Homework 1

Giulio Nenna (s292399@studenti.polito.it)

December 4, 2021

Realizzato in collaborazione con Alessandro Bonaduce (s289906@studenti.polito.it), Davide Grande (s292174@studenti.polito.it), Ciro Balsamo (s289363@studenti.polito.it)

Esercizio 1.

(a) Per la dinamica P (non lazy) distinguiamo 2 casi:

- Se $\frac{n}{2}$ è dispari allora il grafo **non** è aperiodico, pertanto la convergenza della dinamica P non è garantita.
- Se $\frac{n}{2}$ è pari allora siano

$$p_1 = \{0, 1, 2, \dots, n-1, 0\}$$

$$p_2 = \{0, 1, 2, \dots \frac{n}{2}, 0\}$$

due cicli di lunghezza rispettivamente n e $\frac{n}{2} + 1$.

$$\frac{n}{2} \quad \text{pari} \quad \implies n = 4k,\, k \in \mathbb{N}$$

Abbiamo quindi trovato due cicli di lunghezza $4k$ e $2k + 1$ che sono numeri coprimi tra loro, pertanto il grafo è aperiodico e la convergenza è garantita. In particolare

$$x(t) \xrightarrow{t\to\infty} (\pi' x(0))\mathbf{1}$$

Poiché il grafo R_n è regolare, allora $\pi = \frac{1}{n}\mathbf{1}$. La dinamica Q converge sempre dal momento che vengno aggiunti self-loop ad ogni nodo e quindi il grafo risulta sempre aperiodico. In particolare, poiché:

$$\pi' P = \pi' \iff \pi' Q = \pi'$$

a parità di condizioni iniziali $x(0)$ la dinamica Q converge allo stesso consenso della dinamica P (nel caso in cui $\frac{n}{2}$ sia pari)

(b)

$$P = \frac{1}{3}W \implies Q = \frac{1}{6}W + \frac{1}{2}I$$

$$Q = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{6} & \cdots & \frac{1}{6} & \cdots & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{2} & \frac{1}{6} & \cdots & \frac{1}{6} & \cdots \\ \vdots & & & & & \end{bmatrix}$$

Q è una matrice circolare la cui prima riga q è così composta:

$$q_0 = \frac{1}{2}, \quad q_1 = q_{\frac{n}{2}} = q_{n-1} = \frac{1}{6}, \quad q_k = 0 \, \forall k \notin \{1, 2, \frac{n}{2}, n-1\}.$$

(gli indici sono shiftati di una posizione, da 0 a $n-1$). Poiché Q è circolare allora lo spettro sarà dato da:

$$\lambda_k = \sum_{j=0}^{n-1} q_j \omega_k^j, \quad k = 0, \ldots, n-1$$

$$\omega_k = \exp\left[\frac{2\pi i}{n} k\right].$$

Pertanto [1]:

$$\lambda_k = \frac{1}{2}\omega_k^0 + \frac{1}{6}\omega_k^1 + \frac{1}{6}\omega_k^{\frac{n}{2}} + \frac{1}{6}\omega_k^{n-1} =$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{6}\exp\left[\frac{2\pi i}{n}k\right] + \frac{1}{6}\exp\left[-\frac{2\pi i}{n}k\right] + \frac{1}{6}\exp\left[\pi i k\right] =$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\cos\left(\frac{2\pi}{n}k\right) + \frac{1}{6}\exp\left[\pi i k\right]$$

$$\implies \lambda_1 = \frac{2}{3} + \frac{1}{3}\cos\left(\frac{2\pi}{n}\right) = \frac{2}{3} + \frac{1}{3}\left(1 - \frac{2\pi^2}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) \quad n \to \infty.$$

Quindi:

$$\tau = \frac{1}{1-\lambda_1} \approx \frac{1}{\frac{1}{3} + \frac{2\pi^2}{3n^2}}$$

Ossia per $n \to \infty$, $\tau \to 3$.

[1] Stiamo considerando gli indici shiftati di una posizione per cui λ_1 sarà il secondo autovalore di Q.

(c) Il grafo barbell è aperiodico ed è costituito da due "cluster" completi collegati da un unico edge. Se $\lambda_1 \geq \lambda_2, \dots$ sono gli autovalori della relativa matrice P, allora vale la seguente:

$$\frac{1}{2}\phi_{\mathcal{G}}^2 \leq 1 - \lambda_2 \leq 2\phi_{\mathcal{G}}.$$

Poiché $Q = \frac{1}{2}P + \frac{1}{2}I$, allora, se $\lambda_2^{(Q)}$ è il secondo autovalore di Q, abbiamo:

$$\lambda_2^{(Q)} = \frac{1}{2}\lambda_2 + \frac{1}{2}.$$

Pertanto vale:

$$\frac{1}{4}\phi_{\mathcal{G}}^2 \leq 1 - \lambda_2^{(Q)} \leq \phi_{\mathcal{G}} \implies \frac{1}{\phi_{\mathcal{G}}} \leq \tau \leq \frac{4}{\phi_{\mathcal{G}}^2}$$

dove τ è il tempo di rilassamento della dinamica lazy nel grafo barbell. Calcoliamo quindi $\phi_{\mathcal{G}}$:

$$\phi_{\mathcal{G}} = \min_{\mathcal{U} \subseteq \mathcal{V}} \phi(\mathcal{U}) \quad \text{s.t.} \quad 0 \leq w_{\mathcal{U}} \leq \frac{1}{2}\mathbb{1}^T w$$

dove

$$w_{\mathcal{U}} = \sum_{i \in \mathcal{U}} w_i \quad \text{e} \quad \phi(\mathcal{U}) = \frac{\sum_{i \in \mathcal{U}} \sum_{j \in \mathcal{U}^C} W_{i,j}}{w_{\mathcal{U}}}.$$

Consideriamo ora il taglio lungo l'edge che separa i due "cluster" del grafo. Otteniamo:

$$\sum_{i \in \mathcal{U}} \sum_{j \in \mathcal{U}^C} W_{i,j} = 1.$$

Questo vale perchè la matrice di adiacenza di u grafo barbell è composta nel seguente modo:

$$W = \begin{bmatrix} \mathbb{1}\mathbb{1}^T - I & F \\ F^T & \mathbb{1}\mathbb{1}^T - I \end{bmatrix}$$

dove

$$F \in \mathbb{R}^{\frac{n}{2} \times \frac{n}{2}},\ (F)_{\frac{n}{2},1} = 1,\ (F)_{i,j} = 0 \quad \text{altrimenti}$$

Scegliendo il taglio sull'edge che separa i due cluster, la quantità $\sum_{i \in \mathcal{U}} \sum_{j \in \mathcal{U}^C} W_{i,j}$ corrisponde a sommare tutti gli elementi della matrice

F che ha un unico elemento diverso da 0 ed è pari a 1. Abbiamo inoltre che:

$$w_{\mathcal{U}} = \left(\frac{n}{2} - 1\right)\frac{n}{2} + 1$$

Perché tutti i nodi in $\mathcal{U}$ hanno grado $\frac{n}{2} - 1$ tranne uno che è quello collegato con l'altro cluster. Quest'ultimo ha grado $\frac{n}{2}$. In totale ci sono $\frac{n}{2}$ nodi in $\mathcal{U}$. Questo taglio è quello con la *bottleneck ratio* più alta, pertanto:

$$\phi_{\mathcal{G}} = \frac{1}{\frac{n^2}{4} - \frac{n}{2} + 1}$$

da cui:

$$O(n^2) \leq \tau \leq O(n^4)$$