Homework 1

Giulio Nenna (s292399@studenti.polito.it)

November 14, 2021

Realizzato in collaborazione con

Esercizio 1.

(a) Definiamo tutte le possibili partizioni $o-d$ del grafo:

$$U_1 = \{o\}$$
$$U_2 = \{o, a\}$$
$$U_3 = \{o, b\}$$
$$U_4 = \{o, a, b\}$$

e tutti i possibili path $o-d$:

$$p_1 = \{o, a, d\}$$
$$p_2 = \{o, b, d\}$$
$$p_1 = \{o, a, b, d\}$$

Affinché il flusso $o-d$ si annulli deve essere rimossa almeno la seguente quantità di capacità:

$$C_{\min} = \min((C_1 + \min(C_2, C_5)), (C_2 + \min(C_1, C_3 + C_4)))$$

Dove $C_1 + \min(C_2, C_5)$ è la minima capacità da rimuovere nel caso in cui $C_1 > C_2$ mentre $C_2 + \min(C_1, C_3 + C_4)$ è la minima capacità da rimuovere nel caso in cui $C_2 > C_1$

(b) Definiamo le capacità dei tagli:

$$C_{U_1} = C_1 + C_2 = 5$$

$$C_{U_2} = C_2 + C_3 + C_4 = 7$$

$$C_{U_3} = C_1 + C_5 = 5$$

$$C_{U_4} = C_4 + C_5 = 5$$

Affinché venga aumentato il throughput, per il teorema del *max flow - min cut*, è necessario aumentare la capacità del minimo taglio $C_{\min}$. Come si può notare, si hanno tre minimi tagli distinti e non c'è un arco comune a tutti, quindi non è possibile aumentare il throughput del grafo con una sola unità di capacità. Per cui $\tau = C_{\min} = 5$

(c) Le allocazioni ottimali per 2 unità di capacità sono le seguenti:

1. $+1$ su e_1, $+1$ su e_4 $\implies \tau = C_{\min} = 6$;
2. $+1$ su e_1, $+1$ su e_5 $\implies \tau = C_{\min} = 6$;
3. $+1$ su e_2, $+1$ su e_5 $\implies \tau = C_{\min} = 6$;

Per ricavare queste allocazioni si è agito in modo tale da aumentare la capacità degli archi che concorrono ai tagli di capacità minima. L'opzione in cui vengono allocate 2 unità di capacità ad un solo arco non migliora τ dal momento che non esiste un arco comune a tutti e tre i minimi tagli.

(d) Le allocazioni ottimali per 4 unità di capacità sono le seguenti:

1. $+1$ su e_1, $+1$ su e_2, $+1$ su e_4, $+1$ su e_5 $\implies \tau = C_{\min} = 7$;
2. $+2$ su e_1, $+2$ su e_4 $\implies \tau = C_{\min} = 7$;
3. $+2$ su e_2, $+2$ su e_5 $\implies \tau = C_{\min} = 7$;
4. $+2$ su e_1, $+2$ su e_5 $\implies \tau = C_{\min} = 7$;

Tutte e 4 queste allocazioni producono una somma delle capacità dei tagli $C_{\text{tot}} = 30$.

Esercizio 2.

(a) Per il seguente grafo si possono identificare due path distinti tra n_1 e n_6:

$$p_1 = \{n_1, n_2, n_3, n_6\},$$
$$p_2 = \{n_1, n_4, n_5, n_6\}.$$

Definendo con z_i il flusso sull'i-esimo path andiamo a calcolare il costo totale del sistema:

$$C = z_1(\underbrace{3z_1 + z_1 + 1 + z_1 + 1}_{\text{flusso su } p_1}) + z_2(\underbrace{z_2 + 1 + z_2 + 1 + 3z_2}_{\text{flusso su} p_2}).$$

Poiché il throughput del grafo è pari a 2, vale:

$$z_1 + z_2 = 2.$$

Pertanto, per sostituzione si ottiene:

$$C = 10z_1^2 - 20z_1 + 24.$$

$$C' = 0 \implies z_1 = 1,$$

quindi

$$z^* = \arg\min C(z) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Poiché vale:

$$f^* = A^{n_1,n_6} z^*,$$

$$f^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(b) Per calcolare l'equilibro di Wardrop se ne esplicitano le condizioni necessarie:

$$z_1 > 0 \implies \begin{cases} 5z_1 + 2 \leq 5z_2 + 2 \\ 5z_1 + 2 \leq 10 - 5z_1 + 2 \end{cases} \xRightarrow{z_1+z_2=2} z_1 \leq 1,$$

$$z_2 > 0 \implies 5z_1 + 2 \geq 5z_2 + 2 \xRightarrow{z_1+z_2=2} z_1 \geq 1,$$

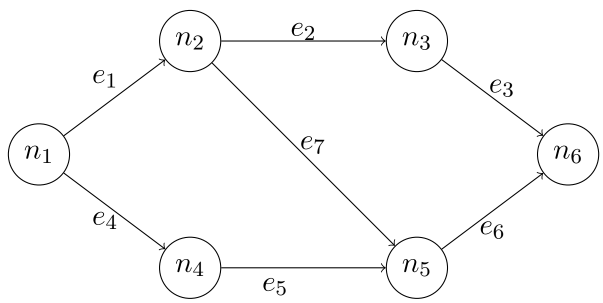
quindi $z_1 = 1$. Se ne conclude che:

$$z^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Poiché $z^{(0)} = z^*$ risulta immediato che:

$$\text{PoA} = 1.$$

(c) Inseriamo il seguente link all'interno del grafo:



I possibili path all'interno del grafo risultano quindi essere:

$$p_1 = \{n_1, n_2, n_3, n_6\},$$
$$p_2 = \{n_1, n_4, n_5, n_6\},$$
$$p_3 = \{n_1, n_2, n_5, n_6\},$$

Posto

$$d_1 = 5\,z_1 + 3\,z_3 + 2,$$
$$d_2 = 5\,z_2 + 3\,z_3 + 2,$$
$$d_3 = 7\,z_3 + 3\,z_2 + 3\,z_1,$$

per calcolare l'equilibrio di Wardrop si esplicitano le seguenti condizioni necessarie:

- $$z_1 > 0 \implies \begin{cases} d_1 \leq d_2, \\ d_1 \leq d_3. \end{cases}$$

  La prima equazione può essere riscritta come

  $$d_1 \leq d_2 \Leftrightarrow 5\,z_1 + 3\,z_3 + 2 \leq 5\,z_2 + 3\,z_3 + 2 \Leftrightarrow z_1 \leq z_2,$$

mentre la seconda diviene

$d_1 \leq d_3 \Leftrightarrow 5\,z_1{+}3\,z_3{+}2 \leq 7\,z_3{+}3\,z_2{+}3\,z_1 \Leftrightarrow 2\,z_1{-}3\,z_2{-}4\,z_3{+}2 \leq 0.$

Pertanto

$2\,z_1{-}3\,z_2{-}4\,z_3{+}2 \leq 0 \xRightarrow{z_1+z_2+z_3=2} 6\,z_1{+}z_2{-}6 \leq 0 \xRightarrow{z_1 \leq z_2} z_1 \leq \dfrac{6}{7}.$

- $$z_2 > 0 \implies \begin{cases} d_2 \leq d_1, \\ d_2 \leq d_3. \end{cases}$$

  La prima equazione può essere riscritta come

  $$d_1 \geq d_2 \Leftrightarrow z_1 \geq z_2 \Rightarrow z_1 = z_2,$$

  mentre la seconda diviene

  $d_2 \leq d_3 \Leftrightarrow 5\,z_2{+}3\,z_3{+}2 \leq 7\,z_3{+}3\,z_2{+}3\,z_1 \Leftrightarrow 3\,z_1{-}2\,z_2{+}4\,z_3{-}2 \geq 0.$

  Pertanto

  $3\,z_1{-}2\,z_2{+}4\,z_3{-}2 \geq 0 \xRightarrow{z_1+z_2+z_3=2} z_1{+}6\,z_2{-}6 \leq 0 \xRightarrow{z_1 \geq z_2} z_2 \leq \dfrac{6}{7}.$

- $$z_3 > 0 \implies \begin{cases} d_3 \leq d_1, \\ d_2 \geq d_3. \end{cases}$$

  La prima equazione può essere riscritta come

  $d_3 \leq d_1 \Leftrightarrow 5\,z_1{+}3\,z_3{+}2 \geq 7\,z_3{+}3\,z_2{+}3\,z_1 \Leftrightarrow 2\,z_1{-}3\,z_2{-}4\,z_3{+}2 \geq 0$

  mentre la seconda diviene

  $$d_2 \leq d_3 \Leftrightarrow 3\,z_1 - 2\,z_2 + 4\,z_3 - 2 \leq 0.$$

  Pertanto

  $$\begin{cases} 2\,z_1 - 3\,z_2 - 4\,z_3 + 2 \geq 0, \\ 3\,z_1 - 2\,z_2 + 4\,z_3 - 2 \leq 0, \end{cases} \xRightarrow{z_1+z_2+z_3=2} \begin{cases} 6\,z_1 + z_2 - 6 \geq 0, \\ z_1 + 6\,z_2 - 6 \geq 0. \end{cases}$$

  Poiché nei punti precedenti si è ottenuto che $z_1 = z_2$, allora

  $$\begin{cases} z_1 \geq \frac{6}{7}, \\ z_2 \geq \frac{6}{7}. \end{cases}$$

Di conseguenza

$$z_1 = z_2 = \frac{6}{7} \xRightarrow{z_1+z_2+z_3=2} z_3 = \frac{2}{7},$$

e quindi posto

$$z^{(0)} = \begin{pmatrix} 6/7 \\ 6/7 \\ 2/7 \end{pmatrix},$$

il vettore di flusso

$$f^{(0)} = A^{n_1,n_6} z^{(0)},$$

$$f^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6/7 \\ 6/7 \\ 2/7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8/7 \\ 6/7 \\ 6/7 \\ 6/7 \\ 6/7 \\ 8/7 \\ 2/7 \end{pmatrix},$$

è un equilibrio di Wardrop. Il costo totale corrispondente è

$$3\,\frac{64}{49} + \left(\frac{36}{49} + \frac{42}{49}\right) + \left(\frac{36}{49} + \frac{42}{49}\right) + \left(\frac{36}{49} + \frac{42}{49}\right) +$$

$$+ \left(\frac{36}{49} + \frac{42}{49}\right) + 3\,\frac{64}{49} + \frac{4}{49} = \frac{100}{7} \simeq 14.3.$$

Nel caso precedente (grafo senza il link e_7) poiché

$$f^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

il costo corrispondente era pari a

$$3 + 2 + 2 + 2 + 2 + 3 = 14,$$

pertanto, aggiungendo il link e_7 si è aumentato il costo totale e quindi si è verificato il paradosso di Braess.

L'ottimo di sistema del nuovo grafo è la soluzione del seguente problema di ottimizzazione

$$\text{minimize} \quad 5\,z_1^2+3\,z_3\,z_1+2\,z_1+5\,z_2^2+3\,z_3\,z_2+2\,z_2+7\,z_3^2+3\,z_2\,z_3+3\,z_3\,z_1,$$

$$\text{subject to} \quad z_1+z_2+z_3=2,$$

il quale ha come soluzione

$$z^* = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}.$$

Di conseguenza, il prezzo dell'anarchia del nuovo grafo è

$$\frac{\frac{100}{7}}{14} = \frac{100}{98} \simeq 1.02.$$

(d) Dal punto precedente

$$f^* = \begin{pmatrix}1&0&1\\1&0&0\\1&0&0\\0&1&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\\1\\1\\0\end{pmatrix},$$

poiché è noto che

$$\omega_e^* = f_e^*\,d_e\left(f_e^*\right), \qquad e \in \mathcal{E}, \tag{1}$$

si ricava che

$$\omega_1 = 3,\ \omega_2 = 1,\ \omega_3 = 1,\ \omega_4 = 1,\ \omega_5 = 1,\ \omega_6 = 3,\ \omega_7 = 0,$$

per cui

$$\omega^* = \begin{pmatrix}3\\1\\1\\1\\1\\3\\0\end{pmatrix}$$

è la distribuzione ottimale dei pedaggi. Al fine di calcolare una distribuzione ottimale dei pedaggi a supporto pieno si consideri il pedaggio $\omega^* + a\mathbb{1}$. Intuitivamente, quello che si sta facendo è aggiungere lo stesso pedaggio costante, pari ad $a > 0$, ad ogni link. Poiché tutti i path hanno la stessa lunghezza pari a 3, questo fatto non dovrebbe influire sulla scelta della strada da parte degli utenti. Sarebbe come se gli utenti dovessero pagare un pedaggio pari a $3a$ per accedere alla rete, indipendentemente dal path scelto.

A questo punto osserviamo che, preso $\omega^* \in \mathbb{R}_+^{\mathcal{E}} : f^{(\omega^*)} = f^*$, allora

$$f^{(\omega^* + a\mathbb{1})} = f^{(\omega^*)} = f^*.$$

Sappiamo, infatti, che $f^{(\omega^*)}$ è un equilibrio di Wardrop per un pedaggio ω^* quindi

$$z_p > 0 \implies$$
$$\implies \sum_{e\in\mathcal{E}} A_{ep}^{(n1,n6)} \left(d_e\left(f_e^{(\omega^*)}\right) + \omega_e^*\right) \leq \sum_{e\in\mathcal{E}} A_{eq}^{(n1,n6)} \left(d_e\left(f_e^{(\omega^*)}\right) + \omega_e^*\right), \forall q \in \Gamma_{n1,n6}.$$

D'altra parte anche $f^{(\omega^* + a\mathbb{1})}$ è un equilibrio di Wardrop per un pedaggio $\omega^* + a\mathbb{1}$, per cui $\forall q \in \Gamma_{n1,n6}$,

$$z_p > 0 \implies$$
$$\sum_{e\in\mathcal{E}} A_{ep}^{(n1,n6)} \left(d_e\left(f_e^{(\omega^*+a\mathbb{1})}\right) + \omega_e^* + a\right) \leq \sum_{e\in\mathcal{E}} A_{eq}^{(n1,n6)} \left(d_e\left(f_e^{(\omega^*+a\mathbb{1})}\right) + \omega_e^* + a\right).$$

Tuttavia, quest'ultima condizione può essere riscritta come

$$\begin{aligned}
&\sum_{e\in\mathcal{E}} A_{ep}^{(n1,n6)} \left(d_e\left(f_e^{(\omega^*+a\mathbb{1})}\right) + \omega_e^*\right) + a\sum_{e\in\mathcal{E}} A_{ep}^{(n1,n6)} \\
&\leq \sum_{e\in\mathcal{E}} A_{eq}^{(n1,n6)} \left(d_e\left(f_e^{(\omega^*+a\mathbb{1})}\right) + \omega_e^*\right) + a\sum_{e\in\mathcal{E}} A_{eq}^{(n1,n6)}, \qquad \forall q \in \Gamma_{n1,n6}, \\
&\sum_{e\in\mathcal{E}} A_{ep}^{(n1,n6)} \left(d_e\left(f_e^{(\omega^*+a\mathbb{1})}\right) + \omega_e^*\right) + 3a \leq \sum_{e\in\mathcal{E}} A_{eq}^{(n1,n6)} \left(d_e\left(f_e^{(\omega^*+a\mathbb{1})}\right) + \omega_e^*\right) + 3a, \qquad \forall q \in \Gamma_{n1,n6}, \\
&\sum_{e\in\mathcal{E}} A_{ep}^{(n1,n6)} \left(d_e\left(f_e^{(\omega^*+a\mathbb{1})}\right) + \omega_e^*\right) \leq \sum_{e\in\mathcal{E}} A_{eq}^{(n1,n6)} \left(d_e\left(f_e^{(\omega^*+a\mathbb{1})}\right) + \omega_e^*\right), \qquad \forall q \in \Gamma_{n1,n6}.
\end{aligned}$$

Poiché per il grafo in esame le funzioni di ritardo sugli edge d_e, definite in precedenza, sono tutte funzioni crescenti questo ci dice che l'equilibrio di Wardrop per un dato $\omega \in \mathbb{R}_+$ è unico, e quindi se vale la disuguaglianza precedente si ha che

$$f^{(\omega^*+a\mathbb{1})} = f^{(\omega^*)}.$$

Pertanto, il vettore di pedaggi

$$\omega^*_{fs} = \omega^* + a\mathbb{1} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad\qquad a > 0$$

è un vettore di pedaggi con supporto pieno il cui vettore dei flussi ottimale corrispondente riduce il PoA a 1.

Al fine di trovare un vettore di pedaggi di supporto minimo si osserva che PoA = 1 se

$$f^{(\omega)} = f^*$$

ossia

$$z^{(\omega)} = z^*.$$

Ricordando che

$$z^* = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

si nota che, nel rispetto dell'ottimo di sistema, nessun utente sceglie di percorrere il path p_3. Pertanto, un ω^*_{ms} di supporto minimo tale per cui gli utenti non hanno alcun motivo di scegliere il path 3 produrrebbe quindi $z^{(\omega^*_{ms})} = z^*$. Si sceglie quindi

$$\omega^*_{ms} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ k \end{pmatrix}, \qquad\qquad k > 0.$$

Per determinare il k più opportuno si ragiona nel modo seguente:

$$z_3^{(\omega^*_{ms})} > 0 \implies \begin{cases} 3\left(z_1 + z_3\right) + z_3 + k + 3\left(z_2 + z_3\right) \leq 3\left(z_1 + z_3\right) + z_1 + 1 + z_1 + 1, \\ 3\left(z_1 + z_3\right) + z_3 + k + 3\left(z_2 + z_3\right) \leq z_2 + 1 + z_2 + 1 + 3\left(z_2 + z_3\right), \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} z_3 \leq \frac{2\,z_1 - 3\,z_2 + 2 - k}{4} \\ z_3 \leq \frac{2\,z_2 - 3\,z_1 + 2 - k}{4} \end{cases} \xRightarrow{z_1 \leq 2 \,\wedge\, z_2 \leq 2} \begin{cases} z_3 \leq \frac{6 - 3\,z_2 - k}{4} \\ z_3 \leq \frac{6 - 3\,z_1 - k}{4} \end{cases} \xRightarrow{z_1 \geq 0 \,\wedge\, z_2 \geq 0} \begin{cases} z_3 \leq \frac{6-k}{4} \\ z_3 \leq \frac{6-k}{4} \end{cases} .$$

Pertanto, se si sceglie $k = 6$ allora

$$z_3^{(\omega^*_{ms})} \leq 0 \implies z_3^{(\omega^*_{ms})} = 0,$$

e quindi

$$z^{(\omega^*_{ms})} = z^* = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(e) In questo caso il nuovo grafo presenta dei ritardi ancora minori sui path p_1 e p_2, in quanto il ritardo è diminuito di due unità su entrambi i path. L'incentivo a prendere il path p_3 diminuisce, pertanto è verosimile che l'ottimo di sistema del nuovo grafo sia ancora

$$z^* = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

in quanto, se prima non c'era motivo di prendere il path p_3, ora è ancora meno conveniente.

Quindi una distribuzione di pedaggi tale che PoA $= 1$ è quella in cui il pedaggio sul link e_7 è talmente alto che non è conveniente percorrerlo anche se vuoto. Quindi, analogamente al punto precedente si sceglie

$$\omega = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ a \end{pmatrix}, \qquad a > 0.$$

Per determinare il k più opportuno si ragiona nel modo seguente:

$$z_3^{(\omega)} > 0 \implies \begin{cases} 3\,(z_1 + z_3) + z_3 + a + 3\,(z_2 + z_3) \leq 3\,(z_1 + z_3) + 2\,z_1, \\ 3\,(z_1 + z_3) + z_3 + a + 3\,(z_2 + z_3) \leq 2\,z_2 + 3\,(z_2 + z_3)\,, \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} z_3 \leq \frac{2\,z_1 - 3\,z_2 - a}{4} \\ z_3 \leq \frac{2\,z_2 - 3\,z_1 - a}{4} \end{cases} \xRightarrow{0 \leq z_e \leq 2,\, e \in \{1,2\}} \begin{cases} z_3 \leq \frac{4-a}{4} \\ z_3 \leq \frac{4-a}{4} \end{cases} .$$

Pertanto, se si sceglie $a = 4$ allora

$$z_3^{(\omega)} \leq 0 \implies z_3^{(\omega)} = 0,$$

per cui la distribuzione di pedaggi

$$\omega = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix},$$

è ottimale, infatti

$$z^{\omega} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Esercizio 3.

(a)

```
W1 = ones(6,6)-diag(ones(1,6));

W2 = zeros(6,8);
W2(6,1)=1;

W3 = [0,1,0,0,0,0,0,0;
      1,0,1,0,0,0,0,0;
      0,1,0,1,1,1,1,1;
      0,0,1,0,0,0,0,0;
      0,0,1,0,0,0,0,0;
      0,0,1,0,0,0,0,0;
      0,0,1,0,0,0,0,0;
      0,0,1,0,0,0,0,0];

W = [W1, W2;
    W2', W3];

G=graph(W);
```

```
deegre_centrality = G.degree

P = diag(deegre_centrality.^-1)*W;

%Calcolo della eigenvector centrality
[X,d] = eigs(W');
eig_centrality = X(:,1)

%Calcolo della invariant centrality
[X,d] = eigs(P');
invariant_centrality = X(:,1)
%NB-> poiche' il grafo e' undirected e
%fortemente connesso =>
% => invariant_centrality = deegre_centrality/norm(deegre_centrality)
```

(b)

```
%Dinamica per il calcolo di Page-Rank
n=14;
beta = 0.15;
mu = ones(n,1)/n;
z_PG=zeros(14,1);
k=0;
k_max = 10000;
flag=true;
tol=1.0e-6;

while k<k_max && flag
    z_PG_new=(1-beta)*P'*z_PG+beta*mu;
    k=k+1;
    if norm(z_PG_new-z_PG)/norm(z_PG)<tol
        flag=false;
    else
        z_PG=z_PG_new;
    end
end


%Dinamica per il calcolo della centralita' di katz
[X,d] = eigs(W);
lambda_W = d(1,1); %Assumiamo di conoscere l'autovalore principale di W
k=0;
z_K = zeros(14,1);
flag=true;
while k<k_max && flag
    z_K_new=(1-beta)/(lambda_W)*W'*z_K+beta*mu;
    k=k+1;
    if norm(z_K_new-z_PG)/norm(z_K)<tol
        flag=false;
```

```
        else
            z_K=z_K_new;
        end
    end
```

Table 1: Confronto tra le centralità

Nodes	Degree	Eigenvector	Invariant	Katz	Page-Rank
1	5	0.4042	0.3450	0.0729	0.0766
2	5	0.4042	0.3450	0.0729	0.0766
3	5	0.4042	0.3450	0.0729	0.0766
4	5	0.4042	0.3450	0.0729	0.0766
5	5	0.4042	0.3450	0.0729	0.0766
6	6	0.4186	0.4140	0.0768	0.0973
7	2	0.0867	0.1380	0.0270	0.0507
8	2	0.0181	0.1380	0.0198	0.0616
9	6	0.0045	0.4140	0.0269	0.2072
10	1	$8.8970e-4$	0.0690	0.0153	0.0401
11	1	$8.8970e-4$	0.0690	0.0153	0.0401
12	1	$8.8970e-4$	0.0690	0.0153	0.0401
13	1	$8.8970e-4$	0.0690	0.0153	0.0401
14	1	$8.8970e-4$	0.0690	0.0153	0.0401

(c) Si può notare come, per la *eigenvector centrality*, la centralità del nodo n_6 sia maggiore di quella del nodo n_9. Questo dipende dal fatto che il nodo n_6 sia il nodo di frontiera per un cluster completo di nodi. Infatti, per ogni nodo, la centralità $z_i = (W'z)_i$ è influenzata dall'out-deegree dei nodi adiacenti. Essendo n_6 adiacente ad un cluster completo è quindi evidente come la sua centralità sia maggiore di quella di n_9, che è adiacente solamente a dei nodi foglia. Per quanto riguarda la *invariant-centrality*, abbiamo una dinamica per cui la centralità di ciascun nodo è proporzionale all'out deegree dei nodi adiacenti **normalizzata**, per questo motivo la *invariant-centrality* del nodo n_6 è uguale a quella del nodo n_9.
Sappiamo che la *Page-Rank-centrality* ha una dinamica del tipo

$$z_{t+1}^{(PG)} = (1-\beta)P'z_t^{(PG)} + \beta\mu$$

pertanto, salvo la combinazione convessa con la centralità intrinseca, la centralità dei nodi n_6 e n_9 parte dallo stesso valore. Si può notare come alla fine $z_9^{(PG)} > z_6^{(PG)}$, questo dipende dal fatto che, considerando l'interpretazione:

$$z^{(PG)} = \beta \sum_{k \geq 0}^{\infty} (1-\beta)^k (P')^k \mu$$

La centralità del nodo n_9 risente dell'effetto del cluster completo a destra *più a lungo* del nodo n_6 che, a differenza di n_9, risente del cluster a sinistra per *minor tempo* (ossia $(P')^k > 0$ per meno potenze k).

Sappiamo che la *Katz-centrality* si basa sulla matrice di adiacenza W proprio come la *eigenvector centrality*, pertanto al primo passo della dinamica

$$z_{t+1}^{(K)} = (1-\beta)\lambda_W^{-1} W' z_t^{(K)} + \beta\mu$$

la centralità del nodo n_9 è già molto minore di quella del nodo n_6, come visto per la *eigenvector centrality*. Nonostante valga ugualmente l'effetto descritto precedentemente dell'espansione in serie, questo non è sufficiente per permettere alla centralità del nodo n_9 di raggiungere quella del nodo n_6.