

# Homework 1

Giulio Nenna (s292399@studenti.polito.it)

January 11, 2022

Realizzato in collaborazione con Alessandro Bonaduce  
(s289906@studenti.polito.it), Davide Grande (s292174@studenti.polito.it).

## Esercizio 1.

---

(a) Date le seguenti funzioni di utilità per ciascun giocatore:

$$u_i(x) = -\frac{x_i^2}{2} + c_i x_i + \beta \sum_{j \neq i} W_{ij} x_j x_i$$

trovare le funzioni di *Best Response* per ciascun giocatore significa trovare le seguenti:

$$BR_i(x_{-i}) = \arg \max_{x_i \in \mathcal{A}} u_i(x_i, x_{-i}).$$

Poiché  $u_i(x)$  è concava rispetto a  $x_i$ , trovare punti stazionari rispetto a  $x_i$  significa trovare massimi globali:

$$\begin{aligned} \frac{\delta u_i(x)}{\delta x_i} &= -x_i + c_i + \beta \sum_{j \neq i} W_{ij} x_j \\ \frac{\delta u_i(x)}{\delta x_i} = 0 &\iff x_i = c_i + \beta \sum_{j \neq i} W_{ij} x_j. \end{aligned}$$

Pertanto:

$$BR_i(x_{-i}) = c_i + \beta \sum_{j \neq i} W_{ij} x_j.$$

(b) Poiché il grafo è privo di self-loop, la matrice di adiacenza  $W$  non presenta elementi non nulli sulla diagonale. è pertanto possibile utilizzare la seguente espressione per gli equilibri di Nash:

$$x^* = \beta W x^* + c. \tag{1}$$

Quindi, in forma esplicita, abbiamo:

$$x^* = (I - \beta W)^{-1}c.$$

Questo significa che esistenza ed unicità di eventuali equilibri di Nash dipendono dalla singolarità della matrice  $(I - \beta W)$ : se l'inversa della matrice  $(I - \beta W)$  esiste ed è unica, allora esiste ed è unico l'equilibrio di Nash  $x^*$  associato.

DA INDAGARE SE ESISTONO CASI IN CUI L'EQUILIBRIO NON È UNICO

La condizione:

$$\beta\omega_i < 1 \quad \forall i \in \mathcal{V} \quad (2)$$

impone che le righe della matrice  $\beta W$  sommino ad una quantità strettamente minore di 1. La matrice  $\beta W$  si dice pertanto essere *substocastica* e il suo raggio spettrale soddisfa la condizione  $\rho(\beta W) < 1$ . Può quindi essere applicato il *Criterio di Neumann* che ci assicura esistenza ed unicità della matrice  $(I - \beta W)^{-1}$ . In particolare vale:

$$(I - \beta W)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} \beta^k W^k \quad (3)$$

- (c) Come visto per il punto precedente, se esiste ed è unico, l'equilibrio di Nash del gioco è dato da:

$$x^* = (I - \beta W)^{-1}c$$

pertanto è nella forma  $x^* = Mc$  e dipende linearmente dal vettore  $c$ . Nel caso in cui valga 2 allora, per il *criterio di Neumann* abbiamo:

$$M = \sum_{k=0}^{\infty} \beta^k W^k. \quad (4)$$

Inoltre vale:

$$(W^k)_{ij} = \# \text{ di path da } i \text{ a } j \text{ di lunghezza } k \implies (W^k)_{ij} \geq 0 \quad \forall i, j \in \mathcal{V}$$

Pertanto  $M$  è dato dalla somma di matrici con elementi tutti non negativi:

$$M_{ij} \geq 0 \quad \forall i, j \in \mathcal{V}$$

(d) Il vettore di centralità di Katz del grafo è dato da:

$$z = \left( I - \left( \frac{1 - \beta_K}{\lambda_W} \right) W' \right)^{-1} \beta_K \mu$$

Abbiamo quindi il seguente risultato:

$$z'c = \left( \left( I - \frac{1 - \beta_K}{\lambda_W} W' \right)^{-1} \beta_K \mu \right)' c = \beta_K \mu' \left( I - \frac{1 - \beta_K}{\lambda_W} W \right)^{-1} c$$

Ponendo quindi <sup>1</sup>

$$\frac{1 - \beta_K}{\lambda_W} = \beta \iff \beta_K = 1 - \lambda_W \beta$$

e

$$\mu = \frac{1}{1 - \lambda_W \beta} \mathbb{1}$$

si ottiene un vettore di centralità di Katz:

$$\hat{z} = (I - \beta W')^{-1} \mathbb{1} \quad (5)$$

tale per cui:

$$\hat{z}'c = \mathbb{1}'(I - \beta W)^{-1}c = \sum_{j \in \mathbb{V}} x_j^* = y. \quad (6)$$

(e) Vale il seguente risultato:

$$\text{Var}(y) = \text{Var}(\hat{z}'c) = \hat{z}' \text{VarCov}(c) \hat{z}$$

Essendo il vettore  $c$  un vettore di variabili aleatorie indipendenti:

$$\text{VarCov}(c) = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \sigma_n^2 \end{bmatrix}$$

Pertanto vale:

$$\text{Var}(y) = \sum_{i=1}^n \hat{z}_i^2 \sigma_i^2 = \sum_{i=1}^n ((I - \beta W')^{-1} \mathbb{1})_i^2 \sigma_i^2$$

---

<sup>1</sup>L'operazione è lecita dal momento che la matrice  $\beta W$  è substocastica. Questo vuol dire che  $\rho(\beta W) = \beta \rho(W) < 1$ , pertanto  $\beta_K \in [0, 1]$ .

- (f) Sia  $i_K$  il key player del gioco e sia  $W^{(-i_K)}$  la matrice di adiacenza del grafo  $\mathcal{G}^{(-i_K)}$  privato del nodo  $i_K$ . Poiché la funzione di utility di ciascun nodo rimane invariata nella forma, si possono applicare gli stessi ragionamenti dei punti precedenti per trovare che esiste ed è unico l'equilibrio di Nash:

$$x^{*(-i_K)} = (I - \beta W^{(-i_K)})^{-1} c$$

per tutte le  $\beta$  che soddisfano 2 dal momento che la matrice  $\beta W^{(-i_K)}$  risulta substocastica. Se definiamo  $M^{(-i_K)} = (I - \beta W^{(-i_K)})^{-1}$  allora, poiché  $c = \mathbb{1}$ , abbiamo:

$$x^{*(-i_K)} = M^{(-i_K)} \mathbb{1} \quad (7)$$

- (g) Per ogni  $k \neq i \neq j$  vale:

$$M_{ij} M_{ik} = M_{ii} (M_{jk} - M_{jk}^{(-i)}).$$

- (h) Poiché il gioco è simmetrico, da 5, si ottiene che

$$\hat{z} = (I - \beta W)^{-1} \mathbb{1} = M \mathbb{1} \quad (8)$$

Notiamo inoltre da 4 che se il gioco è simmetrico allora anche la matrice  $M$  sarà simmetrica. Utilizzando quindi 6 si ottiene:

$$y = \hat{z}' c = (M \mathbb{1})' \mathbb{1} = \mathbb{1}' M \mathbb{1} = \sum_j \sum_k M_{jk} \quad (9)$$

e, analogamente

$$y^{(-i)} = \mathbb{1}' M^{(-i)} \mathbb{1} = \sum_{j \neq i} \sum_{k \neq i} M_{jk}^{(-i)}.$$

A questo punto si ottiene:

$$\begin{aligned} y - y^{(-i)} &= \sum_j \sum_k M_{jk} - \sum_{j \neq i} \sum_{k \neq i} M_{jk}^{(-i)} = \\ &= \left( \sum_{j \neq i} \sum_{k \neq i} M_{jk} - M_{jk}^{(-i)} \right) + \left( \sum_{k \neq i} M_{ik} \right) + \left( \sum_{j \neq i} M_{ji} \right) + M_{ii} \end{aligned}$$

Utilizzando il punto (g):  $(M_{jk} - M_{jk}^{(-i)}) = (M_{ij}M_{ik})/M_{ii}$  pertanto <sup>2</sup>

$$\begin{aligned} y - y^{(-i)} &= \left( \sum_{j \neq i} \sum_{k \neq i} \frac{M_{ij}M_{ik}}{M_{ii}} \right) + 2 \left( \sum_{j \neq i} M_{ij} \right) + M_{ii} = \\ &= \frac{1}{M_{ii}} \left( \sum_{j \neq i} \sum_{k \neq i} M_{ij}M_{ik} \right) + 2 \left( \sum_j M_{ij} \right) - M_{ii} = \\ &= \frac{1}{M_{ii}} \left( \sum_{j \neq i} M_{ij} \sum_k M_{ik} - M_{ii} \sum_{j \neq i} M_{ij} \right) + 2 \left( \sum_j M_{ij} \right) - M_{ii} \end{aligned}$$

Ora, poiché  $z_i = \sum_j M_{ij}$  e  $\sum_{j \neq i} M_{ij} = z_i - M_{ii}$ , otteniamo:

$$\begin{aligned} y - y^{(-i)} &= \frac{1}{M_{ii}} \left( \sum_{j \neq i} M_{ij}(z_i - M_{ii}) \right) + 2z_i - M_{ii} = \\ &= \frac{1}{M_{ii}} (z_i - M_{ii})^2 + 2z_i - M_{ii} = \frac{z_i^2}{M_{ii}} \end{aligned}$$

Pertanto il *key player* è quel giocatore  $i$  che massimizza il rapporto  $\frac{z_i^2}{M_{ii}}$ .

## Esercizio 2.

---

- (a) Siano  $\mathcal{V} = \{1, \dots, n\}$  gli utenti della rete stradale e sia  $\mathcal{R}$  lo spazio delle azioni. La scelta della strada da parte di ciascun utente determina una configurazione  $x \in \mathcal{R}^n$  del gioco in cui le utility sono definite nel modo seguente:

$$u_i(x_i, x_{-i}) = -(\tau_{x_i}(z_{x_i}) + z_{x_i} \tau'(z_{x_i})) =: U(x_i, z).$$

Il vettore di flusso sulle strade  $z \in \mathcal{P}(\mathcal{R})$  rappresenta in questo caso il *type* del grafo. Si può inoltre notare dalla forma di  $u_i$  come esso sia solamente funzione dell'azione dell' $i$ -esimo giocatore e del tipo del

---

<sup>2</sup>Questo passaggio è sempre possibile in quanto  $M_{ii} > 0 \quad \forall i \in \mathcal{V}$ . Infatti, essendo il grafo simmetrico, abbiamo che  $(W^2)_{ii} > 0 \quad \forall i \in \mathcal{V}$ . Il risultato segue dalla definizione di  $M$  e dal risultato ottenuto attraverso il criterio di Neumann.

grafo, pertanto il gioco che stiamo considerando è un gioco *anonimo*. Se si considera una *Noisy Best Response Dynamics* sul grafo, i rate di transizione sono definiti come:

$$\Theta_{ik}(z) = \frac{e^{\beta U(k,z)}}{\sum_{j \in \mathcal{R}} e^{\beta U(j,z)}},$$

mentre il *Drift Operator*  $F(z)$  può essere calcolato come segue:

$$\begin{aligned} F_i(z) &= (z_1 \Theta_{1i}(z) + \dots + z_k \Theta_{ki}(z)) - (z_i \Theta_{i1}(z) + \dots + z_i \Theta_{ik}(z)) = \\ &= \left( \sum_{j \in \mathcal{R}} z_j \Theta_{ji}(z) \right) - z_i \left( \sum_{j \in \mathcal{R}} \Theta_{ij}(z) \right) = \\ &= \left( \frac{e^{\beta U(i,z)}}{\sum_{j \in \mathcal{R}} e^{\beta U(j,z)}} \sum_{j \in \mathcal{R}} z_j \right) - z_i \left( \frac{\sum_{j \in \mathcal{R}} e^{\beta U(j,z)}}{\sum_{j \in \mathcal{R}} e^{\beta U(j,z)}} \right) = g_i(z) - z_i. \end{aligned}$$

Pertanto  $g(z)$  è una funzione così definita:

$$g_i(z) = \frac{\exp[\beta - (\tau_i(z_i) + z_i \tau'(z_i))]}{\sum_{j \in \mathcal{R}} \exp[\beta - (\tau_j(z_j) + z_j \tau'(z_j))]} \quad \forall i \in \mathcal{R}$$

(b) Siano

$$\Phi(z) = \sum_i z_i \tau_i(z_i) \quad H(z) = - \sum_i z_i \log z_i$$

Utilizzando le nozioni afferenti alla sezione 11.3.2 delle *lecture notes* si può notare che l'esistenza della funzione  $\hat{\Phi}(z) := -\Phi(z)$  dimostra che il gioco è *potenziale*. Notiamo inoltre che, essendo le funzioni di delay  $\tau_i(z_i)$  convesse allora  $\hat{\Phi}(z)$  è concava. Possiamo quindi utilizzare il lemma 11.1 delle *lecture notes* che ci assicura che tutti i punti del semplice  $\mathcal{P}(\mathcal{R})$  che rappresentano un equilibrio del limite idrodinamico sono punti stazionari della funzione

$$\hat{V}_\beta(z) := -V_\beta(z) = \hat{\Phi}(z) + \frac{1}{\beta} H(z).$$

Essendo  $\hat{V}_\beta$  strettamente concava, essa ha un unico punto stazionario. Trovarlo equivale a risolvere il problema:

$$z^\beta = \arg \min_{z \in \mathcal{P}(\mathcal{R})} V_\beta(z)$$

che può essere risolto ponendo  $\nabla V_\beta(z) = 0$ . In particolare:

$$\frac{\delta V_\beta(z)}{\delta z_k} = \tau_k(z_k) + z_k \tau'(z_k) + \frac{1}{\beta} (\log(z_k) + 1).$$

Pertanto  $z^\beta$  soddisfa:

$$V_\beta(z^\beta) = 0 \iff \tau_k(z_k^\beta) + z_k^\beta \tau'(z_k^\beta) = -\frac{1}{\beta} (\log(z_k^\beta) + 1) \quad \forall k \in \mathcal{R}.$$

In particolare

$$g_k(z^\beta) = \frac{z_k^\beta e^1}{e^1 \sum_h z_h^\beta} = z_k \quad \forall k \in \mathcal{R}$$

Pertanto  $z^\beta$  è un punto di equilibrio stabile per la ODE della dinamica *mean field*.