Notes

1 Temps propagation lumière dans un espace en expansion

A envoie un signal à B situé à une distance d ($x(A) = 0$ et $x(B) = d$) dans un espace en expansion selon $t \mapsto L(t)$.

Pour la lumière

$$c\,\mathrm{d}t = \frac{L(t)}{L(0)} dx \tag{1}$$

Donc

$$d = cL_0 \int_0^T \frac{dt}{L(t)} \tag{2}$$

Exemple 1 : $L(t) = L_0 e^{\alpha t}$:

$$d = c \int_0^T e^{-\alpha t} dt = \frac{c}{\alpha}\left(1 - e^{-\alpha T}\right) \tag{3}$$

Donc $T = \dfrac{1}{\alpha} \ln \dfrac{1}{1 - \alpha d/c}$ si $d \leq c/\alpha$. De plus $T = d/c + O(\alpha d/c)$ pour $\alpha \to 0$

Exemple 2 : $L(t) = L_0 \left(\dfrac{t}{t_0}\right)^\beta$:

$$d = ct_0^\beta \int_0^T t^{-\beta} dt = \frac{ct_0^\beta}{1-\beta} T^{1-\beta} \text{ si } \beta < 1 \tag{4}$$

Donc $T = \left[(1-\beta)\dfrac{d}{ct_0^\beta}\right]^{[1/(1-\beta)]}$

Si d est mesuré à t_0 :

$$d = ct_0^\beta \int_0^T t^{-\beta} dt = \frac{ct_0^\beta}{1-\beta}\left(T^{1-\beta} - t_0^{1-\beta}\right) \tag{5}$$

2 Horizons

Horizon des évènements : distance maximale R_{ev} de laquelle peut provenir un signal lumineux en un temps fini.

Exemple 1 : $L(t) = L_0 e^{\alpha t} \Rightarrow R_{ev} = c/\alpha$

Exemple 2 : $L_0 \left(\frac{t}{t_0}\right)^{\beta}, \beta < 1 \Rightarrow R_{ev} = +\infty$

Horizon des particules : distance physique maximale à un instant t_1 de laquelle peut provenir un évènement issu de t_0.

$$R_{part} = L(t_1) c \int_{t_0}^{t_1} \frac{dt}{L(t)} \tag{6}$$

3 Relation luminosité-z

On définit z tel que $1 + z(t) = \frac{L(t)}{L_0}$. On peut montrer qu'une source émettant de la lumière à la longueur d'onde λ_0 à $t = 0$ est perçue comme émettant à la longueur d'onde $\lambda(t)$ au temps t selon la relation $\lambda(t) = \lambda_0(1 + z(t))$

Une source émet N photons par seconde en $x = 0$. Au temps t on capte ce signal en un point originellement ($t = 0$) distant de d de la source sur une "surface" dl du front d'onde l(t). On mesure $dN'(t)$ photons par seconde.

On doit avoir : $dN'(t) = \frac{dl}{l(t)} \frac{f(t)}{f_0} N$

La longueur du front d'onde au temps t est donnée par $l(t)$. Dans un espace plat + 2D :

$$l(t) = 2\pi d \frac{L(t)}{L_0} = 2\pi d (1 + z(t)) \tag{7}$$

Dans un espace sphérique 2D :

$$l(t) = 2\pi L(t) \sin \frac{d}{L_0} = 2\pi L_0 (1 + z(t)) \sin \frac{d}{L_0} \tag{8}$$

L'énergie des photons décroit en $1 + z$ (red shift)

Espace plat 2D :

$$\bar{L}(z) = \frac{\bar{L}}{2\pi d (1+z)^2} \tag{9}$$

Espace sphérique 2D :

$$\bar{L}(z) = \frac{\bar{L}}{2\pi L_0 (1+z)^2 \sin \frac{d}{L_0}} \tag{10}$$

Exemple : $L(t) = L_0 \left(\frac{t}{t_0}\right)^{\beta}$

$$t = t_0 \left(1 + z(t)\right)^{1/\beta} \tag{11}$$

Donc

$$d(z) = \frac{ct_0}{1-\beta}\left[(1+z(t))^{(1-\beta)/\beta} - 1\right] \tag{12}$$

Et en espace plat :

$$\bar{L}(z) = \frac{\bar{L}(1-\beta)}{2\pi c t_0\left[(1+z)^{(1+\beta)/\beta} - (1+z)^2\right]} = \frac{\bar{L}(1-\beta)}{2\pi c t_0\,(1+z)\left[(1+z)^{1/\beta} - (1+z)\right]} \tag{13}$$

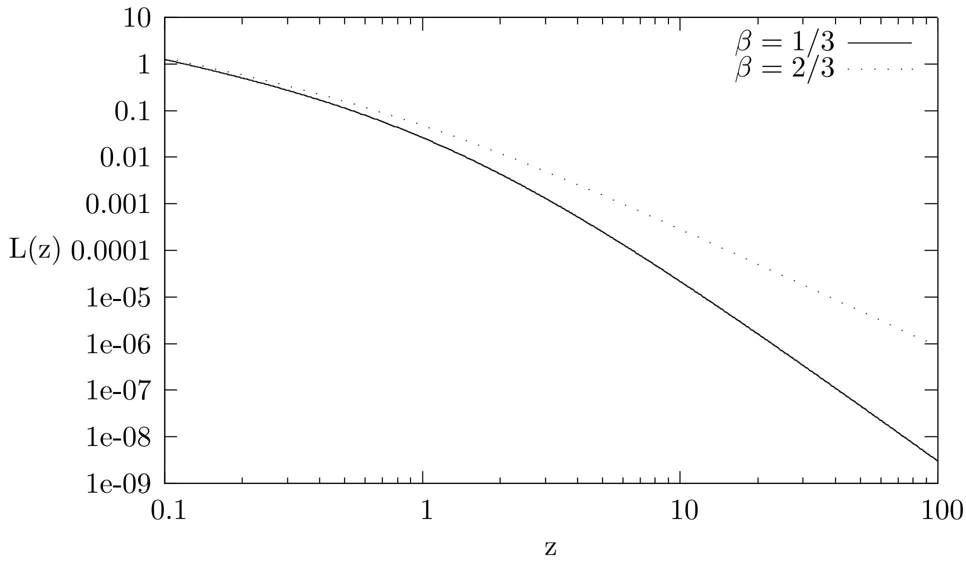
Et de plus

$$H(t) = \frac{\dot{L}}{L}(t) = \frac{\beta}{t_0} \tag{14}$$

Donc

$$\bar{L}(z) = \frac{\bar{L}(1-\beta)H_0}{2\pi\beta c\,(1+z)\left[(1+z)^{1/\beta} - (1+z)\right]} \tag{15}$$

Figure 1 – L(z) en espace 2D plat pour $\beta = 1/3$ et $\beta = 2/3$



En sphérique :

$$\bar{L}(z) = \frac{\bar{L}}{2\pi L_0(1+z)^2 \sin\frac{c\beta}{H_0 L_0(1-\beta)}\left[(1+z)^{(1-\beta)/\beta} - 1\right]} \tag{16}$$

Exemple : $L(t) = L_0 e^{\alpha t}$

$$t = \frac{1}{\alpha}\ln(1+z(t)) \tag{17}$$

Donc

$$d(z) = \frac{c}{\alpha} \frac{z(t)}{1 + z(t)} \tag{18}$$

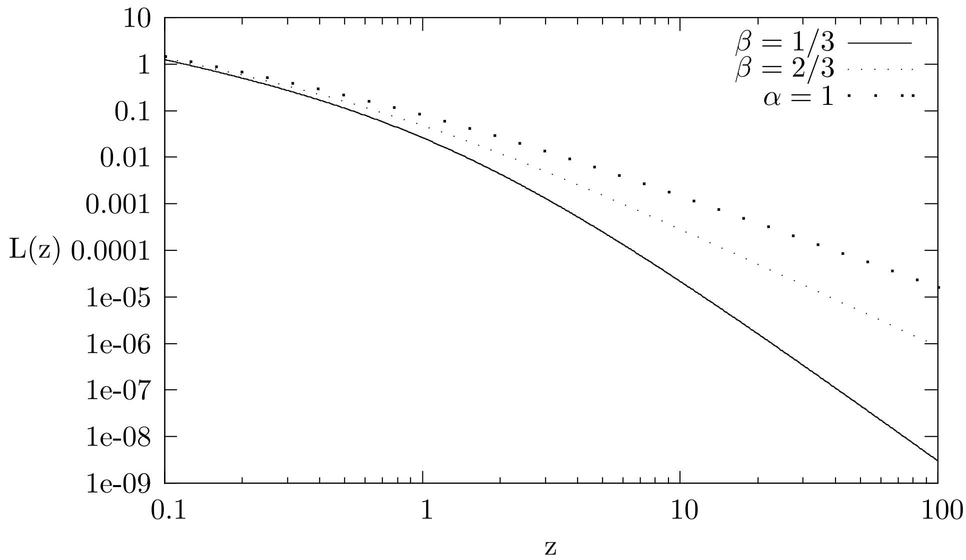
Et si la courbure est nulle :

$$\bar{L}(z) = \frac{H_0 \bar{L}}{2\pi c z(1 + z)} \tag{19}$$

Pour une géométrie sphérique :

$$\bar{L}(z) = \frac{\bar{L}}{2\pi L_0 (1 + z)^2 \sin \frac{c}{H_0 L_0} \frac{z}{1 + z}} \tag{20}$$

FIGURE 2 – L(z) en espace 2D plat pour $\beta = 1/3$ et $\beta = 2/3$



4 Distance angulaire

En 2D, l'angle apparent au temps t est le rapport entre la taille de la source et sa distance comobile

$$d_A \equiv \frac{dl}{d\theta} \tag{21}$$

Or $dl(t) = d(t) L(t)/L_0$. Donc :

$$d_A(t) = c(1 + z(t)) \int_0^t \frac{dt'}{1 + z(t')} \tag{22}$$

Donc en 2D, si $\bar{L}(z) = \bar{L}/d_L$, alors $d_A = d_L/(1 + z)$

5 Univers standard

FIGURE 3 – $d_L(z)$ et $d_A(z)$ pour $\Omega_m = 0{,}32$ et $\Omega_v = 0{,}68$