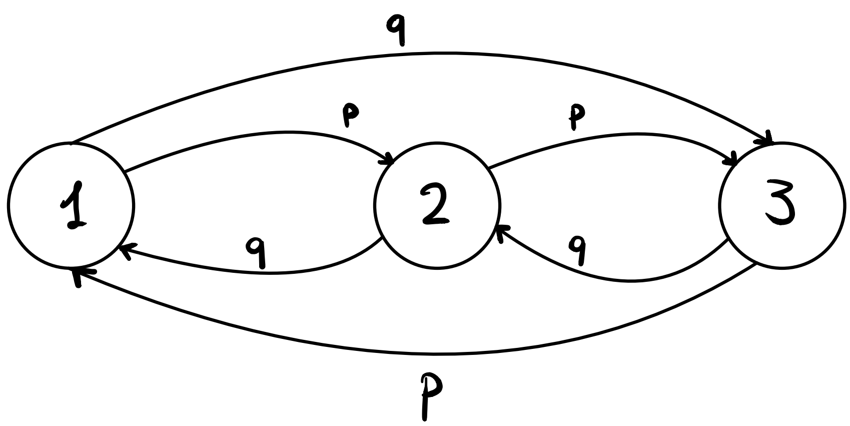
4. Esercizio

Si consideri una catena di Markov chain sugli interi $\{1,2,3\}$ avente probabilità di transizione

$$p_{12} = p_{23} = p_{31} = p, \qquad p_{13} = p_{32} = p_{21} = q = 1 - p,$$

con $0 < p < 1$. Si determini se esiste una distribuzione stazionaria che gode della proprietà del bilancio dettagliato



$$\begin{cases} \pi(2)\cdot p + \pi(3)\cdot q = \pi(1) \\ \pi(1)\cdot q + \pi(3)\cdot p = \pi(2) \\ \pi(1)p \cdot \pi(2)q = \pi(3) \\ \pi(1) + \pi(2) + \pi(3) = 1 \end{cases}$$

$$\begin{array}{c|c|c} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 \end{matrix} & \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & p & q \\ q & 0 & p \\ p & q & 0 \end{bmatrix} & \begin{matrix} =1 \\ =1 \\ =1 \end{matrix} \end{array}$$

$$\text{B.D. } \pi(x)p(x,y) = \pi(y)p(y,x) \Rightarrow \pi(x)\sum_{y \in S} p(x,y) = \pi(x)$$

Quindi affinché valga BD deve essere $\forall i,j$

$$\pi(i)p(i,j) = \pi(j)p(j,i)$$

$$\begin{cases} \frac{1}{3}\cdot p(1,2) = \frac{1}{3} p(2,1) \Rightarrow & p(1,2) = p(2,1) \Rightarrow \boxed{p=q} \\ \frac{1}{3} p(2,3) = \frac{1}{3} p(3,2) \Rightarrow & p=q \\ \frac{1}{3} p(1,3) = \frac{1}{3} p(3,1) \Rightarrow & p=q \end{cases}$$

$$\begin{cases} \pi(1)\, P_{12} = \pi(2)\, P_{21} \\ \pi(2)\, P_{23} = \pi(3)\, P_{32} \\ \pi(3)\, P_{31} = \pi(3)\, P_{13} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \pi(1)\, p = \pi(2)\, q \\ \pi(2)\, p = \pi(3)\, q \\ \pi(3)\, p = \pi(1)\, q \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \pi(1) = q/p\ \pi(2) \\ \pi(2) = q/p\ \pi(3) \\ \pi(3) = q/p\ \pi(1) \end{cases} \Rightarrow \pi(3) = \frac{q}{p}\pi(2) = \frac{q}{p}\cdot\frac{q}{p}\pi(3)$$

$$\Rightarrow \pi(3) = \frac{q^2}{p^2}\pi(3) \iff \frac{q^2}{p^2} = 1$$

$$q^2 = p^2 \Rightarrow q = p \qquad ?$$

Si "entra" e si "entra" da tutti con prob. rispettivam. p e q pertanto non c'è ragione di pensare che abbiano π diverse perché tutti i nodi sono equivalenti

$$\pi(i) = \frac{1}{3} \qquad \forall i \in \{1, 2, 3\} \qquad ??$$