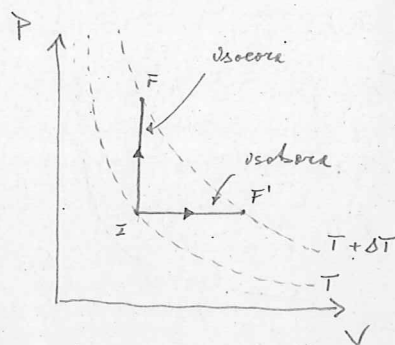


ESERCIZIO. Legame tra calori specifici di un gas perfetto a V costante e P costante

II. App. 1

Lo scopo di questo esercizio è capire la relazione tra calori specifici a V e P costante per un gas perfetto.

Secondo la nostra definizione, il calore specifico determina quanto calore deve essere fornito o ceduto da un sistema per determinare un cambiamento di temperatura ΔT . Abbiamo visto che per i liquidi e i solidi (in buona approssimazione) esiste un coefficiente unico di calore specifico. Per i gas, invece, il calore specifico dipende da come la trasformazione avviene. Particolare rilevanza rivestono due tipi di trasformazione, quella a V costante (isocora) e a P costante (isobara). I calori specifici del gas per queste due trasformazioni sono diversi. Vedremo in questo esercizio queste differenze.



Prima di tutto definiamo i calori specifici molari (ancora per nostra convenienza, invece degli unitari di massa):

$$Q = n C_V \cdot \Delta T \quad (V \text{ costante})$$

$$Q = n C_P \cdot \Delta T \quad (P \text{ costante})$$

Notate che C_V è detto calore specifico molare a V costante mentre C_P è detto calore specifico molare a P costante. C_V e C_P si misurano in J/mole $^{\circ}C$.

Durante un processo isocoro, il volume non varia, quindi il sistema non compie lavoro ($L=0$) quindi la variazione di energia interna è

$$\Delta U_V = Q = n C_V \cdot \Delta T.$$

Ora consideriamo il processo isobaro (espansione) partendo dallo stesso stato iniziale I (vedi figura) e con lo stesso ΔT . In questo processo il gas compie un lavoro

$$L = P \cdot \Delta V,$$

quindi la variazione di energia interna è

$$\Delta U_P = Q - L = n C_P \cdot \Delta T - P \cdot \Delta V.$$

Usando l'equazione di stato $PV = nRT$, troviamo

$$P \cdot \Delta V = nR \Delta T.$$

Inoltre gli stati finali F e F' hanno la stessa temperatura, quindi hanno la stessa energia interna. Dunque ΔU per le trasformazioni isocora e isobara devono essere le stesse: $\Delta U_V = \Delta U_P$.

Da questo troviamo

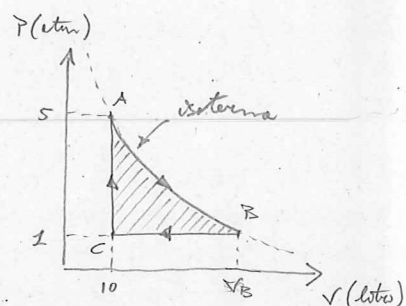
$$n C_V \cdot \Delta T = n C_P \cdot \Delta T - n R \Delta T$$

quindi per un gas perfetto

$$\underline{C_P = C_V + R}.$$

Una mole di gas perfetto monoatomico ($C_V = \frac{3}{2}R$, $C_P = C_V + R$) compie un ciclo come quello in figura. Il ciclo è formato da trasformazioni reversibili. Trovare V_B .

- Calcolare:
- il lavoro fatto dal gas in un ciclo
 - il calore scambiato nelle varie trasformazioni ($A \rightarrow B$, $B \rightarrow C$ e $C \rightarrow A$)
 - la temperatura del gas nei punti A, B e C.
 - l'efficienza del ciclo (lavoro diviso calore assorbito)
 - confrontare l'efficienza con quella di un ciclo di Carnot che opera tra le stesse temperature estreme.



SOLUZIONE V_B si deriva da $PV = nRT$ applicato ad A e B; $V_B P_B = V_A P_A \Rightarrow V_B = \frac{V_A P_A}{P_B} = 50 \text{ L}$.

A \rightarrow B isoterma: il lavoro fatto (espansione) dal gas è

$$L_{AB} = \frac{P_A V_A}{nR} \cdot \log \frac{V_B}{V_A} = 5 \cdot (1.013 \cdot 10^5 \text{ Pa}) (10 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3) \log \left(\frac{50 \text{ L}}{10 \text{ L}} \right) = +8.15 \cdot 10^3 \text{ J}.$$

il calore scambiato (visto che $\Delta U = 0$) è

$$Q_{AB} = L_{AB} = 8.15 \cdot 10^3 \text{ J} \quad (\text{assorbito dal gas})$$

la temperatura in A e B è uguale e vale

$$T_A = T_B = \frac{P_A V_A}{nR} = \frac{P_B V_B}{nR} = \frac{5 \cdot (1.013 \cdot 10^5 \text{ Pa}) (10 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3)}{1 \text{ mole} \cdot 8.314 \text{ J/mole K}} = 608.2 \text{ K}.$$

B \rightarrow C isobara il lavoro fatto dal gas è negativo (compressione)

$$L_{BC} = + P_B \cdot (V_C - V_B) = 1 \cdot (-50 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3 + 10 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3) = -4.05 \cdot 10^3 \text{ J}.$$

la temperatura in C vale

$$T_C = \frac{P_C V_C}{nR} = \frac{1 \cdot (1.013 \cdot 10^5 \text{ Pa}) (10 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3)}{1 \text{ mole} \cdot 8.314 \text{ J/mole K}} = 121.8 \text{ K}.$$

il calore è rilasciato dal gas ed è dato da

$$Q_{BC} = + n C_P \Delta T = n C_P (T_C - T_B) = n \frac{5}{2} R (T_C - T_B) = -10.13 \cdot 10^3 \text{ J}$$

o può anche essere $nRT = PV$ e osservare

$$Q_{BC} = \frac{5}{2} n R (T_C - T_B) = \frac{5}{2} n P_B (V_C - V_B) = -10.13 \cdot 10^3 \text{ J}.$$

C \rightarrow A isocora il lavoro fatto dal gas è nullo: $L_{CA} = 0$.

il calore assorbito è

$$Q_{CA} = n C_V \Delta T = n C_V (T_A - T_C) = n \frac{3}{2} R (T_A - T_C) = 6.08 \cdot 10^3 \text{ J}$$

come nel caso precedente

$$Q_{CA} = \frac{3}{2} n R (T_A - T_C) = + \frac{3}{2} V_C (P_A - P_C) = 6.08 \cdot 10^3 \text{ J}.$$

Il lavoro fatto dal gas nel ciclo è quindi

II. App. 3

$$\begin{aligned} L &= L_{AB} + L_{BC} + L_{CA} \\ &= 8.15 \cdot 10^3 \text{ J} - 4.05 \cdot 10^3 \text{ J} = 4.10 \cdot 10^3 \text{ J}. \end{aligned}$$

Il calore assorbito (notate che Q_{BC} è rilasciato dal gas)

$$Q = Q_{AB} + Q_{CA} = 8.15 \cdot 10^3 \text{ J} + 6.08 \cdot 10^3 \text{ J} = 14.23 \cdot 10^3 \text{ J}.$$

Il rendimento del ciclo è quindi

$$\epsilon = \frac{L}{Q} = \frac{4.10 \cdot 10^3 \text{ J}}{14.23 \cdot 10^3 \text{ J}} = 0.288 \quad \text{ovvero } 28.8\%.$$

Il rendimento di una macchina di Carnot che lavora tra le stesse temperature estreme è

$$\epsilon_c = 1 - \frac{T_c}{T_A} = 1 - \frac{121.8 \text{ K}}{603.2 \text{ K}} = 0.8 \quad \text{ovvero } 80\%$$

in modo equivalente per calcolare $T_c/T_A = T_c/T_B$ si trova che

$$\frac{T_c}{T_A} = \frac{V_c V_c}{V_A V_A} = \frac{V_c}{V_A} \quad \text{e} \quad \frac{T_c}{T_B} = \frac{P_c V_c}{P_B V_B} = \frac{P_c}{P_B}.$$

Il rendimento del ciclo considerato è molto minore di quello del ciclo di Carnot che lavora tra le stesse temperature estreme. Questo è un risultato generale: il ciclo di Carnot che lavora tra due temperature estreme è quello più efficiente possibile.