$$T_{i,j,k}^{n+1} = T_{i,j,k}^{n} + \frac{\tau_n}{h^2}\{$$
$$К_{i+\frac{1}{2},j,k}^{n}\left(T_{i+1,j,k}^{n} - T_{i,j,k}^{n}\right) - К_{i-\frac{1}{2},j,k}^{n}\left(T_{i,j,k}^{n} - T_{i-1,j,k}^{n}\right) +$$
$$+К_{i,j+\frac{1}{2},k}^{n}\left(T_{i,j+1,k}^{n} - T_{i,j,k}^{n}\right) - К_{i,j+\frac{1}{2},k}^{n}\left(T_{i,j,k}^{n} - T_{i,j-1,k}^{n}\right) +$$
$$+К_{i,j,k+\frac{1}{2}}^{n}\left(T_{i,j,k+1}^{n} - T_{i,j,k}^{n}\right) - К_{i,j,k+\frac{1}{2}}^{n}\left(T_{i,j,k}^{n} - T_{i,j,k-1}^{n}\right)\} + q(n,i,j,k,T)$$

$$К_{i+\frac{1}{2},j,k}^{n} = К(T_{i\pm\frac{1}{2},j,k})$$

$$К_{i,j+\frac{1}{2},k}^{n} = К(T_{i,j+\frac{1}{2},k})$$

$$К_{i,j,k+\frac{1}{2}}^{n} = К(T_{i,j,k+\frac{1}{2}})$$

$$T_{i\pm\frac{1}{2},j,k} = \frac{T_{i\pm\frac{1}{2},j,k} + T_{i,j,k}}{2}$$

$$\tau_n = К * \frac{h^2}{2 * K_{max}}$$

$$K \sim 0.9 \sim 1$$

$$K_{max} = MAX_{i,j,k}(K(T_{i,j,k}))$$

Общее уравнение теплопроводности двумерное

$$T_{i,j}^{n+1} = T_{i,j}^{n} + \frac{\tau}{h^2}\, K(K(T_{i+1,j}^{n} - 2T_{i,j}^{n} + T_{i-1,j}^{n}$$

Расчет остаточного напряжения на полубесконечном валике, вектор смеще9ниея YZ

Типичные для СЛП конфигурации переплавленных валиков показаны на рис. 2. Важно, что нижняя часть валика заходит в подложку, обеспечивая металлургический контакт переплавляемого порошка с подложкой. Геометрия (*а*) соответствует предельно малому количеству порошка, по сравнению с переплавляемым материалом подложки, а в геометриях (*б*) и (*в*) доля порошка последовательно возрастает. В направлении валика задача однородна, а смещение среды отсутствует. Тензор деформаций выражается через вектор смещения в плоскости (YZ), $\mathbf{u} = (u_y, u_z)$:

$$\varepsilon_{xx} = \varepsilon_{xy} = \varepsilon_{xz} = 0, \quad \varepsilon_{yy} = \frac{\partial u_y}{\partial y}, \quad \varepsilon_{zz} = \frac{\partial u_z}{\partial z}, \quad \varepsilon_{yz} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y}\right). \qquad (10)$$

Баланс сил в направлениях Y и Z даёт следующие два уравнения в частных производных:

$$\frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial y} = 0, \qquad (11)$$

подстановка в которые закона Гука в виде (1) либо (2) приводит к системе уравнений относительно смещений $\mathbf{u}$. Пример численного решения этой системы для конфигураций, показанных на рис. 2, *а*,

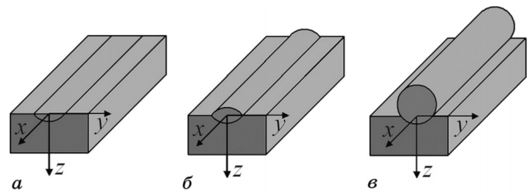


Рис. 2. Отдельные переплавленные валики на полубесконечной подложке.

Уравнение частных производных для полубеконечной подложке

$$\varepsilon_{xx} = \varepsilon_{xy} = \varepsilon_{xz} = 0, \qquad \varepsilon_{yy} = \frac{\partial u_y}{\partial y}, \qquad \varepsilon_{zz} = \frac{\partial u_z}{\partial z}, \qquad \varepsilon_{yz} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y}\right)$$

$$\frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial z} = 0, \qquad \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial y} = 0$$

$$\sigma_{\beta\gamma} = \lambda\Theta\delta_{\beta\gamma} + 2\mu\varepsilon_{\beta\gamma} + 3sk\delta_{\beta\gamma}$$

$$s = \int_{T_a}^{T_m} \alpha dT$$

После подстановки получаем

$$\frac{\partial\left(\lambda\Theta\delta_{yy} + 2\mu\varepsilon_{yy} + 3\left(\int_{T_a}^{T_m} \alpha dT\right)k\delta_{yy}\right)}{\partial y} + \frac{\partial\left(\lambda\Theta\delta_{yz} + 2\mu\varepsilon_{yz} + 3\left(\int_{T_a}^{T_m} \alpha dT\right)k\delta_{yz}\right)}{\partial z} = 0,$$

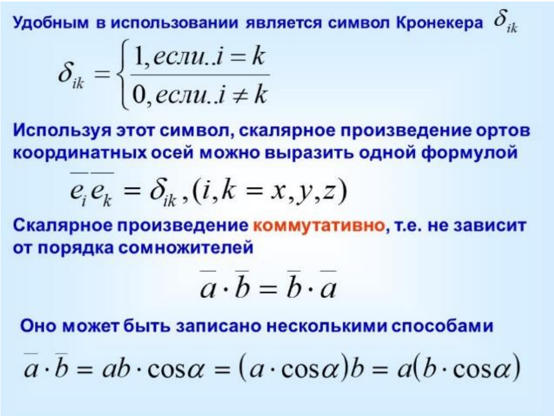
$$\frac{\partial\left(\lambda\Theta\delta_{zz} + 2\mu\varepsilon_{zz} + 3\left(\int_{T_a}^{T_m} \alpha dT\right)k\delta_{zz}\right)}{\partial z} + \frac{\partial\left(\lambda\Theta\delta_{yz} + 2\mu\varepsilon_{yz} + 3\left(\int_{T_a}^{T_m} \alpha dT\right)k\delta_{yz}\right)}{\partial y} = 0$$

Подставим ε

$$\frac{\partial\left(\lambda\Theta\delta_{yy} + 2\mu\frac{\partial u_y}{\partial y} + 3\left(\int_{T_a}^{T_m} \alpha dT\right)k\delta_{yy}\right)}{\partial y} + \frac{\partial\left(\lambda\Theta\delta_{yz} + 2\mu\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y}\right) + 3\left(\int_{T_a}^{T_m} \alpha dT\right)k\delta_{yz}\right)}{\partial z} = 0,$$

$$\frac{\partial\left(\lambda\Theta\delta_{zz} + 2\mu\frac{\partial u_z}{\partial z} + 3\left(\int_{T_a}^{T_m} \alpha dT\right)k\delta_{zz}\right)}{\partial z} + \frac{\partial\left(\lambda\Theta\delta_{yz} + 2\mu\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y}\right) + 3\left(\int_{T_a}^{T_m} \alpha dT\right)k\delta_{yz}\right)}{\partial y} = 0$$

Преобразование после подстановки символа кронекера



$$\frac{\partial(\lambda\Theta + 2\mu\frac{\partial u_y}{\partial y} + 3\left(\int_{T_a}^{T_m}\alpha dT\right)k)}{\partial y} + \frac{\partial(2\mu\frac{1}{2}(\frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y}))}{\partial z} = 0,$$

$$\frac{\partial(\lambda\Theta + 2\mu\frac{\partial u_z}{\partial z} + 3\left(\int_{T_a}^{T_m}\alpha dT\right)k)}{\partial z} + \frac{\partial(2\mu\frac{1}{2}(\frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y}))}{\partial y} = 0$$

Подстановка тензора напряжения в уравнение (2)

$$\sigma_{\beta\gamma} = \lambda\Theta\delta_{\beta\gamma} + 2\mu\varepsilon_{\beta\gamma} + 3(\int_{T_a}^{T_m}\alpha dT)k\delta_{\beta\gamma}$$

При

Тензор деформаций выражается через вектор смещения в плоскости (YZ), u = (uy, uz):

$$\varepsilon_{xx} = \varepsilon_{xy} = \varepsilon_{xz} = 0, \qquad \varepsilon_{yy} = \frac{\partial u_y}{\partial y}, \qquad \varepsilon_{zz} = \frac{\partial u_z}{\partial z}, \qquad \varepsilon_{yz} = \frac{1}{2}(\frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y})$$

$\sigma_{xx} = \lambda\Theta\delta_{xx} + 3\left(\int_{T_a}^{T_m}\alpha dT\right)k\delta_{xx}$

$\sigma_{xy} = \lambda\Theta\delta_{xy} + 3(\int_{T_a}^{T_m}\alpha dT)k\delta_{xy}$

$\sigma_{xz} = \lambda\Theta\delta_{xz} + 3(\int_{T_a}^{T_m}\alpha dT)k\delta_{xz}$

$$\sigma_{yy} = \lambda\Theta\delta_{yy} + 2\mu(\frac{\partial u_y}{\partial y}) + 3(\int_{T_a}^{T_m}\alpha dT)k\delta_{yy}$$

$$\sigma_{zz} = \lambda\Theta\delta_{zz} + 2\mu(\frac{\partial u_z}{\partial z}) + 3(\int_{T_a}^{T_m}\alpha dT)k\delta_{zz}$$

$$\sigma_{yz} = \lambda\Theta\delta_{yz} + 2\mu(\frac{1}{2}(\frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y})) + 3(\int_{T_a}^{T_m}\alpha dT)k\delta_{yz}$$

$\delta_{\beta\gamma}$ − символ Кронекера

λ − первый параметр Ляме

μ — модуль сдвига

$\theta = \varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz}$ – объёмная деформация

$s = \int_{T_a}^{T_m} \alpha dT$ — линейная усадка

α — коэф теплового расширения

Коэф тепловоого расширения

$$\xi_x = -\frac{\partial \alpha}{\partial x}$$

$$\xi_{i,j,k}^{x} = -h^2 \nabla \alpha$$

$$\nabla \varphi = \left(\bar{i}\, \frac{\partial}{\partial x} + \bar{j}\, \frac{\partial}{\partial y} + \bar{k}\, \frac{\partial}{\partial z} \right) \varphi = \bar{i}\, \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \bar{j}\, \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \bar{k}\, \frac{\partial \varphi}{\partial z}.$$

Кси вектор смещения

§ 6. Деформации с изменением температуры

Рассмотрим теперь деформации, сопровождающиеся изменением температуры тела; изменение температуры может происходить как в результате самого процесса деформирования, так и по посторонним причинам.

Будем считать недеформированным состояние тела при отсутствии внешних сил при некоторой заданной температуре T_0. Если тело находится при температуре T, отличной от T_0, то даже при отсутствии внешних сил оно будет, вообще говоря, деформировано в связи с наличием теплового расширения. Поэтому в разложение свободной энергии $F(T)$ будут входить не только квадратичные, но и линейные по тензору деформации члены. Из компонент тензора второго ранга u_{ik} можно составить всего только одну линейную скалярную величину — сумму u_{ll} его диагональных компонент. Далее мы будем предполагать, что сопровождающее деформацию изменение $T - T_0$ температуры мало. Тогда можно считать, что коэффициент при u_{ll} в разложении F (который должен обращаться в нуль при $T = T_0$) просто пропорционален разности $T - T_0$. Таким образом, получим для свободной энергии следующую формулу (заменяющую (4,3)):

$$F(T) = F_0(T) - K\alpha(T - T_0)u_{ll} + \mu\left(u_{ik} - \frac{1}{3}\delta_{ik}u_{ll}\right)^2 + \frac{K}{2}u_{ll}^2, \tag{6,1}$$

где коэффициент при $T - T_0$ написан в виде $-K\alpha$. Величины μ, K, α надо считать здесь постоянными; учет их зависимости от температуры привел бы к величинам высшего порядка малости.

Дифференцируя F по u_{ik}, получим тензор напряжений. Имеем

$$\sigma_{ik} = -K\alpha(T - T_0)\delta_{ik} + Ku_{ll}\delta_{ik} + 2\mu(u_{ik} - {}^1\!/_3\delta_{ik}u_{ll}). \tag{6,2}$$

Первый член здесь представляет собой дополнительные напряжения, связанные с изменением температуры тела. При свободном тепловом расширении тела (при отсутствии внешних сил) внутренние напряжения должны отсутствовать. Приравнивая σ_{ik} нулю, найдем, что u_{ik} имеет вид $\mathrm{const}\cdot\delta_{ik}$, причем

$$u_{ll} = \alpha(T - T_0). \tag{6,3}$$

Но u_{ll} представляет собой относительное изменение объема при деформации. Таким образом, α является не чем иным, как *коэффициентом теплового расширения* тела.

Среди различных (в термодинамическом смысле) типов деформаций существенны изотермические и адиабатические деформации. При изотермических деформациях температура тела не меняется. Соответственно этому в (6,1) надо положить $T = T_0$, и мы возвращаемся к обычным формулам; коэффициенты K и μ можно поэтому назвать *изотермическими модулями*.

Кси вектор деформации для визуализации

$$\xi^x_{i,j,k} = -h^2 \frac{\partial(\alpha_0 \Delta T)}{\partial x} = -h \frac{\hat{\alpha}_{i+1,j,k} - \hat{\alpha}_{i-1,j,k}}{2} \tag{1}$$

$$\xi^y_{i,j,k} = -h^2 \frac{\partial(\alpha_0 \Delta T)}{\partial y} = -h \frac{\hat{\alpha}_{i,j+1,k} - \hat{\alpha}_{i,j-1,k}}{2}$$

$$\xi^z_{i,j,k} = -h^2 \frac{\partial(\alpha_0 \Delta T)}{\partial z} = -h \frac{\hat{\alpha}_{i,j,k+1} - \hat{\alpha}_{i,j,k-1}}{2}$$

$$\hat{\alpha}_{i,j,k} = \alpha_0(T) * \Delta T_{i,j,k}$$

$$\Delta T_{i,j,k} = T_{i,j,k} - T_0$$

$\alpha_0(T) =$
сейчас $const$, потом функция изменения теплового расширения

Если $\xi_{i,j,k} > \xi_{fatal}$, то $\xi_{i,j,k}$ не изменяется при остывании