5. Esercizio

Siano consideri il processo dove $N_1(t)$ e $N_2(t)$ sono due processi di Posson inomogenei indipendenti di intensità $\lambda_1(t)$ e $\lambda_2(t)$.

(1) la somma di $N_1(t)$ e $N_2(t)$ e' ancora un processo di Poisson non omogeneo?

(2) il processo $D(t) = N_1(t) - N_2(t)$ e' ancora un processo di Poisson non omogeneo? Come si può calcolare la distribuzione di $D(t)$?

(3) Sapendo che $N_1(2) = 1$ e $N_2(2) = 1$, calcolare la probabilità che il processo $D(t)$ resti costante per ogni $t \in (2/3, 4/3]$.

$N_1(t)$ e $N_2(t)$

$\lambda_1(t) \quad \lambda_2(t)$

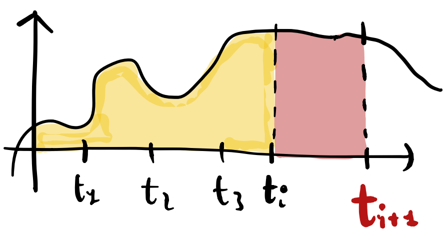
$N_1(t) + N_2(t)$?

Vediamo se sono verificate le definizioni.

1) $N_1(0) = 0$ e $N_2(0) = 0$ per def. Quindi $N_1(0) + N_2(0) = 0$; ✓

2) Incrementi independenti: $t_1 < t_2 < \ldots < t_n$; e si ha che tutti i t sono definiti da $t_i = \int_0^{t_i} \lambda(u)\,du$;

quindi $\tilde{t}_i^{(1)} = \int_0^{t_i} \lambda_1(u)\,du$ e $\tilde{t}_i^{(2)} = \int_0^{t_i} \lambda_2(u)\,du$



$$N_1(t_{1,i+1}) - N_1(t_{1,i}) = \underbrace{N^*(\tilde{t}_{i+1}) - N^*(\tilde{t}_i)}_{\text{dipende solo da } t_{i+1}-t_i}$$

e lo stesso per $N_2(t)$

quindi $N_1(t) + N_2(t)$?

diciamo che

$$N_1(t_{i+1}) + N_2(t_{i+1}) - N_1(t_i) - N_2(t_i) =$$
$$\underbrace{N_1^*(\tilde{t}_{i+1}^{(1)}) - N_1^*(\tilde{t}_i^{(1)})}_{\text{dipende solo da } t_{i+1}-t_i} + \underbrace{N_2^*(\tilde{t}_{i+1}^{(2)}) - N_2^*(\tilde{t}_i^{(2)})}_{\text{dipende solo da } t_{i+1}-t_i} = \quad ✓$$

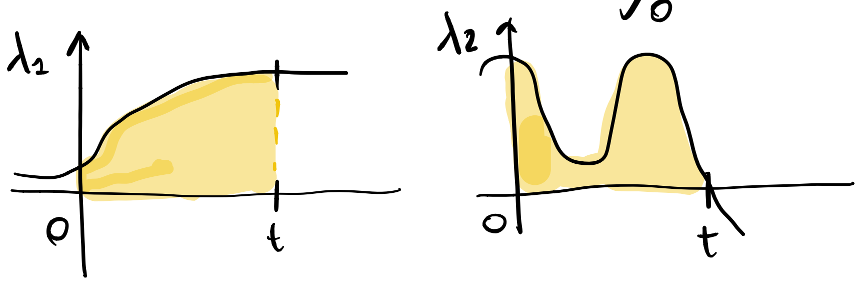
3) sia $s<t$. si deve avere che $M(t)-M(s)$ é proc. di Poisson con media $m(t)-m(s)=$

$$= \int_s^t \lambda(u)\,du.$$

Sia $N^*(t) = N_1(t) + N_2(t)$

calcolo $\mathbb{E}(N_1(t)+N_2(t))$ perché indipend.

$$= \mathbb{E}(N_1(t)) + \mathbb{E}(N_2(t)) = \int_0^t \lambda_1(u)\,du + \int_0^t \lambda_2(u)\,du =$$



$$= \int_0^t \lambda_1(u) + \lambda_2(u)\,du$$

linearità dell' integrale.

quindi il proc. $N^* = N_1(t) + N_2$ ha rate pari a $\lambda^* = \lambda_1(u) + \lambda_2(u)$ e $N^* \sim \text{Pois}(\lambda^* t)$

Ora considero $s<t$ e verifico $N^*(t) - N^*(s)$

$$= M\left(\int_0^t \lambda_1(u) + \lambda_2(u)\,du\right) - M\left(\int_0^s \lambda_1(u) + \lambda_2(u)\,du\right)$$

$$= M \int_s^t \lambda_1(u) + \lambda_2(u)\,du \sim \text{Pois}(\lambda^* t).$$

(superposition)

(2) il processo $D(t) = N_1(t) - N_2(t)$ e' ancora un processo di Poisson non omogeneo? Come si può calcolare la distribuzione di $D(t)$?

$$D(t) = N_1(t) - N_2(t)$$

$$\mathbb{E}(D(t)) = \mathbb{E}(N_1(t) - N_2(t)) = \int_0^t \lambda_1(u)\,du - \int_0^t \lambda_2(u)\,du$$

$$= \int_0^t \lambda_1(u) - \lambda_2(u)\,du \Rightarrow D(t) \sim \text{Poiss}(\lambda_1(t) - \lambda_2(t))$$

1) $D(0) = 0$ OK perché $N_1(0) = 0$ e $N_2(0) = 0$

2) Incrementi independenti: Siano $t_1 < t_2 < \dots < t_n$;

sia $\tilde{t}_i^{(1)} = \int_0^{t_i} \lambda_1(u)\,du$ e $\tilde{t}_i^{(2)} = \int_0^{t_i} \lambda_2(u)\,du$

Vogliamo vedere che $D(t) = N_1(t) - N_2(t)$ ha increm. indipendenti;

$$D(t_{i+1}) - D(t_i) = (N_1(t_{i+1}) - N_2(t_{i+1})) - (N_1(t_i) - N_2(t_i))$$

$$= N_1(t_{i+1}) - N_1(t_i) - N_2(t_{i+1}) + N_2(t_i) =$$

$$= \underbrace{N_1^*(\tilde{t}_{i+1}^{(1)}) - N_1^*(\tilde{t}_i^{(1)})} - (N_2^*(\tilde{t}_{i+1}^{(2)}) - N_2(\tilde{t}_i^{(2)}))$$

3) $s<t$ $D(t)-D(s) = N\left(\int_0^t \lambda_1(u)-\lambda_2(u)\,du\right) -$

$$- N\left(\int_0^s \lambda_1(u)-\lambda_2(u)\,du\right) =$$

$$= N\int_s^t \cancel{\lambda_1(u)}-\cancel{\lambda_2(u)}-\cancel{\lambda_1(u)}+\cancel{\lambda_2(u)}\,du = 0 ?$$

Poisson di rate 0 ?

che distribuzione ha $D(t)$??

Se io ho che al tempo t_1 $N_1(t_1)=K$ e $N_2(t_2)=h$

$D(t_1) = N_1(t_1) - N_2(t_2)$ non può essere un processo di Poisson perché può avere val. negativi che è impossibile per un processo di Poisson che per definizione ha valori in $\underline{\underline{N}}$

(3) Sapendo che $N_1(2) = 1$ e $N_2(2) = 1$, calcolare la probabilità che il processo $D(t)$ resti costante per ogni $t \in (2/3, 4/3]$.

$N_1(2) = 1 \Rightarrow$ per $t=2$ ho $n_1 = 1$

$N_2(2) = 1 \Rightarrow$ per $t=2$ ho $n_2 = 1$