Линейная алгебра. Лекция. 3 сентября 2015.

1 Основные определения

A, B, C - матрицы
a, b, c - элементы матрицы

$$A_{m\times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

a_{ij} - элемент матрицы
$i = \overline{1,m}$ - номер строки
$j = \overline{1,n}$ - номер столбца

Определение
Пусть $i \in I$, $j \in J$, $I \times J$ - множество всех пар (i,j), тогда матрицей на множестве $I \times J$ называется функция на множестве $I \times J$, т.е. закон, сопоставляющий каждой паре (i,j) элемент a_{ij}.

2 Виды матриц

1. Прямоугольная матрица, где $m \neq n$
2. Квадратная матрица (матрица порядка n), где $m = n$
3. Диагональная матрица

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix}$$

4. Скалярная матрица - диагональная матрица, где $a_{11} = a_{22} = \ldots = a_{mn}$. Играет роль константы

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\text{единичная матрица}} \qquad \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{\text{нулевая матрица}}$$

5. Треугольные матрицы

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & \ddots & a_{3n} \\ 0 & 0 & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}}_{\text{верхняя треугольная матрица}} \qquad \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 \\ a_{12} & a_{22} & 0 & 0 \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & 0 \\ a_{1n} & a_{2n} & a_{3n} & a_{nn} \end{pmatrix}}_{\text{нижняя треугольная матрица}}$$

6. Ленточная матрица

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & a_{23} & a_{24} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34} & a_{35} & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_{mn-1} & a_{mn} \end{pmatrix}$$

7. Модулированная матрица

$$\begin{pmatrix} a & b & 0 & 0 & 0 \\ b & a & b & 0 & 0 \\ 0 & b & a & b & 0 \\ 0 & 0 & b & a & b \\ 0 & 0 & 0 & b & a \end{pmatrix}$$

8. Симметричная матрица

$$\begin{pmatrix} a & d & 0 \\ d & b & e \\ 0 & e & c \end{pmatrix}$$

9. Зеркально-симметричная матрица

$$\begin{pmatrix} a & d & f \\ -d & b & e \\ -f & -e & c \end{pmatrix}, a_{ik} = a_{kj}, i \neq j$$

10. Косо-симметричная матрица

$$\begin{pmatrix} 0 & a & c \\ -a & 0 & b \\ -c & -b & 0 \end{pmatrix}, a_{ik} = a_{kj}, i = j, a_{ij} = 0$$

11. Матрица-строка

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \end{pmatrix}$$

12. Матрица-столбец

$$\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}$$

3 Элементарные преобразования матриц

1. Сложение (вычитание) строк или столбцов

2. Умножение строки или столбца на число, не равное нулю

3. Перестановка строк или столбцов матрицы

4 Действия над матрицами

4.1 Линейные операции

1. Сложение (вычитание)

$$A+B = C : c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}, i = \overline{1,m}, j = \overline{1,n}$$

2. Умножение на число

$$A \cdot \lambda = D : d_{ij} = \lambda \cdot a_{ij}, \lambda - \forall \text{ число}, i = \overline{1,m}, j = \overline{1,n}$$

4.1.1 Свойства линейных операций

1. Коммутативность сложения

$$A + B = B + A$$

2. Ассоциативность сложения

$$(A+B)+C = A+(B+C)$$

3. Дистрибутивность умножения

$$\alpha(A+B) = \alpha A + \alpha B$$

4. Коммутативность умножения

$$\alpha \cdot A = A \cdot \alpha$$

5. Ассоциативность умножения

$$(\alpha \cdot \beta)A = \alpha(\beta \cdot A)$$

6. Дистрибутивность умножения

$$(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$$

7. „Существование нуля”

$$A + 0 = A$$

8. „Существование минус единицы”

$$A + (-A) = 0, \text{где} - A = (-1) \cdot A$$