Homework 1

Giulio Nenna (s292399@studenti.polito.it)

January 15, 2022

Realizzato in collaborazione con Alessandro Bonaduce (s289906@studenti.polito.it), Davide Grande (s292174@studenti.polito.it).

Esercizio 1.

(a) Date le seguenti funzioni di utilità per ciascun giocatore:

$$u_i(x) = -\frac{x_i^2}{2} + c_i x_i + \beta \sum_{j \neq i} W_{ij} x_j x_i$$

trovare le funzioni di *Best Response* per ciascun giocatore significa trovare le seguenti:

$$BR_i(x_{-i}) = \arg\max_{x_i \in \mathcal{A}} u_i(x_i, x_{-i}).$$

Poiché $u_i(x)$ è concava rispetto a x_i, trovare punti stazionari rispetto a x_i significa trovare massimi globali:

$$\frac{\delta u_i(x)}{\delta x_i} = -x_i + c_i + \beta \sum_{j \neq i} W_{ij} x_j$$

$$\frac{\delta u_i(x)}{\delta x_i} = 0 \qquad \iff \qquad x_i = c_i + \beta \sum_{j \neq i} W_{ij} x_j.$$

Pertanto:

$$BR_i(x_{-i}) = c_i + \beta \sum_{j \neq i} W_{ij} x_j.$$

(b) Poichè il grafo è privo di self-loop, la matrice di adiacenza W non presenta elementi non nulli sulla diagonale. è pertanto possibile utilizzare la seguente espressione per gli equilibri di Nash:

$$x^* = \beta W x^* + c. \tag{1}$$

Quindi, in forma esplicita, abbiamo:

$$x^* = (I - \beta W)^{-1} c.$$

Questo significa che esistenza ed unicità di eventuali equilibri di Nash dipendono dalla singolarità della matrice $(I - \beta W)$: se l'inversa della matrice $(I - \beta W)$ esiste ed è unica, allora esiste ed è unico l'equilibrio di Nash x^* associato .

DA INDAGARE SE ESISTONO CASI IN CUI L'EQUILIBRIO NON è UNICO

La condizione:

$$\beta \omega_i < 1 \qquad \forall i \in \mathcal{V} \tag{2}$$

impone che le righe della matrice βW sommino ad una quantità strettamente minore di 1. La matrice βW si dice pertanto essere *substocastica* e il suo raggio spettrale soddisfa la condizione $\rho(\beta W) < 1$. Può quindi essere applicato il *Criterio di Neumann* che ci assicura esistenza ed unicità della matrice $(I - \beta W)^{-1}$. In particolare vale:

$$(I - \beta W)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} \beta^k W^k \tag{3}$$

(c) Come visto per il punto precedente, se esiste ed è unico, l'equilibrio di Nash del gioco è dato da:

$$x^* = (I - \beta W)^{-1} c$$

pertanto è nella forma $x^* = Mc$ e dipende linearmente dal vettore c. Nel caso in cui valga 2 allora, per il *criterio di Neumann* abbiamo:

$$M = \sum_{k=0}^{\infty} \beta^k W^k. \tag{4}$$

Inoltre vale:

$$(W^k)_{ij} = \text{ \# di path da i a j di lunghezza k} \implies (W^k)_{ij} \geq 0 \quad \forall i, j \in \mathcal{V}$$

Pertanto M è dato dalla somma di matrici con elementi tutti non negativi:

$$M_{ij} \geq 0 \qquad \forall i, j \in \mathcal{V}$$

(d) Il vettore di centralità di Katz del grafo è dato da:

$$z = \left(I - \left(\frac{1-\beta_K}{\lambda_W}\right) W'\right)^{-1} \beta_K \mu$$

Abbiamo quindi il seguente risultato:

$$z'c = \left(\left(I - \frac{1-\beta_K}{\lambda_W} W'\right)^{-1} \beta_K \mu\right)' c = \beta_k \mu' \left(I - \frac{1-\beta_K}{\lambda_W} W\right)^{-1} c$$

Ponendo quindi [1]

$$\frac{1-\beta_K}{\lambda_W} = \beta \iff \beta_K = 1 - \lambda_W \beta$$

e

$$\mu = \frac{1}{1-\lambda_W \beta} \mathbb{1}$$

si ottiene un vettore di centralità di Katz:

$$\hat{z} = \left(I - \beta W'\right)^{-1} \mathbb{1} \tag{5}$$

tale per cui:

$$\hat{z}'c = \mathbb{1}'(I - \beta W)^{-1} c = \sum_{j \in \mathbb{V}} x_j^* = y. \tag{6}$$

(e) Vale il seguente risultato:

$$Var(y) = Var(\hat{z}'c) = \hat{z}' VarCov(c) \hat{z}$$

Essendo il vettore c un vettore di variabili aleatorie indipendenti:

$$Varcov(c) = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \sigma_n^2 \end{bmatrix}$$

Pertanto vale:

$$Var(y) = \sum_{i=1}^{n} \hat{z}_i^2 \sigma_i^2 = \sum_{i=1}^{n} ((I - \beta W')^{-1} \mathbb{1})_i^2 \sigma_i^2$$

[1] L'operazione è lecita dal momento che la matrice βW è substocastica. Questo vuol dire che $\rho(\beta W) = \beta \rho(W) < 1$, pertanto $\beta_K \in [0, 1]$.

(f) Sia i_K il key player del gioco e sia $W^{(-i_K)}$ la matrice di adiacenza del grafo $\mathcal{G}^{(-i_K)}$ privato del nodo i_K. Poiché la funzione di utility di ciascun nodo rimane invariata nella forma, si possono applicare gli stessi ragionamenti dei punti precedenti per trovare che esiste ed è unico l'equilibrio di Nash:

$$x^{*(-i_K)} = (I - \beta W^{(-i_K)})^{-1} c$$

per tutte le β che soddisfano 2 dal momento che la matrice $\beta W^{(-i_K)}$ risulta substocastica. Se definiamo $M^{(-i_K)} = (I - \beta W^{(-i_K)})^{-1}$ allora, poiché $c = \mathbb{1}$, abbiamo:

$$x^{*(-i_K)} = M^{(-i_K)} \mathbb{1} \tag{7}$$

(g) Per ogni $k \neq i \neq j$ vale:

$$M_{ij} M_{ik} = M_{ii} (M_{jk} - M_{jk}^{(-i)}).$$

(h) Poichè il gioco è simmetrico, da 5, si ottiene che

$$\hat{z} = (I - \beta W)^{-1} \mathbb{1} = M \mathbb{1} \tag{8}$$

Notiamo inoltre da 4 che se il gioco è simmetrico allora anche la matrice M sarà simmetrica. Utilizzando quindi 6 si ottiene:

$$y = \hat{z}' c = (M\mathbb{1})' \mathbb{1} = \mathbb{1}' M \mathbb{1} = \sum_j \sum_k M_{jk} \tag{9}$$

e, analogamente

$$y^{(-i)} = \mathbb{1}' M^{(-i)} \mathbb{1} = \sum_{j \neq i} \sum_{k \neq i} M_{jk}^{(-i)}.$$

A questo punto si ottiene:

$$y - y^{(-i)} = \sum_j \sum_k M_{jk} - \sum_{j \neq i} \sum_{k \neq i} M_{jk}^{(-i)} =$$

$$= \left(\sum_{j \neq i} \sum_{k \neq i} M_{jk} - M_{jk}^{(-i)} \right) + \left(\sum_{k \neq i} M_{ik} \right) + \left(\sum_{j \neq i} M_{ji} \right) + M_{ii}$$

Utilizzando il punto (g): $(M_{jk} - M_{jk}^{(-i)}) = (M_{ij}M_{ik})/M_{ii}$ pertanto [2]

$$\begin{aligned} y - y^{(-i)} &= \left(\sum_{j\neq i}\sum_{k\neq i}\frac{M_{ij}M_{ik}}{M_{ii}}\right) + 2\left(\sum_{j\neq i} M_{ij}\right) + M_{ii} = \\ &= \frac{1}{M_{ii}}\left(\sum_{j\neq i}\sum_{k\neq i} M_{ij}M_{ik}\right) + 2\left(\sum_{j} M_{ij}\right) - M_{ii} = \\ &= \frac{1}{M_{ii}}\left(\sum_{j\neq i} M_{ij}\sum_{k} M_{ik} - M_{ii}\sum_{j\neq i} M_{ij}\right) + 2\left(\sum_{j} M_{ij}\right) - M_{ii} \end{aligned}$$

Ora, poiché $z_i = \sum_j M_{ij}$ e $\sum_{j\neq i} M_{ij} = z_i - M_{ii}$, otteniamo:

$$\begin{aligned} y - y^{(-i)} &= \frac{1}{M_{ii}}\left(\sum_{j\neq i} M_{ij}(z_i - M_{ii})\right) + 2z_i - M_{ii} = \\ &= \frac{1}{M_{ii}}(z_i - M_{ii})^2 + 2z_i - M_{ii} = \frac{z_i^2}{M_{ii}} \end{aligned}$$

Pertanto il *key player* è quel giocatore i che massimizza il rapporto $\frac{z_i^2}{M_{ii}}$.

(i) Per il grafo in esame esistono tre gruppi di simmetria:

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_1 &= \{1, 2, 3, 9, 10, 11\} \\ \mathcal{V}_2 &= \{4, 5, 7, 8\} \\ \mathcal{V}_3 &= \{6\}. \end{aligned}$$

L'obiettivo è quello di risolvere il seguente sistema lineare:

$$z = \beta W' z + \mathbb{1} \tag{10}$$

Utilizzando i gruppi di simmetria è possibile ricavare che:

$$\begin{aligned} z_i &= \lambda \in \mathbb{R}^+ \qquad \forall i \in \mathcal{V}_1 \\ z_i &= s \in \mathbb{R}^+ \qquad \forall i \in \mathcal{V}_2 \\ z_6 &= \theta \in \mathbb{R}^+ \end{aligned}$$

[2] Questo passaggio è sempre possibile in quanto $M_{ii} > 0 \quad \forall i \in \mathcal{V}$. Infatti, essendo il grafo simmetrico, abbiamo che $(W^2)_{ii} > 0 \quad \forall i \in \mathcal{V}$. Il risultato segue dalla definizione di M e dal risultato ottenuto attraverso il criterio di Neumann.

Pertanto basterà ricavare tre equazioni linearmente indipendenti dal sistema 10 per trovare z. Ad esempio dalla prima riga si ottiene:

$$z_1 = \beta(z_2 + z_3 + z_4 + z_5) + 1 \implies (1 - 2\beta)\lambda = 2\beta s + 1$$

mentre dall'equazione sul nodo 6 abbiamo:

$$z_6 = \beta(z_4 + z_5 + z_7 + z_8) + 1 \implies \theta = 4\beta s + 1.$$

Infine, dall'equazione sul nodo 4 si ottiene:

$$z_4 = \beta(z_1 + z_2 + z_3 + z_5 + z_6) + 1 \implies (1 - \beta)s = \beta(3\lambda + \theta) + 1.$$

Utilizzando queste tre equazioni si ottiene il sistema ridotto:

$$\begin{bmatrix} 1-2\beta & -2\beta & 0 \\ 0 & -4\beta & 1 \\ -3\beta\lambda & 1-\beta & -\beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda \\ s \\ \theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Denominando con il pedice a i risultati calcolati utilizzando il valore $\beta = 0.1$ e con il pedice b quelli per cui $\beta = 0.2$ si ottiene:

$$\begin{cases} \lambda_a = 1.72 \\ s_a = 1.87 \\ \theta_a = 1.75 \end{cases} \qquad \begin{cases} \lambda_b = 7.77 \\ s_b = 9.16 \\ \theta_b = 8.33 \end{cases}.$$

Per quanto riguarda la matrice $M = (I - \beta W')^{-1}$, dalle informazioni sulla simmetria è possibile ricavare:

$$\begin{gathered} M_{ii} = M_\lambda \in \mathbb{R}^+ \qquad \forall i \in \mathcal{V}_1 \\ M_{ii} = M_s \in \mathbb{R}^+ \qquad \forall i \in \mathcal{V}_2 \\ M_{6,6} = M_\theta \end{gathered}$$

Calcolando si ottiene:

$$\begin{cases} M_{\lambda_a} = 1.061 \\ M_{s_a} = 1.076 \\ M_{\theta_a} = 1.051 \end{cases} \qquad \begin{cases} M_{\lambda_b} = 1.851 \\ M_{s_b} = 2.083 \\ M_{\theta_b} = 1.666 \end{cases}.$$

A questo punto è possibile individuare i *key player* K_a e K_b andando a calcolare $\arg\max_{i \in \mathcal{V}} \frac{z_i^2}{M_{ii}}$. Si ottiene:

$$K_a = i, \quad \frac{z_i^2}{M_{ii}} = 3.2811 \quad \forall i \in \mathcal{V}_2$$
$$K_b = 6, \quad \frac{z_6^2}{M_{66}} = 41.666$$

Esercizio 2.

(a) Siano $\mathcal{V} = \{1, \dots n\}$ gli utenti della rete stradale e sia $\mathcal{R}$ lo spazio delle azioni.La scelta della strada da parte di ciascun utente determina una configurazione $x \in \mathcal{R}^n$ del gioco in cui le utility sono definite nel modo seguente:

$$u_i(x_i, x_{-i}) = -(\tau_{x_i}(z_{x_i}) + z_{x_i}\tau'(z_{x_i})) =: U(x_i, z).$$

Il vettore di flusso sulle strade $z \in \mathcal{P}(\mathcal{R})$ rappresenta in questo caso il *type* del grafo. Si può inoltre notare dalla forma di u_i come esso sia solamente funzione dell'azione dell' i-esimo giocatore e del tipo del grafo, pertanto il gioco che stiamo considerando è un gioco *anonimo*. Se si considera una *Noisy Best Response Dynamics* sul grafo, i rate di transizione sono definiti come:

$$\Theta_{ik}(z) = \frac{e^{\beta U(k,z)}}{\sum\limits_{j \in \mathcal{R}} e^{\beta U(j,z)}},$$

mentre il *Drift Operator* $F(z)$ può essere calcolato come segue:

$$F_i(z) = (z_1\Theta_{1i}(z) + \dots z_k\Theta_{ki}(z)) - (z_i\Theta_{i1}(z) + \dots + z_i\Theta_{ik}(z)) =$$
$$= \left(\sum_{j \in \mathcal{R}} z_j \Theta_{ji}(z)\right) - z_i \left(\sum_{j \in \mathcal{R}} \Theta_{ij}(z)\right) =$$
$$= \left(\frac{e^{\beta U(i,z)}}{\sum\limits_{j \in \mathcal{R}} e^{\beta U(j,z)}} \sum_{j \in \mathcal{R}} z_j\right) - z_i \left(\frac{\sum\limits_{j \in \mathcal{R}} e^{\beta U(j,z)}}{\sum\limits_{j \in \mathcal{R}} e^{\beta U(j,z)}}\right) = g_i(z) - z_i.$$

Pertanto $g(z)$ è una funzione così definita:

$$g_i(z) = \frac{\exp[\beta - (\tau_i(z_i) + z_i\tau'(z_i))]}{\sum\limits_{j\in\mathcal{R}} \exp[\beta - (\tau_j(z_j) + z_j\tau'(z_j))]} \quad \forall i \in \mathcal{R}$$

(b) Siano

$$\Phi(z) = \sum_i z_i\tau_i(z_i) \qquad H(z) = -\sum_i z_i \log z_i$$

Utilizzando le nozioni afferenti alla sezione 11.3.2 delle *lecture notes* si può notare che l'esistenza della funzione $\hat{\Phi}(z) := -\Phi(z)$ dimostra che il gioco è *potenziale*. Notiamo inoltre che, essendo le funzioni di delay $\tau_i(z_i)$ convesse allora $\hat{\Phi}(z)$ è concava. Possiamo quindi utilizzare il lemma 11.1 delle *lecture notes* che ci assicura che tutti i punti del simplesso $\mathcal{P}(\mathcal{R})$ che rappresentano un equilibrio del limite idrodinamico sono punti stazionari della funzione

$$\hat{V}_\beta(z) := -V_\beta(z) = \hat{\Phi}(z) + \frac{1}{\beta}H(z).$$

Essendo $\hat{V}_\beta$ strettamente concava, essa ha un unico punto stazionario. Trovarlo equivale a risolvere il problema:

$$z^\beta = \arg\min_{z\in\mathcal{P}(\mathcal{R})} V_\beta(z)$$

che può essere risolto ponendo $\nabla V_\beta(z) = 0$. In particolare:

$$\frac{\delta V_\beta(z)}{\delta z_k} = \tau_k(z_k) + z_k\tau'(z_k) + \frac{1}{\beta}(\log(z_k) + 1).$$

Pertanto z^β soddisfa:

$$V_\beta(z^\beta) = 0 \iff \tau_k(z_k^\beta) + z_k^\beta\tau'(z_k^\beta) = -\frac{1}{\beta}(\log(z_k^\beta) + 1) \quad \forall k \in \mathcal{R}.$$

In particolare

$$g_k(z^\beta) = \frac{z_k^\beta e^1}{e^1 \sum\limits_h z_h^\beta} = z_k \qquad \forall k \in \mathcal{R}$$

Pertanto z^β è un punto di equilibrio stabile per la ODE della dinamica *mean field*.

(c) Il vettore z^β soddisfa la seguente relazione:

$$\tau_k(z_k^\beta) + z_k^\beta \tau'(z_k^\beta) \ = -\frac{1}{\beta}(\log(z_k^\beta) + 1) \quad \forall k \in \mathcal{R}$$

Poiché

$$\lim_{\beta \to \infty} \frac{1}{\beta}(\log(z_k^\beta) + 1) = 0$$

Allora, per $\beta \to \infty$, il vettore z° soddisfa:

$$\tau_k(z_k^\circ) + z_k^\circ \tau'(z_k^\beta) = 0.$$

A questo risultato si arriva seguendo lo stesso ragionamento del punto precedente considerando che:

$$z^\circ = \arg \min_{z \in \mathcal{PR}} \left(\lim_{\beta \to \infty} V_\beta(z) \right) = \arg \min_{z \in \mathcal{PR}} \Phi(z)$$

Dal momento che $\Phi(z) = \sum_i z_i \tau_i(z_i)$ allora $\Phi(z)$ rappresenta l'*average delay* in quanto è dato dalla somma dei delay su ciascuna strada pesati per la frazione di utenti che la utilizzano. Pertanto z° minimizza l'*average delay* ed è per definizione un *social optimum traffic assignment*.