

Julia Set 的生成

作者姓名：唐浩

专业和学号：信息与计算科学 3200102118

2022 年 7 月 4 日

摘要

本文就 Julia Set 的生成进行探索，简要介绍一下 Julia Set 的起始，数学推导，并附上一定的图片解释。通过计算机，我们可以进行相对于人脑来说较麻烦的计算，通过计算机进行迭代，我们可以简单重现 Julia Set 的生成过程。并探讨 Julia Set 与 Mandelbrot Set 之间的关系

关键字：Julia Set 迭代 Mandelbrot Set 图形生成 比较

1 引言

朱利亚集合 (又译为茹利亚集合，英语：**Julia se**) 是一个在复平面上形成分形的点的集合。以法国数学家加斯东·朱利亚 (Gaston Julia) 的名字命名。



它是一个几何图形，其中的点均出自迭代公式： $Z_{n+1} = Z_n^2 + C$ ，取定一个常数 C ，对于复平面上的每一点 z ，若 Z_n 收敛，则 z 在集合中。对于所有的 z 组成的集合，便称为 **Julia Set**。本文主要介绍如何生成 Julia Set，并简单叙述其与 Mandelbrot Set 之间的关系。

2 数学理论

2.1 迭代

首先，我们来介绍一下什么是迭代。迭代是重复反馈过程的活动，其目的通常是为了逼近所需目标或结果。每一次对过程的重复称为一次“迭代”，而每一次迭代得到的结果会作为下一次迭代的初始值。就 Julia Set 而言，被迭代的是一些最简单的函数，其形如 $f(x) = x^2 + C$ (C 为常量)。

对于每一个 z ，若根据迭代规则： $Z_{n+1} = Z_n^2 + C$ 生成的序列 $\{x_0, x_1, \dots\} \rightarrow \infty$ ，则 z 的轨迹无界，则 $z \notin \text{Julia Set}$ ，若序列有界，则 $z \in \text{Julia Set}$ 。

2.2 逃逸时间算法

2.2.1 逃逸法则

对于一个复数 $z_n = x_n + y_n i$, 模 $|z_n| = \sqrt{x_n^2 + y_n^2}$ 。定义:

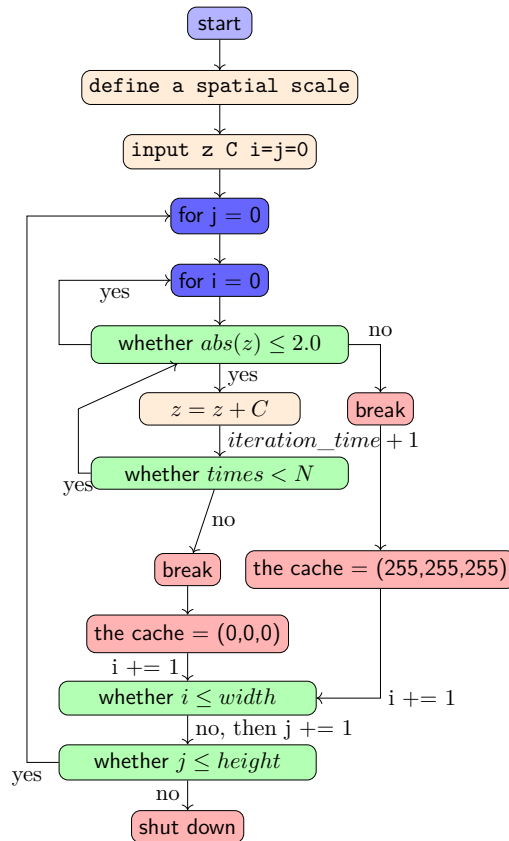
如果对于一个复数序列 $\{z_1, z_2, \dots, z_n\}$ 有 $|z_j| > \max(2, |C|)$ 则序列将逃逸到无穷大。

2.2.2 逃逸时间算法

对于每个复参数平面上的点 C , 我们生成一个序列 Z , 根据逃逸准则, 我们规定 R 为逃逸半径, 在 $\{z_1, \dots, z_n\}$ 里, 如果 $|z_j| < R$, 判断有界 (但其实也有可能这个序列是无界的), 反之, 这个序列无界。故需要确定以下参数:

- 1、复平面范围 $C = \{c = x + yi : x_1 \leq x \leq x_2, y_1 \leq y \leq y_2\}$
- 2、分辨率 gridSize
- 3、逃逸半径 $R = \max(2, |C|)$
- 4、逃逸时间 $N = \text{最大迭代次数}$

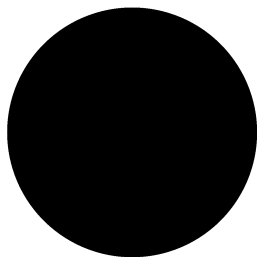
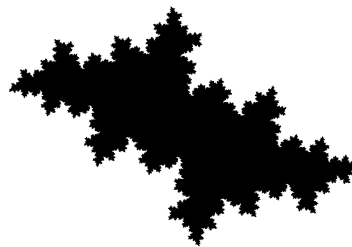
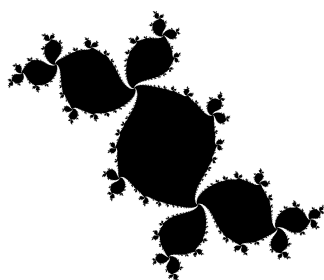
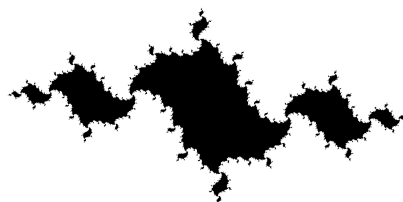
3 算法



4 数值算例

迭代次数取 $N = 100$, 选取不同的常数 C , 将会得到不同的 Julia Set, 下面我们简要选取几个常数 C 的值, 通过计算机生成的 bmp 图像来观察不同的 C 所产生的 Julia Set: 当

我们将 C 设置成 $(0,0)$, 将会得到一个圆, 由于图像的对称性, 在此, 统一将 C 取为 $(-x,y)$ 的形式。

(a) $C = (0,0)$ (b) $C = (-0.5, 0.5)$ (c) $C = (-0.1, 0.7)$ (d) $C = (-1, 0.2)$

如果我们将原点偏移, 还可以得到一个具体部位的放大图, 这里就不做举例了, 感兴趣的读者可以自己修改参数, 查看结果。

5 分析

让我们先生成一个 Mandelbrot Set 的图, 取 $N = 100$, 其生成的图如下所示:

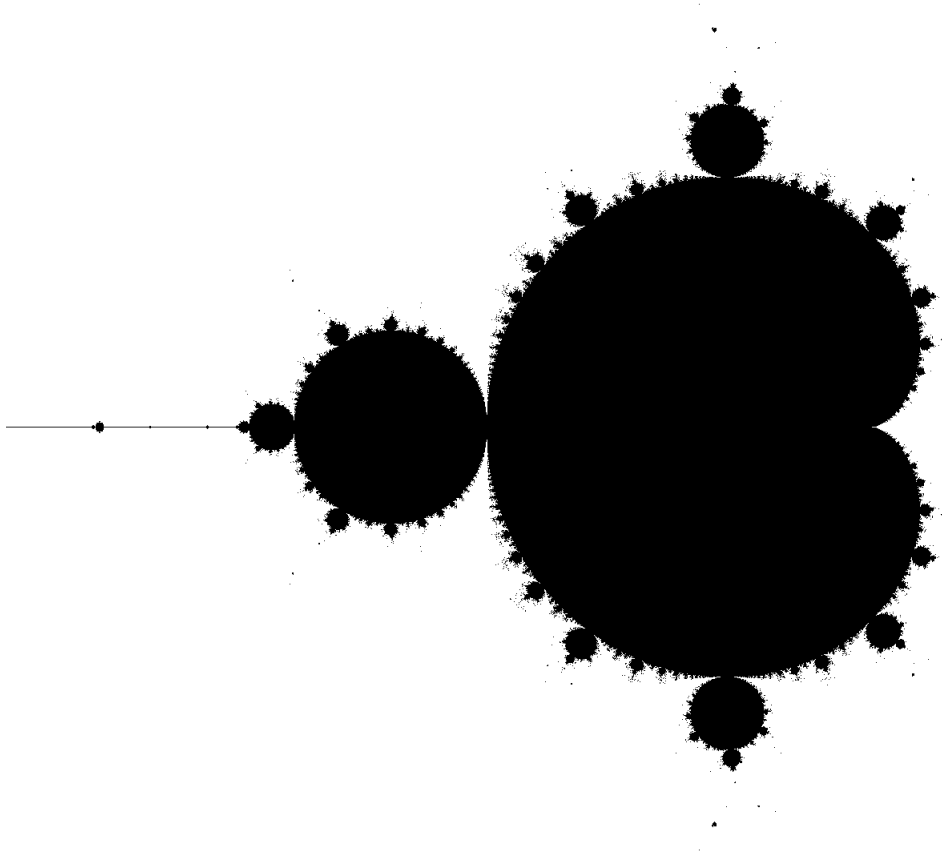


图 1: This is a Mandelbrot Set picture

注意到，图中的每个点对应于一个 filled Julia Set，其中黑点是路径连通的 Julia Set，白点是不连通的 Julia Set。选取 Mandelbrot Set 中的对应黑点，便可得到上面生成的 Julia Set 图。

与我们看到的其他分形不同，Mandelbrot Set 的结构不是自相似的。相反，它在不同的地方有完全不同的局部结构。新的结构在每一个尺度上都被揭示出来，而这种模式似乎并不重复。同样的事情几乎会发生在 Mandelbrot Set 中的任何一点上，在每一点上都会显示出不同的结构。

Mandelbrot Set 与 Julia Set 都是由迭代关系： $z_{n+1} = z_n + C$ 所产生的点集，只不过两者一个由 z 产生，一个由 C 产生，在计算机上表现的不同便是一个遍历 z ，一个遍历 C 。[1]

6 结论

Julia Set 和 Mandelbrot Set 的图形表示可以让我们认识到纯粹的数学之美，与之相关的分形几何学则是无处不在的，不得不感叹数学的力量。由于分形几何学知识的匮乏，本文只能给出 Julia Set 的定义，并以最容易理解的方式绘制出该集合。这里使用的语言是 C++。[2]

参考文献

- [1] Juan Carlos Ponce Campuzano. Julia set. https://complex-analysis.com/content/julia_set.tml.
- [2] 王伊蕾 and 李涛. *LaTeX 科技论文写作简明教程*. LaTeX 科技论文写作简明教程, 2015.