Homework 1

Giulio Nenna (s292399@studenti.polito.it)

November 8, 2021

Realizzato in collaborazione con

Esercizio 1.

(a) Definiamo tutte le possibili partizioni $o-d$ del grafo:

$$U_1 = \{o\}$$
$$U_2 = \{o, a\}$$
$$U_3 = \{o, b\}$$
$$U_4 = \{o, a, b\}$$

e tutti i possibili path $o-d$:

$$p_1 = \{o, a, d\}$$
$$p_2 = \{o, b, d\}$$
$$p_1 = \{o, a, b, d\}$$

Affinché il flusso $o-d$ si annulli deve essere rimossa almeno la seguente quantità di capacità:

$$C_{\text{min}} = \min((C_1 + \min(C_2, C_5)), (C_2 + \min(C_1, C_3 + C_4)))$$

Dove $C_1 + \min(C_2, C_5)$ è la minima capacità da rimuovere nel caso in cui $C_1 > C_2$ mentre $C_2 + \min(C_1, C_3 + C_4)$ è la minima capacità da rimuovere nel caso in cui $C_2 > C_1$

(b) Definiamo le capacità dei tagli:

$$C_{U_1} = C_1 + C_2 = 5$$

$$C_{U_2} = C_2 + C_3 + C_4 = 7$$

$$C_{U_3} = C_1 + C_5 = 5$$

$$C_{U_4} = C_4 + C_5 = 5$$

Affinché venga aumentato il throughput, per il teorema del *max flow - min cut*, è necessario aumentare la capacità del minimo taglio $C_{\min}$. Come si può notare, si hanno tre minimi tagli distinti e non c'è un arco comune a tutti, quindi non è possibile aumentare il throughput del grafo con una sola unità di capacità. Per cui $\tau = C_{\min} = 5$

(c) Le allocazioni ottimali per 2 unità di capacità sono le seguenti:

1. $+1$ su e_1, $+1$ su e_4 $\implies \tau = C_{\min} = 6$;
2. $+1$ su e_1, $+1$ su e_5 $\implies \tau = C_{\min} = 6$;
3. $+1$ su e_2, $+1$ su e_5 $\implies \tau = C_{\min} = 6$;

Per ricavare queste allocazioni si è agito in modo tale da aumentare la capacità degli archi che concorrono ai tagli di capacità minima. L'opzione in cui vengono allocate 2 unità di capacità ad un solo arco non migliora τ dal momento che non esiste un arco comune a tutti e tre i minimi tagli.

(d) Le allocazioni ottimali per 4 unità di capacità sono le seguenti:

1. $+1$ su e_1, $+1$ su e_2, $+1$ su e_4, $+1$ su e_5 $\implies \tau = C_{\min} = 7$;
2. $+2$ su e_1, $+2$ su e_4 $\implies \tau = C_{\min} = 7$;
3. $+2$ su e_2, $+2$ su e_5 $\implies \tau = C_{\min} = 7$;
4. $+2$ su e_1, $+2$ su e_5 $\implies \tau = C_{\min} = 7$;

Tutte e 4 queste allocazioni producono una somma delle capacità dei tagli $C_{\text{tot}} = 30$.