ESERCIZIO Un oggetto posto in aria pesa 7.84 N. Quando l'oggetto è immerso in acqua il suo peso è 6.84 N. Calcolare la densità media dell'oggetto e il suo volume.

SOLUZIONE: Indichiamo con $p_A = 7.84\,N$ il peso in aria e $p_W = 6.84\,N$ il peso in acqua. Indichiamo inoltre con V il volume dell'oggetto e con m la sua massa. Per semplicità all'inizio trascuriamo la spinta di Archimede dovuta all'aria.

Abbiamo che

$$\begin{cases} p_A = m \cdot g = \rho \cdot V \cdot g \\ p_W = \rho \cdot V \cdot g - \rho_A \cdot V \cdot g \end{cases} \qquad \begin{matrix} \rho \equiv \frac{m}{V} \\ \rho_A = \text{densità dell'acqua} \end{matrix}$$

Possiamo calcolare

$$p_A - p_W = \rho \cdot \cancel{V} \cdot g - (\rho \cdot \cancel{V} \cdot g - \rho_A \cdot V \cdot g) = \rho_A \cdot V \cdot g$$

da cui ricaviamo

$$V = \frac{p_A - p_W}{\rho_A \cdot g} \qquad (*)$$

Dall'espressione per p_A ricaviamo (sostituendo $(*)$)

$$\rho = \frac{p_A}{V \cdot g} = \frac{p_A}{\frac{p_A - p_W}{\rho_A \cdot g} \cdot g} = \rho_A \cdot \frac{p_A}{p_A - p_W}$$

La densità cercata è quindi

$$\rho = 10^3\,kg/m^3 \cdot \frac{7.84\,N}{7.84\,N - 6.84\,N} = 7.84 \cdot 10^3\,kg/m^3.$$

Se avessimo tenuto conto dell'effetto dell'aria (assumendo una densità di $1.2\,kg/m^3$) avremmo ottenuto:

$$\begin{cases} p_A = \rho \cdot V \cdot g - \rho_{aria} \cdot V \cdot g \\ p_W = \rho \cdot V \cdot g - \rho_A \cdot V \cdot g \end{cases}$$

da cui

$$p_A - p_W = (\rho_A - \rho_{aria}) \cdot V \cdot g. \Rightarrow V \cdot g = \frac{p_A - p_W}{\rho_A - \rho_{aria}}. \qquad (**)$$

Usando l'espressione per p_A:

$$p_A = (\rho - \rho_{aria}) \cdot V \cdot g \Rightarrow \rho - \rho_{aria} = \frac{p_A}{V \cdot g} \Rightarrow \rho = \frac{p_A}{V \cdot g} + \rho_{aria}$$

da cui usando $(**)$

$$\rho = \frac{p_A}{p_A - p_W}(\rho_A - \rho_{aria}) + \rho_{aria} = \frac{p_A}{p_A - p_W}\rho_A - \frac{p_W}{p_A - p_W}\rho_{aria} =$$

$$= 7.832\,kg/m^3.$$

Il volume del corpo è

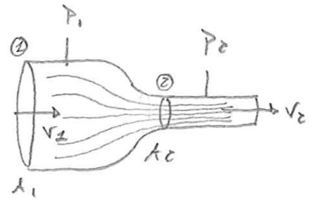
$$V = \frac{p_A - p_W}{\rho_A - \rho_{aria}} \cdot \frac{1}{g} = 1.02 \cdot 10^{-4}\,m^3.$$

ESERCIZIO Il tubo Venturi

La condotta orizzontale mostrata in figura può essere utilizzata per misurare la velocità di un liquido. Se la sezione ② ha un raggio di 1.2 cm e la sezione ① ha un raggio di 2.4 cm, mentre la differenza di pressione tra i due punti è $P_1 - P_2 = 1.2\ kPa$, calcolare

a) la velocità di uscita del liquido (usare che $\rho = 7\cdot10^2\ kg/m^3$)

b) il flusso in m^3/s.



SOLUZIONE Per l'equazione di continuità (A_1 e A_2 sono le aree delle sezioni)

$$v_1 \cdot A_1 = v_2 \cdot A_2 \Rightarrow v_1 \cdot \pi r_1^2 = v_2 \cdot \pi r_2^2$$

raggi nei punti ① e ②.

$$\Rightarrow v_1 \cdot r_1^2 = v_2 \cdot r_2^2 \qquad (*)$$

Per l'equazione di Bernoulli applicata ai punti ① e ②:

$$P_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = P_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 \Rightarrow P_1 - P_2 = \frac{1}{2}\rho\left(v_2^2 - v_1^2\right)$$

Ma usando (*) nella forma $v_1 = v_2 \cdot \frac{r_2^2}{r_1^2}$ si ha

$$P_1 - P_2 = \frac{1}{2}\rho v_2^2\left(1 - \frac{r_2^4}{r_1^4}\right) \Rightarrow v_2^2 = \frac{2(P_1 - P_2)}{\rho\left(1 - \frac{r_2^4}{r_1^4}\right)}.$$

La velocità di uscita del liquido è quindi

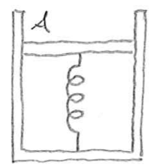
$$v_2 = \sqrt{\frac{2 \cdot 1.2 \cdot 10^3\ Pa}{7 \cdot 10^2\ kg/m^3 \cdot \left(1 - \left(\frac{1.2\ cm}{2.4\ cm}\right)^4\right)}} = 1.91\ m/s.$$

Il flusso è dato da

$$F = A_2 \cdot v_2 = \pi \cdot r_2^2 \cdot v_2 = \pi \cdot \left(1.2 \cdot 10^{-2}\ m\right)^2 \cdot 1.91\ m/s = 8.64 \cdot 10^{-4}\ m^3/s.$$

ESERCIZIO

Un cilindro con un pistone attaccato ad una molla di costante elastica 1250 N/m è immerso in acqua. Se il pistone ha un diametro di 1.2 cm, a che profondità deve essere immerso il cilindro perché la molla si comprima di 0.75 cm?



SOLUZIONE. La forza esercitata dalla pressione ad una profondità h è

$$F = A \cdot \rho g h = \pi \cdot \left(\frac{d}{2}\right)^2 \cdot \rho g h.$$

La molla, quando compressa di $x = 0.75\ cm$, esercita una forza

$$F_{el} = x \cdot k$$

dove $k = 1250\ N/m$ è la costante elastica.

Allora da $F_{el} = F$ si ha:

$$\frac{1}{4}\pi d^2 \rho g h = x \cdot k \Rightarrow h = \frac{4x \cdot k}{\pi d^2 \rho g}$$

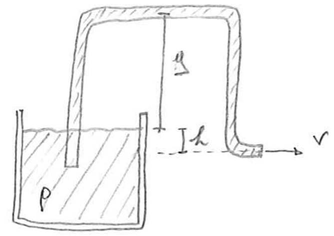
Sostituendo i valori numerici

$$h = \frac{4 \cdot 0.75 \cdot 10^{-2}\ m \cdot 1250\ N/m}{\pi \cdot \left(1.2 \cdot 10^{-2}\ m\right)^2 \cdot 10^3\ kg/m^3 \cdot 9.8\ m/s^2} = 8.46\ m.$$

ESERCIZIO Un sifone è usato per svuotare una cisterna piena d'acqua. Assumendo che il flusso d'acqua sia stazionario rispondere alle seguenti domande. I. Aff S

a) Se $h = 1\,m$ quale è la velocità dell'acqua in uscita?

b) Quale è l'altezza massima a cui si può porre la parte superiore del sifone. (Nota: il flusso si interrompe se la pressione dell'acqua scende sotto la pressione di vapore. Assumere che la pressione di vapore sia $2.3\,kPa$).



SOLUZIONE a) Applichiamo la legge di Bernoulli alla superficie dell'acqua e all'uscita del sifone:

$$p_0 = p_0 - \rho g h + \frac{1}{2}\rho v^2 \qquad (p_0 \text{ è la pressione atmosferica})$$

quindi

$$\frac{1}{2}\rho v^2 = \rho g h \Rightarrow v = \sqrt{2gh} = \sqrt{2 \cdot 9.8\,m/s^2 \cdot 1\,m} = 4.43\,m/s$$

b) Usiamo di nuovo l'equazione di Bernoulli tra l'uscita del tubo e la sua parte superiore

$$P + \rho g y + \cancel{\frac{1}{2}\rho v^2} = P_0 - \rho g h + \cancel{\frac{1}{2}\rho v^2}$$

la velocità del fluido è uguale lungo tutto il sifone.

$$\Rightarrow P = P_0 - \rho g (y + h) \Rightarrow y = \frac{P_0 - P}{\rho g} - h$$

dunque ricaviamo

$$y = \frac{1.013 \cdot 10^5\,Pa - 2.3 \cdot 10^3\,Pa}{1000\,kg/m^3 \cdot 9.8\,m/s^2} - 1\,m = 9.1\,m.$$

(In alternativa avremmo potuto applicare Bernoulli alla parte superiore del sifone e alla superficie dell'acqua nella cisterna:

$$P + \rho g y + \frac{1}{2}\rho v^2 = P_0 \Rightarrow \rho g y = P_0 - P - \frac{1}{2}\rho v^2$$

e usando $v^2 = \sqrt{2gh}$ si ha

$$\rho g y = P_0 - P - \rho g h \Rightarrow y = \frac{P_0 - P}{\rho g} - h$$

che coincide con la formula precedente.)