $R: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que $R(1,0) = (\sqrt{3}/2, -1/2)$.

12. (1 valor) Calcule valores e vetores próprios da matriz hermítica

$$C = \left(\begin{array}{cc} 0 & 2i \\ -2i & 0 \end{array}\right)$$

	$(1\ valor)$ Considere a matriz C definida no exercício 12. Determine uma matriz unitária U e uma matriz diagonal Λ tais que $C=U\Lambda U^{-1}.$
	$(1\ valor)$ Dê um exemplo, se existir, de um operador normal $N:\mathbb{C}^2\to\mathbb{C}^2$ que não seja nem nermítico, nem hemi-hermítico, nem unitário.
	$(1 \ valor)$ A função $y(x)=e^{x^2}$ é solução da equação diferencial $\bigcirc \frac{dy}{dx}-2y=0 \qquad \bigcirc \frac{dy}{dx}-2xy=0 \qquad \bigcirc \frac{d^2y}{dx^2}-2xy=0$
($(1\ valor)$ A matriz quadrada complexa A é hermítica se $\bigcirc A^* = A \qquad \bigcirc A^*A = I \qquad \bigcirc A^*A = AA^*$ $(1\ valor)$ Seja H um operador hemi-hermítico. Então H^2 é



19. $(1 \ valor)$ Existe uma matriz ortogonal R tal que

$$R^2 = \left(\begin{array}{cc} 0 & -1\\ 1 & 0 \end{array}\right)$$

- O Verdadeiro O Falso
- 20. (1 valor) Se a matriz quadrada A é hermítica, então os seus valores próprios λ satisfazem
- $\bigcirc \ i\lambda \in \mathbb{R} \qquad \qquad \bigcirc \ \lambda \in \mathbb{R} \qquad \qquad \bigcirc \ |\lambda| = 1$

Instruções: responda e justifique brevemente as suas respostas nesta folha.

1. $(1 \ valor)$ Identifique a matriz simétrica A que define a forma quadrática

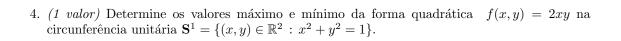
$$Q(x,y) = 5x^2 - 6xy + 5y^2$$

e determine os seus valores próprios.

2. $(1 \ valor)$ Determine uma matriz ortogonal U que diagonaliza a matriz simétrica A do exercício 1, ou seja, tal que $U^{\top}AU$ seja diagonal.

3. (1 valor) Identifique e esboce a cónica definida pela equação cartesiana

$$5x^2 - 6xy + 5y^2 = 1$$



5. (1 valor) Calcule os valores singulares da matriz

$$B = \left(\begin{array}{cc} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{array}\right)$$

6. (1 valor) Calcule o grupo a um parâmetro e^{tB} gerado pela matriz B definida no exercício 5.

7. $(1 \ valor)$ Dê uma definição do grupo $\mathbf{SU}(2)$, e um exemplo de uma matriz deste grupo.

8. (1 valor) Determine a solução do sistema

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \dot{q} = & 2q - p \\ \dot{p} = & q + 2p \end{array} \right.$$

com condições iniciais (q(0), p(0)) = (1, 1).

9. (1 valor) Esboce o retrato de fases do sistema definido no exercício 8.

10. (1 valores) Considere o sistema não homogéneo

$$\left\{ \begin{array}{ll} \dot{q} = & -2q - p \\ \dot{p} = & q - 2p + \cos(t) \end{array} \right.$$

Determine a solução com condições iniciais (q(0), p(0)) = (0, 0).

11.	$(1\ valor)$ Se A é uma matriz real simétrica e U é uma matriz ortogonal então $U^\top A U$ é \bigcirc anti-simétrica. \bigcirc ortogonal. \bigcirc simétrica.
12.	$(1 \ valor)$ Qual dos seguintes subconjuntos de $\mathbf{O}(n,\mathbb{R})$ não é um subgrupo? $\bigcirc \ \{A \in \mathbf{O}(n,\mathbb{R}) : \mathrm{Det} A = -1\}$ $\bigcirc \ \{A \in \mathbf{O}(n,\mathbb{R}) : \mathrm{Det} A > 0\}$ $\bigcirc \ \{A \in \mathbf{O}(n,\mathbb{R}) : \mathrm{Det} A = 1\}$
13.	$(1\ valor)$ Se H é uma matriz quadrada hermítica, então e^{iH} é \bigcirc unitária. \bigcirc hermítica. \bigcirc positiva.
14.	(1 valor) Se A e B são duas matrizes quadradas, então $\frac{d}{dt} \left(e^{tA} e^{tB} \right)$ é igual a $\bigcirc (A+B)e^{tA}e^{tB}$ $\bigcirc e^{tA}(A+B)e^{tB}$ $\bigcirc e^{tA}e^{tB}(A+B)$
15.	$(1\ valor)$ A forma quadrática $2x^2+2xy+y^2$ é linearmente equivalente 1 à forma $\bigcirc\ x^2+y^2$ $\bigcirc\ x^2-y^2$ $\bigcirc\ -x^2-y^2$
16.	$(1\ valor)$ Os semi-eixos do elipsoide $3x^2-2xy+3y^2\leq 2$ são $\bigcirc \ 1$ e 2 $\ \bigcirc \ 1$ e $\sqrt{2}$ $\ \bigcirc \ 1$ e $1/\sqrt{2}$
17.	$(1\ valor)$ Se A é uma matriz quadrada com ${\rm Tr} A=0$ então \bigcirc Det $\left(e^A\right)=0$ \bigcirc Det $\left(e^A\right)=1$ \bigcirc $e^{{\rm Det} A}=1$
18.	 (1 valor) A álgebra de Lie (o espaço tangente na identidade) do grupo unitário SO(2) é o espaço linear das matrizes reais 2 × 2 simétricas. o espaço linear das matrizes reais 2 × 2 com traço nulo. o espaço linear das matrizes reais 2 × 2 anti-simétricas.
19.	$ (1 \ valor) \ \mathrm{Seja} \ B = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix} \right). \ \mathrm{Ent\tilde{ao}} \ e^{tB} \ \acute{\mathrm{e}} \ \mathrm{igual} \ \mathrm{a} \\ \bigcirc \ \left(\begin{smallmatrix} \cos(t) & -\sin(t) \\ \cos(t) & \sin(t) \end{smallmatrix} \right) \qquad \bigcirc \ \left(\begin{smallmatrix} \cosh(t) & \sinh(t) \\ \sinh(t) & \cosh(t) \end{smallmatrix} \right) \qquad \bigcirc \ \left(\begin{smallmatrix} \cosh(t) & -\sinh(t) \\ \cosh(t) & \sinh(t) \end{smallmatrix} \right) $
20.	(1 valor) Considere o sistema linear definido por $ \left\{ \begin{array}{ll} \dot{x}=&2x+7y\\ \dot{y}=&x+3y \end{array} \right. $
	A origem é O um nodo instável. O um ponto de sela. O um foco estável.

As formas quadráticas Q(x,y) e P(x,y) são linearmente equivalentes se existe uma transformação linear invertível $(x,y)\mapsto (x',y')=(ax+by,cx+dy)$ tal que P(x',y')=Q(x,y)