# Homework 3

Giulio Nenna (s245717@studenti.polito.it)

January 15, 2021

Realizzato in collaborazione con Alfredo Baione (s279328), Andrea Sanna (s222975) e Ornella Elena Grassi (s290310)

## Esercizio 1.

Si consideri il limite idrodinamico di diffusione epidemica SIR descritto dal sistema di equazioni differenziali

$$\begin{cases} \dot{p}_S = -\alpha p_S p_I \\ \dot{p}_I = p_I \left(\alpha p_S - 1\right) \\ \dot{p}_R = p_I \end{cases},$$

a partire dai nuclei di interazione descritti da

$$\begin{cases} \Theta_{SI}\left(p\right) = \alpha p_I \\ \Theta_{IR}\left(p\right) = 1 \end{cases}, \quad \alpha > 0.$$

Sia $p\left(t\right) = \left(p_S\left(t\right), p_I\left(t\right), p_R\left(t\right)\right)$ la soluzione dell'ODE sopracitata, con la seguente condizione iniziale

$$p_S\left(0\right) = 1 - \epsilon, \qquad p_I\left(0\right) = \epsilon, \qquad p_R\left(0\right) = 0,$$

dove $\epsilon \in ]0, 1[$.

**(a)** Per ricavare gli equilibri dell'ODE, risolviamo il sistema

$$\begin{cases} -\alpha p_S p_I = 0 \\ p_I \left(\alpha p_S - 1\right) = 0 \\ p_I = 0 \\ p_S + p_I + p_R = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p_S = 1 - p_R \\ p_I = 0 \end{cases},$$

da cui si ottengono i seguenti punti di equilibrio:

$$\left(\bar{p}_S, \bar{p}_I, \bar{p}_R\right) = \left(k, 0, 1 - k\right), \qquad k \in [0, 1].$$

**(b)** Osserviamo che:

$$\dot{p}_S = -\alpha p_S p_I,$$

allora $\dot{p}_S \leq 0$ sempre e, dunque, $p_S$ è decrescente.
Invece:

$$\dot{p}_R = p_I,$$

quindi $\dot{p}_R \geq 0$ sempre e, pertanto, $p_R$ è crescente.

**(c)** Dalla ODE possiamo ricavare che:

$$\dot{p}_I \geq 0 \Leftrightarrow \dot{p}_S \geq \frac{1}{\alpha}.$$

Questo significa che, fintantoché $\dot{p}_S \geq \frac{1}{\alpha}$, $p_i$ sarà crescente; invece, nel caso in cui $\dot{p}_S \leq \frac{1}{\alpha}$, $p_i$ risulterà decrescente. Avendo, però, dimostrato che $p_S$ è monotona decrescente, la soluzione dell'ODE, per $t \mapsto +\infty$, convergerà sempre ad un equilibrio della forma $(\bar{p}_S, \bar{p}_I, \bar{p}_R)$. Infatti, $p_I$ inizialmente o sarà crescente, per poi decrescere fino a 0, oppure decrescerà soltanto fino a 0. $\forall \epsilon$, dunque, l'equilibrio sarà raggiunto.

**(d)** Riscriviamo l'equazione

$$\alpha x + \ln(1 - x)$$

così:

$$\ln\left((1 - x)\, e^{\alpha x}\right). \qquad (*)$$

Dalla ODE possiamo ricavare l'espressione di $p_R$:

$$p_R = \int p_I \, dt + c = \int -\frac{\dot{p}_S}{\alpha p_S} \, dt + c = -\frac{\ln(p_S)}{\alpha} + c.$$

Troviamo il valore di $c$:

$$p_R(0) = -\frac{\ln(p_S(0))}{\alpha} + c \Leftrightarrow \frac{\ln(1 - \epsilon)}{\alpha} = c.$$

Pertanto:

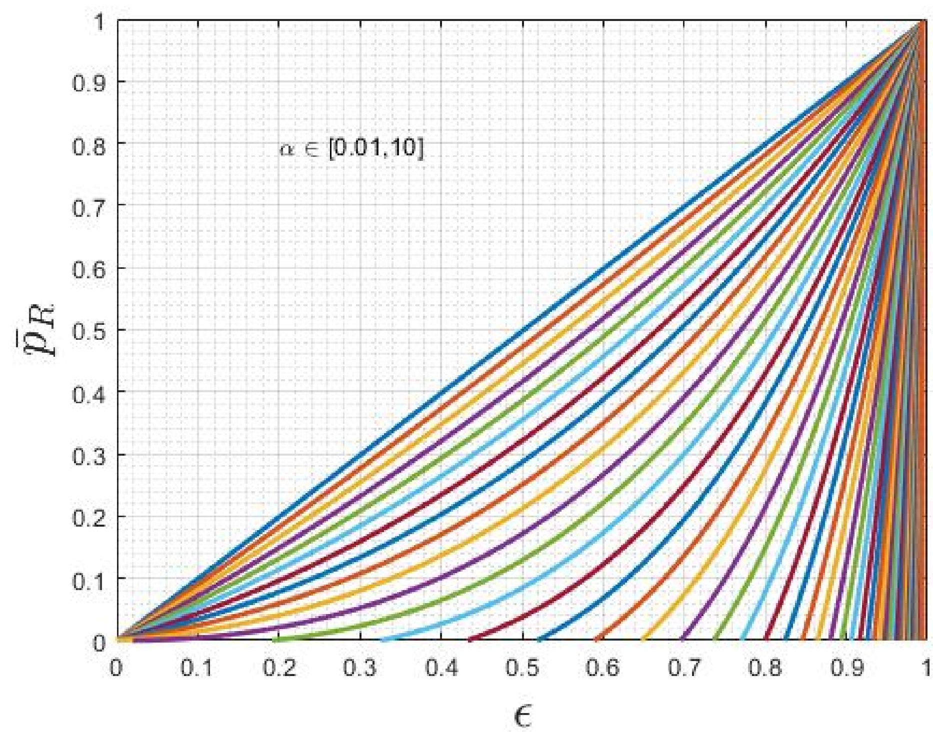
$$p_R = -\frac{\ln(p_S)}{\alpha} + \frac{\ln(1 - \epsilon)}{\alpha} = \frac{1}{\alpha} \ln\left(\frac{1 - \epsilon}{p_S}\right).$$

Adesso, sapendo che il punto limite $(\bar{p}_S, \bar{p}_I, \bar{p}_R)$ è tale per cui

$$\bar{p}_S = 1 - \bar{p}_R \text{ e } \bar{p}_I = 0,$$

sostituendo l'espressione di $\bar{p}_R$ nell'equazione $(*)$, otteniamo:

$$\ln\left(p_S \cdot e^{ln\left(\frac{1-\epsilon}{p_S}\right)}\right) = \ln\left(p_S \cdot \frac{1-\epsilon}{p_S}\right) = \ln(1-\epsilon).$$



**(e)** Sia $\alpha < 1$.
Dall'equazione dell'ODE si ricava che:

$$\dot{p}_I = p_I\left(\alpha p_S - 1\right) \leq p_I\left(\alpha - 1\right),$$

poiché se $\alpha < 1$ e $p_S \leq 1$, risulta:

$$\alpha p_S \leq \alpha.$$

É dunque possibile applicare il lemma di Grönwall, dal momento che $(\alpha - 1)$ e $p_i(t)$ sono funzioni continue a valori reali, definite su $[0, 1]$, tali per cui $p_I(t)$ è derivabile in $]0, 1[$.
Si avrà che:

$$p_I(t) \leq p_I(0)\, e^{\left(\int_0^t \alpha - 1\, ds\right)} = \epsilon \cdot e^{(\alpha-1)t}, \quad t \geq 0.$$

Dal momento che

$$\dot{p}_R(s) = p_I \leq \epsilon \cdot e^{(\alpha-1)t}, \quad t \geq 0,$$

integrando tra 0 e $t$, otteniamo:

$$\int_0^t \dot{p}_R\, ds \leq \int_0^t \epsilon \cdot e^{(\alpha-1)s}\, ds$$

$$\Leftrightarrow p_R(t) \leq \frac{\epsilon \cdot e^{(\alpha-1)t}}{\alpha - 1} - \frac{\epsilon}{\alpha - 1} = \frac{\epsilon}{1-\alpha}\left(1 - e^{(\alpha-1)t}\right), \quad t \geq 0.$$

Da tale risultato si ricava che:

$$\bar{p}_R = \lim_{t\to+\infty} p_R(t) \leq \lim_{t\to+\infty} \frac{\epsilon}{1-\alpha}\left(1 - e^{(\alpha-1)t}\right) = \frac{\epsilon}{1-\alpha}(1-0) = \epsilon\,(1-\alpha)^{-1}.$$

**(f)** Sia $\alpha > 1$ e $(1-\epsilon)\,\alpha > 1$.
Dunque, siamo nel caso in cui $p_S$ può assumere, ad un certo istante $\bar{t}$, il valore $\frac{1}{\alpha}$, poiché $\frac{1}{\alpha} < 1$, $p_S$ è decrescente e $p_S(0) > \frac{1}{\alpha}$ (per ipotesi).
Siccome $\dot{p}_I > 0$ fintantoché $p_S > \frac{1}{\alpha}$ e $\dot{p}_I < 0$ quando $p_S < \frac{1}{\alpha}$, questo significa proprio che $\bar{t}$ è un punto di massimo assoluto per $p_I$.
Ne consegue che $p_I$ sarà crescente in $[0, \bar{t}]$ e decrescente in $[\bar{t}, +\infty[$.

**(g)** Sia $\alpha > 1$.
Per capire se, in tal caso, $\bar{p}_R$ ammette un limite dal basso, è possibile studiare i punti critici dell'equazione di cui $\bar{p}_R$ è soluzione, nell'intervallo $[0, 1[$.

Osserviamo che, per quanto visto prima, $\bar{p}_R$ è sempre limitato dall'alto da

$$\lim_{t \to +\infty} \frac{\epsilon}{1-\alpha} \left(1 - e^{(\alpha-1)t}\right),$$

soltanto che, questa volta, siccome $\alpha > 1$, tale limite va a $+\infty$.
Sia

$$f(x) = \alpha x + \ln(1-x).$$

Si avrà:

$$f(x)' = \alpha - \frac{1}{1-x} \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 1 - \frac{1}{\alpha}$$

e, pertanto, $f\left(1 - \frac{1}{\alpha}\right)$ risulta essere un massimo per $f(x)$.
Inoltre, dato che $f(0) > 0$ e la funzione è crescente nell'intervallo $[0, 1 - \frac{1}{\alpha}]$, essa si annullerà necessariamente in corrispondenza di $\bar{p}_R$ tale che

$$1 - \frac{1}{\alpha} \geq \bar{p}_R.$$

**Esercizio 2.**

Sia $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \varepsilon, W)$ un grafo di ordine $n = |\mathcal{V}| \geq 2$ privo di self loop tale che ogni nodo abbia grado uscente $\omega_i > 0$. Si considera un gioco tra i giocatori $\mathcal{V}$, ciascuno con spazio delle azioni $\mathcal{A} = \mathbb{R}$ e funzioni di utilità

$$u_i(x) = -\frac{x_i^2}{2} + c_i x_i + \beta \sum_{j \neq i} W_{ij} x_j x_i$$

con $i \in \mathcal{V}$, $\beta \geq 0$ e $c \in \mathbb{R}^{\mathcal{V}}$.

**(a)** Dal momento che il grafo non presenta *self-loop* allora $W$ ha elementi tutti nulli sulla diagonale. Ci si può pertanto ricondurre alla scrittura matriciale:

$$u_i(x) = -\frac{x_i^2}{2} + c_i x_i + \beta (Wx)_i x_i$$

Per lo stesso motivo il termine $\beta(Wx)_i$ non dipende da $x_i$ pertanto:

$$\frac{\delta u_i(x)}{\delta x_i} = -x_i + c_i + \beta (Wx)_i \tag{1}$$

Ponendo quindi quest'ultima quantità pari a 0, poiché $u_i(x)$ è una funzione quadratica concava, si ottiene:

$$BR_i(x^{-i}) = c_i + \beta \sum_{j \neq i} W_{ij} x_j$$

**(b)** Gli equilibri di Nash si realizzano nelle configurazioni $x^*$ in cui ogni giocatore assume la sua *best-response*, pertanto dalla **(a)**:

$$x^* = c + \beta W x^*$$

Quindi gli equilibri di Nash saranno nella forma

$$x^* = (I - \beta W)^{-1} c$$

L'esistenza e unicità di $x^*$ dipende quindi solamente dall'invertibilità di $(I - \beta W)$. Siano pertanto $\lambda_i$ gli autovalori di $W$, allora $\psi_i = (1 - \beta\lambda_i)$ sono gli autovalori di $(I - \beta W)$. Affinché questa sia quindi invertibile deve valere $\forall i \in \{1, \dots n\}$

$$\psi_i \neq 0 \Rightarrow \beta\lambda_i \neq 1$$

L'equilibrio di Nash $x^*$ esiste ed è unico se e solo se vale quindi:

$$\beta \neq \frac{1}{\lambda_i} \qquad \forall \lambda_i \in \sigma(W)$$

Si pone ora

$$\beta\omega_i < 1 \qquad \forall i \in \mathcal{V} \tag{2}$$

ossia le righe di $\beta W$ sommano ad una quantità strettamente minore di 1, quindi $\beta W$ è *substocastica*. Questo vuol dire che per il suo raggio spettrale vale $\rho(W) < 1$ e può quindi essere applicato il *Criterio di Neumann* che non solo ci assicura l'esistenza di $(I - \beta W)^{-1}$ ma ci fornisce anche il seguente risultato:

$$(I - \beta W)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} \beta^k W^k$$

**(c)** Come visto nel punto precedente, se $(I - \beta W)$ è invertibile allora esiste ed è unico l'equilibrio di Nash $x^*$. In particolare se si pone $(I - \beta W)^{-1} = M$ allora vale:

$$x^* = Mc$$

pertanto il vettore $x^*$ dipende linearmente dal vettore $c$.
Se inoltre vale 2 allora:

$$M = \sum_{k=0}^{\infty} \beta^k W^k$$

e poiché per costruzione $\beta > 0$ e $W_{ij} \geq 0$ $\forall i, j \in \mathcal{V}$ allora necessariamente

$$M_{ij} \geq 0 \qquad \forall i, j \in \mathcal{V}.$$

**(d)** Il vettore di centralità di Katz si può esprimere nella forma seguente:

$$z = \left( I - \left( \frac{1-\beta_k}{\lambda_W} \right) W' \right)^{-1} \beta_k \mu$$

Poiché $\beta_k$ e $\mu$ sono rispettivamente il fattore di attenuazione della rete e il vettore di *centralità intrinseca*, entrambi scelti arbitrariamente, è possibile porre i seguenti valori:

$$\beta_k = 1 - \beta\lambda_W$$
$$\mu = \frac{1}{\beta_k}\mathbb{1}.$$

Si ottiene quindi:

$$z = (I - \beta W')^{-1}\mathbb{1}$$

che in forma scalare equivale a:

$$z_i = \sum_{j=1}^{n} (I - \beta W')^{-1}_{ij} \qquad \forall i \in \mathbb{V}. \tag{3}$$

Si sviluppa ora il termine $y = \sum_{j=1}^{n} x_j^*$ applicando il criterio di Neumann alla matrice $M$ e scambiando indici e sommatorie al fine di mostrare che $y = \langle c, z \rangle$:

$$y = \sum_{j=1}^{n} x_j^* = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} (I - \beta W)^{-1}_{ji} c_i =$$
$$= \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=0}^{\infty} \beta^k W_{ji}^k c_i = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=0}^{\infty} \beta^k W_{ji}^k c_i =$$
$$\sum_{i=1}^{n} c_i \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=0}^{\infty} \beta^k W_{ij}'^k = \sum_{i=1}^{n} c_i \sum_{j=1}^{n} (I - \beta W')^{-1}_{ij}$$
$$= \sum_{i=1}^{n} c_i z_i = \langle c, z \rangle$$

**(e)** Essendo $c_i$ variabili aleatorie indipendenti $Cov(c_i, c_j) = 0$, pertanto vale:

$$Var(y) = Var\left(\sum_{i=1}^{n} z_i c_i\right) = \sum_{i=1}^{n} z_i^2 \sigma_i^2$$

**(f)** Eliminando un qualsiasi giocatore $i$ dal gioco, le proprietà della matrice $W^{(-i)}$ sono le stesse della matrice $W$. Pertanto se continua a valere 2 allora la matrice $(I - \beta W^{(-1)})$ è ancora substocastica. In particolare se $c = \mathbb{1}$ allora, grazie al criterio di Neuman esiste ed è unico un vettore $x^{*(-i)}$ tale che

$$x^{*(-i)} = (I - \beta W^{(-i)})^{-1}\mathbb{1}$$

**(g)** Per ogni $k \neq i \neq j$ vale:

$$M_{ij}M_{ik} = M_{ii}(M_{ij} - M_{ij}^{(-i)}).$$

**(h)** Sia $\mathcal{V}^{(-i)} := \mathcal{V}\backslash\{i\}$. Sappiamo che $M$ e $M^{(-i)}$ sono matrici con elementi non negativi, quindi:

$$y = \sum_{j\in\mathcal{V}} x_j^* = \sum_{j\in\mathcal{V}} (M\mathbb{1})_j = \sum_{j\in\mathcal{V}}\sum_{k\in\mathcal{V}} M_{jk} > 0$$

$$y^{(-i)} = \sum_{j\neq i} x_j^{*(-i)} = \sum_{j\in\mathcal{V}^{(-i)}} (M\mathbb{1})_j = \sum_{j\in\mathcal{V}^{(-i)}}\sum_{k\in\mathcal{V}^{(-i)}} M_{jk}^{(-i)} > 0$$

Inoltre vale:

$$z_i = \sum_{j\in\mathcal{V}} M_{ij} \Rightarrow \frac{z_i^2}{M_{ii}} = \frac{1}{M_{ii}}\sum_{j\in\mathcal{V}}\sum_{k\in\mathcal{V}} M_{ij}M_{ik}$$

Utilizzando il punto (g) e considerando $M_{jk}^{(-i)} = 0$ se $j = i$ oppure $k = i$ , vale:

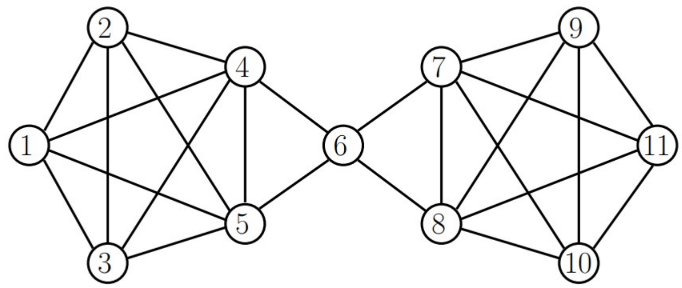
$$\frac{1}{M_{ii}}\sum_{j\in\mathcal{V}}\sum_{k\in\mathcal{V}} M_{ij}M_{ik} = \frac{1}{M_{ii}}\sum_{j\in\mathcal{V}}\sum_{k\in\mathcal{V}} M_{ii}(M_{jk} - M_{jk}^{(-i)}) =$$

$$\sum_{j\in\mathcal{V}}\sum_{k\in\mathcal{V}} M_{jk} - \sum_{j\in\mathcal{V}}\sum_{k\in\mathcal{V}} M_{jk}^{(-i)} = \sum_{j\in\mathcal{V}}\sum_{k\in\mathcal{V}} M_{jk} - \sum_{j\in\mathcal{V}^{(-i)}}\sum_{k\in\mathcal{V}^{(-i)}} M_{jk}^{(-i)} =$$

$$y - y^{(-i)}$$

Utilizzando tutti questi risultati si ottiene quindi

$$\frac{z_i^2}{M_{ii}} = y - y^{(-i)} \Rightarrow \underset{i\in\mathcal{V}}{\operatorname{argmax}}\, y - y^{(-i)} = \underset{i\in\mathcal{V}}{\operatorname{argmax}}\, \frac{z_i^2}{M_{ii}}$$




**(i)** Siano

$$\pi_a = \{1, 2, 3, 9, 10, 11\}$$
$$\pi_b = \{4, 5, 7, 8\}$$
$$\pi_c = \{6\}$$

i gruppi di simmetria del grafo in figura. Supponiamo che

$$\begin{aligned} z_i &= z_a && \forall i \in \pi_a \\ z_i &= z_b && \forall i \in \pi_b \\ z_6 &= z_c. \end{aligned}$$

Vale inoltre il seguente:

$$z = M\mathbb{1} = (I - \beta W')^{-1}\mathbb{1} \Rightarrow (I - \beta W')z = \mathbb{1}$$
$$\Rightarrow z = \mathbb{1} + \beta W' z$$

Si ottiene quindi il seguente sistema:

$$\begin{cases} z_a = 1 + \beta(2z_a + 2z_b) \\ z_b = 1 + \beta(3z_a + z_b + z_c) \\ z_c = 1 + 4\beta z_b \end{cases}$$

da cui si ottengono le seguenti soluzioni:

$$\begin{cases} z_{1a} = 1.72 \\ z_{1b} = 1.87 \\ z_{1c} = 1.75 \end{cases} \qquad \begin{cases} z_{2a} = 7.77 \\ z_{2b} = 9.16 \\ z_{2c} = 8.33 \end{cases}$$

Dove $z_1$ e $z_2$ rappresentano i vettori di centralità di Katz calcolati rispettivamente nel caso in cui $\beta = 0.1$ e $\beta = 0.2$. Analogamente siano $M^1 = (I - 0.1W)^{-1}$ e $M^2 = (I - 0.2W)^{-1}$, si ottengono i seguenti risultati:

$$\begin{cases} M_a^1 = 1.06 \\ M_b^1 = 1.07 \\ M_c^1 = 1.05 \end{cases} \qquad \begin{cases} M_a^2 = 1.85 \\ M_b^2 = 2.08 \\ M_c^2 = 1.66 \end{cases}$$

Dove $M_{ii} = M_k \ \forall i \in \pi_k$ , $k = \{a, b, c\}$.
In entrambi i casi i nodi che massimizzano il rapporto $z_i^2/M_{ii}$ sono quelli del gruppo $b$, infatti:

$$\frac{z_{1b}^2}{M_b^1} = 3.281 \qquad \frac{z_{2b}^2}{M_b^2} = 40.33$$