Линейная алгебра. 1 октября 2015.

1 Линейные пространства

Определение

Множество L называется линейным пространством, а его элементы - векторами линейного пространства, если на этом множестве заданы:

1. Закон сложения
$$\bar{X}, \bar{Y} \in L \to \bar{X} + \bar{Y} \in L$$
2. Закон умножения вектора на число
$$\bar{X} \in L, \lambda \to \lambda\bar{X} \in L$$
3. $\forall \bar{X}, \bar{Y}, \bar{Z} \in L, \forall \alpha, \beta$ выполняются аксиомы:
   а) Свойство коммутативности: $\bar{X} + \bar{Y} = \bar{Y} + \bar{X}$
   б) Свойство ассоциативности: $(\bar{X} + \bar{Y}) + \bar{Z} = \bar{X} + (\bar{Y} + \bar{Z})$
   в) Свойство дистрибутивности: $\alpha(\bar{X} + \bar{Y}) = \alpha\bar{X} + \alpha\bar{Y}$
   г) $(\alpha + \beta)\bar{X} = \alpha\bar{X} + \beta\bar{Y}$
   д) $\alpha(\beta\bar{X}) = (\alpha\beta)\bar{X}$
   е) $\forall x \in L \quad \bar{x} + 0 = \bar{x}$
   ё) $\bar{x} + (-\bar{x}) = 0$
   ж) $\bar{x} \cdot 1 = \bar{x}$

1.1 Базис и размерность линейного пространства

Определение

Базисом в линейном пространстве L называют **упорядоченную конечную** систему векторов, если она линейно независима и любой другой вектор из L есть линейная комбинация векторов базиса, а коэффициент этой линейной комбинации есть компоненты вектора по базису.

$$\bar{\varepsilon} = (\bar{e_1}, \dots, \bar{e_n}) \text{ - базис}$$

$$\bar{X} = x_1\bar{e_1} + \dots + x_n\bar{e_n} = \sum_{i=1}^{n} x_i\bar{e_i} =$$

$$= \begin{pmatrix} \bar{e_1} & \dots & \bar{e_n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \bar{\varepsilon}\bar{X} \text{ - разложение по базису}$$

Следствие 1

Координаты столбцов суммы векторов равен сумме их координатных столбцов, и координаты столбцов произведения вектора на число равен произведению координатных столбцов на это число.

Следствие 2

Вектора линейно зависимы тогда и только тогда, когда зависимы координатные столбцы.

Теорема "О базисе"

Если в ЛП L существует $\bar{\varepsilon}$ из n векторов, то любой другой вектор $\bar{\varepsilon}$ в этом ЛП состоит из того же числа векторов.

Определение

ЛП, в котором $\exists\bar{\varepsilon}$ из n векторов, называется n-мерным, а само число n - размерностью ЛП - L^n.

Следствие 1

В n-мерном ЛП каждая конечная упорядоченная система из n линейно независимых векторов называется *базисом.*

Следствие 2

В n-мерном ЛП каждую упорядоченную линейно-независимую систему из $k < n$ векторов можно дополнить до базиса.

Определение

Непустое множество векторов в ЛП L^n называется подпространством, $L^k(k<n)$, если выполняются условия:

1. сумма любых векторов из L^k также принадлежит L^n
2. произведения любых векторов из L^k также принадлежит L^n

Теорема

Если в ЛП задан базис, то координаты вектора в нем определены однозначно.

Доказательство

пусть $\bar{X}=\sum_{i=1}^{n} x_i\bar{e}_i, \quad \bar{X}=\sum_{i=1}^{n} x_i'\bar{e}_i,$

$\bar{X}=\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad \bar{X}=\begin{pmatrix} x_1' \\ \vdots \\ x_n' \end{pmatrix}$, тогда:

$$\bar{X}-\bar{X}=\sum_{i=1}^{n}(x_i-x_i')\bar{e}_i=0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x_i-x_i'=0\ (i=\overline{1;n}), x_i=x_i'\ (i=\overline{1;n})$$

ч.т.д.

1.2 Линейное отображение и линейные преобразования ЛП

Определение

Отображением A ЛП L в L' называется закон, по которому $\forall\bar{x}\in L$ сопоставляется $\bar{x}\in L'$,

$$\boxed{A: L\to L'}$$

при этом получившийся образ называется $A\bar{x}$.

Определение

Отображение пространства на себя называется преобразованием.

Определение

$A:L\to L'$ называется линейным, если $\forall\bar{X},\bar{Y}\in L$ и $\forall\lambda$ выполняются:

1. $A(\bar{X}+\bar{Y})=A\bar{X}+A\bar{Y}$
2. $A(\lambda\bar{X})=\lambda A\bar{X}$

$$A\bar{X}=\bar{X}': \begin{cases} x_1'=a_{11}x_1+\ldots+a_{1n}x_n \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n'=a_{n1}x_1+\ldots+a_{nn}x_n \end{cases} \tag{1}$$

$A=\begin{pmatrix} a_{11} & & \\ & \ddots & \\ & & a_{nn} \end{pmatrix}$ - матрица отображения

1.3 Действия над преобразованием

1. Суммой линейных преобразований $\bar{Y}=A\bar{X}$ и $\bar{Y}=B\bar{X}$ называется $\bar{Y}=(A+B)\bar{X}$
2. Произведение $\bar{Y}=A\bar{X}$ и $\bar{Y}=B\bar{X}$ называется последовательное выполнение этих преобразований $\bar{Y}=(BA)\bar{X}$

Определение

Обратное отображение обозначается, как A^{-1}

$$\boxed{A^{-1}(A\bar{X})=\bar{X}}$$

Определение

Отображение с I называется тождественным, при этом:

$$x_1'=x_1$$
$$\ldots\ldots\ldots$$
$$x_n'=x_n$$

Определение

Взаимно-однозныачное линейное отображение называется *афинным*, если оно задано системой (1), и матрица этого отображения является невырожденной.

2 Системы линейных уравнений (СЛУ)

$$\begin{cases} a_{11}x_1+\ldots+a_{1n}x_n=b_1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1+\ldots+a_{nn}x_n=b_n \end{cases} \tag{2}$$