МОУ ДЗ Бондарь Роман.

№1 $K=16, \quad M=16$

а) $\begin{cases} \int_0^1 [\dot{x}^2(t) + \dot{x}(t)x(t) + 12t\,x(t)]\,dt \to \min\limits_x \\ x(0)=1, \quad x(1)=0. \end{cases}$

$L = \dot{x}^2 + \dot{x}x + 12tx$

ур. Эйл.: $\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = 0$

$\frac{\partial L}{\partial x} = \dot{x} + 12t$; $\quad \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = 2\dot{x} + x$

УЭ: $\cancel{\dot{x}} + 12t - 2\ddot{x} - \cancel{\dot{x}} = 0 \Rightarrow \ddot{x} - 6t = 0.$

пусть $x(t) = t^3 + At + B$.

НУ: $x(0) = 1 = B$

$x(1) = 0 = 1 + A + 1 \Rightarrow A = -2$

$\hat{x}(t) = t^3 - 2t + 1$

исследуем на минимум:

$J(x+h) - J(x) = \int_0^1 [(\dot{x}+\dot{h})^2 + (\dot{x}+\dot{h})(x+h) + 12t(x+h) -$

$- \dot{x}^2 - \dot{x}x - 12tx)\,dt = \int_0^1 (2\dot{x}\dot{h} + \dot{h}^2 + \dot{x}h + x\dot{h} + h\dot{h} +$

$+ 12th)\,dt =$

$= \int_0^1 [\dot{h}^2 + \dot{h}\underbrace{(6t^2 - 4 + t^3 - 2t + 1 + h)}_{t^3 + 6t^2 - 2t - 3} + h(3t^2 - 2 + 12t)]\,dt =$

$$\circleddash \int_0^1 \dot{h}^2 dt + \cancel{h(t^3+6t^2-2t-3)\Big|_0^1}^{\to 0} + \cancel{\int_0^1 h(3t^2-2t+12t-(3t^2+12t-2))dt}^{\to 0} +$$

т.к. $h(0)=h(1)=0$

$$+\int_0^1 \ddot{h}h\,dt = \int_0^1 (\dot{h}^2+\ddot{h}h)dt = \int_0^1 \dot{h}^2 dt + \int_0^1 \ddot{h}h\,dt =$$

$$= \dot{h}^2\Big|_0^1 - \cancel{\int_0^1 \ddot{h}h\,dt} + \cancel{\int_0^1 \ddot{h}h\,dt} \geqslant 0$$

$\Rightarrow \boxed{\hat{x} = t^3+2t+1}$ — слабый глоб. минимум.

б) $$J(x) = \int_0^T (\dot{x}^2(t) + x^2(t))dt + Kx^2(T) \to \min_x$$

$L = \dot{x}^2 + x^2$, $\quad \frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = 0 \Leftrightarrow 2x - 2\ddot{x} = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \ddot{x} - x = 0$, $\quad x(t) = C_1 e^{-t} + C_2 e^{t}$

усл-е трансверсальности: $\begin{cases} 2\dot{x}(0) = (-1)^0 L_x(0) \\ L\dot{x}(T) = (-1)^1 L_x(T) \end{cases} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2\dot{x}(0) = 0 \\ 2\dot{x}(T) = -2x(T) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x}(0) = 0 \\ \dot{x}(T) = -x(T) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -C_1 + C_2 = 0 \\ -C_1 e^{-T} + C_2 e^{T} = -C_1 e^{-T} - C_2 e^{T} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} C_1 = C_2 \\ 2C_2 e^{T} = 0 \end{cases} \Rightarrow C_1 = C_2 = 0 \Rightarrow \boxed{\hat{x}(t) = 0}$$

допустимая экстремаль.

$$J(x+h)-J(x) = \int_0^1 \left((\dot{x}+\dot{h})^2+(x+h)^2-\dot{x}^2-x^2\right)dt + 16(x(t)+h(t))^2 -$$

$$-16x^2(t) = \int_0^1 (\dot{h}^2+h^2)dt + 16h^2(t) \geqslant 0.$$

$\Rightarrow J(\hat{x}+h) \geqslant J(\hat{x}) \Rightarrow \hat{x}=0 \Rightarrow$ абс. минимум

№2
$$\begin{cases} \int_0^1 [\dot{x}^2(t) + 16\dot{x}^3(t)x(t) + 16t\dot{x}^4(t)]dt \to \min \\ x(0)=0, \quad x(1)=0 \\ x_*(t)=0 \text{ — допуст. экстр.} \end{cases}$$

Необходимое и дост. условие экстремума:

1) усл-е Лежандра: $\hat{f}_{\dot{x}\dot{x}} \geqslant 0$.

$f_{\dot{x}} = 2\dot{x}+48\dot{x}^2x+64t\dot{x}^3$

$\hat{f}_{\dot{x}\dot{x}} = 2+96\dot{x}x+192t\dot{x}^2 = 2 > 0 \Rightarrow$ выполнено.
$\forall t \in [0,1]$

2) усл-е Якоби:

$-\frac{d}{dt}(\hat{f}_{\dot{x}\dot{x}}\dot{h}+\hat{f}_{\dot{x}x}h)+\hat{f}_{x\dot{x}}\dot{h}+\hat{f}_{xx}h=0, \quad h(0)=0, \ \dot{h}(0)=1.$

$\hat{f}_x = 16\dot{x}^3, \ \hat{f}_{xx}=0, \ \hat{f}_{x\dot{x}}=48\dot{x}^2=0, \ \hat{f}_{\dot{x}x}=96\dot{x}=0.$

$-\frac{d}{dt}2\dot{h}=0 \Rightarrow \ddot{h}=0 \Rightarrow h=C_1t+C_2$

НУ: $\begin{cases} h(0)=0 \\ \dot{h}(0)=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_2=0 \\ C_1=1 \end{cases} \Rightarrow h=t$

$h=0 \Leftrightarrow t=0 \Rightarrow h(t)$ не имеет больше нулей на $[0,1] \Rightarrow$ нет сопряж. точек $\Rightarrow$

⇒ выполнено усиленное условие Якоби ⇒

⇒ $\hat{x}(t)$ – слаб. лок. минимум

3) Проверка на сильн экстремум:

$$f_{\dot{x}\dot{x}} = 2 + 96\dot{x}x + 192t\dot{x}^2$$

$f_{\dot{x}\dot{x}}$ ни выпукла, ни вогнута.

проверим усл-е Вейерштрасса:

$$\mathcal{E}(t, x, \dot{x}, u) = L(t, \hat{x}, u) - L(t, \hat{x}, \dot{\hat{x}}) -$$

$$- L_{\dot{x}}(t, \hat{x}, \dot{\hat{x}})(u - \dot{\hat{x}}) = u^2 + \cancel{16u\hat{x}^3} + 16tu^4 -$$

$$- \cancel{\dot{\hat{x}}^2} - \cancel{16\dot{\hat{x}}\hat{x}^3} - \cancel{16t\dot{\hat{x}}^4} - (u - \dot{\hat{x}})\cancel{(2\dot{\hat{x}} + 48\dot{\hat{x}}\hat{x}^2)} =$$

$$= u^2 + 16u^4 t \geq 0 \quad \forall u \in \mathbb{R}, \forall t \in [0, 1] \Rightarrow$$

⇒ усл. Вейерштр. не вып.

⇒ Th. Вейерштр. о дост. ус. сильн. минимума не вып ⇒ ничего не можем сказать.

Ответ: $\hat{x}(t) = 0$ — слаб. лок. мин.

№4 $\dot{x} = Ax + Bu$, $x \in \mathbb{R}^3$, $u \in \mathbb{R}^2$

$x_1 + 4x_2 = 0$ ← линейное многообразие

вывести критерий управляемости с-мы из $(0, 0)$ на все лин. многообр-е.

1) По Th, с-ма вполне управляема <=> $rg[B, AB] = n = 2 = \dim\{x\}$.

2) По опр-ю автономной лин. системы, если $\forall x_0\ \exists t$, $\exists u(t)$ огр и перевод $x_0 \to x_1$, где $Qx_1 = b$. Покажем что это <=> $rg[b, QB, QAB, \dots, QA^{n-1}B] = rg[QB, \dots, QA^{n-1}B]$

=>) Пусть с-ма управляема на $Qx = b$

$$\dot{x} = Ax + Bu \to x(t) = \int_0^t e^{A(t-t')} Bu(t')dt' + \underbrace{e^{At}x^0}_{(0,0)}$$

далее по Th. Гамильтона-Кэли:

м-ца удовлетворяет хар. ур-ю => м-цу в n. степени можно расписать через все младшие степени, т.е $\exists \alpha_k$: $e^M = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k M^k$

$$\Rightarrow Qx(t) = Q\int_0^t e^{A(t-t')} Bu(t')dt' = $$

$$= Q\int_0^t \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k A^k (t-t')^k Bu(t')dt' =$$

$$= Q\sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k \int_0^t A^k (t-t')^k Bu(t')dt' =$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k (QA^k B) \cdot \underbrace{\int_0^t (t-t') u(t') dt'}_{b} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow b \sim \mathrm{Im}[QB, QAB, \dots, QA^{n-1}B]$$

$\boxed{\Leftarrow}$ Рассм. $u(t) = B^T e^{A^T(t'-t)} Q^T v$, $v \in \mathbb{R}^n$.

$$Qx(t) = Q\int_0^t e^{A(t-t')} BB^T e^{A^T(t-t')} Q^T v\,dt' =$$

$$= Q\int_0^t e^{As} BB^T e^{A^T s} Q^T v\,ds = Q\left[\int_0^t e^{As} BB^T e^{A^T s} ds\right] Q^T v =$$

$$= Q\underset{\text{грамиан управляемости}}{w(t)} Q^T v.$$

Ув: $\forall h \in \mathrm{Im}\,[QB, QAB, \dots, QA^{n-1}B]$ $\exists v \in \mathbb{R}^n$ и $t' > 0$:

$h = Qw(t')Q^T v$.

Док: от противного:

Пусть $\exists y \in \mathbb{R}^n$: $\forall v \in \mathbb{R}^n$ и $\forall t' > 0 \Leftrightarrow y^T h \neq 0$

и $y^T Q w(t') Q^T v = 0 \Rightarrow y^T Q w(t') Q^T y = 0 =$

$$= y^T Q \int_0^{t'} e^{As} BB^T e^{A^T s} ds\, Q^T y = \int_0^{t'} \| y^T Q e^{As} B \|^2 ds = 0$$

$\Rightarrow y^T Q e^{As} B = 0$ при $\forall s$

дифференцируя по s много раз (и) получим ($s=0$):

$y^T QB = 0$, $y^T QAB = 0$, $\dots$, $y^T QA^{n-1}B = 0$,

что ~~против~~ при $y^T h \neq 0$ противоречит усл-ю

что $h \in \mathrm{Im}\,[QB, QAB, \dots, QA^{n-1}B]$

доказано.

значит, $\exists v \in \mathbb{R}^n$ и $t' > 0$:

$Qx(t') = Qw(t')Q^T v = h \in \mathrm{Im}\,[\dots]$ $\boxed{\Leftarrow}$

$\Rightarrow$ с-ма управляема на данном многообразии

Пример: $A=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$, $b=0$, $Q=(1\ 2)$

$rg[B, AB] = rg\begin{pmatrix}1&0&1&0\\0&0&0&0\end{pmatrix} = 1 \neq 2 = n \Rightarrow$

$\Rightarrow$ с-ма не вполне управляема,

но $b=0 \in Im[1010] \Rightarrow$

$\Rightarrow$ с-ма вполне упр. на мн-многообразии

$Qx=b$.

<u>№65</u> решить з-Лагранжа с перем. временем:

$$\begin{cases} \int\limits_0^T [u^2(t) - 4x_1^2(t)]\,dt \to min \\ \dot{x}_1(t) = 2x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = u(t) \\ x_1(0) = x_2(0) = 0 \\ x_1(T) = 16 = x_2(T) \end{cases}$$

Ф-я Лагранжа:

$L = \lambda_0(u^2 - 4x_1^2) + p_1(\dot{x}_1 - 2x_2) + p_2(\dot{x}_2 - u)$

$$\mathcal{L} = \int\limits_0^T L\,dt + \underbrace{\lambda_1 x_1(0) + \lambda_2 x_2(0) + \lambda_3(x_1(T) - 16) + \lambda_4(x_2(T) - 16)}_{l(x(0),\, x(T))}$$

Ур-е Эйлера: $\frac{d}{dt}\mathcal{L}_{\dot{x}} = \mathcal{L}_x \Rightarrow \begin{cases} \dot{p}_1 = -8\lambda_0 x_1 \\ \dot{p}_2 = -2p_1 \end{cases}$

усл-е трансв-ти: $L_{\dot{x}}(t_i) = (-1)^i l_x(t_i)$, $i=1,0$.

$$\Rightarrow \begin{cases} p_1(0) = \lambda_1 \\ p_2(0) = \lambda_2 \end{cases}, \quad \begin{cases} p_1(T) = -\lambda_3 \\ p_2(T) = -\lambda_4 \end{cases}$$

усл. минимума по $u(t)$: $L_u = 0$.

$L_u = 2\lambda_0 u - p_2 \rightarrow L_u = 0 \Leftrightarrow 2\lambda_0 u = p_2$

$\rightarrow \lambda_0 = 0 \longrightarrow p_2 \equiv 0 \rightarrow \lambda_2 = 0 = \lambda_4$

$\dot{p}_2 = -2p_1 \equiv 0 \rightarrow p_1 = 0 \rightarrow \lambda_1 = \lambda_3 = 0$ } – не подх.

$\rightarrow \lambda_0 \neq 0$: пусть $2\lambda_0 = 1$ $(\lambda_0 = \frac{1}{2})$: тогда,

$p_2 = u$, $\dot{p}_2 = -2p_1$, $\dot{p}_1 = -4x_1$,

$\dot{x}_1 = 2x_2$, $\dot{x}_2 = 4$.

$$\Rightarrow p_2''' = -2p_1''' = 8x_1'' = 16\dot{x}_2 = 16u = 16p_2.$$

$$\Rightarrow p_2'''' - 16p_2 = 0 \Rightarrow \mu^4 = 2^4 \Rightarrow \begin{cases} \mu = \pm 2 \\ \mu = \pm 2i \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{aligned} p_2 &= Ae^{2t} + Be^{-2t} + C\cos 2t + D\sin 2t \\ p_1 &= -Ae^{2t} + Be^{-2t} + C\sin 2t - D\cos 2t. \end{aligned}$$

подставим:

$$\begin{cases} x_1 = \frac{A}{2}e^{2t} + \frac{B}{2}e^{-2t} - \frac{C}{2}\cos 2t - \frac{D}{2}\sin 2t. \\ x_2 = \frac{A}{2}e^{2t} - \frac{B}{2}e^{-2t} + \frac{C}{2}\sin 2t - \frac{D}{2}\cos 2t \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1(0) = \frac{1}{2}(A+B-C) = 0. \\ x_2(0) = \frac{1}{2}(A-B-D) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C = A+B \\ D = A-B \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1(T) = \frac{1}{2}(Ae^{2T} + Be^{-2T} - C\cos 2T - D\sin 2T) = 16 \\ x_2(T) = \frac{1}{2}(Ae^{2T} - Be^{-2T} + C\sin 2T - D\cos 2T) = 16. \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2\cdot 32 = 2A(e^{2T}-\cos 2T)+2B\sin 2T \\ 0 = -2A\sin 2T + 2B(e^{-2T}-\cos 2T) \end{cases} \Rightarrow$$ находим A, B, C, D (громоздко)

~~$\Rightarrow$ находим~~

T найдём из усл-я стационарности:

$$\mathcal{L}(T) + l_T = 0,$$

т.е. $\lambda_0(u^2(T)-4x_1^2(T)) + p_1(T)(\dot{x}_1(T)-2x_2(T)) + p_2(T)(\dot{x}_2(T)-u(T)) + \lambda_3\dot{x}_1(T)+\lambda_4\dot{x}_2(T)=0.$

подставим $\lambda_0=\frac{1}{2}$, $x_1(T)=16$, $\lambda_3=-p_1(T)$, $\lambda_4=-p_2(T)$,

тогда: $\frac{1}{2}(u^2(T)-4\cdot 16^2)-p_1(T)\cdot\dot{x}_1(T)-u^2(T)=0$

$$\Rightarrow -\frac{1}{2}u^2(T)-2\cdot 16^2-p_1(T)\cdot\dot{x}_1(T)=0$$

$$\dot{x}_1(T)=2x_2(T)=32 \Rightarrow$$ находим T

б) $$\begin{cases} \int_0^T [3u^2(t)+x_1^2(t)]dt \to \min \\ \dot{x}_1(t)=4x_2(t) \\ \dot{x}_2(t)=2u(t) \\ \begin{pmatrix} x_1(0)\\ x_2(0)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1(T)\\ x_2(T)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}16\\16\end{pmatrix} \end{cases}$$

$$\mathcal{L}=\lambda_0(3u^2+x_1^2)+p_1(\dot{x}_1-4x_2)+p_2(\dot{x}_2-2u).$$

$$l=\lambda_1x_1(0)+\lambda_2x_2(0)+\lambda_3(x_1(T)-16)+\lambda_4(x_2(T)-16)$$

Ур. Эйлера: $$\begin{cases}\dot{p}_1=2\lambda_0 x_1\\ \dot{p}_2=-4p_1\end{cases}$$

усл трансверс: $\begin{cases} p_1(0) = \lambda_1 \\ p_2(0) = \lambda_2 \end{cases}$, $\begin{cases} p_1(T) = +\lambda_3 \\ p_2(T) = -\lambda_4 \end{cases}$

Минимум по $u(t)$: $L_u = 0 =$

$= 6\lambda_0 u - 2p_2 \Rightarrow 3\lambda_0 u = p_2$.

$\to \lambda_0 = 0 \to p_2 \equiv 0 \to \lambda_2 = \lambda_4 = 0$

$\dot{p}_2 \equiv 0 = -4p_1 \to \lambda_1 = \lambda_3 = 0$ } не подх

$\to \lambda_0 \neq 0$: пусть $\lambda_0 = 1 \Rightarrow u = \frac{p_2}{3}$.

$\Rightarrow \dot{p}_2 = -4p_1$, $\dot{p}_1 = 2x_1$, $\dot{x}_1 = 4x_2$, $\dot{x}_2 = 2u$.

$\Rightarrow p_2'''' = -4p_1''' = -8x_1'' = -32\dot{x}_2 = -64u = -64\frac{p_2}{3}$

$3p_2'''' + 64p_2 = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \mu_{1,2} = \pm\sqrt[4]{64/3} \\ \mu_{3,4} = \pm i\sqrt[4]{64/3} \end{array} \right.$

ур-хар: $3\mu^4 + 64 = 0$.

$p_2(t) = Ae^{\mu_1 t} + Be^{\mu_2 t} + Ce^{\mu_3 t} + De^{\mu_4 t}$

$p_1(t) = -\frac{1}{4}\dot{p}_2(t)$

$x_1(t) = \frac{1}{2}\dot{p}_1(t) = -\frac{1}{8}\ddot{p}_2(t)$

$x_2(t) = \frac{1}{4}\dot{x}_1(t) = -\frac{1}{32}\dddot{p}_2(t)$.

подставляя ГУ: $x_1(0) = x_2(0) = 0$

$x_1(T) = x_2(T) = Q$)

найдем $A, B, C, D = A(T), B(T), C(T), D(T)$.

а из усл-я стац-ти: $L_T(t) + l_T = 0$,

найдём само T,

стр 10/16 по аналогии с пунктом а)

№3

Изобразить множество достижимости за время $t=1$ из точки $(16, 16)$ при $a=\frac{1}{4}$ и $a=4$ для с-мы:

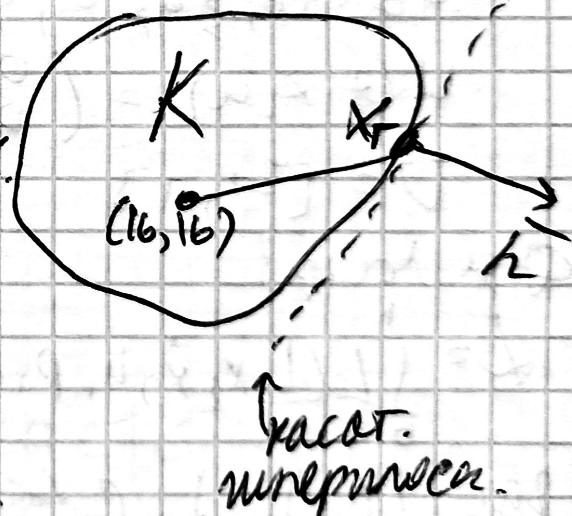
$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = -2x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = a x_1(t) + u(t) \\ |u| \le 1 \longrightarrow U=[-1, 1] \leftarrow \text{выпуклый компакт} \end{cases}$$

$\Rightarrow$ (По соотв. теореме), ~~мно-во~~ достижимое мн-во K тоже выпукл. компакт $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ есть граница выпуклости множества,

~~кон. точка: $x_1(0)=$~~

и из $\forall$ точки на границе Γ, можно провести касательную гиперплоскость и нормаль к мн-ву,



т.е. $\langle \bar{n}, x - x_\Gamma \rangle \le 0$ для ~~$\forall x \in K$~~

$\Rightarrow \forall x \in K \Leftrightarrow \langle \bar{n}, \bar{x} \rangle \le \langle \bar{n}, \bar{x}_\Gamma \rangle$

$\Rightarrow \max\limits_{x \in K} \langle \bar{n}, x \rangle = \langle \bar{n}, x_\Gamma \rangle$

$x_\Gamma \in K \Rightarrow$ точка достижима $\Rightarrow$

$\Rightarrow \exists$ управление $u(t)$, приводящее в эту точку

Метод построения K:

1) перебираем всевозможные нормали $\bar{n} \in \mathbb{R}^2$, $\|\bar{n}\| = 1$.

2) из-за выпуклости K, каждая нормаль определяет $\bar{x}_1 \in K$

3) $\bar{x}_1$ находится, решая задачу:

$$\begin{cases} J[x,u] = \langle \bar{n}, x(1) \rangle \longrightarrow \max\limits_{x,u} \\ \dot{x}_1(t) = -2x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = ax_1(t) + u(t) \\ |u(t)| \le 1, \quad t \in [0,1] \\ x_1(0) = x_2(0) = 16. \end{cases}$$

общая зад. опт. упр-я.

$f_0(t,x,u) \equiv 0$

$\Psi_0(t_0, \xi_0, t_1, \xi_1) = \langle \bar{n}, \xi_1 \rangle$

$\varphi(t,x,u) = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u$

$U = [-1, 1]$

Ф-я Лагр:

$\mathcal{L} = \int\limits_0^1 L(t, x, \dot{x}, u, p, \lambda)\,dt + l(x(0), x(1))$,

где $L(\ldots) = \lambda_0 \cancel{f_0(\ldots)} + \langle p, \dot{x} - \varphi(\ldots) \rangle =$

$= p_1(\dot{x}_1 + 2x_2) + p_2(\dot{x}_2 - ax_1 - u)$;

$l(\ldots) = \lambda_0 \Psi_0(\ldots) = \lambda_0 \langle \bar{n}, \xi_1 \rangle =$

$= \lambda_0 (n_1 x_1(1) + n_2 x_2(1))$

ур Эйлера: $\frac{d}{dt}\mathcal{L}_{\dot{x}} = \mathcal{L}_x \Rightarrow \begin{cases} \dot{p}_1(t) = -ap_2(t) \\ \dot{p}_2(t) = 2p_1(t) \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \ddot{p}_1 = -a\dot{p}_2 = -2ap_1, \; a>0.$

$\ddot{p}_1 + 2ap_1 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow p_1 = c_1 \cos\sqrt{2a}\,t + c_2 \sin\sqrt{2a}\,t$

$p_2 = -\frac{1}{a}\dot{p}_1 = \frac{1}{a}c_1\sqrt{2a}\sin\sqrt{2a}\,t - \frac{1}{a}c_2\sqrt{2a}\cos\sqrt{2a}\,t.$

ур-е трансв-ти: $\mathcal{L}_{\dot{x}}(t_1) = (-1)^k l_{x(t_1)}$ [illegible]

$\Rightarrow \begin{cases} p_1(1) = -n_1 \\ p_2(1) = -n_2 \end{cases}$

условие min по u: $\min\limits_{u\in[-1,1]} L(\cdot, u, \cdot) = L(\cdot, \hat{u}, \dots)$.

$\mathcal{L} = p_1(\dot{x}_1 + 2x_2) + p_2(\dot{x}_2 - ax_1) - p_2 u.$

$\frac{\partial}{\partial u}\mathcal{L} = -p_2 \; \cancel{\dots} = const.$

если $p_2 > 0$, то $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u} < 0 \Rightarrow \operatorname{argmin}\limits_{u\in[-1,1]} \mathcal{L} = 1.$

если $p_2 < 0$, то $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u} > 0 \Rightarrow \operatorname{argmin}\limits_{u\in[-1,1]} \mathcal{L} = -1$

т.е $\hat{u} = \operatorname{sign}(p_2(t))$

подставим это в с-му вместе с $\hat{n} = \begin{pmatrix}\cos\theta \\ \sin\theta\end{pmatrix}$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -2x_2, \quad \dot{x}_2 = ax_1 + u, \quad x_1(0) = x_2(0) = 16. \\ p_1 = c_1\cos\sqrt{2a}\,t + c_2\sin\sqrt{2a}\,t \\ p_2 = -c_2\sqrt{\frac{2}{a}}\cos\sqrt{2a}\,t + c_1\sqrt{\frac{2}{a}}\sin\sqrt{2a}\,t. \\ p_1(1) = -n_1 = -\cos\theta \\ p_2(1) = -n_2 = -\sin\theta \\ u(t) = \operatorname{sign}(p_2(t)) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} \cos\sqrt{2a} & \sin\sqrt{2a} \\ \sqrt{\frac{2}{a}}\sin\sqrt{2a} & -\sqrt{\frac{2}{a}}\cos\sqrt{2a}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}c_1\\c_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-\cos\theta\\-\sin\theta\end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix}c_1\\c_2\end{pmatrix} = \frac{1}{-\sqrt{\frac{2}{a}}}\begin{pmatrix}-\sqrt{\frac{2}{a}}\cos\sqrt{2a} & -\sin\sqrt{2a}\\ -\sqrt{\frac{2}{a}}\sin\sqrt{2a} & \cos\sqrt{2a}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-\cos\theta\\-\sin\theta\end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -\cos\sqrt{2a}\cos\theta - \sqrt{\frac{a}{2}}\sin\sqrt{2a}\sin\theta \\ -\sin\sqrt{2a}\cos\theta + \sqrt{\frac{a}{2}}\cos\sqrt{2a}\sin\theta\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow p_1(t) = -\cos\sqrt{2a}\cos\theta\cos\sqrt{2a}t - \sin\sqrt{2a}\cos\theta\sin\sqrt{2a}t -$$

$$-\sqrt{\frac{a}{2}}\sin\sqrt{2a}\sin\theta\cos\sqrt{2a}t + \sqrt{\frac{a}{2}}\cos\sqrt{2a}\sin\theta\sin\sqrt{2a}t =$$

$$= -\cos((t-1)\sqrt{2a})\cos\theta + \sqrt{\frac{a}{2}}\sin(\sqrt{2a}(t-1))\sin\theta$$

$$p_2(t) = \sqrt{\frac{2}{a}}\cos\sqrt{2a}t\,\sin\sqrt{2a}\cos\theta - \sqrt{\frac{2}{a}}\cos\sqrt{2a}t\cdot\sqrt{\frac{a}{2}}\cos\sqrt{2a}\sin\theta -$$

$$-\sqrt{\frac{2}{a}}\sin\sqrt{2a}t\cos\sqrt{2a}\cos\theta - \sqrt{\frac{2}{a}}\sin\sqrt{2a}t\cdot\sin\sqrt{2a}\cdot\sqrt{\frac{a}{2}}\sin\theta =$$

$$= -\sqrt{\frac{2}{a}}\sin(\sqrt{2a}(t-1))\cos\theta - \cos(\sqrt{2a}(t-1))\sin\theta$$

$u(t) = \operatorname{sign}(p_2(t))$

Найдём при каких θ, $u(0)=+1$:

$p_2(\theta) \geq 0 \Leftrightarrow p_2 = \sqrt{\frac{2}{a}}\sin(\sqrt{2a}(1-t))\cos\theta -$
$-\cos(\sqrt{2a}(t-1))\sin\theta.$

$t=0$: $\sqrt{\frac{2}{a}}\sin(\sqrt{2a})\cos\theta > \cos(\sqrt{2a})\sin\theta$

При $\alpha = \frac{1}{4}$: $2\sqrt{2}\sin(\frac{1}{\sqrt{2}})\cos\theta > \cos(\frac{1}{\sqrt{2}})\sin\theta$

$\Downarrow$

$2\sqrt{2}\,\mathrm{tg}(\frac{1}{\sqrt{2}})\cos\theta > \sin\theta$

$2\sqrt{2}\,\mathrm{tg}(\frac{1}{\sqrt{2}}) > 0$ — верно при $\theta = 0$.

$\alpha = 4$ — наоборот.

$p_2 = 0 \longrightarrow u(t) = \text{sign}(p_2)$ меняет знак,

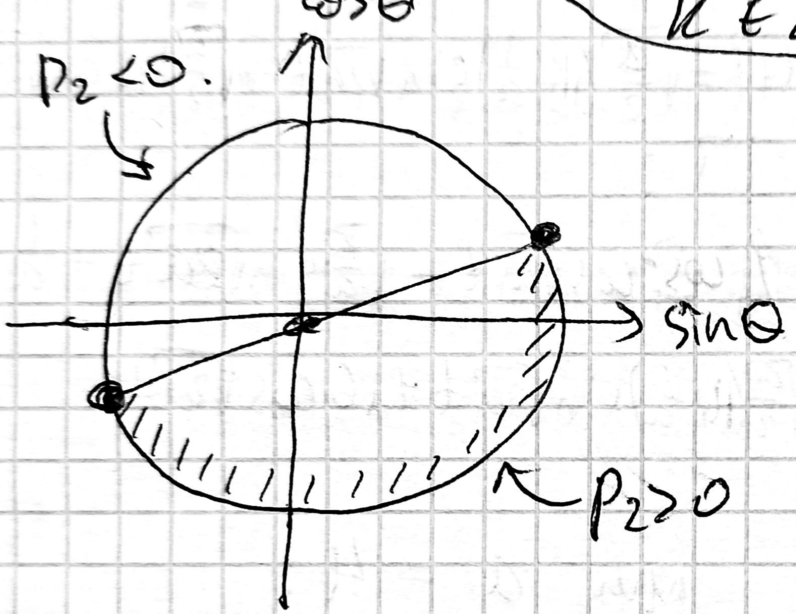
когда $\sqrt{\frac{2}{a}}\cos\theta\sin(\sqrt{2a}(1-t)) = \sin\theta\cdot\cos(\sqrt{2a}(1-t))$

$\Rightarrow \sqrt{\frac{2}{a}}\,tg(\sqrt{2a}(1-t)) = tg\,\theta \Rightarrow$

$\Rightarrow \boxed{t = 1 - \frac{1}{\sqrt{2a}}\left(\pi k + arctg\left(\sqrt{\frac{a}{2}}\,tg\,\theta\right)\right), \quad k \in \mathbb{Z}, \quad t \in [0, 1]}$

$\Downarrow$

не более одного раза меняет знак.



управление $u(t)$ имеет тот же период, что и $p_2(t)$.

Период $T = \frac{2\pi}{\sqrt{2a}} = \sqrt{\frac{2}{a}}\,\pi = \begin{cases} \frac{\pi}{\sqrt{2}}, & a = 4 \\ 2\sqrt{2}\pi, & a = \frac{1}{4}. \end{cases}$

Пусть смена знака произошла в точке t^*, тогда

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -2x_2 \\ \dot{x}_2 = ax_1 + u(t) \\ x_1(0) = x_2(0) = 16 \end{cases}, \quad 0 \le t \le t^*$$

$\Rightarrow \ddot{x}_1 = -2\dot{x}_2 = -2ax_1 - 2.$

$\ddot{x}_1 + 2ax_1 = -2$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = A\cos\sqrt{2a}\,t + B\sin\sqrt{2a}\,t - \frac{1}{a} \\ x_2 = -\frac{1}{2}\dot{x}_1 = \frac{\sqrt{2a}}{2} A\sin\sqrt{2a}\,t - \frac{\sqrt{2a}}{2} B\cos\sqrt{2a}\,t. \end{cases}$$

НУ: $\begin{cases} x_1(0) = 16 = A - \frac{1}{a} \\ x_2(0) = 16 = -\sqrt{\frac{a}{2}}\,B \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = 16 + \frac{1}{a} \\ B = -\sqrt{\frac{2}{a}}\cdot 16 \end{cases}$

Тогда траектория при $t \in [0, t^*)$,

$u(t) \equiv 1$, $\begin{cases} x_1(t) = (16+\frac{1}{a})\cos(\sqrt{2a}\,t) - \sqrt{\frac{2}{a}}\cdot 16\sin\sqrt{2a}\,t - \frac{1}{a} \\ x_2(t) = \sqrt{\frac{a}{2}}(16+\frac{1}{a})\sin\sqrt{2a}\,t + (\frac{a}{2})\cdot 16\cos\sqrt{2a}\,t. \end{cases}$

А при $t \in [t^*, 1]$:

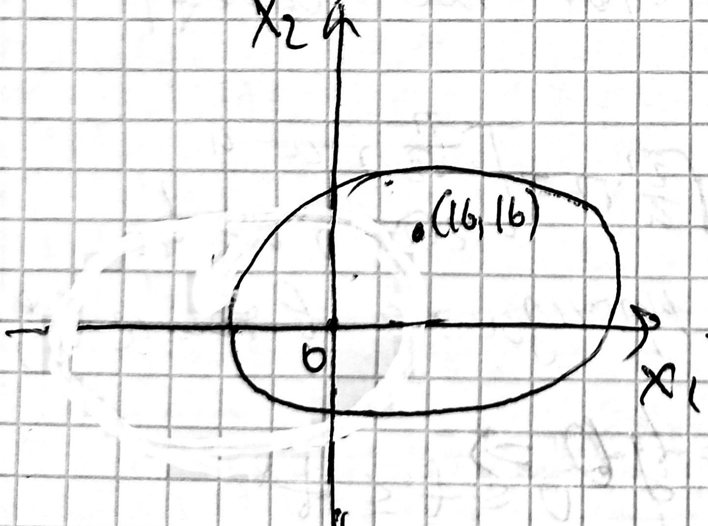
$\dot{x}_1 = -2x_2$

$\dot{x}_2 = ax_1 - 1.$

$\begin{cases} x_1(t) = (16+\frac{1}{a})\cos\sqrt{2a}\,t - \sqrt{\frac{2}{a}}\sin\sqrt{2a}\,t + \frac{1}{a} \\ x_2(t) = \sqrt{\frac{a}{2}}(16+\frac{1}{a})\sin\sqrt{2a}\,t + 16\cos\sqrt{2a}\,t. \end{cases}$

Вид K:

при $a = \frac{1}{4}$:



при $a = 4$: