4. LA TEORIA CINETICA DEI GAS (CENNI)

Abbiamo già accennato il fatto che la temperatura è legata all'energia interna di un sistema. Per essere precisi, la temperatura è legata all'energia cinetica dei moti "disordinati" delle molecole di un sistema, ovvero ai moti vibrazionali delle molecole nei solidi o ai moti caotici delle molecole di un liquido o un gas.

In questa sezione studieremo meglio questa connessione nel caso di un gas ideale. In particolare vedremo quale è il significato microscopico (a livello molecolare) sia della pressione sia della temperatura di un gas ideale.

Per studiare questa connessione dobbiamo introdurre un modello molecolare di un gas ideale, cioè una rappresentazione "semplificata" del comportamento molecolare di un gas. Questo tipo di modello è noto come <u>TEORIA CINETICA</u> dei gas. La teoria cinetica è basata sulle seguenti ipotesi (che servono per semplificare il problema da studiare):

i) <u>gas rarefatto</u>: il numero di molecole è grande ma la distanza di separazione tra di esse è grande confrontata con le loro dimensioni. Le molecole, quindi, occupano una parte trascurabile del volume del contenitore;

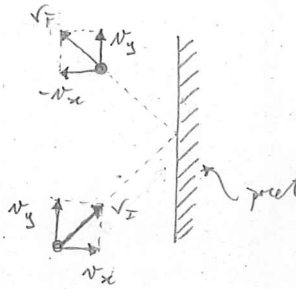
ii) <u>moto casuale</u>: le molecole seguono le leggi del moto di Newton, ma i loro moti sono "casuali", ovvero le loro velocità e posizioni sono distribuite "a caso". Questo non significa che tutte le velocità siano equiprobabili, ma soltanto che le diverse molecole hanno le direzioni delle velocità distribuite uniformemente. (Va notato che le velocità delle molecole hanno una distribuzione ben definita che dipende solo dalla temperatura e non varia nel tempo.);

iii) <u>interazioni a corto raggio</u>: le molecole interagiscono tra di loro solo quando urtano tra di loro, nel qual caso si comportano come durante un urto elastico (ovvero si conserva l'energia cinetica delle molecole). Da notare che per semplicità trascureremo gli urti tra le molecole, che in ogni caso non sono rilevanti per i risultati che discuteremo;

iv) <u>urti elastici con le pareti</u>: le molecole urtano elasticamente con le pareti del contenitore, ovvero la loro energia cinetica rimane invariata durante un urto.

v) <u>sostanza pura</u>: il gas è formato da un solo tipo di molecole tutte uguali tra di loro.

Come prima applicazione della teoria cinetica studiamo l'origine della pressione in un gas. La pressione è dovuta agli urti delle molecole contro le pareti del contenitore. Vediamo come questo avviene considerando una molecola.



Poiché gli urti contro le pareti sono elastici, una molecola che urta acquisirà una velocità finale uguale in grandezza a quella prima dell'urto ma con la componente perpendicolare alla parete col verso rovesciato: $\begin{cases} v_x \to -v_x \\ v_y \to v_y \end{cases}$

(per analogia possiamo pensare ad una palla da biliardo che urta contro uno dei bordi del biliardo e viene riflessa, esattamente come la molecola che stiamo considerando).

Vediamo quale è la variazione di quantità di moto della molecola: $p_I - p_F$. Poiché solo la velocità perpendicolare alla parete cambia abbiamo che la quantità di moto lungo la parete ($p_y = v_y \cdot m$) rimane invariata. Al contrario la velocità perpendicolare alla parete viene invertita, quindi

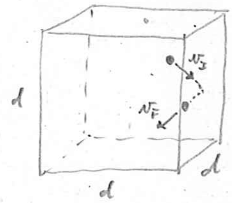
$$\Delta p_x = p_x^F - p_x^I = m(\underset{\text{velocità } x \text{ finale}}{v_x^F} - \underset{\text{velocità } x \text{ iniziale}}{v_x^I}) = m(-v_x - v_x) = -2 m v_x .$$

Applicando il teorema dell'impulso troviamo che la variazione della quantità di moto è data dalla forza applicata alla particella F per l'intervallo di tempo in cui la forza agisce Δt:

$$F \cdot \Delta t = \Delta p_x = -2 m v_x .$$

Per calcolare $F \cdot \Delta t$ possiamo identificare questa quantità con la forza media nell'intervallo di tempo tra due urti. Se il recipiente è un cubo di dimensione d, allora la particella deve percorrere una distanza $2d$ tra due urti sulla stessa parete, quindi possiamo stimare

$$\Delta t = \frac{2d}{v_x} .$$



La forza media $\bar{F}$ che una molecola esercita sulla parete è quindi

$$\bar{F} = -F = \frac{2 m v_x}{\Delta t} = \frac{m v_x^2}{d}$$

Da notare che abbiamo cambiato il segno a F per calcolare la forza che la molecola produce sulla parete. Infatti F è la forza che la parete esercita sulla molecola, quindi per il principio di azione e reazione la forza che la particella esercita sulla parete è uguale e opposta: $\bar{F} = -F$.

Possiamo ora sommare su tutte le molecole del gas ottenendo la forza totale sulla parete

$$\bar{F}_{TOT} = \sum_i \frac{m v_{xi}^2}{d} = \frac{m}{d} \sum_i v_{xi}^2 = \frac{m}{d} \underset{\text{numero di molecole}}{N} \cdot \overline{v_{xi}^2}$$

dove $\overline{v_{xi}^2} = \frac{1}{N} \sum_i v_{xi}^2$ è la velocità quadratica media delle molecole del gas, ovvero la media del quadrato della velocità delle molecole lungo x.

Poiché il gas è isotropo, allora le velocità delle molecole lungo x, y e z sono uguali, quindi

$$\overline{v_x^2} = \overline{v_y^2} = \overline{v_z^2}.$$

Usando la composizione delle velocità

$$v^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2$$

otteniamo che la media di v^2 è data da

$$\overline{v^2} = \overline{v_x^2} + \overline{v_y^2} + \overline{v_z^2} = 3\,\overline{v_x^2} = 3\overline{v_y^2} = 3\,\overline{v_z^2}$$

ovvero

$$\overline{v_x^2} = \overline{v_y^2} = \overline{v_z^2} = \frac{1}{3}\,\overline{v^2}$$

Sostituendo nell'espressione per la forza media troviamo

$$\overline{F}_{TOT} = \frac{m}{d} N \cdot \frac{1}{3}\,\overline{v^2}.$$

La pressione è la forza diviso l'area della parete, cioè d^2, quindi

$$\underline{P = \frac{\overline{F}_{TOT}}{d^2} = \frac{N}{d^3}\frac{1}{3}\,m\,\overline{v^2} = \frac{2}{3}\left(\frac{N}{V}\right)\left(\frac{1}{2}m\,\overline{v^2}\right).} \qquad (*)$$

Questa formula ci dice che la pressione P è legata all'energia cinetica media delle molecole $\frac{1}{2}m\,\overline{v^2}$.

Possiamo ora legare il concetto di temperatura all'energia cinetica delle molecole. Riscriviamo la relazione (*) nella forma

$$P \cdot V = \frac{2}{3} N \left(\frac{1}{2} m\,\overline{v^2}\right).$$

Confrontiamo questo risultato con l'equazione di stato dei gas perfetti

$$P \cdot V = N k_B T.$$

In questo modo troviamo

$$k_B T = \frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}m\,\overline{v^2}\right) \Rightarrow \underline{T = \frac{2}{3k_B}\left(\frac{1}{2}m\,\overline{v^2}\right)}$$

ovvero la temperatura è data semplicemente da 2/3 per l'energia cinetica media delle molecole del gas diviso la costante di Boltzmann.