技術學刊　第四卷　第四期　民國七十八年
Journal of Technology, Vol. 4, No. 4, pp. 355-366 (1989)

含滑行對平面拘束運動鏈之構造合成

盧燈茂
南臺工業專科學校機械工程科

黃文敏
國立成功大學機械系

摘　要

本文之目的在於提出一套有系統的方法與流程，作爲電腦輔助含滑行對平面拘束運動鏈構造合成的依據。首先，將現有的自由度爲1之平面單接頭運動鏈，依接頭順序進行運動對之轉換，並提出含滑行對之連桿鄰接矩陣來表示其拓樸構造。接著，應用含滑行對平面運動鏈形成的拘束運動之條件，來剔除非拘束運動鏈。再利用所提出的含滑行對之連桿鄰接多項式來判認所合成的運動鏈是否爲同構。最後，根據上述之方法與流程，設計一套電腦程式，來自動合成含滑行對平面拘束運動鏈之目錄，供作往後研究之用。

STRUCTURAL SYNTHESIS OF PLANAR CONSTRAINED KINEMATIC CHAINS WITH PRISMATIC PAIRS

Deng-Maw Lu
Department of Mechanical Engineering
Nan Tai Junior College of Technology
Tainan, Taiwan 71008, R.O.C.

Wen-Miin Hwang
Department of Mechanical Engineering
National Cheng Kung University
Tainan, Taiwan 70101, R.O.C.

Key Words: structural synthesis, kinematic chain, prismatic pair.

ABSTRACT

This work presents a systematic approach for the computer-aided structural synthesis of planar constrained kinematic chains with prismatic pairs. The existing simple kinematic chains with one degree of freedom are used for generation of planar kinematic chains with prismatic pairs by the replacement of kinematic pairs. These generated results are represented with the link adjancency matrix with prismatic pairs. The constrained conditions of planar kinematic chains with prismatic pairs are introduced to delete the unconstrained kinematic chains. The idea of link adjancent polynomial with prismatic pair is used for testing the isomorphism of derived kinematic chains. A computer package is developed such that catalogue of all nonisomorphic planar constrained kinematic chains with prismatic pairs can be synthesized automatically.

一、前　　言

在機械運動學（kinematics）的研究領域中，基本上可分爲機構分析（mechanism analysis）和機構合成（mechanism synthesis）兩類。有關機構合成之理論研究，可概分爲類型合成（type synthesis）、數目合成

（number synthesis）與尺寸合成（dimensional synthesis）等三項，其中類型合成與數目合成可合稱爲構造合（structural synthesis）至於運動鏈（kinematic chain），可依其本身運動幾何關係之不同而分爲空間運動鏈（spatial kinematic chain）和平面運動鏈（planar kinematic chain）兩種。歷年來，從事機械運動學研究之學者，對於平面運動鏈構造合成方面的研究，大致可歸納下述幾種：

(1) 僅含迴轉對的平面運動鏈之構造合成。
(2) 含各種運動對的平面運動鏈之構造合成。
(3) 尋找一有效的運動鏈之拓樸構造（topology structure）表示法，以作爲同構運動鏈之判認依據。
(4) 運動鏈的自動合成與繪製之研究。

本文之研究內容是屬於上述的(2)、(3)和(4)等三項之範圍，即探討有關含迴轉對（revolute pair）和滑行對（prismatic pair）平面拘束運動鏈的構造合成和運動鏈的自動繪製等問題。

自從1883年Grübler［1］提出了含迴轉對的平面運動鏈形成拘束運動的條件之後，便陸續有學者對於僅含迴轉對的平面單接頭運動鏈加以研究並發展各種合成理論，分別建立了自由度（degree of freedom）爲1的四、六、八、十和十二桿的單接頭運動鏈目錄［2－5］。在平面運動鏈的構造中，迴轉對與滑行對是屬於以面接觸的低對（lower pair）。因此，有關含迴轉對與滑行對平面運動鏈之構造合成，亦有學者加以探討。1956年，Hain［6］首先由 Watt 和 Stephenson之六桿單接頭運動鏈中，以滑行對取代迴轉對，而合成了自由度爲1且只含一個滑行對的平面單接頭運動鏈。1968年，Hain［7］進而合成了自由度爲1的六桿且最多含四個滑行對的單接頭運動鏈50個，以及六桿且最多含四個滑行對的複接頭運動鏈28個。1973年，Huang和Soni［8］利用線性與非線性圖畫（linear and nonlinear graph）的著色方法，來進行含各種運動對平面運動鏈的構造合成，並以數據表示所合成八桿最多含六個滑行對的平面拘束運動鏈3309個。在往後的研究中，有關含滑行對的平面拘束運動鏈之構造合成，則未再被提出。

關於運動鏈的拓樸構造之表示法與同構之判認，1876年，Reuleaux［9］提出以符號表示法（symbolic notation）來描述機構。1943年，Franke［10］，分別以圓圈和線段來表示多邊形桿件（polynal member）和其連接的狀態，用以表示運動鏈。1955年，Denavit和Hartenberg［11］提出以矩陣的方式表示運動鏈的幾何特性。1964年，Dobrjanskyj和Freudenstein［12］利用圖畫理論（graph theory），將運動鏈轉換成圖畫，並提出利用附隨矩陣（Incidence matrix）來表示運動鏈的拓樸構造。1967年，Dobrjnaskyj和Freudenstein［13］再提出比較拓樸構造的一些特性，來判認同構的運動鏈。1975年，Uicker和Raicu［14］提出連桿組特性多項式（linkage characteristic polynomial）來表示運動鏈，並作爲判認同構之依據。1981年，Yan和Hall［15，16］推導出連桿組特性多項式中，各項係數之物理意義，並探討其唯一性。1983年，Yan和Hwang［17］提出了連桿組構造多項式（linkage structural polynomial）作爲平面複接頭運動鏈之判認方法。1984年，再提出連桿組路徑碼（linkage path code）［18］來判認平面單接頭運動鏈之同構問題。1985年，Dabey和Rao［19］提出距離矩陣之特性多項式（characteristic polynomial of distance matrix）。同年，Mruthyunjaya和Balasubramanian［20］提出階度特性多項式（characteristic polynomial of degree matrix），並比較數種多項式在判認同構運動鏈之優缺點。

有關各種運動鏈之構造合成，早期都以徒手畫法來進行，並配合圖畫理論來表示合成結果。後來，利用各種矩陣來表示運動鏈之拓樸構造，並配合電腦來進行合成工作，其結果大都亦以矩陣來表示。但這些程序與結果在繪製與應用參考上，却頗爲不便。本文利用作者在論文［21］所發展出的平面運動鏈自動繪製法來作爲電腦輸出之工具。

二、含滑行對拘束運動鏈之構造合成理論

1. 運動對之轉換

現有自由度爲1的平面單接頭運動鏈中，由於數目龐大，附錄一僅列出四、六和八桿的平面單接頭運動鏈可用多種不同的矩陣來表示，例如連桿鄰接矩陣（link adjancency matrix）［12］、接頭鄰接矩陣（joint adjancency matrix）［12］、連桿組的附隨矩陣（incidence matrix）［12］與修正的連桿鄰接矩陣（modified link adjancent matrix）等。

本文採用連桿鄰接矩陣，簡稱LAM，來表示平面單接頭運動鏈。如圖1所示之六桿運動鏈，其所對應的連桿鄰接矩陣：

$$LAM=\begin{bmatrix}0&1&1&1&0&0\\1&0&0&0&1&0\\1&0&0&0&1&0\\1&0&0&0&0&1\\0&1&1&0&0&1\\0&0&0&1&1&0\end{bmatrix} \tag{1}$$

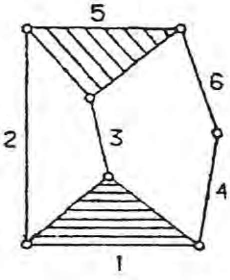


圖1 一種六桿七接頭運動鏈之連桿標示

LAM中的元素 e_{ij} 係表示第i桿與第j桿的鄰接關係，假如第i桿與第j桿係以單接頭鄰接，則 $e_{ij}=1$，否則 $e_{ij}=0$。當單接頭運動鏈的LAM確定後，將運動鏈中的各個接頭加以編號，如圖2所示，以便進行運動對之轉換工作。從接頭1開始，按順序逐一將迴轉對換成滑行對，因而合成了各種含滑行對的連桿鄰接矩陣（link adjancency matrix with prismatic pairs），簡稱PLAM，此矩陣係修正LAM而得。PLAM與LAM之異處為用元素 $e_{ij}=2$ 來表示第i 桿與第j 桿是以滑行對之鄰接關係。例如將圖2中的接頭1和接頭3轉換成滑行對後，其運動鏈如圖3所示，而相對應的含兩個滑行對之連桿鄰接矩陣為：

$$PLAM=\begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \tag{2}$$

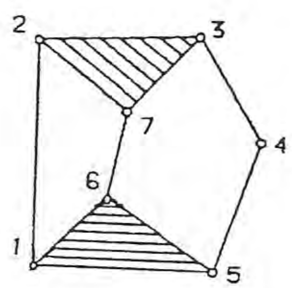


圖2　一種六桿七接頭運動鏈之接頭標示。

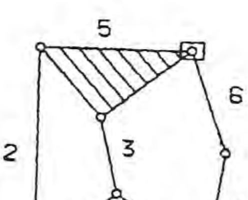


圖3　一種六桿七接頭含兩個滑行對運動鏈之標示。

2. 含滑行對運動鏈形成拘束運動之條件

在機械運動學的研究領域中，對於一個運動鏈，能否做拘束運動（constraind motion）是一個非常重要的概念。所謂拘束運動是指如何構造一機構，使其在承受外力下，所有的構件均能依循可預測的路徑而運動。一般而言，拘束運動鏈是指運動鏈之總自由度F為1者，因為迴轉對與滑行對均屬低對（lower pair），且自由度皆為1，因此由Grübler判別式之運算，含有滑行對之運動鏈，其自由度應該不變；亦即自由度為1的單接頭運動鏈中，若將一些迴轉對以滑行對取代之後，則其自度F仍然為1。但事實上，含滑行對之運動鏈，在某些特殊的構造或特殊的尺寸下，此運動鏈將無法形成拘束運動[6，7]。

1956年，Hain[6]在含滑行對運動鏈的研究中，發現有三種情況，將使含滑行對的運動鏈無法形成拘束運動。此三種情況為：

(1) 在運動鏈中，不能有僅含滑行對對且運動方向相同的連桿，如圖4所示，在桿2上的兩個滑行對具有相同的運動方向。
(2) 在運動鏈中，僅含滑行對的連桿能桿接在一起，如圖5所示，在桿3和桿4的接的頭均為滑行對。
(3) 在運動鏈中的每個運動迴路（kinematic loop）至少要包含兩個迴轉對。如圖6所示，在運動迴路I中，僅桿3和桿4的接頭為迴轉對。

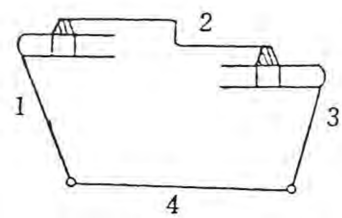


圖4　無拘無束運動情況之一。

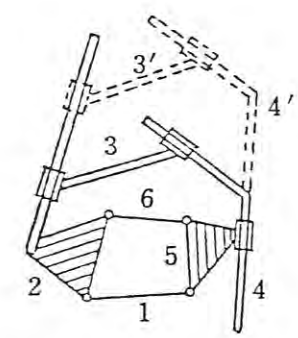


圖5　無拘無束運動情況之二。

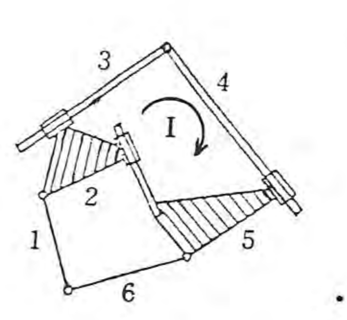


圖6　無拘束運動情況之三。

由於第(1)種情況是屬於尺寸合成的範圍，因此在構造合成中，僅需考慮第(2)種與第(3)種情況即可。由第(3)種情況與 Euler7's 公式[8]可推得一個 n 桿運動鏈中可含最多的滑行對數目爲：

$$P_{max} = 2C \quad (3)$$

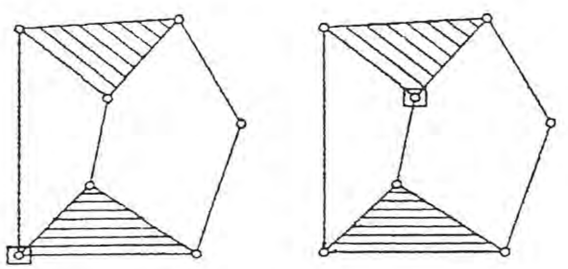
其中，P_{max} 爲運動鏈中最多的滑行對數目，C 爲運動鏈的獨立迴路數目。因此，

$$P_{max} = 2(l - n + 1) \quad (4)$$

例如圖1所的六桿運動鏈，其獨立運動迴路 C 爲2，接頭數 l 爲 7，分別代入 (3) 式或 (4) 式，可得 $P_{max} = 4$，即在進行運動對轉換時，最多只要轉換四個滑行對即可，而不需轉換含五、六或七個滑行對的工作。

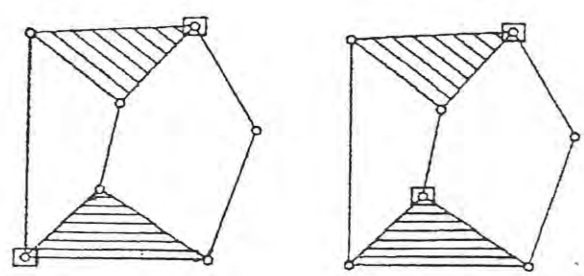
3. 同構運動鏈之判認

有關同構運動鏈之判認，通常可由目視來檢查，但因速度慢又易生錯誤，故目視檢查只能當作輔助之用。因此，尋求一可靠又快速的方法，來判認同構運動鏈，是一項值得深入探討問題。在文獻中［13－20］有很多種判認同構運動鏈的方法，然而，利用電腦來判認同構運動鏈，通常是使用運動鏈的特性多項式。若兩個運動鏈的特性多項式相同，即稱此兩個運動鏈爲同構運動鏈。本文係利用連桿鄰接矩陣，經由運動對之轉換，而合成含滑行對的連桿鄰接矩陣。在合成含滑行對的連桿鄰接矩陣中，將會產生許多的同構運動鏈，如圖7（a）和（b）所示爲六桿含



(a) (b)

圖 7 六桿含一個滑行對之同構運動鏈。



(a) (b)

圖 8 六桿含二個滑行對之同構運動鏈。

一個滑行對的同構運動鏈。

基於含滑行對的連桿鄰接矩陣，在此提出含滑行對的連桿鄰接多項式（link adjancent polynomial with prismatic pairs），PLAP，作爲判認同運動鏈時之依據。一個含滑行對連桿組的連桿鄰接多項式是由矩陣xI－PLAM 的行列式展開而得，其中爲啞變數（dummy variable），I 爲與 PLAP 階的單位矩陣（unit matrix)。一個 n桿連桿組的 PLAM，其通式可表爲：

$$\begin{aligned} PLAP &= |xI - PLAM| \\ &= P_0x^n + P_1x^{n-1} + P_2x^{n-2} + \dots + P_{n-1}x + P_n \\ &= [P_0 / P_1 / P_2 / \dots / P_{n-1} / P_n] \end{aligned}$$

例如，圖8（a）和（b）所示的運動鏈，其相對應的 PLAP 皆爲：

$$\begin{aligned} PLAP &= x^6 - 13x^4 + 34x^2 - 12x - 1 \\ &= [1 / 0 / -13 / 0 / 34 / -12 / -1] \end{aligned}$$

由於兩運動鏈的 PLAP 相同，故可判定此兩運動鏈爲同構運動鏈。

三、電腦程式設計與合成結果

根據前述的構造合成理論與論文［21］的自動繪製法，本文發展出一套有系統的流程，如圖9所示，以作爲設計電腦程式之依據。本程式係以 BASIC 語言和 PLOT50 繪圖軟體寫成，具有下列之功能：

(1) 輸入 MLAM 自動轉換成 LAM 並合成出 PLAM。
(2) 自動剔除非拘束運動鏈。
(3) 自動判認同構運動鏈。
(4) 自動繪製運動鏈。

本程式係利用TEK4054 A圖形微電腦來執行，其結果對於四桿和六桿含滑行對之平面拘束運動鏈，由本程式合成的總數分別爲3個和50個，此與Hain［7］所研究提出的結果完全相同，至於八桿所合成出的總數爲3085個。附錄二中列出部份的合成結果，供作參考。

四、結 論

由本文之研究結果，可歸納出以下幾點結論：

(1) 利用微電腦來執行合成工作，具有操作簡單與節省時間等優點，但易受限於電腦記憶容量。
(2) 利用本文所發展的電腦程式，除了已建立四桿、六桿和八桿等含滑行對拘束運動鏈之目錄外，亦可繼續建立更多桿數的運動鏈目錄。
(3) 本文所提出的含滑行對的連桿組鄰接多項式，當桿數增多時，是否亦具有唯一性，尚待探討。
(4) 由本文所提出的合成觀念與步驟，可繼續應用於含其他運動對平面運動鏈構造合成之研究。

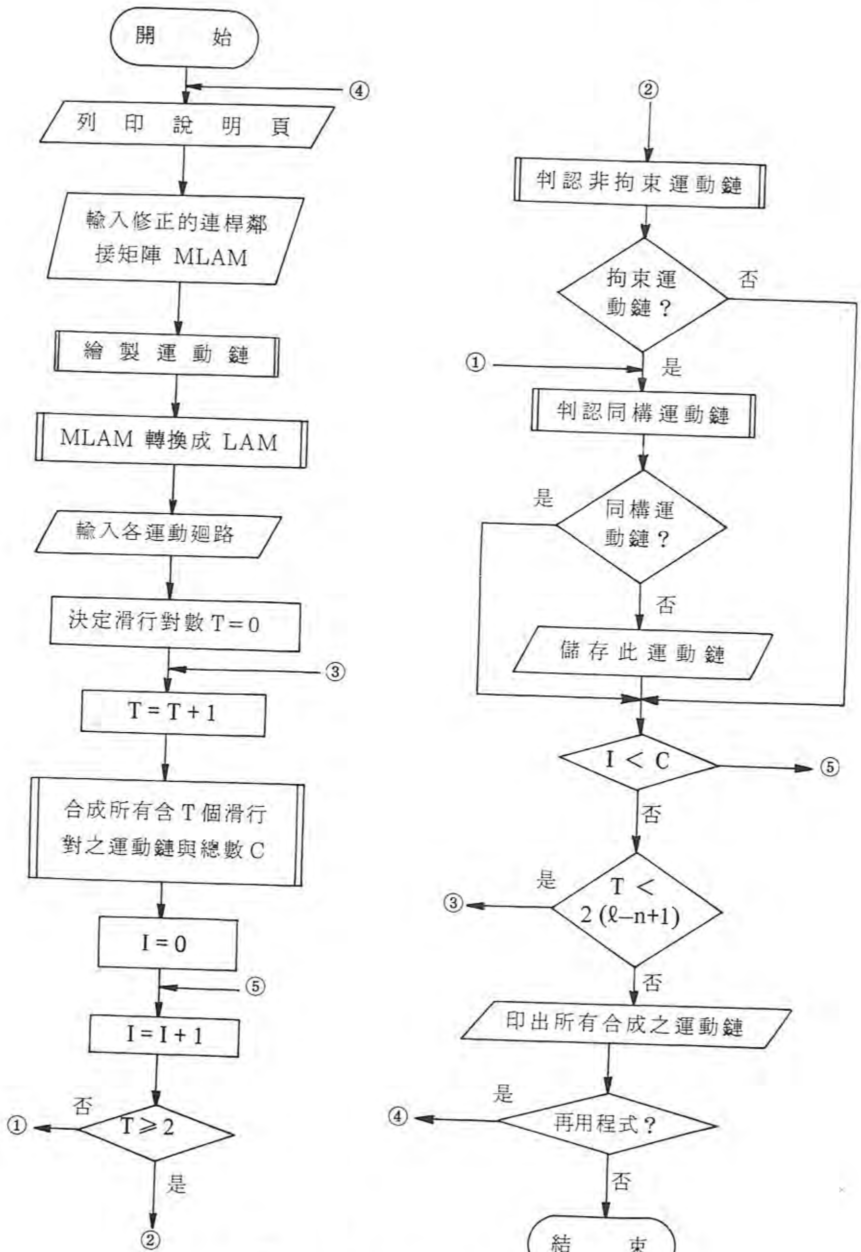


圖 9　構造合成之流程圖。

參 考 文 獻

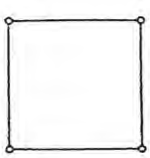
1. Grübler, M., "Allgemeine Eigenschaften der Zwanglaufigen Ebenen Kinematischen Ketten," *Civilingenieur,* Vol. 29, pp. 167-200 (1883).
2. Alt, H., "Zur Synthese der Ebenen Mechanismen", *Z. Angew. Math. Mech.,* Vol. 1, No. 5, pp. 373-398 (1921).
3. Crossley, F.R.E., "The Permutations of Kinematic Chains of Eight Members of Less from the Graph-theoretic View-point," *Dev. Theoretical Appl. Mechanics,* Vol. 2, pp. 467-486, (1964).
4. Crossley, F.R.E., "On an Unpublished Work of Alt," *J. of Mech.,* Vol. 1, pp. 165-170 (1966).
5. 黃以文，「電腦輔助平面單接頭運動鏈之構造合成」，碩士論文，國立成功大學機械工程研究所，台南（1986）。
6. Hain, K., "Die Weiterleitung von Bewegungen und Kräeften durch Gewindespindeln," *Landtechnische Forschung 6,* pp. 1-14, (1956).
7. Hain, K., "Systematik sechsgliedriger kinematischer Ketten," *Maschinenmarkt,* No. 38, pp. 717-723, (1968).
8. Huang, M. and Soni, A.H., "Application of Linear and Nonlinear Graphs in Structual Synthesis of Kinematic chains", *ASME, J. Eng. Ind.* Vol. 95, pp. 525-532, (1973).

9. Reuleaux, F., *The Kinematics of Machinery,* Dover publications, New York (1963).
10. Franks, R., *Vom Aufbau der Getriebe,* Berlin, (1943).
11. Denavit, J. and Hartenberg, R.S., "A kinematic Notation for Lower pair Mechanisms Based on Matrics", *Trans ASME,* J. Appl. Mech., Vol. 22, pp. 215-221, (1955).
12. Freudenstein, F. and L. Dobrjanskyj, "On a Theory for the Type Synthesis of Mechanisms", *proc. 11th Inter. Congress of Appl. Mechanics,* pp. 420-428, (1964).
13. Dobrjanskyj, L., and F. Freudenstein, "Some Applications of Graph Theory to the Structural Analysis of Mechanisms," *ASME, J. Eng. for Industry*, Feb., pp. 153-158 (1967).
14. Uicker, J.J., and A. Raicu, "Method for the Identification and Recognition of Equivalence of Kinematic Chains," *Mechanism and Machine Theory,* Vol. 10, pp. 375-383, (1975).
15. Yan, H.S., and A.S. Hall, "Linkage Characteristic Polynomials: Definitions, Coefficients by Inspection," *ASMÉ, J. Mech. Design*, Vol. 103, pp. 578-584, (1981).
16. Yan, H.S., and A.S. Hall, "Linkage Characteristic Polynomials: Assembly Theorems, Uniqueness," *ASME, J. Mech. Design,* Vol. 104, pp. 11-20, (1982).
17. Yan, H.S., and W.M. Hwang, "A Method for the Identification of Planar Linkage Chains," *ASME, J. Mech., Trans. Auto. Design*, Vol 105 pp. 658-662, (1983).
18. Yan, H.S., and W.M. Hwang, "Linkage Path Code," *Mechanism and Machine Theory,* Vol. 19, pp. 425-429, (1984).
19. Dubey, R.K., and A.C. Rao, "New Characteristic Polynomial – A Reliable Index to Detect Isomorphism between Kinematic Chains," *Natl. Conf. Mach. Mech. IISc.* India, Feb. pp. 36-40, (1985).
20. Mruthyuniaya, T.S., and H.R. Balasubramanian, "In Quest of a Reliable and Efficient Computational Test for Detection of Isomorphism in Kinematic Chains," *Natl. Conf. Mach. Mech. IISc,* India, pp. 53-60, (1985).
21. 盧燈茂，黃文敏，「平面運動鏈之自動繪製法」，技術學刊，第三卷，第四期，第325～330頁，（1988）。

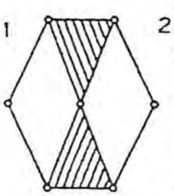
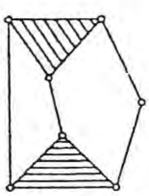
78年 2月20日 收稿
78年 4月22日 修改
78年 5月16日 接受

附錄一 自由度爲1之平面單接頭運動鏈目錄

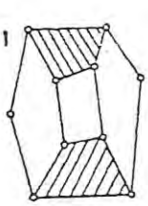
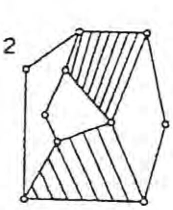
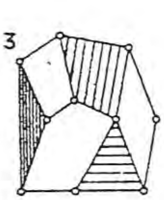
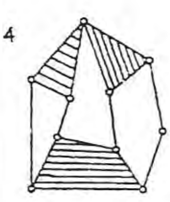
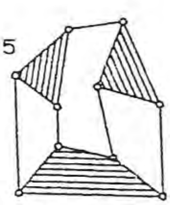
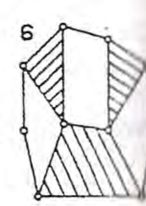
一、四桿運動鏈

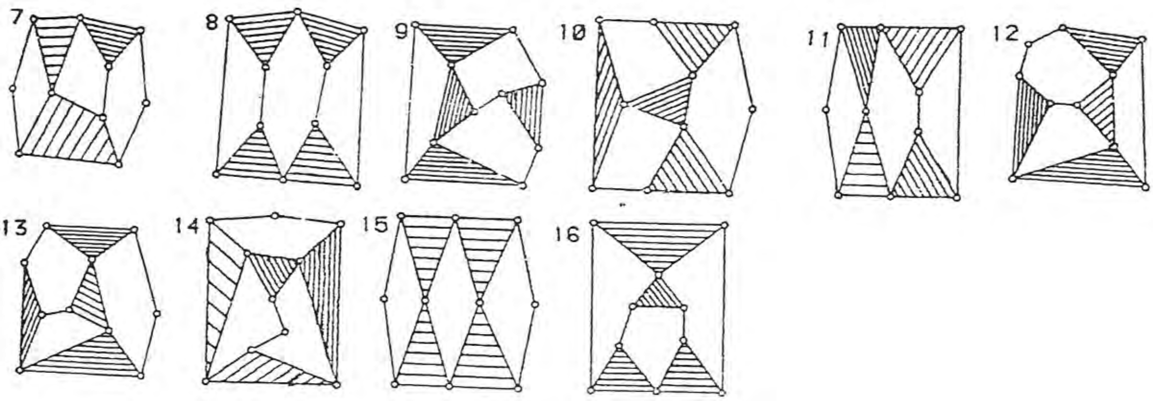
1


二、六桿運動鏈

1

2


三、八桿運動鏈

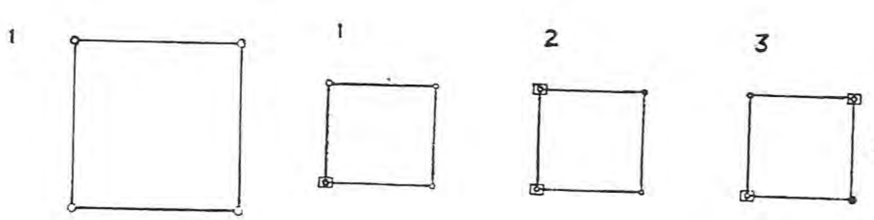
1

2

3

4

5

6




附錄二 含滑行對之平面拘束運動鏈目錄

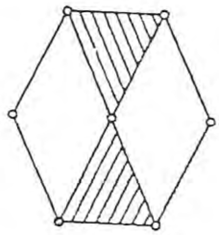
連桿數	編　號	合成運動鏈之總數目
四	(1)	3
六	(1)	24
	(2)	26
八	(1)	98
	(2)	62
	(3)	268
	(4)	302
	(5)	94
	(6)	197
	(7)	426
	(8)	56
	(9)	258
	(10)	222
	(11)	143
	(12)	225
	(13)	456
	(14)	81
	(15)	114
	(16)	83

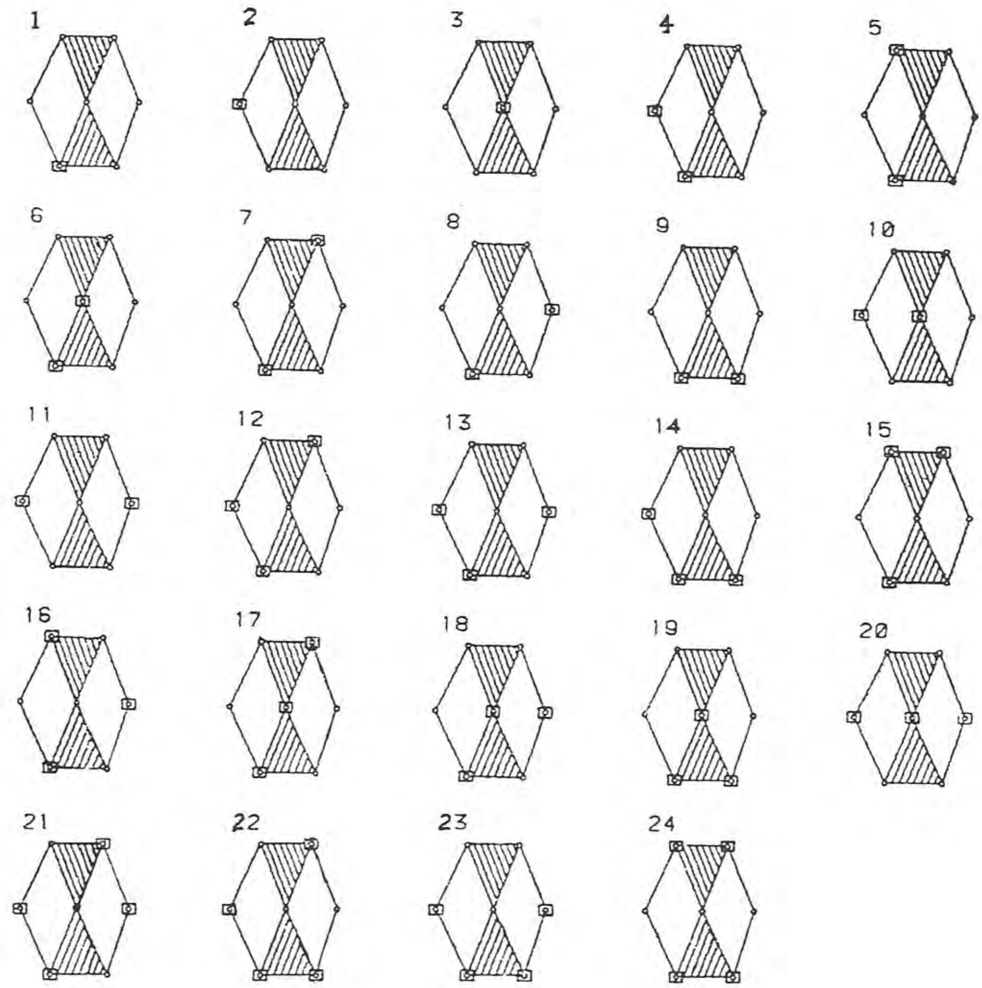
一、四桿運動鏈



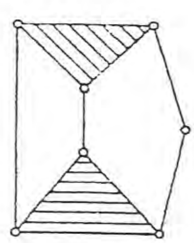
二、六桿運動鏈

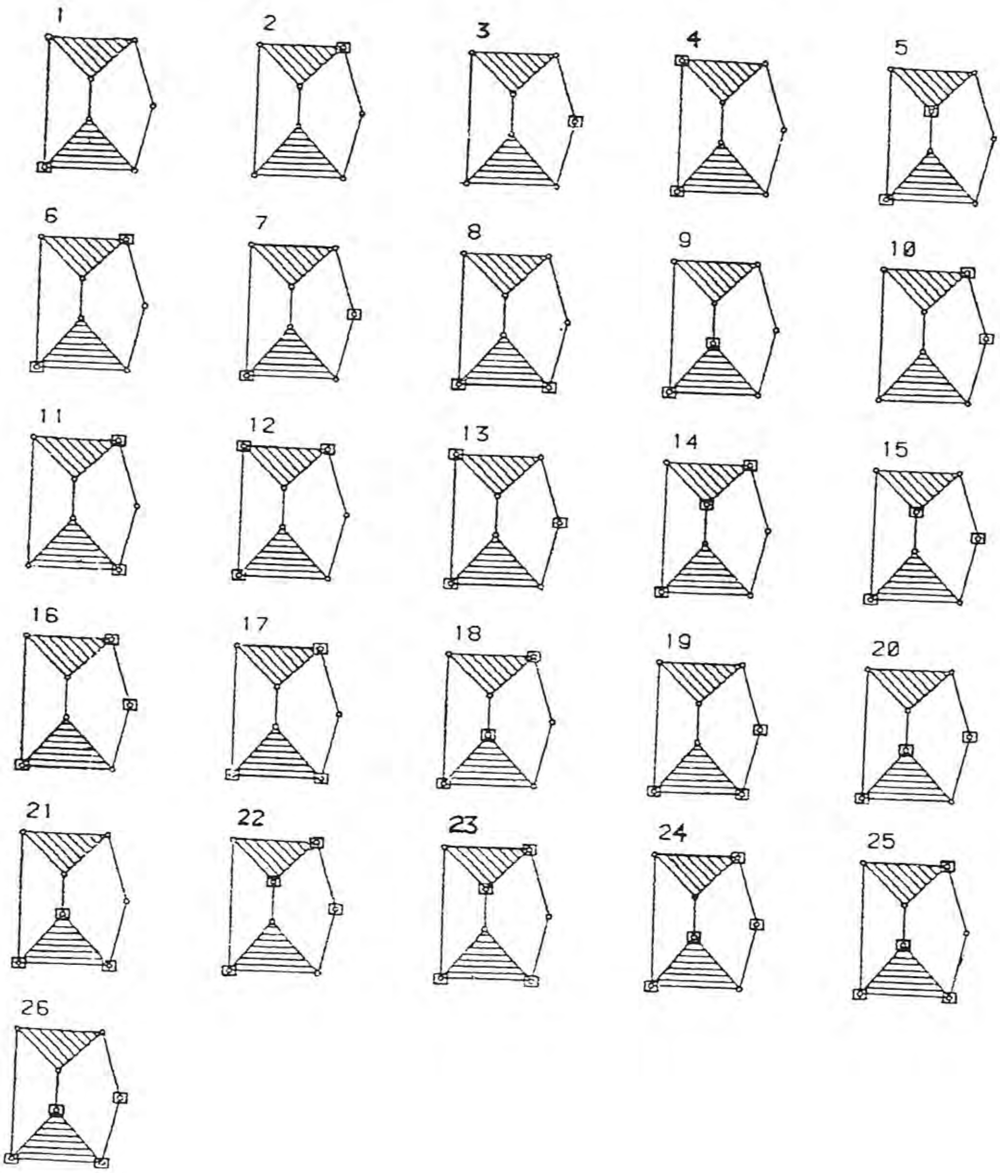
(1)





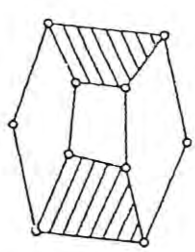
(2)

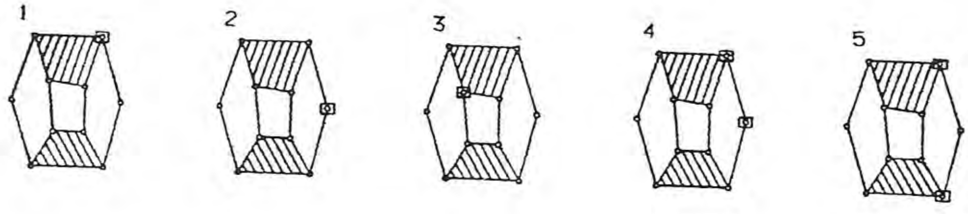


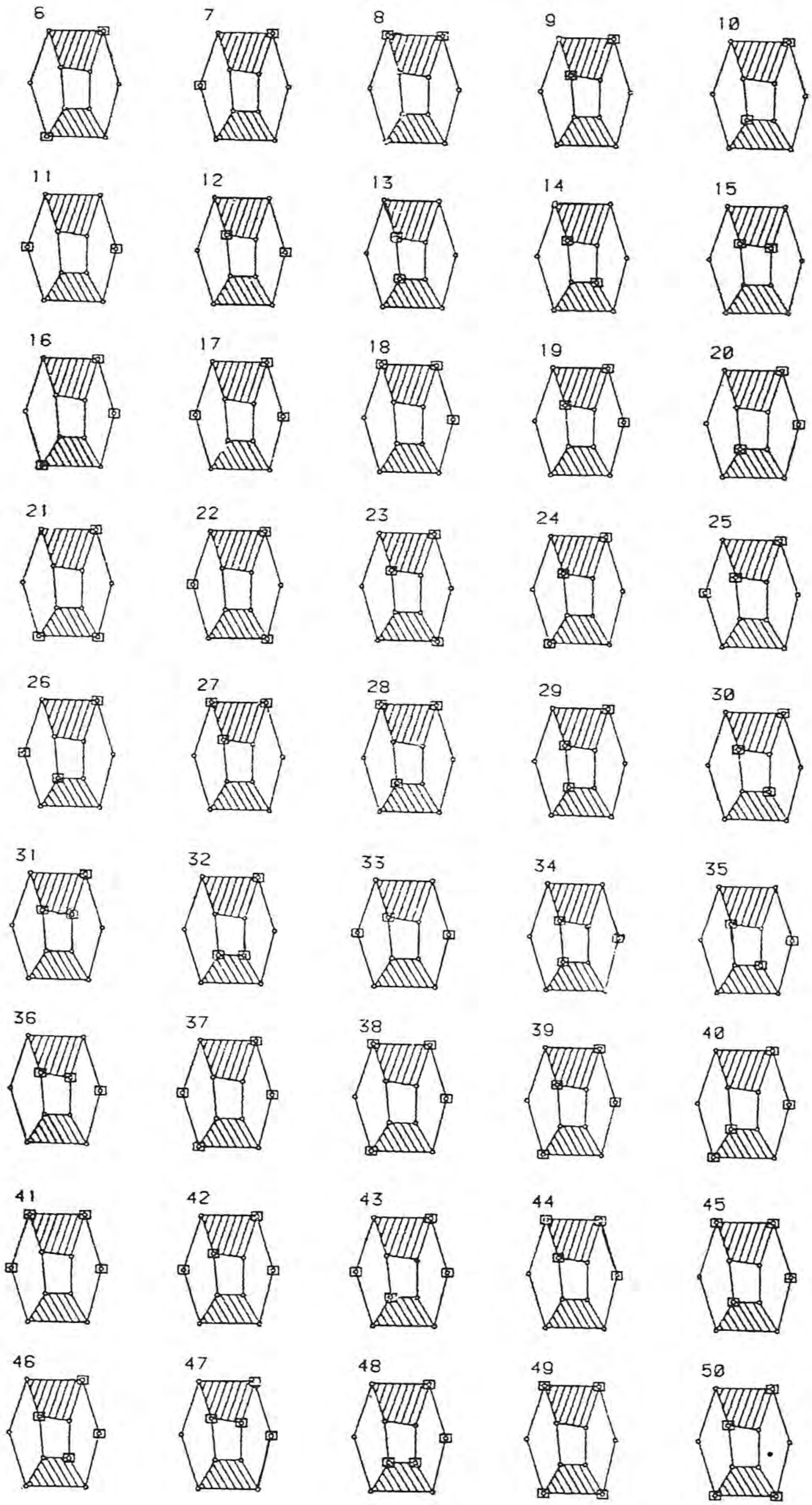


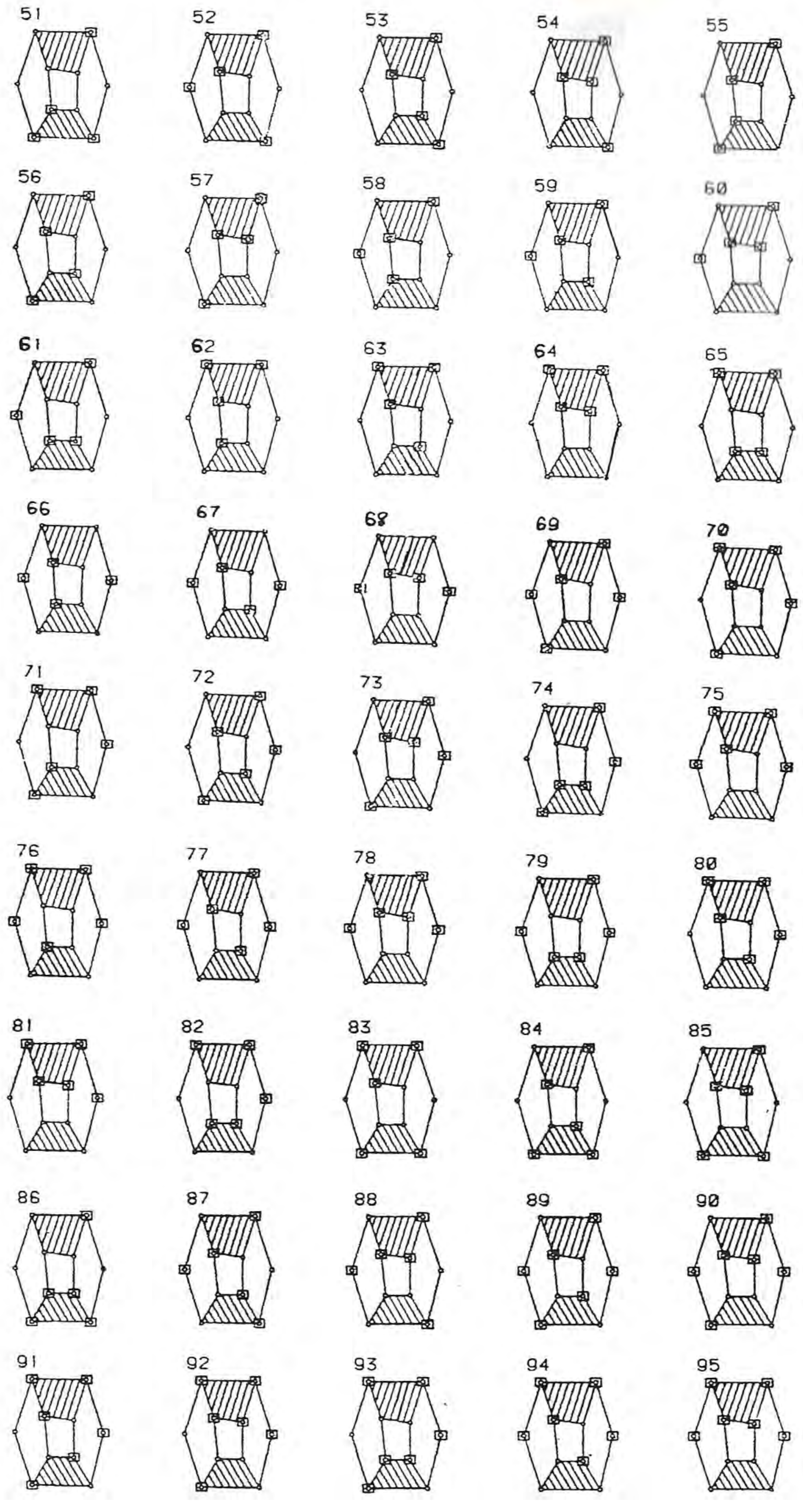
三、八桿運動鏈

(1)

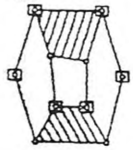




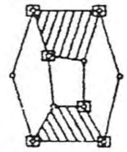

6
7
8
9
10
11
12
13
14
15
16
17
18
19
20
21
22
23
24
25
26
27
28
29
30
31
32
33
34
35
36
37
38
39
40
41
42
43
44
45
46
47
48
49
50


51
52
53
54
55
56
57
58
59
60
61
62
63
64
65
66
67
68
69
70
71
72
73
74
75
76
77
78
79
80
81
82
83
84
85
86
87
88
89
90
91
92
93
94
95

96



97



98