# Implémentation Mfront de la théorie de microprécontrainte-solidification :

## Algorithme exponentiel

Jean-Luc ADIA (UPE), Julien Sanahuja (EDF R&D), Benoit Barry (CEA)

30 Mai 2017

La déformation de fluage totale :

$$\dot{\varepsilon}(t) = \dot{\varepsilon}^{ei}(t) + \dot{\varepsilon}^{ve}(t) + \dot{\varepsilon}^{vi}(t) \tag{1}$$

La partie élastique initiale :

$$\dot{\varepsilon}^{ei}(t) = \frac{1}{3} q_{1v} \dot{\sigma}^{v}(t)\mathbf{1} + \frac{1}{2} q_{1d} \dot{\boldsymbol{\sigma}}^{d}(t) \tag{2}$$

La partie visqueuse :

$$\dot{\varepsilon}^{vi}(t) = \frac{\sigma^{v}(t)}{3\eta_v(t)}\mathbf{1} + \frac{\boldsymbol{\sigma}^{d}(t)}{2\eta_d(t)} \tag{3}$$

$$\frac{1}{\eta_a(t)} = c_0 q_{4a} s(t), \; a = v, d \tag{4}$$

$$\dot{s}(t) + c_0 s^2(t) = c_1 \left| \frac{\dot{h}(t)}{h(t)} \right| \tag{5}$$

La déformation de fluage totale :

$$\dot{\varepsilon}(t) = \dot{\varepsilon}^{ei}(t) + \dot{\varepsilon}^{ve}(t) + \dot{\varepsilon}^{vi}(t) \tag{1}$$

La partie élastique initiale :

$$\dot{\varepsilon}^{ei}(t) = \frac{1}{3} q_{1v} \dot{\sigma}^{v}(t) \mathbf{1} + \frac{1}{2} q_{1d} \dot{\boldsymbol{\sigma}}^{d}(t) \tag{2}$$

La partie visqueuse :

$$\dot{\varepsilon}^{vi}(t) = \frac{\sigma^{v}(t)}{3\eta_{v}(t)} \mathbf{1} + \frac{\boldsymbol{\sigma}^{d}(t)}{2\eta_{d}(t)} \tag{3}$$

$$\frac{1}{\eta_{a}(t)} = c_0 q_{4a} s(t), \; a = v, d \tag{4}$$

$$\dot{s}(t) + c_0 s^2(t) = c_1 \left| \frac{\dot{h}(t)}{h(t)} \right| \tag{5}$$

La partie viscoélastique :

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{ve}(t) = \dot{\gamma}^{v}(t)\mathbf{1} + \dot{\boldsymbol{\gamma}}^{d}(t) \quad (6)$$

$$\gamma^{v}(t) = q_{2v}\int_0^t \frac{1}{v(t)}\Phi_v(t-t')d\sigma^{v}(t') \quad (7)$$

$$\boldsymbol{\gamma}^{d}(t) = q_{2d}\int_0^t \frac{1}{v(t)}\Phi_d(t-t')d\boldsymbol{\sigma}^{d}(t') \quad (8)$$

Fraction volumique apparente :

$$\frac{1}{v(t)} = (\lambda_0/t)^m + \alpha \quad (9)$$

Complaisance de fluage non-vieillissante :

$$\Phi_a(t-t') \approx \sum_{\mu=0}^{N} A_\mu^a[1-\exp(-(t-t')/\tau_\mu^a)], a = v, d \quad (10)$$

La partie viscoélastique :

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{ve}(t) = \dot{\gamma}^{v}(t)\mathbf{1} + \dot{\boldsymbol{\gamma}}^{d}(t) \tag{6}$$

$$\gamma^{v}(t) = q_{2v}\int_0^t \frac{1}{v(t)}\Phi_v(t-t')d\sigma^{v}(t') \tag{7}$$

$$\boldsymbol{\gamma}^{d}(t) = q_{2d}\int_0^t \frac{1}{v(t)}\Phi_d(t-t')d\boldsymbol{\sigma}^{d}(t') \tag{8}$$

Fraction volumique apparente :

$$\frac{1}{v(t)} = (\lambda_0/t)^m + \alpha \tag{9}$$

Complaisance de fluage non-vieillissante :

$$\Phi_a(t-t') \approx \sum_{\mu=0}^{N} A_\mu^a[1-\exp(-(t-t')/\tau_\mu^a)],\, a = v, d \tag{10}$$

La partie viscoélastique :

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{ve}(t) = \dot{\gamma}^{v}(t)\mathbf{1} + \dot{\boldsymbol{\gamma}}^{d}(t) \quad (6)$$

$$\gamma^{v}(t) = q_{2v}\int_{0}^{t}\frac{1}{v(t)}\Phi_{v}(t-t')d\sigma^{v}(t') \quad (7)$$

$$\boldsymbol{\gamma}^{d}(t) = q_{2d}\int_{0}^{t}\frac{1}{v(t)}\Phi_{d}(t-t')d\boldsymbol{\sigma}^{d}(t') \quad (8)$$

Fraction volumique apparente :

$$\frac{1}{v(t)} = (\lambda_0/t)^{m} + \alpha \quad (9)$$

Complaisance de fluage non-vieillissante :

$$\Phi_a(t-t') \approx \sum_{\mu=0}^{N} A_{\mu}^{a}[1-\exp(-(t-t')/\tau_{\mu}^{a})],\ a = v, d \quad (10)$$

Spectre continue $L^a(t)$ :

$$\Phi_a(\xi) = \int_{\tau^a=0}^{+\infty} L^a(\tau)[1-\exp(-\xi/\tau)]d(\ln\tau), \xi = t-t' \geq 0\ ,\ \ a = v, d \tag{11}$$

Approximation d'ordre $k$ du spectre continue :

$$L_k^a(\tau) = -\frac{(-k\tau)^k}{(k-1)!}\Phi_a^{(k)}(k\tau),\ \ a = v, d \tag{12}$$

Convergence vers le spectre continue :

$$L^a(\tau) = \lim_{k\to+\infty} L_k^a(\tau),\ \ a = v, d \tag{13}$$

- choix des formes analytiques $\Phi_a(t-t'),\ a=v,d$
- calcul de l'approximation d'ordre $k$ du spectre continue $L_k^a(\tau)$
- choix des $\tau_\mu^a$
  ($\tau_1$ fixé , $\tau_0=\tau_1/\sqrt{10},\ \tau_\mu=10^{\mu-1}\tau_1$ , $\mu=2,\cdots N$) et détermination des $A_\mu^a,\ a=v,d$ ($A_0=\int_{\tau=0}^{\tau_0}L(\tau)d(\ln\tau)$, $A_\mu=(\ln 10)L(\tau_\mu)$)
- identification des paramètres matériaux $q_{1a},\ q_{2a},\ q_{3a}=\alpha q_{2a}$, $q_{4a}$ $(a=v,d)$, $\lambda_0$, $m$ par optimisation sur des essais de fluage propre vieillissant $(h=cte)$
- identification des paramètres matériaux $c_0$, $c_1$ par optimisation sur des essais fluage sechant $(h=variable)$.

- **Début du pas de temps** : initialisation des variables locales $t_{i+1/2}$, $\Delta y^a_\mu$, $\lambda^a_\mu$, $v^a_{i+1/2}$, $k''$, $\mu''$, $s_{i+1/2}$, $\eta^a_{i+1/2}$

$$t_{i+1/2} = t_0 + \sqrt{t_{i+1} \cdot t_i} \tag{14}$$

$$\Delta y^a_\mu = \Delta t / \tau^a_\mu, \; a = v, d \tag{15}$$

$$\lambda^a_\mu = \frac{1 - e^{-\Delta y^a_\mu}}{\Delta y^a_\mu}, \; a = v, d \tag{16}$$

$$\frac{1}{v_{i+1/2}} = (\frac{\lambda_0}{t_{i+1/2}})^m + \alpha \tag{17}$$

$$\frac{1}{k''} = q_{1v} + q_{2v} \frac{1}{v_{i+1/2}} \sum_{\mu=0}^{N} A_{\mu}^{v} (1 - \lambda_{\mu}^{v}) \tag{18}$$

$$\frac{1}{\mu''} = q_{1d} + q_{2d} \frac{1}{v_{i+1/2}} \sum_{\mu=1}^{N} A_{\mu}^{d} (1 - \lambda_{\mu}^{d}) \tag{19}$$

$$\xi = \sqrt{c_0 c_1 \Delta t |\Delta ln(h)|} \tag{20}$$

$$\omega = \begin{cases} tan(\Delta\xi)/\Delta\xi & \Delta h > 0 \ et \ \Delta\xi > 10^{-5}, \\ tanh(\Delta\xi)/\Delta\xi & \Delta h < 0 \ et \ \Delta\xi > 10^{-5}, \\ 1 & \Delta\xi \leq 10^{-5}, \end{cases} \tag{21}$$

$$s_{i+1} = \frac{s_i + c_1 \omega |\Delta(lnh)|}{1 + c_0 s_i \omega \Delta t} \tag{22}$$

$$s_{i+1/2} = s_i + (s_{i+1} - s_i)/2 \tag{23}$$

$$\eta^a_{i+1/2} = \frac{1}{c_0 q_{4a} s_{i+1/2}}, \ a = v, d \tag{24}$$

- **Itérations** : estimation de $\boldsymbol{\sigma}_{i+1/2}$ à partir de $\Delta\boldsymbol{\sigma}$ de l'itération précédente et chercher $\Delta\varepsilon$ jusqu'à vérifier l'équilibre de la structure pour l'incrément de contrainte $\Delta\boldsymbol{\sigma}$ calculé à partir l'Eq. 30 :

$$\boldsymbol{\sigma}_{i+1/2} = \boldsymbol{\sigma}_i + \Delta\boldsymbol{\sigma}/2 \tag{25}$$

$$\Delta\gamma^{v\prime\prime} = \frac{1}{v_{i+1/2}} \sum_{\mu=0}^{N} (1 - e^{-\Delta y_\mu^v})(q_{2v} A_\mu^v \frac{\sigma_{i+1/2}^v}{3} - \gamma_\mu^v) \tag{26}$$

$$\Delta\boldsymbol{\gamma}^{d\prime\prime} = \frac{1}{v_{i+1/2}} \sum_{\mu=0}^{N} (1 - e^{-\Delta y_\mu^d})(q_{2d} A_\mu^d \frac{\boldsymbol{\sigma}_{i+1/2}^d}{2} - \boldsymbol{\gamma}_\mu^d) \tag{27}$$

$$\Delta\varepsilon^{v\prime\prime} = \Delta\gamma^{v\prime\prime} + \frac{\Delta t \sigma^{v}_{i+1/2}}{3\eta^{v}_{i+1/2}} \tag{28}$$

$$\Delta\boldsymbol{\varepsilon}^{d\prime\prime} = \Delta\boldsymbol{\gamma}^{d\prime\prime} + \frac{\Delta t \boldsymbol{\sigma}^{d}_{i+1/2}}{2\eta^{d}_{i+1/2}} \tag{29}$$

$$\Delta\boldsymbol{\sigma} = 3k''(\Delta\varepsilon^{v} - \Delta\varepsilon^{v\prime\prime})\mathbf{1} + 2\mu''(\Delta\boldsymbol{\varepsilon}^{d} - \Delta\boldsymbol{\varepsilon}^{d\prime\prime}) \tag{30}$$

- **Fin du pas de temps** : si l'équilibre est atteint à l'étape précédente, mettre à jour les variables :

$$\boldsymbol{\sigma}_{i+1} = \boldsymbol{\sigma}_i + \Delta\boldsymbol{\sigma} \tag{31}$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{i+1} = \boldsymbol{\varepsilon}_i + \Delta\boldsymbol{\varepsilon} \tag{32}$$

$$\gamma^v_{\mu_{i+1}} = \gamma^v_{\mu_i} e^{-\Delta y^v_\mu} + \frac{1}{3} q_{2v} A^v_\mu \sigma^v_i (1 - e^{-\Delta y^v_\mu}) + \frac{1}{3} q_{2v} A^v_\mu (1 - \lambda^v_\mu) \Delta\sigma^v \tag{33}$$

$$\boldsymbol{\gamma}^d_{\mu_{i+1}} = \boldsymbol{\gamma}^d_{\mu_i} e^{-\Delta y^d_\mu} + \frac{1}{2} q_{2d} A^d_\mu \boldsymbol{\sigma}^d_i (1 - e^{-\Delta y^d_\mu}) + \frac{1}{2} q_{2d} A^d_\mu (1 - \lambda^d_\mu) \Delta\boldsymbol{\sigma}^d \tag{34}$$

$$\boldsymbol{\gamma}_{\mu_{i+1}} = \gamma^v_{\mu_{i+1}} \mathbf{1} + \boldsymbol{\gamma}^d_{\mu_{i+1}} \tag{35}$$

Fonction de fluage non-vieillissante :

$$\Phi^a(\xi) = \ln(1+\xi^b),\ \xi = \frac{t-t'}{\lambda_0},\ \lambda_0 = 1 \text{ jour et } b = 0.11,\ a = v, d. \tag{36}$$

La complaisance de fluage exacte :

$$\begin{aligned} F_a(t,t') = q_{1a} + q_{2a}Q(t,t') + q_{3a}\ln[1 + (\tfrac{t-t'}{\lambda_0})] \\ + q_{4a}c_0 \int_{t'}^{t} s(\tau)d\tau \ , a = v, d \end{aligned} \tag{37}$$

$$Q(t,t') = \int_{t'}^{t} (\frac{\lambda_0}{\tau}) \frac{b(\tau - t')^{b-1}}{\lambda_0^b + (\tau - t')^b} d\tau \tag{38}$$

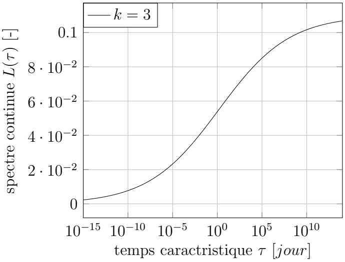
- Aproximation d'ordre 3 du spectre continue :

$$L_3(\tau) = \frac{27}{3}\tau\Phi^3(3\tau) = \frac{b(b-1)(b-2)(3\tau)^b}{2[1+(3\tau)^b]} - \frac{3b^2(b-1)(3\tau)^{2b}}{2[1+(3\tau)^b]^2} + \frac{b^3(3\tau)^{3b}}{[1+(3\tau)^b]^3} \tag{39}$$

- $\tau_1 = 10^{-4}$ jour et $N = 10$ :

$$A_0 = ln(1+(2\tau_0')^b) - \frac{b(2\tau_0')^b}{1+(2\tau_0')^b} + \int_{\tau_0'}^{\tau_0} L_3(\tau)d(ln(\tau)),\ \tau_0' = 10^{-20} \tag{40}$$

$$A_\mu = \ln(10)L_3(\mu) \tag{41}$$



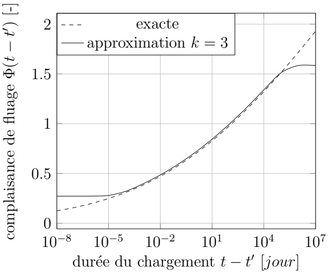




FIGURE: Approximation d'ordre $k = 3$ du spectre continue $L(\tau)$ et de la fonction de complaisance non-vieillissante $\phi(t - t')$.

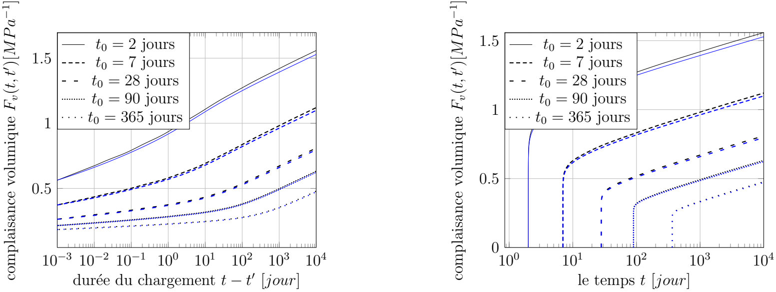
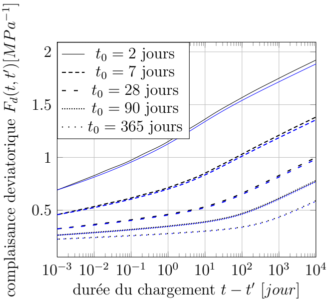



FIGURE: Complaisance volumique de fluage $F_v(t,t')$ pour $h(t) = 1$ $(cte)$. En noir : Mtest et en blue : complaisance exacte.



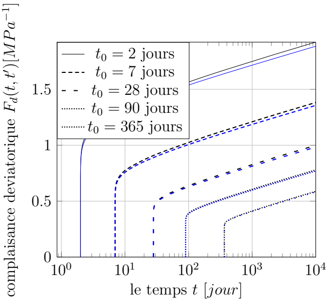




FIGURE: Complaisance deviatorique de fluage $F_d(t,t')$ pour $h(t) = 1$ ($cte$). En noir : Mtest et en blue : complaisance exacte.

- Influence de l'humidité sur les complaisances volumique et déviatorique

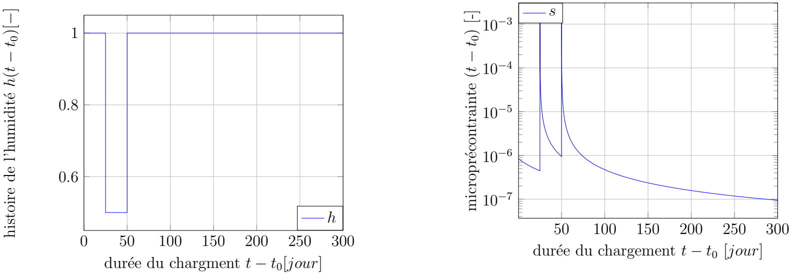



FIGURE: Variation de l'humidité et relaxation de la microprécontrainte.

- Influence de l'humidité sur les complaisances volumique et déviatorique

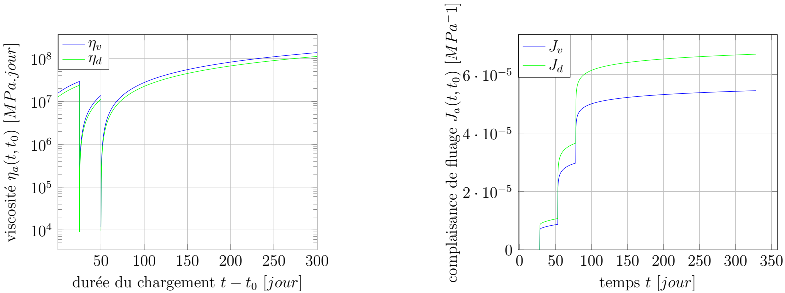



FIGURE: Variation de la viscosité du terme visqueux et complaisance de fluage volumique et déviatorique.

- condition aux limites : $\mathbf{u}(t) = \mathbf{E}(t) \cdot \mathbf{x} + \mathbf{u}'(t)$ ($\mathbf{u}'$ périodique)
- histoire d'humidité uniforme dans la phase solide $h(x, t) = h(t)$
- interface solide-pore (bleu) libre

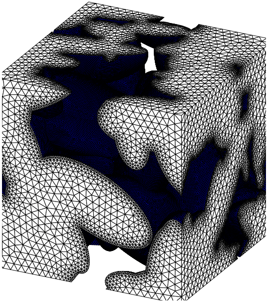


FIGURE: Maillage de la microstructure poreuse, 638883 nœuds et 3475860 tetrahèdres.

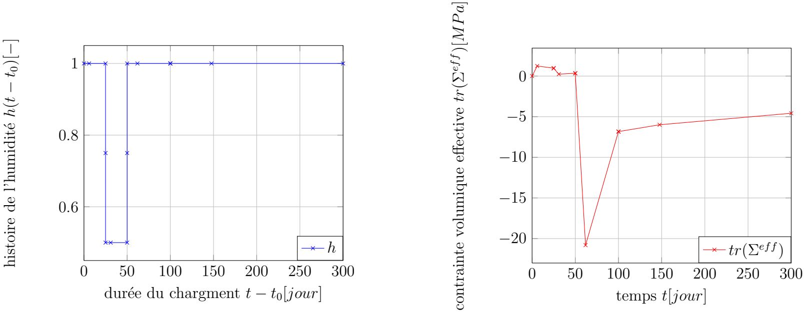



FIGURE: Influence de l'humidité sur la relaxation volumique.