# POLITECNICO DI TORINO
# PROCESSI STOCASTICI E DINAMICHE SU NETWORK
# PRIMO HOMEWORK, PROCESSI - A.Y. 2019/20

## 1. Esercizio

Esibire (se esiste, altrimenti specificare che non esiste e motivare il perchè)

- due DTMC irriducibili a stati finiti diverse che ammettono la stessa distribuzione stazionaria e la stessa distribuzione limite
- due DTMC a stati finiti diverse che ammettono la stessa distribuzione stazionaria e la stessa distribuzione limite
- due DTMC a stati finiti diverse, non irriducibili, che ammettono la stessa famiglia di distribuzioni stazionarie
- due DTMC a stati finiti diverse che ammettono la stessa distribuzione stazionaria, ma il cui comportamento limite per tempi lunghi differisce
- una DTMC a stati infiniti che ammette una distribuzione stazionaria
- una DTMC a stati infiniti che non ammette una distribuzione stazionaria In tutti i casi si privilegino esempi semplici (anche se banali).

## 2. Esercizio

Dimostrare che una catena di Markov che viene inizializzata in uno stato ricorrente, non può visitare nessuno stato transiente.

## 3. Esercizio

Una catena di Markov si muove sugli interi da 1 a $n$. Quando si trova in uno stato, al prossimo passo sceglie uniformemente uno stato tra quelli maggiori di quello corrente. Calcolare il numero atteso di passi necessari a raggiungere lo stato assorbente $n$ (si può iniziare a ragionare su un valore fissato di $n$). Per $n$ che tende all'infinito che comportamento ha questa attesa?

## 4. Esercizio

Si consideri una catena di Markov chain sugli interi $\{1, 2, 3\}$ avente probabilità di transizione

$$p_{12} = p_{23} = p_{31} = p, \qquad p_{13} = p_{32} = p_{21} = q = 1 - p,$$

con $0 < p < 1$. Si determini se esiste una distribuzione stazionaria che gode della proprietà del bilancio dettagliato

## 5. Esercizio

Siano consideri il processo
dove $N_1(t)$ e $N_2(t)$ sono due processi di Posson inomogenei indipendenti di intensità $\lambda_1(t)$ e $\lambda_2(t)$.

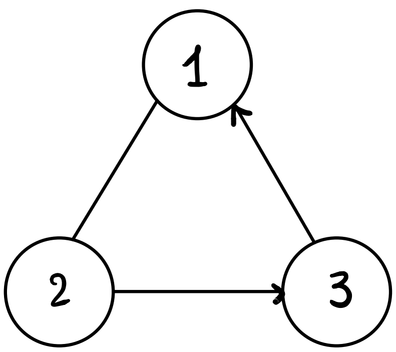
(1) la somma di $N_1(t)$ e $N_2(t)$ e' ancora un processo di Poisson non omogeneo?
(2) il processo $D(t) = N_1(t) - N_2(t)$ e' ancora un processo di Poisson non omogeneo? Come si può calcolare la distribuzione di $D(t)$?
(3) Sapendo che $N_1(2) = 1$ e $N_2(2) = 1$, calcolare la probabilità che il processo $D(t)$ resti costante per ogni $t \in (2/3, 4/3]$.

# 1. Esercizio

Esibire (se esiste, altrimenti specificare che non esiste e motivare il perchè)

- due DTMC irriducibili a stati finiti diverse che ammettono la stessa distribuzione stazionaria e la stessa distribuzione limite
- due DTMC a stati finiti diverse che ammettono la stessa distribuzione stazionaria e la stessa distribuzione limite
- due DTMC a stati finiti diverse, non irriducibili, che ammettono la stessa famiglia di distribuzioni stazionarie
- due DTMC a stati finiti diverse che ammettono la stessa distribuzione stazionaria, ma il cui comportamento limite per tempi lunghi differisce
- una DTMC a stati infiniti che ammette una distribuzione stazionaria
- una DTMC a stati infiniti che non ammette una distribuzione stazionaria In tutti i casi si privilegino esempi semplici (anche se banali).

1)




catena irriducibile

$S = \{1, 2, 3\}$ card$(S) = 3$

$1 \to 2 = (1,2)$ $\quad$ $2 \to 1 = (2,1)$

$2 \to 3 = (2,3)$ $\quad$ $3 \to 2 = (3,1) + (1,2)$

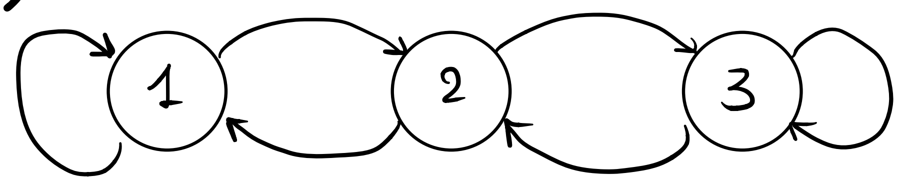
$1 \to 3 = (1,2) + (2,3)$ $\quad$ $3 \to 1 = (3,1)$

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0.5 & 0 & 0.5 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \pi P = \pi$$

$$\begin{cases} \pi(2) = \pi(1) \\ \dfrac{\pi(1)}{2} + \dfrac{\pi(3)}{2} = \pi(2) \\ \pi(3) = \pi(3) \\ \pi(1) + \pi(2) + \pi(3) = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{\pi(1)}{2} + \frac{\pi(3)}{2} = \pi(2) \Rightarrow \pi(1) + \pi(3) = 2\pi(2) \\ \qquad \Rightarrow \pi(2) = \pi(3) = \pi(1) \\ \pi(1) + \pi(2) + \pi(3) = 1 \Rightarrow \quad \pi(1) = \pi(2) = \pi(3) = \frac{1}{3} \end{cases}$$

2)



$1 \to 2 \quad 2 \to 1$
$2 \to 3 \quad 3 \to 2$
$1 \to 3 \quad 3 \to 1$

$$P = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & 0 \\ x_2 & 0 & z_2 \\ 0 & y_3 & z_3 \end{pmatrix} \quad \begin{cases} \pi(1) \cdot x_1 + \pi(2)\, y_1 = \pi(1) = \frac{1}{3} \\ \pi(1)\, x_2 + \pi(3)\, z_2 = \pi(2) = \frac{1}{3} \\ \pi(2)\, y_3 + \pi(3)\, z_3 = \pi(3) = \frac{1}{3} \end{cases}$$

$$\frac{1}{3} x_1 + \frac{1}{3} y_2 = \frac{1}{3}$$

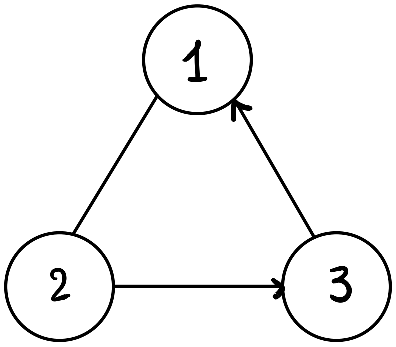
$$\frac{1}{3} x_2 + \frac{1}{3} z_2 = \frac{1}{3}$$

$$\frac{1}{3} y_3 + \frac{1}{3} z_3 = \frac{1}{3}$$

$$\begin{bmatrix} 0{,}7 & 0{,}3 & 0 \\ 0{,}6 & 0 & 0{,}4 \\ 0 & 0.2 & 0.8 \end{bmatrix}$$

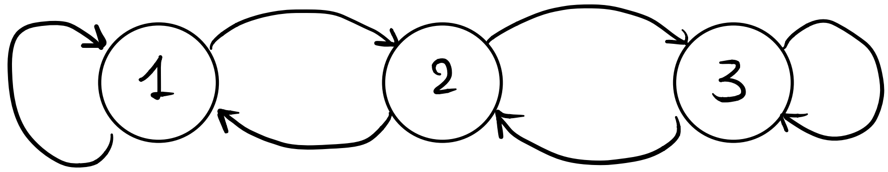
$$\begin{cases} 0.7\pi(1) + 0.3\pi(2) = \pi(1) \Rightarrow \quad 0.3\pi(1) = 0.3\pi(2) \\ 0{,}6\pi(1) + 0{,}4\pi(3) = \pi(2) \quad 0.6(\pi_1) + 0.4(\pi 1) = \pi(1) \\ 0{,}2\pi(2) + 0{,}8\pi(3) = \pi(3) \quad 0.2\pi(2) = 0.2(\pi(1)) \\ \pi(1) + \pi(2) + \pi(3) = 1 \end{cases}$$

1]




$$P_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0.5 & 0 & 0.5 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

2]

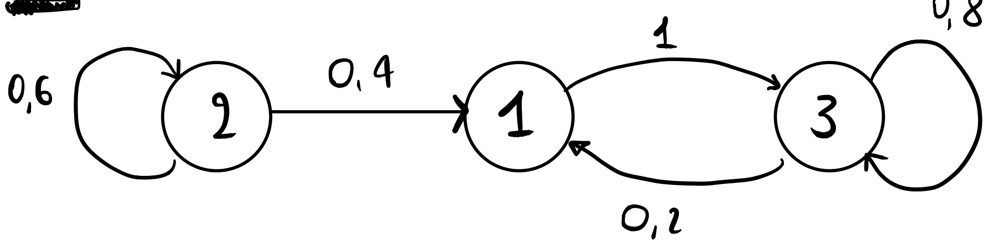



$$P_2 = \begin{bmatrix} 0.7 & 0.3 & 0 \\ 0.6 & 0 & 0.4 \\ 0 & 0.2 & 0.8 \end{bmatrix}$$

$$\pi_1 = \pi_2 = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$$

- due DTMC a stati finiti diverse che ammettono la stessa distribuzione stazionaria e la stessa distribuzione limite

1]




$$P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0,4 & 0,6 & 0 \\ 0.2 & 0 & 0.8 \end{bmatrix}$$

$\{2\}$ é transiente

$\{1, 3\}$ é set di nodi ricorrenti

$$\pi : \quad P_{(1,3)} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0,2 & 0,8 \end{bmatrix}$$

$$P = \begin{bmatrix} 1-a & a \\ b & 1-b \end{bmatrix}$$

$$\pi = \left(\frac{b}{a+b}, a/_{a+b}\right)$$

$$a+b = 1,2$$

$$\pi_{(1,3)} = \left(\frac{0,2}{1,2}, \frac{1}{1,2}\right) \qquad \pi = \left(\frac{1}{6}, 0, \frac{5}{6}\right)$$

$$\lim_{n\to+\infty} P(X_n = 2 \mid X_0 = x) = 0$$

perché $\{2\}$ è transiente e questo vale per ogni $x \in S$.

$$\lim_{n\to\infty} P(X_n = 1 \mid X_0 = 1) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(X_n = 1 \mid X_0 = 3) = \pi(1)$$

$$\text{e } \lim_{n\to\infty} P(X_n = 3 \mid X_0 = 1) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(X_n = 3 \mid X_0 = 3) = \pi(2)$$

perché 1 e 3 sono aperiodici (self loop)

- $$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(X_n = 1 \mid X_0 = 2) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(X_n = 1 \mid X_1 = 1) \cdot \underbrace{\mathbb{P}(X_1 = 1 \mid X_0 = 2)}_{\text{"unica" strada se parto da 2}}$$

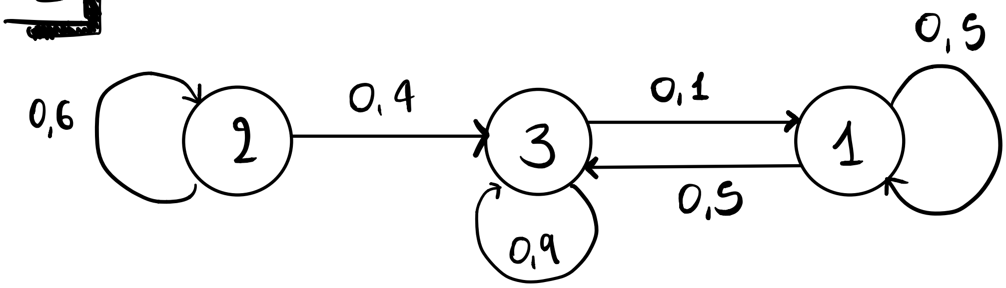
$$= \pi(1) \cdot 0,4 = \frac{1}{6} \cdot \frac{2}{5} = \frac{1}{15}$$

- $$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(X_n = 3 \mid X_0 = 2) = \lim_{n\to\infty} P(X_n = 3 \mid X_1 = 1) \cdot \mathbb{P}(X_1 = 1 \mid X_0 = 2) =$$

$$= \mathbb{P}(X_1 = 1 \mid X_0 = 2) \cdot \lim_{n\to\infty} \underbrace{(X_n = 3 \mid X_1 = 1)}_{= \pi(3)} = 0,4 \cdot \pi(3) = \frac{1}{3}$$

A seconda dell'inizializzazione della catena la dist. limite cambia!

2|




$$P = \begin{bmatrix} 0,5 & 0 & 0,5 \\ 0,6 & 0 & 0,4 \\ 0,1 & 0 & 0,9 \end{bmatrix}$$

$$\pi_{(1,3)} = \left( \frac{b}{a+b}, \frac{a}{a+b} \right) \qquad P_{13} = \begin{bmatrix} 1-a & a \\ b & 1-b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,5 & 0,5 \\ 0,1 & 0,9 \end{bmatrix}$$

$$\pi = \left( \frac{b}{a+b}, 0, \frac{a}{a+b} \right) = \left( \frac{0,1}{0,6}, 0, \frac{0,5}{0,6} \right) = \left( \frac{1}{6}, 0, \frac{5}{6} \right)$$

- $\lim\limits_{n\to\infty} \mathbb{P}(X_n = 2 \mid X_0 = x) = \lim\limits_{n\to\infty} \mathbb{P}(X_n = 2) = 0$ (transient)

- $\lim\limits_{n\to\infty} \mathbb{P}(X_n = 1 \mid X_0 = j) = \pi(1) = \frac{1}{6}$ con $j = 1, 3$;

- $\lim\limits_{n\to\infty} \mathbb{P}(X_n = 3 \mid X_0 = j) = \pi(3) = \frac{5}{6}$ con $j = 1, 3$

- $\lim\limits_{n\to\infty} \mathbb{P}(X_n = 1 \mid X_0 = 2) = \lim\limits_{n\to\infty} \mathbb{P}(X_n = 1 \mid X_1 = 3) \cdot \mathbb{P}(X_1 = 3 \mid X_0 = 2)$

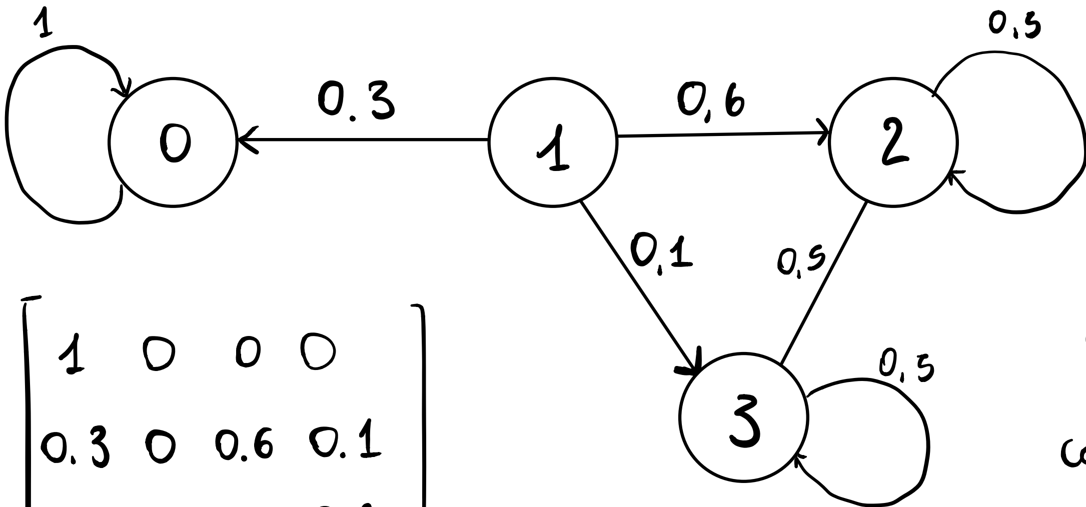
$$= \mathbb{P}(X_1 = 3 \mid X_0 = 2) \cdot \underbrace{\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(X_n = 1 \mid X_1 = 3)}_{=\pi(1)} = \pi(1) . 0,4 = \frac{1}{15}$$

- $\lim\limits_{n\to\infty} \mathbb{P}(X_n = 3 \mid X_0 = 2) = \lim\limits_{n\to\infty} \mathbb{P}(X_n = 3) \cdot \mathbb{P}(X_1 = 3 \mid X_0 = 2)$

$$= \mathbb{P}(X_1 = 3 \mid X_0 = 2) \cdot \underbrace{\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(X_n = 3)}_{=\pi(3)} = \pi(3) . 0,4 = \frac{1}{3}$$

- due DTMC a stati finiti diverse, non irriducibili, che ammettono la stessa famiglia di distribuzioni stazionarie

## Catena 1




$S = T \cup R_1 \cup R_2$

con $T = \{1\}$

$R_1 = \{0\}$

$R_2 = \{2, 3\}$

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0.3 & 0 & 0.6 & 0.1 \\ 0 & 0 & 0,5 & 0.5 \\ 0 & 0 & 0,5 & 0,5 \end{bmatrix}$$

almeno due dist. stazionarie:

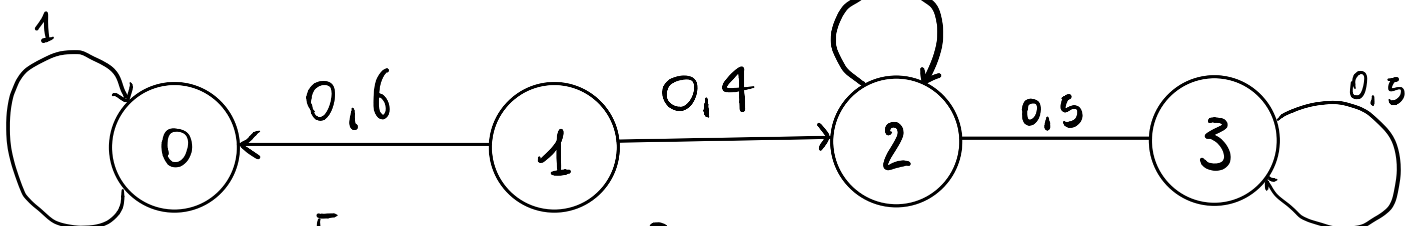
$\pi_1 = (1, 0, 0, 0)$

$\pi_2 = (0, 0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \Rightarrow$ <u>TUTTE</u> le dist. stazionarie sono date da

$\alpha_1, \alpha_2 \geq 0$ con $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$

$$\pi = \left(\alpha_1 \cdot 1,\ 0,\ \frac{\alpha_2}{2},\ \frac{\alpha_2}{2}\right)$$ ← famiglia di dist. stazionarie

## Catena 2




$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0,6 & 0 & 0,4 & 0 \\ 0 & 0 & 0,5 & 0,5 \\ 0 & 0 & 0,5 & 0,5 \end{bmatrix}$$

$\pi_1 = (1, 0, 0, 0)$

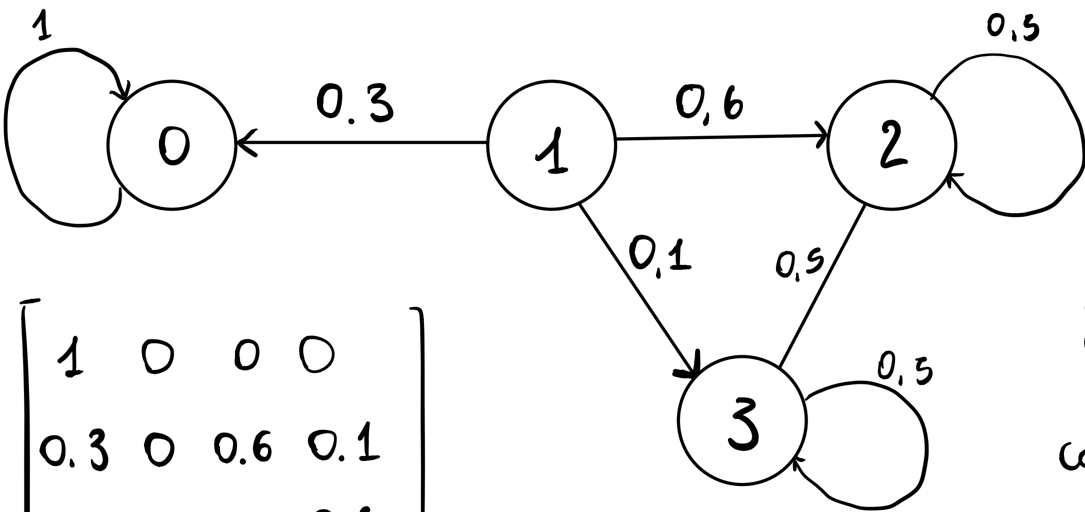
$\pi_2 = (0, 0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \Rightarrow$ dati $\beta_1$ e $\beta_2 \geq 0$ con $\beta_1 + \beta_2 = 1$

famiglia di $\pi(\beta_{1,2}) = \left(\beta_1 \cdot 1,\ 0,\ \beta_2 \cdot \frac{1}{2},\ \beta_2 \cdot \frac{1}{2}\right)$

- due DTMC a stati finiti diverse che ammettono la stessa distribuzione stazionaria, ma il cui comportamento limite per tempi lunghi differisce

Stesse di prima, calcolo il comportam. al limite:

Catena 1




$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0.3 & 0 & 0.6 & 0.1 \\ 0 & 0 & 0,5 & 0.5 \\ 0 & 0 & 0,5 & 0,5 \end{bmatrix}$$

$S = T \cup R_1 \cup R_2$

con $T = \{1\}$

$R_1 = \{0\}$

$R_2 = \{2, 3\}$

- Caso $X_0 = x$, con $x \in \{0, 1, 2, 3\}$
  - $\lim_{n \to \infty} \mathbb{P}(X_n = 1 \mid X_0 = x) = 0$ perché 1 è transiente quindi ha $\mathbb{P}$ nulla.

- Caso $X_0 = 0$
  - $\lim_{n \to \infty} \mathbb{P}(X_n = 0 \mid X_0 = 0) = 1$

per $X_n = 1$ già calcolata

  - $\lim_{n \to \infty} \mathbb{P}(X_n = 2 \mid X_0 = 0) = \mathbb{P}(X_n = 3 \mid X_0 = 0) = 0$

- Caso $X_0 = 2$, $X_0 = 3$ sia $j = 2, 3$

$$-\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(X_n = 0 \mid X_0 = j) = 0$$

$$-\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(X_n = 2 \mid X_0 = j) = \pi_2(2) = \frac{1}{2} \; ; \; -\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(X_n = 3 \mid X_0 = j) = \pi_2(3) = \frac{1}{2}$$

- Caso $X_0 = 1$

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(X_n = 0 \mid X_0 = 1) = \lim_{n\to\infty} \Big[ \mathbb{P}(X_n = 0 \mid X_1 = 0) \cdot \mathbb{P}(X_1 = 0 \mid X_0 = 1)$$

$$+ \underbrace{\cancel{\mathbb{P}(X_n = 0 \mid X_1 = 2)}}_{=0} \cdot \mathbb{P}(X_1 = 2 \mid X_0 = 1) + \underbrace{\cancel{\mathbb{P}(X_n = 0 \mid X_1 = 3)}}_{=0} \cdot \mathbb{P}(X_1 = 3 \mid X_0 = 1)$$

$$= 0{,}3 \cdot \pi_1(0) = 0{,}3$$

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(X_n = 2 \mid X_0 = 1) = \lim_{n\to\infty} \Big[ \overbrace{\mathbb{P}(X_n = 2 \mid X_1 = 2)}^{=\pi_2(2)} \cdot \mathbb{P}(X_1 = 2 \mid X_0 = 1)$$

$$+ \underbrace{\mathbb{P}(X_n = 2 \mid X_1 = 3)}_{\pi_2(2)} \cdot \mathbb{P}(X_1 = 3 \mid X_0 = 1) + \underbrace{\cancel{\mathbb{P}(X_n = 2 \mid X_1 = 0)}}_{=0} \cdot \mathbb{P}(X_1 = 0 \mid X_0 = 1)$$

$$= 0{,}6 \cdot \frac{1}{2} + 0{,}1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{0{,}7}{2} = \frac{7}{20}$$

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(X_n = 3 \mid X_0 = 1) = \lim_{n\to\infty} \Big[ \overbrace{\mathbb{P}(X_n = 3 \mid X_1 = 3)}^{\pi_2(3)} \cdot \mathbb{P}(X_1 = 3 \mid X_0 = 1)$$

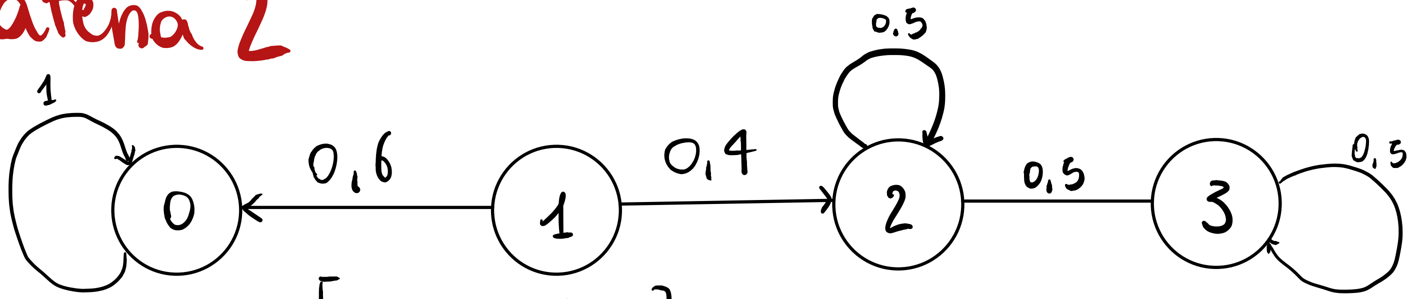
$$+ \underbrace{\mathbb{P}(X_n = 3 \mid X_1 = 2)}_{\pi_2(3)} \cdot \mathbb{P}(X_1 = 2 \mid X_0 = 1) + \underbrace{\cancel{\mathbb{P}(X_n = 3 \mid X_1 = 0)}}_{=0} \cdot \mathbb{P}(X_1 = 0 \mid X_0 = 1)$$

$$= \pi_2(3) \cdot 0{,}1 + \pi_2(3) \cdot 0{,}6 = \frac{7}{20}$$

Quindi, in conclusione:

- se $X_0 = 0$ la dist. limite è: $(1, 0, 0, 0)$
- se $X_0 = 1$ " " è $\left(\frac{3}{10}, 0, \frac{7}{20}, \frac{7}{20}\right)$
- se $X_0 = 2, 3$ " è: $\left(0, 0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$

# Catena 2




$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0,6 & 0 & 0,4 & 0 \\ 0 & 0 & 0,5 & 0,5 \\ 0 & 0 & 0,5 & 0,5 \end{bmatrix}$$

$\pi_1 = (1, 0, 0, 0)$
$\pi_2 = \left(0, 0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ $\Rightarrow$ dati $\beta_1$ e $\beta_2 \geq 0$ con $\beta_1 + \beta_2 = 1$

- Caso $X_0 = x$, con $x \in \{0, 1, 2, 3\}$
  - $\lim_{n \to \infty} \mathbb{P}(X_n = 1 \mid X_0 = x) = 0$ perché 1 è transiente quindi ha $\mathbb{P}$ nulla.
- Caso $X_0 = 0$
  - $\lim_{n \to \infty} \mathbb{P}(X_n = 0 \mid X_0 = 0) = 1$

    per $X_n = 1$ già calcolata
  - $\lim_{n \to \infty} \mathbb{P}(X_n = 2 \mid X_0 = 0) = \mathbb{P}(X_n = 3 \mid X_0 = 0) = 0$
- Caso $X_0 = 2$, $X_0 = 3$ sia $j = 2, 3$
  - $\lim_{n \to \infty} \mathbb{P}(X_n = 0 \mid X_0 = j) = 0$
  - $\lim_{n \to \infty} \mathbb{P}(X_n = 2 \mid X_0 = j) = \pi_2(2) = \frac{1}{2}$ ; $-\lim_{n \to \infty} \mathbb{P}(X_n = 3 \mid X_0 = j) = \pi_2(3) = \frac{1}{2}$

◆ Caso $X_0 = 1$

■ $\lim\limits_{n\to\infty} \mathbb{P}(X_n = 0 | X_0 = 1) = \lim\limits_{n\to\infty} \Big[ \mathbb{P}(X_n = 0 | X_1 = 0) \cdot \mathbb{P}(X_1 = 0 | X_0 = 1)$

$+ \underbrace{\cancel{\mathbb{P}(X_n = 0 | X_1 = 2)}}_{=0} \cdot \mathbb{P}(X_1 = 2 | X_0 = 1) + \underbrace{\cancel{\mathbb{P}(X_n = 0 | X_1 = 3)}}_{=0} \cdot \mathbb{P}(X_1 = 3 | X_0 = 1) \Big]$

$= \quad 0{,}6 \cdot \pi_1(0) = 0{,}6$

■ $\lim\limits_{n\to\infty} \mathbb{P}(X_n = 2 | X_0 = 1) = \lim\limits_{n\to\infty} \Big[ \overbrace{\mathbb{P}(X_n = 2 | X_1 = 2)}^{\pi_2(2)} \cdot \mathbb{P}(X_1 = 2 | X_0 = 1)$

$+ \underbrace{\mathbb{P}(X_n = 2 | X_1 = 3)}_{\pi_2(2)} \cdot \underbrace{\cancel{\mathbb{P}(X_1 = 3 | X_0 = 1)}}_{=0} + \underbrace{\cancel{\mathbb{P}(X_n = 2 | X_1 = 0)}}_{=0} \cdot \mathbb{P}(X_1 = 0 | X_0 = 1) \Big]$

$= \quad 0{,}4 \cdot \pi_2(2) = 0{,}4 \cdot \frac{1}{2} = \frac{4}{20} = \frac{1}{5}$

■ $\lim\limits_{n\to\infty} \mathbb{P}(X_n = 3 | X_0 = 1) = \lim \; \mathbb{P}(X_n = 3 | X_1 = 3) \cdot \underbrace{\cancel{\mathbb{P}(X_1 = 3 | X_0 = 1)}}_{=0} +$

$+ \mathbb{P}(X_n = 3 | X_1 = 2) \cdot \mathbb{P}(X_1 = 2 | X_0 = 1) + \underbrace{\cancel{\mathbb{P}(X_n = 3 | X_1 = 0)}}_{=0} \cdot \mathbb{P}(X_1 = 0 | X_0 = 1)$

$= \pi_2(3) \cdot 0{,}4 = 0{,}4 \cdot \frac{1}{2} = \frac{4}{20} = \frac{1}{5}$

Quindi, in conclusione:

- se $X_0 = 0$ la dist. limite è: $(1, 0, 0, 0)$
- se $X_0 = 1$ " " è $\left(\frac{3}{5}, 0, \frac{1}{5}, \frac{1}{5}\right)$
- se $X_0 = 2, 3$ " è: $\left(0, 0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$

- una DTMC a stati infiniti che ammette una distribuzione stazionaria
- una DTMC a stati infiniti che non ammette una distribuzione stazionaria In tutti i casi si privilegino esempi semplici (anche se banali).

- Birth and death chain $S = \{ x \in \mathbb{Z}, a \leq x \leq b \}$

Se questa ha una dist. stazionaria $\pi$ allora tale $\pi$ é una distribuzione di bilancio dettagliato. Si ha che

$p(x, x+1) = p_x$ $\qquad$ $p_x + q_x + r_x = 1$ e
$q(x, x-1) = q_x$ $\qquad$ $\pi(x) \cdot p_x = \pi(x+1) \cdot q_x$
$r(x, x) = r_x$

- Random walk ad 1 dimensione con $p = \frac{1}{2}$. (anche se pure con $p \neq \frac{1}{2}$ $\nexists$ dist. stazionaria.)