

Homework 2

Giulio Nenna (s245715@studenti.polito.it)

17 febbraio 2021

Realizzato in collaborazione con Giulio Nenna (s245717), Andrea Sanna (s222975) e Ornella Elena Grassi (s290310)

Esercizio 1.

(1) Dato che sono apparsi 8 fiori tra le 9 e le 10 a.m.,

- la probabilità che 3 di questi siano apparsi tra le 9 e le 9:20 a.m. è

$$P\left(N\left(\frac{1}{3}\right) = 3 \mid N(1) = 8\right) = \binom{8}{3} \left(\frac{1}{3}\right)^3 \left(1 - \frac{1}{3}\right)^5 \sim 0.273;$$

- la probabilità che ne appaiano 13 tra le 9 a.m. e le 11 a.m. è

$$P(N(2) = 13 \mid N(1) = 8) = P(N(2) - N(1) = 5) = e^{-3} \frac{3^5}{5!} \sim 0.101.$$

(2) Si vuole calcolare la probabilità che tra le 9 a.m. e le 11 a.m. compaiano esattamente 3 fiori di tipo A, 2 di tipo B e nessuno di tipo C. Siano $N_i(t)$ con $i \in \{A, B, C\}$ i processi di Poisson ottenuti dal *thinning* del processo principale $N(t)$. Essi rappresentano quindi il numero di fiori di tipo i sbocciati entro l'istante t e sono indipendenti con rate λp_i . Si ottiene:

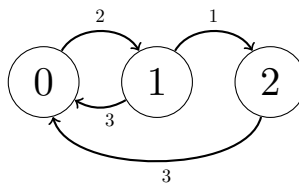
$$\begin{aligned} P(N_A(2) = 3, N_B(2) = 2, N_C(2) = 0) &= \\ P(N_A(2) = 3)P(N_B(2) = 2)P(N_C(2) = 0) &= \\ e^{-3\frac{1}{3}2} \frac{\left(3\frac{1}{3}2\right)^3}{3!} \cdot e^{-3\frac{1}{6}2} \frac{\left(3\frac{1}{6}2\right)^2}{2!} \cdot e^{-3\frac{1}{2}2} \frac{\left(3\frac{1}{2}2\right)^0}{0!} &= \\ e^{-2} \frac{8}{3!} \cdot e^{-1} \frac{1}{2!} \cdot e^{-3} &\sim 0.0016 \end{aligned}$$

- (3) Indicando con τ_1 il tempo in cui compare il primo fiore di tipo A, risulta che se $N_A(t) \sim \text{Poisson}(\lambda p_A = 1)$, allora $\tau_1 \sim \exp(1)$. Pertanto, condizionatamente al fatto che il primo fiore che compare è di tipo A, la probabilità che il tempo τ in cui ciò avviene sia $\leq \frac{1}{2}$ è

$$P\left(\tau_1 \leq \frac{1}{2}\right) = \int_0^{\frac{1}{2}} 1 \cdot e^{-1 \cdot x} dx = 1 - e^{-\frac{1}{2}} \sim 0.393.$$

Esercizio 2.

- (a) Il processo di costruzione e distruzione del castello di sabbia può essere modellato con una catena di Markov a tempo continuo siffatta:



$S = \{0, 1, 2\}$ è l'insieme degli stati ai quali sono associati i seguenti transition rates:

$$Q = \begin{bmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 3 & -4 & 1 \\ 3 & 0 & -3 \end{bmatrix}.$$

Dove $q(i, j)$ per $i \neq j$ rappresenta il *rate* dell'esponenziale che partecipa alla gara esponenziale se la catena si trova sullo stato i . Se a vincere è l'esponenziale $\tau_{ij} \sim \exp(q(i, j))$ allora la catena salta allo stato j . In pratica dallo stato 0 (costruzione del primo piano) si passa necessariamente allo stato 1 dopo un tempo esponenziale ($\exp(2)$). Una volta entrati nello stato 1 (costruzione del secondo piano) parte una gara esponenziale tra l'onda ($\exp(3)$) e la fine della costruzione del secondo piano ($\exp(2)$): se vince la prima si ritorna allo stato 0 mentre se vince la seconda si passa allo stato 2. Infine, arrivati allo stato 2 l'unica possibilità è quella di aspettare un'onda per tornare allo stato 0, che arriverà secondo un tempo esponenziale ($\exp(3)$).

Da Q si deducono quindi:

$$\begin{cases} \lambda(0) = 2 \\ \lambda(1) = 4 \\ \lambda(2) = 3 \end{cases} \quad R = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{3}{4} & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- (b) La probabilità che, partendo dallo stato 1, dopo 2 ore, ci si ritrovi nello stato 0 è

$$P_2(1, 0),$$

dove P_2 è la matrice della probabilità di transizione al tempo $t = 2$, data da

$$P_2 = e^{Q_2} = \sum_{k=0}^{\infty} 2^k \frac{Q^k}{k!},$$

che è una soluzione particolare delle equazioni di Kolmogorov ($P'(t) = P_t Q$ e $P'(t) = Q P_t$), nel caso $t = 2$.

- (c) La probabilità che i bambini riescano a finire la costruzione del secondo livello, prima che un'onda li costringa a ricominciare ed essendo già alle prese con la costruzione del primo livello, è legata al fatto che la variabile di Poisson relativa al processo di comparsa delle onde arrivi due volte seconda in due gare esponenziali, rispettivamente prima con l'esponenziale di tasso 2 e, poi, con l'esponenziale di tasso 1 all'ora. Allora, si avrà:

$$\begin{aligned} 1^a \text{ gara : } P(\exp(2) \text{ arrivi primo}) &= \frac{\lambda(\exp(2))}{\sum_i \lambda_i} = \frac{2}{2+3} = \frac{2}{5}; \\ 2^a \text{ gara : } P(\exp(1) \text{ arrivi primo}) &= \frac{\lambda(\exp(1))}{\sum_i \lambda_i} = \frac{1}{1+3} = \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

Dunque, la probabilità cercata sarà pari a:

$$\frac{2}{5} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{10}$$

Esercizio 3.

Si consideri una CTMC con spazio degli stati $\{0, 1, 2, \dots\}$ e rates di transizione (per $i \neq j$)

$$q(i, j) = \begin{cases} \frac{3+\sin i}{1+i^2}, & \text{se } i^2 < j < 2i^2 + 1 \\ 0, & \text{altrimenti} \end{cases}.$$

- (a) Trovare $P(X_{1.5} = 4 \mid X_0 = 8)$ significa calcolare $P_{1.5}(8, 4)$. Tuttavia, $\forall i, j, i \neq j$, dallo stato i si può arrivare allo stato j solamente se

$$i^2 < j < 2i^2 + 1$$

ossia la catena non può fare altro che avanzare nello spazio degli stati. Pertanto non è possibile che se $X_0 = 8$ la catena effettui un passo verso uno stato $j < 8$, in particolare:

$$P_{1.5}(8, 4) = 0.$$

- (b) Calcolare $P(X_{1.5} \neq 0 \mid X_0 = 0)$ significa calcolare $P_{1.5}(0, x > 0)$, ovvero la probabilità di effettuare un salto da 0 entro un tempo pari a 1.5.

Sia τ_0 l' "holding time" nello stato 0. Sappiamo che

$$\tau_0 \sim \exp(\lambda(0)).$$

Pertanto, si ricava che

$$P_0(\tau_0 < 1.5) = \int_0^{1.5} e^{\lambda(0)x} dx = 1 - e^{-\lambda(0)1.5}$$

dove, sapendo che

$$q(0, 1) = \frac{3 + \sin 0}{1} = 3 = \lambda(0) \cdot r(0, 1)$$

e che $r(0, 1) = 1$ (poiché 1 è l'unico stato raggiungibile da 0), risulta $\lambda(0) = 3$.

In conclusione,

$$P(\tau_0 < 1.5) = 1 - e^{-4.5} \sim 0.99.$$

- (c) Per capire se la catena è esplosiva, possiamo studiare i rates $\lambda(i)$ associati ad ogni stato y_i della catena “embedded”. Risulta:

$$\lambda(i) = \sum_{j=1}^{\infty} q(i, j) = \sum_{j=i^2+1}^{2i^2+1} \frac{3 + \sin(i)}{1 + i^2} =$$

$$(2i^2 + 1 - i^2 - 1 + 1) \frac{3 + \sin(i)}{1 + i^2} = (3 + \sin(i)) \left(\frac{i^2 + 1}{i^2 + 1} \right) < 4$$

Poichè i rate dei tempi di uscita da ciascuno stato sono maggiorati da una costante $K = 4$ allora la catena **non** è esplosiva.

Esercizio 4.

Si consideri una CTMC con spazio degli stati $\{0, 1, 2, \dots\}$. Siano y_i , $i \in S$, i relativi stati della catena “embedded”.

(a) Se i tassi di transizione sono

$$q(i, j) = \begin{cases} 2^i & \text{if } j = i + 1 \\ 0 & \text{if } j \neq i \text{ e } j \neq i + 1 \end{cases},$$

allora la catena “embedded” risulta essere una catena di sole “nascite”, dove $r(i, j) = 1$, $\forall i \neq j$.

Ne consegue che $\lambda(i) = 2^i$, $\forall i$ e, dunque,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda_{y_n}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

è convergente (essendo una serie geometrica di ragione $\frac{1}{2}$).

Pertanto, la catena è esplosiva.

(b) Se i tassi di transizione sono

$$q(i, j) = \begin{cases} i + 1 & \text{if } i < j \leq i + 5 \\ 0.5 & \text{if } j = i - 1 \text{ e } i \geq 1 \\ 0 & \text{in tutti gli altri casi} \end{cases},$$

allora ad ogni salto catena può effettuare un solo passo indietro oppure un numero di passi in avanti compreso tra 1 e 5. Vale la seguente:

$$\lambda(0) = 5$$

$$\lambda(i) = \sum_{j \in S} q(i, j) = 0.5 + \sum_{i+1}^{i+5} (i + 1) = 5i + 5.5 \text{ per } i \geq 1$$

Ora assumendo che la catena embedded parta da un valore arbitrario $Y_0 = k$ con $k \in \mathbb{N}$, allora

$$Y_n \leq k + 5n$$

ossia Y_n non può assumere un valore più grande di $k + 5n$ che si realizzerebbe solamente nel caso in cui la catena compie n salti di

lunghezza 5 in avanti.

Poiché λ è una funzione monotona vale quindi:

$$\lambda(Y_n) \leq \lambda(k + 5n)$$

da cui:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda(Y_n)} \geq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda(k + 5n)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{5k + 25n + 5.5} = \infty$$

pertanto la catena **non** esplode.

(c) Se i tassi di transizione sono

$$q(i, j) = \begin{cases} 2^i & \text{if } j = i + 1 \\ 2^{i+1} & \text{if } j = i - 1 \text{ e } i \geq 2 \\ 0 & \text{in tutti gli altri casi} \end{cases},$$

Allora, per $i \geq 2$:

$$\lambda(i) = 2^{i+1} + 2^i = 3 \cdot 2^i.$$

In particolare per $i \geq 2$:

$$r(i, i+1) = \frac{q(i, i+1)}{\lambda(i)} = \frac{1}{3}$$

$$r(i, i-1) = \frac{q(i, i-1)}{\lambda(i)} = \frac{2}{3}$$

La catena embedded è quindi una *birth-death chain* discreta riflessa nello stato 0. Questo tipo di catena discreta ammette una distribuzione stazionaria (e quindi è ricorrente) se e solo se:

$$M = \sum_{x=0}^{\infty} \prod_{i=0}^{x-1} \frac{p_i}{q_{i+1}} < \infty$$

dove nel nostro caso:

$$\begin{aligned} p_i &= \frac{1}{3} & q_i &= \frac{2}{3} & \forall i \geq 2 \\ p_0 &= p_1 = 1 & q_0 &= q_1 = 0 \end{aligned}$$

infatti se la catena si trova negli stati 0 o 1 non può fare altro che avanzare di un passo.

Quindi la quantità M in esame sarà pari a:

$$M = 2 + \sum_{x=3}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^x < \infty.$$

Questo risultato dimostra che la catena embedded $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ relativa alla CTMC ammette una distribuzione stazionaria ed è quindi una catena **ricorrente**. In particolare la CTMC in esame **non** può essere esplosiva dal momento che se una generica CTMC è esplosiva, allora la sua catena embedded deve necessariamente essere transiente.

Esercizio 5.

Sia $\Omega = \mathbb{N} \setminus \{0\}$ e $\mathcal{F} = P(\Omega)$.

Si consideri il seguente processo stocastico:

$$\begin{cases} X_0 = 0 \\ X_n = \begin{cases} -1 & \text{se } \omega \leq n \\ n & \text{se } \omega > n \end{cases} \end{cases}.$$

(1) Osserviamo che:

$$\begin{aligned} X_0(\omega) &\in \{0\}, \\ X_1(\omega) &\in \{-1, 1\}, \\ X_2(\omega) &\in \{-1, 2\}, \\ &\dots \text{ e cos\`i via.} \end{aligned}$$

Pertanto le controimmagini sono nella forma:

$$\begin{aligned} X_1^{-1}(1) &= \{\omega \in \mathbb{N} \setminus \{0\} | \omega > 1\} \\ X_1^{-1}(-1) &= \{\omega \in \mathbb{N} \setminus \{0\} | \omega \leq 1\} \\ X_2^{-1}(2) &= \{\omega \in \mathbb{N} \setminus \{0\} | \omega > 2\} \\ X_2^{-1}(-1) &= \{\omega \in \mathbb{N} \setminus \{0\} | \omega \leq 2\} \\ &\vdots \end{aligned}$$

Le σ -algebre che rendono misurabile il processo allo scorrere di t sono quindi (si considera $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$):

$$\begin{aligned} \sigma(X_1) &= \sigma(\{0, 1\}, \{k > 1\}) \\ \sigma(X_2) &= \sigma(\{0, 1\}, \{k > 1\}, \{0, 1, 2\}, \{k > 2\}) \\ &\vdots \end{aligned}$$

Se ne deduce, allora, che, per $n \geq 0$,

$$\mathcal{F}_n = \sigma\{X_0, \dots, X_n\} = \sigma(\{0, \dots, i\}, \{k > i\}, i = 1, \dots, n)$$

(2) Sia

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{k \in A} \frac{1}{k(k+1)}.$$

Mostriamo che \mathbb{P} è una probabilità su (Ω, \mathcal{F}) .

- $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$, poiché, in tal caso, $\mathbb{P}(\emptyset) = \sum_{k \in \emptyset} \frac{1}{k(k+1)}$ è una sommatoria vuota, dato che non vi sono elementi in \emptyset ;
- $\mathbb{P}(A) \geq 0 \quad \forall A \in \mathcal{F}$, poiché $\sum_{k \in A} \frac{1}{k(k+1)} > 0$ sempre, dato che $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$;
inoltre, se A_1, A_2, \dots è una successione di insiemi mutuamente disgiunti in \mathcal{F} , allora
- $\mathbb{P}\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right) = \sum_{j=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_j)$, poiché, in tal caso, è possibile scrivere

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right) = \sum_{k \in \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k \in A_1} \frac{1}{k(k+1)} + \sum_{k \in A_2} \frac{1}{k(k+1)} + \dots =$$

$$\mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(A_2) + \dots = \sum_{j=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_j);$$

- $\mathbb{P}(\Omega) = 1$, poiché

$$\mathbb{P}(\Omega) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right)$$

e, dunque,

$$\sum_{n=1}^k \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) = \left(1 - \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \dots + \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) =$$

$$1 - \frac{1}{k+1} \longrightarrow 1, \text{ per } k \rightarrow \infty.$$

Infatti, ad esempio se $n = 1$ si ha:

$$\mathbb{P}(X_1 = -1) = \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{2};$$

$$\mathbb{P}(X_1 = +1) = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2};$$

Per $n = 2$:

$$\mathbb{P}(X_1 = -1) = \sum_{k=1}^2 \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} = \frac{2}{3};$$

$$\mathbb{P}(X_1 = +1) = \sum_{k=3}^{\infty} \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3};$$

e così via.

Mostriamo che $(X_n)_{n \geq 0}$ è una martingala rispetto a \mathcal{F}_n .

- $(X_n)_{n \geq 0}$ è adattato a \mathcal{F}_n , poiché un processo stocastico è sempre adattato alla filtrazione naturale;
- $X_n \in L^1$, poiché

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[|X_n|] &= \mathbb{E}\left[\left| -1 \cdot \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} + n \cdot \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} \right| \right] = 1 - \frac{1}{n+1} + \\ &+ n \cdot \left(1 - \left(1 - \frac{1}{n+1} \right) \right) = 1 - \frac{1}{n+1} + \frac{n}{n+1} = \frac{2n}{n+1} < +\infty; \end{aligned}$$

- $\mathbb{E}[X_{n+1} | \mathcal{F}_n] = X_n$ poiché

$$\mathbb{E}[X_{n+1} | \mathcal{F}_n] = \mathbb{E}[X_{n+1} - X_n + X_n | \mathcal{F}_n] = \mathbb{E}[X_n | \mathcal{F}_n] + \mathbb{E}[X_{n+1} - X_n | \mathcal{F}_n]$$

e, poiché $(X_{n+1} - X_n)$ è indipendente da \mathbb{F}_n essendo X_n un processo ad incrementi indipendenti e pertanto un processo di Markov, vale

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X_{n+1} | \mathcal{F}_n] &= X_n + \mathbb{E}[X_{n+1} - X_n] = X_n + (-1) \cdot \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} + \\ &+ (n+1) \cdot \sum_{k=n+2}^{\infty} \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} - \left[(-1) \cdot \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} + n \cdot \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right] = \\ &X_n + (-1) \cdot \left(1 - \frac{1}{n+2} \right) + (n+1) \left[1 - \left(1 - \frac{1}{n+2} \right) \right] + \left(1 - \frac{1}{n+1} \right) + \\ &- n \left[1 - \left(1 - \frac{1}{n+1} \right) \right] = X_n + \frac{n+2-(n+2)}{n+2} = X_n. \end{aligned}$$

- (3) La martingala X_n è limitata in L^1 , perché si ha che

$$\sup_n \mathbb{E}[|X_n(\omega)|] = \sup_n \frac{2n}{n+1} < \infty$$

perciò applicando il teorema di convergenza di Doob si ottiene che

$$X_n \xrightarrow{q.c.} X_\infty \in L^1.$$

Esercizio 6.

Sia $\Omega = \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $\mathcal{F} = P(\Omega)$ e $\mathbb{P}(A) = \sum_{k \in A} 2^{-k}$.

Si consideri il seguente processo stocastico:

$$\begin{cases} M_n = \omega & \text{se } \omega \leq n \\ M_n = n + 2 & \text{se } \omega > n \end{cases}.$$

(1) Mostriamo che \mathbb{P} è una probabilità su (Ω, \mathcal{F}) .

- $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$, poiché, in tal caso, $\mathbb{P}(\emptyset) = \sum_{k \in \emptyset} \frac{1}{2^k}$ è una sommatoria vuota, dato che non vi sono elementi in \emptyset ;
- $\mathbb{P}(A) \geq 0 \quad \forall A \in \mathcal{F}$, poiché $\frac{1}{2^k} > 0$ sempre;
inoltre, se A_1, A_2, \dots è una successione di insiemi mutuamente disgiunti in \mathcal{F} , allora
- $\mathbb{P}\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right) = \sum_{j=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_j)$, poiché, in tal caso, è possibile scrivere

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right) &= \sum_{k \in \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j} \frac{1}{2^k} = \sum_{k \in A_1} \frac{1}{2^k} + \sum_{k \in A_2} \frac{1}{2^k} + \dots = \\ &= \mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(A_2) + \dots = \sum_{j=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_j); \end{aligned}$$

- $\mathbb{P}(\Omega) = 1$ poiché, osservando che

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n - 1$$

in cui riconosciamo la serie geometrica di ragione $q = \frac{1}{2}$ e pertanto verifichiamo che

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} - 1 = 2 - 1 = 1.$$

Mostriamo che $(M_n)_{n \geq 0}$ è una martingala rispetto alla filtrazione naturale

$$\mathcal{F}_n = \sigma\{M_0, M_1, \dots, M_n\}.$$

- $(M_n)_{n \geq 0}$ è adattato a \mathcal{F}_n , poiché un processo stocastico è sempre adattato alla filtrazione naturale;

- $M_n \in L^1$, poiché

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[|M_n|] &= \sum_{k=1}^n \frac{k}{2^k} + (n+2) \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{2^k} = \\ &= \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{2}\right)^2} \cdot \left[n \left(\frac{1}{2}\right)^{n+2} - (n+1) \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} + \frac{1}{2} \right] + (n+2) \left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} - \sum_{k=0}^n \frac{1}{2^k} \right] = \\ &= 4n \left(\frac{1}{2}\right)^{n+2} - 4(n+1) \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} + 2 + 2(n+2) \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} = \\ &= 2 - 2n \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} + 4n \left(\frac{1}{2}\right)^{n+2} = 2 < \infty;\end{aligned}$$

- Con un ragionamento simile a quello dell'esercizio precedente possiamo far vedere facilmente che

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[M_{n+1}|\mathcal{F}_n] &= \mathbb{E}[M_{n+1} - M_n + M_n|\mathcal{F}_n] = M_n + \mathbb{E}[M_{n+1} - M_n] = \\ &= M_n + \sum_{k=0}^{n+1} \frac{k}{2^k} + (n+3) \sum_{k=n+2}^{\infty} \frac{1}{2^k} - \sum_{k=0}^n \frac{k}{2^k} - (n+2) \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{2^k} = \\ &= M_n + \frac{n+1}{2^{n+1}} + (n+2) \sum_{k=n+2}^{\infty} \frac{1}{2^k} - \left[(n+2) \sum_{k=n+2}^{\infty} \frac{1}{2^k} + \frac{n+2}{2^{n+1}} \right] + 1 \cdot \sum_{k=n+2}^{\infty} \frac{1}{2^k} = \\ &= M_n + \frac{n+1}{2^{n+1}} - \frac{n+2}{2^{n+1}} + \sum_{k=n+2}^{\infty} \frac{1}{2^k} = \frac{-1}{2^{n+1}} + 2 - \frac{2^{n+2}-1}{2^{n+1}} - \frac{1}{2^{n+1}} = \\ &= M_n - \frac{1}{2^{n+1}} + \frac{1}{2^{n+1}} = M_n.\end{aligned}$$

(2) Per dimostrare che M_n è una martingala ereditaria utilizziamo il teorema di caratterizzazione delle martingale in L^1 .

Esso ci garantisce che se una martingala M_n è uniformemente integrabile allora questa converge quasi certamente ed in L^1 , e vale $M_n = \mathbb{E}[X|\mathcal{F}_n]$ per qualche $X \in L^1$, cioè M_n è una martingala ereditaria.

Una famiglia di variabili aleatorie X_i in uno spazio di probabilità $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_n, \mathcal{P})$ è uniformemente integrabile se vale il limite

$$\lim_{M \rightarrow \infty} \left(\sup_i \mathbb{E}(|X_i|; |X_i| > M) \right) = 0.$$

Si può scegliere un M grande abbastanza tale che

$$\sup_i \mathbb{E}|X_i| \leq M < \infty$$

ma, per quanto osservato in precedenza, $\mathbb{E}|X_n|$ non dipende da n ma è un valore finito. Quindi si può concludere che M_n è uniformemente integrabile e che pertanto è una martingala ereditaria per cui vale

$$M_n = \mathbb{E}[X_\tau | \mathcal{F}_n]$$

dove per X_τ si è scelta la martingala M_n arrestata al tempo d'arresto finito τ .

Dal teorema sovracitato, ma anche dal teorema di Doob e dal teorema di convergenza dominata si può inoltre affermare che la martingala M_n converge non solo quasi certamente e in L^p , ma anche in L^1 al valore M_∞ , infatti si scrive

$$M_n \xrightarrow[L^1]{q.c.} M_\infty \in L^1,$$

Infine, essendo M_n ereditaria si può ancora affermare che vale

$$\lim_{n \rightarrow \infty} M_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}[X | \mathcal{F}_n] = \mathbb{E}[X | \mathcal{F}_\infty]$$

cioè si può sempre supporla originata dal proprio limite e poiché X_τ è \mathcal{F}_∞ -misurabile allora si conclude che

$$\mathbb{E}[M_\infty | \mathcal{F}_n] = \mathbb{E}[X | \mathcal{F}_n].$$

Esercizio 7.

- (1) Sia $M = (M_n)_{n \geq 0}$ una martingala ad incrementi equilimitati (cioè tale che $|M_n - M_{n-1}| \leq K$ con K costante) e sia $M^\tau = (M_n^\tau)_{n \geq 0}$ la corrispondente martingala arrestata al tempo τ , integrabile. Proviamo che M^τ è uniformemente integrabile.

Sia

$$M_n^\tau = M_{\tau \wedge 0} + (M_{\tau \wedge 1} - M_{\tau \wedge 0}) + (M_{\tau \wedge 2} - M_{\tau \wedge 1}) + \dots$$

Sfruttando l' "identità di arresto"

$$M_n^\tau - M_{n-1}^\tau = (M_n - M_{n-1}) \mathbb{1}_{\tau \leq n},$$

otteniamo

$$\begin{aligned} M_n^\tau &= M_0 + (M_1 - M_0) + (M_2 - M_1) + \dots \\ \Leftrightarrow |M_n^\tau| &\leq |M_0| + \sum_{i=1}^n |M_i - M_{i-1}| \mathbb{1}_{\{\tau \geq i\}}. \end{aligned}$$

Applicando la maggiorazione

$$|M_n^\tau| \leq |M_0| + \sum_{i=1}^n |M_i - M_{i-1}| \mathbb{1}_{\{\tau \geq i\}} \leq |M_0| + \sum_{i=1}^{\infty} |M_i - M_{i-1}| \mathbb{1}_{\{\tau \geq i\}},$$

ci basterà dimostrare che

$$\mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{\infty} |M_i - M_{i-1}| \mathbb{1}_{\{\tau \geq i\}}\right] < +\infty,$$

per poter dire che $|M_n^\tau| \leq Z \in L^1$.

In effetti, ciò è assicurato dal "teorema di convergenza dominata" di Beppo Levi", per il quale risulta che

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{\infty} |M_i - M_{i-1}| \mathbb{1}_{\{\tau \geq i\}}\right] &\leq \mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{\infty} K \mathbb{1}_{\{\tau \geq i\}}\right] = \\ \mathbb{E}\left[\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n K \mathbb{1}_{\{\tau \geq i\}}\right] &= \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^n K \mathbb{1}_{\{\tau \geq i\}}\right] = \\ \lim_{n \rightarrow \infty} K \sum_{i=1}^n \mathbb{E}[\mathbb{1}_{\{\tau \geq i\}}] &= \lim_{n \rightarrow \infty} K \sum_{i=1}^n P(\tau \geq i) = K \sum_{i=1}^{\infty} P(\tau \geq i) = K \mathbb{E}(\tau) < \infty \end{aligned}$$

(poiché τ è un tempo di arresto integrabile).

Dunque,

$$|M_n^\tau| \leq Z \in L^1 \Rightarrow M_n^\tau \xrightarrow{L^1} M_\tau$$

ed essendo, quindi, M_n^τ limitata in L^1 , per il “teorema di convergenza” di Doob, vale anche

$$M_n^\tau \xrightarrow{q.c.} M_\tau \in L^1.$$

Allora, se

$$M_n^\tau \xrightarrow{L^1} M_\tau \in L^1,$$

per il “teorema di caratterizzazione di martingale in L^1 ”, M^τ è uniformemente integrabile.

(2) Sia $M = (M_n)_{n \geq 0}$ una martingala tale che:

- i) $M_0 = 0$;
- ii) $0 < a \leq |M_n - M_{n-1}| \leq K < +\infty$.

(a) La martingala in questione non converge q.c. al crescere di n . Questo perché essa, per $n \rightarrow \infty$, può espandersi simmetricamente verso valori infinitamente positivi e negativi. Se, per assurdo, M_n convergesse q.c. a M_∞ , si avrebbe necessariamente che $M_\infty = 0$, da cui

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |M_n - M_{n-1}| = 0 \text{ ,}$$

dal momento che $|M_n - M_{n-1}| \geq a > 0, \forall n$.

(b) Sia $\lambda > 0$ e sia $\tau = \inf n : M_n > \lambda$.

Dal momento che $0 < \lambda < \infty$, possiamo sicuramente affermare che τ è un tempo di arresto finito. Infatti, se la martingala $(M_n)_{n \geq 0}$, per $n \rightarrow +\infty$, si estende indefinitamente a $+\infty$ e $-\infty$, esisterà sicuramente un tempo di ingresso finito τ , in cui essa assumerà il valore finito $\lambda + k$, per un opportuno valore $k \in \mathbb{R}$. Ne consegue che $(M_n^\tau)_{n \geq 0}$ è certamente una martingala.

Proviamo che $\lambda + K - M_n^\tau$ è una martingala.

- $(\lambda + K - M_n^\tau) \sim \mathcal{F}_n$, con \mathcal{F}_n filtrazione naturale del processo $(\lambda + K - M_n^\tau)_{n \geq 0}$;
- $(\lambda + K - M_n^\tau) \in L^1$, poiché $(\lambda + K) \in L^1$ e $M_n^\tau \in L^1$;
- $\mathbb{E}[\lambda + K - M_{n+1}^\tau | \mathcal{F}_n] = \lambda + K - M_n^\tau$, poiché

$$\mathbb{E}[\lambda + K - M_{n+1}^\tau | \mathcal{F}_n] = \mathbb{E}[\lambda + K | \mathcal{F}_n] - \mathbb{E}[M_{n+1}^\tau | \mathcal{F}_n] = \lambda + K - M_n^\tau.$$

Adesso, per provare che $\lambda + K - M_n^\tau$ è una martingala convergente, basta provare che M_n^τ è convergente.

Usando l' "identità di arresto" e le proprietà del valore assoluto, si ottiene

$$|M_n^\tau| \leq \sum_{i=1}^n |M_i - M_{i-1}| \mathbb{1}_{\{\tau \geq i\}},$$

da cui:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[|\sum_{i=1}^n M_i - M_{i-1}| \mathbb{1}_{\{\tau \geq i\}}] &\leq \mathbb{E}[\sum_{i=1}^n K \mathbb{1}_{\{\tau \geq i\}}] = \\ K \sum_{i=1}^n \mathbb{E}[\mathbb{1}_{\{\tau \geq i\}}] &= K \sum_{i=1}^n P(\tau \geq i) < +\infty \\ \Rightarrow \sup_n \mathbb{E}[|M_n^\tau|] &\leq +\infty. \end{aligned}$$

Pertanto, per il "teorema di convergenza" di Doob,

$$M_n^\tau \xrightarrow{q.c.} M_\tau \in L^1$$

e, dunque, anche $\lambda + K - M_n^\tau$ converge q.c. a $(\lambda + K - M_\tau) \in L^1$.

- (c) Il "teorema di arresto opzionale" di Doob afferma che se $M = (M_n)_{n \geq 0}$ è una martingala su Ω e τ è un tempo di arresto per M , supponendo che valga una delle seguenti condizioni:

- i) τ è limitato, ovvero $\exists c$ costante tale che $\tau < c$ q.c.;
- ii) $\mathbb{E}[\tau] < \infty$ ed esiste una costante $K \in \mathbb{R}$ tale che

$$|M_n(\omega) - M_{n-1}(\omega)| \leq K \quad \forall (n, \omega);$$

- iii) M è limitata, ovvero $\exists K \in \mathbb{R}$ tale che

$$|M_n(\omega)| \leq K \quad \forall (n, \omega)$$

e τ è finito q.c.;

allora $\mathbb{E}[M_\tau] = \mathbb{E}[M_0]$.

Nel caso della martingala $M = (M_n)_{n \geq 0}$, definita al punto (b), però, risulta che $\mathbb{E}[M_0] = 0$, mentre $\lambda < \mathbb{E}[M_\tau] \leq \lambda + K$.

Di conseguenza, $\mathbb{E}[M_\tau] \neq \mathbb{E}[M_0]$ e quindi, in particolare, τ non è integrabile.