

Homework 3

Giulio Nenna (s245717@studenti.polito.it)

January 15, 2021

Realizzato in collaborazione con Giulio Nenna (s245717), Andrea Sanna (s222975) e Ornella Elena Grassi (s290310)

Esercizio 1.

Si consideri il limite idrodinamico di diffusione epidemica SIR descritto dal sistema di equazioni differenziali

$$\begin{cases} \dot{p}_S = -\alpha p_S p_I \\ \dot{p}_I = p_I (\alpha p_S - 1) \\ \dot{p}_R = p_I \end{cases} ,$$

a partire dai nuclei di interazione descritti da

$$\begin{cases} \Theta_{SI}(p) = \alpha p_I \\ \Theta_{IR}(p) = 1 \end{cases} , \quad \alpha > 0.$$

Sia $p(t) = (p_S(t), p_I(t), p_R(t))$ la soluzione dell'ODE sopracitata, con la seguente condizione iniziale

$$p_S(0) = 1 - \epsilon, \quad p_I(0) = \epsilon, \quad p_R(0) = 0,$$

dove $\epsilon \in]0, 1[$.

(a) Per ricavare gli equilibri dell'ODE, risolviamo il sistema

$$\begin{cases} -\alpha p_S p_I = 0 \\ p_I (\alpha p_S - 1) = 0 \\ p_I = 0 \\ p_S + p_I + p_R = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p_S = 1 - p_R \\ p_I = 0 \end{cases} ,$$

da cui si ottengono i seguenti punti di equilibrio:

$$(\bar{p}_S, \bar{p}_I, \bar{p}_R) = (k, 0, 1 - k), \quad k \in [0, 1].$$

(b) Osserviamo che:

$$\dot{p}_S = -\alpha p_S p_I,$$

allora $\dot{p}_S \leq 0$ sempre e, dunque, p_S è decrescente.

Invece:

$$\dot{p}_R = p_I,$$

quindi $\dot{p}_R \geq 0$ sempre e, pertanto, p_R è crescente.

(c) Dalla ODE possiamo ricavare che:

$$\dot{p}_I \geq 0 \Leftrightarrow \dot{p}_S \geq \frac{1}{\alpha}.$$

Questo significa che, fintantoché $\dot{p}_S \geq \frac{1}{\alpha}$, p_i sarà crescente; invece, nel caso in cui $\dot{p}_S \leq \frac{1}{\alpha}$, p_i risulterà decrescente. Avendo, però, dimostrato che p_S è monotona decrescente, la soluzione dell'ODE, per $t \mapsto +\infty$, convergerà sempre ad un equilibrio della forma $(\bar{p}_S, \bar{p}_I, \bar{p}_R)$. Infatti, p_I inizialmente o sarà crescente, per poi decrescere fino a 0, oppure decrescerà soltanto fino a 0. $\forall \epsilon$, dunque, l'equilibrio sarà raggiunto.

(d) Riscriviamo l'equazione

$$\alpha x + \ln(1 - x)$$

così:

$$\ln((1 - x)e^{\alpha x}). \quad (*)$$

Dalla ODE possiamo ricavare l'espressione di p_R :

$$p_R = \int p_I dt + c = \int -\frac{\dot{p}_S}{\alpha p_S} dt + c = -\frac{\ln(p_S)}{\alpha} + c.$$

Troviamo il valore di c :

$$p_R(0) = -\frac{\ln(p_S(0))}{\alpha} + c \Leftrightarrow \frac{\ln(1 - \epsilon)}{\alpha} = c.$$

Pertanto:

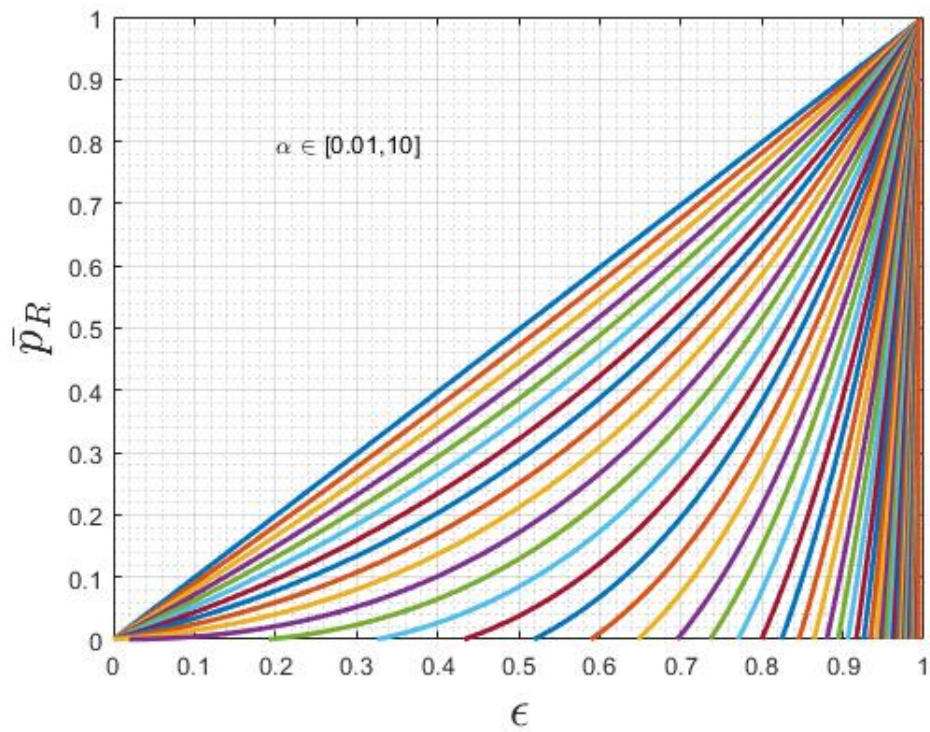
$$p_R = -\frac{\ln(p_S)}{\alpha} + \frac{\ln(1 - \epsilon)}{\alpha} = \frac{1}{\alpha} \ln\left(\frac{1 - \epsilon}{p_S}\right).$$

Adesso, sapendo che il punto limite $(\bar{p}_S, \bar{p}_I, \bar{p}_R)$ è tale per cui

$$\bar{p}_S = 1 - \bar{p}_R \text{ e } \bar{p}_I = 0,$$

sostituendo l'espressione di \bar{p}_R nell'equazione (*), otteniamo:

$$\ln \left(p_S \cdot e^{\ln \left(\frac{1-\epsilon}{p_S} \right)} \right) = \ln \left(p_S \cdot \frac{1-\epsilon}{p_S} \right) = \ln (1 - \epsilon).$$



(e) Sia $\alpha < 1$.

Dall'equazione dell'ODE si ricava che:

$$\dot{p}_I = p_I (\alpha p_S - 1) \leq p_I (\alpha - 1),$$

poiché se $\alpha < 1$ e $p_S \leq 1$, risulta:

$$\alpha p_S \leq \alpha.$$

È dunque possibile applicare il lemma di Grönwall, dal momento che $(\alpha - 1)$ e $p_i(t)$ sono funzioni continue a valori reali, definite su $[0, 1]$, tali per cui $p_I(t)$ è derivabile in $]0, 1[$.

Si avrà che:

$$p_I(t) \leq p_I(0) e^{\left(\int_0^t \alpha - 1 ds\right)} = \epsilon \cdot e^{(\alpha-1)t}, \quad t \geq 0.$$

Dal momento che

$$\dot{p}_R(s) = p_I \leq \epsilon \cdot e^{(\alpha-1)t}, \quad t \geq 0,$$

integrando tra 0 e t , otteniamo:

$$\begin{aligned} \int_0^t \dot{p}_R ds &\leq \int_0^t \epsilon \cdot e^{(\alpha-1)s} ds \\ \Leftrightarrow p_R(t) &\leq \frac{\epsilon \cdot e^{(\alpha-1)t}}{\alpha - 1} - \frac{\epsilon}{\alpha - 1} = \frac{\epsilon}{1 - \alpha} \left(1 - e^{(\alpha-1)t}\right), \quad t \geq 0. \end{aligned}$$

Da tale risultato si ricava che:

$$\bar{p}_R = \lim_{t \rightarrow +\infty} p_R(t) \leq \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\epsilon}{1 - \alpha} \left(1 - e^{(\alpha-1)t}\right) = \frac{\epsilon}{1 - \alpha} (1 - 0) = \epsilon (1 - \alpha)^{-1}.$$

(f) Sia $\alpha > 1$ e $(1 - \epsilon)\alpha > 1$.

Dunque, siamo nel caso in cui p_S può assumere, ad un certo istante \bar{t} , il valore $\frac{1}{\alpha}$, poiché $\frac{1}{\alpha} < 1$, p_S è decrescente e $p_S(0) > \frac{1}{\alpha}$ (per ipotesi). Siccome $\dot{p}_I > 0$ fintantoché $p_S > \frac{1}{\alpha}$ e $\dot{p}_I < 0$ quando $p_S < \frac{1}{\alpha}$, questo significa proprio che \bar{t} è un punto di massimo assoluto per p_I .

Ne consegue che p_I sarà crescente in $[0, \bar{t}]$ e decrescente in $[\bar{t}, +\infty[$.

(g) Sia $\alpha > 1$.

Per capire se, in tal caso, \bar{p}_R ammette un limite dal basso, è possibile studiare i punti critici dell'equazione di cui \bar{p}_R è soluzione, nell'intervallo $[0, 1]$.

Osserviamo che, per quanto visto prima, \bar{p}_R è sempre limitato dall'alto da

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\epsilon}{1 - \alpha} \left(1 - e^{(\alpha-1)t}\right),$$

soltanto che, questa volta, siccome $\alpha > 1$, tale limite va a $+\infty$.

Sia

$$f(x) = \alpha x + \ln(1 - x).$$

Si avrà:

$$f(x)' = \alpha - \frac{1}{1-x} \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 1 - \frac{1}{\alpha}$$

e, pertanto, $f\left(1 - \frac{1}{\alpha}\right)$ risulta essere un massimo per $f(x)$.

Inoltre, dato che $f(0) > 0$ e la funzione è crescente nell'intervallo $[0, 1 - \frac{1}{\alpha}]$, essa si annullerà necessariamente in corrispondenza di \bar{p}_R tale che

$$1 - \frac{1}{\alpha} \geq \bar{p}_R.$$

Esercizio 2.

Sia $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \varepsilon, W)$ un grafo di ordine $n = |\mathcal{V}| \geq 2$ privo di self loop tale che ogni nodo abbia grado uscente $\omega_1 > 0$. Si considera un gioco tra i giocatori \mathcal{V} , ciascuno con spazio delle azioni $\mathcal{A} = \mathbb{R}$ e funzioni di utilità

$$u_i(x) = -\frac{x_i^2}{2} + c_i x_i + \beta \sum_{j \neq i} W_{ij} x_j x_i$$

con $i \in \mathcal{V}$, $\beta \geq 0$ e $c \in \mathbb{R}^{\mathcal{V}}$.

- (a) Dal momento che il grafo non presenta *self-loop* allora W ha elementi tutti nulli sulla diagonale. Ci si può pertanto ricondurre alla scrittura matriciale:

$$u_i(x) = -\frac{x_i^2}{2} + c_i x_i + \beta (Wx)_i x_i$$

Per lo stesso motivo il termine $\beta (Wx)_i$ non dipende da x_i pertanto:

$$\frac{\delta u_i(x)}{\delta x_i} = -x_i + c_i + \beta (Wx)_i \quad (1)$$

Ponendo quindi quest'ultima quantità pari a 0, poiché $u_i(x)$ è una funzione quadratica concava, si ottiene:

$$BR_i(x^{-i}) = c_i + \beta \sum_{j \neq i} W_{ij} x_j$$

- (b) Gli equilibri di Nash si realizzano nelle configurazioni x^* in cui ogni giocatore assume la sua *best-response*, pertanto dalla (a):

$$x^* = c + \beta W x^*$$

Quindi gli equilibri di Nash saranno nella forma

$$x^* = (I - \beta W)^{-1} c$$

L'esistenza e unicità di x^* dipende quindi solamente dall'invertibilità di $(I - \beta W)$. Siano pertanto λ_i gli autovalori di W , allora $\psi_i = (1 - \beta \lambda_i)$ sono gli autovalori di $(I - \beta W)$. Affinché questa sia quindi invertibile deve valere $\forall i \in \{1, \dots, n\}$

$$\psi_i \neq 0 \Rightarrow \beta \lambda_i \neq 1$$

L'equilibrio di Nash x^* esiste ed è unico se e solo se vale quindi:

$$\beta \neq \frac{1}{\lambda_i} \quad \forall \lambda_i \in \sigma(W)$$

Si pone ora

$$\beta \omega_i < 1 \quad \forall i \in \mathcal{V} \quad (2)$$

ossia le righe di βW sommano ad una quantità strettamente minore di 1, quindi βW è *substocastica*. Questo vuol dire che per il suo raggio spettrale vale $\rho(W) < 1$ e può quindi essere applicato il *Criterio di Neumann* che non solo ci assicura l'esistenza di $(I - \beta W)^{-1}$ ma ci fornisce anche il seguente risultato:

$$(I - \beta W)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} \beta^k W^k$$

- (c) Come visto nel punto precedente, se $(I - \beta W)$ è invertibile allora esiste ed è unico l'equilibrio di Nash x^* . In particolare se si pone $(I - \beta W)^{-1} = M$ allora vale:

$$x^* = M c$$

pertanto il vettore x^* dipende linearmente dal vettore c .

Se inoltre vale 2 allora:

$$M = \sum_{k=0}^{\infty} \beta^k W^k$$

e poiché per costruzione $\beta > 0$ e $W_{ij} \geq 0 \forall i, j \in \mathcal{V}$ allora necessariamente

$$M_{ij} \geq 0 \quad \forall i, j \in \mathcal{V}.$$

(d) Il vettore di centralità di Katz si può esprimere nella forma seguente:

$$z = \left(I - \left(\frac{1 - \beta_k}{\lambda_W} \right) W' \right)^{-1} \beta_k \mu$$

Poiché β_k e μ sono rispettivamente uno scalare e un vettore che rappresentano parametri arbitrari relativi alla *centralità intrinseca*, è possibile porre i seguenti valori:

$$\begin{aligned} \beta_k &= 1 - \beta \lambda_W \\ \mu &= \frac{1}{\beta_k} \mathbb{1}. \end{aligned}$$

Si ottiene quindi:

$$z = (I - \beta W')^{-1} \mathbb{1}$$

che in forma scalare equivale a:

$$z_i = \sum_{j=1}^n (I - \beta W')_{ij}^{-1} \quad \forall i \in \mathcal{V}. \quad (3)$$

Si sviluppa ora il termine $y = \sum_{j=1}^n x_j^*$ applicando il criterio di Neumann alla matrice M e scambiando indici e sommatorie al fine di mostrare che $y = \langle c, z \rangle$:

$$\begin{aligned} y &= \sum_{j=1}^n x_j^* = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n (I - \beta W)_{ji}^{-1} c_i = \\ &= \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n \sum_{k=0}^{\infty} \beta^k W_{ji}^k c_i = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{k=0}^{\infty} \beta^k W_{ji}^k c_i = \\ &= \sum_{i=1}^n c_i \sum_{j=1}^n \sum_{k=0}^{\infty} \beta^k W_{ij}^k = \sum_{i=1}^n c_i \sum_{j=1}^n (I - \beta W')_{ij}^{-1} \\ &= \sum_{i=1}^n c_i z_i = \langle c, z \rangle \end{aligned}$$

- (e) Essendo c_i variabili aleatorie indipendenti $Cov(c_i, c_j) = 0$, pertanto vale:

$$Var(y) = Var\left(\sum_{i=1}^n z_i c_i\right) = \sum_{i=1}^n z_i^2 \sigma_i^2$$

- (f) Eliminando un qualsiasi giocatore i dal gioco, le proprietà della matrice $W^{(-i)}$ sono le stesse della matrice W . Pertanto se continua a valere 2 allora la matrice $(I - \beta W^{(-1)})$ è ancora substocastica. In particolare se $c = \mathbb{1}$ allora, grazie al criterio di Neuman esiste ed è unico un vettore $x^{*(-i)}$ tale che

$$x^{*(-i)} = (I - \beta W^{(-i)})^{-1} \mathbb{1}$$

- (g) Per ogni $k \neq i \neq j$ vale:

$$M_{ij} M_{ik} = M_{ii} (M_{ij} - M_{ij}^{(-i)}).$$

- (h) Sia $\mathcal{V}^{(-i)} := \mathcal{V} \setminus \{i\}$. Sappiamo che M e $M^{(-i)}$ sono matrici con elementi non negativi, quindi:

$$\begin{aligned} y &= \sum_{j \in \mathcal{V}} x_j^* = \sum_{j \in \mathcal{V}} (M \mathbb{1})_j = \sum_{j \in \mathcal{V}} \sum_{k \in \mathcal{V}} M_{jk} > 0 \\ y^{(-i)} &= \sum_{j \neq i} x_j^{*(-i)} = \sum_{j \in \mathcal{V}^{(-i)}} (M \mathbb{1})_j = \sum_{j \in \mathcal{V}^{(-i)}} \sum_{k \in \mathcal{V}^{(-i)}} M_{jk}^{(-i)} > 0 \end{aligned}$$

Inoltre vale:

$$z_i = \sum_{j \in \mathcal{V}} M_{ij} \Rightarrow \frac{z_i^2}{M_{ii}} = \frac{1}{M_{ii}} \sum_{j \in \mathcal{V}} \sum_{k \in \mathcal{V}} M_{ij} M_{ik}$$

Utilizzando il punto (g) e considerando $M_{jk}^{(-i)} = 0$ se $j = i$ oppure $k = i$, vale:

$$\begin{aligned} \frac{1}{M_{ii}} \sum_{j \in \mathcal{V}} \sum_{k \in \mathcal{V}} M_{ij} M_{ik} &= \frac{1}{M_{ii}} \sum_{j \in \mathcal{V}} \sum_{k \in \mathcal{V}} M_{ii} (M_{jk} - M_{jk}^{(-i)}) = \\ \sum_{j \in \mathcal{V}} \sum_{k \in \mathcal{V}} M_{jk} - \sum_{j \in \mathcal{V}} \sum_{k \in \mathcal{V}} M_{jk}^{(-i)} &= \sum_{j \in \mathcal{V}} \sum_{k \in \mathcal{V}} M_{jk} - \sum_{j \in \mathcal{V}^{(-i)}} \sum_{k \in \mathcal{V}^{(-i)}} M_{jk}^{(-i)} = \\ &= y - y^{(-i)} \end{aligned}$$

Utilizzando tutti questi risultati si ottiene quindi

$$\frac{z_i^2}{M_{ii}} = y - y^{(-i)} \Rightarrow \operatorname{argmax}_{i \in \mathcal{V}} y - y^{(-i)} = \operatorname{argmax}_{i \in \mathcal{V}} \frac{z_i^2}{M_{ii}}$$

- (i)