POLITECNICO DI TORINO
PROCESSI STOCASTICI E DINAMICHE SU NETWORK
PRIMO HOMEWORK, PROCESSI - A.Y. 2020/21

1. Esercizio

Presto sarà primavera e i fiori inizieranno a comparire in un prato al ritmo di 3 all'ora, secondo un processo di Poisson. Assumiamo che ogni nuovo fiore sia di tipo A, B, o C, con probabilità pari a $\frac{1}{3}, \frac{1}{6}$, and $\frac{1}{2}$, rispettivamente. Assumiamo che il tipo di fiore che spunta sia indipendente dal tipo degli altri fiori e dal tempo trascorso dalle nascite precedenti.

(1) Dato che sono apparsi 8 fiori tra le 9 a.m. e le 10 a.m.,
   - qual è la probabilità che 3 di questi siano apparsi tra le 9 a.m. e le 9:20 a.m.?
   - qual è la probabilità che ne appaiano 13 tra le 9 a.m. e le 11 a.m.?

(2) Qual è la probabilità che tra le 9 a.m. e le 11 a.m. compaiano esattamente 3 fiori di tipo A, 2 di tipo B e nessuno di tipo C?

(3) Sia τ in ore, a partire dalle 9 a.m. a cui compare il primo fiore. Condizionatamente al fatto che il fiore sia di tipo A, qual è la probabilità che $\tau \leq 1/2$?

2. Esercizio

Due bambini instancabili stanno giocando sulla spiaggia in cui arrivano onde alte come un processo di Poisson di tasso 3 all'ora. I bambini stanno costruendo un castello di sabbia: gli serve un tempo esponenziale di tasso 2 all'ora per costruire il primo piano e poi un altro tempo esponenziale di tasso 1 all'ora per costruire il secondo. Quando arriva un 'onda distrugge il castello e loro cominciano da capo. Se riescono a completare la costruzione prima che arrivi l'onda, restano semplicemnete a contemplarla in attesa del destino inelutabile.

a) Si modelli il processo di costruzione e distruzione del castello con una catena di Markov.

b) Supponendo che i bimbi siano al lavoro nella costruzione del secondo piano, con che probabilità tra esattamente due ore si troveranno alle prese con la costruzione del primo piano? (per rispondere può essere opportuno fare uso di un software per il calcolo simbolico, per esempio Mathematica, che avete a disposizione dal portale, oppure si può scivere come si ottiene la risposta senza valutarla numericamente)

c) Supponiamo che i ragazzi stiano costruendo il primo piano. Qual è la probabilità che riescano a finire la costruzione del secondo prima che un'onda li costringa a ricominciare?

3. Esercizio

Si consideri una CTMC con spazio degli stati $\{0, 1, 2, \dots\}$ e rate di transizione (per $i \neq j$)

$$q(i,j) = \begin{cases} \frac{3+\sin i}{1+i^2} & \text{if } i^2 < j \leq 2i^2 + 1 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

a) Trovare $P(X_{1.5} = 4 | X_0 = 8)$.
b) Calcolare $P(X_{1.5} \neq 0 | X_0 = 0)$.
c) La catena è esplosiva?

4. Esercizio

Si consideri una CTMC con spazio degli statie $\{0, 1, 2, \dots\}$. Si assuma che

a) i tassi di transizione siano

$$q(i,j) = \begin{cases} 2^i & \text{if } j = i+1 \\ 0 & \text{if } j \neq i \quad \text{e} \quad j \neq i+1 \end{cases}$$

La catena è esplosiva?

b) i tassi di transizione siano

$$q(i,j) = \begin{cases} i+1 & \text{if } i < j \leq i+5 \\ 0.5 & \text{if } j = i-1 \quad \text{e} \quad i \geq 1 \\ 0 & \text{in tutti gli altri casi con } j \neq i \end{cases}$$

La catena è esplosiva?

c) i tassi di transizione siano

$$q(i,j) = \begin{cases} 2^i & \text{if } j = i+1 \\ 2^{i+1} & \text{if } j = i-1 \quad \text{e} \quad i \geq 2 \\ 0 & \text{in tutti gli altri casi con } j \neq i \end{cases}$$

La catena è esplosiva?

5. Esercizio

Siano $\Omega = \mathbb{N} \backslash \{0\}$ e $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$ (l'insieme di tutte le parti di Ω). Si consideri il processo stocastico $X_0 = -1/2$ e, per $n > 0$, $X_n = -1$ se $\omega \leq n$, $X_n = n$ se $\omega > n$.

(1) Costruire la filtrazione naturale generata dal processo $\mathcal{F}_n = \sigma\{X_0, \cdots, X_n\}$ per $n \geq 0$.

(2) Poniamo
$$\mathbb{P}(A) = \sum_{k\in A} \frac{1}{k(k+1)}.$$
Dimostrare che $\mathbb{P}$ è una probabilità su $(\Omega, \mathcal{F})$ e che $(X_n)_{n\geq 0}$ è una martingala rispetto alla filtrazione naturale.

(3) La martingala X_n è limitata in L^1? Se sì, cosa si può dedurre dal teorema di convergenza di Doob?

6. Esercizio

Siano $\Omega = \mathbb{N}\backslash\{0\}$, $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$ e $\mathbb{P}(A) = \sum_{k\in A} 2^{-k}$. Si consideri il processo stocastico $M_n = \omega$ se $\omega \leq n$, $M_n = n+2$ se $\omega > n$.

(1) Verificare che $\mathbb{P}$ è una probabilità su $(\Omega, \mathcal{F})$ e che $(M_n)_{n\geq 0}$ è una martingala rispetto alla filtrazione naturale.

(2) M_n è una martingala ereditaria? Se sì, scriverla nella forma $M_n = \mathbb{E}(X|\mathcal{F}_n)$ per una opportuna scelta di X. In tal caso, cosa si può dire sulla convergenza di M_n?

7. Esercizio

(1) Dimostrare che se $M = (M_n)_{n\geq 0}$ è una martingala ad incrementi equilimitati (cioè tale che $|M_n - M_{n-1}| \leq K$ con K costante) e τ è un tempo d'arresto integrabile, allora la martingala arrestata M^τ è uniformemente integrabile.

(2) Si consideri un gioco equo nel quale esiste una limitazione superiore all'entità di ciascuna vincita (perdita) (data per es., da tutta la moneta disponibile sulla terra); inoltre esiste un'unità minima di denaro che a ogni scommessa viene necessariamente vinta o persa (per es., non si ammettono frazioni di euro). Queste condizioni si scrivono (supponiamo $M_0 = 0$):
$$0 < a \leq |M_n - M_{n-1}| \leq K < +\infty.$$
(a) La martingala M_n converge q.c. al crescere di n?
(b) Fissato comunque $\lambda > 0$ e posto $\tau = \inf\{n : M_n > \lambda\}$, spiegare perché il processo $\lambda + K - M_n^\tau$ è una martingala convergente e dedurre che $\tau < +\infty$ q.c. (cioè è sicura la possibilità di vincere somme superiori a λ).
(c) Utilizzando il teorema d'arresto di Doob e il punto 1. dell'esercizio, provare che τ non è integrabile.