Graph Theory: Homework #1

Lin Hung Cheng B01902059

Problem 1

試證明， 假設把8 × 8的西洋棋盤上位於同一條對角線上的兩個頂角格子去掉 （於是剩下一個只有62 格的棋盤）， 則這個棋盤沒辦法分割成若干個1 × 2 的長方形。並請利用同樣的論證描述在二分圖當中的一般性結論。

Solution
已知條件

1. 西洋棋盤上本有32個黑格子，32個白格子
2. 同一條對角線上的兩個頂角格子必為同顏色
3. 1 × 2的長方形當中，必然包含1個黑格子，1個白格子

去除對角線上的兩個頂角格子後，只有兩種情形

1. 32個黑格子，30個白格子
2. 30個黑格子，32個白格子

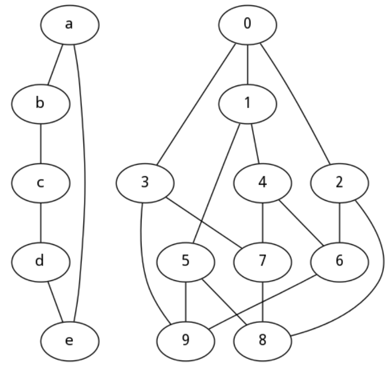
必定無法將所有格子切割成1 × 2 的長方形
用二分圖證明
可以將黑格子和白格子視為二分圖的兩部份，由於目標是分割成1×2，且各包含一個黑白格子的長方形，可以將目標視為在二分圖中，作1對1映射，即每個vertex的degree均為1。
假設每個vertex的degree為1，在兩邊vertex數不同的情況下，則會發現兩部份的degree和不同，產生矛盾。

Problem 2

平面上有 n 個相異點, 已知任兩點的距離至少為 1。 試證明, 最多只有 3n 對點的距離恰為 1。 (提示:考慮將這些點距離恰為 1 者連邊。 請問在所給的條件之下, 每個點的度數至多為多少?)
Solution
取一點v，若要產生最多對點距離為1，則其neighbor v^1 和v的距離均為1，且v^1中的點彼此有最多點距離為1。
可以發現，v^1中的點最多只能和2個其他v^1中的點距離為1(可從v和v^1的其中一點畫出半徑為1的同心圓得知)。 按照這個方法產生點，v最多會有6個neighbor，連邊之後會形成6個正三角形。
所以n個點最多可以產生 $n \times 6 \div 2 = 3n$個點對距離為1。

Problem 3

試證明, 腰圍為 5 的 k-正則圖至少有 $k^2 + 1$ 點。 對於 k = 2 或 3, 具體找出一個恰具有 $k^2 + 1$ 點的這種圖
graph of k = 2 or 3



Proof. 在k-正則圖中取一個點v，其neighbor為 v^1，v^1除了v之外的neighbor為v^2。
可知 $v^1 \bigcap v^2 = \emptyset$，否則會產生3-cycle($v - v_1^1 - v_1^2 - v$)，且 v^1不會有v 以外的共同neighbor，否則會產生4-cycle($v - v_1^1 - v_1^2 - v_2^1 - v$)。
因為是k正則圖，v^1 有 k 個，v^2 有 $k(k-1)$ 個(每一個 v^1 中的點的neighbor，除去v後有k-1個)。
最少會有 $1 + k + k(k-1) = k^2 + 1$ 個點

Problem 4

令圖 G 的點集是所有長度為 n 的二進位字串, 即 a1 a2 . . . an 、其中 ai 0, 1。 而兩個字串相鄰的條件是它們恰有兩個對應的位置不同。 試求 G 的連通部分的個數。
Solution
將兩個點的距離定義為字串對應位置不同的個數，可以發現連通部分中，任意兩個點的距離均會是偶數。
令v_0為 $\{a_i = 0 | i = 1 \sim n\}$，可以分成兩個子集: {和$v_0$距離為偶數的集合，和$v_0$距離為奇數的集合}

Problem 5

(a) 試證明, 圖 G 和其補圖 G 中至少有一個是連通的
(b) 試證明, 若圖 G 是 P4-免除且非 K1 , 則 G 和 G 中有一個是不連通的

Proof. (a)
若圖G不連通，令G的連通部分為$c_1, c_2, c_3 ... c_n$。
則補圖 $\bar{G}$會有c_1中所有點連到$c_i (i = 2\ n)$中的所有點，這會使$\bar{G}$連通。
補圖G不連通的證明同理。
(b)
因為P_4的補圖和P_4同構，所以$\bar{G}$也會是P_4-free，用G或$\bar{G}$來證明是相同的。

若$n = |V(G)|$，可列舉得知在 $n \leq 3$ 的情況下會成立。
設在$n \geq 4$的時候也成立。
則在$P_4 - free, n \geq 4$的連通圖G中，可找到一點V，使$G' =$ G-V不連通(若在G中無此點，則考慮$\bar{G}$產生的$\bar{G}' = \bar{G} - V$，證明方法相同，因為依照歸納法假設，G'和$\bar{G}'$有一個是不連通的。)
若V與所有其他點相連，則$\bar{G}$不連通，若V不和G'相連，則G不連通。
除此之外的相連方式，在G中，V和G'的至少兩個連通部分相連(若只連一個連通部分，則G會不連通)。其

和V連結的其中兩個連通部分為c_1, c_2，令V和c_1的neighbor為W，c_2的neighbor為Y。
G'中也會存在一個與V不相鄰的點，令其為Z，在不失一般性的情況，可以令Y和Z相鄰。如此G中便存在Z–Y–V–W 的 P4 導出子圖，矛盾。
所以可能的情形只有V與所有其他點相連，而會使$\bar{G}$不連通。
所以在$P_4 - free, n \geq 4$的連通圖G中，G和$\bar{G}$有一個是不連通的。
因為已證明$n \leq 3$也是成立，證明完成。[1] □

[1]參考資料: https://homepages.warwick.ac.uk/ masgax/Graph-Theory-notes.pdf