Graph Theory: Homework #7

Lin Hung Cheng B01902059

Problem 1

定義n維超立方（n-dimensionalhypercube）之點集為所有長度為n 的二進字串，而兩個頂點相鄰若且唯若它們的字串恰有一位不同。如果把頂點的二進字串看作是這些頂點在n 維空間中的座標， 那麼就容易看出Qn 其實就相當於是n 維空間中的單位立方塊， 故名。 證明對於n 2， Q_n 至少有$2^{2^{n`2}}$ 種完美匹配。

Proof. 對於n = 2，Q_n有$2^{2^{2-2}} = 2$種完美匹配。
設n = m時，Q_n至少有$2^{2^{n-2}}$種完美匹配，則當n =m+1時，可以將Q_{m+1}分成2個Q_m，每一個Q_m都至少有$2^{2^{m-2}}$種完美匹配，在二個Q_m不互相匹配的情況下，Q_{m+1}至少有$(2^{2^{m-2}})^2 = (2^{2^{m-1}})$種完美匹配。
由歸納法得證，在 $n \geq 2$, 至少有$2^{2^{n-2}}$種完美匹配

Problem 2

4.7 假設二分圖G 的二部份為X 和Y。如果X 中每個點的度數至少為2， 而且—N(S)— —S— 對所有S X 恆成立， 則G 最少有兩個不同的X-完美匹配。
若將定理4.7中的假設「每點的度數至少為2」改為「每點的度數至少為r」， 則可以得到什麼結論
Solution
同定理4.5的第一種證明。
第一種情況，y有r種選法，而對應的r種G'皆有完美匹配，因此就得到G至少有r個X-完美匹配。
第二種情況，G_1 有r個X_1-完美匹配，其中對x ∈ S* 皆有d(G1(x)) = d(G(x))；而G_2至少有一個X_2-完美匹配，其中對$x \in X`S*$ 有可能d(G2(x)) < d(G(x))， 所以合起來G至少也有r個X-完美匹配

Problem 3

兩個人在圖G 上玩遊戲， 規則如下： 第一個人先選取任一點開始，之後兩人輪流選取一個未被選過、但和前一次對方選的點相鄰的點。無法繼續選取的人算輸。
試證明：若G 有完美匹配， 則第二個人有必勝策略； 否則第一個人有必勝策略。

Proof. 令第一個人為p_1, 第二個人為p_2。

若G有完美匹配，則當p_1每選一個w, p_2選擇w的匹配x，可知只要p_1可以選擇一點，p_2必可選擇對應的一點，p_2必不敗(必勝)。

若G無完美匹配，則p_1選取不屬於G的最大匹配的點v，之後p_2每選一點w，p_1選擇w的匹配x。
設p_2選一點w，p_1無法找到匹配，則選過的點產生的路徑(v ... w)是一個G−可擴展路徑(v和w都不屬於匹配中的點)，代表還可以擴張，與無法找到匹配的假設矛盾。
因此，只要p_2可以選擇一點，p_1必可選擇對應的一點，p_1必不敗(必勝)。

Problem 4

一個每行每列和都是1 的非負實數矩陣稱為雙重隨機矩陣（doubly stochasticmatrix）， 這樣的矩陣中若其元素為0 或1，則稱為置換矩陣（permutationmatrix）。試證明， 任一雙重隨機矩陣Q 都可以表示成Q = c1P1+c2P2+. . .+cmPm， 其中c1, c2, . . . , cm 是和為1 的非負實數， P1, P2, . . . , Pm 為置換矩陣。

Proof. 令G的行組成的點集為R, doubly stochastic matrix 為 M
設G無完美匹配，不失一般性，設R有一子集r使 $|N(r)| < |r|$
根據doubly stochastic matrix的性質，屬於r行的元素和應為$|r|$，屬於N(r)列的元素和應為$|N(r)|$；
因為r連接到所有非0的鄰居，$\sum_{i\in r, j\in N(r)} M_{ij} = |r|$。
而N(r)只連接到屬於r的鄰居, $\sum_{i\in r, j\in N(r)} M_{ij} \le |N(r)|$。

此時 $\sum_{i\in r, j\in N(r)} M_{ij} \le |N(r)| < |r| = \sum_{i\in r, j\in N(r)} M_{ij}$，矛盾，所以G有完美匹配。
找到M的完美匹配所對應的元素集S，若其中的最小值為v，則令P為位於S的元素值皆為1的matrix，可找到一個 doubly stochastic matrix M' 使 M = vP + (1-v)M'。再尋找M'的完美匹配......，直到M_n為permutation matrix。 因為M'至少比M少一個非零元素，必能找到M_n。

Problem 5

(a) 證明任一圖G 中的一點集S 是獨立集若且唯若S bar是一個點覆蓋， 因此，α(G) + β(G) = —V (G)—。
(b) 證明任一沒有孤立點的圖G 恆有a'(G) + b'(G) = —V (G)—。
(c) 證明若二分圖G 沒有孤立點， 則α(G) =b'(G)

Proof. (a)
$\Rightarrow$
設Sbar不是一個點覆蓋，則G中至少有一邊$e = \{x, y\}$, $x, y \notin V(\bar{s})$, 此時x, y相鄰且 $x, y \in S$, S非獨立集，矛盾。
$\Leftarrow$
設S不是一個獨立集，則S會包含二點x, y 使 $(x, y) \in G(e)$, 此時$\bar{S}$ 不包含x, y, 無法覆蓋邊(x, y), 矛盾。
max $|S|$ 會產生 min $|\bar{S}|$，即α和β ，所以$\alpha(G) + \beta(G) = |V(G)|$。
(b)
考慮a'(G)以外的點集C，點集中的點互不相鄰，否則a'(G)加上兩個相鄰的點會產生更大的matching。
考慮b'(G)，若使用a'(G)+C來覆蓋，則最小值為$|a(G)| + |C| \le |a(G)| + (|V(G)| - 2a(G)) = |V(G)| - a(G)$。
$a'(G) + b'(G) = a'(G) + (|V(G)| - a'(G)) = |V(G)|$。
(c)
若沒有孤立點，二分圖的minimum edge cover邊數 = minimum vertex cover點數，由(a)可知maximum independent set = minimum vertex cover，在二分圖中也等同於minimum edge cover的邊數，得證。