

# Наименьшее общее кратное

Матвей Милаков

November 2025

Назовём *общим кратным* набора чисел  $a_1, \dots, a_n$  любое число, делящееся на каждое из  $a_i$ . *Наименьшим общим кратным* набора чисел  $a_1, \dots, a_n$  называется положительное число  $m$ , удовлетворяющее следующим условиям:

1.  $m$  – общее кратное для  $a_1, \dots, a_n$
2. если  $n$  некоторое другое общее кратное, то  $n$  делится на  $m$ .

В таком случае, введём обозначение  $[a_1, \dots, a_n] = m$ .

**Утверждение.** Если  $a_1, \dots, a_n$  – набор ненулевых целых чисел, то  $[a_1, \dots, a_n]$  существует и единственен.

**Упражнение 1.** Докажите следующие тождества на НОК

- $(a, b)[a, b] = a \cdot b$
- $[a, b, c] \cdot (a, b) \cdot (b, c) \cdot (c, a) = (a, b, c) \cdot a \cdot b \cdot c$

**Упражнение 2.** Докажите, что для любого натурального  $n$  выполнено

$$[1, 2, \dots, 2n] = [n + 1, n + 2, \dots, 2n]$$

**Упражнение 3.** Найдите все пары целых чисел  $a$  и  $b$ , для которых выполнено:

$$[a, b] - (a, b) = \frac{a \cdot b}{5}$$

**Упражнение 4.** Докажите, что если для натуральных чисел  $a$  и  $b$  выполнено  $[a, a + 5] = [b, b + 5]$ , то  $a = b$

**Упражнение 5.** Докажите свойства *дистрибутивности* для НОД и НОК:

$$([a, b], [a, c]) = [a, (b, c)]$$

$$[(a, b), (a, c)] = (a, [b, c])$$

*Примечание:* проще всего это свойство доказать с помощью основной теоремы арифметики и разложения на простые множители. Но если вы вдруг найдёте другое решение, я буду очень рад его увидеть