

GEOMETRIE ȘI ALGEBRĂ LINIARĂ

Curs 1

Matrice, calcul matriceal; Determinanți

Matricea este un tablou dreptunghiular de elemente ce aparțin unui inel comutativ, în particular unui corp comutativ. Vom lucra peste corpul numerelor reale, \mathbb{R} .

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = (a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}} ; a_{i,j} \in \mathbb{R}$$

Are linii și coloane. Mulțimea matricelor cu m linii și n coloane se notează cu $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$, \mathbb{R} fiind un inel comutativ. Matricele se pot aduna și înmulți cu scalari. Fie $A, B \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$, $A = (a_{i,j})$, $B = (b_{i,j})$, definim suma $A + B = (a_{i,j} + b_{i,j})$, matricea obținută prin adunarea pe componente. Înmulțirea cu un scalar se face înmulțind fiecare componentă cu respectivul scalar: $\alpha \cdot A = \alpha \cdot (a_{i,j}) = (\alpha \cdot a_{i,j})$

$(\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R}), +)$ formează un grup abelian. Elementul neutru pentru adunarea matricelor este matricea $0_{m,n} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$. Opusa unei matrice se obține din

schimbarea semnului fiecărui element al matricei, adică $-A = (-a_{i,j})$. Este clar că $-A + A = A - A = 0_{m,n}$.

Notăm cu $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$, mulțimea matricelor pătrate cu n linii și n coloane.

O altă operație ce se poate face cu matrice este înmulțirea. Fie $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ și $B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$. Înmulțirea se face linie cu coloană.

$$A \cdot B = ((A \cdot B)_{i,l})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq l \leq p}} = \left(\sum_{j=1}^n a_{i,j} b_{j,l} \right)_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq l \leq p}}$$

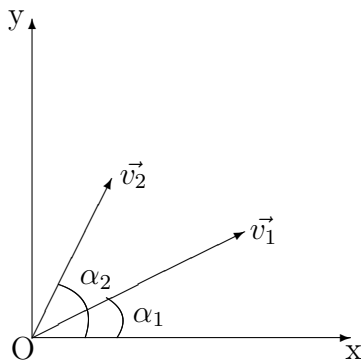
Notând cu $L_i(A)$ linia i a lui A și cu $C_l(B)$ coloana l a lui B , atunci $(A \cdot B)_{i,l} = L_i(A) \cdot C_l(B)$, produsul dintre linia i a matricei A și coloana l a matricei B .

$$(A \cdot B)_{i,l} = L_i(A) \cdot C_l(B) = \sum_{j=1}^n a_{i,j} b_{j,l}.$$

Determinanți

Motivația pentru introducerea determinantului este una geometrică. Fie $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Determinantul matricei A este volumul paralelipipedului construit cu vectorii coloanele lui A (sau liniile acesteia).

În particular în plan, deci pentru $n = 2$ este aria paralelogramului ce are ca laturi coloanele matricei.



Considerăm $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$, $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$ în \mathbb{R}^2 și paralelogramul construit cu aceștia. Aria paralelogramului este $\|\vec{v}_1\| \cdot \|\vec{v}_2\| \cdot \sin(\alpha_2 - \alpha_1)$ unde α_j este unghiul făcut de \vec{v}_j cu partea pozitivă a axei Ox . Presupunem că $\alpha_2 > \alpha_1$. Folosind expresiile $\sin(\alpha_j) = \frac{y_j}{\|\vec{v}_j\|}$, $\cos(\alpha_j) = \frac{x_j}{\|\vec{v}_j\|}$ rezultă aria paralelogram = $\|\vec{v}_1\| \cdot \|\vec{v}_2\| \cdot (\sin(\alpha_2) \cos(\alpha_1) - \cos(\alpha_2) \sin(\alpha_1)) = \|\vec{v}_1\| \cdot \|\vec{v}_2\| \cdot \frac{y_2 x_1 - x_2 y_1}{\|\vec{v}_1\| \cdot \|\vec{v}_2\|} = x_1 y_2 - x_2 y_1 = \det \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{pmatrix}$.

Notăm cu S_n mulțimea permutărilor (bijecțiilor) $\sigma : [n] \longrightarrow [n]$, unde am notat cu $[n] = \{1, 2, \dots, n\}$. S_n este un grup cu operația de compunere a funcțiilor pentru care unitatea este $1 = \text{id}_{[n]} : [n] \longrightarrow [n], 1(i) = i$.

Definiția 1. Fie $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, definim determinantul matricei A

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in S_n} \text{sgn}(\sigma) a_{1,\sigma(1)} a_{2,\sigma(2)} \dots a_{n,\sigma(n)}$$

Exemplul 2. (1) $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$. $S_2 = \{1, (12)\}$, unde (12) este bijecția $\sigma : [2] \longrightarrow [2], \sigma(1) = 2, \sigma(2) = 1$. Signatura acestei bijecții (12) este -1, având o inversiune.

Folosind **definiția ??** avem în formula $\det(A)$ doi termeni corespunzători elementelor din S_2 . Astfel, $\det(A) = a_{11}a_{22} - a_{1\sigma(1)}a_{2\sigma(2)} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$.

(2) Pentru $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, $\det(A) = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}$.

Primii trei termeni ai sumei corespund permutărilor id_{S_3} , $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ care au semnătură 1 (sunt 3-cicli) iar următoarii trei termeni cuprind transpozițiilor $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ și $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ care au semnătura -1.

Matricea transpusă a unei matrice pătratice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, notată cu tA este definită $({}^tA)_{ij} = a_{ji}$, pentru orice $1 \leq i, j \leq n$.

Exemplul 3. Pentru $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ -5 & 4 & 7 \\ 6 & 2 & 8 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, transpusa este ${}^tA = \begin{pmatrix} 1 & -5 & 6 \\ 0 & 4 & 2 \\ -3 & 7 & 8 \end{pmatrix}$.

Propoziția 4 (Proprietăți ale determinantilor). *Determinantul verifică următoarele proprietăți.*

- (1) $\det({}^tA) = \det(A)$, unde tA este transpusa matricei A .
- (2) dacă A are o linie nulă, atunci $\det(A) = 0$.
- (3) dacă $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ se obține din A prin înmulțirea unei linii cu $\lambda \in \mathbb{R}$, atunci $\det(B) = \lambda \det(A)$
- (4) dacă A are două linii proporționale atunci $\det(A) = 0$
- (5) dacă $L_i(A) = (b_{i1} + c_{i1}, \dots, b_{in} + c_{in})$, și B și respectiv C sunt matricele obținute din A înlocuind $L_i(A)$ cu (b_{i1}, \dots, b_{in}) și respectiv (c_{i1}, \dots, c_{in}) , atunci $\det(A) = \det(B) + \det(C)$.
- (6) dacă B se obține din A prin permutarea a două linii a lui A atunci $\det(B) = -\det(A)$.
- (7) dacă B se obține din A prin adunarea la o linie a lui A a multiplului unei alte linii a lui A ($L_i(B) = L_i(A) + \lambda \cdot L_j(A)$), atunci $\det(B) = \det(A)$.

Observația 5. Din (1) rezultă faptul că sunt adevărate aserțiunile similare 2 – 7 pentru coloane.

Exemplul 6 (Determinantul Vandermonde de ordin 3). $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 \end{vmatrix}$ scădem $a_1 \cdot L_1$ din L_2 și respectiv $a_1 \cdot L_2$ din L_3 și obținem $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & a_2 - a_1 & a_3 - a_1 \\ 0 & a_2^2 - a_1 a_2 & a_3^2 - a_1 a_3 \end{vmatrix} =$
 $a_3(a_2 - a_1)(a_3 - a_1) - a_2(a_3 - a_1)(a_2 - a_1) = (a_3 - a_1)(a_2 - a_1)(a_3 - a_2).$

Dezvoltări ale determinanților, formula Laplace

Fie $A \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$. Pentru mulțimile $I \subset [p] = \{1, \dots, p\}$ și $J \subset [q] = \{1, \dots, q\}$, notăm cu $A_{I,J}$ matricea obținută prin intersecția liniilor I cu coloanele J . Dacă $|I| = |J| = m$, atunci $\det(A_{I,J})$ se numește minor de ordin m a lui A .

Exemplul 7. • Dacă $I = \{i\}$ și $J = \{j\}$ atunci $A_{I,J} = a_{ij} \in \mathcal{M}_1(\mathbb{R})$.

• dacă $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ și $I = J = \{1, 2\}$ atunci $A_{I,J} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$.

Fie $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$, $1 \leq m \leq p$ și $I = \{i_1, \dots, i_m\}, J = \{j_1, \dots, j_m\} \subset [p]$ cu $i_1 < \dots < i_m$ și $j_1 < \dots < j_m$. Fie $\bar{I} = [p] \setminus I$ și $\bar{J} = [p] \setminus J$ complementele mulțimilor I și J în $[p]$. Notăm cu $M = \det(A_{I,J})$ minorul de ordin m din A corespunzător mulțimilor de indici I și J și cu $M' = (-1)^{i_1 + \dots + i_m + j_1 + \dots + j_m} \det(A_{\bar{I}, \bar{J}})$ complementul algebric al lui M .

Teorema 8 (Formula Laplace). Fie $p \in \mathbb{N}^*$ și $1 \leq m \leq p$, $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ și $1 \leq i_1 \leq i_2 \leq \dots \leq i_m \leq p$. Atunci

$$\det(A) = \sum_{\substack{M \text{ minor obținut din} \\ \text{liniile } i_1, \dots, i_m \\ \text{și } m \text{ coloane}}} M \cdot M'$$

Exercițiul 9. *Demonstrați*

- (1) $A = \begin{pmatrix} M & N \\ 0 & P \end{pmatrix}$, $\det(A) = \det(M) \det(P)$ pentru $M \in \mathcal{M}_m(\mathbb{R}), P \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$
și $N \in \mathcal{M}_{m,p}(\mathbb{R})$,
- (2) $A = \begin{pmatrix} M & 0 \\ N & P \end{pmatrix}$, $\det(A) = \det(M) \det(P)$ pentru $M \in \mathcal{M}_m(\mathbb{R}), P \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$
și $N \in \mathcal{M}_{p,m}(\mathbb{R})$,
- (3) $A = \begin{pmatrix} M & N \\ P & 0 \end{pmatrix}$, $\det(A) = (-1)^{np} \det(N) \det(P)$ pentru $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), P \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ și $M \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$,

$$(4) \ A = \begin{pmatrix} 0 & M \\ N & P \end{pmatrix}, \det(A) = (-1)^{mn} \det(M) \det(P) \text{ pentru } M \in \mathcal{M}_m(\mathbb{R}), N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \text{ și } P \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R}).$$

GEOMETRIE ȘI ALGEBRĂ LINIARĂ

Am încheiat primul curs cu formula Laplace pe care o reamintesc.

Fie $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$, $1 \leq m \leq p$ și $I = \{i_1, \dots, i_m\}, J = \{j_1, \dots, j_m\} \subset [p]$ cu $i_1 < \dots < i_m$ și $j_1 < \dots < j_m$. Fie $\bar{I} = [p] \setminus I$ și $\bar{J} = [p] \setminus J$ complementele mulțimilor I și J în $[p]$. Notăm cu $M = \det(A_{I,J})$ minorul de ordin m din A corespunzător mulțimilor de indici I și J și cu $M' = (-1)^{i_1+\dots+i_m+j_1+\dots+j_m} \det(A_{\bar{I},\bar{J}})$ complementul algebric al lui M .

Teorema 1 (Formula Laplace). *Fie $p \in \mathbb{N}^*$ și $1 \leq m \leq p$, $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ și $1 \leq i_1 \leq i_2 \leq \dots \leq i_m \leq p$. Atunci*

$$\det(A) = \sum_{\substack{M \text{ minor obținut din} \\ \text{liniile } i_1, \dots, i_m \\ \text{și } m \text{ coloane}}} M \cdot M'$$

Curs 2

Dezvoltări ale determinantilor

Un caz particular al formulei Laplace, deja întâlnit de dumneavoastră în clasa a XI-a, este cel al dezvoltării după o linie sau după o coloană. Pentru că formula Laplace am dat-o pentru o mulțime de indici de linii, voi da în continuare formula de dezvoltare a determinantului pe linie.

Considerăm $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ și aplicăm formula Laplace pentru $|I| = |J| = 1$. Pentru $I = \{i\}, J = \{j\}$ minorul de ordin 1 asociat acestor mulțimi este $M = \det(a_{i,j}) = a_{i,j}$, iar complementul său algebric este $M'_{ij} = (-1)^{i+j} A_{\bar{i},\bar{j}} = (-1)^{i+j} A_{[n] \setminus \{i\}, [n] \setminus \{j\}}$.

Aplicând formula Laplace pentru $I = \{i\}$ avem

$$(1) \quad \det(A) = a_{i1}M'_{i1} + a_{i2}M'_{i2} + \dots + a_{in}M'_{in},$$

adică expresia dezvoltării determinantului după linia i .

Ceea ce am prezentat la curs este formula de dezvoltare a determinantului pe coloană. Considerăm coloana j a unei matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, și aplicând formula Laplace pentru dezvoltarea pe coloana $J = \{j\}$ obținem

$\det(A) = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \dots + a_{nj}A_{nj}$, unde $A_{ij} = M'_{ij} = (-1)^{i+j}A_{i,\bar{j}}$ este ca și mai sus complementul algebric al matricei a_{ij} .

Considerăm acum pentru $p \neq i$ matricea $B_p \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ obținută din A înlocuind $L_p(A)$, cu $L_i(A)$. Deci $L_p(B_p) = L_i(A) = L_i(B_p)$.

$$B_p = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{matrix} \leftarrow L_p = L_i(A) \\ \\ \leftarrow L_i = L_i(A) \end{matrix}$$

Dezvoltăm $\det(B_p)$ după linia p și avem din proprietățile determinantilor

$$(2) \quad 0 = \det(B_p) = a_{i1}M'_{p1} + a_{i2}M'_{p2} + \dots + a_{in}M'_{pn}$$

pentru orice $p \neq i$. Complementii algebrici rămân aceeași pentru că matricea B_p este aceeași cu matricea A în afara liniei p , după care dezvoltăm.

Numim adjuncta matricei A și notăm cu A^* matricea care are pe poziția (i, j) complementul algebric $M'_{j,i}$.

$$A^* = \begin{pmatrix} M'_{11} & M'_{21} & \dots & M'_{n1} \\ M'_{12} & M'_{22} & \dots & M'_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ M'_{1n} & M'_{2n} & \dots & M'_{nn} \end{pmatrix}.$$

Observația 2. Din ecuațiile (1) și (2) rezultă că $A \cdot A^* = \det(A) \cdot I_n$, unde $I_n =$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Similar, lucrând cu versiunea pe coloane obținem:

$$(3) \quad \det(A) = a_{1j}M'_{1j} + a_{2j}M'_{2j} + \dots + a_{nj}M'_{nj}$$

și

$$(4) \quad 0 = \det(C_p) = a_{1j}M'_{1p} + a_{2j}M'_{2p} + \dots + a_{nj}M'_{np}$$

unde C_p este obținută din A înlocuind $C_p(A)$ cu $C_j(A)$. pentru orice $p \neq j$.

Observația 3. Folosind ecuațiile (3) și (4) rezultă $A^* \cdot A = \det(A) \cdot I_n$.

O consecință a **observațiilor 2 și 3** este

Teorema 4. Pentru orice $A \in \mathcal{M}_n(R)$ avem $A \cdot A^* = A^* \cdot A = \det(A) \cdot I_n$.

Definiția 5. $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ se numește inversabilă, dacă și numai dacă $(\exists) B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, a.î. $A \cdot B = B \cdot A = I_n$. În acest caz B se numește inversa matricei A și se notează cu A^{-1} .

Corolarul 6. Fie $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Atunci A este inversabilă $\Leftrightarrow \det(A) \neq 0$. În acest caz $A^{-1} = \det(A)^{-1} \cdot A^*$.

Avem și următorul rezultat:

Teorema 7. Fie $A, B \in \mathcal{M}_n(R)$. Atunci $\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B)$

În cele ce urmează voi prezenta câteva exemple de calcul de determinanți.

Exemplul 8. Calculați

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & b & c & d & e & f \\ 0 & g & h & i & j & 0 \\ 0 & 0 & k & l & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m & n & 0 & 0 \\ 0 & p & q & r & s & 0 \\ t & u & x & y & z & w \end{vmatrix}$$

- dezvoltăm după prima coloană: $\Delta = a \cdot \begin{vmatrix} g & h & i & j & 0 \\ 0 & k & l & 0 & 0 \\ 0 & m & n & 0 & 0 \\ p & q & r & s & 0 \\ u & x & y & z & w \end{vmatrix} - t \cdot \begin{vmatrix} b & c & d & e & f \\ g & h & i & j & 0 \\ 0 & k & l & 0 & 0 \\ 0 & m & n & 0 & 0 \\ p & q & r & s & 0 \end{vmatrix} =$
 $= aw \cdot \begin{vmatrix} g & h & i & j \\ 0 & k & l & 0 \\ 0 & m & n & 0 \\ p & q & r & s \end{vmatrix} - tf \cdot \begin{vmatrix} g & h & i & j \\ 0 & k & l & 0 \\ 0 & m & n & 0 \\ p & q & r & s \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} g & h & i & j \\ 0 & k & l & 0 \\ 0 & m & n & 0 \\ p & q & r & s \end{vmatrix} \cdot (aw - tf) =$
 $\dots = (gs - jp) \cdot (aw - tf) \cdot \begin{vmatrix} k & l \\ m & n \end{vmatrix} = (kn - lm) \cdot (gs - jp) \cdot (aw - tf).$
- Folosind formula Laplace pentru mulțimea indicilor liniilor după care dezvoltăm $I = \{1, 2\}$. Mulțimea indicilor coloanelor este $J \subset [6], |J| = 2$. Numărul acestor submulțimi este $\binom{6}{2} = C_6^2 = 15$. Astfel J este oricare dintre următoarele mulțimi: $\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{1, 5\}, \{1, 6\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{2, 5\}, \{2, 6\}, \{3, 4\}, \{3, 5\}, \{3, 6\}, \{4, 5\}, \{4, 6\}, \{5, 6\}.$

$$\det(A) = \sum_J \det(A_{I,J}) (-1)^{3+4+j_1+j_2} \det(A_{\bar{I},\bar{J}}) =$$

$$= \begin{vmatrix} k & l \\ m & n \end{vmatrix} \cdot (-1)^{3+4+3+4} \begin{vmatrix} a & b & e & f \\ 0 & g & j & 0 \\ 0 & p & s & 0 \\ t & u & z & w \end{vmatrix}. \text{ Toți ceilalți determinanți } 2 \times 2$$

ce apar în formula Laplace sunt 0, având cel puțin o coloană nulă. Pentru determinantul 4×4 dezvoltăm după liniile $I = \{2, 3\}$, și 2 coloane din cele 4.

$$\text{Obținem } \Delta = (kn - ml) \cdot \begin{vmatrix} g & j \\ p & s \end{vmatrix} \cdot (-1)^{2+3+2+3} \begin{vmatrix} a & f \\ t & w \end{vmatrix} = (kn - lm) \cdot (gs - jp) \cdot (aw - tf).$$

Exemplul 9. Să se arate că $\det(A) = (-1)^{np} \det(N) \det(P)$, unde $A = \begin{pmatrix} M & N \\ P & 0 \end{pmatrix}$, $A \in \mathcal{M}_{n+p}(\mathbb{R})$, $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $P \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ și $M \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$.

Folosim formula Laplace pentru mulțimea indicilor liniilor după care dezvoltăm $I = \{n+1, \dots, n+p\}$ și mulțimea de indici ai coloanelor este $J = \{j_1, \dots, j_p\} \subset [n+p]$, $|J| = p$.

$$\det(A) = \sum_{J \subset [n+p], |J|=p} \det(A_{I,J}) (-1)^{n+1+\dots+n+p+j_1+\dots+j_p} \det(A_{\bar{I}, \bar{J}})$$

Singurul determinant nenul $\det(A_{I,J})$ este pentru $J = [p] = \{1, 2, \dots, p\}$.

Obținem pentru $I = \{n+1, \dots, n+p\}$, $\bar{I} = [n+p] \setminus \{n+1, \dots, n+p\} = \{1, \dots, n\}$ și pentru $J = \{1, 2, \dots, p\}$, $\bar{J} = [n+p] \setminus \{1, 2, \dots, p\} = \{p+1, \dots, p+n\}$.

Avem deci

$$\det(A) = \det(A_{\{n+1, \dots, n+p\}, \{1, 2, \dots, p\}}) (-1)^{n+1+\dots+n+p+1+\dots+p} \det(A_{\{1, \dots, n\}, \{p+1, \dots, p+n\}}) = \det(P) (-1)^{np} \cdot \det(N).$$

Exemplul 10. Determinantul Vandermonde. Să se arate că

$$V(a_1, a_2, \dots, a_n) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & \dots & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & \dots & a_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (a_j - a_i)$$

Am demonstrat în cursul trecut că formula este adevărată pentru $n = 3$. Demonstrăm prin inducție. Presupunem formula adevărată pentru $n - 1$ și demonstrăm pentru n .

Facem următoarele operații: $L'_2 = L_2 - a_1 \cdot L_1$, $L'_3 = L_3 - a_1 \cdot L_2$, $L'_n = L_n - a_1 \cdot L_{n-1}$. Obținem

$$V(a_1, a_2, \dots, a_n) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & a_2 - a_1 & \dots & a_n - a_1 \\ 0 & a_2^2 - a_1 a_2 & \dots & a_n^2 - a_1 a_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a_2^{n-1} - a_1 a_2^{n-2} & \dots & a_n^{n-1} - a_1 a_n^{n-2} \end{vmatrix} =$$

dezvoltând după prima coloană obținem

$$= 1 \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} a_2 - a_1 & \dots & a_n - a_1 \\ a_2^2 - a_1 a_2 & \dots & a_n^2 - a_1 a_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_2^{n-1} - a_1 a_2^{n-2} & \dots & a_n^{n-1} - a_1 a_n^{n-2} \end{vmatrix} =$$

dând factori comuni pe fiecare dintre cele $(n-1)$ coloane $(a_j - a_1)$, $2 \leq j \leq n$, obținem

$$= (a_2 - a_1) \dots (a_n - a_1) \begin{vmatrix} 1 & \dots & 1 \\ a_2 & \dots & a_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_2^{n-2} & \dots & a_n^{n-2} \end{vmatrix} = (a_2 - a_1) \dots (a_n - a_1) V(a_2, \dots, a_n).$$

Folosind ipoteza de inducție obținem $V(a_1, a_2, \dots, a_n) = (a_2 - a_1) \dots (a_n - a_1) \prod_{2 \leq i < j \leq n} (a_j - a_i) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (a_j - a_i)$.

Exemplul 11. Determinanți tridiagonali. Pentru $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ să se calculeze

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} \alpha & \beta & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \gamma & \alpha & \beta & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \gamma & \alpha & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \alpha & \beta \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \gamma & \alpha \end{vmatrix}.$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \alpha \end{vmatrix} = \alpha^2 - \beta\gamma. \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} \alpha & \beta & 0 \\ \gamma & \alpha & \beta \\ 0 & \gamma & \alpha \end{vmatrix} = \alpha^3 - 2\alpha\beta\gamma.$$

$$\text{Dezvoltăm } \Delta_n \text{ după prima linie și obținem } \Delta_n = \alpha\Delta_{n-1} - \beta \begin{vmatrix} \gamma & \beta & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \alpha & \beta \\ 0 & 0 & \dots & \gamma & \alpha \end{vmatrix},$$

ultimul determinant având $n-1$ linii și coloane. Dezvoltând acest determinant după prima coloană obținem

$$\Delta_n = \alpha\Delta_{n-1} - \beta\gamma\Delta_{n-2} \text{ de unde } \Delta_n - \alpha\Delta_{n-1} + \beta\gamma\Delta_{n-2} = 0.$$

Ecuția caracteristică asociată este $\lambda^2 - \alpha\lambda + \beta\gamma = 0$. Presupunem că are rădăcini distincte $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Avem $\lambda_1 + \lambda_2 = \alpha$ și $\lambda_1\lambda_2 = \beta\gamma$.

$$\Delta_2 = \alpha^2 - \beta\gamma = (\lambda_1 + \lambda_2)^2 - \lambda_1\lambda_2 = \lambda_1^2 - \lambda_1\lambda_2 + \lambda_2^2 = \frac{\lambda_1^3 - \lambda_2^3}{\lambda_1 - \lambda_2}.$$

$$\text{Demonstrăm prin inducție că } \Delta_n = \frac{\lambda_1^{n+1} - \lambda_2^{n+1}}{\lambda_1 - \lambda_2}.$$

Verificarea a fost făcută pentru $n = 2$, presupunem deci formula adevărată pentru $2 \leq k < n$ și demonstrăm pentru n .

$$\Delta_n = \alpha\Delta_{n-1} - \beta\gamma\Delta_{n-2} = (\lambda_1 + \lambda_2) \frac{\lambda_1^n - \lambda_2^n}{\lambda_1 - \lambda_2} - \lambda_1\lambda_2 \frac{\lambda_1^{n-1} - \lambda_2^{n-1}}{\lambda_1 - \lambda_2} = \frac{\lambda_1^{n+1} - \lambda_2^{n+1}}{\lambda_1 - \lambda_2}.$$

Exemplul 12. Un graf $\Gamma = (V, E)$ este o pereche de mulțimi V , mulțimea vârfurilor și E mulțimea muchiilor ce unesc vârfurile. K_n este graful complet cu n vârfuri și câte o muchie între fiecare două vârfuri. Numim arbore un graf aciclic (fără cicli) și conex (orice două vârfuri pot fi unite printr-un drum în graf). Un subarbore al unui graf se numește arbore generator dacă conține toate vârfurile grafului Γ . Notăm cu $\tau(\Gamma)$ numărul arborilor generatori ai grafului Γ . Numim valența unui vârf, sau gradul acestuia, și notăm $d(v)$ numărul muchiilor incidente cu $v \in V$.

Pentru orice graf Γ , considerăm matricea $Q \in \mathcal{M}_{|V|}(\mathbb{Z})$, $Q = (q_{i,j})$, unde

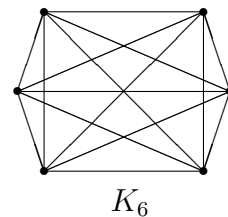
$$q_{i,j} = \begin{cases} d(v_i) & i = j \\ - \text{nr. de muchii ce unește } v_i \text{ cu } v_j & i \neq j \end{cases}.$$

Teorema 13 (matrice-arbore). *Considerăm $\Gamma = (V, E)$ un graf fără bucle și matricea Q asociată acestui graf. Atunci $\tau(\Gamma) = (-1)^{r+s} \det(Q_{r,s})$, unde matricea $Q_{r,s}$ este obținută din Q tăind linia r și coloana s .*

Datorită faptului că suma coloanelor este vectorul nul complementării algebrice sunt constanți pe fiecare linie, deci vom dezvolta după linia și coloana 1.

Formula Cayley $\tau(K_n) = n^{n-2}$.

$$Q(K_n) = \begin{pmatrix} n-1 & -1 & \dots & -1 \\ -1 & n-1 & \dots & -1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & -1 & \dots & n-1 \end{pmatrix}$$



Tăiem linia și coloana 1 a matricei Q și obținem $\tau(K_n) = (-1)^{1+1} \det(Q_{1,1}) =$
 $= \begin{vmatrix} n-1 & -1 & \dots & -1 \\ -1 & n-1 & \dots & -1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & -1 & \dots & n-1 \end{vmatrix}$, determinant cu $n-1$ linii și coloane. Sumând toate

coloanele la prima obținem $\tau(K_n) = \begin{vmatrix} 1 & -1 & \dots & -1 \\ 1 & n-1 & \dots & -1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & -1 & \dots & n-1 \end{vmatrix}$. Scăzând prima linie

din fiecare cealaltă linie obținem $\begin{vmatrix} 1 & -1 & \dots & -1 \\ 0 & n & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & n \end{vmatrix} = n^{n-2}$.

GEOMETRIE ȘI ALGEBRĂ LINIARĂ

Curs 3

În cursul anterior am făcut mai multe exemple de determinanți. Voi începe cursul de astăzi cu o aplicație, anume expresia inversei unei matrice 2×2 .

Fie $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ inversabilă $\Leftrightarrow \det(A) = ad - bc \neq 0$. Avem ${}^tA = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$, de unde adjuncta $A^* = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$. Astfel,

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

Exemplul 1. Fie $A = \begin{pmatrix} \cos(t) & -\sin(t) \\ \sin(t) & \cos(t) \end{pmatrix}$. $\det(A) = \cos^2(t) + \sin^2(t) = 1$. Conform formulei de mai sus, $A^{-1} = \begin{pmatrix} \cos(t) & \sin(t) \\ -\sin(t) & \cos(t) \end{pmatrix} = {}^tA$.

Reamintesc și următorul rezultat enunțat cursul trecut

Teorema 2. Pentru $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ avem $\det(AB) = \det(A)\det(B)$.

Demonstrație: Folosim formula Laplace. Fie $C = \begin{pmatrix} A & 0 \\ -I_n & B \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$. Rezultă din exercițiul (2) de la sfârșitul cursului 1 că $\det(C) = \det(A) \cdot \det(B)$.

Fie $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ și $B = (b_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$. Pentru fiecare $1 \leq j \leq n$, adunăm la $C_{n+j}(C)$ următoarea combinație liniară $b_{1j}C_1(C) + b_{2j}C_2(C) + \dots + b_{nj}C_n(C) = \begin{pmatrix} A \\ -I_n \end{pmatrix} \cdot C_j(B)$. $\begin{pmatrix} A \\ -I_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n,n}(\mathbb{R})$ iar $C_j(B) \in \mathcal{M}_{n,1}$. Făcând combinația liniară de mai sus, pe primele n linii ale coloanei $n+j$, $1 \leq j \leq n$, ale noii matrice vom avea $0 + A \cdot C_j(B)$, iar pe ultimele n linii vom avea $C_j(B) + (-I_n) \cdot C_j(B)$.

Deci în urma acestor combinații liniare cu coloane obținem matricea

$$C' = \begin{pmatrix} A & A \cdot B \\ -I_n & 0 \end{pmatrix}. \text{ Am obținut } C' \text{ prin combinații liniare cu coloane, deci}$$

$\det(C) = \det(C') = (-1)^{n^2} \det(A \cdot B) \det(-I_n) = (-1)^{n^2} \det(A \cdot B) \det(-I_n)$ (vezi exercițiul (3) de la sfârșitul cursului 1) $= (-1)^{n^2} (-1)^n \det(A \cdot B) = (-1)^{n^2+n} \det(A \cdot B) = (-1)^{n(n+1)} \det(A \cdot B) = \det(A \cdot B)$. De aici egalitatea dorită.

□

Corolarul 3. Pentru $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ avem $\det(AB) = \det(BA)$.

Demonstrație: $\det(AB) = \det(A)\det(B) = \det(B)\det(A) = \det(BA)$. □

Corolarul 4. Fie $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ inversabilă și $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Atunci $\det(AXA^{-1}) = \det(X)$.

Demonstrație: $\det(AXA^{-1}) = \det(A^{-1}AX) = \det(I_n X) = \det(X)$. □

Ultimul rezultat legat de determinanți pe care îl voi menționa este

Teorema 5 (Binet-Cauchy). Fie $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R}), B \in \mathcal{M}_{p,r}(\mathbb{R}), k \leq \min\{n, p, r\}$, $I = \{i_1, \dots, i_k\} \subset [n]$ și $L = \{l_1, \dots, l_k\} \subset [r]$. Atunci

$$\det(A \cdot B)_{I,L} = \sum_{\substack{J \subset [p] \\ |J| = k}} \det(A_{I,J}) \det(B_{J,L})$$

Acest rezultat se folosește **esențial** în demonstrația teoremei matrice-arbore pe care am enunțat-o cursul trecut.

Observația 6. $\det : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$, $\det(A + B) \neq \det(A) + \det(B)$. Voi da un exemplu. Fie $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ și $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. $A + B = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.
 $\det(A + B) = 0 \neq 2 = 1 + 1 = \det(A) + \det(B)$.

Voi introduce o altă funcție pe mulțimea matricelor pătrate.

Definiția 7. Fie $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Urmă matricii A , $\text{tr}(A) = \sum_{j=1}^n a_{jj}$.

Avem deci $\text{tr} : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$. De exemplu $\text{tr}(I_n) = 1 + 1 + \dots + 1 = n$.

Voi enumera proprietățile de bază

- este clar că $\text{tr}(A + B) = \text{tr}(A) + \text{tr}(B)$.
- $\text{tr}(\alpha A) = \alpha \text{tr}(A)$.
 $\text{tr}(\alpha A) = \sum_{j=1}^n (\alpha a_{jj}) = \alpha \sum_{j=1}^n a_{jj} = \alpha \text{tr}(A)$.
- $\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$.
 $\text{tr}(AB) = \sum_{k=1}^n (AB)_{kk} = \sum_{k=1}^n (\sum_{j=1}^n a_{kj} b_{jk}) = \sum_{j=1}^n (\sum_{k=1}^n a_{kj} b_{jk}) =$
 $= \sum_{j=1}^n (\sum_{k=1}^n b_{jk} a_{kj}) = \sum_{j=1}^n (BA)_{jj} = \text{tr}(BA)$.
- $A, X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, A inversabilă. Din proprietatea anterioară rezultă
 $\text{tr}(AXA^{-1}) = \text{tr}(X)$.

Exemplul 8. Să se demonstreze că NU există $A, B \in \mathcal{M}_m(\mathbb{R})$ a.î. $AB - BA = I_n$. Presupunem că ar exista două astfel de matrice A, B , atunci $\text{tr}(AB - BA) = \text{tr}(I_n) \Leftrightarrow \text{tr}(AB) - \text{tr}(BA) = n \Leftrightarrow 0 = n$. O contradicție.

Spații vectoriale

Definiția 9. Un spațiu vectorial peste un corp comutativ \mathbb{K} (vom lucra peste \mathbb{R}) este un grup abelian (comutativ) $(V, +)$ ce are și o multiplicare externă cu scalari din \mathbb{K} $((\alpha, v) \mapsto \alpha v \in V, \text{ cu } \alpha \in \mathbb{K} \text{ și } v \in V)$, înmulțire ce îndeplinește următoarele proprietăți:

- (1) $\alpha(v_1 + v_2) = \alpha v_1 + \alpha v_2$, pentru $(\forall)\alpha \in \mathbb{K}$ și $(\forall)v_1, v_2 \in V$,
- (2) $(\alpha_1 + \alpha_2)v = \alpha_1 v + \alpha_2 v$, pentru $(\forall)\alpha_j \in \mathbb{K}$ și $(\forall)v \in V$,
- (3) $\alpha_1(\alpha_2 v) = (\alpha_1 \alpha_2)v$, pentru $(\forall)\alpha_j \in \mathbb{K}$ și $(\forall)v \in V$,
- (4) $1 \cdot v = v$.

De aici înainte toate considerațiile vor fi făcute pentru corpul numerelor reale \mathbb{R} . Elementele din V se numesc vectori iar cele din \mathbb{R} se numesc scalari.

Exemple:

- (1) 0
- (2) $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ este spațiu vectorial peste \mathbb{R}

$$(3) \mathbb{R}^n = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mid x_i \in \mathbb{R} \right\}$$

$$\text{Pentru } \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n, \text{ adunarea este } \vec{x} + \vec{y} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix}$$

$$\text{și înmulțirea cu scalari } \alpha \vec{x} = \begin{pmatrix} \alpha x_1 \\ \alpha x_2 \\ \vdots \\ \alpha x_n \end{pmatrix}, \text{ pentru } \alpha \in \mathbb{R}.$$

Opusul unui vector $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ este obținut schimbând semnul pe fiecare coordonată.

- (4) $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R}) = \{(a_{i,j})_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n} \mid a_{i,j} \in \mathbb{R}\}$. Operațiile sunt cele prezentate în primul curs, adunarea matricelor și înmulțirea acestora cu scalari.

$$\mathcal{M}_{m,1}(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix} \mid a_i \in \mathbb{R} \right\} = \mathbb{R}^m.$$

Similar $\mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{R}) = \{(a_1 \ a_2 \ \cdots \ a_n) \mid a_j \in \mathbb{R}\} \cong \mathbb{R}^n$.

- (5) $\mathbb{R}[X]_{\leq n} = \mathbb{R}[X]_n = \{a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \dots + a_1 X + a_0 \mid a_i \in \mathbb{R}\}$ mulțimea polinoamelor cu coeficienți reali de grad cel mult n .

Suma și respectiv înmulțirea cu scalari sunt cele obișnuite.

(6) $\mathcal{F} = \mathcal{F}(X, \mathbb{R}) = \{f : X \longrightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ funcție}\}$ unde X este o mulțime nevidă.

Operațiile sunt: fie $f, g \in \mathcal{F}$, $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$ ptr. $x \in X$, iar

$(\alpha f)(x) = \alpha f(x)$, pentru $x \in X$.

(7) $\mathcal{C}((a, b), \mathbb{R}) = \{f : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ funcție continuă}\}$

(8) $\mathcal{C}^1((a, b), \mathbb{R}) = \{f : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ funcție continuă cu } f' \text{ continuă}\}.$

Definiția 10. Fie V un spațiu vectorial peste \mathbb{R} , $U \subset V$ se numește subspațiu vectorial al lui V dacă și numai dacă pentru $(\forall)v_1, v_2 \in U$ și pentru $(\forall)\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\alpha v_1 + \beta v_2 \in U$.

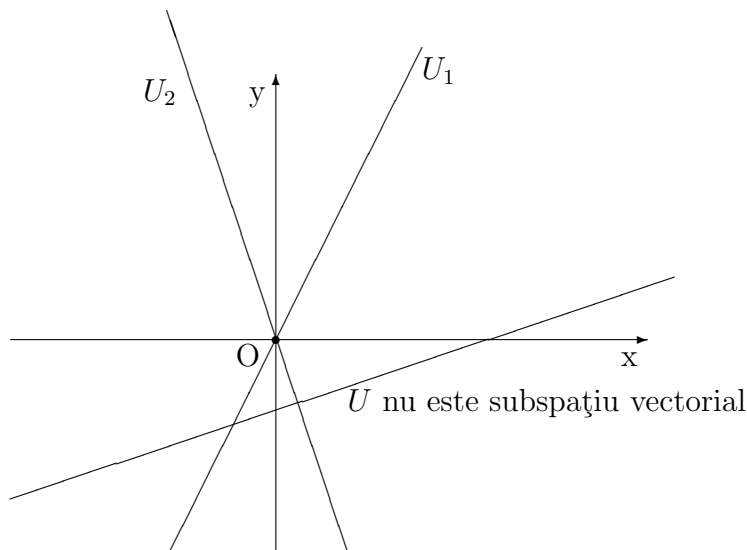
Observația 11. O condiție necesară pentru o submulțime U a spațiului vectorial V să fie subspațiu vectorial este ca $0 \in U$, unde 0 este elementul neutru din V .

Exemplul 12. Considerăm $\mathbb{R}^2 = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$ și $U = \{(x, mx) \mid x \in \mathbb{R}\} = \{(x, y) \mid y = mx, x \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^2$.

Să vedem că într-adevăr avem un subspațiu vectorial.

Fie $v_1 = (x_1, mx_1), v_2 = (x_2, mx_2) \in U$ și $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Avem $\alpha v_1 + \beta v_2 = \alpha(x_1, mx_1) + \beta(x_2, mx_2) = (\alpha x_1, \alpha mx_1) + (\beta x_2, \beta mx_2) = (\alpha x_1 + \beta x_2, \alpha mx_1 + \beta mx_2) = (\alpha x_1 + \beta x_2, m(\alpha x_1 + \beta x_2)) \in U$.



U din figura de mai sus nu este un subspațiu vectorial în \mathbb{R}^2 , nu conține originea. Pe de altă parte, U_1 și U_2 sunt. Cele două linii U_1 și U_2 sunt reprezentări grafice pentru aceste subspații. U_1 este o dreaptă de pantă pozitivă, pe când, U_2 are panta negativă.

Observația 13. Fie $(V_i)_{i \in I}$ subspații vectoriale ale unui \mathbb{R} -spațiu vectorial V . Atunci $\bigcap_{i \in I} V_i$ este un subspațiu vectorial al lui V .

Demonstrație: Fie $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ și $v_1, v_2 \in \bigcap_{i \in I} V_i$. Din definiția intersecției rezultă că $v_1, v_2 \in V_i, (\forall) i \in I$. Dar V_i sunt subspații vectoriale, deci $\alpha v_1 + \beta v_2 \in V_i$ pentru $(\forall) i \in I$, deci $(\alpha v_1 + \beta v_2) \in \bigcap_{i \in I} V_i$.

□

Definiția 14. Fie $S \subset V$, submulțime. Notăm

$$\langle S \rangle = \bigcap_{\substack{W \text{ subspațiu în } V \\ S \subset W}} W$$

intersecția tuturor subspațiilor lui V ce conțin pe S . $\langle S \rangle$ se numește subspațiul generat de mulțimea S .

Se observă că $\langle \phi \rangle = 0$.

$\langle S \rangle$ se descrie astfel:

$$\langle S \rangle = \{a_1 v_1 + \dots + a_n v_n \mid n \in \mathbb{N}^*, v_1, \dots, v_n \in S, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}\}$$

Mai mult dacă $(V_i)_{i \in I}$ sunt subspații în V , cu $I \neq \phi$, atunci

$$\langle \bigcup_{i \in I} V_i \rangle = \{x_{i_1} + \dots + x_{i_n} \mid n \in \mathbb{N}^*, i_1, \dots, i_n \in I, x_{i_j} \in V_{i_j}\}$$

este cel mai mic subspațiu care include toate V_i -urile, și se notează $\sum_{i \in I} V_i$. Dacă $I = \{1, 2, \dots, n\}$, atunci $\sum_{i \in I} V_i = V_1 + \dots + V_n$.

Definiția 15. $S \subset V$ se numește sistem de generatori pentru V dacă $\langle S \rangle = V$.

Exemplul 16. Fie $S = \{v_1 = (1, 0), v_2 = (0, 1)\} \subset \mathbb{R}^2$. După cum am menționat mai sus, $\langle S \rangle$ este mulțimea tuturor combinațiilor liniare ai vectorilor v_1, v_2 cu coeficienți în \mathbb{R} , deci $\langle S \rangle = \{\alpha v_1 + \beta v_2 \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$. Să demonstrăm că $\langle S \rangle = \mathbb{R}^2$. $\langle S \rangle \subset \mathbb{R}^2$ prin definiție. Fie $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ atunci $(a, b) = a \cdot (1, 0) + b \cdot (0, 1) \in \langle S \rangle$. Avem deci egalitate și astfel S este sistem de generatori pentru \mathbb{R}^2 .

GEOMETRIE ȘI ALGEBRĂ LINIARĂ

Curs 4

Spații vectoriale. Bază

Voi începe cu o noțiune pe care am întâlnit-o în cursul trecut. Fie V un spațiu vectorial peste \mathbb{R} .

Definiția 1. Considerăm $S \subset V$. Numim *combinație liniară* de elemente din S orice sumă de tipul $\sum_{i \in I} \alpha_i v_i$, cu $\alpha_i \in \mathbb{R}$ și $v_i \in S$. Dacă $|I| = n < \infty$, atunci combinația liniară finită se scrie $\sum_{i=1}^n \alpha_i v_i = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n$.

Sistem de generatori este $S \subset V$ pentru care $\langle S \rangle = V$. Acest lucru înseamnă că orice $v \in V$, se scrie ca o combinație liniară de vectori din S .

Observația 2. Fie V un spațiu vectorial peste \mathbb{R} și $S \subset V$ un sistem de generatori pentru V .

- (1) Dacă $S \subset S' \implies S'$ este sistem de generatori.
- (2) Dacă $S \subset \langle S' \rangle \implies S'$ este sistem de generatori.

Exemplul 3. (1) $\mathbb{R}[X]_n = \{a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \dots + a_1 X + a_0 \mid a_j \in \mathbb{R}\}$, spațiul vectorial al polinoamelor de grad cel mult n cu coeficienți reali. Orice polinom de grad cel mult n este o combinație liniară cu coeficienți reali de elemente din $\mathcal{B} = \{X^n, X^{n-1}, \dots, X, 1\}$, deci \mathcal{B} este sistem de generatori pentru $\mathbb{R}[X]_n$.

- (2) În particular pentru $n = 3$, $\mathbb{R}[X]_3 = \{a_3 X^3 + a_2 X^2 + a_1 X + a_0 \mid a_j \in \mathbb{R}\}$, $S = \{X^3, X^2, X, 1\}$. De exemplu $X + 1 = 0X^3 + 0X^2 + 1X + 1$.

Definiția 4. $\{v_1, v_2, \dots, v_k\} \subset V$ se numesc vectori *liniar independenți* dacă și numai dacă orice combinație liniară nulă de acești vectori este trivială.

Definiția de mai sus se scrie: $\{v_1, v_2, \dots, v_k\}$ liniar independenți dacă și numai dacă $a_1 v_1 + a_2 v_2 + \dots + a_k v_k = 0_V \implies a_1 = a_2 = \dots = a_k = 0 \in \mathbb{R}$

Observația 5. (1) $(\forall) v \in V \setminus \{0_V\}$ este liniar independent. $a \cdot v = 0_V \implies a = 0$.
(2) 0_V NU este liniar independent. Pentru $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\} = \mathbb{R}^*$, $a \cdot 0_V = 0_V$. Mai mult 0_V nu face parte dintr-un sistem de vectori liniar independenți. Fie $\{v_1, v_2, \dots, v_k, 0_V\}$ un sistem de vectori ce conține vectorul 0_V . Pentru $(\forall) a \in \mathbb{R}^*$ avem combinația liniară nulă $0v_1 + 0v_2 + \dots + 0v_k + a0_V = 0_V$, în care avem un coeficient nenul.

- (3) Dacă $F \subset V$ este o mulțime de vectori liniar independenți în V și $F' \subset F \Rightarrow F'$ este mulțime de vectori liniar independenți

Definiția 6. Numim *bază* a spațiului vectorial V un sistem de vectori $\{v_1, \dots, v_p\}$ care este atât liniar independent cât și sistem de generatori pentru V .

Exemplul 7. (1) $S = \{X^3, X^2, X, 1\}$ este bază pentru $\mathbb{R}[X]_3$. Am văzut în **exemplul 3** (2) că S este sistem de generatori pentru $\mathbb{R}[X]_3$. Verificăm faptul că este sistem de vectori liniar independenți.

Considerăm $a_3X^3 + a_2X^2 + a_1X + a_01 = 0 \in \mathbb{R}[X]_3$. În membrul drept avem polinomul nul iar egalitatea înseamnă că cele două polinoame sunt identice, rezultă faptul că au aceeași coeficienți. Deci $a_j = 0, 0 \leq j \leq 3$.

- (2) $\mathcal{M}_2(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid a, b, c, d \in \mathbb{R} \right\}$ Considerăm $\mathcal{B} = \{E_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, E_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, E_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, E_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\}$. Arătăm că este bază pentru $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Considerăm un element arbitrar din $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = aE_{11} + bE_{12} + cE_{21} + dE_{22}$. Deci \mathcal{B} este sistem de generatori.

Dacă $aE_{11} + bE_{12} + cE_{21} + dE_{22} = 0_{\mathcal{M}_2(\mathbb{R})} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow a = b = c = d = 0$.

Așadar \mathcal{B} este și sistem liniar independent, și deci bază.

- (3) Considerăm acum $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ și $\mathcal{B} \subset \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$, $\mathcal{B} = \{E_{ij}, 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n\}$, unde $E_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{pe poziția (i, j)} \\ 0 & \text{în rest.} \end{cases}$ Se demonstrează ca și în exemplul anterior că \mathcal{B} este bază pentru $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$.

Se pun două întrebări firești :

1. Dacă există bază a unui spațiu vectorial V .
2. Ce legătură este între două baze ale aceluiași spațiu vectorial ?

Vis-a-vis de prima întrebare avem următoarea

Teorema 8. Fie V un spațiu vectorial peste corpul \mathbb{R} , F un sistem de vectori liniar independenți și S un sistem de generatori pentru spațiul vectorial V , cu $F \subset S$. Atunci există o bază \mathcal{B} a lui V a.î. $F \subset \mathcal{B} \subset S$.

Pentru orice spațiu vectorial există sisteme de vectori liniar independenți, de exemplu, $(\forall)v \neq 0_V$ (**observația 5** (1)).

- Corolarul 9.** (1) F liniar independent în $V \Rightarrow (\exists)$ bază \mathcal{B} cu $F \subset \mathcal{B}$.
 (2) S sistem de generatori în $V \Rightarrow (\exists)$ bază \mathcal{B} cu $\mathcal{B} \subset S$.
 (3) Orice spațiu vectorial are o bază.

La a doua întrebare răspunsul este dat de

Teorema 10. Fie V un spațiu vectorial și \mathcal{B}_1 și \mathcal{B}_2 baze pentru V . Atunci $|\mathcal{B}_1| = |\mathcal{B}_2|$ (există deci o bijecție $f : \mathcal{B}_1 \rightarrow \mathcal{B}_2$).

Exemplul 11. $\mathbb{R}[X]_2 = \{a_2X^2 + a_1X + a_0 \mid a_j \in \mathbb{R}\}$. Avem baza $\mathcal{B}_1 = \{X^2, X, 1\}$. prezentată anterior. Să verificăm că $\mathcal{B}_2 = \{(X-1)^2, (X-1), 1\}$ este bază .

Sistem de generatori: exprimăm elementele din \mathcal{B}_1 ca niște combinații liniare de vectorii din \mathcal{B}_2 și aplicăm **observația 2** (2), pentru $S = \mathcal{B}_1$ și $S' = \mathcal{B}_2$.

Considerăm $X \in \mathcal{B}_1$, $X = 1 \cdot (X-1) + 1 \cdot 1 \in \langle \mathcal{B}_2 \rangle$.

Similar $X^2 \in \mathcal{B}_2$, $X^2 = 1 \cdot (X-1)^2 + 2 \cdot (X-1) + 1 \cdot 1$, de unde $X^2 \in \langle \mathcal{B}_2 \rangle$. Din observația mai sus menționată rezultă \mathcal{B}_2 este sistem de generatori.

Sistem liniar independent: considerăm $a_1(X-1)^2 + a_2(X-1) + a_3 \cdot 1 = 0$, unde 0 este polinomul nul.

$$\text{Identificând coeficienții termenilor } X^2, X, 1 \text{ rezultă: } \begin{cases} a_1 = 0 \\ -2a_1 + a_2 = 0 \\ a_1 - a_2 + a_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$a_1 = a_2 = a_3 = 0..$$

Vedem în acest exemplu că $|\mathcal{B}_1| = |\mathcal{B}_2| = 3$.

Pentru că oricare două baze într-un spațiu vectorial V au același cardinal putem da

Definiția 12. Fie V un spațiu vectorial. Numim *dimensiunea spațiului vectorial* V și notăm cu $\dim_{\mathbb{R}}(V) = \dim(V) = |\mathcal{B}|$, cardinalul unei baze \mathcal{B} a lui V .

Observația 13. (1) $\dim_{\mathbb{R}} 0 = 0$. Baza spațiului vectorial 0 este ϕ (mulțimea vidă).

(2) $\dim(\mathcal{M}_2(\mathbb{R})) = 4$, o bază fiind descrisă în **exemplul 7** (2). Pentru $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ avem $\dim(\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})) = m \cdot n$, o bază fiind specificată în **exemplul 7** (3).

(3) $\dim(\mathbb{R}[X]_2) = 3$, o bază fiind $\mathcal{B}_1 = \{X^2, X, 1\}$ sau $\mathcal{B}_2 = \{(X-1)^2, (X-1), 1\}$.

Definiția 14. Fie $\{V_i\}_{i \in I}$ subspații ale spațiului vectorial V . Notăm $\langle \bigcup_{i \in I} V_i \rangle$, subspațiul generat de reuniunea subspațiilor V_i , cu $\sum_{i \in I} V_i$ și numim acest subspațiu, suma subspațiilor V_i .

$$\text{Deci } \sum_{i \in I} V_i = \underbrace{\{v_{i_1} + v_{i_2} + \dots + v_{i_k} \mid v_{i_j} \in V_{i_j}\}}_{\text{finită}}.$$

Teorema 15 (teorema Grassmann). Fie V un spațiu vectorial și U_1, U_2 subspații ale sale. Atunci $\dim(U_1 + U_2) = \dim(U_1) + \dim(U_2) - \dim(U_1 \cap U_2)$.

Observația 16. Acest rezultat este o manifestare a principiului includerii-excluderii. Acesta este: dacă A, B sunt mulțimi finite, atunci $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$. În demonstrația teoremei A și B sunt baze pentru U_1 și respectiv U_2 .

Morfisme de spații vectoriale

Definiția 17. Se numește morfism de spații vectoriale $f : V \longrightarrow W$ o funcție omogenă și aditivă.

- aditivă: $f(v_1 + v_2) = f(v_1) + f(v_2)$, pentru $(\forall) v_1, v_2 \in V$.
- omogenă: $f(\alpha v) = \alpha f(v)$ pentru $(\forall) \alpha \in \mathbb{R}$ și $(\forall) v \in V$.

Propoziția 18. $f : V \longrightarrow W$ este morfism de spații vectoriale dacă și numai dacă pentru $(\forall) \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ și $(\forall) v_1, v_2 \in V$ avem $f(\alpha v_1 + \beta v_2) = \alpha f(v_1) + \beta f(v_2)$.

Observația 19. $f : V \longrightarrow W$ morfism, atunci $f(0_V) = 0_W$.

Exemplul 20. $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, f \left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right) = x + y$. Să demonstrăm că este morfism.

Fie $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^2$ și $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Avem $f(\alpha v_1 + \beta v_2) = f\left(\alpha \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}\right) = f\left(\begin{pmatrix} \alpha x_1 + \beta x_2 \\ \alpha y_1 + \beta y_2 \end{pmatrix}\right) = \alpha x_1 + \beta x_2 + \alpha y_1 + \beta y_2 = \alpha(x_1 + y_1) + \beta(x_2 + y_2) = \alpha \cdot f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}\right) + \beta \cdot f\left(\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}\right) = \alpha f(v_1) + \beta f(v_2)$.

Fie $f : V \longrightarrow W$ un morfism de spații vectoriale reale și $U \subset V$ un subspațiu vectorial. Atunci $f(U)$ este subspațiu în W .

În particular $\text{Im}(f) = f(V) = \{f(v) | v \in V\}$, *imagea morfismului* f este subspațiu în W .

Demonstrație: Fie $w_1, w_2 \in \text{Im}(f) \Leftrightarrow (\exists) v_1, v_2 \in V$ a.î. $f(v_1) = w_1$ și $f(v_2) = w_2$. Fie $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. $\alpha w_1 + \beta w_2 = \alpha f(v_1) + \beta f(v_2) = f(\alpha v_1 + \beta v_2)$. Ultima egalitate are loc pentru că f este morfism. $\alpha v_1 + \beta v_2 \in V$ și astfel am arătat că $\alpha w_1 + \beta w_2 \in \text{Im}(f)$, adică $\text{Im}(f)$ este subspațiu în W . □

Dacă $Y \subset W$ este un subspațiu în W , atunci $f^{-1}(Y) = \{v \in V | f(v) \in Y\}$ este subspațiu vectorial în V .

În particular $\text{Ker}(f) = f^{-1}(0_W) = \{v \in V | f(v) = 0_W\}$, *nucleul morfismului* f , este subspațiu în V . Demonstrăm acest lucru.

Demonstrație: Fie $v_1, v_2 \in \text{Ker}(f)$ și $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. $f(\alpha v_1 + \beta v_2) = \alpha f(v_1) + \beta f(v_2) = \alpha 0_W + \beta 0_W = 0_W \Leftrightarrow \alpha v_1 + \beta v_2 \in \text{Ker}(f)$. □

Teorema 21 (rang-defect). Fie $f : V \longrightarrow W$ morfism de spații vectoriale finit dimensionale. Atunci $\dim(V) = \dim(\text{Im}(f)) + \dim(\text{Ker}(f))$.

$\dim(\text{Im}(f))$ se numește *rangul* aplicației f , și $\dim(\text{Ker}(f))$ *defectul* lui f .

Demonstrație: $\text{Ker}(f) \subset V$. $\dim(V) < \infty \Rightarrow \dim(\text{Ker}(f)) < \infty$. Fie $\{v_1, v_2, \dots, v_k\}$ bază pentru $\text{Ker}(f)$. Completăm la o bază pentru V . Fie $\{v_1, \dots, v_k, u_{k+1}, \dots, u_n\}$ această bază. Demonstrăm că $\{f(u_{k+1}), f(u_{k+2}), \dots, f(u_n)\}$ este bază pentru $\text{Im}(f)$.

Considerăm $w \in \text{Im}(f)$ arbitrar. $(\exists)v \in V$ a.î. $f(v) = w$.

Dar $\{v_1, \dots, v_k, u_{k+1}, \dots, u_n\}$ este bază pentru V , deci $(\exists)\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ a.î. $v = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_k v_k + \alpha_{k+1} u_{k+1} + \dots + \alpha_n u_n$.

Atunci $w = f(v) = f(\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_k v_k + \alpha_{k+1} u_{k+1} + \dots + \alpha_n u_n) = \alpha_1 f(v_1) + \dots + \alpha_k f(v_k) + \alpha_{k+1} f(u_{k+1}) + \dots + \alpha_n f(u_n) = \alpha_{k+1} f(u_{k+1}) + \dots + \alpha_n f(u_n)$, pentru că $v_1, \dots, v_k \in \text{Ker}(f)$. Deci $\{f(u_{k+1}), f(u_{k+2}), \dots, f(u_n)\}$ este sistem de generatori.

Considerăm acum $\beta_{k+1} f(u_{k+1}) + \dots + \beta_n f(u_n) = 0_W \Leftrightarrow f(\beta_{k+1} u_{k+1} + \dots + \beta_n u_n) = 0_W \Leftrightarrow \beta_{k+1} u_{k+1} + \dots + \beta_n u_n \in \text{Ker}(f)$. $\{v_1, \dots, v_k\}$ bază în $\text{Ker}(f)$. Deci $(\exists)\gamma_1, \dots, \gamma_k \in \mathbb{R}$ a.î. $\beta_{k+1} u_{k+1} + \dots + \beta_n u_n = \gamma_1 v_1 + \dots + \gamma_k v_k \Leftrightarrow \gamma_1 v_1 + \dots + \gamma_k v_k - \beta_{k+1} u_{k+1} - \dots - \beta_n u_n = 0_V \Rightarrow \gamma_1 = \dots = \gamma_k = \beta_{k+1} = \dots = \beta_n = 0$. Ultima implicație are loc datorită faptului că $\{v_1, \dots, v_k, u_{k+1}, \dots, u_n\}$ este bază în V . Deci $\{f(u_{k+1}), f(u_{k+2}), \dots, f(u_n)\}$ este sistem liniar independent. \square

GEOMETRIE ȘI ALGEBRĂ LINIARĂ

Lecția 5

Spații vectoriale factor, teoreme de izomorfism, sume directe

În cursul anterior am definit noțiunile de sistem de generatori, sistem de vectori liniar independenți cât și noțiunea de bază pentru un spațiu vectorial. Reamintesc faptul că lucrăm cu spații vectoriale peste corpul numerelor reale \mathbb{R} .

Am enunțat două teoreme care spun că fiecare spațiu vectorial are o bază și respectiv oricare două baze ale unui spațiu vectorial au același cardinal.

Definiția 1. Fie V un spațiu vectorial. Numim *dimensiunea spațiului vectorial* V și notăm cu $\dim_{\mathbb{R}}(V) = \dim(V) = |\mathcal{B}|$, cardinalul unei baze \mathcal{B} a lui V .

Am enunțat

Teorema 2 (teorema Grassmann). *Fie V un spațiu vectorial și X și Y subspații ale sale. Atunci $\dim(X + Y) = \dim(X) + \dim(Y) - \dim(X \cap Y)$.*

Observația 3. Teorema Grassmann este o versiune a principiului includerii-excluderii: pentru două mulțimi finite A, B , $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$.

O demonstrație a teoremei Grassmann se face așa: se alege o bază \mathcal{B} a subspațiului $X \cap Y$ și se completează atât la o bază \mathcal{B}_1 a lui X cât și la una \mathcal{B}_2 a lui Y . Se demonstrează că $\mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$ este bază a spațiului $X + Y$.

Definiția 4. Se numește morfism de spații vectoriale $f : V \longrightarrow W$ o funcție omogenă și aditivă.

- aditivă: $f(v_1 + v_2) = f(v_1) + f(v_2)$, pentru $(\forall)v_1, v_2 \in V$.
- omogenă: $f(\alpha v) = \alpha f(v)$ pentru $(\forall)\alpha \in \mathbb{R}$ și $(\forall)v \in V$.

Am enunțat

Propoziția 5. $f : V \longrightarrow W$ este morfism de spații vectoriale dacă și numai dacă pentru $(\forall)\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ și $v_1, v_2 \in V$, $f(\alpha v_1 + \beta v_2) = \alpha f(v_1) + \beta f(v_2)$.

Asociate unui morfism $f : V \longrightarrow W$ de spații vectoriale avem următoarele subspații: *nucleul morfismului* f , $\text{Ker}(f) = \{v \in V | f(v) = 0_W\} = f^{-1}(0_W)$, și *imagea morfismului* f , $\text{Im}(f) = f(V) = \{f(v) | v \in V\}$. $\text{Ker}(f)$ este subspațiu în V , iar $\text{Im}(f)$ este subspațiu în W .

Teorema 6 (rang-defect). *Fie $f : V \longrightarrow W$ morfism de spații vectoriale finit dimensionale. Atunci $\dim(V) = \dim(\operatorname{Im}(f)) + \dim(\operatorname{Ker}(f))$.*

$\dim(\operatorname{Im}(f))$ se numește *rangul* aplicației f , și $\dim(\operatorname{Ker}(f))$ *defectul* lui f .

Observăm că f este injectiv $\Leftrightarrow \operatorname{Ker}(f) = 0_V$ și f este surjectiv $\Leftrightarrow \operatorname{Im}(f) = W$.

Exemplul 7. Considerăm $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, f\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) = x + y$. Să determinăm $\dim(\operatorname{Ker}(f))$ și o bază pentru acest subspațiu.

Este ușor de arătat că f este morfism de spații vectoriale.

f este surjectiv: $(\forall)x \in \mathbb{R}, x = f\left(\begin{smallmatrix} x \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$; deci $\dim(\operatorname{Im}(f)) = 1 = \dim(\mathbb{R})$. Din **teorema 6** și din faptul că $\dim(\mathbb{R}^2) = 2$, rezultă că $\dim(\operatorname{Ker}(f)) = 1$.

Să găsim o bază pentru $\operatorname{Ker}(f)$.

Nucleul aplicației f este mulțimea $\left\{\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right\} \in \mathbb{R}^2 \mid f\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) = 0\right\} = \left\{\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right\} \mid x + y = 0\right\} = \left\{\begin{smallmatrix} x \\ -x \end{smallmatrix}\right\} \mid y = -x\right\} = \left\{\begin{smallmatrix} x \\ -x \end{smallmatrix}\right\} \mid x \in \mathbb{R}\right\}$. Bază pentru acest spațiu este $v = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. Este linear independent fiind un vector nenul. Este un sistem de generatori pentru $\operatorname{Ker}(f)$ pentru că $\begin{pmatrix} x \\ -x \end{pmatrix} = x \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, x \in \mathbb{R}$.

Reprezentarea grafică a subspațiului vectorial $\operatorname{Ker}(f)$ este a două bisectoare a axelor de coordonate din \mathbb{R}^2 , o dreaptă ce trece prin origine. Și de aici se vede că această submulțime a lui \mathbb{R}^2 verifică condiția necesară de a fi subspațiu, conține 0.

Avem

Propoziția 8. *Fie $f : V \longrightarrow W$ morfism de spații vectoriale. Atunci*

- (1) $X \subset V$, subspațiu $\Rightarrow f(X)$ subspațiu în W ; în particular $\operatorname{Im}(f)$ imaginea lui f , este subspațiu în W .
- (2) $Y \subset W$, subspațiu $\Rightarrow f^{-1}(Y)$ subspațiu în V , în particular $\operatorname{Ker}(f) = f^{-1}(0)$ este subspațiu în V .

Demonstrație: Voi demonstra punctul (1). Fie X subspațiu în $V, w_1, w_2 \in f(X)$ și $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. $(\exists)v_1, v_2 \in X$ a.î. $f(v_j) = w_j, j = 1, 2$. Atunci $\alpha w_1 + \beta w_2 = \alpha f(v_1) + \beta f(v_2) = f(\alpha v_1 + \beta v_2) \Rightarrow \alpha w_1 + \beta w_2 \in f(X)$. Deci $f(X)$ este subspațiu vectorial în W .

Similar se demonstrează punctul (2).

□

Din **propoziția 8** există o corespondență bijectivă între $\{X \subset V \mid X \text{ subspațiu și } \operatorname{Ker}(f) \subset X\}$ și $\{Y \subset W \mid Y \text{ subspațiu în } W\}$, dată de $X \mapsto f(X)$ și $Y \mapsto f^{-1}(Y)$.

Spații vectoriale factor

Fie V un spațiu vectorial și X un subspațiu al său. Pentru că V este grup abelian atunci X este subgrup normal și deci putem forma grupul factor $V/X = \{\hat{v} \mid v \in V\}$, unde $\hat{v}_1 = \hat{v}_2 \Leftrightarrow v_1 - v_2 \in X$.

Operația de adunare pe V/X este: $\widehat{v_1} + \widehat{v_2} = \widehat{v_1 + v_2}$, iar $\pi : V \longrightarrow V/X$, $\pi(v) = \widehat{v}$ (proiecția canonică) este morfism surjectiv de grupuri abeliene.

V/X are structura de \mathbb{R} spațiu vectorial, unde înmulțirea cu scalari este $\alpha \cdot \widehat{v} = \widehat{\alpha v}$, $(\forall) \alpha \in \mathbb{R}$ și $v \in V$.

Operația externă este corect definită: $\widehat{v_1} = \widehat{v_2} \Leftrightarrow v_1 - v_2 \in X \Rightarrow \alpha(v_1 - v_2) \in X \Rightarrow \alpha v_1 - \alpha v_2 \in X \Rightarrow \widehat{\alpha v_1} = \widehat{\alpha v_2}$.

V/X devine \mathbb{R} spațiu vectorial (de verificat axiomele).

În plus, $\pi : V \longrightarrow V/X$, $\pi(v) = \widehat{v}$ este morfism de spații vectoriale.

Avem $\pi(v_1 + v_2) = \widehat{v_1 + v_2} = \widehat{v_1} + \widehat{v_2} = \pi(v_1) + \pi(v_2)$ și $\pi(\alpha v) = \widehat{\alpha v} = \alpha \widehat{v} = \alpha \pi(v)$.

V/X se numește *spațiul vectorial factor al lui V în raport cu X* .

Teorema 9 (teorema fundamentală de izomorfism). *Fie $f : V \longrightarrow W$ un morfism de spații vectoriale. Atunci există un izomorfism de spații vectoriale $V/\text{Ker}(f) \cong \text{Im}(f)$.*

Demonstrație: Din demonstrația teoremei fundamentale de izomorfism pentru grupuri știm că aplicația $\bar{f} : V/\text{Ker}(f) \rightarrow \text{Im}(f)$, $\bar{f}(\widehat{v}) = f(v)$, $v \in V$ este corect definită și este izomorfism de grupuri.

În plus $\bar{f}(\alpha \widehat{v}) = \bar{f}(\widehat{\alpha v}) = f(\alpha v) = \alpha f(v) = \alpha \bar{f}(\widehat{v})$. Deci \bar{f} este chiar izomorfism de spații vectoriale.

□

Dacă V/X este un spațiu vectorial factor, atunci morfismul $\pi : V \longrightarrow V/X$ induce o bijecție între subspațiile vectoriale $U \subset V$ a.î. $X \subset U$ și subspațiile lui V/X , dat de $U \longmapsto \pi(U) = U/X = \{\widehat{x} | x \in U\}$

Teorema 10 (teorema I-a de izomorfism). *Fie V un spațiu vectorial, X și U subspații cu $X \subset U$. Atunci $\frac{V/X}{U/X} \cong V/U$.*

Demonstrație: Fie $f : V/X \rightarrow V/U$, $f(\widehat{v}) = \bar{v}$, unde \widehat{v} este clasa modulo X iar \bar{v} este clasa modulo U . f este corect definită: $\widehat{v_1} = \widehat{v_2} \Rightarrow v_1 - v_2 \in X \Rightarrow v_1 - v_2 \in U \Rightarrow \bar{v_1} = \bar{v_2}$. Se verifică ușor că f este morfism de spații vectoriale. Este clar că f este surjectiv, $f(V/X) = V/U$.

$\text{Ker}(f) = \{\widehat{v} | \bar{v} = \bar{0}\} = \{\widehat{v} | v \in U\} = U/X$. Concluzia rezultă din **teorema 9**.

□

Teorema 11 (teorema II-a de izomorfism). *Fie V un spațiu vectorial și U și X subspații ale sale. Atunci $(U + X)/U \cong X/(X \cap U)$.*

Demonstrație: Definim $f : X \rightarrow (U + X)/U$, $f(v) = \widehat{v}$, (clasa modulo U). Este clar că f este morfism de spații vectoriale.

f surjectiv: fie $\widehat{u + x} \in (U + X)/U$. $\widehat{u + x} = \widehat{u} + \widehat{x} = \widehat{x} = f(x)$, pentru $u \in U$ și $x \in X$.

Pentru $x \in X, x \in \text{Ker}(f) \Leftrightarrow \hat{x} = \hat{0} \Leftrightarrow x \in U \Leftrightarrow x \in U \cap X$. Deci $\text{Ker}(f) = U \cap X$. Folosind **teorema 9** rezultă afirmația din enunț.

□

Propoziția 12. *Fie V un spațiu vectorial real finit dimensional și X un subspațiu al său. Atunci $\dim(V/X) = \dim(V) - \dim(X)$.*

Demonstrație: Considerăm $\pi : V \rightarrow V/X, \pi(x) = \hat{x}$. $\text{Ker}(\pi) = X$. Aplicăm **teorema 6** morfismului π , care este surjectiv. Avem $\dim(V) = \dim(V/X) + \dim(X)$, de unde concluzia.

□

Observația 13. **Teorema 2** se poate demonstra folosind **teorema 11** și **propoziția 12**

Spațiul morfismelor între două spații vectoriale

Fie ca și mai sus V, W două spații vectoriale peste corpul numerelor reale. Notăm cu $\text{Hom}_{\mathbb{R}}(V, W) = \text{Hom}(V, W) = \{f : V \rightarrow W \mid f \text{ morfism}\}$, mulțimea morfismelor spațiilor vectoriale V și W .

Propoziția 14. $\text{Hom}_{\mathbb{R}}(V, W)$ este un spațiu vectorial real.

Demonstrație: Fie $f, g \in \text{Hom}_{\mathbb{R}}(V, W)$ și $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Demonstrăm că $\alpha f + \beta g$ este morfism de spații vectoriale. Fie $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ și $v_1, v_2 \in V$. $(\alpha f + \beta g)(a_1 v_1 + a_2 v_2) = \alpha f(a_1 v_1 + a_2 v_2) + \beta g(a_1 v_1 + a_2 v_2) = \alpha a_1 f(v_1) + \alpha a_2 f(v_2) + \beta a_1 g(v_1) + \beta a_2 g(v_2) = a_1(\alpha f(v_1) + \beta g(v_1)) + a_2(\alpha f(v_2) + \beta g(v_2)) = a_1(\alpha f + \beta g)(v_1) + a_2(\alpha f + \beta g)(v_2)$.

Deci conform **propoziției 5** $(\alpha f + \beta g) \in \text{Hom}(V, W)$.

□

Spații duale

Un caz particular al spațiului morfismelor între două spații vectoriale este pentru $W = \mathbb{R}$.

Fie V un \mathbb{R} spațiu vectorial. Notăm cu $V^* = \text{Hom}_{\mathbb{R}}(V, \mathbb{R})$. Morfismele de la V la \mathbb{R} se numesc și funcționale liniare. Pe mulțimea acestor funcționale liniare avem operațiile obișnuite de adunare și înmulțire cu scalari.

- $(f + g)(v) = f(v) + g(v), (\forall) v \in V, f, g \in V^*$
- $(\alpha f)(v) = \alpha f(v), (\forall) v \in V, f \in V^*, \alpha \in \mathbb{R}$.

Dacă $f : V \longrightarrow W$ este morfism de spații vectoriale, atunci $f^* : W^* \longrightarrow V^*$ prin $f^*(w^*) = w^* \circ f$ pentru orice $w^* \in W^*$.

Avem următoarele proprietăți:

- (1) fie $f : V \longrightarrow W$ și $g : W \longrightarrow U$ morisme de spații vectoriale, atunci $(g \circ f)^* = f^* \circ g^*$.
- (2) dacă $1_V : V \longrightarrow V$ este morfismul identic, atunci $(1_V)^* = 1_{V^*}$.
- (3) dacă $f : V \longrightarrow W$ este izomorfism, atunci și f^* este izomorfism.

Propoziția 15. Fie V un \mathbb{R} spațiu vectorial de dimensiune finită n . Atunci $\dim(V^*) = n$.

Demonstrație: Fie $(e_i)_{i=1,n}$ bază a spațiului vectorial V . Pentru fiecare $i = \overline{1,n}$ considerăm $e_i^* \in V^*$, definite prin $e_i^*(e_j) = \delta_{i,j}$, $(\forall) j = \overline{1,n}$, unde $\delta_{i,j}$ este simbolul lui Kronecker. $\left(\delta_{i,j} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases} \right)$.

Arătăm că $(e_i^*)_{i=1,n}$ este bază a spațiului vectorial V^* .

- liniar independența: fie $a_j \in \mathbb{R}$ și considerăm $a_1 e_1^* + \dots + a_n e_n^* = 0$, funcționala liniară nulă. Atunci pentru $(\forall) i = \overline{1,n}$, $(a_1 e_1^* + \dots + a_n e_n^*)(e_i) = 0 \Leftrightarrow a_i \cdot 1 = 0$.

- sistem de generatori: fie $f \in V^*$, cu $f(e_i) = b_i \in \mathbb{R}$, $(\forall) i = \overline{1,n}$. Atunci $f = b_1 e_1^* + \dots + b_n e_n^*$. Se verifică egalitatea pentru orice vector e_i din baza lui V .

□

Observația 16. Baza din propoziția 15 se numește baza duală bazei $(e_i)_{i=1,n}$.

Sume directe externe

Dacă V_1, V_2, \dots, V_n spații vectoriale, atunci suma lor directă este $V_1 \oplus V_2 \oplus \dots \oplus V_n = V_1 \times V_2 \times \dots \times V_n$, cu operațiile de adunare și înmulțire cu scalari pe componente.

Mai precis:

- $(v_1, \dots, v_n) + (w_1, \dots, w_n) = (v_1 + w_1, \dots, v_n + w_n)$, unde $v_j, w_j \in V_j$, pentru $(\forall) j = \overline{1,n}$.
- $\alpha \cdot (v_1, \dots, v_n) = (\alpha v_1, \dots, \alpha v_n)$

Se mai notează cu $\bigoplus_{i=1,n} V_i$.

Pentru fiecare $j = \overline{1,n}$, definim

- $q_j : V_j \longrightarrow \bigoplus_{i=1,n} V_i$, $q_j(v) = (0, \dots, v, \dots, 0)$, cu v pe poziția j . q_j este morfism injectiv.
- $\pi_j : \bigoplus_{i=1,n} V_i \longrightarrow V_j$, $\pi_j(v_1, \dots, v_n) = v_i$. π_j este morfism surjectiv.

Propoziția 17. Fie V_1, V_2 spații vectoriale finit dimensionale. Atunci

$$\dim(V_1 \oplus V_2) = \dim(V_1) + \dim(V_2)$$

Demonstrație: $\pi_1 : V_1 \oplus V_2 \longrightarrow V_1$, $\pi_1(v_1, v_2) = v_1$ este morfism surjectiv de spații vectoriale. $\text{Ker}(\pi_1) = 0 \oplus V_2 = q_2(V_2) \cong V_2$ (pentru că q_2 este injectiv). Din **teorema 9** rezultă că $V_1 \oplus V_2 / 0 \oplus V_2 \cong V_1$. Din **teorema 6** rezultă că $\dim(V_1 \oplus V_2) = \dim(\text{Im}(\pi_1)) + \dim(\text{Ker}(\pi_1)) = \dim(V_1) + \dim(V_2)$.

□

Corolarul 18. *Dacă avem spațiile vectoriale V_1, V_2, \dots, V_n finit dimensionale, atunci*

$$\dim(V_1 \oplus V_2 \oplus \dots \oplus V_n) = \dim(V_1) + \dim(V_2) + \dots + \dim(V_n)$$

unde $n \in \mathbb{N}^*$, $n \geq 2$.

Sume directe interne

Fie V spațiu și V_1, V_2, \dots, V_n subspații în V . Spunem că V este suma directă internă a familiei $\{V_i\}_{i=1,n}$, dacă

- $V = V_1 + \dots + V_n$
- pentru orice $i : V_i \cap (\sum_{1 \leq j \leq n, j \neq i} V_j) = 0$.

(aceste două condiții sunt echivalente cu faptul că orice $v \in V$ se exprimă în mod unic ca $v = v_1 + \dots + v_n$ cu $v_i \in V_i, \forall i$).

În acest caz scriem $V = V_1 \dot{\oplus} V_2 \dot{\oplus} \dots \dot{\oplus} V_n$, sau $V = \dot{\oplus}_{i=1,n} V_i$.

Observația 19. Dacă $V = \dot{\oplus}_{i=1,n} V_i$, atunci $\dot{\oplus}_{i=1,n} V_i \cong \oplus_{i=1,n} V_i$, deoarece aplicația $f : \oplus_{i=1,n} V_i \longrightarrow \dot{\oplus}_{i=1,n} V_i$, definită prin $f(x_1, \dots, x_n) = x_1 + \dots + x_n$ este izomorfism de spații vectoriale. În particular $\dim(\dot{\oplus}_{i=1,n} V_i) = \dim(\oplus_{i=1,n} V_i)$. Mai mult, dacă \mathcal{B}_i e bază în V_i pentru fiecare $i = \overline{1, n}$, atunci $\cup_{i=1,n} \mathcal{B}_i$ este bază în V .

GEOMETRIE ȘI ALGEBRĂ LINIARĂ

Curs 6 Sisteme de ecuații

Pentru a începe să discutăm despre rezolvarea sistemelor de ecuații liniare, vom introduce în cele ce urmează rangul unei matrice.

Definiția 1. Se numește *rangul* matricei $A \in \mathcal{M}_{m,n}(R)$, $A \neq 0_{m,n}$, ordinul maxim al unui minor nenul al matricii A . Vom nota rangul cu $\text{rang}(A)$. Prin convenție $\text{rang}(0_{m,n}) = 0$.

Așadar $\text{rang}(A) = r \Leftrightarrow A$ are un minor de ordin r nenul și toți minorii de ordin mai mare (dacă există) sunt nuli.

Observația 2. (1) $\text{rang}(A) \leq \min\{m, n\}$
(2) $\text{rang}({}^t A) = \text{rang}(A)$
(3) $\text{rang}(A) = r \Leftrightarrow A$ are un minor de ordin r nenul și toți minorii de ordin $r + 1$ nuli.

Demonstrație: " \Rightarrow " Clar. " \Leftarrow " Din formula Laplace, un minor de ordin $s > r + 1$, deci e nul. Sau altfel: Folosind dezvoltarea după o linie, rezultă că orice minor de ordin $r + 2$ e combinație liniară de ordin $r + 1$, deci nul, și așa mai departe prin inducție.

□

(4) $\text{rang}(A \cdot B) \leq \min\{\text{rang}(A), \text{rang}(B)\}$ ptr. orice matrice $A \in \mathcal{M}_{m,n}(R)$ și $B \in \mathcal{M}_{n,p}(R)$.

Demonstrație: Din formula Binet-Cauchy un minor de ordin r a matricei $A \cdot B$ este o combinație liniară de minori de ordin r ai matricii A (respectiv B), deci $\text{rang}(A \cdot B) \leq \text{rang}(A)$ și $\text{rang}(A \cdot B) \leq \text{rang}(B)$.

□

(5) $A \in \mathcal{M}_{m,n}(R)$, $U \in \mathcal{M}_m(R)$ inversabilă și $V \in \mathcal{M}_n(R)$ inversabilă, atunci $\text{rang}(U \cdot A) = \text{rang}(A) = \text{rang}(A \cdot V)$.

Demonstrație: $\text{rang}(U \cdot A) \leq \min\{\text{rang}(U), \text{rang}(A)\} \leq \text{rang}(A)$ și $\text{rang}(A) = \text{rang}(U^{-1}(U \cdot A)) \leq \text{rang}(U \cdot A)$. Din cele două inegalități ne rezultă prima egalitate. Similar se demonstrează și a doua egalitate.

□

Fie $A \in \mathcal{M}_{m,n}(R)$. Notăm cu $C_1(A), \dots, C_n(A)$ coloanele matricei A . $C_j(A) \in \mathcal{M}_{m,1}(\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^m$.

Teorema 3 (Kronecker). $\text{rang}(A) = \dim \langle C_1(A), \dots, C_n(A) \rangle$

Deci teorema Kronecker ne spune că $\text{rang}(A)$ este egal cu dimensiunea spațiului generat de coloanele matricei A . Acest spațiu este un subspațiu în \mathbb{R}^m .

Demonstrație: Dacă $A = 0$, este clar. Presupunem $A \neq 0$. Fie $r \in \mathbb{N}^*$ a.î. există un minor nenul de ordin r și toți minorii de ordin $r+1$ care-l bordează, (în caz că există) sunt nuli. Arătăm că $\dim \langle C_1(A), \dots, C_n(A) \rangle = r$. Cum $\text{rang}(A)$ este un astfel de r , va rezulta că $\dim \langle C_1(A), \dots, C_n(A) \rangle = \text{rang}(A)$. În plus, rezultă că orice astfel de r este egal cu $\text{rang}(A)$.

Fără a restrânge generalitatea putem presupune că minorul Δ aflat la intersecția primelor r linii cu primele r coloane din A este nenul. Atunci $C_1(A), \dots, C_r(A)$ sunt liniar independente. Altfel, am avea o relație de tipul $C_j(A) = \sum_{1 \leq i \leq r; i \neq j} \alpha_i C_i(A)$, pentru niște $(\alpha_i)_{1 \leq i \leq r; i \neq j}$. Notând cu $\widetilde{C_i(A)}$ coloana de lungime r obținută luând primele r linii din $C_i(A)$, obținem $\widetilde{C_j(A)} = \sum_{1 \leq i \leq r; i \neq j} \alpha_i \widetilde{C_i(A)}$, deci în Δ o coloană este combinație de celelalte coloane, deunde $\Delta = 0$, o contradicție. Deci coloanele $C_1(A), \dots, C_r(A)$ sunt liniar independente de unde $\dim \langle C_1(A), \dots, C_n(A) \rangle \geq r$.

Arătăm că $C_j(A) \in \langle C_1(A), \dots, C_r(A) \rangle$ pentru orice $j > r$, de unde va rezulta că $\dim \langle C_1(A), \dots, C_n(A) \rangle = r$.

$$\text{Fie } j > r \text{ c si } 1 \leq i \leq m. \text{ Atunci } \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1r} & a_{1j} \\ a_{21} & \dots & a_{2r} & a_{2j} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{r1} & \dots & a_{rr} & a_{rj} \\ a_{i1} & \dots & a_{ir} & a_{ij} \end{vmatrix} = 0 \text{ deoarece pentru}$$

$1 \leq i \leq r$ acest determinant are două linii (i și $r+1$) egale, iar pentru $i > r$ e un minor de ordin $r+1$ care bordează Δ .

Dezvoltând după ultima linie rezultă $d_1 \cdot a_{i1} + \dots + d_r \cdot a_{ir} + \Delta \cdot a_{ij} = 0$, iar d_1, \dots, d_r sunt niște complemenți algebrici ce nu depind de i .

Obținem că $a_{ij} = -\Delta^{-1}d_1a_{i1} - \dots - \Delta^{-1}d_ra_{ir}$ pentru orice $1 \leq i \leq m$, de unde $C_j(A) = -\Delta^{-1}d_1C_1(A) - \dots - \Delta^{-1}d_rC_r(A)$, ceea ce doream.

□

Teorema 4 (versiunea pe linii a teoremei Kronecker). $\text{rang}(A) = \dim \langle L_1(A), \dots, L_m(A) \rangle$, unde $L_i(A)$ sunt liniile matricei A , $L_i(A) \in \mathbb{R}^n$.

Demonstrație: Rezultă din faptul că $\text{rang}(A) = \text{rang}(^tA)$.

□

Corolarul 5 (al demonstrației teoremei Kronecker). *Dacă pentru matricea A există un minor de ordin r nenul și toți minorii de ordin $r + 1$ care-l bordează sunt nuli, atunci $\text{rang}(A) = r$.*

Rezolvarea sistemelor de ecuații liniare

Considerăm sistemul de ecuații liniare cu coeficienți reali:

$$(1) \quad \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots + \vdots + \vdots + \vdots = \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Sistemul scris mai sus este un sistem de m ecuații cu n necunoscute. Matricea asociată sistemului este $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ iar coloana termenilor liberi este $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{m,1}(\mathbb{R})$.

Sistemul (1) se poate scrie sub formă matriceală $AX = B$, unde $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ e matricea necunoscutelor.

Considerăm și matricea extinsă,

$$A^e = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array} \right) \in \mathcal{M}_{m,n+1}(\mathbb{R}).$$

care se obține din matricea A adăugând coloana $n + 1$ formată din membrii dreپți ai sistemului. Fiecare coloană este un vector în \mathbb{R}^m .

Definiția 6. Se numește *soluție* a sistemului de mai sus un vector $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$

care verifică toate ecuațiile sistemului.

Un sistem care admite cel puțin o soluție se numește *compatibil*. Altfel acesta se numește *incompatibil*.

Teorema 7 (Kronecker-Capelli). *Sistemul (1) este compatibil dacă și numai dacă $\text{rang}(A) = \text{rang}(A^e)$.*

Demonstrație: Observăm că $AX = x_1C_1(A) + \dots + x_nC_n(A)$, deci sistemul (1) este echivalent cu $x_1C_1(A) + \dots + x_nC_n(A) = B$.

" \Rightarrow " Dacă sistemul (1) este compatibil, fie x_1, x_2, \dots, x_n o soluție. Atunci $B = x_1C_1(A) + \dots + x_nC_n(A) \in \langle C_1(A), \dots, C_n(A) \rangle$ și deci $\langle C_1(A), \dots, C_n(A), B \rangle = \langle C_1(A), \dots, C_n(A) \rangle$. Avem $\dim(\langle C_1(A), \dots, C_n(A), B \rangle) = \dim(\langle C_1(A), \dots, C_n(A) \rangle)$, și din teorema Kronecker rezultă $\text{rang}(A^e) = \text{rang}(A)$.

" \Leftarrow " Avem $\text{rang}(A) = \text{rang}(A^e) \Rightarrow \dim(\langle C_1(A), \dots, C_n(A) \rangle) = \dim(\langle C_1(A), \dots, C_n(A), B \rangle)$. Dar $\langle C_1(A), \dots, C_n(A) \rangle \subset \langle C_1(A), \dots, C_n(A), B \rangle$, și pentru că avem egalitate de dimensiuni atunci avem egalitatea spațiilor. Rezultă că $B \in \langle C_1(A), \dots, C_n(A) \rangle$, adică există x_1, \dots, x_n a.î. $B = x_1C_1(A) + \dots + x_nC_n(A) \Rightarrow x_1, \dots, x_n$ este soluție a sistemului (1).

□

Cum se rezolvă sistemul (1) atunci când $\text{rang}(A) = \text{rang}(A^e)$?

Voi prezenta în continuare metoda eliminării Gauss-Jordan.

Observăm că un sistem liniar peste corpul \mathbb{R} este echivalent (adică are aceleași soluții) cu un sistem obținut prin aplicarea de un număr finit de ori a unor operații de tipul:

- permutarea a două ecuații
- înmulțirea unei ecuații cu un scalar $\alpha \in \mathbb{R}^*$
- adunarea la o ecuație a unei alte ecuații înmulțite cu $\alpha \in \mathbb{R}^*$.

Pentru sistemul (1) scris sub forma matriceală $AX = B$, aceste operații înseamnă:

- permutarea a două linii
- înmulțirea unei linii cu $\alpha \in \mathbb{R}^*$
- adunarea la o linie a unei alte linii înmulțite cu $\alpha \in \mathbb{R}^*$

operații aplicate matricelor A și B , deci matricei extinse $A^e = (A|B)$.

Definiția 8. Se numește matrice eșalon o matrice cu proprietățile:

- liniile nule (dacă) există se află sub liniile nenule
- primul element nenul (de la stânga la dreapta) de pe fiecare linie nenulă este 1; acesta numindu-se pivotul liniei

- pivotul de pe linia $i + 1$ este la dreapta pivotului de pe linia i , pentru orice i
- orice pivot este singurul element nenul de pe coloana sa

Propoziția 9. *Orice matrice poate fi transformată după un număr finit de operații cu linii într-o matrice eșalon.*

Putem da acum algoritmul după Gauss-Jordan de rezolvare a sistemelor de ecuații.

Scriem matricea A^e a sistemului și o aducem la forma eșalon. Dacă există un pivot pe ultima coloană atunci sistemul este incompatibil (în sistemul echivalent avem o ecuație $0 = 1$).

Altfel, necunoscutele corespunzătoare coloanelor cu pivoți sunt coloanele principale, celelate secundare. Trecem necunoscutele secundare în membrul drept și le dăm valori arbitrare în \mathbb{R} și apoi calculăm necunoscutele principale în funcție de cele secundare. Sistemul e compatibil determinat (adică are soluție unică) dacă avem un pivot pe fiecare coloană în afară de ultima.

Observăm că numărul pivoților = $\text{rang}(A^e)$ iar $\text{rang}(A)$ numărul pivoților din primele n coloane și totodată numărul variabilelor principale.

GEOMETRIE ȘI ALGEBRĂ LINIARĂ

Curs 7

Sisteme de ecuații liniare

Continuăm considerațiile începute cursul trecut.

Înainte de a trece la exemple voi menționa și algoritmul de rezolvare a unui sistem compatibil de ecuații liniare. Considerăm din nou sistemul

$$(1) \quad \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots + \vdots + \vdots + \vdots = \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases}$$

Vom presupune că este compatibil.

Fie A matricea sistemului și presupunem că $\text{rang}(A) = r$ și considerăm $I = \{i_1 < \dots < i_r\} \subset \{1, 2, \dots, m\}$ și $J = \{j_1 < \dots < j_r\} \subset \{1, 2, \dots, n\}$ a.î. $\det(A_{I,J}) \neq 0$. Vom rezolva sistemul în funcție de acest minor nenul de ordin r , pe care îl vom fixa..

Știm că $\text{rang}(A) = \text{rang}(A^e)$ (sistemul este compatibil) $= \dim < L_1(A^e), \dots, L_m(A^e) >$. Cum $L_{i_1}(A^e), \dots, L_{i_r}(A^e)$ sunt liniar independente (altfel, ar rezulta că restricțiile acestor linii la J sunt liniar dependente, deci $\det(A_{I,J}) = 0$), avem că faptul că $< L_1(A^e), \dots, L_m(A^e) > = < L_{i_1}(A^e), \dots, L_{i_r}(A^e) >$, deci orice linie este combinație liniară de $L_{i_1}(A^e), \dots, L_{i_r}(A^e)$, asta însemnând că orice ecuație a sistemului este combinație liniară a ecuațiilor i_1, \dots, i_r deci sistemul (1) este echivalent cu sistemul format numai din ecuațiile i_1, \dots, i_r .

Reamintesc că două sisteme se numesc *echivalente* dacă au același soluții.

Din observațiile anterioare sistemul $AX = B$ este echivalent cu sistemul

$$A_{I,\{1,2,\dots,n\}}X = B_I$$

Notând cu $\bar{J} = [n] \setminus J$ avem $A_{I,\{1,2,\dots,n\}}X = A_{I,J}X_J + A_{I,\bar{J}}X_{\bar{J}}$, de unde

$$A_{I,\{1,2,\dots,n\}}X = B_I \Leftrightarrow A_{I,J}X_J + A_{I,\bar{J}}X_{\bar{J}} = B_I \Leftrightarrow A_{I,J}X_J = B_I - A_{I,\bar{J}}X_{\bar{J}} \Leftrightarrow$$

$$(A_{I,J} \text{ inversabilă}) \Leftrightarrow X_J = A_{I,J}^{-1}(B_I - A_{I,\bar{J}}X_{\bar{J}})$$

În termeni de ecuații și necunoscute :

- păstrăm în membrul stâng necunoscutele x_{j_1}, \dots, x_{j_r} , (*necunoscutele principale*). Acestea formează vectorul X_J .
- trecem în membrul drept celelalte necunoscute (*necunoscutele secundare*)
- dăm valori arbitrare necunoscutelor secundare ($X_{\bar{J}} \in \mathcal{M}_{n-r,1}(\mathbb{R})$ este arbitrar)
- calculăm necunoscutele principale în funcție de necunoscutele secundare. Obținem o unică soluție pentru fiecare vector $X_{\bar{J}}$.

Vedem că mulțimea soluțiilor este parametrizată de numărul necunoscutelor secundare, care variază independent una de alta în \mathbb{R} . Deci avem $n - r$ (numărul necunoscutelor secundare) "grade de libertate" sau parametri.

La sfârșitul cursului anterior am prezentat metoda eliminării Gauss-Jordan și forma eșalon a unei matrice.

Am enunțat rezultatul că orice matrice poate fi transformată după un număr finit de operații cu linii într-o matrice eșalon.

În loc de demonstrație voi face exemple.

Exemplul 1. Fie matricea

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ -1 & 3 & 2 & -2 \\ 4 & 3 & -2 & -4 \end{pmatrix}. \text{ Vedem că primul element de pe prima linie este 1, deci din}$$

definiția pivotului acesta este pivotul primei linii. Cum pivotul este singurul nenul pe coloana sa vom elimina elementele de pe prima coloană folosind acest pivot. Astfel $L'_2 = L_2 + L_1$ și $L'_3 = L_3 - 4L_1$. Avem

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ -1 & 3 & 2 & -2 \\ 4 & 3 & -2 & -4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 4 & 4 & 0 \\ 0 & -1 & -10 & -12 \end{pmatrix}. \text{ Vedem că elementul de pe a}$$

doua linie și a doua coloană este nenul. Acesta va fi pivotul celei de-a doua linii. Pentru a obține 1 în acea poziție trebuie să împărțim linia a doua cu 4, deci facem

transformarea $L'_2 = \frac{1}{4}L_2$. Astfel obținem matricea $\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -10 & -12 \end{pmatrix}$. Cu

pivotul al doilea, cel de pe linia a doua, facem eliminări astfel încât acesta să rămână singurul nenul pe coloana sa. Eliminările sunt $L'_1 = L_1 - L_2$, $L'_3 = L_3 + L_2$. Obținem

$$\text{matricea } \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -9 & -12 \end{pmatrix}. \text{ Elementul nenul de pe linia 3 este -9, pe coloana}$$

a treia. Aici obținem al treilea pivot împărțind L_3 cu -9. După această operație

matricea devine $\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{4}{3} \end{pmatrix}$. În sfârșit vom face ultimele eliminări pe coloana

a treia a.î. pivotul să rămână singurul nenul pe coloana sa.

Transformările sunt $L'_1 = L_1 - L_3$ și $L'_2 = L_2 - L_3$. Forma eșalon a matricii este

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{2}{3} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{4}{3} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{4}{3} \end{pmatrix}.$$

Voi face mai multe observații.

În primul rând vedem că forma eșalon E are rangul maxim pe care îl poate atinge ($\text{rang}(E) \leq \min\{3, 4\} = 3$).

Întrebarea naturală care se pune este dacă $\text{rang}(A)$ este egal cu rangul formei eșalon E .

Răspunsul vine din faptul că toate operațiile pe care le-am făcut se pot scrie ca înmulțiri la stânga cu matrice.

Astfel dacă dorim să adunăm L_1 la L_2 , adică să facem transformarea $L'_2 = L_2 + L_1$

matricei A , atunci înmulțim la stânga cu matricea $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Este o matricea I_3

la care am adăugat un 1 pe linia 2 și coloana 1.

$$\text{Deci } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ -1 & 3 & 2 & -2 \\ 4 & 3 & -2 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 4 & 4 & 0 \\ 4 & 3 & -2 & -4 \end{pmatrix}.$$

Dacă procedăm mai departe și facem a doua eliminare pe coloana întâi, $L'_3 =$

$L_3 - 4L_1$, înmulțim la stânga cu matricea $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

$$\begin{aligned} \text{Avem } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot A &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 4 & 4 & 0 \\ 4 & 3 & -2 & -4 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 4 & 4 & 0 \\ 0 & -1 & -10 & -12 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Pentru a obține al doilea pivot trebuie să împărțim linia a doua cu 4. Deci vom modifica numai linia a doua.

$$\text{Acest lucru se obține la stânga cu matricea } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Deci } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 4 & 4 & 0 \\ 0 & -1 & -10 & -12 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -10 & -12 \end{pmatrix}.$$

Restul operațiilor pe care le-am descris în algoritmul de obținere a formei eșalon (se numește eșalonare) E , a matricei A , se fac similar. Le voi menționa la sfârșitul exemplului.

Deocamdată să observăm că matricele cu care înmulțim la stânga sunt matrice inversabile. Determinanții $\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 1$ (sunt matrice inferior triunghiulare), iar $\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{4}$. Deci forma eșalon E a matricei A se obține din A prin înmulțire la stânga cu matrice inversabile.

Acum putem răspunde la întrebarea pe care am pus-o.

În cursul trecut am menționat că dacă $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$, $U \in \mathcal{M}_m(\mathbb{R})$ inversabilă, atunci $\text{rang}(U \cdot A) = \text{rang}(A)$. Cum $E = U \cdot A$, avem $\text{rang}(E) = \text{rang}(A)$.

Voi scrie acum produsul matricelor prin care obținem matricea cu care înmulțim pe A la stânga pentru a obține E , forma eșalon.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{9} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{2}{3} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{4}{3} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{4}{3} \end{pmatrix}$$

Putem spune că $\text{rang}(A) = \text{rang}(E) = 3$.

Algoritmul Gauss-Jordan este folositor pentru a obține și inversa unei matrice.

Exemplul 2. Voi considera pentru ușurință matricea $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 3 & 2 \\ 4 & 3 & -2 \end{pmatrix}$ care

este formată din primele coloane ale matricei A din exemplul anterior. Vom calcula folosind operații cu linii (înmulțiri la stânga cu matrice inversabile) inversa B^{-1} .

Vedem că dacă înmulțim la stânga matricea B cu matricele cu care am înmulțit A la stânga, în aceeași ordine, vom obține primele trei coloane ale formei eșalon E

(înmulțirea se face linie pe coloană), adică I_3 . Deci acest produs de matrice este B^{-1} .

Aplicăm acest algoritm matricei $(B|I_3)$. Înmulțim la stânga cu B^{-1} și avem $B^{-1} \cdot (B|I_3) = (B^{-1} \cdot B | B^{-1} \cdot I_3) = (I_3 | B^{-1})$. Făcând eliminare Gauss-Jordan pentru matricea $(B|I_3)$ vom obține matricea $(I_3 | B^{-1})$, deci în dreapta, inversa lui B .

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \begin{array}{l} L'_2 = L_2 + L_1 \\ L'_3 = L_3 - 4L_1 \\ \sim \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 4 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -10 & -4 & 0 & 1 \end{array} \right) \begin{array}{l} L'_2 = \frac{1}{4}L_2 \\ \sim \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & -1 & -10 & -4 & 0 & 1 \end{array} \right) \begin{array}{l} L'_1 = L_1 - L_2 \\ L'_3 = L_3 + L_2 \\ \sim \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & -9 & -\frac{15}{4} & \frac{1}{4} & 1 \end{array} \right) \begin{array}{l} L'_3 = -\frac{1}{9}L_3 \\ \sim \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{5}{12} & -\frac{1}{36} & -\frac{1}{9} \end{array} \right) \begin{array}{l} L'_1 = L_1 - L_3 \\ L'_2 = L_2 - L_3 \\ \sim \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{4}{12} & -\frac{8}{36} & \frac{1}{9} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{2}{12} & \frac{10}{36} & \frac{1}{9} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{5}{12} & -\frac{1}{36} & -\frac{1}{9} \end{array} \right).$$

Deci

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{12}{36} & -\frac{8}{36} & \frac{4}{36} \\ -\frac{6}{36} & \frac{10}{36} & \frac{4}{36} \\ \frac{15}{36} & -\frac{1}{36} & -\frac{4}{36} \end{pmatrix} = \frac{1}{-36} \begin{pmatrix} -12 & 8 & -4 \\ 6 & -10 & -4 \\ -15 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Numitorul -36 este bineînțeles $\det(B)$. Se verifică ușor că $B \cdot B^{-1} = I_3$.

Este un algoritm mult mai economic decât cel de aflare a adjunctei matricei (deci a cofactorilor). Inversa este adjuncta înmulțită cu inversul determinantului matricei.

O ultimă observație, anume că forma eșalon a unei matrice inversabile este matricea unitate I_n . În acest exemplu forma eșalon a matricii B este I_3 .

Sisteme liniare omogene

Fie $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$. Considerăm sistemul liniar $AX = 0$, unde $0 \in \mathcal{M}_{m,1}(\mathbb{R})$, adică

$$(2) \quad \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \vdots + \vdots + \vdots + \vdots = \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}$$

Bineînțeles că un sistem omogen are întotdeauna soluția nulă, deci orice sistem omogen este compatibil.

Aplicăm același algoritm de rezolvare ca și în cazul sistemelor cu coloana termenilor liberi nenulă. Începem cu calculul rangului matricei. Cel mai economic este aplicarea algoritmului Gauss-Jordan, care ne dă nu numai rangul matricii, dar și o formă simplă, echivalentă, a sistemului de unde aflăm cu ușurință soluția.

Exemplul 3. Să rezolvăm sistemul omogen $\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 0 \\ -x_1 + 3x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 0 \\ 4x_1 + 3x_2 - 2x_3 - 4x_4 = 0 \end{cases}$

Matricea sistemului este $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ -1 & 3 & 2 & -2 \\ 4 & 3 & -2 & -4 \end{pmatrix}$, matricea din **exemplul 1**.

Forma eșalon știm că este $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{2}{3} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{4}{3} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{4}{3} \end{pmatrix}$.

Rangul este 3, primele trei necunoscute sunt principale și depind de a patra necunoscută, cea secundară. Sistemul devine $\begin{cases} x_1 + \frac{2}{3}x_4 = 0 \\ x_2 - \frac{4}{3}x_4 = 0 \\ x_3 + \frac{4}{3}x_4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -\frac{2}{3}x_4 \\ x_2 = \frac{4}{3}x_4 \\ x_3 = -\frac{4}{3}x_4 \end{cases}$

Soluția are un parametru, $x_4 \in \mathbb{R}$.

Mulțimea soluțiilor este $S = \left\{ \begin{pmatrix} -\frac{2}{3}\alpha \\ \frac{4}{3}\alpha \\ -\frac{4}{3}\alpha \\ \alpha \end{pmatrix} \mid \alpha \in \mathbb{R} \right\} \subset \mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}^4$.

GEOMETRIE ȘI ALGEBRĂ LINIARĂ

Curs 8

Matricea unui morfism. Vectori și valori proprii

Voi încheia considerațiile despre sisteme liniare cu o teoremă pe care o cunoașteți din clasa a XI-a, anume regula Cramer.

Considerăm sistemul de n ecuații liniare cu n necunoscute

$$(1) \quad \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots + \vdots + \vdots + \vdots = \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n. \end{cases}$$

Forma matriceală a acestuia este $AX = B$, unde $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ și $X, B \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$

Notăm cu $A_j \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), 1 \leq j \leq n$ matricele ce se obțin din A înlocuind $C_j(A)$, coloana j a matricei A , cu coloana B a termenilor liberi.

Teorema 1 (Regula Cramer). *Considerăm sistemul $AX = B$ de n ecuații liniare cu n necunoscute. Presupunem că $\det(A) \neq 0$. Atunci soluția sistemului este dată de $x_j = \frac{\det(A_j)}{\det(A)}, 1 \leq j \leq n$.*

Recapitulăm metoda de rezolvare a sistemelor liniare.

Pentru rezolvarea unui astfel de sistem scriem matricea extinsă asociată acestuia. O aducem la forma eșalon care este unică.

Dacă avem un pivot pe ultima coloană sistemul este incompatibil. La nivel de ecuații aceasta înseamnă o ecuație cu membrul stâng nul și membrul drept egal cu 1 (pivotul). Deci nu avem soluții.

Dacă nu avem pivot pe ultima coloană sistemul este compatibil.

Numărul de pivoți este egal cu rangul matricii sistemului este egal cu rangul matricii extinse (sistem compatibil) este egal cu numărul necunoscutelor principale. Trecem necunoscutele secundare în membrul drept și aflăm necunoscutele principale în funcție de cele secundare.

Se scrie soluția în funcție de necunoscutele secundare, care sunt parametri.

Sistemele omogene întotdeauna sunt compatibile, având cel puțin soluția nulă.

Dacă sistemul are n ecuații și n necunoscute cu matricea sistemului inversabilă, atunci forma eșalon este matricea I_n și soluția este dată de regula lui Cramer.

Matrice și morfisme

Considerăm $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ și $X, Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ și $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$.

Reamintesc că înmulțirea matricelor se face linie pe coloană, în cazul de față $L_i(A \cdot X) = L_i(A) \cdot X$, $1 \leq i \leq m$.

(1) Se demonstrează ușor că $A \cdot (X + Y) = A \cdot X + A \cdot Y$

$$\begin{aligned} A \cdot (X + Y) &= \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^n a_{1j}(x_j + y_j) \\ \sum_{j=1}^n a_{2j}(x_j + y_j) \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^n a_{mj}(x_j + y_j) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^n a_{1j}x_j + \sum_{j=1}^n a_{1j}y_j \\ \sum_{j=1}^n a_{2j}x_j + \sum_{j=1}^n a_{2j}y_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^n a_{mj}x_j + \sum_{j=1}^n a_{mj}y_j \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^n a_{1j}x_j \\ \sum_{j=1}^n a_{2j}x_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^n a_{mj}x_j \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^n a_{1j}y_j \\ \sum_{j=1}^n a_{2j}y_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^n a_{mj}y_j \end{pmatrix} = A \cdot X + A \cdot Y. \end{aligned}$$

(2) Chiar mai simplu se arată că $A \cdot (\alpha X) = \alpha A \cdot X$ pentru A și X ca mai sus și $\alpha \in \mathbb{R}$.

Data $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$, notăm cu \cdot_A înmulțirea cu matricea A .

Avem deci $\cdot_A : \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{M}_{m,1}(\mathbb{R})$ este morfism. Înmulțirea este aditivă (proprietatea (1)) și respectiv omogenă (proprietatea (2)).

Considerăm acum V un spațiu vectorial real cu $\dim(V) = n$. Fie $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ o bază pentru V . O primă observație este că $(\forall)v \in V$, v are o scriere **unică** ca o combinație liniară de vectorii bazei \mathcal{B} .

Să presupunem că există $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ și $\beta_1, \dots, \beta_n \in \mathbb{R}$ a.î. $\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n = v = \beta_1 v_1 + \dots + \beta_n v_n \Leftrightarrow (\alpha_1 - \beta_1)v_1 + \dots + (\alpha_n - \beta_n)v_n = 0_V$. Dar v_1, \dots, v_n sunt liniar independenți $\Rightarrow \alpha_i - \beta_i = 0 \Leftrightarrow \alpha_i = \beta_i$ pentru $1 \leq i \leq n$.

Deci $v = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n$ cu coeficienți unici. Acești coeficienți se numesc *coordonatele* vectorului v în baza \mathcal{B} . Aleasă o bază $\mathcal{B} \subset V$ orice vector din V se

identifică cu vectorul format din coordonatele sale. $v \leftrightarrow \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^n$.

Am folosit indicele \mathcal{B} pentru vectorul coordonatelor pentru a specifica baza în care se face scrierea.

Să demonstrăm că $f : V \longrightarrow \mathbb{R}^n$, $f(v) = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$ este izomorfism de spații vectoriale. Este clar că este morfism. Este injectiv din unicitatea scrierii unui vector în baza \mathcal{B} . Surjectiv: fie $\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$, atunci $\exists v = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n \in V$ a.î. $f(v) = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$. Baza în care am scris v este $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$.

Deci orice spațiu vectorial real V , cu $\dim(V) = n$ este izomorf cu \mathbb{R}^n .

Fie V și W două \mathbb{R} spații vectoriale cu $\dim(V) = n$ și $\dim(W) = m$ și bazele $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\} \subset V$ și $\mathcal{C} = \{w_1, \dots, w_m\} \subset W$. $V \simeq \mathbb{R}^n$ (izomorfe) și $W \simeq \mathbb{R}^m$.

Considerăm $f : V \longrightarrow W$ un morfism între cele două spații vectoriale.

Pentru fiecare $1 \leq j \leq n$ avem $f(v_j) = \sum_{i=1}^m a_{i,j} w_i$, scrierea unică a vectorului $f(v_j)$ în baza \mathcal{C} .

Notăm $M_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f) = (a_{i,j})_{\substack{i=1,m \\ j=1,n}} \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ matricea asociată morfismului f în

bazele \mathcal{B} și \mathcal{C} . $C_j(M_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f))$, coloana j a acestei matrice este formată din coordonatele vectorului $f(v_j)$ în baza \mathcal{C} .

Fie $v \in V$. Atunci $v = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n$, scriere unică. cu $\alpha_j \in \mathbb{R}, 1 \leq j \leq n$.

$$f(v) = f(\sum_{j=1}^n \alpha_j v_j) = \sum_{j=1}^n \alpha_j f(v_j) = \sum_{j=1}^n \alpha_j (\sum_{i=1}^m a_{i,j} w_i) = \sum_{i=1}^m (\sum_{j=1}^n \alpha_j a_{i,j}) w_i = \sum_{i=1}^m (\sum_{j=1}^n a_{i,j} \alpha_j) w_i.$$

Observația 2. Ceea ce am obținut este o echivalență între matrice și morfisme între spații vectoriale.

Am văzut că dată o matrice $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$, $\cdot_A : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ este morfism de spații vectoriale.

Reciproc pentru $f : V \longrightarrow W$, morfism de spații vectoriale cu $\dim(V) = n$, $\dim(W) = m$ și \mathcal{B} și \mathcal{C} baze în V și respectiv W , ca mai sus avem asociată matricea $M_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f) \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$. Vectorul de coordonate al lui $f(v)$ în baza \mathcal{C} este

$$\begin{pmatrix} \sum_{j=1}^n a_{1,j}\alpha_j \\ \sum_{j=1}^n a_{2,j}\alpha_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^n a_{m,j}\alpha_j \end{pmatrix} = M_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f) \cdot \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}, \text{ unde } \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} \text{ este vectorul coordonatelor}$$
 lui v în baza \mathcal{B} .

De fapt avem un izomorfism de spații vectoriale:

$$\begin{array}{ccc} \text{Hom}_{\mathbb{R}}(V, W) & \simeq & \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R}) \\ f & \leftrightarrow & M_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f) \end{array}$$

Exemplul 3. Fie $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, f \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x + y$. Folosind notațiile anterioare, considerăm $\mathcal{B} = \{v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\} \subset \mathbb{R}^2$ și $\mathcal{C} = \{w_1 = 1\} \subset \mathbb{R}$ baze. Astfel $M_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f) \in \mathcal{M}_{1,2}(\mathbb{R}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix}$ și $f(v) = f \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = f(xv_1 + yv_2) = f(x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x + y$.

Fie V, W și U spații vectoriale finit dimensionale cu bazele $\mathcal{B}, \mathcal{C}, \mathcal{D}$, și $f : V \longrightarrow W$ și $g : W \longrightarrow U$ morfisme între aceste spații vectoriale.

Atunci $M_{\mathcal{B},\mathcal{D}}(g \circ f) = M_{\mathcal{C},\mathcal{D}}(g) \cdot M_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f)$.

Dacă $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2$ sunt baze în V atunci pentru 1_V , morfismul identitate al spațiului vectorial V avem $A = M_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2}(1_V)$ matricea de trecere de la \mathcal{B}_2 la \mathcal{B}_1 (elementele lui \mathcal{B}_1 se scriu în funcție de elementele lui \mathcal{B}_2 și coordonatele se scriu pe coloanele matricii A).

Avem faptul că vectorul coordonatelor lui v în baza \mathcal{B}_2 este egal cu $M_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2}(1_V)$ înmulțit cu vectorul coordonatelor lui v în baza \mathcal{B}_1 .

Să vedem cum se schimbă matricea morfismului la schimbarea bazelor.

Dacă considerăm bazele \mathcal{B} și \mathcal{B}' în V și \mathcal{C} și \mathcal{C}' în W , și morfismul $f : V \longrightarrow W$. Avem următoarele compuneri

$$V_{\mathcal{B}'} \xrightarrow{1_V} V_{\mathcal{B}} \xrightarrow{f} W_{\mathcal{C}} \xrightarrow{1_W} W_{\mathcal{C}'}$$

Folosind formula matricii asociate compunerii morfismelor rezultă următoarea formulă.

$$M_{\mathcal{B}',\mathcal{C}'}(f) = M_{\mathcal{C}',\mathcal{C}}(1_W)^{-1} M_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f) M_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(1_V).$$

Exemplul 4. Să considerăm $V = \mathbb{R}[X]_2$ spațiul vectorial al polinoamelor de grad cel mult 2 cu coeficienți reali. Baza considerată este $\mathcal{B} = \{X^2, X, 1\}$. Fie derivarea $T : \mathbb{R}[X]_2 \longrightarrow \mathbb{R}[X]_2$. Știm că derivarea este aditivă și omogenă, deci un morfism. Pe elementele bazei avem $T(X^i) = iT^{i-1}$, pentru $i = 1, 2$, și $T(1) = 0$. Astfel,

$M_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(T) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Pe fiecare coloană avem coordonatele vectorului $T(X^i)$ în baza \mathcal{B} . De exemplu $T(X^2) = (X^2)' = 2X = 0 \cdot X^2 + 2 \cdot X + 0 \cdot 1$. Vectorul coordonatelor este $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, prima coloană a matricii.

Considerăm și baza $\mathcal{B}' = \{(X-1)^2, X, 1\}$. Verificați că este bază!
 $T((X-1)^2) = 2(X-1) = 2X-2, T(X) = 1, T(1) = 0$, de unde $M_{\mathcal{B}',\mathcal{B}'}(T) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. În acest exemplu $W = V = \mathbb{R}[X]_2$, iar $\mathcal{C}' = \mathcal{B}'$ iar $\mathcal{C} = \mathcal{B}$.

Vreau să verificăm formula $M_{\mathcal{B}',\mathcal{B}'}(T) = M_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(1_V)^{-1} M_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(T) M_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(1_V)$. Mai trebuie să determinăm $M_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(1_V)$, matricea de trecere din baza \mathcal{B} în baza \mathcal{B}' . Avem $(X-1)^2 = X^2 - 2X + 1, X = X$ și $1 = 1$, deci $M_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(1_V) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Inversa

$$\text{acesteia, } M_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(1_V)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Se verifică faptul că

$$M_{\mathcal{B}',\mathcal{B}'}(T) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Considerăm $f : V \longrightarrow W$ morfism, unde în V avem baza \mathcal{B} iar în W baza \mathcal{C} .

Cum aflăm dacă $v \in \text{Ker}(f) \Leftrightarrow f(v) = 0 \Leftrightarrow M_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f) \cdot \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = 0$, unde $\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$ este vectorul coordonatelor lui v în baza \mathcal{B} . Acest vector este deci soluția sistemului omogen scris mai sus.

Când $w \in \text{Im}(f)$? $w \in \text{Im}(f) \Leftrightarrow \exists v \in V$ a.î. $f(v) = w \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow M_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f) \cdot \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = w = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix}, \text{ unde } \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix} \text{ este vectorul coordonatelor}$$

lui w în baza \mathcal{C} . Deci $w \in \text{Im}(f)$ dacă și numai dacă sistemul $M_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f) \cdot \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} =$

$\begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix}$ are soluție. Notăm $A = M_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(f)$. Reamintesc că $A \cdot \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = \alpha_1 C_1(A) + \alpha_2 C_2(A) + \dots + \alpha_n C_n(A)$. Deci $w \in \text{Im}(f) \Leftrightarrow w$ este combinație liniară de coloanele matricei $A \Leftrightarrow w \in \langle C_1(A), \dots, C_n(A) \rangle$. Deci $\text{Im}(f) = \langle C_1(A), \dots, C_n(A) \rangle$.

Vectori și valori proprii

Definiția 5. Fie $f : V \longrightarrow V$ o aplicație liniară.

- un element $\lambda \in \mathbb{R}$ se numește valoare proprie a lui f dacă există $v \in V \setminus \{0\}$ cu $f(v) = \lambda v$ (un astfel de vector se numește vector propriu corespunzător valorii proprii λ).
- un element $v \in V \setminus \{0\}$ se numește vector propriu pentru f dacă există $\lambda \in \mathbb{R}$ cu $f(v) = \lambda v$.

Notăm cu $M_{\mathcal{B}}(f) = M_{\mathcal{B}, \mathcal{B}}(f)$.

Propoziția 6. Fie $A = M_{\mathcal{B}}(f)$, unde \mathcal{B} este bază a lui V . $\lambda \in \mathbb{R}$ e valoare proprie a lui $f \Leftrightarrow \det(\lambda I_n - A) = 0$.

Definiția 7. Dacă $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, atunci $P_A(X) = \det(XI_n - A)$ se numește *polinomul caracteristic* al lui A . (Observăm că $XI_n - A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}[X])$).

Observația 8. 0 este valoare proprie pentru f , dacă și numai dacă matricea $A = M_{\mathcal{B}}(f)$ este singulară.

Propoziția 9. Dacă $f : V \longrightarrow V$ este aplicație liniară, iar $A = M_{\mathcal{B}}(f)$ într-o bază \mathcal{B} , atunci P_A nu depinde de baza \mathcal{B} .

Demonstrație: Dacă \mathcal{B}' e altă bază, știm că $A' = M_{\mathcal{B}'}(f) = Q^{-1}AQ$ unde Q este matricea inversabilă $Q = M_{\mathcal{B}', \mathcal{B}}(1_V)$. Atunci $P_{A'}(X) = \det(XI_n - Q^{-1}AQ) = \det(X \cdot Q^{-1}Q - Q^{-1}AQ) = \det(Q^{-1}(XI_n - A)Q) = \det(Q^{-1}) \det(XI_n - A) \det(Q) = \det(Q^{-1}) \det(Q) \det(XI_n - A) = \det(XI_n - A) = P_A(X)$.

□

Așadar valorile proprii ale lui f sunt rădăcinile în \mathbb{R} ale polinomului caracteristic al lui f . Definim valorile proprii ale unei matrice A ca fiind valorile proprii ale aplicației liniare asociate lui A prin izomorfismul $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \simeq \text{Hom}_{\mathbb{R}}(V, V)$ (pentru o bază fixată a lui V), sau echivalent rădăcinile polinomului $P_A(X)$ în \mathbb{R} .

Exemplul 10. Fie $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. Dacă $M_{\mathcal{B}}(f) = A$ într-o bază \mathcal{B} , atunci $P_T(X) = X^2 - \text{tr}(A)X + \det(A) = X^2 - 2X + 2 = (X - 1)^2 + 1$ și f nu are valori proprii, valorile proprii fiind elemente din \mathbb{R} .

Definiția 11. $f : V \longrightarrow V$ morfism se numește *diagonalizabil* dacă V are o bază \mathcal{B} formată din vectori proprii pentru f . În acest caz $M_{\mathcal{B}}(f)$ este diagonală formată din valori proprii.

Să vedem când este un morfism diagonalizabil.

Propoziția 12. Fie $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ valori proprii distincte pentru $f : V \longrightarrow V$ și v_1, \dots, v_p vectori proprii corespunzători valorilor proprii $\lambda_1, \dots, \lambda_p$. Atunci v_1, \dots, v_p sunt liniar independenți.

Corolarul 13. Fie $f : V \longrightarrow V$ morfism. Dacă $P_f(X)$ are n valori proprii distincte, unde $n = \dim(V)$ atunci f este diagonalizabil.

Exemplul 14. Considerăm matricea $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. A este matricea unui

morfism f într-o bază $\mathcal{B} \subset \mathbb{R}^3$. Polinomul caracteristic este $P(X) = (X+1)^2(X-3)$.

Pentru $\lambda_1 = -1$ calculăm vectorii proprii din sistemul $(A - (-1)I_3) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Rangul matricii $(A - (-1)I_3)$ este 1 și vectorii proprii sunt $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ și $v_2 =$

$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Se observă că avem doi vectori proprii liniar independenți asociați aceleași valori proprii $\lambda_1 = -1$ ce are multiplicitatea 2. Pentru valoarea proprie $\lambda_2 = 3$ avem

sistemul $(A - 3I_3) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Rangul matricii $(A - 3I_3)$ este 2, și vectorul

propriu asociat este $v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Astfel notând cu $Q = (v_1 \ v_2 \ v_3)$. Avem

$A = QDQ^{-1}$, unde $D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, matricea ce are pe diagonală valorile

proprii.

Avem și următorul rezultat foarte important care explică de ce matricea de mai sus este diagonalizabilă neavând toate valorile proprii distincte.

Teorema 15. Orice matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $A = A^t$ (simetrică) este diagonalizabilă.

GEOMETRIE ȘI ALGEBRĂ LINIARĂ

Lecția 9

Pentru început voi face câteva comentarii legate de ceea ce am predat la ultimul curs.

Am definit în cursul trecut ce înseamnă un morfism diagonalizabil. Similar o matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ se numește *diagonalizabilă* dacă există o bază în \mathbb{R}^n de vectori proprii ai matricei A . Punând acești vectori proprii v_1, \dots, v_n într-o matrice $Q = (v_1 \dots v_n)$, ca și coloanele acestei matrice, obținem relația $AQ = QD \Leftrightarrow A = QDQ^{-1}$, unde D este o matrice diagonală formată din valori proprii carora le sunt asociate vectorii proprii v_1, \dots, v_n .

De fapt relația $AQ = QD$ reprezintă toate egalitățile $Av_j = \lambda_j v_j, 1 \leq j \leq n$. Să vedem acest lucru. Vom identifica coloanele celor doi membri. Fie $1 \leq j \leq n$ arbitrar.

În membrul stâng avem $C_j(AQ) = AC_j(Q) = Av_j$ iar în membrul drept $C_j(QD) = QC_j(D) = 0C_1(Q) + 0C_2(Q) + \dots + \lambda_j C_j(Q) + \dots + 0C_n(Q) = 0v_1 + 0v_2 + \dots + \lambda_j v_j + \dots + 0v_n = \lambda_j v_j$.

Exemplul 1. Fie

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$P_A(X) = \det(XI_3 - A) = \begin{vmatrix} X & 0 & 0 \\ 0 & X & -1 \\ 0 & -1 & X \end{vmatrix} = X(X^2 - 1) = X(X - 1)(X + 1). \text{ Deci}$$

valorile proprii sunt $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = -1$. Vectorii proprii asociați acestor valori proprii fiind liniar independenți și fiind în număr de trei, în \mathbb{R}^3 , formează bază. Deci matricea este diagonalizabilă. Vectorii proprii sunt:

$$A \cdot v_1 = 0 \cdot v_1 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow y = z = 0. \text{ Deci } v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$(A - 1I_3) \cdot v_2 = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow x = 0, y = z, \text{ de}$$

$$\text{unde } v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$(A + 1I_3) \cdot v_3 = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow x = 0, y = -z, \text{ și rezultă}$$

$$v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Deci $A = QDQ^{-1}$, unde $Q = (v_1 \ v_2 \ v_3)$, este matricea ce are coloanele vectorii proprii asociați valorilor proprii $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$. Adică $Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ cu inversa

$$Q^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \text{ și } D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \text{ Avem } D = Q^{-1}AQ. \text{ Ce reprezintă}$$

această relație ?

Matricea $A = M_{\mathcal{B}}(f)$, este matricea unei transformări liniare (endomorfism) $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, într-o anumită bază \mathcal{B} a spațiului \mathbb{R}^3 . $D = M_{\mathcal{B}'}(f)$, matricea aceleiași transformări liniare f , dar în baza $\mathcal{B}' = \{v_1, v_2, v_3\}$, formată din vectorii proprii (vedeți definiția morfismului diagonalizabil).

Relația $D = Q^{-1}AQ$ este exact relația $M_{\mathcal{B}'}(f) = M_{\mathcal{B}', \mathcal{B}}(1_{\mathbb{R}^3})^{-1} M_{\mathcal{B}}(f) M_{\mathcal{B}', \mathcal{B}}(1_{\mathbb{R}^3})$, unde $M_{\mathcal{B}', \mathcal{B}}(1_{\mathbb{R}^3})$ este matricea de trecere din baza \mathcal{B} în baza \mathcal{B}' .

Diagonalizarea unei matrice înseamnă, după cum am spus la începutul cursului, găsirea unei baze de vectori proprii. Nu toate matricele cu coeficienți reali sunt diagonalizabile. Cele simetrice sunt.

Forme biliniare, forme pătratice

Considerăm un spațiu vectorial V peste corpul \mathbb{R} cu $\dim_{\mathbb{R}}(V) = n$.

Definiția 2. $F : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ se numește *biliniară* dacă este liniară în fiecare argument. În plus se numește *simetrică* dacă $F(x, y) = F(y, x)$. Forma biliniară se numește *pozitiv semidefinită* dacă $F(x, x) \geq 0$ pentru $\forall x \in V$, și *pozitiv definită* dacă în plus $F(x, x) = 0 \Rightarrow x = 0_V$. Similar forma F este *negativ semidefinită*, respectiv *negativ definită*.

Exemplul 3. • dacă $f_1, f_2 : V \longrightarrow \mathbb{R}$ sunt forme liniare atunci $F(x, y) = f_1(x)f_2(y)$ este o formă biliniară.

- fie $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, definim $F(x, y) = x^t \cdot A \cdot y = \sum_{i,j}^n a_{i,j} x_i y_j$.

Considerăm $n = 3$ și $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Forma biliniară asociată acestei ma-

trice este $F : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$, $F(x, y) = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = x_1 y_3 + x_2 y_3 + x_3 y_2$.

Dacă alegem o bază $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ a spațiului V , și pe V avem o formă biliniară F , considerăm matricea $F(e_i, e_j) = a_{i,j}$. În funcție de această matrice exprimăm valorile lui F pentru orice vectori. $F(x, y) = \sum_{i,j}^n a_{i,j} x_i y_j$.

Propoziția 4. $F : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ este simetrică dacă și numai dacă matricea asociată lui F într-o bază este simetrică.

Deci avem o corespondență bijectivă între mulțimea aplicațiilor biliniare și $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, care se restricționează la o bijecție între mulțimea aplicațiilor biliniare simetrice și mulțimea matricelor simetrice.

Legătura matricelor formei biliniare F la schimbarea bazei este dată de

Propoziția 5. Fie \mathcal{B} și \mathcal{C} două baze ale spațiului vectorial V și $M_{\mathcal{C},\mathcal{B}}$ matricea de trecere din baza \mathcal{B} în baza \mathcal{C} și $A_{\mathcal{B}}$ și respectiv $A_{\mathcal{C}}$ matricele asociate formei biliniare F în cele două baze. Atunci avem $A_{\mathcal{C}} = M_{\mathcal{C},\mathcal{B}}^t \cdot A_{\mathcal{B}} \cdot M_{\mathcal{C},\mathcal{B}}$.

Exemplul 6. $F : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$, $F(x, y) = x_1 y_1 + x_1 y_2 + x_2 y_1 + 2x_2 y_2 + 3x_3 y_3$ este biliniară. matricea asociată în baza canonică este $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$. $F(x, x) = x_1^2 + 2x_1 x_2 + 2x_2^2 + 3x_3^2 = (x_1 + x_2)^2 + x_2^2 + x_3^2$. Se vede că este pozitiv definită.

Definiția 7. Forma pătratică asociată unei forme biliniare simetrice F , este $Q : V \longrightarrow \mathbb{R}$, $Q(x) = F(x, x)$.

F se numește *polara* formei pătratice. Dintr-o formă pătratică obținem polara acesteia prin formula $F(x, y) = \frac{1}{2} (Q(x+y) - Q(x) - Q(y))$, care este simetrică.

Avem deci o bijecție între forme pătratice și matrice simetrice.

Exemplul 8. $Q : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$, $Q(x) = x_1^2 + 7x_2^2 + 3x_3^2 - x_1 x_2 + 5x_2 x_3$. Matricea A asociată lui Q în baza canonică este $A = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & 7 & \frac{5}{2} \\ 0 & \frac{5}{2} & 3 \end{pmatrix}$.

Definiția 9. Spunem că forma pătratică Q este redusă la forma canonică dacă într-o bază avem $Q(x) = \sum_{i=1}^n b_i x_i^2$.

Voi prezenta două metode pentru aducerea formelor pătratice la forma canonică.

Metoda 1

Teorema 10 (Gauss). Fie V un spațiu vectorial cu $\dim_{\mathbb{R}}(V) = n$ și $Q : V \longrightarrow \mathbb{R}$ o formă pătratică. Există o bază în care Q are forma canonică.

Demonstrație: Presupunem $Q \neq 0$. Pentru forma nulă nu avem ce demonstra. Demonstrația ne va da algoritmul de obținere a formei canonice. Fie $\mathcal{B} = \{e_1, \dots, e_n\}$ baza în care $Q(x) = \sum_{1 \leq i, j \leq n} a_{i,j} x_i x_j$. Avem două cazuri.

- (1) $\exists i$ a.î. $a_{i,i} \neq 0$. Renumerotăm și presupunm că $a_{1,1} \neq 0$. Cu acesta vom forța un pătrat perfect.

$$\begin{aligned} \text{Rescriem } Q(x) &= a_{1,1}x_1^2 + 2\sum_{j=2}^n a_{1,j}x_1x_j + \sum_{2 \leq i, j \leq n} a_{i,j}x_i x_j = \\ &= \frac{1}{a_{1,1}}(a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \dots + a_{1,n}x_n)^2 - \frac{1}{a_{1,1}}\sum_{2 \leq i, j \leq n} a_{1,i}a_{1,j}x_i x_j + \sum_{2 \leq i, j \leq n} a_{i,j}x_i x_j = \\ &= \frac{1}{a_{1,1}}(a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \dots + a_{1,n}x_n)^2 + \sum_{2 \leq i, j \leq n} a'_{i,j}x_i x_j, \end{aligned}$$

$$\text{unde } a'_{i,j} = a_{i,j} - \frac{a_{1,i}a_{1,j}}{a_{1,1}}.$$

Facem notația $x'_1 = a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \dots + a_{1,n}x_n$, $x'_2 = x_2, \dots, x'_n = x_n$ și obținem $Q(x') = \frac{1}{a_{1,1}}(x'_1)^2 + \sum_{2 \leq i, j \leq n} a'_{i,j}x'_i x'_j$.

x'_1, x'_2, \dots, x'_n sunt componentele vectorului x în baza $\mathcal{B}' = \{e'_1, \dots, e'_n\}$, în care forma pătratică Q este reprezentată de ecuația de mai sus. În această scriere suma $\sum_{2 \leq i, j \leq n} a'_{i,j}x'_i x'_j$ este o formă pătratică în $n-1$ variabile căreia i se aplică cazul (1) sau/și cazul (2) de mai jos.

- (2) $a_{i,i} = 0, (\forall) i \in \{1, \dots, n\}$. $(\exists) i \neq j$ a.î. $a_{i,j} \neq 0$ ($Q \neq 0$). Renumerotând putem presupune că $a_{1,2} \neq 0$. Facem următoarea schimbare de coordonate $x_1 = x'_1 + x'_2, x_2 = x'_1 - x'_2, x_3 = x'_3, \dots, x_n = x'_n$ și obținem

$$Q(x') = 2a_{1,2}[(x'_1)^2 - (x'_2)^2] + \dots, \text{ formă care este în cazul (1).}$$

După o repetare de un număr finit de ori a acestor cazuri vom ajunge la forma canonică.

□

Exemplul 11. Fie $Q : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}, Q(x) = x_1^2 - 3x_2^2 + 2x_3^2 + 2x_1x_2 + 4x_1x_3$. Folosind algoritmul Gauss obținem $Q(x) = (x_1 + x_2 + 2x_3)^2 - 4x_2^2 - 2x_3^2 - 4x_2x_3 = (x_1 + x_2 + 2x_3)^2 - 4(x_2^2 + x_2x_3 + \frac{1}{4}x_3^2) - x_3^2 = (x_1 + x_2 + 2x_3)^2 - 4(x_2 + \frac{1}{2}x_3)^2 - x_3^2$.

Deci $Q(\bar{x}) = \bar{x}_1^2 - 4\bar{x}_2^2 - \bar{x}_3^2$, unde $\bar{x}_1 = x_1 + x_2 + 2x_3, \bar{x}_2 = x_2 + \frac{1}{2}x_3, \bar{x}_3 = x_3$.

Exemplul 12. Fie $Q(x) = 2x_2x_3$. Matricea acestei forme pătratice este cea din **exemplul 1**, $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Folosind schimbarea de coordonate $x_2 = \bar{x}_2 + \bar{x}_3, x_3 = \bar{x}_2 - \bar{x}_3$, obținem $Q(\bar{x}) = 2\bar{x}_2^2 - 2\bar{x}_3^2$.

Metoda 2

Teorema 13 (Jacobi). *Fie V un spațiu vectorial cu $\dim_{\mathbb{R}}(V) = n$, și $Q : V \rightarrow \mathbb{R}$, o formă pătratică $Q(x) = \sum_{1 \leq i, j \leq n} a_{i,j} x_i x_j$ într-o bază \mathcal{B} . Dacă matricea $A = (a_{i,j})_{i,j=1,\dots,n}$ are toți minorii principali $\Delta_1 = a_{11}, \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \dots, \Delta_n = \det(A)$ nenuli, atunci există o bază $\bar{\mathcal{B}}$ a lui V în care $Q(\bar{x}) = \frac{1}{\Delta_1} \bar{x}_1^2 + \frac{\Delta_1}{\Delta_2} \bar{x}_2^2 + \dots + \frac{\Delta_{n-1}}{\Delta_n} \bar{x}_n^2$.*

Exemplul 14. Considerăm forma pătratică Q care într-o bază \mathcal{B} a spațiului \mathbb{R}^3 are matricea simetrică $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ pentru care $\Delta_1 = 1, \Delta_2 = 3, \Delta_3 = -1$.

Toți sunt nenuli, deci conform teoremei Jacobi forma canonică a formei pătratice Q este $Q(\bar{x}) = \bar{x}_1^2 + \frac{1}{3} \bar{x}_2^2 + \frac{3}{-1} \bar{x}_3^2$.

Spații euclidiene

Considerăm ca și mai sus un spațiu vectorial V peste corpul \mathbb{R} cu $\dim_{\mathbb{R}}(V) = n$.

Definiția 15. $\langle, \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$, o aplicație biliniară, simetrică, pozitiv definită se numește *produs scalar* pe V . (V, \langle, \rangle) spațiul vectorial V pe care avem definit un produs scalar se numește *spațiu euclidian*.

Exemplul 16. • Produsul scalar standard pe \mathbb{R}^n este $\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i$, unde $x, y \in \mathbb{R}^n$. Matricea asociată este matricea identitate I_n . Este clar biliniar, simetric și pozitiv semidefinit. Dacă $\langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^n x_i^2 = 0, x_i \in \mathbb{R}$. De aici rezultă că $x_i = 0, (\forall) 1 \leq i \leq n$, adică $x = 0$. Deci acest produs este un produs scalar pe \mathbb{R}^n .

- Fie $\mathcal{C}([a, b]) = \{f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ continuă} \}$. Pe acest spațiu considerăm $\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x)g(x)dx$. Se verifică faptul că acesta este un produs scalar pe $\mathcal{C}([a, b])$.

Propoziția 17 (Cauchy-Bunyakovsky-Schwarz). *Fie (V, \langle, \rangle) un spațiu euclidian și $x, y \in V$. Atunci are loc $|\langle x, y \rangle| \leq \sqrt{\langle x, x \rangle \langle y, y \rangle}$.*

Definiția 18. Doi vectori x, y din spațiul euclidian (V, \langle, \rangle) se numesc *ortogonali* dacă $\langle x, y \rangle = 0$.

Exemplul 19. Considerăm \mathbb{R}^2 cu produsul scalar canonic și vectorii $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ și $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. Avem $\langle v_1, v_2 \rangle = 1 \cdot 1 + 1 \cdot (-1) = 0$, adică aceștia sunt ortogonali. Acest fapt îl știm deja. v_1 stă în plan pe prima bisectoare a axelor (având coordonatele egale), iar v_2 stă pe a doua bisectoare a axelor. Știm că cele două bisectoare sunt ortogonale.

Mai ușor de văzut este că $\langle e_1, e_2 \rangle = 0$, unde $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ și $e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, sunt vectorii din baza canonică a planului \mathbb{R}^2 .

Propoziția 20. Fie (V, \langle, \rangle) un spațiu euclidian real de dimensiune n . Orice sistem de vectori nenuli ce sunt ortogonali doi câte doi este sistem de vectori liniar independenți..

Definiția 21. Fie $L_1, L_2 \subset V$, submulțimi ale spațiului euclidian (V, \langle, \rangle) . Spunem că L_1 este *ortogonal* pe L_2 dacă $\langle v, w \rangle = 0$ pentru $(\forall) v \in L_1$ și $(\forall) w \in L_2$. Scriem $L_1 \perp L_2$. În particular dacă $L_1 = \{x\} \neq \{0_V\}$, atunci $x \perp L_2 \Leftrightarrow \langle x, w \rangle = 0, (\forall) w \in L_2$.

Ortogonalitatea este suficient să fie testată pe o bază. Mai precis.

Propoziția 22. Fie (V, \langle, \rangle) un spațiu euclidian real de dimensiune n , și L un subspațiu vectorial al lui V . Considerăm $\mathcal{B} \subset L$, o bază a subspațiului L . Atunci $x \perp L \Leftrightarrow x \perp \mathcal{B}$.

Demonstrație: "⇒" Clar pentru că $\mathcal{B} \subset L$.

"⇐" Fie $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_k\}$ bază în L . Considerăm $w \in L$ arbitrar, $w = \sum_{i=1}^k a_i v_i$ cu $a_i \in \mathbb{R}$. $\langle x, w \rangle = \langle x, \sum_{i=1}^k a_i v_i \rangle = \sum_{i=1}^k a_i \langle x, v_i \rangle = 0$ pentru că $\langle x, v_i \rangle = 0$ pentru $(\forall) i$.

□

Definiția 23. Fie (V, \langle, \rangle) un spațiu euclidian real și $L \neq \emptyset$, o submulțime a lui V . Mulțimea notată $L^\perp = \{x \in V \mid x \perp L\}$ se numește *complementul ortogonal* al lui L în V .

Definiția 24. Într-un spațiu euclidian (V, \langle, \rangle) , numim *normă* a vectorului $x \in V$ și notăm $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$.

Din definiție $\|x\| \geq 0$. Din proprietățile produsului scalar rezultă următoarele proprietăți ale normei.

- (1) $\|\alpha x\| = |\alpha| \cdot \|x\|$, pentru $(\forall) x \in V$ și $(\forall) \alpha \in \mathbb{R}$
- (2) $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0_V$,
- (3) $|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|$, $(\forall) x, y \in V$, (Cauchy-Bunyakovsky-Schwarz)

- (4) $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$, $(\forall)x, y \in V$, (inegalitatea Minkowski sau a triunghiului),
 (5) $|\|x\| - \|y\|| \leq \|x - y\|$, $(\forall)x, y \in V$.

Definiția 25. Fie $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\} \subset V$, o bază a spațiului euclidian V . Aceasta se numește *ortogonală* dacă $v_i \perp v_j$, $(\forall)i, j$. Dacă în plus $\|v_i\| = 1$, $(\forall)i$ atunci baza se numește *ortonormată*.

Dacă $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ este bază ortogonală în V , atunci $\mathcal{B}' = \{\frac{v_1}{\|v_1\|}, \dots, \frac{v_n}{\|v_n\|}\}$ este o bază ortonormată.

În **exemplul 19** $\{v_1, v_2\}$ este bază ortogonală. Din aceasta, obținem $\{\frac{1}{\sqrt{2}}v_1, \frac{1}{\sqrt{2}}v_2\}$ bază ortonormată. Baza canonică $\{e_1, e_2\}$ este bază ortonormată.

Definiția 26. Fie (V, \langle, \rangle) un spațiu euclidian real, L un subspațiu a lui V și $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_k\} \subset L$, o bază a lui L . Fie $x \in V$. Vectorul $\sum_{i=1}^k \langle x, v_i \rangle v_i$ se numește *proiecția* vectorului x pe L și se notează $\text{pr}_L x$.

Există un algoritm de a obține din orice bază a unui spațiu euclidian o bază ortonormată.

Teorema 27 (Gram-Schmidt). Fie $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ o bază a spațiului euclidian real (V, \langle, \rangle) cu $\dim_{\mathbb{R}}(V) = n$. Atunci există o bază ortonormată $\{e_1, \dots, e_n\}$, astfel încât sistemele de vectori $\{v_1, \dots, v_k\}$ și $\{e_1, \dots, e_k\}$ generează același subspațiu a lui V , pentru $(\forall)k = \overline{1, n}$.

Demonstrație: Obținem mai întâi o bază ortogonală $\{x_1, \dots, x_n\}$, pe care o normăm.

Definim $x_1 = v_1, x_j = v_j - \sum_{i=1}^{j-1} \frac{\langle v_j, x_i \rangle}{\langle x_i, x_i \rangle} x_i$, pentru $(\forall)j = \overline{2, n}$. Vectorii x_1, \dots, x_n sunt ortogonali doi câte doi, deci conform **propoziției 20**, liniar independenți.

Definim $e_i = \frac{x_i}{\|x_i\|}$. Din definiția vectorilor x_i , și deci ai vectorilor e_i rezultă că subspațiul generat de $\{v_1, \dots, v_k\}$ este egal cu subspațiul generat de $\{e_1, \dots, e_k\}$, pentru orice k . □

Exemplul 28. Fie $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \subset \mathbb{R}^3$, bază. Dorim să obținem o bază ortonormată folosind algoritmul Gram-Schmidt.

$$x_1 = v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, x_2 = v_2 - \frac{\langle v_2, x_1 \rangle}{\langle x_1, x_1 \rangle} x_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{2}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$x_3 = v_3 - \frac{\langle v_3, x_1 \rangle}{\langle x_1, x_1 \rangle} x_1 - \frac{\langle v_3, x_2 \rangle}{\langle x_2, x_2 \rangle} x_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{1} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

$\|x_1\| = \sqrt{2}, \|x_2\| = 1, \|x_3\| = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Deci $e_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}x_1, e_2 = x_2, e_3 = \sqrt{2}x_3$ este baza ortonormată.

GEOMETRIE ȘI ALGEBRĂ LINIARĂ

Curs 10

Matrice și morfisme ortogonale. Geometrie analitică

Metoda transformărilor ortogonale

A treia metodă de aducere la forma canonică a unei forme pătratice Q este metoda transformărilor ortogonale.

Ce înseamnă aducerea la forma canonică a unei forme pătratice la nivel de matrice? Înseamnă aducerea la forma diagonală a matricei A asociate formei pătratice, care este o matrice simetrică. Știm din **teorema 15** din cursul 7, că orice matrice simetrică este diagonalizabilă, deci Q poate fi adusă la forma canonică.

Forma canonică pentru Q , va fi $Q(v) = \lambda_1 \bar{x}_1^2 + \lambda_2 \bar{x}_2^2 + \dots + \lambda_n \bar{x}_n^2$, unde λ_i sunt valorile proprii ale matricei A .

Metodă constă în aflarea valorilor proprii dar și a vectorilor proprii asociați acestora. Acești vectori proprii formează bază pentru spațiul vectorial pe care este definită forma pătratică. Un ultim pas în această metodă constă în obținerea unei baze ortonormate de vectori proprii din vectorii proprii deja obținuți. Obținem nu numai forma canonică, dar și baza în care este exprimată această formă canonică. Această metodă funcționează numai pentru spații euclidiene.

Sigur că și în cazul metodelor Gauss și Jacobi se poate obține baza în care este exprimată forma canonică, dar prin această metodă obținem o bază ortonormată.

Voi descrie metoda pe un exemplu.

Exemplul 1. Considerăm forma pătratică $Q(v) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_3$ pe \mathbb{R}^3 , cu matricea asociată $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Metoda Gauss: $Q(v) = (x_1 + x_3)^2 + x_2^2$. Deci $Q(v) = \bar{x}_1^2 + \bar{x}_2^2$. Schimbarea de coordonate este $\bar{x}_1 = x_1 + x_3$, $\bar{x}_2 = x_2$, $\bar{x}_3 = x_3$. Matricea formei Q în baza

$\bar{\mathcal{B}}$ este $M_{\bar{\mathcal{B}}}(Q) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Doresc să specific în acest caz baza în care am

obținut forma canonică. Considerăm A scrisă în baza canonică \mathcal{B} a spațiului \mathbb{R}^3 . Pentru orice vector $v \in \mathbb{R}^3$ legătura dintre coordonatele lui v în baza \mathcal{B} și baza $\bar{\mathcal{B}}$

este $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = M_{\bar{\mathcal{B}}, \mathcal{B}} \begin{pmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \\ \bar{x}_3 \end{pmatrix}$. Rezolvăm sistemul $\bar{x}_1 = x_1 + x_3$, $\bar{x}_2 = x_2$, $\bar{x}_3 = x_3$

în funcție de x_i -uri și obținem $x_1 = \bar{x}_1 - \bar{x}_3, x_2 = \bar{x}_2, x_3 = \bar{x}_3$, de unde $M_{\bar{\mathcal{B}}, \mathcal{B}} =$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Astfel $\bar{\mathcal{B}} = \{\bar{e}_1 = e_1, \bar{e}_2 = e_2, \bar{e}_3 = -e_1 + e_3\}$. Se verifică relația între matricele formei pătratice în cele două baze (menționată în **propoziția 5** din cursul 9)
 $M_{\bar{\mathcal{B}}}(Q) = {}^t M_{\bar{\mathcal{B}}, \mathcal{B}} M_{\mathcal{B}}(Q) M_{\bar{\mathcal{B}}, \mathcal{B}}$, adică

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. Metoda Jacobi nu se poate aplica pentru că $\Delta_3 = \det(A) = 0$. $\Delta_1 = \Delta_2 = 1$.

3. Metoda transformărilor ortogonale

Polinomul caracteristic este $P_A(X) = X(X-1)(X-2)$ cu rădăcinile $\lambda_1 = 0, \lambda_2 =$

$1, \lambda_3 = 2$. Vectorii proprii sunt $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ cu $\|v_1\| = \sqrt{2}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ cu

$\|v_2\| = 1$, și $v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ cu $\|v_3\| = \sqrt{2}$. Se vede imediat că $\langle v_i, v_j \rangle = \delta_{ij}$,

deci $\{v_1, v_2, v_3\}$ este bază ortogonală. Baza ortonormată $\mathcal{B}' = \{e'_1, e'_2, e'_3\}$ unde $e'_1 =$

$\frac{1}{\sqrt{2}}v_1, e'_2 = v_2, e'_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}v_3$. Matricea $S = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$. Avem ${}^t S \cdot S = I_3$, deci

$S^{-1} = {}^t S$, și $A = SDS^{-1}$, unde $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Să mai facem o observație legat

de matricea S . $S = (e'_1 \ e'_2 \ e'_3)$ și astfel matricea transpusă, ${}^t S = \begin{pmatrix} e'_1 \\ e'_2 \\ e'_3 \end{pmatrix}$. Fiecare

componentă a produsului $({}^t S \cdot S)_{ij} = \langle e'_i, e'_j \rangle = \delta_{ij}$ (δ_{ij} este simbolul Kronecker și este 1 pentru $i = j$ și 0 pentru $i \neq j$), adică ${}^t S \cdot S = I_3$, de unde $S^{-1} = {}^t S$.

Relația $A = SDS^{-1}$ se mai scrie $D = S^{-1}AS = {}^t SAS$, exact relația de transformare între matricele formei Q în bazele \mathcal{B} și \mathcal{B}' , menționată la metoda Gauss. Forma canonică a formei pătratice este asociată matricei D , adică $l Q(v') = x_2'^2 + 2x_3'^2$, expresie ce se obține în baza ortonormată \mathcal{B}' .

Această metodă se numește a transformărilor ortogonale datorită faptului că trecerea de la baza \mathcal{B} la baza ortonormată \mathcal{B}' se face prin matricea $S = M_{\mathcal{B}', \mathcal{B}}$ cu

proprietatea ${}^tSS = I_n$ (în exemplu ${}^tSS = I_3$). O matrice cu această proprietate se numește *ortogonală*.

Matrice și morfisme ortogonale

Notăm pentru orice spațiu vectorial V , $\text{End}(V) = \{f : V \longrightarrow V \mid f \text{ morfism}\}$.

Definiția 2. O matrice $S \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ se numește *ortogonală* dacă ${}^tSS = I_n$. Un endomorfism $f : (V, <, >) \longrightarrow (V, <, >)$ al unui spațiu euclidian se numește *ortogonal* dacă pentru $(\forall)v \in V$, $<f(v), f(v)> = <v, v>$ (adică păstrează produsul scalar).

Exemplul 3. $\text{id}_V : V \longrightarrow V$ este un endomorfism ortogonal, oricare ar fi V spațiul euclidian.

Teorema 4 (de caracterizare a endomorfismelor ortogonale). *Fie $(V, <, >)$ un spațiu vectorial real și $f \in \text{End}(V)$. f este ortogonal dacă și numai dacă pentru $(\forall)v \in V$, $\|f(v)\| = \|v\|$.*

Teorema spune că un endomorfism este ortogonal (păstrează produsul scalar) dacă și numai dacă păstrează norma.

Propoziția 5. *Fie V un spațiu vectorial real de dimensiune finită și $f \in \text{End}(V)$. Atunci f este injectiv $\Leftrightarrow f$ este surjectiv $\Leftrightarrow f$ este bijectiv.*

Demonstrație: f injectiv $\Rightarrow f$ surjectiv. Aplicăm teorema rang-defect lui $f : V \longrightarrow V$. Avem $\dim(V) = \dim(\text{Ker}(f)) + \dim(\text{Im}(f))$. f injectiv $\Leftrightarrow \text{Ker}(f) = 0_V \Leftrightarrow \dim(\text{Ker}(f)) = 0$. Deci $\dim(\text{Im}(f)) = \dim(V)$, iar $\text{Im}(f)$ este subspațiu în V , deci $\text{Im}(f) = V$, adică f surjectiv.

Pentru f surjectiv $\Rightarrow f$ bijectiv trebuie să arătăm că f este injectiv. Argumentul este similar cu cel de mai sus.

f bijectiv $\Rightarrow f$ injectiv din definiție.

□

Propoziția 6. *Fie $f \in \text{End}(V)$ un endomorfism ortogonal al unui spațiu euclidian. Atunci f este bijectiv.*

Demonstrație: Folosind propoziția anterioară trebuie să arătăm că f este injectiv. $v \in \text{Ker}(f) \Leftrightarrow f(v) = 0_V$, dar $\|v\| = \|f(v)\| = \|0_V\| = 0 \Leftrightarrow v = 0_V$.

□

Pentru $(V, <, >)$ spațiu euclidian notăm $\mathcal{O}(V) = \{f : V \longrightarrow V \mid f \text{ morfism ortogonal}\}$. $\mathcal{O}(V)$ formează grup în raport cu compunerea endomorfismelor spațiului V .

Următorul rezultat face legătura între endomorfisme și matrice ortogonale.

Notăm $O_n(\mathbb{R}) = \{S \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid {}^tSS = I_n\}$. Acesta este subgrup al grupului $GL_n(\mathbb{R})$. Parte stabilă: fie $A, B \in O_n(\mathbb{R})$, ${}^t(AB)AB = {}^tB {}^tAAB = {}^tBI_nB = {}^tBB = I_n$. Restul axiomelor grupului se verifică ușor.

Teorema 7. Fie V un spațiu euclidian, cu $\dim_{\mathbb{R}}(V) = n$. Atunci $f \in \mathcal{O}(V)$ dacă și numai dacă $M_{\mathcal{B}}(f) \in O_n(\mathbb{R})$ pentru \mathcal{B} o bază ortonormată a spațiului V .

Pentru $S \in O_n(\mathbb{R})$ avem $\det({}^tSS) = \det(I_n) \Leftrightarrow \det({}^tS)\det(S) = 1 \Leftrightarrow \det(S)^2 = 1 \Rightarrow \det(S) = \pm 1$. Deci pentru orice $S \in O_n(\mathbb{R}) \Rightarrow \det(S) = \pm 1$.

Notăm $SO_n(\mathbb{R}) = \{S \in O_n(\mathbb{R}) \mid \det(S) = 1\}$. Este clar că $SO_n(\mathbb{R})$ este subgrup al grupului $O_n(\mathbb{R})$.

Se arată ușor că toate matricele din $SO_2(\mathbb{R})$ sunt de forma $R = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}$.

(Considerăm o matrice $R = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, punemi condițiile ca aceasta să fie în $SO_2(\mathbb{R})$. Rezultă $d = a$, $c = -b$, și $a^2 + b^2 = 1$) Acestea sunt rotații.

Elementele $S \in O_2(\mathbb{R})$ pentru care $\det(S) = -1$, au forma $S = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ \sin t & -\cos t \end{pmatrix}$.

Sunt simetrii (reflecții). De exemplu pentru $t = \frac{\pi}{2}$ obținem $S = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ care este simetria în prima bisectoare a axelor de coordonate. Este clar că $S^2 = \text{id}_{\mathbb{R}^2}$. Pentru $t = \pi$ obținem $S = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, simetria în axa Oy .

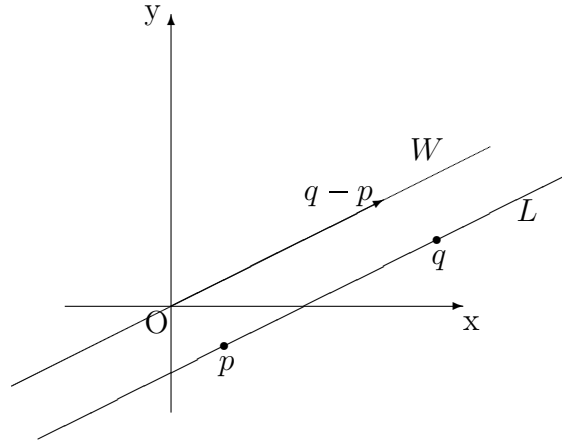
Dacă matricele ortogonale corespund operatorilor ortogonali, pentru matrice simetrice există o clasă specială de operatori cu care acestea sunt asociate.

Definiția 8. Fie (V, \langle, \rangle) un spațiu euclidian și $f \in \text{End}(V)$, f se numește *autoadjunct* dacă pentru $(\forall)v, w \in V$, $\langle f(v), w \rangle = \langle v, f(w) \rangle$.

Teorema 9. Fie (V, \langle, \rangle) un spațiu euclidian finit dimensional și $f \in \text{End}(V)$. Fie \mathcal{B} bază ortonormată în V și $S = M_{\mathcal{B}}(f)$. f este autoadjunct dacă și numai dacă $S = {}^tS$.

Geometrie analitică

Am lucrat până acum cu spații și subspații vectoriale. Considerăm dreptele paralele L și W incluse în planul \mathbb{R}^2 .



Cele două submulțimi ale planului sunt $W = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid y = \frac{1}{2}x \right\}$ și respectiv $L = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid y = \frac{1}{2}x - 1 \right\}$. W conține originea, este deci un subspațiu vectorial al planului \mathbb{R}^2 . L nu este subspațiu vectorial neconținând elementul $0_{\mathbb{R}^2}$. Și totuși L este o linie, este descris de o ecuație liniară. Este de fapt o varietate liniară.

Definiția 10. O *varietate liniară* în \mathbb{R}^n este o submulțime $L = p + W = \{p + w \mid w \in W\}$ unde $p \in \mathbb{R}^n$ și $W \subset \mathbb{R}^n$ este un subspațiu vectorial.

Bineînțeles definiția se poate da pentru orice spațiu vectorial V , orice $p \in V$ și orice $W \subset V$ subspațiu vectorial. Vom lucra însă numai în \mathbb{R}^n .

Este evident că o varietate liniară L este subspațiu vectorial dacă și numai dacă $0_{\mathbb{R}^n} \in L$.

Propoziția 11. Dacă $p + W = p' + W'$, cu W, W' subspații vectoriale în \mathbb{R}^n , atunci $W = W'$.

Deci în reprezentarea unei varietăți liniare nevide sub forma $p + W$, subspațiul vectorial W este unic determinat.

În figura anterioară $L = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} + W$, $p = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$.

Definiția 12. Pentru orice $L \subset \mathbb{R}^n$ varietate liniară, există un unic subspațiu vectorial $W \subset \mathbb{R}^n$, numit *subspațiul director al lui L* , a.î. $(\forall)p_0 \in L$, avem $L = p_0 + W$. *Dimensiunea* unei varietăți liniare este dimensiunea spațiului director, și se notează $\dim_{\mathbb{R}}(L)$.

O varietate liniară de dimensiune 1 se numește *dreaptă*. O varietate liniară de dimensiune 2 se numește *plan*, iar dacă varietatea are dimensiune $n - 1$ în \mathbb{R}^n aceasta se numește *hiperplan*.

Dacă $p \in \mathbb{R}^n$, atunci $L = \{p\}$ are subspațiul director $0_{\mathbb{R}^n}$, și deci $\dim\{p\} = 0$.

Observația 13. Dat un punct $p \in \mathbb{R}^n$ și W un subspațiu vectorial al spațiului \mathbb{R}^n , există o unică varietate liniară ce trece prin p și are ca spațiu director W .

Exemplul 14. Fie $L = \left\{ v = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mid x_1 + x_2 + x_3 = 1, 2x_1 - x_2 - x_3 = 3 \right\}$. Arătăm că L este varietate liniară. $L = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$,

adică L este mulțimea soluțiilor sistemului $A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$, unde $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.

O soluție a acestui sistem este $\begin{pmatrix} 4/3 \\ -1/3 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Deci $L = \begin{pmatrix} 4/3 \\ -1/3 \\ 0 \end{pmatrix} + W$, unde $W = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$. W

este subspațiu vectorial în \mathbb{R}^3 . Este spațiul soluțiilor sistemului omogen $A \cdot v = 0_{\mathbb{R}^2}$. $\dim(W) = \text{defect}(A) = 1 = \text{numărul variabilelor secundare}$. L este o dreaptă în \mathbb{R}^3 . Rezolvând sistemul $A \cdot v = 0_{\mathbb{R}^2}$ obținem $x_1 = 0, x_2 = -x_3, x_3 \in \mathbb{R}$ este parametru.

$W = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = \left\{ t \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R} \right\}$, este spațiul generat de $\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Obținem $L = \left\{ \begin{pmatrix} 4/3 \\ -1/3 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -t \\ t \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} 4/3 \\ -1/3 - t \\ t \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R} \right\}$.

Ecuatiile prin care am definit L se numesc *implicite*. Ecuatiile la care am ajuns se numesc *parametrice*, acestea depind de parametrul $t \in \mathbb{R}$.

În general o dreaptă (varietate liniară de dimensiune 1) are un parametru, un plan are doi parametri iar un hiperplan în \mathbb{R}^n are $n - 1$ parametri.

• Ecuatii ale dreptei

O dreaptă este o varietate liniară de dimensiune 1, adică subspațiul vectorial director este $\langle v \rangle, v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0_{\mathbb{R}^n}\}$. Orice alt vector λv , cu $\lambda \neq 0, \lambda \in \mathbb{R}$ generează $\langle v \rangle (\langle v \rangle = \langle \lambda v \rangle)$.

Voi descrie ecuațiile parametrice și implicite ale unei drepte $L \subset \mathbb{R}^n$ ce trece prin p și are $\langle v \rangle = \{tv \mid t \in \mathbb{R}\}$ (subspațiul generat de v) ca subspațiu director, cu $p = {}^t(p_1, p_2, \dots, p_n) \in \mathbb{R}^n$ și $v = {}^t(v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{R}^n \setminus \{0_{\mathbb{R}^n}\}$.

$L = p + \langle v \rangle$. Deci $(\forall)x \in L, x = p + tv$, pentru un $t \in \mathbb{R}$.

De aici obținem ecuațiile parametrice

$$x_1 = p_1 + tv_1, x_2 = p_2 + tv_2, \dots, x_n = p_n + tv_n.$$

Ecuatiile implicite ale dreptei L se obțin eliminând parametrul t din ecuațiile de mai sus. Obținem

$$L : \frac{x_1 - p_1}{v_1} = \dots = \frac{x_n - p_n}{v_n}.$$

Dacă pentru un indice $j, v_j = 0$, atunci ecuația corespunzătoare indicelui j este $x_j - p_j = 0$.

Ecuatiile dreptei $L(p, q)$ ce trece prin $p = {}^t(p_1, p_2, \dots, p_n) \neq q = {}^t(q_1, q_2, \dots, q_n)$, două puncte distincte din \mathbb{R}^n .

Observăm că $v = q - p$ este un vector director al dreptei $L(p, q)$. Este un vector în spațiul vectorial \mathbb{R}^n , deci originea sa este în $0_{\mathbb{R}^n}$. În figura cu care am început considerațiile geometrice am descris acest fapt.

$L(p, q) = p + \langle q - p \rangle$. Deci $(\forall)x \in L, x = p + t(q - p) = (1 - t)p + tq$, cu $t \in \mathbb{R}$. O combinație liniară $\alpha p + \beta q$, cu $\alpha, \beta \in \mathbb{R}, \alpha + \beta = 1$, se numește combinație convexă. Am obținut $L(p, q) = \{(1 - t)p + tq \mid t \in \mathbb{R}\}$, mulțimea combinațiilor convexe dintre p și q .

Dacă $t \in [0, 1]$, atunci combinația convexă $(1 - t)p + tq$ reprezintă segmentul dintre p și q de pe dreapta $L(p, q)$. Îl putem nota $[p, q] = \{(1 - t)p + tq \mid t \in [0, 1]\}$.

Ecuatiile parametrice ale dreptei $L(p, q)$ sunt

$$\begin{aligned} x_1 &= p_1 + t(q_1 - p_1) = (1 - t)p_1 + tq_1, \\ x_2 &= p_2 + t(q_2 - p_2) = (1 - t)p_2 + tq_2, \quad \dots, \\ x_n &= p_n + t(q_n - p_n) = (1 - t)p_n + tq_n. \end{aligned}$$

De aici, eliminând parametrul t , obținem ecuațiile implicite

$$\frac{x_1 - p_1}{q_1 - p_1} = \dots = \frac{x_n - p_n}{q_n - p_n}.$$

Dacă pentru un indice $j, q_j - p_j = 0$, atunci ecuația corespunzătoare indicelui j este $x_j - p_j = 0$.

GEOMETRIE ȘI ALGEBRĂ LINIARĂ

Curs 11

Varietăți liniare. Paralelism, perpendicularitate.

• Ecuații ale planului

După cum am definit în cursul anterior, un plan este o varietate liniară cu spațiul director de dimensiune 2.

Fie $v, w \in \mathbb{R}^n \setminus \{0_{\mathbb{R}^n}\}$, doi vectori liniar independenți. Planul ce trece prin $p \in \mathbb{R}^n$ și are spațiul director $W = \langle v, w \rangle$ este $L = p + W$. Deci $(\forall) x \in L, x = p + sv + tw$ cu $s, t \in \mathbb{R}$, $L = \{p + sv + tw \mid s, t \in \mathbb{R}\}$.

Putem să scriem ecuațiile parametrice:

$$x_1 = p_1 + sv_1 + tw_1, x_2 = p_2 + sv_2 + tw_2, \dots, x_n = p_n + sv_n + tw_n; s, t \in \mathbb{R}.$$

Ecuațiile planului $L(p, q, r)$, ce trece prin trei puncte necoliniare $p, q, r \in \mathbb{R}^n$. Vectorii $q - p$ și $r - p$ din spațiul vectorial \mathbb{R}^n sunt liniar independenți (pentru că punctele p, q, r sunt necoliniare), și deci generează un subspațiu vectorial de dimensiune 2.

$L(p, q, r) = p + \langle q - p, r - p \rangle = \{p + s(q - p) + t(r - p) \mid s, t \in \mathbb{R}\} = \{(1 - s - t)p + sq + tr \mid s, t \in \mathbb{R}\}$. Vedem că avem din nou o combinație liniară convexă (suma coeficienților este 1).

Ecuațiile parametrice sunt în acest caz

$$\begin{aligned} x_1 &= (1 - s - t)p_1 + sq_1 + tr_1, \\ x_2 &= (1 - s - t)p_2 + sq_2 + tr_2, \quad \dots, \\ x_n &= (1 - s - t)p_n + sq_n + tr_n; \quad s, t \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

• Ecuații ale hiperplanului

Un hiperplan este o varietate liniară de dimensiune $n - 1$ în \mathbb{R}^n .

Considerăm v_1, v_2, \dots, v_{n-1} , $n - 1$ vectori liniar independenți în \mathbb{R}^n . Hiperplanul ce trece prin $p \in \mathbb{R}^n$ și are spațiul director $W = \langle v_1, v_2, \dots, v_{n-1} \rangle$, este $L = p + W$, de unde $L = \{p + t_1v_1 + t_2v_2 + \dots + t_{n-1}v_{n-1} \mid t_1, t_2, \dots, t_{n-1} \in \mathbb{R}\}$. Scriem $v_j, 1 \leq j \leq n - 1$

în coordonate, $v_j = \begin{pmatrix} v_{1,j} \\ v_{2,j} \\ \vdots \\ v_{n,j} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$. Primul indice reprezintă coordonata iar al doilea indice reprezintă indicele vectorului.

Deci $x \in L \Leftrightarrow x = p + t_1 v_1 + t_2 v_2 + \dots + t_{n-1} v_{n-1}$, pentru anumiți $t_1, t_2, \dots, t_{n-1} \in \mathbb{R}$. Ecuațiile parametrice sunt în acest caz

$$\begin{cases} x_1 = p_1 + t_1 v_{1,1} + t_2 v_{1,2} + \dots + t_{n-1} v_{1,n-1}, \\ x_2 = p_2 + t_2 v_{2,1} + t_2 v_{2,2} + \dots + t_{n-1} v_{2,n-1}, & \dots, \\ x_n = p_n + t_2 v_{n,1} + t_2 v_{n,2} + \dots + t_{n-1} v_{n,n-1} & t_1, t_2, \dots, t_{n-1} \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Pentru a obține ecuația implicită ne uităm la sistemul ecuațiilor parametrice. Pentru t_1, \dots, t_{n-1} găsim x_1, \dots, x_n . Date x_1, \dots, x_n , coordonatele unui punct din hiperplan, găsim parametrii t_1, \dots, t_{n-1} , care îl definesc. Deci gândind sistemul în funcție de variabilele t_1, \dots, t_{n-1} , acesta este compatibil dacă și numai dacă matricea formată din vectorii v_1, \dots, v_{n-1} are același rang cu matricea extinsă. Vectorii v_1, \dots, v_{n-1} sunt liniar independenți, deci rangul matricii din $\mathcal{M}_{n,n-1}(\mathbb{R})$ formată cu acești vectori are rang $n-1$. Deci matricea extinsă are rang $n-1$, adică

$$\begin{vmatrix} x_1 - p_1 & v_{1,1} & v_{1,2} & \dots & v_{1,n-1} \\ x_2 - p_2 & v_{2,1} & v_{2,2} & \dots & v_{2,n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_n - p_n & v_{n,1} & v_{n,2} & \dots & v_{n,n-1} \end{vmatrix} = 0, \text{ ceea ce reprezintă ecuația implicită a hiper-}$$

planului. Ceea ce trebuie reținut este că pentru un hiperplan avem o singură ecuație cu n necunoscute.

Propoziția 1. Dacă $\{L_i\}_{i \in I}$ este o familie de varietăți liniare în \mathbb{R}^n , atunci $\bigcap_{i \in I} L_i$ este o varietate liniară. Fie W_i spațiul director pentru $L_i, i \in I$. Dacă $\bigcap_{i \in I} L_i \neq \emptyset$ atunci spațiul director al intersecției $\bigcap_{i \in I} L_i$ este $\bigcap_{i \in I} W_i$. În acest caz $\dim(\bigcap_{i \in I} L_i) = \dim(\bigcap_{i \in I} W_i)$.

Paralelism

Definiția 2. Fie L_1 și L_2 varietăți liniare având subspațiile directoare W_1 și W_2 . Spunem că L_1 este paralelă cu L_2 și notăm $L_1 \parallel L_2$ dacă $W_1 \subseteq W_2$ sau $W_2 \subseteq W_1$.

Propoziția 3. Fie $L_1 \parallel L_2$ două varietăți liniare paralele. Atunci $L_1 \cap L_2 = \emptyset$ sau $L_1 \subseteq L_2$ sau $L_2 \subseteq L_1$.

Demonstrație: Scriem $L_i = p_i + W_i, i = 1, 2$. Presupunem $L_1 \cap L_2 \neq \emptyset$. Fie $x \in L_1 \cap L_2$. Din definiția paralelismului varietăților liniare, $W_1 \subseteq W_2$ sau $W_2 \subseteq W_1$, deci $x + W_1 \subseteq x + W_2$ sau $x + W_2 \subseteq x + W_1$, adică $L_1 \subseteq L_2$ sau $L_2 \subseteq L_1$. □

Exemplul 4. Fie $L_1 = \{v \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 = 1, x_2 = 1\}$ dreapta verticală ce trece prin ${}^t(1, 1, 0) \in \mathbb{R}^3$ și $L_2 = \{v \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 = 0, x_3 = 0\}$, axa Ox_2 din \mathbb{R}^3 . W_1 este axa Ox_1 iar $W_2 = L_2$. $L_1 \cap L_2 = \emptyset$, dar $L_1 \not\parallel L_2$ pentru că nu avem nici o incluziune între W_1 și W_2 .

Postulatul lui Euclid Printr-un punct $p \in \mathbb{R}^n$, există o unică varietate liniară care trece prin p , este paralelă cu o varietate liniară dată L și are dimensiunea varietății L .

Poziția relativă a două drepte în $\mathbb{R}^n, n \geq 3$.

Considerăm $L = p + \langle v \rangle$ și $L' = p' + \langle v' \rangle$, două drepte în \mathbb{R}^n . Avem $L \cap L' \neq \emptyset$ dacă există $t, t' \in \mathbb{R}$ a.î. $p + tv = p' + t'v'$, adică $p - p' \in \langle v, v' \rangle$, sau sistemul $tv - t'v' = p' - p$, în t și t' are soluție, adică este compatibil.

$$\text{Considerăm matricele } A = \begin{pmatrix} v_1 & -v'_1 \\ \vdots & \vdots \\ v_n & -v'_n \end{pmatrix} \text{ și } \bar{A} = \begin{pmatrix} v_1 & -v'_1 & p'_1 - p_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ v_n & -v'_n & p'_n - p_n \end{pmatrix}.$$

Deci L și L' se intersectează dacă și numai dacă $\text{rang}(A) = \text{rang}(\bar{A})$.

$L \parallel L'$ dacă și numai dacă $\langle v \rangle = \langle v' \rangle$ (sunt spații de dimensiuni egale cu 1), adică v este multiplu nenul de v' , adică $\text{rang}(A) = 1$.

Am obținut:

- dacă $\text{rang}(A) = \text{rang}(\bar{A}) = 1$ atunci dreptele L și L' coincid,
- dacă $\text{rang}(A) = 1, \text{rang}(\bar{A}) = 2$ atunci dreptele sunt paralele distincte (nu se intersectează),

- dacă $\text{rang}(A) = \text{rang}(\bar{A}) = 2$ atunci dreptele se intersectează într-un unic punct.

Cazurile de mai sus au loc și pentru $n = 2$, adică în plan. Următorul caz poate avea loc numai pentru $n \geq 3$.

- dacă $\text{rang}(A) = 2, \text{rang}(\bar{A}) = 3$ atunci dreptele sunt neconcurente și neparalele (necoplanare). Este cazul dreptelor din **exemplul 4**.

Putem considera cazul particular a două linii în \mathbb{R}^3 . Fie acestea

$$L : \begin{cases} a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = \alpha \\ b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 = \beta \end{cases} \text{ și } L' : \begin{cases} a'_1x_1 + a'_2x_2 + a'_3x_3 = \alpha' \\ b'_1x_1 + b'_2x_2 + b'_3x_3 = \beta' \end{cases}. \text{ Avem linii}$$

decă un parametru pentru fiecare linie, adică numărul variabilelor secundare este 1 pentru fiecare sistem. Rangul matricii fiecărui sistem așadar 2.

Considerăm sistemul dat de cele patru ecuații cu necunoscutele x_1, x_2, x_3 . Notăm cu B, \bar{B} matricea, respectiv matricea extinsă a sistemului. Dreptele L și L' se intersectează dacă și numai dacă sistemul ce are matricea B este compatibil adică $\text{rang}(B) = \text{rang}(\bar{B})$ și sunt paralele dacă $\text{rang}(B) = 2$.

Obținem cazurile.

- $\text{rang}(B) = \text{rang}(\bar{B}) = 2$ dreptele coincid,
- $\text{rang}(B) = 2, \text{rang}(\bar{B}) = 3$, dreptele sunt paralele, distincte,
- $\text{rang}(B) = \text{rang}(\bar{B}) = 3$, dreptele sunt concutente într-un singur punct,
- $\text{rang}(B) = 3, \text{rang}(\bar{B}) = 4$, dreptele sunt neconcurente și neparalele; sunt necoplanare (cazul din **exemplul 4**).

Dacă cele două drepte le considerăm în plan, atunci dreptele pot fi confundate, paralele distincte sau concurente într-un unic punct.

Poziția relativă a două plane în \mathbb{R}^3 .

Un plan în \mathbb{R}^3 este de fapt un hiperplan, și este descris de o singură ecuație.

Fie $\pi_1 = \{v \in \mathbb{R}^3 \mid a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = \alpha\}$ și $\pi_2 = \{v \in \mathbb{R}^3 \mid a'_1x_1 + a'_2x_2 + a'_3x_3 = \alpha'\}$, două plane în \mathbb{R}^3 .

Considerăm sistemul $\begin{cases} a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = \alpha \\ a'_1x_1 + a'_2x_2 + a'_3x_3 = \alpha' \end{cases}$ cu matricea $C = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a'_1 & a'_2 & a'_3 \end{pmatrix}$ și matricea extinsă $\overline{C} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \alpha \\ a'_1 & a'_2 & a'_3 & \alpha' \end{pmatrix}$.

Planele sunt paralele dacă $\text{rang}(C) = 1$ și se intersectează dacă și numai dacă sistemul este compatibil, adică $\text{rang}(C) = \text{rang}(\overline{C})$.

Obținem următoarele cazuri:

- $\text{rang}(C) = \text{rang}(\overline{C}) = 1$, planele coincid,
- $\text{rang}(C) = 1$ și $\text{rang}(\overline{C}) = 2$, planele sunt paralele, distincte,
- $\text{rang}(C) = \text{rang}(\overline{C}) = 2$, planele se intersectează. Dimensiunea intersecției este numărul variabilelor secundare = 1, adică planele se intersectează după o dreaptă.

Poziția relativă dintre o dreaptă și un hiperplan în \mathbb{R}^n

Cum poate sta o dreaptă față de un plan (care este un hiperplan) în \mathbb{R}^3 ? Poate fi conținută în plan, poate fi paralelă cu acesta, sau poate să se intersecteze într-un unic punct. Același lucru este valabil pentru o dreaptă și un hiperplan în \mathbb{R}^n .

Să demonstrăm acest lucru. Fie dreapta $L = p + \langle v \rangle$, cu $p \in \mathbb{R}^n$ și $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0_{\mathbb{R}^n}\}$ și hiperplanul $H = \{x \in \mathbb{R}^n \mid a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = \alpha\}$. Știm că pentru orice $x \in L$, coordonatele satisfac ecuațiile $x_i = p_i + tv_i, 1 \leq i \leq n$. Considerăm

$$\text{sistemul } \begin{cases} x_1 - tv_1 & = p_1 \\ \dots & \\ x_n - tv_n & = p_n \\ a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n & = \alpha \end{cases} . \text{ Este un sistem cu } n+1 \text{ ecuații în}$$

$n+1$ variabile, x_1, \dots, x_n, t . Considerăm t necunoscută. Dacă $L \cap H = \{z\}$, atunci trebuie să existe $t_0 \in \mathbb{R}$ a.i. $z = p + t_0v \in H$. Deci soluția sistemului dacă există este un $n+1$ -uplu (z_1, \dots, z_n, t_0)

Sistemul este compatibil dacă și numai dacă $\text{rang}(A) = \text{rang}(\overline{A})$.

Pentru a compara cele două ranguri ajungem să comparăm rangurile a două matrice 1×1 și 1×2 . Astfel comparăm $\text{rang}(a_1v_1 + a_2v_2 + \dots + a_nv_n)$ cu $\text{rang}(a_1v_1 + a_2v_2 + \dots + a_nv_n, \alpha - a_1p_1 - a_2p_2 - \dots - a_np_n)$.

Obținem:

- $\text{rang}(a_1v_1 + a_2v_2 + \dots + a_nv_n) = \text{rang}(a_1v_1 + a_2v_2 + \dots + a_nv_n, \alpha - a_1p_1 - a_2p_2 - \dots - a_np_n) = 0$ atunci sistemul este compatibil și $L \subset H$.
- $\text{rang}(a_1v_1 + a_2v_2 + \dots + a_nv_n) = 0 < \text{rang}(a_1v_1 + a_2v_2 + \dots + a_nv_n, \alpha - a_1p_1 - a_2p_2 - \dots - a_np_n) = 1$ Sistemul este incompatibil, $L \cap H = \emptyset$
- $\text{rang}(a_1v_1 + a_2v_2 + \dots + a_nv_n) = \text{rang}(a_1v_1 + a_2v_2 + \dots + a_nv_n, \alpha - a_1p_1 - a_2p_2 - \dots - a_np_n) = 1$, sistemul este compatibil, are soluție unică. $L \cap H = \{z\}$.

Perpendicularitatea varietăților liniare

Definiția 5. Fie L_1 și L_2 două varietăți liniare în \mathbb{R}^n cu subspațiile directoare W_1 și respectiv W_2 . L_1 și L_2 se numesc *perpendiculare* dacă $W_1 \perp W_2$. L_1 și L_2 se numesc *normale* dacă $W_1^\perp = W_2$

De exemplu două linii în spațiu pot fi perpendiculare, dar nu normale. Complementul ortogonal al unei drepte în \mathbb{R}^3 este un plan!

Fie $L_1 = p_1 + \langle v_1 \rangle$ și $L_2 = p_2 + \langle v_2 \rangle$ două drepte în \mathbb{R}^n . Prin definiție $L_1 \perp L_2 \Leftrightarrow v_1 \perp v_2 \Leftrightarrow \langle v_1, v_2 \rangle = 0$, unde \langle, \rangle este produsul scalar canonic în \mathbb{R}^n .

Fie $L = p + \langle v \rangle$ o linie și $H = \{x \in \mathbb{R}^n \mid a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = \alpha\}$ un hiperplan în \mathbb{R}^n . Spațiu director al dreptei este $\langle v \rangle$ iar spațiul director al hiperplanului este $W = \{x \in \mathbb{R}^n \mid a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = 0\}$. Spațiu ortogonal al lui W , $W^\perp = \{z \in \mathbb{R}^n \mid \langle z, x \rangle = 0, (\forall)x \in W\}$. L și H sunt normale $\Leftrightarrow W^\perp = \langle v \rangle \Leftrightarrow v$ este proporțional cu ${}^t(a_1, a_2, \dots, a_n)$.

Definiția 6. Fie $p, q \in \mathbb{R}^n$. Distanța între p și q , $d(p, q) = \|p - q\| = \sqrt{\langle p - q, p - q \rangle}$.

Distanța se poate defini în același mod pe orice spațiu euclidian. În cazul particular de mai sus, în care lucrăm cu produsul scalar canonic pe \mathbb{R}^n , distanța este distanța euclidiană, anume pentru $p, q \in \mathbb{R}^n$, $d(p, q) = \sqrt{\sum_{i=1}^n (p_i - q_i)^2}$. Este lungimea diagonalei paralelipipedului cu laturile de lungimi $p_i - q_i$.

Distanța satisface următoarele proprietăți.

- $d(p, q) \geq 0$ și $d(p, q) = 0 \Leftrightarrow p = q$
- $d(p, q) = d(q, p)$, pentru $(\forall)p, q \in \mathbb{R}^n$
- $d(p, q) \leq d(p, r) + d(r, q)$ pentru $(\forall)p, q, r \in \mathbb{R}^n$.

Fie $L = p + \langle v \rangle$ și $L' = p' + \langle v' \rangle$ două drepte în \mathbb{R}^n . Cosinusul unghiului θ dintre aceste drepte L și L' este $\cos(\theta) = \frac{\langle v, v' \rangle}{\|v\| \cdot \|v'\|}$.

Remarcă 7. Să aflăm o formulă pentru distanța de la un punct $p \in \mathbb{R}^n$ la un hiperplan $H = \{x \in \mathbb{R}^n \mid a_1x_1 + \dots + a_nx_n = \alpha\}$. Normala la H , după cum am văzut mai sus, are vectorul director $a = {}^t(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$. $d(p, H) = \min_{q \in H} d(p, q)$. Această distanță minimă se realizează pe normala de la p la H . Notăm $n(p)$ normala la H ce trece prin p . Fie $\{q_0\} = n(p) \cap H$. Avem $d(p, H) = d(p, q_0)$.

Cu aceste observații obținem formula

$$d(p, H) = \frac{|a_1p_1 + a_2p_2 + \dots + a_np_n - \alpha|}{\|a\|}$$

Definiția 8. Se numește *reper* al unui spațiu vectorial V o bază ordonată a lui V . Într-un spațiu euclidian un reper se numește *ortonormat* dacă baza este ortonormată.

O remarcă importantă este că spre deosebire de spațiul vectorial V , în avem un punct special, anume 0_V (elementul neutru pentru adunarea vectorilor), în spațiul V , nespecificând că este un spațiu vectorial, toate punctele sunt la fel.

În \mathbb{R}^n avem reperul format din baza canonică $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$. Matricea formată cu vectorii din \mathcal{B} este matricea I_n care are determinantul 1. Matricea $M_{\mathcal{B}', \mathcal{B}}$ de trecere de la reperul canonic \mathcal{B} la un alt reper \mathcal{B}' este inversabilă, și are determinantul pozitiv sau negativ. Vom spune că reperul este pozitiv dacă $\det(M_{\mathcal{B}', \mathcal{B}}) > 0$, altfel negativ. De exemplu reperul $\mathcal{B}' = \{e_2, e_1, e_3, \dots, e_n\}$ este negativ pentru că am permutat primele două coloane din I_n între ele și astfel $\det(M_{\mathcal{B}', \mathcal{B}}) = -1$.

În cele ce urmează vom lucra în \mathbb{R}^3 . Un triplet de vectori $\{u, v, w\} \subset \mathbb{R}^3$ este *pozitiv*, dacă un observator situat pe w vede unghiul de la u spre v în sens trigonometric (invers acelor de ceasornic). În caz contrar reperul este negativ. Considerăm un reper ortonormat pe care îl vom nota $\mathcal{B} = \{i, j, k\}$, (de exemplu reperul canonic $\{e_1, e_2, e_3\} \subset \mathbb{R}^3$).

Definiția 9. Fie $u, v \in \mathbb{R}^3$. *Produsul vectorial*, notat cu $u \times v$ este vectorul din \mathbb{R}^3 cu proprietățile

- $u \times v \perp \langle u, v \rangle$ (planul generat de u și v)
- reperul $(u, v, u \times v)$ este pozitiv
- $\|u \times v\|$ este egală cu aria paralelogramului construit cu vectorii u și v , mai precis $\|u \times v\| = \|u\| \cdot \|v\| \sin(u, v)$.

Observația 10. Fie n vectorul unitar perpendicular pe planul generat de vectorii $u, v \in \mathbb{R}^3$, a.î. (u, v, n) este un reper pozitiv. Atunci $u \times v = \|u\| \cdot \|v\| \sin(u, v) n$.

Propoziția 11. Pentru $u, u', v, v' \in \mathbb{R}^3$ și pentru $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ sunt adevărate:

- $u \times v = 0$ dacă u, v sunt coliniari (paralelogramul este degenerat),
- $v \times u = -u \times v$,
- $\times : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ este aplicație bilinară: $(\alpha u + \beta u') \times v = \alpha u \times v + \beta u' \times v$ și $u \times (\alpha v + \beta v') = \alpha u \times v + \beta u \times v'$

Teorema 12. Fie $\mathcal{B} = \{i, j, k\}$ o bază ortonormată pozitivă în \mathbb{R}^3 . Pentru $u, v \in \mathbb{R}^3$,

$$u \times v = \begin{vmatrix} i & j & k \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}.$$

Definiția 13. Fie $u, v, w \in \mathbb{R}^3$. *Produsul mixt* al vectorilor u, v, w , se notează (u, v, w) și este definit prin $(u, v, w) = \langle u, v \times w \rangle \in \mathbb{R}$.

Observația 14. Din proprietățile produsului scalar și a celui vectorial rezultă că produsul mixt $(, ,) : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ este liniar în fiecare argument.

Teorema 15. Fie $\mathcal{B} = \{i, j, k\}$ o bază ortonormată pozitivă în \mathbb{R}^3 . Pentru $u, v, w \in \mathbb{R}^3$, avem

$$\bullet (u, v, w) = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix},$$

- $(u, v, w) = -(v, u, w)$; *semnul nu se schimbă la permutări ciclice* $(u, v, w) = (v, w, u)$,
- *dacă u, v, w sunt necoplanari, atunci $|(u, v, w)|$ reprezintă volumul paralelipipedului construit cu vectorii u, v și w ,*
- $(u, v, w) = 0 \Leftrightarrow u, v, w$ *sunt coplanari.*

Folosind produsul mixt se poate da o formulă pentru distanța între două drepte necoplanare (vectorii directori sunt liniar independenți). Fie $L_1 = q_1 + \langle v_1 \rangle$ și $L_2 = q_2 + \langle v_2 \rangle$ cele două drepte, unde $q_1, q_2 \in \mathbb{R}^3$ și $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^3$ sunt vectori liniar independenți. $d(L_1, L_2) = \min_{P_1 \in L_1, P_2 \in L_2} \{d(P_1, P_2)\}$. Bineînțeles, $d(L_1, L_2)$ se atinge pe perpendiculara comună n a dreptelor L_1 și L_2 . Fie $\{A\} = L_1 \cap n$ și $\{B\} = L_2 \cap n$. $d(L_1, L_2) = d(A, B)$. AB este înălțimea paralelipipedului format cu muchiile $q_1 q_2, v_1, v_2$. Lungimea acestei înălțimi este volumul paralelipipedului împărțit la aria bazei, paralelogramul de laturi v_1, v_2 . Menționând că $q_1 q_2 = q_2 - q_1$, avem $d(L_1, L_2) = \frac{(q_1 q_2, v_1, v_2)}{\|v_1 \times v_2\|} = \frac{(q_2 - q_1, v_1, v_2)}{\|v_1 \times v_2\|}$.

Izometrii

Definiția 16. Se numește *izometrie* $\phi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ cu proprietatea că pentru $(\forall) p, q \in \mathbb{R}^n$, $d(\phi(p), \phi(q)) = d(p, q)$.

Este ușor de arătat că:

- Orice izometrie este o aplicație injectivă.
- Orice izometrie $\phi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ transformă varietăți liniare în varietăți liniare de aceeași dimensiune.
- Izometriile $\phi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ formează grup cu operația de compunere a aplicațiilor.

Teorema 17. $\phi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ este izometrie dacă și numai dacă există un reper ortonormat \mathcal{B} în \mathbb{R}^n , $\phi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$, $\phi(x) = A \cdot x + b$, unde $A \in O_n(\mathbb{R})$ și $b \in \mathbb{R}^n$.

Translația cu $b \in \mathbb{R}^n$, $\phi_b : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$, $\phi(x) = x + b$, corespunzătoare matricei I_n în reperul canonic, este izometrie.

Considerăm $A \in O_n(\mathbb{R})$, atunci $\phi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$, definită prin $\phi(x) = Ax$ este o izometrie. Pentru $A \in SO_n(\mathbb{R})$, avem rotații.

Să mai menționăm simetria față de o varietate liniară, $L \subset \mathbb{R}^n$. Notăm $s_L : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$. $s_L(p) = p'$, unde p' se obține astfel: considerăm varietatea normală la L ce trece prin p , $L^\perp(p)$ și $\{q\} = L \cap L^\perp(p)$. p' simetricul lui p față de q pe dreapta pq , sau q este mijlocul segmentului $[p, p']$. Deci $q = \frac{p+p'}{2} \Leftrightarrow p' = 2q - p$. Punctul $q = \text{pr}_L(p)$, proiecția lui p pe L . Deci $s_L(p) = 2 \text{pr}_L(p) - \text{id}_{\mathbb{R}^n}(p)$, $(\forall) p \in \mathbb{R}^n \Leftrightarrow s_L = 2 \text{pr}_L - \text{id}_{\mathbb{R}^n}$.

Pentru $L = \{x \in \mathbb{R}^n \mid a_1 x_1 + \dots + a_n x_n = \alpha\}$, un hiperplan, atunci pentru $p \in \mathbb{R}^n$, $s_L(p) = p + 2 \frac{\alpha - \langle a, p \rangle}{\|a\|^2} a$. Dacă hiperplanul trece prin origine ($\alpha = 0$), atunci $s_L(p) = p - 2 \frac{\langle a, p \rangle}{\|a\|^2} a$. Se demonstrează în acest caz că matricea $A = M_{\mathcal{B}}(s_L)$ într-un reper ortonormat pozitiv \mathcal{B} are $\det(A) = -1$.

GEOMETRIE ȘI ALGEBRĂ LINIARĂ

Curs 12 Conice

Voi începe prin a enumera conicele și în primul rând cele ce pot fi descrise ca locuri geometrice.

Elipsa se definește ca fiind locul geometric al punctelor din plan ce au suma distanțelor la două puncte fixate (numite focare, notate în figura de mai jos cu F_1 și F_2) constantă. Notăm constanta cu $2a$. Ecuația elipsei ce rezultă din această definiție este $\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a$. Trecem radicalul ce conține $(x-c)^2$ în membrul drept, ridicăm la pătrat, reducem termenii asemenea și obținem $a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = a^2 - cx$. Ridicăm din nou la pătrat, reducem termenii asemenea și ajungem la ecuația $(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2)$. Avem $a > c > 0$ și facem notația $b^2 = a^2 - c^2 > 0$. Cu această notație ecuația devine $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$. Împărțind cu a^2b^2 obținem $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. Această ecuație se numește *ecuația redusă* a elipsei. În figura de mai jos avem o elipsă orizontală cu $a > b$. Semiaxa majoră, mai lungă, de lungime a , este pe Ox . Semiaxa minoră, mai scurtă, este de lungime b și este pe axa Oy . În afară de elipsă, punctat, am figurat și dreptunghiul de laturi $2a$ și $2b$, centrat în $O(0,0)$, dreptunghi în care înscriem elipsa. Cantitatea $0 < e = \frac{c}{a} < 1$ se numește *excentricitatea elipsei*. Elipsa este o conică cu centru.

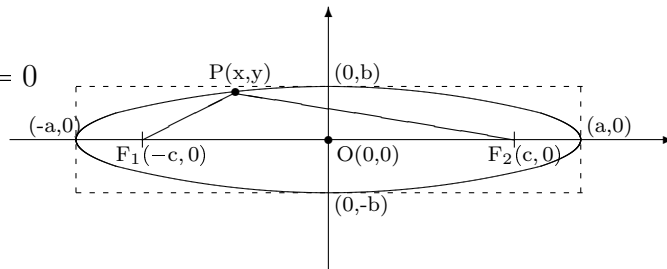
Elipsa

ecuație redusă: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$

centru: $O(0,0)$

lungime semiaxe: a, b

$b^2 = a^2 - c^2, a > c > 0$



Cercul este elipsa pentru care focarele F_1 și F_2 coincid. În acest caz, cele două focare se confundă cu centrul cercului. Deci pentru $c = 0$ semiaxe sunt egale și ecuația cercului de centru $O(0,0)$ este $x^2 + y^2 = r^2$, unde r este raza cercului. Cercul este deci locul geometric al punctelor din plan egal depărtate de un punct fixat, numit centrul cercului.

Hiperbola este locul geometric al punctelor din plan pentru care diferența distanțelor la două puncte fixate este constantă. Notăm constanta cu $2a$. Folosind definiția

scriem ecuația $\sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a$. Făcând calcule similare ca și în cazul elipsei ajungem la relația $(c^2 - a^2)x^2 - a^2y^2 = a^2(c^2 - a^2)$. $c > a > 0$ și notăm $b^2 = c^2 - a^2$. Împărțind la a^2b^2 obținem *ecuația redusă* $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$. Hiperbola are două asimptote, anume dreptele de ecuații $y = \pm \frac{b}{a}x$. În figură, în afară de hiperbolă am reprezentat punctat dreptunghiul centrat în $O(0,0)$ de laturi $2a$ și $2b$, dreptunghi ale cărui diagonale sunt cele două asimptote. Hiperbola este conică cu centru. *Excentricitatea hiperbolei* este $e = \frac{c}{a} > 1$.

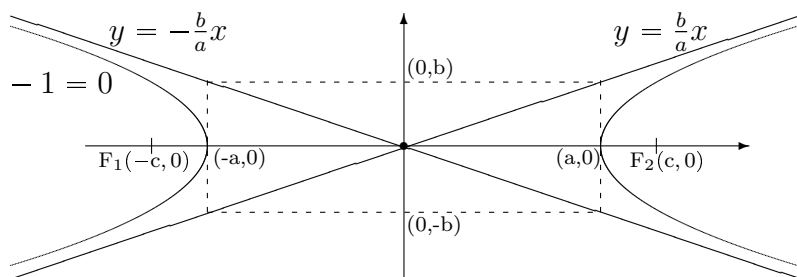
Hiperbola

ecuație redusă: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$

centru: $O(0,0)$

asimptote: $y = \pm \frac{b}{a}x$

$b^2 = c^2 - a^2, c > a > 0$



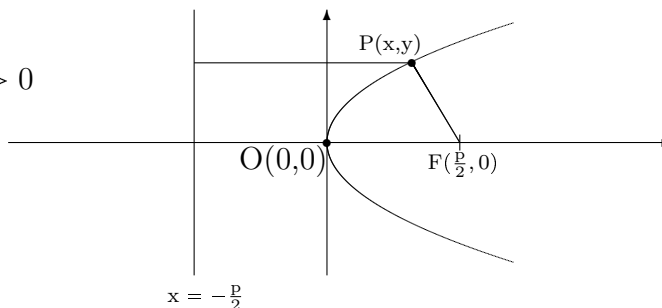
Parabola este locul geometric al punctelor egal depărtate de un punct fixat numit *focar* și de o dreaptă fixată, numită *directoare*. Scriind ecuația ce reiese din definiție și făcând calculele algebrice ca și în cazurile anterioare obținem *ecuația redusă* $2px = y^2$, sau $2py = x^2$. În primul caz dreapta directoare este verticală, iar în al doilea caz este orizontală. Parabola nu are centru. *Excentricitatea parabolei* = 1.

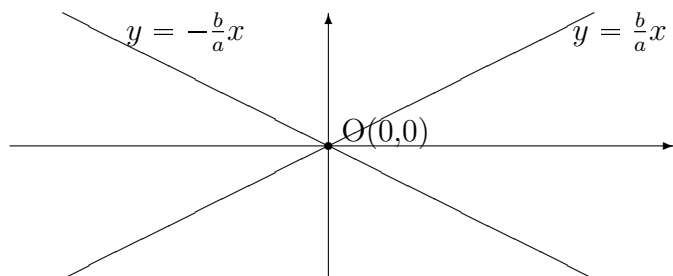
Parabola

ecuație redusă: $2px = y^2, p > 0$

fără centru

axă de simetrie: $y = 0$

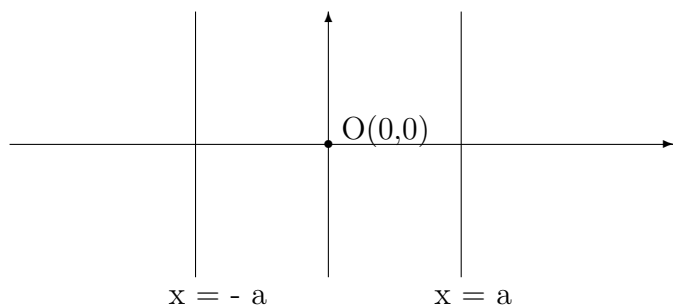


Reuniune de drepte concurenteecuație redusă: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$ centru: $O(0,0)$ 

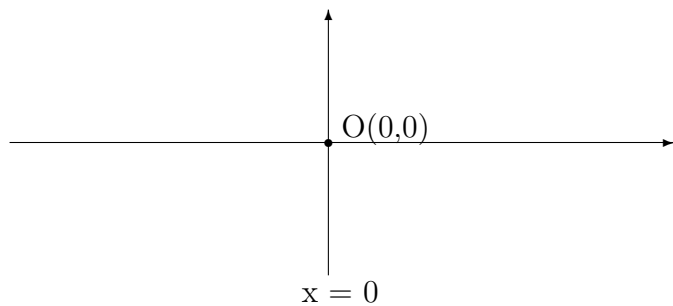
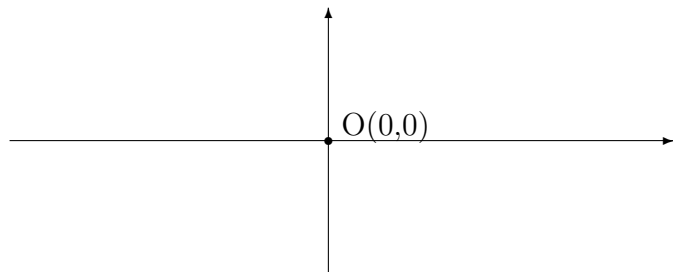
Cele două drepte concurente au ca centru punctul lor de intersecție, în acest caz, punctul $O(0,0)$.

Reuniune de drepte paraleleecuație redusă: $x^2 - a^2 = 0$

infinitate de centre

**Două drepte confundate**ecuație redusă: $x^2 = 0$

infinitate de centre

**Un punct**ecuație redusă: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0$ centru: $O(0,0)$ 

Mulțimea vidă

ecuație redusă: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + 1 = 0$.

Până aici am descris ecuațiile reduse ale conicelor. O conică este descrisă printr-o ecuație de tipul:

$$\mathcal{C} : a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0,$$

unde $a_{ij} \in \mathbb{R}$, $(\forall) i, j = \overline{1, 3}$ și $a_{11}^2 + a_{12}^2 + a_{22}^2 \neq 0$.

Conicei i se asociază matricea simetrică $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}$.

Submatricea de ordin 2 din stânga sus $A_2 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$ este matricea unei forme pătratice pe \mathbb{R}^2 .

Notăm $\Delta = \det(A)$, $\delta = \det(A_2)$, $I = \text{tr}(A_2) = a_{11} + a_{22}$.

Teorema 1. $\Delta = \det(A)$, $\delta = \det(A_2)$, $I = \text{tr}(A_2)$ sunt invarianți la translații și transformări ortogonale.

Clasificarea conicelor

Putem da o clasificare a conicelor folosind invarianții Δ, δ, I .

(1) Dacă $\Delta \neq 0$, atunci conica \mathcal{C} este *nedegenerată*.

a) dacă $\delta > 0$, atunci \mathcal{C} este $\begin{cases} \text{elipsă} & \text{dacă } \Delta \cdot I < 0 \\ \text{mulțimea vidă} & \text{dacă } \Delta \cdot I > 0 \end{cases}$

b) dacă $\delta = 0$, atunci conica \mathcal{C} este *parabolă*

c) dacă $\delta < 0$, atunci conica \mathcal{C} este *hiperbolă*

(2) Dacă $\Delta = 0$, atunci conica \mathcal{C} este conică *degenerată*

a) dacă $\delta > 0$, atunci conica \mathcal{C} este *un punct*,

b) dacă $\delta = 0$, atunci conica este o reuniune de *drepte paralele* sau *confundate* sau *mulțimea vidă*,

c) dacă $\delta < 0$, atunci conica \mathcal{C} este o reuniune de *drepte concurente*.

În cele ce urmează voi descrie metoda roto-translației de aducere la forma redusă a ecuației unei conice.

0. Din invarianții Δ, δ, I se deduce tipul conicei

1. Se aduce la forma canonică forma pătratică dată de matricea A_2 . Pentru aceasta se folosește metoda transformărilor ortogonale. Coeficienții pătratelor perfecte sunt valorile proprii.

2. Se forțează pătratele perfecte în x și y și se obține forma redusă.

Exemplul 2. Să se determine tipul conicei dată de ecuația $5x^2 + 6xy + 5y^2 + 2x - 2y + 2 = 0$ și să se aducă la forma redusă.

Matricea asociată conicei este $A = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 3 & 5 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$. $\Delta = 16, \delta = \det(A_2) =$

$$\begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 25 - 9 = 16, I = 10.$$

$\Delta = 16 \neq 0, \delta \cdot I = 160 > 0$, deci avem conică nedegenerată, care este de fapt mulțimea vidă.

Considerăm $A_2 = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$ pe care o aducem la forma diagonală folosind metoda transformărilor ortogonale.

$P_{A_2}(X) = X^2 - IX + \delta = X^2 - 10X + 16$. Rădăcinile sunt $\lambda_1 = 8, \lambda_2 = 2$.

Vectorii proprii: $(A_2 - 8I_2) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -3 & 3 \\ 3 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$
 $x = y \Rightarrow v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow e_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$

$(A_2 - 2I_2) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow x = -y \Rightarrow v_2 =$
 $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow e_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$ Am ales în $v_2, x = -1$ și $y = 1$ pentru ca matricea

formată cu coloanele v_1, v_2 să aibă $\det > 0$. Matricea $S = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, are proprietatea ${}^tSS = I_2$, și $\det(S) = 1$, deci S este matricea unei rotații în plan.

Schimbarea de variabile este $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = S \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$, adică $x = \frac{1}{\sqrt{2}}(x' - y')$ și $y = \frac{1}{\sqrt{2}}(x' + y')$.

Ecuația conicei în x' și y' devine $\mathcal{C} : 8x'^2 + 2y'^2 - 2\sqrt{2}y' + 2 = 0$. De aici deducem ecuația redusă $8x'^2 + 2(y' - \frac{1}{\sqrt{2}})^2 + 1 = 0$. Suma a două pătrate perfecte plus 1, este mulțimea vidă. Coeficienții pătratelor perfecte sunt valorile proprii ale matricii A_2 .

Voi mai da un exemplu.

Exemplul 3. Să se determine tipul conicei dată de ecuația $3x^2 - 4xy - 2x + 4y - 3 = 0$ și să se aducă la forma redusă.

Matricea $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 \\ -2 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & -3 \end{pmatrix}$. Invariantii metrici ai conicei sunt $\Delta = 8 \neq$

$0, \delta = \det(A_2) = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} = -4, I = 3$. Avem o conică nedegenerată, care este o hiperbolă.

Considerăm forma pătratică $3x^2 - 4xy$ în \mathbb{R}^2 pe care o aducem la forma canonică. Matricea asociată este $A_2 = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$. $P_{A_2}(X) = X^2 - 3X - 4$. Rădăcinile sunt $\lambda_1 = 4, \lambda_2 = -1$.

Vectorii proprii: $(A_2 - 4I_2) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -2 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow x = -2y \Rightarrow v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow e_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$.

$(A_2 + I_2) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow 2x = y \Rightarrow v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow e_2 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Matricea formată cu vectorii e_1, e_2 (coloanele matricei), este $S = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$. S este o matrice ortogonală de determinant 1, deci matricea unei rotații. Schimbarea de variabile este $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = S \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \Rightarrow x = \frac{1}{\sqrt{5}}(2x' + y'), y = \frac{1}{\sqrt{5}}(-x' + 2y')$.

Ecuția conice în noile coordonate devine $\mathcal{C} : 4x'^2 - y'^2 - \frac{8}{\sqrt{5}}x' + \frac{6}{\sqrt{5}}y' - 3 = 0$.

Formăm pătrate perfecte și obținem $4(x' - \frac{1}{\sqrt{5}})^2 - (y' - \frac{3}{\sqrt{5}})^2 - 2 = 0$.

Notăm $X = x' - \frac{1}{\sqrt{5}}, Y = y' - \frac{3}{\sqrt{5}}$. Aceasta reprezintă o translație. Împărțim cu 2 și obținem ecuația redusă a hiperbolei.

$$\mathcal{C} : 2X^2 - \frac{1}{2}Y^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow \frac{X^2}{(\frac{1}{\sqrt{2}})^2} - \frac{Y^2}{(\sqrt{2})^2} - 1 = 0$$

unde $a = \frac{1}{\sqrt{2}}$ și $b = \sqrt{2}$. Centrul hiperbolei este intersecția dreptelor $X = 0$ și $Y = 0$ iar noile coordonate în funcție de x și y sunt $X = \frac{1}{\sqrt{5}}(2x - y) - \frac{1}{\sqrt{5}}, Y = \frac{1}{\sqrt{5}}(x + 2y) - \frac{3}{\sqrt{5}}$. Acestea se obțin folosind $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = {}^tS \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ cât și formulele pentru X și Y în funcție de x' și y' . Matricea ${}^tS = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Dreapta $X = 0$ în sistemul Oxy are ecuația $y = 2x - 1$ iar dreapta $Y = 0$ are ecuația $y = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$. Intersecția acestora este punctul $o(1, 1)$. Acesta este centrul sistemului de coordonate oXY . În acest sistem de axe se reprezintă hiperbola. Asimptotele hiperbolei sunt $Y = \pm \frac{b}{a}X = \pm 2X$. În sistemul Oxy aceste drepte au ecuațiile $y = \frac{3}{4}x + \frac{1}{4}$ și respectiv $x = 1$.

Voi adăuga teorema Sylvester de caracterizare a formelor pătratice. Considerăm V un spațiu vectorial real cu $\dim_{\mathbb{R}}(V) = n < \infty$ și $Q : V \longrightarrow \mathbb{R}$ o formă pătratică. Reamintesc că forma pătratică Q este *pozitiv (negativ) definită* dacă $Q(v) > 0$ ($Q(v) < 0$), pentru orice $v \in V \setminus \{0_V\}$.

Teorema 4 (Sylvester). *Fie $Q : V \longrightarrow \mathbb{R}$ o formă pătratică ca mai sus și $\mathcal{B} = \{e_1, \dots, e_n\}$ o bază a lui V în care forma pătratică are matricea $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$. Fie $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_n$ minorii principali ai matricei A . Atunci:*

- 1) Q este pozitiv definită dacă și numai dacă $\Delta_i > 0$, pentru $(\forall) i = \overline{1, n}$,
- 2) Q este negativ definită dacă și numai dacă $(-1)^i \Delta_i > 0$, pentru $(\forall) i = \overline{1, n}$.

GEOMETRIE ȘI ALGEBRĂ LINIARĂ

Curs 13 Cuadrice

Voi enumera quadricile specificându-le ecuațiile reduse.

Elipsoidul Ecuația redusă este $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$, $a, b, c > 0$.

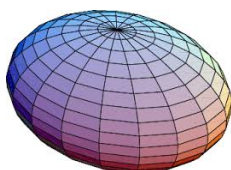


FIGURE 1. Elipsoid

Pentru $a = b = c = r > 0$, obținem sfera de rază r , ce are ecuația $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$. Sfera este locul geometric al punctelor din spațiu egal depărtate de un punct dat. Atât elipsoidul cât și sfera descrie prin ecuațiile de mai sus au centrul $O(0, 0, 0)$. Elipsoidul de centru (x_0, y_0, z_0) are ecuația $\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} + \frac{(z-z_0)^2}{c^2} - 1 = 0$, și similar sfera de centru (x_0, y_0, z_0) și rază r are ecuația $(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2 = r^2$. Intersecția elipsoidului cu un plan paralel cu unul dintre planele de coordonate este o elipsă. Intersecția sferei cu un plan paralel cu unul dintre planele de coordonate este un cerc. Sfera se intersectează cu orice plan ce trece prin origine într-un cerc mare. Mai mult, sfera este o suprafață de rotație.

Hiperboloidul cu o pânză

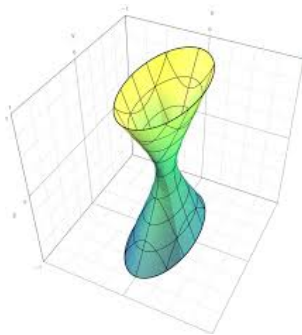


FIGURE 2. Hiperboloid cu o pânză

Ecuția redusă este $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$, cu $a, b, c > 0$.

Pentru $a = b$ este o suprafață care se poate obține prin rotația unei drepte în jurul axei verticale. Prin orice punct al hiperboloidului trec două drepte distincte ce sunt conținute în suprafață. O astfel de suprafață se numește *dublu riglată*.

Intersecția cu un plan orizontal $z = \alpha$ este o elipsă, iar intersecția cu plane paralele cu Oxz și Oyz sunt hiperbole. Să descriem intersecția cu un plan orizontal. Aceasta este soluția sistemului
$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0 \\ z = \gamma \end{cases} \Rightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \left(\frac{\gamma^2}{c^2} + 1\right) = 0$$
, ceea ce reprezintă ecuația unei elipse.

Hiperboloidul cu două pânze Ecuția redusă este $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} + 1 = 0$, cu $a, b, c > 0$.

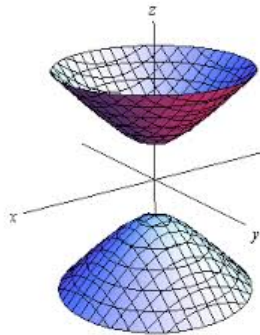


FIGURE 3. Hiperboloid cu o pânze

Intersecția cu un plan orizontal $z = \gamma$ este: mulțimea vidă pentru $|\gamma| < c$, un punct pentru $|\gamma| = c$ și o elipsă pentru $|\gamma| > c$.

Intersecțiile cu plane paralele cu atât cu Oxz cât și cu Oyz sunt hiperbole. Punctele $V_1(0, 0, c)$ și $V_2(0, 0, -c)$ se numesc *vârfulurile hiperboloidului*.

Paraboloidul eliptic Ecuția redusă este $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = z$, cu $a, b, > 0$.

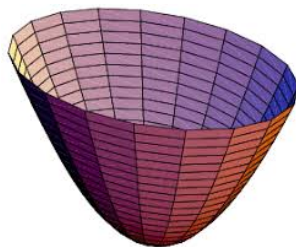


FIGURE 4. Paraboloid eliptic

Intersecția acestei suprafețe cu un plan orizontal $z = \gamma$ este: o elipsă pentru $\gamma > 0$, un punct pentru $\gamma = 0$, și mulțimea vidă pentru $z < 0$. Intersecția cu orice plan paralel cu Oxz sau Oyz este o parabolă. Punctul $O(0, 0, 0)$ se numește vârful paraboloidului.

Paraboloidul hiperbolic sau șa Ecuația redusă este $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = z$, cu $a, b, > 0$.

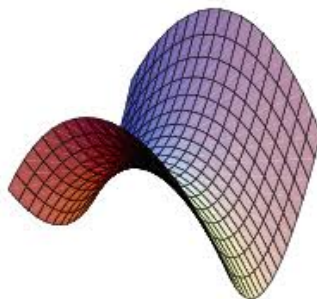


FIGURE 5. Paraboloid hiperbolic

Intersecția paraboloidului hiperbolic cu un plan $z = \gamma$, este o hiperbolă pentru $\gamma \neq 0$ și o reuniune de drepte concurente pentru $\gamma = 0$, ($z = 0, y = \pm \frac{b}{a}x$). Intersecția cu un plan paralel cu Oxz ($y = \beta$) sau cu Oyz ($x = \alpha$) este o parabolă. Originea $O(0, 0, 0)$ este vârful sau punctul șa al paraboloidului hiperbolic. Acoperișul găii din Predeal este o astfel de suprafață.

Prin orice punct al paraboloidului hiperbolic trec două drepte distincte conținute în suprafață. Deci și aceasta este o suprafață dublu riglată.

Conul Ecuația redusă a conului este $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$, cu $a, b, c > 0$.

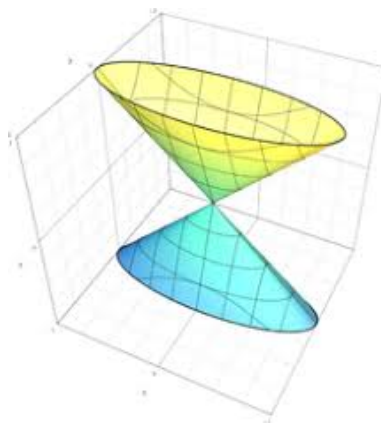


FIGURE 6. Con

Intersecția conului cu un plan orizontal $z = \gamma$ este: punctul $O(0,0,0)$ pentru $\gamma = 0$ și o elipsă pentru $\gamma \neq 0$. Intersecția cu un plan $y = \beta$ este o reuniune de drepte concurente pentru $\beta = 0$ și o hiperbolă pentru $\beta \neq 0$. La fel, intersecția cu un plan $x = \gamma$ este o reuniune de drepte concurente pentru $\gamma = 0$ și o hiperbolă pentru $\gamma \neq 0$.

Dacă $a \neq b$ conul se numește *eliptic* iar dacă $a = b$ avem un con *circular*. Punctul $O(0,0,0)$ se numește *vârful* conului.

Conul este asimptotic atât hiperboloidului cu o pânză cât și celui cu două pânze. Hiperboloidul cu o pânză este exterior conului, iar hiperboloidul cu două pânze este interior conului.

Cilindru eliptic Ecuația redusă a cilindrului eliptic este $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$, cu $a, b > 0$. Intersecția unui cilindru eliptic cu un plan orizontal $z = \gamma$ este o elipsă.

Intersecția cu un plan $y = \beta$ este o reuniune de drepte paralele pentru $|\beta| < b$, o dreaptă pentru $|\beta| = b$ și mulțimea vidă pentru $|\beta| > b$. Similar, intersecția cu un plan $x = \alpha$ este o reuniune de drepte paralele pentru $|\alpha| < a$, o dreaptă pentru $|\alpha| = a$ și mulțimea vidă pentru $|\alpha| > a$.

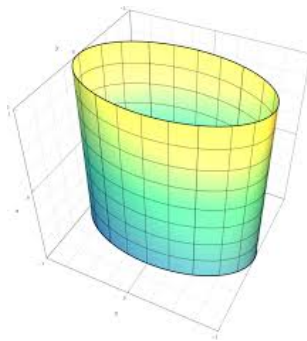


FIGURE 7. Cilindru eliptic

Dacă $a = b = r$, suprafața este un cilindru circular cu ecuația $x^2 + y^2 = r^2$. Intersecția unui cilindru circular cu un plan orizontal $z = \gamma$ este un cerc. Intersecțiile cu plane paralele cu Oxz și Oyz sunt la fel ca în cazul cilindrului eliptic.

Cilindru hiperbolic Ecuația redusă a cilindrului hiperbolic este $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$, cu $a, b > 0$.

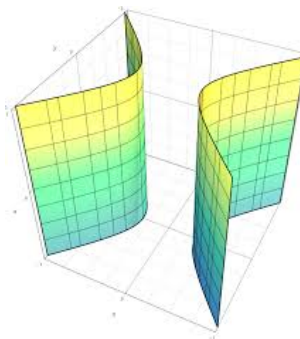


FIGURE 8. Cilindru hiperbolic

În figură este reprezentat un cilindru hiperbolic de ecuație $-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$

Intersecția acestuia cu un plan $z = \gamma$ este o hiperbolă. Intersecția cilindrului hiperbolic cu un plan $y = \beta$ este mulțimea vidă pentru $|\beta| < b$, o dreaptă pentru $|\beta| = b$ și reuniunea a două drepte paralele pentru $|\beta| > b$, iar intersecția cu un plan $x = \alpha$ este o pereche de drepte paralele

Cilindru parabolic Ecuația redusă este $y^2 = 2px$ cu $p > 0$

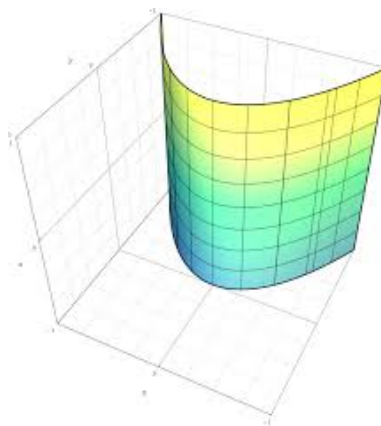


FIGURE 9. Cilindru parabolic

Intersecția cu un plan orizontal $z = \gamma$ este o parabolă. Intersecția cu un plan $y = \beta$ este dreapta de ecuație $x = \frac{\beta^2}{2p}$, iar intersecția cu un plan $x = \alpha$ este mulțimea vidă dacă $\alpha < 0$, dreapta $y = 0$ pentru $\alpha = 0$, și o reuniune de drepte $y = \pm\sqrt{2p\alpha}$ pentru $\alpha > 0$.

Reuniune de plane secante Ecuația redusă este $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$

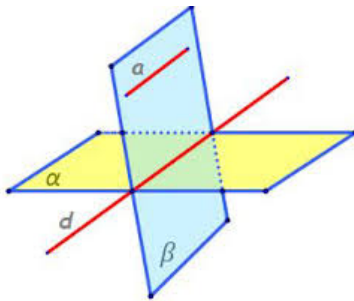


FIGURE 10. Plane secante

Reuniune de plane paralele Ecuația redusă este $x^2 - a^2 = 0$.

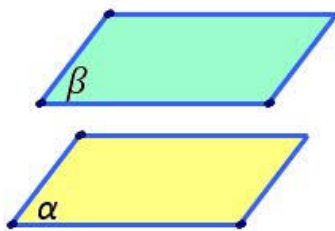


FIGURE 11. Plane paralele

Reuniune de plane confundate Ecuația redusă: $x^2 = 0$.

O dreaptă Ecuația redusă: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0$. Fiind în \mathbb{R}^3 , z fiind un parametru.

Un punct Ecuația redusă: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 0$

Mulțimea vidă Ecuația redusă este $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} + 1 = 0$, $a, b, c > 0$.

Ecuația generală prin care este dată o cuadrică este

$$\mathcal{S} : a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + 2a_{14}x + 2a_{24}y + 2a_{34}z + a_{44} = 0$$

unde $a_{ij} \in \mathbb{R}$, $(\forall) i, j = \overline{1, 4}$ și $a_{11}^2 + a_{22}^2 + a_{33}^2 + a_{12}^2 + a_{13}^2 + a_{23}^2 \neq 0$.

Cuadriciei \mathcal{S} îi asociem matricea simetrică $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & a_{34} \\ a_{14} & a_{24} & a_{34} & a_{44} \end{pmatrix}$. Notăm

cu $A_3 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}$ submatricea din colțul stânga sus, $\Delta = \det(A)$, $\delta =$

$\det(A_3), I = \text{tr}(A_3) = a_{11} + a_{22} + a_{33}$ și $J = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{13} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}$ se numesc invariantii metrici ai cuadricei \mathcal{S} .

Teorema 1. $\Delta = \det(A), \delta = \det(A_3), I$ și J sunt invarianti la translații și transformări ortogonale.

Aducerea la forma canonică a cuadriceilor

Considerăm forma pătratică pe \mathbb{R}^3 , $a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz$ a cărei matrice este A_3 . Folosim metoda transformărilor ortogonale pentru a o aduce la forma normală. Deci calculăm valorile proprii și vectorii proprii asociați, găsim matricea ortogonală S , care realizează rotația. Se forțează pătratele perfecte în ecuația cuadricei \mathcal{S} în noile coordonate și se pune în evidență translația.

Exemplul 2. Utilizând metoda roto-translației să se aducă la forma canonică cuadricea $\mathcal{S} : x^2 + 3y^2 + 4yz - 6x + 8y + 8 = 0$.

Matricea $A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$. $P_{A_3}(X) = \det(XI_3 - A) = (X - 1)(X + 1)(X - 4)$. valorile proprii sunt $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -1, \lambda_3 = 4$. Vectorii proprii asociați acestor valori proprii sunt $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = e_1$, $v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \Rightarrow e_2 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ și $v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow e_3 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Am obținut matricea $S = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} \sqrt{5} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$, cu $\det(S) = 1$, ${}^tSS = I_n$. Schimbarea de coordonate este $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = S \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$. Astfel schimbarea de coordonate este $x = x', y = \frac{1}{\sqrt{5}}(y' - 2z'), z = \frac{1}{\sqrt{5}}(2y' + z')$. Introducând în formula cuadricei \mathcal{S} se obține $x'^2 - y'^2 + 4z'^2 - 6x' + \frac{8}{\sqrt{5}}y' + \frac{16}{\sqrt{5}}z' + 8 = 0 \Leftrightarrow (x' - 3)^2 - (y' - \frac{4}{\sqrt{5}})^2 + 4(z' + \frac{1}{\sqrt{5}})^2 + \frac{7}{5} = 0$. Este un hiperboloid cu două pânze. Putem împărți cu $\frac{7}{5}$. Ecuația redusă este $\frac{1}{7}X^2 - \frac{1}{7}Y^2 + \frac{1}{20}Z^2 + 1 = 0$. Coeficienții $a = b = \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{5}}, c = \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{20}}$.

Exemplul 3. Să se determine locul geometric al punctelor din spațiu al căror raport al distanțelor la punctele $A(2, -2, 3)$ și $B(-2, 2, -3)$ este constantă.

Punctul B este simetricul punctului A față de origine. Fie P un punct al locului geometric. Pentru un astfel de punct P avem $\frac{d(P,A)}{d(P,B)} = \sqrt{\lambda}$, pentru $\lambda > 0$. Distanțele sunt cantități pozitive, deci raportul este o cantitate pozitivă și putem scrie membrul drept $\sqrt{\lambda} > 0$. Înlocuind coordonatele punctelor A și B și ridicând la pătrat obținem

$$\frac{(x-2)^2+(y+2)^2+(z-3)^2}{(x+2)^2+(y-2)^2+(z+3)^2} = \lambda. \text{ Înmulțind și dând factori comuni vom obține}$$

$$(1-\lambda)x^2 + (1-\lambda)y^2 + (1-\lambda)z^2 - 4(1+\lambda)x + 4(1+\lambda)y - 6(1+\lambda)z + 17(1-\lambda) = 0.$$

Avem următoarele două cazuri:

1. $\lambda = 1$ atunci ecuația este $-8x + 8y - 12z = 0 \Leftrightarrow -4x + 4y - 6z = 0$. Este ecuația unui plan ce trece prin origine. Este planul mediator al segmentului AB , adică este planul perpendicular pe AB ce trece prin mijlocul acestui segment $O(0, 0, 0)$. Dreapta normală la acest plan are vectorul director $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = (-4, 4, -6)$, această dreaptă AB care trece prin origine și este complementul ortogonal al planului mediator.

2. Pentru $\lambda \neq 1$, adică $\lambda \in (0, 1) \cup (0, \infty)$ obținem sfera de centru $C(2\alpha, -2\alpha, 3\alpha)$ și rază $\frac{\sqrt{68\lambda}}{|1-\lambda|}$, unde $\alpha = \frac{1+\lambda}{1-\lambda}$. Ecuația sferei este $(x-2\alpha)^2 + (y+2\alpha)^2 + (z-3\alpha)^2 = \frac{68\lambda}{(1-\lambda)^2}$.