ALGEBRĂ LINIARĂ

Gabriel Bercu, Leonard Dăuş, Ariadna Lucia Pletea,
Daniela Roşu, Marius Vlădoiu, Cristian Voica

Lucrarea a fost eleborată după cum urmează:
Capitolul 1: Marius Vlădoiu, Universitatea Bucureşti
Capiotlul 2: Daniela Roşu, Universitatea Tehnică ”Gheorghe Asachi” din Iaşi
Capitolul 3: Gabriel Bercu, Unversitatea ”Dunărea de Jos” din Galaţi
Capitolul 4: Ariadna Lucia Pletea, Universitatea Tehnică ”Gheorghe Asachi” din Iaşi
Capitolul 5: Cristian Voica, Universitatea Bucureşti
Capitolul 6: Leonard Dăuş, Universitatea Tehnică de Construcţii din Bucureşti

Cuprins

Prefaţă

Cartea de faţă a fost elaborată în cadrul proiectului POSDRU/56/1.2/S/32768, ”Formarea cadrelor didactice universitare şi a studenţilor în domeniul utilizării unor instrumente moderne de predare-învăţare-evaluare pentru disciplinele matematice, în vederea creării de competenţe performante şi practice pentru piaţa muncii”. Finanţat din Fondul Social European şi implementat de către Ministerul Educaţiei, Cercetării, Tineretului şi Sportului, în colaborare cu The Red Point, Oameni şi Companii, Universitatea din Bucureşti, Universitatea Tehnică de Construcţii din Bucureşti, Universitatea ”Politehnica” din Bucureşti, Universitatea din Piteşti, Universitatea Tehnică ”Gheorghe Asachi” din Iaşi, Universitatea de Vest din Timişoara, Universitatea ”Dunărea de Jos” din Galaţi, Universitatea Tehnică din Cluj-Napoca, Universitatea ”1 Decembrie 1918” din Alba-Iulia, proiectul contribuie în mod direct la realizarea obiectivului general al Programului Operaţional Sectorial de Dezvoltare a Resurselor Umane - POSDRU şi se înscrie în domeniul major de intervenţie 1.2 Calitate în învăţământul superior. Proiectul are ca obiectiv adaptarea programelor de studii ale disciplinelor matematice la cerinţele pieţei muncii şi crearea de mecanisme şi instrumente de extindere a oportunităţilor de învăţare. Evaluarea nevoilor educaţionale obiective ale cadrelor didactice şi studenţilor legate de utilizarea matematicii în învăţământul superior, masterate şi doctorate precum şi analizarea eficacităţii şi relevanţei curriculelor actuale la nivel de performanţă şi eficienţă, în vederea dezvoltării de cunoştinţe şi competenţe pentru studenţii care învaţă discipline matematice în universităşi, reprezintă obiective specifice de interes în cadrul proiectului. Dezvoltarea şi armonizarea curriculelor universitare ale disciplinelor matematice, conform exigenţelor de pe piaţa muncii, elaborarea şi implementarea unui program de formare a cadrelor didactice şi a studenţilor interesaţi din universităţile partenere, bazat pe dezvoltarea şi armonizarea de curriculum, crearea unei baze de resurse inovative, moderne şi funcţionale pentru predarea-învăţarea-evaluarea în disciplinele matematice pentru învăţământul universitar sunt obiectivele specifice care au ca răspuns materialul de faţă. Formarea de competenţe cheie de matematică şi informatică presupune crearea de abilităşi de care fiecare individ are nevoie pentru dezvoltarea personală, incluziune socială şi inserţie pe piaţa muncii. Se poate constata însă că programele disciplinelor de matematică nu au întotdeauna în vedere identificarea şi sprijinirea elevilor şi studenţilor potenţial talentaţi la matematică. Totuşi, studiul matematicii a evoluat în exigenţe până a ajunge să accepte provocarea de a folosi noile tehnologii în procesul de predare-învăţare-evaluare pentru a face matematica mai atractivă. În acest context, analiza flexibilităţii curriculei, însoţită de analiza metodelor şi instrumentelor folosite pentru identificarea şi motivarea studenţilor talentaţi la matematică ar putea răspunde deopotrivă cerinţelor de masă, cât şi celor de elită. Viziunea pe termen lung a acestui proiect preconizează determinarea unor schimbări în abordarea fenomenului matematic pe mai multe planuri: informarea unui număr cât mai mare de membri ai societăţii în legătură cu rolul şi locul matematicii în educaţia de bază în instrucţie şi în descoperirile ştiinţifice menite să îmbunătăţească calitatea vieţii, inclusiv popularizarea unor mari descoperiri tehnice, şi nu numai, în care matematica cea mai avansată a jucat un rol hotărâtor. De asemenea, se urmăreşte evidenţierea a noi motivaţii solide pentru învăţarea şi studiul matematicii la nivelele de bază şi la nivel de performanţă; stimularea creativităţii şi formarea la viitorii cercetători matematicieni a unei atitudini deschise faţă de însuşirea aspectelor specifice din alte ştiinţe, în scopul participării cu succes în echipe mixte de cercetare sau a abordării unei cercetări inter şi multi disciplinare; identificarea unor forme de pregătire adecvată de matematică pentru viitorii studenţi ai disciplinelor matematice, în scopul utilizării la nivel de performanţă a aparatului matematic în construirea unei cariere profesionale.

Introducere

Algebra liniară constituie de multă vreme unul din instrumentele fundamentale pentru disciplinele matematice cu aplicabilitate în inginerie. Furnizează metode de lucru pentru geometrie, analiză matematică, ecuaţii diferenţiale, teoria sistemelor etc.

Cursul de algebră liniară prezentat a fost elaborat pe baza lecţiilor de algebră liniară ţinute de autori, la universităţile la care predau, pentru studenţii anilor I. Credem că va fi util atât studenţilor de la facultăţile tehnice, dar şi studenţilor de la facultăţile de matematică şi informatică. Cursul a fost elaborat conform cu programa revizuită a disciplinei de algebră liniară. Cartea are ca scop să asigure învăţarea noţiunilor de bază ale algebrei liniare pe parcursul unui semestru de studiu.

Cartea se constituie ca un material unitar şi cuprinzător, prezentat într-o ordine firească, conţinând partea teoretică a problematicii. Majoritatea enunţurilor matematice sunt însoţite de demonstraţii complete şi de exemple sugestive care asigură asimilarea corectă a noţiunilor matematice. Sunt tratate următoarele capitole: calcul matriceal, spaţii vectoriale şi euclidiene, transformări liniare, vectori şi valori proprii, algebră multiliniară şi produs tensorial.

La sfârşitul fiecărui capitol sunt introduse probleme propuse prin care studentul este invitat să verifice temeinicia însuşirii noţiunilor prezentate. Au fost incluse un număr de aproximativ 160 de probleme, de diferite grade de dificultate. Unele probleme sunt calculatorii, altele de rutină şi urmăresc fixarea unor noţiuni şi tehnici de lucru, iar altele sunt de natură teoretică şi au scopul de a îmbunătăţi raţionamentul matematic. Această activitate este uşurată de prezentarea la majoritatea problemelor a unor indicaţii şi rezolvări.

CAPITOLUL 1

Preliminarii

În acest capitol vom prezenta noţiunile algebrice de bază necesare pentru a putea parcurge capitolele următoare. În prima secţiune reamintim definiţiile structurilor fundamentale din algebră (mulţimi, funcţii, relaţii de echivalenţă, grupuri, inele şi corpuri), precum şi proprietăţi importante ale acestora. A doua secţiune este dedicată studiului grupului de permutări $(S_n, \circ)$. Secţiunile 3 şi 4 tratează inelul $\mathbb{K}[X]$, al polinoamelor într-o nedeterminată cu coeficienţi într-un corp comutativ $\mathbb{K}$. Sunt studiate principalele proprietăţi ale inelului $\mathbb{K}[X]$ şi se arată că aritmetica lui $\mathbb{K}[X]$ este similară celei a lui $\mathbb{Z}$.

1.1. Structuri algebrice

1.1.1. Mulţimi. O colecţie de obiecte se numeşte *mulţime*. Un membru al acestei colecţii se mai numeşte şi *element* al mulţimii. Dacă x este un element al mulţimii A, atunci spunem că x *aparţine* lui A şi scriem $x \in A$; în caz contrar, spunem că x *nu aparţine* lui A şi scriem $x \notin A$. De exemplu, $1 \in \{1, 2, 3\}$ şi $4 \notin \{1, 2, 3\}$, unde $\{1, 2, 3\}$ reprezintă mulţimea având elementele $1, 2$ şi 3.

Spunem că două mulţimi A, B sunt *egale*, şi scriem $A = B$, dacă au aceleaşi elemente. Spunem că A este o *submulţime* a lui B dacă orice element care aparţine lui A aparţine şi lui B. Notăm aceasta prin $A \subseteq B$ sau $B \supseteq A$. Dacă, în plus, $A \neq B$, spunem că A este o *submulţime proprie* a lui B sau că A este *strict inclusă* în B şi notăm $A \subset B$ sau $B \supset A$. Prin urmare, obţinem că $A = B \Leftrightarrow A \subseteq B$ şi $B \subseteq A$.

Avem următoarele exemple importante de mulţimi: mulţimea numerelor naturale $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$, mulţimea numerelor întregi $\mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$, mulţimea numerelor raţionale $\mathbb{Q} = \{a/b|\ a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0\}$, mulţimea numerelor reale $\mathbb{R} = \{$ toate scrierile zecimale $\pm d_1 d_2 \ldots d_n, a_1 a_2 a_3 \ldots\}$ şi mulţimea numerelor complexe $\mathbb{C} = \{a + bi|\ a, b \in \mathbb{R}, i^2 = -1\}$. Între aceste mulţimi au loc următoarele incluziuni $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$. Vom nota cu $\mathbb{Q}_+, \mathbb{R}_+$ mulţimea numerelor raţionale pozitive, respectiv a numerelor reale pozitive. De asemenea, vom nota cu $\mathbb{Z}^* = \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ şi analog definim mulţimile $\mathbb{Q}^*, \mathbb{R}^*, \mathbb{C}^*$. *Mulţimea vidă*, notată cu $\emptyset$, este mulţimea care nu are nici un element. O mulţime diferită de mulţimea vidă se numeşte *mulţime nevidă*.

Fie A, B două mulţimi. *Intersecţia* mulţimilor A şi B, notată cu $A \cap B$, reprezintă mulţimea elementelor care aparţin şi lui A şi lui B. Două mulţimi a căror intersecţie este mulţimea vidă se numesc *disjuncte*. *Reuniunea* mulţimilor A şi B, notată cu $A \cup B$, reprezintă mulţimea elementelor care aparţin lui A sau lui B. *Diferenţa* dintre mulţimile A şi B se notează cu

$A \setminus B$ şi reprezintă mulţimea tuturor elementelor care aparţin lui A şi nu aparţin lui B. *Produsul cartezian* al mulţimilor A şi B se notează cu $A \times B$ şi reprezintă mulţimea tuturor perechilor ordonate (x, y) cu $x \in A$ şi $y \in B$. De exemplu, dacă $A = \{1, 2\}$ şi $B = \{1, 3, 4\}$ atunci $A \cap B = \{1\}$, $A \cup B = \{1, 2, 3, 4\}$, $A \setminus B = \{2\}$, $B \setminus A = \{3, 4\}$ şi $A \times B = \{(1, 1), (1, 3), (1, 4), (2, 1), (2, 3), (2, 4)\}$.

Fie A o mulţime nevidă. O *relaţie binară* pe mulţimea A este o submulţime R a produsului cartezian $A \times A$ şi scriem $a \sim b$ dacă $(a, b) \in R$.

Relaţia binară $\sim$ pe mulţimea A se numeşte:

(a) *reflexivă* dacă $a \sim a$, pentru orice $a \in A$;
(b) *simetrică* dacă $a \sim b$ implică $b \sim a$ pentru orice $a, b \in A$;
(c) *tranzitivă* dacă $a \sim b$ şi $b \sim c$ implică $a \sim c$ pentru orice $a, b, c \in A$.

O relaţie binară $\sim$ pe A se numeşte *relaţie de echivalenţă* dacă $\sim$ este reflexivă, simetrică şi tranzitivă.

Dacă $\sim$ defineşte o relaţie de echivalenţă pe A, atunci *clasa de echivalenţă* a elementului $a \in A$, pe care o vom nota cu $\hat{a}$, este mulţimea $\{x \in A | x \sim a\}$. Despre elementele clasei de echivalenţă a lui a se spune că sunt *echivalente* cu a. Dacă C este o clasă de echivalenţă, orice element al lui C se numeşte un *reprezentant* al clasei C. O submulţime S a lui A se numeşte *sistem complet de reprezentanţi* pentru relaţia de echivalenţă $\sim$, dacă S conţine exact câte un reprezentant al fiecărei clase de echivalenţă. Deci, S este sistem complet de reprezentanţi pentru $\sim$ dacă şi numai dacă S verifică simultan următoarele condiţii:

(1) pentru orice $a \in A$ există $s_a \in S$ astfel încât $a \sim s_a$,
(2) orice două elemente distincte ale lui S nu sunt echivalente.

Reamintim că o *partiţie* a unei mulţimi nevide A este o familie de submulţimi nevide disjuncte două câte două ale lui A a cărei reuniune este A. Se poate observa uşor că mulţimea claselor de echivalenţă ale lui A în raport cu relaţia de echivalenţă $\sim$ este o partiţie a lui A. Mulţimea claselor de echivalenţă se numeşte *mulţimea factor a lui A modulo $\sim$* şi se notează cu $A/\sim$. Aşadar $A/\sim = \{\hat{a} : a \in A\}$.

Exemplul 1.1.1. Fie n un număr natural. Definim pe mulţimea $\mathbb{Z}$ relaţia binară

$$a \sim b \quad \text{dacă şi numai dacă} \quad n | b - a.$$

Se observă imediat că $a \sim a$ şi $a \sim b$ implică $b \sim a$, ceea ce înseamnă că $\sim$ este reflexivă şi simetrică. Dacă $a \sim b$ şi $b \sim c$ atunci obţinem că $n | b - a$ şi $n | c - b$, deci n divide şi suma $(b - a) + (c - b) = c - a$. Prin urmare obţinem că $a \sim c$, adică $\sim$ este tranzitivă. Deci $\sim$ este o relaţie de echivalenţă pe $\mathbb{Z}$, care se mai numeşte şi *relaţia de congruenţă modulo n* pe $\mathbb{Z}$ şi se notează de obicei cu $\equiv (\operatorname{mod} n)$. Pentru $n = 0$ se vede imediat că relaţia de congruenţă modulo 0 este chiar egalitatea, iar pentru $n = 1$ orice două numere sunt congruente modulo 1. Obţinem în aceste două cazuri particulare că pentru un număr arbitrar $r \in \mathbb{Z}$ avem $\hat{r} = \{r\}$ dacă $n = 0$, respectiv $\hat{r} = \mathbb{Z}$ dacă $n = 1$. Să presupunem în continuare că $n \geq 2$. Aplicând teorema împărţirii cu rest în $\mathbb{Z}$ obţinem că $a \equiv b (\operatorname{mod} n)$ dacă şi numai dacă a şi b dau acelaşi rest prin împărţirea cu n. Deci $\hat{r} = \{r + nk | k \in \mathbb{Z}\}$. În concluzie, $\mathbb{Z}$ are exact n clase de echivalenţă distincte, iar un sistem complet de reprezentanţi pentru relaţia $\equiv (\operatorname{mod} n)$ este orice mulţime formată cu n numere consecutive, în particular $\{0, 1, \ldots, n-1\}$. Mulţimea factor a lui $\mathbb{Z}$ modulo $\equiv (\operatorname{mod} n)$ se notează cu $\mathbb{Z}_n$. Deci

$$\mathbb{Z}_n = \{\hat{0}, \hat{1}, \ldots, \widehat{n-1}\}.$$

1.1.2. Funcţii. Fie A şi B două mulţimi. Reamintim că o *funcţie* (sau *aplicaţie*) f definită pe A cu valori în B, se notează $f : A \to B$, şi asociază fiecărui element $x \in A$ un unic element din B, pe care îl notăm $f(x)$. Mulţimea A se numeşte *domeniul de definiţie* al lui f, iar B se numeşte *codomeniul* lui f. Trebuie remarcat că, dacă funcţia f nu este definită explicit pentru fiecare element trebuie, în general, verificat că funcţia f este bine definită.

Mulţimea $f(X) = \{f(a) | a \in X\}$, unde $X \subset A$ este o submulţime a lui B, se numeşte *imaginea* lui X prin f. În particular $f(A)$ se notează cu $\operatorname{Im}(f)$ şi se numeşte *imaginea* lui f. Pentru fiecare submulţime C a lui B submulţimea lui A dată prin $f^{-1}(C) = \{a \in A | f(a) \in C\}$ se numeşte *preimaginea* sau *imaginea inversă* a lui C prin f. De exemplu, pentru funcţia $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$, dată prin $f(n) = (-1)^n$, avem $\operatorname{Im}(f) = \{-1, 1\}$, $f(\{1, 3\}) = \{-1\}$, $f^{-1}(\{2, 4\}) = \emptyset$ şi $f^{-1}(\{1\}) = 2\mathbb{N}$, adică mulţimea numerelor naturale pare. Observaţi că f^{-1} nu este în general o funcţie.

Fie $f : A \to B$ şi $g : B \to C$ două funcţii. *Compunerea* dintre g şi f se notează cu $g \circ f$ şi este funcţia $g \circ f : A \to C$ definită prin $(g \circ f)(x) = g(f(x))$ pentru orice $x \in A$. De exemplu, dacă $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 1 + x$, $g(x) = x^3$, atunci $(g \circ f)(x) = (1 + x)^3$ iar $(f \circ g)(x) = 1 + x^3$. Observaţi că, în general $f \circ g \neq g \circ f$ (presupunem că $f \circ g$ şi $g \circ f$ sunt definite).

Fie $f : A \to B$ o funcţie. Funcţia f se numeşte:

(1) *injectivă* dacă pentru orice $x, y \in A$ cu $x \neq y$ avem $f(x) \neq f(y)$ (sau echivalent dacă pentru orice $x, y \in A$ cu $f(x) = f(y)$ rezultă $x = y$).
(2) *surjectivă* dacă pentru orice $y \in B$ există $x \in A$ astfel încât $f(x) = y$ (sau echivalent $\operatorname{Im}(f) = B$).
(3) *bijectivă* dacă este simultan injectivă şi surjectivă.
(4) *inversabilă* dacă există o funcţie $g : B \to A$ astfel încât $g \circ f = 1_A$ şi $f \circ g = 1_B$, unde 1_A reprezintă *funcţia identică* a mulţimii A, i.e. $1_A : A \to A$ cu $1_A(x) = x$ pentru orice $x \in A$.

Pentru a exemplifica definiţiile de mai sus considerăm funcţiile $f, g, h, k : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ date prin: $f(x) = 2x + 1$, $g(x) = [x/2]$ (prin $[x]$ notăm *partea întreagă* a numărului real x, adică cel mai mare număr întreg mai mic sau egal cu x), $h(x) = x + 3$ şi $k(x) = x^2$. Atunci f este injectivă şi nesurjectivă, g este surjectivă şi neinjectivă, h este bijectivă, iar k este neinjectivă şi nesurjectivă. În plus, observăm că funcţia $h_1 : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ definită prin $h_1(x) = x - 3$ are proprietatea că $h \circ h_1 = h_1 \circ h = 1_{\mathbb{Z}}$, ceea ce înseamnă că h este inversabilă. Lăsăm cititorului ca exerciţiu demonstrarea următoarelor proprietăţi importante ale funcţiilor.

Propoziţia 1.1.2. (1) *Fie $f : A \to B$ o funcţie. Atunci f este bijectivă dacă şi numai dacă f este inversabilă.*

(2) *Fie A o mulţime finită şi $f : A \to A$ o funcţie. Atunci f este injectivă $\Longleftrightarrow$ f este surjectivă $\Longleftrightarrow$ f este bijectivă. (vezi Problema 1.5.1 pentru generalizare)*

1.1.3. Grupuri.

Definiţia 1.1.3. *Fie A o mulţime nevidă.*

(1) *O* **operaţie algebrică** $*$ *pe mulţimea A este o funcţie $* : A \times A \to A$. Pentru orice $a, b \in A$ vom scrie $a * b$ în loc $*(a, b)$.*

(2) *O operaţie algebrică $*$ pe mulţimea A se numeşte* **asociativă** *dacă pentru orice $a, b, c \in A$ avem $a * (b * c) = (a * b) * c$.*

(3) *Dacă $*$ este o operaţie algebrică pe mulţimea A spunem că elementele $a, b \in A$ comută dacă $a * b = b * a$. Spunem că $*$ este* **comutativă** *pe mulţimea A dacă $a * b = b * a$ pentru orice $a, b \in A$.*

Exemplul 1.1.4. (1) "+" (adunarea obişnuită) este o operaţie algebrică comutativă şi asociativă pe $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, respectiv $\mathbb{C}$.

(2) "·" (înmulţirea obişnuită) este o operaţie algebrică comutativă şi asociativă pe $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, respectiv $\mathbb{C}$.

(3) "−" (scăderea obişnuită) este o operaţie algebrică necomutativă şi neasociativă pe $\mathbb{Z}$, unde $-(a, b) = a - b$. Într-adevăr, avem $2-1 = 1 \neq -1 = 1-2$ şi $1-(1-1) = 1 \neq -1 = (1-1)-1$.

(4) "−" (scăderea obişnuită) nu este o operaţie algebrică pe $\mathbb{N}$ (nici pe $\mathbb{Q}_+$, $\mathbb{R}_+$). Într-adevăr, pentru $a, b \in \mathbb{N}$ cu $a < b$ obţinem că $a - b \notin \mathbb{N}$, adică $-$ nu este o aplicaţie de la $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ cu valori în $\mathbb{N}$.

Presupunem că $*$ este o operaţie algebrică pe A şi H este o submulţime nevidă a lui A. Dacă restricţia lui $*$ la H este o operaţie algebrică pe H, i.e. pentru orice $a, b \in H$ avem $a * b \in H$, atunci H se numeşte **parte stabilă** a lui A în raport cu $*$ (vom scrie, pe scurt, când nu e pericol de confuzie că H este parte stabilă în raport cu $*$). Observaţi că dacă $*$ este operaţie algebrică asociativă (respectiv comutativă) pe A, iar restricţia lui $*$ la o submulţime H a lui A este o operaţie algebrică pe H, atunci $*$ este automat asociativă (respectiv comutativă) pe H.

Definiţia 1.1.5. *Un* **grup** *este o pereche ordonată $(G, *)$ unde G este o mulţime şi $*$ este o operaţie algebrică pe G care satisface următoarele axiome:*

(G1) *$a * (b * c) = a * (b * c)$, pentru orice $a, b, c \in G$ (i.e. $*$ este asociativă),*

(G2) *există un element $e \in G$ astfel încât $a * e = e * a = a$, pentru orice $a \in G$ (e se numeşte* **element neutru** *al lui G),*

(G3) *pentru fiecare $a \in G$ există un element $a' \in G$ astfel încât $a * a' = a' * a = e$ (a se numeşte* **element inversabil**, *iar a' se numeşte* **inversul** *lui a)*

Grupul $(G, *)$ se numeşte **abelian***(sau* **comutativ***) dacă $*$ este operaţie algebrică comutativă pe G, i.e. $a * b = b * a$ pentru orice $a, b \in G$. Grupul $(G, *)$ se numeşte* **grup finit** *dacă mulţimea G este finită.*

Înainte de a considera câteva exemple de grupuri vom demonstra câteva proprietăţi de bază ale acestora.

Propoziţia 1.1.6. *Fie* $(G, *)$ *un grup. Atunci au loc următoarele:*

(1) *elementul neutru al lui* G*, definit în axioma* $(G2)$*, este unic determinat,*

(2) *pentru fiecare* $a \in G$ *inversul său* a'*, definit în axioma* $(G3)$*, este unic determinat.*

Demonstraţie. (1) Dacă e şi f sunt elemente neutre ale lui G atunci aplicând axioma (G2) obţinem $f = e * f = e$.

(2) Să presupunem că b, c sunt ambele inverse ale lui a, iar e este elementul neutru al lui G. Folosind axiomele grupului obţinem atunci următorul şir de egalităţi

$$c \overset{(G2)}{=} c * e \overset{(G3)}{=} c * (a * b) \overset{(G1)}{=} (c * a) * b \overset{(G3)}{=} e * b \overset{(G2)}{=} b. \quad \square$$

Prezentăm în continuare câteva exemple clasice de grupuri.

Exemplul 1.1.7. (1) $(\mathbb{Z}, +)$, $(\mathbb{Q}, +)$, $(\mathbb{R}, +)$, $(\mathbb{C}, +)$ sunt grupuri abeliene infinite cu elementul neutru $e = 0$ şi $a' = -a$ pentru orice a.

(2) $(\mathbb{Q}^*, \cdot)$, $(\mathbb{R}^*, \cdot)$, $(\mathbb{C}^*, \cdot)$, $(\mathbb{Q}_+, \cdot)$, $(\mathbb{R}_+, \cdot)$ sunt grupuri abeliene infinite cu elementul neutru $e = 1$ şi $a' = \frac{1}{a}$ pentru orice a. $(\mathbb{Z}^*, \cdot)$ nu este grup deoarece singurele elemente inversabile în $\mathbb{Z}^*$ sunt 1 şi -1.

(3) Dacă $(G_1, *)$ şi $(G_2, \circ)$ sunt două grupuri, atunci putem forma cu ajutorul lor un nou grup $(G_1 \times G_2, \cdot)$, numit **produsul direct** al grupurilor $(G_1, *)$ şi $(G_2, \circ)$, ale cărui elemente sunt perechile produsului cartezian $G_1 \times G_2$ iar operaţia algebrică $\cdot$ este definită astfel:

$$(a_1, a_2) \cdot (b_1, b_2) = (a_1 * b_1, a_2 \circ b_2).$$

Lăsăm cititorului verificarea axiomelor $(G1) - (G3)$ pentru a vedea că $(G_1 \times G_2, \cdot)$ este un grup având elementul neutru (e_1, e_2), unde e_1, e_2 sunt elementele neutre ale lui G_1, respectiv G_2. Mai mult, inversul elementului (a_1, a_2) este (a_1', a_2'), unde a_1' este inversul lui a_1 în G_1, iar a_2' este inversul lui a_2 în G_2.

(4) Fie $n \geq 1$. Pe mulţimea $\mathbb{Z}_n = \{\hat{0}, \hat{1}, \ldots, \widehat{n-1}\}$ construită în Exemplul 1.1.1 definim o operaţie de adunare şi una de înmulţire. Fie $\hat{x}, \hat{y} \in \mathbb{Z}_n$ cu $x, y \in \mathbb{Z}$. Definim $\hat{x} + \hat{y} = \widehat{x+y}$ şi $\hat{x}\hat{y} = \widehat{xy}$. Arătăm mai întâi că cele două operaţii sunt bine definite, adică nu depind de reprezentanţii claselor. Într-adevăr, fie $x', y' \in \mathbb{Z}$ astfel încât $\hat{x} = \hat{x'}$ şi $\hat{y} = \hat{y'}$. Atunci n divide $x' - x$ şi $y' - y$. Deci n divide $x' + y' - x - y$ şi $x'y' - xy = (x' - x)y' + x(y' - y)$. Rezultă că $\widehat{x+y} = \widehat{x'+y'}$ şi $\widehat{xy} = \widehat{x'y'}$. Lăsăm cititorului să verifice că $(\mathbb{Z}_n, +)$ este un grup abelian finit, având elementul neutru $\hat{0}$, iar inversul lui $\hat{x}$ este $\widehat{-x}$. Ce putem spune despre $(\mathbb{Z}_n, \cdot)$? Nu este grup. Într-adevăr, se poate verifica uşor că $(\mathbb{Z}_n, \cdot)$ satisface $(G1), (G2)$, dar nu satisface $(G3)$ deoarece $\hat{0}$ nu este element inversabil ($\hat{0}\hat{x} = \hat{0}$, pentru orice $x \in \mathbb{Z}$).

(5) Fie A o mulţime nevidă. Notăm cu S_A mulţimea tuturor funcţiilor definite pe A cu valori în A care sunt bijective. Să observăm că $S_A \neq \emptyset$ deoarece $1_A \in S_A$. Considerăm operaţia de compunere uzuală a funcţiilor "$\circ$" şi lăsăm cititorului să verifice că $(S_A, \circ)$ este un grup.

În general, acest grup nu este abelian, pentru că operaţia de compunere a funcţiilor nu este comutativă. Acest grup se mai numeşte şi *grupul permutărilor mulţimii A*.

Un grup care are un singur element (elementul neutru!) se numeşte şi grupul *trivial*. Dacă G are un număr finit de elemente, atunci numărul de elemente al grupului se numeşte **ordinul** grupului. Reamintim, fără demonstraţie (încercaţi să le demonstraţi!) următoarele reguli de calcul într-un grup $(G, *)$:

- Dacă $a \in G$ are inversul $a' \in G$ atunci inversul lui a' este $(a')' = a$.
- Dacă $a, b \in G$ au inversele $a', b' \in G$, atunci inversul lui $a * b$ este $b' * a'$.
- Pentru orice $a_1, a_2, \ldots, a_n \in G$ valoarea lui $a_1 * a_2 * \cdots * a_n$ este independentă de modul în care s-au pus parantezele (această proprietate se numeşte **legea de asociativitate generalizată**)

De acum înainte vom folosi în prezentarea rezultatelor teoretice referitoare la grupuri, pentru simplificarea scrierii, operaţia algebrică multiplicativă $\cdot$ în loc de operaţia algebrică $*$. Implicit, vom nota inversul unui element x cu x^{-1} în loc de x'. Mai mult, vom scrie pe scurt G este grup în loc de $(G, \cdot)$ este un grup.

Definiţia 1.1.8. *Fie G un grup şi H o submulţime nevidă a lui G. Spunem că H este un* **subgrup** *al lui G, şi notăm $H \leq G$, dacă pentru orice $x, y \in H$ rezultă $xy \in H$ şi $x^{-1} \in H$.*

Observaţi că rezultă imediat din definiţie că orice subgrup H al grupului G conţine elementul neutru e. În plus, H devine grup în raport cu operaţia indusă. Prin urmare, pentru orice grup G ştim în mod automat două subgrupuri, numite şi *subgrupuri improprii*. Este vorba despre G şi $\{e\}$, unde e reprezintă elementul neutru al grupului. Celelalte subgrupuri ale lui G diferite de $\{e\}$ şi G se numesc *subgrupuri proprii*. Se poate demonstra uşor că o submulţime nevidă H a unui grup G este subgrup dacă şi numai dacă $xy^{-1} \in H$ pentru orice $x, y \in H$.

Exemplul 1.1.9. (1) Este uşor de verificat că avem următorul şir de subgrupuri: $(\mathbb{Z}, +) \leq (\mathbb{Q}, +) \leq (\mathbb{R}, +) \leq (\mathbb{C}, +)$.

(2) Fie $n \geq 1$ şi submulţimea lui $\mathbb{C}^*$ dată prin $U_n = \{z \in \mathbb{C} | z^n = 1\}$. Atunci U_n este subgrup al lui $(\mathbb{C}^*, \cdot)$. Într-adevăr dacă $x, y \in U_n$, atunci $(xy^{-1})^n = x^n(y^n)^{-1} = 1$, deci $xy^{-1} \in U_n$.

(3) Fie $n \in \mathbb{N}$ şi notăm cu $n\mathbb{Z}$ mulţimea multiplilor întregi ai lui n, adică $n\mathbb{Z} = \{nk | k \in \mathbb{Z}\}$. $n\mathbb{Z}$ este subgrup al grupului $(\mathbb{Z}, +)$. Într-adevăr, fie $x, y \in n\mathbb{Z}$. Atunci există $k, l \in \mathbb{Z}$ astfel încât $x = nk$ şi $y = nl$. Deci $x - y = n(k - l) \in n\mathbb{Z}$, ceea ce înseamnă că $n\mathbb{Z} \leq (\mathbb{Z}, +)$. Grupul $(\mathbb{Z}, +)$ are proprietatea că orice subgrup al său este de forma $n\mathbb{Z}$ pentru un $n \in \mathbb{N}$. Să observăm mai întâi că subgrupurile improprii ale lui $(\mathbb{Z}, +)$ sunt $\{0\} = 0\mathbb{Z}$ şi $\mathbb{Z} = 1\mathbb{Z}$. Fie H un subgrup propriu al lui $(\mathbb{Z}, +)$. Deoarece $H \neq \{0\}$ obţinem că există $0 \neq m \in H$ şi implicit, din definiţia subgrupului, că $-m \in H$. Prin urmare, $H \cap \mathbb{N}^* \neq \emptyset$. Fie n cel mai mic număr natural nenul din $H \cap \mathbb{N}$ (Atenţie! Existenţa lui n nu este un lucru uşor; ea rezultă din faptul că $\mathbb{N}$ este o mulţime bine ordonată). Arătăm că $H = n\mathbb{Z}$. Incluziunea $n\mathbb{Z} \subseteq H$ rezultă din faptul ca $n \in H$ şi H este grup. Reciproc, fie $h \in H$ şi $h = nq + r$, $q, r \in \mathbb{Z}$, $0 \leq r < n$ împărţirea cu rest a lui

h la n. Deoarece $h, nq \in H$ şi H este subgrup al lui $(\mathbb{Z}, +)$ rezultă că $r = h - nq \in H$. Deci $r = 0$, altfel contrazicem alegerea lui n. În concluzie obţinem că $h = nq \in n\mathbb{Z}$.

Definiţia 1.1.10. *Fie G şi H două grupuri. O funcţie $f : G \to H$ se numeşte* **morfism de grupuri** *dacă*

$$f(xy) = f(x)f(y) \quad \textit{pentru orice} \quad x, y \in G.$$

Un morfism de grupuri bijectiv se numeşte **izomorfism de grupuri**. *Un* **automorfism** *este un izomorfism de grupuri de la un grup la el însuşi.*

Fie $b = f(e_G)$, unde prin e_G am notat elementul neutru al grupului G. Din ${e_G}^2 = e_G$ rezultă că $b^2 = b = be_H$, unde e_H reprezintă elementul neutru al lui H. Înmulţind la stânga relaţia $b^2 = be_H$ cu b^{-1} obţinem că $b = e_H$. Prin urmare, orice morfism de grupuri trimite elementul neutru în element neutru. O altă proprietate importantă a unui morfism de grupuri este că $f(x)^{-1} = f(x^{-1})$. Într-adevăr, avem că

$$e_H = f(e_G) = f(x \cdot x^{-1}) = f(x)f(x^{-1}),$$

şi analog $e_H = f(x^{-1})f(x)$, de unde rezultă folosind $(G3)$ că $f(x)^{-1} = f(x^{-1})$. Un prim exemplu de morfism de grupuri este *morfismul trivial*, i.e. aplicaţia $j : G \to H$ dată prin $j(x) = e_H$ pentru orice $x \in G$ (verificaţi că j este morfism!). Se arată imediat şi că aplicaţia identică $1_G : G \to G$ este un automorfism al lui G. Ca exemple concrete, $f : (\mathbb{Z}, +) \to (\mathbb{Z}, +)$, $f(n) = 5n$ este morfism de grupuri, dar nu este izomorfism, iar $g : (\mathbb{R}, +) \to (\mathbb{R}_+^*, \cdot)$, $g(x) = 5^x$ este izomorfism de grupuri.

Propoziţia 1.1.11. *Compunerea a două morfisme de grupuri este un morfism de grupuri. Inversul unui izomorfism de grupuri este tot un izomorfism.*

Demonstraţie. Ambele afirmaţii rezultă imediat din definiţii. □

Spunem că grupurile G şi H sunt *izomorfe* şi scriem $G \cong H$, dacă există un izomorfim de grupuri $f : G \to H$. Intuitiv, faptul că două grupuri sunt izomorfe, înseamnă ca ele au aceleaşi proprietăţi algebrice. În general, nu este uşor să arăţi că două grupuri sunt sau nu izomorfe. De exemplu, am arătat mai sus că $(\mathbb{R}, +) \cong (\mathbb{R}_+^*, \cdot)$ prin construirea unui astfel de izomorfism. Pentru a arăta că două grupuri nu sunt izomorfe, este util să cauţi o proprietate algebrică pe care un grup o are iar celălalt nu. De exemplu, $(\mathbb{R}, +) \ncong (\mathbb{R}^*, \cdot)$ deoarece $(\mathbb{R}^*, \cdot)$ are un element de ordin 2 (vezi Definiţia 1.1.13), pe -1, iar $(\mathbb{R}, +)$ nu are. Formalizând, dacă presupunem prin absurd că $f : (\mathbb{R}^*, \cdot) \to (\mathbb{R}, +)$ este un izomorfism obţinem că

$$0 = f(1) = f((-1)^2) = 2f(-1),$$

deci $f(-1) = 0$, adică $f(-1) = f(1)$ o contradicţie cu faptul că f este funcţie bijectivă.

Pentru aplicaţii ulterioare avem nevoie de următorul rezultat.

Propoziţia 1.1.12. *Fie $f : G \to G'$ un morfism de grupuri, şi $e_G, e_{G'}$ elementele neutre ale grupurilor G, respectiv G'.*

(a) *Dacă H este un subgrup al lui G, atunci $f(H)$ este un subgrup al lui G'. În particular, avem că* $\mathrm{Im}(f) \leq G'$.

(b) *Dacă H' este un subgrup al lui G', atunci $f^{-1}(H')$ este un subgrup al lui G. În particular, avem că $\mathrm{Ker}(f) := f^{-1}(\{e_{G'}\})$ este un subgrup al lui G, care se numeşte* **nucleul lui** f.

(c) *f este injectiv dacă şi numai dacă $\mathrm{Ker}(f) = \{e_G\}$.*

Demonstraţie. (a) Fie $x, y \in H$. Atunci folosind faptul că f este morfism de grupuri şi H este subgrup al lui G obţinem $f(x)f(y)^{-1} = f(x)f(y^{-1}) = f(xy^{-1}) \in f(H)$.

(b) Fie $x, y \in f^{-1}(H')$. Atunci $f(x), f(y) \in H'$ şi $f(xy^{-1}) = f(x)f(y^{-1}) = f(x)f(y)^{-1} \in H'$. Deci $xy^{-1} \in f^{-1}(H')$.

(c) Este clar că dacă f este injectiv atunci $\mathrm{Ker}(f) = \{e_G\}$. Reciproc, presupunem că $\mathrm{Ker}(f) = \{e_G\}$ şi fie $x, y \in G$ cu $f(x) = f(y)$. Atunci $e_{G'} = f(x)f(y)^{-1} = f(x)f(y^{-1}) = f(xy^{-1})$, adică $xy^{-1} \in \mathrm{Ker}(f) = \{e_G\}$. Prin urmare obţinem că $x = y$. □

În finalul acestei secţiuni reamintim cititorului definiţia ordinului unui element într-un grup.

Definiţia 1.1.13. *Fie G un grup, e_G elementul său neutru şi x un element al lui G.* **Ordinul** *lui x se defineşte prin*

$$\mathrm{ord}(x) = \begin{cases} \infty, & \text{dacă } x^n \neq e_G \text{ pentru orice } n \geq 1 \\ \min\{n \in \mathbb{N}^* | x^n = e_G\}, & \text{dacă există } n \geq 1 \text{ cu } x^n = e_G. \end{cases}$$

Observăm că elementul neutru e_G are ordinul 1. De fapt, este singurul element de ordin 1 al grupului G. Dacă luăm de exemplu subgrupul multiplicativ $(\{\pm 1, \pm i\}, \cdot)$ (verificaţi că e subgrup!) al lui $(\mathbb{C}^*, \cdot)$ avem $\mathrm{ord}(i) = 4$ deoarece $i \neq 1$, $i^2 = -1$, $i^3 = -i$ şi $i^4 = 1$. Analog se arată că $\mathrm{ord}(-i) = 4$ şi $\mathrm{ord}(-1) = 2$. Pe de altă parte, dacă luăm grupul $(\mathbb{Z}, +)$ orice element nenul are ordinul infinit.

1.1.4. Inele.

Definiţia 1.1.14. (1) Se numeşte **inel** o mulţime nevidă R înzestrată cu două operaţii binare $+$ şi $\cdot$ (numite adunare şi înmulţire) care satisfac următoarele axiome:

(i) $(R, +)$ este grup abelian,

(ii) $\cdot$ este asociativă: $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ pentru orice $a, b, c \in R$,

(iii) înmulţirea este distributivă faţă de adunare: pentru orice $a, b, c \in R$ avem

$$(a + b) \cdot c = (a \cdot c) + (b \cdot c) \quad \text{şi} \quad a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c).$$

(2) Inelul R se numeşte **comutativ** dacă operaţia de înmulţire este comutativă.

(3) Inelul R se numeşte **inel unitar** dacă operaţia de înmulţire are element neutru, adică există un element $e \in R$ astfel încât

$$e \cdot a = a \cdot e = a \quad \text{pentru orice } a \in R.$$

Elementul neutru al adunării se notează cu 0 şi se numeşte *elementul nul* al inelului, iar inversul elementului a în raport cu operaţia de adunare se notează cu $-a$. Cel mai simplu exemplu de inel este inelul $\{0\}$ numit şi *inelul nul.* Să observăm că într-un inel unitar nenul $1 \neq 0$. Toate inelele studiate de noi vor fi inele unitare nenule. Într-un inel unitar elementul neutru al înmulţirii se notează cu 1 şi se numeşte *elementul unitate*. Într-un inel unitar R, un element $a \in R$ se numeşte inversabil dacă este inversabil faţă de înmulţire. Mulţimea elementelor inversabile din inelul unitar R se notează cu $U(R)$. Un inel R se numeşte **integru** dacă pentru orice elemente $a, b \in R \setminus \{0\}$ avem $ab \neq 0$. Un inel integru comutativ se numeşte **domeniu de integritate**.

Exemplul 1.1.15. (1) Mulţimile $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ împreună cu operaţiile obişnuite de adunare şi înmulţire sunt inele comutative şi unitare.

(2) Mulţimea $\mathbb{Z}_n$ împreună cu operaţiile de adunare şi înmulţire definite în Exemplul 1.1.7 este un inel comutativ şi unitar.

(3) Fie $n \geq 2$ un număr întreg. Mulţimea $n\mathbb{Z}$ împreună cu operaţiile obişnuite de adunare şi înmulţire a numerelor întregi este un inel comutativ, fără element unitate.

(4) Fie mulţimea $\mathcal{C}([0,1], \mathbb{R}) = \{f : [0,1] \to \mathbb{R} | \ f \text{ continuă}\}$. Mulţimea $\mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$ împreună cu operaţiile de adunare şi înmulţire a funcţiilor definite în mod uzual: $(f+g)(x) = f(x)+g(x)$ şi $(fg)(x) = f(x)g(x)$ este un inel comutativ şi unitar.

(5) Un exemplu clasic de inel necomutativ este dat de inelul $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, de matrice pătratice de ordinul n ($n \geq 2$). Pentru definiţia lui $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vezi capitolul următor, iar pentru demonstrarea faptului că $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ este inel unitar necomutativ vezi Teorema 2.1.11 şi Observaţia 2.1.12.

(6) Fie R şi S două inele. Produsul cartezian $R \times S$ împreună cu operaţiile de adunare şi înmulţire definite pe componente:

$$(r_1, s_1) + (r_2, s_2) = (r_1 + r_2, s_1 + s_2) \quad \text{şi} \quad (r_1, s_1)(r_2, s_2) = (r_1 r_2, s_1 s_2),$$

este un inel numit *produsul direct* al inelelor R şi S.

De acum înainte, pe tot parcursul acestui capitol prin inel vom înţelege inel comutativ şi unitar.

Definiţia 1.1.16. Fie R un inel. O submulţime nevidă $I \subset R$ se numeşte **ideal** dacă $(I, +)$ este subgrup al grupului aditiv $(R, +)$ şi dacă pentru orice $a \in I$ şi $x \in R$ rezultă că $ax \in I$. Notăm faptul că I este un ideal al lui R prin $I \trianglelefteq R$.

Exemplul 1.1.17. (1) Idealele lui $\mathbb{Z}$ sunt $n\mathbb{Z}$ cu $n \geq 0$ un număr întreg. Într-adevăr, ştim deja din Exemplul 1.1.9 (3) că $n\mathbb{Z}$ cu $n \geq 0$ sunt toate subgrupurile lui $(\mathbb{Z}, +)$, şi în mod evident produsul dintre un element din $n\mathbb{Z}$ cu unul din $\mathbb{Z}$ este un element din $n\mathbb{Z}$.

(2) Fie R, S două inele. Se poate arăta uşor (verificaţi), pe baza definiţiei, că idealele produsului direct de inele $R \times S$ sunt toate submulţimile lui $R \times S$ de forma $I \times J$, unde $I \trianglelefteq R$ şi $J \trianglelefteq S$.

Orice inel R are idealele R şi $\{0\}$. Un ideal nenul I al lui R se numeşte **propriu** dacă $I \neq R$. Cu ajutorul idealelor unui inel putem construi noi inele. Construcţia este asemănătoare cu cea dată pentru $\mathbb{Z}_n$. Fie R un inel fixat şi I un ideal al său. Definim pe inelul R următoarea relaţie de echivalenţă, numită *congruenţa modulo I*:

$$x \sim y (\mathrm{mod}\, I) \quad \text{dacă} \quad x - y \in I.$$

Pe mulţimea factor, notată R/I, definim următoarele asocieri:

$$(\hat{x}, \hat{y}) \mapsto \hat{x} + \hat{y} := \widehat{x+y} \;\; \text{şi} \;\; (\hat{x}, \hat{y}) \mapsto \hat{x} \cdot \hat{y} := \widehat{x \cdot y},$$

unde prin $\hat{x}$ am prescurtat $x(\bmod I)$. Se verifică imediat(exerciţiu!) faptul că aceste asocieri nu depind de reprezentanţii aleşi pentru clasele de echivalenţă. Ele determină două operaţii algebrice, care definesc pe mulţimea factor R/I o structură de inel (comutativ şi unitar), în care elementul nul este $\hat{0}$, iar elementul unitate este $\hat{1}$. Inelul astfel obţinut este **inelul factor** al lui R prin idealul I, se notează cu R/I şi este mulţimea $\{x(\bmod I)|\ x \in R\}$.

Definiţia 1.1.18. Fie R şi S două inele.
(1) Un **morfism de inele** este o aplicaţie $\varphi : R \to S$ care satisface următoarele condiţii:

(i) $\varphi(a + b) = \varphi(a) + \varphi(b)$ pentru orice $a, b \in R$,
(ii) $\varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b)$ pentru orice $a, b \in R$,
(iii) $\varphi(1_R) = 1_S$, unde am notat cu $1_R, 1_S$ elementele unitate ale inelelor R şi S.

(2) Un morfism de inele bijectiv se numeşte **izomorfism de inele**.

Menţionăm în continuare câteva exemple de morfisme de inele. Pentru orice inel R aplicaţia identică $i : R \to R$, definită prin $i(x) = x$ pentru orice $x \in R$, este un izomorfism de inele. Dacă $I \trianglelefteq R$ atunci aplicaţia canonică $p : R \to R/I$, definită prin $p(x) = \hat{x}$ este un morfism de inele surjectiv. Singurul morfism de inele $f : \mathbb{Z} \to R$ este cel dat de $f(k) = k \cdot 1_R$ pentru orice $k \in \mathbb{Z}$ (rezultă imediat din definiţia morfismului de inele). Să observăm că dacă $\varphi : R \to S$ este morfism de inele atunci $\mathrm{Ker}(\varphi)$ este un ideal al lui R, iar $\mathrm{Im}(\varphi)$ este un **subinel** al lui S (adică inel în raport cu operaţiile induse de S).

1.1.5. Corpuri. Reamintim că în precedenta secţiune am făcut convenţia că toate inelele considerate în acest capitol vor fi comutative şi unitare. Pentru a evidenţia importanţa fundamentală a comutativităţii corpurilor renunţăm la această convenţie doar pentru definiţia generală. Un polinom cu coeficienţi într-un corp necomutativ poate avea mai multe rădăcini decât îi este gradul (vezi Problema 1.5.10) pe când un polinom cu coeficienţi într-un corp comutativ are cel mult atâtea rădăcini cât îi este gradul (vezi Propoziţia 1.3.5).

Definiţia 1.1.19. Un inel unitar $\mathbb{K}$ se numeşte **corp** dacă orice element nenul al său este inversabil. Echivalent un inel unitar $\mathbb{K}$ este corp dacă şi numai dacă $U(\mathbb{K}) = \mathbb{K}^*$, unde $\mathbb{K}^* = \mathbb{K} \setminus \{0\}$. Dacă, în plus, înmulţirea este comutativă, corpul se numeşte **comutativ**.

Se observă imediat din definiţie că orice corp este un inel integru. Reciproca nu este adevărată după cum se poate vedea din următorul exemplu: $\mathbb{Z}$ este un inel integru, dar $U(\mathbb{Z}) = \{\pm 1\}$. Are loc totuşi o reciprocă parţială: orice inel integru finit este corp (vezi Problema 1.5.11). Prezentăm în continuare câteva exemple de corpuri.

Exemplul 1.1.20. (1) Mulţimile $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ împreună cu operaţiile obişnuite de adunare şi înmulţire a numerelor sunt corpuri comutative.

(2) Fie p un număr natural prim. Atunci mulţimea $\mathbb{Z}_p$ împreună cu operaţiile de adunare şi înmulţire definite în Exemplul 1.1.7 este un corp comutativ (vezi Problema 1.5.12).

(3) Considerăm mulţimea $\mathbb{Q}(\sqrt{3}) = \{a + b\sqrt{3}|\ a, b \in \mathbb{Q}\}$. Atunci $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$ împreună cu operaţiile obişnuite de adunare şi înmulţire a numerelor reale este un corp comutativ. Într-adevăr, se verifică uşor că $(\mathbb{Q}(\sqrt{3}), +, \cdot)$ este un inel comutativ. Arătăm doar că orice element nenul este inversabil. Fie $a + b\sqrt{3} \neq 0$, cu $a, b \in \mathbb{Q}$. Prin calcul direct se observă că

$$(a + b\sqrt{3})^{-1} = \frac{1}{a + b\sqrt{3}} = \frac{a}{a^2 - 3b^2} - \frac{b}{a^2 - 3b^2}\sqrt{3},$$

unde a doua egalitate a fost obţinută prin raţionalizarea fracţiei, adică amplificarea cu "conjugatul" numitorului.

(4) Fie inelul $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ al matricelor pătratice de ordin 2 peste corpul $\mathbb{C}$ (vezi Definiţia 2.1.1). Considerăm $\mathbb{H} \subset \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$, unde

$$\mathbb{H} = \{\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{pmatrix} \mid \alpha, \beta \in \mathbb{C}\}.$$

$\mathbb{H}$ este un corp necomutativ în raport cu adunarea şi înmulţirea matricelor, vezi Problema 1.5.10.

Notaţie: De acum înainte prin corp vom înţelege un corp comutativ, iar prin inel un inel unitar şi comutativ.

Lema 1.1.21. *Un inel R este corp dacă şi numai dacă $\{0\}$ şi R sunt singurele ideale ale lui R.*

Demonstraţie. Să presupunem că R este un corp şi fie I un ideal nenul al lui R. Atunci există $x \in I$ astfel încât $x \neq 0$. Din definiţia corpului rezultă că există $y \in R$ astfel încât $xy = 1$. Aplicând acum definiţia idealului obţinem că $1 = xy \in I$, de unde rezultă imediat că $I = R$.

Reciproc, presupunem că $\{0\}$ şi R sunt singurele ideale ale lui R. Fie $x \in R$, $x \neq 0$ un element arbitrar. Considerăm mulţimea $\{ax|\ a \in R\}$. Este evident din definiţia idealului că această mulţime este un ideal al lui R, care este în plus şi nenul (acest ideal se mai numeşte şi idealul generat de x). Din ipoteză rezultă că obligatoriu acest ideal este R, adică

$$\{ax|\ a \in R\} = R.$$

Cum $1 \in R$, egalitatea de mai sus implică existenţa unui element $y \in R$ astfel încât $yx = 1$. Obţinem aşadar că x este inversabil. Cum x a fost ales arbitrar nenul, înseamnă că R este corp. □

Definiţia 1.1.22. Fie $\mathbb{K}$ un corp. O submulţime nevidă F a lui K se numeşte **subcorp** al lui $\mathbb{K}$ dacă

$$(1)\ \forall\ x, y \in F \text{ rezultă } x - y \in F \quad \text{şi} \quad (2)\ \forall\ x, y \in F, y \neq 0 \quad \text{rezultă} \quad xy^{-1} \in F.$$

Rezultă imediat din definiţie că: orice corp $\mathbb{K}$ este subcorp al lui însuşi; $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ este un subcorp în raport cu adunarea şi înmulţirea numerelor; $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$ este un subcorp al lui $\mathbb{R}$.

Definiţia 1.1.23. Fie $\mathbb{K}$ şi $\mathbb{K}'$ două corpuri. Se numeşte morfism de corpuri de la $\mathbb{K}$ la $\mathbb{K}'$ o funcţie $f : \mathbb{K} \to \mathbb{K}'$, astfel încât să fie satisfăcute următoarele condiţii:

(1) $f(x + y) = f(x) + f(y)$, oricare ar fi $x, y \in \mathbb{K}$;
(2) $f(xy) = f(x)f(y)$, oricare ar fi $x, y \in \mathbb{K}$;
(3) $f(1_{\mathbb{K}}) = 1_{\mathbb{K}'}$.

Se observă că $f : \mathbb{K} \to \mathbb{K}'$ este un morfism de corpuri dacă este un morfism de inele.

Propoziţia 1.1.24. *Orice morfism de corpuri este injectiv.*

Demonstraţie. Fie $f : \mathbb{K} \to \mathbb{K}'$ un morfism de corpuri. Cum f este şi morfism de inele ştim că $\mathrm{Ker}(f)$ este un ideal al lui $\mathbb{K}$. Din Lema 1.1.21 rezultă că $\mathrm{Ker}(f) = \{0\}$ sau $\mathrm{Ker}(f) = \mathbb{K}$. Dacă $\mathrm{Ker}(f) = \mathbb{K}$ atunci $f(1_{\mathbb{K}}) = 0$ şi cum $f(1_{\mathbb{K}}) = 1_{\mathbb{K}'}$ (pentru că f e morfism) am obţine atunci că $1_{\mathbb{K}'} = 0$, o contradicţie. Deci $\mathrm{Ker}(f) = \{0\}$, adică f este injectiv. □

Încheiem această secţiune despre corpuri cu definiţia caracteristicii unui corp. Fie $\mathbb{K}$ un corp şi $1_{\mathbb{K}}$ elementul său neutru. Deoarece $(\mathbb{K}, +)$ este grup abelian, atunci elementele $1_{\mathbb{K}}$, $1_{\mathbb{K}} + 1_{\mathbb{K}}$, $1_{\mathbb{K}} + 1_{\mathbb{K}} + 1_{\mathbb{K}}$, ... se găsesc în $\mathbb{K}$ şi nu sunt neapărat distincte. Pentru un număr natural nenul n punem

$$n \cdot 1_{\mathbb{K}} = \underbrace{1_{\mathbb{K}} + \cdots + 1_{\mathbb{K}}}_{n \text{ ori}}.$$

Atunci avem două posibilităţi: ori toate elementele $n \cdot 1_{\mathbb{K}}$ sunt distincte, ori $m \cdot 1_{\mathbb{K}} = 0$ pentru un anumit număr natural nenul m.

Definiţia 1.1.25. Caracteristica unui corp $\mathbb{K}$, se notează cu $\mathrm{char}(\mathbb{K})$, şi se defineşte ca fiind cel mai mic număr natural nenul p astfel încât $p \cdot 1_{\mathbb{K}} = 0$ dacă un astfel de p există şi 0 în caz contrar.

De exemplu, $\mathrm{char}(\mathbb{Q}) = 0$ pe când $\mathrm{char}(\mathbb{Z}_2) = 2$. Apriori se pare că un corp $\mathbb{K}$ poate avea caracteristica orice număr natural diferit de 1. În realitate avem:

Propoziţia 1.1.26. *Caracteristica unui corp $\mathbb{K}$ este ori 0 ori un număr prim p.*

Demonstraţie. Să presupunem că $\mathrm{char}(\mathbb{K}) \neq 0$. Rezultă din definiţie că $\mathrm{char}(\mathbb{K}) = m$ pentru un anumit număr natural nenul m. Dacă m nu e prim, atunci $m = ab$ cu $a, b > 1$. Deoarece $m \cdot 1_{\mathbb{K}} = 0$ atunci

$$m \cdot 1_{\mathbb{K}} = ab \cdot 1_{\mathbb{K}} = (a \cdot 1_{\mathbb{K}})(b \cdot 1_{\mathbb{K}}) = 0.$$

Dar $\mathbb{K}$ este corp, prin urmare domeniu de integritate, ceea ce implică $a \cdot 1_{\mathbb{K}} = 0$ sau $b \cdot 1_{\mathbb{K}} = 0$, o contradicţie cu minimalitatea lui m. Obţinem aşadar că $\mathrm{char}(K) = p$ cu p număr prim. □

1.2. Grupul $(S_n, \circ)$

Fie A o mulţime nevidă. Reamintim că în Exemplul 1.1.7 (5), notasem cu S_A grupul permutărilor mulţimii A. Operaţia algebrică în raport cu care S_A este grup este operaţia de compunere uzuală a funcţiilor. Dacă A şi B sunt două mulţimi finite cu acelaşi număr de elemente atunci grupurile S_A şi S_B sunt izomorfe (vezi Problema 1.5.15). Prin urmare, grupul permutărilor unei mulţimi finite cu n elemente este izomorf cu grupul permutărilor mulţimii $\{1, 2, \ldots, n\}$, pe care îl notăm cu S_n şi îl numim *grupul permutărilor de grad* n.

Grupul S_n are $n!$ elemente. Într-adevăr, aplicând Propoziţia 1.1.2 b) permutările muţimii $\{1, 2, \ldots, n\}$ sunt exact funcţiile injective definite de la această mulţime în ea însăşi. Folosind acum Problema 1.5.2 obţinem că S_n are exact $n!$ elemente. Pentru scrierea elementelor lui S_n vom folosi următoarea notaţie: permutarea $\sigma \in S_n$ se scrie sub forma

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \ldots & \sigma(n) \end{pmatrix}.$$

Importanţa studierii grupului S_n este justificată de următorul rezultat fundamental din teoria grupurilor.

Teorema 1.2.1. (Cayley) *Orice grup cu n elemente este izomorf cu un subgrup al lui* S_n.

Demonstraţie. Fie G un grup cu n elemente. Deoarece S_n este izomorf cu S_G, este suficient să arătăm că G este izomorf cu un subgrup al grupului S_G. Pentru fiecare $g \in G$, considerăm aplicaţia $\phi_g : G \to G$ definită prin $\phi_g(x) = gx$ pentru orice $x \in G$. Obţinem astfel că pentru orice $g, h, x \in G$ avem $(\phi_g \circ \phi_h)(x) = ghx = \phi_{gh}(x)$. În particular avem ϕ_g bijecţie deoarece $\phi_g \circ \phi_{g^{-1}} = 1_G$ şi aplicaţia $\Phi : G \to S_G$, $\Phi(g) = \phi_g$ este bine definită. Mai mult, Φ este morfism injectiv de grupuri. Într-adevăr, $\Phi(g)\Phi(h) = \phi_g\phi_h = \phi_{gh} = \Phi(gh)$ şi $\mathrm{Ker}(\Phi) = \{g|\phi_g = 1_G\} = \{e_G\}$. Deci G este izomorf cu subgrupul $\Phi(G)$ al lui S_G. □

Vom descrie elementele din S_n folosindu-ne de o metodă, numită *descompunerea în cicli disjuncţi*, pe care o prezentăm în continuare. Un **ciclu** este notat printr-un şir de întregi distincţi cuprinşi între 1 şi n şi reprezintă elementul lui S_n care permută ciclic aceşti întregi şi fixează restul întregilor. Concret, un ciclu se reprezintă astfel: fie $i_1, \ldots, i_k$ numere distincte cuprinse între 1 şi n. Ciclul $(i_1\ i_2 \ldots\ i_k)$ este permutarea din S_n definită prin $i_1 \mapsto i_2 \mapsto \cdots \mapsto i_k \mapsto i_1$ şi $x \mapsto x$ pentru $x \neq i_j$ pentru orice $j = 1, \ldots, k$. Numărul k se numeşte *lungimea ciclului*. Rezultă din definiţia ciclului că permutarea identică este singurul ciclu de lungime 1 din S_n. Ciclii de lungime 2 se numesc **transpoziţii**. De exemplu, ciclul $(2\ 1\ 4) \in S_7$, de lungime 3, reprezintă permutarea lui S_7 definită prin $2 \mapsto 1$, $1 \mapsto 4$, $4 \mapsto 2$ şi $i \mapsto i$ pentru orice $i \notin \{1, 2, 4\}$. Folosind notaţia introdusă deasupra Teoremei 1.2.1

$$(2\ 1\ 4) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 1 & 3 & 2 & 5 & 6 & 7 \end{pmatrix}.$$

Este uşor de observat că pentru $n \geq 3$ avem $(1\ 2\ 3) = (1\ 2) \circ (2\ 3) \neq (2\ 3) \circ (1\ 2) = (1\ 3\ 2)$. În particular, rezultă că S_n nu este grup abelian pentru $n \geq 3$, în timp ce S_1 şi S_2 sunt abeliene.

Spunem că doi cicli $(i_1\ i_2\ \ldots\ i_k)$ şi $(j_1\ j_2\ \ldots\ j_l)$ sunt *disjuncţi* dacă $\{i_1, \ldots, i_k\} \cap \{j_1, \ldots, j_l\} = \emptyset$. Este uşor de verificat (Exerciţiu!) că doi cicli disjuncţi comută. Putem demonstra acum rezultatul central al acestei secţiuni.

Teorema 1.2.2. *Orice permutare* $\sigma \in S_n$ *se scrie ca produs de cicli disjuncţi, scrierea fiind unică până la ordinea ciclilor.*

Demonstraţie. **Existenţa:** Fie $\sigma \in S_n$. Definim pe mulţimea $\{1,\ldots,n\}$ relaţia binară $x \sim y$ dacă şi numai dacă există un întreg $k \geq 1$ cu $\sigma^k(x) = y$. Este uşor de verificat că $\sim$ este o relaţie de echivalenţă. Clasele de echivalenţă ale relaţiei $\sim$ formează o partiţie a mulţimii $\{1,\ldots,n\}$. Să presupunem că $\sim$ are exact r clase de echivalenţă, pe care le notăm cu $\{i_{11},\ldots,i_{1k_1}\}, \{i_{21},\ldots,i_{2k_2}\},\ldots,\{i_{r1},\ldots,i_{rk_r}\}$. Ţinând cont de definiţia relaţiei de echivalenţă $\sim$, rezultă că fixând $x \in \{1,\ldots,n\}$ şi considerând $k \geq 1$ cel mai mic întreg astfel încât $\sigma^k(x) = x$ obţinem că, clasa de echivalenţă a lui x este $\{x, \sigma(x), \ldots, \sigma^{k-1}(x)\}$. Prin urmare, pentru orice $l \in \{1,\ldots,r\}$ există $x_l \in \{1,\ldots,n\}$ astfel încât avem

$$\{i_{l1},\ldots,i_{lk_l}\} = \{x_l, \sigma(x_l),\ldots,\sigma^{k_l-1}(x_l)\}.$$

Rezultă că, până la o renumerotare a elementelor din fiecare clasă de echivalenţă, putem presupune că $i_{l1} = \sigma^{k_l}(i_{l1})$ şi $i_{lj} = \sigma^{j-1}(i_{l1})$ pentru orice l, j cu $1 \leq l \leq r$ şi $2 \leq j \leq k_l$. Obţinem că

$$\sigma = (i_{11}\ i_{12}\ \ldots\ i_{1k_1})\cdots(i_{r1}\ i_{r2}\ \ldots\ i_{rk_r}).$$

Unicitatea: Fie $\sigma = (j_{11}\ j_{12}\ \ldots\ j_{1s_1})\cdots(j_{t1}\ j_{t2}\ \ldots\ j_{ts_t})$ o altă scriere a lui σ ca produs de cicli disjuncţi. Conform definiţiei relaţiei de echivalenţă şi faptului că ciclii disjuncţi comută rezultă că $\{j_{11},\ldots,j_{1s_1}\}, \{j_{21},\ldots,j_{2s_2}\},\ldots,\{j_{t1},\ldots,j_{ts_t}\}$ sunt clasele de echivalenţă ale lui σ. Obţinem că $r = t$ şi până la o eventuală renumerotare putem presupune că $\{i_{l1},\ldots,i_{lk_l}\} = \{j_{l1},\ldots,j_{ls_l}\}$ pentru orice $l \in \{1,\ldots,t\}$. De aici obţinem concluzia dorită. □

Prezentăm în continuare un algoritm de descompunere al unei permutări σ din S_n în produs de cicli disjuncţi şi îl aplicăm în paralel pe o anumită permutare. Fie $n = 13$ şi fie $\sigma \in S_{13}$ următoarea permutare

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 \\ 12 & 13 & 3 & 1 & 11 & 9 & 5 & 10 & 6 & 4 & 7 & 8 & 2 \end{pmatrix}. \tag{1}$$

Algoritm 1.2.3. **Pasul 1:** pentru a începe un nou ciclu alegeţi cel mai mic element al lui $\{1, 2\ldots,n\}$ care nu a apărut deja într-un ciclu anterior - notaţi-l cu a (dacă este primul ciclu, $a = 1$); începeţi noul ciclu: $(a$. În exemplul considerat aveţi (1.

Pasul 2: scrieţi $\sigma(a)$ din definiţia permutării σ - notaţi-l cu b. Dacă $b = a$, închideţi ciclul cu o paranteză rotundă (fără a-l scrie pe b); astfel aţi scris un ciclu - vă întoarceţi la Pasul 1. Dacă $b \neq a$, scrieţi b lângă a în acest ciclu: $(a\ b$. În exemplul considerat $\sigma(1) = 12 = b$, $12 \neq 1$ deci scrieţi: (1 12.

Pasul 3: scrieţi $\sigma(b)$ din definiţia lui σ - notaţi-l cu c. Dacă $c = a$, închideţi ciclul cu o paranteză rotundă şi vă întoarceţi la Pasul 1. Dacă $c \neq a$, scrieţi c după b în acest ciclu: $(a\ b\ c$. Repetaţi acest pas folosind numărul c ca noua valoare a lui b până se încheie ciclul. În exemplul nostru $\sigma(12) = 8$, $8 \neq 1$ deci continuaţi ciclul astfel: (1 12 8. □

Natural, această procedură se termină când toate numerele din mulţimea $\{1, 2\ldots,n\}$ au apărut într-un ciclu. În exemplul considerat mai sus avem:

$$\sigma = (1\ 12\ 8\ 10\ 4)(2\ 13)(3)(5\ 11\ 7)(6\ 9).$$

În general în scrierea în produs de cicli disjuncţi a unei permutări se omit ciclii de lungime 1, adică în exemplul considerat $\sigma = (1\ 12\ 8\ 10\ 4)(2\ 13)(5\ 11\ 7)(6\ 9)$. Pentru a calcula descompunerea în cicli disjuncţi a lui σ^{-1}, şi prin urmare pe σ^{-1}, scriem numerele din fiecare ciclu din descompunerea în cicli disjuncţi a lui σ în ordine inversă. În exemplul considerat avem

$$\sigma^{-1} = (4\ 10\ 8\ 12\ 1)(13\ 2)(7\ 11\ 5)(9\ 6).$$

Corolarul 1.2.4. (1) *Ordinul unei permutări $\sigma \in S_n$ este cel mai mic multiplu comun al lungimii ciclilor care apar în descompunerea lui σ în produs de cicli disjuncţi.*

(2) *Orice permutare $\sigma \in S_n$ se scrie ca produs de transpoziţii.*

Demonstraţie. Fie $\sigma \in S_n$. Conform Teoremei 1.2.2, σ se scrie ca produs de $r \geq 1$ cicli disjuncţi,

$$\sigma = (i_{11}\ i_{12}\ \ldots\ i_{1k_1}) \cdots (i_{r1}\ i_{r2}\ \ldots\ i_{rk_r}).$$

Deoarece $(i_{l1}\ i_{l2}\ \ldots\ i_{lk_l}) = (i_{l1}\ i_{l2})(i_{l2}\ i_{l3}) \cdots (i_{lk_{l-1}}\ i_{lk_l})$ pentru orice $l = 1, \ldots, r$ rezultă că σ se scrie ca produs de transpoziţii. Folosind faptul că orice doi cicli disjuncţi comută obţinem că pentru orice $t \geq 1$ avem

$$\sigma^t = (i_{11}\ i_{12}\ \ldots\ i_{1k_1})^t \cdots (i_{r1}\ i_{r2}\ \ldots\ i_{rk_r})^t.$$

În plus, observând că ordinul unui ciclu este egal cu lungimea lui, obţinem că ordinul lui σ este egal cu cel mai mic multiplu comun al numerelor $k_1, \ldots, k_r$. □

Folosind din nou permutarea σ considerată în (1) avem mai întâi că $\sigma = (1\ 12\ 8\ 10\ 4)(2\ 13)(5\ 11\ 7)(6\ 9)$. Scriind fiecare ciclu ca produs de transpoziţii obţinem

$$\sigma = (1\ 12)(12\ 8)(8\ 10)(10\ 4)(2\ 13)(5\ 11)(11\ 7)(6\ 9).$$

În plus, ordinul lui σ este $[5, 2, 3, 2] = 30$.

Definiţia 1.2.5. Fie $\sigma \in S_n$, unde $n \geq 2$. Definim **signatura** lui σ prin

$$\operatorname{sgn}(\sigma) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} \frac{\sigma(j) - \sigma(i)}{j - i}. \tag{2}$$

O pereche (i, j), $1 \leq i < j \leq n$ cu $\sigma(i) > \sigma(j)$ se numeşte **inversiune** a lui σ. Notăm cu $m(\sigma)$ numărul inversiunilor lui σ.

Propoziţia 1.2.6. *Fie $\sigma \in S_n$, unde $n \geq 2$. Atunci* $\operatorname{sgn}(\sigma) = (-1)^{m(\sigma)}$

Demonstraţie. Deoarece σ este o bijecţie avem

$$\prod_{1 \leq i < j \leq n} (\sigma(j) - \sigma(i)) = (-1)^{m(\sigma)} \prod_{1 \leq i < j \leq n} |\sigma(j) - \sigma(i)| = (-1)^{m(\sigma)} \prod_{1 \leq i < j \leq n} (j - i).$$

Prin urmare, obţinem că

$$\operatorname{sgn}(\sigma) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} \frac{\sigma(j) - \sigma(i)}{j - i} = \frac{\prod_{1 \leq i < j \leq n} (\sigma(j) - \sigma(i))}{\prod_{1 \leq i < j \leq n} (j - i)} = (-1)^{m(\sigma)}. \quad \square$$

O consecinţă a acestei propoziţii este că signatura unei permutări poate fi doar ± 1. Permutările cu signatura 1 se numesc **permutări pare**, iar cele cu signatura -1 se numesc **permutări impare**. Mulţimea permutărilor pare din grupul S_n se notează cu A_n. Permutarea identică e nu are nici o inversiune, prin urmare $m(e) = 0$ şi conform propoziţiei anterioare e este permutare pară. Transpoziţia (1 2) are exact o inversiune $(1, 2)$, deci este o permutare impară. Calculul signaturii cu ajutorul propoziţiei anterioare poate fi destul de complicat. Revenind la permutarea σ din (1) şi numărând toate inversiunile obţinem

$$m(\sigma) = 11 + 11 + 2 + 0 + 8 + 6 + 2 + 5 + 2 + 1 + 1 + 1 + 0 = 50,$$

unde termenul al i-lea din sumă reprezintă numărul de inversiuni (i, j) ale lui σ. Putem decide mai simplu dacă o anumită permutare este pară sau impară? Care este numărul permutărilor pare, respectiv impare?

Teorema 1.2.7. *Fie $n \geq 2$. Aplicaţia* $\operatorname{sgn} : (S_n, \circ) \mapsto (\{-1, 1\}, \cdot)$ *este un morfism surjectiv de grupuri, având nucleul* $\operatorname{Ker}(\operatorname{sgn}) = A_n$. *În particular, A_n este un subgrup al lui S_n şi $|A_n| = n!/2$.*

Demonstraţie. Aplicaţia sgn este evident o funcţie surjectivă (vezi exemplele calculate). Verificăm că sgn este morfism de grupuri:

$$\operatorname{sgn}(\sigma\tau) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} \frac{(\sigma\tau)(j) - (\sigma\tau)(i)}{j - i} =$$

$$\prod_{1 \leq i < j \leq n} \frac{(\sigma\tau)(j) - (\sigma\tau)(i)}{\tau(j) - \tau(i)} \prod_{1 \leq i < j \leq n} \frac{\tau(j) - \tau(i)}{j - i} = \operatorname{sgn}(\sigma) \operatorname{sgn}(\tau),$$

unde pentru prima egalitate am aplicat definiţia signaturii, iar pentru ultima egalitate definiţia signaturii şi faptul că τ este o bijecţie. Evident $\operatorname{Ker}(\operatorname{sgn}) = A_n$ şi, aplicând Propoziţia 1.1.12(b), obţinem că A_n este un subgrup al lui S_n. Pentru ultima afirmaţie a teoremei să observăm că, deoarece sgn este un morfism de grupuri, aplicaţiile

$$A_n \xrightarrow{(1\ 2)} S_n \setminus A_n \quad \text{şi} \quad S_n \setminus A_n \xrightarrow{(1\ 2)} A_n,$$

date de înmulţirea cu transpoziţia (1 2) sunt bine definite şi inverse una celeilalte. Prin urmare, mulţimile finite A_n şi $S_n \setminus A_n$ au acelaşi număr de elemente, adică $n!/2$. □

Ca o primă consecinţă a acestei teoreme să observăm ca orice transpoziţie este permutare impară. Într-adevăr, pentru $1 \leq i < j \leq n$ se poate verifica uşor că

$$(i\ j) = (1\ i)(2\ j)(1\ 2)(2\ j)(1\ i),$$

şi folosind faptul că sgn este morfism de grupuri obţinem că

$$\operatorname{sgn}((i\ j)) = \operatorname{sgn}((1\ i))^2 \operatorname{sgn}((2\ j))^2 \operatorname{sgn}((1\ 2)) = -1.$$

Am văzut în demonstraţia Corolarului 1.2.4 că un ciclu de lungime k se scrie ca produs de $k-1$ transpoziţii, deci ciclii de lungime pară sunt permutări impare, iar ciclii de lungime impară sunt permutări pare. Prin urmare, pe baza acestei teoreme şi folosindu-ne de Teorema 1.2.2, verificarea parităţii unei permutări $\sigma \in S_n$ se poate face mult mai simplu astfel: descompunem σ în produs de cicli disjuncţi folosindu-ne de Algoritmul 1.2.3 şi calculăm signatura lui σ făcând produsul signaturilor ciclilor componenţi. Ca exemplu, pentru permutarea σ din (1) avem

$$\operatorname{sgn}(\sigma) = \operatorname{sgn}((1\ 12\ 8\ 10\ 4)) \operatorname{sgn}((2\ 13)) \operatorname{sgn}((5\ 11\ 7)) \operatorname{sgn}((6\ 9)) = 1 \cdot (-1) \cdot 1 \cdot (-1) = 1,$$

adică σ este permutare pară.

1.3. Inelul de polinoame $\mathbb{K}[X]$

Fie $\mathbb{K}$ un corp comutativ. Notăm cu $\mathbb{K}^{(\mathbb{N})}$ mulţimea şirurilor $(a_n)_{n\geq 0}$ cu elemente din $\mathbb{K}$ cu un număr finit de termeni nenuli. Pe $\mathbb{K}^{(\mathbb{N})}$ definim două operaţii algebrice: dacă $f = (a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots)$ şi $g = (b_0, b_1, \ldots, b_n, \ldots)$, atunci

$$f + g := (a_0 + b_0, a_1 + b_1, \ldots, a_n + b_n, \ldots) \quad \text{şi} \quad f \cdot g := (a_0b_0, a_0b_1 + a_1b_0, \ldots, \sum_{i=0}^{n} a_ib_{n-i}, \ldots).$$

Lăsăm cititorului să verifice că:

Propoziţia 1.3.1. *Mulţimea $\mathbb{K}^{(\mathbb{N})}$ împreună cu operaţiile de adunare şi înmulţire definite mai sus este un inel comutativ.*

În plus avem că elementul nul al acestui inel este $(0, 0, \ldots, 0, \ldots)$, iar elementul neutru este $(1, 0, \ldots, 0, \ldots)$. Menţionăm că acelaşi rezultat rămâne valabil dacă înlocuim pe $\mathbb{K}$ cu un inel comutativ unitar R. Să observăm că aplicaţia $s : \mathbb{K} \to \mathbb{K}^{(\mathbb{N})}$ dată prin $s(a) = (a, 0, \ldots, 0, \ldots)$ este un morfism injectiv de inele (numit şi *scufundarea canonică*). Prin urmare putem identifica corpul $\mathbb{K}$ cu imaginea sa $s(\mathbb{K})$ prin acest morfism. În inelul descris mai sus, notăm *convenţional* cu X şirul $(0, 1, 0, \ldots, 0, \ldots)$ şi îl numim **nedeterminată**. Prin convenţie, definim $X^0 = 1 = (1, 0, \ldots, 0, \ldots)$. Se observă prin calcul că $X^n = (0, 0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots)$, unde 1 este precedat de n zerouri. Cu aceste notaţii, orice element $f = (a_n)_{n\geq 0} \in \mathbb{K}^{(\mathbb{N})}$ se poate scrie ca o sumă finită

$$f = \sum_{n\geq 0} a_nX^n,$$

deoarece şirul $(a_n)_{n\geq 0}$ are doar un număr finit de termeni nenuli. Rezultă că pentru orice $f \in \mathbb{K}^{(\mathbb{N})}$ există un număr natural $m(f)$ astfel încât $f = \sum_{i=0}^{m(f)} a_iX^i$. Inelul $\mathbb{K}^{(\mathbb{N})}$ se notează cu $\mathbb{K}[X]$ şi se numeşte **inelul de polinoame într-o nedeterminată** cu coeficienţi în $\mathbb{K}$. Prin urmare, elementele lui $\mathbb{K}[X]$ se numesc polinoame. Fie $f = a_0 + a_1X + \cdots + a_{m(f)}X^{m(f)}$ un polinom. Numim **gradul lui** f, şi îl notăm cu $\mathrm{grad}(f)$, cel mai mare număr natural k cu $a_k \neq 0$. Prin convenţie, definim gradul polinomului nul ca fiind $-\infty$. Dacă $f = a_0 + a_1X + \cdots + a_nX^n$ are gradul n, atunci $a_0, \ldots, a_n$ se numesc **coeficienţii** polinomului, iar a_n este **coeficientul dominant** al polinomului. În cazul în care coeficientul dominant al polinomului este 1, polinomul se numeşte **polinom unitar**.

Propoziţia 1.3.2. *Fie $\mathbb{K}$ un corp şi $f, g \in \mathbb{K}[X] \setminus \{0\}$. Atunci:*

(a) $\mathrm{grad}(f + g) \leq \max\{\mathrm{grad}(f), \mathrm{grad}(g)\}$.
(b) $\mathrm{grad}(fg) = \mathrm{grad}(f) + \mathrm{grad}(g)$.
(c) $U(\mathbb{K}[X]) = U(\mathbb{K}) = \mathbb{K}^*$.

Demonstraţie. Fie $f = a_0 + a_1X + \cdots + a_nX^n$ şi $g = b_0 + b_1X + \cdots + b_mX^m$ polinoame din $\mathbb{K}[X]$ de grade n, respectiv m.

(a) Fără a restrânge generalitatea, putem presupune că $n \geq m$. Atunci $f + g = (a_0 + b_0) + \cdots + (a_m + b_m)X^m + a_{m+1}X^{m+1} + \cdots + a_nX^n$, de unde rezultă imediat concluzia dorită.

(b) Deoarece grad$(f) = n$ şi $grad(g) = m$ rezultă că $a_n \neq 0$ şi $b_m \neq 0$. Prin urmare $a_n b_m \neq 0$. Calculând produsul dintre f şi g obţinem

$$fg = \sum_{k=0}^{n+m} (\sum_{i+j=k} a_i b_j) X^k,$$

deci grad$(fg) = n + m$, conform definiţiei.

(c) Avem în mod evident incluziunea $U(\mathbb{K}) \subset U(\mathbb{K}[X])$. Pentru a proba incluziunea contrară fie $f \in U(\mathbb{K}[X])$. Rezultă că există $g \in \mathbb{K}[X]$ astfel încât $fg = 1$. Aplicând punctul (b) obţinem că

$$0 = \text{grad}(1) = \text{grad}(fg) = \text{grad}(f) + \text{grad}(g).$$

Din această egalitate rezultă că grad$(f) =$ grad$(g) = 0$. Asta înseamnă că $f, g \in \mathbb{K}^* = U(\mathbb{K})$, ceea ce încheie demonstraţia. □

Teorema 1.3.3. *(Teorema împărţirii cu rest) Fie $\mathbb{K}$ un corp şi fie $f, g \in \mathbb{K}[X]$ astfel încât $g \neq 0$. Atunci există şi sunt unice polinoamele $q, r \in \mathbb{K}[X]$ astfel încât*

$$f = qg + r \quad \text{cu} \quad \text{grad}(r) < \text{grad}(g).$$

Polinoamele q, r se numesc câtul, respectiv restul împărţirii lui f la g.

Demonstraţie. Demonstrăm mai întâi existenţa polinoamelor q şi r. Dacă $f = 0$ atunci putem pune $q = 0$ şi $r = 0$. Deci, putem presupune că $f \neq 0$ şi demonstrăm existenţa lui q şi r prin inducţie după $n =$ grad(f). Cazul $n = 0$ este evident. Fie $m =$ grad(g). Dacă $n < m$ atunci luăm $q = 0$ şi $r = f$. În caz contrar avem că $n \geq m$. Presupunem că $f = a_0 + \cdots + a_n X^n$ şi $g = b_0 + \cdots + b_m X^m$, unde $a_n, b_m \neq 0$. Atunci polinomul $f_1 = f - a_n (b_m)^{-1} X^{n-m} g$ are gradul mai mic strict decât n şi are coeficienţii în corpul $\mathbb{K}$. Aplicăm acum ipoteza de inducţie şi obţinem existenţa polinoamelor $q_1, r_1 \in \mathbb{K}[X]$ cu proprietatea că

$$f_1 = q_1 g + r_1 \quad \text{cu} \quad \text{grad}(r_1) < \text{grad}(g).$$

Punând $q = q_1 + a_n (b_m)^{-1} X^{n-m}$ şi $r = r_1$ avem

$$f = qg + r \quad \text{cu} \quad \text{grad}(r) < \text{grad}(g),$$

ceea ce încheie demonstraţia pasului de inducţie.

Pentru demonstrarea unicităţii să presupunem că şi q_1, r_1 satisfac condiţiile teoremei. Atunci atât $f - q_1 g$ cât şi $f - qg$ sunt polinoame de grad mai mic strict decât $m =$ grad(g). Prin urmare, folosind Propoziţia 1.3.2(a), diferenţa celor două polinoame, i.e. $g(q - q_1)$ are gradul mai mic strict decât m. Dacă $q - q_1 \neq 0$ aplicând Propoziţia 1.3.2(b) obţinem

$$m > \text{grad}(g(q - q_1)) = \text{grad}(g) + \text{grad}(q - q_1) = m + \text{grad}(q - q_1) \geq m,$$

ceea ce reprezintă o contradicţie. Deci $q = q_1$, ceea ce impică $r = r_1$. □

O observaţie importantă este că demonstrarea pasului de inducţie reprezintă de fapt algoritmul de împărţire cu rest a două polinoame. O altă consecinţă a Teoremei împărţirii cu rest este că putem introduce pe $\mathbb{K}[X]$ o relaţie de divizibilitate, pe care o notăm "|". Mai precis, pentru $f, g \in \mathbb{K}[X]$ spunem că f **divide** g (sau g este **divizibil** cu f) şi scriem $f|g$ dacă şi numai dacă există $h \in \mathbb{K}[X]$ astfel încât $g = fh$. Să observăm că pentru cazul esenţial $f \neq 0$ $f|g$ dacă şi numai dacă restul împărţirii lui g la f este 0.

Fie K un corp, $f \in K[X]$ şi $\alpha \in K$. Spunem că α este *rădăcină* a lui f dacă $f(\alpha) = 0$. De exemplu, polinomul $(x^2+1)(x-1) \in \mathbb{R}[X]$ are doar rădăcina -1, pe când polinomul $(x^2+1)(x-1) \in \mathbb{C}[X]$ are rădăcinile $-1, \pm i$. Observăm că rădăcinile unui polinom depind de corpul în care considerăm coeficienţii polinomului. Cum testăm însă dacă un anumit număr este rădăcină a unui polinom? Răspunsul este dat de următorul rezultat, cunoscut şi ca *Teorema lui Bézout*.

Corolarul 1.3.4. *Fie $\mathbb{K}$ un corp, $f \in \mathbb{K}[X]$ şi $\alpha \in \mathbb{K}$. Atunci restul împărţirii lui f la $X - \alpha$ este $f(\alpha)$. În particular avem că α este rădăcină a lui f dacă şi numai dacă $X - \alpha | f$.*

Demonstraţie. Aplicăm Teorema 1.3.3 pentru $f = f$ şi $g = X - \alpha$. Obţinem că există şi sunt unice $q \in \mathbb{K}[X]$ şi $r \in \mathbb{K}$ cu $f = q(X-\alpha) + r$. În această relaţie facem $X = \alpha$ şi obţinem $r = f(\alpha)$. □

Următorul rezultat este privitor la numărul de rădăcini pe care îl poate avea un polinom cu coeficienţi într-un corp $\mathbb{K}$. Conform Corolarului 1.3.4, o rădăcină α corespunde unui divizor $X - \alpha$ al lui f. Dacă f este divizibil prin $(X-\alpha)^m$ dar nu este divizibil cu $(X-\alpha)^{m+1}$, atunci α se numeşte rădăcină cu **ordin de multiplicitate** m sau **rădăcină multiplă de ordin** m.

Propoziţia 1.3.5. *Fie $\mathbb{K}$ un corp şi $f \in \mathbb{K}[X] \setminus \{0\}$ un polinom. Dacă f are rădăcinile distincte $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ în $\mathbb{K}$ cu ordine de multiplicitate $n_1, \dots, n_k$, atunci f este divizibil prin polinomul $(X-\alpha_1)^{n_1}(X-\alpha_2)^{n_2}\cdots(X-\alpha_k)^{n_k}$. În particular, dacă f are gradul n atunci f are cel mult n rădăcini în $\mathbb{K}$.*

Demonstraţie. Afirmaţia este evidentă dacă $k = 1$. Presupunem $k \geq 2$ şi cum α_1 este rădăcină multiplă de ordin n_1 putem scrie $f = (X-\alpha_1)^{n_1} g$ şi $g(\alpha_1) \neq 0$. Înlocuind X cu α_2, obţinem că $0 = f(\alpha_2) = (\alpha_2 - \alpha_1)^{n_1} g(\alpha_2)$ în K, de unde rezultă $g(\alpha_2) = 0$. Prin urmare α_2 este rădăcina lui g cu ordin de multiplicitate n_2. Deci $(X-\alpha_2)^{n_2}|g$ ceea ce implică $(X-\alpha_1)^{n_1}(X-\alpha_2)^{n_2}|f$. Repetând acest argument se obţine că f este divizibil prin $(X-\alpha_1)^{n_1}(X-\alpha_2)^{n_2}\cdots(X-\alpha_k)^{n_k}$. □

Încheiem această secţiune precizând legătura dintre coeficienţii unui polinom şi rădăcinile acestuia, rezultat cunoscut în literatură şi sub numele de **relaţiile lui Viétè**.

Propoziţia 1.3.6. *Fie $\mathbb{K}$ un corp şi $f = a_n X^n + \dots + a_1 X + a_0 \in \mathbb{K}[X]$ un polinom de grad $n \geq 1$. Presupunem că f are rădăcinile $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K}$. Atunci*

$$f = a_n(X-\alpha_1)\cdots(X-\alpha_n),$$

şi în plus au loc relaţiile

$$\left\{\begin{array}{l} \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n = -a_{n-1}(a_n)^{-1}, \\ \alpha_1\alpha_2 + \dots + \alpha_1\alpha_n = a_{n-2}(a_n)^{-1}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n = (-1)^n a_0 (a_n)^{-1}. \end{array}\right. \tag{3}$$

Demonstraţie. Aplicând Propozitia 1.3.5 obţinem că $f = b(X - \alpha_1)\cdots(X - \alpha_n)$, unde $b \in \mathbb{K}^*$. Prin identificarea coeficienţilor dominanţi obţinem că $b = a_n$. Restul relaţiilor se obţin prin identificarea celorlalţi coeficienţi. $\square$

1.4. Aritmetica lui $\mathbb{K}[X]$

Am văzut în secţiunea anterioară că în inelul $\mathbb{K}[X]$, la fel ca în $\mathbb{Z}$, funcţionează Teorema împărţirii cu rest (vezi Teorema 1.3.3). Acest fapt implică, cu o demonstraţie similară cu cea dată în Exemplul 1.1.9 (3), că idealele lui $\mathbb{K}[X]$ sunt generate de un singur polinom. Într-adevăr, dacă I este un ideal nenul al lui $\mathbb{K}[X]$ (idealul nul este generat evident de polinomul nul) considerăm $g \in I \setminus \{0\}$ un polinom de grad minim. Evident $(g) \subset I$. Fie $f \in I$ un polinom arbitrar. Aplicând Teorema 1.3.3, există $q, r \in K[X]$ astfel încât $f = qg + r$ cu $\mathrm{grad}(r) < \mathrm{grad}(g)$. Cum $r = f - qg \in I$ (definiţia idealului) rezultă din minimalitatea gradului polinomului g că $r = 0$. Obţinem deci $f = qg$, adică $I \subset (g)$. În concluzie, orice ideal al lui $\mathbb{K}[X]$ este generat de un singur polinom. Prin urmare, inelele factor ale lui $\mathbb{K}[X]$ sunt de forma $\mathbb{K}[X]/(f)$, unde $f \in \mathbb{K}[X]$. Tot cu ajutorul Teoremei 1.3.3 putem descrie mai bine elementele acestor inele factor.

Lema 1.4.1. *Fie K un corp şi $f \in \mathbb{K}[X]$ un polinom de grad $n \geq 1$. Atunci elementele inelului factor $\mathbb{K}[X]/(f)$ se reprezintă unic sub forma $a_0 + a_1X + \cdots + a_{n-1}X^{n-1}(\mathrm{mod}\ (f))$ cu $a_0, \ldots, a_{n-1} \in \mathbb{K}$.*

Demonstraţie. Conform definiţiei inelului factor dată în prima secţiune a acestui capitol, $\mathbb{K}[X]/(f) = \{g(\mathrm{mod}\ (f)) |\ g \in \mathbb{K}[X]\}$. Fie $g \in \mathbb{K}[X]$. Aplicăm Teorema 1.3.3 şi obţinem existenţa polinoamelor $q, r \in \mathbb{K}[X]$ astfel încât $g = qf + r$ şi $\mathrm{grad}(r) < \mathrm{grad}(f)$. Rezultă că $g(\mathrm{mod}\ (f)) = r(\mathrm{mod}\ (f))$. Prin urmare, clasa de echivalenţă modulo idealul (f) a unui polinom $g \in \mathbb{K}[X]$ este egală cu clasa de echivalenţă a unui polinom de grad $< n$. Pentru încheierea demonstraţiei mai avem de arătat că dacă r, r' sunt două polinoame diferite de grad $< n$ atunci $r(\mathrm{mod}\ (f)) \neq r'(\mathrm{mod}\ (f))$. Dacă prin absurd am avea egalitate atunci, din definiţia relaţiei de echivalenţă, am obţine că $r - r' = fh$, pentru un $h \in \mathbb{K}[X] \setminus \{0\}$. Aplicând acum Propoziţia 1.3.2(a) şi (b) rezultă

$$n \leq \mathrm{grad}(f) + \mathrm{grad}(h) = \mathrm{grad}(fh) = \mathrm{grad}(r - r') < \max\{\mathrm{grad}(r), \mathrm{grad}(r')\} < n,$$

o contradicţie. $\square$

Fără a intra în detalii, precizăm că relaţia de divizibilitate introdusă pe $\mathbb{K}[X]$ în secţiunea anterioară are proprietăţi similare cu relaţia de divizibilitate de pe $\mathbb{Z}$. Mai precis, pentru orice două elemente din $\mathbb{K}[X]$ se defineşte analog ca în $\mathbb{Z}$ *cel mai mare divizor comun* şi *cel mai mic multiplu comun*. Mai exact, polinomul unitar de grad cel mai mare care divide şi pe f şi pe g este **cel mai mare divizor comun** al polinoamelor f şi g, pe când polinomul unitar de grad minim posibil care este divizibil atât cu f cât şi cu g este **cel mai mic multiplu comun** al polinoamelor f şi g. De asemenea, spunem că două polinoame sunt **relativ prime** dacă polinomul unitar care reprezintă cel mai mare divizor comun este 1, adică are gradul 0.

Pentru calculul celui mai mare divizor comun, la fel ca în $\mathbb{Z}$, putem folosi varianta polinomială a algoritmului lui Euclid, pe care o prezentăm pe scurt, demonstraţia fiind lăsată cititorului.

Algoritm 1.4.2. Fie $f, g \in \mathbb{K}[X]$ cu $g \neq 0$. Următorul algoritm, numit **algoritmul lui Euclid**, furnizează cel mai mare divizor comun al polinoamelor f şi g. Aplicăm succesiv Teorema împărţirii cu rest:

$$f = q_1 g + r_1,\ g = q_2 r_1 + r_2,\ \ldots\ ,\ r_{n-2} = q_n r_{n-1} + r_n,\ r_{n-1} = q_{n+1} r_n,$$

unde r_n este ultimul rest nenul. Un astfel de r_n există deoarece $\text{grad}(g) > \text{grad}(r_1) > \text{grad}(r_2) > \ldots > \text{grad}(r_n)$ este un şir descrescător de numere naturale care nu poate fi infinit. Polinomul unitar egal cu r_n/c, unde c este coeficientul dominant al lui r_n reprezintă cel mai mare divizor comun al lui f şi g, vezi Problema 1.5.19 pentru un exemplu. Să mai observăm că înlocuind pe r_{n-1} din ultima relaţie în penultima relaţie, etc. obţinem la final existenţa a două polinoame $u, v \in \mathbb{K}[X]$ astfel încât $r_n = uf + vg$. În particular, avem următoarea echivalenţă: există polinoamele $u, v \in \mathbb{K}[X]$ astfel încât $fu + gv = 1$ dacă şi numai dacă $(f, g) = 1$.

În continuare vrem să vedem cine este omologul elementului prim din $\mathbb{Z}$, în $\mathbb{K}[X]$.

Definiţia 1.4.3. Un polinom neconstant (adică de grad ≥ 1) $f \in \mathbb{K}[X]$ se numeşte **polinom ireductibil** dacă f nu se poate scrie ca produs de două polinoame neconstante, altfel spus, singurii divizori ai lui f sunt a şi af cu $a \in \mathbb{K}^*$. Un polinom neconstant care nu este ireductibil se numeşte **polinom reductibil**.

Spre exemplu, polinomul $X - 1 \in \mathbb{Q}[X]$ este un polinom ireductibil, $(X-1)(X-2) \in \mathbb{Q}[X]$ este reductibil, iar problema (i)reductibilităţii constantei -7 nu se pune. În $\mathbb{Z}$ cunoaştem elementele prime, oare putem scrie şi polinoamele ireductibile din $\mathbb{K}[X]$? După cum o să vedem, ireductibilitatea unui polinom depinde de corpul în care are coeficienţii şi prin urmare este imposibil să scriem polinoamele ireductibile din $\mathbb{K}[X]$ fără a avea informaţii precise despre corpul $\mathbb{K}$. Cu toate acestea, indiferent de cine este corpul $\mathbb{K}$ avem o mulţime clară de polinoame ireductibile şi un criteriu general pentru a testa dacă un anumit polinom este sau nu ireductibil.

Lema 1.4.4. *Fie K un corp. În $\mathbb{K}[X]$ avem*

(a) *polinoamele de gradul 1 sunt ireductibile,*

(b) *un polinom de grad 2 sau 3 este ireductibil dacă şi numai dacă nu are rădăcini în $\mathbb{K}$.*

Demonstraţie. (a) este evidentă. Pentru (b) să observăm că din definiţie rezultă că un polinom de grad 2 sau 3 este reductibil dacă şi numai dacă este divizibil cu un polinom de gradul 1, adică dacă şi numai dacă polinomul are o rădăcină în $\mathbb{K}$. Negând această echivalenţă obţinem concluzia dorită. □

De exemplu, $X^2 - 3$ este polinom ireductibil în $\mathbb{Q}[X]$ deoarece nu are rădăcini raţionale, dar este reductibil în $\mathbb{R}[X]$ pentru că $X^2 - 3 = (X - \sqrt{3})(X + \sqrt{3})$. **Atenţie!** deseori studenţii sunt tentaţi să folosească (b) sub forma: un polinom din $\mathbb{K}[X]$ este ireductibil dacă şi numai dacă nu are rădăcini în $\mathbb{K}$. Greşit, după cum arată următorul exemplu simplu: polinomul

$(X^2-2)(X^2-3) \in \mathbb{Q}[X]$ este reductibil în $\mathbb{Q}[X]$ dar nu are rădăcini în $\mathbb{Q}$. Cum mai putem caracteriza polinoamele ireductibile?

Lema 1.4.5. *Fie $f \in \mathbb{K}[X]$ un polinom neconstant. Atunci f este ireductibil dacă şi numai dacă satisface condiţia:*

$$f|gh \text{ cu } f, g \in \mathbb{K}[X] \Rightarrow f|g \text{ sau } f|h.$$

Demonstraţie. Să considerăm mai întâi că f este ireductibil şi $f|gh$. Presupunem prin absurd că $f \nmid g$ şi $f \nmid h$. Deoarece f este ireductibil (conform definiţiei are ca divizori doar polinoamele unitare 1 şi f) din $f \nmid g$ şi $f \nmid h$ rezultă că $(f,g)=1$ şi $(f,h)=1$. Din algoritmul lui Euclid obţinem atunci că există polinoamele $u_1, u_2, v_1, v_2 \in \mathbb{K}[X]$ astfel încât au loc relaţiile

$$fu_1 + gv_1 = 1 \quad \text{şi} \quad fu_2 + hv_2 = 1.$$

Făcând produsul celor două egalităţi obţinem că

$$f(u_1u_2f + u_1hv_2 + u_2gv_1) + gh(v_1v_2) = 1.$$

De aici rezultă că $(f, gh) = 1$, o contradicţie cu faptul că $f|gh$.

Reciproc, fie f un polinom neconstant care satisface condiţia din enunţ şi să presupunem prin absurd că f este reductibil. Prin urmare, există $g, h \in \mathbb{K}[X]$ polinoame neconstante astfel încât $f = gh$. În particular $f|gh$. Deoarece g, h sunt polinoame neconstante atunci $\text{grad}(g), \text{grad}(h) < \text{grad}(f)$ ceea ce implică, via Propoziţia 1.3.2(b), că $f \nmid g$ şi $f \nmid h$, o contradicţie. Obţinem deci că f este ireductibil. $\square$

De ce suntem interesaţi de polinoamele ireductibile din $\mathbb{K}[X]$? Pentru că în $\mathbb{Z}$ cunoaşterea elementelor prime implică automat, via faimoasa Teorema a lui Euclid, că orice număr întreg diferit de $0, \pm 1$ se poate scrie în mod unic ca produs de numere prime. Prin urmare, dacă s-ar păstra analogia cu $\mathbb{Z}$, atunci şi în $\mathbb{K}[X]$ cunoaşterea polinoamelor ireductibile ar fi esenţială pentru structura elementelor din $\mathbb{K}[X]$. Într-adevăr, următorul rezultat clarifică acest aspect.

Teorema 1.4.6. *Fie $\mathbb{K}$ un corp.*

(a) *Orice polinom neconstant $f \in \mathbb{K}[X]$ se poate scrie ca produs de polinoame ireductibile.*
(b) *Orice polinom neconstant $f \in \mathbb{K}[X]$ se poate scrie în mod unic sub forma $f = ag_1^{k_1} \cdots g_s^{k_s}$, unde $a \in \mathbb{K}^*$, iar $g_1, \ldots, g_s$ sunt polinoame ireductibile unitare distincte cu $k_1, \ldots, k_s \geq 1$.*
(c) *Mulţimea polinoamelor unitare ireductibile din $\mathbb{K}[X]$ este infinită.*

Demonstraţie. (a) Să presupunem prin reducere la absurd că există polinoame neconstante care nu se pot scrie ca produs de polinoame ireductibile. Fie h un astfel de polinom de grad minim. Cum h nu este ireductibil, putem scrie, conform definiţiei, $h = fg$ cu f, g polinoame neconstante, deci de grade strict mai mici decât gradul lui f. Datorită minimalităţii lui h, polinoamele f şi g se pot scrie ca produs de polinoame ireductibile. Dar atunci obţinem şi că $h = fg$ este produs de polinoame ireductibile, contradicţie.

(b) Un polinom ireductibil $f \in \mathbb{K}[X]$ se poate scrie sub forma ag, unde a este coeficientul dominant al polinomului f, iar g este polinomul unitar ireductibil f/a. Această observaţie ne arată că existenţa descompunerii a fost probată la punctul (a). Demonstrăm unicitatea. Să presupunem că f se poate scrie în afară de forma din enunţ şi $f = bh_1^{l_1} \cdots h_r^{l_r}$ cu $b \in \mathbb{K}^*$, $h_1, \ldots, h_r \in \mathbb{K}[X]$ polinoame unitare ireductibile distincte două câte două şi $l_1, \ldots, l_r \geq 1$. Să observăm că din egalitatea coeficienţilor dominanţi în cele două scrieri obţinem că $a = b$, care este coeficientul dominant al lui f. Facem inducţie după m, unde $m = k_1 + \cdots + k_s$. Dacă $m = 1$ atunci afirmaţia este evidentă deoarece f este ireductibil. Presupunem acum că afirmaţia e adevărată pentru $m-1$ şi o demonstrăm pentru $m > 1$. Cum $g_s | f$ şi $f = bh_1^{l_1} \cdots h_r^{l_r}$ rezultă din Lema 1.4.5 că g_s divide unul dintre polinoamele ireductibile $h_1, \ldots, h_r$, să zicem h_r. Acest fapt implică, deoarece g_s, h_r sunt polinoame unitare ireductibile, că $g_s = h_r$. Din egalitatea $ag_1^{k_1} \cdots g_s^{k_s} = ah_1^{l_1} \cdots h_r^{l_r}$ obţinem, prin simplificare cu g_s, că $ag_1^{k_1} \cdots g_s^{k_s - 1} = ah_1^{l_1} \cdots h_r^{l_r - 1}$. Din ipoteza de inducţie rezultă că $s = r$, şi după o eventuală renumerotare, $g_i = h_i$ şi $k_i = l_i$ pentru $i = 1, \ldots, s-1$, şi $k_s - 1 = l_s - 1$, adică $k_s = l_s$.

(c) În cazul în care $\mathbb{K}$ este corp infinit concluzia este imediată deoarece mulţimea polinoamelor ireductibile de forma $X - a$ cu $a \in \mathbb{K}$ este infinită. Fie $\mathbb{K}$ un corp finit şi să presupunem prin absurd că mulţimea polinoamelor unitare ireductibile din $\mathbb{K}[X]$ este finită. Notăm cu $f_1, \ldots, f_r$ aceste polinoame unitare ireductibile. Atunci, polinoamele ireductibile din $\mathbb{K}[X]$ sunt de forma af_i cu $a \in \mathbb{K}^*$ şi $i \in \{1, \ldots, r\}$. Fie F polinomul neconstant $f_1 \cdots f_r + 1$. Aplicând (a) rezultă că există $i \in \{1, \ldots, r\}$ astfel încât $f_i | F$. Prin urmare, restul împărţirii cu rest a lui F la f_i este 0. Pe de altă parte, ţinând cont că $F = f_1 \cdots f_r + 1$ aplicând teorema împărţirii cu rest obţinem că $F = (f_1 \cdots f_{i-1} f_{i+1} \cdots f_r) f_i + 1$, deci restul este 1, o contradicţie. Aşadar, mulţimea polinoamelor unitare ireductibile este infinită. $\square$

Acest rezultat aduce mai multe informaţii asupra inelelor factor ale lui $\mathbb{K}[X]$ prin ideale generate de polinoame ireductibile.

Propoziţia 1.4.7. *Fie $\mathbb{K}$ un corp şi $f \in \mathbb{K}[X]$ un polinom ireductibil. Atunci inelul factor $\mathbb{K}[X]/(f)$ este corp.*

Demonstraţie. Am văzut în demonstraţia Lemei 1.4.1 că un element nenul din inelul $\mathbb{K}[X]/(f)$ se scrie sub forma $r(\text{mod } (f)) := \hat{r}$ cu $r \in \mathbb{K}[X]$ cu $\text{grad}(r) < \text{grad}(f)$. Prin urmare, r este nedivizibil cu f. Cum f este ireductibil, rezultă din Teorema 1.4.6 că f, r sunt relativ prime, cu alte cuvinte cel mai mare divizor comun al lui f şi r este o constantă $c \in \mathbb{K}^*$. Conform algoritmului lui Euclid există polinoamele $f_1, r_1 \in \mathbb{K}[X]$ astfel încât $c = ff_1 + rr_1$. Trecând la clase modulo idealul (f) obţinem $\hat{r}\hat{r}_1 = \hat{1}$, adică $\hat{r}$ este inversabil. În concluzie, $\mathbb{K}[X]/(f)$ este corp. $\square$

Obţinem ca un corolar al acestei propoziţii Lema lui Kronecker, un rezultat fundamental pentru demonstrarea Teoremei 5.2.29.

Corolarul 1.4.8. (Lema lui Kronecker) *Fie K un corp şi $f \in \mathbb{K}[X]$ un polinom de grad ≥ 1. Atunci există un corp L care îl conţine pe K astfel încât f are o rădăcină în L.*

Demonstraţie. Din Teorema 1.4.6 rezultă că putem considera un polinom ireductibil $g \in \mathbb{K}[X]$ care îl divide pe f. Din demonstraţia Propoziţiei 1.4.7 rezultă că morfismul canonic de inele $\phi : \mathbb{K} \to \mathbb{K}[X]/(g)$, $\phi(a) = \hat{a}$, unde ca mai înainte $\hat{a} = a(\text{mod } (g))$ este un morfism de corpuri şi deci injectiv. Putem astfel să identificăm pe K cu un subcorp al lui $\mathbb{K}[X]/(g)$ prin identificarea fiecărui element $a \in \mathbb{K}$ cu $\hat{a}$. Prin această identificare polinomul $g = a_0 + a_1X + \cdots + a_nX^n \in \mathbb{K}[X]$ se identifică cu $\hat{a_0} + \hat{a_1}X + \cdots + \hat{a_n}X^n$ şi atunci

$$g(\hat{X}) = a_0 + a_1\hat{X} + \cdots + a_n\hat{X}^n = \hat{a_0} + \hat{a_1}\hat{X} + \cdots + \hat{a_n}\hat{X}^n = \hat{f} = \hat{0}.$$

Deci $\hat{X}$ este o rădăcină a lui g în corpul $\mathbb{K}[X]/(g)$. Deoarece $g|f$ rezultă că $\hat{X}$ este şi rădăcină a lui f. □

Încheiem acest prim capitol de noţiuni preliminare prin enunţarea, fără demonstraţie, a unui rezultat esenţial al algebrei numit Teorema Fundamentală a Algebrei.

Teorema 1.4.9. (D'Alembert-Gauss) *Orice polinom neconstant $f \in \mathbb{C}[X]$ are cel puţin o rădăcină în $\mathbb{C}$.*

Consecinţa imediată a acestei teoreme şi care va fi fundamentală în Capitolul 5, unde se va discuta forma canonică Jordan a unei matrice, este că polinoamele ireductibile din $\mathbb{C}[X]$ sunt doar cele de gradul 1. Totodată, din această teoremă putem determina imediat şi polinoamele ireductibile din $\mathbb{R}[X]$.

Corolarul 1.4.10. *Polinoamele ireductibile din $\mathbb{R}[X]$ sunt polinoamele de gradul 1 şi cele de gradul 2 fără rădăcini reale.*

Demonstraţie. Prin aplicarea Lemei 1.4.4 rezultă imediat că polinoamele din enunţ sunt ireductibile. Fie acum $f \in \mathbb{R}[X]$ un polinom de grad ≥ 3. Teorema 1.4.9 asigură existenţa unei rădăcini $\alpha \in \mathbb{C}$ a lui f. Dacă $\alpha \in \mathbb{R}$ atunci f este reductibil în $\mathbb{R}[X]$. Dacă nu, deoarece coeficienţii polinomului sunt reali rezultă că şi $\bar{\alpha}$, conjugatul complex al lui α, este rădăcină a lui f. Aplicând Propoziţia 1.3.5 rezultă că $(X-\alpha)(X-\bar{\alpha})$ divide pe f în $\mathbb{C}[X]$. Dar cum polinoamele $(X-\alpha)(X-\bar{\alpha})$ şi f aparţin lui $\mathbb{R}[X]$ atunci polinomul $f/(X-\alpha)(X-\bar{\alpha})$ aparţine tot lui $\mathbb{R}[X]$. Deci, f este reductibil. □

1.5. Probleme propuse

Problema 1.5.1. Fie A o mulţime. Următoarele afirmaţii sunt echivalente:

(a) A este finită,
(b) orice funcţie injectivă $f : A \to A$ este bijectivă,
(c) orice funcţie surjectivă $f : A \to A$ este bijectivă.

Problema 1.5.2. Fie m, n două numere naturale iar A, B două mulţimi având m, respectiv n elemente. Demonstraţi că

(a) Numărul funcţiilor de la A la B este n^m.
(b) Dacă $m \leq n$ atunci numărul funcţiilor injective de la A la B este $n!/(n-m)!$.
(c) Dacă $m \geq n$ atunci numărul funcţiilor surjective de la A la B este

$$n^m - C_n^1(n-1)^m + C_n^2(n-2)^m - \cdots + (-1)^{n-1}C_n^{n-1}.$$

Problema 1.5.3. Care dintre următoarele relaţii binare pe $\mathbb{R}$ este relaţie de echivalenţă: (a) $x \sim y$ dacă $x - y \in \mathbb{Z}$; (b) $x \equiv y$ dacă $|x-y| < 3$; (c) $x \circ y$ dacă $x + y \in \mathbb{Z}$?

Problema 1.5.4. Pe mulţimea numerelor complexe $\mathbb{C}$ definim relaţia binară: $x \sim y \Leftrightarrow |x| = |y|$. Arătaţi că $\sim$ este relaţie de echivalenţă, determinaţi clasele de echivalenţă şi un sistem complet de reprezentanţi.

Problema 1.5.5. Pe mulţimea numerelor complexe $\mathbb{C}$ definim relaţia binară: $x \sim y \Leftrightarrow x - y \in \mathbb{R}$. Arătaţi că $\sim$ este relaţie de echivalenţă, determinaţi clasele de echivalenţă şi un sistem complet de reprezentanţi.

Problema 1.5.6. Fie $\sim$ relaţia binară pe $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ definită prin $(a,b) \sim (c,d)$ dacă $a+d = b+c$. Arătaţi că $\sim$ este o relaţie de echivalenţă şi că mulţimea factor $\mathbb{N} \times \mathbb{N}/\sim$ se află în bijecţie cu mulţimea $\mathbb{Z}$.

Problema 1.5.7. Fie $a, b, c \in \mathbb{Z}$, $b \neq 0$. Pe $\mathbb{Z}$ definim operaţia $x * y = axy + b(x+y) + c$. Arătaţi că operaţia $*$ este asociativă dacă şi numai dacă $b = b^2 - ac$. Arătaţi că operaţia $*$ are element neutru dacă şi numai dacă $b = b^2 - ac$ şi $b|c$.

Problema 1.5.8. Arătaţi că singurul morfism de grupuri $(\mathbb{Q}, +) \to (\mathbb{Z}, +)$ este cel nul.

Problema 1.5.9. Arătaţi că grupurile $(\mathbb{Z}_{2012}, +)$, $(\mathbb{Z}, +)$, $(\mathbb{Q}, +)$ şi $(\mathbb{Q}^*, \cdot)$ sunt două câte două neizomorfe.

Problema 1.5.10. Fie $\mathbb{H} \subset \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$, unde

$$\mathbb{H} = \{\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{pmatrix} \mid \alpha, \beta \in \mathbb{C}\}.$$

Să se arate că $\mathbb{H}$ este un corp necomutativ în raport cu adunarea şi înmulţirea matricelor. Arătaţi că polinomul $X^2 + 1 \in \mathbb{H}[X]$ are o infinitate de rădăcini în $\mathbb{H}$.

Problema 1.5.11. Să se arate că orice inel integru finit este corp (inelul nu trebuie să fie neapărat comutativ).

Problema 1.5.12. Fie $n \geq 2$ un număr natural. Să se arate că mulţimea elementelor inversabile ale inelului $(\mathbb{Z}_n, +, \cdot)$ este $U(\mathbb{Z}_n) = \{\hat{x} |\ 1 \leq x \leq n-1, (x,n) = 1\}$, unde prin $\hat{x}$ am notat clasa de echivalenţă $x (\mathrm{mod}\ n)$. Deduceţi apoi că $\mathbb{Z}_n$ este corp dacă şi numai dacă n e prim.

Problema 1.5.13. Fie $\mathbb{K} \subset \mathcal{M}_2(\mathbb{Z}_7)$ mulţimea matricelor de forma

$$\mathbb{K} = \{\begin{pmatrix} \hat{a} & \hat{b} \\ -\hat{b} & \hat{a} \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{Z}_7\}.$$

Să se arate că $\mathbb{K}$ este un corp comutativ în raport cu adunarea şi înmulţirea obişnuită a matricelor. Generalizare!

Indicaţie! Înlocuiţi pe 7 cu un număr prim p astfel încât $p (\mathrm{mod}\ 4) = 3 (\mathrm{mod}\ 4)$.

Problema 1.5.14. Să se arate că nu există un izomorfism de corpuri , i.e. morfism de corpuri bijectiv, între corpurile $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$ şi $\mathbb{Q}(\sqrt{5})$.

Problema 1.5.15. Arătaţi că dacă A şi B sunt două mulţimi finite cu acelaşi număr de elemente, atunci grupurile S_A şi S_B sunt izomorfe.

Problema 1.5.16. Fie $\sigma, \tau \in S_{15}$ următoarele permutări

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 \\ 13 & 2 & 15 & 14 & 10 & 6 & 12 & 3 & 4 & 1 & 7 & 9 & 5 & 11 & 8 \end{pmatrix},$$

$$\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 \\ 14 & 9 & 10 & 2 & 12 & 6 & 5 & 11 & 15 & 3 & 8 & 7 & 4 & 1 & 13 \end{pmatrix}.$$

Calculaţi şi apoi descompuneţi în produs de cicli disjuncţi fiecare din următoarele permutări: $\sigma, \tau, \sigma^2, \sigma\tau, \tau\sigma$ şi $\sigma^2\tau$. Pentru fiecare din permutările anterioare calculaţi ordinul şi signatura.

Problema 1.5.17. Fie permutarea $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 \\ 3 & 4 & 5 & 7 & 9 & 2 & 8 & 6 & 1 & 11 & 10 \end{pmatrix} \in S_{11}$.

(1) Descompuneţi σ în produs de cicli disjuncţi.
(2) Descompuneţi σ în produs de transpoziţii.
(3) Calculaţi $\operatorname{sgn}(\sigma)$ şi $\operatorname{ord}(\sigma)$.
(4) Există permutări de ordin 35 în S_{11}?
(5) Rezolvaţi ecuaţia $\tau^{2011} = \sigma$ în S_{11}.

Problema 1.5.18. Arătaţi că grupul S_n este generat de: (a) transpoziţiile $(1\ 2)$, $(1\ 3)$, $\ldots$, $(1\ n)$; (b) transpoziţiile $(1\ 2)$, $(2\ 3)$, $\ldots$, $(n-1\ n)$; (c) transpoziţia $(1\ 2)$ şi n-ciclul $(1\ 2 \ldots\ n)$.

Problema 1.5.19. (a) Calculaţi toate ordinele posibile ale permutărilor din S_5 şi daţi câte un exemplu de permutare pentru fiecare ordin posibil.

(b) Dacă $\tau = (1\ 2)(3\ 4)(5\ 6)(7\ 8)(9\ 10)$ determinaţi dacă există un n-ciclu σ $(n \geq 10)$ cu $\tau = \sigma^k$ pentru un anumit întreg k.

(c) Dacă $\tau = (1\ 2)(3\ 4\ 5)$ determinaţi dacă există un n-ciclu σ $(n \geq 5)$ cu $\tau = \sigma^k$ pentru un anumit întreg k.

Problema 1.5.20. Calculaţi cel mai mare divizor comun al polinoamelor $X^4 - 2X^3 + 1$ şi $X^3 - 2X^2 + 1$ în inelul $\mathbb{R}[X]$ şi scrieţi-l apoi în funcţie de cele două polinoame.

Problema 1.5.21. Descompuneţi polinomul $X^n - 1$, $1 \leq n \leq 6$, în produs de polinoame ireductibile în $\mathbb{R}[X]$, $\mathbb{C}[X]$.

Problema 1.5.22. În ce caz este polinomul $X^{3m} + X^{3n+1} + X^{3p+2} \in \mathbb{R}[X]$ divizibil cu $X^4 + X^2 + 1$?

Problema 1.5.23. Dacă α, β sunt rădăcinile reale ale polinomului $X^2 - 6X + 1 \in \mathbb{R}[X]$, atunci pentru orice număr natural n, $\alpha^n + \beta^n$ este un număr întreg, nedivizibil cu 5.

Problema 1.5.24. Fie $a, b \in \mathbb{N}$ şi $d = (a, b)$ cel mai mare divizor comun al numerelor a şi b. Arătaţi că cel mai mare divizor comun al polinoamelor $X^a - 1$ şi $X^b - 1$ în $\mathbb{K}[X]$, unde $\mathbb{K}$ este un corp, este $X^d - 1$.

CAPITOLUL 2

Calcul matriceal

În acest capitol prezentăm noţiunile de matrice şi determinant precum şi o sinteză a rezultatelor referitoare la acestea. În Secţiunea 2.1 ne ocupăm de matrice, operaţii cu matrice. Secţiunea 2.2 este dedicată determinanţilor, proprietăţilor şi metodelor de calcul ale acestora. În Secţiunea 2.3 definim rangul unei matrice şi ne ocupăm de clasa matricelor inversabile. Se prezintă pe scurt maniera de determinare a inversei unei matrice folosind matricea adjunctă, metodă studiată în ciclul liceal. Un paragraf al acestei secţiuni este dedicat transformărilor elementare ale liniilor unei matrice. Aceste transformări îsi evidenţiază utilitatea în determinarea rangului unei matrice, a inversei unei matrice nesingulare, dar şi în rezolvarea sistemelor algebrice liniare. Propunem şi o metodă de lucru cu matrice partiţionate în matrice ”mai mici”, numite blocuri. În Secţiunea 2.5 ne ocupăm de studiul sistemelor de ecuaţii algebrice de gradul întâi cu mai multe necunoscute, omogene şi neomogene, numite şi sisteme liniare. Întrebuinţarea cuvântului ”liniar” pentru a arăta că o anume expresie este de gradul întâi provine din Geometrie Analitică, unde ecuaţia unei linii drepte este de gradul întâi în raport cu coordonatele x, y. Pentru un sistem de ecuaţii liniare vom pune în evidenţă condiţii de compatibilitate şi vom prezenta metoda eliminării Gauss-Jordan de determinare a soluţiilor. În finalul capitolului propunem un set de probleme, aplicaţii la întregul material teoretic prezentat anterior.

2.1. Matrice

Definiţia 2.1.1. *Fie* $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ *corpul comutativ al numerelor reale,* $\mathbb{R}$*, sau cel al numerelor complexe,* $\mathbb{C}$*. Se numeşte* **matrice de tipul** (m, n) *cu elemente din* $\mathbb{K}$ *o aplicaţie*

$$f : \{1, 2, \ldots, m\} \times \{1, 2, \ldots, n\} \to \mathbb{K}, \quad f(i, j) = a_{ij},$$

$i \in \{1, 2, \ldots, m\}, \ j \in \{1, 2, \ldots, n\}.$

Vom nota matricea A sub forma unui tablou ce conţine valorile funcţiei f:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} \tag{4}$$

sau, pe scurt,

$$A = [a_{ij}]_{\substack{i=\overline{1,m} \\ j=\overline{1,n}}} = (a_{ij})_{\substack{i=\overline{1,m} \\ j=\overline{1,n}}}\,. \tag{5}$$

Datorită notaţiei (4) vom spune că matricea A are m linii şi n coloane. Sistemul ordonat de elemente $a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{in}$ se numeşte **linia i**, $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$, iar sistemul ordonat de elemente $a_{1j}, a_{2j}, \ldots, a_{mj}$ se numeşte **coloana j**, $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$, a matricei A.

O matrice de tipul $(1, n)$ se numeşte **matrice linie** şi este de forma:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \end{pmatrix}.$$

O matrice de tipul $(m, 1)$ se numeşte **matrice coloană** şi este de forma:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}.$$

În cazul $n = m$ se obţine **matricea pătratică de ordin n**

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

În această situaţie, sistemul ordonat $a_{11},\ a_{22}, \ldots,\ a_{nn}$ se numeşte **diagonala principală**, iar sistemul ordonat de elemente $a_{1n},\ a_{2\ n-1}, \ldots,\ a_{n1}$ se numeşte **diagonala secundară** a matricei A.

Vom nota $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ mulţimea tuturor matricelor de tipul (m, n) având elementele în $\mathbb{K}$, mulţimea matricelor pătratice de ordin n se va nota $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ iar elementele acestor mulţimi le vom nota fie prin $A,\ B, \ldots$, fie prin $A_1, A_2, \ldots$. Evident au loc incluziunile $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{Z}) \subset \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{Q}) \subset \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R}) \subset \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$.

Definiţia 2.1.2. *Două matrice* $A = (a_{ij})_{\substack{i=\overline{1,m}\\ j=\overline{1,n}}}, B = (b_{ij})_{\substack{i=\overline{1,m}\\ j=\overline{1,n}}} \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$, *se numesc* **egale** *dacă* $a_{ij} = b_{ij}$, *pentru toţi* $i = \overline{1, m},\ j = \overline{1, n}$.

2.1.1. Operaţii cu matrice.

Definiţia 2.1.3. *Fie matricele* $A = (a_{ij})_{\substack{i=\overline{1,m}\\ j=\overline{1,n}}} \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ *şi* $B = (b_{ij})_{\substack{i=\overline{1,m}\\ j=\overline{1,n}}} \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$. *Prin* **suma** *lor înţelegem matricea* $A + B \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$, *dată prin*

$$A + B = (a_{ij} + b_{ij})_{\substack{i=\overline{1,m}\\ j=\overline{1,n}}}. \tag{6}$$

Teorema 2.1.4. *Mulţimea* $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ *înzestrată cu operaţia de adunare are structură de* **grup aditiv abelian**.

Demonstraţie.

1. Adunarea este **asociativă**, adică oricare ar fi matricele $A, B, C \in \mathcal{M}_{m,n}(K)$ avem

$$(A + B) + C = A + (B + C).$$

Într-adevăr, dacă $A=(a_{ij})_{\substack{i=\overline{1,m}\\ j=\overline{1,n}}}$, $B=(b_{ij})_{\substack{i=\overline{1,m}\\ j=\overline{1,n}}}$, $C=(c_{ij})_{\substack{i=\overline{1,m}\\ j=\overline{1,n}}}$, atunci

$$A+B=(a_{ij}+b_{ij})_{\substack{i=\overline{1,m}\\ j=\overline{1,n}}}, \qquad (A+B)+C=((a_{ij}+b_{ij})+c_{ij})_{\substack{i=\overline{1,m}\\ j=\overline{1,n}}}$$

şi, analog găsim $A+(B+C)=(a_{ij}+(b_{ij}+c_{ij}))_{\substack{i=\overline{1,m}\\ j=\overline{1,n}}}$. Proprietatea rezultă evident din asociativitatea operaţiei de adunare în corpul $\mathbb{K}$.

2. Adunarea admite **element neutru** care este matricea ale cărei elemente sunt toate egale cu 0, notată $0_{m,n}$ sau $0_{\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})}$ şi numită **matricea nulă**. Pentru orice $A\in\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ are loc $A+0_{\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})}=0_{\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})}+A=A$, proprietate a cărei verificare este evidentă.

3. Pentru orice $A\in\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ există matricea $-A\in\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$, numită **opusa** matricei A, astfel încât $A+(-A)=(-A)+A=0_{\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})}$. Într-adevăr, dacă $A=(a_{ij})_{\substack{i=\overline{1,m}\\ j=\overline{1,n}}}$ atunci matricea $-A=(-a_{ij})_{\substack{i=\overline{1,m}\\ j=\overline{1,n}}}$ satisface proprietatea enunţată.

4. Adunarea este **comutativă**, adică oricare ar fi matricele $A,B\in\mathcal{M}_{m,n}(K)$ avem $A+B=B+A$, afirmaţie ce rezultă evident din comutativitatea adunării în corpul $\mathbb{K}$. $\square$

Observaţia 2.1.5. Dacă A şi $B\in\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ atunci suma $A+(-B)$ se notează $A-B$ şi se numeşte **diferenţa** matricelor A şi B. Operaţia care asociază matricelor A şi B diferenţa lor se numeţe **scădere**.

Exemplul 2.1.6. Fie matricele

$$A=\begin{pmatrix}-1 & 2 & -3\\ 0 & -7 & 4\end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix}2 & -4 & 1\\ -3 & 0 & 3\end{pmatrix}.$$

Atunci

$$A+B=\begin{pmatrix}1 & -2 & -2\\ -3 & -7 & 7\end{pmatrix}, \quad -A=\begin{pmatrix}1 & -2 & 3\\ 0 & 7 & -4\end{pmatrix}$$

$$A-B=\begin{pmatrix}-3 & 6 & -4\\ 3 & -7 & 1\end{pmatrix}.$$

Definiţia 2.1.7. *Fie $A=(a_{ij})_{\substack{i=\overline{1,m}\\ j=\overline{1,n}}}$ o matrice de tipul (m,n) şi $B=(b_{jk})_{\substack{j=\overline{1,n}\\ k=\overline{1,p}}}$ o matrice de tipul (n,p). Numim* **produsul** *matricelor A şi B, matricea $A\cdot B$ de tip (m,p) dată prin*

$$A\cdot B=\left(\sum_{j=1}^{n}a_{ij}b_{jk}\right)_{\substack{i=\overline{1,m}\\ k=\overline{1,p}}}. \tag{7}$$

Elementul matricei $A\cdot B$ care figurează în linia i şi coloana k este egal cu suma termenilor care se obţin înmulţind elementele liniei i a matricei A cu elementele corespunzătoare ale coloanei j a matricei B (lui a_{i1} îi corespunde b_{1k}, lui a_{i2} îi corespunde b_{2k} $\ldots$ lui a_{in} îi corespunde b_{nk}).

Exemplul 2.1.8. Fie

$$A=\begin{pmatrix}1 & -2 & 2\\ -1 & 4 & 3\end{pmatrix} \text{ şi } B=\begin{pmatrix}4 & -1\\ 0 & 2\\ -2 & 1\end{pmatrix}.$$

Are sens să efectuăm produsul $C = A \cdot B$, care va fi o matrice de tipul $(2,2)$ şi ale căror elemente $c_{ij},\ i = \overline{1,2},\ j = \overline{1,2}$ se obţin astfel

$$c_{11} = 1 \cdot 4 + (-2) \cdot 0 + 2 \cdot (-2) = 0, \quad c_{12} = 1 \cdot (-1) + (-2) \cdot 2 + 2 \cdot 1 = -3,$$

$$c_{21} = (-1) \cdot 4 + 4 \cdot 0 + 3 \cdot (-2) = -10, \quad c_{22} = (-1) \cdot (-1) + 4 \cdot 2 + 3 \cdot 1 = 12.$$

Deci

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ -10 & 12 \end{pmatrix}.$$

Teorema 2.1.9. *Au loc următoarele proprietăţi:*

1. *Înmulţirea matricelor este asociativă, adică oricare ar fi matricele* $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K}),\ B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}),\ C \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K}),$ *avem* $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$.

2. *Înmulţirea matricelor este distributivă la stânga faţă de adunare, adică oricare ar fi matricele* $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K}),\ B, C \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ *are loc* $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$.

3. *Înmulţirea matricelor este distributivă la dreapta faţă de adunare, adică oricare ar fi matricele* $A, B \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K}),\ C \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ *are loc* $(A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C$.

Demonstraţie.

1. Fie $A = (a_{ij})_{\substack{i=\overline{1,m} \\ j=\overline{1,n}}},\ B = (b_{jk})_{\substack{j=\overline{1,n} \\ k=\overline{1,p}}},\ C = (c_{kl})_{\substack{k=\overline{1,p} \\ l=\overline{1,q}}}$. Avem

$$(A \cdot B) \cdot C = \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{jk} \right)_{\substack{i=\overline{1,m} \\ k=\overline{1,p}}} \cdot (c_{kl})_{\substack{k=\overline{1,p} \\ l=\overline{1,q}}} = \left(\sum_{k=1}^{p} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{jk} \right) c_{kl} \right)_{\substack{i=\overline{1,m} \\ l=\overline{1,q}}} =$$

$$\left(\sum_{k=1}^{p} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{jk} c_{kl} \right)_{\substack{i=\overline{1,m} \\ l=\overline{1,q}}} = \left(\sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{p} a_{ij} b_{jk} c_{kl} \right)_{\substack{i=\overline{1,m} \\ l=\overline{1,q}}} = \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \left(\sum_{k=1}^{p} b_{jk} c_{kl} \right) \right)_{\substack{i=\overline{1,m} \\ l=\overline{1,q}}} =$$

$$\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \right)_{\substack{i=\overline{1,m} \\ j=\overline{1,n}}} \cdot \left(\sum_{k=1}^{p} b_{jk} c_{kl} \right)_{\substack{j=\overline{1,n} \\ l=\overline{1,q}}} = A \cdot (B \cdot C).$$

2. Dacă $A = (a_{ij})_{\substack{i=\overline{1,m} \\ j=\overline{1,n}}},\ B = (b_{jk})_{\substack{j=\overline{1,n} \\ k=\overline{1,p}}},\ C = (c_{jk})_{\substack{j=\overline{1,n} \\ k=\overline{1,p}}}$ şi notăm

$$A \cdot (B + C) = D, \quad A \cdot B = D', \quad A \cdot C = D'',$$

$$D = (d_{ik})_{\substack{i=\overline{1,m} \\ k=\overline{1,p}}}, \quad D' = (d'_{ik})_{\substack{i=\overline{1,m} \\ k=\overline{1,p}}}, \quad D'' = (d''_{ik})_{\substack{i=\overline{1,m} \\ k=\overline{1,p}}}$$

atunci

$$d_{ik} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(b_{jk} + c_{jk}) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{jk} + \sum_{j=1}^{n} a_{ij} c_{jk} = d'_{ik} + d''_{ik}.$$

3. Justificarea acestei proprietăţi este asemănătoare cu cea de la 2. şi o propunem cititorului ca exerciţiu. □

În cazul matricelor pătratice are loc următorul rezultat

Teorema 2.1.10. $(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \cdot)$ *are structură de monoid.*

Demonstraţie. Având în vedere Proprietatatea 1 din Teorema 2.1.9, este suficient să mai arătăm că în mulţimea $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ există un **element neutru** la înmulţire.

Într-adevăr matricea

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}, \tag{8}$$

sau $I_n = (\delta_{ij})_{i=\overline{1,n},j=\overline{1,n}}$, unde

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{dacă } i = j \\ 0, & \text{dacă } i \neq j \end{cases}$$

sunt simbolurile lui Kronecker, are proprietatea că pentru orice matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ are loc

$$A \cdot I_n = I_n \cdot A = A.$$

Într-adevăr, dacă $A = (a_{ij})_{i,j=\overline{1,n}}$, atunci

$$A \cdot I_n = \left(\sum_{k=1}^{n} a_{ik}\delta_{kj} \right)_{i,j=\overline{1,n}} = (a_{ij})_{i,j=\overline{1,n}} = A.$$

În mod analog se arată că $I_n \cdot A = A$.

I_n se numeşte **matricea unitate** de ordinul n. □

Teorema 2.1.11. *Mulţimea* $(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}), +, \cdot)$ *este* **inel** *cu element unitate.*

Demonstraţie. Afirmaţia rezultă evident din Teoremele 2.1.4, 2.1.9 şi 2.1.10. □

Observaţia 2.1.12. Dacă $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ şi $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, deşi au sens produsele $A \cdot B$ şi $B \cdot A$, în general, $A \cdot B \neq B \cdot A$, adică *înmulţirea matricelor nu este comutativă.*

Exemplul 2.1.13. Fie

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{şi} \quad B = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Atunci

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -2 & 6 \end{pmatrix} \quad \text{şi} \quad B \cdot A = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ -1 & 7 \end{pmatrix}.$$

Observaţia 2.1.14. Pentru o matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ putem defini succesiv matricele $A^2 = A \cdot A,\ A^3 = A^2 \cdot A, \dots, A^k = A^{k-1} \cdot A$.

Exemplul 2.1.15. Fie

$$A = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}.$$

Să calculăm matricea A^k $(k \geq 1)$. Putem scrie evident

$$A^2 = \begin{pmatrix} \cos^2\varphi - \sin^2\varphi & -2\sin\varphi\cos\varphi \\ 2\sin\varphi\cos\varphi & \cos^2\varphi - \sin^2\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 2\varphi & -\sin 2\varphi \\ \sin 2\varphi & \cos 2\varphi \end{pmatrix}.$$

iar prin inducţie matematică rezultă

$$A^k = \begin{pmatrix} \cos k\varphi & -\sin k\varphi \\ \sin k\varphi & \cos k\varphi \end{pmatrix}.$$

Definiţia 2.1.16. *Fie* $A = (a_{ij})_{\substack{i=\overline{1,m}\\ j=\overline{1,n}}} \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ *şi* $\lambda \in \mathbb{K}$. *Numim* **produs al matricei** A **cu scalarul** λ, *matricea* $\lambda A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ *definită prin*

$$\lambda A = (\lambda a_{ij})_{\substack{i=\overline{1,m}\\ j=\overline{1,n}}}. \tag{9}$$

Exemplul 2.1.17. Fie $A = \begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & -1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$. Atunci $iA = \begin{pmatrix} i & -1 \\ 1 & -i \end{pmatrix}$.

Teorema 2.1.18. *Înmulţirea cu scalari are următoarele proprietăţi:*
1. $\lambda(A+B) = \lambda A + \lambda B$, $\forall \lambda \in \mathbb{K}$, $\forall A, B \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$;
2. $(\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A$, $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}$, $\forall A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$;
3. $(\lambda\mu)A = \lambda(\mu A)$, $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}$, $\forall A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$;
4. $1A = A$, $\forall A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$.

Verificarea acestor proprietăţi este imediată şi o propunem cititorului ca exerciţiu.

Definiţia 2.1.19. *Fie* $A = (a_{ij})_{\substack{i=\overline{1,m}\\ j=\overline{1,n}}} \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$. **Transpusa** *matricei* A *este matricea*

$$A^T = (a_{ji})_{\substack{j=\overline{1,n}\\ i=\overline{1,m}}} \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K}). \tag{10}$$

Exemplul 2.1.20. Fie

$$A = \begin{pmatrix} 1 & i & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{C}).$$

Atunci

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ i & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,2}(\mathbb{C}).$$

Se observă că A^T se obţine luând liniile matricei A (respectiv coloanele lui A) drept coloane (respectiv linii) în A^T.
Operaţia de transpunere a unei matrice are următoarele proprietăţi ce se verifică fară nicio dificultate:

1. $(A+B)^T = A^T + B^T$, $\quad \forall A, B \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$;
2. $(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$, $\quad \forall A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K}), \forall B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$;
3. $(\lambda\, A)^T = \lambda A^T \quad \forall \lambda \in \mathbb{K}$, $\forall A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$.

2.2. Determinanţi

Fie $A = (a_{ij})_{i,j=\overline{1,n}} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ o matrice pătratică.

Definiţia 2.2.1. *Numim* **determinant** *al matricei* $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ *elementul notat* $\det(A) \in \mathbb{K}$ *dat de*

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \dots a_{n\sigma(n)}, \tag{11}$$

unde S_n *este mulţimea permutărilor mulţimii* $\{1, 2, \dots, n\}$, *iar* $\varepsilon(\sigma)$ *este signatura permutării* σ.

Determinantul matricei A se notează

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}. \tag{12}$$

Observaţia 2.2.2. 1. Noţiunea de determinant al unei matrice are sens doar pentru matrice pătratice.

2. Matricea este o funcţie cu valori în corpul comutativ $\mathbb{K}$ real sau complex, în timp ce determinantul unei matrice este un element din $\mathbb{K}$, adică un număr real sau complex.

3. În suma din formula (11) sunt $n!$ termeni, numărul produselor de forma $a_{1\sigma(1)}a_{2\sigma(2)}\dots a_{n\sigma(n)}$ înzestrate cu semnul $+$ este egal cu cel al produselor de aceeşi formă înzestrate cu semnul $-$.

4. Definiţia 2.2.1 se aplică şi matricelor de ordin 1, când $A = (a_{11})$ şi $\det(A) = a_{11}$.

2.2.1. Proprietăţile determinanţilor.

Propoziţia 2.2.3. *Determinantul unei matrice este egal cu determinantul matricei transpuse.*

$$\det(A) = \det(A^T) \quad \forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \tag{13}$$

Demonstraţie. Fie $A = (a_{ij})_{i,j=\overline{1,n}} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ o matrice arbitrară şi fie $A^T = (a_{ji})_{j,i=\overline{1,n}} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ transpusa ei. Avem

$$\det(A) = \sum_{\sigma\in S_n} \varepsilon(\sigma)a_{1\sigma(1)}a_{2\sigma(2)}\dots a_{n\sigma(n)}, \tag{14}$$

$$\det(A^T) = \sum_{\tau\in S_n} \varepsilon(\tau)a_{\tau(1)1}a_{\tau(2)2}\dots a_{\tau(n)n}. \tag{15}$$

Să notăm $\sigma(i) = k_i$. Atunci $i = \sigma^{-1}(k_i)$ şi

$$\varepsilon(\sigma)a_{1\sigma(1)}a_{2\sigma(2)}\dots a_{n\sigma(n)} = \varepsilon(\sigma)a_{\sigma^{-1}(k_1)k_1}a_{\sigma^{-1}(k_2)k_2}\dots a_{\sigma^{-1}(k_n)k_n}.$$

Deoarece $\varepsilon(\sigma) = \varepsilon(\sigma^{-1})$ şi numerele $k_1, k_2, \dots k_n$ sunt numerele $1, 2, \dots n$, eventual într-o altă ordine, iar înmulţirea este comutativă, rezultă

$$\varepsilon(\sigma)a_{1\sigma(1)}a_{2\sigma(2)}\dots a_{n\sigma(n)} = \varepsilon(\sigma^{-1})a_{\sigma^{-1}(1)1}a_{\sigma^{-1}(2)2}\dots a_{\sigma^{-1}(n)n}.$$

Prin urmare orice termen al sumei (14) se regăseşte ca termen în suma (15) şi invers. Deci $\det(A) = \det(A^T)$. □

Observaţia 2.2.4. Propoziţia 2.2.3 arată că dacă o proprietate referitoare la liniile unui determinant este adevărată atunci ea rămâne adevărată şi pentru coloanele determinantului.

Propoziţia 2.2.5. *Dacă toate elementele unei linii* (*coloane*) *ale unei matrice sunt nule, atunci determinantul matricei este nul.*

Demonstraţie. Fie $A = (a_{ij})_{i,j=\overline{1,n}} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ şi să presupunem că toate elementele de pe linia i, $i \in \{1, 2, \dots n\}$, sunt nule. Fiecare termen din suma ce defineşte valoarea determinantului este un produs ce conţine un element de pe linia i, deci acest termen este zero. □

Propoziţia 2.2.6. *Dacă într-o matrice schimbăm două linii (coloane) între ele atunci determinantul matricei astfel obţinute este egal cu opusul determinantului matricei iniţiale.*

Demonstraţie. Fie matricea

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{j1} & a_{j2} & \dots & a_{jn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Prin schimbarea liniilor i şi j între ele obţinem matricea

$$A' = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{j1} & a_{j2} & \dots & a_{jn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

al cărei determinant este $\det(A') = \sum\limits_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \dots a_{j\sigma(i)} \dots a_{i\sigma(j)} \dots a_{n\sigma(n)}$.
Fie transpoziţia $\tau = (i, j)$; $\tau(i) = j$, $\tau(j) = i$, $\tau(k) = k \ \ \forall k \neq i, j$.
Pentru că $\varepsilon(\sigma\tau) = \varepsilon(\sigma)\varepsilon(\tau) = -\varepsilon(\sigma)$, obţinem succesiv

$$\det(A') = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) a_{1(\sigma\tau)(1)} a_{2(\sigma\tau)(2)} \dots a_{j(\sigma\tau)(j)} \dots a_{i(\sigma\tau)(i)} \dots a_{n(\sigma\tau)(n)} =$$

$$- \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma\tau) a_{1(\sigma\tau)(1)} a_{2(\sigma\tau)(2)} \dots a_{i(\sigma\tau)(i)} \dots a_{j(\sigma\tau)(j)} \dots a_{n(\sigma\tau)(n)}.$$

Când σ parcurge toate permutările grupului S_n, $\sigma\tau$ parcurge toate permutările lui S_n şi notând $\sigma\tau = \pi$, rezultă

$$\det(A') = \sum_{\pi \in S_n} \varepsilon(\pi) a_{1\pi(1)} a_{2\pi(2)} \dots a_{n\pi(n)},$$

de unde concluzia. □

Propoziţia 2.2.7. *Dacă o matrice are două linii (coloane) identice atunci determinantul matricei este nul.*

Demonstraţie. Fie $A = (a_{ij})_{i,j=\overline{1,n}}$ o matrice pătratică în care liniile k şi l sunt identice, adică $a_{kj} = a_{lj}$ pentru toţi $j \in \{1, 2, \dots, n\}$. Prin urmare, schimbând liniile k şi l între ele obţinem matricea $A' = A$. Pe de altă parte, conform Propoziţiei 2.2.6 avem $\det(A') = -\det(A)$ şi deci $\det(A) = -\det(A)$. Prin urmare $\det(A) = 0$. □

Propoziţia 2.2.8. *Dacă elementele unei linii (coloane) ale unei matrice se înmulţesc cu un scalar λ, atunci determinantul matricei astfel obţinute este egal cu λ înmulţit cu determinantul matricei iniţiale.*

Demonstraţie. Fie $A = (a_{ij})_{i,j=\overline{1,n}}$ o matrice pătratică şi fie $A' = \left(a'_{ij}\right)_{i,j=\overline{1,n}}$ matricea care se obţine din A prin înmulţirea liniei k cu scalarul λ. Deci pentru toţi $j = \overline{1,n}$ avem $a'_{kj} = \lambda a_{kj}$ şi $a'_{ij} = a_{ij} \ \ \forall i \neq k$. Atunci

$$\det(A') = \sum_{\sigma\in S_n} \varepsilon(\sigma) a'_{1\sigma(1)} a'_{2\sigma(2)} \dots a'_{k\sigma(k)} \dots a'_{n\sigma(n)} =$$

$$\sum_{\sigma\in S_n} \varepsilon(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \dots (\lambda a_{k\sigma(k)} \dots a_{n\sigma(n)} =$$

$$\lambda \sum_{\sigma\in S_n} \varepsilon(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \dots a_{k\sigma(k)} \dots a_{n\sigma(n)} = \lambda \det(A).$$

□

Propoziţia 2.2.9. *Dacă două linii (coloane) ale unei matrice au elementele proporţionale atunci determinantul matricei este nul.*

Demonstraţie. Afirmaţia rezultă cu uşurinţă prin aplicarea succesivă a Propoziţiilor 2.2.8 şi 2.2.7. □

Propoziţia 2.2.10. *Fie $A = (a_{ij})_{i,j=\overline{1,n}}$ o matrice pătratică. Dacă elementele liniei k, $k \in \{1, 2, \dots, n\}$, sunt sume de câte doi termeni, $a_{kj} = a'_{kj} + a''_{kj}$, $\forall j = \overline{1,n}$ şi A' (respectiv A'') este matricea care se obţine din A înlocuind elementele liniei k cu a'_{kj} (respectiv a''_{kj}), atunci* $\det(A) = \det(A') + \det(A'')$.

Demonstraţie. Au loc:

$$\det(A) = \sum_{\sigma\in S_n} \varepsilon(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \dots a_{k\sigma(k)} \dots a_{n\sigma(n)} =$$

$$\sum_{\sigma\in S_n} \varepsilon(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \dots (a'_{k\sigma(k)} + a''_{k\sigma(k)}) \dots a_{n\sigma(n)} =$$

$$\sum_{\sigma\in S_n} \varepsilon(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \dots a'_{k\sigma(k)} \dots a_{n\sigma(n)} +$$

$$\sum_{\sigma\in S_n} \varepsilon(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \dots a''_{k\sigma(k)} \dots a_{n\sigma(n)} = \det(A') + \det(A'').$$

□

Definiţia 2.2.11. *Fie $A = (a_{ij})_{i,j=\overline{1,n}}$ o matrice pătratică. Spunem că linia i este* **combinaţie liniară** *a celorlalte linii, dacă există scalarii $\lambda_1, \dots, \lambda_{i-1}, \lambda_{i+1}, \dots, \lambda_n$ nu toţi nuli, astfel încât, pentru toţi $j = \overline{1,n}$, să avem*

$$a_{ij} = \lambda_1 a_{1j} + \lambda_2 a_{2j} + \dots \lambda_{i-1} a_{i-1,j} + \lambda_{i+1} a_{i+1,j} + \dots \lambda_n a_{nj}.$$

O definiţie analoagă are loc şi pentru coloană, combinaţie liniară a celorlalte coloane.

Propoziţia 2.2.12. *Dacă o linie (coloană) a unei matrice este combinaţie liniară a celorlalte linii (coloane) atunci determinantul matricei este nul.*

Demonstraţie. Aplicând Propoziţia 2.2.10, determinantul matricei date este sumă de determinanţi cu câte două linii proporţionale. Se aplică apoi Propoziţia 2.2.9. □

Propoziţia 2.2.13. *Dacă la o linie (coloană) a unei matrice adunăm elementele altei linii (coloane), înmulţite, eventual, cu un acelaşi scalar nenul, atunci matricea obţinută are acelaşi determinant cu matricea iniţială.*

Demonstraţie. Fie $A = (a_{ij})_{i,j=\overline{1,n}}$ şi fie $A' = \left(a'_{ij}\right)_{i,j=\overline{1,n}}$ matricea care se obţine din A prin adunarea la linia i a liniei k înmulţită cu scalarul λ.

$$a'_{ij} = a_{ij} + \lambda a_{kj}, \quad a'_{lj} = a_{lj}, \quad l \neq i; \quad j = \overline{1,n}.$$

Din Propoziţia 2.2.10, determinantul matricei A' este suma dintre determinantul matricei A şi determinantul unei matrice cu două linii proporţionale. Acesta din urmă este nul, conform Propoziţiei 2.2.9. □

2.2.2. Calculul determinanţilor. În cazul determinanţilor de ordin doi calculul se face conform relaţiei:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

În cazul determinanţilor de ordin trei calculul se face conform relaţiei:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{32}a_{23} =$$

$$a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

Pentru calculul determinanţilor de ordin mai mare sau egal cu patru se aplică regula lui Laplace pe care o ilustrăm în continuare.

Fie $A = (a_{ij})_{i,j=\overline{1,n}} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ o matrice pătratică şi $1 \leq p \leq n$, un număr natural.

Definiţia 2.2.14. *Numim* **minor de ordinul** p *al matricei* A *determinantul matricei de ordinul* p *format cu elementele situate la intersecţia a* p *linii şi* p *coloane ale matricei* A.

Dacă $i_1 < i_2 < \ldots < i_p$ şi $j_1 < j_2 < \ldots < j_p$ sunt p linii şi respectiv p coloane ale matricei A, atunci minorul corespunzător este

$$M = \begin{vmatrix} a_{i_1j_1} & a_{i_1j_2} & \cdots & a_{i_1j_p} \\ a_{i_2j_1} & a_{i_2j_2} & \cdots & a_{i_2j_p} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i_pj_1} & a_{i_pj_2} & \cdots & a_{i_pj_p} \end{vmatrix}.$$

Definiţia 2.2.15. *Numim* **minor complementar** *al minorului* M *de ordin* p *al matricei* A *determinantul* M_c *de ordinul* $n-p$ *al matricei extrase din* A *prin suprimarea celor* p *linii şi* p *coloane corespunzătoare lui* M.

Minorii de ordinul 1 ai matricii A sunt elementele sale, a_{ij}. Minorii complementari ai acestora sunt determinanţi de ordinul $n-1$.

Definiţia 2.2.16. *Numim* **complement algebric** *al minorului M al matricei A elementul din $\mathbb{K}$ definit de $C = (-1)^s M_c$, unde $s = (i_1 + i_2 + \ldots + i_p) + (j_1 + j_2 + \ldots + j_p)$, adică suma indicilor liniilor şi coloanelor matricei A utilizate în M.*

Determinantul matricei pătratice de ordinul $n-1$ care se obţine din A prin suprimarea liniei i şi coloanei j se numeşte **minorul complementar al elementului** a_{ij} şi se notează cu M_{ij}. Numărul $C_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$ se numeşte **complementul algebric al elementului** a_{ij}.

Teorema 2.2.17. (**Teorema lui Laplace**) *Determinantul matricei A este egal cu suma produselor minorilor de ordinul p ce se pot construi cu elementele a p linii (coloane) fixate ale matricei A prin complemenţii lor algebrici.*

În particular, pentru $p = 1$, rezultă că oricare ar fi $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ fixat, are loc egalitatea

$$\det(A) = a_{i1}C_{i1} + a_{i2}C_{i2} + \cdots + a_{in}C_{in}, \tag{16}$$

numită **regula de dezvoltare a determinantului matricei** A **după linia** i.

Corolarul 2.2.18. *Fie $A = (a_{ij})_{i,j=\overline{1,n}} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Pentru orice $j \neq i$ are loc egalitatatea*

$$a_{i1}C_{j1} + a_{i2}C_{j2} + \cdots + a_{in}C_{jn} = 0.$$

Demonstraţie. Fie

$$A' = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{i1} & a_{i2} & \ldots & a_{in} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{i1} & a_{i2} & \ldots & a_{in} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

matricea care se obţine din A prin înlocuirea liniei j cu linia i. Doarece A' are două linii egale, conform Propoziţiei 2.2.7, rezultă $\det(A') = 0$. Pe de altă parte, dezvoltând determinantul matricei A' după linia j, obţinem $\det(A') = a_{i1}C_{j1} + a_{i2}C_{j2} + \cdots + a_{in}C_{jn}$. □

În mod asemănător, pentru orice $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ fixat, are loc egalitatea

$$\det(A) = a_{1j}C_{1j} + a_{2j}C_{2j} + \cdots + a_{nj}C_{nj}, \tag{17}$$

numită **regula de dezvoltare a determinantului matricei** A **după coloana** j, precum şi următorul rezultat:

Corolarul 2.2.19. *Fie $A = (a_{ij})_{i,j=\overline{1,n}} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Pentru orice $i \neq j$ are loc egalitatatea*

$$a_{1j}C_{1i} + a_{2j}C_{2i} + \cdots + a_{nj}C_{ni} = 0.$$

Exemplul 2.2.20. Să se calculeze valoarea determinantului

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 3 & 4 \\ 2 & 5 & 1 & -1 \\ -1 & -2 & 2 & 4 \end{vmatrix}$$

folosind regula lui Laplace prin dezvoltare după primele două linii.

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \cdot (-1)^{1+2+1+2} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} +$$
$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} \cdot (-1)^{1+3+1+2} \begin{vmatrix} 5 & -1 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} \cdot (-1)^{1+1+2+4} \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} +$$
$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} \cdot (-1)^{1+2+2+3} \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} \cdot (-1)^{2+1+2+4} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} +$$
$$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} \cdot (-1)^{1+2+3+4} \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} = -5.$$

Exemplul 2.2.21. Să se calculeze valoarea determinantului de mai sus folosind dezvoltarea după prima linie.

$$D = 1 \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 5 & 1 & -1 \\ -2 & 2 & 4 \end{vmatrix} + 1 \cdot (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 4 \end{vmatrix} +$$
$$2 \cdot (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 2 & 5 & -1 \\ -1 & -2 & 4 \end{vmatrix} + 3 \cdot (-1)^{1+4} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 5 & 1 \\ -1 & -2 & 2 \end{vmatrix} = -5.$$

Procedura recomandată pentru a calcula în mod expeditiv un determinant:

1. Utilizând Propoziţia 2.2.13, se încearcă să se obţină pe o anumită linie (coloană) cât mai multe elemente egale cu zero.
2. Se scrie dezvoltarea determinantului după elementele liniei (coloanei) obţinute după transformările de la punctul 1.

Exemplificăm acest procedeu pentru a calcula determinantul de mai sus, prin dezvoltarea după prima linie, după ce pe aceasta obţinem cât mai multe zerouri.

Coloana 1 o înmulţim cu -1 şi o adunăm la coloana 2, coloana 1 o înmulţim cu -2 şi o adunăm la coloana 3, coloana 1 o înmulţim cu -3 şi o adunăm la coloana 4. Dezvoltăm acum după prima linie şi obţinem:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & -1 & -7 \\ -1 & -1 & 2 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 3 & -3 & -7 \\ -1 & 4 & 7 \end{vmatrix} = -5.$$

Exemplul 2.2.22. Să se calculeze determinantul:

$$D = \begin{vmatrix} a & b & c \\ ab & bc & ca \\ \frac{a}{b} & \frac{b}{c} & \frac{c}{a} \end{vmatrix}, \quad a, b, c \in \mathbb{R},\ abc \neq 0.$$

Avem $D = abc \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ b & c & a \\ \frac{1}{b} & \frac{1}{c} & \frac{1}{a} \end{vmatrix} = abc \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ b & c-b & a-b \\ \frac{1}{b} & \frac{1}{c} - \frac{1}{b} & \frac{1}{a} - \frac{1}{b} \end{vmatrix} =$

$abc(a-b)(b-c)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ b & -1 & 1 \\ \dfrac{1}{b} & \dfrac{1}{bc} & -\dfrac{1}{ab} \end{vmatrix} = abc(a-b)(b-c)\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ \dfrac{1}{bc} & -\dfrac{1}{ab} \end{vmatrix} = abc(a-b)(b-c)(\dfrac{1}{ab}-\dfrac{1}{bc}) =$
$(a-b)(b-c)(c-a)$.

Teorema 2.2.23. *Determinantul produsului a două matrice A şi B este egal cu produsul determinanţilor celor două matrice, adică*

$$\det(AB) = \det(A)\det(B). \tag{18}$$

Demonstraţie. Fie $A = (a_{ij})_{i,j=\overline{1,n}}$, $B = (b_{jk})_{j,k=\overline{1,n}} \in \mathcal{M}_n(K)$ şi fie matricea produs $C = AB = (c_{ik})_{i,k=\overline{1,n}}$,

$$c_{ik} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{jk}, \quad i,k = \overline{1,n}. \tag{19}$$

Construim matricea pătratică de ordinul $2n$

$$P = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 0 & \dots & 0 & b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ 0 & -1 & \dots & 0 & b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & -1 & b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{pmatrix}.$$

Dezvoltâm determinantul matricei P, folosind Teorema lui Laplace 2.2.17, după primele n linii şi obţinem $\det(P) = \det(A)\ \det(B)$.

Pe de altă parte, matricea P poate fi transformată, fără a modifica valoarea determinantului ei, folosind proprietăţile determinanţilor, încât la intersecţia ultimelor n linii şi n coloane să obţinem zerouri. Pentru aceasta este suficient ca la elementele coloanei $n+k$ să adunăm elementele corespunzătoare ale primelor n coloane înmulţite respectiv cu b_{1k}, b_{2k}, $\dots$, b_{nk}, pentru $k = \overline{1,n}$. Ţinând seama de (19), matricea P devine

$$Q = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} & c_{n1} & c_{n2} & \dots & c_{nn} \\ -1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Dezvoltâm determinantul matricei Q, folosind Teorema lui Laplace, după ultimele n linii şi obţinem $\det(Q) = (-1)^{2n(n+1)}\det(C) = \det(C)$. Cum $\det(P) = \det(Q)$, deducem că $\det(AB) = \det(A)\det(B)$. □

2.3. Rangul unei matrice. Tipuri speciale de matrice.

Definiţia 2.3.1. *Matricea nenulă* $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ *are* **rangul** r *dacă există în* A *cel puţin un minor de ordinul* r *diferit de zero şi toţi minorii de ordin mai mare decât* r, *dacă există, sunt egali cu zero. Notăm* $\mathrm{rang}(A) = r$.

Pentru matricea nulă, convenim ca $\mathrm{rang}(0_{m,n}) = 0$.

Teorema 2.3.2. *O matrice nenulă* $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ *are rangul* r *dacă şi numai dacă există un minor de ordinul* r *diferit de zero şi toţi minorii de ordin* $r+1$, *dacă există, sunt egali cu zero.*

Demonstraţie. Necesitatea este consecinţă evidentă a Definiţiei 2.3.1. Să admitem acum că există un minor de ordinul r diferit de zero şi că toţi minorii de ordin $r+1$ sunt nuli. Atunci toţi minorii de ordin $r+2$ sunt nuli. Într-adevăr dezvoltând un minor de ordin $r+2$ după elementele unei linii (coloane) obţinem o sumă de produse iar în fiecare produs apare ca factor un minor de ordin $r+1$. Asemănător, rezultă că toţi minorii de $r+3$, $r+4$, $\ldots$, câţi există, sunt egali cu zero, deci rangul matricei este r. □

Lema 2.3.3. *Fie matricele* $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ $B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. *Orice minor de ordin* k, $1 \leq k \leq \min\{m,p\}$ *al matricei produs* $A \cdot B$ *se poate scrie ca o combinaţie liniară de minori de ordin* k *ai uneia dintre matricele* A *sau* B.

Teorema 2.3.4. *Rangul produsului a două matrice este mai mic sau egal decât rangul fiecărei matrice.*

Demonstraţie. Concluzia rezultă cu uşurinţă din Lema 2.3.3 observând că, dacă toţi minorii de un anumit ordin k, ai matricei A sau B sunt nuli, atunci toţi minorii de acelaşi ordin k ai matricei AB sunt, de asemenea, nuli. □

În continuare punem în evidenţă câteva tipuri de matrice importante pentru parcurgerea materialului teoretic ce va urma.

Definiţia 2.3.5. *Orice matrice pătratică de tipul*

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_n \end{pmatrix},$$

unde $\lambda_i \in \mathbb{K}$, $i = 1, 2, \ldots, n$, *se numeşte* **matrice diagonală**.

O matrice pătratică care are toate elementele de sub diagonala principală egale cu zero, se numeşte **matrice superior triunghiulară** iar dacă toate elementele de deasupra diagonalei principale sunt nule atunci spunem că matricea este **inferior triunghiulară**. Determinantul unei matrice triunghiulară este evident egal cu produsul elementelor de pe diagonala principală.

Definiţia 2.3.6. *Spunem că matricea pătratică* A *este* **simetrică** *dacă* $A^T = A$. *Spunem că matricea pătratică* A *este* **antisimetrică** *dacă* $A^T = -A$.

Observaţia 2.3.7. Dacă $A = (a_{ij})_{i,j=\overline{1,n}} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ este antisimetrică, atunci $a_{ji} = -a_{ij}$ oricare ar fi $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Pentru $i = j$ obţinem $a_{ii} = -a_{ii}$ şi deci $a_{ii} = 0$ pentru toţi $i =\in \{1, 2, \ldots, n\}$. Rezultă că o matrice antisimetrică are toate elementele de pe diagonala principală egale cu zero.

Exemplul 2.3.8. Fie $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ o matrice antisimetrică. Dacă n este număr impar, atunci $\det(A) = 0$.

Într-adevăr, avem $A^T = -A$. Din Propoziţiile 2.2.3 şi 2.2.8 rezultă $\det(A) = (-1)^n \det(A)$. Dar n este impar şi deci $\det(A) = 0$.

Definiţia 2.3.9. *Spunem că matricea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ este* **ortogonală** *dacă $A^T \cdot A = A \cdot A^T = I_n$.*

Notăm $\mathcal{O}(n)$ mulţimea matricelor de ordin n care sunt ortogonale.

Exemplul 2.3.10. Matricea A din Exemplul 2.1.15 este ortogonală. În Geometria Analitică această matrice reprezintă matricea schimbării de coordonate la o rotaţie în plan, de unghi φ.

2.3.1. Matrice inversabilă.

Definiţia 2.3.11. *O matrice pătratică $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ al cărei determinant este diferit de zero se numeşte* **nesingulară**. *Dacă $\det(A) = 0$ spunem că matricea A este* **singulară**.

Definiţia 2.3.12. *Spunem că matricea pătratică $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ este* **inversabilă** *dacă există o matrice notată $A^{-1} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ astfel încât*

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I_n. \tag{20}$$

Definiţia 2.3.13. *Matricea A^{-1} se numeşte* **inversa** *matricei A.*

Teorema 2.3.14. *Inversa unei matrice pătratice, dacă există, este unică.*

Demonstraţie. Fie A o matrice pătratică de ordin n. Să presupunem că există două matrice de ordin n, B şi B' astfel încât

$$A \cdot B = B \cdot A = I_n \quad \text{şi} \quad A \cdot B' = B' \cdot A = I_n.$$

Folosind asociativitatea înmulţirii matricelor obţinem

$$B' = B' \cdot I_n = B' \cdot (A \cdot B) = (B' \cdot A) \cdot B = I_n \cdot B = B.$$

□

Notăm $GL_n(\mathbb{K})$ mulţimea matricelor pătratice de ordin n care sunt inversabile. Din Teorema 2.1.10 deducem:

Teorema 2.3.15. *Mulţimea $GL_n(\mathbb{K})$ înzestrată cu operaţia de înmulţire a matricelor are structură de grup necomutativ.*

Demonstraţie. Să observăm că produsul dintre două matrice inversabile este matrice inversabilă: dacă $A, B \in GL_n(\mathbb{K})$ atunci putem scrie $(A \cdot B) \cdot (B^{-1} \cdot A^{-1}) = A \cdot (B \cdot B^{-1}) \cdot A^{-1} = A \cdot A^{-1} = I_n$ şi deci

$$(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}.$$

Evident $I_n \in GL_n(\mathbb{K})$ cu $I_n^{-1} = I_n$. Dacă $A \in GL_n(\mathbb{K})$ atunci există A^{-1} şi $A^{-1} \in GL_n(\mathbb{K})$ cu $(A^{-1})^{-1} = A$. □

$GL_n(\mathbb{R})$ se numeşte **n-grupul liniar general real**, iar $GL_n(\mathbb{C})$ este numit **n-grupul liniar general complex**.

$GL_1(\mathbb{C}) = \mathbb{C}^*$.

Teorema 2.3.16. *Matricea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ este inversabilă dacă şi numai dacă este nesingulară, adică* $\det(A) \neq 0$.

Demonstraţie. Dacă A este inversabilă atunci, conform Teoremei 2.2.23 avem $\det(A) \cdot \det(A^{-1}) = 1$ şi deci $\det(A) \neq 0$. Reciproc, dacă A este nesingulară, demonstrăm că ea este inversabilă, construind efectiv inversa ei după cum urmează.

Construim mai întâi matricea A^* numită **adjuncta** sau **reciproca** matricei A, înlocuind fiecare element al matricei A^T prin complementul său algebric. Adică, elementul liniei i şi coloanei j din A^* este complementul algebric al elementului a_{ji} din matricea A. Mai precis putem scrie $A^* = \left(a^*_{ij}\right)_{i,j=\overline{1,n}}$, cu $a^*_{ij} = C_{ji}$. Calculăm produsele $A \cdot A^*$ şi $A^* \cdot A$. Folosind formula de dezvoltare a unui determinant după o linie (16) şi Corolarul 2.2.18 obţinem

$$A \cdot A^* = A^* \cdot A = \begin{pmatrix} d & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & d \end{pmatrix},$$

unde $d = \det(A)$. Împarţim prin d egalităţile de mai sus şi rezultă

$$A \cdot \left(\frac{1}{d} A^*\right) = \left(\frac{1}{d} A^*\right) \cdot A = I_n,$$

fapt ce demonstrează că A este inversabilă şi

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} A^*. \tag{21}$$

□

Exemplul 2.3.17. Să calculăm inversa matricei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Avem $\det(A) = -4$ deci A este inversabilă. Calculăm

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{şi} \quad A^* = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{21} & C_{31} \\ C_{12} & C_{22} & C_{32} \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} \end{pmatrix}$$

unde

$$C_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -3, \quad C_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 4,$$

$$C_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 1, \quad \text{s.a.m.d.}$$

Obţinem

$$A^* = \begin{pmatrix} -3 & 4 & 1 \\ -2 & 4 & -2 \\ 1 & -4 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{şi} \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} 3/4 & -1 & -1/4 \\ 1/2 & -1 & 1/2 \\ -1/4 & 1 & -1/4 \end{pmatrix}.$$

Propoziţia 2.3.18. *Mulţimea matricelor ortogonale* $(\mathcal{O}(n), \cdot)$ *este subgrup în mulţimea matricelor inversabile* $(GL_n(\mathbb{K}), \cdot)$ *.*

Demonstraţie. Dacă matricea $A \in \mathcal{O}(n)$ atunci $\det(A) = \pm 1$. Într-adevăr, din Teorema 2.2.23 şi Propoziţia 2.2.3 deducem $(\det(A))^2 = 1$ de unde afirmaţia. Deci matricea A este inversabilă şi din Definiţia 2.3.9 rezultă $A^{-1} = A^T$.

Fie $A, B \in \mathcal{O}(n)$. Avem $(AB)^T AB = B^T A^T AB = B^T I_n B = I_n$ şi deci $A, B \in \mathcal{O}(n)$. Pentru $A \in \mathcal{O}(n)$ avem evident $A^T \in \mathcal{O}(n)$ şi deci $A^{-1} \in \mathcal{O}(n)$, fapt ce încheie demonstraţia afirmaţiei din enunţ. □

$\mathcal{O}(n)$ se numeşte **n-grupul ortogonal**.

Considerăm mulţimea

$$\mathcal{SO}(n) = \{\ A \in \mathcal{O}(n);\ \det(A) = +1\}.$$

Propoziţia 2.3.19. $(\mathcal{SO}(n), \cdot)$ *este subgrup în mulţimea matricelor ortogonale* $(\mathcal{O}(n), \cdot)$ *.*

Demonstraţie. Un calcul elementar arată că $\mathcal{SO}(n)$ este parte stabilă la înmulţirea matricelor. Fie $A \in \mathcal{SO}(n)$. Deoarece $A^{-1} = A^T$ rezultă $\det(A^{-1}) = \det(A^T) = \det(A) = +1$ deci $A^{-1} \in \mathcal{SO}(n)$. □

$\mathcal{SO}(n)$ se numeşte **n-grupul ortogonal special**.

Observaţia 2.3.20. Mulţimea

$$\mathcal{O}^-(n) = \{\ A \in \mathcal{O}(n);\ \det(A) = -1\}$$

nu este parte stabilă la înmulţirea matricelor. Într-adevăr, dacă $A, B \in \mathcal{O}^-(n)$ atunci $\det(AB) = \det(A) \cdot \det(B) = (-1) \cdot (-1) = +1$.

Exemplul 2.3.21. Au loc $\mathcal{O}(1) = \{-1, +1\}$, $\mathcal{SO}(1) = \{+1\}$, $\mathcal{O}^-(1) = \{-1\}$.

2.3.2. Transformări elementare ale liniilor unei matrice. Orice matrice $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ se poate scrie în una din formele:

$A = \begin{pmatrix} L_1 \\ \vdots \\ L_m \end{pmatrix}$, cu ajutorul liniilor $L_i = \begin{pmatrix} a_{i1} & \dots & a_{in} \end{pmatrix}, i = \overline{1, m}$ sau

$A = \begin{pmatrix} C_1 & \dots & C_n \end{pmatrix}$, cu ajutorul coloanelor $C_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}, j = \overline{1, n}.$

Definiţia 2.3.22. *Numim* **transformări elementare** *asupra liniilor matricei A:*

- $\mathbf{T_1}$ transformarea prin care se înmulţeşte o linie cu un scalar nenul;
- $\mathbf{T_2}$ transformarea prin care se schimbă două linii între ele;
- $\mathbf{T_3}$ transformarea prin care se adună la elementele unei linii elementele corespunzătoare altei linii înmulţite, eventual, cu un scalar nenul.

Folosind scrierea matricei cu ajutorul liniilor, cele trei transformări elementare se reprezintă prin schemele:

$$A = \begin{pmatrix} L_1 \\ \vdots \\ L_i \\ \vdots \\ L_m \end{pmatrix} \xrightarrow{\mathbf{T_1}} \begin{pmatrix} L_1 \\ \vdots \\ \alpha L_i \\ \vdots \\ L_m \end{pmatrix}, \alpha \neq 0,$$

$$A = \begin{pmatrix} L_1 \\ \vdots \\ L_i \\ \vdots \\ L_j \\ \vdots \\ L_m \end{pmatrix} \xrightarrow{\mathbf{T_2}} \begin{pmatrix} L_1 \\ \vdots \\ L_j \\ \vdots \\ L_i \\ \vdots \\ L_m \end{pmatrix},$$

$$A = \begin{pmatrix} L_1 \\ \vdots \\ L_i \\ \vdots \\ L_j \\ \vdots \\ L_m \end{pmatrix} \xrightarrow{\mathbf{T_3}} \begin{pmatrix} L_1 \\ \vdots \\ L_i + \beta L_j \\ \vdots \\ L_j \\ \vdots \\ L_m \end{pmatrix}, \beta \neq 0.$$

Definiţia 2.3.23. *Două* **matrice** *de acelaşi tip se numesc* **echivalente pe linii** *dacă una se obţine din cealaltă printr-un număr finit de transformări elementare ale liniilor.*

Definiţia 2.3.24. *O matrice $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ se numeşte* **matrice eşalon** *dacă îndeplineşte următoarele condiţii:*

a) primul element diferit de zero din fiecare linie cu elemente diferite de zero este 1,

b) coloana care conţine numărul 1 al unei linii este situată la dreapta coloanelor care conţin 1 de pe liniile precedente,

c) numărul 1 din condiţia a) este singurul element diferit de zero din coloana în care acest număr se află,

d) liniile cu elementele diferite de zero sunt înaintea liniilor care au toate elementele egale cu zero.

Teorema 2.3.25. *Orice matrice este echivalentă pe linii cu o matrice eşalon.*

Demonstraţie. Presupunem că $A \in \mathcal{M}_{m,n}(K)$ şi că prima coloană a lui A care conţine un element diferit de zero este coloana de ordin j. Dacă elementul de pe linia i şi coloana j este diferit de zero, atunci facem transformarea $L_i \to \dfrac{1}{a_{ij}} L_i$ urmată de $L_1 \leftrightarrow L_i$ şi astfel matricea A se transformă în

$$B = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 & b_{1,j+1} & \cdots & b_{1n} \\ 0 & \cdots & 0 & b_{2j} & b_{2,j+1} & \cdots & b_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & 0 & b_{mj} & b_{m+1,j} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix}.$$

În continuare se aplică matricei B transformările $L_i \to L_i - b_{ij} L_1$ pentru $i \in \{2, 3, \ldots, m\}$ şi se obţine matricea

$$C = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 & c_{1,j+1} & \cdots & c_{1n} \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & c_{2,j+1} & \cdots & c_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & c_{m+1,j} & \cdots & c_{mn} \end{pmatrix}.$$

Dacă după aceste transformări se obţin linii formate numai din elemente egale cu zero atunci ele vor ocupa ultimele locuri în matricea C. Procedeul se repetă acum pentru submatricea formată din liniile $2, 3, ..., m$ şi coloanele $j + 1, ..., n$. În acest fel după un număr finit de asemenea transformări elementare se obţine o matrice eşalon echivalentă cu matricea iniţială A. □

Următoarea observaţie este utilă pentru realizarea unui program pe calculator care să realizeze aceste transformări.

Observaţia 2.3.26. Transformările elementare asupra liniilor se realizează folosind operaţia de înmulţire a matricelor, după cum urmează:

$\mathbf{T_1}$. Transformarea prin care se înmulţeşte linia L_i cu un scalar nenul α, se realizează înmulţind la stânga matricea A cu matricea pătratică de ordin n, $\mathbf{M}_i(\alpha)$ de mai jos. Aceasta are pe diagonala principală 1 cu excepţia poziţiei (i, i) al cărei element este α, iar elementele nediagonale sunt toate egale cu zero.

$$\mathbf{M}_i(\alpha) = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} & & & & i & & \\ & & & & \downarrow & & \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & \ldots & 0 & .. & 0 \\ .. & .. & \ldots & \ldots & .. & .. & .. \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & 0 & .. & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & \ldots & \alpha & .. & 0 \\ .. & .. & \ldots & \ldots & .. & .. & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & \ldots & 0 & .. & 1 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ \leftarrow i \\ \\ \\ \end{array},$$

$\det(\mathbf{M}_i(\alpha)) = \alpha \neq 0;$

$\mathbf{T_2}$. Transformarea prin care se schimbă între linia L_i cu linia L_j se realizează înmulţind matricea A la stânga cu matricea pătratică de ordin n

$$\begin{array}{cc} i & j \\ \downarrow & \downarrow \end{array}$$

$$\mathbf{M}_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & ... & 0 & ... & 0 & .. & 0 \\ .. & ... & .. & ... & .. & .. & .. \\ 0 & ... & 0 & ... & 1 & .. & 0 \\ .. & ... & .. & ... & .. & .. & .. \\ 0 & ... & 1 & ... & 0 & .. & 0 \\ .. & ... & .. & ... & .. & .. & .. \\ 0 & ... & 0 & ... & 0 & .. & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \leftarrow i \\ \\ \leftarrow j \\ \\ \\ \end{array}, \ \det(\mathbf{M}_{ij}) = 1 \neq 0,$$

matrice care are pe diagonala principală 1 cu excepţia poziţiilor (i,i) şi (j,j) care sunt egale cu 0, iar elementele care nu sunt pe diagonala principală sunt zero cu excepţia elementelor de pe poziţiile (i,j) şi (j,i) care sunt egale cu 1.

$\mathbf{T_3}$. Transformarea T_3 prin care linia j înmulţită cu un scalar β, se adună la linia i se realizează prin înmulţirea la stânga a matricei A cu o matrice pătratică de ordin n de forma:

$$\mathbf{M}_{ij}(\beta) = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} & & \overset{i}{\downarrow} & & \overset{j}{\downarrow} & & \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & .. & 0 & .. & 0 & .. & 0 \\ . & .. & .. & .. & . & .. & . \\ 0 & .. & 1 & .. & \beta & . & 0 \\ . & .. & .. & .. & .. & .. & . \\ 0 & .. & 0 & .. & 1 & .. & 0 \\ . & .. & .. & .. & . & .. & . \\ 0 & .. & 0 & . & 0 & . & 1 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ \\ \\ \leftarrow i \\ \\ \leftarrow j \\ \\ \\ \end{array}, \ \det(\mathbf{M}_{ij}(\beta)) = 1 \neq 0,$$

matrice care are pe diagonala principală 1, iar elementele care nu sunt pe diagonala principală sunt zero cu excepţia elementului de pe poziţia (i,j) care este egal cu β.

Matricele introduse mai sus $M_i(\alpha), M_{ij}, M_{ij}(\beta)$ poartă denumirea de **matrice elementare.**

Teorema 2.3.27. *Dacă matricea B se obţine prin aplicarea a k transformări elementare liniilor lui A, atunci există k matrici elementare $E_1, E_2, ..., E_k$ astfel încât să avem*

$$B = E_1 E_2 ... E_k A. \tag{22}$$

Corolarul 2.3.28. *Dacă matricea B se obţine din matricea A prin aplicarea de transformări elementare aupra liniilor acesteia, atunci* $\operatorname{rang}(A) = \operatorname{rang}(B)$.

Exemplul 2.3.29. Folosind transformări elementare să se determine rangul matricei A

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 4 & 2 & 2 & 0 \\ 3 & 6 & 3 & 2 & 2 \\ 5 & 12 & 6 & 4 & 4 \end{pmatrix}.$$

Aplicăm transformările elementare pentru a obţine zerouri sub diagonala a_{11}, $a_{22}, \ldots$. Numărul de elemente nenule de pe această diagonală dă rangul matricei.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 4 & 2 & 2 & 0 \\ 3 & 6 & 3 & 2 & 2 \\ 5 & 12 & 6 & 4 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{L_2 \to (-2)L_1 + L_2 \\ L_3 \to (-3)L_1 + L_3 \\ L_4 \to (-5)L_1 + L_4}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -4 \\ 0 & 2 & 1 & 4 & -6 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{L_2 \leftrightarrow L_4} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 4 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -4 \end{pmatrix}$$

Deoarece pe diagonala care pleacă din poziţia a_{11} sunt 3 elemente nenule rezultă că rang$(A) =$ rang$(B) = 3$.

Corolarul 2.3.30. *Dacă matricea A este inversabilă atunci*

$$A^{-1} = E_1 E_2 ... E_k.$$

Demonstraţie. Afirmaţia rezultă dacă în relaţia (22) considerăm $B = I_n$. □

Ca o aplicaţie a acestui Corolar prezentăm *algoritmul Gauss-Jordan de inversare a unei matrice.*

Exemplul 2.3.31. Să se calculeze, folosind transformări elementare, inversa matricei

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -2 & 3 & 4 \\ 5 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Deoarece $\det(A) = -31 \neq 0$, matricea este inversabilă. Formăm matricea $\begin{pmatrix} A & | & I \end{pmatrix}$. Cu ajutorul transformărilor elementare efectuate asupra liniilor acestei matricii o vom aduce la forma $\begin{pmatrix} I & | & B \end{pmatrix}$. Vom avea $A^{-1} = B$.

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & | & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & 4 & | & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 1 & 1 & | & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{L_1 \to (1/2)L_1} \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 3/2 & | & 1/2 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & 4 & | & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 1 & 1 & | & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\substack{L_2 \to 2L_1 + L_2 \\ L_3 \to -5L_1 + L_3}} \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 3/2 & | & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 7 & | & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -3/2 & -13/2 & | & -5/2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{L_2 \to (1/4)L_2} \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 3/2 & | & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 7/4 & | & 1/4 & 1/4 & 0 \\ 0 & -3/2 & -13/2 & | & -5/2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\substack{L_1 \to (-1/2)L_2 + L_1 \\ L_3 \to (3/2)L_2 + L_3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5/8 & | & 3/8 & -1/8 & 0 \\ 0 & 1 & 7/4 & | & 1/4 & 1/4 & 0 \\ 0 & 0 & -31/8 & | & -17/8 & 3/8 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{L_3 \to (-31/8)L_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5/8 & | & 3/8 & -1/8 & 0 \\ 0 & 1 & 7/4 & | & 1/4 & 1/4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & 17/31 & -3/31 & -8/31 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\substack{L_1 \to (-5/8)L_3 + L_1 \\ L_2 \to (-7/4)L_3 + L_2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 1/31 & -2/31 & 5/31 \\ 0 & 1 & 0 & | & -22/31 & 13/31 & 14/31 \\ 0 & 0 & 1 & | & 17/31 & -3/31 & -8/31 \end{pmatrix}.$$

Rezultă că
$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/31 & -2/31 & 5/31 \\ -22/31 & 13/31 & 14/31 \\ 17/31 & -3/31 & -8/31 \end{pmatrix}.$$

Exemplele 2.3.32. i) Inversa unei matrice diagonale este o matrice de acelaşi tip.

Într-adevăr, împărţind fiecare linie din matricea $(A|I_n)$ cu elementul a_{ii} (dacă $a_{ii} \neq 0$), aflat pe diagonala matricei A obţinem $(I_n|A^{-1})$, deci A^{-1} va avea pe diagonala principală elementele $1/a_{ii}$ şi în rest zero.

ii) Inversa unei matrice triunghiulare superior (inferior) având 1 pe diagonală este o matrice de acelaşi tip.

Dacă A este superior triunghiulară cu 1 pe diagonala principală, vor fi necesare doar acele transformări ale matricei $(A|I_n)$ ce produc zerouri deasupra diagonalei matricei A. Ele păstrează zerourile aflate sub diagonală şi nu modifică elementele de pe diagonală, atât în matricea A, cât şi în I_n. Analog în cazul matricelor triunghiulare inferior.

2.3.3. Matrice cu blocuri.

Definiţia 2.3.33. *O* **matrice cu blocuri** *A este o matrice construită cu ajutorul altor matrice de ordin mai mic numite blocuri sau submatrice ale lui A.*

Să considerăm matricea $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$, $m \geq 2$, $n \geq 2$ pe care o partiţionăm în p benzi orizontale (o bandă orizontală este formată din linii consecutive ale matricei M) şi q benzi verticale (o bandă verticală este formată din coloane consecutive ale matricei A). O matrice care se află la intersecţia unei benzi orizontale cu o bandă verticală se numeşte **bloc** sau **submatrice**. Notăm blocurile cu $A_{ij} \in \mathcal{M}_{m/p,n/q}(\mathbb{K})$, $i = \overline{1,p}$, $j = \overline{1,q}$ şi atunci matricea A se reprezintă sub forma
$$A = \left(\begin{array}{c|c|c|c} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1q} \\ \hline A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2q} \\ \hline \dots & \dots & \dots & \dots \\ \hline A_{p1} & A_{p2} & \dots & A_{pq} \end{array}\right)$$
Notăm $A = (A_{ij})_{\substack{i=\overline{1,p} \\ j=\overline{1,q}}}$.

Observaţia 2.3.34. i) În matricea A blocurile $A_{i1}, A_{i2}, \dots, A_{iq}$, $i \in \{1, 2, \dots, p\}$ au acelaşi număr de linii, iar blocurile $A_{1j}, A_{2j}, \dots, A_{pj}$, $j \in \{1, 2, \dots, q\}$ au acelaşi număr de coloane.

ii) Blocurile de dimensiune $(1, n)$ sunt liniile matricei M, cele de dimensiune $(m, 1)$ sunt coloanele matricei, iar cele de dimensiune $(1, 1)$ sunt elementele matricei A.

Două matrice partiţionate la fel $A = (A_{ij})_{\substack{i=\overline{1,p} \\ j=\overline{1,q}}}$ şi $B = (B_{ij})_{\substack{i=\overline{1,p} \\ j=\overline{1,q}}}$ se pot aduna evident pe blocuri după regula
$$A + B = (A_{ij} + B_{ij})_{\substack{i=\overline{1,p} \\ j=\overline{1,q}}}.$$

Fie $A = (A_{ij})_{\substack{i=\overline{1,p} \\ j=\overline{1,q}}}$ şi $B = (B_{jk})_{\substack{j=\overline{1,q} \\ k=\overline{1,r}}}$ două matrice pentru care se poate efectua produsul $A{\cdot}B$. Admitem că pentru fiecare $i = \overline{1,p}$, $j = \overline{1,q}$ şi $k = \overline{1,r}$ numărul coloanelor din matricea A_{ij} este egal cu numărul de linii din matricea B_{jk}, deci se poate efectua produsul $A_{ij}B_{jk}$. Se verifică prin calcul direct că produsul AB se obţine după regula cunoscută a înmulţirii matricelor pe elemente

$$A \cdot B = \left(\sum_{j=1}^{n} A_{ij} B_{jk} \right)_{\substack{i=\overline{1,p} \\ k=\overline{1,r}}}.$$

Exemplul 2.3.35. Să se determine inversa matricei cu blocuri M de forma:

$$M = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$$

ştiind că matricele A şi B sunt pătratice (pot fi de dimensiuni diferite) inversabile.

Se verifică imediat că matricea

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} A^{-1} & 0 \\ 0 & B^{-1} \end{pmatrix}$$

verifică relaţiile $MM^{-1} = M^{-1}M = I$.

Exemplul 2.3.36. Fie $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$,

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$$

unde $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K}),\ D \in \mathcal{M}_q(\mathbb{K}),\ p+q=n$. Dacă $A \in GL_p(\mathbb{K})$, următoarele afirmaţii sunt echivalente:

i) $M \in GL_n(\mathbb{K})$;

ii) $D - CA^{-1}B \in GL_q(\mathbb{K})$.

Când $M \in GL_n(\mathbb{K})$ să se arate că:

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} A^{-1}\left(I_p + BSCA^{-1}\right) & -A^{-1}BS \\ -SCA^{-1} & S \end{pmatrix}$$

unde $S = \left(D - CA^{-1}B\right)^{-1}$.

i)$\Rightarrow$ ii). Fie

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} E & F \\ G & H \end{pmatrix}.$$

Deoarece $MM^{-1} = I_n$ rezultă:

$$AE + BG = I_p, \quad AF + BH = 0 \tag{23}$$

$$CE + DG = 0, \quad F + DH = I_q. \tag{24}$$

Pentru a afla M^{-1} trebuie să determinăm submatricele E, F, G, H. Înmulţim la stânga relaţiile (23) cu A^{-1} şi găsim

$$E = A^{-1} - A^{-1}BG, \quad F = -A^{-1}BH. \tag{25}$$

Înlocuind E, F din (25) în (24) obţinem

$$CA^{-1} + \left(D - CA^{-1}B\right)G = 0 \tag{26}$$

$$\left(D - CA^{-1}B\right) H = I_q. \tag{27}$$

Din relaţia (27) rezultă că matricea $D - CA^{-1}B$ este inversabilă şi

$$H = \left(D - CA^{-1}B\right)^{-1} = S. \tag{28}$$

Din (26) deducem atunci:

$$G = -\left(D - CA^{-1}B\right)^{-1} CA^{-1} = -SCA^{-1}. \tag{29}$$

Înlocuind H, G obţinute în (25) găsim

$$\begin{aligned} E &= A^{-1}\left(I_p + B\left(D - CA^{-1}B\right)^{-1} CA^{-1}\right) = A^{-1}\left(I_p + BSCA^{-1}\right), \\ F &= -A^{-1}B\left(D - CA^{-1}B\right)^{-1} = -A^{-1}BS. \end{aligned} \tag{30}$$

ii)$\Rightarrow$ i). Dacă $D - CA^{-1}B$ este inversabilă, se poate construi matricea $N = \begin{pmatrix} E & F \\ G & H \end{pmatrix}$. unde E, F, G, H sunt date de (30), (29) şi (28). Se constată prin calcul direct că $MN = I_n$, deci $M \in GL_n(\mathbb{K})$.

2.4. Sisteme de ecuaţii algebrice liniare

2.4.1. Sisteme de m ecuaţii cu n necunoscute.

Definiţia 2.4.1. *Un* **sistem algebric liniar** *de m ecuaţii cu n necunoscute este un ansamblu de m relaţii de forma*

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases} \tag{31}$$

sau sub formă condensată:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i, \quad i = \overline{1, m}, \tag{32}$$

unde a_{ij}, $b_i \in \mathbb{K}$, $i = \overline{1, m}$, $j = \overline{1, n}$, sunt date, iar x_j, $j = \overline{1, n}$ sunt **necunoscutele** *sistemului.*

Matricea $A = (a_{ij})_{i=\overline{1,m}, j=\overline{1,n}} \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ se numeşte **matricea coeficienţilor sistemului** sau simplu, **matricea sistemului**, iar

$$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_m \end{pmatrix}$$

se numeşte **matricea coloană a termenilor liberi**.

Dacă notăm prin

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix}$$

matricea coloană a necunoscutelor, sistemul (31) se scrie sub forma matriceală

$$AX = B. \tag{33}$$

Matricea $(A|B)$ se numeşte **matricea extinsă** a sistemului.

Definiţia 2.4.2. *Se numeşte* **soluţie** *a sistemului* (31) *orice n-uplă de elemente ale corpului* $\mathbb{K}$, $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{K}^n$ *care înlocuită în* (31) *verifică toate cele m ecuaţii ale sistemului adică au loc relaţiile*

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\alpha_j = b_i, \quad \forall\, i = \overline{1, m}.$$

Sistemul (31) se numeşte **compatibil** dacă are cel puţin o soluţie şi **incompatibil** în caz contrar. Un sistem compatibil care admite o singură soluţie se numeşte **compatibil determinat**, iar dacă admite mai multe soluţii atunci spunem că sistemul este **compatibil nedeterminat**.

Două sisteme care au aceleaşi soluţii se numesc **echivalente**.

Teorema 2.4.3. *Aplicarea de transformări elementare asupra liniilor matricei extinse a sistemului* (31)*, conduce la matrice extinse ale unor sisteme echivalente cu* (31)*.*

Demonstraţie. Arătăm că dacă se aplică pe rând o transformare elementară $T_i, i = 1, 2, 3,$ liniilor matricei extinse $(A|B)$, sistemul ataşat matricei transformate este echivalent cu sistemul (31).

Transformarea $\mathbf{T_1}$ înmulţeşte o linie a matricei $(A|B)$ cu un scalar nenul $\alpha \in K$ şi atunci noul sistem este de forma

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \alpha a_{i1}x_1 + \alpha a_{i2}x_2 + \ldots + \alpha a_{in}x_n = \alpha b_i \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

care este evident echivalent cu sistemul (31).

Transformarea $\mathbf{T_2}$ schimbă două ecuaţii între ele, deci soluţiile sistemului iniţial şi al celui transformat coincid.

Sistemul ataşat matricei obţinute din $(A|B)$ prin aplicarea unei transformări de tipul $\mathbf{T_3}$ este de forma

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ (a_{i1} + \beta a_{j1})x_1 + (a_{i2} + \beta a_{j2})x_2 + \ldots + (a_{in} + \beta a_{jm})x_n = b_i + \beta b_j \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases}$$

Este uşor de văzut că orice soluţie a acestui sistem este şi soluţie a sistemului (31) şi reciproc. $\square$

Fie $r = \text{rang}A$. Presupunem că $\det\left(a_{ij}\right)_{i,j=\overline{1,r}} \neq 0$. Prin transformări elementare asupra liniilor, matricea (A,B) poate fi adusă la forma

$$(P,Q) = \left(\begin{array}{ccccccc|c} 1 & 0 & \dots & 0 & p_{1,r+1} & \dots & p_{1,n} & q_1 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & p_{2,r+1} & \dots & p_{2,n} & q_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & p_{r,r+1} & \dots & p_{r,n} & q_r \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & q_{r+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & q_m \end{array}\right). \tag{34}$$

Din Teorema 2.4.3 rezultă că sistemul care are drept matrice extinsă matricea (P,Q), este echivalent cu sistemul (31).

Dacă $r = m$ sistemul este compatibil. Pentru $r < m$ din (34) deducem următoarea teoremă de compatibilitate.

Teorema 2.4.4. *Sistemul* (31) *este compatibil dacă şi numai dacă*

$$q_{r+1} = q_{r+2} = \ldots = q_m = 0. \tag{35}$$

Dacă sistemul este compatibil şi $r = n$ el are o singură soluţie, adică este sistem compatibil determinat, iar dacă $r < n$ el admite ∞^{n-r} soluţii, adică este compatibil nedeterminat.

Teorema 2.4.5. (**Teorema lui Kronecker-Cappelli**) *Sistemul* (31) *este compatibil dacă şi numai dacă rangul matricei sistemului este egal cu rangul matricei extinse, adică*

$$\text{rang } A = \text{rang}\,(A|B)\,.$$

Teorema lui Kronecker-Cappelli ne oferă un mijloc simplu şi rapid de a stabili dacă un sistem algebric liniar este compatibil sau nu, însă, în caz de compatibilitate, nu ne arată cum se calculează soluţiile sistemului. Un minor nenul de ordinul r al matricei A ($r = \text{rang}(A)$) se numeşte **minor principal**. Necunoscutele ale căror coeficienţi intră în formarea acestui minor se numesc **necunoscute principale** iar ecuaţiile din care s-a format acest minor se numesc **ecuaţii principale**. Necunoscutele şi ecuaţiile care nu sunt principale se numesc **necunoscute**, respectiv **ecuaţii secundare**. Minorii de ordinul $r+1$ obţinuţi prin bordarea minorului principal cu elementele corespunzătoare ale coloanei termenilor liberi, precum şi cu cele ale uneia dintre liniile corespunzătoare unei ecuaţii secundare se numesc **minori caracteristici**. Pentru un sistem de m ecuaţii, cu rangul matricei sistemului egal cu r, există minori caracteristici numai dacă $m > r$, iar numărul lor este $m - r$. Teorema precedentă se reformulează astfel:

Teorema 2.4.6. (**Teorema lui Rouché-Frobenius**) *Sistemul* (31), *cu $r < m$, este compatibil dacă şi numai dacă toţi minorii caracteristici sunt egali cu zero.*

In caz de compatibilitate, pentru rezolvarea sistemului se păstrează ecuaţiile principale în care necunoscutele secundare se trec în membrul drept. Atribuim acestora din urmă valori arbitrare din $\mathbb{K}$, apoi rezolvăm sistemul anterior ales, obţinând toate soluţiile sistemului (31).

Exemplul 2.4.7. Să se rezolve sistemul*:*

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 1 \\ -x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 3 \\ 4x_1 + x_2 - 8x_3 = -\dfrac{8}{5}. \end{cases}$$

Matricea sistemului şi matricea extinsă:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -1 & 3 & 2 \\ 4 & 1 & -8 \end{pmatrix}, \quad (A|B) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & | & 1 \\ -1 & 3 & 2 & | & 3 \\ 4 & 1 & -8 & | & -\frac{8}{5} \end{pmatrix}.$$

$\operatorname{rang}(A) = \operatorname{rang}(A \mid B) = 2$ deci sistemul este compatibil

$$d_{\text{pr}} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 5,$$

necunoscutele principale sunt x_1 şi x_2 iar x_3 este necunoscută secundară. Notăm $x_3 = \alpha$. Sistemul format cu ecuaţiile principale este:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 1 + 2\alpha \\ -x_1 + 3x_2 = 3 - 2\alpha \end{cases} \tag{36}$$

şi are soluţia

$$x_1 = \frac{10\alpha - 3}{5}, \quad x_2 = \frac{4}{5}.$$

Aceste valori, împreună cu $x_3 = \alpha$ verifică ecuaţia secundară (a treia) şi formează, pentru $\alpha \in \mathbb{R}$, mulţimea soluţiilor sistemului dat.

O altă metodă utilizează transformări elementare asupra matricei extinse pentru a o aduce la forma (34). Metoda aceasta se numeşte **metoda eliminării (Gauss-Jordan)** şi o vom exemplifica în cele ce urmează.

Exemplul 2.4.8. Să se discute şi, în caz de compatibilitate, să se rezolve sistemul*:*

$$\begin{cases} mx_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + mx_2 + x_3 = m \\ x_1 + x_2 + mx_3 = m^2 \end{cases},$$

unde $m \in \mathbb{R}$. Cu ajutorul transformărilor elementare, matricea extinsă a sistemului devine succesiv:

$$(A|B) = \begin{pmatrix} m & 1 & 1 & | & 1 \\ 1 & m & 1 & | & m \\ 1 & 1 & m & | & m^2 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_1 \leftrightarrow L_2} \begin{pmatrix} 1 & m & 1 & | & m \\ m & 1 & 1 & | & 1 \\ 1 & 1 & m & | & m^2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[L_3 \to L_3 - L_1]{L_2 \to L_2 - mL_1} \begin{pmatrix} 1 & m & 1 & | & m \\ 0 & 1-m^2 & 1-m & | & 1-m^2 \\ 0 & 1-m & m-1 & | & m^2-m \end{pmatrix}.$$

Se impun următoarele două cazuri:

1. $m = 1$. În acest caz obţinem:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 1 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}.$$

Sistemul este compatibil nedeterminat iar soluţiile sale sunt:

$$\begin{cases} x_1 = 1 - \alpha - \beta \\ x_2 = \alpha \\ x_3 = \beta, \qquad \alpha, \beta \in \mathbb{R}. \end{cases} \tag{37}$$

2. $m \neq 1$. În acest caz matricea se transformă în continuare după cum urmează:

$$\xrightarrow[L_3 \to \frac{1}{1-m} L_3]{L_2 \to \frac{1}{1-m} L_2} \begin{pmatrix} 1 & m & 1 & | & m \\ 0 & 1+m & 1 & | & 1+m \\ 0 & 1 & -1 & | & -m \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{L_2 \leftrightarrow L_3} \begin{pmatrix} 1 & m & 1 & | & m \\ 0 & 1 & -1 & | & -m \\ 0 & 1+m & 1 & | & 1+m \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[L_3 \to L_3 - (1+m)L_2]{L_1 \to L_1 - mL_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1+m & | & m+m^2 \\ 0 & 1 & -1 & | & -m \\ 0 & 0 & 2+m & | & (m+1)^2 \end{pmatrix}$$

Avem două posibilităţi:

2.1. Dacă $m = -2$ obţinem

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & | & 2 \\ 0 & 1 & -1 & | & -2 \\ 0 & 0 & 0 & | & 1 \end{pmatrix}$$

şi în acest caz sistemul este incompatibil.

2.2. Dacă $m \neq -2$ aplicăm în continuare transformările elementare şi obţinem:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1+m & | & m+m^2 \\ 0 & 1 & -1 & | & -m \\ 0 & 0 & 2+m & | & (m+1)^2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{L_3 \to \dfrac{1}{2+m} L_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1+m & | & m+m^2 \\ 0 & 1 & -1 & | & -m \\ 0 & 0 & 1 & | & \frac{(m+1)^2}{m+2} \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[L_2 \to L_2 + L_3]{L_1 \to L_1 - (m+1)L_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & -\frac{m+1}{m+2} \\ 0 & 1 & 0 & | & \frac{1}{m+2} \\ 0 & 0 & 1 & | & \frac{(m+1)^2}{m+2} \end{pmatrix}.$$

Rezultă că sistemul este compatibil determinat iar soluţia este:

$$\begin{cases} x_1 = -\dfrac{m+1}{m+2} \\ x_2 = \dfrac{1}{m+2} \\ x_3 = \dfrac{(m+1)^2}{m+2}. \end{cases} \tag{38}$$

În concluzie:

a) dacă $m \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 1\}$ sistemul are soluţie unică dată de (38),

b) dacă $m = -2$ sistemul este incompatibil,

c) dacă $m = -1$ sistemul este compatibil nedeterminat şi soluţiile sunt date de (37).

2.4.2. Sisteme Cramer.

Definiţia 2.4.9. *Un sistem algebric liniar în care $r = m = n$ se numeşte* **sistem Cramer***. Un astfel de sistem se scrie:*

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i, \quad i = \overline{1,n}, \tag{39}$$

cu $\Delta = \det(A) \neq 0$.

Teorema 2.4.10. *Un sistem Cramer este compatibil determinat. Soluţia sa este dată de* **formulele lui Cramer***:*

$$x_j = \frac{\det(A_j)}{\det(A)}, \quad j = \overline{1,n}, \tag{40}$$

unde matricea A_j se obţine din matricea A prin înlocuirea coloanei j cu coloana termenilor liberi.

Demonstraţie. Într-adevăr, deoarece $\det A \neq 0$, matricea A este inversabilă. Din (33), înmulţind la stânga cu A^{-1}, găsim

$$X = A^{-1}B = \frac{1}{\det(A)}A^*B.$$

Dacă avem în vedere definiţia matricei A^* şi formula (17) de dezvoltare a determinantului matricei A_j după coloana j rezultă:

$$x_j = \frac{1}{\det(A)}(b_1C_{1j} + b_2C_{2j} + \cdots + b_nC_{nj}) = \frac{1}{\det(A)}\det(A_j), \quad j = \overline{1,n}.$$

□

Exemplul 2.4.11. Să se rezolve sistemul:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 9 \\ -3x_1 + 2x_2 + 3x_3 = -10. \end{cases}$$

Calculăm determinantul sistemului $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & -2 \\ -3 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 34 \neq 0,$ deci sistemul este compatibil, unic determinat. Apoi calculăm următorii trei determinanţi: $\Delta_{x_1} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 9 & 3 & -2 \\ -10 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 68,$ $\Delta_{x_2} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 9 & -2 \\ -3 & -10 & 3 \end{vmatrix} = 34,$ $\Delta_{x_3} = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 9 \\ -3 & 2 & -10 \end{vmatrix} = -68.$ Soluţia sistemului este $x_1 = \dfrac{\Delta_{x_1}}{\Delta} = 2,\ x_2 = \dfrac{\Delta_{x_2}}{\Delta} = 1,\ x_3 = \dfrac{\Delta_{x_3}}{\Delta} = -2.$

2.4.3. Sisteme omogene. Deşi sistemele omogene de ecuaţii liniare reprezintă un caz particular al celor de m ecuaţii cu n necunoscute, totuşi, dată fiind importanţa lor, consacrăm studiului lor un paragraf special.

Definiţia 2.4.12. *Un sistem liniar în care toţi termenii liberi sunt nuli,* $b_i = 0$, $\forall\, i = \overline{1, m}$, *se numeşte* **sistem omogen**.

El este de forma

$$
\begin{cases}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0, \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = 0,
\end{cases}
\tag{41}
$$

sau

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = 0, \quad i = \overline{1, m},$$

sau, matriceal,

$$AX = 0. \tag{42}$$

După cum se observă direct n-upla $(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (0, 0, \ldots 0)$ este soluţie a sistemului numită **soluţie banală**. Deci un sistem omogen este întotdeauna compatibil.

Utilizând rezultatele din paragrafele precedente putem formula următoarea teoremă:

Teorema 2.4.13. *Condiţia necesară şi suficientă pentru ca un sistem omogen de ecuaţii liniare să admită şi soluţii nebanale este ca* $r < n$, *adică rangul* r *al matricei sistemului să fie strict mai mic decât numărul* n *al necunoscutelor.*

Corolarul 2.4.14. *Dacă numărul necunoscutelor unui sistem liniar omogen este egal cu cel al ecuaţiilor, atunci sistemul admite şi soluţii nebanale dacă şi numai dacă* $\det(A) = 0$.

Observaţia 2.4.15. Dacă un sistem de ecuaţii liniare omogene are numărul ecuaţiilor strict mai mic decât cel al necunoscutelor sistemul are soluţii nenule.

Exemplul 2.4.16. Să se stabilească dacă sistemul de ecuaţii de mai jos admite soluţii nebanale şi în caz afirmativ să se determine aceste soluţii:

$$
\begin{cases}
mx_1 + x_2 + x_3 = 0 \\
x_1 + mx_2 + x_3 = 0 \\
x_1 + x_2 + mx_3 = 0,
\end{cases}
$$

$m \in \mathbb{R}$.

Folosind transformări elementare, ca şi în Exemplul 2.4.8 matricea sistemului devine:

$$
A = \begin{pmatrix} m & 1 & 1 \\ 1 & m & 1 \\ 1 & 1 & m \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & m & 1 \\ 0 & 1-m^2 & 1-m \\ 0 & 1-m & m-1 \end{pmatrix}.
$$

1. Dacă $m = 1$ obţinem

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

deci sistemul admite şi soluţii nebanale:

$$\begin{cases} x_1 = -\alpha - \beta \\ x_2 = \alpha \\ x_3 = \beta, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

2. Dacă $m \neq 1$ continuăm aplicarea transformărilor elementare ca în Exemplul 2.4.8 şi găsim

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1+m \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2+m \end{pmatrix},$$

ceea ce impune discuţia în alte două cazuri:

2.1. Dacă $m = -2$ se obţine matricea

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

deci sistemul admite şi soluţii nebanale: $x_1 = x_2 = x_3 = \alpha$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

2.2. Dacă $m \neq -2$ sistemul admite doar soluţia nulă.

În concluzie:

a) dacă $m \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 1\}$ sistemul admite doar soluţia banală,

b) dacă $m \in \{-2, 1\}$ sistemul admite soluţii nebanale.

2.5. Probleme propuse

Problema 2.5.1. Să se determine matricea X din egalitatea:

$$-5\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 4 \\ 15 & -1 \end{pmatrix} + 2X = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & -2 \\ 5 & 4 \end{pmatrix} - 4\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Problema 2.5.2. Să se calculeze produsele de matrice:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & -2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 5 & 2 \\ -1 & 1 & -2 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Problema 2.5.3. Fie polinomul $P(X) = X^3 - 7X^2 + 13X - 5$. Să se calculeze $P(A)$ pentru

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & -3 \\ 1 & 3 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Problema 2.5.4. Fie $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ astfel încât $AB = BA$. Să se arate că pentru orice $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 1$ au loc

a) $A^k - B^k = (A - B)\left(A^{k-1} + A^{k-2}B + \ldots + AB^{k-2} + B^{k-1}\right).$

b) $(A+B)^k = \sum_{j=0}^{k} C_j^k A^j B^{k-j}$, unde $A^0 = I_n$.

Problema 2.5.5. Fie $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ matrice nenulă cu $\det(A) = 0$.

a) Să se arate că există un număr complex r, astfel încât
$A^k = r^{k-1}A$ pentru orice $k = 1, 2, 3 \ldots$.

b) Să se calculeze $(A + I_2)^k$, $k \in \mathbb{N}$.

Problema 2.5.6. O matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ se numeşte **involutivă** dacă $A^2 = I_n$. O matrice $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ se numeşte **idempotentă** dacă $B^2 = B$. Să se arate că:

a) Dacă B este idempotentă, atunci $2B - I_n$ este involutivă.

b) Dacă A este involutivă, atunci $\frac{1}{2}(A + I_n)$ este idempotentă.

Problema 2.5.7. Pentru o matrice $A = (a_{ij})_{\substack{i=\overline{1,n}\\ j=\overline{1,n}}} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ notăm

$$\mathrm{Tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$$

pe care o numim **urma matricei** A. Să se arate că:

a) $\mathrm{Tr}(A+B) = \mathrm{Tr}(A) + \mathrm{Tr}(B)$, $\forall A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$,

b) $\mathrm{Tr}(\alpha A) = \alpha \mathrm{Tr}(A)$, $\forall \alpha \in \mathbb{C}$, $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$,

c) $\mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(BA)$, $\forall A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$,

d) $\mathrm{Tr}(UAU^{-1}) = \mathrm{Tr}(A)$, $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $\forall U \in GL_n(\mathbb{C})$.

Problema 2.5.8. Să se arate că nu există două matrice $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ astfel încât $AB - BA = I_n$.

Problema 2.5.9. Fie $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ astfel încât $AB = BA$ pentru orice $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Să se arate că $A = \alpha I_n$.

Problema 2.5.10. Fie $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ astfel încât $A+B = AB$. Demonstraţi că $AB = BA$.

Problema 2.5.11. Fie $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ astfel încât $A + B = I_n$ şi $A^2 = A^3$. Demonstraţi că

a) $AB = BA$,

b) $I_n - AB$ şi $I_n + AB$ sunt inversabile.

Problema 2.5.12. Fie $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $n \geq 2$ matrice nesingulară. Să se arate că

$$(A^*)^* = (\det A)^{n-2} \cdot A.$$

Care sunt matricele nesingulare pentru care $(A^*)^* = A$?

Problema 2.5.13. Să se calculeze $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}^{2008}$.

(Third Internet Mathematics Olympiad for Students, 2008)

Problema 2.5.14. Să se găsească valoarea maximă a elementelor matricei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^6.$$

(First Team Internet Mathematics Olympiad for Students, 2010)

Problema 2.5.15. Fie $A, B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ şi $B = (b_{ij})_{i,j=1,3}$ cu $b_{ij} = 1, \forall\, i, j = 1, 2, 3$. Se ştie că $\det A = 1,\ \det(A + B) = 1$. Să se calculeze $\det(A + 2011B)$.
(Seventh Internet Mathematics Olympiad for Students, 2011)

Problema 2.5.16. Determinaţi rangurile matricelor:

$$a)\ \ A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 6 & 2 \\ 4 & 5 & 8 & 10 \end{pmatrix},\ \ b)\ \ A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$c)\ \ A = \begin{pmatrix} 2 & 10 & -12 & 1 \\ 2 & \alpha & -2 & 2 \\ 4 & -1 & 2\alpha & 5 \end{pmatrix},\ \ d)\ \ A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & 2 & 1 \\ \alpha & 2\beta - 1 & 3 & 1 \\ \alpha & \beta & \beta + 3 & 2\beta - 1 \end{pmatrix},\ \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

Problema 2.5.17. Fie $A \in \mathcal{M}_{3,2}(\mathbb{R})$, $B \in \mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})$ două matrice al căror produs este $AB = \begin{pmatrix} 8 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & 4 \\ -2 & 4 & 5 \end{pmatrix}$. Demonstraţi că $BA = \begin{pmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}$.

Problema 2.5.18. Să se demonstreze următoarele proprietăţi

a) $(A^{-1})^{-1} = A$, *b)* $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$,
c) $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$, *d)* $(\lambda A)^{-1} = \dfrac{1}{\lambda} A^{-1},\ \lambda \neq 0$.

Problema 2.5.19. Să se determine inversele matricelor:

$$a)\ \ A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ \ b)\ \ A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 3 & -5 & 2 \\ -3 & -4 & 5 \end{pmatrix},\ \ c)\ \ A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & \alpha \end{pmatrix},$$

$$d)\ \ A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & -1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & \dots & -1 & -1 \end{pmatrix},\ \ e)\ \ A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \alpha & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \alpha & 1 \end{pmatrix},\ \alpha \in \mathbb{R}.$$

Problema 2.5.20. Să se rezolve ecuaţiile matriceale

$$a)\ XA = B,\quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & i \\ i & -1 & 3i \\ -2 & 2i & -1 - i \end{pmatrix},\quad B = \begin{pmatrix} 10 & 20 & 30 \end{pmatrix},$$

$$b)\ AX = B,\quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Problema 2.5.21. Fie $A = (a_{ij})_{i,j=\overline{1,n}} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ şi fie $\overline{A} = (\overline{a_{ij}})_{i,j=\overline{1,n}}$ matricea ale cărei elemente sunt conjugatele elementelor matricei A. Să se demonstreze că

$$a)\ \det(\overline{A}) = \overline{\det(A)}, \quad b)\ \det(A \cdot \overline{A}) = |\det(A)|^2 \geq 0.$$

Problema 2.5.22. Se consideră matricea $A = (a_{ij})_{i,j=\overline{1,n}} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ astfel încât $a_{ij} = \overline{a_{ji}}$, $\forall i, j = \overline{1, n}$. Să se demonstreze că $\det(A) \in \mathbb{R}$.

Problema 2.5.23. Fie $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ astfel încât $AB = BA$. Demonstraţi că

$$\det(A^2 + B^2) \geq 0.$$

Problema 2.5.24. Fie $A, B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Atunci

$$\det(A + B) + \det(A - B) = 2\left(\det(A) + \det(B)\right). \tag{43}$$

Reciproc, dacă $n \geq 2$ şi pentru orice $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ are loc (43) atunci $n = 2$.

Problema 2.5.25. Să se calculeze următorii determinanţi:

$$a) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}, \quad b) \begin{vmatrix} a+b & b+c & c+a \\ a^2+b^2 & b^2+c^2 & c^2+a^2 \\ a^3+b^3 & b^3+c^3 & c^3+a^3 \end{vmatrix}, \quad a, b, c \in \mathbb{C},$$

$$c) \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & -5 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 6 & -5 & 4 & -4 \end{vmatrix}, \quad d) \begin{vmatrix} -2 & 5 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 3 & 7 \\ 3 & -1 & 0 & 5 \\ 2 & 6 & -4 & 1 \end{vmatrix}.$$

Problema 2.5.26. Să se calculeze determinantul:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 0 \\ 4 & 5 & 6 & 0 & 0 \\ 5 & 6 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

(Internet Mathematics Olympiad Team Contest, 2008)

Problema 2.5.27. Să se arate prin inducţie matematică următoarea relaţie:

$$V(a_1, a_2, \ldots, a_n) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ a_1 & a_2 & \ldots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & \ldots & a_n^2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & \ldots & a_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \leq j < i \leq n} (a_i - a_j),$$

$a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{C}$. *(determinant Vandermonde)*

Problema 2.5.28. Fie $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{C}$ şi matricele:

$$V = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ a_1 & a_2 & \ldots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & \ldots & a_n^2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & \ldots & a_n^{n-1} \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ -a_n & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & -a_n & 1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & -a_n & 1 \end{pmatrix}.$$

Să se calculeze $\det(A)$, $\det(AV)$ şi să se deducă formula de recurenţă pentru calculul determinantului Vandermonde $\det(V)$.

Problema 2.5.29. Fie $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{C}$ şi matricea

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \ldots & a_n \\ a_n & a_1 & a_2 & \ldots & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_n & a_1 & \ldots & a_{n-2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_2 & a_3 & a_4 & \ldots & a_1 \end{pmatrix}.$$

Să se demonstreze că $\det(A) = f(\varepsilon_1) f(\varepsilon_2) \ldots f(\varepsilon_n)$, unde $f(x) = a_1 + a_2 x + a_3 x^2 + \ldots + a_n x^{n-1}$ iar $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$ sunt rădăcinile de ordin n ale unităţii (soluţiile ecuaţiei $x^n = 1$).

Problema 2.5.30. Fie $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, matrice cu blocuri de forma

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$$

unde $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$, $D \in \mathcal{M}_q(\mathbb{K})$, $p + q = n$. În ipoteza $D \in GL_q(\mathbb{K})$, să se demonstreze echivalenţa următoarelor afirmaţii:

i) $M \in GL_n(\mathbb{K})$;

ii) $A - BD^{-1}C \in GL_q(\mathbb{K})$.

Când M este inversabilă să se arate că:

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} T & -TBD^{-1} \\ -D^{-1}CT & D^{-1}\left(I_q + CTBD^{-1}\right) \end{pmatrix}$$

unde $T = \left(A - BD^{-1}C\right)^{-1}$.

Problema 2.5.31. Fie $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ nesingulară şi $B = \begin{pmatrix} \alpha A & \beta A \\ \gamma A & \delta A \end{pmatrix}$ cu $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{K}$. Să se arate că dacă $\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$, atunci B este nesingulară şi în acest caz să se determine B^{-1} în funcţie de A^{-1}.

Problema 2.5.32. Folosind partiţionarea în blocuri de tip $(2, 2)$ să se arate că următoarea matrice este inversabilă şi să se determine inversa ei.

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Problema 2.5.33. Să se calculeze determinanţii următoarelor matrice cu blocuri:

$a)$ $P = \begin{pmatrix} A & 0_n \\ 0_n & D \end{pmatrix}$, $b)$ $Q = \begin{pmatrix} A & B \\ 0_n & D \end{pmatrix}$, $\quad A, B, D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$,

$c)$ $R = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$, $\quad A, B, C, D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $\det(A) \neq 0$ sau $\det(D) \neq 0$.

Problema 2.5.34. Să se rezolve următoarele sisteme liniare:

$a)\ \begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ 3x_1 - 2x_2 - 5x_3 + 4x_4 = -30 \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 17 \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 2, \end{cases}$ $\quad b)\ \begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 1 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 + 3x_4 = 2 \\ 8x_1 - x_2 + x_3 + 11x_4 = 8, \end{cases}$

$c)\ \begin{cases} 3x_1 - x_2 + x_3 + 5x_4 = 2 \\ x_1 - 2x_2 - x_3 - 3x_4 = 4 \\ -2x_1 + 5x_2 + x_3 - 2x_4 = 8 \\ -x_1 + x_2 + 2x_3 + 11x_4 = -20, \end{cases}$ $\quad d)\ \begin{cases} x_1 - 2x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 5 \\ 2x_1 - 3x_2 - 4x_3 + 6x_4 = 2 \\ -3x_1 + 4x_2 + x_3 - 6x_4 = 5 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 8x_4 = -10. \end{cases}$

Problema 2.5.35. Utilizând descompunerea în matrice bloc să se rezolve următorul sistem.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ -6 & 5 & 3 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & -3 & 2 & 1 & -1 & -2 \\ -9 & 7 & 1 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 11 \\ 5 \\ 13 \\ 5 \\ 10 \end{pmatrix}.$$

Problema 2.5.36. Să se discute după parametrii reali $m, n \in \mathbb{R}$ următoarele sisteme:

$a)\ \begin{cases} 5x_1 - 3x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 3 \\ 4x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 7x_4 = 1 \\ 8x_1 - 6x_2 - x_3 - 5x_4 = 9 \\ 7x_1 - 3x_2 + 7x_3 + 17x_4 = m, \end{cases}$

$b)\ \begin{cases} mx_1 + x_2 + x_3 = 4 \\ (m+1)x_1 + (n+1)x_2 + 2x_3 = 7 \\ x_1 + 2nx_2 + x_3 = 4. \end{cases}$

Problema 2.5.37. Să se rezolve următoarele sisteme omogene:

$a)\ \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 - 3x_4 = 0 \\ 3x_1 + 5x_2 + 6x_3 - 4x_4 = 0 \\ 3x_1 + 8x_2 + 24x_3 - 19x_4 = 0 \\ 4x_1 + 5x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0, \end{cases}$ $\quad b)\ \begin{cases} x_1 + 4x_2 + x_3 - 2x_4 = 0 \\ 2x_1 - 5x_2 - 4x_3 + 2x_4 = 0 \\ 5x_1 + 3x_2 - 3x_3 + 4x_4 = 0 \\ 2x_1 + mx_2 - 2x_3 = 0, \end{cases} \quad m \in \mathbb{R}.$

Problema 2.5.38. Să se determine toate soluţiile sistemului

$$\begin{cases} x_5 + x_2 = yx_1 \\ x_1 + x_3 = yx_2 \\ x_2 + x_4 = yx_3 \\ x_3 + x_5 = yx_4 \\ x_4 + x_1 = yx_5, \ \ y \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

(Fourth Internet Mathematics Olympiad for Students, 2009)

CAPITOLUL 3

Spaţii vectoriale. Spaţii euclidiene

3.1. Definiţie şi exemple

Noţiunea de spaţiu vectorial reprezintă una dintre cele mai importante structuri algebrice, cu numeroase aplicaţii în diferite ramuri ale matematicii.

Fie $\mathbb{V}$ o mulţime nevidă şi $\mathbb{K}$ un corp comutativ, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ sau $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

Definiţia 3.1.1. *O aplicaţie* $\varphi\colon \mathbb{V}\times\mathbb{V} \to \mathbb{V}$*, definită prin* $(x, y) \to \varphi(x, y) \in \mathbb{V}$*, se numeşte lege de compoziţie (internă) pe* $\mathbb{V}$*.*

Definiţia 3.1.2. *O aplicaţie* $f\colon \mathbb{K}\times\mathbb{V} \to \mathbb{V}$*, definită prin* $(\alpha, x) \to f(\alpha, x) \in \mathbb{V}$*, se numeşte lege de compoziţie externă pe* $\mathbb{V}$*.*

Observaţia 3.1.3. De obicei, pentru legile de compoziţie se utilizează notaţiile $\oplus$, $\otimes$, $*$, $\circ$, $\perp$, $\top$, etc.

Definiţia 3.1.4. *O mulţime nevidă* $\mathbb{V}$*, înzestrată cu două legi de compoziţie, una internă,* $+\colon \mathbb{V}\times\mathbb{V} \to \mathbb{V}$ *şi alta externă* $\cdot\colon \mathbb{K}\times\mathbb{V} \to \mathbb{V}$ *se numeşte* **spaţiu vectorial** *peste* $\mathbb{K}$ *(pe scurt,* $\mathbb{K}$*-spaţiu vectorial), dacă sunt îndeplinite axiomele:*

I. $(\mathbb{V}, +)$ *este grup abelian, adică* :
  a) $(x + y) + z = x + (y + z),\ (\forall)\, x, y, z \in \mathbb{V}$;
  b) $\exists\theta_{\mathbb{V}} \in \mathbb{V}$ *astfel încât* $x + \theta_{\mathbb{V}} = \theta_{\mathbb{V}} + x = x,\ (\forall)\, x \in \mathbb{V}$;
  c) $(\forall)\, x \in \mathbb{V},\ \exists(-x) \in \mathbb{V}$ *astfel încât* $x + (-x) = (-x) + x = 0$;
  d) $x + y = y + x,\ (\forall)\, x, y \in \mathbb{V}$;

II.
  a) $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$;
  b) $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$;
  c) $\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x$;
  d) $1x = x,\ (\forall)\, \alpha, \beta \in \mathbb{K},\ (\forall)\, x, y \in \mathbb{V}, 1$ *fiind elementul unitate din corpul* $\mathbb{K}$.

Elementele corpului $\mathbb{K}$ se numesc *scalari*, elementele din $\mathbb{V}$ se numesc *vectori*, iar legea de compoziţie externă se numeşte *înmulţirea vectorilor cu scalari.* În cazul în care $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $\mathbb{V}$ se numeşte spaţiu vectorial *real*, iar dacă $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, atunci $\mathbb{V}$ se numeşte spaţiu vectorial *complex.*

Observaţia 3.1.5. A nu se face confuzie între notaţiile „+” şi „·” de pe $\mathbb{V}$ cu notaţiile „+” şi „·” de pe $\mathbb{K}$.

Propoziţia 3.1.6. *Într-un $\mathbb{K}$-spaţiu vectorial au loc proprietăţile:*

$$\begin{aligned}
&1)\ (\alpha-\beta)x=\alpha x-\beta y,\ (\forall)\,\alpha,\beta\in\mathbb{K},\ (\forall)\,x\in\mathbb{V};\\
&2)\ \alpha(x-y)=\alpha x-\alpha y,\ (\forall)\,\alpha\in\mathbb{K},\ (\forall)\,x,y\in\mathbb{V};\\
&3)\ 0x=\theta_{\mathbf{V}},\ (\forall)\,x\in\mathbb{V};\\
&4)\ \alpha\theta_{\mathbf{V}}=\theta_{\mathbf{V}},\ (\forall)\,x\in\mathbb{V};\\
&5)\ (-\alpha)x=\alpha(-x)=-\alpha x,\ (\forall)\,\alpha\in\mathbb{K},\ (\forall)\,x\in\mathbb{V};\\
&6)\ \textit{dacă}\ \alpha x=\theta_{\mathbf{V}},\ \textit{atunci}\ \alpha=0\ \textit{sau}\ x=\theta_{\mathbf{V}}.
\end{aligned}$$

Demonstraţie.

1) Avem $\alpha x=(\alpha-\beta+\beta)x=(\alpha-\beta)x+\beta x$, de unde rezultă $\alpha x-\beta x=(\alpha-\beta)x$.

2) Avem $\alpha x=\alpha(x-y+y)=\alpha(x-y)+\alpha y$, de unde rezultă $\alpha x-\alpha y=\alpha(x-y)$.

3) În 1), se consideră $\alpha=\beta$.

4) În 2), se ia $y=x$.

5) $(-\alpha)x=(0-\alpha)x=0x-\alpha x=\theta_{\mathbf{V}}-\alpha x=-\alpha x$. □

Exemplele 3.1.7. 1. $(\mathbb{K},+,\cdot)$ este spaţiu vectorial peste el însuşi cu operaţiile corpului $\mathbb{K}$.

2. Mulţimea $\mathbb{K}^n=\mathbb{K}\times\mathbb{K}\times\cdots\times\mathbb{K}=\{(x_1,x_2,\ldots,x_n)\,|\,x_i\in\mathbb{K}, i=\overline{1,n}\}$, unde $\mathbb{K}$ este un corp comutativ, este un $\mathbb{K}$-spaţiu vectorial, numit *spaţiul aritmetic*, în raport cu legile de compoziţie:

$$\begin{aligned}
&(\forall)\,\alpha\in\mathbb{K},\ (\forall)\,x,y\in\mathbb{K}^n,\ x=(x_1,x_2,\ldots,x_n),\ y=(y_1,y_2,\ldots,y_n),\\
&+\colon\mathbb{K}^n\times\mathbb{K}^n\to\mathbb{K}^n,\ x+y=(x_1+y_1,x_2+y_2,\ldots,x_n+y_n);\\
&\cdot\colon\mathbb{K}\times\mathbb{K}^n\to\mathbb{K}^n,\ \alpha x=(\alpha x_1,\alpha x_2,\cdots,\alpha x_n).
\end{aligned}$$

3. Mulţimea matricelor $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ este un $\mathbb{K}$-spaţiu vectorial în raport cu operaţiile:

$$\begin{aligned}
A+B&=(a_{ij}+b_{ij})_{\substack{i=\overline{1,m}\\ j=\overline{1,n}}},\ (\forall)\,A=(a_{ij})_{\substack{i=\overline{1,m}\\ j=\overline{1,n}}},B=(b_{ij})_{\substack{i=\overline{1,m}\\ j=\overline{1,n}}}\in\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})\\
\alpha A&=(\alpha a_{ij})_{\substack{i=\overline{1,m}\\ j=\overline{1,n}}},\ (\forall)\,A=(a_{ij})_{\substack{i=\overline{1,m}\\ j=\overline{1,n}}}\in\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K}),\ (\forall)\,\alpha\in\mathbb{K}.
\end{aligned}$$

4. Mulţimea $\mathbb{R}[X]_{\le n}=\{P\in\mathbb{R}[X]\,|\,\operatorname{grad}P\le n\}$ este un $\mathbb{R}$-spaţiu vectorial în raport cu operaţiile de adunare a polinoamelor şi înmulţire a polinoamelor cu scalari.

5. Mulţimea soluţiilor unui sistem liniar şi omogen formează un spaţiu vectorial peste corpul $\mathbb{K}$ al coeficienţilor acestui sistem. Soluţiile unui sistem de m ecuaţii şi n necunoscute pot fi privite ca elemente din $\mathbb{K}^n$ şi se adună, respectiv se înmulţesc cu scalari respectând operaţiile definite pe $\mathbb{K}^n$.

3.2. Subspaţii vectoriale

Fie $\mathbb{V}$ un $\mathbb{K}$-spaţiu vectorial şi $\mathbb{W}\subset\mathbb{V}$ o submulţime nevidă.

Definiţia 3.2.1. $\mathbb{W}$ *se numeşte* **subspaţiu vectorial** *al lui* $\mathbb{V}$ *dacă operaţiile algebrice de pe* $\mathbb{V}$ *induc pe* $\mathbb{W}$ *o structură de* $\mathbb{K}$*-spaţiu vectorial.*

Propoziţia 3.2.2. *Dacă* $\mathbb{W}$ *este o submulţime nevidă a* $\mathbb{K}$*-spaţiului vectorial* $\mathbb{V}$*, atunci următoarele afirmaţii sunt echivalente:*

1) $\mathbb{W}$ *este subspaţiul vectorial în* $\mathbb{V}$;
2) $(\forall)\, x, y \in \mathbb{W},\ (\forall)\, \alpha \in \mathbb{K}$ *rezultă* $x + y \in \mathbb{W}$ *şi* $\alpha x \in \mathbb{W}$;
3) $(\forall)\, x, y \in \mathbb{W},\ (\forall)\, \alpha, \beta \in \mathbb{K}$ *rezultă* $\alpha x + \beta y \in \mathbb{W}$.

Demonstraţie.

1) $\Rightarrow$ 2) Evident.

2) $\Rightarrow$ 3) Fie $x, y \in \mathbb{W}$ şi $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$. Din 2), rezultă $\alpha x, \beta y \in \mathbb{W}$ şi $\alpha x + \beta y \in \mathbb{W}$.

3) $\Rightarrow$ 1) Se ia $\alpha = 1$, $\beta = -1$ în 3) şi se obţine $x - y \in \mathbb{W}$, deci $\mathbb{W}$ este subgrup în $(\mathbb{V}, +)$.

Se ia $\beta = 0$ în 3) şi se obţine că pentru $(\forall)\, \alpha \in \mathbb{K}$, $(\forall)\, x \in \mathbb{W}$ avem $\alpha x \in \mathbb{W}$. Deci $\mathbb{W}$ este subspaţiu în $\mathbb{V}$. □

Exemplele 3.2.3. 1. Mulţimea $\{\theta_{\mathbb{V}}\} \subset \mathbb{V}$ este un subspaţiu în $\mathbb{V}$, numit subspaţiul *nul* al lui $\mathbb{V}$. De asemenea $\mathbb{V}$ este un subspaţiu vectorial în $\mathbb{V}$; $\{\theta_{\mathbb{V}}\}$ şi $\mathbb{V}$ se numesc *subspaţii improprii*. Orice alt subspaţiu al lui $\mathbb{V}$ se numeşte *subspaţiu propriu*.

2. Mulţimea $\mathbb{R}[X]_{\leq n} = \{P \in \mathbb{R}[X] \,|\, \operatorname{grad} P \leq n\}$ este un subspaţiu vectorial al spaţiului vectorial al polinoamelor cu coeficienţi reali.

3. Submulţimea $\mathbb{W} = \{(x_1, x_2) \,|\, 3x_1 - 5x_2 = 0\}$ este un subspaţiu vectorial al spaţiului aritmetic $\mathbb{R}_2$.

4. Submulţimea $\mathbb{W} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & x \\ 0 & 0 \\ x + y & z \end{pmatrix} \middle|\, x, y, z \in \mathbb{R} \right\}$ este un subspaţiu vectorial în $\mathbb{R}$-spaţiul vectorial $\mathcal{M}_{3,2}(\mathbb{R})$.

5. În spaţiul aritmetic $\mathbb{R}^3$, dreptele şi planele care conţin originea sunt subspaţii vectoriale.

6. Fie $\mathbb{V}$ un spaţiu vectorial. Dacă W este o submulţime a lui $\mathbb{V}$ care nu conţine vectorul nul $\theta_{\mathbb{V}}$, atunci W nu poate fi subspaţiu vectorial.

Definiţia 3.2.4. *Fie* $\mathbb{K}$*-spaţiu vectorial* $\mathbb{V}$ *şi* $\mathbb{V}_1$*,* $\mathbb{V}_2$ *două subspaţii vectoriale ale lui* $\mathbb{V}$*. Mulţimea* $\mathbb{V}_1 + \mathbb{V}_2 = \{x_1 + x_2 \,|\, x_1 \in \mathbb{V}_1, x_2 \in \mathbb{V}_2\}$ *se numeşte* **suma subspaţiilor** $\mathbb{V}_1$ *şi* $\mathbb{V}_2$.

Propoziţia 3.2.5. *Fie* $\mathbb{K}$*-spaţiul vectorial* $\mathbb{V}$ *şi* $\mathbb{V}_1$*,* $\mathbb{V}_2$ *două subspaţii vectoriale ale lui* $\mathbb{V}$*. Atunci:*

a) $\mathbb{V}_1 \cap \mathbb{V}_2$ *este subspaţiu în* $\mathbb{V}$; b) $\mathbb{V}_1 + \mathbb{V}_2$ *este subspaţiu în* $\mathbb{V}$.

Demonstraţie.

a) Fie $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ şi $x, y \in \mathbb{V}_1 \cap \mathbb{V}_2$. Atunci $x, y \in \mathbb{V}_1$ şi $x, y \in \mathbb{V}_2$.

Cum $\mathbb{V}_1$ şi $\mathbb{V}_2$ sunt subspaţii, rezultă că $\alpha x + \beta y \in \mathbb{V}_1$ şi $\alpha x + \beta y \in \mathbb{V}_2$, deci $\alpha x + \beta y \in \mathbb{V}_1 \cap \mathbb{V}_2$.

b) Fie $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ şi $x, y \in \mathbb{V}_1 + \mathbb{V}_2$. Atunci există $x_1, y_1 \in \mathbb{V}_1$, $x_2, y_2 \in \mathbb{V}_2$ astfel încât $x = x_1 + x_2$ şi $y = y_1 + y_2$.

Astfel $\alpha x + \beta y = \alpha(x_1 + x_2) + \beta(y_1 + y_2) = (\alpha x_1 + \beta y_1) + (\alpha x_2 + \beta y_2)$. Întrucât $\mathbb{V}_1$ şi $\mathbb{V}_2$ sunt subspaţii, $\alpha x_1 + \beta y_1 \in \mathbb{V}_1$ şi $\alpha x_2 + \beta y_2 \in \mathbb{V}_2$. Aşadar, $\alpha x + \beta y \in \mathbb{V}_1 + \mathbb{V}_2$, de unde rezultă că $\mathbb{V}_1 + \mathbb{V}_2$ este un subspaţiu vectorial în $\mathbb{V}$. □

Observaţia 3.2.6. Submulţimea $\mathbb{V}_1 \cup \mathbb{V}_2 \subset \mathbb{V}$ nu este un subspaţiu vectorial.

Propoziţia 3.2.7. *Fie $\mathbb{V}_1$ şi $\mathbb{V}_2$ două subspaţii vectoriale ale $\mathbb{K}$-spaţiului vectorial $\mathbb{V}$ şi $\mathbb{V} = \mathbb{V}_1 + \mathbb{V}_2$. Descompunerea $\mathbb{V} = \mathbb{V}_1 + \mathbb{V}_2$ este unică dacă şi numai dacă $\mathbb{V}_1 \cap \mathbb{V}_2 = \{\theta_{\mathbb{V}}\}$.*

Pe baza acestei propoziţii se introduce următoarea:

Definiţia 3.2.8. *Fie $\mathbb{V}_1$ şi $\mathbb{V}_2$ două subspaţii vectoriale ale lui $\mathbb{V}$, $\mathbb{V}_1 \cap \mathbb{V}_2 = \{\theta_{\mathbb{V}}\}$. Suma $\mathbb{V}_1 + \mathbb{V}_2$ se numeşte* **sumă directă** *şi se notează $\mathbb{V}_1 \oplus \mathbb{V}_2$.*

În plus, dacă $\mathbb{V}_1 \oplus \mathbb{V}_2 = \mathbb{V}$, atunci $\mathbb{V}_1$ şi $\mathbb{V}_2$ se numesc **subspaţii suplimentare** .

Exemplul 3.2.9. Orice funcţie $f\colon (-a, a) \to \mathbb{R}$ este suma dintre o funcţie pară şi una impară:

$$f(x) = \frac{1}{2}[f(x) + f(-x)] + \frac{1}{2}[f(x) - f(-x)], \quad (\forall)\, x \in (-a, a).$$

În plus, singura funcţie pară şi impară este funcţia zero. Aşadar, subspaţiul funcţiilor pare şi subspaţiul funcţiilor impare sunt suplimentare.

Definiţia 3.2.10. *Fie $\mathbb{V}$ un $\mathbb{K}$-spaţiu vectorial şi $S = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\} \subset \mathbb{V}$ o submulţime nevidă a lui $\mathbb{V}$. Un vector de forma $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_n x_n$, $\alpha_i \in \mathbb{K}$, $x_i \in S$, $i = \overline{1, n}$ se numeşte* **combinaţie liniară** *finită de elemente din S. Se notează cu* $\operatorname{Span}(S) = \left\{ \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i \,\middle|\, \alpha_i \in \mathbb{K}, x_i \in S, i = \overline{1, n} \right\}$ *mulţimea tuturor combinaţiilor liniare de vectori din S, cu coeficienţi din $\mathbb{K}$.*

Propoziţia 3.2.11. $\operatorname{Span}(S)$ *este subspaţiu vectorial în $\mathbb{V}$.*

Demonstraţie. Fie $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ şi $x, y \in \operatorname{Span}(S)$. Există $\alpha_i, \beta_i \in \mathbb{K}$, $i = \overline{1, n}$ astfel încât $x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i$ şi $y = \sum_{i=1}^{n} \beta_i x_i$. Atunci $\alpha x + \beta y = \sum_{i=1}^{n} (\alpha\alpha_i + \beta\beta_i) x_i$ şi cum $\alpha\alpha_i + \beta\beta_i \in \mathbb{K}$, $i = \overline{1, n}$, rezultă că $\operatorname{Span}(S)$ este subspaţiu în $\mathbb{V}$. □

Definiţia 3.2.12. $\operatorname{Span}(S)$ *se numeşte* **subspaţiul generat** *de S sau acoperirea liniară a lui S.*

Observaţiile 3.2.13. 1. Dacă S este mulţimea vidă, atunci $\operatorname{Span}(S) = \{\theta_{\mathbb{V}}\}$.

2. $\mathbb{V}_1 + \mathbb{V}_2 = \operatorname{Span}(\mathbb{V}_1 \cup \mathbb{V}_2)$.

3. $\operatorname{Span}(S)$ coincide cu intersecţia tuturor subspaţiilor lui $\mathbb{V}$ ce conţine pe S.

4. Diferite submulţimi de vectori din $\mathbb{V}$ pot genera acelaşi subspaţiu vectorial. De exemplu, mulţimile

$$\{1, X, X^2, \ldots, X^n\}, \quad \left\{1, \frac{X}{1!}, \frac{X^2}{2!}, \ldots, \frac{X^n}{n!}\right\}, \quad \{1, 1 - X, (1 - X)^2, \ldots, (1 - X)^n\}$$

generează spaţiul vectorial al polinoamelor de grad cel mult n.

Exemplul 3.2.14. Se consideră subspaţiile vectoriale $\mathbb{V}_1$ şi $\mathbb{V}_2$ generate de vectorii $w_1 = (1;5)$, $w_2 = (-1;-10)$, $w_3 = (3;15)$, respectiv $u_1 = (-1;-4)$, $u_2 = (-1;2)$, $u_3 = (2;0)$. Să se determine subspaţiile $\mathbb{V}_1 + \mathbb{V}_2$ şi $\mathbb{V}_1 \cap \mathbb{V}_2$.

Întrad-evăr, deoarece $\mathbb{V}_1 + \mathbb{V}_2 = \text{Span}(\mathbb{V}_1 \cup \mathbb{V}_2)$, rezultă că orice $v \in \mathbb{V}_1 + \mathbb{V}_2$ se scrie sub forma $v = k_1w_1 + k_2w_2 + k_3w_3 + k_4u_1 + k_5u_2 + k_6u_3$. Subspaţiul $\mathbb{V}_1 \cap \mathbb{V}_2$ este format din vectorii pentru care $\alpha_1w_1 + \alpha_2w_2 + \alpha_3w_3 = \beta_1u_1 + \beta_2u_2 + \beta_3u_3$, relaţie echivalentă cu sistemul

$$\begin{cases} \alpha_1 - 2\alpha_2 + 3\alpha_3 = -\beta_1 - \beta_2 + 2\beta_3 \\ 5\alpha_1 - 10\alpha_2 + 15\alpha_3 = -4\beta_1 + 2\beta_2. \end{cases}$$

Rangul matricei sistemului este 1, deci compatibilitatea este asigurată de anularea minorului caracteristic $\beta_1 + 7\beta_2 - 10\beta_3 = 0$.

Se găseşte $\beta_1 = -7\lambda + 10\mu$, $\beta_2 = \lambda$, $\beta_3 = \mu$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Aşadar, vectorii din $\mathbb{V}_1 \cap \mathbb{V}_2$ sunt de forma $(-7\lambda + 10\mu)u_1 + \lambda u_2 + \mu u_3 = (6\lambda - 8\mu, 30\lambda - 40\mu)$.

Fie $\mathbb{V}$ un $\mathbb{K}$-spaţiu vectorial şi $S = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\} \subset \mathbb{V}$.

Definiţia 3.2.15. 1) *Sistemul de vectori S se numeşte* **liniar independent** *sau* **liber** *dacă egalitatea $\alpha_1x_1 + \alpha_2x_2 + \cdots + \alpha_nx_n = \theta_{\mathbb{V}}$, $\alpha_i \in \mathbb{K}$, $i = \overline{1,n}$ are loc numai dacă $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = 0$.*

2) *Sistemul de vectori S se numeşte* **liniar dependent** *sau* **legat** *dacă există $\alpha_i \in \mathbb{K}$, $i = \overline{1,n}$, nu toţi nuli, astfel încât $\alpha_1x_1 + \alpha_2x_2 + \cdots + \alpha_nx_n = \theta_{\mathbb{V}}$.*

Exemplele 3.2.16. 1. $S = \{\theta_{\mathbb{V}}\}$ este liniar dependent, deoarece există egalitatea $1\theta_{\mathbb{V}} = \theta_{\mathbb{V}}$ şi $1 \neq 0$.

2. $S = \{x\}$, $x \in \mathbb{V}$, $x \neq \theta_{\mathbb{V}}$ este liniar independent deoarece din $\alpha x = \theta_{\mathbb{V}}$, $x \neq \theta_{\mathbb{V}}$ rezultă $\alpha = 0$.

3. În spaţiul vectorial real aritmetic $\mathbb{R}^n$, mulţimea de vectori $S = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$, unde $e_1 = (1;0;0;\ldots;0), e_2 = (0;1;0;\ldots;0), \ldots, e_n = (0;0;\ldots;0;,1)$ este liniar independentă.

Într-adevăr, din egalitatea

$$\alpha_1e_1 + \alpha_2e_2 + \cdots + \alpha_ne_n = \theta_{\mathbb{R}^n},$$

rezultă $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) = (0, 0, \ldots, 0)$, deci $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = 0$.

4. Fie $f_1(t) = e^t$, $f_2(t) = e^{-t}$ şi $f_3(t) = \operatorname{sh} t$. Întrucât are loc egalitatea $f_1(t) - f_2(t) - 2f_3(t) = 0$, rezultă că mulţimea $\{f_1, f_2, f_3\}$ este liniar independentă.

Propoziţia 3.2.17. *Fie $\mathbb{K}$-spaţiul vectorial $\mathbb{V}$ şi submulţimea $S = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\} \subset \mathbb{V}$.*

1) *Dacă $\theta_{\mathbb{V}} \in S$, atunci S este liniar dependent.*

2) *Dacă S este liniar independent, atunci $x_i \neq \theta_{\mathbb{V}}$, $i = \overline{1,n}$.*

3) *Dacă S este liniar dependent, atunci oricare ar fi $S' \subset \mathbb{V}$, $S \subset S'$, rezultă că S' este liniar dependent.*

4) *Dacă S este liniar independent, atunci oricare ar fi $S'' \subset S$, $S'' \neq \theta_{\mathbb{V}}$, S'' este liniar independent.*

Demonstraţie.

1) Fie $x_n = \theta_{\mathbb{V}} \in S$. Are loc egalitatea $0x_1+0x_2+\cdots+1\theta_{\mathbb{V}} = \theta_{\mathbb{V}}$, care nu are toţi coeficienţii nuli, deci S este liniar dependent.

2) Dacă $x_i = \theta_{\mathbb{V}} \in S$, atunci S e liniar dependent, contradicţie.

3) S fiind liniar dependent, rezultă că există $\alpha_i \in \mathbb{K}$, $i = \overline{1,n}$, nu toţi nuli astfel încât

$$\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n = \theta_{\mathbb{V}}. \tag{44}$$

Presupunem că $S' = \{x_1, x_2, \ldots, x_n, x_{n+1}, \ldots, x_m\}$, $m \geq n$. Relaţia (45) poate fi scrisă sub forma $\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n + 0x_{n+1} + \cdots + 0x_m = \theta_{\mathbb{V}}$, care este o combinaţie liniară nulă, ce nu are toţi coeficienţii nuli. Deci S' este liniar dependent.

4) Presupunem prin reducere la absurd că S'' este liniar dependent. Din 3), rezultă că $S'' \subset S$ este liniar dependent, contradicţie. Prin urmare, S'' este liniar independent. □

Observaţia 3.2.18. Dacă anularea unei combinaţii liniare finite, formată cu vectorii $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{V}$ permite exprimarea unui vector în funcţie de ceilalţi, atunci vectorii $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sunt liniar dependenţi. În caz contrar, vectorii sunt liniar independenţi.

Definiţia 3.2.19. *Numărul maxim de vectori liniar independenţi din S, $S \subset \mathbb{V}$, se numeşte* **dimensiunea** *sau* **rangul** *lui S.*

Fie $\mathbb{V}$ un $\mathbb{K}$-spaţiu vectorial şi $S = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\} \subset \mathbb{V}$.

Definiţia 3.2.20. *S se numeşte* **sistem de generatori** *pentru $\mathbb{V}$ dacă orice vector $x \in \mathbb{V}$ se exprimă ca o combinaţie liniară de vectori din S, adică există $\alpha_i \in \mathbb{K}$, $i = \overline{1,n}$ astfel încât $x = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_n x_n$. În acest caz, spaţiul vectorial $\mathbb{V}$ se numeşte finit generat.*

Observaţiile 3.2.21. 1. Dacă $\mathbb{V}$ este generat de S, atunci $\mathbb{V} = \mathrm{Span}(S)$.

2. Orice $\mathbb{K}$-spaţiu vectorial $\mathbb{V}$ admite cel puţin un sistem de generatori, de exemplu $S = \mathbb{V}$.

Exemplele 3.2.22. 1. În $\mathbb{R}$-spaţiul aritmetic $\mathbb{R}^2$, mulţimea $S = \{(1,1),(0,1)\}$ este un sistem de generatori, deoarece orice $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ se scrie sub forma $x = \alpha(1,1) + \beta(0,1)$. Într-adevăr, ultima egalitate este echivalentă cu $\begin{cases} x_1 = \alpha \\ x_2 = \alpha + \beta, \end{cases}$ unde $\begin{cases} \alpha = x_1 \\ \beta = x_2 - x_1. \end{cases}$

2. În spaţiul vectorial real $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, mulţimea

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \middle| a, b \in \mathbb{R} \right\} \cup \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ c & d \end{pmatrix} \middle| c, d \in \mathbb{R} \right\}$$

este un sistem de generatori, deoarece orice matrice $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ se scrie sub forma $A = 1 \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ c & d \end{pmatrix}$.

Propoziţia 3.2.23. *Fie $\mathbb{K}$-spaţiul vectorial $\mathbb{V}$ şi $S = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\} \subset \mathbb{V}$ un sistem de generatori. Următoarele operaţii transformă sistemul S într-un nou sistem S', care rămâne sistem de generatori pentru $\mathbb{V}$:*

1) *schimbarea ordinii vectorilor din S;*
2) *înmulţirea unui vector din S cu un scalar nenul;*
3) *adăugarea la un vector din S a unui alt vector din S înmulţit cu un scalar nenul.*

Teorema 3.2.24 (a schimbului). *Fie $\mathbb{V}$ un $\mathbb{K}$-spaţiu vectorial, $S = \{u_1, \ldots, u_s\}$ un sistem liniar independent din $\mathbb{V}$ şi $S' = \{v_1, \ldots, v_m\}$ un sistem de generatori pentru $\mathbb{V}$. Atunci:*

1) *$s \le m$;*
2) *după o eventuală reindexare a vectorilor din S', sistemul*

$$S'' = \{u_1, \ldots, u_s, v_{s+1}, \ldots, v_m\}$$

este tot un sistem de generatori pentru $\mathbb{V}$.

Demonstraţie. Inducţie matematică după s.
Dacă $s = 1$, atunci evident $1 \le m$. Deoarece $\mathbb{V} = \mathrm{Span}(S')$ rezultă că $\exists\ a_1, ..., a_m \in \mathbb{K}$ astfel încât $u_1 = a_1v_1 + ... + a_mv_m$. Cum $u_1 \neq \theta_{\mathbb{V}}$, se poate alege $a_1 \neq 0$ şi atunci $v_1 = a_1^{-1}u_1 - a_1^{-1}a_2u_2 - ... - a_1^{-1}a_mu_m$, deci $\mathbb{V} = \mathrm{Span}(u_1, v_2, ..., v_m)$.
Presupunînd afirmaţia adevarată pentru $s - 1$ şi ţinând cont că S este sistem liniar independent, rezultă că $s - 1 \le m$ şi că există o renumerotare a vectorilor $v_1, ..., v_m$ astfel încât $\mathbb{V} = \mathrm{Span}(u_1, ..., u_{s-1}, v_s, v_{s+1}, ..., v_m)$, deci există $b_1, ..., b_m \in \mathbb{K}$ astfel încât

$$u_s = b_1u_1 + ... + b_{s-1}u_{s-1} + b_sv_s + ... + b_mv_m \ (*)$$

Dacă $s - 1 = m$, atunci $u_s = b_1u_1 + ... + b_{s-1}u_{s-1}$, contradicţie cu faptul că S este liniar independent. Deci $s - 1 \le m - 1$, de unde $s \le m$. Din $(*)$ rezultă că se poate alege $b_s \neq 0$ şi atunci avem

$$v_s = b_s^{-1}u_s - b_s^{-1}b_1u_1 - ... - b_s^{-1}b_{s-1}u_{s-1} - b_s^{-1}b_{s+1}v_{s+1} - ... - b_s^{-1}b_mv_m$$

de unde rezultă că $\mathbb{V} = \mathrm{Span}(u_1, \ldots, u_s, v_{s+1}, \ldots, v_m)$.

Observaţia 3.2.25. Conform afirmaţiei 1), într-un spaţiu vectorial, orice sistem de vectori liniar independent are mai puţine elemente decât orice sistem de generatori. Conform afirmaţiei 2), se poate înlocui în orice sistem de generatori unul sau mai mulţi vectori cu alţii, liniar independenţi, fără ca proprietatea de a fi sistem de generatori a sistemului să fie afectată.

3.3. Bază şi dimensiune

Fie $\mathbb{V}$ un $\mathbb{K}$-spaţiu vectorial.

Definiţia 3.3.1. *Un sistem de vectori $\mathcal{B} \subset \mathbb{V}$ se numeşte* **bază** *în $\mathbb{V}$ dacă:*

1) *$\mathcal{B}$ este liniar independent;* 2) *$\mathcal{B}$ este sistem de generatori pentru $\mathbb{V}$.*

Teorema 3.3.2. *Orice spaţiu vectorial nenul admite cel puţin o bază.*

Definiţia 3.3.3. *Un spaţiu vectorial* $\mathbb{V}$ *se numeşte finit dimensional dacă admite o bază finită, în caz contrar se numeşte infinit dimensional.*

Exemplele 3.3.4. 1. În spaţiul aritmetic $\mathbb{K}^n$, mulţimea $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$, unde $e_1 = (1;0;\ldots;0)$, $e_2 = (0;1;0;\ldots;0), \ldots, e_n = (0;0;\ldots;0;1)$ este o bază, numită *baza canonică.*

2. În spaţiul real al polinoamelor de grad cel mult n, $\mathbb{R}[X]_{\leq n}$, mulţimea

$$\mathcal{B} = \{1, X, X^2, \ldots, X^n\}$$

este bază.

3. În spaţiul vectorial al matricelor de tip (m,n), $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$, mulţimea

$$\mathcal{B} = \{E_{11}, E_{12}, \ldots, E_{mn}\}$$

este o bază, unde $E_{ij} = (a_{kl})_{\substack{k=\overline{1,m}\\ l=\overline{1,n}}}$ are elementele $a_{kl} = \begin{cases} 1, & (k,l) = (i,j) \\ 0, & \text{în rest.} \end{cases}$

Propoziţia 3.3.5. *Oricare două baze dintr-un* $\mathbb{K}$*-spaţiu vectorial finit generat au acelaşi număr de elemente.*

Demonstraţie. Fie $\mathcal{B}_1 = \{u_1, \ldots, u_n\}$ şi $\mathcal{B}_2 = \{v_1, \ldots, v_m\}$ două baze în $\mathbb{V}$. Se aplică de două ori teorema schimbului. $\mathcal{B}_1$ fiind liniar independent şi $\mathcal{B}_2$ fiind sistem de generatori pentru $\mathbb{V}$, rezultă că $n \leq m$. Pe de altă parte, $\mathcal{B}_1$ este şi sistem de generatori pentru $\mathbb{V}$, iar $\mathcal{B}_2$ este şi sistem liniar independent, deci $n \geq m$. În final, $n = m$. □

Definiţia 3.3.6. *Numărul de vectori dintr-o bază se numeşte dimensiune a spaţiului vectorial şi se notează cu* $\dim_{\mathbb{K}} \mathbb{V}$.

Exemplele 3.3.7. 1. $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{R}[X]_{\leq n} = n+1$.
2. $\dim_{\mathbb{R}} \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K}) = m \cdot n$.

Propoziţia 3.3.8. *Fie* $\mathbb{V}$ *un* $\mathbb{K}$*-spaţiu vectorial finit dimensional şi* $\mathcal{B} = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ *o submulţime a sa. Atunci* $\mathcal{B}$ *este o bază în* $\mathbb{V}$ *dacă şi numai dacă orice vector din* $\mathbb{V}$ *are o exprimare unică ca o combinaţie liniară de vectori din* $\mathcal{B}$.

Demonstraţie. Dacă $\mathcal{B}$ este o bază, atunci $\mathcal{B}$ este sistem de generatori pentru $\mathbb{V}$. Rezultă că orice vector $x \in \mathbb{V}$ se scrie ca o combinaţie liniară a vectorilor din $\mathcal{B}$. Unicitatea reprezentării lui x se arată astfel: dacă $x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i$ şi $x = \sum_{i=1}^{n} \beta_i x_i$, $\alpha_i, \beta_i \in \mathbb{K}$, $i = \overline{1,n}$, atunci $\sum_{i=1}^{n} (\alpha_i - \beta_i) x_i = 0$ şi cum $\mathcal{B}$ este sistem liniar independent, se obţine $\alpha_i = \beta_i$, $i = \overline{1,n}$.

Reciproc, din ipoteză, se deduce că $\mathcal{B}$ este sistem de generatori pentru $\mathbb{V}$. Pentru a arăta că $\mathcal{B}$ este liniar independent, se consideră combinaţia liniară

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_n x_n = \theta_{\mathbb{V}}.$$

Dar $\theta_{\mathbb{V}} = 0x_1 + 0x_2 + \cdots + 0x_n$. Din unicitatea reprezentării vectorului $\theta_{\mathbb{V}}$, rezultă că $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = 0$. Aşadar, $\mathcal{B}$ este bază. □

Definiţia 3.3.9. *Fie* $\mathbb{V}$ *un* $\mathbb{K}$*-spaţiu vectorial,* $\mathcal{B} = \{x_1, \dots, x_n\}$ *o bază în* $\mathbb{V}$ *şi* $x \in \mathbb{V}$*,* $x = \alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n$*,* $\alpha_i \in \mathbb{K}$*,* $i = \overline{1, n}$*. Scalarii unici* $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ *se numesc* **coordonatele vectorului** x *în baza* $\mathcal{B}$*, iar funcţia bijectivă* $f\colon \mathbb{V} \to \mathbb{K}^n$*,* $f(x) = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ *se numeşte* **sistem de coordonate** *pe* $\mathbb{V}$*.*

Propoziţia 3.3.10. *Fie* $\mathbb{V}$ *un* $\mathbb{K}$*-spaţiu vectorial de dimensiune* n*. Atunci:*
1) *orice sistem liniar independent are cel mult* n *vectori;*
2) *orice sistem liniar independent care are* n *vectori este bază în* $\mathbb{V}$*;*
3) *orice sistem de generatori ai lui* $\mathbb{V}$ *are cel puţin* n *vectori;*
4) *orice sistem de generatori ai lui* $\mathbb{V}$ *care are* n *vectori este bază.*

Teorema 3.3.11 (de existenţă a bazei unui spaţiu)**.** *Fie* $\mathbb{V}$ *un* $\mathbb{K}$*-spaţiu vectorial de dimensiune* n *şi* $S = \{x_1, x_2, \dots, x_k\}$ *o submulţime a sa, liniar independentă. Atunci există vectorii* $\{x_{k+1}, \dots, x_{k+p}\}$ *astfel încât mulţimea* $\{x_1, \dots, x_{k+p}\}$ *să formeze o bază,* $k + p = n$*.*

Altfel reformulat*: O mulţime de vectori liniar independenţi ai unui spaţiu vectorial poate fi completată până la o bază a spaţiului.*

Demonstraţie. Există două cazuri referitoare la sistemul de vectori liniar independenţi $S = \{x_1, \dots, x_k\}$.

CAZUL 1. S este un sistem de generatori ai spaţiului. Atunci $\mathrm{Span}(S) = \mathbb{V}$ şi rezultă că S formează o bază.

CAZUL 2. S nu este un sistem de generatori. Atunci există $x_{k+1} \in \mathbb{V} \setminus S$ astfel încât x_{k+1} nu poate fi scris ca o combinaţie liniară a vectorilor din S. Rezultă că $\mathcal{B} = \{x_1, x_2, \dots, x_k, x_{k+1}\}$ este liniar independentă.

$\mathcal{B}$ se poate afla în unul dintre cazurile precedente; continuând procedeul, după un număr finit de paşi, se ajunge la baza $\{x_1, x_2, \dots, x_k, x_{k+1}, \dots, x_{k+p}\}$, $k + p = n$. □

Teorema 3.3.12 (a dimensiunii)**.** *Dacă* $\mathbb{V}_1$ *şi* $\mathbb{V}_2$ *sunt două subspaţii vectoriale ale* $\mathbb{K}$*-spaţiului vectorial finit dimensional* $\mathbb{V}$*, atunci*

$$\dim_{\mathbb{K}} \mathbb{V}_1 + \dim_{\mathbb{K}} \mathbb{V}_2 = \dim_{\mathbb{K}}(\mathbb{V}_1 + \mathbb{V}_2) + \dim_{\mathbb{K}}(\mathbb{V}_1 \cap \mathbb{V}_2).$$

Demonstraţie. Notăm $\dim(\mathbb{V}_1) = r_1$ şi $\dim(\mathbb{V}_2) = r_2$. Se consideră bază $\mathcal{B} = \{e_1, \dots, e_m\} \subset \mathbb{V}_1 \cap \mathbb{V}_2$ a subspaţiului $\mathbb{V}_1 \cap \mathbb{V}_2$. Aceşti vectori sunt liniar independenţi şi, în plus, $\mathcal{B} \subset \mathbb{V}_1$. Folosind teorema de existenţă a bazei, ei pot fi completaţi până la o bază a subspaţiului $\mathbb{V}_1$, deci există $\{y_1, \dots, y_k\} \subset \mathbb{V}_1$ astfel încât $\{y_1, \dots, y_k, e_1, \dots, e_m\}$ să fie o bază în $\mathbb{V}_1$.

Dar $\mathcal{B} \subset \mathbb{V}_2$, deci există $\{z_1, \dots, z_p\} \subset \mathbb{V}_2$ astfel încât $\{z_1, \dots, z_p, e_1, \dots, e_m\}$ să fie o bază în $\mathbb{V}_2$. Cu notaţiile precedente, avem $r_1 = k + m$ şi $r_2 = p + m$.

Mai rămâne de arătat că $\{y_1, \dots, y_k, e_1, \dots, e_m, z_1, \dots, z_p\}$ este o bază a subspaţiului $\mathbb{V}_1 + \mathbb{V}_2$.

Fie combinaţia $\alpha_1 y_1 + \cdots + \alpha_k y_k + \gamma_1 e_1 + \cdots + \gamma_m e_m + \beta_1 z_1 + \cdots + \beta_p z_p = 0$. Avem $z = \beta_1 z_1 + \cdots + \beta_p z_p \in \mathbb{V}_2$, $t = \alpha_1 y_1 + \cdots + \alpha_k y_k + \gamma_1 e_1 + \cdots + \gamma_m e_m \in \mathbb{V}_1$, deci $z \in \mathbb{V}_1$, $z \in \mathbb{V}_1 \cap \mathbb{V}_2$ şi $t + z \in \mathbb{V}_1 + \mathbb{V}_2$. Atunci $z = \delta_1 e_1 + \cdots + \delta_m e_m$, $\delta_i \in \mathbb{K}$. Dar $z = \beta_1 z_1 + \cdots + \beta_p z_p$ şi se obţine

$\delta_1 e_1 + \cdots + \delta_m e_m + (-\beta_1) z_1 + \cdots + (-\beta_p) z_p = 0$, de unde $\delta_1 = \cdots = \delta_m = \beta_1 = \cdots = \beta_p = 0$, deoarece vectorii $\{e_1, \ldots, e_m, z_1, \ldots, z_p\}$ formează o bază în $\mathbb{V}_2$. În plus, $\{y_1, \ldots, y_k, e_1, \ldots, e_m\}$ sunt vectori liniar independenţi, deci rezultă că $\alpha_1 = \cdots = \alpha_k = \gamma_1 = \cdots = \gamma_m = 0$. Orice vector din subspaţiile $\mathbb{V}_1$ şi $\mathbb{V}_2$ se exprimă liniar independent în raport cu vectorii bazei corespunzătoare şi, mai mult, în raport cu vectorii $\{y_1, \ldots, y_k, e_1, \ldots, e_m, z_1, \ldots, z_p\}$. □

În continuare se va lua în discuţie modificarea coordonatelor unui vector la o schimbare de baze. Pentru aceasta, se consideră $\mathbb{V}$ un $\mathbb{K}$-spaţiu vectorial de dimensiune n şi $\mathcal{B}_1 = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$, $\mathcal{B}_2 = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ baze în $\mathbb{V}$. Orice vector din $\mathcal{B}_2$ se exprimă în mod unic în funcţie de vectorii bazei $\mathcal{B}_1$, conform relaţiilor $v_i = \sum\limits_{j=1}^{n} c_{ji} u_j$, $(\forall)\, i = \overline{1,n}$. Acest sistem defineşte o matrice pătratică de ordin n, $M = (c_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, ce reprezintă transpusa matricei coeficienţilor.

Notând $\bar{\mathcal{B}}_1 = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$, $\bar{\mathcal{B}}_2 = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$, relaţia de legătură dintre vectorii celor două baze se reprezintă matriceal sub forma $\bar{\mathcal{B}}_2 = M^T \cdot \bar{\mathcal{B}}_1$.

Definiţia 3.3.13. *Matricea M, astfel determinată, se numeşte* **matricea de trecere** *de la baza $\mathcal{B}_1$ la baza $\mathcal{B}_2$.*

Teorema 3.3.14 (de schimbare a bazei)**.** *Dacă M este matricea de trecere de la baza $\mathcal{B}_1$ la baza $\mathcal{B}_2$, iar $X_{\mathcal{B}_1}$, $X_{\mathcal{B}_2}$ sunt vectorii coloană ai coordonatelor unui vector $x \in \mathbb{V}$ în bazele $\mathcal{B}_1$, respectiv $\mathcal{B}_2$, atunci $X_{\mathcal{B}_2} = M^{-1} X_{\mathcal{B}_1}$.*

Demonstraţie. Fie $\mathcal{B}_1 = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$, $\mathcal{B}_2 = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ cele două baze. Vectorul $x \in \mathbb{V}$ admite următoarele reprezentări în cele două baze: $x = \sum\limits_{j=1}^{n} \alpha_j u_j$, respectiv $x = \sum\limits_{i=1}^{n} \beta_i v_i$.

Atunci $x = \sum\limits_{i=1}^{n} \beta_i v_i = \sum\limits_{i=1}^{n} \beta_i \left(\sum\limits_{j=1}^{n} c_{ji} u_j \right) = \sum\limits_{j=1}^{n} \left(\sum\limits_{i=1}^{n} \beta_i c_{ji} \right) u_j$. Ţinând cont că reprezentarea lui x în baza $\mathcal{B}_1$ este unică, se poate scrie $\alpha_j = \sum\limits_{i=1}^{n} \beta_i c_{ji}$, $i = \overline{1,n}$, sau sub formă matriceală $X_{\mathcal{B}_1} = M X_{\mathcal{B}_2}$, de unde $X_{\mathcal{B}_2} = M^{-1} X_{\mathcal{B}_1}$. □

Observaţia 3.3.15. Matricea de trecere M este inversabilă.
Într-adevăr, $\mathcal{B}_2$ este sistem liniar independent, deci, din combinaţia liniară $\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n = \theta_{\mathbb{V}}$, rezultă $\alpha_i = 0$, $(\forall)\, i = \overline{1,n}$.

Această implicaţie se poate reformula $\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i \left(\sum\limits_{j=1}^{n} c_{ji} u_j \right) = \theta_{\mathbb{V}}$, care este echivalentă cu $\sum\limits_{j=1}^{n} \left(\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i c_{ji} \right) u_j = \theta_{\mathbb{V}}$ şi cum $\mathcal{B}_1$ este liniar independent, rezultă sistemul $\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i c_{ji} = 0$, $(\forall)\, i = \overline{1,n}$. Acest sistem omogen admite numai soluţia banală, deci trebuie ca determinantul sistemului să fie nenul. Aşadar, matricea M este inversabilă.

3.4. Spaţii euclidiene reale. Produs scalar

În acest paragraf, spaţiul vectorial $\mathbb{E}$ va fi considerat peste corpul numerelor reale, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, aşadar definiţiile şi propoziţiile din paragraful precedent rămân valabile.

Definiţia 3.4.1. *O aplicaţie* $g\colon \mathbb{E} \times \mathbb{E} \to \mathbb{R}$, $g(x, y) = \langle x, y\rangle$ *cu proprietăţile:*

$$\begin{aligned}
&\text{I. } \langle x, y\rangle = \langle y, x\rangle,\ (\forall)\, x, y \in \mathbb{E};\\
&\text{II. } \langle x + x', y\rangle = \langle x, y\rangle + \langle x', y\rangle,\ (\forall)\, x, x' \in \mathbb{E};\\
&\text{III. } \langle \alpha x, y\rangle = \alpha\langle x, y\rangle,\ (\forall)\, x, y \in \mathbb{E},\ (\forall)\, \alpha \in \mathbb{R};\\
&\text{IV. } \langle x, x\rangle \geq 0,\ (\forall)\, x \in \mathbb{E}
\end{aligned}$$

se numeşte **produs scalar** *pe spaţiul vectorial* $\mathbb{E}$.

Definiţia 3.4.2. *Spaţiul vectorial real* $\mathbb{E}$ *pe care s-a definit un produs scalar se numeşte* **spaţiu vectorial euclidian** .

Propoziţia 3.4.3 (Inegalitatea lui Schwartz)**.** *Dacă* $\mathbb{E}$ *este un spaţiu vectorial euclidian, atunci are loc inegalitatea*

$$|\langle x, y\rangle| \leq \sqrt{\langle x, x\rangle\langle y, y\rangle}, (\forall)\, x, y \in \mathbb{E}$$

Demonstraţie. Fie $x, y \in \mathbb{E}$ şi $\lambda \in \mathbb{R}$.

Din proprietăţile produsului scalar rezultă că $\langle \lambda x+y, \lambda x+y\rangle \geq 0$, $(\forall)\, \lambda \in \mathbb{R}$ sau, echivalent,

$$\lambda^2\langle x, x\rangle + 2\lambda\langle x, y\rangle + \langle y, y\rangle \geq 0, \quad (\forall)\, \lambda \in \mathbb{R}. \tag{45}$$

Se deosebesc două cazuri:

Cazul 1. $\langle x, x\rangle = 0$.

Relaţia (45) este echivalentă cu $2\lambda\langle x, y\rangle + \langle y, y\rangle \geq 0$, $(\forall)\, \lambda \in \mathbb{R}$, de unde rezultă $\langle x, y\rangle = 0$ şi atunci $|\langle x, y\rangle| = 0 \leq \sqrt{\langle x, x\rangle\langle y, y\rangle}$, $(\forall)\, x, y \in \mathbb{E}$.

Cazul 2. $\langle x, x\rangle \neq 0$.

Relaţia (45) afirmă că polinomul de gradul doi în λ din membrul stâng are semnul lui $\langle x, x\rangle$ pentru orice $\lambda \in \mathbb{R}$, deci discriminantul $\Delta \leq 0$, inegalitate echivalentă cu $|\langle x, y\rangle| \leq \sqrt{\langle x, x\rangle\langle y, y\rangle}$, $(\forall)\, x, y \in \mathbb{E}$. □

Definiţia 3.4.4. *Se numeşte* **normă** *normă a unui vector* x *din spaţiul euclidian* $\mathbb{E}$*, numărul real pozitiv* $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$.

Din modul de definire a produsului scalar, rezultă că norma unui vector are următoarele proprietăţi:

a) $\|\alpha x\| = |\alpha|\,\|x\|$, $(\forall)\, x \in \mathbb{E}$, $(\forall)\, \alpha \in \mathbb{R}$;
b) $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = \theta_{\mathbb{E}}$;
c) $|\langle x, y\rangle| \leq \|x\|\,\|y\|$, $(\forall)\, x, y \in \mathbb{E}$ (inegalitatea lui Schwartz);
d) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$, $(\forall)\, x, y \in \mathbb{E}$ (inegalitatea lui Minkowski);
e) $|\|x\| - \|y\|| \leq \|x - y\|$, $(\forall)\, x, y \in \mathbb{E}$;
f) $\|x\| \leq \|x - y\| + \|y\|$, $(\forall)\, x, y \in \mathbb{E}$.

Definiţia 3.4.5. *Se numeşte* **distanţă** *pe spaţiul vectorial real* $\mathbb{E}$*, orice aplicaţie* $d\colon \mathbb{E}\times\mathbb{E}\to\mathbb{R}_+$*, care are proprietăţile:*

a) $d(x,y)=0 \Leftrightarrow x=y$;
b) $d(x,y)=d(y,x)$, $(\forall)\, x,y\in\mathbb{E}$;
c) $d(x,y)\le d(x,z)+d(z,y)$, $(\forall)\, x,y,z\in\mathbb{E}$.

Observaţia 3.4.6. Dacă $\mathbb{E}$ este un spaţiu euclidian, atunci aplicaţia $d\colon \mathbb{E}\times\mathbb{E}\to\mathbb{R}_+$ definită prin $d(x,y)=\|x-y\|$ este o distanţă, numită distanţă asociată normei lui $\mathbb{E}$ sau distanţa euclidiană.

Definiţia 3.4.7. *Doi vectori x, y din spaţiul euclidian* $\mathbb{E}$ *se numesc* **ortogonali** *dacă* $\langle x,y\rangle=0$.

Din egalitatea $\|x+y\|^2=\langle x+y,x+y\rangle=\|x\|^2+\|y\|^2+2\langle x,y\rangle$, rezultă: condiţia necesară şi suficientă ca doi vectori $x,y\in\mathbb{E}$ să fie ortogonali este

$$\|x+y\|^2=\|x\|^2+\|y\|^2.$$

Definiţia 3.4.8. *Fie* $\mathbb{E}$ *un spaţiu euclidian de dimensiune finită* $n\ge 2$*. O bază* $\mathcal{B}$ *a lui* $\mathbb{E}$*, ai cărei vectori sunt ortogonali doi câte doi se numeşte* **bază ortogonală** *a lui* $\mathbb{E}$.

Aşadar, baza $\mathcal{B}=\{e_1,e_2,\ldots,e_n\}$ a lui $\mathbb{E}$ este ortogonală dacă şi numai dacă $\langle e_i,e_j\rangle=0$, $(\forall)\, 1\le i<j\le n$.

Definiţia 3.4.9. *Fie* $\mathbb{E}$ *un spaţiu euclidian de dimensiune finită* $n\ge 2$*. O bază ortogonală* $\mathcal{B}$ *a lui* $\mathbb{E}$*, ai cărei vectori au toţi norma egală cu 1, se numeşte* **bază ortonormată** *a lui* $\mathbb{E}$.

Aşadar, baza $\mathcal{B}=\{e_1,e_2,\ldots,e_n\}$ a lui $\mathbb{E}$ este ortonormată dacă şi numai dacă $\langle e_i,e_j\rangle=0$, $(\forall)\, 1\le i<j\le n$ şi $\langle e_i,e_i\rangle=1$, $(\forall)\, 1\le i\le n$.

Se notează $\langle e_i,e_j\rangle=\delta_{ij}=\begin{cases}1, & i=j\\ 0, & i\neq j.\end{cases}$

Observaţia 3.4.10. Dacă $\mathcal{B}=\{e_1,e_2,\ldots,e_n\}$ este o bază ortogonală a lui $\mathbb{E}$, atunci $\mathcal{B}'=\left\{\frac{e_1}{\|e_1\|},\frac{e_2}{\|e_2\|},\ldots,\frac{e_n}{\|e_n\|}\right\}$ este o bază ortonormată a lui $\mathbb{E}$.

Propoziţia 3.4.11. *În spaţiul euclidian* $\mathbb{E}$*, de dimensiune finită* n*, orice sistem de vectori nenuli, ortogonali doi câte doi, este liniar independent.*

Demonstraţie. Fie $S=\{x_1,x_2,\ldots,x_n\}\subset\mathbb{E}$ un sistem de vectori nenuli, ortogonali, adică $\langle x_i,x_j\rangle=0$, $(\forall)\, i\neq j$. Considerând combinaţia liniară nulă a vectorilor din S: $\alpha_1x_1+\alpha_2x_2+\cdots+\alpha_nx_n=\theta_{\mathbb{E}}$ şi înmulţind-o scalar, succesiv, cu $x_1,x_2,\ldots,x_n$ se obţine $\langle \alpha_1x_1+\cdots+\alpha_nx_n,x_i\rangle=0$, $(\forall)\, i=\overline{1,n}$, adică $\alpha_i\langle x_i,x_i\rangle=0$, $(\forall)\, i=\overline{1,n}$, deci $\alpha_i=0$, $(\forall)\, i=\overline{1,n}$, ceea ce demonstrează că S este sistem de vectori liniar independent. □

Definiţia 3.4.12. *Fie* $\mathbb{E}$ *un spaţiu vectorial şi* L_1*,* L_2 *două submulţimi ale lui* $\mathbb{E}$*.* L_1*,* L_2 *se numesc ortogonale dacă orice vector din* L_1 *este ortogonal pe orice vector din* L_2*. Se notează* $L_1\perp L_2$.

În particular, dacă $L_1 = \{x\}$, $x \neq \theta_{\mathbb{E}}$, atunci $x \perp L_2$ dacă x este ortogonal pe orice vector din L_2.

Propoziţia 3.4.13. *Fie $\mathbb{E}$ un spaţiu vectorial real. Fie $\mathbb{L}$ un subspaţiu vectorial în $\mathbb{E}$ şi $\mathcal{B} \subset \mathbb{L}$ o bază a subspaţiului. Atunci $x \perp \mathbb{L} \Leftrightarrow x \perp \mathcal{B}$.*

Demonstraţie. Fie $\mathcal{B} = \{y_1, \ldots, y_k\}$ bază în $\mathbb{L}$. Dacă $x \perp \mathbb{L}$, atunci $\langle x, y_i \rangle = 0$, $(\forall)\, 1 \leq i \leq k$. Pentru un vector oarecare $z \in \mathbb{L}$, $z = \sum\limits_{i=1}^{k} \alpha_i y_i$ şi $\langle x, z \rangle = \langle x, \sum\limits_{i=1}^{k} \alpha_i y_i \rangle = \sum\limits_{i=1}^{k} \alpha_i \langle x, y_i \rangle = 0$, deci $x \perp \mathbb{L}$. □

Corolarul 3.4.14. *Orice vector al unei baze dintr-unul din spaţii este ortogonal pe o bază a celuilalt spaţiu.*

Definiţia 3.4.15. *Fie $\mathbb{E}$ un spaţiu euclidian şi $\mathbb{L}_1, \mathbb{L}_2, \ldots, \mathbb{L}_m \subset \mathbb{E}$ subspaţii vectoriale. Fie $\mathbb{L} = \mathbb{L}_1 + \mathbb{L}_2 + \cdots + \mathbb{L}_m$. $\mathbb{L}$ se numeşte sumă ortogonală de subspaţii dacă $\mathbb{L}_i \perp \mathbb{L}_j$, $(\forall)\, i \neq j$, $i, j = \overline{1, m}$.*

Teorema 3.4.16. *O sumă ortogonală de subspaţii nenule este întotdeauna sumă directă şi se notează $\mathbb{L} = \mathbb{L}_1 \oplus \mathbb{L}_2 \oplus \cdots \oplus \mathbb{L}_m$.*

Demonstraţie. Alegem în fiecare subspaţiu $\mathbb{L}_i$ o bază ortonormată şi considerăm sistemul de vectori formaţi din reuniunea bazelor subspaţiilor $\mathbb{L}_i$, $i = \overline{1, m}$.

Orice $x \in \mathbb{L}$ se exprimă ca o combinaţie liniară a acestor vectori. Ei sunt liniar independenţi, fiind vectori nenuli ortogonali (propoziţia 3.4.11).

În continuare, teorema rezultă pe baza faptului că reuniunea bazelor subspaţiilor $\mathbb{L}_i$ este o bază a spaţiului $\mathbb{L}$. □

Observaţia 3.4.17. Dacă $\mathbb{E} = \mathbb{L}_1 \oplus \mathbb{L}_2 \oplus \cdots \oplus \mathbb{L}_m$, atunci pentru $x, y \in \mathbb{E}$, rezultă $x = x_1 + x_2 + \cdots + x_m$, $x_i \in \mathbb{L}_i$ şi $y = y_1 + y_2 + \cdots + y_m$, $y_i \in \mathbb{L}_i$. Atunci produsul scalar ia forma $\langle x, y \rangle = \langle x_1, y_1 \rangle + \langle x_2, y_2 \rangle + \cdots + \langle x_m, y_m \rangle$.

Definiţia 3.4.18. *Fie L o submulţime nevidă a unui spaţiu euclidian $\mathbb{E}$. Mulţimea $\{x \in \mathbb{E} \,|\, x \perp L\}$ se numeşte* **complementul ortogonal** *al lui L şi se notează cu $L^{\perp}$.*

Definiţia 3.4.19. *Fie $\mathbb{L} \subset \mathbb{E}$, $\mathcal{B} = \{e_1, \ldots, e_s\} \subset \mathbb{L}$ o bază a subspaţiului $\mathbb{L}$ şi $x \in \mathbb{E}$. Vectorul $y = \sum\limits_{i=1}^{s} \langle x, e_i \rangle e_i$ se numeşte proiecţia lui x pe subspaţiul $\mathbb{L}$ şi se notează $\mathrm{pr}_{\mathbb{L}} x$.*

Teorema 3.4.20. *Un spaţiu euclidian $\mathbb{E}$ este o sumă directă dintre un subspaţiu vectorial al său $\mathbb{L}$ şi complementul ortogonal al acestuia $\mathbb{L}^{\perp}$, adică $\mathbb{E} = \mathbb{L} \oplus \mathbb{L}^{\perp}$.*

Demonstraţie. Fie $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, \ldots, e_s\} \subset \mathbb{L}$ o bază ortonormată a subspaţiului $\mathbb{L}$, $x \in \mathbb{E}$ şi $y = \sum_{i=1}^{s} \langle x, e_i \rangle e_i$ proiecţia lui x pe $\mathbb{L}$. Fie $z = x - y$. Deoarece

$$\begin{aligned}\langle z, y \rangle &= \langle x, y \rangle - \langle y, y \rangle = \langle x, \sum_{i=1}^{s} \langle x, e_i \rangle e_i \rangle \\ &\quad - \langle \sum_{i=1}^{s} \langle x, e_i \rangle e_i, \sum_{j=1}^{s} \langle x_j, e_j \rangle e_j \rangle \\ &= \sum_{i=1}^{s} \langle x, e_i \rangle^2 - \sum_{i=1}^{s} \sum_{j=1}^{s} \langle x, e_i \rangle \langle x, e_j \rangle \delta_{ij} \\ &= \sum_{i=1}^{s} \langle x, e_i \rangle^2 - \sum_{i=1}^{s} \langle x, e_i \rangle^2 = 0,\end{aligned}$$

rezultă că $z \in \mathbb{L}^{\perp}$.

Exprimarea unică $x = y + z$ arată că $\mathbb{E} = \mathbb{L} \oplus \mathbb{L}^{\perp}$. □

Teorema 3.4.21 (de ortonormalizare a lui Gram-Schmidt). *Dacă avem o bază $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ în spaţiul euclidian $\mathbb{E}$, de dimensiune n, atunci există o bază ortonormată $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ a lui $\mathbb{E}$ astfel încât sistemele de vectori $\{x_1, x_2, \ldots, x_p\}$ şi $\{e_1, e_2, \ldots, e_p\}$ generează acelaşi subspaţiu $\mathbb{U} \subset \mathbb{E}$, $(\forall)\, p = \overline{1, n}$.*

Demonstraţie. Mai întâi se construieşte o mulţime ortogonală $\{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$ şi apoi normăm fiecare element. Se definesc vectorii

$$\begin{aligned}&y_1 = x_1;\\ &y_j = x_j - \sum_{i=1}^{j-1} \frac{\langle x_j, y_i \rangle}{\langle y_i, y_i \rangle} y_i, \ (\forall)\, j = \overline{2, n}.\end{aligned}$$

Vectorii $y_1, y_2, \ldots, y_n$ astfel definiţi, sunt ortogonali doi câte doi, deci, conform propoziţiei anterioare, sunt liniar independenţi.

Definim vectorii $e_i = \dfrac{y_i}{\|y_i\|}$, $(\forall)\, i = \overline{1, n}$ şi rezultă că mulţimea $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ reprezintă o bază ortonormată în $\mathbb{E}$.

Întrucât vectorii $e_1, e_2, \ldots, e_p$ se exprimă în funcţie de $x_1, x_2, \ldots, x_p$, iar aceste subsisteme sunt liniar independente, rezultă $\mathrm{Span}(e_1, e_2, \ldots, e_p) = \mathrm{Span}(x_1, x_2, \ldots, x_p)$. □

Corolarul 3.4.22. *Orice spaţiu vectorial euclidian admite o bază ortonormată.*

Observaţiile 3.4.23. 1. Fie $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ o bază ortonormată în $\mathbb{E}$ şi $x, y \in \mathbb{E}$.

Atunci $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$, $y = \sum_{j=1}^{n} y_j e_j$, de unde rezultă expresia produsului scalar într-o bază ortonormată

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} x_j y_j \langle e_i, e_j \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n.$$

2. Fie $\mathcal{B}_1 = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ şi $\mathcal{B}_2 = \{f_1, f_2, \ldots, f_n\}$ două baze ortonormate în spaţiul euclidian $\mathbb{E}$. Relaţiile între elementele celor două baze sunt date de $f_j = \sum_{k=1}^{n} a_{kj} e_k$, $(\forall)\, j = \overline{1, n}$.

Dar $\mathcal{B}_2$ este ortonormată, deci

$$\delta_{ij} = \langle f_i, f_j \rangle = \sum_{k=1}^{n} \sum_{h=1}^{n} a_{ki} a_{hj} \langle e_k, e_h \rangle = \sum_{k=1}^{n} a_{ki} a_{kj},$$

relaţie echivalentă cu scrierea matriceală $A^T A = I_n$.

Prin urmare, dacă $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ este matricea de trecere de la baza ortonormată $\mathcal{B}_1$ la baza ortonormată $\mathcal{B}_2$, atunci $A^T A = I_n$, adică A este o matrice ortogonală.

Exemplul 3.4.24. Se consideră $\mathbb{E} = \mathbb{R}^3$ spaţiul euclidian canonic şi baza

$$\mathcal{B} = \{x_1 = (1; 1; -1), x_2 = (3; -1; -1), x_3 = (0; -1; 1)\}.$$

Să se determine baza ortonormată asociată.

Utilizând procedeul Gram-Schmidt, se construieşte mai întâi o mulţime ortogonală $\{y_1, y_2, y_3\}$ formată din vectorii nenuli

$$\begin{aligned} y_1 &= x_1 = (1; 1; -1); \\ y_2 &= x_2 - \frac{\langle x_2, y_1 \rangle}{\langle y_1, y_1 \rangle} y_1 = (3; -1; -1) - \frac{3}{3}(1, 1, -1) = (2; -2; 0); \\ y_3 &= x_3 - \frac{\langle x_3, y_1 \rangle}{\langle y_1, y_1 \rangle} y_1 - \frac{\langle x_3, y_2 \rangle}{\langle y_3, y_2 \rangle} y_2 \\ &= (0; 1; -1) - \frac{-2}{3}(1; 1; -1) - \frac{2}{8}(2; -2; 0) = \left(\frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{3}\right). \end{aligned}$$

Vectorii

$$e_1 = \frac{y_1}{\|y_1\|} = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right), \quad e_2 = \frac{y_2}{\|y_2\|} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right),$$

$$e_3 = \frac{y_3}{\|y_3\|} = \left(\frac{\sqrt{6}}{6}, \frac{\sqrt{6}}{6}, \frac{\sqrt{6}}{3}\right),$$

formează o bază ortonormată.

3.5. Probleme propuse

Problema 3.5.1. Fie $a \in \mathbb{R}$ fixat. Să se stabilească dacă legile de compoziţie

$$\begin{aligned} &\oplus \colon \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \oplus y = x + y - a; \\ &\odot \colon \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ \alpha \odot x = \alpha x + (1 - \alpha) a, \end{aligned}$$

determină o structură de spaţiu vectorial real pe mulţimea $\mathbb{R}$.

Problema 3.5.2. Să se arate că mulţimea $(0, \infty)$ este un spaţiu vectorial real în raport cu legile de compoziţie

$$\begin{aligned} &\oplus \colon (0, \infty) \times (0, \infty) \to (0, \infty),\ x \oplus y = xy; \\ &\odot \colon \mathbb{R} \times (0, \infty) \to (0, \infty),\ \alpha \odot x = x^\alpha. \end{aligned}$$

Problema 3.5.3. Să se arate că mulţimea $S = \{(\alpha - 2\beta; \alpha + 3\beta; \beta) \,|\, \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$ este un subspaţiu vectorial al spaţiului vectorial real $\mathbb{R}^3$. Determinaţi o bază în S, precum şi $\dim_{\mathbb{R}} S$.

Problema 3.5.4. Se consideră mulţimea

$$L = \left\{ A \in M_{2,3}(\mathbb{R}) \middle| A = \begin{pmatrix} x & 0 & y \\ 0 & u & z \end{pmatrix}, x, y, u, z \in \mathbb{R}, x = y + z \right\}$$

a) Să se arate că L este un subspaţiu vectorial al lui $\mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})$.
b) Determinaţi o bază în L, precum şi $\dim_{\mathbb{R}} L$.

Problema 3.5.5. Se consideră sistemul omogen

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0. \end{cases}$$

Să se rezolve sistemul. Să se arate că mulţimea soluţiilor sistemului este un subspaţiu vectorial în $\mathbb{R}^4$. Determinaţi o bază în subspaţiul soluţiilor sistemului.

Problema 3.5.6. În spaţiul vectorial real $\mathfrak{F}(\mathbb{R}) = \{f \mid f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}$ se consideră mulţimea $S = \{f_1, f_2, \dots, f_n\}$, unde $f_i(x) = e^{a_i x}$, $i = \overline{1, n}$, $a_i \in \mathbb{R}$, distincte. Să se arate că S este liniar independentă.

Problema 3.5.7. Fie $f \in \mathbb{R}[X]_{\leq n}$ un polinom de grad n. Să se arate că mulţimea

$$S = \{f, f', \dots, f^{(n)}\},$$

unde $f^{(k)}$ este derivata de ordinul k a polinomului f, este liniar independentă în spaţiul vectorial $\mathbb{R}[X]_{\leq n} = \{h \in \mathbb{R}[X] \mid \operatorname{grad} h \leq n\}$.

Problema 3.5.8. Să se arate că sistemul de vectori $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ din spaţiul vectorial real $\mathbb{R}^3$, unde $v_1 = (1; 1; 0)$, $v_2 = (1; 0; 1)$, $v_3 = (0; 1; 1)$ şi $v_4 = (1; 1; 1)$ este liniar dependent.

Problema 3.5.9. În spaţiul vectorial real $\mathbb{R}^3$ se consideră vectorii $v_1 = (1; 2; 3)$, $v_2 = (2; 3; 1)$, $v_3 = (\alpha + 3, \alpha + 1, \alpha + 2)$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Ştiind că vectorii v_1, v_2 şi v_3 sunt liniar dependenţi, să se determine α.

Problema 3.5.10. Să se stabilească dacă vectorul $v = (4; -2; 0; 3)$ din spaţiul vectorial real $\mathbb{R}^4$ este o combinaţie liniară a vectorilor $v_1 = (3; 9; -4; -2)$, $v_2 = (2; 3; 0; -1)$ şi $v_3 = (2; -1; 2; 1)$.

Problema 3.5.11. Să se determine baza din spaţiul vectorial $\mathbb{R}^3$ în raport cu care vectorii $u_1 = (1; 0; 0)$, $u_2 = (1; 1; 0)$, $u_3 = (1; 1; 1)$ au respectiv componentele u_3, u_2, u_1.

Problema 3.5.12. Să se găsească coordonatele polinomului $p(x) = 3x^2 - x + 4$ în raport cu baza $\mathcal{B} = \{p_1(x), p_2(x), p_3(x)\}$, unde $p_1(x) = x^2 - 1$, $p_2(x) = 2x + 1$, $p_3(x) = x^2 + 3$.

Problema 3.5.13. În spaţiul vectorial real $\mathbb{R}^3$ se consideră baza canonică

$$\mathcal{B} = \{e_1 = (1; 0; 0), e_2 = (0; 1; 0), e_3 = (0; 0; 1)\}$$

şi o altă bază $\mathcal{B}' = \{u_1 = (1; 2; 1), u_2 = (1; -1; 0), u_3 = (3; 1; -2)\}$. Să se determine matricea de trecere de la baza $\mathcal{B}$ la baza $\mathcal{B}'$, precum şi coordonatele vectorului $v = (2; 3; -5)$ în baza $\mathcal{B}'$.

Problema 3.5.14. În $\mathbb{R}[X]_{\leq n}$, spaţiul vectorial al polinoamelor reale de grad cel mult n, se consideră $\langle\cdot,\cdot\rangle\colon \mathbb{R}[X]_{\leq n}\times\mathbb{R}[X]_{\leq n}\to\mathbb{R}$, dată prin $\langle p,q\rangle=\sum\limits_{k=0}^{n}(k!)^2 a_k b_k$, pentru orice polinoame $p(x)=\sum\limits_{i=0}^{n}a_i x^i$, $q(x)=\sum\limits_{j=0}^{n}b_j x^j$, $a_i,b_j\in\mathbb{R}$, $(\forall)\, i,j=\overline{0,n}$.

Să se verifice că $\langle\cdot,\cdot\rangle$ este un produs scalar şi să se calculeze $\|h\|$, unde $h(x)=1+5x-4x^2+6x^3$.

Problema 3.5.15. Fie spaţiul vectorial $C^0([1;e])=\{f\colon[1,e]\to\mathbb{R}\mid f \text{ continuă pe } [1;e]\}$. Se defineşte aplicaţia $\langle\cdot,\cdot\rangle\colon C^0([1;e])\times C^0([1,e])\to\mathbb{R}$, dată prin

$$\langle f,g\rangle=\int_1^e f(x)g(x)\ln x\,d\,x.$$

a) Să se arate că $\langle\cdot,\cdot\rangle$ este un produs scalar.

b) Să se calculeze $\|h\|$, dacă $h(x)=\sqrt{x}$.

c) Să se determine funcţia $g\in C^0([1,e])$, $g(x)=ax+b$, ortogonală funcţiei $f(x)=5$, $(\forall)\,x\in[1,e]$.

Problema 3.5.16. În spaţiul $\mathbb{R}[X]_{\leq 2}$ se consideră vectorii:

$$p_1(x)=3x^2+2x+1;\qquad p_2(x)=-x^2+2x+1;$$
$$p_3(x)=3x^2+2x+5;\qquad p_4(x)=3x^2+5x+2.$$

Să se determine un polinom $p(x)$ echidistant vectorilor p_1, p_2, p_3 şi p_4 în raport cu distanţa euclidiană.

Problema 3.5.17. În $\mathbb{R}^4$ se consideră vectorii ortogonali $x=(1;0;1;3)$ şi $y=(-1;1;1;0)$. Să se completeze aceşti vectori până la o bază ortogonală.

Problema 3.5.18. În spaţiul euclidian $\mathbb{R}^3$ se consideră

$$S=\{x\in\mathbb{R}^3\mid x=(x_1,x_2,x_3),\quad x_1+x_2=0\}.$$

a) Să se determine complementul său ortogonal $S^{\perp}$.

b) Să se descompună vectorul $v=(1;4;5)$ după cele două subspaţii.

Problema 3.5.19. În spaţiul euclidian $\mathbb{R}^4$ se consideră vectorii $x_1=(1;3;0;2)$, $x_2=(3;7;-1;2)$ şi $x_3=(2;4;-1;0)$. Să se afle complementul ortogonal al subspaţiului generat de aceşti vectori.

Problema 3.5.20. Se consideră vectorul $v=(1;0;1;1)\in\mathbb{R}^4$ şi $S=\operatorname{Span}(\{x_1,x_2,x_3\})$, unde $x_1=(1;1;2;1)$, $x_2=(-1;0;2;3)$ şi $x_3=(1;2;-1;-3)$. Să se determine proiecţia ortogonală a lui v pe S, precum şi complementul ortogonal al lui v relativ la S.

Problema 3.5.21. În spaţiul euclidian $\mathbb{R}^4$, fie $S=\{x_1,x_2,x_3\}$, unde $x_1=(1;3;0;2)$, $x_2=(3;7;-1;2)$ şi $x_3=(2;4;-1;0)$. Să se afle o bază a subspaţiului $L^{\perp}(S)$.

Problema 3.5.22. Fie mulţimea $\mathbb{V}=\left\{(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\mid \sum\limits_{n=1}^{\infty}x_n^2 \text{ convergentă}\right\}$.

Să se arate că $\mathbb{V}$ are structură de spaţiu vectorial real în raport cu legile:

$+ : \mathbb{V} \times \mathbb{V} \to \mathbb{V}$
$\forall (x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{V} : (x_n)_{n\in\mathbb{N}} + (y_n)_{n\in\mathbb{N}} = (x_n + y_n)_{n\in\mathbb{N}}$
$\cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{V} \to \mathbb{V}$
$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall (x_n)_{n\in\mathbb{N}} : \lambda (x_n)_{n\in\mathbb{N}} = (\lambda x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Problema 3.5.23. Fie spaţiul vectorial $\mathbb{V} = \left\{ (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \mid \sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n^2 \text{ convergentă} \right\}$.
a) Să se arate că pentru orice $\alpha > 1$ şirul cu termenul general $x_n(\alpha) = \frac{\sqrt{n}}{(\sqrt{\alpha})^n} \in \mathbb{V}$.
b) Să se calculeze suma seriei $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n^2(\alpha)$.
c) Să se arate că aplicaţia
$\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{V} \times \mathbb{V} \to \mathbb{R}$
$(\forall) ((x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (y_n)_{n\in\mathbb{N}}) \in l_2 \times \mathbb{V} : \langle (x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \rangle = \sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n y_n$ este un produs scalar.
d) Calculaţi unghiul dintre $(x_n(\alpha))_{n\in\mathbb{N}}, (x_n(\beta))_{n\in\mathbb{N}}$.

CAPITOLUL 4

Transformări liniare

Algebra liniară constituie cadrul matematic abstract pentru rezolvarea problemelor liniare din diverse ramuri. Noţiunile de bază sunt: spaţiul vectorial şi transformarea (operatorul, aplicaţia) liniară. În acest capitol studiem transformarea liniară care este "purtător" de informaţie de la un spaţiu vectorial la altul.

În secţiunea 4.1 definim conceptul de transformare liniară pe spaţii vectoriale finit dimensionale, apoi introducem noţiunile de monomorfism, epimorfism, izomorfism şi endomorfism. Secţiunea 4.2 este dedicată operaţiilor cu transformări liniare, în secţiunea 4.3 ne ocupăm cu proprietăţile acestora, iar în secţiunea 4.4 introducem noţiunile de nucleu şi imagine pentru transformări liniare. Aceste noţiuni ne permit caracterizarea injectivităţii şi surjectivităţii unei transformări liniare. Izomorfismele de spaţii vectoriale sunt studiate în secţiunea 4.5. În secţiunea 4.6 ataşm unei transformări liniare o matrice în raport cu perechea de baze din cele două spaţiile vectoriale pe care este definită şi respectiv în care ia valori. Tipuri speciale de transformări liniare, tipuri de endomorfisme pe spaţii euclidiene, sunt studiate în secţiunea 4.7. În finalul capitolului propunem un set de probleme, aplicaţii la întregul material teoretic prezentat anterior.

4.1. Definiţia transformării liniare

În acest capitol vom introduce funcţii ale căror variabile sunt elemente ale unui spaţiu vectorial de dimensiune finită, iar valorile lor sunt elemente ale unui alt spaţiu vectorial.

Fie $\mathbb{V}$ şi $\mathbb{W}$ două liniare spaţii vectoriale definite peste acelaşi corp comutativ $\mathbb{K}$.

Definiţia 4.1.1. *O aplicaţie $T : \mathbb{V} \to \mathbb{W}$ se numeşte* **transformare liniară** *(***operator liniar, aplicaţie liniară** *sau* **morfism de spaţii liniare***) dacă satisface:*

a) proprietatea de **aditivitate**

$$\forall u, v \in \mathbb{V} : T(u + v) = T(u) + T(v); \tag{46}$$

b) proprietatea de **omogeneitate**

$$\forall \alpha \in \mathbb{K}, \forall u \in \mathbb{V} : T(\alpha u) = \alpha T(u). \tag{47}$$

Definiţia 4.1.2. *O transformare liniară T se numeşte* **monomorfism** *,* **epimorfism** *sau* **izomorfism** *dacă T este respectiv injectivă, surjectivă sau bijectivă.*

Dacă $\mathbb{W} = \mathbb{V}$ atunci transformarea liniară T se numeşte **endomorfism***. Un endomorfism bijectiv se numeşte* **automorfism***.*

Observaţia 4.1.3. Dacă în definiţia 4.1.1, a), înlocuim $u = \mathbf{0}_{\mathbb{V}}$ şi $v = \mathbf{0}_{\mathbb{W}}$ rezultă că

$$T(\mathbf{0}_{\mathbb{V}}) = \mathbf{0}_{\mathbb{W}}, \tag{48}$$

unde $\mathbf{0}_{\mathbb{V}}$ şi respectiv $\mathbf{0}_{\mathbb{W}}$ sunt vectorii nuli din $\mathbb{K}$-spaţiile vectoriale $\mathbb{V}$ şi respectiv $\mathbb{W}$. Condiţia (48) este doar o condiţie necesară ca o transformare să fie liniară. De aici rezultă că dacă $T(\mathbf{0}_{\mathbb{V}}) \neq \mathbf{0}_{\mathbb{W}}$ atunci T nu este liniară.

Prezentăm teorema de caracterizare a transformărilor liniare.

Teorema 4.1.4. *Condiţia necesară şi suficientă ca o transformare să fie liniară este:*

$$\forall \alpha \in \mathbb{K}, \forall u, v \in \mathbb{V} : T(\alpha u + v) = \alpha T(u) + T(v). \tag{49}$$

Demonstraţie. *Necesitatea.* Presupunem că T este o transformare liniară. Conform definiţiei 4.1.1

$\forall \alpha \in \mathbb{K}, \forall u, v \mathbb{V} : T(\alpha u + v) = T(\alpha u) + T(v) = \alpha T(u) + T(v).$

Suficienţa. Considerăm în (49) $\alpha = 1$ şi rezultă (46). Considerăm în (49) $v = \mathbf{0}_{\mathbb{V}}$ şi folosind observaţia 4.1.3 rezultă (47). □

Cu ajutorul inducţiei matematice demonstrăm că dacă T este transformare liniară atunci oricare ar fi $u_i \in \mathbb{V}$ şi oricare ar fi $\alpha_i \in \mathbb{K}$, $i = \overline{1, n}$, are loc relaţia

$$T\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i u_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i T(u_i).$$

Exemplele 4.1.5. 1. Fie $\mathbb{R}[x]_{\leq 2}$ spaţiul vectorial al polinoamelor cu coeficienţi reali, de grad cel mult doi. Demonstrăm că aplicaţia $T : \mathbb{R}[x]_{\leq 2} \to \mathbb{R}[x]_{\leq 2}$, definită prin $[Tp](x) = xp'(x)$ pentru orice $p \in \mathbb{R}[x]_{\leq 2}$ este o transformare liniară. Verificăm condiţia (49). Într-adevăr, pentru $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, $\forall p, q \in \mathbb{R}[x]_{\leq 2}$, $\forall x \in \mathbb{R}$, : $[T(\alpha p + q)](x) = x(\alpha p + q)'(x) = x(\alpha p' + q')(x) = \alpha x p'(x) + bxq'(x) = \alpha [Tp](x) + [Tq](x)$.

2. Aplicaţia $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, definită prin $T(X) = (x_1 + 1, x_2, x_1 + x_2)$, $\forall X = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ nu este o transformare liniară deoarece $T(\mathbf{0}_{\mathbb{R}^2}) \neq \mathbf{0}_{\mathbb{R}^3}$, $\mathbf{0}_{\mathbb{R}^2} = (0; 0)$, conform observaţiei 4.1.3.

3. Fie $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ o matrice fixată. Dacă $X \in \mathbb{R}^n, X = (x_1, x_2, ...x_n)$ definim

$T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m, T(X) = \left(\sum_{i=1}^{n} a_{1i}x_i, \quad \sum_{i=1}^{n} a_{2i}x_i, \quad ... \quad , \sum_{i=1}^{n} a_{mi}x_i \right).$

T este o transformare liniară asociată matricei A.

De exemplu, $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, definită prin $T(X) = (x_1 + x_2, x_1 + 3x_2, x_2)$, $\forall X = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ este transformarea liniară asociată matricei

$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$

4. Fie $\mathbb{V}$ un $\mathbb{K}$-spaţiu vectorial şi $\lambda \in \mathbb{K}$, λ fixat. Definim funcţia

$$T : \mathbb{V} \to \mathbb{V}, \forall u \in \mathbb{V} : T(u) = \lambda u.$$

Atunci $\forall \alpha \in \mathbb{K}, \forall u, v \in \mathbb{V} : T(\alpha u + v) = \lambda(\alpha u + v) = \alpha(\lambda u) + \lambda v = \alpha T(u) + T(v).$

Pentru $\lambda = 0$ obţinem $T = \mathbf{0}_{\mathcal{L}(\mathbb{V})}$ numită **transformarea nulă** a lui $\mathbb{V}$.

Pentru $\lambda = 1$ obţinem $T = id_{\mathcal{L}(\mathbb{V})}$ numită **transformarea identitate** a lui $\mathbb{V}$.

Pentru $\lambda \in \mathbb{K}$ endomorfismele T definite mai sus se numesc **omotetii de raport λ ale lui $\mathbb{V}$** .

5. Fie $\mathbb{V}$ un $\mathbb{K}$-spaţiu vectorial şi $\mathbb{V}_1, \mathbb{V}_2$ două subspaţii vectoriale ale lui $\mathbb{V}$ astfel încât $\mathbb{V} = \mathbb{V}_1 \oplus \mathbb{V}_2$. Atunci orice vector $u \in \mathbb{V}$ se descompune în mod unic de forma $u = u_1 + u_2, u_1 \in \mathbb{V}_1, u_2 \in \mathbb{V}_2$, conform propoziţiei 3.2.7. Definim funcţiile

$$\Pi_1 : \mathbb{V} \to \mathbb{V}_1, \forall u \in \mathbb{V} : \Pi_1(u) = u_1$$

şi

$$\Pi_2 : \mathbb{V} \to \mathbb{V}_2, \forall u \in \mathbb{V} : \Pi_2(u) = u_2,$$

.

Demonstrăm că $\Pi_1 \in \mathcal{L}(\mathbb{V}, \mathbb{V}_1), \Pi_2 \in \mathcal{L}(\mathbb{V}, \mathbb{V}_2)$. Fie $u, v \in \mathbb{V}$, u, v admit descompunerea unică $u = u_1 + u_2, v = v_1 + v_2, u_1, v_1 \in \mathbb{V}_1, u_2, v_2 \in \mathbb{V}_2$. Atunci pentru $\forall \alpha \in \mathbb{K}$, $\Pi_i(\alpha u + v) = \alpha u_i + v_i = \alpha \Pi_i(u) + \Pi_i(v), i = 1, 2$.

Transformările liniare Π_1 şi Π_2 definite mai sus, se numesc **proiecţia spaţiului $\mathbb{V}$ pe $\mathbb{V}_1$ paralelă cu $\mathbb{V}_2$** şi respectiv **proiecţia spaţiului $\mathbb{V}$ pe $\mathbb{V}_2$ paralelă cu $\mathbb{V}_1$**.

Vom nota $\mathcal{L}(\mathbb{V}, \mathbb{W}) = \{T \mid T : \mathbb{V} \to \mathbb{W}, T \text{ transformare liniară}\}$. În cazul particular al endomorfismelor ($\mathbb{W} = \mathbb{V}$), vom nota $\mathcal{L}(\mathbb{V}, \mathbb{V}) = \mathcal{L}(\mathbb{V})$.

Definiţia 4.1.6. *Spaţiul liniar $\mathcal{L}(\mathbb{V}, \mathbb{K}) = \mathbb{V}^\sharp$ se numeşte* **dualul algebric** *al spaţiului liniar $\mathbb{V}$ peste corpul comutativ $\mathbb{K}$. Dacă $L \in \mathbb{V}^\sharp$ atunci L este numită formă (funcţională) liniară.*

4.2. Operaţii cu transformări liniare

Teorema 4.2.1. $\mathcal{L}(\mathbb{V}, \mathbb{W})$ *este un spaţiu vectorial peste corpul comutativ $\mathbb{K}$.*

Demonstraţie. Introducem legea internă din $\mathcal{L}(\mathbb{V}, \mathbb{W})$. Definim suma a două transformări liniare astfel : $\forall T, S \in \mathcal{L}(\mathbb{V}, \mathbb{W}) : (T + S)(u) = T(u) + S(u), \forall u \in \mathbb{V}$.

Folosind definiţia sumei a două funcţii, liniaritatea şi teorema 4.1.4 obţinem:

$\forall T, S \in \mathcal{L}(\mathbb{V}, \mathbb{W}) : (T+S)(\alpha u+v) = T(\alpha u+v)+S(\alpha u+v) = \alpha T(u)+T(v)+\alpha S(u)+S(v) = \alpha(T(u) + S(u)) + (T(v) + S(v)) = \alpha(T + S)(u) + (T + S)(u)$, $\forall \alpha \in \mathbb{K}, \forall u \in \mathbb{V}$, adică $T + S \in \mathcal{L}(\mathbb{V}, \mathbb{W})$.

Introducem legea externă din $\mathcal{L}(\mathbb{V}, \mathbb{W})$. Definim produsul dintre un scalar şi o transformare liniară astfel: $\forall T \in \mathcal{L}(\mathbb{V}, \mathbb{W}), \forall \lambda \in \mathbb{K} : (\lambda T)(u) = \lambda T(u), \forall u \in \mathbb{V}$.

Folosind definiţia produsului dintre un scalar şi o aplicaţie, liniaritatea ei şi teorema 4.1.4 obţinem:

$\forall \lambda \in \mathbb{K}, T \in \mathcal{L}(\mathbb{V}, \mathbb{W})$:$(\lambda T)(\alpha u+v) = \lambda T(\alpha u+v) = \lambda(\alpha T(u)+T(v)) = \alpha(\lambda T(u))+\lambda T(v) = \alpha(\lambda T)(u) + (\lambda T)(u), \forall \alpha \in \mathbb{K}, u, v \in \mathbb{V}$, adică $\lambda T \in \mathcal{L}(\mathbb{V}, \mathbb{W})$.

Având definite aceste operaţii se verifică uşor că $(\mathcal{L}(\mathbb{V}, \mathbb{W}), +)$ este grup comutativ şi sunt satisfăcute axiomele spaţiului vectorial. □

Teorema 4.2.2. *Fie $\mathbb{V}, \mathbb{W}$ şi $\mathbb{U}$ trei spaţii vectoriale peste acelaşi corp comutativ $\mathbb{K}$ şi $T \in \mathcal{L}(\mathbb{V}, \mathbb{W})$, $S \in \mathcal{L}(\mathbb{W}, \mathbb{U})$. Atunci $S \circ T \in \mathcal{L}(\mathbb{V}, \mathbb{U})$ (compunerea a două transformări liniare* *este o transformare liniară), unde* $(S \circ T)(u) = S(T(u)), \forall u \in \mathbb{V}$. *Mai mult, dacă* T *şi* S *sunt izomorfisme, atunci* $S \circ T$ *este izomorfism.*

Pentru orice izomorfism $T \in \mathcal{L}(\mathbb{V}, \mathbb{W})$*, funcţia inversă este o transformare liniară, adică* $T^{-1} \in \mathcal{L}(\mathbb{W}, \mathbb{V})$ *(inversul unui izomorfism liniar este un izomorfism liniar).*

Demonstraţie. Din liniaritatea lui T şi S rezultă din

$\forall \alpha \in \mathbb{K}, u, v \in \mathbb{V} : (S \circ T)(\alpha u + v) = S(T(\alpha u + v)) = S(\alpha T(u) + T(v)) = \alpha S(T(u)) + S(T(v)) = \alpha(S \circ T)(u) + (S \circ T)(v) \Rightarrow S \circ T \in \mathcal{L}(\mathbb{V}, \mathbb{U})$.

Deoarece compunerea a două funcţii bijective este o funcţie bijectivă rezultă că $S \circ T$ este bijectivă, deci este izomorfism.

Deoarece inversa unei funcţii bijective este o funcţie bijectivă este suficient să demonstrăm că T^{-1} este o transformare liniară.

Fie $\alpha \in \mathbb{K}, w_1, w_2 \in \mathbb{W} \Rightarrow \exists v_1, v_2 \in \mathbb{V} : T(v_1) = w_1,\ T(v_2) = w_2 : T^{-1}(\alpha w_1 + w_2) = T^{-1}(\alpha T(v_1) + T(v_2)) = T^{-1}(T(\alpha v_1 + v_2)) = (T^{-1} \circ T)(\alpha v_1 + v_2) = \alpha v_1 + v_2 = \alpha T^{-1}(w_1) + T^{-1}(w_2)$, deci $T^{-1}(\alpha w_1 + w_2) = \alpha T^{-1}(w_1) + T^{-1}(w_2)$. □

Observaţia 4.2.3. Pentru orice $T \in \mathcal{L}(\mathbb{V}, \mathbb{W})$ are loc relaţia $T(-v) = -T(v), \forall v \in \mathbb{V}$. Afirmaţia rezultă din condiţia (47) în care $\alpha = -1$.

4.3. Proprietăţi ale transformărilor liniare

Teorema 4.3.1. *Fie* $T \in \mathcal{L}(\mathbb{V}, \mathbb{W})$.

a) Dacă $\mathbb{V}_1$ *este un subspaţiu vectorial al lui* $\mathbb{V}$*, atunci* $T(\mathbb{V}_1)$ *este un subspaţiu vectorial al lui* $\mathbb{W}$.

b) Dacă $\mathbb{W}_1$ *este un subspaţiu vectorial al lui* $\mathbb{W}$*, atunci* $T^{-1}(\mathbb{W}_1) = \{v \in \mathbb{V} : T(v) \in \mathbb{W}_1\}$ *este un subspaţiu vectorial al lui* $\mathbb{V}$.

Demonstraţie. a) Fie $\alpha \in \mathbb{K}, w_1, w_2 \in T(\mathbb{V}_1) \Rightarrow \exists v_1, v_2 \in \mathbb{V}_1 : T(v_1) = w_1, T(v_2) = w_2 \Rightarrow \alpha w_1 + w_2 = \alpha T(v_1) + T(v_2) = T(\alpha v_1 + v_2) \Rightarrow \alpha w_1 + w_2 \in T(\mathbb{V}_1) \Rightarrow T(\mathbb{V}_1)$ subspaţiu liniar.

b) Fie $\alpha \in \mathbb{K}, v_1, v_2 \in T^{-1}(\mathbb{W}_1) \Rightarrow \exists w_1, w_2 \in \mathbb{W}_1 : T(v_1) = w_1,\ T(v_2) = w_2 \Rightarrow \alpha v_1 + v_2 = \alpha T^{-1}(w_1) + T^{-1}(w_2) = T^{-1}(\alpha w_1 + w_2) \Rightarrow \alpha v_1 + v_2 \in T^{-1}(\mathbb{W}_1) \Rightarrow T(\mathbb{W}_1)$ subspaţiu liniar. □

Teorema 4.3.2. *Fie* $T \in \mathcal{L}(\mathbb{V}, \mathbb{W})$.

a) Dacă mulţimea ordonată de vectori $\{v_i\}_{i=\overline{1,n}}$ *este liniar dependentă în* $\mathbb{V}$*, atunci şi mulţimea ordonată de vectori* $\{T(v_i)\}_{i=\overline{1,n}}$ *este liniar dependentă în* $\mathbb{W}$.

b) Dacă T *este injectivă şi mulţimea ordonată de vectori* $\{v_i\}_{i=\overline{1,n}}$ *este liniar independentă în* $\mathbb{V}$*, atunci şi mulţimea ordonată de vectori* $\{T(v_i)\}_{i=\overline{1,n}}$ *este liniar independentă în* $\mathbb{W}$.

c) Dacă T *este surjectivă şi mulţimea de vectori* $\{v_i\}_{i=\overline{1,n}}$ *este sistem de generatori pentru* $\mathbb{V}$*, atunci şi mulţimea de vectori* $\{T(v_i)\}_{i=\overline{1,n}}$ *este sistem de generatori pentru* $\mathbb{W}$.

d) Dacă T *este bijectivă atunci* $\dim_{\mathbb{K}} \mathbb{V} = \dim_{\mathbb{K}} \mathbb{W}$.

Demonstraţie. a) Fie mulţimea ordonată de vectori $\{v_i\}_{i=\overline{1,n}}$ liniar dependentă în $\mathbb{V}$. Rezultă că $\exists\, (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{K}^n \setminus \{\mathbf{0}_{\mathbb{K}^n}\}$, astfel încât $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \ldots + \alpha_n v_n = \mathbf{0}_{\mathbb{V}}$. Dar $T(\alpha_1 v_1 +$

$\alpha_2 v_2 + \ldots + \alpha_n v_n) = T(\mathbf{0}_{\mathbb{V}}) \Rightarrow \alpha_1 T(v_1) + \alpha_2 T(v_2) + \ldots + \alpha_n T(v_n) = \mathbf{0}_{\mathbb{W}}$ cu $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \neq \mathbf{0}_{\mathbb{K}^n}$, deci mulţimea ordonată de vectori $\{T(v_i)\}_{i=\overline{1,n}}$ este liniar dependentă în $\mathbb{W}$.

b) Fie mulţimea ordonată de vectori $\{v_i\}_{i=\overline{1,n}}$ liniar independentă în $\mathbb{V}$ şi $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{K}^n$, astfel încât $\alpha_1 T(v_1) + \alpha_2 T(v_2) + \ldots + \alpha_n T(v_n) = \mathbf{0}_{\mathbb{W}} \Rightarrow T(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \ldots + \alpha_n v_n) = \mathbf{0}_{\mathbb{W}}$. Deoarece T este transformare liniară injectivă are loc egalitatea $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \ldots + \alpha_n v_n = \mathbf{0}_{\mathbb{V}}$. Dar $\{v_i\}_{i=\overline{1,n}}$ este liniar independentă în $\mathbb{V}$, rezultă că $\alpha_1 = \ldots = \alpha_n = 0$, deci mulţimea ordonată de vectori $\{T(v_i)\}_{i=\overline{1,n}}$ este liniar independentă în $\mathbb{W}$.

c) Fie $\{v_i\}_{i=\overline{1,n}}$ un sistem de generatori pentru $\mathbb{V}$ şi T transformare liniară surjectivă. Fie $w \in \mathbb{W}$ arbitrar. Deoarece T este transformare liniară surjectivă există $v \in \mathbb{V}$ astfel încât $T(v) = w$. Dar $\{v_i\}_{i=\overline{1,n}}$ este un sistem de generatori pentru $\mathbb{V}$ rezultă că $\exists\ (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{K}^n$ astfel încât $v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \ldots + \alpha_n v_n$. Rezultă că $w = T(v) = T(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \ldots + \alpha_n v_n) = \alpha_1 T(v_1) + \alpha_2 T(v_2) + \ldots + \alpha_n T(v_n)$, deci $\{T(v_i)\}_{i=\overline{1,n}}$ este sistem de generatori pentru $\mathbb{W}$.

d) Fie $\{v_i\}_{i=\overline{1,n}}$ o bază în $\mathbb{V}$. Deoarece T este bijectivă, folosind rezultatele de la punctele b) şi c), rezultă că $\{T(v_i)\}_{i=\overline{1,n}}$ este o mulţime ordonată de vectori liniar independentă şi sistem de generatori, deci o bază în $\mathbb{W}$. Rezultă că dimensiunile celor două spaţii vectoriale coincid. □

Teorema 4.3.3. *Dacă $\mathcal{B} = \{v_i\}_{i=\overline{1,n}}$ este o bază în $\mathbb{V}$ şi $\mathcal{B}' = \{w_i\}_{i=\overline{1,n}}$ sunt n vectori oarecare în $\mathbb{W}$ atunci există şi este unică o transformare liniară $T \in \mathcal{L}(\mathbb{V}, \mathbb{W})$ astfel încât $T(v_i) = w_i, i = \overline{1,n}$.*

Demonstraţie. Dacă $v \in \mathbb{V}$ şi $\mathcal{B} = \{v_i\}_{i=\overline{1,n}}$ este o bază în $\mathbb{V}$ atunci există şi sunt unici $(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n) \in \mathbb{K}^n$ astfel încât $v = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i v_i$. Definim $T(v) = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i w_i$.

Unicitatea lui T rezultă din faptul că $\mathcal{B}$ este bază.

Demonstrăm că T este o transformare liniară. Fie $u_1, u_2 \in \mathbb{V}$, există şi sunt unici

$(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n) \in \mathbb{K}^n, (\beta_1, \beta_2, ..., \beta_n) \in \mathbb{K}^n$, astfel încât $u_1 = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i v_i$, $u_2 = \sum\limits_{i=1}^{n} \beta_i v_i$. Conform definiţiei, $T(u_1) = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i w_i, T(u_2) = \sum\limits_{i=1}^{n} \beta_i w_i$. Pentru orice $\lambda \in \mathbb{K}$, $\lambda u_1 + u_2 = \sum\limits_{i=1}^{n} (\lambda \alpha_i + \beta_i) v_i$. Dar $T(\lambda u_1 + u_2) = \sum\limits_{i=1}^{n} (\lambda \alpha_i + \beta_i) w_i = \lambda \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i w_i + \sum\limits_{i=1}^{n} \beta_i w_i = \lambda T(u_1) + T(u_2)$. □

Teorema 4.3.4. *Spaţiul dual $\mathbb{V}^\sharp$ al unui spaţiu vectorial finit dimensional are aceeaşi dimensiune cu $\mathbb{V}$.*

Demonstraţie. Fie $\dim_{\mathbb{K}} \mathbb{V} = n$ şi $\mathcal{B} = \{v_i\}_{i=\overline{1,n}}$ o bază în $\mathbb{V}$. Pornind de la această bază a spaţiului vectorial $\mathbb{V}$, vom construi o bază în spaţiul dual, care se va numi duala bazei $\mathcal{B}$. Pentru $v \in \mathbb{V}$ avem $v = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i v_i$. Introducem n forme liniare care iau in v valori egale cu coordonatele vectorului în baza $\mathcal{B}$,

$L_1(v) = \alpha_1, L_2(v) = \alpha_2, ..., L_n(v) = \alpha_n$.

Formele liniare astfel definite sunt unice, conform teoremei 4.3.3. Obervăm că

$L_j(v_i) = \delta_{ji} = \begin{cases} 1, & j = i \\ 0, & j \neq i \end{cases}$.

Demonstrăm că $\{L_1, L_2, ..., L_n\}$ este o bază în $\mathbb{V}^\sharp$.

Liniara independenţă. Fie $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n \in \mathbb{K}$ astfel încât $\lambda_1 L_1 + \lambda_2 L_2 + ... + \lambda_n L_n = \mathbf{0}_{\mathbb{V}^\sharp}$. Rezultă că $\forall v \in \mathbb{V}$ avem $(\lambda_1 L_1 + \lambda_2 L_2 + ... + \lambda_n L_n)(v) = 0_{\mathbb{K}}$. În particular dacă $v = v_i, i = \overline{1,n}$ $(\lambda_1 L_1 + \lambda_2 L_2 + ... + \lambda_n L_n)(v_i) = \lambda_i = 0_{\mathbb{K}}$. Deci $\{L_1, L_2, ..., L_n\}$ este liniar independentă.

Demonstrăm că $\{L_1, L_2, ..., L_n\}$ este sistem de generatori pentru $\mathbb{V}^\sharp$. Fie $L \in \mathbb{V}^\sharp$ şi $v = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i$. Atunci

$L(v) = L(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i L(v_i) = \sum_{i=1}^{n} L_i(v) L(v_i)$.

Rezultă că $\mathcal{B}^\sharp = \{L_1, L_2, ..., L_n\}$ este o bază în $\mathbb{V}^\sharp$, duala bazei $\mathcal{B}$. □

Observaţia 4.3.5. Din teorema 4.3.4 rezultă că $\dim_{\mathbb{K}} \mathbb{V} = \dim_{\mathbb{K}} \mathbb{V}^\sharp = n$, deci $\mathbb{V} \simeq \mathbb{V}^\sharp$ adică spaţiile sunt izomorfe.

4.4. Rangul şi defectul unei transformări liniare

Definiţia 4.4.1. *Mulţimea* $\mathrm{Ker}(T) = \{v \mid v \in \mathbb{V} : T(v) = \mathbf{0}_{\mathbb{W}}\}$ *se numeşte* **nucleul** *transformării liniare* T.

Mulţimea $\mathrm{Im}(T) = \{w \mid w \in \mathbb{W} : \exists v \in \mathbb{V}, T(v) = w\}$ *se numeşte* **imaginea** *transformării liniare* T.

Teorema 4.4.2. *Fie* $T \in \mathcal{L}(\mathbb{V}, \mathbb{W})$. *Nucleul lui* T *este un subspaţiu vectorial al lui* $\mathbb{V}$*; imaginea lui* T *este un subspaţiu vectorial al lui* $\mathbb{W}$.

Demonstraţie. Observăm că $\mathrm{Ker}(T) \neq \emptyset$ deoarece $\mathbf{0}_{\mathbb{V}} \in \mathrm{Ker}(T)$, conform relaţiei (48).

Fie $\alpha \in \mathbb{K}, u, v \in \mathrm{Ker}(T) \Rightarrow T(u) = \mathbf{0}_{\mathbb{W}}, T(v) = \mathbf{0}_{\mathbb{W}}$; $\mathrm{T}(\alpha u + v) = \alpha T(u) + T(v) = \alpha \mathbf{0}_{\mathbb{W}} + \mathbf{0}_{\mathbb{W}} = \mathbf{0}_{\mathbb{W}} \Rightarrow \alpha u + v \in \mathrm{Ker}(T)$.

Observăm că $\mathrm{Im}(T) \neq \emptyset$ deoarece $\mathbf{0}_{\mathbb{W}} \in \mathrm{Im}(T)$, conform relaţiei (48).

Fie $\alpha \in \mathbb{K}, u, v \in \mathrm{Im}(T) \Rightarrow \exists w_1, w_2 \in \mathbb{W} : T(u) = w_1, T(v) = w_2; \alpha w_1 + w_2 = \alpha T(u) + T(v) = T(\alpha u + v) \Rightarrow \alpha w_1 + w_2 \in \mathrm{Im}(T)$. □

Dăm o caracterizare a injectivităţii unei transformări liniare cu ajutorul nucleului transformării.

Teorema 4.4.3. *O transformare liniară* $T \in \mathcal{L}(\mathbb{V}, \mathbb{W})$ *este injectivă dacă şi numai dacă* $\mathrm{Ker}(T) = \{\mathbf{0}_{\mathbb{V}}\}$.

Demonstraţie. *Necesitatea.* Presupunem că T este injectivă şi fie $v \in \mathrm{Ker}(T) \Rightarrow T(v) = \mathbf{0}_{\mathbb{W}}$. Dar $T(\mathbf{0}_{\mathbb{V}}) = \mathbf{0}_{\mathbb{W}} \Rightarrow v = \mathbf{0}_{\mathbb{V}}$, adică $\mathrm{Ker}(T) = \{\mathbf{0}_{\mathbb{V}}\}$.

Suficienţa. Presupunem că $\mathrm{Ker}(T) = \{\mathbf{0}_{\mathbb{V}}\}$ şi fie $T(u) = T(v)$. Rezultă $T(u - v) = \mathbf{0}_{\mathbb{W}}$ $\Rightarrow u - v \in \mathrm{Ker}(T) \Rightarrow u = v$, adică T injectivă. □

Dăm o caracterizare a surjectivităţii unei transformări liniare cu ajutorul imaginii ei.

Teorema 4.4.4. *O transformare liniară* $T \in \mathcal{L}(\mathbb{V}, \mathbb{W})$ *este surjectivă dacă şi numai dacă* $\mathrm{Im}(T) = \mathbb{W}$.

Demonstraţie. Rezultă din definiţia surjectivităţii. □

Observaţia 4.4.5. Dacă $\mathbb{V}$ şi $\mathbb{W}$ spaţii vectoriale finit dimensionale peste acelaşi corp comutativ $\mathbb{K}$, rezultă că nucleul şi imaginea unei transformări liniare, care sunt subspaţii liniare (Teorema 4.2.2), sunt finit dimensionale şi $\dim_{\mathbb{K}}(\mathrm{Ker}(T)) \leq \dim_{\mathbb{K}} \mathbb{V}, \dim_{\mathbb{K}}(\mathrm{Im}(T)) \leq \dim_{\mathbb{K}} \mathbb{W}$.

Definiţia 4.4.6. *Fie* $T \in \mathcal{L}(\mathbb{V}, \mathbb{W})$. *Se numeşte* **rangul** *lui* T *şi se notează* $\mathrm{rang}(T)$, *dimensiunea subspaţiului* $\mathrm{Im}(T)$, $\mathrm{rang}(T) = \dim_{\mathbb{K}}(\mathrm{Im}(T))$. *Se numeşte* **defectul** *lui* T *şi se notează* $\mathrm{def}(T)$, *dimensiunea subspaţiului* $\mathrm{Ker}(T)$, $\mathrm{def}(T) = \dim_{\mathbb{K}}(\mathrm{Ker}(T))$.

Teorema 4.4.7. *(Teorema rang-defect) Fie* $\mathbb{V}$ *şi* $\mathbb{W}$ *spaţii vectoriale peste acelaşi corp comutativ* $\mathbb{K}, \dim_{\mathbb{K}} \mathbb{V} = n$ *şi* $T \in \mathcal{L}(\mathbb{V}, \mathbb{W})$. *Atunci*

$$\mathrm{rang}(T) + \mathrm{def}(T) = n.$$

Demonstraţie. Presupunem că $n \geq 1$, cazul $n = 0$ fiind banal. Fie $\mathrm{def}(T) = r \leq n$ şi fie $\mathcal{B}' = \{v_1, \ldots, v_r\}$ o bază în $\mathrm{Ker}(T)$, dacă $\mathrm{Ker}(T) \neq \{\mathbf{0}_{\mathbb{V}}\}$. Completăm mulţimea de vectori liniar independentă $\mathcal{B}'$ până la o bază $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_r, v_{r+1}, \ldots, v_n\}$ în $\mathbb{V}$. Demonstrăm că $\mathcal{B}'' = \{T(v_{r+1}), \ldots, T(v_n)\}$ este o bază în $\mathrm{Im}(T)$. Pentru aceasta arătăm că vectorii mulţimii $\mathcal{B}''$ sunt liniar independenţi şi formează un sistem de generatori pentru $\mathrm{Im}(T)$.

Fie $w \in \mathrm{Im}(T) \Rightarrow \exists v \in \mathbb{V} : T(v) = w$. Dar $v = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i v_i \Rightarrow w = T(v) = T(\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i v_i) \Rightarrow w = \sum\limits_{i=r+1}^{n} \alpha_i T(v_i)$, deoarece $v_i \in \mathrm{Ker}(T), i = \overline{1, r}$. Rezultă că $w \in \mathrm{Span}\,(\mathcal{B}'')$, adică orice vector din $\mathrm{Im}(T)$ se poate scrie ca o combinaţie liniară de vectori din $\mathcal{B}''$.

Fie $\sum\limits_{i=r+1}^{n} \alpha_i T(v_i) = \mathbf{0}_{\mathbb{W}} \Rightarrow T(\sum\limits_{i=r+1}^{n} \alpha_i v_i) = \mathbf{0}_{\mathbb{W}} \Rightarrow \sum\limits_{i=r+1}^{n} \alpha_i v_i \in \mathrm{Ker}(T) \Rightarrow \sum\limits_{i=r+1}^{n} \alpha_i v_i = \sum\limits_{i=1}^{r} \beta_i v_i \Rightarrow \sum\limits_{i=r+1}^{n} \alpha_i v_i - \sum\limits_{i=1}^{r} \beta_i v_i = \mathbf{0}_{\mathbb{V}}$.

Deoarece $\mathcal{B}$ este o mulţime de vectori liniar independentă, rezultă $\alpha_{r+1} = \ldots = \alpha_n = \beta_1 = \ldots = \beta_r = 0$, deci mulţimea de vectori $\mathcal{B}''$ este liniar independentă.

Rezultă că $\mathcal{B}''$ este o bază în $\mathrm{Im}(T)$, deci $\mathrm{rang}(T) = n - r \Rightarrow \mathrm{rang}(T) + \mathrm{def}(T) = n$. □

Exemplul 4.4.8. Considerăm transformarea liniară din Exemplul 4.1.5,

$T : \mathbb{R}[x]_{\leq 2} \to \mathbb{R}[x]_{\leq 2}$, definită prin $[Tp](x) = xp'(x), \forall p \in \mathbb{R}[x]_{\leq 2}$. Determinăm nucleul şi imaginea lui T şi verificăm teorema rangului. Conform definiţiei,

$\mathrm{Ker}(T) = \left\{p \in \mathbb{R}[x]_{\leq 2} : xp'(x) = 0, \forall x \in \mathbb{R}\right\} =$

$= \left\{p \in \mathbb{R}[x]_{\leq 2} : p'(x) = 0, \forall x \in \mathbb{R}\right\} = \{c : c \in \mathbb{R}\}$, deci $\mathrm{def}(T) = 1$.

$\mathrm{Im}(T) = \left\{q \in \mathbb{R}[x]_{\leq 2} : \exists p \in \mathbb{R}[x]_{\leq 2}, Tp = q\right\}$. Fie $p \in \mathbb{R}[x]_{\leq 2}, p(x) = a + bx + cx^2, xp'(x) = bx + 2cx^2$, deci $\mathrm{Im}(T) = \left\{q \in \mathbb{R}[x]_{\leq 2}, q(x) = dx + fx^2\right\}$. Evident $\mathrm{rang}(T) = 2$, o bază în $\mathrm{Im}(T)$ este, de exemplu, $\{x, x^2\}$. De aici rezultă că $\mathrm{rang}(T) + \mathrm{def}(T) = 2 + 1 = 3$.

Teorema 4.4.9. *Fie* $\mathbb{V}$ *şi* $\mathbb{W}$ *două spaţii vectoriale peste acelaşi corp comutativ* $\mathbb{K}$, $\dim_{\mathbb{K}} \mathbb{V} = n$, $\dim_{\mathbb{K}} \mathbb{W} = m$ *şi* $T \in \mathcal{L}(\mathbb{V}, \mathbb{W})$. *Atunci au loc afirmaţiile:*

a) T *este transformare liniară injectivă dacă şi numai dacă* $\mathrm{rang}(T) = n, n \leq m$.

b) T *este transformare liniară surjectivă dacă şi numai dacă* $\mathrm{rang}(T) = m, m \leq n$.

c) T *este transformare liniară bijectivă dacă şi numai dacă* $\mathrm{rang}(T) = n, n = m$.

Demonstraţie. Justificăm afirmaţia a). T injectivă$\Leftrightarrow$ $\mathrm{Ker}(T) = \{\mathbf{0_V}\} \Leftrightarrow \mathrm{def}(T) = 0 \Leftrightarrow$ $\mathrm{rang}(T) = n$ (Teorema 4.4.7) şi, deoarece $\mathrm{Im}(T)$ este subspaţiu vectorial al lui $\mathbb{W}$ (Teorema 4.4.2), rezultă că $n = \mathrm{rang}(T) \leq \dim_{\mathbb{K}} \mathbb{W} = m$.

Demonstrăm afirmaţia b). T surjectivă$\Leftrightarrow$ $\mathrm{Im}(T) = \mathbb{W} \Leftrightarrow \dim_{\mathbb{K}}(\mathrm{Im}(T)) = \dim_{\mathbb{K}}\mathbb{W} \Leftrightarrow$ $\mathrm{rang}(T) = m$ şi deoarece $\mathrm{rang}(T) + \mathrm{def}(T) = n, \mathrm{def}(T) \geq 0 \Rightarrow \mathrm{rang}(T) = m \leq n$.

Afirmaţia c) este o consecinţă imediată a afirmaţiilor a) şi b). □

Teorema 4.4.10. *Fie* $\mathbb{V}$ *şi* $\mathbb{W}$ *două spaţii vectoriale peste acelaşi corp comutativ* $\mathbb{K}$*,* $\dim_{\mathbb{K}}\mathbb{V} = \dim_{\mathbb{K}}\mathbb{W} = n$ *şi* $T \in \mathcal{L}(\mathbb{V}, \mathbb{W})$.
Atunci afirmaţiile următoare sunt echivalente:
a) T *este o transformare liniară injectivă.*
b) T *este o transformare liniară surjectivă.*
c) T *este o transformare liniară bijectivă.*

Demonstraţie. Demonstraţiile rezultă utilizând Teorema 4.4.9. □

Teorema 4.4.11. *Fie* $\mathbb{U}, \mathbb{V}$ *şi* $\mathbb{W}$ *trei spaţii vectoriale peste acelaşi corp comutativ* $\mathbb{K}$ *şi* $T \in \mathcal{L}(\mathbb{U}, \mathbb{V})$, $S \in \mathcal{L}(\mathbb{V}, \mathbb{W})$. *Atunci*
a) $\mathrm{rang}(S \circ T) \leq \min\{\mathrm{rang}(S), \mathrm{rang}(T)\}$
b) dacă S *este izomorfism atunci* $\mathrm{rang}(S \circ T) = \mathrm{rang}(T)$,
c) dacă T *este izomorfism atunci* $\mathrm{rang}(S \circ T) = \mathrm{rang}(S)$.

Demonstraţie. a) Dacă demonstrăm că $\mathrm{Im}(S \circ T) \subseteq \mathrm{Im}(S)$ rezultă că $\dim_{\mathbb{K}}\mathrm{Im}(S \circ T) \leq \dim_{\mathbb{K}}\mathrm{Im}(S)$ adică $\mathrm{rang}(S \circ T) \leq \mathrm{rang}(S)$.

Dar $T(\mathbb{U}) \subseteq \mathbb{V}$ conform teoremei 4.3.1, $S(T(\mathbb{U})) \subseteq S(\mathbb{V}) \Rightarrow \mathrm{Im}(S \circ T) \subseteq \mathrm{Im}(S)$.

Dacă demonstrăm că $\ker(T) \subseteq \ker(S \circ T)$ rezultă că $\mathrm{def}(T) \leq \mathrm{def}(S \circ T)$. Dar $\mathrm{def}(T) + \mathrm{rang}(T) = \dim_{\mathbb{K}}\mathbb{U}$, $\mathrm{def}(S \circ T) + \mathrm{rang}(S \circ T) = \dim_{\mathbb{K}}\mathbb{U}$, deci $\mathrm{rang}(S \circ T) \leq \mathrm{rang}(T)$.

Fie $u \in \mathrm{Ker}(T) \Rightarrow T(u) = \mathbf{0_V}, S(T(u)) = S(\mathbf{0_V}) = \mathbf{0_W}$, deci $u \in \mathrm{Ker}(S \circ T)$.

b) $S \in \mathcal{L}(\mathbb{V}, \mathbb{W}), S$ izomorfism, rezultă că $S^{-1} \in \mathcal{L}(\mathbb{W}, \mathbb{V})$ şi este izomorfism. Scriem $T = S^{-1} \circ (S \circ T)$ şi conform punctului a) şi b), $\mathrm{rang}(T) \leq \min\{\mathrm{rang}(S \circ T), \mathrm{rang}(S^{-1})\} \leq \mathrm{rang}(S \circ T) \leq \min\{\mathrm{rang}(S), \mathrm{rang}(T)\} \leq \mathrm{rang}(T)$.

c) Scriem $S = (S \circ T) \circ T^{-1}$ şi facem un raţionament analog cu cel de la punctul c). □

4.5. Spaţii vectoriale izomorfe

Definiţia 4.5.1. *Două spaţii vectoriale* $\mathbb{V}$ *şi* $\mathbb{W}$, *peste acelaţi corp comutativ* $\mathbb{K}$, *se numesc* **spaţii vectoriale izomorfe** *dacă există un izomorfism* $T \in \mathcal{L}(\mathbb{V}, \mathbb{W})$. *Vom nota* $\mathbb{V} \cong W$.

Teorema 4.5.2. *Fie* $\mathbb{V}$ *un* $\mathbb{K}$*-spaţiu vectorial,* $\dim_{\mathbb{K}} \mathbb{V} = n$. *Atunci au loc afirmaţiile:*
a) $\mathbb{V} \cong \mathbb{K}^n$.
b) Dacă $\mathbb{W}$ *şi* $\mathbb{Z}$ *sunt două* $\mathbb{K}$*-spaţii vectoriale, atunci* $\mathbb{W} \simeq \mathbb{Z}$ *dacă şi numai dacă* $\dim_{\mathbb{K}} \mathbb{W} = \dim_{\mathbb{K}} \mathbb{Z}$.

Demonstraţie. a) Fie $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ o bază în $\mathbb{V}$. Definim aplicaţia

$T:\mathbb{V}\to\mathbb{K}^n, \forall u\in\mathbb{V}, \exists^*(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)\in\mathbb{K}^n: u=(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)\begin{pmatrix} v_1\\ \vdots\\ v_n\end{pmatrix}: T(v)=(\alpha_1,\ldots,\alpha_n).$

Demonstrăm că T astfel definită este o transformare liniară bijectivă. Liniaritatea:

$\forall\lambda\in\mathbb{K}, u,v\in\mathbb{V}, \exists^*(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)\in\mathbb{K}^n: u=(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)\begin{pmatrix} v_1\\ \vdots\\ v_n\end{pmatrix},$

$\exists^*(\beta_1,\ldots,\beta_n)\in\mathbb{K}^n: v=(\beta_1,\ldots,\beta_n)\begin{pmatrix} v_1\\ \vdots\\ v_n\end{pmatrix}, \lambda u+v=(\lambda\alpha_1+\beta_1,\ldots,\lambda\alpha_n+\beta_n)\begin{pmatrix} v_1\\ \vdots\\ v_n\end{pmatrix}\Rightarrow$

$T(\lambda u+v)=(\lambda\alpha_1+\beta_1,...,\lambda\alpha_n+\beta_n)=\lambda(\alpha_1,...,\alpha_n)+(\beta_1,...,\beta_n)=\lambda T(u)+T(v).$

Pentru bijectivitate este suficient să demonstrăm că T este injectivă (Teorema 4.4.10). Fie $u,v\in\mathbb{V}$, $\exists^*(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)\in\mathbb{K}^n,(\beta_1,\ldots,\beta_n)\in\mathbb{K}^n: u=(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)\begin{pmatrix} v_1\\ \vdots\\ v_n\end{pmatrix}$, $v=(\beta_1,\ldots,\beta_n)\begin{pmatrix} v_1\\ \vdots\\ v_n\end{pmatrix}$. Din $T(u)=T(v)\Rightarrow(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)=(\beta_1,\ldots,\beta_n)\Rightarrow\alpha_i=\beta_i, i=\overline{1,n}\Rightarrow$ $u=v$,rezultă că T este injectivă.

b) *Necesitatea.* Presupunem $\mathbb{W}\cong\mathbb{Z}\Rightarrow\exists T\in\mathcal{L}(\mathbb{W},\mathbb{Z})$ T bijectivă. Conform teoremei 4.3.2, punctul d) rezultă că $\dim_{\mathbb{K}}\mathbb{W}=\dim_{\mathbb{K}}\mathbb{Z}$.

Suficienţa. Presupunem că $\dim_{\mathbb{K}}\mathbb{W}=\dim_{\mathbb{K}}\mathbb{Z}=m$. Conform afirmaţiei a) din $\mathbb{W}\cong\mathbb{K}^m\Rightarrow$ $\exists T\in\mathcal{L}(\mathbb{W},\mathbb{K}^m): T$ bijectivă; analog $\mathbb{Z}\simeq\mathbb{K}^m\Rightarrow\exists S\in\mathcal{L}(\mathbb{Z},\mathbb{K}^m): S$ bijectivă. Din $S\in\mathcal{L}(\mathbb{Z},\mathbb{K}^m)$ şi S bijectivă $\Rightarrow\exists S^{-1}\in\mathcal{L}(\mathbb{K}^m,\mathbb{Z})$ şi S^{-1} bijectivă (Teorema 4.2.2). Conform Teoremei 4.2.2, $S^{-1}\circ T\in\mathcal{L}(\mathbb{W},\mathbb{Z})$, $S^{-1}\circ T$ bijectivă$\Rightarrow\mathbb{W}\simeq\mathbb{Z}$. □

Teorema 4.5.3. *Relaţia de izomorfism a spaţiilor vectoriale definite peste acelaşi corp comutativ este o relaţie de echivalenţă.*

Demonstraţie. Verificăm proprietăţile de reflexivitate, simetrie şi tranzitivitate.

Fie $\mathbb{V}$ un spaţiu vectorial peste corpul comutativ $\mathbb{K}$. Are loc $\mathbb{V}\simeq\mathbb{V}$ deoarece putem defini $T\in\mathcal{L}(\mathbb{V}), T(v)=v, \forall v\in\mathbb{V}, T$ bijectivă.

Fie $\mathbb{V}$ şi $\mathbb{W}$ două $\mathbb{K}$-spaţii vectoriale. $\mathbb{V}\simeq\mathbb{W}\Rightarrow\exists T\in\mathcal{L}(\mathbb{V},\mathbb{W})$, T bijectivă. Dar $T^{-1}\in\mathcal{L}(\mathbb{W},\mathbb{V})$, T^{-1} bijectivă conform Teoremei 4.2.2, rezultă $\mathbb{W}\simeq\mathbb{V}$.

Fie $\mathbb{V},\mathbb{W}$ şi $\mathbb{Z}$ trei $\mathbb{K}$-spaţii vectoriale, $\mathbb{V}\simeq\mathbb{W}$, $\mathbb{W}\simeq\mathbb{Z}\Rightarrow\exists T\in\mathcal{L}(\mathbb{V},\mathbb{W})$, T bijectivă şi $\exists S\in\mathcal{L}(\mathbb{W},\mathbb{Z})$, S bijectivă, atunci, conform Teoremei 4.2.2, $S\circ T\in\mathcal{L}(\mathbb{V},\mathbb{Z})$ şi $S\circ T$ este bijectivă, deci $\mathbb{V}\simeq\mathbb{Z}$. □

4.6. Matricea unei transformări liniare

Teorema 4.6.1. *Fie* $\mathbb{V}$ *şi* $\mathbb{W}$ *două* $\mathbb{K}$*-spaţii vectoriale,* $\dim_{\mathbb{K}}\mathbb{V}=n, \dim_{\mathbb{K}}\mathbb{W}=m$ *şi* $T\in\mathcal{L}(\mathbb{V},\mathbb{W})$. *Dacă* $\mathcal{B}_1=\{v_1,\ldots,v_n\}$ *este o bază în* $\mathbb{V}$ *şi* $\mathcal{B}_2=\{w_1,\ldots,w_m\}$ *o bază în* $\mathbb{W}$*, atunci* *există o matrice unică* $P \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K}), P = (p_{ij})_{i=\overline{1,m}, j=\overline{1,n}}$ *astfel încât*

(50)
$$\begin{pmatrix} T(v_1) \\ \vdots \\ T(v_n) \end{pmatrix} = P^T \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_m \end{pmatrix}.$$

Dacă $v \in \mathbb{V}$, $v = (\alpha_1 \; \dots \; \alpha_n) \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$ *are imaginea* $T(v) = (\beta_1 \dots \beta_m) \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_m \end{pmatrix}$, *atunci*

(51)
$$\begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_m \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}..$$

Demonstraţie. Demonstrăm existenţa şi unicitatea matricei P.

Existenţa matricei P. Dacă $\mathcal{B}_1 = \{v_1, \dots, v_n\}$ este o bază în $\mathbb{V}$, vectorii $T(v_i) \in \mathbb{W}, i = \overline{1,n}$ au descompunerile în raport cu baza $\mathcal{B}_2$ de forma:

$$T(v_i) = (p_{1i}.....p_{mi}) \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_m \end{pmatrix}, i = \overline{1,n},\ p_{ji} \in \mathbb{K}, i = \overline{1,n}, j = \overline{1,m},$$

echivalentă cu scrierea matriceală

(52)
$$\begin{pmatrix} T(v_1) \\ \vdots \\ T(v_n) \end{pmatrix} = P^T \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_m \end{pmatrix},$$

ceea ce reprezintă relaţia (50).

Unicitatea: matricea P este unică datorită unicităţii descompunerii unui vector după vectorii bazei (Teorema de caracterizare a bazelor).

Demonstrăm relaţia (51). Fie $T \in \mathcal{L}(\mathbb{V}, \mathbb{W})$ şi $v \in \mathbb{V}$, $v = (\alpha_1 \; \dots \; \alpha_n) \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$. Atunci

$T(v) = (\alpha_1 \; \dots \; \alpha_n) \begin{pmatrix} T(v_1) \\ \vdots \\ T(v_n) \end{pmatrix} = (\beta_1 \dots \beta_m) \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_m \end{pmatrix}$. Utilizând relaţia (52) rezultă:

$$(\alpha_1 \; \dots \; \alpha_n)\, P^T \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_m \end{pmatrix} = (\beta_1 \dots \beta_m) \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_m \end{pmatrix} \Rightarrow (\alpha_1 \; \dots \; \alpha_n)\, P^T = (\beta_1 \dots \beta_m).$$

Prin transpunere rezultă relaţia (51). □

Exemplul 4.6.2. Considerăm transformarea liniară din Exemplul 4.1.5,

$T : \mathbb{R}[x]_{\leq 2} \to \mathbb{R}[x]_{\leq 2}$, definită prin $[Tp](x) = xp'(x)$, $\forall p \in \mathbb{R}[x]_{\leq 2}$. Determinaţi matricea transformării liniare T în raport cu baza canonică din $\mathbb{R}[x]_{\leq 2}$, $\mathcal{B}_1 = \{1, x, x^2\}$, matricea transformării liniare T în raport cu baza $\mathcal{B}_2 = \{1, 1+x, (1+x)^2\}$ din $\mathbb{R}[x]_{\leq 2}$ şi matricea transformării liniare T în raport cu bazele $(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2)$.

Considerăm baza canonică $p_1(x) = 1, p_2(x) = x, p_3(x) = x^2$ şi determinăm $[Tp_1](x) = 0 \cdot p_1(x) + 0 \cdot p_2(x) + 0 \cdot p_3(x)$, $[Tp_2](x) = x = 0 \cdot p_1(x) + 1 \cdot p_2(x) + 0 \cdot p_3(x)$, $[Tp_2](x) = 2x^2 = 0 \cdot p_1(x) + 1 \cdot p_2(x) + 2 \cdot p_3(x)$.

$${}_{\mathcal{B}_1}(T)_{\mathcal{B}_1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Notăm $q_1(x) = 1, q_2(x) = 1 + x, q_3(x) = (1 + x)^2$ şi determinăm

$[Tq_1](x) = 0 = 0 \cdot q_1(x) + 0 \cdot q_2(x)) + 0 \cdot q_3(x)$,

$[Tq_2](x) = x = -1 \cdot q_1(x) + 1 \cdot q_2(x) + 0 \cdot q_3(x)$,

$[Tp_2](x) = 2x + 2x^2 = 0 \cdot q_1(x) + (-2) \cdot q_3(x) + 2 \cdot q_3(x)$.

$${}_{\mathcal{B}_2}(T)_{\mathcal{B}_2} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

$[Tp_1](x) = 0 \cdot q_1(x) + 0 \cdot q_2(x) + 0 \cdot q_3(x)$,

$[Tp_2](x) = x = -1 \cdot q_1(x) + 1 \cdot q_2(x) + 0 \cdot q_3(x)^2$,

$[Tp_2](x) = 2x^2 = 2 \cdot q_1(x) - 4 \cdot q_2(x) + 2 \cdot q_3(x)$

$${}_{\mathcal{B}_1}(T)_{\mathcal{B}_2} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Definiţia 4.6.3. *Fie* $\mathbb{V}$ *şi* $\mathbb{W}$ *două* $\mathbb{K}$*-spaţii vectoriale,* $\dim_{\mathbb{K}} \mathbb{V} = n, \dim_{\mathbb{K}} \mathbb{W} = m, \mathcal{B}_1 = \{v_j\}_{j=\overline{1,n}}, \mathcal{B}_2 = \{w_j\}_{j=\overline{1,m}}$ *două baze în* $\mathbb{V}$ *şi respectiv* $\mathbb{W}$ *iar* $T \in \mathcal{L}(\mathbb{V}, \mathbb{W})$. *Matricea* $P \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$, *ale cărei coloane sunt coordonatele vectorilor* $T(v_j), j = \overline{1,n}$ *în baza* $\mathcal{B}_2$, *se numeşte* **matricea asociată** *transformării liniare* T *în raport cu perechea de baze* $(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2)$.

Folosim notaţia $P = {}_{\mathcal{B}_1}(T)_{\mathcal{B}_2}$.

Observaţia 4.6.4. Relaţia (51) scrisă sub forma

$$\begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix} = {}_{\mathcal{B}_1}(T)_{\mathcal{B}_2} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} \tag{53}$$

se numeşte **ecuaţia matriceală** a transformării liniare T.

Teorema 4.6.5. *Fie* $\mathbb{V}$ *şi* $\mathbb{W}$ *două* $\mathbb{K}-$*spaţii vectoriale,* $\dim_{\mathbb{K}} \mathbb{V} = n, \dim_{\mathbb{K}} \mathbb{W} = m$, $\mathcal{B}_1 = \{v_j\}_{j=\overline{1,n}}, \mathcal{B}_2 = \{w_j\}_{j=\overline{1,m}}$ *două baze în* $\mathbb{V}$ *şi respectiv* $\mathbb{W}$, $T \in \mathcal{L}(\mathbb{V}, \mathbb{W})$ *şi* $P \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ *matricea asociată transformării liniare* T *în raport cu perechea de baze* $(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2)$. *Atunci* $\operatorname{rang}(T) = \operatorname{rang}(P)$ *oricare ar fi perechea de baze* $(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2)$.

Demonstraţie. Un vector $v \in \mathbb{V}$, $v = (\alpha_1 \ \dots \ \alpha_n) \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$ aparţine lui $\operatorname{Ker}(T)$ dacă $T(v) = \mathbf{0}_{\mathbb{W}}$. Dar

$$T(v) = (\alpha_1 \ \dots \ \alpha_n) \begin{pmatrix} T(v_1) \\ \vdots \\ T(v_n) \end{pmatrix} = (\alpha_1 \ \dots \ \alpha_n) P^T \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_m \end{pmatrix} = \mathbf{0}_{\mathbb{W}}.$$

Rezultă

$$P\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \vdots\\ \alpha_n\end{pmatrix}=\mathbf{0}_{n\times 1}. \tag{54}$$

Relaţia (54) reprezintă un sistem liniar omogen de m ecuaţii cu n necunoscute. Matricea sistemului este P. Dacă $\text{rang}(P)=r$, mulţimea soluţiilor sistemul este un subspaţiu vectorial al lui $\mathbb{K}^n$ de dimensiune $n-r$. Deci $\dim_{\mathbb{K}}(\text{Ker}(T))=n-r$. Rezultă că rangul transformării liniare T este r, $\text{rang}(T)=n-\dim_{\mathbb{K}}(\text{Ker}(T))=n-(n-r)=r$. □

Teorema 4.6.6. $\mathcal{L}(\mathbb{V},\mathbb{W})\simeq M_{m\times n}(\mathbb{K})$.

Demonstraţie. Fie $\mathcal{B}_1=\{v_j\}_{j=\overline{1,n}}$ o bază în $\mathbb{V}$ şi $\mathcal{B}_2=\{w_j\}_{j=\overline{1,m}}$ o bază în $\mathbb{W}$. Definim funcţia $H:\mathcal{L}(\mathbb{V},\mathbb{W})\to\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K}),\forall T\in\mathcal{L}(\mathbb{V},\mathbb{W}):H(T)={}_{\mathcal{B}_1}(T)_{\mathcal{B}_2}$.

Demonstrăm că H este o transformare liniară bijectivă.

Demonstrăm liniaritatea. Fie $\lambda\in\mathbb{K},T,S\in\mathcal{L}(\mathbb{V},\mathbb{W}),H(T)={}_{\mathcal{B}_1}(T)_{\mathcal{B}_2}=P,H(S)={}_{\mathcal{B}_1}(S)_{\mathcal{B}_2}=Q$,

$$\begin{pmatrix}(\lambda T+S)(v_1)\\ \vdots\\ (\lambda T+S)(v_n)\end{pmatrix}={}_{\mathcal{B}_1}(\lambda T+S)_{\mathcal{B}_2}\begin{pmatrix}w_1\\ \vdots\\ w_m\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}(\lambda T+S)(v_1)\\ \vdots\\ (\lambda T+S)(v_n)\end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix}T(v_1)\\ \vdots\\ T(v_1)\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}S(v_1)\\ \vdots\\ S(v_n)\end{pmatrix}=(\lambda P+Q)^T\begin{pmatrix}w_1\\ \vdots\\ w_m\end{pmatrix}\Rightarrow_{\mathcal{B}_1}(\lambda T+S)_{\mathcal{B}_2}=\lambda P+Q.$$

$H(\lambda T+S)={}_{\mathcal{B}_1}(\lambda T+S)_{\mathcal{B}_2}=\lambda P+Q=\lambda_{\mathcal{B}_1}(T)_{\mathcal{B}_2}+_{\mathcal{B}_1}(S)_{\mathcal{B}_2}=\lambda H(T)+H(S)$.

Demonstrăm injectivitatea lui H. Fie $T,S\in\mathcal{L}(\mathbb{V},\mathbb{W})$, $H(T)=H(S)$ (T,S au aceeaşi matrice în raport cu perechea de baze $(\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2)$)$\Rightarrow T=S$.

$H(T)={}_{\mathcal{B}_1}(T)_{\mathcal{B}_2}=P,H(S)={}_{\mathcal{B}_1}(S)_{\mathcal{B}_2}=Q,P=Q\Rightarrow$
$\begin{pmatrix}T(v_1)\\ \vdots\\ T(v_1)\end{pmatrix}=P^T\begin{pmatrix}w_1\\ \vdots\\ w_m\end{pmatrix},\begin{pmatrix}S(v_1)\\ \vdots\\ S(v_n)\end{pmatrix}=Q^T\begin{pmatrix}w_1\\ \vdots\\ w_m\end{pmatrix}\Rightarrow T(v_j)=S(v_j),j=\overline{1,n}$. Rezultă

$$\forall v\in\mathbb{V}:T(v)=(\alpha_1\ \dots\ \alpha_n)\begin{pmatrix}T(v_1)\\ \vdots\\ T(v_n)\end{pmatrix}=(\alpha_1\ \dots\ \alpha_n)\begin{pmatrix}S(v_1)\\ \vdots\\ S(v_n)\end{pmatrix}=S(v)\Rightarrow T=S.$$

Demonstrăm surjectivitatea. Fie $P\in\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ şi definim funcţia $T:\mathbb{V}\to\mathbb{W}$, $\forall v\in\mathbb{V}$, $v=(\alpha_1\ \dots\ \alpha_n)\begin{pmatrix}v_1\\ \vdots\\ v_n\end{pmatrix},T(v)=(\alpha_1\ \dots\ \alpha_n)\begin{pmatrix}T(v_1)\\ \vdots\\ T(v_n)\end{pmatrix}=(\alpha_1\ \dots\ \alpha_n)P^T\begin{pmatrix}w_1\\ \vdots\\ w_m\end{pmatrix}$. Se demonstrează imediat că T astfel definită este o transformare liniară.

Rezultă că T este bijectivă, deci există un izomorfism între $\mathcal{L}(\mathbb{V},\mathbb{W})$ şi $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$. □

Observaţiile 4.6.7. 1. Izomorfismul H depinde de bazele considerate în cele două spaţii vectoriale.

2. $\dim_{\mathbb{K}}\mathcal{L}(\mathbb{V},\mathbb{W})=\dim_{\mathbb{K}}\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})=m\cdot n$.

Proprietăţile transformării liniare sunt reflectate în proprietăţile matricelor asociate în diferite baze.

Teorema 4.6.8. *Fie* $\mathbb{V}$,$\mathbb{W}$ *şi* $\mathbb{Z}$ *trei* $\mathbb{K}-$*spaţii vectoriale,* $\dim_{\mathbb{K}} \mathbb{V} = n$, $\dim_{\mathbb{K}} \mathbb{W} = m$, $\dim_{\mathbb{K}} \mathbb{Z} = p$ *şi* $T \in \mathcal{L}(\mathbb{V}, \mathbb{W}$, $S \in \mathcal{L}(\mathbb{W}, \mathbb{Z})$. *Fie* $\mathcal{B}_1 = \{v_i\}_{i=\overline{1,n}}$, $\mathcal{B}_2 = \{w_i\}_{i=\overline{1,m}}$, $\mathcal{B}_3 = \{z_i\}_{i=\overline{1,p}}$ *baze în* $\mathbb{V}$, $\mathbb{W}$ *şi respectiv în* $\mathbb{Z}$. *Atunci are loc relaţia:*

(55) $$_{\mathcal{B}_1}(S \circ T)_{\mathcal{B}_3} = _{\mathcal{B}_2}(S)_{\mathcal{B}_3}\, _{\mathcal{B}_1}(T)_{\mathcal{B}_2}.$$

Demonstraţie. Fie $v \in \mathbb{V}$, $v = (\alpha_1\ \dots\ \alpha_n)\begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$, $T(v) = w \in \mathbb{W}$,

$w = (\beta_1 \dots \beta_m)\begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_m \end{pmatrix}$, $S(w) = z \in \mathbb{Z}$, $z = (\gamma_1 \dots \gamma_p)\begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_p \end{pmatrix}$.

Fie $_{\mathcal{B}_1}(T)_{\mathcal{B}_2} = P \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$. Are loc relaţia: $\begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_m \end{pmatrix} = P\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$.

Fie $_{\mathcal{B}_2}(S)_{\mathcal{B}_3} = Q \in \mathcal{M}_{p\times m}(\mathbb{K})$. Are loc relaţia: $\begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \vdots \\ \gamma_p \end{pmatrix} = Q\begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_m \end{pmatrix}$.

Atunci $\begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \vdots \\ \gamma_p \end{pmatrix} = QP\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$, adică $_{\mathcal{B}_1}(S \circ T)_{\mathcal{B}_3} = QP$ care reprezintă relaţia (55). □

Teorema 4.6.9. *Fie* $\mathbb{V}$ *si* $\mathbb{W}$ *două* $\mathbb{K}-$*spaţii vectoriale,* $\dim_{\mathbb{K}} \mathbb{V} = \dim_{\mathbb{K}} \mathbb{W} = n$ *şi* $T \in \mathcal{L}(\mathbb{V}, \mathbb{W})$, T *izomorfism. Fie* $\mathcal{B}_1$ *şi* $\mathcal{B}_2$ *două baze în* $\mathbb{V}$ *şi respectiv* $\mathbb{W}$. *Atunci are loc relaţia:*

(56) $$_{\mathcal{B}_2}(T^{-1})_{\mathcal{B}_1} = \left(_{\mathcal{B}_1}(T)_{\mathcal{B}_2}\right)^{-1}.$$

Demonstraţie. Deoarece $T \circ T^{-1} = id_{\mathbb{W}}$ şi $T^{-1} \circ T = id_{\mathbb{V}}$, ţinând seama de Teorema 4.6.8 şi de faptul că matricea aplicaţiei identitate este matricea unitate, rezultă:
$_{\mathcal{B}_1}(T)_{\mathcal{B}_2} \cdot_{\mathcal{B}_2} (T^{-1})_{\mathcal{B}_1} = _{\mathcal{B}_2}(T^{-1})_{\mathcal{B}_1} \cdot_{\mathcal{B}_1} (T)_{\mathcal{B}_2} = I_n \Rightarrow \left(_{\mathcal{B}_1}(T)_{\mathcal{B}_2}\right)^{-1} = _{\mathcal{B}_2}(T^{-1})_{\mathcal{B}_1}$. □

Propoziţia 4.6.10. *Fie matricele* $A \in \mathcal{M}_{m\times p}(\mathbb{K})$ *şi* $B \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$. *Atunci:*
$\text{rang}(AB) \leq \min\{\text{rang}(A), \text{rang}(B)\}$.

Demonstraţie. Fie $T : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$, şi $\mathcal{B}_1$, $\mathcal{B}_2, \mathcal{B}_3$ bazele canonice din $\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^m$ şi respectiv $\mathbb{K}^p$, $_{\mathcal{B}_1}(T)_{\mathcal{B}_2} = B$ şi fie $S : \mathbb{K}^m \to \mathbb{K}^p$, $_{\mathcal{B}_2}(S)_{\mathcal{B}_3} = A$. Considerăm compunerea $S \circ T : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^p$. Dar $_{\mathcal{B}_1}(S \circ T)_{\mathcal{B}_3} = _{\mathcal{B}_2}(S)_{\mathcal{B}_3} \cdot_{\mathcal{B}_1} (T)_{\mathcal{B}_2} = AB$.

Avem $\text{rang}(AB) = \text{rang}(S \circ T) \leq \min\{\text{rang}(S), \text{rang}(T)\} \leq \min\{\text{rang}(A), \text{rang}(B)\}$, folosind teoremele 4.4.11 şi 4.6.5. □

Propoziţia 4.6.11. *Dacă* $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ *şi* $B \in GL_m(\mathbb{K}), C \in GL_n(\mathbb{K})$, *atunci*
$\text{rang}(BA) = \text{rang}(A) = \text{rang}(AC)$.

Demonstraţie. Avem $\operatorname{rang}(BA) \leq \min\{\operatorname{rang}(B), \operatorname{rang}(A)\} \leq \operatorname{rang}(A)$. Putem scrie $A = B^{-1}(BA)$ de unde rezultă că $\operatorname{rang}(A) \leq \min\{rang(B^{-1}), rang(BA)\} \leq rang(BA)$, folosind Teorema 4.6.10. Deducem că $\operatorname{rang}(BA) = \operatorname{rang}(A)$. Analog se demonstrează cea de a doua relaţie. $\square$

4.6.1. Schimbarea matricei unei transformări liniare la schimbarea bazelor.

Teorema 4.6.12. *Fie* $\mathbb{V}$ *si* $\mathbb{W}$ *două* $\mathbb{K}-$*spaţii vectoriale,* $\dim_{\mathbb{K}} \mathbb{V} = n, \dim_{\mathbb{K}} \mathbb{W} = m$ *şi* $T \in \mathcal{L}(\mathbb{V}, \mathbb{W})$. *Fie* $\mathcal{B}_1 = \{v_i\}_{i=\overline{1,n}}$, $\overline{\mathcal{B}_1} = \{\overline{v_i}\}_{i=\overline{1,n}}$ *două baze în* $\mathbb{V}$ *şi* $\mathcal{B}_2 = \{w_i\}_{i=\overline{1,m}}, \overline{\mathcal{B}_2} = \{\overline{w_i}\}_{i=\overline{1,m}}$ *două baze în* $\mathbb{W}$, $\mathcal{B}_1 \xrightarrow{A} \overline{\mathcal{B}}_1, \mathcal{B}_2 \xrightarrow{B} \overline{\mathcal{B}}_2$. *Atunci are loc relaţia:*

$$_{\overline{\mathcal{B}}_1}(T)_{\overline{\mathcal{B}}_2} = B^{-1} \cdot_{\mathcal{B}_1} (T)_{\mathcal{B}_2} \cdot A. \tag{57}$$

Demonstraţie. Fie $T \in \mathcal{L}(\mathbb{V}, \mathbb{W})$ şi $v \in \mathbb{V}$, $v = (\alpha_1 \ \ldots \ \alpha_n) \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$.

Atunci $T(v) = (\beta_1 \ \ldots \ \beta_m) \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_m \end{pmatrix}$. Folosim ecuaţia matriceală a transformării liniare T în perechea de baze $(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2)$, (53):

$$\begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_m \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}, P =_{\mathcal{B}_1} (T)_{\mathcal{B}_2}. \tag{58}$$

Descompunem v şi $T(v)$ după bazele $\overline{\mathcal{B}_1}$ şi respectiv $\overline{\mathcal{B}_2}$:

$$v = (\overline{\alpha_1} \ \ldots \ \overline{\alpha_n}) \begin{pmatrix} \overline{v}_1 \\ \vdots \\ \overline{v}_n \end{pmatrix}, T(u) = (\overline{\beta}_1 \ldots \overline{\beta_m}) \begin{pmatrix} \overline{w_1} \\ \vdots \\ \overline{w_m} \end{pmatrix}.$$

Folosim ecuaţia matriceală a transformării liniare T în perechea de baze $\left(\overline{\mathcal{B}}_1, \overline{\mathcal{B}}_2\right)$

$$\begin{pmatrix} \overline{\beta_1} \\ \vdots \\ \overline{\beta_m} \end{pmatrix} = Q \begin{pmatrix} \overline{\alpha_1} \\ \vdots \\ \overline{\alpha_n} \end{pmatrix}, Q =_{\overline{\mathcal{B}}_1} (T)_{\overline{\mathcal{B}}_2}. \tag{59}$$

Folosind formula de schimbare a coordonatelor unui vector la o schimbare de baze, rezultă

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} \overline{\alpha_1} \\ \vdots \\ \overline{\alpha_n} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} \overline{\beta_1} \\ \vdots \\ \overline{\beta_n} \end{pmatrix}.$$

Înlocuind în (58), rezultă:

$$B \begin{pmatrix} \overline{\beta_1} \\ \vdots \\ \overline{\beta_n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_m \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = PA \begin{pmatrix} \overline{\alpha_1} \\ \vdots \\ \overline{\alpha_n} \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} \overline{\beta_1} \\ \vdots \\ \overline{\beta_n} \end{pmatrix} = B^{-1}PA \begin{pmatrix} \overline{\alpha_1} \\ \vdots \\ \overline{\alpha_n} \end{pmatrix}$$

Din această relaţie şi din (59) rezultă relaţia (57).

Exemplificăm conţinutul teoremei prin următoarea schemă:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{V}_{\mathcal{B}_1} & \overset{_{\mathcal{B}_1}T_{\mathcal{B}_2}}{\rightarrow} & \mathbb{W}_{\mathcal{B}_2} \\ A \downarrow & & \downarrow B \\ \mathbb{V}_{\overline{\mathcal{B}_1}} & \overset{_{\overline{\mathcal{B}_1}}T_{\overline{\mathcal{B}_2}}}{\rightarrow} & \mathbb{W}_{\overline{\mathcal{B}_2}} \end{array}$$

□

Teorema 4.6.13. *Fie $\mathbb{V}$ un $\mathbb{K}-$spaţiu vectorial,* $\dim_{\mathbb{K}} \mathbb{V} = n$ *şi* $T \in \mathcal{L}(\mathbb{V})$. *Dacă $\mathcal{B}, \overline{\mathcal{B}}$ sunt două baze în $\mathbb{V}$, $\mathcal{B} \overset{A}{\rightarrow} \overline{\mathcal{B}}$, atunci are loc relaţia*

(60) $$_{\overline{\mathcal{B}}}(T)_{\overline{\mathcal{B}}} = A^{-1} \cdot_{\mathcal{B}} (T)_{\mathcal{B}} \cdot A.$$

Observaţia 4.6.14. Formula (57) se numeşte **formula de schimbare a matricei unei transformări liniare** $T \in \mathcal{L}(\mathbb{V}, \mathbb{W})$ la schimbarea bazelor în cele două $\mathbb{K}-$spaţii vectoriale $\mathbb{V}$ şi $\mathbb{W}$.

Reamintim că s-a notat, în Capitolul 2, cu $GL_n(\mathbb{K})$ n-grupul liniar general real, adică mulţimea matricelor pătratice, cu elemente reale, de ordin n, inversabile.

Definiţia 4.6.15. *Două matrice $P, \overline{P} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ se numesc* **matrice asemenea** *dacă există o matrice $A \in GL_n(\mathbb{K})$ astfel încât:*

(61) $$\overline{P} = A^{-1} \cdot P \cdot A.$$

Notăm relaţia de asemănare prin "$\sim$ ", $P \sim \overline{P}$.

Teorema 4.6.16. *Relaţia de asemănare a matricelor pătratice de un ordin dat este o relaţie de echivalenţă.*

Demonstraţie. a) $\forall P \in M_n(\mathbb{K})$, $P \sim P$, deoarece $P = I_n^{-1} \cdot P \cdot I_n$ (relaţia de asemănare este reflexivă)

b)$\forall P, \overline{P} \in M_n(\mathbb{K})$, $P \sim \overline{P} \Rightarrow \overline{P} \sim P$ (relaţia de asemănare este simetrică).

Într-adevăr, $P \sim \overline{P} \Rightarrow \exists A \in GL_n(\mathbb{K}) : \overline{P} = A^{-1} \cdot P \cdot A \Rightarrow P = A \cdot \overline{P} \cdot A^{-1} = (A^{-1})^{-1} \cdot \overline{P} \cdot A^{-1} \Rightarrow \overline{P} \sim P$.

c)$\forall P, \overline{P}, \overline{\overline{P}} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ $P \sim \overline{P}, \overline{P} \sim \overline{\overline{P}} \Rightarrow P \sim \overline{\overline{P}}$ (relaţia de asemănare este tranzitivă).

Într-adevăr, $P \sim \overline{P} \Rightarrow \exists A \in GL_n(\mathbb{K}) : \overline{P} = A^{-1} \cdot P \cdot A$; $\overline{P} \sim \overline{\overline{P}} \Rightarrow \exists B \in GL_n(\mathbb{K}) : \overline{\overline{P}} = B^{-1} \cdot \overline{P} \cdot B \Rightarrow \overline{\overline{P}} = B^{-1} \cdot A^{-1} \cdot P \cdot A \cdot B = (A \cdot B)^{-1} \cdot P \cdot (A \cdot B) \Rightarrow P \sim \overline{\overline{P}}$. □

Observaţiile 4.6.17. 1. Folosind teorema 4.6.11 rezultă că două matrice asemenea au acelaşi rang.

2. Din relaţia (61) rezultă că matricele asociate unui endomorfism $T \in \mathcal{L}(\mathbb{V})$ în două baze diferite ale lui $\mathbb{V}$ sunt matrice asemenea. Are loc şi afirmaţia reciprocă, care reprezintă teorema următoare:

Teorema 4.6.18. *Fie* $\mathbb{V}$ *un* $\mathbb{K}-$*spaţiu vectorial,* $\dim_{\mathbb{K}} \mathbb{V} = n, P, Q \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ *două matrice asemenea. Atunci ele reprezină matricele aceluiaşi endomorfism* $T \in \mathcal{L}(\mathbb{V})$ *în două baze convenabil alese.*

Demonstraţie. Fie $P \sim Q \Rightarrow \exists A \in GL_n(\mathbb{K})$ astfel încât $Q = A^{-1} \cdot P \cdot A$. Fie $\mathcal{B} = \{v_i\}_{i=\overline{1,n}}$ o bază în $\mathbb{V}$. Considerăm baza $\overline{\mathcal{B}}$ astfel încât $\mathcal{B} \xrightarrow{A} \overline{\mathcal{B}}$. Atunci, conform Teoremei 4.6.13, rezultă că

$_{\overline{\mathcal{B}}}(T)_{\overline{\mathcal{B}}} = A^{-1} \cdot_{\mathcal{B}}(T)_{\mathcal{B}} \cdot A.$ □

Observaţia 4.6.19. Din Teoremele 4.6.13, 4.6.16 şi 4.6.18 rezultă că relaţia de asemănare împarte mulţimea matricelor pătratice de ordin n în clase de echivalenţă, fiecare clasă de echivalenţă corespunzând unui endomorfism$T \in \mathcal{L}(\mathbb{V})$, $\dim_{\mathbb{K}} \mathbb{V} = n$.

4.7. Endomorfisme speciale pe spaţii euclidiene

4.7.1. Endomorfism adjunct.

Definiţia 4.7.1. *Fie* $(\mathbb{V}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ *un spaţiu euclidian şi* $T \in \mathcal{L}(\mathbb{V})$. *Endomorfismul* T^*,
$T^* : \mathbb{V} \to \mathbb{V}$ *se numeşte* **endomorfism adjunct** *al endomorfismului* T *dacă*

$$\forall u, v \in \mathbb{V} : \langle T(u), v\rangle = \langle u, T^*(v)\rangle. \tag{62}$$

Teorema 4.7.2. *Fie* $(\mathbb{V}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ *un spaţiu euclidian şi* $T \in \mathcal{L}(\mathbb{V})$. *Dacă există endomorfismul* T^* *cu proprietatea (62) atunci el este unic.*

Demonstraţie. Presupunem că există şi T^0 cu proprietatea (62). Atunci
$\langle T(u), v\rangle = \langle u, T^0(v)\rangle = \langle u, T^*(v)\rangle, \forall u, v \in \mathbb{V}$
$\Rightarrow \langle u, T^0(v) - T^*(v)\rangle = 0, \forall u, v \in \mathbb{V}$.
Fie $u = T^0(v) - T^*(v) \Rightarrow \| T^0(v) - T^*(v) \| = 0 \Rightarrow T^0(v) = T^*(v)$, $\forall v \in \mathbb{V} \Rightarrow T^0 = T^*$. □

Teorema 4.7.3. Proprietăţi ale endomorfismelor adjuncte
i) $\forall T, S \in \mathcal{L}(\mathbb{V}) : (T + S)^* = T^* + S^*$,
ii) $\forall \alpha \in \mathbb{V}, \forall S \in \mathcal{L}(\mathbb{V}) : (\alpha T)^* = \alpha T^*$,
iii) $\forall T, S \in \mathcal{L}(\mathbb{V}) : (T \circ S)^* = S^* \circ T^*$,
iv) $\forall T \in \mathcal{L}(\mathbb{V}) : (T^*)^* = T$,
v) $(id_{\mathbb{V}})^* = id_{\mathbb{V}}, \mathbf{0}^*_{\mathcal{L}(\mathbb{V})} = \mathbf{0}_{\mathcal{L}(\mathbb{V})}.(\mathbf{0}_{\mathcal{L}(\mathbb{V})} : \mathbb{V} \to \mathbb{V}, \forall v \in \mathbb{V} : \mathbf{0}_{\mathcal{L}(\mathbb{V})}(v) = \mathbf{0}_{\mathbb{V}})$.

Demonstraţie. Demonstrăm relaţia *iii*), pentru celelalte se procedează analog. Fie
$u, v \in \mathbb{V}, \langle (T \circ S)(u), v\rangle = \langle T(S(u)), v\rangle = \langle S(u), T^*(v)\rangle = \langle u, S^*(T^*(u))\rangle$.
Dar $\langle (T \circ S)(u), v\rangle = \langle u, (T \circ S)^*(v)\rangle$. Din aceste două relaţii şi din unicitatea endomorfismului adjunct rezultă relaţia *iii*).
Analog se demonstrează celelalte relaţii. □

Teorema 4.7.4. *Fie* $(\mathbb{V}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ *un spaţiu liniar euclidian finit dimensional,* $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{V} = n$. *Fie* $T \in \mathcal{L}(\mathbb{V})$ *şi* $\mathcal{B} = \{e_i\}_{i=\overline{1,n}}$ *o bază ortonormată în* $\mathbb{V}$, $P =_{\mathcal{B}} (T)_{\mathcal{B}}$. *Matricea ataşată lui* T^* *în raport cu aceeaşi bază ortonormată în* $\mathbb{V}$ *este* P^T.

Demonstraţie. Fie $\mathcal{B} = \{e_i\}_{i=\overline{1,n}}$ o bază ortonormată în $\mathbb{V}$ şi fie $T \in \mathcal{L}(\mathbb{V})$.

Fie $u, v \in \mathbb{V}, u = (\alpha_1 \dots \alpha_n) \begin{pmatrix} e_1 \\ \vdots \\ e_n \end{pmatrix}$, $T(u) = (\overline{\alpha_1} \dots \overline{\alpha_n}) \begin{pmatrix} e_1 \\ \vdots \\ e_n \end{pmatrix}$,

$v = (\beta_1 \dots \beta_n) \begin{pmatrix} e_1 \\ \vdots \\ e_n \end{pmatrix}$, $T(v) = (\overline{\beta_1}, \dots, \overline{\beta_n}) \begin{pmatrix} e_1 \\ \vdots \\ e_n \end{pmatrix}$.

Fie $\begin{pmatrix} \overline{\beta_1} \\ \vdots \\ \overline{\beta_n} \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix}$ şi $\begin{pmatrix} \overline{\alpha_1} \\ \vdots \\ \overline{\alpha_n} \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$,
relaţii date de ecuaţia matriceală a aplicaţiei liniare T.

Atunci

$\langle T(u), v \rangle = (\overline{\alpha_1} \dots \overline{\alpha_n}) \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix} = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)\, P^T \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix}$.

Fie $Q =_{\mathcal{B}} (T^*)_{\mathcal{B}}$, $T^*(v) = (\beta_1^* \dots \beta_n^*) \begin{pmatrix} e_1 \\ \vdots \\ e_n \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} \beta_1^* \\ \vdots \\ \beta_n^* \end{pmatrix} = Q \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix}$,
atunci

$\langle u, T^*(v) \rangle = (\alpha_1 \dots \alpha_n) \begin{pmatrix} \beta_1^* \\ \vdots \\ \beta_n^* \end{pmatrix} = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)\, Q \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix}$, dar $\langle T(u), v \rangle = \langle u, T^*(v) \rangle, \forall u, v \in \mathbb{V} \Rightarrow Q = P^T$. $\square$

4.7.2. Endomorfism autoadjunct.

Definiţia 4.7.5. *Fie* $(\mathbb{V}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ *un spaţiu euclidian şi* $T \in \mathcal{L}(\mathbb{V})$. *Endomorfismul* T *se numeşte* **endomorfism autoadjunct** *dacă*
$\forall u, v \in \mathbb{V} : \langle T(u), v \rangle = \langle u, T(v) \rangle$.

Observaţia 4.7.6. Observăm că dacă $T \in \mathcal{L}(\mathbb{V})$ este autoadjunct, atunci $T = T^*$.

Teorema 4.7.7. *Fie* $(\mathbb{V}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ *un spaţiu euclidian finit dimensional,* $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{V} = n$, $T \in \mathcal{L}(\mathbb{V})$ *şi* $\mathcal{B} = \{e_i\}_{i=\overline{1,n}}$ *o bază ortonormată în* $\mathbb{V}$, $P =_{\mathcal{B}} (T)_{\mathcal{B}}$. *Dacă* T *este un endomorfism autoadjunct, atunci* $P = P^T$. *Reciproc, dacă* $P = P^T$ *atunci endomorfismul* T *este autoadjunct.*

Demonstraţie. *Necesitatea.* Dacă $Q =_{\mathcal{B}} (T^*)_{\mathcal{B}}$, $P =_{\mathcal{B}} (T)_{\mathcal{B}}$ iar $T = T^* \Rightarrow Q = P^T, Q = P \Rightarrow P = P^T$.

Suficienţa. Dacă ${}_{\mathcal{B}}(T)_{\mathcal{B}} = P = P^T$,

$u, v \in \mathbb{V}$, $u = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \begin{pmatrix} e_1 \\ \vdots \\ e_n \end{pmatrix}$, $v = (\beta_1, \dots, \beta_n) \begin{pmatrix} e_1 \\ \vdots \\ e_n \end{pmatrix}$,

$T(u) = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \begin{pmatrix} T(e_1) \\ \vdots \\ T(e_n) \end{pmatrix} = (\overline{\alpha_1}, \dots, \overline{\alpha_n}) \begin{pmatrix} e_1 \\ \vdots \\ e_n \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} \overline{\alpha_1} \\ \vdots \\ \overline{\alpha_n} \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$,

$$T(v) = (\beta_1, \ldots, \beta_n) \begin{pmatrix} T(e_1) \\ \vdots \\ T(e_n) \end{pmatrix} = (\overline{\beta_1}, \ldots, \overline{\beta_n}) \begin{pmatrix} e_1 \\ \vdots \\ e_n \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} \overline{\beta_1} \\ \vdots \\ \overline{\beta_n} \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix}.$$

Atunci

$$\langle T(u), v\rangle = (\overline{\alpha_1}, \ldots, \overline{\alpha_n}) \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)\, P^T \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix}$$

$$\langle u, T(v)\rangle = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \begin{pmatrix} \overline{\beta_1} \\ \vdots \\ \overline{\beta_n} \end{pmatrix} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)\, P \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix}.$$

Dar $P = P^T \Rightarrow \langle T(u), v\rangle = \langle u, T(v)\rangle, \forall u, v \in \mathbb{V}$. □

4.7.3. Endomorfism ortogonal.

Definiţia 4.7.8. *Fie* $(\mathbb{V}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ *un spaţiu euclidian şi* $T \in \mathcal{L}(\mathbb{V})$. *Endomorfismul* T *se numeşte* **endomorfism ortogonal** *dacă păstrează produsul scalar,*

$$\forall u, v \in \mathbb{V} : \langle T(u), T(v)\rangle = \langle u, v\rangle. \tag{63}$$

Exemplul 4.7.9. Funcţia identitate, $id_{\mathbb{V}} : \mathbb{V} \to \mathbb{V}, \forall u \in \mathbb{X}, id_{\mathbb{V}}(u) = u,$ este un endomorfism ortogonal deoarece:

$\forall (u, v) \in \mathbb{V}^2 : \langle id_{\mathbb{V}}(u), id_{\mathbb{V}}(v)\rangle = \langle u, v\rangle.$

Teorema 4.7.10. (Teorema de caracterizare a endomorfismelor ortogonale) *Dacă* $(\mathbb{V}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ *este un spaţiu euclidian şi* $T \in \mathcal{L}(\mathbb{V})$, *atunci* T *este ortogonal dacă şi numai dacă păstrează norma vectorilor din* $\mathbb{V}$:

$$\forall v \in \mathbb{V} : \| T(v) \| = \| v \| . \tag{64}$$

Demonstraţie. *Necesitatea.* Presupunem T ortogonal, atunci

$\forall v \in \mathbb{V} : \| T(v) \|^2 = \langle T(v), T(v)\rangle = \langle v, v\rangle = \| v \|^2 \Rightarrow \| T(v) \| = \| v \|$.

Suficienţa. Presupunem relaţia (64) adevărată. Demonstrăm relaţia

$\langle u, v\rangle = \frac{1}{2}\left\{\| u+v \|^2 - \| u \|^2 - \| v \|^2\right\},$

care rezultă din

$\| u+v \|^2 = \langle u+v, u+v\rangle = \langle u, u\rangle + \langle u, v\rangle + \langle v, u\rangle + \langle v, v\rangle = \langle u, u\rangle + 2\langle u, v\rangle + \langle v, v\rangle.$

Aplicăm această relaţie vectorilor $T(u)$ şi $T(v)$:

$\forall (u, v) \in \mathbb{V}^2 : \langle T(u), T(v)\rangle = \frac{1}{2}\left\{\| T(u) + T(v) \|^2 - \| T(u) \|^2 - \| T(v) \|^2\right\} =$

$= \frac{1}{2}\left\{\| u+v \|^2 - \| u \|^2 - \| v \|^2\right\} = \langle u, v\rangle,$

ceea ce trebuia de demonstrat. □

Propoziţia 4.7.11. *Dacă* $(\mathbb{V}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ *este un spaţiu euclidian finit dimensional şi* $T \in \mathcal{L}(\mathbb{V})$, T *este ortogonal, atunci* T *este bijectiv.*

Demonstraţie. Este suficient să demonstrăm $\mathrm{Ker}(T) = \{\mathbf{0_V}\}$. (Teoremele 4.4.3 şi 4.4.10). Dacă $u \in \ker(T) \Rightarrow T(u) = \mathbf{0_V} \Rightarrow \| T(u) \| = \| u \| = 0 \Rightarrow u = \mathbf{0_V} \Rightarrow \mathrm{Ker}(T) = \{\mathbf{0_V}\}$. □

Teorema 4.7.12. *Fie $(\mathbb{V}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un spaţiu euclidian finit dimensional. În raport cu operaţiile de compunere, endomorfismele ortogonale ale spaţiului euclidian $\mathbb{V}$ formează un grup $(\mathcal{O}(\mathbb{V}), \circ)$ numit* **grupul ortogonal** *al spaţiului euclidian $\mathbb{V}$, subgrup al grupului $GL_n(\mathbb{R})$ (grupul general liniar al lui $\mathbb{V}$).*

Demonstraţie. Observăm că $\mathcal{O}(\mathbb{V}) \neq \emptyset$, deoarece $id_{\mathbb{V}} \in \mathcal{O}(\mathbb{V})$ (Exemplul 4.7.9). Fie $T, S \in \mathcal{O}(\mathbb{V})$. Ştim că $T \circ S \in \mathcal{L}(\mathbb{V})$ şi

$\forall u \in \mathbb{V} : \| (T \circ S)(u) \| = \| T(S(u)) \| = \| S(u) \| = \| u \| \Rightarrow T \circ S \in \mathcal{O}(\mathbb{V})$.

Fie $T \in \mathcal{O}(\mathbb{V})$. Conform Teoremelor 4.7.11 şi 4.2.2 rezultă că există $T^{-1} \in \mathcal{L}(\mathbb{V})$. Demonstrăm că $T^{-1} \in \mathcal{O}(\mathbb{V})$. Pentru $u \in \mathbb{V} : T^{-1}(u) = v \Leftrightarrow T(v) = u$. Dar $\| T(v) \| = \| v \| \Leftrightarrow \| v \| = \| u \| \Leftrightarrow \| T^{-1}(u) \| = \| u \| \Leftrightarrow T^{-1} \in \mathcal{O}(\mathbb{V})$. Rezultă că $(\mathcal{O}(\mathbb{V}), \circ)$ are structură de grup. □

Teorema 4.7.13. *Fie $(\mathbb{V}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un spaţiu euclidian finit dimensional,* $\dim_{\mathbb{K}} \mathbb{V} = n$. *$T \in \mathcal{O}(\mathbb{V})$ dacă şi numai dacă matricea lui T în raport cu o bază ortonormată în $\mathbb{V}$ este ortogonală.*

Demonstraţie. *Necesitatea.* Fie $\mathcal{B} = \{e_i\}_{i=\overline{1,n}}$ o bază ortonormată în $\mathbb{V}$ şi fie $T \in \mathcal{O}(\mathbb{V})$. Rezultă că T păstrează produsul scalar.

Fie $u \in \mathbb{V}$, $u = (\alpha_1 \ldots \alpha_n) \begin{pmatrix} e_1 \\ \vdots \\ e_n \end{pmatrix}$.

Atunci

$$T(u) = (\alpha_1 \ldots \alpha_n) \begin{pmatrix} T(e_1) \\ \vdots \\ T(e_n) \end{pmatrix} = (\overline{\alpha_1} \ldots \overline{\alpha_n}) \begin{pmatrix} e_1 \\ \vdots \\ e_n \end{pmatrix}.$$

Fie $\begin{pmatrix} \overline{\alpha_1} \\ \vdots \\ \overline{\alpha_n} \end{pmatrix} =_{\mathcal{B}} (T)_{\mathcal{B}} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$ ecuaţia matriceală a transformării liniare T.

Notăm cu $P =_{\mathcal{B}} (T)_{\mathcal{B}}$.

Atunci

$$\langle T(u), T(u)\rangle = (\overline{\alpha_1} \ldots \overline{\alpha_n}) \begin{pmatrix} \overline{\alpha_1} \\ \vdots \\ \overline{\alpha_n} \end{pmatrix} = (\alpha_1 \ldots \alpha_n)\, P^T \cdot P \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix},$$

$$\langle u, u\rangle = (\alpha_1 \ldots \alpha_n) \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} \Rightarrow P^T \cdot \mathbf{P} = I_n \Rightarrow \mathbf{P}^{-1} = P^T \Rightarrow P \text{ matrice ortogonală.}$$

Suficienţa. Presupunem că $T \in \mathcal{L}(\mathbb{V})$, $P =_{\mathcal{B}} (T)_{\mathcal{B}}$ este o matrice ortogonală, $P^T \cdot P = I_n$.

Fie $u \in \mathbb{V}$, $u = (\alpha_1 \ldots \alpha_n) \begin{pmatrix} e_1 \\ \vdots \\ e_n \end{pmatrix}$, $T(u) = (\alpha_1 \ldots \alpha_n) \begin{pmatrix} T(e_1) \\ \vdots \\ T(e_n) \end{pmatrix} = (\overline{\alpha_1} \ldots \overline{\alpha_n}) \begin{pmatrix} e_1 \\ \vdots \\ e_n \end{pmatrix}$.

Fie $\begin{pmatrix} \overline{\alpha_1} \\ \vdots \\ \overline{\alpha_n} \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$.

Atunci

$\langle T(u), T(u) \rangle = (\overline{\alpha_1} \ldots \overline{\alpha_n}) \begin{pmatrix} \overline{\alpha_1} \\ \vdots \\ \overline{\alpha_n} \end{pmatrix} = (\alpha_1 \ldots \alpha_n)\, P^T \cdot P \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = (\alpha_1 \ldots \alpha_n) \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = \langle u, u \rangle \Rightarrow$

$\| T(u) \| = \| u \| \Rightarrow T \in \mathcal{O}(\mathbb{V})$.

Observaţia 4.7.14. Ştim că dacă $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ este o matrice ortogonală, atunci avem $\det(P) = \pm 1$.

Notăm $\mathcal{O}^+(V) = \{T \in \mathcal{O}(\mathbb{V}), \det(P) = 1, P =_{\mathcal{B}} (T)_{\mathcal{B}}, \mathcal{B} \text{ bază ortonormată în } \mathbb{V}\}$.

Un element $T \in \mathcal{O}^+(\mathbb{V})$ se numeşte **endomorfism ortogonal de specia a I-a** sau **rotaţie.** Rezultă imediat că $(\mathcal{O}^+(\mathbb{V}), \circ)$ este un subgrup al lui $(\mathcal{O}(\mathbb{V}), \circ)$, numit **grupul rotaţiilor** sau **grupul ortogonal special.**

Analog notăm $\mathcal{O}^-(\mathbb{V}) = \{T \in \mathcal{O}(\mathbb{V}), \det(\mathbf{P}) = -1, P =_{\mathcal{B}} (T)_{\mathcal{B}}, \mathcal{B} \text{ bază ortonormată în } \mathbb{V}\}$.

Un element $T \in \mathcal{O}^-(\mathbb{V})$ se numeşte **endomorfism ortogonal de specia a II-a.** Remarcăm că $(\mathcal{O}^-(\mathbb{V}), \circ)$ nu este un subgrup al lui $(\mathcal{O}(\mathbb{V}), \circ)$, deoarece dacă $T, S \in \mathcal{O}^-(\mathbb{V})$ atunci $T \circ S \in \mathcal{O}^+(\mathbb{V})$.

4.7.4. Proiecţii ortogonale. Fie $(\mathbb{V}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un spaţiu euclidian şi $\mathbb{W}$ un subspaţiu al lui $\mathbb{V}$. Conform teoremei 3.4.20, $\mathbb{V} = \mathbb{W} \oplus \mathbb{W}^{\perp}$. Orice vector $u \in \mathbb{V}$:$u = u' + u'', u' \in \mathbb{W}, u'' \in \mathbb{W}^{\perp}$. Conform Exemplului 4.1.5, aplicaţiile

$$\Pi_1 : \mathbb{V} \to W \tag{65}$$

şi

$$\Pi_2 : \mathbb{V} \to W^{\perp} \tag{66}$$

definite prin $\forall u \in \mathbb{V} : \Pi_1(u) = u', \Pi_2(u) = u''$ sunt transformări liniare numite **proiecţii.**

Definiţia 4.7.15. *Transformările liniare* Π_1 *şi* Π_2 *definite prin relaţiile* (65) *şi* (66) *se numesc* **proiecţii ortogonale** *ale spaţiului euclidian* $\mathbb{V}$ *pe* $\mathbb{W}$ *şi* $\mathbb{W}^{\perp}$, *respectiv.*

Exemplele 4.7.16. 1. Din proprietăţile transformărilor liniare rezultă că aplicaţiile:

$\Sigma' : \mathbb{V} \to V, \Sigma' = 2\Pi_1 - id_{\mathbb{V}}$,

şi

$\Sigma'' : \mathbb{V} \to X, \Sigma'' = 2\Pi_2 - id_{\mathbb{V}}$

sunt endomorfisme ale lui $\mathbb{V}$ şi se numesc **simetriile ortogonale** ale lui $\mathbb{V}$ faţă de subspaţiile $\mathbb{W}$ şi $\mathbb{W}^{\perp}$, respectiv. Observăm că

$\forall u \in \mathbb{V}$:$u = u' + u''$, $u' \in \mathbb{W}$, $u'' \in \mathbb{W}^{\perp}$,

$\Sigma'(u) = 2\ \Pi_1(u) - id_{\mathbb{V}}(u) = 2u' - (u' + u'') = u' - u''$,

$\Sigma''(u) = 2\ \Pi_2(u) - id_{\mathbb{V}}(u) = 2u'' - (u' + u'') = -u' + u''$.

2. Fie $(\mathbb{V}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un spaţiu euclidian şi $\mathbb{W}$ un subspaţiu al spaţiului $\mathbb{V}, \mathbb{V} = \mathbb{W} \oplus \mathbb{W}^{\perp}$.

Simetriile ortogonale, definite în exerciţiul anterior, sunt endomorfisme ortogonale. Într-adevăr,

$\forall u, v \in \mathbb{V}$:$u = u' + u'', v = v' + v''$, $u', v' \in \mathbb{W}$, $u'', v'' \in \mathbb{W}^{\perp}$, $\langle \Sigma'(u), \Sigma'(v) \rangle = \langle u' - u'', v' - v'' \rangle = \langle u', v' \rangle + \langle u'', v'' \rangle = \langle u, v \rangle$.

Analog rezultă $\langle \Sigma''(u), \Sigma''(v) \rangle = \langle u, v \rangle$.

4.8. Probleme propuse

Problema 4.8.1. Fie $T : C([a, b], \mathbb{R}) \to \mathbb{R}, T(f) = \int_a^b f(x)dx, \forall f \in C([a, b], \mathbb{R})$. Demonstraţi că T este transformare liniară.

Problema 4.8.2. Fie $T : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}, T(X) = x_k, k$ fixat, unde $X \in \mathbb{K}^n, X = (x_1, x_2, ..., x_n)$. Demonstraţi că T este transformare liniară. Ea poartă denumirea de proiecţie de ordin k.

Problema 4.8.3. Fie $T : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, T(z) = \overline{z}$.

(a) Demonstraţi că T este transformare liniară dacă $\mathbb{C}$ este considerat ca spaţiu vectorial peste $\mathbb{R}$.

(b) Demonstraţi că T nu este transformare liniară dacă $\mathbb{C}$ este considerat ca spaţiu vectorial peste $\mathbb{C}$.

Problema 4.8.4. În $\mathbb{R}^4$ se iau vectorii $u = (3; 2; -1; 1)\,, v = (2; 5; 0; -1)\,.$ Să se afle, în baza standard, matricea proiecţiei ortogonale pe subspaţiul generat de u şi v.

Problema 4.8.5. Fie $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ o transformare liniară cu proprietatea că pentru $x = (1; 2)$, $T\,(x) = (1; 0; 0)$ iar pentru $y = (-1; -1)$, $T(y) = (1; 1; 1)$. Calculaţi $T(z)$, unde $z = (-1; 1)$.

Problema 4.8.6. Fie $T \in \mathcal{L}(\mathbb{V})$ şi $x \in \mathbb{V}$ astfel încât $T^m x = \mathbf{0}, T^{m-1}x \neq \mathbf{0}$ pentru un m fixat, $m \in \mathbb{N}$. Demonstraţi că $\{x, Tx, T^2x, ..., T^{m-1}x\}$ este un sistem de vectori liniar independent.

Problema 4.8.7. Fie $\mathcal{B} = \{v_i\}_{i=\overline{1,n}}$ o bază în $\mathbb{V}$ şi $\mathcal{B}' = \{w_i\}_{i=\overline{1,n}}$ sunt n vectori oarecare în $\mathbb{W}$. Conform Teoremei 4.3.3 există şi este unică o transformare liniară $T \in \mathcal{L}(\mathbb{V}, \mathbb{W})$ astfel încât $T(v_i) = w_i, i = \overline{1, n}$. Demonstraţi că T este injectivă (respectiv surjectivă, bijectivă) dacă şi numai dacă $\{w_i\}_{i=\overline{1,n}}$ este un sistem liniar independent (respectiv sistem de generatori, bază) în $\mathbb{W}$.

Problema 4.8.8. Fie $T \in \mathcal{L}(\mathbb{V}, \mathbb{W})$ şi $\{u_1, u_2, ..., u_p\} \in \mathbb{V}\backslash\mathrm{Ker}(T)$ este un sistem de vectori liniar independent. Demonstraţi că $\{T(u_1), T(u_2), ..., T(u_p)\}$ este o mulţime de vectori liniar independentă.

Problema 4.8.9. Fie $\mathbb{V}$ şi $\mathbb{W}$ spaţii vectoriale peste acelaşi corp comutativ $\mathbb{K}$ şi $T : \mathbb{V} \to \mathbb{W}$ o transformare liniară. Dacă $\mathbb{V}_1 \subset \mathbb{V}$ demonstraţi că $T(\mathrm{Span}(\mathbb{V}_1)) = \mathrm{Span}(T(\mathbb{V}_1))$.

Problema 4.8.10. Arătaţi că dacă $T : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ este o formă liniară astfel încât $T(AB) = T(BA), \forall A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, atunci există $a \in \mathbb{K}$ astfel încât $T(A) = a\,\mathrm{tr}(A), \forall A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Problema 4.8.11. Fie transformarea liniara $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definită prin
$T(x) = (x_1 + 2x_3, x_1 + x_2 - x_3)$, $\forall x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$. Verificaţi teorema rang-defect.

Problema 4.8.12. Fie $\mathbb{V}$ şi $\mathbb{W}$ două spaţii vectoriale peste acelaşi corp comutativ $\mathbb{K}$, fie $\mathbb{W}_1$ un subspaţiu vectorial al lui $\mathbb{W}$ şi $T \in \mathcal{L}(\mathbb{V}, \mathbb{W})$. Demonstraţi că dimensiunea lui $T^{-1}(\mathbb{W}_1)$ este cel puţin $\dim_{\mathbb{K}} \mathbb{V} - \dim_{\mathbb{K}} \mathbb{W} + \dim_{\mathbb{K}} \mathbb{W}_1$.

Problema 4.8.13. Fie $\mathbb{K}[x]_{\leq n}$ spaţiul liniar al polinoamelor, cu coeficienţi din $\mathbb{K}$, de grad mai mic sau egal cu n. Demonstraţi că aplicaţia $\mathbf{d} : \mathbb{K}[x]_{\leq n} \to \mathbb{K}[x]_{\leq n}$ definită prin $\mathbf{d}(\mathbf{p}) = \mathbf{p}', \forall \mathbf{p} \in \mathbb{K}[\mathbf{x}]_{\leq \mathbf{n}}$ care duce fiecare funcţie polinomială de grad cel mult n în derivata sa, este o transformare liniară pe $\mathbb{K}[x]_{\leq n}$. Determinaţi matricea lui $\mathbf{d}$ în baza $\mathcal{B} = \{1, x, x^2, ..., x^n\}$.

Problema 4.8.14. Fie transformarea liniară $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^4)$ definită prin
$T(x) = (x_1 + x_2, x_1 + x_3, x_2 - x_3, x_1 - x_2 + 2x_3), \forall x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$.
Determinaţi matricea lui T în bazele $\mathcal{B}_1 = \{u_1 = (1; 1; -1), u_2 = (1; -1; 1), u_2 = (-1; 1; 1)\}$ şi respectiv $\mathcal{B}_2 = \{v_1 = (0; 1; 1; 1), v_2 = (1; 0; 1; 1), v_3 = (1; 1; 0; 1), v_4 = (1; 1; 1; 0)\}$.

Problema 4.8.15. Fie $\mathbb{R}\left[x\right]_{\leq n}$ spaţiul vectorial real al polinoamelor de grad cel mult n cu coeficienţi reali. Pentru $q \in \mathbb{R}\left[x\right]_{\leq n}, q \neq 0$ fixat definim aplicaţia $T : \mathbb{R}\left[x\right]_{\leq n} \to \mathbb{R}\left[x\right]_{\leq n}$, $\forall p \in \mathbb{R}\left[x\right]_{\leq n}$, $T(p) = c$, unde c este câtul împărţirii cu rest al lui p la q.

a) Arătaţi că T este o transformare liniară.

b) Determinaţi $\operatorname{def}(T)$.

c) Pentru $\mathbb{R}\left[x\right]_{\leq 3}$ şi $q(x) = x^2 + x + 1$ scrieţi matricea lui T în baza $\mathcal{B} = \{1, x, x^2, x^3\}$.

Problema 4.8.16. Fie $\mathbb{W} \subset \mathbb{R}^n, n \geq 2$ un subspaţiu vectorial cu $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{W} = k$, $1 \leq k \leq n-1$. Fie $\mathcal{F} = \{f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n), f(x) = \mathbf{0}_{\mathbb{R}^n}, \forall x \in \mathbb{W}\}$. Arătaţi că $\mathcal{F}$ este spaţiu vectorial real, să se determine dimensiunea sa şi să se indice o bază în acest spaţiu.

Problema 4.8.17. Fie $\mathbb{V}$ spaţiul vectorial al funcţiilor reale cu baza
$\mathcal{B} = \{1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \cos 3x, \sin 3x\}$
şi transformarea liniară $T : \mathbb{V} \to \mathbb{V}$ definită prin $T(f)(x) = 4 \int\limits_0^{2\pi} \sin^3(x + y) f(y) dy$ $(\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x)$. Determinaţi subspaţiile $\operatorname{Ker}(T)$ *şi* $\operatorname{Im}(T)$.

Problema 4.8.18. Fie $\mathbb{V}$ spaţiul liniar al funcţiilor reale continue pe $[-\pi, \pi]$ şi aplicaţia $T : \mathbb{V} \to \mathbb{V}$ definită prin $T(f)(x) = \int\limits_{-\pi}^{\pi} [1 + \sin(t - x) f(t) dt]$.

a) Demonstraţi că T este aplicaţie liniară şi calculaţi $T(f)$ pentru $f(x) = \sin x$ şi respectiv $f(x) = \cos x$.

b) Arătaţi că $\operatorname{Im}(T)$ este finit dimensional şi determinaţi o bază a sa. Determinaţi $\ker(T)$ şi arătaţi că este infinit dimensional.

Problema 4.8.19. Fie $\mathbb{V}, \mathbb{W}$ două spaţii vectoriale peste acelaţi corp comutativ $\mathbb{K}$. Demonstraţi că $\operatorname{Im}(\alpha T_1 + \beta T_2) \subseteq \alpha \operatorname{Im}(T_1) + \beta \operatorname{Im}(T_2), \forall T_1, T_2 \in \mathcal{L}(\mathbb{V}, \mathbb{W}), \forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}$.

Daţi un exemplu pentru care incluziunea anterioară este strictă.

Problema 4.8.20. Fie $\mathbb{V}$ un spaţiu vectorial finit dimensional, $T \in \mathcal{L}(\mathbb{V})$.Dacă $\dim_{\mathbb{K}} \mathrm{Im}(T^2) = \dim_{\mathbb{K}} \mathrm{Im}(T)$, demonstraţi că $\mathrm{Im}(T) \cap \mathrm{Ker}(T) = \{\mathbf{0}_{\mathbb{V}}\}$ şi deduceţi că $\mathrm{Im}(T) + \mathrm{Ker}(T) = \mathbb{V}$.

Problema 4.8.21. *(Inegalitatea lui Sylvester)* Fie $\mathbb{V}_i$, $i = 1, 2, 3$ trei spaţii vectoriale, $T \in \mathcal{L}(\mathbb{V}_1, \mathbb{V}_2)$, $S \in \mathcal{L}(\mathbb{V}_2, \mathbb{V}_3)$, $\dim_{\mathbb{K}} \mathbb{V}_2 = n$, atunci

$$\mathrm{rang}\,(S \circ T) \geq \mathrm{rang}\,(T) + \mathrm{rang}\,(S) - n. \tag{67}$$

Problema 4.8.22. Fie $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Dacă $AB = 0_n$, atunci $\mathrm{rang}(A) + \mathrm{rang}(B) \leq n$.

Problema 4.8.23. Fie $\mathbb{V}$ şi $\mathbb{W}$ două spaţii vectoriale peste acelaşi corp comutativ $\mathbb{K}$, $T : \mathbb{V} \to \mathbb{W}$, o transformare liniară, $\mathbb{V}_1$ subspaţiu vectorial al lui $\mathbb{V}$. Atunci

$$\mathrm{rang}(T) - \mathrm{rang}\,(T|_{\mathbb{V}_1}) \leq \dim_{\mathbb{K}} \mathbb{V} - \dim_{\mathbb{K}} \mathbb{V}_1. \tag{68}$$

Problema 4.8.24. *(Inegalitatea lui Frobenius)* Fie $\mathbb{V}_i$, $i = 1, 2, 3, 4$ patru spaţii vectoriale peste acelaşi corp comutativ $\mathbb{K}$, $T \in \mathcal{L}(\mathbb{V}_1, \mathbb{V}_2)$, $S \in \mathcal{L}(\mathbb{V}_2, \mathbb{V}_3)$, $P \in \mathcal{L}(\mathbb{V}_3, \mathbb{V}_4)$, $\dim_{\mathbb{K}} \mathbb{V}_2 = n$, atunci

$$\mathrm{rang}\,(P \circ S) + \mathrm{rang}\,(S \circ T) \leq \mathrm{rang}(S) + \mathrm{rang}\,(P \circ S \circ T). \tag{69}$$

Problema 4.8.25. Fie $\mathbb{V}_1, \mathbb{V}_2$şi $\mathbb{V}_3$ trei $\mathbb{K}$-spaţii vectoriale finit dimensionale şi $T_1 : \mathbb{V}_1 \to \mathbb{V}_2$, $T_2 : \mathbb{V}_2 \to \mathbb{V}_3$ transformări liniare. Arătaţi că $\dim_{\mathbb{K}} \mathrm{Ker}(T_2 \circ T_1) \leq \mathrm{def}(T_1) + \mathrm{def}(T_2)$.

Problema 4.8.26. *(Teorema lui Sylvester)* Fie $\mathbb{V}_1, \mathbb{V}_2$ şi $\mathbb{V}_3$ $\mathbb{K}$-spaţii vecoriale finit dimensionale iar $T_1 : \mathbb{V}_1 \to \mathbb{V}_2, T_2 : \mathbb{V}_2 \to \mathbb{V}_3$ transformări liniare. Demonstraţi că
$\dim_{\mathbb{K}} \mathrm{Im}(T_2 \circ T_1) = \dim_{\mathbb{K}} \mathrm{Im}(T_1) - \dim_{\mathbb{K}}(\mathrm{Im}(T_1) \cap \mathrm{Ker}(T_2))$.

Problema 4.8.27. *Fie* $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Arătaţi că $\mathrm{rang}(A + B) \leq \mathrm{rang}(A) + \mathrm{rang}(B)$.

Problema 4.8.28. Fie $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Dacă există $a, b \in \mathbb{R}^*$ astfel încât $AB = aA + bB$ atunci
a) $\mathrm{rang}(A - bI_n) = \mathrm{rang}(B - aI_n) = n$,
b) $\mathrm{rang}(A) = \mathrm{rang}(B)$.

Problema 4.8.29. Fie $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Demonstraţi că $\mathrm{rang}\left(A^T A\right) = \mathrm{rang}(A)$.

Problema 4.8.30. Dacă A, $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Să se arate că
(a) Dacă $A + B = AB$ atunci $\mathrm{rang}(A) = \mathrm{rang}(B)$.
(b) Dacă $\mathrm{rang}(A) = n - 1$ atunci există $C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}), C \neq 0_n$ astfel încât $(A + C)^p = A^p + C^p, \forall p \in \mathbb{N}$.

Problema 4.8.31. Fie aplicaţia $Tr : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}, \forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) : Tr(A) = \sum\limits_{i=1}^{n} a_{ii}$. Demonstraţi că $\mathrm{def}(Tr) = n^2 - 1$.

Problema 4.8.32. Fie S subspaţiul matricelor $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ generat de matricele de forma $AB - BA, A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Demonstraţi că
(a) $\dim_{\mathbb{R}}(S) \leq n^2 - 1$.
(b) $\dim_{\mathbb{R}}(S) = n^2 - 1$.

Problema 4.8.33. În spaţiul vectorial $\mathbb{R}^3$ se consideră subspaţiile liniare S_1 şi S_2, date de ecuaţiile $S_1 : x + y - z = 0, \quad S_2 : 3x - 4y - 2z = 0.$

(a) Notăm c $s = (-v, u + v, u)$ şi $y = (2u, u - v, u + 2v)$. Să se arate că aplicaţia $T(s) = y$ este un izomorfism între S_1 *şi* S_2.

(b) Să se afle locul geometric al mijloacelor segmentelor care unesc punctele lui S_1 cu imaginile lor prin transformarea T din S_2.

(c) Să se determine acele izomorfisme liniare $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ care coincid cu T pe subspaţiul S_1.

Problema 4.8.34. Fie $\{e_1, e_2, e_3\}$ o bază ortonormată în spaţiul euclidian $\mathbb{R}^3$ şi să presupunem că în baza formată din vectorii $f_1 = e_1 + 2e_2 + e_3, \quad f_2 = e_1 + e_2 + 2e_3, \quad f_3 = e_1 + e_2$ transformarea liniară T are matricea

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 5 & -1 \\ 2 & 7 & -3 \end{pmatrix}.$$

Să se afle matricea transformării adjuncte T^* în aceeaşi bază.

Problema 4.8.35. Determinaţi adjunctul endomorfismelor de mai jos relativ la produsul scalar canonic.

$T_1 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \forall x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$, $T_1(x) = (x_1 + 2x_2 - x_3, x_1 - x_2 + x_3, x_1 + x_3)$,

$T_2 : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4, \forall x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4$, $T_2(x) = (x_1 - x_2, x_2 - x_3, x_3 - x_4, x_4 - x_1)$.

Problema 4.8.36. Se consideră spaţiul vectorial $\mathbb{R}[x]_{\leq 2}$ al polinoamelor de grad cel mult doi în variabila x pe care se defineşte produsul scalar

$\forall p, q \in \mathbb{R}[x]_{\leq 2}, \langle p, q \rangle = \int\limits_{-1}^{1} p(x)q(x)dx.$

Determinaţi endomorfismul adjunct endomorfismului $T : \mathbb{R}[x]_{\leq 2} \to \mathbb{R}[x]_{\leq 2}, T(p) = 2p' - 3p.$

Problema 4.8.37. Demonstraţi că

$T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \forall x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2,$

$T(x) = (x_1 \cos\varphi - x_2 \sin\varphi, x_1 \sin\varphi + x_2 \cos\varphi)$

este un endomorfism ortogonal.

Problema 4.8.38. Fie $u \neq \mathbf{0}$ un vector fixat în spaţiul euclidian real $\mathbb{V}$ şi fie $T : \mathbb{V} \to \mathbb{V}$, $T(x) = x - a\langle x, u\rangle u$ (a constantă reală) o transformare liniară.

(a) Să se afle $a \in \mathbb{R}$, astfel încât T să fie o transformare ortogonală şi să se arate că pentru valoarea $a_0 \neq 0$ găsită, avem

$$\underbrace{T \circ T \circ T \cdots \circ T}_{n \ ori} = \begin{cases} T, & n = \text{ impar} \\ I, & n = \text{ par} \end{cases}.$$

Fie $\mathbb{V} = \mathbb{R}^3, u = 2e_1 + 2e_2 + e_3,\ a = a_0$ şi $\{e_i, i = \overline{1,3}\}$ baza canonică (standard) în $\mathbb{R}^3$.

(b) Să se scrie matricea transformării liniare T în baza standard.

CAPITOLUL 5

Vectori şi valori proprii

În tot acest capitol, $\mathbb{K}$ este un corp comutativ, iar $\mathbb{V}$, $\mathbb{W}$, ... sunt $\mathbb{K}$-spaţii vectoriale de dimensiune finită.

5.1. Endomorfisme şi subspaţii invariante

5.1.1. Matricea asociată unui morfism: câteva precizări. Să notăm cu $\mathbb{V}_1$ şi $\mathbb{V}_2$ două $\mathbb{K}$-spaţii vectoriale de dimensiune finită şi fie $T : \mathbb{V}_1 \to \mathbb{V}_2$ o transformare liniară. De îndată ce fixăm o bază în $\mathbb{V}_1$ şi o (altă) bază în $\mathbb{V}_2$, putem descrie T prin matricea asociată în aceste baze. Alegerea *separată* a celor două baze este suficient de permisivă: putem alege bazele astfel încât matricea asociată transformării liniare T în aceste baze să aibă forma:

$$\begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

(toate elementele neprecizate sunt egale cu 0). O astfel de matrice, de formă diagonală, ne permite să obţinem imediat diverse informaţii despre transformarea liniară T. De exemplu, dacă pe diagonala principală a matricei nu apare niciun 0, atunci T este morfism injectiv, dacă $\dim_{\mathbb{K}}(\mathbb{V}_1) \leq \dim_{\mathbb{K}}(\mathbb{V}_2)$, respectiv este morfism surjectiv dacă $\dim_{\mathbb{K}}(\mathbb{V}_1) \geq \dim_{\mathbb{K}}(\mathbb{V}_2)$ (conform 4.4.9).

În acest capitol, suntem însă interesaţi de **endomorfisme** de spaţii vectoriale. Altfel spus, spre deosebire de situaţia generală descrisă mai sus, vom presupune că $\mathbb{V}_1 = \mathbb{V}_2$.

Fie deci $T : \mathbb{V} \to \mathbb{V}$ un endomorfism liniar. Am văzut în capitolul anterior că, în acest caz, în loc să alegem două baze (una pentru domeniu şi alta pentru codomeniu), este mai util să considerăm pentru cele două spaţii vectoriale *o aceeaşi bază*. De ce? Pentru că, în acest fel, putem înlocui adunarea sau compunerea endomorfismelor lui $\mathbb{V}$ cu adunarea, respectiv cu înmulţirea matricelor. Altfel spus:

Teorema 5.1.1. *Odată fixată o bază în spaţiul vectorial $\mathbb{V}$, obţinem un izomorfism canonic între inelul $(\mathcal{L}(\mathbb{V}), +, \circ)$ şi inelul $(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}), +, \cdot)$, unde $n = \dim_{\mathbb{K}}(\mathbb{V})$.*

Noua situaţie conduce în mod natural la întrebarea:

Dacă $T \in \mathcal{L}(\mathbb{V})$ este un endomorfism fixat, mai este oare posibil să alegem o bază a lui $\mathbb{V}$, astfel încât matricea asociată lui T în această bază să fie o matrice diagonală?

Din păcate, răspunsul la această întrebare poate fi negativ.

Exemplul 5.1.2. Să notăm cu $\mathbb{R}[X]_{\leq 2}$ spaţiul vectorial al polinoamelor cu coeficienţi reali, de grad cel mult 2. Fie $\mathbf{d}$ endomorfismul de derivare, prin care unui polinom P îi corespunde polinomul derivat P'. Vom arăta că nu există o bază a lui $\mathbb{R}[X]_{\leq 2}$, pentru care matricea asociată lui $\mathbf{d}$ să fie matrice diagonală. Să presupunem contrariul: ar exista deci o bază $\{F_1, F_2, F_3\}$ în $\mathbb{R}[X]_{\leq 2}$ şi scalarii $a, b, c \in \mathbb{R}$ pentru care

$$F_1' = a \cdot F_1,\ F_2' = b \cdot F_2,\ F_3' = c \cdot F_3.$$

Deducem că F_1, F_2, F_3 sunt polinoame de grad 0, ceea ce contrazice faptul că ele formează o bază. □

Exemplul 5.1.2 ne arată că întrebarea de mai sus trebuie nuanţată. Pare mai natural să ne întrebăm:

Cum am putea alege o bază a lui $\mathbb{V}$, astfel încât matricea asociată endomorfismului T în această bază să fie cât mai simplă?

Desigur, întrebarea este neclară: nu am precizat încă ce ar putea însemna faptul că o matrice este ”mai simplă” decât alta! Vom explica acest lucru în secţiunile următoare.

5.1.2. Reformularea algebrică. Întrebările de mai sus se referă la endomorfismele unui spaţiu vectorial şi la matricea asociată acestuia într-o bază dată. Vom reformula aceste întrebări, într-un context aparent diferit. Reamintim următoarea definiţie (4.6.15).

Definiţia 5.1.3. *Spunem că matricele A şi B din $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ sunt* **asemenea** *dacă există o matrice inversabilă $U \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ asfel încât*

$$B = U^{-1}AU. \tag{70}$$

Relaţia de asemănare a matricelor are legătură cu problematica anterioară: să ne amintim (4.6.13) că, la schimbarea bazei, matricea endomorfismului T se schimbă după regula (70), unde U este matricea de trecere între baze.

Este uşor de demonstrat următoarea proprietate (vezi 4.6.16):

Lema 5.1.4. *Asemănarea este o relaţie de echivalenţă pe $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.* □

În acest nou context, întrebarea 5.1.1 poate fi reformulată astfel:

Dată o matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, cum putem determina o matrice inversabilă $U \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ pentru care matricea $U^{-1}AU$ este cât mai simplă?

Reformularea algebrică ne va permite ca, în continuare, să ne referim sau la endomorfisme sau la matrice: comentariul de mai sus arată că această alternanţă nu schimbă problema.

5.1.3. Subspaţii invariante ale unui endomorfism. Pentru a calcula produsul dintre două matrice pătratice de ordin n, sunt necesare n^4 înmulţiri şi $n^2(n-1)$ adunări. Aşadar, când calculăm produsului a două matrice pătratice, efectuăm un număr mare de operaţii aritmetice. Evident, numărul acestor operaţii se micşorează dacă cei doi factori au unele elemente nule. De aceea, ar fi util ca în operaţiile cu matrice să avem factori cu cât mai multe zerouri.

Uneori, putem *să alegem* forma matricelor cu care lucrăm. Să considerăm, de exemplu, $T, S \in \mathcal{L}(\mathbb{V})$, două endomorfisme ale $\mathbb{K}$-spaţiului vectorial $\mathbb{V}$. Compunerea $T \circ S$ poate fi exprimată prin produsul matricelor asociate acestor endomorfisme, într-o bază dată. Putem spera ca, alegând convenabil această bază, matricele asociate să aibă cât mai multe zerouri.

Cum putem face însă o astfel de alegere? O posibilitate: identificăm subspaţii vectoriale cu anumite proprietăţi.

Definiţia 5.1.5. *Subspaţiul* $\mathbb{W} \subseteq \mathbb{V}$ *este* **subspaţiu invariat** *de* T *(sau este* **subspaţiu invariant** *pentru* T*) dacă:*

$$\forall\, w \in \mathbb{W}: \ T(w) \in \mathbb{W}.$$

Exemplele 5.1.6. (1) Pentru orice $T \in \mathcal{L}(\mathbb{V})$, subspaţiile triviale $\mathbb{V}$ şi $\{0\}$, precum şi $\mathrm{Ker}(T)$ şi $\mathrm{Im}(T)$, sunt subspaţii invariate de T.

(2) Fie $\mathbb{R}[X]_{\leq n}$ spaţiul vectorial al polinoamelor cu coeficienţi reali, de grad cel mult n şi fie $\mathbf{d}$ endomorfismul de derivare. Pentru orice număr $k \leq n$, subspaţiul $\mathbb{R}[X]_{\leq k}$, al polinoamelor de grad $\leq k$, este subspaţiu invariat de $\mathbf{d}$. □

Vom arăta în continuare în ce mod subspaţiile invariante conduc la matrice mai simple.

Să presupunem că am reuşit să identificăm două subspaţii $\mathbb{W}_1$ şi $\mathbb{W}_2$ ale lui $\mathbb{V}$, invariate de T, astfel încât $\mathbb{V} = \mathbb{W}_1 \oplus \mathbb{W}_2$. Alegem (la întâmplare!) baza $\mathcal{B}_1$ în $\mathbb{W}_1$ şi baza $\mathcal{B}_2$ în $\mathbb{W}_2$ şi fie $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$.

Lema 5.1.7. *În condiţiile şi cu notaţiile de mai sus:*

(1) $\mathcal{B}$ *este o bază a lui* $\mathbb{V}$*;*

(2) *matricea asociată endomorfismului* T *în această bază are forma:*

$$\begin{pmatrix} A & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & C \end{pmatrix},$$

unde A *şi* C *sunt matrice pătratice, iar* $\mathbf{0}$ *este o notaţie generală pentru matricele nule.*

Demonstraţie.

(1) Rezultă din definiţia şi proprietăţile sumei directe de subspaţii (3.2.8).

(2) Fie $\mathcal{B}_1 = \{v_1,\ v_2, \ldots,\ v_m\}$ şi $\mathcal{B}_2 = \{v_{m+1},\ v_{m+2}, \ldots,\ v_n\}$. Deoarece $\mathbb{W}_1$ este subspaţiu invariat de T, avem $T(v_i) \in \mathbb{W}_1$ pentru $i \in \overline{1,m}$; de aceea

$$T(v_i) = \sum_{j=1}^{m} a_{ji} v_j.$$

Altfel spus: pe primele m coloane ale matricei asociate lui T în baza $\mathcal{B}$, apar elemente nenule doar în primele m linii. Analog, pe ultimele $n-m$ coloane ale matricei asociate lui T, toate elementele din primele m linii sunt nule. □

Aşadar, dacă descompunem $\mathbb{V}$ ca sumă directă de subspaţii invariante, matricea asociată lui T într-o anumită bază se reprezintă ca matrice cu blocuri, în care blocurile de pe diagonală sunt pătratice, iar elementele din afara acestor blocuri sunt nule. O astfel de structurare permite ca operaţiile efectuate cu matricea respectivă (de exemplu, ridicarea la putere a matricei) să necesite mai puţine operaţii aritmetice. De aceea, descompunerea lui $\mathbb{V}$ ca sumă directă de subspaţii invariante, de dimensiune cât mai mică, poate fi utilă în calcule. Pentru aplicaţiile efective, ne rămâne totuşi să răspundem la câteva întrebări:

> *Cum determinăm subspaţii invariate de un endomorfism dat? Cum descompunem $\mathbb{V}$ ca sumă directă de subspaţii invariante?*

5.2. Subspaţii invariante de dimensiune 1

5.2.1. Vectori proprii. Valori proprii. Să determinăm mai întâi subspaţiile invariante de dimensiune 1. Fie $\mathbb{W}$ un astfel de subspaţiu şi fie w un generator al său. Deoarece $T(w) \in \mathbb{W}$, există un scalar $\alpha \in \mathbb{K}$ pentru care $T(w) = \alpha \cdot w$.

Definiţia 5.2.1. *Un vector nenul $v \in \mathbb{V}^*$ este* **vector propriu** *pentru endomorfismul T dacă există un scalar $\lambda \in \mathbb{K}$ astfel încât*

$$T(v) = \lambda v.$$

Scalarul λ cu proprietatea de mai sus se numeşte **valoare proprie** *a lui T, corespunzătoare vectorului propriu v.*

Exemplele 5.2.2. Fie $\mathbb{V}$ spaţiul vectorial al vectorilor din plan.

(1) Dacă T este simetria faţă de o dreaptă d, atunci orice vector nenul, având ca direcţie dreapta d, este vector propriu corespunzător valorii proprii $+1$, iar orice vector nenul, perpendicular pe dreapta d, este vector propriu corespunzător valorii proprii -1.

(2) Dacă T este rotaţia cu $90°$ în jurul punctului O, nu există vectori proprii pentru T. □

Observaţia 5.2.3. Simetria faţă de o dreaptă şi rotaţia în jurul unui punct sunt izometrii ale planului: prin aceste aplicaţii, un segment se transformă într-un segment congruent, deci un vector se transformă într-un vector de acelaşi modul. De aceea, valorile proprii ale endomorfismelor din Exemplul 5.2.2 nu ar putea fi decât $+1$ sau -1.

Câteva proprietăţi ale vectorilor proprii ai unui endomorfism sunt demonstrate în continuare.

Propoziţia 5.2.4. *Fie v_1 şi v_2 vectori proprii ai endomorfismului T, corespunzători valorilor proprii α_1 şi α_2.*

(1) *Pentru orice $a \in \mathbb{K}^*$, vectorul av este vector propriu al lui T, corespunzător aceleiaşi valori proprii α_1;*
(2) *Dacă $\alpha_1 = \alpha_2$, atunci vectorul nenul $a_1v_1 + a_2v_2$ este vector propriu al lui T (unde $a_1, a_2 \in \mathbb{K}$);*

(3) *Dacă* $\alpha_1 \neq \alpha_2$, *atunci* v_1 *şi* v_2 *sunt vectori liniar independenţi.*

Demonstraţie.

(1) Observăm că $av_1 \neq 0$ şi că

$$T(av_1) = aT(v_1) = a(\alpha_1 v_1) = \alpha_1(av_1).$$

(2) Calculăm

$$T(a_1v_1 + a_2v_2) = a_1T(v_1) + a_2T(v_2) = \ldots = \alpha_1(a_1v_1 + a_2v_2).$$

(3) Fie $x_1, x_2 \in \mathbb{K}$ pentru care $x_1v_1 + x_2v_2 = 0$; vom arăta că $x_1 = x_2 = 0$. Din relaţia

$$0 = T(0) = T(x_1v_1 + x_2v_2) = \ldots = \alpha_1x_1v_1 + \alpha_2x_2v_2,$$

obţinem imediat că

$$x_1(\alpha_1 - \alpha_2)v_1 = 0 \text{ şi } x_2(\alpha_1 - \alpha_2)v_2 = 0.$$

Deoarece $\alpha_1 - \alpha_2 \neq 0$, deducem că $x_1 = x_2 = 0$. □

Putem interpreta Propoziţia 5.2.4 astfel:

Pentru fiecare valoare proprie α, definim mulţimea

$$\mathbb{V}(\alpha) = \{v \in \mathbb{V} :\ T(v) = \alpha v\}. \tag{71}$$

Mulţimea $\mathbb{V}(\alpha)$ conţine deci vectorul nul şi toţi vectorii proprii ai lui T, corespunzători valorii proprii α. Propoziţia 5.2.4 afirmă de fapt că $\mathbb{V}(\alpha)$ este subspaţiu vectorial al lui $\mathbb{V}$ şi că $\mathbb{V}(\alpha) \cap \mathbb{V}(\beta) = \{0\}$ dacă $\alpha \neq \beta$.

Exemplul 5.2.5. Dacă $\mathbb{V} = \mathbb{R}[X]_{\leq 2}$ şi dacă $T = \mathbf{d}$ este morfismul de derivare, atunci 0 este valoare proprie a lui T, iar $\mathbb{V}(0) = \mathbb{R}[X]_{\leq 0}$ este mulţimea polinoamelor constante. □

5.2.2. Polinomul caracteristic al unui endomorfism. Polinomul caracteristic al unei matrice. Vom exprima în coordonate condiţia ca un vector să fie vector propriu al endomorfismului T.

Să fixăm o bază $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ a lui $\mathbb{V}$ şi fie

$$A = (a_{ij})_{i,j=\overline{1,n}}$$

matricea endomorfismului T în această bază. Condiţia ca vectorul nenul

$$v = x_1e_1 + x_2e_2 + \ldots + x_ne_n$$

să fie vector propriu pentru T se exprimă în baza dată astfel: există un scalar $\lambda \in \mathbb{K}$ pentru care

$$A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}. \tag{72}$$

Egalitatea (72) reprezintă un sistem omogen de ecuaţii liniare, în care $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sunt necunoscutele, iar λ este un parametru. Sistemul (72) are soluţie nenulă (deci vectorul propriu

v există, iar λ este valoare proprie) dacă şi numai dacă determinantul matricei sistemului este nul. Am demonstrat astfel rezultatul care urmează.

Propoziţia 5.2.6. *Un scalar $\lambda \in \mathbb{K}$ este valoare proprie a endomorfismului T dacă şi numai dacă λ este soluţie a ecuaţiei*

$$\det(xI_n - A) = 0,$$

unde A este matricea asociată endomorfismului într-o bază dată. □

Definiţia 5.2.7. *Dacă $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ este matricea asociată endomorfismului T în baza $\mathcal{B}$, atunci polinomul*

$$P_T(X) = \det(XI_n - A)$$

este **polinomul caracteristic** *al endomorfismului T. Ecuaţia polinomială $P_T(X) = 0$ se numeşte* **ecuaţia caracteristică** *a endomorfismului dat.*

Definiţia 5.2.7 are o lacună: polinomul caracteristic pare să depindă nu doar de endomorfismul T, ci şi de baza $\mathcal{B}$. Altfel spus, este posibil ca, alegând o altă bază a spaţiului vectorial $\mathbb{V}$, deci asociind o altă matrice endomorfismului T, să obţinem un alt polinom.

Vom demonstra în continuare că, de fapt, această ambiguitate nu există.

Lema 5.2.8. *Polinomul caracteristic al unui endomorfism este independent de baza aleasă.*

Demonstraţie. Fie $\mathcal{B}_1$ şi $\mathcal{B}_2$ două baze ale spaţiului vectorial $\mathbb{V}$ şi fie A_1 şi A_2 matricele asociate endomorfismului T în aceste baze. Atunci există o matrice inversabilă U astfel încât

$$A_2 = U^{-1}A_1U.$$

Folosind proprietatea multiplicativă a determinantului (2.2.23), obţinem

$$\det(XI_n - A_2) = \det(XI_n - U^{-1}A_1U) = \det(U^{-1}(XI_n - A_1)U) =$$

$$= \det(U^{-1})\det(XI_n - A_1)\det(U) = \det(U^{-1})\det(U)\det(XI_n - A_1) = \det(XI_n - A_1).$$

Altfel spus: polinomul caracteristic asociat lui T în baza $\mathcal{B}_1$ coincide cu polinomul caracteristic asociat lui T în baza $\mathcal{B}_2$. □

Exemplul 5.2.9. Fie $\mathbb{V} = \mathbb{R}[X]_{\leq 2}$ spaţiul vectorial al polinoamelor cu coeficienţi reali, de grad cel mult 2 şi fie $\mathbf{d}$ endomorfismul de derivare.

Dacă fixăm baza $\{1, X, X^2\}$ în $\mathbb{V}$, matricea asociată lui $\mathbf{d}$ în această bază este

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix},$$

deci polinomul caracteristic al lui $\mathbf{d}$ este

$$P_{\mathbf{d}}(X) = \begin{vmatrix} X & 0 & 0 \\ -1 & X & 0 \\ 0 & -2 & X \end{vmatrix} = X^3.$$

Considerăm acum baza $\{X(X-1), (X-1)(X-2), X(X-2)\}$; obţinem

$$P_{\mathbf{d}}(X) = \begin{vmatrix} X-1,5 & -0,5 & -1 \\ 0,5 & X+1,5 & 1 \\ 1 & -1 & X \end{vmatrix} = X^3.$$

Am verificat astfel, pe un exemplu, rezultatul demonstrat în Lema 5.2.8. □

Am definit mai sus polinomul caracteristic asociat unui endomorfism. Aceeaşi definiţie ne conduce la **polinomul caracteristic al unei matrice**: Teorema 5.1.1 ne arată că, de fapt, endomorfismele şi matricele reprezintă aceleaşi "obiecte" matematice. În noul context, al matricelor, Lema 5.2.8 poate fi reformulată astfel:

Lema 5.2.10. *Matricele asemenea au acelaşi polinom caracteristic.* □

5.2.3. Descrierea polinomului caracteristic. Este evident din definiţie că polinomul caracteristic al unui endomorfism (sau al unei matrice) este polinom monic, de grad egal cu $\dim_{\mathbb{K}}(\mathbb{V})$ (sau cu ordinul matricei).

Să fixăm o matrice $A = (a_{ij})_{i,j=\overline{1,n}}$, al cărei polinom caracteristic este:

(73) $$P_A(X) = X^n - \sigma_1 X^{n-1} + \sigma_2 X^{n-2} - \ldots + (-1)^n \sigma_n.$$

Propoziţia 5.2.11. *Coeficientul σ_k din polinomul caracteristic este egal cu suma minorilor diagonali de ordinul k din matricea A. (Reamintim că un minor este diagonal dacă este format din linii şi coloane cu aceiaşi indici.) În particular,*

$$\sigma_1 = \mathrm{tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}, \textit{ iar } \sigma_n = \det(A).$$

Demonstraţie. Să notăm cu $s_k(A)$ suma minorilor diagonali de ordinul k din matricea A. Trebuie să demonstrăm deci egalitatea

$$s_k(A) = \sigma_k, \text{ pentru orice } k = \overline{1,n}.$$

Vom demonstra această egalitate prin inducţie după n. Rezultatul din enunţ este evident adevărat pentru matricele de ordin 1. Pentru a justifica pasul de inducţie, este nevoie să facem mai întâi următoarea precizare.

Fie $M = (f_{ij}(x))_{i,j=\overline{1,n}}$ o matrice ale cărei elemente sunt funcţii derivabile. Atunci determinantul $d(x)$ al acestei matrice este tot o funcţie derivabilă. Folosind formula de calcul al unui determinant şi regulile uzuale de derivare, obţinem imediat egalitatea:

$$d'(x) = \sum_{k=1}^{n} \det(M_k),$$

unde M_k este matricea obţinută din M prin derivarea liniei de pe locul k, adică prin înlocuirea acestei linii cu

$$(f'_{k1}(x); f'_{k2}(x); \ldots; f'_{kn}(x)).$$

Vom aplica această formulă de derivare pentru matricea $M = xI_n - A$, al cărei determinant este funcţia polinomială asociată polinomului caracteristic al lui A. În acest caz, prin derivare, linia de pe locul k a matricei M se înlocuieşte cu linia $e_k = (0; 0; \ldots; 1; \ldots; 0)$ (în care apare un singur 1, pe locul k). Folosind dezvoltarea determinanţilor obţinuţi după liniile înlocuite, obţinem egalitatea

$$P'_A(x) = \sum_{k-1}^{n} P_{A_k}(x),$$

unde A_k este matricea obţinută din A prin tăierea liniei şi coloanei de pe locul k. Aceste noi matrice A_k sunt însă de ordin $n-1$; conform ipotezei de inducţie, ştim că toţi coeficienţii polinoamelor $P_{A_k}(x)$ sunt sume de minori principali ai matricelor A_k.

Un minor diagonal al matricei A_k este însă minor diagonal şi pentru matricea A. Reciproc, orice minor diagonal de ordin r (cu $r \neq n$) din matricea A, apare ca minor diagonal în exact $n-r$ matrice A_k. De aceea

$$P'_A(x) = nx^{n-1} - (n-1)\sigma_1 x^{n-2} + (n-2)\sigma_2 x^{n-3} + \ldots + (-1)^{n-1}\sigma_{n-1}.$$

Deoarece, în mod evident, $P_A(0) = (-1)^n \sigma_n$, enunţul propoziţiei rezultă prin integrare. □

Observaţia 5.2.12. *Aparent, demonstraţia anterioară funcţionează doar în cazul corpului numerelor reale. O analiză a tehnicilor folosite arată însă că demonstraţia poate fi adaptată pentru orice corp comutativ.*

Exemplul 5.2.13. Fie

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$$

o matrice de ordinul 2. Atunci polinomul său caracteristic are forma

$$P_A(X) = X^2 - (a+d)X + (ad - bc).$$

□

Exemplul 5.2.14. Fie $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ o matrice antisimetrică (adică o matrice cu proprietatea $A^T = -A$). Atunci coeficienţii $\sigma_1, \sigma_3, \sigma_5, \ldots$ ai polinomului caracteristic $P_A(X)$ sunt nuli, deoarece determinantul unei matrice antisimetrice de ordin impar este 0. De exemplu, pentru

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & -3 \\ -2 & 3 & 0 \end{pmatrix},$$

polinomul caracteristic este $P_A(X) = X^3 + 14X$. □

5.2.4. Multiplicitate algebrică. Multiplicitate geometrică. Să fixăm un endomorfism $T \in \mathcal{L}(\mathbb{V})$ şi o valoare proprei λ a acestui endomorfism. Am văzut că, pe de o parte, λ este rădăcină a polinomului caracteristic $P_T(X)$ şi că, pe de altă parte, îi putem asocia lui λ un subspaţiu $\mathbb{V}(\lambda) \subseteq \mathbb{V}$. De aceea, valorii proprii λ i se pot asocia două numere naturale.

Definiţia 5.2.15. *Fie T un endomorfism al spaţiului vectorial $\mathbb{V}$ şi fie λ o valoare proprie a lui T.*

(1) **Multiplicitatea algebrică** *a valorii proprii λ (notată $m_a(\lambda)$) este multiplicitatea rădăcinii λ în polinomul caracteristic $P_T(X)$.*

(2) **Multiplicitatea geometrică** *a valorii proprii* λ *(notată* $m_g(\lambda)$*) este dimensiunea* $\mathbb{K}$*-spaţiului vectorial* $\mathbb{V}(\lambda)$.

Exemplele 5.2.16. (1) Fie $\mathbb{V} = \mathbb{R}[X]_{\leq 2}$ spaţiul vectorial al polinoamelor cu coeficienţi reali, de grad ≤ 2 şi fie $\mathbf{d}$ endomorfismul de derivare. Am văzut că $P_{\mathbf{d}}(X) = X^3$ şi că $\mathbb{V}(0)$ (subspaţiul corespunzător valorii proprii 0) este mulţimea polinoamelor constante. De aceea $m_a(0) = 3,$ iar $m_g(0) = 1$.

(2) Fie $\mathbb{V}$ spaţiul vectorial al vectorilor din plan, iar T simetria faţă de dreapta d. Polinomul caracteristic al endomorfismului T este $P(X) = X^2 - 1$. Considerăm valoarea proprie $\lambda = 1$: atunci $m_a(1) = m_g(1) = 1$. □

În exemplul 5.2.16 am obţinut de fiecare dată inegalitatea $m_a(\lambda) \geq m_g(\lambda)$; această inegalitate este valabilă nu doar pentru exemplele studiate, aşa cum vom vedea în rezultatul general care urmează.

Propoziţia 5.2.17. *Pentru orice valoare proprie* λ *a unui endomorfism de spaţii vectoriale, este adevărată inegalitatea*

$$m_a(\lambda) \geq m_g(\lambda).$$

Demonstraţie. Fie $r = m_g(\lambda)$ multiplicitatea geometrică a unei valori proprii a endomorfismului $T \in \mathcal{L}(\mathbb{V})$; ştim deci că $\dim_{\mathbb{K}}(\mathbb{V}(\lambda)) = r$.

Alegem baza $\{v_1, v_2, \ldots, v_r\}$ a lui $\mathbb{V}(\lambda)$, pe care o completăm la o bază $\mathcal{B}$ a lui $\mathbb{V}$. Vom folosi această bază pentru a calcula polinomul caracteristic al lui T.

Deoarece, din definiţie, vectorii $v_1, v_2, \ldots, v_r$ sunt vectori proprii ai lui T, corespunzători valorii proprii λ, matricea asociată endomorfismului T în baza $\mathcal{B}$ este o matrice structurată în blocuri de forma

$$\begin{pmatrix} \lambda \cdot I_r & B \\ \mathbf{0} & C \end{pmatrix},$$

(unde I_r este matricea unitate de ordinul r). De aceea

$$P_T(X) = \det(XI_n - \begin{pmatrix} \lambda \cdot I_r & B \\ \mathbf{0} & C \end{pmatrix}) = (X - \lambda)^r P_C(X)$$

(Ultima egalitate rezultă prin dezvoltarea determinantului după primele r coloane.) Deducem imediat, din definiţie, că multiplicitatea rădăcinii λ în polinomul $P_T(X)$ este cel puţin egală cu r. Altfel spus: $m_g(\lambda) \leq m_a(\lambda)$. □

5.2.5. Teorema Cayley - Hamilton: o demonstraţie. Fie A o matrice de ordinul n, cu coeficienţi în corpul comutativ $\mathbb{K}$. Este uşor de văzut că matricea A verifică o ecuaţie polinomială cu coeficienţi în $\mathbb{K}$. Într-adevăr, matricele $I_n, A, A^2, \ldots, A^{n^2}$ nu pot fi liniar independente, deoarece $\dim_{\mathbb{K}}(\mathcal{M}_n(\mathbb{K})) = n^2$, iar o combinaţie liniară netrivială a lor determină o ecuaţie polinomială verificată de A.

Observaţia de mai sus are doar o natură *calitativă*: am arătat că *există* o astfel de ecuaţie polinomială, fără a indica o modalitate *efectivă* de aflare a acesteia. Pentru aplicaţiile numerice, ar fi mult mai util să răspundem la următoarea întrebare:

Cum am putea oare explicita un astfel de polinom?

Analizăm mai întâi câteva cazuri particulare. Fie

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

o matrice de ordinul 2. Un calcul direct ne arată că

$$A^2 - (a+d)A + (ad - bc)I_2 = 0_2. \tag{74}$$

O relaţie asemănătoare (desigur, mai complicată) este verificată şi de matricele de ordinul 3. Aceste egalităţi matriceale, observate pentru prima dată de către Arthur Cayley (1821-1895) şi William Rowan Hamilton (1805-1865), au făcut posibilă formularea următorului rezultat general, demonstrat de către Ferdinand Georg Frobenius (1849-1917).

Teorema 5.2.18. *(Teorema Cayley - Hamilton). Fie A o matrice de ordinul n şi fie $P_A(X)$ polinomul său caracteristic. Atunci*

$$P_A(A) = \mathbf{0}_n.$$

Demonstraţie.

O ”demonstraţie” a teoremei 5.2.18 ar părea să fie următoarea:

Deoarece $P_A(X) = \det(XI_n - A)$, avem

$$P_A(A) = \det(AI_n - A) = \det(0_n) = 0.$$

Nu vă lăsaţi înşelaţi de simplitatea ”demonstraţiei”: este falsă!! Putem vedea, de exemplu, că rezultatul obţinut de noi este *un număr*, pe când $P_A(A)$ ar trebui să fie *o matrice*.

Indicăm în continuare o **demonstraţie corectă** a teoremei. Fie

$$M = XI_n - A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}[X])$$

matricea caracteristică a lui A: determinantul acestei matrice este polinomul caracteristic $P_A(X)$. Considerăm matricea M^*, adjuncta matricei M. Este evident (din modul de definire a matricei adjuncte) că $M^* \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}[X])$ (adică este o matrice ale cărei elemente sunt polinoame cu coeficienţi în $\mathbb{K}$) şi că toate elementele acestei matrice au gradul $\leq n-1$.

Vom folosi în continuare egalitatea

$$M \cdot M^* = \det(M) \cdot I_n.$$

Această egalitate a fost demonstrată în Capitolul 2 (vezi 2.3.16) pentru matrice pătratice cu coeficienţi într-un corp comutativ; egalitatea rămâne însă adevărată şi pentru matrice pătratice cu coeficienţi într-un inel comutativ, demonstraţia fiind, practic, aceeaşi. (În cazul nostru, matricea M este o matrice pătratică cu coeficienţi în inelul comutativ $\mathbb{K}[X]$.)

Pentru orice matrice F cu elemente polinoame, există o unică scriere de forma

$$F = F_0 + X \cdot F_1 + \cdots + X^p \cdot F_p, \tag{75}$$

unde p este gradul maxim al polinoamelor ce apar în scrierea lui F, iar F_i sunt matrice ”scalare”, cu coeficienţi din $\mathbb{K}$. În particular, pentru matricea M^*, există o scriere de forma:

$$M^* = X^{n-1} \cdot B_{n-1} + X^{n-2} \cdot B_{n-2} + \cdots + X \cdot B_1 + B_0, \tag{76}$$

unde $B_0, B_1, \cdots, B_{n-1} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Folosind notaţia din (73) pentru polinomul caracteristic $P_A(X)$, obţinem egalitatea

$$(XI_n - A)(X^{n-1} \cdot B_{n-1} + X^{n-2} \cdot B_{n-2} + \cdots + B_0) = (X^n - \sigma_1 X^{n-1} + \cdots + (-1)^n \sigma_n) \cdot I_n.$$

Egalitatea anterioară are loc într-un inel atipic - este vorba despre inelul de polinoame la stânga cu coeficienţi în inelul de matrice $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Nu avem însă neapărată nevoie de această formalizare: deoarece scrierea unei matrice ca în (75) este *unică*, identificăm în egalitatea de mai sus coeficienţii diverselor monoame de tip X^k şi obţinem următorul sistem de ecuaţii:

$$\begin{cases} -AB_0 & = & (-1)^n \sigma_n I_n \\ B_0 - AB_1 & = & (-1)^{n-1} \sigma_{n-1} I_n \\ B_1 - AB_2 & = & (-1)^{n-2} \sigma_{n-2} I_n \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ B_{n-2} - AB_{n-1} & = & -\sigma_1 I_n \\ B_{n-1} & = & I_n \end{cases}$$

Deşi nu este de tip numeric, interpretăm sistemul de mai sus ca un sistem liniar, în care matricele $B_0, B_1, \ldots, B_{n-1}$ sunt necunoscutele. Observăm că avem un sistem de tip Gauss, deoarece fiecare ecuaţie conţine cu o necunoscută mai mult decât precedentele. Efectuând, de exemplu, înlocuiri succesive ale necunoscutelor, de la sfârşit spre început (sau înmulţind la stânga ultima ecuaţie cu A, penultima ecuaţie cu A^2,..., prima ecuaţie cu A^n şi adunând ecuaţiile obţinute), ajungem imediat la egalitatea

$$A^n - \sigma_1 A^{n-1} + \sigma_2 A^{n-2} - \ldots + (-1)^{n-1} \sigma_{n-1} A + (-1)^n \sigma_n I_n = \mathbf{0}_n.$$

Altfel spus: $P_A(A) = \mathbf{0}_n$. □

Observaţia 5.2.19. Putem explica acum egalitatea (74): polinomul caracteristic al matricei A este

$$P_A(X) = X^2 - (a+d)A + (ad - bc)I_2$$

(notaţiile sunt cele din (74)).

Teorema 5.2.18 este valabilă şi pentru endomorfisme: pentru a o putea enunţa în acest caz, avem nevoie de câteva precizări.

Fie $T \in \mathcal{L}(\mathbb{V})$ un endomorfism fixat. Vom nota $T^2 = T \circ T$ şi, mai general, $T^k = \underbrace{T \circ T \circ \ldots \circ T}_{de\ k\ ori}$. (Prin convenţie, $T^0 = \mathrm{id}_{\mathbb{V}}$.) De aceea, are sens să vorbim despre endomorfismul $F(T) \in \mathcal{L}(\mathbb{V})$, unde F este un polinom fixat din $\mathbb{K}[X]$. Cu aceste notaţii, teorema Cayley - Hamilton poate fi reformulată astfel:

Teorema 5.2.20. *Fie $T \in \mathcal{L}(\mathbb{V})$ un endomorfism şi fie $P_T(X)$ polinomul său caracteristic. Atunci*

$$P_T(T) = \mathbf{0}_{\mathbb{V}},$$

(unde $\mathbf{0}_{\mathbb{V}}$ este endomorfismul nul). □

Exemplul 5.2.21. Fie $\mathbb{V} = \mathbb{R}[X]_{\leq 2}$ spaţiul vectorial al polinoamelor cu coeficienţi reali, de grad ≤ 2 şi fie $\mathbf{d}$ endomorfismul de derivare (care duce un polinom F în polinomul derivat F'). În exemplul 5.2.13, am văzut că polinomul caracteristic al endomorfismului $\mathbf{d}$ este $P_{\mathbf{d}}(X) = X^3$.

Teorema Cayley-Hamilton afirmă că $\mathbf{d}^3 = 0$; vom verifica această egalitate şi printr-un calcul direct. Într-adevăr, endomorfismul $\mathbf{d}^3$ duce un vector F (F este, de fapt, un polinom!), în $F^{(3)}$. Cum grad$(F) \leq 2$, este evident că $F^{(3)} = 0$. Aşadar, endomorfismul $\mathbf{d}^3$ duce orice vector din $\mathbb{V}$ în vectorul nul: deci $\mathbf{d}^3$ este endomorfismul nul. □

5.2.6. Polinomul minimal al unei matrice. Polinomul minimal al unui endomorfism. Comentariile de la începutul secţiunii 5.2.5 şi teorema 5.2.18 evidenţiază două aspecte interesante privind legătura dintre polinoame şi matrice.

Pe de o parte, ştim că orice matrice de ordin n verifică, în inelul $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, o ecuaţie polinomială de grad $\leq n^2$. Pe de altă parte, odată fixată o matrice de ordinul n, există o ecuaţie polinomială de grad n (ecuaţia caracteristică) verificată de matricea dată. "Distanţa" dintre gradul "anticipat" (n^2) şi cel "efectiv" (n) face ca următoarea întrebare să devină foarte naturală:

Poate fi oare îmbunătăţit rezultatul din teorma Cayley - Hamilton? Altfel spus, putem micşora şi mai mult gradul polinomului F pentru care $F(A) = \mathbf{0}_n$?

Pentru a răspunde, vom analiza în continuare câteva exemple.

Exemplele 5.2.22. (1) Fie

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Un calcul simplu ne arată că

$$A^2 - I_3 = \mathbf{0}_3.$$

Aşadar, în acest caz, matricea A verifică o ecuaţie polinomială de grad mai mic decât ordinul său.

(2) Fie

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Folosind doar definiţia, putem deduce că matricele

$$I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \; B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

sunt liniar independente în $\mathbb{R}$-spaţiul vectorial $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Aceasta arată că matricea B nu poate verifica o ecuaţie polinomială netrivială de grad ≤ 2. De aceea, în cazul matricei B, teorema 5.2.18 oferă cel mai bun rezultat posibil. □

Am văzut în exemplele anterioare că, dată o matrice pătratică A de ordinul n, putem găsi uneori polinoame F de grad mai mic decât n cu proprietatea că $F(A) = 0_n$. Pentru comoditatea calculelor, am fi interesaţi să identificăm astfel de polinoame cu grad cât mai mic posibil.

Definiţia 5.2.23. Polinomul minimal *al unei matrice fixate $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ este acel polinom monic $\mu_A(X) \in \mathbb{K}[X]^*$, de grad minim posibil, care verifică condiţia*

$$\mu_A(A) = \mathbf{0}_n.$$

Din definiţie rezultă imediat următoarea proprietate.

Lema 5.2.24. *Polinomul minimal al unei matrice este unic determinat.* □

Vom arăta acum în ce mod putem extinde această noţiune şi pentru endomorfisme de spaţii vectoriale. Fie $T \in \mathcal{L}(\mathbb{V})$ un endomorfism şi fie A matricea asociată lui T într-o bază oarecare. Vom defini **polinomul minimal al lui** T (notat $\mu_T(X)$) ca fiind polinomul minimal al matricei A. Deoarece inelele $(\mathcal{L}(\mathbb{V}), +, \circ)$ şi $(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}), +, \cdot)$ sunt izomorfe, polinomul minimal al endomorfismului T verifică relaţia

$$\mu_T(T) = \mathbf{0}_{\mathbb{V}}.$$

Definiţia de mai sus are însă o lacună: nu este clar dacă polinomul $\mu_T(X)$ nu depinde şi de baza aleasă, faţă de care scriem matricea endomorfismului T. Pentru a fi completă, definiţia necesită demonstrarea următorului rezultat.

Lema 5.2.25. *Fie $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ două matrice asemenea (conform Definiţiei 5.1.3). Atunci*

$$\mu_A(X) = \mu_B(X).$$

Demonstraţie. Deoarece matricele A şi B sunt asemenea, există o matrice inversabilă $U \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ astfel încât

$$B = U^{-1}AU.$$

Să observăm că matricele A^2 şi B^2 sunt şi ele asemenea; întradevăr

$$B^2 = (U^{-1}AU)(U^{-1}AU) = U^{-1}A^2U.$$

Analog, se demonstrează că matricele A^k şi B^k sunt asemenea, pentru orice $k \in \mathbb{N}$. Mai general, dacă F este un polinom oarecare din $\mathbb{K}[X]$, atunci matricile $F(A)$ şi $F(B)$ sunt asemenea. (În demonstraţie, folosim exprimarea matricei $F(B)$ ca sumă de "monoame" de forma αB^k.)

Calculăm

$$\mu_A(B) = \mu_A(U^{-1}AU) = U^{-1}\mu_A(A)U = \mathbf{0}_n,$$

deci $\mu_A(B) = \mathbf{0}_n$. Din definiţia polinomului minimal, avem că

$$\mathrm{grad}(\mu_B(X)) \leq \mathrm{grad}(\mu_A(X)).$$

Relaţia de asemănare a matricelor este însă o relaţie simetrică: procedând analog, deducem că $\mathrm{grad}(\mu_B(X)) \geq \mathrm{grad}(\mu_A(X))$, adică cele două polinoame minimale au acelaşi grad. În plus, ele sunt polinoame monice şi ambele se anulează atunci când înlocuim variabila X cu matricea B. De aici, rezultă că cele două polinoame sunt egale. □

Lema 5.2.24 şi Teorema 5.1.1 ne permit să ne referim sau la polinomul minimal al unei matrice, sau la polinomul minimal al unui endomorfism: rezultatele demonstrate în unul din aceste cazuri rămân valabile şi în celălalt caz. Pentru simplitatea expunerii, în această secţiune ne vom referi doar la cazul matricelor.

Lema 5.2.26. *Fie $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ o matrice fixată şi fie $\mu_A(X)$ polinomul său minimal. Dacă $F \in \mathbb{K}[X]$ şi $F(A) = \mathbf{0}_n$, atunci $\mu_A(X)$ divide $F(X)$.*

Demonstraţie. În inelul $\mathbb{K}[X]$ aplicăm teorema împărţirii cu rest pentru polinoamele $F(X)$ şi $\mu_A(X)$ (1.3.3): există deci $C(X), R(X) \in \mathbb{K}[X]$ astfel încât

$$F(X) = \mu_A(X)C(X) + R(X)$$

şi $\mathrm{grad}(R(X)) < \mathrm{grad}(\mu_A(X))$. Deducem că

$$R(A) = F(A) - \mu_A(A)C(A) = \mathbf{0}_n.$$

Deoarece polinomul $R(X)$ are gradul mai mic decât polinomul minimal $\mu_A(X)$ şi $R(A) = \mathbf{0}_n$, deducem că $R(X)$ trebuie să fie polinomul nul: în caz contrar, contrazicem Definiţia 5.2.23. Altfel spus: $\mu_A(X)$ divide $F(X)$. □

Corolarul 5.2.27. *Polinomul minimal divide polinomul caracteristic.* □

Corolarul (5.2.27) indică o posibilă metodă de calcul al polinomului minimal al unei matrice. Putem proceda astfel:

(1) Calculăm polinomul caracteristic al matricei;
(2) Descompunem polinomul caracteristic în factori ireductibili în $\mathbb{K}[X]$;
(3) Determinăm toţi divizorii monici ai polinomului caracteristic;
(4) Unul din aceşti divizori este polinomul minimal al matricei date.

Exemplul 5.2.28. Fie

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}).$$

Polinomul caracteristic al matricei A este

$$P_A(X) = X^2(X-3).$$

De aceea, polinomul minimal al lui A poate fi unul din următoarele polinoame:

$$1, X, X-3, X^2, X(X-3), X^2(X-3).$$

Pentru a determina efectiv care este polinomul minimal, avem de efectuat câteva calcule cu matricea A. Folosind (5.2.26), în funcţie de rezultatele deja obţinute, putem evita unele din aceste calcule. De exemplu, dacă am găsit că $A(A-3I) = \mathbf{0}$, atunci polinomul minimal al matricei A nu are cum să fie egal cu X^2, deoarece acest polinom nu divide $X(X-3)$. (De fapt, pentru exemplul analizat, polinomul minimal este chiar $X(X-3)$.) □

Deşi ne poate conduce la rezultat, algoritmul indicat mai sus are o restricţie de care ar trebui să ţinem cont în aplicaţiile practice: polinomul caracteristic poate avea mulţi divizori monici, ceea ce ar putea conduce la calcule complicate. Rezultatul care urmează, demonstrat de către Ferdinand Georg Frobenius (1849-1917), oferă o modalitate practică de simplificare a acestor calcule.

Teorema 5.2.29. *Polinomul caracteristic şi polinomul minimal ale unei matrice au aceiaşi factori ireductibili în* $\mathbb{K}[X]$.

Demonstraţie. Vom demonstra mai întâi teorema în cazul $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

Fie deci $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ o matrice cu elemente numere complexe şi fie $P_A(X)$ şi $\mu_A(X)$ polinomul caracteristic, respectiv polinomul minimal ale acestei matrice. Deoarece polinoamele ireductibile din $\mathbb{C}[X]$ sunt cele de gradul 1, este suficient să demonstrăm următorul enunţ:

> *Orice rădăcină a polinomului caracteristic* $P_A(X)$, *este rădăcină şi pentru polinomul minimal* $\mu_A(X)$.

Fie λ o rădăcină a polinomului caracteristic: există deci un vector propriu (nenul) asociat acestei valori proprii. Altfel spus, există o matrice coloană $v = (x_1\ x_2\ \ldots\ x_n)^T$ pentru care

$$Av = \lambda v.$$

Este uşor de văzut că $A^2 v = \lambda^2 v$ şi că, în general, pentru orice polinom $F \in \mathbb{C}[X]$,

$$F(A)v = F(\lambda)v.$$

În particular, considerând $F = \mu_A$, obţinem

$$0 = \mu_A(A)v = \mu_A(\lambda)v,$$

de unde deducem imediat că

$$\mu_A(\lambda) = 0.$$

Această demonstraţie nu mai este valabilă peste un corp comutativ arbitrar $\mathbb{K}$, deoarece polinoamele ireductibile din $\mathbb{K}[X]$ pot avea grade > 1. Pentru cazul general, avem nevoie de următorul rezultat (1.4.8):

Lema 5.2.30. *Fie* $F \in \mathbb{K}[X]$ *un polinom de grad* ≥ 1. *Există atunci o extindere* $\mathbb{K}_1$ *a corpului comutativ* $\mathbb{K}$, *în care* F *are (cel puţin) o rădăcină.* □

Fie deci $F(X)$ un factor ireductibil peste $\mathbb{K}$ al polinomului caracteristic $P_A(X)$: vrem să demonstrăm că $F(X) \mid \mu_A(X)$. Considerăm extinderea de corpuri $\mathbb{K} \subset \mathbb{K}_1$, cu proprietatea că polinomul F are o rădăcină λ în $\mathbb{K}_1$. Folosind acelaşi argument ca în demonstraţia de mai sus, deducem că

$$\mu_A(\lambda) = 0.$$

Aplicând teorema împărţirii cu rest în inelul $\mathbb{K}[X]$ (1.3.3), putem scrie

$$\mu_A(X) = F(X) \cdot C(X) + R(X),$$

unde $C(X), R(X) \in \mathbb{K}[X]$ şi $\mathrm{grad}(R) < \mathrm{grad}(\mu_A)$. Atribuind variabilei X valoarea λ, obţinem $R(\lambda) = 0$. Să presupunem, prin absurd, că $R \neq 0$: deoarece polinomul F este ireductibil, iar

$\text{grad}(R) < \text{grad}(F)$, polinoamele F şi R trebuie să fie prime între ele. Există deci polinoamele $G(X), H(X) \in \mathbb{K}[X]$ cu proprietatea

$$F(X)G(X) + R(X)H(X) = 1. \tag{77}$$

Dacă atribuim în (82) valoarea λ variabilei X, obţinem $0 = 1$, ceea ce constituie evident o contradicţie. Deducem că $R(X) = 0$, deci că $F(X)$ divide $\mu_A(X)$. □

5.3. Subspaţii invariante de dimensiuni arbitrare

5.3.1. Forma triangulară a unei matrice. *Atenţie! Tehnica folosită în demonstrarea rezultatelor care urmează depăşeşte nivelul de până acum al acestui curs: de aceea, această secţiune poate fi ignorată la o primă lectură.*

În secţiunile anterioare, am studiat subspaţiile 1-dimensionale invariate de un endomorfism fixat $T \in \mathcal{L}(\mathbb{V})$. Am ajuns astfel să definim câteva noţiuni importante pentru studiul endomorfismelor (sau al matricelor), cum ar fi, de exemplu, polinomul caracteristic sau polinomul minimal.

În această secţiune, suntem interesaţi de subspaţii de dimensiuni arbitrare, invariate de T. Vom porni de la următoarea întrebare naturală:

Există oare subspaţii invariate de T, de orice dimensiune posibilă?

După cum am văzut în Exemplul 5.2.2, există situaţii în care un endomorfism nu are valori proprii, deci nu are subspaţii invariante de dimensiune 1: cu atât mai mult, e posibil ca endomorfismul să nu aibă subspaţii invariante de dimensiuni mai mari decât 1.

Să analizăm cu mai mare atenţie aceste situaţii. Valorile proprii ale endomorfismului dat sunt rădăcinile din corpul $\mathbb{K}$ ale polinomului caracteristic. Pentru a fi siguri de existenţa *în* $\mathbb{K}$ a acestor rădăcini, este suficient să presupunem că lucrăm peste un corp *algebric închis*, de exemplu peste corpul $\mathbb{C}$ al numerelor complexe. Cu această ipoteză suplimentară, vom demonstra că răspunsul la întrebarea de mai sus este afirmativ.

Teorema 5.3.1. *Fie $\mathbb{V}$ un spaţiu vectorial definit peste corpul numerelor complexe şi fie $T \in \mathcal{L}(\mathbb{V})$ un endomorfism fixat. Există un şir de subspaţii invariate de T*

$$\mathbb{V} = \mathbb{V}_n \supset \mathbb{V}_{n-1} \supset \mathbb{V}_{n-2} \supset \cdots \supset \mathbb{V}_1 \supset \mathbb{V}_0,$$

unde $\dim_{\mathbb{C}}(\mathbb{V}_p) = p$, *pentru orice* $p \in \overline{1, n}$.

În particular, există subspaţii invariate de T, de orice dimensiune posibilă.

Demonstraţie. Pentru a demonstra teorema, este suficient să justificăm următorul rezultat mai simplu:

(**) Dacă $\mathbb{V}$ este un $\mathbb{C}$-spaţiu vectorial de dimensiune n, iar $T \in \mathcal{L}(\mathbb{V})$ este un endomorfim fixat, atunci există în $\mathbb{V}$ un subspaţiu invariat de T, de dimensiune $n-1$.

Vom demonstra afirmaţia (**) prin inducţie după n.

Pentru $n = 1$, afirmaţia este evidentă: subspaţiul nul este invariat de T şi are dimensiunea 0 $(= n - 1)$.

Să presupunem acum că afirmaţia (**) este adevărată pentru orice spaţiu vectorial de dimensiune $\leq k$: vom demonstra că are loc şi pentru spaţiile vectoriale de dimensiune $k + 1$.

Deoarece lucrăm peste corpul numerelor complexe $\mathbb{C}$, endomorfismul T are (cel puţin) o valoare proprie $\lambda \in \mathbb{C}$. Fie v un vector propriu corespunzător valorii proprii λ şi fie

$$\mathbb{W} = \mathbb{V}/\mathbb{C}v$$

spaţiul vectorial obţinut prin factorizarea lui $\mathbb{V}$ la subspaţiul propriu $\mathbb{C}v$, generat de v. Din diagrama de transformări liniare

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{V} & \xrightarrow{T} & \mathbb{V} \\ {\scriptstyle p}\Big\downarrow & & {\scriptstyle p}\Big\downarrow \\ \mathbb{W} & & \mathbb{W} \end{array}$$

(unde p este morfismul canonic de trecere la clase $x \mapsto x + \mathbb{C}v$), deducem că există o transformare liniară indusă

$$\mathbb{W} \xrightarrow{S} \mathbb{W},$$

descrisă prin

$$S(x + \mathbb{C}v) = T(x) + \mathbb{C}v.$$

Deoarece $\dim_{\mathbb{C}}(\mathbb{W}) = k$, iar S este un endomorfism al lui $\mathbb{W}$, conform ipotezei de inducţie există un subspaţiu $\mathbb{U} \subseteq \mathbb{W}$, invariat de S, de dimensiune $k - 1$. Fie $\mathbb{E} = p^{-1}(\mathbb{U})$ preimaginea subspaţiului $\mathbb{U}$ prin morfismul canonic p. $\mathbb{E}$ este un subspaţiu vectorial al lui $\mathbb{V}$, de dimensiune k. În plus, dacă $y \in \mathbb{E}$ este un vector arbitrar, atunci

$$p(T(y)) = S(p(y)) \in \mathbb{U},$$

deci

$$T(y) \in \mathbb{E}.$$

Deducem că $\mathbb{E}$ este subspaţiul căutat. □

Corolarul 5.3.2. *Fie $\mathbb{V}$ este un spaţiu vectorial de dimensiune n, definit peste corpul numerelor complexe şi fie $T \in \mathcal{L}(\mathbb{V})$ un endomorfism fixat. Există o bază $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ a lui $\mathbb{V}$ cu proprietatea că subspaţiul generat de $\{v_1, v_2, \ldots, v_p\}$ este subspaţiu invariat de T, pentru orice $p \in \overline{1, n}$.*

Demonstraţie. În condiţiile teoremei anterioare, alegem succesiv vectorii $(v_i)_i$ astfel încât subspaţiul generat de $\{v_1, v_2, \ldots, v_p\}$ să fie egal cu $\mathbb{V}_p$. □

Corolarul 5.3.3. *Fie $T \in \mathcal{L}(\mathbb{V})$ un endomorfism fixat. Există o bază a lui $\mathbb{V}$ în care matricea lui T este inferior diagonală, adică are forma:*

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & * & * & \dots & * \\ 0 & \lambda_2 & * & \dots & * \\ 0 & 0 & \lambda_3 & \dots & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix},$$

unde λ_i (numerele de pe diagonala matricei) sunt valorile proprii ale lui T.

Demonstraţie. Scriem matricea asociată lui T în baza $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ descrisă în Corolarul 5.3.1: din modul de alegere a acestei baze, ştim că

$$T(v_i) \in \text{Span}\{v_1, v_2, \dots, v_i\}, \text{ pentru orice } i \in \overline{1, n}.$$

De aceea, pe coloana i a matricei asociate, toate elementele de pe poziţiile $i+1, i+2, \dots, n$ sunt nule. Pentru a justifica ultima afirmaţie din enunţ, este suficient să calculăm polinomul caracteristic al endomorfismului T, folosind matricea găsită. □

Observaţia 5.3.4. Corolarul 5.3.3 reprezintă o variantă a Teoremei de descompunere, demonstrată de către Issai Schur (1875-1941). Vom arăta în continuare cum putem obţine o demonstraţie a Teoremei Cayley - Hamilton (5.2.18), folosind doar acest corolar.

Fie $S = P_T(T) \in \mathcal{L}(\mathbb{V})$; vrem să demonstrăm că $S = \mathbf{0}_{\mathbb{V}}$. Notăm de asemenea $f_i = T - \lambda_i \cdot id_{\mathbb{V}}$. Vom folosi în continuare egalitatea

$$S = f_1 \circ f_2 \circ \dots \circ f_n. \tag{78}$$

(În compunerea endomorfismelor de mai sus, ordinea factorilor poate fi schimbată, deoarece endomorfismele f_i şi f_j comută.)

Alegem unul din vectorii v_i ai bazei descrise în Corolarul 5.3.3 şi calculăm $S(v_i)$. Deoarece

$$f_i(v_i) = T(v_i) - \lambda_i v_i \in \text{Span}\{v_1, v_2, \dots, v_{i-1}\},$$

deducem că pentru orice $i \in \overline{1, n}$:

$$f_1 \circ f_2 \circ \dots \circ f_i(v_i) = 0.$$

De aceea $S(v_i) = 0$, pentru orice i, deci $S = \mathbf{0}_{\mathbb{V}}$. □

5.3.2. Descompunerea în sumă directă de subspaţii invariante. Să ne întoarcem acum la întrebarea formulată la sfârşitul secţiunii (5.1.3): *Cum putem descompune $\mathbb{V}$ ca sumă directă de subspaţii invariante?*

Întrebarea are, în continuare, sens: chiar dacă am fi determinat deja diferite subspaţii invariate de endomorfismul T, nu este clar că $\mathbb{V}$ poate fi exprimat ca suma directă a acestora! Este necesar deci să dezvoltăm noi tehnici prin care putem defini şi putem determina efectiv subspaţii invariante.

Pornim de la următoarea constatare. Dacă $\mathbb{V} = \mathbb{V}_1 \oplus \mathbb{V}_2$, unde $\mathbb{V}_1$ şi $\mathbb{V}_2$ sunt subspaţii invariate de T şi dacă S_i este restricţia lui T la $\mathbb{V}_i$, atunci

$$P_T(X) = P_{S_1}(X) \cdot P_{S_2}(X).$$

Aşadar, o descompunere a lui $\mathbb{V}$ ca sumă directă de subspaţii invariante determină o descompunere în factori a polinomului caracteristic P_T. Vom arăta că, în anumite condiţii, este valabilă şi reciproca.

Fie

$$P_T(X) = F(X) \cdot G(X),$$

o decompunere a polinomului caracteristic, unde F şi G sunt polinoame *relativ prime între ele* din $\mathbb{K}[X]$. Definim endomorfismele f şi g ale lui $\mathbb{V}$, descrise astfel:

$$f = F(T), \ g = G(T).$$

Următoarele proprietăţi rezultă imediat din definiţii şi din Teorema 5.2.18:

$$f \circ T = T \circ f \text{ şi } f \circ g = g \circ f = \mathbf{0}_{\mathbb{V}}. \tag{79}$$

Să notăm

$$\mathbb{V}_F = \mathrm{Ker}(f) \text{ şi } \mathbb{V}_G = \mathrm{Ker}(g);$$

evident, acestea sunt două subspaţii vectoriale ale lui $\mathbb{V}$. Vom demonstra că obţinem astfel descompunerea dorită.

Teorema 5.3.5. *Următoarele proprietăţi se referă la subspaţiile definite mai sus.*

(1) $\mathbb{V}_F$ *şi* $\mathbb{V}_G$ *sunt subspaţii invariate de* T*.*
(2) $\mathbb{V} = \mathbb{V}_F \bigoplus \mathbb{V}_G$*;*
(3) $\mathbb{V}_F = \mathrm{Im}(g), \mathbb{V}_G = \mathrm{Im}(f)$*;*
(4) $\dim_{\mathbb{K}}(\mathbb{V}_F) = \mathrm{grad}(F)$*.*

Demonstraţie. (1) Fie $v \in \mathbb{V}_F$ un vector arbitrar; vom demonstra că $T(v) \in \mathbb{V}_F$. Aplicând (79), avem

$$f(T(v)) = f \circ T(v) = T \circ f(v) = T(0) = 0,$$

de unde deducem că

$$T(v) \in \mathrm{Ker}(f) = \mathbb{V}_F.$$

(2) Deoarece polinoamele F şi G sunt prime între ele în inelul $\mathbb{K}[X]$, există polinoamele $Q, R \in \mathbb{K}[X]$ cu proprietatea

$$FQ + GR = 1.$$

Înlocuind variabila X cu T, obţinem în inelul $\mathcal{L}(\mathbb{V})$ egalitatea

$$f \circ Q(T) + g \circ R(T) = \mathbf{1}_{\mathbb{V}}. \tag{80}$$

Fie $w \in \mathbb{V}$ un vector arbitrar şi fie

$$w_1 = g \circ R(T)(w), \ w_2 = f \circ Q(T)(w).$$

Folosind (80), obţinem imediat egalitatea

$$w = w_1 + w_2.$$

Vom demonstra că $w_1 \in \mathbb{V}_F$ şi $w_2 \in \mathbb{V}_G$; într-adevăr

$$f(w_1) = f \circ g \circ R(T)(w_1) = \mathbf{0}_{\mathbb{V}}(R(T)(w_1)) = 0.$$

Am obţinut deci egalitatea

$$\mathbb{V} = \mathbb{V}_F + \mathbb{V}_G.$$

Pentru a arăta că descompunerea de mai sus este o sumă directă, verificăm dacă

$$\mathbb{V}_F \cap \mathbb{V}_G = \{0\}.$$

Fie $t \in \mathbb{V}_F \cap \mathbb{V}_G$ un vector arbitrar; deoarece $f(t) = g(t) = 0$, din egalitatea (80) obţinem

$$t = (Q(T) \circ f)(t) + (R(T) \circ g)(t) = 0.$$

(3) Pentru demonstrarea egalităţilor din enunţ, se foloseşte descompunerea (80): lăsăm detaliile pe seama cititorului.

(4) Fie S restricţia endomorfismului T la subspaţiul $\mathbb{V}_F$: aşadar, $S \in \mathcal{L}(\mathbb{V}_F)$. Deoarece $F(S)$ este restricţia endomorfismului $f(= F(T))$ la $\mathbb{V}_F$, din definiţia subspaţiului $\mathbb{V}_F$ obţinem că $F(S) = \mathbf{0}_{\mathbb{V}_F}$; de aceea,

$$\mu_S(X) \mid F(X),$$

unde μ_S este polinomul minimal al endomorfismului S.

Pe de altă parte, polinomul caracteristic $P_S(X)$ al endomorfismului S divide polinomul caracteristic $P_T(X)$: afirmaţia rezultă din scrierea lui $\mathbb{V}$ ca sumă directă şi din definiţia polinomului caracteristic.

Toate aceste observaţii, precum şi Teorema 5.2.29, ne conduc la concluzia

$$P_S(X) \text{ divide } F(X).$$

Din divizibilitatea de mai sus, reţinem doar că $\mathrm{grad}(P_S(X)) \leq \mathrm{grad}(F(X))$ deci că

$$\dim_{\mathbb{K}}(\mathbb{V}_F) \leq \mathrm{grad}(F).$$

Analog,

$$\dim_{\mathbb{K}}(\mathbb{V}_G) \leq \mathrm{grad}(G).$$

Cum

$$\dim_{\mathbb{K}}(\mathbb{V}_F) + \dim_{\mathbb{K}}(\mathbb{V}_G) = \dim_{\mathbb{K}}(\mathbb{V}) = \mathrm{grad}(P_T(X)) = \mathrm{grad}(F(X)) + \mathrm{grad}(G(X)),$$

în inegalităţile anterioare trebuie să avem egalitate. □

Observaţiile 5.3.6. (1) Teorema 5.3.5 rămâne adevărată şi în cazul în care polinomul caracteristic $P_T(X)$ a fost descompus ca produs de trei sau mai mulţi factori relativ primi: obţinem astfel scrierea lui $\mathbb{V}$ ca sumă directă de mai multe subspaţii invariante, numărul sumanzilor fiind egal cu numărul de factori din descompunere. Demonstraţia de mai sus poate fi uşor adpatată şi pentru acest caz.

(2) Cu excepţia ultimei afirmaţii din Teorma 5.3.5, toate celelalte afirmaţii rămân valabile dacă, în locul polinomul caracteristic $P_T(X)$, descompunem polinomul mininal ca produs de factori relativ primi: o analiză atentă a demonstraţiei teoremei arată că în prima parte am folosit doar faptul că $FG(T) = \mathbf{0}_{\mathbb{V}}$.

5.4. Forma canonică Jordan

Am definit în (5.1.3) relaţia de asemănare a matricelor pătratice. Pentru aplicaţiile numerice, este util să identificăm un *sistem complet de reprezentanţi* pentru această relaţie de echivalenţa: altfel spus, este util să determinăm un anumit tip de matrice, cu proprietatea că orice matrice pătratică este asemenea cu o *unică* matrice de tipul dat. Din considerente pe care le vom explica ulterior, vom studia această problematică doar pentru matrice definite peste corpul $\mathbb{C}$ al numerelor complexe.

Am văzut de asemenea că orice matrice cu elemente numere complexe este asemenea cu o matrice inferior triunghiulară, care are pe diagonală valorile proprii al matricei date: nu ar putea fi oare acesta tipul de matrice căutat? Din păcate, demonstraţia Teoremei 5.3.1 şi demonstraţia Corolarului 5.3.3 arată că pot exista matrice inferior triunghiulare, cu aceleaşi elemente pe diagonala principală, care nu sunt asemenea. Aşadar, matricele inferior triunghiulare nu ne rezolvă problema!

Matricele diagonale reprezintă un alt "candidat" posibil. Acestea îndeplinesc proprietatea de unicitate, deoarece două matrice diagonale sunt asemenea dacă şi numai dacă au aceleaşi intrări pe diagonală (nu neapărat în aceeaşi ordine). Din păcate, aşa cum am văzut în Exemplul 72, nu orice matrice este asemenea cu o matrice diagonală. Din nou am dat greş!

Marie Ennemond Camille Jordan (1838 - 1922) a reuşit să identifice o clasă de matrice "aproape diagonale", numite matrice Jordan, care îndeplinesc proprietăţile dorite. Mai precis, orice matrice pătratică cu elemente din $\mathbb{C}$ este asemenea cu o anumită matrice Jordan şi aceasta este, în mod esenţial, unic determinată. O matrice Jordan asemenea cu o matrice dată se numeşte **forma canonică Jordan** a matricei respective.

Să explicăm ce este o matrice Jordan.

Definiţia 5.4.1. *Un* **bloc Jordan** *corespunzător numărului complex λ este o matrice pătrată de forma*

$$J_p(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & \lambda & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \lambda & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & \lambda \end{pmatrix}.$$

(Pe diagonala principală apare de p ori numărul λ, iar pe diagonala imediat de sub diagonala principală apare de $p-1$ ori numărul 1. Toate celelalte intrări ale matricei sunt egale cu 0.)

O **matrice Jordan** *este o matrice pătratică, formată din blocuri Jordan aşezate pe diagonala principală, toate celelalte intrări fiind egale cu 0:*

$$J = \begin{pmatrix} J_{p_1}(\lambda_1) & & & \\ & J_{p_2}(\lambda_2) & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_{p_t}(\lambda_t) \end{pmatrix}.$$

Blocurile Jordan care apar pe diagonală nu sunt neapărat diferite între ele.

Scopul acestui capitol este demonstrarea următoarei teoreme.

Teorema 5.4.2. *(Teorema lui Jordan.) Fie $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ o matrice de numere complexe. Există atunci o matrice inversabilă $U \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ astfel ca*

$$A = U \begin{pmatrix} J_{p_1}(\lambda_1) & & & \\ & J_{p_2}(\lambda_2) & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_{p_t}(\lambda_t) \end{pmatrix} U^{-1},$$

unde $p_1 + p_2 + \ldots + p_t = n$.

Enunţ echivalent: Dacă $T \in \mathcal{L}(\mathbb{V})$ este un endomorfism dat, atunci există o bază a spaţiului vectorial n-dimensional $\mathbb{V}$ în care matricea lui T este o matrice Jordan.

Matricea Jordan a lui A (sau a lui T) este unică până la o permutare a blocurilor Jordan de pe diagonală.

Vom demonstra în cele ce urmează Teorema lui Jordan, pornind de la cazurile cele mai simple spre cazul general.

5.4.1. Endomorfisme nilpotente. Fie $T \in \mathcal{L}(\mathbb{V})$ un endomorfism nilpotent, adică un endomorfism pentru care există $r \in \mathbb{N}$ astfel ca

$$T^r = \mathbf{0}_{\mathbb{V}}.$$

Echivalent: polinomul caracteristic al lui T este $P_T(X) = X^n$, unde $n = \dim_{\mathbb{K}}(\mathbb{V})$. Vom folosi în continuare următoarea definiţie.

Definiţia 5.4.3. *Un* **vector propriu generalizat** *al endomorfismului nilpotent T este un şir de vectori nenuli, de forma*

$$\mathbf{v} = \{v, T(v), T^2(v), \ldots, T^{m-1}(v)\},$$

unde $T^m(v) = 0$. v este **rădăcina** *vectorului propriu generalizat, iar m este* **lungimea** *acestuia.*

Este uşor de demonstrat următoarea afirmaţie.

Lema 5.4.4. *Orice vector propriu generalizat formează un sistem liniar independent.* □

Arătăm acum că Teorema lui Jordan (5.4.2) este adevărată pentru endomorfismele (sau matricele) nilpotente. *Existenţa* formei Jordan rezultă din următoarea propoziţie.

Propoziţia 5.4.5. *Fie $T \in \mathcal{L}(\mathbb{V})$ un endomorfism nilpotent. Atunci $\mathbb{V}$ are o bază formată din vectori proprii generalizaţi ai lui T.*

Matricea asociată lui T în această bază este matrice Jordan.

Demonstraţie. Fie $r \in \mathbb{N}$ cel mai mic număr natural pentru care $T^r = \mathbf{0}_{\mathbb{V}}$; vom demonstra propoziţia prin inducţie după r.

Pentru $r = 1$, este suficient să alegem *orice* bază a lui $\mathbb{V}$: fiecare vector al acestei baze este un vector propriu generalizat, de lungime 1.

Să demonstrăm acum pasul de inducţie. Fie $T \in \mathcal{L}(\mathbb{V})$ un endomorfism cu proprietatea că $T^{r+1} = \mathbf{0}_{\mathbb{V}}$. Considerăm subspaţiul

$$\mathbb{W} = \mathrm{Im}(T) \subseteq \mathbb{V}.$$

$\mathbb{W}$ este un subspaţiu propriu al lui $\mathbb{V}$, invariat de T. Fie $S = res(T)$, restricţia endomorfismului T la subspaţiul $\mathbb{W}$. Este evident că S este un endomorfism al lui $\mathbb{W}$ (deoarece $\mathbb{W}$ este invariat de T) şi că $S^r = \mathbf{0}_{\mathbb{W}}$ (deoarece $\mathbb{W} = \mathrm{Im}(T)$). Putem aplica deci ipoteza de inducţie pentru a deduce că există o bază a lui $\mathbb{W}$ formată din vectori proprii generalizaţi pentru S, de forma:

$$\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \ldots, \mathbf{v_s},$$

unde $\mathbf{v_i}$ are rădăcina v_i şi lungimea m_i. Vom încerca să ”extindem” această bază la o bază a lui $\mathbb{V}$.

Deoarece $v_1, v_2, \ldots, v_s \in \mathbb{W} = \mathrm{Im}(S)$, există vectorii $w_1, w_2, \ldots, w_s \in \mathbb{V}$ cu proprietatea că

$$v_i = T(w_i), \text{ pentru } i = \overline{1, s}.$$

Obţinem astfel următorii vectori proprii generalizaţi ai lui $\mathbb{V}$:

$$\mathbf{w_i} = \{w_i, T(w_i), T^2(w_i), \ldots, T^{m_i}(w_i)\}, \ i = \overline{1, r}.$$

Vom demonstra acum că vectorii $\{\mathbf{w_1}, \mathbf{w_2}, \ldots, \mathbf{w_s}\}$ sunt liniar independenţi. (Evident, afirmaţia se referă la sistemul de vectori obţinut prin reunirea vectorilor proprii generalizaţi!) Să considerăm combinaţia liniară nulă:

$$\sum_{i=1}^{r} \sum_{j=0}^{m_i} a_{i,j} T^j(w_i) = 0. \tag{81}$$

Aplicăm în (81) morfismul T şi ţinem cont de faptul că $T^{m_i+1}(w_i) = 0$; obţinem

$$\sum_{i=1}^{r} \sum_{j=0}^{m_i-1} a_{i,j} T^{j+1}(w_i) = 0.$$

Deoarece $T(w_i) = v_i$, egalitatea anterioară se mai scrie

$$\sum_{i=1}^{r} \sum_{j=0}^{m_i-1} a_{i,j} T^j(v_i) = 0. \tag{82}$$

Ştim însă că vectorii $\{\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \ldots, \mathbf{v_s}\}$ sunt liniar independendenţi (pentru că formează o bază a lui $\mathbb{W}$), iar în egalitatea (82) apar doar aceşti vectori; de aceea, $a_{i,j} = 0$, pentru $i = \overline{1, r}$ şi $j = \overline{0, m_i - 1}$. Cu aceasta, egalitatea (81) se reduce la

$$\sum_{i=1}^{r} a_{i,m_i} T^{m_i}(w_i) = 0.$$

Deoarece $t_i \geq 1$, aceasta egalitate mai poate fi scrisă

$$\sum_{i=1}^{r} a_{i,m_i} T^{m_i-1}(v_i) = 0;$$

folosim din nou liniar independenţa vectorilor proprii generalizaţi $\{\mathbf{v_i}\}_i$ pentru a deduce că

$$a_{i,m_i} = 0, \forall i \in \overline{1, r}.$$

Fie $\mathbb{U} = \text{Span}\{\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \ldots, \mathbf{v_r}\}$ subspaţiul vectorial generat de vectorii proprii generalizaţi determinaţi deja în $\mathbb{V}$. Vom arăta că putem completa sistemul liniar independent $\{\mathbf{w_1}, \ldots, \mathbf{w_r}\}$ la o bază a lui $\mathbb{V}$, adăugând doar vectori din $\text{Ker}(T)$. Aceasta va termina demonstraţia propoziţiei, deoarece orice vector din $\text{Ker}(T)$ este vector propriu generalizat, de lungime 1.

Pentru început, completăm *la întâmplare* sistemul liniar independent $\{\mathbf{w_1}, \mathbf{w_2}, \ldots, \mathbf{w_r}\}$, cu vectorii $\{u_{r+1}, u_{r+2}, \ldots, u_q\}$, pentru a obţine o bază a lui $\mathbb{V}$. Vom arăta că putem modifica vectorii nou adăugaţi, pentru ca aceştia să aparţină nucleului lui T, iar sistemul de q vectori proprii generalizaţi astfel obţinut să rămână bază în $\mathbb{V}$.

Să considerăm de exemplu vectorul u_{r+1}; deoarece $T(u_{r+1}) \in \mathbb{W}$, iar $\{\mathbf{v_1}, \ldots, \mathbf{v_r}\}$ este o bază a lui $\mathbb{W}$, putem scrie

$$T(u_{r+1}) = \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=0}^{m_i-1} \alpha_{i,j} T^j(v_i) = \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=0}^{m_i-1} \alpha_{i,j} T^{j+1}(w_i) \tag{83}$$

(în ultima egalitate, am ţinut cont de faptul că $v_i = T(w_i)$, $i = \overline{1, r}$).

Fie

$$\widetilde{u_{r+1}} = u_{r+1} - \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=0}^{m_i-1} \alpha_{i,j} T^j(w_i);$$

este clar că $T(\widetilde{u_{r+1}}) = 0$ şi că, prin înlocuirea lui u_{r+1} cu $\widetilde{u_{r+1}}$, obţinem tot o bază.

Procedăm analog cu ceilalţi vectori ai bazei, nou adăugaţi: obţinem astfel o bază a lui $\mathbb{V}$ formată din vectori proprii generalizaţi pentru T.

Justificăm acum ultima parte a Propoziţiei 5.4.5. Fiecare vector propriu generalizat $\mathbf{v}$, ale cărui componente $v, T(v), T^2(v), \ldots, T^{m-1}(v)$ reprezintă o parte din baza identificată mai sus, determină în matricea asociată lui T celula Jordan $J_m(0)$. Într-adevăr, pentru a scrie matricea asociată lui T, trebuie să exprimăm $T(u)$ în funcţie de elementele bazei, unde u este, pe rând, fiecare element al bazei. Când ajungem la secvenţa reprezentată de componentele lui $\mathbf{v}$, constatăm că T acţionează asupra acestor componente prin "translaţie" spre dreapta (adică T duce componenta de pe locul i în componenta de pe locul $i+1$, iar ultima componentă este dusă în 0). Deoarece baza lui $\mathbb{V}$ este formată din vectori proprii generalizaţi, matricea asociată lui T este o matrice Jordan. □

Am demonstrat mai sus *existenţa* matricei Jordan a unui endomorfism nilpotent (sau, echivalent, a unei matrice nilpotente). Rămâne să răspundem la întrebarea:

Este această matrice Jordan unic determinată?

Demonstraţia Propoziţiei 5.4.5 nu ne ajută să dăm un răspuns: în această demonstraţie, alegem succesiv elemente ale unei baze din $\mathbb{V}$. Apriori, aceste alegeri (care permit un grad mare de libertate) influenţează matricea asociată endomorfismului. Cu toate acestea, vom demonstra că matricea Jordan are o anumită proprietate de unicitate. Precizăm în continuare ce se înţelege prin aceasta.

Să presupunem că am fixat o bază a lui $\mathbb{V}$, formată din vectori proprii generalizaţi pentru T. O permutare a vectorilor proprii generalizaţi ce constituie baza aleasă determină aceeaşi permutare a blocurilor Jordan de pe diagonala matricei asociate lui T. Aşadar, nu ne putem aştepta ca matricele Jordan asociate lui T în două baze diferite, să fie *"absolut" identice*; totuşi, dacă permitem premutarea blocurilor de pe diagonala principală, atunci unicitatea poate fi demonstrată!

Propoziţia 5.4.6. *Fie J o matrice Jordan a matricei nilpotente A, formată din n_1 blocuri Jordan de ordinul 1, n_2 blocuri Jordan de ordinul 2, ..., aşezate pe diagonala principală. Atunci*

(84) $$n_i = \operatorname{rang}(A^{i-1}) - 2\operatorname{rang}(A^i) + \operatorname{rang}(A^{i+1}), \textit{pentru orice } i \geq 1.$$

Altfel spus: matricea Jordan J este unic determinată de matricea A, până la o permutare a blocurilor de pe diagonala principală.

Demonstraţie. Fie $U \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ o matrice inversabilă cu proprietatea că

$$J = U^{-1}AU.$$

Deoarece

$$J^i = U^{-1}A^iU, \text{ pentru orice } i \in \mathbb{N},$$

avem egalitatea

(85) $$\operatorname{rang}(A^i) = \operatorname{rang}(J^i), \text{ pentru orice } i.$$

De aceea, este suficient să caracterizăm numărul de blocuri Jordan ale lui J de un anumit ordin, în funcţie de rangul diverselor puteri ale lui A.

Vom folosi în continuare următorul rezultat, a cărui demonstraţie este lăsată ca exerciţiu.

Lema 5.4.7. *Fie*

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

un bloc Jordan de ordin p, corespunzător numărului 0. Atunci B^i se obţine prin deplasarea diagonalei nenule, cu $i-1$ poziţii mai jos.

De aceea: $\operatorname{rang}(B^i) = p - i$ *pentru* $i \leq p$*, iar* $\operatorname{rang}(B^j) = 0$ *pentru* $j > p$. □

Revenim la demonstraţia Propoziţiei (5.4.6). Matricea Jordan J este o matrice organizată în blocuri; această organizare ne permite să exprimăm uşor puterile lui J:

(86)
$$\text{dacă } J = \begin{pmatrix} J_{p_1}(0) & & & \\ & J_{p_2}(0) & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_{p_r}(0) \end{pmatrix}, \text{ atunci } J^i = \begin{pmatrix} J_{p_1}(0)^i & & & \\ & J_{p_2}(0)^i & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_{p_r}(0)^i \end{pmatrix}.$$

De aceea

$$\operatorname{rang}(J^i) = \operatorname{rang}(J_{p_1}(0)^i) + \operatorname{rang}(J_{p_2}(0)^i) + \ldots + \operatorname{rang}(J_{p_r}(0)^i).$$

Ţinând cont de Lema (5.6.2) şi de (85), obţinem următorul sistem de ecuaţii liniare:

$$
\left\{\begin{array}{lcl}
n_1+n_2+\ n_3+\ n_4+\dots & = & n-\operatorname{rang}(A)\\
n_1+2n_2+2n_3+2n_4+\dots & = & n-\operatorname{rang}(A^2)\\
n_1+2n_2+3n_3+3n_4+\dots & = & n-\operatorname{rang}(A^3)\\
n_1+2n_2+3n_3+4n_4+\dots & = & n-\operatorname{rang}(A^4)\\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots & \dots & \dots\dots\dots
\end{array}\right. \tag{87}
$$

Sistemul (87) este compatibil determinat şi are soluţia

$$n_i=\operatorname{rang}(A^{i-1})-2\operatorname{rang}(A^i)+\operatorname{rang}(A^{i+1}),$$

pentru orice $i\geq 1$. (În egalitatea anterioară, am considerat prin convenţie $A^0=I_n$.)

În concluzie: matricea Jordan asociată unei matrice nilpotente A este unic determinată. □

Observaţia 5.4.8. Numerele n_i definite în Propoziţia 5.4.6 îndeplinesc evident condiţia

$$1\cdot n_1+2\cdot n_2+3\cdot n_3+\cdots=n,$$

unde n este ordinul matricei A.

Exemplul 5.4.9. Fie

$$A=\begin{pmatrix}0&1&1&0\\-1&2&0&1\\-1&0&-2&1\\0&-1&-1&0\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_4(\mathbb{C}).$$

Un calcul simplu arată că polinomul caracteristic al matricei A este $P_A(X)=X^4$; deducem de aici că A este matrice nilpotentă.

Deoarece

$$A^2=\begin{pmatrix}-2&2&-2&2\\-2&2&-2&2\\2&-2&2&-2\\2&-2&2&-2\end{pmatrix},\ \text{iar } A^3=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix},$$

$\operatorname{rang}(A)=2$, $\operatorname{rang}(A^2)=1$, $\operatorname{rang}(A^3)=\operatorname{rang}(A^4)=\operatorname{rang}(A^5)=0$. De aceea

$$n_1=\operatorname{rang}(I_4)-2\operatorname{rang}(A)+\operatorname{rang}(A^2)=1,$$

$$n_2=\operatorname{rang}(A)-2\operatorname{rang}(A^2)+\operatorname{rang}(A^3)=0,$$

$$n_3=\operatorname{rang}(A^2)-2\operatorname{rang}(A^3)+\operatorname{rang}(A^4)=1,$$

$$n_4=\operatorname{rang}(A^3)-2\operatorname{rang}(A^4)+\operatorname{rang}(A^5)=0.$$

Aşadar, matricea Jordan asociată lui A are o celulă de ordin 1 şi o celulă de ordin 3, deci

$$J_A=\left(\begin{array}{ccc|c}0&0&0&0\\1&0&0&0\\0&1&0&0\\\hline 0&0&0&0\end{array}\right).$$

□

5.4.2. Forma canonică Jordan: cazul general. În secţiunea anterioară, am demonstrat că Teorema 5.4.2 este adevărată pentru endomorfismele (sau matricele) nilpotente. Vom arăta acum în ce mod putem folosi această demonstraţie, pentru a justifica teorema în cazul general.

5.4.2.1. *Endomorfisme cu o unică valoare proprie.* Să presupunem acum că $T \in \mathcal{L}(\mathbb{V})$ este un endomorfism care are *o unică valoare proprie* λ; altfel spus, presupunem că polinomul caracteristic al lui T are forma

$$P_T(X) = (X - \lambda)^n.$$

Fie

$$S = T - \lambda \cdot \mathrm{id}_{\mathbb{V}};$$

obţinem astfel un endomorfism nilpotent al lui $\mathbb{V}$. Conform Propoziţiei 5.4.6, există o bază a lui $\mathbb{V}$ în care matricea asociată endomorfismului S este o matrice Jordan, de forma

$$J_S = \begin{pmatrix} J_{p_1}(0) & & & \\ & J_{p_2}(0) & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_{p_r}(0) \end{pmatrix}.$$

Dacă exprimăm în aceeaşi bază matricea lui T, obţinem matricea

$$\begin{pmatrix} J_{p_1}(\lambda) & & & \\ & J_{p_2}(\lambda) & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_{p_r}(\lambda) \end{pmatrix},$$

care este o matrice Jordan asociată endomorfismului T.

Reciproc, dacă J este o matrice Jordan asociată lui T (nu neapărat matricea de mai sus!), atunci $J - \lambda \cdot I_n$ este o matrice Jordan asociată lui S. Pentru endomorfismele nilpotente, am demonstrat însă unicitatea matricei Jordan asociate (în sensul Propoziţiei 5.4.6); aceasta arată că lui T i se poate asocia o *unică* matrice Jordan.

Discuţia anterioară arată că Teorema 5.4.2 este adevărată pentru endomorfismele (sau matricele) care au o unică valoare proprie.

5.4.2.2. *Endomorfisme arbitrare.* Fie acum $T \in \mathcal{L}(\mathbb{V})$ un endomorfism arbitrar al spaţiului vectorial complex $\mathbb{V}$. Notăm

$$P_T(X) = (X - \lambda_1)^{s_1}(X - \lambda_2)^{s_2} \cdots (X - \lambda_t)^{s_t}$$

polinomul caracteristic al lui T, unde $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_t$ sunt valorile proprii distincte ale lui T. Definim subspaţiile vectoriale $\mathbb{V}_i \leq_{\mathbb{K}} \mathbb{V}$, $i = \overline{1,t}$, descrise astfel:

$$V_i = \mathrm{Ker}((T - \lambda_i \cdot id_{\mathbb{V}})^{s_i}).$$

Polinoamele $F_i = (X - \lambda_i)^{s_i}$ sunt relativ prime între ele. De aceea, conform Teoremei 5.3.5, fiecare dintre subspaţiile $\mathbb{V}_i$ este subspaţiu invariat de T, cu $\dim_{\mathbb{C}}(V_i) = s_i$. Fie $S_i \in \mathcal{L}(\mathbb{V}_i)$ restricţia lui T la subspaţiul $\mathbb{V}_i$. Deoarece polinomul $F_i(X) = (X - \lambda_i)^{s_i}$ este polinomul caracteristic al lui S_i (conform Teoremei 5.3.5), deducem că fiecare dintre endomorfismele S_i are o unică valoare proprie λ_i. Suntem astfel în condiţiile secţiunii (5.4.2.1): pentru fiecare dintre aceste morfisme, există deci câte o matrice Jordan $\mathcal{M}_i$, care reprezintă matricea asociată endomorfismului S_i într-o anumită bază $\mathcal{B}_i$ a subspaţiului $\mathbb{V}_i$.

Deoarece $\mathbb{V} = \oplus_j \mathbb{V}_j$, reuniunea bazelor $\mathcal{B}_j$, fixate în fiecare dintre subspaţiile V_j, determină o bază $\mathcal{B}$ a lui $\mathbb{V}$. Dacă păstrăm în $\mathcal{B}$ ordinea vectorilor din bazele $\mathcal{B}_j$, matricea lui T în baza $\mathcal{B}$

se obţine prin scrierea succesivă, pe diagonală, a matricelor $\mathcal{M}_j$; este evident însă că matricea $\mathcal{M}$ astfel obţinută este o matrice Jordan.

Pentru a demonstra unicitatea matricei Jordan asociată lui T, vom folosi un argument analog celui din Propoziţia 5.4.6. Fie J o matrice Jordan asociată morfismului T şi fie λ o valoare proprie fixată a morfismului. Notăm cu n_i numărul de blocuri Jordan, care au ordinul i şi sunt asociate lui λ, ce apar pe diagonala matricei J. Vom demonstra că numerele n_i verifică un sistem analog cu (87).

Argumentul care urmează se bazează pe câteva rezultate, care au fost demonstrate deja în capitolele anterioare; pentru a fi mai uşor de urmărit de către cititor, reluăm aici enunţurile lor.

Lema 5.4.10. *Dacă*

$$M = \begin{pmatrix} B & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & C \end{pmatrix}$$

este o matrice-bloc, în care B şi C sunt matrice pătratice, atunci

(1) $\mathrm{rang}(M) = \mathrm{rang}(B) + \mathrm{rang}(C)$;

(2) *pentru orice $p \in \mathbb{N}$,*

$$M^p = \begin{pmatrix} B^p & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & C^p \end{pmatrix}.$$

Fie $B = J - \lambda \cdot I_n$; aplicând Lema 5.4.10 obţinem imediat următoarele egalităţi, similare celor din (87):

$$\begin{cases} n_1 + n_2 + \ n_3 + \ n_4 + \dots & = & n - \mathrm{rang}(B) \\ n_1 + 2n_2 + 2n_3 + 2n_4 + \dots & = & n - \mathrm{rang}(B^2) \\ n_1 + 2n_2 + 3n_3 + 3n_4 + \dots & = & n - \mathrm{rang}(B^3) \\ n_1 + 2n_2 + 3n_3 + 4n_4 + \dots & = & n - \mathrm{rang}(B^4) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots & \dots & \dots\dots\dots \end{cases} \tag{88}$$

Matricea B este însă matricea asociată endomorfismului $g = T - \lambda \cdot \mathrm{id}_{\mathbb{V}}$ în baza $\mathcal{B}$ (de mai sus); de aceea, pentru orice $p \in \mathbb{N}$, $\mathrm{rang}(B^p)$ (care este egal cu $\mathrm{rang}(g^p)$) depinde doar de endomorfismul T. Vedem deci că numerele n_i (care verifică sistemul (88)) depind doar de morfismul T. Faptul că aceste numere sunt unic determinate demonstrează unicitatea matricei Jordan asociate lui T.

Am demonstrat astfel Teorema 5.4.2 în cazul general.

Definiţia 5.4.11. Forma canonică Jordan *a unui endomorfism (sau a unei matrice) este unica matrice Jordan asociată endomorfismului (sau matricei).*

5.5. Algoritmi pentru determinarea formei canonice Jordan

Vom explicita, în cele ce urmează, câteva modalităţi practice de determinare a formei canonice Jordan. Pentru a facilita înţelegerea acestor algoritmi, am ales de fiecare dată să îi explicăm prin exemple.

5.5.1. Metoda calculării rangului.

Exemplul 5.5.1. Fie

$$A = \begin{pmatrix} 6 & -9 & 5 & 4 \\ 7 & -13 & 8 & 7 \\ 8 & -17 & 11 & 8 \\ 1 & -2 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Explicităm, pentru această matrice, algoritmul descris parţial în Propoziţia 5.4.6.

- Pasul 1: calculăm polinomul caracteristic al matricei

$$P_A(X) = \det(XI_4 - A) = (X-2)^3(X-1).$$

- Pasul 2: determinăm valorile proprii şi dimensiunile subspaţiilor invariante corespunzătoare. Valorile proprii sunt 2 şi 1; subspaţiile corespunzătoare au respectiv dimensiunile 3 şi 1 (egale cu multiplicităţile algebrice ale valorilor proprii).
- Pasul 3: identificăm dimensiunile blocurilor Jordan, pentru fiecare valoare proprie în parte. Există un singur bloc Jordan corespunzător valorii proprii 1, de ordin 1. Notăm n_1, n_2, n_3 numărul de blocuri Jordan de ordin $1, 2$, respectiv 3, corespunzătoare valorii proprii 2. Pentru matricea $B = A - 2I_4$, calculăm

$$B = \begin{pmatrix} 4 & -9 & 5 & 4 \\ 7 & -15 & 8 & 7 \\ 8 & -17 & 9 & 8 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \end{pmatrix},\ B^2 = \begin{pmatrix} -3 & 6 & -3 & -3 \\ -6 & 12 & -6 & -6 \\ -7 & 14 & -7 & -7 \\ -1 & 2 & -1 & -1 \end{pmatrix},\ B^3 = \begin{pmatrix} 3 & -6 & 3 & 3 \\ 6 & -12 & 6 & 6 \\ 7 & -14 & 7 & 7 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

  Deoarece $\operatorname{rang}(B) = 2$, $\operatorname{rang}(B^2) = 1$, $\operatorname{rang}(B^3) = 1$, din sistemul (88) obţinem

$$n_1 = 1, n_2 = 1, n_3 = 0.$$

- Pasul 4: scriem forma canonică Jordan a lui A.

$$J_A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

□

5.5.2. Metoda explicitării bazei.

Exemplul 5.5.2. Fie $T : \mathbb{C}^4 \to \mathbb{C}^4$ endomorfismul descris prin

$$T(x,y,z,t) = (x - 2y - t; -3x - 6y - 3z - 4t; z; 3x + 13y + 3z + 8t).$$

Vom folosi modul de calcul prezentat în demonstraţia Propoziţiei 5.4.5, pentru a determina efectiv o bază în care matricea asociată lui T este matricea Jordan.

- Pasul 1: determinăm polinomul caracteristic al endomorfismului. Folosim pentru aceasta, de exemplu, baza canonica şi matricea lui T în această bază. Obţinem

$$P_T(X) = (X-1)^4.$$

- Pasul 2: Explicităm endomorfismul nilpotent $S = T - 1 \cdot \mathrm{id}_{\mathbb{C}^4}$. Matricea acestui endomorfism în baza canonică este
$$B = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 0 & 3 \\ -2 & -7 & 0 & 13 \\ 0 & -3 & 0 & 3 \\ -1 & -4 & 0 & 7 \end{pmatrix}.$$
- Pasul 3: identificăm subspaţiile vectoriale $\mathrm{Im}(S), \mathrm{Im}(S^2), \mathrm{Im}(S^3)$. Pentru aceasta, calculăm
$$B^2 = \begin{pmatrix} 3 & 9 & 0 & -18 \\ 1 & 3 & 0 & -6 \\ 3 & 9 & 0 & -18 \\ 1 & 3 & 0 & -6 \end{pmatrix},\ B^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$
Deducem că $\mathrm{Im}(S) = \mathrm{Span}\{(0;2;0;1)^T, (3;7;3;4)^T\}$, $\mathrm{Im}(S^2) = \mathrm{Span}\{(3;1;3;1)^T\}$, iar $\mathrm{Im}(S^3) = (0)$. (Imaginea unui morfism este generată de coloanele matricei corespunzătoare morfismului, într-o bază dată.)
- Pasul 4: alegem o bază în $\mathrm{Im}(S^2)$. De exemplu, alegem vectorul $v = (3;1;3;1)^T$. Observăm că vectorul ales se poate reprezenta sub forma $v = S(w)$, unde $w = (0;-2;0;-1)^T \in \mathrm{Im}(S)$. Am obţinut vectorul propriu generalizat $\{w, S(w) = v\}$.
- Pasul 5: continuăm procesul de completare a bazei. Scriem $w = S(t)$, unde $t = (1;0;0;0)^T \in \mathbb{C}^4$. Obţinem vectorul propriu generalizat $\{t, w = S(t), v = S^2(t)\}$.

  Ştim că aceşti trei vectori sunt liniar independenţi: completăm sistemul $\{t, w, v\}$ la o bază a lui $\mathbb{C}^4$, folosind, de exemplu, vectorul $e_2 = (0;1;0;0)^T$.
- Pasul 6: modificăm vectorul adăugat. Deoarece
$$S(e_2) = -3w - v = S(-t - 3w),$$
înlocuim vectorul e_2 cu vectorul
$$q = e_2 + t + 3w = (-3;-1;0;-1)^T \in \mathrm{Ker}(S).$$
Am obţinut baza $\{t, w, v, q\}$, formată din vectori proprii generalizaţi pentru S. Matricea lui T în această bază este matricea Jordan
$$J_S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

□

Exemplul 5.5.3. Fie
$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 & -1 \\ 6 & 1 & -1 & 1 \\ -6 & -1 & 4 & 2 \end{pmatrix},$$
matricea asociată endomorfismului $T \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^4)$, în baza canonică. Vom determina matricea canonică Jordan a lui T şi baza lui $\mathbb{C}^4$ în care matricea asociată acestui endomorfism este matricea Jordan; folosim pentru aceasta algoritmul descris în demonstraţia Propoziţiei 5.4.5.

Pasul 1: determinăm polinomul caracteristic al endomorfismului.

$$P_T(X) = \det(XI_4 - A) = (X-3)^3(X+2).$$

Pasul 2: explicităm subspaţiile invariante. Fie $F = (X-3)^3$ şi $G = X+2$ factorii relativ primi în care se descompune $P_T(X)$ şi fie $f = F(T)$ şi $g = G(T)$ endomorfismele corespunzătoare. Definim (ca în secţiunea (5.3.2)) $\mathbb{V}_F = \mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Im}(g)$ şi $\mathbb{V}_G = \mathrm{Ker}(g) = \mathrm{Im}(f)$: ştim că acestea sunt subspaţii invariate de T şi că $\mathbb{C}^4 = \mathbb{V}_F \oplus \mathbb{V}_G$.

Pentru a explicita aceste subspaţii vectoriale, calculăm

$$B = A - 3I_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \\ 6 & 1 & -4 & 1 \\ -6 & -1 & 4 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{şi } C = A + 2I_4 = \begin{pmatrix} 6 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 4 & -1 & -1 \\ 6 & 1 & 1 & 1 \\ -6 & -1 & 4 & 4 \end{pmatrix};$$

atunci

$$\mathbb{V}_F = \{v \in \mathbb{C}^4 : B^3 v = 0\} = \mathrm{Span}\{v_1 = (1;0;1;0)^T,\ v_2 = (0;1;0;0)^T,\ v_3 = (0;0;0;1)^T\},$$

iar

$$\mathbb{V}_G = \{v \in \mathbb{C}^4 : Cv = 0\} = \mathrm{Span}\{w_1 = (0;0;1;-1)^T\}.$$

Pasul 3: explicităm restricţiile endomorfismelor $S = T - 3 \cdot \mathrm{id}_{\mathbb{C}^4}$ şi $U = T + 2 \cdot \mathrm{id}_{\mathbb{C}^4}$ la subspaţiile invariante $\mathbb{V}_F$, respectiv $\mathbb{V}_G$.

Pentru aceasta, calculăm de exemplu matricea E asociată endomorfismului $S|_{\mathbb{V}_F}$ în baza $\{v_1, v_2, v_3\}$. Deoarece $S(v_1) = (2;-2;2;-2)^T = 2v_1 - 2v_2 - 2v_3$, prima coloană a matricei căutate este $(2;-2;-2)^T$. Procedând analog cu ceilalţi vectori din bază, obţinem

$$E = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & -1 \\ -2 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Folosim acum procedeul din exemplul anterior, pentru a determina în $\mathbb{V}_F$ o bază convenabilă, în care matricea lui $S|_{\mathbb{V}_F}$ este matrice Jordan: această bază poate fi, de exemplu

$$\{p_1 = (0;1;0)^T, p_2 = (1;-1;-1)^T, p_3 = (0;-1;1)^T\}.$$

Atenţie! Baza obţinută mai sus este exprimată în coordonate, în funcţie de baza $\{v_1, v_2, v_3\}$, aleasă în $\mathbb{V}_F$. Pentru a obţine exprimarea vectorilor p_i ca vectori din $\mathbb{C}^4$ (adică din spaţiul vectorial iniţial), ţinem cont de exprimarea vectorilor v_i în baza canonică. Obţinem astfel următoarea bază a lui $\mathbb{V}_F$:

$$p_1 = v_2 = (0;1;0;0)^T, p_2 = v_1 - v_2 - v_3 = (1;-1;1;-1)^T, p_3 = -v_2 + v_3 = (0;-1;0;1)^T.$$

Pentru spaţiul $\mathbb{V}_G$, calculele sunt mult mai simple: acesta este de dimensiune 1 şi, de aceea, matricea asociată endomorfismului $U|_{\mathbb{V}_G}$ în baza $\{w_1\}$ este matricea Jordan.

Pasul 4: scriem matricea Jordan a lui T. Am determinat anterior baze în $\mathbb{V}_F$ şi în $\mathbb{V}_G$, în care matricele asociate restricţiilor lui S şi, respectiv, U la aceste subspaţii, sunt matricele

Jordan. Reuniunea acestor baze, adică $\mathcal{B} = \{p_1, p_2, p_3, w_1\}$, formează o bază a lui $\mathbb{V}$ pentru care matricea asociată lui T este matricea Jordan. Explicităm această matrice şi obţinem

$$J_T = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Pentru exemplul analizat, am obţinut atât forma canonică Jordan a endomorfismului dat, cât şi o bază în care matricea asociată este matricea Jordan. În plus, calculele făcute ne permit să determinăm imediat o matrice inversabilă U cu proprietatea că $U^{-1}AU = J_A$: aceasta poate fi, de exemplu, matricea de trecere între baza canonică şi baza $\mathcal{B}$ determinată mai sus. □

5.6. Aplicaţii: calcule cu matrice

Vom prezenta în continuare câteva aplicaţii ale formei canonice Jordan a unui endomorfism (sau a unei matrice). Vom arăta în ce mod putem folosi această matrice cvasi-diagonală în calculele efective.

5.6.1. Calculul puterilor unei matrice. Fie $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ o matrice cu elemente complexe, de ordinul n. Ne dorm să identificăm algoritmi eficienţi pentru calculului puterilor matricei A.

Pentru a calcula, de exemplu, A^{10}, pare să fie nevoie să calculăm, pe rând, toate puterile A^k, cu $k \leq 10$, ceea ce măreşte mult complexitatea calculelor.

O abordare mai eficientă ar putea fi următoarea: calculăm A^2, apoi $A^4 = (A^2)^2$, apoi analog A^8 şi finalizăm calculul efectuând $A^8 \cdot A^2$. Metoda este mai eficientă, dar are dezavantajul că toate puterile de exponent putere de 2 ale lui A trebuie memorate, ceea ce consumă memorie (în condiţii de calcul electronic).

Forma canonică Jordan a matricei A poate eficientiza şi mai mult aceste calcule. Pentru a înţelege afirmaţia anterioară, avem nevoie de rezultatul care urmează.

Propoziţia 5.6.1. *Fie*

$$J = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & a & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & a \end{pmatrix}$$

un bloc Jordan de ordin p, corespunzător numărului a.

Dacă $F \in \mathbb{C}[X]$ este un polinom arbitrar, atunci

$$F(J) = \begin{pmatrix} F(a) & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ F'(a)/1! & F(a) & 0 & \dots & 0 & 0 \\ F''(a)/2! & F'(a)/1! & F(a) & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ F^{(p-2)}(a)/(p-2)! & F^{(p-3)}(a)/(p-3)! & F^{(p-4)}(a)/(p-4)! & \dots & F(a) & 0 \\ F^{(p-1)}(a)/(p-1)! & F^{(p-2)}(a)/(p-2)! & F^{(p-3)}(a)/(p-3)! & \dots & F'(a)/1! & F(a) \end{pmatrix}.$$

Demonstraţie. Va fi suficient să verificăm relaţia din enunţ pentru polinoame de forma $F(X) = X^n$, deoarece orice polinom este o sumă de monoame. Am observat deja (vezi Lema 5.6.2) că formula este adevărată pentru $a = 0$. Ne putem însă reduce la acest caz, deoarece

$$\overline{J} = J - aI_p$$

este un bloc Jordan corespunzător numărului 0 pe diagonală. □

Exemplul 5.6.2. Fie

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & 3 \\ -2 & -6 & 0 & 13 \\ 0 & -3 & 1 & 3 \\ -1 & -4 & 0 & 8 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_4(\mathbb{C})$$

matricea endomorfismului T din exemplul 5.5.2. Ne propunem să calculăm A^{10}, folosind forma Jordan a acestei matrice.

În exemplul citat, am determinat efectiv baza $\mathcal{B} = \{t, w, v, q\}$, în care matricea asociată lui T este matricea Jordan $J = J_T$. Altfel spus, ştim că $U^{-1}AU = J$, unde

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & -3 \\ 0 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

este matricea de trecere între baza canonică şi baza $\mathcal{B}$. Propoziţia 5.6.1 ne arată cum putem calcula rapid puterile lui J; în particular,

$$J^{10} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 10 & 1 & 0 & 0 \\ 45 & 10 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

Deoarece $U^{-1}A^{10}U = J^{10}$, obţinem imediat

$$A^{10} = UJ^{10}U^{-1} = \begin{pmatrix} 136 & 375 & 0 & -780 \\ 25 & 66 & 0 & -140 \\ 135 & 375 & 1 & -780 \\ 35 & 95 & 0 & -199 \end{pmatrix}.$$

□

5.6.2. Calculul polinomului minimal. Teorema lui Frobenius (5.2.29) precizează unele condiţii *necesare* pe care le îndeplineşte polinomul minimal al unei matrice date (sau al unui endomorfism). Vom arăta acum cum putem determina imediat polinomul minimal al unei matrice, odată ce am determinat forma canonică Jordan a acesteia.

Fie deci $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ o matrice dată şi fie

$$J_A = \begin{pmatrix} J_{p_1}(\lambda_1) & & & \\ & J_{p_2}(\lambda_2) & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_{p_t}(\lambda_t) \end{pmatrix}$$

forma sa canonică Jordan. Este suficient să determinăm polinomul minimal al matricei J_A, deoarece acesta coincide cu polinomul minimal al lui A. Conform Propoziţiei 5.6.1, dacă $F \in \mathbb{C}[X]$ este un polinom arbitrar, atunci

$$F(J_A) = 0 \Longleftrightarrow F(\lambda_i) = F'(\lambda_i) = \ldots = F^{(p_i-1)}(\lambda_i) = 0, \text{ pentru orice } i = \overline{1,t}.$$

Aşadar, F este polinomul minimal al lui J_A (deci şi al lui A) dacă şi numai dacă acesta este polinomul nenul, monic, de grad minim posibil, care are fiecare număr λ_i ca rădăcină multiplă de ordin $\geq p_i$. Am demonstrat astfel rezultatul următor.

Propoziţia 5.6.3. *Polinomul minimal al matricei Jordan J este egal cu*

$$\mu_J(X) = (X - a_1)^{r_1}(X - a_2)^{r_2} \cdots (X - a_s)^{r_s},$$

unde $a_1, a_2, \cdots, a_s$ sunt valorile proprii distincte ale lui J, iar r_i este ordinul maxim al blocurilor Jordan ce compun J, asociate valorii proprii a_i.

În calculele efective, acest rezultat nu este prea util, deoarece este mai uşor să căutăm prin încercări polinomul minimal al unei matrice, decât să determinăm forma Jordan.

Exemplul 5.6.4. Pentru matricea A din Exemplul 5.5.3, polinomul minimal este

$$\mu_A(X) = (X - 3)^2(X + 2).$$

□

Exemplul 5.6.5. Să analizăm din nou matricea A (asociată endomorfismului T) din Exemplele 5.5.2 şi 5.6.2. Folosind Propoziţia anterioară şi matricea Jordan a lui T (din 5.5.2), obţinem imediat polinomul minimal al matricei A: acesta este

$$\mu_A(X) = (X - 1)^3.$$

Vom folosi acest polinom pentru a calcula A^{10}, utilizând o metodă diferită de cea din Exemplul 5.6.2. Aplicăm Teorema împărţirii cu rest (1.3.3):

$$X^{10} = (X - 1)^3 \cdot C(X) + (45X^2 - 80X + 36). \tag{89}$$

Înlocuind în (89) variabila X cu matricea A, obţinem

$$A^{10} = 45A^2 - 80A + 36I_4 =$$

$$45\begin{pmatrix} 4 & 3 & 0 & -12 \\ -3 & -10 & 0 & 20 \\ 3 & 3 & 1 & -12 \\ -1 & -5 & 0 & 9 \end{pmatrix} - 80\begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & 3 \\ -2 & -6 & 0 & 13 \\ 0 & -3 & 1 & 3 \\ -1 & -4 & 0 & 8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 36 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 36 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 36 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 36 \end{pmatrix},$$

ceea ce conduce la acelaşi rezultat ca în Exemplul 5.6.2. □

5.6.3. Calculul inversei unei matrice. Algoritmul de calcul al inversei unei matrice (2.3.16) necesită un număr mare de operaţii algebrice. De exemplu, dacă matricea are ordinul 5, atunci, pentru a scrie matricea A^{-1}, este nevoie să calculăm un determinant de ordinul 5 şi 25 de determinanţi de ordinul 4.

Calculatoarele electronice reprezintă un instrument extrem de util în realizarea acestor calcule; pentru a fi eficiente însă, programele de calcul trebuie să utilizeze un număr cât mai mic de operaţii aritmetice. O modalitate eficientă de calcul se poate obţine utilizând polinomul minimal al matricei.

Exemplul 5.6.6. Fie A matricea analizată în Exemplele 5.5.2, 5.6.2 şi 5.6.5. Ştim că

$$\mathbf{0}_4 = (A - I_4)^3 = A^3 - 3A^2 + 3A - I_4.$$

Din relaţia anterioară (în care nu am folosit decât faptul că $\mu_A(X) = (X-1)^3$), obţinem

$$0_4 = A^2 - 3A + 3I_4 - A^{-1}.$$

De aceea

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 0 & -12 \\ -3 & -10 & 0 & 20 \\ 3 & 3 & 1 & -12 \\ -1 & -5 & 0 & 9 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & 3 \\ -2 & -6 & 0 & 13 \\ 0 & -3 & 1 & 3 \\ -1 & -4 & 0 & 8 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 12 & 0 & -21 \\ 3 & 11 & 0 & -19 \\ 3 & 12 & 1 & -21 \\ 2 & 7 & 0 & -12 \end{pmatrix}.$$

□

5.7. Matrice diagonalizabile

Am început acest capitol cu o întrebare naturală: *este oare orice endomorfism de spaţii vectoriale diagonalizabil?* Ştim deja că răspunsul este negativ; ar fi totuşi util să putem răspunde la o nouă întrebare:

În ce condiţii un endomorfism dat este diagonalizabil?

Având în vedere modul în care se determină matricea unui endomorfism într-o bază, următoarea condiţie este evidentă.

Lema 5.7.1. *T este diagonalizabil dacă şi numai dacă există o bază a lui $\mathbb{V}$ formată din vectori proprii ai lui T.* □

Cu aceasta, nu am răspuns însă la întrebarea de mai sus; am înlocuit-o doar cu o alta, la fel de complicată: *În ce condiţii, există o bază formată din vectori proprii ai unui endomorfism dat?*

Am văzut că oricărei matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ i se poate asocia o matrice Jordan. O matrice diagonală este un caz particular de matrice Jordan, în care toate blocurile de pe diagonală sunt de ordin 1. De aceea, putem folosi unicitatea formei Jordan, pentru a caracteriza matricele diagonalizabile.

Teorema 5.7.2. *Fie $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ o matrice şi fie $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ valorile sale proprii distincte. Următoarele condiţii sunt echivalente:*

(1) *A este diagonalizabilă;*
(2) *$F(A) = \mathbf{0}_n$, unde $F(X) = (X - \lambda_1)(X - \lambda_2)\dots(X - \lambda_m)$;*
(3) *Polinomul minimal $\mu_A(X)$ se descompune în factori liniari distincţi;*
(4) *Polinomul minimal $\mu_A(X)$ nu are rădăcini multiple.*
(5) *Pentru orice valoare proprie λ_i, $m_a(\lambda_i) = m_g(\lambda_i)$.*

Demonstraţie. Vom justifica doar (4) $\Rightarrow$ (1), celelalte implicaţii fiind lăsate ca exerciţiu cititorului. Fie J forma canonică Jordan a lui A. În ipoteza (4), propoziţia 5.6.3 ne arată că toate blocurile Jordan care apar pe diagonala matricei J sunt de dimensiune 1, deci matricea J este o matrice diagonală. Cum A şi J sunt matrice asemenea, deducem că A este diagonalizabilă. $\square$

5.8. Probleme propuse

Problema 5.8.1. Demonstraţi Lema 5.1.4, care afirmă că asemănarea matricelor este o relaţie de echivalenţă pe $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Problema 5.8.2. Calculaţi valorile proprii ale următoarelor matrice cu coeficienţi complecşi:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ D = \begin{pmatrix} 2 & -5 & -3 \\ 3 & 15 & 12 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Problema 5.8.3. (1) Demonstraţi că matricea

$$A = \begin{pmatrix} a_1b_1 & a_1b_2 & \dots & a_1b_n \\ a_2b_1 & a_2b_2 & \dots & a_2b_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_nb_1 & a_nb_2 & \dots & a_nb_n \end{pmatrix}$$

are rangul ≤ 1.
(2) Folosiţi Teorema 73 pentru a calcula polinomul caracteristic al matricei A.
(3) Precizaţi valorile proprii ale matricei A şi determinaţi multiplicitatea algebrică şi multiplicitatea geometrică a fiecăreia dintre aceste valori proprii.
(4) Decideţi dacă matricea A este diagonalizabilă.

Problema 5.8.4. Fie $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ şi fie

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ B & A \end{pmatrix}$$

matrice-bloc de ordin $2n$. Demonstraţi că polinomul caracteristic al matricei M este egal cu produsul polinoamelor caracteristice ale matricelor $A + B$ şi $A - B$.

Enunţaţi un posibil rezultat pentru polinomul minimal al matricei M. Verificaţi apoi acest rezultat pe câteva cazuri particulare şi, dacă se dovedeşte adevărat, încercaţi să îl demonstraţi!

Problema 5.8.5. Fie $T \in \mathcal{L}(\mathbb{V})$ un endomorfism, fie λ o valoare proprie a lui T şi fie v un vector propriu corespunzător acestei valori proprii. Demonstraţi că:

(1) $v \in Ker(T)$, dacă $\lambda = 0$;
(2) $v \in Im(T)$, dacă $\lambda \neq 0$.

Problema 5.8.6. Dacă v este vector propriu pentru endomorfismul T, arătaţi că v rămâne vector propriu şi pentru endomorfismul $T + a \cdot id_{\mathbb{V}}$, unde $a \in \mathbb{K}$ este un scalar arbitrar. Propuneţi apoi o generalizare a acestei proprietăţi.

Problema 5.8.7. Fie $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ o matrice cu elemente numere complexe. Notăm $\overline{A}$ matricea obţinută prin înlocuirea fiecărui element a_{ij} al lui A cu conjugatul său complex $\overline{a_{ij}}$. Ce relaţie există între:

(1) polinoamele caracteristice ale matricelor A şi $\overline{A}$;
(2) valorile proprii ale matricelor A şi $\overline{A}$?

Problema 5.8.8. Recitiţi demonstraţia Teoremei 5.2.8, în care am arătat că, dacă două matrice sunt asemenea, atunci ele au acelaşi polinom caracteristic. Demonstraţi sau infirmaţi reciproca: Dacă două matrice au acelaşi polinom caracteristic, atunci matricele sunt asemenea.

Problema 5.8.9. Dacă matricele A şi B sunt asemenea, atunci ele au aceleaşi valori proprii. Ce relaţii există între vectorii proprii ai celor două matrice?

Problema 5.8.10. Fie $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ o matrice care are valorile proprii $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ şi fie $F \in \mathbb{K}[X]$ un polinom arbitrar.

(1) Demonstraţi că $det(F(A)) = F(\lambda_1) \cdot F(\lambda_2) \cdots F(\lambda_n)$.
(2) Arătaţi că matricea $F(A)$ are valorile proprii $F(\lambda_1), F(\lambda_2), \ldots, F(\lambda_n)$.

Problema 5.8.11. Fie $\mathbb{V} = \mathbb{R}^3$ şi fie T simetria faţă de un plan ce trece prin origine. Descrieţi subspaţii $\mathbb{V}_i$ invariate de T, cu $dim(\mathbb{V}_i) = i$.

Problema 5.8.12. Fie $T \in \mathcal{L}(\mathbb{V})$ un endomorfism şi fie $\mathbb{U}$ şi $\mathbb{W}$ două subspaţii invariate de T.

(1) Demonstraţi că $\mathbb{U} + \mathbb{W}$ şi $\mathbb{U} \cap \mathbb{W}$ sunt de asemenea subspaţii invariate de T.
(2) Dacă T este automorfism, atunci $\mathbb{U}$ şi $\mathbb{W}$ rămîn subspaţii invariante şi pentru T^{-1}.

Problema 5.8.13. Calculaţi forma canonică Jordan a următoarelor matrice cu elemente complexe:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 6 & -3 & 2 \\ 8 & -6 & 5 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 0 & -4 & -2 \\ 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ D = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Problema 5.8.14. Fie $\mathbb{V} = \mathbb{C}[X]_{\leq 3}$ $\mathbb{C}$- spaţiul vectorial al polinoamelor de grad cel mult 3 şi fie $\mathbf{d}$ endomorfismul de derivare (adică endomorfismul care duce un polinom F în polinomul derivat F'). Determinaţi matricea Jordan şi baza corespunzătoare pentru endomorfismele: a) $\mathbf{d}$; b) $\mathbf{d}^2$.

Problema 5.8.15. Fiecare dintre matricele următoare este matricea asociată unui endomorfism de $\mathbb{C}$- spaţii vectoriale, în baza canonică. Determinaţi forma canonică Jordan a acestor endomorfisme şi câte o bază în care matricea asociată este matricea Jordan.

$$A = \begin{pmatrix} 11 & 4 \\ -4 & 3 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 5 & -9 & -4 \\ 6 & -11 & -5 \\ -7 & 13 & 6 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Problema 5.8.16. Polinomului monic $P(X) = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \ldots + a_1X + a_0 \in \mathbb{K}[X]$ îi asociem matricea companion de ordinul n

$$C_P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 & -a_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix}.$$

(1) Scrieţi matricea companion a polinomului $P(X) = X^3 + 2X^2 - 5X + 1$.
(2) Demonstraţi că polinomul caracteristic al matricei companion C_P este chiar polinomul P.
(3) Enunţaţi, verificaţi pe cazuri particulare, apoi demonstraţi un rezultat despre polinomul minimal al matricei C_P.
(4) Determinaţi forma canonică Jordan a matricei C_P, în cazul $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.
(5) Demonstraţi că orice bloc Jordan este asemenea cu matricea companion asociată polinomului său caracteristic.

Problema 5.8.17. Fie $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ o matrice fixată. Notăm $C(A) = \{X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) : AX = XA\}$, mulţimea matricelor care comută cu A.

(1) Demonstraţi că $C(A)$ este subspaţiu vectorial în $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
(2) Justificaţi inegalitatea: $dim_{\mathbb{C}}(C(A)) \geq n$.
(3) Determinaţi $dim_{\mathbb{C}}(C(B))$ în cazul în care

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & 3 \\ -2 & -6 & 0 & 13 \\ 0 & -3 & 1 & 3 \\ -1 & -4 & 0 & 8 \end{pmatrix}.$$

(4) Demonstraţi că

$$C(A) = \{F(A) : \ F \in \mathbb{C}[X]\} \Longleftrightarrow P_A(X) = \mu_A(X).$$

Problema 5.8.18. (1) Demonstraţi că o matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ are acelaşi polinom caracteristic şi acelaşi polinom minimal ca şi matricea transpusă A^T.
(2) În cazul $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, este oare adevărat că A şi A^T au aceeaşi formă Jordan? Verificaţi pe un exemplu, apoi demonstraţi!

Problema 5.8.19. Fie $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ o matrice de ordinul n. Notăm cu $\tilde{A}$ matricea obţinută din A prin aplicarea următoarei transformări: alegem la întâmplare doi indici i, j şi schimbăm între ele liniile i şi j, apoi coloanele i şi j din matricea A. Demonstraţi că matricele A şi $\tilde{A}$ au aceeaşi formă canonică Jordan.

Problema 5.8.20. Demonstraţi că, dacă polinomul minimal al matricei $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ este $\mu_A(X) = \prod_{i=1}^{t} (X - \lambda_i)^{s_i}$, atunci polinomul minimal al matricei de ordin $2n$

$$B = \begin{pmatrix} A & I_n \\ 0_n & A \end{pmatrix}$$

este $\mu_B(X) = \prod_{i=1}^{t} (X - \lambda_i)^{s_i+1}$.

Problema 5.8.21. Fie

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -5 & 3 \\ 0 & 0 & -3 & 1 \\ -5 & 3 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_4(\mathbb{C}).$$

(1) Demonstraţi că polinomul caracteristic al matricei A este $P_A(X) = (X^2 - 4)^2$.
(2) Calculaţi multiplicitatea algebrică şi multiplicitatea geometrică a fiecărei valori proprii a lui A.
(3) Dacă $F = (X - 2)^2$ şi $G = (X + 2)^2$, explicitaţi subspaţiile $\mathbb{C}_F$ şi $\mathbb{C}_G$ (Notaţiile sunt cele din Secţiunea 5.3.2.)
(4) Folosiţi Corolarul 5.2.27 pentru a determina polinomul minimal al matricei A.
(5) Este matricea A diagonalizabilă?
(6) Se schimbă ceva în punctele anterioare ale problemei, dacă, în loc să considerăm că A este o matrice de numere complexe, o considerăm matrice de numere raţionale?

Problema 5.8.22. Fie $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ o matrice dată.

(1) Dacă A este diagonalizabilă, atunci orice putere a lui A este diagonalizabilă.
(2) Reciproc, dacă A este nesingulară şi o putere a sa este diagonalizabilă, atunci şi A este diagonalizabilă.

Problema 5.8.23. Fie $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ o matrice simetrică, adică o matrice pentru care

$$A^T = A.$$

(1) Demonstraţi că toate valorile proprii ale lui A sunt reale.
(2) Este oare adevărat că, dacă matricea B este asemenea cu A, atunci B este simetrică?

Problema 5.8.24. Fie $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ o matrice simetrică.

(1) Demonstraţi că A este diagonalizabilă.
(2) Arătaţi că există o matrice ortogonală U (adică o matrice cu proprietatea $U^{-1} = U^T$) pentru care $U^{-1}AU$ este o matrice diagonală.

Problema 5.8.25. Fie $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ o matrice nilpotentă, adică o matrice pentru care există un număr natural nenul p cu proprietatea că $A^p = \mathbf{0}_n$.

(1) Demonstraţi că polinomul caracteristic al matricei A este $P_A(X) = X^n$.
(2) Fie k ordinul maxim al blocurilor Jordan din forma canonică Jordan a matricei A. Demonstraţi că $A^{k-1} \neq \mathbf{0}_n$.
(3) În ce caz este diagonalizabilă o matrice nilpotentă?

Problema 5.8.26. Dacă $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ este o matrice de ordinul n, să se arate că

$$A \text{ este nilpotentă} \iff Tr(A^p) = 0, \text{ pentru orice } p \geq 1.$$

Problema 5.8.27. Fie $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Dacă $A + \lambda B$ este matrice nilpotentă, pentru $n+1$ valori distincte ale lui λ, să se arata că matricele A şi B sunt nilpotente.

Problema 5.8.28. Matricea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ se numeşte idempotentă dacă $A^2 = A$.
(1) Demonstraţi că o matrice idempotentă este diagonalizabilă.
(2) Dacă A este idempotentă, atunci $rang(A) = Tr(A)$.
(3) A este idempotentă dacă şi numai dacă $I_n - A$ este idempotentă.
(4) Fie A şi B două matrice idempotente, de acelaşi ordin. Să se arate că

$$A + B \text{ este idempotentă} \iff AB = BA = \mathbf{0}_n.$$

Problema 5.8.29. Fie $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ o matrice diferită de λI_n. Demonstraţi că A este asemenea cu o matrice a cărei diagonală este de forma

$$diag\{0, 0, \ldots, 0, Tr(A)\}.$$

Problema 5.8.30. Fie $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ o matrice care are exact m valori proprii distincte. Pentru fiecare $i, j \geq 1$ definim numerele

$$b_{ij} = Tr(A^{i+j-2}).$$

Demonstraţi că $det(b_{ij})_{i,j\in\overline{1,m}} \neq 0$, iar $det(b_{ij})_{i,j\in\overline{1,m+1}} = 0$.

CAPITOLUL 6

Algebră multiliniară şi produs tensorial. Aplicaţii biliniare, forme pătratice

6.1. Forme biliniare

Pe parcursul primelor trei secţiuni din acest capitol, $\mathbb{V}$ va desemna un spaţiu vectorial real.

Definiţia 6.1.1. *O aplicaţie $F : \mathbb{V} \times \mathbb{V} \to \mathbb{R}$ care satisface proprietăţile:*

1. $F(\alpha x + \beta y, z) = \alpha F(x, z) + \beta F(y, z)$, *pentru orice $x, y, z \in \mathbb{V}$ şi $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$;*
2. $F(x, \alpha y + \beta z) = \alpha F(x, y) + \beta F(x, z)$, *pentru orice $x, y, z \in \mathbb{V}$ şi $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$,*

se numeşte **formă biliniară**.

Definiţia 6.1.2. *O formă biliniară $F : \mathbb{V} \times \mathbb{V} \to \mathbb{R}$ se numeşte* **simetrică** *dacă*

$$F(x, y) = F(y, x),$$

pentru orice $x, y \in \mathbb{V}$.

Definiţia 6.1.3. *O formă biliniară simetrică F se numeşte* **pozitiv** (**negativ**) **semidefinită** *dacă $F(x, x) \geq 0$ (resp. $F(x, x) \leq 0$), pentru orice $x \in \mathbb{V}$. Dacă în plus $F(x, x) = 0$ numai pentru $x = 0_{\mathbb{V}}$, F se numeşte* **pozitiv** (*resp.* **negativ**) **definită** .

Exemplele 6.1.4. 1. Fie $\mathbb{V}$ un spaţiu euclidian cu un produs scalar $\langle x, y\rangle : \mathbb{V} \times \mathbb{V} \to \mathbb{R}$. Atunci aplicaţia $F : \mathbb{V} \times \mathbb{V} \to \mathbb{R}$, $F(x, y) = \langle x, y\rangle$ este o formă biliniară simetrică, pozitiv definită, acest lucru probându-se imediat, având în vedere axiomele din definiţia produsului scalar.

2. Dacă L_1, $L_2 : \mathbb{V} \to \mathbb{R}$ sunt două transformări liniare, atunci $F : \mathbb{V} \times \mathbb{V} \to \mathbb{R}$, $F(x, y) = L_1(x)L_2(y)$ este o formă biliniară. Evident, F este simetrică dacă şi numai dacă $L_1 = L_2$.

3. Considerăm $\mathbb{V} = \mathbb{K}^n$ şi $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Atunci aplicaţia $F : \mathbb{V} \times \mathbb{V} \to \mathbb{K}$, $F(v, w) = v^T Aw$ este o formă biliniară.

4. Fie D o submulţime deschisă a lui $\mathbb{R}^n$ şi $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ o funcţie de clasă $\mathcal{C}^2$ pe D. Considerăm $a = (a_1, a_2, ..., a_n) \in D$, arbitrar. Atunci aplicaţia

$$F : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \quad F(h, k) = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} h_i k_j,$$

unde $h = (h_1, h_2, ..., h_n)$ şi $k = (k_1, k_2, ..., k_n)$, este o formă biliniară simetrică, numită diferenţiala a doua a funcţiei f.

Fie $\mathbb{V}$ un spaţiu vectorial real de dimensiune n, $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, ..., e_n\}$ o bază a lui $\mathbb{V}$ şi $F : \mathbb{V} \times \mathbb{V} \to \mathbb{R}$ o formă biliniară. Dacă $x = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i e_i$ şi $y = \sum\limits_{j=1}^{n} y_j e_j$ sunt doi vectori arbitrari din $\mathbb{V}$, atunci

$$F(x, y) = F\left(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i, \sum_{j=1}^{n} y_j e_j\right) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i y_j F(e_i, e_j). \tag{90}$$

Pentru $i, j = \overline{1, n}$, notăm $a_{ij} = F(e_i, e_j)$. Astfel, relaţia (1) conduce la

$$F(x, y) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i y_j, \tag{91}$$

ceea ce ne permite să conchidem că forma biliniară F este perfect determinată de matricea $A = (a_{ij})_{i,j=\overline{1,n}}$.

Definiţia 6.1.5. *Matricea* $A = (a_{ij})_{i,j=\overline{1,n}} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ *construită mai sus se numeşte* **matricea asociată formei biliniare F în baza $\mathcal{B}$** .

Propoziţia 6.1.6. *Fie $\mathbb{V}$ un spaţiu vectorial real finit dimensional şi $F : \mathbb{V} \times \mathbb{V} \to \mathbb{R}$ o formă biliniară. Atunci F este simetrică dacă şi numai dacă matricea asociată lui F într-o bază oarecare este simetrică.*

Demonstraţie. Considerăm $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, ..., e_n\}$ o bază arbitrară a lui $\mathbb{V}$ şi fie $A = (a_{ij})_{i,j=\overline{1,n}}$ matricea asociată lui F în baza $\mathcal{B}$.

Presupunem mai întâi că F este formă biliniară simetrică. Atunci

$$a_{ij} = F(e_i, e_j) = F(e_j, e_i) = a_{ji},$$

pentru orice $i, j = \overline{1, n}$, deci A este matrice simetrică.

Reciproc, dacă A este matrice simetrică, atunci $a_{ij} = a_{ji}$, pentru orice $i, j = \overline{1, n}$. Fie $x, y \in \mathbb{V}$ doi vectori arbitrari având scrierile în baza $\mathcal{B}$: $x = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i e_i$ şi $y = \sum\limits_{j=1}^{n} y_j e_j$. Rezultă că

$$F(x, y) = F(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i, \sum_{j=1}^{n} y_j e_j) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i y_j F(e_i, e_j) =$$

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i y_j a_{ij} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i y_j a_{ji} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i y_j F(e_j, e_i) =$$

$$F(\sum_{j=1}^{n} y_j e_j, \sum_{i=1}^{n} x_i e_i) = F(y, x)$$

şi astfel putem conchide că forma biliniară F este simetrică. □

Aşa cum s-a văzut anterior, matricea asociată unei forme biliniare $F : \mathbb{V} \times \mathbb{V} \to \mathbb{R}$ depinde de baza spaţiului vectorial $\mathbb{V}$. În continuare, vom studia cum se modifică această matrice o dată cu schimbarea bazei spaţiului vectorial.

Teorema 6.1.7. *Fie* $\mathbb{V}$ *un spaţiu vectorial de dimensiune* n*,* $\mathcal{B}_1 = \{e_1, e_2, ..., e_n\}$ *şi* $\mathcal{B}_2 = \{f_1, f_2, ..., f_n\}$ *două baze ale lui* $\mathbb{V}$ *şi* $F : \mathbb{V} \times \mathbb{V} \to \mathbb{R}$ *o formă biliniară. Dacă* $A = (a_{ij})_{i,j=\overline{1,n}}$ *şi* $B = (b_{ij})_{i,j=\overline{1,n}}$ *sunt matricele ataşate lui* F *în bazele* $\mathcal{B}_1$ *şi respectiv* $\mathcal{B}_2$*, atunci*

$$B = C^T AC, \tag{92}$$

unde $C = (c_{ij})_{i,j=\overline{1,n}}$ *este matricea de trecere de la baza* B_1 *la baza* B_2*.*

Demonstraţie. Din definiţia matricei de trecere de la o bază la alta pentru un spaţiu vectorial avem

$$f_i = \sum_{j=1}^{n} c_{ji} e_j.$$

Folosind Definiţia 6.1.5, obţinem:

$$b_{ij} = F(f_i, f_j) = F(\sum_{k=1}^{n} c_{ki} e_k, \sum_{l=1}^{n} c_{lj} e_l) = \sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n} c_{ki} c_{lj} F(e_k, e_l) =$$

$$\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n} c_{ki} c_{lj} a_{kl} = \sum_{l=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{n} c_{ki} a_{kl}\right) c_{lj},$$

pentru orice $i, j = \overline{1, n}$, de unde rezultă că $B = C^T AC$. □

Exemplul 6.1.8. Considerăm aplicaţia

$$F : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, F(x, y) = x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + 2x_2y_2 + 3x_3y_3,$$

unde $x = (x_1, x_2, x_3)$ şi $y = (y_1, y_2, y_3)$. Vom demonstra că F este o formă biliniară, iar apoi vom studia simetria şi pozitiv definirea lui F. În final, determinăm matricea asociată acestei forme biliniare în baza canonică a spaţiului vectorial $\mathbb{R}^3$.

Fie $x = (x_1, x_2, x_3)$, $y = (y_1, y_2, y_3)$, $z = (z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{R}^3$ şi α, $\beta \in \mathbb{R}$, arbitrari. Atunci:

$$F(\alpha x + \beta y, z) = (\alpha x_1 + \beta y_1)z_1 + (\alpha x_1 + \beta y_1)z_2 + (\alpha x_2 + \beta y_2)z_1+$$

$$2(\alpha x_2 + \beta y_2)z_2 + 3(\alpha x_3 + \beta y_3)z_3 = \alpha x_1z_1 + \beta y_1z_1 + \alpha x_1z_2 + \beta y_1z_2 + \alpha x_2z_1+$$

$$\beta y_2z_1 + 2\alpha x_2z_2 + 2\beta y_2z_2 + 3\alpha x_3z_3 + 3\beta y_3z_3 = \alpha(x_1z_1 + x_1z_2 + x_2z_1+$$

$$2x_2z_2 + 3x_3z_3) + \beta(y_1z_1 + y_1z_2 + y_2z_1 + 2y_2z_2 + 3y_3z_3) = \alpha F(x, z) + \beta F(y, z).$$

Similar aratăm că $F(x, \alpha y + \beta z) = \alpha F(x, y) + \beta F(x, z)$. Astfel, F este o formă biliniară.

$F(x, y) = x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + 2x_2y_2 + 3x_3y_3 = y_1x_1 + y_1x_2 + y_2x_1 + 2y_2x_2 + 3y_3x_3 = F(y, x)$, pentru orice $x, y \in \mathbb{R}^3$, deci F este simetrică.

Pe de altă parte,

$$F(x, x) = x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_2^2 + 3x_3^2 = (x_1 + x_2)^2 + x_2^2 + 3x_3^2 \geq 0$$

cu egalitate dacă şi numai dacă $x_1 + x_2 = x_2 = x_3 = 0$, adică $x_1 = x_2 = x_3 = 0$. Aşadar, F este şi pozitiv definită.

Baza canonică a lui $\mathbb{R}^3$ este

$$\mathcal{B} = \{e_1 = (1; 0; 0)\,,\ e_2 = (0; 1; 0)\,,\ e_3 = (0; 0; 1)\}.$$

Deoarece

$$F(e_1, e_1) = 1\,,\; F(e_1, e_2) = F(e_2, e_1) = 1\,,\; F(e_1, e_3) = F(e_3, e_1) = 0,$$
$$F(e_2, e_2) = 2\,,\; F(e_2, e_3) = F(e_3, e_2) = 0\,,\; F(e_3, e_3) = 3,$$

matricea asociată formei pătratice F în baza $\mathcal{B}$ este:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

6.2. Forme pătratice. Reducerea la forma canonică

Definiţia 6.2.1. *Fie F o formă biliniară simetrică. Aplicaţia*

(93) $$Q : \mathbb{V} \to \mathbb{R},\; Q(x) = F(x, x)$$

se numeşte se numeşte **formă pătratică** *asociată formei biliniare simetrice F. În acest context, vom spune că F este* **polara formei pătratice** *Q.*

Aşa cum reiese din această definiţie, orice formă biliniară simetrică induce o unică formă pătratică. Vom arăta că este valabilă şi reciproca, adică oricărei forme pătratice i se asociază o unică formă biliniară simetrică. Într-adevăr,

$$Q(x + y) = F(x + y, x + y) = F(x, x) + 2F(x, y) + F(y, y) =$$
$$Q(x) + 2F(x, y) + Q(y),$$

de unde rezultă că

(94) $$F(x, y) = \frac{1}{2}[Q(x + y) - Q(x) - Q(y)],$$

pentru orice $x, y \in \mathbb{V}$. S-a obţinut astfel următorul rezultat:

Propoziţia 6.2.2. *Între mulţimea formelor pătratice definite pe spaţiul vectorial $\mathbb{V}$ şi mulţimea formelor biliniare simetrice definite pe $\mathbb{V} \times \mathbb{V}$ există o corespondenţă bijectivă.*

Exemplele 6.2.3. 1. Fie $\mathbb{V}$ un spaţiu euclidian cu un produs scalar $\langle x, y\rangle : \mathbb{V} \times \mathbb{V} \to \mathbb{R}$. Aşa cum am văzut în secţiunea precedentă, aplicaţia $F : \mathbb{V} \times \mathbb{V} \to \mathbb{R}$, $F(x, y) = \langle x, y\rangle$ este o formă biliniară simetrică. Aceasta induce forma pătratică $Q : \mathbb{V} \to \mathbb{R}$, $Q(x) = F(x, x) = \langle x, x\rangle = \|x\|^2$.

2. Aplicaţia

$$Q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \quad Q(x) = x_1^2 + 7x_2^2 + 3x_3^2 - x_1x_2 + 5x_2x_3,$$

unde $x = (x_1, x_2, x_3)$, reprezintă o formă pătratică. Polara acestei forme pătratice este

$$F(x, y) = \frac{1}{2}[Q(x + y) - Q(x) - Q(y)] = \frac{1}{2}[(x_1 + y_1)^2 + 7(x_2 + y_2)^2+$$
$$3(x_3 + y_3)^2 - (x_1 + y_1)(x_2 + y_2) + 5(x_2 + y_2)(x_3 + y_3) - x_1^2 - 7x_2^2 - 3x_3^2 + x_1x_2-$$
$$5x_2x_3 - y_1^2 - 7y_2^2 - 3y_3^2 + y_1y_2 - 5y_2y_3] = x_1y_1 + 7x_2y_2 + 3x_3y_3 - \frac{1}{2}x_1y_2-$$
$$\frac{1}{2}x_2y_1 + \frac{5}{2}x_2y_3 + \frac{5}{2}x_3y_2.$$

În continuarea acestei secţiuni vom lucra sub ipoteza că $\mathbb{V}$ este spaţiu vectorial real de dimensiune n.

Definiţia 6.2.4. *Fie $\mathcal{B}$ o bază a spaţiului vectorial $\mathbb{V}$ şi $Q : \mathbb{V} \longrightarrow \mathbb{R}$ o formă pătratică. Se numeşte* **matrice asociată formei pătratice** *Q în baza $\mathcal{B}$ matricea asociată polarei sale F în aceeaşi bază.*

Observaţia 6.2.5. Deoarece polara unei forme pătratice este o formă biliniară simetrică, din definiţia precedentă şi din Propoziţia 6.1.6 rezultă că matricea asociată unei forme pătratice este întotdeauna simetrică.

Fie x un vector arbitrar al spaţiului vectorial $\mathbb{V}$, având scrierea în baza $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, ..., e_n\}$: $x = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i e_i$. Atunci

$$Q(x) = F(x, x) = F(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i, \sum_{j=1}^{n} x_j e_j) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i x_j F(e_i, e_j) =$$

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j.$$

Aşadar, prin fixarea unei baze $\mathcal{B}$ a spaţiului vectorial $\mathbb{V}$, pentru forma pătratică Q obţinem o scriere de forma

$$Q(x) = \sum_{1 \leq i, j \leq n} a_{ij} x_i x_j \tag{95}$$

unde a_{ij} reprezintă componentele matricei A ataşate formei pătratice Q în baza $\mathcal{B}$ (şi deci, conform observaţiei anterioare, avem $a_{ij} = a_{ji}$, pentru orice $i, j = \overline{1, n}$). Evident, o dată cu schimbarea bazei spaţiului vectorial se va schimba şi expresia (95) a formei pătratice.

Definiţia 6.2.6. *Spunem că forma pătratică $Q : \mathbb{V} \longrightarrow \mathbb{R}$ este* **redusă la forma canonică** *dacă determinăm pentru Q o scriere de forma*

$$Q(x) = \sum_{i=1}^{n} b_i x_i^2, \tag{96}$$

într-o anumită bază a lui $\mathbb{V}$.

Având în vedere că în scrierea (96) a unei forme pătratice apar două tipuri de termeni:

- termeni la pătrat, pentru $i = j$;
- termeni micşti, pentru $i \neq j$,

a reduce o formă pătratică la forma canonică înseamnă de fapt a găsi o scriere în care să apară numai termeni cu pătrate.

În continuare vom prezenta trei metode de reducere a formelor pătratice la forma canonică.

Metoda lui Gauss.

Teorema 6.2.7. *(Gauss) Pentru orice formă pătratică* $Q : \mathbb{V} \longrightarrow \mathbb{R}$ *există o bază* $\mathcal{B}$ *a lui* $\mathbb{V}$ *în care forma pătratică este redusă la forma canonică .*

Demonstraţie. Fie $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, ..., e_n\}$ bază a lui $\mathbb{V}$ faţă de care forma pătratică Q are expresia $Q(x) = \sum\limits_{1 \leq i, j \leq n} a_{ij} x_i x_j$.

Distingem două cazuri:

(I) Există cel puţin un $i \in \{1, 2, ..., n\}$ astfel încât $a_{ii} \neq 0$ (în expresia formei pătratice apare cel puţin un termen la pătrat). Printr-o eventuală renumerotare a vectorilor bazei $\mathcal{B}$ putem presupune că $a_{11} \neq 0$. Atunci, în expresia formei biliniare Q, vom grupa termenii astfel:

$$Q(x) = a_{11}x_1^2 + 2\sum_{j=2}^{n} a_{1j}x_1x_j + \sum_{2 \leq i, j \leq n} a_{ij}x_ix_j = \frac{1}{a_{11}}(a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ...+$$

$$a_{1n}x_n)^2 - \frac{1}{a_{11}} \sum_{2 \leq i, j \leq n} a_{1i}a_{1j}x_ix_j + \sum_{2 \leq i, j \leq n} a_{ij}x_ix_j = \frac{1}{a_{11}}(a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ...+$$

$$a_{1n}x_n)^2 + \sum_{2 \leq i, j \leq n} a'_{ij}x_ix_j,$$

unde $a'_{ij} = a_{ij} - \frac{a_{1i}a_{1j}}{a_{11}}$, pentru orice $2 \leq i, j \leq n$.

Notând

(97)
$$\begin{cases} x'_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n \\ x'_2 &= x_2 \\ & ..... \\ x'_n &= x_n \end{cases}$$

obţinem

(98)
$$Q(x) = \frac{1}{a_{11}}\left(x'_1\right)^2 + \sum_{2 \leq i, j \leq n} a'_{ij}x'_ix'_j.$$

$x'_1, x'_2, ..., x'_n$ reprezintă componentele vectorului x în baza $\mathcal{B}' = \{e'_1, e'_2, ..., e'_n\}$, faţă de care forma pătratică Q are expresia (98). De remarcat că suma $\sum\limits_{2 \leq i, j \leq n} a'_{ij}x'_ix'_j$ care apare în (98) este o formă pătratică în $n-1$ variabile. Astfel, după cel mult $n-1$ paşi (aplicând eventual şi procedeul descris în cazul (II)), vom obþine o bază $\bar{\mathcal{B}} = \{\bar{e}_1, \bar{e}_2, ..., \bar{e}_n\}$ a lui $\mathbb{V}$ faţă de care Q are forma canonică:

$$Q(x) = \alpha_1\bar{x}_1^2 + \alpha_2\bar{x}_2^2 + ... + \alpha_n\bar{x}_n^2.$$

(II) Toţi coeficienţii a_{ii} sunt nuli (în expresia formei pătratice apar numai termeni micşti). Lucrând sub presupunerea că forma pătratică Q este nenulă, există $i, j \in \{1, 2, ..., n\}$, $i \neq j$, astfel încât $a_{ij} \neq 0$. Printr-o eventuală renumerotare a vectorilor din baza $\mathcal{B}$ se poate presupune că $a_{12} \neq 0$. Cu ajutorul schimbărilor de coordonate

(99)
$$\begin{cases} x_1 &= x'_1 + x'_2 \\ x_1 &= x'_1 - x'_2 \\ x_3 &= x'_3 \\ & .... \\ x_n &= x'_n \end{cases}$$

vom obţine

$$Q(x) = 2a_{12}\left[\left(x_1'\right)^2 - \left(x_2'\right)^2\right] + ... \tag{100}$$

Deoarece în această expresie avem cel puţin un termen la pătrat, putem aplica în continuare procedeul descris la cazul (I). □

Observaţia 6.2.8. Procedeul descris în demonstraţia anterioară reprezintă **metoda lui Gauss de reducere a formelor pătratice la forma canonică** .

Exemplul 6.2.9. Considerăm forma pătratică $Q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, care într-o anumită bază $\mathcal{B}$ a spaţiului $\mathbb{R}^3$ are expresia $Q(x) = x_1^2 + 4x_2^2 + x_3^2 - 2x_1x_2 + 2x_1x_3$. Cu ajutorul metodei lui Gauss, reducem această formă pătratică la forma canonică.

Deoarece în expresia formei pătratice apar termeni la pătrat, ne situăm în cazul (I) al metodei lui Gauss. Urmând procedeul descris în această situaţie, vom avea:

$$\begin{aligned} Q(x) &= (x_1^2 - 2x_1x_2 + 2x_1x_3) + 4x_2^2 + x_3^2 = \\ &= (x_1 - x_2 + x_3)^2 - x_2^2 - x_3^2 + 2x_2x_3 + 4x_2^2 + x_3^2 = \\ &= (x_1 - x_2 + x_3)^2 + 3x_2^2 + 2x_2x_3 = \\ &= (x_1 - x_2 + x_3)^2 + \frac{1}{3}(9x_2^2 + 6x_2x_3) = \\ &= (x_1 - x_2 + x_3)^2 + \frac{1}{3}(3x_2 + x_3)^2 - \frac{1}{3}x_3^2 \end{aligned}$$

Cu notaţiile:

$$\begin{cases} \bar{x}_1 = x_1 - x_2 + x_3 \\ \bar{x}_2 = 3x_2 + x_3 \\ \bar{x}_3 = x_3 \end{cases}$$

vom obţine forma canonică a formei pătratice:

$$Q(x) = \bar{x}_1^2 + \frac{1}{3}\bar{x}_2^2 - \frac{1}{3}\bar{x}_3^2.$$

Pentru a determina baza $\bar{\mathcal{B}} = \{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$ în raport cu care s-a obţinut această formă canonică, se exprimă mai întâi componentele iniţiale x_1, x_2, x_3 ale vectorului x în funcţie de componentele $\bar{x}_1$, $\bar{x}_2$, $\bar{x}_3$ din baza $\bar{\mathcal{B}}$:

$$\begin{cases} x_1 = \bar{x}_1 + \frac{1}{3}\bar{x}_2 - \frac{4}{3}\bar{x}_3 \\ x_2 = \frac{1}{3}\bar{x}_2 - \frac{1}{3}\bar{x}_3 \\ x_3 = \bar{x}_3 \end{cases}$$

Din Teorema 3.3.14, obţinem că matricea de trecere de la baza iniţială $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, e_3\}$ la baza $\bar{\mathcal{B}}$ este

$$C = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{3} & -\frac{4}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Rezultă că vectorii bazei $\bar{\mathcal{B}}$ vor fi:

$$\begin{cases} \bar{e}_1 = e_1 \\ \bar{e}_2 = \frac{1}{3}e_1 + \frac{1}{3}e_2 \\ \bar{e}_3 = -\frac{4}{3}e_1 - \frac{1}{3}e_2 + e_3 \end{cases}$$

Exemplul 6.2.10. Reducem la forma canonică prin metoda lui Gauss forma pătratică

$$Q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \quad Q(x) = x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1,$$

specificând şi transformarea de coordonate care se efectuează.

Deoarece în expresia formei pătratice apar numai termeni micşti, ne situăm în cazul (II) al metodei lui Gauss. În consecinţă, facem schimbările de coordonate:

(101)
$$\begin{cases} x_1 &= x_1' + x_2' \\ x_1 &= x_1' - x_2' \\ x_3 &= x_3' \end{cases}$$

Astfel, forma pătratică devine:

$$\begin{aligned} Q(x) &= \left(x_1'\right)^2 - \left(x_2'\right)^2 + \left(x_1' - x_2'\right)x_3' + x_3'\left(x_1' + x_2'\right) = \\ &= \left(x_1'\right)^2 - \left(x_2'\right)^2 + 2x_1'x_3' = \left[\left(x_1'\right)^2 + 2x_1'x_3'\right] - \left(x_2'\right)^2 = \\ &= \left(x_1' + x_3'\right)^2 - \left(x_2'\right)^2 - \left(x_3'\right)^2 \end{aligned}$$

Efectuăm o nouă schimbare de coordonate

(102)
$$\begin{cases} \bar{x}_1 = x_1' + x_3' \\ \bar{x}_2 = x_2' \\ \bar{x}_3 = x_3' \end{cases}$$

în urma căreia va rezulta forma canonică

$$Q(x) = \bar{x}_1^2 - \bar{x}_2^2 - \bar{x}_3^2.$$

Din sistemele de relaţii (101) şi (103) obţinem relaţiile de transformare ale coordonatelor:

(103)
$$\begin{cases} \bar{x}_1 = \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2 + x_3 \\ \bar{x}_2 = \frac{1}{2}x_1 - \frac{1}{2}x_2 \\ \bar{x}_3 = x_3 \end{cases}$$

Metoda lui Jacobi.

Teorema 6.2.11. *(Jacobi) Fie* $\mathbb{V}$ *un spaţiu vectorial,* $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, ..., e_n\}$ *o bază a lui* $\mathbb{V}$ *şi* $Q : \mathbb{V} \longrightarrow \mathbb{R}$ *o formă pătratică având expresia* $Q(x) = \sum\limits_{1 \le i,\, j \le n} a_{ij}x_ix_j$ *în baza* B*. Dacă matricea* $A = (a_{ij})_{i,j=\overline{1,n}} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ *asociată formei pătratice* Q *în baza* $\mathcal{B}$ *are toţi minorii principali*

$$\Delta_1 = a_{11}, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix}, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}, ..., \Delta_n = det(A)$$

nenuli, atunci există o bază $\bar{\mathcal{B}} = \{\bar{e}_1, \bar{e}_2, ..., \bar{e}_n\}$ *a lui* $\mathbb{V}$ *faţă de care* Q *are forma canonică:*

(104)
$$Q(x) = \frac{1}{\Delta_1}\bar{x}_1^2 + \frac{\Delta_1}{\Delta_2}\bar{x}_2^2 + \frac{\Delta_2}{\Delta_3}\bar{x}_3^2 + ... + \frac{\Delta_{n-1}}{\Delta_n}\bar{x}_n^2.$$

Demonstraţie. Fie $F : \mathbb{V} \times \mathbb{V} \longrightarrow \mathbb{R}$ polara formei pătratice Q. Căutăm vectorii bazei $\bar{\mathcal{B}}$ de forma:

(105)
$$\begin{cases} \bar{e}_1 = c_{11}e_1 \\ \bar{e}_2 = c_{12}e_1 + c_{22}e_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \bar{e}_i = c_{1i}e_1 + c_{2i}e_2 + ... + c_{ii}e_i \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \bar{e}_n = c_{1n}e_1 + c_{2n}e_2 + ... + c_{nn}e_n \end{cases}$$

unde coeficienţii c_{ij} se determină din condiţiile

(106)
$$F(\bar{e}_i, e_j) = 0, \quad \text{pentru orice} \quad 1 \leq j < i \leq n$$

şi

(107)
$$F(\bar{e}_i, e_i) = 1, \quad \text{pentru} \quad i = \overline{1, n}.$$

(Aceste ultime relaţii sunt deduse din condiţia ca matricea asociată formei pătratice Q în baza să fie $diag(c_{11}, c_{22}, ..., c_{nn})$.)

Fixăm un $i \in \{1, 2, ..., n\}$ arbitrar. Deoarece

$$F(\bar{e}_i, e_j) = F\left(\sum_{k=1}^{i} c_{ki}e_k, e_j\right) = \sum_{k=1}^{i} c_{ki}F\left(e_k,\, e_j\right) = \sum_{k=1}^{i} c_{ki}a_{kj},$$

din relaţiile (106) şi (107) , ţinând cont că $a_{kj} = a_{jk}$, obţinem sistemul:

(108)
$$\begin{cases} a_{11}c_{1i} & + a_{12}c_{2i} & + ... + a_{1i}c_{ii} & = 0 \\ a_{12}c_{1i} & + a_{22}c_{2i} & + ... + a_{2i}c_{ii} & = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{1,i-1}c_{1i} & + a_{2,i-1}c_{2i} & + ... + a_{i-1,i}c_{ii} & = 0 \\ a_{1i}c_{1i} & + a_{2i}c_{2i} & + ... + a_{ii}c_{ii} & = 1 \end{cases}.$$

Se observă că determinantul acestui sistem este minorul principal Δ_i, care, conform ipotezei, este nenul. Astfel, din *regula lui Cramer*, sistemul este compatibil determinat şi în plus

$$c_{ii} = \frac{1}{\Delta_i}\begin{vmatrix} a_{11} & ... & a_{1,i-1} & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{1,i-1} & ... & a_{i-1,i-1} & 0 \\ a_{1i} & ... & a_{i-1,i} & 1 \end{vmatrix} = \frac{\Delta_{i-1}}{\Delta_i}.$$

Având în vedere că matricea

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & ... & c_{1n} \\ 0 & c_{22} & ... & c_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & c_{nn} \end{pmatrix}$$

are determinantul

$$det(C) = c_{11}c_{22}...c_{nn} = \frac{1}{\Delta_1}\frac{\Delta_1}{\Delta_2}...\frac{\Delta_{n-1}}{\Delta_n} = \frac{1}{\Delta_n} \neq 0$$

şi că $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, ..., e_n\}$ este o bază a lui $\mathbb{V}$, din sistemul de relaţii (105) rezultă că şi $\bar{\mathcal{B}} = \{\bar{e}_1, \bar{e}_2, ..., \bar{e}_n\}$ este o bază a lui $\mathbb{V}$. Deoarece

$$F(\bar{e}_i, \bar{e}_j) = \begin{cases} 0, & \text{pentru} \ \ i \neq j \\ c_{ii}, & \text{pentru} \ \ i = j \end{cases},$$

concluzia teoremei este acum clară. $\square$

Observaţia 6.2.12. Spre deosebire de metoda lui Gauss, care se poate aplica pentru orice formă pătratică, în cazul metodei Jacobi suntem condiţionaţi de faptul ca toţi minorii principali ai matricei ataşate formei pătratice în baza iniţială să fie nenului. Astfel, dacă măcar unul dintre aceşti minori este zero, atunci metoda lui Jacobi nu poate fi aplicată şi trebuie utilizată o altă metodă.

Exemplul 6.2.13. Utilizând metoda lui Jacobi, reducem la forma canonică următoarea forma pătratică:

$$Q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \quad Q(x) = 3x_1^2 + 3x_2^2 - 2x_1x_2 + 4x_1x_3 + 4x_2x_3,$$

unde $x = (x_1; x_2; x_3)$ este un vector arbitrar din $\mathbb{R}^3$.

Matricea asociată formei pătratice Q în baza canonică a lui $\mathbb{R}^3$ este:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ -1 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Minorii principali ai acestei matrice sunt:

$$\Delta_1 = 3 \neq 0, \Delta_2 = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 8 \neq 0, \Delta_3 = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 \\ -1 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{vmatrix} = -32 \neq 0,$$

deci putem aplica metoda lui Jacobi. Forma canonică a formei pătratice Q va fi:

$$Q(x) = \frac{1}{\Delta_1}\bar{x}_1^2 + \frac{\Delta_1}{\Delta_2}\bar{x}_2^2 + \frac{\Delta_2}{\Delta_3}\bar{x}_3^2 = \frac{1}{3}\bar{x}_1^2 + \frac{3}{8}\bar{x}_2^2 - \frac{1}{4}\bar{x}_3^2.$$

Exemplul 6.2.14. Considerăm forma pătratică:

$$Q : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}, \quad Q(x) = x_1^2 + x_3^2 + x_1x_2 + x_3x_4,$$

unde $x = (x_1; x_2; x_3; x_4)$ sunt coordonatele unui vector x în baza canonică a lui $\mathbb{R}^4$. Utilizând metoda lui Jacobi, reducem această formă pătratică la forma canonică şi vom specifica şi baza în care se obţine forma canonică.

Forma pătratică dată are în baza canonică a lui $\mathbb{R}$ matricea asociată:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}.$$

Obţinem minorii principali:

$$\Delta_1 = 1 \neq 0, \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{vmatrix} = -\frac{1}{4} \neq 0, \Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -\frac{1}{4} \neq 0,$$

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{16} \neq 0.$$

Din (104) rezultă că forma canonică obţinută în urma aplicării metodei lui Jacobi este:

$$Q(x) = \bar{x}_1^2 - 4\bar{x}_2^2 + \bar{x}_3^2 - 4\bar{x}_4^2.$$

Vectorii bazei $\bar{\mathcal{B}} = \{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3, \bar{e}_4\}$ în care se obţine forma canonică sunt daţi de sistemul (105), care în acest caz este:

$$\begin{cases} \bar{e}_1 = c_{11}e_1 \\ \bar{e}_2 = c_{12}e_1 + c_{22}e_2 \\ \bar{e}_3 = c_{13}e_1 + c_{23}e_2 + c_{33}e_3 \\ \bar{e}_4 = c_{14}e_1 + c_{24}e_2 + c_{34}e_3 + c_{44}e_4 \end{cases}.$$

unde $c_{11} = \frac{1}{\Delta_1}$, iar c_{jk}, $k = 2, 3, 4$, $j = 1, ..., k$ sunt soluţii ale sistemelor (108) pentru $i = 2, 3, 4$. Rezultă că $\bar{e}_1 = e_1 = (1, 0, 0, 0)$, iar pentru $i = 2$ avem

$$\begin{cases} c_{12} + \frac{1}{2}c_{22} = 0 \\ \frac{1}{2}c_{12} \qquad\quad = 1 \end{cases},$$

deci $c_{12} = 2$, $c_{22} = -4$ şi $\bar{e}_2 = 2e_1 - 4e_2 = (2, -4, 0, 0)$. Pentru $i = 3$ avem

$$\begin{cases} c_{13} + \frac{1}{2}c_{23} \qquad = 0 \\ \frac{1}{2}c_{13} \qquad\qquad\; = 0 \\ \qquad\qquad\quad c_{33} = 1 \end{cases},$$

deci $c_{13} = 0$, $c_{23} = 0$, $c_{33} = 1$ şi $\bar{e}_3 = e_3 = (0, 0, 1, 0)$. În final, pentru $i = 4$ avem

$$\begin{cases} c_{14} + \frac{1}{2}c_{24} \qquad\qquad\quad = 0 \\ \frac{1}{2}c_{14} \qquad\qquad\qquad\quad\;\; = 0 \\ \qquad\qquad c_{34} + \frac{1}{2}c_{44} = 0 \\ \qquad\qquad \frac{1}{2}c_{34} \qquad\;\; = 1 \end{cases},$$

de unde obţinem $c_{14} = 0$, $c_{24} = 0$, $c_{34} = 2$, $c_{44} = -4$ şi $\bar{e}_4 = 2e_3 - 4e_4 = (0, 0, 2, -2)$.

Metoda transformărilor ortogonale.

Teorema 6.2.15. *Fie $\mathbb{V}$ un spaţiu euclidian de dimensiune n şi o formă pătratică. Atunci există o bază ortonormată a lui $\mathbb{V}$ în raport cu care forma pătratică Q este redusă la forma canonică.*

Demonstraţie. În concordanţă cu Teorema 3.4.21, există o bază ortonormată $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, ..., e_n\}$ a lui $\mathbb{V}$. Fie $A = (a_{ij})_{i,j=\overline{1,n}}$ matricea asociată formei pătratice Q în baza $\mathcal{B}$. Deoarece A este matrice simetrică, din Problema 5.8.24 rezultă existenţa unei matrice ortogonale $C = (c_{ij})_{i,j=\overline{1,n}} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ cu proprietatea că

(109) $$A = CDC^T,$$

unde $D = diag(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n)$ este forma diagonală a matricei A.

Construim baza $\bar{\mathcal{B}} = \{\bar{e}_1, \bar{e}_2, ..., \bar{e}_n\}$ a lui $\mathbb{V}$ astfel încât matricea de trecere de la baza $\mathcal{B}$ la $\bar{\mathcal{B}}$ să fie chiar C:

$$\left\{\begin{array}{l} \bar{e}_1 = c_{11}e_1 + c_{21}e_2 + ... + c_{n1}e_n \\ \bar{e}_2 = c_{12}e_1 + c_{22}e_2 + ... + c_{n2}e_n \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \bar{e}_n = c_{1n}e_1 + c_{2n}e_2 + ... + c_{nn}e_n \end{array}\right. \tag{110}$$

Ţinând cont că $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, ..., e_n\}$ este o bază ortonormată, iar C este o matrice ortogonală vom obţine relaţiile:

$$\langle \bar{e}_i, \bar{e}_i \rangle = \left\langle \sum_{k=1}^{n} c_{ki}e_k, \sum_{j=1}^{n} c_{ji}e_j \right\rangle = \sum_{1 \le k,j \le n} c_{ki}c_{ji} \langle e_k, e_j \rangle = \sum_{k=1}^{n} c_{ki}^2 = 1,$$

pentru $i = \overline{1, n}$, şi respectiv

$$\langle \bar{e}_i, \bar{e}_j \rangle = \left\langle \sum_{k=1}^{n} c_{ki}e_k, \sum_{p=1}^{n} c_{pj}e_p \right\rangle = \sum_{1 \le k,p \le n} c_{ki}c_{pj} \langle e_k, e_p \rangle = \sum_{k=1}^{n} c_{ki}c_{kj} = 0,$$

pentru orice $i \neq j$. Aşadar, $\bar{\mathcal{B}} = \{\bar{e}_1, \bar{e}_2, ..., \bar{e}_n\}$ este o bază ortonormată a lui $\mathbb{V}$.

Notând cu F polara formei pătratice Q, din Teorema 6.1.7 şi din relaţia (109) rezultă că matricea asociată lui F în baza $\bar{\mathcal{B}}$ este $D = diag(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n)$ şi, în consecinţă forma pătratică Q va avea scrierea în baza $\bar{B}$:

$$Q(x) = \lambda_1 \bar{x}_1^2 + \lambda_2 \bar{x}_2^2 + ... + \lambda_n \bar{x}_n^2,$$

adică este redusă la forma canonică.

Observaţia 6.2.16. Metodă transformărilor ortogonale, spre deosebire de celelalte două metode prezentate anterior, se aplică numai formelor pătratice definite pe spaţii euclidiene. Deoarece spaţiile vectoriale de tipul $\mathbb{R}^n$ sunt spaţii euclidiene, această metodă poate fi folosită în majoritatea exerciţiilor având drept cerinţă reducerea formelor pătratice la forma canonică.

Din demonstraţia teoremei precedente deducem următorul algoritm de reducere a unei forme pătratice $Q : \mathbb{V} \to \mathbb{R}$ la forma canonică, unde $\mathbb{V}$ este spaţiu euclidian de dimensiune n:

1. Etapa 1: scriem matricea A ataşată formei pătratice;
2. Etapa 2: găsim, prin rezolvarea ecuaţiei caracteristice $det(A - \lambda I_n) = 0$, valorile proprii λ_i, $1 \le i \le p$, având ordinele de multiplicitate n_i şi determinăm subspaţiile vectorilor proprii $\mathbb{V}(\lambda_i)$, corespunzătoare acestor valori proprii;
3. Etapa 3: Pentru fiecare subspaţiu $\mathbb{V}(\lambda_i)$ determinăm câte o bază ortonormată $\mathcal{B}_i$;
4. Etapa 4: Forma canonică a formei pătratice date este:

$$Q(x) = \lambda_1 \bar{x}_1^2 + \lambda_2 \bar{x}_2^2 + ... + \lambda_n \bar{x}_n^2, \tag{111}$$

cu menţiunea că în această scriere fiecare valoare proprie apare de un număr de ori egal cu ordinul de multiplicitate. Baza ortonormată în care se obţine această formă canonică este $\bar{\mathcal{B}} = \mathcal{B}_1 \bigcup \mathcal{B}_2 \bigcup ... \bigcup \mathcal{B}_n$.

Exemplul 6.2.17. Vom reduce la forma canonică, prin metoda transformărilor ortogonale, următoarea formă pătratică:

$$Q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, Q(x) = 3x_1^2 + 3x_2^2 - 2x_1x_2 + 4x_1x_3 + 4x_2x_3,$$

unde $x = (x_1; x_2; x_3)$ este un vector arbitrar din $\mathbb{R}^3$, specificând şi o bază ortonormată în care s-a obţinut această formă.

Matricea asociată formei pătratice Q în baza canonică a lui $\mathbb{R}^3$ este:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ -1 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Vom determina valorile proprii ale matricei A, rezolvând ecuaţia caracteristică $det(A - \lambda I_3) = 0$ sau echivalent $\begin{vmatrix} 3-\lambda & -1 & 2 \\ -1 & 3-\lambda & 2 \\ 2 & 2 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 6\lambda^2 - 32 = 0$. Se obţin $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = \lambda_3 = 4$.

Vectorii proprii corespunzători valorii proprii $\lambda_1 = -2$ sunt daţi de sistemul: $\begin{cases} 5x_1 - x_2 + 2x_3 = 0 \\ -x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 0 \\ 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases}$, având soluţia $\begin{cases} x_1 = -\alpha \\ x_2 = -\alpha \\ x_3 = 2\alpha \end{cases}$, cu $\alpha \in \mathbb{R}^*$. Subspaţiul invariant corespunzător valorii proprii -2 este

$$\mathbb{V}(-2) = \{(-\alpha; -\alpha; 2\alpha)^T / \, \alpha \in \mathbb{R}\}.$$

O bază pentru $\mathbb{V}(-2)$ este $\{(-1; -1; 2)^T\}$, de unde obţinem baza ortonormată $\mathcal{B}_1 = \left\{ \left(-\frac{1}{\sqrt{6}}; -\frac{1}{\sqrt{6}}; \frac{2}{\sqrt{6}} \right)^T \right\}$.

Pentru valoarea proprie 4, vectorii proprii sunt daţi de sistemul: $\begin{cases} -x_1 - x_2 + 2x_3 = 0 \\ -x_1 - x_2 + 2x_3 = 0 \\ 2x_1 + 2x_2 - 4x_3 = 0 \end{cases}$, adică $\begin{cases} x_1 = -\alpha + 2\beta \\ x_2 = \alpha \\ x_3 = \beta \end{cases}$, cu $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\alpha^2 + \beta^2 \neq 0$. Subspaţiul invariant corespunzător valorii proprii 4 este

$$\mathbb{V}(4) = \{(-\alpha + 2\beta; \alpha; \beta)^T / \, \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}.$$

Alegem $e_2 = (-1; 1; 0)^T \in \mathbb{V}(4)$ şi vrem să determinăm $e_3 = (-\alpha_3 + 2\beta_3; \alpha_3; \beta_3)^T$ astfel încât $\langle e_2, e_3 \rangle = 0$, adică $\alpha_3 - 2\beta_3 + \alpha_3 = 0$. Rezultă că $\beta_3 = \alpha_3$, de unde $e_3 = (\alpha_3; \alpha_3; \alpha_3)^T$ şi astfel putem alege $e_3 = (1; 1; 1)^T$. S-a obţinut baza ortogonală $\{(-1; 1; 0)^T, (1; 1; 1)^T\}$, din care se construieşte, prin normalizare, baza ortonormată $\mathcal{B}_2 = \left\{ \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{2}}; 0 \right)^T, \left(\frac{1}{\sqrt{3}}; \frac{1}{\sqrt{3}}; \frac{1}{\sqrt{3}} \right)^T \right\}$.

Forma canonică a formei pătratice date este

$$Q(x) = -2\bar{x}_1^2 + 4\bar{x}_2^2 - 4\bar{x}_3^2,$$

aceasta fiind obţinută în baza ortonormată

$$\bar{\mathcal{B}} = \left\{ \left(-\frac{1}{\sqrt{6}}; -\frac{1}{\sqrt{6}}; \frac{2}{\sqrt{6}} \right)^T, \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{2}}; 0 \right)^T, \left(\frac{1}{\sqrt{3}}; \frac{1}{\sqrt{3}}; \frac{1}{\sqrt{3}} \right)^T \right\}.$$

Observaţia 6.2.18. Comparând rezultatele obţinute în exemplele 6.2.13 şi 6.2.17, reiese concluzia că atunci când se reduce o formă pătratică la forma canonică, prin două metode diferite, se pot obţine rezultate diferite. În secţiunea următoare, vom determina totuşi un invariant al formei canonice.

6.3. Signatura unei forme pătratice. Teorema inerţiei

Definiţia 6.3.1. *Pentru o formă pătratică având forma canonică*

$$Q(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i \bar{x}_i^2, \tag{112}$$

în care p coeficienţi sunt strict pozitivi, q coeficienţi sunt strict negativi, iar $r = n - (p + q)$ sunt nuli, tripletul (p, q, r) se numeşte **signatura formei pătratice***.*

Teorema 6.3.2. *(Teorema inerţiei) Signatura unei forme pătratice este un invariant al formei canonice, adică signatura este aceeaşi în orice formă canonică a formei pătratice respective.*

Demonstraţie. Fie $Q : \mathbb{V} \to \mathbb{R}$ o formă pătratică şi $\mathcal{B}_1 = \{e_1, e_2, ..., e_n\}$, $\mathcal{B}_2 = \{f_1, f_2, ..., f_n\}$ două baze ale lui $\mathbb{V}$ în raport cu care Q are formele canonice:

$$Q(x) = \sum_{i=1}^{n} b_i \bar{x}_i^2 \quad \text{şi} \quad Q(x) = \sum_{i=1}^{n} b_i \tilde{x}_i^2$$

cu signaturile (p_1, q_1, r_1) şi respectiv (p_2, q_2, r_2).

Printr-o eventuală rearanjare a vectorilor din cele două baze se poate presupune că primii p_1 (respectiv p_2) coeficienţi ai celor două forme canonice sunt strict pozitivi, următorii q_1 (respectiv q_2) coeficienţi sunt strict negativi, iar ultimii r_1 (respectiv r_2) coeficienţi sunt nuli.

Presupunem prin absurd că $p_1 > p_2$. Vom nota cu $\mathbb{V}_1 = Span\{e_1, e_2, ..., e_{p_1}\}$ subspaţiul lui $\mathbb{V}$ generat de $\{e_1, e_2, ..., e_{p_1}\}$ şi cu $\mathbb{V}_2 = Span\{e_{p_2+1}, e_{p_2+2}, ..., e_n\}$ subspaţiul lui $\mathbb{V}$ generat de $\{e_{p_2+1}, e_{p_2+2}, ..., e_n\}$. Rezultă că

$$dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{V}_1) + dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{V}_2) = p_1 + n - p_2 > n.$$

Aplicând acum *Teorema lui Grassmann* avem:

$$n \geq dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{V}_1 + \mathbb{V}_2) = dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{V}_1) + dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{V}_2) - dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{V}_1 \bigcap \mathbb{V}_2) > n - dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{V}_1 \bigcap \mathbb{V}_2),$$

de unde rezultă că $\mathbb{V}_1 \bigcap \mathbb{V}_2 \neq \{0_{\mathbb{V}}\}$. Astfel, se poate considera un vector nenul $x^* \in \mathbb{V}_1 \bigcap \mathbb{V}_2$.

Pe de-o parte, deoarece $x^* \in \mathbb{V}_1$ avem $x^* = \bar{x}_1 e_1 + \bar{x}_2 e_2 + ... + \bar{x}_p e_p$, de unde

$$Q(x^*) = \sum_{i=1}^{p} a_i \bar{x}_i^2 \geq 0, \tag{113}$$

iar pe de altă parte, cum $x \in \mathbb{V}_2$ avem $x^* = \tilde{x}_{p_2+1}f_{p_2+1} + \tilde{x}_{p_2+2}f_{p_2+2} + ... + \tilde{x}_n f_n$, şi astfel

$$Q(x^*) = \sum_{i=p_2+1}^{n} b_i \tilde{x}_i^2 \leq 0. \tag{114}$$

Din relaţiile (113) şi (114) obţinem $Q(x^*) = 0$, de unde vom găsi $\bar{x}_1 = \bar{x}_2 = ... = \bar{x}_p = \tilde{x}_{p_2+1} = \tilde{x}_{p_2+2} = ... = \tilde{x}_n = 0$, ceea ce implică $x^* = 0_{\mathbb{V}}$ - contradicţie. Deci presupunerea că $p_1 > p_2$ este falsă. Similar se demonstrază că nu putem avea nici inegalitatea $p_1 < p_2$ şi astfel am obţinut că $p_1 = p_2$.

Procedând analog, se arată că $q_1 = q_2$, ceea ce demonstrează că signatura este aceeaşi pentru ambele forme canonice. □

Exemplul 6.3.3. În Exemplul 6.2.17 s-a determinat pentru forma pătratică

$$Q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, Q(x) = 3x_1^2 + 3x_2^2 - 2x_1x_2 + 4x_1x_3 + 4x_2x_3,$$

forma canonică $Q(x) = -2\bar{x}_1^2 + 4\bar{x}_2^2 + 4\bar{x}_3^2$. Astfel, signatura acestei forme pătratice va fi $(2, 1, 0)$.

Definiţia 6.3.4. *Spunem că forma pătratică $Q : \mathbb{V} \to \mathbb{R}$ este* **pozitiv** *(***negativ***)* **definită** *dacă $Q(x) > 0$ (resp. $Q(x) < 0$) pentru orice $x \in \mathbb{V}\backslash\{0_{\mathbb{V}}\}$.*

Observaţia 6.3.5. O formă pătratică Q este pozitiv (negativ) definită dacă şi numai dacă polara ei F este pozitiv (resp. negativ) definită.

Teorema 6.3.6. *(Criteriul lui Sylvester) Fie $Q : \mathbb{V} \to \mathbb{R}$ o formă pătratică, $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, ..., e_n\}$ o bază a lui $\mathbb{V}$, $A = (a_{ij})_{i,j=\overline{1,n}}$ matricea asociată formei pătratice Q în baza $\mathcal{B}$ şi Δ_1, Δ_2, ..., Δ_n minorii principali ai matricei A. Atunci:*

1. *Q este pozitiv definită dacă şi numai dacă $\Delta_i > 0$, pentru $i = \overline{1,n}$;*
2. *Q este negativ definită dacă şi numai dacă $(-1)^i\Delta_i > 0$, pentru $i = \overline{1,n}$.*

Demonstraţie. 1. Presupunem că forma pătratică Q este pozitiv definită şi notăm cu F polara lui Q. Vom arăta mai întâi că toţi minorii principali ai matricei A sunt nenuli. Presupunem prin absurd că există $k \in \{1, 2, ..., n\}$ astfel încât $\Delta_k = 0$. În acest caz o linie a determinantului Δ_k este o combinaţie liniară a celorlalte linii, deci există $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_k \in \mathbb{R}$, nu toţi nuli, astfel încât

$$\alpha_1 a_{1i} + \alpha_2 a_{2i} + ... + \alpha_k a_{k\,i} = 0,$$

pentru $i = \overline{1,k}$. Din această relaţie, succesiv obţinem:

$$0 = \sum_{j=1}^{k} \alpha_j a_{ji} = \sum_{j=1}^{k} \alpha_j F(e_j, e_i) = F\left(\sum_{j=1}^{k} \alpha_j e_j, e_i\right),$$

pentru $i = \overline{1,k}$. Înmulţind relaţiile de mai sus cu α_i şi sumând aceste relaţii după $i = \overline{1,k}$, obţinem:

$$F\left(\sum_{j=1}^{k} \alpha_j e_j, \sum_{i=1}^{k} \alpha_i e_i\right) = 0.$$

Cum F este pozitiv definită, rezultă $\sum_{i=1}^{k} \alpha_i e_i = 0$, ceea ce arată că vectorii $e_1, e_2, ..., e_k$ sunt liniar dependenţi, contradicţie. Deci $\Delta_i \neq 0$, pentru $i = \overline{1,n}$.

Putem aplica acum Teorema 6.2.11 . Rezultă că există o bază $\bar{\mathcal{B}} = \{\bar{e}_1, \bar{e}_2, ..., \bar{e}_n\}$ în raport cu care forma pătratică Q are forma canonică

$$Q(x) = \frac{1}{\Delta_1}\bar{x}_1^2 + \frac{\Delta_1}{\Delta_2}\bar{x}_2^2 + \frac{\Delta_2}{\Delta_3}\bar{x}_3^2 + ... + \frac{\Delta_{n-1}}{\Delta_n}\bar{x}_n^2.$$

Deoarece Q este pozitiv definită, obţinem

$$\frac{1}{\Delta_1}, \frac{\Delta_1}{\Delta_2}, \frac{\Delta_2}{\Delta_3}, ..., \frac{\Delta_{n-1}}{\Delta_n} > 0$$

şi în consecinţă Δ_1, Δ_2, ..., $\Delta_n > 0$.

Reciproc, dacă Δ_1, Δ_2, ..., $\Delta_n > 0$ rezultă că

$$\frac{1}{\Delta_1}, \frac{\Delta_1}{\Delta_2}, \frac{\Delta_2}{\Delta_3}, ..., \frac{\Delta_{n-1}}{\Delta_n} > 0.$$

Astfel,

$$Q(x) = \frac{1}{\Delta_1}\bar{x}_1^2 + \frac{\Delta_1}{\Delta_2}\bar{x}_2^2 + \frac{\Delta_2}{\Delta_3}\bar{x}_3^2 + ... + \frac{\Delta_{n-1}}{\Delta_n}\bar{x}_n^2 > 0,$$

pentru orice $x \in V\backslash\{0_{\mathbb{V}}\}$, unde $\bar{x}_1, \bar{x}_2, ..., \bar{x}_n$ sunt componentele vectorului x în baza în care s-a obţinut baza canonică a cărei existenţă este asigurată de Teorema 6.2.11. Deci forma pătratică Q este pozitiv definită.

2. Forma pătratică Q este negativ definită dacă şi numai dacă forma pătratică $Q' : \mathbb{V} \to \mathbb{R}$, $Q'(x) = -Q(x)$ este pozitiv definită. Matricea asociată lui Q' este $A' = -A$, iar minorii ei principali sunt $\Delta_i' = (-1)^i \Delta_i$, $i = \overline{1,n}$.

De la punctul 1. al teoremei avem Q' pozitiv definită dacă şi numai dacă $\Delta_i' > 0$. Aşadar Q este negativ definită dacă şi numai dacă $(-1)^i \Delta_i > 0$. □

Fie o formă pătratică având scrierea

$$Q(x) = \sum_{1 \leq i, j \leq n} a_{ij} x_i x_j \tag{115}$$

într-o anumită bază $\mathcal{B}$ a lui $\mathbb{V}$. Dacă notăm cu $A = (a_{ij})_{i,j=\overline{1,n}}$ matricea asociată formei pătratice Q în baza B, atunci egalitatea (115) este echivalentă cu relaţia matricială

$$Q(x) = XAX^T, \tag{116}$$

unde, în membrul drept al acestei egalităţi, X reprezintă matricea linie $(x_1\ x_2\ ...\ x_n)$.

Reamintim că o matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ se numeşte pozitiv definită dacă $xAx^T > 0$, pentru orice vector nenul $x \in \mathbb{R}^n$. Din relaţia (116) se obţine imediat următorul rezultat:

Propoziţia 6.3.7. *Forma pătratică este pozitiv definită dacă şi numai dacă matricea ei asociată A este pozitiv definită.*

Deoarece între mulţimea formelor pătratice $Q : \mathbb{V} \to \mathbb{R}$ şi mulţimea matricelor simetrice este o corespondenţă bijectivă, cu ajutorul Propoziţiei 6.3.7 putem reformula primul punct al *Criteriului lui Sylvester* astfel:

Teorema 6.3.8. *O matrice simetrică este pozitiv definită dacă şi numai dacă toţi minorii principali ai matricei sunt strict pozitivi.*

6.4. Aplicaţii multiliniare. Forme multiliniare

Pe parcursul acestor două ultime secţiuni, $\mathbb{K}$ va desemna un corp comutativ.

Definiţia 6.4.1. *Fie $\mathbb{V}_1, \mathbb{V}_2, ..., \mathbb{V}_n$ şi $\mathbb{W}$ spaţii vectoriale peste acelaşi corp $\mathbb{K}$. O aplicaţie $F : \mathbb{V}_1 \times \mathbb{V}_2 \times ... \times \mathbb{V}_n \longrightarrow \mathbb{W}$ se numeşte* **aplicaţie multiliniară** *(sau n-**liniară**) dacă este liniară în fiecare dintre variabilele sale, adică*

$$F(v_1, ..., v_{i-1}, \alpha v_i + \beta v_i', v_{i+1}, ..., v_n) = \alpha F(v_1, ..., v_{i-1}, v_i, v_{i+1}, ..., v_n)$$
$$+\beta F(v_1, ..., v_{i-1}, v_i', v_{i+1}, ..., v_n),$$

pentru orice $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$, $v_j \in \mathbb{V}_j$, cu $j = 1, ..., n$ şi $v_i' \in \mathbb{V}_i$, cu $i = 1, ..., n$. Vom nota cu $\mathcal{L}_n(\mathbb{V}_1, \mathbb{V}_2, ..., \mathbb{V}_n; \mathbb{W})$ mulţimea aplicaţiilor n-liniare definite pe $\mathbb{V}_1 \times \mathbb{V}_2 \times ... \times \mathbb{V}_n$ cu valori în $\mathbb{W}$.

În cazul particular în care $\mathbb{V}_1 = \mathbb{V}_2 = ... = \mathbb{V}_n = \mathbb{V}$ şi $\mathbb{W} = \mathbb{K}$, aplicaţia multiliniară se va numi **formă multiliniară** (*sau n-**liniară***) . *Vom nota cu $\mathcal{L}_n(\mathbb{V}; \mathbb{K})$ mulţimea formelor n-liniare definite pe $\mathbb{V}^n = \underbrace{\mathbb{V} \times \mathbb{V} \times ... \times \mathbb{V}}_{n \text{ ori}}$.*

Observaţia 6.4.2. *Noţiunea de formă multiliniară reprezintă o generalizare naturală a conceptului de formă biliniară.*

Exemplele 6.4.3. 1. Aplicaţia $F : \mathbb{V}_3 \times \mathbb{V}_3 \longrightarrow \mathbb{V}_3$, $F(\vec{a}, \vec{b}) = \vec{a} \times \vec{b}$ (produsul vectorial a doi vectori liberi) este o aplicaţie 2-liniară (sau aplicaţie biliniară).

2. $F : \mathbb{V}_3 \times \mathbb{V}_3 \times \mathbb{V}_3 \longrightarrow \mathbb{V}_3$, $F(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = \vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c})$ (dublul produs vectorial a trei vectori liberi) este o aplicaţie 3-liniară (sau aplicaţie triliniară).

3. Aplicaţia $F : \mathbb{V}_3 \times \mathbb{V}_3 \longrightarrow \mathbb{R}$, $F(\vec{a}, \vec{b}) = \vec{a} \cdot \vec{b}$ (produsul scalar a doi vectori liberi) reprezintă o formă 2-liniară (sau formă biliniară).

Observaţia 6.4.4. *Mulţimea formelor n-liniare $\mathcal{L}_n(\mathbb{V}_1, \mathbb{V}_2, ..., \mathbb{V}_n; \mathbb{W})$ are o structură de $\mathbb{K}$-spaţiu vectorial faţă de adunarea formelor n-liniare:*

$(F + G)(v_1, v_2, ..., v_n) = F(v_1, v_2, ..., v_n) + G(v_1, v_2, ..., v_n)$, $v_i \in \mathbb{V}_i$, $i = 1, ..., n$

şi faţă de înmulţirea unei forme n-liniare cu un scalar:

$(\alpha F)(v_1, v_2, ..., v_n) = \alpha F(v_1, v_2, ..., v_n)$, $\alpha \in \mathbb{K}$, $v_i \in V_i$, $i = 1, ..., n$.

Se verifică imediat că $F + G$ şi αF astfel definite sunt forme n-liniare. Mai mult, operaţiile de adunare şi înmulţire a unei forme n-liniare cu un scalar verifică axiomele din definiţia spaţiului vectorial.

Propoziţia 6.4.5. *Fie $\mathbb{V}_1, \mathbb{V}_2, ..., \mathbb{V}_n, \mathbb{W}$ spaţiie vectoriale finit dimensionale peste acelaşi corp $\mathbb{K}$. Atunci*

$$dim_{\mathbb{K}} \mathcal{L}_n(\mathbb{V}_1, \mathbb{V}_2, ..., \mathbb{V}_n; \mathbb{W}) = dim_{\mathbb{K}}(\mathbb{V}_1)...dim_{\mathbb{K}}(\mathbb{V}_n) dim_{\mathbb{K}}(\mathbb{W}).$$

Demonstraţie. Fie $\{\nu_{i_1}\}$,...,$\{\nu_{i_n}\}$, $\{\omega_j\}$ baze pentru spaţiile vectoriale $\mathbb{V}_1$,...,$\mathbb{V}_n$ şi respectiv $\mathbb{W}$, iar $\{\nu^*_{i_1}\}$,...,$\{\nu^*_{i_n}\}$, $\{\omega^*_j\}$ bazele duale corespunzătoare.

Definim aplicaţiile:

$$F^j_{i_1,...,i_n} : \mathbb{V}_1 \times ... \times \mathbb{V}_n \longrightarrow \mathbb{W}, F^j_{i_1,...,i_n}(v_1, ..., v_n) = \nu^*_{i_1}(v_1)...\nu^*_{i_n}(v_n)\omega_j.$$

Datorită liniarităţii aplicaţiilor $\nu^*_{i_k}$, $k = 1, ..., n$, rezultă imediat că aplicaţiile $F^j_{i_1,...,i_n}$ sunt n-liniare. Vom demonstra că ele formează o bază a spaţiului $\mathcal{L}_n(\mathbb{V}_1, \mathbb{V}_2, ..., \mathbb{V}_n; \mathbb{W})$.

Considerăm $F \in \mathcal{L}_n(\mathbb{V}_1, \mathbb{V}_2, ..., \mathbb{V}_n; \mathbb{W})$ şi $(v_1, ..., v_n) \in \mathbb{V}_1 \times ... \times \mathbb{V}_n$ arbitrari. Atunci:

$$F(v_1, ..., v_n) = F(\sum_{i_1} \nu^*_{i_1}(v)\nu_{i_1}, ..., \sum_{i_n} \nu^*_{i_n}(v)\nu_{i_n}) = \sum_{i_1,...,i_n} \nu^*_{i_1}(v)...\nu^*_{i_n}(v)F(\nu_{i_1}, ..., \nu_{i_n}) =$$

$$\sum_{i_1,...,i_n,j} \nu^*_{i_1}(v)...\nu^*_{i_n}(v)\omega^*_j(F(\nu_{i_1}, ..., \nu_{i_n}))\omega_j = \sum_{i_1,...,i_n,j} \omega^*_j(F(\nu_{i_1}, ..., \nu_{i_n}))F^j_{i_1,...,i_n}(v_1, ..., v_n).$$

Deci aplicaţiile $F^j_{i_1,...,i_n}$ constituie o mulţime de generatori pentru $\mathcal{L}_n(\mathbb{V}_1, \mathbb{V}_2, ..., \mathbb{V}_n; \mathbb{W})$. Mai mult, mulţimea scalarilor $\{\omega^*_j(F(\nu_{i_1}, ..., \nu_{i_n}))\}$ este unic determinată de aplicaţia multiliniară F şi, în consecinţă, $F^j_{i_1,...,i_n}$ formează o bază a spaţiului $\mathcal{L}_n(\mathbb{V}_1, \mathbb{V}_2, ..., \mathbb{V}_n; \mathbb{W})$. Aşadar

$$dim_{\mathbb{K}}\mathcal{L}_n(\mathbb{V}_1, \mathbb{V}_2, ..., \mathbb{V}_n; \mathbb{W}) = dim_{\mathbb{K}}(\mathbb{V}_1)...dim_{\mathbb{K}}(\mathbb{V}_n)dim_{\mathbb{K}}(\mathbb{W}).$$

□

Definiţia 6.4.6. *O formă multiliniară $F : \mathbb{V}^n \longrightarrow \mathbb{K}$ se numeşte* **alternată** *dacă $F(v_1, ..., v_i, ..., v_j, ..., v_n) = 0$ ori de câte ori $v_i = v_j$, cu $i < j$.*

Exemplul 6.4.7. 1. Aplicaţia $F : \mathbb{V}_3 \times \mathbb{V}_3 \times \mathbb{V}_3 \longrightarrow \mathbb{R}$, $F(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ (produsul mixt a trei vectori liberi) reprezintă o formă 3-liniară (sau formă triliniară) alternată.

Propoziţia 6.4.8. *Dacă $F : \mathbb{V}^n \longrightarrow \mathbb{K}$ este o formă multiliniară alternată, atunci*

$$F(v_1, ..., v_i, ..., v_j, ..., v_n) = -F(v_1, ..., v_j, ..., v_i, ..., v_n),$$

pentru orice $i < j$.

Demonstraţie. Considerăm $1 \leq i < j \leq n$, arbitrari. Din Definiţiile 6.4.1 şi 6.4.6: $0 = F(v_1, ..., v_i + v_j, ..., v_i + v_j, ..., v_n) = F(v_1, ..., v_i, ..., v_i, ..., v_n) + F(v_1, ..., v_i, ..., v_j, ..., v_n) +$
$F(v_1, ..., v_j, ..., v_i, ..., v_n) + F(v_1, ..., v_j, ..., v_j, ..., v_n) = F(v_1, ..., v_i, ..., v_j, ..., v_n)+$
$F(v_1, ..., v_j, ..., v_i, ..., v_n)$, şi astfel $F(v_1, ..., v_i, ..., v_j, ..., v_n) = -F(v_1, ..., v_j, ..., v_i, ..., v_n)$. □

Corolarul 6.4.9. *Pentru orice formă multiliniară alternată $F : \mathbb{V}^n \longrightarrow \mathbb{K}$ şi orice permutare $\sigma \in S_n$ avem*

$$F(v_{\sigma(1)}, ..., v_{\sigma(n)}) = \epsilon(\sigma)F(v_1, ..., v_n),$$

unde $\epsilon(\sigma)$ reprezintă signatura permutării σ.

Demonstraţie. Descompunem permutarea σ în produs de transpoziţii: $\sigma = \tau_1 \circ ... \circ \tau_m$. Rezultă că $\epsilon(\sigma) = \epsilon(\tau_1) \circ ... \circ \epsilon(\tau_m) = (-1)^m$. Astfel, putem să ne reducem la cazul $m = 1$. În acest caz, σ este o transpoziţie, iar afirmaţia de demonstrat rezultă din propoziţia precedentă. □

Definiţia 6.4.10. *Pentru o matrice $A = (a_{ij})_{1\le i,j\le n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, suma*

$$\sum_{\sigma\in S_n} \epsilon(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} ... a_{n\sigma(n)}$$

se va numi **determinantul** *matricei A. Vom nota cu $det(A)$ determinantul matricei A.*

Propoziţia 6.4.11. *Dacă $A = (a_{ij})_{1\le i,j\le n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, atunci*

$$det(A) = det(A^T).$$

Demonstraţie. Matricea transpusă $A^T = (a^T_{ij})_{1\le i,j\le n}$ are elementele $a^T_{ij} = a_{ji}$, pentru orice $i, j = 1, 2, ..., n$. Din definiţia determinantului unei matrice avem:

$$det(A^T) = \sum_{\sigma\in S_n} \epsilon(\sigma) a^T_{1\sigma(1)} a^T_{2\sigma(2)} ... a^T_{n\sigma(n)} = \sum_{\sigma\in S_n} \epsilon(\sigma) a_{\sigma(1)1} a_{\sigma(2)2} ... a_{\sigma(n)n}. \tag{117}$$

Dacă $\sigma(i) = j$, atunci $i = \sigma^{-1}(j)$. Evident corespondenţa $S_n \longrightarrow S_n$, $\sigma \longmapsto \sigma^{-1}$ este bijectivă. Deoarece $\epsilon(\sigma) = \epsilon(\sigma^{-1})$ şi având în vedere comutativitatea operaţiilor de pe $\mathbb{K}$, din relaţia (117) obţinem:

$$det(A^T) = \sum_{\sigma\in S_n} \epsilon(\sigma^{-1}) a_{1\sigma^{-1}(1)} a_{2\sigma^{-1}(2)} ... a_{n\sigma^{-1}(n)} = \sum_{\sigma\in S_n} \epsilon(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} ... a_{n\sigma(n)} = det(A).$$

□

Propoziţia 6.4.12. *Fie $F : \mathbb{V}^n \longrightarrow \mathbb{K}$ o formă multiliniară alternată, $A = (a_{ij})_{1\le i,j\le n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ o matrice arbitrară şi elementele $e_1, e_2, ..., e_n \in \mathbb{V}$. Dacă pentru orice $i = 1, ..., n$ definim elementele $f_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} e_j$ şi $g_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ji} e_j$, atunci*

$$F(f_1, f_2, ..., f_n) = F(g_1, g_2, ..., g_n) = det(A)F(e_1, e_2, ...e_n).$$

Demonstraţie. Datorită "multiliniarităţii" lui F, avem:

$$F(f_1, f_2, ..., f_n) = F(a_{11}e_1 + a_{12}e_2 + ... + a_{1n}e_n, a_{21}e_1 + a_{22}e_2 + ... + a_{2n}e_n, ..., a_{n1}e_1 +$$
$$a_{n2}e_2 + ... + a_{nn}e_n) = \sum_{1\le i_1, i_2, ..., i_n \le n} a_{1i_1} a_{2i_2} ... a_{ni_n} F(e_{i_1}, e_{i_2}, ..., e_{i_n})$$

Definim funcţia $\sigma : \{1, 2, ..., n\} \longrightarrow \{1, 2, ..., n\}$, $\sigma(k) = i_k$. Evident, dacă σ este injectivă, atunci este şi surjectivă, deci bijectivă, adică o permutare de ordin n: $\sigma \in S_n$. Dacă σ nu este injectivă, atunci există $k, l \in 1, 2, ..., n$, $k \neq l$ astfel încât $e_{i_k} = e_{i_l}$. Cum F este alternată, în aceasta situaţie avem: $F(e_{i_1}, e_{i_2}, ..., e_{i_n}) = 0$. Deci

$$F(f_1, f_2, ..., f_n) = \sum_{\sigma:\{1,2,...,n\}\longrightarrow\{1,2,...,n\}} a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} ... a_{n\sigma(n)} F(e_{\sigma(1)}, e_{\sigma(2)}, ..., e_{\sigma(n)}) = \tag{118}$$
$$\sum_{\sigma\in S_n} a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} ... a_{n\sigma(n)} F(e_{\sigma(1)}, e_{\sigma(2)}, ..., e_{\sigma(n)}).$$

Dar, din Corolarul 6.4.9, avem

$$F(e_{\sigma(1)}, e_{\sigma(2)}, ..., e_{\sigma(n)}) = \epsilon(\sigma)F(e_1, e_2, ..., e_n). \tag{119}$$

Din relaţiile (118) şi (119) obţinem:

$$F(f_1, f_2, ..., f_n) = \sum_{\sigma\in S_n} \epsilon(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} ... a_{n\sigma(n)} F(e_1, e_2, ..., e_n) = det(A)F(e_1, e_2, ..., e_n).$$

Pentru a proba ultima egalitate, observăm că:

$$g_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ji} e_j = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}^t e_j,$$

pentru orice $i = 1, ..., n$. Din cele demonstrate mai sus, precum şi din Propoziţia 6.4.11, avem:

$$F(g_1, g_2, ..., g_n) = det(A^T) F(e_1, e_2, ...e_n) = det(A) F(e_1, e_2, ...e_n). \quad \square$$

Considerăm $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ mulţimea matricelor coloană cu n componente din corpul $\mathbb{K}$. Evident $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ este un $\mathbb{K}$-spaţiu vectorial de dimensiune n, o bază a acestuia fiind

$$e^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ ... \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e^2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ ... \\ 0 \end{pmatrix}, ..., \quad e^n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ ... \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(baza canonică). Dacă $A = (a_{ij})_{1 \le i,j \le n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, vom nota cu $A^1, A^2, ..., A^n$ coloanele matricei A. Astfel

$$A^j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ ... \\ a_{nj} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}), \qquad j = 1, 2, ..., n.$$

Teorema 6.4.13. *(Teorema fundamentală a teoriei determinanţilor) Considerăm $\mathbb{K}$-spaţiul vectorial $\mathbb{V} = \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ şi $\{e^1, e^2, ..., e^n\}$ baza sa canonică. Atunci există o unică formă multiliniară alternată $F_n : \mathbb{V}^n \longrightarrow \mathbb{K}$ astfel încât $F_n(e^1, e^2, ..., e^n) = 1$. În plus,*

$$F_n(A^1, A^2, ..., A^n) = det(A),$$

pentru orice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Demonstraţie. Probăm mai întâi unicitatea. Fie $A^1, A^2, ..., A^n \in \mathbb{V}$ vectori arbitrari şi considerăm matricea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, având coloanele $A^1, A^2, ..., A^n$. Dacă $F_n, F'_n : \mathbb{V}^n \longrightarrow \mathbb{K}$ sunt două forme multiliniare alternate cu proprietatea că $F_n(e^1, e^2, ..., e^n) = F'_n(e^1, e^2, ..., e^n) = 1$, atunci din Propoziţia 6.4.12 obţinem că

$$F_n(A^1, A^2, ..., A^n) = F'_n(A^1, A^2, ..., A^n) = det(A).$$

Cum $A^1, A^2, ..., A^n$ au fost consideraţi arbitrari, rezultă că $F_n = F'_n$.

Pentru a demonstra existenţa formei multiliniare alternate vom utiliza metoda inducţiei matematice.

Dacă $n = 2$, atunci $\mathbb{V} = \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{K})$. Definim aplicaţia $F_2 : \mathbb{V}^2 \longrightarrow \mathbb{K}$, $F(A^1, A^2) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$, unde $A^1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{pmatrix}$ şi $A^2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{pmatrix}$. Se verifică imediat că F_2 este formă biliniară şi, deoarece $F(A^1, A^1) = 0$, este şi alternată.

Presupunem că există F_{n-1} cu proprietatea din enunţul teoremei şi vrem să construim F_n. Fie $A^1, A^2, ..., A^n \in \mathbb{V}$, $A^j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ ... \\ a_{nj} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, pentru orice $j = 1, 2, ..., n$ şi considerăm A matricea pătratică având coloanele $A^1, A^2, ..., A^n$. Notăm cu A_{ij} matricea obţinută din A prin eliminarea liniei i şi coloanei j, iar cu $A^1_{ij}, A^2_{ij}, ..., A^n_{ij}$ coloanele acestei matrice. Evident $A_{ij} \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{K})$. Fixăm un $i \in \{1, 2, ..., n\}$ arbitrar şi definim aplicaţia

$$F_n : \mathbb{V}^n \longrightarrow \mathbb{K}, \quad F_n(A^1, A^2, ..., A^n) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} F_{n-1}(A^1_{ij}, A^2_{ij}, ..., A^{n-1}_{ij}). \tag{120}$$

În cazul particular în care $A^j = e^j$, pentru orice $j = 1, 2, ..., n$, rezultă că $a_{ii} = 1$ şi $a_{ij} = 0$, când $j \neq i$. Pe de altă parte, $A^1_{ii}, A^2_{ii}, ..., A^{n-1}_{ii}$ va reprezenta, în acest caz, baza canonică a lui $\mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{K})$. Aşadar, ţinând cont şi de ipoteza inductivă, din relaţia (120) obţinem

$$F_n(e^1, e^2, ..., e^n) = 1.$$

În continuare, vom proba că F_n este formă multiliniară. Pentru aceasta, vom arăta mai întâi că

$$F_n(A^1, ..., A^k + A'^k, ..., A^n) = F_n(A^1, ..., A^k, ..., A^n) + F_n(A^1, ..., A'^k, ..., A^n),$$

pentru orice $A^1, ..., A^k, A'^k, ..., A^n \in V$ şi $1 \leq k \leq n$. Presupunem că

$$A'^k = \begin{pmatrix} a'_{1k} \\ a'_{2k} \\ ... \\ a'_{nk} \end{pmatrix}, \quad A^j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ ... \\ a_{nj} \end{pmatrix},$$

pentru orice $j = 1, 2, ..., n$. Considerăm matricele $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$, $A' = (a'_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$, cu $a'_{ij} = a_{ij}$, când $j \neq k$, $B = (b_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$, cu $b_{ij} = a_{ij} = a'_{ij}$, pentru $j \neq k$ şi $b_{ik} = a_{ik} + a'_{ik}$. (De fapt, B este matricea având coloanele $A^1, ..., A^k + A'^k, ..., A^n$.) Atunci

$$F(A^1, ..., A^k + A'^k, ..., A^n) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} b_{ij} F_{n-1}(B^1_{ij}, B^2_{ij}, ..., B^{n-1}_{ij}) =$$

$$\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{n} (-1)^{i+j} b_{ij} F_{n-1}(B^1_{ij}, B^2_{ij}, ..., B^{n-1}_{ij}) + (-1)^{i+k} b_{ik} F_{n-1}(B^1_{ik}, B^2_{ik}, ..., B^{n-1}_{ik}) =$$

$$\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} F_{n-1}(A^1_{ij}, A^2_{ij}, ..., A^{n-1}_{ij}) + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{n} (-1)^{i+j} a'_{ij} F_{n-1}(A'^1_{ij}, A'^2_{ij}, ..., A'^{n-1}_{ij}) +$$

$$(-1)^{i+k} a_{ik} F_{n-1}(A^1_{ik}, A^2_{ik}, ..., A^{n-1}_{ik}) + (-1)^{i+k} a'_{ik} F_{n-1}(A'^1_{ik}, A'^2_{ik}, ..., A'^{n-1}_{ik}) =$$

$$F_n(A^1, ..., A^k, ..., A^n) + F_n(A'^1, ..., A'^k, ..., A'^n) = F_n(A^1, ..., A^k, ..., A^n) + F_n(A^1, ..., A'^k, ..., A^n).$$

Demonstrăm acum că

$$F_n(A^1, ..., \lambda A^k, ..., A^n) = \lambda F_n(A^1, ..., A^k, ..., A^n),$$

pentru orice $A^1, ..., A^k, ..., A^n \in \mathbb{V}$, $\lambda \in \mathbb{K}$ şi $1 \leq k \leq n$. Considerăm matricea $C = (c_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$ având drept coloane pe $A^1, ..., \lambda A^k, ..., A^n$. Atunci $c_{ij} = a_{ij}$, pentru $j \neq k$ şi $c_{ik} = \lambda a_{ik}$. Rezultă că

$$F_n(A^1, ..., \lambda A^k, ..., A^n) = \sum_{j=1}^{n}(-1)^{i+j} c_{ij} F_{n-1}(C^1_{ij}, C^2_{ij}, ..., C^{n-1}_{ij}) =$$

$$\sum_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{n}(-1)^{i+j} c_{ij} F_{n-1}(C^1_{ij}, C^2_{ij}, ..., C^{n-1}_{ij}) + (-1)^{i+k} c_{ik} F_{n-1}(C^1_{ik}, C^2_{ik}, ..., C^{n-1}_{ik}) =$$

$$\sum_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{n}(-1)^{i+j} a_{ij} \lambda F_{n-1}(A^1_{ij}, A^2_{ij}, ..., A^{n-1}_{ij}) + (-1)^{i+k} \lambda a_{ik} F_{n-1}(A^1_{ik}, A^2_{ik}, ..., A^{n-1}_{ik}) =$$

$$\lambda \sum_{j=1}^{n}(-1)^{i+j} a_{ij} F_{n-1}(A^1_{ij}, A^2_{ij}, ..., A^{n-1}_{ij}) = \lambda F_n(A^1, ..., A^k, ..., A^n).$$

În final, vom demonstra că forma multiliniară F este alternată. Presupunem că doi dintre vectorii $A^1, A^2, ..., A^n$ sunt egali. Fără a reduce generalitatea putem presupune că $A^1 = A^2$ (altfel, se aplică o permutare vectorilor $A^1, A^2, ..., A^n$ astfel încât în urma acesteia primii doi vectori să fie egali). Atunci:

$$F_n(A^1, A^2, ..., A^n) = \sum_{j=1}^{n}(-1)^{i+j} a_{ij} F_{n-1}(A^1_{ij}, A^2_{ij}, ..., A^{n-1}_{ij}) = (-1)^{i+1} a_{i1} F_{n-1}(A^1_{i1}, A^2_{i1}, ..., A^{n-1}_{i1}) +$$

$$(-1)^{i+2} a_{i2} F_{n-1}(A^1_{i2}, A^2_{i2}, ..., A^{n-1}_{i2}) + \sum_{j=3}^{n}(-1)^{i+j} a_{ij} F_{n-1}(A^1_{ij}, A^2_{ij}, ..., A^{n-1}_{ij}).$$

Deoarece $A^1 = A^2$, atunci $A^1_{ij} = A^2_{ij}$, pentru $j = 3, .., n$ şi în consecinţă

$$F_{n-1}(A^1_{ij}, A^2_{ij}, ..., A^{n-1}_{ij}) = 0,$$

pentru $j = 3, .., n$. Pe de altă parte, egalitatea $A^1 = A^2$ conduce la

$$a_{i1} F_{n-1}(A^1_{i1}, A^2_{i1}, ..., A^{n-1}_{i1}) = a_{i2} F_{n-1}(A^1_{i2}, A^2_{i2}, ..., A^{n-1}_{i2}),$$

deci

$$(-1)^{i+1} a_{i1} F_{n-1}(A^1_{i1}, A^2_{i1}, ..., A^{n-1}_{i1}) + (-1)^{i+2} a_{i2} F_{n-1}(A^1_{i2}, A^2_{i2}, ..., A^{n-1}_{i2}) = 0.$$

Astfel putem conchide că

$$F_n(A^1, A^2, ..., A^n) = 0.$$

□

Din definirea lui F_n, dată în Teorema fundamentală a teoriei determinanţilor, se obţine următorul rezultat, cunoscut sub numele de dezvoltatrea determinantului după linia i:

Corolarul 6.4.14. *Dacă $A = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, atunci pentru orice $i = 1, 2, ..., n$ avem*

$$det(A) = \sum_{j=1}^{n}(-1)^{i+j} a_{ij} det(A_{ij}),$$

unde A_{ij} este matricea obţinută din matricea A prin eliminarea liniei i şi coloanei j.

Folosind Propoziţia 6.4.11, Teorema 6.4.13, precum şi proprietăţile formelor multiliniare alternate, găsim următoarele proprietăţi ale determinanţilor:

Corolarul 6.4.15. *1. O matrice având două linii sau două coloane egale are determinantul zero.*

2. Dacă se permută două linii sau două coloane ale matricei, se schimba semnul determinantului matricei.

3. Dacă se înmulţesc elementele unei linii sau coloane dintr-o matrice cu un element din corpul $\mathbb{K}$, valoarea determinantului matricei se multiplică prin acel element.

4. Dacă la o linie (resp. coloană) a unei matrice se adună o altă linie (resp. coloană) înmulţită cu un element din $\mathbb{K}$, valoarea determinantului nu se schimbă.

5. Dacă toate elementele unei linii sau unei coloane dintr-o matrice sunt nule, atunci determinantul matricei este zero.

Propoziţia 6.4.16. *Dacă $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, atunci*

$$det(AB) = det(A)det(B).$$

Demonstraţie. Fie $A = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq n}, B = (b_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$. Considerăm $\{e^1, e^2, ..., e^n\}$ baza canonică a $\mathbb{K}$-spaţiului vectorial $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ şi definim $f_i = \sum_{j=1}^{n} b_{ij}e^j$, $g_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}f_j$, pentru orice $i = 1, 2, ..., n$. Atunci

$$\begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ ... \\ f_n \end{pmatrix} = B \cdot \begin{pmatrix} e^1 \\ e^2 \\ ... \\ e^n \end{pmatrix} \quad \text{şi} \quad \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \\ ... \\ g_n \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ ... \\ f_n \end{pmatrix}.$$

Rezultă că

$$\begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \\ ... \\ g_n \end{pmatrix} = A \cdot \left(B \cdot \begin{pmatrix} e^1 \\ e^2 \\ ... \\ e^n \end{pmatrix} \right) = (A \cdot B) \cdot \begin{pmatrix} e^1 \\ e^2 \\ ... \\ e^n \end{pmatrix}.$$

Aplicând Propoziţia 6.4.12, obţinem pe de-o parte:

$$F_n(g_1, g_2, ..., g_n) = det(AB) \cdot F_n(e^1, e^2, ..., e^n) = det(AB), \tag{121}$$

iar pe de altă parte

$$F_n(g_1, g_2, ..., g_n) = det(A) \cdot F_n(f_1, f_2, ..., f_n) = det(A) \cdot (det(B) \cdot F_n(e^1, e^2, ..., e^n)) = det(A) \cdot det(B). \tag{122}$$

Din relaţiile (121) şi (122) obţinem

$$det(AB) = det(A)det(B).$$

□

Problema 6.4.17. *Fie $\mathbb{V}$ şi $\mathbb{W}$ două $\mathbb{K}$-spaţii vectoriale, $T : \mathbb{V} \longrightarrow \mathbb{W}$ o transformare liniară şi $F : \mathbb{W}^n \longrightarrow \mathbb{K}$ o formă n-liniară alternată. Să se demonstreze că aplicaţia*

$$G : \mathbb{V}^n \longrightarrow \mathbb{K}, \qquad G(x_1, x_2, ..., x_n) = F(T(x_1), T(x_2), ..., T(x_n))$$

este o formă n-liniară alternată.

Soluţie. Fie $x_1, ..., x_i, x'_i, ..., x_n \in \mathbb{V}$ şi $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$, arbitrari. Ţinând cont că T este transformare liniară, iar F formă n-liniară, succesiv avem:

$$G(x_1, ..., \alpha x_i + \beta x'_i, ..., x_n) = F(T(x_1), ..., T(\alpha x_i + \beta x'_i), ..., T(x_n)) =$$

$$F(T(x_1), ..., \alpha T(x_i) + \beta T(x'_i), ..., T(x_n)) = \alpha F(T(x_1), ..., T(x_i), ..., T(x_n)) +$$

$$\beta F(T(x_1), ..., T(x'_i), ..., T(x_n)) = \alpha G(x_1, ..., x_i, ..., x_n) + \beta G(x_1, ..., x'_i, ..., x_n)$$

şi, în consecinţă, G este formă n-liniară.

Dacă există $1 \leq i, j \leq n$, $i \neq j$ astfel încât $x_i = x_j$, atunci evident $T(x_i) = T(x_j)$. Deoarece F este o formă n-liniară alternată, atunci $F(T(x_1), ..., T(x_i), ..., T(x_j), ..., T(x_n)) = 0$, de unde rezultă că $G(x_1, ..., x_i, ..., x_j, ..., x_n) = 0$. Aşadar, G este o formă n-liniară alternată. □

Exemplul 6.4.18. (Determinantul Vandermonde) Fie $\mathbb{K}$ un corp şi $a_1, a_2, ..., a_n \in \mathbb{K}$. Vom demonstra că

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & ... & 1 \\ a_1 & a_2 & ... & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & ... & a_n^2 \\ ... & ... & ... & ... \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & ... & a_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (a_j - a_i).$$

Arătam mai întâi că

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & ... & 1 \\ a_1 & a_2 & ... & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & ... & a_n^2 \\ ... & ... & ... & ... \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & ... & a_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 < j \leq n} (a_j - a_1) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & ... & 1 \\ a_2 & a_3 & ... & a_n \\ a_2^2 & a_3^2 & ... & a_n^2 \\ ... & ... & ... & ... \\ a_2^{n-2} & a_3^{n-2} & ... & a_n^{n-2} \end{vmatrix},$$

de unde, printr-un raţionament inductiv, se obţine rezultatul dorit.

Asupra determinantului Vandermonde efectuăm următoarele transformări: adunăm penultima linie, înmulţită cu a_1, la ultima linie, apoi se aduna antepenultima linie, înmulţită cu a_1, la penultima linie, şi aşa mai departe, la final adunându-se prima linie, înmulţită cu a_1, la a doua linie. Astfel

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & ... & 1 \\ a_1 & a_2 & ... & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & ... & a_n^2 \\ ... & ... & ... & ... \\ a_1^{n-2} & a_2^{n-2} & ... & a_n^{n-2} \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & ... & a_n^{n-1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & ... & 1 \\ 0 & a_2 - a_1 & ... & a_n - a_1 \\ 0 & a_2^2 - a_1 a_2 & ... & a_n^2 - a_1 a_n \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & a_2^{n-2} - a_1 a_2^{n-3} & ... & a_n^{n-2} - a_1 a_n^{n-3} \\ 0 & a_2^{n-1} - a_1 a_2^{n-2} & ... & a_n^{n-1} - a_1 a_n^{n-2} \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} a_2 - a_1 & ... & a_n - a_1 \\ a_2^2 - a_1 a_2 & ... & a_n^2 - a_1 a_n \\ ... & ... & ... \\ a_2^{n-2} - a_1 a_2^{n-3} & ... & a_n^{n-2} - a_1 a_n^{n-3} \\ a_2^{n-1} - a_1 a_2^{n-2} & ... & a_n^{n-1} - a_1 a_n^{n-2} \end{vmatrix} = (a_2 - a_1)...(a_n - a_1) \begin{vmatrix} 1 & ... & 1 \\ a_2 & ... & a_n \\ ... & ... & ... \\ a_2^{n-3} & ... & a_n^{n-3} \\ a_2^{n-2} & ... & a_n^{n-2} \end{vmatrix}.$$

(Ultimele două egalităţi rezultă din Corolarul 6.4.14 şi respectiv din Corolarul 6.4.15.)

6.5. Produs tensorial

Definiţia 6.5.1. *Fie* $\mathbb{V}$ *şi* $\mathbb{W}$ *două spaţii vectoriale peste corpul comutativ* $\mathbb{K}$. *Un* $\mathbb{K}$- *spaţiu vectorial* $\mathbb{V}\otimes\mathbb{W}$ *împreună cu o aplicaţie biliniară* $F:\mathbb{V}\times\mathbb{W}\longrightarrow\mathbb{V}\otimes\mathbb{W}$ *se numeşte* **produs tensorial al lui $\mathbb{V}$ cu $\mathbb{W}$ peste corpul** $\mathbb{K}$ *dacă pentru orice* $\mathbb{K}$- *spaţiu vectorial* $\mathbb{U}$ *şi orice aplicaţie biliniară* $G:\mathbb{V}\times\mathbb{W}\longrightarrow\mathbb{U}$ *există o unică transformare liniară* $\bar{G}:\mathbb{V}\otimes\mathbb{W}\longrightarrow\mathbb{U}$ *astfel încât următoarea diagramă*

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{V}\times\mathbb{W} \arrow[r, "F"] \arrow[dr, "G"'] & \mathbb{V}\otimes\mathbb{W} \arrow[d, dashed, "\bar{G}"] \\
 & \mathbb{U}
\end{tikzcd}$$

este comutativă: $\bar{G}\circ F=G$.

Observaţia 6.5.2. *Din definiţia produsului tensorial rezultă că avem următorul izomorfism de spaţii vectoriale:*

$$\mathcal{L}_2(\mathbb{V},\mathbb{W};\mathbb{U})\simeq Hom_{\mathbb{K}}(\mathbb{V}\otimes\mathbb{W},\mathbb{U}). \tag{123}$$

Într-adevăr, dată o aplicaţie biliniară $G\in\mathcal{L}_2(\mathbb{V},\mathbb{W};\mathbb{U})$ *există un unic morfism* $\bar{G}\in Hom_{\mathbb{K}}(\mathbb{V}\otimes\mathbb{W},\mathbb{U})$ *astfel încât* $\bar{G}(v\otimes w)=G(v,w)$, *pentru orice* $(v,w)\in\mathbb{V}\times\mathbb{W}$. *Reciproc, dat un morfism* $\gamma:\mathbb{V}\otimes\mathbb{W}\longrightarrow\mathbb{U}$, *compunerea* $\gamma\circ\otimes:\mathbb{V}\times\mathbb{W}\longrightarrow\mathbb{U}$ *este aplicaţie biliniară. Mai mult, aplicaţiile*

$$\mathcal{L}_2(\mathbb{V},\mathbb{W};\mathbb{U})\ni g\longmapsto\bar{g}\in Hom_{\mathbb{K}}(\mathbb{V}\otimes\mathbb{W},\mathbb{U})$$

şi

$$Hom_{\mathbb{K}}(\mathbb{V}\otimes\mathbb{W},\mathbb{U})\ni\gamma\longmapsto\gamma\circ\otimes\in\mathcal{L}_2(\mathbb{V},\mathbb{W};\mathbb{U})$$

sunt inverse una celeilalte.

Propoziţia 6.5.3. *Produsul tensorial a două* $\mathbb{K}$*-spaţii vectoriale, dacă există, este unic până la un izomorfism: dacă* $\mathbb{V}$ *şi* $\mathbb{W}$ *sunt două* $\mathbb{K}$*-spaţii vectoriale, iar* $\mathbb{V}\otimes_1\mathbb{W}$ *şi* $\mathbb{V}\otimes_2\mathbb{W}$ *sunt produse tensoriale ale lui* $\mathbb{V}$ *cu* $\mathbb{W}$ *peste* $\mathbb{K}$, *atunci* $\mathbb{V}\otimes_1\mathbb{W}\simeq\mathbb{V}\otimes_2\mathbb{W}$.

Demonstraţie. Fie $F_1:\mathbb{V}\times\mathbb{W}\longrightarrow\mathbb{V}\otimes_1\mathbb{W}$ şi $F_2:\mathbb{V}\times\mathbb{W}\longrightarrow\mathbb{V}\otimes_2\mathbb{W}$ aplicaţiile biliniare corespunzătoare celor două produse tensoriale. Deoarece $\mathbb{V}\otimes_1\mathbb{W}$ este un produs tensorial, din Definiţia 6.5.1, există o unică transformare liniară $\bar{G}_1:\mathbb{V}\otimes_1\mathbb{W}\longrightarrow\mathbb{V}\otimes_2\mathbb{W}$, astfel încât diagrama

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{V}\times\mathbb{W} \arrow[r, "F"] \arrow[dr, "G"'] & \mathbb{V}\otimes_1\mathbb{W} \arrow[d, dashed, "\bar{G}_1"] \\
 & \mathbb{V}\otimes_2\mathbb{W}
\end{tikzcd}$$

este comutativă.

Cu aceleaşi argumente, schimbând rolurile lui $\mathbb{V}\otimes_1\mathbb{W}$ şi $\mathbb{V}\otimes_2\mathbb{W}$, există o unică transformare liniară $\bar{G}_2 : \mathbb{V}\otimes_2\mathbb{W} \longrightarrow \mathbb{V}\otimes_1\mathbb{W}$, astfel încât diagrama

$$\begin{tikzcd} \mathbb{V}\times\mathbb{W} \arrow[r, "G"] \arrow[dr, "F"'] & \mathbb{V}\otimes_2\mathbb{W} \arrow[d, dashed, "\bar{G}_2"] \\ & \mathbb{V}\otimes_1\mathbb{W} \end{tikzcd}$$

este comutativă.

Deoarece $\bar{G}_2\circ\bar{G}_1\circ F = \bar{G}_2\circ G = F$, atunci transformarea liniară $\bar{G}_2\circ\bar{G}_1 : \mathbb{V}\otimes_1\mathbb{W} \longrightarrow \mathbb{V}\otimes_1\mathbb{W}$ face comutativă următoarea diagramă:

$$\begin{tikzcd} \mathbb{V}\times\mathbb{W} \arrow[r, "F"] \arrow[dr, "F"'] & \mathbb{V}\otimes_1\mathbb{W} \arrow[d, dashed, "\bar{G}_2\circ\bar{G}_1"] \\ & \mathbb{V}\otimes_1\mathbb{W} \end{tikzcd}$$

Dar, şi $id_{\mathbb{V}\otimes_1\mathbb{W}}$ face comutativă diagrama precedentă. Ţinând cont de unicitate, obţinem că $\bar{G}_2\circ\bar{G}_1 = id_{\mathbb{V}\otimes_1\mathbb{W}}$. Similar se demonstrează că $\bar{G}_1\circ\bar{G}_2 = id_{\mathbb{V}\otimes_2\mathbb{W}}$, deci $\bar{G}_1$ şi $\bar{G}_2$ sunt inverse una alteia, de unde rezultă $\mathbb{V}\otimes_1\mathbb{W}\simeq\mathbb{V}\otimes_2\mathbb{W}$. □

Propoziţia 6.5.4. *Dacă $\mathbb{V}$ şi $\mathbb{W}$ sunt două $\mathbb{K}$-spaţii vectoriale, atunci produsul tensorial al lui $\mathbb{V}$ cu $\mathbb{W}$ există.*

Demonstraţie. Date fiind $\mathbb{K}$-spaţiile vectoriale $\mathbb{V}$ şi $\mathbb{W}$, vrem să construim un nou spaţiu vectorial $\mathbb{V}\otimes\mathbb{W}$ şi o aplicaţie biliniară $F : \mathbb{V}\times\mathbb{W} \longrightarrow \mathbb{V}\otimes\mathbb{W}$ care satisfac Definiţia 6.5.1.

Vom considera $\mathcal{L}(\mathbb{V}\times\mathbb{W})$ spaţiul vectorial al tuturor combinaţiilor liniare finite de perechi ordonate (v, w) cu $v \in \mathbb{V}$ şi $w \in \mathbb{W}$. Evident, $\mathbb{V}\times\mathbb{W}$ este o bază a acestui spaţiu vectorial. Notăm cu $\mathbb{U}$ subspaţiul vectorial al lui $\mathcal{L}(\mathbb{V}\times\mathbb{W})$ generat de toţi vectorii de forma

$$(v_1 + v_2, w) - (v_1, w) - (v_2, w)$$

$$(\alpha v, w) - \alpha(v, w)$$

$$(v, w_1 + w_2) - (v, w_1) - (v, w_2)$$

$$(v, \alpha w) - \alpha(v, w),$$

unde $v, v_1, v_2 \in \mathbb{V}$, $w, w_1, w_2 \in \mathbb{W}$ şi $\alpha \in \mathbb{K}$.

Definim $\mathbb{V}\otimes\mathbb{W}$ ca fiind spaţiul vectorial cât al lui $\mathcal{L}(\mathbb{V}\times\mathbb{W})$ prin subspaţiul $\mathbb{U}$:

$$\mathbb{V}\otimes\mathbb{W} = \mathcal{L}(\mathbb{V}\times\mathbb{W})/\mathbb{U},$$

iar aplicaţia $F : \mathbb{V}\times\mathbb{W} \longrightarrow \mathbb{V}\otimes\mathbb{W}$ ca şi compunerea dintre incluziunea $i : \mathbb{V}\times\mathbb{W} \hookrightarrow \mathcal{L}(\mathbb{V}\times\mathbb{W})$ şi proiecţia canonică $\pi : \mathcal{L}(\mathbb{V}\times\mathbb{W}) \longrightarrow \mathcal{L}(\mathbb{V}\times\mathbb{W})/\mathbb{U}$. Din modul de definire al subspaţiului $\mathbb{U}$, rezultă că aplicaţia F construită anterior este biliniară.

Considerăm aplicaţia biliniară $G : \mathbb{V} \times \mathbb{W} \longrightarrow \mathbb{U}$. Deoarece $\mathbb{V} \times \mathbb{W}$ este o bază a lui $\mathcal{L}(\mathbb{V} \times \mathbb{W})$, aplicaţia G induce o unică transformare liniară $\widetilde{G} : \mathcal{L}(\mathbb{V} \times \mathbb{W}) \longrightarrow \mathbb{U}$ astfel încât $\widetilde{G}((v, w)) = G(v, w)$, pentru orice $(v, w) \in V \times W$. Datorită biliniarităţii lui G şi din definirea subspaţiului $\mathbb{U}$, rezultă că $\widetilde{G}$ se anulează pe elementele lui $\mathbb{U}$. Astfel obţinem o transformare liniară $\overline{G} : \mathbb{V} \otimes \mathbb{W} \longrightarrow \mathbb{U}$, $\overline{G}(F((v, w))) = \widetilde{G}((v, w)) = G(v, w)$. Deoarece elemetele de forma $F((v, w))$ generează spaţiul $V \otimes W$, atunci $\overline{G}$ va fi unic. □

Observaţia 6.5.5. *Având asigurată existenţa produsului tensorial, precum şi unicitatea lui, până la un izomorfism, pentru două $\mathbb{K}$-spaţii vectoriale date $\mathbb{V}$ şi $\mathbb{W}$ vom folosi denumirea de produsul vectorial al lui $\mathbb{V}$ cu $\mathbb{W}$. De asemenea, dacă $F : \mathbb{V} \times \mathbb{W} \longrightarrow \mathbb{V} \otimes \mathbb{W}$ este aplicaţia biliniară asociată produsului tensorial, vom nota cu $v \otimes w$ imaginea elementului $(v, w) \in \mathbb{V} \times \mathbb{W}$ prin aplicaţia F.*

Propoziţia 6.5.6. *Fie v_i, $i = 1, ..., n$ vectori liniar independenţi din $\mathbb{V}$ şi w_i, $i = 1, ..., n$ vectori arbitrari din $\mathbb{W}$. Atunci relaţia*

$$\sum_{i=1}^{n} v_i \otimes w_i = 0$$

implică $w_i = 0$, pentru orice $i = 1, ..., n$.

Demonstraţie. Deoarece v_i, $i = 1, ..., n$ sunt vectori liniar independenţi, atunci putem construi transformările liniare $f^i \in \mathbb{V}^* = Hom_{\mathbb{K}}(\mathbb{V}, \mathbb{K})$ astfel încât

$$f^i(v_j) = \delta^i_j = \begin{cases} 1 & , \text{dacă} \quad i = j \\ 0 & , \text{dacă} \quad i \neq j \end{cases}$$

Construim forma biliniară

$$F : \mathbb{V} \times \mathbb{W} \longrightarrow \mathbb{K}, \quad F(v, w) = \sum_{i=1}^{n} f^i(v) g^i(w),$$

cu $g^i \in \mathbb{W}^*$, arbitrari. Din definiţia produsului tensorial rezultă că există transformarea liniară $h : \mathbb{V} \otimes \mathbb{W} \longrightarrow \mathbb{K}$ astfel încât $h(v \otimes w) = \sum\limits_{i=1}^{n} f^i(v) g^i(w)$. Atunci

$$h(\sum_{j=1}^{n} v_j \otimes w_j) = \sum_{i,j=1}^{n} f^i(v_j) g^i(w_j) = \sum_{i=1}^{n} g^i(w_i).$$

Deoarece $\sum\limits_{i=1}^{n} v_i \otimes w_i = 0$, obţinem că $\sum\limits_{i=1}^{n} g^i(w_i) = 0$, pentru orice $g^i \in \mathbb{W}^*$. Rezultă că $w_i = 0$, pentru orice $i = 1, ..., n$. □

Corolarul 6.5.7. *Dacă $v \neq 0$ şi $w \neq 0$, atunci $v \otimes w \neq 0$.*

Propoziţia 6.5.8. *Dacă $\mathbb{V}$ şi $\mathbb{W}$ sunt $\mathbb{K}$-spaţii vectoriale finit dimensionale, atunci*

$$dim_{\mathbb{K}}(\mathbb{V} \otimes \mathbb{W}) = dim_{\mathbb{K}}(\mathbb{V}) dim_{\mathbb{K}}(\mathbb{W}).$$

Demonstraţie. Folosind izomorfismul (123), precum şi Propoziţia 6.4.5, succesiv avem:

$$dim_{\mathbb{K}}(\mathbb{V} \otimes \mathbb{W}) = dim_{\mathbb{K}}(\mathbb{V} \otimes \mathbb{W})^* = dim_{\mathbb{K}} Hom_{\mathbb{K}}(\mathbb{V} \otimes \mathbb{W}, \mathbb{K}) = dim_{\mathbb{K}} \mathcal{L}_2(\mathbb{V}, \mathbb{W}; \mathbb{K}) =$$

$$dim_{\mathbb{K}}(\mathbb{V}) dim_{\mathbb{K}}(\mathbb{W}) dim_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}) = dim_{\mathbb{K}}(\mathbb{V}) dim_{\mathbb{K}}(\mathbb{W}).$$

□

Corolarul 6.5.9. *Dacă* $\{v_i\}_{i=\overline{1,n}}$ *şi* $\{w_j\}_{j=\overline{1,m}}$ *sunt baze ale* $\mathbb{K}$*-spaţiilor vectoriale* $\mathbb{V}$ *şi respectiv* $\mathbb{W}$*, atunci* $\{v_i \otimes w_j\}_{\substack{i=\overline{1,n}\\ j=\overline{1,m}}}$ *este o bază a lui* $\mathbb{V} \otimes \mathbb{W}$*.*

Demonstraţie. Deoarece mulţimea $\{v \otimes w / v \in \mathbb{V}, w \in \mathbb{W}\}$ generează $\mathbb{K}$-spaţiul vectorial $\mathbb{V} \otimes \mathbb{W}$, iar orice element $v \otimes w$ este o combinaţie liniară de elemente de forma $v_i \otimes w_j$, rezultă că $\{v_i \otimes w_j\}_{\substack{i=\overline{1,n}\\ j=\overline{1,m}}}$ generează spaţiul $\mathbb{V} \otimes \mathbb{W}$. Ţinând cont că $dim_{\mathbb{K}}(\mathbb{V} \otimes \mathbb{W}) = dim_{\mathbb{K}}(\mathbb{V}) dim_{\mathbb{K}}(\mathbb{W})$ este exact numărul de elemente din mulţimea $\{v_i \otimes w_j\}_{\substack{i=\overline{1,n}\\ j=\overline{1,m}}}$, atunci $\{v_i \otimes w_j\}_{\substack{i=\overline{1,n}\\ j=\overline{1,m}}}$ este o bază a lui $\mathbb{V} \otimes \mathbb{W}$. □

Propoziţia 6.5.10. *Dacă* $\mathbb{V}$ *şi* $\mathbb{W}$ *sunt două* $\mathbb{K}$*-spaţii vectoriale, atunci*

$$\mathbb{V} \otimes \mathbb{W} \simeq \mathbb{W} \otimes \mathbb{V}.$$

Demonstraţie. Izomorfismul dintre cele două spaţii vectoriale rezultă imediat având în vedere egalitatea dintre dimensiunile lor:

$$dim_{\mathbb{K}}(\mathbb{V} \otimes \mathbb{W}) = dim_{\mathbb{K}}(\mathbb{V}) dim_{\mathbb{K}}(\mathbb{W}) = dim_{\mathbb{K}}(\mathbb{W} \otimes \mathbb{V}).$$

În continuare vom preciza izomorfismul canonic dintre cele două spaţii vectoriale. Considerăm aplicaţia $G : \mathbb{V} \times \mathbb{W} \longrightarrow \mathbb{W} \otimes \mathbb{V}$, $G(v, w) = w \otimes v$. Deoarece G este aplicaţie biliniară, atunci există o unică transformare liniară $\bar{G} : \mathbb{V} \otimes \mathbb{W} \longrightarrow \mathbb{W} \otimes \mathbb{V}$ cu proprietatea că $\bar{G}(v \otimes w) = w \otimes v$. Deoarece mulţimea $\{w \otimes v / w \in \mathbb{W}, v \in \mathbb{V}\}$ generează $\mathbb{K}$-spaţiul vectorial $\mathbb{W} \otimes \mathbb{V}$, aplicaţia $\bar{G}$ este surjectivă. Având în vedere că $dim_{\mathbb{K}}(\mathbb{V} \otimes \mathbb{W}) = dim_{\mathbb{K}}(\mathbb{W} \otimes \mathbb{V})$, rezultă că $\bar{G}$ este izomorfism. □

Propoziţia 6.5.11. *Dacă* $\mathbb{V}$ *este un* $\mathbb{K}$*-spaţiu vectorial, atunci*

$$\mathbb{K} \otimes \mathbb{V} \simeq \mathbb{V} \text{ şi } \mathbb{V} \otimes \mathbb{K} \simeq \mathbb{V}.$$

Demonstraţie. Având în vedere propoziţia precedentă, precum şi tranzitivitatea relaţiei de izomorfism, este suficient să probăm unul dintre cele două izomorfisme. Din Propoziţia 6.5.8 avem:

$$dim_{\mathbb{K}}(\mathbb{K} \otimes \mathbb{V}) = dim_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}) dim_{\mathbb{K}}(\mathbb{V}) = dim_{\mathbb{K}}(\mathbb{V}),$$

deci $\mathbb{K} \otimes \mathbb{V} \simeq \mathbb{V}$.

Lăsăm cititorului ca exerciţiu să probeze că aplicaţia

$$f : \mathbb{K} \otimes \mathbb{V} \longrightarrow \mathbb{V}, \qquad f(k \otimes v) = kv$$

reprezintă izomorfismul canonic. □

Propoziţia 6.5.12. *Dacă* $\mathbb{V}$*,* $\mathbb{W}$ *şi* $\mathbb{U}$ *sunt trei* $\mathbb{K}$*-spaţii vectoriale, atunci*

$$(\mathbb{V} \otimes \mathbb{W}) \otimes \mathbb{U} \simeq \mathbb{V} \otimes (\mathbb{W} \otimes \mathbb{U}).$$

Demonstraţie. Din Propoziţia 6.5.8 avem:

$$dim_{\mathbb{K}}((\mathbb{V}\otimes\mathbb{W})\otimes\mathbb{U}) = dim_{\mathbb{K}}(\mathbb{V}\otimes\mathbb{W})dim_{\mathbb{K}}(\mathbb{U}) = (dim_{\mathbb{K}}(\mathbb{V})dim_{\mathbb{K}}(\mathbb{W}))dim_{\mathbb{K}}(\mathbb{U}) =$$

$$dim_{\mathbb{K}}(\mathbb{V})(dim_{\mathbb{K}}(\mathbb{W})dim_{\mathbb{K}}(\mathbb{U})) = dim_{\mathbb{K}}(\mathbb{V})dim_{\mathbb{K}}(\mathbb{W}\otimes\mathbb{U}) = dim_{\mathbb{K}}\mathbb{V}\otimes(\mathbb{W}\otimes\mathbb{U}).$$

□

Observaţia 6.5.13. *Având în vedere proprietatea de asociativitate a produsului tensorial demonstrată în Propoziţia 6.5.12 rezultă că putem scrie* $\mathbb{V}\otimes\mathbb{W}\otimes\mathbb{U}$ *în loc de* $(\mathbb{V}\otimes\mathbb{W})\otimes\mathbb{U}$*. Astfel, putem defini uşor produsul tensorial al unui număr finit de* $\mathbb{K}$*-spaţii vectoriale. În mod natural, putem extinde relaţia dintre aplicaţii biliniare şi produse tensoriale de două spaţii vectoriale la relaţia dintre aplicaţii n-liniare şi produse tensoriale de n-spaţii vectoriale.*

De asemenea, Propoziţia 6.5.12 ne permite să definim recursiv "puterea tensorială" a unui $\mathbb{K}$*-spaţiu vectorial astfel:*

$\mathbb{V}^{\otimes 0} = \mathbb{K}$

$\mathbb{V}^{\otimes 1} = \mathbb{V}$

$\mathbb{V}^{\otimes n} = \mathbb{V}^{\otimes(n-1)}\otimes\mathbb{V}$, *pentru orice* $n > 1$.

6.6. Probleme propuse

Problema 6.6.1. Care dintre următoarele aplicaţii:

a) $F : \mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $F(x, y) = x_1y_2 - x_2y_1$, unde $x = (x_1, x_2)$, $y = (y_1, y_2)$;

b) $F : \mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $F(x, y) = (x_1 - y_1)^2 - x_2y_2$, unde $x = (x_1, x_2)$, $y = (y_1, y_2)$;

c) $F : \mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $F(x, y) = x_1y_1 + 2x_2y_2 - 3x_3y_3$, unde $x = (x_1, x_2, x_3)$, $y = (y_1, y_2, y_3)$,

sunt forme biliniare?

Problema 6.6.2. Fie $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ o matrice fixată. Să se demonstreze că aplicaţia $F : \mathcal{M}_n(\mathbb{R})\times\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, $F(X, Y) = XAY^t$ este o formă biliniară. Este această formă biliniară simetrică?

Problema 6.6.3. Fie $F : V\times V \to \mathbb{R}$ o formă biliniară pozitiv definită. Atunci are loc inegalitatea:

$$F(x, y)^2 \leq F(x, x)F(y, y),$$

pentru orice $x, y \in V$, cu egalitate dacă şi numai dacă vectorii x şi y sunt liniar dependenţi.

Problema 6.6.4. Se consideră aplicaţia $F : \mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$,

$$F(x, y) = 3x_1y_2 + x_2y_1 + x_2y_2 - x_3y_1 + 2x_3y_3,$$

unde $x = (x_1, x_2, x_3)$, $y = (y_1, y_2, y_3)$.

a) Arătaţi că F este formă biliniară;

b) Scrieţi matricea asociată lui F în baza canonică $\mathcal{B}_1$ a lui $\mathbb{R}^3$;

c) Determinaţi matricea asociată lui F în baza $\mathcal{B}_2 = \{(0, 1, 1), (1, 0, 0), (1, 1, 0)\}$.

Problema 6.6.5. Să se determine formele pătratice induse de următoarele forme biliniare simetrice:

a) $F : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $F(x,y) = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 + 2x_1y_2 + 2x_2y_1 - 4x_2y_3 - 4x_3y_2$

b) $F : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, $F(AB) = Tr(AB)$.

Problema 6.6.6. Utilizând metoda lui Gauss, să se reducă la forma canonică următoarele forme pătratice:

a) $Q(x_1,x_2,x_3) = x_1^2 + 9x_2^2 + 17x_3^2 - 2x_1x_2 + 4x_1x_3;$

b) $Q(x_1,x_2,x_3) = 4x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 4x_1x_2 - 4x_1x_3 + 8x_2x_3;$

c) $Q(x_1,x_2,x_3,x_4) = x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4;$

d) $Q(x_1,x_2,x_3,x_4) = x_1^2 + 2x_2^2 - 3x_4^2 + x_1x_2 + 2x_1x_3 - 4x_1x_4 + x_2x_3 + x_3x_4.$

Problema 6.6.7. Reduceţi următoarele forme pătratice la forma canonică, utilizând metoda lui Jacobi:

a) $Q(x_1,x_2,x_3) = x_1^2 + 8x_2^2 + x_3^2 + 16x_1x_2 + 4x_1x_3 + 4x_2x_3;$

b) $Q(x_1,x_2,x_3) = x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2 - 4x_1x_2 - 4x_2x_3;$

c) $Q(x_1,x_2,x_3,x_4) = x_1^2 - x_2^2 + x_3^2 - 2x_4^2 - 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 2x_1x_4 +$
$2x_2x_3 - 4x_2x_4;$

d) $Q(x_1,x_2,x_3,x_4) = x_1^2 + x_2^2 + 4x_3^2 + 4x_4^2 + 4x_1x_3 + 2x_1x_4 + 2x_2x_3 +$
$2x_2x_4 + 6x_3x_4.$

Problema 6.6.8. Cu ajutorul metodei transformărilor ortogonale, să se reducă la forma canonică următoarele forme pătratice:

a) $Q(x_1,x_2,x_3) = x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2 - 4x_1x_2 - 4x_2x_3;$

b) $Q(x_1,x_2,x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 2x_1x_2 - 2x_1x_3 - 2x_2x_3;$

c) $Q(x_1,x_2,x_3) = 3x_1^2 + 5x_2^2 + 7x_3^2 - 8x_1x_2 + 8x_2x_3.$

Problema 6.6.9. Se consideră forma pătratică

$$Q(x_1,x_2,x_3) = 5x_1^2 + 6x_2^2 + 4x_3^2 - 4x_1x_2 - 4x_1x_3.$$

Utilizând metoda lui Gauss, metoda lui Jacobi şi respectiv metoda transformărilor ortogonale, să se reducă forma pătratică la forma canonică. Verificaţi Teorema inerţiei.

Problema 6.6.10. Fie $Q : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ forma pătratică definită de

$$Q(x_1,x_2,x_3) = (\alpha-2)x_1^2 + (\alpha-2)x_2^2 + (\alpha+1)x_3^2 - 2x_1x_2 + 4x_1x_3 - 4x_2x_3,$$

unde α este un parametru real

a) Pentru ce valori ale lui α forma canonică este pozitiv definită?

b) Pentru $\alpha = 3$ să se determine forma canonică a lui Q, folosind metoda transformărilor ortogonale.

(Concurs Traian Lalescu, Etapa locala 2009, Universitatea Tehnică de Construcţii Bucureşti)

Problema 6.6.11. Fie $\mathbb{V}$ şi $\mathbb{W}$ două $\mathbb{K}$-spaţii vectoriale. Să se gşeasca izomorfismul natural:

$$(\mathbb{V} \otimes \mathbb{W})^* \simeq \mathbb{V}^* \otimes \mathbb{W}^*.$$

Problema 6.6.12. Fie $\mathbb{V}$ şi $\mathbb{W}$ două $\mathbb{K}$-spaţii vectoriale. Dacă v_1, v_2 sunt doi vectori liniar independenţi din $\mathbb{V}$, iar w_1, w_2 sunt doi vectori liniar independenţi din $\mathbb{W}$, să se demonstreze că nu există $v \in \mathbb{V}$ şi $w \in \mathbb{W}$ astfel încât

$$v_1 \otimes w_1 + v_2 \otimes w_2 = v \otimes w.$$

Problema 6.6.13. Să se stabilească următoarele izomorfisme:

a) $\mathbb{R} \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R} \simeq \mathbb{R}$, ca şi $\mathbb{Q}$-spaţii vectoriale;

b) $\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C} \simeq \mathbb{C} \times \mathbb{C}$, ca şi $\mathbb{Q}$-spaţii vectoriale;

c) $\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} \simeq \mathbb{R}^4$, ca şi $\mathbb{R}$-spaţii vectoriale.

Soluţii

1.5.1 Demonstrăm mai întâi că $(a) \Rightarrow (b)$ şi $(a) \Rightarrow (c)$. Fie $A = \{a_1 \dots, a_n\}$. Dacă f este injectivă, atunci $f(a_1), \dots, f(a_n)$ sunt n elemente distincte din A, deci $A = \{f(a_1), \dots, f(a_n)\}$, adică f este surjectivă şi implicit bijectivă.

Dacă f este surjectivă, atunci $\{f(a_1), \dots, f(a_n)\} = A$ deci $f(a_1), \dots, f(a_n)$ sunt distincte două câte două, adică f este injectivă şi prin urmare f este bijectivă.

Demonstrăm acum implicaţiile $(b) \Rightarrow (a)$ şi $(c) \Rightarrow (a)$. Presupunem prin absurd că A este o mulţime infinită şi vom construi funcţiile $f, g : A \to A$, f injectivă nesurjectivă, g surjectivă neinjectivă. Fiind infinită, A conţine o submulţime infinită $B = \{a_1, a_2, \dots, a_n, \dots\}$. Definim funcţiile $f, g : A \to A$ prin

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{dacă } x \in A \setminus B \\ a_{n+1} & \text{dacă } x = a_n \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} x, & \text{dacă } x \in A \setminus B \cup \{a_1\} \\ a_{n-1} & \text{dacă } x = a_n,\ n \geq 2. \end{cases}$$

Deoarece $a_1 \notin \mathrm{Im}(f)$, $g(a_1) = g(a_2)$ rezultă că f nu este surjectivă, iar g nu este injectivă. Pe de altă parte, f este evident injectivă (este injectivă pe ramuri iar $f(A \setminus B) \cap f(B) = \emptyset$) iar g este evident surjectivă. Deci f este injectivă şi nu e surjectivă, iar g este surjectivă şi nu e injectivă, o contradicţie.

1.5.2 Putem presupune fără a restrânge generalitatea că $A = \{1, \dots, m\}$ şi $B = \{1, \dots, n\}$. Fie $f : A \to B$ o funcţie oarecare. Atunci f este perfect determinată de valorile $f(1), \dots, f(m)$.

(a) Fiecare $f(i)$ poate fi ales arbitrar din B, deci poate fi ales în n moduri. Prin urmare numărul total de funcţii care se pot defini pe A cu valori în B este n^m.

(b) În mod evident, dacă $m > n$ rezultă din definiţia funcţiei injective că nu există funcţii injective definite pe A cu valori în B. Fie $m \leq n$ şi f o funcţie injectivă. Rezultă că $f(1), \dots, f(m)$ sunt distincte două câte două. În particular a da o funcţie injectivă f revine la a alege o submulţime ordonată cu m elemente a lui B. Prin urmare numărul funcţiilor injective este numărul de submulţimi ordonate cu n elemente a mulţimii B (cu n elemente) adică $A_n^m = n!/(n-m)!$.

(c) Pentru calculul funcţiilor surjective avem nevoie de Principiul includerii şi excluderii pe care îl enunţăm fără demonstraţie (demonstraţia se poate face prin inducţie după numărul de mulţimi n).

Principiul includerii şi excluderii. Fie Y o mulţime finită nevidă şi $Y_1, \dots, Y_n$ submulţimi ale lui Y. Atunci are loc:

$$|Y_1 \cup \dots \cup Y_n| = \sum_{i=1}^{n} |Y_i| - \sum_{1 \leq i < j \leq n} |Y_i \cap Y_j| + \cdots \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_l \leq n} |Y_{i_1} \cap \cdots \cap Y_{i_l}| + \cdots + (-1)^{n+1} |Y_1 \cap \cdots \cap Y_n|.$$

Numărul funcţiilor surjective se obţine scăzând din numărul total de funcţii (calculat la punctul (a)) pe cel al funcţiilor care nu sunt surjective. Să notăm cu N numărul funcţiilor care nu sunt surjective. Prin definiţie, f nu este surjectivă dacă există $i \in B$ astfel încât $i \notin \mathrm{Im}(f)$. Să notăm cu Y_i, pentru orice $i = 1, \ldots, n$, mulţimea funcţiilor $f : A \to B$ cu $i \notin \mathrm{Im}(f)$. Atunci $N = |Y_1 \cup \cdots \cup Y_n|$ şi pentru calculul lui N folosim principiul includerii şi excluderii. Rămâne de văzut cine este $|Y_{i_1} \cap \cdots \cap Y_{i_l}|$, unde l parcurge mulţimea $\{1, \ldots, n\}$ iar $1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_l \leq n$. Din definiţia lui Y_i obţinem că mulţimea $Y_{i_1} \cap \cdots \cap Y_{i_l}$ este mulţimea funcţiilor definite pe A care iau valori în mulţimea $B \setminus \{i_1, \ldots, i_l\}$, deci are $(n-l)^m$ elemente conform (a). Pentru un l fixat, avem C_n^l astfel de intersecţii. Deci, numărul de funcţii surjective este egal cu

$$n^m - |Y_1 \cup \cdots \cup Y_n| = n^m - (C_n^1(n-1)^m - C_n^2(n-2)^m + \cdots + (-1)^n C_n^{n-1}(n-(n-1))^m),$$

adică numărul căutat.

1.5.3 (a) $\sim$ este reflexivă ($a - a = 0 \in \mathbb{Z}$), simetrică ($a - b \in \mathbb{Z}$ implică $b - a \in \mathbb{Z}$) şi tranzitivă ($a - b \in \mathbb{Z}$ şi $b - c \in \mathbb{Z}$ implică $a - c = (a-b) + (b-c) \in \mathbb{Z}$), deci $\sim$ este relaţie de echivalenţă. (b) $\equiv$ este reflexivă, simetrică şi nu este tranzitivă ($|0-1| < 3$, $|1-3| < 3$ dar $|0-3| = 3 \geq 3$), deci $\equiv$ nu este relaţie de echivalenţă. (c) $\circ$ nu este reflexivă ($1/3 + 1/3 \notin \mathbb{Z}$) , este simetrică şi nu este tranzitivă ($2/3 + 1/3 \in \mathbb{Z}$, $1/3 + 5/3 \in \mathbb{Z}$ dar $2/3 + 5/3 \notin \mathbb{Z}$), deci nu este relaţie de echivalenţă.

1.5.4 Se verifică imediat că $\sim$ este relaţie de echivalenţă. Clasa de echivalenţă a lui z este $\hat{z} = \{w |\, |w| = |z|\}$. Să observăm că $\hat{0} = \{0\}$, iar $z \sim |z|$ implică $\hat{z} = \widehat{|z|}$ pentru orice $z \in \mathbb{C}$. Geometric, prin identificarea lui $\mathbb{C}$ cu planul, via bijecţia $z = a + ib \mapsto (a, b)$, clasele de echivalenţă sunt cercurile cu centru în origine. Asta ne arată că un sistem complet de reprezentanţi este orice semidreaptă inchisă care pleacă din originea planului. Algebric, să arătăm că $\mathbb{R}_+$ este un sistem complet de reprezentanţi. Deoarece $z \sim |z|$ şi $|z| \geq 0$, $|z| \in \mathbb{R}$ rezultă că pentru orice $z \in \mathbb{C}$ există un element $a \in \mathbb{R}_+$ astfel încât $z \sim a$. Mai departe, este evident că dacă $a, b \in \mathbb{R}_+$ cu $|a| = |b|$ rezultă că $a = b$. Obţinem astfel că $\mathbb{R}_+$ este un sistem complet de reprezentanţi pentru $\sim$. Alegerea sistemului complet de reprezentanţi nu e unică. Cititorul este invitat să demonstreze că oricare din următoarele mulţimi este un sistem complet de reprezentanţi pentru $\sim$: $\mathbb{R}_-$, $i\mathbb{R}_+ = \{ai|\, a \in \mathbb{R}_+\}$, $\{a + ai|\, a \in \mathbb{R}_+\}$.

1.5.5 Se verifică la fel ca la exerciţiul anterior că $\sim$ este o relaţie de echivalenţă. Dacă $z = a + ib \in \mathbb{C}$ este un număr complex atunci se verifică imediat că $a + ib \sim c + id$ dacăşi numai dacă $b = d$. Deci clasa de echivalenţă a unui numărcompllex $z = a + ib$ este $\widehat{a+ib} = \{c + ib|\, c \in \mathbb{R}\}$. Geometric, clasele de echivalenţă sunt dreptele verticale, iar un sistem complet de reprezentanţi este dat de orice dreaptă care nu este verticală. Algebric, se poate verifica la fel ca la exerciţiul anterior că oricare din mulţimile următoare este un sistem complet de reprezentanţi: $\mathbb{R}$, $\{a + ib|\, b \in \mathbb{R}\}$, $\{x + 1 + ix|\, x \in \mathbb{R}\}$.

1.5.6 Relaţia $\sim$ este reflexivă ($a + b = b + a$), simetrică ($a + d = b + c$ implică $b + c = a + d$) şi tranzitivă ($a + d = b + c$ şi $c + f + d + e$ implică, prin adunarea relaţiilor, că $a + f = b + e$), deci este o relaţie de echivalenţă. Fie mulţimea factor $\mathbb{N} \times \mathbb{N}/\sim = \{\widehat{(a,b)}|\, a, b \in \mathbb{N}\}$. Definim funcţia $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N}/\sim \to \mathbb{Z}$ prin $f(\widehat{(a,b)}) = a - b$. Arătăm că f este bine definită c si apoi că f

este funţie bijectivă. Într-adevăr să presupunem că $a, b, c, d \in \mathbb{N}$ sunt astfel încât $\widehat{(a,b)} = \widehat{(c,d)}$. Obţinem din definiţia lui $\sim$ că $a + d = b + c$, adică $a - b = c - d$. Cu alte cuvinte, definiţia lui f nu depinde de reprezentantul ales al clasei de echivalenţă, adică f este bine definită. f este injectivă deoarece dacă $f(\widehat{(a,b)}) = f(\widehat{(c,d)})$ pentru $a, b, c, d \in \mathbb{N}$, rezultă că $a - b = c - d$, de unde $a+d = b+c$ adică $\widehat{(a,b)} = \widehat{(c,d)}$. Pentru surjectivitate, este uşor de văzut că $f(\widehat{(n,0)}) = n$ şi $f(\widehat{(0,n)}) = -n$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$. Obţinem că f este bijectivă, ceea ce doream.

1.5.7 Operaţia $*$ este asociativă dacăşi numai dacă $(x * y) * z = x * (y * z)$ pentru orice $x, y, z \in \mathbb{Z}$. Calculând obţinem $(x * y) * z - x * (y * z) = (ac + b - b^2)(x - z)$. Prin urmare $*$ este asociativă dacă şi numai dacă $b^2 = b + ac$. Operaţia $*$ are element neutru dacă şi numai dacă există $e \in \mathbb{Z}$ astfel încât pentru orice $x \in \mathbb{Z}$ avem $x * e = e * x = x$. Dar $x * e - x = e * x - x = (ae - 1 + b)x + be + c$, deci $*$ are element neutru dacă şi numai dacă $(ae - 1 + b)x + be + c = 0$ pentru orice $x \in \mathbb{Z}$ dacă şi numai dacă $ae - 1 + b = 0$ şi $be + c = 0$. Aşadar $*$ are element neutru dacă şi numai dacă $b|c$ şi $b^2 = b + ac$.

1.5.8 Fie $\phi : (\mathbb{Q}, +) \to (\mathbb{Z}, +)$ un morfism de grupuri. Din definiţia morfismului obţinem că $\phi(0) = 0$. Să presupunem că $\phi(1) = a \neq 0$ şi fie p un număr prim mai mare strict decât a (putem alege un astfel de p deoarece mulţimea numerelor prime este infinită). Deoarece $\phi(x + y) = \phi(x) + \phi(y)$ pentru orice $x, y \in \mathbb{Z}$ obţinem că

$$a = \phi(1) = \phi(\underbrace{\frac{1}{p} + \cdots + \frac{1}{p}}_{p}) = \underbrace{\phi(\frac{1}{p}) + \cdots + \phi(\frac{1}{p})}_{p} = p\phi(\frac{1}{p}),$$

de unde rezultă că $\phi(\frac{1}{p}) = a/p \notin \mathbb{Z}$, o contradicţie cu $\mathrm{Im}(\phi) \subset \mathbb{Z}$. Aşadar avem că $\phi(1) = 0$. Asta implică imediat că $\phi(n) = 0$ pentru orice $n \in \mathbb{Z}$ şi la fel ca mai sus că $\phi(1/n) = 0$ pentru orice $n \in \mathbb{Z}^*$. Implicit obţinem că $\phi(x) = 0$ pentru orice $x \in \mathbb{Q}$.

1.5.9 Să observăm mai întâi că $(\mathbb{Z}_{2012}, +)$ este grup finit pe când $(\mathbb{Z}, +)$, $(\mathbb{Q}, +)$ şi $(\mathbb{Q}^*, \cdot)$ sunt grupuri infinite, deci primul grup nu este izomorf cu nici unul din celelalte 3 grupuri. Am văzut în problema anterioară că singurul morfism de grupuri de la $(\mathbb{Q}, +)$ la $(\mathbb{Z}, +)$ este morfismul nul, prin urmare aceste două grupuri nu sunt izomorfe. În sfârşit $(\mathbb{Q}^*, \cdot)$ are un element de ordin 2, pe -1, iar celelalte două grupuri nu au.

1.5.10 E clar că matricea unitate se află în $\mathbb{H}$. Se arată prin calcul că $\mathbb{H}$ este parte stabilă în raport cu adunarea şi înmulţirea matricelor. De exemplu, pentru înmulţire avem

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma & \delta \\ -\bar{\delta} & \bar{\gamma} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha\gamma - \beta\bar{\delta} & \alpha\delta + \beta\bar{\gamma} \\ -\overline{\alpha\delta + \beta\bar{\gamma}} & \overline{\alpha\gamma - \beta\bar{\delta}} \end{pmatrix}.$$

Deoarece $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ este inel (vezi Teorema 2.1.11), rezultă că $\mathbb{H}$ este subinel al lui $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$. Fie $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{pmatrix}$ o matrice nenulă din $\mathbb{H}$, deci $\Delta = |\alpha^2| + |\beta^2| \neq 0$. Se verifică uşor că

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{\alpha}/\Delta & -\beta/\Delta \\ \bar{\beta}/\Delta & \alpha/\Delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

de unde rezultă că orice element nenul al lui $\mathbb{H}$ este inversabil, ceea ce înseamnă că $\mathbb{H}$ este corp. În plus,

$$\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix},$$

implică faptul că $\mathbb{H}$ este corp necomutativ. Pentru demonstrarea ultimei afirmaţii, definim mai întâi morfismul (injectiv) de corpuri $f : \mathbb{C} \to \mathbb{H}$, $f(a) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & \bar{a} \end{pmatrix}$. Prin acest morfism putem gândi $\mathbb{R}$ şi $\mathbb{C}$ ca pe subcorpuri ale lui $\mathbb{H}$ prin identificarea fiecărui $a \in \mathbb{C}$ cu $f(a)$. În particular, numărul real a se identifică cu $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$ iar i se identifică cu $\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$. Considerăm în plus şi elementele $j = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $k = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$. Prin calcul se arată că $ij = k$, $ji = -k$, $jk = i$, $kj = -i$, $ki = j$, $ik = -j$ şi $i^2 = j^2 = k^2 = -1$. În plus, dacă luăm un element arbitrar al lui $\mathbb{H}$, $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{pmatrix}$, cu $\alpha = x + iy \in \mathbb{C}$ şi $\beta = z + iu \in \mathbb{C}$, îl putem identifica via notaţiile făcute mai sus cu

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + iy & z + iu \\ -z + iu & x - iy \end{pmatrix} = x + yi + zj + uk,$$

scrierea fiind unică. Asta înseamnă că mai putem scrie pe $\mathbb{H}$ şi sub forma

$$\mathbb{H} = \{x + yi + zj + uk |\ x, y, z, u \in \mathbb{R}\},$$

împreună cu relaţiile $ij = k$, $ji = -k$, $jk = i$, $kj = -i$, $ki = j$, $ik = -j$ şi $i^2 = j^2 = k^2 = -1$. Fie următoarea submulţime a lui $\mathbb{H}$, $\{yi+zj+uk |\ y, z, u \in \mathbb{R}, y^2+z^2+u^2 = 1\}$. Această mulţime este infinită şi are proprietatea că orice element al ei este soluţie a polinomului $X^2 + 1 \in \mathbb{H}[X]$, cum se poate verifica uşor ţinând cont de regulile de calcul din $\mathbb{H}$.

1.5.11 Fie R un astfel de inel şi fie $a \in R$, $a \neq 0$. Definim funcţia $\phi_a : R \to R$, $\phi_a(x) = ax$. Dacă $\phi_a(x) = \phi_a(y)$, atunci $ax = ay$ sau $a(x-y) = 0$, de unde rezultă că $x = y$, deoarece inelul R este integru. Prin urmare, funcţia ϕ_a este injectivă şi aplicând Propoziţia 1.1.2 rezultă că ϕ_a este şi surjectivă. De aici, obţinem că există $b \in R$ astfel încât $1 = \phi_a(b) = ab$. Analog, considerând funcţia $\psi_a : R \to R$, $\psi_a(x) = xa$ obţinem că există $c \in R$ astfel încât $1 = \psi_a(c) = ca$. Deci, avem $ab = 1 = ca$ de unde obţinem $b = 1 \cdot b = (ca)b = c(ab) = c \cdot 1 = c$, adică a este inversabil. Cum a a fost ales arbitrar, obţinem că R este un corp.

1.5.12 Avem că $\hat{x} \in \mathbb{Z}_n \Leftrightarrow$ există $y \in \mathbb{Z}$ cu $\hat{x}\hat{y} = \hat{1} \Leftrightarrow$ există $a, y \in \mathbb{Z}$ cu $xy + an = 1 \Leftrightarrow (x, n) = 1$. De aici obţinem că $\mathbb{Z}_n$ este corp $\Leftrightarrow U(\mathbb{Z}_n) = Z_n \setminus \{\hat{0}\} \Leftrightarrow$ toţi întregii strict pozitivi mai mici decât n sunt primi cu $n \Leftrightarrow n$ este număr prim.

1.5.13 E clar că matricea unitate se află în $\mathbb{K}$. Se arată prin calcul că $\mathbb{K}$ este parte stabilă în raport cu adunarea şi înmulţirea matricelor. Prin urmare $\mathbb{K}$ este un subinel al lui $\mathcal{M}_2(\mathbb{Z}_7)$ şi se verifică imediat că $\mathbb{K}$ este inel comutativ. Fie acum $A = \begin{pmatrix} \hat{a} & \hat{b} \\ -\hat{b} & \hat{a} \end{pmatrix}$ o matrice nenulă din $\mathbb{K}$. Cum $\det(A) = \hat{a}^2 + \hat{b}^2$ şi $\hat{a}^2, \hat{b}^2 \in \{\hat{0}, \hat{1}, \hat{2}, \hat{4}\}$, deoarece $\hat{a}, \hat{b} \in \mathbb{Z}_7$ rezultă că $\det(A) = \hat{0} \Leftrightarrow \hat{a} = \hat{b} = \hat{0} \Leftrightarrow A = 0 \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z}_7)$. Deci $A \neq 0 \Leftrightarrow \det(A) \neq \hat{0}$. Se verifică imediat că matricea

$\begin{pmatrix} \hat{a}/\det(A) & -\hat{b}/\det(A) \\ \hat{b}/\det(A) & \hat{a}\det(A) \end{pmatrix}$ aparţine lui $\mathbb{K}$ şi este inversa lui A. Prin urmare, obţinem $\mathbb{K}$ este un corp comutativ. Fie acum p un număr prim astfel încât $p \equiv 3 (\bmod 4)$. Analog se arată că $\mathbb{K}$ este inel comutativ. La fel ca mai sus este suficient să arătăm că $A = \begin{pmatrix} \hat{a} & \hat{b} \\ -\hat{b} & \hat{a} \end{pmatrix} \neq 0 \Leftrightarrow$ $\det(A) \neq \hat{0}$. Această afirmaţie este echivalentă cu $\hat{a}^2 + \hat{b}^2 = \hat{0} \Leftrightarrow \hat{a} = \hat{b} = \hat{0}$ sau $p|a^2 + b^2 \Leftrightarrow p|a$ şi $p|b$. Această ultimă echivalenţă este datorată ipotezei că $p \equiv 3 (\bmod 4)$. Demonstrarea acestui fapt nu este deloc uşoară, cititorul având nevoie de cunoştinţe de teoria numerelor (simbol Legendre) sau de algebră. Dăm în continuare demonstraţia variantei algebrice, care presupune cunoaşterea elementelor prime ale inelului $\mathbb{Z}[i] = \{a + bi \ \ a, b \in \mathbb{Z}\}$. Mai exact, în $\mathbb{Z}[i]$ se ştie că numerele prime p din $\mathbb{Z}$ care au proprietatea că $p \equiv 3 (\bmod 4)$ sunt numere prime şi în $\mathbb{Z}[i]$. Atunci din $p|a^2 + b^2$ rezultă că $p|(a + bi)(a - bi)$ şi folosind faptul că p este prim în $\mathbb{Z}[i]$ rezultă că $p|a + bi$ sau $p|a - bi$. Dacă $p|a + bi$ atunci din definiţia divizibilităţii în $\mathbb{Z}[i]$ obţinem că există $z = c + di \in \mathbb{Z}[i]$ astfel încât $a + bi = p(c + di)$. Egalitatea de numere complexe implică $a = pc$ şi $b = pd$, adică $p|a$ şi $p|b$.

1.5.14 Presupunem prin absurd că există un izomorfism de corpuri $\phi : \mathbb{Q}(\sqrt{3}) \to \mathbb{Q}(\sqrt{5})$, unde $\mathbb{Q}(\sqrt{3}) = \{a + b\sqrt{3} |\ a, b \in \mathbb{Q}\}$ şi $\mathbb{Q}(\sqrt{5}) = \{a + b\sqrt{5} |\ a, b \in \mathbb{Q}\}$. Deoarece ϕ este morfism de corpuri si $\phi(1) = 1$ rezultă că $\phi(q) = q$ pentru orice $q \in \mathbb{Q}$. Fie $\phi(\sqrt{3}) = a + b\sqrt{5} \in \mathbb{Q}(\sqrt{5})$. Atunci

$$3 = \phi(3) = \phi(\sqrt{3}^2) = \phi(\sqrt{3})^2 = (a + b\sqrt{5})^2 = (a^2 + 5b^2) + 2ab\sqrt{5},$$

de unde obţinem că $(a^2+5b^2-3)+2ab\sqrt{5} = 0$. Dacă $ab \neq 0$ atunci $\sqrt{5} = -(a^2+5b^2-3)/(2ab) \in \mathbb{Q}$, o contradicţie. Deci $ab = 0$, adică $a = 0$ sau $b = 0$. Dacă $a = 0$ atunci obţinem $3 = 5b^2$, o contradicţie deoarece $b \in \mathbb{Q}$. Cazul $b = 0$ implică $3 = a^2$, o contradicţie cu $a \in \mathbb{Q}$. Am obţinut că presupunerea iniţială este falsă, adică cele 2 corpuri nu sunt izomorfe.

1.5.15 Demonstrăm rezultatul în cazul mai general în care mulţimile A şi B sunt echipotente, adică există o funcţie bijectivă $f : A \to B$ (în cazul nostru mulţimile fiind finite şi având acelaşi număr de elemente rezultă imediat existenţa acestei funcţii bijective). Definim $\phi : S_A \to S_B$, $\phi(\sigma) = f\sigma f^{-1}$, unde prin f^{-1} am notat inversa lui f. Arătăm că ϕ este izomorfism de grupuri. Într-adevăr

$$\phi(\sigma \circ \tau) = f\sigma\tau f^{-1} = (f\sigma f^{-1})(f\tau f^{-1}) = \phi(\sigma)\phi(\tau),$$

adică ϕ este morfism de grupuri. Probăm injectivitatea: $\phi(\sigma) = \phi(\tau) \Rightarrow f\sigma f^{-1} = f\tau f^{-1} \Rightarrow$ $(f\sigma f^{-1})(b) = (f\tau f^{-1})(b)$ pentru orice $b \in B$. De aici obţinem că $f(\sigma(f^{-1}(b))) = f(\tau(f^{-1}(b)))$ pentru orice $b \in B$ şi deoarece f este bijectivă avem $\sigma(a) = \tau(a)$ pentru orice $a \in A$, adică $\sigma = \tau$. Surjectivitatea rezultă imediat observând că pentru o permutare $\tau \in S_B$ funcţia $f^{-1}\tau f \in S_A$ şi $\phi(f^{-1}\tau f) = \tau$.

1.5.16 $\sigma = (1\ 13\ 5\ 10)(3\ 15\ 8)(4\ 14\ 11\ 7\ 12\ 9)$, $\mathrm{sgn}(\sigma) = (-1)^3(-1)^2(-1)^5 = 1$, $\mathrm{ord}(\sigma) = [4, 3, 6] = 12$; $\tau = (1\ 14)(2\ 9\ 15\ 13\ 4)(3\ 10)(5\ 12\ 7)(8\ 11)$, $\mathrm{sgn}(\tau) = (-1)^1(-1)^4(-1)^1(-1)^2(-1)^1 =$

-1, $\text{ord}(\tau) = [2,5,2,3,2] = 30$;

$$\sigma^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 \\ 5 & 2 & 8 & 11 & 1 & 6 & 9 & 15 & 14 & 13 & 12 & 4 & 10 & 7 & 3 \end{pmatrix},$$

de unde $\sigma^2 = (1\ 5)(3\ 8\ 15)(4\ 11\ 12)(7\ 9\ 14)(10\ 13)$, $\text{sgn}(\sigma^2) = 1$, $\text{ord}(\sigma^2) = [2,3,3,3,2] = 6$ (sau $\text{ord}(\sigma^2) = \frac{\text{ord}(\sigma)}{(2,\text{ord}(\sigma))} = \frac{12}{2} = 6$);

$$\sigma\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 \\ 11 & 4 & 1 & 2 & 9 & 6 & 10 & 7 & 8 & 15 & 3 & 12 & 14 & 13 & 5 \end{pmatrix},$$

de unde $\sigma\tau = (1\ 11\ 3)(2\ 4)(5\ 9\ 8\ 7\ 10\ 15)(13\ 14)$, $\text{sgn}(\sigma\tau) = -1$, $\text{ord}(\sigma\tau) = [3,2,6,2] = 6$;

$$\tau\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 \\ 4 & 9 & 13 & 1 & 3 & 6 & 7 & 10 & 2 & 14 & 5 & 15 & 12 & 8 & 11 \end{pmatrix},$$

de unde $\tau\sigma = (1\ 4)(2\ 9)(3\ 13\ 12\ 15\ 11\ 5)(8\ 10\ 14)$, $\text{sgn}(\tau\sigma) = -1$, $\text{ord}(\tau\sigma) = [2,2,6,3] = 6$;

$$\sigma^2\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 \\ 7 & 14 & 13 & 2 & 4 & 6 & 1 & 12 & 3 & 8 & 15 & 9 & 11 & 5 & 10 \end{pmatrix},$$

de unde $\sigma^2\tau = (1\ 7)(2\ 14\ 5\ 4)(3\ 13\ 11\ 15\ 10\ 8\ 12\ 9)$, $\text{sgn}(\sigma^2\tau) = -1$, $\text{ord}(\sigma^2\tau) = [2,4,8] = 8$.

1.5.17 (1) $\sigma = (1\ 3\ 5\ 9)(2\ 4\ 7\ 8\ 6)(10\ 11)$; (2) $\sigma = (1\ 3)(3\ 5)(5\ 9)(2\ 4)(4\ 7)(7\ 8)(8\ 6)(10\ 11)$; (3) $\text{sgn}(\sigma) = (-1)^3(-1)^4(-1) = 1$, $\text{ord}(\sigma) = [4,5,2] = 20$. (4) Ştim că ordinul unei permutări este egal cu cel mai mic multiplu comun al lungimii ciclilor care apar în descompunerea ei în produs de cicli disjuncţi. Deci, dacă ar exista $\tau \in S_{11}$ astfel încât $\text{ord}(\tau) = 35$ şi dacă $n_1, \dots, n_k$ sunt lungimile ciclilor care apar în descompunerea lui τ în produs de cicli disjuncţi, atunci avem $k \geq 1$, $1 \leq n_1, \dots, n_k \leq 11$, $n_1 + \cdots + n_k = 11$ şi $[n_1, \dots, n_k] = 35$. Acest lucru e imposibil, deoarece singura posibilitate de a obţine 35 ca cel mai mic multiplu comun a unor numere întregi mai mici sau egale decât 11 este ca 2 dintre numere să fie 5, respectiv 7, o contradicţie cu faptul că suma lor este mai mică decât 11. (5) Să presupunem că există $\tau \in S_{11}$ astfel încât $\tau^{2011} = \sigma$ şi fie $\tau = \tau_1 \cdots \tau_k$ descompunerea lui τ în produs de cicli disjuncţi de lungimi $n_1, \dots, n_k \leq 11$. Cum 2011 este un număr prim şi $\tau^{2011} = \tau_1^{2011} \cdots \tau_k^{2011}$ rezultă că τ_i^{2011} este tot un ciclu de lungime n_i pentru orice $i \in \{1, \dots, k\}$. Rezultă că $k = 3$ $n_1 = 4$, $n_2 = 5$, $n_3 = 2$ şi $\tau_1^{2011} = (1\ 3\ 5\ 9)$, $\tau_2^{2011} = (2\ 4\ 7\ 8\ 6)$, $\tau_3^{2011} = (10\ 11)$. Obţinem că $\tau_1^3 = (1\ 3\ 5\ 9)$, de unde rezultă că $\tau_1 = (1\ 9\ 5\ 3)$; $\tau_2 = (2\ 4\ 7\ 8\ 6)$ şi $\tau_3 = (10\ 11)$. Deci ecuatţia dată are o singură soluţie $\tau = (1\ 9\ 5\ 3)(2\ 4\ 7\ 8\ 6)(10\ 11)$.

1.5.18 (a) S_n este generat de toate transpoziţiile şi $(i\ j) = (1\ i)(1\ j)(1\ i)$. (b) $(2\ 3)(1\ 2)(2\ 3) = (1\ 3)$, $(3\ 4)(1\ 3)(3\ 4) = (1\ 4)$, etc. şi aplicăm apoi (a). (c) $(1\ 2 \dots\ n)(1\ 2)(1\ 2 \dots\ n)^{-1} = (2\ 3)$, $(1\ 2 \dots\ n)(2\ 3)(1\ 2 \dots\ n) = (3\ 4)$, etc. şi aplicăm (b).

1.5.19 (a) Mulţimea ordinelor posibile permutărilor din S_5 este $\{1,2,3,4,5,6\}$. Într-adevăr, dacă n este astfel încât $n = [n_1, \dots, n_k]$, cu $n_1 + \cdots + n_k = 5$ şi $n_1, \dots, n_k \geq 1$ atunci avem următoarele posibilităţi $5 = 5$, $5 = 4+1$, $5 = 3+2$, $5 = 3+1+1$, $5 = 2+2+1$, $5 = 2+1+1+1$ şi $5 = 1+1+1+1+1$. De aici obţinem concluzia dorită. Să dăm în continuare câte un exemplu pentru fiecare ordin posibil. Pentru $n = 1$ avem permutarea identică; pentru $n \in \{2,3,4,5\}$ un ciclu de lungime n; pentru $n = 6$ un produs între un ciclu de lungime 3 şi o transpoziţie, i.e. (1 2 3)(4 5). (b) Putem lua de exemplu ciclul de lungime 10, $\sigma = (1\ 3\ 5\ 7\ 9\ 2\ 4\ 6\ 8\ 10)$ şi observăm că $\sigma^5 = (1\ 2)(3\ 4)(5\ 6)(7\ 8)(9\ 10)$. (c) Dacă σ este un n-ciclu definit astfel:

$$a_1 \xrightarrow{\sigma} a_2 \xrightarrow{\sigma} a_3 \ldots \xrightarrow{\sigma} a_n \xrightarrow{\sigma} a_1,$$

atunci $\sigma^k(a_i) = a_{k+i (\operatorname{mod} n)}$ pentru orice k şi orice $i = 1, \ldots, n$. Prin urmare, dacă ar exista un ciclu de lungime n, σ, astfel încât $\sigma^k = (1\ 2)(3\ 4\ 5)$ atunci $n = 5$ şi $\{a_1, \ldots, a_5\} = \{1, \ldots, 5\}$. Acest lucru nu este însă posibil deoarece $\operatorname{ord}(\sigma) = 5$ iar $\operatorname{ord}(\tau) = 6$.

1.5.20 Aplicăm succesiv Teorema împărţirii cu rest: $X^4 - 2X^3 + 1 = X(X^3 - 2X^2 + 1) + (-X + 1)$; $X^3 - 2X^2 + 1 = (-X^2 + X + 1)(-X + 1) + 0$. Deci, conforma algoritmului lui Euclid, cel mai mare divizor comun al polinoamelor $X^4 - 2X^3 + 1$ şi $X^3 - 2X^2 + 1$ este $X - 1$. Obţinem că $X - 1 = (-1)(X^4 - 2X^3 + 1) + X(X^3 - 2X^2 + 1)$.

1.5.21 $X - 1$ este ireductibil în $\mathbb{R}[X], \mathbb{C}[X]$. $X^2 - 1 = (X - 1)(X + 1)$; $X^3 - 1 = (X - 1)(X^2 + X + 1)$ este descompunerea în polinoame ireductibile în $\mathbb{R}[X]$; în $\mathbb{C}[X]$ putem scrie $X^3 - 1 = (X - 1)(X + 1/2 + i\sqrt{3}/2)(X + 1/2 - i\sqrt{3}/2)$; $X^4 - 1 = (X - 1)(X + 1)(X^2 + 1)$ în $\mathbb{R}[X]$ şi $X^4 - 1 = (X - 1)(X + 1)(X + i)(X - i)$ în $\mathbb{C}[X]$; $X^5 - 1 = (X - 1)(X^4 + X^3 + X^2 + X + 1) = (X - 1)(X^2 + (1/2 + \sqrt{5}/2)X + 1)(X^2 + (1/2 - \sqrt{5}/2)X + 1)$ în $\mathbb{R}[X]$ şi $X^5 - 1 = (X - 1)(X - \epsilon)(X - \epsilon^2)(X - \epsilon^3)(X - \epsilon^4)$ în $\mathbb{C}[X]$, unde $\epsilon = (\sqrt{5} - 1)/4 + i\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}/4$; $X^6 - 1 = (X^3 - 1)(X^3 + 1) = (X - 1)(X + 1)(X^2 - X + 1)(X^2 + X + 1)$ în $\mathbb{R}[X]$ şi $X^6 - 1 = (X - 1)(X + 1)(X + 1/2 + i\sqrt{3}/2)(X + 1/2 - i\sqrt{3}/2)(X - 1/2 + i\sqrt{3}/2)(X - 1/2 - i\sqrt{3}/2)$ în $\mathbb{C}[X]$. Toate descompunerile sunt clare mai puţin cea a lui $X^5 - 1$. Prezentăm în continuare detaliile. Rădăcinile polinomului $X^n - 1 \in \mathbb{C}[X]$ sunt $\{1, \epsilon_n, \epsilon_n^2, \ldots, \epsilon_n^{n-1}\}$, unde $\epsilon_n = \cos(2\pi/n) + i\sin(2\pi/n)$. Formula lui Moivre ne spune că $\epsilon_n^k = \cos(2k\pi/n) + i\sin(2k\pi/n)$ pentru orice întreg $k \geq 1$. Atunci $X^5 - 1 = (X - 1)(X - \epsilon)(X - \epsilon^2)(X - \epsilon^3)(X - \epsilon^4)$, unde $\epsilon = \epsilon_5 = \cos(2\pi/5) + i\sin(2\pi/5)$. Deoarece ϵ şi ϵ^4, respectiv ϵ^2 şi ϵ^3 sunt perechi de numere complexe conjugate ($\epsilon^5 = 1$, $\epsilon^4 = 1/\epsilon = |\epsilon|/\epsilon = \overline{\epsilon}$ şi analog pentru ϵ^2 şi ϵ^3) rezultă că descompunerea polinomului $X^5 - 1$ în $\mathbb{R}[X]$ este: $X^5 - 1 = (X - 1)[(X - \epsilon)(X - \overline{\epsilon})][(X - \epsilon^2)(X - \overline{\epsilon^2})] = (X - 1)(X^2 - 2\cos(2\pi/5)X + 1)(X^2 - 2\cos(4\pi/5)X + 1)$. Pentru a ajunge la descompunerea de mai sus mai rămâne să calculăm efectiv ϵ. Pentru asta să observăm că deoarece $\epsilon \neq 1$ este rădăcina polinomului $X^5 - 1$ avem $\epsilon^4 + \epsilon^3 + \epsilon^2 + \epsilon + 1 = 0$. Împărţind egalitatea cu ϵ^2 şi notând cu $t = \epsilon + 1/\epsilon$ obţinem că $t^2 + t - 1 = 0$, de unde rezultă că $t = -1/2 - \sqrt{5}/2$ sau $t = -1/2 + \sqrt{5}/2$. Dar cum $t = 2cos(2\pi/5) > 0$, rezultă că $\cos(2\pi/5) = (\sqrt{5} - 1)/4$ şi de aici $\sin(2\pi/5) = \sqrt{1 - \cos(2\pi/5)^2} = \sqrt{10 + 2\sqrt{5}}/4$. Obţinem astfel formula lui ϵ.

1.5.22 Fie $f = X^{3m} + X^{3n+1} + X^{3p+2}$. Polinomul $X^4 + X^2 + 1$ se descompune în $\mathbb{R}[X]$ astfel: $X^4 + X^2 + 1 = (X^2 + X + 1)(X^2 - X + 1)$. Polinoamele de gradul 2, $X^2 + X + 1$ şi $X^2 - X + 1$ au fiecare câte două rădăcini distincte. Fie ϵ o rădăcină a polinomului $X^2 + X + 1$. Atunci se poate observa uşor că $\epsilon^3 = 1$ (vezi eventual rezolvarea Problemei 1.5.21) şi că $f(\epsilon) = \epsilon^{3m} + \epsilon^{3n+1} + \epsilon^{3p+2} = 1 + \epsilon + \epsilon^2 = 0$, adică ϵ este rădăcină şi a lui f. Deci $X^2 + X + 1$ divide f. Fie acum ω o rădăcină a lui $X^2 - X + 1$. Se poate observa uşor că $\omega^3 = -1$ (la fel ca mai sus) şi că $f(\omega) = \omega^{3m} + \omega^{3n+1} + \omega^{3p+2} = (-1)^m + (-1)^n\omega + (-1)^p\omega^2$, de unde via $\omega^2 = \omega - 1$ obţinem $f(\omega) = \omega((-1)^n + (-1)^p) + (-1)^m + (-1)^{p+1}$. Prin urmare, f este divizibil cu $X^4 + X^2 + 1$

dacă şi numai dacă f este divizibil cu $X^2 - X + 1$ dacă şi numai dacă p, n au parităţi diferite şi p, m au aceeaşi paritate.

1.5.23 Aplicând relaţiile lui Viétè avem că $\alpha + \beta = 6$ şi $\alpha\beta = 1$. Notăm cu $s_n = \alpha^n + \beta^n$ pentru orice $n \geq 1$. Observăm că $s_1 = 6$ şi $s_2 = s_1^2 - 2\alpha\beta = 34$. Din egalităţile $\alpha^2 - 6\alpha + 1 = 0$ şi $\beta^2 - 6\beta + 1 = 0$, prin înmulţire cu α^{n-2}, respectiv β^{n-2}, obţinem după adunare că $s_n - 6s_{n-1} + s_{n-2} = 0$, pentru orice $n \geq 3$. Din această relaţie rezultă că $s_n = 6s_{n-1} - s_{n-2}$ pentru orice $n \geq 3$, şi cum $s_1, s_2 \in \mathbb{Z}$ obţinem că $s_n \in \mathbb{Z}$ pentru orice $n \geq 1$. Pentru ultima afirmaţie, se poate observa mai întâi că $s_n \equiv s_{n-1} - sn - 2 (\bmod 5)$, iar apoi prin calcul direct că $s_1 \equiv 1 (\bmod 5)$, $s_2 \equiv 4 (\bmod 5)$, $s_3 \equiv 3 (\bmod 5)$, $s_4 \equiv 4 (\bmod 5)$, $s_5 \equiv 1 (\bmod 5)$, $s_6 \equiv 2 (\bmod 5)$, $s_7 \equiv 1 (\bmod 5)$, $s_8 \equiv 4 (\bmod 5)$, $s_9 \equiv 3 (\bmod 5)$. Prin urmare, modulo 5, şirul $(s_n)_{n \geq 1}$ este periodic de perioadă 6, şi deci s_n nu este divizibil cu 5 pentru orice $n \geq 1$.

1.5.24 Fie $a = bq + r$ împărţirea cu rest a lui a la b. Atunci

$$X^a - 1 = X^r (X^b - 1)(X^{b(q-1)} + X^{b(q-2)} + \cdots + X^b + 1) + X^r - 1$$

este împărţirea cu rest a lui $X^a - 1$ la $X^b - 1$. Observăm că dacă restul împăţirii lui a la b este r, atunci restul împărţirii lui $X^a - 1$ la $X^b - 1$ este $X^r - 1$. Prin urmare, cum cel mai mare divizor comun al numerelor întregi/polinoamelor se calculeaza cu algoritmul lui Euclid, vezi Algoritm 1.4.2, va rezulta că în paralel cu d vom obţine că cel mai mare divizor comun al polinoamelor $X^a - 1$ şi $X^b - 1$ este $X^d - 1$.

2.5.1 $X = \begin{pmatrix} 4 & -7 \\ -3/2 & 9 \\ 44 & -13/2 \end{pmatrix}$.

2.5.2 $\begin{pmatrix} 16 & 80 & 54 \\ 17 & 8 & 15 \end{pmatrix}$.

2.5.3 Matricea nulă de ordin 3.

2.5.4 Deoarece $AB = BA$ rezultă că pentru orice $m, p \in \mathbb{N}$ avem $A^m B^p = B^p A^m$. Folosind aceasta, relaţia cerută la punctul a) rezultă prin efectuarea produsului din membrul drept al acesteia, iar identitatea de la b) se obţine prin inducţie matematică.

2.5.5 a) Fie $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ cu $ad = bc$. Dacă cel puţin un element al matricei este nul atunci A are una dintre formele:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ c & d \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & d \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ c & 0 \end{pmatrix} \text{ sau } A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

şi proprietatea se verifică imediat. Putem presupune că toate elementele matricei A sunt nenule. Dacă notăm $\frac{a}{c} = \frac{b}{d} = \frac{1}{\alpha}$ atunci $A = \begin{pmatrix} a & b \\ \alpha a & \alpha d \end{pmatrix}$. Dacă există $r \in \mathbb{R}$ astfel încât $A^2 = rA$, atunci $A^k = r^{k-1}A$ pentru orice $k = 1, 2, 3 \ldots$. Într-adevăr, dacă $A^k = r^{k-1}A$ pentru orice $k = 1, 2, 3 \ldots n-1$, atunci $A^n = A^{n-1}A = r^{n-2}AA = r^{n-2}rA = r^{n-1}A$. Rămâne să determinăm r aşa încât $A^2 = rA$. După un calcul elementar, această condiţie se exprimă în a găsi un număr r care satisface $\begin{cases} a^2 + \alpha ab = ra \\ ab + \alpha b^2 = rb. \end{cases}$ Acest sistem are soluţia $r = a + \alpha b$.

b) Deoarece $AI_2 = I_2A$, folosind Problema 2.5.5 *b*) şi rezultatul de la *a*), obţinem succesiv:

$$(A+I_2)^n = I_2 + \sum_{j=1}^{n} C_n^j A^j I_2^{n-j} = I_2 + \sum_{j=1}^{n} C_n^j A^j =$$
$$I_2 + \sum_{j=1}^{n} C_n^j r^{j-1} A = I_2 + \frac{1}{r}\left(\sum_{j=1}^{n} C_n^j r^j\right) A = I_2 + \frac{(1+r)^n - 1}{r} A.$$

2.5.6 a) $(2B - I_n)^2 = 4B^2 - 4B + I_n = I_n$,

b) $\left[\frac{1}{2}(A+I_n)\right]^2 = \frac{1}{4}\left(A^2 + 2A + I_n\right) = \frac{1}{2}(A+I_n)$.

2.5.7 Fie $A = (a_{ij})_{\substack{i=\overline{1,n}\\ j=\overline{1,n}}}$, $B = (b_{ij})_{\substack{i=\overline{1,n}\\ j=\overline{1,n}}}$, atunci

a) $\mathrm{Tr}(A+B) = \sum_{i=1}^{n}(a_{ii} + b_{ii}) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} + \sum_{i=1}^{n} b_{ii} = \mathrm{Tr}(A) + \mathrm{Tr}(B)$,

b) $\mathrm{Tr}(\alpha A) = \sum_{i=1}^{n}(\alpha a_{ii}) = \alpha \sum_{i=1}^{n} a_{ii} = \alpha \mathrm{Tr}(A)$,

c) $\mathrm{Tr}(AB) = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{ji}\right) = \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n} b_{ij}a_{ji}\right) = \mathrm{Tr}(BA)$,

d) $\mathrm{Tr}(UAU^{-1}) = \mathrm{Tr}(AUU^{-1}) = \mathrm{Tr}(A)$.

2.5.8 $\mathrm{Tr}(AB - BA) = \mathrm{Tr}(AB) - \mathrm{Tr}(BA) = 0$ şi $\mathrm{Tr}(I_n) = n$.

2.5.9 Fie E_{ij} matricea de ordin n care are în poziţia (i,j) elementul 1, iar în rest 0. Deoarece $AE_{ij} = E_{ij}A$ pentru fiecare $i, j \in \{1, 2, \ldots n\}$, rezultă cu uşurinţă că A este o matrice de forma $A = \alpha I_n$.

2.5.10 Avem $I_n - A - B + AB = I_n$ de unde $(I_n - A)(I_n - B) = I_n$. Rezultă că una dintre matrice este inversa celeilalte şi deci are loc şi relaţia $(I_n - B)(I_n - A) = I_n$. Deci $I_n - B - A + BA = I_n$ şi în concluzie $BA = A + B = AB$.

2.5.11 a) Înmulţim relaţia $A+B = I_n$ cu A la dreapta şi apoi la stânga, obţinem $A^2+AB = A$, $A^2 + BA = A$ de unde rezultă prima relaţie. b) Avem $(I_n - AB)(I_n + AB) = I_n + AB - AB + ABAB$. Din $A + B = I_n$ prin înmulţirea cu A^2 la stânga obţinem $A^3 + A^2B = A^2$ şi deci $A^2B = 0_n$. Dacă ţinem seama de rezultatul punctului a), avem $ABAB = A(BA)B = (A^2B)B = 0_n$. Atunci $(I_n - AB)(I_n + AB) = I_n$. Aplicăm determinantul şi rezultă b).

2.5.12 Avem $A^* = (\det A)\cdot A^{-1}$ şi $\det(\lambda A) = \lambda^n \det A$. Deoarece $A\,A^* = (\det A)\cdot I_n$ rezultă $\det A^* = (\det A)^{n-1}$. Atunci $(A^*)^* = (\det(A^*))\cdot (A^*)^{-1} = (\det A)^{n-1}\left((\det A)\cdot A^{-1}\right)^{-1} = (\det A)^{n-2}\cdot A$. În ipoteza că A este nesingulară, relaţia $(A^*)^* = A$ are loc dacă şi numai dacă $(\det A)^{n-2} = 1$, iar matricele care satisfac această proprietate sunt cele nesingulare de ordin 2, matricele de determinant 1 şi ordin arbitrar precum şi matricele de determinant -1 şi ordin par.

2.5.13 Se poate scrie

$$A = \begin{bmatrix} \cos\frac{\pi}{3} & \sin\frac{\pi}{3} \\ -\sin\frac{\pi}{3} & \cos\frac{\pi}{3} \end{bmatrix}.$$

$$A^2 = \begin{bmatrix} \cos\frac{\pi}{3} & \sin\frac{\pi}{3} \\ -\sin\frac{\pi}{3} & \cos\frac{\pi}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\frac{\pi}{3} & \sin\frac{\pi}{3} \\ -\sin\frac{\pi}{3} & \cos\frac{\pi}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\frac{2\pi}{3} & \sin\frac{2\pi}{3} \\ -\sin\frac{2\pi}{3} & \cos\frac{2\pi}{3} \end{bmatrix}.$$

Prin inducţie matematică se demonstrează că pentru orice $n \in \mathbb{N}$ avem

$A^n = \begin{bmatrix} \cos\frac{n\pi}{3} & \sin\frac{n\pi}{3} \\ -\sin\frac{n\pi}{3} & \cos\frac{n\pi}{3} \end{bmatrix}$. $A^{2008} = \begin{bmatrix} -\cos\frac{\pi}{3} & -\sin\frac{\pi}{3} \\ \sin\frac{\pi}{3} & -\cos\frac{\pi}{3} \end{bmatrix} = -A.$

2.5.14 $A^2 = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix} = 3A.$

Se demonstrază prin inducţie că $A^k = 3^{k-1}A$. Rezultă că valoarea maximă cerută este $3^5 = 243$.

2.5.15 Considerăm polinomul $P(x) = \det(A + xB)$. Transformăm determinantul scăzând prima linie din a doua şi din a treia linie, apoi dezvoltăm determinantul după linia întâi. Este evident că polinomul este de forma $P(x) = a_0 + a_1x,\ a_0, a_1 \in \mathbb{R}$. Observăm că $a_o = P(0) = \det A$. Dar $P(1) = \det(A + B) = 1 + a_1 = 1$, rezultă $a_1 = 0$. Deci $P(x) = 1$. Rezultă că $P(2011) = 1$.

2.5.16 a) 2, b) 4, c) pentru $\alpha = 3$ rangul este 2, pentru $\alpha \neq 3$ rangul este 3, d) pentru $\beta = 1$ sau $\beta = 5$ şi $\alpha = 0$ rangul este 2, iar în rest rangul este 3.

2.5.17 Remarcăm că rangul matricei produs AB este 2. Se verifică prin calcul direct că $ABAB = 9AB$, deci $\operatorname{rang}(ABAB) = 2$. Din Teorema 2.3.4 avem
$\operatorname{rang}(ABAB) \leq \min\{\operatorname{rang}(A), \operatorname{rang}(BA), \operatorname{rang}(B)\}$.
Deci $\operatorname{rang}(BA) = 2$ şi atunci rezultă că BA este inversabilă. Dar $(BA)^3 = B(AB)(AB)A = B(ABAB)A = 9B(AB)A = 9(BA)^2$, de unde $BA = 9I_2$.

2.5.18 a) Proprietatea rezultă evident din definiţia inversei unei matrice $A^{-1}\cdot A = A\cdot A^{-1} = I_n$, de unde rezultă şi $\det(A^{-1}) = \dfrac{1}{\det(A)}$, b) Avem $I_n = I_n^T = (A\cdot A^{-1})^T = (A^{-1})^T \cdot A^T$, c) $(AB)\cdot(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = AI_nA^{-1} = AA^{-1} = I_n$, d) $(\lambda A)^{-1}\cdot \dfrac{1}{\lambda}A^{-1} = I_n$.

2.5.19 a) $A^{-1} = \dfrac{1}{10}\begin{pmatrix} 2 & 1 & -5 \\ -4 & 3 & 5 \\ 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}$,

b) $A^{-1} = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 17 & -6 & -1 \\ 21 & -8 & -1 \\ 27 & -10 & -1 \end{pmatrix}$,

c) Dacă $\alpha = \dfrac{3}{4}$ matricea nu este inversabilă. Pentru $\alpha \neq \dfrac{3}{4}$ se obţine
$A^{-1} = \dfrac{1}{3-4\alpha}\begin{pmatrix} -\alpha & 2(3-\alpha) & 3 \\ -\alpha & 2\alpha+3 & 3 \\ -3 & -6 & -4 \end{pmatrix}$,

$$d)\ \ A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{n-1}{n} & -\frac{1}{n} & -\frac{1}{n} & \dots & -\frac{1}{n} & -\frac{1}{n} \\ -\frac{1}{n} & \frac{n-1}{n} & -\frac{1}{n} & \dots & -\frac{1}{n} & -\frac{1}{n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -\frac{1}{n} & -\frac{1}{n} & -\frac{1}{n} & \dots & \frac{n-1}{n} & -\frac{1}{n} \\ -\frac{1}{n} & -\frac{1}{n} & -\frac{1}{n} & \dots & -\frac{1}{n} & -\frac{1}{n} \end{pmatrix},$$

$$e)\quad A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -\alpha & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \alpha^2 & -\alpha & 1 & \dots & 0 \\ -\alpha^3 & \alpha^2 & -\alpha & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ (-1)^{n-1}\alpha^{n-1} & (-1)^{n-2}\alpha^{n-2} & (-1)^{n-3}\alpha^{n-3} & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

2.5.20 a) $X = BA^{-1} = \begin{pmatrix} -3+11i & 3+9i & -1+7i \end{pmatrix}$,

b) $X = A^{-1}B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

2.5.21 a) $\det\left(\overline{A}\right) = \sum\limits_{\sigma\in S_n} \varepsilon(\sigma)\overline{a_{1\sigma(1)}a_{2\sigma(2)}}\dots\overline{a_{n\sigma(n)}} = \overline{\sum\limits_{\sigma\in S_n} \varepsilon(\sigma)a_{1\sigma(1)}a_{2\sigma(2)}\dots a_{n\sigma(n)}} = \overline{\det(A)}$.
b) $\det(A\overline{A}) = \det(A)\det(\overline{A}) = \det(A)\overline{\det(A)} = |\det(A)|^2 \geq 0$.

2.5.22 Folosim definiţia determinantului şi faptul că dacă $\sigma \in S_n$ atunci şi $\sigma^{-1} \in S_n$. Avem $\det(A) = \sum\limits_{\sigma\in S_n} \varepsilon(\sigma)a_{1\sigma(1)}a_{2\sigma(2)}\dots a_{n\sigma(n)}$.

$$\overline{\det(A)} = \overline{\sum_{\sigma\in S_n} \varepsilon(\sigma)a_{1\sigma(1)}a_{2\sigma(2)}\dots a_{n\sigma(n)}} = \sum_{\sigma\in S_n} \varepsilon(\sigma)\overline{a_{1\sigma(1)}a_{2\sigma(2)}}\dots\overline{a_{n\sigma(n)}}$$

$$= \sum_{\sigma\in S_n} \varepsilon(\sigma)a_{\sigma(1)1}a_{\sigma(2)2}\dots a_{\sigma(n)n} = \sum_{\sigma\in S_n} \varepsilon(\sigma)a_{1\sigma^{-1}(1)}a_{2\sigma^{-1}(2)}\dots a_{n\sigma^{-1}(n)}.$$

Deci $\overline{\det(A)} = \det(A)$.

2.5.23 Deoarece $AB = BA$ avem $A^2 + B^2 = (A+iB)(A-iB)$ şi putem scrie $\det(A^2 + B^2) = \det[(A+iB)(A-iB)] = \det(A+iB)\det(A-iB) = \det(A+iB)\overline{\det(A+iB)} = |\det(A+iB)|^2 \geq 0$.

2.5.24 Dacă $n = 2$, prin calcul direct rezultă (43). Reciproc, în (43) facem $A = B$ cu $\det(A) \neq 0$ şi obţinem $\det(2A) = 4\det(A)$, deci $2^n\det(A) = 4\det(A)$. Deducem $n = 2$.

2.5.25 a) $(a-b)(b-c)(c-a)$, b) $2abc(a-b)(b-c)(c-a)$, c) 70, d) 37.

2.5.26 Se scade linia a doua din linia întâi, linia a treia din linia a doua etc, apoi se scade linia întâi din a doua, din a treia,..., din a cincea şi se dezvoltă după acele linii care au un singur element diferit de zero.

$$d = \begin{vmatrix} -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & 6 \\ -1 & -1 & -1 & 6 & 0 \\ -1 & -1 & 6 & 0 & 0 \\ 5 & 6 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 7 & 1 \\ 0 & 0 & 7 & 1 & 1 \\ 6 & 7 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -7\begin{vmatrix} -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 7 & 1 \\ 6 & 7 & 1 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$-7^2\begin{vmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 7 \\ 6 & 7 & 1 \end{vmatrix} = 7^3\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 6 & 7 \end{vmatrix} = -7^3.$$

2.5.27 Putem considera $V(a_1, a_2, \dots, a_n)$ ca un polinom de grad $n-1$ în necunoscuta a_n. Pentru $a_n = a_i$, $i = 1, 2, \dots, n-1$ se obţin de fiecare dată două coloane egale, deci determinanţii vor fi nuli. Rezultă că $V(a_1, a_2, \dots, a_n)$ este divizibil cu $(a_n - a_1)(a_n - a_2)\dots(a_n - a_{n-1})$ şi atunci $V(a_1, a_2, \dots, a_n) = (a_n - a_1)(a_n - a_2)\dots(a_n - a_{n-1})V'$. Dacă dezvoltăm după ultima coloană, a_n^{n-1} se înmulţeşte exact cu $V(a_1, a_2, \dots, a_{n-1})$. Rezultă atunci că $V' = V(a_1, a_2, \dots, a_{n-1})$. Obţinem astfel următoarea formulă de recurenţă:

$V(a_1, a_2, \dots, a_n) = (a_n - a_1)(a_n - a_2)\dots(a_n - a_{n-1})V(a_1, a_2, \dots, a_{n-1})$.

2.5.28 $\det(A) = 1$, $\det(AV) = \det(A)\cdot\det(V) = V(a_1, a_2, \dots, a_n)$. Pe de altă parte avem:

$$\det(AV) = \begin{vmatrix} 1 & \dots & 1 & 1 \\ a_1 - a_n & \dots & a_{n-1} - a_n & 0 \\ a_1(a_1 - a_n) & \dots & a_{n-1}(a_{n-1} - a_n) & 0 \\ a_1^2(a_1 - a_n) & \dots & a_{n-1}^2(a_{n-1} - a_n) & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_1^{n-2}(a_1 - a_n) & \dots & a_{n-1}^{n-2}(a_{n-1} - a_n) & 0 \end{vmatrix} =$$

$$(-1)^{n-1}(a_1 - a_n)\dots(a_{n-1} - a_n)V(a_1, a_2, \dots, a_{n-1}) =$$

$$(a_n - a_1)\dots(a_n - a_{n-1})V(a_1, a_2, \dots, a_{n-1}),$$

de unde obţinem $\quad V(a_1, a_2, \dots, a_n) = (a_n - a_1)\dots(a_n - a_{n-1})V(a_1, a_2, \dots, a_{n-1})$.

2.5.29 Se consideră matricea $V = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \varepsilon_1 & \varepsilon_2 & \dots & \varepsilon_n \\ \varepsilon_1^2 & \varepsilon_2^2 & \dots & \varepsilon_n^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \varepsilon_1^{n-1} & \varepsilon_2^{n-1} & \dots & \varepsilon_n^{n-1} \end{pmatrix}$

cu determinantul Vandermonde $\det(V) = V(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n)$ şi se calculează produsul

$$AV = \begin{pmatrix} f(\varepsilon_1) & f(\varepsilon_2) & \dots & f(\varepsilon_n) \\ \varepsilon_1 f(\varepsilon_1) & \varepsilon_2 f(\varepsilon_2) & \dots & \varepsilon_n f(\varepsilon_n) \\ \varepsilon_1^2 f(\varepsilon_1) & \varepsilon_2^2 f(\varepsilon_2) & \dots & \varepsilon_n^2 f(\varepsilon_n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \varepsilon_1^{n-1} f(\varepsilon_1) & \varepsilon_2^{n-1} f(\varepsilon_2) & \dots & \varepsilon_n^{n-1} f(\varepsilon_n) \end{pmatrix}.$$

Avem $\det(AV) = f(\varepsilon_1)\, f(\varepsilon_2) \dots f(\varepsilon_n)\cdot\det(V)$, iar pe de altă parte, $\det(AV) = \det(A)\cdot\det(V)$, de unde concluzia.

2.5.30 Analog cu Exemplul 2.3.36.

2.5.31 Se aplică Exemplul 2.3.36 sau Problema 2.5.30.
$B^{-1} = \dfrac{1}{\alpha\delta - \beta\gamma}\begin{pmatrix} \delta A^{-1} & -\beta A^{-1} \\ -\gamma A^{-1} & \alpha A^{-1} \end{pmatrix}$.

2.5.32 Partiţionăm matricea în modul:

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ \hline 1 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

Putem folosi Problema 2.5.30. Avem $\det(D) = 2 \neq 0$ şi inversa $D^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Deoarece matricea $A - BD^{-1}C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1/2 & 3/2 \end{pmatrix}$ este inversabilă ($\det(A - BD^{-1}C) = 3/2 \neq 0$) rezultă că M este inversabilă. Folosind rezultatul din Problema 2.5.30 găsim

$$M^{-1} = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & -2 \\ -1/3 & 2/3 & -1/3 & 4/3 \\ \hline -1 & 1 & 0 & 1 \\ 1/3 & -2/3 & 1/3 & -1/3 \end{array}\right).$$

2.5.33 a), b) Se aplică regula lui Laplace de dezvoltare a unui determinant; $\det(P) = \det(Q) = \det(A) \cdot \det(D)$. c) Admitem că A este inversabilă. Determinăm o matrice T care prin înmulţirea la stânga cu matricea R să conducă la o matrice triunghiulară.

$$RT = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_n & U \\ 0_n & I_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B + AU \\ C & D + CU \end{pmatrix}$$

Alegem U astfel încât $B + AU = 0_n$ deci $U = -A^{-1}B$. Atunci

$$RT = \begin{pmatrix} A & 0_n \\ C & D - CA^{-1}B \end{pmatrix}$$

şi $\det(RT) = \det A \cdot \det\left(D - CA^{-1}B\right)$. Pe de altă parte $\det(RT) = \det(R) \cdot \det(T) = \det(R)$. Obţinem $\det(R) = \det A \cdot \det\left(D - CA^{-1}B\right)$.

Dacă $AC = CA$ atunci rezultă $\det\left(A\left(D - CA^{-1}B\right)\right) =$
$\det\left(AD - ACA^{-1}B\right) = \det\left(AD - CAA^{-1}B\right) = \det(AD - CB)$.

Un raţionament analog are loc dacă matricea D este inversabilă.

2.5.34 a) Sistemul este compatibil determinat cu soluţia unică: $x_1 = -1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 3$, $x_4 = -2$, b) sistemul este compatibil dublu nedeterminat cu soluţia: $x_1 = \dfrac{3 - 4\beta}{3}$, $x_2 = \dfrac{3\alpha + \beta}{3}$, $x_3 = \alpha$, $x_4 = \beta$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, c) sistemul este compatibil simplu nedeterminat cu soluţia: $x_1 = \alpha + 6$, $x_2 = 2\alpha + 6$, $x_3 = -6\alpha - 10$, $x_4 = \alpha \in \mathbb{R}$, d) sistemul este incompatibil.

2.5.35 Deoarece în primele trei ecuaţii necunoscutele x_4, x_5, x_6 au coeficienţii nuli, putem descompune sistemul în două blocuri. Primul este format din primele trei ecuaţii
$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 5 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 11 \\ 5 \end{pmatrix}$ şi are soluţia $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = 2$. Introducem în ultimele trei ecuaţii şi avem
$\begin{pmatrix} -6 & 5 & 3 \\ 1 & -3 & 2 \\ -9 & 7 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 \\ 5 \\ 10 \end{pmatrix}$ cu soluţia $x_4 = 3$, $x_5 = -1$, $x_6 = 0$.

2.5.36 a) Dacă $m \neq 0$ sistemul este incompatibil. Dacă $m = 0$ soluţia sistemului este $x_1 = \dfrac{-5\alpha - 13\beta - 3}{2}$, $x_2 = \dfrac{-7\alpha - 19\beta - 7}{2}$, $x_3 = \alpha$, $x_4 = \beta$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. b) Dacă $m \neq 1$ şi $n \neq 0$ sistemul este compatibil determinat cu soluţia $x_1 = \dfrac{2n - 1}{n(m-1)}$, $x_2 = \dfrac{1}{n}$, $x_3 = \dfrac{2mn - 4n + 1}{n(m-1)}$. Dacă $\{m = 1$ şi $n \neq \dfrac{1}{2}\}$ sau $n = 0$ sistemul este incompatibil. Dacă $m = 1$ şi $n = \dfrac{1}{2}$ sistemul este compatibil nedeterminat cu soluţia $x_1 = 2 - \alpha$, $x_2 = 2$, $x_3 = \alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

2.5.37 a) $x_1 = 8\alpha - 7\beta$, $x_2 = -6\alpha + 5\beta$, $x_3 = \alpha$, $x_4 = \beta$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. b) Dacă $m \neq -\dfrac{2}{3}$ sistemul admite numai soluţia nulă. Dacă $m = -\dfrac{2}{3}$ sistemul admite şi soluţii nebanale şi acestea sunt $x_1 = 34\alpha$, $x_2 = -18\alpha$, $x_3 = 40\alpha$, $x_4 = \alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

2.5.38 Este un sistem liniar omogen care admite soluţia banală pentru orice valoare a parametrului y. Determinantul sistemului este $\Delta = (2 - y)\left(y^2 + y - 1\right)^2$. Dacă $y = 2$ obţinem soluţiile $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = x_5 = \alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Dacă $y = \dfrac{\sqrt{5} - 1}{2}$ obţinem soluţiile $x_1 =$

$\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}\beta-\alpha,\ x_2=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\alpha+\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\beta,\ x_3=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}\alpha-\beta,\ x_4=\alpha,\ x_5=\beta,\ \alpha,\beta\in\mathbb{R}$.
Dacă $y=-\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$ obţinem soluţiile $x_1=-\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}\beta-\alpha,\ x_2=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\alpha+\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\beta$, $x_3=-\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}\alpha-\beta,\ x_4=\alpha,\ x_5=\beta,\ \alpha,\beta\in\mathbb{R}$.

3.5.1-3.5.2. Se verifică axiomele spaţiului vectorial.

3.5.3. Pentru orice $a,b\in\mathbb{R}$ şi orice $x,y\in S$, rezultă

$$\begin{aligned}ax+by&=a(\alpha-2\beta,\alpha+3\beta,\beta)+b(\alpha'-2\beta',\alpha'+3\beta',\beta')\\&=(a\alpha+b\alpha'-2(a\beta+b\beta'),a\alpha+b\alpha'+3(a\beta+b\beta'),a\beta+b\beta')\in S,\end{aligned}$$

deci S este subspaţiu vectorial.

Pentru $x\in S$, arbitrar, avem $x=(\alpha-2\beta,\alpha+3\beta,\beta)=\alpha(1;1;0)+\beta(-2;3;1)$, deci $\mathcal{B}=\{e_1=(1;1;0),\ e_2=(-2;3;1)\}$ este bază în S, adică $\dim_{\mathbb{R}} S=2$.

3.5.4. Se procedează analog cu exerciţiul **3.5.3**.

3.5.5. Matricea sistemului $A=\begin{pmatrix}1&-2&3&1\\2&-1&1&-1\end{pmatrix}$ are rangul 2, minorul principal fiind $\Delta_p=\begin{vmatrix}1&-2\\2&-1\end{vmatrix}=3$. x_1 şi x_2 sunt necunoscute principale, iar $x_3=\alpha$ şi $x_4=\beta$ sunt necunoscute secundare. Se obţine soluţia sistemului

$$S=\left\{\left(\frac{\alpha+3\beta}{3},\frac{5\alpha+3\beta}{3},\alpha,\beta\right)\mid\alpha,\beta\in\mathbb{R}\right\}.$$

3.5.6. Din combinaţia liniară $\alpha_1f_1(x)+\alpha_2f_2(x)+\cdots+\alpha_nf_n(x)=0,\ \forall\, x\in\mathbb{R}\Rightarrow\alpha_1e^{a_1x}+\alpha_2e^{a_2x}+\cdots+\alpha_ne^{a_nx}=0,\ \forall\, x\in\mathbb{R}$.

Pentru $x=0$, avem $\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n=0$. Derivând succesiv şi considerând $x=0$, se obţine sistemul omogen

$$\begin{cases}\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n=0\\a_1\alpha_1+a_2\alpha_2+\cdots+a_n\alpha_n=0\\a_1^2\alpha_1+a_2^2\alpha_2+\cdots+a_n^2\alpha_n=0\\\vdots\\a_1^{n-1}\alpha_1+a_2^{n-1}\alpha_2+\cdots+a_n^{n-1}\alpha_n=0,\end{cases}$$

al cărui determinant este Vandermonde. Ţinând cont că a_i sunt distincte, $\forall\, i=\overline{1,n}$, deci determinantul este nenul, deci unica soluţie a sistemului este cea nulă $\alpha_1=\alpha_2=\cdots=\alpha_n=0$.

3.5.7. Fie polinomul $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+a_{n-2}x^{n-2}+\cdots+a_1x+a_0,\ a_n\neq 0$. Obţinem

$$\begin{aligned}&f'(x)=na_nx^{n-1}+(n-1)a_{n-1}x^{n-2}+\cdots+a_1\\&f''(x)=n(n-1)a_nx^{n-2}+(n-1)(n-2)a_{n-1}x^{n-3}+\cdots+2a_2\\&\quad\vdots\\&f^{(n)}(x)=n!\cdot a_n.\end{aligned}$$

Din combinaţia liniară $\alpha_0f(x)+\alpha_1f'(x)+\cdots+\alpha_nf^{(n)}(x)=0,\ \forall\, x\in\mathbb{R}$. Identificând coeficienţii din membrul stâng cu zero şi ţinând cont că $a_n\neq 0$, rezultă $\alpha_0=\alpha_1=\cdots=\alpha_n=0$.

3.5.8. Matricea formată din componentele vectorilor v_1, v_2, v_3 şi v_4, scrise pe coloane, este $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Cum rang $A = 3$, deducem că vectorii v_1, v_2, v_3 şi v_4 sunt liniar dependenţi.

3.5.9. Matricea formată din componentele vectorilor v_1, v_2 şi v_3, scrise pe coloane, este $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \alpha+3 \\ 2 & 3 & \alpha+1 \\ 3 & 1 & \alpha+2 \end{pmatrix}$. Întrucât vectorii v_1, v_2 şi v_3 sunt liniar dependenţi, rezultă că rang $(A)\langle 3$, adică $\det(A) = 0$, de unde $\alpha = -6$.

3.5.10. Presupunând că există numerele reale α_1, α_2 şi α_3 astfel încât $v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3$, se obţine sistemul $\begin{cases} 3\alpha_1 + 2\alpha_2 + 2\alpha_3 = 4 \\ 9\alpha_1 + 3\alpha_2 - \alpha_3 = -2 \\ -4\alpha_1 + 2\alpha_3 = 0 \\ -2\alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 = 3, \end{cases}$ care este incompatibil. Deci v nu se poate scrie ca o combinaţie liniară a vectorilor v_1, v_2 şi v_3.

3.5.12. Din egalitatea $p(x) = \alpha_1 p_1(x) + \alpha_2 p_2(x) + \alpha_3 p_3(x)$ adevărată pentru orice $x \in \mathbb{R}$, se obţine sistemul $\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_3 = 3 \\ 2\alpha_2 = -1 \\ -\alpha_1 + \alpha_2 + 3\alpha_3 = 4, \end{cases}$ care are soluţia $\alpha_1 = \dfrac{9}{8}$, $\alpha_2 = -\dfrac{1}{2}$ şi $\alpha_3 = \dfrac{15}{8}$.

3.5.13. Întrucât $\mathcal{B}$ este baza canonică, rezultă că matricea de trecere de la baza $\mathcal{B}$ la baza $\mathcal{B}'$ este $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$.

3.5.14. Se verifică proprietăţile produsului scalar. În plus,

$$\begin{aligned} \|h\| &= \sqrt{\langle h, h\rangle} = \sqrt{\langle 1 + 5x - 4x^2 + 6x^3, 1 + 5x - 4x^2 + 6x^3\rangle} \\ &= \sqrt{(0!)^2 \cdot 1^2 + (1!)^2 \cdot 5^2 + (2!)^2 \cdot (-4)^2 + (3!)^2 \cdot 6^2} = \sqrt{1386}. \end{aligned}$$

3.5.15. a) Se verifică proprietăţile produsului scalar.

b) Obţinem

$$\langle h, h\rangle = \int_1^e h^2(x) \ln x d\,x = \int_1^e x \ln x d\,x = \frac{x^2}{2} \cdot \ln x\Big|_1^e - \int_1^e \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{x} d\,x = \frac{e^2+1}{4},$$

de unde $\|h\| = \sqrt{\langle h, h\rangle} = \dfrac{\sqrt{e^2+1}}{2}$.

c) Avem $0 = \langle f(x), g(x)\rangle = \int_1^e f(x) \cdot g(x) \ln x d\,x = \int_1^e 5(ax+b) \ln x d\,x = 5a \int_1^e x \ln x d\,x + 5b \int_1^e \ln x d\,x = 5a \cdot \dfrac{e^2+1}{4} + 5b$ şi rezultă $b = \dfrac{-a(e^2+1)}{4}$, $a \in \mathbb{R}$.

3.5.16. Se notează $p(x) = ax^2 + bx + c$. Găsim

$$\begin{aligned} \mathrm{d}(p, p_1) &= \|p - p_1\| = \|(a-3)x^2 + (b-2)x + (c-5)| \\ &= \sqrt{(a-3)^2 + (b-2)^2 + (c-5)^2}. \end{aligned}$$

Similar, se exprimă şi celelalte distanţe care, egalate, conduc la $a = 1$, $b = 3$ şi $c = 3$.

3.5.17. Fie $z=(a,b,c,d)$. Din condiţiile de ortogonalitate $\langle x,z\rangle=0$ şi $\langle y,z\rangle=0$, se obţine $\begin{cases} a+c+3d=0 \\ -a+b+c=0, \end{cases}$ care are soluţia

$$z=(-c-3d,-2c-3d,c,d)=c(-1;-2;1;0)+d(-3;-3;0;1).$$

Se ia $z=(-1;-2;1;0)$. Apoi se determină vectorul $t=(a',b',c',d')$, ortogonal vectorilor x, y şi z. Se obţine sistemul $\begin{cases} a+c+3d=0 \\ -a+b+c=0 \\ -a-2b+c=0 \end{cases}$ cu soluţia $t=\left(a,0,a,-\dfrac{2a}{3}\right)$. Se ia $t=(3;0;3;-2)$.

3.5.18. a) $S=\{x\in\mathbb{R}_3\,|\,x=(-x_2,x_2,x_3)=x_2(-1;1;0)+x_3(0;0;1)\}=\mathrm{Span}(e_1,e_2)$, unde $e_1=(-1;1;0)$ şi $e_2=(0;0;1)$. Fie $x=(a,b,c)$. Din $\langle x,e_1\rangle=0$ şi $\langle x,e_2\rangle=0$, rezultă $x=(a,a,0)=a(1;1;0)$, deci $S^\perp=\mathrm{Span}(e_3)$, unde $e_3=(1;1;0)$.

b) Se rezolvă sistemul neomogen $v=\alpha_1e_1+\alpha_2e_2+\alpha_3e_3$ şi se obţine descompunerea $v=\dfrac{3}{2}e_1+5e_2+\dfrac{5}{2}e_3$.

3.5.19. Găsim

$$\begin{aligned}\mathrm{Span}(x_1,x_2,x_3)&=\{x\in\mathbb{R}_4\,|\,x=\alpha_1x_1+\alpha_2x_2+\alpha_3x_3\}\\&=\{x\in\mathbb{R}_4\,|\,x=\alpha_1x_1+\alpha_2(x_1+x_3)+\alpha_3x_3\}\\&=\{x\in\mathbb{R}_4\,|\,x=k_1x_1+k_2x_2\},\end{aligned}$$

deci $\dim L=2$ şi $\dim L^\perp=2$. Ca în exerciţiul precedent, o bază în $L^\perp$ se poate considera $\{y_1=(-3;1;-2;0),\ y_2=(1;-1;-2;1)\}$.

3.5.20. Fie $y=\alpha_1x_1+\alpha_2x_2+\alpha_3x_3$ proiecţia ortogonală a lui v pe subspaţiul S. Fie $y^\perp=(a,b,c,d)$ proiecţia lui v pe $\mathrm{Span}(S)$. Deoarece $\langle y^\perp,x_i\rangle=0$, $(\forall)\,i=1,2,3$, rezultă sistemul

$$\begin{cases} a+b+2c+d=0 \\ -a+2c+3d=0 \\ a+2b-c+3d=0. \end{cases}$$

Din condiţia $\alpha_1x_1+\alpha_2x_2+\alpha_3x_3+y^\perp=v$, se obţine sistemul

$$\begin{cases} \alpha_1-\alpha_2+\alpha_3+a=1 \\ \alpha_1+2\alpha_3+b=0 \\ 2\alpha_1+2\alpha_2-\alpha_3+c=1 \\ \alpha_1+3\alpha_2+3\alpha_3+d=1, \end{cases}$$

cu a, b, c şi d aflaţi anterior.

3.5.21. Avem $x_2=x_1+x_3$, deci $\dim\mathrm{Span}(S)=2$ şi $\dim L^\perp(S)=2$. Fie $v\in L^\perp(S)$, cu $v=(a,b,c,d)$. Din $\langle v,x_1\rangle=0$, $\langle v,x_3\rangle=0$ se obţine sistemul $\begin{cases} a+3b+2d=0 \\ 2a+4d-c=0 \end{cases}$ sau din $\langle v,x_1\rangle=0$, $\langle v,x_3\rangle=0$, se obţine sistemul $\begin{cases} a+3b+2d=0 \\ 3a+7b-c+2d=0. \end{cases}$ Rezolvând unul dintre sistemele de mai sus, rezultă $v=\left(\dfrac{3}{2}c,-\dfrac{1}{2}c-2d,c,d\right)$, respectiv $v=\left(\dfrac{3}{2}c+4d,-\dfrac{1}{2}c-2d,c,d\right)$. Vectorii $(-3;-1;-2;0)$ şi $(1;-1;-2;1)$ formează o bază în $L^\perp(S)$.

3.5.23. a) $x_n(\alpha)=\frac{\sqrt{n}}{(\sqrt{\alpha})^n}\in l_2\Leftrightarrow\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{\alpha^n}$convergentă.

Criteriul raportului $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+1}{\alpha^{n+1}}\cdot\frac{\alpha^n}{n}=\frac{1}{\alpha}<1\Rightarrow$ seria convergentă.

b) Pornim de la seria

$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + ... + x^n + ..., |x| < 1.$

Derivăm seria de puteri termen cu termen

$\frac{1}{(1-x)^2} = 1 + 2x + 3x^2 + ... + nx^{n-1} + ..., |x| < 1.$

Înmulţim seria cu x

$\frac{x}{(1-x)^2} = x + 2x^2 + 3x^3 + ... + nx^n + ..., |x| < 1$

şi trecem pe $x \to \frac{1}{\alpha}$ obţinând

$\frac{\alpha}{(1-\alpha)^2} = \alpha + \frac{2}{\alpha^2} + \frac{3}{\alpha^3} + ... + \frac{n}{\alpha^n} + ..., \alpha > 1.$

c) Demonstrăm că $\langle (x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \rangle = \sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n y_n < \infty$. Rezultă din faptul că $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |x_n y_n| \leq \frac{1}{2} \sum\limits_{n=1}^{\infty} (x_n^2 + y_n^2) < \infty$.

Verificăm axiomele produsului scalar:

$\langle (x_n)_{n\in\mathbb{N}} + (y_n)_{n\in\mathbb{N}}, (z_n)_{n\in\mathbb{N}} \rangle = \langle (x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (z_n)_{n\in\mathbb{N}} \rangle + \langle (y_n)_{n\in\mathbb{N}}, (z_n)_{n\in\mathbb{N}} \rangle$

$\langle \alpha(x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \rangle = \alpha \langle (x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \rangle$

$\langle (x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \rangle = \langle (y_n)_{n\in\mathbb{N}}, (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \rangle$

$\langle (x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \rangle \geq 0, \langle (x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \rangle = 0 \Leftrightarrow x_n = 0, (\forall)\, n \in \mathbb{N}.$

d) $(\widehat{(x_n(\alpha))_{n\in\mathbb{N}}, (x_n(\beta))_{n\in\mathbb{N}}}) = \frac{\langle (x_n(\alpha))_{n\in\mathbb{N}}, (x_n(\beta))_{n\in\mathbb{N}} \rangle}{\sqrt{\langle (x_n(\alpha))_{n\in\mathbb{N}}, (x_n(\alpha))_{n\in\mathbb{N}} \rangle} \sqrt{\langle (x_n(\beta))_{n\in\mathbb{N}}, (x_n(\beta))_{n\in\mathbb{N}} \rangle}} =$

$= \frac{\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\sqrt{\alpha\beta}^n}}{\sqrt{\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\alpha^n}} \sqrt{\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\beta^n}}} = \frac{\frac{\sqrt{\alpha\beta}}{\left(1-\sqrt{\alpha\beta}\right)^2}}{\sqrt{\frac{\alpha}{(1-\alpha)^2}} \sqrt{\frac{\beta}{(1-\beta)^2}}} = \frac{(\alpha-1)(\beta-1)}{(\sqrt{\alpha\beta}-1)^2}.$

4.8.3. (a) Dacă $\mathbb{C}$ este spaţiu vectorial peste $\mathbb{R}$ atunci $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2 \in C : T(\alpha z_1 + z_2) = T(\alpha x_1 + x_2 + i(\alpha y_1 + y_2)) = \alpha x_1 + x_2 - i(\alpha y_1 + y_2) = \alpha T(z_1) + T(z_2)$.

(b) Considerăm $\alpha = i, z = i \Rightarrow T(i \cdot i) = T(-1) = -1$ şi $iT(i) = i \cdot (-i) = 1 \Rightarrow T(i \cdot i) \neq iT(i)$.

4.8.4. Proiecţia ortogonală a unui vector oarecare $x \in \mathbb{R}^4$ pe subspaţiul generat de u şi v este un vector din acest subspaţiu, deci de forma $c_1 u + c_2 v$, cu proprietatea că $x - (c_1 u + c_2 v)$ este ortogonal pe vectorii u şi v. Anulând respectivele produse scalare, găsim sistemul

$$\begin{cases} c_1 \langle u, u \rangle + c_2 \langle v, u \rangle = \langle x, u \rangle \\ c_1 \langle u, v \rangle + c_2 \langle v, v \rangle = \langle x, v \rangle \end{cases}.$$

Se găseşte că

$$15c_1 = 4x_1 - x_2 - 2x_3 + 3x_4, \quad 15c_2 = -x_1 + 3x_2 + x_3 - 2x_4.$$

Proiecţia ortogonală căutată, notată $T(x)$, este dată de vectorul

$$\begin{aligned} T(x) &= c_1 u + c_2 v = \\ &= \frac{1}{15} \left[(4x_1 - x_2 - 2x_3 + 3x_4) u + (-x_1 + 3x_2 + x_3 - 2x_4) v \right] = \\ &= \frac{1}{15} (\ 10x_1 + 3x_2 - 4x_3 + 5x_4, \quad 3x_1 + 13x_2 + x_3 - 4x_4, \\ &\qquad -4x_1 + x_2 + 2x_3 - 3x_4, \quad 5x_1 - 4x_2 - 3x_3 + 5x_4 \ ) \end{aligned}$$

Proiecţiile vectorilor bazei standard (numite şi baza canonică) sunt

$$\begin{cases} T(e_1) = \frac{1}{15}(10, 3, -4, 5) = \frac{2}{3}e_1 + \frac{1}{5}e_2 - \frac{4}{15}e_3 + \frac{1}{3}e_4 \\ T(e_2) = \frac{1}{15}(3, 13, 1, -4) = \frac{1}{5}e_1 + \frac{13}{15}e_2 + \frac{1}{15}e_3 - \frac{4}{15}e_4 \\ T(e_3) = \frac{1}{15}(-4, 1, 2, -3) = -\frac{4}{15}e_1 + \frac{1}{15}e_2 + \frac{2}{15}e_3 - \frac{1}{5}e_4 \\ T(e_4) = \frac{1}{15}(5, -4, -3, 5) = \frac{1}{3}e_1 - \frac{4}{15}e_2 - \frac{1}{5}e_3 + \frac{1}{3}e_4 \end{cases}$$

iar matricea transformării T se poate scrie imediat.

4.8.5. $z = (-1; 1) = \alpha x + \beta y, (-1; 1) = \alpha(1; 2) + \beta(-1; -1) \Rightarrow \alpha = 2, \beta = 3$. De aici $T(z) = T(2x + 3y) = 2T(x) + 3T(y) = 2(1; 0; 0) + 3(1; 1; 1) = (5; 3; 3)$.

4.8.6. Fie $\alpha_0, \alpha_1, ..., \alpha_{m-1} \in \mathbb{K}$ şi $\alpha_0 x + \alpha_1 T x + ... + \alpha_{m-1} T^{m-1} x = \mathbf{0}$.

Aplicăm relaţiei $T^{m-k-1}, k = \overline{0, m-1}$ şi se obţine $\alpha_{m-k+1} = 0, k = \overline{0, m-1}$ de unde rezultă concluzia.

4.8.7. Se folosesc teoremele 4.3.2 şi 4.3.3.

4.8.8. Fie $(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_p) \in \mathbb{K}^p$ astfel încât $\alpha_1 T(u_1) + \alpha_2 T(u_2) + ... + \alpha_p T(u_p) = \mathbf{0}_{\mathbb{W}} \Rightarrow T(\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + ... + \alpha_p u_p) = \mathbf{0}_{\mathbb{W}} \Rightarrow \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + ... + \alpha_p u_p \in \mathrm{Ker}(T)$. Dar $\{u_1, u_2, ..., u_p\} \notin \mathrm{Ker}(T)$ rezultă că $\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + ... + \alpha_p u_p = \mathbf{0}_{\mathbb{V}}$; $\{u_1, u_2, ..., u_p\}$ este un sistem de vectori liniar independent rezultă că $\alpha_1 = \alpha_2 = ... = \alpha_p = 0$, deci concluzia.

4.8.9. Demonstrăm prin dublă incluziune. Fie $v \in T(\mathrm{Span}(\mathbb{V}_1)) \Rightarrow \exists u \in \mathrm{Span}(\mathbb{V}_1)$: $T(u) = v$; dar $u \in \mathrm{Span}(\mathbb{V}_1) \Rightarrow \exists u_1, u_2, ..., u_p \in S$ şi $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_p \in \mathbb{K}$ astfel încât $u = \sum\limits_{i=1}^{p} \alpha_i u_i$ şi $v = T(u) = T(\sum\limits_{i=1}^{p} \alpha_i u_i) = \sum\limits_{i=1}^{p} \alpha_i T(u_i) \Rightarrow v \in \mathrm{Span}\, T(\mathbb{V}_1)$.

Invers, dacă $v \in \mathrm{Span}\, T(\mathbb{V}_1) \Rightarrow \exists T(u_1), T(u_2), ..., T(u_p) \in T(\mathbb{V}_1), u_1, u_2, ..., u_p \in \mathbb{V}_1$ şi $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_p \in \mathbb{K}$ astfel încât $v = \sum\limits_{i=1}^{p} \alpha_i T(u_i) = T(\sum\limits_{i=1}^{p} \alpha_i u_i) \Rightarrow v \in T(\mathrm{Span}(\mathbb{V}_1))$.

4.8.10. Dacă $B = \{e_1, e_2, ..., e_n\}$ este bază în $\mathbb{V}$, definim transformările liniare $T_1, T_2, ..., T_n$ prin $T_i : \mathbb{V} \to \mathbb{R}, i = \overline{1, n}$, $T_i(e_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, i = j, \\ 0, i \neq j, \end{cases} \forall i, j = \overline{1, n}$.

Folosind teorema 4.3.3 rezultă că transformările liniare $T_1, T_2, ..., T_n$ sunt definite pe tot spaţiul $\mathbb{V}$. Rămâne de demonstrat că $\mathcal{B}' = \{T_1, T_2, ..., T_n\}$ formează o bază în $\mathbb{V}'$, deci sistem de generatori pentru $\mathbb{V}'$ şi liniar independentă.

4.8.11. Determinăm nucleului lui T.

$T(x) = \mathbf{0}_{\mathbb{R}^2} \Rightarrow \begin{cases} x_1 + 2x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 - x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2x_3 \\ x_2 = 3x_3 \end{cases}$.

Rezultă $x \in \mathrm{Ker}(T) \Leftrightarrow x = \alpha(-2, -3, 1), x_3 = \alpha \in \mathbb{R}, \mathrm{def}(T) = 1$.

Determinăm imaginea lui T.

$T(x) = y \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + 2x_3 = y_1 \\ x_1 + x_2 - x_3 = y_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2x_3 + y_1 \\ x_2 = 3x_3 + y_2 - y_1 \end{cases}$

Sistemul este compatibil nedeterminat, oricare ar fi $y \in \mathbb{R}$. Rezultă $\mathrm{Im}(T) = \mathbb{R}^2 \Rightarrow \mathrm{rang}(T) = 2$.

Cum $n = \dim_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^3 = 3 \Rightarrow \mathrm{rang}(T) + \mathrm{def}(T) = 1 + 2 = 3$ şi teorema este verificată.

4.8.12 Considerăm restricţia lui T la $T^{-1}(\mathbb{W}_1)$ şi aplicăm teorema rang-defect pentru T:

$\dim_{\mathbb{K}} \mathbb{V} = def(T) + rang(T)$

şi pentru

$T|_{T^{-1}(\mathbb{W}_1)} : T^{-1}(\mathbb{W}_1) \to \mathbb{W}_1$,

$\dim_{\mathbb{K}} T^{-1}(\mathbb{W}_1) = \dim_{\mathbb{K}} \left(\ker(T|_{T^{-1}(\mathbb{W}_1)})\right) + \dim_{\mathbb{K}} \left(\mathrm{Im}(T|_{T^{-1}(\mathbb{W}_1)})\right).$

Dar $\dim_{\mathbb{K}} \left(\ker(T|_{T^{-1}(\mathbb{W}_1)})\right) = def(T), \dim_{\mathbb{K}} \left(\mathrm{Im}(T|_{T^{-1}(\mathbb{W}_1)})\right) = \dim_{\mathbb{K}} \mathbb{W}_1$, rezultă

$def(T) = \dim_{\mathbb{K}} T^{-1}(\mathbb{W}_1) - \dim_{\mathbb{K}} \mathbb{W}_1$

$\dim_{\mathbb{K}} \mathbb{V} = \dim_{\mathbb{K}} T^{-1}(\mathbb{W}_1) - \dim_{\mathbb{K}} \mathbb{W}_1 + rang(T) \leq \dim_{\mathbb{K}} T^{-1}(\mathbb{W}_1) - \dim_{\mathbb{K}} \mathbb{W}_1 + \dim_{\mathbb{K}} \mathbb{W} \Rightarrow$

$\dim_{\mathbb{K}} T^{-1}(\mathbb{W}_1) \geq \dim_{\mathbb{K}} \mathbb{V} - \dim_{\mathbb{K}} \mathbb{W} + \dim_{\mathbb{K}} \mathbb{W}_1.$

4.8.13. Liniaritatea rezultă din proprietăţile operaţiei de derivare.

Determinarea matricei: $\mathbf{d}(1) = 0, \mathbf{d}(x) = 1, \mathbf{d}(x^2) = 2x, ..., \mathbf{d}(x^n) = nx^{n-1}$, deci

$$_{\mathcal{B}}(\mathbf{d})_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n-1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & n \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

4.8.14. Calculăm $T(u_1) = (2;0;2;-2) = \sum_{i=1}^{4} p_{i1}v_i$,

$T(u_2) = (0;2;-2;4) = \sum_{i=1}^{4} p_{i2}v_i$,

$T(u_3) = (0;0;0;0) = \sum_{i=1}^{4} p_{i3}v_i$.

Rezolvând sistemele obţinem

$$P =_{\mathcal{B}_1} (T)_{\mathcal{B}_2} = \begin{pmatrix} \frac{4}{3} & \frac{4}{3} & 0 \\ \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & 0 \\ -\frac{4}{3} & \frac{10}{3} & 0 \\ \frac{8}{3} & -\frac{8}{3} & 0 \end{pmatrix}.$$

4.8.15. a) Fie $p_1, p_2 \in \mathbb{R}_n[x], p_1 = c_1 \cdot q + r_1, p_2 = c_2 \cdot q + r_2$, $\mathrm{grad}(r_1) < n, \mathrm{grad}(r_2) < n$, $p_1 + p_2 = (c_1 + c_2) \cdot q + r_1 + r_2, \mathrm{grad}(r_1 + r_2) < n$

$T(p_1 + p_2) = c_1 + c_2 = T(p_1) + T(p_2)$,

$\alpha \cdot p = \alpha \cdot c \cdot q + \alpha \cdot r, \mathrm{grad}(\alpha r) = \mathrm{grad}(r) < n$

$T(\alpha p) = \alpha \cdot c = \alpha T(p)$.

b) $\mathrm{Ker}(T) = \{p \in \mathbb{R}_n[x] \,|p = 0 \cdot q + r, \mathrm{grad}(r) < \mathrm{grad}(q)\}$.

Fie $\mathrm{grad}(q) = s$. $\mathrm{Ker}(T) = \{p \in \mathbb{R}_{s-1}[x]\}$.

c) $1 = 0 \cdot (x^2 + x + 1) + 1 \Rightarrow T(1) = 0$

$x = 0 \cdot (x^2 + x + 1) + x \Rightarrow T(x) = 0$

$x^2 = 1 \cdot (x^2 + x + 1) - x - 1 \Rightarrow T(x^2) = 1$

$x^3 = (x-1) \cdot (x^2 + x + 1) + 1 \Rightarrow T(x^3) = x - 1$,

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

4.8.16. $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ este spaţiu vectorial în raport cu operaţiile de adunare a funcţiilor şi de înmulţire cu un scalar.

Fie $\{w_1, w_2, ..., w_k\}$ o bază în $\mathbb{W}$. Completăm până la o bază în $\mathbb{R}^n$, fie aceasta $\mathcal{B} = \{w_1, w_2, ..., w_k, w_{k+1}, ..., w_n\}$.

Fie $f \in \mathcal{F}$. Matricea lui f în baza $\mathcal{B}$ este:

$f(w_1) = \mathbf{0}_{\mathbb{R}^n} = 0 \cdot w_1 + 0 \cdot w_2 + ... + 0 \cdot w_n,$
$f(w_2) = \mathbf{0}_{\mathbb{R}^n} = 0 \cdot w_1 + 0 \cdot w_2 + ... + 0 \cdot w_n,$
$\cdots$
$f(w_k) = \mathbf{0}_{\mathbb{R}^n} = 0 \cdot w_1 + 0 \cdot w_2 + ... + 0 \cdot w_n,$
$f(w_{k+1}) = p_{1,k+1} \cdot w_1 + p_{2,k+1} \cdot w_2 + ... + p_{n,k+1} \cdot w_n,$
$\cdots$
$f(w_n) = p_{1,n} \cdot w_1 + p_{2,n} \cdot w_2 + ... + p_{n,n} \cdot w_n,$

$$_B(f)_B = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & p_{1,k+1} & p_{1,k+2} & \cdots & p_{1,n} \\ 0 & \cdots & 0 & p_{2,k+1} & p_{2,k+2} & \cdots & p_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & p_{1,n} & p_{2,n} & \cdots & p_{n,n} \end{pmatrix}.$$

$\dim_{\mathbb{R}} \mathcal{F} = n(n-k)$ şi o bază a sa este dată de mulţimea transformarilor liniare corespunzătoare matricelor

$$M_{ij} = (m_{lh}), m_{lh} = \begin{cases} 1, l = i, h = j, j \geq k \\ 0, \text{ în rest} \end{cases}$$

4.8.17. $T(f)(x) = 0 \Leftrightarrow 4 \int\limits_0^{2\pi} \sin^3(x+y) f(y) dy = 0 \Leftrightarrow$

$\int\limits_0^{2\pi} (3\sin(x+y) - \sin 3(x+y)) f(y) dy = 0 \Leftrightarrow$

$3 \sin x \int\limits_0^{2\pi} \cos y f(y) + 3 \cos x \int\limits_0^{2\pi} \sin y f(y) - \sin 3x \int\limits_0^{2\pi} \cos 3y f(y) - \cos 3x \int\limits_0^{2\pi} \sin 3y f(y) = 0 \Leftrightarrow$

$\int\limits_0^{2\pi} \cos y f(y) = 0, \int\limits_0^{2\pi} \sin y f(y) = 0, \int\limits_0^{2\pi} \cos 3y f(y) = 0, \int\limits_0^{2\pi} \sin 3y f(y) = 0.$

$\mathrm{Ker}(T) = \left\{ f \in \mathbb{V} : \int\limits_0^{2\pi} \cos y f(y) = 0, \int\limits_0^{2\pi} \sin y f(y) = 0, \int\limits_0^{2\pi} \cos 3y f(y) = 0, \int\limits_0^{2\pi} \sin 3y f(y) = 0 \right\}.$

$\mathrm{Im}(T) = \{ g \in \mathbb{V} : g(x) = c_1 \sin x + c_2 \cos x + c_3 \sin 3x + c_4 \cos 3x \}.$

$\mathrm{Im}(T) = (\mathrm{Ker}(T))^{\perp}$

4.8.19. Fie $w \in \mathrm{Im}(\alpha T_1 + \beta T_2) \Rightarrow \exists v \in \mathbb{V} : (\alpha T_1 + \beta T_2)(v) = w \Rightarrow w = \alpha T_1(v) + \beta T_2(v) \in \alpha \,\mathrm{Im}(T_1) + \beta \,\mathrm{Im}(T_2)$.

Pentru $\alpha = 1, \beta = -1, \mathbb{W} = \mathbb{V}, T_1 = T_2 = I_{\mathbb{V}} \Rightarrow \mathrm{Im}(\alpha T_1 + \beta T_2) = \{\mathbf{0}_{\mathbb{V}}\} \Rightarrow$

$\dim_{\mathbb{K}} (\mathrm{Im}(\alpha T_1 + \beta T_2)) = 0$ şi $\dim_{\mathbb{K}} (\alpha \,\mathrm{Im}(T_1)) > 0, \dim_{\mathbb{K}} (\beta \,\mathrm{Im}(T_2)) > 0.$

4.8.20. Demonstrăm că $\mathrm{Im}(T^2) = \mathrm{Im}(T)$.

Pentru aceasta arătăm că $\mathrm{Im}(T^2) \subseteq \mathrm{Im}(T)$ şi, ţinând seama că au aceeaşi dimensiune, rezultă relaţia $\mathrm{Im}(T^2) = \mathrm{Im}(T)$.

Fie $y \in \mathrm{Im}(T^2) \Rightarrow \exists x \in \mathbb{V} : T^2(x) = y$, dar $y = T(T(x)) \Rightarrow y \in \mathrm{Im}(T)$.

Fie $T_1 : \mathrm{Im}(T) \to \mathrm{Im}(T^2), \forall u \in \mathrm{Im}(T) : T_1(u) = T(u), T_1$ restricţia lui T la $\mathrm{Im}(T)$.

Dar $\forall y \in \mathrm{Im}(T^2), \exists x \in \mathbb{V} : T^2(x) = y$. Dar $y = T(T(x)) = T_1(T(x)), T(x) \in \mathrm{Im}(T) \Rightarrow T_1$ surjectivă, $\dim_{\mathbb{K}} \mathrm{Im}(T^2) = \dim_{\mathbb{K}} \mathrm{Im}(T) \Rightarrow T_1$ injectivă $\Rightarrow \mathrm{Ker}(T_1) = \{\mathbf{0}\}, \mathrm{Ker}(T_1) = \mathrm{Ker}(T) \cap \mathrm{Im}(T) \Rightarrow \mathrm{Ker}(T) \cap \mathrm{Im}(T) = \{\mathbf{0}\}.$

Aplicăm Grassmann

$\dim_{\mathbb{K}} (\mathrm{Im}(T) + \mathrm{Ker}(T)) = \dim_{\mathbb{K}} \mathrm{Im}(T) + \dim_{\mathbb{K}} \mathrm{Ker}(T) - \dim_{\mathbb{K}} (\mathrm{Im}(T) \cap \mathrm{Ker}(T)) = \dim_{\mathbb{K}} \mathbb{V},$

$\text{Im}(T) + \text{Ker}(T) \subseteq \mathbb{V} \Rightarrow \text{Im}(T) + \text{Ker}(T) = \mathbb{V}$.

4.8.21. Notăm $S' = S|_{\text{Im}(T)}$. Rezultă

$\text{rang}(S') + \text{def}(S') = \text{rang}(T)$.

Dar $\text{Im}(S') = \text{Im}(S \circ T) \Rightarrow \text{rang}(S') = \text{rang}(S \circ T)$.

$\text{Ker}(S') = \text{Ker}(S) \cap \text{Im}(T) \subseteq \text{Ker}(S) \Rightarrow \text{def}(S') \leq \text{def}(S)$.

$\text{rang}(S \circ T) + \text{def}(S') = \text{rang}(T), \text{rang}(S) + \text{def}(S) = n \Rightarrow$

$\text{rang}(S \circ T) = \text{rang}(T) - \text{def}(S') \geq \text{rang}(T) - \text{def}(S) = \text{rang}(T) - n + \text{rang}(S) = \text{rang}\,(T) + \text{rang}\,(S) - n$.

4.8.22. Aplicăm inegalitatea lui Sylvester matricelor A şi B.

$\text{rang}\,(AB) \geq \text{rang}\,(A) + \text{rang}\,(A) - n$.

Dar $\text{rang}\,(AB) = 0$ şi rezultă inegalitatea.

4.8.23. Observăm că $\text{Ker}\,(T|_{\mathbb{V}}) \subset \text{Ker}(T) \Leftrightarrow \text{def}\,(T|_{\mathbb{V}}) \leq \text{def}(T)$.

Ştim că

$\text{def}(T) + \text{rang}(T) = \dim_{\mathbb{K}} \mathbb{X}$,

$\text{def}\,(T|_{\mathbb{V}}) + \text{rang}\,(T|_{\mathbb{V}}) = \dim_{\mathbb{K}} \mathbb{V}$.

Scădem aceste două egalităţi şi obţinem:

$\text{def}(T) - \text{def}\,(T|_{\mathbb{V}}) + \text{rang}(T) - \text{rang}\,(T|_{\mathbb{V}}) = \dim_{\mathbb{K}} \mathbb{X} - \dim_{\mathbb{K}} \mathbb{V}$.

Dar $\text{def}(T) - \text{def}\,(T|_{\mathbb{V}}) \geq 0 \Rightarrow \text{rang}(T) - \text{rang}\,(T|_{\mathbb{V}}) \leq \dim_{\mathbb{K}} \mathbb{X} - \dim_{\mathbb{K}} \mathbb{V}$.

4.8.24. Aplicăm relaţia (68) spaţiului $\text{Im}(S)$ şi subspaţiului $\text{Im}(S \circ T)$:

$\text{rang}\,(P \circ S) - \text{rang}\left(P|_{\text{Im}(S \circ T)}\right) \leq \text{rang}(S) - \text{rang}\,(S \circ T) \Leftrightarrow$

$\text{rang}\,(P \circ S) + \text{rang}\,(S \circ T) \leq \text{rang}(S) + \text{rang}\,(P \circ S \circ T)$.

Transpusă pentru matrice această inegalitate devine: $A \in \mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{R})$, $B \in \mathcal{M}_{m\times p}(\mathbb{R})$, $C \in \mathcal{M}_{p\times q}(\mathbb{R}) : \text{rang}\,(BC) + \text{rang}\,(AB) \leq \text{rang}\,(B) + \text{rang}\,(ABC)$.

4.8.25. Observaăm că

1. $\forall u \in \text{Ker}(T_1) \Rightarrow T_1(u) = \mathbf{0}$

2. $\exists v \in \mathbb{V}_1 : T_1(v) \neq \mathbf{0}$ dar $(T_2 \circ T_1)\,(v) = \mathbf{0} \Rightarrow \text{Ker}(T_1) \subseteq \text{Ker}(T_2 \circ T_1)$ şi aceşti $T_1(v) \in \text{Ker}(T_2)$.

3. Problema $T_1^{-1}\,(\text{Ker}(T_2)) = \text{Ker}(T_2 \circ T_1)$?

Fie $u \in T_1^{-1}\,(\text{Ker}(T_2)) \Rightarrow T_1(u) \in \text{Ker}(T_2) \Rightarrow (T_2 \circ T_1)\,(u) = \mathbf{0} \Rightarrow u \in \text{Ker}(T_2 \circ T_1)$.

Reciproc $u \in \text{Ker}(T_2 \circ T_1) \Rightarrow (T_2 \circ T_1)\,(u) = \mathbf{0} \Rightarrow T_2(T_1(u)) = \mathbf{0} \Rightarrow T_1(u) \in \text{Ker}(T_2) \Rightarrow u \in T_1^{-1}\,(\text{Ker}(T_2))$.

Definim $\widetilde{T_1}$ restricţia lui T_1 la $T_1^{-1}\,(\text{Ker}(T_2))$,

$\widetilde{T_1} : T_1^{-1}\,(\text{Ker}(T_2)) \to \mathbb{V}_2, \forall u \in T_1^{-1}\,(\text{Ker}(T_2))\,, \widetilde{T_1}(u) = T_1(u)$.

$\dim_R T_1^{-1}\,(\text{Ker}(T_2)) = \text{def}(\widetilde{T_1}) + \text{rang}(\widetilde{T_1})$.

Dar $\text{Ker}\,(\widetilde{T_1}) \subseteq \text{Ker}(T_1) \Rightarrow \text{def}\,(\widetilde{T_1}) \subseteq \text{def}(T_1)$,

$\text{Im}\,(\widetilde{T_1}) \subseteq \text{Ker}(T_2) \Rightarrow \text{rang}\,(\widetilde{T_1}) \subseteq \text{def}(T_2)$

Rezultă că $\dim_R T_1^{-1}\,(\text{Ker}(T_2)) = \text{def}(T_2 \circ T_1) = \text{def}(\widetilde{T_1}) + \text{rang}(\widetilde{T_1}) \leq \text{def}(T_1) + \text{def}(T_2)$.

4.8.26. $\mathbb{V}_1 \xrightarrow{T_1} \mathbb{V}_2 \xrightarrow{T_2} \mathbb{V}_3$,

$\mathbb{V}_1 \xrightarrow{T_1} \text{Im}(T_1) \subseteq \mathbb{V}_2 \xrightarrow{T_2} \mathbb{V}_3 \Rightarrow \dim_{\mathbb{K}} \text{Im}(T_1) = \dim_{\mathbb{K}} \text{Im}(T_2 \circ T_1) + \dim_{\mathbb{K}} \ker(T_2 \circ T_1))$,

$\ker(T_2 \circ T_1) = \text{Im}(T_1) \cap \text{Ker}(T_2)$ deoarece

$x \in \mathrm{Ker}(T_2 \circ T_1) \Rightarrow (T_2 \circ T_1)(x) = \mathbf{0}_{\mathbb{V}_3} \Rightarrow T_2(T_1(x)) = \mathbf{0}_{\mathbb{V}_3} \Rightarrow T_1(x) \in \mathrm{Im}(T_1) \cap \mathrm{Ker}(T_2)$,

$y \in \mathrm{Im}(T_1) \cap \ker(T_2) \Rightarrow T_2(y) = \mathbf{0}, y \in \mathrm{Im}(T_1) \Rightarrow \exists x \in \mathbb{V}_1 : T_1(x) = y \Rightarrow T_2(T_1(x)) = T_2(y) = \mathbf{0} \Rightarrow x \in \mathrm{Ker}(T_2 \circ T_1)$.

4.8.27. Fie transformările liniare

$T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, {}_{\mathcal{B}}(T)_{\mathcal{B}} = A$,

$S : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, {}_{\mathcal{B}}(S)_{\mathcal{B}} = B$,

unde am notat cu $\mathcal{B}$ o baza canonică.

$\mathrm{rang}(A + B) = \dim_{\mathbb{R}}(\mathrm{Im}(S + T))$.

Demonstrăm că $\mathrm{Im}(S + T) \subseteq \mathrm{Im}(S) + \mathrm{Im}(T)$.

Fie $y \in \mathrm{Im}(S + T) \Rightarrow \exists x \in \mathbb{R}^n : (S + T)(x) = y \Rightarrow y = S(x) + T(x) = y_1 + y_2$, $y_1 \in \mathrm{Im}(S), y_2 \in \mathrm{Im}(T) \Rightarrow y \in \mathrm{Im}(S) + \mathrm{Im}(T)$.

Rezultă $\dim_{\mathbb{R}}(\mathrm{Im}(S + T)) \leq \dim_{\mathbb{R}}(\mathrm{Im}(S) + \mathrm{Im}(T))$

$\dim_{\mathbb{R}}(\mathrm{Im}(S)) + \dim_{\mathbb{R}}(\mathrm{Im}(T)) + \dim_{\mathbb{R}}(\mathrm{Im}(S) \cap (\mathrm{Im}(T)) = \dim_{\mathbb{R}}(\mathrm{Im}(S)) + \dim_{\mathbb{R}}(\mathrm{Im}(T))$

$\Rightarrow \dim_{\mathbb{R}}(\mathrm{Im}(S + T)) \leq \dim_{\mathbb{R}}(\mathrm{Im}(S) + \mathrm{Im}(T)) \leq \dim_{\mathbb{R}}(\mathrm{Im}(S)) + \dim_{\mathbb{R}}(\mathrm{Im}(T))$.

4.8.28. a) Studiem $\mathrm{rang}(A - bI_n)$ şi $\mathrm{rang}(B - aI_n)$.

$AB - aA - bB + abI_n = abI_n \Rightarrow A(B - aI_n) - b(B - aI_n) = abI_n \Rightarrow (A - bI_n)(B - aI_n) = abI_n \Rightarrow \mathrm{rang}\left[(A - bI_n)(B - aI_n)\right] = n \Rightarrow \mathrm{rang}(A - bI_n) = \mathrm{rang}(B - aI_n) = n$.

b) $AB = aA + bB \Rightarrow aA = AB - bB \Rightarrow A = \frac{1}{a}(A - bI_n)B \Rightarrow$

$\mathrm{rang}(A) \leq \min\left\{\mathrm{rang}(A - bI_n), \mathrm{rang}(B)\right\}$

Analog $\mathrm{rang}(B) \leq \min\left\{\mathrm{rang}(B - aI_n), \mathrm{rang}(A)\right\}$.

Din cele două relaţii de mai sus rezultă $\mathrm{rang}(A) = \mathrm{rang}(B)$.

4.8.29. $\mathrm{rang}\left(A^T A\right) = \mathrm{rang}(A) \Leftrightarrow \mathrm{def}\left(A^T A\right) = \mathrm{def}(A)$

Fie $x \in \mathrm{Ker}(A) \Rightarrow Ax = \mathbf{0} \Rightarrow A^T Ax = \mathbf{0} \Rightarrow x \in \mathrm{Ker}\left(A^T A\right)$.

$x \in \mathrm{Ker}\left(A^T A\right) \Rightarrow A^T Ax = \mathbf{0} \Rightarrow x^T A^T Ax = \mathbf{0} \Rightarrow \langle Ax, Ax\rangle = \mathbf{0} \Rightarrow \|Ax\|^2 = \mathbf{0} \Rightarrow Ax = \mathbf{0} \Rightarrow x \in \mathrm{Ker}(A)$

4.8.30. a) $A + B = AB \Leftrightarrow AB - A - B + I_n = I_n \Leftrightarrow (A - I_n)(B - I_n) = I_n \Rightarrow \mathrm{rang}\,(A - I_n) = \mathrm{rang}\,(B - I_n) = n$

Dar $A = (A - I_n) B \Rightarrow \mathrm{rang}\, A = \mathrm{rang}\, B$.

b) Determinăm matricea C astfel încât $AC = CA = 0_n, C \neq 0_n$.

Fie $X \in \mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbb{C})$ şi sistemul $AX = 0_{n\times 1}, \det(A) = 0 \Rightarrow \exists X \in \mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbb{C})\ X \neq 0_{n\times 1}$

Fie $Y \in \mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbb{C})$ şi sistemul $YA = 0_{n\times 1}, \det(A) = 0 \Rightarrow \exists Y \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{C})\ Y \neq 0_{1\times n}$

Considerăm $C = XY \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$

$AC = AXY = 0_{n\times 1}Y = 0_n, CA = XYA = 0_n$.

Demonstrăm prin inducţie $A^k C^j = 0_n, \forall k, j \in \mathbb{N} \Rightarrow (A + C)^p = A^p + C^p, \forall p \in \mathbb{N}$.

4.8.31. $Tr : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}, \forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) : \mathrm{tr}(A) = \sum\limits_{i=1}^{n} a_{ii} \in \mathbb{R}$

Teorema rang-defect $\mathrm{def}(Tr) + \mathrm{rang}(Tr) = \dim_{\mathbb{R}} \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\mathrm{rang}(\mathrm{tr}) = 1 \Rightarrow \mathrm{def}(Tr) = \dim_{\mathbb{R}} \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) - \mathrm{rang}(Tr) = n^2 - 1$.

4.8.32 a) $Tr(AB) = \sum\limits_{i=1}^{n}\left(\sum\limits_{k=1}^{n} a_{ik}b_{ki}\right) = \sum\limits_{k=1}^{n}\left(\sum\limits_{i=1}^{n} b_{ki}a_{ik}\right) = Tr(BA)$,

$Tr(A + B) = Tr(A) + Tr(B)$

$Tr\,(AB - BA) = 0 \Rightarrow S \subset \mathrm{Ker}(Tr) \Rightarrow \dim_{\mathbb{R}}(S) \leq \mathrm{def}(Tr) = n^2 - 1.$

b) Punem în evidenţă $n^2 - 1$ vectori liniar independenţi din S. Atunci va rezulta că $\dim_{\mathbb{R}}(S) = n^2 - 1$.

Fie M_{ij} matricea care are pe poziţia (i, j) valoarea 1 şi restul 0. Pentru $i \neq j$ scriem $M_{ij} = M_{ik}M_{kj} - M_{kj}M_{ik} \in S$.

$M_{11} - M_{jj} = M_{1j}M_{j1} - M_{j1}M_{1j}$.

Se demonstrează că sistemul de vectori astfel obţinut este liniar independent.

4.8.33. (a) Orice punct (vector) din S_1 poate fi scris în mod unic în forma $(-v, u+v, u)$ şi orice punct din S_2 poate fi scris în mod unic în forma $(2u, u-v, u+2v)$. Aplicaţia $T : S_1 \to S_2$ este injectivă şi surjectivă (demonstraţi!). Dacă notăm $s = (-v_1, u_1 + v_1, u_1)$ şi $t = (-v_2, u_2 + v_2, u_2)$, avem $T\,(s+t) = T\,(s) + T\,(t)$, $\forall s, t \in S_1$ şi $T\,(cs) = cT\,(s)$, $\forall c \in \mathbb{R}$ şi $\forall s \in S_1$.

(b) Coordonatele mijlocului segmentului (în spaţiu) care uneşte punctele $(-v, u+v, u)$ şi $(2u, u-v, u+2v)$ sunt $z = u - \frac{v}{2}$, $y = u$, $z = u + v$ şi ele satisfac ecuaţia $2x - 3y + z = 0$, care este ecuaţia unui plan ce trece prin origine. Acesta este locul geometric căutat.

(c) Dacă $\varphi\,(X) = (X')$, unde $X = (x, y, z)\,, X' = (x', y', z')$ este un izomorfism liniar în $\mathbb{R}^3$, el este de forma

$$\begin{cases} x' = a_1x + a_2y + a_3z \\ y' = b_1x + b_2y + b_3z \\ z' = c_1x + c_2y + c_3z \end{cases}$$

în care determinantul coeficienţilor este $\neq 0$. Impunând condiţia că φ coincide cu T pe subspaţiul liniar S_1, găsim

$$\begin{cases} -a_1v + a_2\,(u+v) + a_3u \equiv 2u \\ -b_1v + b_2\,(u+v) + b_3u \equiv u - v \\ -c_1v + c_2\,(u+v) + c_3u \equiv u + 2v \end{cases}.$$

Din prima identitate, avem $a_2 + a_3 = 2$ şi $a_2 - a_1 = 0$. Dacă notăm $a_1 = a$, vom avea $a_2 = a$ şi $a_3 = 2 - a$. Din celelalte două identităţi, găsim $b_1 = b$, $b_2 = b - 1$, $b_3 = 2 - b$ şi respectiv $c_1 = c$, $c_2 = c + 2$, $c_3 = -\,(c+1)$. Izomorfismele căutate sunt de forma

$$\begin{cases} x' = ax + ay + (2-a)\,z \\ y' = bx + (b-1)\,y + (2-b)\,z \\ z' = cx + (c+2)\,y - (c+1)\,z \end{cases}$$

în care constantele satisfac condiţia $-3a + 4b + 2c \neq 0$.

4.8.34. Transformarea adjunctă se defineşte prin condiţia $\langle T\,(x)\,, y\rangle = \langle x, T^*\,(y)\rangle$, $\forall x, y \in \mathbb{R}^3$. În baze ortonormate, dacă T are matricea A, adjuncta T^* are matricea A^T.

Deci este preferabil să lucrăm în baza $\{e_1, e_2, e_3\}$. Vom avea

$$\begin{cases} T\,(v_1) = v_1 + 2v_3 = 3e_1 + 4e_2 + e_4 \\ T\,(v_2) = v_1 + 5v_2 + 7v_3 = 13e_1 + 14e_2 + 11e_3 \\ T\,(v_3) = 3v_1 - v_2 - 3v_3 = -e_1 + 2e_2 + e_3 \end{cases}.$$

Pe de altă parte, avem

$$\begin{cases} T\,(f_1) = T\,(e_1) + 2T\,(e_2) + T\,(e_3) \\ T\,(f_2) = T\,(e_1) + T\,(e_2) + 2T\,(e_3) \\ T\,(f_3) = T\,(e_1) + T\,(e_2) \end{cases}.$$

Scriind $2T(e_3) = T(f_2) - T(f_3)$, $T(e_2) - T(e_3) = T(f_1) - T(f_2)$, $T(e_1) = T(f_3) - T(e_2)$, vom obţine

$$\begin{cases} T(e_1) = 2e_1 + 6e_2 + 6e_3 \\ T(e_2) = -3e_1 - 4e_2 - 5e_3 \\ T(e_3) = 7e_1 + 6e_2 + 5e_3 \end{cases}.$$

Deci, în baza $\{e_1, e_2, e_3\}$, transformarea T^* va avea ca matrice transpusa matricei lui T, adică matricea

$$A^* = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 6 \\ -3 & -4 & -5 \\ 7 & 6 & 6 \end{pmatrix}.$$

Trecerea de la baza $\{e_1, e_2, e_3\}$ la baza $\{f_1, f_2, f_3\}$ se face prin matricea schimbării de bază

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix},$$

prin urmare matricea lui T^* în noua bază va fi

$$B^* = C^{-1} A^* C.$$

4.8.35. Considerăm baza canonică, $\mathcal{B}_1$, din $\mathbb{R}^3$ care este ortonormată şi matricea lui T_1 în această bază va fi

$$_{\mathcal{B}_1}(T_1)_{\mathcal{B}_1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Matricea endomorfismului T_1^* în aceeaşi bază ortonormată este

$$_{\mathcal{B}_1}(T_1^*)_{\mathcal{B}_1} = \left(_{\mathcal{B}_1}(T_1)_{\mathcal{B}_1}\right)^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Deci $T_1^* : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \forall x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$,

$T_1^*(x) = (x_1 + 2x_2 + x_3, 2x_1 - x_2, x_1 + x_2 + x_3)$.

Analog,

$$_{\mathcal{B}_2}(T_2^*)_{\mathcal{B}_2} = \left(_{\mathcal{B}2}(T_2)_{\mathcal{B}_2}\right)^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$T_2^* : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4, \forall x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4$,

$T_2^*(x) = (x_1 - x_4, -x_1 + x_2, -x_2 + x_3, -x_3 + x_4)$.

4.8.36 Se ştie că o bază a spaţiului $\mathbb{R}_{\leq 2}[x]$ este $\{1, x, x^2\}$. Aplicând procedeul Gram-Schmidt se obţine baza ortogonală $\left\{1, x.x^2 - \frac{1}{3}\right\}$ şi apoi baza ortonormată

$\mathcal{B} = \left\{r_1(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}, r_2(x) = \frac{\sqrt{6}}{2}x, r_3(x) = \frac{\sqrt{10}}{4}(3x^2 - 1)\right\}$.

În această bază determinăm matricea asociată endomorfismului

$T(r_1(x)) = -3 \cdot r_1(x) + 0 \cdot r_2(x) + 0 \cdot r_3(x)$

$T(r_2(x)) = 2\frac{\sqrt{6}}{2} - 3\frac{\sqrt{6}}{2}x = 2\sqrt{3}r_1(x) + (-3)r_2(x) + 0 \cdot r_3(x)$

$T(\frac{\sqrt{10}}{4}(3x^2 - 1)) = 0 \cdot r_1(x) + 2\sqrt{15}r_2(x) + (-3)r_3(x)$

$$_{\mathcal{B}}(T)_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & 2\sqrt{15} \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}.$$

Matricea endomorfismului adjunct în aceeaşi bază ortonormată este

$${}_{\mathcal{B}}\left(T^*\right)_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & 0 \\ 0 & 2\sqrt{15} & -3 \end{pmatrix}$$

$T^*(r_1(x)) = -3r_1(x) + 2r_2(x) = \sqrt{6}\left(x - \frac{1}{2}\right)$

$T^*(r_2(x)) = -3r_2(x) + 2\sqrt{15}r_3(x) = -\sqrt{6}\left(-\frac{15}{2}x^2 + \frac{3}{2}x + \frac{5}{2}\right)$

$T^*(r_3(x)) = -3r_3(x) = -3\frac{\sqrt{10}}{4}(3x^2 - 1)$

$T^*(a + bx + cx^2) = T^*\left(a\sqrt{2}r_1(x) + b\frac{\sqrt{6}}{3}r_2(x) + c\left(\frac{2}{15}\sqrt{10}r_3(x) + \frac{\sqrt{2}}{3}r_1(x)\right)\right) =$

$= a\sqrt{2}T^*(r_1(x)) + b\frac{\sqrt{6}}{3}T^*(r_2(x)) + c\frac{2}{15}\sqrt{10}T^*(r_3(x)) + c\frac{\sqrt{2}}{3}T^*(r_1(x)) =$

$= \left(-\sqrt{3}a - 5b + c - \frac{1}{3}\sqrt{3}c\right) + (2\sqrt{3}a - 3b + \frac{2}{3}\sqrt{3}c)x + (15b - 3c)\,x^2$

4.8.37. Matricea asocoată în baza canonică din $\mathbb{R}^2$, bază ortonormată, este

$P = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$, $P^{-1} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$.

Deoarece $P^{-1} = P^T$ rezultă că endomorfismul este ortogonal.

4.8.38. (a) Impunem condiţia $\langle T(x), T(x)\rangle = \langle x, x\rangle$, $\forall x \in \mathbb{V}$ şi găsim $a\langle x, u\rangle^2 (a\langle u, u\rangle - 2) = 0 \Rightarrow a = \frac{2}{\langle u,u\rangle}$. Prin urmare, T este dată prin

$$T(x) = x - \frac{2\langle x, u\rangle}{\langle u, u\rangle}u, \quad \forall x \in \mathbb{V}.$$

Rezultă

$$(T \circ T)(x) = T(T(x)) = T\left(x - \frac{2\langle x, u\rangle}{\langle u, u\rangle}u\right) = T(x) - \frac{2\langle x, u\rangle}{\langle u, u\rangle}T(u) =$$

$$= x - \frac{2\langle x, u\rangle}{\langle u, u\rangle}u - \frac{2\langle x, u\rangle}{\langle u, u\rangle}\left(u - \frac{2\langle u, u\rangle}{\langle u, u\rangle}u\right) = x, \quad \forall x \in \mathbb{V}$$

ceea ce înseamnă $T \circ T = I =$ transformarea identică în $\mathbb{V}$. Este evident că aplicarea de un număr impar de ori a transformării T coincide cu T şi că aplicarea de un număr par de ori coincide cu transformarea identică.

(b) Pentru $x = (x_1, x_2, x_3)$ şi $u = (2; 2; 1)$, avem $\langle x, u\rangle = 2x_1 + 2x_2 + x_3$ şi

$$T(x) = x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3 - \frac{2}{9}(2x_1 + 2x_2 + x_3)(2e_1 + 2e_2 + e_3).$$

Acum, vom căuta imaginile vectorilor e_1, e_2, e_3 pentru a putea scrie matricea lui T în această bază

$$\begin{cases} T(e_1) = \frac{1}{9}e_1 - \frac{8}{9}e_2 - \frac{4}{9}e_3 \\ T(e_2) = -\frac{8}{9}e_1 + \frac{1}{9}e_2 - \frac{4}{9}e_3 \\ T(e_3) = -\frac{4}{9}e_1 - \frac{4}{9}e_2 + \frac{7}{9}e_3 \end{cases}.$$

Matricea căutată este

$$\mathbf{A} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 1 & -8 & -4 \\ -8 & 1 & -4 \\ -4 & -4 & 7 \end{pmatrix}.$$

5.8.1 Vom demonstra doar simetria relaţiei: reflexivitatea şi tranzitivitatea sunt lăsate pe seama cititorilor. Dacă $B = UAU^{-1}$, atunci $A = U^{-1}BU = U^{-1}B(U^{-1})^{-1}$: aceasta arată că, dacă A este asemenea cu B, atunci şi B este asemenea cu A.

5.8.2 Calculăm mai întâi polinoamele caracteristice ale acestor matrice: $P_A(X) = (X - 1)(X - 2)(X - 3)$;$P_B(X) = (X - 3)^2(X - 6)$; $P_C(X) = (X - 2)(X^2 - X + 1)$; $P_D(X) = (X - 3)^2(X - 6)$. Rezolvăm apoi în $\mathbb{C}$ ecuaţiile polinomiale asociate.

5.8.3

(1) Este evident că orice minor de ordin ≥ 2 al matricei A are două linii proporţionale, deci este nul.

(2) Deoarece, în particular, toţi minorii principali de ordin ≥ 2 sunt nuli, polinomul caracteristic al matricei A este

$$P_A(X) = X^n - \sigma_1 X^{n-1} + \sigma_2 X^{n-2} - \ldots + (-1)^n \sigma_n = X^n - tX^{n-1},$$

unde $t = a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n$. (Notaţiile sunt cele din Propoziţia 5.2.11.)

(3) Pentru $t \neq 0$, matricea A are valoarea proprie 0, de multiplicitate algebrică $n-1$ şi valoarea proprie t de multiplicitate algebrică 1. În acest caz, multiplicitatea geometrică a lui t (care oricum este > 0), este egală cu 1, iar multiplicitatea algebrică a lui 0 (care este egală cu $n - rang(A)$) este $n-1$. Cazurile $t = 0, rang(A) = 1$ şi $t = rang(A) = 0$ sunt lăsate spre analiză cititorilor.

(4) Observăm că $A^2 = tA$. De aceea, dacă $t \neq 0$, polinomul minimal al matricei A (care divide $X^2 - tX$) trebuie să aibă rădăcini simple, adică A este diagonalizabilă. Cititorul este îndemnat să analizeze cazurile: $t = 0,\ rang(A) = 1$, respectiv $A = 0$.

5.8.4 Calculăm

$$det(XI_{2n} - M) = \begin{vmatrix} XI_n - A & -B \\ -B & XI_n - A \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} XI_n - A - B & -B \\ XI_n - A - B & XI_n - A \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} XI_n - A - B & -B \\ \mathbf{0} & XI_n - a + b \end{vmatrix} = det(XI_n - (A+B)) \cdot det(XI_n - (A-B)) = P_{A+B}(X) \cdot P_{A-B}(X).$$

5.8.5 Dacă $\lambda = 0$, atunci $T(v) = 0 \cdot v = 0$, adică $v \in Ker(T)$. Dacă $\lambda \neq 0$, atunci $T(\lambda^{-1}v) = \lambda^{-1}T(v) = v$, deci $v \in Im(T)$.

5.8.6 Fie λ valoarea proprie corespunzătoare vectorului propriu v; atunci

$$(T + a \cdot id_{\mathbf{V}})(v) = T(v) + av = (\lambda + a)v,$$

ceea ce arată că v este vector propriu pentru endomorfismul dat.

O posibilă generalizare este: *Dacă v este vector propriu pentru T, iar F este un polinom arbitar, atunci v este vector propriu şi pentru $F(T)$.*

5.8.7 Vom arăta că toţi coeficienţii polinomului $P_{\overline{A}}$ se obţin prin conjugarea complexă a coeficienţilor corespunzători ai polinomului P_A. Dacă ţinem cont de Propoziţia 5.2.11, e suficient să arătăm că $det(\overline{A})$ este conjugatul complex al $det(A)$: aceasta rezultă imediat din definiţia determinantului şi din proprietăţile conjugării.

5.8.8 Reciproca nu este adevărată. Să considerăm, de exemplu, următoarele matrice:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Este evident că $P_A(X) = P_B(X) = (X-1)^2$, dar A şi B nu pot fi asemenea, deoarece $U^{-1}AU = A$ pentru orice matrice inversabilă U.

5.8.9 Două matrice asemenea A şi B au acelaşi polinom caracteristic, deci au aceleaşi valori proprii.

Dacă v este vector propriu pentru A, iar U este o matrice inversabilă pentru care $B = UAU^{-1}$, atunci $w = Uv$ este vector propriu al lui B, corespunzător aceleiaşi valori proprii λ:

$$Bw = (UAU^{-1})(Uv) = U(Av) = U(\lambda v) = \lambda w.$$

5.8.10

(1) Fie $F(X) = a(X - t_1)\dots(X - t_r)$; atunci $F(A) = a(A - t_1 I_n)(A - t_2 I_n)\dots(A - t_r I_n)$. De aceea, $det(F(A) = a^n det(A - t_1 I_n)\dots det(A - t_r I_n) = a^n(-1)^{nr} P_A(t_1)\dots P_A(t_r)$. Cum $P_A(X) = (X - \lambda_1)\dots(X - \lambda_n)$, egalitatea din enunţ rezultă imediat.

(2) Aplicăm proprietatea de la punctul (1) polinomului $G(X) = Y - F(X) \in \mathbb{K}(Y)[X]$:

$$det(G(A)) = det(YI_n - F(A)) = (Y - F(\lambda_1))(Y - F(\lambda_2))\dots(Y - F(\lambda_n)).$$

Pe de altă parte, $det(G(A)) = P_{G(A)}(Y)$, ceea ce demonstrează afirmaţia din enunţ.

5.8.11 De exemplu, subspaţiile de dimensiune 2, invariate de T, sunt planul de simetrie π, precum şi orice plan β ce trece prin origine şi este perpendicular pe π.

5.8.12 Vom demonstra, ca exemplu, doar afirmaţia: $\mathbb{U} + \mathbb{W}$ este subspaţiu invariat de T. Fie $v \in \mathbb{U} + \mathbb{W}$ un vector arbitrar; există deci $u \in \mathbb{U}$ şi $w \in \mathbb{W}$ astfel ca $v = u + w$. Atunci:

$$T(v) = T(u + w) = T(u) + T(w) \in \mathbb{U} + \mathbb{W}.$$

(Ultima afirmaţie rezultă din ipoteza că $\mathbb{U}$ şi $\mathbb{W}$ sunt subspaţii invariante.)

5.8.13 Răspuns:

$$J_A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2+i & 0 \\ 0 & 0 & 2-i \end{pmatrix}, J_B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, J_C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, J_D = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Explicităm calculele doar pentru matricea B: pentru celelalte matrice, recomandăm cititorului să procedeze analog.

Calculăm $P_B(X) = det(XI_3 - B) = (X - 2)^3$. Definim

$$E = B - 2I_3 = \begin{pmatrix} -2 & -4 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Deoarece $E^2 = 0_3$, deci $rang(E) = 1$, iar $rang(E^2) = rang(E^3) = 0$, obţinem $n_1 = n_2 = 1$ (notaţiile sunt cele din (87)).

5.8.14 Răspuns:

$$J_{\mathbf{d}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \mathcal{B}_1 = \{X^2; 2X; 2\}; \quad J_{\mathbf{d}^2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \mathcal{B}_2 = \{X^2; 2; 2X\}.$$

Argumentăm doar primul calcul. Matricea asociată lui $\mathbf{d}$ în baza canonică $\{1; X; X^2\}$ este $D = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Calculăm $D^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ şi $D^3 = 0$. O bază în $Im(\mathbf{d}^2)$ este $v_1 = [2; 0; 0]^T$, vector care corespunde polinomului $F_1 = 2$. Avem $v_1 = Dv_2$, unde $v_2 = [0; 2; 0]^T$ corespunde polinomului $F_2 = 2X$, iar $v_2 = Dv_3$, unde $v_3 = [0; 0; 1]^T$ corespunde polinomului $F_3 = X^2$. Deci

$\{F_3, F_2, F_1\}$ este un vector propriu generalizat, iar matricea asociată lui $\mathbf{d}$ în această bază este matricea $J_{\mathbf{d}}$.

5.8.15 Răspuns: $J_A = \begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 1 & 7 \end{pmatrix}, \mathcal{B}_A = \{[4;3]^T, [0;1]^T\}$;

$$J_B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \mathcal{B}_B = \{[(1;1;-1]^T, [-4;-5;6]^T; [0;0;1]^T\};$$

$$J_C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \mathcal{B}_C = \{[1;-1;0;0]^T, [0;1;-1;0]^T, [0;0;1;-1]^T, [0,0,0,1]^T\}.$$

(Bazele $\mathcal{B}_A, \mathcal{B}_B, \mathcal{B}_C$ în care matricele asociate sunt matricele Jordan, nu sunt unic determinate.)

Explicităm calculele doar pentru matricea B. Calculăm: $P_B(X) = X^3$, deci singura valoare proprie a lui B este 0. Notăm tot cu B endomorfismul lui $\mathbb{C}^3$ a cărei matrice în baza canonică este matricea B. Calculăm

$$B^2 = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}, B^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Observăm că $dim(Im(B^2)) = rang(B^2) = 1$, o bază fiind de exemplu $v_1 = (1;1;-1)^T$ (luăm una din coloanele matricei B^2). Căutăm vectorul $v_2 \in Im(B)$ cu proprietatea că $v_1 = Bv_2$ şi găsim $v_2 = (-4;-5;6)^T$ (v_2 este ultima coloană a matricei B), apoi determinăm un vector v_3 pentru care $Bv_3 = v_2$ şi găsim $v_3 = (0;0;1)^T$ ($v_3 = e_3$, deoarece v_2 este ultima coloană a lui B). Am determinat astfel o bază în care matricea asociată endomorfismului dat este matricea Jordan.

5.8.16

(1) $C_P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$.

(2) Dezvoltăm $det(XI_n - C_P)$ după ultima coloană şi obţinem

$$(-1)^{n+1}a_0\cdot(-1)^{n-1}+(-1)^{n+2}a_1\cdot(-1)^{n-2}X+\ldots+(-1)^{2n-1}a_{n-2}\cdot(-1)^1X^{n-2}+(X+a_{n-1})X^{n-1} = P(X).$$

(3) Enunţ posibil: *polinomul minimal al matricei companion C_P este polinomul P*. Enunţul este susţinut de următorul caz particular: dacă P este ireductibil în $\mathbb{K}[X]$, atunci el trebuie să coincidă cu polinomul minimal al matricei C_P. Vom demonstra că acest enunţ este adevărat. Considerăm matricea C_P ca fiind matricea asociată endomorfismului $T \in End_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}^n)$, în baza canonică $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$. Ştim deci că $T(e_i) = e_{i+1}$ pentru $1 \leq i < n$. Fie $F = b_0 + b_1X + \ldots + b_{n-1}X^{n-1}$ un polinom de grad $< n$, pentru care $F(T) = 0$. Atunci

$$0 = F(T)(e_1) = b_0e_1 + b_1e_2 + \ldots + b_{n-1}e_n.$$

Folosind liniar independenţa sistemului de vectori $\{e_i\}_i$, deducem că F este polinomul nul. Rezultă deci că polinomul minimal al lui T are grad $\geq n$, deci coincide cu polinomul caracteristic, adică cu $P(X)$.

(4) Dacă polinomul minimal al unei matrice A coincide cu polinomul caracteristic, Teorema 5.6.3 şi un calcul cu ordinele blocurilor Jordan ne arată că matricea Jordan J_A are cîte un singur bloc Jordan corespunzător fiecărei valori proprii, al cărui ordin este egal cu multiplicitatea algebrică a valorii proprii respective. În particular, în cazul matricei companion C_P, forma sa canonică Jordan este

$$J = \begin{pmatrix} J_{p_1}(\lambda_1) & & & \\ & J_{p_2}(\lambda_2) & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_{p_r}(\lambda_r) \end{pmatrix},$$

dacă $P(X) = (X - \lambda_1)^{p_1}(X - \lambda_2)^{p_2} \dots (X - \lambda_r)^{p_r}$ este descompunerea în factori liniari a lui P.

(5) Rezultă din (2) şi (4).

5.8.17

(1) Se aplică doar definiţia: dacă $X.Y \in C(A)$, iar $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$, atunci

$$A(\alpha X + \beta Y) = \alpha AX + \beta AY = \alpha XA + \beta YA = (\alpha X + \beta Y)A,$$

deci $\alpha X + \beta Y \in C(A)$.

(2) Dacă polinomul minimal şi polinomul caracteristic ale matricei A coincid, atunci proprietatea cerută este imediată: matricele I_n, A, $A^2, \dots, A^{n-1}$ sunt liniar independente şi comută cu A. Acest caz particular, care arată legătura între punctele (2) şi (4) ale problemei, nu este însă suficient pentru a demonstra proprietatea (2) în general.

Să particularizăm într-un alt mod: vom presupune acum că

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

este un bloc Jordan corespunzător numărului 0. (De fapt, pentru un bloc Jordan, polinomul minimal şi polinomul caracteristic coincid, deci putem aplica de la început argumentul de mai sus; includem totuşi o demonstraţie directă pentru acest caz.) Este uşor de văzut, folosind doar definiţia, că X comută cu A dacă şi numai dacă

$$X = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & \dots & 0 \\ b & a & 0 & \dots & 0 \\ c & b & a & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x & y & z & \dots & a \end{pmatrix},$$

adică diagonalele de sub diagonala principală ale lui X conţin câte un acelaşi număr, iar restul elementelor sunt nule. De aceea, în acest caz, $dim_{\mathbb{C}}(C(A)) = n$.

Dacă A este un bloc Jordan arbitar (care corespunde numărului λ, eventual nenul), observăm că X comută cu A dacă şi numai dacă X comută cu $A - \lambda I_n$; reducem astfel problema la cazul particular anterior.

Fie acum $A = diag\{J_1, J_2, \ldots, J_p\}$ o matrice Jordan, adică o matrice formată din blocuri Jordan aşezate pe diagonala principală. Vom determina doar acele matrice X care comută cu A şi, în plus, au o formă - bloc asemănătoare cu A, adică $X = diag\{X_1, X_2, \ldots, X_p\}$ (deci sunt formate din blocuri de aceleaşi dimensiuni cu cele din A, aşezate pe diagonală, iar restul elementelor sunt 0). Dacă scriem explicit condiţia de comutare, obţinem imediat relaţia

$$X \text{ comută cu } A \Leftrightarrow X_i \text{ comută cu } J_i, \forall i.$$

Deoarece matricele X de această formă formează un subspaţiu vectorial al lui $C(A)$, iar din cele demonstrate mai sus, obţinem că dimensiunea acestui subspaţiu este n, deducem că $dim_{\mathbb{C}}(C(A)) \geq n$.

Fie acum A o matrice arbitrară şi fie J forma sa canonică Jordan. Este uşor de văzut că spaţiile vectoriale $C(A)$ şi $C(J)$ sunt izomorfe. Într-adevăr, dacă $J = U^{-1}AU$, aplicaţia $X \mapsto U^{-1}XU$ determină izomorfismul cerut. Deci: $dim_{\mathbb{C}}(C(A)) = dim_{\mathbb{C}}(C(J)) \geq n$.

(3) Conform celor demonstrate anterior, este suficient să determinăm dimensiunea spaţiului $C(J)$, unde $J = diag\{J_3, J_1\}$ este forma Jordan a matricei B, în care blocurile Jordan corespund numărului 1 (conform Exemplului **??**). Scriem matricea X sub forma-bloc

$$X = \begin{pmatrix} M & N \\ P & Q \end{pmatrix},$$

unde blocurile au aceleaşi dimensiuni cu blocurile lui J. Condiţia de comutare se scrie

$$J_3 \cdot M = M \cdot J_3; J_3 \cdot N = N \cdot J_1; J_1 \cdot P = P \cdot J_3; J_1 \cdot Q = Q \cdot J_1.$$

Ştim deja că M determină un spaţiu vectorial de dimensiune 3, iar Q determină un spaţiu vectorial de dimensiune 1. Scriind explicit celelalte două ecuaţii, obţinem că N şi P determină fiecare spaţii vectoriale de dimensiune 1. De aceea, $dim_{\mathbb{C}}(C(B)) = 6$.

(4) Procedăm analog ca în exemplul de la punctul (3). Este util să demonstrăm doar următorul rezultat: *Dacă $J_p(\alpha)$ şi $J_q(\beta)$ sunt două blocuri Jordan, atunci dimensiunea spaţiului matricelor Y pentru cate $J_p(\alpha)Y = YJ_q(\beta)$ este egală cu $min\{p, q\}$ pentru $\alpha = \beta$, sau este 0 în caz contrar.*

5.8.18 Observăm că $det(XI_n - A) = det(XI_n - A^T)$, deoarece aceste două matrice sunt una transpusa celeilalte; de aici, rezultă că $P_A(X) = P_{A^T}(X)$. Pentru a demonstra că matricele A şi A^T au acelaşi polinom minimal, folosim faptul că rangul unei matrice nu se modifică prin transpunerea matricei respective; de aceea, relaţiile (88) arată că matricele au aceeaşi formă canonică Jordan, deci au acelaşi polinom minimal.

5.8.19 Fie U matricea obţinută din I_n prin schimbarea între ele a liniilor i şi j, apoi a coloanelor i şi j. Matricea U are în continuare, pe fiecare linie şi coloană, un singur element egal cu 1, toate celelalte elemente fiind nule. Matricea U corespunde, de fapt, transpoziţiei (i, j): chiar şi fără această observaţie, putem verifica imediat egalitatea $U^{-1} = U$. În plus, un calcul simplu arată că $\tilde{A} = UAU$. Deducem că matricele $\tilde{A}$ şi A sunt matrice asemenea, deci ele au aceeaşi formă Jordan.

5.8.20 Putem verifica (de exemplu, prin inducţie) că, dacă F este un polinom arbitrar, atunci

$$F(B) = \begin{pmatrix} F(A) & F'(A) \\ 0 & F(A) \end{pmatrix}.$$

De aceea, polinomul minimal al matricei B este un polinom nenul P, de grad minim posibil, cu proprietatea că P şi P' sunt divizibile cu μ_A. Ajungem astfel la egalitatea: $P(X) = \prod_{i=1}^{t}(X - \lambda_i)^{s_i+1}$.

5.8.21

(1) Dezvoltaţi determinantul după o linie.

(2) Evident, $m_a(2) = 2$. Pentru a calcula $m_g(2)$, calculăm rangul matricei $2I_4 - A$: avem $m_g(2) = dim(Ker(2I_4 - A)) = 4 - rang(2I_4 - A) = 1$.

(3) Calculăm $B = A - 2I_4$, apoi B^2; subspaţiul $\mathbb{C}_F$ se obţine determinând vectorii v pentru care $B^2 v = 0$. Explicităm spaţiul soluţiilor acestui sistem liniar şi obţinem $\mathbb{C}_F = Span\{(1;0;-1;0)^T, (0;1;0;-1)^T\}$. Analog, $\mathbb{C}_G = Span\{(1;0;1;0)^T, (0;1;0;1)^T\}$.

(4) Polinomul minimal divide polinomul caracteristic şi aceste două polinoame au aceiaşi factori ireductibili. De aceea, polinomul minimal al lui A poate fi unul din următoarele polinoame: $(X-2)(X+2), (X-2)^2(X+2), (X-2)(X+2)^2, (X-2)^2(X+2)^2$. O verificare directă ne arată că $\mu_A(X) = (X-2)^2(X+2)^2$.

(5) Nu, deoarece polinomul minimal are rădăcini multiple. Alt argument: $m_a(2) \neq m_g(2)$, deci matricea A nu este diagonalizabilă.

(6) Nu, aceleaşi calcule sunt valabile şi peste corpul $\mathbb{Q}$ al numerelor raţionale.

5.8.22

(1) Dacă $U^{-1}AU = diag\{a_1, a_n, \dots, a_n\}$, atunci $U^{-1}A^pU = diag\{a_1^p, a_2^p, \dots, a_n^p\}$. Deci A^p este diagonalizabilă.

(2) Dacă A^p este diagonalizabilă, atunci polinomul minimal al acestei matrice este de forma $\mu_{A^p}(X) = (X - b_1)\dots(X - b_r)$, unde numerele $b_1, b_2, \dots, b_r$ sunt distincte şi nenule. Deducem că $F(A) = 0$, unde $F = (X^p - b_1)\dots(X^p - b_r)$. Deoarece polinomul F are rădăcini distincte, iar μ_A divide F, rezultă că şi polinomul minimal μ_A al matricei A are rădăcini distincte. Deci A este diagonalizabilă.

5.8.23 Considerăm A ca matrice cu elemente numere complexe, asociată unui endomorfism $T \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^n)$ şi fie $\lambda \in \mathbb{C}$ o valoare proprie a lui A. Există deci un vector propriu (nenul) $v \in \mathbb{C}^n$, pentru care $Av = \lambda \cdot v$. Aplicând conjugarea complexă egalităţii anterioare şi ţinând cont de ipoteze, obţinem

$$\overline{v}^T A = \overline{\lambda} \cdot \overline{v}^T.$$

Deoarece

$$\lambda\|v\| = \lambda\overline{v}^T \cdot v = \overline{v}^T A v = \overline{\lambda}\|v\|,$$

iar $\|v\| \neq 0$, deducem că $\lambda \in \mathbb{R}$. Răspunsul la a doua întrebare este negativ. Lăsăm cititorului plăcerea de a găsi un contraexemplu.

5.8.24 Vom demonstra ambele proprietăţi în acelaşi timp, prin inducţie după n.

Pentru $n = 1$, problema este evidentă. Să presupunem acum că orice matrice simetrică din $\mathcal{M}_k(\mathbb{R})$ este diagonalizabilă, prin intermediul unei matrice de trecere ortogonale, şi să demonstrăm că proprietatea se păstrează pentru matricele simetrice din $\mathcal{M}_{k+1}(\mathbb{R})$.

Fie $A \in \mathcal{M}_{k+1}(\mathbb{R})$ o matrice simetrică şi fie λ o valoare proprie (reală) a matricei A. Putem alege un vector propriu v_1, corespunzător acestei valori proprii, de normă 1. Completăm vectorul v_1 la o bază a lui $\mathbb{R}^{k+1}$, apoi transformăm această bază în baza *ortonormată* $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, \ldots, v_{k+1}\}$, folosind, de exemplu, procedeul de ortogonalizare Gram-Schmidt. Fie U matricea de trecere dintre baza canonică a lui $\mathbb{R}^{k+1}$ şi baza $\mathcal{B}_1$; atunci U este o matrice ortogonală, ortogonalitatea fiind echivalentă cu $\langle v_i, v_j \rangle = \delta_{i,j}$ (condiţie ce defineşte bazele ortonormate).

Fie $B = U^{-1}AU$; deoarece

$$B^T = (U^{-1}AU)^T = U^T A^T (U^{-1})^T = U^{-1}AU,$$

deducem că B este matrice simetrică. În plus, prima coloană a lui B este

$$Be_1 = U^{-1}AUe_1 = U^{-1}Av_1 = U^{-1}\lambda v_1 = \lambda e_1,$$

unde e_1 este primul vector al bazei canonice din $\mathbb{R}^{k+1}$. (Am folosit aici doar definiţia matricei de trecere de la o bază la alta!). Deducem că

$$B = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix},$$

unde C este o matrice simetrică, de ordinul k. Conform ipotezei de inducţie, există o matrice ortogonală $V \in \mathcal{M}_k(R)$ pentru care $V^{-1}CV$ este matrice diagonală; atunci matricea

$$D = U \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & V \end{pmatrix}$$

este o matrice ortogonală, care transformă A într-o matrice diagonală.

5.8.25

(1) Polinomul minimal al matricei A divide X^p, deci este de forma X^q. Cum polinomul caracteristic şi polinomul minimal au aceiaşi factori ireductibili, deducem că $P_A(X) = X^n$.
(2) Se foloseşte Lema 5.6.1.
(3) Deoarece polinomul minimal al matricei A este de forma $\mu_A(X) = X^q$, matricea A este diagonalizabilă dacă şi numai dacă $q = 1$. Altfel spus, singura matrice nilpotentă diagonalizabilă este matricea nulă.

5.8.26 Pentru implicaţia directă, înlocuim A cu J_A: urma unei matrice se păstrează dacă înlocuim matricea dată cu o matrice asemenea cu ea.

Pentru implicaţia inversă, folosim egalitatea

$$Tr(A^p) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i,$$

unde $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ sunt valorile proprii ale lui A.

5.8.27 Exprimăm matricea $(A + \lambda B)^n$ sub forma

$$A^n + \lambda C_1 + \lambda^2 C_2 + \ldots + \lambda^{n-1} C_{n-1} + \lambda^n B^n,$$

unde matricele $C_1, C_2, \ldots, C_{n-1}$ nu depind de λ.

Pentru o poziţie fixată (i, j), fie $a, c_1, c_2, \ldots, c_{n-1}, b$ elementele de pe poziţia (i, j) din matricele $A^n, C_1, \ldots, C_{n-1}, B^n$. Ipoteza spune că polinomul

$$a + c_1 X + c_2 X^2 + \ldots + c_{n-1} X^{n-1} + b X^n$$

se anulează pentru $n+1$ valori distincte ale variabilei X. Deducem că acest polinom este identic nul, deci, în particular, $a = b = 0$. Aşadar, toate elementele matricelor A^n şi B^n sunt nule, deci matricele A şi B sunt nilpotente.

5.8.28

(1) Polinomul minimal al lui A divide $X(X-1)$, deci are rădăcini simple.

(2) Înlocuim A cu J_A: rangul şi urma matricei nu se schimbă prin această înlocuire. Dacă A este idempotentă, atunci celulele Jordan din J_A au ordin 1 şi corespund valorilor proprii 0 sau 1.

(3) $A^2 = A \iff (I - A)^2 = I - A$.

(4) Dacă $(A + B)^2 = A + B$, atunci $AB + BA = \mathbf{0}_n$. Înmulţim la stânga cu A, apoi la dreapta cu B această relaţie şi obţinem

$$AB = -ABA = BA.$$

Deci $AB = BA = \mathbf{0}_n$. Reciproca este imediată.

5.8.29 Demonstraţia se face prin inducţie după n. Pentru $n = 2$, rezultă imediat că putem alege vectorul $v \neq 0$ pentru care Av şi v sunt liniar independenţi; în baza $\{v, Av\}$, matricea asemenea cu A are forma cerută.

Fie A o matrice de ordin $m + 1$, cu $m \geq 2$. Scriem $A = \begin{pmatrix} B & * \\ * & * \end{pmatrix}$, unde B este o matrice de ordinul m. Putem presupune (efectuînd eventual permutări de linii şi coloane) că $B \neq \lambda I_m$. Există deci o matrice inversabilă $U \in \mathcal{M}_m(\mathbb{K})$ pentru care UPU^{-1} are forma cerută. Diagonala matricei $C = \begin{pmatrix} U & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B & * \\ * & * \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} UBU^{-1} & * \\ * & * \end{pmatrix}$ este de forma $diag\{0, 0, \ldots, 0, \alpha, \beta\}$. Dacă $\alpha = 0$, am terminat; dacă nu, aplicăm cazul $n = 2$ matricei $\begin{pmatrix} \alpha & * \\ * & \beta \end{pmatrix}$.

5.8.30 Fie $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ cele m valori proprii distincte, de multiplicităţi algebrice $p_1, \ldots, p_m$. Atunci

$$b_{ij} = p_1 \lambda_1^{i+j-2} + p_2 \lambda_2^{i+j-2} + \ldots + p_m \lambda_m^{i+j-2}.$$

Folosind un determinant de tip Vandermonde şi proprietatea $det(XY) = det(X)det(Y)$, obţinem egalitatea

$$det(b_{ij})_{i,j \in \overline{1,m}} = p_1 \ldots p_m \prod_{i<j} (\lambda_i - \lambda_j)^2 \neq 0.$$

6.6.1 Se verifică imediat, prin calcul direct, că aplicaţiile de la punctele a) şi c) sunt forme biliniare, în timp ce aplicaţia dată la punctul b) nu este formă biliniară.

6.6.2 Ţinând cont de proprietăţile matricelor avem:
$F(\alpha X+\beta Y,Z)=(\alpha X+\beta Y)AZ^t=\alpha XAZ^t+\beta YAZ^t=\alpha F(X,Z)+\beta F(Y,Z)$ şi $F(X,\alpha Y+\beta Z)=XA(\alpha Y+\beta Z)^t=XA(\alpha Y^t+\beta Z^t)=\alpha XAY^t+\beta XAZ^t=\alpha F(X,Y)+\beta F(X,Z)$. Astfel, putem conchide că F este o formă biliniară. Forma biliniară nu este simetrică.

6.6.3 Dacă $x=0_V$, atunci $F(x,y)=F(x,x)=0$, deci în inegalitatea $F(x,y)^2\leq F(x,x)F(y,y)$ avem egalitate. Pe de altă parte, deoarece orice mulţime de vectori ce conţine vectorul nul este liniar dependentă, problema este rezolvată în acest caz particular.

Putem presupune deci că $x\neq 0_V$, adică $F(x,x)>0$. Considerăm $\alpha\in\mathbb{R}$ arbitrar. Deoarece F este pozitiv definită, rezultă că $F(\alpha x+y,\alpha x+y)\geq 0$. Pe de altă parte, folosind axiomele din definiţia formei biliniare, avem $F(\alpha x+y,\alpha x+y)=\alpha^2F(x,x)+2\alpha F(x,y)+F(y,y)$, deci $\alpha^2F(x,x)+2\alpha F(x,y)+F(y,y)\geq 0$, pentru orice $x,y\in V$.

Definim funcţia $\varphi:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $\varphi(\alpha)=\alpha^2F(x,x)+2\alpha F(x,y)+F(y,y)$. Observăm că φ este o funcţie polinomială de gradul doi, având coeficientul termenului dominant $F(x,x)>0$ şi cu proprietatea că $\varphi(\alpha)\geq 0$, pentru orice $\alpha\in\mathbb{R}$. Obţinem că $\Delta\leq 0$, adică $4F(x,y)^2-4F(x,x)F(y,y)\leq 0$, de unde rezultă că $F(x,y)^2\leq F(x,x)F(y,y)$.

Presupunem acum că $F(x,y)^2=F(x,x)F(y,y)$, adică $\Delta=0$. Atunci ecuaţia de gradul doi $\alpha^2F(x,x)+2\alpha F(x,y)+F(y,y)=0$ are două rădacini reale egale $\alpha_1=\alpha_2$. Obţinem deci că $F(\alpha_1x+y,\alpha_1x+y)=0$, ceea ce conduce la $\alpha_1x+y=0$, deci vectorii x şi y sunt liniar dependenţi.

Reciproc, dacă x şi y sunt liniar dependenţi, atunci există $\lambda\in\mathbb{R}$ astfel încât $y=\lambda x$. Rezultă că $F(x,y)^2=\alpha^2F(x,x)^2$, iar $F(x,x)F(y,y)=F(x,x)F(\alpha x,\alpha x)=\alpha^2F(x,x)^2$. Din ultimele două relaţii obţinem că $F(x,y)^2=F(x,x)F(y,y)$.

6.6.4 a) Se verifică prin calcul direct că F este formă biliniară.

b) Matricea asociată formei biliniare F în baza canonică a lui $\mathbb{R}^3$ este:

$$A=\begin{pmatrix}0&3&0\\1&1&0\\-1&0&2\end{pmatrix}.$$

c) Vom folosi Teorema 6.1.7. Deoarece matricea asociată formei pătratice F în baza canonică B_1 este A, găsită la punctul precedent, iar matricea de trecere de la B_1 la B_2 este $C=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&0&0\end{pmatrix}$, rezultă că matricea asociată lui F în baza B_2 este:

$$B=C^TAC=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&0\\1&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&3&0\\1&1&0\\-1&0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&0&1\\3&0&3\\4&1&5\end{pmatrix}.$$

6.6.5 a) $Q : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$, $Q(x) = F(x,x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 4x_1x_2 - 8x_2x_3$;
b) $Q : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, $Q(A) = Tr(A)$.

6.6.6 a) Aplicând procedeul descris în Teorema 6.2.7 avem:

$$Q(x) = (x_1^2 - 2x_1x_2 + 4x_1x_3) + 9x_2^2 + 17x_3^2 = (x_1 - x_2 + 2x_3)^2 - x_2^2 - 4x_3^2 + 4x_2x_3 + 9x_2^2 + 17x_3^2$$

$$= (x_1 - x_2 + 2x_3)^2 + 8x_2^2 + 13x_3^2 + 4x_2x_3 = (x_1 - x_2 + 2x_3)^2 + \frac{1}{8}(64x_2^2 + 32x_2x_3 + 13x_3^2)$$

$$= (x_1 - x_2 + 2x_3)^2 + \frac{1}{8}(8x_2 + 2x_3)^2 - \frac{1}{2}x_3^2 + 13x_3^2 = (x_1 - x_2 + 2x_3)^2 + \frac{1}{8}(8x_2 + 2x_3)^2 + \frac{25}{2}x_3^2$$

Cu notaţiile:

$$\begin{cases} \bar{x}_1 = x_1 - x_2 + 2x_3 \\ \bar{x}_2 = 8x_2 + 2x_3 \\ \bar{x}_3 = x_3 \end{cases}$$

vom obţine forma canonică a formei pătratice:

$$Q(x) = \bar{x}_1^2 + \frac{1}{8}\bar{x}_2^2 + \frac{25}{2}\bar{x}_3^2.$$

b) Ne aflăm în primul caz al metodei lui Gauss, prezentat în demonstraţia Teoremei 6.2.7. Astfel

$$Q(x) = (4x_1^2 - 4x_1x_2 - 4x_1x_3) + x_2^2 + x_3^2 + 8x_2x_3 = \frac{1}{4}(16x_1^2 - 16x_1x_2 - 16x_1x_3) + x_2^2 + x_3^2 +$$

$$8x_2x_3 = \frac{1}{4}(4x_1 - 2x_2 - 2x_3)^2 - x_2^2 - x_3^2 - 2x_2x_3 + x_2^2 + x_3^2 + 8x_2x_3 = \frac{1}{4}(4x_1 - 2x_2 - 2x_3)^2 + 6x_2x_3.$$

În continuare ne aflăm în cel de-al doilea caz al metodei lui Gauss. Pentru a obţine un nou termen cu pătrat vom nota:

$$\begin{cases} 4x_1 - 2x_2 - 2x_3 = \bar{x}_1 \\ x_2 = \bar{x}_2 + \bar{x}_3 \\ x_3 = \bar{x}_2 - \bar{x}_3 \end{cases}$$

Obţinem forma canonică:

$$Q(x) = \frac{1}{4}\bar{x}_1^2 + 6\bar{x}_2^2 - 6\bar{x}_3^2.$$

c) Notând

$$\begin{cases} x_1 = x_1' + x_2' \\ x_2 = x_1' - x_2' \\ x_3 = x_3' \\ x_4 = x_4' \end{cases}$$

rezultă:

$$Q(x) = x_1'^2 - x_2'^2 + 2x_1'x_3' + 2x_1'x_4' + x_3'x_4' = (x_1' + x_3' + x_4')^2 - x_3'^2 - x_4'^2 - 2x_3'x_4' - x_2'^2 + x_3'x_4' =$$

$$(x_1' + x_3' + x_4')^2 - x_2'^2 - x_3'^2 - x_4'^2 - x_3'x_4' = (x_1' + x_3' + x_4')^2 - x_2'^2 - \left(x_3' + \frac{1}{2}x_4'\right)^2 - \frac{3}{4}x_4'^2.$$

În final găsim forma canonică

$$Q(x) = \bar{x}_1^2 - \bar{x}_2^2 - \bar{x}_3^2 - \frac{3}{4}\bar{x}_4^2.$$

d) Succesiv avem:

$Q(x) = (x_1^2 + x_1x_2 + 2x_1x_3 - 4x_1x_4) + 2x_2^2 - 3x_4^2 + x_2x_3 + x_3x_4 = (x_1 + \frac{1}{2}x_2 + x_3 - 2x_4)^2 - \frac{1}{4}x_2^2 - x_3^2 - 4x_4^2 - x_2x_3 + x_2x_4 + 4x_3x_4 + 2x_2^2 - 3x_4^2 + x_2x_3 + x_3x_4 = (x_1 + \frac{1}{2}x_2 + x_3 - 2x_4)^2 + \frac{7}{4}x_2^2 - x_3^2 - 7x_4^2 + x_2x_4 + 5x_3x_4 = (x_1 + \frac{1}{2}x_2 + x_3 - 2x_4)^2 + \frac{4}{7}\left(\frac{49}{16}x_2^2 + \frac{7}{4}x_2x_4\right) - x_3^2 - 7x_4^2 + 5x_3x_4 = (x_1 + \frac{1}{2}x_2 + x_3 - 2x_4)^2 + \frac{4}{7}\left(\frac{7}{4}x_2 + \frac{1}{2}x_4\right)^2 - \frac{1}{7}x_4^2 - x_3^2 - 7x_4^2 + 5x_3x_4 = (x_1 + \frac{1}{2}x_2 + x_3 - 2x_4)^2 + \frac{4}{7}\left(\frac{7}{4}x_2 + \frac{1}{2}x_4\right)^2 - x_3^2 - \frac{50}{7}x_4^2 + 5x_3x_4 = (x_1 + \frac{1}{2}x_2 + x_3 - 2x_4)^2 + \frac{4}{7}\left(\frac{7}{4}x_2 + \frac{1}{2}x_4\right)^2 - \left(x_3 - \frac{5}{2}\right)^2 + \frac{25}{4}x_4^2 - \frac{50}{7}x_4^2 = (x_1 + \frac{1}{2}x_2 + x_3 - 2x_4)^2 + \frac{4}{7}\left(\frac{7}{4}x_2 + \frac{1}{2}x_4\right)^2 - \left(x_3 - \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{25}{28}x_4^2.$

Aşadar, forma canonică va fi

$$Q(x) = \bar{x}_1^2 + \frac{4}{7}\bar{x}_2^2 - \bar{x}_3^2 - \frac{25}{28}\bar{x}_1^2.$$

6.6.7 a) Matricea asociată formei pătratice este

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 8 & 2 \\ 8 & 8 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Minorii principali ai acestei matrice sunt:

$$\Delta_1 = 1 \neq 0, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 8 \\ 8 & 8 \end{vmatrix} = -56 \neq 0, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 8 & 2 \\ 8 & 8 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -28 \neq 0.$$

Forma canonică a formei pătratice Q va fi:

$$Q(x) = \bar{x}_1^2 - \frac{1}{56}\bar{x}_2^2 + 2\bar{x}_3^2.$$

b) $Q(x) = \bar{x}_1^2 - \frac{1}{2}\bar{x}_2^2 + \frac{1}{5}\bar{x}_3^2.$

c) $Q(x) = \bar{x}_1^2 - \frac{1}{2}\bar{x}_2^2 + \frac{1}{2}\bar{x}_3^2 + 2\bar{x}_4^2.$

d) $Q(x) = \bar{x}_1^2 + \bar{x}_2^2 - \bar{x}_3^2 - \frac{1}{2}\bar{x}_4^2.$

6.6.8 Formele canonice obţinute prin metoda transformărilor ortogonale sunt:
a) $Q(x) = -\bar{x}_1^2 + 2\bar{x}_2^2 + 5\bar{x}_3^2;$
b) $Q(x) = -2\bar{x}_1^2 - 2\bar{x}_2^2 + \bar{x}_3^2;$
c) $Q(x) = -\bar{x}_1^2 + 5\bar{x}_2^2 + 11\bar{x}_3^2.$

6.6.9 În urma aplicării metodei lui Gauss obţinem forma canonică $Q(x) = \frac{1}{5}\bar{x}_1^2 + \frac{5}{26}\bar{x}_2^2 + \frac{40}{13}\bar{x}_4^2$, unde $\bar{x}_1 = 5x_1 - 2x_2 - 2x_3$, $\bar{x}_2 = \frac{26}{5}\bar{x}_2 - \frac{4}{4}\bar{x}_3$ şi $\bar{x}_3 = x_3$.

Aplicând metoda lui Jacobi vom găsi forma canonică $Q(x) = \frac{1}{5}\bar{x}_1^2 + \frac{5}{26}\bar{x}_2^2 + \frac{13}{40}\bar{x}_4^2$, iar prin metoda transformărilor ortogonale obţinem $Q(x) = 2\bar{x}_1^2 + 5\bar{x}_2^2 + 8\bar{x}_3^2$.

Toate formele canonice gşite conţin 3 termeni pozitivi, 0 negativi şi 0 nuli, deci signatura este (3,0,0).

6.6.10 a) Vom folosi Criteriul lui Sylvester. Deoarece matricea asociată formei pătratice Q este

$$A = \begin{pmatrix} \alpha-2 & -1 & 2 \\ -1 & \alpha-2 & -2 \\ 2 & -2 & \alpha+1 \end{pmatrix},$$

rezultă că minorii principali ai matricei A vor fi:

$$\Delta_1 = \alpha - 2, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} \alpha-2 & -1 \\ -1 & \alpha-2 \end{vmatrix} \quad \text{şi} \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} \alpha-1 & -1 & 2 \\ -1 & \alpha-1 & -2 \\ 2 & -2 & \alpha-1 \end{vmatrix}.$$

Pentru ca forma pătratică să fie pozitiv definită condiţia necesară şi suficientă este ca $\Delta_i > 0$, pentru $i = \overline{1,3}$.

Rezultă că $\Delta_1 = \alpha - 2 > 0$, $\Delta_2 = (\alpha-3)(\alpha-1) > 0$ şi $\Delta_3 = (\alpha-3)^2(\alpha+3) > 0$. Intersectând soluţiile acestor trei inecuaţii vom găsi $\alpha \in (3, +\infty)$.

b) Pentru $\alpha = 3$ obţinem forma pătratică $Q(x) = x_1^2 + x_2^2 + 4x_3^2 - 2x_1x_2 + 4x_1x_3 - 4x_2x_3$. Matricea asociată este $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 4 \end{pmatrix}$ şi astfel ecuaţia caracteristică va fi $A = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 & 2 \\ -1 & 1-\lambda & -2 \\ 2 & -2 & 4-\lambda \end{vmatrix}$. Obţinem valorile proprii $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, $\lambda_3 = 6$, deci forma canonică a formei pătratice va fi $Q(x) = 6\bar{x}_3^2$.

6.6.11 Fie $\{v_i\}_{i=\overline{1,n}}$ şi $\{w_j\}_{j=\overline{1,m}}$ baze ale $\mathbb{K}$-spaţiilor vectoriale $\mathbb{V}$ şi respectiv $\mathbb{W}$. Atunci $\{v_i \otimes w_j\}_{\substack{i=\overline{1,n} \\ j=\overline{1,m}}}$ este bază a lui $\mathbb{V} \otimes \mathbb{W}$. Definim $\varphi : (\mathbb{V} \otimes \mathbb{W})^* \longrightarrow \mathbb{V}^* \otimes \mathbb{W}^*$ astfel încât pe elementele bazei spaţiului vectorial $(\mathbb{V} \otimes \mathbb{W})^*$ avem $\varphi((v_i \otimes w_j)^*) = v_i^* \otimes w_j^*$. Evident φ este transformare liniară. Cum $\{v_i^*\}_{i=\overline{1,n}}$ şi $\left\{w_j^*\right\}_{j=\overline{1,m}}$ sunt baze ale $\mathbb{K}$-spaţiilor vectoriale $\mathbb{V}^*$ şi respectiv $\mathbb{W}^*$, rezultă că $\left\{v_i^* \otimes w_j^*\right\}_{\substack{i=\overline{1,n} \\ j=\overline{1,m}}}$ este bază a spaţiului $\mathbb{V}^* \otimes \mathbb{W}^*$. Astfel, φ este surjectivă. Deoarece

$$dim_{\mathbb{K}}(\mathbb{V}\otimes\mathbb{W})^* = dim_{\mathbb{K}}(\mathbb{V}\otimes\mathbb{W}) = dim_{\mathbb{K}}(\mathbb{V})dim_{\mathbb{K}}(\mathbb{W}) = dim_{\mathbb{K}}(\mathbb{V})^* dim_{\mathbb{K}}(\mathbb{W})^* = dim_{\mathbb{K}}(\mathbb{V}^*\otimes\mathbb{W}^*),$$

rezultă că φ este izomorfism.

6.6.12 Presupunem prin absurd că există $v \in V$ şi $w \in W$ astfel încât $v_1 \otimes w_1 + v_2 \otimes w_2 = v \otimes w$. Dacă vectorii v_1, v_2, v ar fi liniar independenţi, din relaţia

(124) $$v_1 \otimes w_1 + v_2 \otimes w_2 - v \otimes w = 0$$

şi din Propoziţia 6.5.6 ar rezulta că $w_1 = w_2 = w$, în contradicţie cu liniar independenţa vectorilor w_1 şi w_2. Similar, vectorii w_1, w_2, w nu pot fi liniar independenţi.

Aşadar, v este o combinaţie liniară a vectorilor v_1 şi v_2, iar w este o combinaţie liniară a vectorilor w_1 şi w_2. Rezultă că

$$v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 \quad \text{şi} \quad w = \beta_1 w_1 + \beta_2 w_2,$$

cu $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 \in \mathbb{K}$. Este clar că $\alpha_1^2 + \alpha_2^2 \neq 0$ şi $\beta_1^2 + \beta_2^2 \neq 0$. Înlocuind în relaţia (124) şi grupând termenii convenabil, obţinem:

$$v_1 \otimes [(1 - \alpha_1\beta_1)\, w_1 - \alpha_1\beta_2 w_2] + v_2 \otimes [-\alpha_2\beta_1 w_1 + (1 - \alpha_2\beta_2)\, w_2] = 0.$$

Deoarece v_1, v_2 sunt liniar independenţi, din Propoziţia 6.5.6 rezultă că $(1 - \alpha_1\beta_1)\, w_1 - \alpha_1\beta_2 w_2 = 0$ şi $-\alpha_2\beta_1 w_1 + (1 - \alpha_2\beta_2)\, w_2 = 0$. Deci w_1 şi w_2 sunt liniar dependenţi (o contradicţie) sau $1 - \alpha_1\beta_1 = \alpha 1\beta_2 = \alpha_2\beta_1 = 1 - \alpha_2\beta_2 = 0$ (o contradicţie, deoarece din $\alpha_1\beta_1 = \alpha_2\beta_2 = 1$ rezultă că $\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2 \neq 0$).

6.6.13 a) Deoarece $dim_{\mathbb{Q}}(\mathbb{R}) = \aleph$, atunci există o mulţime I de cardinal $\aleph$ astfel încât avem următorul izomorfism de spaţii vectoriale: $\mathbb{R} \simeq \mathbb{Q}^{(I)}$. În acest caz, $|I \times I| = |I|$ şi astfel:

$$\mathbb{R} \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R} \simeq \mathbb{Q}^{(I)} \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}^{(I)} \simeq \mathbb{Q}^{(I\times I)} \simeq \mathbb{Q}^{(I)} \simeq \mathbb{R}.$$

b) Deoarece $\mathbb{C} \simeq \mathbb{R}^2$, ca şi $\mathbb{Q}-$spaţii vectoriale, rezultă că

$$\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C} \simeq \mathbb{R}^2 \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R}^2 \simeq (\mathbb{R} \otimes \mathbb{R})^4 \simeq \mathbb{R}^4 \simeq \mathbb{C} \times \mathbb{C},$$

ca şi $\mathbb{Q}-$spaţii vectoriale.

c) Cum $dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{C}) = 2$, rezultă că $dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}) = 4$, deci $\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} \simeq \mathbb{R}^4$.

Bibliografie

1. E. Arghiriade, *Curs de algebră superioară*, vol I, Editura didactică şi pedagogică, Bucureşti, 1962.
2. Gh. Atanasiu, E. Stoica, *Algebră liniară. Geometrie analitică*, Editura Fair Partners, 2003.
3. G. Bercu, *Algebră liniară. Geometrie analitică şi diferenţială*, Editura Fair Partners, 2009.
4. E. Cioară, *Algebră liniară, geometrie analitică, geometrie diferenţială*, Editura Fair Partners, 2005.
5. L. Dăuş, *Algebră liniară şi geometrie analitică*, Editura ConsPress, Bucureşti, 2009.
6. T. Dumitrescu, *Algebră*, Ed. Universităţii din Bucureşti, Bucureşti, 2006.
7. P. R. Halmos, *Finite-dimensional vector spaces*, 2nd ed, Undergraduate Texts in Mathematics, Ed. Springer, 1987.
8. R Horn şi C. Johnson, *Analiza matricială*, Ed. Theta, Bucureşti, 2001.
9. I. Ion şi N. Radu, *Algebră*, Ed. Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1991.
10. H. Ikramov, *Recueil de problèmes d'algèbre linéaire*, Ed. Mir, Moscova, 1977.
11. D. Lay, *Linear algebra and its applications*, Addison-Wesley Publishing, 2003.
12. C. Năstăsescu, C. Niţă, M. Brandiburu şi D. Joiţă, *Exerciţii şi probleme de algebră pentru clasele IX-XII, Editura didactică şi pedagogică*, Bucureşti, 1983.
13. C. Năstăsescu, C. Niţă şi I. Stănescu, *Matematică; Elemente de algebră superioară*; Manual pentru clasa a XI-a, Editura didactică şi pedagogică, Bucureşti, 1980.
14. M. Pavel *Algebră liniară, geometrie analitică şi diferenţială*, Vol. 1, Editura Agir, Bucureşti, 2002.
15. I. Pop, Gh. Neagu, *Algebră liniară şi geometrie analitică* în plan şi spaţiu, Editura Plumb, Bacău, 1996.
16. A. L. Pletea, A. Corduneanu, M. Lupan, *Lecţii de algebra liniară*, Editura Politehnium, Iaşi, 2005.
17. I. Proskouriakov, *Recueil de problèmes d'algèbre linéaire*, Ed. Mir, Moscova, 1989.
18. G. Strang *Linear algebra and its applications*, Thomson Learning, 1988.
19. C. Udrişte, *Algebră liniară. Geometrie analitică*, Geometry Balkan Press, 1996.
20. C. Udrişte ş.a., *Algebră, geometrie şi ecuaţii diferenţiale*, Editura didactică şi pedagogică, Bucureşti,1982.

Index