Наибольший общий делитель

Матвей Милаков

October 2025

1 Наибольший общий делитель

Для целых чисел a и d будем писать $d \mid a$, если d делит a, и $d \nmid a$ иначе. Число d называется *общим делителем* чисел $a_1, \ldots, a_n$, если $d \mid a_i$ для всякого $i \in \{1, \ldots, n\}$. Положительное число d назовём *наибольшим общим делителем* чисел $a_1, \ldots, a_n$, когда выполнены два условия:

- d – общий делитель $a_1, \ldots, a_n$
- если c – другой общий делитель $a_1, \ldots, a_n$, тогда $c \mid d$

НОД чисел $a_1, \ldots, a_n$ обозначается как $(a_1, \ldots a_n)$.

Теорема. *Для любых ненулевых чисел $a_1, \ldots, a_n$ существует их наибольший общий делитель. Более того, существуют некоторые целые числа b_i, такие что $\sum_{i=1}^{n} a_i b_i = (a_1, \ldots, a_n)$ (линейное представление НОД).*

Далее в задачах нам понадобится простой, но оттого не менее важный принцип, называемый **правилом 2-из-3**: если в уравнении

$$a + b = c$$

любые два из трёх чисел делятся на n, то и оставшееся делится на n

Упражнение 1. Основные свойства НОД:

1. $(a, b) = a$ тогда и только тогда, когда $a \mid b$
2. $(m \cdot a, m \cdot b) = |m| \cdot (a, b)$ для любого целого числа $m \neq 0$
3. $(a, b) \mid (a, m \cdot b)$ для любого целого m
4. $(a, b) = (a + n \cdot b, b)$ для любого целого числа n
5. $(a, b) = (a \bmod b, b)$
6. $(a, (b, c)) = ((a, b), c) = (a, b, c)$

Вопрос. По пятому свойству при вычислении НОД мы можем заменить одно из чисел на его остаток при делении на второе из них. Давайте раз за разом совершать такое действие. Остановимся ли мы когда-то и почему? Если да, то какие два числа в конце мы получим?

Упражнение 2. Найдите НОД чисел: а) 72 и 108; б) 168 и 180; в) 360 и 1050; г) 270, 450 и 555

Упражнение 3. Найдите НОД чисел

1. 11 111 111 и $\underbrace{11\ldots11}_{100}$
2. $\underbrace{11\ldots11}_{n}$ и $\underbrace{11\ldots11}_{m}$
3. $2^{30}-1$ и $2^{40}-1$

Упражнение 4. Докажите, что (ab, ac, bc) делится на $(a, b, c)^2$

Упражнение 5. Может ли наибольший общий делитель двух чисел быть строго больше их разности?

Упражнение 6. Последовательность, задаваемая рекуррентным соотношением $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ с начальными условиями $F_0 = 0, F_1 = 1$ называется последовательностью *чисел Фибоначчи.* Чему равен наибольший общий делитель любых двух последовательных чисел Фибоначчи?

Числа a и b называются *взаимно простыми*, если $(a, b) = 1$, то есть, если у a и b нет общих делителей, кроме ±1.

Упражнение 7. Свойства взаимно простых чисел

- $(a, b) = 1$ тогда и только тогда, когда существуют m и n такие, что $an + bm = 1$
- $(a, bc) = 1$ равносильно $(a, b) = 1$ и $(a, c) = 1$
- Если $(a, b) = 1$ и $a \mid bc$, тогда $a \mid c$
- Если $a \mid c$ и $b \mid c$, $(a, b) = 1$, тогда $ab \mid c$

Упражнение 8. Дробь $\frac{a}{b}$ несократима, если у a и b нет нетривиальных общих делителей.

1. Докажите, что $\frac{12n+1}{30n+1}$ несократима для любых n
2. Докажите, что $\frac{n^2-n+1}{n^2+1}$ несократима для любых n
3. Для каких n сократима дробь $\frac{n^2+2n+4}{n^2+n+3}$?

Упражнение 9. a и b – взаимно простые натуральные числа. Докажите, что $(a+b, a^2+b^2)$ равняется либо 1, либо 2.

Подсказка: подумайте, как воспользоваться свойством 3 в первом упражнении

Упражнение 10. a и b – натуральные числа. Известно, что a^2+b^2 делится на ab. Докажите, что $a = b$.