

# Homework 1

Giulio Nenna (s292399@studenti.polito.it)

November 14, 2021

Realizzato in collaborazione con Alessandro Bonaduce  
(s289906@studenti.polito.it), Davide Grande (s292174@studenti.polito.it),  
Ciro Balsamo (s289363@studenti.polito.it)

## Esercizio 1.

---

(a) Definiamo tutte le possibili partizioni  $o - d$  del grafo:

$$U_1 = \{o\}$$

$$U_2 = \{o, a\}$$

$$U_3 = \{o, b\}$$

$$U_4 = \{o, a, b\}$$

e tutti i possibili path  $o - d$ :

$$p_1 = \{o, a, d\}$$

$$p_2 = \{o, b, d\}$$

$$p_3 = \{o, a, b, d\}$$

Affinché il flusso  $o - d$  si annulli deve essere rimossa almeno la seguente quantità di capacità:

$$C_{\min} = \min((C_1 + \min(C_2, C_5)), (C_2 + \min(C_1, C_3 + C_4)))$$

Dove  $C_1 + \min(C_2, C_5)$  è la minima capacità da rimuovere nel caso in cui  $C_1 > C_2$  mentre  $C_2 + \min(C_1, C_3 + C_4)$  è la minima capacità da rimuovere nel caso in cui  $C_2 > C_1$

(b) Definiamo le capacità dei tagli:

$$C_{U_1} = C_1 + C_2 = 5$$

$$C_{U_2} = C_2 + C_3 + C_4 = 7$$

$$C_{U_3} = C_1 + C_5 = 5$$

$$C_{U_4} = C_4 + C_5 = 5$$

Affinché venga aumentato il throughput, per il teorema del *max flow - min cut*, è necessario aumentare la capacità del minimo taglio  $C_{\min}$ . Come si può notare, si hanno tre minimi tagli distinti e non c'è un arco comune a tutti, quindi non è possibile aumentare il throughput del grafo con una sola unità di capacità. Per cui  $\tau = C_{\min} = 5$

(c) Le allocazioni ottimali per 2 unità di capacità sono le seguenti:

1. +1 su  $e_1$ , +1 su  $e_4 \implies \tau = C_{\min} = 6$ ;
2. +1 su  $e_1$ , +1 su  $e_5 \implies \tau = C_{\min} = 6$ ;
3. +1 su  $e_2$ , +1 su  $e_5 \implies \tau = C_{\min} = 6$ ;

Per ricavare queste allocazioni si è agito in modo tale da aumentare la capacità degli archi che concorrono ai tagli di capacità minima. L'opzione in cui vengono allocate 2 unità di capacità ad un solo arco non migliora  $\tau$  dal momento che non esiste un arco comune a tutti e tre i minimi tagli.

(d) Le allocazioni ottimali per 4 unità di capacità sono le seguenti:

1. +1 su  $e_1$ , +1 su  $e_2$ , +1 su  $e_4$ , +1 su  $e_5 \implies \tau = C_{\min} = 7$ ;
2. +2 su  $e_1$ , +2 su  $e_4 \implies \tau = C_{\min} = 7$ ;
3. +2 su  $e_2$ , +2 su  $e_5 \implies \tau = C_{\min} = 7$ ;
4. +2 su  $e_1$ , +2 su  $e_5 \implies \tau = C_{\min} = 7$ ;

Tutte e 4 queste allocazioni producono una somma delle capacità dei tagli  $C_{\text{tot}} = 30$ .

---

## Esercizio 2.

---

- (a) Per il seguente grafo si possono identificare due path distinti tra  $n_1$  e  $n_6$ :

$$p_1 = \{n_1, n_2, n_3, n_6\},$$

$$p_2 = \{n_1, n_4, n_5, n_6\}.$$

Definendo con  $z_i$  il flusso sull' $i$ -esimo path andiamo a calcolare il costo totale del sistema:

$$C = z_1 \underbrace{(3z_1 + z_1 + 1 + z_1 + 1)}_{\text{flusso su } p_1} + z_2 \underbrace{(z_2 + 1 + z_2 + 1 + 3z_2)}_{\text{flusso su } p_2}.$$

Poiché il throughput del grafo è pari a 2, vale:

$$z_1 + z_2 = 2.$$

Pertanto, per sostituzione si ottiene:

$$C = 10z_1^2 - 20z_1 + 24.$$

$$C' = 0 \implies z_1 = 1,$$

quindi

$$z^* = \arg \min C(z) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Poiché vale:

$$f^* = A^{n_1, n_6} z^*,$$

$$f^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

- (b) Per calcolare l'equilibrio di Wardrop se ne esplicitano le condizioni necessarie:

$$z_1 > 0 \implies \begin{cases} 5z_1 + 2 \leq 5z_2 + 2 \\ 5z_1 + 2 \leq 10 - 5z_1 + 2 \end{cases} \xrightarrow{z_1+z_2=2} z_1 \leq 1,$$

$$z_2 > 0 \implies 5z_1 + 2 \geq 5z_2 + 2 \xrightarrow{z_1+z_2=2} z_1 \geq 1,$$

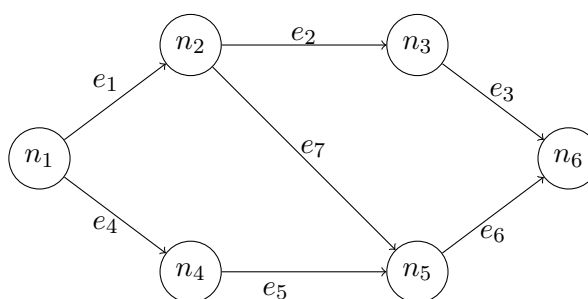
quindi  $z_1 = 1$ . Se ne conclude che:

$$z^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Poiché  $z^{(0)} = z^*$  risulta immediato che:

$$\text{PoA} = 1.$$

(c) Inseriamo il seguente link all'interno del grafo:



I possibili path all'interno del grafo risultano quindi essere:

$$p_1 = \{n_1, n_2, n_3, n_6\},$$

$$p_2 = \{n_1, n_4, n_5, n_6\},$$

$$p_3 = \{n_1, n_2, n_5, n_6\},$$

Posto

$$d_1 = 5z_1 + 3z_3 + 2,$$

$$d_2 = 5z_2 + 3z_3 + 2,$$

$$d_3 = 7z_3 + 3z_2 + 3z_1,$$

per calcolare l'equilibrio di Wardrop si esplicitano le seguenti condizioni necessarie:

•

$$z_1 > 0 \implies \begin{cases} d_1 \leq d_2, \\ d_1 \leq d_3. \end{cases}$$

La prima equazione può essere riscritta come

$$d_1 \leq d_2 \Leftrightarrow 5z_1 + 3z_3 + 2 \leq 5z_2 + 3z_3 + 2 \Leftrightarrow z_1 \leq z_2,$$

mentre la seconda diviene

$$d_1 \leq d_3 \Leftrightarrow 5z_1 + 3z_3 + 2 \leq 7z_3 + 3z_2 + 3z_1 \Leftrightarrow 2z_1 - 3z_2 - 4z_3 + 2 \leq 0.$$

Pertanto

$$2z_1 - 3z_2 - 4z_3 + 2 \leq 0 \xrightarrow{z_1+z_2+z_3=2} 6z_1 + z_2 - 6 \leq 0 \xrightarrow{z_1 \leq z_2} z_1 \leq \frac{6}{7}.$$

•

$$z_2 > 0 \implies \begin{cases} d_2 \leq d_1, \\ d_2 \leq d_3. \end{cases}$$

La prima equazione può essere riscritta come

$$d_1 \geq d_2 \Leftrightarrow z_1 \geq z_2 \Rightarrow z_1 = z_2,$$

mentre la seconda diviene

$$d_2 \leq d_3 \Leftrightarrow 5z_2 + 3z_3 + 2 \leq 7z_3 + 3z_2 + 3z_1 \Leftrightarrow 3z_1 - 2z_2 + 4z_3 - 2 \geq 0.$$

Pertanto

$$3z_1 - 2z_2 + 4z_3 - 2 \geq 0 \xrightarrow{z_1+z_2+z_3=2} z_1 + 6z_2 - 6 \leq 0 \xrightarrow{z_1 \geq z_2} z_2 \leq \frac{6}{7}.$$

•

$$z_3 > 0 \implies \begin{cases} d_3 \leq d_1, \\ d_2 \geq d_3. \end{cases}$$

La prima equazione può essere riscritta come

$$d_3 \leq d_1 \Leftrightarrow 5z_1 + 3z_3 + 2 \geq 7z_3 + 3z_2 + 3z_1 \Leftrightarrow 2z_1 - 3z_2 - 4z_3 + 2 \geq 0$$

mentre la seconda diviene

$$d_2 \leq d_3 \Leftrightarrow 3z_1 - 2z_2 + 4z_3 - 2 \leq 0.$$

Pertanto

$$\begin{cases} 2z_1 - 3z_2 - 4z_3 + 2 \geq 0, \\ 3z_1 - 2z_2 + 4z_3 - 2 \leq 0, \end{cases} \xrightarrow{z_1+z_2+z_3=2} \begin{cases} 6z_1 + z_2 - 6 \geq 0, \\ z_1 + 6z_2 - 6 \geq 0. \end{cases}$$

Poiché nei punti precedenti si è ottenuto che  $z_1 = z_2$ , allora

$$\begin{cases} z_1 \geq \frac{6}{7}, \\ z_2 \geq \frac{6}{7}. \end{cases}$$

Di conseguenza

$$z_1 = z_2 = \frac{6}{7} \xrightarrow{z_1+z_2+z_3=2} z_3 = \frac{2}{7},$$

e quindi posto

$$z^{(0)} = \begin{pmatrix} 6/7 \\ 6/7 \\ 2/7 \end{pmatrix},$$

il vettore di flusso

$$f^{(0)} = A^{n_1, n_6} z^{(0)},$$

$$f^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6/7 \\ 6/7 \\ 2/7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8/7 \\ 6/7 \\ 6/7 \\ 6/7 \\ 8/7 \\ 2/7 \end{pmatrix},$$

è un equilibrio di Wardrop. Il costo totale corrispondente è

$$3 \frac{64}{49} + \left( \frac{36}{49} + \frac{42}{49} \right) + \left( \frac{36}{49} + \frac{42}{49} \right) + \left( \frac{36}{49} + \frac{42}{49} \right) +$$

$$+ \left( \frac{36}{49} + \frac{42}{49} \right) + 3 \frac{64}{49} + \frac{4}{49} = \frac{100}{7} \simeq 14.3.$$

Nel caso precedente (grafo senza il link  $e_7$ ) poiché

$$f^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

il costo corrispondente era pari a

$$3 + 2 + 2 + 2 + 2 + 3 = 14,$$

pertanto, aggiungendo il link  $e_7$  si è aumentato il costo totale e quindi si è verificato il paradosso di Braess.

L'ottimo di sistema del nuovo grafo è la soluzione del seguente problema di ottimizzazione

$$\begin{aligned} \text{minimize} \quad & 5z_1^2 + 3z_3z_1 + 2z_1 + 5z_2^2 + 3z_3z_2 + 2z_2 + 7z_3^2 + 3z_2z_3 + 3z_3z_1, \\ \text{subject to} \quad & z_1 + z_2 + z_3 = 2, \end{aligned}$$

il quale ha come soluzione

$$z^* = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Di conseguenza, il prezzo dell'anarchia del nuovo grafo è

$$\frac{\frac{100}{7}}{14} = \frac{100}{98} \simeq 1.02.$$

(d) Dal punto precedente

$$f^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

poiché è noto che

$$\omega_e^* = f_e^* d_e(f_e^*), \quad e \in \mathcal{E}, \quad (1)$$

si ricava che

$$\omega_1 = 3, \omega_2 = 1, \omega_3 = 1, \omega_4 = 1, \omega_5 = 1, \omega_6 = 3, \omega_7 = 0,$$

per cui

$$\omega^* = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

è la distribuzione ottimale dei pedaggi. Al fine di calcolare una distribuzione ottimale dei pedaggi a supporto pieno si consideri il pedaggio  $\omega^* + a\mathbb{1}$ . Intuitivamente, quello che si sta facendo è aggiungere lo stesso pedaggio costante, pari ad  $a > 0$ , ad ogni link. Poiché tutti i path hanno la stessa lunghezza pari a 3, questo fatto non dovrebbe influire sulla scelta della strada da parte degli utenti. Sarebbe come se gli utenti dovessero pagare un pedaggio pari a  $3a$  per accedere alla rete, indipendentemente dal path scelto.

A questo punto osserviamo che, preso  $\omega^* \in \mathbb{R}_+^{\mathcal{E}} : f^{(\omega^*)} = f^*$ , allora

$$f^{(\omega^* + a\mathbb{1})} = f^{(\omega^*)} = f^*.$$

Sappiamo, infatti, che  $f^{(\omega^*)}$  è un equilibrio di Wardrop per un pedaggio  $\omega^*$  quindi

$$\begin{aligned} z_p > 0 &\implies \\ \implies \sum_{e \in \mathcal{E}} A_{ep}^{(n1, n6)} \left( d_e \left( f_e^{(\omega^*)} \right) + \omega_e^* \right) &\leq \sum_{e \in \mathcal{E}} A_{eq}^{(n1, n6)} \left( d_e \left( f_e^{(\omega^*)} \right) + \omega_e^* \right), \forall q \in \Gamma_{n1, n6}. \end{aligned}$$

D'altra parte anche  $f^{(\omega^* + a\mathbb{1})}$  è un equilibrio di Wardrop per un pedaggio  $\omega^* + a\mathbb{1}$ , per cui  $\forall q \in \Gamma_{n1, n6}$ ,

$$\begin{aligned} z_p > 0 &\implies \\ \sum_{e \in \mathcal{E}} A_{ep}^{(n1, n6)} \left( d_e \left( f_e^{(\omega^* + a\mathbb{1})} \right) + \omega_e^* + a \right) &\leq \sum_{e \in \mathcal{E}} A_{eq}^{(n1, n6)} \left( d_e \left( f_e^{(\omega^* + a\mathbb{1})} \right) + \omega_e^* + a \right). \end{aligned}$$

Tuttavia, quest'ultima condizione può essere riscritta come

$$\begin{aligned} &\sum_{e \in \mathcal{E}} A_{ep}^{(n1, n6)} \left( d_e \left( f_e^{(\omega^* + a\mathbb{1})} \right) + \omega_e^* \right) + a \sum_{e \in \mathcal{E}} A_{ep}^{(n1, n6)} \\ &\leq \sum_{e \in \mathcal{E}} A_{eq}^{(n1, n6)} \left( d_e \left( f_e^{(\omega^* + a\mathbb{1})} \right) + \omega_e^* \right) + a \sum_{e \in \mathcal{E}} A_{eq}^{(n1, n6)}, \quad \forall q \in \Gamma_{n1, n6}, \\ &\sum_{e \in \mathcal{E}} A_{ep}^{(n1, n6)} \left( d_e \left( f_e^{(\omega^* + a\mathbb{1})} \right) + \omega_e^* \right) + 3a \leq \sum_{e \in \mathcal{E}} A_{eq}^{(n1, n6)} \left( d_e \left( f_e^{(\omega^* + a\mathbb{1})} \right) + \omega_e^* \right) + 3a, \quad \forall q \in \Gamma_{n1, n6}, \\ &\sum_{e \in \mathcal{E}} A_{ep}^{(n1, n6)} \left( d_e \left( f_e^{(\omega^* + a\mathbb{1})} \right) + \omega_e^* \right) \leq \sum_{e \in \mathcal{E}} A_{eq}^{(n1, n6)} \left( d_e \left( f_e^{(\omega^* + a\mathbb{1})} \right) + \omega_e^* \right), \quad \forall q \in \Gamma_{n1, n6}. \end{aligned}$$

Poiché per il grafo in esame le funzioni di ritardo sugli edge  $d_e$ , definite in precedenza, sono tutte funzioni crescenti questo ci dice che l'equilibrio di Wardrop per un dato  $\omega \in \mathbb{R}_+$  è unico, e quindi se vale la disuguaglianza precedente si ha che

$$f^{(\omega^* + a\mathbb{1})} = f^{(\omega^*)}.$$



Pertanto, il vettore di pedaggi

$$\omega_{fs}^* = \omega^* + a\mathbb{1} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad a > 0$$

è un vettore di pedaggi con supporto pieno il cui vettore dei flussi ottimale corrispondente riduce il PoA a 1.

Al fine di trovare un vettore di pedaggi di supporto minimo si osserva che  $\text{PoA} = 1$  se

$$f^{(\omega)} = f^*$$

ossia

$$z^{(\omega)} = z^*.$$

Ricordando che

$$z^* = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

si nota che, nel rispetto dell'ottimo di sistema, nessun utente sceglie di percorrere il path  $p_3$ . Pertanto, un  $\omega_{ms}^*$  di supporto minimo tale per cui gli utenti non hanno alcun motivo di scegliere il path 3 produrrebbe quindi  $z^{(\omega_{ms}^*)} = z^*$ . Si sceglie quindi

$$\omega_{ms}^* = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ k \end{pmatrix}, \quad k > 0.$$

Per determinare il  $k$  più opportuno si ragiona nel modo seguente:

$$z_3^{(\omega_{ms}^*)} > 0 \implies \begin{cases} 3(z_1 + z_3) + z_3 + k + 3(z_2 + z_3) \leq 3(z_1 + z_3) + z_1 + 1 + z_1 + 1, \\ 3(z_1 + z_3) + z_3 + k + 3(z_2 + z_3) \leq z_2 + 1 + z_2 + 1 + 3(z_2 + z_3), \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} z_3 \leq \frac{2z_1-3z_2+2-k}{4} \\ z_3 \leq \frac{2z_2-3z_1+2-k}{4} \end{cases} \xrightarrow{z_1 \leq 2 \wedge z_2 \leq 2} \begin{cases} z_3 \leq \frac{6-3z_2-k}{4} \\ z_3 \leq \frac{6-3z_1-k}{4} \end{cases} \xrightarrow{z_1 \geq 0 \wedge z_2 \geq 0} \begin{cases} z_3 \leq \frac{6-k}{4} \\ z_3 \leq \frac{6-k}{4} \end{cases}.$$

Pertanto, se si sceglie  $k = 6$  allora

$$z_3^{(\omega_{ms}^*)} \leq 0 \implies z_3^{(\omega_{ms}^*)} = 0,$$

e quindi

$$z^{(\omega_{ms}^*)} = z^* = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

- (e) In questo caso il nuovo grafo presenta dei ritardi ancora minori sui path  $p_1$  e  $p_2$ , in quanto il ritardo è diminuito di due unità su entrambi i path. L'incentivo a prendere il path  $p_3$  diminuisce, pertanto è verosimile che l'ottimo di sistema del nuovo grafo sia ancora

$$z^* = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

in quanto, se prima non c'era motivo di prendere il path  $p_3$ , ora è ancora meno conveniente.

Quindi una distribuzione di pedaggi tale che  $\text{PoA} = 1$  è quella in cui il pedaggio sul link  $e_7$  è talmente alto che non è conveniente percorrerlo anche se vuoto. Quindi, analogamente al punto precedente si sceglie

$$\omega = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ a \end{pmatrix}, \quad a > 0.$$

Per determinare il  $k$  più opportuno si ragiona nel modo seguente:

$$\begin{aligned} z_3^{(\omega)} > 0 &\implies \begin{cases} 3(z_1 + z_3) + z_3 + a + 3(z_2 + z_3) \leq 3(z_1 + z_3) + 2z_1, \\ 3(z_1 + z_3) + z_3 + a + 3(z_2 + z_3) \leq 2z_2 + 3(z_2 + z_3), \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} z_3 \leq \frac{2z_1-3z_2-a}{4} \\ z_3 \leq \frac{2z_2-3z_1-a}{4} \end{cases} \xrightarrow{0 \leq z_e \leq 2, e \in \{1,2\}} \begin{cases} z_3 \leq \frac{4-a}{4} \\ z_3 \leq \frac{4-a}{4} \end{cases}. \end{aligned}$$

Pertanto, se si sceglie  $a = 4$  allora

$$z_3^{(\omega)} \leq 0 \implies z_3^{(\omega)} = 0,$$

per cui la distribuzione di pedaggi

$$\omega = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix},$$

è ottimale, infatti

$$z^\omega = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

### Esercizio 3.

(a)

```
W1 = ones(6,6)-diag(ones(1,6));
```

```
W2 = zeros(6,8);
```

```
W2(6,1)=1;
```

```
W3 = [0,1,0,0,0,0,0,0;
      1,0,1,0,0,0,0,0;
      0,1,0,1,1,1,1,1;
      0,0,1,0,0,0,0,0;
      0,0,1,0,0,0,0,0;
      0,0,1,0,0,0,0,0;
      0,0,1,0,0,0,0,0;
      0,0,1,0,0,0,0,0;
      0,0,1,0,0,0,0,0];
```

```
W = [W1, W2;
     W2', W3];
```

```
G=graph(W);
```

```

deegre centrality = G.degree

P = diag(deegre centrality.^-1)*W;

%Calcolo della eigenvector centrality
[X,d] = eigs(W');
eig centrality = X(:,1)

%Calcolo della invariant centrality
[X,d] = eigs(P');
invariant centrality = X(:,1)
%NB-> poiche' il grafo e' undirected e
%fortemente connesso =>
% => invariant centrality = deegre centrality/norm(deegre centrality)

```

Table 1: Confronto tra le centralità

Nodes	Degree	Eigenvector	Invariant
1	5	0.4042	0.3450
2	5	0.4042	0.3450
3	5	0.4042	0.3450
4	5	0.4042	0.3450
5	5	0.4042	0.3450
6	6	0.4186	0.4140
7	2	0.0867	0.1380
8	2	0.0181	0.1380
9	6	0.0045	0.4140
10	1	$8.8970e-4$	0.0690
11	1	$8.8970e-4$	0.0690
12	1	$8.8970e-4$	0.0690
13	1	$8.8970e-4$	0.0690
14	1	$8.8970e-4$	0.0690

Poiché la *degree-centrality* di un nodo è definita come il suo *in-degree* si osserva che questa è minima per i nodi  $n_{10}, n_{11}, n_{12}, n_{13}, n_{14}$  e massima per i nodi  $n_6$  e  $n_9$ .

La *eigenvector-centrality*, invece, misura la centralità di un nodo tenendo conto della centralità degli *in-neighbours*, pertanto i nodi che hanno un maggiore *in-degree*, come  $n_1, n_2, n_3, n_4, n_5, n_6$ , hanno una centralità più grande, dal momento che formano un cluster molto ben connesso (formano un sottografo completo).

Per quanto riguarda la *invariant-centrality*, la centralità di ciascun

nodo è proporzionale alla *degree-centrality*<sup>1</sup>, per questo motivo questa risulta essere, per i nodi  $n_1, n_2, n_3, n_4, n_5$  più bassa e per i nodi  $n_7, n_8, n_9, n_{10}, n_{11}, n_{12}, n_{13}, n_{14}$  più alta, rispetto alla *eigenvector-centrality*.

(b)

```
%Dinamica per il calcolo di Page-Rank
n=14;
beta = 0.15;
mu = ones(n,1)/n;
z_PG=zeros(14,1);
k=0;
k_max = 10000;
flag=true;
tol=1.0e-6;

while k<k_max && flag
    z_PG_new=(1-beta)*P'*z_PG+beta*mu;
    k=k+1;
    if norm(z_PG_new-z_PG)/norm(z_PG)<tol
        flag=false;
    else
        z_PG=z_PG_new;
    end
end

%Dinamica per il calcolo della centralita' di katz
[X,d] = eigs(W);
lambda_W = d(1,1); %Assumiamo di conoscere l'autovalore principale di W
k=0;
z_K = zeros(14,1);
flag=true;
while k<k_max && flag
    z_K_new=(1-beta)/(lambda_W)*W'*z_K+beta*mu;
    k=k+1;
    if norm(z_K_new-z_PG)/norm(z_K)<tol
        flag=false;
    else
        z_K=z_K_new;
    end
end
```

(c) Si può notare come, per la *eigenvector centrality*, la centralità del nodo  $n_6$  sia maggiore di quella del nodo  $n_9$ . Questo dipende dal fatto che il nodo  $n_6$  sia il nodo di frontiera per un cluster completo di nodi.

---

<sup>1</sup>Dal momento che il grafo è bilanciato (undirected) e fortemente connesso

Table 2: Confronto tra le centralità

Nodes	Degree	Eigenvector	Invariant	Katz	Page-Rank
1	5	0.4042	0.3450	0.0729	0.0766
2	5	0.4042	0.3450	0.0729	0.0766
3	5	0.4042	0.3450	0.0729	0.0766
4	5	0.4042	0.3450	0.0729	0.0766
5	5	0.4042	0.3450	0.0729	0.0766
6	6	0.4186	0.4140	0.0768	0.0973
7	2	0.0867	0.1380	0.0270	0.0507
8	2	0.0181	0.1380	0.0198	0.0616
9	6	0.0045	0.4140	0.0269	0.2072
10	1	$8.8970e - 4$	0.0690	0.0153	0.0401
11	1	$8.8970e - 4$	0.0690	0.0153	0.0401
12	1	$8.8970e - 4$	0.0690	0.0153	0.0401
13	1	$8.8970e - 4$	0.0690	0.0153	0.0401
14	1	$8.8970e - 4$	0.0690	0.0153	0.0401

Infatti, per ogni nodo, la centralità  $z_i = (W'z)_i$  è influenzata dall'*in-degree* dei nodi adiacenti. Essendo  $n_6$  adiacente ad un cluster completo è quindi evidente come la sua centralità sia maggiore di quella di  $n_9$ , che è adiacente solamente a dei nodi foglia.

Per quanto riguarda la *invariant-centrality*, come già riportato al punto (a), si ha una dinamica per cui la centralità di ciascun nodo è proporzionale alla *degree-centrality*, per questo motivo la *invariant-centrality* del nodo  $n_6$  è uguale a quella del nodo  $n_9$ .

La *Page-Rank-centrality* ha una dinamica del tipo

$$z_{t+1}^{(PG)} = (1 - \beta)P'z_t^{(PG)} + \beta\mu$$

Si può notare come  $z_9^{(PG)} > z_6^{(PG)}$ , questo dipende dal fatto che, considerando l'interpretazione:

$$z^{(PG)} = \beta \sum_{k=0}^{\infty} (1 - \beta)^k (P')^k \mu$$

La centralità del nodo  $n_9$  risente dell'effetto del cluster completo a destra *più a lungo* del nodo  $n_6$  che, a differenza di  $n_9$ , risente del cluster a sinistra per *meno passi*.

La *Katz-centrality* si basa sulla matrice di adiacenza  $W$  proprio come la *eigenvector centrality*, pertanto ai primi passi della dinamica

$$z_{t+1}^{(K)} = (1 - \beta)\lambda_W^{-1}W'z_t^{(K)} + \beta\mu$$

la centralità del nodo  $n_9$  è già molto minore di quella del nodo  $n_6$ , come visto per la *eigenvector centrality*. Nonostante valga ugualmente l'effetto descritto precedentemente dell'espansione in serie, questo non è sufficiente per permettere alla centralità del nodo  $n_9$  di raggiungere quella del nodo  $n_6$ .