Homework 1

Giulio Nenna (s292399@studenti.polito.it)

November 13, 2021

Realizzato in collaborazione con

Esercizio 1.

(a) Definiamo tutte le possibili partizioni $o - d$ del grafo:

$$U_1 = \{o\}$$
$$U_2 = \{o, a\}$$
$$U_3 = \{o, b\}$$
$$U_4 = \{o, a, b\}$$

e tutti i possibili path $o - d$:

$$p_1 = \{o, a, d\}$$
$$p_2 = \{o, b, d\}$$
$$p_1 = \{o, a, b, d\}$$

Affinché il flusso $o-d$ si annulli deve essere rimossa almeno la seguente quantità di capacità:

$$C_{\min} = \min((C_1 + \min(C_2, C_5)), (C_2 + \min(C_1, C_3 + C_4)))$$

Dove $C_1 + \min(C_2, C_5)$ è la minima capacità da rimuovere nel caso in cui $C_1 > C_2$ mentre $C_2 + \min(C_1, C_3 + C_4)$ è la minima capacità da rimuovere nel caso in cui $C_2 > C_1$

(b) Definiamo le capacità dei tagli:

$$C_{U_1} = C_1 + C_2 = 5$$

$$C_{U_2} = C_2 + C_3 + C_4 = 7$$

$$C_{U_3} = C_1 + C_5 = 5$$

$$C_{U_4} = C_4 + C_5 = 5$$

Affinché venga aumentato il throughput, per il teorema del *max flow - min cut*, è necessario aumentare la capacità del minimo taglio C_{min}. Come si può notare, si hanno tre minimi tagli distinti e non c'è un arco comune a tutti, quindi non è possibile aumentare il throughput del grafo con una sola unità di capacità. Per cui $\tau = C_{\text{min}} = 5$

(c) Le allocazioni ottimali per 2 unità di capacità sono le seguenti:

1. $+1$ su e_1, $+1$ su $e_4 \implies \tau = C_{\text{min}} = 6$;

2. $+1$ su e_1, $+1$ su $e_5 \implies \tau = C_{\text{min}} = 6$;

3. $+1$ su e_2, $+1$ su $e_5 \implies \tau = C_{\text{min}} = 6$;

Per ricavare queste allocazioni si è agito in modo tale da aumentare la capacità degli archi che concorrono ai tagli di capacità minima. L'opzione in cui vengono allocate 2 unità di capacità ad un solo arco non migliora τ dal momento che non esiste un arco comune a tutti e tre i minimi tagli.

(d) Le allocazioni ottimali per 4 unità di capacità sono le seguenti:

1. $+1$ su e_1, $+1$ su e_2, $+1$ su e_4, $+1$ su $e_5 \implies \tau = C_{\text{min}} = 7$;

2. $+2$ su e_1, $+2$ su $e_4 \implies \tau = C_{\text{min}} = 7$;

3. $+2$ su e_2, $+2$ su $e_5 \implies \tau = C_{\text{min}} = 7$;

4. $+2$ su e_1, $+2$ su $e_5 \implies \tau = C_{\text{min}} = 7$;

Tutte e 4 queste allocazioni producono una somma delle capacità dei tagli $C_{\text{tot}} = 30$.

Esercizio 2.

(a) Per il seguente grafo si possono identificare due path distinti tra n_1 e n_6:

$$p_1 = \{n_1, n_2, n_3, n_6\},$$
$$p_2 = \{n_1, n_4, n_5, n_6\}.$$

Definendo con z_i il flusso sull'i-esimo path andiamo a calcolare il costo totale del sistema:

$$C = z_1(\underbrace{3z_1 + z_1 + 1 + z_1 + 1}_{\text{flusso su } p_1}) + z_2(\underbrace{z_2 + 1 + z_2 + 1 + 3z_2}_{\text{flusso su} p_2}).$$

Poiché il throughput del grafo è pari a 2, vale:

$$z_1 + z_2 = 2.$$

Pertanto, per sostituzione si ottiene:

$$C = 10z_1^2 - 20z_1 + 24.$$
$$C' = 0 \implies z_1 = 1,$$

quindi

$$z^* = \arg\min C(z) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Poiché vale:

$$f^* = A^{n_1,n_6} z^*,$$

$$f^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(b) Per calcolare l'equilibro di Wardrop se ne esplicitano le condizioni necessarie:

$$z_1 > 0 \implies \begin{cases} 5z_1 + 2 \leq 5z_2 + 2 \\ 5z_1 + 2 \leq 10 - 5z_1 + 2 \end{cases} \xRightarrow{z_1+z_2=2} z_1 \leq 1,$$

$$z_2 > 0 \implies 5z_1 + 2 \geq 5z_2 + 2 \xRightarrow{z_1+z_2=2} z_1 \geq 1,$$

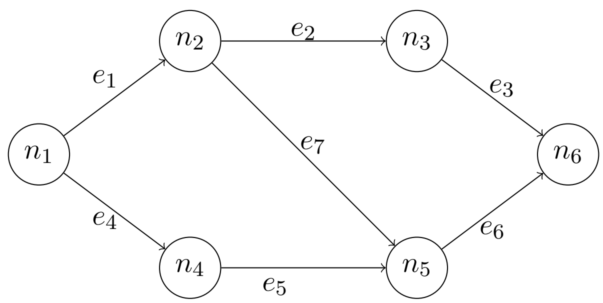
quindi $z_1 = 1$. Se ne conclude che:

$$z^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Poiché $z^{(0)} = z^*$ risulta immediato che:

$$\text{PoA} = 1.$$

(c) Inseriamo il seguente link all'interno del grafo:



I possibili path all'interno del grafo risultano quindi essere:

$$\begin{aligned} p_1 &= \{n_1, n_2, n_3, n_6\}, \\ p_2 &= \{n_1, n_4, n_5, n_6\}, \\ p_3 &= \{n_1, n_2, n_5, n_6\}, \end{aligned}$$

Posto

$$\begin{aligned} d_1 &= 5\, z_1 + 3\, z_3 + 2, \\ d_2 &= 5\, z_2 + 3\, z_3 + 2, \\ d_3 &= 7\, z_3 + 3\, z_2 + 3\, z_1, \end{aligned}$$

per calcolare l'equilibrio di Wardrop si esplicitano le seguenti condizioni necessarie:

- $$z_1 > 0 \implies \begin{cases} d_1 \leq d_2, \\ d_1 \leq d_3. \end{cases}$$

  La prima equazione può essere riscritta come

  $$d_1 \leq d_2 \Leftrightarrow 5\, z_1 + 3\, z_3 + 2 \leq 5\, z_2 + 3\, z_3 + 2 \Leftrightarrow z_1 \leq z_2,$$

mentre la seconda diviene

$d_1 \leq d_3 \Leftrightarrow 5\,z_1{+}3\,z_3{+}2 \leq 7\,z_3{+}3\,z_2{+}3\,z_1 \Leftrightarrow 2\,z_1{-}3\,z_2{-}4\,z_3{+}2 \leq 0.$

Pertanto

$2\,z_1{-}3\,z_2{-}4\,z_3{+}2 \leq 0 \xRightarrow{z_1+z_2+z_3=2} 6\,z_1{+}z_2{-}6 \leq 0 \xRightarrow{z_1 \leq z_2} z_1 \leq \dfrac{6}{7}.$

- $$z_2 > 0 \implies \begin{cases} d_2 \leq d_1, \\ d_2 \leq d_3. \end{cases}$$

  La prima equazione può essere riscritta come

  $$d_1 \geq d_2 \Leftrightarrow z_1 \geq z_2 \Rightarrow z_1 = z_2,$$

  mentre la seconda diviene

  $d_2 \leq d_3 \Leftrightarrow 5\,z_2{+}3\,z_3{+}2 \leq 7\,z_3{+}3\,z_2{+}3\,z_1 \Leftrightarrow 3\,z_1{-}2\,z_2{+}4\,z_3{-}2 \geq 0.$

  Pertanto

  $3\,z_1{-}2\,z_2{+}4\,z_3{-}2 \geq 0 \xRightarrow{z_1+z_2+z_3=2} z_1{+}6\,z_2{-}6 \leq 0 \xRightarrow{z_1 \geq z_2} z_2 \leq \dfrac{6}{7}.$

- $$z_3 > 0 \implies \begin{cases} d_3 \leq d_1, \\ d_2 \geq d_3. \end{cases}$$

  La prima equazione può essere riscritta come

  $d_3 \leq d_1 \Leftrightarrow 5\,z_1{+}3\,z_3{+}2 \geq 7\,z_3{+}3\,z_2{+}3\,z_1 \Leftrightarrow 2\,z_1{-}3\,z_2{-}4\,z_3{+}2 \geq 0$

  mentre la seconda diviene

  $$d_2 \leq d_3 \Leftrightarrow 3\,z_1 - 2\,z_2 + 4\,z_3 - 2 \leq 0.$$

  Pertanto

  $$\begin{cases} 2\,z_1 - 3\,z_2 - 4\,z_3 + 2 \geq 0, \\ 3\,z_1 - 2\,z_2 + 4\,z_3 - 2 \leq 0, \end{cases} \xRightarrow{z_1+z_2+z_3=2} \begin{cases} 6\,z_1 + z_2 - 6 \geq 0, \\ z_1 + 6\,z_2 - 6 \geq 0. \end{cases}$$

  Poiché nei punti precedenti si è ottenuto che $z_1 = z_2$, allora

  $$\begin{cases} z_1 \geq \frac{6}{7}, \\ z_2 \geq \frac{6}{7}. \end{cases}$$

Di conseguenza

$$z_1 = z_2 = \frac{6}{7} \xRightarrow{z_1+z_2+z_3=2} z_3 = \frac{2}{7},$$

e quindi posto

$$z^{(0)} = \begin{pmatrix} 6/7 \\ 6/7 \\ 2/7 \end{pmatrix},$$

il vettore di flusso

$$f^{(0)} = A^{n_1,n_6} z^{(0)},$$

$$f^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6/7 \\ 6/7 \\ 2/7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8/7 \\ 6/7 \\ 6/7 \\ 6/7 \\ 6/7 \\ 8/7 \\ 2/7 \end{pmatrix},$$

è un equilibrio di Wardrop. Il costo totale corrispondente è

$$3\,\frac{64}{49} + \left(\frac{36}{49} + \frac{42}{49}\right) + \left(\frac{36}{49} + \frac{42}{49}\right) + \left(\frac{36}{49} + \frac{42}{49}\right) +$$

$$+ \left(\frac{36}{49} + \frac{42}{49}\right) + 3\,\frac{64}{49} + \frac{4}{49} = \frac{100}{7} \simeq 14.3.$$

Nel caso precedente (grafo senza il link e_7) poiché

$$f^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

il costo corrispondente era pari a

$$3 + 2 + 2 + 2 + 2 + 3 = 14,$$

pertanto, aggiungendo il link e_7 si è aumentato il costo totale e quindi si è verificato il paradosso di Braess.

L'ottimo di sistema del nuovo grafo è la soluzione del seguente problema di ottimizzazione

$$\text{minimize} \quad 5\,z_1^2+3\,z_3\,z_1+2\,z_1+5\,z_2^2+3\,z_3\,z_2+2\,z_2+7\,z_3^2+3\,z_2\,z_3+3\,z_3\,z_1,$$
$$\text{subject to} \quad z_1+z_2+z_3=2,$$

il quale ha come soluzione

$$z^* = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Di conseguenza, il prezzo dell'anarchia del nuovo grafo è

$$\frac{\frac{100}{7}}{14} = \frac{100}{98} \simeq 1.02.$$

(d) Dal punto precedente

$$f^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

poiché è noto che

$$\omega_e^* = f_e^*\, d_e\left(f_e^*\right), \qquad e \in \mathcal{E}, \tag{1}$$

si ricava che

$$\omega_1 = 3,\ \omega_2 = 1,\ \omega_3 = 1,\ \omega_4 = 1,\ \omega_5 = 1,\ \omega_6 = 3,\ \omega_7 = 0,$$

per cui

$$\omega^* = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

è la distribuzione ottimale dei pedaggi. Al fine di calcolare una distribuzione ottimale dei pedaggi a supporto pieno si consideri il pedaggio $\omega^* + a\mathbb{1}$. Intuitivamente, quello che si sta facendo è aggiungere lo stesso pedaggio costante, pari ad $a > 0$, ad ogni link. Poiché tutti i path hanno la stessa lunghezza pari a 3, questo fatto non dovrebbe influire sulla scelta della strada da parte degli utenti. Sarebbe come se gli utenti dovessero pagare un pedaggio pari a $3a$ per accedere alla rete, indipendentemente dal path scelto.

A questo punto osserviamo che, preso $\omega^* \in \mathbb{R}_+^{\mathcal{E}} : f^{(\omega^*)} = f^*$, allora

$$f^{(\omega^*+a\mathbb{1})} = f^{(\omega^*)} = f^*.$$

Sappiamo, infatti, che $f^{(\omega^*)}$ è un equilibrio di Wardrop per un pedaggio ω^* quindi

$$z_p > 0 \implies$$
$$\implies \sum_{e\in\mathcal{E}} A_{ep}^{(n1,n6)} \left(d_e\left(f_e^{(\omega^*)}\right) + \omega_e^*\right) \le \sum_{e\in\mathcal{E}} A_{eq}^{(n1,n6)} \left(d_e\left(f_e^{(\omega^*)}\right) + \omega_e^*\right), \forall q \in \Gamma_{n1,n6}.$$

D'altra parte anche $f^{(\omega^*+a\mathbb{1})}$ è un equilibrio di Wardrop per un pedaggio $\omega^* + a\mathbb{1}$, per cui $\forall q \in \Gamma_{n1,n6}$,

$$z_p > 0 \implies$$
$$\sum_{e\in\mathcal{E}} A_{ep}^{(n1,n6)} \left(d_e\left(f_e^{(\omega^*+a\mathbb{1})}\right) + \omega_e^* + a\right) \le \sum_{e\in\mathcal{E}} A_{eq}^{(n1,n6)} \left(d_e\left(f_e^{(\omega^*+a\mathbb{1})}\right) + \omega_e^* + a\right).$$

Tuttavia, quest'ultima condizione può essere riscritta come

$$\begin{aligned}
&\sum_{e\in\mathcal{E}} A_{ep}^{(n1,n6)} \left(d_e\left(f_e^{(\omega^*+a\mathbb{1})}\right) + \omega_e^*\right) + a\sum_{e\in\mathcal{E}} A_{ep}^{(n1,n6)} \\
&\le \sum_{e\in\mathcal{E}} A_{eq}^{(n1,n6)} \left(d_e\left(f_e^{(\omega^*+a\mathbb{1})}\right) + \omega_e^*\right) + a\sum_{e\in\mathcal{E}} A_{eq}^{(n1,n6)}, \quad \forall q \in \Gamma_{n1,n6}, \\
&\sum_{e\in\mathcal{E}} A_{ep}^{(n1,n6)} \left(d_e\left(f_e^{(\omega^*+a\mathbb{1})}\right) + \omega_e^*\right) + 3a \le \sum_{e\in\mathcal{E}} A_{eq}^{(n1,n6)} \left(d_e\left(f_e^{(\omega^*+a\mathbb{1})}\right) + \omega_e^*\right) + 3a, \quad \forall q \in \Gamma_{n1,n6}, \\
&\sum_{e\in\mathcal{E}} A_{ep}^{(n1,n6)} \left(d_e\left(f_e^{(\omega^*+a\mathbb{1})}\right) + \omega_e^*\right) \le \sum_{e\in\mathcal{E}} A_{eq}^{(n1,n6)} \left(d_e\left(f_e^{(\omega^*+a\mathbb{1})}\right) + \omega_e^*\right), \quad \forall q \in \Gamma_{n1,n6}.
\end{aligned}$$

Poiché per il grafo in esame le funzioni di ritardo sugli edge d_e, definite in precedenza, sono tutte funzioni crescenti questo ci dice che l'equilibrio di Wardrop per un dato $\omega \in \mathbb{R}_+$ è unico, e quindi se vale la disuguaglianza precedente si ha che

$$f^{(\omega^*+a\mathbb{1})} = f^{(\omega^*)}.$$

Pertanto, il vettore di pedaggi

$$\omega^*_{fs} = \omega^* + a\mathbb{1} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad a > 0$$

è un vettore di pedaggi con supporto pieno il cui vettore dei flussi ottimale corrispondente riduce il PoA a 1.

Al fine di trovare un vettore di pedaggi di supporto minimo si osserva che PoA = 1 se

$$f^{(\omega)} = f^*$$

ossia

$$z^{(\omega)} = z^*.$$

Ricordando che

$$z^* = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

si nota che, nel rispetto dell'ottimo di sistema, nessun utente sceglie di percorrere il path p_3. Pertanto, un ω^*_{ms} di supporto minimo tale per cui gli utenti non hanno alcun motivo di scegliere il path 3 produrrebbe quindi $z^{(\omega^*_{ms})} = z^*$. Si sceglie quindi

$$\omega^*_{ms} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ k \end{pmatrix}, \qquad k > 0.$$

Per determinare il k più opportuno si ragiona nel modo seguente:

$$z_3^{(\omega^*_{ms})} > 0 \implies \begin{cases} 3\left(z_1 + z_3\right) + z_3 + k + 3\left(z_2 + z_3\right) \leq 3\left(z_1 + z_3\right) + z_1 + 1 + z_1 + 1, \\ 3\left(z_1 + z_3\right) + z_3 + k + 3\left(z_2 + z_3\right) \leq z_2 + 1 + z_2 + 1 + 3\left(z_2 + z_3\right), \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} z_3 \leq \frac{2\,z_1 - 3\,z_2 + 2 - k}{4} \\ z_3 \leq \frac{2\,z_2 - 3\,z_1 + 2 - k}{4} \end{cases} \xRightarrow{z_1 \leq 2 \wedge z_2 \leq 2} \begin{cases} z_3 \leq \frac{6 - 3\,z_2 - k}{4} \\ z_3 \leq \frac{6 - 3\,z_1 - k}{4} \end{cases} \xRightarrow{z_1 \geq 0 \wedge z_2 \geq 0} \begin{cases} z_3 \leq \frac{6-k}{4} \\ z_3 \leq \frac{6-k}{4} \end{cases}.$$

Pertanto, se si sceglie $k = 6$ allora

$$z_3^{(\omega^*_{ms})} \leq 0 \implies z_3^{(\omega^*_{ms})} = 0,$$

e quindi

$$z^{(\omega^*_{ms})} = z^* = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(e) In questo caso il nuovo grafo presenta dei ritardi ancora minori sui path p_1 e p_2, in quanto il ritardo è diminuito di due unità su entrambi i path. L'incentivo a prendere il path p_3 diminuisce, pertanto è verosimile che l'ottimo di sistema del nuovo grafo sia ancora

$$z^* = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

in quanto, se prima non c'era motivo di prendere il path p_3, ora è ancora meno conveniente.

Quindi una distribuzione di pedaggi tale che PoA $= 1$ è quella in cui il pedaggio sul link e_7 è talmente alto che non è conveniente percorrerlo anche se vuoto. Quindi, analogamente al punto precedente si sceglie

$$\omega = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ a \end{pmatrix}, \qquad a > 0.$$

Per determinare il k più opportuno si ragiona nel modo seguente:

$$z_3^{(\omega)} > 0 \implies \begin{cases} 3\,(z_1 + z_3) + z_3 + a + 3\,(z_2 + z_3) \leq 3\,(z_1 + z_3) + 2\,z_1, \\ 3\,(z_1 + z_3) + z_3 + a + 3\,(z_2 + z_3) \leq 2\,z_2 + 3\,(z_2 + z_3), \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} z_3 \leq \frac{2\,z_1 - 3\,z_2 - a}{4} \\ z_3 \leq \frac{2\,z_2 - 3\,z_1 - a}{4} \end{cases} \xRightarrow{0 \leq z_e \leq 2,\, e \in \{1,2\}} \begin{cases} z_3 \leq \frac{4-a}{4} \\ z_3 \leq \frac{4-a}{4} \end{cases}.$$

Pertanto, se si sceglie $a = 4$ allora

$$z_3^{(\omega)} \leq 0 \implies z_3^{(\omega)} = 0,$$

per cui la distribuzione di pedaggi

$$\omega = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ a \end{pmatrix},$$

è ottimale, infatti

$$z^{\omega} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$