ОГЛАВЛЕНИЕ

1 Математическое введение

1.1 Символ Кронекера и его свойства

Символом Кронекера называют функцию двух переменных определяемую над множеством натуральных (иногда и целых, и даже действительных) чисел и удовлетворяющую свойству:

$$\delta(i,j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j; \\ 0 & i \neq j. \end{cases}$$

Свойства:

1. Симметричность:

$$\delta_{ij} = \delta_{ji}.$$

2. Суммирование любого тензора с символом Кронекера:

$$a_{i_1 i_2 \ldots i_N} \delta_{i_1 k} = a_{k i_2 \ldots i_N}.$$

1.2 Символ Леви-Чивиты

Символ Леви-Чивиты возникает при рассмотрении векторного произведения и позволяет его обобщить. Как известно векторное произведение представляет собой определитель. В трёхмерном случае:

$$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \sum_{\text{по перестановкам} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ i & j & k \end{pmatrix}} (-1)^{P\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ i & j & k \end{pmatrix}} a_j b_k \mathbf{e}_i = \epsilon_{ijk} a_j b_k \mathbf{e}_i,$$

здесь

$$P\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ i & j & k \end{pmatrix}$$

— количество перестановок, с помощью которых можно перевести данную перестановку (i,j,k) к виду $(1,2,3)$. Отсюда следует, что символ Леви-Чивиты ϵ_{ijk} можно определить следующим образом:

$$\epsilon_{i_1 i_2 \ldots i_n} = \begin{cases} 1, & \text{если перестановка } (i,j,k) \text{ – чётная} \\ -1, & \text{если перестановка } (i,j,k) \text{ – нечётная} \\ 0, & \text{если } (i,j,k) \text{ хотя бы 2 числа из } (i,j,k) \text{ совпадают.} \end{cases}$$

Определение, обобщённое на многомерный случай:

$$\epsilon_{i_1 i_2 \dots i_n} = \begin{cases} 1, & \text{если перестановка } i_1, i_2, \dots, i_n \text{ из } 1, 2, \dots n \text{ – чётная;} \\ -1, & \text{если перестановка } i_1, i_2, \dots, i_n \text{ – нечётная;} \\ 0, & \text{если } i_1, i_2, \dots, i_n \text{ не сводится к перестановке из } 1, 2, \dots n. \end{cases}$$

Свойства:

1. Антисимметричность по любым двум индексам:

$$\epsilon_{i_1 i_2 \dots i_n} = -\epsilon_{i_2 i_1 \dots i_n}.$$

2. Свёртка по любым двум индексам равна 0.

$$\epsilon_{i_2 i_2 \dots i_n} = 0.$$

3. $(n-1)$ свёртка произведения двух символов Леви-Чивиты n-го порядка:

$$\epsilon_{i_1 i_2 \dots i_{n-1} i_n} \epsilon_{i_1 i_2 \dots i_{n-1} j_n} = \begin{cases} 0 & j_n \neq i_n \\ \sum\limits_{i_1 \dots i_{n-1}} \left(\epsilon_{i_1 i_2 \dots i_{n-1} i_n}\right)^2 & j_n = i_n \end{cases} =$$

$=$ [в силу свойств $\epsilon_{i_1 i_2 \dots i_{n-1} i_n}$ остаются слагаемые с различными $i_1, i_2, \dots, i_{n-1}$, при данном i_n существует $(n-1)!$ перестановок $i_1, i_2, \dots, i_{n-1}$, а квадрат от -1 или 1 равен 1] $=$

$$= \begin{cases} 0 & j_n \neq i_n; \\ \sum\limits_{(i_1, \dots, i_{n-1})} 1 & j_n = i_n. \end{cases} = \begin{cases} 0 & j_n \neq i_n; \\ (n-1)! & j_n = i_n. \end{cases} = (n-1)!\, \delta_{j_n i_n}.$$

4. $(n-2)$ свёртка произведения двух символов Леви-Чивиты n-го порядка:

$$\epsilon_{i_1 i_2 \dots i_{n-2} i_{n-1} i_n} \epsilon_{i_1 i_2 \dots i_{n-2} j_{n-1} j_n} =$$

$$= \begin{cases} \sum\limits_{i_1 \dots i_{n-2}} (\epsilon_{i_1 i_2 \dots i_{n-2} i_{n-1} i_n})^2, & i_{n-1} = j_{n-1}, i_n = j_n; \\ -\sum\limits_{i_1 \dots i_{n-2}} (\epsilon_{i_1 i_2 \dots i_{n-2} i_{n-1} i_n})^2, & i_{n-1} = j_n, i_n = j_{n-1}; = \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} (n-2)!, & i_{n-1} = j_{n-1}, i_n = j_n; \\ -(n-2)!, & i_{n-1} = j_n, i_n = j_{n-1}; \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases} = (n-2)!(\delta_{i_{n-1}j_{n-1}}\delta_{i_nj_n} - \delta_{i_{n-1}j_n}\delta_{i_nj_{n-1}})$$

В частности отсюда следует всем известный $\boldsymbol{b}(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}) - \boldsymbol{c}(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})$:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}) = \epsilon_{ijk}\mathbf{e}_i a_j \epsilon_{klm} b_l c_m = -\epsilon_{kji}\epsilon_{klm} a_j b_l c_m \mathbf{e}_i = \\ = -(\delta_{lj}\delta_{im} - \delta_{li}\delta_{jm}) a_j b_l c_m \mathbf{e}_i = \\ = -(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}) c_m \mathbf{e}_m + (\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}) b_i \mathbf{e}_i = \\ = \boldsymbol{b}(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}) - \boldsymbol{c}(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}). \end{aligned}$$

5. Произведение двух символов Леви-Чивиты (док-во можно провести например по индукции):

$$\epsilon_{i_1 i_2 \ldots i_{n-1} i_n}\epsilon_{j_1 j_2 \ldots j_{n-1} j_n} = \begin{vmatrix} \delta_{i_1j_1} & \delta_{i_1j_2} & \ldots & \delta_{i_1j_n} \\ \delta_{i_2j_1} & \delta_{i_2j_2} & \ldots & \delta_{i_2j_n} \\ \ldots & \ldots & \ddots & \ldots \\ \delta_{i_nj_1} & \delta_{i_nj_2} & \ldots & \delta_{i_nj_n} \end{vmatrix}$$

1.3 Дельта-функция Дирака

Можно дать множество определений дельта-функции Дирака. Оставим вопрос со строгостью каждого из них математикам. Наиболее интересные на мой взгляд определения:

1. Интегральное: для произвольной функции $f(x)$

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x)dx = f(0).$$

Мне не удалось доказать отсюда, что она равна 0 при всех $x \neq 0$, поэтому оно дополняется соответствующим свойством:

$$\delta(x) = 0 \text{ при } x \neq 0.$$

Последнее свойство однако легко доказывается, если принять в качестве определения следующее:

$$\int\limits_a^b f(x)\delta(x)dx = \begin{cases} f(0) & \text{если } 0 \in (a,b); \\ 0 & \text{если } 0 \notin [a,b]. \end{cases}$$

2. Важнейшее с моей точки зрения определение:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \delta(x)dx = 1,$$

$$\delta(x) = 0 \text{ при } x \neq 0.$$

Оно не содержит никаких произвольных функций, но из него легко получить одно простое свойство дельта-функции:

$$f(x)\delta(x) = f(0)\delta(x),$$

и как следствие предыдущее определение.

3. В форме предела:

$$\delta(x) = \lim_{\sigma\to 0} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right) = \lim_{\alpha\to\infty} \frac{1}{\pi}\frac{\sin(\alpha x)}{x}$$

Преобразование Фурье от дельта-функции:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \delta(x)e^{i\omega x}dx = 1.$$

Обратное преобразование Фурье:

$$\delta(x) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega x}d\omega.$$

Дельта-функция от произвольной функции $f(x)$ с корнями x_k:

$$\delta(f(x)) = \sum_k \frac{\delta(x-x_k)}{f'(x_k)}$$

1.4 Решение волнового уравнения

Рассмотрим волновое уравнение без правой части:

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} - \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} - \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} = 0.$$

Обычно его рассматривают при следующих условиях:

$$\varphi\Big|_{t=0} = f(x,y,z),$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t}\Big|_{t=0} = g(x,y,z),$$
$$\varphi\Big|_S = u(t),$$
$$\frac{\partial\varphi}{\partial n}\Big|_S = v(t).$$

S — замкнутая поверхность, внутри которой ищем решение. В этом случае из теоремы Грина следует, что решение единственно. Продемонстрируем это. Пусть существует второе решение ψ, удовлетворяющее и уравнению и дополнительным условиям. Домножим первое уравнение на ψ, вычтем аналогичное уравнение относительно ψ, домноженное на φ и проинтегрируем по объёму, ограниченному S.

$$\int\limits_V \left(\psi\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} - \varphi\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} - \psi\Delta\varphi + \varphi\Delta\psi\right) dV$$

Теорема Грина:

$$\int\limits_V (\varphi\Delta\psi - \psi\Delta\varphi) dV = \oint\limits_S \left(\varphi\frac{\partial\psi}{\partial n} - \psi\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right) dV$$

2 Геометрия

2.1 Одномерный случай

Евклидова геометрия основана на понятии **наложение**. В ней утверждается, что две фигуры (два тела) равны, если их можно движением наложить одну на другую, при этом если совпадут точки границ фигур (тел), то считается, что совпали и все внутренние точки. При движении фигуры не меняются, длины отрезков и углы сохраняются. Это очень сильное утверждение.

На рисунке 2.1 приведена прямая, на которой выбраны две точки — задан отрезок AB, затем на отрезке AB, выбран единичный отрезок OE. Стандартный способ измерить длину отрезка AB (по Евклиду), это отложить от конца A (или B) n отрезков OE, таких что все эти n отрезков, лежат внутри отрезка AB, затем разделить отрезок OE на 10 частей, если нам нужна длина в десятичной системе счисления, и замостить n_1 такими отрезками оставшуюся часть, снова разделить отрезок теперь уже на 100 частей и так далее. В результате получится число:

$$\overline{n,n_1n_2\ldots}.$$

Это и есть длина отрезка. Таким образом для измерения длины нам потребовались две нетривиальные операции. Первая операция состояла в том, чтобы отложить отрезок равный данному, вторая операция состояла в том, чтобы разделить отрезок на n частей.

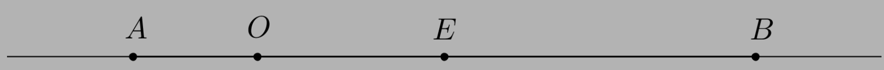


Рисунок 2.1 — Измерение длины

Выберем на прямой произвольную точку O, и сопоставим ей число 0. Выберем на прямой точку E и сопоставим ей число 1. С помощью понятия длины поставим в соответствие каждой точке B справа от O положительное действительное число a такое что $a = OB$ по Евклиду, каждой точке A слева от O, сопоставим отрицательное действительное число $a = -OA$. Полученную таким способом координатную сетку будем называть евклидовой. Над евклидовой координатной сеткой можно задать общее понятие расстояния между двумя точками A, B. Пусть координаты этих точек x_A, x_B, $x_A \leqslant x_B$. Расстояние между двумя точками есть функция двух этих координат, удовлетворяющая следующим свойствам:

1. $d(x_A, x_B) \geqslant 0$ причём равенство возможно только тогда, когда точки A и B совпадают;
2. $d(x_A, x_B) = d(x_B, x_A)$;
3. $d(x_A, x_C) + d(x_C, x_B) = d(x_A, x_B)$, где $C \in AB$.

В силу 1 свойства:

$$\lim_{\Delta x \to 0} d(x, x + \Delta x) = 0.$$

Поэтому, если $d(x_A, x_B)$ — непрерывная функция,

$$d(x, x + \Delta x) = \sqrt{g(x)}(\Delta x)^s.$$

Далее в силу 2 свойства:

$$d(x, x + \Delta x) = \sqrt{g(x)}|\Delta x|^s, \quad g(x) > 0,$$

s — некоторое число, характеризующее данное пространство. В силу 3 свойства, если на промежутке выделить точки $x_1, x_2, \ldots x_n$, такие что

$$x_A = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = x_B,$$

получим

$$d(x_A, x_B) = \lim_{\substack{\max \Delta x_i = \max\{x_{i+1} - x_i\} \to 0 \\ n \to \infty}} \sum_{i=0}^{n-1} d(x_i, x_{i+1}) = \lim_{\substack{\max \Delta x_i \to 0 \\ n \to \infty}} \sum_{i=0}^{n-1} \sqrt{g(x_i)}|\Delta x_i|^s.$$

Если все $\Delta x_i = \Delta x = (x_B - x_A)/n$, то

$$d(x_A, x_B) = \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ n \to \infty}} (\Delta x)^s \sum_{i=0}^{n-1} \sqrt{g(x_i)};$$

$$\lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ n \to \infty}} (\Delta x)^s n \min \sqrt{g(x_i)} \leqslant d(x_A, x_B) \leqslant \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ n \to \infty}} (\Delta x)^s n \max \sqrt{g(x_i)}$$

$$\lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ n \to \infty}} (\Delta x)^{s-1}(x_B - x_A) \min \sqrt{g(x_i)} \leqslant d(x_A, x_B) \leqslant$$
$$\leqslant \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ n \to \infty}} (\Delta x)^{s-1}(x_B - x_A) \max \sqrt{g(x_i)}$$

Отсюда следует, что:

$$d(x_A, x_B) = \begin{cases} 0, & s > 1; \\ \int\limits_{x_A}^{x_B} \sqrt{g(x)}dx, & s = 1; \\ \infty, & s < 1. \end{cases}$$

Интерес представляет один единственный случай:

$$d(x_A, x_B) = \int\limits_{x_A}^{x_B} \sqrt{g(x)}dx.$$

Для этого случая существует достаточно простой эквивалент. Выйдем за пределы одномерного случая и рассмотрим произвольную кривую $f(x)$ на отрезке $[x_A, x_B]$ (Рисунок 2.2). Длина такой кривой:

$$d(x_A, x_B) = \int\limits_{x_A}^{x_B} \sqrt{1 + f'^2}dx.$$

Для кривой существует понятие кривизны. В двух близких точках кривой M и N, можно построить касательные:

$$M : y = f'(x_M)(x - x_M) + f(x_M);$$
$$N : y = f'(x_N)(x - x_N) + f(x_N).$$

Отсюда следует, что прямые нормальные к касательным будут задаваться уравнениями:

$$M : y - f(x_M) + \frac{1}{f'(x_M)}(x - x_M) = 0;$$
$$N : y - f(x_N) + \frac{1}{f'(x_N)}(x - x_N) = 0.$$

По точке пересечения двух нормалей (x_O, y_O) определённой при стремлении $x_N \to x_M$ и точке $(x_M, f(x_M))$, можно построить окружность

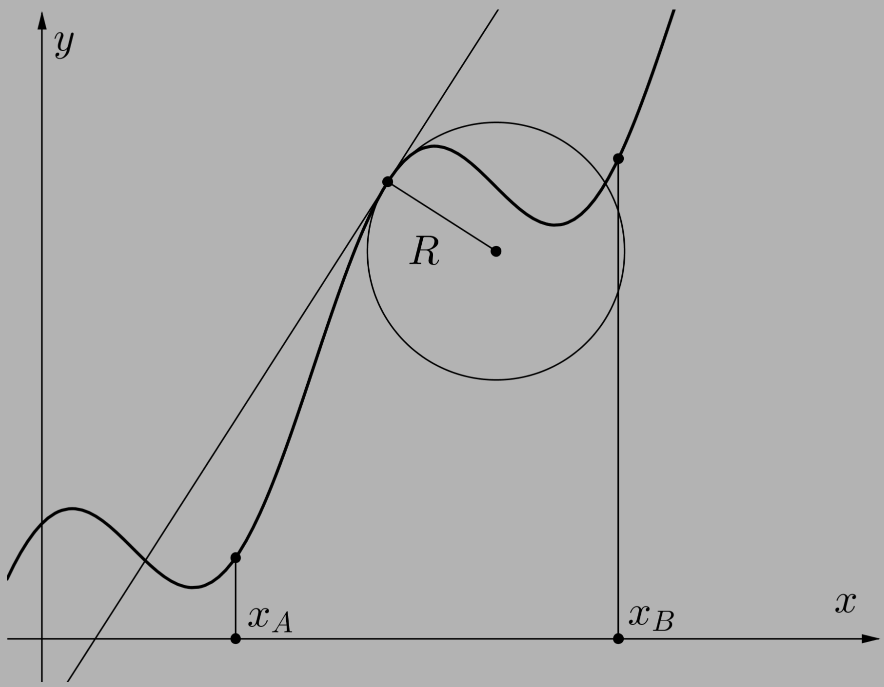


Рисунок 2.2 — Эквивалент одномерного определения длины

радиуса:

$$R = \sqrt{(y_O - y_M)^2 + (x_O - x_M)^2} = |x_O - x_M|\sqrt{\frac{1}{(f'(x_M))^2} + 1}.$$

Находим x_O:

$$f(x_N) - f(x_M) + \left(\frac{1}{f'(x_M)} - \frac{1}{f'(x_N)}\right) x_O - \left(\frac{x_M}{f'(x_M)} - \frac{x_N}{f'(x_N)}\right) = 0;$$

$$x_O = \lim_{x_N \to x_M} \frac{\left(\dfrac{x_M}{f'(x_M)} - \dfrac{x_N}{f'(x_N)}\right) - (f(x_N) - f(x_M))}{\left(\dfrac{1}{f'(x_M)} - \dfrac{1}{f'(x_N)}\right)} =$$

$$= (f'(x_M))^2 \frac{\dfrac{x_M f''(x_M)(x_N - x_M) - (x_N - x_M) f'(x_M)}{(f'(x_M))^2} - f'(x_M)(x_N - x_M)}{f''(x_M)(x_N - x_M)} =$$

$$= x_M - \frac{f'(x_M)(1 + (f'(x_M))^2)}{f''(x_M)}.$$

Отсюда следует, что радиус кривизны

$$R = \frac{(1 + f'^2)^{3/2}}{f''}.$$

Кривизна:
$$\chi = \frac{1}{R} = \frac{f''}{(1+f'^2)^{3/2}}.$$

Чтобы ввести аналогичное понятие для пространства, с метрикой $g(x)$, примем по аналогии:
$$g(x) = 1 + f'^2.$$

Тогда
$$\chi = \frac{g'}{2g^{3/2}\sqrt{g-1}}$$

2.2 Тождества векторной алгебры и анализа

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}) = \boldsymbol{b}(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c}) - \boldsymbol{c}(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}) \\
&\operatorname{rot} \operatorname{grad} u = 0 \\
&\operatorname{div} \operatorname{rot} \boldsymbol{a} = 0 \\
&\operatorname{grad} uv = u \operatorname{grad} v + v \operatorname{grad} u \\
&\operatorname{div} u\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a} \cdot \operatorname{grad} u + u \operatorname{div} \boldsymbol{a} \\
&\operatorname{rot} u\boldsymbol{a} = u \operatorname{rot} \boldsymbol{a} + \operatorname{grad} u \times \boldsymbol{a} \\
&\operatorname{rot} \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = \boldsymbol{a} \operatorname{div} \boldsymbol{b} - \boldsymbol{b} \operatorname{div} \boldsymbol{a} \\
&\operatorname{grad} \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = \nabla_a(\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{a}) + \nabla_b(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}) = \\
&\qquad\qquad = \boldsymbol{b} \times \operatorname{rot} \boldsymbol{a} + (\boldsymbol{b} \cdot \nabla)\boldsymbol{a} + \boldsymbol{a} \times \operatorname{rot} \boldsymbol{b} + (\boldsymbol{a} \cdot \nabla)\boldsymbol{b} \\
&\operatorname{div} \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = \boldsymbol{b} \cdot \operatorname{rot} \boldsymbol{a} - \boldsymbol{a} \cdot \operatorname{rot} \boldsymbol{b}
\end{aligned}$$

3 Четырёхмерное пространство-время

Аналогом трёхмерной точки (x, y, z) в четырёхмерном пространстве-времени является совокупность величин:

$$(ct, x, y, z),$$

где t, (x, y, z), время и координаты точки в трёхмерном пространстве, c — некоторая скорость, сейчас в качестве этой скорости выступает скорость электромагнитных волн (света) в вакууме и пока не обнаружено отклонений от этого правила. Каждой точке в трёхмерном пространстве соответствует радиус-вектор. Вектор в четырёхмерном пространстве также может быть выражен в виде совокупности чисел, только теперь четырёх. В дальнейшем контравариантным 4-вектором будем называть следующий вектор:

$$x^i = \begin{bmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{bmatrix} = (ct, x, y, z).$$

Метрический тензор:

$$g = \{g_{ij}\} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Пока пространство-время как легко видеть — плоское (кривизна определяется через производные, а производные от константы 0).

Свойства метрического тензора:

1. $g_{ij} = g^{ij}$.

2. $g_{ij} = g_{ji}$.

3. $g_{jk}g^{ki} = \delta^i_j$, где δ^i_j — символ Кронекера. Здесь и далее применяется правило суммирования Эйнштейна, согласно которому если в выражении встречаются повторяющиеся индексы, то по ним ведётся суммирование.

Ковариантный вектор определяется следующим образом:

$$x_i = g_{ij}x^j = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ct \\ -x \\ -y \\ -z \end{bmatrix} = (ct, -x, -y, -z).$$

Также следует понимать, что скобки в данном случае не означают матрицы. Напоминаю, что в стандартной матричной алгебре вектор — это матрица-столбец. $(ct, -x, -y, -z)$ — просто обозначение вектора, чтобы столбец не писать, но при применении матриц следует помнить, что это столбцы.

Обобщённое линейное преобразование запишется в виде:

$$\xi^i = \gamma^i_j x^j.$$

Тоже самое в матрицах:

$$\xi = \begin{bmatrix} \xi^0 \\ \xi^1 \\ \xi^2 \\ \xi^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma^0_0 & \gamma^0_1 & \gamma^0_2 & \gamma^0_3 \\ \gamma^1_0 & \gamma^1_1 & \gamma^1_2 & \gamma^1_3 \\ \gamma^2_0 & \gamma^2_1 & \gamma^2_2 & \gamma^2_3 \\ \gamma^3_0 & \gamma^3_1 & \gamma^3_2 & \gamma^3_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{bmatrix}.$$

Матрица

$$\gamma = \begin{bmatrix} \gamma^1_1 & \gamma^1_2 & \gamma^1_3 \\ \gamma^2_1 & \gamma^2_2 & \gamma^2_3 \\ \gamma^3_1 & \gamma^3_2 & \gamma^3_3 \end{bmatrix}$$

отвечает за поворот и масштабирование координатных осей. Компоненты с нулевыми индексами — за преобразование систем отсчёта, или поворот и масштабирование временной оси. С точки зрения базисных ортов преобразование координат сводится к вращению базиса. Для ковариантных ортов $\boldsymbol{e}_i$ и новых ковариантных ортов $\boldsymbol{\varepsilon}_i$:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_i = \gamma^j_i \boldsymbol{e}_j.$$

Новые и старые орты обладают свойством ортогональности с соответствующими контравариантными ортами:

$$\delta^i_j = \boldsymbol{\varepsilon}^i \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_j = \gamma^{ki}\gamma^p_j \boldsymbol{e}_k \cdot \boldsymbol{e}_p = \gamma^i_k \gamma^p_j \boldsymbol{e}^k \cdot \boldsymbol{e}_p = \gamma^i_k \gamma^p_j \delta_{kp} = \gamma^i_k \gamma^k_j.$$

Отсюда следует одно важное свойство матрицы γ:

$$\gamma^{-1} = \gamma^T.$$

Количество уравнений

4 К принципу наименьшего действия

Результатом и обобщением экспериментов можно считать силу Лоренца и уравнения Максвелла (Закон Гаусса, Фарадея и так далее):

$$\frac{d\boldsymbol{p}}{dt} = q\boldsymbol{E} + q\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}, \tag{4.1}$$

$$\operatorname{div}\boldsymbol{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}, \tag{4.2}$$

$$\operatorname{rot}\boldsymbol{E} = -\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}, \tag{4.3}$$

$$\operatorname{div}\boldsymbol{B} = 0, \tag{4.4}$$

$$\operatorname{rot}\boldsymbol{B} = \mu_0\boldsymbol{j} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t}. \tag{4.5}$$

Из уравнений (4.3) и (4.4) следует, что поля $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{B}$, могут быть выражены через потенциалы — векторный и скалярный:

$$\boldsymbol{E} = -\frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial t} - \operatorname{grad}\varphi, \tag{4.6}$$

$$\boldsymbol{B} = \operatorname{rot}\boldsymbol{A}. \tag{4.7}$$

Потенциалы $\boldsymbol{A}$ и φ определены с точностью до градиента, взятого с обратным знаком, и производной по времени от некоторой функции $f(\boldsymbol{r},t)$. При этом поля $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{B}$ не меняются:

$$\boldsymbol{E} = -\frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial t} - \operatorname{grad}\varphi = -\frac{\partial(\boldsymbol{A}' - \operatorname{grad} f)}{\partial t} - \operatorname{grad}\left(\varphi' - \frac{\partial f}{\partial t}\right) =$$

$$= -\frac{\partial\boldsymbol{A}'}{\partial t} - \operatorname{grad}\varphi';$$

$$\boldsymbol{B} = \operatorname{rot}\boldsymbol{A} = \operatorname{rot}\boldsymbol{A}' - \operatorname{rot}\operatorname{grad} f = \operatorname{rot}\boldsymbol{A}'.$$

Преобразования

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}' - \operatorname{grad} f$$

$$\varphi = \varphi' - \frac{\partial f}{\partial t}$$

называют калибровочными, а процесс выбора потенциалов калибровкой. Обычно используют две калибровки. Калибровка Кулона:

$$\operatorname{div}\boldsymbol{A} = 0.$$

Калибровка Лоренца:
$$\operatorname{div}\boldsymbol{A}+\frac{1}{c^2}\frac{\partial\varphi}{\partial t}=0.$$
При этом потенциалы также оказываются определены с точностью до градиента и производной, но на функцию f появляется дополнительное ограничение. В случае калибровки Кулона:
$$\operatorname{div}\operatorname{grad}f=\Delta f=0.$$
В случае калибровки Лоренца:
$$\operatorname{div}\operatorname{grad}f-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}=\Box f=0.$$

4.1 Функция Лагранжа для частицы в электромагнитном поле

Перейдём от силы Лоренца к принципу наименьшего действия. Для этого перейдём к потенциалам во втором законе Ньютона
$$\frac{d\boldsymbol{p}}{dt}=q\boldsymbol{E}+q\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}=-q\frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial t}-q\operatorname{grad}\varphi+q\boldsymbol{v}\times\operatorname{rot}\boldsymbol{A}.$$
и воспользуемся тождеством
$$\begin{aligned}\operatorname{grad}\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}&=\nabla_a(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a})+\nabla_b(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})=\\&=\boldsymbol{b}\times\operatorname{rot}\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}\cdot\nabla)\boldsymbol{a}+\boldsymbol{a}\times\operatorname{rot}\boldsymbol{b}+(\boldsymbol{a}\cdot\nabla)\boldsymbol{b}.\end{aligned}$$
Из него следует, так как $\boldsymbol{v}$ не зависит от $\boldsymbol{r}$:
$$\boldsymbol{v}\times\operatorname{rot}\boldsymbol{A}=\operatorname{grad}\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{A}-(\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{A}.$$
Тогда
$$\begin{aligned}\frac{d\boldsymbol{p}}{dt}&=-q\frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial t}-q(\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{A}-q\operatorname{grad}\varphi+q\operatorname{grad}\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{A}=\\&=-q\frac{d\boldsymbol{A}}{dt}-q\operatorname{grad}\left(\varphi-\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{A}\right);\\\frac{d\boldsymbol{p}+q\boldsymbol{A}}{dt}&=-q\operatorname{grad}\left(\varphi-\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{A}\right).\end{aligned}$$
Вспомним уравнения Лагранжа:
$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\boldsymbol{v}}-\frac{\partial L}{\partial\boldsymbol{r}}=0.$$

и получим дополнительное соотношение:

$$\int \boldsymbol{p} \cdot d\boldsymbol{v} = \int \frac{m\,dv^2}{2\sqrt{1 - v^2/c^2}} = -mc^2\sqrt{1 - v^2/c^2}.$$

В результате

$$L = -mc^2\sqrt{1 - v^2/c^2} - q\varphi + q\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{A}.$$

4.2 Закон сохранения энергии

Рассмотрим заряженную среду с плотностью заряда ρ. Для импульса $\boldsymbol{p}$ элемента объёма такой среды:

$$\frac{d\boldsymbol{p}}{dt} = \int\limits_V (\rho\boldsymbol{E} + \rho\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}) dV.$$

Домножим левую и правую части скалярно на $\boldsymbol{v}$ и будем полагать, что объём мал(такой что в пределах этого объёма скорость $\boldsymbol{v}$ можно считать постоянной и она может быть внесена под интеграл). В результате:

$$\boldsymbol{v} \cdot \frac{d\boldsymbol{p}}{dt} = \int\limits_V \rho\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{E} dV.$$

Но

$$\rho\boldsymbol{v} = \boldsymbol{j}.$$

С учётом уравнений Максвелла (4.2-4.5) и соотношения

$$dW = d\frac{mc^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \boldsymbol{v}d\boldsymbol{p}$$

получим

$$\frac{dW}{dt} = \frac{1}{\mu_0}\int\limits_V \left(\operatorname{rot}\boldsymbol{B} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}\right) \cdot \boldsymbol{E} dV = \frac{1}{\mu_0}\int\limits_V \left(\operatorname{rot}\boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{E} - \frac{1}{2c^2}\frac{\partial E^2}{\partial t}\right) dV.$$

Воспользуемся соотношением:

$$\operatorname{div}\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = \boldsymbol{b} \cdot \operatorname{rot}\boldsymbol{a} - \boldsymbol{a} \cdot \operatorname{rot}\boldsymbol{b}.$$

Отсюда

$$\frac{dW}{dt} = \frac{1}{\mu_0}\int\limits_V \left(\operatorname{div}\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{B} + \boldsymbol{B} \cdot \operatorname{rot}\boldsymbol{E} - \frac{1}{2c^2}\frac{\partial E^2}{\partial t}\right) dV =$$

$$= \frac{1}{\mu_0} \int\limits_V \left(\operatorname{div} \boldsymbol{E} \times \boldsymbol{B} - \boldsymbol{B} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} - \frac{1}{2c^2} \frac{\partial E^2}{\partial t} \right) dV =$$

$$= \frac{1}{\mu_0} \int\limits_V \left(\operatorname{div} \boldsymbol{E} \times \boldsymbol{B} - \frac{1}{2} \frac{\partial B^2}{\partial t} - \frac{1}{2c^2} \frac{\partial E^2}{\partial t} \right) dV =$$

$$= \frac{1}{\mu_0} \oint\limits_S \boldsymbol{E} \times \boldsymbol{B} \cdot d\boldsymbol{S} - \frac{d}{dt} \int\limits_V \left(\frac{B^2}{2\mu_0} + \frac{\varepsilon_0 E^2}{2} \right) dV.$$

Переносим последний интеграл в левую часть, получаем:

$$\frac{d}{dt} \left(W + \int\limits_V \left(\frac{B^2}{2\mu_0} + \frac{\varepsilon_0 E^2}{2} \right) dV \right) = \frac{1}{\mu_0} \oint\limits_S \boldsymbol{E} \times \boldsymbol{B} \cdot d\boldsymbol{S}$$

Интеграл в правой части, если поля убывают с расстоянием как r^{-2}, равен 0 при стремлении S к бесконечности. Это закон сохранения энергии для системы частицы-поля. Суммарная энергия поля:

$$\int\limits_V \left(\frac{B^2}{2\mu_0} + \frac{\varepsilon_0 E^2}{2} \right) dV.$$

Плотность энергии:

$$w = \frac{B^2}{2\mu_0} + \frac{\varepsilon_0 E^2}{2}.$$

Плотность потока энергии $\boldsymbol{P}$ носит название вектора Умова-Пойнтинга или просто вектора Пойнтинга и показывает какая энергия переносится через единичную площадку в направлении нормали к этой площадке за единицу времени:

$$\boldsymbol{P} = \frac{1}{\mu_0} \boldsymbol{E} \times \boldsymbol{B}.$$

4.3 Закон сохранения импульса

Как и ранее рассмотрим заряженную среду с плотностью заряда ρ:

$$\frac{d\boldsymbol{p}}{dt} = \int\limits_V (\rho \boldsymbol{E} + \rho \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}) dV.$$

С учётом уравнений Максвелла (4.2-4.5):

$$\frac{d\boldsymbol{p}}{dt} = \frac{1}{\mu_0} \int\limits_V \left(\frac{1}{c^2} \boldsymbol{E} \operatorname{div} \boldsymbol{E} + \left(\operatorname{rot} \boldsymbol{B} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} \right) \times \boldsymbol{B} \right) dV =$$

$$= \frac{1}{\mu_0} \int\limits_V \left(\frac{1}{c^2} \boldsymbol{E} \operatorname{div} \boldsymbol{E} + \operatorname{rot} \boldsymbol{B} \times \boldsymbol{B} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial \boldsymbol{E} \times \boldsymbol{B}}{\partial t} + \frac{1}{c^2} \boldsymbol{E} \times \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \right) dV =$$

$$= \frac{1}{\mu_0} \int\limits_V \left(-\frac{1}{c^2} \frac{\partial \boldsymbol{E} \times \boldsymbol{B}}{\partial t} + \frac{1}{c^2} \boldsymbol{E} \operatorname{div} \boldsymbol{E} + \operatorname{rot} \boldsymbol{B} \times \boldsymbol{B} - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{c^2} \boldsymbol{E} \times \operatorname{rot} \boldsymbol{E} + \boldsymbol{B} \operatorname{div} \boldsymbol{B} \right) dV$$

Выпишем градиент от скалярного произведения, например, от $\boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{E} = E^2$:

$$\operatorname{grad} E^2 = \nabla E^2 = 2(\boldsymbol{E} \times \operatorname{rot} \boldsymbol{E} + (\boldsymbol{E} \cdot \nabla) \boldsymbol{E}).$$

Отсюда следует

$$\boldsymbol{E} \operatorname{div} \boldsymbol{E} - \boldsymbol{E} \times \operatorname{rot} \boldsymbol{E} = \frac{1}{2} \nabla E^2 + \boldsymbol{E} \operatorname{div} \boldsymbol{E} + (\boldsymbol{E} \cdot \nabla) \boldsymbol{E} =$$

$$= \frac{1}{2} \frac{\partial E^2}{\partial x_\alpha} + E_\alpha \frac{\partial E_\beta}{\partial x_\beta} + E_\beta \frac{\partial E_\alpha}{\partial x_\beta} = \frac{1}{2} \frac{\partial E^2}{\partial x_\beta} \delta_{\alpha\beta} + \frac{\partial E_\alpha E_\beta}{\partial x_\beta} = \frac{\partial}{\partial x_\beta} \left(\frac{E^2}{2} \delta_{\alpha\beta} + E_\alpha E_\beta \right)$$

Аналогичные соотношения верны для поля $\boldsymbol{B}$. Если ввести тензор натяжений Максвелла:

$$T_{\alpha\beta} = \frac{1}{\mu_0} \left[\left(\frac{1}{c^2} \frac{E^2}{2} + \frac{B^2}{2} \right) \delta_{\alpha\beta} + \frac{1}{c^2} E_\alpha E_\beta + B_\alpha B_\beta \right],$$

то получим уравнения:

$$\frac{d}{dt} \left(\boldsymbol{p} + \int\limits_V \varepsilon_0 \boldsymbol{E} \times \boldsymbol{B} dV \right) = \int\limits_V \frac{\partial T_{\alpha\beta}}{\partial x_\beta} dV = \oint\limits_S T_{\alpha\beta} dS_\beta.$$

Если устремить S к бесконечности, то для полей убывающих с расстоянием по закону r^{-2} интеграл в правой части 0, мы получили закон сохранения импульса. Таким образом импульсом поля является величина:

$$\int\limits_V \varepsilon_0 \boldsymbol{E} \times \boldsymbol{B} dV.$$

Плотность импульса:

$$\boldsymbol{P}_{im} = \varepsilon_0 \boldsymbol{E} \times \boldsymbol{B} = \frac{1}{c^2} \boldsymbol{P}.$$

4.4 Закон сохранения момента импульса

Так как у поля существует импульс, то можно рассмотреть и момент импульса поля. Закон, по которому изменяется момент импульса системы частиц $\boldsymbol{L}$ (относительно центра масс!), определяется через момент силы:

$$\frac{d\boldsymbol{L}}{dt} = \int\limits_V (\rho\boldsymbol{E} + \rho\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}) \times \boldsymbol{r} dV.$$

Ранее мы уже получали выражение для силы теперь просто им воспользуемся:

$$\rho\boldsymbol{E} + \rho\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B} = \varepsilon_0 \frac{\partial \boldsymbol{E} \times \boldsymbol{B}}{\partial t} + \frac{\partial T_{\alpha\beta}}{\partial x_\beta}.$$

Тогда:

$$\frac{d}{dt}\left(\boldsymbol{L} + \int\limits_V \boldsymbol{P}_{im} \times \boldsymbol{r} dV\right) = \int\limits_V \epsilon_{\gamma\alpha\eta} \frac{\partial T_{\alpha\beta}}{\partial x_\beta} x_\eta dV =$$
$$\int\limits_S \epsilon_{\gamma\alpha\eta} T_{\alpha\beta} x_\eta dS_\beta - \int\limits_V \epsilon_{\gamma\alpha\eta} T_{\alpha\beta} \frac{\partial x_\eta}{\partial x_\beta} dV =$$
$$\int\limits_S \epsilon_{\gamma\alpha\eta} T_{\alpha\beta} x_\eta dS_\beta - \int\limits_V \epsilon_{\gamma\alpha\eta} T_{\alpha\beta} \delta_{\eta\beta} dV =$$
$$\int\limits_S \epsilon_{\gamma\alpha\eta} T_{\alpha\beta} x_\eta dS_\beta - \int\limits_V \epsilon_{\gamma\alpha\eta} T_{\alpha\eta} dV$$

Так как $T_{\alpha\eta}$ — симметричный тензор, то:

$$\epsilon_{\gamma\alpha\eta} T_{\alpha\eta} = \frac{1}{2}(\epsilon_{\gamma\alpha\eta} T_{\alpha\eta} + \epsilon_{\gamma\alpha\eta} T_{\eta\alpha}) =$$
$$= [\text{меняем местами во втором слагаемом немые индексы } \eta \text{ и } \alpha] =$$
$$= \frac{1}{2}(\epsilon_{\gamma\alpha\eta} T_{\alpha\eta} + \epsilon_{\gamma\eta\alpha} T_{\alpha\eta}) = \frac{1}{2}(\epsilon_{\gamma\alpha\eta} + \epsilon_{\gamma\eta\alpha}) T_{\alpha\eta} =$$
$$= [\text{учитываем, что } \epsilon_{\gamma\alpha\eta} = -\epsilon_{\gamma\eta\alpha}] =$$
$$= 0.$$

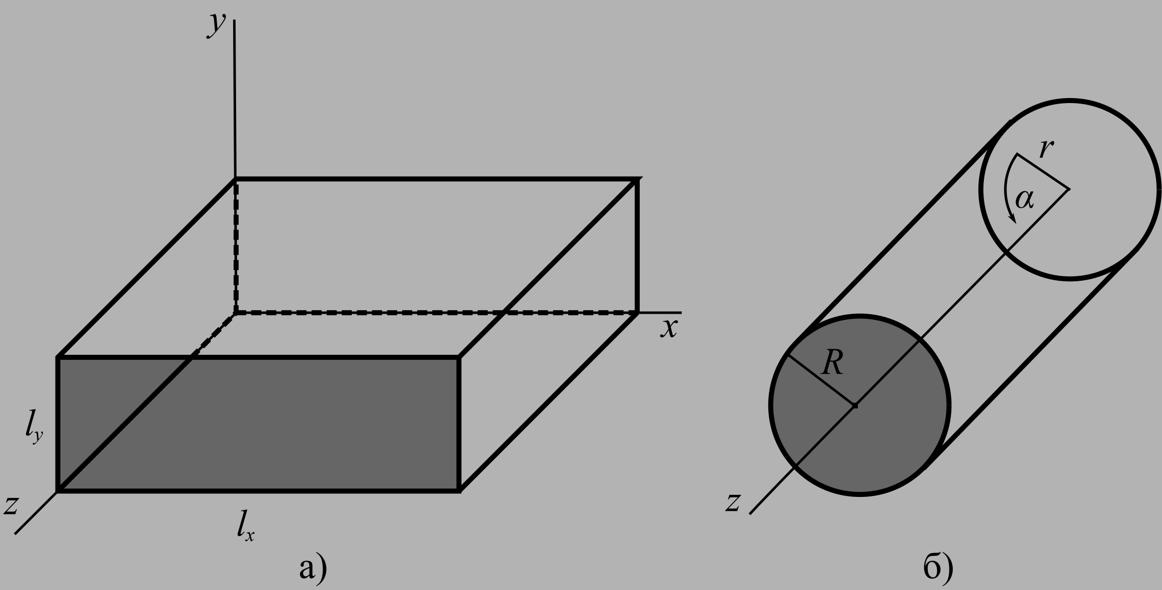
Поэтому

$$\frac{d}{dt}\left(\boldsymbol{L} + \int\limits_V \boldsymbol{P}_{im} \times \boldsymbol{r} dV\right) = \int\limits_S \epsilon_{\gamma\alpha\eta} T_{\alpha\beta} x_\eta dS_\beta$$

Устремляя S к бесконечности, получаем закон сохранения момента импульса системы частицы-поле.

5 Волноводы

Волноводами называют системы поле внутри которых вдоль выделенного направления имеет волновой характер $\sim \exp i(\omega t - kz)$. Типичными представителями таких систем являются прямоугольный и цилиндрический волноводы (Рисунок 5.1).



а) прямоугольный волновод; б) цилиндрический волновод;

Рисунок 5.1 — Прямоугольный и цилиндрический волноводы

Волноводы могут быть изогнутыми, заполненными диэлектриком и вообще любым материалом иметь произвольную переменную форму сечения. Наиболее простой случай — волновод, представляющий собой цилиндрическую поверхность с произвольным сечением в основании. Если в основании прямоугольник, то волновод прямоугольный, круг — цилиндрический.

5.1 Волноводные уравнения

Рассмотрим волновод произвольного сечения. Два орта перпендикулярных к оси z обозначим $\mathbf{e}_n$, $\mathbf{e}_\tau$. Поля пропорциональны $\exp i(\omega t - \beta z)$.

Операция ротора при таких обозначениях:

$$
\operatorname{rot} \boldsymbol{E} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_\tau & \mathbf{e}_n & \mathbf{e}_z \\ \dfrac{\partial}{\partial \tau} & \dfrac{\partial}{\partial n} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ E_\tau & E_n & E_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_\tau & \mathbf{e}_n & \mathbf{e}_z \\ \dfrac{\partial}{\partial \tau} & \dfrac{\partial}{\partial n} & -i\beta \\ E_\tau & E_n & E_z \end{vmatrix}
$$

поэтому уравнения Максвелла для полых волноводов примут вид

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial E_z}{\partial n} + i\beta E_n = -i\omega B_\tau && \frac{\partial B_z}{\partial n} + i\beta B_n = i\frac{\omega}{c^2} E_\tau \\
&-\frac{\partial E_z}{\partial \tau} - i\beta E_\tau = -i\omega B_n && -\frac{\partial B_z}{\partial \tau} - i\beta B_\tau = i\frac{\omega}{c^2} E_n \\
&\frac{\partial E_n}{\partial \tau} - \frac{\partial E_\tau}{\partial n} = -i\omega B_z && \frac{\partial B_n}{\partial \tau} - \frac{\partial B_\tau}{\partial n} = i\frac{\omega}{c^2} E_z \\
&\frac{\partial E_n}{\partial n} + \frac{\partial E_\tau}{\partial \tau} - i\beta E_z = 0 && \frac{\partial B_n}{\partial n} + \frac{\partial B_\tau}{\partial \tau} - i\beta B_z = 0
\end{aligned}
$$

Получим отсюда две подсистемы:

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial E_z}{\partial n} = -i\beta E_n - i\omega B_\tau && \frac{\partial B_z}{\partial n} = i\frac{\omega}{c^2} E_\tau - i\beta B_n \\
&-\frac{\partial B_z}{\partial \tau} = i\frac{\omega}{c^2} E_n + i\beta B_\tau && -\frac{\partial E_z}{\partial \tau} = i\beta E_\tau - i\omega B_n
\end{aligned}
$$

Отсюда следует, что поперечные компоненты поля выражаются через продольные компоненты, поэтому достаточно найти продольные компоненты, чтобы решить задачу. Соотношения для поперечных компонент:

$$
\begin{aligned}
E_\tau &= -i\frac{1}{\gamma^2}\left(\beta\frac{\partial E_z}{\partial \tau} + \omega\frac{\partial B_z}{\partial n}\right) \\
E_n &= -i\frac{1}{\gamma^2}\left(\beta\frac{\partial E_z}{\partial n} - \omega\frac{\partial B_z}{\partial \tau}\right) \\
B_\tau &= i\frac{1}{\gamma^2}\left(\frac{\omega}{c^2}\frac{\partial E_z}{\partial n} - \beta\frac{\partial B_z}{\partial \tau}\right) \\
B_n &= -i\frac{1}{\gamma^2}\left(\frac{\omega}{c^2}\frac{\partial E_z}{\partial \tau} + \beta\frac{\partial B_z}{\partial n}\right)
\end{aligned}
$$

где обозначено $\gamma^2 = \omega^2/c^2 - \beta^2$, γ — поперечное волновое число. Оставшиеся 4 уравнения Максвелла сводятся к двум уравнениям Гельмгольца простой подстановкой только что полученных соотношений для поперечных компонент:

$$\frac{\partial^2 E_z}{\partial \tau^2} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial n^2} + \gamma^2 E_z = 0$$
$$\frac{\partial^2 B_z}{\partial \tau^2} + \frac{\partial^2 B_z}{\partial n^2} + \gamma^2 B_z = 0$$

Эти уравнения и определяют совместно с соотношениями для поперечных компонент поле в волноводе.

5.2 Прямоугольный волновод

В случае прямоугольного волновода $\partial\tau = \partial x$, $\partial n = \partial y$. Уравнения Гельмгольца:

$$\frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial y^2} + \gamma^2 E_z = 0$$
$$\frac{\partial^2 B_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 B_z}{\partial y^2} + \gamma^2 B_z = 0$$

Будем их решать методом разделения переменных. Примем для начала, что $B_z = 0$. В результате для E_z:

$$E_z = (K \sin\gamma_x x + L\cos\gamma_x x)(M\sin\gamma_y y + N\cos\gamma_y y)e^{i(\omega t - \beta z)}$$

Здесь γ_x, γ_y — пока неизвестные переменные, которые можно найти из граничных условий.

6 Принцип наименьшего действия

6.1 Свободная релятивистская частица

Принцип наименьшего действия формулируется всегда таким образом, чтобы действие было инвариантно относительно любых преобразований, и выражает собой тот факт, что движение объектов и тел не зависит от того как наблюдатель движется относительно них или зависит настолько слабо, что этим воздействием можно пренебречь.

Инвариантом относительно преобразований Лоренца (в ОТО вообще относительно произвольных преобразований координат и времени) является интервал:

$$ds^2 = c^2dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 = g_{ij}dx^i dx^j = dx^i dx_i.$$

По этой причине действие следует искать в форме:

$$S(1,2) = \int\limits_1^2 A\,ds,$$

где A — константа, такая, что в нерелятивистском случае подынтегральное выражение переходит в функцию Лагранжа с точностью до константы и множителя dt:

$$Ads = Ac\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}dt = Ac\left(1 - \frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2} + \ldots\right)dt,$$

сравнивая с нерелятивистским выражением

$$\frac{mv^2}{2}dt,$$

получаем

$$A = -mc.$$

Действие для свободной релятивистской частицы:

$$S(1,2) = -\int\limits_1^2 mc\,ds.$$

Вариация от действия по x^i будет связана с вариацией от интервала:

$$\delta\, ds^2 = 2ds\,\delta\, ds = d\,\delta x^i dx_i + d\,\delta x_i dx^i = 2d\,\delta x^i dx_i.$$

Отсюда:

$$\delta\, ds = u_i d\,\delta x^i = d(u_i \delta x^i) - du_i \delta x^i = -du_i \delta x^i.$$

Здесь отброшен полный дифференциал, который после интегрирования будет давать 0. Далее также будут отбрасываться полные дифференциалы.

Уравнения движения свободной релятивистской частицы:

$$mc\frac{du_i}{ds} = 0.$$

То есть свободная релятивистская частица движется с постоянной четырёхскоростью.

6.2 Инварианты взаимодействия частицы с векторным полем и их вариации

Векторное поле A_i действует на частицу. У частицы есть три характеристики x_i — координата, u_i — четырёхскорость, w_i — четырёхускорение. С векторным полем A_i три эти характеристики дают инварианты:

$$A_i(x^j)x^i, A_i(x^j)u^i, A_i(x^j)w^i,$$

но последний инвариант при вариации даст уравнения выше второго порядка и по этой причине его следует отбросить, так как мы полагаем, что движение частицы полностью определяется начальной скоростью и положением частицы, а первый инвариант нарушает представления об однородности пространства. В дополнение к этим инвариантам идут инварианты поля, но пока ограничимся инвариантом

$$S_1 = A_i u^i.$$

Действие будет в виде:

$$S(1,2) = \int\limits_1^2 f(S_1) ds,$$

где $f(S_1)$ — пока неизвестная функция. Вариация от действия сведётся к вариации от инварианта. Найдём её:

$$\delta S_1 = u^k \frac{\partial A_k}{\partial x^i}\delta x^i + A_i \frac{d\delta x^i}{ds} = u^k \frac{\partial A_k}{\partial x^i}\delta x^i + \frac{dA_i \delta x^i}{ds} - \frac{dA_i}{ds}\delta x^i =$$
$$= u^k \left(\frac{\partial A_k}{\partial x^i} - \frac{\partial A_i}{\partial x^k} \right) \delta x^i = F_{ik} u^k.$$

Из силы Лоренца следует, что

$$\frac{\partial f(S_1)}{\partial S_1} = q.$$

Действие для частицы в поле имеет вид:

$$\int -mc\, ds + qA_i\, dx^i.$$

Уравнения движения в четырёхмерном виде:

$$mc \frac{du_i}{ds} = F_{ik} u^k.$$

6.3 Инварианты поля и уравнения для полей

Инварианты поля такие, что при вариации по полю продолжает работать принцип суперпозиции, то есть A_i входит в инварианты максимум во второй степени, и такие, что поле полностью определяется своими значениями и производными на границе(то есть уравнения поля должны быть не выше второго порядка, а в инварианты могут входить только производные первого порядка от поля):

$$A_i(x^j) A^i(x^k), \frac{\partial A^i}{\partial x^i}, \frac{\partial A^i}{\partial x^j}\frac{\partial A^j}{\partial x^i}.$$

Второй инвариант при калибровке Лоренца равен нулю. Последний инвариант эквивалентен инвариантам:

$$F_{ik}F^{ki}, \tilde{F}_{ik}\tilde{F}^{ki}.$$

Поле — протяжённая система, поэтому действие поля должно иметь вид:

$$\int f(inv) d^4 x.$$