

Cálculo para Ciências

1^o teste

21.11.2022

Justifique todas as respostas.

Exercício 1. [3,0 valores] Considere a função $f(x) = \frac{1}{|x+1| - 1}$

- a) Determine o domínio de f .
- b) Determine $A = f^{-1}\left(\left]\frac{1}{4}, +\infty\right[\right)$.
- c) Seja $B = A \cap [-7, \pi] \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$. Calcule, caso existam, o máximo e o mínimo de B , justificando.

Se não conseguiu resolver b), use $A =]-5, -1[\cup]2, 5[$.

Exercício 2. [6,0 valores] Considere o polinómio $P(x) = \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{2}x^4 - \frac{1}{3}x^3 + x^2 - \frac{1}{2}$.

- a) Sabendo que $x = 1$ é um zero de P' , calcule os restantes zeros de P' .
- b) Determine os intervalos de monotonia de P e os máximos e mínimos locais de P .
- c) Indique quantos zeros tem P , justificando.

Exercício 3. [6,0 valores] Calcule:

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \operatorname{sen}^2(x)}{\operatorname{sh}(x) \operatorname{tg}(x)}$; b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{\operatorname{sen} x}}{x^2}$.

Exercício 4. [3,0 valores] Dê exemplo de, ou justifique porque não existe, uma função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que:

- a) f contínua, $f(0) = 0$, $f(1) = 1$ e $\frac{1}{2} \notin D'f$.
- b) f é derivável, estritamente decrescente, $f(0) = 1$ e $f'(0) = 0$;
- c) f contínua, $f(0) = -1$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$ e f tem três zeros.

Exercício 5. [2,0 valores] Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função derivável em x_0 . Mostre que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + 4h) - f(x_0 - h)}{h} = 5f'(x_0).$$

FIM

BOA SORTE