Homework 1

Giulio Nenna (s292399@studenti.polito.it)

November 11, 2021

Realizzato in collaborazione con

Esercizio 1.

(a) Definiamo tutte le possibili partizioni $o - d$ del grafo:

$$U_1 = \{o\}$$
$$U_2 = \{o, a\}$$
$$U_3 = \{o, b\}$$
$$U_4 = \{o, a, b\}$$

e tutti i possibili path $o - d$:

$$p_1 = \{o, a, d\}$$
$$p_2 = \{o, b, d\}$$
$$p_1 = \{o, a, b, d\}$$

Affinché il flusso $o-d$ si annulli deve essere rimossa almeno la seguente quantità di capacità:

$$C_{\min} = \min((C_1 + \min(C_2, C_5)), (C_2 + \min(C_1, C_3 + C_4)))$$

Dove $C_1 + \min(C_2, C_5)$ è la minima capacità da rimuovere nel caso in cui $C_1 > C_2$ mentre $C_2 + \min(C_1, C_3 + C_4)$ è la minima capacità da rimuovere nel caso in cui $C_2 > C_1$

(b) Definiamo le capacità dei tagli:

$$C_{U_1} = C_1 + C_2 = 5$$

$$C_{U_2} = C_2 + C_3 + C_4 = 7$$

$$C_{U_3} = C_1 + C_5 = 5$$

$$C_{U_4} = C_4 + C_5 = 5$$

Affinché venga aumentato il throughput, per il teorema del *max flow - min cut*, è necessario aumentare la capacità del minimo taglio $C_{\min}$. Come si può notare, si hanno tre minimi tagli distinti e non c'è un arco comune a tutti, quindi non è possibile aumentare il throughput del grafo con una sola unità di capacità. Per cui $\tau = C_{\min} = 5$

(c) Le allocazioni ottimali per 2 unità di capacità sono le seguenti:

1. $+1$ su e_1, $+1$ su $e_4 \implies \tau = C_{\min} = 6$;
2. $+1$ su e_1, $+1$ su $e_5 \implies \tau = C_{\min} = 6$;
3. $+1$ su e_2, $+1$ su $e_5 \implies \tau = C_{\min} = 6$;

Per ricavare queste allocazioni si è agito in modo tale da aumentare la capacità degli archi che concorrono ai tagli di capacità minima. L'opzione in cui vengono allocate 2 unità di capacità ad un solo arco non migliora τ dal momento che non esiste un arco comune a tutti e tre i minimi tagli.

(d) Le allocazioni ottimali per 4 unità di capacità sono le seguenti:

1. $+1$ su e_1, $+1$ su e_2, $+1$ su e_4, $+1$ su $e_5 \implies \tau = C_{\min} = 7$;
2. $+2$ su e_1, $+2$ su $e_4 \implies \tau = C_{\min} = 7$;
3. $+2$ su e_2, $+2$ su $e_5 \implies \tau = C_{\min} = 7$;
4. $+2$ su e_1, $+2$ su $e_5 \implies \tau = C_{\min} = 7$;

Tutte e 4 queste allocazioni producono una somma delle capacità dei tagli $C_{\text{tot}} = 30$.

Esercizio 2.

(a) Per il seguente grafo si possono identificare due path distinti tra n_1 e n_6:

$$p_1 = \{n_1, n_2, n_3, n_6\}$$
$$p_2 = \{n_1, n_4, n_5, n_6\}.$$

Definendo con z_i il flusso sull'i-esimo path andiamo a calcolare il costo totale del sistema:

$$C = z_1(\underbrace{3z_1 + z_1 + 1 + z_1 + 1}_{\text{flusso su } p_1}) + z_2(\underbrace{z_2 + 1 + z_2 + 1 + 3z_2}_{\text{flusso su} p_2}).$$

Poiché il throughput del grafo è pari a 2, vale:

$$z_1 + z_2 = 2.$$

Pertanto, per sostituzione si ottiene:

$$C = 10z_1^2 - 20z_1 + 24.$$

$$C' = 0 \implies z_1 = 1$$

quindi

$$z^* = \arg\min C(z) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Poiché vale:

$$f^* = A^{n_1,n_6} z^*$$

$$f^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(b) Per calcolare l'equilibro di Wardrop se ne esplicitano le condizioni necessarie:

$$z_1 > 0 \implies \begin{cases} 5z_1 + 2 \leq 5z_2 + 2 \\ 5z_1 + 2 \leq 10 - 5z_1 + 2 \end{cases} \xRightarrow{z_1 + z_2 = 2} z_1 \leq 1$$

$$z_2 > 0 \implies 5z_1 + 2 \geq 5z_2 + 2 \xRightarrow{z_1 + z_2 = 2} z_1 \geq 1$$

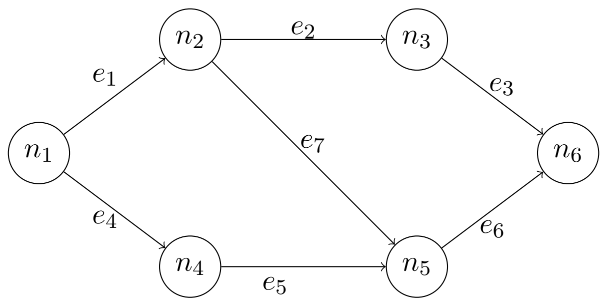
quindi $z_1 = 0$. Se ne conclude che:

$$z^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Poiché $z^{(0)} = z^*$ risulta immediato che:

$$\mathrm{PoA} = 1.$$

(c) Inseriamo il seguente link all'interno del grafo:



I possibili path all'interno del grafo risultano quindi essere:

$$p_1 = \{n_1, n_2, n_3, n_6\}$$
$$p_2 = \{n_1, n_4, n_5, n_6\}$$
$$p_3 = \{n_1, n_2, n_5, n_6\}$$

INSERIRE CALCOLI DELL'EQUILIBRIO DI WARDROP