

Appunti per il corso di
METODI MATEMATICI PER LA FISICA

Giuliano Panico

*Dipartimento di Fisica e Astronomia
Università degli Studi di Firenze*

A.A. 2021/2022

INDICE

1	Complementi sulla trasformata di Fourier	1
1.1	Relazione di indeterminazione per la trasformata di Fourier	1
1.2	La trasformata di Fourier come operatore	3
1.2.1	Lo spettro della Trasformata di Fourier	4
1.3	Polinomi minimi per operatori su spazi di Hilbert	5
2	L'operatore di Volterra	9
3	Le distribuzioni temperate e il teorema spettrale	13
3.1	Le distribuzioni temperate	13
3.1.1	Le distribuzioni regolari	15
3.1.2	Lo spazio delle distribuzioni temperate \mathcal{S}'	17
3.1.3	La convergenza debole	20
3.2	Il teorema spettrale per operatori autoaggiunti	20
3.2.1	Ulteriori implicazioni del teorema spettrale	26
3.2.2	La notazione di Dirac	27
4	Il teorema fondamentale dell'algebra	29
	Riferimenti bibliografici	31

COMPLEMENTI SULLA TRASFORMATA DI FOURIER

1.1 Relazione di indeterminazione per la trasformata di Fourier

Abbiamo visto (cap. 2 di [6]) che la trasformata di Fourier di una funzione f ha la peculiarità di diventare più “larga” o “stretta” a seconda che la funzione f sia più “localizzata” o più “ampia”. Vediamo ora di chiarire questo aspetto in termini più quantitativi e generali. Per questa discussione seguiremo la trattazione di [1].

Consideriamo una funzione $f(t)$, che dal punto di vista fisico potrebbe rappresentare un treno di onde elettromagnetiche. Assumiamo che $f \in L^2(\mathbb{R})$ sia abbastanza regolare, ovvero che valgano le seguenti condizioni: $tf(t) \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$, $\omega \tilde{f}(\omega) \in L^2(\mathbb{R})$ e $\lim_{\omega \rightarrow \pm\infty} \omega |\tilde{f}(\omega)|^2 = 0$, dove $\tilde{f}(\omega)$ è la trasformata di Fourier di $f(t)$:

$$\tilde{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega t} f(t) dt, \quad (1.1)$$

che rappresenta la decomposizione spettrale (ovvero in frequenza) del treno d'onde.

Definiamo il baricentro temporale \bar{t} del treno d'onde come

$$\bar{t} \equiv \frac{1}{M} \int_{-\infty}^{+\infty} t |f(t)|^2 dt. \quad (1.2)$$

dove il fattore di normalizzazione è dato da

$$M \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |\tilde{f}(\omega)|^2 d\omega. \quad (1.3)$$

Si noti che l'ultima uguaglianza nella precedente equazione segue dall'identità di Parseval. La larghezza temporale del pacchetto d'onde è definita come

$$\Delta t^2 \equiv \overline{(t - \bar{t})^2} = \frac{1}{M} \int_{-\infty}^{+\infty} (t - \bar{t})^2 |f(t)|^2 dt. \quad (1.4)$$

In modo analogo definiamo il baricentro spettrale $\bar{\omega}$ come

$$\bar{\omega} \equiv \frac{1}{M} \int_{-\infty}^{+\infty} \omega |\tilde{f}(\omega)|^2 d\omega. \quad (1.5)$$

Infine la larghezza spettrale $\Delta\omega$ è definita come

$$\Delta\omega^2 \equiv \overline{(\omega - \bar{\omega})^2} = \frac{1}{M} \int_{-\infty}^{+\infty} (\omega - \bar{\omega})^2 |\tilde{f}(\omega)|^2 d\omega. \quad (1.6)$$

Vogliamo ora dimostrare che la larghezza temporale Δt e quella spettrale $\Delta\omega$ soddisfano la seguente *relazione di indeterminazione*:

$$\Delta t \Delta\omega \geq \frac{1}{2}. \quad (1.7)$$

Dimostrazione. Veniamo ora alla dimostrazione della relazione d'indeterminazione. Per semplicità assumiamo il pacchetto d'onde sia centrato a $\bar{t} = 0$, cosa che può sempre essere ottenuta tramite una traslazione temporale, che lascia ovviamente invariati Δt e $\Delta\omega$. In questo caso $\Delta t = \bar{t}^2$. Consideriamo la seguente norma in $L^2(\mathbb{R})$:

$$\begin{aligned} 0 &\leq \left\| \frac{\omega - \bar{\omega}}{2\Delta\omega^2} \tilde{f}(\omega) + \frac{d\tilde{f}(\omega)}{d\omega} \right\|^2 \\ &= \frac{1}{4\Delta\omega^4} \Delta\omega^2 \left\| \tilde{f}(\omega) \right\|^2 + \left\| -i\mathcal{F}(tf(t)) \right\|^2 + \frac{1}{2\Delta\omega^2} \int_{-\infty}^{+\infty} (\omega - \bar{\omega}) \left[\tilde{f}^* \frac{d\tilde{f}}{d\omega} + \tilde{f} \frac{d\tilde{f}^*}{d\omega} \right] \\ &= \frac{1}{4\Delta\omega^2} \|f(t)\|^2 + \Delta t^2 \|f(t)\|^2 - \frac{1}{2\Delta\omega^2} \left\| \tilde{f}(\omega) \right\|^2 \\ &= \frac{\|f(t)\|^2}{\Delta\omega^2} \left(\Delta t^2 \Delta\omega^2 - \frac{1}{4} \right), \end{aligned} \quad (1.8)$$

da cui segue la relazione d'indeterminazione. Si noti che per ottenere le espressioni al secondo rigo dell'equazione precedente si sono usate le proprietà della trasformata di Fourier sotto derivazione e l'integrazione per parti. \square

La dimostrazione ci permette anche di determinare in quali casi nella relazione di indeterminazione valga il segno di uguaglianza. Perché ciò accada è necessario che la funzione nella norma al primo rigo dell'eq. (1.8) sia identicamente nulla, ovvero

$$\frac{\omega - \bar{\omega}}{2\Delta\omega^2} \tilde{f}(\omega) + \frac{d\tilde{f}(\omega)}{d\omega} = 0. \quad (1.9)$$

Questa equazione ha come soluzione una gaussiana

$$\tilde{f}(\omega) = \alpha \exp \left(-\frac{(\omega - \bar{\omega})^2}{4\Delta\omega^2} \right), \quad (1.10)$$

con α una costante moltiplicativa arbitraria. Sappiamo inoltre che l'antitrasformata di una gaussiana è ancora una gaussiana, ovvero

$$f(t) = \sqrt{2}\Delta\omega \alpha e^{-\Delta\omega^2 t^2} e^{i\bar{\omega}t}. \quad (1.11)$$

Dal punto di vista fisico la relazione d'indeterminazione implica che quanto più un pacchetto d'onda è localizzato temporalmente, tanto più ampio è lo spettro di frequenze

nella sua decomposizione spettrale. Questo significa, in particolare, che, dovendo necessariamente qualsiasi treno d'onde avere estensione temporale finita, non è possibile ottenere righe spettrali infinitamente sottili, anche se il treno d'onde è quanto più possibile monocromatico. Viceversa, un treno d'onde di breve durata temporale avrà righe spettrali piuttosto allargate.

Una seconda conseguenza della relazione di indeterminazione si ha in meccanica quantistica, nella quale il comportamento delle particelle è descritto in termini ondulatori (formalismo di Schrodinger). Consideriamo una particella libera in una dimensione, descritta da una funzione d'onda $\psi(x)$. Il modulo quadro della funzione d'onda $|\psi(x)|^2$ (opportunitamente normalizzato) descrive la densità di probabilità di trovare la particella nella posizione x . Tramite il principio di de Broglie possiamo inoltre associare a una particella con impulso p un'onda di lunghezza d'onda $\lambda = h/p$, ovvero un'onda

$$e^{-ikx} \quad \text{con} \quad k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{p}{\hbar}. \quad (1.12)$$

La funzione d'onda della particella nello spazio degli impulsi corrisponde alla trasformata di Fourier di $\psi(x)$, che indichiamo con $\phi(p)$. Analogamente a quanto accade nello spazio delle configurazioni, la quantità $|\phi(p)|^2$ (opportunitamente normalizzata) descrive la densità di probabilità che la particella abbia momento p . Applicando la relazione di indeterminazione (1.7), otteniamo il ben noto *principio di indeterminazione* di Heisenberg: $\Delta x \Delta p \geq \hbar/2$. Tale principio implica che tramite un processo di misura non si possono mai determinare contemporaneamente la posizione e il momento di una particella con precisione arbitrariamente alta. Le incertezze nella determinazione delle due quantità devono sempre soddisfare il principio di indeterminazione.

1.2 La trasformata di Fourier come operatore

La trasformata di Fourier \mathcal{F} su $L^2(\mathbb{R})$ è una trasformazione unitaria, ovvero è un automorfismo che preserva il prodotto scalare (cap. 2 e sez. 4.3.2 di [6]), ovvero, date $\phi, \psi \in L^2(\mathbb{R})$ si ha che

$$(\mathcal{F}\phi | \mathcal{F}\psi) = (\phi | \psi). \quad (1.13)$$

È facile verificare che si può definire l'aggiunto della trasformata di Fourier, e che esso coincide con l'inversa della trasformata stessa:

$$\mathcal{F}^\dagger = \mathcal{F} \circ \iota = \iota \circ \mathcal{F} = \mathcal{F}^{-1}, \quad (1.14)$$

dove ι è l'operatore di riflessione. Vediamo quindi che la trasformata di Fourier soddisfa la relazione che definisce gli operatori unitari

$$\mathcal{F}^\dagger \mathcal{F} = \mathcal{F} \mathcal{F}^\dagger = \mathbb{1}. \quad (1.15)$$

Dalle relazioni in eq. (1.14) discende direttamente la proprietà¹

$$\mathcal{F}^2 = \iota, \quad (1.16)$$

ovvero il fatto che

$$\mathcal{F}^4 = \mathbb{1}. \quad (1.17)$$

¹Basta tener conto del fatto che $\iota \circ \iota = \mathbb{1}$.

1.2.1 Lo spettro della Trasformata di Fourier

Studiamo ora lo spettro della Trasformata di Fourier. Essendo un operatore unitario, esso è limitato e continuo, inoltre è normale. Da questo segue che \mathcal{F} non ha spettro residuo $\sigma_r(\mathcal{F}) = \emptyset$, inoltre il suo spettro è un sottoinsieme dei numeri complessi unitari.

Dalla relazione in eq. (1.17) discende che tutti i $\lambda \in \mathbb{C}$ tali che $\lambda^4 \neq 1$ appartengono al risolvente $\rho(\mathcal{F})$. Infatti utilizzando la relazione (1.17) si verifica facilmente che

$$(\mathcal{F} - \lambda \mathbb{1})^{-1} = \frac{1}{1 - \lambda^4} (\mathcal{F}^3 + \lambda \mathcal{F}^2 + \lambda^2 \mathcal{F} + \lambda^3 \mathbb{1}), \quad \text{per } \lambda \notin \{1, i, -1, -i\}, \quad (1.18)$$

ovvero che per tali valori di λ l'operatore risolvente esiste, è densamente definito e limitato.

Dimostriamo ora che \mathcal{F} ha solo spettro puntuale e che $\sigma(\mathcal{F}) = \sigma_p(\mathcal{F}) = \{1, i, -1, -i\}$. Trattiamo il caso $\lambda = 1$, Dalla relazione (1.17) segue che

$$(\mathcal{F} - \mathbb{1})(\mathcal{F} - i\mathbb{1})(\mathcal{F} + \mathbb{1})(\mathcal{F} + i\mathbb{1}) = 0. \quad (1.19)$$

Consideriamo ora una funzione $\phi \in L^2(\mathbb{R})$ tale che $\psi \equiv (\mathcal{F} - i\mathbb{1})(\mathcal{F} + \mathbb{1})(\mathcal{F} + i\mathbb{1})\phi \neq 0$. Allora si ha che

$$0 = (\mathcal{F} - \mathbb{1})(\mathcal{F} - i\mathbb{1})(\mathcal{F} + \mathbb{1})(\mathcal{F} + i\mathbb{1})\phi = (\mathcal{F} - \mathbb{1})\psi, \quad (1.20)$$

ovvero ψ è autovettore per \mathcal{F} con autovalore $\lambda = 1$. Per vedere che un tale ψ non nullo esiste si può notare che

$$(\mathcal{F} - i\mathbb{1})(\mathcal{F} + \mathbb{1})(\mathcal{F} + i\mathbb{1}) = (\mathcal{F} + \mathbb{1})(\mathbb{1} + i). \quad (1.21)$$

L'operatore $\mathbb{1} + i$ seleziona la parte pari di una funzione e chiaramente $\mathcal{F} + \mathbb{1}$ non si annulla su una generica funzione pari.

Vediamo ora che lo spazio di Hilbert si può decomporre come somma diretta degli autospazi relativi agli autovalori in $\sigma_p(\mathcal{F})$. Essendo \mathcal{F} normale, autospazi relativi ad autovalori diversi sono ortogonali tra di loro. Costruiamo ora dei proiettori sui vari autospazi. In analogia con quanto visto sopra, costruiamo i polinomi di Lagrange

$$P_k = \prod_{i=1, i \neq k}^4 \frac{\mathcal{F} - \lambda_i \mathbb{1}}{\lambda_k - \lambda_i}, \quad (1.22)$$

dove λ_i indica l' i -esimo autovalore. Si verifica facilmente² che

$$P_k^2 = P_k, \quad P_k^\dagger = P_k, \quad P_i P_k = P_k P_i = 0 \quad \text{per } i \neq k, \quad (1.23)$$

inoltre

$$\sum_{k=1}^4 P_k = \mathbb{1}. \quad (1.24)$$

Quindi i P_k sono dei proiettori a due a due ortogonali, la cui somma ricostruisce l'identità. Essi permettono di decomporre lo spazio di Hilbert come somma di autospazi.

²Può essere conveniente riscrivere i P_k in analogia con l'eq. (1.21).

Come ultimo passo determiniamo esplicitamente delle espressioni esplicite per gli autovettori della trasformata di Fourier. Partiamo dall'osservazione che la funzione gaussiana $G(x) = e^{-x^2/2}$ coincide con la sua trasformata di Fourier, quindi essa costituisce un autovettore corrispondente all'autovalore $\lambda = 1$. Le proprietà della trasformata di Fourier, che trasforma derivate in fattori polinomiali e viceversa, suggerisce che le autofunzioni possano essere scritte come polinomi che moltiplicano $G(x)$. In effetti questo risultato è corretto e, come dimostreremo nel seguito, le autofunzioni della trasformata di Fourier hanno la forma

$$\psi_n(x) = H_n(x)G(x) \quad \text{con autovalore } (-i)^n. \quad (1.25)$$

Le $\psi_n(x)$ sono dette funzioni di Hermite (o di Hermite-Gauss).

Per dimostrare questo risultato partiamo dalla formula di Rodrigues per i polinomi di Hermite scritta nella forma

$$H_n(x) = e^{x^2/2} \left(x - \frac{d}{dx} \right)^n e^{-x^2/2}, \quad (1.26)$$

che può essere ricavata manipolando l'eq. (4.51) in [6]. Abbiamo quindi

$$\psi_n(x) = \left(x - \frac{d}{dx} \right)^n e^{-x^2/2}. \quad (1.27)$$

Consideriamo la trasformata di Fourier della precedente espressione. Si noti che $G(x)$ è una funzione dello spazio di Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, quindi possiamo sfruttare tutte le proprietà della trasformata di Fourier, in particolare (si veda il teorema 2.36 in [6])

$$\left[\mathcal{F} \frac{d}{dx} f \right] (k) = i k [\mathcal{F} f](k), \quad [\mathcal{F} \{ x f(x) \}](k) = i \left[\frac{d}{dk} (\mathcal{F} f) \right] (k). \quad (1.28)$$

Otteniamo quindi la corrispondenza

$$\left(x - \frac{d}{dx} \right) \rightarrow i \left(\frac{d}{dk} - k \right), \quad (1.29)$$

da cui

$$\begin{aligned} [\mathcal{F} \psi_n](k) &= \left[\mathcal{F} \left\{ \left(x - \frac{d}{dx} \right)^n e^{-x^2/2} \right\} \right] (k) = (-i)^n \left(k - \frac{d}{dk} \right)^n [\mathcal{F} e^{-x^2/2}](k) \\ &= (-i)^n \left(k - \frac{d}{dk} \right)^n G(k) = (-i)^n \psi_n(k), \end{aligned} \quad (1.30)$$

che dimostra il risultato riportato precedentemente in eq. (1.25).

1.3 Polinomi minimi per operatori su spazi di Hilbert

Quanto fatto per l'operatore trasformata di Fourier può essere replicato (con minime modifiche) per un generico operatore limitato T su uno spazio di Hilbert per il quale

esista un polinomio tale che $p(T) = 0$. Se non esiste nessun altro polinomio $p'(\lambda)$ che divida $p(\lambda)$ e tale che $p'(T) = 0$, allora p è detto il *polinomio minimo*³ per T .

Scomponiamo il polinomio p in fattori, assumendo per semplicità che il coefficiente del termine di ordine più alto sia uno,

$$p(\lambda) = \prod_i (\lambda - \lambda_i)^{n_i}, \quad (1.31)$$

dove $\{\lambda_i\}$ sono le radici del polinomio e $\{n_i\}$ le loro molteplicità.

Mostriamo ora che lo spettro dell'operatore T è contenuto nell'insieme delle radici del polinomio p . Vogliamo mostrare che per un dato λ , tale che $p(\lambda) \neq 0$, l'operatore risolvente $R_\lambda(T) = (T - \lambda \mathbb{1})^{-1}$ esiste limitato e densamente definito. Riscriviamo il polinomio $p(T)$ come

$$0 = p(T) = p((T - \lambda \mathbb{1}) + \lambda \mathbb{1}) = (T - \lambda \mathbb{1}) k(T - \lambda \mathbb{1}) + p(\lambda \mathbb{1}), \quad (1.32)$$

dove k è un opportuno polinomio e $p(\lambda \mathbb{1}) \neq 0$, poiché λ per ipotesi non è uno degli zeri di p . Abbiamo quindi che

$$(T - \lambda \mathbb{1}) \left[\frac{-1}{p(\lambda)} k(T - \lambda \mathbb{1}) \right] = \left[\frac{-1}{p(\lambda)} k(T - \lambda \mathbb{1}) \right] (T - \lambda \mathbb{1}) = \mathbb{1}, \quad (1.33)$$

ovvero che

$$R_\lambda(T) = (T - \lambda \mathbb{1})^{-1} = -\frac{1}{p(\lambda)} k(T - \lambda \mathbb{1}). \quad (1.34)$$

Questo dimostra che l'operatore risolvente esiste per ogni λ tale che $p(\lambda) \neq 0$. Inoltre esso ha lo stesso dominio di T ed è limitato.

Supponiamo ora che p sia il polinomio minimo per T . In questo caso per ogni autovalore abbiamo

$$p(T) = (T - \lambda_i \mathbb{1}) \left[(\lambda - \lambda_i)^{n_i-1} \prod_{j \neq i} (\lambda - \lambda_j)^{n_j} \right] = 0, \quad (1.35)$$

inoltre l'operatore

$$\left[(\lambda - \lambda_i)^{n_i-1} \prod_{j \neq i} (\lambda - \lambda_j)^{n_j} \right] \quad (1.36)$$

non è identicamente nullo, dunque esiste qualche ϕ per il quale

$$\psi \equiv \left[(\lambda - \lambda_i)^{n_i-1} \prod_{j \neq i} (\lambda - \lambda_j)^{n_j} \right] \phi \neq 0. \quad (1.37)$$

Tale ψ è chiaramente un autovettore per T corrispondente all'autovalore λ_i . L'operatore T ha quindi spettro puramente puntuale e gli elementi dello spettro coincidono con le radici del polinomio minimo p .

³Questa nomenclatura ricalca quella utilizzata in algebra lineare per operatori (matrici) su spazi a dimensione finita.

Consideriamo ora gli operatori corrispondenti ai polinomi di Lagrange

$$P_k = \prod_{i=1, i \neq k}^n \frac{\mathcal{F} - \lambda_i}{\lambda_k - \lambda_i}, \quad (1.38)$$

dove λ_i indica l' i -esimo autovalore e n è il numero di radici distinte di p . Consideriamo la somma

$$P = \sum_i P_i, \quad (1.39)$$

che corrisponde ad un polinomio di grado $n - 1$. Si verifica facilmente che

$$P_k(\lambda_i) = \delta_{ik}, \quad (1.40)$$

quindi $P(\lambda_i) = 1$ in n punti distinti, ma essendo di grado $n - 1$ si ha che P è costante. Concludiamo quindi che

$$\sum_k P_k(T) = \mathbb{1}. \quad (1.41)$$

In generale però non è detto che valga l'analogo delle proprietà in eq. (1.23). Le proprietà

$$P_k^2 = P_k, \quad P_i P_k = P_k P_i = 0 \quad \text{per } i \neq k, \quad (1.42)$$

valgono se il polinomio minimo ha solo radici semplici. In tal caso infatti per $i \neq j$ si ha che $P_i P_j$ è un polinomio che è divisibile per il polinomio minimo (contenendo tutti i fattori di quest'ultimo). Quindi $P_i P_j = 0$ se $i \neq j$. A questo punto prendendo il quadrato dell'eq. (1.41) abbiamo

$$\mathbb{1} = \left(\sum_k P_k(T) \right)^2 = \sum_k P_k^2(T). \quad (1.43)$$

E da questo

$$P_k^2 = \left(\mathbb{1} - \sum_{j \neq k} P_j \right)^2 = \mathbb{1} - 2 \sum_{j \neq k} P_j + \sum_{j \neq k} P_j^2 = \mathbb{1} - 2(\mathbb{1} - P_k) + (\mathbb{1} - P_k^2) = 2P_k - P_k^2, \quad (1.44)$$

ovvero $P_k^2 = P_k$.

Esempio 1.1. Un esempio di operatori con polinomi minimi è dato dai proiettori, ovvero da operatori che soddisfano $T^2 = T$. Per tali operatori si ha che lo spettro è dato da $\sigma_p(T) = \{0, 1\}$, mentre i polinomi P_k sono

$$P_0 = \mathbb{1} - T, \quad P_1 = T. \quad (1.45)$$

Avendo il polinomio minimo radici distinte, si ha che $P_k^2 = P_k$ e $P_0 P_1 = P_1 P_0 = 0$, come si può anche verificare direttamente.

2

L'OPERATORE DI VOLTERRA

L'operatore di Volterra $A : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ è definito sullo spazio di Hilbert $\mathcal{H} = L^2([0, 1])$ in termini dell'integrale

$$[Af](x) = \int_0^x f(t)dt. \quad (2.1)$$

Si dimostra facilmente che tale operatore è limitato (e quindi continuo). Infatti

$$|[Af](x)| \leq \int_0^x |f(t)|dt \leq \int_0^1 1|f(t)|dt = (1|f|) \leq \|1\|_2 \|f\|_2 = \|f\|_2, \quad (2.2)$$

dove abbiamo sfruttato la disuguaglianza di Schwarz, e di conseguenza

$$\|Af\|_2^2 = \int_0^1 |[Af](t)|^2 dt \leq \int_0^1 \|f\|_2^2 dt = \|f\|_2^2. \quad (2.3)$$

A è quindi limitato con norma $\|A\|_2 \leq 1$.

Una buona stima inferiore per la norma dell'operatore di Volterra si ottiene considerando la funzione $f(t) = 1 - t^2$. Con semplici calcoli si ottiene

$$\frac{\|Af\|_2}{\|f\|_2} = \sqrt{\frac{17}{42}} = 0.6362\dots \quad (2.4)$$

La famiglia di funzioni $f_a(t) = 1 - at^2$ dà invece

$$\frac{\|Af\|_2}{\|f\|_2} = \sqrt{\frac{105 - 42a + 5a^2}{315 - 210a + 63a^2}}, \quad (2.5)$$

che ha massimo $\sqrt{(45 + \sqrt{1605})/210} = 0.6364\dots$ (per $a = (60 - \sqrt{1605})/19$). Quindi ricaviamo che $0.6364 < \|A\|_2 \leq 1$.

L'espressione esatta per la norma dell'operatore può essere determinata come segue. Consideriamo l'operatore aggiunto A^\dagger , che è dato da

$$[A^\dagger f](x) = \int_x^1 f(t)dt, \quad (2.6)$$

e studiamo l'operatore $S \equiv A^\dagger A$

$$[Sf](x) = \int_x^1 \int_0^y f(t) dt dy. \quad (2.7)$$

Si può mostrare che S è autoaggiunto, positivo e *compatto* (la compattezza segue dal fatto che anche A è compatto), e che $\|A\|_2 = \sqrt{\|A^\dagger A\|_2}$. Inoltre il teorema spettrale per operatori autoaggiunti compatti garantisce che S ha un set di autovalori e la norma di S coincide con l'autovalore con il più grande valore assoluto. Non svilupperemo in questo corso la teoria degli operatori compatti¹, quindi qui ci limiteremo a sfruttare il teorema spettrale per determinare una opportuna funzione f che saturi l'equazione per la norma di A . Utilizzeremo poi direttamente questa funzione per determinare la norma.

Determiniamo ora gli autovettori di S , ovvero le funzioni $f(x)$ che soddisfano

$$[Sf](x) = [A^\dagger A f](x) = \lambda f(x). \quad (2.8)$$

Sfruttando la forma esplicita (2.7) e assumendo la regolarità della funzione f (per semplicità non ci dilunghiamo su questo punto), si ottiene l'equazione

$$-f(x) = \lambda f''(x), \quad (2.9)$$

dove $\lambda \geq 0$, essendo l'operatore S positivo. Inoltre si verifica facilmente dall'eq. (2.7) che valgono le condizioni al bordo

$$f(1) = 0, \quad f'(0) = 0. \quad (2.10)$$

L'equazione differenziale ammette come soluzione generale

$$f(x) = \alpha \cos(x/\sqrt{\lambda}) + \beta \sin(x/\sqrt{\lambda}). \quad (2.11)$$

Imponendo le condizioni al bordo si ricava che

$$\beta = 0, \quad \sqrt{\lambda} = \frac{2}{(2n+1)\pi} \quad \text{con } n \in \mathbb{N}. \quad (2.12)$$

L'autovalore con modulo maggiore è quindi

$$\lambda = (2/\pi)^2, \quad (2.13)$$

corrispondente all'autovettore

$$f(x) = \alpha \cos \frac{\pi x}{2}. \quad (2.14)$$

Ricordando il legame tra la norma di A e quella di S , da questo risultato si può concludere che $\|A\|_2 = 2/\pi$.

¹Per una trattazione concisa si veda [8].

Una dimostrazione diretta che non sfrutta le proprietà degli operatori autoaggiunti compatti si può ottenere come segue:

$$\begin{aligned}
 \|Af\|_2^2 &= \int_0^1 \left| \int_0^t f(s) ds \right|^2 dt = \int_0^1 \left| \int_0^t \sqrt{\cos \frac{\pi s}{2} + \epsilon} \frac{f(s)}{\sqrt{\cos \frac{\pi s}{2} + \epsilon}} ds \right|^2 dt \\
 &\leq \int_0^1 \left[\left(\int_0^t \left(\cos \frac{\pi s}{2} + \epsilon \right) ds \right) \left(\int_0^t \frac{|f(s)|^2}{\cos \frac{\pi s}{2} + \epsilon} ds \right) \right] dt \\
 &= \frac{2}{\pi} \int_0^1 \int_0^t \left(\sin \frac{\pi t}{2} + \frac{\pi \epsilon}{2} t \right) \frac{|f(s)|^2}{\cos \frac{\pi s}{2} + \epsilon} ds dt \\
 &= \frac{2}{\pi} \int_0^1 \left[\int_s^1 \left(\sin \frac{\pi t}{2} + \frac{\pi \epsilon}{2} t \right) dt \right] \frac{|f(s)|^2}{\cos \frac{\pi s}{2} + \epsilon} ds \\
 &= \left(\frac{2}{\pi} \right)^2 \int_0^1 \frac{\cos \frac{\pi s}{2} + \frac{\pi^2 \epsilon}{8} (1 - s^2)}{\cos \frac{\pi s}{2} + \epsilon} |f(s)|^2 ds \\
 &\leq \left(\frac{2}{\pi} \right)^2 \int_0^1 \frac{1 + \pi^2 \epsilon / 8}{1 + \epsilon} |f(s)|^2 ds = \left(\frac{2}{\pi} \right)^2 \frac{1 + \pi^2 \epsilon / 8}{1 + \epsilon} \|f\|^2, \tag{2.15}
 \end{aligned}$$

che è valida per $\epsilon > 0$ arbitrario.² Per scambiare l'ordine degli integrali è stato utilizzato Tonelli-Fubini. Per ottenere l'espressione sulla seconda riga abbiamo inoltre sfruttato la disuguaglianza di Schwarz per funzioni in $L^2([0, t])$. Si noti che la disuguaglianza di Schwarz diventa un'uguaglianza per $f(s) = \alpha(\cos(\pi s/2) + \epsilon)$, con α arbitrario. Prendendo il limite per $\epsilon \rightarrow 0$ otteniamo quindi che

$$\|A\|_2 = 2/\pi = 0.6366 \dots, \tag{2.16}$$

e la funzione $f(s)$ che satura la disuguaglianza della norma è $f(s) = \alpha \cos(\pi s/2)$.

²Si noti che ponendo $\epsilon = 0$ l'integrale della funzione $|f(s)|^2 / \cos(\pi s/2)$ non è in generale finito sull'intervallo $s \in [0, 1]$. Non possiamo quindi prendere il caso $\epsilon \rightarrow 0$ come punto di partenza per ricavare la disuguaglianza.

3

LE DISTRIBUZIONI TEMPERATE E IL TEOREMA SPETTRALE

3.1 Le distribuzioni temperate

Lo spazio delle *distribuzioni temperate* è il duale topologico dello *spazio di Schwartz* $\mathcal{S}(\mathbb{R})$. Quest'ultimo è lo spazio delle funzioni infinitamente derivabili che decrescono all'infinito, insieme alle loro derivate di ogni ordine, più velocemente di qualsiasi potenza inversa, ovvero¹

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}) = \left\{ \phi \in C^\infty(\mathbb{R}) : \lim_{x \rightarrow \infty} x^r \partial^j \phi(x) = 0 \quad \forall r, j \in \mathbb{N} \right\}. \quad (3.1)$$

La condizione di decrescenza rapida può anche essere espressa in modo equivalente richiedendo che $|x^p \partial^j \phi(x)|$ sia limitata per ogni coppia $p, j \in \mathbb{N}$, ovvero che per ogni coppia p, j esista una costante $C_{pj} > 0$ tale che

$$|x^p \partial^j \phi(x)| \leq C_{pj} \quad \forall x \in \mathbb{R}. \quad (3.2)$$

Quando abbiamo introdotto $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ come sottospazio di $L^2(\mathbb{R})$ (si veda la sezione 2.7.1 di [6]) per estendere la trasformata di Fourier, abbiamo considerato in $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ sempre la convergenza in media quadratica, cioè la topologia indotta da L^2 . Per definire le distribuzioni, invece, è necessario introdurre una diversa topologia su \mathcal{S} , assai più forte della norma quadratica. Questa topologia ci permetterà di definire uno spazio duale topologico molto ampio.²

La topologia dello spazio di Schwartz, non sarà assegnata mediante una norma, ma solamente indicando il criterio di convergenza delle sue successioni.³

Definizione 3.1. Una successione di funzioni $(\phi_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{S}$ si dice *convergente* in \mathcal{S} alla funzione $\phi \in C^\infty$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \phi_n = \phi \quad \text{in } \mathcal{S}, \quad (3.3)$$

¹Per una definizione equivalente si veda la definizione (1.29) in [6].

²Ricordiamo che il duale topologico di $L^2(\mathbb{R})$ coincide con lo spazio stesso per il teorema di Fischer-Riesz (teorema 5.1 in [6]).

³La topologia di \mathcal{S} può essere ottenuta introducendo un'infinità numerabile di norme. A partire da queste si può anche definire una distanza, quindi \mathcal{S} è uno spazio metrico, ma non uno spazio normato. Per la definizione delle norme e della distanza si veda ad esempio [5], oppure [9] per una trattazione sintetica.

se per ogni $j \in \mathbb{N}$ vale

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \partial^j \phi_n(x) = \partial^j \phi(x) \quad (3.4)$$

uniformemente rispetto a x in ogni intervallo limitato ed inoltre le costanti C_{pj} della maggiorazione (3.2) possono essere scelte indipendentemente da n , cioè se vale

$$|x^p \partial^j \phi_n(x)| \leq C_{pj} \quad \forall p, j \in \mathbb{N}, \quad (3.5)$$

qualunque sia $n \in \mathbb{N}$.

Questa definizione è equivalente a richiedere che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x^p \partial^j \phi_n = x^p \partial^j \phi \quad (3.6)$$

uniformemente su tutto \mathbb{R} per ogni $p, j \in \mathbb{N}$. La dimostrazione dell'equivalenza è data nella sezione 6.5.1 di [6].

Facciamo notare che nella definizione 3.1 non si richiede che $\phi \in \mathcal{S}$. Questo perché, sotto le ipotesi di convergenza, si può dimostrare che ciò è sempre vero. Infatti lo spazio di Schwartz inteso come spazio metrico è completo. Intuitivamente questo si spiega con il fatto che la convergenza imposta dalla definizione 3.1 è molto più stringente della convergenza in media quadratica in L^2 o anche di quella uniforme.

Una notevole proprietà della definizione di convergenza in \mathcal{S} è la continuità degli operatori di moltiplicazione e di derivazione.⁴

Teorema 3.1. Gli operatori di moltiplicazione, di derivazione e qualsiasi loro potenza e composizione sono continui in $\mathcal{S}(\mathbb{R})$.

Quindi, diversamente che in L^2 , in \mathcal{S} tutti gli operatori di interesse fisico sono continui. Definiamo ora il concetto di *distribuzione temperata*.

Definizione 3.2. Si chiama *distribuzione temperata* ogni funzionale *lineare e continuo* su $\mathcal{S}(\mathbb{R})$.⁵ Esplicitamente diciamo che un'applicazione

$$T : \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{C}, \quad \phi \mapsto \langle T, \phi \rangle \quad (3.7)$$

è una distribuzione temperata (e usiamo il simbolo $\langle T, \phi \rangle$ per indicare il numero complesso in cui T manda la funzione $\phi \in \mathcal{S}$) se essa è lineare,

$$\langle T, \alpha_1 \phi_1 + \alpha_2 \phi_2 \rangle = \alpha_1 \langle T, \phi_1 \rangle + \alpha_2 \langle T, \phi_2 \rangle \quad \text{per ogni } \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{C}, \phi_1, \phi_2 \in \mathcal{S}, \quad (3.8)$$

ed è continua,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \langle T, \phi_n \rangle = \langle T, \lim_{n \rightarrow \infty} \phi_n \rangle. \quad (3.9)$$

Naturalmente, nell'eq. (3.9), $(\phi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ è una successione convergente in \mathcal{S} , per cui il secondo limite va inteso nel senso della definizione 3.1, mentre il primo limite è quello di una successione in \mathbb{C} .

⁴Si noti che il concetto di norma di un operatore e l'equivalenza tra limitatezza e continuità non sono applicabili su \mathcal{S} quando si considera la sua peculiare topologia. Sono tuttavia applicabili quando \mathcal{S} è interpretato come sottospazio di L^2 con la topologia (e la norma) di L^2 .

⁵Per il suo ruolo nella definizione delle distribuzioni temperate lo spazio $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ è detto anche *spazio delle funzioni di test*.

3.1.1 Le distribuzioni regolari

Discutiamo ora una classe molto rilevante di distribuzioni temperate, le cosiddette *distribuzioni regolari*. Partiamo dalla definizione di *funzione a crescita algebrica finita* (detta anche *a crescita lenta*).

Definizione 3.3. Una funzione $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ definita quasi ovunque su \mathbb{R} , localmente sommabile è detta *a crescita algebrica finita* se esistono $x_0 > 0$, $C > 0$ e $m \in \mathbb{N}$ per cui

$$|f(x)| \leq C|x|^m \quad \forall x : |x| \geq x_0. \quad (3.10)$$

Ogni funzione a crescita algebrica finita f definisce in modo univoco una distribuzione temperata, che indichiamo con f^\diamond ,⁶ mediante la formula⁷

$$\langle f^\diamond, \phi \rangle \equiv \int_{\mathbb{R}} f^*(x)\phi(x)dx \quad \forall \phi \in \mathcal{S}. \quad (3.11)$$

L'integrale a secondo membro esiste certamente poiché l'integrando è una funzione localmente sommabile e decrescente all'infinito più rapidamente di qualsiasi potenza. Si verifica facilmente che il funzionale f^\diamond è lineare (per la linearità dell'integrale) e continuo (per il teorema di Lebesgue sulla convergenza dominata e la definizione 3.1 di convergenza in \mathcal{S}). Nel seguito utilizzeremo una notazione semplificata in cui omettiamo il simbolo \diamond , ovvero

$$\langle f, \phi \rangle \equiv \langle f^\diamond, \phi \rangle. \quad (3.12)$$

Tale notazione è quella comunemente utilizzata in letteratura (si pensi alla notazione di Dirac in cui il morfismo \diamond corrisponde a $|v\rangle \rightarrow \langle v|$).⁸

L'integrale in eq. (3.11) assomiglia molto alla definizione di prodotto scalare in L^2 . Non a caso si è utilizzata la notazione $\langle f, \phi \rangle$ che è analoga alla notazione che abbiamo usato per il prodotto scalare $(f|\phi)$ e a quella di Dirac $\langle f|\phi \rangle$. C'è tuttavia un'importante differenza: nell'eq. (3.11) le due funzioni f e ϕ appartengono a spazi diversi, infatti $\phi \in \mathcal{S}$, mentre f fa parte dello spazio delle funzioni a crescita algebrica finita (che è spazio vettoriale).

È facile vedere che lo spazio delle funzioni a crescita algebrica finita, che indicheremo con \mathcal{F} ,⁹ contiene lo spazio L^2 , che a sua volta contiene lo spazio \mathcal{S} , ovvero

$$\mathcal{S} \subset L^2 \subset \mathcal{F}. \quad (3.13)$$

Lo spazio delle distribuzioni temperate, che indicheremo con \mathcal{S}' , è tuttavia ancora più ampio rispetto a quello definito dalle funzioni a crescita lenta. Un esempio paradigmatico

⁶In [6] il morfismo \diamond è indicato con \dagger .

⁷Nella teoria delle distribuzioni, la definizione tipicamente usata per le distribuzioni regolari non include la coniugazione complessa di f , ovvero $\langle f, \phi \rangle \equiv \int_{\mathbb{R}} f(x)\phi(x)dx$. In questo caso, per consistenza, l'operazione di combinazione lineare tra distribuzioni (eq. (3.21)) diventa $\langle \alpha_1 T_1 + \alpha_2 T_2, \phi \rangle = \alpha_1 \langle T_1, \phi \rangle + \alpha_2 \langle T_2, \phi \rangle$, mentre l'azione di un operatore su una distribuzione (eq. (3.24)) diventa $\langle AT, \phi \rangle \equiv \langle T, A^t \phi \rangle$, dove $A^t \equiv (A^\dagger)^*$. La definizione adottata in queste note, sebbene meno comune, è più conveniente per discutere la connessione delle distribuzioni con il teorema spettrale su spazi di Hilbert complessi.

⁸Come si evincerà dalle definizioni date nella sezione 3.1.2, il morfismo \diamond agisce in modo molto semplice rispetto alla combinazione lineare di elementi, infatti la sua azione è lineare: $(\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2)^\diamond = \alpha_1 f_1^\diamond + \alpha_2 f_2^\diamond$. Inoltre nel caso di applicazione di un operatore si ha $(Af)^\diamond = Af^\diamond$. Sottintendere il simbolo \diamond , quindi, non comporta particolari ambiguità.

⁹Si noti che questa notazione non è standard.

è dato dalla delta di Dirac. Ammettiamo per assurdo che esista una funzione $f \in \mathcal{F}$ tale che $f = \delta$, ovvero tale che

$$\int_{\mathbb{R}} f^*(x) \phi(x) dx = \phi(0) \quad \forall \phi \in \mathcal{S}. \quad (3.14)$$

In particolare questo dovrebbe valere per le funzioni $\phi_\varepsilon \in \mathcal{S}$ con $\varepsilon > 0$ definite da

$$\phi_\varepsilon = \begin{cases} \exp\left(-\frac{x^2}{\varepsilon^2 - x^2}\right) & |x| < \varepsilon \\ 0 & |x| > \varepsilon \end{cases}. \quad (3.15)$$

Poiché $\phi_\varepsilon(0) = 1$, l'eq. (3.14) implica

$$\int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} f^*(x) \exp\left(-\frac{x^2}{\varepsilon^2 - x^2}\right) dx = 1. \quad (3.16)$$

Inoltre, dal fatto che $|\phi_\varepsilon(x)| \leq 1$, si ha anche

$$\left| \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} f^*(x) \exp\left(-\frac{x^2}{\varepsilon^2 - x^2}\right) dx \right| \leq \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} |f(x)| dx \quad (3.17)$$

che tende a 0 per $\varepsilon \rightarrow 0$, in contrasto con l'eq. (3.16). Concludiamo quindi che la delta di Dirac non è rappresentabile nella forma (3.11) con $f \in \mathcal{F}$.

Le distribuzioni che possono essere rappresentate da funzioni ordinarie attraverso l'eq. (3.11) sono dette *distribuzioni regolari*. Tutte le altre, come ad esempio la delta di Dirac, sono dette *distribuzioni singolari*.

Per analogia con il caso delle distribuzioni regolari, per ogni distribuzione $T \in \mathcal{S}'$ si scrive spesso

$$\langle T, \phi \rangle = \int T^*(x) \phi(x) dx, \quad (3.18)$$

come se al funzionale T corrispondesse una “funzione simbolica” $T(x)$. Ad esempio per la delta di Dirac si scrive $\langle \delta, \phi \rangle = \int \delta(x) \phi(x) dx = \phi(0)$. Non bisogna però dimenticare che questa è una notazione simbolica e che $T(x)$ *non* rappresenta il valore di nessuna funzione nel punto x .

Tramite il morfismo \diamond possiamo identificare \mathcal{S} , L^2 e \mathcal{F} con opportuni sottospazi di \mathcal{S}' (cioè le corrispondenti classi di distribuzioni regolari), ovvero $\mathcal{S} \cong \mathcal{S}^\diamond$, $L^2 \cong L^{2\diamond} \equiv L^{2*}$ e $\mathcal{F} \cong \mathcal{F}^\diamond$. Quindi il fatto che \mathcal{S}' estende \mathcal{F}^\diamond può anche essere espresso con la serie di inclusioni¹⁰

$$\mathcal{S} \subset L^2 \subset \mathcal{F} \subset \mathcal{S}'. \quad (3.19)$$

La notazione simbolica $T(x)$ fornisce un'utile rappresentazione dell'inclusione $\mathcal{F} \subset \mathcal{S}'$. Come vedremo, essa è anche utile per rappresentare in modo conciso l'azione degli operatori definiti sullo spazio \mathcal{S}' .

¹⁰L'estensione dello spazio di Hilbert ottenuta mediante lo spazio di distribuzioni \mathcal{S}' è detta *spazio di Hilbert allargato* o *equipaggiato* (in inglese, *rigged Hilbert space*). Per una trattazione più approfondita si vedano [6] o [7].

3.1.2 Lo spazio delle distribuzioni temperate \mathcal{S}'

Vogliamo ora discutere quali è la struttura dello spazio delle distribuzioni temperate. È naturale aspettarsi che lo spazio \mathcal{S}' possa essere dotato di una struttura di \mathbb{C} spazio vettoriale, analogamente a quanto accade per \mathcal{S} , L^2 e \mathcal{F} .

Per capire come definire la somma e la moltiplicazione per scalari di una distribuzione temperata, consideriamo il caso delle distribuzioni regolari. Assegnati due scalari $\alpha_{1,2} \in \mathbb{C}$ e due funzioni $f_{1,2} \in \mathcal{F}$ calcoliamo la distribuzione associata a $\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2$. Abbiamo che

$$\begin{aligned} \langle \alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2, \phi \rangle &= \int [\alpha_1 f_1(x) + \alpha_2 f_2(x)]^* \phi(x) dx \\ &= \alpha_1^* \int f_1^*(x) \phi(x) dx + \alpha_2^* \int f_2^*(x) \phi(x) dx \\ &= \alpha_1^* \langle f_1, \phi \rangle + \alpha_2^* \langle f_2, \phi \rangle \quad \forall \phi \in \mathcal{S}. \end{aligned} \quad (3.20)$$

In analogia con questo caso particolare adottiamo la seguente definizione.

Definizione 3.4. Assegnati due scalari $\alpha_{1,2} \in \mathbb{C}$ e due distribuzioni temperate $T_{1,2}$, se definisce la distribuzione temperata $\alpha_1 T_1 + \alpha_2 T_2$ come quel funzionale che ad ogni funzione $\phi \in \mathcal{S}$ associa il numero complesso

$$\langle \alpha_1 T_1 + \alpha_2 T_2, \phi \rangle = \alpha_1^* \langle T_1, \phi \rangle + \alpha_2^* \langle T_2, \phi \rangle. \quad (3.21)$$

È immediato verificare che tale funzionale è lineare e continuo e che la definizione adottata rende lo spazio \mathcal{S}' uno spazio vettoriale su \mathbb{C} .

Veniamo ora ad un secondo aspetto estremamente rilevante per le applicazioni, ovvero la definizione degli operatori sullo spazio delle distribuzioni temperate. Come abbiamo fatto per definire la combinazione lineare di distribuzioni, per capire come definire l'azione di un operatore partiamo dal caso delle distribuzioni regolari. In particolare consideriamo una distribuzione regolare per la quale $f \in L^2(\mathbb{R})$ e un operatore lineare continuo A per il quale è definita l'azione su f . Abbiamo che

$$\langle Af, \phi \rangle = \int_{\mathbb{R}} ([Af](x))^* \phi(x) dx. \quad (3.22)$$

Poiché A è continuo, è definito su L^2 il suo aggiunto A^\dagger . In particolare A^\dagger è definito su ogni $\phi \in \mathcal{S} \subset L^2$, quindi possiamo riscrivere l'eq. (3.22) come

$$\langle Af, \phi \rangle = \int_{\mathbb{R}} f^*(x) A^\dagger \phi(x) dx = \langle f, A^\dagger \phi \rangle. \quad (3.23)$$

Questa relazione è il punto di partenza per definire l'azione di opportuni operatori $A \in \text{Hom}(L^2(\mathbb{R}))$ su tutto \mathcal{S}' . Diciamo “opportuni” poiché per poter ottenere una definizione consistente, è necessario richiedere che A soddisfi alcune proprietà. Le richieste minimali sono

- l'operatore A deve avere dominio denso in L^2 , affinché si possa definire l'aggiunto,
- $\mathcal{S} \subset \mathcal{D}(A^\dagger)$,

- $A^\dagger \phi \in \mathcal{S}$ per ogni $\phi \in \mathcal{S}$,
- A^\dagger deve essere continuo in \mathcal{S} nella topologia di \mathcal{S} , affinché $\phi \mapsto \langle f, A^\dagger \phi \rangle$ sia continua.

Arriviamo quindi alla seguente definizione.

Teorema 3.2 (Definizione di operatore in \mathcal{S}'). Sia $A \in \text{Hom}(L^2(\mathbb{R}))$ un operatore densamente definito tale che $\mathcal{S} \subset \mathcal{D}(A^\dagger)$ e che A^\dagger sia continuo in \mathcal{S} nella topologia di \mathcal{S} . Allora A può essere esteso ad un operatore continuo in \mathcal{S}' definendo

$$A : \mathcal{S}' \rightarrow \mathcal{S}', \quad T \mapsto AT, \quad \langle AT, \phi \rangle = \langle T, A^\dagger \phi \rangle \quad (3.24)$$

per ogni funzione di test $\phi \in \mathcal{S}$.

Dimostrazione. Questa è una definizione consistente, in quanto dalla continuità di A^\dagger in \mathcal{S} segue che $A^\dagger \phi \in \mathcal{S}$ per ogni $\phi \in \mathcal{S}$. È poi immediato verificare che dalla linearità di A^\dagger e di T segue la linearità di AT . Inoltre, la continuità di A^\dagger in \mathcal{S} , combinata con la continuità di T , garantisce che il funzionale AT sia continuo, ossia che appartenga a \mathcal{S}' . Infine si può dimostrare che $A : \mathcal{S}' \rightarrow \mathcal{S}'$ è continuo (secondo la topologia di \mathcal{S}' , che è la topologia debole). \square

Si noti che il precedente teorema non richiede la continuità dell'operatore A in $L^2(\mathbb{R})$, quindi si può applicare anche ad operatori non limitati.

Se A è un operatore autoaggiunto, definito e continuo su tutto \mathcal{S} , valgono le ipotesi del teorema precedente, quindi A può essere esteso a tutto \mathcal{S}' , in questo caso si ha semplicemente

$$\langle AT, \phi \rangle = \langle T, A\phi \rangle \quad (\text{per } A = A^\dagger). \quad (3.25)$$

In particolare il teorema 3.2 si applica agli operatori P e X e alle loro potenze e composizioni.

Consideriamo ora alcuni esempi particolarmente rilevanti.

Esempio 3.1 (L'operatore di derivazione). Sia A l'operatore di derivazione. Esso è anti-autoaggiunto su un dominio denso in L^2 (ovvero $\partial^\dagger = -\partial$), inoltre è continuo su \mathcal{S} (nella topologia di \mathcal{S}). Quindi ogni distribuzione temperata $T \in \mathcal{S}'$ è derivabile e vale (dal teorema 3.2)

$$\langle \partial T, \phi \rangle \equiv \langle T, \partial^\dagger \phi \rangle = \langle T, -\partial \phi \rangle = -\langle T, \phi' \rangle. \quad (3.26)$$

Vediamo alcuni casi particolari. Nel caso di una distribuzione regolare associata ad una funzione derivabile $f \in \mathcal{D}(\partial)$, si ha che

$$\langle \partial f, \phi \rangle \equiv -\langle f, \phi' \rangle = -\int_{\mathbb{R}} f^*(x) \partial \phi(x) dx = \int_{\mathbb{R}} \partial f^*(x) \phi(x) dx = \int_{\mathbb{R}} [\partial f(x)]^* \phi(x) dx, \quad (3.27)$$

in cui abbiamo sfruttato l'integrazione per parti, con i termini al bordo nulli grazie alla forte decrescenza di ϕ all'infinito. Si vede quindi che la distribuzione ∂f è in questo caso ancora una distribuzione regolare ed è associata alla funzione $g = \partial f$. Questo risultato non è per nulla sorprendente, anzi una proprietà analoga vale in tutti i casi in cui l'operatore A è ben definito sulla funzione f che definisce una distribuzione regolare (ovvero $Af \in \mathcal{F}$). Si riveda a tal proposito la discussione che precede il teorema 3.2.

Nel caso della delta di Dirac abbiamo

$$\partial\delta_{x_0} : \phi \mapsto \langle \partial\delta_{x_0}, \phi \rangle = -\langle \delta_{x_0}, \phi' \rangle = -\phi'(x_0), \quad (3.28)$$

e, applicando ripetutamente questo risultato,

$$\langle \partial^n \delta_{x_0}, \phi \rangle = (-1)^n \phi^{(n)}(x_0). \quad (3.29)$$

Quindi anche una distribuzione singolare è derivabile.

È facile dedurre che ogni distribuzione è infinitamente derivabile. Questo fatto può apparire sorprendente, dato che funzioni discontinue individuano delle distribuzioni regolari. Ma si spiega facilmente perché la derivata di una distribuzione associata ad una funzione discontinua (o in generale non derivabile) è una distribuzione singolare.

Come esempio esplicito determiniamo la derivata della distribuzione associata alla funzione a scalino di Heaviside $\theta \in \mathcal{F}$. Abbiamo che

$$\langle \partial\theta, \phi \rangle \equiv -\langle \theta, \phi' \rangle = -\int_{\mathbb{R}} \theta(x) \phi'(x) dx = -\int_0^\infty \phi'(x) dx = \phi(0) = \langle \delta, \phi \rangle, \quad (3.30)$$

in quanto $\lim_{x \rightarrow \infty} \phi(x) = 0$. Quindi la derivata nel senso delle distribuzioni della funzione θ è la delta di Dirac: $\theta' = \delta$.

Da questa discussione concludiamo che

- il concetto di derivata di una distribuzione coincide con la derivata ordinaria se la distribuzione è regolare e discende da una funzione derivabile,
- l'operazione di derivata può essere estesa a funzioni non derivabili, in particolare discontinue, purché localmente integrabili e a crescita algebrica finita,
- l'operazione di derivata può essere estesa anche a distribuzioni singolari, ovvero non associate a funzioni di nessun tipo.

Esempio 3.2 (L'operatore di moltiplicazione). Consideriamo ora un multiplo complesso dell'operatore di moltiplicazione $A = \alpha X$, con $\alpha \in \mathbb{C}$. In questo caso abbiamo che

$$\langle \alpha XT, \phi \rangle \equiv \langle T, (\alpha X)^\dagger \phi \rangle = \langle T, \alpha^* X \phi \rangle. \quad (3.31)$$

Nel caso di una distribuzione regolare associata a $f \in \mathcal{F}$ si ha che $[Af](x) = [\alpha Xf](x) = \alpha x f(x)$ appartiene a \mathcal{F} . È inoltre immediato verificare che

$$\langle Af, \phi \rangle = \langle \alpha x f, \phi \rangle, \quad (3.32)$$

ovvero la distribuzione Af è ancora una distribuzione regolare ed è associata alla funzione $g(x) = [\alpha Xf](x) = \alpha x f(x)$. Si noti che se $f \in L^2(\mathbb{R}) \subset \mathcal{F}$, allora necessariamente $Xf \in \mathcal{F}$, ma non è detto che $Xf \in L^2(\mathbb{R})$.

Nel caso della delta di Dirac abbiamo che

$$\langle A\delta_{x_0}, \phi \rangle = \langle \delta_{x_0}, \alpha^* X \phi \rangle = \alpha^* x_0 \phi(x_0) = \langle \alpha x_0 \delta_{x_0}, \phi \rangle. \quad (3.33)$$

Da cui concludiamo che $(\alpha X)\delta_{x_0} = \alpha x_0 \delta_{x_0}$.

3.1.3 La convergenza debole

Nello spazio \mathcal{S}' delle distribuzioni temperate è naturale introdurre il seguente concetto di limite debole.

Definizione 3.5. Sia $(T_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{S}'$ una successione di distribuzioni temperate. Si dice che la distribuzione $T \in \mathcal{S}'$ ne è il *limite debole* (o il *limite nel senso delle distribuzioni*) e si scrive

$$T = \lim_{n \rightarrow \infty} T_n \quad (3.34)$$

se per ogni $\phi \in \mathcal{S}$ esiste il limite della successione di numeri complessi $\langle T_n, \phi \rangle$ e vale

$$\langle T, \phi \rangle = \lim_{n \rightarrow \infty} \langle T_n, \phi \rangle \quad \forall \phi \in \mathcal{S}. \quad (3.35)$$

Nella scrittura con funzioni simboliche le eq. (3.34) e (3.35) diventano

$$T(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} T_n(x) \quad (3.36)$$

$$\int_{\mathbb{R}} T^*(x) \phi(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} T_n^*(x) \phi(x) dx. \quad (3.37)$$

Nel caso (molto frequente) in cui le T_n siano distribuzioni regolari mentre il limite debole T sia una distribuzione singolare, gli integrali a secondo membro hanno senso proprio, mentre non ha senso proprio l'integrazione a primo membro e l'espressione in eq. (3.36). Queste espressioni acquistano senso quando sono applicate a delle funzioni di test $\phi \in \mathcal{S}$. Se invece si cerca di effettuare il $\lim_{n \rightarrow \infty} T_n(x)$ nel senso della convergenza puntuale, in generale si ottiene qualcosa che non ha senso o qualcosa che non ha nulla a che fare con la distribuzione T .¹¹

La definizione 3.5 ci permette di dare delle utilissime rappresentazioni della delta di Dirac come limite debole di successioni di funzioni ordinarie (le cosiddette *δ -famiglie*). Un esempio è dato dal nucleo di Dirichlet (usato nel teorema di convergenza puntuale della serie di Fourier)

$$D_N(x) = \frac{\sin((N + 1/2)x)}{\sin(x/2)}, \quad \lim_{N \rightarrow \infty} D_N(x) = \delta(x) \quad \text{in } \mathcal{S}([-\pi, \pi]). \quad (3.38)$$

Un altro esempio è (usato nel teorema di convergenza puntuale della trasformata di Fourier, teorema 2.30 in [6])

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \frac{\sin(Rx)}{\pi x} = \delta(x). \quad (3.39)$$

3.2 Il teorema spettrale per operatori autoaggiunti

L'estensione dello spazio di Hilbert L^2 allo spazio delle distribuzioni \mathcal{S}' ci permette di introdurre il concetto di *autovettore generalizzato* per un operatore.

¹¹Ovviamente esistono anche casi in cui il limiti esistono anche in senso ordinario. Per esempio questo accade se le T_n soddisfano le ipotesi del teorema di convergenza dominata di Lebesgue.

Definizione 3.6 (Equazione agli autovalori generalizzata). Sia $T \in \mathcal{S}'$, e sia A un operatore autoaggiunto continuo su \mathcal{S} (nella topologia di \mathcal{S}). La seguente equazione

$$AT = \lambda T \quad \text{con } \lambda \in \mathbb{C}, \quad (T \neq 0) \quad (3.40)$$

è detta *equazione agli autovalori generalizzata*. I T che la soddisfano sono gli autovettori corrispondenti all'autovalore λ . La precedente condizione può anche essere espressa come

$$\langle AT, \phi \rangle \equiv \langle T, A\phi \rangle = \lambda^* \langle T, \phi \rangle \equiv \langle \lambda T, \phi \rangle \quad \forall \phi \in \mathcal{S}. \quad (3.41)$$

È evidente ad un autovettore proprio di un operatore A corrisponde un autovettore secondo la definizione 3.6. Infatti ogni autovettore proprio f_λ appartiene al dominio di A ed è un elemento dello spazio di Hilbert tale che $Af_\lambda = \lambda f_\lambda$. Esso corrisponde ad una distribuzione regolare per la quale è facile verificare che $\langle Af_\lambda, \phi \rangle = \langle \lambda f_\lambda, \phi \rangle$. D'altro canto, gli autovettori che non appartengono allo spazio di Hilbert, sono detti *autovettori generalizzati*.

Si può dimostrare che i λ che soddisfano l'equazione agli autovalori generalizzata sono tutti e soli i punti dello spettro di A . L'estensione dello spazio di Hilbert a \mathcal{S}' ci ha quindi permesso di ottenere autovettori corrispondenti non solo agli elementi dello spettro discreto, ma anche a quelli dello spettro continuo.

Vediamo un paio di esempi di interesse fisico.

Esempio 3.3 (L'operatore impulso). Consideriamo l'operatore di derivazione scritto nella forma $P = -i\partial$ (che corrisponde all'operatore impulso in meccanica quantistica) e definito sulle funzioni in $L^2(\mathbb{R})$ assolutamente continue e derivabili. Abbiamo già visto (sezione 6.4.1 di [6]) che P è autoaggiunto e il suo spettro è puramente continuo e coincide con \mathbb{R} . Vediamo di determinarne gli autovettori generalizzati.

Partiamo dall'equazione agli autovalori generalizzata per un autovalore $k \in \mathbb{R}$

$$-i\partial f_k = k f_k. \quad (3.42)$$

Per prima cosa vediamo se esiste una distribuzione regolare che soddisfa questa equazione, ovvero una soluzione con $f_k \in \mathcal{F}$ nello spazio delle funzioni a crescita algebrica finita. Effettivamente l'equazione (3.42) ha come soluzione (a meno di costanti moltiplicative)

$$f_k = e^{ikx}, \quad (3.43)$$

che è un elemento di \mathcal{F} (ma *non* è un elemento di $L^2(\mathbb{R})$). La distribuzione regolare

$$\langle f_k, \phi \rangle \equiv \int_{\mathbb{R}} e^{-ikx} \phi(x) dx, \quad (3.44)$$

è un autovettore generalizzato per l'operatore P , come si può facilmente verificare in modo esplicito:

$$\begin{aligned} \langle P f_k, \phi \rangle &= \int_{\mathbb{R}} e^{-ikx} (-i\partial_x e^{ikx} \phi(x)) dx = \int_{\mathbb{R}} (i\partial_x e^{-ikx}) \phi(x) dx \\ &= k \int_{\mathbb{R}} e^{-ikx} \phi(x) dx = \langle k f_k, \phi \rangle \quad \forall \phi \in \mathcal{S}. \end{aligned} \quad (3.45)$$

Esempio 3.4 (L'operatore posizione). Consideriamo ora l'operatore di moltiplicazione X definito in $L^2(\mathbb{R})$ (che corrisponde all'operatore posizione in meccanica quantistica). Sappiamo (sezione 6.4.2 di [6]) che X è autoaggiunto e il suo spettro coincide con \mathbb{R} . L'equazione agli autovalori generalizzata è

$$XT = \lambda T. \quad (3.46)$$

Abbiamo visto nell'esempio 3.2 che questa equazione è soddisfatta dalla delta di Dirac, per la quale vale

$$X\delta_\lambda = \lambda\delta_\lambda. \quad (3.47)$$

Quindi le distribuzioni delta di Dirac costituiscono gli autovettori generalizzati per l'operatore di moltiplicazione (ovviamente la delta di Dirac non appartiene allo spazio $L^2(\mathbb{R})$).

Veniamo ora ad enunciare il fondamentale teorema della completezza dello spettro degli operatori autoaggiunti, che costituisce lo scopo principale di tutta la nostra trattazione.

Teorema 3.3 (Teorema spettrale). Ogni operatore autoaggiunto A in uno spazio di Hilbert è caratterizzato da un insieme *completo* di autovettori, ovvero

- i) dall'insieme dei suoi autovalori e autovettori propri $\{\lambda_n, u_n\}$, che formano un sistema ortonormale (SON), dove gli autovalori λ_n corrispondono agli elementi dello spettro discreto $\sigma_p(A)$,
- ii) da una o più famiglie continue di autovalori e autovettori generalizzati $\{\lambda, u_\lambda\}$, con gli autovalori λ appartenenti allo spettro continuo $\sigma_c(A)$.

Ogni elemento Ψ dello spazio \mathcal{S} può essere decomposto come¹²

$$\Psi = \sum_{\sigma_p(A)} \psi_n u_n + \int_{\sigma_c(A)} \psi(\lambda) u_\lambda d\lambda, \quad (3.48)$$

dove ψ_n sono i coefficienti di Fourier della decomposizione sul sottospazio dello spazio di Hilbert generato dagli autovettori propri,

$$\psi_n \equiv \langle u_n, \Psi \rangle, \quad (3.49)$$

mentre la funzione

$$\psi(\lambda) \equiv \langle u_\lambda, \Psi \rangle, \quad (3.50)$$

ottenuta facendo correre λ su $\sigma_c(A)$, è a quadrato sommabile su $\sigma_c(A)$.¹³ Inoltre, il prodotto scalare tra una coppia di elementi Ψ e Φ appartenenti a \mathcal{S} può essere espresso come

$$(\Psi|\Phi) = \sum_{\sigma_p(A)} \psi_n^* \phi_n + \int_{\sigma_c(A)} \psi^*(\lambda) \phi(\lambda) d\lambda. \quad (3.51)$$

¹²Per semplicità assumiamo che gli autovalori non siano degeneri e che esista una sola famiglia di autovalori generalizzati. L'estensione al caso generico è ovvia.

¹³Si noti che gli autovettori generalizzati devono essere opportunamente normalizzati. Per maggiori dettagli si veda ad esempio [7].

Dimostrazione. La dimostrazione del teorema spettrale (o di una delle sue formulazioni equivalenti) può essere trovata in testi di analisi funzionale, come ad esempio [2]. Vista la sua complessità non la riportiamo su queste note. L'unica cosa che mostriamo è la derivazione dell'eq. (3.51) a partire dalla regola di decomposizione in eq. (3.48). Notiamo, per prima cosa, che l'elemento Ψ dato in eq. (3.48) è interpretabile come un funzionale, e può quindi essere applicato ad un elemento Φ dello spazio \mathcal{S} . Abbiamo quindi

$$(\Psi|\Phi) = \langle \Psi, \Phi \rangle = \sum_{\sigma_p(A)} \psi_n^* \langle u_n, \Phi \rangle + \int_{\sigma_c(A)} \psi^*(\lambda) \langle u_\lambda, \Phi \rangle d\lambda. \quad (3.52)$$

Utilizzando le definizioni date dalle equazioni (3.49) e (3.49), si ottiene l'eq. (3.51). \square

Il teorema spettrale ci permette di dire che l'insieme degli autovettori propri e generalizzati di un operatore autoaggiunto costituisce un sistema ortonormale completo (SONC) generalizzato. Attraverso il teorema spettrale abbiamo inoltre effettivamente *diagonalizzato* l'operatore A . Infatti esso può essere espresso come

$$A\Psi = \sum_{\sigma_p(A)} \lambda_n \psi_n u_n + \int_{\sigma_c(A)} \lambda \psi(\lambda) u_\lambda d\lambda. \quad (3.53)$$

Questa equazione segue banalmente dal fatto che u_n e u_λ sono autovettori di A , ovvero $Au_n = \lambda u_n$ e $Au_\lambda = \lambda u_\lambda$. Il teorema spettrale può quindi essere visto come una generalizzazione del teorema di diagonalizzabilità delle matrici hermitiane a spazi vettoriali con infinite dimensioni.

Qualora l'operatore autoaggiunto abbia *solo spettro discreto*, il teorema spettrale ci dice che l'insieme degli autovettori propri forma un SONC. I coefficienti ψ_n definiti dall'eq. (3.50) non sono nient'altro che i coefficienti di Fourier per la decomposizione sul SONC e l'eq. (3.51) è l'equivalente dell'identità di Parseval.

È importante notare che affinché questa proprietà valga è sufficiente che l'operatore A sia autoaggiunto (e con spettro soltanto discreto), mentre non è affatto necessario che sia continuo e limitato. Ad esempio l'operatore $L_z = -i\partial_z$ definito su $L^2([-\pi, \pi])$ (corrispondente alla componente z del momento angolare in meccanica quantistica) non è limitato né continuo, ma l'insieme dei suoi autovettori, dati da

$$\phi \mapsto e^{in\phi} \quad \text{con } n \in \mathbb{N}, \quad (3.54)$$

forma un SONC. In effetti questi autovettori non sono altro che la base di funzioni utilizzata per la serie di Fourier su $L^2([-\pi, \pi])$. La meccanica quantistica offre tantissimi altri esempi di operatori autoaggiunti con spettro puramente discreto (ad esempio l'Hamiltoniana dell'oscillatore armonico, o quella della particella in una buca di potenziale infinita). Ognuno di questi determina un insieme di autovettori che formano un SONC per il corrispondente spazio di Hilbert.

Il più semplice esempio di operatore con spettro puramente continuo è l'operatore posizione X su $L^2(\mathbb{R})$, i cui autovettori generalizzati corrispondono alla delta di Dirac (esempio 3.4). Data una $\psi \in \mathcal{S}$ abbiamo che l'eq. (3.49) dà banalmente

$$\psi(x) = \langle \delta_x, \psi \rangle = \psi(x), \quad (3.55)$$

ovvero $\psi(x)$ è la “decomposizione” di ψ sulla base degli autovettori generalizzati dell’operatore posizione. Mentre l’eq. (3.51) riproduce il prodotto scalare in $L^2(\mathbb{R})$

$$\langle \phi, \psi \rangle = \int_{\mathbb{R}} \phi(x)^* \psi(x) dx. \quad (3.56)$$

Un secondo esempio molto rilevante di operatore autoaggiunto con spettro puramente continuo è l’operatore impulso su $L^2(\mathbb{R})$ (esempio 3.3). Le autofunzioni generalizzate, opportunamente normalizzate (discuteremo la normalizzazione nel seguito), sono

$$f_k(x) = \frac{e^{ikx}}{\sqrt{2\pi}} \in \mathcal{F} \subset \mathcal{S}' \quad \text{con } k \in \mathbb{R}. \quad (3.57)$$

L’eq. (3.49) fornisce la rappresentazione di un generico vettore nello spazio dei momenti, ovvero

$$\tilde{\psi}(k) \equiv \langle f_k, \psi \rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ikx} \psi(x) dx, \quad (3.58)$$

che non è altro che la trasformata di Fourier della funzione $\psi(x)$ definita nello spazio delle configurazioni. L’eq. (3.51),

$$\langle \phi, \psi \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{\phi}^*(k) \tilde{\psi}(x) dx, \quad (3.59)$$

è l’identità di Parseval per la trasformata di Fourier.

Estensione a \mathcal{H}

La decomposizione spettrale enunciata nel teorema 3.3 (ad esempio l’eq. (3.48)) si riferisce ad elementi dello spazio \mathcal{S} e non a generici elementi dello spazio di Hilbert. L’estensione ad elementi $\Psi \in \mathcal{H}$ è ovvia nel caso in cui l’operatore abbia solo spettro discreto, nel qual caso gli autovettori u_n appartengono allo spazio di Hilbert e formano un SONC. Nel caso in cui esista uno spettro continuo, la definizione di $\psi(\lambda)$ deve essere ottenuta tramite un processo di limite, considerando una successione di elementi $(\Psi_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{S}$ che convergono in norma quadratica a $\Psi \in \mathcal{H}$. Una tale successione esiste sempre in quanto \mathcal{S} è denso in \mathcal{H} in norma quadratica. Dunque si ha

$$\Psi = \lim_{n \rightarrow \infty} \Psi_n \quad \text{in } \mathcal{H}, \quad (3.60)$$

e $\psi(\lambda)$ è definito come

$$\langle u_\lambda, \Psi \rangle \equiv \psi(\lambda) = \lim_{n \rightarrow \infty} \langle u_\lambda, \Psi_n \rangle = \lim_{n \rightarrow \infty} \psi_n(\lambda) \quad \text{in } L^2(\sigma_c(A)). \quad (3.61)$$

Si noti che la convergenza dei $\psi_n(\lambda)$ *non* è puntuale, ma solo in norma quadratica. Con questa definizione si può estendere la validità dell’eq. (3.51) a generici vettori di \mathcal{H} . Per maggiori dettagli si veda [7].

Normalizzazione degli autovettori generalizzati

Affinché la decomposizione data dal teorema spettrale sia valida è necessario che gli autovettori (propri e generalizzati) siano opportunamente normalizzati. È facile vedere che gli autovettori propri u_n devono essere ortonormali. Infatti consideriamo un operatore A con spettro puramente discreto. Calcolando il prodotto scalare $(\Psi|u_m)$ e sostituendo al posto di Ψ la decomposizione spettrale abbiamo

$$(\Psi|u_m) = \sum_{\sigma_p(A)} \psi_n^*(u_n|u_m), \quad (3.62)$$

ma anche

$$(\Psi|u_m) = (u_m|\Psi)^* = \psi_m^*, \quad (3.63)$$

e confrontando le due espressioni

$$(u_n|u_m) = \delta_{nm}. \quad (3.64)$$

Consideriamo ora gli autovettori generalizzati relativi allo spettro continuo. Consideriamo un operatore A con spettro puramente continuo. Partiamo dalla definizione (3.49) e sostituiamo al posto di $\Psi \in \mathcal{S}$ la decomposizione spettrale. In questo modo otteniamo

$$\psi(\lambda) = \langle u_\lambda, \Psi \rangle = \langle u_\lambda, \int_{\sigma_c(A)} u_{\lambda'} \psi(\lambda') d\lambda' \rangle. \quad (3.65)$$

Dimentichiamo per un momento che $(u'_\lambda)_{\lambda' \in \sigma_p(A)}$ non sono elementi dello spazio \mathcal{S} (né dello spazio di Hilbert \mathcal{H}) e, con un abuso, riscriviamo l'equazione precedente come

$$\psi(\lambda) = \langle u_\lambda, \int_{\sigma_c(A)} u_{\lambda'} \psi(\lambda') d\lambda' \rangle = \int_{\sigma_c(A)} \langle u_\lambda, u_{\lambda'} \rangle \psi(\lambda') d\lambda'. \quad (3.66)$$

Per dare senso a questa espressione, dobbiamo interpretare l'oggetto $\langle u_\lambda, u_{\lambda'} \rangle$ come una distribuzione e porre

$$\langle u_\lambda, u_{\lambda'} \rangle = \delta(\lambda - \lambda'). \quad (3.67)$$

Questa relazione definisce la nozione di ortonormalità per gli autovettori generalizzati. Sebbene il ragionamento che abbiamo seguito (insieme alla notazione utilizzata) non sia matematicamente ineccepibile,¹⁴ la relazione (3.67) risulta estremamente utile dal punto di vista pratico ed è ampiamente utilizzata in fisica per determinare la corretta normalizzazione degli autovettori generalizzati di un operatore.

¹⁴Possiamo dare un senso matematico all'espressione (3.67) assumendo che essa vada sempre utilizzata in espressioni come

$$\int d\lambda' \langle u_\lambda, u_{\lambda'} \rangle \langle u_{\lambda'}, \Psi \rangle = \langle u_\lambda, \Psi \rangle = \psi(\lambda). \quad (3.68)$$

o calcolata su due elementi di \mathcal{S} e interpretata come

$$\int d\lambda d\lambda' \langle \Phi, u_\lambda \rangle \langle u_\lambda, u_{\lambda'} \rangle \langle u_{\lambda'}, \Psi \rangle = (\Phi|\Psi). \quad (3.69)$$

Nel caso di un operatore autoaggiunto A con spettro misto (ovvero sia con una componente discreta che una continua), ci limitiamo a dire che vale la condizione di ortogonalità

$$\langle u_\lambda, u_n \rangle = 0 \quad \text{per } u_n \in \sigma_p(A) \text{ e } \lambda \in \sigma_c(A). \quad (3.70)$$

Vediamo di applicare queste considerazioni ai due esempi espliciti considerati prima, l'operatore posizione e l'operatore impulso. Per l'operatore posizione avevamo trovato (usando la notazione dell'eq. (3.65))

$$u_x = \delta_x. \quad (3.71)$$

L'equazione (3.65) quindi coincide semplicemente con l'identità

$$\psi(x) = \int_{\mathbb{R}} dy \delta(x-y) \left(\int_{\mathbb{R}} dz \delta(y-z) \psi(z) \right), \quad (3.72)$$

ovvero con il fatto che (con abuso di notazione)

$$\int_{\mathbb{R}} dy \delta(x-y) \delta(y-z) = \delta(x-z). \quad (3.73)$$

Il caso dell'operatore impulso è meno banale. Infatti abbiamo visto (eq. (3.58)) che la rappresentazione di un vettore nello spazio degli impulsi è la trasformata di Fourier della sua rappresentazione nello spazio delle configurazioni. Aver ottenuto la trasformata di Fourier con la corretta normalizzazione è essenziale per poter ottenere l'equazione (3.59). Si vede quindi come il fattore $1/\sqrt{2\pi}$ introdotto nell'eq. (3.57) per normalizzare gli autostati generalizzati è strettamente necessario. In questo caso l'eq. (3.66) è equivalente al fatto che l'inversa della trasformata di Fourier \mathcal{F} è data da $\mathcal{F}^{-1} = \imath \circ \mathcal{F}$. Infatti l'eq. (3.66) può essere reinterpretata come

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} dx e^{-ikx} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} dp e^{ipx} \psi(p) \right) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} dx e^{-ikx} ([\mathcal{F}^{-1}\psi](x)) \\ &= [\mathcal{F}(\mathcal{F}^{-1}\psi)](k) = \psi(k). \end{aligned} \quad (3.74)$$

Dal punto di vista delle distribuzioni queste equazioni equivalgono a calcolare la trasformata di Fourier della distribuzione regolare associata alla funzione $e^{ipx}/\sqrt{2\pi}$, che risulta uguale alla delta di Dirac, ovvero (con abuso di notazione)

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} dx e^{-ikx} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ipx} = \delta(k-p). \quad (3.75)$$

3.2.1 Ulteriori implicazioni del teorema spettrale

Il teorema spettrale può essere esteso ad una classe più ampia di operatori.¹⁵ Una prima estensione si ha per gli operatori unitari, ovvero tali che $U^\dagger U = U U^\dagger = \mathbf{1}$. Si può infatti dimostrare che un operatore unitario può sempre essere riscritto nella forma

$$U = \exp(iA), \quad (3.76)$$

¹⁵Per semplicità riportiamo solo i risultati generali senza entrare nei dettagli del dominio di definizione degli operatori.

con A operatore autoaggiunto. Di conseguenza, il teorema spettrale implica che ogni operatore unitario ammette un SONC generalizzato di autovettori. Inoltre lo spettro dell'operatore U è dato da $\exp(\sigma(A))$.

La più ampia estensione del teorema spettrale è quella ottenuta per gli operatori normali, ovvero tali che $NN^\dagger = N^\dagger N$. Si vede facilmente che un operatore normale può essere decomposto come somma di un operatore autoaggiunto e di un operatore anti-autoaggiunto, ovvero

$$N = \frac{N + N^\dagger}{2} + \frac{N - N^\dagger}{2} \equiv T_+ + iT_-, \quad (3.77)$$

dove T_+ e T_- sono autoaggiunti. Inoltre, poiché N è normale, T_+ e T_- commutano. Ne segue che T_+ e T_- ammettono un SONC generalizzato di autovettori comuni, che risultano autovettori anche di N .¹⁶

3.2.2 La notazione di Dirac

La notazione che abbiamo utilizzato per definire le distribuzioni e ricavare il problema spettrale può essere facilmente convertita nella notazione di Dirac.

Il morfismo \diamond che associa un elemento di \mathcal{S} ad una distribuzione regolare è semplicemente

$$\diamond : |u\rangle \rightarrow \langle u|. \quad (3.78)$$

I bra $\langle u|$ possono essere interpretati in senso esteso come distribuzioni temperate, ovvero generici elementi di \mathcal{S}' . I ket $|u\rangle$, d'altro canto, possono essere interpretati come elementi dello spazio di Hilbert \mathcal{H} o, all'occorrenza, come elementi dello spazio delle funzioni di test \mathcal{S} . L'applicazione di un bra ad un ket è quindi semplicemente l'applicazione di una distribuzione temperata ad un elemento dello spazio \mathcal{S} :

$$\langle T, \phi \rangle = \langle T | \phi \rangle. \quad (3.79)$$

Per esprimere l'azione di un operatore autoaggiunto sullo spazio \mathcal{S}' si utilizza la notazione

$$\langle Af, \phi \rangle = \langle f, A\phi \rangle = \langle f | A | \phi \rangle. \quad (3.80)$$

La decomposizione spettrale generata da un operatore autoaggiunto A si esprime nel modo seguente

$$\sum_{n \in \sigma_p(A)} |\lambda_n\rangle \langle \lambda_n| + \int_{\sigma_c(A)} |\lambda\rangle \langle \lambda| d\lambda = \mathbb{1}, \quad (3.81)$$

dove $|\lambda_n\rangle$ e $|\lambda\rangle$ denotano gli autovettori propri e generalizzati di A . Questa espressione va interpretata come

$$\sum_{n \in \sigma_p(A)} |\lambda_n\rangle \langle \lambda_n | \psi \rangle + \int_{\sigma_c(A)} |\lambda\rangle \langle \lambda | \psi \rangle d\lambda = |\psi\rangle. \quad (3.82)$$

¹⁶Si noti che gli operatori unitari sono anche normali, quindi il teorema spettrale per i primi discende anche da quello valido per questi ultimi.

La rappresentazione spettrale di un operatore autoaggiunto (eq. (3.53)) si esprime invece come

$$A = \sum_{n \in \sigma_p(A)} |\lambda_n\rangle \lambda_n \langle \lambda_n| + \int_{\sigma_c(A)} |\lambda\rangle \lambda \langle \lambda| d\lambda. \quad (3.83)$$

Infine la relazione di ortonormalità degli autovettori generalizzati si esprime come

$$\langle \lambda | \lambda' \rangle = \delta(\lambda - \lambda'). \quad (3.84)$$

IL TEOREMA FONDAMENTALE DELL'ALGEBRA

Lo studio delle funzioni olomorfe fornisce una dimostrazione molto elegante del teorema fondamentale dell'algebra, come vedremo nel seguito.

Partiamo dal derivare le *disuguaglianze di Cauchy* per i coefficienti dello sviluppo in serie di una funzione olomorfa. Partendo dai teoremi 8.9 e 8.11 di [6], abbiamo che, per una funzione olomorfa f sviluppata in serie attorno al punto regolare $z = z_0$

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n, \quad (4.1)$$

dove

$$c_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta. \quad (4.2)$$

L'integrale è calcolato su un cerchio γ centrato in z_0 e di raggio r tale che f sia olomorfa per $|z - z_0| < r$.

Parametrizzando la curva γ tramite la formula $z_0 + re^{i\theta}$, si ha che l'integrale vale

$$c_n = \frac{1}{2\pi r^n} \int_0^{2\pi} e^{-in\theta} f(z_0 + re^{i\theta}) d\theta. \quad (4.3)$$

Poniamo

$$M(r) = \sup_{\theta} |f(z_0 + re^{i\theta})|, \quad (4.4)$$

e maggioriamo c_n come

$$|c_n| \leq \frac{1}{2\pi r^n} \int_0^{2\pi} |e^{-in\theta} f(z_0 + re^{i\theta})| d\theta \leq \frac{M(r)}{2\pi r^n} \int_0^{2\pi} d\theta, \quad (4.5)$$

da cui otteniamo le disuguaglianze di Cauchy

$$|c_n| \leq \frac{M(r)}{r^n} \quad \text{per } n \geq 0. \quad (4.6)$$

Dalle disuguaglianze di Cauchy segue direttamente il seguente teorema.

Teorema 4.1 (di Liouville). Una funzione $f(z)$ olomorfa in tutto il piano complesso e limitata è costante.

Dimostrazione. Sviluppiamo la funzione f in serie (attorno ad un qualsiasi punto) e utilizziamo le disuguaglianze di Cauchy con r generico (essendo f olomorfa su tutto il piano complesso). Essendo $f(z)$ limitata, allora $M(r) < M$ per qualche numero M indipendente da r . Quindi otteniamo

$$|c_n| \leq \frac{M}{r^n}. \quad (4.7)$$

Poiché r può essere arbitrariamente grande concludiamo che $c_n = 0$ per ogni $n \geq 1$, ovvero $f(z) = c_0$ è costante. \square

Possiamo ora dimostrare il teorema fondamentale dell'algebra.

Teorema 4.2 (fondamentale dell'algebra). Ogni polinomio P a coefficienti in \mathbb{C} di grado maggiore o uguale a uno ammette almeno una radice $\bar{z} \in \mathbb{C}$.

Dimostrazione. Ragioniamo per assurdo. Supponiamo che $P(z) \neq 0$ per ogni $z \in \mathbb{C}$. Allora la funzione $1/P(z)$ è olomorfa su tutto il piano complesso. Essa è anche limitata. Infatti per $|z| \rightarrow \infty$ si ha che $|P(z)| \rightarrow \infty$, quindi $|1/P(z)|$ è limitata al di fuori di un disco compatto. Inoltre, essendo continua, essa è limitata anche all'interno del disco. Per il teorema di Liouville concludiamo che $1/P(z)$ è costante, contrariamente all'ipotesi del teorema. \square

RIFERIMENTI BIBLIOGRAFICI

Monografie

- [1] G. Cicogna, *Metodi matematici della Fisica*, Springer (2015)
- [2] W. Rudin, *Functional analysis*, McGraw-Hill (1990)
- [3] M. Reed and B. Simon, *Methods of Modern Mathematical Physics, I: functional analysis*, Academic Press (1980).
- [4] H. Cartan, *Elementary Theory of Analytic Functions of One or Several Complex Variables*, Dover Publications (1995).
- [5] A. N. Kolmogorov, S. V. Fomin, *Elementi di teoria delle funzioni e di analisi funzionale, Vol. 1 e 2*, Edizioni MIR.

Dispense

- [6] D. Colferai, *Appunti per il corso di Metodi matematici per la fisica*, dispense.
- [7] S. Sciuto, *Metodi matematici della Fisica II*, dispense.
- [8] D. Dominici, *Analisi funzionale*, dispense.
- [9] G. Panico, *Appunti per il corso di Complementi di Metodi Matematici per la Fisica*, dispense.