Линейная алгебра. 1 октября 2015.

1 Линейные пространства

Определение

Множество L называется линейным пространством, а его элементы - векторами линейного пространства, если на этом множестве заданы:

1. Закон сложения
$$\bar{X}, \bar{Y} \in L \rightarrow \bar{X} + \bar{Y} \in L$$
2. Закон умножения вектора на число
$$\bar{X} \in L, \lambda \rightarrow \lambda \bar{X} \in L$$
3. $\forall \bar{X}, \bar{Y}, \bar{Z} \in L, \forall \alpha, \beta$ выполняются аксиомы:
   а) Свойство коммутативности: $\bar{X} + \bar{Y} = \bar{Y} + \bar{X}$
   б) Свойство ассоциативности: $(\bar{X} + \bar{Y}) + \bar{Z} = \bar{X} + (\bar{Y} + \bar{Z})$
   в) Свойство дистрибутивности: $\alpha(\bar{X} + \bar{Y}) = \alpha \bar{X} + \alpha \bar{Y}$
   г) $(\alpha + \beta)\bar{X} = \alpha \bar{X} + \beta \bar{Y}$
   д) $\alpha(\beta \bar{X}) = (\alpha\beta)\bar{X}$
   е) $\forall x \in L \quad \bar{x} + 0 = \bar{x}$
   ё) $\bar{x} + (-\bar{x}) = 0$
   ж) $\bar{x} \cdot 1 = \bar{x}$

1.1 Базис и размерность линейного пространства

Определение

Базисом в линейном пространстве L называют **упорядоченную конечную** систему векторов, если она линейно независима и любой другой вектор из L есть линейная комбинация векторов базиса, а коэффициент этой линейной комбинации есть компоненты вектора по базису.

$$\bar{\varepsilon} = (\bar{e_1}, \ldots, \bar{e_n}) \text{ - базис}$$

$$\bar{X} = x_1\bar{e_1} + \ldots + x_n\bar{e_n} = \sum_{i=1}^{n} x_i \bar{e_i} =$$

$$= \begin{pmatrix} \bar{e_1} & \ldots & \bar{e_n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \bar{\varepsilon}\bar{X} \text{ - разложение по базису}$$

Следствие 1

Координаты столбцов суммы векторов равен сумме их координатных столбцов, и координаты столбцов произведения вектора на число равен произведению координатных столбцов на это число.

Следствие 2

Вектора линейно зависимы тогда и только тогда, когда зависимы координатные столбцы.

Теорема "О базисе"

Если в ЛП L существует $\bar{\varepsilon}$ из n векторов, то любой другой вектор $\bar{\varepsilon}$ в этом ЛП состоит из того же числа векторов.

Определение

ЛП, в котором $\exists \bar{\varepsilon}$ из n векторов, называется n-мерным, а само число n - размерностью ЛП - L^n.

Следствие 1

В n-мерном ЛП каждая конечная упорядоченная система из n линейно независимых векторов называется *базисом.*

Следствие 2

В n-мерном ЛП каждую упорядоченную линейно-независимую систему из $k < n$ векторов можно дополнить до базиса.

Определение

Непустое множество векторов в ЛП L^n называется подпространством, $L^k (k < n)$, если выполняются условия:

1. сумма любых векторов из L^k также принадлежит L^n
2. произведения любых векторов из L^k также принадлежит L^n

Теорема

Если в ЛП задан базис, то координаты вектора в нем определены однозначно.

Доказательство

пусть $\bar{X} = \sum_{i=1}^{n} x_i \bar{e}_i, \quad \bar{X} = \sum_{i=1}^{n} x_i' \bar{e}_i,$

$\bar{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad \bar{X} = \begin{pmatrix} x_1' \\ \vdots \\ x_n' \end{pmatrix}$, тогда:

$$\bar{X} - \bar{X} = \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_i') \bar{e}_i = 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x_i - x_i' = 0 \ (i = \overline{1;n}), x_i = x_i' \ (i = \overline{1;n})$$

ч.т.д.

1.2 Линейное отображение и линейные преобразования ЛП

Определение

Отображением A ЛП L в L' называется закон, по которому $\forall \bar{x} \in L$ сопоставляется $\bar{x} \in L'$,

$$\boxed{A : L \to L'}$$

при этом получившийся образ называется $A\bar{x}$.

Определение

Отображение пространства на себя называется преобразованием.

Определение

$A : L \to L'$ называется линейным, если $\forall \bar{X}, \bar{Y} \in L$ и $\forall \lambda$ выполняются:

1. $A(\bar{X} + \bar{Y}) = A\bar{X} + A\bar{Y}$
2. $A(\lambda \bar{X}) = \lambda A \bar{X}$

$$A\bar{X} = \bar{X}' : \begin{cases} x_1' = a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n' = a_{n1}x_1 + \ldots + a_{nn}x_n \end{cases} \qquad (1)$$

$A = \begin{pmatrix} a_{11} & & \\ & \ddots & \\ & & a_{nn} \end{pmatrix}$ - матрица отображения

1.3 Действия над преобразованием

1. Суммой линейных преобразований $\bar{Y} = A\bar{X}$ и $\bar{Y} = B\bar{X}$ называется $\bar{Y} = (A + B)\bar{X}$
2. Произведение $\bar{Y} = A\bar{X}$ и $\bar{Y} = B\bar{X}$ называется последовательное выполнение этих преобразований $\bar{Y} = (BA)\bar{X}$

Определение

Обратное отображение обозначается, как A^{-1}

$$\boxed{A^{-1}(A\bar{X}) = \bar{X}}$$

Определение

Отображение с I называется тождественным, при этом:

$$x_1' = x_1$$
$$\ldots\ldots$$
$$x_n' = x_n$$

Определение

Взаимно-однозныачное линейное отображение называется *афинным*, если оно задано системой (1), и матрица этого отображения является невырожденной.

2 Системы линейных уравнений (СЛУ)

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \qquad (2)$$

Теорема "Правило Крамера"

Если есть система (2), в случае, когда $\det A \neq 0$, решение находится по формуле:

$$x_i = \frac{\Delta_i}{\Delta}, \ (i = \overline{1;n})$$

Доказательство

$$(2) \to AX = B \to X = A^{-1}B, \quad A^{-1} = \frac{1}{\det A}A^*$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} A_{11}b_1 + A_{22}b_2 + \dots + A_{1n}b_n \\ A_{21}b_1 + A_{22}b_2 + \dots + A_{2n}b_n \\ \dots \\ A_{n1}b_1 + A_{n2}b_2 + \dots + A_{nn}b_n \end{pmatrix} = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} \Delta_1 \\ \Delta_2 \\ \vdots \\ \Delta_n \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \dots, x_n = \frac{\Delta_n}{\Delta}$$

ч.т.д.

Теорема

Пусть A - матрица системы из n уравнений. Если $\det A = 0$, то система либо не имеет решений, либо имеет бесконечное множество решений (если $\Delta_i = 0$ $(i = \overline{1; n})$)