Домашнее задание №1

Бардышев Артём Антонович 408221

Задание 1. Найдите остаток от деления

$$6^{93} \cdot 8^{90} + 50^{12} \cdot 90^{10} \quad \text{на } 47.$$

Решение.

1. **Понижение степеней первого множителя.** Сначала заметим, что $6 \cdot 8 = 48 \equiv 1 \pmod{47}$. Это означает, что числа 6 и 8 взаимно обратны по модулю 47, то есть $8 \equiv 6^{-1} \pmod{47}$. Значит, из произведения $6^{93} \cdot 8^{90}$ можно "погасить" большую часть степеней:
$$6^{93} \cdot 8^{90} \equiv 6^{93} \cdot (6^{-1})^{90} = 6^{93-90} = 6^3.$$
Осталось сократить 6^3 по модулю 47: $6^3 = 216$, а $216 = 47 \cdot 4 + 28$, значит $6^{93} \cdot 8^{90} \equiv 28 \pmod{47}$.

2. **Приведение второго множителя.** Числа 50 и 90 тоже удобно заменить остатками: $50 \equiv 3 \pmod{47}$, $90 \equiv -4 \pmod{47}$. Тогда
$$50^{12} \cdot 90^{10} \equiv 3^{12} \cdot (-4)^{10}.$$
Степень 12 у тройки можно считать последовательно: $3^2 = 9$, $3^3 = 27$, $3^4 = 81 \equiv 34$, далее $3^5 \equiv 6$, $3^6 \equiv 18$, $3^7 \equiv 8$, $3^8 \equiv 24$, $3^9 \equiv 25$, $3^{10} \equiv 31$, $3^{11} \equiv 46$, $3^{12} \equiv 12$. Для степени 10 удобно заметить, что $(-4)^{10} = 4^{10}$, а $4^2 = 16$, $4^3 \equiv 64 \equiv 17$, $4^4 \equiv 68 \equiv 21$, $4^5 \equiv 84 \equiv -10$, $4^{10} \equiv (-10)^2 \equiv 100 \equiv 6$. Значит, вторая часть равна $12 \cdot 6 \equiv 72 \equiv 25 \pmod{47}$.

3. **Сборка результата.** Складываем остатки частей: $28 + 25 = 53$, а $53 = 47 + 6$, следовательно итоговый остаток 6.

Ответ: остаток равен 6.

Задание 2. Используя признак Паскаля, проверьте, делится ли число $2131BB9BCA_{13}$ на 18.

Решение.

1. **Подготовка коэффициентов.** Признак Паскаля основан на том, что $13 \equiv -5 \pmod{18}$. Значит $13^2 \equiv 25 \equiv 7$, а $13^3 \equiv -35 \equiv 1 \pmod{18}$. Поэтому каждую третью степень можно заменить единицей, и удобно группировать цифры по три.

2. **Разбиение числа на триплеты.** Записываем число блоками справа налево:
$$213 \,|\, 1BB \,|\, 9BC \,|\, A.$$
Первому блоку соответствует коэффициент 1, второму — -5, третьему — 7, четвёртому снова -5 (коэффициенты повторяются с периодом $1, -5, 7$).

3. **Перевод блоков и вычисление суммы.**

$$\begin{aligned}(213)_{13} &= 2\cdot 13^2 + 1\cdot 13 + 3 = 2\cdot 169 + 13 + 3 = 354,\\ (1BB)_{13} &= 1\cdot 13^2 + 11\cdot 13 + 11 = 169 + 143 + 11 = 323,\\ (9BC)_{13} &= 9\cdot 13^2 + 11\cdot 13 + 12 = 9\cdot 169 + 143 + 12 = 1666,\\ A_{13} &= 10.\end{aligned}$$

   Объединяем с весами:

$$S = 354\cdot 1 - 323\cdot 5 + 1666\cdot 7 - 10\cdot 5 = 354 - 1615 + 11662 - 50 = 10351.$$

   Теперь $10351 \equiv 17 \pmod{18}$.

4. **Вывод.** Остаток 17 не равен нулю, значит исходное число не делится на 18.

Задание 3. Существует ли целое n, при котором дробь

$$\frac{50n^2+70n+4}{100n^2+150n+9}$$

сократима?

Решение. Обозначим числитель и знаменатель через

$$A(n) = 50n^2 + 70n + 4, \qquad B(n) = 100n^2 + 150n + 9,$$

и рассмотрим их НОД: $d = (A(n), B(n))$. Будем понижать пару, как в алгоритме Евклида.

1. **Первый шаг.** Вычитаем удвоенный числитель из знаменателя:

$$(A, B) = (A,\ B - 2A) = \big(A,\ 10n + 1\big).$$

   Теперь вместо громоздких квадратов имеем линейный многочлен $10n + 1$.

2. **Второй шаг.** Снова применяем тот же приём:

$$(A,\ 10n+1) = \big(A - (5n+7)(10n+1),\ 10n+1\big) = (-25,\ 10n+1).$$

   То есть НОД наших многочленов совпадает с НОД чисел 25 и $10n + 1$.

3. **Финал.** Значит $d = (25,\ 10n+1)$. Но $10n + 1 \equiv 1 \pmod 5$ при любом целом n, поэтому общий делитель не может содержать множитель 5. Следовательно, $d = 1$, и исходная дробь несократима.

Задание 4. Докажите для нечётных целых a, b, c тождество

$$\left(\frac{a+b}{2}, \frac{a+c}{2}, \frac{b+c}{2}\right) = (a, b, c).$$

Доказательство.

1. **Корректность выражений.** Поскольку a, b, c нечётные, их попарные суммы чётны, значит каждое из чисел $\frac{a+b}{2}$, $\frac{a+c}{2}$, $\frac{b+c}{2}$ действительно целое.

2. **Покажем, что левый НОД делит правый.** Обозначим $g = \left(\frac{a+b}{2}, \frac{a+c}{2}, \frac{b+c}{2}\right)$. Выразим исходные числа через половины сумм:

$$a = \frac{a+b}{2} + \frac{a+c}{2} - \frac{b+c}{2}, \qquad b = \frac{a+b}{2} + \frac{b+c}{2} - \frac{a+c}{2},$$

   и т.д. Линейные комбинации показывают, что g делит каждое из a, b, c. Значит $g \mid (a, b, c)$.

3. **Покажем обратное деление.** Пусть теперь $d = (a, b, c)$. Тогда d делит каждое из a, b, c, а значит делит их суммы. Поскольку суммы чётные, деление на 2 не нарушает целостности, и d делит каждую половину суммы. Значит $d \mid g$.

4. **Заключение.** Мы получили взаимное деление $g \mid d$ и $d \mid g$, откуда $g = d$, что и требовалось.