Guía 3
Sistemas complejos en máquinas paralelas

1er Cuatrimestre 2017

Esta guía tiene como objetivo poner en práctica la realización de discretizaciones de algunas ecuaciones diferenciales parciales por el método de las diferencias finitas, su clasificación y su posterior implementación. Para los siguientes ejercicios se pide realizar las consignas: [1]

a Clasifique la ecuación diferencial: elíptica, parabólica o hiperbólica.

b Discretice por diferencias finitas. Intercale el uso de los métodos: explícito, crank-nicolson y fuertemente implícito.

c Implemente la solución basándose en las rutinas para resolución de sistemas de ecuaciones lineales del práctico anterior.

d Grafique la solución para diferentes tiempos.

Ejercicios:

1. Se tiene una cuerda de 1 m de largo completamente estirada, fijada en sus extremos a idéntica altura. La misma pesa 1g y se estira con una tensión de 40 kgf (1 kgf = 9.80665 N). A 50 cm del extremo izquierdo se tira de la cuerda 7 cm respecto de la posición del equilibrio y se la suelta. La siguiente ecuación diferencial modela el problema:
$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{T}{\mu}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{1}$$
Donde $x \in [0;1]$ y $t > 0$ son las variables espacial y temporal respectivamente. u(x,t) es la distancia que se estira la cuerda de la posición de equilibrio. $\mu = m/L$, es la densidad lineal, m es la masa, y L es el largo de la cuerda. Se desea resolver dicha ecuación en base a los siguiente datos: condiciones de contorno u(x=0,t)=0 y u(x=1,t)=0 para todo t. Condiciones iniciales: recta que pasa por (0,0) y (0.5,0.07), y recta que pasa por (0.5,0.07) y (1,0).

   (a) Calcule la velocidad de propagación de la onda en la cuerda $v = (\frac{T}{\mu})^{0.5}$

   (b) ¿En cuanto tiempo (t_c) se completa un ciclo de la onda?

   (c) A partir de ese valor, calcular la frecuencia ($f = \frac{1}{t_c}$) a la que vibra la cuerda. Comparar con $f = \frac{v}{2L}$

   (d) Probar el ejemplo interactivo de la ecuación de la cuerda vibrante en Wolfram Demostrations Project: `http://demonstrations.wolfram.com/TheVibratingString`
   Para ejecutar la demostración debe instalar Wolrfram CDF Player: `https://www.wolfram.com/cdf-player`

   Nota: prestar atención a las unidades.

2. La ecuación de Burgers es una ecuación diferencial de la mecánica de los fluidos y es equivalente a la ecuación de Navier-Stokes para un fluido incompresible sin el término de presión. La versión 1D de dicha ecuación es la siguiente:
$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} = \nu\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{2}$$
Donde $x \in [-0.5; 0.5]$ y $t > 0$ son las variables espacial y temporal respectivamente. u(x,t) la velocidad del fluido dependiente del espacio y el tiempo. Se desea resolver dicha ecuación en base a los siguiente datos: condiciones de contorno: $u(-0.5,t) = 0.5$, $u(0.5,t) = -0.5$. Condiciones iniciales: $u(x,0) = 0$ con $x \in (-0.5, 0.5)$. Coeficientes de viscosidad $\nu = 0.01$, 0.1 y 1.

   (a) ¿Qué método (explícito, cranck-nicolson, fuertemente implícito) remueve la no-linealidad de la ecuación?

   (b) Analice los resultados para los distintos coeficientes de viscosidad propuestos.

   (c) Analice los resultados para distintas densidades de mallado espacial.

[1]Nota: Se recomienda realizar las implementaciones en C++ y los gráficos en Octave/Matlab.

3. En una placa petri se introduce un gel cuya composición es distinta en cada mitad de dicha placa. En el centro de la misma, por goteo, se mantiene una concentración constante de una determinada sustancia, 2g/l. Dicha sustancia se transporta a través del gel. Se realizan mediciones durante 30 minutos del avance de los frentes (isolíneas) correspondiente a k=1g/l y en base a los datos obtenidos se generan la siguientes funciones:

$$r_{izq}(t) = 1.234\ t^{0.5} \quad y \quad r_{der}(t) = 0.567\ t^{0.5} \tag{3}$$

Donde r_{izq} y r_{der} son los radios [cm] de los frentes izquierdo y derecho respectivamente, t es el tiempo [min]. El fenómeno de transporte escala con $t^{0.5}$, por lo que presenta un régimen difusivo. Se pide realizar una simulación numérica del experimento antes descripto utilizando la ecuación de difusión 2D con coeficiente de difusión variable en el espacio, pero constante en el tiempo.

$$\frac{\partial C}{\partial t} = \nabla \cdot (D \nabla C) \Rightarrow \frac{\partial C(x,y,t)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\Big(D(x,y)\ \frac{\partial C(x,y,t)}{\partial x}\Big) + \frac{\partial}{\partial y}\Big(D(x,y)\ \frac{\partial C(x,y,t)}{\partial y}\Big) \tag{4}$$

Donde x, y y $t > 0$ son las variables espacial y temporal respectivamente. C(x,y,t) la concentración de la sustancia dependiente del espacio y el tiempo.

(a) Establezca las condiciones de contorno e iniciales apropiadas para el problema. Asuma que el diámetro de la placa de petri es suficientemente grande.

(b) Ajuste los coeficientes de difusión para satisfacer los datos experimentales.

4. La ecuación de la onda describe la propagación de éstas a velocidad v. Es una importante EDP usada en diversas áreas de la física, como acústica, electromagnetismo y fluidodinámica. Se pide modelar numéricamente dicha ecuación en 2D, para diferentes velocidades (definidas por usted) y sobre un recinto cuadrado.

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} = v^2 \nabla^2 \Psi \Rightarrow \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} = v^2 \Big(\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2}\Big) \tag{5}$$

Donde $x, y \in [-1, 1]$ y $t > 0$ son las variables espacial y temporal respectivamente. $\Psi(x, y, t)$ la amplitud de la onda dependiente del espacio y el tiempo.

(a) Use como condición inicial una gaussiana centrada en el recinto, $\Psi(x, y) = e^{-(\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2})}$ y en el contorno la condición de dirichlet $\Psi(x, y) = 0$.

(b) Use como condición inicial $\Psi(x, y) = 0$ en todo el dominio y en el contorno la condición de neumann $\nabla\Psi, \hat{\mathbf{n}} = 0$. De forma aleatoria y durante el transcurso de la simulación, perturbe el dominio para generar nuevas ondas estableciendo $\Psi(x_{rand}, y_{rand}) = 1$, y luego aplicando laplace para suavizar, o bien aplicando gaussianas centradas en los diferentes (x_{rand}, y_{rand}).

5. La ecuación de Burgers en su forma vectorial es la siguiente:

$$\frac{\partial v_e}{\partial t} + v_e \cdot \nabla v_e = \nu \nabla^2 v_e \tag{6}$$

Podemos expresar dicha ecuación en su forma bidimensional de la siguiente manera:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} = \nu\ \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) \tag{7}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} = \nu\ \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right) \tag{8}$$

Donde $x, y \in [0; 2]$ y $t > 0$ son las variables espacial y temporal respectivamente. $v_e = (u(x, y, t), v(x, y, t))$ es la velocidad del fluido dependiente del espacio y el tiempo. ν es el coeficiente de viscocidad. Se desea resolver dicha ecuación en base a los siguiente datos: $\nu = 0.01$, condiciones de contorno: $u(x, y, t) = v(x, y, t) = 1$ para todo x, y perteneciente al borde del recinto y $t \geq 0$. Condiciones iniciales: $u(x, y, 0) = 2$ y $v(x, y, 0) = 2$ para $0.5 \leq x \leq 1$ y $0.5 \leq y \leq$1. Sino $u(x, y, 0) = v(x, y, 0) = 1$. Tenga en cuenta la siguiente condición numérica para satisfacer la estabilidad: $\frac{\nu \Delta t}{\Delta x \Delta y} = 0.009$

(a) Realice un gráfico para cada tiempo t_i (definidos por usted) compuesto por $u(x, y, t_i),\ v(x, y, t_i),\ v_e(x, y, t_i)$ y $|v_e(x, y, t_i)|$. Puede usar *subplot* en Octave/Matlab para realizar este tipo de gráficos.

(b) Analice el resultado obtenido, distinga los fenómenos difusivo y convectivo.

6. Las ecuaciones de Navier-Stokes describen el movimiento de los fluidos, particularmente como se relaciona la velocidad, presión, temperatura y densidad de un fluido en movimiento. Son ecuaciones en derivadas parciales no lineales y tienen gran relevancia en el mundo de la física y la ingeniería. Se usan para la representación de flujos en vehículos, en cañerías, sanguíneos, atmósfera, corrientes oceánicas, etc. Actualmente no se dispone de una solución analítica general. En el pasado se hizo uso de aproximaciones y simplificaciones a dichas ecuaciones para poder encontrar soluciones. Recientemente, el alto rendimiento de las computadoras ha sido aprovechado para resolverlas numericamente usando una variedad de métodos como diferencias finitas, volúmenes finitos, elementos finitos y métodos espectrales. Esta área de estudio se conoce como *Computational Fluid Dynamics* o *CFD*.

   Trabajaremos con las ecuaciones de Navier-Stokes para fluidos incompresibles:

$$\nabla \cdot v_e = 0 \tag{9}$$

$$\frac{\partial v_e}{\partial t} + (v_e \cdot \nabla) v_e = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \nu \nabla^2 v_e \tag{10}$$

   Donde (1) es la ecuación de conservación de la masa para densidad ρ constante, y (2) es la ecuación del momento. v_e es la velocidad del fluido y p la presión. ν es el coeficiente de viscocidad. Las ecuaciones anteriores tienen el problema de que no existe una forma obvia de acoplar presión y velocidad. Para solucionar este problema se aplica la divergencia en ambos miembros de (2), se trabaja algebraicamente y se aplica la restricción (1). Se llega entonces a una nueva forma de las ecuaciones anteriores, cuya versión bidimensional es:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \nu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) \tag{11}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} + \nu\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right) \tag{12}$$

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} = -\rho\left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial x} + 2\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}\right) \tag{13}$$

   Donde $x, y \in [0; 2]$ y $t > 0$ son las variables espacial y temporal respectivamente. $u(x, y, t)$ y $v(x, y, t)$ son los componentes x-y de la velocidad del fluido dependiente del espacio y el tiempo. Se desea resolver el *Lid − driven cavity problem* en el cual a un recipiente (2D) que contiene un determinado fluido se le desliza su tapa hacia uno de los lados, provocando cambios en el movimiento y la presión del fluido. Para resolver el problema se cuenta con los siguiente datos: $\nu = 0.1$. ρ=1. Condiciones iniciales $u, v, p = 0$ en todos lados. Condiciones de contorno $u = 1$ en $y = 2$ (la "tapa"). $u, v = 0$ en los demás bordes. $\frac{\partial p}{\partial y} = 0$ en $y = 0$. $p = 0$ en $y = 2$. $\frac{\partial p}{\partial x} = 0$ en $x = 0, 2$

   (a) Analice los cambios de presión en los extremos del recipiente en contacto con la tapa.

   (b) ¿Cuánto tarda el fluido en estabilizarse?

Bibliografía:

- "Analisis Numéricos para Ingeniería". FI. UNMDP. Argentina. `http://www3.fi.mdp.edu.ar/analisis/`
- `http://www.math.ucsb.edu/~grigoryan/124B/lecs/lec18.pdf`
- `https://www.grc.nasa.gov/www/k-12/airplane/nseqs.html`
- `http://nbviewer.ipython.org/github/barbagroup/CFDPython/blob/master/lessons/10_Step_8.ipynb`
- `http://nbviewer.ipython.org/github/barbagroup/CFDPython/blob/master/lessons/13_Step_10.ipynb`
- `http://nbviewer.ipython.org/github/barbagroup/CFDPython/blob/master/lessons/15_Step_11.ipynb`
- `https://en.wikipedia.org/wiki/Navier%E2%80%93Stokes_equations`
- `https://en.wikipedia.org/wiki/Millennium_Prize_Problems`