Homework 1

Ornella Elena Grassi (s290310@studenti.polito.it)

16 febbraio 2021

Realizzato in collaborazione con Giulio Nenna (s245717), Andrea Sanna (s222975) e Alfredo Baione (s279328)

Esercizio 1.

---

1. Se una catena di Markov a stati finiti è irriducibile, allora tutti i suoi stati sono ricorrenti, ovvero
$$\mathbb{E}_i[T_i] = \mathbb{E}[T_i \mid X_0 = i] < \infty,$$
cioè il tempo medio di primo ritorno in i è minore di ∞.
Inoltre sappiamo che, per questa catena, esiste un'unica distribuzione stazionaria e che, in generale, una distribuzione limite è una distribuzione stazionaria.
Dunque, in questo particolare caso, basterà scegliere due catene di Markov a tempo discreto le cui matrici di transizione siano doppiamente stocastiche e aperiodiche (condizione che garantisce l'esistenza di una distribuzione limite nel nostro caso), ad esempio
$$p_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}, \qquad p_2 = \begin{bmatrix} 0.4 & 0.6 \\ 0.6 & 0.4 \end{bmatrix}$$
e osservare che, per questi due processi, indipendentemente dallo stato iniziale, la distribuzione uniforme è sempre una distribuzione stazionaria.
Si avrà
$$\pi_S\left(1\right) = \pi_S\left(2\right) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)'$$
e questa sarà anche la loro distribuzione limite.

2. Due DTMC a stati finiti, diverse, che ammettono la stessa distribuzione stazionaria e la stessa distribuzione limite, potrebbero essere due catene siffatte:

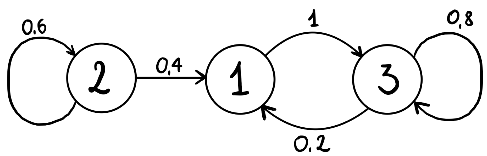


Figura 1: Catena 1.

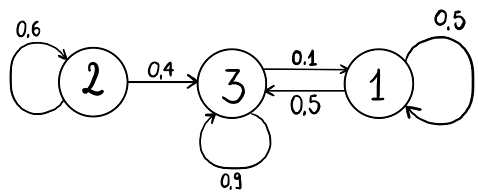


Figura 2: Catena 2.

aventi matrici di transizione rispettivamente

$$P_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0.4 & 0.6 & 0 \\ 0.2 & 0 & 0.8 \end{bmatrix}, \qquad P_2 = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 & 0.5 \\ 0 & 0.6 & 0.4 \\ 0.1 & 0 & 0.9 \end{bmatrix}.$$

In entrambi i casi lo stato $\{2\}$ è transiente mentre $\{1, 3\}$ è l'insieme dei ricorrenti. La distribuzione stazionaria sarà data da

$$\pi_1(1) = \frac{0.2}{1+0.2} \qquad \pi_1(2) = 0 \qquad \pi_1(3) = \frac{1}{1+0.2}$$
$$\pi_2(1) = \frac{0.1}{0.5+0.1} \qquad \pi_2(2) = 0 \qquad \pi_2(3) = \frac{0.5}{0.5+0.1}$$

e quindi pari a

$$\pi_{1,2} = \left(\frac{1}{6}, 0, \frac{5}{6}\right).$$

Per poter calcolare la distribuzione limite delle due catene, invece, bisogna considerare le differenti possibili inizializzazioni.

Per la catena 1 si ha:

- $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(X_n = 1|X_0 = j) = \pi(1) = \frac{1}{6}; \qquad \text{con } j = 1, 3;$
- $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(X_n = 1|X_0 = 2) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(X_n = 1) \cdot \mathbb{P}(X_1 = 1|X_0 = 2) = 0.4 \cdot \pi(1) = \frac{1}{15};$
- $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(X_n = 2|X_0 = x) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(X_n = 2) = 0;$
- $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(X_n = 3|X_0 = j) = \pi(3) = \frac{5}{6}; \qquad \text{con } j = 1, 3;$
- $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(X_n = 3|X_0 = 2) = 0.4 \cdot \pi(3) = \frac{1}{3};$

Allo stesso modo per la catena 2 si verifica:

- $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(X_n = 1|X_0 = j) = \pi(1) = \frac{1}{6}; \qquad \text{con } j = 1, 3;$
- $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(X_n = 1|X_0 = 2) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(X_n = 1|X_1 = 3) \cdot \mathbb{P}(X_1 = 3|X_0 = 2) =$ $0.4 \cdot \pi(1) = \frac{1}{15};$
- $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(X_n = 2|X_0 = x) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(X_n = 2) = 0;$
- $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(X_n = 3|X_0 = j) = \pi(3) = \frac{5}{6}; \qquad \text{con } j = 1, 3;$
- $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(X_n = 3|X_0 = 2) = 0.4 \cdot \pi(3) = \frac{1}{3};$

In ambo i casi ottiene quindi che se le DTMC sono inizializzate a $X_0 = 2$ la distribuzione limite è

$$\left(\frac{1}{15}, 0, \frac{1}{3}\right)',$$

altrimenti per $X_0 = 1, X_0 = 3$ si ha

$$\left(\frac{1}{6}, 0, \frac{5}{6}\right)'.$$

3. Due DTMC a stati finiti, diverse, non irriducibili, che ammettono la stessa famiglia di distribuzioni stazionarie, potrebbero essere le seguenti.

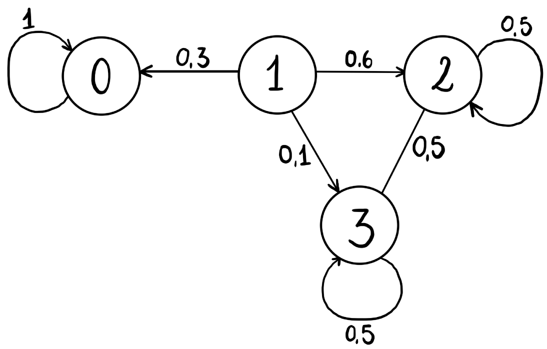


Figura 3: Catena 1.

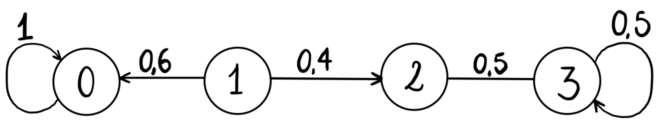


Figura 4: Catena 2.

La matrice di trasizione P_1 vale

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0.3 & 0 & 0.6 & 0.1 \\ 0 & 0 & 0.5 & 0.5 \\ 0 & 0 & 0.5 & 0.5 \end{bmatrix}$$

La catena non è irriducibile. Vi è uno stato transiente, $T = \{1\}$ mentre gli insiemi ricorrenti sono $R_1 = \{0\}$ e $R_2 = \{2, 3\}$. Questo implica che le distribuzioni seguenti siano entrambe stazionarie

$$\pi_1 = (1, 0, 0, 0) \quad e \quad \pi_2 = (0, 0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$$

e che appartengano alla famiglia di distribuzioni data da

$$(\alpha_1, 0, \frac{\alpha_2}{2}, \frac{\alpha_2}{2})$$

dove $\alpha_1, \alpha_2 \geq 0$, con $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$.

La catena 2 invece ha matrice di transizione P_2

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0.6 & 0 & 0.4 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 & 0.5 \\ 0 & 0 & 0.5 & 0.5 \end{bmatrix}$$

Anche in questo caso la DTMC ha due set di stati ricorrenti $R_1 = \{0\}$ e $R_2 = \{2, 3\}$ per i quali si possono trovare almeno due distribuzioni stazionarie differenti, quali

$$\pi_1 = (1, 0, 0, 0) \quad e \quad \pi_2 = (0, 0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}).$$

Dati $\beta_1, \beta_2 \geq 0$, con $\beta_1 + \beta_2 = 1$, tutte le distribuzioni di P_2 sono del tipo

$$(\beta_1, 0, \frac{\beta_2}{2}, \frac{\beta_2}{2}),$$

identiche a P_1.

4. Utilizzando le catene del punto precedente, ne calcoliamo la distribuzione al limite per tutte le possibili inizializzazioni della catena. Per la catena 1 si avrà:

   - $\mathbb{P}(X_n = 1)$, per $n \to \infty$:

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(X_n = 1|X_0 = x) = 0, \qquad x \in \{0, 1, 2, 3\}.$$

   - $\mathbb{P}(X_n = 0)$, per $n \to \infty$:

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(X_n = 0|X_0 = 0) = 1;$$

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(X_n = 0|X_0 = 1) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(X_n = 0|X_1 = 0) \cdot \mathbb{P}(X_1 = 0|X_0 = 1)\\ = 0.3 \cdot \pi_1(0) = \frac{3}{10};\end{aligned}$$

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(X_n = 0|X_0 = x) = 0, \qquad x \in \{2, 3\}.$$

   - $\mathbb{P}(X_n = 2)$, per $n \to \infty$:

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(X_n = 2|X_0 = 0) = 0;$$

$$\begin{aligned}&\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(X_n = 2|X_0 = 1) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(X_n = 2|X_1 = 2) \cdot \mathbb{P}(X_1 = 2|X_0 = 1)+\\ &+ \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(X_n = 2|X_1 = 3) \cdot \mathbb{P}(X_1 = 3|X_0 = 1) = 0.6 \cdot \pi_2(2) + 0.1 \cdot \pi_2(2) = \frac{7}{20};\end{aligned}$$

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(X_n = 2|X_0 = x) = \pi_2(2) = \frac{1}{2}, \qquad x \in \{2, 3\}.$$

   - $\mathbb{P}(X_n = 1)$, per $n \to \infty$:

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(X_n = 3|X_0 = 0) = 0;$$

$$\begin{aligned}&\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(X_n = 3|X_0 = 1) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(X_n = 3|X_1 = 3) \cdot \mathbb{P}(X_1 = 3|X_0 = 1)+\\ &+ \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(X_n = 3|X_1 = 2) \cdot \mathbb{P}(X_1 = 2|X_0 = 1) = 0.1 \cdot \pi_2(3) + 0.6 \cdot \pi_2(3) = \frac{7}{20};\end{aligned}$$

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(X_n = 3|X_0 = x) = \pi_2(3) = \frac{1}{2}, \qquad x \in \{2, 3\}.$$

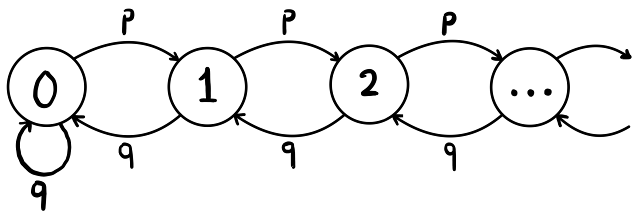
   Il motivo per cui la distribuzione al limite non è unica risiede nella non irriducibilità della catena. Si avrà pertanto che:

- se $X_0 = 0$ la distribuzione limite corrisponde alla distribuzione stazionaria dove $\alpha_1 = 1$ e $\alpha_2 = 0$
$$(1, 0, 0, 0)$$
- se $X_0 = 1$ la distribuzione limite è quella in cui $\alpha_1 = 0.3$ e $\alpha_2 = 0.7$
$$\left(\frac{3}{10}, 0, \frac{7}{20}, \frac{7}{20}\right)$$
- se $X_0 = 2$ oppure $X_0 = 3$ i due coefficienti valgono $\alpha_1 = 0$ e $\alpha_2 = 1$
$$\left(0, 0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right).$$

Allo stesso modo si calcolano le distribuzioni limite per la seconda DTMC. Si ottengono i risultati seguenti:

- se $X_0 = 0$ si ha $\beta_1 = 1$ e $\beta_2 = 0$
$$(1, 0, 0, 0)$$
- se $X_0 = 1$ la distribuzione limite è quella in cui $\beta_1 = 0.6$ e $\beta_2 = 0.2$
$$\left(\frac{3}{5}, 0, \frac{1}{5}, \frac{1}{5}\right)$$
- se $X_0 = 2$ oppure $X_0 = 3$ i due coefficienti valgono $\beta_1 = 0$ e $\beta_2 = 1$
$$\left(0, 0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right).$$

5. Una DTCM a stati infiniti che ammette distribuzione stazionaria potrebbe essere la seguente:



Questa è una catena di nascita e morte sui numeri naturali, incluso lo 0. Sappiamo che, per le catene di questo tipo la distribuzione stazionaria esiste sotto determinate condizioni. In particolare ogni catena di nascita è morte ha un'unica distribuzione stazionaria se e solo se

$$0 < \sum_{x=0}^{\infty} \prod_{i=0}^{x-1} \frac{p_i}{q_{i+1}} < \infty.$$

Ci basterà pertanto scegliere come esempio il cosiddetto "1d partially reflected Random Walk" a cui assegnamo le probabilità di transizione:

$$p\,(x, x+1) = p_x = p = \frac{1}{3}, \;\; \forall x \geq 0;$$
$$p\,(x, x-1) = q_x = 1 - p = q = \frac{2}{3}, \;\; \forall x \geq 1;$$
$$p\,(0, 0) = 1 - p = q.$$

Per tale catena risulta che

$$\sum_{x=0}^{\infty} \prod_{i=0}^{x-1} = \sum_{x=0}^{\infty} \prod_{i=0}^{x-1} \frac{p}{q} = \sum_{x=0}^{\infty} \left(\frac{p}{q}\right)^x$$

e questa serie converge a un numero finito se e solo se $p < \frac{1}{2}$. Solo in questo modo, infatti, si garantisce l'esistenza di una distribuzione stazionaria che nel nostro caso sarà pari a :

$$\pi\,(x) = \left(1 - \frac{p}{q}\right)\left(\frac{p}{q}\right)^x = \left(\frac{1}{2}\right) \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^x = \left(\frac{1}{2}\right)^{x+1}$$

per ogni $x \in \mathbb{N}$ perchè tutti gli stati della catena sono positivo ricorrenti.

6. Similmente al caso precedente, consideriamo ora la catena di Markov a stati infiniti denominata "1d Random Walk" o "cammino dell'ubriaco", sullo spazio degli stati discreto $S = \mathbb{Z} = \{... - 2, -1, 0, 1, 2, ...\}$ con probabilità di transizione:

$$p\,(i, i+1) = p;$$
$$p\,(i, i-1) = q, \;\; con \;\; q = 1 - p, \;\; \forall i \in \mathbb{Z}.$$

Osserviamo che se $p \neq \frac{1}{2}$ tutti gli stati sono transienti e quindi non esiste una distribuzione stazionaria. Se invece $p = q = \frac{1}{2}$, nonostante la catena sia irriducibile e ricorrente e pertanto garantisce l'esistenza di una misura stazionaria $\eta(x)$, non è possibile trovare una distribuzione stazionaria perché bisognerebbe assicurare che

$$\sum_{x \in \mathbb{Z}} \pi(x) = 1$$

il che è impossibile.

Esercizio 2.

Supponiamo che una catena di Markov sia fatta da un insieme di stati ricorrenti R e da uno transiente T, come nell'esempio.

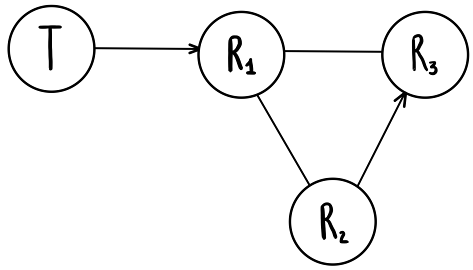


Figura 5: Esempio banale

Uno stato y è detto ricorrente se il tempo di prima visita ad y, (*hitting time*) vale $T_t < \infty$ ed avviene che y sarà visitato nuovamente con probabilità $\rho_{yy} = 1$.
Tutti i nodi ricorrenti appartenenti allo stesso insieme comunicano tra loro, cioè dati $i, j \in R$ si ha che i è raggiungibile da j e j e raggiungibile da i.
Supponiamo di aver inizializzato la nostra catena ad uno stato ricorrente qualsiasi di $y \in R$.
Dato il nodo transiente t ed si deve avere necessariamente che t è raggiungibile da y ma non viceversa oppure y è raggiungibile da t ma non viceversa.
Altrimenti T potrebbe non essere connesso affatto con y e quindi la tesi sarebbe presto dimostrata oppure t comuincherebbe con y e quindi sarebbe ricorrente, che contraddice l'ipotesi.

Valutiamo quindi il caso in cui $p(t, y) > 0$ e $p(y, t) = 0$. Avendo inizializzato la catena a $X_0 = y$ si ha che

$$\mathbb{P}(X_n = t | X_0 = y) = p^{(n)}(y, t) = 0$$

ovvero non è possibile raggiungere t, che equivale alla tesi.

Se invece $p(t, y) = 0$ e $p(y, t) > 0$ si ha che

$$\begin{aligned}\rho_{yy} = \mathbb{P}(X_n = y, X_{n-1} = t | X_0 = y) = \\ = \mathbb{P}(X_n = y | X_n - 1 = t) \cdot (\mathbb{P}(X_{n-1} = t | X_0 = y) = \\ = p(t, y) \cdot p^{(n-1)}(y, t) = 0\end{aligned}$$

che è impossibile perché y ricorrente.
Pertanto una catena che al tempo $n \in \mathbb{N}$ si trova in uno stato ricorrente non potrà più visitare uno stato transiente.

Esercizio 3.

Il problema si presenta in una forma in cui, partendo da uno stato x, il numero di passi per arrivare nello stato n è pari al numero di passi per uscire dalla zona tegli stati transienti. Per come è definito il problema i nodi da 1 a $n-1$ sono gli stati transienti della catena e pertanto appartengono all'insieme T mentre l'unico stato ricorrente (pertanto assorbente) è rappresentato dal nodo n che sarà l'unico elemento dell'insieme R.
Quella cercata è pertanto l'attesa del numero di passi per arrivare da uno stato T ad uno stato R, ossia un *expected exit time*:

$$m_x = \mathbb{E}_x\left[\sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{1}_{\{X_n \notin R\}}\right] = (Qe)_x$$

Dove $Q \in \mathbb{R}^{\#T \times \#T}$ è la matrice delle visite attese ad uno stato transiente. In particolare:

$$Q = (I - P_{T,T})^{-1} \Rightarrow (I - P_{T,T})m = e$$

Dove $I - P_{T,T}$ è una matrice triangolare superiore, pertanto il sistema può essere risolto per sostituzione.

$$\begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{n-1} & -\frac{1}{n-1} & \dots & -\frac{1}{n-1} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{n-2} & \dots & -\frac{1}{n-2} \\ \vdots & & \ddots & & \\ 0 & \dots & & 1 & -\frac{1}{n-(n-2)} \\ 0 & \dots & & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \\ \vdots \\ m_{n-2} \\ m_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Il sistema può essere risolto per induzione con soluzione:

$$m_{n-i} = \sum_{k=1}^{i} \frac{1}{n-(n-k)} = \sum_{k=1}^{i} \frac{1}{k}$$

infatti abbiamo:

$$m_{n-1} = 1$$
$$m_{n-2} = 1 + \frac{1}{2} = \sum_{k=1}^{2} \frac{1}{k}.$$

Dimostrata la base induttiva, supponiamo l'asserto vero per $i = n-2$ (quindi $t = 2$).
Si avrà:

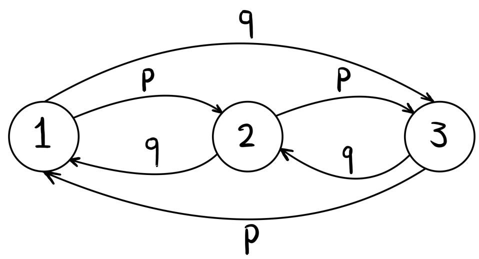
$$\mathbb{E}_1[\#\ \text{p. p. r. } n] = \left(1 - \frac{1}{n-1}\right)\mathbb{E}_2[\#\ \text{p. p. r. } n] + \frac{1}{n-1}\left(\mathbb{E}_2[\#\ \text{p. p. r. } n] + 1\right) =$$
$$\mathbb{E}_2[\#\ \text{p. p. r. } n]\left(\frac{n-2+1}{n-1}\right) + \frac{1}{n-1} = \sum_{k}^{n-2} \frac{1}{k} + \frac{1}{n-1} = \sum_{k}^{n-1} \frac{1}{k}.$$

Ne risulta che, per $n \to \infty$, questa attesa avrà il seguente comportamento:

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}_t[\#\ \text{passi per raggiungere } n] = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{i} \frac{1}{k} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n-t} \frac{1}{k} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = +\infty.$$

Esercizio 4.

Sappiamo che una distribuzione di bilancio dettagliato, se esiste, è anche una distribuzione



stazionaria.
Consideriamo allora il sistema relativo all'esistenza di una distribuzione di bilancio dettagliato nel caso della catena di Markov in questione:

$$\begin{cases} \pi_1 p = \pi_2 (1-p) \\ \pi_1 (1-p) = \pi_3 p \\ \pi_2 p = \pi_3 (1-p) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \pi_1 p - \pi_2 (1-p) = 0 \\ \pi_1 (1-p) - \pi_3 p = 0 \\ \pi_2 p - \pi_3 (1-p) = 0 \end{cases} .$$

Studiando il rango della matrice

$$A = \begin{bmatrix} p & p-1 & 0 \\ 1-p & 0 & -p \\ 0 & p & p-1 \end{bmatrix},$$

si ricava che

$$\det A = p^3 + (p-1)^3 = 0 \Leftrightarrow p^3 = (1-p)^3 \Leftrightarrow p = 1-p.$$

Allora, se $p \neq (1-p)$, il sistema ammette solo la soluzione banale che, però, non identificando una distribuzione, non può essere accettata.
Se $p = (1-p)$, invece, il rango di A è 2 e, dunque, il sistema ammette la soluzione non banale $\pi_1 = \pi_2 = \pi_3$ che, imponendo la condizione $\pi_1 + \pi_2 + \pi_3 = 1$, si traduce in $\pi \equiv \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)'$.
Quindi, nell'ultimo caso, abbiamo trovato anche una distribuzione stazionaria, che è quella tale per cui $p = \frac{1}{2}$ e $\pi \equiv \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)'$.

Esercizio 5.

(1) I processi $N_1(t)$ e $N_2(t)$ possono essere scritti come

$$N_1(t) = N\left(\int_0^t \lambda_1(u)\ du\right) \text{ e } N_2(t) = N\left(\int_0^t \lambda_2(u)\ du\right),$$

dove $N(t)$ è un processo di Poisson di rate 1 (per il teorema del "riscalamento" del tempo di un processo di Poisson di rate 1).
Adesso, possiamo applicare la proprietà di "supercondition" per processi di Poisson non omogenei, la quale afferma che se abbiamo $N_1(t), ..., N_k(t)$ processi di Poisson indipendenti di rates, rispettivamente, $\lambda_1(t), ..., \lambda_k(t)$, allora $N_1(t) + ... + N_k(t)$ è un processo di Poisson di rate $\lambda_1(t) + ... + \lambda_k(t)$.
Nel nostro caso, allora,

$$N_1(t) + N_2(t) = N\left(\int_0^t \lambda_1(u)\ du\right) + N\left(\int_0^t \lambda_2(u)\ du\right)$$

è un processo di Poisson non omogeneo di rate $\lambda_1(t) + \lambda_2(t)$.

(2) Il processo $D(t) = N_1(t) - N_2(t)$ non è più un processo di Poisson non omogeneo. Infatti, ponendo

$$D(t) = N\left(\int_0^t \lambda_1(u)\ du\right) - N\left(\int_0^t \lambda_2(u)\ du\right),$$

con $N(t)$ processo di Poisson di rate 1, come in precedenza, risulta che, $\forall t, s$, con $s < t$, risulta che $D(t) - D(s)$ segue una distribuzione di Skellam di parametri $\left(\int_s^t \lambda_1(u)\ du, \int_s^t \lambda_2(u)\ du\right)$.
Infatti

$$\begin{aligned}
&D(t) - D(s) = N_1(t) - N_2(t) - N_1(s) + N_2(s) = \\
&[N_1(t) - N_1(s)] - [N_2(t) - N_2(s)] = \\
&[N\left(\int_0^t \lambda_1(u)\ du\right) - N\left(\int_0^s \lambda_1(u)\ du\right)] - [N\left(\int_0^t \lambda_2(u)\ du\right) - N\left(\int_0^s \lambda_2(u)\ du\right)]
\end{aligned}$$

e questa è una differenza tra variabili aleatorie che seguono, rispettivamente, due distribuzioni di Poisson di parametri $\int_s^t \lambda_1(u)\ du$ e $\int_s^t \lambda_2(u)\ du$.
Allora, $D(t)$ seguirà una distribuzione di Skellam di parametri $\left(\int_0^t \lambda_1(u)\ du, \int_0^t \lambda_2(u)\ du\right)$ e risulterà che

$$P(D(t) = n) = e^{\left(\int_0^t \lambda_1(u)\, du + \int_0^t \lambda_2(u)\, du\right)} \left(\frac{\int_0^t \lambda_1(u)\ du}{\int_0^t \lambda_2(u)\ du}\right)^{\frac{n}{2}} I_n\left(2\sqrt{\int_0^t \lambda_1(u)\ du \int_0^t \lambda_2(u)\ du}\right),$$

dove I_α è la funzione di Bassel, di primo tipo, modificata.

(3) La probabilità che il processo $D(t)$ resti costante, $\forall t \in \left(\frac{2}{3}, \frac{4}{3}\right]$, può essere calcolata nel modo seguente:

$$
\begin{aligned}
&P\left(D(t) = k \mid N_1(2) = N_2(2) = 1\right) \quad \forall t \in \left(\frac{2}{3}, \frac{4}{3}\right) = \\
&P\left(N_1\left(\frac{4}{3}\right) = 0 \mid N_1(2) = 1\right) \cdot P\left(N_2\left(\frac{4}{3}\right) = 0 \mid N_2(2) = 1\right) + \\
&P\left(N_1\left(\frac{2}{3}\right) = 1 \mid N_1(2) = 1\right) \cdot P\left(N_2\left(\frac{2}{3}\right) = 1 \mid N_2(2) = 1\right) + \\
&P\left(N_1\left(\frac{4}{3}\right) = 0 \mid N_1(2) = 1\right) \cdot P\left(N_2\left(\frac{2}{3}\right) = 1 \mid N_2(2) = 1\right) + \\
&P\left(N_1\left(\frac{2}{3}\right) = 1 \mid N_1(2) = 1\right) \cdot P\left(N_2\left(\frac{4}{3}\right) = 0 \mid N_2(2) = 1\right) + \\
&P\left(N_1(t) = N_2(t) = 1 \mid N_1(2) = N_2(2) = 1\right), \quad \forall t \in \left(\frac{2}{3}, \frac{4}{3}\right].
\end{aligned}
$$

Tuttavia, l'ultimo addendo è pari a 0, in quanto equivale alla probabilità che, in una gara esponenziale, due variabili arrivino contemporaneamente al traguardo, in un intervallo di tempo reale.
Si avrà:

$$
\begin{aligned}
&P\left(D(t) = k \mid N_1(2) = N_2(2) = 1\right) \quad \forall t \in \left(\frac{2}{3}, \frac{4}{3}\right) = \\
&\binom{1}{0}\left(\frac{\frac{4}{3}}{2}\right)^0\left(1 - \frac{\frac{4}{3}}{2}\right) \cdot \binom{1}{0}\left(\frac{\frac{4}{3}}{2}\right)^0\left(1 - \frac{\frac{4}{3}}{2}\right) + \\
&\binom{1}{1}\left(\frac{\frac{2}{3}}{2}\right)\left(1 - \frac{\frac{2}{3}}{2}\right)^0 \cdot \binom{1}{1}\left(\frac{\frac{2}{3}}{2}\right)\left(1 - \frac{\frac{2}{3}}{2}\right)^0 + \\
&\binom{1}{0}\left(\frac{\frac{4}{3}}{2}\right)^0\left(1 - \frac{\frac{4}{3}}{2}\right) \cdot \binom{1}{1}\left(\frac{\frac{2}{3}}{2}\right)\left(1 - \frac{\frac{2}{3}}{2}\right)^0 + \\
&\binom{1}{1}\left(\frac{\frac{2}{3}}{2}\right)\left(1 - \frac{\frac{2}{3}}{2}\right)^0 \cdot \binom{1}{0}\left(\frac{\frac{4}{3}}{2}\right)^0\left(1 - \frac{\frac{4}{3}}{2}\right) = \\
&\frac{1}{9} + \frac{1}{9} + \frac{1}{9} + \frac{1}{9} = \frac{4}{9} \sim 0.44.
\end{aligned}
$$