1. Esercizio

Presto sarà primavera e i fiori inizieranno a comparire in un prato al ritmo di 3 all'ora, secondo un processo di Poisson. Assumiamo che ogni nuovo fiore sia di tipo A, B, o C, con probabilità pari a $\frac{1}{3}, \frac{1}{6}$, and $\frac{1}{2}$, rispettivamente. Assumiamo che il tipo di fiore che spunta sia indipendente dal tipo degli altri fiori e dal tempo trascorso dalle nascite precedenti.

Sia $N(t)$ il processo di Poisson che conta il numero di fiori comparsi nel prato, con rate $\lambda = 3$. $N(t) \sim Poiss(\lambda t)$

Per i processi di Poisson vale $N(t+s) - N(s) \sim Poisson(\lambda t)$, con $t > s \geq 0$

e vale $\mathbb{P}\{N(s) = n\} = \mathbb{P}\{T_n \leq s, \tau_{n+1} > s - T_n\}$ cioé $\tau_{n+1} = T_n + N_{n+1}$, $T_n + \tau_{n+1} > s$

$$= \int_0^s \int_{s-t}^{\infty} f_{T_n}(t) \cdot f_{\tau_{n+1}}(r)\, dr\, dt =$$

da 0 al tempo S — incremento successivo a s

Significa testualmente: il processo vale n al tempo s (anche prima di s volendo) e valga $n+1$ in tempi successivi che denotiamo con T_{n+1}, vale a dire il tempo in cui $N(t) = n+1$

Quindi $\tau_{n+1} = T_{n+1} - T_n$ ed indica l'intervallo impiegato dal processo per andare da n a $n+1$. Quindi usando la definizione di distribuz. di Poisson ricavo:

$$= \int_0^s \int_{s-t}^{\infty} \underbrace{\lambda e^{-\lambda t} \cdot \frac{(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!}}_{\text{perché } \sum_{i=1}^{n} \tau_i = T_n} \lambda e^{-\lambda r}\, dr\, dt =$$

perché $\sum_{i=1}^{n} \tau_i = T_n \rightarrow$ ogni singolo incremento ha una distribuzione esponenziale di par. λ

$$= \frac{\lambda^n}{(n-1)!} \int_0^s e^{-\lambda t}\, t^{(n-1)} \cdot \left(-e^{-\lambda r}\right)_{s-t}^{\infty} dt$$

$\left[-0 + e^{-\lambda(s-t)}\right] = e^{-\lambda(s-t)}$

$$= \frac{\lambda^n}{(n-1)!} \int_0^s e^{-\lambda(\cancel{t} + s - \cancel{t})}\, t^{(n-1)}\, dt =$$

$$= \frac{\lambda^n}{(n-1)!} \int_0^s t^{(n-1)} e^{-\lambda s}\, dt = e^{-\lambda s} \cdot \frac{(\lambda)^n}{(n-1)!} \cdot \left[\frac{1}{n} \cdot t^n\right]_0^s = e^{-\lambda s} \frac{(\lambda s)^n}{n!}$$

$n(n-1)! = n!$

(1) Dato che sono apparsi 8 fiori tra le 9 a.m. e le 10 a.m.,

- qual è la probabilità che 3 di questi siano apparsi tra le 9 a.m. e le 9:20 a.m.?

Pongo $s=0$ quando $t=9$ a.m.

Pertanto risulta $N(0)=0$, $N(1)\,8$. Essendo le 9.20 a.m. pari ad $\frac{1}{3}\cdot 1h$, voglio calcolare la seguente probabilità condizionata:

$$\mathbb{P}\{N(\tfrac{1}{3})=3 \mid N(1)=8\}$$

Utilizzando il corollario del teorema del condizionamento, sapendo che $N(1)=8$ con $\Delta t=[0,1]$ e ponendo $s=\frac{1}{3}<t=1$ si ottiene che la var. aleatoria $N(\frac{1}{3})$ si distribuisce come una binomiale di parametri $Bin(n,\frac{s}{t}) = Bin(3,\frac{1}{3})$.

Pertanto si ottiene

$$P(N(\tfrac{1}{3})=3 \mid N(1)=8) = \binom{8}{3}\left(\tfrac{1}{3}\right)^3\left(1-\tfrac{1}{3}\right)^{8-3} = \frac{8!}{3!\,5!}\cdot\left(\tfrac{1}{3}\right)^3\left(\tfrac{2}{3}\right)^5 = 0{,}2731$$

- qual è la probabilità che ne appaiano 13 tra le 9 a.m. e le 11 a.m.?

$\mathbb{P}(N(2)=13 \mid N(1)=8) = \mathbb{P}(N(2)-N(1)=5)$ ma gli incrementi in $(\underset{s}{1}, \underset{t}{1}+\underset{s}{1}]$, sapendo che $N(s)=8$ sono indipendenti da $N(1)$ e pertanto ci basta calcolare $\mathbb{P}(N(1)=5) = e^{-\lambda s}\frac{(\lambda s)^n}{n!}$ con $\lambda=3$

$$\mathbb{P}(N(1)=5) = e^{-3}\frac{(3)^5}{5!} = 0{,}1010$$

(2) Qual è la probabilità che tra le 9 a.m. e le 11 a.m. compaiano esattamente 3 fiori di tipo A, 2 di tipo B e nessuno di tipo C?

Essendo i fiori appartenenti a 3 tipologie differenti, tra loro indipendenti possiamo scomporre il processo di partenza $N(t)$ nei 3 processi $N_A(t)$, $N_B(t)$ e $N_C(t)$ applicando la proprietà di thinning. $N_j(t)$ con $j=A,B,C$ sono a loro volta ancora processi di Poisson indipendenti tali che:

$$N_A(t) \sim Poiss(\lambda p_A), \quad N_B(t) \sim Poiss(\lambda p_B) \qquad N_C(t) \sim Poiss(\lambda p_C)$$

Sapendo che $N(0)=0$ vogliamo quindi calcolare:

$$\mathbb{P}[N_A(2)=n_A,\ N_B(2)=n_B,\ N_C(2)=n_C] \qquad \text{con } n_A=3,\ n_B=2,\ n_C=0$$

$$p_A = \frac{1}{3}, \quad p_B = \frac{1}{6}, \quad p_C = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad p = \frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{2} = 1$$

Consideriamo perció il processo di Poisson di rate λ e utilizziamo una distribuzione multinomiale per distinguere i fiori in base alle tipologie.

$$\mathbb{P}[N_A(t)=3,\ N_B(t)=2,\ N_C(t)=0] = e^{-\lambda\underbrace{(p_A+p_B+p_C)}_{1}(t)} \cdot \frac{(\lambda t)^{n_A+n_B+n_C}}{(n_A+n_B+n_C)!} \cdot \binom{n_A+n_B+n_C}{n_A, n_B, n_C} p_A^{n_A} p_B^{n_B} p_C^{n_C} =$$

$$= e^{-\lambda t} \cdot \frac{(\lambda p_A t)^{n_A}}{n_A!} \cdot \frac{(\lambda p_B t)^{n_B}}{n_B!} \cdot \underbrace{\cancel{\frac{(\lambda p_C t)^{n_C}}{n_C!}}}_{=1} = e^{-6} \cdot \frac{2^3}{3!} \cdot \frac{1^2}{2!} = 1{,}65 \cdot 10^{-3}$$

(3) Sia τ in ore, a partire dalle 9 a.m. a cui compare il primo fiore. Condizionatamente al fatto che il fiore sia di tipo A, qual è la probabilità che $\tau \leq 1/2$?

Applicando la definizione di processo di Poisson al processo $N_A(t) \sim Poiss(1)$

$$\mathbb{P}\left(\tau \leq \frac{1}{2}\right) = \int_0^{\frac{1}{2}} f_{T_1}(t)\,dt = \int_0^{\frac{1}{2}} \lambda e^{-\lambda t}\,dt = -\left[e^{-t}\right]_0^{\frac{1}{2}} = 1 - e^{-\frac{1}{2}} = 0{,}3935.$$