Comportements viscoélastiques, applications aux bétons

Journée utilisateurs MFront 2017

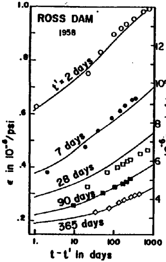
Julien SANAHUJA Benoît BARY Jean-Luc ADIA

EDF lab MMC, CEA LECBA, UPE

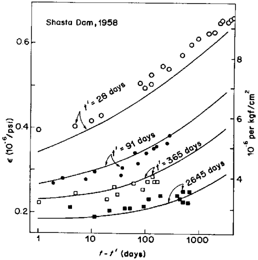
30 mai 2017

- enceinte : béton précontraint
- capacité de confinement dépend de l'état mécanique
- béton : déformations différées, retraits, fluages
- câbles de précontrainte : tension diminue par fluage béton

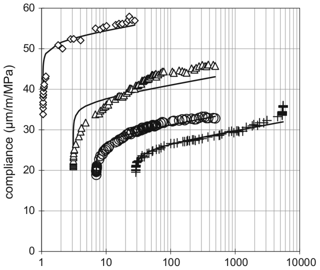
Béton: essais de fluage propre



[Bažant, 1975]



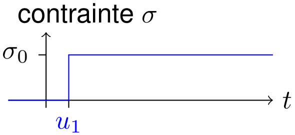
[Bažant, 1988]



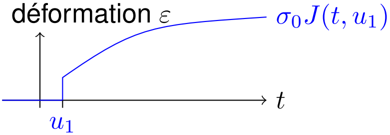
[Le Roy, 2017]

Comportement viscoélastique linéaire vieillissant

Viscoélasticité: fonction de complaisance $J(t,u) \neq J(t-u)$

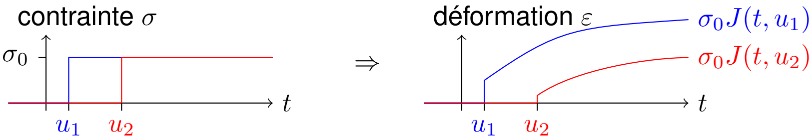


$\Rightarrow$



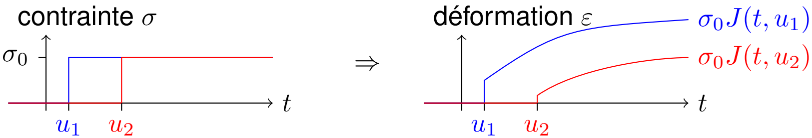
Comportement viscoélastique linéaire vieillissant

Viscoélasticité: fonction de complaisance $J(t,u) \neq J(t-u)$



Comportement viscoélastique linéaire vieillissant

Viscoélasticité: fonction de complaisance $J(t,u) \neq J(t-u)$



Matériaux Boltzmanniens : principe de superposition (échelons $\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}$)

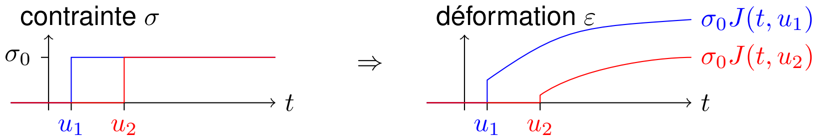
Loi de comportement définie par le tenseur de complaisance $\mathbb{J}(t,u)$

$$\boldsymbol{\varepsilon}(t) = \int_{u=-\infty}^{t} \mathbb{J}(t,u) : \dot{\boldsymbol{\sigma}}(u)\,\mathrm{d}u$$

ou par le tenseur de relaxation $\mathbb{R}(t,u)$

$$\boldsymbol{\sigma}(t) = \int_{u=-\infty}^{t} \mathbb{R}(t,u) : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}(u)\,\mathrm{d}u$$

Viscoélasticité: fonction de complaisance $J(t,u) \neq J(t-u)$



Matériaux Boltzmanniens : principe de superposition (échelons $\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}$)

Loi de comportement définie par le tenseur de complaisance $\mathbb{J}(t,u)$

$$\boldsymbol{\varepsilon}(t) = \int_{u=-\infty}^{t} \mathbb{J}(t,u) : \dot{\boldsymbol{\sigma}}(u)\,\mathrm{d}u$$

ou par le tenseur de relaxation $\mathbb{R}(t,u)$

$$\boldsymbol{\sigma}(t) = \int_{u=-\infty}^{t} \mathbb{R}(t,u) : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}(u)\,\mathrm{d}u$$

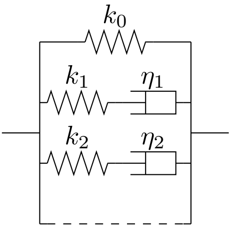
Cas du comportement isotrope

$\mathbb{R}(t,u) = 3R_k(t,u)\mathbb{J} + 2R_\mu(t,u)\mathbb{K}$

soit

$$\boldsymbol{\sigma}(t) = \int_{u=-\infty}^{t} R_k(t,u)\mathrm{tr}\dot{\varepsilon}(u)\,\mathrm{d}u\,\mathbf{1} + \int_{u=-\infty}^{t} 2R_\mu(t,u) : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{dev}(u)\,\mathrm{d}u$$

Un cas particulier intégrable, adapté pour FEM

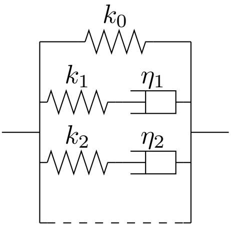


Cas non vieillissant : modèle de Maxwell généralisé

$$R(t-u) = \left(k_0 + \sum_{i=1}^{n} k_i \mathrm{e}^{-\frac{t-u}{\tau_i}} \right) \mathrm{H}(t-u)$$

avec $\tau_i = \eta_i / k_i$

Un cas particulier intégrable, adapté pour FEM



Cas non vieillissant : modèle de Maxwell généralisé

$$R(t-u) = \left(k_0 + \sum_{i=1}^{n} k_i \mathrm{e}^{-\frac{t-u}{\tau_i}} \right) \mathrm{H}(t-u)$$

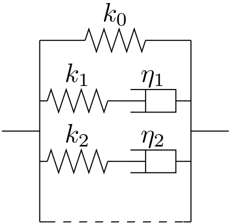
avec $\tau_i = \eta_i / k_i$

Extension au cas vieillissant

$$R(t,u) = \left(k_0(u) + \sum_{i=1}^{n} k_i(u) \mathrm{e}^{-\frac{t-u}{\tau_i}} \right) \mathrm{H}(t-u)$$

avec $k_i(u)$ les « fonctions de vieillissement »

Un cas particulier intégrable, adapté pour FEM



Cas non vieillissant : modèle de Maxwell généralisé

$$R(t-u) = \left(k_0 + \sum_{i=1}^{n} k_i e^{-\frac{t-u}{\tau_i}} \right) \mathrm{H}(t-u)$$

avec $\tau_i = \eta_i / k_i$

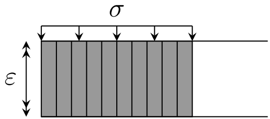
Extension au cas vieillissant

$$R(t,u) = \left(k_0(u) + \sum_{i=1}^{n} k_i(u) e^{-\frac{t-u}{\tau_i}} \right) \mathrm{H}(t-u)$$

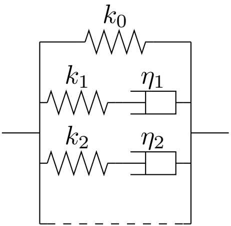
avec $k_i(u)$ les « fonctions de vieillissement »

Interprétation physique : théorie de solidification de Bažant

[Bažant et al., JEM 115, 1989]



Un cas particulier intégrable, adapté pour FEM



Cas non vieillissant : modèle de Maxwell généralisé

$$R(t-u) = \left(k_0 + \sum_{i=1}^{n} k_i \mathrm{e}^{-\frac{t-u}{\tau_i}} \right) \mathrm{H}(t-u)$$

avec $\tau_i = \eta_i / k_i$

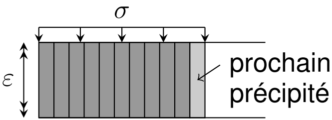
Extension au cas vieillissant

$$R(t,u) = \left(k_0(u) + \sum_{i=1}^{n} k_i(u) \mathrm{e}^{-\frac{t-u}{\tau_i}} \right) \mathrm{H}(t-u)$$

avec $k_i(u)$ les « fonctions de vieillissement »

Interprétation physique : théorie de solidification de Bažant

[Bažant et al., JEM 115, 1989]



$$R(t,u) = f_{prec}(u) R_{nalv}(t-u)$$

Méthode proposée par Bažant pour la complaisance [Bažant, SMIRT, 1971] efficace et adaptée à des pas de temps de durée croissante

Principe

$$\sigma(t) = \int_{u=-\infty}^{t} \left(k_0(u) + \sum_{i=1}^{n} k_i(u) \mathrm{e}^{-\frac{t-u}{\tau_i}} \right) \dot{\varepsilon}(u)\,\mathrm{d}u$$

Méthode d'intégration : aperçu en 1D

Méthode proposée par Bažant pour la complaisance [Bažant, SMIRT, 1971]
efficace et adaptée à des pas de temps de durée croissante

Principe

$$\sigma(t) = \int_{u=-\infty}^{t} \left(k_0(u) + \sum_{i=1}^{n} k_i(u) \mathrm{e}^{-\frac{t-u}{\tau_i}} \right) \dot{\varepsilon}(u) \, \mathrm{d}u$$

Hyp. : $\dot{\varepsilon}(u)$ et $k_i(u)$ constants sur chaque pas de temps

$\Rightarrow$ comportement incrémental : élastique linéaire avec précontrainte

$\Delta\sigma = k'' \Delta\varepsilon + \sigma''_p$ avec $\Delta\sigma = \sigma(t+\Delta t) - \sigma(t)$

- raideur tangente $k'' \leftarrow k_i(t), k_i(t+\Delta t), \tau_i, \Delta t$
- précontrainte $\sigma''_p \leftarrow \sigma_i^{int}(t), \tau_i, \Delta t$
- vars internes $\sigma_i^{int}(t+\Delta t) \leftarrow \sigma_i^{int}(t), \Delta\varepsilon, k_i(t), k_i(t+\Delta t), \tau_i, \Delta t$
  $\sigma_i^{int} \equiv$ contrainte dans la chaîne i

Méthode d'intégration : aperçu en 1D

Méthode proposée par Bažant pour la complaisance [Bažant, SMIRT, 1971]
efficace et adaptée à des pas de temps de durée croissante

Principe

$$\sigma(t) = \int_{u=-\infty}^{t} \left(k_0(u) + \sum_{i=1}^{n} k_i(u) \mathrm{e}^{-\frac{t-u}{\tau_i}} \right) \dot{\varepsilon}(u)\,\mathrm{d}u$$

Hyp. : $\dot{\varepsilon}(u)$ et $k_i(u)$ constants sur chaque pas de temps

$\Rightarrow$ comportement incrémental : élastique linéaire avec précontrainte

$\Delta\sigma = k''\Delta\varepsilon + \sigma''_p$ avec $\Delta\sigma = \sigma(t+\Delta t) - \sigma(t)$

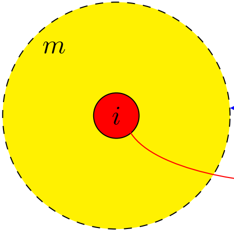
- raideur tangente $k'' \leftarrow k_i(t), k_i(t+\Delta t), \tau_i, \Delta t$
- précontrainte $\sigma''_p \leftarrow \sigma_i^{int}(t), \tau_i, \Delta t$
- vars internes $\sigma_i^{int}(t+\Delta t) \leftarrow \sigma_i^{int}(t), \Delta\varepsilon, k_i(t), k_i(t+\Delta t), \tau_i, \Delta t$
  $\sigma_i^{int} \equiv$ contrainte dans la chaîne i

$\Rightarrow$ Il suffit de savoir traiter le comportement
élastique linéaire à état initial non naturel

Implémentation MFront : aperçu ($n = 1$)

```
@Parser DefaultParser;
...
@ProvidesSymmetricTangentOperator;
@StateVariable StrainStensor sigint1; // internal variable
@StateVariable real tt; // time
@Integrator{
  ...
  // tangent modulus
  k_fict = k0_mid + lambda1sph*k1_mid;
  // eigenstress
  eigensig_fict_tr = - unmexp_tau1sph * sigint1_tr;
  // use incremental elasticity
  dsig_tr = 3*k_fict * deto_tr + eigensig_fict_tr;
  // increment of internal variable
  dsigint1_tr = lambda1sph*3*k1_mid*deto_tr - unmexp_tau1sph*sigint1_tr;
  ...
  // update internal variable
  dsigint1 = (dsigint1_tr/3.) * Stensor::Id() + dsigint1_dev;
  // update stress
  sig += (dsig_tr/3.) * Stensor::Id() + dsig_dev;
  // update time
  tt += dt;
  // tangent stiffness is known
  if(computeTangentOperator_){
   Dt = 3*k_fict*Stensor4::J() + 2*mu_fict*Stensor4::K();
  }
}
```

Un cas test : l'inhomogénéité d'Eshelby

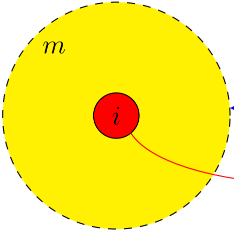


Inhomogénéité sphérique en milieu infini
matériaux viscoélastiques linéaires vieillissants

$$\underline{\xi}(\underline{x}) = \boldsymbol{E}(t) \cdot \underline{x},\ |\underline{x}| \to \infty$$

$\boldsymbol{\varepsilon}^i(t)$ uniforme dans l'inhomogénéité

Un cas test : l'inhomogénéité d'Eshelby



Inhomogénéité sphérique en milieu infini
matériaux viscoélastiques linéaires vieillissants

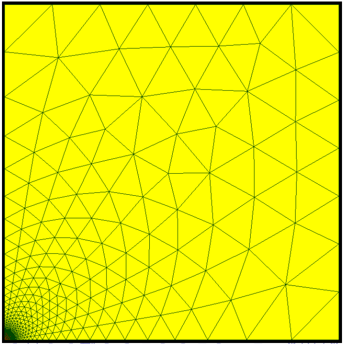
$\underline{\xi}(\underline{x}) = \boldsymbol{E}(t) \cdot \underline{x}, |\underline{x}| \to \infty$

$\boldsymbol{\varepsilon}^i(t)$ uniforme dans l'inhomogénéité

Tenseur de localisation : $\mathbb{A}(t,u)$

$$\boldsymbol{\varepsilon}^i(t) = \int_{u=-\infty}^{t} \mathbb{A}(t,u) : \dot{\boldsymbol{E}}(u)\,\mathrm{d}u$$

- forme sphérique + comportements isotropes
  $\mathbb{A}(t,u) = A_j(t,u)\mathbb{J} + A_k(t,u)\mathbb{K}$
- chargement en échelon à t_0
  $\boldsymbol{E}(u) = \mathrm{H}(u-t_0)\boldsymbol{E}_0 \Rightarrow \boldsymbol{\varepsilon}^i(t) = \mathbb{A}(t,t_0) : \boldsymbol{E}_0$
- cas test MFront + Code_Aster
  calcul de la partie sphérique $A_j(t,t_0)$



Fonctions de relaxation élémentaires (MTest)

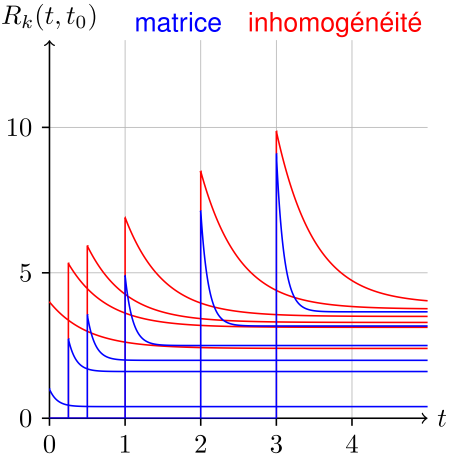
Même forme et $n = 1$

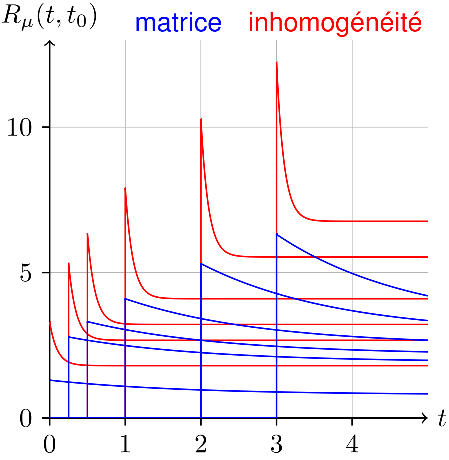
$$R_k^i(t,u) = \left(k_0(u) + k_1(u)\mathrm{e}^{-\frac{t-u}{\tau_1}}\right)\mathrm{H}(t-u) \quad \text{avec} \quad k_j(u) = \alpha_j + \beta_j u^{\gamma_j}$$

Fonctions de relaxation élémentaires (MTest)

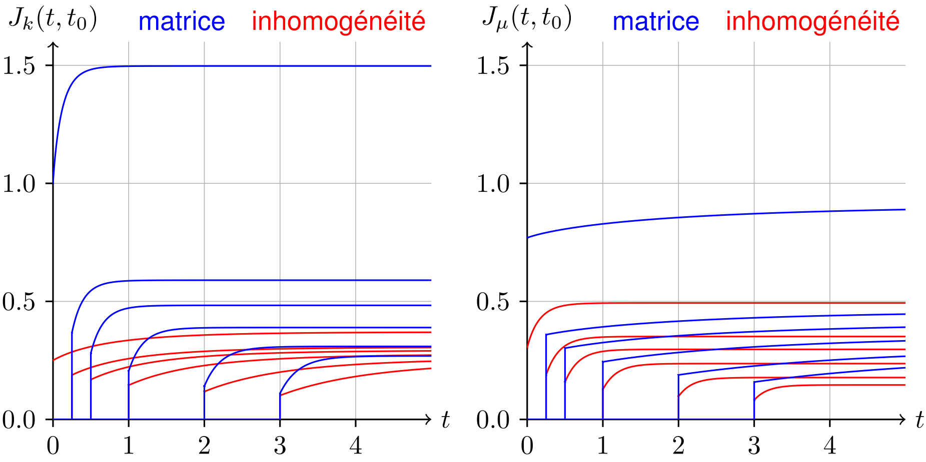
Même forme et $n = 1$

$$R_k^i(t,u) = \left(k_0(u) + k_1(u)\mathrm{e}^{-\frac{t-u}{\tau_1}}\right)\mathrm{H}(t-u) \quad \text{avec} \quad k_j(u) = \alpha_j + \beta_j u^{\gamma_j}$$

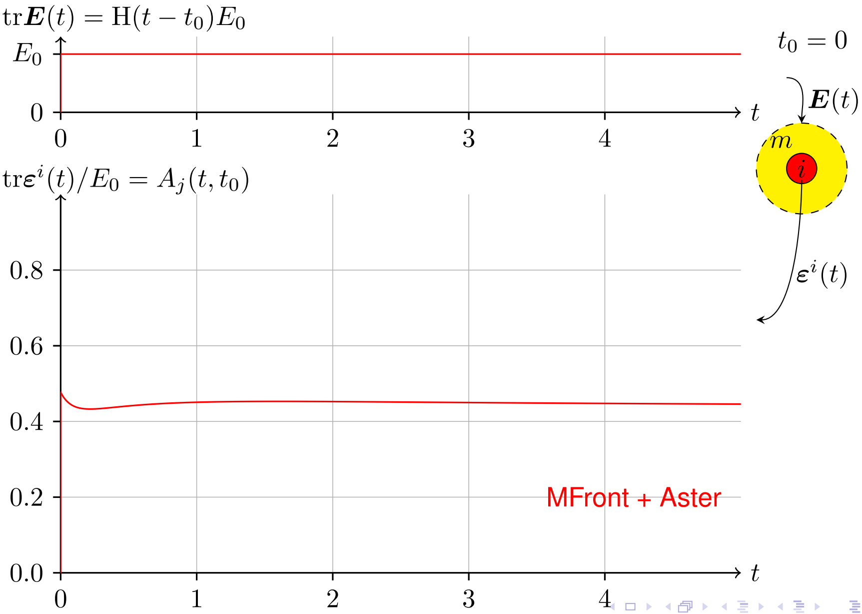




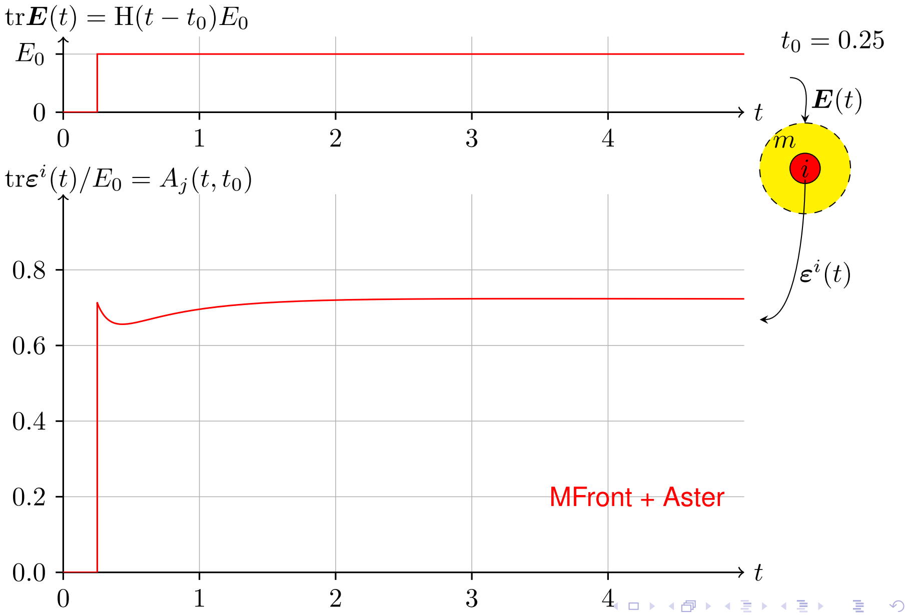
Fonctions de complaisance élémentaires (MTest)



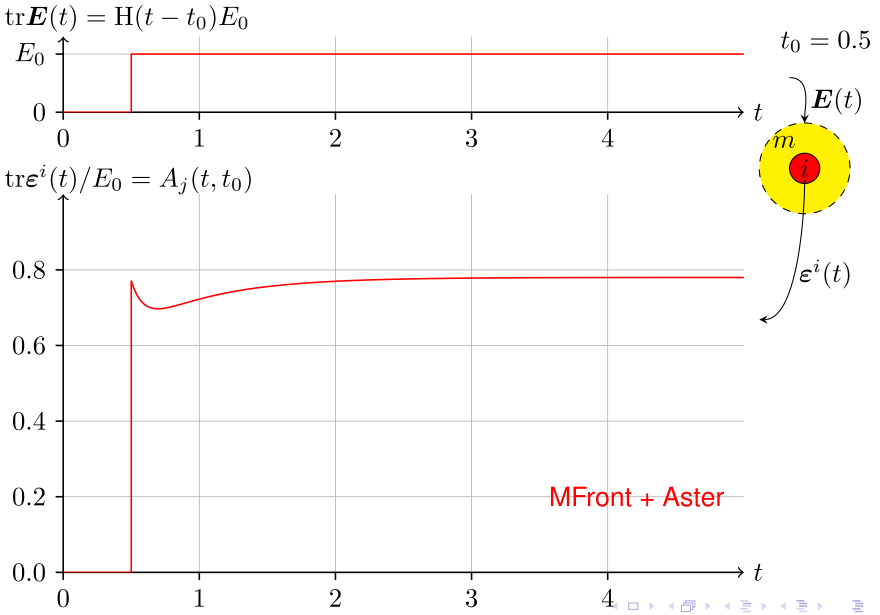
Localisation isotrope déformation (Code_Aster)



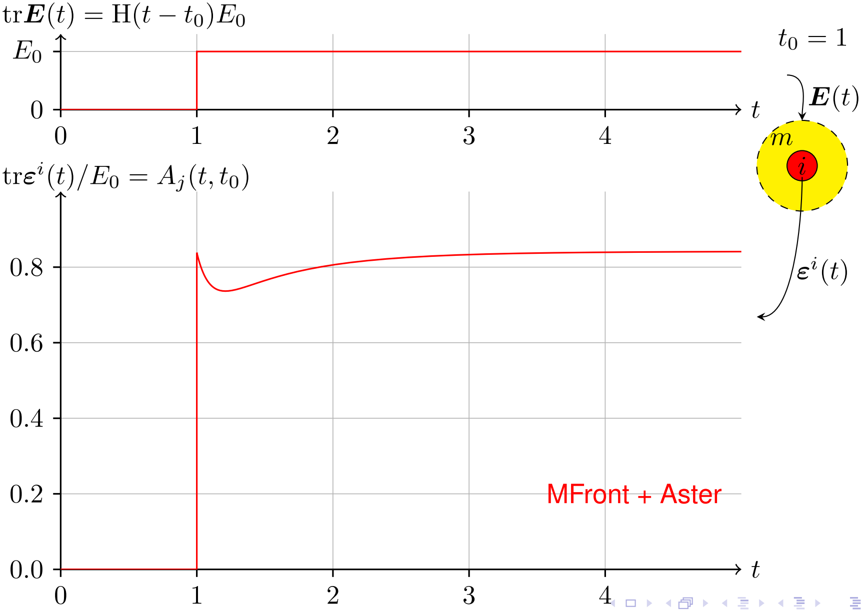
Localisation isotrope déformation (Code_Aster)



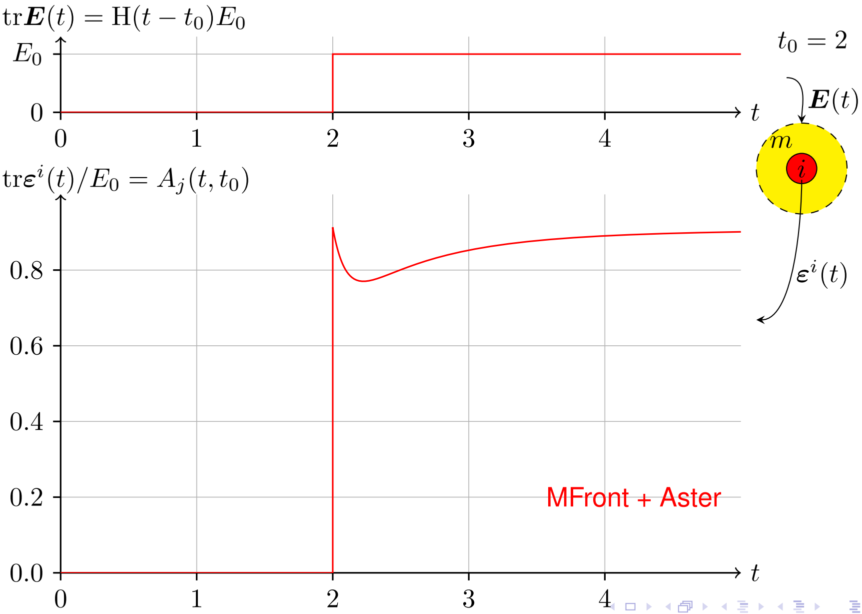
Localisation isotrope déformation (Code_Aster)



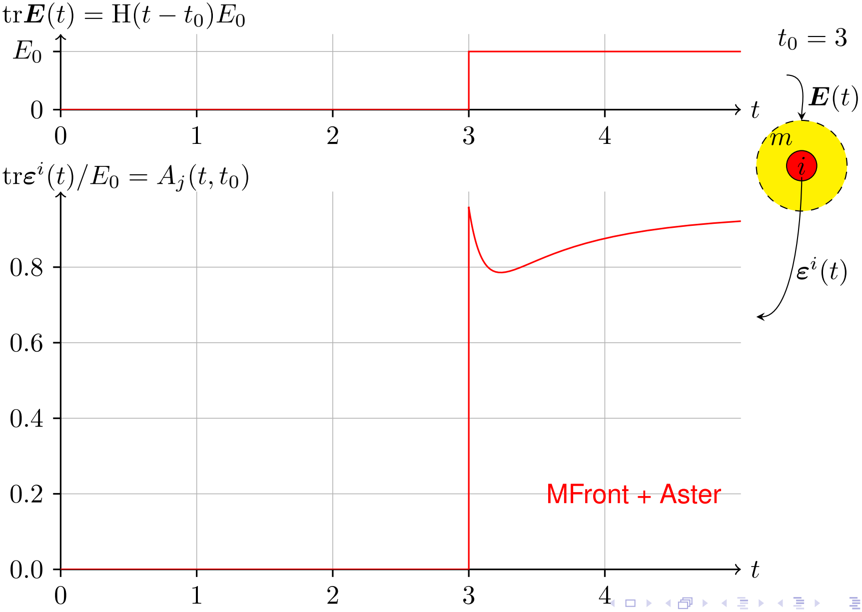
Localisation isotrope déformation (Code_Aster)

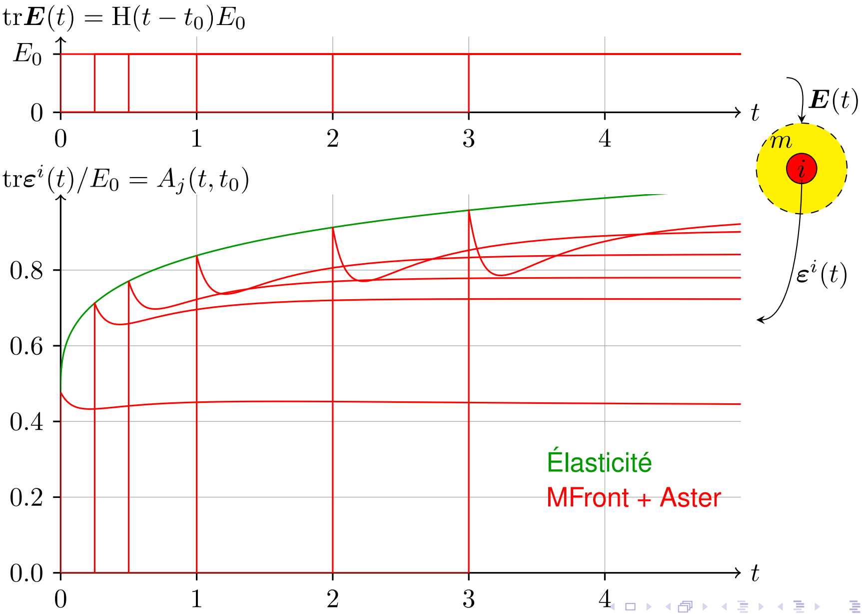


Localisation isotrope déformation (Code_Aster)



Localisation isotrope déformation (Code_Aster)



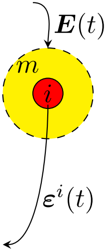


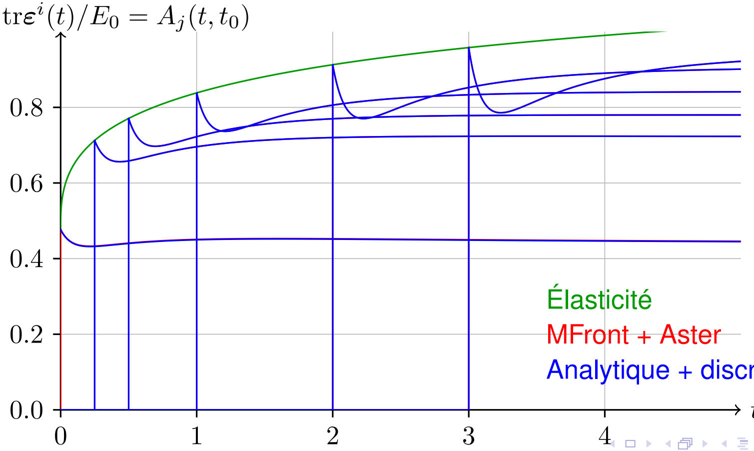
trE(t) = H(t − t0)E0
E0
0
t
0 1 2 3 4
trε^i(t)/E0 = Aj(t, t0)
0.8
0.6
0.4
0.2
0.0
Élasticité
MFront + Aster
E(t)
m
i
ε^i(t)

Solution analytique : équation intégrale de Volterra de 1re espèce

[Sanahuja, IJSS 50, 2013]

$$\int_{t'=-\infty}^{t} \left[3k_i + 4\mu_m\right](t,t') \frac{\partial A_j}{\partial t'}(t',t_0)\,\mathrm{d}t' = \left[3k_m + 4\mu_m\right](t,t_0)$$





Bilan

Avant

- détournement de V_GRANGER_FP, avec champs T, h et fonction de désorption fictifs
- limites : formulation en complaisance seulement, isotrope, coefficient de Poisson constant, une seule fonction de vieillissement

Bilan

Avant

- détournement de V_GRANGER_FP, avec champs T, h et fonction de désorption fictifs
- limites : formulation en complaisance seulement, isotrope, coefficient de Poisson constant, une seule fonction de vieillissement

Après

- formulation en complaisance ou relaxation
- anisotropie
- une fonction de vieillissement par chaîne
- extension à d'autres modèles rhéologiques ou formulations

Bilan

Avant

- détournement de V_GRANGER_FP, avec champs T, h et fonction de désorption fictifs
- limites : formulation en complaisance seulement, isotrope, coefficient de Poisson constant, une seule fonction de vieillissement

Après

- formulation en complaisance ou relaxation
- anisotropie
- une fonction de vieillissement par chaîne
- extension à d'autres modèles rhéologiques ou formulations

Perspectives

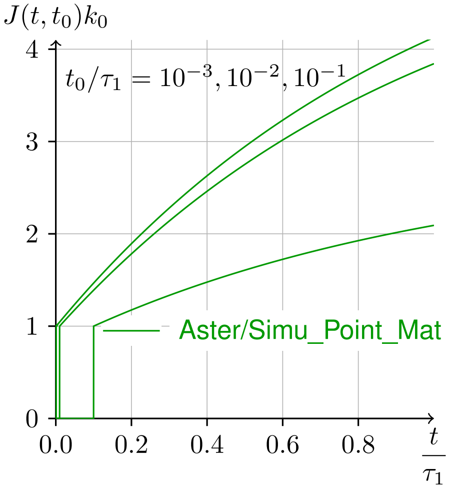
- estimation tenseur de relaxation par homogénéisation
- $\rightarrow$ identification paramètres de la loi MFront
- $\rightarrow$ utilisation en FEM

Bonus: basé sur des faits réels. . .

Code_Aster: loi GRANGER_FP_V

$$J(t,u) = \frac{1}{k_0} + f_a(u) \sum_{i=1}^{n} J_i \left(1 - e^{-\frac{t-u}{\tau_i}}\right)$$

avec $n = 1$, $k_0 = 1$, $J_1 = 5$, $\tau_1 = 1$, $f_a(u) = e^{-u/\tau_a}$, $\tau_a = 0.1$

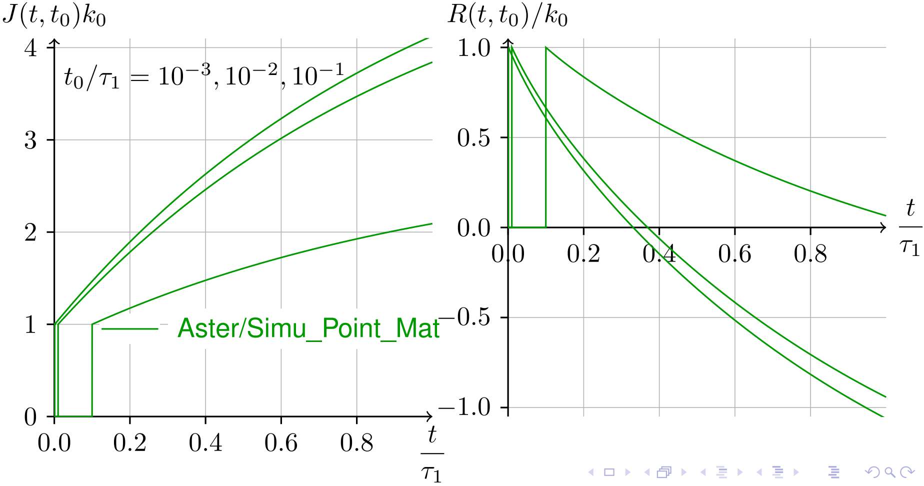


Bonus: basé sur des faits réels. . .

Code_Aster: loi GRANGER_FP_V

$$J(t,u) = \frac{1}{k_0} + f_a(u) \sum_{i=1}^{n} J_i \left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{t-u}{\tau_i}}\right)$$

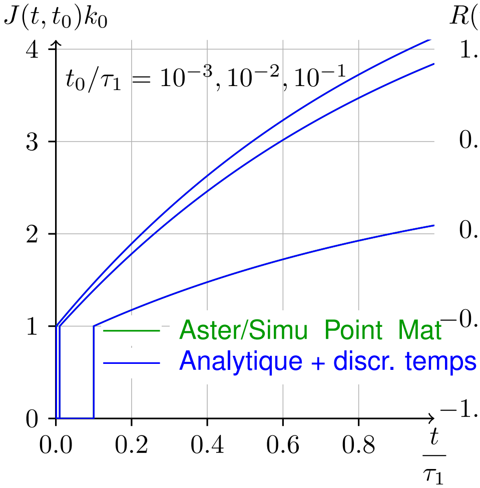
avec $n = 1$, $k_0 = 1$, $J_1 = 5$, $\tau_1 = 1$, $f_a(u) = \mathrm{e}^{-u/\tau_a}$, $\tau_a = 0.1$

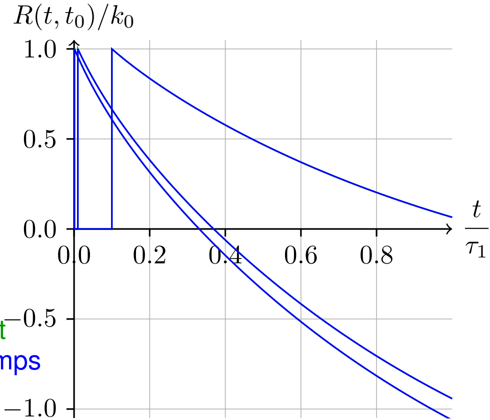


Code_Aster: loi GRANGER_FP_V

$$J(t,u) = \frac{1}{k_0} + f_a(u) \sum_{i=1}^{n} J_i \left(1 - e^{-\frac{t-u}{\tau_i}}\right)$$

avec $n = 1$, $k_0 = 1$, $J_1 = 5$, $\tau_1 = 1$, $f_a(u) = e^{-u/\tau_a}$, $\tau_a = 0.1$



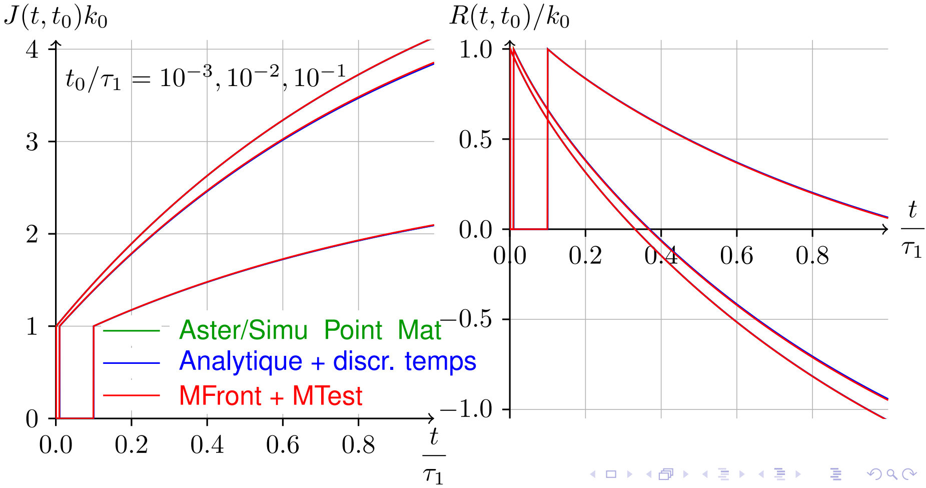


Bonus: basé sur des faits réels. . .

Code_Aster: loi GRANGER_FP_V

$$J(t,u) = \frac{1}{k_0} + f_a(u) \sum_{i=1}^{n} J_i \left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{t-u}{\tau_i}}\right)$$

avec $n = 1$, $k_0 = 1$, $J_1 = 5$, $\tau_1 = 1$, $f_a(u) = \mathrm{e}^{-u/\tau_a}$, $\tau_a = 0.1$



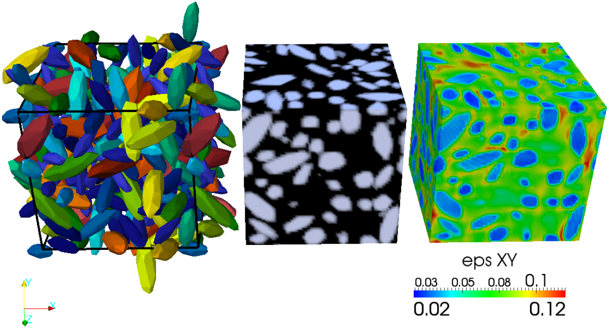
Bonus: pub

the materials ageing institute

20-21 septembre 2017

Workshop: imagerie, transport, résistance, endommagement, fluage, retrait, ...

Session pratique sur outils logiciels



Résumés bienvenus !

julien.sanahuja@edf.fr, contact@themai.org