Homework 2

Giulio Nenna (s245717@studenti.polito.it)

December 22, 2020

Realizzato in collaborazione con Alfredo Baione (s279328)

Esercizio 1.

1. Il numero di 1 in $X(t)$ è:

$$\eta\left(x\right)=\sum_{i=0}^{n}x_i.$$

Sia

$$N\left(t\right)=\eta\left(X\left(t\right)\right)=\sum_{i=1}^{n}X_i\left(t\right)$$

il numero dei nodi foglia infetti al tempo t.
La matrice del kernel di mutazione riferita a tale processo è:

$$\psi=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 1 & 0\end{bmatrix},$$

mentre quelle associate al kernel di interazione sono:

$$\varphi\left(0\right)=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix},\qquad\qquad \varphi\left(1\right)=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix}.$$

È possibile osservare, allora, che le *active boundaries* di $X(t)$ coincidono e sono solo solo funzioni di $\eta\left(x\right)$:

$$\zeta_{01}\left(x\right)=\sum_{i,j}W_{ij}\left(1-x_i\right)x_j=\zeta_{10}\left(x\right)=\sum_{i,j}W_{ij}\left(1-x_j\right)x_i=n{+}1{-}\eta\left(x\right).$$

Ne risulta che $N\left(t\right)$ è una "birth-and-death" chain.
Ponendo $N\left(t\right)=k$, risulta:

$$\lambda_{N(t)}\left(x\right)=\left(n-k\right)\psi_{01}+\zeta_{01}\left(x\right)\beta\varphi_{01}\left(1\right)=\left(n-k\right)\cdot 0+\left(n+1-\eta\left(x\right)\right)\cdot\beta=\left(n-k\right)\cdot\beta,$$

$$\mu_{N(t)}\left(x\right)=k\psi_{10}+\zeta_{10}\left(x\right)\beta\varphi_{10}\left(0\right)=k+\left(n+1-\eta\left(x\right)\right)\cdot\beta\cdot 0=k.$$

2. Sia $N(t) = k$. Nella costruzione dei rate di transizione della catena di Markov di nascita e morte $N(t)$, si ottiene:

   - $\forall k < n, \quad \lambda_{N(t)}(x) = (n-k) \cdot \beta > 0 \quad (k = 1, ..., n-1)$;
   - $\forall k > 0, \quad \mu_{N(t)}(x) = k > 0 \quad (k = n, ..., 1)$.

   Pertanto, la catena è irriducibile.
   L'unica distribuzione di probabilità invariante $\bar{\pi}$ di $N(t)$ avrà come componenti:

$$\bar{\pi}_i = \frac{1}{\sum_{k=0}^{n} \prod_{j=0}^{k-1} \frac{\lambda_j}{\mu_{j+1}}} \cdot \prod_{j=0}^{i-1} \frac{\lambda_j}{\mu_{j+1}} = \frac{1}{\sum_{k=0}^{n} \prod_{j=0}^{k-1} \frac{(n-j)\cdot\beta}{j+1}} \cdot \prod_{j=0}^{i-1} \frac{(n-j)\cdot\beta}{j+1}, \qquad i = 0, ..., n.$$

3. Sia $n = 3$. Applicando la formula precedente, risulta che

$$\bar{\pi}_i = \frac{1}{\sum_{k=0}^{3} \prod_{j=0}^{k-1} \frac{(3-j)\cdot\beta}{j+1}} \cdot \prod_{j=0}^{i-1} \frac{(3-j)\cdot\beta}{j+1}, \qquad i = 0, ..., 3,$$

   da cui si ottiene:

$$\bar{\pi}_0 = \frac{1}{1+3\beta+3\beta^2+\beta^3},$$
$$\bar{\pi}_1 = \frac{3\beta}{1+3\beta+3\beta^2+\beta^3},$$
$$\bar{\pi}_2 = \frac{3\beta^2}{1+3\beta+3\beta^2+\beta^3},$$
$$\bar{\pi}_3 = \frac{\beta^3}{1+3\beta+3\beta^2+\beta^3}.$$

   Per capire quando $\bar{\pi}_k$, $k = 0, ..., 3$, è massima, è possibile studiare il comportamento di $\bar{\pi}_0$, $\bar{\pi}_1$, $\bar{\pi}_2$ e $\bar{\pi}_3$, rispetto alla variabile β, nell'intervallo $[0, +\infty)$.

Come si evince dal grafico, allora:

- se $0 \leq \beta \leq \frac{1}{3}$, $k = 0$ è lo stato per cui $\bar{\pi}_k$ è massima;
- se $\frac{1}{3} \leq \beta \leq 1$, $k = 1$ è lo stato per cui $\bar{\pi}_k$ è massima;
- se $1 \leq \beta \leq 3$, $k = 2$ è lo stato per cui $\bar{\pi}_k$ è massima;
- se $3 \leq \beta < +\infty$, $k = 3$ è lo stato per cui $\bar{\pi}_k$ è massima.

4. Sia

$$k_n = \underset{k=0,\dots,n}{\arg\max} \, (\bar{\pi}_k).$$

La catena di disuguaglianze

$$\frac{\bar{\pi}_{i+1}}{\bar{\pi}_i} \geq 1 \Leftrightarrow \frac{\lambda_j}{\mu_{j+1}} \geq 1 \Leftrightarrow (n-j) \cdot \beta \geq j \Leftrightarrow \; n\beta - j\beta \geq j \Leftrightarrow j + j\beta \leq n\beta \Leftrightarrow j \leq \frac{n\beta}{1+\beta}$$

prova che:

$$k_n = \underset{k=0,\dots,n}{\arg\max} \, (\bar{\pi}_k) = \left\lfloor \frac{n\beta}{1+\beta} \right\rfloor = \frac{n\beta}{1+\beta} - \epsilon, \qquad 0 \leq \epsilon < 1.$$

Pertanto, si avrà:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{k_n}{n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n\beta}{n\,(1+\beta)} - \frac{\epsilon}{n} \right) = \frac{\beta}{1+\beta}.$$

Esercizio 2.

(a) Agli archi e_1 ed e_2 corrispondono le funzioni di costo

$$\Delta_1 = \omega_1 \qquad e \qquad \Delta_2 = \omega_2 + \frac{3}{2} f_2,$$

dove ω_1 e ω_2 rappresentano i pedaggi applicati al passaggio dei corrispondenti flussi f_1 e f_2, tali che $f_1 + f_2 = 1$.
Risulta che $f^{(\omega)} = \left(f_1^{(\omega)}, f_2^{(\omega)}\right)$ è "equilibrio di Wardrop" se e solo se:

$$\begin{cases} f_1^{(\omega)} > 0 \Rightarrow \Delta_1 \leq \Delta_2 \Leftrightarrow \omega_1 \leq \omega_2 + \frac{3}{2} f_2^{(\omega)} \\ f_2^{(\omega)} > 0 \Rightarrow \Delta_2 \leq \Delta_1 \Leftrightarrow \omega_1 \geq \omega_2 + \frac{3}{2} f_2^{(\omega)} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f_2^{(\omega)} = \frac{2}{3}\left(\omega_1 - \omega_2\right) \\ f_1^{(\omega)} = 1 - \frac{2}{3}\left(\omega_1 - \omega_2\right). \end{cases}$$

(b) Si consideri il gioco

$$\left(\mathcal{V} = \{1, 2\},\ A = \{0, 1\},\ U = \{u_i\left(\omega_1, \omega_2\right) = \omega_i f_i^{(\omega)},\ i = 1, 2\}\right),$$

dove 1 e 2 rappresentano, rispettivamente, i gestori dei nodi o e d del suddetto grafo.
La funzione di *best response* del primo giocatore risulta essere

$$BR_1\left(\omega_2\right) = \arg\max_{\omega_1 \in A} u_1\left(\omega_1, \omega_2\right) = \arg\max_{\omega_1 \in A} \omega_1 f_1^{(\omega)} = \arg\max_{\omega_1 \in A} \omega_1 \left(1 - \frac{2}{3}\left(\omega_1 - \omega_2\right)\right) =$$
$$\arg\max_{\omega_1 \in A} \omega_1 \left(1 - \frac{2}{3}\omega_1 + \frac{2}{3}\omega_2\right) = \arg\max_{\omega_1 \in A} \left(\omega_1 - \frac{2}{3}\omega_1^2 + \frac{2}{3}\omega_1\omega_2\right) = \frac{3}{4} + \frac{1}{2}\omega_2,$$

mentre quella relativa al secondo é

$$BR_2\left(\omega_1\right) = \arg\max_{\omega_2 \in A} u_2\left(\omega_2, \omega_1\right) = \arg\max_{\omega_2 \in A} \omega_2 f_2^{(\omega)} = \arg\max_{\omega_2 \in A} \omega_2 \left(\frac{2}{3}\left(\omega_1 - \omega_2\right)\right) =$$
$$\arg\max_{\omega_2 \in A} \omega_2 \left(\frac{2}{3}\omega_1 - \frac{2}{3}\omega_2\right) = \arg\max_{\omega_2 \in A} \left(\frac{2}{3}\omega_2\omega_1 - \frac{2}{3}\omega_2^2\right) = \frac{1}{2}\omega_1.$$

(c) Per trovare l'equilibrio di Nash del gioco in questione, si deve imporre che ogni giocatore giochi la sua *best response*, in risposta all'azione dell'altro giocatore. In tal caso, questo si traduce nella risoluzione del seguente sistema:

$$\begin{cases} \omega_1^* = \frac{3}{4} + \frac{1}{2}\omega_2^* \\ \omega_2^* = \frac{1}{2}\omega_1^* \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \omega_1^* = \frac{3}{4} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\omega_1^*\right) \\ \omega_2^* = \frac{1}{2}\omega_1^* \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \omega_1^* = 1 \\ \omega_2^* = \frac{1}{2} \end{cases},$$

e tali sono i valori degli equilibri di Nash cercati.

Esercizio 3.

Si consideri il gioco $(\mathcal{V}, A, \{u_i\})$, caratterizzato da

$$\mathcal{V}=\{1,2,...,n\}, \quad A=\{-1,+1\}, \quad u_i\left(x_i, x_{-i}\right)=\begin{cases} \frac{1}{2}\sum_{j\neq i} \mid x_i+x_j \mid & se\ i\in\mathcal{V}_1 \\ \frac{1}{2}\sum_{j\neq i} \mid x_i-x_j \mid & se\ i\in\mathcal{V}_2 \end{cases},$$

dove

$$\mathcal{V}_1=\{1,2,...,n_1\} \text{ e } \mathcal{V}_2=\{n_1+1,n_1+2,...,n\}.$$

(a) Sia $n=3$.

(a1) $n_1=3$.
Ciascun giocatore sta giocando un coordination game quindi valgono le seguenti:

$$\mathcal{V}_1=\{1,2,3\},\ \mathcal{V}_2=\emptyset,$$
$$u_i=\frac{1}{2}\sum_{j\neq i} \mid x_i+x_j \mid,\ \forall i.$$

Se definiamo le quantità

$$n^+=|\{x_i=+1, i\in\mathcal{V}\}|$$
$$n^-=|\{x_i=-1, i\in\mathcal{V}\}|$$

che rappresentano rispettivamente il numero di giocatori che stanno giocando +1 e -1 allora per ciascun giocatore vale la seguente:

$$\{x_i=+1\}\in BR_i(x_{-i}) \iff n^+\geq n^-$$
$$\{x_i=-1\}\in BR_i(x_{-i}) \iff n^-\geq n^+$$

Gli equilibri di Nash, pertanto, saranno dati dalle terne $(-1,-1,-1)$ e $(+1,+1,+1)$, perché entrambe le configurazioni, in tal caso, massimizzano le "utilities" di 1, 2 e 3 e sono compatibili con i best response di ciascun giocatore.

(a2) $n_1=2$.
In questo caso il giocatore $i=3$ sta giocando un anti-coordination

game. Quindi:

$$\begin{aligned}\mathcal{V}_1 = \{1,2\},\ \mathcal{V}_2 = \{3\},\\ u_1 = \frac{1}{2}\cdot\left(\mid x_1 + x_2 \mid + \mid x_1 + x_3 \mid\right),\\ u_2 = \frac{1}{2}\cdot\left(\mid x_2 + x_1 \mid + \mid x_2 + x_3 \mid\right),\\ u_3 = \frac{1}{2}\cdot\left(\mid x_3 - x_1 \mid + \mid x_3 - x_2 \mid\right).\end{aligned}$$

Per cui vale:

$$\begin{aligned}\{x_3 = +1\} \in BR_3(x_{-3}) \iff n^- \geq n^+\\ \{x_3 = -1\} \in BR_3(x_{-3}) \iff n^+ \geq n^-\end{aligned}$$

Quindi, gli equilibri di Nash risultano essere individuati dalle configurazioni $(-1,-1,+1)$ e $(+1,+1,-1)$ in cui si può notare come ai primi due giocatori convenga essere "accordati" mentre al terzo convenga giocare il contrario di quello che giocano i primi due.

(a3) $n_1 = 1$.
In questo caso due dei tre giocatori sta giocando un anti-coordination game e solo il terzo sta giocando un coordination game. In particolare:

$$\begin{aligned}\mathcal{V}_1 = \{1\},\ \mathcal{V}_2 = \{2,3\},\\ u_1 = \frac{1}{2}\cdot\left(\mid x_1 + x_2 \mid + \mid x_1 + x_3 \mid\right),\\ u_2 = \frac{1}{2}\cdot\left(\mid x_2 - x_1 \mid + \mid x_2 - x_3 \mid\right),\\ u_3 = \frac{1}{2}\cdot\left(\mid x_3 - x_1 \mid + \mid x_3 - x_2 \mid\right).\end{aligned}$$

Gli equilibri di Nash sono individuati da $(+1,+1,-1)$, $(-1,+1,-1)$, $(+1,-1,+1)$ e $(-1,-1,+1)$, ossia configurazioni in cui fintanto che $x_1 \neq x_2$ allora $i = 1$ può giocare qualsiasi valore dal momento che la sua utilità non cambia. In queste configurazioni nessun giocatore guadagna utilità cambiando mossa.

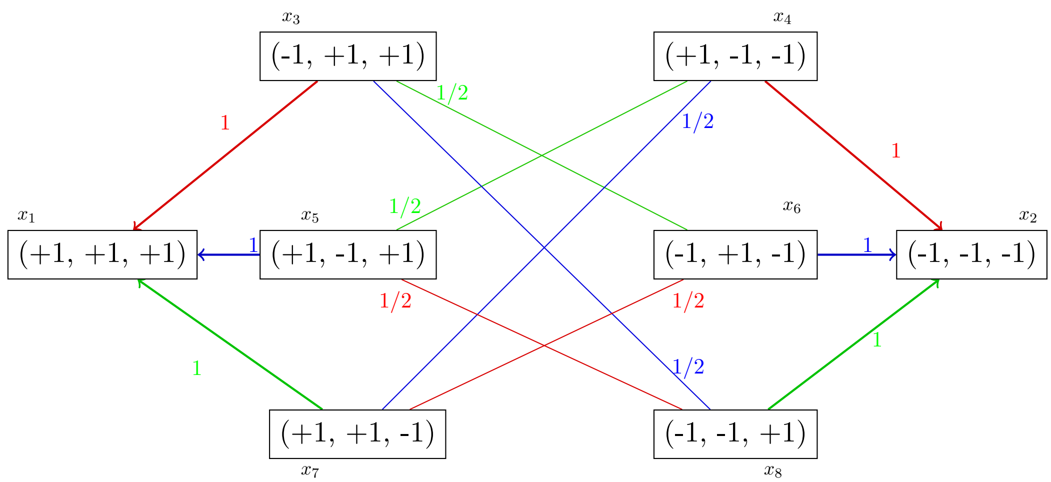
(a4) $n_1 = 0$.
Tutti i giocatori stanno giocando un anti-coordination game:

$$\begin{aligned}\mathcal{V}_1 = \emptyset,\ \mathcal{V}_2 = \{1,2,3\},\\ u_i = \frac{1}{2}\sum_{j\neq i} \mid x_i - x_j \mid,\ \forall i\end{aligned}$$

e gli stati $(+1, -1, -1)$, $(-1, +1, -1)$, $(-1, -1, +1)$, $(-1, +1, +1)$, $(+1, -1, +1)$ e $(+1, +1, -1)$ saranno equilibri di Nash, per le ragioni già esposte. Queste configurazioni rappresentano tutte le possibili combinazioni di mosse dei giocatori tranne quelle in cui sono tutti accordati, incompatibili con i best response di qualsiasi giocatore nel caso di un anti-coordination game.

(b) Sia $n = 3$ e $X(0) = (+1, -1, +1)$ la configurazione iniziale della catena di Markov $X(t)$, a tempo continuo, corrispondente alla dinamica di *best response* asincrona per il gioco di sopra.

(b1) $n_1 = 3$.



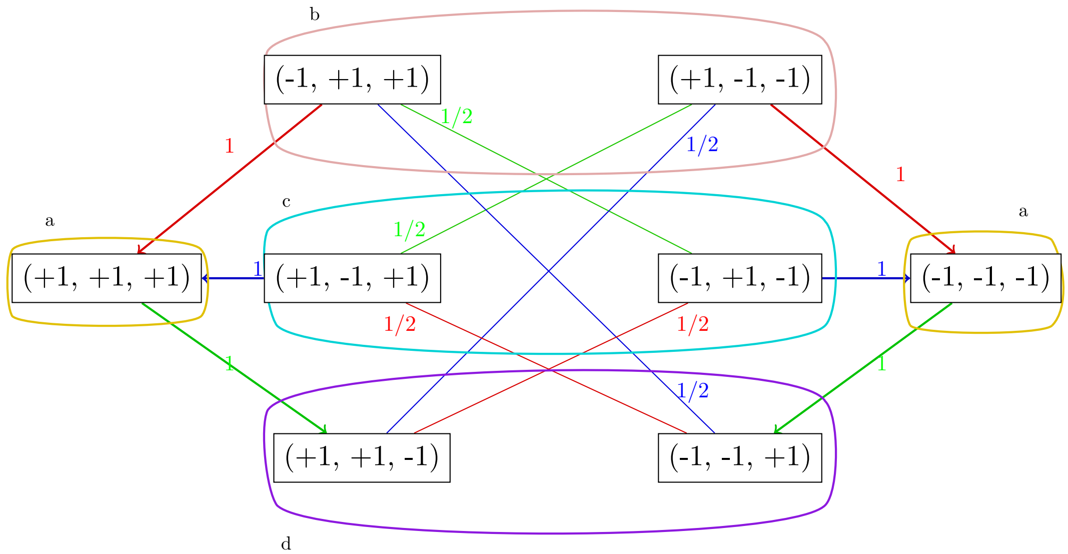
Per questo punto e per quelli successivi verrà utilizzata la nomenclatura mostrata in figura. In particolare x_i rappresenta la i-esima configurazione nel grafo delle transizioni e gli archi sono colorati in rosso, blu o verde se a cambiare mossa in un salto di configurazione sono rispettivamente il primo, il secondo o il terzo giocatore.

Come si può osservare dal grafo delle transizioni di configurazione con i relativi *rate* di transizione, risulta che

$$\lim_{t \to +\infty} \mathbb{P}\left(X(t) = x \mid X(0) = (+1, -1, +1)\right) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0, 0, 0, 0, 0, 0\right)',$$

in quanto $X(t)$, per $t \mapsto +\infty$, finirà necessariamente in uno dei due stati assorbenti, $(-1, -1, -1)$ oppure $(+1, +1, +1)$, con probabilità pari a $\frac{1}{2}$ per entrambi.

(b2) $n_1 = 2$.



Il grafo di transizione, in tal caso, è fortemente connesso. Questo significa che esiste una sola misura invariante, π_x, a cui tenderà

$$\lim_{t \to +\infty} \mathbb{P}\left(X\left(t\right) = x \mid X\left(0\right) = \left(+1, -1, +1\right)\right).$$

Sfruttando allora l'esistenza di 4 simmetrie, identificabili con π_a, π_b, π_c e π_d (ognuna associata ad un raggruppamento di colore diverso in figura) è possibile determinare la misura invariante π_x traducendo la condizione

$$L'\pi = 0 \iff \text{diag}(\omega)\pi = \Lambda'\pi$$

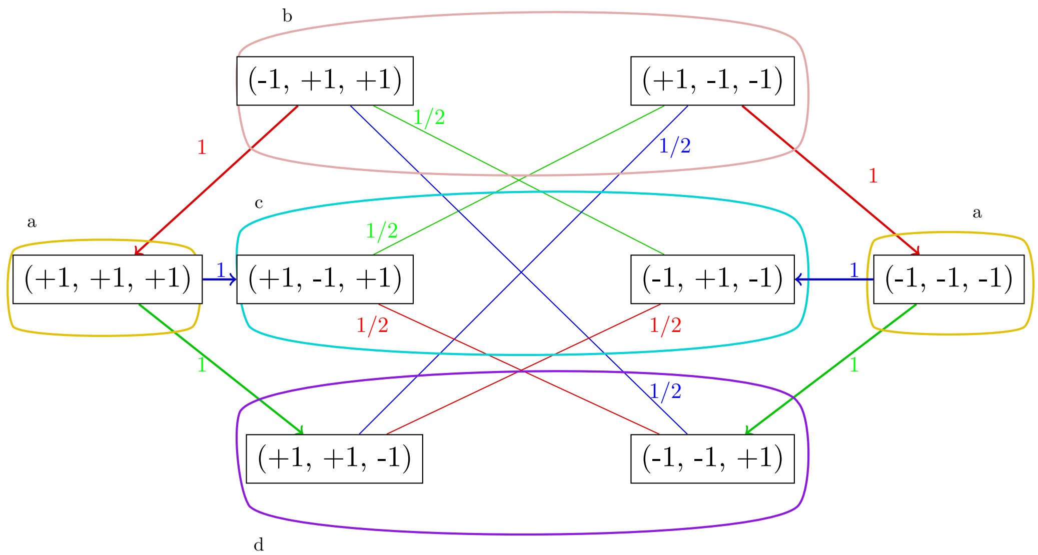
in

$$\begin{cases} \pi_a = \pi_c + \pi_b \\ 2\pi_b = \frac{1}{2}\pi_c + \frac{1}{2}\pi_d \\ 2\pi_c = \frac{1}{2}\pi_b + \frac{1}{2}\pi_d \\ \pi_a + \pi_b + \pi_c + \pi_d = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \pi_a = \frac{2}{14} \\ \pi_b = \frac{1}{14} \\ \pi_c = \frac{1}{14} \\ \pi_d = \frac{3}{14} \end{cases},$$

da cui si ricava che

$$\lim_{t \to +\infty} \mathbb{P}\left(X\left(t\right) = x \mid X\left(0\right) = \left(+1, -1, +1\right)\right) =$$
$$= \pi_x = \frac{1}{14}\left(2, 2, 1, 1, 1, 1, 3, 3\right)'.$$

(b3) $n_1 = 1$.



Anche in tal caso il grafo di transizione risulta fortemente connesso e, quindi, esiste un'unica misura invariante, π_x, a cui tende

$$\lim_{t\to+\infty} \mathbb{P}\left(X\left(t\right) = x \mid X\left(0\right) = \left(+1,-1,+1\right)\right).$$

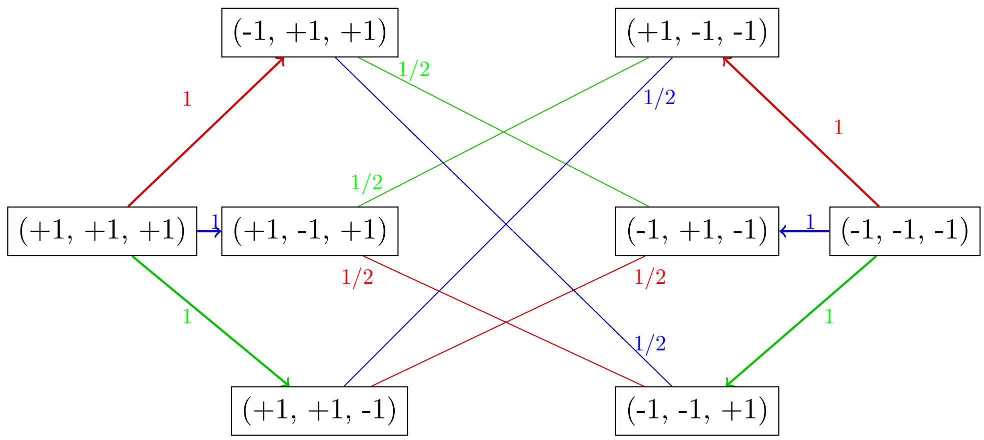
Come prima, grazie ai *rates* di transizione tra i diversi stati e alle quattro simmetrie presenti nel grafo (π_a, π_b, π_c e π_d), ricaviamo il sistema

$$\begin{cases} 2\pi_a = \pi_b \\ \pi_c = \pi_a + \frac{1}{2}\pi_b + \frac{1}{2}\pi_d \\ 2\pi_b = \frac{1}{2}\pi_c + \frac{1}{2}\pi_d \\ \pi_a + \pi_b + \pi_c + \pi_d = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \pi_a = \frac{1}{22} \\ \pi_c = \pi_d = \frac{2}{11} \\ \pi_b = \frac{1}{11} \end{cases},$$

da cui

$$\lim_{t\to+\infty} \mathbb{P}\left(X\left(t\right) = x \mid X\left(0\right) = \left(+1,-1,+1\right)\right) =$$
$$= \pi_x = \left(\frac{1}{22}, \frac{1}{22}, \frac{1}{11}, \frac{1}{11}, \frac{2}{11}, \frac{2}{11}, \frac{2}{11}, \frac{2}{11}\right)'.$$

(b4) $n_1 = 0$.



In quest'ultima configurazione del grafo di transizione esiste un solo stato assorbente del sistema, per $t \mapsto +\infty$, rappresentato dall'insieme $\{x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8\}$.
Pertanto, si avrà, analogamente al caso in cui $n_1 = 3$:

$$\lim_{t \to +\infty} \mathbb{P}\left(X\left(t\right) = x \mid X\left(0\right) = (+1, -1, +1)\right) = \left(0, 0, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}\right)'.$$