Homework 3

Alfredo Baione (s279328@studenti.polito.it)

January 12, 2021

Realizzato in collaborazione con Giulio Nenna (s245717), Andrea Sanna (s222975) e Ornella Elena Grassi (s290310)

Esercizio 1.

Si consideri il limite idrodinamico di diffusione epidemica SIR descritto dal sistema di equazioni differenziali

$$\begin{cases} \dot{p}_S = -\alpha p_S p_I \\ \dot{p}_I = p_I \left(\alpha p_S - 1\right) \\ \dot{p}_R = p_I \end{cases} ,$$

a partire dai nuclei di interazione descritti da

$$\begin{cases} \Theta_{SI}\left(p\right) = \alpha p_I \\ \Theta_{IR}\left(p\right) = 1 \end{cases} , \quad \alpha > 0.$$

Sia $p\left(t\right) = \left(p_S\left(t\right), p_I\left(t\right), p_R\left(t\right)\right)$ la soluzione dell'ODE sopracitata, con la seguente condizione iniziale

$$p_S\left(0\right) = 1 - \epsilon, \qquad p_I\left(0\right) = \epsilon, \qquad p_R\left(0\right) = 0,$$

dove $\epsilon \in]0, 1[$.

(a) Per ricavare gli equilibri dell'ODE, risolviamo il sistema

$$\begin{cases} -\alpha p_S p_I = 0 \\ p_I \left(\alpha p_S - 1\right) = 0 \\ p_I = 0 \\ p_S + p_I + p_R = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p_S = 1 - p_R \\ p_I = 0 \end{cases} ,$$

da cui si ottengono i seguenti punti di equilibrio:

$$\left(\bar{p}_S, \bar{p}_I, \bar{p}_R\right) = \left(k, 0, 1-k\right), \qquad k \in [0, 1].$$

(b) Osserviamo che:

$$\dot{p}_S = -\alpha p_S p_I,$$

allora $\dot{p}_S \leq 0$ sempre e, dunque, p_S è decrescente.
Invece:

$$\dot{p}_R = p_I,$$

quindi $\dot{p}_R \geq 0$ sempre e, pertanto, p_R è crescente.

(c) Dalla ODE possiamo ricavare che:

$$\dot{p}_I \geq 0 \Leftrightarrow \dot{p}_S \geq \frac{1}{\alpha}.$$

Questo significa che, fintantoché $\dot{p}_S \geq \frac{1}{\alpha}$, p_i sarà crescente; invece, nel caso in cui $\dot{p}_S \leq \frac{1}{\alpha}$, p_i risulterà decrescente. Avendo, però, dimostrato che p_S è monotona decrescente, la soluzione dell'ODE, per $t \mapsto +\infty$, convergerà sempre ad un equilibrio della forma $(\bar{p}_S, \bar{p}_I, \bar{p}_R)$. Infatti, p_I inizialmente o sarà crescente, per poi decrescere fino a 0, oppure decrescerà soltanto fino a 0. $\forall \epsilon$, dunque, l'equilibrio sarà raggiunto.

(d) Riscriviamo l'equazione

$$\alpha x + \ln(1 - x)$$

così:

$$\ln\left((1 - x)\, e^{\alpha x}\right). \qquad (*)$$

Dalla ODE possiamo ricavare l'espressione di p_R:

$$p_R = \int p_I \, dt + c = \int -\frac{\dot{p}_S}{\alpha p_S} \, dt + c = -\frac{\ln(p_S)}{\alpha} + c.$$

Troviamo il valore di c:

$$p_R(0) = -\frac{\ln(p_S(0))}{\alpha} + c \Leftrightarrow \frac{\ln(1 - \epsilon)}{\alpha} = c.$$

Pertanto:

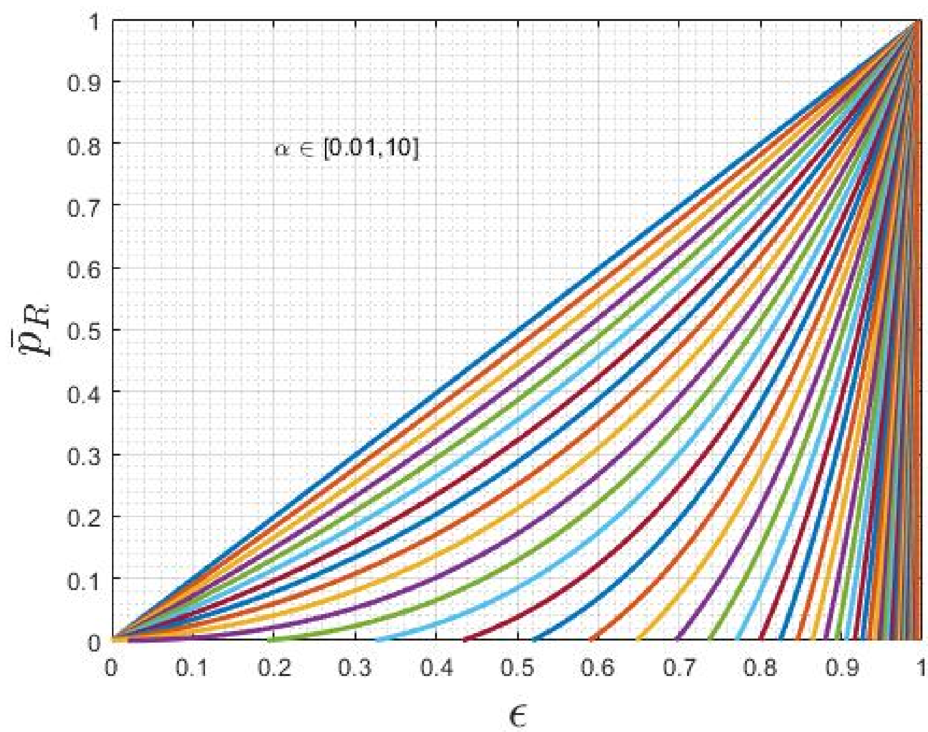
$$p_R = -\frac{\ln(p_S)}{\alpha} + \frac{\ln(1 - \epsilon)}{\alpha} = \frac{1}{\alpha} \ln\left(\frac{1 - \epsilon}{p_S}\right).$$

Adesso, sapendo che il punto limite $(\bar{p}_S, \bar{p}_I, \bar{p}_R)$ è tale per cui

$$\bar{p}_S = 1 - \bar{p}_R \text{ e } \bar{p}_I = 0,$$

sostituendo l'espressione di $\bar{p}_R$ nell'equazione $(*)$, otteniamo:

$$\ln\left(p_S \cdot e^{ln\left(\frac{1-\epsilon}{p_S}\right)}\right) = \ln\left(p_S \cdot \frac{1-\epsilon}{p_S}\right) = \ln(1-\epsilon).$$



(e) Sia $\alpha < 1$.
Dall'equazione dell'ODE si ricava che:

$$\dot{p}_I = p_I \left(\alpha p_S - 1\right) \leq p_I \left(\alpha - 1\right),$$

poiché se $\alpha < 1$ e $p_S \leq 1$, risulta:

$$\alpha p_S \leq \alpha.$$

É dunque possibile applicare il lemma di Grönwall, dal momento che $(\alpha - 1)$ e $p_i(t)$ sono funzioni continue a valori reali, definite su $[0, 1]$, tali per cui $p_I(t)$ è derivabile in $]0, 1[$.
Si avrà che:

$$p_I(t) \leq p_I(0)\, e^{\left(\int_0^t \alpha - 1\, ds\right)} = \epsilon \cdot e^{(\alpha-1)t}, \quad t \geq 0.$$

Dal momento che

$$\dot{p}_R(s) = p_I \leq \epsilon \cdot e^{(\alpha-1)t}, \quad t \geq 0,$$

integrando tra 0 e t, otteniamo:

$$\int_0^t \dot{p}_R\, ds \leq \int_0^t \epsilon \cdot e^{(\alpha-1)s}\, ds$$

$$\Leftrightarrow p_R(t) \leq \frac{\epsilon \cdot e^{(\alpha-1)t}}{\alpha - 1} - \frac{\epsilon}{\alpha - 1} = \frac{\epsilon}{1 - \alpha}\left(1 - e^{(\alpha-1)t}\right), \quad t \geq 0.$$

Da tale risultato si ricava che:

$$\bar{p}_R = \lim_{t \to +\infty} p_R(t) \leq \lim_{t \to +\infty} \frac{\epsilon}{1 - \alpha}\left(1 - e^{(\alpha-1)t}\right) = \frac{\epsilon}{1 - \alpha}(1 - 0) = \epsilon\,(1 - \alpha)^{-1}.$$

(f) Sia $\alpha > 1$ e $(1 - \epsilon)\,\alpha > 1$.
Dunque, siamo nel caso in cui p_S può assumere, ad un certo istante $\bar{t}$, il valore $\frac{1}{\alpha}$, poiché $\frac{1}{\alpha} < 1$, p_S è decrescente e $p_S(0) > \frac{1}{\alpha}$ (per ipotesi).
Siccome $\dot{p}_I > 0$ fintantoché $p_S > \frac{1}{\alpha}$ e $\dot{p}_I < 0$ quando $p_S < \frac{1}{\alpha}$, questo significa proprio che $\bar{t}$ è un punto di massimo assoluto per p_I.
Ne consegue che p_I sarà crescente in $[0, \bar{t}]$ e decrescente in $[\bar{t}, +\infty[$.

(g) Sia $\alpha > 1$.
Per capire se, in tal caso, $\bar{p}_R$ ammette un limite dal basso, è possibile studiare i punti critici dell'equazione di cui $\bar{p}_R$ è soluzione, nell'intervallo $[0, 1[$.

Osserviamo che, per quanto visto prima, $\bar{p}_R$ è sempre limitato dall'alto da

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{\epsilon}{1-\alpha}\left(1-e^{(\alpha-1)t}\right),$$

soltanto che, questa volta, siccome $\alpha > 1$, tale limite va a $+\infty$.
Sia

$$f\left(x\right)=\alpha x+\ln\left(1-x\right).$$

Si avrà:

$$f\left(x\right)' = \alpha - \frac{1}{1-x} \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 1-\frac{1}{\alpha}$$

e, pertanto, $f\left(1-\frac{1}{\alpha}\right)$ risulta essere un massimo per $f\left(x\right)$.
Inoltre, dato che $f\left(0\right) > 0$ e la funzione è crescente nell'intervallo $[0, 1-\frac{1}{\alpha}]$, essa si annullerà necessariamente in corrispondenza di $\bar{p}_R$ tale che

$$1-\frac{1}{\alpha} \geq \bar{p}_R.$$