Graph Theory: Homework #9

Lin Hung Cheng B01902059

Problem 1

Solution

1.
設$K_{m,n}$的m部份為a個點所在的部份，則$|[S,\bar{S}]|$為
a(n-b)+b(m-a)

2.
若要使$K_{m,n}$不連通，在移除最少邊的情況下，剩下最大的連通部份為$K_{m,n-1}$或$K_{m-1,n}$
令a = m, b = n-1，此時$|[S,\bar{S}]|$ = m
令a = m-1, b = n，此時$|[S,\bar{S}]|$ = n
可知$\kappa'(K_{m,n}) = min\{m,n\}$

3.
$K_{3,3}$至少需3條邊才可連通，所以除去7條邊會剩2條邊，無法連通。
根據公式，邊截集的數目為(1)所示，在$0 \leq a, b \leq 3$的條件下，無法找到邊為7的邊截集。

Problem 2

Proof. 若 $\delta(G) = n - 1$，此時G為完全圖，$\kappa(G) = n - 1$
若 $\delta(G) = n - 2$，刪除任意n-3個點產生G'，此時G'仍為連通，因為每個點最多只會和一個點不相連，而G'有三個點。
因為$\kappa(G) < \delta(G)$，所以$\kappa(G) = n - 2$，得證。

$V = \{a, b, c, d, e\}, E = \{ab, ac, bc, cd, ce, de\}$
$\delta(G) = 2$
$\kappa(G) = 1$(c)

Problem 3

Solution

與5.6的證明類似
令$S = \kappa(G)$，H_1, H_2 為 G-S 的兩個連通部份，對於任何$v \in S$，v在H_1與H_2當中都必各有鄰居。
又因為$\Delta(G) \leq 3$，考慮下列情況：
若deg(v) = 3：
如果v在其中某一部份當中只有一個鄰居，那我們就把連往該鄰居的邊加入切斷集中。
如果v在兩部份當中都只有一個鄰居但第三個鄰居不屬於S，那隨便將連往H_1或H_2的其中一邊加入切斷集。
如果v在兩部份當中都只有一個鄰居，但第三個鄰居u也屬於S，將v和u連往同一側的邊選出。
若deg(v) = 2，v各有一條邊連到H_1, H_2，隨便將連往H_1或H_2的其中一邊加入切斷集。
若deg(v) = 1，則移除此邊即可。

共使用了$|S|$條邊加入切斷集中，得證。

Problem 4

Solution

對於只有一個圈的仙人掌，n個點會有n個邊，符合條件。
對於只有圈的仙人掌，可從原本第一個圈的點連出新的圈，每增加一個m個點的圈，會使n增加m-1，邊數增加m。
新增加的點數m-1, 邊數為 m，$3((m-1)-1)/2 \geq m$，化簡得 $m \geq 3$，因為m形成圈，條件必成立。且因為第一個圈已符合條件，整體也符合條件。
對於有邊和圈的仙人掌，每加入一條邊(連結兩個區塊的圈)，會增加一個點和一條邊，所以必符合條件，得證。

Problem 5

Solution

$\Rightarrow$
因為G為2連通，y-z必在一圈C上，令在C中的y-z路徑為p，x-y的一條路徑為P:
若$P \cap C = y$，則路徑為P-p(重複的y不計)。
若$|P \cap C| > 1$，則找P中第一個和p重複的點v，從v沿著C中的路徑到達y，即可走p。路徑為x-v-y-p(重複的y不計)。

$\Leftarrow$
設去除一點y後，存在x, z使G-y沒有x-z路徑，則代表所有$v \in G - x - y - z$所產生的x-v-z路徑都有經過y，所以在G中找不到能產生x-z-y的路徑，因為x-z路徑中必包含y，矛盾。