Graph Theory: Homework #10

Lin Hung Cheng B01902059

Problem 1

Solution

1.

對2-連通圖G進行貪求耳分解，形成p_1, p_2, p_3 ... p_n。
只考慮p_1時，則依圈的方向組合成P_3，明顯條件成立。

考慮p_1+p_2，先將p_2的點排成兩兩相斥的P_3，若無多餘點，因為p_1, p_2都符合條件，條件成立；若有多餘點(最多兩個)，則可和p_1的點排成P_3，剩下的p_1仍為P_N，組合成P_3後，最多只會剩餘兩個點，條件成立。

考慮p_1+p_2+p_3，先將p_3的點排成兩兩相斥的P_3，若p_3無多餘的點，條件成立；若p_3有多餘點：

1. 若p_3的端點皆屬於p_1：
若p_1+p_2時，p_2沒有多餘點，則將p_1+p_3用p_1+p_2的方式組合，條件成立。
否則，p_2也有多餘點，因為G是claw-free的圖，此時p_2的端點和p_3的端點兩兩不同，令p_2的端點為v_1, v_2，p_3的端點為v_3, v_4，
不失一般性，可將p_1分為 4 個點集：b1 = v_1 v_2(不含v_1, v_2), $a_1 = v_2$ v_3, $b_2 = v_3$ v_4(不含v_3, v_4), $a_2 = v_4$ $v_1$fi$|a_1, a_2| \geq 0$, 因為是貪求耳分解，$|p_2| \leq |b_1|$, 且p_2有多餘點，$|p_2| > 0, |b_1, b_2| > 0$。
先從p_2, p_3開始組合P_3，從p_2, p_3取v_1 = Neighbor(端點)為起始點組合出P_3，因為p_2, p_3各有兩個端點，有2*2 = 4種組合方法，此時p_1的兩個連通部分的點集分別為
$\{(a_1), (a_2, b_1, b_2)\}, \{(a_1, b_1), (a_2, b_2)\}, \{(a_1, b_2), (a_2, b_1)\}, \{(a_2), (a_1, b_1, b_2)\}$(若$p_2$, p_3只剩一點，需要額外對其中一個連通部分去除一點，以形成P_3)，經列舉可知，必有一種方法可使兩個連通部分剩餘的點數目 ≤ 2，條件成立。

2. 若p_3的端點皆屬於p_2，則剩下的p_2可能會不連通，令其點集為r_1, r_2；，在p_1以v_1和v_2為起始/結束點的路徑的點集為q_1, q_2, 可和p_2的點排成P_3，r_1, r_2可和q_1, q_2排成P_3，使r_1, r_2的點完全用完，由和1.相似的方法列舉可知，必有一種方法可使q_1, q_2剩餘的點數目≤2，條件成立。

3. 若p_3的端點分別屬於p_1, p_2，則從v_1 = Neighbor(屬於p_1的端點)為起始點組合成P_3，其餘組合方法與2. 的方法相同。

其餘耳朵也可用此方法遞迴證明條件成立。

Problem 2

Proof. 區塊可能為一條邊或是2-連通圖。
且因G無偶圈，區塊中無偶圈。
若區塊G'為2-連通圖，且無偶圈，此時G'的耳分解為p_1, p_2, ... p_n。
p_1必為奇圈，若p_2的端點為v_1, v_2：
因為p_1為奇圈，v_1, v_2必有一奇數距離P_1，一偶數距離的路徑P_2。
若p_2上有偶數個邊，則 P_2p_2 形成一偶圈；若p_2上有奇數個邊，則v_1, P_1p_2 形成一偶圈；所以G'沒有p_1以外的耳分解，即G'為奇圈。
所以在無偶圈的情況下，區塊只可能為一條邊或是奇圈。

Problem 3

Solution

不失一般性，可設從X為原點，到$Y = \{0, 1\} \times k$。
k條路徑的第一條邊分別為(1, 0, ..., 0), (0, 1, ..., 0), (0, 0, ... , 1)，分別屬於路徑p_1, p_2, p_3..., p_k。
p_i的路徑產生方法為：先將第i個座標的值設為1，然後從i+1個座標軸開始，依序將每個座標軸的值修正成和Y相同的值，直到和Y完全相同或是修正到第i個座標軸。
若$Y_i = 1$，p_j(j $\neq$i)必不包含p_i經過的邊，因為p_j在修正到i時才會使第i個座標軸的值為1，此時已經修正過第j i座標軸的值。
若$Y_i = 0$，p_j(j $\neq$ i)必不經過p_i經過的點，因為p_j的第i個座標軸的值永遠為0。

Problem 4

Solution

1.
令G為極小2連通圖，此時$\delta(G) \geq \kappa(G) = 2$，而因為G為2-connected，所以有耳分解。
設耳分解的耳朵為p_1, p_2, p_3 ... p_n。若$\delta(G) > 2$，則G中的每個點至少都屬於一個耳朵的端點。
此時除去一條邊產生圖G'，設邊為p_i上的v_1v_2：
若有p_j為v_1, v_2作為端點，則可將p_j放入p_i中，取代原本的v_1v_2，並移除p_j；因為此時p_1, p_2,...p_i-v_1v_2+p_j, ... $p_j - 1$, $p_j + 1$ ...p_n為圖G'的耳分解；
若無v_1, v_2作為端點的耳分解，則可找到以v_1作端點的p_j和以v_2作端點的pk，將p_i中與v_1連通的部分p_{i1}放入p_j中，將p_i中與v_2連通的部分p_{i2}放入p_k中，並移除p_i，此時p_1, p_2,... p_j+p_{i1}, ... p_k+p_{i2} ...p_n為圖G'的耳分解；
所以G'必為2-連通，與G為極小2連通圖的條件矛盾。因為$2 = \kappa(G) \leq \delta(G) \leq 2$，$\delta(G) = 2$。
2.
令G為極小k邊連通圖，其$\kappa'(G) = k \leq \delta(G)$。
若$\delta(G) > k$，不失一般性，令$\delta(G) = k + 1$，則從G中去除一邊，形成圖G'，因為...，圖G'是k-邊連通，矛盾。

Problem 5

Solution

1.
令圖G符合k = m時的條件，移除m個點時產生圖G'，依所給的條件可知，G'中d_j的度數 ≥ j，G'的度序列符合k=0的條件。
若k=0時的圖不連通，不失一般性，設有兩個連通部份A, B, 且A包含d_n對應的點, 則A最少有d_n+1個點；此時B最多只有n-1-d_n個點，因為$d_{n-1-d_n} \geq n - 1 - d_n$，B的最大點度數的最小值為n-1-$d_n$，與B為一連通部分的假設矛盾，k=0時圖連通。
因為移除m個點後依然連通，k=m時，圖G為m+1連通，得證。
2.
$V = \{a, b, c, d\}$
$E = \{ab, ac, ad, bd, cd\}$
j = 1, k = 2

若移除k個度數為n-1的點，則G剩下j個度數為j-1的點，n-j-k個度數為n-j-k-1。