Homework 2

Giulio Nenna (s245715@studenti.polito.it)

17 febbraio 2021

Realizzato in collaborazione con Alfredo Baione (s279328), Andrea Sanna (s222975) e Ornella Elena Grassi (s290310)

Esercizio 1.

---

(1) Dato che sono apparsi 8 fiori tra le 9 e le 10 a.m.,

- la probabilità che 3 di questi siano apparsi tra le 9 e le 9:20 a.m. è

$$P\left(N\left(\frac{1}{3}\right)=3 \mid N(1)=8\right)=\binom{8}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^3\left(1-\frac{1}{3}\right)^5 \sim 0.273;$$

- la probabilità che ne appaiano 13 tra le 9 a.m. e le 11 a.m. è

$$P\left(N(2)=13 \mid N(1)=8\right)=P\left(N(2)-N(1)=5\right)=e^{-3}\frac{3^5}{5!} \sim 0.101.$$

(2) Si vuole calcolare la probabilità che tra le 9 a.m. e le 11 a.m. compaiano esattamente 3 fiori di tipo A, 2 di tipo B e nessuno di tipo C. Siano $N_i(t)$ con $i \in \{A, B, C\}$ i processi di Poisson ottenuti dal *thinning* del processo principale $N(t)$. Essi rappresentano quindi il numero di fiori di tipo i sbocciati entro l'istante t e sono indipendenti con rate λp_i. Si ottiene:

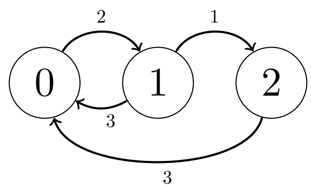
$$\begin{gathered}
P\left(N_A(2)=3, N_B(2)=2, N_C(2)=0\right)= \\
P(N_A(2)=3)P(N_B(2)=2)P(N_C(2)=0)= \\
e^{-3\frac{1}{3}2}\frac{\left(3\frac{1}{3}2\right)^3}{3!}\cdot e^{-3\frac{1}{6}2}\frac{\left(3\frac{1}{6}2\right)^2}{2!}\cdot e^{-3\frac{1}{2}2}\frac{\left(3\frac{1}{2}2\right)^0}{0!}= \\
e^{-2}\frac{8}{3!}\cdot e^{-1}\frac{1}{2!}\cdot e^{-3} \sim 0.0016
\end{gathered}$$

(3) Indicando con τ_1 il tempo in cui compare il primo fiore di tipo A, risulta che se $N_A(t) \backsim \text{Poisson}(\lambda p_A = 1)$, allora $\tau_1 \backsim \exp(1)$. Pertanto, condizionatamente al fatto che il primo fiore che compare è di tipo A, la probabilità che il tempo τ in cui ciò avviene sia $\leq \frac{1}{2}$ è

$$P\left(\tau_1 \leq \frac{1}{2}\right) = \int_0^{\frac{1}{2}} 1 \cdot e^{-1 \cdot x}\, dx = 1 - e^{-\frac{1}{2}} \sim 0.393.$$

Esercizio 2.

(a) Il processo di costruzione e distruzione del castello di sabbia può essere modellato con una catena di Markov a tempo continuo siffatta:



$S = \{0, 1, 2\}$ è l'insieme degli stati ai quali sono associati i seguenti transition rates:

$$Q = \begin{bmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 3 & -4 & 1 \\ 3 & 0 & -3 \end{bmatrix}.$$

Dove $q(i, j)$ per $i \neq j$ rappresenta il *rate* dell'esponenziale che partecipa alla gara esponenziale se la catena si trova sullo stato i. Se a vincere è l'esponenziale $\tau_{ij} \sim \exp(q(i, j))$ allora la catena salta allo stato j. In pratica dallo stato 0 (costruzione del primo piano) si passa necessariamente allo stato 1 dopo un tempo esponenziale ($\exp(2)$). Una volta entrati nello stato 1 (costruzione del secondo piano) parte una gara esponenziale tra l'onda ($\exp(3)$) e la fine della costruzione del secondo piano ($\exp(2)$): se vince la prima si ritorna allo stato 0 mentre se vince la seconda si passa allo stato 2. Infine, arrivati allo stato 2 l'unica possibilità è quella di aspettare un'onda per tornare allo stato 0, che arriverà secondo un tempo esponenziale ($\exp(3)$).

Da Q si deducono quindi:

$$\begin{cases} \lambda(0) = 2 \\ \lambda(1) = 4 \\ \lambda(2) = 3 \end{cases} \qquad\qquad R = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{3}{4} & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(b) La probabilità che, partendo dallo stato 1, dopo 2 ore, ci si ritrovi nello stato 0 è

$$P_2(1, 0),$$

dove P_2 è la matrice della probabilità di transizione al tempo $t = 2$, data da

$$P_2 = e^{Q_2} = \sum_{k=0}^{\infty} 2^k \frac{Q^k}{k!},$$

che è una soluzione particolare delle equazioni di Kolmogorov ($P'(t) = P_t Q$ e $P'(t) = QP_t$), nel caso $t = 2$.

(c) La probabilità che i bambini riescano a finire la costruzione del secondo livello, prima che un'onda li costringa a ricominciare ed essendo già alle prese con la costruzione del primo livello, è legata al fatto che la variabile di Poisson relativa al processo di comparsa delle onde arrivi due volte seconda in due gare esponenziali, rispettivamente prima con l'esponenziale di tasso 2 e, poi, con l'esponenziale di tasso 1 all'ora. Allora, si avrà:

$$1^a\text{gara}: \quad P(\exp(2)\,\text{arrivi primo}) = \frac{\lambda(\exp(2))}{\sum_i \lambda_i} = \frac{2}{2+3} = \frac{2}{5};$$
$$2^a\text{gara}: \quad P(\exp(1)\,\text{arrivi primo}) = \frac{\lambda(\exp(1))}{\sum_i \lambda_i} = \frac{1}{1+3} = \frac{1}{4}.$$

Dunque, la probabilità cercata sarà pari a:

$$\frac{2}{5} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{10}$$

Esercizio 3.

Si consideri una CTMC con spazio degli stati $\{0, 1, 2, ...\}$ e rates di transizione (per $i \neq j$)

$$q(i,j) = \begin{cases} \frac{3+\sin i}{1+i^2}, & \text{se } i^2 < j < 2i^2 + 1 \\ 0, & \text{altrimenti} \end{cases} .$$

(a) Trovare $P(X_{1.5} = 4 \mid X_0 = 8)$ significa calcolare $P_{1.5}(8,4)$. Tuttavia, $\forall i, j, i \neq j$, dallo stato i si può arrivare allo stato j solamente se

$$i^2 < j < 2i^2 + 1$$

ossia la catena non può fare altro che avanzare nello spazio degli stati Pertanto non è possibile che se $X_0 = 8$ la catena effettui un passo verso uno stato $j < 8$, in particolare:

$$P_{1.5}(8,4) = 0.$$

(b) Calcolare $P(X_{1.5} \neq 0 \mid X_0 = 0)$ significa calcolare $P_{1.5}(0, x > 0)$, ovvero la probabilità di effettuare un salto da 0 entro un tempo pari a 1.5.
Sia τ_0 l' "holding time" nello stato 0. Sappiamo che

$$\tau_0 \sim \exp(\lambda(0)).$$

Pertanto, si ricava che

$$P_0(\tau_0 < 1.5) = \int_0^{1.5} e^{\lambda(0)x}\, dx = 1 - e^{-\lambda(0)1.5}$$

dove, sapendo che

$$q(0,1) = \frac{3 + \sin 0}{1} = 3 = \lambda(0) \cdot r(0,1)$$

e che $r(0,1) = 1$ (poiché 1 è l'unico stato raggiungibile da 0), risulta $\lambda(0) = 3$.
In conclusione,

$$P(\tau_0 < 1.5) = 1 - e^{-4.5} \sim 0.99.$$

(c) Per capire se la catena è esplosiva, possiamo studiare i rates $\lambda\,(i)$ associati ad ogni stato y_i della catena "embedded". Risulta:

$$\lambda(i) = \sum_{j=1}^{\infty} q(i,j) = \sum_{j=i^2+1}^{2i^2+1} \frac{3+\sin(i)}{1+i^2} =$$

$$(2i^2+1-i^2-1+1)\frac{3+\sin(i)}{1+i^2} = (3+sin(i))\left(\frac{i^2+1}{i^2+1}\right) < 4$$

Poichè i rate dei tempi di uscita da ciascuno stato sono maggiorati da una costante $K = 4$ allora la catena **non** è esplosiva.

Esercizio 4.

Si consideri una CTMC con spazio degli stati $\{0, 1, 2, ...\}$. Siano y_i, $i \in S$, i relativi stati della catena "embedded".

(a) Se i tassi di transizione sono

$$q(i,j) = \begin{cases} 2^i \text{ if } j = i+1 \\ 0 \text{ if } j \neq i \text{ e } j \neq i+1 \end{cases},$$

allora la catena "embedded" risulta essere una catena di sole "nascite", dove $r(i,j) = 1$, $\forall i \neq j$.
Ne consegue che $\lambda(i) = 2^i$, $\forall i$ e, dunque,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda_{y_n}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

è convergente (essendo una serie geometrica di ragione $\frac{1}{2}$).
Pertanto, la catena è esplosiva.

(b) Se i tassi di transizione sono

$$q(i,j) = \begin{cases} i+1 \text{ if } i < j \leq i+5 \\ 0.5 \text{ if } j = i-1 \text{ e } i \geq 1 \\ 0 \text{ in tutti gli altri casi} \end{cases},$$

allora ad ogni salto catena può effettuare un solo passo indietro oppure un numero di passi in avanti compreso tra 1 e 5. Vale la seguente:

$$\lambda(0) = 5$$
$$\lambda(i) = \sum_{j \in S} q(i,j) = 0.5 + \sum_{i+1}^{i+5} (i+1) = 5i + 5.5 \text{ per } i \geq 1$$

Ora assumendo che la catena embedded parta da un valore arbitrario $Y_0 = k$ con $k \in \mathbb{N}$, allora

$$Y_n \leq k + 5n$$

ossia Y_n non può assumere un valore più grande di $k + 5n$ che si realizzerebbe solamente nel caso in cui la catena compie n salti di

lunghezza 5 in avanti.
Poiché λ è una funzione monotona vale quindi:

$$\lambda(Y_n) \leq \lambda(k+5n)$$

da cui:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda(Y_n)} \geq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda(k+5n)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{5k+25n+5.5} = \infty$$

pertanto la catena **non** esplode.

(c) Se i tassi di transizione sono

$$q(i,j) = \begin{cases} 2^i \text{ if } j = i+1 \\ 2^{i+1} \text{ if } j = i-1 \text{ e } i \geq 2 \\ 0 \text{ in tutti gli altri casi} \end{cases},$$

Allora, per $i \geq 2$:

$$\lambda(i) = 2^{i+1} + 2^i = 3 \cdot 2^i.$$

In particolare per $i \geq 2$:

$$r(i,i+1) = \frac{q(i,i+1)}{\lambda(i)} = \frac{1}{3}$$
$$r(i,i-1) = \frac{q(i,i-1)}{\lambda(i)} = \frac{2}{3}$$

La catena embedded è quindi una *birth-death chain* discreta riflessa nello stato 0. Questo tipo di catena discreta ammette una distribuzione stazionaria (e quindi è ricorrente) se e solo se:

$$M = \sum_{x=0}^{\infty} \prod_{i=0}^{x-1} \frac{p_i}{q_{i-1}} < \infty$$

dove nel nostro caso:

$$p_i = \frac{1}{3} \qquad q_i = \frac{2}{3} \qquad \forall i \geq 2$$
$$p_0 = p_1 = 1 \qquad q_0 = q_1 = 0$$

infatti se la catena si trova negli stati 0 o 1 non può fare altro che avanzare di un passo.
Quindi la quantità M in esame sarà pari a:

$$M = 2 + \sum_{x=3}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^x < \infty.$$

Questo risultato dimostra che la catena embedded $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ relativa alla CTMC ammette una distribuzione stazionaria ed è quindi una catena **ricorrente**. In particolare la CTMC in esame **non** può essere esplosiva dal momento che se una generica CTMC è esplosiva, allora la sua catena embedded deve necessariamente essere transiente.

Esercizio 5.

Sia $\Omega = \mathbb{N} \setminus \{0\}$ e $\mathcal{F} = P(\Omega)$.
Si consideri il seguente processo stocastico:

$$\begin{cases} X_0 = 0 \\ X_n = \begin{cases} -1 \text{ se } \omega \leq n \\ n \text{ se } \omega > n \end{cases} \end{cases}.$$

(1) Osserviamo che:

$$\begin{aligned} &X_0(\omega) \in \{0\}, \\ &X_1(\omega) \in \{-1, 1\}, \\ &X_2(\omega) \in \{-1, 2\}, \\ &\text{... e così via.} \end{aligned}$$

Pertanto le controimmagini sono nella forma:

$$\begin{gathered} X_1^{-1}(1) = \{\omega \in \mathbb{N}\backslash\{0\}|\omega > 1\} \\ X_1^{-1}(-1) = \{\omega \in \mathbb{N}\backslash\{0\}|\omega \leq 1\} \\ X_2^{-1}(2) = \{\omega \in \mathbb{N}\backslash\{0\}|\omega > 2\} \\ X_2^{-1}(-1) = \{\omega \in \mathbb{N}\backslash\{0\}|\omega \leq 2\} \\ \vdots \end{gathered}$$

Le σ-algebre che rendono misurabile il processo allo scorrere di t sono quindi (si considera $k \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$):

$$\begin{gathered} \sigma(X_1) = \sigma(\{0,1\}, \{k > 1\}) \\ \sigma(X_2) = \sigma(\{0,1\}, \{k > 1\}, \{0,1,2\}, \{k > 2\}) \\ \vdots \end{gathered}$$

Se ne deduce, allora, che, per $n \geq 0$,

$$\mathcal{F}_n = \sigma\{X_0, ..., X_n\} = \sigma(\{0, \ldots, i\}, \{k > i\}, i = 1, \ldots n)$$

(2) Sia

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{k \in A} \frac{1}{k(k+1)}.$$

Mostriamo che $\mathbb{P}$ è una probabilità su $(\Omega, \mathcal{F})$.

- $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$, poiché, in tal caso, $\mathbb{P}(\emptyset) = \sum_{k\in\emptyset} \frac{1}{k(k+1)}$ è una sommatoria vuota, dato che non vi sono elementi in $\emptyset$;
- $\mathbb{P}(A) \geq 0 \ \forall A \in \mathcal{F}$, poiché $\sum_{k\in A} \frac{1}{k(k+1)} > 0$ sempre, dato che $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$;
  inoltre, se $A_1, A_2, ...$ è una successione di insiemi mutuamente disgiunti in $\mathcal{F}$, allora
- $\mathbb{P}\left(\cup_{j=1}^{\infty} A_j\right) = \sum_{j=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_j)$, poiché, in tal caso, è possibile scrivere

$$\mathbb{P}\left(\cup_{j=1}^{\infty} A_j\right) = \sum_{k\in\cup_{j=1}^{\infty} A_j} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k\in A_1} \frac{1}{k(k+1)} + \sum_{k\in A_2} \frac{1}{k(k+1)} + ... =$$
$$\mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(A_2) + ... = \sum_{j=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_j);$$

- $\mathbb{P}(\Omega) = 1$, poiché

$$\mathbb{P}(\Omega) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right)$$

e, dunque,

$$\sum_{n=1}^{k} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + ... + \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) =$$
$$1 - \frac{1}{k+1} \longrightarrow 1, \ \text{per} \ k \to \infty.$$

Infatti, ad esempio se n = 1 si ha:

$$\mathbb{P}(X_1 = -1) = \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{2};$$
$$\mathbb{P}(X_1 = +1) = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2};$$

Per n = 2:

$$\mathbb{P}(X_1 = -1) = \sum_{k=1}^{2} \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} = \frac{2}{3};$$
$$\mathbb{P}(X_1 = +1) = \sum_{k=3}^{\infty} \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3};$$

e così via.

Mostriamo che $(X_n)_{n\geq 0}$ è una martingala rispetto a $\mathcal{F}_n$.

- $(X_n)_{n\geq 0}$ è adattato a $\mathcal{F}_n$, poiché un processo stocastico è sempre adattato alla filtrazione naturale;
- $X_n \in L^1$, poiché
$$\mathbb{E}[\mid X_n \mid] = \mid -1 \mid \cdot \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} + n \cdot \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} = 1 - \frac{1}{n+1} +$$
$$+ n \cdot (1 - (1 - \frac{1}{n+1})) = 1 - \frac{1}{n+1} + \frac{n}{n+1} = \frac{2n}{n+1} < +\infty;$$
- $\mathbb{E}[X_{n+1} \mid \mathcal{F}_n] = X_n$ poiché
$$\mathbb{E}[X_{n+1} \mid \mathcal{F}_n] = \mathbb{E}[X_{n+1} - X_n + X_n \mid \mathcal{F}_n] = \mathbb{E}[X_n \mid \mathcal{F}_n] + \mathbb{E}[X_{n+1} - X_n \mid \mathcal{F}_n]$$
e, poiché $(X_{n+1} - X_n)$ è indipendente da $\mathbb{F}_n$ essendo X_n un processo ad incrementi indipendenti e pertanto un processo di Markov, vale
$$\mathbb{E}[X_{n+1} \mid \mathcal{F}_n] = X_n + \mathbb{E}[X_{n+1} - X_n] = X_n + (-1) \cdot \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} +$$
$$+ (n+1) \cdot \sum_{k=n+2}^{\infty} \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} - \left[(-1) \cdot \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} + n \cdot \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right] =$$
$$X_n + (-1) \cdot \left(1 - \frac{1}{n+2}\right) + (n+1) \left[1 - \left(1 - \frac{1}{n+2}\right)\right] + \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) +$$
$$- n \left[1 - \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)\right] = X_n + \frac{n+2-(n+2)}{n+2} = X_n.$$

(3) La martingala X_n è limitata in L^1, perché si ha che
$$\sup_n \mathbb{E}[|X_n(\omega)|] = \sup_n \frac{2n}{n+1} < \infty$$
perciò applicando il teorema di convergenza di Doob si ottiene che
$$X_n \xrightarrow{q.c.} X_\infty \in L^1.$$

Esercizio 6.

Sia $\Omega = \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $\mathcal{F} = P(\Omega)$ e $\mathbb{P}(A) = \sum_{k\in A} 2^{-k}$.
Si consideri il seguente processo stocastico:

$$\begin{cases} M_n = \omega \ \text{ se } \ \omega \le n \\ M_n = n+2 \ \text{ se } \ \omega > n \end{cases}.$$

(1) Mostriamo che $\mathbb{P}$ è una probabilità su $(\Omega, \mathcal{F})$.

- $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$, poiché, in tal caso, $\mathbb{P}(\emptyset) = \sum_{k\in\emptyset} \frac{1}{2^k}$ è una sommatoria vuota, dato che non vi sono elementi in $\emptyset$;
- $\mathbb{P}(A) \ge 0 \ \ \forall A \in \mathcal{F}$, poiché $\frac{1}{2^k} > 0$ sempre;
  inoltre, se $A_1, A_2, ...$ è una successione di insiemi mutuamente disgiunti in $\mathcal{F}$, allora
- $\mathbb{P}\left(\cup_{j=1}^{\infty} A_j\right) = \sum_{j=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_j)$, poiché, in tal caso, è possibile scrivere

$$\mathbb{P}\left(\cup_{j=1}^{\infty} A_j\right) = \sum_{k\in\cup_{j=1}^{\infty} A_j} \frac{1}{2^k} = \sum_{k\in A_1} \frac{1}{2^k} + \sum_{k\in A_2} \frac{1}{2^k} + ... =$$
$$\mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(A_2) + ... = \sum_{j=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_j);$$

- $\mathbb{P}(\Omega) = 1$ poiché, osservando che

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n - 1$$

  in cui riconosciamo la serie geometrica di ragione $q = \frac{1}{2}$ e pertanto verifichiamo che

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} - 1 = 2 - 1 = 1.$$

Mostriamo che $(M_n)_{n\ge0}$ è una martingala rispetto alla filtrazione naturale
$\mathcal{F}_n = \sigma\{M_0, M_1, ..., M_n\}$.

- $(M_n)_{n\ge0}$ è adattato a $\mathcal{F}_n$, poiché un processo stocastico è sempre adattato alla filtrazione naturale;

- $M_n \in L^1$, poiché

$$\mathbb{E}[|M_n|] = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{2^k} + (n+2) \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{2^k} =$$

$$\frac{1}{\left(1-\frac{1}{2}\right)^2} \cdot \left[n\left(\frac{1}{2}\right)^{n+2} - (n+1)\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} + \frac{1}{2} \right] + (n+2)\left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k} \right] =$$

$$= 4n\left(\frac{1}{2}\right)^{n+2} - 4(n+1)\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} + 2 + 2(n+2)\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} =$$

$$= 2 - 2n\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} + 4n\left(\frac{1}{2}\right)^{n+2} = 2 < \infty;$$

- Con un ragionamento simile a quello dell'esercizio precedente possiamo far vedere facilmente che

$$\mathbb{E}[M_{n+1}|\mathcal{F}_n] = \mathbb{E}[M_{n+1} - M_n + M_n|\mathcal{F}_n] = M_n + \mathbb{E}[M_{n+1} - M_n] =$$

$$M_n + \sum_{k=0}^{n+1} \frac{k}{2^k} + (n+3) \sum_{k=n+2}^{\infty} \frac{1}{2^k} - \sum_{k=0}^{n} \frac{k}{2^k} - (n+2) \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{2^k} =$$

$$M_n + \frac{n+1}{2^{n+1}} + (n+2) \sum_{k=n+2}^{\infty} \frac{1}{2^k} - \left[(n+2) \sum_{k=n+2}^{\infty} \frac{1}{2^k} + \frac{n+2}{2^{n+1}} \right] + 1 \cdot \sum_{k=n+2}^{\infty} \frac{1}{2^k} =$$

$$M_n + \frac{n+1}{2^{n+1}} - \frac{n+2}{2^{n+1}} + \sum_{k=n+2}^{\infty} \frac{1}{2^k} = \frac{-1}{2^{n+1}} + 2 - \frac{2^{n+2}-1}{2^{n+1}} - \frac{1}{2^{n+1}} =$$

$$M_n - \frac{1}{2^{n+1}} + \frac{1}{2^{n+1}} = M_n.$$

(2) Per dimostrare che M_n è una martingala ereditaria utilizziamo il teorema di caratterizzazione delle martingale in L^1.
Esso ci garantisce che se una martingala M_n è uniformemente integrabile allora questa converge quasi certamente ed in L^1, e vale $M_n = \mathbb{E}\left[X|\mathbb{F}_n\right]$ per qualche $X \in L^1$, cioè M_n è una martingala ereditaria.
Una famiglia di variabili aleatorie X_i in uno spazio di probabilità $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_n, \mathcal{P})$ è uniformemente integrabile se vale il limite

$$\lim_{M\to\infty} \left(\sup_i E(|X_i|; |X_i| > M) \right) = 0.$$

Si può scegliere un M grande abbastanza tale che

$$\sup_i \mathbb{E}|X_i| \leq M < \infty$$

ma, per quanto osservato in precedenza, $\mathbb{E}|X_n|$ non dipende da n ma è un valore finito. Quindi si può concludere che M_n è uniformemente integrabile e che pertanto è una martingala ereditaria per cui vale

$$M_n = \mathbb{E}\left[X_\tau|\mathcal{F}_n\right]$$

dove per X_τ si è scelta la martingala M_n arrestata al tempo d'arresto finito τ.
Dal teorema sovracitato, ma anche dal teorema di Doob e dal teorema di convergenza dominata si può inoltre affermare che la martingala M_n converge non solo quasi certamente e in L^p, ma anche in L^1 al valore M_∞, infatti si scrive

$$M_n \xrightarrow[L^1]{q.c.} M_\infty \in L^1,$$

Infine, essendo M_n ereditaria si può ancora affermare che vale

$$\lim_{n\to\infty} M_n = \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[X|\mathcal{F}_n] = \mathbb{E}[X|\mathcal{F}_\infty]$$

cioè si può sempre supporla originata dal proprio limite e poiché X_τ é $\mathcal{F}_\infty$-misurabile allora si conclude che

$$\mathbb{E}[M_\infty|\mathcal{F}_n] = \mathbb{E}[X|\mathcal{F}_n].$$

Esercizio 7.

(1) Sia $M = (M_n)_{n\geq 0}$ una martingala ad incrementi equilimitati (cioè tale che $\mid M_n - M_{n-1} \mid \leq K$ con K costante) e sia $M^\tau = (M_n^\tau)_{n\geq 0}$ la corrispondente martingala arrestata al tempo τ, integrabile. Proviamo che M^τ è uniformemente integrabile.
Sia
$$M_n^\tau = M_{\tau\wedge 0} + (M_{\tau\wedge 1} - M_{\tau\wedge 0}) + (M_{\tau\wedge 2} - M_{\tau\wedge 1}) + ...$$
Sfruttando l' "identità di arresto"
$$M_n^\tau - M_{n-1}^\tau = (M_n - M_{n-1})\, \mathbb{1}_{\tau\leq n},$$
otteniamo
$$M_n^\tau = M_0 + (M_1 - M_0) + (M_2 - M_1) + ...$$
$$\Leftrightarrow \mid M_n^\tau \mid \leq \mid M_0 \mid + \sum_{i=1}^{n} \mid M_i - M_{i-1} \mid \mathbb{1}_{\{\tau\geq i\}}.$$
Applicando la maggiorazione
$$\mid M_n^\tau \mid \leq \mid M_0 \mid + \sum_{i=1}^{n} \mid M_i - M_{i-1} \mid \mathbb{1}_{\{\tau\geq i\}} \leq \mid M_0 \mid + \sum_{i=1}^{\infty} \mid M_i - M_{i-1} \mid \mathbb{1}_{\{\tau\geq i\}},$$
ci basterà dimostrare che
$$\mathbb{E}[\mid \sum_{i=1}^{\infty} \mid M_i - M_{i-1} \mid \mathbb{1}_{\{\tau\geq i\}} \mid] < +\infty,$$
per poter dire che $\mid M_n^\tau \mid \leq Z \in L^1$.
In effetti, ciò è assicurato dal "teorema di convergenza dominata" di Beppo Levi", per il quale risulta che
$$\mathbb{E}[\mid \sum_{i=1}^{\infty} \mid M_i - M_{i-1} \mid \mathbb{1}_{\{\tau\geq i\}} \mid] \leq \mathbb{E}[\sum_{i=1}^{\infty} K\mathbb{1}_{\{\tau\geq i\}}] =$$
$$\mathbb{E}[\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} K\mathbb{1}_{\{\tau\geq i\}}] = \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[\sum_{i=1}^{n} K\mathbb{1}_{\{\tau\geq i\}}] =$$
$$\lim_{n\to\infty} K \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}[\mathbb{1}_{\{\tau\geq i\}}] = \lim_{n\to\infty} K \sum_{i=1}^{n} P\left(\tau \geq i\right) = K \sum_{i=1}^{\infty} P\left(\tau \geq i\right) = K\mathbb{E}\left(\tau\right) < \infty$$

(poiché τ è un tempo di arresto integrabile).
Dunque,

$$| M_n^\tau | \leq Z \in L^1 \Rightarrow M_n^\tau \xrightarrow[L^1]{} M_\tau$$

ed essendo, quindi, M_n^τ limitata in L^1, per il "teorema di convergenza" di Doob, vale anche

$$M_n^\tau \xrightarrow{q.c.} M_\tau \in L^1.$$

Allora, se

$$M_n^\tau \xrightarrow[L^1]{q.c.} M_\tau \in L^1,$$

per il "teorema di caratterizzazione di martingale in L^1", M^τ è uniformemente integrabile.

(2) Sia $M = (M_n)_{n\geq 0}$ una martingala tale che:

i) $M_0 = 0$;

ii) $0 < a \leq | M_n - M_{n-1} | \leq K < +\infty$.

(a) La martingala in questione non converge q.c. al crescere di n. Questo perché essa, per $n \to \infty$, può espandersi simmetricamente verso valori infinitamente positivi e negativi.
Se, per assurdo, M_n convergesse q.c. a M_∞, si avrebbe necessariamente che $M_\infty = 0$, da cui

$$\lim_{n\to\infty} | M_n - M_{n-1} | = 0 \lightning,$$

dal momento che $| M_n - M_{n-1} | \geq a > 0$, $\forall n$.

(b) Sia $\lambda > 0$ e sia $\tau = \inf n : M_n > \lambda$.
Dal momento che $0 < \lambda < \infty$, possiamo sicuramente affermare che τ è un tempo di arresto finito. Infatti, se la martingala $(M_n)_{n\geq 0}$, per $n \to +\infty$, si estende indefinitamente a $+\infty$ e $-\infty$,esisterà sicuramente un tempo di ingresso finito τ, in cui essa assumerà il valore finito $\lambda + k$, per un opportuno valore $k \in \mathbb{R}$.
Ne consegue che $(M_n^\tau)_{n\geq 0}$ è certamente una martingala.
Proviamo che $\lambda + K - M_n^\tau$ è una martingala.

- $(\lambda + K - M_n^\tau) \sim \mathcal{F}_n$, con $\mathcal{F}_n$ filtrazione naturale del processo $(\lambda + K - M_n^\tau)_{n\geq 0}$;
- $(\lambda + K - M_n^\tau) \in L^1$, poiché $(\lambda + K) \in L^1$ e $M_n^\tau \in L^1$;
- $\mathbb{E}[\lambda + K - M_{n+1}^\tau \mid \mathcal{F}_n] = \lambda + K - M_n^\tau$, poiché

$$\mathbb{E}[\lambda + K - M_{n+1}^\tau \mid \mathcal{F}_n] = \mathbb{E}[\lambda + K \mid \mathcal{F}_n] - \mathbb{E}[M_{n+1}^\tau \mid \mathcal{F}_n] = \lambda + K - M_n^\tau.$$

Adesso, per provare che $\lambda + K - M_n^\tau$ è una martingala convergente, basta provare che M_n^τ è convergente.
Usando l' "identità di arresto" e le proprietà del valore assoluto, si ottiene

$$| M_n^\tau | \leq \sum_{i=1}^{n} | M_i - M_{i-1} | \mathbb{1}_{\{\tau \geq i\}},$$

da cui:

$$\mathbb{E}[| \sum_{i=1}^{n} | M_i - M_{i-1} | \mathbb{1}_{\{\tau \geq i\}} |] \leq \mathbb{E}[\sum_{i=1}^{n} K \mathbb{1}_{\{\tau \geq i\}}] =$$
$$K \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}[\mathbb{1}_{\{\tau \geq i\}}] = K \sum_{i=1}^{n} P(\tau \geq i) < +\infty$$
$$\Rightarrow \sup_n \mathbb{E}[| M_n^\tau |] \leq +\infty.$$

Pertanto, per il "teorema di convergenza" di Doob,

$$M_n^\tau \xrightarrow{q.c.} M_\tau \in L^1$$

e, dunque, anche $\lambda + K - M_n^\tau$ converge q.c. a $(\lambda + K - M_\tau) \in L^1$.

(c) Il "teorema di arresto opzionale" di Doob afferma che se $M = (M_n)_{n \geq 0}$ è una martingala su Ω e τ è un tempo di arresto per M, supponendo che valga una delle seguenti condizioni:

i) τ è limitato, ovvero $\exists c$ costante tale che $\tau < c$ q.c.;

ii) $\mathbb{E}[\tau] < \infty$ ed esiste una costante $K \in \mathbb{R}$ tale che

$$| M_n(\omega) - M_{n-1}(\omega) | \leq K \ \ \forall (n, \omega);$$

iii) M è limitata, ovvero $\exists K \in \mathbb{R}$ tale che

$$| M_n(\omega) | \leq K \ \ \forall (n, \omega)$$

e τ è finito q.c.;

allora $\mathbb{E}[M_\tau] = \mathbb{E}[M_0]$.
Nel caso della martingala $M = (M_n)_{n \geq 0}$, definita al punto (b), però, risulta che $\mathbb{E}[M_0] = 0$, mentre $\lambda < \mathbb{E}[M_\tau] \leq \lambda + K$.
Di conseguenza, $\mathbb{E}[M_\tau] \neq \mathbb{E}[M_0]$ e quindi, in particolare, τ non è integrabile.