Системы счисления, признаки делимости и наибольший общий делитель

Матвей Милаков

October 2025

1 Системы счисления и признаки делимости

Сформулируем в общей форме *признак делимости Паскаля.*

Пусть b – натуральное число (основание системы счисления), $q \neq 0$ – целое, $a = \overline{a_k \dots a_0}$ – число, записанное в b-ичной системе счисления. Обозначим $r_i = b^i \mod q$. Тогда

Утверждение (Признак Паскаля)**.** Число a делится на q в том и только в том случае, когда $r_k \cdot \overline{a_k} + \dots + r_0 \cdot \overline{a_0}$ делится на q.

Большинство используемых нами признаков делимости выводятся из признака Паскаля, в частности, признак делимости на 3 и на 9, а также признаки делимости на степени 2, 5 и 10

Упражнение 1. С помощью признака делимости Паскаля установите признаки делимости на числа 11, 7, 27, 37.

Упражнение 2. Проверьте справедливость следующих утверждений:

1. $1234567_8 \vdots 7$
2. $FD80ABEEA1_{16} \vdots 17$
3. $9876543210FB_{17} \vdots 7$

Упражнение 3. Может ли число, записываемое при помощи 100 нулей, 100 единиц и 100 двоек, быть полным квадратом?

Упражнение 4. Докажите, что число $\overline{abcd}$ делится на 99 тогда и только тогда, когда число $\overline{ab} + \overline{cd}$ делится на 99.

Упражнение 5. Найдите все числа вида $\overline{xy9z}$, которые делятся на 132.

Упражнение 6. Найдите все числа вида $\overline{13xy45z}$, которые делятся на 792.

Упражнение 7. При каком минимальном x число $123x5_{15} + 1x233_{15}$ делится на 14

Упражнение 8. Найдите хотя бы два x таких, что $(x-1) \mid 12444_x$.

Упражнение 9. Опишите все системы счисления, в которых число делится на 2 тогда и только тогда, когда сумма его цифр делится на 2. Решите задачу, заменив модуль 2 произвольным натуральным числом $m > 1$.

Упражнение 10. Докажите, что если необходимый и достаточный признак делимости, выражающийся через свойства цифр числа, не зависит от порядка цифр, то это признак делимости на 3 или на 9.

Упражнение 11. Существует следующий способ проверить, делится ли данное число N на 19:

1. отбрасываем последнюю цифру у числа N
2. прибавляем к полученному числу произведение отброшенной цифры на 2
3. с полученным числом проделываем операции 1 и 2 до тех пор, пока не останется число, меньшее или равное 19
4. если остается 19, то $19 \mid N$, в противном случае $19 \nmid N$.

Докажите, что этот признак делимости действительно работает

Упражнение 12. Найдите наименьшее основание системы счисления, в которой одновременно имеют место следующие признаки делимости:

1. число делится на 5 тогда и только тогда, когда сумма его цифр делится на 5;
2. число делится на 7 тогда и только тогда, когда число, составленное из двух его последних цифр, делится на 7.

Рассмотрим число N, записанное в десятичной системе счисления. Найдем сумму цифр этого числа, потом сложим цифры, которыми записана сумма и т.д. Будем продолжать этот процесс, пока в конце концов не получим однозначное число, которое называют *цифровым корнем числа* N.

Упражнение 13. Докажите, что цифровой корень сравним с N по модулю 9.

Упражнение 14. Какие цифровые корни бывают у полных квадратов и полных кубов?

Упражнение 15. Последовательность $\{x_n\}$ устроена следующим образом: $x_1 = 3^{2001}$, а каждый следующий член равен сумме цифр предыдущего. Найдите x_5.

Подсказка: как быстро убывает цифровой корень?

2 Наибольший общий делитель

Для целых чисел a и d будем писать $d \mid a$, если d делит a, и $d \nmid a$ иначе. Число d называется *общим делителем* чисел $a_1, \dots, a_n$, если $d \mid a_i$ для всякого $i \in \{1, \dots, n\}$. Положительное число d назовём *наибольшим общим делителем* чисел $a_1, \dots, a_n$, когда выполнены два условия:

- d – общий делитель $a_1, \dots, a_n$
- если c – другой общий делитель $a_1, \dots, a_n$, тогда $c \mid d$

НОД чисел $a_1, \dots, a_n$ обозначается как $(a_1, \dots a_n)$.

Теорема. *Для любых ненулевых чисел $a_1, \dots, a_n$ существует их наибольший общий делитель. Более того, существуют некоторые целые числа b_i, такие что $\sum_{i=1}^{n} a_i b_i = (a_1, \dots, a_n)$ (линейное представление НОД).*

Упражнение 16. Основные свойства НОД:

1. $(a, b) = a$ тогда и только тогда, когда $a \mid b$
2. $(ma, mb) = m(a, b)$ для любого целого числа $m \neq 0$
3. $(a, b) = (a + nb, b)$ для любого целого числа n
4. $(a, b) = (a \bmod b, b)$
5. $(a, (b, c)) = ((a, b), c) = (a, b, c)$

Упражнение 17. Найдите НОД чисел: а) 72 и 108; б) 168 и 180; в) 360 и 1050; г) 270, 450 и 555

Упражнение 18. Найдите НОД чисел

1. 11 111 111 и $\underbrace{11\dots11}_{100}$
2. $\underbrace{11\dots11}_{n}$ и $\underbrace{11\dots11}_{m}$

Упражнение 19. Докажите, что (ab, ac, bc) делится на $(a, b, c)^2$

Упражнение 20. Может ли наибольший общий делитель двух чисел быть строго больше их разности?

Числа a и b называются *взаимно простыми*, если $(a, b) = 1$, то есть, если у a и b нет общих делителей, кроме ± 1.

Упражнение 21. Свойства взаимно простых чисел

- $(a, b) = 1$ тогда и только тогда, когда существуют m и n такие, что $an + bm = 1$
- $(a, bc) = 1$ равносильно $(a, b) = 1$ и $(a, c) = 1$
- Если $(a, b) = 1$ и $a \mid bc$, тогда $a \mid c$

Упражнение 22. Докажите, что дробь $\frac{12n+1}{30n+1}$ несократима

Упражнение 23. a и b – натуральные числа. Известно, что $a^2 + b^2$ делится на ab. Докажите, что $a = b$.