Graph Theory: Homework #6

Lin Hung Cheng B01902059

Problem 1

針對下面各個問題， 設計出對應的演算法。
(1) 求出一個連通圖中兩點x 和y 的距離。
(2) 判斷一個圖是否為二分圖。

Solution

1. 對x作BFS，若找到y，回傳目前深度

2.

```
function isBipartite(n)
    for each node v in G do
        if visit[v] = false then
            if visit(v, BLACK) = false then
                return false
            end if
        end if
    end for
    return true
end function
function visit(v, color)
    if visit[v] = true then
        return true
    end if
    visit[v] ← true;
    anotherColor ← (color = BLACK)?WHITE:BLACK;
    if color[v] = anotherColor then
        return false
    end if
    color[v] ← color
    for each neighbor n of v do
        if cannot visit(n, anotherColor) then
            return false
        end if
    end for
    return true
end function
```

Algorithm 1: isBipartite

Problem 2

求圖3.12 中有16 點16 邊的圖的生成樹個數。

Solution

用矩陣-樹定理計算(by matlab)
ans = 2000

Problem 3

令Gn 是如圖3.13 所示具有2n 點和3n 2 邊的圖。證明當n 3 時， τ (Gn) = 4 τ (Gn1 τ (Gn2)。當n 1 時，求 τ (Gn)。

Proof. 從Gn到Gn+1，會多2個點和3個邊，而從T_n到T_{n+1}，會多2個點和2個邊。
多2個邊的情況有3種，多3個邊、少1個邊的情況有一種。
這四種情況使生成樹數目為$\tau(G_{n+1}) = \tau(G_n) \times 4$，但在少1個邊的情況時，會使$T_n$最後1個方塊的情況減少一種，所以需減掉$\tau(Gn-1)$。

Problem 4

若T 和T是連通圖G 的兩生成樹， 證明存在e E(TE(T) 使得T - e + e'和T + e - e'都是G 的生成樹。

Proof. 令$e = \{x, y\}$，T'必存在路徑 x, v1, v2, ..., vk, y，可以找到$e' = (v_i, v_{i+1}) \notin$ T(否則T產生圈)。
此時T' - e' + e無圈(因為去除e'，圈仍未產生)，且邊數為n-1，為生成樹。
同理可證 T - e + e' 也為生成樹。

Problem 5

Prim 演算法以下面方法產生一邊賦權連通圖G 的最小生成樹：試證明當演算法結束時， E 是G 的最小生成樹。

Proof. 設$T = \{V, E\}$為G的最小生成樹。使用prim algorithm生成的樹是T':
假設$T \neq T'$:
令e'是prim algorithm第一個選擇到不在T的邊，而T選擇e，則$T - e + e'$也是生成樹，因為e'必為可連接的邊中權重最小的邊，e的權重w(e)大於等於e'的權重$w(e')$。
若$w(e) = w(e')$，則$w(T - e + e') = w(T')$，否則$w(e) > w(e')$使$w(T - e + e') < w(T)$，與T是最小生成樹的假設矛盾。
使用此方法在所有T和T'不同的邊，可推得$w(T) = w(T')$。