Математический анализ.

16 сентября 2015

1 Замечательные пределы

1.1 Первый замечательный предел

Утверждение 1

$$\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1}$$

Утверждение 2

$$\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x}=1$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{arctg} x}{x}=1$$

Пример 1

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\cos x}\dfrac{\sin x}{x}\right)=1$

Пример 2

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{\operatorname{tg} 3x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\sin 2x}{x\operatorname{tg} 3x}=\lim\limits_{x\to 0}\left(2\dfrac{\sin 2x}{2x}\dfrac{1}{3}\dfrac{3x}{\operatorname{tg} 3x}\right)=\dfrac{2}{3}$

1.2 Второй замечательный предел

Утверждение 1

$$\boxed{\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e}$$

Пример 1

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+3}{x-1}\right)^{x-1}=\lim_{x\to\infty}\left(1-1+\frac{x+3}{x-1}\right)^{x-1}=\lim_{x\to\infty}\left(\underbrace{\left(1+\frac{4}{x-1}\right)^{\frac{x-1}{4}}}_{e}\right)^4=e^4$$

Утверждение 2

$$\boxed{\lim_{x\to a}f(x)^{g(x)}=e^{\lim_{x\to a}(f(x)-1)g(x)}}$$

2 Бесконечно малые функции

Определение

$\alpha(x)$ называется бесконечно малой при $x\to a$, если $\lim\limits_{x\to a}\alpha(x)=0$

$A(x)$ называется бесконечно большой при $x\to a$, если $\lim\limits_{x\to a}\alpha(x)=\infty$

2.1 Сравнение бесконечно малых функций

Пусть $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ - бесконечно малые при $x \to a$, тогда:

Определение

$\alpha(x)$ называется бесконечно малой более высокого порядка по сравнению с $\beta(x)$, если

$$\exists \lim_{x\to a} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 0 \Rightarrow \alpha(x) = \bar{\bar{o}}\beta(x)$$

Определение

$\alpha(x)$ называется бесконечно малой более низкого порядка по сравнению с $\beta(x)$, если

$$\exists \lim_{x\to a} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \infty \Rightarrow \beta(x) = \bar{\bar{o}}\alpha(x)$$

Определение

$\alpha(x)$ и $\beta(x)$ называются бесконечно малыми одного порядка, если

$$\exists \lim_{x\to a} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = A, \begin{cases} A \neq 0 \\ A \neq \infty \end{cases} \Rightarrow \alpha(x) = \underline{\underline{O}}\beta(x)$$

Определение

$\alpha(x)$ и $\beta(x)$ называются эквивалентными бесконечно малыми, если

$$\exists \lim_{x\to a} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1 \Rightarrow \alpha(x) \sim \beta(x)$$

2.1.1 Эквивалентные бесконечно малые функции

Если $\alpha(x)$ - бесконечно малая

$$\begin{array}{cc}
\sin\alpha(x) \sim \alpha(x) & \operatorname{tg}\alpha(x) \sim \alpha(x) \\
\arcsin\alpha(x) \sim \alpha(x) & \operatorname{arctg}\alpha(x) \sim \alpha(x) \\
\ln(1+\alpha(x)) \sim \alpha(x) & e^{\alpha(x)} - 1 \sim \alpha(x) \\
b^{\alpha(x)} - 1 \sim \alpha(x)\ln b & (1+\alpha(x))^p \sim 1 + p\alpha(x)
\end{array}$$