



UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DELL'AQUILA

---

DIPARTIMENTO DI INGEGNERIA E SCIENZE  
DELL'INFORMAZIONE E MATEMATICA



CORSO DI LAUREA IN INFORMATICA

## Stima efficiente del numero di Network Motifs tramite Color-Coding e decomposizioni bilanciate

**Relatore:**

---

*Dott. Stefano Leucci*

**Candidato:**

---

*Giulia Scoccia*

**Correlatore:**

---

*Prof. Guido Proietti*

**Matricola:**

---

*249503*

---

ANNO ACCADEMICO 2019–2020

<b>1</b>	<b>Introduzione</b>	<b>2</b>
1.1	Contributo della tesi . . . . .	3
1.2	Organizzazione del testo . . . . .	4
<b>2</b>	<b>Color Coding</b>	<b>5</b>
2.1	Algoritmo . . . . .	6
2.2	Dettagli implementativi: rappresentazione compatta dei treelet colorati	8
<b>3</b>	<b>Tecnica Ottimizzata</b>	<b>14</b>
3.1	Decomposizioni Bilanciate di un albero . . . . .	14
3.2	Algoritmo . . . . .	21

I Motif, anche chiamati Graphlet o Pattern, sono piccoli sottografi connessi indotti di un grafo.

La conta dei motif è un problema ben noto del graph mining e dell'analisi dei social network.

Dato in input un grafo  $G$  e un intero positivo  $k$  il problema richiede di contare, per ogni graphlet  $H$  di  $k$  nodi, il numero di sottografi indotti di  $G$  isomorfi ad  $H$ . Comprendere la distribuzione dei motif in un grafo fa luce sul tipo di strutture locali presenti in esso che possono essere usate per svariati tipi di analisi, come ad esempio per l'analisi di reti sociali [2, 3, 4], reti biologiche [1], etc... Poichè il conteggio dei graphlet può risultare computazionalmente impegnativo, di solito ci si accontenta di obiettivi meno ambiziosi. Uno di questi è la stima approssimata della frequenza: per ogni sottografo si richiede di stimare, nel modo più accurato possibile, la sua frequenza relativa rispetto a tutti i sottografi della stessa dimensione. Dato che il numero di motif cresce rispetto al numero  $k$ , si restringe l'attenzione al problema della stima della frequenza relativa solo ai sottografi che compaiono il maggior numero di volte nel grafo input. Ci sono due approcci per ottenere tali stime. Il primo utilizza i metodi Monte Carlo, basati sulle catene di Markov, mentre il secondo sfrutta la tecnica del Color Coding introdotta da Alon, Yuster e Zwick [5]. Studi recenti analizzano le differenze tra i due approcci concludendo come regola generale che il Color Coding è preferibile quando la garanzia di accuratezza sui dati risulta

fondamentale nonostante la complessità spaziale che può limitarne l'utilizzo [6]. In questa tesi ci concentreremo solo sulla tecnica del Color Coding. Tale tecnica è stata introdotta per risolvere in maniera randomizzata il problema di determinare l'esistenza di sottografi isomorfi a cammini ed alberi con treewidth limitata nel grafo  $G$  in input. Un'estensione di questa tecnica consente di ottenere garanzie statistiche forti per il problema del Motif Counting da cui le frequenze possono essere facilmente derivate. Tale estensione si basa su due osservazioni chiave. La prima è che il Color Coding può essere usato per costruire “un'urna” astratta che contiene un sottoinsieme statisticamente rappresentativo di tutti i sottografi di  $G$  (non necessariamente indotti) che hanno esattamente  $k$  nodi e sono alberi. La seconda osservazione è che il compito di campionare  $k$ -graphlet, ossia graphlet con  $k$  nodi, può essere ridotto, con un overhead minimale, a campionare  $k$ -alberi, ossia alberi con  $k$  nodi, dall'urna. Si può così stimare il numero dei motif in due fasi: la “fase di costruzione” in cui si crea l'urna da  $G$  e la “fase di campionamento” dove si campionano i graphlet fino ad ottenere delle stime accurate per quelli di interesse.

## 1.1 Contributo della tesi

In questo lavoro di tesi l'attenzione è stata concentrata sull'ottimizzazione di un algoritmo basato sulle tecnica del Color Coding per il conteggio di  $k$ -treelet all'interno di grafi più o meno grandi. Per  $k$ -treelet si intendono alberi (non necessariamente indotti) in un grafo con  $k$  nodi.

Nel 2008 il conteggio dei  $k$ -treelet in un grafo  $\tilde{A}$  è stato implementato su una rete  $PPI(Protein - Protein Interaction)$ . In tal modo  $\tilde{A}$  è stata riscontrata la sua grande utilità per la ricerca della frequenza di particolari strutture biomolecolari.

Lo studio  $\tilde{A}$  è stato svolto sia su reti di organismi unicellulari che possono risultare simili e sia su reti di organismi pluricellulari che possono variare molto tra di loro.

Per effettuare il conteggio è stato necessario concentrarsi sulla fase costruttiva descritta in precedenza.

La fase costruttiva è descritta mediante un algoritmo di programmazione dinamica che richiede un grande impiego di tempo e spazio. In primo luogo, tramite

il lavoro svolto, si Ã arrivati ad implementare l'algoritmo in Java descritto in [6]. L'approccio dell'algoritmo, supposto di dover conteggiare i treelet di dimensione  $k$  di un grafo, lavora esattamente in  $k$  fasi. Nell' $i$ -esima fase vengono conteggiati i treelet di dimensione  $i$ . Tali conteggi saranno ottenuti in funzione della struttura del grafo e del numero di occorrenze dei treelet di dimensioni minore di  $i$ . Perci per poter calcolare i treelet di dimensione  $k$ , sar necessario aver gi calcolato quelli di dimensione fino a  $k - 1$ . Tale dipendenza  evidenziata dalle formule di ricorrenza che descrivono l'algoritmo di programmazione dinamica, che verr descritto nella sezione 2.1. Poich il numero dei  $k$ -treelet cresce in maniera esponenziale rispetto a  $k$ , l'algoritmo pu essere eseguito solo per valori piccoli di  $k$  prima che il tempo richiesto diventi eccessivo.

A tal proposito nella tesi viene proposta un'ottimizzazione, basata su opportune decomposizioni "bilanciate" degli alberi, che consente di rendere indipendenti i conteggi dei treelet di dimensione  $k$  da  $\frac{1}{3}$  dei conteggi precedenti. Questo consente di eseguire le prime  $\lceil \frac{2}{3}k \rceil$  fasi prima della fase  $k$ , comportando un risparmio notevole di tempo. Ad esempio su un grafo sociale con 63731 nodi e 817090 archi, l'algoritmo non ottimizzato richiede DA VEDERE tempo per la ricerca dei treelet con DA VEDERE nodi, mentre quello ottimizzato richiede un tempo DA VEDERE.

## 1.2 Organizzazione del testo

La descrizione del lavoro  strutturata nel seguente modo. Nel capitolo 2 verr descritta la tecnica del color coding e il suo utilizzo per il conteggio degli alberi. Si vedr l'algoritmo di [6] e la sua formulazione. Si discuter la scelta di adottata per l'implementazione e i suoi vantaggi. Nel capitolo 3 si discuter in dettaglio la tecnica delle decomposizioni bilanciate ed il relativo impatto sull'algoritmo. Anche in questo caso si discuteranno le scelte effettuate in fase implementativa. Nel capitolo 4 verranno mostrati i risultati di un'analisi sperimentale delle performance dell'algoritmo ottimizzato rispetto alla versione di [6]. Infine, nel capitolo 5, verranno discusse le possibili estensioni del presente lavoro di tesi.

## CAPITOLO 2

## COLOR CODING

Nel capitolo viene descritta la tecnica del Color Coding utilizzata in questa tesi.

La tecnica fu introdotta nel 1995 da Alon, Yuster e Zwick [5]. In generale, dato un grafo  $G = (V, E)$ , il problema dell'isomorfismo dei sottografi di  $G$  è un problema  $NP$ -completo.

Il metodo del Color Coding permette di risolvere sottocasi di questo problema in tempo polinomiale tramite un algoritmo randomizzato.

Il primo algoritmo che loro descrissero, però, si limitava alla ricerca di sottografi indotti in un grafo senza farne un conteggio del numero delle occorrenze totali.

È per questo motivo che, in questo capitolo, si presenta un'estensione dell'algoritmo descritto da Alon [5, 6] per effettuare un conteggio delle occorrenze dei *treelet* all'interno del grafo.

Dati in input un grafo  $G = (V, E)$  e un numero  $k$ , per prima cosa il color coding assegna uniformemente e indipendentemente per ogni nodo  $v \in V$  di  $G$  un'etichetta in  $[k] := \{1, \dots, k\}$ , indicato come un colore. L'obiettivo è quello di conteggiare il numero di occorrenze di alberi colorati non indotti di  $k$ -nodi in  $G$ , chiamati  $k$ -*treelet*, in cui ogni vertice dell'occorrenza ha un colore distinto.

Questo viene fatto in maniera efficiente mediante programmazione dinamica, una tecnica che identifica dei sottoproblemi del problema originario, procedendo dai problemi più piccoli verso quelli più grandi.

In generale dato un  $k$ -*treelet* colorato  $T$  in un grafo  $G$ , il numero delle sue occorrenze

nel grafo è pari al più a  $\frac{k!}{k^k}$  volte il numero di occorrenze totali non colorate.

## 2.1 Algoritmo

In questa sezione viene descritta l'estensione dell'algoritmo del color coding che può contare i treelet (non indotti) colorati uniformemente a caso.

L'algoritmo inizialmente prevede una fase di colorazione dove, ad ogni nodo  $v \in V$  di  $G$ , è assegnato un colore  $c_v$  scelto indipendentemente e uniformemente a caso da  $[k] := \{1, \dots, k\}$ .

L'obiettivo della fase di costruzione è quello di creare una tabella con il conteggio delle occorrenze dei treelet che si possono incontrare in  $G$ .

Per ogni nodo  $v \in V$  e per ogni albero colorato  $T_C$ , con  $k$  nodi, si vuole calcolare il numero  $c(T_C, v)$  di copie di  $T_C$  in  $G$  che sono radicate in  $v$  (si noti che qui si intendono copie non indotte).

Si definisce con  $T_C$  una coppia  $(T, C)$  con  $T$  un treelet radicato di  $k$  nodi e  $C \subseteq \{1, \dots, k\}$ .

Quello che si fa è per ogni nodo  $v$  si inizializza  $c(T_{C_0}, v) = 1$ , dove  $T$  è il treelet di 1 nodo e  $C_0 = \{c_v\}$ . Per ogni  $h = 2, \dots, k$  a turno, si considera ogni possibile albero radicato  $T$  di dimensione  $h$  e ogni possibile insieme di colori  $C \subseteq [k]$  con  $|C| = h$ .

Quindi  $\forall v \in V$  di  $G$ , si calcola come segue il numero  $c(T_C, v)$  di occorrenze dei treelet (non indotti) radicati in  $v$  isomorfi a  $T$  e i cui colori giacciono nell'insieme  $C$ .

Si divide idealmente  $T$  in due sottoalberi colorati unici  $T'$  di dimensione  $i$  con  $i = 1, \dots, h-1$  e  $T''$  di dimensione  $h-i$ . I due alberi saranno tali che  $T''$  è il sottoalbero radicato in uno dei figli della radice  $v$  di  $T$  e  $T'$  è il sottoalbero di  $T$  radicato in  $v$  contenente  $|T| - |T''|$  nodi.

Per calcolare  $c(T_C, v)$  si analizza  $\forall v \in V$  di  $G$  l'insieme dei nodi  $u \in V$  tale che la coppia  $(u, v) \in E$ . Si prendono tutti i treelet colorati radicati in  $v$  isomorfi a  $T'_{C'}$  e tutti i treelet radicati in  $u$  isomorfi a  $T''_{C''}$ .

Sia per  $T'$  che per  $T''$  è noto il numero di occorrenze  $c(T'_{C'}, v)$  e  $c(T''_{C''}, u)$  in  $G$ . Poichè essendo la programmazione dinamica per poter calcolare le occorrenze di un treelet con  $k$  nodi sarà necessario aver calcolato le occorrenze di tutti i treelet con

un numero di nodi minore o uguale a  $k - 1$ .

Se  $C' \cap C'' = \emptyset$ , si procede al conteggio delle occorrenze di  $T_C$  radicato in  $v$  nel modo seguente:

$$c(T_C, v) = \frac{1}{\beta_T} \sum_{(u,v) \in E} \sum_{\substack{C' \subset C \\ C'' = C \setminus C' \\ |C'|=|T'|, |C''|=|T''|}} c(T_{C'}, v) \cdot c(T_{C''}, u) \quad (1)$$

dove  $\beta_T$  è una costante di normalizzazione che è uguale al numero di sottoalberi di  $T$  isomorfi a  $T''$  radicati nell'ultimo figlio della radice  $r$  di  $T$ .

La correttezza e la complessità di questa costruzione, non sono trattate in questa tesi, ma vengono dimostrate da Alon in [5].

Si può vedere l'algoritmo formalmente descritto in Algoritmo 1.

---

**Algoritmo 1:** Fase di costruzione

---

```

1 input : Grafo  $G = (V, E)$ , dimensione del treelet  $k$ , insieme  $[k]$  di colori;
2 for  $v$  in  $G$  do
3    $C_0 = \{c_v\}$ ; viene assegnato un colore uniformemente a caso preso da  $[k]$ ;
4    $c(T_{C_0}, v) = 1$ ;
5 end
6 for  $h = 2$  to  $k$  do
7   for  $v \in V$  do
8     foreach  $T : |T| = h$  do
9        $c(T_C, v) = \frac{1}{\beta_T} \sum_{(u,v) \in E} \sum_{\substack{C', C'' \subset C \\ C' \cap C'' = \emptyset}} c(T_{C'}, v) \cdot c(T_{C''}, u)$ 
10    end
11  end
12 end

```

---

Come si può notare, per calcolare le occorrenze di un albero  $T_C$  nell'algoritmo si sfrutta un approccio top-down, ossia, a partire dall'albero  $T_C$ , si identificano i



due alberi  $T'$  e  $T''$  in cui può essere scomposto, si considerano tutte le partizioni di  $C', C'' \subset C$  e in seguito si procede al calcolo di  $c(T_C, v)$  come indicato in (1).

In questa tesi, così come in [7], si è sfruttato un approccio bottom-up. Infatti, per ogni nodo  $v \in V$  di  $G$  e per ogni nodo  $u \in V$  con  $(u, v) \in E$  si prendono tutte le coppie possibili di treelet colorati radicati in  $v$  e  $u$ , rispettivamente  $T'_{C'}$  e  $T''_{C''}$ , tali che la loro unione generi l'albero  $T$  con  $k$  nodi radicato in  $v$ .

Sarà, pertanto, necessario che:  $|T'|, |T''| > 0$  e che  $|T'| + |T''| = k$ . Inoltre viene supposto di voler ottenere solo i  $k$ -treelet  $T$  in cui i sottoalberi radicati nella radice  $r$  abbiano un ordinamento non crescente. Perciò se la cardinalità di  $T''$  supera la cardinalità del sottoalbero radicato nell'ultimo figlio della radice di  $|T'|$ , non è possibile compiere l'unione tra i due.

Dallo sviluppo dell'algoritmo 1, si noti che i conteggi del numero di occorrenze di ogni  $k$ -treelet colorato raggiungibile da ogni nodo  $v \in V$  di  $G$ , sono svolti e salvati in maniera separata. Lo scopo di questa tesi però è quello di conteggiare il numero di  $k$ -treelet colorati diversi individuabili su tutto il grafo  $G$  e le occorrenze totali per ognuno. A tale scopo è necessario aggregare gli alberi in un'unica tabella contenente i diversi  $k$ -treelet e le rispettive occorrenze. Per evitare di conteggiare gli alberi un numero di volte superiori a quelle effettive, vengono classificati secondo una classe di equivalenza di isomorfismo.

Dati due alberi  $T' = (V', E')$  e  $T'' = (G'', E'')$  si dicono isomorfi se esiste una funzione bigettiva  $f : V' \rightarrow V''$  tale che  $(u, v) \in E'$  se e solo se  $(f(u), f(v)) \in E''$ .

Perciò se due alberi sono isomorfi verranno raggruppati nella stessa classe di equivalenza e le loro occorrenze saranno sommate. Così facendo otterremo i conteggi effettivi di tutti i  $k$ -treelet colorati trovati in  $G$  e il numero di volte che occorrono nel grafo.

## 2.2 Dettagli implementativi: rappresentazione compatta dei treelet colorati

In questa sezione vengono descritte le strutture dati usate per implementare l'algoritmo in Java. Gli oggetti principali che vengono manipolati sono i treelet

colorati e le occorrenze associate.

Ogni treelet colorato  $T_C = (T, C)$  ha una rappresentazione unica nella quale sono memorizzate la topologia di  $T$ , i colori in  $C$  ed informazioni aggiuntive per facilitare la manipolazione di  $T_C$ . Tale rappresentazione richiede al più 58 bit e può pertanto essere memorizzata usando degli interi a 64 bit, un tipo di dati nativo in Java e nelle più comuni architetture moderne. I bit sono numerati da 0 a 63 e ordinati dal bit meno significativo a quello più significativo.

Sono così suddivisi:

- i bit da 0-3 contengono il numero di nodi di  $T$  a meno della radice, che non è necessaria ai fini delle operazioni effettuate.
- i bit da 4-7 contengono la dimensione del sottoalbero radicato nell'ultimo figlio della radice di  $T$ .
- i bit da 8-11 vengono usati per memorizzare il valore di  $\beta_T$  associato a  $T$ .
- i bit da 12-27 sono usati per indicare i colori in  $C$ .
- i bit da 28-58 sono usati per codificare la struttura del treelet, come descritto di seguito.
- gli ultimi 5 bit sono lasciati a zero

Per codificare la struttura dell'albero si procede a partire da una visita DFS su  $T$ . Nella teoria dei grafi il DFS (*depth – first – search*), o ricerca in profondità, è un algoritmo di ricerca su alberi e grafi che ha la proprietà di essere intrinsecamente ricorsivo.

In questo caso la visita avviene partendo dalla radice  $r$  di  $T$  e attraversando tutti gli archi. Al termine ogni arco sarà stato attraversato esattamente 2 volte, in direzioni opposte.

Sia  $h = |T|$  e sia  $e_i$ , con  $i = 1, 2, \dots, 2(h-1)$ , l' $i$ -esimo arco attraversato dalla visita. L' $i$ -esimo bit della codifica è 0 se  $e_i$  è attraversato in direzione di  $r$  in  $T$  e 1 in caso

contrario.

In Figura 2.1 si può vedere un esempio di tale codifica.

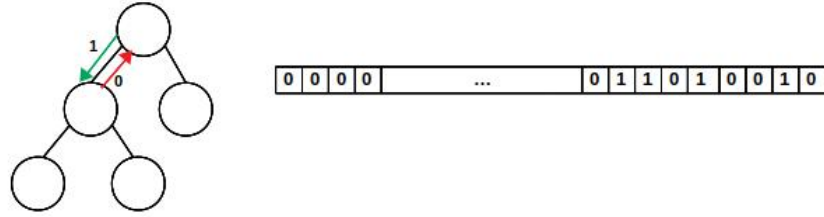


Figura 2.1: Un treelet radicato e la codifica della sua struttura

Per un qualunque  $k \leq 16$  questa codifica richiede al massimo 30 bit. Come abbiamo precedentemente detto i sottoalberi radicati nei figli della radice dell'albero  $T$  hanno un ordinamento non crescente, garantito anche nella struttura.

L'ordinamento lessicografico sulla struttura permette anche un'ordinamento totale sui treelet. Questo ordinamento è anche una regola decisiva per la visita DFS: i figli di un nodo vengono visitati nell'ordine dato dai sottoalberi radicati in esso. Ciò implica che ogni treelet  $T$  ha una codifica unica ed ogni codifica valida corrisponde ad un solo treelet. Inoltre, in questo modo è possibile implementare rapidamente l'operazione di unione.

La codifica dei treelet supporta le seguenti operazioni :

- **singleton** ( $c$ ) : permette di inizializzare un treelet di un solo nodo con il rispettivo  $c \in 1, \dots, k$
- **merge** ( $T', T''$ ) : fa l'unione di due alberi  $T'$  e  $T''$  e se possibile crea un nuovo albero  $T$  che avrà come struttura la concatenazione delle strutture di  $T'$  e  $T''$ . Come dimensione, a meno della radice,  $T$  avrà la somma delle dimensioni di  $T'$  e  $T''$  più 1. I colori di  $T$ , sono dati dall'unione dei colori di  $T'$  e  $T''$ . In  $T$  come  $\beta_T$  viene memorizzato il valore corrispondente a quello di  $T'$  e se la struttura del sottoalbero più piccolo di  $T'$  è uguale a quella di  $T''$  viene incrementato di 1. Per finire, la dimensione del sottoalbero più piccolo radicato in  $T$  sarà esattamente la dimensione di  $T'' + 1$ .

- **normalization\_factor** ( $T$ ): restituisce la costante di normalizzazione  $\beta_T$  associata a  $T$ .

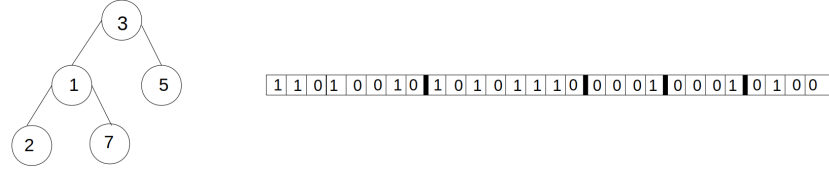


Figura 2.2: un treelet colorato e la sua codifica, mostrata per semplicità solo su  $8+8+4+4+4=28$  bit

In Figura 2.2 è mostrato un esempio di treelet colorato e della sua codifica

Nell’implementazione i treelet individuati da ogni nodo e i rispettivi conteggi vengono salvati all’interno di una tabella indicizzata, rappresentata mediante strutture annidate di *ArrayList*.

Inizialmente, come nell’algoritmo 1, i treelet e i conteggi sono stati valutati su ogni nodo  $v \in V$  di  $G$  scorrendo tutti gli archi  $E$ . Solo una volta calcolati tutti i treelet su tutti i nodi  $v$ , questi verranno aggregati e i loro conteggi sommati, inoltre, per ogni classe di equivalenza sarà identificato un unico rappresentante che è il  $k$ -treelet radicato in un nodo particolare dell’albero. Nella sezione 3.1 verrà definito tale nodo e l’algoritmo per la sua ricerca.

Inizialmente, perciò, quello che si ha è una tabella con  $k$  entrate indicizzate da 1 a  $k$  ed associate al numero di vertici dei treelet.

L’ $i$ -esima entrata della tabella, con  $1 \leq i \leq k$  generico, a sua volta, è un *ArrayList*, con una dimensione fissata, che varia a secondo della cardinalità di  $V$ , così che ad ogni entrata è associato un vertice  $v \in V$  di  $G$ .

Per ognuna delle  $|V|$  entrate, viene creato un *ArrayList* contenente tutti i treelet colorati di dimensione  $i$  raggiungibili dai differenti nodi in  $V$ , insieme al relativo numero di occorrenze.

All’interno di quest’ultima lista i treelet sono ordinati in ordine non decrescente.

La tabella ha una costruzione dinamica, perciò l’ $i$ -esima entrata è costruita solo dopo aver terminato la costruzione della  $i - 1$ -esima. Per creare la tabella nel metodo venfono usati i seguenti metodi:

- **build()**: si procede alla creazione della tabella mediante l'invocazione al suo interno dei metodi principali:
  - **do\_build1()** : colora ogni nodo  $v \in V$  di  $G$  in maniera casuale o round robin. Popola la tabella per  $h = 1$ , creando per ogni nodo  $v$  un albero colorato con un solo nodo, esattamente  $v$ , e numero di occorrenze pari a 1 (paragrafo 2.1 algoritmo 1 da linea 2 a linea 5).
  - **do\_build( $h$ )** : al variare di  $h = 1, \dots, k$  vengono popolate le rispettive tabelle, salvando per ogni nodo  $v$  i treelet colorati con  $h$  nodi e le rispettive occorrenze (paragrafo 2.1 algoritmo 1 da linea 6 a linea 12).

Come detto precedentemente una volta calcolati i  $k$ -treelet raggiungibili dai singoli nodi andranno aggregati, secondo equivalenze isomorfe, per ottenere le occorrenze totali dei treelet nel grafo. Questa operazione viene garantita nel metodo

- **aggregate()**: resituisce gli alberi di dimensione  $k$  radicati in ogni nodo aggregati secondo equivalenze di isomorfismo e somma tutte le rispettive occorrenze.

Per permettere una costruzione più rapida della tabella, nell'implementazione è utilizzato il *Multithreading*, cioè vengono utilizzati più thread che lavorano in parallelo. Un thread è un flusso di esecuzione indipendente all'interno di un processo. Il numero di thread utilizzato nell'implementazione è dipendente dal numero di processori presenti nella macchina. Supponendo di avere una macchina con 4 processori, vengono usati 3 thread, uno in meno rispetto al totale, poichè lavorando in Java era necessario garantire l'utilizzo di un processore al *Garbage Collector* essendo la mole di dati molto elevata.

Per garantire un funzionamento in parallelo senza conflitti si è dovuto provvedere affinché nessuna operazione necessitasse di semafori di mutua esclusione (mutex) e che ogni tipo di dato coinvolto fosse atomico, ossia non scomponibile.

Riguardo le operazioni sugli ArrayList non è stato necessario ricorrere alla mutua esclusione. Per le variabili è stato necessario, invece, garantire la visita dei vertici

del grafo in maniera atomica e a tal proposito i vertici, in ogni `ArrayList`, sono rappresentati mediante *AtomicInteger*, ossia valori interi che possono essere aggiornati in maniera atomica.

In questo capitolo viene presentata un'ottimizzazione al problema descritto nel capitolo precedente. Tale ottimizzazione si basa sul principio delle decomposizioni bilanciate. Si fa vedere, inoltre, come vengono modificati i precedenti dettagli implementativi ottenendo un miglioramento delle performance.

### 3.1 Decomposizioni Bilanciate di un albero

Si vuole andare a dimostrare in questa sezione che dato un albero  $T$  è sempre possibile ricavare una scomposizione bilanciata dell'albero.

Prima di poter enunciare e dimostrare il risultato principale occorre dare delle nozioni preliminari.

**Definizione 3.1.1.** Sia  $T_r$  un albero radicato nel nodo  $r$ , con  $k$  nodi. Diremo che la coppia  $(A, B)$ , dove  $A$  e  $B$  sono insiemi contenenti i nodi di  $T_r$ , è una decomposizione per l'albero  $T_r$  se:

- $|A| + |B| = k$
- $A \cap B = \{r\}$ .

**Definizione 3.1.2.** Dato un albero  $T$  con  $k$  nodi, diremo che  $(A, B)$  è una decomposizione bilanciata se:

$$\max\{|A|, |B|\} \leq f(k)$$

con  $f$  una funzione definita su  $k$ .

**Definizione 3.1.3.** Per ogni nodo  $v$  di un albero  $T$ , le diramazioni di  $T$  rispetto a  $v$ , sono tutti i sottoalberi massimali di  $T$  non contenenti  $v$ . Per ogni  $v \in T$ , si definisce  $\alpha(v)$  come il grado della diramazione di  $v$  con il maggior numero di nodi. Un nodo  $v$  di un albero  $T$  con  $n$  nodi, è un nodo centroide se  $\alpha(v) \leq \frac{n}{2}$ .

Il centroide di un albero non è necessariamente unico, infatti Jordan [8] ha dimostrato che, dato un albero  $T$  con  $n$  nodi:

- i  $T$  ha un singolo centroide  $v$  e  $\alpha(v) < \frac{n}{2}$ ;
- ii  $T$  ha due nodi centroidi (adiacenti)  $v_1$  e  $v_2$  tali che  $\alpha(v_1) = \alpha(v_2) = \frac{n}{2}$ , in questo caso il numero di nodi  $n$  è pari.

Esistono diversi algoritmi per la ricerca del centroide, quello utilizzato in questa tesi è l'algoritmo di Jordan [8] che ha una complessità temporale lineare nel numero di nodi.

Il primo passo da effettuare è determinare  $\alpha(v)$  per ogni nodo  $v \in T$ .

Si indica  $\delta(z)$  come il fattore di diramazione di un albero. ossia il numero di nodi incontrati durante una visita DFS (in profondità) effettuata a partire dalla radice  $z$ . Siano  $\delta(z_i)$  i fattori di bilanciamento ottenuti da tutte le possibili diramazioni  $i$  di  $T$  unite a  $v$  che non lo contengono, allora,  $\alpha(v) = \max\{\delta(z_i)\}$ .

Una volta calcolato il valore di  $\alpha(v) \forall v \in T$  si verifica per quali valori risulta  $\alpha(v) \leq \frac{n}{2}$ .

Nel caso ci fosse un unico nodo  $v$  che soddisfa la precedente espressione, come in (i), allora tale nodo rappresenta l'unico centroide dell'albero  $T$ . Nel caso, invece, ce ne fossero due, come definito in (ii), per esempio  $v_1$  e  $v_2$ , l'albero  $T$  conterrà due centroidi, rispettivamente  $v_1$  e  $v_2$ .

Nell'esempio 3.1.4 si può vedere l'applicazione dell'algoritmo per la ricerca del centroide.



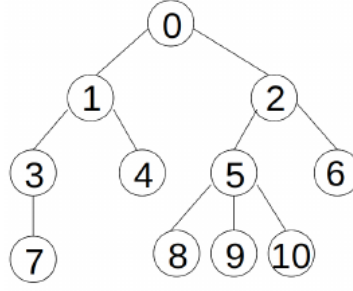


Figura 3.1: Albero  $T$  per la ricerca del centroide

**Esempio 3.1.4.** Si consideri l'albero  $T$  in figura 3.1 per la ricerca del nodo centroide. Per ogni nodo  $v$  di  $T$  numerato da 0 a 10, viene calcolato  $\alpha(v)$ .

Quello che si ottiene è :

$$\begin{array}{lll}
 \alpha(0) = 6 & \alpha(1) = 7 & \alpha(2) = 5 \\
 \alpha(3) = 9 & \alpha(4) = 10 & \alpha(5) = 7 \\
 \alpha(6) = 10 & \alpha(7) = 10 & \alpha(8) = 10 \\
 \alpha(9) = 10 & \alpha(10) = 10 & 
 \end{array}$$

Poiché  $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor = \lfloor \frac{11}{2} \rfloor = 5$ , l'unico nodo per cui la disuguaglianza risulta vera è il nodo 2, infatti  $5 \leq 5$ .

Poiché il numero di nodi è dispari certamente questo sarà l'unico centroide dell'albero  $T$  (figura 3.1).  $\square$

L'ultimo punto da considerare prima di poter enunciare e dimostrare il risultato principale di questa sezione riguarda la definizione di un algoritmo valido per comporre due insiemi di nodi, che chiameremo  $T'$  e  $T''$ , in maniera  $f(k)$ -bilanciata. Siano dati in input un albero  $T$ , con  $k$  nodi, ed un fattore di bilanciamento definito da una funzione  $f(k)$ , poiché non considero la radice di  $T$ , si avrà che  $f(k) = f(k-1)$ . Si suppone inoltre, senza perdita di generalità, che i sottoalberi radicati nei figli della radice  $r$  di  $T$  siano ordinati con ordine non crescente. Da questo deriva che, supponendo che  $r$  abbia  $n$  figli, vi saranno al più  $n$  alberi radicati in ciascuno di essi tali che:  $|T_i| \geq |T_{i+1}| \quad \forall i = 1, \dots, n-1$ .

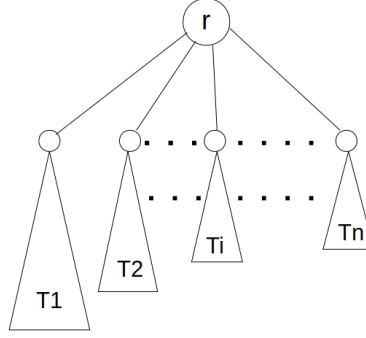


Figura 3.2: Esempio di albero  $T$  radicato in  $r$ , con  $k$  nodi, valido come input per l'algoritmo 2

---

**Algoritmo 2:** Insiemi  $k$ -bilanciati

---

```

1 input : Albero  $T$  con  $k$  nodi, fattore di bilanciamento  $f(k-1)$ ;
2  $T', T'' \leftarrow$  due alberi inizialmente senza nodi;
3 for  $i = 1, \dots, n$  do
4   if  $\sum_{j=1}^i |T_j| > f(k-1)$  then
5      $T' \leftarrow$  sottoalbero di  $T$  indotto da  $\{r\} \cup \bigcup_{j=1}^{i-1} V(T_j)$ .
6      $T'' \leftarrow$  sottoalbero di  $T$  indotto da  $V(T) \setminus T'$ .
7   end
8 end
9 return  $(T', T'')$ .

```

---

Una volta concluso l'algoritmo 2 si avrà una coppia  $(T', T'')$  tale che :  $\max(|T'|, |T''|) \leq f(k-1) = f(k)$ . Viene pertanto rispettata la definizione 3.1.2, perciò si ottiene una decomposizione  $f(k)$ -bilanciata.

In base a tutte le nozioni fino ad ora discusse si può dare il seguente risultato

**Teorema 3.1.5.** *Per ogni albero  $T$  di  $k$  nodi esiste un nodo  $r$  di  $T$  tale che l'albero  $T_r$ , ottenuto radicano-  
do  $T$  in  $r$ , ammette una decomposizione  $(\lfloor \frac{2}{3}(k-1) \rfloor + 1)$ -bilanciata ed, inoltre, sia  $(|T'|, |T''|)$  tale decomposizione risulta che  $\max\{|T'|, |T''|\} \geq 2 + \left\lfloor \frac{(k-1)}{3} \right\rfloor$*

*Dimostrazione.* Sia  $T$  un albero di  $k$  nodi, con  $k > 2$  (per  $n \leq 2$  la proprietà è banalmente vera)

La prima operazione da compiere è individuare il nodo  $r$  di  $T$  su cui si andrà poi a radicare il nuovo albero  $T_r$ .

Si suppone che tale nodo sia un centroide dell'albero  $T$  quindi si applica l'algoritmo di Jordan per la ricerca del centroide. Senza perdita di generalità si suppone di avere un unico nodo centroide, indicato con  $r$ .

Se il centroide  $r$  trovato non corrisponde alla radice dell'albero  $T$ , si modifica  $T$  radicandolo in  $r$  e l'albero così ottenuto verrà indicato con  $T_r$ .

Inoltre, si suppone che i sottoalberi radicati nei figli di  $r$  siano ordinati in maniera non crescente rispetto alla loro dimensione.

Si applichi a  $T_r$  l'algoritmo 2 precedentemente descritto per definire se è possibile ottenere una decomposizione  $f(k)$ -bilanciata, con  $f(k) = (\lfloor \frac{2}{3}(k-1) \rfloor + 1)$ .

Sia  $\{T_i \mid i = 1, \dots, n\}$  l'insieme dei sottoalberi radicati negli  $n$  figli di  $r$  e si consideri il primo valore di  $i$  tale che l'istruzione  $if$  di riga 4 nell'algoritmo 2 risulti vera (si noti che tale valore di  $i$  esiste sempre dal fatto che per  $i = n$  la condizione è verificata).

Sia

$$S = \sum_{i=1}^n |T_i| = (k-1)$$

e sia

$$x = \sum_{j=1}^{i-1} |T_j|$$

Distinguiamo due casi

- **i > 2** Si ha che

$$x + |T_i| > \frac{2}{3} \cdot S \tag{2}$$

Inoltre sapendo che per costruzione

$$|T_i| \leq \frac{S}{i} \leq \frac{S}{3} \quad (3)$$

Sottraendo la disequazione (3) alla (2) si ottiene che

$$x > \frac{2}{3} \cdot S - \frac{S}{3} = \frac{S}{3} \quad (4)$$

- **i=2** Anche in questo caso come nel precedente vale la disequazione (2).

Inoltre, essendo  $i = 2$  per costruzione dell'albero  $T$  si può dire che

$$x = |T_1| \geq |T_2| = |T_i| \quad (5)$$

Pertanto, sfruttando la disequazione (5) combinata con la (2) si ha che

$$2x > \frac{2}{3} \cdot S \Rightarrow x > \frac{S}{3} \quad (6)$$

Per entrambi i casi otteniamo che

$$x > \frac{S}{3} \Rightarrow x \geq \left\lfloor \frac{S}{3} \right\rfloor + 1$$

Pertanto si avrà che

$$\left\lfloor \frac{S}{3} \right\rfloor + 1 \leq x \leq \left\lfloor \frac{2}{3} \cdot S \right\rfloor$$

Quindi

$$|T'| = 1 + x \leq 1 + \left\lfloor \frac{2}{3} \cdot S \right\rfloor = 1 + \left\lfloor \frac{2}{3} \cdot (k-1) \right\rfloor \quad (7)$$

$$|T''| = 1 + S - x = 1 + S - 1 - \left\lfloor \frac{S}{3} \right\rfloor = \left\lceil \frac{2}{3} \cdot S \right\rceil = \left\lceil \frac{2}{3} \cdot (k-1) \right\rceil \quad (8)$$

Inoltre

$$|T'| = 1 + x \geq 1 + \left(1 + \left\lfloor \frac{S}{3} \right\rfloor\right) = 2 + \left\lfloor \frac{(k-1)}{3} \right\rfloor$$

Poichè

$$1 + \left\lfloor \frac{2}{3} \cdot (k-1) \right\rfloor \geq \left\lceil \frac{2}{3} \cdot (k-1) \right\rceil$$

Possiamo concludere che

$$2 + \left\lfloor \frac{(k-1)}{3} \right\rfloor \leq \max\{|T'|, |T''|\} \leq 1 + \left\lfloor \frac{2}{3} \cdot (k-1) \right\rfloor$$

ottenendo perciò una decomposizione  $(\lfloor \frac{2}{3}(k-1) \rfloor + 1)$ -bilanciata, tale che  $\max\{|T'|, |T''|\} \geq 2 + \left\lfloor \frac{(k-1)}{3} \right\rfloor$

□

Nel caso in cui si abbiano due centroidi, la scelta su quale radicare l'albero è deterministica.

Nel caso in cui gli alberi ottenuti radicando  $T$  in ognuno di essi abbiano strutture differenti, viene scelto quello che tra i due ha una struttura più piccola. Altrimenti se gli alberi ottenuti sono identici, viene scelto uno dei due in maniera arbitraria.

## 3.2 Algoritmo

In questa sezione si vede come è stato utilizzato il risultato del paragrafo 3.1 per ottimizzare e migliorare l'algoritmo 1 descritto nel capitolo 2 paragrafo 2.1.

Molto brevemente, quello che si faceva precedentemente era la seguente cosa. Dato  $T_C = (T, C)$ , con  $T$  un albero colorato radicato di  $k$  nodi i cui colori giacciono in  $C$ , si procedeva a calcolare il numero di occorrenze  $c(T_C, v) \quad \forall v \in V$  dividendo idealmente  $T$  in due sottoalberi,  $T'$  e  $T''$ , con  $T''$  il sottoalbero radicato in  $u$  uno dei figli della radice  $v$  di  $T$  e  $T'$  il sottoalbero di  $T$  radicato in  $v$  contenente  $|T| - |T''|$  nodi. Si procedeva al conteggio delle occorrenze di  $T_C$  nel seguente modo

$$c(T_C, v) = \frac{1}{\beta_T} \sum_{(u,v) \in E} \sum_{\substack{C' \subset C \\ C'' = C \setminus C' \\ |C'| = |T'|, |C''| = |T''|}} c(T'_{C'}, v) \cdot c(T''_{C''}, u)$$

In questa nuova versione, invece, la divisione dell'albero  $T_C$  non è più scelta in maniera ideale, ma bensì vengono presi due alberi  $T'_{C'}$  e  $T''_{C''}$  tali che la decomposizione di  $T_C$  risulti bilanciata. Inoltre, a differenza della precedente versione, gli alberi  $T'_{C'}$  e  $T''_{C''}$  saranno radicati entrambi nello stesso nodo  $v$  su cui sarà poi radicato  $T_C$ .

- [1] Noga Alon, Phuong Dao, Iman Hajirasouliha, Fereydoun Hormozdiari, and S Cenk Sahinalp. Biomolecular network motif counting and discovery by color coding. *Bioinformatics*, 24(13):i241–i249, 2008.
- [2] Mansurul A Bhuiyan, Mahmudur Rahman, Mahmuda Rahman, and Mohammad Al Hasan. Guise: Uniform sampling of graphlets for large graph analysis. In *2012 IEEE 12th International Conference on Data Mining*, pages 91–100. IEEE, 2012.
- [3] Zhao Zhao, Maleq Khan, VS Anil Kumar, and Madhav V Marathe. Subgraph enumeration in large social contact networks using parallel color coding and streaming. In *2010 39th International Conference on Parallel Processing*, pages 594–603. IEEE, 2010.
- [4] Paolo Boldi, Marco Rosa, Massimo Santini, and Sebastiano Vigna. Layered label propagation: A multiresolution coordinate-free ordering for compressing social networks. In *Proceedings of the 20th international conference on World wide web*, pages 587–596, 2011.
- [5] Noga Alon, Raphael Yuster, and Uri Zwick. Color-coding. *Journal of the ACM (JACM)*, 42(4):844–856, 1995.
- [6] Marco Bressan, Flavio Chierichetti, Ravi Kumar, Stefano Leucci, and Alessandro Panconesi. Motif counting beyond five nodes. *ACM Transactions on Knowledge Discovery from Data (TKDD)*, 12(4):1–25, 2018.

- [7] Marco Bressan, Stefano Leucci, and Alessandro Panconesi. Motivo: fast motif counting via succinct color coding and adaptive sampling. *Proceedings of the VLDB Endowment*, 12(11):1651–1663, 2019.
- [8] Camille Jordan. Sur les assemblages de lignes. *J. Reine Angew. Math*, 70(185):81, 1869.