Homework III

La soluzione degli esercizi deve essere caricata sul portale del corso entro le ore 23:59 di venerdì 15 Gennaio 2020, sotto il nome di Homework3.

Esercizio 1. Si consideri il limite idrodinamico di diffusione epidemica SIR descritto dal sistema di equazioni differenziali

$$\begin{cases} \dot{p_S} &= -\alpha p_S p_I \\ \dot{p_I} &= p_I(\alpha p_S - 1) \\ \dot{p_R} &= p_I \end{cases} \tag{1}$$

e sia $p(t) = (p_S(t), p_I(t), p_R(t))$ la soluzione con la seguente condizione iniziale

$$p_S(0) = 1 - \varepsilon\,, \qquad p_I(0) = \varepsilon \qquad p_R(0) = 0\,, \tag{2}$$

dove $\varepsilon \in]0,1[$.

(a) Si determinino tutti i punti di equilibrio dell'ODE (1) nel simplesso $\mathcal{P}(\mathcal{A})$ dei vettori di probabilitità su $\mathcal{A}$.

(b) Si dimostri che $p_S(t)$ è decrescente e $p_R(t)$ è crescente.

(c) Si dimostri che, per ogni ε, la soluzione $p(t)$ dell'ODE (1) converge ad un equilibrio. Si indichi con $(\bar{p}_S, \bar{p}_I, \bar{p}_R)$ tale punto limite.

(d) Si dimostri che $\bar{p}_R$ è soluzione dell'equazione

$$\alpha x + \log(1-x) = \log(1-\varepsilon)\,, \tag{3}$$

e si tracci (ad esempio in Matlab) il grafico di $\bar{p}_R$ come funzione di ε in $[0,1]$.

Si consideri l'ODE (1) nel caso $\alpha < 1$.

(e) Si dimostri che, in questo caso, $\dot{p}_I \leq (\alpha - 1)p_I$ e, usando il lemma di Gronwall, che

$$p_I(t) \leq \varepsilon\, e^{(\alpha-1)t}\,, \qquad t \geq 0\,.$$

Se ne concluda che

$$p_R(t) \leq \frac{\varepsilon}{1-\alpha}\left(1 - e^{(\alpha-1)t}\right)\,, \qquad t \geq 0\,,$$

così che, in questo caso $\bar{p}_R \leq \varepsilon(1-\alpha)^{-1}$.

Si consideri l'ODE (1) nel caso $\alpha > 1$.

(f) Si dimostri che, se $(1-\varepsilon)\alpha > 1$, esiste $\bar{t} > 0$ tale che p_I è crescente in $[0, \bar{t}]$ e decrescente in $[\bar{t}, +\infty[$.

(g) Sfruttando (d) si dimostri che

$$\bar{p}_R \geq 1 - \frac{1}{\alpha} > 0\,,$$

così che, in questo caso, con una frazione iniziale di infetti $p_I(0) = \varepsilon$ arbitrariamente piccola ma positiva, la frazione finale $\bar{p}_R$ di agenti in stato R è limitata dal basso da una costante positiva $1 - 1/\alpha$ indipendente da ε.

Esercizio 2. Dato un grafo $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{E}, W)$ di ordine $n = |\mathcal{V}| \geq 2$, privo di self-loop e tale che ogni nodo abbia grado uscente $w_i = \sum_j W_{ij} > 0$, si consideri il gioco quadratico con insieme dei giocatori $\mathcal{V}$, spazio delle azioni $\mathcal{A} = \mathbb{R}$ coincidente con l'asse reale per ciascun giocatore e funzioni di utilità

$$u_i(x) = -\frac{x_i^2}{2} + c_i x_i + \beta \sum_{j \neq i} W_{ij} x_j x_i \,, \qquad i \in \mathcal{V} \,,$$

dove $\beta \geq 0$ è un parametro scalare non negativo e $c \in \mathbb{R}^{\mathcal{V}}$ è un vettore.

(a) Si determinino le funzioni di best response per ciascun giocatore.

(b) Si discutano esistenza e unicità degli equilibri di Nash al variare del parametro $\beta \geq 0$, dimostrando in particolare che esiste un unico equilibrio di Nash nel caso in cui

$$\beta w_i < 1 \,, \qquad \forall i \in \mathcal{V} \,. \tag{4}$$

(c) Si mostri che quando esiste ed è unico l'equilibrio di Nash

$$x^* = Mc$$

dipende linearmente dal vettore c, mostrando in particolare che, nel caso in cui vale la condizione (4), tale matrice M ha componenti tutte non negative.

Si consideri ora il caso in cui vale la (4). Sia

$$y = \sum_{j \in \mathcal{V}} x_j^* \,.$$

(d) Si mostri che y può essere espresso come il prodotto scalare tra il vettore c e una versione opportunamente normalizzata del vettore di centralità di Katz del grafo.

(e) Si determini un'espressione per la varianza di y nel caso in cui le componenti c_i del vettore c sono variabili aleatorie indipendenti a media nulla e varianza σ_i^2.

Nel caso in cui $c = \mathbb{1}$ e il grafo è indiretto, cioè $W' = W$, si consideri ora il problema di determinare il "key player" $i \in \mathcal{V}$ la cui rimozione dalla rete comporti la maggior riduzione di y. Più precisamente, per $i \in \mathcal{V}$, siano $W^{(-i)}$ la matrice ottenuta da W rimuovendone la i-esima riga e la i-esima colonna e $\mathcal{G}^{(-i)}$ il grafo di insieme dei nodi $\mathcal{V} \setminus \{i\}$ e matrice dei pesi $W^{(-i)}$.

(f) Si mostri che per i β per i quali la (4) è soddisfatta, il gioco quadratico sul grafo ristretto $\mathcal{G}^{(-i)}$ ammette un unico equilibrio di Nash

$$x^{*(-i)} = M^{(-i)} \mathbb{1} \,.$$

(g*) **Facoltativo:** Si mostri che

$$M_{ij} M_{ik} = M_{ii} (M_{jk} - M_{jk}^{(-i)})$$

per ogni $k \neq i \neq j$.

(h) Usando il punto (g) si dimostri che un nodo i^* in $\mathcal{V}$ massimizza

$$y - y^{(-i)} \,, \qquad y^{(-i)} = \sum_{j \neq i} x_j^{*(-i)}$$

se e solo se i^* massimizza il rapporto

$$z_i^2 / M_{ii}$$

dove $z = M\mathbb{1}$.

(i) Nell caso particolare in cui W è la matrice di adiacenza del grafo semplice riportato in Figura 1, per valori $\beta = 0.1$ e $\beta = 0.2$, si calcolino le quantità z_i e M_{ii} per ciascun nodo i e si individui un "key player". (Suggerimento: le simmetrie del grafo permettono di ridurre sensibilmente la dimensione del problema.)

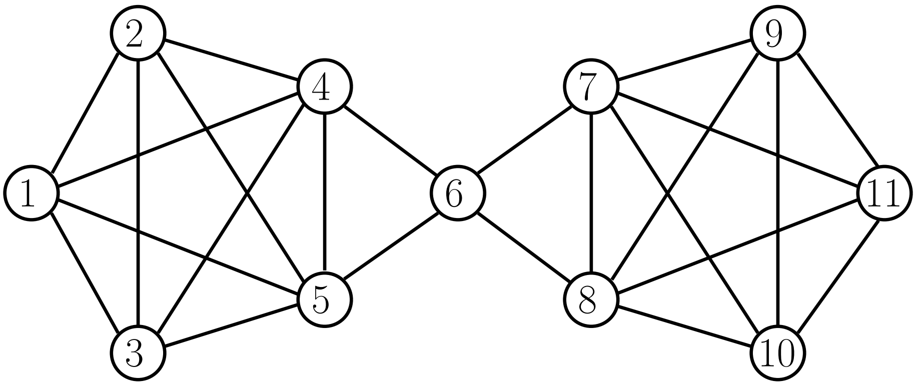

Figure 1: Grafo dell'Esercizio 2 (i).