Homework 1

Giulio Nenna (s292399@studenti.polito.it)

November 30, 2021

Realizzato in collaborazione con Alessandro Bonaduce (s289906@studenti.polito.it), Davide Grande (s292174@studenti.polito.it), Ciro Balsamo (s289363@studenti.polito.it)

Esercizio 1.

(a) Per la dinamica P (non lazy) distinguiamo 2 casi:

- Se $\frac{n}{2}$ è dispari allora il grafo **non** è aperiodico, pertanto la convergenza della dinamica P non è garantita.
- Se $\frac{n}{2}$ è pari allora siano

$$p_1 = \{0, 1, 2, \ldots, n-1, 0\}$$

$$p_2 = \{0, 1, 2, \ldots \frac{n}{2}, 0\}$$

due cicli di lunghezza rispettivamente n e $\frac{n}{2} + 1$.

$$\frac{n}{2} \quad \text{pari} \quad \implies n = 4k,\, k \in \mathbb{N}$$

Abbiamo quindi trovato due cicli di lunghezza $4k$ e $2k + 1$ che sono numeri coprimi tra loro, pertanto il grafo è aperiodico e la convergenza è garantita. In particolare

$$x(t) \xrightarrow{t\to\infty} (\pi' x(0))\mathbf{1}$$

Poiché il grafo R_n è regolare, allora $\pi = \frac{1}{n}\mathbf{1}$. La dinamica Q converge sempre dal momento che vengno aggiunti self-loop ad ogni nodo e quindi il grafo risulta sempre aperiodico. In particolare, poiché:

$$\pi' P = \pi' \iff \pi' Q = \pi'$$

a parità di condizioni iniziali $x(0)$ la dinamica Q converge allo stesso consenso della dinamica P (nel caso in cui $\frac{n}{2}$ sia pari)

(b)

$$P = \frac{1}{3}W \implies Q = \frac{1}{6}W + \frac{1}{2}I$$

$$Q = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{6} & \cdots & \frac{1}{6} & \cdots & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{2} & \frac{1}{6} & \cdots & \frac{1}{6} & \cdots \\ \vdots & & & & & \end{bmatrix}$$

Q è una matrice circolare la cui prima riga q è così composta:

$$q_0 = \frac{1}{2}, \quad q_1 = q_{\frac{n}{2}} = q_{n-1} = \frac{1}{6}, \quad q_k = 0\,\forall k \notin \{1, 2, \frac{n}{2}, n-1\}.$$

(gli indici sono shiftati di una posizione, da 0 a $n-1$). Poiché Q è circolare allora lo spettro sarà dato da:

$$\lambda_k = \sum_{j=0}^{n-1} q_j \omega_k^j, \quad k = 0, \ldots, n-1$$

$$\omega_k = \exp\left[\frac{2\pi i}{n} k\right].$$

Pertanto:

$$\lambda_k = \frac{1}{2}\omega_k^0 + \frac{1}{6}\omega_k^1 + \frac{1}{6}\omega_k^{\frac{n}{2}} + \frac{1}{6}\omega_k^{n-1} =$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{6}\exp\left[\frac{2\pi i}{n}k\right] + \frac{1}{6}\exp\left[-\frac{2\pi i}{n}k\right] + \frac{1}{6}\exp\left[\pi i k\right] =$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\cos\left(\frac{2\pi}{n}k\right) + \frac{1}{6}\exp\left[\pi i k\right]$$

$$\implies \lambda_1 = \frac{2}{3} + \frac{1}{3}\cos\left(\frac{2\pi}{n}\right)$$