MECCANICA DEI FLUIDI

1. INTRODUZIONE

La materia si presenta solitamente in uno dei tre stati:

- SOLIDO : ha forma e volume definiti
- LIQUIDO : ha volume definito ma non una forma
- GAS : non ha né volume né forma definiti

} FLUIDI

Gli stati di liquido e di gas hanno delle proprietà che li rendono "analoghi", e quindi sotto diversi aspetti possono essere studiati insieme. Per questa ragione vengono genericamente denominati entrambi come FLUIDI.

In questa parte del corso ci occuperemo dei fluidi, in particolare delle loro proprietà "statiche", ovvero del loro comportamento da "fermi", e delle loro proprietà "dinamiche", ovvero cosa accade quando "scorrono". Le due parti della fisica che si occupano di questi aspetti sono:

- STATICA dei fluidi;
- DINAMICA dei fluidi.

· Definizione microscopica di un fluido

Dal punto di vista microscopico, un fluido è un insieme di molecole sistemate in modo casuale e tenute insieme da deboli forze di coesione e dalle forze esercitate dalle pareti del contenitore.

- Nei liquidi le forze di coesione permettono alle molecole di spostarsi le une rispetto alle altre, ma sono forti abbastanza da mantenerle vicine le une alle altre (per questo i liquidi hanno volume definito)
- Nei gas le forze di coesione sono molto deboli, quasi assenti, quindi permettono alle molecole di allontanarsi le une dalle altre (per questo i gas si possono espandere o comprimere).

Per confronto, nei solidi le forze di coesione sono così elevate che le molecole sono trattenute in posizioni fisse e non possono spostarsi le une rispetto alle altre (perciò volume e forma di un solido sono fissi).

2. STATICA DEI FLUIDI

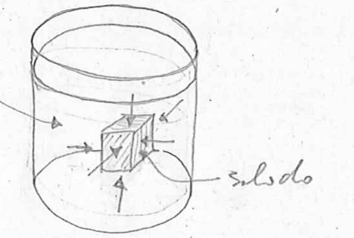
Ci occupiamo come prima cosa delle proprietà statiche dei fluidi, in particolare discuteremo il concetto di pressione e le sue conseguenze.

2.1. PRESSIONE

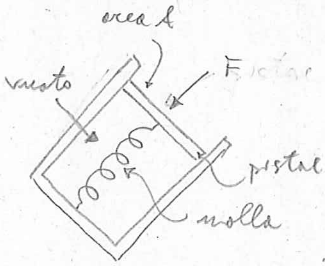
Visto che porzioni adiacenti di un fluido possono scorrere liberamente le une rispetto alle altre, i fluidi non reagiscono alle cosiddette "forze di taglio". Per questa ragione è facile capire come l'unica forza che possono esercitare su un oggetto immerso è una forza di compressione.

Un esempio banale di questa forza di compressione è ciò che succede quando un sub si immerge sott'acqua e il suo corpo viene compresso dalla pressione dell'acqua stessa.

La forza di pressione è sempre perpendicolare alle pareti dell'oggetto immerso.



Un semplice strumento per misurare la pressione si ottiene mediante un cilindro cavo in cui è stato fatto il vuoto che contiene un pistone a tenuta stagna collegato ad una molla.



Quando lo strumento viene immerso in un fluido, il fluido preme il pistone, facendo comprimere la molla. Misurando quanto la molla si comprime si può determinare la pressione nel fluido.

- Definizione di pressione.

  Se F è la forza che agisce sul pistone e A è l'area del pistone, allora la pressione P del fluido è definita da

$$P = \frac{F}{A} .$$

La pressione è una forza per unità di area, quindi le sue unità di misura nel SI sono N/m^2. Questa unità di misura è anche chiamata pascal (Pa):

$$1\ Pa = 1\ N/m^2 .$$

E' ben noto a tutti tramite esperienze comuni che la pressione in un fluido aumenta con la profondità. Ad esempio la pressione aumenta scendendo più in profondità nel mare, o, viceversa, la pressione atmosferica diminuisce andando in montagna. Ora studieremo come la pressione dipende dalla profondità.

Prima di tutto è utile introdurre il concetto di densità:

. Definizione di densità

La densità di una sostanza è data dalla sua massa per unità di volume. Si misura in kg/m^3. Data massa M e volume V la densità media è

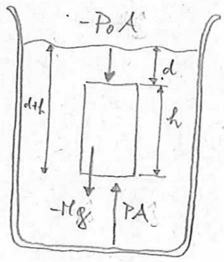
$$\rho = \frac{M}{V}.$$

. esempi di densità: (a $T = 0°C$ e pressione atmosferica)

– acqua (distillata)	$1000 = 1 \cdot 10^3\ kg/m^3$
– ghiaccio	$917 = 0.917 \cdot 10^3\ kg/m^3$
– aria	$1.29\ kg/m^3$
– rame	$8.4 \cdot 10^3\ kg/m^3$
– ferro	$7.86 \cdot 10^3\ kg/m^3$
– piombo	$11.3 \cdot 10^3\ kg/m^3$
– oro	$19.3 \cdot 10^3\ kg/m^3$

Ora possiamo studiare l'aumento della pressione con la profondità. Consideriamo un fluido con densità ρ costante. Il fluido è a riposo. Per semplicità assumiamo che il fluido sia incomprimibile, così che la sua densità sia indipendente dalla profondità.

Consideriamo una porzione di liquido contenuto in un immaginario cilindro di altezza h e area di base A. Il liquido all'interno del cilindretto ideale è fermo (quindi in equilibrio) e non è soggetto a nessuna accelerazione. Dunque le forze che agiscono su di esso si bilanciano perfettamente. Vediamo che forze agiscono in verticale:



– peso del liquido nel cilindretto $\quad \overset{\text{verso il basso}}{-} M \cdot g = -\rho \cdot V g = -\rho \cdot A \cdot h \cdot g$

$g = 9.81\ m/s^2$ accelerazione di gravità

– forza di pressione sulla superficie superiore $\quad -P_0 \cdot A$

– forza di pressione sulla base $\quad +P \cdot A$

Visto che la forza totale si deve bilanciare:

$$-\rho \cdot A \cdot h \cdot g - P_0 \cdot A + P \cdot A = 0$$

Dividendo per A e con semplici passaggi troviamo la LEGGE DI STEVINO

$$P = P_0 + \rho g h$$

Quindi la pressione, in un punto posto a profondità h in più rispetto al punto di riferimento a pressione P_0, è più grande di $\rho g h$.

Possiamo ora prendere come riferimento la superficie del liquido, che sarà alla pressione atmosferica

$$P_0 = 1.00\ atm = 1.013 \cdot 10^5\ Pa$$

In questo caso troviamo che la pressione in un punto a profondità h sotto la superficie è maggiore della pressione atmosferica P_0 di $\rho g h$.

· Esempio. Pressione nell'acqua di mare. La densità dell'acqua di mare è circa $\rho = 1.03 \cdot 10^3\ kg/m^3$.
La pressione a profondità h è quindi

$$P = P_0 + \rho g h$$

$$= 1.013 \cdot 10^5\ Pa + 1.03 \cdot 10^3\ kg/m^3 \cdot 9.80\ m/s^2 \cdot \overset{\text{in } m}{h}\ m$$

$$= 1.013 \cdot 10^5\ Pa + 1.01 \cdot 10^4 \underbrace{\frac{kg}{m^3} \cdot \frac{m}{s^2} \cdot m}\ \cdot h$$

$$= \frac{kg}{m s^2} = \underbrace{\frac{kg \cdot m}{s^2}}_{N} \cdot \frac{1}{m^2} = \frac{N}{m^2} = Pa$$

$$= 1.013 \cdot 10^5\ Pa + 1.01 \cdot 10^4\ Pa \cdot h$$

Per $h = 10\ m$ la pressione è circa il doppio di quella atmosferica, mentre per $h = 20\ m$ la pressione è il triplo e così via.

· Legge di Pascal.

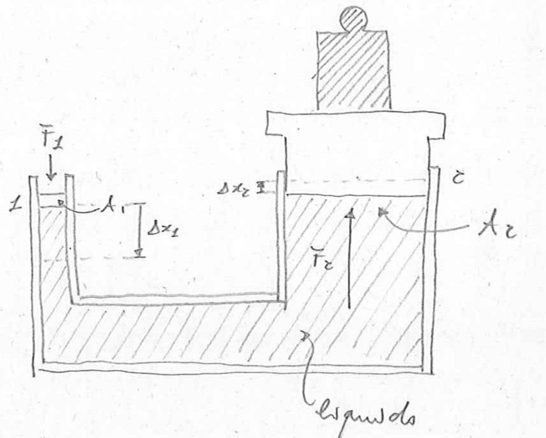
Abbiamo appena visto che la pressione dipende solo dalla profondità in un liquido, ma non dalla "posizione orizzontale" del punto considerato. Quindi se la pressione alla superficie del liquido aumenta, questo aumento è trasmesso in maniera uguale in ogni punto del fluido.

Questa è la legge di Pascal (1623-1662), cioè:

una variazione di pressione applicata a un liquido chiuso viene trasmessa integralmente in ogni punto del liquido e alle pareti del contenitore.

- Un'importante applicazione della legge di Pascal è la pressa idraulica.

Vediamo come funziona. La pressa idraulica consiste in un contenitore chiuso con due pistoni, uno di area A_1 e uno di area A_2, con $A_2 > A_1$.



Se applichiamo una forza F_1 al pistone 1 otteniamo un aumento di pressione (assumendo il liquido incompressibile)

$$P = \frac{F_1}{A_1}$$

La pressione, in accordo con la legge di Pascal, è trasmessa all'altro pistone, generando un aumento di pressione P. Questo corrisponde alla forza F_2:

$$P = \frac{F_2}{A_2} \Rightarrow F_2 = P \cdot A_2 = F_1 \cdot \frac{A_2}{A_1}$$

Vediamo che la forza sul pistone 2 è maggiore di quella applicata sul pistone 1 per un fattore

$$\frac{A_2}{A_1} > 1 .$$

Dunque la pressa idraulica permette di ottenere una enorme forza in uscita utilizzando solo una piccola forza in entrata.

Vediamo ora cosa succede se spostiamo in basso il pistone 1 della distanza Δx_1. Ovviamente il liquido si sposta dal lato del pistone 2 e quest'ultimo si solleva di una distanza Δx_2. Poiché il volume di liquido spostato è lo stesso si ha

$$\Delta x_1 \cdot A_1 = V = \Delta x_2 \cdot A_2 \Rightarrow \Delta x_2 = \Delta x_1 \cdot \frac{A_1}{A_2} .$$

Quindi lo spostamento del pistone 2 è molto minore dello spostamento del pistone 1.

Calcoliamo ora il lavoro fatto dalle forze F_1 e F_2:

$$L_1 = F_1 \cdot \Delta x_1$$

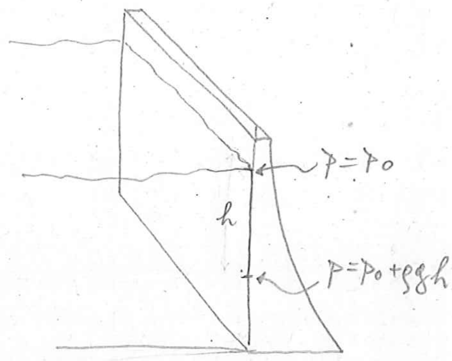
$$L_2 = F_2 \cdot \Delta x_2 = \left(F_1 \cdot \frac{A_2}{A_1}\right) \cdot \left(\Delta x_1 \cdot \frac{A_1}{A_2}\right) = F_1 \cdot \Delta x_1 = L_1$$

Vediamo che il lavoro fatto dalle due forze è esattamente lo stesso. Questo è semplicemente una conseguenza del fatto che l'energia si conserva.

• <u>Forma di una diga.</u> La variazione della pressione con la profondità si può usare per capire la forma delle dighe.

Abbiamo visto che la pressione aumenta con la profondità come

$$P = P_0 + \rho g h.$$



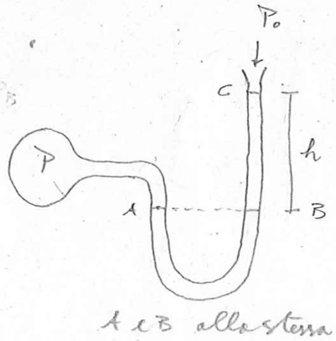
• Questo spiega perché le dighe devono essere più spesse in basso e più sottili in alto. Il maggiore spessore in basso serve per compensare la maggiore forza esercitata dalla pressione dell'acqua sulla parete della diga.

2.3 MISURE DI PRESSIONE: IL BAROMETRO E IL MANOMETRO

Discutiamo ora un paio di semplici strumenti che possono essere adoperati per misurare la pressione.

• <u>Il manometro a tubo</u>

E' costituito da un tubo ad U che ad una estremità è aperto all'atmosfera mentre dall'altra è collegato ad un sistema a pressione incognita P che vogliamo misurare. Quando il liquido nel tubo ad U è in equilibrio, la pressione nei punti A e B è uguale $P_B = P_A = P$ (altrimenti il liquido nella porzione di tubo tra A e B si sposterebbe per effetto della differenza di pressione). Se il liquido arriva al punto C, allora la pressione nella colonna a destra è data da



A e B alla stessa altezza

$$P_B = P_0 + \rho g h.$$

Quindi anche

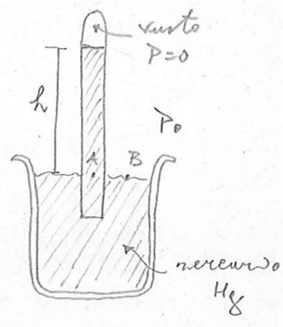
$$P = P_A = P_B = P_0 + \rho g h.$$

Misurando l'altezza della colonna di liquido possiamo determinare la pressione P. La pressione P è detta <u>pressione assoluta</u>, mentre la quantità $P - P_0 = \rho g h$ è detta <u>pressione relativa</u> (è la pressione in più rispetto alla pressione esterna, cioè in questo caso la pressione atmosferica).

N.B. Quando misuriamo la pressione di uno pneumatico stiamo misurando la pressione relativa.

· Il barometro di Torricelli (1608-1647)

Uno strumento usato per misurare la pressione atmosferica è il barometro di Torricelli. Consiste in un lungo tubo pieno di mercurio rovesciato in un recipiente anch'esso pieno di mercurio. Quando il tubo viene rovesciato l'aria non riesce ad entrare nel tubo, quindi nella parte superiore si crea il vuoto, e la parte superiore del mercurio nel tubo è a pressione $P=0$.



La superficie del mercurio nella vaschetta è invece a pressione atmosferica P_0 (punto B). Analogamente il punto A posto nel tubo alla stessa altezza del punto B ha la pressione P_0.

Per quanto visto prima abbiamo

$$P_0 = P_A = \underbrace{P}_{P=0} + \rho_{Hg}\, g\, h = \overbrace{\rho_{Hg}}^{\text{densità del mercurio}} g\, h .$$

Quindi la pressione atmosferica si può ricavare dalla misura dell'altezza della colonnina di mercurio.

Vediamo ora quale è l'altezza per la pressione atmosferica standard $P_0 = 1\,atm = 1.013\cdot 10^5\,Pa$.

$$h = \frac{P_0}{\rho_{Hg}\cdot g} = \frac{1.013\cdot 10^5\,Pa}{\underbrace{(13.6\cdot 10^3\,kg/m^3)}_{\rho_{Hg}}(9.80\,m/s^2)} = 0.76\,m .$$

Una definizione equivalente di atmosfera è dunque la pressione corrispondente ad una colonna di mercurio alta esattamente 76 cm (a $T=0°C$).

· Test rapido: Se costruiamo dei barometri di Torricelli con i liquidi

- mercurio $\rho = 13.6\cdot 10^3\,kg/m^3$
- acqua $\rho = 1\cdot 10^3\,kg/m^3$
- alcool etilico $\rho = 0.806\cdot 10^3\,kg/m^3$
- benzene $\rho = 0.879\cdot 10^3\,kg/m^3$

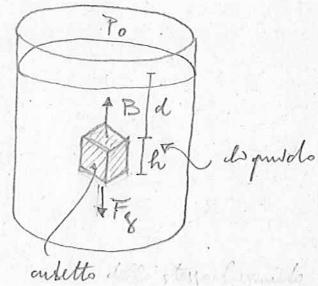
quale di questi avrà la colonna di liquido più alta?

Quando cerchiamo di immergere un oggetto voluminoso e leggero (ad es. un pallone) in acqua vediamo che esso riceve una spinta verso l'alto che rende difficile farlo rimanere sott'acqua. Questa spinta è la forza di galleggiamento, che ora studieremo.

• Principio di Archimede

Un oggetto immerso in un fluido riceve una spinta verso l'alto detta forza di Archimede o forza di galleggiamento. Il valore di questa forza è pari al peso del fluido spostato dall'oggetto.

Cerchiamo di capire meglio l'origine di questa forza e il principio di Archimede. Consideriamo un cubetto di fluido all'interno di un contenitore pieno dello stesso fluido. Il cubetto è ovviamente in equilibrio, quindi le forze che agiscono su di esso si equilibrano:



- peso F_g (verso il basso)
- spinta di Archimede B (verso l'alto)

vediamo quindi che la spinta di Archimede è esattamente uguale (in grandezza ma in verso opposto) al peso del cubetto di liquido:

$$\underline{B = F_g = \rho_{liquido} \cdot V \cdot g = M_{liquido} \cdot g}$$

Ovviamente se rimpiazziamo il cubetto di liquido con un qualunque oggetto delle stesse dimensioni, la spinta di Archimede rimane la stessa. Quindi concludiamo che la spinta verso l'alto dipende solo dal volume del corpo immerso e dalla densità del liquido, ma non dalle altre proprietà del corpo (eg. il materiale).

L'origine della spinta di Archimede è la forza di pressione all'interno del fluido. Verifichiamolo esplicitamente. Se il nostro cubetto ha area di base A, troviamo che le forze di pressione sulla faccia inferiore e superiore sono

- faccia inferiore $F_1 = P_0 + (d+h)\cdot\rho\cdot A\cdot g$
- faccia superiore $F_2 = P_0 + d\cdot\rho\cdot A\cdot g$

Quindi la forza risultante (notate che F_1 è verso l'alto e F_2 verso il basso) è

$$\underline{F_1 - F_2 = h\cdot\rho\cdot A\cdot g = \overset{\text{densità del liquido!}}{\rho}\cdot V\cdot g = M_{liquido}\cdot g}$$

quindi la forza è uguale al peso del fluido nel cubetto ed è diretta verso l'alto.

Studiamo ora due casi particolari, un corpo completamente immerso e un corpo galleggiante.

caso 1. Corpo completamente immerso

Quando un corpo è completamente immerso la spinta di Archimede è data da

$$B = \rho_{fluido} \cdot V_0 \cdot g \qquad \text{(verso l'alto)}$$

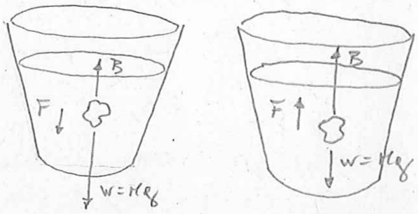
dove V_0 è il volume totale del corpo. Sul corpo agisce anche la forza di gravità che dà un peso

$$W = M \cdot g = \rho_0 \cdot V_0 \cdot g \qquad \text{(verso il basso)}$$

dove ρ_0 è la densità del corpo.

La forza risultante è

$$F = B - W = (\rho_{fluido} - \rho_0)\, V_0\, g .$$



Vediamo che esistono 3 casi:

i) $\rho_{fluido} > \rho_0$ la forza di Archimede è maggiore del peso del corpo, quindi una forza F verso l'alto agisce sul corpo che accelererà verso l'alto;

ii) $\rho_{fluido} < \rho_0$ la forza peso è maggiore della forza di Archimede, quindi il corpo affonderà;

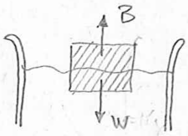
iii) $\rho_{fluido} = \rho_0$ forza di Archimede e peso si bilanciano, quindi il corpo rimane in equilibrio.

È importante notare che il comportamento di un corpo dipende solamente dalla sua densità (confrontata con la densità del fluido) e non da altre caratteristiche.

caso 2. Corpo galleggiante

Consideriamo ora un corpo galleggiante, cioè solo parzialmente immerso nel fluido.

In questo caso il peso del corpo è equilibrato dalla spinta di Archimede.



La forza di Archimede è

$$B = \rho_f \cdot V_I \cdot g$$

dove V_I indica il volume del fluido spostato dal corpo (che corrisponde al volume del corpo immerso nel liquido). Il peso del corpo è

$$W = \rho \cdot V \cdot g$$

dove V è il volume totale del corpo. Poiché $B = W$, otteniamo

$$\rho_f \cdot V_I \cdot g = \rho \cdot V \cdot g \quad \Rightarrow \quad \frac{\rho}{\rho_f} = \frac{V_I}{V} .$$

Questa equazione ci dice che la frazione di volume immersa di un corpo che galleggia è uguale al rapporto tra la densità del corpo e la densità del fluido.

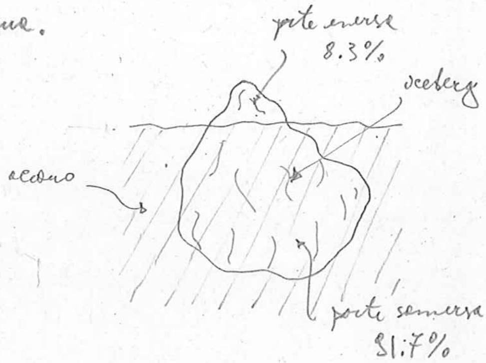
Esempio Il galleggiamento del ghiaccio

Cerchiamo di capire come galleggia una massa di ghiaccio circondata da acqua liquida. Abbiamo visto che la frazione di un corpo immerso è data dal rapporto tra la sua densità e la densità del fluido. Nel caso dell'acqua e del ghiaccio:

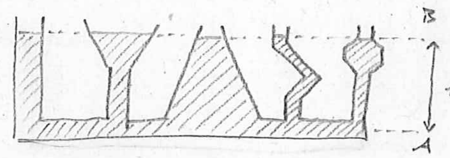
$$\frac{V_I}{V} = \frac{\rho_{ghiaccio}}{\rho_{acqua}} = \frac{917\ kg/m^3}{1000\ kg/m^3} = 0.917 \Rightarrow 91.7\%$$

Otteniamo che il 91.7% del ghiaccio è immerso, quindi solo l'8.3% della massa totale di ghiaccio emerge dall'acqua.

Un esempio rilevante è quello degli iceberg, dei quali solo una piccola parte emerge dall'oceano, la maggior parte del loro volume è sotto la superficie dell'acqua.



2.5 IL PRINCIPIO DEI VASI COMUNICANTI



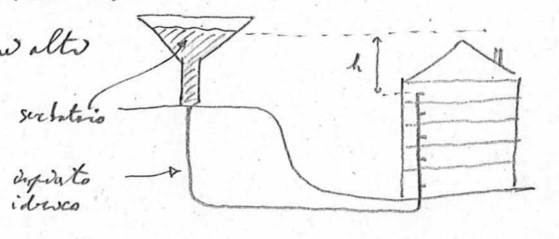
Consideriamo un insieme di contenitori per fluidi collegati tra di loro come per esempio nel disegno a lato. Questi contenitori sono detti *vasi comunicanti*. Quando vengono riempiti con un liquido (in presenza di gravità) il liquido stesso si dispone in modo da raggiungere all'equilibrio la stessa altezza in tutti i contenitori, indipendentemente dalla loro forma. Se dell'altro liquido viene aggiunto in uno dei contenitori, allora il livello negli altri contenitori si adatterà in modo che siano di nuovo tutti alla stessa altezza. Questo fenomeno è detto *principio dei vasi comunicanti*.

Questo principio è una semplice conseguenza della legge di Pascal, che afferma che la pressione esercitata su un punto di un fluido è trasmessa integralmente a tutti gli altri punti del fluido stesso. Per vedere come questo implica il principio dei vasi comunicanti vediamo quale è la pressione alla base di ogni contenitore. Poiché la pressione dipende solo dalla profondità abbiamo che alla base di ogni contenitore

$$P = \rho g \cdot h .$$

Visto che i vasi contenitori sono in comunicazione tra di loro, la pressione nel punto di comunicazione deve essere uguale, quindi h deve essere uguale in tutti i contenitori.

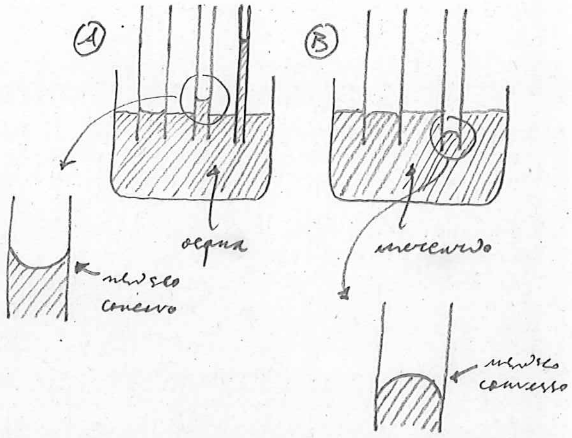
Il principio dei vasi comunicanti è estremamente importante per gli impianti idraulici. In un acquedotto l'acqua raggiungerà la stessa altezza in tutte le parti del sistema indipendentemente da come i tubi sono collegati e dalla loro altezza. Per questa ragione si costruiscono serbatoi posti in alto (es. sugli edifici o su alti supporti) in modo che l'acqua, grazie al principio dei vasi comunicanti possa raggiungere con pressione sufficiente i piani alti degli edifici.



2.6. LA CAPILLARITA'

Abbiamo appena discusso il principio dei vasi comunicanti, ora discuteremo delle modifiche a questo principio. Il fatto che l'altezza del liquido è la stessa in tutti i contenitori è valido se i contenitori non sono troppo sottili. Se i vasi (o alcuni dei vasi) sono molto sottili, nel qual caso sono detti capillari, l'altezza del liquido può essere modificata dando origine al fenomeno della CAPILLARITA'.

Il fenomeno della capillarità consiste nel fatto che, se si immerge in un fluido l'estremità di un capillare, il liquido stesso tenderà a disporsi nel capillare a un livello più alto (A) o più basso (B) rispetto al livello del liquido esterno. Inoltre la superficie libera del liquido all'interno del capillare non è piana, ma tende ad assumere una forma curva (menisco), rispettivamente concava nel caso (A) e convessa nel caso (B).



Nel caso (A), che per esempio succede nel caso dell'acqua, il liquido "bagna" le superfici del contenitore (perché le forze di adesione tra liquido e contenitore sono maggiori delle forze di coesione alla superficie del liquido).

Nel caso (B), che per esempio succede con il mercurio, il liquido "non bagna" il contenitore, cioè le forze di coesione prevalgono su quelle di adesione.

Per un capillare cilindrico la differenza di altezza del liquido è inversamente proporzionale al raggio del capillare: r

$$h = \frac{\text{costante}}{r} .$$

· La capillarità è estremamente importante in natura, infatti è un effetto essenziale per permettere la risalita della linfa lungo i fusti delle piante.

· Un altro fenomeno dovuto alla capillarità è l'umidità di risalita. L'acqua che si trova in profondità nel terreno (fino a 4-6 metri sotto terra) risale per capillarità fino alle murature. L'acqua risale nel terreno grazie a sottili dotti naturali che si comportano come capillari.

3. DINAMICA DEI FLUIDI

Fino ad ora ci siamo occupati di fluidi in un regime statico, cioè in quiete. Adesso vogliamo studiare quali leggi regolano il comportamento di un fluido in movimento.

· caratteristiche del flusso

Esistono due principali tipi di flusso:

- flusso stazionario (o laminare): i cammini seguiti da ciascuna particella del fluido sono regolari (cioè senza cambi bruschi di traiettoria) e non si intersecano tra di loro. In questo caso la velocità del fluido in ogni punto rimane costante nel tempo.

- flusso non stazionario (o turbolento): è un flusso irregolare, caratterizzato dalla presenza di vortici.

Il flusso di un fluido è tipicamente stazionario per basse velocità e diventa turbolento per velocità maggiori di un valore critico.

· viscosità

La viscosità è il grado di attrito interno nel flusso di un fluido. E' associata alla resistenza allo scorrimento di due strati adiacenti di fluido. A causa della viscosità parte dell'energia cinetica di un fluido in scorrimento viene "persa", cioè convertita in energia termica.

Il moto di un fluido in generale può essere molto complesso. Per affrontare l'argomento faremo dunque delle ipotesi semplificative:

i) fluido non viscoso: le forze di attrito interno sono trascurabili;

ii) fluido incompressibile: la densità del fluido è uguale in tutti i punti e non cambia nel tempo;

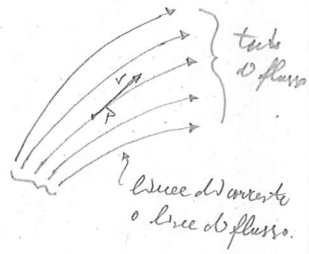
iii) flusso stazionario;

iv) flusso irrotazionale: il momento angolare del fluido è nullo in ogni punto; se una piccola ruota, posta in qualsiasi punto del fluido, non ruota attorno al suo centro di massa, il fluido è irrotazionale.

Le prime due proprietà (non viscosità e incompressibilità) definiscono la nozione di fluido ideale.

3.1 LINEE DI CORRENTE, PORTATA ED EQUAZIONE DI CONTINUITA'

Partiamo definendo le linee di corrente (o linee di flusso) che corrispondono al percorso seguito da una particella del fluido.

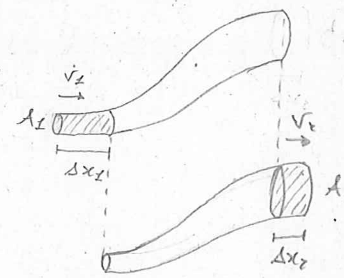


La velocità della particella è sempre tangente alla linea di flusso lungo la quale si muove.

Due linee di corrente non possono incrociarsi, se così fosse all'incrocio di due linee una particella potrebbe seguire due cammini differenti e il flusso non sarebbe stazionario.

Un insieme di linee di corrente (che circondano un'area delimitata) formano un tubo di flusso. E' importante notare che le particelle che sono all'interno di un tubo di flusso non possono uscire fuori. In caso contrario le loro linee di flusso si intersecherebbero con le linee di flusso che delimitano il tubo di flusso.

· Equazione di continuità.



Consideriamo ora un fluido che si muove all'interno di un tubo di flusso di sezione variabile.

Consideriamo il fluido all'estremità sinistra del tubo di flusso. In un piccolo intervallo di tempo Δt esso si muove di una distanza

$$\Delta x_1 = \Delta t \cdot v_1 .$$

Se l'area della sezione del tubo di flusso in questa regione è A_1, allora il volume di fluido nella regione tratteggiata è:

$$\Delta V_1 = \Delta x_1 \cdot A_1 = \Delta t \cdot v_1 \cdot A_1 .$$

Nello stesso intervallo di tempo il fluido all'estremità destra del tubo di flusso si muove di

$$\Delta x_2 = \Delta t \cdot v_2 .$$

occupando un volume

$$\Delta V_2 = \Delta x_2 \cdot A_2 = \Delta t \cdot v_2 \cdot A_2 .$$

Ovviamente il fluido si conserva, quindi, essendo incomprimibile, il volume ΔV_1 deve essere uguale al volume ΔV_2, cioè

$$\Delta V_1 = \Delta V_2 \Rightarrow \Delta t \cdot v_1 \cdot A_1 = \Delta t \cdot v_2 \cdot A_2 \Rightarrow v_1 \cdot A_1 = v_2 \cdot A_2 = \text{costante}$$

Questa equazione è detta equazione di continuità e ci dice che il prodotto della velocità per l'area del tubo di flusso è lo stesso in tutti i punti del tubo. Vediamo quindi che la velocità del fluido è maggiore dove il tubo è più stretto e minore dove è più ampio.

· Portata

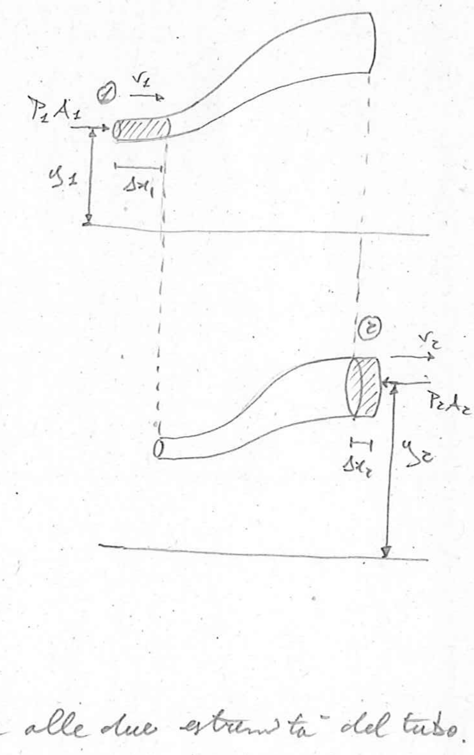
Il prodotto $Q = A \cdot v$ è detto portata e corrisponde al volume di liquido che attraversa una qualunque sezione del tubo di flusso nell'unità di tempo.
La portata ha le dimensioni di volume/tempo e si può ad esempio misurare in m^3/s.

L'equazione di continuità $Q = Av =$ costante è semplicemente equivalente al fatto che la quantità di fluido che entra da una estremità del tubo di flusso in un dato intervallo di tempo è uguale alla quantità di fluido che esce dal tubo stesso nello stesso intervallo di tempo.

· Esempio. Quando utilizziamo un tubo di plastica per innaffiare il giardino, se vogliamo far arrivare il getto d'acqua più lontano possiamo mettere un dito a chiudere parzialmente la bocca del tubo. In questo modo l'area della bocca del tubo si riduce e per l'equazione di continuità la velocità dell'acqua aumenta, permettendo al getto di arrivare più lontano.

3.2. TEOREMA DI BERNOULLI

Vediamo ora cosa succede quando un fluido scorre all'interno di un tubo di sezione ed altezza variabili. La relazione che lega pressione, velocità e altezza fu scoperta da Bernoulli (1700-1782).



Consideriamo il flusso del fluido attraverso il tubo in un piccolo intervallo di tempo Δt. Vediamo le forze agiscono sul fluido.
Sul liquido all'estremità sinistra viene esercitata una forza

$$F_1 = P_1 \cdot A_1$$

dove P_1 è la pressione al punto 1 e A_1 è la sezione del tubo.
Il lavoro fatto da questa forza è

$$W_1 = F_1 \cdot \Delta x_1 = P_1 \cdot A_1 \cdot \Delta x_1 = P_1 \cdot V$$

dove V è il volume di fluido che si è spostato nel tempo Δt.

Facciamo la stessa cosa all'estremità destra:

$$F_2 = -P_2 \cdot A_2$$

quindi il lavoro è

$$W_2 = -F_2 \cdot \Delta x_2 = -P_2 \cdot A_2 \cdot \Delta x_2 = -P_2 \cdot V.$$

Ovviamente il volume del liquido che si è spostato è uguale alle due estremità del tubo.
Da notare che il lavoro W_1 è positivo, visto che è fatto dalla pressione esterna nella stessa direzione della velocità (la pressione P_1 spinge il fluido ad entrare nel tubo), mentre W_2 è negativo (la pressione P_2 va in verso contrario al moto, quindi si oppone alla fuoriuscita del fluido).

Quindi il lavoro netto fatto sul fluido è

$$\underline{W = W_1 + W_2 = (P_1 - P_2)\, V}.$$

Questo lavoro netto ha due effetti: porta cambia l'energia cinetica del fluido nel volumetto che si è spostato e porta cambia l'energia potenziale gravitazionale (cioè il fatto che il volumetto di fluido ha cambiato altezza).

La variazione di energia cinetica è data da

$$\Delta K = K_2 - K_1 = \frac{1}{2} m v_2^2 - \frac{1}{2} m v_1^2 = \frac{1}{2} m (v_2^2 - v_1^2) .$$

dove m è la massa di liquido contenuta nel volumetto, ovvero

$$m = \rho \cdot A_1 \cdot \Delta x_1 = \rho \cdot A_2 \cdot \Delta x_2 = \rho \cdot V .$$

La variazione di energia potenziale è invece

$$\Delta U = m g y_2 - m g y_1 = m g (y_2 - y_1) .$$

Da notare che la variazione di energia cinetica e di energia potenziale è solo quella dei volumetti alle estremità del tubo. Il fluido nella porzione centrale del tubo è esattamente nelle stesse condizioni all'inizio e alla fine dell'intervallo di tempo, quindi la sua energia totale è esattamente la stessa.

Ora possiamo mettere tutto insieme. Il lavoro totale fatto sul sistema è uguale alla variazione di energia cinetica più energia potenziale, quindi

$$L = \Delta K + \Delta U .$$

Da cui otteniamo

$$(P_1 - P_2) V = \frac{1}{2} m (v_2^2 - v_1^2) + m g (y_2 - y_1)$$

dividendo per V otteniamo

$$P_1 - P_2 = \frac{1}{2} \rho (v_2^2 - v_1^2) + \rho g (y_2 - y_1)$$

e riarrangiando i termini:

$$P_1 + \frac{1}{2} \rho v_1^2 + \rho g h_1 = P_2 + \frac{1}{2} \rho v_2^2 + \rho g h_2 .$$

Questo è il teorema di Bernoulli, che può essere espresso come

$$\underline{P + \frac{1}{2} \rho v^2 + \rho g h = \text{costante}} ,$$

cioè la somma della pressione (P), dell'energia cinetica per unità di volume ($\frac{1}{2}\rho v^2$) e dell'energia potenziale gravitazionale per unità di volume ($\rho g h$) è costante in tutti i punti di una linea di corrente.

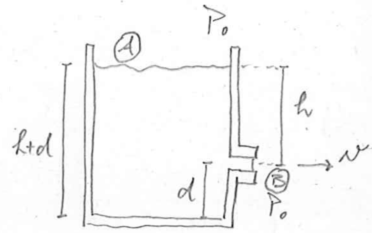
· Test rapido. Il teorema di Bernoulli si applica anche quando il fluido è fermo $v_1 = v_2 = 0$. In questo caso otteniamo

$$P_1 - P_2 = \rho g (h_2 - h_1)$$

cioè l'equazione che lega la pressione con la profondità in un fluido, che avevamo derivato in un modo diverso nella sezione 2.2.

· Esempio   La legge di Torricelli

Consideriamo un recipiente pieno di un liquido con un foro posto ad una profondità h rispetto alla superficie del liquido. Con che velocità il liquido fuoriesce dal foro?



Per risolvere il problema applichiamo il teorema di Bernoulli considerando la superficie del liquido e il foro. Visto che il foro è molto più piccolo della superficie del liquido, la quantità di acqua che fuoriesce è poca, confrontata col volume totale del liquido e la superficie del liquido è circa ferma alla stessa altezza. Allora abbiamo nel punto A:

$$P_0 + \rho g (h+d),$$

dove P_0 è la pressione esterna (per es. la pressione atmosferica). Nel punto B (il foro) invece il fluido fuoriesce con velocità v, quindi

$$P_0 + \rho g d + \frac{1}{2}\rho v^2 .$$

Usando il teorema di Bernoulli

$$\cancel{P_0} + \rho g (h+d) = \cancel{P_0} + \rho g d + \frac{1}{2}\rho v^2$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{2}\rho v^2 = \rho g h \Rightarrow \underline{v = \sqrt{2gh}}$$

Come si vede la velocità di fuoriuscita del fluido dipende solo dalla profondità del foro rispetto alla superficie del liquido h. Inoltre essa è uguale alla velocità che acquista un grave in caduta libera dopo aver percorso una distanza verticale h. Questo risultato è noto come <u>legge di Torricelli</u>.

3.3. ENERGIA EOLICA

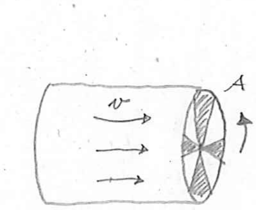
Per concludere la nostra discussione sulla dinamica dei fluidi cerchiamo di capire come funzionano i generatori di energia eolica. L'energia eolica è l'energia portata dal vento, che, come ben noto, può essere sfruttata per generare energia elettrica (es. impianti eolici).

L'energia eolica non è nient'altro che l'energia cinetica dell'aria in movimento. Possiamo quindi usare i metodi sviluppati in questo corso per stimarne la potenza. L'energia cinetica di una colonna d'aria in movimento per unità di volume è:

$$\frac{\text{energia cinetica}}{\text{volume}} = \frac{1}{2}\rho v^2$$

dove v è la velocità del vento e ρ è la densità dell'aria.

La quantità d'aria che attraversa una turbina di sezione A nell'unità di tempo è data da



$$A \cdot v \cdot \Delta$$

Quindi la quantità di energia trasportata dall'aria che attraversa la turbina nell'unità di tempo, cioè la potenza, è

$$\text{potenza} = \frac{\text{energia cinetica}}{\text{volume}} \times \frac{\text{volume}}{\text{tempo}} = \left(\tfrac{1}{2}\rho v^2\right)\cdot(A v) = \tfrac{1}{2}\rho v^3 A .$$

La potenza per unità di area è quindi

$$\frac{\text{potenza}}{\text{area}} = \frac{1}{A}\cdot\left(\tfrac{1}{2}\rho v^3 A\right) = \tfrac{1}{2}\rho v^3 .$$

Facciamo delle stime numeriche. Se la velocità del vento è di $12\,m/s$ ($\simeq 43\,km/h$) allora la potenza per metro quadro è

$$\frac{\text{potenza}}{\text{area}} = \frac{1}{2}\left(1.3\,kg/m^3\right)\cdot\left(12\,m/s\right)^3 \simeq 1100\,\frac{W}{m^2} = 1.1\,\frac{kW}{m^3}$$

cioè circa 1 kW per m^2. Ovviamente tutta questa potenza potrebbe essere sfruttata solo fermando completamente l'aria, il che non è possibile. La quantità effettivamente sfruttabile è circa la metà di questa stima.

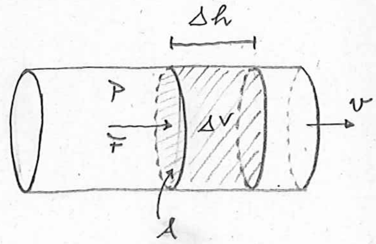
C'è un'altra cosa interessante da notare. La potenza per unità di area dipende dal cubo della velocità del vento. Questo significa che una piccola variazione di quest'ultima ha un grosso impatto. Se la velocità del vento raddoppia allora la potenza diventa 8 volte più grande, mentre se la velocità diventa la metà la potenza diventa 8 volte più piccola.

3.4 LAVORO E POTENZA NEI LIQUIDI

Per gestire al meglio gli impianti idraulici è utile conoscere la relazione tra i concetti introdotti in precedenza per un fluido in movimento, ossia pressione e portata, e i concetti meccanici di lavoro e potenza.

Abbiamo visto che una pressione corrisponde ad una forza esercitata da un fluido, quando questa forza agisce su una superficie o su un sistema in movimento allora essa genera un lavoro. Abbiamo già usato il concetto di lavoro di un fluido in modo "implicito" per ricavare il teorema di Bernoulli, ora considereremo più a fondo questo concetto.

Supponiamo che un fluido con pressione P sia contenuto in una condotta cilindrica di sezione di area A, come mostrato in figura. Supponiamo che il fluido sia spinto dalla pressione P verso l'estremità destra della condotta per un tratto Δh, producendo quindi uno spostamento di un volume $\Delta V = A\cdot\Delta h$.



Il fluido è spinto in avanti dalla forza di pressione, ovvero $F = P\cdot A$. Di conseguenza il fluido nel volume ΔV riceve un lavoro

$$L = F\cdot\Delta h = P\cdot A\cdot\Delta h = P\cdot\Delta V .$$

Possiamo esprimere questo risultato nella seguente forma:

Il lavoro di una pressione è uguale al prodotto della pressione che spinge il fluido per il volume di fluido che attraversa una sezione della condotta.

Vediamo ora quale è la potenza esercitata dalla pressione. La potenza è semplicemente il lavoro nell'unità di tempo. Se il lavoro è L ed è eseguito in un intervallo di tempo Δt, allora la potenza W è: $W = L/\Delta t$.

Nel caso che abbiamo discusso prima troviamo

$$W = \frac{L}{\Delta t} = \frac{P\cdot\Delta V}{\Delta t} = P\cdot A\cdot\frac{\Delta h}{\Delta t} = P\cdot A\cdot v,$$

infatti Δt è il tempo che il volumetto di fluido impiega per spostarsi di Δh, quindi $\Delta h/\Delta t = v$ è la velocità del fluido. Possiamo notare che $A\cdot v = Q$ non è altro che la portata del fluido, quindi otteniamo

$$W = P\cdot Q$$

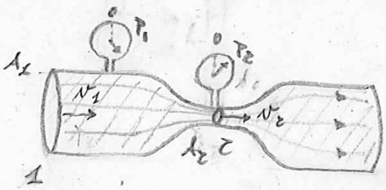
ovvero:

La potenza di una pressione è data dal prodotto della pressione che spinge il fluido per la sua portata.

3.5 L'EFFETTO VENTURI

Studiamo un'altra conseguenza del teorema di Bernoulli, nota come effetto Venturi. Consideriamo una condotta orizzontale ma di sezione variabile, per esempio come quella mostrata in figura. Applichiamo il teorema di Bernoulli alle sezioni 1 e 2:

$$P_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = P_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 \qquad (*)$$



Utilizziamo ora l'equazione di continuità:

$$A_1\cdot v_1 = A_2\cdot v_2 \Rightarrow v_2 = v_1\cdot\frac{A_1}{A_2}.$$

Sostituendo in (*) e riarrangiando i termini:

$$P_2 - P_1 = \frac{1}{2}\rho\left(v_1^2 - v_2^2\right) = \frac{1}{2}\rho\left(v_1^2 - v_1^2\frac{A_1^2}{A_2^2}\right) = \frac{1}{2}\rho v_1^2\left(1 - \frac{A_1^2}{A_2^2}\right)$$

Abbiamo ottenuto un risultato a prima vista sorprendente:

Quando la sezione di un tubo di flusso si restringe la velocità del fluido aumenta e la pressione diminuisce.

Infatti se $A_1 > A_2$ allora

$$P_2 - P_1 = \frac{1}{2}\rho v_1^2 \underbrace{\left(1 - \frac{A_1^2}{A_2^2}\right)}_{<0} < 0$$

o equivalentemente $v_2 > v_1$ quindi $P_2 - P_1 = \frac{1}{2}\rho\left(\overbrace{v_1^2 - v_2^2}^{<0}\right) < 0$.

Raccogliamo qui alcuni esercizi relativi alla meccanica e alla dinamica dei fluidi.

1.) UNITA' DI MISURA DELLA PRESSIONE

Oltre al Pa (pascal) che è l'unità di misura delle pressioni nel sistema Internazionale (SI) esistono altre unità utilizzate abbastanza frequentemente. Ecco le più utili:

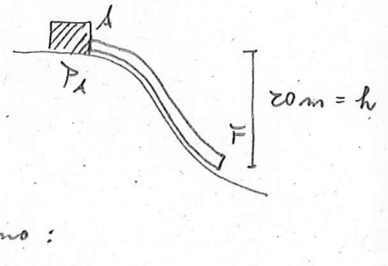
- $1\ Pa = 1\ N/m^2$;
- $1\ bar = 100000\ Pa = 10^5\ Pa$ esiste anche il millibar che corrisponde ad 1/1000 bar, cioè $1\ mbar = 10^{-3}\ bar = 100\ Pa$; usata frequentemente in meteorologia;
- $1\ atm$ (atmosfera) $= 1.013 \cdot 10^5\ Pa$ corrisponde circa alla pressione standard atmosferica al livello del mare;
- $1\ Torr$ (torricelli) $= 1\ mmHg$ (millimetro di mercurio) $= \frac{1}{760}\ atm = 133.3\ Pa$; definito come la pressione esercitata da una colonnina di 1 mm di mercurio.

. Trasformare 3000 Pa in mbar, bar, atm e mmHg:

Soluzione:
$$3 \cdot 10^3\ Pa = \frac{3 \cdot 10^3}{100}\ mbar = 30\ mbar;$$
$$3 \cdot 10^3\ Pa = \frac{3 \cdot 10^3}{10^5}\ bar = 3 \cdot 10^{-2} = 0.03\ bar;$$
$$3 \cdot 10^3\ Pa = \frac{3 \cdot 10^3}{1.013 \cdot 10^5}\ atm = 2.96 \cdot 10^{-2}\ atm;$$
$$3 \cdot 10^3\ Pa = \frac{3 \cdot 10^3}{133.3}\ mmHg = 22.5\ mmHg.$$

2.) TUBATURA IN DISCESA

Una tubatura porta l'acqua da un deposito in collina a valle. La tubatura scende lungo la collina sino ad arrivare ad una fontanella posta 20 m a valle del deposito A. Nel punto A la pressione dell'acqua è $380000\ Pa = 3.8 \cdot 10^5\ Pa$. La fontanella ha una superficie di uscita di $5\ cm^2$. Con quale forza l'acqua esce dalla fontanella? Si tenga conto che all'esterno c'è una pressione atmosferica $1.013 \cdot 10^5\ Pa$ e che l'acqua ha un peso specifico $9800\ N/m^3$.



Soluzione: La forza dell'acqua in uscita è semplicemente data dal prodotto della pressione all'uscita per l'area della superficie di uscita: $A_F = 5\ cm^2 = 5 \cdot 10^{-4}\ m^2$.
Per calcolare la pressione di uscita usiamo la legge di Stevino:
$$P = P_A + \rho g \cdot h = 3.8 \cdot 10^5\ Pa + (9800\ N/m^3) \cdot (20\ m) = 576000\ Pa$$
(da notare che il peso specifico è uguale a $\rho \cdot g$, in quanto è il peso per unità di volume: peso specifico $= \frac{m \cdot g}{V} = \frac{(\rho \cdot V) \cdot g}{V} = \rho \cdot g$).

Ovviamente all'uscita dell'acqua la pressione atmosferica agirà come pressione esterna che frena il flusso dell'acqua. Quindi la pressione che genera la forza in F è uguale a

$$P_F = P - P_{atm} = 576000\,Pa - 101300\,Pa = 474700\,Pa.$$

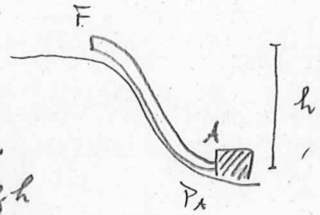
La forza con cui l'acqua fuoriesce è quindi

$$F = P_F \cdot A_F = 474700\,Pa \cdot 5 \cdot 10^{-4}\,m^2 = 237.35\,N.$$

3.) TUBATURA IN SALITA

Consideriamo ora il problema di una tubatura in salita. In questo caso la tubatura parte da valle nel punto A in cui la pressione dell'acqua è ancora 380000 Pa e sale per 20 m fino alla fontanella di sezione 5 cm². Ripetere il calcolo dell'esercizio 2.

Soluzione: Essendo la tubatura in salita la pressione sarà minore in F rispetto ad A. Possiamo di nuovo usare la legge di Stevino, ma stavolta considerando h come negativa $= -20\,m$.



(In alternativa si può vedere come $P_A = P_F + \rho g h \Rightarrow P_F = P_A - \rho g h$ dove ora h è considerata come positiva)

Quindi otteniamo che la pressione che spinge l'acqua a fuoriuscire è

$$P = 380000\,Pa + (9800\,N/m^3)(-20\,m) = 184000\,Pa.$$

Anche ora dobbiamo sottrarre la pressione atmosferica, quindi

$$P_F = 184000\,Pa - 101300\,Pa = 82700\,Pa$$

e la forza è

$$F = (82700\,Pa) \cdot (5 \cdot 10^{-4}\,m^2) = 41.35\,N.$$

Calcolare ora a che altezza potrebbe arrivare la tubatura in modo da continuare a far fuoriuscire acqua.

Soluzione: Dobbiamo calcolare l'altezza h a cui la pressione interna alla fontanella è uguale alla pressione atmosferica. Quindi usando la legge di Stevino abbiamo

$$P = P_A + \rho g h = P_{atm} \Rightarrow \rho g h = P_{atm} - P_A$$

$$\Rightarrow h = \frac{1}{\rho \cdot g}(P_{atm} - P_A)$$

Utilizziamo questa formula per trovare

$$h = \frac{1}{9800\,N/m^3}(101300\,Pa - 380000\,Pa) = -28.44\,m.$$

Quindi se la tubatura salisse per 28.44 m l'acqua cesserebbe di fuoriuscire.