

# Математический анализ.

16 сентября 2015

## 1 Замечательные пределы

### 1.1 Первый замечательный предел

Утверждение 1

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

Утверждение 2

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x} = 1$$
$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} x}{x} = 1$$

Пример 1

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{\cos x} \frac{\sin x}{x} \right) = 1$$

Пример 2

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{\operatorname{tg} 3x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin 2x}{x \operatorname{tg} 3x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left( 2 \frac{\sin 2x}{2x} \frac{1}{3} \frac{3x}{\operatorname{tg} 3x} \right) = \frac{2}{3}$$

### 1.2 Второй замечательный предел

Утверждение 1

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{1}{x} \right)^x = \lim_{x \rightarrow 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = e$$

Пример 1

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x+3}{x-1} \right)^{x-1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( 1 - 1 + \frac{x+3}{x-1} \right)^{x-1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \underbrace{\left( 1 + \frac{4}{x-1} \right)^{\frac{x-1}{4}}}_e \right)^4 = e^4$$

Утверждение 2

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x)^{g(x)} = e^{\lim_{x \rightarrow a} (f(x)-1)g(x)}$$

## 2 Бесконечно малые функции

Определение

$\alpha(x)$  называется бесконечно малой при  $x \rightarrow a$ , если  $\lim_{x \rightarrow a} \alpha(x) = 0$

$A(x)$  называется бесконечно большой при  $x \rightarrow a$ , если  $\lim_{x \rightarrow a} \alpha(x) = \infty$

## 2.1 Сравнение бесконечно малых функций

Пусть  $\alpha(x)$  и  $\beta(x)$  - бесконечно малые при  $x \rightarrow a$ , тогда:

**Определение**

$\alpha(x)$  называется бесконечно малой более высокого порядка по сравнению с  $\beta(x)$ , если

$$\exists \lim_{x \rightarrow a} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 0 \Rightarrow \alpha(x) = \bar{o}\beta(x)$$

**Определение**

$\alpha(x)$  называется бесконечно малой более низкого порядка по сравнению с  $\beta(x)$ , если

$$\exists \lim_{x \rightarrow a} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \infty \Rightarrow \beta(x) = \bar{o}\alpha(x)$$

**Определение**

$\alpha(x)$  и  $\beta(x)$  называются бесконечно малыми одного порядка, если

$$\exists \lim_{x \rightarrow a} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = A, \begin{cases} A \neq 0 \\ A \neq \infty \end{cases} \Rightarrow \alpha(x) = \underline{O}\beta(x)$$

**Определение**

$\alpha(x)$  и  $\beta(x)$  называются эквивалентными бесконечно малыми, если

$$\exists \lim_{x \rightarrow a} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1 \Rightarrow \alpha(x) \sim \beta(x)$$

### 2.1.1 Эквивалентные бесконечно малые функции

Если  $\alpha(x)$  - бесконечно малая

$$\begin{array}{ll} \sin \alpha(x) \sim \alpha(x) & \operatorname{tg} \alpha(x) \sim \alpha(x) \\ \arcsin \alpha(x) \sim \alpha(x) & \operatorname{arctg} \alpha(x) \sim \alpha(x) \\ \ln(1 + \alpha(x)) \sim \alpha(x) & e^{\alpha(x)} - 1 \sim \alpha(x) \\ b^{\alpha(x)} - 1 \sim \alpha(x) \ln b & (1 + \alpha(x))^p \sim 1 + p\alpha(x) \end{array}$$