Graph Theory: Homework #15

Lin Hung Cheng B01902059

Problem 1

1.
令n≥m，令n部份的點為n_1, n_2，... n_i。n_i的連邊所著的顏色表示為$\{n_i m_1,\ n_i m_2,\ \ldots\ n_i m_m\}$（為方便，都表示成n=m的形式，在$n > m$的情況下，只需減少$n_i$的長度即可），著色值由1開始計算
在n = 1時，$n_1 = \{1\}$
在n = 2時，$n_1 = \{1, 2\}$，$n_2 = \{2, 1\}$
在n = 3時，n_1 =$\{1, 2, 3\}$，$n_2 = \{3, 1, 2\}$，$n_3 = \{2, 3, 1\}$
在n = 4時，n_1 =$\{1, 2, 3, 4\}$，$n_2 = \{4, 1, 2, 3\}$，$n_3 = \{2, 3, 4, 1\}$, $n_4 = \{3, 4, 1, 2\}$
在n = 5時，n_1 =$\{1, 2, 3, 4, 5\}$，$n_2 = \{2, 3, 4, 5, 1\}$，$n_3 = \{3, 4, 5, 1, 2\}$, $n_4 = \{4, 5, 1, 2, 3\}$, $n_5 = \{5, 1, 2, 3, 4, 5\}$
在n = 6時，n_1 =$\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$，$n_2 = \{2, 3, 4, 5, 6, 1\}$，$n_3 = \{3, 4, 5, 6, 1, 2\}$, $n_4 = \{4, 5, 6, 1, 2, 3\}$, $n_5 = \{5, 6, 1, 2, 3, 4\}$, $n_6 = \{6, 1, 2, 3, 4, 5\}$
以此類推，可得證。
2.
Q_1：明顯成立
Q_n(n≥2): 將其拆分成二分圖，由(1)可知二分圖的邊著色數等於最大度數，其邊著色數為n，成立。

Problem 2

設G的邊著色數為最大度數，且G有截點v，G-v的連通部份為C_1, C_2, ...，其相接點分別為v_1, v_2, v_3...。
因為邊著色數為最大度數，令連到截點的邊的顏色為a，任何連通部份顏色a之外，任何一色的邊均形成完美匹配，其點個數為偶數。
考慮a的完美匹配，可發現$C_i - v_i$為顏色a的完美匹配，所以$C_i - v_i$有偶數個點，與上述條件矛盾。

Problem 3

Solution

(a)

設G沒有一種2-邊著色使(a)條件成立。
則此時至少有一點v的度數≥2且其相連邊的顏色都相同。
若圖G除去v及其鄰邊後產生兩個以上連通部份，則將其中一個連通部份和其連至v的邊換成另一顏色即可。
若圖G除去v及其鄰邊後產生一個連通部份：
(1)若$v1, v2, ..., vn$其中一點的度數>2且除了連至v的邊的c(v)=2，
或是度數=2，均可將連至v的邊換色使條件成立。
(2)若$v1, v2, ..., vn$所有點的度數>2且除了連至v的邊的c(v_i)=1，則可以找到G中包含v的偶圈，令其長度為2m，則在偶圈中和v相距最遠的點w，其在偶圈中的兩邊顏色相同。將其中一邊換色即可使c(v) = 2。
若除了v之外，尚有其他點不合條件，則使用同方法換色即可。

(b)

設H沒有奇圈，則將H用(a)的方法重新著色，可得比f更高的c(v)和，矛盾，所以H有奇圈。

(c)

若著色數大於最大度數，設f是Δ-最佳著色，則必有一點u使顏色a出現至少兩次，顏色b沒有出現(因為著色數$> \Delta$)。
由(b)可知，G中存在奇圈，與二分圖矛盾，得證。

Problem 4

Problem 5

不失一般性，設G為樹；在點個數n=1時，條件成立。
設n=N-1時，條件成立；則n=N時，令x，y是Gn中的兩點。
若xy相連，則移除此邊，G-xy = $G_x + G_y$，且G_x和G_y符合條件。
令x'為x的任一鄰居, y'為y的任一鄰居，則x'和x，y'和y，y'和x'在G_3為鄰居。
此時有一個hamilton圈的路徑為$x - ... - x' - y' - ... - y - x$。(和G相同處省略)
若xy不相連，則令路徑P為x到y的路徑。取一點x的鄰居z。
令x'為x的任一鄰居, y'為y的任一鄰居，則x'和z在G_3為鄰居。
此時有一個hamilton圈的路徑為$x - ... - x' - z - ... - y' - ... - y - x$。(和G相同處省略)