Линейные диофантовы уравнения и простые числа

Матвей Милаков

November 2025

1 Линейные диофантовы уравнения

Упражнение 1. Решите линейные диофантовы уравнения:

1. $45x - 37y = 25$
2. $19x + 95y = 1995$
3. $10x + 2y + 18z = 7$
4. $F_{n+1}x + F_n y = 1$

Упражнение 2. Решите линейное сравнение:

1. $72x \equiv 2 \pmod{10}$
2. $385x \equiv 231 \pmod{15}$
3. $152x \equiv 24 \pmod{16}$

Упражнение 3. Разделите:

- 59 на 109 в $\mathbb{Z}/89\mathbb{Z}$
- 10 на 29 в $\mathbb{Z}/17\mathbb{Z}$

Упражнение 4. Доказать, что любое целое число удовлетворяет, по крайней мере, одному из сравнений:

- $x \equiv 0 \pmod 2$
- $x \equiv 0 \pmod 3$
- $x \equiv 1 \pmod 4$
- $x \equiv 1 \pmod 6$
- $x \equiv 11 \pmod{12}$

2 Простые и составные числа

Упражнение 5. Докажите, что остаток от деления любого простого числа на 30 всегда является простым числом.

Упражнение 6. Найдите все пары простых чисел p и q, для которых выполнено:

$$p^2 - 2q^2 = 1$$

Упражнение 7. Докажите, что составное число n всегда имеет делитель не больше чем $\sqrt{n}$.

Упражнение 8. При каких n число $n^4 + 4$ составное?

Упражнение 9. Пара простых чисел p и q называются *простыми числами-близнецами*, если $|p - q| = 2$. Найдите все возможные простые числа *тройняшки*, то есть, тройки простых чисел вида p, $p + 2$ и $p + 4$

Благодаря основной теореме арифметики мы знаем, что любое натуральное число единственным образом (с точностью до перестановки слагаемых) раскладывается в произведение простых чисел. Это позволяет совершенно иначе взглянуть на НОД и НОК

Упражнение 10. Назовём *p-показателем* числа a максимальное n, для которого p^n делит a, и введём обозначение $\{a\}_p = n$. Докажите следующие формулы:

- $\{(a, b)\}_p = \min(\{a\}_p, \{b\}_p)$
- $\{[a, b]\}_p = \max(\{a\}_p, \{b\}_p)$

С помощью этих формул и основной теоремы арифметики докажите законы дистрибутивности для НОД и НОК:

- $([a, b], [a, c]) = [a, (b, c)]$
- $[(a, b), (a, c)] = (a, [b, c])$

3 Вокруг теоремы Евклида

Упражнение 11 (Теорема Евклида)**.** Докажите, что существует бесконечно много простых чисел

Упражнение 12. Докажите, что существует бесконечно много простых чисел вида $4k + 3$.

Упражнение 13. Докажите неравенство $p_{n+1} < p_1 \cdot \ldots \cdot p_n$.

Упражнение 14 (Не очень интересная задача)**.** Верно ли, что все числа вида $p_1 \cdot \ldots \cdot p_n + 1$ являются простыми?

Упражнение 15. Обозначим n-ое по порядку простое число как p_n.

- Докажите, что $p_n > 2n$ при $n \geqslant 5$.
- Для каких n верно $p_n > 3n$?