

Наименьшее общее кратное

Матвей Милаков

November 2025

Назовём *общим кратным* набора чисел a_1, \dots, a_n любое число, делящееся на каждое из a_i . *Наименьшим общим кратным* набора чисел a_1, \dots, a_n называется положительное число m , удовлетворяющее следующим условиям:

1. m – общее кратное для a_1, \dots, a_n
2. если n некоторое другое общее кратное, то n делится на m .

В таком случае, введём обозначение $[a_1, \dots, a_n] = m$.

Утверждение. Если a_1, \dots, a_n – набор ненулевых целых чисел, то $[a_1, \dots, a_n]$ существует и единственен.

Упражнение 1. Докажите следующие тождества на НОК

- $(a, b)[a, b] = a \cdot b$
- $[a, b, c] \cdot (a, b) \cdot (b, c) \cdot (c, a) = (a, b, c) \cdot a \cdot b \cdot c$

Упражнение 2. Докажите, что для любого натурального n выполнено

$$[1, 2, \dots, 2n] = [n+1, n+2, \dots, 2n]$$

Упражнение 3. Найдите все пары целых чисел a и b , для которых выполнено:

$$[a, b] - (a, b) = \frac{a \cdot b}{5}$$

Упражнение 4. Докажите, что если для натуральных чисел a и b выполнено $[a, a+5] = [b, b+5]$, то $a = b$

Упражнение 5. Докажите свойства *дистрибутивности* для НОД и НОК:

$$([a, b], [a, c]) = [a, (b, c)]$$

$$[(a, b), (a, c)] = (a, [b, c])$$

Примечание: проще всего это свойство доказать с помощью основной теоремы арифметики и разложения на простые множители. Но если вы вдруг найдёте другое решение, я буду очень рад его увидеть