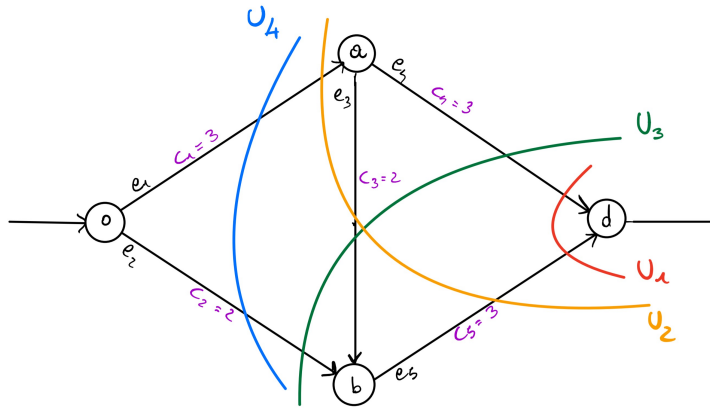


Homework 1

Giulio Nenna (s245717@studenti.polito.it)

November 18, 2020

Esercizio 1.



Tutti i possibili path $o - d$ sono i seguenti:

1. $p_{(1)} = o - a - d$
2. $p_{(2)} = o - b - d$
3. $p_{(3)} = o - a - b - d$

I possibili cut e annesse capacità sono:

$U_1 = \{d\}$	$C(U_1) = 5$
$U_2 = \{a, d\}$	$C(U_2) = 5$
$U_3 = \{b, d\}$	$C(U_3) = 7$
$U_4 = \{a, b, d\}$	$C(U_4) = 5$

- (a) Tutti i possibili colli di bottiglia del grafo hanno capacità pari a 5, quindi per ostruire qualsiasi tipo di flow unitario da o a d bisogna eliminare una capacità C^* tale che

$$C^* < 4$$

- (b) Dal momento che vale il teorema del *Max Flow - Min Cut*, le due unità di capacità devono essere distribuite in modo tale da aumentare la capacità del minimo taglio. Poiché ci sono ben tre tagli su 4 che rappresentano un minimo taglio (U_1, U_2, U_4) è necessario aumentare la capacità su archi in comune a questi tre tagli. Una scelta possibile potrebbe essere quella di aggiungere un'unità di capacità ciascuno agli archi e_1 ed e_4 in modo tale che i tagli risultino:

$$\begin{array}{ll} U_1 = \{d\} & C(U_1) = 6 \\ U_2 = \{a, d\} & C(U_2) = 6 \\ U_3 = \{b, d\} & C(U_3) = 9 \\ U_4 = \{a, b, d\} & C(U_4) = 6 \end{array}$$

Aumentando in questo modo il massimo throughput da 5 a 6

- (c) Assegnati i seguenti delay a ciascun arco:

$$d_1(x) = d_5(x) = x + 1, \quad d_3(x) = 1, \quad d_2(x) = d_4(x) = 5x + 1$$

e definendo con z_i il flusso sull' i -esimo path, si calcola il delay complessivo su ciascun path:

$$\begin{aligned} d_{p_1} &= 6z_1 + z_3 + 2 \\ d_{p_2} &= 6z_2 + z_3 + 2 \\ d_{p_3} &= 2z_3 + z_1 + z_2 + 3 \end{aligned}$$

Si calcola ora l'equilibrio di Wardrop considerando che $z_1 + z_2 + z_3 = 1$ (quindi che $z_1 + z_2 = 1 - z_3$) e che il delay su ciascun path con flusso non nullo deve essere minore di qualsiasi altro delay.

$$z_1 < 0 \Rightarrow \quad 6z_1 + z_3 + 2 \leq 2z_3 + z_1 + z_2 + 3, \quad \Rightarrow z_1 \leq \frac{1}{3}$$

$$\begin{aligned}
z_3 > 0 \Rightarrow \quad 2z_3 + z_1 + z_2 + 3 \leq 6z_1 + z_3 + 2 &\Rightarrow z_1 \geq \frac{1}{3} \\
&2z_3 + z_1 + z_2 + 3 \leq 6z_2 + z_3 + 2 &\Rightarrow z_2 \geq \frac{1}{3}
\end{aligned}$$

$$z_2 > 0 \Rightarrow \quad 6z_2 + z_3 + 2 \leq 2z_3 + z_1 + z_2 + 3 \quad \Rightarrow z_2 \leq \frac{1}{3}$$

Queste condizioni implicano che un possibile vettore di flusso che soddisfi le condizioni di Wardrop sia il seguente:

$$z_{\text{Wardrop}} = z_W = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3} \right)$$

Il ritardo totale che deriva da questo vettore di flusso è dato da:

$$\frac{2}{3} \left(\frac{2}{3} + 1 \right) + \frac{5}{9} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{5}{9} + \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \left(\frac{2}{3} + 1 \right) = \frac{13}{3}$$

- (d) Calcolare l'ottimo di sistema equivale a minimizzare il ritardo totale in funzione del flusso su ciascun path $o - d$:

$$\min_z (z_1 + z_3)(z_1 + z_3 + 1) + (5z_2^2 + z_2) + (z_3) + (5z_1^2 + z_1) + (z_2 + z_3)(z_2 + z_3 + 1)$$

Utilizzando la condizione di flusso unitario ($z_1 + z_2 + z_3 = 1$) si ottiene:

$$\begin{aligned}
&\min_z (1 - z_2)(2 - z_2) + (5z_2^2 + z_2) + \\
&+ (1 - z_1 - z_2) + (5z_1^2 + z_1) + (1 - z_1)(2 - z_2) = \\
&\min_z 3(2z_1^2 - z_1) + 3(2z_2^2 - z_2) + 5
\end{aligned}$$

Da cui si deduce:

$$z_1 = \frac{1}{4} \qquad z_2 = \frac{1}{4}$$

Quindi:

$$z_{\text{Sistema}} = z_S = \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2} \right)$$

Questa configurazione dei flussi produce un ritardo totale dato da:

$$\frac{3}{4} \left(\frac{3}{4} + 1 \right) + \frac{1}{4} \left(\frac{5}{4} + 1 \right) + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \left(\frac{5}{4} + 1 \right) + \frac{3}{4} \left(\frac{3}{4} + 1 \right) = \frac{17}{4}$$

- (e) Il costo totale dell'anarchia è dato dal rapporto tra il ritardo totale dell'ottimo di sistema e il ritardo totale dell'equilibrio di Wardrop

$$\frac{\frac{13}{3}}{\frac{17}{4}} = \frac{52}{51}$$

- (f) Siano $f_{e_i}^*$ e $f_{e_i}^{(w)}$ i flussi su ciascun arco e_i rispettivamente nella configurazione dell'ottimo di sistema e in quella di equilibrio di Wardrop. Sia il ritardo totale su ciascun arco e_i definito come $C_{e_i}(f_e) = d_{e_i} f_{e_i}$. La configurazione ottimale dei pedaggi per ottenere un costo dell'anarchia unitario è la seguente:

$$\omega_{e_i} = C'_{e_i}(f_{e_i}^*) - d_{e_i}(f_{e_i}^*) = f_{e_i}^* d'_{e_i}(f_{e_i}^*)$$

che nel caso specifico si traduce in:

$$\begin{aligned} \omega_{e_1} &= \frac{3}{4} 1 = \frac{3}{4} \\ \omega_{e_2} &= \frac{1}{4} 5 = \frac{5}{4} \\ \omega_{e_3} &= 0 \\ \omega_{e_4} &= \frac{5}{4} \\ \omega_{e_5} &= \frac{3}{4} \end{aligned}$$

Esercizio 2.

This question's number will be auto-incremented.

Nam dui ligula, fringilla a, euismod sodales, sollicitudin vel, wisi. Morbi auctor lorem non justo. Nam lacus libero, pretium at, lobortis vitae, ultricies

et, tellus. Donec aliquet, tortor sed accumsan bibendum, erat ligula aliquet magna, vitae ornare odio metus a mi. Morbi ac orci et nisl hendrerit mollis. Suspendisse ut massa. Cras nec ante. Pellentesque a nulla. Cum sociis natoque penatibus et magnis dis parturient montes, nascetur ridiculus mus. Aliquam tincidunt urna. Nulla ullamcorper vestibulum turpis. Pellentesque cursus luctus mauris.

3. Super Fancy Named Question

This question was given a fancy name!

Nulla malesuada porttitor diam. Donec felis erat, congue non, volutpat at, tincidunt tristique, libero. Vivamus viverra fermentum felis. Donec nonummy pellentesque ante. Phasellus adipiscing semper elit. Proin fermentum massa ac quam. Sed diam turpis, molestie vitae, placerat a, molestie nec, leo. Maecenas lacinia. Nam ipsum ligula, eleifend at, accumsan nec, suscipit a, ipsum. Morbi blandit ligula feugiat magna. Nunc eleifend consequat lorem. Sed lacinia nulla vitae enim. Pellentesque tincidunt purus vel magna. Integer non enim. Praesent euismod nunc eu purus. Donec bibendum quam in tellus. Nullam cursus pulvinar lectus. Donec et mi. Nam vulputate metus eu enim. Vestibulum pellentesque felis eu massa.

Esercizio 4.

Using the `induction` environment is a great way to typeset induction proofs!

Base Case

Here I have my base case. This is usually about 1-2 lines of text that is not entirely difficult to come up with. That doesn't mean it's not important though!

Induction Hypothesis

Assume cool things to make proof work. Look, math:

$$a^2 + b^2 = c^2$$

Induction Step

Prove all the things. When in doubt, write in Latin, because things written in Latin sound more true. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit. Maecenas tempor risus in dapibus aliquam. Donec at euismod dui. In libero turpis, blandit quis vestibulum ac, rutrum sit amet est. Suspendisse nec lacus vel dui lobortis lacinia at sit amet risus. Fusce dui ex, imperdiet nec finibus ut, bibendum a lacus.

Therefore, we have proven the claim by induction in the `induction` environment.

Esercizio 5.

Use the `arabicparts` environment to include the questionCounter number in the list.

5.1) Use `LATEX`

5.2) ???

5.3) Profit!

Sed commodo posuere pede. Mauris ut est. Ut quis purus. Sed ac odio. Sed vehicula hendrerit sem. Duis non odio. Morbi ut dui. Sed accumsan risus eget odio. In hac habitasse platea dictumst. Pellentesque non elit. Fusce sed justo eu urna porta tincidunt. Mauris felis odio, sollicitudin sed,

volutpat a, ornare ac, erat. Morbi quis dolor. Donec pellentesque, erat ac sagittis semper, nunc dui lobortis purus, quis congue purus metus ultricies tellus. Proin et quam. Class aptent taciti sociosqu ad litora torquent per conubia nostra, per inceptos hymenaeos. Praesent sapien turpis, fermentum vel, eleifend faucibus, vehicula eu, lacus.

Esercizio 6.

Use the `alphaparts` environment for letters instead of numbers.

- (a) Use `\LaTeX`
- (b) ???
- (c) Profit!

Esercizio 7.

Question part numbers are auto-incremented within the same question, so if you have some question parts...

- (a) Use `\LaTeX`
- (b) ???

Followed by some additional text, followed by some more question parts:

- (c) Profit!

All parts will be continuously numbered.

Esercizio 8.

Question numbers continue to auto-increment, regardless of question type.

Quisque ullamcorper placerat ipsum. Cras nibh. Morbi vel justo vitae lacus tincidunt ultrices. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit. In hac habitasse platea dictumst. Integer tempus convallis augue. Etiam facilisis. Nunc elementum fermentum wisi. Aenean placerat. Ut imperdiet, enim sed gravida sollicitudin, felis odio placerat quam, ac pulvinar elit purus

eget enim. Nunc vitae tortor. Proin tempus nibh sit amet nisl. Vivamus quis tortor vitae risus porta vehicula.

Task 9.

This question has a different question type!

Fusce mauris. Vestibulum luctus nibh at lectus. Sed bibendum, nulla a faucibus semper, leo velit ultricies tellus, ac venenatis arcu wisi vel nisl. Vestibulum diam. Aliquam pellentesque, augue quis sagittis posuere, turpis lacus congue quam, in hendrerit risus eros eget felis. Maecenas eget erat in sapien mattis porttitor. Vestibulum porttitor. Nulla facilisi. Sed a turpis eu lacus commodo facilisis. Morbi fringilla, wisi in dignissim interdum, justo lectus sagittis dui, et vehicula libero dui cursus dui. Mauris tempor ligula sed lacus. Duis cursus enim ut augue. Cras ac magna. Cras nulla. Nulla egestas. Curabitur a leo. Quisque egestas wisi eget nunc. Nam feugiat lacus vel est. Curabitur consectetur.

Question 10.

You can still do things like nesting lists inside of these environments.

(a) Use \LaTeX

(a) Open terminal

(b) Open vim

(c) Write LaTeX

(b) ???

(c) Profit!

Morbi luctus, wisi viverra faucibus pretium, nibh est placerat odio, nec commodo wisi enim eget quam. Quisque libero justo, consectetur a, feugiat vitae, porttitor eu, libero. Suspendisse sed mauris vitae elit sollicitudin malesuada. Maecenas ultricies eros sit amet ante. Ut venenatis velit. Maecenas sed mi eget dui varius euismod. Phasellus aliquet volutpat odio. Vestibulum ante ipsum primis in faucibus orci luctus et ultrices posuere cubilia Curae; Pellentesque sit amet pede ac sem eleifend consectetur. Nullam elementum, urna vel imperdiet sodales, elit ipsum pharetra ligula, ac pretium ante justo a nulla. Curabitur tristique arcu eu metus. Vestibulum lectus. Proin mauris. Proin eu nunc eu urna hendrerit faucibus. Aliquam auctor, pede

consequat laoreet varius, eros tellus scelerisque quam, pellentesque hendrerit ipsum dolor sed augue. Nulla nec lacus.

Question 9001.

It's over 9000!!!

Suspendisse vel felis. Ut lorem lorem, interdum eu, tincidunt sit amet, laoreet vitae, arcu. Aenean faucibus pede eu ante. Praesent enim elit, rutrum at, molestie non, nonummy vel, nisl. Ut lectus eros, malesuada sit amet, fermentum eu, sodales cursus, magna. Donec eu purus. Quisque vehicula, urna sed ultricies auctor, pede lorem egestas dui, et convallis elit erat sed nulla. Donec luctus. Curabitur et nunc. Aliquam dolor odio, commodo pretium, ultricies non, pharetra in, velit. Integer arcu est, nonummy in, fermentum faucibus, egestas vel, odio.

Question 9002.

You can also use the `section` macro for starting a question.

Suspendisse vitae elit. Aliquam arcu neque, ornare in, ullamcorper quis, commodo eu, libero. Fusce sagittis erat at erat tristique mollis. Maecenas sapien libero, molestie et, lobortis in, sodales eget, dui. Morbi ultrices rutrum lorem. Nam elementum ullamcorper leo. Morbi dui. Aliquam sagittis. Nunc placerat. Pellentesque tristique sodales est. Maecenas imperdiet lacinia velit. Cras non urna. Morbi eros pede, suscipit ac, varius vel, egestas non, eros. Praesent malesuada, diam id pretium elementum, eros sem dictum tortor, vel consectetur odio sem sed wisi.

9003. Using the `section` Macro

The starred `section*` works as well.

Sed feugiat. Cum sociis natoque penatibus et magnis dis parturient montes, nascetur ridiculus mus. Ut pellentesque augue sed urna. Vestibulum diam eros, fringilla et, consectetur eu, nonummy id, sapien. Nullam at lectus. In sagittis ultrices mauris. Curabitur malesuada erat sit amet massa. Fusce blandit. Aliquam erat volutpat. Aliquam euismod. Aenean vel lectus. Nunc imperdiet justo nec dolor.