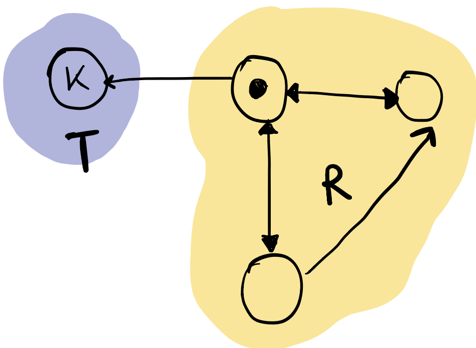
2. Esercizio

Dimostrare che una catena di Markov che viene inizializzata in uno stato ricorrente, non può visitare nessuno stato transiente.



$$S = T \cup R$$

transienti ricorrenti

$$X_0 = r_i \text{ con } r_i \in R$$

Tutti i nodi di R comunicano tra loro. Se anche un nodo TRANSIENTE comunicasse con almeno un nodo di R, cioè se si avesse $r_i \longrightarrow t_i$ e $t_i \longrightarrow r_i$, $t_i \longleftrightarrow r_i$ (entrambi raggiungibili) allora avremmo che t_i dovrebbe appartenere alla classe di r_i e cioè sarebbe ricorrente. Ma per ipotesi così non è e perciò t_i e r_i non comunicano tra loro. Ciò significa che, o vale $p(r_i, t_i) = 0$ cioè t_i non è raggiungibile da r_i e allora la tesi è confermata perché se $X_0 = r_i$ per Hp

$$P(X_1 = t_i \mid X_0 = r_i) = p(r_i, t_i) = 0$$

Oppure vale $p(t_i, r_i) = 0$ cioè r_i non è raggiung...

da t_i e quindi si avrebbe che: $p(r_i, t_i) > 0$

quindi t_i è raggiungibile da r_i con probabilità > 0

pertanto la probabilità di tornare in r_i dopo aver visitato t_i sarebbe:

$$\mathbb{P}(X_2 = r_i, X_1 = t_i \mid X_0 = r_i) =$$

$$\mathbb{P}(X_2 = r_i \mid X_1 = t_i) \cdot \mathbb{P}(X_1 = t_i \mid X_0 = r_i) =$$

$$= \underbrace{p(t_i, r_i)}_{=0\ (Hp)} \cdot \underbrace{p(r_i, t_i)}_{>0} = 0$$

che contraddice la definizione di NODO RICORRENTE per cui vale $P(T_{r_i} < \infty) = 1$.