Homework 1

Giulio Nenna (s292399@studenti.polito.it)

January 5, 2022

Realizzato in collaborazione con Alessandro Bonaduce (s289906@studenti.polito.it), Davide Grande (s292174@studenti.polito.it).

Esercizio 1.

(a) Date le seguenti funzioni di utilità per ciascun giocatore:

$$u_i(x) = -\frac{x_i^2}{2} + c_i x_i + \beta \sum_{j \neq i} W_{ij} x_j x_i$$

trovare le funzioni di *Best Response* per ciascun giocatore significa trovare le seguenti:

$$BR_i(x_{-i}) = \arg\max_{x_i \in \mathcal{A}} u_i(x_i, x_{-i}).$$

Poiché $u_i(x)$ è concava rispetto a x_i, trovare punti stazionari rispetto a x_i significa trovare massimi globali:

$$\frac{\delta u_i(x)}{\delta x_i} = -x_i + c_i + \beta \sum_{j \neq i} W_{ij} x_j$$

$$\frac{\delta u_i(x)}{\delta x_i} = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad x_i = c_i + \beta \sum_{j \neq i} W_{ij} x_j.$$

Pertanto:

$$BR_i(x_{-i}) = c_i + \beta \sum_{j \neq i} W_{ij} x_j.$$

(b) Poichè il grafo è privo di self-loop, la matrice di adiacenza W non presenta elementi non nulli sulla diagonale. è pertanto possibile utilizzare la seguente espressione per gli equilibri di Nash:

$$x^* = \beta W x^* + c. \tag{1}$$

Quindi, in forma esplicita, abbiamo:

$$x^* = (I - \beta W)^{-1} c.$$

Questo significa che esistenza ed unicità di eventuali equilibri di Nash dipendono dalla singolarità della matrice $(I - \beta W)$: se l'inversa della matrice $(I - \beta W)$ esiste ed è unica, allora esiste ed è unico l'equilibrio di Nash x^* associato .

DA INDAGARE SE ESISTONO CASI IN CUI L'EQUILIBRIO NON è UNICO

La condizione:

$$\beta\omega_i < 1 \qquad \forall i \in \mathcal{V} \tag{2}$$

impone che le righe della matrice βW sommino ad una quantità strettamente minore di 1. La matrice βW si dice pertanto essere *substocastica* e il suo raggio spettrale soddisfa la condizione $\rho(\beta W) < 1$. Può quindi essere applicato il *Criterio di Neumann* che ci assicura esistenza ed unicità della matrice $(I - \beta W)^{-1}$. In particolare vale:

$$(I - \beta W)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} \beta^k W^k \tag{3}$$