

# Homework 1

Giulio Nenna (s292399@studenti.polito.it)

January 5, 2022

Realizzato in collaborazione con Alessandro Bonaduce  
(s289906@studenti.polito.it), Davide Grande (s292174@studenti.polito.it).

## Esercizio 1.

---

(a) Date le seguenti funzioni di utilità per ciascun giocatore:

$$u_i(x) = -\frac{x_i^2}{2} + c_i x_i + \beta \sum_{j \neq i} W_{ij} x_j x_i$$

trovare le funzioni di *Best Response* per ciascun giocatore significa trovare le seguenti:

$$BR_i(x_{-i}) = \arg \max_{x_i \in \mathcal{A}} u_i(x_i, x_{-i}).$$

Poiché  $u_i(x)$  è concava rispetto a  $x_i$ , trovare punti stazionari rispetto a  $x_i$  significa trovare massimi globali:

$$\begin{aligned} \frac{\delta u_i(x)}{\delta x_i} &= -x_i + c_i + \beta \sum_{j \neq i} W_{ij} x_j \\ \frac{\delta u_i(x)}{\delta x_i} = 0 &\iff x_i = c_i + \beta \sum_{j \neq i} W_{ij} x_j. \end{aligned}$$

Pertanto:

$$BR_i(x_{-i}) = c_i + \beta \sum_{j \neq i} W_{ij} x_j.$$

(b) Poiché il grafo è privo di self-loop, la matrice di adiacenza  $W$  non presenta elementi non nulli sulla diagonale. è pertanto possibile utilizzare la seguente espressione per gli equilibri di Nash:

$$x^* = \beta W x^* + c. \tag{1}$$

Quindi, in forma esplicita, abbiamo:

$$x^* = (I - \beta W)^{-1}c.$$

Questo significa che esistenza ed unicità di eventuali equilibri di Nash dipendono dalla singolarità della matrice  $(I - \beta W)$ : se l'inversa della matrice  $(I - \beta W)$  esiste ed è unica, allora esiste ed è unico l'equilibrio di Nash  $x^*$  associato.

DA INDAGARE SE ESISTONO CASI IN CUI L'EQUILIBRIO NON È UNICO

La condizione:

$$\beta\omega_i < 1 \quad \forall i \in \mathcal{V} \quad (2)$$

impone che le righe della matrice  $\beta W$  sommino ad una quantità strettamente minore di 1. La matrice  $\beta W$  si dice pertanto essere *substocastica* e il suo raggio spettrale soddisfa la condizione  $\rho(\beta W) < 1$ . Può quindi essere applicato il *Criterio di Neumann* che ci assicura esistenza ed unicità della matrice  $(I - \beta W)^{-1}$ . In particolare vale:

$$(I - \beta W)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} \beta^k W^k \quad (3)$$

- (c) Come visto per il punto precedente, se esiste ed è unico, l'equilibrio di Nash del gioco è dato da:

$$x^* = (I - \beta W)^{-1}c$$

pertanto è nella forma  $x^* = Mc$  e dipende linearmente dal vettore  $c$ . Nel caso in cui valga 2 allora, per il *criterio di Neumann* abbiamo:

$$M = \sum_{k=0}^{\infty} \beta^k W^k. \quad (4)$$

Inoltre vale:

$$(W^k)_{ij} = \# \text{ di path da } i \text{ a } j \text{ di lunghezza } k \implies (W^k)_{ij} \geq 0 \quad \forall i, j \in \mathcal{V}$$

Pertanto  $M$  è dato dalla somma di matrici con elementi tutti non negativi:

$$M_{ij} \geq 0 \quad \forall i, j \in \mathcal{V}$$