

## Homework 2

Giulio Nenna (s245715@studenti.polito.it)

11 febbraio 2021

Realizzato in collaborazione con Giulio Nenna (s245717), Andrea Sanna (s222975) e Ornella Elena Grassi (s290310)

### Esercizio 1.

---

(1) Dato che sono apparsi 8 fiori tra le 9 e le 10 a.m.,

- la probabilità che 3 di questi siano apparsi tra le 9 e le 9:20 a.m. è

$$P\left(N\left(\frac{1}{3}\right) = 3 \mid N(1) = 8\right) = \binom{8}{3} \left(\frac{1}{3}\right)^3 \left(1 - \frac{1}{3}\right)^5 \sim 0.273;$$

- la probabilità che ne appaiano 13 tra le 9 a.m. e le 11 a.m. è

$$P(N(2) = 13 \mid N(1) = 8) = P(N(2) - N(1) = 5) = e^{-3} \frac{3^5}{5!} \sim 0.101.$$

(2) Si vuole calcolare la probabilità che tra le 9 a.m. e le 11 a.m. compaiano esattamente 3 fiori di tipo A, 2 di tipo B e nessuno di tipo C. Siano  $N_i(t)$  con  $i \in \{A, B, C\}$  i processi di Poisson ottenuti dal *thinning* del processo principale  $N(t)$ . Essi rappresentano quindi il numero di fiori di tipo  $i$  sbocciati entro l'istante  $t$  e sono indipendenti con rate  $\lambda p_i$ . Si ottiene:

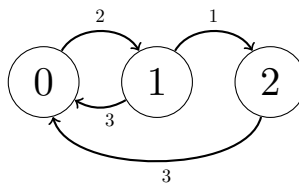
$$\begin{aligned} P(N_A(2) = 3, N_B(2) = 2, N_C(2) = 0) &= \\ P(N_A(2) = 3)P(N_B(2) = 2)P(N_C(2) = 0) &= \\ e^{-3\frac{1}{3}2} \frac{\left(3\frac{1}{3}2\right)^3}{3!} \cdot e^{-3\frac{1}{6}2} \frac{\left(3\frac{1}{6}2\right)^2}{2!} \cdot e^{-3\frac{1}{2}2} \frac{\left(3\frac{1}{2}2\right)^0}{0!} &= \\ e^{-2} \frac{8}{3!} \cdot e^{-1} \frac{1}{2!} \cdot e^{-3} &\sim 0.0016 \end{aligned}$$

- (3) Indicando con  $\tau_1$  il tempo in cui compare il primo fiore di tipo A, risulta che se  $N_A(t) \sim \text{Poisson}(\lambda p_A = 1)$ , allora  $\tau_1 \sim \exp(1)$ . Pertanto, condizionatamente al fatto che il primo fiore che compare è di tipo A, la probabilità che il tempo  $\tau$  in cui ciò avviene sia  $\leq \frac{1}{2}$  è

$$P\left(\tau_1 \leq \frac{1}{2}\right) = \int_0^{\frac{1}{2}} 1 \cdot e^{-1 \cdot x} dx = 1 - e^{-\frac{1}{2}} \sim 0.393.$$

**Esercizio 2.**

- (a) Il processo di costruzione e distruzione del castello di sabbia può essere modellato con una catena di Markov a tempo continuo siffatta:



$S = \{0, 1, 2\}$  è l'insieme degli stati ai quali sono associati i seguenti transition rates:

$$Q = \begin{bmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 3 & -4 & 1 \\ 3 & 0 & -3 \end{bmatrix}.$$

Dove  $q(i, j)$  per  $i \neq j$  rappresenta il *rate* dell'esponenziale che partecipa alla gara esponenziale se la catena si trova sullo stato  $i$ . Se a vincere è l'esponenziale  $\tau_{ij} \sim \exp(q(i, j))$  allora la catena salta allo stato  $j$ . In pratica dallo stato 0 (costruzione del primo piano) si passa necessariamente allo stato 1 dopo un tempo esponenziale ( $\exp(2)$ ). Una volta entrati nello stato 1 (costruzione del secondo piano) parte una gara esponenziale tra l'onda ( $\exp(3)$ ) e la fine della costruzione del secondo piano ( $\exp(2)$ ): se vince la prima si ritorna allo stato 0 mentre se vince la seconda si passa allo stato 2. Infine, arrivati allo stato 2 l'unica possibilità è quella di aspettare un'onda per tornare allo stato 0, che arriverà secondo un tempo esponenziale ( $\exp(3)$ ).

Da  $Q$  si deducono quindi:

$$\begin{cases} \lambda(0) = 2 \\ \lambda(1) = 4 \\ \lambda(2) = 3 \end{cases} \quad R = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{3}{4} & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- (b) La probabilità che, partendo dallo stato 1, dopo 2 ore, ci si ritrovi nello stato 0 è

$$P_2(1, 0),$$

dove  $P_2$  è la matrice della probabilità di transizione al tempo  $t = 2$ , data da

$$P_2 = e^{Q_2} = \sum_{k=0}^{\infty} 2^k \frac{Q^k}{k!},$$

che è una soluzione particolare delle equazioni di Kolmogorov ( $P'(t) = P_t Q$  e  $P'(t) = Q P_t$ ), nel caso  $t = 2$ .

- (c) La probabilità che i bambini riescano a finire la costruzione del secondo livello, prima che un'onda li costringa a ricominciare ed essendo già alle prese con la costruzione del primo livello, è legata al fatto che la variabile di Poisson relativa al processo di comparsa delle onde arrivi due volte seconda in due gare esponenziali, rispettivamente prima con l'esponenziale di tasso 2 e, poi, con l'esponenziale di tasso 1 all'ora. Allora, si avrà:

$$\begin{aligned} 1^a \text{ gara : } P(\exp(2) \text{ arrivi primo}) &= \frac{\lambda(\exp(2))}{\sum_i \lambda_i} = \frac{2}{2+3} = \frac{2}{5}; \\ 2^a \text{ gara : } P(\exp(1) \text{ arrivi primo}) &= \frac{\lambda(\exp(1))}{\sum_i \lambda_i} = \frac{1}{1+3} = \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

Dunque, la probabilità cercata sarà pari a:

$$\frac{2}{5} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{10}$$

**Esercizio 3.**

Si consideri una CTMC con spazio degli stati  $\{0, 1, 2, \dots\}$  e rates di transizione (per  $i \neq j$ )

$$q(i, j) = \begin{cases} \frac{3+\sin i}{1+i^2}, & \text{se } i^2 < j < 2i^2 + 1 \\ 0, & \text{altrimenti} \end{cases}.$$

- (a) Trovare  $P(X_{1.5} = 4 \mid X_0 = 8)$  significa calcolare  $P_{1.5}(8, 4)$ . Tuttavia,  $\forall i, j, i \neq j$ , dallo stato  $i$  si può arrivare allo stato  $j$  solamente se

$$i^2 < j < 2i^2 + 1$$

ossia la catena non può fare altro che avanzare nello spazio degli stati. Pertanto non è possibile che se  $X_0 = 8$  la catena effettui un passo verso uno stato  $j < 8$ , in particolare:

$$P_{1.5}(8, 4) = 0.$$

- (b) Calcolare  $P(X_{1.5} \neq 0 \mid X_0 = 0)$  significa calcolare  $P_{1.5}(0, x > 0)$ , ovvero la probabilità di effettuare un salto da 0 entro un tempo pari a 1.5.

Sia  $\tau_0$  l' "holding time" nello stato 0. Sappiamo che

$$\tau_0 \sim \exp(\lambda(0)).$$

Pertanto, si ricava che

$$P_0(\tau_0 < 1.5) = \int_0^{1.5} e^{\lambda(0)x} dx = 1 - e^{-\lambda(0)1.5}$$

dove, sapendo che

$$q(0, 1) = \frac{3 + \sin 0}{1} = 3 = \lambda(0) \cdot r(0, 1)$$

e che  $r(0, 1) = 1$  (poiché 1 è l'unico stato raggiungibile da 0), risulta  $\lambda(0) = 3$ .

In conclusione,

$$P(\tau_0 < 1.5) = 1 - e^{-4.5} \sim 0.99.$$

- (c) Per capire se la catena è esplosiva, possiamo studiare i rates  $\lambda(i)$  associati ad ogni stato  $y_i$  della catena “embedded”. Risulta:

$$\lambda(i) = \sum_{j=1}^{\infty} q(i, j) = \sum_{j=i^2+1}^{2i^2+1} \frac{3 + \sin(i)}{1 + i^2} =$$

$$(2i^2 + 1 - i^2 - 1 + 1) \frac{3 + \sin(i)}{1 + i^2} = (3 + \sin(i)) \left( \frac{i^2 + 1}{i^2 + 1} \right) < 4$$

Poichè i rate dei tempi di uscita da ciascuno stato sono maggiorati da una costante  $K = 4$  allora la catena **non** è esplosiva.

**Esercizio 4.**

Si consideri una CTMC con spazio degli stati  $\{0, 1, 2, \dots\}$ . Siano  $y_i$ ,  $i \in S$ , i relativi stati della catena “embedded”.

(a) Se i tassi di transizione sono

$$q(i, j) = \begin{cases} 2^i & \text{if } j = i + 1 \\ 0 & \text{if } j \neq i \text{ e } j \neq i + 1 \end{cases},$$

allora la catena “embedded” risulta essere una catena di sole “nascite”, dove  $r(i, j) = 1$ ,  $\forall i \neq j$ .

Ne consegue che  $\lambda(i) = 2^i$ ,  $\forall i$  e, dunque,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda_{y_n}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

è convergente (essendo una serie geometrica di ragione  $\frac{1}{2}$ ).

Pertanto, la catena è esplosiva.

(b) Se i tassi di transizione sono

$$q(i, j) = \begin{cases} i + 1 & \text{if } i < j \leq i + 5 \\ 0.5 & \text{if } j = i - 1 \text{ e } i \geq 1 \\ 0 & \text{in tutti gli altri casi} \end{cases},$$

allora ad ogni salto catena può effettuare un solo passo indietro oppure un numero di passi in avanti compreso tra 1 e 5. Vale la seguente:

$$\lambda(0) = 5$$

$$\lambda(i) = \sum_{j \in S} q(i, j) = 0.5 + \sum_{i+1}^{i+5} (i + 1) = 5i + 5.5 \text{ per } i \geq 1$$

Ora assumendo che la catena embedded parta da un valore arbitrario  $Y_0 = k$  con  $k \in \mathbb{N}$ , allora

$$Y_n \leq k + 5n$$

ossia  $Y_n$  non può assumere un valore più grande di  $k + 5n$  che si realizzerebbe solamente nel caso in cui la catena compie  $n$  salti di

lunghezza 5 in avanti.

Poiché  $\lambda$  è una funzione monotona vale quindi:

$$\lambda(Y_n) \leq \lambda(k + 5n)$$

da cui:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda(Y_n)} \geq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda(k + 5n)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{5k + 25n + 5.5} = \infty$$

pertanto la catena **non** esplode.

(c) Se i tassi di transizione sono

$$q(i, j) = \begin{cases} 2^i & \text{if } j = i + 1 \\ 2^{i+1} & \text{if } j = i - 1 \text{ e } i \geq 2 \\ 0 & \text{in tutti gli altri casi} \end{cases} ,$$

risulta che

$$\begin{aligned} \lambda(0) &= 1, \\ \lambda(1) &= 1, \\ \lambda(2) &= 3 \cdot 2^2, \\ \lambda(3) &= 3 \cdot 2^3, \\ \lambda(4) &= 3 \cdot 2^4, \\ &\dots, \end{aligned}$$

da cui si impone lo studio del carattere della serie seguente:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda_{y_n}} = 2 + \frac{1}{6} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n .$$

Essendo, tuttavia, verificata la catena di disuguaglianze

$$\frac{1}{6} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n < \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n < \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 2,$$

la serie di nostro interesse non può che comportarsi come  $\frac{1}{6} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n$  e, dunque, convergere.

Pertanto, la catena risulta esplosiva.

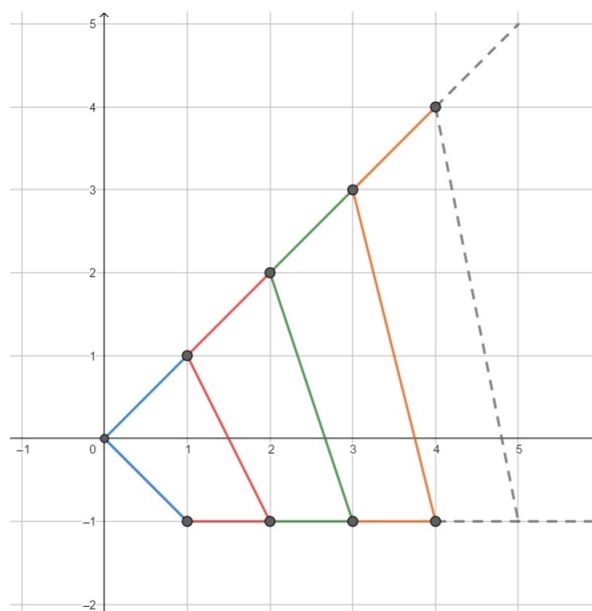


**Esercizio 5.**

Sia  $\Omega = \mathbb{N} \setminus \{0\}$  e  $\mathcal{F} = P(\Omega)$ .

Si consideri il seguente processo stocastico:

$$\begin{cases} X_0 = 0 \\ X_n = \begin{cases} -1 & \text{se } \omega \leq n \\ n & \text{se } \omega > n \end{cases} \end{cases}.$$



(1) Osserviamo che:

$$\begin{aligned} X_0(\omega) &\in \{0\}, \\ X_1(\omega) &\in \{-1, 1\}, \\ X_2(\omega) &\in \{-1, 2\}, \\ &\dots \text{ e così via.} \end{aligned}$$

Se ne deduce, allora, che, per  $n \geq 0$ ,

$$\mathcal{F}_n = \sigma\{X_0, \dots, X_n\} = \sigma\{\{0\}, \{i, -1\} \mid i : 1, \dots, n\}.$$

(2) Sia

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{k \in A} \frac{1}{k(k+1)}.$$

Mostriamo che  $\mathbb{P}$  è una probabilità su  $(\Omega, \mathcal{F})$ .

- $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$ , poiché, in tal caso,  $\mathbb{P}(\emptyset) = \sum_{k \in \emptyset} \frac{1}{k(k+1)}$  è una sommatoria vuota, dato che non vi sono elementi in  $\emptyset$ ;
- $\mathbb{P}(A) \geq 0 \ \forall A \in \mathcal{F}$ , poiché  $\sum_{k \in A} \frac{1}{k(k+1)} > 0$  sempre, dato che  $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ ;  
inoltre, se  $A_1, A_2, \dots$  è una successione di insiemi mutuamente disgiunti in  $\mathcal{F}$ , allora
- $\mathbb{P}\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right) = \sum_{j=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_j)$ , poiché, in tal caso, è possibile scrivere

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right) &= \sum_{k \in \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k \in A_1} \frac{1}{k(k+1)} + \sum_{k \in A_2} \frac{1}{k(k+1)} + \dots = \\ &\mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(A_2) + \dots = \sum_{j=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_j); \end{aligned}$$

- $\mathbb{P}(\Omega) = 1$ , poiché

$$\mathbb{P}(\Omega) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{\infty} \left( \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right)$$

e, dunque,

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^k \left( \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) &= \left( 1 - \frac{1}{2} \right) + \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \dots + \left( \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) = \\ 1 - \frac{1}{k+1} &\longrightarrow 1, \text{ per } k \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Mostriamo che  $(X_n)_{n \geq 0}$  è una martingala rispetto a  $\mathcal{F}_n$ .

- $(X_n)_{n \geq 0}$  è adattato a  $\mathcal{F}_n$ , poiché un processo stocastico è sempre adattato alla filtrazione naturale;
- $X_n \in L^1$ , poiché

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[|X_n|] &= |-1| \cdot P(\omega_i \leq n) + n \cdot P(\omega_i > n) \leq 1 + n < +\infty \\ \Rightarrow \mathbb{E}[|X_n|] &< +\infty; \end{aligned}$$

- $\mathbb{E}[X_{n+1} | \mathcal{F}_n] = X_n$ , poiché

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X_{n+1} - X_n | \mathcal{F}_n] &= P(\omega_i > n+1) + (-1-n) \cdot P(\omega_i = n+1) = \\ &= \sum_{k=n+2}^{\infty} \left( \frac{1}{k(k+1)} \right) + (-1-n) \cdot \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \\ &= 1 - \left( 1 - \frac{1}{n+2} \right) - \frac{n+1}{(n+1)(n+2)} = \\ &= 1 - \frac{n+1}{n+2} - \frac{1}{n+2} = \\ &= \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+2} = 0. \end{aligned}$$

- (3) La martingala  $X_n$  risulta essere limitata in  $L^1$ , poiché, essendo inferiormente limitata da  $-1$ , essa non potrà mai allontanarsi indefinitamente da questo valore. In particolare, risulta:

$$\sup_n \mathbb{E}[|X_n(\omega)|] = \omega - 1.$$

Applicando il “teorema di convergenza” di Doob, allora, si ottiene che

$$X_n \xrightarrow{q.c.} X_\infty \in L^1$$

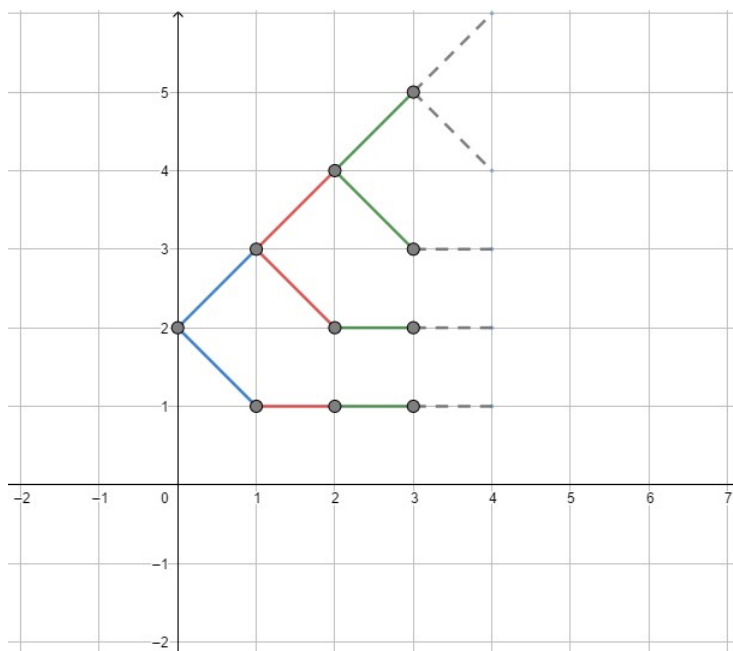
e, quindi,  $X_\infty$  deve necessariamente valere  $-1$ .

**Esercizio 6.**

Sia  $\Omega = \mathbb{N} \setminus \{0\}$ ,  $\mathcal{F} = P(\Omega)$  e  $\mathbb{P}(A) = \sum_{k \in A} 2^{-k}$ .

Si consideri il seguente processo stocastico:

$$\begin{cases} M_n = \omega & \text{se } \omega \leq n \\ M_n = n + 2 & \text{se } \omega > n \end{cases}.$$



(1) Mostriamo che  $\mathbb{P}$  è una probabilità su  $(\Omega, \mathcal{F})$ .

- $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$ , poiché, in tal caso,  $\mathbb{P}(\emptyset) = \sum_{k \in \emptyset} \frac{1}{2^k}$  è una sommatoria vuota, dato che non vi sono elementi in  $\emptyset$ ;
- $\mathbb{P}(A) \geq 0 \ \forall A \in \mathcal{F}$ , poiché  $\frac{1}{2^k} > 0$  sempre;  
inoltre, se  $A_1, A_2, \dots$  è una successione di insiemi mutuamente disgiunti in  $\mathcal{F}$ , allora
- $\mathbb{P}\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right) = \sum_{j=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_j)$ , poiché, in tal caso, è possibile scrivere

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right) &= \sum_{k \in \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j} \frac{1}{2^k} = \sum_{k \in A_1} \frac{1}{2^k} + \sum_{k \in A_2} \frac{1}{2^k} + \dots = \\ &\mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(A_2) + \dots = \sum_{j=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_j); \end{aligned}$$

- $\mathbb{P}(\Omega) = 1$  poiché, osservando che

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n - 1$$

e ragionando sulla prima quantità di questa differenza, possiamo scrivere:

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n &= 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \dots \\ \Leftrightarrow \left(1 - \frac{1}{2}\right) \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n &= \left(1 - \frac{1}{2}\right) \left(1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \dots\right) \\ \Leftrightarrow \left(1 - \frac{1}{2}\right) \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n &= \left(1 - \frac{1}{2}\right)^{n+1} \\ \Leftrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n &= \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Da ciò segue che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$$

e, pertanto,

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} = 2 - 1 = 1.$$

Mostriamo che  $(M_n)_{n \geq 0}$  è una martingala rispetto alla filtrazione naturale  $\mathcal{F}_n = \sigma\{M_0, M_1, \dots, M_n\}$ .

- $(M_n)_{n \geq 0}$  è adattato a  $\mathcal{F}_n$ , poiché un processo stocastico è sempre adattato alla filtrazione naturale;
- $M_n \in L^1$ , poiché

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[|M_n|] &= \sum_{i=1}^{\infty} |\omega_i| p_{\omega_i} \mathbb{1}_{\{\omega_i \leq n\}} + |n+2| P(\omega_i > n) \leq \frac{n(n+1)}{2} + n+2 < +\infty \\ \Rightarrow \mathbb{E}[|M_n|] &< +\infty; \end{aligned}$$

- $\mathbb{E}[M_{n+1} | \mathcal{F}_n] = M_n$ , poiché

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[M_{n+1} - M_n | \mathcal{F}_n] &= 1 \cdot P(\omega_i > n+1) + (-1) \cdot P(\omega_i = n+1) = \\ &= \sum_{k=n+2}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} = \\ &= 2 - \frac{2^{n+2} - 1}{2^{n+1}} - \frac{1}{2^{n+1}} = \\ &= \frac{1}{2^{n+1}} - \frac{1}{2^{n+1}} = 0. \end{aligned}$$

(2)  $M_n$  è in realtà una martingala ereditaria, poiché

$$M_n = \mathbb{E}[\omega | \mathcal{F}_n],$$

dove  $\omega$  è una variabile aleatoria  $\in L^1$ .

Infatti

$$\mathbb{E}[|\omega|] = \sum_{i=1}^{\infty} \omega_i p_{\omega_i} \mathbb{1}_{\{\omega_i \leq n\}} + \sum_{i=1}^{\infty} \omega_i p_{\omega_i} \mathbb{1}_{\{\omega_i > n\}} \leq \frac{n(n+1)}{2} + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{n+i}{2^{n+i}} < \infty,$$

poiché  $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{n+i}{2^{n+i}}$  converge, come mostra l'applicazione del “criterio del rapporto” a tale serie:

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \frac{n+i+1}{2^{n+i+1}} \cdot \frac{2^{n+i}}{n+i} = \lim_{i \rightarrow \infty} \frac{n+i+1}{2n+2i} = \frac{1}{2}.$$

Pertanto, essendo  $M_n$  una martingala ereditaria, essa converge quasi certamente e in  $L^1$  a  $M_{\infty}$ , che è anche il limite che la genera, ovvero:

$$M_n \xrightarrow[L^1]{q.c.} M_{\infty} \in L^1,$$

dove

$$M_\infty = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}[\omega \mid \mathcal{F}_n] = \mathbb{E}[\omega \mid \mathcal{F}_\infty].$$

Inoltre,

$$\mathbb{E}[\omega \mid \mathcal{F}_n] = \mathbb{E}[M_\infty \mid \mathcal{F}_n],$$

dal momento che

$$\mathbb{E}[M_\infty \mid \mathcal{F}_n] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[\omega \mid \mathcal{F}_\infty] \mid \mathcal{F}_n] = \mathbb{E}[\omega \mid \mathcal{F}_n].$$

Infine, siccome

$$\mathcal{F}_n = \sigma\{M_0, M_1, \dots, M_n\} = \sigma\{\{2\}, \{1, 3\}, \{1, 2, 4\}, \dots, \{1, 2, 3, 4, \dots, n, n+2\} \mid n \in \mathbb{N}\},$$

$\forall n \geq \omega - 2$ , risulta che  $\omega \sim \mathcal{F}_n$  e, pertanto,  $\omega \sim \mathcal{F}_\infty$ ; dunque, si avrà:

$$M_\infty = \mathbb{E}[\omega \mid \mathcal{F}_\infty] = \omega.$$

**Esercizio 7.**

- (1) Sia  $M = (M_n)_{n \geq 0}$  una martingala ad incrementi equilimitati (cioè tale che  $|M_n - M_{n-1}| \leq K$  con  $K$  costante) e sia  $M^\tau = (M_n^\tau)_{n \geq 0}$  la corrispondente martingala arrestata al tempo  $\tau$ , integrabile. Proviamo che  $M^\tau$  è uniformemente integrabile.

Sia

$$M_n^\tau = M_{\tau \wedge 0} + (M_{\tau \wedge 1} - M_{\tau \wedge 0}) + (M_{\tau \wedge 2} - M_{\tau \wedge 1}) + \dots$$

Sfruttando l' "identità di arresto"

$$M_n^\tau - M_{n-1}^\tau = (M_n - M_{n-1}) \mathbb{1}_{\tau \leq n},$$

otteniamo

$$\begin{aligned} M_n^\tau &= M_0 + (M_1 - M_0) + (M_2 - M_1) + \dots \\ \Leftrightarrow |M_n^\tau| &\leq |M_0| + \sum_{i=1}^n |M_i - M_{i-1}| \mathbb{1}_{\{\tau \geq i\}}. \end{aligned}$$

Applicando la maggiorazione

$$|M_n^\tau| \leq |M_0| + \sum_{i=1}^n |M_i - M_{i-1}| \mathbb{1}_{\{\tau \geq i\}} \leq |M_0| + \sum_{i=1}^{\infty} |M_i - M_{i-1}| \mathbb{1}_{\{\tau \geq i\}},$$

ci basterà dimostrare che

$$\mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{\infty} |M_i - M_{i-1}| \mathbb{1}_{\{\tau \geq i\}}\right] < +\infty,$$

per poter dire che  $|M_n^\tau| \leq Z \in L^1$ .

In effetti, ciò è assicurato dal "teorema di convergenza dominata" di Beppo Levi", per il quale risulta che

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{\infty} |M_i - M_{i-1}| \mathbb{1}_{\{\tau \geq i\}}\right] &\leq \mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{\infty} K \mathbb{1}_{\{\tau \geq i\}}\right] = \\ \mathbb{E}\left[\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n K \mathbb{1}_{\{\tau \geq i\}}\right] &= \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^n K \mathbb{1}_{\{\tau \geq i\}}\right] = \\ \lim_{n \rightarrow \infty} K \sum_{i=1}^n \mathbb{E}[\mathbb{1}_{\{\tau \geq i\}}] &= \lim_{n \rightarrow \infty} K \sum_{i=1}^n P(\tau \geq i) = K \sum_{i=1}^{\infty} P(\tau \geq i) = K \mathbb{E}(\tau) < \infty \end{aligned}$$



(poiché  $\tau$  è un tempo di arresto integrabile).

Dunque,

$$|M_n^\tau| \leq Z \in L^1 \Rightarrow M_n^\tau \xrightarrow{L^1} M_\tau$$

ed essendo, quindi,  $M_n^\tau$  limitata in  $L^1$ , per il “teorema di convergenza” di Doob, vale anche

$$M_n^\tau \xrightarrow[q.c.]{L^1} M_\tau \in L^1.$$

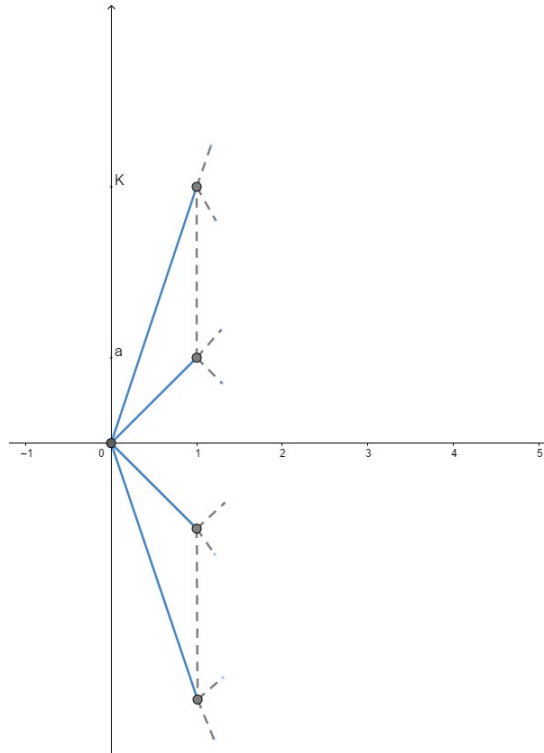
Allora, se

$$M_n^\tau \xrightarrow[q.c.]{L^1} M_\tau \in L^1,$$

per il “teorema di caratterizzazione di martingale in  $L^1$ ”,  $M^\tau$  è uniformemente integrabile.

(2) Sia  $M = (M_n)_{n \geq 0}$  una martingala tale che:

- i)  $M_0 = 0$ ;
- ii)  $0 < a \leq |M_n - M_{n-1}| \leq K < +\infty$ .



- (a) La martingala in questione non converge q.c. al crescere di  $n$ . Questo perché essa, per  $n \rightarrow \infty$ , può espandersi simmetricamente verso valori infinitamente positivi e negativi. Se, per assurdo,  $M_n$  convergesse q.c. a  $M_\infty$ , si avrebbe necessariamente che  $M_\infty = 0$ , da cui

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |M_n - M_{n-1}| = 0 \not\equiv,$$

dal momento che  $|M_n - M_{n-1}| \geq a > 0, \forall n$ .

- (b) Sia  $\lambda > 0$  e sia  $\tau = \inf n : M_n > \lambda$ .

Dal momento che  $0 < \lambda < \infty$ , possiamo sicuramente affermare che  $\tau$  è un tempo di arresto finito. Infatti, se la martingala  $(M_n)_{n \geq 0}$ , per  $n \rightarrow +\infty$ , si estende indefinitamente a  $+\infty$  e  $-\infty$ , esisterà sicuramente un tempo di ingresso finito  $\tau$ , in cui essa assumerà il valore finito  $\lambda + k$ , per un opportuno valore  $k \in \mathbb{R}$ . Ne consegue che  $(M_n^\tau)_{n \geq 0}$  è certamente una martingala.

Proviamo che  $\lambda + K - M_n^\tau$  è una martingala.

- $(\lambda + K - M_n^\tau) \sim \mathcal{F}_n$ , con  $\mathcal{F}_n$  filtrazione naturale del processo  $(\lambda + K - M_n^\tau)_{n \geq 0}$ ;
- $(\lambda + K - M_n^\tau) \in L^1$ , poiché  $(\lambda + K) \in L^1$  e  $M_n^\tau \in L^1$ ;
- $\mathbb{E}[\lambda + K - M_{n+1}^\tau | \mathcal{F}_n] = \lambda + K - M_n^\tau$ , poiché

$$\mathbb{E}[\lambda + K - M_{n+1}^\tau | \mathcal{F}_n] = \mathbb{E}[\lambda + K | \mathcal{F}_n] - \mathbb{E}[M_{n+1}^\tau | \mathcal{F}_n] = \lambda + K - M_n^\tau.$$

Adesso, per provare che  $\lambda + K - M_n^\tau$  è una martingala convergente, basta provare che  $M_n^\tau$  è convergente.

Usando l' "identità di arresto" e le proprietà del valore assoluto, si ottiene

$$|M_n^\tau| \leq \sum_{i=1}^n |M_i - M_{i-1}| \mathbb{1}_{\{\tau \geq i\}},$$

da cui:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[|\sum_{i=1}^n |M_i - M_{i-1}| \mathbb{1}_{\{\tau \geq i\}}|] &\leq \mathbb{E}[\sum_{i=1}^n K \mathbb{1}_{\{\tau \geq i\}}] = \\ K \sum_{i=1}^n \mathbb{E}[\mathbb{1}_{\{\tau \geq i\}}] &= K \sum_{i=1}^n P(\tau \geq i) < +\infty \\ \Rightarrow \sup_n \mathbb{E}[|M_n^\tau|] &\leq +\infty. \end{aligned}$$

Pertanto, per il “teorema di convergenza” di Doob,

$$M_n^\tau \xrightarrow{q.c.} M_\tau \in L^1$$

e, dunque, anche  $\lambda + K - M_n^\tau$  converge q.c. a  $(\lambda + K - M_\tau) \in L^1$ .

(c) Il “teorema di arresto opzionale” di Doob afferma che se  $M = (M_n)_{n \geq 0}$  è una martingala su  $\Omega$  e  $\tau$  è un tempo di arresto per  $M$ , supponendo che valga una delle seguenti condizioni:

- i)  $\tau$  è limitato, ovvero  $\exists c$  costante tale che  $\tau < c$  q.c.;
- ii)  $\mathbb{E}[\tau] < \infty$  ed esiste una costante  $K \in \mathbb{R}$  tale che

$$|M_n(\omega) - M_{n-1}(\omega)| \leq K \quad \forall (n, \omega);$$

iii)  $M$  è limitata, ovvero  $\exists K \in \mathbb{R}$  tale che

$$|M_n(\omega)| \leq K \quad \forall (n, \omega)$$

e  $\tau$  è finito q.c.;

allora  $\mathbb{E}[M_\tau] = \mathbb{E}[M_0]$ .

Nel caso della martingala  $M = (M_n)_{n \geq 0}$ , definita al punto (b), però, risulta che  $\mathbb{E}[M_0] = 0$ , mentre  $\lambda < \mathbb{E}[M_\tau] \leq \lambda + K$ .

Di conseguenza,  $\mathbb{E}[M_\tau] \neq \mathbb{E}[M_0]$  e quindi, in particolare,  $\tau$  non è integrabile.