Graph Theory: Homework #12

Lin Hung Cheng B01902059

Problem 1

Solution將原本的點集中的$\{0,1,2\}$視為點v_1，$\{3,4,5\}$視為點v_2，$\{6,7,8\},\{9,10,11\},\{12,13\}$分別視為點$v_3,v_4,v_5$。
則此五點形成K_5，無法畫出平面圖。

Problem 2

Proof. 從給定的p_1, p_2, ...投影到球面上，並在球面上畫出圖G，因為圖G為平面圖，必可於球面上畫出。
再投影回平面上即可。

Problem 3

Solution

由Euler公式可知，$t(K_{4,4})$和$t(K_{5,5}) \geq 2$。

1.

$t(K_{4,4})$ 可分為$K_{2,4} + K_{2,4}$。

$t(K_{4,4}) = 2$

2.

$t(K_{5,5})$ 可分為兩圖（如右）

$t(K_{5,5}) = 2$

Problem 4

Solution

令$K_{n,n,n}$的三部分為G_1, G_2, G_3

(a)

可將f(n)分為三部分：$G_1 - G_2, G_2 - G_3, G_1 - G_3$。

三部分內的最少交叉數均為$c(K_{n,n})$，

所以$f(n) \geq 3c(K_{n,n})$。

$f(n) >= c(K_{n,2n}) = n \times 2n - (6n - 4)$

$c(K_{n,n}) = n \times n - (4n - 4)$

將三部分的點放置將平面分成三份的三個軸上，因為從任意兩部分各取兩點，最多有一交叉，

可知每部分最多有$(C_2^n)^2$ 個交叉，所以$f(n) \leq 3(n2)^2$。

(b)

去除一點後，每一個交叉會重複計算3次，產生6個$c(K_{3,2,1})$和1個$c(K_{3,3})$

$3c(K_{3,3,1}) \geq 6c(K_{3,2,1}) + c(K_{3,3}) = 7ﬁc(K_{3,3,1}) > 2$。

而由下圖可知$c(K_{3,3,1}) \leq 3$，所以$c(K_{3,3,1}) = 3$。

去除一點後，每一個交叉會重複計算4次，產生6個$c(K_{3,2,2})$和2個$c(K_{3,3,1})$。

$4c(K_{3,3,2}) \geq 6c(K_{3,2,2}) + 2c(K_{3,3,1}) = 18ﬁc(K_{3,3,1}) \geq 5$。

而由下圖可知$c(K_{3,3,2}) \leq 7$，得證。

去除一點後，每一個交叉會重複計算5次，產生9個$c(K_{3,3,2})$。

$5c(K_{3,3,3}) \geq 9c(K_{3,3,2})$，代入5可得$c(K_{3,3,3}) \geq 9$。

而由下圖可知$c(K_{3,3,2}) \leq 15$，得證。

(c)

n=3時成立。

設n=N-1成立，n=N時，f(N-1)為f(N)在每一部分各移除一點，若交叉的點只在其中兩部分，會重覆$N(N-2)^2$次；

若交叉的點包含3部分的點，會重覆$(N-2)(N-1)^2$次，此兩種交叉的數目皆為f(N-1)。

所以$(N-2)(N-1)^2 f(N) \geq N^3 \times f(N-1) = N^3(N-1)^3(N-2)/6$，

$f(N) \geq N^3(N-1)/6$，得證。

(d) 將三部分各放置於二維中的三維座標上，且各有接近一半的點分別放在正負軸上(如圖示)

此時有$2^3 \times 3/2 = 12$種組合，每種組合最多有(如x+, y+)$(C_2^{n/2})^2$)個交叉，

再加上有12種連接至不同軸的交叉(如線(x+, y+)，(x+, z+)的交叉)有$(n/22)^2 \times n/2 \times n/2$個交叉，共有

$f(n) \leq 12(3/64n^4 + O(n^3)) = 9/16n^4 + O(n^3)$

Problem 5

Solution

(a) m = 6時成立。$m > 6$時，N若m = M-1成立，在m = M的情況下，
去除M部分中的一點, 產生M個$K_{M-1,n}$。
M的每個交叉重複M-2次，$(M-2)c(K_{M,n}) \geq Mc(K_{M-1,n})$
$c(K_{M,n}) \geq (M/(M-2))((M-1)((M-2)/5)(n/2)((n-1)/2)) = M(M-1)/5(n/2)((n-1)/2))$。
由數學歸納法得證。
(b) $c(K_n) \geq c(K_{n/2,n}) \geq 1/80n^4 + O(n^3)$