Chapitre 1 : Espace vectoriel et Applications linéaires

Espace vectoriel en dimension finie

I. Généralisation R ^{2} ; R^3 ; R ^{n}

I-1- Notation :

Un couple de nombres réels est une suite ordonnée de deux nombres réels comme (1, 2) ; (0, 1) etc. …, le premier nombre est la première coordonnée ou abscisse, le 2eme nombre est la 2eme coordonnée ou ordonnée. L'ensemble de tous les couples de réels se note IR².

Un triplet de nombres réels est une suite ordonnée de 3 nombres réels comme (1 ; -1 ; 1) ; (- 2, 0, 0) etc. … le premier nombre est la première coordonnée ou abscisse, le 2eme nombre coordonnée ou ordonnée et le 3eme nombre est la 3eme coordonnée on cote. L'ensemble de tout le triplet de réels se note IR^3.

On définition plus généralement les n – uplets des réels comme les suites ordonnées de réels de la forme (x_1 ; x_2 ; … x_n) où x_1 ; x_2 ; … x_n sont des nombres réels. De tous les n – uplets de réels se note IR^n.

I-2- Addition et Multiplication

a) On sait additionner deux vecteurs x = (x_1, x_2) et y = (y_1, y_2) deux vecteurs de IR^2 :

$(x_1, x_2) + (y_1, y_2) = (x_1+y_1, x_2+y_2)$

On remarquera que, dans cette formule, les symboles + n'ont pas tous la même signification ; en toute rigueur, il conviendrait de noter différemment le + de IR et le + de IR^2.

Pour tous vecteurs x, y et z de IR^2, on a les propriétés :

$(x_1, x_2) + (y_1, y_2) = (y_1,y_2) + (x_1,x_2)$

$((x_1, x_2) + (y_1, y_2)) + (z_1, z_2) = (x_1, x_2) + ((y_1, y_2) + (z_1,z_2))$

$(x_1,x_2) + (0,0) = (x_1, x_2)$

$(x_1, x_2) + (-x_1,-x_2) = (0,0)$

b) On sait aussi multiplier un vecteur x de IR^2 par un réel λ :

$\lambda.(x_1,x_2) = (\lambda.x_1, \lambda.x_2)$

On distingue ici dans la notation la multiplication x de deux réels et la multiplication d'un réel par un vecteur.

Et pour tous vecteurs x et y de IR^2 et tous réels l et m, on a les propriétés :

$\lambda. ((x_1, x_2) + (y_1, y_2)) = \lambda.(x_1,x_2) + \lambda.(y_1,y_2)$

$(\lambda + \beta) .(x_1, x_2) = \lambda.(x_1,x_2) + \beta.(x_1, x_2)$

$1.(x_1,x_2) = (x_1, x_2)$

$\lambda. (\beta.(x_1,x_2)) = (\lambda \text{ x } \beta) .(x_1,x_2)$

Dans toute la suite IR^n sera l'ensemble des vecteurs, IR l'ensemble des scalaires.

L'addition définie au a) est appelée addition interne parce qu'elle prend deux vecteurs de IR^n.
La multiplication définie au b) est appelée multiplication externe parce qu'elle prend un scalaire de IR et un vecteur de IR^n.
Il faut noter que les vecteurs peuvent être choisis dans l'ensemble des nombres complexes C

II- Espaces Vectoriels

II-1 Définition :

Soient un ensemble E dont les éléments sont des vecteurs et K un corps commutatif appelé corps des scalaires (ou des réels IR).
On dit que l'ensemble E possède une structure d'espace vectoriel (e v) sur le corps des scalaires K, si on peut définir :

1) Une loi de composition interne dans E, qui lui confère une structure de groupe commutatif, notée + , tel que pour tout U, V, et W $W \in E$
   - U + V = V + U (commutativité)
   - (U +V) + W = U + (V +W) (associativité)
   - U+ 0 = 0 + U = U (existence d'un élément
   - neutre 0)
   - U+(-U) =(-U)+U= 0 (existence d' un symétrie –U pour tout $U \in E$

2) Une loi de composition externe appelée multiplication par un scalaire, qui à tout couple
$(\lambda, U) \in K \times E$ fait correspondre un élément de E noté λ U , tel que pour tout U $\in$E , V$\in$E et $\lambda \in$ R , et $\beta \in$U, on ait :
* λ (U + V) = λ U + λ V
* $(\lambda + \beta).U = \lambda_U + \beta V$
* $\lambda(\beta U) = (\lambda\beta)U$
* 1. U = U existence d'un élément unité 1,

Conséquence de la définition
* De la structure de groupe commutatif pour l'addition vectorielle (loi interne), il résulte que :
Tout vecteur de E est régulier pour l'addition ie pour tout U$\in$ E et V$\in$ E,
si U+λ= V + λ, alors U = V
* Des axiomes sur la loi de composition externe, il en résulte :
a) Pour tout U$\in$ E ; 0.U = 0
b) pour tout $\lambda \in$ R λ.0 = 0
c) si λ.U = 0 $\Rightarrow$ λ = 0 ou U = 0

II) – 2 Exemple d'Espace Vectoriel

- Les ensembles IR, IR², IR^3 et plus généralement IR^n et C^n sont des espaces vectoriels sur R.
- Si $D \in IR$

$\mathcal{F}(D,$ IR) ensemble des applications de D dans IR
C (D, IR) ensemble des applications continues de D dans IR
C^1 (D, IR) ensemble des applications de classe C^1de D dans IR
C^n(D, IR) ensemble des applications de classe C^n de D dans IR
C^∞ (D, IR) ensemble des applications de classe C^∞ de D dans IR

II - 3 - Combinaison Linéaire

Tout vecteur de la forme $\lambda_1 U_1 + \lambda_2 U_2$ + ----+ $\lambda_n U_n$ est appelé combinaison linéaire des vecteur Ui avec i € {1, 2,…, n), où les λ_i sont les éléments de IR. Une telle somme est notée .

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i U_i$$

Exemple :
les vecteurs U + V .et 2 U – V sont des combinaisons linéaires de U et V .

II **-4 Sous espace Vectoriel**

II-4-1-Définition

Une partie non vide F d'un e v E sur R est appelée un sous – espace vectoriel si pour les lois de composition interne et externe à opérations dans R, F est un espace vectoriel.

II-4-2-Définition- Proposition

On dit qu'un sous ensemble F de E est sev de l'ensemble E sur IR si
1) F non vide
2) ∀ U , V∈ F on a U + V∈F stabilité par la loi interne
3) ∀U∈F, $\forall \lambda \in R$, λU∈F stabilité par la loi externe

Exemple : E = IR^3
Soit F est une partie de IR^3 tel que $F = \{(x, y, z) \in R^3 telque\ x - 2y + z = 0\}$
Montrer que F est un s e v de l'espace R^3 sur R.

- (0, 0, 0) ∈F donc F est non vide
- Soient U, V ∈ F on a : U = (x, y, z) ⇒ x – 2 y + z = 0 (1)
  V = (x', y', z') ⇒ x' – 2 y' + z' = 0 (2)

Montrons que : U + V ∈ F
U + V = (x, y, z) + (x', y', z')) = (x +x',y +y', z +z')

(1)+ (2) $\Rightarrow$ x – 2 y + z + x' – 2 y' + z'= 0
(x + x') -2(y + y') + (z + z')= 0$\Rightarrow$ U + U ∈F.

3) Soient U ∈F et $\lambda \in$ R. Montrons que: λU ∈ F ?
U∈F , on a : x – 2 y + z = 0 et λU = (λx , λy, λz ,)
λx – 2 λy + λ z = λ (x – 2y+ z) = 0.
D 'ou λU∈F. Ainsi F est un s e v de R^3.

II – 4 – 3 Théorèmes

Théorèmes 1 :
Pour qu'une partie non vide F d'un e v E soit un s e v de E il faut et il suffit que, $\forall U, V \in F$ et $\forall \lambda, \beta \in R$, on a: $\lambda U + \beta V \in F$

Théorème 2 :
Si F_1et F_2 sont des s e v de E alors $F_1 \cap F_2$ est un s e v de E.

Théorèmes 3 : Somme de deux S E V
Si F_1 et F_2 sont des s e v de E , alors F_1+ F_2 est un sev de E
Avec $F_1 + F_2 = \{U / U = U_1 + U_2$ avec $U_1 \in F_1 ; U_2 \in F_2\}$.
NB : les théorèmes 1et 2 seront démontrés au TD

II – 4 – 4 Somme directe et sous espaces Supplémentaires

Définition 1 Soient F_1 et F_2 deux s e v d'un e v E. La Somme F_1+ F_2 est directe si :

- $F_1 \cap F_2 = \{0\}$ et
- $Pour\ tout\ U \in E$, il existe un seul élément $U_1 \in F_1$ et un seul $U_2 \in F_2$ tel que $U=U_1+U_2$.

Cette somme se note $F_1 \oplus F_2$
Ainsi E = $F_1 \oplus F_2$ $\Rightarrow$ $F_1 \cap F_2$= {0}
E = $F_1 + F_2$.
Définition 2 : Deux s e v F_1 et F_2 de E sont dits supplémentaires si E est somme directe de F_1 et F_2.
F_1 et F_2 supplémentaires $\Leftrightarrow$ E = $F_1 \oplus F_2$

Théorèmes : $F_1 + F_2 = F_1 + F_2 \Leftrightarrow F_1 \cap F_2 = \{0\}$.

III- Famille libre, Famille Génératrice, base

III-1- Famille libre

On dit que les vecteurs U et V sont linéairement indépendants ou que la famille {U, V} est libre si pour tout scalaires λ et β tel que $\lambda U + \beta V = 0$, alors $\lambda = \beta = 0$. Dans le cas contraire, on dit qu'ils sont linéairement dépendants. On dit alors qu'ils forment une famille liée. Autrement dit λ et β sont non nuls.

Remarque : Si une famille des vecteurs est liée, on peut exprimer un ou plusieurs vecteurs comme combinaisons linéaire des autres vecteurs : Réciproquement si un des vecteurs d'une famille est combinaison linéaire des autres, alors cette famille est liée.

Exemple : {U, V} Famille liée, alors si $\lambda \neq 0, U = \lambda V$
{U, V, W} Famille liée, alors si $\lambda \neq 0, U = \lambda V + \beta W$

Propriété : Tonte sous – famille d'une famille libre est libre

Exemple : Soit E = R^3 la famille {U_1, U_2, U_3}
avec U_1 = (1, -1,-2) ; U_2 = (2,1,2) et U_3 = (1, 2, 4) est – elle libre ?
On peut remarque que $U_3 = U_2 - U_1$, alors la famille (U_1, U_2, U_3) est liée.

III – 2 -Famille Génératrice

On dit qu'une famille S = {Ui / i ∈ [1, n]} d'un espace vectoriel E est génératrice si :
- Tout vecteur V∈ E est une combinaison linéaire unique des vecteurs de S
Et tout combinaison linéaire de vecteur de S est un élément E.
Autrement dit S est génératrice de E si

$$\forall V \in E, il\ existe, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in R$$

tel que : $\lambda_1 U_1\ \lambda_2 U_2, \ldots, \lambda_n U_n$
Avec S = {U i / i € [1, n]}. On écrit E = Lin (U_1, U_2, …., U_n)
ou encore Vect(U_1, U_2, …., U_n)

Exemple 1 E = R^3
Montrer que la famille { (1 , 1 , 1) ; (1 , 1 , 0); (0 , 1 , 1)} est génératrice de R^3
Soit V = (x, y, z) ∈ R^3 $\exists \lambda, \beta\ et\ \gamma \in$ IR
(x, y , z) = λ(1 , 1 , 1)+β (1 , 1 , 0)+γ (0, 1, 1)

On a : $\begin{cases} \lambda + \beta = x \ \ (1) \\ \lambda + \beta + \gamma = y \ \ \ (2) \\ \lambda + \gamma = z \ \ \ (3) \end{cases}$

(2)- (1) donne $\gamma = y - x$
(1) – (3) donne $\beta = \gamma + x - z = y - x + x - z = y - z$
γ dans (3) on obtient: $\lambda = x - y + z$. Ainsi λ, β et γ existe et sont uniques, alors cette famille est génératrice de IR^3

2) E = R^3 la famille {U_1, U_2, U_3} est – elle Libre ? génératrice de IR^3?
Avec U_1 = (0, 1, 1) ; U_2 = (1, 0, 1) U_3 = (1, 1, 0).

Vérifions si cette famille est libre

$Soient\ \alpha, \beta, \gamma \epsilon R$ tels que $\alpha U_1 + \beta U_2 + \gamma U_3 = 0$

$\alpha(0,1,1)+\beta(1,0,1) \quad +\gamma(1,1,0)=0$

On a : $\begin{cases} \beta+\gamma=0 \ (1) \\ \alpha+\gamma=0 \ \ (2) \\ \alpha+\beta=0 \ \ (3) \end{cases}$

(1)– (2) $\Rightarrow \ \alpha = \ \beta$
(2)–(3) $\Rightarrow \ \gamma = \ \beta$
(3)–(1) $\Rightarrow \ \alpha = \ \gamma$

En remplaçant γ $dans$ (1) on obtient $\beta=0$. On déduit alors que $\alpha = \ \gamma = 0$
D'où $\alpha = \ \gamma = \ \beta=0$. Alors la famille {$U_1$, U_2, U_3} est libre.
Vérifions si la famille {U_1, U_2, U_3} est génératrice de IR^3
$Soient\ \alpha,\beta,\gamma\epsilon R\ et\ pour\ tout\ V=(x,y,z)\in R^3$ tels que
$\alpha U_1+\beta U_2+\gamma U_3=V$
$\alpha(0,1,1)+\beta(1,0,1) \quad +\gamma(1,1,0)=(x\ ,y,z)$

On a : $\begin{cases} \beta+\gamma=x \ (1) \\ \alpha+\gamma=y \ \ (2) \\ \alpha+\beta=z \ \ (3) \end{cases}$

(1)– (2) $\Rightarrow \ \ \beta=\alpha+x-y$
(2)–(3) $\Rightarrow \ \gamma = \ \beta+y-z$
(3)–(1) $\Rightarrow \ \alpha = \ \gamma+z-x$

En remplaçant $\alpha,\gamma\ et\ \beta$ respectivement dans (2), (1) et (3)
On obtient $\alpha=\frac{1}{2}(-x+y+z),\ \beta=\frac{1}{2}(x-y+z),\ \gamma=\frac{1}{2}(-x+y-z)$ qui sont uniques. Alors la famille {U_1, U_2, U_3} est génératrice d R.

III-3- Théorèmes

Théorème1

Soit E un espace vectoriel sur IR, et Si F une partie engendré par une famille libre de vecteurs de E, alors F est un sous espace vectoriel de E

Exemple :

Montrer que la partie F = {(x,y,z)$\in$ IR^3 /x + y = y + z = z + x} est un espace vectoriel sur IR

Soit U= (x, y ,z)$\in$ F , on a : $\begin{cases} x+y=y+z \\ x+y=z+x \\ y+z=z+x \end{cases} \Rightarrow x=y=z$

Alors , F= {(x,y,z) $\in$ IR^3}= {(x, y, z)} ={(x, x, x)}= {x(1, 1, 1)}
F= *Lin* ((1,11))
Comme F est engendré par un vecteur de R^3, alors F est un sous espace vectoriel de R^3.

Théorème2 : Rang d'un système de vecteur

Le rang d'un système de vecteur est le nombre des vecteurs libres dans cette famille.

Recherche du rang d'un système de vecteur : Méthode de Pivot de Gauss

On place les vecteurs en ligne et on fixe un pivot sur une ligne et on remplace les autres vecteurs par une combinaison de ce vecteur avec le vecteur du pivot de sorte qu'on obtienne des zéro sur les autres vecteurs. On réitère le processus jusqu'à n'est plus obtenir de pivot. Le nombre de pivot non nul correspondant au rang de la famille.

NB : ces combinaisons peuvent s'effectuer en plaçant les vecteurs en colonne.

Application :

Déterminer le rang du système des vecteurs de IR^3 suivants

V_1= (1,2,-4); V_3= (2,4,-8). V_2= (6,1,0) ; V_4= (1,3,-3)

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 1 & 3 & -3 \\ 6 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & -8 \end{pmatrix} \begin{matrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ V_4 \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 0 & 1 & 1 \\ 6 & -11 & 24 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} V_1' = V_1 \\ V_2' = V_2 - V_1 \\ V_3' = V_3 - 6V_1 \\ V_4' = V_4 - 2V_1 \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 35 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} V_1' = V_1 \\ V''_2 = V_2' \\ V_3'' = V_3' + 11V_2' \\ V_4'' = V_4' \end{matrix}$$

Il ya une ligne nulle, alors le système de ces vecteurs est lié. Comme on a trois pivot non nul alors le rang de ce système est égal à 3.

On peut trouver une relation entre ces vecteurs.

On voit que $V_4'' = V_4' = V_4 - 2V_1 = 0\,,\, on\ a\ V_4 = 2V_1$

III– 4- Base d'un espace vectoriel

III-4-1-Un système B des vecteurs est une base **de** E si cette famille est libre et génératrice de E

Exemple :

La famille {U_1, U_2, U_3} est Libre et génératrice de IR^3, alors elle forme une base de R^3, avec U_1 = (0, 1, 1) ; U_2 = (1, 0, 1) U_3 = (1, 1, 0)

III-4-2- base canonique

1) E = R^2 { (1, 0) ; (0 , 1) } est une base canonique de R^2.

2) E = R^3 { (1 , 0 , 0) ; (0 , 1 , 0) ; (0 , 0 , 1)} est une base canonique R^3

3) E =P $[IR]_2$ = { a x^2 + b x + c , a , b , c € R } {1, x, x^2} est une base de P_2.

III – 5 -Dimensions d'E. V

III-5 – 1 Définition

On appelle dimension d'un e v E le nombre de vecteur de sa base et on note DimE

Exemple:

1- $E_1 = IR$, Dim R = 1 ; $E_2 = IR^2$. Dim $R^2 = 2$; $E^3 = R^3$; Dim $R^3 = 3$
2- La famille $\{U_1, U_2, U_3\}$ étant Libre et génératrice de IR^3, forme une base de R^3, avec $U_1 = (0, 1, 1)$; $U_2 = (1, 0, 1)$ $U_3 = (1, 1, 0)$. Tout sous espace vectoriel engendré par cette famille sera de dimension **3**

III- 5 -2 Théorème 1

Si un espace vectoriel E admet une base de n éléments alors toutes les bases de E sont constituées de n élément.

Conséquences

1) Dans un espace vectoriel E de dimension n, toute famille libre de n vecteurs est une base de E.
2) Dans un espace vectoriel de Dimension n, toute famille génération de n vecteur est une base de E.

Exemple : on considère $E = R^3$

Soit U = (3, - 2 , 1) ; V = (1 , 1 – 2) ; W = (0 , - 2 , 3) trois vecteurs de R^3 , montrer que B= (U , V , W) est une base de R^3 il suffit de montrer que c' est une famille libre ou que cette famille est génératrice de R^3.

Remarque :

Par convention, l'espace réduit au vecteur nul est de dimension égale à 0.

III- 5-3 Théorème 2

Soit F et G deux sous espaces vectoriels de E alors :

Dim (G + F) = Dim G +Dim F - Dim$(G \cap F)$

IV- Sous Espaces vectoriels supplémentaires

IV-1- Somme directe

Soit E un espace vectoriel sur IR, F_1 et F_2 deux sous espaces vectoriel de E.

On dit que E es tune somme directe de F_1 et F_2 si

$$F_1 \cap F_2 \neq \emptyset$$
$$E = F_1 + F_2$$
qui signifie que tout élément x de E se décompose de façon unique comme somme d'un élèment x_1 de F_1 et d'un élèment x_2 de F_2
$$\forall x \in E, \exists! x_1 \in F_1 \; ; \; \exists! x_2 \in F_2 \; / \; x = x_1 + x_2$$
$$On\ écrit\ E = F_1 \oplus F_2$$

IV-2- Sous espaces supplémentaires

Soit E un espace vectoriel sur IR, F_1 et F_2 deux sous espaces vectoriel de E.
On dit F_1 et F_2 sont supplémentaires de E si ils sont somme directe de E.

IV-3- Propriétés

IV-3-1-$E = F_1 \oplus F_2 \Leftrightarrow \text{Dim } E = \text{Dim } F_1 + \text{Dim } F_2$

IV-3-2-$E = F_1 \oplus F_2 \Leftrightarrow F_1$ et F_2 sont supplémentaires de E

Exercice d'application

Exercice N°1

Soient F et G les sous-espaces vectoriels suivants de R^3 :

$F = \{(x, y, z) \in R^3; x - y - 2z = 0\}$; $G = \{(x, y, z) \in R^3; x = 2y = x + z\}$.

1. Montrer que F et G sont des sous espaces vectoriels de R^3
2. Déterminer la dimension de F et de G.
3. **3.** Calculer $F \cap G$. En déduire que F et G sont supplémentaire.

Indication solution

1. Montrons que F et G sont deux sous espaces vectoriels de R^3

$F = \{(x, y, z) \in R^3; x - y - 2z = 0\}$

$$\forall X = (x, y, z) \in F, x - y - 2z = 0 \Longrightarrow x = y + 2z$$

$$X = (y + 2z, y, z) = y(1, 1,0) + z(2, 0, 1) = xU + zV$$

Ce qui montre que F= Vect(U, V)

On peut rapidement vérifier que la famille (U, V) est libre. Alors F est un sous espace vectoriel de R^3

$G = \{(x, y, z) \in R^3; x = 2y = x + z\}$.

$$\forall X = (x, y, z) \in F, x = 2y = x + z \Longrightarrow \begin{cases} x = 2y \\ x = x + z \\ 2y = x + z \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} z = 0 \\ x = 2y \end{cases}$$

$$X = (x, y, z) = (2y, y, 0) = y(2, 1, 0) = yW$$

Ce qui montre que G =Vect(W). Alors G est une sous espace vectoriel de R^3.

2. Dimension de F et de G

F = Vect(U, V) et la famille (U,V) est libre alors elle forme une base de F et donc Dim F = 2.

G = Vect(W) et Dim G = 1

3. Déterminons $F \cap G$

$$\forall X \in F \cap G \text{, on a} \begin{cases} x - y - 2z = 0 \\ z = 0 \\ x = 2y \end{cases} ; \Rightarrow x = y = z = 0$$

$F \cap G$ = Vect ((0,0,0)), alors Dim $F \cap G = 0$

On peut aussi utiliser la méthode de Pivot pour trouver la dimension de $F \cap G$. Le nombre de ligne nulle correspond à la dimension de $F \cap G$. Ici on montre qu'il ya pas de ligne nulle, donc Dim $F \cap G=0$

Dim (F +G) = Dim F + Dim G - Dim $F \cap G$ = 2 + 1- 0 = 3= Dim R^3

Alors F et G sont supplémentaires

IV-4-Théorème 3 : Théorème de la base incomplète

Soit E un espace vectoriel de dimension n, si P vecteurs (avec P < n) sont linéairement indépendants dans l'e. v E, on peut leur adjoindre n – p autres vecteurs de E de façon que l'ensemble des n vecteurs constituent une base de E.

Exemple E = R ^{3}

Soit la famille S = { U , V } ou U = (1, 1 , 2) et V = (1, 1 , -1)

Montrer que S est une famille libre.

$\lambda U + \beta V = 0$, on a : $\begin{cases} \lambda + \beta = 0 \\ \lambda + \beta = 0 \\ 2\lambda - \beta = 0 \end{cases}$ on trouve rapidement que $\lambda = \beta = 0$. Alors S est une famille libre.

Soit S' = { U, V , U' } avec U' = (0, 0 , 1)

On montre que S'est lié donc non une base.

On considère maintenant le système S'' = { U , V , U'' } avec U = (1 , 0 , 0)

On montre S''est libre

S'' est génératrice de R ^{3} .

$\forall w \in IR^3, \exists \lambda, \beta \, et \, \alpha / w = \lambda U + \beta V + \alpha U''$

D' où S'est une base de R ^{3}

V- Problème de changement de Base

Soit un Espace vectoriel rapporté à une base B = (et une nouvelle base B ' dont les vecteurs sont déterminés par leur composantes dans B. Les éléments de B' sont combinaison linéaire unique des éléments de la base B. Le problème de changement de base consiste a exprimer tout vecteur V de composants (x, y,z) dans la base B'.

Exemple :

Soit E^3 muni de la base B = {V_1,V_2 } , avec V_1= (1 ,1) ; V_2 =(0,1), et B'= (V'_1,V'_2)

Avec $V'_1 = V_1 - V_2$ et $V'_2 = V_2$. Soit le vecteur U de composantes (x, y) dans la base B et (x',y') dans la base B '

On a : $U = x V_1 + y V_2 = x 'V'_1 + y V'_2$

En exprimant V_1 et V_2 dans la base B on obtient

$U = x V1 + yV_2 = x ' (V_1 - V_2) + y' V_2 = x' V_1 + (- x ' + y ') V_2$

$$\begin{cases} x = x' \\ y = -x' + y' \end{cases}$$

Si on connaît les coordonnées de U dans B , on peut en déduire celles dans B'.

Applications numériques

Pour une vecteur U= (1, 1) dans la base B, de terminer les coordonnes

On a : $\begin{cases} 1 = x' \\ 1 = -x' + y' \end{cases}$ $\begin{cases} x' = 1 \\ -x' + y = 1 \end{cases}$ y ' = 2 de U des B '

U = (1, 2) dans la base B '.

VI- Applications linéaires

VI-1- Définitions d'une application linéaire

Soient F et G deux E V sur R l'application f : F $\rightarrow$ G est linéaire

si $*\ \forall u, v \in F \quad on \quad a: f(u+v) = f(u) + f(v)$

$*\ \forall \alpha \in IR; \forall u \in F; f(\alpha u) = \alpha f(u)$

Si F = G, f est appelée endomorphisme de F

Si G = IR, f est appelée forme linéaire sur F

L'ensemble des applications linéaires de F dans G est noté par : $L_R(F,G)$

L'ensemble des endomorphismes de F est noté par : $L_R(F)$

VI-2- Autre définition

Soient F et G deux E V sur R l'application f : F $\rightarrow$ G est linéaire

Si $\forall\ u, v \in F\ \ et\ \ \alpha, \beta \in R, on\ a\ f(\alpha u + \beta v) = \alpha f(u) + \beta f(v)$

Exemple

Soit l'application définie de f : IR^3 dans IR^3

(x, y ,z) f(x, y ,z) =(x – y +z, x +y +z , 2x –y –z)

Montrer que f est une application linéaire**.**

Soient X = (x, y, z)∈ R^3 et Y = (x', y' z')∈ R^3

X + Y = (x +x', y +y', z +z')

f(X+Y) = ((x +x')-(y +y')+ (z +z'), (x +x')+(y +y')+ (z +z'), 2(x +x')-(y +y')-(z +z'),

f(X+Y) = (x – y +z, x +y +z , 2x –y –z) +(x' – y' + z', x' + y' + z' , 2x' –y' –z')

f(X+Y) = f(X) +f(Y)

Soient X = (x, y, z)∈ R^3 et $\alpha \in R$

$$\alpha X = \alpha(x, y, z) = (\alpha x, \alpha y, \alpha z)$$

$f(\alpha X) = f(\alpha(x,y,z)) = (\alpha x - \alpha y + \alpha z, \alpha x + \alpha y + \alpha z, 2\alpha x - \alpha y - \alpha z)$

$= \alpha(x - y + z, x + y + z, 2x - y - z)$

$\mathbf{f(\alpha X) = \alpha f(X)}$

Alors f est bien une application numérique

VI-3-Propriété

VI-3-1- Si $f \in L_K(F,G)$, alors f(O_F) = O_G

VI-3-2- Une application linéaire est parfaitement définie par la donnée des images des vecteurs d'une base de F

Exemple :

Montrer que les données suivantes définissent une application linéaire et une seule que l'on déterminera.

f(1 ,-1,1) = (3, 1, 2) ; f(1 ,1,-1) = (-1, 1, 2) ; f(-1 ,1,1) = (-1, 1,-4)

Solution

Ces données définissent une application linéaire unique si les vecteurs V1 =(1 ,-1,1) V_2= (1 ,1,-1) ; V_3= (-1 ,1,1) forment une base de IR^3

Pour déterminer l'application, on considère un vecteur X= (x, y, z)

Comme B = (V1, V_2, V3) est une base, alors existe $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in IR$ tel que $X = \lambda_1 V_1 + \lambda_2 V_2 + \lambda_3 V_3$ (1), on exprime les λ en fonction de x ,y et z

Et on calcul l'image de x ie $f(X) = \lambda_1 f(V_1) + \lambda_2 f(V_2) + \lambda_3 f(V_3)$) (2)

De (1) on a : $\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3 = x \\ -\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = y \\ \alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3 = z \end{cases}$

On obtient : $\alpha_1 = \frac{1}{2}(x+z)$; $\alpha_2 = \frac{1}{2}(x+y)$; $\alpha_3 = \frac{1}{2}(y+z)$;

De (2) : $f(X) = \lambda_1 f(V_1) + \lambda_2 f(V_2) + \lambda_3 f(V_3)$

On remplace les α et les f(V), l'application donne :

f(x, y, z) = (-y ; x +y +z ; 2x –y –z)

VII- Noyau et image

Soit f une application linéaire de E dans F

VII-1-Noyau

On appelle noyau de f, l'ensemble, noté Kerf, définie par :

Kerf = $\{x \in E \ tel \ f(x) = 0\}$

VII-2-Image

On appelle Image de f , l'ensemble, noté Imf, défini par :

Imf = $\{y \in F \backslash \exists x \in E \backslash f(x) = y\}$

VII-3-Théorèmes

VII-3-1-Kerf est un sous espace vectoriel de E et Imf est un sous espace vectoriel de F

VII-3-2-Théorème des dimensions

Si E et F sont deux sous espaces vectoriels de G

DimG = Dim E + Dim F

VIII-Injection, surjection et bijection

Soit f une application linéaire de E dans F

VIII-1- Injection

f est injective si pour tout x et y de E vérifiant : f(x) = f(y) alors x = y

VIII-2- Surjection

f est surjective si pour tout y de F, il existe x de E tel que f(x) = y

VIII-3-Bijection

f est bijective si f est subjective et injective
Si f est bijective, on parle d'isomorphisme.
Si E = F, on parle d'endomorphisme.
Si E = F et f bijective, on parle d'automorphisme.

VIII-4-Proposition

VIII-4-1- f est injective si et seulement si Kerf = { 0}

VIII-4-2- f est bijective si et seulement si l'image d'une base de E est une base de F

VIII-4-3- Par définition de la subjectivité, une application linéaire est surjective

VIII-4-4-si et seulement si son image est égale à son espace d'arrivée :
F est surjective, Im f = F

Exemple :

Soit f : IR^3 dans IR^2 telle que f(x, y, z) = (x, y, z) = (x+y-2z, 3x-y+2z) une application linéaire.

Déterminer Kerf et Imf

$$\mathrm{Kerf} = \{(\mathrm{x,y,z}) \in \mathrm{R}^3 ./ f(x,y,z) = O_{R^2}\}$$

Soir X = (x, y, z)$\in Kerf \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{x+y-2z = 0} \ (1) \\ \mathrm{3x-y+2z = 0} \ (2) \end{cases}$

(1)+ (2) $\Rightarrow \begin{cases} \mathrm{x+y-2z = 0} \\ \quad \mathrm{4x = 0} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{y = 2z} \\ \mathrm{x = 0} \end{cases}$

X = (x, y, z)$\in Kerf, on\ a$: $X = (0, 2z, z) = z(0,2,1)$

Alors Kerf = Vect (0, 2, 1)

$$Imf = \{(\mathrm{x',y'}) \in \mathrm{R}^2, \exists\ (x,y,z) \in R^3\ telque\ f(x,y,z) = (x',y')\}$$

X' = (x', y')$\in Imf \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{x+y-2z = x'} \ (1) \\ \mathrm{3x-y+2z = y'} \ (2) \end{cases}$

(1)+ (2) $\Rightarrow \begin{cases} \mathrm{x+y-2z = x'} \\ \quad \mathrm{4x = x' + y'} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{x+y-2z = x'} \\ \mathrm{x = \frac{1}{4}(x' + y')} \end{cases}$

IX- Opérations sur les applications linéaires

IX-1- La somme, la composition de deux applications linéaires est une application linéaire.

IX-2- La multiplication d'une application linéaire par un scalaire une application linéaire

X- Rang d'un application linaire

X-1-Définition

Soient E et F deux K-espaces vectoriels et f une application linéaire de E dans F. Rappelons que Imf est un sous espace vectoriel de F. Si Im f est un sous espace vectoriel de dimension finie dans F, alors on appelle rang de l'application linéaire f la dimension de Im f . On notera rg f le rang de f.

X-2- Proposition Formule du rang

Si E et F sont des k-espaces vectoriels, que E est
de dimension finie, et que f est une application linéaire de E dans F alors f vérifie: dim Ker f + rg f = dim E.

X-3- Propriétés du rang :

si $f \in$ L(E ;F) , dimE = n ; dim F= p; alors

X-3-1- rg(f) $\leq min(n;p)$

X-3-2- rg(f) = n, si et seulement si est injective

X-3-3- rg(f) = p, si et seulement si est surjective

X-3-4- rg(f) = n= p, f est bijective

XI- Matrice d'une application linéaire

XI-1-Définition :

Soient F et G deux espaces vectoriels de dimensions respectives n et m de base respectives $B_n = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ et $B_m = (U_1, U_2, \ldots, U_m)$.

Et f une application linéaire de F $\rightarrow$ G.

La matrice de f dans les bases B_n et B_m à pour colonnes les coordonnées dans B_m des vecteurs f (e_1), f (e_2), ….f (e_n). On la note M(f, B_n, B_m) qui est une matrice de type (m, n)

$$M(f, B_n, B_m) = \begin{array}{cc} \begin{array}{cccc} f(e_1) & f(e_2) & - & f(e_n) \end{array} & \\ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2m} \\ - & - & - & - \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nm} \end{pmatrix} & \begin{array}{c} U_1 \\ U_2 \\ - \\ U_m \end{array} \end{array}$$

Si E =F et B =B', on note M(f, B).

Exemple

On considère l'application linéaire suivante.

$$F: R^3 \rightarrow R^2$$

$$(x,y,z) \mapsto f(x,y,z) = (2x + y, x - 3z)$$

On munit IR^3 et IR^2 des bases canoniques respectives

$B = (e_1, e_2, e_3)$ et $B' = (e'_1, e'_2)$

$f(e_1) = f((1,0,0) = (2,1) = 2e'_1 + e'_2$

$f(e_2) = f((0,1,0) = (1,0) = 1e'_1 + 0e'_2$

$f(e_3) = f((0,0,1) = (0,-3) = 0e'_1 - 3e'_2$

$$M(f,B,B') = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

XI-2- Changement de base

XI-2-1-Matrice de passage

Soient E un espace vectoriel de dimension fine n sur K. B et B' deux bases de E. On appelle matrice passage de la base B à la base B', la matrice carrée d'ordre n, dont les colonnes sont respectivement les composantes des vecteurs de B' dans B.

XI-2-2- changement de base

Soit E un espace vectoriel, soient $(e_1,\ldots e_n)$ et $(e'_1,\ldots,e'_n)$ deux bases de E. Soit F un autre espace vectoriel, soient $(f_1,\ldots f_m)$ et $(f'_1,\ldots ,f'm)$ deux bases de F. Soit f une application linéaire de E dans F, et $M \in Mmn$ sa matrice relative aux bases $(e_1,\ldots e_n)$ et $(f_1,\ldots f_m)$. Soit $P \in Mn$ la matrice de passage de l'application linéaire qui à ei associe e'_i, pour tout i =1,…,n.

Soit $P' \in M'$ la matrice de l'application linéaire qui à fi associe f'i,

La matrice de f relative aux bases $(e'_1,\ldots,e'_n)$ et $(f'_1,\ldots ,f'_m)$ est $M' = P'^{-1}.MP$

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{E,(ei)} \arrow[r, "\mathbf{f}", "\mathbf{M}"'] & \mathbf{F,(fi)} \arrow[d, "\mathbf{P^{-1}}\ \mathbf{I_F}"] \\
\mathbf{E(e'i)} \arrow[u, "\mathbf{I_E}\ \mathbf{P}"] \arrow[r, "\mathbf{M'}", "\mathbf{f}"'] & \mathbf{F(f'i)}
\end{tikzcd}$$

$$\mathbf{M' = P^{-1}MP}$$

Application 1

On considère l'application f de R^3 dans R^3 définie par :

$f(x,y,z) = (-x-3y+3z\ ;\ -4x-2y+5z\ ;\ -4x-4y+7z)$

1. Montrer que f est une application linéaire
2. Déterminer la matrice M associée à f par rapport à la base canonique $B=(e_1,e_2,e_3)$
3. On donne les vecteurs $u_1= e_1+e_2+e_3$; $u_2= e_1-e_2$; $u_3 = e_2+e_3$. Montrer que $B'= (u_1,u_2,u_3)$ est une base de R^3.
4. Donner la matrice de passage P de B à B'

5. Montrer que P est inversible et calculer P^{-1}
6. Déterminer la matrice M' de f par rapport à la base B'.
7. Calculer $P^{-1}MP$ et PM'^{-1}

Solution

1. **Montrons que f est une application linéaire (on applique la définition du cours)**
2. **La matrice M est telle que les colonnes sont les éléments f(ei) en fonction des ei**

   $f(e_1) = f(1,0,0)= (-1,-4,-4) = -e_1-4e_2-4e_3$

   $f(e_2) = f(0,1,0)= (-3,-2,-4) = -3e_1-2e_2-4e_3$

   $f(e_3) = f(0,0,1)= (3,5,7) = 3e_1+5e_2+7e_3$

   D'où $M = \begin{pmatrix} -1 & -3 & 3 \\ -4 & -2 & 5 \\ -4 & -4 & 7 \end{pmatrix}$
3. Montrons que B' est une base (voir cours)
4. Déterminons la matrice P de passage de B à B'

Cette matrice est telle que les colonnes sont les composantes des vecteurs de B' dans la base B.

D'où $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

5. Pour montrer que P est inversible on calcule le déterminant et la matrice inverse est obtenue en exprimant les ei en fonction des vi.

   On a : $\begin{cases} u1 = e1 + e2 + e3 \\ u2 = e1 - e2 \\ u3 = e2 + e3 \end{cases} \quad soit \quad \begin{cases} e1 = u1 - u3 \\ e2 = u1 - u2 - u3 \\ e3 = -u1 + u2 + 2u3 \end{cases}$

   D'où $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$
6. Déterminons la matrice M de f associée à la base B'

   M= (f, B) ; On exprime les f(ui) en fonction des ui

$f(u_1) = f(e_1)+f(e_2)+f(e_3) = -e_1 -e_2 -e_3 = -u_1$

$f(u_2) = f(e_1) - f(e_2) = 2e_1 -2e_2 =2 u_2$

$f(u_3) = f(e_2)+f(e_3) = 3e_2 3e_3 = 3u_3$

D'où M'=$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

7. On remarque $P^{-1}MP=M'$ et $PM'P^{-1} = M$