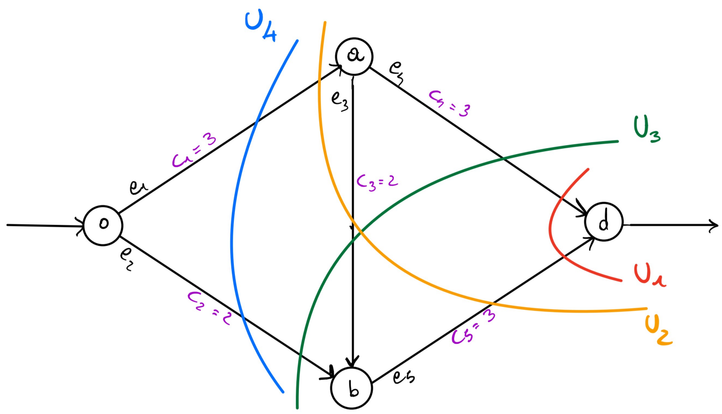
Homework 1

Giulio Nenna (s245717@studenti.polito.it)

November 18, 2020

Esercizio 1.



Tutti i possibili path $o - d$ sono i seguenti:

1. $p_{(1)} = o - a - d$

2. $p_{(2)} = o - b - d$

3. $p_{(3)} = o - a - b - d$

I possibili cut e annesse capacità sono:

$$\begin{aligned} U_1 &= \{d\} & C(U_1) &= 5 \\ U_2 &= \{a, d\} & C(U_2) &= 5 \\ U_3 &= \{b, d\} & C(U_3) &= 7 \\ U_4 &= \{a, b, d\} & C(U_4) &= 5 \end{aligned}$$

(a) Tutti i possibili colli di bottiglia del grafo hanno capacità pari a 5, quindi per ostruire qualsiasi tipo di flow unitario da o a d bisogna eliminare una capacità C^* tale che

$$C^* < 4$$

(b) Dal momento che vale il teorema del *Max Flow - Min Cut*, le due unità di capacità devono essere distribuite in modo tale da aumentare lacapacità del minimo taglio. Poiché ci sono ben tre tagli su 4 che rappresentano un minimo taglio (U_1, U_2, U_4) è necessario aumentare la capacità su archi in comune a questi tre tagli.
Una scelta possibile potrebbe essere quella di aggiungere un'unità di capacità ciascuno agli archi e_1 ed e_4 in modo tale che i tagli risultino:

$$\begin{aligned} U_1 &= \{d\} & C(U_1) &= 6 \\ U_2 &= \{a, d\} & C(U_2) &= 6 \\ U_3 &= \{b, d\} & C(U_3) &= 9 \\ U_4 &= \{a, b, d\} & C(U_4) &= 6 \end{aligned}$$

Aumentando in questo modo il massimo troughput da 5 a 6

(c) Assegnati i seguenti delay a ciascun arco:

$$d_1(x) = d_5(x) = x + 1, \quad d_3(x) = 1, \quad d_2(x) = d_4(x) = 5x + 1$$

e definendo con z_i il flusso sull'i-esimo path, si calcola il delay complessivo su ciascun path:

$$\begin{aligned} d_{p_1} &= 6z_1 + z_3 + 2 \\ d_{p_2} &= 6z_2 + z_3 + 2 \\ d_{p_3} &= 2z_3 + z_1 + z_2 + 3 \end{aligned}$$

Si calcola ora l'equilibrio di Wardrop considerando che $z_1 + z_2 + z_3 = 1$ (quindi che $z_1 + z_2 = 1 - z_3$)e che il delay su ciascun path con flusso non nullo deve essere minore di qualsiasi altro delay.

$$z_1 < 0 \Rightarrow \qquad 6z_1 + z_3 + 2 \leq 2z_3 + z_1 + z_2 + 3, \qquad \Rightarrow z_1 \leq \frac{1}{3}$$

$$
\begin{aligned}
z_3 > 0 \Rightarrow \qquad & 2z_3 + z_1 + z_2 + 3 \leq 6z_1 + z_3 + 2 \qquad && \Rightarrow z_1 \geq \frac{1}{3} \\
& 2z_3 + z_1 + z_2 + 3 \leq 6z_2 + z_3 + 2 \qquad && \Rightarrow z_2 \geq \frac{1}{3}
\end{aligned}
$$

$$
z_2 > 0 \Rightarrow \qquad 6z_2 + z_3 + 2 \leq 2z_3 + z_1 + z_2 + 3 \qquad \Rightarrow z_2 \leq \frac{1}{3}
$$

Queste condizioni implicano che un possibile vettore di flusso che soddisfi le condizioni di Wardrop sia il seguente:

$$
z_{\text{Wardrop}} = z_W = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)
$$

Il ritardo totale che deriva da questo vettore di flusso è dato da:

$$
\frac{2}{3}\left(\frac{2}{3}+1\right) + \frac{5}{9} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{5}{9} + \frac{1}{3} + \frac{2}{3}\left(\frac{2}{3}+1\right) = \frac{13}{3}
$$

(d) Calcolare l'ottimo di sistema equivale a minimizzare il ritardo totale in funzione del flusso su ciascun path o - d:

$$
\min_z (z_1+z_3)(z_1+z_3+1)+(5z_2^2+z_2)+(z_3)+(5z_1^2+z_1)+(z_2+z_3)(z_2+z_3+1)
$$

Utilizzando la condizione di flusso unitario ($z_1+z_2+z_3 = 1$) si ottiene:

$$
\begin{gathered}
\min_z (1 - z_2)(2 - z_2) + (5z_2^2 + z_2) + \\
+(1 - z_1 - z_2) + (5z_1^2 + z_1) + (1 - z_1)(2 - z_2) = \\
\min_z 3(2z_1^2 - z_1) + 3(2z_2^2 - z_2) + 5
\end{gathered}
$$

Da cui si deduce:

$$
z_1 = \frac{1}{4} \qquad\qquad z_2 = \frac{1}{4}
$$

Quindi:

$$
z_{\text{Sistema}} = z_S = \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right)
$$

Questa configurazione dei flussi produce un ritardo totale dato da:

$$\frac{3}{4}\left(\frac{3}{4}+1\right)+\frac{1}{4}\left(\frac{5}{4}+1\right)+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\left(\frac{5}{4}+1\right)+\frac{3}{4}\left(\frac{3}{4}+1\right)=\frac{17}{4}$$

(e) Il costo totale dell'anarchia è dato dal rapporto tra il il ritardo totale dell'ottimo di sistema e il ritardo totale dell'equilibrio di Wardrop

$$\frac{\frac{13}{3}}{\frac{17}{4}}=\frac{52}{51}$$

(f) Siano $f^*_{e_i}$ e $f^{(w)}_{e_i}$ i flussi su ciascun arco e_i rispettivamente nella configurazione dell'ottimo di sistema e in quella di equilibrio di Wardrop. Sia il ritardo totale su ciascun arco e_i definito come $C_{e_i}(f_e) = d_{e_i} f_{e_i}$. La configurazione ottimale dei pedaggi per ottenere un costo dell'anarchia unitario è la seguente:

$$\omega_{e_i} = C'_{e_i}(f^*_{e_i}) - d_{e_i}(f^*_{e_i}) = f^*_{e_i} d'_{e_i}(f^*_{e_i})$$

che nel caso specifico si traduce in:

$$\begin{aligned}
\omega_{e_1} &= \frac{3}{4}1 = \frac{3}{4}\\
\omega_{e_2} &= \frac{1}{4}5 = \frac{5}{4}\\
\omega_{e_3} &= 0\\
\omega_{e_4} &= \frac{5}{4}\\
\omega_{e_4} &= \frac{3}{4}
\end{aligned}$$

Esercizio 2.

(a) La matrice dei pesi W è la seguente:

$$W = \begin{bmatrix} a & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

la matrice dei pesi normalizzata è data da:

$$\omega = \begin{pmatrix} a+1 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad \Rightarrow \qquad P = \begin{bmatrix} \frac{a}{a+1} & \frac{1}{a+1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Di conseguenza il laplaciano è dato da:

$$L = D - W = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

(b) La dinamica di opinione di French-De Groot è data da:

$$x(t+1) = Px(t)$$

dove $x(t) = (x_1(t), x_2(t), x_3(t), x_4(t))$ e $x_i(t)$ rappresenta il valore dell'opinione del nodo i al tempo t.

(c) Affinchè l'opinione su $\mathcal{G}$ converga ad un consenso il grafo deve essere fortemente connesso ed aperiodico. Date le ridotte dimensioni del grafo è possibile verificare queste due proprietà manualmente, notando che è possibile raggiungere qualsiasi nodo a partire da qualsiasi posizione sul grafo e che ad esempio il nodo 4 ha un ciclo di lunghezza 2 e un altro di lunghezza 3. Connessione ed aperiodicità sono indipendenti dal valore di a pertanto vale:

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = \pi' x(0) \qquad\qquad \forall a \geq 0$$

Dal momento che $\mathcal{G}$ è bilanciato la misura di probabilità invariante π è proporzionale al vettore ω. In particolare:

$$\pi = \frac{\omega}{\mathbb{1}'\omega} = \begin{pmatrix} \frac{a+1}{a+6} & \frac{2}{a+6} & \frac{1}{a+6} & \frac{2}{a+6} \end{pmatrix}'$$

Pertanto il valore del consenso converge ad un valore finito fintanto che $a \neq -6$, condizione automaticamente verificata dal momento che $a \geq 0$

(d) Nel caso particolare in cui $a = 0$ si ha:

$$\pi = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}'$$

Per cui, date le condizioni iniziali $x(0)$, il consenso raggiunge il seguente valore:

$$\lim_{t\to\infty} x_i(t) = \pi' x(0) = \frac{1}{3} \qquad\qquad \forall i = 1\dots 4$$

(e) Poiché il consenso viene raggiunto $\forall a \geq 0$, date le condizioni iniziali $x(0)$, vale la seguente:

$$\lim_{t\to\infty} x_1(t) = \pi' x(0) = \frac{1}{a+6}(-a+1+2-1+2) = \frac{2-a}{a+6}$$

segue quindi che:

$$\lim_{t\to\infty} x_1(t) \leq 0 \qquad \Rightarrow \qquad \frac{2-a}{a+6} \leq 0 \qquad \Rightarrow \qquad a \geq 2$$

(f) Date $x_i(0)$ variabili aleatorie indipendenti e identicamente distribuite tali che $Var(x_i(0)) = 1\ \forall i = 1\dots 4$, vale la seguente:

$$\lim_{t\to\infty} x_1(t) = \frac{a+1}{a+6}x_1(0) + \frac{2}{a+6}x_2(0) + \frac{1}{a+6}x_3(0) + \frac{2}{a+6}x_4(0)$$

Poiché le variabili sono i.i.d. e $Var(x_i(0)) = 1\ \forall i = 1\dots 4$ vale:

$$\begin{aligned} Var\left(\lim_{t\to\infty} x_1(t)\right) &= \left(\frac{a+1}{a+6}\right)^2 Var(x_1(0)) + \left(\frac{2}{a+6}\right)^2 Var(x_2(0)) + \\ &+ \left(\frac{1}{a+6}\right)^2 Var(x_3(0)) + \left(\frac{2}{a+6}\right)^2 Var(x_4(0)) = \\ &= \frac{a^2+2a+10}{(a+6)^2} = v(a) \end{aligned}$$

Essendo $v(a)$ una funzione convessa, si verifica facilmente che raggiunge un minimo per:

$$a = \frac{4}{5}$$

Che rappresenta il valore di a per cui viene minimizzata la varianza del consenso.

Esercizio 3.

(a) Dal momento che il grafo in analisi è un grafo fortemente conneso e aciclico la dinamica di French-De Groot convergerà ad un consenso come visto per il secondo esercizio. Poichè il grafo è undirected la misura di probabilità invariante è proporzionale al vettore ω, quest'ultimo è facilmente calcolabile in quanto corrisponde in questo caso al vettore dei gradi uscenti di ogni nodo. In particolare:

$$\omega = (1, 3, 3, 4, 3, 4, 2, 2, 3, 1, 3, 6, 1, 2, 1)$$
$$\pi = \frac{1}{38}\omega$$

quindi dal momento che il vettore degli stati iniziali è dato da:

$$x(0) = (0, 0, 0, 0, 0, -1, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0)$$

il valore del consenso sarà:

$$\lim_{t\to\infty} x_i(t) = \left(\pi' x(0)\right)_i = \frac{6-4}{38} = \frac{1}{19} \qquad \forall i = 1\ldots 15$$

4. Using the `section` Macro

The starred `section*` works as well.

Sed feugiat. Cum sociis natoque penatibus et magnis dis parturient montes, nascetur ridiculus mus. Ut pellentesque augue sed urna. Vestibulum diam eros, fringilla et, consectetuer eu, nonummy id, sapien. Nullam at lectus. In sagittis ultrices mauris. Curabitur malesuada erat sit amet massa. Fusce blandit. Aliquam erat volutpat. Aliquam euismod. Aenean vel lectus. Nunc imperdiet justo nec dolor.