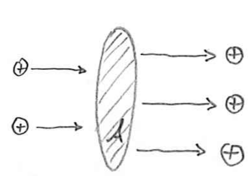
Fino ad ora ci siamo occupati di cariche elettriche in condizioni statiche. Ora studieremo cosa succede quando c'è uno spostamento di cariche elettriche. In questo caso si parla di CORRENTE ELETTRICA, o semplicemente CORRENTE. Come tutti sappiamo le applicazioni tecnologiche dell'elettricità sono innumerevoli e sono essenziali per la nostra vita di tutti i giorni. In questa sezione cercheremo di capire cosa è l'elettricità e quali leggi regolano le sue proprietà (ad es. nei circuiti elettrici).

Il primo concetto che dobbiamo definire è quello di corrente elettrica, che corrisponde ad un moto ordinato e concorde di cariche elettriche. Supponiamo di considerare una superficie A perpendicolare al moto delle cariche elettriche (questa superficie può ad esempio essere la sezione trasversale di un filo). Si definisce CORRENTE la quantità di carica che attraversa la superficie A nell'unità di tempo, ovvero



$$I = \frac{\Delta Q}{\Delta t}$$

dove ΔQ è la quantità di carica che passa nel tempo Δt e I è la corrente (o intensità della corrente). La corrente si misura in ampere (A) che corrisponde a

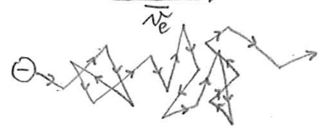
$$1\ A = 1\ C/s,$$

cioè 1 A corrisponde al passaggio di 1 C in 1 s.

Bisogna sottolineare che le cariche che attraversano la superficie A possono avere segno generico (sia positive, sia negative che miste). Convenzionalmente si sceglie come verso positivo della corrente quello in cui fluisce la carica positiva.

Da notare che nei comuni conduttori metallici una corrente elettrica è dovuta allo spostamento di elettroni, cioè cariche negative. Il verso della corrente in questo caso è quindi opposto rispetto al moto degli elettroni.

Usualmente ci si riferisce alle cariche che si muovono (sia positive che negative) come ai portatori di carica. Per esempio i portatori di carica in un metallo sono gli elettroni.



moto di un elettrone in un conduttore metallico

A livello microscopico il moto degli elettroni in un conduttore metallico non è semplice. Gli elettroni infatti urtano continuamente contro gli atomi e quindi sono deviati in direzioni casuali. Il loro avanzamento nel verso della corrente è quindi vero solo "in media", cioè gli elettroni fluiscono lentamente in verso opposto rispetto alla corrente. In questo moto, gli urti contro gli atomi trasferiscono a questi ultimi energia cinetica che fa aumentare l'energia cinetica di vibrazione degli atomi. Questo porta ad un aumento di temperatura degli atomi. Questo meccanismo microscopico fa capire che gli elettroni incontrano una resistenza che si oppone alla corrente (approfondiremo dopo questo aspetto) e spiega perché un conduttore percorso da una corrente si riscalda. Parte dell'energia elettrica è quindi "persa" sotto forma di calore.

3.1. POTENZIALE ELETTRICO

In meccanica, nel caso della forza gravitazionale esiste il concetto di energia potenziale, che determina la quantità di energia "immagazzinata" da un corpo che è posto in un certo campo gravitazionale. Nel caso di campo uniforme (come il campo vicino alla superficie terrestre) l'energia potenziale è semplicemente $V = mgh$, con m la massa del corpo e h l'altezza a cui è posto.

Nel caso della forza elettrica possiamo introdurre un concetto analogo, cioè l'energia potenziale dovuta al campo elettrico. (Notate che, esattamente come la forza gravitazionale, anche la forza elettrica è conservativa, ovvero ammette una definizione univoca di energia potenziale.) Ovviamente, analogamente all'energia gravitazionale che è proporzionale alla massa del corpo, l'energia potenziale elettrica sarà proporzionale alla carica elettrica del corpo (e non alla massa). E' quindi conveniente introdurre il concetto di POTENZIALE ELETTRICO che è definito come l'energia potenziale elettrica per unità di carica elettrica del corpo:

$$V = \frac{V_{elettrica}}{q}$$

dove $V_{elettrica}$ è l'energia potenziale per un dato corpo e q è la carica del corpo. Come abbiamo detto $V_{elettrica} \propto q$ è proporzionale alla carica q, quindi V non dipende più da q, ma è solo funzione del campo elettrico e non del corpo che in esso è immerso.

Il potenziale elettrico si misura in volt (V) che corrisponde a

$$1\,V = 1\,J/C,$$

cioè il volt corrisponde ad un Joule per unità di carica elettrica.

Esattamente come nel caso gravitazionale $V_{elettrica} = V \cdot q$ può convertirsi in altre forme di energia (ad es. energia cinetica, energia potenziale gravitazionale o anche energia termica). Cioè è un'altra forma di energia e segue il solito principio di conservazione dell'energia. Inoltre, di nuovo esattamente come nel caso gravitazionale, ciò che conta non è il valore assoluto di $V_{elettrica}$ in un punto, bensì la differenza di energia potenziale, cioè $\Delta V_{elettrica}$. E' infatti quest'ultima quantità che si trasforma in altri tipi di energia.

E' utile tenere a mente anche una seconda interpretazione del volt: per far superare ad una carica di 1C la differenza di potenziale di 1V è necessario fornire il lavoro di 1J.

Il potenziale elettrico ci dice in che modo si muovono le cariche elettriche libere (ovvero non trattenute da altre forze):

- una <u>carica positiva</u> si sposterà da un punto a potenziale maggiore ad uno con potenziale minore;
- una <u>carica negativa</u> si sposterà da un punto a potenziale minore ad uno a potenziale maggiore.

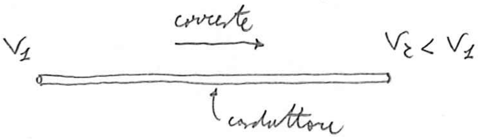
Questo è semplicemente una conseguenza del fatto che una carica libera tende a far decrescere la propria energia potenziale, cioè $\Delta U_{elettrica} < 0$. Ma visto che

$$\Delta U_{elettrica} = q \cdot \Delta V$$

si ha che

- per $q > 0$ un $\Delta U_{elettrica} < 0$ corrisponde a $\Delta V < 0$,
- per $q < 0$ un $\Delta U_{elettrica} < 0$ corrisponde a $\Delta V > 0$.

Questa discussione rende chiaro che se vogliamo indurre una corrente elettrica (ad es. attraverso un filo conduttore) dobbiamo utilizzare una differenza di potenziale:



Se una differenza di potenziale $\Delta V = V_1 - V_2$ è indotta ai capi di un conduttore, una corrente inizierà a fluire attraverso il conduttore.

3.2. RESISTENZA E LEGGE DI OHM

Vediamo ora quanta corrente attraversa un conduttore ai cui estremi sia stata applicata una differenza di potenziale ΔV. Si trova sperimentalmente che nei buoni conduttori l'intensità di corrente I è proporzionale a ΔV, ovvero $I \propto \Delta V$. In questo caso possiamo scrivere

$$I = \frac{\Delta V}{R} \qquad \underline{\text{legge di Ohm}}$$

dove R è detta <u>resistenza elettrica</u> (o semplicemente resistenza). L'unità di misura della resistenza è l'ohm (Ω), che corrisponde a V/A. Ovvero un conduttore con resistenza $1\,\Omega$ ai cui capi sia stata applicata una differenza di potenziale di $1\,V$ sarà attraversato da $1\,A$ di corrente.
È spesso utile ricordare la legge di Ohm nella forma

$$\Delta V = R \cdot I$$

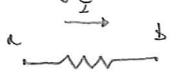
che ci permette di ricavare la differenza di potenziale agli estremi di un conduttore conoscendo la corrente che lo attraversa e la resistenza.

<u>NOTA.</u> $\Delta V = V_I - V_F$, cioè è la differenza tra il potenziale nel punto in cui arriva la corrente V_I al punto in cui essa lascia la resistenza V_F.

Bisogna tener presente che la legge di Ohm non è una legge fondamentale della natura. E' semplicemente una legge empirica approssimata valida per un buon numero di conduttori in un certo intervallo di temperature e di intensità di corrente. Se la temperatura cresce o decresce molto la resistenza di un materiale varia (tipicamente aumentando a temperature maggiori). Inoltre per correnti molto elevate la proporzionalità I e ΔV può essere persa.

In ogni caso per i nostri esercizi assumeremo che la legge di Ohm sia esatta.

Un RESISTORE (detto nel linguaggio comune una resistenza) è un semplice elemento di un circuito elettrico che fornisce una specifica resistenza R. Nei diagrammi dei circuiti è denotato da una linea a zig-zag



$\Rightarrow$ resistore $\qquad \Delta V = V_a - V_b = R \cdot I.$

La resistenza di un filo conduttore è proporzionale alla sua lunghezza e inversamente proporzionale alla sua sezione, ovvero

$$R = \rho \cdot \frac{l}{A} \qquad (*)$$

dove l è la lunghezza del filo e A è l'area della sua sezione. La costante di proporzionalità ρ è chiamata resistività e dipende dal materiale. La resistività si misura in $\Omega \cdot m$.

L'inverso della resistività è detto conduttività:

$$\sigma = 1/\rho$$

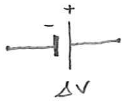
ed è misurata in $(\Omega \cdot m)^{-1}$. L'equazione $(*)$ può quindi essere riscritta come

$$R = \frac{l}{\sigma A}.$$

In questa tabella elenchiamo la resistività di alcuni materiali

MATERIALE	RESISTIVITA' $(\Omega \cdot m)$	
Argento	$1.59 \cdot 10^{-8}$	buoni conduttori
Rame	$1.7 \cdot 10^{-8}$	
Oro	$2.44 \cdot 10^{-8}$	
Alluminio	$2.82 \cdot 10^{-8}$	
Tungsteno	$5.6 \cdot 10^{-8}$	
Acciaio	$10 \cdot 10^{-8}$	
Platino	$11 \cdot 10^{-8}$	
Piombo	$22 \cdot 10^{-8}$	
Carbonio	$3.5 \cdot 10^{-5}$	cattivi conduttori
Silicio	640	
Gomma	$10^{10} - 10^{14}$	isolante.

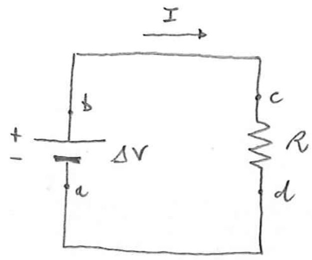
Vediamo ora di capire quale è il bilancio energetico per semplici circuiti con resistenza.
Prima di tutto introduciamo il concetto di batteria che corrisponde semplicemente ad un dispositivo capace di generare una differenza di potenziale (stabile nel tempo) ΔV. Una batteria in un circuito si indica col simbolo



$\Rightarrow$ batteria con dato ΔV.

I segni + e − indicano quale polo ha potenziale maggiore (il +) e quale ha potenziale minore (il −).

Uno dei circuiti più semplici può essere costruito collegando una batteria ad un resistore come in figura. Gli estremi della batteria sono collegati al resistore tramite dei fili conduttori, che assumiamo abbiano resistenza zero (cioè totalmente trascurabile).



Visto che la batteria genera una differenza di potenziale agli estremi a e b del circuito una corrente I inizierà a circolare nel circuito stesso.

Prima di tutto vogliamo capire quale è l'intensità della corrente. Per fare ciò usiamo la legge di Ohm per i vari tratti del circuito:

- filo b−c : poiché la resistenza $R_{bc}=0$ si ha che $\Delta V_{bc} = V_b - V_c = R_{bc} \cdot I = 0$.
  cioè un conduttore con resistenza zero è allo stesso potenziale in tutti i punti, quindi $V_c = V_b$.

- resistore c−d : ha resistenza R, quindi $\Delta V_{cd} = V_c - V_d = R \cdot I$.

- filo d−a : ha resistenza $R_{da} = 0$, quindi $V_d = V_a$.

- batteria a−b : ha una differenza di potenziale $\Delta V_{ba} = V_b - V_a = \Delta V$.

Unendo le equazioni precedenti troviamo che

$$V_c - V_d = V_b - V_a = \Delta V$$

e quindi

$$\Delta V = R \cdot I .$$

Questa formula ci dà l'intensità di corrente che scorre nel circuito.

Vediamo ora di calcolare la potenza assorbita dalla resistenza. La potenza è data dalla perdita di energia potenziale elettrica che le cariche subiscono quando attraversano la resistenza nell'unità di tempo.
Possiamo quindi scrivere

$$P = \frac{\Delta U_{elettrica}}{\Delta t} = \frac{\Delta Q \cdot \Delta V}{\Delta t} = \frac{\Delta Q}{\Delta t} \cdot \Delta V = I \cdot \Delta V ,$$

dove abbiamo indicato con ΔQ la carica che attraversa la resistenza nel tempo Δt. Ovviamente, in accordo con la definizione di intensità di corrente $\Delta Q / \Delta t = I$. La potenza dissipata da un resistore è quindi data dal prodotto dell'intensità per la differenza di potenziale ai capi del resistore stesso.

Usando la legge di Ohm ($\Delta V = R \cdot I$) possiamo riscrivere la potenza in modo equivalente:

$$P = I \cdot \Delta V = R \cdot I^2 = \frac{\Delta V^2}{R}.$$

Come abbiamo già visto l'unità di misura della potenza è il watt (W). Nel caso dell'energia elettrica si usa spesso una unità di misura alternativa al joule, cioè il kWh (chilowattora), che corrisponde all'energia fornita in un'ora da un kW di potenza. In funzione del joule possiamo riscrivere il kWh come

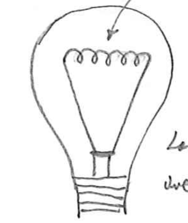
$$1\ \mathrm{kWh} = (10^3\ \mathrm{W}) \cdot (3600\ \mathrm{s}) = 3.6 \cdot 10^6\ \mathrm{J}.$$

Se il resistore è dato semplicemente da un materiale ad alta resistenza, allora la potenza assorbita dal resistore è dissipata sotto forma di calore. Questo è detto <u>effetto Joule</u>. La formula

$$P = I \cdot \Delta V,$$

però, si applica a qualunque tipo di dispositivo, anche più complesso di un resistore e fornisce sempre la misura della potenza assorbita dal dispositivo. Nel caso di dispositivo complesso questa potenza può essere trasformata non solo in calore, ma anche in altre forme di energia (es. energia meccanica).

Un esempio semplice di conversione ad altre forme di energia è fornito dalla lampadina a incandescenza. La lampadina contiene un filamento ad alta resistenza che si riscalda al passaggio della corrente. Raggiungendo temperature molto elevate emette luce visibile (oltre che calore). In questo caso la potenza $P = I \cdot \Delta V$ è convertita in parte in luce (onde elettromagnetiche) in parte in calore. La potenza totale assorbita coincide con la somma di queste due componenti (conservazione dell'energia).



<u>ESERCIZIO.</u> <u>Caratteristiche di una lampadina a incandescenza</u>

Una lampadina ha la sigla 220V/75W, cioè opera a 220V ed assorbe una potenza di 75W. Calcolare la resistenza della lampadina e l'intensità della corrente che la attraversa.

<u>SOLUZIONE</u> Per trovare la corrente usiamo

$$P = I \cdot \Delta V \Rightarrow I = \frac{P}{\Delta V} = \frac{75\ \mathrm{W}}{220\ \mathrm{V}} = 0.341\ \mathrm{A}.$$

Per trovare la resistenza possiamo usare la legge di Ohm

$$\Delta V = R \cdot I \Rightarrow R = \frac{\Delta V}{I} = \frac{220\ \mathrm{V}}{0.341\ \mathrm{A}} = 645\ \Omega.$$

Equivalentemente avremmo potuto usare la relazione

$$P = \frac{\Delta V^2}{R} \Rightarrow R = \frac{\Delta V^2}{P} = \frac{(220\ \mathrm{V})^2}{75\ \mathrm{W}} = 645\ \Omega.$$

ESERCIZIO. Costo di funzionamento di una lampadina.

Quanto costa tenere accesa una lampadina da 100 W per 24 h se il costo dell'elettricità è 0.2 € al kWh?

SOLUZIONE L'energia assorbita dalla lampadina è

$$E = (0.1\ \mathrm{kW}) \cdot (24\ \mathrm{h}) = 2.4\ \mathrm{kWh}.$$

Il costo di questa energia è

$$\text{costo} = E \cdot 0.2\ €/\mathrm{kWh} = 2.4\ \mathrm{kWh} \cdot 0.2\ €/\mathrm{kWh} = 0.48\ €.$$

Una lampadina di questo tipo tenuta accesa 24h al giorno per un anno costerebbe

$$\text{costo/anno} = 365 \cdot 0.48\ € = 175.20\ €.$$

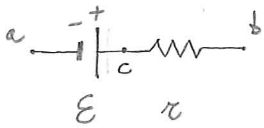
3.4. FORZA ELETTROMOTRICE

Come abbiamo visto, una corrente può essere generata in un circuito se applichiamo una differenza di potenziale elettrico. Se questa sorgente è stabile e capace di mantenere una corrente costante in un circuito chiuso, allora la sorgente si chiama tradizionalmente <u>generatore di forza elettromotrice</u> (quest'ultima è anche abbreviata con fem, e si usa di solito il simbolo $\mathcal{E}$ per il suo valore). Bisogna notare che la forza elettromotrice <u>non</u> è veramente una forza nel significato che usiamo in fisica. Piuttosto la forza elettromotrice è una differenza di potenziale.

Una sorgente di forza elettromotrice è un qualunque dispositivo (batteria o generatore) che aumenta l'energia potenziale elettrica delle cariche che circolano in un circuito. Possiamo pensare a tale sorgente come una "pompa" di carica che costringe gli elettroni a muoversi in una certa direzione all'interno della sorgente stessa.

La fem $\mathcal{E}$ esprime il lavoro svolto per unità di carica, quindi si misura in volt, come il potenziale elettrico.

La necessità di distinguere tra fem e differenza di potenziale per un generatore (o una batteria) è dovuta al fatto che i generatori hanno una resistenza interna. Possiamo schematizzare un generatore come un circuito contenente una batteria e un resistore:



La fem $\mathcal{E}$ corrisponde alla differenza di potenziale della parte del circuito, mentre il resistore r rappresenta la resistenza interna. Vediamo qual è la differenza di potenziale tra i capi a e b (cioè $\Delta V = V_b - V_a$) quando il generatore è percorso da una corrente di intensità I. Bisogna notare che la corrente scorre dal polo + al polo − della batteria nel circuito esterno, mentre all'interno della batteria essa scorre dal polo − al polo +.

La differenza di potenziale tra i punti c ed a è data da

$$V_c - V_a = \mathcal{E}$$

mentre, per la legge di Ohm, abbiamo

$$V_c - V_b = I \cdot r .$$

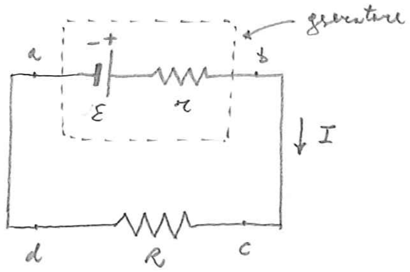
Quindi otteniamo che

$$\underline{\Delta V = V_b - V_a = \mathcal{E} - I r} .$$

Vediamo quindi che la differenza di potenziale tra i capi del generatore è <u>minore</u> di $\mathcal{E}$ quando il generatore stesso è percorso da una corrente. In particolare ΔV decresce al crescere della corrente I.

La fem $\mathcal{E}$ quindi coincide con la differenza di potenziale quando il circuito è aperto (cioè quando la batteria non è collegata ad un circuito). In questo caso, infatti, $I=0$ e quindi $\Delta V = \mathcal{E}$.

Vediamo ora cosa succede se colleghiamo un generatore con fem $\mathcal{E}$ e resistenza interna r ad un circuito con un resistore di resistenza R, come nello schema seguente



La differenza di potenziale tra b e a; $\Delta V_{ba} = \mathcal{E} - Ir$, deve essere uguale a quella tra c e d, cioè

$$\Delta V_{cd} = R \cdot I.$$

Quindi troviamo

$$\Delta V_{ba} = \Delta V_{cd} \Rightarrow \mathcal{E} - Ir = R \cdot I \Rightarrow \underline{I = \frac{\mathcal{E}}{R+r}}.$$

La corrente quindi dipende sia dalla cosiddetta "<u>resistenza di carico</u>" R, sia dalla resistenza interna del generatore. In particolare la corrente è minore di quella nel caso ideale in cui la resistenza interna è nulla:

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R+r} < \frac{\mathcal{E}}{R}.$$

Si può anche notare che se la resistenza di carico è molto maggiore della resistenza interna, quest'ultima può essere trascurata.

Vediamo ora quale è la potenza dissipata dal resistore e quella dissipata dalla resistenza interna. Abbiamo che

$$I \cdot \mathcal{E} = I^2 R + I^2 r.$$

Vediamo quindi che la potenza totale fornita dalla fem $I \cdot \mathcal{E}$, viene dissipata in parte dal resistore, cioè $R \cdot I^2$, e in parte dalla resistenza interna, cioè $I^2 \cdot r$. Anche in questo caso se $R \gg r$ allora la maggior parte della potenza fornita dalla batteria viene trasferita alla resistenza di carico.

<u>ESERCIZIO</u> <u>Resistenza di carico</u>

Una batteria con una fem 12 V e una resistenza interna di 0.5 Ω è collegata a una resistenza di carico R. Se la corrente nel circuito è 1.4 A. Qual è il valore di R?

<u>SOLUZIONE.</u> Usiamo l'equazione $\mathcal{E} = IR + Ir$, quindi

$$R = \frac{\mathcal{E}}{I} - r = \frac{12\,V}{1.4\,A} - 0.5\,\Omega = 7.67\,\Omega.$$

ESERCIZIO Una batteria ha una fem $\mathcal{E} = 12\,V$ e una resistenza interna $r = 0.05\,\Omega$. Se è connessa ad una resistenza di carico di $R = 3\,\Omega$, calcolare:

a) la corrente che circola nel circuito e la differenza di voltaggio ai capi della resistenza;

b) la potenza erogata alla resistenza di carico, quella dissipata dalla resistenza interna e quella fornita dalla batteria.

Quando una batteria "invecchia", la sua resistenza interna aumenta. Supponiamo che la resistenza interna diventi $R = 2\,\Omega$. Come cambiano i risultati calcolati prima?

SOLUZIONE. La corrente è data da

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R+r} = \frac{12\,V}{3\,\Omega + 0.05\,\Omega} = 3.93\,A.$$

La caduta di potenziale agli estremi del resistore è

$$\Delta V = R \cdot I = (3.93\,A)(3\,\Omega) = 11.8\,V.$$

La potenza assorbita dalla resistenza di carico è

$$P_R = I^2 \cdot R = (3.93\,A)^2 (3\,\Omega) = 46.3\,W,$$

la potenza dissipata dalla resistenza interna è

$$P_r = I^2 r = (3.93\,A)^2 (0.05\,\Omega) = 0.772\,W.$$

La potenza fornita dalla fem è

$$P = I \cdot \mathcal{E} = 47.2\,W$$

(In alternativa, si può usare $P = I^2 R + I^2 r = 47.2\,W$).

Vediamo ora come cambiano i risultati precedenti quando $r = 2\,\Omega$. In questo caso

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R+r} = \frac{12\,V}{3\,\Omega + 2\,\Omega} = 2.4\,A$$

$$\Delta V = R \cdot I = (2.4\,A)(3\,\Omega) = 7.2\,V$$

$$P_R = I^2 R = (2.4\,A)^2 (3\,\Omega) = 17.3\,W$$

$$P_r = I^2 r = (2.4\,A)^2 (2\,\Omega) = 11.5\,W$$

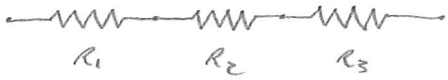
$$P = \mathcal{E} \cdot I = 28.8\,W.$$

Vediamo quindi come la corrente diminuisca significativamente rispetto al caso di bassa resistenza interna. Inoltre ora solo il 60% della potenza è erogata alla resistenza di carico, mentre ben il 40% è dissipata dalla resistenza interna della batteria. Bisogna anche notare che la potenza erogata dalla batteria è significativamente minore di quella nel caso precedente. Questo risultato spiega perché una batteria alla fine del suo ciclo di vita diventa meno efficiente rispetto a quando è nuova.

3.5 RESISTENZE IN SERIE E IN PARALLELO

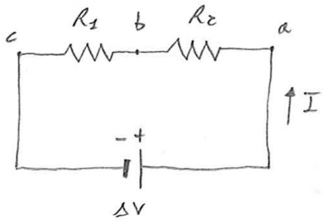
Vogliamo ora capire cosa succede quando più resistenze sono collegate tra di loro in modo che abbiano degli estremi in comune.

Una prima configurazione si ottiene collegando i resistori in modo che abbiano un solo estremo in comune per ogni coppia, come nella figura



In questo caso si dice che le resistenze sono collegate in serie. Vogliamo capire se e come è possibile rimpiazzare delle resistenze in serie con un'unica resistenza "equivalente", cioè che dia le stesse proprietà in termini di corrente e di caduta di potenziale.

Consideriamo per semplicità il caso di due resistenze in serie R_1 ed R_2 collegate ad una batteria ΔV.



Prima di tutto notiamo che quando due (o più) resistenze sono in serie esse sono attraversate dalla stessa corrente. Quindi avremo, indicando con I la corrente,

$$V_a - V_b = I \cdot R_2 \qquad e \qquad V_b - V_c = I \cdot R_1 .$$

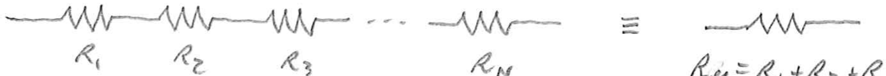
Ma allora

$$\Delta V = V_a - V_c = (V_a - V_b) + (V_b - V_c) = I \cdot R_2 + I \cdot R_1$$
$$= I\,(R_2 + R_1).$$

Vediamo quindi che le resistenze in serie danno lo stesso effetto di un'unica resistenza R_{eq}:

$$\underline{R_{eq} = R_1 + R_2} .$$

Più in generale, la resistenza equivalente di resistori collegati in serie è data dalla somma di tutte le resistenze in serie:

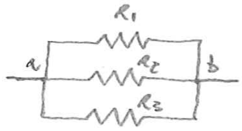


$$\underline{R_{eq} = R_1 + R_2 + R_3 + \cdots + R_N}$$

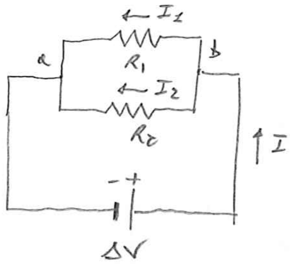
Bisogna notare che la resistenza equivalente di una serie di resistenze è sempre maggiore delle singole resistenze: $R_{eq} > R_i$ per $i = 1, 2, \ldots, N$

Notate inoltre che se anche una sola delle resistenze in serie si dovesse rompere allora tutto il tratto di circuito dato dalla serie non potrebbe più condurre elettricità.

Una seconda configurazione è quella di resistenze <u>in parallelo</u>, come quelle mostrate nella seguente figura



In questo caso le varie resistenze sono in generale attraversate da correnti diverse. Tuttavia la differenza di potenziale ai loro capi è la stessa per tutte le resistenze in parallelo (per quelle in figura è data da $\Delta V = V_b - V_a$). Vediamo ora quale è la resistenza equivalente per resistenze in parallelo. Consideriamo il caso di due sole resistenze in parallelo collegate ad una batteria:



Poiché le resistenze sono in parallelo allora le loro cadute di potenziale sono uguali e sono date da

$$V_b - V_a = \Delta V .$$

Applicando la legge di Ohm a ciascuna resistenza abbiamo

$$\Delta V = I_1 \cdot R_1 \Rightarrow I_1 = \Delta V / R_1 ,$$
$$\Delta V = I_2 \cdot R_2 \Rightarrow I_2 = \Delta V / R_2 .$$

Vediamo allora che la corrente totale I è data da

$$I = I_1 + I_2 = \frac{\Delta V}{R_1} + \frac{\Delta V}{R_2} = \Delta V \cdot \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right).$$

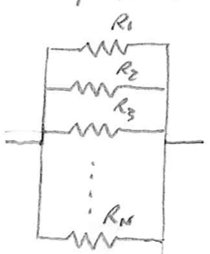
Una resistenza equivalente deve dare la stessa corrente I e la stessa caduta di potenziale, quindi

$$\Delta V = R_{eq} I \Rightarrow I = \frac{\Delta V}{R_{eq}} .$$

Uguagliando questa equazione con quella precedente otteniamo

$$\frac{\Delta V}{R_{eq}} = \Delta V \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \Rightarrow \underline{\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}} .$$

Estendendo questo risultato ad un numero arbitrario di resistenze in parallelo troviamo



$\equiv$

$$\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \cdots + \frac{1}{R_N}$$

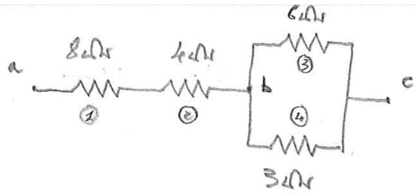
Ovvero, l'inverso della resistenza equivalente di due (o più) resistenze in parallelo è dato dalla somma degli inversi delle resistenze stesse.

Notate che in questo caso la resistenza equivalente è minore della più piccola resistenza posta in parallelo: $R_{eq} < R_i$ per $i = 1, 2, \dots, N$.

A differenza del caso di resistenze in serie, quando una resistenza in parallelo si rompe il circuito non viene interrotto e la corrente può fluire attraverso le restanti resistenze in parallelo.

ESERCIZIO. Trovare la resistenza equivalente

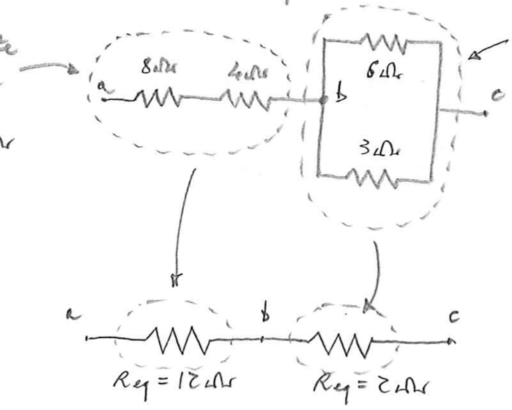
Considerare il circuito mostrato in figura. Calcolare la resistenza equivalente tra i punti a e c. Quale è la corrente in ogni resistore se la differenza di potenziale tra a e c è $\Delta V = V_a - V_c = 42\ V$.



SOLUZIONE Notate che, sebbene il circuito non sia totalmente in serie, né totalmente in parallelo esso può essere spezzato in due parti. Ogni sottosezione del circuito può essere sostituita da una resistenza equivalente. Il circuito risultante può poi essere rappresentato usando nuovamente le regole per resistenze in serie e in parallelo. Questi passaggi possono essere ripetuti un numero sufficiente di volte finché non si arriva ad un'unica resistenza equivalente. Vediamo i dettagli.

resistenze in serie

resistenze in parallelo

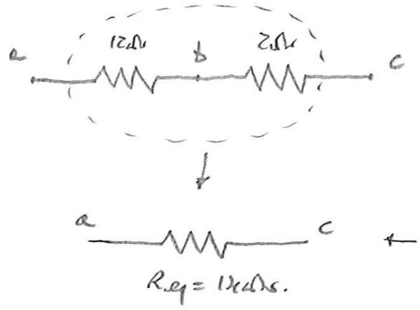


$R_{eq} = 8k\Omega + 4k\Omega = 12k\Omega$

$$\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{6k\Omega} + \frac{1}{3k\Omega} = \frac{1}{2k\Omega} \Rightarrow R_{eq} = 2k\Omega$$

A questo punto abbiamo ottenuto due resistenze in serie che possono a loro volta essere sostituite con una resistenza equivalente

$$\underline{R_{eq} = 12k\Omega + 2k\Omega = 14k\Omega}$$



← questa è la resistenza equivalente di tutto il circuito mostrato all'inizio.

Possiamo ora calcolare le correnti. La corrente totale che attraversa il circuito può essere calcolata a partire dalla resistenza equivalente $R_{eq} = 14\,\Omega$. Otteniamo quindi

$$I = \frac{\Delta V}{R_{eq}} = \frac{42\,V}{14\,\Omega} = 3.0\,A.$$

Visto che le resistenze tra a e b sono in serie, la corrente che scorre attraverso il circuito (da a a c) deve attraversarle entrambe. Quindi la corrente che attraversa le resistenze ① e ② è

$$I_1 = I_2 = I.$$

Usando la legge di Ohm possiamo trovare la caduta di potenziale data da queste due resistenze:

$$\Delta V_1 = I_1 \cdot R_1 = (3.0\,A)(8\,\Omega) = 24\,V$$

$$\Delta V_2 = I_2 \cdot R_2 = (3.0\,A)(4\,\Omega) = 12\,V$$

La differenza di potenziale tra a e b è quindi data da

$$V_a - V_b = \Delta V_1 + \Delta V_2 = 24\,V + 12\,V = 36\,V.$$

Calcoliamo ora le correnti che attraversano le resistenze ③ e ④. La differenza di potenziale ai loro capi è

$$\Delta V = V_b - V_c = (V_a - V_c) - (V_a - V_b) = 42\,V - 36\,V = 6\,V.$$

Le correnti cercate sono quindi

$$I_3 = \frac{\Delta V}{R_3} = \frac{6\,V}{6\,\Omega} = 1\,A$$

$$I_4 = \frac{\Delta V}{R_4} = \frac{6\,V}{3\,\Omega} = 2\,A$$

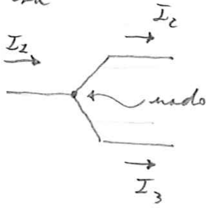
Ovviamente $I_3 + I_4 = I$, come si può verificare facilmente.

3.6 LEGGI DI KIRCHHOFF

Nelle sezioni precedenti abbiamo considerato semplici circuiti con resistori e batterie ed abbiamo ricavato le intensità di corrente e le differenze di potenziale corrispondenti ai vari elementi. Questo può essere fatto facilmente quando si ha un singolo circuito o quando ci si può ricondurre ad un singolo circuito tramite le regole di resistenze in parallelo e in serie. Per circuiti più complessi, in cui questo non è possibile, abbiamo bisogno di ulteriori regole per poter calcolare intensità di corrente e potenziali. Queste regole sono date dalle <u>LEGGI DI KIRCHHOFF</u>:

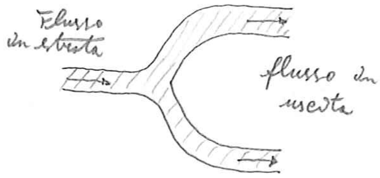
1. La somma delle correnti che entrano in un <u>nodo</u> deve essere uguale alla somma delle correnti che ne escono. (Un nodo è un qualsiasi punto del circuito in cui le correnti si dividono).
2. La somma delle differenze di potenziale ai capi di ogni elemento all'interno di una <u>maglia</u> è uguale a zero. (Una maglia è un qualsiasi percorso chiuso all'interno del circuito.)

La prima legge è una semplice conseguenza della conservazione della carica elettrica, cioè una corrente che entra in un certo punto del circuito deve poi lasciare quel punto in quanto la carica non si può accumulare in un punto indefinitamente (in condizioni statiche). Per esempio nel nodo seguente si ha



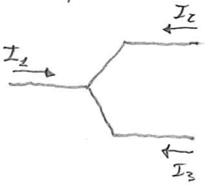
$$I_1 = I_2 + I_3 \qquad (*)$$

<u>Nota</u> Per un'analogia con la fluidodinamica si può pensare ad una condotta che si divide in più rami. Il fluido che entra nella condotta poi si divide e la stessa quantità totale fuoriesce dalle diramazioni.



E' importante stare attenti al verso delle correnti per scrivere la prima legge di Kirchhoff. E' sempre necessario decidere in partenza una direzione delle correnti in ogni segmento del circuito e poi usare sempre quella convenzione nei calcoli. Il verso scelto è convenzionale e non è importante, può essere scelto arbitrariamente per ogni sezione tra due nodi. Quello che è importante è seguire sempre la stessa convenzione una volta che sia stata scelta.

Cambiare il verso della corrente in un elemento semplicemente corrisponde ad un cambio di segno. Per esempio avremmo potuto rovesciare i versi di I_2 e I_3 nell'esempio precedente



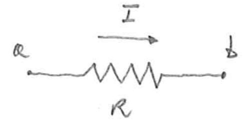
$$I_1 + I_2 + I_3 = 0$$

equivalente all'equazione (*) in cui sostituiamo $I_2 \to -I_2$ e $I_3 \to -I_3$.

La seconda legge di Kirchhoff è invece legata alla conservazione dell'energia. Ci dice semplicemente che trasportando una carica per un percorso chiuso attraverso il circuito la sua energia potenziale è uguale prima e dopo il percorso. Questo accade semplicemente perché il percorso è chiuso e le configurazioni iniziale e finale sono le stesse.

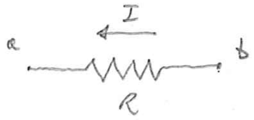
Nell'applicare la seconda legge di Kirchhoff bisogna stabilire un verso in cui percorriamo la maglia (questo verso è arbitrario) e si devono tenere presenti le seguenti regole

- se una resistenza viene percorsa nel verso della corrente, la caduta di potenziale ai suoi capi è $-R \cdot I$



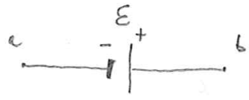
$\Delta V = V_b - V_a = -R \cdot I$

- se una resistenza viene percorsa nel verso opposto alla corrente, la differenza di potenziale ai capi della resistenza è $+R \cdot I$



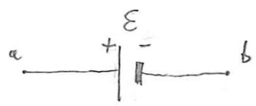
$\Delta V = V_b - V_a = +R \cdot I$.

- se una sorgente di fem viene attraversata nello stesso verso della fem (da − a + tra gli estremi) la differenza di potenziale è data da $+\mathcal{E}$



$\Delta V = V_b - V_a = +\mathcal{E}$

- se una sorgente di fem viene attraversata in verso opposto rispetto alla fem (da + a −) la differenza di potenziale è $-\mathcal{E}$



$\Delta V = V_b - V_a = -\mathcal{E}$

Bisogna notare che per risolvere un circuito è necessario trovare un numero di equazioni indipendenti uguale al numero di incognite. In particolare si possono usare le equazioni relative a tutti i nodi tranne una che sarà una combinazione delle altre. Inoltre si possono usare le equazioni per le maglie tenendo presente che si ottengono equazioni indipendenti solo se si include almeno un elemento (batteria o resistenza) che non sia già stato incluso in altre maglie già usate per ricavare le equazioni.

STRATEGIA PER RISOLVERE I PROBLEMI

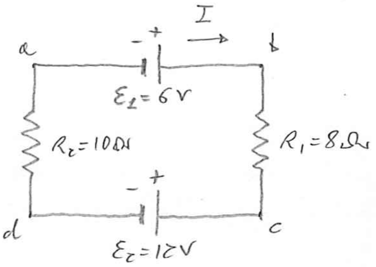
1. Disegnare lo schema del circuito assegnando nomi e simboli a tutte le grandezze note e incognite (es. tutti i generatori, le resistenze e le correnti). Bisogna assegnare un verso (oltre che un nome) alle correnti in ciascun ramo del circuito. Il verso scelto non è importante per il risultato finale, però è importante tenere conto dei versi quando si applicano le leggi di Kirchhoff.
2. Applicare la regola dei nodi (prima legge di Kirchhoff) a qualsiasi nodo del circuito, in modo da ottenere una serie di equazioni che legano le correnti. (Nota. Una di queste equazioni sarà combinazione delle altre, ma in ogni caso sarà solo ridondante e non modificherà il risultato).

3. Applicare la seconda legge di Kirchhoff a tante maglie del circuito quante sono necessarie per calcolare le incognite. Per applicare correttamente la seconda legge, bisogna identificare correttamente la caduta di potenziale quando si attraversa ciascun elemento della maglia.

4. Risolvere il sistema di equazioni per le grandezze incognite. Se una corrente ha valore negativo significa semplicemente che essa scorre nel verso opposto rispetto a quello scelto, ma l'intensità calcolata è corretta in grandezza.

ESERCIZIO Circuito con due batterie e due resistori

Considerare il circuito mostrato a lato. Calcolare la corrente che scorre nel circuito.



SOLUZIONE Il circuito ha una sola maglia, quindi la corrente che scorre in tutti gli elementi è la stessa. Scegliamo convenzionalmente il verso orario per la corrente I. Per risolvere il problema dobbiamo applicare la seconda legge di Kirchhoff. Facciamolo per i versi segnati in verso orario:

- $a \to b$: $\Delta V_{ab} = V_b - V_a = \mathcal{E}_1$
- $b \to c$: $\Delta V_{bc} = V_c - V_b = -I \cdot R_1$
- $c \to d$: $\Delta V_{cd} = V_d - V_c = -\mathcal{E}_2$
- $d \to a$: $\Delta V_{dd} = V_a - V_d = -R_2 \cdot I$

Per la seconda legge di Kirchhoff

$$\Delta V_{ab} + \Delta V_{bc} + \Delta V_{cd} + \Delta V_{da} = \mathcal{E}_1 - IR_1 - \mathcal{E}_2 - IR_2 = 0$$

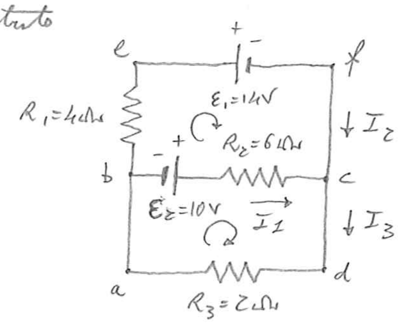
quindi otteniamo

$$\mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2 - I(R_1 + R_2) = 0 \quad \Rightarrow \quad I = \frac{\mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2}{R_1 + R_2} = \frac{6V - 12V}{8\Omega + 10\Omega} = -0.333 A.$$

Vediamo che il risultato per I è negativo, quindi la corrente (la cui intensità è 0.333 A) scorre in verso opposto rispetto alla nostra convenzione, cioè scorre in verso antiorario.

ESERCIZIO Circuito con due maglie

Trovare le correnti I_1, I_2 e I_3 nel circuito mostrato nella figura.



SOLUZIONE Per ricavare le correnti dobbiamo usare le leggi di Kirchhoff. In questo caso ci sono due nodi e due maglie, quindi dobbiamo usare entrambe le leggi. Iniziamo dai nodi:

· nodo b : $I_3 = I_1 + I_2$

· nodo c : $I_1 + I_2 = I_3$

Vediamo che le due equazioni sono uguali, quindi basta prenderne una. Ora consideriamo la seconda legge. Possiamo applicarla in 3 modi diversi (scegliamo il verso orario per le maglie)

· maglia abcda : $\mathcal{E}_2 - I_1 R_2 - I_3 R_3 = 0$ (1)

(notiamo che il potenziale in a e in b è uguale e analogamente in c e d)

· maglia bef cb : $-\mathcal{E}_1 + I_1 R_2 - \mathcal{E}_2 - R_1 I_2 = 0$ (2)

· maglia abefcda : $-\mathcal{E}_1 - I_3 R_3 - I_2 R_1 = 0$ (3)

Vediamo che se sommiamo l'equazione (1) all'equazione (2) otteniamo l'equazione (3). Quindi le tre equazioni non sono indipendenti. Basta sceglierne due e la terza è ridondante.

Le equazioni indipendenti possono essere scelte come:

$$\begin{cases} I_3 = I_1 + I_2 \\ \mathcal{E}_2 - I_1 R_2 - I_3 R_3 = 0 \\ -\mathcal{E}_1 - I_3 R_3 - I_2 R_1 = 0 \end{cases} \qquad (4)$$

Risolviamo ora il sistema. Usando il valore di I_3 ricavato dalla prima equazione, le altre due diventano

$$\begin{cases} \mathcal{E}_2 - I_1 R_2 - (I_1 + I_2) R_3 = 0 \\ -\mathcal{E}_1 - (I_1 + I_2) R_3 - I_2 R_1 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \mathcal{E}_2 - I_1 (R_2 + R_3) - I_2 R_3 = 0 \\ -\mathcal{E}_1 - I_1 R_3 - I_2 (R_1 + R_3) = 0 \end{cases}$$

Dalla prima ricaviamo

$$I_2 = \frac{\mathcal{E}_2 - I_1 (R_2 + R_3)}{R_3} \qquad (5)$$

e sostituendo nella seconda

$$-\mathcal{E}_1 - I_1 R_3 - \frac{\mathcal{E}_2 - I_1 (R_2 + R_3)}{R_3} (R_1 + R_3) = 0$$

Da questa equazione ricaviamo I_1:

$$-R_3\mathcal{E}_1 - I_1 R_3^2 - \left(\mathcal{E}_2 - I_1(R_2+R_3)\right)(R_1+R_3) = 0$$

espandendo

$$-R_3\mathcal{E}_1 - I_1 R_3^2 - \mathcal{E}_2(R_1+R_3) + I_1(R_2+R_3)(R_1+R_3) = 0$$

$$\Rightarrow I_1\left[(R_2+R_3)(R_1+R_3) - R_3^2\right] - R_3\mathcal{E}_1 - (R_1+R_3)\mathcal{E}_2 = 0$$

$$\Rightarrow I_1 = \frac{\mathcal{E}_1 R_3 + \mathcal{E}_2(R_1+R_3)}{(R_2+R_3)(R_1+R_3) - R_3^2} = \frac{14\,V\cdot 2\,\Omega + 10\,V(4\,\Omega+2\,\Omega)}{(6\,\Omega+2\,\Omega)(4\,\Omega+2\,\Omega)-(2\,\Omega)^2} = 2\,A.$$

Ricaviamo ora I_2 dall'equazione (5):

$$I_2 = \frac{\mathcal{E}_2 - I_1(R_2+R_3)}{R_3} = \frac{10\,V - 2\,A(6\,\Omega+2\,\Omega)}{2\,\Omega} = -3\,A.$$

Infine I_3 può essere ricavata dall'equazione (4):

$$I_3 = I_1 + I_2 = 2\,A - 3\,A = -1\,A.$$

Poiché I_2 e I_3 sono negative le direzioni di queste due correnti sono opposte rispetto a quelle scelte convenzionalmente. I_1 invece è positiva e va nel verso scelto.