

Homework 1

Giulio Nenna (s292399@studenti.polito.it)

December 4, 2021

Realizzato in collaborazione con Alessandro Bonaduce
(s289906@studenti.polito.it), Davide Grande (s292174@studenti.polito.it),
Ciro Balsamo (s289363@studenti.polito.it)

Esercizio 1.

(a) Per la dinamica P (non lazy) distinguiamo 2 casi:

- Se $\frac{n}{2}$ è dispari allora il grafo **non** è aperiodico, pertanto la convergenza della dinamica P non è garantita.
- Se $\frac{n}{2}$ è pari allora siano

$$p_1 = \{0, 1, 2, \dots, n-1, 0\}$$

$$p_2 = \{0, 1, 2, \dots, \frac{n}{2}, 0\}$$

due cicli di lunghezza rispettivamente n e $\frac{n}{2} + 1$.

$$\frac{n}{2} \text{ pari} \implies n = 4k, k \in \mathbb{N}$$

Abbiamo quindi trovato due cicli di lunghezza $4k$ e $2k + 1$ che sono numeri coprimi tra loro, pertanto il grafo è aperiodico e la convergenza è garantita. In particolare

$$x(t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} (\pi' x(0)) \mathbf{1}$$

Poiché il grafo R_n è regolare, allora $\pi = \frac{1}{n} \mathbf{1}$. La dinamica Q converge sempre dal momento che vengono aggiunti self-loop ad ogni nodo e quindi il grafo risulta sempre aperiodico. In particolare, poiché:

$$\pi' P = \pi' \iff \pi' Q = \pi'$$

a parità di condizioni iniziali $x(0)$ la dinamica Q converge allo stesso consenso della dinamica P (nel caso in cui $\frac{n}{2}$ sia pari)

(b)

$$P = \frac{1}{3}W \implies Q = \frac{1}{6}W + \frac{1}{2}I$$

$$Q = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{6} & \cdots & \frac{1}{6} & \cdots & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{2} & \frac{1}{6} & \cdots & \frac{1}{6} & \cdots \\ \vdots & & & & & \end{bmatrix}$$

Q è una matrice circolare la cui prima riga q è così composta:

$$q_0 = \frac{1}{2}, \quad q_1 = q_{\frac{n}{2}} = q_{n-1} = \frac{1}{6}, \quad q_k = 0 \forall k \notin \{1, 2, \frac{n}{2}, n-1\}.$$

(gli indici sono shiftati di una posizione, da 0 a $n-1$). Poiché Q è circolare allora lo spettro sarà dato da:

$$\lambda_k = \sum_{j=0}^{n-1} q_j \omega_k^j, \quad k = 0, \dots, n-1$$

$$\omega_k = \exp \left[\frac{2\pi i}{n} k \right].$$

Pertanto ¹:

$$\begin{aligned} \lambda_k &= \frac{1}{2}\omega_k^0 + \frac{1}{6}\omega_k^1 + \frac{1}{6}\omega_k^{\frac{n}{2}} + \frac{1}{6}\omega_k^{n-1} = \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{6} \exp \left[\frac{2\pi i}{n} k \right] + \frac{1}{6} \exp \left[-\frac{2\pi i}{n} k \right] + \frac{1}{6} \exp [\pi i k] = \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \cos \left(\frac{2\pi}{n} k \right) + \frac{1}{6} \exp [\pi i k] \\ \implies \lambda_1 &= \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \cos \left(\frac{2\pi}{n} \right) = \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \left(1 - \frac{2\pi^2}{n^2} + o \left(\frac{1}{n^3} \right) \right) \quad n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Quindi:

$$\tau = \frac{1}{1 - \lambda_1} \approx \frac{1}{\frac{1}{3} + \frac{2\pi^2}{3n^2}}$$

Ossia per $n \rightarrow \infty$, $\tau \rightarrow 3$.

¹Stiamo considerando gli indici shiftati di una posizione per cui λ_1 sarà il secondo autovalore di Q .

- (c) Il grafo barbell è aperiodico ed è costituito da due "cluster" completi collegati da un unico edge. Se $\lambda_1 \geq \lambda_2, \dots$ sono gli autovalori della relativa matrice P , allora vale la seguente:

$$\frac{1}{2}\phi_{\mathcal{G}}^2 \leq 1 - \lambda_2 \leq 2\phi_{\mathcal{G}}.$$

Poiché $Q = \frac{1}{2}P + \frac{1}{2}I$, allora, se $\lambda_2^{(Q)}$ è il secondo autovalore di Q , abbiamo:

$$\lambda_2^{(Q)} = \frac{1}{2}\lambda_2 + \frac{1}{2}.$$

Pertanto vale:

$$\frac{1}{4}\phi_{\mathcal{G}}^2 \leq 1 - \lambda_2^{(Q)} \leq \phi_{\mathcal{G}} \implies \frac{1}{\phi_{\mathcal{G}}} \leq \tau \leq \frac{4}{\phi_{\mathcal{G}}^2}$$

dove τ è il tempo di rilassamento della dinamica lazy nel grafo barbell. Calcoliamo quindi $\phi_{\mathcal{G}}$:

$$\phi_{\mathcal{G}} = \min_{\mathcal{U} \subseteq \mathcal{V}} \phi(\mathcal{U}) \quad \text{s.t.} \quad 0 \leq w_{\mathcal{U}} \leq \frac{1}{2} \mathbb{1}^T w$$

dove

$$w_{\mathcal{U}} = \sum_{i \in \mathcal{U}} w_i \quad \text{e} \quad \phi(\mathcal{U}) = \frac{\sum_{i \in \mathcal{U}} \sum_{j \in \mathcal{U}^C} W_{i,j}}{w_{\mathcal{U}}}.$$

Consideriamo ora il taglio lungo l'edge che separa i due "cluster" del grafo. Otteniamo:

$$\sum_{i \in \mathcal{U}} \sum_{j \in \mathcal{U}^C} W_{i,j} = 1.$$

Questo vale perchè la matrice di adiacenza di un grafo barbell è composta nel seguente modo:

$$W = \begin{bmatrix} \mathbb{1} \mathbb{1}^T - I & F \\ F^T & \mathbb{1} \mathbb{1}^T - I \end{bmatrix}$$

dove

$$F \in \mathbb{R}^{\frac{n}{2} \times \frac{n}{2}}, (F)_{\frac{n}{2},1} = 1, (F)_{i,j} = 0 \quad \text{altrimenti}$$

Scegliendo il taglio sull'edge che separa i due cluster, la quantità $\sum_{i \in \mathcal{U}} \sum_{j \in \mathcal{U}^C} W_{i,j}$ corrisponde a sommare tutti gli elementi della matrice

F che ha un unico elemento diverso da 0 ed è pari a 1. Abbiamo inoltre che:

$$w_{\mathcal{U}} = \left(\frac{n}{2} - 1\right) \frac{n}{2} + 1$$

Perché tutti i nodi in \mathcal{U} hanno grado $\frac{n}{2} - 1$ tranne uno che è quello collegato con l'altro cluster. Quest'ultimo ha grado $\frac{n}{2}$. In totale ci sono $\frac{n}{2}$ nodi in \mathcal{U} . Questo taglio è quello con la *bottleneck ratio* più alta, pertanto:

$$\phi_G = \frac{1}{\frac{n^2}{4} - \frac{n}{2} + 1}$$

da cui:

$$O(n^2) \leq \tau \leq O(n^4)$$

- (d) Scegliamo come condizioni iniziali per la convergenza al consenso le seguenti:

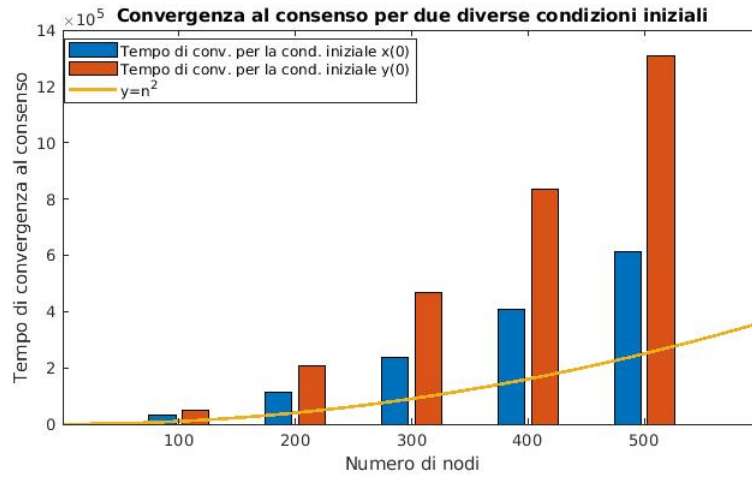
$$x(0) = (0, 1, 0, 1, 0, 1, \dots)$$

$$y(0) = (0, 0, 0, \dots, 0, 1, 1, 1, \dots, 1)$$

Nel caso di $x(0)$, **in ciascuno dei due cluster del grafo barbell**, metà dei nodi ha opinione 1 mentre l'altra metà ha opinione 0. Nel caso di $y(0)$ tutti i nodi di un cluster hanno opinione 1 mentre tutti i nodi dell'altro cluster hanno opinione 0.

```
1 clear
2 close all
3 clc
4
5
6 for i=1:5
7     n = 100*i;
8
9     C=zeros(n/2, n/2);
10     C(n/2, 1) = 1;
11     Wc=ones(n/2, n/2);
12     Wc=Wc-eye(n/2);
13     W=[Wc, C;
14         C', Wc];
15     G=graph(W);
16     deegre_centrality = G.degree';
17     P = diag(deegre_centrality.^-1)*W;
18     Q = 0.5*P + 0.5*eye(n);
19
20     e=ones(n, 1);
```

```
21     x_0 = zeros(n,1);
22     y_0 = zeros(n,1);
23     x_0(1:2:n)=e(1:2:n); %convergenza veloce
24     y_0(1:n/2)=e(1:n/2); %convergenza lenta
25
26
27
28     %---SIMULAZIONE DELLA DINAMICA-----
29     toll=10^-8;
30     %--simulazione convergenza veloce-----
31     x=x_0;
32     x_new=Q*x;
33     x_counter=1;
34     x_consensus = 0.5*ones(n,1);
35     while norm(x_consensus-x_new)>toll
36         x=x_new;
37         x_new = Q*x;
38         x_counter=x_counter+1;
39     end
40     x_counter_seq(i)=x_counter;
41
42     %--simulazione convergenza lenta-----
43     y=y_0;
44     y_new=Q*y;
45     y_counter=1;
46     while norm(x_consensus-y_new)>toll
47         y=y_new;
48         y_new = Q*y;
49         y_counter=y_counter+1;
50     end
51     y_counter_seq(i)=y_counter;
52 end
53
54 %--plot-----
55 x=linspace(0,600);
56 figure(1)
57 bar(100:100:500, [x_counter_seq',y_counter_seq']); hold on
58 plot(x, x.^2, 'linewidth', 2);
59 title('Convergenza al consenso per due diverse condizioni
        iniziali')
60 legend('Tempo di conv. per la cond. iniziale x(0)', 'Tempo di
        conv. per la cond. iniziale y(0)', 'y=n^2');
61 xlabel('Numero di nodi');
62 ylabel('Tempo di convergenza al consenso')
```



Come si può notare la convergenza per la condizione $y(0)$ scala molto più lentamente della condizione $x(0)$ rispetto al numero di nodi. Entrambe sono tuttavia sopra il limite inferiore teorico calcolato al punto precedente. Questo fenomeno dipende dal fatto che nel caso di $y(0)$ il consenso viene raggiunto utilizzando come unico canale di comunicazione il singolo edge che collega i due cluster. Nel caso di $x(0)$ questo non è necessario dal momento che le due opinioni sono distribuite uniformemente lungo tutto il grafo.