Graph Theory: Homework #5

Lin Hung Cheng B01902059

Problem 1

試證明定理3.7 的(5) 與(6) 和其他四個敘述等價。
Solution
已知(1)(2)(3)(4)等價
(5)→(1)
已知G無圈，設G不連通，可以找到一邊e，其兩點分別屬於二個不同的連通部份，使G+e仍不會產生圈，矛盾。所以G必連通，符合(1)的條件。
(6)→(1)
已知G連通，設G有圈，可以找到一邊e，為圈的其中一邊，使G-e仍連通，矛盾。所以G必無圈，符合(1)的條件。
(1)→(5)
樹的定義即包含無圈，設任意加入一條新的邊不會使G有圈，則再任意加入一條邊後的圖G'仍然是樹，可以以此方法加入邊，產生樹$G_1, G_2, G_3...$，使G_n產生圈，矛盾。所以任意加入一條新的邊會使G有圈。
(1)→(6)
樹的定義即包含連通，設任意刪除一條邊不會使G不連通，則刪除一條邊後的圖G'仍是樹，可以以此方法刪除邊，直到圖中沒有任何邊，與連通的假設矛盾。所以任意刪除一條邊會使G不連通。

Problem 2

若圖G 有n $\geq$ 3 點， 且從G 中去掉任一點均成樹， 試求G 的邊數， 並藉此求G。
Solution
若此時G有n個點，則去掉任一點後的G'會有n-1個點，因為G'是樹，有n-2條邊。
因為去掉任一點之後的邊數相同，可知每個點的度數相同，設其為d。
此時去掉一點會使度數減2d，由總度數變化的式子 dn - 2d = 2(n-2)，可求得d = 2。
G會有2n條邊，形成環的形狀。

Problem 3

試證當n 2 時正整數序列d1, d2, . . . , dn 是某棵樹的度序列之充分必要條件。
Solution
(⇒)
由性質3.6可知n個點的樹有n-1個邊，其度數和即為2(n-1) = 2n-2。
(⇐)
已知度數和為2n-2，在點序列為 $\{v_1 = 1, v_2 = 2, ..., v_{n-1} = 2, v_n = 1/$ 的情況下，必可以找到一棵樹T = V, E，E為$\{(v_i, v_{i+1}), 1 \leq i \leq n-1\}$。

Problem 4

圖G 的中段（median）是指由s(x)最小的所有x所構成的集合。證明樹T的中段恰含一點或恰含相鄰兩點。
Solution
設樹T的中段為x, y二個不相鄰的點，則可以在x-y路徑之間找到如下的z, w。

設z為x-y路徑中，最靠近x的點，令x包含z的分支共有a個點，其他分支(不含x)共有b個點，則s(z) = s(x) + b - a
因為$s(x) = s(y) < s(z)$, $b > a$

設w為x-y路徑中，最靠近y的點，令x-y路徑(不含x, y)和x-y路徑中，除了x, y以外的分支共有c個點($0 < c < a$)，則s(w) = s(y) + (a-c) - (b+c)
因為$s(x) = s(y) < s(w)$, $a - c > b + c$, $a > b + 2c$

將兩個不等式列出，得$b > a > b + 2c$，因為$c > 0$, 矛盾 ；所以x, y必相鄰。

Problem 5

設G 是有n 點的連通圖， 定義一個新圖G 其點集為G 的所有生成樹所成的集合， 而兩生成樹相鄰若且唯若它們在G 中有n 2 條共用邊。證明G是連通圖， 並決定G的直徑。

Proof. G中任意兩個生成樹T和T'，距離為$d \leq n - 1$，可以找到在T中一邊e'，和T'中一邊e'，如此可以產生一個新樹T_1 = T - e + e'，$d(T_1, T')$ = d-1，由此方法可以產生T_2, T_3...，直到T_d使 $d(T_d, T') = 0$。
由此可知T和T'是連通的，所以G是連通圖。
因為生成樹每經過一個鄰居可使兩個生成樹的一條邊相同，生成樹最多只有n-1個邊不同，所以只須n-1個鄰居，直徑為n-1。