Graph Theory: Homework #13

Lin Hung Cheng B01902059

Problem 1

Solution

Problem 2

Proof. **(1)** 一個面f的鄰居彼此不相鄰，若相鄰，則其分界邊會分割f為兩個面，矛盾。
因此可將所有面分為兩個獨立集，分別著兩種顏色。

(2) 考慮三條邊互相交叉形成的三角形，可知著色數最小為3。
以座標值的和排序以著色，則著色時最多只有2個鄰居被著色。所以著色數小於3。

Problem 3

Solution令v1, v2, ... vn為一種貪求著色順序，其著色結果為S。
可知任何貪求著色都可用交換顏色的方法轉換成S。

Problem 4

Solution

$G_{n,k}$包含K_{k+1}，所以著色數最少為k+1。
且因為在$G_{n,k}$的外環中的任k+1個連續點，都要彼此著色不同(因為這k+1個點的導出子圖為K_{k+1})，
所以依外環順時針方向貪求著色，即可得最佳著色。
若n能被k+1整除，則依照順時針方向貪求著色，可得著色數為k+1。
若n不能被k+1整除，則依照順時針方向貪求著色，可得著色數為k+2。

Problem 5

Solution

取一點v，作向外延伸的六個正三角形，邊長均為1，可發現最少需著色數3。
取一點v，作向外延伸的一個正三角形，令其他兩點為v1, v2，則取經過此兩點，半徑為1的另一個圓，其圓心為w。
因為v1, v2顏色已確定，w的顏色會和v相同。再用同方法作一點y，和w的距離為1，則w, y顏色相同且距離為1，矛盾。
所以著色數最小為4。
將平面切為邊長=0.999的正六邊形，以七種顏色填上，此時著色成立。所以著色數最大為7。