Homework II

La soluzione degli esercizi deve essere caricata sul portale del corso entro le ore 23:59 di mercoledì 23 Dicembre 2020, sotto il nome di Homework2.

Esercizio 1. Si consideri il seguente modello epidemico su un grafo a stella con il nodo centrale 0 e n foglie $1, 2, \dots, n$. Ciascun nodo i può essere in stato $X_i(t) = 0$ (non infetto) oppure in stato $X_i(t) = 1$ (infetto). Si assuma che il nodo centrale 0 sia sempre infetto, il suo stato rimane dunque sempre eguale ad 1. I nodi foglia invece seguono una dinamica di tipo SIS, cioè contraggono l'infezione dal nodo centrale con rate β e mutano spontaneamente da 1 a 0 con rate 1. Sia $N(t) = \sum_{i=1}^{n} X_i(t)$ il numero dei nodi foglia infetti al tempo t.

1. Si mostri che $N(t)$ è una catena di nascita e morte e si calcolino esplicitamente, per ogni $k = 0, \dots, n$ i rate λ_k e μ_k, rispettivamente di incremento e di diminuzione del processo $N(t)$ quando $N(t) = k$.
2. Si verifichi che $N(t)$ è una catena irriducibile e si determini, in forma chiusa, l'unica distribuzione di probabilità invariante $\overline{\pi}$ di $N(t)$.
3. Nel caso $n = 3$ si calcoli esplicitamente la distribuzione di probabilità invariante $\overline{\pi}$ e si determini, al variare di β, lo stato per cui $\overline{\pi}_k$ è massima.
4. Per n generico, si determini lo stato k_n per cui la distribuzione invariante $\overline{\pi}_k$ è massima e si determini
$$\lim_{n \to +\infty} \frac{k_n}{n}$$

Esercizio 2. Si consideri una rete stradale con due nodi $\mathcal{V} = \{o, d\}$ e due link paralleli $\mathcal{E} = \{e_1, e_2\}$, entrambi con nodo coda o e nodo testa d. Il link i-esimo, per $i = 1, 2$, ha funzione di ritardo $d_i(x)$ pedaggio $\omega_i \in [0, 1]$, così che il costo percepito dall'utente su tale link è $\omega_i + d_i(f_i)$, dove $f_i \geq 0$ è il flusso sul link e_i. Si assuma che

$$d_1(x) = 0\,, \qquad d_2(x) = \frac{3}{2}x\,.$$

Si considerino flussi unitari da o a d, i.e., $(f_1, f_2) \in \mathbb{R}_+^{\mathcal{E}}$, $f_1 + f_2 = 1$.

(a) Si determini il flusso di equilibrio di Wardrop $f^{(\omega)} = (f_1^{(\omega)}, f_2^{(\omega)})$ come funzione del vettore dei pedaggio $\omega = (\omega_1, \omega_2)$.

Si consideri ora un gioco a due giocatori con insieme delle azioni $\mathcal{A} = [0, 1]$ in cui i giocatori sono i gestori dei due link, e l'azione e la funzione di utilità del giocatore i-esimo sono rispettivamente il pedaggio ω_i e l'incasso al corrispondente equilibrio di Wardrop:

$$u_i(\omega_1, \omega_2) = \omega_i f_i^{(\omega)}\,, \qquad i = 1, 2\,.$$

(b) Si determinino le funzioni *best response* $BR_1(\omega_2)$ e $BR_2(\omega_1)$;

(c) Si determini l'equilibrio di Nash del gioco.

Esercizio 3. Si consideri un gioco $(\mathcal{V}, \mathcal{A}, \{u_i\})$ con insieme dei giocatori $\mathcal{V} = \{1, 2, \dots, n\}$ e insieme delle azioni $\mathcal{A} = \{-1, +1\}$. I giocatori sono divisi in due classi, $\mathcal{V}_1 = \{1, \dots, n_1\}$ e $\mathcal{V}_2 = \{n_1 + 1, \dots n\}$, e le funzioni utilità sono date da

$$u_i(x_i, x_{-i}) = \begin{cases} \dfrac{1}{2} \displaystyle\sum_{j \neq i} |x_i + x_j| \text{ se } i \in \mathcal{V}_1 \\[2ex] \dfrac{1}{2} \displaystyle\sum_{j \neq i} |x_i - x_j| \text{ se } i \in \mathcal{V}_2 \end{cases}$$

In altre parole i giocatori in $\mathcal{V}_1$ hanno la funzione utilità di un gioco di coordinamento, mentre quelli in $\mathcal{V}_2$ hanno la funzione utilità di un gioco di anti-coordinamento. Si determinino gli eventuali equilibri di Nash (a strategia pura) del gioco nei casi in cui $n = 3$ e:

(a1) $n_1 = 3$;

(a2) $n_1 = 2$;

(a3) $n_1 = 1$;

(a4) $n_1 = 0$.

Si consideri ora la catena di Markov $X(t)$ a tempo continuo corrispondente alla dinamica di *best response* asincrona per il gioco di sopra. Se ne rappresenti il grafo delle transizioni di configurazione con i relativi *rate* di transizione e si determini il limite

$$\lim_{t \to +\infty} \mathbb{P}(X(t) = x | X(0) = (+1, -1, +1)) \,, \qquad x \in \{-1, +1\}^3$$

della distribuzione di probabilità condizionata alla configurazione iniziale $X(0) = (+1, -1, +1)$ nei casi in cui $n = 3$ e:

(b1) $n_1 = 3$;

(b2) $n_1 = 2$;

(b3) $n_1 = 1$;

(b4) $n_1 = 0$.

Infine, (**facoltativo**)

(c) si detemini il numero di equilibri di Nash (a strategia pura) del gioco per valori non negativi arbitrari di n e n_1 come funzione di tali parametri.