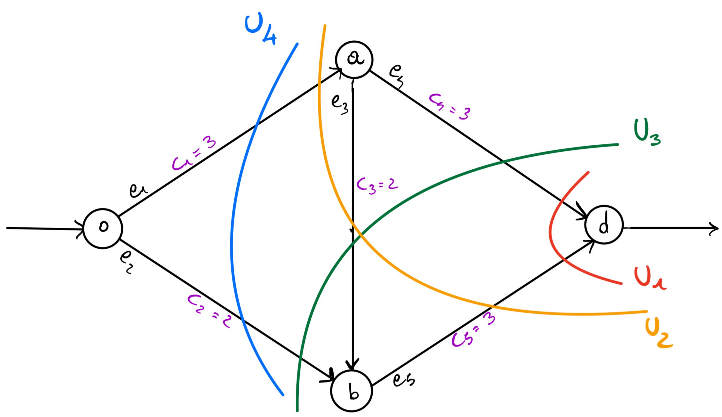
Homework 1

Giulio Nenna (s245717@studenti.polito.it)

November 25, 2020

Realizzato in collaborazione con Alfredo Baione (s279328)

Esercizio 1.



Tutti i possibili path $o - d$ sono i seguenti:

1. $p_{(1)} = o - a - d$

2. $p_{(2)} = o - b - d$

3. $p_{(3)} = o - a - b - d$

I possibili cut e annesse capacità sono:

$$
\begin{aligned}
U_1 &= \{d\} & C(U_1) &= 5 \\
U_2 &= \{a, d\} & C(U_2) &= 5 \\
U_3 &= \{b, d\} & C(U_3) &= 7 \\
U_4 &= \{a, b, d\} & C(U_4) &= 5
\end{aligned}
$$

(a) Tutti i possibili colli di bottiglia del grafo hanno capacità pari a 5, quindi per ostruire qualsiasi tipo di flow unitario da o a d bisogna eliminare una capacità C^* tale che

$$C^* = 5$$

(b) Dal momento che vale il teorema del *Max Flow - Min Cut*, le due unità di capacità devono essere distribuite in modo tale da aumentare la capacità del minimo taglio. Poiché ci sono ben tre tagli su quattro che rappresentano un minimo taglio (U_1, U_2, U_4) è necessario aumentare la capacità su archi in comune a questi tre tagli.
Una scelta possibile potrebbe essere quella di aggiungere un'unità di capacità ciascuno agli archi e_1 ed e_4 in modo tale che i tagli risultino:

$$\begin{aligned} U_1 &= \{d\} & C(U_1) &= 6 \\ U_2 &= \{a, d\} & C(U_2) &= 6 \\ U_3 &= \{b, d\} & C(U_3) &= 9 \\ U_4 &= \{a, b, d\} & C(U_4) &= 6 \end{aligned}$$

Aumentando in questo modo il massimo troughput da 5 a 6

(c) Assegnati i seguenti delay a ciascun arco:

$$d_1(x) = d_5(x) = x + 1, \quad d_3(x) = 1, \quad d_2(x) = d_4(x) = 5x + 1$$

e definendo con z_i il flusso sull'i-esimo path, si calcola il delay complessivo su ciascun path:

$$\begin{aligned} d_{p_1} &= 6z_1 + z_3 + 2 \\ d_{p_2} &= 6z_2 + z_3 + 2 \\ d_{p_3} &= 2z_3 + z_1 + z_2 + 3 \end{aligned}$$

Si calcola ora l'equilibrio di Wardrop considerando che $z_1 + z_2 + z_3 = 1$ (quindi che $z_1 + z_2 = 1 - z_3$)e che il delay su ciascun path con flusso non nullo deve essere minore di qualsiasi altro delay.

$$z_1 < 0 \Rightarrow \qquad 6z_1 + z_3 + 2 \leq 2z_3 + z_1 + z_2 + 3, \qquad \Rightarrow z_1 \leq \frac{1}{3}$$

$$
\begin{aligned}
z_3 > 0 \Rightarrow \qquad & 2z_3 + z_1 + z_2 + 3 \leq 6z_1 + z_3 + 2 \qquad && \Rightarrow z_1 \geq \frac{1}{3} \\
& 2z_3 + z_1 + z_2 + 3 \leq 6z_2 + z_3 + 2 \qquad && \Rightarrow z_2 \geq \frac{1}{3}
\end{aligned}
$$

$$
z_2 > 0 \Rightarrow \qquad 6z_2 + z_3 + 2 \leq 2z_3 + z_1 + z_2 + 3 \qquad \Rightarrow z_2 \leq \frac{1}{3}
$$

Queste condizioni implicano che un possibile vettore di flusso sui path che soddisfi le condizioni di Wardrop sia il seguente:

$$
z_{\text{Wardrop}} = z_W = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)
$$

che corrisponde al seguente vettore di flusso sugli archi:

$$
f_e^{(w)} = \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)
$$

Il ritardo totale che deriva da questo vettore di flusso è dato da:

$$
T_W = \frac{2}{3}\left(\frac{2}{3}+1\right) + \frac{5}{9} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{5}{9} + \frac{1}{3} + \frac{2}{3}\left(\frac{2}{3}+1\right) = \frac{13}{3}
$$

(d) Calcolare l'ottimo di sistema equivale a minimizzare il ritardo totale in funzione del flusso su ciascun path o - d:

$$
\min_z (z_1+z_3)(z_1+z_3+1)+(5z_2^2+z_2)+(z_3)+(5z_1^2+z_1)+(z_2+z_3)(z_2+z_3+1)
$$

Utilizzando la condizione di flusso unitario $(z_1+z_2+z_3=1)$ si ottiene:

$$
\begin{gathered}
\min_z (1-z_2)(2-z_2) + (5z_2^2 + z_2) + \\
+(1-z_1-z_2) + (5z_1^2 + z_1) + (1-z_1)(2-z_2) = \\
\min_z 3(2z_1^2 - z_1) + 3(2z_2^2 - z_2) + 5
\end{gathered}
$$

Da cui si deduce:

$$
z_1 = \frac{1}{4} \qquad\qquad z_2 = \frac{1}{4}
$$

Quindi:

$$z_{\text{Sistema}} = z_S = \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right)$$

che corrisponde al seguente vettore di flusso sugli archi:

$$f_e^* = \left(\frac{3}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right)$$

Questa configurazione dei flussi produce un ritardo totale dato da:

$$T_S = \frac{3}{4}\left(\frac{3}{4}+1\right) + \frac{1}{4}\left(\frac{5}{4}+1\right) + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\left(\frac{5}{4}+1\right) + \frac{3}{4}\left(\frac{3}{4}+1\right) = \frac{17}{4}$$

(e) Il costo totale dell'anarchia è dato dal rapporto tra il il ritardo totale dell'ottimo di sistema e il ritardo totale dell'equilibrio di Wardrop

$$\frac{T_W}{T_S} = \frac{\frac{13}{3}}{\frac{17}{4}} = \frac{52}{51}$$

(f) Siano $f_{e_i}^*$ e $f_{e_i}^{(w)}$ i flussi su ciascun arco e_i rispettivamente nella configurazione dell'ottimo di sistema e in quella di equilibrio di Wardrop. Sia il ritardo totale su ciascun arco e_i definito come $C_{e_i}(f_e) = d_{e_i} f_{e_i}$. La configurazione ottimale dei pedaggi per ottenere un costo dell'anarchia unitario è la seguente:

$$\omega_{e_i} = C'_{e_i}(f_{e_i}^*) - d_{e_i}(f_{e_i}^*) = f_{e_i}^* d'_{e_i}(f_{e_i}^*)$$

che nel caso specifico si traduce in:

$$\begin{aligned}
\omega_{e_1} &= \frac{3}{4}1 = \frac{3}{4} \\
\omega_{e_2} &= \frac{1}{4}5 = \frac{5}{4} \\
\omega_{e_3} &= 0 \\
\omega_{e_4} &= \frac{5}{4} \\
\omega_{e_4} &= \frac{3}{4}
\end{aligned}$$

Esercizio 2.

(a) La matrice dei pesi W è la seguente:

$$W = \begin{bmatrix} a & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

la matrice dei pesi normalizzata è data da:

$$\omega = \begin{pmatrix} a+1 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad \Rightarrow \qquad P = \begin{bmatrix} \frac{a}{a+1} & \frac{1}{a+1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Di conseguenza il laplaciano è dato da:

$$L = D - W = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

(b) La dinamica di opinione di French-De Groot è data da:

$$x(t+1) = Px(t)$$

dove $x(t) = (x_1(t), x_2(t), x_3(t), x_4(t))$ e $x_i(t)$ rappresenta il valore dell'opinione del nodo i al tempo t.

(c) Affinchè l'opinione su $\mathcal{G}$ converga ad un consenso il grafo deve essere fortemente connesso ed aperiodico. Date le ridotte dimensioni del grafo è possibile verificare queste due proprietà manualmente, notando che è possibile raggiungere qualsiasi nodo a partire da qualsiasi posizione sul grafo e che ad esempio il nodo 4 ha un ciclo di lunghezza 2 e un altro di lunghezza 3. Connessione ed aperiodicità sono indipendenti dal valore di a pertanto vale:

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = \pi' x(0) \qquad\qquad \forall a \geq 0$$

Dal momento che $\mathcal{G}$ è bilanciato la misura di probabilità invariante π è proporzionale al vettore ω. In particolare:

$$\pi = \frac{\omega}{\mathbb{1}'\omega} = \begin{pmatrix} \frac{a+1}{a+6} & \frac{2}{a+6} & \frac{1}{a+6} & \frac{2}{a+6} \end{pmatrix}'$$

Pertanto il valore del consenso converge ad un valore finito fintanto che $a \neq -6$, condizione automaticamente verificata dal momento che $a \geq 0$

(d) Nel caso particolare in cui $a = 0$ si ha:

$$\pi = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}'$$

Per cui, date le condizioni iniziali $x(0)$, il consenso raggiunge il seguente valore:

$$\lim_{t\to\infty} x_i(t) = \pi' x(0) = \frac{1}{3} \qquad\qquad \forall i = 1 \dots 4$$

(e) Poiché il consenso viene raggiunto $\forall a \geq 0$, date le condizioni iniziali $x(0)$, vale la seguente:

$$\lim_{t\to\infty} x_1(t) = \pi' x(0) = \frac{1}{a+6}(-a+1+2-1+2) = \frac{2-a}{a+6}$$

segue quindi che:

$$\lim_{t\to\infty} x_1(t) \leq 0 \qquad \Rightarrow \qquad \frac{2-a}{a+6} \leq 0 \qquad \Rightarrow \qquad a \geq 2$$

(f) Date $x_i(0)$ variabili aleatorie indipendenti e identicamente distribuite tali che $Var(x_i(0)) = 1$ $\forall i = 1 \dots 4$, vale la seguente:

$$\lim_{t\to\infty} x_1(t) = \frac{a+1}{a+6}x_1(0) + \frac{2}{a+6}x_2(0) + \frac{1}{a+6}x_3(0) + \frac{2}{a+6}x_4(0)$$

Poiché le variabili sono i.i.d. e $Var(x_i(0)) = 1$ $\forall i = 1 \dots 4$ vale:

$$\begin{aligned} Var\left(\lim_{t\to\infty} x_1(t)\right) &= \left(\frac{a+1}{a+6}\right)^2 Var(x_1(0)) + \left(\frac{2}{a+6}\right)^2 Var(x_2(0)) + \\ &+ \left(\frac{1}{a+6}\right)^2 Var(x_3(0)) + \left(\frac{2}{a+6}\right)^2 Var(x_4(0)) = \\ &= \frac{a^2+2a+10}{(a+6)^2} = v(a) \end{aligned}$$

Essendo $v(a)$ una funzione convessa, si verifica facilmente che raggiunge un minimo per:

$$a = \frac{4}{5}$$

Che rappresenta il valore di a per cui viene minimizzata la varianza del consenso.

Esercizio 3.

(a) Dal momento che il grafo in analisi è un grafo fortemente conneso e aciclico la dinamica di French-De Groot convergerà ad un consenso come visto per il secondo esercizio. Poichè il grafo è undirected la misura di probabilità invariante è proporzionale al vettore ω, quest'ultimo è facilmente calcolabile in quanto corrisponde in questo caso al vettore dei gradi uscenti di ogni nodo. In particolare:

$$\omega = (1, 3, 3, 4, 3, 4, 2, 2, 3, 1, 3, 6, 1, 2, 1)$$
$$\pi = \frac{1}{38}\omega$$

quindi dal momento che il vettore degli stati iniziali è dato da:

$$x(0) = (0, 0, 0, 0, 0, -1, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0)$$

il valore del consenso sarà:

$$\lim_{t\to\infty} x_i(t) = \left(\pi' x(0)\right)_i = \frac{6-4}{38} = \frac{1}{19} \qquad \forall i = 1 \dots 15$$

(b) Il seguente codice `MATLAB` produce una simulazione della dinamica di French-De Groot assegnando i due nodi stubborn $\{\text{Strozzi}, \text{Medici}\}$ e fornendo una rappresentazione grafica della dinamica tramite la colorazione progressiva dei nodi in funzione della loro opinione

```
    close all
clear all
clc
%Costruzione della matrice di adiacenza
W = zeros (15);
W(1,12)=1; W(12,1)=1; W(3,2)=1; W(2,3)=1; W(13,2)=1;
W(2,13)=1; W(14,2)=1; W(2,14)=1; W(12,3)=1; W(3,12)=1;
```

```
W(14,3)=1; W(3,14)=1; W(12,4)=1; W(4,12)=1; W(4,15)=1;
W(15,4)=1; W(5,14)=1; W(14,5)=1; W(5,15)=1; W(15,5)=1;
W(6,7)=1; W(7,6)=1; W(6,12)=1; W(12,6)=1; W(15,6)=1;
W(6,15)=1; W(13,8)=1; W(8,13)=1; W(15,8)=1; W(8,15)=1;
W(9,15)=1; W(15,9)=1; W(11,10)=1; W(10,11)=1; W(10,15)=1;
W(15,10)=1; W(13,14)=1; W(14,13)=1;


Names={'Lamberteschi', 'Peruzzi', 'Bischeri','Tornabuoni',
 'Ridolfi', 'Albizzi', 'Ginori', 'Barbadori',
  'Acciaiuoli', 'Salviati', 'Pazzi', 'Guadagni',
   'Castellani', 'Strozzi', 'Medici'}';
index=[1:15]';
x=zeros(15,1); %Vettore di opinioni

%Inserisco i due nodi stubborn
x(15)=1;
x(14)=-1;

%Costruzione del Grafo in un oggetto graph
NodeTable=table(index, Names, x); %Informazioni sui nodi
G=graph(W,NodeTable);

%------------------Plot del grafo iniziale--------------------------

%Colorazione dei nodi
color=zeros(15,3);
for i=1:15
    if x(i)>0
        color(i,1)=x(i);
    else
        color(i,3)=abs(x(i));
    end
end

plot(G, 'NodeLabel', G.Nodes.Names,
        'NodeColor', color,
        'MarkerSize', 10 )

%--------Calcolo della dinamica di averaging con nodi stubborn---------
w=W*ones(15,1);
D=diag(w);
P=D\W;

x_curr=x(1:13);         %x(t)
i=1;                    %contatore
MaxIter=100;            %iterazioni massime della simulazione
tol=10e-4;              %Tolleranza come criterio di stop della simulazione
Q=P(1:13,1:13);         %Matrice Q della dinamica
```

```
Eu=P(1:13,14:15)*x(14:15); %Fattore Eu che dipende dai nodi stubborn
x_real=(eye(13)-Q)\Eu;  %Calcolo del vettore delle
                        %opinioni limite reale secondo il teorema
x_next=zeros(13,1);     %x(t+1)
err=1;
X=zeros(13,MaxIter);    %Matrice degli stati dei nodi nel tempo
X(:,1)=x_curr;          %Inizializzazione della matrice

while(i<MaxIter && err>tol)

    x_next=Q*x_curr+Eu; %DINAMICA DI AVERAGING CON NODI STUBBORN

    err=norm(x_next-x_curr)/norm(x_next);

    G.Nodes.x(1:13)=x_next;
    x_curr=x_next;
    i=i+1;

    X(:,i)=x_curr;


    %--------Plot del grafo------------
    color=zeros(15,3);
    for j=1:15
        if G.Nodes.x(j)>0
            color(j,1)=G.Nodes.x(j);
        else
            color(j,3)=abs(G.Nodes.x(j));
        end
    end
    plot(G, 'NodeLabel', G.Nodes.Names,
            'NodeColor', color,
            'MarkerSize', 10 ,
            'NodeFontSize', 10)
    title('Evoluzione delle opinioni nella simulazione della dinamica')
    pause(0.5);
    %-------------------------------------
end

%Plot delle traiettorie dei nodi-----------------------

X=X(:,1:i); %Riduzione delle dimensioni per salvare spazio
t=1:i
for k=1:13
figure(2)
hold on

plot(t,X(k,:),'Linewidth', 2)
```

```
end
title('Traiettorie delle opinioni di ciascun nodo (non stubborn)')
xlabel('Tempo')
ylabel('Opinione')
legend(Names(1:13))

%-----------------------------------------------------------

%Calcolo dell'errore rispetto al valore reale ottenuto dal teorema
x_sym=G.Nodes.x(1:13)
x_real
err_rel=norm(x_real-x_sym)/norm(x_real)

%Plot del grafo con opinioni reali
G.Nodes.x(1:13)=x_real;

for i=1:15
        if G.Nodes.x(i)>0
            color(i,1)=G.Nodes.x(i);
        else
            color(i,3)=abs(G.Nodes.x(i));
        end
end
    figure(3)
    plot(G, 'NodeLabel', G.Nodes.Names,
            'NodeColor', color,
            'Markersize', 10,
            'NodeFontSize', 10)
    title('Convergenza delle opinioni calcolata direttamente')
```

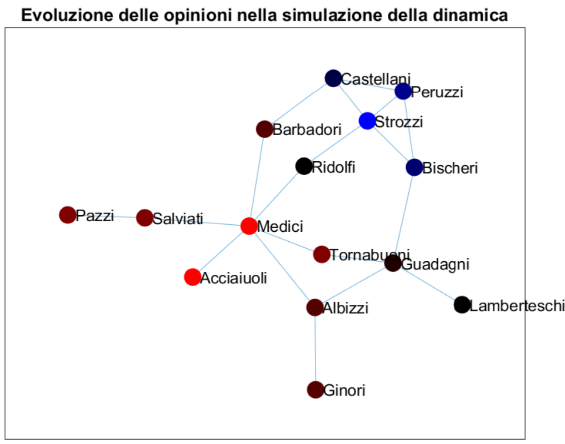


Figure 1: Stato delle opinioni dopo 2 iterazioni

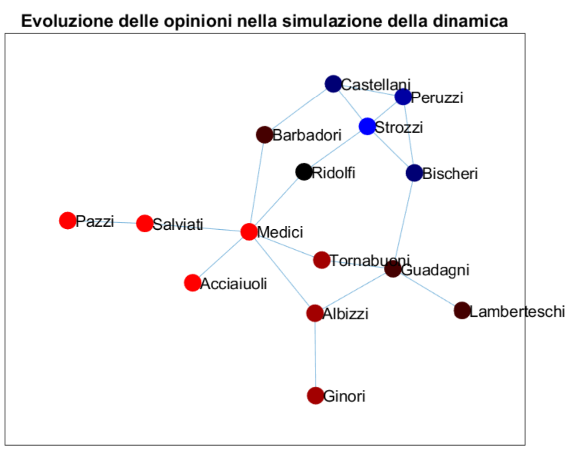


Figure 2: Stato delle opinioni dopo 25 iterazioni

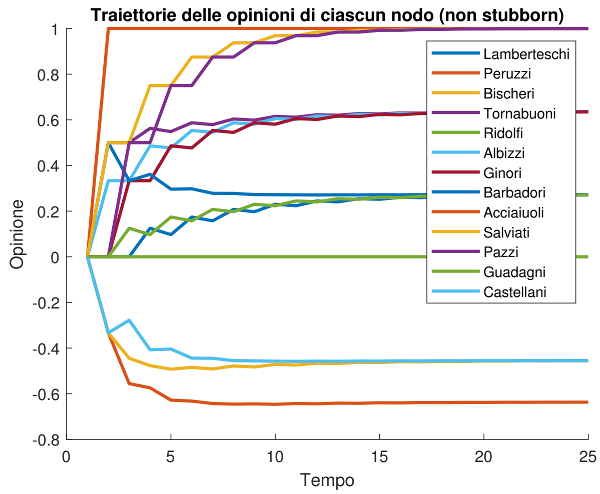


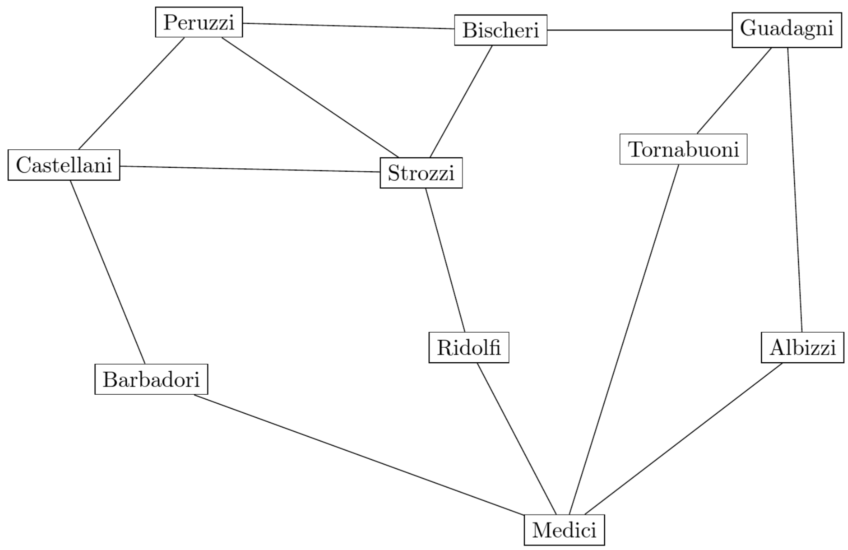
Figure 3: traiettoria delle opinioni

(c) Per calcolare analiticamente il vettore di equilibrio della dinamica di averaging con insieme di nodi stubborn dato da

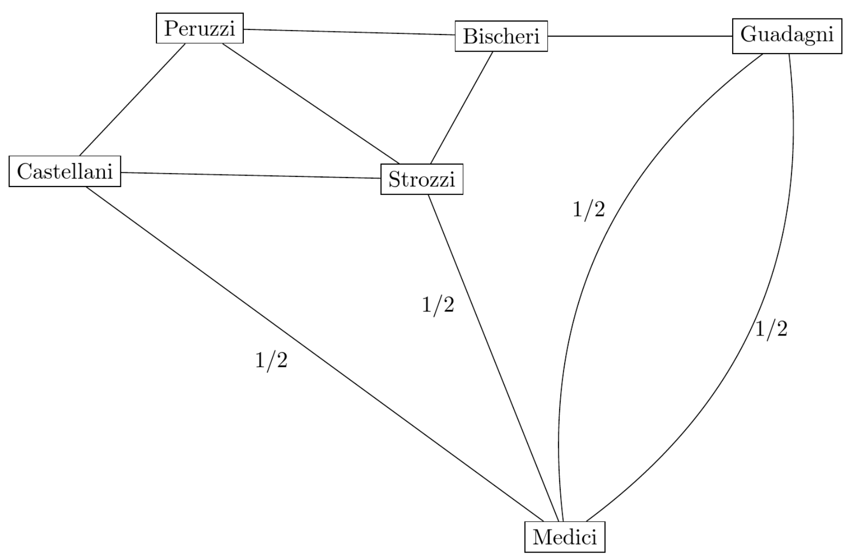
$$\mathcal{S} = \{\text{Medici}, \text{Strozzi}, \text{Castellani}, \text{Guadagni}\}$$

ci si può avvalere dell'analogia con le reti elettriche ed effettuare alcune semplificazioni.
Si può inizialmente andare ad effettuare un operazione di *Glueing* sui nodi che ricevono influenza in maniera univoca da un unico nodo, in particolare:

$$x_{\text{Lamberteschi}} = x_{\text{Guadagni}} \qquad x_{\text{Albizzi}} = x_{\text{Ginori}}$$
$$x_{\text{Salviati}} = x_{\text{Pazzi}} = x_{\text{Medici}} \qquad x_{\text{Acciaiuoli}} = x_{\text{Medici}}$$



Il grafo può quindi essere ulteriormente semplificato andando ad eliminare i nodi {Barbadori, Ridolfi, Tornabuoni, Guadagni} e aggiornando di conseguenza i pesi degli archi:



Risulta quindi evidente che, dal momento che i nodi Peruzzi e Bischeri sono esclusivamente influenzati da nodi stubborn con opinione $u = -1$, necessariamente:

$$x_{\text{Peruzzi}} = x_{\text{Bischeri}} = -1$$

Sfruttando ora l'analogia con la rete elettrica è possibile reintrodurre i nodi eliminati tramite la regola della serie, in particolare per il nodo Barbadori vale:

$$\Phi_{\text{Medici, Castellani}} = \frac{1}{2}\left(x_{\text{Medici}} - x_{\text{Castellani}}\right) = 1 = \Phi$$

Quindi necessariamente

$$\Phi = 1 = 1\left(x_{\text{Medici}} - x_{\text{Barbadori}}\right) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x_{\text{Barbadori}} = 0$$

Analogamente per il resto dei nodi eliminati con la regola della serie vale:

$$x_{\text{Barbadori}} = x_{\text{Ridolfi}} = x_{\text{Tornabuoni}} = x_{\text{Albizzi}} = 0$$

Infine per i nodi eliminati tramite il processo di *glueing* vale:

$$x_{\text{Lamberteschi}} = -1$$
$$x_{\text{Ginori}} = 0$$
$$x_{\text{Acciaiuoli}} = x_{\text{Salviati}} = x_{\text{Pazzi}} = 1$$

(d) Il seguente codice si basa sulle dichiarazioni di variabili relative al codice del punto precedente e sull'algoritmo che sfrutta la sub-stocasticità di $(1-\beta)P'$

```
    %Sfruttiamo la proprieta' di (1-beta)P' di essere una matrice
    %sub stocastica per calcolare efficientemente
% il vettore di centralita' Page-Rank

err=1;
beta=0.15
nu=1/15*ones(15,1);
y=ones(15,1);
i=1;
while(i<MaxIter && err>tol)
    y_next=(1-beta)*P'*y+beta*nu;
```

```
    err=norm(y_next-y)/norm(y_next);

    y=y_next; i=i+1;
end

err
y
```