Universidade do Minho
Escola de Ciências

Departamento de Matemática

Cálculo para Engenharia

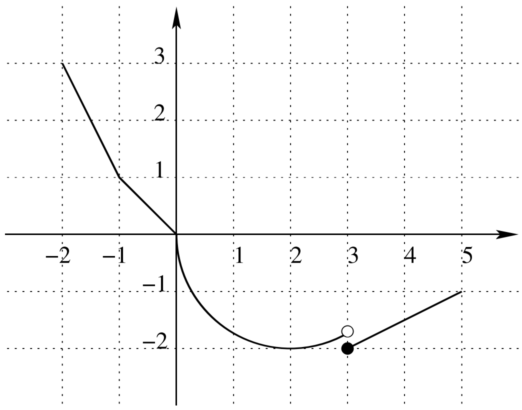
Nome

Número

I

As respostas à questão deste grupo devem ser dadas na folha de enunciado.

Questão 1. [6 valores] Considere a função $f : [-2, 5] \longrightarrow \mathbb{R}$ cujo gráfico se apresenta na figura anexa. No intervalo $[0, 3[$ o gráfico da função é um arco da circunferência centrada em $(2, 0)$ de raio 2, cuja equação é $(x-2)^2 + y^2 = 4$.



a) Classifique a função f quanto à injetividade.

b) Determine $f^{-1}([1, 2])$.

c) Indique os pontos de mínimo local de f, e o respetivo valor de f.

d) Indique os pontos onde f é descontínua.

e) Indique os pontos onde f não é derivável.

f) Indique o maior valor positivo para δ de modo a que seja verdadeira a implicação,

$$|x-2| < \delta \Rightarrow |f(x) + 2| < \frac{1}{2}.$$

II

As respostas às questões deste grupo devem ser convenientemente justificadas.

Questão 1. [3 valores] Calcule cada um dos seguintes limites:

a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sh} x}{e^x - 1}$;

b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{sen}(\sqrt{2}x)}$.

Questão 2. [3 valores] Considere a função bijetiva $f : \mathbb{R}^+ \longrightarrow]1, +\infty[$ tal que $f(x) = \operatorname{ch} \frac{1}{x}$.

a) Calcule a derivada de f.

b) Determine a função inversa de f.

c) Calcule a derivada da função inversa de f. $\Big($Pode usar $f^{-1}(x) = \frac{1}{\ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)}\Big)$.

Questão 3. [2 valores] Em cada uma das alíneas seguintes apresente um exemplo ou justifique porque não existe:

a) Dois números irracionais a e b tais que $10^{-3} < |a - b| < 10^{-1}$;

b) Um conjunto X tal que $X \cap X' = \{0\}$;

c) Uma função $f : [0, 1] \to [0, 1[$ bijetiva;

d) Uma função $f : [0, 2] \longrightarrow \mathbb{R}$ cujo conjunto dos pontos de continuidade seja o intervalo $[0, 1]$.

III

Em cada uma das questões seguintes, assinale neste enunciado, a afirmação verdadeira; não deve apresentar qualquer justificação.
Cada resposta certa vale 1 valor e cada resposta errada desconta 0,25 valores.

Questão 1. O conjunto $\{x \in \mathbb{R} : |1 - x| \geq |2x + 4|\}$ é igual ao conjunto:

○ $\{x \in \mathbb{R} : x^2 + 6x + 5 \leq 0\}$.

○ $\{x \in \mathbb{R} : 0 \leq 2x + 4 \leq 1 - x\}$.

○ $\{x \in \mathbb{R} : |\frac{2x+4}{1-x}| \leq 0\} \cup \{1\}$.

○ $]-\infty, -1]$.

Questão 2. Considere o conjunto $A = \left[1, \sqrt{2}\,\right] \cap \mathbb{Q}$.

○ A é minorado mas não majorado.

○ A tem mínimo mas não tem máximo.

○ A tem mínimo e máximo.

○ A tem supremo mas não tem ínfimo.

Questão 3. Seja $f : \mathbb{R}_0^- \to [-5, +\infty[$ tal que $f(x) = x^2 - 5$

○ $f^{-1}(x) = \sqrt{x + 5}$.

○ $f^{-1}(x) = -\sqrt{x + 5}$.

○ $f^{-1}(x) = \frac{1}{x^2-5}$.

○ f não é invertível.

Questão 4. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = \operatorname{sh} x + \operatorname{ch} x$. Então

○ f anula-se em pelo menos um ponto.

○ f é sobrejetiva.

○ f é crescente.

○ $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$.

Questão 5. O valor de $\operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg} \frac{5\pi}{7}\right)$ é

○ $\frac{5\pi}{7}$.

○ $\frac{2\pi}{7}$.

○ $\frac{\pi}{7}$.

○ $-\frac{2\pi}{7}$.

Questão 6. Se uma função $f : \mathbb{R} \longrightarrow [-1, 1]$ é contínua, então

○ f não é monótona.

○ f não é injetiva.

○ f não é bijetiva.

○ f não é sobrejetiva.