

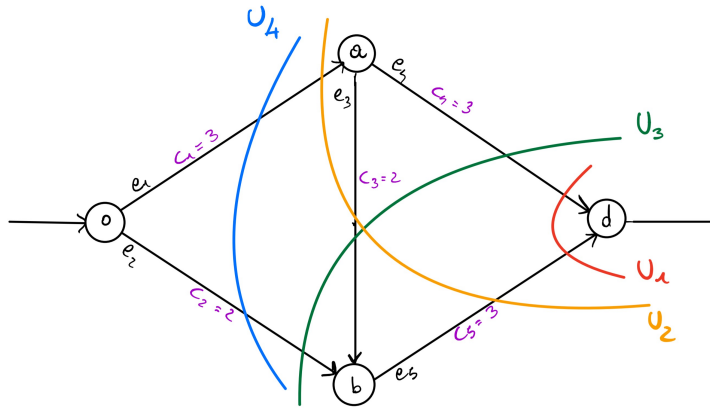
# Homework 1

Giulio Nenna (s245717@studenti.polito.it)

November 18, 2020

## Esercizio 1.

---



Tutti i possibili path  $o - d$  sono i seguenti:

1.  $p_{(1)} = o - a - d$
2.  $p_{(2)} = o - b - d$
3.  $p_{(3)} = o - a - b - d$

I possibili cut e annesse capacità sono:

$U_1 = \{d\}$	$C(U_1) = 5$
$U_2 = \{a, d\}$	$C(U_2) = 5$
$U_3 = \{b, d\}$	$C(U_3) = 7$
$U_4 = \{a, b, d\}$	$C(U_4) = 5$

- (a) Tutti i possibili colli di bottiglia del grafo hanno capacità pari a 5, quindi per ostruire qualsiasi tipo di flow unitario da  $o$  a  $d$  bisogna eliminare una capacità  $C^*$  tale che

$$C^* < 4$$

- (b) Dal momento che vale il teorema del *Max Flow - Min Cut*, le due unità di capacità devono essere distribuite in modo tale da aumentare la capacità del minimo taglio. Poiché ci sono ben tre tagli su 4 che rappresentano un minimo taglio ( $U_1, U_2, U_4$ ) è necessario aumentare la capacità su archi in comune a questi tre tagli. Una scelta possibile potrebbe essere quella di aggiungere un'unità di capacità ciascuno agli archi  $e_1$  ed  $e_4$  in modo tale che i tagli risultino:

$$\begin{array}{ll} U_1 = \{d\} & C(U_1) = 6 \\ U_2 = \{a, d\} & C(U_2) = 6 \\ U_3 = \{b, d\} & C(U_3) = 9 \\ U_4 = \{a, b, d\} & C(U_4) = 6 \end{array}$$

Aumentando in questo modo il massimo throughput da 5 a 6

- (c) Assegnati i seguenti delay a ciascun arco:

$$d_1(x) = d_5(x) = x + 1, \quad d_3(x) = 1, \quad d_2(x) = d_4(x) = 5x + 1$$

e definendo con  $z_i$  il flusso sull' $i$ -esimo path, si calcola il delay complessivo su ciascun path:

$$\begin{aligned} d_{p_1} &= 6z_1 + z_3 + 2 \\ d_{p_2} &= 6z_2 + z_3 + 2 \\ d_{p_3} &= 2z_3 + z_1 + z_2 + 3 \end{aligned}$$

Si calcola ora l'equilibrio di Wardrop considerando che  $z_1 + z_2 + z_3 = 1$  (quindi che  $z_1 + z_2 = 1 - z_3$ ) e che il delay su ciascun path con flusso non nullo deve essere minore di qualsiasi altro delay.

$$z_1 < 0 \Rightarrow \quad 6z_1 + z_3 + 2 \leq 2z_3 + z_1 + z_2 + 3, \quad \Rightarrow z_1 \leq \frac{1}{3}$$

$$\begin{aligned}
z_3 > 0 \Rightarrow \quad 2z_3 + z_1 + z_2 + 3 \leq 6z_1 + z_3 + 2 &\Rightarrow z_1 \geq \frac{1}{3} \\
&2z_3 + z_1 + z_2 + 3 \leq 6z_2 + z_3 + 2 &\Rightarrow z_2 \geq \frac{1}{3}
\end{aligned}$$

$$z_2 > 0 \Rightarrow \quad 6z_2 + z_3 + 2 \leq 2z_3 + z_1 + z_2 + 3 \quad \Rightarrow z_2 \leq \frac{1}{3}$$

Queste condizioni implicano che un possibile vettore di flusso che soddisfi le condizioni di Wardrop sia il seguente:

$$z_{\text{Wardrop}} = z_W = \left( \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3} \right)$$

Il ritardo totale che deriva da questo vettore di flusso è dato da:

$$\frac{2}{3} \left( \frac{2}{3} + 1 \right) + \frac{5}{9} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{5}{9} + \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \left( \frac{2}{3} + 1 \right) = \frac{13}{3}$$

- (d) Calcolare l'ottimo di sistema equivale a minimizzare il ritardo totale in funzione del flusso su ciascun path  $o - d$ :

$$\min_z (z_1 + z_3)(z_1 + z_3 + 1) + (5z_2^2 + z_2) + (z_3) + (5z_1^2 + z_1) + (z_2 + z_3)(z_2 + z_3 + 1)$$

Utilizzando la condizione di flusso unitario ( $z_1 + z_2 + z_3 = 1$ ) si ottiene:

$$\begin{aligned}
&\min_z (1 - z_2)(2 - z_2) + (5z_2^2 + z_2) + \\
&+ (1 - z_1 - z_2) + (5z_1^2 + z_1) + (1 - z_1)(2 - z_2) = \\
&\min_z 3(2z_1^2 - z_1) + 3(2z_2^2 - z_2) + 5
\end{aligned}$$

Da cui si deduce:

$$z_1 = \frac{1}{4} \qquad z_2 = \frac{1}{4}$$

Quindi:

$$z_{\text{Sistema}} = z_S = \left( \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2} \right)$$

Questa configurazione dei flussi produce un ritardo totale dato da:

$$\frac{3}{4} \left( \frac{3}{4} + 1 \right) + \frac{1}{4} \left( \frac{5}{4} + 1 \right) + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \left( \frac{5}{4} + 1 \right) + \frac{3}{4} \left( \frac{3}{4} + 1 \right) = \frac{17}{4}$$

- (e) Il costo totale dell'anarchia è dato dal rapporto tra il ritardo totale dell'ottimo di sistema e il ritardo totale dell'equilibrio di Wardrop

$$\frac{\frac{13}{3}}{\frac{17}{4}} = \frac{52}{51}$$

- (f) Siano  $f_{e_i}^*$  e  $f_{e_i}^{(w)}$  i flussi su ciascun arco  $e_i$  rispettivamente nella configurazione dell'ottimo di sistema e in quella di equilibrio di Wardrop. Sia il ritardo totale su ciascun arco  $e_i$  definito come  $C_{e_i}(f_e) = d_{e_i} f_{e_i}$ . La configurazione ottimale dei pedaggi per ottenere un costo dell'anarchia unitario è la seguente:

$$\omega_{e_i} = C'_{e_i}(f_{e_i}^*) - d_{e_i}(f_{e_i}^*) = f_{e_i}^* d'_{e_i}(f_{e_i}^*)$$

che nel caso specifico si traduce in:

$$\begin{aligned} \omega_{e_1} &= \frac{3}{4} 1 = \frac{3}{4} \\ \omega_{e_2} &= \frac{1}{4} 5 = \frac{5}{4} \\ \omega_{e_3} &= 0 \\ \omega_{e_4} &= \frac{5}{4} \\ \omega_{e_5} &= \frac{3}{4} \end{aligned}$$

## Esercizio 2.

---

- (a) La matrice dei pesi  $W$  è la seguente:

$$W = \begin{bmatrix} a & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

la matrice dei pesi normalizzata è data da:

$$\omega = \begin{pmatrix} a+1 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow P = \begin{bmatrix} \frac{a}{a+1} & \frac{1}{a+1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Di conseguenza il laplaciano è dato da:

$$L = D - W = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

(b) La dinamica di opinione di French-De Groot è data da:

$$x(t+1) = Px(t)$$

dove  $x(t) = (x_1(t), x_2(t), x_3(t), x_4(t))$  e  $x_i(t)$  rappresenta il valore dell'opinione del nodo  $i$  al tempo  $t$ .

(c) Affinchè l'opinione su  $\mathcal{G}$  converga ad un consenso il grafo deve essere fortemente connesso ed aperiodico. Date le ridotte dimensioni del grafo è possibile verificare queste due proprietà manualmente, notando che è possibile raggiungere qualsiasi nodo a partire da qualsiasi posizione sul grafo e che ad esempio il nodo 4 ha un ciclo di lunghezza 2 e un altro di lunghezza 3. Connessione ed aperiodicità sono indipendenti dal valore di  $a$  pertanto vale:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \pi' x(0) \quad \forall a \geq 0$$

Dal momento che  $\mathcal{G}$  è bilanciato la misura di probabilità invariante  $\pi$  è proporzionale al vettore  $\omega$ . In particolare:

$$\pi = \frac{\omega}{\mathbb{1}'\omega} = \left( \frac{a+1}{a+6} \quad \frac{2}{a+6} \quad \frac{1}{a+6} \quad \frac{2}{a+6} \right)'$$

Pertanto il valore del consenso converge ad un valore finito fintanto che  $a \neq -6$ , condizione automaticamente verificata dal momento che  $a \geq 0$

(d) Nel caso particolare in cui  $a = 0$  si ha:

$$\pi = \left( \frac{1}{6} \quad \frac{1}{3} \quad \frac{1}{6} \quad \frac{1}{3} \right)'$$

Per cui, date le condizioni iniziali  $x(0)$ , il consenso raggiunge il seguente valore:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x_i(t) = \pi' x(0) = \frac{1}{3} \quad \forall i = 1 \dots 4$$

(e) Poiché il consenso viene raggiunto  $\forall a \geq 0$ , date le condizioni iniziali  $x(0)$ , vale la seguente:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x_1(t) = \pi' x(0) = \frac{1}{a+6}(-a+1+2-1+2) = \frac{2-a}{a+6}$$

segue quindi che:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x_1(t) \leq 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{2-a}{a+6} \leq 0 \quad \Rightarrow \quad a \geq 2$$

(f) Date  $x_i(0)$  variabili aleatorie indipendenti e identicamente distribuite tali che  $Var(x_i(0)) = 1 \quad \forall i = 1 \dots 4$ , vale la seguente:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x_1(t) = \frac{a+1}{a+6}x_1(0) + \frac{2}{a+6}x_2(0) + \frac{1}{a+6}x_3(0) + \frac{2}{a+6}x_4(0)$$

Poiché le variabili sono i.i.d. e  $Var(x_i(0)) = 1 \quad \forall i = 1 \dots 4$  vale:

$$\begin{aligned} Var\left(\lim_{t \rightarrow \infty} x_1(t)\right) &= \left(\frac{a+1}{a+6}\right)^2 Var(x_1(0)) + \left(\frac{2}{a+6}\right)^2 Var(x_2(0)) + \\ &+ \left(\frac{1}{a+6}\right)^2 Var(x_3(0)) + \left(\frac{2}{a+6}\right)^2 Var(x_4(0)) = \\ &= \frac{a^2 + 2a + 10}{(a+6)^2} = v(a) \end{aligned}$$

Essendo  $v(a)$  una funzione convessa, si verifica facilmente che raggiunge un minimo per:

$$a = \frac{4}{5}$$

Che rappresenta il valore di  $a$  per cui viene minimizzata la varianza del consenso.

**Esercizio 3.**

- (a) Dal momento che il grafo in analisi è un grafo fortemente connesso e aciclico la dinamica di French-De Groot convergerà ad un consenso come visto per il secondo esercizio. Poichè il grafo è undirected la misura di probabilità invariante è proporzionale al vettore  $\omega$ , quest'ultimo è facilmente calcolabile in quanto corrisponde in questo caso al vettore dei gradi uscenti di ogni nodo. In particolare:

$$\omega = (1, 3, 3, 4, 3, 4, 2, 2, 3, 1, 3, 6, 1, 2, 1)$$

$$\pi = \frac{1}{38}\omega$$

quindi dal momento che il vettore degli stati iniziali è dato da:

$$x(0) = (0, 0, 0, 0, 0, -1, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0)$$

il valore del consenso sarà:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x_i(t) = (\pi' x(0))_i = \frac{6 - 4}{38} = \frac{1}{19} \quad \forall i = 1 \dots 15$$

- (b) Il seguente codice MATLAB produce una simulazione della dinamica di French-De Groot assegnando i due nodi stubborn {Strozzi, Medici} e fornendo una rappresentazione grafica della dinamica tramite la colorazione progressiva dei nodi in funzione della loro opinione

```

close all
clear all
clc
%Costruzione della matrice di adiacenza
W = zeros (15);
W(1,12)=1; W(12,1)=1; W(3,2)=1; W(2,3)=1; W(13,2)=1;
W(2,13)=1; W(14,2)=1; W(2,14)=1; W(12,3)=1; W(3,12)=1;
W(14,3)=1; W(3,14)=1; W(12,4)=1; W(4,12)=1; W(4,15)=1;
W(15,4)=1; W(5,14)=1; W(14,5)=1; W(5,15)=1; W(15,5)=1;
W(6,7)=1; W(7,6)=1; W(6,12)=1; W(12,6)=1; W(15,6)=1;
W(6,15)=1; W(13,8)=1; W(8,13)=1; W(15,8)=1; W(8,15)=1;
W(9,15)=1; W(15,9)=1; W(11,10)=1; W(10,11)=1; W(10,15)=1;
W(15,10)=1; W(13,14)=1; W(14,13)=1;

Names={'Lamberteschi', 'Peruzzi', 'Bischeri','Tornabuoni',

```

---

```

'Ridolfi', 'Albizzi', 'Ginori', 'Barbadori',
'Acciaiuoli', 'Salviati', 'Pazzi', 'Guadagni',
'Castellani', 'Strozzi', 'Medici'}';
index=[1:15]';
x=zeros(15,1); %Vettore di opinioni

%Inserisco i due nodi stubborn
x(15)=1;
x(14)=-1;

%Costruzione del Grafo in un oggetto graph
NodeTable=table(index, Names, x); %Informazioni sui nodi
G=graph(W,NodeTable);

%-----Plot del grafo iniziale-----

%Colorazione dei nodi
color=zeros(15,3);
for i=1:15
    if x(i)>0
        color(i,1)=x(i);
    else
        color(i,3)=abs(x(i));
    end
end

plot(G, 'NodeLabel', G.Nodes.Names,
      'NodeColor', color,
      'MarkerSize', 10 )

%-----Calcolo della dinamica di averaging con nodi stubborn-----
w=W*ones(15,1);
D=diag(w);
P=D\W;

x_curr=x(1:13);          %x(t)
i=1;                     %contatore
MaxIter=100;             %iterazioni massime della simulazione
tol=10e-4;               %Tolleranza come criterio di stop della simulazione
Q=P(1:13,1:13);          %Matrice Q della dinamica
Eu=P(1:13,14:15)*x(14:15); %Fattore Eu che dipende dai nodi stubborn
x_real=(eye(13)-Q)\Eu;    %Calcolo del vettore delle
                        %opinioni limite reale secondo il teorema

x_next=zeros(13,1);      %x(t+1)
err=1;
X=zeros(13,MaxIter);     %Matrice degli stati dei nodi nel tempo
X(:,1)=x_curr;           %Inizializzazione della matrice

while(i<MaxIter && err>tol)

```



---

```

x_next=Q*x_curr+Eu; %DINAMICA DI AVERAGING CON NODI STUBBORN

err=norm(x_next-x_curr)/norm(x_next);

G.Nodes.x(1:13)=x_next;
x_curr=x_next;
i=i+1;

X(:,i)=x_curr;

%-----Plot del grafo-----
color=zeros(15,3);
for j=1:15
    if G.Nodes.x(j)>0
        color(j,1)=G.Nodes.x(j);
    else
        color(j,3)=abs(G.Nodes.x(j));
    end
end
plot(G, 'NodeLabel', G.Nodes.Names,
      'NodeColor', color,
      'MarkerSize', 10 ,
      'NodeFontSize', 10)
title('Evoluzione delle opinioni nella simulazione della dinamica')
pause(0.5);
%-----

end

%Plot delle traiettorie dei nodi-----

X=X(:,1:i); %Riduzione delle dimensioni per salvare spazio
t=1:i
for k=1:13
    figure(2)
    hold on

    plot(t,X(k,:), 'Linewidth', 2)

end
title('Traiettorie delle opinioni di ciascun nodo (non stubborn)')
xlabel('Tempo')
ylabel('Opinione')
legend(Names(1:13))

%-----

%Calcolo dell'errore rispetto al valore reale ottenuto dal teorema

```

```

x_sym=G.Nodes.x(1:13)
x_real
err_rel=norm(x_real-x_sym)/norm(x_real)

%Plot del grafo con opinioni reali
G.Nodes.x(1:13)=x_real;

for i=1:15
    if G.Nodes.x(i)>0
        color(i,1)=G.Nodes.x(i);
    else
        color(i,3)=abs(G.Nodes.x(i));
    end
end
end
figure(3)
plot(G, 'NodeLabel', G.Nodes.Names,
      'NodeColor', color,
      'Markersize', 10,
      'NodeFontSize', 10)
title('Convergenza delle opinioni calcolata direttamente')

```

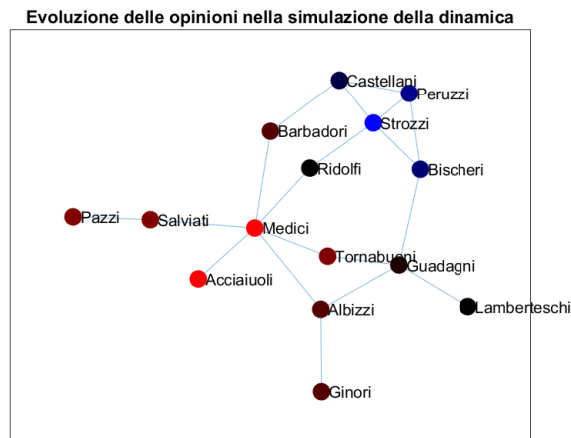


Figure 1: Stato delle opinioni dopo 2 iterazioni

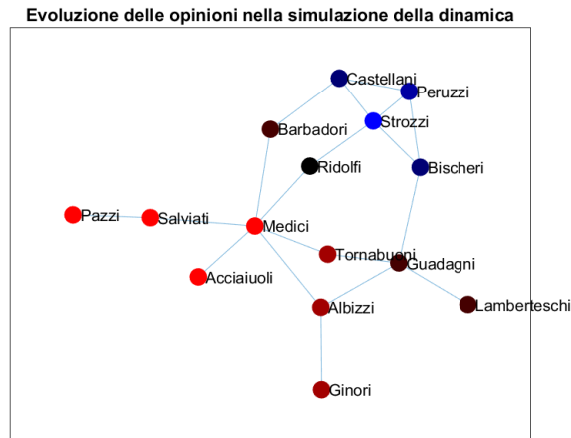


Figure 2: Stato delle opinioni dopo 25 iterazioni

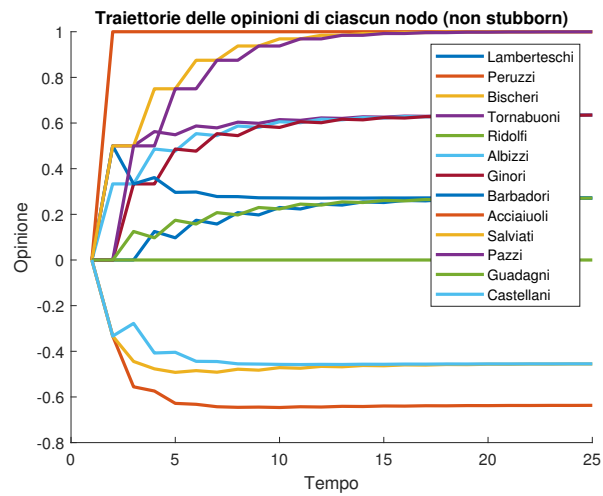


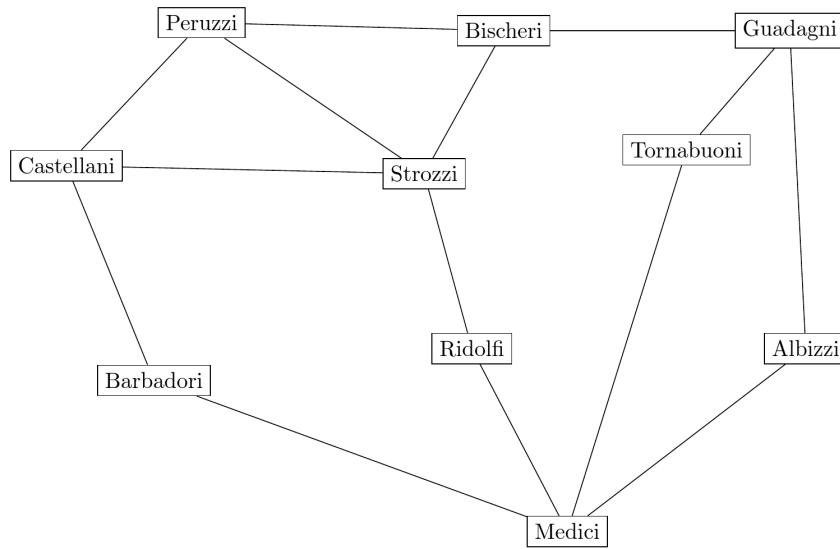
Figure 3: traiettoria delle opinioni

- (c) Per calcolare analiticamente il vettore di equilibrio della dinamica di averaging con insieme di nodi stubborn dato da

$$\mathcal{S} = \{\text{Medici}, \text{Strozzi}, \text{Castellani}, \text{Guadagni}\}$$

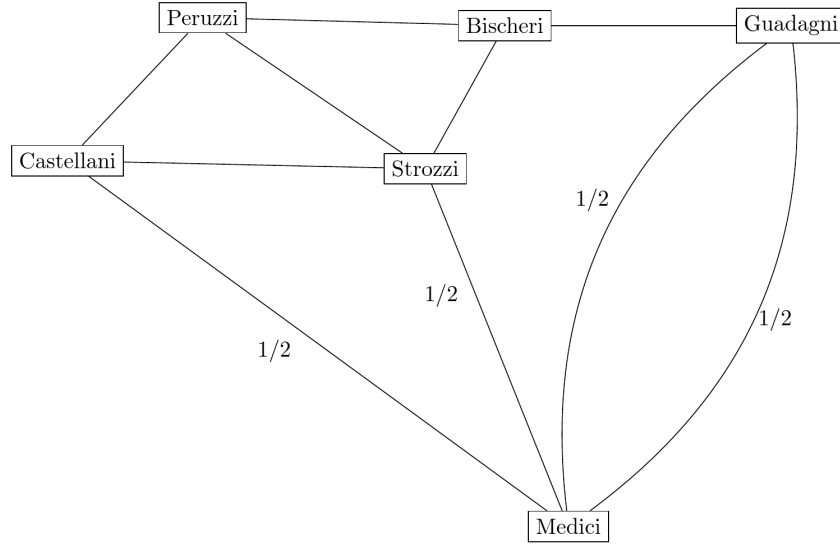
ci si può avvalere dell'analogia con le reti elettriche ed effettuare alcune semplificazioni.

Si può inizialmente andare ad effettuare un operazione di *Glueing* sui nodi che ricevono influenza in maniera univoca da un unico nodo, in particolare:



$$\begin{aligned}
 x_{\text{Lamberteschi}} &= x_{\text{Guadagni}} & x_{\text{Albizzi}} &= x_{\text{Ginori}} \\
 x_{\text{Salviati}} &= x_{\text{Pazzi}} = x_{\text{Medici}} & x_{\text{Acciaiuoli}} &= x_{\text{Medici}}
 \end{aligned}$$

Il grafo può quindi essere ulteriormente semplificato andando ad eliminare i nodi  $\{\text{Barbadori, Ridolfi, Tornabuoni, Guadagni}\}$  e aggiornando di conseguenza i pesi degli archi:



Risulta quindi evidente che, dal momento che i nodi Peruzzi e Bischieri sono esclusivamente influenzati da nodi stubborn con opinione  $u = -1$ , necessariamente:

$$x_{\text{Peruzzi}} = x_{\text{Bischieri}} = -1$$

Sfruttando ora l'analogia con la rete elettrica è possibile reintrodurre i nodi eliminati tramite la regola della serie, in particolare per il nodo Barbadori vale:

$$\Phi_{\text{Medici, Castellani}} = \frac{1}{2} (x_{\text{Medici}} - x_{\text{Castellani}}) = 1 = \Phi$$

Quindi necessariamente

$$\begin{aligned} \Phi = 1 &= 1 (x_{\text{Medici}} - x_{\text{Barbadori}}) \Rightarrow \\ &\Rightarrow x_{\text{Barbadori}} = 0 \end{aligned}$$

Analogamente per il resto dei nodi eliminati con la regola della serie vale:

$$x_{\text{Barbadori}} = x_{\text{Ridolfi}} = x_{\text{Tornabuoni}} = x_{\text{Albizzi}} = 0$$