Homework 2

Alfredo Baione (s279328@studenti.polito.it)

December 22, 2020

Realizzato in collaborazione con Giulio Nenna (s245717)

Esercizio 1.

1. Il numero di 1 in $X(t)$ è:
$$\eta\left(x\right)=\sum_{i=0}^{n}x_i.$$
Sia
$$N\left(t\right)=\eta\left(X\left(t\right)\right)=\sum_{i=1}^{n}X_i\left(t\right)$$
il numero dei nodi foglia infetti al tempo t.
La matrice del kernel di mutazione riferita a tale processo è:
$$\psi=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 1 & 0\end{bmatrix},$$
mentre quelle associate al kernel di interazione sono:
$$\varphi\left(0\right)=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}, \qquad \varphi\left(1\right)=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix}.$$
È possibile osservare, allora, che le *active boundaries* di $X(t)$ coincidono e sono solo solo funzioni di $\eta\left(x\right)$:
$$\zeta_{01}\left(x\right)=\sum_{i,j}W_{ij}\left(1-x_i\right)x_j=\zeta_{10}\left(x\right)=\sum_{i,j}W_{ij}\left(1-x_j\right)x_i=n+1-\eta\left(x\right).$$
Ne risulta che $N\left(t\right)$ è una “birth-and-death” chain.
Ponendo $N\left(t\right)=k$, risulta:
$$\lambda_{N(t)}\left(x\right)=\left(n-k\right)\psi_{01}+\zeta_{01}\left(x\right)\beta\varphi_{01}\left(1\right)=\left(n-k\right)\cdot 0+\left(n+1-\eta\left(x\right)\right)\cdot\beta=\left(n-k\right)\cdot\beta,$$
$$\mu_{N(t)}\left(x\right)=k\psi_{10}+\zeta_{10}\left(x\right)\beta\varphi_{10}\left(0\right)=k+\left(n+1-\eta\left(x\right)\right)\cdot\beta\cdot 0=k.$$

2. Sia $N(t) = k$. Nella costruzione dei rate di transizione della catena di Markov di nascita e morte $N(t)$, si ottiene:

   - $\forall k < n, \quad \lambda_{N(t)}(x) = (n-k) \cdot \beta > 0 \quad (k = 1, ..., n-1)\,;$
   - $\forall k > 0, \quad \mu_{N(t)}(x) = k > 0 \quad (k = n, ..., 1)\,.$

   Pertanto, la catena è irriducibile.
   L'unica distribuzione di probabilità invariante $\bar{\pi}$ di $N(t)$ avrà come componenti:

$$\bar{\pi}_i = \frac{1}{\sum_{k=0}^{n} \prod_{j=0}^{k-1} \frac{\lambda_j}{\mu_{j+1}}} \cdot \prod_{j=0}^{i-1} \frac{\lambda_j}{\mu_{j+1}} =$$
$$\frac{1}{\sum_{k=0}^{n} \prod_{j=0}^{k-1} \frac{(n-j)\cdot\beta}{j+1}} \cdot \prod_{j=0}^{i-1} \frac{(n-j)\cdot\beta}{j+1}, \qquad i = 0, ..., n.$$

3. Sia $n = 3$. Applicando la formula precedente, risulta che

$$\bar{\pi}_i = \frac{1}{\sum_{k=0}^{3} \prod_{j=0}^{k-1} \frac{(3-j)\cdot\beta}{j+1}} \cdot \prod_{j=0}^{i-1} \frac{(3-j)\cdot\beta}{j+1}, \qquad i = 0, ..., 3,$$

   da cui si ottiene:

$$\bar{\pi}_0 = \frac{1}{1+3\beta+3\beta^2+\beta^3},$$
$$\bar{\pi}_1 = \frac{3\beta}{1+3\beta+3\beta^2+\beta^3},$$
$$\bar{\pi}_2 = \frac{3\beta^2}{1+3\beta+3\beta^2+\beta^3},$$
$$\bar{\pi}_3 = \frac{\beta^3}{1+3\beta+3\beta^2+\beta^3}.$$

   Per capire quando $\bar{\pi}_k$, $k = 0, ..., 3$, è massima, è possibile studiare il comportamento di $\bar{\pi}_0$, $\bar{\pi}_1$, $\bar{\pi}_2$ e $\bar{\pi}_3$, rispetto alla variabile β, nell'intervallo $[0, +\infty)$.

Come si evince dal grafico, allora:

- se $0 \leq \beta \leq \frac{1}{3}$, $k = 0$ è lo stato per cui $\bar{\pi}_k$ è massima;
- se $\frac{1}{3} \leq \beta \leq 1$, $k = 1$ è lo stato per cui $\bar{\pi}_k$ è massima;
- se $1 \leq \beta \leq 3$, $k = 2$ è lo stato per cui $\bar{\pi}_k$ è massima;
- se $3 \leq \beta < +\infty$, $k = 3$ è lo stato per cui $\bar{\pi}_k$ è massima.

4. Sia

$$k_n = \underset{k=0,\dots,n}{\arg\max}\ (\bar{\pi}_k).$$

La catena di disuguaglianze

$$\frac{\bar{\pi}_{i+1}}{\bar{\pi}_i} \geq 1 \Leftrightarrow \frac{\lambda_j}{\mu_{j+1}} \geq 1 \Leftrightarrow (n-j) \cdot \beta \geq j \Leftrightarrow\ n\beta - j\beta \geq j \Leftrightarrow j + j\beta \leq n\beta \Leftrightarrow j \leq \frac{n\beta}{1+\beta}$$

prova che:

$$k_n = \underset{k=0,\dots,n}{\arg\max}\ (\bar{\pi}_k) = \left\lfloor \frac{n\beta}{1+\beta} \right\rfloor = \frac{n\beta}{1+\beta} - \epsilon, \qquad 0 \leq \epsilon < 1.$$

Pertanto, si avrà:

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{k_n}{n} = \lim_{n \to \infty} \left(\frac{n\beta}{n\,(1+\beta)} - \frac{\epsilon}{n} \right) = \frac{\beta}{1+\beta}.$$

Esercizio 2.

(a) Agli archi e_1 ed e_2 corrispondono le funzioni di costo

$$\Delta_1 = \omega_1 \qquad\qquad e \qquad\qquad \Delta_2 = \omega_2 + \frac{3}{2} f_2,$$

dove ω_1 e ω_2 rappresentano i pedaggi applicati al passaggio dei corrispondenti flussi f_1 e f_2, tali che $f_1 + f_2 = 1$.
Risulta che $f^{(\omega)} = \left(f_1^{(\omega)}, f_2^{(\omega)}\right)$ è "equilibrio di Wardrop" se e solo se:

$$\begin{cases} f_1^{(\omega)} > 0 \Rightarrow \Delta_1 \leq \Delta_2 \Leftrightarrow \omega_1 \leq \omega_2 + \frac{3}{2} f_2^{(\omega)} \\ f_2^{(\omega)} > 0 \Rightarrow \Delta_2 \leq \Delta_1 \Leftrightarrow \omega_1 \geq \omega_2 + \frac{3}{2} f_2^{(\omega)} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f_2^{(\omega)} = \frac{2}{3}\left(\omega_1 - \omega_2\right) \\ f_1^{(\omega)} = 1 - \frac{2}{3}\left(\omega_1 - \omega_2\right). \end{cases}$$

(b) Si consideri il gioco

$$\left(\mathcal{V} = \{1,2\},\ A = \{0,1\},\ U = \{u_i\left(\omega_1, \omega_2\right) = \omega_i f_i^{(\omega)},\ i = 1,2\}\right),$$

dove 1 e 2 rappresentano, rispettivamente, i gestori dei nodi o e d del suddetto grafo.
La funzione di *best response* del primo giocatore risulta essere

$$BR_1\left(\omega_2\right) = \operatorname*{arg\,max}_{\omega_1 \in A}\ u_1\left(\omega_1, \omega_2\right) = \operatorname*{arg\,max}_{\omega_1 \in A}\ \omega_1 f_1^{(\omega)} = \operatorname*{arg\,max}_{\omega_1 \in A}\ \omega_1 \left(1 - \frac{2}{3}\left(\omega_1 - \omega_2\right)\right) =$$
$$\operatorname*{arg\,max}_{\omega_1 \in A}\ \omega_1 \left(1 - \frac{2}{3}\omega_1 + \frac{2}{3}\omega_2\right) = \operatorname*{arg\,max}_{\omega_1 \in A}\ \left(\omega_1 - \frac{2}{3}\omega_1^2 + \frac{2}{3}\omega_1 \omega_2\right) = \frac{3}{4} + \frac{1}{2}\omega_2,$$

mentre quella relativa al secondo é

$$BR_2\left(\omega_1\right) = \operatorname*{arg\,max}_{\omega_2 \in A}\ u_2\left(\omega_2, \omega_1\right) = \operatorname*{arg\,max}_{\omega_2 \in A}\ \omega_2 f_2^{(\omega)} = \operatorname*{arg\,max}_{\omega_2 \in A}\ \omega_2 \left(\frac{2}{3}\left(\omega_1 - \omega_2\right)\right) =$$
$$\operatorname*{arg\,max}_{\omega_2 \in A}\ \omega_2 \left(\frac{2}{3}\omega_1 - \frac{2}{3}\omega_2\right) = \operatorname*{arg\,max}_{\omega_2 \in A}\ \left(\frac{2}{3}\omega_2 \omega_1 - \frac{2}{3}\omega_2^2\right) = \frac{1}{2}\omega_1.$$

(c) Per trovare l'equilibrio di Nash del gioco in questione, si deve imporre che ogni giocatore giochi la sua *best response*, in risposta all'azione dell'altro giocatore. In tal caso, questo si traduce nella risoluzione del seguente sistema:

$$\begin{cases} \omega_1^* = \frac{3}{4} + \frac{1}{2}\omega_2^* \\ \omega_2^* = \frac{1}{2}\omega_1^* \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \omega_1^* = \frac{3}{4} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\omega_1^*\right) \\ \omega_2^* = \frac{1}{2}\omega_1^* \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \omega_1^* = 1 \\ \omega_2^* = \frac{1}{2} \end{cases},$$

e tali sono i valori degli equilibri di Nash cercati.

Esercizio 3.

Si consideri il gioco $(\mathcal{V}, A, \{u_i\})$, caratterizzato da

$$\mathcal{V} = \{1, 2, ..., n\}, \quad A = \{-1, +1\}, \quad u_i\,(x_i, x_{-i}) = \begin{cases} \frac{1}{2}\sum_{j\neq i} \mid x_i + x_j \mid & se\ i \in \mathcal{V}_1 \\ \frac{1}{2}\sum_{j\neq i} \mid x_i - x_j \mid & se\ i \in \mathcal{V}_2 \end{cases},$$

dove

$$\mathcal{V}_1 = \{1, 2, ..., n_1\} \text{ e } \mathcal{V}_2 = \{n_1 + 1, n_1 + 2, ..., n\}.$$

(a) Sia $n = 3$.

(**a1**) $n_1 = 3$.

$$\mathcal{V}_1 = \{1, 2, 3\},\ \mathcal{V}_2 = \emptyset,$$
$$u_i = \frac{1}{2}\sum_{j\neq i} \mid x_i + x_j \mid,\ \forall i.$$

Gli equilibri di Nash, pertanto, saranno dati dalle terne $(-1, -1, -1)$ e $(+1, +1, +1)$, perché entrambe le configurazioni, in tal caso, massimizzano le "utilities" di 1, 2 e 3.

(**a2**) $n_1 = 2$.

$$\mathcal{V}_1 = \{1, 2\},\ \mathcal{V}_2 = \{3\},$$
$$u_1 = \frac{1}{2} \cdot (\mid x_1 + x_2 \mid + \mid x_1 + x_3 \mid),$$
$$u_2 = \frac{1}{2} \cdot (\mid x_2 + x_1 \mid + \mid x_2 + x_3 \mid),$$
$$u_3 = \frac{1}{2} \cdot (\mid x_3 - x_1 \mid + \mid x_3 - x_2 \mid).$$

Adesso, gli equilibri di Nash risultano essere individuati dalle configurazioni $(-1, -1, +1)$ e $(+1, +1, -1)$, poiché in questi stati qualsiasi altra azione di uno dei tre giocatori, mantenendo invariate quelle degli altri, non ne migliora l' "utility".

(a3) $n_1 = 1$.

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_1 = \{1\},\, \mathcal{V}_2 &= \{2,3\}, \\ u_1 &= \frac{1}{2} \cdot \left(\mid x_1 + x_2 \mid + \mid x_1 + x_3 \mid\right), \\ u_2 &= \frac{1}{2} \cdot \left(\mid x_2 - x_1 \mid + \mid x_2 - x_3 \mid\right), \\ u_3 &= \frac{1}{2} \cdot \left(\mid x_3 - x_1 \mid + \mid x_3 - x_2 \mid\right). \end{aligned}$$

Gli equilibri di Nash sono individuati da $(+1, +1, -1)$, $(-1, +1, -1)$, $(+1, -1, +1)$ e $(-1, -1, +1)$, poiché in tali configurazioni, come spiegato anche in precedenza, nessun giocatore ha incentivo a cambiare la sua azione, se quella degli altri resta invariata.

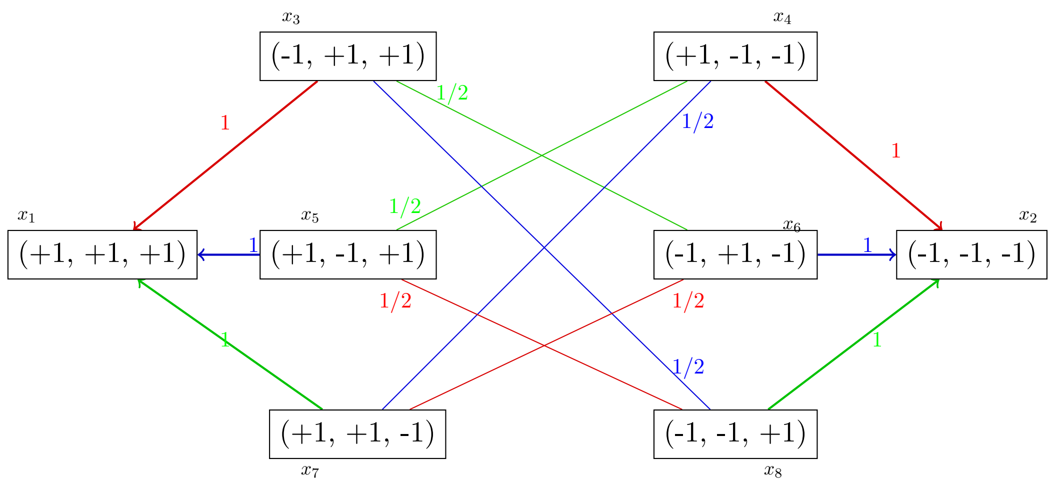
(a4) $n_1 = 0$.

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_1 = \emptyset,\, \mathcal{V}_2 &= \{1,2,3\}, \\ u_i &= \frac{1}{2} \sum_{j \neq i} \mid x_i - x_j \mid,\ \forall i \end{aligned}$$

e gli stati $(+1, -1, -1)$, $(-1, +1, -1)$, $(-1, -1, +1)$, $(-1, +1, +1)$, $(+1, -1, +1)$ e $(+1, +1, -1)$ saranno equilibri di Nash, per le ragioni già esposte.

(b) Sia $n = 3$ e $X(0) = (+1, -1, +1)$ la configurazione iniziale della catena di Markov $X(t)$, a tempo continuo, corrispondente alla dinamica di *best response* asincrona per il gioco di sopra.

(b1) $n_1 = 3$.

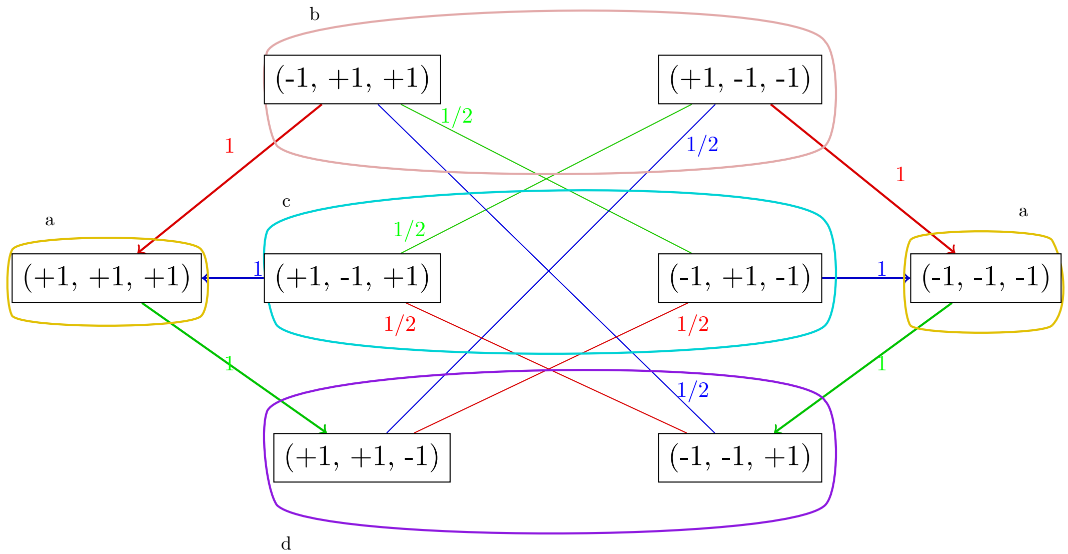


Come si può osservare dal grafo delle transizioni di configurazione con i relativi *rate* di transizione, risulta che

$$\lim_{t \to +\infty} \mathbb{P}\left(X(t) = x \mid X(0) = (+1, -1, +1)\right) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0, 0, 0, 0, 0, 0\right)',$$

in quanto $X(t)$, per $t \mapsto +\infty$, finirà necessariamente in uno dei due stati assorbenti, $(-1, -1, -1)$ oppure $(+1, +1, +1)$, con probabilità pari a $\frac{1}{2}$ per entrambi.

(b2) $n_1 = 2$.



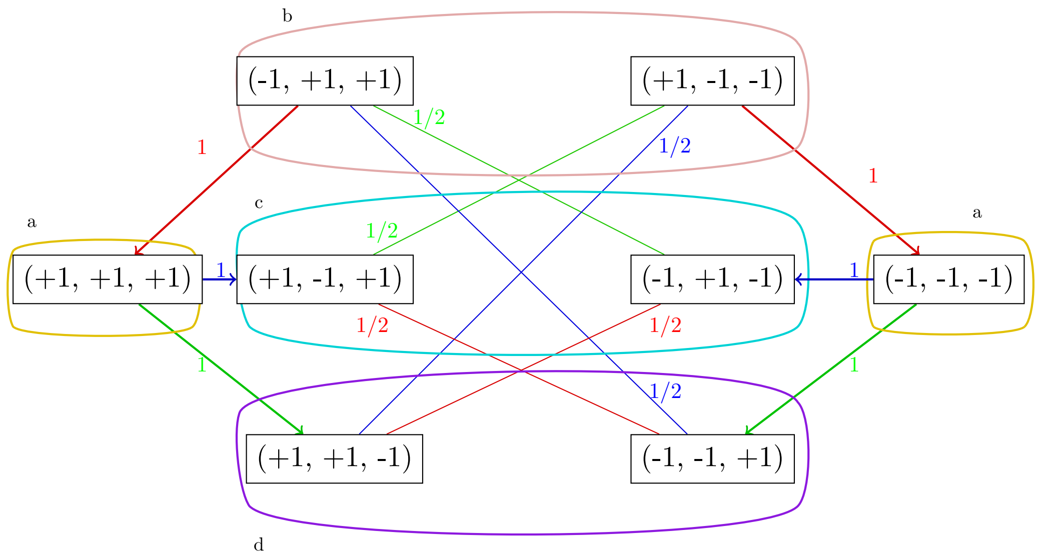
Il grafo di transizione, in tal caso, è fortemente connesso. Questo significa che esiste una sola misura invariante, π_x, a cui tenderà $\lim_{t \to +\infty} \mathbb{P}\left(X\left(t\right) = x \mid X\left(0\right) = \left(+1, -1, +1\right)\right)$.
Sfruttando, allora, l'esistenza di 4 simmetrie, identificabili con π_a, π_b, π_c e π_d (ognuna associata ad un raggruppamento di colore diverso in figura), risulta individuato, a partire dai *rates* di transizione di ogni stato, il sistema lineare

$$\begin{cases} \pi_a = \pi_c + \pi_d \\ \pi_b = \pi_a \\ 2\pi_c = \frac{1}{2}\pi_b + \frac{1}{2}\pi_d \\ 2\pi_d = \frac{1}{2}\pi_b + \frac{1}{2}\pi_c \\ \pi_a + \pi_b + \pi_c + \pi_d = \frac{1}{2} \end{cases} \qquad \Leftrightarrow \begin{cases} \pi_a = \pi_b = \frac{1}{6} \\ \pi_c = \pi_d = \frac{1}{12} \end{cases} \qquad ,$$

da cui si ricava che

$$\lim_{t \to +\infty} \mathbb{P}\left(X\left(t\right) = x \mid X\left(0\right) = \left(+1, -1, +1\right)\right) = \pi_x = \left(\frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{12}, \frac{1}{12}, \frac{1}{12}, \frac{1}{12}, \frac{1}{12}, \frac{1}{12}\right)'.$$

(**b3**) $n_1 = 1$.



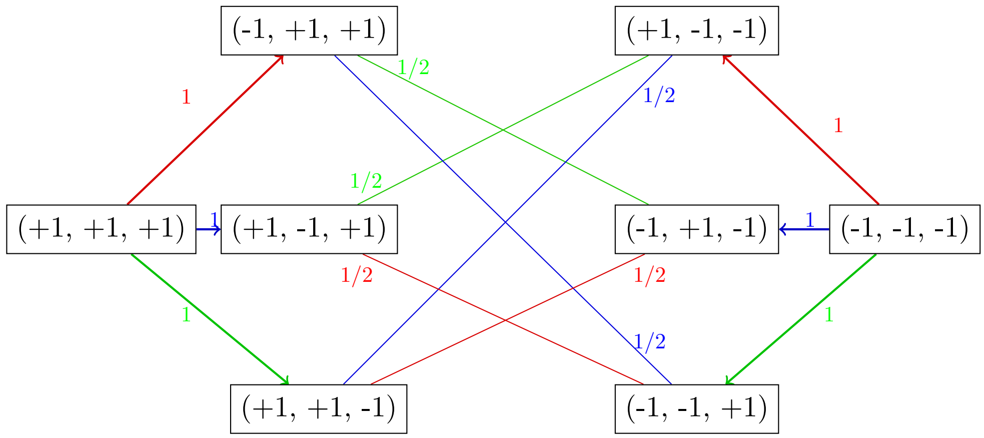
Anche in tal caso il grafo di transizione risulta fortemente connesso e, quindi, esiste un'unica misura invariante, π_x, a cui tende $\lim_{t\to+\infty} \mathbb{P}\left(X\left(t\right)=x \mid X\left(0\right)=\left(+1,-1,+1\right)\right).$
Come prima, grazie ai *rates* di transizione tra i diversi stati e alle quattro simmetrie presenti nel grafo (π_a, π_b, π_c e π_d), ricaviamo il sistema

$$\begin{cases} 2\pi_a = \pi_c \\ \pi_b = \pi_a + \frac{1}{2}\pi_c + \frac{1}{2}\pi_d \\ 2\pi_c = \frac{1}{2}\pi_b + \frac{1}{2}\pi_d \\ \pi_d = \pi_a + \frac{1}{2}\pi_b + \frac{1}{2}\pi_c \\ \pi_a + \pi_b + \pi_c + \pi_d = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \pi_a = \frac{1}{22} \\ \pi_b = \pi_d = \frac{2}{11} \\ \pi_c = \frac{1}{11} \end{cases},$$

da cui

$$\lim_{t\to+\infty} \mathbb{P}\left(X\left(t\right)=x \mid X\left(0\right)=\left(+1,-1,+1\right)\right) = \pi_x = \left(\frac{1}{22},\frac{1}{22},\frac{2}{11},\frac{2}{11},\frac{1}{11},\frac{1}{11},\frac{2}{11},\frac{2}{11}\right)'.$$

(**b4**) $n_1 = 0$.



In quest'ultima configurazione del grafo di transizione esiste un solo stato assorbente del sistema, per $t \mapsto +\infty$, rappresentato dall'insieme $\{x_3,\, x_4,\, x_5,\, x_6,\, x_7,\, x_8\}$.
Pertanto, si avrà:

$$\lim_{t \to +\infty} \mathbb{P}\left(X\left(t\right) = x \mid X\left(0\right) = (+1, -1, +1)\right) = \left(0, 0, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}\right)'.$$