Graph Theory: Homework #8

Lin Hung Cheng B01902059

Problem 1

有n 個公車司機， n 條費時分別為x1, x2, . . . , xn 的上午路線以及n 條費時分別為y1, y2, . . . ,yn的下午路線。如果他的工時總和超過t就要付他加班費。公司的目標是要分配每個司機一條上午路線及一條下午路線， 使得所有司機超時的總和越小越好。
將上述問題化為加權二分圖問題， 並證明將第i 長的上午路線和第i 短的下午路線分配給同一個司機即可達到公司的目的。

Solution

將上午路線和下午路線視為二分圖的兩邊，形成二分圖，其邊$(x_i,\ y_j)$為$\{x_iy_j|x_i + y_j - t \geq 0\}$，權重為$x_i + y_j - t$，其餘邊權重為0，所得的匹配權重和即為加班費總和。

Proof. 希望匹配得到最低權重。
令 $x_1 > x_2 > x_3.... > x_n, y_1 < y_2 < y_3... < y_n$。
若為匹配 $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)...(x_n, y_n)$，則使權重最小($x_1$和$y_1$最不可能有權重$> 0$的邊，以此類推)。

Problem 2

證明一棵樹T 有完美匹配的充要條件是$o(T`v) = 1$ 對T 中的每一個點v 都成立。

Proof. $\rightarrow$

樹T有完美匹配，則有一個最大交錯路徑P經過所有點，且點的數目為偶數。
若T-v存在兩個奇連通部份S_1, S_2，因為S_1, S_2的點在T中也不相連，S_1, S_2中的奇點無法匹配，無法達到完美匹配，矛盾。
且T-v有奇數個點，T-v至少有一點奇連通部份。所以T-v恰有一個奇連通部份。

$\leftarrow$

對於每個v，只需找到 (T-v的奇連通部份)$\cap N(v)$ 的點作匹配即可，因為$o(T - v) = 1$且T為樹，對應的點w恰有一個，若v的奇連通部份為S，此時$w \in S$，則S-w為偶數點，根據條件，不會有2個以上奇連通部份，所以S-w只有偶連通部份。則w的奇連通部份 $\in \bar{S}$，此時$v \in \bar{S}$，所以每兩點會互相對應，可找到一完美匹配。

Problem 3

假設圖G 滿足$o(G`S)d|S|$ 對所有$SV(G)$ 皆成立， 而且T 是滿足$o(G`T) = |T|$ 的最大點集。
(a) 證明G T 的所有連通部分都有奇數點， 進而證明$T = \Pi$。
(b) 對於G T 的任一連通部分C， 證明C x 對於所有$x\Phi V(G)$ 都滿足Tutte 條件。
(c) 設C 是G T 的所有連通部分所成的集合， 考慮以$T*C$ 為點集、以$tC : t\Phi T, C\Phi C, NG(t))C = \Pi$為邊集的二分圖H。利用Hall 定理證明H 有一匹配、其大小為—C—。
(d) 利用(a), (b), (c) 證明Tutte 定理。

Proof. (a)
已知$o(G-T) = |T|$，若G-T存在一連通部分S為偶數點，則可在S中找到一點v，使S-v至少有一個奇數點連通部份。此時T+v為一個更大的點集合，滿足$o(G-T) = |T|$的條件，矛盾。
T若為空集合，此時$o(G) \leq 0$，與G-T的所有連通部分都有奇數點的假設矛盾。所以$T \neq \emptyset$

(b)
若存在$S \in V(C)$ 使 $o(C-S) > |S|$，則 $T \cup S$ 會使 $o(G-T\cup S) = (o(G-T)-o(C)) + o(C-S) > |T|-1+|S| \neq |T \cup S| = |T|+|S|$，矛盾。

(c)
若對於任何$c \in C$ 都有$|N_T(c)| \geq |c|$, 則H中有C-完美匹配，其配對大小為$|C|$。

(d)
由(a)可知有 $T \notin \emptyset$，G-T有T個奇連通部份，由(c)得知T可和所有奇連通部份剩下的點相連。其餘點由(b)可知每個C-x都滿足tutte條件，則可遞迴使用此方法匹配；最後所有點被匹配完，可得一完美匹配。

Problem 4

依照下列的男方與女方之偏好順序列表， 求出男方求婚法與女方求婚法的結果。
男方u, v,w, x, y, z，女方a, b, c, d, e, f
$u : a > b > d > c > f > ea : z > x > y > u > v > w$
$v : a > b > c > f > e > db : y > z > w > x > v > u$
$w : c > b > d > a > f > ec : v > x > w > y > u > z$
$x : c > a > d > b > e > fd : w > y > u > x > z > v$
$y : c > d > a > b > f > ee : u > v > x > w > y > z$
$z : d > e > f > c > b > af : u > w > x > v > z > y$

Solution
男：uf vc wb xa yd ze
女：az by cv dw ex fu

Problem 5

(a) 證明在求婚法當中， 至多只有一個男生會被拒絕n 1 次。
(b) 試構造一種偏好組合， 使得進行求婚法的時候每次迴圈過程中都恰只有一個男生被拒絕， 且到最後除了一個男生被拒絕了n 1 次以外其他男生都被拒絕了n 2 次。作為推論， 求婚法總會在不超過(n 1)2 次迴圈內完成。

Problem 5 continued on next page. . .

Solution

(a)設有兩個男生a, b會被拒絕n-1次，令兩人的最後配對為(a, x), (b, y)。
則rank(a, x) = n, rank(b, y) = n, $rank(x, a) < rank(x, b)$, $rank(y, b) < rank(y, a)$。
a 會先向 y 求婚，b 會先向 x 求婚，此時為穩定狀態，矛盾。
若也有最終配對為(c, z)的c向x或y求婚，不失一般性設為x，且 $rank(c, x) < rank(b, x)$，若b向z求婚成功，則(a, y), (b, z), (c, x)求婚會成為最終配對，矛盾；若b向z求婚失敗，則可向當時配對(d,z)的d的最終配對求婚，以此類推，b必可找到尚未配對的人完成最終配對(因為目前有(c-x)配對)，矛盾。
若為其他情況，如$rank(b, x) < rank(c, x)$，則不影響(a, y), (b, x)的穩定狀態，仍為矛盾。

所以最多只有一個男生會被拒絕n-1次

(b)
n = 3, 男方:a, b, c, 女方:w, x, y

	w	x	y
a	13	22	31
b	12	21	32
c	21	13	33