第 1 章　通論

發現了！
– Archimedes

1.1.　圖論緣起

歷史證明， 那些贊助過數學——精密科學的共同源頭——發展的帝國君王， 也是統治最英明、榮耀最長久的君王； Euler（1707∼1783）所處的時期正是這樣的一個年代。1727 年經過 Bernoulli 兄弟的引薦， 俄國皇后 Catherine 召見 Euler 到聖彼得堡， 先是讓他在 1731 年成爲物理教授， 兩年後又增添了數學教授的職位。 在這樣優厚的環境下， Euler 得以全神投入他所喜愛的數學研究； 令人惋惜的是， 因爲努力過頭了， 使得他在 1735 年時右眼失明。 在這種情況下， 不可能會有人繼續放任他無止盡地工作下去， 所以 Euler 的太太便強迫安排全家一起到山明水秀的 Königsberg 去度假， 希望能抒解一下他的工作壓力。 故事就這樣開始了。

東普魯士的 Königsburg 市（今俄羅斯的 Kaliningrad 市）有一條 Pregel 河（今 Pregolya 河）流經， 河的中心有兩個小島， 小島與河的兩岸有七座橋相連接（如圖 1.1 所示）。 當地流傳著這樣一則謎題， 要如何才能從某一塊土地開始、將每一座橋恰好經過一次。

觀察力略爲敏銳的遊客在經過一些嘗試之後， 很快就會感覺到這應該是不可能的。漫步在橋上的 Euler， 完全把太太安排度假的事情拋在腦後， 邊走還邊構思著一篇關於力學的重大論文； 想累了， 就改來想想到底要怎麼去說服 Bernoulli， 關於所有正整數

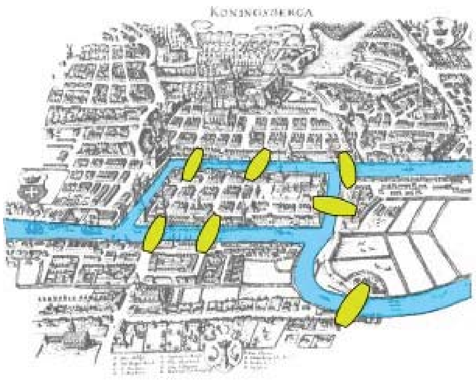


圖 1.1: Königsburg 地圖。

平方倒數和下列的結果

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots=\frac{\pi^2}{6}\text{。}$$

當然， 走在這些橋上不可能不去想關於這個小鎮所流傳的七橋問題， 但他不只想要解決七橋問題， 更希望能夠找到所有類似問題的一般性結論。 忽然靈機一動， 他下橋快步回旅館。 小孩們看到爸爸回來都很高興， 靠攏過來依偎著他， 而 Euler 則一面抱起其中最小的一個， 一面鋪紙振筆疾書； 於是， 一個不僅解決了七橋問題、同時更一般的結論就這樣出現了。 1736 年 Euler 的這篇文章 [9] 奠基了圖論這門學問[1]。

從 1736 年到 1936 年這整整兩百年， 可以說是圖論的春秋戰國時代， 不同領域的人在他們各自的崗位上， 以不同的名稱、不同的內容， 探索與 Euler 發現的圖一樣的概念（參見 [3]）。 一直到 1936 年， Kőnig[2] 關於圖論的第一本著作《有限圖與無限圖的理論》[14]， 正式宣告圖論這門學問誕生。 這之後的七十多年以來， 各式各樣圖論的書籍， 以幾何級數的速度產生， 我們這本書就是其中之一。 圖論是一門探討物件之間如何關連的學問。 在前面的故事中我們提到的七橋問題， 其本質上就是在討論陸地之間

[1]Euler 遊橋的故事係屬杜撰， 但他右眼失明、 寫出一篇關於力學的重大論文、 推導出正整數平方倒數和的答案、 喜歡小孩、 寫出關於七橋問題的論文等， 都是歷史上記載的事實。

[2]Kőnig Dénes （依照匈牙利的習慣， 姓氏是擺在前面， 這和中國人的習慣相同； 在歐洲， 匈牙利是唯一有這種習慣的國家） 以及其父親爲了方便在歐洲其他國家的期刊（主要是德文期刊）發表文章， 都是把姓氏中的雙重音字母 ő（常見於匈牙利文）改成了曲音字母 ö（常見於德文）、 以 König 爲名發表； 另一位本書也會多次提到的著名匈牙利數學家 Erdős Paul 早年也是寫作 Erdös， 但是逐漸地隨著排版機制的進步、 和正名運動聲浪的興起， 最終是恢復了 Erdős 的正確寫法。 爲了因應這個潮流以及向這位偉大數學家致敬， 本書中都將以 Kőnig 稱之。

（透過橋樑）的連結關係。 如果撇開 Königsberg 小鎮的房子跟具體的地理形狀不管，我們可以把整個鳥瞰圖抽象成如圖 1.2 中間的型式； 如果我們再進一步地、 更簡單地只用一個點來表示一塊陸地， 並且依照它們之間的橋樑連接關係用邊連接起來， 那最後我們會得到如圖 1.2 右邊的示意圖。

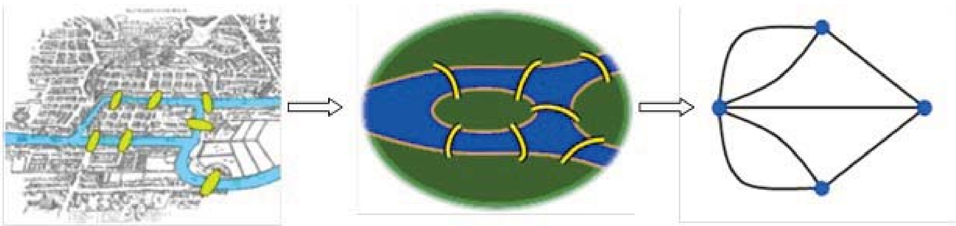


圖 1.2: Königsburg 七橋問題的抽象化。

於是， Königsberg 七橋問題就相當於是要求我們從圖中的某一點出發、 不重複亦不遺漏地將每一條邊都走過一次。 對於所有類似於這種由點和邊連結而成的圖， 我們都可以問同樣的問題， 這就是河與橋問題的一般化。 圖論要研究的對象就是像這樣的一種事物。 其他例子如電腦網路的連結、 道路鋪設、 人與人之間的互動關係， 都可以透過類似的示意圖來表示。 在這種示意圖當中， 我們以個別的點表示物件， 而以邊連接標示它們之間的關係。 因此， 簡單來說， 我們所要討論的圖就是一些點跟邊的組合。 在這種圖當中， 長度跟位置都不是最重要的， 我們關心的重點只有物件之間怎麼連接的問題。 當年 Euler 將這種學問視爲一種特殊的新型幾何， 並提到是由 Leibniz 最早考慮這種幾何的， 稱之爲「位置的幾何學（geometria situs）」。 後來這種不考慮距離只考慮構造的幾何朝著兩種不同的模式發展， 一種變成了拓撲學， 而另外一種則變成了圖論。 兩者雖然有非常密切的關連， 但圖論不同於拓撲的地方是， 圖論當中沒有複雜的幾何結構， 只有點跟邊兩種最單純的元素， 所以其討論往往是非常具離散意味的； 事實上， 圖論通常也是歸類在離散數學的分支之中。 在這一章， 我們首先介紹圖論的基本要素， 接著討論如何用圖論的觀點解決 Königsberg 七橋問題， 以及一些衍生出來的相關議題。

1.2. 圖的定義

前面我們已經約略地提到了什麼是圖論當中所指的圖， 下面我們比較正式地描述「**圖**

（graph）」的定義。 首先我們考慮一般最常遇到的圖， 這種圖只有有限個點， 任兩點之間都至多只有一條邊相連， 而且不會有一條邊的兩端是連接同一個點， 這樣的圖稱爲**簡單圖**（simple graph）。 嚴格來說， 簡單圖就是一個有序對 $G = (V, E)$， 其中 V 是非空的有限集， 其元素稱爲**頂**點（vertex）， 簡稱爲**點**， E 是一些 V 的相異二元無序對的集合， 即 $E \subseteq \{e\colon e \subseteq V, |e| = 2\}$， 其元素稱爲**邊**（edge）。 有的時候，我們用 $V(G)$ 表示圖 G 的點集、 而 $E(G)$ 則表示其邊集。 方便起見， 我們也經常將一條邊 $e = \{u, v\}$ 直接寫成 uv， 因此， uv 跟 vu 是相同的。 此時我們說 u 跟 v 是 e 的**端點**（end vertices）， 也說 e 和 u（及 v）**相連**（incident）， 並說 u 和 v **相鄰**（adjacent）、 或者說 u 是 v 的**鄰居**（neighbor）。 我們以 $N_G(v)$ 表示圖 G 中點 v 的全體鄰居所構成的集合， 如果討論的圖很明確時可以簡寫作 $N(v)$。 爲了視覺上的方便， 我們通常會將圖具體地畫出來， 如圖 1.3 表示 $V = \{a, b, c, d, e\}$ 及 $E = \{ab, ae, bc, be, cd, de\}$ 的圖。 如果點的名字暫時不重要時， 我們也可能不將它們標出來， 一直等到有需要的時候再標示； 如果只有少數點的名字必須用到， 我們也可能只標示出那些點的名字。

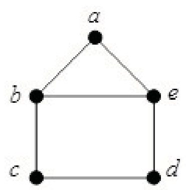


圖 1.3: 有 5 個點及 6 條邊的圖。

我們可以透過改變集合 V 跟 E 的屬性以得到各種變型的圖的概念。 例如， 若允許 V 是無窮集， 則得到**無限圖**（infinite graph）。 而如果允許 E 是重集（multi-set，即同樣的元素可以重複出現的集合）， 就有所謂**重圖**（multigraph）， 也就是兩點之間可以有多條邊相連的情況， 這樣的邊稱爲**重邊**（multiedge）[3]； 例如前面七橋問題當中所考慮的圖就是重圖。 如果更進一步允許邊 $\{u, v\}$ 是重集， 也就是可以有 $u = v$ 的話，

[3]我們可以用另外一種等價的定義方式， 以通常的集合結構來刻畫出重圖。 我們定義一個圖是由 $G = (V, E, f)$ 構成、 其中 $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ 是點集、 $E = \{e_1, e_2, \ldots, e_m\}$ 是邊集， 而 f 則是一個從 E 到 $\{\{v_i, v_j\}\colon 1 \le i < j \le n\}$ 的映射、 以表示每一條邊的頂點爲何。 如果 f 是一個嵌射（injection、即不同的元素必映至不同的元素）， 那對應的 G 就是簡單圖； 而如果 f 不是嵌射的話那 G 就是重圖。 此外， 如果將上面的「$<$」改成「$\le$」， 定義出來的就會是近圖。

則得到所謂的**近圖**（pseudograph），$\{u, u\}$ 這樣的邊稱爲**迴邊**（loop）。 如果將邊改成有序對 (u, v)， 那麼 uv 跟 vu 就表示不同的邊， 我們稱這樣的圖爲**有向圖**（directed graph 或簡稱 digraph）。 畫有向圖的時候， 邊通常會加上箭頭以表示方向。

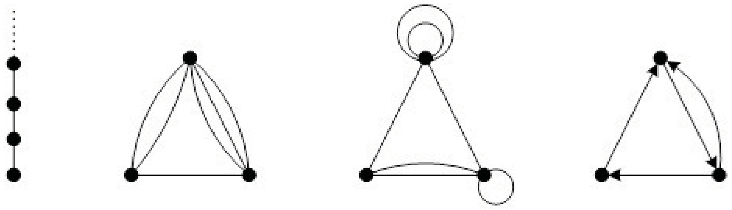


圖 1.4: 無限圖、重圖、近圖、有向圖的例子。

前述各種不同種類的圖都是圖， 不過往後如果沒有特別強調是近圖或者重圖等的話， 當我們說「圖」的時候都是指簡單圖。 我們來看一些基本的圖的例子。 **n-完全圖**（n-complete graph）是指具有 n 個頂點且任兩點均有邊相連的圖， 即點集 $V = \{1, 2, \ldots, n\}$ 及邊集 $E = \{ij\colon i, j \in V$ 且 $i \neq j\}$ 的圖。 這個圖一般記做 K_n。

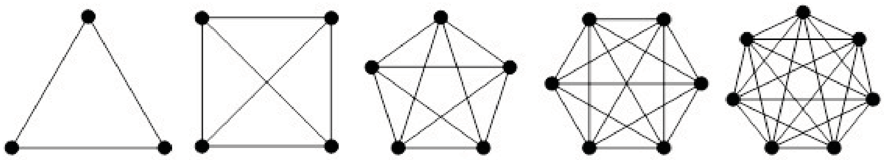


圖 1.5: 完全圖 K_3、K_4、K_5、K_6 及 K_7。

二分圖（bipartite graph）是指一個圖 G、 其點集可以表示成兩個互斥集合 X 跟 Y 的聯集， 使得所有 G 的邊都只存在於 X 跟 Y 之間； 也就是說，X 裡面的點都兩兩不相鄰， Y 裡面的點也一樣。 此時我們會說 X 跟 Y 是 G 的**二部份**（bipartition）。 例如， **完全二分圖** （complete bipartite graph）$K_{m,n}$ 是指一個點集分成兩部分、 一部份有 m 個點而另一部份有 n 個點， 並將這兩部分任一對點都予以連邊的圖。

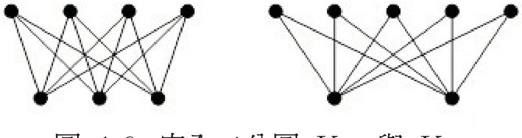


圖 1.6: 完全二分圖 $K_{4,3}$ 與 $K_{5,2}$。

二分圖的觀念也可以推廣成爲 k**-分圖**（k-partite graph）， 即一個點集可以分成 k 個部分、 使得個別部分內部都沒有連邊的圖。 **完全** k**-分圖**（complete k-partite graph）相對地就是把這 k 個部分兩兩之間的點全部連邊的圖， 我們通常以 $K_{n_1,n_2,\ldots,n_k}$ 來表示完全 k-分圖， 其中 $n_1,n_2,\ldots,n_k$ 分別是每個部分的大小。 圖 1.7 顯示的是 $K_{2,2,2}$ 的例子。

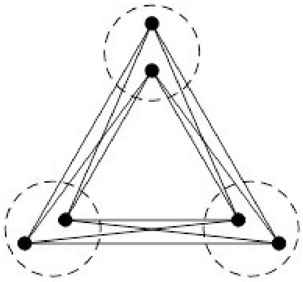


圖 1.7: 完全 3-分圖 $K_{2,2,2}$，其中以虛線圈出此圖的三部分。

n**-圈**（n-cylcle）C_n 是由 n 個點組成的圈狀圖， 其點集爲 $V=\{1,2,\ldots,n\}$ 而邊集爲 $E=\{12,23,\ldots,(n-1)n,n1\}$。 其中 C_3 又常被稱爲**三角形**（triangle）。

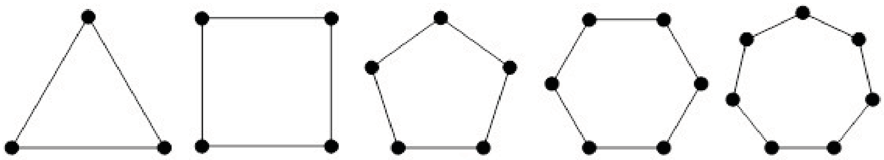


圖 1.8: 圈圖 C_3、C_4、C_5、C_6 及 C_7。。

此外，n**-路徑**（n-path）P_n 是由 n 個點組成的徑狀圖，其點集爲 $V=\{1,2,\ldots,n\}$ 而邊集爲 $E\{1,23,\ldots,(n-1)n\}$。

圖 1.9: 路徑圖 P_2、P_3、P_4、P_5 及 P_6。

不難看出 $K_1=P_1$、$K_2=P_2$、$K_3=C_3$， 因此這些記號都是可以交換使用的。 對於任何一個圖， 我們通常不只一種方法可以把它畫出來， 但是這些不同的圖像所代表的內在結構其實都是相同的， 例如圖 1.10 中的三個圖雖然乍看之下並不相同， 但是其點

跟邊之間的連結關係都是一樣的 （例如在三個圖當中，點 1 都是和點 2、點 5 以及點 6 相鄰，等等）， 它們都有一個共同的特別名字， 叫做 **Petersen 圖**。

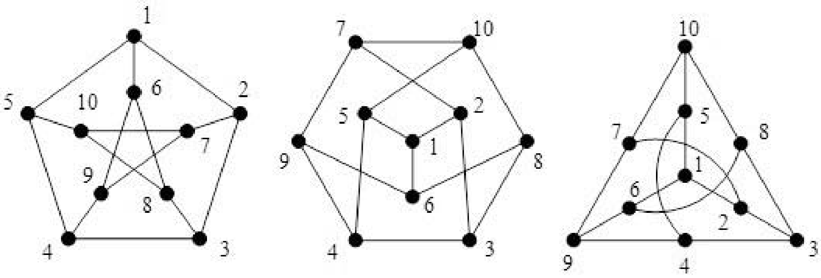


圖 1.10: 三圖同構，都是 Petersen 圖。

這種情況下我們會說這些圖是**同構**（isomorphic）的。 精確而言， 所謂兩個圖 G 和 H 同構， 是指在 $V(G)$ 和 $V(H)$ 之間存在一個一對一映成函數 f， 使得 $uv \in E(G)$ 若且唯若 $f(u)f(v) \in E(H)$。 圖 G 和 H 同構記作 $G \cong H$。

如果 $V(G) \subseteq V(H)$ 且 $E(G) \subseteq E(H)$， 則我們說 G 是 H 的**子圖**（subgraph）， 而 H 則稱爲 G 的**父圖**（supergraph）， 這個關係可以記作 $G \subseteq H$； 如果更進一步有 $V(G) = V(H)$， 則稱 G 爲 H 的**生成子圖**（spanning subgraph）、 或說 G 是 H 的**因圖**（factor）。 若 G 爲 H 的子圖但不等於 H， 則我們說 G 是 H 的**眞子圖**（proper subgraph）。

如果 $S \subseteq V(G)$，$E_S = \{uv \in E(G) \colon u \in S, v \in S\}$， 則稱圖 $G[S] = (S, E_S)$ 是 G 的一個（**點**）**導出子圖**（(vertex-)induced subgraph）， 並說 $G[S]$ 是由 S 所導出（induce）的。 如果 G 沒有導出子圖與 H 同構， 我們稱 G 是 **H-免除的**（H-free）。

如果 $S \subset V(G)$[4]， 則稱 $G[V(G)\backslash S]$ 是 G 的**刪除圖**（deletion）， 簡記作 $G-S$。 如果 S 只有一個元素 v， 則 $G-\{v\}$ 亦可簡記作 $G-v$。 如果 $E' \subseteq E(G)$， 則 $G-E'$ 是指圖 $(V(G), E(G)-E')$； 如果 E' 只有一條邊 e， 類似地我們也常將 $G-\{e\}$ 簡記作 $G-e$。 相對地， 如果把另一個圖 H 加入 G、 但是不把 G 跟 H 之間連任何邊， 那麼得到的新圖稱爲它們的**互斥聯集**（disjoint union）或**和圖**（sum），記做 $G+H$。

一個跟這些概念有關的未解問題如下所述。

[4]本書用 $A \subseteq B$ 表示 A 爲 B 的子集， 而以 $A \subset B$ 表示 A 爲 B 的眞子集、 亦即 $A \subseteq B$ 但 $A \neq B$。 有些作者習慣用 $A \subset B$ 表示 A 爲 B 的子集， 本書將不使用這種記號， 請特別注意。

猜想 1.1.（**Ulam 猜想 [19]**）假如 $n \geq 3$，圖 G 跟 H 各自都有 n 個頂點，分別爲 u_i 和 v_i（$1 \leq i \leq n$）。如果對於每一個 i 都有 $G - u_i \cong H - v_i$，則 $G \cong H$[5]。

一個近圖 $G = (V, E)$ 當中，點 v 的**度數**（degree）是指與此點相連的邊數，其中迴邊 $\{v, v\}$ 對 v 的度數的貢獻爲 2。我們以 $\deg_G(v)$ 表示 v 的度數，或當討論的圖很明確時可以簡寫作 $\deg(v)$。度數爲奇數的點稱爲**奇點**（odd vertex），度數爲偶數的點則稱爲**偶點**（even vertex），度數爲 0 的點稱爲**孤立點**（isolated vertex），而度數爲 1 的點則稱爲**葉**（leaf，會有這樣的名稱是跟後面將會提到的「樹」有關）。往後我們分別用 $\delta(G)$ 和 $\delta(G)$ 兩個記號表示 G 中頂點的最小度數和最大度數。如果一個圖 G 中的每個點的度數都相同，例如對所有 $v \in V(G)$ 都有 $\deg(v) = k$ 時，我們就說 G 是 **k-正則的**（k-regular）。一個跟度數有關的性質是當年 Euler 在他 1736 年的那篇文章 [9] 中提到的，可以說是跟圖論有關的第一個定理。

性質 1.2. 對任一近圖 $G = (V, E)$，恆有 $\sum_{v \in V} \deg(v) = 2|E|$。

這個性質在直觀上很容易理解，因爲當我們計算左邊的和時，每數一個點的度數、就會把跟它相連的邊都算一次，這麼一來，最後每一條邊都將恰好被數兩次，因爲每條邊都恰與兩點相連（雖然可能是同一點，但這並不影響）。上面這樣的論證方法叫做**雙邊計數**（two-way counting），是一種很有用的方法。這個性質的一個立即推論如下所述。

推論 1.3. 任一近圖的奇點數目必爲偶數。

1.3. 路徑

到目前爲止我們還沒有說到要如何將七橋問題的本質刻畫出來。現在讓我們來看如何描述「在圖上行走」的這個行爲。

一個近圖 G 中的一條**道路**（walk）是指一條點邊相間的序列 $v_0 e_1 v_1 e_2 v_2 \ldots e_k v_k$，其中點 v_{i-1} 和 v_i 是邊 e_i 的端點。在簡單圖的情況中，由於 v_{i-1} 和 v_i 會決定唯一的

[5] 這個猜想乍看之下好像很直觀地會對，不過稍微多想一下或許就會發現其眞正的困難處在於，我們並沒有要求 $G - u_i$ 跟 $H - v_i$ 必須按照頂點對應的編號作同構映射。

e_i， 因此這條道路可以只用 $v_0v_1v_2\dots v_k$ 表示。 我們稱 v_0 和 v_k 爲這條道路的**起點**和**終點**， k 稱爲道路的**長**（length，特別注意 k 是邊數而非點數）。 有時爲了強調起點和終點， 也會稱之爲 v_0-v_k 道路。 當 $v_0 = v_k$ 的時候， 我們稱這條 v_0-v_k 道路爲**封閉**（closed）道路， 否則若 $v_0 \neq v_k$ 則稱爲**開放**（open）道路。

一條**行跡**（trail）是指一條邊不重複的道路， 而一條**路徑**（path）則是指一條點不重複的道路； 顯然所有的路徑都是行跡， 且行跡都是道路， 但反之則未必成立。 一個**圈**（cycle）是指除了 $v_0 = v_k$ 以外、 點跟邊都兩兩相異的 v_0-v_k 道路。 先前我們曾提到的 P_n 和 C_n 分別就是只由一條路徑和一個圈所構成的圖。

現在我們回頭來看七橋問題。

對於一個近圖而言， 如果一條行跡包含了該圖所有的邊， 我們就稱之爲一條 **Euler 行跡**（Euler trail）， 而封閉的 Euler 行跡則稱爲 **Euler 迴路**（Euler tour）。 七橋問題所要問的就是， 下面的這個重圖存不存在一條 Euler 行跡？

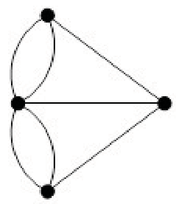


圖 1.11: 七橋問題所對應的重圖。

答案是並不存在。 要解釋這一點， 我們只需要有點的度數觀念就夠了。 事實上我們可以了解到， 假如存在一條開放的 Euler 行跡， 則當我們沿著這條行跡從某一條邊進入某點之後、 我們必定要從另外一條邊走出來， 因此與每一點相連的邊都可以依照進去和出來的關係配成對， 除非該點正好就是行跡的起點或終點； 此時會有一條邊是當作出發的邊或者結束的邊。 而對於 Euler 迴路而言， 這兩條邊又恰可以配對。 因此我們就得到下面這樣的結論。

性質 1.4. 如果一個近圖中存在一條 *Euler* 迴路， 則必定每一點都是偶點。 如果一個近圖中存在一條開放的 *Euler* 行跡， 那麼必定恰有兩點是奇點（且分別爲行跡的起點跟終點）， 其餘都是偶點。

回過頭來看圖 1.11， 很不巧地， 這個重圖剛好四個點通通都是奇點， 這就表示裡

面不可能存在開放的 Euler 行跡， 更沒有 Euler 迴路， 故七橋問題無解。

不過， 上面的結論反過來不見得會對， 因爲就算所有的點都是偶點， 可是如果考慮的圖分裂成兩堆、 中間根本沒有道路連接， 那麼當然不可能有 Euler 迴路存在。 因此， 我們還必須考慮到圖的連通性。

對於一個近圖 G 來說， 如果裡面任兩點之間都有道路連接， 則我們就說 G 是**連通的**（connected）。 其實， 這個定義也可以改寫成「任兩點之間都有路徑連接」， 因爲我們有如下的性質。

性質 1.5. 對於近圖 G 中的兩點 u 和 v， 存在一條 u-v 路徑的充分必要條件是存在一條 u-v 道路。

證明： 必要性是顯然的， 因爲所有的路徑都是道路。 反過來， 如果存在一條 u-v 道路，根據良序原理，我們可以找到一條長度最短的 u-v 道路 $W: v_0e_1v_1e_2v_2\ldots e_iv_i\ldots e_j v_j\ldots e_kv_k$； 如果存在 $i<j$ 使得 $v_i=v_j$， 那麼我們將 $e_{i+1}v_{i+1}\ldots e_jv_j$ 這一段從 W 當中去掉， 將會得到一條更短的 u-v 道路， 這與 W 最短的假設矛盾， 所以 W 本身就是一條路徑。 ■

上述證明中取最短道路 W 的方法， 等同於做數學歸納法， 它就是所謂的**良序原理**， 也就是說， 任何一個由一些自然數組成的非空集合一定有一個最小元素， 在圖論中我們常常使用這種方法來證明定理。 也就是， 取最大或最小反例， 再導出矛盾， 以此證明定理。

於是， 剛才提到的基本顯然事實就可以描述如下。

性質 1.6. 近圖 G 中存在 *Euler* 行跡的必要條件是， G 中除了孤立點外都是連通的。

注意到， 定義當中我們並沒有要求 Euler 行跡必須通過所有的點， 因此孤立點的存在並不影響 G 有沒有 Euler 行跡。

一個近圖 G 中**極大**（maximal）的連通子圖稱爲其**連通部分**（connected component）。 這邊所謂「極大」是指， 如果 C 是 G 的連通子圖、 而且不存在 G 的另一個連通子圖 H 使得 $C\subseteq H$ 但 $C\neq H$， 那我們就說 C 是極大的連通子圖。 也就是說，極大的概念是在子圖關係底下決定出來的大小順序。 而如果我們要談的是數量上的大小順序概念（例如根據點或邊的數目多寡）， 我們會用**最大**（maximum）這個詞。 類似

地可以區隔**極小**（minimal）和**最小**（minimum）之間的概念差異。 最大一定是極大，但反之未必。

顯然， 如果 C_1 和 C_2 都是 G 的連通子圖而且 $V(C_1) \cap V(C_2) \neq \emptyset$， 則其**聯集**（union）$C_1 \cup C_2 = (V(C_1) \cup V(C_2), E(C_1) \cup E(C_2))$ 也會是 G 的連通子圖。 於是，有如下的性質。

性質 1.7. 近圖 G 的所有連通部分的點集是 $V(G)$ 的一個**分割**（*partition*， 即一些聯集爲 $V(G)$ 但兩兩不相交的非空集合）、 其邊集也會是 $E(G)$ 的一個分割。

如果圖 G 的一系列的子圖 $H_1, H_2, \ldots, H_k$ 的邊集恰構成 $E(G)$ 的分割， 那我們會說這些子圖構成了 G 的一個**分解**（decomposition）。 因此， G 的所有連通部分就構成了 G 的一種分解。

在談圖的連通部分時， 也有人會採用另外一種等價的說法， 講起來也許比較麻煩， 但卻是比較高觀點的看法。 首先， 我們可以在集合 $V(G)$ 中定義這樣的一種**關係**（relation）：

$$x \sim y \iff \text{存在一條 } x\text{-}y \text{ 道路。}$$

很容易驗證， 由這個方式定義出來的 $\sim$ 是一種**等價關係**（equivalence relation）， 即它滿足下面三個性質。

1. **反身性**（reflexive）：若 $x \in V(G)$，則 $x \sim x$。
2. **對稱性**（symmetric）：若 $x \sim y$，則 $y \sim x$。
3. **遞移性**（transitive）：若 $x \sim y$ 且 $y \sim z$，則 $x \sim z$。

因此， 我們可以應用這個等價關係將 $V(G)$ 分成若干個**等價類**（equivalence class） $V_1, V_2, \ldots, V_r$， 而易知這些等價類所導出的子圖 $G[V_1], G[V_2], \ldots, G[V_r]$ 其實就是 G 的連通部分。

圈是一個相當重要的構造， 在後面的章節中都還會出現很多應用到圈的理論。 在本節最後部分， 我們先舉一個簡單的例子。 如果一個圈的邊數爲奇數， 我們就稱之爲**奇圈**（odd cycle）， 反之就稱爲**偶圈**（even cycle）。 類似地我們可以定義奇道路、奇行跡等等。 關於二分圖， 有下述這樣的基本性質。

定理 1.8. 圖 G 是二分圖， 若且唯若它沒有奇圈。

證明： 如果 G 是二分圖， 則任何圈都只能是 $x_1y_1x_2y_2\ldots x_ky_kx_1$ 這樣的型式， 也就是二部份 X 跟 Y 中的點交錯出現， 所以 G 中的圈都必定是偶圈。 反過來， 如果 G 中沒有奇圈， 則我們要將點分成 X 和 Y 兩部分。 易知如果 G 的每個連通部分都是二分圖、 那 G 也必定是二分圖， 所以只要討論 G 本身是連通的情況即可。 先任意選取一個點 v， 然後對於任何一個點 u， 由於 G 是連通的， 必存在一條最短的 v-u 道路， 設其長度爲 k， 如果 k 是偶數就將 u 分到 X 類， 反之若 k 是奇數就將 u 分到 Y 類。 這麼一來每一個點都會被唯一地分到某一類。 現在， 假設 X 或 Y 內部有邊爲 uu'， 那麼將剛才選取的最短 v-u 道路（其長度爲 k）、 邊 uu'、 以及倒過來的最短 u'-v 道路（其長度爲 k'、與 k 同奇偶）串在一起， 就會得到一條長度爲 $k+1+k'$ 的封閉奇道路， 可是根據習題 1.6， 此時 G 中必有奇圈， 矛盾。 所以 X 跟 Y 內部都沒有邊。 ■

1.4. Euler 圖

如果近圖 G 中存在 Euler 迴路， 我們就稱 G 爲 **Euler 近圖**（Euler pseudograph）。上一節我們已經舉出了一個近圖 G 爲 Euler 近圖的兩個必要條件， 而有趣的是， 這兩個條件加起來剛好就構成了充分條件， Euler 當年在他的論文 [9] 當中就已經提到了這件事。 用嚴格的尺度來要求， 他的文章並沒有給出這個充分性的「完整」證明， 不過他已經用建構式的方式， 描述了證明的主要精神， 這樣其他人就可以將比較正式完整的證明寫出來， 而且， 他的方法也提供了求 Euler 迴路的演算法。 在那個年代， 像這樣在嚴謹度上有小瑕疵的討論比比皆是， 但是這並沒有構成數學發展的阻礙， 事實上， 十八世紀的數學家仍舊在這種風氣之下醞釀出大量深刻而有內涵的結論。 這個定理也是如此。

定理 1.9. 一個恰爲一孤立點或不含孤立點的近圖 G 爲 *Euler* 近圖的充分必要條件是，G 是連通的、 而且其中所有的點都是偶點。

證明： 必要性已經由前兩個命題所給出。 而關於充分性， 底下我們準備給出三種不同的證法。 本質上它們都是對 G 的邊數（設爲 m）做數學歸納法。

證法一： 當 $m=0$ 的時候， 定理顯然成立。 現在假設 $m>0$， 且定理對所有邊數小於 m 的近圖都成立。 我們從某一個非孤立點 u 開始、 在「邊不重複」的前提下盡量行走、 直到不能再繼續爲止， 這給出一條行跡 W。 此時 W 的終點 v 必定也是 u， 不然

W 將只用到 v 的奇數條相連邊， 但 v 是一個偶點， 必定還有某條邊可以繼續走， 這跟 W 的取法矛盾。 於是， 因爲 $u = v$， W 當中與任何一點相連的邊數一定是偶數， 所以 $G' = G - E(W)$ 中各點皆爲偶點， 且 G' 的各個連通部分的邊數皆小於 m。 由歸納法假設， 這些連通部分都有 Euler 迴路， 於是我們可以將 G' 的連通部分各自的 Euler 迴路合併到 W 當中以得到 G 的一條 Euler 迴路。 亦即， 我們先沿著 W 行走， 而一旦碰到 G' 的某個連通部分， 就先繞道將該連通部分的 Euler 迴路走完， 然後再繼續沿著 W 走， 這就會得到 G 的一條 Euler 迴路。 值得注意的是， 因爲 G 是連通的， 所以 G' 的任何一個連通部分一定會碰到 W。 □

證法二： 在 G 中選取一條最長的行跡

$$W\colon v_0e_1v_1e_2v_2\dots e_iv_ie_{i+1}v_{i+1}\dots e_kv_k\text{。}$$

如果 $v_k \neq v_0$， 則 W 只用到奇數條與 v_k 相連的邊， 所以存在某一邊 $e_{k+1} = \{v_k, v_{k+1}\}$ 不在 W 當中， 這導致 $We_{k+1}v_{k+1}$ 是一條更長的行跡， 矛盾； 所以必有 $v_k = v_0$。

我們宣稱 W 就是一條 Euler 迴路； 因爲， 如果 W 沒有用完 G 所有的邊， 則因爲 G 是連通的， 所以 G 中必存在某一邊 $e = \{v, v_i\} \notin W$， 其中 v_i 在 W 當中。 但這麼一來

$$vev_ie_{i+1}v_{i+1}\dots e_kv_ke_1v_1\dots e_iv_i$$

會是一條比 W 更長的行跡， 又導致矛盾。 因此 W 本身就是 G 的一條 Euler 迴路。 □

證法三[6]**：** 當 $m = 0$ 的時候， 定理顯然成立。 現在假設 $m > 0$。 當 G 的邊都是迴邊的時候， 所有的迴邊都通過同一點， 因此易看出 G 有 Euler 迴路。 如果 G 至少有某一邊不是迴邊， 例如 $e_1 = uv$ 不是迴邊， 則因爲 u 是偶點， 必定還有 $v' \neq u$ 使得 $e_2 = uv' \in E(G)$。 令 G' 是 G 去掉 e_1 和 e_2 並加入 $e = vv'$ 之後的近圖， 其邊數 $m' = m - 1$。 在這個更動之下， 除了 u 的度數減少 2 之外， 其他點的度數都沒有改變， 因此 G' 的點仍都是偶點。

接著分成兩種情況， 一種是 G' 只有一個連通部分， 另一種情況是 G' 有兩個連通部分。 無論是哪一種情況， v 跟 v' 都會被包含在一個邊數少於 m 的連通部分 C_1 當中， 而根據歸納假設， C_1 有 Euler 迴路 W。 於是， 在第一種情況中， 我們可以將

[6]這個證法由台大數學系陳聖華提供。

W 當中的 e 換成 e_1ue_2 而得到 G 的 Euler 迴路；而在第二種情況中， 根據歸納假設，包含 u 的連通部分 C_2 也會有 Euler 迴路 W' （不失一般性我們可以假設 W' 是 u-u 迴路）， 於是我們將 W 中的 e 換成 $e_1W'e_2$ 即得到 G 的 Euler 迴路。 □ ■

由這個定理可以得到的立即推論如下。

推論 1.10. 一個不含孤立點的近圖 G 中存在開放 *Euler* 行跡的充分必要條件是， G 是連通的、 而且其中恰有兩個奇點。

證明： 必要性一樣已經由前面的討論給出。 要證明充分性， 假設 G 中僅有的兩個奇點分別是 u 跟 v， 無論這兩點是否相鄰， 我們都將 G 再加上一條新的邊 $e = uv$ 而得到 G'， 於是 G' 的點全都是偶點。 根據定理 1.9，G' 有 Euler 迴路 W， 不失一般性我們可以假設 W 的最後一條邊就是 e。 於是， 將 W 去掉最後的 ev 就得到 G 中的一條開放 Euler 行跡， 其起點爲 v、終點爲 u。 ■

以實用的觀點來說， 光是知道判別的準則通常還不夠， 最重要的應該是， 實際給了一個符合定理 1.9 條件的 G， 我們如何具體地把 Euler 迴路找出來才對。 所以我們還要進一步來研究**演算法**（algorithm）的問題。 我們在下一章會更仔細地介紹演算法的基本概念， 不過在這裡我們只是要來看怎麼樣透過固定的流程來解決問題而已。

上面關於該定理的三種證法當中， 前兩種本質上是相同的， 只是差在第一種證法用的是最一般的數學歸納法、 而第二種證法則是改以良序原理的方式呈現。 以演算法的觀點來說， 第一種證法是比較能夠改寫成演算法的； 第二種證法雖然簡潔， 但跟第三種證法一樣， 都不利於改寫成演算法。

雖然第一種證法比較能夠改寫成演算法， 但是如果眞的照那樣的方法做， 結果並不會很有效率。 首先我們注意到， 依照這個方法的構想， 一開始我們會從某個點出法，盡量地「能走就走」， 最後回到出發點； 此時假如我們已經把所有的邊都走過那當然最好， 但是， 很有可能我們偏偏走了捷徑、 很快就回到起點， 留下了一大堆還沒走過的邊， 如此一來我們還必須先將這些邊扣除、 造出新的圖 G'， 然後再用遞迴程式去做。這種不斷製造新圖的行爲將會是非常沒效率的方法。 例如以圖 1.12 來說， 我們有可能從 v_1 出發、 走了 $v_1e_1v_2e_3v_3e_2v_1$ 之後就結束， 偏偏這剛好是最短的道路。

關於這個問題， 現今較常見的 Fleury 演算法是在類似的「能走就走」的作法之下， 稍微加上一點選擇的條件， 以避免抄捷徑的情況發生。 他的想法是這樣， 假設

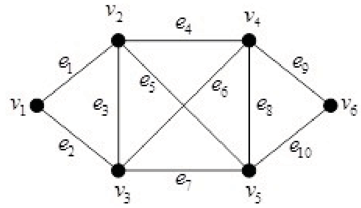


圖 1.12: Euler 圖的例子。

G 本身沒有孤立點; 當我們走 i 條邊之後得到 $W\colon v_0e_1v_1e_2v_2\ldots e_iv_i$ 時, 下一條邊 $e_{i+1}=v_iv_{i+1}$ 的選法是、找一條尚未走過的邊 e_{i+1} 使得 $G-\{e_1,e_2,\ldots,e_{i+1}\}$ 是連通的(除了孤立點以外)。可以證明, 照這樣做確實可以走過 G 所有的邊; 但是在執行上, 要驗證一個圖是否連通也是一件花時間的事情, 更何況我們每走一步就要檢查一次連通性, 所以我們也不認爲這是一個好方法。

其實, 只要將證明一的方法稍微做一點修改, 我們就可以得到下面這個有效的演算法。這個方法是在「能走就走」的原則之下, 加上「不能走就回頭到一個較早的點, 從未走過的邊走完之後再插入」的新規則。我們仍用圖 1.12 來說明。

首先選定 v_1 出發, 能走就走; 假設我們像剛才一樣走了 $v_1e_1v_2e_3v_3e_2v_1$, 最後走到 v_1 走不下去了, 那麼就沿著這條行跡的最後一點往前找, 第一個點是 v_3, 而 v_3 還有相連的邊可以繼續再走, 於是我們就從 v_3 出發隨便走, 例如走出 $v_3e_6v_4e_8v_5e_7v_3$ 乃至不能再走。將這一段新的行跡取代原先的行跡中 v_3 的位置, 就得到

$$v_1e_1v_2e_3(v_3e_6v_4e_8v_5e_7\underline{v_3})e_2v_1,$$

接著輪到 v_3 這點走不下去, 於是我們就再從這點往前找, 發現 v_5 這點還可以再走, 於是再從 v_5 走出 $v_5e_5v_2e_4v_4e_9v_6e_{10}v_5$, 並再次插回去得到

$$v_1e_1v_2e_3v_3e_6v_4e_8(v_5e_5v_2e_4v_4e_9v_6e_{10}\underline{v_5})e_7v_3e_2v_1,$$

現在是輪到 v_5 走不下去, 於是我們再次從這點往前找還能走的點, 可是這次發現, 一路往回走直到發點 v_1 之後, 每一點都不能再走了, 這表示這條行跡就是一個圖 1.12 的 Euler 一條迴路。

1.5. Euler 迴路的應用

在我們舉例說明 Euler 迴路的應用之前， 我們先將前面的結果推廣到有向近圖的情況。首先， 在有向近圖當中， 關於道路、 行跡、 Euler 迴路的定義都跟近圖相同， 只是當我們提到 $v_{i-1}e_iv_i$ 的時候， $e_i = (v_{i-1}, v_i)$ 是有序對。 其次， 我們說一個有向近圖是**強連通的**（strongly connected）是指對任意兩點 x 和 y， 均存在一條由 x 到 y 的道路[7] ； 而一個有向近圖的**強連通部分**（strongly connected component）是指極大的強連通有向子近圖。 一個點 v 的**出度**（out-degree）是指 v 連出去的邊 vv' 的數目， 記做 $\deg^+(v)$， 而 v 的**入度**（in-degree）則是指 v 連進來的邊 $v'v$ 的數目， 記做 $\deg^-(v)$。類似地， 我們會以 $N^+(v)$ 和 $N^-(v)$ 表示所有從 v 連出去的鄰居的集合和連進 v 的鄰居的集合。

性質 1.11. 對任一個有向近圖 $G = (V, E)$， $\sum_{v\in V} \deg^+(v) = \sum_{v\in V} \deg^-(v) = |E|$。

證明： 這是因爲每一條邊都只會在我們計算入度和出度時各被數一次。 ■

相對於 Euler 迴路的定理如下， 其證明和無向近圖的時候一樣， 此處省略其證明。

定理 1.12. *一個恰爲一孤立點或不含孤立點的有向近圖 G 有 Euler 迴路的充要條件是， G 是強連通的、 而且其中每一點 v 恆有 $\deg^+(v) = \deg^-(v)$。*

接下來我們來談一個有向近圖 Euler 迴路的有趣應用， 即所謂的 **de Bruijn 序列**。

首先，我們考慮二進位的情況， 即一切東西都是 0 跟 1 組成的， 不過我們不準備把它們當數字使用、 而當成是字母看待。 請問有多少種方法可以用這兩個字母拼成長度是 2 的序列？ 很顯然是 00、01、10、11 四種。

考慮 0011 這個序列， 取出所有相鄰 2 個字母組成的子列， 我們發現裡面剛好出現了 00、01 跟 11， 而如果把這個序列的尾巴跟頭接起來， 那 10 也出現了； 四種組合恰好都在這個序列當中出現一次。 像這樣的序列 0011， 我們就稱爲是一個 **de Bruijn 2-序列**。

[7]請特別注意， 如果我們仍舊把這個關係記做 $\sim$， 則一般而言在有向近圖中我們未必會有對稱性， 即 $x \sim y$ 並不保證有 $y \sim x$ 成立； 但若有強連通性就一定會成立了。

一般而言，令 $\Sigma = \{0, 1, \ldots, \sigma-1\}$，其中 $\sigma \geq 2$。 對自然數 n，一個 **de Bruijn n-序列**是指某一個 Σ 上的序列 $a_0a_1 \ldots a_{L-1}$[8]， 使得對任一個 Σ 上長度爲 n 的序列 $b_0b_1 \ldots b_{n-1}$ 都存在唯一的 i 使得 $b_0b_1 \ldots b_{n-1} = a_ia_{i+1} \ldots a_{i+n-1}$，其中 a_j 的下標取模 L。 剛才我們舉出的例子就是 $\sigma = 2$ 時的 de Bruijn 2-序列。 又例如同樣取 $\sigma = 2$、則 $n = 3$ 的一個例子爲 00011101， 這裡面恰好將每一個長度是 3 的二進序列都表現一次。 顯然， 對於任何這樣的序列都一定要有 $L = \sigma^n$。

我們感興趣的問題是， 任意給定 σ 和 n， 是否存在這樣的序列？ 而若存在、 又要如何尋找？ 前述有向近圖的 Euler 迴路剛好就可以用來解決這個問題。

我們考慮一個有向近圖 $G_{\sigma,n}$， 其中

$$
\begin{aligned}
V(G_{\sigma,n}) &= \{a_0a_1 \ldots a_{n-2} \colon \text{各 } a_i \in \Sigma\}\text{、} \\
E(G_{\sigma,n}) &= \{(a_0a_1 \ldots a_{n-2}, a_1a_2 \ldots a_{n-1}) \colon \text{各 } a_i \in \Sigma\}\text{，}
\end{aligned}
$$

則 $G_{\sigma,n}$ 恰有 σ^{n-1} 個點和 $\sigma^n = L$ 條邊。 我們發現這個 $G_{\sigma,n}$ 是有 Euler 迴路的。 首先，對每一點 $a_0a_1 \ldots a_{n-2}$， 恰有 σ 種方法選取 a_{n-1} 使得 $(a_0a_1 \ldots a_{n-2}, a_1a_2 \ldots a_{n-1}) \in E(G_{\sigma,n})$， 因此 $\deg^+(v) = n$； 同理我們有 $\deg^-(v) = n$， 因此度數方面的條件滿足。其次， 對於任兩點 $a_0a_1 \ldots a_{n-2}$ 跟 $b_0b_1 \ldots b_{n-2}$， 永遠存在這樣的一條道路

$$
a_0a_1 \ldots a_{n-2} \to a_1a_2 \ldots a_{n-2}b_0 \to a_2a_3 \ldots a_{n-2}b_0b_1 \to \ldots a_{n-2}b_0b_1 \ldots b_{n-3} \to b_0b_1 \ldots b_{n-2}
$$

連接著這兩點， 因此 $G_{\sigma,n}$ 是強連通的， 所以綜合起來就得到它有 Euler 迴路。

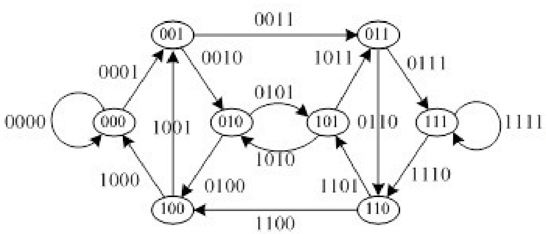


圖 1.13: 有向圖 $G_{2,4}$， 其邊 $(a_0a_1 \ldots a_{n-2}, a_1a_2 \ldots a_{n-1})$ 簡記爲 $a_0a_1 \ldots a_{n-2}a_{n-1}$。

[8]正式來說， 序列應該表示爲 $(a_0, a_1, \ldots, a_{L-1})$， 而省略分號的 $a_0a_1 \ldots a_{L-1}$ 稱爲**字串**。 傳統上，de Bruijn 序列都是用字串的方式書寫， 特別是當 $\sigma < 10$ 時， 這樣寫並不會造成混淆， 好處是用起來比較簡便； 但是當 $\sigma \geq 10$ 時， 正式的序列符號就有其必要了。

以圖 1.13 的 $G_{2,4}$ 爲例， 我們有這樣的一條 Euler 迴路

$$\begin{aligned}&000 \to 000 \to 001 \to 010 \to 100 \to 001 \to 011 \to 110 \to\\&101 \to 010 \to 101 \to 011 \to 111 \to 111 \to 110 \to 100 \to 000。\end{aligned}$$

果我們把這樣的一條 Euler 迴路的每一點（除最後一點 000 以外）取最後一個字母串接起來， 結果其實正好就是我們要的 de Bruijn 4-序列（爲什麼？）：0010011010111100。

於是， 我們就可以將 de Bruijn 序列跟這種圖（稱爲 de Bruijn 圖）中的 Euler 迴路取得對應。 由上面的討論， 我們就得到如下的結論。

定理 1.13. 對於任何的 $\sigma \geq 2$ 和 $n \geq 2$，*de Bruijn n*-序列都存在。

要具體找出這種序列， 我們只要把 de Brujin 圖畫出來， 然後按照找 Euler 迴路的方法來找就行了。 不過， 如果從演算法的角度來看， 按照這種想法， 我們需要構造出一個有 σ^{n-1} 點的有向近圖， 這會隨著 σ 和 n 而成長得非常急遽， 使得資料的儲存造成龐大的負擔。 於是， 要如何在不具體將圖構造出來的情況下找出 de Brujin 序列就變成了一個有趣的問題。

de Brujin 序列可能不只一種 （即便排除序列的輪換或鏡射以及字母的置換）； 例如上面的例子中， 我們也可以取出 0101101000011110 這樣的 de Bruijn 序列 （對應的是哪一個 Euler 迴路？）， 而這個跟我們剛才取得的序列本質上是不同的。

1.6. 度序列

一個圖的**度序列**（degree sequence）是指由此圖的度數所排成的序列， 例如圖 1.12 中的圖的度序列爲 $2, 4, 4, 4, 4, 2$[9]。 給定一個序列 $d\colon d_1, d_2, \ldots, d_n$， 如果存在 G 使得該序列是它的度序列， 我們就說 G **實現**（realize）d。 這樣的 G 不一定是唯一的（就同構而言）， 例如圖 1.14 就是一個例子， 其左邊跟右邊這兩個的圖的度序列都是 $2, 2, 2, 1, 1$，但是兩者顯然不同構。

如果 $d_1, d_2, \ldots, d_n$ 是一度序列， 則由性質 1.2 知道 $\sum_{i=1}^{n} \deg(v_i)$ 必定是偶數， 但是反過來， 即便序列 $d_1, d_2, \ldots, d_n$ 滿足和爲偶數， 也不見得能找得到一個圖 G 實現該

[9]通常我們都會把度序列由大到小排序地寫出來， 但這不是絕對必要的。 基本上， 除了證明時方便起見以外， 我們在講一個圖的度序列時， 我們並不在乎其順序。

圖 1.14: 最小的例子使得一個度序列對應的圖不唯一。

序列， 例如若 $n=1$，則 $d_1=2$ 不可能是一個圖的度序列； 不過如果我們允許 G 是近圖， 那倒是可以找到一個恰有一迴邊的近圖滿足所求。 一般而言， 我們容易得到近圖的度序列的充分必要條件。

定理 1.14. 非負整數序列 $d_1, d_2, \ldots, d_n$ 是某近圖的度序列，若且唯若 $\sum_{i=1}^n d_i$ 是偶數。

證明： 必要性已由性質 1.2 給出。 要證明充分性， 假設 $\sum_{i=1}^n d_i$ 爲偶數， 則其中爲奇數的 d_i 的個數必須是偶數， 不妨假設爲 $d_1, d_2, \ldots, d_{2r}$。 考慮一個點集 $V=\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ 的近圖， 其中每一點 v_i 上恰有 $\lfloor d_i/2 \rfloor$ 條迴邊， 且 $v_i v_{r+i}$ 對 $1 \le i \le r$ 而言都是邊； 易看出這個近圖的度序列就是 d。 ■

如果我們限制 G 是重圖， 度序列的充分必要條件就會稍微複雜一點。

定理 1.15. 負整數序列 $d\colon d_1 \ge d_2 \ge \ldots \ge d_n$ 是一個重圖的度序列的充分必要條件是， $\sum_{i=1}^n d_i$ 是偶數且 $d_1 \le \sum_{i=2}^n d_i$。

證明留給讀者做練習（參見習題 1.27）。 如果我們更進一步要求 G 沒有迴邊又沒有重邊， 那麼條件就會更加複雜了。 我們說一個非負整數序列是**圖序列**（graphic sequence）， 如果存在一個圖實現該序列的話。 Erdős 和 Gallai [8] 在 1960 年給出下面的刻劃定理。 早期的證明大都採用網路流的方法， 參見 Berge 的書 [2] 的第 6 章； 後來 Harary [12] 給出一個直接略爲冗長的證明， 這之後有各種簡化的證明 [6][16][17]。

定理 1.16. （**Erdős-Gallai [8]**） 非負整數序列 $d\colon d_1 \ge d_2 \ge \ldots \ge d_n$ 是圖序列的充分必要條件是， $s=\sum_{i=1}^n d_i$ 是偶數，且對 $1 \le i \le n$ 恆有

$$\sum_{i=1}^{k} d_i \le k(k-1) + \sum_{j=k+1}^{n} \min\{k, d_j\}。 \tag{1.1}$$

證明： $(\Rightarrow)$ 設 $V(G)=\{v_1,v_2,\ldots,v_n\}$， 其中 $\deg(v_i)=d_i$。 同前， $\sum_{i=1}^{n} d_i$ 必爲偶數。 對於任意 k， 當我們計算 $V_k=\{v_1,v_2,\ldots,v_k\}$ 這個點集的總度數時， 我們可以把與這些點相連的邊分成兩類： 一類是在 V_k 內部連接的邊， 這種邊每條會被算兩次， 所以總共最多有 $k(k-1)$ 條邊； 另一類是從 V_k 連接到 $\overline{V_k}=\{v_{k+1},v_{k+2},\ldots,v_n\}$ 的邊，或者， 反過來說是從 $\overline{V_k}$ 連到 V_k 也可以， 注意到對於每一個 $\overline{V_k}$ 中的點 v_j 來說， 它至多連 $\min\{k,d_j\}$ 條邊到 V_k， 因此就得到 (1.1) 的不等式。

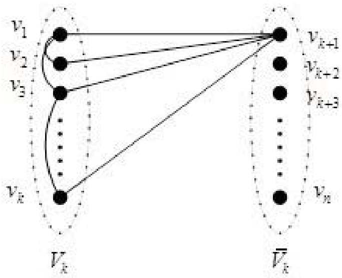


圖 1.15: 定理 1.16 必要性證明的示意圖。

假設序列 d 滿足定理的條件， 接著要用兩種方法來證明存在圖 G 實現 d。

證法一（Harary [12]）： $(\Leftarrow)$ 我們對 n 做數學歸納法。 當 $n=1$ 時， 式 (1.1) 爲 $d_1\le 0+0$， 因此必有 $d_1=0$， 取 $G=K_1$ 便可滿足條件。 現在考慮 $n\ge 2$ 的情況，由式 (1.1) 可知 $d_1\le\sum_{j=2}^{n}\min\{1,d_j\}$， 因此 $d_2\ge d_3\ge\ldots\ge d_{1+d_1}\ge 1$。

令 $d'\colon d'_1\ge d'_2\ge\ldots\ge d'_{n-1}$ 是將 $d_2-1,d_3-1,\ldots,d_{1+d_1}-1,d_{2+d_1},d_{3+d_1},\ldots,d_n$ 排序後得到的度序列， 我們宣稱它滿足定理的條件。 首先， $\sum_{i=1}^{n-1} d'_i=\sum_{i=1}^{n} d_i-2d_1$ 爲偶數。 接著， 透過一連串的討論可以驗證 d' 確實滿足式 (1.1) 的條件 （參見習題 1.28；亦可參考 [12]）， 由歸納法假設， 存在圖 G' 實現 d'。 令 G 爲 G' 中加入一個點使其連到度數爲 $d_2-1,d_3-1,\ldots,d_{1+d_1}-1$ 的各點所成的圖， 於是 G 實現 d。 □

證法一最繁雜的部分在於驗證 d' 滿足式 (1.1)， 這是因爲 d' 必需重新排序、 而且下標由 i 變爲 $i-1$ 之故。 下面 Choudum [6] 證法的修改版可以避免排序。

證法二： $(\Leftarrow)$ 我們對 $s+n$ 做數學歸納法。 當 $s=0$ 時， 取 $\overline{K_n}$ 便可滿足條件。 現在考慮 $s\ge 2$ 的情況， 不失一般性， 可以假設 $d_n\ge 1$， 因爲 $d_n=0$ 時可以考慮去掉此項的序列 d'， 此一只有 $n-1$ 項的序列顯然滿足式 (1.1) 的條件， 因此由歸納法假設，存在圖 G' 實現 d'； 則 G' 中加入一個孤立點所成的圖 G 實現 d。

當 d 中各項不全相等時， 取 t 滿足 $d_1 = d_2 = \ldots = d_t > d_{t+1}$， 否則， 取 $t = n-1$。 考慮 d': $d_1 = d_2 = \ldots = d_{t-1} > d_t - 1 \geq t_{t+1} \geq \ldots \geq d_{n-1} \geq d_n - 1$，其各項和爲偶數。 我們將驗證 d' 滿足式 (1.1)。 以下將用到 $\min\{a,b\}-1 \leq \min\{a,b-1\}$。

當 $k = n$（或 $t \leq k < n$） 時， 式 (1.1) 不等號左邊對 d' 的值比對 d 的值少 2（或 1）、 而不等號右邊對 d' 的值等於對 d 的值（或最多少 1）， 所以， d 的 (1.1) 導到 d' 的 (1.1)。 接下來討論 $1 \leq k < t$ 的情況， 因爲 $\sum_{i=1}^{k} d_i = kd_1$， 所以只需驗證

$$kd_1 \leq k(k-1) + \sum_{j=k+1, j\neq t}^{n-1} \min\{k, d_j\} + \min\{k, d_t - 1\} + \min\{k, d_n - 1\}。 \tag{1.2}$$

當 $d_1 \leq k-1$ 時， (1.2) 顯然成立。 當 $d_1 = k$ 時， 如果 (1.2) 不成立， 因爲 $\min\{k, d_t - 1\} = d_1 - 1$， 只可能是 $k+1 = t = n-1$ 且 $d_n = 1$，這樣一來，$\sum_{i=1}^{n} d_i = k(k+1)+1$ 爲奇數， 矛盾。 最後考慮 $d_1 \geq k+1$ 的情況。 令 r 是使得 $d_r \geq k+1$ 成立的最大下標， 此時 $r \geq t$， 而有 $\min\{k, d_t - 1\} = \min\{k, d_t\}$。 又 $r < n$， 否則 $\min\{k, d_n - 1\} = \min\{k, d_n\}$， 式 (1.2) 就是 (1.1)。 所以 $\min\{k, d_n - 1\} = d_n - 1$， 且對 $k+1 \leq j \leq r$ 恆有 $\min\{k, d_j\} = k$， 所以要證明 (1.2) 只需證明

$$kd_1 \leq k(k-1) + \sum_{j=k+1}^{n-1} \min\{k, d_j\} + d_n - 1 = k(r-1) + \sum_{j=r+1}^{n-1} \min\{k, d_j\} + d_n - 1。 \tag{1.3}$$

將式 (1.1) 中的 k 用 $k+1$ 取代， 因爲 $k+2 \leq j \leq r$ 恆有 $\{k+1, d_j\} = k+1$， 得到

$$(k+1)d_1 \leq (k+1)k + \sum_{j=k+2}^{n} \min\{k+1, d_j\} = (k+1)(r-1) + \sum_{j=r+1}^{n} \min\{k+1, d_j\}。 \tag{1.4}$$

將式 (1.4) 乘以 $k/(k+1)$， 並利用 $\frac{k}{k+1}\min\{k+1, d_n\} < d_n$， 可以得到 (1.2)。

由以上證明， d' 滿足式 (1.1)， 因此由歸納法假設， 存在圖 G' 實現 d'。 當 $v_t v_n$ 不是 G' 的邊時， 在 G' 中加入 $v_t v_n$ 得到一圖 G 實現 d。 當 $v_t v_n$ 是 G' 的邊時， 因爲 $\deg_{G'}(v_t) = d_t - 1 \leq n-2$， 所以存在不和 v_t 相鄰點 v_i， 又因爲 $\deg_{G'}(v_i) \geq \deg_{G'}(v_n)$、 但 v_t 和 v_n 相鄰卻沒和 v_i 相鄰， 所以存在 v_j 和 v_i 相鄰卻不和 v_n 相鄰， 將 G' 中的 $v_i v_j$ 換成 $v_i v_t$ 和 $v_j v_n$ 得到一圖 G 實現 d。 □ ■

上面的定理雖然給出了一個完整的條件， 但它卻不利於改寫成演算法。 底下這個由 Havel [13] 及 Hakimi [11] 提出的說法則可以解決演算法上的需要。

定理 1.17. 設 $n \geq 2$， 則非負整數序列 $d\colon d_1 \geq d_2 \geq \ldots \geq d_n$ 是圖序列的充分必要條件是， 序列 $d'\colon d_2 - 1, d_3 - 1, \ldots, d_{1+d_1} - 1, d_{2+d-1}, d_{3+d-1}, \ldots, d_n$ 也是圖序列。

證明： ($\Leftarrow$) 跟定理 1.16 的第一個證法中最後的步驟一樣， 在 d' 對應的圖中加入一點並連邊就可以得到實現 d 的圖。

($\Rightarrow$) 假設 G 實現 d 且對應於序列的點爲 $v_1, v_2, \ldots, v_n$， 令 r 是使得 v_1 和 v_r 不相鄰的最小數。 不失一般性， 我們可以假設 G 是在所有實現 d 的圖當中使得 r 最大的一個。 如果 $r > 1 + d_1$， 表示 v_1 跟 $v_2, v_3, \ldots, v_{1+d_1}$ 都相鄰， 那我們直接取 $G' = G - v_1$ 就會是實現 d' 的圖； 而如果 $2 \leq r \leq 1 + d_1$， 則必存在 $s > 1 + d_1$ 使得 v_1 跟 v_s 相鄰； 同時因爲 $d_r \geq d_s$， 且 v_1 跟 v_s 相鄰但跟 v_r 不相鄰， 所有必存在 v_t 跟 v_r 相鄰但跟 v_s 不相鄰， 如圖 1.16 所示。

令 $\widehat{G}$ 是將 G 當中的 v_1v_s 和 v_rv_t 這兩條邊換成 v_1v_r 和 v_sv_t 的圖， 則易看出 $\widehat{G}$ 的度序列也是 d， 但是對應的 $\hat{r} > r$， 矛盾。 這就證明了結論。 ■

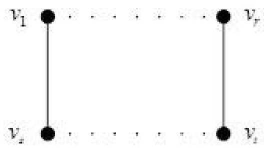


圖 1.16: 四點的連結情況。

1.7. 圖論用於 Brouwer 定點定理的證明

最後， 我們來看看如何將度數的觀念應用在證明分析學的 Brouwer 定點定理（Brouwer fixed point theorem）， 作爲本章的結尾。 我們假定讀者具備若干分析的基本知識， 例如連續函數與序列的收斂性等等。

考慮平面上的一個三角形 T， 將 T 做三角化（triangulation）使其成有限個三角形， 我們說這個三角化爲單純（simplicical）三角化是指任兩個三角形若相交， 則只交在頂點或整條邊上， 見圖 1.17 (a)。 圖 1.17 (b) 則是一個非單純三角化的例子， 因爲左右兩半的三角形並沒有交在整條邊上。

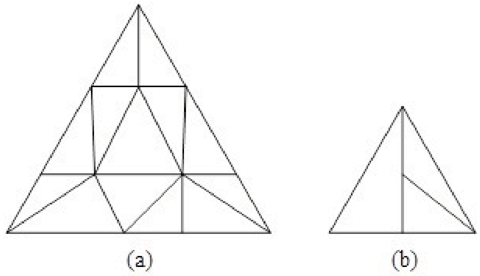


圖 1.17: (a) 單純三角化。(b) 非單純三角化。

我們把一個單純三角化中每一個頂點標爲 0, 1 或 2。 如果標號的方式滿足下面的兩個條件， 我們就說是**適當**（proper）的標號。

1. T 的三個頂點分別標爲 0, 1, 2。

2. T 的三邊上的其他頂點的標號與該邊兩端頂點其中之一相同。

例如，圖 1.18 (a) 就是一個適當標號的例子。

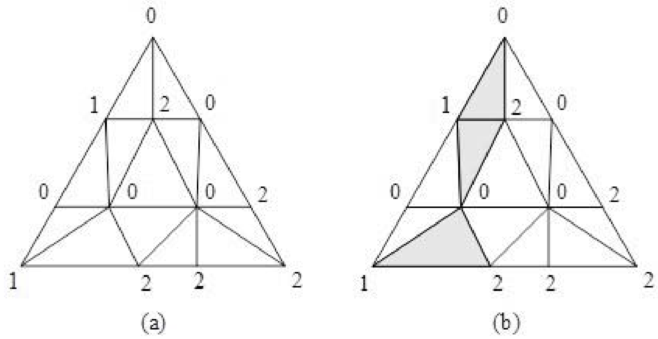


圖 1.18: (a) 圖 1.17 (a) 的一個適當標號。(b) 頂點標號相異的小三角形。

考慮圖 1.18 (a) 中所有頂點恰也是分別被標成 0, 1, 2 的小三角形， 一共有三個，如圖 1.18 (b) 所示。 我們發現， 一般而言， 這樣的小三角形都會有奇數個。

引理 1.18. （**Sperner引理 [15]**） 一個經適當標號的單純三角化的三角形中， 使得三個頂點都標不同號的小三角形的數目必爲奇數。 因此， 至少會有一個這樣的小三角形。

證明： 令 T_0 是 T 外的大區域， 而 $T_1, T_2, \ldots, T_n$ 是 T 內的小三角形區域。 構造一個圖 G， 其點集爲 $V = \{v_0, v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ 分別對應於各個區域， 而 v_i 和 v_j 有邊相連

的條件是 $T_i \cap T_j$ 的兩頂點各標 0 跟 1。 此時， 對於每一個小三角形 T_i， 有下面三種可能。

1. 沒有任何兩個頂點分別被標為 0 和 1，此時 $\deg(v_i) = 0$。
2. 三個頂點被標為 $\{0, 0, 1\}$ 或 $\{0, 1, 1\}$，此時 $\deg(v_i) = 2$。
3. 三個頂點被標為 $\{0, 1, 2\}$，此時 $\deg(v_i) = 1$。

也就是說， 一個小三角形的三頂點標號相異、 若且唯若對應的頂點是奇點。 現在， 注意到 T 上連接 0 和 1 的那條邊當中有奇數段的頂點為 0 和 1（為什麼？）， 於是 $\deg(v_0)$ 會是奇數， 因為 T_0 只有在這邊才有機會和小三角形共用頂點為 0 和 1 的邊。 但是我們知道任何圖的度數和都是偶數， 所以必定有奇數個小三角形對應的頂點是奇點， 這就得到了引理的結論。 ■

現在我們來看 Brouwer 定點定理的證明。 假設 f 是從三角形區域 T 映射到自己的連續函數， 其中 T 的三個頂點是 x_0, x_1, x_2， 則我們知道 T 中任何一點 x（作為二維向量）都可以唯一地寫成 $x = a_0x_0 + a_1x_1 + a_2x_2$， 其中 $a_i \geq 0$ 且 $\sum_{i=0}^{2} a_i = 1$。 我們改以這個坐標 (a_0, a_1, a_2) 表示 x， 並且把 f 表示成 $f(a_0, a_1, a_2) = (a'_0, a'_1, a'_2)$。

定義 $S_i = \{(a_0, a_1, a_2)\colon a'_i \leq a_i\}$、 $0 \leq i \leq 2$。 因為每個點的座標都滿足 $\sum_{i=0}^{2} a_i = 1$， 於是每個點都會屬於某個 S_i。 而我們的目標是說明 $S_0 \cap S_1 \cap S_2$ 非空； 此時， 易知該集合中的點滿足 $(a_0, a_1, a_2) = (a'_0, a'_1, a'_2)$， 也就是一個 f 的定點。

考慮 T 的一系列單純三角化 $T^{(1)}, T^{(2)}, T^{(3)}, \ldots$， 其中 $T^{(n)}$ 內最大小三角形的最長邊長 ℓ_n 當 $n \to \infty$ 時趨近於零。 對於每一個三角化 $T^{(n)}$， 我們考慮將各個頂點按照它們屬於那一個 S_i 加以標號， 不過這些點當然有機會同時屬於兩個 S_i（如果同時屬於三個 S_i，那證明就已經結束了）， 所以我們要稍加決定如何標號。 注意到對於 T 的頂點、 例如 $(1, 0, 0)$， 其函數值的第一個座標不可能變得更大， 所以它一定屬於 S_0， 我們就將它標為 0。 類似地另外兩個頂點分別被標為 1 和 2。 接著， 對於 T 的邊上的點而言， 它有其中一個座標為 0， 這個座標不可能變得更小， 所以它一定可以被標成和該邊的兩端點其中之一同號。 至於 T 內部的頂點隨便選一個號標上去即可。 於是， 我們就將 $T^{(n)}$ 的各個頂點按照它們所屬的某個 S_i 適當地加以標號完畢。

因此， 根據 Sperner 引理， 每一個單純三角化 $T^{(n)}$ 當中都至少會有一個小三角形、 不妨記作 $A_0^{(n)}A_1^{(n)}A_2^{(n)}$， 使得 $A_i^{(n)} \in S_i$。 由於 T 是一個有限閉區域， 根據分析

中的 Bolzano-Weierstrass 定理， $A_0^{(n)}$ 一定有一個收斂到 T 中某一點的子序列， 不妨假設 $A_0^{(n_k)} \to A_0$。 但是因為 $T^{(n)}$ 中的小三角形邊長越來越小， 得到

$$\lim_{k\to\infty} A_0^{(n_k)} = \lim_{k\to\infty} (A_0^{(n_k)} + (A_i^{(n_k)} - A_0^{(n_k)})) = A_0\text{；}$$

然而， 因為 f 是連續函數， 所以每個 S_i 都是閉集， 由 $A_i^{(n)} \in S_i$ 就得到 $A_0 \in S_i$ 對 $i = 0, 1, 2$ 都成立。 這樣就證明了我們的結論。

定理 1.19. （Brouwer 定點定理，二維情形） 任何三角形區域到自己的連續映射一定有一個定點。

習題

1.1. 試證明， 假設把 8×8 的西洋棋盤上位於同一條對角線上的兩個頂角格子去掉（於是剩下一個只有 62 格的棋盤）， 則這個棋盤沒辦法分割成若干個 1×2 的長方形。 並請利用同樣的論證描述在二分圖當中的一般性結論。

1.2. 一個圖 $G = (V, E)$ 的**補圖**（complement）是指 $\overline{G} = (V, \overline{E})$， 其中 $\overline{E}$ 是由所有 G 所不包含的邊所構成， 即 $\overline{E} = \{uv\colon u \neq v, uv \notin E\}$。 一個圖 G 稱為**自反同構**（self-complement）是指 $G \cong \overline{G}$， 例如 P_4 就是一個自反同構的圖。 試證對於自然數 n， 存在 n 點的自反同構圖之充分必要條件為 $n \equiv 0, 1 \pmod 4$。 （提示：若要構造實例，不妨考慮將 P_4 的構造加以推廣）

1.3. 試證明， 如果完全圖 K_n 可以分解成一些三角形， 則 $n \equiv 1, 3 \pmod 6$。

1.4. 假設 $2n$ 個人（$n \geq 2$）當中每個人至少和其他 n 個人認識。 試證明， 其中至少有四個人、 使得這四個人能夠圍著圓桌而坐、 讓每個人兩旁的人都是他認識的人。

1.5. 平面上有 n 個相異點， 已知任兩點的距離至少為 1。 試證明， 最多只有 $3n$ 對點的距離恰為 1。 （提示：考慮將這些點距離恰為 1 者連邊。 請問在所給的條件之下， 每個點的度數至多為多少？）

1.6. 試證明， 奇封閉道路必包含奇圈。 偶封閉道路是否一定含圈？

1.7. 一個圖的 **腰圍**（girth）是指其最短圈的長度（如果沒有圈，方便起見定義腰圍爲 ∞）。試證明，腰圍爲 4 的 k-正則圖至少有 $2k$ 點。並找出所有恰具有 $2k$ 點的這種圖。

1.8. 試證明，腰圍爲 5 的 k-正則圖至少有 k^2+1 點。對於 $k=2$ 或 3，具體找出一個恰具有 k^2+1 點的這種圖[10]。

1.9. 定義**奇圖**（odd graph）$\mathcal{O}_k$ 如下：點集爲 $\{1,2,\ldots,2k+1\}$ 的所有 k-子集（即恰含 k 個元素的子集），而兩點相鄰若且唯若它們不相交（disjoint）。例如 $\mathcal{O}_2$ 就是 Petersen 圖（請檢查看看）。試證明，當 $k \geq 3$ 的時候 $\mathcal{O}_k$ 的腰圍是 6。

1.10. 令圖 G_n 的點集是所有 $\{1,2,\ldots,n\}$ 的排序。兩個排序 $a_1a_2\ldots a_n$ 和 $b_1b_2\ldots b_n$ 相鄰若且唯若兩者可以在交換一對相鄰元素之後變成對方（參見圖 1.19）。證明 G_n 是連通的。

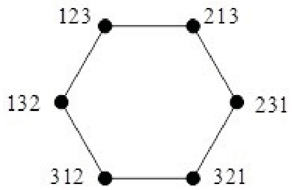


圖 1.19: 圖 G_3。

1.11. 令圖 G 的點集是所有長度爲 n 的二進位字串，即 $a_1a_2\ldots a_n$、其中 $a_i \in \{0,1\}$。而兩個字串相鄰的條件是它們恰有兩個對應的位置不同。試求 G 的連通部分的個數。

1.12. 若圖 G 有 n 個點和 m 條邊使得 $m > \binom{n-1}{2}$，證明 G 是連通的。當 $n \geq 2$ 時，請找出一個非連通圖使得 $m = \binom{n-1}{2}$。

1.13. 若圖 G 有 n 個點且其最小度數 $\delta(G) \geq (n-1)/2$，證明 G 是連通的。對所有的 n，請找一個非連通圖滿足 $\lfloor (n-2)/2 \rfloor$。

1.14. 設連通圖 G 爲 P_4-免除且 C_3-免除的，試證明，G 是完全二分圖。

[10] Hoffman 和 Singleton 在 1960 年曾證明，如果腰圍等於 5 且點數恰爲 k^2+1 的 k-正則圖存在，則 $k=2,3,7$（這些都可以具體構造出來，其中唯一一個滿足 $k=7$ 的情況的稱爲 **Hoffman-Singleton 圖**）、或者 57 也有可能，但至今尚未找到具體的例子。詳情可參見第 **??** 節。

1.15. 設連通圖 G 爲 P_4-免除且 C_4-免除的， 試證明， G 當中有一個點連到其他所有的點。 （提示：考慮一個擁有最大度數的點）。

1.16. (a) 試證明， 圖 G 和其補圖 $\overline{G}$ 中至少有一個是連通的。

(b) 試證明， 若圖 G 是 P_4-免除且非 K_1， 則 G 和 $\overline{G}$ 中有一個是不連通的。

1.17. $K_{1,3}$ 又稱爲爪（claw）。 試證明， 設圖 G 的每個點之度數都是 3， 則 G 可以分解爲爪、 若且唯若 G 是二分圖。

1.18. 試證明， 連通圖 G 的任兩條最長路徑 P 和 Q 至少有一個公共點。

1.19. 試證明， 當 $k \geq 1$ 時， 在恰有 $2k$ 個奇點的連通近圖中， 存在 k 條不共用邊的行跡將此近圖的邊都用完。

1.20. 試證明， 每一個連通近圖都有一條道路， 將此近圖中的一條邊至少用過一次。 甚至可以進一步要求， 任一條邊都用了一次或兩次。

1.21. 試證明， 每一個強連通有向近圖都有一條道路， 將此有向近圖中的一條邊至少用過一次。 是否可以進一步要求， 任一條邊都用了一次或兩次？

1.22. 試證明， 對 $1 \leq k \leq 8$ 有向近圖 $G_{2,4}$ 都有一條長度爲 k 的有向圈。 是否對 $1 \leq k \leq \sigma^{n-1}$ 有向近圖 $G_{\sigma,n}$ 都有一條長度爲 k 的有向圈？

1.23. 試求出 $\sigma = 3$ 時的一種 de Bruijn 3-序列。

1.24. 試構造出兩個不同構但都是連通的圖， 使得它們的度序列相同。

1.25. 下面的序列何者爲圖序列？ 若是， 請構造出對應的圖； 若不是， 請說明理由。

$(5,5,4,3,2,2,2,1)$, $(5,5,5,3,2,2,1,1)$, $(5,5,4,4,2,2,1,1)$, $(5,5,5,4,2,1,1,1)$。

1.26. 令 $S = \{2,6,7\}$。 試證明， 存在一正整數 k、 使得一個 S 中每一元素恰用 k 次的序列是圖序列。 滿足這種條件的最小 k 爲何？

1.27. 試證明， 定理 1.15 （提示：可以對點數作歸納法， 也可以對 $\sum_{i=2}^{n} d_i$ 做歸納法）。

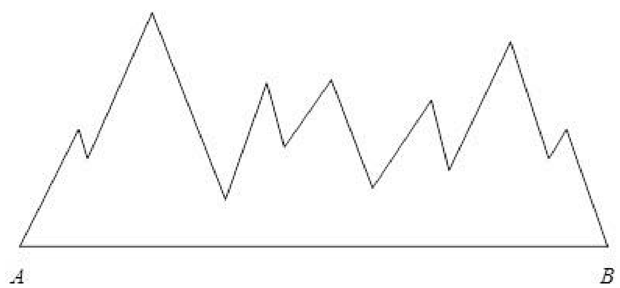
1.28. 試證明， 定理 1.16 的證法一中的 d' 確實滿足式 (1.1)。

1.29. 對兩個非負整數序列 a: $a_1, a_2, \ldots, a_m$ 和 b: $b_1, b_2, \ldots, b_n$， 試證明， 存在一個二分重圖其兩部分的度序列分別是 a 和 b 的充分必要條件是， $\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$。

1.30. 對兩個排序的非負整數序列 a: $a_1 \geq a_2 \geq \ldots \geq a_m$ 和 b: $b_1 \geq b_2 \geq \ldots \geq b_n$，試證明， 存在一個二分圖其兩部分的度序列分別是 a 和 b 的充分必要條件是，$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$ 且 $a_1^* + a_2^* + \ldots + a_k^* \geq b_1 + b_2 + \ldots + b_k$ 其中 a_i^* 是滿足 $a_j \geq i$ 的下標 j 的個數、 而當 $k > j$ 時令 $b_k = 0$。

1.31. 設 $d_1 \leq d_2 \leq \ldots \leq d_n$ 是圖 G 的度序列。 如果當 $i \leq n-1-d_n$ 時恆有 $d_i \geq i$，試證明， G 是連通的。

1.32. 一個山脈是指坐標平面上從 $A = (a, 0)$ 到 $B = (b, 0)$ 在上半平面的一連串折線段。 考慮兩個登山者 A 和 B 分別從兩端點出發， 試證明， 他們有辦法用一種（或許是非常詭異的）方式登山、 使得兩個人在登山過程中的任何時刻都維持在同樣的海拔高度， 而且最後又能碰面。 （提示：請試著用一個圖來模擬兩個登山者的移動）



這是由 Hoffman 提出的有趣結果。 各位或許會注意到， 在這種登山方式裡頭，其中一個人可能經常必須在某一段路上來回數次。

參考文獻

[1] E. T. Bell, *Men of Mathematics*, New York: Simon & Schuster, 1986, c1736. 井竹均等譯，大數學家，九章出版社，1998。

[2] C. Berge, *Graphs and Hypergraphs*, Translated by E. Minieka, North-Holland, Amstendam, 1973.

[3] N. L. Biggs, E. K. Lloyd and R. J. Wilson, *Graph Theory 1736-1936*, Clarendon Press, Oxford, 1998.

[4] J. A. Bondy and U.S.R. Murty, *Graph Theory with Applications*, American Elsevier, New York, 1976. （本書已由作者放在網路上供免費下載）

[5] G. Chartrand and P. Zhang, *Introduction to Graph Theory*, McGraw-Hill, Boston, 2005.

[6] S. A. Choudum, A simple proof of the Erdős-Gallai theorem on graph sequence, *Bull. Austral. Math. Soc.*, vol. 33 (1986), pp. 67-70.

[7] R. Diestel, *Graph Theory, Second Edition*, Springer-Verlag, New York, 2000.

[8] P. Erdős and T. Gallai, Graphen mit Punkten vorgeschriebenen Graphs, *Mat. Lapok*, vol. 11 (1960), pp. 264-274.

[9] L. Euler, Soluto problematics ad geometriam situs pertinentis, *Commentaii Academiae Scientiarum Impericalis Petropolictanae*, vol. 8 (1736), pp. 128-140.

[10] R. Gould, *Graph Theory*, the Benjamin/Cummings, Menlo Park, CA, 1988.

[11] S. L. Hakimi, On the realizability of a set of integers as degrees of the vertices of a graph, *SIAM J. Appl. Math.*, vol. 10 (1962), pp. 496-506.

[12] F. Harary, *Graph Theory*, Addison-Wesley, Reading, Mass., 1969.

[13] V. Havel, A remark on the existence of finite graphs (Czech.), *Časopis Pěst. Mat.*, vol. 80 (1955), pp. 477-480.

[14] D. Kőnig, *Theory of Finite and Infinite Graphs*, translated by R. Mcloart with commentary by W. T. Tutte, Birkhäuser, Boston, 1990. (Originally published as *Theorie der Endlichen und Unendlichen Graphen*, Akademische Verlagsgesellschaft Leipzig 1936. German Edition 1986.)

[15] E. Sperner, Neuer Beweis für die Invarianz der Dimensionszahl und des Gebietes, *Hamburger Abhand.*, vol. 6 (1928), pp. 265-272.

[16] A. Tripathi and H. Tyagi, A simple criterion on degree sequences of graphs, *Discrete Appl. Math.*, vol. 156 (2008), pp. 3515-3517.

[17] A. Tripathi, S. Venugopalan and D. B. West, A short constructive proof of the Erdős-Gallai characterization of graphic lists, *Discrete Math.*, vol. 310 (2010), pp. 843-844.

[18] W. T. Tutte and C. St. J. A. Nash-Williams, *Graph Theory*, Addison-Wesley, Menlo Park, CA, 1984.

[19] S. M. Ulam, *A Collection of Mathematical Problems*, Wiley, New York, 1960, pp. 29.

[20] D. B. West, *Introduction to Graph Theory, Second Edition*, Prentice Hall, Upper Saddle River, NJ, 2001.

[21] 王樹禾， 圖論及其算法， 中國科學技術大學出版社，合肥，1990。