

Homework 1

Giulio Nenna (s292399@studenti.polito.it)

January 5, 2022

Realizzato in collaborazione con Alessandro Bonaduce
(s289906@studenti.polito.it), Davide Grande (s292174@studenti.polito.it).

Esercizio 1.

(a) Date le seguenti funzioni di utilità per ciascun giocatore:

$$u_i(x) = -\frac{x_i^2}{2} + c_i x_i + \beta \sum_{j \neq i} W_{ij} x_j x_i$$

trovare le funzioni di *Best Response* per ciascun giocatore significa trovare le seguenti:

$$BR_i(x_{-i}) = \arg \max_{x_i \in \mathcal{A}} u_i(x_i, x_{-i}).$$

Poiché $u_i(x)$ è concava rispetto a x_i , trovare punti stazionari rispetto a x_i significa trovare massimi globali:

$$\begin{aligned} \frac{\delta u_i(x)}{\delta x_i} &= -x_i + c_i + \beta \sum_{j \neq i} W_{ij} x_j \\ \frac{\delta u_i(x)}{\delta x_i} = 0 &\iff x_i = c_i + \beta \sum_{j \neq i} W_{ij} x_j. \end{aligned}$$

Pertanto:

$$BR_i(x_{-i}) = c_i + \beta \sum_{j \neq i} W_{ij} x_j.$$

(b) Poiché il grafo è privo di self-loop, la matrice di adiacenza W non presenta elementi non nulli sulla diagonale. è pertanto possibile utilizzare la seguente espressione per gli equilibri di Nash:

$$x^* = \beta W x^* + c. \tag{1}$$

Quindi, in forma esplicita, abbiamo:

$$x^* = (I - \beta W)^{-1}c.$$

Questo significa che esistenza ed unicità di eventuali equilibri di Nash dipendono dalla singolarità della matrice $(I - \beta W)$: se l'inversa della matrice $(I - \beta W)$ esiste ed è unica, allora esiste ed è unico l'equilibrio di Nash x^* associato.

DA INDAGARE SE ESISTONO CASI IN CUI L'EQUILIBRIO NON È UNICO

La condizione:

$$\beta \omega_i < 1 \quad \forall i \in \mathcal{V} \quad (2)$$

impone che le righe della matrice βW sommino ad una quantità strettamente minore di 1. La matrice βW si dice pertanto essere *substocastica* e il suo raggio spettrale soddisfa la condizione $\rho(\beta W) < 1$. Può quindi essere applicato il *Criterio di Neumann* che ci assicura esistenza ed unicità della matrice $(I - \beta W)^{-1}$. In particolare vale:

$$(I - \beta W)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} \beta^k W^k \quad (3)$$

- (c) Come visto per il punto precedente, se esiste ed è unico, l'equilibrio di Nash del gioco è dato da:

$$x^* = (I - \beta W)^{-1}c$$

pertanto è nella forma $x^* = Mc$ e dipende linearmente dal vettore c . Nel caso in cui valga 2 allora, per il *criterio di Neumann* abbiamo:

$$M = \sum_{k=0}^{\infty} \beta^k W^k. \quad (4)$$

Inoltre vale:

$$(W^k)_{ij} = \# \text{ di path da } i \text{ a } j \text{ di lunghezza } k \implies (W^k)_{ij} \geq 0 \quad \forall i, j \in \mathcal{V}$$

Pertanto M è dato dalla somma di matrici con elementi tutti non negativi:

$$M_{ij} \geq 0 \quad \forall i, j \in \mathcal{V}$$

(d) Il vettore di centralità di Katz del grafo è dato da:

$$z = \left(I - \left(\frac{1 - \beta_K}{\lambda_W} \right) W' \right)^{-1} \beta_K \mu$$

Abbiamo quindi il seguente risultato:

$$z'c = \left(\left(I - \frac{1 - \beta_K}{\lambda_W} W' \right)^{-1} \beta_K \mu \right)' c = \beta_K \mu' \left(I - \frac{1 - \beta_K}{\lambda_W} W \right)^{-1} c$$

Ponendo quindi ¹

$$\frac{1 - \beta_K}{\lambda_W} = \beta \iff \beta_K = 1 - \lambda_W \beta$$

e

$$\mu = \frac{1}{1 - \lambda_W \beta} \mathbb{1}$$

si ottiene un vettore di centralità di Katz:

$$\hat{z} = (I - \beta W')^{-1} \mathbb{1}$$

tale per cui:

$$\hat{z}'c = \mathbb{1}'(I - \beta W)^{-1}c = \sum_{j \in \mathbb{V}} x_j^* = y.$$

(e) Vale il seguente risultato:

$$Var(y) = Var(\hat{z}'c) = \hat{z}'VarCov(c)\hat{z}$$

Essendo il vettore c un vettore di variabili aleatorie indipendenti:

$$VarCov(c) = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \sigma_n^2 \end{bmatrix}$$

Pertanto vale:

$$Var(y) = \sum_{i=1}^n \hat{z}_i^2 \sigma_i^2 = \sum_{i=1}^n ((I - \beta W')^{-1} \mathbb{1})_i^2 \sigma_i^2$$

¹L'operazione è lecita dal momento che la matrice βW è substocastica. Questo vuol dire che $\rho(\beta W) = \beta \rho(W) < 1$, pertanto $\beta_K \in [0, 1]$.

- (f) Sia i_K il key player del gioco e sia $W^{(-i_K)}$ la matrice di adiacenza del grafo $\mathcal{G}^{(-i_K)}$ privato del nodo i_K . Poiché la funzione di utility di ciascun nodo rimane invariata nella forma, si possono applicare gli stessi ragionamenti dei punti precedenti per trovare che esiste ed è unico l'equilibrio di Nash:

$$x^{*(-i_K)} = (I - \beta W^{(-i_K)})^{-1} c$$

per tutte le β che soddisfano 2 dal momento che la matrice $\beta W^{(-i_K)}$ risulta substocastica. Se definiamo $M^{(-i_K)} = (I - \beta W^{(-i_K)})^{-1}$ allora, poiché $c = \mathbb{1}$, abbiamo:

$$x^{*(-i_K)} = M^{(-i_K)} \mathbb{1} \tag{5}$$