Graph Theory: Homework #2

Lin Hung Cheng B01902059

Problem 1

試證明， 每一個連通近圖都有一條道路， 將此近圖中的一條邊至少用過一次。甚至可以進一步要求，任一條邊都用了一次或兩次。

Proof. 至少用過一次：對一圖G，從點$V \in G$開始，分別走向所有$V_n \in Neighbor(V)$，再走回V，其路徑為$VV_1VV_2VV_3....V_n$，完成後，因為是連通圖，可走到任意一個尚未執行此步驟的點W，分別走向所有$W_n \in Neighbor(W)$，再走回W......重複執行直到所有在G中的點都執行過此步驟。
此時G中的所有點都走過其所有的邊，所以任一條邊至少用過一次。

因為此種走法有許多不必要的重複，若一條邊被行走超過兩次，可以將在行走路徑中最近的 $(a \to b), (b \to a)$成對刪除，最後每一條邊會剩下1次或2次行走。
因為在 $(a \to b), (b \to a)$ 之間的路徑序列則可能是 從a到a，或是 從b到b 的路徑，可以將此序列移動到剩下的 $(X \to a), (X \to b)$後面，或$(a \to X), (b \to X)$前面，而不會影響其他行走序列。

Problem 2

試證明， 對$1 \leq k \leq 8$ 有向近圖$G_{2,4}$ 都有一條長度為k 的有向圈。是否對$1 \leq k \leq {}^{n-1}$ 有向近圖G_{n-1} 都有一條長度為k 有向圈？

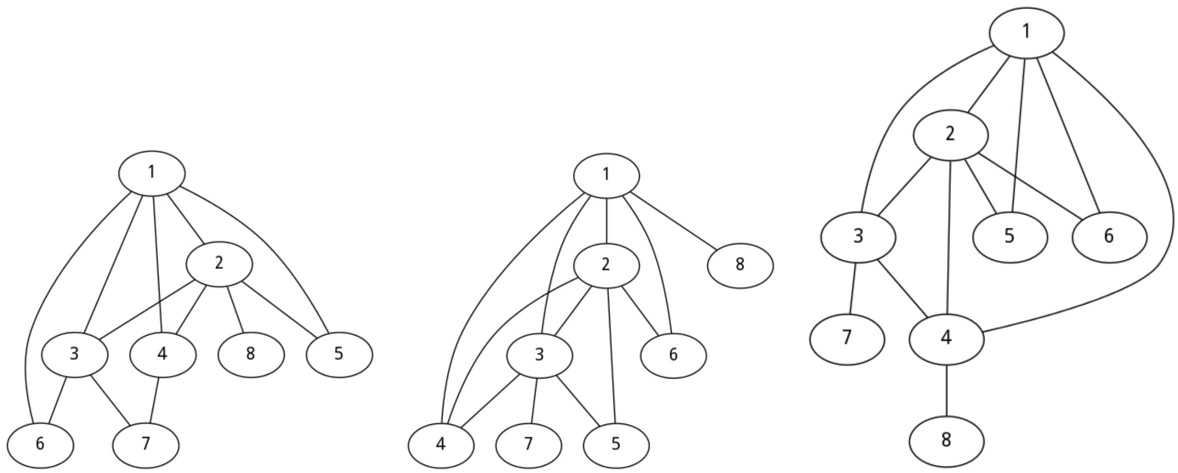
Solution
k = 1，111-111
k = 2，101-010-101
k = 3，101-011-110-101
k = 4，111-110-101-011-111
k = 5，111-110-100-001-011-111
k = 6，111-110-101-010-101-011-111
k = 7，111-110-100-001-010-101-011-111
k = 8，111-110-100-000-001-010-101-011-111
有向近圖G_{n-1}若要有 長度為k的cycle 設起始點為V = a0, a1, a2 ...，其cycle路徑為
$\{a_1a_2a_3...a_n, a_2a_3...a_nb_1, a_3...a_nb_1b_2, ..., b_1...b_k\}$
必有k = 1的cycle，如111...1 - 111...1 若沒有 k = n的cycle，則

Problem 3

下面的序列何者為圖序列？若是，請構造出對應的圖；若不是，請說明理由。
(5, 5, 4, 3, 2, 2, 2, 1), (5, 5, 5, 3, 2, 2, 1, 1), (5, 5, 4, 4, 2, 2, 1, 1), (5, 5, 5, 4, 2, 1, 1, 1)。

Solution

用定理1.17 確定是否是圖序列
1. $(5,5,4,3,2,2,2,1) \rightarrow (4,3,2,2,1,1,1) \rightarrow (2,1,1,1,1,0) \rightarrow (1,1) \rightarrow (0)$
$d_1 = 0$，滿足是圖序列的條件
2. $(5,5,5,3,2,2,1,1) \rightarrow (4,4,2,1,1,1,1) \rightarrow (3,1,1,1) \rightarrow (0)$
$d_1 = 0$，滿足是圖序列的條件
3. $(5,5,4,4,2,2,1,1) \rightarrow (4,3,3,1,1,1,1) \rightarrow (2,2,1,1) \rightarrow (1,1,0) \rightarrow (0)$
$d_1 = 0$，滿足是圖序列的條件
4. $(5,5,5,4,2,1,1,1) \rightarrow (4,4,3,1,1,1) \rightarrow (3,2,1)$
$d_1 > 2$，不滿足圖序列的條件



1 2 3

Answer

Problem 4

對兩個排序的非負整數序列a: $a_1 \geq a_2 \geq ... \geq a_m$ 和b：$b_1 \geq b_2 \geq ... \geq b_n$，試證明，存在一個二分圖其兩部分的度序列分別是a 和b 的充分必要條件。

Solution

已知 $a_1^* \geq a_2^* \geq ... \geq a_k^*$，
且屬於a_k^*的點∈屬於a_{k-1}^*的點∈ ... ∈ 屬於a_1^*的點

1. 存在二分圖 $\Rightarrow \sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$ 且 $a_1^* + a_2^* + ... + a_k^* \geq b_1 + b_2 + b_3 + ... + b_k$
因為二分圖的邊只存在於a部份和b部份的連線，兩邊度數和會相同。
k = 1時，$a_1^* \geq b_1$ 明顯成立，否則b_1代表的點無法連到b_1個不同的點。
k = 2時，b_2和b_1可以都連到屬於a_2^*的點，此時a部份剩下$a_1^* - a_2^*$個點可供b_1或b_2其中一個連，所以$b_2 + b_1 \leq (a_1^* - a_2^*) + a_2^* \times 2 = a_1^* + a_2^*$
以此方法類推，則$a_1^* + a_2^* + ... + a_k^* \geq b_1 + b_2 + b_3 + ... + b_k$成立，右式得證
2. 存在二分圖 $\Leftarrow \sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$ 且 $a_1^* + a_2^* + ... + a_k^* \geq b_1 + b_2 + b_3 + ... + b_k$
從子圖$G = (V(G), \emptyset)$, 將b_1代表的點連到b_1個符合a_1^*的點，而且從屬於a_k^*的點開始連，再連到屬於a_{k-1}^*的

點...以此類推。因為$a_1^* \geq b_1$，必有成功的連接。
將b_2代表的點連到b_2個符合a_2^*的點，因為$a_1^* + a_2^* \geq b_1 + b_2$且$a_1^* \geq b_1$，所以$a_2^* \geq b_2$，必有成功的連接。因為$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$，以此方式對$b_1 ... b_j$作連線後，a部份的點也會全部連線，可得所述的二分圖

Problem 5

一個山脈是指坐標平面上從A = (a, 0) 到B = (b, 0) 在上半平面的一連串折線段。考慮兩個登山者A 和B 分別從兩端點出發， 試證明，他們有辦法用一種（或許是非常詭異的）方式登山、使得兩個人在登山過程中的任何時刻都維持在同樣的海拔高度，而且最後又能碰面。（提示：請試著用一個圖來模擬兩個登山者的移動）

Solution

將山峰和山谷(圖中的極大值和極小值)視為節點
當A或B遇到節點的時候，若要繼續前進，則另一個人需要改變方向才能維持高度相同。
所以走法為：當A或B遇到節點的時候，繼續前進，另一個人改變方向，若同時遇到節點則不需要改變方向。
設A改變方向，B的目前高度為h_1，下一個將到的節點高度為h_2，則在B到達h_2之前，A的高度只會在h_1和h_2之間移動，也就是說，B不會退到目前的節點之前，這可以保證B可以在A遇到有限次節點後，走到下一個節點。而整個圖包含有限個節點，所以B可以在遇到有限次節點的情況下遇到A。

Proof. 若改變方向後，A到達h_2高度前，遇到的節點高度為h，在不失一般性的情況下，設$h_1 > h_2$：

1. 若$h < h_2$，B會先到達下一個節點，符合條件
2. 若$h_1 > h > h_2$，符合條件
3. 若$h > h_1$, 則在此節點前，至少有一節點在h_1, h_2之間（因為從變低到變高）令A改變方向後第一個遇到的節點為C，因為C比B在h_1的節點早遇到，在遇到C的時候，A會前進，且B會改變方向，所以B不會先達到h_1，而是A先達到下一個節點，矛盾