Graph Theory: Homework #14

Lin Hung Cheng B01902059

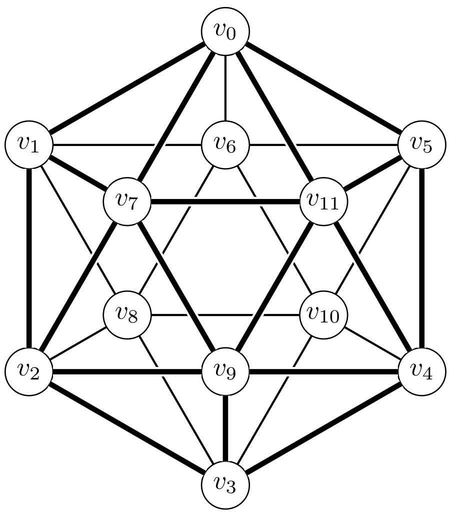
Problem 1

1.
設在最多12點的平面圖中，存在著色數為5的圖（五色定理）。
令G為著色數5的圖中最小的圖，移除其度數不大於4的點v，此時的圖G'著色數為4，否則G不為著色數5的圖中最小的圖。
重新加入此點，可發現其著色數為4，矛盾：
若其度數小於4，v可填原本的4色之一，著色數為4。
若其度數等於4且其鄰居有兩個以上同色，v可填原本的4色之一，著色數為4。
若其度數等於4且其鄰居分別用4種不同色，則使用5色定理證明時的方法換色即可。

Proof. 最多12點的平面圖中, 除了正二十面體，存在度數不大於4的點。
最多12點的平面圖邊數最多為30，此時若要建構出所有點度數大於4，則每個點度數均為5，即為正二十面體。

所以上述證明了除了正二十面體，設在最多12點的平面圖中，存在著色數為5的圖（五色定理）。

正二十面體的著色如下：



2.
在最多32條邊的圖中，若點數最多為12，已證明。
若點數≥ 13，則其平均度數< 5，必存在度數小於四的點，
用相同方法即可證明。

Problem 2

Solution

考慮G_2的情形，由列舉可知G_2的4著色會使4色均使用2次。設G_n成立，則G_{n+2}即為G_n的外圈四點及G_2的內圈四點分別相連的圖形。此時G_n使4色均使用n次；而G_2的部份，可用以下規則連接G_n和G_2，使G_{n+2}的4著色使4色均使用n+2次，由數學歸納法得證。

G_n的外圈四點為P_1 到 P_4，有邊$\{P_1, P_2\}$, $\{P_2, P_3\}$, $\{P_3, P_4\}$, $\{P_4, P_1\}$

G_2的八個點為p_1 到 p_8，有邊$\{p_1, p_2\}$, $\{p_2, p_3\}$, $\{p_3, p_4\}$, $\{p_4, p_1\}$, $\{p_5, p_6\}$, $\{p_6, p_7\}$, $\{p_7, p_8\}$, $\{p_8, p_5\}$, $\{p_1, p_5\}$, $\{p_2, p_5\}$, $\{p_2, p_6\}$, $\{p_3, p_6\}$, $\{p_3, p_7\}$, $\{p_4, p_7\}$, $\{p_4, p_8\}$, $\{p_1, p_8\}$。

相連的邊為$\{P_1, p_1\}$, $\{P_2, p_1\}$, $\{P_2, p_2\}$, $\{P_3, p_2\}$, $\{P_3, p_3\}$, $\{P_4, p_3\}$, $\{P_4, p_4\}$, $\{P_1, p_4\}$

(1) 若G_n的外圈四點著色組合為{x, x, y, y}，不失一般性，令P_1 到 P_4 為{x, y, x, y}，
則p_1到p_8可著色為{w, z, w, z, x, y, x, y}

(2) 若G_n的外圈四點著色組合為{x, x, y, z}，不失一般性，令P_1 到 P_4 為{x, y, x, z},
則p_1到p_8可著色為{z, w, z, y, x, y, x, w}

(3) 若G_n的外圈四點著色組合為{w, x, y, z}，不失一般性，令P_1 到 P_4 為{w, x, y, z}，
則p_1到p_8可著色為{y, z, w, x, z, w, y, z}

Problem 3

Solution

1.

在圖的外圍加上一個點v，並將所有點連至此點。因為是外圍平面圖，新的圖G必為平面圖。
此時G可被4著色。因為v連至所有點，v的顏色不能用於原圖中的任一點。所以原圖可被3著色。

2.

1個點的外圍平面圖可被3著色。
設n個點的外圍平面圖可被3著色，則在G_{n+1}中取一度數不大於2的點v，移除v和其邊。此時圖為n個點的外圍平面圖。
可以將v著色為與其鄰居皆不同的顏色，此時最多只用3色，所以G_{n+1}可被3著色；由數學歸納法得證。

3. 將圖分割成互不相交的三角形，其頂點均為原圖的點。此時的圖G為外圍平面圖，將圖G著色成3色，且因為三角形的三個點顏色兩兩不同，所以選擇最少出現的顏色作為守衛的位置即得證。

Problem 4

Solution

在環上，對一個至少有三個點的圖，永遠有e $\leq$ 3n。

Proof. 環面的虧格為1，所以$n - e + f = 0$。
且因為n≥3，且於環面上，每個面都至少有三條邊。
$2e \geq 3f$ 代入公式後就得到 $e \leq 3n$。

將圖分割成互不相交的三角形，其頂點均為原圖的點。此時每個面都由三條邊組成，所以$2e = 3f$,$e = 3v$，且每點度數均為6。
所以在環上，一個至少有三個點的圖的著色數≤7，且因為K_7可以嵌入環中，所以著色數≥7。