statics assign

1.Frequentist방법과 Bayesian방법론의 차이점을 10줄 이내로 정리하여 작성해주세요.

Frequentist와 Bayesian은 확률의 정의를 내리는 부분에서부터 차이가 발생합니다. Frequentist는 반복가능한 사건의 발생빈도에 기반한 객관적인 것으로 확률을 정의내립니다. 반면에 Bayesian은 주관적 믿음의 정도를 나타내는 것으로 확률을 정의내립니다. 또한 Frequentist는 모수를 고정된 값으로 생각하는 것에 반해 Bayesian은 모수를 확률적으로 변한는 확률변수로 취급합니다. Bayesian 방법론은 사전 지식이나 믿음을 바탕으로 초기 확률(사전 확률) 설정하고 새로운 증거나 데이터를 통해 확률을 갱신(사후 확률) 하기 때문에 불확실성을 다루는 데 유용합니다. 특히 ML분야에서 데이터로부터 파라미터들을 예측할때 Bayesian방법론이 많이 쓰입니다.

2. 베이지안은 사전분포 g(θ)를 완벽하게 안다고 가정한다는 문제점이 존재합니다. 이를 어떻게 해결할 수 있는지 10줄 이내로 정리하여 작성해주세요.

첫번째 해결방안은 비모수적 베이지안 방법을 사용하는 것입니다. 이는 특정 확률분포를 미리 가정하지 않고 데이터에 따라 모델 구조및 모수의 개수를 유연하게 바꾸는 방법입니다. 비모수적 베이지안 방법은 ML에서도 많이쓰인다고 합니다. 예를 들어 학습을 할때 클러스터가 몇개가 있다고 단정지을 순 없습니다. 이렇게 클러스터의 개수(모수)를 가정하지 않고 모델을 세우는 것을 비모수적 베이지안 방법이라고 합니다.
두번째 해결방안은 감마분포를 활용하는 것입니다. 0부터 무한대의 값을 가지는 양수값을 추정하는 베이지안 추정에 사용됩니다.

좀더 자세히 예기하자면 모수의 베이지안 추정에 사용됩니다. 감마분포를 사전확률(prior)로 설정했고, 포아송분포/지수분포가 likehood(가능도)라고 한다면 사후확률(posterior은 다시 감마분포가 된다는 주장입니다. Gam(x;a,b)=1Γ(a)$baxa$-1e-bx 이렇게 생겼으며 감마분포의 모수는 a, b입니다.

3. 반례

$$f_n(x) = \begin{cases} n & if\ 0 \le x \le \frac{1}{n} \\ 0 & otherwise \end{cases}$$

이라는 확률밀도함수가 있다고 가정해봅시다.

$f_n(x)$ 의 누적분포함수를 $F_n(x)$ 라고 해봅시다.

$$F_n(x) = \begin{cases} 0 & if\ x \le 0 \\ 1 & if\ 0 < x \end{cases}$$

$F_n(x)$는 모든 실수에 대해 수렴합니다.

반면 확률밀도 함수는 $\lim_{n \to 0+} f_n(0) = \infty$ 즉 n이 0으로 수렴할때 $f_n(0)$ 은 무한대로 발산하게 됨으로 확률밀도함수로 분포수렴을 정의할 수 없습니다.

4. clt 증명

이용할 성질

- 확률변수 X, Y가 독립이면 $M_{X+Y}(t) = M_X(t) + M_Y(t)$
- 어떤 두 확률 분포의 적률 생성 함수가 동일하면, 두 확률 분포는 동일합니다.

$M_{\frac{\sqrt{n}(\overline{X}-\mu)}{\sigma}}$
$= M_{\frac{\sqrt{n}((X_1+X_2+\cdots+X_n\frac{1}{n})-\mu)}{\sigma}}$
$= M_{\frac{(X_1+X_2+\cdots+X_n-n\mu)}{\sigma\sqrt{n}}}$
$= M_{\frac{X_1-\mu}{\sigma}} + M_{\frac{X_2-\mu}{\sigma}} + \cdots + M_{\frac{X_n-\mu}{\sigma}}$
$= M_{\frac{X_1-\mu}{\sigma\sqrt{n}}} M_{\frac{X_2-\mu}{\sigma\sqrt{n}}} \ldots M_{\frac{X_n-\mu}{\sigma\sqrt{n}}}$
$= E(exp(\frac{X_1-\mu}{\sigma\sqrt{n}}))E(exp(\frac{X_2-\mu}{\sigma\sqrt{n}}))\ldots E(exp(\frac{X_n-\mu}{\sigma\sqrt{n}}))$
$= E(exp(\frac{X-\mu}{\sigma\sqrt{n}}))^n$
$= (M_{\frac{X-\mu}{\sigma}}(\frac{t}{\sqrt{n}}))^n$

$n \to \infty$ 로 보내며 표준화한 표번평균의 적률생성함수가 표준정규분포의 생성함수와 동일함을 보이겠습니다. 현제 구한 식이 1^∞ 꼴이기 때문에 자연로그를 씌워 계산하겠습니다.

$\lim_{n\to\infty} ln(M_{\frac{X-\mu}{\sigma}}(\frac{t}{\sqrt{n}}))^n$
$= \lim_{n\to\infty} n\ln(M_{\frac{X-\mu}{\sigma}}(\frac{t}{\sqrt{n}}))$
$y = \frac{1}{\sqrt{n}}$ 이라고 두겠습니다.
$= \lim_{n\to\infty} \frac{\ln(M_{\frac{X-\mu}{\sigma}}(ty))}{y^2}$
로피탈 정리를 2번 쓰겠습니다.
$= \lim_{n\to\infty} \frac{tM'_{\frac{X-\mu}{\sigma}}(ty)}{2y}$
$= \lim_{n\to\infty} \frac{t^2}{2} M''_{\frac{X-\mu}{\sigma}}(yt)$

$= \frac{t^2}{2} M''(0)$
$= \frac{t^2}{2}$

즉 $\lim_{n\to\infty} M_{\frac{\sqrt{n}(\overline{X}-\mu)}{\sigma}} = \lim_{n\to\infty} M_{\frac{X-\mu}{\sigma}}(\frac{t}{\sqrt{n}})^n = \exp(\frac{t^2}{2})$ 이다. 한편 평균μ, 분산σ^2 인 정규분포의 적률생성함수는 $M_X = \exp(t\mu + \frac{\sigma^2 t^2}{2})$ 입니다.표준정규분포는 평균$\mu = 0$, 분산$\sigma^2 = 1$ 임으로 표준정규분포의 적률생성함수는 $\exp(\frac{t^2}{2})$ 입니

다. 따라서 표준화한 표본 평균의 적률생성함수와 표준정규분포의 적률생성함수가 같음으로 중심극한정리가 성립합니다.