Homework 1

Giulio Nenna (s292399@studenti.polito.it)

January 5, 2022

Realizzato in collaborazione con Alessandro Bonaduce (s289906@studenti.polito.it), Davide Grande (s292174@studenti.polito.it).

Esercizio 1.

(a) Date le seguenti funzioni di utilità per ciascun giocatore:

$$u_i(x) = -\frac{x_i^2}{2} + c_i x_i + \beta \sum_{j \neq i} W_{ij} x_j x_i$$

trovare le funzioni di *Best Response* per ciascun giocatore significa trovare le seguenti:

$$BR_i(x_{-i}) = \arg\max_{x_i \in \mathcal{A}} u_i(x_i, x_{-i}).$$

Poiché $u_i(x)$ è concava rispetto a x_i, trovare punti stazionari rispetto a x_i significa trovare massimi globali:

$$\frac{\delta u_i(x)}{\delta x_i} = -x_i + c_i + \beta \sum_{j \neq i} W_{ij} x_j$$

$$\frac{\delta u_i(x)}{\delta x_i} = 0 \quad \iff \quad x_i = c_i + \beta \sum_{j \neq i} W_{ij} x_j.$$

Pertanto:

$$BR_i(x_{-i}) = c_i + \beta \sum_{j \neq i} W_{ij} x_j.$$

(b) Poichè il grafo è privo di self-loop, la matrice di adiacenza W non presenta elementi non nulli sulla diagonale. è pertanto possibile utilizzare la seguente espressione per gli equilibri di Nash:

$$x^* = \beta W x^* + c. \tag{1}$$

Quindi, in forma esplicita, abbiamo:

$$x^* = (I - \beta W)^{-1} c.$$

Questo significa che esistenza ed unicità di eventuali equilibri di Nash dipendono dalla singolarità della matrice $(I - \beta W)$: se l'inversa della matrice $(I - \beta W)$ esiste ed è unica, allora esiste ed è unico l'equilibrio di Nash x^* associato .

DA INDAGARE SE ESISTONO CASI IN CUI L'EQUILIBRIO NON è UNICO

La condizione:

$$\beta \omega_i < 1 \qquad \forall i \in \mathcal{V} \tag{2}$$

impone che le righe della matrice βW sommino ad una quantità strettamente minore di 1. La matrice βW si dice pertanto essere *substocastica* e il suo raggio spettrale soddisfa la condizione $\rho(\beta W) < 1$. Può quindi essere applicato il *Criterio di Neumann* che ci assicura esistenza ed unicità della matrice $(I - \beta W)^{-1}$. In particolare vale:

$$(I - \beta W)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} \beta^k W^k \tag{3}$$

(c) Come visto per il punto precedente, se esiste ed è unico, l'equilibrio di Nash del gioco è dato da:

$$x^* = (I - \beta W)^{-1} c$$

pertanto è nella forma $x^* = Mc$ e dipende linearmente dal vettore c. Nel caso in cui valga 2 allora, per il *criterio di Neumann* abbiamo:

$$M = \sum_{k=0}^{\infty} \beta^k W^k. \tag{4}$$

Inoltre vale:

$$(W^k)_{ij} = \text{ \# di path da i a j di lunghezza k} \implies (W^k)_{ij} \geq 0 \quad \forall i, j \in \mathcal{V}$$

Pertanto M è dato dalla somma di matrici con elementi tutti non negativi:

$$M_{ij} \geq 0 \qquad \forall i, j \in \mathcal{V}$$

(d) Il vettore di centralità di Katz del grafo è dato da:

$$z = \left(I - \left(\frac{1-\beta_K}{\lambda_W}\right) W'\right)^{-1} \beta_K \mu$$

Abbiamo quindi il seguente risultato:

$$z'c = \left(\left(I - \frac{1-\beta_K}{\lambda_W} W'\right)^{-1} \beta_K \mu\right)' c = \beta_k \mu' \left(I - \frac{1-\beta_K}{\lambda_W} W\right)^{-1} c$$

Ponendo quindi [1]

$$\frac{1-\beta_K}{\lambda_W} = \beta \iff \beta_K = 1 - \lambda_W \beta$$

e

$$\mu = \frac{1}{1-\lambda_W \beta} \mathbb{1}$$

si ottiene un vettore di centralità di Katz:

$$\hat{z} = \left(I - \beta W'\right)^{-1} \mathbb{1}$$

tale per cui:

$$\hat{z}'c = \mathbb{1}'(I - \beta W)^{-1} c = \sum_{j \in \mathbb{V}} x_j^* = y.$$

(e) Vale il seguente risultato:

$$Var(y) = Var(\hat{z}'c) = \hat{z}' VarCov(c) \hat{z}$$

Essendo il vettore c un vettore di variabili aleatorie indipendenti:

$$Varcov(c) = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \sigma_n^2 \end{bmatrix}$$

Pertanto vale:

$$Var(y) = \sum_{i=1}^{n} \hat{z}_i^2 \sigma_i^2 = \sum_{i=1}^{n} ((I - \beta W')^{-1} \mathbb{1})_i^2 \sigma_i^2$$

[1] L'operazione è lecita dal momento che la matrice βW è substocastica. Questo vuol dire che $\rho(\beta W) = \beta \rho(W) < 1$, pertanto $\beta_K \in [0, 1]$.