Mandelbrot Set 的生成和探索

作者姓名：唐浩
专业和学号：信息与计算科学 3200102118

2022 年 7 月 2 日

摘要

本文就 Mandelbrot Set [1] 的生成进行探索，简要介绍一下 Mandelbrot Set 的起始，数学推导，后给出具体的程序说明，并附上一定的图片解释。通过计算机，我们可以进行相对于人脑来说较麻烦的计算，通过计算机进行迭代，我们可以简单重现 Mandelbrot Set 的生成过程。

关键字：Mandelbrot Set 迭代图形生成

1 引言

Mandelbrot Set [2] 曾被称为 **"上帝的指纹" "魔鬼的聚合物"**，它是由 **Benoit B. Mandelbrot** 教授

在二十世纪七十年代发现的。它是一个几何图形，其中的点均出自迭代公式：$Z_{n+1} = Z_n^2 + C$，对于每一个 C，从 $Z = 0 + 0i$ 开始计算，若 Z_n 收敛，则 C 在集合中。对于所有的 C 组成的集合，便称为 **Mandelbrot Set**。本文主要介绍如何生成 Mandelbrot Set，并就其各种格式进行一个初步的探索。主要通过去选取不同的参数，对生成的图进行解释，得出一定的结论。

2 数学理论

2.1 迭代

首先，我们来介绍一下什么是迭代。迭代是重复反馈过程的活动，其目的通常是为了逼近所需目标或结果。每一次对过程的重复称为一次"迭代"，而每一次迭代得到的结果会作为下一次迭代的初始值。就 Mandelbrot Set 而言，被迭代的是一些最简单的函数，其形如 $f(x) = x^2 + C$(C 为常量)。

对于每一个 C, 若根据迭代规则：$Z_{n+1} = Z_n^2 + C$ 生成的序列 $\{x_0, x_1, ...\} \to \infty$，则 Z 的轨迹无界，则 $C \notin$ Mandelbrot Set, 若序列有界，则 $C \in$ Mandelbrot Set 。

2.2 逃逸时间算法

2.2.1 逃逸法则

对于一个复数 $z_n = x_n + y_n i$, 模 $|z_n| = \sqrt{x_n^2 + y_n^2}$ 。定义:

如果对于一个复数序列 $\{z_1, z_2, \ldots, z_n\}$ 有 $|z_j| > max(2, |C|)$ 则序列将逃逸到无穷大。

2.2.2 逃逸时间算法

对于每个复参数平面上的点 C，我们生成一个序列 Z，根据逃逸准则，我们规定 R 为逃逸半径，在 $\{z_1, \ldots z_n\}$ 里，如果 $|z_j| < R$ ，判断有界（但其实也有可能这个序列是无界的），反之，这个序列无界。故需要确定以下参数：

1、复平面范围 $C = \{c = x + yi : x_1 \leq x \leq x_2, y_1 \leq y \leq y_2\}$

2、分辨率 gridSize

3、逃逸半径 $R = max(2, |C|)$

4、逃逸时间 N = 最大迭代次数

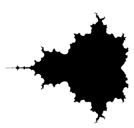
3 算法

```
#include <iostream>
#include <cstdlib>
#include "Window.h"
#include "Manderbrot.h"
#include "bitmap.h"

int main(argc, *argv[])

if argc < 5
then cerr << "Usage: " << argv[0] << " filename ox oy dimension" << endl
exit(-1)

Window win(atof(argv[2]), atof(argv[3]),atof(argv[4]))

lpp <- win.get_lpp()
dim <- win.get_dimension()
width <- win.get_width()
height <- win.get_height()
ox <- win.get_ox() - dim
oy <- win.get_oy() - dim / width * height
N <- 100
*cache <- new char[width * height * 3]

for j <- 0 to height
for i <- 0 to width
```

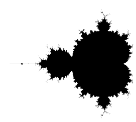
```
x <- ox + lpp * i
y <- oy + lpp * j
pos <- width * j + i;
Manderbrot man(complex<double>{0.0, 0.0}, N, complex<double>{x, y})

while !man.stop_criterion()
man.forward_step()
if man.is_disconvergence()
then break

if man.stop_criterion()
then
cache[pos * 3] <- 255
cache[pos * 3 + 1] <- 255
cache[pos * 3 + 2] <- 255
else
cache[pos * 3] <- 0
cache[pos * 3 + 1] <- 0
cache[pos * 3 + 2] <- 0
build_bmp(argv[1], width, height, cache)
delete [] cache

return 0
```

4 数值算例

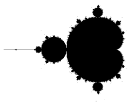
以下为原点在 (0,0) 时修改 N 所得到的不同图像:



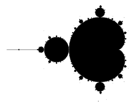
(a) N = 10



(b) N = 20



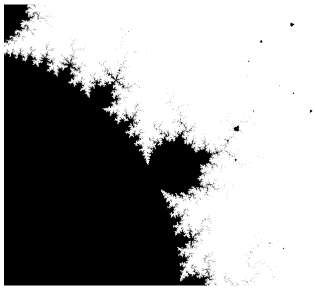
(c) N = 100



(d) N = 10000

下面我们将原点偏移，可以得到具体部位的一个放大图，以 N = 100 为例：

(e) 原点：(0.0,1.0,1)



(f) 原点：(0.0,0.8,0.1)

5 结论

Mandelbrot Set 的图形表示可以让我们认识到纯粹的数学之美，与之相关的分形几何学则是无处不在的，不得不感叹数学的力量。由于分形几何学知识的匮乏，本文只能给出 Mandelbrot Set 的定义，并以最容易理解的方式绘制出该集合。这里使用的语言是 C++。我们还可以给 Mandelbrot Set 添加不同的颜色，由于时间因素，就不进行颜色的添加了。[3]

参考文献

[1] B. Branner. *The Mandelbrot set.* Chaos and Fractals: The Mathematics Behind the Computer Graphics, 1989.

[2] C. T. Mcmullen. The mandelbrot set is universal. *mandelbrot set theme variations*, page 4, 1998.

[3] 王伊蕾 and 李涛. *LaTeX 科技论文写作简明教程*. LaTeX 科技论文写作简明教程, 2015.