

Complementi di Metodi Matematici per la Fisica

Docenti: Filippo Colomo e Giuliano Panico
Sessione Invernale, Martedì 16 Febbraio 2021
Compito scritto¹

- 1) Si calcoli il valore dell'integrale

$$\int_{-a}^a \frac{(x+a)^\alpha (a-x)^{1-\alpha}}{x+b} dx,$$

con $0 < a < b$, e $-1 < \alpha < 2$.

- 2) Si valuti il termine dominante nell'espansione asintotica di

$$I(x) := \int_2^\infty e^{\frac{3}{2}axt^2} \frac{t^3}{\sinh xt^3} dt, \quad a \in \mathbb{R},$$

per $x \rightarrow +\infty$. Si noti che il risultato dipende dal valore di a : si discutano i vari casi.

- 3) Si determini la soluzione generale dell'equazione differenziale ordinaria (nel dominio $x > 0$)

$$x^2 u'' + x u' - u = x^2 e^x.$$

Suggerimento: per determinare una soluzione particolare può essere utile adottare il metodo di variazione delle costanti.

- 4) Si consideri l'equazione differenziale

$$(z-1)u''(z) + \left(1 - \frac{3}{2z}\right)u'(z) - \frac{4}{z}u(z) = 0.$$

- i) Si studino i punti singolari dell'equazione e si calcolino i relativi indici.
- ii) Si determinino due soluzioni indipendenti.
- iii) Si riscriva la soluzione regolare nell'origine in termini di polinomi di Jacobi e se ne determini la forma esplicita.
- iv) Opzionale: Si determini la forma esplicita della seconda soluzione.
(Suggerimento: si utilizzino le relazioni per funzioni ipergeometriche contigue e le formule per casi speciali delle funzioni ipergeometriche.)

¹NB: per l'ammissione all'orale è necessario svolgere correttamente almeno un esercizio tra i primi due, e uno tra i secondi due.