Homework 2

Giulio Nenna (s245717@studenti.polito.it)

December 22, 2020

Realizzato in collaborazione con Alfredo Baione (s279328)

Esercizio 1.

1. Il numero di 1 in $X(t)$ è:

$$\eta(x) = \sum_{i=0}^{n} x_i.$$

Sia

$$N(t) = \eta(X(t)) = \sum_{i=1}^{n} X_i(t)$$

il numero dei nodi foglia infetti al tempo t.
La matrice del kernel di mutazione riferita a tale processo è:

$$\psi = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},$$

mentre quelle associate al kernel di interazione sono:

$$\varphi(0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \varphi(1) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

È possibile osservare, allora, che le *active boundaries* di $X(t)$ coincidono e sono solo solo funzioni di $\eta(x)$:

$$\zeta_{01}(x) = \sum_{i,j} W_{ij}(1-x_i)x_j = \zeta_{10}(x) = \sum_{i,j} W_{ij}(1-x_j)x_i = n+1-\eta(x).$$

Ne risulta che $N(t)$ è una "birth-and-death" chain.
Ponendo $N(t) = k$, risulta:

$$\lambda_{N(t)}(x) = (n-k)\psi_{01} + \zeta_{01}(x)\beta\varphi_{01}(1) = (n-k)\cdot 0 + (n+1-\eta(x))\cdot\beta = (n-k)\cdot\beta,$$
$$\mu_{N(t)}(x) = k\psi_{10} + \zeta_{10}(x)\beta\varphi_{10}(0) = k + (n+1-\eta(x))\cdot\beta\cdot 0 = k.$$

2. Sia $N(t) = k$. Nella costruzione dei rate di transizione della catena di Markov di nascita e morte $N(t)$, si ottiene:

   - $\forall k < n, \quad \lambda_{N(t)}(x) = (n-k) \cdot \beta > 0 \quad (k = 1, ..., n-1)\,;$
   - $\forall k > 0, \quad \mu_{N(t)}(x) = k > 0 \quad (k = n, ..., 1)\,.$

   Pertanto, la catena è irriducibile.
   L'unica distribuzione di probabilità invariante $\bar{\pi}$ di $N(t)$ avrà come componenti:

$$\bar{\pi}_i = \frac{1}{\sum_{k=0}^{n} \prod_{j=0}^{k-1} \frac{\lambda_j}{\mu_{j+1}}} \cdot \prod_{j=0}^{i-1} \frac{\lambda_j}{\mu_{j+1}} =$$
$$\frac{1}{\sum_{k=0}^{n} \prod_{j=0}^{k-1} \frac{(n-j)\cdot\beta}{j+1}} \cdot \prod_{j=0}^{i-1} \frac{(n-j)\cdot\beta}{j+1}, \qquad i = 0, ..., n.$$

3. Sia $n = 3$. Applicando la formula precedente, risulta che

$$\bar{\pi}_i = \frac{1}{\sum_{k=0}^{3} \prod_{j=0}^{k-1} \frac{(3-j)\cdot\beta}{j+1}} \cdot \prod_{j=0}^{i-1} \frac{(3-j)\cdot\beta}{j+1}, \qquad i = 0, ..., 3,$$

   da cui si ottiene:

$$\bar{\pi}_0 = \frac{1}{1+3\beta+3\beta^2+\beta^3},$$
$$\bar{\pi}_1 = \frac{3\beta}{1+3\beta+3\beta^2+\beta^3},$$
$$\bar{\pi}_2 = \frac{3\beta^2}{1+3\beta+3\beta^2+\beta^3},$$
$$\bar{\pi}_3 = \frac{\beta^3}{1+3\beta+3\beta^2+\beta^3}.$$

   Per capire quando $\bar{\pi}_k$, $k = 0, ..., 3$, è massima, è possibile studiare il comportamento di $\bar{\pi}_0$, $\bar{\pi}_1$, $\bar{\pi}_2$ e $\bar{\pi}_3$, rispetto alla variabile β, nell'intervallo $[0, +\infty)$.

Come si evince dal grafico, allora:

- se $0 \leq \beta \leq \frac{1}{3}$, $k = 0$ è lo stato per cui $\bar{\pi}_k$ è massima;
- se $\frac{1}{3} \leq \beta \leq 1$, $k = 1$ è lo stato per cui $\bar{\pi}_k$ è massima;
- se $1 \leq \beta \leq 3$, $k = 2$ è lo stato per cui $\bar{\pi}_k$ è massima;
- se $3 \leq \beta < +\infty$, $k = 3$ è lo stato per cui $\bar{\pi}_k$ è massima.

4. Sia

$$k_n = \underset{k=0,\dots,n}{\arg\max}\ (\bar{\pi}_k).$$

La catena di disuguaglianze

$$\frac{\bar{\pi}_{i+1}}{\bar{\pi}_i} \geq 1 \Leftrightarrow \frac{\lambda_j}{\mu_{j+1}} \geq 1 \Leftrightarrow (n-j)\cdot\beta \geq j \Leftrightarrow\ n\beta - j\beta \geq j \Leftrightarrow j + j\beta \leq n\beta \Leftrightarrow j \leq \frac{n\beta}{1+\beta}$$

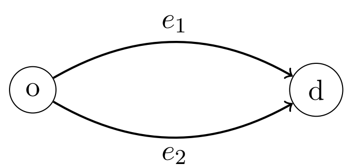
prova che:

$$k_n = \underset{k=0,\dots,n}{\arg\max}\ (\bar{\pi}_k) = \left\lfloor \frac{n\beta}{1+\beta} \right\rfloor = \frac{n\beta}{1+\beta} - \epsilon, \qquad 0 \leq \epsilon < 1.$$

Pertanto, si avrà:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{k_n}{n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n\beta}{n\,(1+\beta)} - \frac{\epsilon}{n} \right) = \frac{\beta}{1+\beta}.$$

Esercizio 2.



(a) Agli archi e_1 ed e_2 corrispondono le funzioni di costo

$$\Delta_1 = \omega_1 \qquad e \qquad \Delta_2 = \omega_2 + \frac{3}{2} f_2,$$

dove ω_1 e ω_2 rappresentano i pedaggi applicati al passaggio dei corrispondenti flussi f_1 e f_2, tali che $f_1 + f_2 = 1$.
Risulta che $f^{(\omega)} = \left(f_1^{(\omega)}, f_2^{(\omega)}\right)$ è "equilibrio di Wardrop" se e solo se:

$$\begin{cases} f_1^{(\omega)} > 0 \Rightarrow \Delta_1 \leq \Delta_2 \Leftrightarrow \omega_1 \leq \omega_2 + \frac{3}{2} f_2^{(\omega)} \\ f_2^{(\omega)} > 0 \Rightarrow \Delta_2 \leq \Delta_1 \Leftrightarrow \omega_1 \geq \omega_2 + \frac{3}{2} f_2^{(\omega)} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f_2^{(\omega)} = \frac{2}{3}(\omega_1 - \omega_2) \\ f_1^{(\omega)} = 1 - \frac{2}{3}(\omega_1 - \omega_2). \end{cases}$$

(b) Si consideri il gioco

$$\left(\mathcal{V} = \{1,2\},\ A = \{0,1\},\ U = \{u_i(\omega_1, \omega_2) = \omega_i f_i^{(\omega)},\ i = 1,2\}\right),$$

dove 1 e 2 rappresentano, rispettivamente, i gestori dei nodi o e d del suddetto grafo.
La funzione di *best response* del primo giocatore risulta essere

$$BR_1(\omega_2) = \arg\max_{\omega_1 \in A} u_1(\omega_1, \omega_2) = \arg\max_{\omega_1 \in A} \omega_1 f_1^{(\omega)} =$$
$$\arg\max_{\omega_1 \in A} \omega_1 \left(1 - \frac{2}{3}(\omega_1 - \omega_2)\right) = \arg\max_{\omega_1 \in A} \omega_1 \left(1 - \frac{2}{3}\omega_1 + \frac{2}{3}\omega_2\right) =$$
$$\arg\max_{\omega_1 \in A} \left(\omega_1 - \frac{2}{3}\omega_1^2 + \frac{2}{3}\omega_1\omega_2\right) = \frac{3}{4} + \frac{1}{2}\omega_2,$$

mentre quella relativa al secondo é

$$BR_2(\omega_1) = \arg\max_{\omega_2 \in A} u_2(\omega_2, \omega_1) = \arg\max_{\omega_2 \in A} \omega_2 f_2^{(\omega)} =$$
$$\arg\max_{\omega_2 \in A} \omega_2 \left(\frac{2}{3}(\omega_1 - \omega_2)\right) = \arg\max_{\omega_2 \in A} \omega_2 \left(\frac{2}{3}\omega_1 - \frac{2}{3}\omega_2\right) =$$
$$\arg\max_{\omega_2 \in A} \left(\frac{2}{3}\omega_2\omega_1 - \frac{2}{3}\omega_2^2\right) = \frac{1}{2}\omega_1.$$

(c) Per trovare l'equilibrio di Nash del gioco in questione, si deve imporre che ogni giocatore giochi la sua *best response*, in risposta all'azione dell'altro giocatore. In tal caso, questo si traduce nella risoluzione del seguente sistema:

$$\begin{cases} \omega_1^* = \frac{3}{4} + \frac{1}{2}\omega_2^* \\ \omega_2^* = \frac{1}{2}\omega_1^* \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \omega_1^* = \frac{3}{4} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\omega_1^*\right) \\ \omega_2^* = \frac{1}{2}\omega_1^* \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \omega_1^* = 1 \\ \omega_2^* = \frac{1}{2} \end{cases} ,$$

e tali sono i valori degli equilibri di Nash cercati.

Esercizio 3.

Si consideri il gioco $(\mathcal{V}, A, \{u_i\})$, caratterizzato da

$$\mathcal{V} = \{1, 2, ..., n\}, \quad A = \{-1, +1\}, \quad u_i(x_i, x_{-i}) = \begin{cases} \frac{1}{2}\sum_{j\neq i} \mid x_i + x_j \mid & se\ i \in \mathcal{V}_1 \\ \frac{1}{2}\sum_{j\neq i} \mid x_i - x_j \mid & se\ i \in \mathcal{V}_2 \end{cases},$$

dove

$$\mathcal{V}_1 = \{1, 2, ..., n_1\} \text{ e } \mathcal{V}_2 = \{n_1 + 1, n_1 + 2, ..., n\}.$$

(a) Sia $n = 3$.

(a1) $n_1 = 3$.
Ciascun giocatore sta giocando un coordination game quindi valgono le seguenti:

$$\mathcal{V}_1 = \{1, 2, 3\},\ \mathcal{V}_2 = \emptyset,$$
$$u_i = \frac{1}{2}\sum_{j\neq i} \mid x_i + x_j \mid,\ \forall i.$$

Se definiamo le quantità

$$n^+ = |\{x_i = +1, i \in \mathcal{V}\}|$$
$$n^- = |\{x_i = -1, i \in \mathcal{V}\}|$$

che rappresentano rispettivamente il numero di giocatori che stanno giocando +1 e -1 allora per ciascun giocatore vale la seguente:

$$\{x_i = +1\} \in BR_i(x_{-i}) \iff n^+ \geq n^-$$
$$\{x_i = -1\} \in BR_i(x_{-i}) \iff n^- \geq n^+$$

Gli equilibri di Nash, pertanto, saranno dati dalle terne $(-1, -1, -1)$ e $(+1, +1, +1)$, perché entrambe le configurazioni, in tal caso, massimizzano le "utilities" di 1, 2 e 3 e sono compatibili con i best response di ciascun giocatore.

(a2) $n_1 = 2$.
In questo caso il giocatore $i = 3$ sta giocando un anti-coordination

game. Quindi:

$$\mathcal{V}_1 = \{1,2\},\ \mathcal{V}_2 = \{3\},$$
$$u_1 = \frac{1}{2} \cdot (\mid x_1 + x_2 \mid + \mid x_1 + x_3 \mid),$$
$$u_2 = \frac{1}{2} \cdot (\mid x_2 + x_1 \mid + \mid x_2 + x_3 \mid),$$
$$u_3 = \frac{1}{2} \cdot (\mid x_3 - x_1 \mid + \mid x_3 - x_2 \mid).$$

Per cui vale:

$$\{x_3 = +1\} \in BR_3(x_{-3}) \iff n^- \geq n^+$$
$$\{x_3 = -1\} \in BR_3(x_{-3}) \iff n^+ \geq n^-$$

Quindi, gli equilibri di Nash risultano essere individuati dalle configurazioni $(-1,-1,+1)$ e $(+1,+1,-1)$ in cui si può notare come ai primi due giocatori convenga essere "accordati" mentre al terzo convenga giocare il contrario di quello che giocano i primi due.

(a3) $n_1 = 1$.
In questo caso due dei tre giocatori sta giocando un anti-coordination game e solo il terzo sta giocando un coordination game. In particolare:

$$\mathcal{V}_1 = \{1\},\ \mathcal{V}_2 = \{2,3\},$$
$$u_1 = \frac{1}{2} \cdot (\mid x_1 + x_2 \mid + \mid x_1 + x_3 \mid),$$
$$u_2 = \frac{1}{2} \cdot (\mid x_2 - x_1 \mid + \mid x_2 - x_3 \mid),$$
$$u_3 = \frac{1}{2} \cdot (\mid x_3 - x_1 \mid + \mid x_3 - x_2 \mid).$$

Gli equilibri di Nash sono individuati da $(+1,+1,-1)$, $(-1,+1,-1)$, $(+1,-1,+1)$ e $(-1,-1,+1)$, ossia configurazioni in cui fintanto che $x_1 \neq x_2$ allora $i = 1$ può giocare qualsiasi valore dal momento che la sua utilità non cambia. In queste configurazioni nessun giocatore guadagna utilità cambiando mossa.

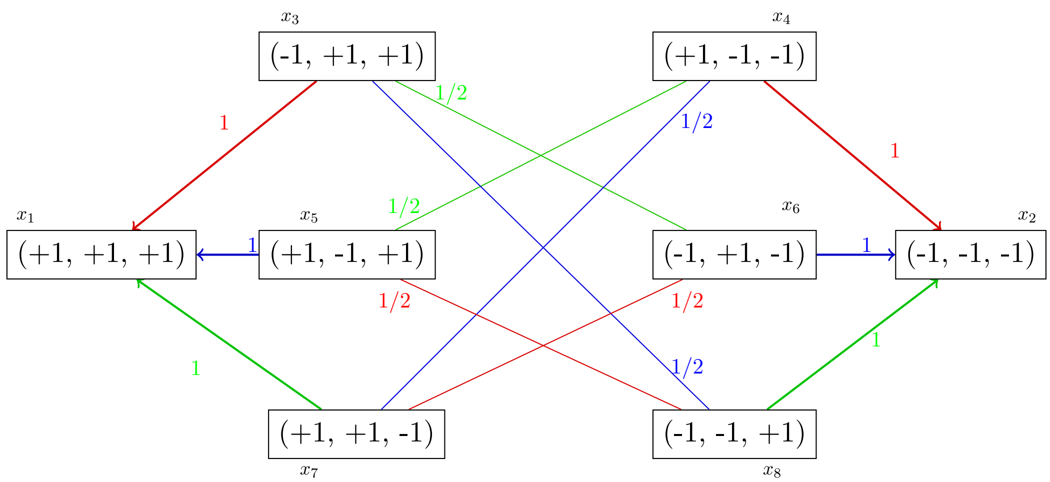
(a4) $n_1 = 0$.
Tutti i giocatori stanno giocando un anti-coordination game:

$$\mathcal{V}_1 = \emptyset,\ \mathcal{V}_2 = \{1,2,3\},$$
$$u_i = \frac{1}{2} \sum_{j \neq i} \mid x_i - x_j \mid,\ \forall i$$

e gli stati $(+1, -1, -1)$, $(-1, +1, -1)$, $(-1, -1, +1)$, $(-1, +1, +1)$, $(+1, -1, +1)$ e $(+1, +1, -1)$ saranno equilibri di Nash, per le ragioni già esposte. Queste configurazioni rappresentano tutte le possibili combinazioni di mosse dei giocatori tranne quelle in cui sono tutti accordati, incompatibili con i best response di qualsiasi giocatore nel caso di un anti-coordination game.

(b) Sia $n = 3$ e $X(0) = (+1, -1, +1)$ la configurazione iniziale della catena di Markov $X(t)$, a tempo continuo, corrispondente alla dinamica di *best response* asincrona per il gioco di sopra.

(b1) $n_1 = 3$.



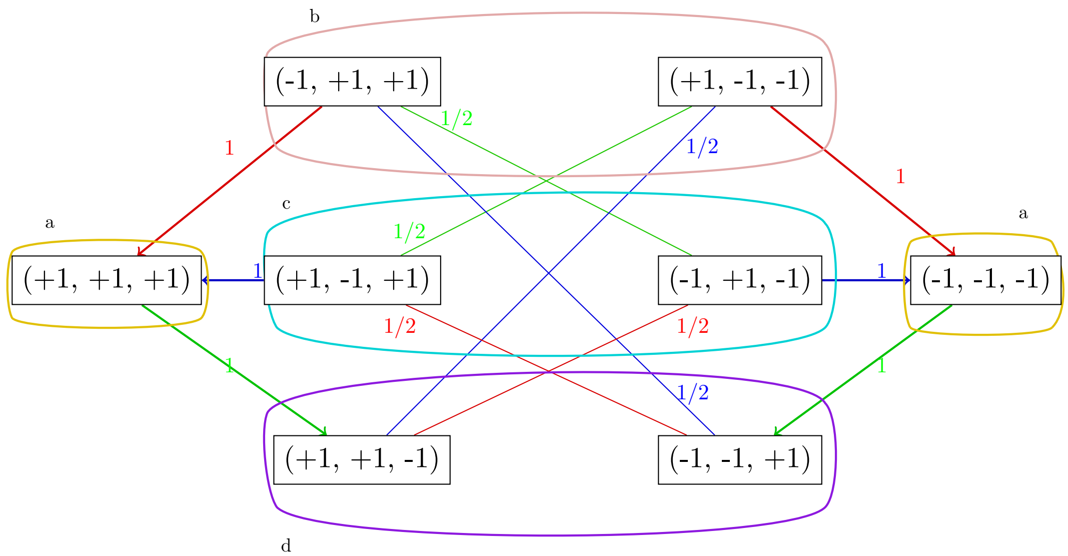
Per questo punto e per quelli successivi verrà utilizzata la nomenclatura mostrata in figura. In particolare x_i rappresenta la i-esima configurazione nel grafo delle transizioni e gli archi sono colorati in rosso, blu o verde se a cambiare mossa in un salto di configurazione sono rispettivamente il primo, il secondo o il terzo giocatore.

Come si può osservare dal grafo delle transizioni di configurazione con i relativi *rate* di transizione, risulta che

$$\lim_{t\to+\infty} \mathbb{P}\left(X(t) = x \mid X(0) = (+1, -1, +1)\right) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0, 0, 0, 0, 0, 0\right)',$$

in quanto $X(t)$, per $t \mapsto +\infty$, finirà necessariamente in uno dei due stati assorbenti, $(-1, -1, -1)$ oppure $(+1, +1, +1)$, con probabilità pari a $\frac{1}{2}$ per entrambi.

(b2) $n_1 = 2$.



Il grafo di transizione, in tal caso, è fortemente connesso. Questo significa che esiste una sola misura invariante, π_x, a cui tenderà

$$\lim_{t\to+\infty} \mathbb{P}\left(X\left(t\right) = x \mid X\left(0\right) = (+1, -1, +1)\right).$$

Sfruttando allora l'esistenza di 4 simmetrie, identificabili con π_a, π_b, π_c e π_d (ognuna associata ad un raggruppamento di colore diverso in figura) è possibile determinare la misura invariante π_x traducendo la condizione

$$L'\pi = 0 \iff \mathrm{diag}(\omega)\pi = \Lambda'\pi$$

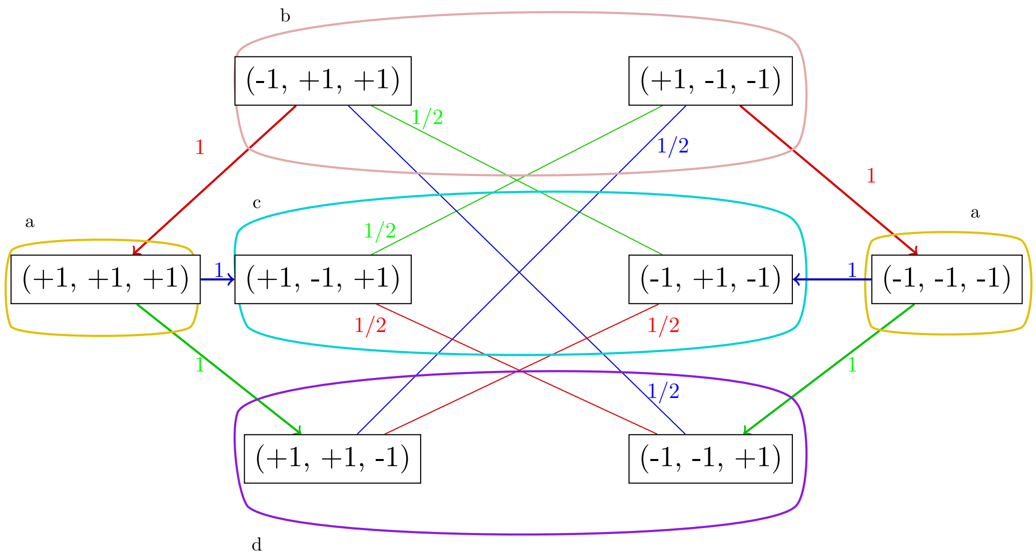
in

$$\begin{cases} \pi_a = \pi_c + \pi_b \\ 2\pi_b = \frac{1}{2}\pi_c + \frac{1}{2}\pi_d \\ 2\pi_c = \frac{1}{2}\pi_b + \frac{1}{2}\pi_d \\ \pi_a + \pi_b + \pi_c + \pi_d = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \pi_a = \frac{2}{14} \\ \pi_b = \frac{1}{14} \\ \pi_c = \frac{1}{14} \\ \pi_d = \frac{3}{14} \end{cases},$$

da cui si ricava che

$$\lim_{t\to+\infty} \mathbb{P}\left(X\left(t\right) = x \mid X\left(0\right) = (+1, -1, +1)\right) =$$
$$= \pi_x = \frac{1}{14}\left(2, 2, 1, 1, 1, 1, 3, 3\right)'.$$

(**b3**) $n_1 = 1$.



Anche in tal caso il grafo di transizione risulta fortemente connesso e, quindi, esiste un'unica misura invariante, π_x, a cui tende

$$\lim_{t\to+\infty} \mathbb{P}\left(X\left(t\right) = x \mid X\left(0\right) = (+1,-1,+1)\right).$$

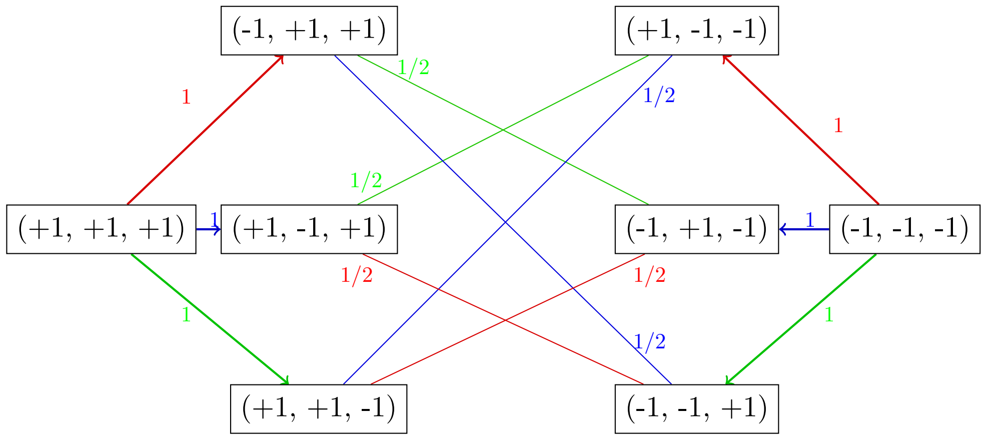
Come prima, grazie ai *rates* di transizione tra i diversi stati e alle quattro simmetrie presenti nel grafo (π_a, π_b, π_c e π_d), ricaviamo il sistema

$$\begin{cases} 2\pi_a = \pi_b \\ \pi_c = \pi_a + \frac{1}{2}\pi_b + \frac{1}{2}\pi_d \\ 2\pi_b = \frac{1}{2}\pi_c + \frac{1}{2}\pi_d \\ \pi_a + \pi_b + \pi_c + \pi_d = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \pi_a = \frac{1}{22} \\ \pi_c = \pi_d = \frac{2}{11} \\ \pi_b = \frac{1}{11} \end{cases},$$

da cui

$$\lim_{t\to+\infty} \mathbb{P}\left(X\left(t\right) = x \mid X\left(0\right) = (+1,-1,+1)\right) =$$
$$= \pi_x = \left(\frac{1}{22}, \frac{1}{22}, \frac{1}{11}, \frac{1}{11}, \frac{2}{11}, \frac{2}{11}, \frac{2}{11}, \frac{2}{11}\right)'.$$

(b4) $n_1 = 0$.



In quest'ultima configurazione del grafo di transizione esiste un solo stato assorbente del sistema, per $t \mapsto +\infty$, rappresentato dall'insieme $\{x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8\}$.
Pertanto, si avrà, analogamente al caso in cui $n_1 = 3$:

$$\lim_{t \to +\infty} \mathbb{P}\left(X\left(t\right) = x \mid X\left(0\right) = \left(+1, -1, +1\right)\right) = \left(0, 0, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}\right)'.$$