

Appunti per il corso di
**COMPLEMENTI DI METODI MATEMATICI
PER LA FISICA**
(SECONDO MODULO)

Giuliano Panico

*Dipartimento di Fisica e Astronomia
Università degli Studi di Firenze*

A.A. 2019/2020

REVISIONE 2021/2022

INDICE

Prefazione	v
-------------------	----------

PARTE I ELEMENTI DI TEORIA DELLE DISTRIBUZIONI

1 Spazi metrici, normati, di Hilbert	3
1.1 Spazi metrici	3
1.2 Spazi normati e spazi di Banach	8
1.3 Spazi con prodotto interno e spazi di Hilbert	10
2 Distribuzioni	17
2.1 Spazio \mathcal{D} di funzioni di test	18
2.2 Distribuzioni in \mathcal{D}	19
2.3 Operazioni sulle distribuzioni	21
2.4 Distribuzioni temperate	25
2.5 Successioni di distribuzioni	28
2.5.1 Differenziazione rispetto ad un parametro	30
2.5.2 δ -famiglie	30
2.6 Prodotto diretto di distribuzioni e prodotto di convoluzione	33
2.7 Esercizi	35
3 Trasformata di Fourier di distribuzioni temperate	39
3.1 Definizione ed esempi	39
3.2 Esercizi	42

PARTE II EQUAZIONI DIFFERENZIALI ORDINARIE

4 Proprietà generali delle equazioni differenziali	47
4.1 Generalità	47
4.2 Teoremi di esistenza ed unicità	48
4.3 Equazioni differenziali e distribuzioni	51

5	Equazioni differenziali lineari del primo ordine	53
5.1	Considerazioni generali	53
5.2	L'equazione omogenea associata	55
5.3	Soluzione completa: Metodo della variazione delle costanti	55
5.4	Soluzione completa: Metodo della funzione di Green	57
5.5	Esempi	60
5.6	Esercizi	62
6	Equazioni differenziali lineari del secondo ordine	65
6.1	Considerazioni generali	65
6.2	Equazioni omogenee a coefficienti costanti	67
6.3	Equazioni di Eulero	67
6.4	Metodo del wronskiano	69
6.4.1	Proprietà del wronskiano per equazioni del secondo ordine	69
6.4.2	Uso del wronskiano per equazioni del secondo ordine	70
6.5	Metodo della funzione di Green	74
6.5.1	Teorema di Green	76
6.5.2	Teorema dell'alternativa	81
6.5.3	Funzione di Green per il problema di Cauchy	85
6.6	Esercizi	87
7	Sistemi di equazioni differenziali lineari del primo ordine	91
7.1	Il problema di Cauchy per sistemi di equazioni differenziali	91
7.2	Soluzioni del sistema omogeneo associato	93
7.3	Esempi	95
7.4	Esercizi	100

PARTE III EQUAZIONI DIFFERENZIALI LINEARI SU \mathbb{C}

8	Studio dei punti singolari	103
8.1	Un esempio per equazioni del primo ordine	103
8.2	Equazioni del secondo ordine: Punti regolari	104
8.3	Tecnica di Frobenius	106
8.4	Equazioni del secondo ordine: Classificazione dei punti singolari	111
8.5	Sviluppo attorno al punto all'infinito	116
8.6	Esercizi	117
9	Equazioni con uno, due e tre punti singolari regolari	121
9.1	Struttura generale delle equazioni con punti singolari fuchsiani	121
9.2	Trasformazioni conformi	124
9.3	Equazioni con un solo punto singolare regolare	126
9.4	Equazioni con due punti singolari regolari	127
9.4.1	Confluenza	129
9.5	Equazioni con tre punti singolari regolari (Papperitz-Riemann)	129
9.6	Esercizi	131

10 L'equazione ipergeometrica	133
10.1 L'equazione ipergeometrica	133
10.2 La serie ipergeometrica	134
10.3 Proprietà della funzione ipergeometrica	137
10.3.1 Derivate della serie ipergeometrica	137
10.3.2 Rappresentazione mediante integrale euleriano	137
10.3.3 Relazioni per funzioni contigue	139
10.4 Soluzioni di Kummer	140
10.5 Casi particolari	142
10.6 Esercizi	142
11 I polinomi ipergeometrici	147
11.1 I polinomi di Jacobi	147
11.1.1 Ortogonalità dei polinomi di Jacobi	149
11.1.2 Relazioni tra polinomi di Jacobi	150
11.2 I polinomi di Legendre	151
11.3 Esercizi	154
12 L'equazione ipergeometrica confluyente	159
12.1 Ipergeometrica confluyente del primo tipo	159
12.2 Le funzioni di Bessel	160
12.3 I polinomi di Laguerre	162
12.3.1 I polinomi di Hermite	163
12.4 Ipergeometrica confluyente del secondo tipo	164
12.5 Applicazioni alla meccanica quantistica	165
12.5.1 L'oscillatore armonico unidimensionale	165
12.5.2 Particella in un potenziale a simmetria sferica	167
12.6 Esercizi	171
Rassegna di esercizi d'esame	177
Soluzioni degli esercizi	191
Riferimenti bibliografici	209

PREFAZIONE

Queste dispense sono state preparate per il corso “Complementi di Metodi Matematici per la Fisica” incluso nell’offerta formativa per il curriculum teorico della laurea magistrale in Scienze Fisiche e Astrofisiche all’Università di Firenze. Il corso è stato tenuto per la prima volta nell’anno accademico 2019/2020. Le dispense contengono tutti gli argomenti trattati nel secondo modulo del corso (12 lezioni per un totale di 24 ore).

Gli argomenti trattati sono strutturati in tre parti largamente indipendenti tra di loro.

I. Teoria delle distribuzioni.

Contiene una dettagliata introduzione alla teoria delle distribuzioni con particolare attenzione agli aspetti applicativi e computazionali. Il primo capitolo contiene una rassegna di nozioni di base sugli spazi metrici.

II. Equazioni differenziali ordinarie.

Dedicata allo studio delle equazioni differenziali ordinarie. Il primo capitolo contiene una discussione delle proprietà generali di tali equazioni e dei teoremi di esistenza ed unicità. Nei capitoli successivi viene studiata in dettaglio la classe delle equazioni differenziali lineari. Tecniche di soluzione sono presentate per il caso di equazioni del primo e secondo ordine e per i sistemi di equazioni del primo ordine. Tra le tecniche di risoluzione sono prese in considerazione la tecnica della variazione delle costanti, il metodo del wronskiano ed il metodo della funzione di Green.

III. Equazioni differenziali su \mathbb{C} .

Dedicata allo studio delle singolarità delle equazioni differenziali lineari omogenee del secondo ordine. Si parte con la classificazione delle singolarità regolari (o fuchsiane) ed irregolari e con la presentazione della tecnica di risoluzione per serie (di Frobenius). Successivamente si passa ad uno studio dettagliato dell’equazione differenziale ipergeometrica, caratterizzata da tre punti singolari fuchsiani, e delle sue soluzioni. Applicazioni rilevanti delle funzioni ipergeometriche alla fisica (potenziale Newtoniano, armoniche sferiche, autostati per sistemi quantistici) sono anche discusse.

Nota sugli esercizi

La maggior parte dei capitoli contiene una rassegna di esercizi che possono essere utilizzati per la preparazione all’esame. Si noti che alcuni degli esercizi sono pensati come percorsi guidati per l’approfondimento di alcuni argomenti o applicazioni che non sono stati discussi in dettaglio durante il corso. Gli esercizi contrassegnati con * presentano

maggiori difficoltà nella soluzione o sono relativi ad argomenti che si discostano dal profilo del corso, e sono quindi da considerare come accessori.

Le soluzioni (in forma schematica) di buona parte degli esercizi proposti sono raccolte alla fine delle dispense.

Firenze, giugno 2020
Giuliano Panico

PARTE I

ELEMENTI DI TEORIA DELLE DISTRIBUZIONI

SPAZI METRICI, NORMATI, DI HILBERT

L'analisi funzionale trae i suoi sviluppi all'inizio del XX secolo dai lavori di tesi di dottorato di Lebesgue (1902) sull'integrazione, di Frechet (1906) sugli spazi metrici, e dall'articolo di Hilbert del 1912 sui fondamenti di una teoria generale delle equazioni integrali. Ulteriori contributi rilevanti saranno poi dati dalla tesi di Banach (1920), da Sobolev, Neumann, Schwartz e Riesz.

Parecchi problemi in fisica teorica trattano non una singola funzione ma un insieme di funzioni. In molti casi siamo poi interessati al caso in cui questo insieme di funzioni è uno spazio vettoriale. Inoltre, poiché spesso i processi di limite risultano importanti, è necessario dotare questi spazi di metriche o, almeno, di topologie. Gli spazi metrici svolgono nell'analisi funzionale il ruolo della retta \mathbb{R} nell'analisi.

In questo capitolo proporrò una concisa rassegna delle nozioni fondamentali sugli spazi metrici e sugli spazi vettoriali dotati di metrica.

1.1 Spazi metrici

Come primo passo definiamo il concetto di spazio metrico, sul quale si baseranno le successive definizioni di spazi vettoriali dotati di metriche.

Definizione 1.1 (Spazio metrico). Uno *spazio metrico* è una coppia (X, d) dove X è un insieme e d una metrica, ovvero una funzione definita su $X \times X$ che ad ogni coppia di elementi $x, y \in X$ associa un numero reale $d(x, y)$ detto *distanza* tra x e y tale che valgano le seguenti proprietà

$$i) \quad d(x, y) \geq 0, \quad d(x, y) = 0 \text{ se e solo se } x = y \quad (1.1.1)$$

$$ii) \quad d(x, y) = d(y, x) \quad (1.1.2)$$

$$iii) \quad d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y) \quad \forall z \in X \quad (\text{disuguaglianza triangolare}) \quad (1.1.3)$$

La funzione d è detta *distanza* o *metrica*.

Un *sottospazio* (Y, \bar{d}) è un sottoinsieme $Y \subset X$ che ha come metrica \bar{d} la restrizione della metrica d a $Y \times Y$.

Diamo alcuni esempi di spazi metrici.

Esempio 1.1. La retta reale \mathbb{R} con la distanza $d(x, y) = |x - y|$.

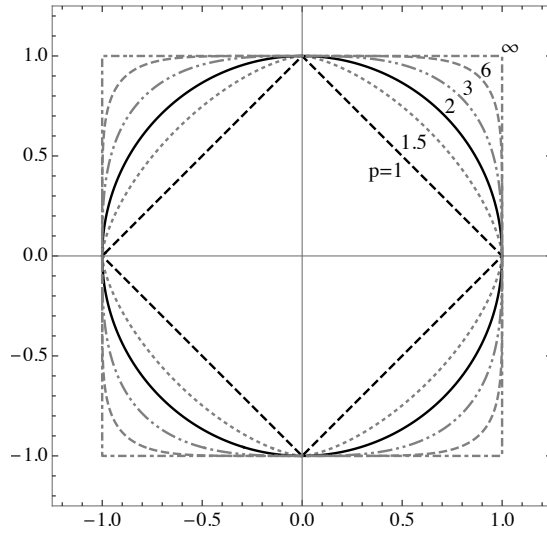


Figura 1.1: Cerchi unitari per le distanze $d_p(x, y)$ in \mathbb{R}^2 .

Esempio 1.2. Il piano complesso \mathbb{C} con la distanza $d(x, y) = |x - y|$.

Esempio 1.3. Lo spazio \mathbb{R}^n può essere dotato di varie metriche date da

$$d_p(x, y) = \left(\sum_{i=1}^n |x_i - y_i|^p \right)^{1/p} \quad 1 \leq p < \infty \quad (1.1.4)$$

e

$$d_\infty = \sup_i \{|x_i - y_i|\} \quad (1.1.5)$$

dove $x = (x_1, \dots, x_n)$ e $y = (y_1, \dots, y_n)$ sono due elementi di \mathbb{R}^n .

La metrica d_2 è la usuale *metrica euclidea*. Si noti che gli spazi metrici (\mathbb{R}^n, d_p) sono tutti distinti, come si può dedurre dai “cerchi unitari” in fig. 1.1.

La disuguaglianza triangolare in (\mathbb{R}^n, d_2) può essere dimostrata facilmente a partire dalla disuguaglianza di Cauchy

$$\left(\sum_{k=1}^n a_k b_k \right)^2 \leq \left(\sum_{k=1}^n a_k^2 \right) \left(\sum_{k=1}^n b_k^2 \right), \quad (1.1.6)$$

che segue direttamente dall'identità

$$\left(\sum_{k=1}^n a_k b_k \right)^2 = \left(\sum_{k=1}^n a_k^2 \right) \left(\sum_{k=1}^n b_k^2 \right) - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (a_i b_j - b_i a_j)^2. \quad (1.1.7)$$

Dalla disuguaglianza di Cauchy possiamo ricavare un caso particolare della disuguaglianza di Minkowski

$$\sum_{k=1}^n (a_k + b_k)^2 \leq \left(\sqrt{\sum_{k=1}^n a_k^2} + \sqrt{\sum_{k=1}^n b_k^2} \right)^2, \quad (1.1.8)$$

da cui, estraendo la radice quadrata e scegliendo $a_k = x_k - z_k$ e $b_k = z_k - y_k$, segue la disuguaglianza triangolare.¹

Esempio 1.4. Consideriamo come spazio X l'insieme delle funzioni continue a valori reali o complessi definite sull'intervallo $[a, b]$, ovvero $C([a, b]; \mathbb{R})$ o $C([a, b]; \mathbb{C})$. Possiamo definire in questi spazi le metriche seguenti ($1 \leq p < \infty$, non necessariamente intero)

$$\begin{aligned} d_1(f, g) &= \int_a^b |f(x) - g(x)| dx \\ d_2(f, g) &= \left[\int_a^b |f(x) - g(x)|^2 dx \right]^{1/2} \\ &\dots \\ d_p(f, g) &= \left[\int_a^b |f(x) - g(x)|^p dx \right]^{1/p} \\ d_\infty(f, g) &= \max_{a \leq x \leq b} |f(x) - g(x)| \end{aligned} \tag{1.1.9}$$

ottenendo gli spazi metrici distinti (X, d_p) .

Esempio 1.5 (Spazi l^p). Sia $p \geq 1$ un numero reale. Definiamo ciascun elemento di l^p come una successione di numeri complessi

$$x = \{\xi_i\} = (\xi_1, \xi_2, \dots) \tag{1.1.10}$$

tale che

$$\sum_{j=1}^{\infty} |\xi_j|^p < \infty. \tag{1.1.11}$$

Dati $\xi, \eta \in l^p$ la distanza è definita da

$$d(x, y) = \left[\sum_{j=1}^{\infty} |\xi_j - \eta_j|^p \right]^{1/p}. \tag{1.1.12}$$

l^p è in generale uno spazio metrico.²

Per $p = 2$ otteniamo il ben noto spazio delle successioni di Hilbert l^2 . Questo spazio fu introdotto e studiato da D. Hilbert (1912) e, oltre ad essere uno spazio metrico, è un esempio di spazio di Hilbert, come vedremo nella sezione 1.3.

È ora utile generalizzare ad arbitrari spazi metrici una serie di concetti che tipicamente sono definiti in \mathbb{R} e \mathbb{C} . Per semplicità denoteremo semplicemente con X lo spazio metrico (X, d) .

¹La disuguaglianza triangolare in (\mathbb{R}^n, d_p) può essere dimostrata a partire da una forma più generale della disuguaglianza di Minkowski, si veda ad esempio [5].

²La disuguaglianza triangolare in l^p può essere dimostrata a partire dalla disuguaglianza di Minkowski, si veda ad esempio [5].

Definizione 1.2 (Sfera aperta e chiusa). Dato un punto $x_0 \in X$ ed un numero reale $r > 0$ definiamo

$$\begin{aligned} B(x_0, r) &= \{x \in X \mid d(x, x_0) < r\} && \text{sfera aperta} \\ \overline{B}(x_0, r) &= \{x \in X \mid d(x, x_0) \leq r\} && \text{sfera chiusa} \end{aligned} \tag{1.1.13}$$

x_0 è il *centro* ed r il *raggio*.

Una sfera aperta $B(x_0, \epsilon)$ è chiamata anche un ϵ -*intorno*. Più in generale, per *intorno* di x_0 intendiamo ogni sottoinsieme di X che contiene un ϵ -intorno di x_0 . Chiamiamo un punto x_0 di un insieme $M \subset X$ *punto interno* se M è un intorno di x_0 .

Definizione 1.3 (Insieme aperto e chiuso). Un sottoinsieme M di uno spazio metrico X è detto *aperto* se $\forall x \in M$ esiste una sfera aperta con centro x completamente contenuta in M , ovvero $B(x, r) \subset M$. Un insieme è detto *chiuso* se il suo complemento in X è aperto.

Possiamo ora definire il concetto di *punto di accumulazione* e la *chiusura* di un insieme.

Definizione 1.4 (Punto di accumulazione). Un punto $x \in X$ è detto *punto di accumulazione* di M se ogni suo intorno contiene almeno un punto $y \in M$ distinto da x .

Definizione 1.5 (Chiusura). La *chiusura* \overline{M} di un insieme è definita come l'insieme costituito da M e da tutti i suoi punti di accumulazione.

Si noti che il concetto di chiusura definito come sopra può essere applicato ad un generico spazio topologico. Nel caso di spazi metrici, come quelli a cui siamo interessati, possiamo sostituire il concetto di intorno con quello di sfera aperta che abbiamo definito precedentemente. La chiusura di un insieme gode di alcune interessanti proprietà.

- i) La chiusura di un insieme M è il più piccolo insieme chiuso che contiene M .
- ii) M è chiuso se e solo se $M = \overline{M}$.

La dimostrazione della proprietà i) può essere trovata sui manuali di topologia, la proprietà ii) è dimostrata nel teorema 1.2.

Definizione 1.6 (Sottoinsieme denso e spazio separabile). Un sottoinsieme M di uno spazio metrico è detto (*ovunque*) *denso* in X se $\overline{M} = X$. X è detto *separabile* se possiede un sottoinsieme *numerabile* che è denso in X .

Definizione 1.7 (Sottoinsieme limitato). Un insieme M si dice *limitato* se esiste un intero $m > 0$ tale che $d(x, y) \leq m \forall x, y \in M$.

Definizione 1.8 (Successione convergente). Una successione $\{x_n\}$ in uno spazio metrico X è definita *convergente* se esiste un $x \in X$ tale che $\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, x) = 0$. In questo caso scriveremo anche $x_n \rightarrow x$. Se $\{x_n\}$ non è convergente, la successione è detta *divergente*.

Definizione 1.9 (Insieme compatto). Un insieme M si dice *compatto* se ogni successione di punti di M contiene una sottosuccessione convergente. M è *relativamente compatto* se \overline{M} è compatto.

Definizione 1.10 (Successione di Cauchy e spazio completo). Una successione $\{x_n\}$ in uno spazio metrico X è detta *di Cauchy* se $\forall \epsilon > 0$ esiste un $N(\epsilon)$ tale che $d(x_n, x_m) < \epsilon$ per ogni $m, n > N$. Uno spazio è detto *completo* se ogni successione di Cauchy è convergente.

Dimostriamo ora un risultato generale relativo alle successioni convergenti in uno spazio metrico.

Teorema 1.1. Ogni successione convergente in uno spazio metrico è una successione di Cauchy.

Dimostrazione. Se $x_n \rightarrow x$, allora $\forall \epsilon > 0$ esiste un N tale che

$$d(x_n, x) < \frac{\epsilon}{2} \quad \forall n > N. \quad (1.1.14)$$

Pertanto, utilizzando la disuguaglianza triangolare,

$$d(x_m, x_n) < d(x_m, x) + d(x, x_n) < \epsilon \quad \forall n, m > N. \quad (1.1.15)$$

□

Analogamente alla convergenza per le successioni, possiamo definire la convergenza per le serie. Diremo che la serie $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ è convergente se è convergente la successione delle somme parziali $\left\{ \sum_{n=1}^N x_n \right\}$.

Teorema 1.2. Sia M un sottoinsieme di uno spazio metrico X e sia \overline{M} la sua chiusura. Allora $x \in \overline{M}$ se e solo se esiste una successione $\{x_n\}$ in M tendente ad x .

M è chiuso se e solo se per ogni successione $\{x_n\} \subset M$ tale che $x_n \rightarrow x$ si ha che $x \in M$, ovvero se e solo se contiene tutti i suoi punti di accumulazione, ovvero se e solo se $M = \overline{M}$.

Dimostrazione. Dimostriamo la prima parte del teorema. Sia $x \in \overline{M}$. Se $x \in M$, una possibile successione che converge a x è banalmente data da (x, x, x, \dots) . Se $x \notin M$ allora è un punto di accumulazione. Quindi per $n = 1, 2, 3, \dots$ la sfera $B(x, 1/n)$ contiene un $x_n \in M$ e, chiaramente, la successione costruita in questo modo è tale che $x_n \rightarrow x$ per $n \rightarrow \infty$. Per dimostrare l'implicazione inversa, notiamo che se $\{x_n\} \subset M$ e $x_n \rightarrow x$ con $x \notin M$, allora ogni intorno di x contiene punti di M diversi da x , quindi x è un punto di accumulazione di M e dunque $x \in \overline{M}$.

Per dimostrare la seconda parte del teorema partiamo dall'assumere che M sia chiuso. Dalla definizione 1.3, ricaviamo che il complemento di M , che indichiamo con M^c , è aperto. Consideriamo una successione convergente in M , $x_n \rightarrow x$. Poiché $d(x_n, x) \rightarrow 0$ per $n \rightarrow \infty$, non esiste nessuna sfera aperta $B(x, r)$ con $r > 0$ che sia interamente contenuta nel complemento di M . Quindi x non appartiene ad M^c e, di conseguenza, $x \in M$. Per dimostrare l'implicazione inversa, consideriamo $y \in M^c$. Se non esistesse nessuna sfera aperta $B(y, r) \subset M^c$ con $r > 0$, allora per ogni r piccolo a piacere potremmo trovare (almeno) un punto x tale che $d(x, y) < r$. Scegliendo una successione r_n tale che $r_n \rightarrow 0$ per $n \rightarrow \infty$ potremmo quindi costruire una successione x_n convergente a y . Ma allora dovrebbe essere $y \in M$ contrariamente alla nostra assunzione che $y \in M^c$. Concludiamo allora che per ogni $y \in M^c$ esiste una sfera aperta $B(y, r) \subset M^c$ con $r > 0$, quindi M^c è aperto ed M è chiuso. □

Teorema 1.3 (del sottospazio). Un sottospazio M di uno spazio metrico X completo è anch'esso completo se e solo se è chiuso.

Dimostrazione. Supponiamo che M sia completo. Per ogni $x \in \overline{M}$ esiste una successione $\{x_n\}$ che converge a x . Poiché $\{x_n\}$ è una successione di Cauchy (teorema 1.1) ed M è completo, $\{x_n\}$ converge in M . Quindi $x \in M$ e pertanto $M = \overline{M}$ ed è chiuso.

Per l'implicazione contraria, supponiamo che M sia chiuso e $\{x_n\}$ sia una successione di Cauchy in M . Per la completezza di X , la successione converge, $x_n \rightarrow x \in X$. Chiaramente si ha $x \in \overline{M}$. Ma essendo M chiuso, $M = \overline{M}$ e quindi $x \in M$. Dunque ogni successione di Cauchy converge in M ed M è completo. \square

Se uno spazio metrico M non è completo, esso può sempre essere “esteso” in uno spazio completo M^* con una procedura detta *completamento*, in modo che $M \subset M^*$ e $\overline{M} = M^*$.

Esempio 1.6. La retta reale è separabile. Infatti il sottoinsieme \mathbb{Q} dei razionali è denso in \mathbb{R} . Lo spazio \mathbb{Q} dei razionali con la metrica $d(x, y) = |x - y|$ non è completo. Il suo completamento è \mathbb{R} .

Esempio 1.7. Poiché il limite uniforme di una successione di funzioni continue è una funzione continua, ne segue che $(C[a, b], d_\infty)$ è completo.

1.2 Spazi normati e spazi di Banach

Un'importante classe di spazi metrici è ottenuta a partire da spazi vettoriali sui quali si definisce una metrica a partire da una norma. Gli spazi di questo tipo sono detti *spazi normati*. Nel caso in cui lo spazio sia anche completo si parla di *spazio di Banach*. In questa sezione discuteremo brevemente la definizione e le proprietà degli spazi normati e degli spazi di Banach.

Cominciamo ricordando la definizione di spazio vettoriale.

Definizione 1.11 (Spazio vettoriale). Uno *spazio vettoriale* su un campo \mathbb{K} è un insieme X con due operazioni algebriche: l'*addizione* vettoriale e la *moltiplicazione* per un elemento del campo.³ L'*addizione* vettoriale associa ad ogni coppia di vettori (x, y) un vettore $x + y$ in modo che valgano le proprietà commutativa ed associativa dell'addizione. Esiste l'elemento neutro per l'addizione vettoriale, dato dal vettore zero (o nullo) 0 , per il quale vale

$$x + 0 = x \quad \forall x \in X, \quad (1.2.1)$$

inoltre per ogni vettore x esiste l'inverso, $-x$, che soddisfa la relazione

$$x + (-x) = 0. \quad (1.2.2)$$

³Tipicamente nel seguito identificheremo \mathbb{K} con \mathbb{R} oppure \mathbb{C} .

La *moltiplicazione* per un elemento $\alpha \in \mathbb{K}$ associa ad ogni vettore x il vettore αx . La moltiplicazione e l'addizione vettoriale soddisfano le seguenti proprietà

$$\begin{aligned}\alpha(\beta x) &= (\alpha\beta)x \\ 1x &= x \\ \alpha(x+y) &= \alpha x + \alpha y \\ (\alpha+\beta)x &= \alpha x + \beta x\end{aligned}\tag{1.2.3}$$

per ogni $x, y \in X$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$, dove 1 indica l'elemento neutro per la moltiplicazione in \mathbb{K} .

Un *sottospazio* di uno spazio vettoriale X è un sottoinsieme non vuoto Y di X , tale da soddisfare le proprietà dello spazio vettoriale con la restrizione delle operazioni a Y .

Definizione 1.12 (Vettori linearmente dipendenti). Un insieme di vettori x_1, \dots, x_n è *linearmente dipendente* se esistono dei numeri $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{K}$ non tutti nulli tali che

$$a_1x_1 + \dots + a_nx_n = 0.\tag{1.2.4}$$

I vettori sono invece *linearmente indipendenti* se l'equazione (1.2.4) è soddisfatta solo per $a_1 = \dots = a_n = 0$.

Per ogni sottoinsieme $M \subset X$ di vettori, non necessariamente linearmente indipendenti, l'insieme delle loro combinazioni lineari è indicato con $\text{Span } M$. Chiaramente $\text{Span } M$ è un sottospazio vettoriale di X , che si dice *generato* da M .

Uno spazio X è detto di *dimensione finita* se esiste un intero positivo n tale che X contiene un insieme linearmente indipendente di n vettori mentre ogni insieme di $n+1$ vettori è linearmente dipendente. Per definizione $\dim X = 0$ se $X = \{0\}$. Se X non ha dimensione finita, si dice che esso ha *dimensione infinita*.

Definizione 1.13 (Spazio normato). Uno *spazio normato* è uno spazio vettoriale X su un campo \mathbb{K} su cui è definita una funzione *norma* $x \rightarrow \|x\|$ che abbia le proprietà

$$i) \quad \|x\| \geq 0 \quad \forall x \in X\tag{1.2.5}$$

$$ii) \quad \|x\| = 0 \quad \text{se e solo se } x = 0\tag{1.2.6}$$

$$iii) \quad \|\alpha x\| = |\alpha| \|x\| \quad \forall \alpha \in \mathbb{K}\tag{1.2.7}$$

$$iv) \quad \|x+y\| \leq \|x\| + \|y\| \quad \forall x, y \in X \quad (\text{disuguaglianza triangolare})\tag{1.2.8}$$

Una norma su X può essere usata per indurre una metrica, data da

$$d(x, y) = \|x - y\|.\tag{1.2.9}$$

Quindi uno spazio normato è naturalmente dotato di una struttura di spazio metrico. Si noti che dalla disuguaglianza triangolare per la norma discende la disuguaglianza triangolare per la metrica. Il campo \mathbb{K} è detto *campo scalare* dello spazio vettoriale X . X è detto *spazio vettoriale reale* se $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, mentre è detto *spazio vettoriale complesso* se $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

Definizione 1.14 (Spazio di Banach). Uno spazio normato completo nella metrica indotta dalla norma è detto *spazio di Banach*.

Elenchiamo ora alcuni esempi di spazi metrici e di spazi di Banach.

Esempio 1.8. Nello spazio $(C[a, b], d_\infty)$ possiamo ricavare la metrica d_∞ dalla seguente norma

$$\|f\| = \max_{a \leq x \leq b} |f(x)|. \quad (1.2.10)$$

Questo spazio è completo, è quindi uno spazio di Banach.

Esempio 1.9. Nello spazio $(C[a, b], d_2)$ possiamo ricavare la metrica d_2 dalla seguente norma

$$\|f\| = \left[\int_a^b |f(x)|^2 dx \right]^{1/2}. \quad (1.2.11)$$

Questo spazio normato non è completo. Per esempio la successione di funzioni continue

$$u_k(x) = \begin{cases} 0 & a \leq x \leq \frac{a+b}{2} \\ k \left(x - \frac{a+b}{2} \right) & \frac{a+b}{2} < x \leq \frac{a+b}{2} + \frac{1}{k} \\ 1 & \frac{a+b}{2} + \frac{1}{k} < x \leq b \end{cases} \quad (1.2.12)$$

è una successione di Cauchy nella metrica d_2 , ma converge per $k \rightarrow \infty$ alla funzione discontinua $\theta \left(x - \frac{a+b}{2} \right)$.

Il completamento di questo spazio è $L^2[a, b]$. Lo spazio $L^2[a, b]$ è separabile, poiché l'insieme di tutti i polinomi, che è numerabile, è denso in $L^2[a, b]$. In modo simile anche $L^2(\mathbb{R})$ è separabile.

Esempio 1.10. Consideriamo l'insieme $L^1(\mathbb{R})$, ovvero l'insieme delle funzioni integrabili in \mathbb{R} . Dato che una combinazione lineare di funzioni integrabili è ancora integrabile, questo insieme ha la struttura di spazio vettoriale. Possiamo definire una norma come

$$\|f\| = \int_{\mathbb{R}} |f(x)| dx. \quad (1.2.13)$$

È chiaro che valgono le proprietà (1.2.6) e (1.2.7). Tuttavia, affinché sia verificata la (1.2.5), ovvero $\|f\| = 0 \Rightarrow f = 0$, occorre considerare come elementi di L^1 le classi di equivalenza costituite dalle funzioni uguali quasi ovunque. In particolare l'elemento nullo è costituito dalle funzioni che sono zero quasi ovunque.

Quindi L^1 è lo spazio normato i cui elementi sono classi di funzioni integrabili uguali quasi ovunque. Si può dimostrare che lo spazio L^1 è completo [6].

1.3 Spazi con prodotto interno e spazi di Hilbert

Negli spazi normati abbiamo a disposizione le operazioni di addizione di vettori e di moltiplicazioni per scalari. Inoltre il concetto di norma generalizza a questi spazi la nozione di lunghezza di un vettore. Un ulteriore elemento, che ancora manca negli spazi normati, è l'analogo del prodotto scalare tra vettori. Questo ingrediente ci permette di indurre una norma e di definire il concetto di *ortogonalità* tra vettori.

La generalizzazione del prodotto scalare negli spazi normati è data dal *prodotto interno*. Gli spazi con prodotto interno nel caso in cui siano completi sono noti anche come *spazi di Hilbert*. Gli spazi con prodotto interno e gli spazi di Hilbert costituiscono l'argomento di questa sezione.

Partiamo dalla definizione di spazio dotato di prodotto interno.

Definizione 1.15 (Spazio con prodotto interno). Uno *spazio con prodotto interno* o *prehilbertiano* è uno spazio vettoriale su cui è definita un'applicazione da $X \times X$ sul campo \mathbb{K} , detta *prodotto interno* ed indicata con $(x, y) \rightarrow \langle x, y \rangle$ che soddisfa le seguenti proprietà

$$\begin{aligned}\langle x, y + z \rangle &= \langle x, y \rangle + \langle x, z \rangle \\ \langle x, \alpha y \rangle &= \alpha \langle x, y \rangle \\ \langle x, y \rangle &= \overline{\langle y, x \rangle} \\ \langle x, x \rangle &\geq 0, \quad \langle x, x \rangle = 0 \quad \text{se e solo se } x = 0\end{aligned}\tag{1.3.1}$$

per ogni $x, y, z \in X$ e $\alpha \in \mathbb{K}$.⁴ Se X è uno spazio reale abbiamo, al posto della eq. (1.3.1), $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$. Si noti che dalle proprietà del prodotto interno segue che $\langle \alpha x, y \rangle = \alpha \langle x, y \rangle$.

Uno spazio con prodotto interno ha una norma indotta dal prodotto interno e data da

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle},\tag{1.3.2}$$

dalla quale discende la metrica

$$d(x, y) = \|x - y\| = \sqrt{\langle x - y, x - y \rangle}.\tag{1.3.3}$$

Gli spazi con prodotto interno sono quindi automaticamente spazi normati. La norma indotta dal prodotto scalare soddisfa l'*identità del parallelogramma*⁵

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2).\tag{1.3.4}$$

Il prodotto interno inoltre soddisfa le seguenti proprietà.

Teorema 1.4 (Disuguaglianza di Schwarz). Si ha che

$$|\langle x, y \rangle|^2 \leq \langle x, x \rangle \langle y, y \rangle.\tag{1.3.5}$$

Dimostrazione. Osserviamo preliminarmente che per ogni coppia x, z vale $\langle x - z, x - z \rangle \geq 0$, quindi

$$\langle x, x \rangle \geq \langle z, x \rangle + \langle x, z \rangle - \langle z, z \rangle = 2 \operatorname{Re} \langle z, x \rangle - \langle z, z \rangle.\tag{1.3.6}$$

⁴Il simbolo $\overline{\langle y, x \rangle}$ indica il complesso coniugato di $\langle y, x \rangle$.

⁵Si noti che una norma che non derivi da un prodotto interno non soddisfa l'identità del parallelogramma. Si può infatti dimostrare che una norma che soddisfa tale identità può sempre essere ricavata da un opportuno prodotto interno. Esempi di norme che non soddisfano l'identità del parallelogramma sono le norme $\|x\|_p = (\sum_{i=1}^n |x_i|^p)^{1/p}$ per $p \neq 2$.

Se $y = 0$ la disuguaglianza di Schwarz è banalmente soddisfatta. Sia quindi $y \neq 0$ e poniamo $z = (\langle y, x \rangle / \langle y, y \rangle) y$, allora

$$\langle x, x \rangle \geq 2 \operatorname{Re} \frac{\langle \langle y, x \rangle y, x \rangle}{\langle y, y \rangle} - \frac{|\langle y, x \rangle|^2}{\langle y, y \rangle} = 2 \frac{|\langle y, x \rangle|^2}{\langle y, y \rangle} - \frac{|\langle y, x \rangle|^2}{\langle y, y \rangle} = \frac{|\langle y, x \rangle|^2}{\langle y, y \rangle}, \quad (1.3.7)$$

che coincide con la tesi. \square

Usando l'identità di Schwarz si può facilmente dimostrare che la norma indotta dal prodotto interno soddisfa la disuguaglianza triangolare:

$$\|x + y\|^2 = \langle x + y, x + y \rangle \leq \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\|x\|\|y\| = (\|x\| + \|y\|)^2. \quad (1.3.8)$$

Teorema 1.5 (Continuità del prodotto interno). In uno spazio con prodotto interno X , sia data una successione $\{x_n\}$ tale che $x_n \rightarrow x$, allora per ogni $y \in X$ vale che $\langle x_n, y \rangle \rightarrow \langle x, y \rangle$.

Dimostrazione. Per la disuguaglianza di Schwarz abbiamo che

$$|\langle x_n, y \rangle - \langle x, y \rangle|^2 = |\langle x_n - x, y \rangle|^2 \leq \|x_n - x\|^2 \|y\|^2, \quad (1.3.9)$$

dalla quale, data la convergenza della successione, segue la tesi. \square

Questo teorema si generalizza banalmente alle serie convergenti, cioè se $\sum_{n=0}^{\infty} x_n = x$ allora $\sum_{n=0}^{\infty} \langle x_n, y \rangle = \langle x, y \rangle$.

Definizione 1.16 (Spazio di Hilbert). Uno spazio con prodotto interno che sia completo nella metrica indotta dallo stesso prodotto interno è detto *spazio di Hilbert*.

Chiaramente uno spazio di Hilbert è automaticamente uno spazio di Banach. La definizione assiomatica di spazio di Hilbert fu data da Hilbert e Von Neumann (1927-28) in alcuni articoli sulla meccanica quantistica.

Teorema 1.6 (del sottospazio). Sia Y un sottospazio di uno spazio di Hilbert H . Valgono le seguenti affermazioni

- i) Y è completo se e solo se è chiuso
- ii) se Y ha dimensione finita, allora Y è completo.

Dimostrazione. La proprietà i) è una conseguenza del teorema del sottospazio 1.3 per uno spazio metrico. Per la dimostrazione della proprietà ii) si veda ad esempio [5]. \square

Diamo ora alcuni esempi di spazi con prodotto interno e di spazi di Hilbert.

Esempio 1.11. Gli spazi \mathbb{R}^n (\mathbb{C}^n) nelle n -ple di numeri reali (complessi) con prodotto interno definito da

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i \quad \left(\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i^* y_i \right) \quad (1.3.10)$$

sono spazi di Hilbert.

Esempio 1.12 (Spazio l^2). Sullo spazio l^2 definiamo il prodotto interno come

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{\infty} x_i^* y_i, \quad (1.3.11)$$

dove $x = \{x_1, x_2, \dots\}$ e $y = \{y_1, y_2, \dots\}$ sono successioni in l^2 . Si dimostra che l^2 è completo e quindi costituisce uno spazio di Hilbert. l^2 è separabile ed ogni spazio di Hilbert separabile è isomorfo a l^2 .

Esempio 1.13 (Spazio $L^2[a, b]$). Sullo spazio $L^2[a, b]$ possiamo definire il prodotto interno come

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b \overline{f(x)} g(x) dx, \quad (1.3.12)$$

da cui deriva la norma

$$\|f\| = \left(\int_a^b |f(x)|^2 dx \right)^{1/2}. \quad (1.3.13)$$

Il prodotto interno in eq. (1.3.12) è ben definito in quanto

$$|\overline{f(x)} g(x)| = |\overline{f(x)}| |g(x)| \leq \frac{1}{2} |f(x)|^2 + \frac{1}{2} |g(x)|^2 \quad (1.3.14)$$

e quindi $\overline{f(x)} g(x) \in L^1[a, b]$. Come abbiamo già visto, $L^2[a, b]$ è separabile, poiché ogni funzione continua può essere arbitrariamente approssimata da un polinomio definito in $[a, b]$ e l'insieme delle funzioni continue in $[a, b]$ è denso in $L^2[a, b]$. Si può dimostrare che $L^2[a, b]$ è completo nella norma in eq. (1.3.13).

Definizione 1.17 (Base). Se X ha dimensione finita e B è un sottoinsieme di X di vettori linearmente indipendenti tale che $X = \text{span } B$ allora B è detto una *base*.

Definizione 1.18 (Ortogonalità). Due vettori $x, y \in H$ sono *ortogonali* se $\langle x, y \rangle = 0$. Un insieme di vettori $x_i \in H$ è detto un *sistema ortogonale* se $\langle x_i, x_j \rangle = 0$ per $i \neq j$. Se inoltre $\langle x_i, x_i \rangle = 1$ per ogni i il sistema è detto *ortonormale*.

Definizione 1.19 (Somma diretta). Sia M un sottospazio di uno spazio di Hilbert. Se esiste un sottospazio N tale che ogni $x \in H$ si scrive in modo unico come somma di un elemento di M e uno di N e inoltre $M \cap N = \{0\}$, allora H si dice *somma diretta* di M e N e si usa la notazione $H = M \oplus N$.

Definizione 1.20 (Complemento ortogonale). Sia M un sottospazio di uno spazio di Hilbert H . Denotiamo con M^\perp l'insieme dei vettori di H che sono ortogonali a tutti gli elementi di M . M^\perp è detto *complemento ortogonale* di M .

M^\perp è un sottospazio vettoriale di H ed inoltre è chiuso. Infatti se $\{x_i\}$ è una successione in M^\perp tendente a $x \in H$, dalla continuità del prodotto interno segue $\langle x, y \rangle = 0$ $\forall y \in M$ e quindi $x \in M^\perp$.

Teorema 1.7. Sia H uno spazio di Hilbert. Sia M un sottospazio chiuso di H . Allora per ogni $x \in H$ esiste un unico elemento $z \in M$ tale che

$$d = \|x - z\| = \inf_{y \in M} \|x - y\|. \quad (1.3.15)$$

Dimostrazione. L'insieme dei valori $\|x - y\|$ con $y \in M$ è limitato inferiormente, quindi possiamo definire $d = \inf_{y \in M} \|x - y\|$. Per definizione di d esiste una successione $\{y_n\}$ con $y_n \in M$ tale che

$$\|x - y_n\| \rightarrow d \quad \text{per } n \rightarrow \infty. \quad (1.3.16)$$

Allora

$$\begin{aligned} \|y_n - y_m\|^2 &= \|(y_n - x) - (y_m - x)\|^2 \\ &= 2\|y_n - x\|^2 + 2\|y_m - x\|^2 - \|(y_n - x) + (y_m - x)\|^2 \\ &= 2\|y_n - x\|^2 + 2\|y_m - x\|^2 - 4\|x - (y_n + y_m)/2\|^2 \\ &\leq 2\|y_n - x\|^2 + 2\|y_m - x\|^2 - 4d^2 \\ &\rightarrow 2d^2 + 2d^2 - 4d^2 = 0 \quad \text{per } m, n \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (1.3.17)$$

In questa derivazione abbiamo usato l'identità del parallelogramma e il fatto che, essendo $(y_n + y_m)/2 \in M$, allora $\|x - (y_n + y_m)/2\| \geq d$ (d essendo l'estremo inferiore). Quindi $\{y_n\}$ è una successione di Cauchy e poiché M è chiuso (e quindi completo) $\{y_n\}$ converge ad un elemento $z \in M$. L'unicità si dimostra facilmente considerando due possibili vettori $z_1, z_2 \in M$ tali che $\|x - z_1\| = \|x - z_2\| = d$ e seguendo gli stessi passaggi usati nell'eq. (1.3.17). \square

Teorema 1.8 (della proiezione). Sia H uno spazio di Hilbert e M un suo sottospazio chiuso. Allora ogni vettore $x \in H$ può essere riscritto in modo unico come $y + z$ con $z \in M$ e $y \in M^\perp$.

Dimostrazione. Consideriamo il caso di spazio complesso (il caso reale si tratta analogamente). Sia $x \in H$. Per il teorema 1.7 esiste un unico elemento $z \in M$ a distanza minima da x . Definiamo $y = x - z$, quindi $x = y + z$. Sia $w \in M$, allora se $d = \|x - z\|$ e $t \in \mathbb{R}$ abbiamo che

$$d^2 \leq \|x - (z + tw)\|^2 = \|y - tw\|^2 = d^2 - 2t \operatorname{Re} \langle w, y \rangle + t^2 \langle w, w \rangle. \quad (1.3.18)$$

Pertanto $-2t \operatorname{Re} \langle w, y \rangle + t^2 \langle w, w \rangle \geq 0$ per ogni t . Scegliendo $t = \operatorname{Re} \langle w, y \rangle / \langle w, w \rangle$, questo implica che $\operatorname{Re} \langle w, y \rangle = 0$. In modo analogo prendendo it al posto di t si dimostra che $\operatorname{Im} \langle w, y \rangle = 0$. Quindi $y \in M^\perp$. L'unicità si dimostra facilmente. \square

Da questo teorema discende che lo spazio di Hilbert H può essere scritto come somma diretta $H = M \oplus M^\perp$, dove M è un sottospazio chiuso. Il vettore z è anche chiamato *proiezione ortogonale* di x su M (termine motivato dalla geometria elementare). Questa decomposizione permette di definire una mappa

$$\begin{aligned} P : H &\rightarrow M \\ x &\rightarrow z = Px \end{aligned} \quad (1.3.19)$$

P è chiamato *operatore di proiezione* o *proiettore* e soddisfa la condizione $P^2 = P$ (è idempotente).

Teorema 1.9. Se M è un sottospazio chiuso allora $(M^\perp)^\perp = M$.

Dimostrazione. È ovvio che $M \subset (M^\perp)^\perp$, infatti se $x \in M$ allora è anche $x \in (M^\perp)^\perp$. D'altra parte

$$H = M \oplus M^\perp = M^\perp \oplus (M^\perp)^\perp \quad (1.3.20)$$

e quindi M non può essere un sottospazio proprio di $(M^\perp)^\perp$. \square

Si ha inoltre che, se $M \subset N$, allora $N^\perp \subset M^\perp$. Infatti ogni elemento ortogonale a N è ortogonale anche a M . Infine, se M non è chiuso, allora $M^\perp = \overline{M}^\perp$. Infatti per la proprietà precedente $\overline{M}^\perp \subset M^\perp$. Inoltre se $x \in M^\perp$ e $y \in \overline{M}$, sia $y_n \in M$ una successione tendente a $y \in \overline{M}$. Allora $\langle y_n, x \rangle \rightarrow \langle y, x \rangle = 0$ e quindi $x \in \overline{M}^\perp$, da cui si deduce che $M^\perp \subset \overline{M}^\perp$. Combinando i due risultati segue che $M^\perp = \overline{M}^\perp$. Di conseguenza, per ogni M vale che $(M^\perp)^\perp = \overline{M}$.

Definizione 1.21 (Insieme ortonormale completo). Un insieme B di vettori ortonormali è detto un *insieme (o sistema) ortonormale completo* in H se $\overline{\text{Span } B} = H$. Esso è anche detto una base, anche se non è una base nel senso dell'algebra, a meno che H non abbia dimensione finita.

Teorema 1.10. In ogni spazio di Hilbert $H \neq \{0\}$ esiste una base ortonormale completa.

Dimostrazione. Si veda [8], pag. 44. \square

Teorema 1.11. Se $\{e_i\}$ con $i = 1, 2, \dots$ è un insieme ortonormale in H (separabile), le seguenti affermazioni sono equivalenti

- i) $\{e_i\}$ è completo,
- ii) $x = \sum_{i=1}^{\infty} \langle e_i, x \rangle e_i \quad \forall x \in H$,
- iii) $\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{\infty} \langle x, e_i \rangle \langle e_i, y \rangle \quad \forall x, y \in H$,
- iv) $\|x\|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} |\langle x, e_i \rangle|^2 \quad \forall x \in H$.

Dimostrazione. i) \rightarrow ii). Il vettore $x - \sum_{i=1}^{\infty} \langle e_i, x \rangle e_i$ è ortogonale ad ogni e_i , quindi

$$x - \sum_{i=1}^{\infty} \langle e_i, x \rangle e_i \in \overline{\text{Span}(e_i)}^\perp = H^\perp = \{0\}. \quad (1.3.21)$$

Pertanto $x - \sum_{i=1}^{\infty} \langle e_i, x \rangle e_i$ è uguale al vettore nullo.

ii) \rightarrow iii). Dalla continuità del prodotto interno segue

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{\infty} \langle x, e_i \rangle \langle e_i, y \rangle. \quad (1.3.22)$$

iii) \rightarrow iv). Basta porre $y = x$.

iv) \rightarrow i). Se x è ortogonale a tutti gli e_i dalla iv) segue che $x = 0$, quindi $\overline{\text{Span}(e_i)}^\perp = \{0\} = H^\perp$ da cui segue $\overline{\text{Span}(e_i)} = H$. \square

Nel caso di spazi di Hilbert di dimensione finita o di spazi di Hilbert di dimensione infinita ma separabili, la procedura di Gram Schmidt permette di costruire una base ortonormale.

Teorema 1.12 (Ortogonalizzazione di Gram Schmidt). Sia $\{h_1, h_2, \dots, h_n\}$ un insieme finito di vettori linearmente indipendenti. Allora esiste un sistema ortonormale $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ tale che $\text{Span}(e_1, e_2, \dots, e_n) = \text{Span}(h_1, h_2, \dots, h_n)$.

Dimostrazione. Il primo elemento è dato da

$$e_1 = \frac{1}{\|h_1\|} h_1. \quad (1.3.23)$$

Il secondo è dato da

$$e_2 = \frac{1}{\|g_2\|} g_2 \quad \text{dove} \quad g_2 = h_2 - \langle e_1, h_2 \rangle e_1. \quad (1.3.24)$$

Il generico elemento è dato da

$$e_k = \frac{1}{\|g_k\|} g_k \quad \text{dove} \quad g_k = h_k - \sum_{j=1}^{k-1} \langle e_j, h_k \rangle e_j. \quad (1.3.25)$$

□

Questa procedura si estende per induzione al caso in cui si abbia un'infinità numerabile di vettori.

2

DISTRIBUZIONI

Una variabile fisica è di solito rappresentata ricorrendo al concetto di funzione. In alcuni casi però il concetto di funzione non è più sufficiente. È spesso utile considerare, per esempio, cariche puntiformi in elettrodinamica o punti materiali in meccanica, la cui descrizione non è ottenibile in termini di funzioni ordinarie. Un'altra limitazione importante del concetto classico di funzione è legata all'esistenza di funzioni non derivabili, che rendono inapplicabili molti risultati classici del calcolo differenziale.

Come vedremo in questo capitolo, per ovviare a queste limitazioni, è possibile estendere il concetto di funzione, inglobandolo in una classe molto più ampia di oggetti, le cosiddette *distribuzioni* (o *funzioni generalizzate*), ovvero dei funzionali lineari che assegnano un numero reale o complesso a ogni funzione appartenente a un certo insieme di funzioni test.

In questo capitolo considereremo due classi particolari di distribuzioni (le distribuzioni “standard” e le distribuzioni temperate), che differiscono per la scelta dello spazio di funzioni test. Il concetto di distribuzione permetterà la descrizione di oggetti matematici come la delta di Dirac, che possono essere direttamente utilizzati per descrivere oggetti puntiformi. I classici risultati del calcolo differenziale saranno naturalmente estesi a questi nuovi oggetti. La teoria delle distribuzioni permetterà inoltre di definire la trasformata di Fourier di funzioni come 1 o $\sin x$, cioè di funzioni che non sono di classe L^1 o L^2 .

Per ottenere un'estensione utile del concetto di funzione, è importante richiedere che alcune proprietà di base siano rispettate dalle distribuzioni [7]:

- Ogni funzione continua deve corrispondere a una distribuzione.¹
- Le derivate di una distribuzione devono essere a loro volta distribuzioni. In particolare, per funzioni differenziabili, il nuovo concetto di derivata deve coincidere con quello standard. Le distribuzioni devono inoltre essere infinitamente differenziabili (come conseguenza dell'esistenza di funzioni C^∞).
- Le distribuzioni devono rispettare le classiche regole del calcolo differenziale.
- Deve esistere un concetto di convergenza per poter introdurre la nozione di limite.

Come vedremo, i funzionali lineari su determinate classi di funzioni di test soddisfano tutte queste proprietà, e costituiscono quindi un'estensione naturale del concetto di funzione.

¹Vedremo che questo è vero per le distribuzioni in \mathcal{D}' , ma non per le distribuzioni temperate, che invece sono introdotte per essere “compatibili” con la trasformata di Fourier.

2.1 Spazio \mathcal{D} di funzioni di test

Prima di definire le distribuzioni dobbiamo introdurre lo spazio delle *funzioni test*. Cominciamo col ricordare cosa si intende per funzione a supporto compatto.²

Definizione 2.1 (Funzione a supporto compatto). Una funzione $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}(\mathbb{C})$ definita su \mathbb{R}^n e nulla al di fuori di una regione chiusa e limitata Ω si dice a *supporto compatto*.

Indichiamo con $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ o con $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ (nel seguito tipicamente ometteremo \mathbb{R}^n usando la notazione \mathcal{D}) lo spazio delle funzioni a supporto compatto ed infinitamente derivabili. Naturalmente il supporto Ω non è lo stesso per tutte le funzioni. Le funzioni in \mathcal{D} sono dette *funzioni test*.

Lo spazio delle funzioni di test è uno spazio vettoriale, ovvero se $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{D}$ anche $a\varphi_1 + b\varphi_2 \in \mathcal{D}$ per ogni $a, b \in \mathbb{R}$ e gli assiomi dello spazio vettoriale sono soddisfatti.

Lo spazio delle funzioni di test *non* è uno spazio metrico, ma è possibile introdurre un concetto di convergenza.³ Consideriamo una successione di funzioni test $\{\varphi_i\}$ con $i \in \mathbb{N}$ in $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$.

Definizione 2.2 (Successioni nulle). Diremo che la successione $\{\varphi_i\}$ è una *successione nulla* se

- i) tutte le φ_i sono zero al di fuori di una regione limitata (indipendente da i)⁴
- ii) per ogni multiindice $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ di dimensione n (di interi non negativi) vale

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |\partial^\alpha \varphi_i(x)| = 0, \quad (2.1.1)$$

dove

$$\partial^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \dots \partial x_n^{\alpha_n}} \quad (2.1.2)$$

essendo $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n$ l'*ordine* della derivata.

In altre parole la successione $\{\varphi_i\}$ ed ogni successione di derivate $\{\partial^\alpha \varphi_i\}$ tendono uniformemente a zero.

Esempio 2.1. Un esempio di funzione di test in $C_0^\infty(\mathbb{R})$ è

$$\varphi = \begin{cases} \exp \frac{1}{x^2 - 1} & |x| < 1 \\ 0 & |x| \leq 1 \end{cases}. \quad (2.1.3)$$

La successione $\{\frac{1}{i}\varphi(x)\}$ è una successione nulla. Si noti che la successione $\{\frac{1}{i}\varphi(x/i)\}$ non soddisfa la i), in quanto non esiste un intervallo finito al di fuori del quale tutte le funzioni sono zero. La successione $\{\frac{1}{i}\varphi(ix)\}$ non soddisfa la ii).

²Rammentiamo che il supporto di una funzione è la chiusura dell'insieme dei punti x in cui $f(x) \neq 0$.

³Su \mathcal{D} non è possibile introdurre una distanza dalla quale discenda la topologia collegata al concetto di convergenza di successioni di funzioni di test. Per una discussione approfondita di questo aspetto si veda [7].

⁴Questa condizione è necessaria per assicurare che lo spazio vettoriale \mathcal{D} sia completo nella topologia che definisce il concetto di successione nulla. [7]

2.2 Distribuzioni in \mathcal{D}

Considereremo in questa sezione distribuzioni definite per funzioni di test $\varphi \in \mathcal{D}$. Diamo prima la definizione di *funzionale lineare*.

Definizione 2.3 (Funzionale lineare). Un *funzionale lineare* è un'applicazione lineare da uno spazio vettoriale X in un campo scalare \mathbb{K} . Per indicare tale applicazione useremo la seguente notazione

$$T : \varphi \in \mathcal{D} \rightarrow (T, \varphi) \in \mathbb{K}. \quad (2.2.1)$$

Se $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ (\mathbb{C}) il funzionale è detto funzionale reale (complesso).

Ricordiamo che un funzionale T su \mathcal{D} è *lineare* se

$$(T, a\varphi_1 + b\varphi_2) = a(T, \varphi_1) + b(T, \varphi_2), \quad (2.2.2)$$

per ogni $a, b \in \mathbb{K}$ e $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{D}$.

Per verificare la continuità del funzionale lineare basta verificarla nell'origine. Quindi un funzionale T su \mathcal{D} è *continuo* se per ogni successione nulla di funzioni di test $\{\varphi_i\}$ la successione numerica $\{(T, \varphi_i)\}$ tende a zero. In particolare il *funzionale nullo* O è tale che $(O, \varphi) = 0 \forall \varphi \in \mathcal{D}$.

Definizione 2.4 (Distribuzione). Una *distribuzione* è un funzionale lineare e continuo definito sullo spazio delle funzioni test \mathcal{D} .

Lo spazio delle distribuzioni così definite sarà indicato con \mathcal{D}' . Esso è anche chiamato *spazio duale* di \mathcal{D} .

Definizione 2.5 (Distribuzione regolare). Le funzioni localmente integrabili, ovvero le funzioni integrabili secondo Lebesgue su ogni regione limitata, permettono di definire delle distribuzioni, dette *distribuzioni regolari*, nel modo seguente. La distribuzione T_f associa a φ la quantità data da

$$(T_f, \varphi) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\varphi(x)dx \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}. \quad (2.2.3)$$

Dimostrazione. La linearità del funzionale definito in eq. (2.2.3) è ovvia. Consideriamo poi una successione nulla $\{\varphi_i\}$. Si ha

$$|(T_f, \varphi_i)| = \left| \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\varphi_i(x)dx \right| \leq \sup_{x \in \Omega} |\varphi_i(x)| \int_{\Omega} |f(x)|dx, \quad (2.2.4)$$

dove $\Omega \in \mathbb{R}^n$ è una sfera tale che al di fuori di essa tutte le φ_i sono nulle. Dall'eq. (2.2.4), essendo $\{\varphi_i\}$ una successione nulla, segue che

$$\lim_{i \rightarrow \infty} |(T_f, \varphi_i)| = 0. \quad (2.2.5)$$

□

Si noti che tutte le distribuzioni che non sono regolari sono dette *distribuzioni singolari*.
Due funzioni localmente integrabili tali che

$$f(x) = g(x) \quad \text{quasi ovunque} \quad (2.2.6)$$

individuano la stessa distribuzione regolare.

Nel seguito, nel caso di distribuzioni regolari T_f utilizzeremo la notazione semplificata $(T_f, \varphi) = (f, \varphi)$.

Esempio 2.2. Sia c una costante. Consideriamo il funzionale su \mathcal{D} definito da

$$(c, \varphi) = \int_{\mathbb{R}^n} c \varphi(x) dx \quad \varphi \in \mathcal{D}. \quad (2.2.7)$$

Questa espressione definisce una distribuzione regolare.

Esempio 2.3. Sia Ω un dominio in \mathbb{R}^n . Consideriamo il funzionale

$$(I_\Omega, \varphi) = \int_{\Omega} \varphi(x) dx = \int_{\mathbb{R}^n} I_\Omega(x) \varphi(x) dx, \quad (2.2.8)$$

con I_Ω la funzione caratteristica dell'insieme Ω . L'espressione precedente definisce una distribuzione regolare.

Esempio 2.4 (Delta di Dirac). Definiamo il funzionale lineare δ come il funzionale che associa ad ogni $\varphi \in \mathcal{D}$ la quantità

$$(\delta, \varphi) = \varphi(0). \quad (2.2.9)$$

Il funzionale è lineare e continuo. La linearità è ovvia. La continuità si può verificare facilmente, infatti se $\{\varphi_i\}$ è una successione nulla, segue che (per i sufficientemente grande), $\forall \epsilon > 0$

$$|(\delta, \varphi_i)| = |\varphi_i(0)| \leq \sum |\varphi_i| \leq \epsilon. \quad (2.2.10)$$

Questa distribuzione è detta *delta di Dirac*.

La distribuzione delta è una distribuzione singolare. Se essa fosse regolare dovrebbe esistere una funzione f localmente integrabile tale che

$$(\delta, \varphi) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \varphi(x) dx = \varphi(0) \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}. \quad (2.2.11)$$

Per dimostrare che tale f non può esistere, consideriamo come funzioni test la famiglia di funzioni

$$\psi_a(x) = \begin{cases} \exp \frac{a^2}{|x|^2 - a^2} & |x| < a \\ 0 & |x| \geq a \end{cases} \quad (2.2.12)$$

con $|x| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$. Si ha

$$\left| \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \psi_a(x) dx \right| = \left| \int_{|x| < a} f(x) \psi_a(x) dx \right| \leq \frac{1}{e} \int_{|x| < a} |f(x)| dx, \quad (2.2.13)$$

dove abbiamo usato il fatto che $|\psi_a(x)| \leq 1/e$. Se $f(x)$ fosse localmente integrabile, si avrebbe

$$\lim_{a \rightarrow 0} \int_{|x| < a} |f(x)| dx = 0 \quad (2.2.14)$$

e pertanto dall'eq. (2.2.13)

$$\lim_{a \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \psi_a(x) dx = 0. \quad (2.2.15)$$

D'altro canto

$$(\delta, \psi_a) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \psi_a(x) dx = \psi_a(0) = \frac{1}{e} \quad (2.2.16)$$

e quindi si dovrebbe anche avere

$$\lim_{a \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \psi_a(x) dx = \frac{1}{e}, \quad (2.2.17)$$

in contraddizione con l'eq. (2.2.15). Concludiamo quindi che la distribuzione δ non è regolare.

2.3 Operazioni sulle distribuzioni

Passiamo ora a considerare una classe di operazioni che possono essere effettuate sulle distribuzioni.

Addizione di distribuzioni. Siano T_1 e T_2 due distribuzioni in \mathcal{D}' . La loro somma è definita come la distribuzione $T_1 + T_2 \in \mathcal{D}'$ tale che

$$(T_1 + T_2, \varphi) = (T_1, \varphi) + (T_2, \varphi) \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}. \quad (2.3.1)$$

Moltiplicazione di una distribuzione per una costante. Sia α un numero reale (complesso), la moltiplicazione di una distribuzione T per α è la distribuzione αT definita da

$$(\alpha T, \varphi) = (T, \alpha \varphi) \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}. \quad (2.3.2)$$

Lo spazio \mathcal{D}' con le due operazioni di addizione e moltiplicazione è uno spazio vettoriale.

Traslazione di una distribuzione. Sia T una distribuzione in \mathcal{D}' . Definiamo la *distribuzione traslata* come la distribuzione $T(x - a)$ tale che

$$(T(x - a), \varphi(x)) = (T, \varphi(x + a)) \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}. \quad (2.3.3)$$

Questa definizione è precisamente quella che ci aspettiamo. Infatti se T_f è la distribuzione regolare associata alla funzione f , allora

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x - a) \varphi(x) dx = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \varphi(x + a) dx. \quad (2.3.4)$$

Esempio 2.5. Traslazione della delta di Dirac.

$$(\delta(x - a), \varphi(x)) = (\delta, \varphi(x + a)) = \varphi(a). \quad (2.3.5)$$

Cambiamento di scala. Data la distribuzione T vogliamo definire la distribuzione $T(\alpha x)$, dove $x = (x_1, \dots, x_n)$ e $\alpha x = (\alpha x_1, \dots, \alpha x_n)$ con $\alpha \in \mathbb{R}$. Consideriamo prima una distribuzione regolare T_f . In questo caso si ha che

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(\alpha x) \varphi(x) dx = \frac{1}{|\alpha|^n} \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \varphi(x/\alpha) dx = (T_f, |\alpha|^{-n} \varphi(x/\alpha)). \quad (2.3.6)$$

Quindi definiamo in generale la distribuzione $T(\alpha x)$ attraverso l'equazione

$$(T(\alpha x), \varphi) = (T, |\alpha|^{-n} \varphi(x/\alpha)). \quad (2.3.7)$$

Se invece $\alpha x = (\alpha_1 x_1, \dots, \alpha_n x_n)$ la definizione diventa

$$(T(\alpha_1 x_1, \dots, \alpha_n x_n), \varphi) = (T, |\alpha_1 \dots \alpha_n|^{-1} \varphi(x/\alpha)), \quad (2.3.8)$$

dove $x/\alpha \equiv (x_1/\alpha_1, \dots, x_n/\alpha_n)$.

Esempio 2.6. Se $\delta \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ allora è $\delta(\alpha x) = \frac{1}{|\alpha|} \delta$. Infatti

$$(\delta(\alpha x), \varphi) = \frac{1}{|\alpha|} (\delta, \varphi(x/\alpha)) = \frac{1}{|\alpha|} \varphi(0). \quad (2.3.9)$$

Come conseguenza si ha $\delta(-x) = \delta(x)$.

Nel caso di una trasformazione generale con una matrice invertibile $n \times n$ vale

$$(T(A^{-1}x), \varphi) = |\det A| (T, \varphi(Ax)). \quad (2.3.10)$$

In questo modo è possibile studiare le proprietà di invarianza delle distribuzioni rispetto a trasformazioni lineari (traslazioni, rotazioni, trasformazioni di Lorentz, etc.).

Moltiplicazione di una distribuzione per una funzione C^∞ . In generale *non* è possibile definire il prodotto di distribuzioni. In alcuni casi, però, questo è possibile. Per esempio, sia g una distribuzione regolare associata ad una funzione $g \in C^\infty$. Allora è possibile definire il prodotto Tg con $T \in \mathcal{D}'$ come

$$(Tg, \varphi) = (T, g\varphi) \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}. \quad (2.3.11)$$

Infatti sotto queste ipotesi anche $g\varphi \in \mathcal{D}$.

Esempio 2.7. Se $g \in C^\infty$ allora $g(x)\delta(x) = g(0)\delta(x)$.

Si noti che *non* si può definire il prodotto di distribuzioni che siano singolari nello stesso punto. Ad esempio il quadrato della delta di Dirac $(\delta(x))^2$ non è ben definito come distribuzione in $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

Derivata di una distribuzione. Una funzione localmente integrabile può non avere derivata in alcuni punti. Una distribuzione è invece sempre derivabile, e la derivata è ancora una distribuzione. Consideriamo prima una distribuzione regolare generata da una funzione di una variabile che sia derivabile ovunque e con derivata continua. Vale allora

$$(f', \varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} f'(x)\varphi(x)dx = - \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\varphi'(x)dx = -(f, \varphi'), \quad (2.3.12)$$

ovvero la derivata della distribuzione regolare f coincide con la distribuzione regolare definita da f' . Definiamo quindi, per ogni distribuzione $T \in \mathcal{D}'$, la sua derivata $T' \in \mathcal{D}'$ come quella distribuzione tale che

$$(T', \varphi) = -(T, \varphi') \quad \forall T \in \mathcal{D}'. \quad (2.3.13)$$

Questa equazione definisce un funzionale lineare e continuo. La linearità è ovvia. Inoltre se $\{\varphi_i\}$ è una successione nulla anche φ'_i lo è e quindi $(T, \varphi'_i) \rightarrow 0$.

L'ovvia generalizzazione ad \mathbb{R}^n per ogni multiindice α di interi non negativi è

$$(\partial^\alpha T, \varphi) = (-1)^{|\alpha|} (T, \partial^\alpha \varphi), \quad (2.3.14)$$

dove $|\alpha| = \sum_{i=1}^n \alpha_i$. Essendo $\varphi \in C_0^\infty$ segue che una distribuzione è infinitamente derivabile. Questo permette quindi di estendere il concetto di differenziabilità a funzioni che non sarebbero derivabili nel senso dell'analisi.

Esempio 2.8 (Derivata della delta di Dirac). Calcoliamo la derivata della delta di Dirac:

$$(\delta', \varphi) = -(\delta, \varphi') = -\varphi'(0). \quad (2.3.15)$$

Esempio 2.9 (Funzione θ). La funzione $\theta(x)$ (o funzione di Heaviside) può essere usata per definire la distribuzione

$$(\theta, \varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} \theta(x)\varphi(x)dx = \int_0^{\infty} \varphi(x)dx. \quad (2.3.16)$$

Questa definizione soddisfa chiaramente la linearità. La continuità segue da

$$\left| \int_0^{\infty} \varphi_i(x)dx \right| \leq \sup_{x \in [-a, a]} |\varphi_i(x)| a \xrightarrow{i \rightarrow \infty} 0, \quad (2.3.17)$$

se la regione al di fuori della quale tutte le φ_i sono nulle è l'intervallo $(-a, a)$. Perciò abbiamo

$$(\theta', \varphi) = -(\theta, \varphi') = - \int_0^{\infty} \varphi'(x)dx = \varphi(0). \quad (2.3.18)$$

Quindi otteniamo che

$$\theta' = \delta. \quad (2.3.19)$$

Analogamente

$$\left(\frac{d}{dx} \theta(-x), \varphi \right) = -(\theta(-x), \varphi') = - \int_{-\infty}^0 \varphi'(x)dx = -\varphi(0), \quad (2.3.20)$$

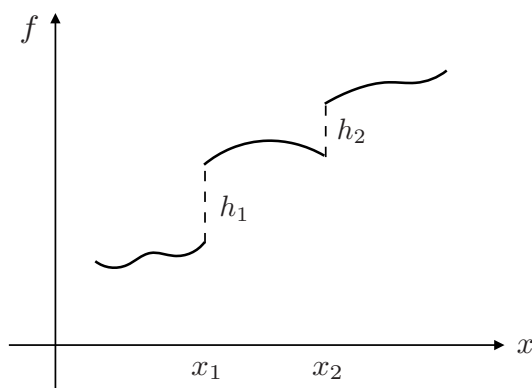


Figura 2.1: Esempio di funzione continua a tratti.

dove abbiamo utilizzato

$$(\theta(-x), \varphi) = (\theta, \varphi(-x)) = \int_0^\infty \varphi(-x) dx = \int_{-\infty}^0 \varphi(x) dx. \quad (2.3.21)$$

In conclusione

$$\frac{d}{dx} \theta(-x) = -\delta. \quad (2.3.22)$$

Esempio 2.10 (Derivata di una funzione continua a tratti). Sia f una funzione continua a tratti, con derivata prima continua a tratti, salvo nei punti x_1, x_2, \dots dove f ha delle discontinuità con salti uguali a h_1, h_2, \dots , come in fig. 2.1. Se definiamo la funzione

$$f_1(x) = f(x) - \sum_k h_k \theta(x - x_k), \quad (2.3.23)$$

questa funzione è continua e possiede una derivata uguale a f' salvo in x_1, x_2, \dots .

Possiamo costruirci le distribuzioni f ed f_1 associate alle funzioni f ed f_1 . La derivata della distribuzione regolare f_1 coincide con la distribuzione regolare definita da f'_1 . Risulta inoltre

$$f'_1 = f' - \sum_k h_k \delta(x - x_k). \quad (2.3.24)$$

Infatti

$$(f'_1, \varphi) = -(f_1, \varphi') = -(f, \varphi') + \left(\sum_k h_k \theta(x - x_k), \varphi' \right) = (f', \varphi) - \left(\sum_k h_k \delta(x - x_k), \varphi \right), \quad (2.3.25)$$

ovvero

$$f' = f'_1 + \sum_k h_k \delta(x - x_k). \quad (2.3.26)$$

2.4 Distribuzioni temperate

È spesso utile definire il concetto di distribuzione per funzioni di test che non abbiano supporto compatto, ma che tuttavia siano sufficientemente regolari e decrescano rapidamente all'infinito. Introduciamo a questo scopo lo *spazio delle funzioni rapidamente decrescenti* o *spazio di Schwarz*.

Definizione 2.6 (Spazio delle funzioni rapidamente decrescenti). Lo *spazio delle funzioni rapidamente decrescenti* o *spazio di Schwarz* $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ è lo spazio vettoriale costituito dalla funzioni $\varphi(x)$ che sono infinitamente derivabili e che sono inoltre a *decrescita rapida* con tutte le loro derivate. Ovvero una funzione $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ deve soddisfare, per ogni α e β multiindici di dimensione n di interi non negativi, la relazione

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^n} |x^\alpha \partial^\beta \varphi| < \infty, \quad (2.4.1)$$

dove $x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n}$

In altre parole, una funzione a decrescita rapida è essenzialmente una funzione tale che essa stessa e tutte le sue derivate esistono in ogni punto e vanno a zero all'infinito più rapidamente di ogni potenza inversa di polinomi. Chiaramente $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ è un sottospazio di $C^\infty(\mathbb{R}^n)$.⁵

Esempio 2.11. Se α è un multiindice di dimensione n con valori non negativi e a è un numero reale positivo, allora

$$x^\alpha e^{-a|x|^2} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n). \quad (2.4.4)$$

Possiamo introdurre in \mathcal{S} una nozione di convergenza.

Definizione 2.7 (Successione nulla in \mathcal{S}). Una successione $\{\varphi_i\}$ in \mathcal{S} si dice *successione nulla* se

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |x^\alpha \partial^\beta \varphi_i(x)| = 0 \quad (2.4.5)$$

per ogni coppia di multiindici α e β .

Si può facilmente capire che ogni funzione φ in $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ è anche in $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, infatti φ e tutte le sue derivate sono nulle al di fuori del supporto. Tuttavia lo spazio \mathcal{S} non coincide con \mathcal{D} . Per esempio la funzione $\exp(-|x|^2)$ è in \mathcal{S} , ma non appartiene a \mathcal{D} . Si può dimostrare che \mathcal{D} è denso in \mathcal{S} , cioè per ogni $\varphi \in \mathcal{S}$ esiste una successione di funzioni $\{\varphi_i\} \in \mathcal{D}$ tendente a φ .

Possiamo allora definire delle distribuzioni sullo spazio \mathcal{S} .

⁵Si può dimostrare che $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ è uno spazio metrico, ma non uno spazio normato. La topologia (e il concetto di convergenza) su $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ può essere derivato dalla famiglia numerabile di semi-norme

$$\|f\|_{\alpha,\beta} = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |x^\alpha \partial^\beta f|. \quad (2.4.2)$$

La corrispondente topologia non deriva da una norma, ma può essere metrizzata. Ad esempio tramite la metrica

$$d(f, g) = \sum_{\alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^n} \frac{c_{\alpha, \beta} \|f - g\|_{\alpha, \beta}}{1 + \|f - g\|_{\alpha, \beta}}, \quad (2.4.3)$$

dove $c_{\alpha, \beta} > 0$ sono costanti positive tali che $\sum_{\alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^n} c_{\alpha, \beta}$ converge. $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ è uno spazio completo in questa topologia.

Definizione 2.8 (Distribuzione temperata). Una *distribuzione temperata* (o a *crescita lenta*) è un funzionale lineare e continuo su \mathcal{S} . Indicheremo con \mathcal{S}' lo spazio delle distribuzioni temperate.

Una classe particolare di distribuzioni temperate corrisponde alle distribuzioni generate da funzioni a crescita lenta.

Se f è una *funzione a crescita lenta*, cioè se per qualche $m \geq 0$

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)| (1 + |x|^2)^{-m} dx < \infty \quad (2.4.6)$$

con $|x| = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}$, allora essa determina una distribuzione temperata definita da

$$(f, \varphi) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \varphi(x) dx \quad \varphi \in \mathcal{S}. \quad (2.4.7)$$

In modo equivalente una funzione è a crescita lenta se è localmente integrabile ed esistono $c, n \in \mathbb{R}$ con $c, n > 0$ tali che

$$|f(x)| \leq c |x|^n \quad \text{per } x \rightarrow \infty. \quad (2.4.8)$$

Abbiamo visto che $\mathcal{D} \subset \mathcal{S}$, quindi le distribuzioni temperate, essendo definite su \mathcal{S} , sono anche definite su \mathcal{D} , ovvero $\mathcal{S}' \subset \mathcal{D}'$. Mostriamo un esempio di distribuzione in \mathcal{D}' che non appartiene a \mathcal{S}' . La serie di distribuzioni

$$g = \sum_{n=1}^{\infty} \exp(n^2) \delta(x - n) \quad (2.4.9)$$

definisce una distribuzione in \mathcal{D}' . Infatti, $\forall \varphi \in \mathcal{D}$,

$$(g, \varphi) = \sum_{n=1}^{\infty} \exp(n^2) \varphi(n) < \infty, \quad (2.4.10)$$

dato che le φ sono a supporto compatto. Se invece prendiamo $\varphi \in \mathcal{S}$ esistono dei casi in cui l'espressione (2.4.10) non converge. Basta prendere $\varphi(x) = \exp(-x^2)$.

Si dimostra che \mathcal{S}' è denso in \mathcal{D}' . Poiché \mathcal{S}' è un sottoinsieme di \mathcal{D}' segue che le operazioni definite in \mathcal{D}' valgono anche in \mathcal{S}' salvo la seguente precisazione.

Notiamo che se f è una distribuzione temperata ed a una funzione, se vogliamo che il prodotto $a f$ sia ancora una distribuzione temperata occorre che la funzione a sia a crescita lenta.

Definiamo ora il supporto di una distribuzione.

Definizione 2.9 (Supporto di una distribuzione). L'unione degli aperti Ω per cui $(T, \varphi) = 0$ per ogni $\varphi \in \mathcal{D}$ con supporto contenuto in Ω è detto *insieme nullo*. Il complementare dell'insieme nullo è il *supporto*, e quindi essendo il complemento di un aperto esso è chiuso.

Vale il seguente risultato. Se $T \in \mathcal{D}'$ ha supporto limitato allora T appartiene anche a \mathcal{S}' .

Esempio 2.12. Il supporto della distribuzione δ è l'insieme costituito dal punto $x = 0$. Infatti se consideriamo $\varphi \in \mathcal{D}$ con supporto su intervalli non contenenti il punto $x = 0$ vale $(\delta, \varphi) = 0$.

Esempio 2.13 (Valore principale di Cauchy). Indichiamo con $Pv\frac{1}{x}$ la distribuzione temperata su \mathbb{R} definita da

$$\left(Pv\frac{1}{x}, \varphi\right) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \left[\int_{-\infty}^{-\epsilon} \frac{\varphi(x)}{x} + \int_{\epsilon}^{\infty} \frac{\varphi(x)}{x} \right] \quad \varphi \in \mathcal{S}. \quad (2.4.11)$$

Questo limite dell'integrale si chiama *valore principale di Cauchy*. Per verificare che $Pv\frac{1}{x}$ sia effettivamente una distribuzione, dobbiamo per prima cosa provare che

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{|x| > \epsilon} \frac{\varphi(x)}{x} dx \quad (2.4.12)$$

esiste. Infatti si ha

$$\begin{aligned} \int_{|x| > \epsilon} \frac{\varphi(x)}{x} dx &= \int_{\epsilon}^{\infty} \frac{\varphi(x)}{x} dx + \int_{-\infty}^{-\epsilon} \frac{\varphi(x)}{x} dx \\ &= \int_{\epsilon}^{\infty} \frac{\varphi(x) - \varphi(-x)}{x} dx. \end{aligned} \quad (2.4.13)$$

Poiché

$$\frac{\varphi(x) - \varphi(-x)}{x} \rightarrow 2\varphi'(0) \quad (2.4.14)$$

quando $x \rightarrow 0$, l'integrando è continuo e limitato per $x \rightarrow 0$ e dunque integrabile su tutta la semiretta positiva (si ricordi che φ è una funzione infinitamente derivabile). Quindi l'integrale esiste quando $\epsilon \rightarrow 0$ e definisce un funzionale lineare. Si può dimostrare che il valore principale di Cauchy è anche continuo.

Proviamo ora a calcolare la derivata della distribuzione temperata $\log|x| = \theta(x)\log x + \theta(-x)\log(-x)$. Abbiamo che

$$\begin{aligned} \left(\frac{d}{dx} \log|x|, \varphi\right) &= -\left(\log|x|, \frac{d}{dx} \varphi\right) \\ &= -\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \left[\int_{\epsilon}^{\infty} \log x \frac{d}{dx} \varphi(x) dx + \int_{-\infty}^{-\epsilon} \log(-x) \frac{d}{dx} \varphi(x) dx \right] \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \left[\int_{\epsilon}^{\infty} \frac{1}{x} \varphi(x) dx + \int_{-\infty}^{-\epsilon} \frac{1}{x} \varphi(x) dx \right] + \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} (\varphi(\epsilon) - \varphi(-\epsilon)) \log \epsilon \\ &= \left(Pv\frac{1}{x}, \varphi\right) + 2\varphi'(0) \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \epsilon \log \epsilon \\ &= \left(Pv\frac{1}{x}, \varphi\right). \end{aligned} \quad (2.4.15)$$

Pertanto

$$\frac{d}{dx} \log|x| = Pv\frac{1}{x}. \quad (2.4.16)$$

2.5 Successioni di distribuzioni

Introduciamo ora il concetto di *convergenza debole* per distribuzioni.

Definizione 2.10 (Convergenza debole). Sia $\{T_y\}$ una *famiglia* di distribuzioni in \mathcal{D}' (o analogamente in \mathcal{S}') dipendente da un parametro continuo y . Diremo che la famiglia T_y *converge (debolmente)* alla distribuzione T quando $y \rightarrow y_0$ e scriveremo

$$\lim_{y \rightarrow y_0} T_y = T, \quad (2.5.1)$$

se

$$\lim_{y \rightarrow y_0} (T_y, \varphi) = (T, \varphi) \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}. \quad (2.5.2)$$

Quanto detto per le famiglie è valido anche per *successioni* di distribuzioni, quando $y \in \mathbb{N}$ e $y_0 = \infty$. In modo analogo diremo che una *serie* di distribuzioni converge se converge la successione delle somme parziali delle distribuzioni.

Valgono i seguenti teoremi.

Teorema 2.1. Sia $\{T_y\}$ una famiglia di distribuzioni in \mathcal{D}' . Se

$$\lim_{y \rightarrow y_0} (T_y, \varphi) \quad (2.5.3)$$

esiste $\forall \varphi \in \mathcal{D}$, allora il funzionale su \mathcal{D} definito da

$$(T, \varphi) = \lim_{y \rightarrow y_0} (T_y, \varphi) \quad (2.5.4)$$

è una distribuzione su \mathcal{D} .

Dimostrazione. Si verifica facilmente che il funzionale definito precedentemente è lineare e continuo. \square

Teorema 2.2. Sia $\{T_y\}$ una famiglia di distribuzioni in \mathcal{D}' convergente a T per $y \rightarrow y_0$. Si ha allora, per ogni multiindice α , $\partial^\alpha T_y \rightarrow \partial^\alpha T$ per $y \rightarrow y_0$.

Dimostrazione. Verifichiamolo nel caso $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$. Si ha

$$(T'_y, \varphi) = -(T_y, \varphi') \xrightarrow{y \rightarrow y_0} -(T, \varphi') = (T', \varphi). \quad (2.5.5)$$

La dimostrazione si estende analogamente al caso di derivate di ordine superiore. \square

Teorema 2.3. Sia $\{f_\alpha\}$ una famiglia di funzioni localmente integrabili e su ogni sfera chiusa in \mathbb{R}^n supponiamo che f_α converga uniformemente a f per $\alpha \rightarrow \alpha_0$, ovvero $\sup |f_\alpha(x) - f(x)| \rightarrow 0$. Allora f_α tende a f nel senso delle distribuzioni.

Dimostrazione. Poiché f_α converge uniformemente è possibile passare il limite sotto il segno di integrale. \square

È interessante notare che la definizione di convergenza debole è particolarmente ampia. Essa infatti include come casi particolari molte nozioni di convergenza “standard”, e inoltre fa spazio a situazioni di convergenza completamente nuove. Vediamo alcuni esempi.

Esempio 2.14. Se $u_n(x)$ è una successione di funzioni in L^2 convergente ad $u(x)$ nel senso della norma L^2 , è immediato verificare che la successione delle distribuzioni regolari associate T_{u_n} è anche convergente a T_u nel senso delle distribuzioni. Questo risultato segue direttamente dalla continuità del prodotto interno (teorema 1.5), infatti

$$(T_{u_n}, \varphi) = \langle u_n^*, \varphi \rangle \rightarrow \langle u^*, \varphi \rangle = (T_u, \varphi). \quad (2.5.6)$$

Esempio 2.15. La convergenza debole vale anche se le $u_n(x)$ convergono puntualmente quasi ovunque ad $u(x)$, sono localmente sommabili e limitate, ovvero $|u_n(x)|, |u(x)| < M$.⁶ Infatti, per ogni funzione di test φ , si ha

$$|(T_{u_n}, \varphi) - (T_u, \varphi)| = \left| \int_{-\infty}^{+\infty} (u_n - u) \varphi \, dx \right| \rightarrow 0, \quad (2.5.7)$$

dato che dalle ipotesi discende che l'integrando $|(u_n - u)\varphi|$ può essere maggiorato da una funzione L^1 e quindi è possibile scambiare il limite con l'integrale.

Veniamo infine al caso di convergenze di tipo “nuovo”.

Esempio 2.16. Un semplice esempio è dato da $u_n = e^{inx}$ con $x \in \mathbb{R}$ che tende a 0 debolmente per $n \rightarrow \infty$. Infatti

$$(e^{inx}, \varphi) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{inx} \varphi(x) \, dx \rightarrow 0 \quad (2.5.8)$$

grazie al teorema di Riemann-Lebesgue, il quale afferma che la trasformata di Fourier di una funzione in $L^1(\mathbb{R})$ tende a zero per $x \rightarrow \pm\infty$.⁷ Ovviamente le funzioni u_n non convergono nel senso “standard”. Lo stesso risultato vale per le successioni $x^k e^{inx}$ con k intero non negativo.

Esempio 2.17. Un altro esempio è dato dalla successione di funzioni

$$f_n(x) = \frac{1}{n} \sin nx. \quad (2.5.9)$$

Questa successione converge uniformemente a zero, ma la successione delle derivate, $\cos nx$, non converge in senso classico. Tuttavia se interpretiamo la successione nel senso delle distribuzioni, la successione f'_n converge a zero. Infatti

$$(f'_n, \varphi) = -\frac{1}{n} \int_{-a}^{+a} \sin nx \, \varphi'(x) \, dx \rightarrow 0, \quad (2.5.10)$$

se $[-a, a]$ è il supporto della funzione φ .

Altri casi di convergenze che valgono unicamente nel senso debole sono dati dalle δ -famiglie, che, come suggerisce il nome, sono legate alla distribuzione delta di Dirac. Discuteremo questi casi a breve.

⁶In realtà è sufficiente assumere che u_n e u siano maggiorate da un polinomio.

⁷Nel nostro caso la dimostrazione può essere ottenuta anche integrando per parti, utilizzando il fatto che φ sono funzioni infinitamente differenziabili e a supporto compatto (o rapidamente decrescenti per nel caso di \mathcal{S}).

2.5.1 Differenziazione rispetto ad un parametro

Sia T_y una distribuzione dipendente da un parametro continuo y . Per ogni y fissato, $[T_{y+h} - T_y]/h$ è una distribuzione dipendente dal parametro h . Definiamo derivata della distribuzione T_y rispetto al parametro y la distribuzione dT_y/dy , definita dalla seguente equazione

$$\left(\frac{dT_y}{dy}, \varphi\right) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} [(T_{y+h}, \varphi) - (T_y, \varphi)] , \quad (2.5.11)$$

quando il limite esiste.

Esempio 2.18. Consideriamo la derivata rispetto a y della distribuzione $T(x - y)$ in $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$. Vale

$$\begin{aligned} \left(\frac{d}{dy}T(x - y), \varphi(x)\right) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} (T(x - y - h) - T(x - y), \varphi(x)) \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} (T, \varphi(x + y + h) - \varphi(x + y)) \\ &= (T, \varphi'(x + y)) \\ &= -(T', \varphi(x + y)) = -(T'(x - y), \varphi(x)) . \end{aligned} \quad (2.5.12)$$

Pertanto

$$\frac{d}{dy}T(x - y) = -T'(x - y) , \quad (2.5.13)$$

cioè la derivata della distribuzione traslata rispetto al parametro della traslazione è uguale all'opposto della distribuzione derivata traslata. In particolare

$$\frac{d}{dy}\delta(x - y) = -\delta'(x - y) . \quad (2.5.14)$$

2.5.2 δ -famiglie

Sia $\{f_\alpha\}$ una famiglia di funzioni localmente integrabili su \mathbb{R}^n con la proprietà

$$\lim_{\alpha \rightarrow \alpha_0} (f_\alpha, \varphi) = \lim_{\alpha \rightarrow \alpha_0} \int_{\mathbb{R}^n} f_\alpha(x) \varphi(x) dx = \varphi(0) \quad \forall \varphi \in \mathcal{D} . \quad (2.5.15)$$

Chiameremo $\{f_\alpha\}$ una δ -famiglia n -dimensionale. Se l'indice α assume valori interi, parleremo di δ -successione.

Teorema 2.4. Sia $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione non negativa localmente integrabile⁸ su \mathbb{R}^n per la quale

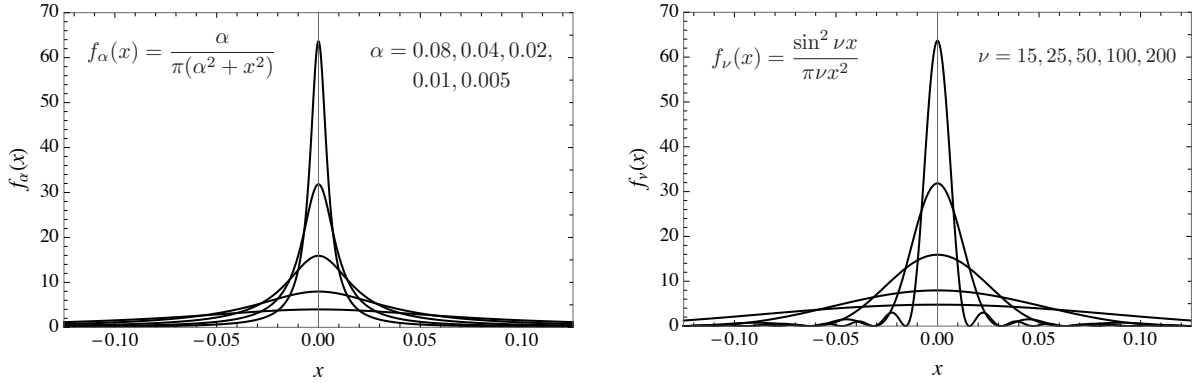
$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x) dx = 1 . \quad (2.5.16)$$

Per $\alpha > 0$ definiamo

$$f_\alpha(x) = \frac{1}{\alpha^n} f(x/\alpha) . \quad (2.5.17)$$

Allora $\{f_\alpha\}$ è una δ -famiglia per $\alpha \rightarrow 0$.

⁸Equivalentemente si può considerare una funzione assolutamente integrabile.

Figura 2.2: Esempi di δ -famiglie.

Dimostrazione. Consideriamo una funzione di test $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ e calcoliamo (f_α, φ)

$$(f_\alpha, \varphi) = \int_{\mathbb{R}^n} f_\alpha(x) \varphi(x) dx = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{\alpha^n} f(x/\alpha) \varphi(x) dx = \int_{\mathbb{R}^n} f(t) \varphi(\alpha t) dt, \quad (2.5.18)$$

dove abbiamo usato il cambio di variabile $x = \alpha t$. Notiamo che

$$|f(t) \varphi(\alpha t)| \leq (\sup_x |\varphi(x)|) |f(t)|, \quad (2.5.19)$$

dunque, essendo le funzioni di test limitate, $f(t) \varphi(\alpha t)$ è maggiorata (per ogni α) da una funzione assolutamente integrabile. Possiamo quindi applicare il teorema di Lebesgue alla seguente espressione, scambiando limite ed integrale,

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} (f_\alpha, \varphi) = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^n} f_\alpha(x) \varphi(x) dx = \int_{\mathbb{R}^n} \left(\lim_{\alpha \rightarrow 0} f(t) \varphi(\alpha t) \right) dt = \varphi(0) \int_{\mathbb{R}^n} f(t) dt = \varphi(0), \quad (2.5.20)$$

da cui deduciamo che $\{f_\alpha(x)\}$ costituisce una δ -famiglia. \square

Esempio 2.19. Diamo degli esempi di δ -famiglie su \mathbb{R}

$$\begin{array}{lll} f(x) = \frac{1}{2} \chi_{[-1,1]}(x) & f_\nu(x) = \frac{\nu}{2} \chi_{[-1,1]}(\nu x) & \nu \rightarrow \infty \\ f(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)} & f_\alpha(x) = \frac{\alpha}{\pi(\alpha^2+x^2)} & \alpha \rightarrow 0^+ \\ f(x) = \frac{e^{-x^2/4}}{\sqrt{4\pi}} & f_t(x) = \frac{e^{-x^2/(4t)}}{\sqrt{4\pi t}} & t \rightarrow 0^+ \\ f(x) = \theta(x) \frac{e^{-1/(4x)}}{\sqrt{4\pi x^{3/2}}} & f_t(x) = \theta(x) t \frac{e^{-t/(4x)}}{\sqrt{4\pi x^{3/2}}} & t \rightarrow 0^+ \\ f(x) = \frac{\sin^2 x}{\pi x^2} & f_\nu(x) = \frac{\sin^2 \nu x}{\pi \nu x^2} & \nu \rightarrow \infty \\ f(x) = \frac{\sin x}{\pi x} & f_\nu(x) = \frac{\sin \nu x}{\pi x} & \nu \rightarrow \infty \end{array} \quad (2.5.21)$$

dove $\chi_{[-1,1]}(x)$ è la funzione caratteristica dell'intervallo $[-1, 1]$.⁹ In fig. 2.2 sono mostrati i grafici delle funzioni di due esempi di δ -famiglie.

⁹Si noti che la funzione $f(x) = \sin x / (\pi x)$ non è assolutamente integrabile su \mathbb{R} . Dunque non possiamo applicare ad essa il teorema 2.4. Per dimostrare che da $f(x)$ si ottiene effettivamente una δ -famiglia si può utilizzare la trasformata di Fourier. Si veda a tal proposito l'esercizio 3.4.

Esempio 2.20. Consideriamo la distribuzione temperata $\log(x + iy)$ ottenuta dalla funzione a lenta crescita $x \rightarrow \log(x + iy)$. Nel senso delle distribuzioni vale

$$\frac{d}{dx} \log(x + iy) = \frac{1}{x + iy}. \quad (2.5.22)$$

Infatti basta considerare la distribuzione a crescita lenta $\log(x + iy)$, applicare la definizione di derivata, ed integrare per parti. Quindi

$$\lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{1}{x + iy} = \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{d}{dx} \log(x + iy). \quad (2.5.23)$$

D'altra parte per la funzione $\log(x + iy)$ vale

$$\lim_{y \rightarrow 0^+} \log(x + iy) = \lim_{y \rightarrow 0^+} [\log |x + iy| + i \operatorname{Arg}(x + iy)] = \log |x| + i \pi \theta(-x). \quad (2.5.24)$$

Questo risultato è vero anche per le distribuzioni. Infatti, passando al limite sotto il segno di integrale, si ottiene

$$\lim_{y \rightarrow 0^+} \int \log(x + iy) \varphi(x) dx = \int [\log |x| + i \pi \theta(-x)] \varphi(x) dx. \quad (2.5.25)$$

Pertanto, utilizzando il teorema 2.2,¹⁰

$$\frac{1}{x + i\epsilon} = \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{1}{x + iy} = \frac{d}{dx} [\log |x| + i \pi \theta(-x)] = P_v \frac{1}{x} - i \pi \delta. \quad (2.5.26)$$

Analogamente

$$\frac{1}{x - i\epsilon} = P_v \frac{1}{x} + i \pi \delta. \quad (2.5.27)$$

Esempio 2.21 (La distribuzione $\delta(a(x))$). Sia $a \in C^1(\mathbb{R})$. Definiamo la distribuzione $\delta(a(x))$ con

$$\delta(a(x)) = \lim_{\alpha \rightarrow 0^+} f_\alpha(a(x)), \quad (2.5.28)$$

dove $\{f_\alpha\}$ è una δ -famiglia. Supponiamo che $a(x)$ ammetta zeri semplici¹¹ nei punti x_k con $k = 1, 2, \dots, n$. Allora vale

$$\delta(a(x)) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{|a'(x_k)|} \delta(x - x_k). \quad (2.5.29)$$

Basta dimostrare il teorema localmente nell'intorno dello zero x_k . Scegliamo un intorno di x_k , $(x_k - \epsilon_k, x_k + \epsilon_k)$, tale che $a(x)$ sia monotona e quindi invertibile. Sia $\varphi \in \mathcal{D}([x_k -$

¹⁰La notazione $\frac{1}{x \pm i\epsilon}$ è tipica della fisica teorica. Nella letteratura matematica si utilizza tipicamente la notazione $\frac{1}{x \pm i0}$.

¹¹Nel caso in cui la funzione $a(x)$ ammetta zeri con molteplicità maggiore di uno l'espressione $\delta(a(x))$ non è univocamente definita.

$\epsilon_k, x_k + \epsilon_k]$), ovvero abbia supporto in $(x_k - \epsilon_k, x_k + \epsilon_k)$. Per tale φ

$$\begin{aligned}
 (\delta(a(x)), \varphi) &= \lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \int_{x_k - \epsilon_k}^{x_k + \epsilon_k} f_\alpha(a(x)) \varphi(x) dx \\
 &= \lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \int_{a(x_k - \epsilon_k)}^{a(x_k + \epsilon_k)} f_\alpha(y) \varphi(a^{-1}(y)) \frac{1}{|a'[a^{-1}(y)]|} dy \\
 &= \left(\delta, \varphi(a^{-1}(y)) \frac{1}{|a'[a^{-1}(y)]|} \right) \\
 &= \frac{1}{|a'(x_k)|} \varphi(x_k) \\
 &= \left(\frac{1}{|a'(x_k)|} \delta(x - x_k), \varphi \right), \tag{2.5.30}
 \end{aligned}$$

dove abbiamo sfruttato il cambio di variabile $y = a(x)$ ed il fatto che $y = 0$ per $x = x_k$. Se invece $\varphi \in \mathcal{D}([\alpha, \beta])$ e l'intervallo (α, β) non contiene nessuno zero x_k allora

$$(\delta(a(x)), \varphi) = 0. \tag{2.5.31}$$

Sommando i vari contributi si ottiene il risultato finale.

Diamo un paio di esempi:

$$\delta(x^2 - a^2) = \frac{1}{2a} [\delta(x - a) + \delta(x + a)] \quad \text{per } a > 0, \tag{2.5.32}$$

$$\delta(\sin x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(x - k\pi). \tag{2.5.33}$$

2.6 Prodotto diretto di distribuzioni e prodotto di convoluzione

Definizione 2.11 (Prodotto diretto di distribuzioni). Questa operazione combina una distribuzione $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ con una $S \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^m)$. Consideriamo una funzione $\varphi(x, y) \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m)$. Per ogni $x \in \mathbb{R}^n$ fissato, $\varphi(x, y) \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^m)$, e si può dimostrare che $(S, \varphi(x, y)) \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$. Questo permette di considerare il funzionale

$$(T \times S, \varphi(x, y)) = (T, (S, \varphi(x, y))). \tag{2.6.1}$$

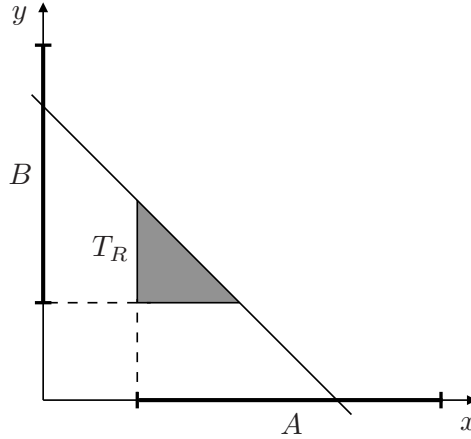
Si verifica che questa espressione definisce una distribuzione in $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m)$ che è detta *prodotto diretto* o *prodotto tensoriale* delle due distribuzioni. Si dimostra che il prodotto diretto è commutativo e associativo. Un'analoga definizione vale in \mathcal{S}' .

Esempio 2.22. Un esempio di prodotto diretto o tensoriale è la δ di Dirac in \mathbb{R}^3 , definita come

$$\delta(\vec{x}) \equiv \delta^3(x) = \delta(x) \times \delta(y) \times \delta(z). \tag{2.6.2}$$

Infatti

$$(\delta(\vec{x}), \varphi(x, y, z)) = \varphi(0, 0, 0). \tag{2.6.3}$$

Figura 2.3: Esempio di regione T_R limitata.

Definizione 2.12 (Prodotto di convoluzione). Siano f e g due funzioni localmente integrabili su \mathbb{R}^n . Se $\forall x$ esiste l'integrale

$$f * g(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(y)g(x-y)dy, \quad (2.6.4)$$

questo definisce il prodotto di convoluzione delle due funzioni.

Se $\text{supp } f \subset A$ e $\text{supp } g \subset B$ ed inoltre gli insiemi sono tali che $\forall R > 0$ l'insieme

$$T_R = [(x, y) : x \in A, y \in B, |x + y| \leq R] \quad (2.6.5)$$

sia limitato in \mathbb{R}^{2n} (vedi fig. 2.3), il prodotto di convoluzione $f * g$ è localmente integrabile. Infatti utilizzando il teorema di Fubini si ha

$$\left| \int_{|z| < R} f * g dz \right| \leq \int_{|z| < R} \int |f(y)| |g(z-y)| dy dz \leq \int_{T_R} |f(y)| |g(x)| dy dx, \quad (2.6.6)$$

dove abbiamo usato il cambio di variabile $x = z - y$. Possiamo allora considerare la distribuzione $f * g$ definita da

$$(f * g, \varphi) = \int f(y)g(z-y) dy \varphi(z) dz \quad \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n). \quad (2.6.7)$$

Facendo il cambio di variabili a jacobiano uno $z \rightarrow x + y$, $y \rightarrow y$ possiamo riscrivere l'espressione precedente nella forma

$$(f * g, \varphi) = \int f(x)g(y)\varphi(x+y) dx dy, \quad (2.6.8)$$

ovvero

$$(f * g, \varphi) = (f(x), (g(y), \varphi(x+y))). \quad (2.6.9)$$

Assumeremo questa espressione come definizione di *prodotto di convoluzione* di due distribuzioni.

Bisogna notare che se $\varphi(x)$ è a supporto compatto in $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, non è detto che $\varphi(x+y)$ sia a supporto compatto in $\mathcal{D}(\mathbb{R}^{2n})$. Quindi la convoluzione così definita non esiste sempre. Il prodotto esiste se una delle due distribuzioni è a supporto compatto.

Diamo il seguente criterio per l'esistenza del prodotto di convoluzione.

Teorema 2.5. Siano T_1 e T_2 due distribuzioni su $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$. Allora $T_1 * T_2$ esiste se vale una delle seguenti condizioni

- i) T_1 e/o T_2 hanno supporto limitato,
- ii) T_1 e T_2 hanno supporto limitato a sinistra (valido per $n = 1$),
- iii) T_1 e T_2 hanno supporto limitato a destra (valido per $n = 1$).

Il prodotto di commutazione, quando esiste, è commutativo e, tra distribuzioni a supporto compatto, è anche associativo.¹² Il prodotto di convoluzione ha come unità la δ di Dirac, infatti

$$(T * \delta, \varphi) = (T(x), (\delta(y), \varphi(x + y))) = (T(x), \varphi(x)) = (T, \varphi). \quad (2.6.10)$$

Quindi $T * \delta = T$. In modo analogo si dimostra

$$T(x - a) = T * \delta(x - a) \quad (2.6.11)$$

e

$$T * \delta' = T'. \quad (2.6.12)$$

Quindi la derivata di una distribuzione è equivalente alla convoluzione della distribuzione con la derivata della δ di Dirac.

Vale inoltre, se $T_1 * T_2$ esiste,

$$(T_1 * T_2)' = T_1 * T_2' = T_1' * T_2. \quad (2.6.13)$$

Infatti

$$(T_1 * T_2)' = \delta' * (T_1 * T_2) = (\delta' * T_1) * T_2 = T_1' * T_2. \quad (2.6.14)$$

Utilizzando le proprietà commutativa ed associativa si dimostra l'altra uguaglianza.

Questa proprietà si generalizza al caso \mathbb{R}^n

$$\partial^\alpha (T_1 * T_2) = (\partial^\alpha T_1) * T_2 = T_1 * (\partial^\alpha T_2), \quad (2.6.15)$$

dove α è un multiindice.

2.7 Esercizi

Esercizio 2.1. Si dimostrino i seguenti limiti in $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ per k intero non negativo

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} t^k \cos tx &= 0, \\ \lim_{t \rightarrow \infty} t^k \sin tx &= 0. \end{aligned} \quad (2.7.1)$$

¹²Più in generale il prodotto di convoluzione è associativo se tutte le distribuzioni, tranne al più una, hanno supporto compatto. Si veda l'esercizio 2.16.

Esercizio 2.2. Si determini la distribuzione $\delta(a - \cos x)$ per $-1 < a < 1$. Perché non sono stati inclusi i punti $a = \pm 1$?

Esercizio 2.3. Si determinino i seguenti limiti in $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$

$$\begin{aligned} i) \quad & \lim_{t \rightarrow \infty} t^2 x \cos tx, & v) \quad & \lim_{t \rightarrow \infty} t \sin(t|x|), \\ ii) \quad & \lim_{t \rightarrow \infty} t^2 |x| \cos tx, & vi) \quad & \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{t}{1 + t^2 x^2}, \\ iii) \quad & \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \sin tx, & vii) \quad & \lim_{t \rightarrow 0} t^{-1/2} e^{-x^2/(4t)}. \\ iv) \quad & \lim_{t \rightarrow \infty} \cos tx P v \frac{1}{x}, & & \end{aligned} \quad (2.7.2)$$

(Suggerimento: per il limite iv), può essere utile notare che, per $\varphi(x) \in \mathcal{D}$, $(\varphi(x) - \varphi(0))/x$ è una funzione infinitamente differenziabile. Per la dimostrazione di questo fatto si confronti l'esercizio 2.17.)

Esercizio 2.4 (Distribuzione parte finita). Definiamo la seguente distribuzione in $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$, detta *parte finita* o anche *partie finie di Hadamard* o *regolarizzazione di Hadamard*

$$\left(Pf \frac{1}{x^2}, \varphi \right) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \left\{ \int_{-\infty}^{-\epsilon} \frac{\varphi(x)}{x^2} dx + \int_{\epsilon}^{\infty} \frac{\varphi(x)}{x^2} dx - \frac{2\varphi(0)}{\epsilon} \right\}. \quad (2.7.3)$$

Si dimostri che tale distribuzione è ben definita e che coincide con la derivata del valore principale

$$\left(P v \frac{1}{x} \right)' = -Pf \frac{1}{x^2}. \quad (2.7.4)$$

Analogamente si può definire

$$Pf x^{-n} = -\frac{d}{dx} Pf \left(\frac{x^{-(n-1)}}{n-1} \right), \quad \text{per } n = 2, 3, \dots, \quad (2.7.5)$$

dove abbiamo posto $Pf(1/x) = P v(1/x)$.

Esercizio 2.5. Si dimostri che in $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$

$$\frac{d^2}{dx^2} \log |x| = -Pf \frac{1}{x^2}. \quad (2.7.6)$$

Esercizio 2.6. Si calcoli in $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^2/\{0,0\})$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t \sin(t|x^2 + y^2 - 1|). \quad (2.7.7)$$

Il limite esiste in $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$?

Esercizio 2.7. Mostrare che la funzione

$$f(x) = \frac{e^x}{(x + i\epsilon)^2} + \frac{e^{-x}}{(x - i\epsilon)^2} - \frac{2(x^2 - \epsilon^2)}{(x^2 + \epsilon^2)^2} \quad (2.7.8)$$

ha limite in $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ per $\epsilon \rightarrow 0$ e riscriverla in forma semplice.

Esercizio 2.8. Si dimostri che la derivata k -esima della funzione delta agisce come $(\delta^{(k)}, \varphi) = (-1)^k \varphi^{(k)}(0)$.

Esercizio 2.9. Si definisca la seguente distribuzione in $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$

$$(f, \varphi) = \int_0^\infty \int_0^\infty \varphi(x, y) dx dy. \quad (2.7.9)$$

Si determini $\partial^2 f / \partial x \partial y$.

Esercizio 2.10. Si risolva per f in $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ l'equazione algebrica $P(x)f = Q(x)$, dove P e Q sono polinomi reali con zeri semplici.

Esercizio 2.11. Si risolva per f in $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ l'equazione differenziale $x^2 df/dx = 1$. (Suggerimento: si determini per prima cosa una soluzione particolare dell'equazione, e si aggiungano poi le ambiguità legate alle funzioni delta ottenibili come soluzioni dell'equazione omogenea associata. Si tenga conto che l'equazione è un'equazione tra distribuzioni, ovvero deve essere valida quando valutata su funzioni di test.)

Esercizio 2.12. Si dimostri che $f = \sum_{n=-\infty}^\infty \delta(x - n)$ è una distribuzione temperata.

Esercizio 2.13. Si determini la più generale distribuzione f in $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ che soddisfa l'equazione $x^k f = 0$, con k intero positivo.

Esercizio 2.14. Si determini $f * f * \dots * f$ (con n fattori) per $f(x) = \theta(x)$ e $f(x) = e^{-x}\theta(x)$.

Esercizio 2.15. Si determini la convoluzione $\delta^{(k)}\theta(x)$, per k intero non negativo.

Esercizio 2.16. Si determinino le convoluzioni di distribuzioni $(1 * \delta') * \theta$ e $1 * (\delta' * \theta)$.

Esercizio* 2.17. Si dimostri che, data $\varphi(x) \in \mathcal{D}$ e $\chi(x) \in \mathcal{D}$ con $\chi(0) = 1$, la seguente definizione

$$\psi(x) = \begin{cases} \frac{\varphi(x) - \varphi(0)\chi(x)}{x} & x \neq 0 \\ \varphi'(0) & x = 0 \end{cases} \quad (2.7.10)$$

corrisponde ad una funzione di test in \mathcal{D} . (Suggerimento: per dimostrare che la funzione è (infinitamente) derivabile si può utilizzare la formula di Taylor

$$f(x) = \sum_{k=0}^m \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + \frac{1}{m!} \int_0^x (x-t)^m f^{(m+1)}(t) dt, \quad (2.7.11)$$

sviluppando la funzione ψ sino all'ordine opportuno.)

Esercizio* 2.18. Si dimostri formalmente che in $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ l'equazione $xT = 0$ ha per soluzione $T = a\delta(x)$ con a costante. Si utilizzi questo risultato per determinare la soluzione dell'equazione $x^m T = 0$. (Suggerimento: si utilizzi il risultato dell'esercizio 2.17 per riscrivere una funzione di test $\varphi(x) \in \mathcal{D}$ come $\varphi(x) = \varphi(0)\chi(x) + x\psi(x)$ e si usi il fatto che $(xT, \psi) = (T, x\psi) = 0$. Per la seconda parte del problema si noti che $x^m T = x(x^{m-1}T)$ e che $x^{m-1}T$ è ancora una distribuzione.)

Esercizio* 2.19. Si dimostri formalmente che in $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ l'equazione $T' = 0$ ha per soluzione $T = a$ con a costante. Si sfruttino questo risultato ed i risultati dell'esercizio 2.18 per determinare la soluzione dell'equazione $x^m T' = 0$. (Suggerimento: si dimostri che la funzione di test $\varphi(x)$ può essere riscritta come $\varphi(x) = \psi'(x) + (\int \varphi(x))\chi(x)$, dove ψ e χ sono funzioni di test e $\int \chi = 1$.)

3

TRASFORMATA DI FOURIER DI DISTRIBUZIONI TEMPERATE

In generale la trasformata di Fourier esiste solo per funzioni assolutamente integrabili sulla retta reale. Ci si rende conto immediatamente che tale restrizione ne limiterebbe l'uso in modo decisivo. Per esempio funzioni che appaiono spesso nelle soluzioni di problemi fisici, come una costante o la funzione trigonometrica $\sin x$, non hanno una trasformata di Fourier propria. È chiaro che una generalizzazione del concetto di trasformata di Fourier che possa coprire anche funzioni di questo tipo sia desiderabile. In questo capitolo vedremo come l'applicabilità della trasformata di Fourier può essere notevolmente ampliata estendendone la nozione alla classe delle distribuzioni temperate.

3.1 Definizione ed esempi

Definizione 3.1 (Trasformata di Fourier di una funzione). Sia φ una funzione in $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Definiamo la sua trasformata di Fourier nel modo seguente

$$F\varphi(y) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int \varphi(x) e^{-i x \cdot y} dx. \quad (3.1.1)$$

Si noti che, con questa convenzione, la trasformata di Fourier inversa è data da

$$F^{-1}\varphi(x) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int \varphi(y) e^{i x \cdot y} dy. \quad (3.1.2)$$

Passiamo ora a definire la trasformata di Fourier per distribuzioni temperate.

Definizione 3.2 (Trasformata di Fourier di una distribuzione temperata). Sia T una distribuzione temperata. Definiamo la sua trasformata di Fourier come la distribuzione FT tale che

$$(FT, \varphi) = (T, F\varphi) \quad \forall \varphi \in \mathcal{S}. \quad (3.1.3)$$

Questa definizione è ben posta in quanto vale che se $\varphi \in \mathcal{S}$, allora $F\varphi \in \mathcal{S}$.¹ L'equazione (3.1.3) definisce quindi un funzionale lineare e continuo, $FT : \mathcal{S}' \rightarrow \mathbb{C}$. La linearità

¹Si noti che, a differenza di quanto avviene in \mathcal{S} , la trasformata di Fourier di una funzione in \mathcal{D} non è in \mathcal{D} . Infatti la trasformata di Fourier di una funzione $C^\infty(\mathbb{R})$ a supporto compatto non ha supporto compatto (tuttavia essa è a decrescita rapida, quindi è in \mathcal{S}). Dunque la trasformata di Fourier di una distribuzione in \mathcal{D}' non sempre esiste.

è ovvia e la continuità segue dalla continuità della trasformata di Fourier. Infatti se $\{\varphi_i\}$ è una successione nulla $\{F\varphi_i\}$ è ancora una successione nulla e quindi

$$(FT, \varphi_i) = (T, F\varphi_i) \rightarrow 0. \quad (3.1.4)$$

In modo analogo si definisce la trasformata inversa

$$(F^{-1}T, \varphi) = (T, F^{-1}\varphi) \quad \forall \varphi \in S. \quad (3.1.5)$$

Valgono inoltre le stesse proprietà della trasformata di Fourier di una funzione:

$$\begin{aligned} F[\partial^\alpha T] &= (i)^{|\alpha|} x^\alpha FT \\ F[(-i)^{|\alpha|} x^\alpha T] &= \partial^\alpha FT \\ F[e^{iax} T] &= [FT](x - a) \\ F[T(x - a)] &= e^{-iax} FT \end{aligned} \quad (3.1.6)$$

dove α è un multiindice e $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n$.

Dimostriamo per esempio la prima delle proprietà precedenti. Per semplicità consideriamo le distribuzioni in \mathbb{R} . Denotando con $T^{(k)}$ la derivata $\partial^k T / \partial x^k$, abbiamo

$$\begin{aligned} (F[T^{(k)}], \varphi) &= (T^{(k)}, F\varphi) = (-1)^k (T, (F\varphi)^{(k)}) \\ &= (-1)^k (T, F[(-ix)^k \varphi]) \\ &= (FT, (ix)^k \varphi) \\ &= ((ix)^k FT, \varphi). \end{aligned} \quad (3.1.7)$$

In modo analogo si dimostrano le altre relazioni.

Esempio 3.1. Calcoliamo la trasformata di Fourier della δ :

$$(F\delta, \varphi) = (\delta, F\varphi) = (F\varphi)(0) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int \varphi(x) dx = \left(\frac{1}{(2\pi)^{n/2}}, \varphi \right) \quad (3.1.8)$$

e quindi

$$F\delta = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}}. \quad (3.1.9)$$

Esempio 3.2. Calcoliamo la trasformata di Fourier della distribuzione regolare associata alla funzione costante $1 \in \mathcal{S}'$. Si ha che

$$(F1, \varphi) = (1, F\varphi) = \int F\varphi dx = (2\pi)^{n/2} \varphi(0) = ((2\pi)^{n/2} \delta, \varphi) \quad \forall \varphi \in \mathcal{S}, \quad (3.1.10)$$

da cui otteniamo²

$$F1 = (2\pi)^{n/2} \delta. \quad (3.1.11)$$

Osserviamo che la funzione costante 1 non è trasformabile secondo Fourier, mentre lo è la distribuzione temperata ad essa associata.

²Questa relazione può anche essere ottenuta applicando la trasformata di Fourier inversa all'eq. (3.1.9).

Esempio 3.3. Calcoliamo la trasformata di Fourier della distribuzione di Heaviside θ in \mathbb{R} . Per il teorema di Lebesgue del passaggio al limite sotto il segno di integrale, vale

$$\int_0^\infty \varphi(y) dy = \lim_{p \rightarrow 0^+} \int_0^\infty e^{-py} \varphi(y) dy. \quad (3.1.12)$$

Si ha allora

$$\begin{aligned} (F\theta, \varphi) &= (\theta, F\varphi) = \int_0^\infty (F\varphi)(y) dy \\ &= \lim_{p \rightarrow 0^+} \int_0^\infty e^{-py} (F\varphi)(y) dy \\ &= \lim_{p \rightarrow 0^+} \int_0^\infty e^{-py} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) e^{-ixy} dx dy \\ &= \lim_{p \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) \int_0^\infty e^{-(p+ix)y} dy dx \\ &= \lim_{p \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) \frac{1}{p+ix} dx \\ &= \frac{1}{i\sqrt{2\pi}} \lim_{p \rightarrow 0^+} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x-ip} \varphi(x) dx = \frac{1}{i\sqrt{2\pi}} \left(\frac{1}{x-i\epsilon}, \varphi \right), \end{aligned} \quad (3.1.13)$$

dove abbiamo utilizzato il teorema di Fubini. Quindi, facendo uso dell'eq. (2.5.27), otteniamo

$$F\theta = \frac{1}{i\sqrt{2\pi}} \frac{1}{x-i\epsilon} = -\frac{i}{\sqrt{2\pi}} P_v \frac{1}{x} + \sqrt{\frac{\pi}{2}} \delta. \quad (3.1.14)$$

Esempio 3.4. Calcoliamo la trasformata di Fourier della distribuzione temperata in \mathbb{R}^3 $\delta(r-a)$, dove $r^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$ e a è un numero reale positivo, definita da

$$(\delta(x-a), \varphi) = \int_{S_a} \varphi dS_a. \quad (3.1.15)$$

Tale distribuzione ha per supporto la superficie S_a della sfera di raggio a con centro nell'origine. Si ha allora

$$\begin{aligned} (F\delta(r-a), \varphi) &= (\delta(r-a), F\varphi) = \int_{S_a} F\varphi dS_a \\ &= (2\pi)^{-3/2} \int_{S_a} \int_{\mathbb{R}^3} \varphi(y) e^{-ix \cdot y} dy dS_a \\ &= (2\pi)^{-3/2} \int_{\mathbb{R}^3} \varphi(y) \int_{S_a} e^{-ix \cdot y} dS_a dy. \end{aligned} \quad (3.1.16)$$

Posto $|y| = \rho$, $x \cdot y = a\rho \cos \theta$, $dS_a = a^2 \sin \theta d\theta d\alpha$, si ottiene

$$\begin{aligned} (F\delta(r-a), \varphi) &= \frac{a^2}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}^3} \varphi(y) \int_{-1}^1 e^{iapu} du dy \\ &= \frac{a^2}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}^3} \varphi(y) 2 \frac{\sin a\rho}{a\rho} dy = \left(\sqrt{\frac{2}{\pi}} a \frac{\sin a\rho}{\rho}, \varphi \right), \end{aligned} \quad (3.1.17)$$

dove abbiamo posto $u = -\cos \theta$ nell'integrale su θ . Quindi otteniamo

$$F\delta(r-a) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} a \frac{\sin a\rho}{\rho}. \quad (3.1.18)$$

3.2 Esercizi

Esercizio 3.1 (Trasformata di Fourier di polinomi). Ogni funzione localmente integrabile con crescita polinomiale definisce una distribuzione in $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ ed ammette trasformata di Fourier. Considerato un polinomio $P(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k$, si dimostri che

$$(FP)(x) = \sqrt{2\pi} \sum_{k=0}^n a_k i^k \delta^{(k)}(x). \quad (3.2.1)$$

(Suggerimento: si sfrutti la relazione $F[(-i)^k x^k T] = \frac{d^k}{dx^k} FT$.)

Esercizio 3.2. Si dimostri che la trasformata di Fourier della distribuzione $1/(x+i\epsilon)$ è data da $F(1/(x+i\epsilon)) = -\sqrt{2\pi}i\theta$.

Esercizio 3.3. Date due distribuzioni temperate T_1 e T_2 di cui almeno una a supporto compatto, si dimostri che

$$F(T_1 * T_2) = FT_1 FT_2. \quad (3.2.2)$$

Si noti che l'espressione a secondo membro è ben definita perché la trasformata di Fourier di una distribuzione a supporto compatto è una funzione C^∞ con crescita polinomiale.

Esercizio 3.4 (Trasformata di Fourier della funzione caratteristica). Si determini la trasformata di Fourier della funzione caratteristica dell'intervallo $[-a, a]$, ovvero $\chi_{[-a, a]}$. Si utilizzi questo risultato per dimostrare che

$$\lim_{a \rightarrow \infty} \frac{\sin ax}{x} = \pi \delta(x). \quad (3.2.3)$$

(Suggerimento: Si confronti l'uguaglianza ottenuta nella prima parte dell'esercizio con la riscrittura della δ ottenuta applicando la trasformata di Fourier alla distribuzione 1.)

Esercizio 3.5. Si determinino le trasformate di Fourier delle seguenti funzioni su \mathbb{R}

$$\begin{array}{ll} i) & x \sin x, \\ ii) & x \sin^2 x, \\ iii) & \frac{1}{1+x^2}, \\ iv) & \sin^k x \quad (k \text{ intero positivo}), \end{array} \quad \begin{array}{ll} v) & x \theta(x), \\ vi) & \theta(x) - \theta(-x), \\ vii) & \sin |x|, \\ viii) & \arctan x. \end{array} \quad (3.2.4)$$

(Suggerimento: per il caso iii) si utilizzi il teorema dei residui per calcolare l'integrale, per il caso viii) si sfrutti la derivata della funzione.)

Esercizio 3.6. Facendo uso delle proprietà elencate in eq. (3.1.6) si dimostri che

$$F \sin ax = i\sqrt{\frac{\pi}{2}}[\delta(x+a) - \delta(x-a)] \quad (3.2.5)$$

e

$$F(\theta \sin ax) = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \left[\frac{1}{x+a-i\epsilon} - \frac{1}{x-a-i\epsilon} \right] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{-a}{(x-i\epsilon)^2 - a^2}. \quad (3.2.6)$$

Esercizio 3.7. Utilizzando la trasformata di Fourier si trovi una soluzione particolare dell'equazione differenziale

$$f''(x) - 4f(x) = \delta(x-5). \quad (3.2.7)$$

PARTE II

EQUAZIONI DIFFERENZIALI ORDINARIE

PROPRIETÀ GENERALI DELLE EQUAZIONI DIFFERENZIALI

Le equazioni differenziali rivestono importanza fondamentale in tutti i settori della fisica. In questo e nei prossimi capitoli presenteremo alcuni aspetti generali riguardanti le equazioni differenziali, insieme a diversi esempi di tecniche di risoluzione e loro possibili applicazioni.

Questo primo capitolo è dedicato alla discussione di alcune proprietà generali delle equazioni differenziali. Introduciamo la nozione di problema di Cauchy come “modello di base” per lo studio delle equazioni differenziali. Inoltre presenteremo i teoremi che garantiscono esistenza ed unicità delle soluzioni.

4.1 Generalità

Si dice *equazione differenziale ordinaria* di ordine n un'equazione che contenga come incognita una funzione u della variabile indipendente $x \in \mathbb{R}$, unitamente alle sue derivate sino all' n -esima. Genericamente possiamo scrivere l'equazione nella forma

$$\Phi(x, u, u', \dots, u^{(n)}) = 0, \quad (4.1.1)$$

con Φ funzione arbitraria. Per molte applicazioni, è sufficiente limitarsi al caso in cui l'equazione può essere messa in *forma normale*, cioè in forma esplicita rispetto alla derivata di massimo grado

$$u^{(n)} = f(x, u, u', \dots, u^{(n-1)}). \quad (4.1.2)$$

Una tale equazione è sempre equivalente ad un sistema di n equazioni differenziali del primo ordine. Basta infatti definire

$$u' = v_1, \quad v_1' = u'' = v_2, \quad \dots \quad v_{n-2}' = u^{(n-1)} = v_{n-1}. \quad (4.1.3)$$

In questo modo l'eq. (4.1.2) si riscrive come

$$\begin{cases} u' = v_1 \\ v_1' = v_2 \\ \dots \\ v_{n-2}' = v_{n-1} \\ v_{n-1}' = f(x, u, v_1, \dots, v_{n-1}) \end{cases}. \quad (4.1.4)$$

Genericamente possiamo quindi restringerci a considerare il problema del primo ordine

$$y' = f(x, y), \quad (4.1.5)$$

in cui $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ è una n -pla di funzioni incognite $y = (y_1, \dots, y_n)$, mentre f è una n -pla di funzioni con dominio in \mathbb{R}^{n+1} . Se f non dipende esplicitamente da x allora il sistema si dice *autonomo*.

Si noti che questo tipo di equazioni differenziali possono anche rappresentare equazioni a valori complessi dipendenti da una variabile reale. Infatti esse possono essere ridotte alla forma (4.1.5) separando la parte reale e la parte immaginaria delle varie funzioni.

Esiste una semplice interpretazione geometrica del problema (4.1.5). Punto per punto nello spazio (x, y) , l'equazione determina delle curve $x \rightarrow y(x)$ con la proprietà di avere i coefficienti angolari della retta tangente determinati esattamente dall'equazione nel punto. Tali curve vengono dette *curve integrali* o *caratteristiche*. Ogni curva integrale è una soluzione dell'equazione. L'insieme infinito delle curve integrali si dice integrale generale dell'equazione.

Per individuare una specifica curva integrale e quindi una soluzione, occorre corredare l'equazione di dati aggiuntivi. Una possibilità è quella di assegnare nel piano un punto (x_0, y_0) attraverso cui la curva soluzione debba passare. Il problema corrispondente viene detto *problema di Cauchy*:

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}. \quad (4.1.6)$$

Almeno localmente, vale a dire in un intorno opportuno del punto iniziale (x_0, y_0) , è possibile stabilire esistenza ed unicità delle soluzioni, se la funzione f è sufficientemente regolare. Valgono infatti i fondamentali teoremi che andremo ad illustrare nella seguente sezione.

Per concludere la discussione generale, facciamo notare che, in luogo delle condizioni iniziali che caratterizzano il problema di Cauchy, possono essere assegnate *condizioni al bordo*, in numero pari all'ordine dell'equazione, distribuite su punti diversi. Ad esempio si possono scegliere delle condizioni agli estremi di un intervallo \mathcal{I} della variabile x all'interno del dominio di definizione. Si indica come *problema di Dirichlet* il caso in cui siano assegnate condizioni al bordo sui valori della funzione $y(x)$. Si parla invece di *problema di Neumann* quando siano assegnate condizioni al bordo sui valori della derivata dy/dx .

A differenza del problema di Cauchy, nel caso di problemi al bordo lo studio di esistenza ed unicità della soluzione è assai complicato da trattare. Per le equazioni lineari, ad esempio, i problemi al bordo si riconducono a problemi agli autovalori per i corrispondenti operatori lineari. In questo caso si parla di *problemi di Sturm-Liouville*. Tali problemi sono molto rilevanti per la fisica. Ad esempio l'equazione di Schrödinger indipendente dal tempo in una dimensione è un problema di Sturm-Liouville.

4.2 Teoremi di esistenza ed unicità

Come primo passo stabiliamo l'esistenza della soluzione del problema differenziale.

Teorema 4.1 (di Peano). Sia assegnato il problema di Cauchy (4.1.6) in un dominio aperto $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^{n+1}$ contenente (x_0, y_0) , e sia $f(x, y)$ continua. Si può allora determinare un

opportuno intorno $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, in cui la soluzione del predetto problema di Cauchy esiste.

Dimostrazione. La dimostrazione di questo teorema può essere trovata in [9]. \square

È importante notare che il teorema di Peano garantisce l'esistenza di una soluzione, ma non la sua unicità. Consideriamo infatti il seguente problema differenziale

$$\begin{cases} y' = \sqrt{|y|} \\ y(x_0) = 0 \end{cases} \quad (4.2.1)$$

nel quale la funzione $f(x, y) = \sqrt{|y|}$ è continua. Si noti tuttavia che questa funzione ha un andamento “singolare” all'origine. Approfondiremo questo aspetto nel seguito.

L'equazione è di facile soluzione. Imponendo la condizione iniziale, una soluzione banale è

$$y(x) = 0, \quad (4.2.2)$$

valida per ogni valore di x . Possiamo però facilmente identificare una seconda soluzione data da

$$\begin{cases} y(x) = \left(\frac{x - x_0}{2}\right)^2 & x \geq x_0 \\ y(x) = -\left(\frac{x - x_0}{2}\right)^2 & x < x_0 \end{cases}, \quad (4.2.3)$$

anch'essa valida per ogni valore di x . In realtà il problema di Cauchy (4.2.1) ammette una famiglia infinita (e continua) di soluzioni, dato che per ogni intervallo (a, b) che contenga x_0 al suo interno, la seguente curva è soluzione:

$$\begin{cases} y(x) = \left(\frac{x - b}{2}\right)^2 & x \geq b \\ y(x) = 0 & a \leq x < b \\ y(x) = -\left(\frac{x - a}{2}\right)^2 & x < a \end{cases}. \quad (4.2.4)$$

Questo insieme di soluzioni è detto *pennello di Peano*. L'origine del nome si intuisce guardando la forma delle soluzioni mostrata in fig. 4.1. Si noti che la soluzione perde l'unicità esattamente quando $y = 0$, ovvero dove $f(x, y) = \sqrt{|y|}$ diventa “singolare”.

Soluzioni di questo tipo vengono dette *singolari*, in quanto non possono essere determinate in maniera completa assegnando le condizioni iniziali, proprio per il venir meno dell'unicità della soluzione.

Nel caso in cui la funzione $f(x, y)$ non solo sia continua, ma abbia anche “crescita limitata”, si può dimostrare che il problema di Cauchy ammette (localmente) un'unica soluzione.

Per chiarire più nel dettaglio questa affermazione, partiamo dalla seguente definizione di funzione localmente lipschitziana.

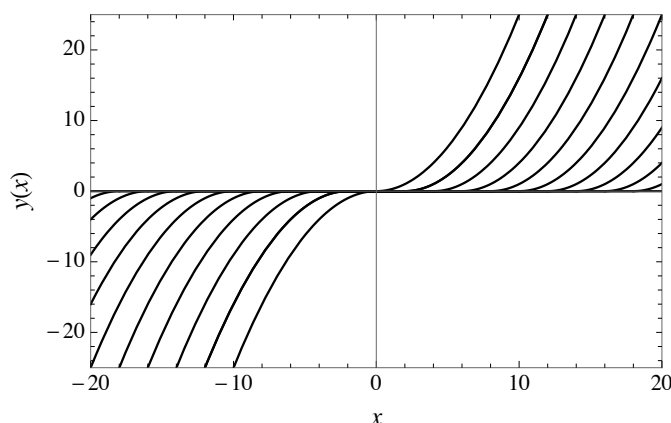


Figura 4.1: *Pennello di Peano*, esempi di soluzioni del problema differenziale (4.2.1) con $x_0 = 0$.

Definizione 4.1 (Condizione di Lipschitz). Consideriamo una funzione $g(x)$ definita su un dominio $D \subset \mathbb{R}^n$. Essa è detta *localmente lipschitziana* se per ogni insieme chiuso e limitato $U \subset D$ esiste una costante positiva L tale che, per ogni coppia di punti $x_1, x_2 \in U$,

$$\|g(x_1) - g(x_2)\| \leq L\|x_1 - x_2\|. \quad (4.2.5)$$

Si noti che la condizione di Lipschitz è più forte della semplice continuità, ma più debole della derivabilità. Ad esempio la funzione $|x|$, con $x \in \mathbb{R}$ è lipschitziana per qualunque valore di x , ma non è derivabile nell'origine. È facile verificare che una funzione che abbia derivati parziali prime continue su D è localmente lipschitziana.

L'introduzione della condizione di Lipschitz è giustificata dal seguente teorema di *Picard-Lindelöf* (detto anche di *Cauchy-Lipschitz*).

Teorema 4.2 (di Picard-Lindelöf). Sia assegnato il problema di Cauchy (4.1.6) in un dominio $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^{n+1}$ contenente (x_0, y_0) . Se $f(x, y)$ è continua e soddisfa la condizione di Lipschitz rispetto alla seconda variabile

$$\|f(x, y_1) - f(x, y_2)\| \leq L\|y_1 - y_2\|, \quad (4.2.6)$$

allora esiste un opportuno intorno aperto di x_0 in cui la soluzione del predetto problema di Cauchy esiste ed è *unica*. La soluzione $y(x; x_0, y_0)$ è inoltre continua rispetto agli argomenti x, x_0 e y_0 in un opportuno intorno $\mathcal{E} \subset \mathbb{R}^{n+2}$ del punto (x_0, x_0, y_0) .

È importante sottolineare che il teorema 4.2 non dice nulla in merito al comportamento “globale” della soluzione. Il dominio di esistenza ed unicità può in genere prolungarsi sino ad un intervallo *massimale*, che di solito è più piccolo del dominio di definizione del problema differenziale. Un esempio classico ed elementare è dato dal seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = y^2 \\ y(0) = 1 \end{cases}. \quad (4.2.7)$$

Si verifica facilmente che la soluzione è

$$y(x) = \frac{1}{1-x}. \quad (4.2.8)$$

Tale soluzione, tuttavia, può essere prolungata solo in $x \in [-\infty, 1]$, esibendo un polo per $x = 1$. L'equazione differenziale, d'altro canto, è definita su tutta la retta reale.

Torniamo ora a considerare il problema di Cauchy (4.2.1), che avevamo proposto come esempio di problema differenziale la cui soluzione non è unica. Possiamo ora apprezzare il fatto che l'unicità della soluzione viene meno nel punto in cui $f(x, y) = \sqrt{|y|}$ diventa non lipschitziana. Infatti

$$\left| \frac{f(x, y) - f(x, 0)}{y} \right| = \frac{1}{\sqrt{|y|}}, \quad (4.2.9)$$

che implica la violazione della condizione di Lipschitz per $y = 0$.

Per concludere discutiamo un'interpretazione geometrica dell'insieme delle soluzioni del problema di Cauchy al variare delle condizioni iniziali. Abbiamo visto che ogni soluzione corrisponde ad una curva integrale che passa per il punto (x_0, y_0) assegnato. Il teorema di Peano garantisce che, sotto l'ipotesi di continuità di $f(x, y)$, per ogni punto (x_0, y_0) nel dominio di definizione passi *almeno* una curva integrale. L'esempio del pennello di Peano dimostra che per un punto possano passare anche più curve integrali.

Nel caso in cui $f(x, y)$ soddisfi in un dominio la condizione di Lipschitz, invece, l'unicità garantisce che per ogni punto passi una ed una sola curva integrale. Geometricamente queste curve integrali si comportano come linee di flusso nello spazio \mathbb{R}^{n+1} . Tali linee di flusso ovviamente *non* si possono intersecare. L'insieme delle curve integrali copre tutto il dominio di definizione del problema di Cauchy.

4.3 Equazioni differenziali e distribuzioni

In senso stretto, la soluzione di un'equazione differenziale di ordine n dovrebbe essere una funzione di classe almeno C^n . È tuttavia evidente che una tale restrizione è troppo vincolante per l'utilizzo delle equazioni differenziali nella fisica teorica. Ad esempio, si consideri il seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) = \theta(x) \\ y(0) = y_0 \end{cases}, \quad (4.3.1)$$

dove $\theta(x)$ è la funzione di Heaviside. Questo problema differenziale potrebbe descrivere la velocità di una particella che a partire dal tempo $x = 0$ è sottoposta ad una forza costante, essendo y_0 la velocità iniziale. Il raccordo continuo in $x = 0$ produce la soluzione

$$y(x) = y_0 + x\theta(x), \quad (4.3.2)$$

che ovviamente non è derivabile nell'origine.

Questo e moltissimi altri esempi richiedono che la classe di funzioni alla quale appartengono coefficienti e soluzioni delle equazioni sia la più ampia possibile.

In un famoso lavoro del 1930, nella necessità di descrivere la funzione d'onda di una particella localizzata nello spazio, P.A.M. Dirac introdusse la "funzione delta" che abbiamo già discusso nel capitolo 2. La delta è ben adatta a descrivere quantità che rappresentano "distribuzioni" localizzate per oggetti puntiformi, quali ad esempio densità di massa o

di carica di un insieme discreto di punti materiali. È quindi naturale aspettarsi che essa possa comparire in molti problemi differenziali della fisica teorica. Per poter gestire esempi di questo tipo è necessario estendere i problemi differenziali in modo che sia i coefficienti che le soluzioni siano sempre pensati appartenere alla classe delle distribuzioni. Ovviamente, nei casi “regolari”, si ritroveranno le soluzioni “classiche” continue e derivabili fino all’ordine dell’equazione differenziale.

EQUAZIONI DIFFERENZIALI LINEARI DEL PRIMO ORDINE

Una classe di problemi differenziali molto rilevante per la fisica teorica è quella comprendente le *equazioni differenziali lineari*, ovvero la classe di problemi in cui la variabile y appare solo linearmente nelle equazioni. In questo capitolo studieremo un caso particolarmente semplice di problemi lineari, ovvero le equazioni lineari del primo ordine in cui y ha una sola componente. Vedremo che le soluzioni di questa classe di problemi possono essere determinate in maniera esplicita. Lo studio delle equazioni lineari ci permetterà inoltre di introdurre due utili tecniche risolutive, il metodo della *variazione delle costanti* e il metodo della *funzione di Green*, che saranno poi ripresi ed approfonditi nei capitoli successivi.

5.1 Considerazioni generali

Un'equazione differenziale lineare indica genericamente un'equazione che può essere posta nella forma

$$\mathcal{L}_x y(x) = f(x), \quad (5.1.1)$$

dove $f(x)$ è una funzione assegnata e \mathcal{L}_x è l'operatore differenziale *lineare* di ordine n

$$\mathcal{L}_x = \sum_{k=0}^n c_k(x) \frac{d^k}{dx^k}, \quad (5.1.2)$$

con $c_k(x)$ funzioni nella variabile x . Si noti che si possono sempre ridefinire i coefficienti $c_k(x)$ insieme ad $f(x)$ in modo che il termine con derivate di ordine massimo sia $c_n(x) = 1$.

Alcuni casi notevoli, che analizzeremo in questo e nei prossimi capitoli, sono dati dalle equazioni del primo ordine

$$\mathcal{L}_x^{(1)} = \frac{d}{dx} + c_0(x), \quad (5.1.3)$$

e del secondo ordine

$$\mathcal{L}_x^{(2)} = \frac{d^2}{dx^2} + c_1(x) \frac{d}{dx} + c_0(x). \quad (5.1.4)$$

Si noti che, come discusso nella sezione 4.1, equazioni differenziali di ordine superiore al primo possono sempre essere riscritte come sistemi di equazioni differenziali del primo

ordine. Questo risultato vale ovviamente anche nel caso di equazioni differenziali lineari, nel qual caso la linearità viene preservata. Non di rado, tuttavia, è conveniente considerare direttamente equazioni differenziali di ordine maggiore di uno.

In questo capitolo ci concentreremo esclusivamente sul caso di equazioni lineari del primo ordine. Le equazioni differenziali del secondo ordine saranno discusse nel capitolo 6, mentre i sistemi di equazioni differenziali saranno presentati nel capitolo 7.

Un aspetto importante da tenere in considerazione nello studio delle equazioni differenziali è la possibilità che la soluzione possa sviluppare delle singolarità. Abbiamo visto nella sezione 4.2 che anche semplici equazioni con $f(x, y)$ analitica in y e indipendente da x (eq. (4.2.7)) possono dare luogo a soluzioni che presentano singolarità e non possono essere estese su tutto il dominio di definizione dell'equazione differenziale.

Le condizioni di esistenza ed unicità che abbiamo discusso nel capitolo 4 si rifrassano nel caso lineare in condizioni sui coefficienti $c_k(x)$. In particolare si ottiene che intorno a punti non singolari dei coefficienti $c_k(x)$ le soluzioni sono analitiche. Dunque, nel caso lineare, possibili singolarità della soluzione possono svilupparsi esclusivamente nei punti in cui i coefficienti sono singolari.

Di conseguenza, la natura delle equazioni, che dipende essenzialmente dal numero e dalle caratteristiche di questi punti singolari, determina le proprietà delle soluzioni. La trattazione delle singolarità può essere sviluppata sfruttando gli strumenti dell'analisi complessa, in particolare tramite gli sviluppi in serie di Laurent. Discuteremo questo aspetto nella parte III di queste note.

La continuità dei coefficienti $c_k(x)$ assicura, nel caso di equazioni lineari, l'esistenza e l'unicità delle soluzioni in tutto l'intervallo di definizione del problema differenziale. Infatti sotto questa condizione, la corrispondente funzione $f(x, y)$ risulta automaticamente lipschitziana nell'intervallo di definizione della variabile x .

Prima di considerare in dettaglio le equazioni lineari del primo ordine, è utile fare alcune considerazioni. Introduciamo la nozione di *equazione omogenea associata* all'equazione (5.1.1), vale a dire

$$\mathcal{L}_x y(x) = \sum_{k=0}^n c_k(x) \frac{d^k y}{dx^k} = 0. \quad (5.1.5)$$

Assumiamo che i coefficienti $c_k(x)$ siano continui. Si verifica facilmente che, dato un insieme di soluzioni dell'eq. (5.1.5), una qualsiasi loro combinazione lineare è ancora soluzione. L'insieme delle soluzioni è quindi uno spazio vettoriale, che si dimostra avere dimensione pari ad n . Pertanto date n soluzioni linearmente indipendenti y_1, \dots, y_n , ogni soluzione dell'equazione omogenea può essere scritta come loro combinazione lineare $y = a_1 y_1 + \dots + a_n y_n$, per opportuni coefficienti a_k (non dipendenti da x).

Inoltre la differenza di due soluzioni dell'equazione non omogenea (5.1.1) deve necessariamente soddisfare l'equazione omogenea. L'integrale generale si otterrà dunque come somma di una qualsiasi soluzione dell'equazione non omogenea (detta *soluzione particolare*, $y_P(x)$) e della soluzione generale dell'omogenea. Si può quindi scrivere

$$y(x) = y_P(x) + \sum_{k=1}^n a_k y_k(x), \quad (5.1.6)$$

dove i coefficienti a_k vanno fissati imponendo le condizioni iniziali del problema di Cauchy in modo da ottenere l'unica soluzione.

5.2 L'equazione omogenea associata

Andiamo ora a studiare le soluzioni esplicite per le equazioni lineari del primo ordine. La parte più difficile nella determinazione dell'integrale generale è solitamente la determinazione della soluzione particolare $y_P(x)$. Introduciamo nelle prossime sezioni due metodi equivalenti, ma concettualmente diversi, per ottenere questa soluzione, quello detto della *variazione delle costanti* e il *metodo della funzione di Green*.

Partiamo dal problema di Cauchy

$$\begin{cases} \frac{dy(x)}{dx} + c_0(x)y(x) = f(x) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} . \quad (5.2.1)$$

Come già detto, la soluzione $y(x)$ esiste ed è unica in tutto l'intervallo di definizione dei coefficienti dell'equazione, che si assumono essere continui. Nel caso lineare del primo ordine la soluzione può anche essere scritta esplicitamente, come illustreremo.

Il primo passo per ottenere la soluzione consiste nel considerare l'equazione omogenea associata, ovvero

$$y' + c_0 y = 0 , \quad (5.2.2)$$

dove abbiamo sottinteso la dipendenza da x . Questa equazione può essere risolta per *separazione delle variabili*,

$$\frac{y'}{y} = -c_0 , \quad (5.2.3)$$

da cui ricaviamo

$$\log y = - \int^x c_0(\xi) d\xi + C , \quad (5.2.4)$$

dove C è una costante arbitraria, e quindi

$$y = \exp \left(- \int^x c_0(\xi) d\xi \right) . \quad (5.2.5)$$

Lasciamo per ora libero l'estremo inferiore di integrazione e poniamo la costante $C = 0$. Variando l'estremo di integrazione otteniamo una variazione della soluzione per una costante moltiplicativa, analogamente a quanto succede variando C .

Si noti che la soluzione in eq. (5.2.5) può essere estesa a tutto il dominio di definizione di $c_0(x)$, essendo $c_0(x)$ continua e quindi integrabile.

5.3 Soluzione completa: Metodo della variazione delle costanti

Veniamo ora alla trattazione dell'equazione non omogenea. Per determinare una soluzione particolare adotteremo il metodo della *variazione delle costanti*. Questo metodo consiste

nel riscrivere y_P come

$$y_P = a y \quad (5.3.1)$$

dove y è una soluzione dell'equazione omogenea ed a è una funzione di x anziché una costante.¹ In tal modo otteniamo la seguente espressione per la derivata di y_P :

$$y'_P = a'y + a y'. \quad (5.3.2)$$

Sostituendo y_P e y'_P nell'eq. (5.2.1) risulta

$$(a'y + a y') + c_0 a y = f(x). \quad (5.3.3)$$

Poiché y è soluzione dell'equazione omogenea,

$$a(y' + c_0 y) + a'y = a'y = f(x), \quad (5.3.4)$$

da cui

$$a' = f(x)/y(x). \quad (5.3.5)$$

Questa equazione è facilmente risolubile per integrazione:

$$a(x) = \int^x \frac{f(\xi)}{y(\xi)} d\xi, \quad (5.3.6)$$

da cui ricaviamo

$$y_P = \left[\int^x f(\xi) \exp \left(\int^\xi c_0(\eta) d\eta \right) d\xi \right] \left[\exp \left(- \int^x c_0(\eta) d\eta \right) \right] \quad (5.3.7)$$

$$= \int^x f(\xi) \exp \left(- \int_\xi^x c_0(t) dt \right) d\xi. \quad (5.3.8)$$

L'integrale generale dell'equazione differenziale non omogenea

$$\bar{y} = y_P + c y, \quad (5.3.9)$$

deve infine essere specializzato in modo da soddisfare la condizione iniziale $\bar{y}(x_0) = y_0$. Una scelta opportuna degli estremi di integrazione è quella che rende nulla la soluzione particolare y_P nel punto iniziale ed uguale a y_0 la restante espressione $c y$. In definitiva

$$\bar{y}(x) = y_0 \exp \left(- \int_{x_0}^x c_0(\xi) d\xi \right) + \int_{x_0}^x f(\xi) \exp \left(- \int_\xi^x c_0(t) dt \right) d\xi. \quad (5.3.10)$$

¹Vedremo in seguito che il metodo di variazione delle costanti, per equazioni di ordine superiore o per sistemi di equazioni del primo ordine, consiste nel riscrivere la soluzione particolare come combinazione lineare di soluzioni indipendenti dell'equazione omogenea, con coefficienti dipendenti da x .

5.4 Soluzione completa: Metodo della funzione di Green

Presentiamo ora un metodo alternativo per ricavare la soluzione generale del problema non omogeneo. Questo metodo è noto come *metodo della funzione di Green*. Partiamo dalla definizione di *soluzione fondamentale* dell'operatore lineare.

Definizione 5.1 (Soluzione fondamentale). Si definisce *soluzione fondamentale* dell'operatore lineare $\mathcal{L}_x^{(1)} = \frac{d}{dx} + c_0(x)$ una funzione di due variabili $G(x, t)$ che soddisfa, nel senso delle distribuzioni, l'equazione

$$\mathcal{L}_x^{(1)} G(x, t) = \delta(x - t), \quad (5.4.1)$$

dove il termine noto è la delta di Dirac.

Come integrale generale, la soluzione fondamentale è definita a meno di soluzioni dell'equazione omogenea associata. La soluzione fondamentale può essere interpretata come la risposta di un sistema ad un "impulso" localizzato a $x = t$.

Per discuterne l'uso è opportuno considerare il problema con condizioni iniziali omogenee

$$\begin{cases} \frac{dy(x)}{dx} + c_0(x)y(x) = g(x) \\ y(x_0) = 0 \end{cases}. \quad (5.4.2)$$

Il problema di Cauchy (5.2.1) può essere facilmente ricondotto a quello con condizioni iniziali omogenee ridefinendo $y(x)$. In particolare la ridefinizione $y(x) = \tilde{y}(x) + y_0$ trasforma il problema di Cauchy (5.2.1) nell'equazione (5.4.2) con $g(x) = f(x) - y_0 c_0(x)$.

Definiamo ora la *funzione di Green*.

Definizione 5.2 (Funzione di Green). La soluzione fondamentale $G(x, t)$ che soddisfa la condizione iniziale omogenea

$$G(x_0, t) = 0 \quad (5.4.3)$$

prende il nome di *funzione di Green* dell'operatore differenziale $\mathcal{L}_x^{(1)}$.

La funzione di Green è identificabile con il nucleo dell'operatore differenziale inverso. Infatti, con riferimento al problema (5.4.2), possiamo ottenere la soluzione attraverso l'integrale della funzione di Green e del termine noto $g(x)$:

$$y(x) = \int G(x, t) g(t) dt. \quad (5.4.4)$$

Questo risultato si verifica facilmente notando che

$$\mathcal{L}_x^{(1)} y(x) = \int (\mathcal{L}_x^{(1)} G) g(t) dt = \int \delta(x - t) g(t) dt = g(x), \quad (5.4.5)$$

e che la soluzione data dalla (5.4.4) soddisfa la condizione iniziale omogenea.

Se, invece della funzione di Green, si utilizzasse nell'eq. (5.4.4) una qualsiasi soluzione fondamentale, si otterrebbe sempre una soluzione particolare dell'equazione differenziale,

ma con diverse condizioni iniziali. Questa soluzione differirebbe dalla soluzione del problema (5.4.2) per una soluzione dell'equazione omogenea (ovvero dell'equazione con $g(x) = 0$).

Determiniamo esplicitamente la funzione di Green per l'equazione (5.4.2). Partendo da

$$\frac{d}{dx}G(x, t) + c_0(x)G(x, t) = \delta(x - t), \quad (5.4.6)$$

possiamo osservare che $G(x, t)$ soddisfa l'equazione omogenea per $x \neq t$. La presenza della δ suggerisce che G debba avere un salto per $x = t$, in modo che G' ricostruisca $\delta(x - t)$. Per determinare la condizione di giunzione possiamo usare la procedura (non rigorosa) di integrare l'equazione differenziale in un intorno del punto t :

$$\int_{t-\epsilon}^{t+\epsilon} \frac{dG(x, t)}{dx} dx + \int_{t-\epsilon}^{t+\epsilon} c_0(x)G(x, t) dx = \int_{t-\epsilon}^{t+\epsilon} \delta(x - t) dx. \quad (5.4.7)$$

Nel limite in cui $\epsilon \rightarrow 0$, il secondo integrale a primo membro si annulla. Infatti se $c_0(x)$ è regolare, l'integrando può al più esibire un salto e quindi è limitato. Otteniamo dunque

$$G(t + \epsilon, t) - G(t - \epsilon, t) = 1. \quad (5.4.8)$$

Ovvero, la funzione di Green in $x = t$ deve esibire un salto pari a 1.

La generica soluzione dell'equazione omogenea è, come visto in precedenza,

$$y(x) = \exp\left(-\int^x c_0(\xi) d\xi\right). \quad (5.4.9)$$

Si può allora definire, con una scelta opportuna degli estremi di integrazione,

$$G(x, t) = \begin{cases} A_-(t) \exp\left(-\int_t^x c_0(\xi) d\xi\right) & x < t \\ A_+(t) \exp\left(-\int_t^x c_0(\xi) d\xi\right) & x > t \end{cases}. \quad (5.4.10)$$

Imponendo la condizione di salto otteniamo

$$A_+(t) = A_-(t) + 1. \quad (5.4.11)$$

Dunque possiamo riscrivere l'equazione (5.4.10) come

$$G(x, t) = (A_-(t) + \theta(x - t)) \exp\left(-\int_t^x c_0(\xi) d\xi\right). \quad (5.4.12)$$

Dobbiamo ora imporre la condizione iniziale $G(x_0, t) = 0$. Per fare ciò distinguiamo i due casi $t > x_0$ e $t < x_0$. Nel caso $t > x_0$ la condizione iniziale implica che $A_-(t) = 0$, mentre nel caso $t < x_0$ otteniamo $A_-(t) = -1$. La funzione di Green è quindi data da

$$G(x, t) = (-\theta(x_0 - t) + \theta(x - t)) \exp\left(-\int_t^x c_0(\xi) d\xi\right). \quad (5.4.13)$$

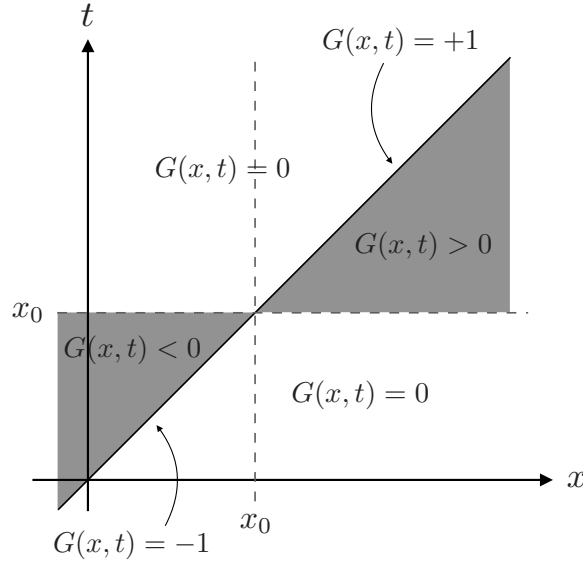


Figura 5.1: Struttura della funzione di Green $G(x, t)$ per il problema di Cauchy del primo ordine.

La struttura della funzione di Green nel piano (x, t) è mostrata nella fig. 5.1. Si può notare che $G(x, t)$ è nulla nelle regioni $x < t$ con $t > x_0$ e $x > t$ con $t < x_0$. Nelle regioni in cui $G(x, t)$ non si annulla si ha che, per $x > t$ la Funzione di Green è positiva e tende a $+1$ per $x \rightarrow t^+$, mentre per $x < t$ è negativa e tende a -1 per $x \rightarrow t^-$.

Per ottenere la soluzione del problema di Cauchy in eq. (5.2.1) dobbiamo applicare l'eq. (5.4.4) con le opportune ridefinizioni di $y(t)$ e $g(t)$. In questo modo otteniamo che

$$y(x) = y_0 + \int_{-\infty}^{+\infty} G(x, t)[f(t) - y_0 c_0(t)] dt. \quad (5.4.14)$$

Partiamo dal caso $x > x_0$. Notiamo che $G(x, t) = 0$ per $t < x_0$ e per $t > x$, quindi ricaviamo che

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^x \exp\left(-\int_t^x c_0(\xi) d\xi\right) [f(t) - y_0 c_0(t)] dt. \quad (5.4.15)$$

Usando il fatto che

$$\frac{d}{dt} \exp\left(-\int_t^x c_0(\xi) d\xi\right) = c_0(t) \exp\left(-\int_t^x c_0(\xi) d\xi\right), \quad (5.4.16)$$

si ottiene facilmente il risultato

$$y(x) = y_0 \exp\left(-\int_{x_0}^x c_0(\xi) d\xi\right) + \int_{x_0}^x f(t) \exp\left(-\int_t^x c_0(\xi) d\xi\right) dt, \quad (5.4.17)$$

Nel caso $x < x_0$ abbiamo che $G(x, t) = 0$ per $t > x_0$ e per $t < x$, quindi otteniamo

$$y(x) = y_0 + \int_x^{x_0} (-1) \exp\left(-\int_t^x c_0(\xi) d\xi\right) [f(t) - y_0 c_0(t)] dt. \quad (5.4.18)$$

Questa espressione si riconduce immediatamente a quella data in eq. (5.4.15) e quindi porta nuovamente al risultato in eq. (5.4.17), che risulta valido per qualunque valore di x .

L'espressione ottenuta coincide correttamente con il risultato ricavato tramite il metodo della variazione delle costanti, eq. (5.3.10).

Concludiamo la discussione menzionando che la scelta di condizioni al bordo per la funzione di Green data nella definizione 5.2 non è l'unica possibile. Un'alternativa consiste nel definire due funzioni di Green che soddisfano le condizioni $G_A(x, t) = 0$ per $t > x$ e $G_R(x, t) = 0$ per $t < x$. Queste due funzioni sono dette rispettivamente *funzione di Green avanzata* e *funzione di Green ritardata*. Come è facile verificare $G(x, t) = G_A(x, t)$ se $x_0 < t < x$, mentre $G(x, t) = G_R(x, t)$ se $x_0 > t > x$. Usando le funzioni di Green avanzata e ritardata l'equazione (5.4.4) può essere riscritta come²

$$y(x) = \int_{x_0}^{+\infty} G_A(x, t)g(t) dt \quad (5.4.19)$$

per $x > x_0$ e

$$y(x) = \int_{-\infty}^{x_0} G_R(x, t)g(t) dt \quad (5.4.20)$$

per $x < x_0$. Queste espressioni chiaramente forniscono la soluzione del problema con condizioni omogenee $y(x_0) = 0$. Analogamente a quanto mostrato in precedenza, esse possono anche essere utilizzate per ricavare la soluzione generale del problema di Cauchy con condizione iniziale non omogenea.

Discuteremo più in dettaglio le funzioni di Green avanzata e ritardata nel caso di equazioni differenziali lineari del secondo ordine, che costituiranno l'argomento del capitolo 6.

5.5 Esempi

Proponiamo ora un esempio esplicito di problema da Cauchy lineare del primo ordine. Discuteremo tre modi equivalenti per ricavare la soluzione. Il primo è l'utilizzo delle formule ricavate nelle sezioni precedenti. Gli altri due sono le applicazioni del metodo di variazione delle costanti e del metodo della funzione di Green. Questi ultimi approcci sono presentati in dettaglio per renderli più chiari grazie all'applicazione ad un caso esplicito.

Consideriamo il seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) + 5x^4 y(x) = x^4 \\ y(0) = 0 \end{cases} \quad (5.5.1)$$

²Come conseguenza delle condizioni al bordo delle funzioni di Green $G_A(x, t)$ e $G_R(x, t)$, gli estremi di integrazione $\pm\infty$ possono essere sostituiti con un qualunque valore $\Delta \geq x$ per il caso $+\infty$ e $\Delta \leq x$ per il caso $-\infty$.

Uso del risultato generale. Applicando la formula data in eq. (5.3.10), con $c_0(x) = 5x^4$, $f(x) = x^4$, $x_0 = 0$ e $y_0 = 0$, otteniamo

$$\begin{aligned} y(x) &= \int_0^x t^4 \exp\left(-\int_t^x 5\xi^4 d\xi\right) dt = \int_0^x t^4 e^{-x^5+t^5} dt \\ &= e^{-x^5} \int_0^x t^4 \exp(t^5) dt = e^{-x^5} \frac{1}{5} e^{t^5} \Big|_0^x = \frac{1}{5} (1 - e^{-x^5}) . \end{aligned} \quad (5.5.2)$$

Soluzione dell'equazione omogenea associata. Per applicare il metodo della variazione delle costanti e il metodo della funzione di Green, è dapprima necessario ricavare la soluzione dell'equazione omogenea associata. Partiamo dall'equazione omogenea

$$y' + 5x^4 y = 0 , \quad (5.5.3)$$

utilizzando il metodo della separazione delle variabili otteniamo

$$\frac{y'}{y} = -5x^4 \quad (5.5.4)$$

e quindi

$$\log y = -x^5 + \tilde{c} , \quad (5.5.5)$$

con \tilde{c} una costante arbitraria. La soluzione dell'equazione omogenea è quindi

$$\tilde{y} = c e^{-x^5} . \quad (5.5.6)$$

Metodo della variazione delle costanti. Poniamo

$$y_P = a(x) e^{-x^5} , \quad (5.5.7)$$

dove $a(x)$ è il coefficiente da determinare. Sostituendo y_P nell'equazione si ottiene

$$a'(x) e^{-x^5} + a(x) (-5x^4) e^{-x^5} + 5x^4 a(x) e^{-x^5} = x^4 , \quad (5.5.8)$$

da cui

$$a'(x) = x^4 e^{x^5} = \frac{d}{dx} \frac{e^{x^5}}{5} . \quad (5.5.9)$$

Ricaviamo quindi

$$a(x) = \frac{1}{5} e^{x^5} \quad \Rightarrow \quad y_P = \frac{1}{5} e^{x^5} e^{-x^5} = \frac{1}{5} . \quad (5.5.10)$$

L'integrale generale dell'equazione non omogenea è

$$y(x) = y_P + \tilde{y} = \frac{1}{5} + c e^{-x^5} . \quad (5.5.11)$$

Imponendo la condizione iniziale ricaviamo la costante c :

$$y(0) = 0 = \frac{1}{5} + c \quad \Rightarrow \quad c = -\frac{1}{5} . \quad (5.5.12)$$

Otteniamo dunque la soluzione cercata

$$y(x) = \frac{1}{5} (1 - e^{-x^5}) . \quad (5.5.13)$$

Metodo della funzione di Green. Si trova facilmente che la funzione di Green del problema ha la forma

$$G(x, t) = (\theta(x - t) - \theta(-t))e^{-x^5+t^5}. \quad (5.5.14)$$

Il problema differenziale ha condizione iniziale omogenea, quindi la soluzione è data dall'eq. (5.4.4), da cui ricaviamo³

$$\begin{aligned} y(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} (\theta(x - t) - \theta(-t))e^{-x^5+t^5} t^4 dt = \int_0^x e^{-x^5+t^5} t^4 dt \\ &= e^{-x^5} \int_0^x dt \frac{d}{dt} \frac{e^{-t^5}}{5} = \frac{e^{-x^5}}{5} e^{t^5} \Big|_0^x = \frac{1}{5} (1 - e^{-x^5}). \end{aligned} \quad (5.5.15)$$

5.6 Esercizi

Esercizio 5.1. Si risolva il problema di Cauchy in eq. (5.5.1) con la condizione iniziale non omogenea $y(0) = y_0$. Per ricavare la soluzione si utilizzino il risultato generale eq. (5.3.10), il metodo della variazione delle costanti ed il metodo della funzione di Green.

Esercizio 5.2 (Equazioni a coefficienti costanti). Si risolva il seguente tipo di equazioni differenziali omogenee a coefficienti costanti

$$y' + a y = 0. \quad (5.6.1)$$

Per determinare la soluzione si può utilizzare l'Ansatz $y = c e^{\alpha x}$ e ricavare l'equazione indiciale per α .

Esercizio 5.3 (Equazioni di Eulero). Si risolva il seguente tipo di equazioni differenziali omogenee sul dominio $[0, \infty]$

$$x y' + a y = 0, \quad (5.6.2)$$

con a costante. Per determinare la soluzione si può utilizzare l'Ansatz $y = c x^\alpha$ e ricavare l'equazione indiciale per α .

Esercizio 5.4. Si risolva il seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) - \tan x y(x) = \sin x \\ y(0) = y_0 \end{cases}. \quad (5.6.3)$$

Esercizio 5.5. Si risolva il seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) + \tan x y(x) = \cos x \\ y(0) = y_0 \end{cases}. \quad (5.6.4)$$

Esercizio 5.6. Si risolva il seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} \sin x y'(x) - \cos x y(x) = \sin^2 x \\ y'(0) = y_0 \end{cases}. \quad (5.6.5)$$

Si utilizzi il metodo della variazione delle costanti. Si noti che la condizione al bordo coinvolge la derivata della funzione e che nel punto $x = 0$ il coefficiente del termine $y'(x)$ si annulla.

³Ricordiamo che i casi $x < x_0$ ed $x > x_0$ riconducono alla stessa espressione.

Esercizio 5.7. Risolvere nel senso delle distribuzioni l'equazione differenziale

$$y' + 2xy = \delta(x^2 - x), \quad (5.6.6)$$

con il dato iniziale $y(-1) = 1$.

EQUAZIONI DIFFERENZIALI LINEARI DEL SECONDO ORDINE

In questo capitolo discuteremo un'importante classe di equazioni differenziali, quelle lineari del secondo ordine. A differenza del caso di equazioni del primo ordine, per quelle del secondo ordine spesso non è possibile determinare esplicitamente la soluzione. Tuttavia esistono diverse tecniche che permettono di risolvere le equazioni almeno localmente, come ad esempio le espansioni in serie.

Il fatto che le equazioni omogenee del secondo ordine ammettano due soluzioni indipendenti, rende la teoria che descrive queste equazioni molto più ricca. Ad esempio, le soluzioni indipendenti sono strettamente legate tra di loro. Questa relazione è esplicitata attraverso il *determinante di Wronski* o *wronskiano*, che permette di semplificare la determinazione delle soluzioni dell'equazione qualora sia nota una delle due soluzioni dell'equazione omogenea.

Inoltre, come vedremo, i metodi della variazione delle costanti e della funzione di Green possono essere generalizzati al caso di equazioni del secondo ordine, fornendo degli utili strumenti di risoluzione.

6.1 Considerazioni generali

Un'equazione lineare del secondo ordine è genericamente della forma

$$u''(x) + c_1(x)u'(x) + c_0(x)u(x) = f(x). \quad (6.1.1)$$

Tale forma può tuttavia essere semplificata tramite una ridefinizione della variabile y , in modo da portare l'equazione nella cosiddetta *forma canonica*

$$y''(x) + c(x)y(x) = g(x), \quad (6.1.2)$$

in cui il termine con la derivata prima è assente.

Per trasformare l'equazione in forma canonica si usa la ridefinizione $u(x) = A(x)y(x)$ e si determina $A(x)$ imponendo che i termini del primo ordine si annullino. Vediamo esplicitamente la determinazione di $A(x)$. Le espressioni per le derivate di u diventano

$$u' = A'y + Ay' \quad (6.1.3)$$

e

$$u'' = A''y + 2A'y' + Ay'' . \quad (6.1.4)$$

L'equazione differenziale in eq. (6.1.1) diviene

$$Ay'' + (2A' + Ac_1)y' + (A'' + c_1A' + c_0A)y = f(x) , \quad (6.1.5)$$

quindi la condizione $2A' + Ac_1 = 0$ produce

$$A = \exp \left(- \int^x \frac{c_1(\xi)}{2} d\xi \right) . \quad (6.1.6)$$

L'equazione in forma canonica in termini della nuova variabile risulta

$$y'' + \frac{A'' + c_1A' + c_0A}{A}y = \frac{f}{A} , \quad (6.1.7)$$

che può anche essere riscritta come

$$y'' + \left(c_0 - \frac{c_1'}{2} - \frac{c_1^2}{4} \right) y = \frac{f(x)}{A} . \quad (6.1.8)$$

Chiaramente le eventuali condizioni al contorno devono essere trasformate di conseguenza, utilizzando la relazione tra $u(x)$ e $y(x)$. In particolare, generiche condizioni al bordo della forma¹

$$\begin{cases} \alpha_1 u(a) + \beta_1 u'(a) - \gamma_1 = 0 \\ \alpha_2 u(b) + \beta_2 u'(b) - \gamma_2 = 0 \end{cases} , \quad (6.1.9)$$

dove a e b sono i punti in cui sono imposte le condizioni, vengono trasformate in condizioni analoghe su y , come si può facilmente verificare.

Una seconda forma in cui le equazioni differenziali lineari del secondo ordine sono spesso riscritte è quella di Sturm-Liouville, ovvero

$$\frac{d}{dx} \left(p(x) \frac{d}{dx} \right) y(x) + q(x) y(x) = g(x) . \quad (6.1.10)$$

Tale forma può essere ottenuta moltiplicando l'eq. (6.1.1) per il fattore

$$\mu(x) = \exp \left(\int^x c_1(\xi) d\xi \right) . \quad (6.1.11)$$

In questo modo si ottiene

$$p(x) = \mu(x) , \quad q(x) = c_0(x)\mu(x) , \quad g(x) = f(x)\mu(x) . \quad (6.1.12)$$

Abbiamo visto, nei paragrafi precedenti, che un ruolo cruciale è giocato dalle soluzioni dell'equazione omogenea associata. Purtroppo, a differenza del caso del primo ordine, non esiste un metodo che possa condurre sempre alla determinazione di tali soluzioni per equazioni lineari di ordine superiore. Esistono, tuttavia, due tipologie particolari di equazioni lineari omogenee per le quali la soluzione è pressoché immediata, le equazioni a coefficienti costanti e le equazioni di Eulero, che discuteremo nelle prossime sezioni.

¹Si noti che per specificare la soluzione di un'equazione del secondo ordine occorre specificare due condizioni al bordo.

6.2 Equazioni omogenee a coefficienti costanti

Una classe di equazioni differenziali lineari omogenee del secondo ordine facilmente risolubili è quella delle equazioni a coefficienti costanti. Esse hanno la forma

$$a y''(x) + b y'(x) + c y(x) = 0, \quad (6.2.1)$$

dove a , b e c sono costanti.²

Cerchiamo delle soluzioni utilizzando l'Ansatz $y(x) = e^{\alpha x}$. Sostituendo nell'equazione troviamo l'*equazione caratteristica*

$$a \alpha^2 + b \alpha + c = 0, \quad (6.2.2)$$

le cui radici α_1 e α_2 , se distinte, determinano la coppia di soluzioni indipendenti

$$y_1(x) = e^{\alpha_1 x}, \quad y_2(x) = e^{\alpha_2 x}. \quad (6.2.3)$$

Nel caso in cui le radici siano coincidenti $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$, una soluzione è ancora $y_1(x) = e^{\alpha x}$. Una seconda soluzione linearmente indipendente può essere cercata usando l'Ansatz

$$y(x) = \rho(x) e^{\alpha x}. \quad (6.2.4)$$

Sostituendo nell'equazione differenziale troviamo

$$(a \alpha^2 + b \alpha + c) \rho(x) e^{\alpha x} + [a \rho''(x) + (2 a \alpha + b) \rho'(x)] e^{\alpha x} = 0. \quad (6.2.5)$$

L'espressione nella prima parentesi è nulla coincidendo con l'equazione caratteristica valutata in α . La seconda parentesi fornisce l'equazione

$$\rho''(x) = 0, \quad (6.2.6)$$

infatti, essendo le soluzioni dell'equazione caratteristica coincidenti si ha che $\alpha = -b/2a$ e il coefficiente del termine $\rho'(x)$ è nullo. Ne segue che $\rho(x) = c_1 x + c_2$. Una possibile scelta per la seconda soluzione è $y_2(x) = x e^{\alpha x}$, che è chiaramente indipendente da $y_1(x) = e^{\alpha x}$, avendosi $y_2/y_1 = x$ non costante. La coppia di soluzioni indipendenti è quindi

$$y_1(x) = e^{\alpha x}, \quad y_2(x) = x e^{\alpha x}. \quad (6.2.7)$$

6.3 Equazioni di Eulero

Passiamo ora a considerare il caso delle *equazioni di Eulero* del secondo ordine, ovvero

$$y''(x) + \frac{a}{x} y'(x) + \frac{b}{x^2} y(x) = 0, \quad (6.3.1)$$

con a e b costanti.³ Si noti che i coefficienti di questa equazione hanno delle singolarità per $x = 0$. Ci restringeremo quindi al dominio $x > 0$. Lo studio dei punti singolari delle equazioni differenziali lineari sarà discusso nella parte III.

²Si noti che si può sempre porre $a = 1$.

³Un modo equivalente per esprimere l'equazione di Eulero è $x^2 y''(x) + a x y'(x) + b y(x) = 0$.

In questo caso è conveniente cercare soluzioni utilizzando l'Ansatz $y(x) = x^\alpha$. Sostituendo nell'equazione differenziale otteniamo l'*equazione caratteristica*

$$\alpha(\alpha - 1) + a\alpha + b = 0, \quad (6.3.2)$$

le cui radici α_1 e α_2 determinano, se distinte, la coppia di soluzioni indipendenti

$$y_1(x) = x^{\alpha_1}, \quad y_2(x) = x^{\alpha_2}. \quad (6.3.3)$$

Notiamo che queste soluzioni sono reali solo se le radici $\alpha_{1,2}$ sono reali. Nel caso in cui $a, b \in \mathbb{R}$ e le radici siano complesse, ovvero $\alpha_{1,2} = \alpha \pm i\beta$, una coppia di soluzioni reali può essere determinata prendendo opportune combinazioni lineari delle soluzioni in eq. (6.3.3). Una possibile scelta per le due soluzioni reali è

$$x^\alpha \cos(\beta \log(x)), \quad x^\alpha \sin(\beta \log(x)). \quad (6.3.4)$$

Come per le equazioni a coefficienti costanti, nel caso in cui le radici dell'equazione caratteristica siano coincidenti $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha = (1-a)/2$ la determinazione di una seconda soluzione è non banale.

Un metodo per trattare questo caso consiste nell'usare l'Ansatz $y_2(x) = \rho(x)x^\alpha$ e determinare l'equazione differenziale per $\rho(x)$. Con semplici passaggi si ottiene

$$\rho''(x) + \frac{\rho'(x)}{x} = 0. \quad (6.3.5)$$

Si può verificare facilmente che questa equazione ha come soluzione generale $\rho(x) = c_1 + c_2 \log x$. Quindi la seconda soluzione può essere scelta nella forma $y_2(x) = x^\alpha \log x$.

Un metodo alternativo consiste nel considerare l'equazione la cui equazione caratteristica ha radici $\alpha + \epsilon$ ed $\alpha - \epsilon$. Nel limite $\epsilon \rightarrow 0$ si può riottenere il risultato precedente. La verifica di questo è lasciata per esercizio (esercizio 6.1).

Un interessante metodo alternativo per trattare l'equazione di Eulero (incluso il caso con radici coincidenti) nasce dall'osservazione che tramite il cambio di variabile $x = e^t$, questa equazione può essere trasformata in un'equazione a coefficienti costanti. Infatti si ha

$$\frac{dy}{dx} = e^{-t} \frac{dy}{dt} \quad (6.3.6)$$

e

$$\frac{d^2y}{dx^2} = e^{-2t} \frac{d^2y}{dt^2} - e^{-2t} \frac{dy}{dt}, \quad (6.3.7)$$

che sostituite nell'equazione di Eulero danno

$$e^{-2t} \left[\frac{d^2y}{dt^2} + (a-1) \frac{dy}{dt} + by \right] = 0. \quad (6.3.8)$$

L'equazione caratteristica coincide con quella dell'equazione di Eulero originale. Nella variabile t le due soluzioni linearmente indipendenti nel caso di radici coincidenti sono $y_1(t) = e^{\alpha t}$ e $y_2(t) = t e^{\alpha t}$. Nella variabile x queste equivalgono a

$$y_1(x) = x^\alpha, \quad y_2(x) = x^\alpha \log x. \quad (6.3.9)$$

Chiaramente, nel caso di radici non coincidenti, si ritrovano le soluzioni date in eq. (6.3.3).

6.4 Metodo del wronskiano

Fatta eccezione per le due tipologie appena discusse, le soluzioni dell'equazione omogenea associata ad un'equazione differenziale lineare del secondo ordine non sono immediatamente ricavabili. Esse tuttavia sono necessarie sia nella determinazione dell'integrale generale, sia per l'individuazione della soluzione particolare dell'equazione non omogenea, ad esempio attraverso il metodo di variazione delle costanti.

Nel caso in cui si riesca a determinare una sola delle soluzioni dell'equazione omogenea, è possibile, almeno in linea di principio, ricavare l'altra mediante il *metodo del wronskiano*.

Definizione 6.1 (Determinante di Wronski). Si definisce *determinante di Wronski* o *wronskiano* dell'insieme di funzioni $\{f_i(x)\}$ con $i = 1, 2, \dots, n$, assunte differenziabili sino all'ordine $n - 1$, l'espressione

$$W(f_1, f_2, \dots, f_n)(x) = \begin{vmatrix} f_1(x) & f_2(x) & \cdots & f_n(x) \\ f_1'(x) & f_2'(x) & \cdots & f_n'(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_1^{(n-1)}(x) & f_2^{(n-1)}(x) & \cdots & f_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}. \quad (6.4.1)$$

Questa matrice, il cui determinante dà il wronskiano, è anche detta *matrice fondamentale*.

Se le funzioni f_i sono linearmente dipendenti allora il wronskiano è identicamente nullo. Infatti in questo caso le colonne della matrice sono linearmente dipendenti, rendendo nullo il determinante.⁴

6.4.1 Proprietà del wronskiano per equazioni del secondo ordine

Nel caso di equazioni differenziali del secondo ordine, siamo interessati a considerare il wronskiano costruito con una coppia di soluzioni linearmente indipendenti dell'equazione omogenea associata. Consideriamo un'equazione omogenea della forma

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = 0, \quad (6.4.2)$$

e siano y_1 e y_2 una coppia di soluzioni. Valgono le seguenti equazioni

$$\begin{aligned} y_1 y_2'' + a_1 y_1 y_2' + a_2 y_1 y_2 &= 0 \\ y_2 y_1'' + a_1 y_2 y_1' + a_2 y_2 y_1 &= 0 \end{aligned} \quad (6.4.3)$$

ricavate moltiplicando per y_1 l'equazione relativa a y_2 , e viceversa. Sottraendo membro a membro otteniamo

$$(y_1 y_2'' - y_2 y_1'') + a_1 (y_1 y_2' - y_2 y_1') = 0. \quad (6.4.4)$$

⁴Si noti che l'annullarsi del wronskiano non implica necessariamente che le funzioni siano linearmente dipendenti. Un esempio esplicito, dovuto a Peano, è dato dalle due funzioni x^2 e $x|x|$, che sono entrambe C^1 . Esse hanno $W = 0$ ma non sono linearmente dipendenti in un intorno di $x = 0$. Se le funzioni sono *analitiche*, tuttavia, l'annullarsi del wronskiano implica la dipendenza lineare.

Si può riconoscere nella seconda parentesi il wronskiano delle due soluzioni, ovvero $W = y_1 y_2' - y_2 y_1'$. La prima parentesi coincide invece con la derivata del wronskiano. Ne segue che W debba soddisfare l'equazione (*di Liouville*)

$$W' + a_1 W = 0. \quad (6.4.5)$$

Assegnando il valore del wronskiano in un punto, $W(x_0) = W_0$, si ottiene l'*identità di Abel*⁵

$$W(x) = W_0 \exp \left(- \int_{x_0}^x a_1(\xi) d\xi \right). \quad (6.4.6)$$

L'identità di Abel implica alcune importanti proprietà.

1. Se l'equazione differenziale è nella forma canonica (6.1.2) il wronskiano è costante, essendo $a_1 = 0$.
2. Se esiste un x_1 tale che $W(x_1) = 0$, allora $W = 0$ per ogni x . Basta infatti risolvere l'equazione di Liouville con il dato iniziale in x_1 .
3. Se $W \neq 0$ in un punto, allora esso è sempre non nullo. Inoltre il suo segno è fissato per ogni x .
4. Se y_1 e y_2 sono due soluzioni linearmente indipendenti allora $W \neq 0$ per ogni x . Infatti se il wronskiano si annullasse in un punto esso sarebbe sempre nullo e le due soluzioni sarebbero linearmente dipendenti.⁶

6.4.2 Uso del wronskiano per equazioni del secondo ordine

Vediamo ora come si può utilizzare il wronskiano per derivare una seconda soluzione y_2 dell'equazione differenziale omogenea a partire da una soluzione nota y_1 (non nulla). Partendo dall'equazione di Abel troviamo

$$\frac{W}{y_1^2} = \frac{y_2' y_1 - y_2 y_1'}{y_1^2} = \frac{W_0}{y_1^2} \exp \left(- \int_{x_0}^x a_1(\xi) d\xi \right). \quad (6.4.7)$$

La seconda espressione in questa equazione coincide con $\frac{d}{dx} \frac{y_2}{y_1}$, quindi integrando rispetto ad x si ricava

$$\frac{y_2}{y_1} = \int^x \frac{A}{y_1^2(\eta)} \exp \left(- \int^\eta a_1(\xi) d\xi \right) d\eta + c, \quad (6.4.8)$$

dove la costante A in luogo di W_0 permette di lasciare liberi gli estremi di integrazione. La conoscenza della soluzione y_1 determina, in linea di principio, la soluzione y_2 attraverso la formula

$$y_2 = A y_1 \int^x \frac{1}{y_1^2(\eta)} \exp \left(- \int^\eta a_1(\xi) d\xi \right) d\eta + c y_1. \quad (6.4.9)$$

⁵L'identità di Abel può essere generalizzata ad equazioni di ordine superiore al secondo. Inoltre una relazione analoga, detta *identità di Liouville* è valida per sistemi di equazioni differenziali del primo ordine, che discuteremo nel capitolo 7.

⁶Questo vale nei domini in cui i coefficienti dell'equazione differenziale sono regolari. In questi punti infatti le soluzioni sono analitiche. Si veda la discussione nella nota 4.

Si noti che nel caso in cui l'equazione differenziale sia in forma canonica, allora $a_1 = 0$ e la formula precedente si semplifica in

$$y_2 = A y_1 \int^x \frac{1}{y_1^2(\eta)} d\eta + c y_1. \quad (6.4.10)$$

A partire dalle due soluzioni $y_{1,2}$ possiamo poi determinare la soluzione particolare dell'equazione non omogenea utilizzando, ad esempio, il metodo della variazione delle costanti. In altre parole, nota y_1 si riesce a determinare, almeno in forma implicita (non è detto, infatti, che gli integrali coinvolti nelle formule precedenti si sappiano eseguire esplicitamente), l'integrale generale dell'equazione non omogenea.

Vediamo ora un esempio concreto, nel quale viene anche illustrato l'utilizzo del metodo di variazione delle costanti per le equazioni lineari del secondo ordine.

Esempio 6.1. Determinare l'integrale generale dell'equazione differenziale

$$t y'' + 2 y' - \frac{6t}{(1+t)^2} y = f(t), \quad (6.4.11)$$

con

$$f(t) = -5(1+t)^2. \quad (6.4.12)$$

Soluzione. Si noti che nei punti $t = -1$ e $t = 0$ i coefficienti dell'equazione diventano singolari,⁷ essi vanno quindi esclusi dal dominio di definizione dell'equazione. Ci si deve dunque restringere ad un intervallo (possibilmente infinito) che non contenga tali punti.

Partiamo dal seguente Ansatz per una delle soluzioni dell'equazione omogenea

$$y_1 = \frac{(1+t)^3}{t}. \quad (6.4.13)$$

Si verifica facilmente che y_1 è effettivamente soluzione dell'equazione differenziale. Scrivendo l'equazione in forma normale,

$$y'' + \frac{2}{t} y' - \frac{6}{(1+t)^2} y = \frac{f(t)}{t}, \quad (6.4.14)$$

si ricava che $a_1 = 2/t$, da cui

$$\int^\eta a_1(\xi) d\xi = 2 \log \eta. \quad (6.4.15)$$

Utilizziamo l'eq. (6.4.9) per ottenere una seconda soluzione dell'equazione differenziale

$$y_2 = A y_1 \int^t \frac{1}{\eta^2} \frac{1}{y_1^2(\eta)} d\eta = A y_1 \int^t \frac{1}{\eta^2} \frac{\eta^2}{(1+\eta)^6} d\eta = -\frac{A}{5t(1+t)^2} + c y_1, \quad (6.4.16)$$

che, ponendo ad esempio $A = -5$ e $c = 0$, dà

$$y_2 = \frac{1}{t(1+t)^2}. \quad (6.4.17)$$

⁷Si può vedere che il punto $t = 0$ è singolare considerando l'equazione in forma normale, con coefficiente del termine y'' pari ad 1.

Il wronskiano delle soluzioni y_1 e y_2 vale

$$W = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = -\frac{5}{t^2}, \quad (6.4.18)$$

che non è mai nullo, mostrando l'indipendenza delle due soluzioni.

È istruttivo ricavare la forma canonica dell'equazione. Usando l'espressione (6.1.6) con $c_1 = 2/t$ si ottiene

$$y(t) = \exp\left(-\int^t \frac{1}{\xi} d\xi\right) u(t) = \frac{u(t)}{t}, \quad (6.4.19)$$

dove abbiamo scelto opportunamente l'estremo inferiore di integrazione per fissare ad 1 il prefattore. L'equazione in termini di $u(t)$ diventa

$$u''(t) - \frac{6}{(1+t)^2} u = f(t), \quad (6.4.20)$$

mentre la coppia di soluzioni dell'equazione omogenea associata diventano

$$u_1 = (1+t)^3, \quad u_2 = \frac{1}{(1+t)^2}. \quad (6.4.21)$$

Il wronskiano ora vale

$$W = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ u_1' & u_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} (1+t)^3 & (1+t)^{-2} \\ 3(1+t)^2 & -2(1+t)^{-3} \end{vmatrix} = -5, \quad (6.4.22)$$

ovviamente non nullo e costante, come atteso per un'equazione in forma canonica.

Torniamo ora alla forma originale dell'equazione e determiniamo una soluzione particolare con il metodo della variazione delle costanti. Consideriamo la combinazione lineare delle soluzioni dell'equazione omogenea

$$y_P = A_1 y_1 + A_2 y_2, \quad (6.4.23)$$

dove A_1 ed A_2 sono funzioni di t . Notiamo ora abbiamo due funzioni incognite da determinare, ma solo una equazione differenziale. È quindi possibile imporre una seconda condizione, che sceglieremo opportunamente per semplificare la procedura.

La derivata prima di y_P è

$$y_P' = A_1' y_1 + A_1 y_1' + A_2' y_2 + A_2 y_2'. \quad (6.4.24)$$

Per semplificare questa espressione è conveniente scegliere la condizione aggiuntiva

$$A_1' y_1 + A_2' y_2 = 0, \quad (6.4.25)$$

in modo che

$$y_P'' = A_1' y_1' + A_1 y_1'' + A_2' y_2' + A_2 y_2''. \quad (6.4.26)$$

Sostituendo nell'equazione di partenza, e ricordando che $y_{1,2}$ soddisfano l'equazione omogenea associata, troviamo l'equazione

$$A_1' y_1' + A_2' y_2' = f(t). \quad (6.4.27)$$

Mettendo insieme questa equazione e la condizione in eq. (6.4.25) si ottiene il sistema di equazioni

$$\begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1' \\ A_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ f \end{pmatrix}. \quad (6.4.28)$$

Si noti che la matrice riproduce la matrice fondamentale e il suo determinante è il wronskiano, che non è mai nullo. Di conseguenza il sistema di equazioni determina univocamente A_1' e A_2' . Essendo $W \neq 0$, la matrice fondamentale è invertibile, quindi

$$\begin{pmatrix} A_1' \\ A_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ f \end{pmatrix} = \frac{1}{W} \begin{pmatrix} y_2' & -y_2 \\ -y_1' & y_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ f \end{pmatrix} = \frac{1}{W} \begin{pmatrix} -y_2 f \\ y_1 f \end{pmatrix}. \quad (6.4.29)$$

Integrando queste equazioni rispetto a t otteniamo

$$\begin{cases} A_1 = \int^t -\frac{y_2(\xi)f(\xi)}{W(\xi)} d\xi + c_1 \\ A_2 = \int^t \frac{y_1(\xi)f(\xi)}{W(\xi)} d\xi + c_2 \end{cases}. \quad (6.4.30)$$

Nel nostro caso specifico, si ricava (a meno di costanti additive)

$$A_1' = -1 \quad \Rightarrow \quad A_1 = -t \quad (6.4.31)$$

$$A_2' = (1+t)^5 \quad \Rightarrow \quad A_2 = \frac{(1+t)^6}{6} \quad (6.4.32)$$

e la soluzione particolare risulta

$$y_P = -t y_1 + \frac{(1+t)^6}{6} y_2 = \frac{(1+t)^6}{6t} - (1+t)^3. \quad (6.4.33)$$

□

Esempio 6.2. Come secondo esempio mostriamo che, nel caso dell'equazione di Eulero con radici coincidenti, la coppia di soluzioni determinata con il metodo del wronskiano coincide con quella trovata in precedenza.

Ponendo $y_1 = x^\alpha$ ed utilizzando la formula (6.4.9), si ricava

$$y_2 = x^\alpha \int^x \frac{1}{\eta^{2\alpha}} \exp\left(-\int^\eta \frac{a}{\xi} d\xi\right) d\eta = x^\alpha \int^x \eta^{-(a+2\alpha)} d\eta. \quad (6.4.34)$$

Nel caso di radici coincidenti $a + 2\alpha = 1$, quindi $y_2 = x^\alpha \log x$, come atteso.

6.5 Metodo della funzione di Green

In questa sezione discuteremo in modo approfondito il metodo della funzione di Green per le equazioni differenziali lineari del secondo ordine. Consideriamo l'operatore differenziale lineare

$$\mathcal{L}_x^{(2)} = a_0(x) \frac{d^2}{dx^2} + a_1(x) \frac{d}{dx} + a_2(x). \quad (6.5.1)$$

Come nel caso delle equazioni differenziali del primo ordine, si definisce *soluzione fondamentale* per l'operatore $\mathcal{L}_x^{(2)}$ una funzione $G(x, t)$ che soddisfa

$$\mathcal{L}_x^{(2)} G(x, t) = \delta(x - t). \quad (6.5.2)$$

Anche in questo caso si possono derivare delle condizioni di giunzione per $G(x - t)$ per i punti $x = t$. Poiché l'equazione differenziale è del secondo ordine, questa volta $G(x - t)$ sarà continua e sarà la sua derivata prima ad essere discontinua per $x = t$, in modo che G'' ricostruisca la delta di Dirac. Integrando in un intorno di t otteniamo la condizione

$$\left. \frac{dG}{dx} \right|_{t-\epsilon}^{t+\epsilon} = \frac{1}{a_0(t)}. \quad (6.5.3)$$

Quindi, per $x \neq t$, $G(x, t)$ è una soluzione dell'equazione omogenea associata. Inoltre essa è continua per $x = y$ e tale che

$$G'(t^+, t) - G'(t^-, t) = \frac{1}{a_0(t)}. \quad (6.5.4)$$

Vediamo ora qual è l'espressione generica della soluzione fondamentale in funzione delle soluzioni dell'equazione omogenea associata. Siano date $y_1(x)$ e $y_2(x)$, soluzioni linearmente indipendenti. La generica soluzione fondamentale coincide con l'integrale generale dell'eq. (6.5.1),

$$G(x, t) = A y_1(x) + B y_2(x) + G_P(x, t), \quad (6.5.5)$$

dove la soluzione particolare G_P può essere scritta nella forma

$$G_P(x, t) = \begin{cases} c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) & x < t \\ d_1 y_1(x) + d_2 y_2(x) & x > t \end{cases} \quad (6.5.6)$$

con coefficienti costanti rispetto ad x , ma che possono dipendere da t . Il raccordo continuo delle soluzioni in $x = t$ implica

$$c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t) = d_1 y_1(t) + d_2 y_2(t), \quad (6.5.7)$$

mentre il salto della derivata dà

$$d_1 y_1'(t) + d_2 y_2'(t) - c_1 y_1'(t) - c_2 y_2'(t) = \frac{1}{a_0(t)}. \quad (6.5.8)$$

Queste due equazioni si riscrivono in forma matriciale come

$$\begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_1 - c_1 \\ d_2 - c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1/a_0(t) \end{pmatrix}, \quad (6.5.9)$$

la cui matrice dei coefficienti è la matrice fondamentale delle due soluzioni $y_{1,2}$. Queste equazioni determinano le differenze $d_1 - c_1$ e $d_2 - c_2$:

$$\begin{cases} d_1 - c_1 = -\frac{y_2(t)}{a_0(t)W(t)} \\ d_2 - c_2 = \frac{y_1(t)}{a_0(t)W(t)} \end{cases} \quad (6.5.10)$$

dando luogo alla soluzione particolare

$$G_P(x, t) = \begin{cases} c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) & x < t \\ \left[c_1 - \frac{y_2(t)}{a_0(t)W(t)} \right] y_1(x) + \left[c_2 + \frac{y_1(t)}{a_0(t)W(t)} \right] y_2(x) & x > t \end{cases} \quad (6.5.11)$$

La generica soluzione fondamentale è quindi

$$G(x, t) = c_1(t)y_1(x) + c_2(t)y_2(x) + \theta(x - t) \left[\frac{y_1(t)y_2(x) - y_2(t)y_1(x)}{a_0(t)W(t)} \right] \quad (6.5.12)$$

$$= d_1(t)y_1(x) + d_2(t)y_2(x) - \theta(t - x) \left[\frac{y_1(t)y_2(x) - y_2(t)y_1(x)}{a_0(t)W(t)} \right] \quad (6.5.13)$$

Per determinare la funzione di Green dell'operatore $\mathcal{L}_x^{(2)}$ dobbiamo specificare anche delle opportune condizioni al bordo (o, in alternativa, condizioni iniziali). L'esistenza della funzione di Green non è garantita, e dipende sia dalle proprietà dell'operatore $\mathcal{L}_x^{(2)}$, sia dalle condizioni al bordo. Discuteremo questi aspetti a breve.

Sottolineiamo, tuttavia, che alcune soluzioni fondamentali vengono designate *a priori* assegnando delle condizioni al bordo che fissano i coefficienti c_i o d_i nelle equazioni (6.5.12) e (6.5.13). Ad esempio, si definisce *funzione di Green avanzata* la soluzione fondamentale che soddisfa

$$G_A(x, t) = 0 \quad \text{per } x < t, \quad (6.5.14)$$

mentre si indica come *funzione di Green ritardata* quella tale che

$$G_R(x, t) = 0 \quad \text{per } x > t. \quad (6.5.15)$$

Se sono note due soluzioni indipendenti dell'equazione omogenea associata, la funzione di Green avanzata può essere determinata dall'eq. (6.5.12) ponendo $c_{1,2} = 0$, mentre quella ritardata dall'eq. (6.5.13) con $d_{1,2} = 0$.

Per concludere questa discussione generale, notiamo che, data una soluzione fondamentale $G(x, t)$ per l'operatore $\mathcal{L}_x^{(2)}$, possiamo ottenere una soluzione particolare del problema non omogeneo

$$\mathcal{L}_x^{(2)} u(x) = f(x) \quad (6.5.16)$$

tramite la formula

$$u_P(x) = \int G(x, t) f(t) dt. \quad (6.5.17)$$

Applicando l'operatore differenziale al secondo membro di questa espressione si verifica facilmente che essa costituisce una soluzione dell'equazione differenziale. La soluzione

più generale può a questo punto essere ottenuta sommando alla soluzione particolare una arbitraria combinazione lineare delle due soluzioni dell'equazione omogenea associata:

$$u(x) = u_P(x) + c_1 u_1(x) + c_2 u_2(x). \quad (6.5.18)$$

Sottolineiamo che eventuali condizioni al bordo dovranno poi essere imposte sulla soluzione generale, determinando i coefficienti $c_{1,2}$. Vedremo nelle prossime sezioni come, per diverse classi di problemi, si può determinare a priori una forma specifica della soluzione fondamentale, detta funzione di Green, che garantisce che la soluzione particolare $u_P(x)$ soddisfi le opportune condizioni al bordo. Questa analisi, inoltre, permetterà di capire come, in alcuni casi, l'equazione differenziale corredata da condizioni al bordo non ammetta soluzioni oppure ne ammetta un insieme infinito.

6.5.1 Teorema di Green

Il teorema di Green è lo strumento che consente di stabilire le condizioni al bordo per il calcolo della funzione di Green di un problema differenziale lineare. La conoscenza della funzione di Green, e non solo della generica soluzione fondamentale, è molto importante soprattutto nei casi in cui non si riesca a determinare la soluzione per quadrature, perché almeno ne fornisce una rappresentazione integrale. Considerazioni simili valgono per le equazioni differenziali alle derivate parziali, per le quali sono necessarie opportune generalizzazioni del teorema di Green.

Iniziamo la discussione per la classe di problemi di Sturm-Liouville, in cui le condizioni accessorie siano date sul bordo dell'intervallo $[a, b]$. Sia assegnato il problema

$$\begin{cases} \mathcal{L}_x^{(2)} v(x) = g(x) \\ \tilde{\mathcal{B}}_a(v) = \tilde{\alpha}_1 v(a) + \tilde{\beta}_1 v'(a) - \gamma_1 = 0 \\ \tilde{\mathcal{B}}_b(v) = \tilde{\alpha}_2 v(b) + \tilde{\beta}_2 v'(b) - \gamma_2 = 0 \end{cases} \quad (6.5.19)$$

Utilizzando i risultati discussi nella sezione 6.1 possiamo sempre ridefinire $v(x)$ in modo che l'operatore differenziale $\mathcal{L}_x^{(2)}$ risulti nella forma di Sturm-Liouville⁸

$$\mathcal{L}_x^{SL} = \frac{d}{dx} \left(p(x) \frac{d}{dx} \right) + q(x). \quad (6.5.20)$$

Ci limitiamo per ora a studiare il problema di Sturm-Liouville non omogeneo con condizioni omogenee⁹

$$\begin{cases} \mathcal{L}_x^{SL} u(x) = f(x) \\ \mathcal{B}_a(u) = \alpha_1 u(a) + \beta_1 u'(a) = 0 \\ \mathcal{B}_b(u) = \alpha_2 u(b) + \beta_2 u'(b) = 0 \end{cases} \quad (6.5.21)$$

⁸Si noti che, alternativamente, ci si può ricondurre al caso di operatore in forma canonica $\mathcal{L}_x^C = d^2/dx^2 + q(x)$. I risultati che ricaveremo per l'operatore in forma di Sturm-Liouville possono essere facilmente adattati al caso di operatore in forma canonica ponendo $p(x) = 1$.

⁹Per ora si noti che tramite la ridefinizione $v(x) = u(x) + mx + n$ è sempre possibile rendere le condizioni al bordo su $u(x)$ omogenee. Quindi il problema in eq. (6.5.21) può anche essere pensato come il più generale.

Se il problema omogeneo associato (con $f(x) = 0$) ammette la sola soluzione banale $u(x) = 0$, allora l'operatore \mathcal{L}_x^{SL} è invertibile e la funzione di Green si determina a partire dal seguente teorema.

Teorema 6.1 (di Green). Il problema di Sturm-Liouville (6.5.21), *nel caso in cui il problema omogeneo associato (cioè il caso con $f(x) = 0$) ammetta la sola soluzione $u(x) = 0$* , ha come soluzione

$$u(x) = \int_a^b G(x, t) f(t) dt \quad (6.5.22)$$

dove $G(t, x)$ è la funzione di Green per l'operatore di Sturm-Liouville, ovvero la soluzione dell'equazione

$$\begin{cases} \mathcal{L}_x^{SL} G(x, t) = \delta(x - t) \\ \mathcal{B}_a(G) = \alpha_1 G(a, t) + \beta_1 G'(a, t) = 0 \\ \mathcal{B}_b(G) = \alpha_2 G(b, t) + \beta_2 G'(b, t) = 0 \end{cases} \quad (6.5.23)$$

Si noti che la funzione di Green ha le stesse condizioni al bordo *omogenee* del problema di Sturm-Liouville.

Dimostrazione. Per dimostrare il teorema partiamo dalla *formula di Green*

$$\int_a^b [u \mathcal{L}_x^{SL} v - v \mathcal{L}_x^{SL} u] = p \left(u \frac{dv}{dx} - v \frac{du}{dx} \right) \Big|_a^b, \quad (6.5.24)$$

dove u e v sono due funzioni (sufficientemente regolari). Si noti che questa formula è valida *soltanto* se l'operatore differenziale è nella forma di Sturm-Liouville.

Per dimostrare questa relazione, espandiamo il membro di sinistra esplicitando l'operatore di Sturm-Liouville

$$\begin{aligned} \int_a^b [u \mathcal{L}_x^{SL} v - v \mathcal{L}_x^{SL} u] &= \int_a^b \left\{ u \left[\frac{d}{dx} \left(p \frac{dv}{dx} \right) + qv \right] - v \left[\frac{d}{dx} \left(p \frac{du}{dx} \right) + qu \right] \right\} \\ &= \int_a^b \left[u \frac{d}{dx} \left(p \frac{dv}{dx} \right) - v \frac{d}{dx} \left(p \frac{du}{dx} \right) \right] \\ &= p \left(u \frac{dv}{dx} - v \frac{du}{dx} \right) \Big|_a^b. \end{aligned} \quad (6.5.25)$$

L'ultima relazione è stata ottenuta integrando per parti.¹⁰

È facile verificare che, se u e v soddisfano le condizioni al bordo del problema di Sturm-Liouville (6.5.21), allora il secondo membro della formula di Green si annulla. Consideriamo ora la formula di Green con $v(x) = G(x, t)$ e $u(x)$ una soluzione del problema di Sturm-Liouville. Poiché entrambe le funzioni soddisfano le condizioni al bordo del problema di Sturm-Liouville si ha

$$\int_a^b [u \mathcal{L}_x^{SL} G - G \mathcal{L}_x^{SL} u] = 0. \quad (6.5.26)$$

¹⁰Nel seguito considereremo il caso in cui u e/o v possono essere funzioni di Green. In questo caso per effettuare l'integrazione per parti bisogna tenere conto di possibili singolarità nelle espressioni. Si può dimostrare che la continuità delle funzioni di Green garantisce che queste manipolazioni sono ancora valide (si vedano le ipotesi del teorema di Green 6.1).

Inoltre utilizzando la definizione di funzione di Green $\mathcal{L}_x^{SL}G(x, t) = \delta(x - t)$ e l'equazione $\mathcal{L}_x^{SL}u(x) = f(x)$ si ha

$$\begin{aligned} 0 &= \int_a^b [u(\xi)\mathcal{L}_x^{SL}G(\xi, t) - G(\xi, t)\mathcal{L}_x^{SL}u(\xi)] d\xi = \int_a^b [u(\xi)\delta(\xi - t) - G(\xi, t)f(\xi)] d\xi \\ &= u(t) - \int_a^b G(\xi, t)f(\xi) d\xi, \end{aligned} \quad (6.5.27)$$

ovvero

$$u(t) = \int_a^b G(\xi, t)f(\xi) d\xi. \quad (6.5.28)$$

Il risultato in eq. (6.5.22) si ottiene come conseguenza del fatto che, nel caso del problema di Sturm-Liouville, la funzione di Green è simmetrica per scambio degli argomenti $G(x, t) = G(t, x)$. Dimosteremo questa proprietà qui di seguito. \square

Teorema 6.2 (Simmetria della funzione di Green). La funzione di Green per il problema di Sturm-Liouville (6.5.21) è simmetrica per scambio degli argomenti, ovvero

$$G(x, t) = G(t, x). \quad (6.5.29)$$

Dimostrazione. Per dimostrare questo teorema partiamo dalla formula di Green (6.5.24) applicata a $u(x) = G(x, x_1)$ e $v(x) = G(x, x_2)$. Essendo $\mathcal{L}_x^{SL}G(x, x_i) = \delta(x - x_i)$, otteniamo

$$\int_a^b [G(x, x_1)\delta(x - x_2) - G(x, x_2)\delta(x - x_1)] dx = 0. \quad (6.5.30)$$

Da cui segue

$$G(x_1, x_2) = G(x_2, x_1). \quad (6.5.31)$$

\square

Conoscendo due soluzioni del problema di Sturm-Liouville omogeneo u_1 ed u_2 , tali che rispettino le seguenti condizioni al bordo¹¹

$$\mathcal{B}_a(u_1) = 0, \quad \mathcal{B}_b(u_2) = 0, \quad (6.5.32)$$

possiamo determinare un'espressione formale per la funzione di Green. Se $W(u_1, u_2)$ è il wronskiano delle due soluzioni, la funzione di Green è data da

$$G(x, t) = \begin{cases} \frac{u_1(x)u_2(t)}{p(t)W(u_1(t), u_2(t))} & x < t \\ \frac{u_2(x)u_1(t)}{p(t)W(u_1(t), u_2(t))} & x > t \end{cases}. \quad (6.5.33)$$

¹¹Si noti che le due soluzioni soddisfano le condizioni al bordo del problema di Sturm-Liouville solo ad un'estremità dell'intervallo, u_1 in $x = a$ e u_2 in $x = b$. Tali soluzioni non possono soddisfare entrambe le condizioni al bordo in quanto abbiamo assunto che non esista nessuna soluzione (non banale) del problema di Sturm-Liouville omogeneo.

Questa espressione, infatti, per definizione soddisfa le condizioni al bordo omogenee. Oltre ad essere continua per $x = t$, essa esibisce un salto pari a $1/p(t)$ nella derivata prima

$$G'(t^+, t) - G'(t^-, t) = \frac{u_2'(t)u_1(t) - u_1'(t)u_2(t)}{p(t)W(u_1, u_2)} = \frac{W(u_1, u_2)}{p(t)W(u_1, u_2)} = \frac{1}{p(t)}. \quad (6.5.34)$$

Si noti che, come atteso, l'espressione in eq. (6.5.33) è simmetrica per lo scambio di x e t in quanto, per ogni coppia di soluzioni indipendenti del problema di Sturm-Liouville omogeneo vale la seguente relazione

$$p(x)W(u_1(x), u_2(x)) = \text{cost.} \quad (6.5.35)$$

Questa proprietà del wronskiano può essere dimostrata nel modo seguente:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}(p(x)W(x)) &= \frac{d}{dx}[p(x)(u_1(x)u_2'(x) - u_2(x)u_1'(x))] \\ &= u_1 \frac{d}{dx} \left(p \frac{d}{dx} u_2 \right) + p u_1' u_2' - u_2 \frac{d}{dx} \left(p \frac{d}{dx} u_1 \right) - p u_2' u_1' \\ &= -q u_1 u_2 + q u_2 u_1 = 0, \end{aligned} \quad (6.5.36)$$

dove abbiamo usato l'equazione differenziale omogenea $\mathcal{L}_x^{SL} u_{1,2} = 0$ per ricavare l'espressione sull'ultima riga. Si noti che l'eq. (6.5.35) è valida solo nel caso in cui l'operatore differenziale sia nella forma di Sturm-Liouville.

Relazione di simmetria per le funzioni di Green avanzata e ritardata

Nel caso di operatore differenziale nella forma di Sturm-Liouville, un'ulteriore relazione lega la funzione di Green avanzata a quella ritardata, ovvero

$$G_A(x_1, x_2) = G_R(x_2, x_1). \quad (6.5.37)$$

Questo risultato può essere facilmente verificato a partire dalle formule esplicite per le funzioni di Green avanzata e ritardata, (6.5.12) e (6.5.13), tenendo conto del fatto che $p(x)W(x) = \text{cost.}$. Vedremo un'applicazione delle funzioni di Green avanzata e ritardata nella sezione 6.5.3.

Problema di Sturm-Liouville con condizioni al bordo non omogenee

Il problema di Sturm-Liouville con condizioni al bordo non omogenee

$$\begin{cases} \mathcal{L}_x^{SL} u(x) = f(x) \\ \mathcal{B}_a(u) = \alpha_1 u(a) + \beta_1 u'(a) = \gamma_1 \\ \mathcal{B}_b(u) = \alpha_2 u(b) + \beta_2 u'(b) = \gamma_2 \end{cases} \quad (6.5.38)$$

può essere risolto con una piccola modifica della procedura discussa per il problema con condizioni al bordo omogenee.

Partiamo dalla formula di Green (6.5.24) applicata alla soluzione cercata $u(x)$ ed alla funzione di Green per il problema con condizioni al bordo omogenee $v(x) = G(x, t)$. Con semplici manipolazioni otteniamo

$$u(x) = \int_a^b G(x, \xi) f(\xi) d\xi + p(\xi) \left(u(\xi) \frac{d}{d\xi} G(\xi, x) - G(\xi, x) u'(\xi) \right) \Big|_a^b, \quad (6.5.39)$$

dove abbiamo usato la simmetria della funzione di Green.

Consideriamo ora le condizioni al bordo

$$\alpha_1 u(a) + \beta_1 u'(a) = \gamma_1, \quad \alpha_1 G(a, t) + \beta_1 G'(a, t) = 0. \quad (6.5.40)$$

Se $\alpha_1 \neq 0$ moltiplicando la prima equazione per $G'(a, x)$ e la seconda per $u'(a)$ e sottraendo membro a membro si ottiene

$$u(a)G'(a, x) - u'(a)G(a, x) = \frac{\gamma_1}{\alpha_1} G'(a, x) = \frac{\gamma_1}{\alpha_1} \frac{d}{d\xi} G(x, \xi) \Big|_{\xi=a}. \quad (6.5.41)$$

Se $\beta_1 \neq 0$ si ottiene con una procedura analoga

$$u(a)G'(a, x) - u'(a)G(a, x) = -\frac{\gamma_1}{\beta_1} G(a, x) = -\frac{\gamma_1}{\beta_1} G(x, a). \quad (6.5.42)$$

Simili espressioni si ottengono per l'estremo $x = b$.

Queste espressioni danno una formula esplicita per i termini al bordo nell'eq. (6.5.39). Ad esempio, se $\alpha_{1,2} \neq 0$ si ottiene

$$u(x) = \int_a^b G(x, \xi) f(\xi) d\xi + \frac{\gamma_2}{\alpha_2} p(b) \frac{d}{d\xi} G(x, \xi) \Big|_{\xi=b} - \frac{\gamma_1}{\alpha_1} p(a) \frac{d}{d\xi} G(x, \xi) \Big|_{\xi=a}. \quad (6.5.43)$$

Espressioni equivalenti possono essere ottenute per $\beta_{1,2} \neq 0$ usando il risultato (6.5.42).

Esempio 6.3. Come esempio esplicito, applichiamo il metodo della funzione di Green al seguente problema di Sturm-Liouville

$$\begin{cases} u'' - k^2 u = f(x) \\ u(0) = u(L) = 0 \end{cases}, \quad (6.5.44)$$

per due scelte di $f(x)$, ovvero $f(x) = 1$ e $f(x) = x$.

Soluzione. Partiamo dalla determinazione della funzione di Green. Due soluzioni indipendenti dell'equazione omogenea associata sono date da

$$e^{\pm kx}. \quad (6.5.45)$$

Per ottenere la funzione di Green possiamo usare l'equazione (6.5.33). Si noti che per applicare questa formula bisogna prima determinare due soluzioni dell'equazione omogenea che soddisfano le opportune condizioni al bordo, ovvero

$$u_1(0) = 0, \quad u_2(L) = 0. \quad (6.5.46)$$

Si trova facilmente che due soluzioni che soddisfano queste condizioni sono

$$u_1(x) = \sinh kx, \quad u_2(x) = \sinh k(L - x). \quad (6.5.47)$$

Il Wronskiano di queste soluzioni è $W(u_1, u_2) = -k \sinh kL$. La funzione di Green è quindi data da

$$G(x, t) = \begin{cases} -\frac{\sinh kx \sinh k(L - t)}{k \sinh kL} & x < t \\ -\frac{\sinh k(L - x) \sinh kt}{k \sinh kL} & x > t \end{cases}. \quad (6.5.48)$$

La soluzione del problema di Sturm-Liouville per $f(x) = 1$ è data da

$$\begin{aligned} u(x) &= \int_0^L G(x, t) f(t) dt \\ &= -\frac{\sinh kx}{k \sinh kL} \int_x^L \sinh k(L - t) dt - \frac{\sinh k(L - x)}{k \sinh kL} \int_0^x \sinh kt dt \\ &= \frac{1}{k^2} \left(-1 + \frac{\sinh kx + \sinh k(L - x)}{\sinh kL} \right). \end{aligned} \quad (6.5.49)$$

Nel caso $f(x) = x$ con analoghi passaggi si ottiene

$$u(x) = \frac{1}{k^2} \left(-x + L \frac{\sinh kx}{\sinh kL} \right). \quad (6.5.50)$$

Vediamo ora come cambiano questi risultati se si assumono condizioni al bordo non omogenee, ovvero

$$u(0) = a, \quad u(L) = b. \quad (6.5.51)$$

La soluzione si ottiene sommando a quelle trovate precedentemente i termini aggiuntivi dati nell'equazione (6.5.43),

$$b \frac{d}{dt} G(x, t) \Big|_{t=L} - a \frac{d}{dt} G(x, t) \Big|_{t=0} = b \frac{\sinh kx}{\sinh kL} + a \frac{\sinh k(L - x)}{\sinh kL}. \quad (6.5.52)$$

□

6.5.2 Teorema dell'alternativa

Nella sezione precedente ci siamo concentrati sul caso in cui l'operatore di Sturm-Liouville non ammette modi zero, ovvero l'equazione omogenea associata al problema di Sturm-Liouville con condizioni al bordo omogenee non ammette soluzioni non banali. Vediamo ora cosa succede in caso contrario.

È facile convincersi del fatto che, se il problema di Sturm-Liouville omogeneo (cioè con $f(x) = 0$) ammette una soluzione non banale $u(x) = \phi(x)$, allora il problema non omogeneo, nel caso in cui abbia soluzione, ammette un numero infinito di soluzioni. Infatti data una soluzione $u(x)$, qualunque combinazione $u(x) + \alpha \phi(x)$ è ancora soluzione dello stesso problema. È tuttavia anche possibile che il problema di Sturm-Liouville non ammetta nessuna soluzione.

Queste affermazioni sono sintetizzate nel seguente teorema.

Teorema 6.3 (dell'alternativa di Fredholm). Consideriamo il problema di Sturm-Liouville non omogeneo con condizioni al bordo omogenee in eq. (6.5.21). Si ha che

- i) se $u(x) = 0$ è l'unica soluzione del problema omogeneo associato, allora il problema non omogeneo ammette una soluzione unica,
- ii) se esistono soluzioni non banali $u(x) = \phi(x) \neq 0$ del problema omogeneo, allora per il problema non omogeneo si verifica una delle seguenti alternative: non ammette soluzioni, oppure ammette un insieme infinito di soluzioni.

Un discorso analogo vale per l'esistenza della funzione di Green. Se il problema di Sturm-Liouville omogeneo ammette una soluzione non banale, la funzione di Green $G(x, t)$ non esiste per ogni t , ed inoltre non è unica. Vedremo nel seguito come la funzione di Green può essere modificata per ovviare a questo problema.

I risultati precedenti hanno un'interpretazione geometrica in termini di applicazioni lineari su spazi di Hilbert. Questa interpretazione ci porta lontano dalla nostra discussione, quindi ci limiteremo a presentarla in maniera non rigorosa.

Possiamo considerare lo spazio delle funzioni $u(x)$ che soddisfano le condizioni al bordo come uno spazio di Hilbert. L'applicazione ad $u(x)$ dell'operatore lineare \mathcal{L}_x^{SL} fornisce un'applicazione lineare su tale spazio. L'assenza di soluzioni nulle per il problema omogeneo è equivalente all'assenza di autovalori nulli per l'operatore lineare.¹² In questo caso l'operatore è invertibile e ciò garantisce l'esistenza e l'unicità della soluzione del problema di Sturm-Liouville.

Se esistono autovalori nulli, il kernel $\ker \mathcal{L}_x^{SL}$ è non banale e l'operatore non è invertibile. Quando questo succede il problema lineare $\mathcal{L}_x^{SL}u = f$ ha soluzione solo se $f \perp \ker(\mathcal{L}_x^{SL})^\dagger$. Inoltre esistono infinite soluzioni, in quanto si può sempre aggiungere ad u un elemento di $\ker \mathcal{L}_x^{SL}$.

Come abbiamo accennato, la soluzione del problema di Sturm-Liouville esiste se $f(x)$ è in qualche modo ortogonale rispetto alla soluzione non banale del problema omogeneo $\phi(x)$. Tale condizione può essere determinata esplicitamente. Se il problema di Sturm-Liouville non omogeneo ammette soluzione allora

$$\int_a^b f(x)\phi(x)dx = 0. \quad (6.5.53)$$

Questo risultato può essere dimostrato utilizzando la formula di Green (6.5.24) applicata a $\phi(x)$ e ad una soluzione del problema non omogeneo $u(x)$:

$$0 = \int_a^b [\phi(x)\mathcal{L}_x^{SL}u(x) - u(x)\mathcal{L}_x^{SL}\phi(x)] dx = \int_a^b \phi(x)f(x)dx, \quad (6.5.54)$$

dove abbiamo usato il fatto che $\mathcal{L}_x^{SL}u(x) = f(x)$ e $\mathcal{L}_x^{SL}\phi(x) = 0$.

Si noti che il risultato (6.5.53) mostra che la funzione di Green $G(x, t)$ non può esistere per tutti i valori di t . In particolare non può esistere per tutti i t per i quali $\phi(t) \neq 0$. È tuttavia possibile definire una funzione di Green generalizzata che soddisfi l'equazione

$$\mathcal{L}_x^{SL}G(x, t) = \delta(x - t) + c\phi(x), \quad (6.5.55)$$

¹²Si noti che le funzioni $f(x)$ possono essere espanse su una base di autofunzioni dell'operatore lineare.

dove c è una costante scelta opportunamente. La costante può essere determinata utilizzando la condizione (6.5.53):

$$0 = \int_a^b \phi(x) [\delta(x-t) + c\phi(x)] dx = \phi(t) + c \int_a^b \phi^2(x) dx. \quad (6.5.56)$$

Definizione 6.2 (Funzione di Green generalizzata). Definiamo la funzione di Green generalizzata come una soluzione dell'equazione

$$\mathcal{L}_x^{SL} G_m(x, t) = \delta(x-t) - \frac{\phi(x)\phi(t)}{\int_a^b \phi^2(\xi) d\xi} \quad (6.5.57)$$

che soddisfi le condizioni al bordo omogenee del problema di Sturm-Liouville.

Come discusso in precedenza, questa equazione ha infinite soluzioni, quindi la funzione di Green generalizzata non è unica. È possibile scegliere la funzione di Green generalizzata in modo che la proprietà di simmetria $\overline{G}_m(x, t) = \overline{G}_m(t, x)$ sia valida. Se $\overline{G}_m(x, t)$ è una funzione di Green generalizzata simmetrica allora anche

$$\tilde{G}_m(x, t) = \overline{G}_m(x, t) + \beta\phi(t)\phi(x), \quad (6.5.58)$$

per ogni β costante (indipendente da x e t), è una funzione di Green generalizzata simmetrica. Quindi esistono infinite funzioni di Green generalizzate simmetriche.

Teorema 6.4. Le soluzioni del problema di Sturm-Liouville non omogeneo sono date da

$$u(x) = \int_a^b G_m(\xi, x) f(\xi) d\xi + \beta\phi(x). \quad (6.5.59)$$

Se si considera una funzione di Green generalizzata simmetrica, la formula precedente diventa

$$u(x) = \int_a^b \overline{G}_m(x, \xi) f(\xi) d\xi + \beta\phi(x). \quad (6.5.60)$$

Dimostrazione. Partiamo dalla formula di Green applicata alla soluzione u e ad una funzione di Green generalizzata

$$\int_a^b [u(\xi) \mathcal{L}_x^{SL} G_m(\xi, x) - G_m(\xi, x) \mathcal{L}_x^{SL} u(\xi)] d\xi = 0, \quad (6.5.61)$$

poiché sia $u(x)$ che $G_m(x, t)$ soddisfano le stesse condizioni al bordo omogenee. Usando la definizione della funzione di Green generalizzata (6.5.57) e l'equazione differenziale per $u(x)$ si ottiene

$$\int_a^b \left[u(\xi) \left(\delta(\xi-x) - \frac{\phi(\xi)\phi(x)}{\int_a^b \phi^2(\zeta) d\zeta} \right) - G_m(\xi, x) f(\xi) \right] d\xi = 0, \quad (6.5.62)$$

da cui

$$u(x) = \int_a^b G_m(\xi, x) f(\xi) d\xi + \frac{\phi(x)}{\int_a^b \phi^2(\zeta) d\zeta} \int_a^b u(\xi) \phi(\xi) d\xi. \quad (6.5.63)$$

Si noti che il secondo termine di questa espressione è un multiplo della soluzione omogenea $\phi(x)$. Questo dimostra il risultato (6.5.59). Nel caso in cui la funzione di Green sia simmetrica si ottiene anche il risultato (6.5.60). \square

Presentiamo ora un esempio esplicito di problema di Sturm-Liouville con un modo zero.

Esempio 6.4. Si consideri il seguente problema di Sturm-Liouville

$$\begin{cases} \frac{d^2}{dx^2}u(x) = f(x) \\ u'(a) = u'(b) = 0 \end{cases} \quad (6.5.64)$$

e si determini una opportuna funzione di Green generalizzata.

Soluzione. In questo caso è facile verificare che la funzione costante, $u(x) = c$, è soluzione dell'equazione omogenea. La condizione per l'esistenza di una soluzione in questo caso è

$$\int_a^b f(\xi) d\xi = 0. \quad (6.5.65)$$

Chiaramente questo implica che la funzione di Green standard $G(x, t)$ non esiste per nessun valore di t . Verifichiamo esplicitamente questo fatto.

Due soluzioni indipendenti dell'equazione omogenea associata sono $u_1(x) = 1$, $u_2(x) = x$. Il loro wronskiano è $W(u_1, u_2) = 1$. Usando il risultato in eq. (6.5.12) vediamo che la più generale soluzione fondamentale è

$$G(x, t) = c_1(t) + c_2(t)x + \theta(x - t)(x - t). \quad (6.5.66)$$

Si verifica facilmente che non esiste nessuna scelta di $c_1(t)$ e $c_2(t)$ tale che $G(x, t)$ soddisfi le condizioni al bordo

$$\begin{cases} G'(a, t) = c_2(t) = 0 \\ G'(b, t) = c_2(t) + 1 = 0 \end{cases}. \quad (6.5.67)$$

Cerchiamo quindi di determinare una funzione di Green generalizzata. Essa deve soddisfare l'equazione (6.5.57)

$$\frac{d^2}{dx^2}G_m(x, t) = \delta(x - t) - \left(\int_a^b d\xi\right)^{-1} = \delta(x - t) - \frac{1}{b - a} \quad (6.5.68)$$

e le condizioni al bordo $G'(a, t) = G'(b, t) = 0$.

Possiamo spezzare la funzione di Green generalizzata come somma di una soluzione fondamentale e di una funzione da determinare r

$$G_m(x, t) = G(x, t) + r(x, t), \quad (6.5.69)$$

con r che soddisfa l'equazione

$$\frac{d^2}{dx^2}r(x, t) = -\frac{1}{b - a}. \quad (6.5.70)$$

L'equazione per r si risolve facilmente

$$r = \frac{x^2}{2(a - b)} + a_1(t) + a_2(t)x. \quad (6.5.71)$$

Mettendo tutto insieme

$$\begin{aligned} G_m(x, t) &= c_1(t) + c_2(t)x + \theta(x-t)(x-t) + \frac{x^2}{2(a-b)} + a_1(t) + a_2(t)x \\ &= a_1(t) + a_2(t)x + \theta(x-t)(x-t) + \frac{x^2}{2(a-b)}, \end{aligned} \quad (6.5.72)$$

dove abbiamo riassorbito $c_{1,2}$ in $a_{1,2}$.

Imponiamo ora le condizioni al bordo

$$\begin{cases} G'(a, t) = a_2 + \frac{a}{a-b} = 0 \\ G'(b, t) = a_2 + \frac{b}{a-b} + 1 = 0 \end{cases} \quad (6.5.73)$$

da cui ricaviamo $a_2 = a/(b-a)$. La funzione di Green generalizzata è quindi

$$G_m(x, t) = a_1(t) + \frac{ax}{b-a} + \frac{x^2}{2(a-b)} + \theta(x-t)(x-t). \quad (6.5.74)$$

Si noti che, come atteso, la funzione di Green generalizzata non è unica, infatti essa dipende da una funzione arbitraria di t , $a_1(t)$.

Come discusso prima, la funzione di Green generalizzata può essere scelta in modo da essere simmetrica per scambio degli argomenti. Per determinare una forma simmetrica imponiamo $G_m(x, t) = G_m(t, x)$,

$$a_1(t) + \frac{ax}{b-a} + \frac{x^2}{2(a-b)} + \theta(x-t)(x-t) = a_1(x) + \frac{at}{b-a} + \frac{t^2}{2(a-b)} + \theta(t-x)(t-x). \quad (6.5.75)$$

Per $x > t$ otteniamo

$$a_1(t) + \frac{ax}{b-a} + \frac{x^2}{2(a-b)} + (x-t) = a_1(x) + \frac{at}{b-a} + \frac{t^2}{2(a-b)}, \quad (6.5.76)$$

da cui otteniamo

$$a_1(t) = \frac{bt}{b-a} + \frac{t^2}{2(a-b)} + d, \quad (6.5.77)$$

con d costante. Quindi la funzione di Green generalizzata in forma simmetrica è

$$G_m(x, t) = d + \frac{ax + bt}{b-a} + \frac{x^2 + t^2}{2(a-b)} + \theta(x-t)(x-t). \quad (6.5.78)$$

□

6.5.3 Funzione di Green per il problema di Cauchy

Sin qui abbiamo discusso l'uso del metodo della funzione di Green per risolvere il problema di Sturm-Liouville, ovvero un problema differenziale con condizioni al bordo assegnate agli estremi di un segmento. È tuttavia possibile applicare questo metodo anche al caso del *problema di Cauchy*, nel quale sono assegnate due condizioni iniziali nello stesso punto.

Consideriamo quindi il *problema di Cauchy* seguente in cui l'operatore differenziale è nella forma di Sturm-Liouville

$$\begin{cases} \mathcal{L}_x^{SL} u(x) = f(x) \\ u(x_0) = u_0 \\ u'(x_0) = u'_0 \end{cases} . \quad (6.5.79)$$

Per risolvere questo problema possiamo partire dalla formula di Green (6.5.24) applicata alla soluzione fondamentale $G(x, t)$ ed alla soluzione cercata $u(x)$. Scegliamo $x > x_0$, con semplici passaggi si ottiene

$$\int_{x_0}^{\Delta} [u(\xi)\delta(\xi - x) - G(\xi, x)f(\xi)] d\xi = p \left(u \frac{dG(\xi, x)}{d\xi} - G(\xi, x) \frac{du}{d\xi} \right) \Big|_{x_0}^{\Delta}, \quad (6.5.80)$$

ovvero

$$\begin{aligned} u(x) &= \int_{x_0}^{\Delta} G(\xi, x)f(\xi)d\xi + p \left(u \frac{dG(\xi, x)}{d\xi} - G(\xi, x) \frac{du}{d\xi} \right) \Big|_{x_0}^{\Delta} \\ &= \int_{x_0}^{\Delta} G(\xi, x)f(\xi)d\xi - p(x_0) [u(x_0)G'(x_0, x) - G(x_0, x)u'(x_0)] \\ &\quad + p(\Delta) [u(\Delta)G'(\Delta, x) - G(\Delta, x)u'(\Delta)], \end{aligned} \quad (6.5.81)$$

dove $\Delta > x$ è un punto all'interno del dominio di definizione del problema di Cauchy. Si può notare che i termini sull'ultima riga non sono noti, mentre l'espressione sulla riga precedente può essere determinata a partire dalle condizioni iniziali al punto x_0 .

Possiamo quindi scegliere le condizioni al contorno della funzione di Green in modo da annullare i termini sull'ultima riga. Questo si ottiene utilizzando la funzione di Green ritardata, ovvero quella per cui $G_R(x, t) = 0$ per $x > t$. Con questa scelta si ottiene

$$u(x) = \int_{x_0}^x G_R(\xi, x)f(\xi)d\xi - p(x_0) [u_0 G'_R(x_0, x) - G_R(x_0, x)u'_0]. \quad (6.5.82)$$

Sfruttando la relazione tra le funzioni di Green ritardata ed avanzata (eq. (6.5.37)) possiamo anche riscrivere l'equazione precedente come

$$u(x) = \int_{x_0}^x G_A(x, \xi)f(\xi)d\xi - p(x_0) \left[u_0 \frac{d}{dx_0} G_A(x, x_0) - G_A(x, x_0)u'_0 \right]. \quad (6.5.83)$$

In tal caso la funzione di Green “propaga” l'effetto del “termine forzante” $f(\xi)$ dal punto iniziale ξ fino al punto x .

Per determinare la soluzione per $x < x_0$ si può utilizzare un metodo analogo e sfruttare la funzione di Green avanzata, ovvero quella per cui $G_A(x, t) = 0$ per $x < t$. In questo caso si ottiene

$$u(x) = \int_x^{x_0} G_A(\xi, x)f(\xi)d\xi + p(x_0) [u_0 G'_A(x_0, x) - G_A(x_0, x)u'_0], \quad (6.5.84)$$

ovvero, usando la relazione con la funzione di Green ritardata

$$u(x) = \int_x^{x_0} G_R(x, \xi)f(\xi)d\xi + p(x_0) \left[u_0 \frac{d}{dx_0} G_R(x, x_0) - G_R(x, x_0)u'_0 \right]. \quad (6.5.85)$$

Consideriamo ora il caso in cui l'operatore differenziale abbia struttura generica (quindi in generale non sia nella forma di Sturm-Liouville). In questo caso il problema di Cauchy è della forma

$$\begin{cases} \mathcal{L}_x^{(2)} u(x) = f(x) \\ u(x_0) = u_0 \\ u'(x_0) = u'_0 \end{cases} . \quad (6.5.86)$$

Possiamo risolvere questo problema notando che¹³

$$u_P(x) = \int_{x_0}^x G_A(x, \xi) f(\xi) d\xi, \quad (6.5.87)$$

è una soluzione particolare dell'equazione che soddisfa le condizioni iniziali

$$\begin{cases} u(x_0) = 0 \\ u'(x_0) = 0 \end{cases} . \quad (6.5.88)$$

La soluzione completa che soddisfa le condizioni iniziali del problema di Cauchy può essere ottenuta sommando una opportuna combinazione lineare delle soluzioni dell'equazione omogenea associata:

$$u(x) = u_P(x) + c_1 u_1(x) + c_2 u_2(x). \quad (6.5.89)$$

Una formula analoga può essere ricavata per $x < x_0$ utilizzando la funzione di Green ritardata $G_R(x, t)$.

6.6 Esercizi

Esercizio 6.1. Si consideri un'equazione lineare omogenea del secondo ordine a coefficienti costanti che abbia le radici dell'equazione caratteristica coincidenti. Si verifichi che le due soluzioni indipendenti possono essere ottenute con un'opportuna combinazione delle soluzioni del problema con radici $\alpha + \epsilon$ ed $\alpha - \epsilon$ nel limite $\epsilon \rightarrow 0$.

Si verifichi lo stesso risultato nel caso di equazioni di Eulero con radici dell'equazione caratteristica coincidenti.

Esercizio 6.2. Determinare la soluzione generale dell'equazione differenziale

$$(1-x)y'' + xy' - y = (1-x)^2, \quad (6.6.1)$$

sapendo che $y = x$ è una soluzione dell'equazione omogenea associata.

Esercizio 6.3. Si risolva il seguente problema di Sturm-Liouville

$$\begin{cases} x^2 y'' - 3xy' + 3y = \frac{1}{x}, \\ y(1) = a \\ y(2) = a \end{cases}, \quad (6.6.2)$$

con a costante reale.

¹³Per verificare questa affermazione si può applicare l'operatore differenziale $\mathcal{L}_x^{(2)}$ e scambiare l'operatore con il segno di integrale, ottenendo $\mathcal{L}_x^{(2)} G_A(x, t) = \delta(x-t)$.

Esercizio 6.4. Si risolva il seguente problema di Sturm-Liouville

$$\begin{cases} x^2 y'' - 3xy' + 3y = \log x, \\ y'(1) = a \\ y'(2) = a \end{cases}, \quad (6.6.3)$$

con a costante reale.

Esercizio 6.5. Sia assegnata la seguente equazione differenziale

$$y'' - 2y' + y = x^2 e^x. \quad (6.6.4)$$

- i) Si determini la soluzione utilizzando le condizioni al bordo $y(0) = a$ e $y(1) = 0$, con a costante reale.
- ii) Si studi il caso in cui la condizione al bordo in $x = 0$ sia modificata in $y'(0) = 0$.
- iii) Si studi il caso in cui il termine noto sia $(x^2 - 1/6)e^x$ e le condizioni al bordo siano $y'(0) = 0$ e $y(1) = 0$.

Si discutano in dettaglio i risultati dei punti ii) e iii) tenendo conto del teorema dell'alternativa di Fredholm.

Esercizio 6.6. Si risolva il seguente problema di Sturm-Liouville

$$\begin{cases} x y'' + 2 y' + x y = 1, \\ y(\pi/2) = 0 \\ y(\pi) = 0 \end{cases}, \quad (6.6.5)$$

utilizzando il metodo della funzione di Green. Si discuta inoltre il caso in cui la condizione al bordo nel punto $x = \pi/2$ sia

$$y(\pi/2) + \frac{\pi}{2} y'(\pi/2) = 0. \quad (6.6.6)$$

(Suggerimento: si noti che $x y'' + 2 y' = \frac{d^2}{dx^2}(x y)$.)

Esercizio 6.7. Sia assegnato il seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' + 2y' + \left(1 - \frac{2}{\cos^2 x}\right) y = e^{-x} \cos x, \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 0 \end{cases}. \quad (6.6.7)$$

Si determini la soluzione sapendo che una soluzione dell'equazione omogenea è

$$u(x) = e^{-x} \tan x. \quad (6.6.8)$$

Esercizio 6.8. Si risolva, utilizzando il metodo della funzione di Green, il problema di Cauchy

$$\begin{cases} u''(x) - \frac{2}{x^2}u(x) = x \sin(x) \\ u(\pi) = 0 \\ u'(\pi) = 0 \end{cases} . \quad (6.6.9)$$

Esercizio 6.9. Si risolva, utilizzando il metodo della funzione di Green, il problema di Cauchy

$$\begin{cases} u''(x) - 3u'(x) + 3u(x) = x \\ u(0) = 1 \\ u'(0) = 1 \end{cases} . \quad (6.6.10)$$

Esercizio 6.10. Si risolva, utilizzando il metodo della funzione di Green, il problema di Cauchy

$$\begin{cases} \frac{d}{dx} \left(x^2 \frac{d}{dx} \right) u(x) - 2u(x) = x^2 \log x \\ u(1) = -1/3 \\ u'(1) = -1/3 \end{cases} . \quad (6.6.11)$$

Si noti che $u(x) = x$ è soluzione dell'equazione omogenea associata.

Esercizio 6.11. Si consideri il problema di Sturm-Liouville con condizioni al bordo non omogenee

$$\begin{cases} \mathcal{L}_x^{SL} u(x) = f(x) \\ u(0) = a \\ u(L) = b \end{cases} . \quad (6.6.12)$$

Si assuma che tale problema ammetta delle soluzioni non banali $\phi_h(x)$ per il problema omogeneo associato con condizioni al bordo omogenee. Si determinino le condizioni su $f(x)$ che garantiscono l'esistenza di una soluzione. (Suggerimento: si prenda spunto dalla condizione per il caso con condizioni al bordo omogenee.)

Esercizio 6.12. Sia assegnata la seguente equazione differenziale

$$u''(x) + \gamma u(x) = \sin x . \quad (6.6.13)$$

Si determini quante soluzioni esistono, e successivamente si trovino esplicitamente, nei seguenti casi

- i) $\gamma = 1$ con $u(0) = u(\pi) = 0$,
- ii) $\gamma = 1$ con $u'(0) = u'(\pi) = 0$,
- iii) $\gamma = -1$ con $u(0) = u(\pi) = 0$,
- iv) $\gamma = 2$ con $u(0) = u(\pi) = 0$.

SISTEMI DI EQUAZIONI DIFFERENZIALI LINEARI DEL PRIMO ORDINE

Questo capitolo è dedicato allo studio del problema di Cauchy per sistemi di equazioni differenziali del primo ordine. Vedremo quali sono le proprietà generali di questi sistemi di equazioni e come se ne può determinare la soluzione in alcuni casi particolari.

7.1 Il problema di Cauchy per sistemi di equazioni differenziali

Consideriamo il seguente problema di Cauchy per un sistema di equazioni differenziali lineari del primo ordine

$$\begin{cases} y'(x) = A(x)y(x) + a(x) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}, \quad (7.1.1)$$

con $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}^n$, $A(x)$ una matrice $n \times n$ di funzioni a valori in \mathbb{C} e $a(x)$ un vettore di funzioni a valori in \mathbb{C} .

Come abbiamo visto nel capitolo 4, se $A(x)$ e $a(x)$ sono continue, il sistema di equazioni differenziali ammette un'unica soluzione che soddisfa le condizioni iniziali.

Consideriamo ora il sistema di equazioni omogeneo associato

$$y'(x) = A(x)y(x). \quad (7.1.2)$$

Definizione 7.1 (Matrice fondamentale). Definiamo la *matrice fondamentale* Y per il sistema di equazioni omogeneo come una matrice $n \times n$ le cui colonne sono n soluzioni linearmente indipendenti dell'equazione (7.1.2):

$$Y(x) = (y^{(1)}(x), \dots, y^{(n)}(x)). \quad (7.1.3)$$

Essendo le n soluzioni linearmente indipendenti, si ha che $\det Y \neq 0$.¹ Inoltre valgono le seguenti proprietà.

¹Si noti che la matrice fondamentale qui definita è strettamente connessa con quella definita nella sezione 6.4. Infatti, riducendo un'equazione differenziale di ordine n ad un sistema di equazione di primo ordine, come spiegato nella sezione 4.1, la funzione incognita e le sue derivate sino all'ordine $n - 1$ diventano le variabili del sistema di equazioni del primo ordine.

Teorema 7.1. Sia Y la matrice fondamentale per il sistema di equazioni differenziali in eq. (7.1.2), allora

i) Y è soluzione di

$$Y'(x) = A(x)Y(x), \quad (7.1.4)$$

ii) se Y_1 è un'altra matrice fondamentale, esiste una matrice $n \times n$ costante C invertibile tale che $Y_1(x) = Y(x)C$,

iii) la soluzione del sistema di equazioni differenziali (7.1.2) tale che $y(x_0) = y_0$ è data da

$$y(x) = Y(x)Y^{-1}(x_0)y_0. \quad (7.1.5)$$

Dimostrazione. La dimostrazione di queste proprietà è lasciata per esercizio. \square

La determinazione della soluzione del problema di Cauchy non omogeneo può inoltre essere ottenuta mediante il seguente risultato.

Teorema 7.2. Sia Y una matrice fondamentale per il sistema di equazioni differenziali (7.1.2). Allora la soluzione del problema di Cauchy (7.1.1) è data da

$$y(x) = Y(x) \left[Y^{-1}(x_0)y_0 + \int_{x_0}^x Y^{-1}(t)a(t)dt \right]. \quad (7.1.6)$$

Dimostrazione. Per dimostrare questo risultato possiamo cercare una soluzione del problema di Cauchy con il metodo della variazione delle costanti. Poniamo $y(x) = Y(x)c(x)$, dove $c(x)$ è un vettore con n componenti che soddisfa la condizione $Y(x_0)c(x_0) = y_0$, ovvero $c(x_0) = Y^{-1}(x_0)y_0$. Sostituendo nell'equazione differenziale otteniamo

$$(Y(x)c(x))' = A(x)y(x) + a(x). \quad (7.1.7)$$

Ma vale anche

$$(Y(x)c(x))' = Y'(x)c(x) + Y(x)c'(x) = A(x)Y(x)c(x) + Y(x)c'(x) = A(x)y(x) + Y(x)c'(x), \quad (7.1.8)$$

e quindi

$$Y(x)c'(x) = a(x) \quad \Rightarrow \quad c'(x) = Y^{-1}(x)a(x). \quad (7.1.9)$$

Integrando e tenendo conto della condizione iniziale segue che

$$c(x) = Y^{-1}(x_0)y_0 + \int_{x_0}^x Y^{-1}(t)a(t)dt. \quad (7.1.10)$$

Sostituendo questa espressione nella definizione $y(x) = Y(x)c(x)$ otteniamo la relazione cercata. \square

7.2 Soluzioni del sistema omogeneo associato

Abbiamo visto che la soluzione del problema di Cauchy (7.1.1) può essere ottenuta (almeno formalmente) nel caso in cui si conosca una base di soluzioni del sistema di equazioni omogeneo associato. Vediamo quindi di identificare una procedura che ci permetta (almeno in alcuni casi) di determinare tale base di soluzioni.

Partiamo dal caso in cui la matrice A è una matrice costante a coefficienti in \mathbb{C} . Una matrice di questo tipo può essere interpretata come un operatore lineare da $\mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$. Possiamo anche definire una norma per A , data da

$$\|A\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}, \quad (7.2.1)$$

dove $\|x\| = \sqrt{|x_1|^2 + \dots + |x_n|^2}$. Con tale metrica, l'insieme di tutti gli operatori lineari $A : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ costituisce uno spazio di Banach.

È facile dimostrare che $\|AB\| \leq \|A\| \|B\|$. Da questa relazione segue che $\|A^n\| \leq \|A\|^n$.

Definizione 7.2 (Esponenziale di una matrice). Definiamo l'esponenziale di una matrice A come la serie

$$\exp(A) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!} = 1 + A + \frac{1}{2!}A^2 + \dots + \frac{1}{n!}A^n + \dots \quad (7.2.2)$$

Usando le proprietà della norma si può dimostrare che questa è una serie di Cauchy. Essendo lo spazio completo, la serie converge ad un elemento dello spazio delle matrici.

Valgono le seguenti proprietà:

- i) se $[A, B] = AB - BA = 0$ allora $\exp(A)\exp(B) = \exp(A+B)$,
- ii) se $A = PBP^{-1}$ allora $\exp(A) = P\exp(B)P^{-1}$,
- iii) $\det \exp(A) = \exp \operatorname{Tr}(A)$,
- iv) nel caso in cui $[A, B] \neq 0$ si può utilizzare la formula di Baker, Campbell, Hausdorff per ottenere il prodotto di due esponenziali

$$\exp(A)\exp(B) = \exp(C), \quad (7.2.3)$$

dove

$$C = A + B + \frac{1}{2}[A, B] + \frac{1}{12}\{[A, [A, B]] + [B, [B, A]]\} + \dots, \quad (7.2.4)$$

- v) un'altra relazione utile è

$$\exp(iA)B\exp(-iA) = B + i[A, B] + \frac{i^2}{2!}[A, [A, B]] + \dots \quad (7.2.5)$$

Torniamo ora al sistema di equazioni differenziali omogeneo (7.1.2). Vale il seguente risultato.

Teorema 7.3. Sia dato il sistema di equazioni differenziali omogeneo (7.1.2) con $A(x) = A$ costante. La soluzione che soddisfa le condizioni iniziali $y(x_0) = y_0$ è data da

$$y(x) = \exp(A(x - x_0)) y_0. \quad (7.2.6)$$

La matrice fondamentale per tale sistema è $Y(x) = \exp(Ax)$.

Dimostrazione. Per verificare questo risultato basta usare la serie che definisce l'esponenziale di una matrice costante e derivare termine a termine. \square

Discutiamo ora il caso generale in cui la matrice $A(x)$ non è costante. Un caso in cui una semplice formula esplicita può essere ricavata è quello in cui la matrice $A(x)$ è tale che, dati x_1 ed x_2 qualsiasi nell'intervallo di definizione del problema di Cauchy le matrici $A(x_1)$ ed $A(x_2)$ commutano, ovvero $[A(x_1), A(x_2)] = 0$. In questo caso si può verificare che il sistema di equazioni differenziali omogeneo (7.1.2) ammette la seguente soluzione

$$y(x) = \exp\left(\int_{x_0}^x A(t)dt\right) y_0. \quad (7.2.7)$$

Tale soluzione soddisfa la condizione al bordo $y(x_0) = y_0$. Si noti che questa espressione è una semplice generalizzazione dell'eq. (7.2.6) e può essere verificata in modo analogo. In particolare se $A(x)$ è costante l'eq. (7.2.7) si riduce all'eq. (7.2.6).

Si noti che l'espressione (7.2.7) *non* fornisce una soluzione del sistema di equazioni differenziali se $A(x)$ non commuta per x diversi. Vediamo il perché di questo fatto. Consideriamo ad esempio il termine quadratico nell'espansione dell'esponenziale

$$\mathcal{I}^{(2)} = \frac{1}{2} \left(\int_{x_0}^x A(t)dt \right)^2. \quad (7.2.8)$$

Calcolando la derivata otteniamo

$$\frac{d}{dx} \mathcal{I}^{(2)} = \frac{1}{2} A(x) \left(\int_{x_0}^x A(t)dt \right) + \frac{1}{2} \left(\int_{x_0}^x A(t)dt \right) A(x). \quad (7.2.9)$$

Se $A(x)$ non commuta per x diversi, allora nel secondo termine *non* possiamo invertire l'ordine di $A(x)$ e dell'integrale, dunque la serie *non* risolve il sistema di equazioni differenziali.

Per ottenere una soluzione dobbiamo fare in modo che $A(x)$ ottenuto derivando l'estremo di integrazione superiore appaia sempre 'a sinistra' dello sviluppo in serie. Questo può essere (formalmente) ottenuto definendo un esponenziale *ordinato temporalmente*,² ovvero

$$\begin{aligned} \mathcal{T} \exp\left(\int_{x_0}^x A(t)dt\right) &\equiv \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \int_{x_0}^x \cdots \int_{x_0}^x \mathcal{T}\{A(t'_1) \cdots A(t'_n)\} dt'_1 \cdots dt'_n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \int_{x_0}^x \int_{x_0}^{t'_n} \int_{x_0}^{t'_{n-1}} \cdots \int_{x_0}^{t'_2} A(t'_n) \cdots A(t'_1) dt'_1 \cdots dt'_{n-2} dt'_{n-1} dt'_n, \end{aligned} \quad (7.2.10)$$

$$(7.2.11)$$

²I concetti di ordinamento temporale e di esponenziale ordinato temporalmente sono estremamente utili in teoria dei campi quantistica per la definizione di correlatori ed operatori di evoluzione temporale. Tale utilità deriva dal fatto che gli operatori in quantistici tipicamente non commutano.

dove \mathcal{T} indica che gli argomenti $A(t'_i)$ devono essere ordinati in ordine di t'_i decrescente da sinistra a destra. Ad esempio se $t'_3 > t'_1 > t'_2$ allora

$$\mathcal{T}\{A(t'_1)A(t'_2)A(t'_3)\} = A(t'_3)A(t'_1)A(t'_2). \quad (7.2.12)$$

È facile verificare che

$$\frac{d}{dx} \mathcal{T} \exp \left(\int_{x_0}^x A(t) dt \right) = A(x) \mathcal{T} \exp \left(\int_{x_0}^x A(t) dt \right). \quad (7.2.13)$$

Da questa relazione segue che la soluzione del sistema di equazioni differenziali omogeneo (7.1.2) è data in generale da

$$y(x) = \mathcal{T} \exp \left(\int_{x_0}^x A(t) dt \right) y_0. \quad (7.2.14)$$

Chiaramente questa espressione si riduce a quella data in eq. (7.2.7) nel caso in cui $A(x)$ commuti per x differenti.

Si noti che l'esponenziale ordinato temporalmente è di solito molto difficile da calcolare in modo esplicito. Tuttavia esso fornisce una soluzione formale che può essere utile per applicazioni specifiche. Ad esempio esso può essere usato per ottenere opportuni sviluppi in serie.

7.3 Esempi

Presentiamo ora alcuni esempi espliciti. Partiamo da alcune formule utili per ricavare l'esponenziale di matrici costanti per alcuni casi notevoli.

Esponenziale di una matrice diagonale. Nel caso in cui

$$A = \text{diag}\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\} \quad (7.3.1)$$

sarà banalmente

$$\exp(Ax) = \text{diag}\{\exp(\lambda_1 x), \dots, \exp(\lambda_n x)\}. \quad (7.3.2)$$

Se la matrice A è diagonalizzabile tramite la trasformazione PAP^{-1} , allora si può calcolare l'esponenziale della matrice diagonale e poi effettuare la trasformazione inversa.

Esponenziale di una matrice nilpotente. Una matrice è detta nilpotente se una sua potenza si annulla, ovvero $N^k = 0$ per un qualche k . Anche in questo caso il calcolo dell'esponenziale $\exp(Nx)$ è semplice perché lo sviluppo in serie si arresta al termine $k-1$.

Esempio 7.1. Calcolare $\exp(Nx)$ con

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (7.3.3)$$

Abbiamo che $N^3 = 0$, quindi

$$\exp(Nx) = \mathbb{I}_3 + Nx + \frac{1}{2}N^2x^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & x & 1 & 0 \\ 0 & x^2/2 & x & 1 \end{pmatrix}. \quad (7.3.4)$$

Esponenziale di una matrice nilpotente elementare. Una matrice $n \times n$ è detta nilpotente elementare se è del tipo

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}. \quad (7.3.5)$$

Vale che $N^n = 0$. Per esempio, se $n = 4$ si ha

$$\exp(Nx) = \mathbb{I}_4 + Nx + \frac{1}{2}N^2x^2 + \frac{1}{3!}N^3x^3 = \begin{pmatrix} 1 & x & x^2/2 & x^3/3! \\ 0 & 1 & x & x^2/2 \\ 0 & 0 & 1 & x \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (7.3.6)$$

Esponenziale di un blocco di Jordan. Un blocco di Jordan è una matrice $n \times n$ del tipo

$$J = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda \end{pmatrix} = \lambda \mathbb{I}_n + N_n, \quad (7.3.7)$$

con N_n matrice nilpotente elementare $n \times n$. Si ha

$$\exp(Jx) = \exp[(\lambda \mathbb{I}_n + N_n)x] = \exp(\lambda \mathbb{I}_n x) \exp(N_n x) = e^{\lambda x} \begin{pmatrix} 1 & x & \frac{x^2}{2} & \cdots & \frac{x^m}{m!} \\ 0 & 1 & x & \cdots & \frac{x^{m-1}}{(m-1)!} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}. \quad (7.3.8)$$

In generale ogni matrice può essere trasformata, con una trasformazione non singolare P , nella forma diagonale a blocchi

$$P^{-1}AP = \text{diag}\{J_1, \dots, J_p\}, \quad (7.3.9)$$

dove J_i ($i = 1, \dots, p$) sono blocchi di Jordan $m_i \times m_i$

$$J_i = \begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_i & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_i \end{pmatrix} = \lambda_i \mathbb{I}_{m_i} + N_{m_i}, \quad (7.3.10)$$

con gli autovalori λ_i non necessariamente distinti. La soluzione del sistema di equazioni differenziali omogeneo sarà quindi

$$e^{Ax} = P \exp \operatorname{diag}\{J_1 x, \dots, J_p x\} P^{-1} = P \operatorname{diag}\{\exp(J_1 x), \dots, \exp(J_p x)\} P^{-1}, \quad (7.3.11)$$

dove ciascun blocco è del tipo (7.3.10).

La matrice P può essere ottenuta a partire dagli *autovettori generalizzati* della matrice A . Per ogni blocco di Jordan di dimensione m_i ed autovalore λ_i gli autovettori generalizzati sono dati una catena di Jordan, ovvero un insieme $\{v^{(k)}\}$ di m_i vettori che soddisfano le equazioni

$$v^{(k-1)} = (A - \lambda_i \mathbb{I}) v^{(k)} \quad k = 2, \dots, m_i, \quad (7.3.12)$$

dove $v^{(1)}$ è l'autovettore proprio corrispondente all'autovalore λ_i . La matrice P è costruita utilizzando come colonne i vari autovettori propri e generalizzati della matrice A , ovvero

$$P = (v^{(1)}, v^{(2)}, \dots, v^{(n)}), \quad (7.3.13)$$

dove n è la dimensione di A .

Esempio 7.2. Trovare la matrice fondamentale del sistema di equazioni differenziali

$$y'(x) = A y(x), \quad (7.3.14)$$

con

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}. \quad (7.3.15)$$

Soluzione. L'equazione agli autovalori

$$(2 - \lambda)(3 - \lambda) - 2 = 0 \quad (7.3.16)$$

ha per soluzioni $\lambda_1 = 1$ e $\lambda_2 = 4$. Determiniamo l'autovettore corrispondente all'autovalore $\lambda = 1$,

$$A \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \quad (7.3.17)$$

ovvero

$$u + 2v = 0. \quad (7.3.18)$$

Per l'autovalore $\lambda_2 = 4$ si ottiene

$$u - v = 0. \quad (7.3.19)$$

Scegliamo come due autovettori

$$v^{(1)} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (7.3.20)$$

La matrice che diagonalizza A è quindi

$$P = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad (7.3.21)$$

con

$$P^{-1} = -\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}. \quad (7.3.22)$$

Chiaramente risulta

$$P^{-1}AP = A_D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}. \quad (7.3.23)$$

Pertanto la matrice fondamentale è

$$e^{Ax} = Pe^{A_D x}P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3}e^x + \frac{1}{3}e^{4x} & -\frac{2}{3}e^x + \frac{2}{3}e^{4x} \\ -\frac{1}{3}e^x + \frac{1}{3}e^{4x} & \frac{1}{3}e^x + \frac{2}{3}e^{4x} \end{pmatrix}. \quad (7.3.24)$$

□

Esempio 7.3. Trovare la matrice fondamentale del sistema di equazioni differenziali

$$y'(x) = Ay(x), \quad (7.3.25)$$

con

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ 5 & -2 & -1 \end{pmatrix}. \quad (7.3.26)$$

Soluzione. L'equazione per gli autovalori della matrice A è

$$(\lambda + 1)(\lambda - 2)^2 = 0. \quad (7.3.27)$$

Vediamo quindi che la matrice A ha autovalore $\lambda_1 = -1$ con molteplicità 1 e autovalore $\lambda_2 = 2$ con molteplicità 2. Indicando le componenti di un vettore con (u, v, w) , l'equazione per l'autovettore di autovalore λ_1 fornisce le relazioni

$$\begin{cases} 2u = -u \\ 3u + 2v = -v \\ 5u - 2v - w = -w \end{cases}, \quad (7.3.28)$$

un autovettore corrispondente è quindi

$$v^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (7.3.29)$$

L'equazione per l'autovettore di autovalore λ_2 fornisce le relazioni

$$\begin{cases} 2u = 2u \\ 3u + 2v = 2v \\ 5u - 2v - w = 2w \end{cases} . \quad (7.3.30)$$

In questo caso è possibile determinare un solo autovettore, che può essere scelto come

$$v^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} . \quad (7.3.31)$$

è possibile però costruire un *autovettore generalizzato* $v^{(3)}$ soluzione dell'equazione

$$(A - 2\mathbb{I})v^{(3)} = v^{(2)} . \quad (7.3.32)$$

Questo vettore appartiene al $\ker(A - 2\mathbb{I})^2$. Il conto esplicito mostra che si può scegliere

$$v^{(3)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} . \quad (7.3.33)$$

Costruiamo la matrice

$$P = \{v^{(1)}, v^{(2)}, v^{(3)}\}, \quad P^{-1} = -\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 7 & -2 & -3 \\ 2 & -1 & 0 \\ -3 & 0 & 0 \end{pmatrix} . \quad (7.3.34)$$

Si ha

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \text{diag}\{J_1, J_2\}, \quad (7.3.35)$$

con

$$J_1 = -1, \quad J_2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} . \quad (7.3.36)$$

Quindi otteniamo

$$\exp(P^{-1}APx) = \begin{pmatrix} e^{-x} & 0 & 0 \\ 0 & e^{2x} & xe^{2x} \\ 0 & 0 & e^{2x} \end{pmatrix} . \quad (7.3.37)$$

La matrice fondamentale del problema è quindi data da

$$e^{Ax} = P \exp(P^{-1}APx) P^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 3e^{2x} & 0 & 0 \\ 9xe^{2x} & 3e^{2x} & 0 \\ -7e^{-x} + 7e^{2x} - 6xe^{2x} & 2e^{-x} - 2e^{2x} & 3e^{-x} \end{pmatrix} . \quad (7.3.38)$$

In generale per ciascun autovalore λ con una molteplicità p si ottiene prima lo spazio nullo di $A - \lambda\mathbb{I}$. Se la dimensione del $\ker(A - \lambda\mathbb{I})$ è minore di p , si procede col determinare gli autovettori generalizzati sino ad ottenere una base di p vettori. \square

7.4 Esercizi

Esercizio 7.1. Si determini la soluzione generale del sistema di equazioni

$$y' = Ay + B, \quad (7.4.1)$$

dove

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} x^2 \\ e^x \end{pmatrix}. \quad (7.4.2)$$

Specializzare la soluzione al caso in cui

$$y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (7.4.3)$$

Esercizio 7.2. Si riscriva il seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' - 3y' + 2y = 0 \\ y(0) = a \\ y'(0) = b \end{cases} \quad (7.4.4)$$

in forma di sistema di equazioni differenziale del primo ordine. Si determini la matrice fondamentale del sistema. Si ricavi la soluzione generale dell'equazione e la soluzione che soddisfa le condizioni iniziali.

Esercizio 7.3. Si determini la matrice fondamentale del seguente sistema di equazioni differenziali

$$y' = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} y. \quad (7.4.5)$$

Esercizio 7.4. Si determini la matrice fondamentale del seguente sistema di equazioni differenziali

$$y' = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} y. \quad (7.4.6)$$

Esercizio 7.5. Si determini la matrice fondamentale del seguente sistema di equazioni differenziali

$$y' = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -6 & 8 \end{pmatrix} y. \quad (7.4.7)$$

PARTE III

EQUAZIONI DIFFERENZIALI LINEARI SU \mathbb{C}

Nelle equazioni differenziali riveste grande importanza lo studio delle singolarità delle funzioni che entrano come coefficienti dell'equazione. In questo capitolo discuteremo le problematiche connesse a queste singolarità. Ci concentreremo in particolar modo sulle equazioni lineari del secondo ordine, classificandole in base ai tipi di singolarità che possono contenere. Come vedremo questa classificazione è strettamente legata alla possibilità di prolungare l'equazione differenziale in \mathbb{C} , per poter utilizzare gli strumenti dell'analisi complessa.

8.1 Un esempio per equazioni del primo ordine

Per illustrare il tipo di questioni che si devono affrontare quando un'equazione differenziale presenta punti singolari, analizziamo un esempio di equazione lineare del primo ordine. Sia assegnato in \mathbb{R} il seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) = p(x)y(x) \\ y(0) = y_0 \end{cases} . \quad (8.1.1)$$

Come abbiamo visto in precedenza, la soluzione è data da

$$y(x) = y_0 \exp \left(\int_0^x p(\zeta) d\zeta \right) . \quad (8.1.2)$$

Notiamo che per avere una soluzione ben definita è essenziale garantire l'integrabilità della funzione $p(x)$ intorno all'origine. Immaginiamo infatti di prolungare sui complessi l'equazione e sviluppiamo in serie di Laurent intorno all'origine la funzione $p(\zeta)$:

$$p(\zeta) = \sum_k c_k \zeta^k . \quad (8.1.3)$$

Possiamo allora formalmente scrivere

$$\int^x p(\zeta) d\zeta = \sum_{k \neq -1} c_k \frac{x^{k+1}}{k+1} + c_{-1} \log x . \quad (8.1.4)$$

Se $p(x)$ non possiede singolarità, l'equazione ammette la soluzione (8.1.2) che risulta *analitica*. Viceversa, se $p(x)$ possiede dei poli, si vede immediatamente che

- se $c_{-1} \neq 0$ ma $c_k = 0$ per $k \leq -2$ la soluzione (8.1.2) ha una *singularità algebrica* nell'origine,¹
- se $c_k \neq 0$ per almeno un $k \leq -2$, la soluzione ha una *singularità essenziale* nell'origine.

Questo esempio illustra l'importanza dello studio delle singularità delle funzioni coefficienti dell'equazione e del loro rapporto con le singularità delle soluzioni.

8.2 Equazioni del secondo ordine: Punti regolari

Considereremo, da qui in poi, la classe di equazioni differenziali del secondo ordine lineari ed omogenee, in cui la variabile indipendente z sia complessa. Come abbiamo visto nei capitoli precedenti, nella forma standard l'equazione generica si scrive

$$\frac{d^2u}{dz^2} + p(z)\frac{du}{dz} + q(z)u = 0. \quad (8.2.1)$$

Definizione 8.1 (Punti regolari e singolari). Un punto $z_0 \in \mathbb{C}$ del piano complesso in cui sia $p(z)$ che $q(z)$ siano analitiche si dice un punto *regolare* per l'equazione. Tutti gli altri punti si dicono *singolari*.

Iniziamo lo studio delle soluzioni intorno ad un punto regolare. Sia z_0 un punto *regolare* per l'equazione (8.2.1). Vogliamo mostrare che dato il problema di Cauchy

$$\begin{cases} u(z_0) = a_0 \\ u'(z_0) = a_1 \end{cases} \quad (8.2.2)$$

con punto iniziale z_0 , esiste un raggio r_0 tale che nel cerchio aperto $B(z_0, r_0)$ dato da $|z - z_0| < r_0$ la soluzione esiste e può essere determinata per iterazione. Tale soluzione è inoltre *analitica* e *unica*.

Per semplificare la dimostrazione è utile ricondurre l'equazione differenziale nella forma canonica

$$\frac{d^2v}{dz^2} + J(z)v = 0. \quad (8.2.3)$$

Come discusso nella sezione 6.1, questo può essere sempre ottenuto tramite la ridefinizione

$$u(z) = v(z) \exp\left(-\frac{1}{2} \int_{z_0}^z p(\zeta) d\zeta\right). \quad (8.2.4)$$

In questo modo risulta

$$J(z) = q(z) - \frac{1}{2} \frac{dp(z)}{dz} - \frac{1}{4} (p(z))^2. \quad (8.2.5)$$

Essendo $p(z)$ e $q(z)$ analitiche in un intorno di z_0 , segue che anche $J(z)$ è analitica in un intorno di z_0 .

¹Questo è vero per valori generici del coefficiente c_{-1} . Tuttavia nel caso in cui $c_{-1} = n$ con $n \in \mathbb{N}$ non nullo, la soluzione è regolare nell'origine.

Consideriamo ora la sequenza di funzioni $v_n(z)$ analitiche in $B(z_0, r_0)$, definite da

$$\begin{aligned} v_0(z) &= b_0 + b_1(z - z_0), \\ v_n(z) &= \int_{z_0}^z (\zeta - z) J(\zeta) v_{n-1}(\zeta) d\zeta, \quad (n = 1, 2, \dots). \end{aligned} \quad (8.2.6)$$

Vogliamo mostrare che

$$v(z) = \sum_n v_n(z) \quad (8.2.7)$$

è una serie convergente in $B(z_0, r_0)$ e costituisce una soluzione dell'equazione differenziale.

Essendo $J(z)$ e $v_0(z)$ analitiche, possiamo trovare degli opportuni M e μ tali che $|J(z)| \leq M$ e $|v_0(z)| \leq \mu$ in $B(z_0, r_0)$. Vediamo ora che in $B(z_0, r_0)$ sono valide anche le disuguaglianze

$$|v_n(z)| \leq \mu M^n \frac{|z - z_0|^{2n}}{n!}. \quad (8.2.8)$$

Questa disuguaglianza è chiaramente valida per $n = 0$. Dimostriamo il caso generale per induzione. Assumiamo che la disuguaglianza sia valida per $\forall n < m$. Consideriamo $v_m(z)$ scegliendo il percorso di integrazione rettilineo² tra z_0 e z

$$\begin{aligned} |v_m(z)| &= \left| \int_{z_0}^z (\zeta - z) J(\zeta) v_{m-1}(\zeta) d\zeta \right| \\ &\leq \frac{1}{(m-1)!} \int_{z_0}^z |\zeta - z| |J(\zeta)| \mu M^{m-1} |\zeta - z_0|^{2m-2} |d\zeta| \\ &\leq \frac{1}{(m-1)!} \mu M^m |z - z_0| \int_0^{|z-z_0|} t^{2m-2} dt \\ &< \frac{1}{m!} \mu M^m |z - z_0|^{2m}. \end{aligned} \quad (8.2.9)$$

Il che dimostra la disuguaglianza in eq. (8.2.8) per ogni valore di n .

Quando $z \in B(z_0, r_0)$,

$$|v_n(z)| \leq \frac{\mu M^n r_0^{2n}}{n!}, \quad (8.2.10)$$

allora la serie $v(z) = \sum_{n=0}^{\infty} v_n(z)$ converge assolutamente ed è analitica, in quanto

$$\sum_{n=0}^{\infty} |v_n(z)| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mu M^n r_0^{2n}}{n!} \quad (8.2.11)$$

che è convergente. Inoltre, dalla definizione di $v_n(z)$ otteniamo, per $n \geq 1$,

$$\frac{d}{dz} v_n(z) = - \int_{z_0}^z J(\zeta) v_{n-1}(\zeta) d\zeta, \quad (8.2.12)$$

$$\frac{d^2}{dz^2} v_n(z) = -J(z) v_{n-1}(z). \quad (8.2.13)$$

²Come conseguenza dell'analiticità dell'argomento dell'integrale, ogni percorso contenuto in $B(z_0, r_0)$ dà lo stesso risultato.

Quindi si ha che

$$\frac{d^2 v(z)}{dz^2} = \frac{d^2 v_0(z)}{dz^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d^2 v_n(z)}{dz^2} = -J(z)v(z), \quad (8.2.14)$$

da cui segue che la serie $v(z)$ soddisfa l'equazione differenziale (8.2.3). Inoltre si verifica facilmente che

$$v(z_0) = b_0, \quad v'(z_0) = b_1, \quad (8.2.15)$$

quindi questi due parametri possono essere scelti liberamente per soddisfare le condizioni iniziali.

Discutiamo ora l'unicità della soluzione. Consideriamo due soluzioni analitiche dell'equazione differenziale, $v_1(z)$ e $v_2(z)$ che soddisfano le stesse condizioni iniziali. Allora $w(z) = v_1(z) - v_2(z)$ soddisfa la stessa equazione omogenea

$$\frac{d^2 w(z)}{dz^2} + J(z)w(z) = 0 \quad (8.2.16)$$

ed ha come condizioni iniziali $w(z_0) = 0$ e $w'(z_0) = 0$. Differenziando $n-2$ volte l'equazione per $w(z)$ e ponendo $z = z_0$ otteniamo

$$w^{(n)}(z_0) + J(z_0)w^{(n-2)}(z_0) + \binom{n-2}{1} J'(z_0)w^{(n-3)}(z_0) + \dots + J^{(n-2)}(z_0)w(z_0) = 0. \quad (8.2.17)$$

Considerando in successione le relazioni per $n = 2, 3, \dots$, si conclude che tutte le derivate di $w(z)$ sono nulle in z_0 . Essendo w analitica, concludiamo che $w(z) = 0$, cioè le due soluzioni $v_1(z)$ e $v_2(z)$ sono identiche.

Chiaramente lo stesso risultato vale per le soluzioni dell'equazione (8.2.1), che sono legate alla soluzione del problema in forma canonica da una ridefinizione tramite una funzione analitica.

8.3 Tecnica di Frobenius

Come conseguenza della teoria della continuazione analitica, la soluzione dell'equazione differenziale è analitica in tutti i punti del dominio di definizione a parte i punti in cui i coefficienti sono singolari. La soluzione, tuttavia, in generale non è definita globalmente in tutto il dominio, in quanto potrebbe assumere più valori. Descrivendo un percorso chiuso attorno ad uno o più punti singolari, la soluzione potrebbe non tornare al valore iniziale.

In un intorno dei punti regolari, la soluzione dell'equazione differenziale, essendo analitica, può essere trovata attraverso una espansione in serie di Taylor. Questa strategia è detta *tecnica di Frobenius*. Ne presenteremo i dettagli in questa sezione.

Consideriamo un'equazione differenziale della forma

$$r(z)\frac{d^2 y}{dz^2} + p(z)\frac{dy}{dz} + q(z)y = 0. \quad (8.3.1)$$

Si noti che abbiamo introdotto una funzione che moltiplica il termine di derivata seconda. Chiaramente si può sempre porre $r(z) = 1$, tuttavia la libertà di scegliere $r(z)$ può essere utilizzata per semplificare la determinazione della soluzione. Ad esempio, $r(z)$ può

essere scelta in modo tale da eliminare i denominatori in $p(z)$ e $q(z)$ semplificando la loro espansione in serie.

Per semplicità, illustreremo la tecnica di Frobenius solo per il caso $r(z) = 1$. L'estensione al caso generale può essere ottenuta con una procedura analoga a quella che presenteremo.

Cerchiamo una soluzione nella forma di serie di potenze, ridefinendo opportunamente z in modo che $z_0 = 0$,

$$y(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k. \quad (8.3.2)$$

Espandiamo in serie anche le funzioni $p(z)$ e $q(z)$

$$p(z) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k z^k, \quad q(z) = \sum_{k=0}^{\infty} q_k z^k. \quad (8.3.3)$$

Calcoliamo $y'(z)$ e $y''(z)$,

$$y'(z) = \sum_{k=1}^{\infty} k c_k z^{k-1}, \quad y''(z) = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) c_k z^{k-2}. \quad (8.3.4)$$

Sostituendo queste espansioni in serie nell'equazione differenziale otteniamo

$$\sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) c_k z^{k-2} + \sum_{r=0}^{\infty} p_r z^r \sum_{s=1}^{\infty} s c_s z^{s-1} + \sum_{r=0}^{\infty} q_r z^r \sum_{s=0}^{\infty} c_s z^s = 0, \quad (8.3.5)$$

ovvero

$$\sum_{k=0}^{\infty} (k+2)(k+1) c_{k+2} z^k + \sum_{r=0}^{\infty} p_r z^r \sum_{s=0}^{\infty} (s+1) c_{s+1} z^s + \sum_{r=0}^{\infty} q_r z^r \sum_{s=0}^{\infty} c_s z^s = 0. \quad (8.3.6)$$

Utilizzando la formula

$$\sum_{r=0}^{\infty} a_r z^r \sum_{s=0}^{\infty} b_s z^s = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{s=0}^k (a_s b_{k-s}) z^k, \quad (8.3.7)$$

otteniamo

$$\sum_{k=0}^{\infty} (k+2)(k+1) c_{k+2} z^k + \sum_{k=0}^{\infty} \left[\sum_{s=0}^k p_{k-s} (s+1) c_{s+1} \right] z^k + \sum_{k=0}^{\infty} \left[\sum_{s=0}^k q_{k-s} c_s \right] z^k = 0, \quad (8.3.8)$$

che si riscrive infine come

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left[(k+2)(k+1) c_{k+2} + \sum_{s=0}^k p_{k-s} (s+1) c_{s+1} + \sum_{s=0}^k q_{k-s} c_s \right] z^k = 0. \quad (8.3.9)$$

Affinché questa equazione sia verificata per ogni z in un intorno dell'origine, è necessario che si annullino tutti i coefficienti di z^k . Si ottiene quindi una relazione di ricorrenza

per i c_k , per cui, noti tutti i p_i e q_i , è possibile determinare tutti i termini dello sviluppo della soluzione:

$$(k+2)(k+1)c_{k+2} = - \sum_{s=0}^k [(s+1)p_{k-s}c_{s+1} + q_{k-s}c_s] . \quad (8.3.10)$$

Si noti che la relazione di ricorrenza non determina i coefficienti c_0 e c_1 , coerentemente con il fatto che esistono due soluzioni linearmente indipendenti del problema omogeneo. Per esempio una scelta possibile per le due soluzioni è

$$\begin{cases} c_0 = 1 \\ c_1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_1(0) = 1 \\ y_1'(0) = 0 \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} c_0 = 0 \\ c_1 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_2(0) = 0 \\ y_2'(0) = 1 \end{cases} . \quad (8.3.11)$$

Per conoscere la funzione soluzione del problema di Cauchy con condizioni iniziali assegnate nel punto $z = 0$ basta scegliere

$$c_0 = y(0), \quad c_1 = y'(0) . \quad (8.3.12)$$

Se R è il più piccolo dei raggi di convergenza degli sviluppi in serie di $p(z)$ e $q(z)$ si dimostra che la soluzione ha un raggio di convergenza che è maggiore o uguale a R [11].

Presentiamo ora due esempi espliciti di applicazione della tecnica di Frobenius.

Esempio 8.1 (Equazione di Hermite). Consideriamo la seguente equazione differenziale

$$y'' - 2zy' + 2\nu y = 0 , \quad (8.3.13)$$

detta equazione di Hermite. Il punto $z = 0$ è un punto regolare, quindi attorno ad esso possiamo espandere in serie ed applicare la tecnica di Frobenius.

Lo sviluppo in serie di $p(z)$ e $q(z)$ è banale. Con le notazioni precedenti abbiamo

$$p(z) = -2z \Rightarrow \begin{cases} p_0 = 0 \\ p_1 = -2 \\ p_i = 0 \quad \forall i \geq 2 \end{cases} , \quad q(z) = 2\nu \Rightarrow \begin{cases} q_0 = 2\nu \\ q_i = 0 \quad \forall i \geq 1 \end{cases} . \quad (8.3.14)$$

Dalla relazione di ricorrenza (8.3.10) otteniamo

$$(k+2)(k+1)c_{k+2} = 2(k-\nu)c_k \quad (8.3.15)$$

e con la sostituzione $k \rightarrow k-2$ si ha

$$c_k k(k-1) = -2(\nu - k + 2)c_{k-2} . \quad (8.3.16)$$

Separando k pari e dispari otteniamo

$$c_{2k} = \frac{-2(\nu - 2k + 2)}{2k(2k-1)} c_{2k-2} , \quad (8.3.17)$$

$$c_{2k+1} = \frac{-2(\nu - 2k + 1)}{(2k+1)2k} c_{2k-1} . \quad (8.3.18)$$

Si vede quindi che i termini pari e quelli dispari forniscono due soluzioni indipendenti dell'equazione differenziale. Consideriamo prima i soli termini pari dello sviluppo, esprimendoli in funzione di c_0 :

$$\begin{aligned}
 c_{2k} &= \frac{(-2)^k(\nu - 2k + 2)(\nu - 2k + 4) \cdots (\nu - 2k + 2k)}{2k(2k - 1)(2k - 2) \cdots (1)} c_0 \\
 &= \frac{(-1)^k 2^{2k}}{(2k)!} (\nu/2 - k + 1)(\nu/2 - k + 2) \cdots (\nu/2) \\
 &= \frac{(-1)^k 2^{2k}}{(2k)!} \frac{\Gamma(\nu/2 - k + 2)}{\Gamma(\nu/2 - k + 1)} \frac{\Gamma(\nu/2 - k + 3)}{\Gamma(\nu/2 - k + 2)} \cdots \frac{\Gamma(\nu/2 + 1)}{\Gamma(\nu/2)} c_0 \\
 &= \frac{(-1)^k 2^{2k}}{(2k)!} \frac{\Gamma(\nu/2 + 1)}{\Gamma(\nu/2 - k + 1)} c_0, \tag{8.3.19}
 \end{aligned}$$

dove abbiamo fatto uso della relazione $z\Gamma(z) = \Gamma(z + 1)$. In modo simile per i termini dispari si ottiene

$$c_{2k+1} = \frac{(-1)^k 2^{2k}}{(2k + 1)!} \frac{\Gamma(\nu/2 + 1)}{\Gamma(\nu/2 - k + 1/2)} c_1. \tag{8.3.20}$$

Due soluzioni indipendenti dell'equazione differenziale sono quindi

$$y_1(z) = \Gamma\left(\frac{\nu}{2} + 1\right) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} \frac{(2z)^{2k}}{\Gamma(\nu/2 - k + 1)}, \tag{8.3.21}$$

$$y_2(z) = \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{\nu}{2} + 1\right) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k + 1)!} \frac{(2z)^{2k}}{\Gamma(\nu/2 - k + 1/2)}. \tag{8.3.22}$$

Supponiamo ora che $\nu = 2n$ con $n \in \mathbb{Z}$. Le serie precedenti in questo caso si semplificano. Consideriamo infatti la soluzione *pari*

$$c_{2k} = \frac{(-1)^k 2^{2k}}{(2k)!} \frac{\Gamma(n + 1)}{\Gamma(n - k + 1)} c_0. \tag{8.3.23}$$

Se si ha $k = n + 1$ si ottiene

$$c_{2n+2} \sim \frac{1}{\Gamma(0)} \rightarrow 0, \tag{8.3.24}$$

dunque $c_{2n+2} = 0$, per cui concludiamo che $c_{2k} = 0$ per $k > n + 1$. In questo caso si può verificare che la soluzione è proporzionale al polinomio di Hermite di ordine $2n$, H_{2n} . Infatti tale polinomio è dato da

$$H_{2n}(z) = (-1)^n (2n)! \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k (2z)^{2k}}{(2k)! (n - k)!} = \frac{(-1)^n (2n)!}{n!} y_1(z). \tag{8.3.25}$$

Vale inoltre una analoga relazione per la soluzione *dispari*

$$H_{2n+1}(z) = \frac{2(-1)^n (2n + 1)!}{n!} y_2(z). \tag{8.3.26}$$

I polinomi di Hermite e le loro principali proprietà saranno discussi in dettaglio nella sezione 12.3.1.

Esempio 8.2 (Equazione di Legendre). Cerchiamo adesso la soluzione dell'equazione differenziale

$$(1 - z^2)y''(z) - 2z y'(z) + \nu(\nu + 1)y(z) = 0 \quad (8.3.27)$$

nell'intorno di $z = 0$. Si può vedere facilmente che $z = 0$ è un punto regolare per l'equazione di Legendre. In questo caso particolare è più conveniente usare uno sviluppo in serie tenendo l'equazione differenziale nella forma data, senza riscriverla in forma standard. Sviluppando $y(z)$ in serie e sostituendo nell'equazione otteniamo

$$\begin{aligned} 0 &= (1 - z^2) \sum_{m=2}^{\infty} m(m-1)c_m z^{m-2} - 2z \sum_{m=1}^{\infty} m c_m z^{m-1} + \nu(\nu+1) \sum_{m=0}^{\infty} c_m z^m \\ &= \sum_{m=2}^{\infty} m(m-1)c_m z^{m-2} - \sum_{m=2}^{\infty} m(m-1)c_m z^m - 2 \sum_{m=1}^{\infty} m c_m z^m + \nu(\nu+1) \sum_{m=0}^{\infty} c_m z^m \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} (m+2)(m+1)c_{m+2} z^m - \sum_{m=0}^{\infty} m(m-1)c_m z^m - 2 \sum_{m=0}^{\infty} m c_m z^m + \nu(\nu+1) \sum_{m=0}^{\infty} c_m z^m \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} [(m+2)(m+1)c_{m+2} - m(m-1)c_m + \nu(\nu+1)c_m] z^m. \end{aligned} \quad (8.3.28)$$

Si ottiene quindi la relazione di ricorrenza

$$c_{m+2} = -\frac{-m(m+1) + \nu(\nu+1)}{(m+2)(m+1)} c_m = -\frac{(\nu-m)(\nu+m+1)}{(m+2)(m+1)} c_m. \quad (8.3.29)$$

Anche in questo caso si hanno due soluzioni distinte, una pari e una dispari. Studieremo esclusivamente la soluzione pari, ponendo cioè $c_0 = 1$ e $c_1 = 0$. La relazione per ricorrenza per i c_m si può riscrivere allora come

$$c_{2k} = -\frac{(\nu-2k+2)(\nu+2k-1)}{2k(2k-1)} c_{2k-2}. \quad (8.3.30)$$

Iterando questa relazione fino ad ottenere c_{2k} in funzione di c_0 si ha

$$\begin{aligned} c_{2k} &= (-1)^k \frac{(\nu-2k+2)(\nu-2k+4) \cdots (\nu)(\nu+2k-1)(\nu+2k-3) \cdots (\nu+1)}{(2k)!} c_0 \\ &= (-1)^k \frac{2^k (\frac{\nu}{2} - k + 1)(\frac{\nu}{2} - k + 2) \cdots (\frac{\nu}{2}) 2^k (\frac{\nu}{2} + k - \frac{1}{2})(\frac{\nu}{2} + k - \frac{3}{2}) \cdots (\frac{\nu}{2} + \frac{1}{2})}{(2k)!} c_0. \end{aligned} \quad (8.3.31)$$

Usando la relazione $z\Gamma(z) = \Gamma(z+1)$ si ricava

$$\frac{\nu}{2} = \frac{\Gamma(\nu/2+1)}{\Gamma(\nu/2)}, \quad \frac{\nu}{2} - 1 = \frac{\Gamma(\nu/2)}{\Gamma(\nu/2-1)}, \quad \dots \quad (8.3.32)$$

I coefficienti di c_{2k} diventano quindi

$$c_{2k} = (-1)^k \frac{2^{2k} \Gamma(\frac{\nu}{2} - k + 2)}{\Gamma(\frac{\nu}{2} - k + 1)} \frac{\Gamma(\frac{\nu}{2} - k + 3)}{\Gamma(\frac{\nu}{2} - k + 2)} \cdots \frac{\Gamma(\frac{\nu}{2} + 1)}{\Gamma(\frac{\nu}{2})}. \quad (8.3.33)$$

$$\begin{aligned} &\cdot \frac{\Gamma(\frac{\nu+1}{2} + k)}{\Gamma(\frac{\nu+1}{2} + k - 1)} \frac{\Gamma(\frac{\nu+1}{2} + k - 3)}{\Gamma(\frac{\nu+1}{2} + k - 2)} \cdots \frac{\Gamma(\frac{\nu+1}{2} + 1)}{\Gamma(\frac{\nu+1}{2})} c_0 \\ &= (-1)^k 2^{2k} \frac{\Gamma(\frac{\nu}{2} + 1)}{\Gamma(\frac{\nu}{2} - k + 1)} \frac{\Gamma(\frac{\nu+1}{2} + k)}{\Gamma(\frac{\nu}{2} + \frac{1}{2})} c_0. \end{aligned} \quad (8.3.34)$$

Con la scelta $c_0 = 1$ otteniamo la soluzione pari

$$y_1(z) = \frac{\Gamma(\frac{\nu}{2} + 1)}{\Gamma(\frac{\nu}{2} + \frac{1}{2})} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \Gamma(\frac{\nu}{2} + k + \frac{1}{2})}{(2k)! \Gamma(\frac{\nu}{2} - k + 1)} (2z)^{2k}. \quad (8.3.35)$$

In modo analogo si trova la soluzione dispari con $c_1 = 1$ (e $c_0 = 0$)

$$y_2(z) = \frac{\Gamma(\frac{\nu}{2} + \frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{\nu}{2} + 1)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \Gamma(\frac{\nu}{2} + k + 1)}{(2k+1)! \Gamma(\frac{\nu}{2} - k + \frac{1}{2})} (2z)^{2k+1}. \quad (8.3.36)$$

Se $\nu = n$ con n intero pari, la soluzione $y_1(z)$ è proporzionale al polinomio di Legendre P_n di ordine n :

$$P_n(z) = \frac{(-1)^{n/2} n!}{2^n \left[\left(\frac{n}{2}\right)!\right]^2} y_1(z). \quad (8.3.37)$$

Se $\nu = n$ con n intero dispari, esiste un'analogia relazione tra la soluzione dispari e il polinomio di Legendre di ordine n :

$$P_n(z) = \frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}} (n+1)!}{2^n \left(\frac{n-1}{2}\right)! \left(\frac{n+1}{2}\right)!} y_2(z). \quad (8.3.38)$$

Le proprietà dei polinomi di Legendre e la loro connessione con l'equazione ipergeometrica saranno discussi nella sezione 11.2.

8.4 Equazioni del secondo ordine: Classificazione dei punti singolari

Discutiamo ora cosa succede alle soluzioni del problema differenziale (8.2.1) in un intorno dei punti singolari di $p(z)$ e $q(z)$. Come vedremo in dettaglio, i punti singolari possono essere classificati in

- punti singolari *regolari* (detti anche *fuchsiani* o *inessenziali*),
- punti singolari *irregolari*.

In particolare, sono *punti singolari regolari*, i punti nei quali l'equazione (8.2.1) ammette soluzioni u_i che non esibiscono singolarità essenziali. Come vedremo, le condizioni necessarie e sufficienti affinché questo sia il caso possono essere determinate a priori e sono legate alle proprietà delle funzioni $p(z)$ e $q(z)$ nel punto singolare.

Consideriamo un punto singolare regolare isolato z_0 . In generale, le soluzioni u_i non sono monodrome attorno a z_0 , nel senso che se prolungate analiticamente esse non ritornano allo stesso valore seguendo un percorso chiuso che circonda z_0 . In un intorno di z_0 le soluzioni presenteranno le proprietà di monodromia delle potenze $(z - z_0)^\alpha$ (con $\alpha \in \mathbb{C}$) o dei logaritmi $(z - z_0)^\alpha \log(z - z_0)$.

Nel caso di punti singolari regolari, le soluzioni non presentano singolarità essenziali, è quindi possibile studiare le loro proprietà utilizzando uno sviluppo in serie di Laurent intorno a z_0 . Se entrambe le soluzioni presentano le proprietà di monodromia delle potenze, allora possiamo utilizzare gli sviluppi

$$\begin{cases} u_1(z) = (z - z_0)^{\tilde{\alpha}_1} \sum_{n=-N}^{\infty} c_n (z - z_0)^n = (z - z_0)^{\alpha_1} \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z - z_0)^k \\ u_2(z) = (z - z_0)^{\tilde{\alpha}_2} \sum_{n=-M}^{\infty} d_n (z - z_0)^n = (z - z_0)^{\alpha_2} \sum_{k=0}^{\infty} d_k (z - z_0)^k \end{cases} \quad (8.4.1)$$

dove N ed M sono interi. Si noti che le serie di Laurent devono troncarsi ad una potenza negativa finita, in quanto le soluzioni non presentano singolarità essenziali in z_0 . Possiamo quindi sempre ricondurci al caso in cui la polidromia sia tutta contenuta nei prefattori $(z - z_0)^{\alpha_i}$. Nel caso in cui una soluzione presenti le proprietà di polidromia dei logaritmi (come vedremo questo può succedere solo se $\alpha_1 - \alpha_2$ è un intero), la seconda soluzione deve essere scritta nella forma

$$\begin{aligned} u_2(z) &= A \log(z - z_0) u_1(z) + \sum_n b_n (z - z_0)^{n+\alpha_1} \\ &= A \log(z - z_0) \sum_n c_n (z - z_0)^{n+\alpha_1} + \sum_n b_n (z - z_0)^{n+\alpha_1}. \end{aligned} \quad (8.4.2)$$

Notiamo che dalla forma delle soluzioni è possibile dedurre la forma dei coefficienti dell'equazione. Infatti dalla (8.2.1) segue

$$q(z) = -p(z) \frac{u_1'}{u_1} - \frac{u_1''}{u_1}, \quad (8.4.3)$$

mentre $p(z)$ può essere determinato a partire dall'equazione di Liouville (6.4.5)

$$W' + p(z)W = 0 \quad \Rightarrow \quad p(z) = -\frac{W'}{W} = -\frac{u_1 u_2'' - u_2 u_1''}{u_1 u_2' - u_2 u_1'}. \quad (8.4.4)$$

Se le due soluzioni sono date da (8.4.1), basta calcolare esplicitamente le derivate per ottenere

$$\begin{aligned} u_i(z) &= (z - z_0)^{\alpha_i} R_i(z) \\ u_i'(z) &= \alpha_i (z - z_0)^{\alpha_i-1} R_i(z) + (z - z_0)^{\alpha_i} R_i'(z) = (z - z_0)^{\alpha_i-1} \tilde{R}_i(z) \\ u_i''(z) &= (z - z_0)^{\alpha_i-2} \tilde{\tilde{R}}_i(z) \end{aligned} \quad (8.4.5)$$

dove le funzioni $R_i(z)$, $\tilde{R}_i(z)$ e $\tilde{\tilde{R}}_i(z)$ sono analitiche e non nulle in z_0 . Risulta quindi

$$p(z) = -\frac{(z - z_0)^{\alpha_1+\alpha_2-2} (R_1 \tilde{\tilde{R}}_2 - R_2 \tilde{\tilde{R}}_1)}{(z - z_0)^{\alpha_1+\alpha_2-1} (R_1 \tilde{R}_2 - R_2 \tilde{R}_1)} = \frac{P(z)}{(z - z_0)}. \quad (8.4.6)$$

$P(z)$ è una funzione analitica in virtù del fatto che $R_1 \tilde{\tilde{R}}_2 - R_2 \tilde{\tilde{R}}_1$ non si annulla per $z = z_0$.³ Quindi $p(z)$ può avere al più un polo semplice in z_0 .⁴

³Questa proprietà segue facilmente dalle definizioni in eq. (8.4.5) nel caso in cui $\alpha_1 \neq \alpha_2$. Infatti si ha $\tilde{\tilde{R}}_i(z_0) = \alpha_i R_i(z_0)$.

⁴Un risultato analogo si ottiene quando la soluzione u_2 è della forma (8.4.2).

In modo analogo possiamo ricavare

$$q(z) = \frac{Q(z)}{(z - z_0)^2}, \quad (8.4.7)$$

dove $Q(z)$ è analitica. Quindi $q(z)$ ha al più un polo doppio in z_0 .

Possiamo riassumere le condizioni appena trovate nel seguente teorema.

Teorema 8.1 (di Fuchs). Il punto z_0 è un *punto singolare regolare* (o *fuchsiano*) per l'equazione differenziale (8.2.1) se e solo se

$$(z - z_0)p(z) \quad \text{e} \quad (z - z_0)^2 q(z) \quad (8.4.8)$$

sono *analitiche* in z_0 . In questo caso l'equazione differenziale assume la forma

$$u''(z) + \frac{P(z - z_0)}{z - z_0} u'(z) + \frac{Q(z - z_0)}{(z - z_0)^2} u(z) = 0, \quad (8.4.9)$$

dove $P(z)$ e $Q(z)$ sono analitiche in un intorno di z_0 .

A questo punto dobbiamo ancora dimostrare che i coefficienti nello sviluppo in serie delle soluzioni sono determinati dall'equazione e che le serie corrispondenti sono convergenti. Per semplificare la notazione poniamo $\xi = z - z_0$ e consideriamo le serie di Taylor delle funzioni analitiche $P(\xi)$ e $Q(\xi)$

$$P(\xi) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k \xi^k, \quad Q(\xi) = \sum_{k=0}^{\infty} q_k \xi^k. \quad (8.4.10)$$

Utilizziamo l'Ansatz generico per la soluzione con indice α

$$u = \xi^\alpha \sum_{k=0}^{\infty} c_k \xi^k. \quad (8.4.11)$$

Calcolando le derivate

$$u'(\xi) = \sum_{k=0}^{\infty} (k + \alpha) c_k \xi^{k+\alpha-1}, \quad u''(\xi) = \sum_{k=0}^{\infty} (k + \alpha)(k + \alpha - 1) c_k \xi^{k+\alpha-2}. \quad (8.4.12)$$

Inserendo questi sviluppi nell'equazione differenziale si ottiene

$$\sum_{k=0}^{\infty} (k + \alpha)(k + \alpha - 1) c_k \xi^{k+\alpha-2} + \sum_{n=0}^{\infty} p_n \xi^{n-1} \sum_{k=0}^{\infty} (k + \alpha) c_k \xi^{k+\alpha-1} + \sum_{n=0}^{\infty} q_n \xi^{n-2} \sum_{k=0}^{\infty} c_k \xi^{k+\alpha} = 0, \quad (8.4.13)$$

ovvero

$$\sum_{k=0}^{\infty} (k + \alpha)(k + \alpha - 1) c_k \xi^{k+\alpha-2} + \sum_{n,k=0}^{\infty} p_n (k + \alpha) c_k \xi^{n+k+\alpha-2} + \sum_{n,k=0}^{\infty} q_n c_k \xi^{n+k+\alpha-2} = 0. \quad (8.4.14)$$

Usando la formula per il prodotto di serie (8.3.7), si ottiene

$$\sum_{k=0}^{\infty} (k+\alpha)(k+\alpha-1)c_k \xi^{k+\alpha-2} + \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{n=0}^l p_n c_{l-n} (l-n+\alpha) \xi^{l+\alpha-2} + \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{n=0}^l q_n c_{l-n} \xi^{l+\alpha-2} = 0. \quad (8.4.15)$$

Raggruppando i coefficienti dei termini con identiche potenze, si ottiene infine

$$\sum_{k=0}^{\infty} \xi^{k+\alpha-2} \left[(k+\alpha)(k+\alpha-1)c_k + \sum_{n=0}^k [p_n c_{k-n}(-n+k+\alpha) + q_n c_{k-n}] \right] = 0, \quad (8.4.16)$$

che porta alle equazioni ricorsive per i c_k

$$[(k+\alpha)(k+\alpha-1) + p_0(k+\alpha) + q_0]c_k + \sum_{s=0}^{k-1} [p_{k-s}(s+\alpha) + q_{k-s}]c_s = 0. \quad (8.4.17)$$

Definendo

$$\begin{cases} F_0(\alpha) = \alpha(\alpha-1) + \alpha p_0 + q_0 \\ F_n(\alpha) = \alpha p_n + q_n \end{cases} \quad (8.4.18)$$

possiamo riscrivere la relazione di ricorrenza come

$$F_0(\alpha+k)c_k = - \sum_{s=0}^{k-1} F_{k-s}(\alpha+s)c_s. \quad (8.4.19)$$

In principio, i coefficienti c_k devono essere determinati a partire da queste equazioni una volta assegnato c_0 .

Consideriamo ora la prima relazione della serie, che dipende solo da c_0 :

$$F_0(\alpha)c_0 = 0. \quad (8.4.20)$$

Il caso $c_0 = 0$ produce la soluzione identicamente nulla, che è sempre presente per un'equazione omogenea. Se invece $c_0 \neq 0$, si ottiene

$$F_0(\alpha) = \alpha^2 + (p_0 - 1)\alpha + q_0 = 0. \quad (8.4.21)$$

Questa equazione è indipendente dai c_k ed è detta *equazione indiciale*. Essa infatti determina la coppia di indici α_1 e α_2 che caratterizzano la polidromia delle soluzioni dell'equazione differenziale.

Torniamo ora alle relazioni di ricorrenza (8.4.19) per i coefficienti c_k . Possiamo distinguere tre casi, a seconda della relazione tra le radici dell'equazione indiciale:

- i) $\alpha_1 - \alpha_2 \notin \mathbb{Z}$,
- ii) $\alpha_1 = \alpha_2$,
- iii) $\alpha_1 - \alpha_2 \in \mathbb{Z}$ ma $\alpha_1 \neq \alpha_2$.

Se α_1 ed α_2 non differiscono per un intero (caso i), allora $F_0(\alpha_i + n)$ è sempre diverso da zero per $n \geq 1$, in quanto $\alpha_i + n$ non può essere una radice dell'equazione indiciale. Quindi il sistema di equazioni determina completamente sia i coefficienti c_k della soluzione u_1 di indice α_1 , sia quelli della u_2 con indice α_2 .

Nel caso in cui gli indici coincidano (caso ii), $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$, una delle soluzioni u_1 ha la struttura in serie (8.4.11) e può essere determinata come in precedenza. La soluzione u_2 , invece, presenta un termine logaritmico ed è della forma

$$u_2(z) = u_1(z) \log(z - z_0) + (z - z_0)^\alpha \sum_{k=0}^{\infty} b_k (z - z_0)^k. \quad (8.4.22)$$

I coefficienti b_k possono essere calcolati ricavando nuovamente le relazioni di ricorrenza a partire da questo Ansatz.

Consideriamo ora il caso in cui gli indici differiscano per un intero (caso iii). Ordiniamo le radici dell'equazione indiciale in modo che α_1 sia la radice che ha $\operatorname{Re} \alpha_i$ massima tra le due, quindi $\alpha_1 = \alpha_2 + n$ con $n \geq 1$. In questo caso le relazioni di ricorrenza (8.4.19) determinano completamente la serie per u_1 , infatti $F_0(\alpha_1 + n)$ non è mai nullo per $n \geq 1$.

Consideriamo ora la seconda soluzione. Partiamo dall'Ansatz (8.4.11) e dalle relazioni di ricorrenza associate (8.4.19). Notiamo che $F_0(\alpha_2 + n) = F_0(\alpha_1) = 0$, quindi nell'equazione che dovrebbe determinare il coefficiente c_n , il coefficiente che moltiplica c_n si annulla. In questo caso ci sono due alternative. Se il resto dell'equazione è identicamente nullo, l'equazione è verificata per ogni valore di c_n . Dunque c_n può assumere un valore arbitrario, insieme a c_0 , e tutti gli altri coefficienti della serie sono univocamente determinati. Si noti che l'arbitrarietà di c_n corrisponde al fatto che la soluzione u_2 è determinata a meno di un multiplo di u_1 . Infatti i termini dello sviluppo in serie di u_1 sono anche presenti nello sviluppo in serie di u_2 .

Se invece i restanti termini nell'equazione per c_n non si annullano, le relazioni di ricorrenza non ammettono una soluzione consistente. In questo caso la seconda soluzione può essere determinata attraverso l'Ansatz

$$u_2(z) = A u_1(z) \log(z - z_0) + (z - z_0)^{\alpha_2} \sum_{k=0}^{\infty} b_k (z - z_0)^k, \quad (8.4.23)$$

ricavando le opportune relazioni di ricorrenza per i coefficienti b_k .

L'ultimo punto che rimane da dimostrare è che gli sviluppi in serie di u_1 ed u_2 sono convergenti in un opportuno intorno di z_0 . Non presenteremo qui la dimostrazione. Rimandiamo il lettore interessato alla sezione 10.31 di [2].

La situazione si complica notevolmente in presenza di singolarità non regolari. In generale, l'equazione indiciale diviene del primo ordine e si riesce quindi a determinare al massimo un solo indice e di conseguenza una sola delle soluzioni. Inoltre, non si riesce sempre a dimostrare la convergenza della serie ottenuta, che potrebbe quindi risultare una serie asintotica. La situazione migliora in presenza del fenomeno cosiddetto della confluenza: alcune equazioni esibiscono punti singolari irregolari che sono il limite di corrispondenti equazioni in cui più punti singolari regolari vanno a coincidere.

8.5 Sviluppo attorno al punto all'infinito

Discutiamo ora il comportamento dell'equazione differenziale (8.2.1) intorno al *punto all'infinito*, estendendo l'analisi precedente all'intera sfera di Riemann. Lo studio dei punti all'infinito si effettua tramite la trasformazione conforme

$$\eta = \frac{1}{z}, \quad (8.5.1)$$

che mappa il punto all'infinito nell'origine (studieremo in dettaglio le trasformazioni conformi nella sezione 9.2). Le derivate rispetto a z si riscrivono in termini delle derivate rispetto a η come

$$\frac{d}{dz} = \frac{d}{d\eta} \frac{d\eta}{dz} = -\frac{1}{z^2} \frac{d}{d\eta} = -\eta^2 \frac{d}{d\eta}, \quad (8.5.2)$$

$$\frac{d^2}{dz^2} = -\eta^2 \frac{d}{d\eta} \left(-\eta^2 \frac{d}{d\eta} \right) = \eta^4 \frac{d^2}{d\eta^2} + 2\eta^3 \frac{d}{d\eta}. \quad (8.5.3)$$

L'equazione (8.2.1), nelle nuove variabili, diviene

$$\eta^4 u'' + 2\eta^3 u' + p \left(\frac{1}{\eta} \right) [-\eta^2 u'] + q \left(\frac{1}{\eta} \right) u = 0, \quad (8.5.4)$$

ovvero

$$u'' + \left[\frac{2}{\eta} - \frac{1}{\eta^2} p \left(\frac{1}{\eta} \right) \right] u' + \frac{1}{\eta^4} q \left(\frac{1}{\eta} \right) u = 0. \quad (8.5.5)$$

Definendo

$$\tilde{p}(\eta) = \frac{2}{\eta} - \frac{1}{\eta^2} p \left(\frac{1}{\eta} \right), \quad \tilde{q}(\eta) = \frac{1}{\eta^4} q \left(\frac{1}{\eta} \right), \quad (8.5.6)$$

l'equazione assume la forma standard nella variabile η .

In questa forma è possibile applicare per $\eta = 0$ l'analisi della regolarità dell'equazione discussa nelle sezioni precedenti. Ne risulta che il punto all'infinito è un *punto regolare* se $\tilde{p}(\eta)$ e $\tilde{q}(\eta)$ sono analitiche in $\eta = 0$. Nella variabile z questo implica che

$$2z - z^2 p(z) \quad \text{e} \quad z^4 q(z) \quad (8.5.7)$$

siano *analitiche* per $z \rightarrow \infty$, ovvero siano espandibili in serie di Taylor in $1/z$.⁵ Queste condizioni implicano che

$$\lim_{z \rightarrow \infty} z p(z) = 2 \quad \text{e} \quad \lim_{z \rightarrow \infty} z^4 q(z) = \text{cost.} \quad (8.5.8)$$

In modo analogo possiamo ricavare le condizioni sotto le quali il punto all'infinito è un *punto singolare regolare*. In questo caso dobbiamo imporre che $\eta \tilde{p}(\eta)$ e $\eta^2 \tilde{q}(\eta)$ siano analitiche nell'origine. Nella variabile z questo implica che

$$z p(z) \quad \text{e} \quad z^2 q(z) \quad (8.5.9)$$

⁵Si noti che z *non* è analitica per $z \rightarrow \infty$, quindi il termine $2z$ nella condizione per $p(z)$ deve cancellarsi nell'espansione in serie.

siano *analitiche* per $z \rightarrow \infty$.

Se non sono soddisfatte le condizioni di analiticità né per le funzioni in eq. (8.5.7) né per quelle in eq. (8.5.9), allora il punto all'infinito è un *punto singolare irregolare*.

Le soluzioni attorno al punto all'infinito possono essere espanse in serie come

$$\left\{ \begin{array}{l} u_1(z) = z^{-\alpha_1} \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^{-n} \\ u_2(z) = \begin{cases} z^{-\alpha_2} \sum_{n=0}^{\infty} d_n z^{-n} & \alpha_1 \neq \alpha_2 + n \\ A u_1(z) \log(z) + z^{-\alpha_2} \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^{-n} & \alpha_1 = \alpha_2 + n \end{cases} \end{array} \right. \quad (8.5.10)$$

Si noti che, per ricavare gli indici relativi al punto all'infinito quando questo sia singolare regolare, è possibile inserire nell'equazione differenziale l'Ansatz $u(z) = 1/z^\alpha$. Sviluppando il tutto in serie di Laurent e tenendo solo il primo termine dell'espansione, si ottiene l'equazione indiciale.

8.6 Esercizi

Esercizio 8.1. Si dimostri che l'equazione differenziale

$$(1 - z^2)u'' - 2z u' + \frac{3}{4}u = 0 \quad (8.6.1)$$

ammette le seguenti serie come soluzioni attorno a $z = 0$

$$\begin{aligned} u_1 &= 1 - \frac{3}{8}z^2 - \frac{21}{128}z^4 - \dots \\ u_2 &= z + \frac{5}{24}z^3 + \frac{15}{128}z^5 + \dots \end{aligned} \quad (8.6.2)$$

e determinare le espressioni generali per i coefficienti delle serie.

Esercizio 8.2. Si determinino le soluzioni fondamentali per l'equazione differenziale

$$(z - 2)(z - 3)u'' - (2z - 5)u' + 2u = 0 \quad (8.6.3)$$

utilizzando la tecnica di Frobenius attorno a $z = 0$.

Esercizio 8.3. Sia assegnata l'equazione differenziale

$$u'' + \left[\left(\frac{1}{4} - m^2 \right) \frac{1}{z^2} - \frac{1}{4} \right] u = 0, \quad (8.6.4)$$

con $n \notin \mathbb{Z}$. Si studino le proprietà del punto $z = 0$ e si determinino le soluzioni dell'equazione indiciale. Si ottengano le due soluzioni fondamentali utilizzando la tecnica di Frobenius attorno a $z = 0$.

Esercizio 8.4. Si dimostri che l'equazione

$$u'' + \frac{1}{z}u' - m^2u = 0 \quad (8.6.5)$$

ammette le seguenti soluzioni attorno a $z = 0$

$$\begin{aligned} u_1 &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{m^{2n} z^{2n}}{2^{2n} (n!)^2}, \\ u_2 &= u_1 \log z - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{m^{2n} z^{2n}}{2^{2n} (n!)^2} \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} \right). \end{aligned} \quad (8.6.6)$$

Esercizio 8.5. Si dimostri che l'equazione

$$z(z-1)u'' + (2z-1)u' + \frac{1}{4}u = 0 \quad (8.6.7)$$

ammette le seguenti soluzioni attorno a $z = 0$

$$\begin{aligned} u_1 &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot \dots \cdot (2n)} \right)^2 z^n, \\ u_2 &= u_1 \log z + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot \dots \cdot (2n)} \right)^2 \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \cdots - \frac{1}{2n} \right) z^n. \end{aligned} \quad (8.6.8)$$

Esercizio 8.6. Si dimostri che ogni punto sul piano complesso, incluso il punto all'infinito, è un punto regolare o singolare regolare per le seguenti equazioni differenziali

$$z(1-z)u'' + (c - (a+b+1)z)u' - ab u = 0, \quad (8.6.9)$$

$$(1-z^2)u'' - 2zu' + n(n+1)u = 0, \quad (8.6.10)$$

con a, b, c ed n costanti.

Esercizio 8.7. Si dimostri che ogni punto sul piano complesso, incluso il punto all'infinito, è un punto regolare o singolare regolare per la seguente equazione differenziale

$$z^2 u'' + z u' + (z^2 - n^2)u = 0 \quad (8.6.11)$$

con n costante.

Esercizio 8.8. Si dimostri che l'equazione

$$(1-z^2)u'' - 2zu' + 6u = 0 \quad (8.6.12)$$

ammette le soluzioni

$$\begin{aligned} u_1 &= z^2 - \frac{1}{3}, \\ u_2 &= \frac{1}{z^3} + \frac{3 \cdot 4}{2 \cdot 7} \frac{1}{z^5} + \frac{3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6}{2 \cdot 4 \cdot 7 \cdot 9} \frac{1}{z^7} + \cdots. \end{aligned} \quad (8.6.13)$$

Si noti che la seconda soluzione corrisponde ad una espansione attorno al punto all'infinito.

Esercizio 8.9 (Weber's equation). Si ottengano le soluzioni dell'equazione differenziale

$$u'' - x^2 u = 0 \quad (8.6.14)$$

utilizzando la tecnica di Frobenius attorno a $z = 0$.

Esercizio 8.10 (Airy's equation). Si ottengano le soluzioni dell'equazione differenziale

$$u'' - xu = 0 \quad (8.6.15)$$

utilizzando la tecnica di Frobenius attorno a $z = 0$.

Esercizio 8.11. Si determini la soluzione dell'equazione

$$u'' + \frac{1}{4z^2}(1 - z^2)u = 0 \quad (8.6.16)$$

utilizzando la tecnica di Frobenius attorno a $z = 0$. Si noti che il punto $z = 0$ è singolare.

Esercizio 8.12. Si determinino due soluzioni indipendenti dell'equazione

$$z(1 - z)u'' + (3 - 4z)u' - 2u = 0 \quad (8.6.17)$$

utilizzando la tecnica di Frobenius attorno al punto singolare $z = 0$.

Esercizio 8.13. Si risponda ai seguenti quesiti:

- i) È possibile che una soluzione di una equazione differenziale lineare del secondo ordine abbia, attorno ad un punto regolare z_0 , l'andamento $u(z) \sim (z - z_0)^k$ con $k \geq 2$ (ovvero che nella sua espansione in serie i coefficienti c_0 ed c_1 si annullino)?
- ii) Cosa si può dire sull'esistenza ed unicità della soluzione di un problema di Cauchy per un'equazione differenziale lineare del secondo ordine con condizioni iniziali imposte in un punto singolare (regolare)?

EQUAZIONI CON UNO, DUE E TRE PUNTI SINGOLARI REGOLARI

In questo capitolo discuteremo la struttura delle equazioni lineari omogenee che presentano unicamente singolarità fuchsiane. Vedremo, in particolare, come la forma di queste equazioni dipende esclusivamente dalla posizione delle singolarità e dagli indici relativi ad ogni singolarità. Inoltre discuteremo in dettaglio la struttura delle equazioni con una, due e tre singolarità fuchsiane.

9.1 Struttura generale delle equazioni con punti singolari fuchsiani

Vediamo ora quale è la struttura delle equazioni differenziali con soli punti singolari regolari. Consideriamo il caso in cui l'equazione differenziale abbia N punti singolari regolari ξ_1, \dots, ξ_N in aggiunta al punto all'infinito, anch'esso singolare regolare. Possiamo associare ad ogni punto singolare finito le due soluzioni dell'equazione indiciale, che chiameremo α_i e β_i . Indicheremo con μ_1 e μ_2 gli indici relativi al punto all'infinito. Possiamo visualizzare queste informazioni nel seguente modo

$$\begin{pmatrix} \xi_1 & \cdots & \xi_N & \infty \\ \downarrow & \cdots & \downarrow & \downarrow \\ \alpha_1 & \cdots & \alpha_N & \mu_1 \\ \beta_1 & \cdots & \beta_N & \mu_2 \end{pmatrix}. \quad (9.1.1)$$

L'equazione da analizzare è della forma (8.2.1). Abbiamo visto che, affinché il punto ξ_i sia fuchsiano, $p(z)$ e $q(z)$ devono avere rispettivamente al più poli semplici e al più poli doppi in ξ_i . Affinché il punto all'infinito sia fuchsiano le espressioni in eq. (8.5.9) devono essere analitiche per $z \rightarrow \infty$. Da queste ultime si deduce immediatamente che, se parametrizziamo $p(z)$ nella forma

$$p(z) = \frac{P(z)}{(z - \xi_1) \cdots (z - \xi_N)}, \quad (9.1.2)$$

$P(z)$ debba essere un *polinomio di grado* $N - 1$ nella variabile z . Un modo conveniente per scrivere $p(z)$ è attraverso lo sviluppo in frazioni parziali. Se infatti si pone

$$p(z) = \frac{A_1}{z - \xi_1} + \frac{A_2}{z - \xi_2} + \cdots + \frac{A_N}{z - \xi_n}, \quad (9.1.3)$$

gli N coefficienti A_i determinano in modo univoco gli N coefficienti del polinomio $P(z)$, mostrando che la formula (9.1.3) fornisce la più generica parametrizzazione.

Analogo ragionamento può essere seguito per parametrizzare $q(z)$ nella massima generalità. La presenza di, al più, N poli doppi per $q(z)$ impone che il denominatore, nel termine dominante per $z \rightarrow \infty$, si comporti come z^{2N} . Il numeratore, di conseguenza, deve essere un polinomio di grado $2N - 2$. Genericamente occorre dunque specificare $2N - 1$ coefficienti. Una maniera conveniente per esibire il comportamento dominante attorno ai poli è la seguente

$$q(z) = \frac{B_1}{(z - \xi_1)^2} + \cdots + \frac{B_N}{(z - \xi_N)^2} + \frac{c_0 z^{N-2} + c_1 z^{N-3} + \cdots + c_{N-3} z + c_{N-2}}{(z - \xi_1) \cdots (z - \xi_N)}. \quad (9.1.4)$$

Agli N coefficienti B_1, \dots, B_N , responsabili dell'andamento intorno ai poli doppi, vanno aggiunti i termini dipendenti da c_i , che forniscono i rimanenti $N - 1$ coefficienti.

Con le scelte appena fatte, le equazioni indiciali attorno ai punti fuchsiani ξ_i assumono una forma particolarmente semplice. Infatti, considerando che

$$\begin{cases} \lim_{z \rightarrow \xi_i} (z - \xi_i) p(z) = A_i \\ \lim_{z \rightarrow \xi_i} (z - \xi_i)^2 q(z) = B_i \end{cases}, \quad (9.1.5)$$

l'equazione indiciale diviene

$$\rho^2 + (A_i - 1)\rho + B_i = 0. \quad (9.1.6)$$

Confrontando questa equazione con

$$0 = (\rho - \alpha_i)(\rho - \beta_i) = \rho^2 - (\alpha_i + \beta_i)\rho + \alpha_i\beta_i, \quad (9.1.7)$$

otteniamo le seguenti relazioni per gli indici α_i e β_i

$$\begin{cases} \alpha_i + \beta_i = 1 - A_i \\ \alpha_i\beta_i = B_i \end{cases}. \quad (9.1.8)$$

Queste relazioni permettono di riscrivere l'equazione differenziale come

$$u'' + u' \left(\sum_{i=1}^N \frac{1 - \alpha_i - \beta_i}{z - \xi_i} \right) + u \left(\sum_{i=1}^N \frac{\alpha_i\beta_i}{(z - \xi_i)^2} + \frac{c_0 z^{N-2} + c_1 z^{N-3} + \cdots + c_{N-3} z + c_{N-2}}{(z - \xi_1) \cdots (z - \xi_N)} \right) = 0. \quad (9.1.9)$$

Resta da analizzare l'equazione indiciale intorno al punto all'infinito. Con l'Ansatz $u = z^{-\mu}$, tenendo solo l'andamento dominante, si ottiene

$$\mu^2 + \mu \left(\sum_{i=1}^N (\alpha_i + \beta_i) + (1 - N) \right) + \left(c_0 + \sum_{i=1}^N \alpha_i\beta_i \right) = 0, \quad (9.1.10)$$

di cui μ_1 e μ_2 sono le soluzioni. Si osservi che solo il coefficiente c_0 si aggiunge agli A_i e B_i per determinare gli indici del punto all'infinito.

Una classe di equazioni di grande interesse per la fisica matematica è quella delle equazioni con 5 punti singolari regolari per i quali gli indici soddisfano le relazioni $\alpha_i - \beta_i = \frac{1}{2}$, $i = 1, \dots, 4$, e $\mu_1 - \mu_2 = \frac{1}{2}$. Tale tipo di equazione è detta *equazione generalizzata di Lamé*. In questo caso si ha che

$$c_0 = \left(\sum_{i=1}^4 \alpha_i \right)^2 - \sum_{i=1}^4 \alpha_i^2 - \frac{3}{2} \sum_{i=1}^4 \alpha_i + \frac{3}{16}. \quad (9.1.11)$$

La confluenza di due punti singolari regolari nell'equazione di Lamé generalizzata, come può essere verificato esplicitamente dall'equazione ponendo ad esempio $\xi_1 = \xi_2$, crea un punto singolare regolare con esponenti α e β che soddisfano le equazioni

$$\alpha + \beta = 2(\alpha_1 + \alpha_2), \quad \alpha\beta = \alpha_1 \left(\alpha_1 + \frac{1}{2} \right) + \alpha_2 \left(\alpha_2 + \frac{1}{2} \right) + D, \quad (9.1.12)$$

dove

$$D = \frac{c_0 \alpha_1^2 + 2c_1 \alpha_1 + c_2}{(\alpha_1 - \alpha_3)(\alpha_1 - \alpha_4)}. \quad (9.1.13)$$

Quindi la differenza degli esponenti per la singolarità ottenuta dalla confluenza non è fissata e può assumere qualunque valore tramite un'opportuna scelta di c_1 e c_2 .

Dalla confluenza di tre punti singolari regolari dell'equazione di Lamé generalizzata si può invece ottenere un punto singolare irregolare.

Tramite la confluenza delle 5 singolarità regolari dell'equazione di Lamé generalizzata, si possono ottenere 6 tipi di equazioni che possono essere classificate tramite il numero di punti singolari con differenza degli indici pari a $1/2$ (a), il numero di altri punti con singolarità regolari (b) e il numero di punti con singolarità irregolari (c). La classificazione è riportata nella seguente tabella

	(a)	(b)	(c)	
I	3	1	0	Lamé
II	2	0	1	Mathieu
III	1	2	0	Legendre
IV	0	1	1	Bessel
V	1	0	1	Weber, Hermite
VI	0	0	1	Stokes

Si noti che nelle equazioni di Weber, Hermite, la singolarità irregolare deriva dalla confluenza di 4 singolarità regolari, mentre nell'equazione di Stokes essa deriva dalla confluenza di 5 singolarità regolari.

In generale, le equazioni con più singolarità confluenti (quindi quelle più in basso nella tabella) hanno soluzioni le cui proprietà sono più semplici.

Punto all'infinito regolare. Per concludere la discussione consideriamo il caso in cui l'equazione differenziale presenta N punti singolari al finito, ma il punto all'infinito regolare. La derivazione usata in questa sezione può essere usata anche in questo caso, l'equazione differenziale può quindi essere scritta nella forma (9.1.9). La regolarità del

punto all'infinito impone alcune restrizioni sugli indici α_i e β_i e sui coefficienti c_i . Si può verificare facilmente che le condizioni di regolarità all'infinito (8.5.8) possono essere riscritte nella forma seguente. La regolarità per $p(z)$ corrisponde a

$$\sum_{i=1}^N (\alpha_i + \beta_i) = N - 2, \quad (9.1.14)$$

mentre la regolarità per $q(z)$ dà

$$\begin{cases} c_0 = -\sum_{i=1}^N \alpha_i \beta_i & (N \geq 1) \\ c_1 = \left(\sum_{i=1}^N \alpha_i \beta_i \right) \left(\sum_{r=1}^N \xi_r \right) - 2 \sum_{i=1}^N \xi_i \alpha_i \beta_i & (N \geq 2) \end{cases}, \quad (9.1.15)$$

nel caso $N = 1$ si deve porre $c_0 = 0$ mentre nel caso $N = 2$ si deve porre $c_1 = 0$.

9.2 Trasformazioni conformi

Nello studio delle soluzioni di equazioni differenziali sui complessi, è spesso utile poter spostare in modo conveniente la posizione delle singolarità delle equazioni, come già visto nel caso dello studio del comportamento intorno al punto all'infinito. La compattificazione del piano di Gauss nella sfera di Riemann consente infatti di considerare il punto all'infinito alla stessa stregua dei punti al finito. Inoltre, molto spesso la scelta della variabile indipendente può semplificare notevolmente la forma dell'equazione e facilitare la ricerca delle soluzioni. In questa sezione studieremo delle trasformazioni analitiche $z \rightarrow F(z)$ del piano in sé, anche dette trasformazioni conformi, ovvero applicazioni che preservano (localmente) gli angoli ma non le distanze.

Particolare importanza rivestono le *trasformazioni di Möbius*

$$z \rightarrow F(z) = \frac{az + b}{cz + d}, \quad \text{con } ad - bc = 1, \quad (9.2.1)$$

dove a, b, c e d sono numeri complessi.¹ Esse generano un gruppo non abeliano isomorfo a $PSL(2, \mathbb{C})$. L'isomorfismo si costruisce associando alla trasformazione di Möbius la matrice

$$\hat{F} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad (9.2.2)$$

e osservando che la composizione di due trasformazioni equivale al prodotto matriciale.

Le trasformazioni di Möbius sono singolari nel punto $z = -d/c$, mentre in tutti gli altri punti sono invertibili. Le trasformazioni inverse sono anche trasformazioni di Möbius e sono singolari per $w = F(z) = a/c$. L'espressione esplicita è

$$w = \frac{az + b}{cz + d} \quad \Rightarrow \quad z = \frac{-dw + b}{cw - a}. \quad (9.2.3)$$

¹Si noti che la trasformazione con parametri riscalati $(\lambda a, \lambda b, \lambda c, \lambda d)$ ($\forall \lambda \neq 0$) è equivalente a quella con parametri (a, b, c, d) . Questo permette sempre di riscalare i parametri per soddisfare la condizione $ad - bc = 1$. Tuttavia è a volte utile non imporre la condizione di normalizzazione per avere delle espressioni più semplici per i parametri (si veda l'esempio del *birapporto* in eq. (9.2.5)).

È quindi del tutto naturale estendere le trasformazioni al punto all'infinito ponendo $F(-d/c) = \infty$ e $F(\infty) = a/c$. Con tali assunzioni, le trasformazioni di Möbius diventano le uniche mappe biunivoche della sfera di Riemann in se stessa.

In virtù della proiettività, la trasformazione (9.2.1) è evidentemente definita da tre parametri indipendenti. Di conseguenza è sempre possibile trovare una trasformazione di Möbius che, assegnati tre punti distinti z_1, z_2 e z_3 sulla sfera di Riemann, li trasformi in tre qualsiasi altri punti distinti w_1, w_2 e w_3 . Vale infatti il seguente teorema.

Teorema 9.1. Dati tre punti distinti qualsiasi z_1, z_2 e z_3 , esiste un'unica trasformazione di Möbius F tale che

$$\begin{cases} F(z_1) = w_1 \\ F(z_2) = w_2 \\ F(z_3) = w_3 \end{cases} . \quad (9.2.4)$$

Dimostrazione. Consideriamo la seguente trasformazione di Möbius, detta *birapporto*,

$$F(z) = \frac{(z - z_1)(z_2 - z_3)}{(z - z_3)(z_2 - z_1)} . \quad (9.2.5)$$

Essa è invariante per trasformazioni di Möbius², come si verifica facilmente. Quindi in ogni scelta di coordinate il birapporto è lo stesso. Esso mappa i punti z_1, z_2 e z_3 rispettivamente nei punti 0, 1 e ∞ . Di conseguenza, possiamo spostare attraverso il birapporto (z_1, z_2, z_3) in $(0, 1, \infty)$ e poi nello stesso modo, attraverso il birapporto nella variabile w , $(0, 1, \infty)$ in (w_1, w_2, w_3) . La trasformazione di Möbius che mappa (z_1, z_2, z_3) in (w_1, w_2, w_3) è dunque data implicitamente dall'espressione

$$\frac{(w - w_1)(w_2 - w_3)}{(w - w_3)(w_2 - w_1)} = \frac{(z - z_1)(z_2 - z_3)}{(z - z_3)(z_2 - z_1)} . \quad (9.2.6)$$

Risolvendo rispetto a w si può determinare la forma esplicita di $F(z)$.

Dobbiamo ora dimostrare che la trasformazione è unica. Se non lo fosse, dovrebbero esistere F_1 e F_2 che mappano tre punti negli stessi tre punti. Di conseguenza, la trasformazione $F_1 \circ F_2^{-1}$ sarebbe una trasformazione di Möbius con tre punti fissi. Mostriamo che una tale trasformazione è l'identità. Senza perdita di generalità possiamo supporre che i tre punti fissi siano $(0, 1, \infty)$. Se ∞ è fisso, vuol dire che $F(\infty) = \infty$. Ma $F(\infty) = a/c$, quindi $c = 0$ ed $F(z) = az + b$. Se anche 0 e 1 sono fissi allora si vede facilmente che $a = 1$ e $b = 0$. Quindi $F_1 \circ F_2^{-1} = \mathbb{I}$ e le due trasformazioni coincidono. \square

Vediamo ora come applicare una trasformazione di coordinate ad un'equazione differenziale. Come esempio consideriamo una generica equazione del secondo ordine

$$a(z) \frac{d^2 u(z)}{dz^2} + b(z) \frac{du(z)}{dz} + c(z) = 0 , \quad (9.2.7)$$

ed effettuiamo il cambio di variabile

$$z \rightarrow w \equiv w(z) . \quad (9.2.8)$$

²Ovvero il valore di F non cambia se z, z_1, z_2 e z_3 sono trasformati con una trasformazione di Möbius.

Assumiamo che la funzione $w(z)$ sia invertibile nel dominio di definizione dell'equazione differenziale, in modo che in tale dominio sia definita l'inversa $z = z(w)$.

Per effettuare il cambio di variabile nell'equazione differenziale esprimiamo le derivate in z come funzione delle derivate in w . Per la derivata prima otteniamo facilmente

$$\frac{d}{dz} = \frac{1}{dw/dz} \frac{d}{dw} = \frac{1}{z'(w)} \frac{d}{dw}. \quad (9.2.9)$$

Si noti che il fattore $1/z'(w)$ può equivalentemente essere espresso come $1/z'(w) = \frac{dw(z(w))}{dz}$. A partire dal risultato in eq. (9.2.9) si possono ricavare le espressioni per le derivate di ordine superiore.

L'equazione differenziale quindi diventa

$$a(z(w)) \frac{1}{z'(w)} \frac{d}{dw} \left(\frac{1}{z'(w)} \frac{d}{dw} \tilde{u}(w) \right) + b(z(w)) \frac{1}{z'(w)} \frac{d}{dw} \tilde{u}(w) + c(z(w)) \tilde{u}(w) = 0, \quad (9.2.10)$$

dove abbiamo usato la notazione $\tilde{u}(w) \equiv u(z(w))$. La funzione $u(z)$ è quindi data da $u(z) = \tilde{u}(w(z))$. Solitamente, con abuso di notazione, si denota semplicemente con $u(w)$ la funzione $\tilde{u}(w)$. Si noti che, in questo caso, $u(w)$ *non* coincide con $u(z)$, nel senso che la dipendenza delle due funzioni dall'argomento *non* è la stessa.

Sotto una trasformazione di Möbius

$$w = \frac{az + b}{cz + d} \quad (9.2.11)$$

le derivate rispetto a z si trasformano come

$$\frac{d}{dz} = \frac{(a - cw)^2}{ad - bc} \frac{d}{dw}, \quad (9.2.12)$$

$$\frac{d^2}{dz^2} = \frac{(a - cw)^2}{ad - bc} \frac{d}{dw} \left(\frac{(a - cw)^2}{ad - bc} \frac{d}{dw} \right) = \frac{(a - cw)^4}{(ad - bc)^2} \frac{d^2}{dw^2} - \frac{2c(a - cw)^3}{(ad - bc)^2} \frac{d}{dw}. \quad (9.2.13)$$

Si noti che se i parametri sono normalizzati ($ad - bc = 1$) i denominatori si semplificano. Queste espressioni sono utili per ricavare la forma di un'equazione differenziale ottenuta applicando una trasformazione di Möbius.

Come abbiamo detto, le trasformazioni di Möbius sono invertibili per $z \neq -d/c$ e $w = a/c$ (che corrispondono al punto all'infinito). Esse forniscono delle mappe analitiche, quindi non modificano l'ordine dei poli di una funzione. Per questa ragione, quando applicate ad una equazione differenziale, mantengono le proprietà di regolarità dei punti, ovvero mandano punti regolari, singolari regolari e singolari irregolari in punti dello stesso tipo. Esse inoltre preservano gli indici relativi ai punti singolari fuchsiani.

9.3 Equazioni con un solo punto singolare regolare

Consideriamo equazioni con un solo punto singolare regolare. Assumiamo che esso sia in un punto al finito, z_0 , e che il punto all'infinito sia regolare. In questo caso le funzioni $p(z)$ e $q(z)$ (si veda l'eq. (9.1.9)) sono date da

$$p(z) = \frac{1 - \alpha - \beta}{z - z_0}, \quad q(z) = \frac{\alpha\beta}{(z - z_0)^2}, \quad (9.3.1)$$

dove α e β sono gli indici del punto singolare. Affinchè il punto all'infinito sia regolare devono valere le condizioni (9.1.14) e (9.1.15), che danno

$$\alpha + \beta = -1, \quad \alpha\beta = 0, \quad (9.3.2)$$

ovvero³

$$\alpha = 0, \quad \beta = -1. \quad (9.3.3)$$

La forma dell'equazione risulta

$$u''(z) + \frac{2}{z - z_0} u'(z) = 0. \quad (9.3.4)$$

Si noti che questa equazione non ha parametri liberi.

La soluzione più generale è data da

$$u(z) = c_1 + \frac{c_2}{z - z_0}, \quad (9.3.5)$$

consistente con gli indici prima determinati.⁴

Nel caso in cui il punto singolare regolare sia all'infinito, $p(z)$ e $q(z)$ devono essere analitiche in tutto il piano complesso, inoltre $z p(z)$ e $z^2 q(z)$ devono essere analitiche per $z \rightarrow \infty$. Queste condizioni implicano che l'equazione differenziale ha la forma⁵

$$u''(z) = 0, \quad (9.3.6)$$

le cui soluzioni sono

$$u(z) = c_1 + c_2 z. \quad (9.3.7)$$

9.4 Equazioni con due punti singolari regolari

Passiamo ora a considerare il caso di equazioni con due punti singolari regolari. Assumiamo che i due punti singolari siano al finito, mentre il punto all'infinito sia regolare. Abbiamo visto che $p(z)$ e $q(z)$ possono essere parametrizzate come

$$p(z) = \frac{1 - \alpha_1 - \beta_1}{z - z_1} + \frac{1 - \alpha_2 - \beta_2}{z - z_2}, \quad q(z) = \frac{\alpha_1 \beta_1}{(z - z_1)^2} + \frac{\alpha_2 \beta_2}{(z - z_2)^2} + \frac{c_0}{(z - z_1)(z - z_2)}. \quad (9.4.1)$$

Le condizioni di regolarità per il punto all'infinito (9.1.14) e (9.1.15) si scrivono come

$$\begin{cases} \alpha_1 + \beta_1 + \alpha_2 + \beta_2 = 0 \\ c_0 = -\alpha_1 \beta_1 - \alpha_2 \beta_2 \\ (\alpha_1 \beta_1 + \alpha_2 \beta_2)(z_1 + z_2) - 2(z_1 \alpha_1 \beta_1 + z_2 \alpha_2 \beta_2) = 0 \end{cases}. \quad (9.4.2)$$

³Si noti che i valori per α e β possono essere interscambiati.

⁴Si noti che, sebbene gli indici differiscano per un intero, la seconda soluzione non presenta un termine proporzionale a $\log(z - z_0)$.

⁵Un metodo equivalente per ricavare questa equazione, e le relative soluzioni, è partire dall'eq. (9.3.4) ed utilizzare la trasformazione di Möbius $w = 1/(z - z_0)$.

La prima e terza equazione danno

$$\begin{cases} \alpha_2 + \beta_2 = -\alpha_1 - \beta_1 \\ (\alpha_1\beta_1 - \alpha_2\beta_2)(z_1 - z_2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \alpha_1\beta_1 = \alpha_2\beta_2, \quad (9.4.3)$$

che implicano $\alpha_1 = -\alpha_2$ e $\beta_1 = -\beta_2$ (o $\alpha_1 = -\beta_2$, $\beta_1 = -\alpha_2$). Quindi otteniamo

$$p(z) = \frac{1 - \alpha_1 - \beta_1}{z - z_1} + \frac{1 + \alpha_1 + \beta_1}{z - z_2}, \quad (9.4.4)$$

e

$$q(z) = \frac{\alpha_1\beta_1}{(z - z_1)^2} + \frac{\alpha_1\beta_1}{(z - z_2)^2} - \frac{2\alpha_1\beta_1}{(z - z_1)(z - z_2)} = \frac{\alpha_1\beta_1(z_1 - z_2)^2}{(z - z_1)^2(z - z_2)^2}. \quad (9.4.5)$$

L'equazione differenziale è dunque della forma

$$u''(z) + \left(\frac{1 - \alpha_1 - \beta_1}{z - z_1} + \frac{1 + \alpha_1 + \beta_1}{z - z_2} \right) u'(z) + \frac{\alpha_1\beta_1(z_1 - z_2)^2}{(z - z_1)^2(z - z_2)^2} u(z) = 0. \quad (9.4.6)$$

Vediamo ora come cambia l'equazione tramite la trasformazione conforme

$$w = \frac{z - z_1}{z - z_2}. \quad (9.4.7)$$

Questa trasformazione mappa $z_1 \rightarrow 0$ e $z_2 \rightarrow \infty$. È facile verificare che la nuova equazione differenziale ha la forma

$$u''(w) + \frac{1 - \alpha_1 - \beta_1}{w} u'(w) + \frac{\alpha_1\beta_1}{w^2} u(w) = 0. \quad (9.4.8)$$

Ovvero ogni equazione con due punti singolari regolari è un'equazione di Eulero. Le soluzioni di questa equazione sono state discusse nella sezione 6.3 e sono date da

$$u(w) = c_1 w^{\alpha_1} + c_2 w^{\beta_1} \quad (9.4.9)$$

se $\alpha_1 \neq \beta_1$, mentre risulta

$$u(w) = c_1 w^{\alpha_1} + c_2 w^{\alpha_1} \log w \quad (9.4.10)$$

se $\alpha_1 = \beta_1$.

Le soluzioni dell'equazione (9.4.6) sono quindi date da

$$u(z) = c_1 \left(\frac{z - z_1}{z - z_2} \right)^{\alpha_1} + c_2 \left(\frac{z - z_1}{z - z_2} \right)^{\beta_1} \quad (9.4.11)$$

se $\alpha_1 \neq \beta_1$, e

$$u(z) = c_1 \left(\frac{z - z_1}{z - z_2} \right)^{\alpha_1} + c_2 \left(\frac{z - z_1}{z - z_2} \right)^{\alpha_1} \log \left(\frac{z - z_1}{z - z_2} \right) \quad (9.4.12)$$

se $\alpha_1 = \beta_1$.

9.4.1 Confluenza

Discutiamo ora il fenomeno della confluenza dei punti singolari per le equazioni con due punti singolari regolari. Abbiamo visto che le equazioni con un solo punto singolare regolare hanno forma completamente fissata. Tuttavia, se partiamo con due punti singolari regolari nei punti $z = z_1$ e $z = z_2$ e li facciamo coincidere tramite un processo di limite $z_2 \rightarrow z_1$, nuovi fenomeni possono accadere.

Per studiare questo fenomeno poniamo $z_2 = z_1 + \epsilon$ e consideriamo il limite $\epsilon \rightarrow 0$. L'equazione differenziale (9.4.6) diventa

$$u''(z) + \frac{2(z - z_1) - \epsilon(1 - \alpha_1 - \beta_1)}{(z - z_1)(z - z_1 - \epsilon)}u'(z) + \frac{\alpha_1\beta_1\epsilon^2}{(z - z_1)^2(z - z_1 - \epsilon)^2}u(z) = 0. \quad (9.4.13)$$

Prendendo il limite $\epsilon \rightarrow 0$, tenendo α_1 e β_1 fissati, otteniamo l'equazione differenziale con un solo punto singolare regolare in z_1 .

Tuttavia possiamo anche considerare il processo di limite in cui i due indici vanno all'infinito per $\epsilon \rightarrow 0$. Imponiamo quindi le condizioni

$$\begin{cases} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \epsilon(\alpha_1 + \beta_1) = 0 \\ \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \epsilon^2 \alpha_1 \beta_1 = k^2 \end{cases} \quad (9.4.14)$$

dove k^2 è una costante complessa. Nel limite otteniamo l'equazione differenziale

$$u''(z) + \frac{2}{z - z_1}u'(z) + \frac{k^2}{(z - z_1)^4}u(z) = 0. \quad (9.4.15)$$

Per $k^2 \neq 0$, il punto singolare $z = z_1$ è ora *irregolare*.

Per determinare la soluzione dell'equazione differenziale utilizziamo la trasformazione conforme $w = 1/(z - z_1)$ per mappare il punto singolare all'infinito. In questo modo otteniamo

$$\frac{d^2}{dw^2}u(w) + k^2u(w) = 0, \quad (9.4.16)$$

che ha come soluzioni

$$u(w) = c_1 e^{ikw} + c_2 e^{-ikw}, \quad (9.4.17)$$

ovvero, nella variabile z ,

$$u(z) = c_1 e^{ik/(z-z_1)} + c_2 e^{-ik/(z-z_1)}. \quad (9.4.18)$$

Il fatto che il punto $z = z_1$ è un punto singolare irregolare si riflette nella forma delle soluzioni. Infatti $u(z)$ presenta una singolarità essenziale a $z = z_1$, in contrasto con l'andamento a potenza che si ottiene per un punto singolare regolare.

9.5 Equazioni con tre punti singolari regolari (Papperitz-Riemann)

Consideriamo infine il caso delle equazioni fuchsiane con tre punti singolari regolari e il punto all'infinito regolare. Tale classe di equazioni differenziali è tra le più interessanti per molte applicazioni in fisica matematica.

A partire dalle condizioni di regolarità per il punto all'infinito (9.1.14) e (9.1.15) si ottiene che

$$\begin{cases} p(z) = \sum_{i=1}^3 \frac{1 - \alpha_i - \beta_i}{z - z_i} \\ q(z) = \frac{1}{\prod_{i=1}^3 (z - z_i)} \left(\sum_{i=1}^3 \frac{\alpha_i \beta_i}{z - z_i} (z_i - z_j)(z_i - z_k) \right) \end{cases} \quad i \neq j \neq k \quad (9.5.1)$$

con la condizione addizionale

$$\sum_{i=1}^3 (\alpha_i + \beta_i) = 1. \quad (9.5.2)$$

L'equazione generica quindi si scrive come

$$u'' + \left(\sum_{i=1}^3 \frac{1 - \alpha_i - \beta_i}{z - z_i} \right) u' + \frac{1}{\prod_{i=1}^3 (z - z_i)} \left(\sum_{i=1}^3 \frac{\alpha_i \beta_i}{z - z_i} (z_i - z_j)(z_i - z_k) \right) u = 0. \quad (9.5.3)$$

Questa equazione è detta *equazione di Papperitz-Riemann*.

Per rappresentare l'integrale generale dell'equazione, Riemann introdusse il cosiddetto *P-simbolo*

$$u(z) = P \begin{Bmatrix} z_1 & z_2 & z_3 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & z \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \end{Bmatrix}, \quad (9.5.4)$$

che riassume i punti singolari, gli esponenti indiciali e la variabile rispetto alla quale viene espressa la soluzione. Ovviamente, il *P*-simbolo non aggiunge informazioni a quelle contenute nell'equazione stessa, ma le sue proprietà, come vedremo, lo rendono uno strumento importante nello studio delle soluzioni.

Come detto, c'è una certa ridondanza nella definizione del *P*-simbolo (ad esempio la somma degli indici è fissata ad essere 1). Se ne possono dedurre alcune proprietà formali che andiamo ad enunciare.⁶

- i) Si possono permutare arbitrariamente le colonne (non vi è un ordinamento tra i punti singolari).
- ii) Si possono scambiare in modo arbitrario fra loro gli indici α_i con gli indici β_i corrispondenti allo stesso punto singolare (non vi è ordinamento tra gli indici).
- iii) Essendo l'equazione omogenea, il *P*-simbolo è definito a meno di una costante moltiplicativa: se *P* è una soluzione, anche *CP*, con *C* costante lo è.
- iv) Se si effettua una trasformazione di Möbius $z \rightarrow w(z)$, i punti singolari dell'equazione cambiano ma gli indici corrispondenti restano gli stessi (come detto, infatti, l'andamento intorno a un punto singolare è una proprietà intrinseca dell'equazione e non relativa alla scelta di variabile dipendente):

$$P \begin{Bmatrix} z_1 & z_2 & z_3 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & z \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \end{Bmatrix} = P \begin{Bmatrix} w_1 & w_2 & w_3 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & w \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \end{Bmatrix}. \quad (9.5.5)$$

⁶Va sottolineato che tali proprietà sono conseguenza del fatto che il *P*-simbolo non rappresenta una singola soluzione, bensì l'insieme degli ∞^2 integrali particolari dell'equazione.

- v) È possibile lasciare fissi i punti singolari alterando gli indici nel P -simbolo attraverso il trasporto di alcuni termini a fattore secondo la relazione

$$P \left\{ \begin{matrix} z_1 & z_2 & z_3 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \end{matrix} \right\} = (z - z_1)^{\gamma_1} (z - z_2)^{\gamma_2} (z - z_3)^{\gamma_3} P \left\{ \begin{matrix} z_1 & z_2 & z_3 \\ \alpha_1 - \gamma_1 & \alpha_2 - \gamma_2 & \alpha_3 - \gamma_3 \\ \beta_1 - \gamma_1 & \beta_2 - \gamma_2 & \beta_3 - \gamma_3 \end{matrix} \right\}, \quad (9.5.6)$$

dove γ_1, γ_2 e γ_3 sono numeri complessi vincolati dalla condizione

$$\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 = 0, \quad (9.5.7)$$

imposta per assicurare che la somma degli indici nel P -simbolo continui ad essere uno.

La proprietà vale, molto semplicemente, perché intorno al punto singolare z_i le soluzioni possono essere sviluppate nella forma⁷

$$\begin{cases} u_1 = (z - z_i)^{\alpha_i} \sum_n c_n z^n = (z - z_i)^{\gamma_i} (z - z_i)^{\alpha_i - \gamma_i} \sum_n c_n z^n \\ u_2 = (z - z_i)^{\beta_i} \sum_n d_n z^n = (z - z_i)^{\gamma_i} (z - z_i)^{\beta_i - \gamma_i} \sum_n d_n z^n \end{cases}. \quad (9.5.8)$$

Un caso particolare è

$$P \left\{ \begin{matrix} z_1 & z_2 & z_3 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \end{matrix} \right\} = (z - z_1)^{\gamma} (z - z_3)^{-\gamma} P \left\{ \begin{matrix} z_1 & z_2 & z_3 \\ \alpha_1 - \gamma & \alpha_2 & \alpha_3 + \gamma \\ \beta_1 - \gamma & \beta_2 & \beta_3 + \gamma \end{matrix} \right\}, \quad (9.5.9)$$

che, qualora si scelga $z_3 = \infty$, può essere ulteriormente semplificato in

$$P \left\{ \begin{matrix} z_1 & z_2 & \infty \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \end{matrix} \right\} = (z - z_1)^{\gamma} P \left\{ \begin{matrix} z_1 & z_2 & \infty \\ \alpha_1 - \gamma & \alpha_2 & \alpha_3 + \gamma \\ \beta_1 - \gamma & \beta_2 & \beta_3 + \gamma \end{matrix} \right\}. \quad (9.5.10)$$

L'andamento intorno al punto all'infinito scompare quindi dal prefattore, rilevandosi equivalente ad un riscaldamento costante.

Sfruttando le proprietà del P -simbolo, possiamo sempre ricondurre un'equazione con tre punti singolari regolari in una forma standard, in cui le singolarità siano nei punti 0, 1 e ∞ e gli indici α_1 e α_2 siano nulli. Tale forma è detta *equazione ipergeometrica* e sarà discussa in dettaglio nel capitolo 10.

9.6 Esercizi

Esercizio 9.1. Si dimostri che, se $\beta + \gamma + \beta' + \gamma' = 1/2$, allora

$$P \left\{ \begin{matrix} 0 & \infty & 1 \\ 0 & \beta & \gamma \\ 1/2 & \beta' & \gamma' \end{matrix} \right\} = P \left\{ \begin{matrix} -0 & \infty & 1 \\ \gamma & 2\beta & \gamma \\ \gamma' & 2\beta' & \gamma' \end{matrix} \right\}. \quad (9.6.1)$$

⁷Nel caso di indici che differiscono per un intero possono anche essere presenti logaritmi, ma la struttura generale non cambia.

Da dove deriva la condizione su $\beta + \gamma + \beta' + \gamma'$? (Suggerimento: si determinino le equazioni differenziali corrispondenti ai due P -simboli e si dimostri, con un cambio di variabili, che sono equivalenti.)

Esercizio 9.2. Si dimostri che l'equazione differenziale

$$(1 - z^2)u'' - (2a + 1)zu' + n(n + 2a)u = 0 \quad (9.6.2)$$

corrisponde al seguente P -simbolo

$$P \left\{ \begin{array}{ccc} 1 & \infty & -1 \\ 0 & -n & 0 \\ 1/2 - a & n + 2a & 1/2 - a \end{array} \quad z \right\}. \quad (9.6.3)$$

Esercizio 9.3. Si consideri l'equazione differenziale

$$u'' + \frac{2}{z-1}u' + \frac{2}{9z^2(z-1)^2}u = 0. \quad (9.6.4)$$

- i) Si studi la natura dei punti singolari ed i relativi esponenti indiciali.
- ii) Si determini la soluzione generale.

Esercizio 9.4. Si consideri l'equazione differenziale

$$u'' + \frac{1}{4(z-z_0)^2}u = 0. \quad (9.6.5)$$

- i) Si studi la natura dei punti singolari ed i relativi esponenti indiciali.
- ii) Si determini la soluzione generale.

Esercizio 9.5. Si consideri l'equazione differenziale

$$z^4u'' + 2z^3u - u = 0. \quad (9.6.6)$$

- i) Si studi la natura dei punti singolari ed i relativi esponenti indiciali.
- ii) Si determini la soluzione generale.

Esercizio* 9.6. Si mostri che la più generale equazione differenziale lineare omogenea di primo grado con solo punti singolari regolari (intesi come punti in cui le soluzioni hanno al più singolarità algebriche) ha la forma

$$y'(z) + \left(\sum_{k=1}^n \frac{a_k}{z - z_k} \right) y(z) = 0. \quad (9.6.7)$$

Si determinino le condizioni che garantiscono che il punto all'infinito sia regolare. Si trovi la soluzione dell'equazione differenziale. (Suggerimento: si mostri che un punto è singolare regolare se il coefficiente di $y(z)$ ha un polo semplice. Si prenda spunto dall'analisi fatta per le equazioni del secondo ordine nella sezione 9.1.)

Esercizio 9.7. Si consideri l'equazione differenziale

$$(z^2 + 1)^2u'' + 2(z + i)(z^2 + 1)u' + 24u = 0. \quad (9.6.8)$$

(Si noti che i indica l'unità immaginaria e non un parametro libero.)

- i) Si studi la natura dei punti singolari ed i relativi esponenti indiciali.
- ii) Si determini la soluzione generale.

L'EQUAZIONE IPERGEOMETRICA

In questo capitolo discuteremo una classe molto rilevante di equazioni differenziali lineari con tre punti singolari regolari, le equazioni ipergeometriche. Vedremo come queste sono legate alla più generale equazione di Papperitz-Riemann e quali sono le proprietà più rilevanti delle loro soluzioni.

10.1 L'equazione ipergeometrica

Tra le equazioni con tre punti fuchsiani, la più nota è senz'altro l'*equazione ipergeometrica*. Si tratta dell'equazione di Papperitz-Riemann con i tre punti singolari regolari posti in $z_1 = 0$, $z_2 = 1$ e $z_3 = \infty$ e tale che gli indici α_1 e α_2 siano nulli. Il P -simbolo relativo si indica con

$$P \left\{ \begin{array}{ccc} 0 & 1 & \infty \\ 0 & 0 & a \\ 1-c & c-a-b & b \end{array} \begin{array}{c} \\ z \\ \end{array} \right\}, \quad (10.1.1)$$

dove a , b e c sono parametri complessi.

Abbiamo visto nel capitolo 9 che non vi è perdita di generalità nello spostare i punti singolari in posizioni opportune. È chiaro quindi che ogni P -simbolo può essere messo in relazione con la funzione ipergeometrica, come andiamo ad illustrare. Il birapporto

$$w = \frac{z - z_1}{z - z_3} \frac{z_2 - z_3}{z_2 - z_1} \quad (10.1.2)$$

mappa i punti (z_1, z_2, z_3) nei punti $(0, 1, \infty)$, inoltre sfruttando la proprietà (9.5.6) si ottiene che ogni soluzione dell'equazione di Papperitz-Riemann può essere scritta nella forma

$$\begin{aligned} P \left\{ \begin{array}{ccc} z_1 & z_2 & z_3 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \end{array} \begin{array}{c} \\ z \\ \end{array} \right\} &= P \left\{ \begin{array}{ccc} 0 & 1 & \infty \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \end{array} \begin{array}{c} \\ w \\ \end{array} \right\} \\ &= w^{\alpha_1} (w-1)^{\alpha_2} P \left\{ \begin{array}{ccc} 0 & 1 & \infty \\ 0 & 0 & \alpha_3 + \alpha_1 + \alpha_2 \\ \beta_1 - \alpha_1 & \beta_2 - \alpha_2 & \beta_3 + \alpha_1 + \alpha_2 \end{array} \begin{array}{c} \\ w \\ \end{array} \right\}, \quad (10.1.3) \end{aligned}$$

ovvero, in termini della variabile z ,

$$P \begin{Bmatrix} z_1 & z_2 & z_3 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \end{Bmatrix} z = \frac{(z - z_1)^{\alpha_1} (z - z_2)^{\alpha_2}}{(z - z_3)^{\alpha_1 + \alpha_2}} P \begin{Bmatrix} 0 & 1 & \infty \\ 0 & 0 & \alpha_3 + \alpha_1 + \alpha_2 \\ \beta_1 - \alpha_1 & \beta_2 - \alpha_2 & \beta_3 + \alpha_1 + \alpha_2 \end{Bmatrix} \frac{z - z_1}{z - z_3} \frac{z_2 - z_3}{z_2 - z_1}. \quad (10.1.4)$$

Possiamo ricavare l'equazione ipergeometrica specializzando la forma generale dell'equazione di Papperitz-Riemann. Facendo tendere $z_3 \rightarrow \infty$ si ricava

$$u'' + \left(\sum_{i=1}^2 \frac{1 - \alpha_i - \beta_i}{z - z_i} \right) u' + \frac{1}{\prod_{i=1}^2 (z - z_i)} \left(\frac{\alpha_1 \beta_1}{z - z_1} (z_1 - z_2) + \frac{\alpha_2 \beta_2}{z - z_2} (z_2 - z_1) + \alpha_3 \beta_3 \right) u = 0. \quad (10.1.5)$$

Ponendo $z_1 = 0$, $z_2 = 1$, $\alpha_2 = \alpha_1 = 0$, $\alpha_3 = a$, $\beta_3 = b$, $\beta_1 = 1 - c$ e $\beta_2 = c - a - b$, si ricava

$$u''(z) + \left(\frac{c}{z} + \frac{1 - c + a + b}{z - 1} \right) u'(z) + \frac{ab}{z(z - 1)} u(z) = 0, \quad (10.1.6)$$

che si può finalmente riscrivere nella forma universalmente riportata in letteratura

$$z(z - 1)u''(z) + [(1 + a + b)z - c]u'(z) + ab u(z) = 0. \quad (10.1.7)$$

10.2 La serie ipergeometrica

Studiamo ora la soluzione dell'equazione ipergeometrica in un intorno del punto singolare regolare $z = 0$. Come abbiamo visto, le radici dell'equazione indiciale sono 0 e $1 - c$. Per semplicità assumiamo che $1 - c$ non sia un intero, in caso contrario una delle soluzioni può presentare dei termini logaritmici. Le due soluzioni indipendenti possono essere espresse in serie come

$$u_1(z) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n z^n, \quad u_2(z) = z^{1-c} \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} d_n z^n \right). \quad (10.2.1)$$

Chiaramente la soluzione u_1 , corrispondente all'indice 0, è analitica in $z = 0$, mentre u_2 non lo è.

La serie $u_1(z)$ è detta *serie ipergeometrica*. Il suo raggio di convergenza è al più la distanza dal punto singolare più vicino all'origine, cioè il punto $z = 1$.¹

L'estensione della serie ipergeometrica al piano complesso è detta *funzione ipergeometrica*. Per indicarla si usa la notazione

$${}_2F_1(a, b; c; z). \quad (10.2.2)$$

I due pedici sono spesso omissi in letteratura, dando la notazione semplificata $F(a, b; c; z)$. La funzione ipergeometrica è analitica su tutto il piano complesso, ad esclusione della possibile singolarità a $z = 1$. La singolarità può essere un polo oppure un branch point.

¹Sono possibili delle eccezioni. Ad esempio, se $ab = 0$, una soluzione è data da $u(z) = 1$ che ha raggio di convergenza infinito.

Il quest'ultimo caso si può introdurre un branch cut dal punto $z = 1$ al punto all'infinito $z = \infty$ lungo l'asse reale. In questo modo si ottiene una funzione ad un singolo valore su tutto il piano complesso con il cut.

Vediamo ora di determinare i coefficienti della serie ipergeometrica. Sostituendo la serie per u_1 nell'equazione differenziale otteniamo

$$\sum_{n=0}^{\infty} [(n(n-1)c_n + n(1+a+b)c_n + ab c_n)z^n + (-n(n-1)c_n - n c c_n)z^{n-1}] = 0. \quad (10.2.3)$$

Isolando i termini con la stessa potenza di z , otteniamo la relazione di ricorrenza per i coefficienti

$$c_n[n(n-1) + n(1+a+b) + ab] - c_{n-1}[n(n+1) + c(n+1)] = 0, \quad (10.2.4)$$

ovvero

$$c_{n+1} = \frac{(n+a)(n+b)}{(n+c)(n+1)} c_n. \quad (10.2.5)$$

Ponendo $c_0 = 1$, si trova che il generico coefficiente è dato da

$$c_n = \prod_{k=0}^{n-1} \frac{(k+a)(k+b)}{(k+1)(k+c)}. \quad (10.2.6)$$

Introducendo i *simboli di Pochhammer*

$$(a)_n = a(a+1) \cdots (a+n-1) = \frac{\Gamma(a+n)}{\Gamma(a)}, \quad (10.2.7)$$

possiamo riscrivere il coefficiente c_n come

$$c_n = \frac{(a)_n(b)_n}{(c)_n} \frac{1}{n!} = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} \frac{\Gamma(a+n)\Gamma(b+n)}{\Gamma(c+n)\Gamma(1+n)}. \quad (10.2.8)$$

La serie ipergeometrica è quindi data da

$${}_2F_1(a, b; c; z) = u_1(z) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(a+n)\Gamma(b+n)}{\Gamma(c+n)\Gamma(1+n)} z^n. \quad (10.2.9)$$

Si noti che questo risultato è valido solo se $c \neq -m$, $\forall m \in \mathbb{N}$, in caso contrario i coefficienti divergono.²

Vale il seguente teorema sulla convergenza della serie ipergeometrica.

²Per $c \rightarrow -m$ possiamo ottenere una serie ben definita scegliendo $c_0 = 1/\Gamma(c)$. In questo caso si ottiene il limite

$$\lim_{c \rightarrow -m} \frac{{}_2F_1(a, b; c; z)}{\Gamma(c)} = \frac{(a)_{m+1}(b)_{m+1}}{(m+1)!} z^{m+1} {}_2F_1(a+m+1, b+m+1; m+2; z). \quad (10.2.10)$$

Teorema 10.1. La serie ipergeometrica

- converge all'interno del cerchio unitario, $|z| < 1$, e in tale dominio essa rappresenta una funzione analitica per ogni scelta dei parametri, purché c non sia zero o un intero negativo;
- al di fuori del cerchio unitario, per $|z| > 1$ la serie in generale diverge;
- sul cerchio unitario, $|z| = 1$, la serie è assolutamente convergente se $\operatorname{Re}(c-a-b) > 0$; la serie converge, ma non assolutamente, per $|z| = 1$, $z \neq 1$ se $-1 < \operatorname{Re}(c-a-b) \leq 0$; la serie diverge se $\operatorname{Re}(c-a-b) \leq -1$.

La serie ipergeometrica, nel suo dominio di convergenza, rappresenta la funzione ipergeometrica ${}_2F_1(a, b; c; z)$.

Per trovare una seconda soluzione esplicita nella forma $u_2(z)$ attorno al punto $z = 0$, osserviamo che questa soluzione presenta una potenza non intera di z , cioè z^{1-c} . Possiamo allora utilizzare la proprietà (9.5.10) ottenendo

$$\begin{aligned} P \left\{ \begin{array}{ccc} 0 & 1 & \infty \\ 0 & 0 & a \\ 1-c & c-a-b & b \end{array} \right\} &= z^{1-c} P \left\{ \begin{array}{ccc} 0 & 1 & \infty \\ c-1 & 0 & a-c+1 \\ 0 & c-a-b & b-c+1 \end{array} \right\} \\ &= z^{1-c} P \left\{ \begin{array}{ccc} 0 & 1 & \infty \\ 0 & 0 & a-c+1 \\ c-1 & c-a-b & b-c+1 \end{array} \right\}. \quad (10.2.11) \end{aligned}$$

Il nuovo P -simbolo corrisponde ancora ad una serie ipergeometrica intorno all'origine, con indici ridefiniti opportunamente. Si ha dunque

$$u_2(z) = z^{1-c} {}_2F_1(a-c+1, b-c+1; 2-c; z). \quad (10.2.12)$$

Per ipotesi c non è intero, quindi $u_1(z)$ e $u_2(z)$ sono soluzioni linearmente indipendenti. Possiamo allora scrivere la soluzione generale dell'equazione ipergeometrica attorno all'origine come

$$u(z) = A {}_2F_1(a, b; c; z) + B z^{1-c} {}_2F_1(a-c+1, b-c+1; 2-c; z), \quad (10.2.13)$$

con A e B costanti arbitrarie.³

Sviluppi attorno agli altri punti singolari

Si può dimostrare che gli sviluppi delle soluzioni attorno al punto singolare $z = 1$ sono dati da⁴

$${}_2F_1(a, b; 1+a+b-c; 1-z) \quad (10.2.14)$$

³Nel caso in cui c è intero positivo, la seconda soluzione ha la forma $u_2(z) = G(a, b, c, z) + \log z H(a, b, c, z)$, dove G ed H sono funzioni analitiche in un intorno di $z = 0$. Per il caso in cui c è un intero negativo si veda l'equazione (10.2.10) nella nota 2.

⁴Queste soluzioni sono valide per $c-a-b$ non intero.

e

$$(1-z)^{c-a-b} {}_2F_1(c-a, c-b; 1+c-a-b; 1-z). \quad (10.2.15)$$

Per gli sviluppi attorno al punto all'infinito⁵

$$z^{-a} {}_2F_1(a, 1+a-c; 1+a-b; z^{-1}) \quad (10.2.16)$$

e

$$z^{-b} {}_2F_1(b, 1+b-c; 1+b-a; z^{-1}). \quad (10.2.17)$$

10.3 Proprietà della funzione ipergeometrica

In questa sezione proponiamo una rassegna di alcune importanti proprietà della funzione ipergeometrica.

10.3.1 Derivate della serie ipergeometrica

Essendo la serie ipergeometrica una funzione analitica nel dominio di convergenza, le sue derivate possono essere calcolate derivando termine a termine. Otteniamo

$$\frac{d}{dz} {}_2F_1(a, b; c; z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(a)_n (b)_n}{(c)_n n!} n z^{n-1}, \quad (10.3.1)$$

riscalando la somma e osservando che $(a)_{n+1} = a(a+1)_n$ si ha

$$\begin{aligned} \frac{d}{dz} {}_2F_1(a, b; c; z) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_{n+1} (b)_{n+1}}{(c)_{n+1} n!} z^n \\ &= \frac{ab}{c} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a+1)_n (b+1)_n}{(c+1)_n n!} z^n \\ &= \frac{ab}{c} {}_2F_1(a+1, b+1; c+1; z). \end{aligned} \quad (10.3.2)$$

L'espressione precedente si generalizza facilmente al caso di derivata n -esima:

$$\frac{d^n}{dz^n} {}_2F_1(a, b; c; z) = \frac{(a)_n (b)_n}{(c)_n} {}_2F_1(a+n, b+n; c+n; z). \quad (10.3.3)$$

10.3.2 Rappresentazione mediante integrale euleriano

La più semplice rappresentazione integrale della funzione ipergeometrica si ottiene tramite un integrale euleriano.

Teorema 10.2. La funzione ipergeometrica ha la rappresentazione integrale

$${}_2F_1(a, b; c; z) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)} \int_0^1 t^{b-1} (1-t)^{c-b-1} (1-tz)^{-a} dt, \quad (10.3.4)$$

valida per $\operatorname{Re} c > \operatorname{Re} b > 0$ e per z complesso tale che $z \notin [1, \infty)$.

⁵Queste soluzioni sono valide per $a-b$ non intero.

Dimostrazione. Proviamo che l'integrale coincide con la serie ipergeometrica. Per $|z| < 1$ e $t \in [0, 1]$ espandiamo il termine $(1 - tz)^{-a}$:

$$(1 - tz)^{-a} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(a+n)}{\Gamma(a)n!} t^n z^n. \quad (10.3.5)$$

Otteniamo

$$\begin{aligned} & \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)} \int_0^1 t^{b-1} (1-t)^{c-b-1} (1-tz)^{-a} dt \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(c)\Gamma(a+n)}{\Gamma(a)\Gamma(b)\Gamma(c-b)n!} z^n \int_0^1 t^{b+n-1} (1-t)^{c-b-1} dt \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(c)\Gamma(a+n)}{\Gamma(a)\Gamma(b)\Gamma(c-b)n!} \frac{\Gamma(b+n)\Gamma(c-b)}{\Gamma(c+n)} z^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} \frac{\Gamma(a+n)\Gamma(b+n)}{\Gamma(c+n)n!} z^n = {}_2F_1(a, b; c; z), \end{aligned} \quad (10.3.6)$$

dove abbiamo usato il risultato per la funzione beta

$$\int_0^1 t^{b+n-1} (1-t)^{c-b-1} dt = \frac{\Gamma(n+b)\Gamma(c-b)}{\Gamma(c+n)}. \quad (10.3.7)$$

L'integrale quindi coincide con la serie ipergeometrica nel dominio di convergenza $|z| < 1$, quindi, usando la continuazione analitica, coincide dovunque con la funzione ipergeometrica. Si noti che a e b possono essere scambiati senza alterare il risultato. \square

Dalla rappresentazione integrale (10.3.4) otteniamo il seguente corollario.

Corollario (Formula di Gauss). Se c non è zero o un intero negativo e $\operatorname{Re}(c-a-b) > 0$, allora

$${}_2F_1(a, b; c; 1) = \frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)}. \quad (10.3.8)$$

Dimostrazione. Questa identità deriva direttamente dalla rappresentazione integrale

$${}_2F_1(a, b; c; 1) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)} \int_0^1 t^{b-1} (1-t)^{c-a-b-1} dt, \quad (10.3.9)$$

che converge per $\operatorname{Re} b > 0$ e $\operatorname{Re}(c-a-b) > 0$. Per ricavare l'espressione abbiamo usato il risultato per la funzione beta in (10.3.7). \square

Tramite il cambio di variabile di integrazione $t \rightarrow 1/t$ si ottiene il corollario seguente.

Corollario. La serie ipergeometrica ammette la rappresentazione integrale

$${}_2F_1(a, b; c; z) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)} \int_1^{\infty} t^{a-c} (t-1)^{c-b-1} (t-z)^{-a} dt, \quad (10.3.10)$$

valida per $\operatorname{Re} c > \operatorname{Re} b > 0$ e z complesso con $z \notin [1, \infty)$.

Inoltre vale il seguente lemma.

Lemma 10.3 (di Eulero). La funzione ipergeometrica soddisfa la seguente relazione

$${}_2F_1(a, b; c; z) = (1 - z)^{-a} {}_2F_1\left(a, c - b; c; \frac{z}{z - 1}\right). \quad (10.3.11)$$

Dimostrazione. Dalla rappresentazione integrale (10.3.4), tramite il cambio di variabile $t = 1 - u$, otteniamo

$${}_2F_1(a, b; c; z) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)} \int_0^1 (1-u)^{b-1} u^{c-b-1} (1 - (1-u)z)^{-a} du, \quad (10.3.12)$$

che può essere riscritta come

$${}_2F_1(a, b; c; z) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)} (1-z)^{-a} \int_0^1 u^{c-b-1} (1-u)^{c-(c-b)-1} \left(1 - u \frac{z}{z-1}\right)^{-a} du. \quad (10.3.13)$$

Questa relazione mostra che

$${}_2F_1(a, b; c; z) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)} (1-z)^{-a} \frac{\Gamma(b)\Gamma(c-b)}{\Gamma(c)} {}_2F_1\left(a, c-b; c; \frac{z}{z-1}\right), \quad (10.3.14)$$

e la continuazione analitica di entrambe le serie dimostra il lemma. □

Si noti che la trasformazione conforme $z \rightarrow z/(z-1)$ mappa l'interno del cerchio unitario nel semipiano $\operatorname{Re} z < 1/2$, quindi la serie ${}_2F_1(a, c-b; c; z/(z-1))$ converge su tale dominio. Il risultato del lemma precedente estende quindi il dominio di analiticità della serie ipergeometrica al semipiano $\operatorname{Re} z < 1/2$.

10.3.3 Relazioni per funzioni contigue

Si dicono *contigue* a ${}_2F_1(a, b; c; z)$ le sei funzioni ipergeometriche seguenti

$${}_2F_1(a \pm 1, b; c; z), \quad {}_2F_1(a, b \pm 1; c; z), \quad {}_2F_1(a, b; c \pm 1; z), \quad (10.3.15)$$

i cui indici differiscono di una unità rispetto alla funzione ipergeometrica iniziale. Gauss dimostrò che ${}_2F_1(a, b; c; z)$ può essere scritta come combinazione lineare di una qualsiasi coppia delle sue funzioni continue con coefficienti razionali in a, b, c e z . In questo modo si ricavano un totale di 15 relazioni.

Tali relazioni si possono ottenere identificando due qualsiasi delle ultime sei righe della

relazione

$$\begin{aligned}
z \frac{dF(a, b; c)}{dz} &= z \frac{ab}{c} F(a+1, b+1; c+1) = \\
&= a[F(a+1, b; c) - F(a, b; c)] \\
&= b[F(a, b+1; c) - F(a, b; c)] \\
&= (c-1)[F(a, b; c-1) - F(a, b; c)] \\
&= \frac{(c-a)F(a-1, b; c) + (a-c+bz)F(a, b; c)}{1-z} \\
&= \frac{(c-b)F(a, b-1; c) + (b-c+az)F(a, b; c)}{1-z} \\
&= z \frac{(c-a)(c-b)F(a, b; c+1) + c(a+b-c)F(a, b; c)}{c(1-z)},
\end{aligned} \tag{10.3.16}$$

dove abbiamo utilizzato la notazione semplificata $F(a, b; c) \equiv {}_2F_1(a, b; c; z)$. Queste uguaglianze possono essere dimostrate utilizzando l'espansione in serie della funzione ipergeometrica.

Ad esempio utilizzando le prime due relazioni (seconda e terza riga) si ottiene

$$(b-a) {}_2F_1(a, b; c; z) + a {}_2F_1(a+1, b; c; z) - b {}_2F_1(a, b+1; c; z) = 0. \tag{10.3.17}$$

D'altro canto, utilizzando le espressioni sulla terzultima e sull'ultima riga si ottiene

$$c(1-z) {}_2F_1(a, b; c; z) - c {}_2F_1(a-1, b; c; z) + z(c-b) {}_2F_1(a, b; c+1; z) = 0. \tag{10.3.18}$$

Chiaramente applicando ripetutamente le relazioni tra funzioni contigue si possono trovare relazioni tra ${}_2F_1(a, b; c; z)$ una sua contigua e funzioni ipergeometriche i cui indici differiscono per degli interi generici, ad esempio, ${}_2F_1(a+n, b+m; c+l; z)$, con n, m e l interi.

10.4 Soluzioni di Kummer

Come abbiamo visto, gli indici relativi all'equazione ipergeometrica possono essere ridefiniti applicando il risultato (9.5.6), possiamo in particolare riscrivere l'equazione in modo equivalente moltiplicando per uno dei seguenti fattori

$$z^{1-c}, \quad (1-z)^{c-a-b}, \quad z^{1-c}(1-z)^{c-a-b}. \tag{10.4.1}$$

Abbiamo già utilizzato la moltiplicazione per z^{1-c} per ottenere una seconda soluzione indipendente per l'equazione ipergeometrica attorno a $z = 0$. L'utilizzo delle altre ridefinizioni, ovviamente, non porta ad ottenere nuove soluzioni, ma fornisce delle combinazioni lineari delle due soluzioni indipendenti già ricavate.

Un'ulteriore classe di trasformazioni che mandano l'equazione ipergeometrica in una equazione dello stesso tipo è data dalle trasformazioni di Möbius che producono una permutazione dei punti singolari. Esistono 6 permutazioni possibili dei punti singolari

$(0, 1, \infty)$, ottenibili con le seguenti trasformazioni conformi

$$\begin{array}{lll}
 z \rightarrow z & (0, 1, \infty) & z \rightarrow \frac{z}{z-1} \quad (0, \infty, 1) \\
 z \rightarrow 1-z & (1, 0, \infty) & z \rightarrow 1 - \frac{1}{z} \quad (\infty, 0, 1) . \\
 z \rightarrow \frac{1}{z} & (\infty, 1, 0) & z \rightarrow \frac{1}{1-z} \quad (1, \infty, 0)
 \end{array} \quad (10.4.2)$$

Applicando una di queste trasformazioni conformi, ed eventualmente ridefinendo gli indici relativi ai punti singolari 0 ed 1 tramite opportuni fattori, l'equazione ipergeometrica non cambia.

Combinando moltiplicazione per un fattore e trasformazione di Möbius in tutti i modi possibili, otteniamo quindi 24 modi equivalenti per esprimere le soluzioni dell'equazione ipergeometrica. Queste espressioni sono dette *soluzioni di Kummer*.

Esistendo solo due soluzioni indipendenti, scelte tre qualsiasi soluzioni di Kummer, deve esistere una relazione lineare tra di loro. Alcune relazioni sono molto semplici, ad esempio

$${}_2F_1(a, b; c; z) = (1-z)^{c-a-b} {}_2F_1(c-b, c-a; c; z) \quad (10.4.3)$$

$$= (1-z)^{-a} {}_2F_1(a, c-b; c; z/(z-1)) \quad (10.4.4)$$

$$= (1-z)^{-b} {}_2F_1(c-a, b; c; z/(z-1)) . \quad (10.4.5)$$

Mentre altre sono molto meno banali,

$$\begin{aligned}
 {}_2F_1(a, b; c; z) &= \frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)} {}_2F_1(a, b; a+b-c+1; 1-z) \\
 &+ \frac{\Gamma(c)\Gamma(a+b-c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} (1-z)^{c-a-b} {}_2F_1(c-a, c-b; c-a-b+1; 1-z) .
 \end{aligned} \quad (10.4.6)$$

È interessante notare che le serie corrispondenti alle soluzioni di Kummer convergono in domini diversi. La serie ipergeometrica originale converge all'interno del cerchio unitario, quindi le serie ottenute tramite una trasformazione conforme convergono sul dominio ottenuto trasformando il cerchio unitario. Escludendo la semiretta $z \in [1, \infty)$, le varie trasformazioni conformi portano ai seguenti domini di convergenza

$$\begin{array}{lll}
 z \rightarrow z & |z| < 1 & z \rightarrow \frac{z}{z-1} \quad \operatorname{Re} z < 1/2 \\
 z \rightarrow 1-z & |z-1| < 1 & z \rightarrow 1 - \frac{1}{z} \quad \operatorname{Re} z > 1/2 . \\
 z \rightarrow \frac{1}{z} & |z| > 1 & z \rightarrow \frac{1}{1-z} \quad |z-1| > 1
 \end{array} \quad (10.4.7)$$

Sfruttando le relazioni tra le soluzioni di Kummer e il fatto che le serie sono definite in domini differenti, si può estendere la definizione per serie delle funzioni ipergeometriche a domini al di fuori del cerchio unitario, al quale è limitata la convergenza della serie ipergeometrica.

10.5 Casi particolari

Una lunga lista di funzioni elementari e speciali può essere espressa in termini della funzione ipergeometrica ${}_2F_1(a, b; c; z)$. Vediamo alcuni esempi.

Nel caso in cui $a = -N$ (o $b = -N$) con N intero, la serie si tronca ad un polinomio di grado N . Si ha infatti che $(-N)_{N+k} = 0$ se $k > 0$, quindi

$${}_2F_1(-N, b; c; z) = \sum_{n=0}^N \frac{(-N)_n (b)_n}{(c)_n} \frac{z^n}{n!}. \quad (10.5.1)$$

Vedremo nella sezione 11.1 che questi polinomi sono legati ai *polinomi di Jacobi*.

Per alcuni particolari valori degli indici la funzione ipergeometrica riproduce alcune funzioni elementari. Scegliendo $a = b = 1$ e $c = 2$ si ottiene

$${}_2F_1(1, 1; 2; z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(n+1)^2}{\Gamma(n+2)n!} z^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n+1} = -\frac{1}{z} \log(1-z). \quad (10.5.2)$$

Inoltre

$${}_2F_1(a, b; b; z) = {}_2F_1(b, a; b; z) = (1-z)^{-a}. \quad (10.5.3)$$

Per indici semiinteri e argomenti non lineari si possono citare

$${}_2F_1(1/2, 1; 3/2; -z^2) = \frac{1}{z} \arctan z, \quad (10.5.4)$$

e

$${}_2F_1(1/2, 1/2; 3/2; z^2) = \frac{1}{z} \arcsin z. \quad (10.5.5)$$

Per dimostrare la prima di queste relazioni, ad esempio,

$$\begin{aligned} {}_2F_1(1/2, 1; 3/2; -z^2) &= \frac{\Gamma(3/2)}{\Gamma(1/2)\Gamma(1)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(n+1/2)\Gamma(n+1)}{\Gamma(n+3/2)n!} (-1)^n z^{2n} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1/2} z^{2n} = \frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} z^{2n+1} = \frac{1}{z} \arctan z. \end{aligned} \quad (10.5.6)$$

10.6 Esercizi

Esercizio 10.1. Si dimostri la seguente identità

$${}_2F_1(1/2, 1/2; 3/2; z^2) = \frac{1}{z} \arcsin z. \quad (10.6.1)$$

Esercizio 10.2. Si dimostri la seguente identità

$${}_2F_1(\alpha, \beta; \beta; z) = {}_2F_1(\beta, \alpha; \beta; z) = \frac{1}{(1-z)^\alpha} \quad (10.6.2)$$

valida per $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Esercizio 10.3 (Trasformazione quadratica). Si dimostri la seguente identità

$${}_2F_1\left(a, b; a + b + \frac{1}{2}; 4z(1 - z)\right) = {}_2F_1\left(2a, 2b; a + b + \frac{1}{2}; z\right) \quad (10.6.3)$$

per $a + b + 1/2$ non nullo e diverso da un intero negativo. (Suggerimento: Si parta dall'equazione ipergeometrica per $c = a + b + 1/2$ scritta nella variabile $t = 4z(1 - z)$. Si utilizzi il cambio di variabile in z per dimostrare che l'equazione è equivalente ad una nuova ipergeometrica con $a' = 2a$, $b' = 2b$ e $c' = a + b + 1/2$. Si noti che ${}_2F_1$ corrisponde alla soluzione analitica nell'origine che assume valore 1 per $z = 0$. La condizione su $a + b + 1/2$ implica che esiste una sola soluzione analitica nell'origine.)

Esercizio 10.4. Utilizzando l'espressione esplicita della serie ipergeometrica verificare le uguaglianze elencate nell'eq. (10.3.16).

Esercizio 10.5. Utilizzando il risultato dell'esercizio 10.2 e la formula di Gauss (10.3.8) si determini ${}_2F_1(2a, 2b; a + b + 1/2; 1/2)$.

Esercizio 10.6. Sia data l'equazione differenziale

$$u'' + \frac{2z - 1}{z(z - 1)}u' - \frac{2}{9} \frac{1}{z^2(z - 1)(z - 2)}u = 0. \quad (10.6.4)$$

- i) Si studino i punti singolari e gli esponenti indiciali e si scriva il corrispondente P -simbolo.
- ii) Si scrivano le soluzioni legandole a funzioni ipergeometriche. (Suggerimento: tramite una trasformazione di Möbius è possibile spostare i punti singolari in 0, 1 e ∞ .)

Esercizio 10.7. Sia data l'equazione differenziale

$$u'' + \frac{2z^2 - 3z - 1}{z(z^2 - 1)}u' + \frac{a^2}{z^2(z^2 - 1)}u = 0, \quad (10.6.5)$$

con $a > 0$.

- i) Si studino i punti singolari e gli esponenti indiciali.
- ii) Si determini almeno una soluzione intorno al punto $z = -1$ calcolandone esplicitamente i primi due coefficienti dello sviluppo in serie di potenze. (Suggerimento: gli indici relativi al punto $z = -1$ differiscono per un intero. La seconda soluzione contiene quindi un termine logaritmico e può essere determinata come spiegato nella sezione 8.4.)
- iii) Si riscriva la soluzione regolare per $z = -1$ in termini di serie ipergeometrica.

Esercizio 10.8. Si dimostri la relazione

$$\lim_{c \rightarrow -m} \frac{{}_2F_1(a, b; c; z)}{\Gamma(c)} = \frac{(a)_{m+1}(b)_{m+1}}{(m+1)!} z^{m+1} {}_2F_1(a + m + 1, b + m + 1; m + 2; z), \quad (10.6.6)$$

dove m è un intero positivo (si veda l'equazione (10.2.10) nella nota 2).

Esercizio 10.9. Sia assegnata l'equazione differenziale

$$u'' + \frac{2z}{z^2 - 1}u' - \frac{2}{z(z+1)(z-1)^2}u = 0. \quad (10.6.7)$$

- i) Si studino i punti singolari e gli esponenti indiciali.
- ii) Si determini almeno una soluzione intorno al punto $z = 1$. (Suggerimento: si riconduca l'equazione ad una equazione ipergeometrica standard spostando i punti singolari $(-1, 0, 1)$ in $(0, 1, \infty)$.)

Esercizio 10.10. Si dimostri la seguente identità

$${}_2F_1(0, b; c; z) = 1. \quad (10.6.8)$$

Esercizio 10.11. Si consideri l'equazione differenziale

$$z(z - \alpha)u'' + [(\alpha + 2)z - \alpha]u' + \alpha u = 0. \quad (10.6.9)$$

- i) Si studino i punti singolari e gli esponenti indiciali.
- ii) Si scriva esplicitamente la soluzione per α generico intorno al punto $z = \alpha$ utilizzando la serie ipergeometrica.

Esercizio 10.12. Si consideri l'equazione differenziale

$$z(z - a)u'' + [z(a + b + 1) - ac]u' + ab u = 0. \quad (10.6.10)$$

- i) Si studino i punti singolari e gli esponenti indiciali.
- ii) Si scriva esplicitamente la soluzione utilizzando la serie ipergeometrica.

Esercizio 10.13. Si dimostri la seguente relazione di ricorrenza

$${}_2F_1(1, 1; n + 1; z) = \frac{n}{(n - 1)^2} \left[(1 - z) \frac{d}{dz} + (n - 2) \right] {}_2F_1(1, 1; n; z), \quad (10.6.11)$$

valida per $n \neq 1, 0, -1, -2, \dots$. Si utilizzi questa relazione per calcolare ${}_2F_1(1, 1; 3; z)$ e ${}_2F_1(1, 1; 4; z)$. (Suggerimento: si utilizzino le relazioni tra funzioni ipergeometriche contigue.)

Esercizio 10.14. Si calcolino esplicitamente le seguenti serie ipergeometriche

$$\begin{array}{ll} i) \quad {}_2F_1(3, 5; 6; z), & iii) \quad {}_2F_1(3/2, 2; 5/2; -z^2), \\ ii) \quad {}_2F_1(3, 5; 4; z), & iv) \quad {}_2F_1(3/2, 3/2; 5/2; z^2). \end{array} \quad (10.6.12)$$

(Suggerimento: si utilizzino le relazioni tra funzioni ipergeometriche contigue e le espressioni per le loro derivate.)

Esercizio 10.15. Data l'equazione differenziale

$$z^2(z^2 + 1)u'' + 2z^3 u' - a(a + 1)u = 0, \quad (10.6.13)$$

con $a \notin \mathbb{Z}$,

- i) si determinino le singolarità fuchsiane ed i relativi indici e si scriva il P -simbolo dell'equazione,
- ii) si scriva la soluzione generale nell'intorno dell'origine in termini di funzioni ipergeometriche.

Esercizio* 10.16. Si consideri un'equazione di Papperitz-Riemann che sia invariante per cambio di segno della variabile indipendente ($z \rightarrow -z$).

- i) Se ne determini la forma più generale assumendo che un punto singolare sia in $z = 0$.
- ii) Si dimostri che il cambio di variabile $y = z^2/z_0^2$, dove $z_0 \neq 0$ è la posizione di uno dei poli differenti dall'origine, trasforma questa equazione in un'equazione di Papperitz-Riemann con poli in 0, 1 e ∞ , e se ne determinino i corrispondenti indici.
- iii) Si scriva, utilizzando la funzione ipergeometrica, la soluzione più generale di questa equazione in un intorno di $y = 0$.
- iv) Si utilizzino i risultati precedenti per dimostrare la formula di trasformazione quadratica

$${}_2F_1(a, a + 1/2; c; z^2) = (1 \pm z)^{-2a} {}_2F_1\left(2a, c - \frac{1}{2}; 2c - 1; \frac{2z}{z \pm 1}\right). \quad (10.6.14)$$

Esercizio 10.17. Si sfruttino le proprietà del P -simbolo per ricavare le soluzioni dell'equazione ipergeometrica attorno ai punti $z = 1$ e $z = \infty$ riportate nelle equazioni (10.2.14), (10.2.15), (10.2.16) e (10.2.17). (Suggerimento: si sfruttino le trasformazioni conformi e le ridefinizioni degli indici.)

I POLINOMI IPERGEOMETRICI

Per particolari valori dei parametri, la serie ipergeometrica contiene un numero finito di termini, dando luogo ad un polinomio. I polinomi ottenuti in questo modo corrispondono ai *polinomi di Jacobi* e formano una base ortogonale, rispetto ad un opportuno prodotto scalare, per le funzioni su un intervallo dell'asse reale (convenzionalmente $[-1, 1]$). Un caso particolare dei polinomi di Jacobi corrisponde ai *polinomi di Legendre*, che rivestono particolare rilievo in fisica matematica per le notevoli applicazioni.

11.1 I polinomi di Jacobi

Abbiamo notato nel capitolo 10 che, se a (o b) è un intero non positivo ($a = -n$), la serie ipergeometrica ${}_2F_1(a, b; c; z)$ si arresta dopo un numero finito di termini, dando un polinomio di grado n . In questa sezione discuteremo in dettaglio le proprietà di tali polinomi, che, come vedremo, corrispondono ai *polinomi di Jacobi*.

Iniziamo con la costruzione standard dei polinomi di Jacobi $P_n^{(\alpha, \beta)}(x)$ mediante la *formula di Rodrigues*

$$P_n^{(\alpha, \beta)}(x) = \frac{(-1)^n}{2^n n!} (1-x)^{-\alpha} (1+x)^{-\beta} \frac{d^n}{dx^n} ((1-x)^{\alpha+n} (1+x)^{\beta+n}), \quad (11.1.1)$$

per parametri reali tali che $\alpha, \beta > -1$ e n intero non negativo. È facile vedere che $p_n^{(\alpha, \beta)}$ corrisponde ad un polinomio di grado n .

Vogliamo ora mostrare che i polinomi di Jacobi soddisfano l'equazione ipergeometrica, quindi possono essere espressi tramite la serie ipergeometrica. In particolare dimostreremo il seguente risultato.

Teorema 11.1. I polinomi di Jacobi ammettono la seguente rappresentazione in termini della serie ipergeometrica

$$P_n^{(\alpha, \beta)}(x) = \binom{n+\alpha}{n} {}_2F_1 \left(-n, n+\alpha+\beta+1; \alpha+1; \frac{1-x}{2} \right). \quad (11.1.2)$$

Dimostrazione. Come primo passo utilizziamo il cambio di variabile

$$z = \frac{1-x}{2}, \quad (11.1.3)$$

tramite il quale possiamo riscrivere la formula di Rodrigues come

$$P_n^{(\alpha, \beta)}(x) = P_n^{(\alpha, \beta)}(1-2z) = \frac{z^{-\alpha}(1-z)^{-\beta}}{n!} \frac{d^n}{dz^n} (z^{\alpha+n}(1-z)^{\beta+n}) . \quad (11.1.4)$$

E consideriamo la funzione

$$g_n(z) = (z^{\alpha+n}(1-z)^{\beta+n}) , \quad (11.1.5)$$

in termini della quale si ha

$$P_n^{(\alpha, \beta)}(x) = P_n^{(\alpha, \beta)}(1-2z) = \frac{z^{-\alpha}(1-z)^{-\beta}}{n!} \frac{d^n}{dz^n} g_n(z) . \quad (11.1.6)$$

Calcoliamo le derivate di $g_n(z)$. La derivata prima si può esprimere nella forma

$$g'_n(z) = \frac{\alpha+n}{z} g_n(z) - \frac{\beta+n}{1-z} g_n(z) , \quad (11.1.7)$$

ovvero, in forma equivalente,

$$z(1-z)g'_n(z) = [\alpha+n-(2n+\alpha+\beta)z]g_n(z) . \quad (11.1.8)$$

Calcoliamo ora la derivata $(m+1)$ -esima di entrambi i membri dell'equazione (11.1.8):

$$\begin{aligned} z(1-z)g_n^{(m+2)}(z) + \binom{m+1}{1}(1-2z)g_n^{(m+1)}(z) + \binom{m+1}{2}(-2)g_n^{(m)}(z) = \\ = [\alpha+n-(2n+\alpha+\beta)z]g_n^{(m+1)}(z) - \binom{m+1}{1}(2n+\alpha+\beta)g_n^{(m)}(z) . \end{aligned} \quad (11.1.9)$$

Considerando questa equazione per $m=n$ e riarrangiando i vari termini ricaviamo

$$z(z-1)(g_n^{(n)})''(z) + [(2-\alpha-\beta)z+\alpha-1](g_n^{(n)})'(z) - (n+1)(n+\alpha+\beta)g_n^{(n)}(z) = 0 . \quad (11.1.10)$$

Vediamo quindi che $g_n^{(n)}$ soddisfa l'equazione ipergeometrica (10.1.7) con coefficienti¹

$$\begin{cases} a+b=1-\alpha-\beta \\ ab=-(n+1)(n+\alpha+\beta) \\ c=1-\alpha \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=n+1 \\ b=-n-\alpha-\beta \\ c=1-\alpha \end{cases} . \quad (11.1.11)$$

Concludiamo quindi che $g_n^{(n)}(z)$ è una delle soluzioni descritte dal P -simbolo

$$g_n^{(n)}(z) \in P \left\{ \begin{matrix} 0 & 1 & \infty \\ 0 & 0 & n+1 \\ \alpha & \beta & -n-\alpha-\beta \end{matrix} \begin{matrix} z \\ z \\ z \end{matrix} \right\} . \quad (11.1.12)$$

Usando la proprietà (9.5.6) si ottiene

$$g_n^{(n)}(z) = \frac{d^n}{dz^n} (z^{\alpha+n}(1-z)^{\beta+n}) \in z^\alpha(1-z)^\beta P \left\{ \begin{matrix} 0 & 1 & \infty \\ 0 & 0 & n+\alpha+\beta+1 \\ -\alpha & -\beta & -n \end{matrix} \begin{matrix} z \\ z \\ z \end{matrix} \right\} . \quad (11.1.13)$$

¹Come già visto a e b possono anche essere scambiati.

Si ottiene quindi che

$$z^{-\alpha}(1-z)^{-\beta} \frac{d^n}{dz^n} (z^{\alpha+n}(1-z)^{\beta+n}) \propto {}_2F_1(-n, n+\alpha+\beta+1; \alpha+1; z), \quad (11.1.14)$$

e quindi

$$P_n^{(\alpha, \beta)}(x) \propto {}_2F_1\left(-n, n+\alpha+\beta+1; \alpha+1; \frac{1-x}{2}\right). \quad (11.1.15)$$

Resta soltanto da determinare la costante di proporzionalità. A questo scopo possiamo confrontare le due espressioni per $x = 1$. Come abbiamo visto

$${}_2F_1(-n, n+\alpha+\beta+1; \alpha+1; 0) = 1. \quad (11.1.16)$$

A partire dalla formula di Rodrigues (11.1.1) si ottiene facilmente²

$$P_n^{(\alpha, \beta)}(1) = \binom{\alpha+n}{n} \equiv \frac{\Gamma(\alpha+n+1)}{\Gamma(n+1)\Gamma(\alpha+1)}. \quad (11.1.17)$$

Otteniamo quindi l'espressione (11.1.2) per i polinomi di Jacobi in termini della serie ipergeometrica. \square

11.1.1 Ortogonalità dei polinomi di Jacobi

Una importante proprietà dei polinomi di Jacobi è il fatto che essi costituiscono una base ortogonale per le funzioni nell'intervallo $[-1, 1]$. Vale infatti il seguente teorema.

Teorema 11.2. I polinomi di Jacobi $P_n^{(\alpha, \beta)}$ formano un sistema completo ortogonale sull'intervallo $[-1, 1]$ rispetto al peso $(1-x)^\alpha(1+x)^\beta$, dove α e β sono costanti reali maggiori di -1 e $n \in \mathbb{N}$. La condizione di ortogonalità è

$$\int_{-1}^1 (1-x)^\alpha(1+x)^\beta P_n^{(\alpha, \beta)}(x) P_m^{(\alpha, \beta)}(x) dx = \frac{2^{\alpha+\beta+1} \Gamma(\alpha+n+1) \Gamma(\beta+n+1)}{n! (\alpha+\beta+2n+1) \Gamma(\alpha+\beta+n+1)} \delta_{nm}. \quad (11.1.18)$$

Dimostrazione. Per dimostrare l'ortogonalità partiamo da

$$\begin{aligned} I_{n,m} &= \int_{-1}^1 (1-x)^\alpha(1+x)^\beta P_n^{(\alpha, \beta)}(x) P_m^{(\alpha, \beta)}(x) dx \\ &= \frac{(-1)^n}{2^n n!} \int_{-1}^1 \frac{d^n}{dx^n} ((1-x)^{\alpha+n}(1+x)^{\beta+n}) P_m^{(\alpha, \beta)}(x) dx. \end{aligned} \quad (11.1.19)$$

Assumiamo che $m < n$,³ ed integriamo per parti n volte, ottenendo

$$I_{n,m} = \frac{1}{2^n n!} \int_{-1}^1 ((1-x)^{\alpha+n}(1+x)^{\beta+n}) \frac{d^n}{dx^n} P_m^{(\alpha, \beta)}(x) dx = 0. \quad (11.1.20)$$

²Si noti che per ottenere un termine non nullo per $x = 1$, si deve derivare n volte il termine $(1-x)^{\alpha+n}$.

³Essendo l'espressione simmetrica per scambio di n ed m , possiamo sempre assumere questa condizione.

L'annullamento di questa espressione è dovuto al fatto che $P_m^{(\alpha, \beta)}$ è un polinomio di grado $m < n$, quindi si annulla quando è derivato n volte.

Consideriamo ora il caso $n = m$. Con gli stessi passaggi si ottiene

$$I_{n,n} = \frac{1}{2^n n!} \int_{-1}^1 ((1-x)^{\alpha+n}(1+x)^{\beta+n}) \frac{d^n}{dx^n} P_n^{(\alpha, \beta)}(x) dx = 0. \quad (11.1.21)$$

La derivata n -esima di $P_n^{(\alpha, \beta)}(x)$ seleziona il coefficiente del termine x^n , che indichiamo con $c_n^{(\alpha, \beta)}$, quindi

$$\begin{aligned} I_{n,n} &= \frac{c_n^{(\alpha, \beta)}}{2^n} \int_{-1}^1 ((1-x)^{\alpha+n}(1+x)^{\beta+n}) dx = \frac{c_n^{(\alpha, \beta)}}{2^{n-1}} \int_0^1 (2-2t)^{\alpha+n}(2t)^{\beta+n} dt \\ &= 2^{\alpha+\beta+n+1} c_n^{(\alpha, \beta)} \frac{\Gamma(\alpha+n+1)\Gamma(\beta+n+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+2n+2)}, \end{aligned} \quad (11.1.22)$$

dove abbiamo usato il cambio di variabile $x = 2t - 1$. Si può dimostrare facilmente che

$$c_n^{(\alpha, \beta)} = \frac{1}{2^n n!} \frac{\Gamma(\alpha+\beta+2n+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+n+1)}, \quad (11.1.23)$$

quindi

$$I_{n,n} = \frac{2^{\alpha+\beta+1}}{\alpha+\beta+2n+1} \frac{\Gamma(\alpha+n+1)\Gamma(\beta+n+1)}{n! \Gamma(\alpha+\beta+n+1)}. \quad (11.1.24)$$

Questi risultati dimostrano il teorema. \square

11.1.2 Relazioni tra polinomi di Jacobi

Essendo casi speciali della serie ipergeometrica, i polinomi di Jacobi soddisfano delle relazioni di contiguità del tutto analoghe a quelle presentate nella sezione 10.3.3. Esse legano polinomi i cui indici α , β ed n variano di una unità.

Inoltre un'altra semplice relazione lega ogni terna di polinomi di Jacobi con indici n consecutivi.

Teorema 11.3. I polinomi di Jacobi soddisfano la seguente relazione di ricorrenza

$$\begin{aligned} 2n(n+\alpha+\beta)(2n+\alpha+\beta-2)P_n^{(\alpha, \beta)}(x) &= \\ &= (2n+\alpha+\beta-1) [(2n+\alpha+\beta)(2n+\alpha+\beta-2)x + \alpha^2 - \beta^2] P_{n-1}^{(\alpha, \beta)}(x) \\ &\quad - 2(n+\alpha-1)(n+\beta-1)(2n+\alpha+\beta)P_{n-2}^{(\alpha, \beta)}(x). \end{aligned} \quad (11.1.25)$$

Dimostrazione. Questa relazione può essere dimostrata sfruttando la proprietà di ortogonalità dei polinomi di Jacobi. Per la dimostrazione completa si veda [4]. Nella sezione 11.2 presenteremo una analoga dimostrazione per il caso, più semplice, dei polinomi di Legendre. \square

Si noti che le relazioni di ricorrenza possono essere utilizzate per ricavare la forma esplicita dei polinomi di Jacobi a partire da quelli di grado più basso. I primi due polinomi di Jacobi possono facilmente essere determinati dalla formula di Rodrigues e sono dati da

$$\begin{cases} P_0^{(\alpha, \beta)}(x) = 1 \\ P_1^{(\alpha, \beta)}(x) = \frac{1}{2}(\alpha+\beta+2)x + \frac{1}{2}(\alpha-\beta) \end{cases}. \quad (11.1.26)$$

La relazione di ricorrenza può essere estesa anche al caso $n = 1$ ponendo $P_{-1}^{(\alpha, \beta)}(x) = 0$.

È facile verificare che i polinomi di Jacobi soddisfano la relazione di simmetria

$$P_n^{(\alpha, \beta)}(-x) = (-1)^n P_n^{(\beta, \alpha)}(x). \quad (11.1.27)$$

Si noti che questa relazione lega polinomi con gli indici α e β scambiati. Nel caso in cui $\alpha = \beta$ essa implica che i polinomi di Jacobi sono pari o dispari a seconda di n . Usando la relazione precedente insieme al risultato in eq. (11.1.17) si ottiene che

$$P_n^{(\alpha, \beta)}(-1) = (-1)^n \binom{n + \beta}{n}. \quad (11.1.28)$$

Infine, vale la seguente formula per le derivate

$$\frac{d^k}{dx^k} P_n^{(\alpha, \beta)}(x) = \frac{\Gamma(\alpha + \beta + n + 1 + k)}{2^k \Gamma(\alpha + \beta + n + 1)} P_{n-k}^{(\alpha+k, \beta+k)}(x), \quad (11.1.29)$$

che può essere ricavata a partire dall'analogia formula per la serie ipergeometrica (10.3.3).

11.2 I polinomi di Legendre

Alcune classi di polinomi ortogonali classici, in particolare i *polinomi di Legendre*, i *polinomi di Chebyshev* e i *polinomi di Gegenbauer*, possono essere ricavati come casi particolari dei polinomi di Jacobi.

In questa sezione considereremo il caso dei *polinomi di Legendre*. Essi corrispondono ai polinomi di Jacobi con $\alpha = \beta = 0$, ovvero

$$P_n(x) = P_n^{(0,0)}(x). \quad (11.2.1)$$

La formula di Rodrigues (11.1.1) diventa in questo caso

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n. \quad (11.2.2)$$

Lo sviluppo del binomio può essere utilizzato per derivare una rappresentazione esplicita dei polinomi di Legendre,

$$P_n(x) = \sum_{0 \leq k \leq n/2} \frac{(-1)^k (2n - 2k)!}{2^n k! (n - k)! (n - 2k)!} x^{n-2k}. \quad (11.2.3)$$

Da questa equazione si derivano immediatamente le seguenti proprietà di simmetria

$$P_n(-x) = (-1)^n P_n(x), \quad (11.2.4)$$

ovvero i polinomi di Legendre sono pari (dispari) per n pari (dispari). A partire da questa proprietà e dal risultato (11.1.17) si ricavano i valori per $x = \pm 1$

$$P_n(1) = 1, \quad P_n(-1) = (-1)^n. \quad (11.2.5)$$

Equazione differenziale per i polinomi di Legendre

I polinomi di Legendre soddisfano la seguente equazione differenziale (di forma ipergeometrica)

$$(1 - x^2)u''(x) - 2x u'(x) + n(n+1)u(x) = 0. \quad (11.2.6)$$

Si noti che, come per i polinomi di Jacobi, le singolarità dell'equazione differenziale sono poste in $x = -1$, $x = 1$ e $x = \infty$. Lo studio della soluzione di questa equazione ottenuta tramite la tecnica di Frobenius attorno al punto $z = 0$ è stato discusso nell'esempio 8.2.

Proprietà di ortogonalità

I polinomi di Legendre costituiscono un sistema ortogonale completo sul segmento $[-1, 1]$ con la norma L^2 . Il teorema 11.2 diventa in questo caso

$$\int_{-1}^1 P_n(x) P_m(x) dx = \frac{2}{2n+1} \delta_{nm}. \quad (11.2.7)$$

Da questa proprietà segue che una funzione $f \in L^2[-1, 1]$ può essere decomposta come somma di polinomi di Legendre, ovvero

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n P_n(x), \quad (11.2.8)$$

con

$$c_n = \frac{2n+1}{2} \int_{-1}^1 f(x) P_n(x) dx. \quad (11.2.9)$$

Relazione di ricorrenza

I polinomi di Legendre soddisfano la relazione di ricorrenza (si veda il teorema 11.3)

$$(n+1) P_{n+1} = (2n+1) x P_n(x) - n P_{n-1}(x). \quad (11.2.10)$$

Dimostrazione. Partiamo da una relazione del tipo

$$P_{n+1}(x) - a_n x P_n(x) = \sum_{k=0}^n b_k P_k(x), \quad (11.2.11)$$

in cui abbiamo scelto a_n in modo da cancellare il termine x^{n+1} di $P_{n+1}(x)$. In questo modo l'espressione a primo membro può chiaramente essere espansa usando i polinomi $P_k(x)$ con $k \leq n$. Come conseguenza delle proprietà di simmetria dei polinomi per $x \rightarrow -x$, si ottiene immediatamente $b_n = 0$. Se inoltre utilizziamo le proprietà di ortogonalità, proiettando entrambi i membri su $P_s(x)$ per $s \leq n-1$, notiamo che il membro di sinistra è nullo per $s \neq n-1$, quindi $b_k = 0$ per $k \leq n-2$.⁴ Otteniamo quindi una relazione del tipo

$$P_{n+1}(x) - a_n x P_n(x) = b_{n-1} P_{n-1}(x). \quad (11.2.12)$$

⁴Per vedere che i termini a sinistra non danno contributo, si noti che $x P_s(x)$ è un polinomio di grado $s+1$, quindi può avere proiezione non nulla su $P_n(x)$ solo se $s \geq n-1$.

Il coefficiente a_n può essere determinato imponendo la cancellazione del termine x^{n+1} , ovvero, dalla (11.2.3),

$$a_n = \frac{(2n+2)!}{2^{n+1}((n+1)!)^2} \left(\frac{(2n)!}{2^n(n!)^2} \right)^{-1} = \frac{2n+1}{n+1}. \quad (11.2.13)$$

Il coefficiente b_{n-1} può essere determinato valutando l'equazione (11.2.12) per $x = 1$,

$$b_{n-1} = 1 - a_n = -\frac{n}{n+1}. \quad (11.2.14)$$

Questi risultati dimostrano la tesi del teorema. \square

Un'altra interessante relazione lega le derivate dei polinomi di Legendre, ovvero

$$n P_n + \frac{d}{dx} P_{n-1} - x \frac{d}{dx} P_n = 0. \quad (11.2.15)$$

Dimostrazione. Questa relazione può essere dimostrata utilizzando la formula di Rodrigues e sfruttando l'identità

$$x \frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}} = \frac{d^n}{dx^n} \left(x \frac{d}{dx} - n \right), \quad (11.2.16)$$

per riscrivere in modo opportuno il termine $x P'_n$. \square

A partire dalle equazioni (11.2.10) e (11.2.15) si ottiene un'ulteriore relazione utile per l'integrazione delle funzioni di Legendre

$$(2n+1)P_n = \frac{d}{dx} (P_{n+1} - P_{n-1}). \quad (11.2.17)$$

Funzione generatrice

Teorema 11.4. I polinomi di Legendre possono essere definiti come i coefficienti dell'espansione in potenze di t della funzione generatrice

$$\frac{1}{\sqrt{1-2xt+t^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)t^n. \quad (11.2.18)$$

Dimostrazione. Calcolando la derivata della formula (11.2.18) otteniamo

$$\frac{x-t}{\sqrt{1-2xt+t^2}} = (1-2xt+t^2) \sum_{n=1}^{\infty} n P_n(x) t^{n-1}. \quad (11.2.19)$$

Sfruttando di nuovo l'equazione (11.2.18) per riscrivere il termine di sinistra, si ha

$$(x-t) \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x) t^n = (1-2xt+t^2) \sum_{n=1}^{\infty} n P_n(x) t^{n-1}. \quad (11.2.20)$$

Identificando i termini con uguale potenza di t si ottiene infine

$$(n+1)P_{n+1}(x) = (2n+1)xP_n(x) - nP_{n-1}(x), \quad (11.2.21)$$

che coincide con le relazioni di ricorrenza per i polinomi di Legendre (11.2.10). Inoltre dalle equazioni (11.2.18) e (11.2.19) si ottiene

$$P_0(x) = 1, \quad P_1(x) = x, \quad (11.2.22)$$

che coincidono con le espressioni dei primi due polinomi di Legendre, dimostrando la tesi. \square

Il legame dei polinomi di Legendre con la funzione generatrice è molto utile in fisica per ottenere un'espansione in serie del potenziale Newtoniano di una massa (o carica) puntiforme in tre dimensioni. Infatti

$$\frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} = \frac{1}{\sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr' \cos \theta}} = \frac{1}{r} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{r'}{r}\right)^k P_k(\cos \theta), \quad (11.2.23)$$

dove $r = |\vec{x}|$, $r' = |\vec{x}'|$ e θ è l'angolo tra i due vettori. L'espansione in polinomi di Legendre può essere utile, per esempio, per integrare il potenziale su una distribuzione continua di massa (o carica).

11.3 Esercizi

Esercizio 11.1. Si dimostri che i polinomi di Legendre soddisfano le seguenti relazioni

$$P_{2m}(0) = \frac{(-1)^m}{4^m} \binom{2m}{m} = \frac{(-1)^m}{4^m} \frac{(2m)!}{(m!)^2}, \quad (11.3.1)$$

$$P_{2m+1}(0) = 0. \quad (11.3.2)$$

Esercizio 11.2. Si sviluppi la funzione

$$f(x) = \begin{cases} 1 & 0 < x < 1 \\ -1 & -1 < x < 0 \end{cases} \quad (11.3.3)$$

in serie di polinomi di Legendre. (Suggerimento: si sfrutti la relazione (11.2.17) ed il risultato dell'esercizio 11.1.)

Esercizio 11.3 (Formula esplicita per i polinomi di Jacobi). Si dimostri che i polinomi di Jacobi ammettono la seguente rappresentazione esplicita

$$P_n^{(\alpha, \beta)}(z) = \frac{\Gamma(\alpha + n + 1)}{n! \Gamma(\alpha + \beta + n + 1)} \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n}{k} \frac{\Gamma(\alpha + \beta + n + k + 1)}{\Gamma(\alpha + k + 1)} \left(\frac{z-1}{2}\right)^k. \quad (11.3.4)$$

Esercizio 11.4 (Formula esplicita alternativa per i polinomi di Jacobi). Si dimostri che i polinomi di Jacobi per x reale ammettono la seguente rappresentazione esplicita

$$P_n^{(\alpha, \beta)}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n+\alpha}{n-k} \binom{n+\beta}{k} \left(\frac{x-1}{2}\right)^k \left(\frac{x+1}{2}\right)^{n-k}, \quad (11.3.5)$$

dove

$$\binom{z}{n} = \begin{cases} \frac{\Gamma(z+1)}{\Gamma(n+1)\Gamma(z-n+1)} & n \geq 0 \\ 0 & n < 0 \end{cases}. \quad (11.3.6)$$

(Suggerimento: si sfrutti la formula di Rodrigues.)

Esercizio 11.5. Si dimostri la formula esplicita per i polinomi di Legendre data in equazione (11.2.3).

Esercizio* 11.6 (Polinomi di Zernike). I *polinomi di Zernike* forniscono un insieme di funzioni ortogonali sul disco unitario. Essi sono definiti come

$$\begin{aligned} Z_n^m(\rho, \varphi) &= R_n^m(\rho) \cos(m\varphi) \\ Z_n^{-m}(\rho, \varphi) &= R_n^m(\rho) \sin(m\varphi) \end{aligned} \quad (11.3.7)$$

con m ed n interi non negativi tali che $n \geq m$. La variabile ρ rappresenta la distanza radiale, mentre φ è l'angolo azimutale. I polinomi $R_n^m(\rho)$ sono non nulli solo per $n-m$ intero pari. In questo caso essi sono definiti da

$$R_n^m(\rho) = \sum_{k=0}^{\frac{n-m}{2}} \frac{(-1)^k (n-k)!}{k! \left(\frac{n+m}{2} - k\right)! \left(\frac{n-m}{2} - k\right)!} \rho^{n-2k}. \quad (11.3.8)$$

- i) Si dimostri che i polinomi R_n^m possono essere espressi in termini della serie ipergeometrica come

$$R_n^m(\rho) = (-1)^{\frac{n-m}{2}} \binom{\frac{n+m}{2}}{m} \rho^m {}_2F_1 \left(1 + \frac{n+m}{2}, \frac{m-n}{2}; 1+m; \rho^2 \right). \quad (11.3.9)$$

- ii) Si riscrivano i polinomi R_n^m in termini dei polinomi di Jacobi, verificando la formula

$$R_n^m(\rho) = (-1)^{\frac{n-m}{2}} \rho^m P_{\frac{n-m}{2}}^{(m,0)}(1-2\rho^2). \quad (11.3.10)$$

- iii) Si dimostri che i polinomi Z_n^m verificano la seguente condizione di ortogonalità sul disco unitario

$$\int Z_n^m(\rho, \varphi) Z_{n'}^{m'}(\rho, \varphi) d^2r = \frac{\epsilon_m \pi}{2n+2} \delta_{n,n'} \delta_{m,m'}, \quad (11.3.11)$$

dove $d^2r = \rho d\rho d\varphi$, l'integrazione è fatta sul disco unitario ($0 \leq \rho \leq 1$ e $0 \leq \varphi < 2\pi$) e ϵ_m è il *fattore di Neumann*

$$\epsilon_m = \begin{cases} 2 & m = 0 \\ 1 & m \neq 0 \end{cases}. \quad (11.3.12)$$

(Suggerimento: si utilizzi la proprietà di ortogonalità dei polinomi di Jacobi per dimostrare l'ortogonalità dei polinomi $R_n^m(\rho)$ rispetto all'integrazione in $\rho d\rho$.)

Esercizio 11.7 (L'equazione di Legendre associata). Si consideri la seguente equazione differenziale, detta *equazione di Legendre associata*,

$$(1 - z^2)u''(z) - 2zu'(z) + \left(\nu(\nu + 1) - \frac{\mu^2}{1 - z^2}\right)u(z) = 0. \quad (11.3.13)$$

- i) Si dimostri che due sue soluzioni indipendenti sono date dalle *funzioni di Legendre di prima e seconda specie*, ovvero

$$P_\nu^\mu(z) = \frac{1}{\Gamma(1 - \mu)} \left(\frac{1 + z}{1 - z}\right)^{\mu/2} {}_2F_1(-\nu, \nu + 1; 1 - \mu; (1 - z)/2), \quad (11.3.14)$$

$$Q_\nu^\mu(z) = \frac{\sqrt{\pi} \Gamma(\nu + \mu + 1)}{2^{\nu+1} \Gamma(\nu + 3/2)} \frac{1}{z^{\nu+\mu+1}} (1 - z^2)^{\mu/2} {}_2F_1\left(\frac{\nu + \mu + 1}{2}, \frac{\nu + \mu + 2}{2}; \nu + \frac{3}{2}; \frac{1}{z^2}\right). \quad (11.3.15)$$

- ii) Si dimostri che $P_\nu^\mu(z)$ con ν e μ interi tali che $\nu \geq 0$ e $-\nu \leq \mu \leq \nu$ si riducono a polinomi.
- iii) Si verifichi che le funzioni di Legendre di prima specie con $m = 0$ coincidono con i polinomi di Legendre, ovvero $P_l^0(z) = P_l(z)$. (Suggerimento: si ricordi che i polinomi di Jacobi possono essere riscritti come funzioni ipergeometriche.)
- iv) Si mostri che la ridefinizione

$$u(z) = (1 - z^2)^{\mu/2} w(z) \quad (11.3.16)$$

porta l'equazione differenziale nella forma

$$(1 - z^2)w''(z) - 2z(\mu + 1)w'(z) + (\nu(\nu + 1) - \mu(\mu + 1))w(z) = 0. \quad (11.3.17)$$

(Suggerimento: si ricavi il P -simbolo per l'equazione differenziale e si sfruttino le sue proprietà sotto trasformazioni conformi e ridefinizioni degli indici. Si usi inoltre una ridefinizione quadratica della variabile indipendente z .)

Esercizio 11.8 (I polinomi di Legendre associati). Definiamo i *polinomi di Legendre associati* tramite la relazione

$$P_l^m(z) = (-1)^m (1 - z^2)^{m/2} \frac{d^m}{dz^m} P_l(z) = \frac{(-1)^m}{2^l l!} (1 - z^2)^{m/2} \frac{d^{l+m}}{dz^{l+m}} (z^2 - 1)^l, \quad (11.3.18)$$

valida per l ed m interi, tali che $l \geq 0$ e $-l \leq m \leq l$. Si noti che la prima relazione nell'equazione precedente è valida solo per $m \geq 0$, mentre la seconda è valida per tutti i valori di m .

- i) Si dimostri che la derivata m -esima del polinomio di Legendre $P_l(z)$, con $m \leq l$, soddisfa l'equazione differenziale (11.3.17) con $\nu = l$ e $\mu = m$. (Suggerimento: si calcoli la derivata m -esima dell'equazione differenziale (11.2.6) che definisce i polinomi di Legendre.)

ii) Si dimostri la proprietà di simmetria

$$P_l^m(-z) = (-1)^{l+m} P_l^m(z). \quad (11.3.19)$$

iii) Si dimostri la relazione di ortogonalità

$$\int_{-1}^{+1} P_k^m(z) P_l^m(z) dz = \frac{2(l+m)!}{(2l+1)(l-m)!} \delta_{k,l}. \quad (11.3.20)$$

(Suggerimento: si proceda come nella dimostrazione del teorema 11.2. Il seguente risultato

$$\int_{-1}^{+1} (z^2 - 1)^l dz = (-1)^l \sqrt{\pi} \frac{\Gamma(l+1)}{\Gamma(l+3/2)} \quad (11.3.21)$$

può essere utile per calcolare l'integrale nel caso $k = l$.)

iv) Si verifichi la relazione di ortogonalità nella variabile $x = \cos \theta$

$$\int_0^\pi P_k^m(\cos \theta) P_l^m(\cos \theta) \sin \theta d\theta = \frac{2(l+m)!}{(2l+1)(l-m)!} \delta_{k,l}. \quad (11.3.22)$$

v) Si dimostri la seguente relazione valida per $0 \leq m \leq l$

$$P_l^{-m}(z) = (-1)^m \frac{(l-m)!}{(l+m)!} P_l^m(z). \quad (11.3.23)$$

(Suggerimento: si noti che P_l^m e P_l^{-m} soddisfano la stessa equazione differenziale. Per determinare la normalizzazione si sfrutti il risultato ottenuto al punto iii) oppure si confrontino le espressioni date dalla definizione (11.3.18).)

Esercizio 11.9 (Le armoniche sferiche). Consideriamo l'equazione di Laplace in coordinate sferiche in tre dimensioni

$$\Delta \Psi(r, \theta, \phi) = 0, \quad (11.3.24)$$

dove l'operatore di Laplace è

$$\Delta = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \right). \quad (11.3.25)$$

Cerchiamo una soluzione della forma

$$\Psi(r, \theta, \phi) = \frac{R(r)}{r} \Theta(\theta) \Phi(\phi). \quad (11.3.26)$$

i) Si verifichi che l'equazione si può riscrivere come

$$\frac{r^2}{R} R'' = -\frac{\Theta'' + \cot \theta \Theta'}{\Theta} - \frac{\Phi''}{\Phi \sin^2 \theta}. \quad (11.3.27)$$

Essendo i due membri dipendenti da variabili diverse, concludiamo che entrambi devono essere uguali ad una stessa costante che indichiamo con $\nu(\nu+1)$.

ii) Si verifichi che per la parte angolare si ottiene la seguente equazione

$$\frac{\sin^2 \theta}{\Theta} (\Theta'' + \cot \theta \Theta') + \nu(\nu + 1) \sin^2 \theta = -\frac{\Phi''}{\Phi}. \quad (11.3.28)$$

Anche questa equazione è separabile ed i due membri dipendono da variabili distinte. Detto μ^2 il valore costante dei due membri otteniamo le equazioni

$$\Phi'' + \mu^2 \Phi = 0, \quad (11.3.29)$$

$$\Theta'' \sin^2 \theta + \Theta' \sin \theta \cos \theta + [\nu(\nu + 1) \sin^2 \theta - \mu^2] \Theta = 0. \quad (11.3.30)$$

iii) Si risolva l'equazione per Φ . Imponendo le condizioni di periodicità $\Phi(\phi + 2\pi) = \Phi(\phi)$ si verifichi che le soluzioni sono

$$\Phi(\phi) = \exp(\pm i\mu\phi) \quad (11.3.31)$$

con μ intero.

iv) Tramite il cambio di variabili $z = \cos \theta$ si dimostri che Θ soddisfa l'equazione di Legendre associata (11.3.13). Per quali valori di ν e μ l'equazione ammette soluzioni polinomiali regolari? Determinare esplicitamente tali soluzioni.

v) Utilizzando i risultati ottenuti nei punti precedenti possiamo ottenere le armoniche sferiche normalizzate

$$Y_{l,m}(\theta, \phi) = \sqrt{\frac{(2l+1)(l-m)!}{4\pi(l+m)!}} P_l^m(\cos \theta) e^{im\phi}, \quad (11.3.32)$$

con l e m interi tali che $l \geq 0$ e $-l \leq m \leq l$. Le armoniche sferiche costituiscono una base di soluzioni per la parte angolare dell'equazione di Laplace. Si dimostri che esse sono ortonormali quando integrate sulla sfera unitaria, ovvero

$$\int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi d\theta \sin \theta Y_{l,m}(\theta) Y_{k,n}^*(\theta, \phi) = \delta_{k,l} \delta_{m,n}. \quad (11.3.33)$$

(Suggerimento: si sfruttino le proprietà dei polinomi di Legendre associati discusse nell'esercizio 11.8.)

L'EQUAZIONE IPERGEOMETRICA CONFLUENTE

In questo capitolo studieremo il fenomeno della confluenza per l'equazione ipergeometrica. In particolare vedremo cosa succede quando due dei suoi punti singolari vengono portati a coincidere. Vedremo che in questo limite è possibile ottenere due differenti classi di equazioni differenziali che presentano un punto singolare irregolare.

Importanti classi di funzioni che soddisfano l'equazione ipergeometrica confluyente sono le funzioni di Bessel che hanno molte applicazioni in fisica teorica. Casi speciali delle funzioni ipergeometriche confluenti sono i polinomi di Laguerre e di Hermite.

12.1 Ipergeometrica confluyente del primo tipo

La confluenza dell'equazione ipergeometrica è ottenuta spostando uno dei suoi punti singolari (convenzionalmente il punto $z = 1$) in modo che tenda all'infinito. Per ottenere un risultato non banale, questo limite deve essere effettuato riscaldando contemporaneamente gli indici a e/o b . Il primo tipo di confluenza si ottiene riscaldando un solo indice in modo che esso tenda all'infinito. Questa procedura può essere effettuata utilizzando un cambio di variabili $\zeta = \beta z$, che trasporta il punto $z = 1$ nel punto $\zeta = \beta$ e ponendo uno degli indici pari a β .¹

In termini della nuova variabile ζ l'equazione differenziale in forma standard diviene

$$u''(\zeta) + \left[\frac{\beta c}{\zeta(\beta - \zeta)} - \frac{a + \beta + 1}{\beta - \zeta} \right] u'(\zeta) - \frac{a\beta}{\zeta(\beta - \zeta)} u(\zeta) = 0, \quad (12.1.1)$$

con punti singolari in $\zeta = (0, \beta, \infty)$. Nel limite $\beta \rightarrow \infty$ si ottiene l'equazione

$$u''(\zeta) + \left(\frac{c}{\zeta} - 1 \right) u'(\zeta) - \frac{a}{\zeta} u(\zeta) = 0, \quad (12.1.2)$$

ovvero, ridefinendo per comodità $\zeta \rightarrow z$,

$$z u''(z) + (c - z) u'(z) - a u(z) = 0. \quad (12.1.3)$$

¹In generale si può porre uno degli indici pari a $k\beta$ con k una costante arbitraria non nulla. Tuttavia questa ridefinizione è equivalente ad un riscaldamento delle coordinate, quindi non altera le proprietà dell'equazione differenziale.

Tale equazione è detta *equazione ipergeometrica confluyente (del primo tipo)* o *equazione di Kummer*. Per costruzione, l'equazione ipergeometrica confluyente possiede un punto singolare regolare in $z = 0$, con indici 0 e $1 - c$. Il punto all'infinito, invece, è un punto singolare irregolare, come è facile verificare.

Una soluzione dell'equazione ipergeometrica confluyente può essere ottenuta come limite della serie ipergeometrica, ovvero

$$\lim_{\beta \rightarrow \infty} {}_2F_1\left(a, \beta; c; \frac{z}{\beta}\right) = \lim_{\beta \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a)_k (\beta)_k}{(c)_k} \frac{z^k}{\beta^k k!}. \quad (12.1.4)$$

Nel limite $\beta \rightarrow \infty$ si ha che il simbolo di Pochhammer $(\beta)_k$ tende a β^k , quindi si ottiene la soluzione

$$u_1(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a)_k}{(c)_k} \frac{z^k}{k!} = {}_1F_1(a; c; z). \quad (12.1.5)$$

La funzione ${}_1F_1(a; c; z)$ è detta *funzione ipergeometrica confluyente (del primo tipo)* o *funzione di Kummer*.

La funzione ipergeometrica confluyente soddisfa la proprietà

$${}_1F_1(a; c; 0) = 1, \quad (12.1.6)$$

inoltre la sua espansione in serie converge su tutto il piano complesso.

Analogamente a quanto abbiamo discusso per la funzione ipergeometrica, anche nel caso confluyente una seconda soluzione attorno a $z = 0$, quando c non è un intero, può essere identificata con la seguente espressione

$$u_2(z) = z^{1-c} {}_1F_1(a - c + 1; 2 - c; z). \quad (12.1.7)$$

12.2 Le funzioni di Bessel

Il caso particolare più rilevante dell'equazione ipergeometrica confluyente è costituito dalle funzioni di Bessel, che discuteremo in questa sezione. La trattazione si limiterà agli aspetti più salienti, essendo l'argomento assai vasto e complesso.

Partiamo dall'equazione ipergeometrica confluyente del primo tipo con $c = 2a = 2\nu + 1$, ovvero

$$z u'' + (2\nu + 1 - z)u' - (\nu + 1/2)u = 0. \quad (12.2.1)$$

Ridefinendo la soluzione nel modo seguente

$$u(z) = e^{z/2} z^{-\nu} w(z), \quad (12.2.2)$$

si ottiene che $w(z)$ soddisfa l'equazione

$$z w'' + w' - \left(\frac{z}{4} + \frac{\nu^2}{z}\right) w = 0. \quad (12.2.3)$$

Riscalando la variabile indipendente, $z \rightarrow 2z$, si giunge all'*equazione di Bessel modificata*

$$z w'' + w' - \left(z + \frac{\nu^2}{z}\right) w = 0, \quad (12.2.4)$$

e, infine, ponendo $z \rightarrow iz$, si ottiene l'equazione di Bessel

$$z w'' + w' + \left(z - \frac{\nu^2}{z}\right) w = 0. \quad (12.2.5)$$

Una delle soluzioni dell'equazione di Bessel può quindi essere legata alla funzione ${}_1F_1(\nu + 1/2; 2\nu + 1; 2iz)$. Scegliendo la normalizzazione universalmente utilizzata in letteratura, si definisce la *funzione di Bessel di prima specie* di ordine ν l'espressione

$$J_\nu(z) = \frac{(z/2)^\nu}{\Gamma(\nu + 1)} e^{-iz} {}_1F_1(\nu + 1/2; 2\nu + 1; 2iz). \quad (12.2.6)$$

Se ν non è intero, una seconda soluzione dell'equazione di Bessel è data da $J_{-\nu}(z)$. Infatti l'equazione è invariante per $\nu \rightarrow -\nu$, inoltre $J_\nu(z)$ e $J_{-\nu}(z)$ hanno un diverso andamento vicino all'origine.²

Espansione in serie

Ricaviamo ora l'espansione in serie per le funzioni di Bessel. Tale espansione può essere ricavata combinando l'espansione dell'esponenziale con la serie ipergeometrica. Tuttavia è più facile ricavarla direttamente. Gli esponenti indiciali attorno all'origine sono $\pm\nu$, usiamo quindi l'Ansatz

$$w(z) = z^\nu \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n. \quad (12.2.7)$$

Sostituendo nell'equazione di Bessel otteniamo

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+\nu)(n+\nu-1) c_n z^{n+\nu} + \sum_{n=0}^{\infty} (n+\nu) c_n z^{n+\nu} + \sum_{n=2}^{\infty} c_{n-2} z^{n+\nu} - \sum_{n=0}^{\infty} \nu^2 c_n z^{n+\nu} = 0. \quad (12.2.8)$$

Si verifica facilmente che il coefficiente c_0 è arbitrario, mentre $c_1 = 0$. Per i coefficienti con $n \geq 2$ valgono le relazioni di ricorrenza

$$c_{n+2} = \frac{-1}{(n+2)(n+2+\nu)} c_n, \quad (12.2.9)$$

i coefficienti dispari sono pertanto nulli, mentre per i pari si ottiene

$$c_{2n} = \frac{(-1)^n \Gamma(\nu + 1)}{2^{2n} n! \Gamma(\nu + n + 1)} c_0. \quad (12.2.10)$$

La normalizzazione delle funzioni di Bessel corrisponde alla scelta $c_0 = 1/(2^\nu \Gamma(\nu + 1))$, che conduce all'espansione in serie

$$J_\nu(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n! \Gamma(n + \nu + 1)} \left(\frac{z}{2}\right)^{2n+\nu}. \quad (12.2.11)$$

²Per la determinazione di una seconda soluzione nel caso in cui ν sia un intero si veda ad esempio [3].

Relazioni tra funzioni di Bessel contigue

La derivata della funzione di Bessel può essere riscritta come combinazione delle funzioni contigue come

$$2 \frac{d}{dz} J_\nu(z) = J_{\nu-1}(z) - J_{\nu+1}(z). \quad (12.2.12)$$

Inoltre vale la seguente relazione

$$2 \frac{\nu}{z} J_\nu(z) = J_{\nu-1}(z) + J_{\nu+1}(z). \quad (12.2.13)$$

La dimostrazione di queste identità è proposta come esercizio (si veda l'esercizio 12.12).

12.3 I polinomi di Laguerre

Se $a = -n$, con n intero non negativo, la serie ipergeometrica confluyente ${}_1F_1(a; c; z)$ si tronca ad un polinomio di grado n . Tali polinomi sono proporzionali ai *polinomi di Laguerre generalizzati* (o *polinomi di Laguerre associati*), che possono essere definiti tramite la formula di Rodrigues

$$L_n^{(\alpha)}(x) = \frac{x^{-\alpha} e^x}{n!} \frac{d^n}{dx^n} (e^{-x} x^{n+\alpha}) = \frac{x^{-\alpha}}{n!} \left(\frac{d}{dx} - 1 \right)^n x^{n+\alpha}. \quad (12.3.1)$$

Per determinare un'espressione esplicita osserviamo che

$$\begin{aligned} \frac{d^n}{dx^n} (e^{-x} x^{n+\alpha}) &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \left(\frac{d^k}{dx^k} x^{n+\alpha} \right) \left(\frac{d^{n-k}}{dx^{n-k}} e^{-x} \right) \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{\Gamma(n-k+\alpha+1)} x^{n+\alpha-k} (-1)^{n-k} e^{-x}. \end{aligned} \quad (12.3.2)$$

Da questa espressione otteniamo

$$L_n^{(\alpha)}(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{\Gamma(n-k+\alpha+1)} \frac{(-x)^{n-k}}{n!}, \quad (12.3.3)$$

e, infine, scambiando k con $n-k$

$$L_n^{(\alpha)}(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n+\alpha}{n-k} \frac{(-x)^k}{k!}. \quad (12.3.4)$$

Confrontando questo risultato con l'espressione esplicita per la serie ipergeometrica confluyente, otteniamo inoltre

$$L_n^{(\alpha)}(x) = \binom{n+\alpha}{n} {}_1F_1(-n; \alpha+1; x). \quad (12.3.5)$$

Proprietà di ortogonalità

Teorema 12.1. I polinomi di Laguerre generalizzati (per $\alpha > -1$) sono ortogonali sulla semiretta reale positiva rispetto al peso $w(x) = e^{-x}x^\alpha$, ovvero

$$\mathcal{I}_{n,m} = \int_0^\infty dx e^{-x} x^\alpha L_n^{(\alpha)}(x) L_m^{(\alpha)}(x) = \frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{n!} \delta_{nm}. \quad (12.3.6)$$

Dimostrazione. Supponiamo che $m > n$, usando la formula di Rodrigues otteniamo

$$\mathcal{I}_{n,m} = \frac{1}{m!} \int_0^\infty dx L_n^{(\alpha)}(x) \frac{d^m}{dx^m} (e^{-x} x^{m+\alpha}) = \frac{(-1)^m}{m!} \int_0^\infty dx e^{-x} x^{m+\alpha} \frac{d^m}{dx^m} L_n^{(\alpha)}(x), \quad (12.3.7)$$

in quanto i termini al bordo si annullano per il fattore $e^{-x}x^{m+\alpha}$. Chiaramente, essendo $L_n^{(\alpha)}$ un polinomio di grado n , derivando $m > n$ volte si ottiene zero. Quindi $\mathcal{I}_{n,m} = 0$ per $n \neq m$. Nel caso $n = m$ abbiamo che

$$\frac{d^m}{dx^m} L_m^{(\alpha)} = (-1)^m, \quad (12.3.8)$$

come si può verificare dall'espressione esplicita, e quindi dall'equazione (12.3.7) si ottiene

$$\mathcal{I}_{m,m} = \frac{1}{m!} \int_0^\infty dx e^{-x} x^{m+\alpha} = \frac{\Gamma(m+\alpha+1)}{m!}, \quad (12.3.9)$$

che completa la dimostrazione della tesi. \square

12.3.1 I polinomi di Hermite

I *polinomi di Hermite* H_n costituiscono un caso speciale dei polinomi di Laguerre. Essi sono definiti da

$$\begin{cases} H_{2m}(x) = (-4)^m m! L_m^{(-1/2)}(x^2) \\ H_{2m+1}(x) = 2(-4)^m m! x L_m^{(1/2)}(x^2) \end{cases} \quad (12.3.10)$$

con $m \in \mathbb{N}$. L'argomento dei polinomi di Hermite ha tipicamente valori su tutto l'asse reale.

I polinomi di Hermite soddisfano la seguente equazione differenziale

$$H_n''(x) - 2xH_n'(x) + 2nH_n(x) = 0. \quad (12.3.11)$$

Formule esplicite. I polinomi di Hermite possono essere derivati dalla seguente formula di Rodrigues

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2} = e^{x^2/2} \left(x - \frac{d}{dx} \right)^n e^{-x^2/2} = \left(2x - \frac{d}{dx} \right)^n \cdot 1. \quad (12.3.12)$$

Inoltre essi sono dati esplicitamente dalla formula

$$H_n(x) = n! \sum_{m=1}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \frac{(-1)^m}{m! (n-2m)!} (2x)^{n-2m}, \quad (12.3.13)$$

dove $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ indica il più grande intero che sia minore o uguale a $n/2$.

Proprietà di ortogonalità. I polinomi di Hermite sono ortogonali sulla retta reale rispetto al peso $w(x) = e^{-x^2}$, ovvero

$$\int_{-\infty}^{+\infty} H_m(x) H_n(x) e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi} 2^n n! \delta_{nm}. \quad (12.3.14)$$

Relazione tra polinomi di Hermite. Vale la seguente relazione tra i polinomi con indici contigui

$$H_{n+1}(x) = 2x H_n(x) - 2n H_{n-1}(x). \quad (12.3.15)$$

Una semplice formula vale inoltre per le derivate di un polinomio di Hermite

$$H_n^{(m)}(x) = 2^m \frac{n!}{(n-m)!} H_{n-m}(x). \quad (12.3.16)$$

12.4 Ipergeometrica confluyente del secondo tipo

Il secondo tipo di confluenza per l'equazione ipergeometrica si ottiene riscaldando i due indici a e b dell'equazione e facendoli tendere all'infinito insieme ad uno dei punti singolari. Utilizziamo nuovamente il cambio di variabili $\zeta = \beta z$, che sposta il punto singolare $z = 1$ in $\zeta = \beta$. Inoltre fissiamo gli indici dell'equazione ipergeometrica ai valori $a = b = \sqrt{\beta}$. L'equazione ipergeometrica diventa

$$u''(\zeta) + \left[\frac{\beta c}{\zeta(\beta - \zeta)} - \frac{2\sqrt{\beta} + 1}{\beta - \zeta} \right] u'(\zeta) - \frac{\beta}{\zeta(\beta - \zeta)} u(\zeta) = 0, \quad (12.4.1)$$

che, nel limite $\beta \rightarrow \infty$ diventa

$$u''(\zeta) + \frac{c}{\zeta} u'(\zeta) - \frac{1}{\zeta} u(\zeta) = 0. \quad (12.4.2)$$

Ridefinendo $\zeta \rightarrow z$, otteniamo la forma usuale dell'*equazione ipergeometrica confluyente del secondo tipo*

$$z u''(z) + c u'(z) - u(z) = 0. \quad (12.4.3)$$

Si può verificare facilmente che la serie ipergeometrica ${}_2F_1(\sqrt{\beta}, \sqrt{\beta}; c; z/\beta)$ converge a

$${}_0F_1(; c; z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(c)_k} \frac{z^k}{k!}. \quad (12.4.4)$$

Questa serie converge su tutto il piano complesso, inoltre vale ${}_0F_1(; c; 0) = 1$.

Quando c non è un intero, una seconda soluzione attorno a $z = 0$ è data da

$$z^{1-c} {}_0F_1(; 2 - c; z). \quad (12.4.5)$$

La funzione ipergeometrica confluyente del secondo tipo è legata strettamente alle funzioni di Bessel, infatti vale la seguente relazione

$$J_\nu(x) = \frac{(x/2)^\nu}{\Gamma(\nu + 1)} {}_0F_1(; \nu + 1; -x^2/4). \quad (12.4.6)$$

Questa relazione può essere verificata facilmente utilizzando la relazione presentata nell'esercizio 12.5, oppure ricorrendo all'espansione in serie per le funzioni di Bessel.

12.5 Applicazioni alla meccanica quantistica

In questa sezione discuteremo alcune applicazioni delle equazioni ipergeometriche confluenti al problema della determinazione delle autofunzioni dell'equazione di Schrödinger per una particella soggetta ad un potenziale. Considereremo due classi di problemi. Il primo riguarda lo studio dell'oscillatore armonico unidimensionale, le cui autofunzioni sono esprimibili in termini dei polinomi di Hermite. Il secondo caso riguarda i potenziali a simmetria sferica in tre dimensioni, che invece sono riconducibili all'equazione di Bessel.

12.5.1 L'oscillatore armonico unidimensionale

Consideriamo il problema della determinazione dei livelli di energia, e delle relative funzioni d'onda, per l'oscillatore armonico unidimensionale in meccanica quantistica. L'equazione di Schrödinger per il sistema è

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 \psi = E\psi. \quad (12.5.1)$$

Definiamo, per convenienza, le due quantità

$$k^2 = \frac{2m}{\hbar} E, \quad \lambda = \frac{m\omega}{\hbar}, \quad (12.5.2)$$

in funzione delle quali l'equazione di Schrödinger può essere riscritta come

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + (k^2 - \lambda^2 x^2)\psi = 0. \quad (12.5.3)$$

Questo tipo di equazione è detta *equazione di Weber*.

Come primo passo effettuiamo un cambio della variabile indipendente, $y = \lambda x^2$, a seguito del quale l'equazione diviene

$$y \frac{d^2\psi}{dy^2} + \frac{1}{2} \frac{d\psi}{dy} + \left(\frac{\kappa}{2} - \frac{1}{4}y \right) \psi = 0, \quad (12.5.4)$$

dove

$$\kappa = \frac{k^2}{2\lambda} = \frac{E}{\hbar\omega}. \quad (12.5.5)$$

Un secondo passo consiste nel ridefinire la funzione d'onda come

$$\psi = e^{-y/2} \varphi(y), \quad (12.5.6)$$

che porta l'equazione nella forma

$$y \frac{d^2\varphi}{dy^2} + \left(\frac{1}{2} - y \right) \frac{d\varphi}{dy} + \left(\frac{\kappa}{2} - \frac{1}{4} \right) \varphi = 0. \quad (12.5.7)$$

Questa equazione coincide con l'equazione ipergeometrica confluyente del primo tipo, la cui soluzione generale è

$$\varphi(y) = A {}_1F_1(a; 1/2; y) + B y^{1/2} {}_1F_1(a + 1/2; 3/2; y), \quad (12.5.8)$$

con A e B costanti arbitrarie e

$$a = -\left(\frac{\kappa}{2} - \frac{1}{4}\right). \quad (12.5.9)$$

Tenendo conto delle ridefinizioni usate, otteniamo la seguente espressione per la funzione d'onda

$$\psi(x) = A e^{-\lambda x^2/2} {}_1F_1(a; 1/2; \lambda x^2) + B e^{-\lambda x^2/2} \sqrt{\lambda} x {}_1F_1(a + 1/2; 3/2; \lambda x^2), \quad (12.5.10)$$

Studiamo ora le proprietà di questa espressione. Il primo termine nell'eq. (12.5.10) è pari rispetto all'origine delle coordinate, mentre il secondo termine è dispari. Si ha inoltre che per $y \rightarrow +\infty$ le funzioni ipergeometriche confluenti, per a generico, hanno l'andamento³

$${}_1F_1(a; 1/2; y) \sim y^{1/2} {}_1F_1(a + 1/2; 3/2; y) \sim e^y y^{a-1/2}. \quad (12.5.11)$$

Per valori particolari di a , tuttavia, queste funzioni si riducono ai polinomi di Hermite (si veda l'esercizio 12.16), ovvero

$$\begin{aligned} {}_1F_1(a; 1/2; y) &\propto H_{-2a}(\sqrt{y}) & a = 0, -1, -2, \dots \\ \sqrt{y} {}_1F_1(a + 1/2; 3/2; y) &\propto H_{-2a}(\sqrt{y}) & a = -1/2, -3/2, -5/2, \dots \end{aligned} \quad (12.5.12)$$

Notiamo che per a generico, la funzione d'onda ψ non è normalizzabile, in quanto il fattore $e^{-\lambda x^2/2}$ non compensa la crescita esponenziale delle funzioni ipergeometriche. Si noti inoltre che, avendo i due termini in eq. (12.5.10) diversa parità, non è mai possibile scegliere A e B in modo da cancellare la crescita esponenziale per $x \rightarrow \pm\infty$.⁴ L'unica possibilità per ottenere una funzione d'onda normalizzabile è che le funzioni ipergeometriche si riducano a dei polinomi.

Come abbiamo visto questo accade per i seguenti valori di a .

i) $a = -m$ con $m \in \mathbb{N}$, che porta alla soluzione

$$\psi_{2m}(x) = N e^{-\lambda x^2/2} {}_1F_1(-m; 1/2; \lambda x^2) = N' e^{-\lambda x^2/2} H_{2m}(\sqrt{\lambda} x). \quad (12.5.13)$$

In questo caso si deve porre $B = 0$ per ottenere una funzione d'onda normalizzabile e la soluzione è *pari* rispetto all'origine. L'energia è data da

$$E = \hbar\omega \left(\frac{1}{2} - 2a\right) = \hbar\omega \left(\frac{1}{2} + 2m\right). \quad (12.5.14)$$

ii) $a = -m - 1/2$ con $m \in \mathbb{N}$, che porta alla soluzione

$$\psi_{2m+1}(x) = N e^{-\lambda x^2/2} \sqrt{\lambda} x {}_1F_1(-m; 3/2; \lambda x^2) = N' e^{-\lambda x^2/2} H_{2m+1}(\sqrt{\lambda} x). \quad (12.5.15)$$

³Non dimostriamo questo fatto. Una prova parziale di questo risultato può essere ottenuta studiando l'andamento all'infinito dei termini della serie ipergeometrica confluyente e verificando che essi tendono a ricostruire la serie esponenziale.

⁴È tuttavia possibile scegliere una opportuna combinazione delle due funzioni in modo da cancellare la crescita o per $x \rightarrow +\infty$ o per $x \rightarrow -\infty$.

In questo caso si deve porre $A = 0$ per ottenere una funzione d'onda normalizzabile e la soluzione è *dispari* rispetto all'origine. L'energia è data da

$$E = \hbar\omega \left(\frac{1}{2} - 2a \right) = \hbar\omega \left(\frac{1}{2} + 2m + 1 \right). \quad (12.5.16)$$

I due risultati possono essere riassunti nel seguente modo

$$E_n = \hbar\omega \left(n + \frac{1}{2} \right), \quad \psi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2^n n!}} \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar} \right)^{1/4} e^{-m\omega x^2/2\hbar} H_n \left(\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} x \right), \quad (12.5.17)$$

con $n \in \mathbb{N}$ e dove abbiamo scelto una opportuna normalizzazione. Queste espressioni riproducono correttamente i livelli di energia dell'oscillatore armonico unidimensionale e le relative funzioni d'onda.

12.5.2 Particella in un potenziale a simmetria sferica

Come seconda applicazione dell'equazione ipergeometrica confluyente, studiamo il caso di una particella in un potenziale a simmetria sferica in tre dimensioni. L'equazione di Schrödinger per un tale sistema fisico è data da

$$-\frac{\hbar^2}{2m_0} \nabla^2 \psi + V(r) \psi = E \psi. \quad (12.5.18)$$

Passando a coordinate sferiche, (r, θ, ϕ) , e riscrivendo la funzione d'onda come

$$\psi = R(r) Y_{lm}(\theta, \phi), \quad (12.5.19)$$

l'equazione di Schrödinger si separa in equazioni indipendenti per la parte radiale $R(r)$ e la parte angolare $Y_{lm}(\theta, \phi)$.

La parte angolare dell'equazione di Schrödinger è data da

$$-\frac{1}{\sin^2 \theta} \left[\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \right) \right] Y_{lm}(\theta, \phi) = l(l+1) Y_{lm}(\theta, \phi), \quad (12.5.20)$$

le cui soluzioni corrispondono alle armoniche sferiche con $l = 0, 1, 2, \dots$ (si veda l'esercizio 11.9). La parte radiale dell'equazione invece diventa

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m_0 r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d}{dr} \right) + \frac{\hbar^2 l(l+1)}{2m_0 r^2} + V(r) \right] R(r) = E R(r). \quad (12.5.21)$$

L'equazione radiale può essere connessa con l'equazione per una particella in una dimensione. Usando l'identità

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} r^2 \frac{d}{dr} = \frac{1}{r} \frac{d^2}{dr^2} r, \quad (12.5.22)$$

e ridefinendo la funzione radiale come $u(r) = rR(r)$ si ottiene

$$-\frac{\hbar^2}{2m_0} \frac{d^2 u}{dr^2} + V_{\text{eff}}(r) u(r) = E u(r), \quad (12.5.23)$$

con un potenziale effettivo

$$V_{\text{eff}}(r) = V(r) + \frac{\hbar^2 l(l+1)}{2m_0 r^2}, \quad (12.5.24)$$

che contiene, oltre al potenziale iniziale, una *barriera centrifuga* collegata al momento angolare.

Particella libera

Consideriamo come primo caso una particella libera, ovvero $V(r) = 0$. Riscriviamo l'equazione in termini della variabile adimensionale

$$\rho = k r \quad \text{con} \quad k = \frac{\sqrt{2m_0 E}}{\hbar} \quad (12.5.25)$$

ponendo $R(r) = \frac{1}{\sqrt{\rho}} w(\rho)$. In questo modo si ottiene

$$\rho^2 \frac{d^2 w}{d\rho^2} + \rho \frac{dw}{d\rho} + \left[\rho^2 - \left(l + \frac{1}{2} \right)^2 \right] w = 0. \quad (12.5.26)$$

Questa equazione coincide con l'equazione di Bessel (12.2.5), la cui soluzione generale è data da

$$w(\rho) = c_1 J_{l+1/2}(\rho) + c_2 J_{-l-1/2}(\rho), \quad (12.5.27)$$

ovvero

$$R(r) = c_1 \frac{1}{\sqrt{kr}} J_{l+1/2}(kr) + c_2 \frac{1}{\sqrt{kr}} J_{-l-1/2}(kr), \quad (12.5.28)$$

La funzione d'onda deve tuttavia essere regolare nell'origine, quindi $w(\rho)$ deve andare a zero (almeno come $\rho^{1/2}$) per $\rho \rightarrow 0$. Intorno all'origine le funzioni di Bessel hanno l'andamento

$$J_{l+1/2}(\rho) \sim \rho^{l+1/2}, \quad J_{-l-1/2}(\rho) \sim \rho^{-l-1/2}, \quad (12.5.29)$$

quindi solo la funzione di Bessel con indice $l + 1/2$ dà una soluzione regolare.

Otteniamo quindi la seguente forma per la funzione d'onda con momento angolare ed energia fissati

$$\psi(r) = j_l(kr) Y_{lm}(\theta, \phi), \quad \text{con} \quad k = \frac{\sqrt{2m_0 E}}{\hbar}, \quad (12.5.30)$$

dove abbiamo fissato la normalizzazione e definito le *funzioni di Bessel sferiche*

$$\begin{cases} j_l(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}} J_{l+1/2}(x) \\ y_l(x) = (-1)^{l+1} \sqrt{\frac{\pi}{2x}} J_{-l-1/2}(x) \end{cases}, \quad (12.5.31)$$

per $l = 0, 1, 2, \dots$. Le funzioni di Bessel sferiche possono essere espresse in termini di funzioni trigonometriche elementari, ovvero

$$\begin{cases} j_l(x) = (-x)^l \left(\frac{1}{x} \frac{d}{dx} \right)^l \frac{\sin x}{x} \\ y_l(x) = -(-x)^l \left(\frac{1}{x} \frac{d}{dx} \right)^l \frac{\cos x}{x} \end{cases}, \quad (12.5.32)$$

queste espressioni possono essere ricavate facilmente a partire dai risultati riportati negli esercizi 12.11 e 12.12.

Buca di potenziale sferica infinita

Nel caso in cui il potenziale abbia valore $V(r) = 0$ per $r < r_0$ e sia infinito al di fuori, si ottiene la buca sferica infinita. Le funzioni d'onda devono essere identicamente nulle per $r \geq r_0$ e regolari nell'origine. L'equazione da risolvere per $r < r_0$ è esattamente uguale a quella del caso di particella libera. Le soluzioni sono quindi date dalle funzioni

$$\psi = N j_l(kr) Y_{lm}(\theta, \phi), \quad (12.5.33)$$

tali che $j_l(kr_0) = 0$. Indicando con $u_{l,n}$ l' n -esimo zero della funzione di Bessel sferica $j_l(x)$ abbiamo che i livelli di energia (se veda l'equazione (12.5.25)) sono dati da

$$E_{nl} = \frac{u_{l,n}^2 \hbar^2}{2m_0 r_0^2}. \quad (12.5.34)$$

Nel caso particolare con momento angolare nullo, $l = 0$, la funzione di Bessel sferica j_0 ha l'espressione

$$j_0(x) = \frac{\sin x}{x}, \quad (12.5.35)$$

quindi i suoi zeri sono dati da $u_{0,n} = n\pi$. I livelli energetici in questo caso sono dunque

$$E_{n0} = \frac{(n\pi)^2 \hbar^2}{2m_0 r_0^2}. \quad (12.5.36)$$

Stati legati degli atomi idrogenoidi

Consideriamo ora il caso degli atomi idrogenoidi in cui il potenziale per l'elettrone è dato da

$$V(r) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Ze^2}{r} \quad (12.5.37)$$

Restringiamo la nostra analisi alla determinazione degli stati legati, per i quali $E < 0$.

Come per il caso generale separiamo la parte angolare e quella radiale della funzione d'onda. L'equazione (12.5.23) per la parte radiale, tramite il cambio di variabile⁵

$$x = \frac{2}{\hbar} \sqrt{-2Em_e} r, \quad (12.5.38)$$

diviene

$$\left[\frac{d^2}{dx^2} - \frac{l(l+1)}{x^2} + \frac{\nu}{x} - \frac{1}{4} \right] u_l = 0, \quad (12.5.39)$$

dove abbiamo definito

$$\nu = \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 \hbar} \sqrt{-\frac{m_e}{2E}}. \quad (12.5.40)$$

Ridefiniamo ora la funzione $u_l(x)$ come

$$u_l(x) = x^{l+1} e^{-x/2} f_l(x). \quad (12.5.41)$$

⁵Invece di usare la notazione m_0 per la massa, per questo caso utilizziamo m_e .

In questo modo

$$\left[x \frac{d^2}{dx^2} + (2l + 2 - x) \frac{d}{dx} + (\nu - l - 1) \right] f_l(x) = 0. \quad (12.5.42)$$

Questa equazione coincide con l'equazione ipergeometrica confluyente del primo tipo con $a = -\nu + l + 1$ e $c = 2l + 2$, la cui soluzione generale è

$$f_l(x) = A {}_1F_1(-\nu + l + 1; 2l + 2; x) + B x^{-2l-1} {}_1F_1(-\nu - l; -2l; x). \quad (12.5.43)$$

La seconda funzione in questa soluzione è singolare nell'origine, quindi si deve porre $B = 0$. Per $x \rightarrow \infty$ la funzione ipergeometrica confluyente per ν generico ha l'andamento

$${}_1F_1(-\nu + l + 1; 2l + 2; x) \sim e^x x^{-1-l-\nu}. \quad (12.5.44)$$

Questo andamento non permette di ottenere una funzione d'onda normalizzabile. Tuttavia, per $\nu = n$ con $n \geq l + 1$ intero, la serie ipergeometrica confluyente si tronca dando un polinomio di Laguerre generalizzato (si veda l'eq. (12.3.5)). In questo caso otteniamo una funzione d'onda normalizzabile.

Otteniamo quindi che i livelli di energia sono dati da

$$E_n = -\frac{Z^2}{2n^2} E_h, \quad n \geq l + 1 \quad \text{con} \quad E_h = m_e \left(\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0\hbar} \right)^2. \quad (12.5.45)$$

Le corrispondenti funzioni d'onda radiali sono

$$R_{nl}(r) = N_{nl} \left(\frac{2Zr}{na_0} \right)^l e^{-\frac{Zr}{na_0}} L_{n-l-1}^{(2l+1)} \left(\frac{2Zr}{na_0} \right), \quad (12.5.46)$$

dove a_0 è il *raggio di Bohr*,

$$a_0 = \frac{4\pi\epsilon_0\hbar^2}{m_e e^2}, \quad (12.5.47)$$

mentre la normalizzazione è data da

$$N_{nl} = \left[\left(\frac{2Zr}{na_0} \right)^3 \frac{(n-l-1)!}{2n[(n+l)!]^3} \right]^{1/2}. \quad (12.5.48)$$

Per derivare la normalizzazione può essere usata la relazione

$$\int_0^\infty x^{2l+2} e^{-x} \left[L_{n-l-1}^{(2l+1)}(x) \right]^2 dx = \frac{2n(n+l)!}{(n-l-1)!}. \quad (12.5.49)$$

Oscillatore armonico isotropo

Infine discutiamo il caso dell'oscillatore armonico isotropo il cui potenziale è dato da

$$V(r) = \frac{1}{2} m_0 \omega^2 r^2. \quad (12.5.50)$$

Tramite la ridefinizione

$$x = \gamma r^2, \quad \text{dove} \quad \gamma = \frac{m_0 \omega}{\hbar}, \quad (12.5.51)$$

l'equazione (12.5.23) per la parte radiale della funzione d'onda diviene

$$\left[-2x \frac{d^2}{dx^2} - \frac{d}{dx} + \frac{l(l+1)}{2x^2} + \frac{x^2}{2} - \frac{E}{\hbar\omega} \right] u = 0. \quad (12.5.52)$$

Questa equazione può essere trasformata in un'equazione ipergeometrica confluyente del primo tipo tramite la ridefinizione

$$u = x^{\frac{l+1}{2}} e^{-x/2} f(x), \quad (12.5.53)$$

tramite la quale si ottiene

$$x f'' + \left(l + \frac{3}{2} - x \right) f' + \frac{1}{2} \left(\frac{E}{\hbar\omega} - l - \frac{3}{2} \right) f = 0. \quad (12.5.54)$$

Analogamente a quanto discusso nei casi precedenti, la funzione d'onda per il sistema è normalizzabile solo se la soluzione dell'equazione differenziale si riduce ad un polinomio. Questo accade se

$$\frac{1}{2} \left(\frac{E}{\hbar\omega} - l - \frac{3}{2} \right) = -k, \quad (12.5.55)$$

con $k \in \mathbb{N}$. In questo caso otteniamo

$$E_n = \hbar\omega \left(2k + l + \frac{3}{2} \right) = \hbar\omega \left(n + \frac{3}{2} \right), \quad (12.5.56)$$

dove abbiamo posto $n = 2k + l$. Si noti che questa relazione implica che i livelli energetici sono identificati da un intero $n \geq l$ tale che $n - l$ sia pari.

La funzione d'onda radiale corrispondente all'energia E_n e ad un l fissato è data da

$$R_{nl}(r) = N_{nl} r^l e^{-\gamma r^2/2} L_{(n-l)/2}^{(l+1/2)}(\gamma r^2) \quad (12.5.57)$$

con la normalizzazione

$$N_{nl} = \left(\frac{2^{n+l+2} \gamma^{l+3/2}}{\sqrt{\pi}} \right)^{1/2} \left(\frac{[(n-l)/2]! [(n+l)/2]!}{(n+l+1)!} \right)^{1/2}. \quad (12.5.58)$$

12.6 Esercizi

Esercizio 12.1. Si consideri l'equazione differenziale

$$u'' + \frac{5-3z}{3(z-1)} u' - \frac{2}{z-1} u = 0. \quad (12.6.1)$$

- i) Si studi la natura dei punti singolari e i relativi esponenti indiciali.

- ii) Si scriva esplicitamente la soluzione attorno al punto $z = 1$ utilizzando la funzione di Kummer ${}_1F_1(a, c; z)$.

Esercizio 12.2. Si dimostri che

$${}_1F_1(a; a; z) = e^z. \quad (12.6.2)$$

Esercizio 12.3. Si dimostri che la più generale equazione lineare del secondo ordine con coefficienti lineari in z ,

$$(\alpha + \beta z)u''(z) + (\gamma + \delta z)u'(z) + (\eta + \kappa z)u(z) = 0, \quad (12.6.3)$$

con $\kappa \neq \delta^2/4$ può essere ricondotta all'equazione ipergeometrica confluyente del primo tipo.

- i) Si utilizzi un cambio di variabile per portare l'equazione nella forma

$$zu'' + (\gamma + \delta z)u' + (\eta + \kappa z)u = 0, \quad (12.6.4)$$

(con γ, δ, η e κ opportunamente ridefiniti).

- ii) Si riscali la variabile, $z \rightarrow z/\sqrt{\delta^2 - 4\kappa}$ in modo da ottenere l'equazione

$$zu'' + \left(\gamma + \frac{\delta}{\sqrt{\delta^2 - 4\kappa}}z\right)u' + \left(\frac{\eta}{\sqrt{\delta^2 - 4\kappa}} + \frac{\kappa}{\delta^2 - 4\kappa}z\right)u = 0. \quad (12.6.5)$$

- iii) Si dimostri che l'equazione precedente ammette la soluzione

$$u(z) = \exp\left(-\left(1 + \frac{\delta}{\sqrt{\delta^2 - 4\kappa}}\right)\frac{z}{2}\right)w(z), \quad (12.6.6)$$

dove $w(z)$ soddisfa l'equazione ipergeometrica confluyente del primo tipo con

$$a = \left(1 + \frac{\delta}{\sqrt{\delta^2 - 4\kappa}}\right)\frac{\gamma}{2} - \frac{\eta}{\sqrt{\delta^2 - 4\kappa}}, \quad b = \gamma. \quad (12.6.7)$$

Esercizio 12.4. Si dimostri che la classe di equazioni lineari del secondo ordine con coefficienti lineari in z ,

$$(\alpha + \beta z)u''(z) + (\gamma + \delta z)u'(z) + \left(\eta + \frac{\delta^2}{4}z\right)u(z) = 0, \quad (12.6.8)$$

può essere ricondotta all'equazione ipergeometrica confluyente del secondo tipo.

- i) Si utilizzi un cambio di variabile per portare l'equazione nella forma

$$zu'' + (\gamma + \delta z)u' + \left(\eta + \frac{\delta^2}{4}z\right)u = 0, \quad (12.6.9)$$

(con γ, δ ed η opportunamente ridefiniti).

ii) Si dimostri che l'equazione precedente ammette la soluzione

$$u(z) = \exp\left(-\delta \frac{z}{2}\right) w(z), \quad (12.6.10)$$

dove $w(z)$ soddisfa l'equazione

$$z w'' + \gamma w' + \left(\eta - \frac{1}{2}\gamma\delta\right) w = 0. \quad (12.6.11)$$

iii) Tramite un cambio di variabile si mostri che, se $\eta - \gamma\delta/2 \neq 0$, l'equazione precedente è riconducibile all'equazione ipergeometrica confluyente del secondo tipo.

iv) Si studi il caso in cui $\eta - \gamma\delta/2 = 0$.

Esercizio 12.5. Si dimostri la seguente identità

$${}_0F_1(; c; z^2/16) = e^{-z/2} {}_1F_1(c - 1/2; 2c - 1; z). \quad (12.6.12)$$

(Suggerimento: si parta dall'equazione ipergeometrica confluyente del secondo tipo, si effettui il cambio di variabile $z \rightarrow z^2/16$ e, successivamente, si consideri una soluzione della forma $e^{-z/2}w(z)$.)

Esercizio 12.6 (Relazioni tra funzioni di Kummer contigue). Si dimostrino le seguenti identità

$$\begin{aligned} z \frac{d}{dz} F(a; c) &= z \frac{a}{c} F(a + 1; c + 1) = a(F(a + 1; c) - F(a; c)) \\ &= (c - 1)(F(a; c - 1) - F(a; c)) \\ &= (c - a)F(a - 1; c) + (a - c + z)F(a; c) \\ &= z(a/c - 1)F(a; c + 1) + zF(a; c) \end{aligned} \quad (12.6.13)$$

dove $F(a; c) \equiv {}_1F_1(a; c; z)$. A partire da queste identità si ottengano le relazioni tra funzioni di Kummer contigue, ovvero quelle in cui a o c differiscono per ± 1 .

Esercizio 12.7 (Relazione tra funzioni ${}_0F_1$ contigue). Si dimostrino le seguenti identità

$$z \frac{d}{dz} {}_0F_1(; c; z) = \frac{z}{c} {}_0F_1(; c + 1; z) = (c - 1)({}_0F_1(; c - 1; z) - {}_0F_1(; c; z)). \quad (12.6.14)$$

Esercizio 12.8 (Formule di derivazione). Si dimostrino le seguenti formule di derivazione

$$\frac{d^n}{dz^n} {}_1F_1(a; c; z) = \frac{(a)_n}{(c)_n} {}_1F_1(a + n; c + n; z), \quad (12.6.15)$$

$$\frac{d^n}{dz^n} {}_0F_1(; c; z) = \frac{1}{(c)_n} {}_0F_1(; c + n; z). \quad (12.6.16)$$

Esercizio 12.9 (Relazione di autotrasformazione di Kummer). Si dimostri le seguente identità

$${}_1F_1(a; c; z) = e^z {}_1F_1(c - a; c; -z). \quad (12.6.17)$$

(Suggerimento: verificare che l'espressione a secondo membro soddisfa l'equazione ipergeometrica confluyente con indici a e c .)

Esercizio 12.10. Si verifichino le identità

$$J_{1/2}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \sin(z), \quad J_{-1/2}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \cos(z). \quad (12.6.18)$$

(Suggerimento: si usi l'espansione in serie e la relazione $2^{2n}n! \Gamma(n + 3/2) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}(2n + 1)!$.)

Esercizio 12.11. Si dimostri che per $\nu = n$ intero

$$J_{-n}(z) = (-1)^n J_n(z). \quad (12.6.19)$$

(Suggerimento: si usi l'espansione in serie ridefinendo opportunamente l'indice di somma.)

Esercizio 12.12 (Derivate delle funzioni di Bessel). Si dimostrino le seguenti relazioni

$$\frac{d}{dz} [z^\nu J_\nu(z)] = z^\nu J_{\nu-1}(z), \quad \frac{d}{dz} [z^{-\nu} J_\nu(z)] = -z^{-\nu} J_{\nu+1}(z). \quad (12.6.20)$$

Si usino queste relazioni per dimostrare che

$$2 \frac{d}{dz} J_\nu(z) = J_{\nu-1}(z) - J_{\nu+1}(z) \quad (12.6.21)$$

e

$$2 \frac{\nu}{z} J_\nu(z) = J_{\nu-1}(z) + J_{\nu+1}(z). \quad (12.6.22)$$

Esercizio 12.13. Si consideri l'equazione

$$z^2 u'' + z(z+1)u' - \frac{1}{9}u = 0. \quad (12.6.23)$$

- i) Si studino i punti singolari.
- ii) Si determinino le relazioni di ricorrenza dei coefficienti per le due soluzioni espanse intorno a $z = 0$.
- iii) Si verifichi che la ridefinizione

$$u(z) = z^{1/3} e^{-z} w(z) \quad (12.6.24)$$

trasforma l'equazione nella forma di una equazione ipergeometrica confluyente e se ne determinino le soluzioni in termini della funzione di Kummer.

Esercizio 12.14 (Relazione tra equazione di Airy ed equazione di Bessel). Si consideri l'equazione di Airy

$$u'' - zu = 0. \quad (12.6.25)$$

Si effettui il cambio di variabili $y = 2/3z^{3/2}$ e la ridefinizione $u(y) = y^{1/3}w(y)$. Si dimostri che $w(y)$ soddisfa l'equazione di Bessel modificata con $\nu^2 = 1/9$.

Esercizio 12.15. Si verifichi la proprietà di ortogonalità per i polinomi di Hermite in eq. (12.3.14).

Esercizio 12.16. Si dimostri che i polinomi di Hermite soddisfano l'equazione differenziale (12.3.11). Si riscrivano i polinomi di Hermite in termini di funzioni ipergeometriche confluenti. Si ricavi inoltre una seconda soluzione che soddisfa la stessa equazione differenziale. (Suggerimento: si sfrutti la connessione con i polinomi di Laguerre e si utilizzino le opportune ridefinizioni per manipolare l'equazione ipergeometrica confluyente.)

Esercizio 12.17. Si ottenga l'espressione esplicita per i polinomi di Hermite (12.3.13) a partire dalla loro espressione in termini di polinomi di Laguerre (12.3.10).

Esercizio 12.18. Si dimostrino la relazione di ricorrenza (12.3.15) e la formula per le derivate (12.3.16). (Suggerimento: si utilizzi l'espressione esplicita (12.3.13).)

Esercizio 12.19. Si dimostri la formula di Rodrigues per i polinomi di Hermite (12.3.12). (Suggerimento: si verifichi che la formula di Rodrigues soddisfa la relazione di ricorrenza (12.3.15).)

Esercizio 12.20. Si dimostri che i polinomi di Hermite sono ottenibili dalla seguente funzione generatrice esponenziale

$$e^{2xt-t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} H_n(x) \frac{t^n}{n!}. \quad (12.6.26)$$

(Suggerimento: si prenda spunto dalla dimostrazione del teorema 11.4.)

Esercizio 12.21. Si consideri l'equazione

$$u'' + \left(\frac{1}{2z} - 1\right) u' - \frac{1}{2z} u = 0. \quad (12.6.27)$$

- i) Si studino i punti singolari.
- ii) Si determinino due soluzioni indipendenti.

RASSEGNA DI ESERCIZI D'ESAME

Questo capitolo riporta una rassegna di esercizi proposti negli esami scritti del corso, insieme alle relative soluzioni.

Esercizio 1. Si determini, nello spazio delle distribuzioni \mathcal{D}' , la soluzione generale dell'equazione

$$x^2(x-2)f(x) = x,$$

giustificando adeguatamente il risultato.

Soluzione. Come prima cosa determiniamo una soluzione particolare dell'equazione. Ricaviamo $f(x)$ tenendo conto che i poli nei coefficienti del polinomio che moltiplica $f(x)$ devono essere regolarizzati prendendo il valore principale:

$$f_0(x) = Pv \frac{1}{x(x-2)} = \frac{1}{2}Pv \frac{1}{x-2} - \frac{1}{2}Pv \frac{1}{x}.$$

Questo risultato può essere giustificato formalmente verificando che, per qualsiasi funzione di test $\varphi \in \mathcal{D}$, si ha

$$\left((x-\alpha)Pv \frac{1}{x-\alpha}, \varphi \right) = (1, \varphi).$$

Determiniamo ora la soluzione generale. Essa può essere ricavata sommando alla soluzione particolare f_0 la soluzione generica dell'equazione omogenea associata. Notiamo che l'equazione omogenea ammette delle soluzioni localizzate negli zeri nel polinomio $p(x) = x^2(x-2)$ che moltiplica $f(x)$.⁶ Quest'ultimo presenta uno zero doppio in $x = 0$ ed uno zero semplice in $x = 2$. Sfruttando il risultato dell'esercizio 2.18 si ottiene

$$\tilde{f}(x) = f(x) - f_0(x) = c_1 \delta'(x) + c_2 \delta(x) + c_3 \delta(x-2),$$

da cui

$$f(x) = \frac{1}{2}Pv \frac{1}{x-2} - \frac{1}{2}Pv \frac{1}{x} + c_1 \delta'(x) + c_2 \delta(x) + c_3 \delta(x-2).$$

La soluzione generale dell'equazione omogenea $x^2(x-2)\tilde{f}(x) = 0$ può anche essere ricavata in modo più formale. Definiamo, ad esempio, $g(x) = (x-2)\tilde{f}(x)$. Si noti che $g(x)$ è anch'essa una distribuzione. In questo modo si ha

$$x^2 g(x) = 0,$$

⁶Si noti che non possiamo semplificare il fattore x^2 con il fattore x al secondo membro.

da cui otteniamo (si veda l'esercizio 2.18)

$$g(x) = \tilde{c}_1 \delta'(x) + \tilde{c}_2 \delta(x).$$

A questo punto dobbiamo risolvere

$$(x-2)\tilde{f}(x) = \tilde{c}_1 \delta'(x) + \tilde{c}_2 \delta(x).$$

Questa equazione ammette come soluzione particolare

$$\tilde{f}(x) = -\frac{1}{2}\tilde{c}_1 \delta'(x) - \frac{1}{2}\tilde{c}_2 \delta(x),$$

e come soluzione dell'equazione omogenea associata $c_3 \delta(x-2)$. Mettendo tutto insieme e ridefinendo opportunamente $\tilde{c}_{1,2}$ si ottiene il risultato riportato in precedenza. \square

Esercizio 2. Si consideri la seguente equazione differenziale

$$(z-1)^2(z+2)(z-3)u''(z) + 2(z-1)(z^2+1)u'(z) + 4u(z) = 0.$$

- i) Si studino i punti singolari dell'equazione e si calcolino i relativi indici.
- ii) Si determinino due soluzioni indipendenti.

Soluzione. Ponendo l'equazione in forma standard

$$u''(z) + p(z)u'(z) + q(z)u(z) = 0,$$

con

$$p(z) = \frac{2(z^2+1)}{(z-1)(z+2)(z-3)}, \quad q(z) = \frac{4}{(z-1)^2(z+2)(z-3)},$$

si verifica facilmente la presenza di poli per i coefficienti di u' ed u in $z=1$, $z=-2$ e $z=3$. Studiamo ognuno di questi punti.

- Per $z=1$ otteniamo

$$p_0 = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1)p(z) = -2/3, \quad q_0 = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1)^2 q(z) = -2/3.$$

Il punto è quindi singolare regolare. La corrispondente equazione indiciale è

$$\alpha(\alpha-1) + \alpha p_0 + q_0 = \alpha^2 - 4\alpha/3 - 2/3 = 0,$$

le cui radici sono

$$\alpha_1 = -1/3, \quad \alpha_2 = 2.$$

- Per $z=-2$ otteniamo

$$p_0 = \lim_{z \rightarrow -2} (z+2)p(z) = 2/3, \quad q_0 = \lim_{z \rightarrow -2} (z+2)^2 q(z) = 0.$$

I corrispondenti indici risultano

$$\alpha_1 = 0, \quad \alpha_2 = 1/3.$$

- Per $z = 3$ otteniamo

$$p_0 = \lim_{z \rightarrow 3} (z - 3)p(z) = 2, \quad q_0 = \lim_{z \rightarrow 3} (z - 3)^2 q(z) = 0.$$

I corrispondenti indici risultano

$$\alpha_1 = 0, \quad \alpha_2 = -1.$$

Studiamo ora il punto all'infinito. Si ha che

$$\lim_{z \rightarrow \infty} z p(z) = 2, \quad \lim_{z \rightarrow \infty} z^4 q(z) = 4.$$

Il punto all'infinito risulta quindi regolare.

L'equazione presenta tre punti singolari regolari, ed è quindi della forma di Papperitz-Riemann. Il P -simbolo corrispondente è dato da

$$P \left\{ \begin{array}{cccc} 1 & -2 & 3 & \\ -1/3 & 0 & 0 & z \\ 2 & 1/3 & -1 & \end{array} \right\}.$$

Passiamo ora alla determinazione delle soluzioni. Il P -simbolo può essere agevolmente riportato in forma ipergeometrica tramite una trasformazione di Möbius che mandi

$$1 \rightarrow \infty, \quad -2 \rightarrow 0, \quad 3 \rightarrow 1.$$

Tale trasformazione è data da

$$\zeta = \frac{2z + 2}{5z - 1},$$

ovvero

$$P \left\{ \begin{array}{cccc} 1 & -2 & 3 & \\ -1/3 & 0 & 0 & z \\ 2 & 1/3 & -1 & \end{array} \right\} = P \left\{ \begin{array}{cccc} 0 & 1 & \infty & \\ 0 & 0 & -1/3 & \zeta = \frac{2z + 2}{5z - 1} \\ 1/3 & -1 & 2 & \end{array} \right\}.$$

Una coppia di soluzioni indipendenti può essere determinata considerando l'espansione intorno a $\zeta = 0$. In questo modo si ricava

$$u_1(z) = {}_2F_1 \left(-\frac{1}{3}, 2; \frac{2}{3}; \zeta \right) = {}_2F_1 \left(-\frac{1}{3}, 2; \frac{2}{3}; \frac{2z + 2}{5z - 1} \right),$$

e

$$u_2(z) = \zeta^{1/3} {}_2F_1 \left(0, \frac{7}{3}; \frac{4}{3}; \zeta \right) = \zeta^{1/3} = \left(\frac{2z + 2}{5z - 1} \right)^{1/3},$$

dove abbiamo sfruttato il fatto che ${}_2F_1(0, b; c; \zeta) = 1$. Si noti che le due soluzioni u_1 ed u_2 sono indipendenti avendo andamenti diversi intorno a $\zeta = 0$.

Due soluzioni indipendenti possono anche essere determinate espandendo in serie intorno a $\zeta = \infty$:

$$\tilde{u}_1(z) = \zeta^{-2} {}_2F_1 \left(2, \frac{7}{3}; \frac{10}{3}; \zeta^{-1} \right) = \left(\frac{5z - 1}{2z + 2} \right)^2 {}_2F_1 \left(2, \frac{7}{3}, 2; \frac{10}{3}; \frac{5z - 1}{2z + 2} \right),$$

e

$$\tilde{u}_2(z) = \zeta^{1/3} {}_2F_1\left(-\frac{1}{3}, 0; -\frac{4}{3}; \zeta^{-1}\right) = \zeta^{1/3} = \left(\frac{2z+2}{5z-1}\right)^{1/3} = u_2(z),$$

Anche in questo caso, poiché gli indici relativi al punto $\zeta = \infty$ differiscono per una quantità non intera, le due soluzioni sono indipendenti.

D'altro canto, gli sviluppi attorno al punto $\zeta = 1$, permettono di ricavare solo una delle due soluzioni. Infatti

$$\tilde{u}_1(z) = {}_2F_1\left(-\frac{1}{3}, 2; 2; 1 - \zeta\right) = \zeta^{1/3} = u_2(z),$$

e (si veda l'equazione (10.2.10) nella nota 2)

$$\tilde{u}_2(z) \propto (1 - \zeta)^{-1} {}_2F_1\left(1, -\frac{4}{3}; 0; 1 - \zeta\right) \propto (1 - \zeta)^{-1} (1 - \zeta) {}_2F_1\left(2, -\frac{1}{3}; 2; 1 - \zeta\right) = \tilde{u}_1(z).$$

Questo accade in quanto i due indici relativi al punto $\zeta = 1$ differiscono per un intero. Si noti che per ricavare la forma esplicita delle soluzioni abbiamo sfruttato il risultato dell'esercizio 10.2.

Riportiamo, a titolo illustrativo, una seconda procedura per determinare le soluzioni, ottenuta riordinando in modo diverso i punti singolari. Scegliamo di mandare

$$1 \rightarrow 1, \quad -2 \rightarrow 0, \quad 3 \rightarrow \infty,$$

mediante la trasformazione di Möbius

$$\omega = -\frac{2z+2}{3z-3}.$$

Il P -simbolo cambia nel modo seguente

$$P\left\{\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & z \\ -1/3 & 0 & 0 & \\ 2 & 1/3 & -1 & \end{array}\right\} = P\left\{\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & \infty & \\ 0 & -1/3 & 0 & \omega = -\frac{2z+2}{5z-3} \\ 1/3 & 2 & -1 & \end{array}\right\}.$$

Il nuovo P -simbolo non è in forma ipergeometrica, ma può essere riportato in tale forma tramite una ridefinizione degli indici relativi al punto $\omega = 1$, ovvero

$$P\left\{\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & z \\ -1/3 & 0 & 0 & \\ 2 & 1/3 & -1 & \end{array}\right\} = (\omega - 1)^2 P\left\{\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & \infty & \\ 0 & 0 & 1 & \omega = -\frac{2z+2}{5z-3} \\ 1/3 & -7/3 & 2 & \end{array}\right\}.$$

Due soluzioni indipendenti possono essere ottenute sviluppando intorno ad $\omega = 0$, ovvero

$$u_1(z) = (\omega - 1)^2 {}_2F_1\left(1, 2; \frac{2}{3}; \omega\right) = \left(-\frac{5z-1}{3z-3}\right)^2 {}_2F_1\left(1, 2; \frac{2}{3}; -\frac{2z+2}{5z-3}\right),$$

e

$$\begin{aligned} u_2(z) &= (\omega - 1)^2 \omega^{1/3} {}_2F_1\left(\frac{4}{3}, \frac{7}{3}; \frac{4}{3}; \omega\right) \\ &= (\omega - 1)^2 \omega^{1/3} \left(\frac{1}{1 - \omega}\right)^{7/3} \propto \left(\frac{\omega}{\omega - 1}\right)^{1/3} = \left(\frac{2z + 2}{5z - 1}\right)^{1/3}. \end{aligned}$$

Soluzioni indipendenti possono essere determinate anche espandendo intorno ad $\omega = 1$:

$$\tilde{u}_1(z) = (\omega - 1)^2 {}_2F_1\left(1, 2; \frac{10}{3}; 1 - \omega\right) = \left(-\frac{5z - 1}{3z - 3}\right)^2 {}_2F_1\left(1, 2; \frac{10}{3}; \frac{5z - 1}{3z - 3}\right),$$

e

$$\begin{aligned} \tilde{u}_2(z) &= (\omega - 1)^2 (1 - \omega)^{-7/3} {}_2F_1\left(-\frac{1}{3}, -\frac{4}{3}; -\frac{4}{3}; 1 - \omega\right) \\ &= (\omega - 1)^2 (1 - \omega)^{-7/3} \omega^{1/3} \propto \left(\frac{\omega}{\omega - 1}\right)^{1/3} = \left(\frac{2z + 2}{5z - 1}\right)^{1/3}. \end{aligned}$$

Le serie standard intorno al punto $\omega = \infty$, invece, danno la stessa soluzione

$$\tilde{\tilde{u}}_1(z) = (\omega - 1)^2 \omega^{-2} {}_2F_1\left(2, \frac{7}{3}; 2; \omega^{-1}\right) = \left(\frac{\omega}{\omega - 1}\right)^{1/3} = \left(\frac{2z + 2}{5z - 1}\right)^{1/3},$$

e

$$\tilde{\tilde{u}}_2(z) \propto (\omega - 1)^{-2} \omega^{-1} {}_2F_1\left(1, \frac{4}{3}; 0; \omega^{-1}\right) \propto (\omega - 1)^2 \omega^{-1} \omega^{-1} {}_2F_1\left(2, \frac{7}{3}; 2; \omega^{-1}\right) = \tilde{\tilde{u}}_1(z).$$

□

Esercizio 3. Si determini, nello spazio delle distribuzioni \mathcal{D}' , la soluzione generale dell'equazione

$$x f'(x) = 1,$$

giustificando adeguatamente il risultato.

Soluzione. Come primo passo notiamo come una soluzione particolare dell'equazione sia data semplicemente da

$$f_0(x) = \log |x|.$$

Abbiamo infatti che $d \log |x| / dx = P v_x^1$, e inoltre $x P v_x^1 = 1$, come si verifica facilmente.

Determiniamo ora la soluzione generale. Sottraendo ad f la soluzione particolare prima ricavata, otteniamo che $\tilde{f} = f - f_0$ soddisfa l'equazione

$$x \tilde{f}'(x) = 0,$$

da cui segue facilmente che

$$\tilde{f}'(x) = c_1 \delta(x),$$

dove c_1 è una costante arbitraria. Questa equazione ha chiaramente come soluzione

$$\tilde{f}(x) = c_1 \theta(x) + c_2,$$

con c_2 costante arbitraria.

Mettendo insieme i risultati precedenti otteniamo che la soluzione generale dell'equazione data è

$$f(x) = \log |x| + c_1 \theta(x) + c_2.$$

□

Esercizio 4. Si consideri la seguente equazione differenziale

$$2(z-1)^3 u'' + (z^2-1)u' - u = 0.$$

- i) Si studino i punti singolari dell'equazione.
- ii) Si determinino due soluzioni indipendenti esprimendole in termini delle appropriate funzioni ipergeometriche.

Soluzione. Poniamo l'equazione in forma standard

$$u''(z) + \frac{1}{2} \frac{z+1}{(z-1)^2} u'(z) - \frac{1}{2} \frac{1}{(z-1)^3} u(z) = 0.$$

I coefficienti dei termini u' ed u hanno poli per $z=1$ e per il punto all'infinito.

- Per $z=1$ otteniamo

$$\lim_{z \rightarrow 1} (z-1) \frac{1}{2} \frac{z+1}{(z-1)^2} \rightarrow \infty, \quad \lim_{z \rightarrow 1} -(z-1) \frac{1}{2} \frac{1}{(z-1)^3} \rightarrow \infty.$$

Il punto $z=1$ è quindi singolare irregolare.

- Per $z=\infty$ otteniamo

$$\lim_{z \rightarrow \infty} z \frac{1}{2} \frac{z+1}{(z-1)^2} \rightarrow \frac{1}{2}, \quad \lim_{z \rightarrow \infty} -(z-1) \frac{1}{2} \frac{1}{(z-1)^3} \sim -\frac{1}{2z} \rightarrow 0.$$

Il punto all'infinito è quindi singolare regolare. Per determinarne gli indici si può utilizzare un'espansione in $1/z$. Espandendo $u(z) = (1/z)^\mu$ otteniamo

$$\mu(\mu+1)z^{-\mu-2} - \frac{z+1}{2(z-1)^2} \mu z^{-\mu-1} - \frac{1}{2(z-1)^3} z^{-\mu} = 0.$$

Ritenendo solo i termini dominanti nell'equazione si ha

$$\mu(\mu+1)z^{-\mu-2} - \frac{1}{2} \mu z^{-\mu-2} = 0.$$

L'equazione indiciale è

$$\mu(\mu+1) - \mu/2 = \mu(\mu+1/2) = 0.$$

Gli indici relativi al punto $z=\infty$ sono quindi 0 e $-1/2$.

Per determinare le soluzioni dell'equazione effettuiamo un cambio di variabile, mandando il punto $z = 1$ all'infinito e portando $z = \infty$ nell'origine. Un modo semplice per effettuare la trasformazione consiste nel considerare una traslazione che sposta il punto $z = 1$ nell'origine e poi l'inversione $z \rightarrow 1/z$. In questo modo, dopo semplici passaggi algebrici, si ottiene l'equazione

$$y \frac{d^2}{dy^2} u(y) + \left(\frac{3}{2} - y \right) \frac{d}{dy} u(y) - \frac{1}{2} u(y) = 0,$$

dove $y = 1/(z-1)$. Questa equazione è un'equazione ipergeometrica confluyente del primo tipo con indici $a = 1/2$ e $c = 3/2$. Due soluzioni indipendenti sono date da

$$u_1(z) = {}_1F_1(1/2; 3/2; y) = {}_1F_1(1/2; 3/2; 1/(z-1))$$

e

$$u_2(z) = y^{-1/2} {}_1F_1(0; 1/2; y) = \sqrt{z-1},$$

dove abbiamo utilizzato il fatto che ${}_1F_1(0; 1/2; y) = 1$. □

Esercizio 5. Si determini la soluzione generale dell'equazione differenziale ordinaria (nel dominio $x > 0$)

$$x^2 u'' + x u' - u = x^2 e^x.$$

Suggerimento: per determinare una soluzione particolare può essere utile adottare il metodo di variazione delle costanti.

Soluzione. Come primo passo determiniamo le soluzioni dell'equazione omogenea associata:

$$x^2 u'' + x u' - u = 0.$$

Questa equazione è un'equazione di Eulero, infatti in forma canonica risulta

$$u'' + \frac{1}{x} u' - \frac{1}{x^2} u = 0.$$

La corrispondente equazione indiciale è

$$\alpha(\alpha-1) + \alpha - 1 = 0,$$

le cui soluzioni sono

$$\alpha_1 = +1, \quad \alpha_2 = -1.$$

La soluzione generale dell'equazione omogenea è quindi

$$u = c_1 x + c_2 \frac{1}{x}.$$

Passiamo ora a determinare una soluzione particolare dell'equazione completa. Utilizziamo il metodo di variazione delle costanti come illustrato nella sezione 6.4.2 (esempio 6.1). Cerchiamo una soluzione particolare della forma

$$u_P = A_1 u_1 + A_2 u_2 = A_1 x + A_2 \frac{1}{x},$$

con $A_{1,2}$ funzioni di x che soddisfano la condizione

$$A_1' u_1 + A_2' u_2 = 0.$$

Le funzioni $A_{1,2}$ soddisfano il sistema di equazioni differenziali del primo ordine in eq. (6.4.29), in cui il wronskiano è dato da

$$W = \begin{vmatrix} x & 1/x \\ 1 & -1/x^2 \end{vmatrix} = -2/x.$$

Ovvero, esplicitamente,

$$\begin{cases} A_1' = \frac{1}{2}e^x \\ A_2' = -\frac{1}{2}x^2 e^x \end{cases}.$$

Il sistema di equazioni è facilmente risolvibile (ad esempio utilizzando le espressioni in eq. (6.4.30)):

$$\begin{cases} A_1 = \frac{1}{2}e^x \\ A_2 = \left(-\frac{x^2}{2} + x - 1\right)e^x \end{cases},$$

dove abbiamo rimosso possibili costanti additive. Una soluzione particolare è quindi

$$u_P = \left(1 - \frac{1}{x}\right)e^x.$$

La soluzione generale dell'equazione differenziale è

$$u(x) = \left(1 - \frac{1}{x}\right)e^x + c_1 x + c_2 \frac{1}{x}.$$

□

Esercizio 6. Si consideri l'equazione differenziale

$$(z-1)u''(z) + \left(1 - \frac{3}{2z}\right)u'(z) - \frac{4}{z}u(z) = 0.$$

- i) Si studino i punti singolari dell'equazione e si calcolino i relativi indici.
- ii) Si determinino due soluzioni indipendenti.
- iii) Si riscriva la soluzione regolare nell'origine in termini di polinomi di Jacobi e se ne determini la forma esplicita.
- iv) Opzionale: Si determini la forma esplicita della seconda soluzione. (Suggerimento: si utilizzino le relazioni per funzioni ipergeometriche contigue e le formule per casi speciali delle funzioni ipergeometriche.)

Soluzione. Moltiplicando l'equazione per z , si riconosce immediatamente che essa assume la forma di una equazione ipergeometrica standard con parametri

$$a = -2, \quad b = 2, \quad c = 3/2.$$

Il P-simbolo corrispondente all'equazione è

$$P \left\{ \begin{array}{ccc} 0 & 1 & \infty \\ 0 & 0 & -2 \\ -1/2 & 3/2 & 2 \end{array} z \right\},$$

che riporta gli indici relativi ai tre punti singolari $0, 1$ e ∞ . Per brevità non riportiamo l'analisi esplicita dei punti singolari, che è del tutto standard.

Due soluzioni indipendenti possono essere ottenute tramite l'espansione attorno al punto $z = 0$. Questo porta alle due serie ipergeometriche

$$u_1 = {}_2F_1(-2, 2; 3/2; z)$$

e

$$u_2 = z^{-1/2} {}_2F_1(-5/2, 3/2; 1/2; z).$$

Queste soluzioni sono chiaramente indipendenti avendo diverso andamento attorno al punto $z = 0$.

Nota: due soluzioni indipendenti possono analogamente essere ottenute anche tramite l'espansione attorno al punto $z = 1$:

$$\tilde{u}_1 = {}_2F_1(-2, 2; -1/2; 1 - z), \quad \tilde{u}_2 = (1 - z)^{3/2} {}_2F_1(7/2, -1/2; 5/2; 1 - z).$$

La soluzione u_1 è regolare nell'origine, mentre la soluzione u_2 è singolare (ha andamento $z^{-1/2}$). La soluzione u_1 corrisponde ad una serie ipergeometrica con $a = -2$, quindi ha un numero finito di termini ed è rappresentabile in forma di polinomio di Jacobi. Dalla formula (11.1.2), con $n = 2$, $\alpha = 1/2$ e $\beta = -3/2$, ricaviamo che

$$P_2^{(1/2, -3/2)}(1 - 2z) = \binom{5/2}{2} {}_2F_1(-2, 2; 3/2; z) = \frac{15}{8} {}_2F_1(-2, 2; 3/2; z).$$

Il coefficiente binomiale può essere calcolato come

$$\binom{5/2}{2} = \frac{\Gamma(7/2)}{\Gamma(3)\Gamma(3/2)} = \frac{(5/2)(3/2)\Gamma(3/2)}{\Gamma(3)\Gamma(3/2)} = \frac{15}{8}.$$

Possiamo quindi riscrivere u_1 come

$$u_1 = \frac{8}{15} P_2^{(1/2, -3/2)}(1 - 2z).$$

Utilizzando la relazione di ricorrenza per i polinomi di Jacobi, eq. (11.1.25), e le forme esplicite per $P_{0,1}^{(1/2, -3/2)}(x)$ in eq. (11.1.26), otteniamo che

$$P_2^{(1/2, -3/2)}(x) = \frac{1}{8} + x + \frac{3}{4}x^2,$$

da cui si ricava

$$u_1 = 1 - \frac{8}{3}z + \frac{8}{5}z^2.$$

Per determinare la forma esplicita della soluzione u_2 possiamo utilizzare la relazione tra funzioni ipergeometriche contigue in eq. (10.3.18) applicata a ${}_2F_1(-5/2, 3/2; 1/2; z) = {}_2F_1(3/2, -5/2; 3/2; z)$. In questo modo si ottiene

$${}_2F_1(-5/2, 3/2; 1/2; z) = \frac{2}{1-z} \left(\frac{1}{2} {}_2F_1(1/2, -5/2; 1/2; z) - 3z {}_2F_1(3/2, -5/2; 3/2; z) \right).$$

Sfruttando inoltre il risultato in eq. (10.5.3) ricaviamo

$${}_2F_1(-5/2, 3/2; 1/2; z) = (1-6z)(1-z)^{3/2}.$$

La forma esplicita della soluzione u_2 è quindi

$$u_2 = z^{-1/2}(1-6z)(1-z)^{3/2}.$$

□

Esercizio 7. Si consideri il funzionale T definito da

$$(T, \varphi) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left[\int_{-\infty}^{1-\varepsilon} dx \frac{1}{x^3-1} \varphi + \int_{1+k\varepsilon}^{+\infty} dx \frac{1}{x^3-1} \varphi \right]$$

con $k > 0$. Si dimostri che esso definisce una distribuzione in \mathcal{D}' . Si esprima T in termini di distribuzioni regolari e di distribuzioni singolari standard (in particolare la distribuzione valore principale di Cauchy). (Suggerimento: può essere conveniente utilizzare lo sviluppo in frazioni parziali.)

Soluzione. Dimostriamo che il funzionale T definisce una distribuzione in \mathcal{D}' . Per prima cosa mostriamo che T è ben definito per ogni funzione di test $\varphi \in \mathcal{D}$. Riscriviamo T come

$$(T, \varphi) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left[\int_{-\infty}^{1-\varepsilon} dx \frac{1}{x^3-1} \varphi + \int_{1+\varepsilon}^{+\infty} dx \frac{1}{x^3-1} \varphi - \int_{1+\varepsilon}^{1+k\varepsilon} dx \frac{1}{x^3-1} \varphi \right].$$

Per studiare i primi due termini utilizziamo uno sviluppo in frazioni parziali,

$$\frac{1}{x^3-1} = \frac{1}{3} \frac{1}{x-1} - \frac{1}{3} \frac{x+2}{x^2+x+1}.$$

Il primo termine presenta un polo semplice (in $x=1$), mentre il secondo è regolare su tutta la retta reale. Otteniamo quindi che

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left[\int_{-\infty}^{1-\varepsilon} dx \frac{1}{x^3-1} \varphi + \int_{1+\varepsilon}^{+\infty} dx \frac{1}{x^3-1} \varphi \right] &= \frac{1}{3} \left(Pv \frac{1}{x-1}, \varphi \right) \\ &+ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{1}{3} \int_{|x-1|>\varepsilon} dx \frac{x+2}{x^2+x+1} \varphi. \end{aligned}$$

L'integrale sulla seconda riga ha integrando regolare, quindi possiamo semplicemente prendere il limite negli estremi di integrazione, ottenendo la distribuzione regolare

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{1}{3} \int_{|x-1| > \varepsilon} dx \frac{x+2}{x^2+x+1} \varphi = \frac{1}{3} \int_{-\infty}^{+\infty} dx \frac{x+2}{x^2+x+1} \varphi = \left(\frac{1}{3} \frac{x+2}{x^2+x+1}, \varphi \right).$$

Veniamo ora all'ultimo termine nella riscrittura di (T, φ) . Con un cambio di variabile $x = 1 + \varepsilon y$ otteniamo

$$- \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left[\int_{1+\varepsilon}^{1+k\varepsilon} dx \frac{1}{x^3-1} \varphi \right] = - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left[\int_1^k dy \frac{\varepsilon}{\varepsilon y(3+3\varepsilon y+\varepsilon^2 y^2)} \varphi(1+\varepsilon y) \right].$$

L'integrando è limitato in modulo sul dominio di integrazione, quindi per il teorema della convergenza dominata possiamo scambiare il limite in ε con l'integrale, ottenendo

$$\begin{aligned} - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left[\int_{1+\varepsilon}^{1+k\varepsilon} dx \frac{1}{x^3-1} \varphi \right] &= - \int_1^k dy \frac{1}{3y} \varphi(1) \\ &= -\frac{1}{3} \varphi(1) \log k = -\frac{1}{3} \log k (\delta(x-1), \varphi). \end{aligned}$$

I risultati precedenti mostrano che il funzionale T è ben definito su \mathcal{D} . Inoltre esso è lineare e continuo, come si verifica banalmente. Quindi T corrisponde ad una distribuzione in \mathcal{D}' . Le manipolazioni precedenti ci permettono anche di riscrivere T in termini di distribuzioni regolari e singolari standard

$$(T, \varphi) = \frac{1}{3} \left(Pv \frac{1}{x-1}, \varphi \right) - \frac{1}{3} \left(\frac{x+2}{x^2+x+1}, \varphi \right) - \frac{1}{3} \log k (\delta(x-1), \varphi).$$

□

Esercizio 8. Si consideri l'equazione differenziale

$$z(z-1)u''(z) + \left(\frac{1}{2} + \frac{5z}{3} \right) u'(z) - \frac{1}{2z} u(z) = 0.$$

- i) Si studino i punti singolari dell'equazione e si calcolino i relativi indici.
- ii) Si determinino due soluzioni indipendenti.
- iii) Opzionale: Si determini la forma esplicita di una delle due soluzioni. (Suggerimento: si utilizzino le formule per casi speciali delle funzioni ipergeometriche.)

Soluzione. Lo studio dei punti singolari è del tutto standard, quindi riportiamo solo i risultati. L'equazione ha tre punti singolari, $z = 0$, $z = 1$ e $z = \infty$.

- Per $z = 0$ otteniamo gli indici

$$\alpha_1 = 1/2, \quad \alpha_2 = 1.$$

- Per $z = 1$ otteniamo gli indici

$$\alpha_1 = 0, \quad \alpha_2 = -7/6.$$

- Per $z = \infty$ otteniamo gli indici

$$\alpha_1 = 0, \quad \alpha_2 = 2/3.$$

Il P-simbolo corrispondente all'equazione è

$$P \left\{ \begin{array}{ccc} 0 & 1 & \infty \\ 1/2 & 0 & 0 \\ 1 & -7/6 & 2/3 \end{array} \begin{array}{c} z \\ \\ \end{array} \right\}.$$

Si vede immediatamente che il cambio di variabili $\eta = 1/z$ porta l'equazione nella forma di una equazione ipergeometrica standard con parametri

$$a = 1/2, \quad b = 1, \quad c = 1/3,$$

corrispondente al P-simbolo

$$P \left\{ \begin{array}{ccc} 0 & 1 & \infty \\ 0 & 0 & 1/2 \\ 2/3 & -7/6 & 1 \end{array} \begin{array}{c} \eta = 1/z \\ \\ \end{array} \right\}.$$

Due soluzioni indipendenti possono essere ricavate espandendo attorno al punto $\eta = 0$ (equivalentemente si può espandere attorno a $\eta = 1$ o $\eta = \infty$)

$$u_1 = {}_2F_1(1/2, 1; 1/3; 1/z), \quad u_2 = z^{-2/3} {}_2F_1(7/6, 5/3; 5/3; 1/z).$$

La soluzione u_2 può essere riscritta in termini di funzioni elementari sfruttando il risultato in eq. (10.5.3):

$$u_2 = \frac{\sqrt{z}}{(z-1)^{7/6}}.$$

In alternativa, la soluzione può essere determinata sfruttando la proprietà (9.5.10) del P-simbolo, ovvero

$$P \left\{ \begin{array}{ccc} 0 & 1 & \infty \\ 1/2 & 0 & 0 \\ 1 & -7/6 & 2/3 \end{array} \begin{array}{c} z \\ \\ \end{array} \right\} = z^{1/2} P \left\{ \begin{array}{ccc} 0 & 1 & \infty \\ 0 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & -7/6 & 7/6 \end{array} \begin{array}{c} z \\ \\ \end{array} \right\}.$$

Il secondo P-simbolo corrisponde a un'equazione ipergeometrica con parametri

$$a = 1/2, \quad b = 7/6, \quad c = 1/2.$$

Da questo si ricava facilmente (tramite gli sviluppi attorno al punto $z = 0$)

$$\tilde{u}_1 = z^{1/2} {}_2F_1(1/2, 7/6; 1/2; z), \quad \tilde{u}_2 = {}_2F_1(1, 5/3; 3/2; z).$$

Si verifica facilmente che $\tilde{u}_1 \propto u_2$. □

Esercizio 9. Si consideri il seguente problema di Sturm-Liouville

$$\begin{cases} \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{x^2} \frac{du(x)}{dx} \right) + \frac{2}{x^4} u(x) = e^x \\ u(1) = u(2) = 0 \end{cases}.$$

- i) Si discuta l'esistenza e l'unicità della soluzione alla luce del teorema dell'alternativa.
- ii) Si determini la soluzione utilizzando il metodo della funzione di Green.

Soluzione. Consideriamo il problema omogeneo associato

$$\begin{cases} \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{x^2} \frac{du(x)}{dx} \right) + \frac{2}{x^4} u(x) = 0 \\ u(1) = u(2) = 0 \end{cases}.$$

L'equazione differenziale è riconducibile all'equazione di Eulero

$$x^2 u'' - 2x u' + 2u = 0,$$

che ha come soluzione generale

$$u = ax + bx^2,$$

con a e b costanti generiche. Si vede facilmente che il problema omogeneo con le condizioni al bordo assegnate ammette solo la soluzione banale $u(x) = 0$. Dal teorema dell'alternativa concludiamo che il problema di Sturm-Liouville assegnato ammette un'unica soluzione.

Passiamo alla determinazione della soluzione esplicita. La funzione di Green può essere ricavata dall'eq. (6.5.33). Abbiamo che due soluzioni che rispettano le condizioni in eq. (6.5.32) sono

$$u_1 = x^2 - x, \quad u_2 = x^2 - 2x,$$

inoltre $W(u_1, u_2) = x^2$. Poiché $p(x) = 1/x^2$, otteniamo la funzione di Green

$$G(x, t) = \begin{cases} (x^2 - x)(t^2 - 2t) & x < t \\ (x^2 - 2x)(t^2 - t) & x > t \end{cases}.$$

La soluzione del problema di Sturm-Liouville assegnato è data da

$$\begin{aligned} \bar{u}(x) &= \int_1^2 G(x, t) e^t dt = (x^2 - x) \int_x^2 (t^2 - t) e^t dt + (x^2 - 2x) \int_1^x (t^2 - t) e^t dt \\ &= x(x - 2)(e^x - e). \end{aligned}$$

Esercizio 10. Si consideri l'equazione differenziale

$$4(z^2 + 1) u''(z) + 4iu'(z) - 3u(z) = 0,$$

dove i è l'unità immaginaria.

- i) Si studino i punti singolari dell'equazione e si calcolino i relativi indici.
- ii) Si determinino due soluzioni indipendenti.
- iii) Opzionale: Si determini la forma esplicita di almeno una delle due soluzioni. (Suggerimento: si utilizzino le formule per casi speciali delle funzioni ipergeometriche.)

Soluzione Lo studio dei punti singolari è del tutto standard, quindi riportiamo solo i risultati. L'equazione ha tre punti singolari, $z = i$, $z = -i$ e $z = \infty$.

- Per $z = i$ otteniamo gli indici

$$\alpha_1 = 0, \quad \alpha_2 = 1/2.$$

- Per $z = -i$ otteniamo gli indici

$$\alpha_1 = 0, \quad \alpha_2 = 3/2.$$

- Per $z = \infty$ otteniamo gli indici

$$\alpha_1 = 1/2, \quad \alpha_2 = -3/2.$$

Il P-simbolo corrispondente all'equazione è

$$P \left\{ \begin{array}{ccc} i & -i & \infty \\ 0 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 3/2 & -3/2 \end{array} \right. z \right\}.$$

Si vede immediatamente che il cambio di variabili $\eta = (i - z)/(2i)$ porta l'equazione nella forma di una equazione ipergeometrica standard con parametri

$$a = 1/2, \quad b = -3/2, \quad c = 1/2,$$

corrispondente al P-simbolo

$$P \left\{ \begin{array}{ccc} 0 & 1 & \infty \\ 0 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 3/2 & -3/2 \end{array} \right. \eta = (i - z)/(2i) \right\}.$$

Due soluzioni indipendenti possono essere ricavate espandendo attorno al punto $\eta = 0$ ⁷

$$u_1 = {}_2F_1 \left(1/2, -3/2; 1/2; \frac{i - z}{2i} \right), \quad u_2 = \left(\frac{i - z}{2i} \right)^{1/2} {}_2F_1 \left(1, -1; 3/2; \frac{i - z}{2i} \right).$$

La soluzione u_1 può essere riscritta in termini di funzioni elementari sfruttando il risultato nell'eq. (10.5.3):

$$u_1 = \left(1 - \frac{i - z}{2i} \right)^{3/2} = \left(\frac{1}{2} - \frac{i}{2} z \right)^{3/2}.$$

La funzione ipergeometrica nella soluzione u_2 si riduce ad un polinomio, quindi:

$$u_2 = \left(\frac{i - z}{2i} \right)^{1/2} \sum_{n=0}^1 \frac{(-1)_n (1)_n}{n! (3/2)_n} \left(\frac{1}{2} - \frac{i}{2} z \right)^n = \frac{1}{3\sqrt{2}} (1 + iz)^{1/2} (2 - iz).$$

⁷Equivalentemente si può espandere attorno a $\eta = 1$, sebbene questa espansione renda più difficile la determinazione esplicita di entrambe le soluzioni indipendenti richiesta al punto iii. Anche la determinazione delle soluzioni sviluppando attorno al punto $\eta = \infty$ è possibile, ma richiede maggiore cura in quanto coinvolge serie ipergeometriche con $c \in \mathbb{Z}$.

SOLUZIONI DEGLI ESERCIZI

Capitolo 2

Esercizio 2.2. La distribuzione è data da

$$\frac{1}{(1-a^2)^{1/2}} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (\delta(x - (2\pi k + \arccos a)) + \delta(x - (2\pi k - \arccos a))) .$$

Per $a = \pm 1$ l'argomento della delta $a - \cos x$ presenta degli zeri doppi, quindi l'espressione non è ben definita. Si noti che la soluzione data precedentemente diventa singolare per $a = \pm 1$.

Esercizio 2.3.

$i)$	$0,$	$v)$	$2\delta,$
$ii)$	$-2\delta,$	$vi)$	$\pi\delta,$
$iii)$	$\pi\delta,$	$vii)$	$2\sqrt{\pi}\delta.$
$iv)$	$0,$		

Esercizio 2.6. Consideriamo una funzione di test in $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^2/\{0,0\})$. La distribuzione, nel limite $t \rightarrow \infty$, converge a

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (T_t, \varphi) = \int \phi(1, \theta) d\theta ,$$

dove $\phi(r, \theta)$ corrisponde alla funzione di test riscritta in coordinate polari. La distribuzione non ha limite ben definito in $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$. Per dimostrarlo si consideri, ad esempio, una funzione di test del tipo $\varphi = \varphi(x^2 + y^2) = \phi(r^2)$ con $\phi \in C_0^\infty((-1, 1))$ e $\varphi(0) \neq 0$. Per tale funzione risulta

$$(T_t, \varphi) = -\pi\varphi(0) \cos t - \pi \int_0^1 \cos(ts) \varphi'(1-s) ds .$$

L'integrale tende a zero per $t \rightarrow \infty$, mentre il primo termine oscilla con ampiezza costante. La distribuzione quindi non ha limite ben definito in $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$.

Esercizio 2.7. La distribuzione corrisponde a

$$2 \frac{\cosh x - 1}{x^2} - 2\pi i \delta.$$

Si noti che l'espressione iniziale può essere riscritta in modo semplificato come

$$\frac{e^x - 1}{(x + i\epsilon)^2} + \frac{e^{-x} - 1}{(x - i\epsilon)^2}.$$

Esercizio 2.9.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \delta(x)\delta(y).$$

Esercizio 2.10.

$$f = Pv \frac{Q(x)}{P(x)} + \sum_i a_i \delta(x - x_i),$$

dove x_i sono gli zeri del polinomio $P(x)$ e a_i sono delle costanti arbitrarie. Si noti che il valore principale deve essere preso intorno a tutti gli zeri di $P(x)$.

Esercizio 2.11.

$$f = Pv \frac{1}{x} + a + b\delta(x) + c\theta(x),$$

con a , b e c costanti arbitrarie.

Esercizio 2.13. La distribuzione è data da

$$\sum_{i=0}^k c_i \delta^{(i)},$$

con c_i coefficienti costanti.

Esercizio 2.14. Le due convoluzioni hanno come risultato

$$\frac{x^{n-1}}{(n-1)!} \theta(x), \quad e^{-x} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} \theta(x).$$

Esercizio 2.15. La distribuzione corrisponde a

$$\theta^{(k)}(x) = \delta^{(k-1)}.$$

Esercizio 2.16. Le due convoluzioni hanno come risultato

$$(1 * \delta') * \theta = 0, \quad 1 * (\delta' * \theta) = 1.$$

Si noti che in questo caso la convoluzione non soddisfa la proprietà associativa. Questo succede in quanto due delle distribuzioni convolute non hanno supporto compatto.

Esercizio* 2.18. Per dimostrare che $T = a\delta(x)$, calcoliamo T su una funzione di test φ e riscriviamo quest'ultima come

$$\varphi(x) = \varphi(0)\chi(x) + x\psi(x),$$

dove abbiamo usato il risultato dell'esercizio 2.17. In questo modo otteniamo

$$\begin{aligned}(T, \varphi) &= (T, \varphi(0)\chi(x) + x\psi(x)) = \varphi(0)(T, \chi) + (T, x\psi) \\ &= \varphi(0)(T, \chi) + (xT, \psi) = a\varphi(0) = (a\delta(x), \varphi(x)),\end{aligned}$$

dove $a = (T, \chi(x))$ è una costante.

Per risolvere la seconda parte dell'esercizio procediamo per induzione. Assumiamo che $x^k T = 0$ per $k \leq m$ abbia come soluzione

$$T = \sum_{i=0}^{k-1} a_i \delta^{(i)}(x),$$

con a_i costanti e $\delta^{(0)}(x) = \delta(x)$. Vogliamo dimostrare che questa espressione è valida anche per $k = m + 1$. Partiamo dall'equazione

$$x^{m+1} T = x(x^m T) = 0,$$

da cui otteniamo che

$$x^m T = a_m \delta(x).$$

Ridefiniamo T come

$$T = \tilde{T} + \frac{(-1)^m}{m!} a_m \delta^{(m)}(x)$$

Si verifica facilmente che

$$x^m \tilde{T} = x^m T - \frac{(-1)^m}{m!} a_m x^m \delta^{(m)}(x) = 0.$$

Dunque

$$\tilde{T} = \sum_{i=0}^{m-1} a_i \delta^{(i)}(x),$$

da cui segue il risultato cercato per T .

Esercizio* 2.19. Data una funzione di test $\varphi(x)$ dimostriamo che essa può essere riscritta come

$$\varphi(x) = \psi'(x) + \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi \right) \chi(x),$$

dove $\psi(x)$ e $\chi(x)$ sono funzioni di test con $\int \chi = 1$. Definiamo infatti

$$\psi(x) = \int_{-\infty}^x [\varphi(t) - \mathcal{I} \chi(t)] dt,$$

dove

$$\mathcal{I} = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t) dt.$$

Si ha che

$$\psi'(x) = \varphi(x) - \mathcal{I}\chi(x).$$

Inoltre si ha che $\psi(x) = 0$ per x al di fuori del supporto di φ e χ , che indichiamo con Ω . Questo fatto è banale per $x < \inf \Omega$. Per il caso $x > \sup \Omega$, notiamo che, dalla definizione di ψ segue che per $x \rightarrow \infty$ $\psi \rightarrow 0$. Poiché l'integrale che definisce ψ riceve contributi solo dalla regione Ω , si ha che per $x > \sup \Omega$ $\psi(x) = 0$. Infine, essendo $\psi'(x)$ una combinazione lineare di funzioni di test, essa è infinitamente derivabile. Questo prova che $\psi \in \mathcal{D}$.

Vediamo ora che

$$(T, \varphi) = (T, \psi' + \mathcal{I}\chi) = (T, \psi') + \mathcal{I}(T, \chi) = a\mathcal{I} = (a, \varphi),$$

dove $a = (T, \chi)$ è una costante. Questo dimostra la tesi nella prima parte dell'esercizio.

Per determinare la distribuzione che risolve l'equazione $x^m T' = 0$, usiamo il risultato dell'esercizio 2.18, dal quale ricaviamo (per $m \geq 1$)

$$T' = \sum_{k=0}^{m-1} a_k \delta^{(k)}(x),$$

Ridefiniamo T come

$$T = \tilde{T} + a_0 \theta(x) + \sum_{k=1}^{m-1} a_k \delta^{(k-1)}(x),$$

dove le delta di Dirac sono assenti per $m = 1$. Si verifica facilmente, applicando la distribuzione ad una funzione di test, che $\tilde{T}' = 0$, quindi $\tilde{T} = a$ con a costante. A partire da questo risultato otteniamo

$$T = a + a_0 \theta(x) + \sum_{k=0}^{m-2} a_{k+1} \delta^{(k)}(x).$$

Chiaramente per $m = 1$ i termini con le delta di Dirac sono assenti.

Capitolo 3

Esercizio 3.5.

- | | |
|---|---|
| i) $\sqrt{\frac{\pi}{2}} [\delta'(\omega - 1) - \delta'(\omega + 1)]$, | v) $-\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{(\omega - i\epsilon)^2}$, |
| ii) $\sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{i}{2} [2\delta'(\omega) - \delta'(\omega - 2) - \delta'(\omega + 2)]$, | vi) $-\sqrt{\frac{2}{\pi}} i P v \frac{1}{\omega}$, |
| iii) $\sqrt{\frac{\pi}{2}} (\text{sign } \omega) \frac{e^{- \omega }}{i}$, | vii) $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(P v \frac{1}{\omega + 1} - P v \frac{1}{\omega - 1} \right)$, |
| iv) $\frac{\sqrt{2\pi}}{(2i)^k} \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} (-1)^j \delta(\omega - (k - 2j))$, | viii) $\sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{i} P v \frac{e^{- \omega }}{\omega}$. |

Esercizio 3.7. Calcolando la trasformata di Fourier dell'equazione otteniamo

$$-k^2 F - 4F = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{5ik},$$

dove abbiamo posto $F(k) \equiv [\mathcal{F}f](k)$. Dunque otteniamo

$$F(k) = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{e^{5ik}}{k^2 + 4}.$$

L'antitrasformata di Fourier può essere calcolata con un'integrazione sul piano complesso, ottenendo

$$f(x) = -\frac{1}{4} e^{-2|x+5|}.$$

Capitolo 5

Esercizio 5.1.

$$y = \frac{1}{5} (1 - e^{-x^5}) + y_0 e^{-x^5}.$$

Esercizio 5.2.

$$y = c e^{-ax}.$$

Esercizio 5.3.

$$y = c x^{-a}.$$

Esercizio 5.4.

$$y = \frac{1}{2 \cos x} (1 + 2 y_0 - \cos^2 x).$$

Esercizio 5.5.

$$y = (x + y_0) \cos x.$$

Esercizio 5.6.

$$y = (x + y_0) \sin x.$$

Esercizio 5.7.

$$y = [e + \theta(x) + e \theta(x-1)] e^{-x^2}.$$

Capitolo 6

Esercizio 6.2.

$$y(x) = 1 + x^2 + b x + c e^x.$$

Esercizio 6.3.

$$y(x) = \frac{1}{96x}(12 - (15 - 112a)x^2 + (3 - 16a)x^4).$$

Esercizio 6.4.

$$\frac{1}{54}(24 - (21 - 54a)x + x^3 + 18 \log x).$$

Esercizio 6.5.

i) La soluzione è data da

$$y(x) = -\frac{1}{12}e^x(x-1)(12a - x - x^2 - x^3).$$

ii) Con questa scelta di condizioni al bordo l'equazione differenziale non ammette soluzione. In questo caso l'operatore differenziale non è invertibile, esso infatti ammette il modo zero

$$\phi(x) = (x-1)e^x,$$

che soddisfa le condizioni al bordo omogenee $y'(0) = 0$ e $y(1) = 0$. Essendo il termine noto (x^2e^x) non ortogonale al modo zero (si veda a tal proposito la discussione data nella soluzione del punto iii)) il problema differenziale non è risolubile. Si noti inoltre che la funzione di Green non esiste.

iii) Il problema differenziale ammette infinite soluzioni,

$$y(x) = \frac{e^x}{12}(x-1)(x^2 + x^3 + \alpha),$$

con α costante arbitraria. L'operatore differenziale ammette, ovviamente, lo stesso modo zero determinato nel caso ii). Tuttavia il termine noto $(x^2 - 1/6)e^{-x}$ è ortogonale al modo zero. Si noti che per verificare l'ortogonalità tramite l'eq. (6.5.53) è necessario riscrivere l'operatore differenziale nella forma di Sturm-Liouville. Con le opportune manipolazioni, l'equazione differenziale può essere riscritta nella forma

$$\frac{d}{dx} \left(e^{-2x} \frac{dy}{dx} \right) + e^{-2x} y = \left(x^2 - \frac{1}{6} \right) e^{-x}.$$

Si verifica facilmente che la condizione (6.5.53) è soddisfatta:

$$\int_0^1 \phi(x)(x^2 - 1/6)e^{-x} = \int_0^1 (x-1)e^x(x^2 - 1/6)e^{-x} = 0.$$

Quindi, per il teorema dell'alternativa, l'equazione differenziale (con condizioni al bordo omogenee) ammette infinite soluzioni.

Esercizio 6.6. La soluzione del problema iniziale è data da

$$y(x) = \frac{1}{x}(1 + \cos x - \sin x).$$

La seconda scelta di condizioni al bordo non ammette soluzione. In questo caso l'operatore differenziale non è invertibile, infatti la seguente funzione

$$y(x) = \frac{\sin x}{x},$$

è soluzione dell'equazione omogenea associata e soddisfa le condizioni al bordo omogenee. Essendo il termine noto (1) non ortogonale al modo zero il problema differenziale non è risolubile (si veda la discussione al punto iii) della soluzione dell'esercizio 6.5). Inoltre la funzione di Green non esiste.

Esercizio 6.7.

$$y(x) = (\cos x + 2 \tan x \sin x - x \tan x - 1)e^{-x}.$$

Esercizio 6.8.

$$u(x) = \frac{1}{3x}(-6\pi + \pi^3 - x^3 - 6x \cos x + 6 \sin x - 3x^2 \sin x).$$

Esercizio 6.9.

$$u(x) = \frac{1}{4}(3 - 4e^x + e^{2x} + 2x).$$

Esercizio 6.10.

$$u(x) = \frac{1}{48x^2}(12x^4 \log x - 15x^4 - 1).$$

Esercizio 6.11. La condizione è

$$\int_0^L \phi_h(x)f(x) - \alpha p(0)\phi'(0) + \beta p(L)\phi'(L) = 0.$$

Esercizio 6.12.

- i) L'operatore differenziale ammette il modo zero $\phi(x) = \sin x$. Il termine noto non è ortogonale al modo zero, quindi non esistono soluzioni.
- ii) L'operatore differenziale ammette il modo zero $\phi(x) = \cos x$. Il termine noto è ortogonale al modo zero, quindi esistono infinite soluzioni,

$$u(x) = \frac{1}{2}(\sin x - x \cos x) + a \cos x.$$

- iii) L'operatore differenziale non ammette modi zero, quindi esiste una sola soluzione

$$u(x) = -\frac{1}{2} \sin x.$$

iii) L'operatore differenziale non ammette modi zero, quindi esiste una sola soluzione

$$u(x) = \sin x.$$

Capitolo 7

Esercizio 7.1. La soluzione generale del sistema omogeneo associato è data da

$$y = Y \cdot \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - 2x & -x \\ 4x & 1 + 2x \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix},$$

dove Y è la matrice fondamentale. Una soluzione particolare del sistema di equazioni è data da

$$y_P = \begin{pmatrix} \frac{1}{6}(2-x)x^3 - e^x \\ \frac{x^4}{3} + 3e^x \end{pmatrix}.$$

Si noti che una soluzione particolare può essere ricavata dalla formula (si veda il teorema 7.2)

$$y_P(x) = Y(x) \int^x Y^{-1}(t)B(t)dt,$$

dove Y è la matrice fondamentale. La soluzione che soddisfa le condizioni iniziali date è

$$y = \begin{pmatrix} -1 + x^2 - \frac{2x^3}{3} - e^x \\ 2 + \frac{4x^3}{3} + 3e^x \end{pmatrix},$$

essa può essere ricavata tramite il risultato del teorema 7.2 oppure sommando la soluzione generale dell'equazione omogenea con la soluzione particolare y_P ed imponendo le condizioni al bordo.

Esercizio 7.2. L'equazione differenziale si riscrive come

$$u' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} u,$$

dove $u = (u_0, u_1) \equiv (y, y')$. La matrice fondamentale risulta

$$Y = \begin{pmatrix} 2e^x - e^{2x} & -e^x + e^{2x} \\ 2e^x - 2e^{2x} & -e^x + 2e^{2x} \end{pmatrix}.$$

La soluzione che soddisfa le condizioni iniziali è data da

$$u = Y \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}.$$

Esercizio 7.3.

$$Y(x) = e^{3x} \begin{pmatrix} 1-x & x \\ -x & 1+x \end{pmatrix}.$$

Esercizio 7.4.

$$Y(x) = e^{2x} \begin{pmatrix} \cos 3x & \sin 3x \\ -\sin 3x & \cos 3x \end{pmatrix}.$$

Esercizio 7.5.

$$Y(x) = \begin{pmatrix} 2e^{2x} - e^{5x} & -e^{2x} + e^{5x} \\ 2e^{2x} - 2e^{5x} & -e^{2x} + 2e^{5x} \end{pmatrix}.$$

Capitolo 8

Esercizio 8.1. La relazione di ricorrenza per i coefficienti delle serie è

$$c_{k+2} = \frac{(k-1/2)(k+3/2)}{(k+1)(k+2)} c_k.$$

Esercizio 8.2.

$$u_1 = 1 - \frac{z^2}{6}, \quad u_2 = z - \frac{5z^2}{12}.$$

Esercizio 8.3. Il punto $z = 0$ è singolare regolare e le relative soluzioni dell'equazione indiciale sono

$$\alpha_1 = \frac{1}{2} + m, \quad \alpha_2 = \frac{1}{2} - m.$$

Le soluzioni ottenute espandendo in serie attorno a $z = 0$ sono

$$u_1 = z^{1/2+m} \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(1+m) \cdots (n+m)} \frac{(z/4)^{2n}}{n!} \right),$$

$$u_2 = z^{1/2-m} \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(1-m) \cdots (n-m)} \frac{(z/4)^{2n}}{n!} \right).$$

Esercizio 8.9.

$$u_1 = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n! 4^n} \frac{1}{(4n-1)(4n-5) \cdots 3} z^{4n},$$

$$u_2 = z + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n! 4^n} \frac{1}{(4n+1)(4n-3) \cdots 5} z^{4n+1}.$$

Esercizio 8.10.

$$u_1 = 1 + \frac{z^3}{2 \cdot 3} + \frac{z^6}{(2 \cdot 3)(5 \cdot 6)} + \cdots + \frac{z^{3n}}{(2 \cdot 3)(5 \cdot 6) \cdots ((3n-1) \cdot 3n)} + \cdots,$$

$$u_2 = z + \frac{z^4}{3 \cdot 4} + \frac{z^7}{(3 \cdot 4)(6 \cdot 7)} + \cdots + \frac{z^{3n+1}}{(3 \cdot 4)(6 \cdot 7) \cdots (3n \cdot (3n+1))} + \cdots.$$

Esercizio 8.12. Gli indici relativi al punto $z = 0$ sono $\alpha_1 = 0$ e $\alpha_2 = -2$. Due soluzioni espanse in serie attorno a $z = 0$ sono

$$u_1 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2}{k+2} z^k, \quad u_2 = \frac{1}{z^2}.$$

Si noti che questa equazione è un'equazione ipergeometrica con $a = 1$, $b = 2$ e $c = 3$. Due soluzioni indipendenti sono date da

$$u_1 = {}_2F_1(1, 2; 3; z) = -\frac{2}{z^2}(z + \log(1-z)), \quad u_2 = z^{-2} {}_2F_1(-1, 0; -1; z) = \frac{1}{z^2}.$$

Si verifica facilmente che l'espansione in serie di u_1 coincide con l'espressione data precedentemente.

Esercizio 8.13.

- i) In un intorno di un punto regolare una soluzione, non identicamente nulla, deve sempre avere valore non nullo e/o derivata prima non nulla, ovvero $c_0 \neq 0$ e/o $c_1 \neq 0$. Questo significa che il suo andamento deve essere costante o lineare.

Per dimostrare questo fatto si può ricorrere al teorema di esistenza ed unicità. Una soluzione con andamento $(z - z_0)^k$ con $k \geq 2$ avrebbe $u(z_0) = u'(z_0) = 0$. Ma un problema di Cauchy con queste condizioni iniziali ammette come unica soluzione (in un intorno di z_0) la funzione $u(z) = 0$.

Un metodo alternativo per dimostrare il risultato è sfruttare l'espansione in serie attorno a z_0 . Si verifica facilmente che, essendo il coefficiente del termine u'' non nullo in z_0 , le relazioni di ricorrenza per i coefficienti dell'espansione implicano che la soluzione è identicamente nulla se $c_0 = c_1 = 0$.

- ii) Un problema di Cauchy con condizioni iniziali assegnate in un punto singolare non sempre ammette soluzione. Se esiste una soluzione, essa può non essere unica. Ad esempio l'equazione

$$u''(z) - \frac{2}{z}u'(z) + \frac{2}{z^2}u(z) = 0$$

ammette come soluzione generale $u(z) = c_1 z + c_2 z^2$. Come si vede questa soluzione ha necessariamente $u(0) = 0$, quindi il problema di Cauchy con $u(0) \neq 0$ non ammette soluzione. Inoltre il problema di Cauchy con $u(0) = 0$ e $u'(0) = 0$ ammette infinite soluzioni, date da $u(z) = c_2 z^2$ per c_2 arbitrario (possibilmente anche nullo).

Capitolo 9

Esercizio 9.3.

- i) L'equazione ha due punti singolari regolari, $z = 0$ e $z = 1$. Gli indici per $z = 0$ sono $\alpha_1 = 1/3$ e $\beta_1 = 2/3$, mentre per $z = 1$ sono $\alpha_1 = -1/3$ e $\beta_1 = -2/3$. Il punto all'infinito è regolare. L'equazione è quindi un'equazione di Eulero.
- ii) La soluzione generale è data da

$$u = c_1 \left(\frac{z}{1-z} \right)^{1/3} + c_2 \left(\frac{z}{1-z} \right)^{2/3}.$$

Esercizio 9.4.

- i) L'equazione ha due punti singolari regolari, $z = z_0$ e $z = \infty$. Gli indici per $z = z_0$ sono $\alpha_1 = \beta_1 = 1/2$, mentre per $z = \infty$ sono $\alpha_1 = \beta_1 = -1/2$. L'equazione è quindi un'equazione di Eulero.
- ii) La soluzione generale è data da

$$u = \sqrt{z - z_0} (c_1 + c_2 \log(z - z_0)).$$

Esercizio 9.5.

- i) L'equazione ha un punto singolare irregolare, $z = 0$. Il punto all'infinito è regolare.
- ii) L'equazione è riconducibile all'equazione con due punti singolari regolari confluenti (9.4.15) con $k = i$, la cui soluzione generale è

$$u = c_1 e^{1/z} + c_2 e^{-1/z} = (c_1 + c_2) \cosh \frac{1}{z} + (c_1 - c_2) \sinh \frac{1}{z}.$$

Esercizio* 9.6. Si dimostra facilmente che il punto all'infinito è regolare se il coefficiente del termine $y(z)$ moltiplicato per z^2 è analitico per $z \rightarrow \infty$. Da questo segue che la condizione che garantisce la regolarità del punto all'infinito è

$$\sum_{k=1}^n a_k = 0.$$

La soluzione dell'equazione è

$$y(z) = c \prod_{k=1}^n (z - z_k)^{-a_k}.$$

Esercizio 9.7.

- i) L'equazione ha due punti singolari regolari, $z = \pm i$. Gli indici relativi al punto $z = i$ sono $\alpha_1 = 2$, $\alpha_2 = -3$, mentre quelli relativi al punto $z = -i$ sono $\alpha_1 = -2$, $\alpha_2 = 3$. Il punto all'infinito è regolare.
- ii) L'equazione è un'equazione di Eulero. Tramite la trasformazione conforme

$$\zeta = \frac{z-i}{z+i}$$

si possono mandare i punti singolari $z = i$ e $z = -i$ in $\zeta = 0$ e $\zeta = \infty$, portando l'equazione in forma standard. La soluzione è quindi data da

$$u = c_1 \left(\frac{z-i}{z+i} \right)^2 + c_2 \left(\frac{z-i}{z+i} \right)^{-3}.$$

Capitolo 10**Esercizio 10.5.**

$${}_2F_1(2a, 2b; a+b+1/2; 1/2) = \frac{\Gamma(a+b+1/2)\Gamma(1/2)}{\Gamma(a+1/2)\Gamma(b+1/2)}.$$

Esercizio 10.6.

- i) I punti singolari sono 0, 1 e 2, il punto all'infinito è regolare. Il P -simbolo corrispondente è

$$P \left\{ \begin{array}{ccc} 0 & 1 & 2 \\ 1/3 & 0 & 1 \\ -1/3 & 0 & 0 \end{array} \begin{array}{c} z \\ \\ \end{array} \right\}.$$

- ii) Due soluzioni indipendenti sono date da

$$\left(\frac{z}{2-z} \right)^{1/3} {}_2F_1 \left(\frac{4}{3}, \frac{1}{3}; \frac{5}{3}; \frac{z}{2-z} \right), \quad \frac{z}{2-z} {}_2F_1 \left(\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}; \frac{1}{3}; \frac{z}{2-z} \right).$$

Esercizio 10.7.

- i) I punti singolari sono 0, 1 e -1 , il punto all'infinito è regolare. Il P -simbolo corrispondente è

$$P \left\{ \begin{array}{ccc} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a \\ -1 & 2 & -a \end{array} \begin{array}{c} z \\ \\ \end{array} \right\}.$$

ii) La soluzione regolare ha sviluppo in serie

$$u_1 = 1 + \frac{a^2}{4}(z+1) + \frac{(11+a^2)a^2}{48}(z+1)^2 + \dots$$

la seconda soluzione (a meno di multipli di u_1) può essere scritta nella forma

$$u_2 = \frac{a^2-1}{2}u_1 \log(z+1) + \frac{1}{z+1} - \frac{8-15a^2+3a^4}{16}(z-1) - \frac{72-155a^2+4a^4+7a^6}{288}(z+1)^2 + \dots$$

iii) L'equazione differenziale può essere trasformata in un'equazione ipergeometrica standard spostando i punti singolari in 0, 1 e ∞ tramite una trasformazione di Möbius. Possiamo scegliere la trasformazione

$$t = \frac{z+1}{2z},$$

che manda le singolarità in $(-1, 1, 0)$ in $(0, 1, \infty)$. La soluzione regolare in $z = -1$ può essere riscritta come

$$u_1 = {}_2F_1\left(a, -a; 2; \frac{z+1}{2z}\right).$$

Si noti che la seconda soluzione “canonica” attorno a $z = -1$

$$\left(\frac{z+1}{2z}\right)^{-1} {}_2F_1\left(a-1, -a-1; 0; \frac{z+1}{2z}\right),$$

non è ben definita. Una seconda soluzione può tuttavia essere determinata tramite un processo di limite, utilizzando

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[\frac{1-a^2}{\epsilon} {}_2F_1(a, -a; 2-\epsilon; t) - t^{-1+\epsilon} {}_2F_1(a-1+\epsilon, -a-1+\epsilon; \epsilon; t) \right].$$

Questa soluzione coincide, a meno di un fattore moltiplicativo e di un multiplo di u_1 , con la serie per u_2 riportata in precedenza.

Esercizio 10.9.

i) I punti singolari sono 0, 1 e -1 , il punto all'infinito è regolare. Il P -simbolo corrispondente è

$$P \left\{ \begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 1 & z \\ 0 & 0 & 1 & \\ 0 & 1 & -1 & \end{array} \right\}.$$

ii) Per spostare i punti singolari in $(0, 1, \infty)$ si utilizzare la trasformazione di Möbius

$$\zeta = \frac{1+z}{1-z}.$$

Due soluzioni indipendenti possono essere ottenute usando le formule per le serie attorno a $\zeta = \infty$, equazioni (10.2.16) e (10.2.17),

$$u_1 = \left(\frac{1+z}{1-z} \right) {}_2F_1 \left(-1, -1, -1, \frac{1-z}{1+z} \right) = \frac{2z}{1-z},$$

$$u_2 = \left(\frac{1+z}{1-z} \right)^{-1} {}_2F_1 \left(1, 1, 3, \frac{1-z}{1+z} \right) = 2 + \frac{4z}{1-z} \log \frac{2z}{1+z}.$$

Esercizio 10.11.

i) I punti singolari sono 0, α e il punto all'infinito. Il P -simbolo corrispondente è

$$P \left\{ \begin{matrix} 0 & \alpha & \infty \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -\alpha & \alpha \end{matrix} \quad z \right\}.$$

ii) Per ottenere la soluzione si può usare un riscalamento della coordinata z , ottenendo

$$P \left\{ \begin{matrix} 0 & \alpha & \infty \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -\alpha & \alpha \end{matrix} \quad z \right\} = P \left\{ \begin{matrix} 0 & 1 & \infty \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -\alpha & \alpha \end{matrix} \quad z/\alpha \right\}.$$

Per $\alpha \neq -1, -2, -3, \dots$, due soluzioni indipendenti attorno a $z = \alpha$ sono

$$u_1 = {}_2F_1(1, \alpha; 1 + \alpha; 1 - z/\alpha),$$

$$u_2 = (1 - z/\alpha)^{-\alpha} {}_2F_1(0, 1 - \alpha; 1 - \alpha; 1 - z/\alpha) = (1 - z/\alpha)^{-\alpha}.$$

Se $\alpha \neq -1, -2, -3, \dots$ queste due soluzioni sono linearmente dipendenti, per ottenere una seconda soluzione indipendente si può usare la serie attorno a $z = \infty$,

$$u_1 = (\alpha/z) {}_2F_1(1, 1; 2 - \alpha; \alpha/z), \quad u_2 = (\alpha/z)^{-\alpha} {}_2F_1(\alpha, \alpha; \alpha; \alpha/z) = (z/\alpha - 1)^{-\alpha}.$$

Esercizio 10.12.

i) I punti singolari sono 0, a e il punto all'infinito. Il P -simbolo corrispondente è

$$P \left\{ \begin{matrix} 0 & a & \infty \\ 0 & 0 & a \\ 1 - c & c - a - b & b \end{matrix} \quad z \right\}.$$

ii) Per ottenere la soluzione si può usare un riscalamento della coordinata z , ottenendo

$$P \left\{ \begin{matrix} 0 & a & \infty \\ 0 & 0 & a \\ 1 - c & c - a - b & b \end{matrix} \quad z \right\} = P \left\{ \begin{matrix} 0 & a & \infty \\ 0 & 0 & a \\ 1 - c & c - a - b & b \end{matrix} \quad z/a \right\}.$$

Per $c \neq 0, -1, -2, -3, \dots$, due soluzioni indipendenti sono

$$u_1 = {}_2F_1(a, b; c; z/\alpha),$$

$$u_2 = (z/\alpha)^{1-c} {}_2F_1(1 + a - c, 1 + b - c; 2 - c; z/\alpha).$$

Per $c = 0, -1, -2, -3, \dots$ per ottenere una seconda soluzione si possono usare le soluzioni sviluppate in serie attorno al punto all'infinito.

Esercizio 10.13.

$${}_2F_1(1, 1; 3; z) = \frac{2}{z} + \frac{2(1-z)}{z^2} \log(1-z),$$

$${}_2F_1(1, 1; 4; z) = \frac{3(3z-2)}{2z^2} - \frac{3(1-z)^2}{z^3} \log(1-z).$$

Esercizio 10.14.

$$\begin{aligned} i) \quad {}_2F_1(3, 5; 6; z) &= \frac{5}{2} \frac{(z-2)(z^2+6z-6)}{(z-1)^2 z^4} - \frac{30}{z^5} \log(1-z), \\ ii) \quad {}_2F_1(3, 5; 4; z) &= \frac{1}{4} \frac{z-4}{(z-1)^4}, \\ iii) \quad {}_2F_1(3/2, 2; 5/2; -z^2) &= \frac{3}{2z^3} \left(-\frac{z}{1+z^2} + \arctan z \right), \\ iv) \quad {}_2F_1(3/2, 3/2; 5/2; z^2) &= \frac{3}{z^3} \left(\frac{z}{\sqrt{1+z^2}} - \arcsin z \right). \end{aligned}$$

Esercizio 10.15.

- i) I punti singolari sono 0, i e $-i$, il punto all'infinito è regolare. Il P -simbolo corrispondente è

$$P \left\{ \begin{array}{ccc} 0 & i & -i \\ -a & 0 & 0 \\ 1+a & 0 & 0 \end{array} \begin{array}{c} z \\ \\ \end{array} \right\}.$$

- ii) Per spostare i punti singolari in $(0, 1, \infty)$ si utilizzare la trasformazione di Möbius

$$\zeta = \frac{2z}{z+i}.$$

A questo punto si può usare la trasformazione (9.5.10) per portare l'equazione in forma di ipergeometrica. Due soluzioni indipendenti attorno a $\zeta = z = 0$ sono

$$\begin{aligned} u_1 &= \left(\frac{2z}{z+i} \right)^{-a} {}_2F_1 \left(-a, -a; -2a; \frac{2z}{z+i} \right), \\ u_2 &= \left(\frac{2z}{z+i} \right)^{1+a} {}_2F_1 \left(1+a, 1+a; 2+2a; \frac{2z}{z+i} \right). \end{aligned}$$

Esercizio* 10.16.

- i) Si noti come prima cosa che un'equazione con tre punti singolari invariante per $z \rightarrow -z$ deve avere due punti singolari in posizioni opposte rispetto all'origine, ovvero $z = \pm z_0$. Il terzo punto singolare sarà posto nell'origine. Partendo dalla forma generale dall'equazione di Papperitz-Riemann (9.5.3) ed imponendo la proprietà di simmetria otteniamo la forma generale

$$u'' + \left(2z \frac{1-\alpha-\beta}{(z^2-z_0)^2} + \frac{1-\alpha_0-\beta_0}{z} \right) u' + \frac{z_0^2}{z(z^2-z_0^2)} \left(4z \frac{\alpha\beta}{(z^2-z_0)^2} - \frac{\alpha_0\beta_0}{z} \right) u = 0.$$

Si noti che la simmetria implica che gli indici relativi ai punti singolari $\pm z_0$ siano uguali. Nell'equazione precedente, essi sono stati indicati con α e β , mentre α_0 e β_0 sono gli indici relativi al punto singolare $z = 0$. Si noti che gli indici devono soddisfare la relazione (9.5.2), ovvero

$$\alpha_0 + \beta_0 + 2\alpha + 2\beta = 1.$$

ii) Il cambio di variabile $y = z^2/z_0^2$ porta l'equazione nella seguente forma

$$u''(y) + \left(\frac{1 - \alpha - \beta}{y - 1} + \frac{1 - (\alpha_0 + \beta_0)/2}{y} \right) u'(y) + \frac{1}{y(y - 1)} \left(\frac{\alpha\beta}{y - 1} - \frac{\alpha_0\beta_0}{4y} \right) u(y) = 0.$$

Questa equazione è nella forma di Papperitz-Riemann ed ha punti singolari regolari in 0, 1 e ∞ . Il corrispondente P -simbolo è

$$P \left\{ \begin{array}{ccc} 0 & 1 & \infty \\ \alpha_0/2 & \alpha & 0 \\ \beta_0/2 & \beta & 1 - (\alpha_0 + \beta_0)/2 - \alpha - \beta \end{array} \right. y \right\}.$$

iii) L'equazione può essere portata in forma di ipergeometrica usando la trasformazione (9.5.10). Si ottiene in questo modo

$$y^{\alpha_0/2}(y - 1)^\alpha P \left\{ \begin{array}{ccc} 0 & 1 & \infty \\ 0 & 0 & \alpha + \alpha_0/2 \\ (\beta_0 - \alpha_0)/2 & \beta - \alpha & 1 - \beta_0/2 - \beta \end{array} \right. y \right\}.$$

Due soluzioni indipendenti di questa equazione sono date da

$$u_1 = y^{\alpha_0/2}(y - 1)^\alpha {}_2F_1(a, a + 1/2; 1 + a - b; y)$$

$$u_2 = y^{\beta_0/2}(y - 1)^\alpha {}_2F_1(b, b + 1/2; 1 + b - a; y)$$

dove per convenienza abbiamo definito

$$a = \alpha_0/2 + \alpha, \quad b = \beta_0/2 + \alpha.$$

iv) Per dimostrare la trasformazione quadratica, consideriamo il caso $z = 1$ e risolviamo direttamente l'equazione differenziale nella variabile z . Tramite la trasformazione conforme

$$\zeta = \frac{2z}{z + 1}$$

possiamo spostare i punti singolari in 0, 1 e ∞ . Inoltre, sfruttando la trasformazione (9.5.10), possiamo riscrivere il corrispondente P -simbolo come

$$\left(\frac{2z}{z + 1} \right)^{\alpha_0} \left(\frac{2z}{z + 1} - 1 \right)^\alpha P \left\{ \begin{array}{ccc} 0 & 1 & \infty \\ 0 & 0 & 2\alpha + \alpha_0 \\ \beta_0 - \alpha_0 & \beta - \alpha & \alpha + \beta + \alpha_0 \end{array} \right. 2z/(z + 1) \right\}.$$

Due soluzioni indipendenti sono date da

$$u_1 = \left(\frac{z}{z+1} \right)^{\alpha_0} \left(\frac{z-1}{z+1} \right)^{\alpha} {}_2F_1(2a, a-b+1/2; 1+2(a-b); 2z/(z+1)),$$

$$u_2 = \left(\frac{z}{z+1} \right)^{\beta_0} \left(\frac{z-1}{z+1} \right)^{\alpha} {}_2F_1(2b, b-a+1/2; 1+2(b-a); 2z/(z+1)).$$

Per valori generici degli indici α_0 e β_0 , l'andamento intorno a $z = 0$ permette di identificare le soluzioni appena trovare con quelle determinate nel punto iii) come funzione della variabile y . Si può inoltre controllare facilmente (usando il fatto che ${}_2F_1(a, b; c; 0) = 1$) che la normalizzazione è la stessa. Dal confronto tra le due espressioni di u_1 (lo stesso risultato si ottiene confrontando u_2) si deduce che

$${}_2F_1(a, a+1/2; 1+a-b; z^2) = (1+z)^{-2a} {}_2F_1\left(2a, a-b+1/2; 1+2(a-b); \frac{2z}{z+1}\right),$$

da cui segue una delle due relazioni quadratiche ponendo $c = 1 + a - b$. La seconda relazione quadratica si ottiene immediatamente da questa con il cambio di variabile $z \rightarrow -z$.

Capitolo 11

Esercizio 11.2.

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{4^k} \frac{4k+3}{2(k+1)} \frac{(2k)!}{(k!)^2} P_{2k+1}(x).$$

Capitolo 12

Esercizio 12.1.

- i) I punti singolari sono $z = 1$ e $z = \infty$. $z = 1$ è un punto singolare regolare, con indici 0 e $1/3$. Il punto $z = \infty$ è singolare irregolare.
- ii) La soluzione generale è

$$u(z) = c_1 {}_1F_1(2; 2/3; z-1) + c_2 (z-1)^{1/3} {}_1F_1(7/3; 4/3; z-1).$$

Esercizio 12.13.

- i) I punti singolari sono $z = 0$ e $z = \infty$. $z = 0$ è un punto singolare regolare, con indici $\alpha_{1,2} = \pm 1/3$. Il punto $z = \infty$ è singolare irregolare.

ii) Le relazioni di ricorrenza per le serie delle soluzioni sono

$$u_1 = z^{1/3} \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k \quad \text{con} \quad c_k = -\frac{k-2/3}{k(k+2/3)} c_{k-1},$$

e

$$u_2 = z^{-1/3} \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k \quad \text{con} \quad c_k = -\frac{k-4/3}{k(k-2/3)} c_{k-1}.$$

iii) La funzione w soddisfa l'equazione ipergeometrica confluyente del primo tipo con $a = 4/3$ e $c = 5/3$. Le soluzioni sono

$$u_1(z) = z^{1/3} e^{-z} {}_1F_1(4/3; 5/3; z), \quad u_2(z) = z^{-1/3} e^{-z} {}_1F_1(2/3; 1/3; z).$$

Esercizio 12.16. In termini della funzione ipergeometrica confluyente i polinomi di Hermite corrispondono a

$$H_{2m}(x) = (-1)^m \frac{(2m)!}{m!} {}_1F_1(-m; 1/2; x^2),$$

$$H_{2m+1}(x) = 2(-1)^m \frac{(2m+1)!}{m!} x {}_1F_1(-m; 3/2; x^2).$$

Una seconda soluzione dell'equazione differenziale è data da

$$\begin{aligned} x {}_1F_1(-m+1/2; 3/2; x^2) & \quad \text{per i polinomi pari,} \\ {}_1F_1(-m-1/2; 1/2; x^2) & \quad \text{per i polinomi dispari.} \end{aligned}$$

Esercizio 12.21.

- i) I punti singolari sono $z = 0$ e $z = \infty$. $z = 0$ è un punto singolare regolare, con indici $\alpha_1 = 0$ e $\alpha_2 = 1/2$. Il punto $z = \infty$ è singolare irregolare.
- ii) L'equazione è un'equazione ipergeometrica confluyente del primo tipo con $a = c = 1/2$. Due soluzioni indipendenti sono date da

$$u_1 = {}_1F_1(1/2; 1/2; z) = e^z, \quad u_2 = z^{1/2} {}_1F_1(1; 3/2; z).$$

Si noti che, una volta individuata la forma esplicita della soluzione u_1 , si può determinare una seconda soluzione con il metodo del Wronskiano (eq. (6.4.9)):

$$\begin{aligned} \tilde{u}_2 &= A e^z \int^z e^{-2t} \exp\left(-\int^t \left(\frac{1}{2\eta} - 1\right) d\eta\right) dt + B e^z = A e^z \int^z \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} + B e^z \\ &= A e^z \int^{\sqrt{z}} e^{-y^2} dy + B e^z = A \sqrt{\pi} e^z \operatorname{erf}(\sqrt{z}) + B e^z, \end{aligned}$$

dove abbiamo scelto di integrare in y a partire da $y = 0$. Sfruttando il fatto che

$$\sqrt{\pi} \operatorname{erf}(x) \sim 2x$$

per $x \rightarrow 0$, si ricava che \tilde{u}_2 con la scelta $A = 1/2$ e $B = 0$ riproduce la soluzione u_2 scritta prima in termini della funzione di Kummer. Questo dimostra inoltre la relazione

$${}_1F_1(1; 3/2; z) = \frac{1}{2} e^z \sqrt{\frac{\pi}{z}} \operatorname{erf}(\sqrt{z}).$$

RIFERIMENTI BIBLIOGRAFICI

Monografie

- [1] L. V. Ahlfors, *Complex Analysis*, Mc. Graw-Hill, New York (1996)
- [2] E. T. Whittaker, G. N. Watson, *A course of modern analysis*, Cambridge University Press (1927, reissued 1996)
- [3] G. Pradisi, *Lezioni di metodi matematici della fisica*, Collana “Appunti”, Edizioni della Normale, Pisa (2012)
- [4] G. Kristensson, *Second Order Differential Equations, Special Functions and Their Classification*, Springer Verlag (2010)
- [5] E. K. Kreyszig, *Introductory Functional Analysis with Applications*, John Wiley and Sons (1978).
- [6] A. N. Kolmogorov e S. V. Fomin, *Elements of the Theory of Functions and Functional Analysis*, Dover publications (1999)
- [7] W. Rudin, *Functional Analysis*, McGraw-Hill (1990)
- [8] M. Reed and B. Simon, *Methods of Modern Mathematical Physics, I: Functional Analysis*, Academic Press
- [9] J. K. Hale, *Ordinary Differential Equations*, Wiley
- [10] V. I. Arnold, *Ordinary differential equations*, Springer
- [11] B. Spain and M. G. Smith, *Functions of Mathematical Physics*, Van Nostrand Reinhold Company, London 1970

Dispense

- [12] D. Dominici, *Analisi funzionale*, dispense reperibili online.
- [13] D. Dominici, *Equazioni differenziali*, dispense reperibili online.