Graph Theory: Homework #16

Lin Hung Cheng B01902059

Problem 1

(1) → (2)
由(1)可知$deg(u), deg(v) \geq \frac{n}{2}$
，所以$deg(u) + deg(v) \geq n$
(2) → (3)
若(2)成立時，$d_k <= k, 1 \leq k < \frac{n}{2}$
則可以找到$d_i, d_j, ij \notin G, 1 \leq i, j < \frac{n}{2}$使deg(i)+deg(j) < n
(因為$deg(i) < \frac{n}{2}$，i不可能連至所有$d_j\{j < \frac{n}{2}\}$)，矛盾。
(3) → (4)
由(3)知，若$d_j < j$，則$j \geq \frac{n}{2}$，所以j, k都大於$\frac{n}{2}$，因此$d_j, d_k > d_{\frac{n}{2}}$，$d_j + d_k \geq n$。
(4) → (5)
(5)的k, n-k代入(4)，可得$k < n - k$，$d_k \leq k$，若$d_{n-k} < n - k$，則$d_k + d_{n-k} \geq n$，$d_{n-k} \geq n - k$，矛盾。所以$d_{n-k} \geq n - k$。
(5) → (6)
設符合條件(6)時會使$d_i + d_j < n$
考慮符合(6)條件的$(i, j) = (k, n - k)$(若i+j = n時成立, j更大的情況也會成立)，且令$i \leq j$。
則若$i < \frac{n}{2}$，由(5)可知，$d_j \geq n - k$，與(6)的條件矛盾。
所以$i \geq \frac{n}{2}$，此時$d_i < i, d_j < j$，且因為G不包含ij，
...
(6) → (7)

Problem 2

Solution

取3-邊著色中的兩色為邊的G'，此時所有點的度數皆為2，即為一圈，且每一點皆經過，為一hamilton圈。

Problem 3

Solution

Problem 4

Solution圖一有1個八邊的面，6個四邊的面。
由Grinberg定理可知，$6(f_8 - g_8) + 4(f_6 - g_6) = 0$
由於八邊的面為外邊，可寫成$4(f_6 - g_6) = 6$。
不成立，所以無hamilton圈。
圖二有3個四邊的面，6個六邊的面。
由Grinberg定理可知，$4(f_6 - g_6) + 2(f_4 - g_4) = 0$
可由下圖路徑得到hamilton圈。

Problem 5

Proof. 21個五邊的面，3個八邊的面，1個九邊的面。
由Grinberg定理可知，$3(f_5 - g_5) + 6(f_8 - g_8) + 7(f_9 - g_9) = 0$，而因為九邊的面必為外邊，$f_9 - g_9 = -1$。
所以$3(f_5 - g_5) + 6(f_8 - g_8) = 7$，不可能成立。