

Raccolta di esercizi per il corso di
METODI MATEMATICI PER LA FISICA

Giuliano Panico

*Dipartimento di Fisica e Astronomia
Università degli Studi di Firenze*

A.A. 2021/2022

INDICE

| | | |
|----------|--|-----------|
| 1 | Numeri complessi e serie di potenze | 1 |
| 1.1 | Soluzioni | 3 |
| 2 | Serie e trasformata di Fourier | 4 |
| 2.1 | Soluzioni | 10 |
| 3 | Spazi di Hilbert | 19 |
| 3.1 | Soluzioni | 24 |
| 4 | Distribuzioni temperate | 37 |
| 4.1 | Soluzioni | 39 |
| 5 | Analisi complessa | 42 |
| 5.1 | Soluzioni | 46 |
| 6 | Trasformata di Laplace | 57 |
| 6.1 | Soluzioni | 61 |

Nota: Gli esercizi contrassegnati con * presentano maggiori difficoltà nella soluzione o sono relativi ad argomenti che si discostano dal profilo del corso, e sono quindi da considerarsi come accessori. Gli esercizi ripresi da compiti d'esame assegnati degli ultimi anni riportano i dettagli relativi all'appello (professore e data).

1 Numeri complessi e serie di potenze

Esercizio 1.1. Si dimostri che una serie di potenze $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, nel caso in cui il limite esista (eventualmente infinito), ha raggio di convergenza

$$R_a = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|. \quad (1.1)$$

[Suggerimento: si sfrutti il criterio del rapporto per la convergenza di una serie.]

Esercizio 1.2. Determinare il raggio di convergenza della serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{2^{n+1}}. \quad (1.2)$$

Esercizio 1.3. Utilizzando il prodotto di Cauchy di serie di potenze, si dimostri la relazione $e^z e^w = e^{z+w}$.

Esercizio 1.4. Dimostrare che la serie logaritmica

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} z^n \quad (1.3)$$

converge (ma non assolutamente) su tutti i punti della circonferenza unitaria $|z| = 1$, tranne il punto $z = -1$. [Suggerimento: si può utilizzare il criterio di Abel-Dirichlet, ovvero data una successione $\{a_n\}$ di numeri reali monotona tale che $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ e una successione di numeri complessi $\{b_n\}$ tale che $\left| \sum_{n=1}^N b_n \right| \leq M$ sia valida per ogni N con $M \geq 0$ indipendente da N , allora la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ converge.]

Esercizio* 1.5 (Rappresentazione matriciale dei numeri complessi). Si associ al generico numero complesso $x + iy$ la seguente matrice 2×2

$$x + iy \mapsto \begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix}. \quad (1.4)$$

- i) Si dimostri che le regole di somma e moltiplicazione dei numeri complessi corrispondono alla somma e alla moltiplicazione tra matrici.¹
- ii) Si dimostri che il modulo quadro di un numero complesso corrisponde al determinante della matrice, mentre l'operazione di coniugazione complessa corrisponde alla trasposizione della matrice.
- iii) Si dimostri che la forma matriciale può anche essere espressa come un opportuno riscalamento di una matrice di rotazione, ovvero

$$\begin{pmatrix} r \cos \phi & -r \sin \phi \\ r \sin \phi & r \cos \phi \end{pmatrix} \quad (1.5)$$

e si ricavano le espressioni per r e ϕ in termini di x e y . Si ricavi la formula per il prodotto di due numeri complessi usando la rappresentazione in eq. (1.5).

¹Per quanto riguarda la moltiplicazione è necessario verificare anche la commutatività, non ovvia per la moltiplicazione tra matrici.

iv) Utilizzando la notazione matriciale si verifichino le seguenti identità:²

$$i^2 = -1, \quad e^{i\pi} = -1. \quad (1.6)$$

²Per definire l'esponenziale di una matrice si utilizzi opportunamente la definizione dell'esponenziale tramite serie di potenze.

1.1 Soluzioni

Esercizio 1.2. Il raggio di convergenza è $R = \sqrt{2}$. Per ricavarlo si può utilizzare il criterio di Hadamard (si noti che le potenze che appaiono nella serie sono solamente quelle pari)

$$R = \frac{1}{\limsup_{n \rightarrow \infty} (2^{-n-1})^{1/(2n)}} = \frac{1}{\limsup_{n \rightarrow \infty} 2^{-1/2-1/(2n)}} = \sqrt{2}.$$

Esercizio 1.4. Si prenda $a_n = 1/n$ e $b_n = (-1)^n z^n$. Ovviamente $\{a_n\}$ è monotona decrescente e converge a zero. Inoltre, poiché $|z| = 1$, si ha che

$$\left| \sum_{n=1}^N (-z)^n \right| = \left| \frac{(-1 + (-z)^N)z}{1+z} \right| = \frac{|(-1 + (-z)^N)||z|}{|1+z|} \leq \frac{2}{|1+z|} \equiv M < \infty,$$

essendo $z \neq 1$. Possiamo quindi applicare il criterio di Abel-Dirichlet e concludere che la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n z^n}{n}$$

converge per $|z| = 1$ e $z \neq 1$, da cui segue che anche la serie logaritmica converge per questi valori di z .

2 Serie e trasformata di Fourier

Esercizio 2.1. Calcolare la serie di Fourier della funzione $f(x) = \cosh ax$ con $a > 0$ e $x \in [-\pi, \pi]$ (estesa per periodicità) e usarla per risommare le serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2 + a^2} \quad \text{e} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + a^2}. \quad (2.1)$$

Esercizio 2.2 (Cotrone 20/07/2017). Calcolare la serie di Fourier della funzione $f(x) = \sinh x$ con $x \in [-\pi, \pi]$ (estesa per periodicità) e usarla per risommare le serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n+1)}{(2n+1)^2 + 1}. \quad (2.2)$$

Esercizio 2.3 (Cotrone 17/09/2019). Determinare la serie di Fourier in $[-\pi, \pi]$ della funzione

$$f(x) = a - x^2 \quad a \in \mathbb{R} \quad (2.3)$$

e usarla per determinare la somma della serie $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^2$.

Esercizio 2.4. Si dimostri che nel caso della serie di Fourier in forma reale sull'intervallo $[-\lambda/2, +\lambda/2]$,

$$f(x) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [c_n \cos n k x + s_n \sin n k x] \quad (k \equiv 2\pi/\lambda), \quad (2.4)$$

l'identità di Parseval (teorema 2.7 di [6]) diventa

$$|c_0|^2 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (|c_n|^2 + |s_n|^2) = \|f\|_2^2, \quad (2.5)$$

dove

$$\|f\|_2 \equiv \left(\frac{1}{\lambda} \int_{-\lambda/2}^{+\lambda/2} |f(x)|^2 dx \right)^{1/2}. \quad (2.6)$$

[Suggerimento: si parta dall'identità di Parseval per la serie di Fourier complessa, oppure si guardi l'esercizio 2.6.]

Esercizio 2.5 (Cotrone 17/04/2019). Determinare la serie di Fourier in $[-\pi, \pi]$ della funzione

$$f(x) = \frac{\pi}{2} - |x| \quad (2.7)$$

e utilizzare l'identità di Parseval per calcolare la somma della serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^4}. \quad (2.8)$$

Esercizio 2.6. Si dimostri l'identità di Parseval su $L^2([-\lambda/2, +\lambda/2])$ per la serie di Fourier in forma complessa:

$$\|f\|_2^2 = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n|^2, \quad (2.9)$$

dove

$$\|f\|_2 \equiv \left(\frac{1}{\lambda} \int_{-\lambda/2}^{+\lambda/2} |f(x)|^2 dx \right)^{1/2}. \quad (2.10)$$

[Suggerimento: si inserisca la serie di Fourier nell'integrale che definisce la norma e si sfrutti l'ortogonalità delle funzioni di base nell'espansione di Fourier.]

Esercizio 2.7 (Cotrone 12/09/2018). Usando la serie di Fourier, risolvere l'equazione per la corda vibrante

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} f(x, t) = c^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} f(x, t) \quad (2.11)$$

con estremi fissi a $x = 0$ e $x = \pi$ (cioè $f(0, t) = f(\pi, t) = 0$) e con condizioni iniziali

$$f(x, 0) = \sin 2x \quad \frac{\partial f}{\partial t}(x, 0) = 3 \sin 5x. \quad (2.12)$$

[Suggerimento: si veda la sezione 2.2 di [6].]

Esercizio 2.8 (Cotrone 09/01/2017). Determinare la serie di Fourier della funzione

$$f(x) = \begin{cases} 4 & 0 \leq x < \pi \\ 2 & \pi \leq x < 2\pi \end{cases} \quad (2.13)$$

estesa per periodicità.

Esercizio 2.9 (Cotrone 04/02/2019). Definendo il prodotto di convoluzione di due funzioni di periodo 2π come

$$(f * g)(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(y)g(x-y) dy, \quad (2.14)$$

dimostrare che i coefficienti della serie di Fourier (in forma complessa) $(f * g)_n$ del prodotto di convoluzione sono dati dal prodotto dei coefficienti di Fourier f_n, g_n delle due funzioni:

$$(f * g)_n = f_n g_n. \quad (2.15)$$

Usare questo risultato per risolvere l'equazione integrale

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin(y) f(x-y) dy = \cos(x). \quad (2.16)$$

Esercizio 2.10 (Cotrone 05/02/2018). Determinare la serie di Fourier della funzione

$$f(x) = x(\pi - x)(\pi + x) \quad -\pi \leq x \leq \pi \quad (2.17)$$

e utilizzarla per calcolare la serie $\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(2m+1)^3}$.

Esercizio 2.11 (Sistemi ortogonali sul $[0, \pi]$).

i) Si dimostri che le due classi di funzioni

$$\mathcal{Y}_{C1} = \{\cos nx\} \quad n \geq 0 \quad (2.18)$$

e

$$\mathcal{Y}_{S1} = \{\sin nx\} \quad n \geq 1 \quad (2.19)$$

costituiscono dei sistemi ortogonali per l'espansione di Fourier sul segmento $[0, \pi]$ (ovvero sono funzioni ortogonali rispetto al prodotto scalare standard in $L^2([0, \pi])$).

ii) Si dimostri che, data una funzione $f(x)$ con $x \in [0, \pi]$ le espansioni in $\mathcal{Y}_{C1, S1}$ coincide con la serie di Fourier standard in forma reale per la funzione $f_{c,s}(x)$ ottenuta prolungando in modo pari (dispari) $f(x)$ all'intervallo $[-\pi, 0]$ e poi estendendo periodicamente.

iii) Si usino i sistemi ortogonali $\mathcal{Y}_{C1, S1}$ per espandere in serie le funzioni $f_1(x) = x$ e $f_2(x) = x(\pi - x)$ per $x \in [0, \pi]$.

[Nota: i sistemi ortonormali qui considerati si interpretano come basi ortogonali nel formalismo degli spazi di Hilbert, in particolare per lo spazio $L^2([0, \pi])$. Si veda l'esercizio 3.1.]

Esercizio 2.12 (Sistemi ortogonali su $[0, \pi]$).

i) Si dimostri che le due classi di funzioni

$$\mathcal{Y}_{C2} = \{\cos(n + 1/2)x\} \quad n \geq 0 \quad (2.20)$$

e

$$\mathcal{Y}_{S2} = \{\sin(n + 1/2)x\} \quad n \geq 0 \quad (2.21)$$

costituiscono dei sistemi ortogonali per l'espansione di Fourier sul segmento $[0, \pi]$ (ovvero sono funzioni ortogonali rispetto al prodotto scalare standard in $L^2([0, \pi])$).

ii) Si usino i sistemi ortogonali $\mathcal{Y}_{C2, S2}$ per espandere in serie le funzioni $f_1(x) = x$ e $f_2(x) = x(\pi - x)$ per $x \in [0, \pi]$.

[Nota: i sistemi ortonormali qui considerati si interpretano come basi ortogonali nel formalismo degli spazi di Hilbert, in particolare per lo spazio $L^2([0, \pi])$. Si veda l'esercizio 3.1.]

Esercizio 2.13. Si determini la trasformata di Fourier delle seguenti funzioni

$$\begin{array}{lll} i) & e^{-ax^2} & a > 0 \\ ii) & xe^{-ax^2} & a > 0 \\ iv) & \theta(x)e^{-ax} & a > 0 \end{array} \quad \begin{array}{ll} iv) & \theta(x)\theta(\pi - x)\sin x \\ v) & \theta(x)\theta(\pi - x)\cos x \end{array} \quad (2.22)$$

Esercizio 2.14. Si determini la trasformata di Fourier della funzione

$$f(x) = e^{-a|x|} \quad \text{con } a > 0. \quad (2.23)$$

Si utilizzi questo risultato per determinare la trasformata di Fourier delle seguenti funzioni

$$xe^{-a|x|}, \quad \frac{1}{x^2 + a^2}, \quad \frac{x}{(x^2 + a^2)^2}. \quad (2.24)$$

Esercizio 2.15 (Cotrone 19/09/2014). Calcolare il prodotto di convoluzione delle funzioni

$$f(x) = e^{-x^2}, \quad g(x) = xe^{-x^2}. \quad (2.25)$$

[Suggerimento: si può utilizzare la trasformata di Fourier e sfruttare le sue proprietà.]

Esercizio 2.16 (Cotrone 07/02/2014). Si determini la trasformata di Fourier della funzione

$$f(x) = x^2 e^{-x^2} \quad x \in \mathbb{R}. \quad (2.26)$$

Esercizio 2.17 (Cotrone 30/01/2017). Risolvere mediante la trasformata di Fourier l'equazione integrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x-y)f(y)dy = \frac{2(3x^2-1)}{(x^2+1)^3}. \quad (2.27)$$

[Nota: il calcolo della trasformata di Fourier richiede la conoscenza delle tecniche di integrazione sul piano complesso. Per svolgere l'esercizio senza utilizzare l'analisi complessa, si svolga prima l'esercizio 2.14 oppure si sfrutti il risultato

$$\mathcal{F}\left[\frac{1}{x^2+1}\right] = \sqrt{\frac{\pi}{2}}e^{-|k|}.$$

Esercizio 2.18 (Cotrone 29/03/2018). Risolvere mediante la trasformata di Fourier l'equazione integrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)f(x-t)dt = e^{-x^2}. \quad (2.28)$$

Esercizio 2.19 (Cotrone 22/06/2016). Sapendo che la trasformata di Fourier della funzione $f(t)$ è $F[f] = 1/(|k|^3 + 1)$ si calcoli l'integrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f * f'|^2 dt \quad (2.29)$$

[Suggerimento: si faccia uso del teorema di Parseval e delle proprietà del prodotto di convoluzione sotto trasformata di Fourier per ridurre l'integrale ad una forma elementare.]

Esercizio 2.20 (Cotrone 22/02/2013). Calcolare la trasformata di Fourier della funzione

$$f(x) = \begin{cases} 0 & |x| > 1 \\ 1 - |x| & |x| \leq 1 \end{cases}. \quad (2.30)$$

Si confronti la trasformata di Fourier con i coefficienti della serie di Fourier relativa all'estensione periodica (di periodo $\lambda = 2$) della funzione $f(x)$.

Esercizio 2.21 (Cotrone 21/03/2016). Facendo uso della formula di Parseval, si calcoli l'integrale

$$\frac{2}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2} dx. \quad (2.31)$$

Esercizio 2.22 (Cotrone 17/07/2015). Calcolare la trasformata di Fourier della funzione

$$f(x) = e^{-|x|} \quad (2.32)$$

e usarla, congiuntamente alla definizione del prodotto di convoluzione, per calcolare

$$\cos x * f(x). \quad (2.33)$$

Esercizio 2.23 (Cotrone 19/09/2018). Sapendo che la trasformata di Fourier di $f(x)$ è

$$\mathcal{F}[f](k) = \frac{1 - ik \sin k}{1 + ik} \frac{1}{k}, \quad (2.34)$$

si calcoli

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2 dx. \quad (2.35)$$

[Suggerimento: si sfrutti la formula di Parseval.]

Esercizio 2.24. Si risolva, mediante la trasformata di Fourier, l'equazione differenziale

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} f(x, t) = t^3 \frac{\partial}{\partial x} f(x, t) \\ f(x, 0) = g(x) \end{cases}. \quad (2.36)$$

Esercizio 2.25. Usando la trasformata di Fourier risolvere l'equazione

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(y) f(x - y) dy - \frac{1}{\pi^2 + x^2} = 0. \quad (2.37)$$

Esercizio 2.26. Calcolare la trasformata di Fourier della funzione

$$f(x) = e^{-|x|} \cos x. \quad (2.38)$$

Esercizio 2.27 (Cotrone 05/02/2018). Risolvere, mediante la trasformata di Fourier, il sistema

$$\begin{cases} \partial_t^2 f(x, t) = c^2 \partial_x^2 f(x, t) \\ \partial_t f(x, t)|_{t=0} = 0 \\ f(x, 0) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin x}{x} \end{cases}. \quad (2.39)$$

Esercizio 2.28. Si consideri la seguente successione di funzioni

$$f_n(t) = \begin{cases} c_n & 0 \leq t \leq n \\ 0 & \text{altrove} \end{cases} \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (2.40)$$

dove i c_n sono numeri reali.

i) Quale condizione basta imporre sui c_n affinché la successione $\{f_n\}$

a) converga uniformemente alla funzione nulla?

- b) converga nel senso della norma $L^2(\mathbb{R})$ alla funzione nulla?
 - c) converga nel senso della norma $L^1(\mathbb{R})$ alla funzione nulla?
- ii) Dire se è possibile (in caso affermativo, dare un esempio; in caso negativo, spiegare perché) scegliere i c_n in modo che la successione
- a) converga uniformemente a 0 ma non nel senso L^2 né nel senso L^1 .
 - b) converga uniformemente e nel senso L^2 a 0 ma non nel senso L^1 .
 - c) converga uniformemente e nel senso L^1 a 0 ma non nel senso L^2 .
- iii) Porre $c_n = 1/n$. Si può prevedere convergenza uniforme per la successione delle trasformate di Fourier $\widehat{f}_n(\omega) = \mathcal{F}(f_n(t))$? Calcolare tali trasformate e verificare direttamente su di esse se la previsione fatta sia esatta.

Esercizio 2.29. Si discutano i rapporti di inclusione tra le seguenti coppie di spazi normati

- i) $L^1(\mathbb{R})$ e $L^2(\mathbb{R})$;
- ii) $L^1(\mathbb{R}) \cap B(\mathbb{R})$ e $L^2(\mathbb{R}) \cap B(\mathbb{R})$, dove $B(\mathbb{R})$ indica lo spazio delle funzioni limitate;
- iii) $L^1([a, b])$ e $L^2([a, b])$, con $-\infty < a < b < \infty$.

Esercizio* 2.30. Si dimostri (teorema 2.5 di [6]) che se $1 \leq p < q \leq \infty$ allora data $f \in L^q_\lambda$ si ha $\|f\|_p \leq \|f\|_q$, dove

$$\|f\|_p = \left(\frac{1}{\lambda} \int_a^{a+\lambda} |f(x)|^p dx \right)^{1/p}. \quad (2.41)$$

[Suggerimento: si usi la disuguaglianza di Hölder, teorema 3.24 di [6]. Si noti la diversa normalizzazione nella definizione della norma.]

2.1 Soluzioni

Esercizio 2.1. La funzione f è pari, quindi la sua espansione in serie di Fourier contiene solo coseni

$$S(x) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos(nx),$$

con

$$c_0 = \frac{1}{a\pi} \sinh a\pi, \quad c_n = \frac{2(-1)^n a}{\pi n^2 + a^2} \sinh a\pi \quad \text{per } n \geq 1.$$

Calcolando la serie in $x = 0$ si ha

$$\cosh 0 = 1 = S(0) = \frac{\sinh a\pi}{a\pi} + \frac{2a \sinh a\pi}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2 + a^2},$$

da cui

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2 + a^2} = -\frac{1}{2a^2} + \frac{\pi}{2a \sinh a\pi}.$$

Calcolando la serie in $x = \pi$ abbiamo

$$\cosh a\pi = S(\pi) = \frac{\sinh a\pi}{a\pi} + \frac{2a \sinh a\pi}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + a^2},$$

da cui

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + 1} = -\frac{1}{2a^2} + \frac{\pi}{2a \tanh a\pi}.$$

Esercizio 2.2. La funzione f è dispari, quindi la sua espansione in serie di Fourier contiene solo seni

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin(nx),$$

con

$$c_n = \frac{2(-1)^{n+1}n}{\pi n^2 + 1} \sinh \pi.$$

La serie converge a $f(x)$ in $(-\pi, \pi)$, mentre in $x = \pm\pi$ si ha $S(\pm\pi) = 0$, pari alla media dei valori assunti da $f(\pi \pm \epsilon)$. In $x = \pi/2$ si ha

$$\sin(n\pi/2) = \begin{cases} 0 & \text{per } n \text{ pari} \\ (-1)^{\frac{n+3}{2}} & \text{per } n \text{ dispari} \end{cases}$$

quindi (ponendo $n = 2m + 1$) si ha

$$f(\pi/2) = \sinh \pi/2 = S(\pi/2) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{2(-1)^{2m+2}(2m+1)}{\pi (2m+1)^2 + 1} (-1)^{m+2} \sinh \pi$$

da cui

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m(2m+1)}{(2m+1)^2 + 1} = \frac{\pi}{4} \frac{1}{\cosh \pi/2}.$$

Esercizio 2.3. La funzione è pari, quindi ha come serie di Fourier

$$S(x) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos nx,$$

con

$$c_0 = a - \frac{\pi^2}{3}, \quad c_n = -\frac{4(-1)^n}{n^2}.$$

Per la determinazione della serie utilizziamo

$$f(x) = a - \pi^2 = S(\pi) = a - \frac{\pi^2}{3} - 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2},$$

de cui

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Esercizio 2.5. La funzione è pari, quindi ha come serie di Fourier

$$S(x) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos nx,$$

con

$$c_0 = 0, \quad c_n = \begin{cases} 0 & n \text{ pari} \\ \frac{4}{\pi n^2} & n \text{ dispari} \end{cases},$$

quindi

$$S(x) = \frac{4}{\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(2m+1)^2} \cos[(2m+1)x].$$

La formula di Parseval (per la serie di Fourier in seni e coseni) dà

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n^2 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx = \frac{\pi^2}{6},$$

da cui

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(2m+1)^2} = \frac{\pi^4}{96}.$$

Esercizio 2.7.

$$f(x, t) = \cos(2ct) \sin(2x) + \frac{3}{5c} \sin(5ct) \sin(5x).$$

Esercizio 2.8.

$$f(x) = 3 + \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2k+1} \sin[(2k+1)x].$$

Esercizio 2.9. Per definizione

$$\begin{aligned}(f * g)_n &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} dx e^{-inx} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(y) g(x-y) dy \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} dy f(y) e^{-iny} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-in(x-y)} g(x-y) d(x-y) = f_n g_n.\end{aligned}$$

I coefficienti dello sviluppo delle funzioni $\sin x$ e $\cos x$ sono

$$(\sin x)_n = \begin{cases} 0 & n \neq \pm 1 \\ 1/(2i) & n = 1 \\ -1/(2i) & n = -1 \end{cases}, \quad (\cos x)_n = \begin{cases} 0 & n \neq 1 \\ 1/2 & n = +1, -1 \end{cases}.$$

L'equazione per i coefficienti è dunque

$$(f * \sin x)_n = f_n (\sin x)_n = \frac{f_1}{2i} \delta_{1n} - \frac{f_{-1}}{2i} \delta_{-1n} = (\cos x)_n = \frac{1}{2} \delta_{1n} + \frac{1}{2} \delta_{-1n},$$

da cui $f_1 = i$, $f_{-1} = -i$, $f_{n \neq \pm 1} = 0$. Quindi

$$f(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} f_n e^{inx} = i(e^{ix} - e^{-ix}) = -2 \sin x.$$

Esercizio 2.10. L'espansione in serie di Fourier è (la funzione è dispari)

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin nx,$$

con

$$c_n = -(-1)^n \frac{12}{n^3}.$$

Per calcolare la serie si utilizza

$$f(\pi/2) = \frac{3}{8} \pi^3 = \sum_{n \text{ dispari}} (-1)^{n+1} \frac{12}{n^3} (-1)^{(n+3)/2} = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{12}{(2m+1)^3},$$

da cui

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(2m+1)^3} = \frac{\pi^3}{32}.$$

Esercizio 2.11. Le espansioni in serie della funzione $f_1(x)$ sono

$$f_1(x) = -2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \sin(nx), \quad f_1(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - (-1)^n}{n^2} \cos(nx).$$

Le espansioni in serie della funzione $f_2(x)$ sono

$$f_2(x) = \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - (-1)^n}{n^3} \sin(nx), \quad f_2(x) = \frac{\pi^2}{6} - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 + (-1)^n}{n^2} \cos(nx).$$

Esercizio 2.12. Le espansioni in serie della funzione $f_1(x)$ sono

$$f_1(x) = \frac{8}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2} \sin((n+1/2)x),$$

$$f_1(x) = \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{-2 + (-1)^n(2n+1)\pi}{(2n+1)^2} \cos((n+1/2)x).$$

Le espansioni in serie della funzione $f_2(x)$ sono

$$f_2(x) = \frac{8}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4 - (-1)^n(2n+1)\pi}{(2n+1)^3} \sin((n+1/2)x),$$

$$f_2(x) = \frac{8}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4(-1)^n - (2n+1)\pi}{(2n+1)^3} \cos((n+1/2)x).$$

Esercizio 2.13.

$$\begin{array}{ll} i) & \frac{1}{\sqrt{2a}} e^{-\frac{k^2}{4a}} \\ ii) & \frac{-ik}{2\sqrt{2}a^{3/2}} e^{-\frac{k^2}{4a}} \\ iv) & \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{a+ik} \end{array} \quad \begin{array}{ll} iv) & \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1+e^{-i\pi k}}{1-k^2} \\ v) & \frac{ik}{\sqrt{2\pi}} \frac{1+e^{-i\pi k}}{1-k^2} \end{array}$$

Esercizio 2.14.

$$\mathcal{F}[e^{-a|x|}](k) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{a}{k^2 + a^2}. \quad (2.42)$$

$$\mathcal{F}[xe^{-a|x|}](k) = i \frac{d}{dk} \mathcal{F}[e^{-a|x|}](k) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{-2iak}{(k^2 + a^2)^2}.$$

Per determinare la trasformata di Fourier della funzione $1/(x^2 + a^2)$ sfruttiamo il fatto che $\mathcal{F}^2 = \iota$. Quindi applicando \mathcal{F} all'eq. (2.42) abbiamo

$$\mathcal{F}^2[e^{-a|x|}](k) = e^{-a|x|} = \mathcal{F} \left[\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{a}{k^2 + a^2} \right],$$

da cui

$$\mathcal{F} \left[\frac{1}{x^2 + a^2} \right] = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{a} e^{-a|k|}.$$

Per l'ultima funzione

$$\mathcal{F} \left[\frac{x}{(x^2 + a^2)^2} \right] = \mathcal{F} \left[-\frac{1}{2} \frac{d}{dx} \frac{1}{x^2 + a^2} \right] = -\frac{i}{2} k \mathcal{F} \left[\frac{1}{x^2 + a^2} \right] = -\sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{ik}{2a} e^{-a|k|}.$$

Esercizio 2.15.

$$[f * g](x) = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}} x e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

Esercizio 2.16.

$$\mathcal{F}[f] = \frac{1}{4\sqrt{2}} (2 - k^2) e^{-k^2/4}.$$

Esercizio 2.17. La trasformata di Fourier dell'equazione assegnata è

$$\begin{aligned}\mathcal{F}[f * f] &= \sqrt{2\pi} \mathcal{F}[f]^2 = \mathcal{F}\left[\frac{2(3x^2 - 1)}{(x^2 + 1)^3}\right] = \mathcal{F}\left[\frac{d^2}{dx^2} \frac{1}{x^2 + 1}\right] \\ &= (ik)^2 \mathcal{F}\left[\frac{1}{x^2 + 1}\right] = -k^2 \mathcal{F}\left[\frac{1}{x^2 + 1}\right].\end{aligned}$$

La trasformata di Fourier di $1/(x^2 + 1)$ è data da

$$\mathcal{F}\left[\frac{1}{x^2 + 1}\right] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-ikx}}{x^2 + 1} dx = \sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{-|k|},$$

e può essere ottenuta tramite integrazione sul piano complesso (utilizzando il lemma di Jordan sul piano complesso superiore (inferiore) per $k < 0$ ($k > 0$)). L'equazione quindi diventa

$$\sqrt{2\pi} \mathcal{F}[f]^2 = -k^2 \frac{\sqrt{2\pi}}{2} e^{-|k|},$$

da cui

$$\mathcal{F}[f] = \pm i \frac{k}{\sqrt{2}} e^{-\frac{|k|}{2}}.$$

Si noti l'esistenza di due soluzioni di segno opposto, coerentemente col fatto che l'equazione assegnata è invariante per $f(x) \rightarrow -f(x)$. L'antitrasformata di Fourier si calcola con tecniche elementari, ottenendo

$$f(x) = \pm \frac{16}{\sqrt{\pi}} \frac{x}{(1 + 4x^2)^2}.$$

Esercizio 2.18. La trasformata di Fourier dell'equazione assegnata è

$$\mathcal{F}[f * f] = \sqrt{2\pi} \mathcal{F}[f]^2 = \mathcal{F}[e^{-x^2}] = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-k^2/4}.$$

Dunque

$$\mathcal{F}[f] = \pm \frac{1}{\sqrt{2\sqrt{\pi}}} e^{-k^2/8},$$

da cui

$$f(x) = \pm \sqrt{\frac{2}{\sqrt{\pi}}} e^{-2x^2}.$$

Esercizio 2.19. Usando la formula di Parseval e le proprietà del prodotto di convoluzione sotto trasformata di Fourier si ottiene

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} |f * f'|^2 dt &= \int_{-\infty}^{+\infty} |\mathcal{F}[f * f']|^2 dk = \int_{-\infty}^{+\infty} |\sqrt{2\pi} \mathcal{F}[f] \mathcal{F}[f']|^2 dk \\ &= 2\pi \int_{-\infty}^{+\infty} |ik \mathcal{F}[f]^2|^2 dk = 2\pi \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{k^2}{(|k|^3 + 1)^4} dk \\ &= 4\pi \int_0^{+\infty} \frac{k^2}{(k^3 + 1)^4} dk = -\frac{4\pi}{9} \frac{1}{(k^3 + 1)^3} \Big|_0^{+\infty} = \frac{4\pi}{9}.\end{aligned}$$

Esercizio 2.20. La trasformata di Fourier di $f(x)$ è data da

$$F(k) \equiv \mathcal{F}[f](k) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1 - \cos k}{k^2}.$$

La funzione $f(x)$ è pari, quindi può essere espansa sulla base $\cos n\pi x$ ($n \in \mathbb{N}$) con coefficienti

$$c_0 = \frac{1}{2}, \quad c_n = \frac{2}{n^2 \pi^2} (1 - (-1)^n) \quad n \geq 1.$$

Si ha la seguente corrispondenza

$$c_0 = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \lim_{k \rightarrow 0} F(k), \quad c_n = \sqrt{2\pi} F(n\pi) \quad n \geq 1.$$

La corrispondenza è facile da spiegare. Il fattore $\sqrt{\pi/2}$ deriva dalla normalizzazione della trasformata di Fourier, mentre l'ulteriore fattore 2 nei coefficienti c_n deriva dal fatto che abbiamo usato la serie di Fourier in forma reale, invece che complessa.

Esercizio 2.21. La funzione $\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin x}{x}$ è la trasformata di Fourier della funzione a gradino $\chi_{[-1,1]}$ (si veda sez. 2.5 di [6]). Quindi otteniamo

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left| \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin x}{x} \right|^2 dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \mathcal{F} \left[\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin x}{x} \right] (k) \right|^2 dk = \int_{-1}^{+1} dk = 2.$$

Esercizio 2.22. La trasformata di Fourier di $f(x)$ è

$$\mathcal{F}[f](k) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{1 + k^2}.$$

Abbiamo che

$$\begin{aligned}\cos x * f(x) &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} f(y) (e^{i(x-y)} + e^{-i(x-y)}) dy \\ &= \frac{\sqrt{2\pi}}{2} (e^{ix} \tilde{f}(1) + e^{-ix} \tilde{f}(-1)) = e^{ix} \frac{1}{2} + e^{-ix} \frac{1}{2} = \cos x.\end{aligned}$$

Esercizio 2.23. La formula di Parseval consente di scrivere

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2 dx = \int_{-\infty}^{+\infty} |\mathcal{F}[f](k)|^2 dk = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^2 k}{k^2} dk.$$

Poiché la funzione $\frac{\sin k}{k}$ è la trasformata di Fourier della funzione $g(x) = \sqrt{\pi/2} \chi_{[-1,1]}$, usando ancora la formula di Parseval si ottiene

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2 dx = \int_{-\infty}^{+\infty} |g(x)|^2 dx = \int_{-1}^{+1} \frac{\pi}{2} dx = \pi.$$

Esercizio 2.24. Indichiamo con $\tilde{f}(k, t)$ la trasformata di Fourier di $f(x, t)$ rispetto a x e con $\tilde{g}(k)$ la trasformata di Fourier di $g(x)$. L'equazione trasformata è

$$\partial_t \tilde{f}(k, t) = ikt^3 \tilde{f}(k, t),$$

da cui

$$\tilde{f}(k, t) = A \exp \left(ik \frac{t^4}{4} \right).$$

Imponendo la condizione iniziale $\tilde{f}(k, 0) = A = \tilde{g}(k)$, dunque

$$\tilde{f}(k, t) = \tilde{g}(k) \exp \left(ik \frac{t^4}{4} \right).$$

Antitrasformando si ottiene

$$\begin{aligned} f(x, t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ikx} \tilde{g}(k) e^{ikt^4/4} dk = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ik(x+t^4/4)} \tilde{g}(k) dk \\ &= \mathcal{F}^{-1} \mathcal{F}[g](x + t^4/4) = g(x + t^4/4). \end{aligned}$$

Esercizio 2.25.

$$f(x) = \pm \frac{2}{4x^2 + \pi^2}.$$

Esercizio 2.26.

$$\mathcal{F}[f](k) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{2 + k^2}{4 + k^4}.$$

Esercizio 2.27. La trasformata di Fourier dell'equazione differenziale è

$$\partial_t^2 F = -c^2 k^2 F$$

da cui

$$F(k, t) = A(k) e^{ickt} + B(k) e^{-ickt}.$$

La condizione sulla derivata dà

$$0 = \mathcal{F}[\partial_t f(x, 0)] = \partial_t F(k, 0) = ickA(k) - ickB(k) \quad \Rightarrow \quad B(k) = A(k),$$

da cui

$$F(k, t) = 2A(k) \cos(ckt).$$

Poiché $\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin x}{x}$ è la trasformata di $\chi_{[-1,1]}$ la condizione su $f(x, 0)$ dà $2A(k) = \chi_{[-1,1]}$, quindi

$$F(k, t) = \begin{cases} \cos(ckt) & |k| < 1 \\ 0 & |k| > 1 \\ \frac{1}{2} \cos(ckt) & |k| = 1 \end{cases}.$$

Infine

$$f(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{\sin(x+ct)}{x+ct} + \frac{\sin(x-ct)}{x-ct} \right).$$

Esercizio 2.28.

i) Le condizioni da imporre sono le seguenti

- a) per avere convergenza uniforme si deve imporre $\|f_n\|_\infty = |c_n| \rightarrow 0$ per $n \rightarrow \infty$.
- b) per avere convergenza in norma L^2 si deve imporre $\|f_n\|_2 = |c_n|\sqrt{n} \rightarrow 0$ per $n \rightarrow \infty$.
- c) per avere convergenza in norma L^1 si deve imporre $\|f_n\|_1 = |c_n|n \rightarrow 0$ per $n \rightarrow \infty$.

ii) Tenendo conto dei risultati del punto i) si ha che

- a) si può avere convergenza uniforme a 0 ma non nel senso L^2 e L^1 : $c_n = 1/n^{1/4}$.
- b) si può avere convergenza uniforme e nel senso L^2 a zero, ma non in senso L^1 : $c_n = 1/n^{2/3}$.
- c) non si può avere convergenza uniforme e nel senso L^1 , ma non in senso L^2 . Infatti la convergenza in senso L^1 implica $|c_n|n \rightarrow 0$, ma allora si ha anche $|c_n|\sqrt{n} \leq |c_n|n \rightarrow 0$ e si ha convergenza in senso L^2 .

iii) Si può notare che la norma L^2 della successione di funzioni è $\|f_n\|_2 = 1/\sqrt{n}$. Se ne deriva che le \widehat{f}_n (avendo la stessa norma L^2 delle f_n) tendono a zero in senso L^2 , e quindi $\widehat{f}_n(t) \rightarrow 0$ puntualmente quasi ovunque. Calcolando $\widehat{f}_n(0)$ si ha

$$\widehat{f}_n(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f_n(t) dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^n \frac{1}{n} dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}},$$

quindi $\|\widehat{f}_n\|_\infty \geq 1/\sqrt{2\pi}$ (in realtà le formule esplicite mostrano che vale l'uguaglianza). Quindi la successione \widehat{f}_n converge puntualmente (quasi ovunque) alla funzione nulla ma non può convergere uniformemente.

Il calcolo esplicito dà

$$\widehat{f}_n(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{-in\omega/2} \frac{\sin \frac{n\omega}{2}}{n\omega},$$

che effettivamente convergono a zero puntualmente per ogni $\omega \neq 0$, ma rimangono costanti per $\omega = 0$ (e hanno $\|\widehat{f}_n\|_\infty = 1/\sqrt{2\pi}$).

Esercizio 2.29.

- i) Non c'è inclusione in nessun verso. Infatti per $f_1(x) = \frac{1}{\sqrt{|x|(1+x^2)}}$ si ha $f_1 \in L^1(\mathbb{R})$ ma $f_1 \notin L^2(\mathbb{R})$, invece per $f_2(x) = \frac{1}{1+|x|}$ si ha $f_2 \in L^2(\mathbb{R})$ ma $f_2 \notin L^1(\mathbb{R})$.
- ii) Si ha che $L^1(\mathbb{R}) \cap B(\mathbb{R}) \subset L^2(\mathbb{R}) \cap B(\mathbb{R})$. La funzione f_2 del punto i) mostra che $L^2(\mathbb{R}) \cap B(\mathbb{R}) \not\subset L^1(\mathbb{R}) \cap B(\mathbb{R})$. Se invece $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap B(\mathbb{R})$, allora consideriamo i due insiemi

$$A = \{x \in \mathbb{R} \mid |f(x)| \geq 1\}, \quad B = \{x \in \mathbb{R} \mid |f(x)| < 1\}, .$$

Poiché f è in $L^1(\mathbb{R})$, allora l'insieme A ha misura finita ($\mu(A) < \infty$), inoltre l'integrale del modulo di f sul dominio B è finito. Ma allora su A anche il modulo quadro di f ha integrale finito (essendo limitato ed avendo A misura finita). Inoltre su B si ha che $|f(x)|^2 < |f(x)|$, quindi il modulo quadro di f è sommabile. Concludiamo che $|f(x)|^2$ è sommabile su tutto \mathbb{R} e quindi $f \in L^2(\mathbb{R})$.

- iii) Si ha che $L^2([a, b]) \subset L^1([a, b])$. La funzione f_1 del punto i) può essere facilmente modificata per appartenere a $L^1([a, b])$ ma non a $L^2([a, b])$. Se invece $f \in L^2([a, b])$ allora $f \in L^1([a, b])$ per il teorema 2.5 di [6].

Esercizio* 2.30. Data $f \in L^p_\lambda$ abbiamo (lasciamo sottintesi i limiti di integrazione)

$$\begin{aligned} \|f\|_p^p &= \int |f|^p \frac{dx}{\lambda} = \frac{1}{\lambda} \int 1 \cdot |f|^p dx \leq \frac{1}{\lambda} \left(\int 1 dx \right)^{\frac{q-p}{q}} \left(\int (|f|^p)^{q/p} dx \right)^{p/q} \\ &= \frac{1}{\lambda} \left(\int |f|^q \frac{dx}{\lambda} \right)^{p/q} \lambda^{p/q} \lambda^{\frac{q-p}{q}} = \|f\|_q^p. \end{aligned}$$

3 Spazi di Hilbert

Esercizio 3.1. Si consideri l'operatore $-d^2/dx^2$ definito su un opportuno sottospazio dello spazio di Hilbert $L^2([0, \pi])$. Si determinino opportune condizioni al bordo che rendano l'operatore autoaggiunto e che diano come autofunzioni le basi ortogonali di funzioni $\mathcal{Y}_{C1, S1, C2, S2}$ considerate negli esercizi 2.11 e 2.12.

Esercizio* 3.2 (Lo spettro della trasformata di Fourier). Si consideri la trasformata di Fourier sullo spazio $L^2(\mathbb{R})$.

- i) Si dimostri che l'aggiunto dell'operatore \mathcal{F} è

$$\mathcal{F}^\dagger = \mathcal{F} \circ \iota = \iota \circ \mathcal{F} = \mathcal{F}^{-1}, \quad (3.1)$$

dove ι è l'operatore di riflessione ($\iota f(x) = f(-x)$). [Suggerimento: si sfrutti l'unitarietà della trasformata di Fourier.]

- ii) Si dimostrino le relazioni

$$\mathcal{F}^2 = \iota, \quad \mathcal{F}^4 = \mathbb{1}. \quad (3.2)$$

- iii) Si dimostri che tutti i $\lambda \in \mathbb{C}$ tali che $\lambda^4 \neq 1$ appartengono al risolvente $\rho(\mathcal{F})$, ovvero che l'operatore $(\mathcal{F} - \lambda \mathbb{1})$ è invertibile. [Suggerimento: si ricavi esplicitamente l'espressione per $(\mathcal{F} - \lambda \mathbb{1})^{-1}$ come funzione di \mathcal{F} sfruttando la seconda relazione in eq. (3.2).]

- iv) Si dimostri che \mathcal{F} ha solo spettro discreto e che $\sigma_P(\mathcal{F}) = \{1, i, -1, -i\}$. [Suggerimento: si scomponga la relazione $\mathcal{F}^4 - \mathbb{1} = 0$ in fattori primi e si sfrutti la decomposizione per dimostrare l'esistenza di autovettori (non nulli) corrispondenti agli elementi di $\sigma_P(\mathcal{F})$.]

- v) Si considerino i seguenti operatori

$$P_k = \prod_{i=1, i \neq k}^4 \frac{\mathcal{F} - \lambda_i \mathbb{1}}{\lambda_i - \lambda_k}, \quad (3.3)$$

dove λ_i indica l' i -esimo autovalore. Si verifichi che i P_k sono dei proiettori ortogonali (ovvero che $P_k^2 = P_k$, $P_k^\dagger = P_k$ e $P_i P_k = 0$ per $i \neq k$) e che

$$\sum_{k=1}^4 P_k = \mathbb{1}. \quad (3.4)$$

Che tipo di decomposizione si deduce per lo spazio di Hilbert $L^2(\mathbb{R})$?

- vi) Si dimostri che la funzione gaussiana $G(x) = e^{-x^2/2}$ è autofunzione di \mathcal{F} e si ricavi il corrispondente autovalore.
- vii) Si dimostri che le funzioni di Hermite

$$\psi_n(x) = H_n(x)G(x), \quad (3.5)$$

dove $H_n(x)$ sono i polinomi di Hermite sono autofunzioni di \mathcal{F} e si ricavano i corrispondenti autovalori. [Suggerimento: si sfruttino le proprietà della trasformata di Fourier, insieme al fatto che i polinomi di Hermite possono essere rappresentati mediante la formula di Rodrigues

$$H_n(x) = e^{x^2/2} \left(x - \frac{d}{dx} \right)^n e^{-x^2/2} . \quad]$$

Esercizio 3.3 (Colferai 11/01/2021). Dimostrare che l'operatore

$$A : L^1([-3, 2]) \rightarrow L^\infty([-3, 2]) \quad [Af](x) = \int_{-3}^2 x y f(y) dy \quad (3.6)$$

è limitato e calcolarne la norma.

Esercizio 3.4 (Colferai 09/02/2021). Si consideri l'operatore

$$A : L^p([0, \pi]) \rightarrow L^p([0, \pi]) \quad [Af](x) = \sin(x)f(x) . \quad (3.7)$$

- i) Determinare per quali valori di $p \in [1, +\infty]$ l'operatore è limitato.
- ii) Per tali valori calcolarne la norma.
- iii) Per $p = 2$, l'operatore è hermitiano? È isometrico?

Esercizio 3.5 (Colferai 29/03/2021). Si consideri lo spazio di Hilbert $\mathcal{H} = L^2([0, 1], \mathbb{C})$.

- i) Il sottoinsieme P dei polinomi (con dominio ristretto a $[0, 1]$) è un sottospazio di \mathcal{H} ?
- ii) È chiuso?
- iii) Il sottoinsieme P_2 dei polinomi di grado minore o uguale a 2 (con dominio ristretto a $[0, 1]$) è un sottospazio di \mathcal{H} ?
- iv) È chiuso?
- v) Determinare una base ortonormale per P_2 .
- vi) Determinare la proiezione ortogonale della funzione $h(x) = e^x$ su P_2 [Suggerimento: possono essere utili gli integrali

$$\int x e^x dx = (x - 1)e^x + c \quad \int x^2 e^x dx = (x^2 - 2x + 2)e^x + c . \quad]$$

Esercizio 3.6 (Colferai 24/05/2021). Nello spazio di Hilbert $\mathcal{H} = L^2([-a, 1], \mathbb{C})$ con $a > 0$ è definito l'operatore

$$A : D \rightarrow \mathcal{H} \quad [Af](x) = x f'(x) , \quad (3.8)$$

con dominio

$$D = \{f \in \mathcal{H} : x f'(x) \in \mathcal{H}\} . \quad (3.9)$$

- i) Determinare l'aggiunto di A .
- ii) Determinare le autofunzioni di A e i corrispondenti autovalori propri.
- iii) Stabilire se A è un operatore limitato.
- iv) Mostrare che il sottospazio $P_2 < D < \mathcal{H}$ dei polinomi di secondo grado è stabile per A , ovvero che $AP_2 \subset P_2$.
- v) Determinare l'esponenziale di A ristretto a P_2 .

Esercizio 3.7 (Colferai 14/06/2021). Si consideri l'operatore di derivazione $D : f \mapsto f'$ definito nello spazio di Hilbert \mathcal{H} dei polinomi in \mathbb{R} a coefficienti reali di grado minore o uguale a 2, dotato del prodotto scalare

$$(f|g) = \int_{\mathbb{R}} f(x)g(x)e^{-x^2} dx. \quad (3.10)$$

- i) Determinare la dimensione di \mathcal{H} e discutere la limitatezza di D .
- ii) Determinare le autofunzioni di D e i corrispondenti autovalori propri.
- iii) Determinare l'operatore aggiunto di D .
- iv) Determinare l'operatore esponenziale $\exp(aD)$ con $a \in \mathbb{R}$. [Suggerimento: stabilire una base di \mathcal{H} e determinare la matrice (nilpotente) che rappresenta D .]
- v) C'è una relazione tra $\exp(aD)$ e un qualche operatore di traslazione?

Esercizio 3.8 (Colferai 03/09/2021). Nello spazio di Hilbert $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ si considerino gli operatori A e B definiti da

$$[Af](x) = \frac{1}{2}[f(x) + f(-x)], \quad [Bf](x) = \frac{1}{2}[f(x) - f(-x)], \quad (3.11)$$

nel loro dominio naturale.

- i) Dimostrare che A e B sono limitati.
- ii) Calcolarne la norma.
- iii) Determinare gli operatori A^\dagger e B^\dagger .
- iv) Mostrare che A e B sono idempotenti.
- v) Cosa si può concludere da iii) e iv)?
- vi) Mostrare che $A + B = 1$ e che $\mathcal{H} = \text{Im}(A) \boxplus \text{Im}(B)$, dove $\text{Im}(\cdot)$ indica l'immagine dell'operatore.

Esercizio 3.9 (L'operatore di traslazione I). Si consideri l'operatore di traslazione

$$T : L^2(\mathbb{R}) \rightarrow L^2(\mathbb{R}) \quad Tf(x) = f(x + a) \quad (3.12)$$

con $a \in \mathbb{R}$.

- i) Si dimostri che T è limitato e se ne determini l'aggiunto.
- ii) Si dimostri che T è unitario.
- iii) Si determini lo spettro di T e si studi la tipologia dei punti dello spettro.
- iv) Si determini un insieme di autovettori (propri o generalizzati) corrispondenti agli elementi dello spettro di T .
- iv) Si considerino le funzioni della forma $f(x) = e^{\lambda x}$ con $\lambda \in \mathbb{C}$ e $|\lambda| \neq 1$. Si verifichi che per queste funzioni vale $Tf(x) = e^{a\lambda}f(x)$. Queste funzioni hanno qualche connessione con lo spettro di T ? Possono essere incluse tra gli autovettori generalizzati?

Esercizio 3.10 (L'operatore di traslazione II). Si consideri l'operatore di traslazione

$$T : L^2([0, +\infty]) \rightarrow L^2([0, +\infty]) \quad Tf(x) = f(x + a) \quad (3.13)$$

con $a > 0$.

- i) Si dimostri che T è limitato e se ne determini l'aggiunto.
- ii) Si determini la norma di T . L'operatore T è unitario?
- iii) Si determini lo spettro di T e si studi la tipologia dei punti dello spettro.
- iv) Si determini un insieme di autovettori (propri o generalizzati) corrispondenti agli elementi dello spettro di T .
- v) Si studi lo spettro di T^\dagger .

Esercizio 3.11. Sia $T : L^2(\mathbb{R}) \rightarrow L^2(\mathbb{R})$ l'operatore

$$Tf(x) = f(x) - f(x - \pi). \quad (3.14)$$

- i) Dire se T è limitato, se è unitario e trovarne l'aggiunto.
- ii) Calcolare $\|T\|$ e determinare autovalori e autovettori (propri e generalizzati) di T . [Suggerimento: può essere utile considerare i risultati dell'esercizio 3.9.]

Esercizio 3.12. Si dimostri che un funzionale lineare non limitato su uno spazio normato ha kernel denso.

Esercizio* 3.13. Si dimostri che la disuguaglianza di Hölder ($f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $g \in L^q(\mathbb{R}^n)$)

$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q, \quad (3.15)$$

per $1 < p, q < \infty$ tali che $1/p + 1/q = 1$, diventa un'uguaglianza se e solo se (quasi ovunque)

$$|f(x)|^p = \lambda |g(x)|^q \quad (3.16)$$

con $\lambda \geq 0$ o se $g = 0$. [Suggerimento: si sfrutti la dimostrazione della disuguaglianza di Hölder riportata nel teorema 3.24 di [6].]

Esercizio* 3.14. Si dimostri che la disuguaglianza di Minkowski ($f, g \in L^p(\mathbb{R}^n)$)

$$\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p, \quad (3.17)$$

per $1 < p < \infty$, diventa un'uguaglianza se e solo se (quasi ovunque)

$$f(x) = \lambda g(x) \quad (3.18)$$

con $\lambda \geq 0$ o se $g = 0$. [Suggerimento: si sfrutti la dimostrazione della disuguaglianza di Minkowski riportata nel teorema 3.25 di [6].]

Cosa si può dire nei casi $p = 1$ e $p = \infty$?

Esercizio 3.15. Si dimostri che per $1 \leq p, q < \infty$ si ha che $L^p(\mathbb{R}^n, \mathbb{C}) \cap L^q(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$ è denso in $L^p(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$. [Suggerimento: si sfruttino le proprietà riportate nella sezione 3.1.2 di [6].]

Esercizio 3.16. Si consideri l'operatore di traslazione

$$T : L^2(\mathbb{R}) \rightarrow L^2(\mathbb{R}) \quad Tf(x) = f(x + a) \quad (3.19)$$

con $a \in \mathbb{R}$. Si dimostri che l'operatore $T - \lambda \mathbb{1}$ per $|\lambda| = 1$ non è suriettivo. [Suggerimento: si considerino le funzioni $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ e si cerchi una proprietà che caratterizza l'immagine dell'operatore $T - \lambda \mathbb{1}$. Può essere conveniente partire dal caso $\lambda = 1$.]

Esercizio 3.17. Si dimostri che lo spettro di un operatore limitato è limitato (punto 4 del teorema 6.9 di [6]):

$$\sigma(T) \subset B(0, \|T\|), \quad (3.20)$$

ovvero $|\lambda| \leq \|T\|$ per ogni $\lambda \in \sigma(T)$. [Suggerimento: determinare l'operatore risolvibile tramite uno sviluppo in serie.]

Si dimostri che se un operatore è invertibile con inverso limitato, allora gli elementi λ dello spettro di T hanno la proprietà $|\lambda| \geq 1/\|T^{-1}\|$.

Se ne deduca che per un operatore unitario lo spettro è un sottoinsieme dei numeri complessi unitari.

Esercizio 3.18. Dato un operatore T limitato e invertibile con inverso limitato, si dimostri che lo spettro di T^{-1} è dato dagli $1/\lambda$ (con $\lambda \neq 0$) tali che $\lambda \in \sigma(T)$. [Suggerimento: si colleghi il risolvente di T^{-1} a quello di T .]

Esercizio 3.19. Si consideri l'operatore lineare

$$[Af](x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \sin(x + y) f(y) dy \quad (3.21)$$

definita sullo spazio di Hilbert $L^2([0, 2\pi])$.

- i) Si dimostri che A è limitato.
- ii) Si determini il raggio di convergenza della serie $\sum_{n=0}^{\infty} z^n A^n$ e se ne calcoli la somma. [Suggerimento: si prenda spunto dallo svolgimento dell'esercizio analogo nella sezione 5.3.5 di [6], in particolare si determini l'azione degli operatori A^2 e A^3 .]

3.1 Soluzioni

Esercizio 3.1. Il sistema \mathcal{Y}_{C1} corrisponde alle condizioni al bordo $f'(0) = f'(\pi) = 0$. Il sistema \mathcal{Y}_{S1} corrisponde alle condizioni al bordo $f(0) = f(\pi) = 0$. Il sistema \mathcal{Y}_{C2} corrisponde alle condizioni al bordo $f'(0) = f(\pi) = 0$. Il sistema \mathcal{Y}_{S2} corrisponde alle condizioni al bordo $f(0) = f'(\pi) = 0$.

Esercizio* 3.2. La derivazione dello spettro e delle autofunzioni della trasformata di Fourier è discussa in [9].

Esercizio 3.3. Innanzitutto osserviamo che, per ogni funzione f sommabile in $[-3, 2]$, l'integrale di $yf(y)$ esiste e quindi la funzione $g = Af$ è ben definita. Essa è anche limitata in quanto $x \in [-3, 2]$, quindi $g \in L^\infty$. Per dimostrare che l'operatore A è limitato partiamo dalla relazione

$$|[Af](x)| = |g(x)| \leq \int_{-3}^2 |x| |y| |f(y)| dy \leq 3 \cdot 3 \int_{-3}^2 |f(y)| dy = 9 \|f\|_1$$

(essendo $|x| \leq 3$ e $|y| \leq 3$ visto l'intervallo di definizione delle funzioni). Da questo ricaviamo che

$$\|Af\|_\infty \leq 9 \|f\|_1$$

e dunque A è limitato e $\|A\| \leq 9$.

Vogliamo ora dimostrare che $\|A\| = 9$. Partiamo dall'osservazione che $g(x)$ è semplicemente una funzione lineare in x con coefficiente dato da $\int_{-3}^2 yf(y)dy$, quindi $|g(x)|$ assume massimo in $x = -3$. Nell'integrale $f(y)$ è moltiplicata per y il cui valore massimo in modulo è per $y = -3$. Consideriamo quindi una famiglia di funzioni "localizzate" vicino a $y = -3$, ovvero $f_\epsilon = \chi_{[-3, -3+\epsilon]}$ ($\epsilon > 0$). Abbiamo che

$$\begin{aligned} \|f_\epsilon\|_1 &= \int_{-3}^{-3+\epsilon} dy = \epsilon \\ \|Af_\epsilon\|_\infty &= 3 \int_{-3}^{-3+\epsilon} |y| dy = 9\epsilon - \frac{3}{2}\epsilon^2 \end{aligned}$$

da cui ricaviamo

$$\frac{\|Af_\epsilon\|_\infty}{\|f_\epsilon\|_1} = 9 - \frac{3}{2}\epsilon.$$

Pertanto $\|A\| > 9 - 3\epsilon/2$ per ϵ piccolo a piacere. Prendendo il limite $\epsilon \rightarrow 0$ si ha che $\|A\| \geq 9$ e quindi $\|A\| = 9$.

Esercizio 3.4.

- i) L'operatore A consiste nel moltiplicare la funzione f per $\sin x$, che è una funzione continua e limitata. Di conseguenza, se $f \in L^p$ con $p < \infty$, allora anche $Af \in L^p$:

$$\|Af\|_p^p = \int |\sin(x)f(x)|^p dx \leq \int |f(x)|^p dx = \|f\|_p^p < \infty.$$

Da questo si ricava anche che $\|A\| \leq 1$. Nel caso $p = \infty$ abbiamo un risultato analogo, infatti

$$\|Af\|_\infty = \sup_x |\sin(x)f(x)| \leq \sup_x |f(x)| = \|f\|_\infty.$$

Quindi A è limitato su tutti gli spazi L_p con $1 \leq p \leq \infty$. Si noti che in questa derivazione non abbiamo avuto bisogno di specificare il dominio $[0, \pi]$, quindi le stesse conclusioni valgono per un qualsiasi dominio sottoinsieme (misurabile) di \mathbb{R} .

- ii) La funzione $\sin x$ ha massimo in $x = \pi/2$, quindi per massimizzare l'azione di A è opportuno considerare funzioni f “localizzate” attorno a $x = \pi/2$. Consideriamo la famiglia di funzioni (con $\varepsilon > 0$) $f_\varepsilon = \chi_{[\pi/2-\varepsilon, \pi/2+\varepsilon]}(x)$. Per $p < \infty$ abbiamo

$$\|Af\|_p^p = \int_{\frac{\pi}{2}-\varepsilon}^{\frac{\pi}{2}+\varepsilon} |\sin(x)|^p dx = \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} |\cos x|^p dx \geq \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} |\cos \varepsilon|^p dx = (2\varepsilon) \cos^p \varepsilon,$$

mentre $\|f\|_p^p = 2\varepsilon$. Quindi ricaviamo che

$$\|A\| = \sup_{f \neq 0} \frac{\|Af\|_p}{\|f\|_p} \geq \sup_{\varepsilon > 0} \frac{\|Af_\varepsilon\|_p}{\|f_\varepsilon\|_p} = \sup_{\varepsilon > 0} \cos \varepsilon = 1,$$

da cui $\|A\| = 1$. Analogamente, nel caso $p = \infty$ si ha

$$\|A\| = \sup_{f \neq 0} \frac{\|Af\|_\infty}{\|f\|_\infty} \geq \sup_{\varepsilon > 0} \frac{\|Af_\varepsilon\|_\infty}{\|f_\varepsilon\|_\infty} = 1,$$

quindi $\|A\| = 1$.

- iii) Si verifica facilmente che, essendo $\sin x$ reale, l'operatore A è hermitiano. Inoltre, essendo limitato, esso è anche autoaggiunto. L'operatore A non è isometrico, visto che non conserva la norma. Questo fatto è evidente per funzioni $f(x)$ che abbiamo supporto non contenente il punto $x = \pi/2$. Ad esempio per $f(x) = \chi_{[0, \pi/4]}$ abbiamo che

$$[Af](x) = \sin(x)\chi_{[0, \pi/4]} \leq \sin(\pi/4)\chi_{[0, \pi/4]} = \frac{1}{\sqrt{2}}f(x),$$

da cui

$$\|Af\| \leq \frac{1}{\sqrt{2}}\|f\| < \|f\|.$$

Esercizio 3.5.

- i) L'affermazione è vera. L'insieme P è sottospazio vettoriale di \mathcal{H} , essendo chiuso per combinazioni lineari finite. Condizionato ristretto a $[0, 1]$, ogni polinomio è integrabile in modulo quadro, quindi appartiene a \mathcal{H} .
- ii) P non è chiuso. Infatti una successione infinita di polinomi non è detto che converga ad un polinomio. Basti pensare che in $L^2([-1, 1])$ i polinomi di Legendre formano un sistema (ortogonale) completo, quindi ogni funzione di L^2 si può pensare come limite di una successione di polinomi. Un altro esempio è la successione delle somme parziali della serie $\sum_{n=0}^{\infty} x^n/n!$, che ovviamente converge a $\exp x$ che non è un elemento di P . Quindi P non contiene tutti i suoi punti di accumulazione e non è chiuso.

- iii) L'affermazione è vera. P_2 è sottospazio di P , quindi lo è anche di \mathcal{H} .
- iv) P_2 , avendo dimensione finita (pari a 3) è chiuso.
- v) Per determinare una possibile base ortonormale possiamo partire dalla base $\{1, x, x^2\}$ e applicare la procedura di ortonormalizzazione di Gram-Schmidt. In questo modo si ottiene la base ortonormale

$$\{e_0, e_1, e_2\} = \left\{ 1, 2\sqrt{3} \left(x - \frac{1}{2} \right), 6\sqrt{5} \left(x^2 - x + \frac{1}{6} \right) \right\}.$$

- vi) Sfruttando la base ortonormale determinata nel punto v), abbiamo che la proiezione di h su P_2 è data da

$$\Pi_2 h = \sum_{k=0}^2 e_k (e_k | h),$$

dove, come si verifica facilmente,

$$(e_0 | h) = e - 1, \quad (e_1 | h) = \sqrt{3}(3 - e), \quad (e_2 | h) = \sqrt{5}(7e - 19).$$

Quindi ricaviamo

$$\Pi_2 h = (210e - 570)x^2 + (588 - 216e)x + 39e - 105.$$

Esercizio 3.6.

- i) Cerchiamo l'operatore A^\dagger tale che $(f | Ag) = (A^\dagger f | g)$ per ogni $g \in D$. Deve valere

$$\int_{-a}^a f^*(x) x g'(x) dx = \int_{-a}^a [A^\dagger f]^*(x) g(x) dx.$$

Integrando per parti si ottiene

$$\int_{-a}^a f^*(x) x g'(x) dx = [x f^*(x) g(x)]_{-a}^a - \int_{-a}^a [f(x) + x f'(x)]^* g(x) dx.$$

Confrontando i due risultati abbiamo

$$\begin{cases} a[f^*(a)g(a) + f^*(-a)g(-a)] = 0 \\ [A^\dagger f](x) = -[f(x) + x f'(x)] \end{cases}.$$

Poiché non abbiamo imposto nessuna condizione al bordo per $g \in D$, è necessario che le f appartenenti al dominio di A^\dagger si annullino agli estremi dell'intervallo $[-a, a]$, quindi

$$[A^\dagger f](x) = -[f(x) + x f'(x)]$$

$$\mathcal{D}(A^\dagger) = \{f \in \mathcal{H} : x f'(x) \in \mathcal{H}, \quad f(-a) = f(a) = 0\}.$$

ii) L'equazione agli autovalori 'e

$$\begin{aligned} Af = \lambda f &\Leftrightarrow x f'(x) = \lambda f(x) \Leftrightarrow \frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{\lambda}{x} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \frac{d}{dx} \log f(x) &= \frac{\lambda}{x} \Leftrightarrow \log f(x) = \lambda \log |x| + k \Leftrightarrow f(x) = N|x|^\lambda. \end{aligned}$$

Nel punto $x = 0$ ci sono singolarità e la derivazione perde significato, ma non ci preoccupiamo di insiemi di misura nulla. Più in generale si può vedere facilmente che l'equazione agli autovalori ammette la soluzione generale

$$f(x) = N_+ \theta(x) x^\lambda + N_- \theta(-x) (-x)^\lambda,$$

con N_\pm costanti (complesse) arbitrarie. Per $\lambda = n \in \mathbb{N}$ si può semplicemente scegliere al soluzione monomiale $f(x) = x^n$.

Affinché $f \in \mathcal{H}$, $|f|^2$ deve essere integrabile. L'unico problema si può avere in un intorno di $x = 0$, in cui $|f|^2 \sim |x|^{2\lambda}$. Quindi deve essere $2\lambda > -1$. In definitiva le autofunzioni sono

$$f_\lambda(x) = |x|^\lambda \quad \text{con} \quad \lambda > -1/2.$$

iii) L'operatore di derivazione non è limitato in L^2 , infatti anche se una funzione ha norma unitaria, è sufficiente che vari rapidamente affinché la norma della sua derivata sia arbitrariamente alta. La moltiplicazione per x non modifica questo comportamento. Molto più semplicemente, visto che A ha autovalori arbitrariamente grandi, esso è illimitato

$$\frac{\|Af_\lambda\|}{\|f_\lambda\|} = |\lambda|$$

e quindi non può esistere una costante di limitatezza M tale che per ogni $f \in D$ valga $\|Af\| \leq M\|f\|$.

iv) L'azione di A su un generico elemento $p(x) = a + bx + cx^2$ di P_2 dà

$$[Ap](x) = x(b + 2cx) = bx + 2cx^2 \in P_2,$$

quindi P_2 è stabile per A .

v) Nella base *non ortogonale* $\{1, x, x^2\}$ di P_2 la matrice dell'operatore A è diagonale

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

infatti tali vettori di base sono autofunzioni di A con autovalori $\{0, 1, 2\}$ rispettivamente. In tale base, la matrice di $\exp(A)$ è data da

$$\exp A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & e & 0 \\ 0 & 0 & e^2 \end{pmatrix}.$$

Esplicitamente, l'azione di $\exp(A)$ su un polinomio $p \in P_2$ è

$$[\exp(A)p](x) = a + ebx + e^2cx^2.$$

Esercizio 3.7.

- i) Lo spazio dei polinomi di grado minore o uguale a 2 ha dimensione 3. Una sua base (non ortogonale) è $\{1, x, x^2\}$. Quindi \mathcal{H} ha dimensione finita e ogni operatore lineare in esso definito è limitato e continuo. Notiamo che se $f \in \mathcal{H}$ allora anche $f' \in \mathcal{H}$.
- ii) L'azione di D sul generico elemento $f(x) = A + Bx + Cx^2$ è

$$[Df](x) = B + 2Cx.$$

L'equazione agli autovalori è

$$B + 2Cx = \lambda(A + Bx + Cx^2) \quad \Leftrightarrow \quad \lambda = 0, B = C = 0.$$

Gli unici polinomi autofunzioni di D sono quelli costanti, con autovalore $\lambda = 0$ e formano un sottospazio unidimensionale. (Questo risultato è abbastanza ovvio, visto che sappiamo che le autofunzioni dell'operatore D sono della forma $e^{\lambda x}$ e si riducono a un polinomio solo per $\lambda = 0$.)

- iii) Essendo D limitato, il suo aggiunto esiste certamente definito su tutto \mathcal{H} . L'equazione per determinare l'aggiunto è $(f|Dg) = (D^\dagger f|g)$ per ogni $f, g \in \mathcal{H}$. Quindi deve valere

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)g'(x)e^{-x^2} dx = \int_{\mathbb{R}} [D^\dagger f](x)g(x)e^{-x^2} dx.$$

Integrando per parti

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-x^2}g'(x)dx &= [f(x)g(x)e^{-x^2}] \Big|_{-\infty}^{+\infty} - \int_{\mathbb{R}} \frac{d}{dx}[e^{-x^2}f(x)]g(x)dx \\ &= - \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2}[f'(x) - 2xf(x)]g(x)dx. \end{aligned}$$

Quindi otteniamo

$$[D^\dagger f](x) = -[f'(x) - 2xf(x)] \quad \Leftrightarrow \quad D^\dagger = 2X - D,$$

deve X è l'operatore di moltiplicazione.

- iv) L'operatore D è nilpotente in \mathcal{H} , infatti

$$A + Bx + Cx^2 \xrightarrow{D} B + 2Cx \xrightarrow{D} 2C \xrightarrow{D} 0.$$

Quindi $D^3 = 0$ e la serie esponenziale si riduce a una somma finita

$$[\exp(aD)p](x) = \left(1 + aD + \frac{1}{2}a^2D^2\right)p(x) = (A + aB + a^2C) + (B + 2aC)x + Cx^2.$$

Alternativamente si può fare il calcolo tramite la rappresentazione matriciale, ad esempio nella base $\{1, x, x^2\}$. La matrice che rappresenta D in questa base è

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

per cui

$$e^{aD}p = \begin{pmatrix} A + aB + a^2C \\ B + 2aC \\ C \end{pmatrix}$$

in accordo con il risultato precedente.

v) Dato $k \in \mathbb{R}$ l'azione dell'operatore di traslazione τ_k su $p \in \mathcal{H}$ è

$$[\tau_k p](x) = p(x-k) = A + B(x-k) + C(x-k)^2 = (A - kB + k^2C) + (B - 2kC)x + Cx^2$$

che coincide con $\exp(aD)$ se $k = -a$. Quindi $\exp(aD) = \tau_{-a}$.

Esercizio 3.8.

i) Per dimostrare la limitatezza di A si può procedere come

$$\|Af\| = \frac{1}{2}\|f(x) + f(-x)\| \leq \frac{1}{2}(\|f(x)\| + \|f(-x)\|) = \|f(x)\| \quad \Rightarrow \quad \|A\| \leq 1,$$

e analogamente per B .

ii) Le norme degli operatori sono $\|A\| = \|B\| = 1$. Infatti presa una qualunque $f(x) \in \mathcal{H}$ pari si ha

$$Af(x) = f(x) \quad \Rightarrow \quad \|Af\| = \|f\|,$$

e analogamente per B considerando una $f(x) \in \text{cal}H$ che sia dispari.

iii) L'equazione che determina l'aggiunto di A è

$$\begin{aligned} (A^\dagger f|g) &= (f|Ag) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} f^*(x)[g(x) + g(-x)]dx = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} f^*(x)g(x) + f^*(-x)g(x)dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{2}[f(x) + f(-x)]^*g(x)dx, \end{aligned}$$

dove per ottenere la terza espressione abbiamo usato un cambio di variabile di integrazione per il termine $\int f^*(x)g(-x)dx$. Da questo si conclude che $A^\dagger = A$. Si noti che non ci sono particolari restrizioni di dominio. Con analoghi passaggi si dimostra che $B^\dagger = B$.

iv) La verifica dell'idempotenza è banale, basta calcolare esplicitamente $A[Af]$ e $B[Bf]$.

v) Dai punti iii) e iv) si conclude che A e B sono dei proiettori ortogonali.

vi) La verifica che $A+B = \mathbb{1}$ è banale e si ottiene calcolando esplicitamente $(A+B)f = Af + Bf$. Si noti che $AB = BA = 0$, quindi A e B proiettano su sottospazi mutualmente ortogonali. Le immagini dei due operatori A e B coincidono rispettivamente con il sottospazio delle funzioni pari e con il sottospazio delle funzioni dispari. Questi due sottospazi, sono chiaramente ortogonali in \mathcal{H} e la loro somma genera tutto \mathcal{H} , essendo ogni funzione $f \in \mathcal{H}$ decomponibile come somma della sua parte pari e della sua parte dispari. Concludiamo che $\mathcal{H} = \text{Im}(A) \boxplus \text{Im}(B)$.

Esercizio 3.9.

i) Per una generica funzione $f \in L^2(\mathbb{R})$ si ha

$$\|Tf\|_2^2 = \int_{\mathbb{R}} |f(x+a)|^2 dx = \int_{\mathbb{R}} |f(y)|^2 dy = \|f\|_2^2,$$

dove abbiamo usato il cambio di variabile d'integrazione $y = x+1$. Otteniamo quindi che $\|T\| = 1$ e inoltre che T preserva la norma di qualsiasi elemento dello spazio di Hilbert. Essendo anche suriettivo (come si verifica facilmente), T è unitario. Si verifica facilmente che l'aggiunto (definito su tutto $L^2(\mathbb{R})$ in quanto T è limitato) è

$$T^\dagger f(x) = f(x-a).$$

E banale verificare che $T^\dagger T = TT^\dagger = \mathbb{1}$, coerentemente con il fatto che T è unitario.

ii) Svolto insieme al punto i).

iii) Essendo T unitario, il suo spettro è contenuto nella circonferenza unitaria, ovvero $\sigma(T) \subseteq \mathbb{U}$. L'equazione agli autovalori

$$Tf(x) = f(x+a) = \lambda f(x)$$

con $|\lambda| = 1$ non ammette soluzioni in $L^2(\mathbb{R})$. Infatti se esistesse $f(x)$ autovettore, allora varrebbe che

$$f(x+na) = \lambda^n f(x).$$

Ma allora la norma di f sarebbe

$$\|f\|_2^2 = \int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 dx = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |\lambda|^{2n} \int_0^a |f(x)|^2 dx,$$

che chiaramente diverge se $\int_0^a |f(x)|^2 dx \neq 0$, ovvero se $f(x)$ non si annulla dovunque (a meno di un insieme di misura nulla). Concludiamo quindi che T ha solo spettro continuo: $\sigma(T) = \sigma_c(T)$ (T non ha spettro residuo essendo unitario).

Vogliamo ora mostrare che lo spettro di T include tutti i λ della forma $|\lambda| = 1$. Assegnato un tale λ consideriamo l'insieme di funzioni f_r

$$f_r(x) = \frac{1}{\sqrt{2r}} e^{i\theta x} \chi_{[-r,r]}(x)$$

con $\theta \in [0, 2\pi[$ tale che $e^{i\theta a} = \lambda$ e $r > 0$. Abbiamo che

$$Tf_r(x) = \frac{1}{\sqrt{2r}} e^{i\theta a} e^{i\theta x} \chi_{[-r-a, r-a]}(x) = \frac{\lambda}{\sqrt{2r}} e^{i\theta x} \chi_{[-r-a, r-a]}(x).$$

Calcoliamo il risolvente su f_r

$$(T - \lambda \mathbb{1})f_r = \frac{\lambda}{\sqrt{2r}} e^{i\theta x} (\chi_{[-r-a, -r]}(x) - \chi_{[r-a, r]}(x)),$$

la cui norma è

$$\|(T - \lambda \mathbf{1})f_r\|_2 = \frac{|\lambda|}{\sqrt{2r}}\sqrt{2a} = \sqrt{\frac{a}{r}}.$$

Essendo la norma di f_r pari a $\|f_r\|_2 = 1$ abbiamo che

$$\frac{\|(T - \lambda \mathbf{1})f_r\|_2}{\|f_r\|_2} = \sqrt{\frac{a}{r}} \xrightarrow{r \rightarrow \infty} 0,$$

quindi λ fa parte dello spettro continuo di T .

- iv) L'operatore ha solo spettro continuo, quindi ha solo autovettori generalizzati. Dalla derivazione precedente si conclude immediatamente che gli autovettori generalizzati sono

$$f_\lambda(x) = e^{i\theta x},$$

dove $\theta \in [0, 2\pi[$ e $e^{i\theta a} = \lambda$. Le funzioni f_λ sono a crescita algebrica limitata, quindi corrispondono a distribuzioni temperate, come richiesto per essere autovettori generalizzati.

- v) È banale verificare che per $f(x) = e^{\lambda x}$ e λ generico si ha che $Tf(x) = e^{\lambda a}f(x)$. Tuttavia se $\lambda \neq 1$ queste funzioni non sono autovettori generalizzati di T e dunque i corrispondenti λ non fanno parte dello spettro di T . Un modo per vederlo è notare che $e^{\lambda x}$ per $|\lambda| \neq 1$ non è una funzione a crescita algebrica limitata, quindi non corrisponde ad una distribuzione temperata.

Se si applicasse una strategia analoga a quella utilizzata nel punto iii) per ottenere delle autofunzioni approssimate, si vedrebbe che il rapporto $\|(T - \lambda \mathbf{1})f_r\|_2/\|f_r\|_2$ non convergerebbe a zero, ma rimarrebbe finito per $r \rightarrow \infty$.

Esercizio 3.10.

- i) Per dimostrare la limitatezza notiamo che

$$\|Tf\|_2^2 = \int_0^\infty |f(x+a)|^2 dx = \int_a^\infty |f(y)|^2 dy \leq \int_0^\infty |f(y)|^2 dy = \|f\|_2^2,$$

quindi concludiamo che T è limitato e che $\|T\| \leq 1$. L'aggiunto risulta

$$T^\dagger f(x) = \begin{cases} f(x-a) & x \geq a \\ 0 & 0 \leq x < a \end{cases}.$$

- ii) La norma di T è $\|T\| = 1$, infatti per qualsiasi f tale che $f(x) = 0$ per $x < a$ si ha che $\|Tf\|_2 = \|f\|_2$. L'operatore non è unitario, infatti non preserva la norma per tutte le funzioni. Per vederlo basta considerare una funzione non nulla tale che $f(x) = 0$ per $x \geq a$, per la quale si ha $\|Tf\|_2 = 0$.
- iii) Essendo $\|T\| = 1$ lo spettro di T è totalmente contenuto nel cerchio unitario. Mostriamo che ogni λ tale che $0 < |\lambda| < 1$ è un autovalore per T . Infatti per la funzione $f(x) = e^{kx}$ con $\text{Re}(k) < 0$, che ha norma finita

$$\|f\|_2^2 = \int_0^\infty e^{2\text{Re}(k)x} dx < \infty,$$

vale

$$Tf(x) = f(x+a) = e^{ka}e^{kx} = e^{ka}f(x).$$

Ovvero f è autofunzione di T con autovalore $\lambda = e^{ka}$ non nullo che soddisfa $|\lambda| = e^{\operatorname{Re}(k)a} < 1$. Anche $\lambda = 0$ è autovalore, infatti abbiamo visto nel punto ii) che esistono f non nulle tali che $Tf = 0$.

Per $|\lambda| = 1$ invece non esistono autovettori, ma esistono autovettori approssimati. Essi possono esser costruiti come

$$f_r(x) = \frac{1}{\sqrt{r}} e^{i\theta x} \chi_{[0,r]}(x)$$

con $\theta \in [0, 2\pi[$. La dimostrazione che essi sono effettivamente autovettori approssimati procede come il punto iii) dell'esercizio 3.9.

- iv) L'autovettore generalizzato corrispondente ad un elemento λ dello spettro continuo ($|\lambda| = 1$) è

$$f_\lambda(x) = e^{i\theta x}$$

con $\theta \in [0, 2\pi[$ e $e^{i\theta a} = \lambda$.

- v) Premettiamo che l'operatore aggiunto T^\dagger preserva la norma degli elementi dello spazio di Hilbert ma non è suriettivo, quindi non è unitario (e infatti, sebbene $TT^\dagger = 1$, si ha che $T^\dagger T \neq 1$).

T^\dagger non ha spettro puntuale né spettro continuo. È facile vedere che T^\dagger non ha autovettori propri né generalizzati (corrispondenti a distribuzioni temperate). L'autovalore (nello spettro discreto o continuo) $\lambda = 0$ si esclude tenendo conto che T^\dagger preserva la norma. Per gli autovalori propri non nulli si può procedere nel seguente modo. $g(x) = T^\dagger f(x)$ si annulla identicamente per $x \in [0, a[$ dunque $f(x)$ potrebbe essere autovettore (con autovalore non nullo) solo se $f(x)$ si annullasse sullo stesso intervallo. Ma in questo caso $g(x)$ si annullerebbe anche sull'intervallo $[a, 2a[$. Procedendo in questo modo si dimostra che $f(x)$ si annulla su tutto il dominio $[0, +\infty]$, quindi non è un autovettore. Nel caso di autovettori generalizzati si può utilizzare lo stesso ragionamento, avendo cura di interpretare l'annullamento in un intervallo con il fatto che la distribuzione temperata ha supporto al di fuori di quell'intervallo.

T^\dagger ha però spettro residuo non vuoto: $\sigma_r(T^\dagger) = \{0\}$. Per dimostrare questa affermazione notiamo che T^\dagger è invertibile con inverso limitato (l'inverso è T), ma solo in un dominio non denso. Infatti tutte le funzioni $f(x)$ tali che non siano identicamente nulle nell'intervallo $[0, a[$ non appartengono all'immagine di T^\dagger , quindi non sono nel dominio di $(T^\dagger)^{-1}$.

Nota: l'operatore di traslazione che abbiamo qui considerato può essere pensato come la generalizzazione al caso continuo degli operatori di traslazione a sinistra e a destra nello spazio delle successioni (si vedano le sezioni 5.1 e 6.3.1 di [6]). Le proprietà spettrali di questi operatori infatti coincidono con quelle discusse in questo esercizio.

Esercizio 3.11.

i) L'operatore è limitato:

$$\|Tf\|_2 = \|f(x) - f(x - \pi)\|_2 \leq \|f(x)\|_2 + \|f(x - \pi)\|_2 = 2\|f(x)\|_2,$$

quindi $\|T\| \leq 2$. L'uguaglianza si può avere solo se $f(x - \pi) = \alpha f(x)$ con $\alpha > 0$. L'operatore non è unitario, ad esempio se $f(x) = \theta(x)\theta(\pi - x)$ ($\|f\|_2 = \sqrt{\pi}$) si ha $Tf(x) = \theta(x)\theta(\pi - x) - \theta(x - \pi)\theta(2\pi - x)$ con $\|Tf\|_2 = \sqrt{2\pi} = \sqrt{2}\|f\|_2$. L'aggiunto è dato da

$$T^\dagger f(x) = f(x) - f(x + \pi).$$

ii) Per dimostrare che $\|T\| = 2$ si può usare la famiglia di funzioni $f_r(x) = \frac{1}{\sqrt{2r}}e^{ix}\chi_{[-r,r]}$ con $r > \pi$. Si ha che $\|f_r\|_2 = 1$ e $\|Tf_r\|_2/\|f_r\|_2 = \sqrt{4 - \pi/r} \rightarrow 2$ per $r \rightarrow \infty$.

L'operatore è equivalente a $T = \mathbf{1} - T_{-\pi}$ dove $T_{-\pi}$ corrisponde all'operatore di traslazione considerato nell'esercizio 3.9 (con $a = -\pi$). L'equazione agli autovalori è del tutto analoga a quella per $T_{-\pi}$, infatti

$$Tf(x) = f(x) - T_{-\pi}f(x) = \lambda f(x) \quad \Rightarrow \quad T_{-\pi}f(x) = (1 - \lambda)f(x).$$

Quindi lo studio dello spettro è simile a quanto fatto nell'esercizio 3.9. Lo spettro è dato dai λ che sono sulla circonferenza di raggio unitario e centro in 1, ovvero $|\lambda - 1| = 1$. Lo spettro è solo continuo e gli autovettori generalizzati sono analoghi a quelli per l'operatore di traslazione $T_{-\pi}$ (con l'ovvia modifica dei corrispondenti autovalori: $\lambda = 1 - \lambda_{T_{-\pi}}$).

Esercizio 3.12. Se il funzionale $f : X \rightarrow \mathbb{C}$ non è limitato, allora esiste una successione $\{x_n\} \subset X$ tale che

$$f(x_n) \geq n\|x_n\|.$$

(Volendo possiamo sempre porre $\|x_n\| = 1$ riscalandosi i vettori x_n .)

Consideriamo ora un punto $z \in X$. Dal risultato precedente segue che

$$z_n = z - \frac{f(z)}{f(x_n)}x_n$$

è una successione che converge a z . Per i punti z_n vale che

$$f(z_n) = f(z) - \frac{f(z)}{f(x_n)}f(x_n) = 0,$$

quindi $z_n \in \ker(f)$. Poiché $z_n \rightarrow z$ si ha che $z \in \overline{\ker(f)}$. Data l'arbitrarietà di z si conclude che il kernel è denso in X .

Esercizio* 3.14. Per $p = 1$, si ha che $f(x) = \lambda g(x)$ con $\lambda > 0$ o $g(x) = 0$ è condizione sufficiente per avere l'uguaglianza nella relazione di Minkowski (come si vede facilmente). Tuttavia non è una condizione necessaria. Un esempio è dato dalle funzioni $f(x) = \chi_{[-2,-1]}(x)$ e $g(x) = \chi_{[1,2]}(x)$ per le quali l'uguaglianza è valida.

Anche per $p = \infty$ la condizione è sufficiente ma non necessaria. Infatti scegliendo $f(x) = \chi_{[-2,1]}(x)$ e $g(x) = \chi_{[-1,2]}(x)$ l'uguaglianza è valida.

Esercizio 3.15. Le funzioni continue a supporto compatto $S_c(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$ (si possono anche considerare le funzioni a scalino a supporto compatto $S_c(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$) sono dense in $L^r(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$ per $1 \leq r < \infty$. Ma allora, per $1 \leq p, q < \infty$,

$$S_c(\mathbb{R}^n, \mathbb{C}) \subset L^p(\mathbb{R}^n, \mathbb{C}) \cap L^q(\mathbb{R}^n, \mathbb{C}),$$

dunque $L^p(\mathbb{R}^n, \mathbb{C}) \cap L^q(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$ contiene un sottoinsieme che è denso in $L^p(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$ e di conseguenza è anch'esso denso.

Esercizio 3.16. Si consideri una funzione $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$. Per tale funzione esiste finito l'integrale

$$\int_{\mathbb{R}} e^{i\theta x} f(x) dx,$$

per $\theta \in \mathbb{R}$, come segue dalle proprietà dell'integrale di Lebesgue. Calcoliamo la quantità

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} e^{i\theta x} (T - \lambda \mathbf{1})[f(x)] dx &= \int_{\mathbb{R}} e^{i\theta x} (f(x+a) - \lambda f(x)) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} (e^{-i\theta a} e^{i\theta(x+a)} f(x+a) - \lambda e^{i\theta x} f(x)) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} (e^{-i\theta a} - \lambda) e^{i\theta x} f(x) dx. \end{aligned}$$

Scegliendo θ tale che $e^{-i\theta a} = \lambda$ (sempre possibile essendo $|\lambda| = 1$) si ottiene che

$$\int_{\mathbb{R}} e^{i\theta x} (T - \lambda \mathbf{1})[f(x)] dx = 0.$$

Concludiamo quindi che le funzioni $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ tali che

$$\int_{\mathbb{R}} e^{i\theta x} (T - \lambda \mathbf{1})[f(x)] dx \neq 0$$

non fanno parte dell'immagine dell'operatore risolvete, che quindi non è suriettivo.

Nota: questa proprietà non è casuale. Infatti si può dimostrare (come conseguenza del *teorema della mappa aperta*) che un operatore limitato e biiettivo ammette inverso continuo (e quindi limitato). Visto che l'operatore di traslazione è unitario (e quindi limitato) anche l'operatore $T - \lambda \mathbf{1}$ è limitato ed è iniettivo visto che T ha solo spettro continuo (dato dai λ di modulo unitario, esercizio 3.9). Se quest'ultimo fosse anche suriettivo, allora sarebbe biiettivo e quindi invertibile con inverso definito su tutto lo spazio di Hilbert. Ma allora il corrispondente λ non farebbe parte dello spettro.

Esercizio 3.17. Consideriamo l'operatore risolvete $R_\lambda = (T - \lambda \mathbf{1})^{-1}$ e sviluppiamo formalmente in serie

$$R_\lambda = -\frac{1}{\lambda} (\mathbf{1} - T/\lambda)^{-1} = -\frac{1}{\lambda} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{T}{\lambda} \right)^n.$$

Sfruttando le proprietà della norma ($\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$ e $\|A^n\| \leq \|A\|^n$) abbiamo che

$$\|R_\lambda\| = \left\| -\frac{1}{\lambda} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{T}{\lambda} \right)^n \right\| \leq \frac{1}{|\lambda|} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\|T\|}{|\lambda|} \right)^n = \frac{1}{|\lambda|} \frac{1}{1 - \|T\|/|\lambda|} = \frac{1}{|\lambda| - \|T\|} < \infty.$$

Concludiamo quindi che la serie converge se $|\lambda| > \|T\|$ e che R_λ è limitato e definito (dalla serie) su tutto lo spazio di Hilbert. Quindi un generico λ tale che $|\lambda| > \|T\|$ non appartiene allo spettro.

Nel caso di un operatore invertibile e limitato inferiormente sviluppiamo il risolvente come

$$R_\lambda = [T(\mathbb{1} - \lambda T^{-1})]^{-1} = T^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda T^{-1})^n.$$

Procedendo in modo analogo a quanto fatto nella prima parte dell'esercizio, abbiamo che, se $|\lambda| < 1/\|T^{-1}\|$, R_λ è limitato e definito (dalla serie) su tutto lo spazio di Hilbert, quindi λ non appartiene allo spettro. (Questo risultato può anche essere ottenuto come nell'esercizio 3.18.)

Nel caso di un operatore unitario U si ha che $\|U\| = 1$ e $\|U^{-1}\| = \|U^\dagger\| = 1$. Quindi si ha che un $\lambda \in \sigma(U)$ deve rispettare $1 \leq |\lambda| \leq 1$ e quindi lo spettro è un sottoinsieme dei numeri complessi unitari.

Esercizio 3.18. Consideriamo il risolvente di T relativo all'autovalore λ . Si ha

$$R_\lambda(T) = (T - \lambda \mathbb{1})^{-1} = [-\lambda T(T^{-1} - \mathbb{1}/\lambda)]^{-1} = -\frac{T^{-1}}{\lambda} (T^{-1} - \mathbb{1}/\lambda)^{-1} = -\frac{T^{-1}}{\lambda} R_{1/\lambda}(T^{-1}).$$

Da questo discende immediatamente il risolvente $R_\lambda(T)$ esiste ed è limitato se e solo se il risolvente per $R_{1/\lambda}(T^{-1})$ esiste ed è limitato, quindi $\lambda \in \rho(T)$ se e solo se $1/\lambda \in \rho(T^{-1})$.

Esercizio 3.19. La dimostrazione della limitatezza dell'operatore è analoga a quanto mostrato nella sezione 5.3.5 di [6]. Inoltre può essere ricavata dalla soluzione del punto ii, che ora discuteremo.

Si riscriva l'operatore nella forma

$$[Af](x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} [\sin x \cos y + \cos x \sin y] f(y) dy.$$

Notiamo che

$$c(x) \equiv \frac{\cos x}{\sqrt{2}}, \quad s(x) \equiv \frac{\sin x}{\sqrt{2}}$$

hanno norma $\|c\| = \|s\| = 1$ in $L^2([0, 2\pi])$ e inoltre sono ortogonali ($c|s\rangle = 0$). L'operatore agisce quindi come

$$Af = s(c|f) + c(s|f).$$

Si vede chiaramente che l'operatore ha norma $\|A\| = 1$, quindi è limitato. Il raggio di convergenza della serie è dunque pari a 1, cioè si ha convergenza in norma se $\|zA\| = |z| \|A\| = |z| < 1$.

Determiniamo l'azione dell'operatore A^2 . Con semplici passaggi otteniamo

$$A^2 f = A[Af] = A[s(c|f) + c(s|f)] = c(c|f) + s(s|f),$$

ovvero A^2 è un proiettore (dunque $A^4 = A^2$). Inoltre si verifica facilmente che $A^3 = A$. Generalizzando queste relazioni otteniamo che

$$A^{2n+1} = A \quad A^{2n+2} = A^2, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Infine, sostituendo nella serie operatoriale:

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} z^n A^n &= \mathbb{1} + \sum_{n=0}^{\infty} z^{2n+1} A^{2n+1} + \sum_{n=0}^{\infty} z^{2n+2} A^{2n+2} = \mathbb{1} + A \sum_{n=0}^{\infty} z^{2n+1} + A^2 \sum_{n=0}^{\infty} z^{2n+2} \\ &= \mathbb{1} + \frac{z}{1-z^2} A + \frac{z^2}{1-z^2} A^2. \end{aligned}$$

4 Distribuzioni temperate

Esercizio 4.1. Si dimostrino i seguenti limiti deboli in $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ per k intero non negativo

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^k \cos tx = 0, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} t^k \sin tx = 0. \quad (4.1)$$

Esercizio 4.2. Si determini (con opportuna motivazione) se le seguenti affermazioni sono vere o false.

i) Ogni combinazione lineare finita di distribuzioni delta di Dirac

$$\sum_{n=0}^N c_n \delta(x - x_n) \quad (4.2)$$

è una distribuzione temperata.

ii) Ogni combinazione lineare (anche infinita) di distribuzioni delta di Dirac

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n \delta(x - x_n) \quad (4.3)$$

è una distribuzione temperata.

iii) La combinazione lineare

$$\sum_{n=0}^{\infty} \delta(x - n) \quad (4.4)$$

è una distribuzione temperata.

Esercizio 4.3. Si determinino, in senso distribuzionale, tutte le derivate di $|x|$.

Esercizio 4.4. Si determini, in senso distribuzionale, la derivata seconda di $|\sin x|$.

Esercizio 4.5. Si determini, in senso distribuzionale, la soluzione dell'equazione

$$xT = 0. \quad (4.5)$$

Esercizio 4.6. Si determini, in senso distribuzionale, la soluzione dell'equazione

$$(x-1)^2 T = 0. \quad (4.6)$$

Esercizio* 4.7 (La distribuzione valore principale di Cauchy). Si definisca il funzionale $Pv \frac{1}{x}$ come

$$\langle Pv \frac{1}{x}, \phi \rangle = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left[\int_{-\infty}^{-\varepsilon} \frac{\phi(x)}{x} + \int_{+\varepsilon}^{+\infty} \frac{\phi(x)}{x} \right] \quad \phi \in \mathcal{S}. \quad (4.7)$$

Si dimostri che questa definizione corrisponde a una distribuzione temperata, detta *valore principale di Cauchy*.

Esercizio* 4.8. Si dimostri che $\log|x| = \theta(x)\log x + \theta(-x)\log(-x)$ definisce una distribuzione temperata e di determini la derivata $\frac{d}{dx}\log|x|$ in senso distribuzionale.

Esercizio 4.9. Si dimostri il seguente limite debole

$$\lim_{\nu \rightarrow +\infty} \frac{\nu}{2} \chi_{[-1,1]}(\nu x) = \delta(x). \quad (4.8)$$

Esercizio* 4.10 (Trasformata di Fourier di una distribuzione temperata). Seguendo la definizione di operatore applicato ad una distribuzione, si può definire la trasformata di Fourier di una distribuzione come

$$\langle \mathcal{F}[T], \phi \rangle = \langle T, \mathcal{F}^\dagger \phi \rangle = \langle T, \iota \circ \mathcal{F}[\phi] \rangle = \langle T, \mathcal{F}[\iota \phi] \rangle. \quad (4.9)$$

Si sfruttino le proprietà delle funzioni in \mathcal{S} sotto trasformata di Fourier per far vedere che ogni distribuzione temperata ammette trasformata di Fourier.

Si dimostri che, sullo spazio delle distribuzioni, valgono le proprietà usuali della trasformata di Fourier

$$\mathcal{F}^2 T = \iota T, \quad \mathcal{F}^4 T = T. \quad (4.10)$$

Si determini la trasformata di Fourier delle distribuzioni temperate

$$T = \delta(x), \quad T = 1 \quad (4.11)$$

e si discuta il legame tra i due risultati.

4.1 Soluzioni

Esercizio 4.1. La dimostrazione può essere ottenuta sfruttando l'integrazione per parti.

Esercizio 4.2.

- i) L'affermazione è vera. Infatti tale combinazione è chiaramente un funzionale lineare e continuo (essendo combinazione lineare finita di funzionali lineari continui). Inoltre è definito per qualunque funzione di test in \mathcal{S} essendo tali funzioni limitate.
- ii) L'affermazione è falsa. Consideriamo ad esempio $x_n = 1/n$ e $c_n = 1$ (per $n \geq 1$), e calcoliamone il valore sulla funzione di test $\phi(x) = e^{-x^2}$:

$$\left\langle \sum_{n=1}^{\infty} \delta(x - 1/n), \phi \right\rangle = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N e^{-1/n^2} > \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N e^{-1} = +\infty,$$

quindi la serie non converge su tutto lo spazio di test e non rappresenta una distribuzione temperata.

- iii) L'affermazione è vera. La serie può essere ottenuta come derivata della distribuzione temperata regolare associata alla funzione a scalini

$$f(x) = \begin{cases} n & \text{per } n-1 < x \leq n, \ n \geq 1 \\ 0 & \text{per } x \leq 0 \end{cases}$$

Questa funzione definisce una distribuzione regolare in quanto è a crescita algebrica finita (è maggiorata dalla funzione $2|x|$ per $|x| > 1$). Si verifica facilmente che la derivata di questa distribuzione corrisponde alla serie di delta di Dirac assegnata.

Una dimostrazione diretta del fatto che la serie converge su ogni funzione di test è la seguente. Data $\phi \in \mathcal{S}$ si ottiene la serie (per ora formale)

$$\left\langle \sum_{n=0}^{\infty} \delta(x - n), \phi \right\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \phi(n).$$

Ma per la definizione di funzione di test, esiste un coefficiente C tale che per ogni x

$$|x^2 \phi(x)| \leq C \quad \Rightarrow \quad |\phi(x)| \leq C/|x|^2,$$

ovvero $|\phi(n)| \leq C/n^2$ per $n \geq 1$, dunque la serie converge assolutamente.

Esercizio 4.3.

$$\frac{d}{dx}|x| = \theta(x) - \theta(-x), \quad \frac{d^n}{dx^n}|x| = 2\delta^{(n-2)}(x) \quad \text{per } n \geq 2.$$

Esercizio 4.4.

$$\frac{d}{dx}|\sin x| = \begin{cases} \cos x & x \in [2\pi k, \pi + 2\pi k[, \ k \in \mathbb{Z} \\ -\cos x & \text{altrimenti} \end{cases},$$

$$\frac{d^2}{dx^2}|\sin x| = -|\sin x| + 2 \sum_{k \in \mathbb{Z}} \delta(x - \pi k).$$

Esercizio 4.5.

$$T = a \delta(x) \quad \text{con } a \in \mathbb{C}.$$

Esercizio 4.6.

$$T = a \delta(x-1) + b \delta'(x-1) \quad \text{con } a, b \in \mathbb{C}.$$

Esercizio* 4.7. L'integrale nella definizione si può riscrivere come

$$\int_{-\varepsilon}^{-\varepsilon} \frac{\phi(x)}{x} + \int_{+\varepsilon}^{+\infty} \frac{\phi(x)}{x} = \int_{+\varepsilon}^{+\infty} \frac{\phi(x) - \phi(-x)}{x}.$$

Essendo $\phi(x)$ infinitamente derivabile, allora

$$\frac{\phi(x) - \phi(-x)}{x} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 2\phi'(0) < \infty,$$

quindi l'integrando è continuo e limitato e l'integrale esiste anche nel limite $\varepsilon \rightarrow 0$. La linearità è ovvia, mentre la continuità si dimostra facilmente.

Esercizio* 4.8. La funzione $\log|x|$ è localmente integrabile e a crescita algebrica finita, quindi definisce una distribuzione temperata regolare. La sua derivata vale

$$\frac{d}{dx} \log|x| = P_v \frac{1}{x}.$$

Questo risultato può essere derivato applicando la definizione di derivata e sfruttando l'integrazione per parti (avendo cura di regolare la divergenza in $x = 0$ tramite un processo di limite sulla regione di integrazione).

Esercizio* 4.10. La trasformata di Fourier definisce una mappa $\mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}$, quindi la trasformata di Fourier di una distribuzione temperata è sempre ben definita. Le proprietà della trasformata di Fourier sulle distribuzioni discendono direttamente da quelle sulle funzioni di test.

Abbiamo che

$$\langle \mathcal{F}\delta, \phi \rangle = \langle \delta, \mathcal{F}\phi(-t) \rangle = \mathcal{F}[\iota\phi](0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(-t) dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(y) dy,$$

concludiamo quindi che

$$\mathcal{F}\delta = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}.$$

Nel caso di $T = 1$:

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{F}1, \phi \rangle &= \langle 1, \mathcal{F}\phi(-t) \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{F}[\iota\phi](t) dt = \sqrt{2\pi} \mathcal{F}[\mathcal{F}[\iota\phi]](0) \\ &= \sqrt{2\pi} \mathcal{F}^2[\iota\phi](0) = \sqrt{2\pi} \iota[\iota\phi](0) = \sqrt{2\pi} \phi(0) = \langle \sqrt{2\pi} \delta, \phi \rangle, \end{aligned}$$

da cui

$$\mathcal{F}1 = \sqrt{2\pi} \delta.$$

I due risultati sono legati, infatti

$$\mathcal{F}\delta = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \quad \Rightarrow \quad \mathcal{F}\frac{1}{\sqrt{2\pi}} = \mathcal{F}[\mathcal{F}\delta] = \mathcal{F}^2\delta = i\delta = \delta,$$

dove nell'ultima uguaglianza abbiamo sfruttato la parità della delta di Dirac.

5 Analisi complessa

Esercizio 5.1 (Cotrone 22/06/2015). Determinare la trasformata di Fourier della funzione

$$f(x) = \frac{1}{x^2 + 1} \cos \frac{\pi x}{2}. \quad (5.1)$$

[Suggerimento: si utilizzi la forma esponenziale delle funzioni trigonometriche.]

Esercizio 5.2 (Cotrone 21/07/2014). Facendo uso delle tecniche di integrazione sul piano complesso, determinare la trasformata di Fourier della funzione

$$f(x) = \frac{x}{(1 + x^2)^2}. \quad (5.2)$$

Esercizio 5.3 (Cotrone 19/07/2013). Facendo uso delle tecniche di integrazione sul piano complesso, determinare la trasformata di Fourier della funzione

$$f(x) = \frac{1}{x^2 - 1} \cos \frac{\pi x}{2}. \quad (5.3)$$

Esercizio 5.4 (Cotrone 18/07/2016). Determinare la trasformata di Fourier della funzione

$$f(x) = \frac{\sin 2x}{x^3 + 4x}. \quad (5.4)$$

Esercizio 5.5 (Cotrone 16/07/2019).

- i) Determinare il raggio di convergenza della serie di Taylor $S(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n / 2^n$.
- ii) Determinare il raggio di convergenza della serie di Taylor $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n / (2^n n!)$. Determinare per quali valori della variabile complessa z è analitica la funzione

$$\widehat{S}(z) = \int_0^{\infty} dt e^{-t} g(zt). \quad (5.5)$$

- iii) Dopo aver confrontato la massima regione di analiticità della funzione $f(z) = 2/(2 - z)$ con le regioni di analiticità di $S(z)$ e $\widehat{S}(z)$ determinate ai punti precedenti, si determinino tutte le espansioni in serie di $f(z)$ in $z = 0$ e si indichino i rispettivi raggi di convergenza.

Esercizio 5.6 (Cotrone 14/09/2015). Calcolare la trasformata di Fourier della funzione

$$f(x) = \frac{d^2}{dx^2} \frac{1}{x^2 + 2}. \quad (5.6)$$

Esercizio 5.7 (Cotrone 14/04/2014). Calcolare la trasformata di Fourier della funzione

$$f(x) = \frac{1}{x^2 + 2rx + r^2 + 1} \quad r \in \mathbb{R}. \quad (5.7)$$

Esercizio 5.8 (Cotrone 13/09/2013). Calcolare la trasformata di Fourier della funzione

$$f(x) = \frac{\sin \alpha x}{x^2 + 1} \quad \alpha > 0. \quad (5.8)$$

Esercizio 5.9 (Cotrone 12/09/2016). Calcolare la trasformata di Fourier della funzione

$$f(x) = \frac{1}{(x^2 + 1)^3}. \quad (5.9)$$

Esercizio 5.10 (Cotrone 10/01/2014). Determinare la trasformata di Fourier della funzione

$$f(x) = \frac{\sin x}{x(x^2 + 1)}. \quad (5.10)$$

Esercizio 5.11 (Cotrone 08/01/2018). Determinare le serie di Taylor e/o di Laurent della funzione

$$\frac{z}{1 + z^2} \quad (5.11)$$

intorno ai punti $z = 0, i, -i$ e indicare quali sono le regioni di convergenza in ciascun caso.

Esercizio 5.12 (Cotrone 07/01/2019). Data la funzione complessa

$$f(z) = \frac{e^z}{z^3(z - 1)} \cos \frac{\pi z}{2}, \quad (5.12)$$

elencarne le singolarità e i raggi di convergenza delle espansioni in serie (di Taylor o Laurent) intorno a un generico punto. Determinare la parte caratteristica (i termini divergenti) della serie di Laurent di $f(z)$ intorno a $z = 0$.

Esercizio 5.13 (Cotrone 07/01/2016). Facendo uso della trasformata di Fourier, trovare una soluzione dell'equazione

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x - y)f(y) dy + 2f(x) = \frac{4x^2 + 10}{\pi(x^4 + 5x^2 + 4)}. \quad (5.13)$$

Esercizio 5.14 (Cotrone 04/09/2017). Calcolare la trasformata di Fourier della funzione

$$f(x) = \frac{\cos ax}{x^2 + 4} \quad a > 0. \quad (5.14)$$

Esercizio 5.15. Si calcoli il seguente integrale

$$\int_0^\infty \frac{1}{1 + x^3} dx. \quad (5.15)$$

Esercizio 5.16. Si calcoli il seguente integrale

$$\int_0^\infty \frac{\sqrt{x}}{1 + x^2} dx. \quad (5.16)$$

Esercizio 5.17 (Il contorno a serratura). Si calcoli il seguente integrale

$$\int_0^\infty \frac{\sqrt{x}}{x^2 + 5x + 4} dx, \quad (5.17)$$

utilizzando il *contorno a serratura*, definito dal limite per $\varepsilon \rightarrow 0$ ($\varepsilon > 0$) dei seguenti contorni:

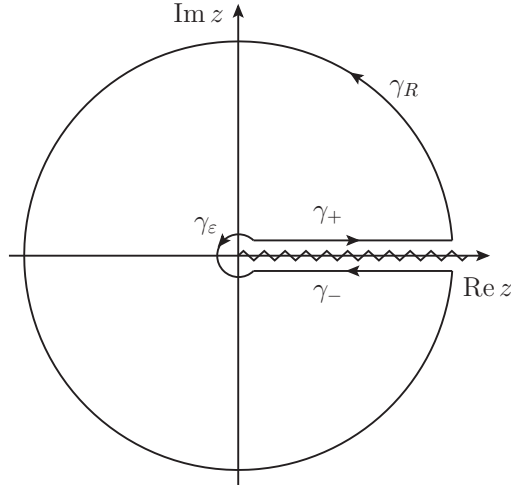


Figura 1: *Contorno a serratura* per l'integrazione sul piano complesso. La linea a zigzag sull'asse reale positivo mostra la posizione del branch cut dalla funzione integranda.

γ_+ : la semiretta $t + i\varepsilon$ con $t \in [\varepsilon, +\infty]$,

γ_- : la semiretta $t - i\varepsilon$ con $t \in [+ \infty, \varepsilon]$,

γ_ε : il cerchio piccolo $\varepsilon e^{i\theta}$ con $\theta \in [-2\pi, 0]$,

γ_R : il cerchio grande $Re^{i\theta}$ con $\theta \in [0, \pi]$ e $R \rightarrow +\infty$.

Il contorno è mostrato in fig. 1.

Esercizio 5.18. Si calcoli il seguente integrale

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x(x^2 + a^2)} dx, \quad (5.18)$$

con $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$.

Esercizio 5.19. Si calcoli il seguente integrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \sin \pi x}{1 - x^2} dx. \quad (5.19)$$

Esercizio 5.20. Si calcoli il seguente integrale

$$\int_0^\infty \frac{x^2}{(x^2 + a^2)^3} dx, \quad (5.20)$$

con $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$. Si estenda il risultato al caso $a \in \mathbb{C}$ con $\operatorname{Re} a \neq 0$.

Esercizio 5.21. Si calcoli il seguente integrale

$$\int_0^\infty \frac{\log^2 x}{x^2 + a^2} dx, \quad (5.21)$$

con $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$.

Esercizio 5.22. Si calcoli il seguente integrale

$$\int_0^{\infty} \frac{\log x}{x^2 + a^2} dx, \quad (5.22)$$

con $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$.

Esercizio 5.23. Si calcoli il seguente integrale

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{(a + b \cos x)^2} dx. \quad (5.23)$$

Si consideri inizialmente il caso $a, b \in \mathbb{R}$ con $|a| > |b|$.

Esercizio 5.24. Si calcoli il seguente integrale

$$\int_0^{\infty} \frac{x}{\sinh \pi x} dx. \quad (5.24)$$

Esercizio 5.25 (Colferai 03/09/2021). Discutere l'esistenza dell'integrale

$$I = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos 2\alpha}{1 - \sqrt{2} \sin \alpha} d\alpha \quad (5.25)$$

e calcolarlo con il metodo dei residui, senza usare le formule di bisezione o duplicazione (se non, eventualmente, per controllare il risultato).

Esercizio 5.26 (Colferai 24/05/2021). Calcolare con il metodo dei residui il seguente integrale

$$I = \int_0^{\infty} \frac{\log x}{(x+1)(x+2)} dx. \quad (5.26)$$

Esercizio 5.27 (Colferai 14/06/2021). Determinare per quali valori di $a \in \mathbb{R}$ esiste l'integrale

$$I = \int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x}(x+a)} dx \quad (5.27)$$

e calcolarlo con il metodo dei residui. Discutere cosa succede se $a \in \mathbb{C}$.

Esercizio 5.28 (Colferai 29/03/2021). Calcolare la trasformata di Fourier della funzione

$$f(x) = \frac{x^2}{(x^2 + a^2)^2} \quad (5.28)$$

dove $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

5.1 Soluzioni

Esercizio 5.1. Per effettuare l'integrazione sul piano complesso è conveniente riscrivere $\cos(\pi x/2)$ in termini di esponenziali. Il risultato è

$$\mathcal{F}[f](k) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{-\pi/2} \cosh k.$$

Esercizio 5.2.

$$\mathcal{F}[f](k) = -\frac{i}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}} k e^{-|k|}.$$

Il calcolo può essere semplificato sfruttando la simmetria della funzione f . Inoltre si possono utilizzare le proprietà della trasformata di Fourier sotto derivazione.

Esercizio 5.3. Per effettuare l'integrazione sul piano complesso è conveniente riscrivere $\cos(\pi x/2)$ in termini di esponenziali. Si tenga anche conto che per effettuare l'integrazione si deve modificare il percorso di integrazione attorno ai punti $z = \pm 1$. Il risultato è

$$\mathcal{F}[f](k) = \begin{cases} -\sqrt{\pi/2} \cos k & |k| \leq \pi/2 \\ 0 & |k| > \pi/2 \end{cases}.$$

Esercizio 5.4. Per effettuare l'integrazione sul piano complesso è conveniente riscrivere $\sin 2x$ in termini di esponenziali. Si tenga anche conto che per effettuare l'integrazione si deve modificare il percorso di integrazione attorno al punto $z = 0$. Il risultato è

$$\mathcal{F}[f](k) = \frac{1}{4} \sqrt{\frac{\pi}{2}} (1 - e^{-4} \cosh 2k).$$

Esercizio 5.5.

i) Usando il criterio del rapporto si ha convergenza se

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|z|^{n+1}}{2^{n+1}} \left(\frac{|z|^n}{2^n} \right)^{-1} = \frac{|z|}{2} < 1$$

il raggio di convergenza di $S(z)$ è $R = 2$.

ii) Usando il criterio del rapporto si trova

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|z|^{n+1}}{2^{n+1}(n+1)!} \left(\frac{|z|^n}{2^n n!} \right)^{-1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|z|}{2(n+1)} = 0$$

quindi la serie ha raggio di convergenza $R = \infty$. Si vede facilmente che $g(z) = e^{z/2}$, dunque

$$\widehat{S}(z) = \int_0^\infty dt \exp(-t(1 - z/2))$$

che è analitica per $\operatorname{Re} z < 2$, dove $\widehat{S}(z) = 2/(2 - z)$.

iii) $f(z)$ è analitica su $\mathbb{C} \setminus \{2\}$. Determiniamo espansioni in serie attorno a $z = 0$:

- per $|z| < 2$ si ha $f(z) = S(z)$
- per $|z| > 2$ si ha

$$f(z) = -\frac{2}{z(1-2/z)} = -\frac{2}{z} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{z^n} = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{n+1}}{z^{n+1}},$$

il raggio esterno della regione di convergenza è infinito.

Esercizio 5.6.

$$\mathcal{F}[f](k) = -\frac{\sqrt{\pi}}{2} k^2 e^{-\sqrt{2}|k|}.$$

Esercizio 5.7.

$$\mathcal{F}[f](k) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{ikr} e^{-|k|}.$$

Esercizio 5.8. Per effettuare l'integrazione sul piano complesso è conveniente riscrivere $\sin \alpha x$ in termini di esponenziali. Il risultato è

$$\mathcal{F}[f](k) = \begin{cases} i\sqrt{\frac{\pi}{2}} e^k \sinh \alpha & k < -\alpha \\ -i\sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{-\alpha} \sinh k & -\alpha \leq k \leq \alpha \\ -i\sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{-k} \sinh \alpha & k > \alpha \end{cases}.$$

Esercizio 5.9.

$$\mathcal{F}[f](k) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{e^{-|k|}}{8} (k^2 + 3|k| + 3).$$

Esercizio 5.10. Per effettuare l'integrazione sul piano complesso è conveniente riscrivere $\sin x$ in termini di esponenziali. Si tenga anche conto che per effettuare l'integrazione si deve modificare il percorso di integrazione attorno al punto $z = 0$. Il risultato è

$$\mathcal{F}[f](k) = \begin{cases} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sinh 1 e^{-|k|} & |k| > 1 \\ \sqrt{\frac{\pi}{2}} \left(1 - \frac{\cosh k}{e}\right) & |k| \leq 1 \end{cases}.$$

Esercizio 5.11.

$z = 0$: Per $|z| < 1$ si ha la serie di Taylor

$$\frac{z}{1+z^2} = z \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^{2n+1}$$

con raggio di convergenza $R = 1$. Per $|z| > 1$ si ha la serie di Laurent

$$\frac{z}{1+z^2} = \frac{z}{z^2(1+1/z^2)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{z^{2n+1}}$$

convergente nella regione anulare con raggi $R_1 = 1$, $R_2 = \infty$.

$z = i$: Si riscrive la funzione come

$$\frac{z}{1+z^2} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{z+i} + \frac{1}{z-i} \right).$$

Ponendo $w = z - i$, per $|w| < 2$ si ha la serie di Laurent

$$\frac{1}{2} \left(\frac{1}{w+2i} + \frac{1}{w} \right) = \frac{1}{2w} + \frac{1}{4i} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{w^n}{(2i)^n} = \frac{1}{2(z-i)} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (z-i)^n}{2^{n+2} i^{n+1}}$$

con $R_1 = 0$ e $R_2 = 2$. Per $|w| > 2$ si ha la serie di Laurent

$$\frac{1}{2(z-i)} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n i^n 2^{n-1}}{(z-i)^{n+1}},$$

con $R_1 = 2$ e $R_2 = \infty$.

$z = -i$: Per $|z+i| < 2$ si ha la serie di Laurent

$$\frac{1}{2(z+i)} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z+i)^n}{2^{n+2} i^{n+1}}$$

con $R_1 = 0$ e $R_2 = 2$. Per $|z+i| > 2$ si ha la serie di Laurent

$$\frac{1}{2(z+i)} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n 2^{n-1}}{(z+i)^{n+1}},$$

con $R_1 = 2$, $R_2 = \infty$.

Esercizio 5.12. La funzione ha un polo triplo in $z = 0$ e una singolarità eliminabile in $z = 1$.

L'espansione in serie di Taylor intorno a un qualsiasi punto $z_0 \neq 0$ ha raggio di convergenza $R = |z_0|$: $A_1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| < |z_0|\}$.

L'espansione di Laurent intorno a $z_0 \neq 0$ converge nella regione anulare di raggio interno $R_1 = |z_0|$ e raggio esterno $R_2 = \infty$: $A_2 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z_0| < |z - z_0| < \infty\}$.

L'espansione in serie di Laurent intorno a $z = 0$ converge nella regione anulare di raggio interno nullo e raggio esterno infinito, cioè in $A_3 = \mathbb{C} \setminus \{0\}$. La parte caratteristica è

$$f(z) \underset{z \sim 0}{\sim} -\frac{1}{z^3} - \frac{2}{z^2} - \left(\frac{5}{2} - \frac{\pi^2}{8} \right) \frac{1}{z} + \dots$$

Esercizio 5.13.

$$f(x) = \frac{1}{\pi(x^2 + 1)}.$$

Esercizio 5.14. Per effettuare l'integrazione sul piano complesso è conveniente riscrivere $\cos \alpha x$ in termini di esponenziali. Il risultato è

$$\mathcal{F}[f](k) = \begin{cases} \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{-2a} \cosh 2k & -|k| \leq a \\ \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{-2|k|} \cosh 2a & |k| > a \end{cases}.$$

Esercizio 5.15. L'integrale può essere calcolato come integrale del quinto tipo (con $n = 0$) [6] tramite l'integrale complesso

$$\int_{\gamma_r} z \frac{e^z}{1 + e^{3z}} dz.$$

Il risultato è

$$\frac{2\pi}{3\sqrt{3}}.$$

In alternativa si può integrare la funzione $1/(1 + z^3)$ sul contorno dato dall'asse reale positivo $([0, +\infty])$, dalla semiretta $z = e^{2i\pi/3}t$ (con $t \in [+ \infty, 0]$) e dall'arco di cerchio all'infinito che chiude il circuito. Si noti che sulla semiretta γ definita da $z = e^{2i\pi/3}t$ si ha

$$\int_{\gamma} \frac{1}{1 + z^3} dz = - \int_0^{\infty} \frac{1}{1 + t^3} e^{2i\pi/3} dt.$$

Una terza tecnica di integrazione si ottiene considerando l'integrale

$$\int_{\Gamma} \frac{\log z}{1 + z^3} dz,$$

dove Γ è il contorno a serratura (si veda l'esercizio 5.17). Per calcolare l'integrale si pone il branch cut del logaritmo sull'asse reale positivo, in modo che $\log(t - i\varepsilon) = \log(t + i\varepsilon) + 2\pi i$.

Esercizio 5.16. L'integrale può essere calcolato come integrale del quarto tipo (con $\alpha = 3/2$) [6] tramite l'integrale complesso

$$\int_{\gamma_r} \frac{e^{3z/2}}{1 + e^{2z}} dz.$$

Il risultato è

$$\frac{\pi}{\sqrt{2}}.$$

In alternativa si può calcolare l'integrale complesso sul contorno rettangolare con vertici $-r, r, r + i\pi, -r + i\pi$ (con $r \rightarrow \infty$).

Come terzo metodo si può utilizzare il contorno a serratura (si veda l'esercizio 5.17).

Esercizio 5.17. Consideriamo l'integrale sul piano complesso

$$\int_{\Gamma} \frac{\sqrt{z}}{z^2 + 5z + 4} dz,$$

effettuato sul contorno a serratura (fig. 1). Essendo la radice quadrata una funzione con determinazioni multiple, per effettuare l'integrale dobbiamo scegliere una determinazione opportuna. La scelta naturale, visto il contorno di integrazione, è di porre il branch cut della definizione della radice sul semiasse reale positivo, come mostrato nella fig. 1. Ad esempio possiamo utilizzare la seguente determinazione della radice:

$$\sqrt{z} = \sqrt{|z|}e^{i\theta/2} = \sqrt{|z|}e^{i\theta/2} \quad \text{con } \theta \in [0, 2\pi[,$$

con la scelta positiva per $\sqrt{|z|}$.³

In questo modo si ha che, nel limite $\varepsilon \rightarrow 0$ su γ_+ vale $\sqrt{z} = \sqrt{|z|}$, mentre su γ_- vale $\sqrt{z} = -\sqrt{|z|}$. Abbiamo quindi che l'integrale su γ_- è uguale a quello su γ_+ (si tenga conto del verso di integrazione). Quindi

$$\int_{\gamma_+ + \gamma_R + \gamma_- + \gamma_\varepsilon} \frac{\sqrt{z}}{z^2 + 5z + 4} dz = 2 \int_0^\infty \frac{\sqrt{x}}{x^2 + 5x + 4} dx + \int_{\gamma_\varepsilon + \gamma_R} \frac{\sqrt{z}}{z^2 + 5z + 4} dz.$$

Si verifica facilmente che gli integrali su γ_ε e γ_R vanno a zero per $\varepsilon \rightarrow 0$ e $R \rightarrow \infty$ (per i teoremi del cerchio piccolo e del cerchio grande). Sfruttando il teorema dei residui:

$$\int_0^\infty \frac{\sqrt{x}}{x^2 + 5x + 4} dx = \frac{1}{2} 2\pi i \sum \text{Res} \left(\frac{\sqrt{z}}{z^2 + 5z + 4} \right).$$

La funzione ha poli (semplici) in $z = -1$ e $z = -4$ e i rispettivi residui valgono rispettivamente $i/3$ e $-2i/3$ (si noti che per calcolare i residui si deve utilizzare la determinazione della radice scelta per l'integrale complesso). Quindi

$$\int_0^\infty \frac{\sqrt{x}}{x^2 + 5x + 4} dx = \frac{1}{2} 2\pi i \left(\frac{i}{3} - \frac{2i}{3} \right) = \frac{\pi}{3}.$$

Esercizio 5.18. L'integrale non ricade direttamente in nessuna delle cinque “forme standard” definite in [6]. Tuttavia può essere ricondotto agli integrali del terzo tipo. Infatti possiamo modificare l'integrale come

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x(x^2 + a^2)} dx = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{x(x^2 + a^2)} dx = \frac{1}{2} \text{Im} \left[\text{vp} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ix}}{x(x^2 + a^2)} dx \right],$$

avendo sfruttato il fatto che $e^{ix} = \cos x + i \sin x$. Si noti che la parte reale dell'integrale (quella con il $\cos x$) presenta un polo in $z = 0$. Tuttavia essa è dispari, quindi integrando in modo simmetrico rispetto a $x = 0$ la parte reale dell'integrale si annulla. Per questa ragione abbiamo specificato che l'integrale deve essere calcolato come *valore principale*.

Per effettuare l'integrale utilizziamo il contorno di integrazione sul piano complesso mostrato nella fig. 2, dove il contorno γ_ε è un semicerchio di raggio ε (che faremo tendere

³Avremmo potuto analogamente scegliere la determinazione con il segno opposto.

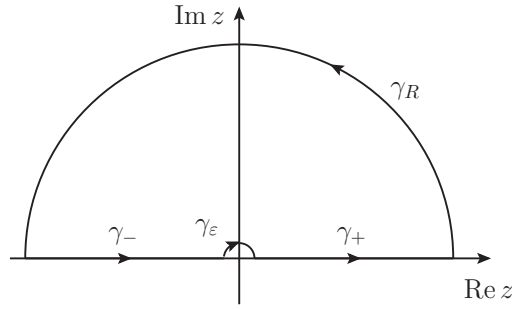


Figura 2: Contorno per l'integrazione sul piano complesso.

a zero) centrato nell'origine. Per il lemma di Jordan, l'integrale su γ_R tende a zero per $R \rightarrow \infty$, mentre la somma degli integrali su γ_- e γ_+ ricostruisce l'integrale sull'asse reale (nel limite $\varepsilon \rightarrow 0$). Infine, per il lemma 8.28 di [6], si ha che l'integrale sulla semicirconferenza γ_ε vale il residuo al polo $z = 0$ moltiplicato per $-\pi i$ (ovvero metà dell'integrale su una circonferenza completa):⁴

$$\int_{\gamma_\varepsilon} \frac{e^{iz}}{z(z^2 + a^2)} dz = -\pi i \operatorname{Res}_{z=0} \left(\frac{e^{iz}}{z(z^2 + a^2)} \right) = -\frac{\pi i}{a^2}.$$

Otteniamo quindi

$$\text{vp} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ix}}{x(x^2 + a^2)} dx = \frac{\pi i}{a^2} + 2\pi i \sum \operatorname{Res} \left(\frac{e^{iz}}{z(z^2 + a^2)} \right) = \frac{\pi i}{a^2} - \frac{\pi i e^{-|a|}}{a^2},$$

dove la somma è sui residui posti nel semipiano superiore ($\operatorname{Im} z > 0$), ovvero sul polo in $z = i|a|$. Il risultato finale è

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x(x^2 + a^2)} dx = \frac{\pi}{2a^2} (1 - e^{-|a|}).$$

Esercizio 5.19. Si proceda come nella soluzione dell'esercizio 5.18, ma utilizzando un contorno di integrazione che aggiri i poli in $x = \pm 1$. Il risultato finale è

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \sin \pi x}{1 - x^2} dx = \pi.$$

Esercizio 5.20. L'integrale si riconduce facilmente (estendendo per parità) ad un integrale del secondo tipo. Il risultato è

$$\frac{\pi}{16|a|^3}.$$

Si noti che la funzione ha poli *tripli* in $z = \pm i|a|$, i cui residui valgono $\mp i/(16|a|^3)$.

Nel caso in cui $a \in \mathbb{C}$ si devono distinguere i due casi $\operatorname{Re} a > 0$ e $\operatorname{Re} a < 0$. Nel primo (secondo) caso la il polo ia è nel semipiano immaginario positivo (negativo), e viceversa

⁴Si tenga conto del verso di integrazione che dà un segno $-$.

per il polo $-ia$. Il risultato dell'integrale è

$$\begin{cases} \frac{\pi^3}{16a^3} & \text{per } \operatorname{Re} a > 0 \\ -\frac{\pi^3}{16a^3} & \text{per } \operatorname{Re} a < 0 \end{cases}.$$

L'estensione al piano complesso può essere anche ottenuta tramite le proprietà delle funzioni olomorfe. Derivando l'integrale rispetto ad a si dimostra facilmente che esso converge per $\operatorname{Re} a \neq 0$ (si applichi il teorema di derivazione sotto il segno di integrale). Quindi la funzione data dall'integrale può essere estesa analiticamente ai semipiani $\operatorname{Re} a > 0$ e $\operatorname{Re} a < 0$. Avendo determinato il valore sulle due semirette reali, l'estensione olomorfa ai semipiani è univoca e chiaramente coincide con quella riportata precedentemente.

Esercizio 5.21. L'integrale è del quinto tipo. Può essere calcolato partendo dall'integrale

$$\int_{\gamma_r} \frac{z^3 e^z}{e^{2z} + a^2} dz,$$

dove γ_r è il circuito rettangolare sull'asse reale e sulla retta $t + 2\pi i$, con $t \in \mathbb{R}$. Su quest'ultima abbiamo

$$(z + 2\pi i)^3 = z^3 + 3(2\pi i)z^2 + 3(2\pi i)^2 z + (2\pi i)^3.$$

L'integrale del termine z^3 si cancella con l'integrazione sull'asse reale, quindi rimangono solo gli altri tre termini. Il termine che ci interessa è quello in z^2 . La sua determinazione può essere fatta considerando la parte immaginaria pura dell'integrale e poi sottraendo il contributo del termine $(2\pi i)^3$, che corrisponde all'integrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(2\pi i)^3 e^x}{e^{2x} + a^2} dx = \int_0^\infty \frac{(2\pi i)^3}{x^2 + a^2} dx = -\frac{4\pi^4 i}{|a|},$$

come si ottiene facilmente tramite un integrale del secondo tipo.

I poli di $z^3 e^z / (e^{2z} + a^2)$ sono per $e^{z_\pm} = \pm i|a|$. Per determinare la loro posizione all'interno del contorno di integrazione γ_r si devono ottenere dei valori per z che abbiano parte immaginaria compresa tra 0 e $2\pi i$. Si ricava che

$$z_+ = \log |a| + \frac{i\pi}{2}, \quad z_- = \log |a| + \frac{3i\pi}{2}.$$

Con semplici passaggi si ottiene che

$$2\pi i \sum \operatorname{Res} \frac{z^3 e^z}{e^{2z} + a^2} = \frac{\pi^2}{4|a|} (-12i \log^2 |a| + 24\pi \log |a| + 13\pi^2 i).$$

Calcolando i vari contributi dell'integrale sul contorno abbiamo

$$-\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(3(2\pi i)x^2 - 3(2\pi i)^2 x + (2\pi i)^3)e^x}{e^{2x} + a^2} dx = \frac{\pi^2}{4|a|} (-12i \log^2 |a| + 24\pi \log |a| + 13\pi^2 i). \quad (5.29)$$

Considerando la parte immaginaria pura otteniamo

$$-6\pi \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2 e^x}{e^{2x} + a^2} dx = \frac{\pi^2}{4|a|} (-12 \log^2 |a| + 13\pi^2) + \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(2\pi i)^3 e^x}{e^{2x} + a^2} dx,$$

ovvero, mettendo insieme i risultati precedenti,

$$\int_0^\infty \frac{\log^2 x}{x^2 + a^2} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2 e^x}{e^{2x} + a^2} dx = \frac{\pi}{2|a|} \left(\log^2 |a| + \frac{1}{4}\pi^2 \right).$$

Notiamo inoltre che calcolando la parte reale dell'equazione (5.29) si ha

$$12\pi^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x e^x}{e^{2x} + a^2} dx = \frac{6\pi^3}{|a|} \log |a|,$$

e quindi

$$\int_0^\infty \frac{\log x}{x^2 + a^2} = \frac{\pi}{2|a|} \log |a|.$$

Un metodo alternativo per calcolare l'integrale è quello di considerare il contorno di integrazione rettangolare con vertici $\{-\infty + 0i, +\infty + 0i, +\infty + \pi i, -\infty + \pi i\}$, ovvero non coprire un periodo intero dell'esponenziale, ma solo mezzo periodo. Sulla semiretta $t + i\pi$ si ha che

$$\frac{z^3 e^z}{z^{2z} + a^2} \rightarrow \frac{-(z + i\pi)^3 e^z}{e^{2z} + a^2}.$$

In questo caso il termine z^3 non si cancella, ma può essere ugualmente eliminato prendendo la parte immaginaria dell'integrale. All'interno del nuovo circuito di integrazione cade solo un polo $z_+ = \log |a| + i\pi/2$. Il resto del calcolo procede come nello svolgimento dato prima.

Un terzo metodo per effettuare il calcolo è quello di utilizzare il contorno di integrazione rettangolare con vertici $\{-\infty + 0i, +\infty + 0i, +\infty + \pi i, -\infty + \pi i\}$, e integrare la funzione

$$\frac{z^2 e^z}{e^{2z} + a^2}.$$

Infatti sulla semiretta $t + i\pi$ si ha

$$\frac{z^2 e^z}{z^{2z} + a^2} \rightarrow \frac{-(z + i\pi)^2 e^z}{e^{2z} + a^2}.$$

Quindi il termine in z^2 non si cancella con il contributo proveniente dalla retta reale. Il resto del calcolo procede come prima.

Esercizio 5.22. L'integrale è del quinto tipo e ha come risultato

$$\int_0^\infty \frac{\log x}{x^2 + a^2} = \frac{\pi}{2|a|} \log |a|.$$

Il calcolo può essere effettuato considerando la funzione $z^2 e^z / (e^{2z} + a^2)$ sul circuito di periodicità dell'esponenziale (il rettangolo $\{-\infty + 0i, +\infty + 0i, +\infty + 2\pi i, -\infty + 2\pi i\}$) e prendendo la parte immaginaria del risultato.

Un metodo alternativo consiste nel considerare la funzione $z e^z / (e^{2z} + a^2)$ sul circuito rettangolare $\{-\infty + 0i, +\infty + 0i, +\infty + \pi i, -\infty + \pi i\}$. Si veda la soluzione dell'esercizio 5.21 per ulteriori dettagli.

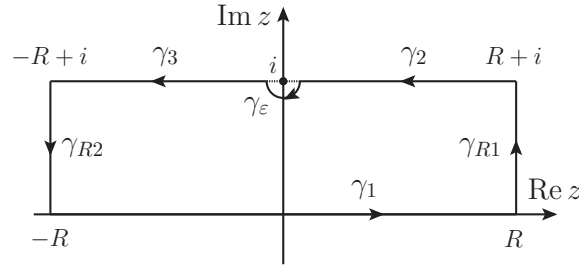


Figura 3: Contorno per l'integrazione sul piano complesso (nel limite $R \rightarrow \infty$).

Esercizio 5.23. L'integrale è del primo tipo e ha come risultato

$$\frac{2a\pi}{(a^2 - b^2)^{3/2}}.$$

Per effettuare il calcolo è conveniente definire $a/b \equiv c$ (si noti che le condizioni implicano $|c| > 1$) e portare un fattore $1/b^2$ fuori dall'integrale. Si noti che l'integrale sul piano complesso è

$$\frac{4}{ib^2} \int_{|z|=1} \frac{z}{(z^2 + 2cz + 1)^2} dz.$$

L'integrando ha due poli doppi in $z_{\pm} = c \pm \sqrt{c^2 - 1}$. Solo uno di questi poli è all'interno del disco unitario, in quanto $z_+ z_- = 1$. Si vede facilmente che il polo all'interno del disco unitario è z_- .

Esercizio 5.24. L'integrale può essere calcolato estendendo l'integrando sul piano complesso e utilizzando un contorno rettangolare analogo a quelli usati per gli integrali di quarto e quinto tipo (la funzione da integrare è pari e quindi può essere estesa a tutta la retta reale). Ci sono tuttavia delle differenze da notare. Nella direzione immaginaria il $\sinh \pi x$ ha periodo $2i$, inoltre esso cambia segno per $z \rightarrow z + i$. Quindi possiamo utilizzare un contorno rettangolare con il lato superiore sulla retta $[-\infty + i, +\infty + i]$. Un'altra particolarità è il fatto che su questa retta l'integrando ha un polo semplice in $z = i$. Dobbiamo dunque adattare il contorno di integrazione come mostrato nella fig. 3, inserendo un semicerchio di raggio $\varepsilon \rightarrow 0$ attorno al polo.

Sulla retta $[-\infty + i, +\infty + i]$ si ha che

$$\frac{z}{\sinh \pi z} \rightarrow -\frac{x + i}{\sinh \pi x}.$$

Si noti che la parte reale riproduce (si tenga conto del verso di integrazione) l'integrale sull'asse reale, mentre la parte immaginaria si annulla per integrazione simmetrica (essendo dispari). L'integrale lungo il contorno semicircolare vale $-\pi i$ per il residuo al polo (si tenga conto del verso di percorrenza orario). Si noti che non ci sono poli all'interno del circuito di integrazione.

Abbiamo quindi integrando lungo il contorno

$$2 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{\sinh \pi x} - \pi i \operatorname{Res}_{z=i} \left(\frac{z}{\sinh \pi z} \right) = 0,$$

da cui

$$\int_0^{+\infty} \frac{x}{\sinh \pi x} = \frac{1}{4}.$$

In alternativa si può integrare la funzione

$$\frac{z^2}{\sinh \pi z}$$

lungo un contorno rettangolare analogo a quello in fig. 3, ma con il lato superiore sulla retta $[-\infty + 2i, +\infty + 2i]$. Anche in questo caso si deve tener conto di un polo ($z = 2i$) vicino al contorno di integrazione. Inoltre all'interno del circuito di integrazione cade il polo in $z = i$.

Esercizio 5.25. È un integrale del primo tipo. L'integrando ha potenzialmente dei poli singoli per $\sin \alpha = 1/\sqrt{2}$, ovvero $\alpha = \pi/4, 3\pi/4$. Tuttavia per tali valori il numeratore si annulla, quindi l'integrando rimane limitato e integrabile. Il calcolo degli integrali con il metodo dei residui è del tutto standard. L'unica cosa a cui stare attenti è il fatto che

$$\cos 2\alpha \rightarrow \frac{1}{2} \left(z^2 + \frac{1}{z^2} \right).$$

L'integrale in forma complessa diventa

$$\int_{|z|=1} \frac{1+z^4}{\sqrt{2}+2iz-z^2(\sqrt{2}z^2)} dz = \int_{|z|=1} \frac{\sqrt{2}-2iz-\sqrt{2}z^2}{2z^2} dz.$$

Ha polo in $z = 0$, con residuo $-i$. L'integrale quindi vale

$$I = 2\pi.$$

Le formule di duplicazione mostrano che

$$\frac{\cos 2\alpha}{1 - \sqrt{2} \sin \alpha} = 1 + \sqrt{2} \sin \alpha.$$

Il cui integrale si calcola banalmente e coincide con il risultato precedente.

Esercizio 5.26. È un integrale del quinto tipo. Si può calcolare integrando sul circuito rettangolare $\{-\infty, +\infty, +\infty + 2\pi i, -\infty + 2\pi i\}$ la funzione

$$\frac{z^2 e^z}{(e^z + 1)(e^z + 2)}.$$

Il risultato è

$$I = \frac{1}{2} \log^2 2.$$

In alternativa si può integrare la funzione

$$\frac{\log^2 z}{(z+1)(z+2)}$$

sul circuito a serratura.

Esercizio 5.27. È un integrale del quarto tipo. Per $a < 0$ l'integrando ha un polo sul dominio $[0, \infty]$, quindi non è integrabile. Per $a = 0$, intorno a $x = 0$ l'integrando ha l'andamento $1/x^{3/2}$, che non è integrabile. Per $a > 0$ l'integrando è regolare sul dominio $[0, \infty]$, inoltre esso ha una singolarità integrabile in $x = 0$ e decresce come $1/x^{3/2}$ all'infinito, quindi l'integrale è ben definito.

Per semplificare il calcolo dell'integrale si può estrarre la dipendenza da a :

$$I(a) = \int_0^\infty \frac{adt}{\sqrt{at}(at+a)} = \frac{1}{\sqrt{a}} I(1).$$

L'integrale $I(1)$ può essere determinato integrando sul circuito rettangolare $\{-\infty, +\infty, +\infty + 2\pi i, -\infty + 2\pi i\}$ la funzione

$$\frac{e^{z/2}}{e^z + 1}.$$

Il risultato è

$$I(a) = \frac{\pi}{\sqrt{a}}.$$

In alternativa si può integrare la funzione

$$\frac{1}{\sqrt{z}(z+1)}$$

sul circuito a serratura, scegliendo opportunamente il branch cut della funzione \sqrt{z} .

Si verifica facilmente che per $a \notin [-\infty, 0]$ l'integrale è derivabile rispetto ad a con valore finito (si applichi il teorema di derivazione sotto il segno di integrale). Quindi l'integrale definisce una funzione olomorfa in tutto il piano complesso tranne la semiretta reale negativa. Per il principio di unicità delle funzioni olomorfe, l'integrale si estende al dominio di definizione come

$$I(a) = \frac{\pi}{\sqrt{a}} \quad a \in \mathbb{C} \setminus [-\infty, 0].$$

Esercizio 5.28. Il calcolo può essere semplificato sfruttando le proprietà della trasformata di Fourier sotto derivazione e moltiplicazione per potenze. Si può riscrivere $f(x)$ come

$$f(x) = \frac{x^2}{(x^2 + a^2)^2} = -\frac{1}{2}x \frac{d}{dx} \frac{1}{x^2 + a^2}.$$

Inoltre si può notare che $f(x)$ è pari, dunque anche la sua trasformata di Fourier è pari. Infine la dipendenza da a può essere dedotta tramite riscalamento. Il risultato è

$$\mathcal{F}[f](k) = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}|a|} (1 - |a||k|) e^{-|a||k|}.$$

6 Trasformata di Laplace

Esercizio 6.1 (Colferai 24/05/2021). Determinare la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} -f'(t) + f(t) = \cosh t \\ f(0) = \frac{1}{4} \end{cases} \quad (6.1)$$

usando la trasformata di Laplace.

Esercizio 6.2 (Colferai 03/09/2021). Determinare la funzione $f(t)$ che risolve il problema di Cauchy

$$\begin{cases} f''(t) + g'(t) + 2f(t) = 0 \\ f'(t) - g(t) = t e^{it} \\ f(0) = f'(0) = g(0) = 0 \end{cases} \quad (6.2)$$

usando la trasformata di Laplace. (Non è richiesto il calcolo di $g(t)$.)

Esercizio 6.3. Si dimostri la seguente proprietà di traslazione per la trasformata di Laplace

$$\mathcal{L}[\theta(t-a)f(t-a)](s) = e^{-as} \mathcal{L}[f](s), \quad (6.3)$$

con $a > 0$.

Esercizio 6.4. Si dimostrino le seguenti proprietà della trasformata di Laplace inversa

i) [*Linearità*] Date $F(s)$, $G(s)$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$

$$\mathcal{L}^{-1}[\alpha F + \beta G] = \alpha \mathcal{L}^{-1}[F] + \beta \mathcal{L}^{-1}[G]. \quad (6.4)$$

ii) [*Traslazione I*] Data $F(s)$ e $a \in \mathbb{R}$

$$\mathcal{L}^{-1}[F(s-a)](t) = e^{at} \mathcal{L}^{-1}[F](t). \quad (6.5)$$

iii) [*Traslazione II*] Data $F(s)$ e $a > 0$

$$\mathcal{L}^{-1}[e^{-as}F(s)](t) = \theta(t-a) \mathcal{L}^{-1}[F](t-a). \quad (6.6)$$

iv) [*Dilatazione*] Data $F(s)$ e $a > 0$

$$\mathcal{L}^{-1}[F(as)](t) = \frac{1}{a} \mathcal{L}^{-1}[F]\left(\frac{t}{a}\right). \quad (6.7)$$

v) [*Derivazione*] Data $F(s)$ derivabile m volte

$$\mathcal{L}^{-1}[F^{(m)}(s)](t) = (-t)^m \mathcal{L}^{-1}[F](t). \quad (6.8)$$

vi) [*Integrazione*] Data $F(s)$ integrabile

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\int_s^\infty F(u) du\right](t) = \frac{1}{t} \mathcal{L}^{-1}[F](t). \quad (6.9)$$

vii) [Moltiplicazione per s^n] Data $F(t)$ con $F^{(k)}(0^+) = 0$ per $k = 0, \dots, m$

$$\mathcal{L}^{-1}[s^m F(s)](t) = \frac{d^m}{dt^m} \mathcal{L}^{-1}[F](t). \quad (6.10)$$

viii) [Divisione per s] Data $F(s)$

$$\mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{s} F(s) \right] (t) = \int_0^t \mathcal{L}^{-1}[F](u) du. \quad (6.11)$$

ix) [Convoluzione] Date $F(s)$ e $G(s)$

$$\mathcal{L}^{-1}[F(s)G(s)](t) = \int_0^t \mathcal{L}^{-1}[F](u) \mathcal{L}^{-1}[G](t-u) du = \mathcal{L}^{-1}[F] * \mathcal{L}^{-1}[G]. \quad (6.12)$$

[Suggerimento: la dimostrazione può essere effettuata considerando la forma esplicita delle relazioni corrispondenti per la trasformata di Laplace diretta, oppure sfruttando le proprietà della trasformata di Laplace. Si veda la sezione 9.3 di [6].]

Esercizio 6.5 (Colferai 14/06/2021). Data la funzione

$$g(t) = (1-t)\theta(1-t) \quad (6.13)$$

determinare la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} f''(t) - 4f(t) = g(t) \\ f(0) = f'(0) = 0 \end{cases} \quad (6.14)$$

usando la trasformata di Laplace. [Suggerimento: il termine noto g può essere riscritto come somma di monomi opportunamente traslati.]

Esercizio 6.6 (Colferai 29/03/2021). Determinare le funzioni incognite f e g soluzioni del problema di Cauchy

$$\begin{cases} f'(t) + g(t) = te^t \\ f(t) + g'(t) = e^t \\ f(0) = g(0) = 0 \end{cases} \quad (6.15)$$

usando la trasformata di Laplace.

Esercizio 6.7 (La funzione a gradino). Si calcoli la trasformata di Laplace della funzione a gradino $\chi_{[0,1]}(x)$.

Esercizio 6.8 (La funzione a triangolo). Si mostri che il prodotto di convoluzione tra due funzioni a scalino è uguale alla funzione a triangolo

$$\chi_{[0,1]} * \chi_{[0,1]} = \Lambda(x) = \begin{cases} x & 0 < x < 1 \\ 1-x & 1 \leq x < 2 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}.$$

Si sfrutti la proprietà appena dimostrata per determinare la trasformata di Laplace della funzione a triangolo.

Esercizio 6.9. Determinare la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} f''(x) + 4f(x) = 2\Lambda(x) \\ f(0) = f'(0) = 0 \end{cases}, \quad (6.16)$$

dove $\Lambda(x)$ è la funzione a triangolo definita nell'esercizio 6.8, usando la trasformata di Laplace.

Esercizio 6.10 (Colferai 25/06/2020). Risolvere, facendo uso della trasformata di Laplace, l'equazione integrale

$$\int_0^x (x-t)f(t) dt = x^2 e^x \quad (6.17)$$

dove $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{C}$ rappresenta la funzione incognita.

Esercizio 6.11. Utilizzando la trasformata di Laplace si determini la soluzione dell'equazione differenziale

$$\begin{cases} f''(x) + f(x) = \chi_{[0,1]}(x) - \chi_{[1,2]}(x) \\ f(0) = f'(0) = 0 \end{cases}. \quad (6.18)$$

Esercizio 6.12 (Colferai 15/07/2020). Risolvere, facendo uso della trasformata di Laplace, l'equazione integrale

$$\int_0^x (x-t)f(t)e^{x-t} dt = e^x + f(x) \quad (6.19)$$

dove $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{C}$ rappresenta la funzione incognita.

Esercizio 6.13 (Colferai 15/07/2020). Determinare la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y''(x) - 3y'(x) + 2y(x) = \sin x \\ y(0) = y'(0) = 0 \end{cases} \quad (6.20)$$

usando la trasformata di Laplace.

Esercizio 6.14 (Colferai 09/09/2020). Determinare la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'''(t) + a^2 y'(t) = 1 - t \\ y'(0) = y''(0) = 0 \\ y(0) = b \end{cases} \quad (6.21)$$

usando la trasformata di Laplace. Si considerino $a \neq 0$ e b numeri noti.

Esercizio 6.15 (Colferai 09/02/2020). Determinare la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'''(t) + \lambda y''(t) = t \\ y'(0) = y''(0) = 0 \\ y(0) = a \end{cases} \quad (6.22)$$

usando la trasformata di Laplace. Si considerino $\lambda \neq 0$ e a numeri noti.

Esercizio 6.16 (Colferai 11/01/2021). Determinare la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y''(t) - 2y'(t) + y(t) = \sin(t)\theta(\pi - t) \\ y'(0) = y(0) = 7 \end{cases} \quad (6.23)$$

usando la trasformata di Laplace. [Suggerimento: il termine noto può essere riscritto come somma di $\sin t$ e della sua traslata.]

Esercizio 6.17. Calcolare la trasformata di Laplace delle seguenti funzioni

$$1, \quad t^n, \quad e^{at}, \quad \cos(at), \quad \sin(at), \quad \cosh(at), \quad \sinh(at), \quad (6.24)$$

sfruttando le proprietà della trasformata di Laplace. [Non si calcolino le trasformate di Laplace tramite integrazione, ma si utilizzino in modo opportuno le proprietà enunciate nel teorema 9.1 di [6].]

6.1 Soluzioni

Esercizio 6.1. Applicando la trasformata di Laplace,

$$[\mathcal{L}f](s) = F(s), \quad [\mathcal{L}f'](s) = sF(s) - f(0) = sF(s) - \frac{1}{4}, \quad [\mathcal{L} \cosh t](s) = \frac{s}{s^2 - 1},$$

l'equazione differenziale diventa

$$(-s + 1)F(s) = \frac{s}{s^2 - 1} - \frac{1}{4} \quad \Rightarrow \quad F(s) = \frac{-s}{(s - 1)^2(s + 1)} + \frac{1}{4(s - 1)}.$$

$F(s)$ ha dei poli in $s = 1$ (di ordine 2) e $s = -1$ (di ordine 1). Quindi l'ascissa di convergenza della soluzione (data dalla parte reale della singolarità più a destra nel piano complesso) è $\alpha_F = 1$.

La soluzione si può determinare tramite l'antitrasformata di Laplace di F :

$$f(t) = \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{ds}{2\pi i} \left[\frac{-se^{st}}{(s - 1)^2(s + 1)} + \frac{e^{st}}{2(s - 1)} \right],$$

per qualsiasi $c > \alpha_F$ reale. Poiché $\lim_{s \rightarrow +\infty} F(s) = 0$ possiamo applicare il lemma di Jordan chiudendo il cammino di integrazione nel semipiano sinistro. Usando il teorema dei residui si ottiene

$$f(t) = [\mathcal{L}^{-1}F](t) = \text{Res}(e^{st}F(s), -1) + \text{Res}(e^{st}F(s), +1) = \frac{1}{4}(e^{-t} - te^t),$$

dove abbiamo usato

$$\text{Res}(e^{st}F(s), -1) = \frac{e^{-t}}{4} \quad \text{Res}(e^{st}F(s), +1) = -\frac{te^t}{2}.$$

Un metodo alternativo per determinare l'antitrasformata di Laplace è spezzare $F(s)$ in frazioni semplici, di cui conosciamo l'antitrasformata. Si verifica facilmente che

$$F(s) = \frac{1}{4} \frac{1}{s + 1} - \frac{1}{2} \frac{1}{(s - 1)^2}.$$

Dalle trasformate di Laplace

$$[\mathcal{L} e^{at}](s) = \frac{1}{s - a} \quad [\mathcal{L} t](s) = \frac{1}{s^2} \quad \rightarrow \quad [\mathcal{L} te^t](s) = \frac{1}{(s - 1)^2}$$

si trova che

$$\left[\mathcal{L}^{-1} \frac{1}{s + 1} \right](t) = e^{-t} \quad \left[\mathcal{L}^{-1} \frac{1}{(s - 1)^2} \right](t) = te^t.$$

Da questo segue immediatamente il risultato per $f(t)$ riportato in precedenza.

Esercizio 6.2. Applicando la trasformata di Laplace,

$$\begin{aligned} [\mathcal{L}f](s) &= F(s), & [\mathcal{L}f'](s) &= sF(s), & [\mathcal{L}f''](s) &= s^2F(s), \\ [\mathcal{L}g](s) &= G(s), & [\mathcal{L}g'](s) &= sG(s), & [\mathcal{L}te^{it}](s) &= \frac{1}{(s-i)^2}, \end{aligned}$$

l'equazione differenziale diventa

$$\begin{cases} s^2F(s) + sG(s) + 2F(s) = 0 \\ sF(s) - G(s) = 1/(s-i)^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} G(s) = sF(s) - 1/(s-i)^2 \\ F(s) = \frac{1}{2} \frac{s}{(s^2+1)(s-i)^2} \end{cases}.$$

La determinazione di $f(t)$ può essere effettuata calcolando l'antitrasformata di Laplace con integrazione sul piano complesso (convergenza per $\text{Re}(s) > 0$).

In alternativa si può decomporre $F(s)$ in frazioni parziali

$$F(s) = \frac{1}{2} \frac{s}{(s^2+1)(s-i)^2} = \frac{1}{4} \left[\frac{1}{(s-i)^3} - \frac{i}{2} \frac{1}{(s-i)^2} + \frac{1}{4} \frac{1}{s-i} - \frac{1}{4} \frac{1}{s+i} \right].$$

L'antitrasformata di Laplace si calcola facilmente sfruttando le formule standard per la trasformata e per la traslazione:

$$f(t) = \frac{1}{16} e^{it} (2t^2 - 2it + 1) - \frac{1}{16} e^{-it}.$$

Esercizio 6.5. La funzione g può essere espressa come

$$g(t) = 1 - t + \theta(t-1)(t-1),$$

la cui trasformata di Laplace è (si confronti l'esercizio 6.3)

$$G(s) \equiv \mathcal{L}[g](s) = \frac{1}{s} - \frac{1}{s^2} + \frac{e^{-s}}{s^2}.$$

Quindi l'equazione differenziale diventa ($\mathcal{L}[f] \equiv F$)

$$s^2F - 4F = G \Rightarrow F = \frac{1}{s^2(s^2-4)}(s-1+e^{-s}) = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{s^2-4} - \frac{1}{s^2} \right) (s-1+e^{-s}).$$

Sfruttando le proprietà dell'antitrasformata di Laplace (si veda l'esercizio 6.4) si ottiene

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F](t) = \frac{1}{4} \left[t - 1 + \cosh 2t - \frac{1}{2} \sinh 2t + \theta(t-1) \left[1 - t + \frac{1}{2} \sinh 2(t-1) \right] \right].$$

Esercizio 6.6. Usando la trasformata di Laplace si trova che ($\mathcal{L}[f] \equiv F$, $\mathcal{L}[g] \equiv G$)

$$\begin{cases} sF(s) + G(s) = \frac{1}{(s-1)^2} \\ F(s) + sG(s) = \frac{1}{s-1} \end{cases},$$

da cui

$$F = \frac{1}{(s^2 - 1)(s - 1)^2} = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{(s - 1)^3} - \frac{1}{2} \frac{1}{(s - 1)^2} + \frac{1}{2} \frac{1}{s^2 - 1} \right].$$

Quindi otteniamo

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F] = \frac{1}{4} [\sinh t + t(t - 1)e^t].$$

Il modo più semplice per trovare g è utilizzare l'equazione differenziale di partenza

$$g(t) = -f'(t) + te^t = \frac{1}{4} [\sinh t - t(t - 3)e^t].$$

Esercizio 6.7. Il calcolo può essere effettuato direttamente dalla definizione di trasformata di Laplace. Un metodo più rapido consiste nel riscrivere la funzione a gradino come

$$\chi_{[0,1]}(x) = 1 - \theta(x - 1),$$

da cui si ricava immediatamente

$$\mathcal{L}[\chi_{[0,1]}](s) = \frac{1 - e^{-s}}{s}.$$

Esercizio 6.8. Il prodotto di convoluzione si verifica direttamente dalla definizione di convoluzione. La trasformata di Laplace è

$$\mathcal{L}[\Lambda](s) = \mathcal{L}[\chi_{[0,1]} * \chi_{[0,1]}](s) = (\mathcal{L}[\chi_{[0,1]}](s))^2 = \frac{(1 - e^{-s})^2}{s^2},$$

dove abbiamo sfruttato il risultato dell'esercizio 6.7.

Esercizio 6.9. Sfruttando il risultato dell'esercizio 6.8 per la trasformata di Laplace della funzione a triangolo, si ottiene l'equazione per $F(s) = \mathcal{L}[f](s)$

$$F(s) = \frac{(1 - e^{-s})^2}{s^2(s^2 + 4)} = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{s^2} - \frac{1}{s^2 + 4} \right) (1 - e^{-s})^2.$$

L'antitrasformata di Laplace dà (sfruttando le proprietà di traslazione)

$$\mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{4} \frac{(1 - e^{-s})^2}{s^2} \right] (x) = \frac{1}{4} [x - 2(x - 1)\theta(x - 1) + (x - 2)\theta(x - 2)] = \frac{1}{4} \Lambda(x),$$

(l'ultima uguaglianza è valida per $x \geq 0$) e

$$\mathcal{L}^{-1} \left[-\frac{1}{4} \frac{(1 - e^{-s})^2}{s^2 + 4} \right] (x) = -\frac{1}{8} [\sin 2x - 2\theta(x - 1) \sin(2(x - 1)) + \theta(x - 2) \sin(2(x - 2))].$$

La somma di questi due contributi dà il risultato totale

$$f(x) = \frac{1}{8} [2\Lambda(x) - \sin 2x + 2\theta(x - 1) \sin(2(x - 1)) - \theta(x - 2) \sin(2(x - 2))].$$

Esercizio 6.10. Il membro di sinistra dell'equazione integrale corrisponde a un prodotto di convoluzione, quindi possiamo riscrivere l'equazione come

$$[\theta(t) * f(t)](x) = x^2 e^x,$$

la cui trasformata di Laplace è

$$\mathcal{L}[\theta](s)\mathcal{L}[f](s) = \frac{1}{s^2}\mathcal{L}[f](s) = \mathcal{L}[x^2 e^x] = \frac{2}{(s-1)^3}.$$

Ricaviamo

$$\mathcal{L}[f](s) = \frac{2s^2}{(s-1)^3} = \frac{2}{(s-1)^3} + \frac{4}{(s-1)^2} + \frac{2}{s-1} \quad \Rightarrow \quad f(x) = (x^2 + 4x + 2)e^x.$$

Si noti che il risultato può essere verificato in modo semplice calcolando la derivata seconda dell'equazione integrale, che dà

$$f(x) = \frac{d}{dx^2}(x^2 e^x) = (x^2 + 4x + 2)e^x.$$

Esercizio 6.11. La trasformata di Laplace dell'equazione dà (si vedano i risultati dell'esercizio 6.7)

$$(s^2 + 1)\mathcal{L}[f](s) = \frac{1 - 2e^{-s} + e^{-2s}}{s} \quad \Rightarrow \quad \mathcal{L}[f](s) = (1 - 2e^{-s} + e^{-2s}) \left(\frac{1}{s} - \frac{s}{s^2 + 1} \right).$$

Da questo si ricava

$$f(x) = \chi_{0,1}[x] - \chi_{[1,2]}(x) + \cos x - 2\theta(x-1)\cos(x-1) + \theta(x-2)\cos(x-2).$$

Esercizio 6.12. La trasformata di Laplace dell'equazione integrale dà

$$\frac{1}{(s-1)^2}\mathcal{L}[f](s) = \frac{1}{s-1} + \mathcal{L}[f](s),$$

da cui

$$\mathcal{L}[f](s) = \frac{1-s}{s(s-2)} = -\frac{1}{2} \left(\frac{1}{s} + \frac{1}{s-2} \right) \quad \Rightarrow \quad f(x) = -\frac{1}{2}(1 + e^{2x}).$$

Esercizio 6.13. Tramite la trasformata di Laplace si ottiene

$$\mathcal{L}[y](s) = \frac{1}{(s-1)(s-2)} \frac{1}{s^2 + 1} = \frac{1}{10} \frac{3s+1}{s^2 + 1} - \frac{1}{2} \frac{1}{s-1} + \frac{1}{5} \frac{1}{s-2},$$

da cui

$$y(x) = \frac{1}{10}(3 \cos x + \sin x) - \frac{e^x}{2} + \frac{e^{2x}}{5}.$$

Esercizio 6.14. Tramite la trasformata di Laplace si ottiene

$$(s^3 + a^2 s) \mathcal{L}[y](s) - (s^2 + a^2) b = \frac{1}{s} - \frac{1}{s^2},$$

da cui

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[y](s) &= \frac{b}{s} + \frac{1}{s(s^2 + a^2)} \left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s^2} \right) = \frac{b}{s} + \frac{1}{a^2} \left(\frac{1}{s} - \frac{s}{s^2 + a^2} \right) \left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s^2} \right) \\ &= \frac{b}{s} + \frac{1}{a^2} \left(\frac{1}{s^2} - \frac{1}{s^3} - \frac{1}{s^2 + a^2} + \frac{1}{a^2} \left(\frac{1}{s} - \frac{s}{s^2 + a^2} \right) \right). \end{aligned}$$

Calcolando l'antitrasformata si ottiene

$$y(t) = b + \frac{1}{a^2} \left(t - \frac{t^2}{2} - \frac{1}{a} \sin(at) + \frac{1}{a^2} (1 - \cos(at)) \right).$$

Esercizio 6.15. Tramite la trasformata di Laplace si ottiene

$$(s^3 + \lambda s^2) \mathcal{L}[y](s) - (s^2 + \lambda s) a = \frac{1}{s^2},$$

da cui

$$\mathcal{L}[y](s) = \frac{a}{s} + \frac{1}{s^4(s + \lambda)} = \frac{a}{s} + \frac{1}{\lambda^4(s + \lambda)} + \frac{1}{\lambda s^4} - \frac{1}{\lambda^2 s^3} + \frac{1}{\lambda^3 s^2} - \frac{1}{\lambda^4 s}.$$

Calcolando l'antitrasformata si ottiene

$$y(t) = a + \frac{1}{\lambda^4} \left(e^{-\lambda x} - 1 + \lambda x - \frac{1}{2} \lambda^2 x^2 + \frac{1}{6} \lambda^3 x^3 \right).$$

Esercizio 6.16. L'equazione può essere riscritta come

$$y''(t) - 2y'(t) + y(t) = \sin t + \sin(t - \pi) \theta(t - \pi),$$

la cui trasformata di Laplace (tenendo conto delle condizioni in $t = 0$) è

$$(s^2 - 2s + 1) \mathcal{L}[y](s) = 7(s - 1) + \frac{1 + e^{-\pi s}}{s^2 + 1}.$$

Da questo ricaviamo

$$\mathcal{L}[y](s) = \frac{7}{s - 1} + \frac{1 + e^{-\pi s}}{2} \left(\frac{1}{(s - 1)^2} - \frac{1}{s - 1} + \frac{s}{s^2 + 1} \right),$$

la cui antitrasformata è

$$y[t] = 7e^t + \frac{1}{2} [\cos t + (t - 1)e^t] + \frac{1}{2} \theta(t - \pi) [-\cos t + (t - \pi - 1)e^{t-\pi}].$$

Esercizio 6.17.

- La trasformata di Laplace della funzione $f(t) = 1$ può essere determinata dalla proprietà per derivazione (usando che $f' = 0$):

$$0 = \mathcal{L}(f') = s \mathcal{L}(f) - f(0^+) = s \mathcal{L}(f) - 1 \quad \Rightarrow \quad \mathcal{L}(1) = 1/s.$$

- Utilizziamo di nuovo la proprietà per derivazione con $f = t^n$, $n \geq 1$. Abbiamo che

$$\mathcal{L}(f') = n \mathcal{L}(t^{n-1}) = s \mathcal{L}(f) - f(0^+) = s \mathcal{L}(t^n) \quad \Rightarrow \quad \mathcal{L}(t^n) = \frac{n}{s} \mathcal{L}(t^{n-1}).$$

Sfruttando questa relazione e il fatto che $\mathcal{L}(t^0) = \mathcal{L}(1) = 1/s$ si ottiene che

$$\mathcal{L}(t^n) = \frac{n!}{s^{n+1}}.$$

- Per calcolare la trasformata di e^{at} sfruttiamo la proprietà per traslazione

$$\mathcal{L}(e^{at}) = \mathcal{L}(e^{at} \cdot 1) = [\mathcal{L}(1)](s - a) = \frac{1}{s - a}.$$

- Per calcolare la trasformata di $\cos(at)$ sfruttiamo il fatto che

$$\frac{d^2}{dt^2} \cos(at) = -a^2 \cos(at).$$

Usando la regola per la trasformata della derivata seconda abbiamo

$$\mathcal{L}(-a^2 \cos(at)) = s^2 \mathcal{L}(\cos(at)) - s \quad \Rightarrow \quad \mathcal{L}(\cos(at)) = \frac{s}{s^2 + a^2}.$$

Poiché $\frac{d}{dt} \cos(at) = -a \sin(at)$ abbiamo che

$$\mathcal{L}(-a \sin(at)) = \mathcal{L}(\cos(at)) - 1 \quad \Rightarrow \quad \mathcal{L}(\sin(at)) = \frac{a}{s^2 + a^2}.$$

In alternativa si può sfruttare il fatto che $\cos(at) = (e^{iat} + e^{-iat})/2$, da cui

$$\mathcal{L}(\cos(at)) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{s - ia} + \frac{1}{s + ia} \right) = \frac{s}{s^2 + a^2}.$$

Questo metodo può essere utilizzato anche per determinare la trasformata di Laplace delle funzioni $\sin(at)$, $\cosh(at)$ e $\sinh(at)$.

- Per le trasformate di Laplace di $\cosh(at)$ e $\sinh(at)$ si procede in modo analogo a quanto fatto per $\cos(at)$ e $\sin(at)$, trovando

$$\mathcal{L}(\cosh(at)) = \frac{s}{s^2 - a^2}, \quad \mathcal{L}(\sinh(at)) = \frac{a}{s^2 - a^2}.$$

RIFERIMENTI BIBLIOGRAFICI

Monografie

- [1] G. Cicogna, *Metodi matematici della Fisica*, Springer (2015)
- [2] W. Rudin, *Functional analysis*, McGraw-Hill (1990)
- [3] M. Reed and B. Simon, *Methods of Modern Mathematical Physics, I: functional analysis*, Academic Press (1980).
- [4] H. Cartan, *Elementary Theory of Analytic Functions of One or Several Complex Variables*, Dover Publications (1995).
- [5] A. N. Kolmogorov, S. V. Fomin, *Elementi di teoria delle funzioni e di analisi funzionale, Vol. 1 e 2*, Edizioni MIR.

Dispense

- [6] D. Colferai, *Appunti per il corso di Metodi matematici per la fisica*, dispense.
- [7] S. Sciuto, *Metodi matematici della Fisica II*, dispense.
- [8] D. Dominici, *Analisi funzionale*, dispense.
- [9] G. Panico, *Appunti per il corso di Complementi di Metodi Matematici per la Fisica*, dispense.