MODELLI MATEMATICI PER LE EPIDEMIE

ESAMI DI STAT0 2019-2020

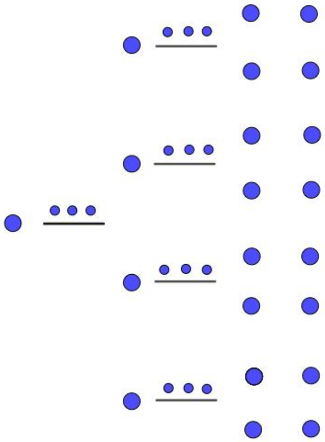
Fantuzzi Giulio

Liceo scientifico G.Galilei
classe 5 AS

MODELLO ESPONENZIALE

L'idea di base

Come evolve il contagio nel corso dei giorni?



MODELLO ESPONENZIALE

Alla ricerca di una formula

$$
\begin{aligned}
I(0) &= 1 \\
I(1) &= 1 \cdot 3 + 1 = 4 \\
I(2) &= 4 \cdot 3 + 4 = 16
\end{aligned}
$$

Siano:

- $I(t)$ il numero di persone infette al giorno t
- λ il numero di contagi al giorno (per ogni infetto)

E' possibile trovare una formula che descriva il modello?

$$
\begin{aligned}
I(0) &= 1 \\
I(1) &= 1 \cdot 3 + 1 = 4 \\
I(2) &= 4 \cdot 3 + 4 = 16
\end{aligned}
$$

Siano:

- $I(t)$ il numero di persone infette al giorno t
- λ il numero di contagi al giorno (per ogni infetto)

E' possibile trovare una formula che descriva il modello?

$$I(t) = I(t-1) \cdot \lambda + I(t-1)$$

Alcuni passaggi algebrici:

$$I(t) = I(t-1) \cdot \lambda + I(t-1)$$

Alcuni passaggi algebrici:

$$
\begin{aligned}
I(t) &= I(t-1)\cdot\lambda + I(t-1) \\
&= I(t-1)\cdot(\lambda+1)
\end{aligned}
$$

Alcuni passaggi algebrici:

$$\begin{aligned} I(t) &= I(t-1)\cdot\lambda + I(t-1) \\ &= I(t-1)\cdot(\lambda+1) \end{aligned}$$

ma

$$\begin{aligned} I(t-1) &= I(t-2)\cdot(\lambda+1) \\ &= I(t-3)\cdot\underbrace{(\lambda+1)\cdot(\lambda+1)}_{=(\lambda+1)^2} \\ &= I(t-4)\cdot\underbrace{(\lambda+1)\cdot(\lambda+1)\cdot(\lambda+1)}_{=(\lambda+1)^3} \end{aligned}$$

MODELLO ESPONENZIALE

Funzione esponenziale

Alcuni passaggi algebrici:

$$
\begin{aligned}
I(t) &= I(t-1) \cdot \lambda + I(t-1) \\
&= I(t-1) \cdot (\lambda + 1)
\end{aligned}
$$

ma

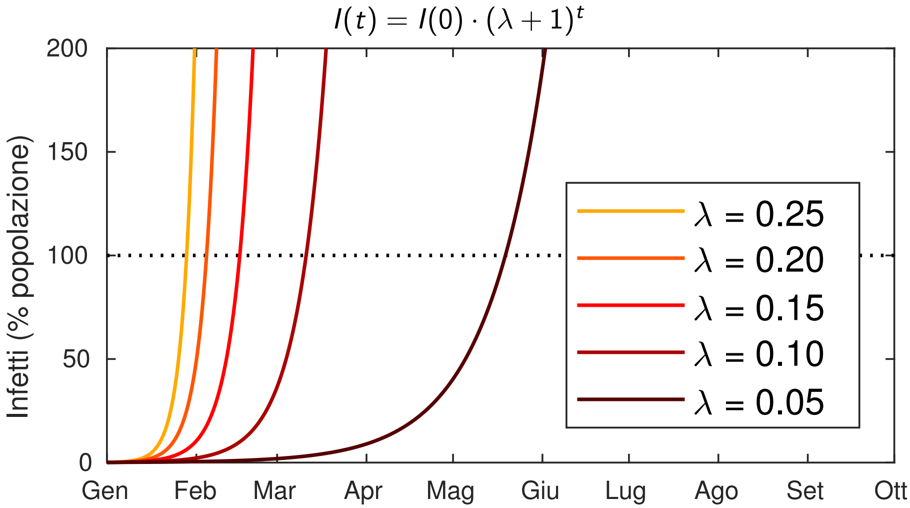
$$
\begin{aligned}
I(t-1) &= I(t-2) \cdot (\lambda + 1) \\
&= I(t-3) \cdot \underbrace{(\lambda + 1) \cdot (\lambda + 1)}_{=(\lambda+1)^2} \\
&= I(t-4) \cdot \underbrace{(\lambda + 1) \cdot (\lambda + 1) \cdot (\lambda + 1)}_{=(\lambda+1)^3}
\end{aligned}
$$

Per ricorsione si arriva a:

$$I(t) = I(0) \cdot (\lambda + 1)^t$$

MODELLO ESPONENZIALE

Il grafico



$$\mathbf{N = I(t) + S(t)}$$

Si aggiusta il modello esponenziale:

$$I(t+1) - I(t) = \lambda \cdot I(t) \cdot \frac{S(t)}{N}$$

$$\mathbf{N = I(t) + S(t)}$$

Si aggiusta il modello esponenziale:

$$I(t+1) - I(t) = \lambda \cdot I(t) \cdot \frac{S(t)}{N}$$

Considerando il tempo come variabile continua:

$$I(t+\Delta t) - I(t) = \lambda \cdot \Delta t \cdot I(t) \cdot \frac{S(t)}{N}$$

$$\mathbf{N = I(t) + S(t)}$$

Si aggiusta il modello esponenziale:

$$I(t+1) - I(t) = \lambda \cdot I(t) \cdot \frac{S(t)}{N}$$

Considerando il tempo come variabile continua:

$$I(t+\Delta t) - I(t) = \lambda \cdot \Delta t \cdot I(t) \cdot \frac{S(t)}{N}$$

Dividendo per Δt e passando al limite per $\Delta t \to 0$:

$$I'(t) = \lambda \cdot I(t) \cdot \frac{S(t)}{N} = \lambda \cdot I(t) \cdot \left(1 - \frac{I(t)}{N}\right)$$

Equazione differenziale (a variabili separabili):

$$I' = \lambda \cdot I \cdot \left(1 - \frac{I}{N}\right)$$

MODELLO LOGISTICO
Risoluzione dell'equazione differenziale

Equazione differenziale (a variabili separabili):

$$I' = \lambda \cdot I \cdot \left(1 - \frac{I}{N}\right)$$

Separazione delle variabili:

1. $$\frac{dI}{dt} = \lambda I \left(1 - \frac{I}{N}\right)$$

2. $$\int \frac{1}{I\left(1 - \frac{I}{N}\right)} dI = \int \lambda dt$$

Applicazione del metodo delle razionali fratte:

$$\frac{1}{I\left(1-\frac{I}{N}\right)}=\frac{A}{I}+\frac{B}{\left(1-\frac{I}{N}\right)} \quad \Rightarrow \quad A=1,\ B=\frac{1}{N}$$

Applicazione del metodo delle razionali fratte:

$$\frac{1}{I\left(1-\frac{I}{N}\right)} = \frac{A}{I} + \frac{B}{\left(1-\frac{I}{N}\right)} \quad \Rightarrow \quad A = 1,\ B = \frac{1}{N}$$

Risoluzione dell'integrale:

$$\int \left(\frac{1}{I} + \frac{1}{N-I}\right) dI = \lambda t + c$$

$$\ln\left(\frac{I}{N-I}\right) = \lambda t + c$$

$$I = \frac{Ne^{\lambda t}e^{c}}{N + e^{\lambda t}e^{c}}$$

Determinazione della costante e^c in relazione a $I(0)$

$$I\left(0\right) = \frac{Ne^c}{N + e^c} \Rightarrow e^c = \frac{I(0)N}{N - I(0)}$$

Determinazione della costante e^c in relazione a $I(0)$

$$I(0) = \frac{Ne^c}{N + e^c} \Rightarrow e^c = \frac{I(0)N}{N - I(0)}$$

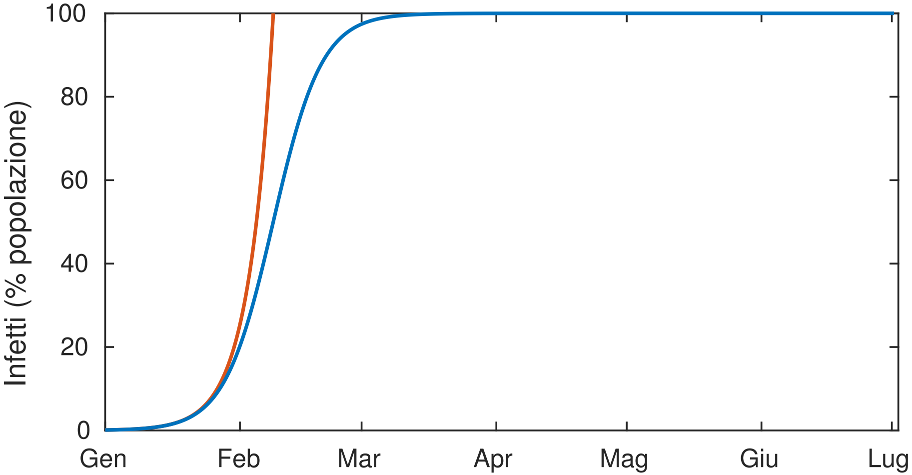
$$I(t) = \frac{I(0) \cdot N \cdot e^{\lambda t}}{N - I(0) + I(0) \cdot e^{\lambda t}}$$

Dove:

- $I(t)$: numero di infetti al giorno t
- $I(0)$: numero iniziale di infetti
- N: popolazione totale
- λ: numero di contagi al giorno (per ogni infetto)

MODELLO LOGISTICO

Il grafico



$$N = I(t) + S(t) + R(t)$$

MODELLO SIR
Il modello

$$\mathbf{N = I(t) + S(t) + R(t)}$$

$$\begin{cases} S(t+1) - S(t) &= -\lambda \cdot I \cdot \frac{S}{N} \\[2ex] I(t+1) - I(t) &= \lambda \cdot I \cdot \frac{S}{N} - \gamma \cdot I \\ &= \lambda \cdot I \cdot \left(\frac{S}{N} - \frac{\gamma}{\lambda} \right) \end{cases}$$

- λ: numero di contagi al giorno (per ogni infetto)
- γ: $\frac{1}{\textit{durata malattia}}$

Spesso si sente parlare di fattore ρ_0. Cos'è?

- ρ_0: numero di contagi (per ogni infetto) durante tutta la durata della malattia
- $\rho_0 = \frac{\lambda}{\gamma}$

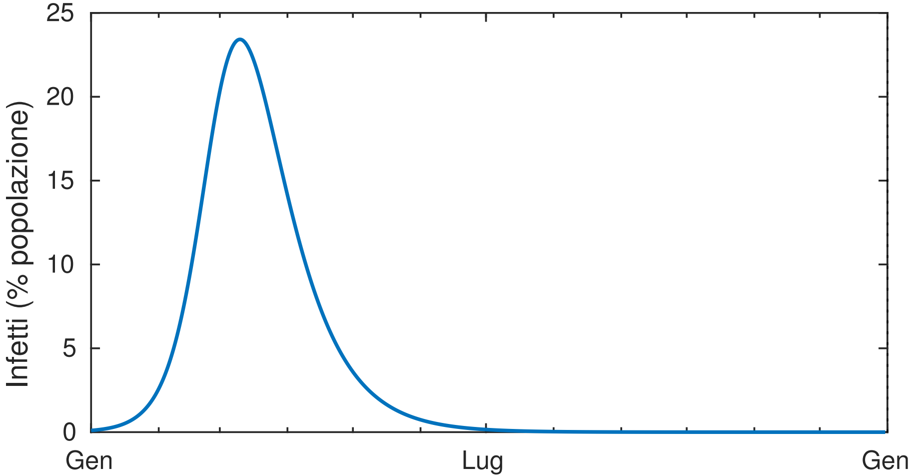
MODELLO SIR

Il fattore ρ_0

Spesso si sente parlare di fattore ρ_0. Cos'è?

- ρ_0: numero di contagi (per ogni infetto) durante tutta la durata della malattia
- $\rho_0 = \frac{\lambda}{\gamma}$
- $\rho = \frac{S}{N} \cdot \rho_0$

SE $\rho < 1$ IL CONTAGIO RECEDE!



1. FASE ESPONENZIALE ($\rho > 1$)
2. PICCO DEL CONTAGIO ($\rho \approx 1$)
3. RECESSIONE DEL CONTAGIO ($\rho < 1$)

MODELLO SIR

Come il nostro comportamento può influenzare l'andamento del grafico

Come si può abbassare il fattore ρ? $\left(\rho = \frac{S}{N} \cdot \frac{\lambda}{\gamma}\right)$

MODELLO SIR

Come il nostro comportamento può influenzare l'andamento del grafico

Come si può abbassare il fattore ρ? $\left(\rho = \frac{S}{N} \cdot \frac{\lambda}{\gamma}\right)$

- Aumentare $\gamma \rightarrow$ diminuire i tempi di guarigione:
  -NUOVI FARMACI

MODELLO SIR

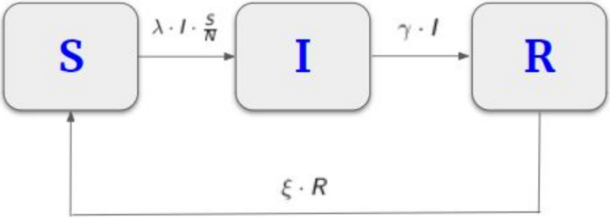
Come il nostro comportamento può influenzare l'andamento del grafico

Come si può abbassare il fattore ρ? $\left(\rho = \frac{S}{N} \cdot \frac{\lambda}{\gamma}\right)$

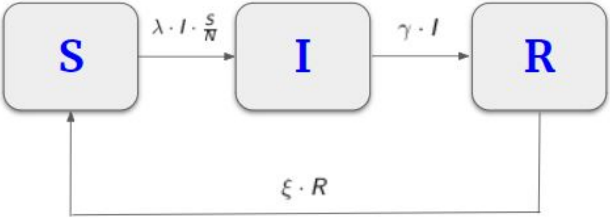
- Aumentare $\gamma \rightarrow$ diminuire i tempi di guarigione:
  -NUOVI FARMACI
- Diminuire $\lambda \rightarrow$ diminuire i contagi giornalieri:
  -STARE A CASA
  -USARE LE MASCHERINE
  -LAVARSI LE MANI

Come si può abbassare il fattore ρ? $\left(\rho = \frac{S}{N} \cdot \frac{\lambda}{\gamma}\right)$

- Aumentare $\gamma \rightarrow$ diminuire i tempi di guarigione:
  -NUOVI FARMACI
- Diminuire $\lambda \rightarrow$ diminuire i contagi giornalieri:
  -STARE A CASA
  -USARE LE MASCHERINE
  -LAVARSI LE MANI
- Aumentare i risolti (R) $\rightarrow$ VACCINO



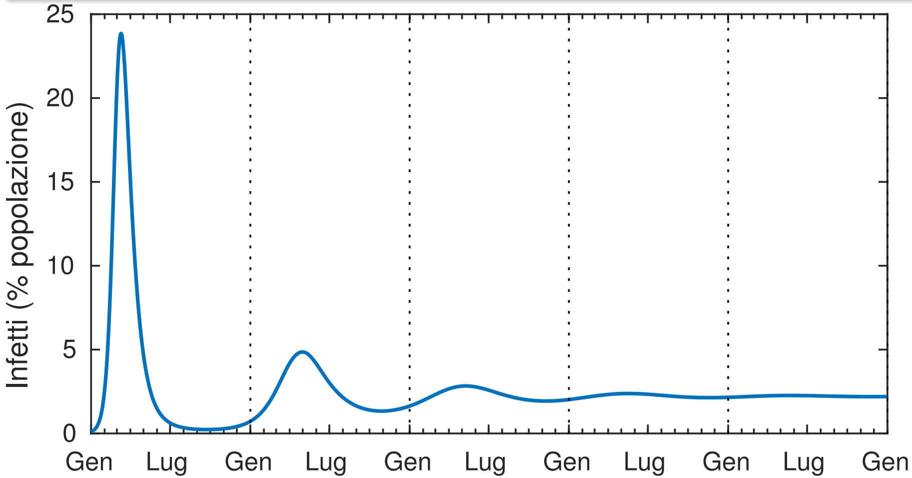
- ξ è la probabilità giornaliera di perdere l'immunità



- ξ è la probabilità giornaliera di perdere l'immunità
- I RISOLTI POSSONO RICONTRARRE IL VIRUS!

Che effetto ha ξ sull'andamento del grafico?

Che effetto ha ξ sull'andamento del grafico?



MODELLO SIRS

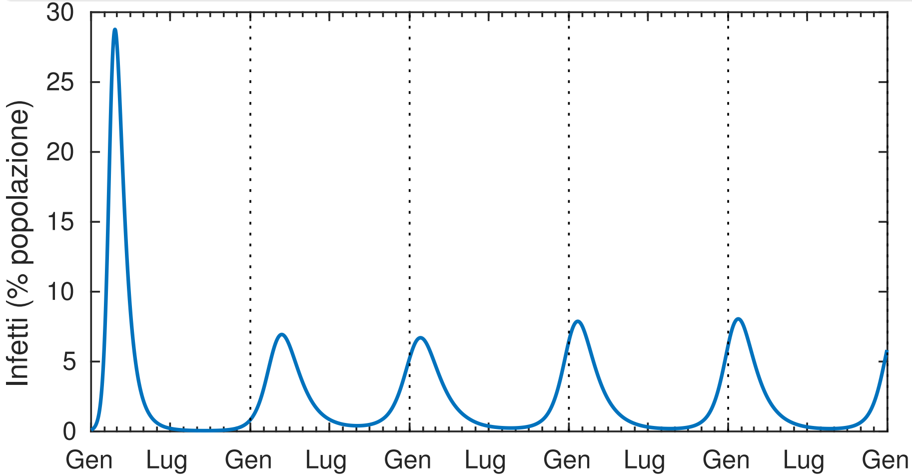
Il grafico e l'andamento stagionale dovuto a λ

λ può variare a seconda della stagione. Qual è l'effetto sul grafico?

MODELLO SIRS

Il grafico e l'andamento stagionale dovuto a λ

λ può variare a seconda della stagione. Qual è l'effetto sul grafico?



UNO SGUARDO ALL'EQUAZIONE DEL DECADIMENTO RADIOATTIVO

Un'equazione differenziale molto simile alle precedenti

- Radioattività: Scoperta di Henri Bequerel (1896)
- I nuclei con $\mathbb{Z} > 83$ sono instabili e decadono
- Il decadimento è un evento casuale, ma si può prevedere l'andamento

UNO SGUARDO ALL'EQUAZIONE DEL DECADIMENTO RADIOATTIVO

Un'equazione differenziale molto simile alle precedenti

- Radioattività: Scoperta di Henri Bequerel (1896)
- I nuclei con $\mathbb{Z} > 83$ sono instabili e decadono
- Il decadimento è un evento casuale, ma si può prevedere l'andamento

MODELLO ESPONENZIALE

$$I(t) = I(0) \cdot (\lambda + 1)^t$$

DECADIMENTO RADIOATTIVO

$$N(t) = N(0) \cdot e^{-\lambda t}$$

UNO SGUARDO ALL'EQUAZIONE DEL DECADIMENTO RADIOATTIVO

Un'equazione differenziale molto simile alle precedenti

- Radioattività: Scoperta di Henri Bequerel (1896)
- I nuclei con $\mathbb{Z} > 83$ sono instabili e decadono
- Il decadimento è un evento casuale, ma si può prevedere l'andamento

MODELLO ESPONENZIALE

$$I(t) = I(0) \cdot (\lambda + 1)^t$$

- $I(t)$:numero di infetti al giorno t

DECADIMENTO RADIOATTIVO

$$N(t) = N(0) \cdot e^{-\lambda t}$$

- $N(t)$: nuclei radioattivi all'istante t

UNO SGUARDO ALL'EQUAZIONE DEL DECADIMENTO RADIOATTIVO

Un'equazione differenziale molto simile alle precedenti

- Radioattività: Scoperta di Henri Bequerel (1896)
- I nuclei con $\mathbb{Z} > 83$ sono instabili e decadono
- Il decadimento è un evento casuale, ma si può prevedere l'andamento

MODELLO ESPONENZIALE

$$I(t) = I(0) \cdot (\lambda + 1)^t$$

- (A) $I(t)$:numero di infetti al giorno t
- (B) $I(0)$:numero iniziale di infetti

DECADIMENTO RADIOATTIVO

$$N(t) = N(0) \cdot e^{-\lambda t}$$

- (A) $N(t)$: nuclei radioattivi all'istante t
- (B) $N(0)$: nuclei radioattivi iniziali

UNO SGUARDO ALL'EQUAZIONE DEL DECADIMENTO RADIOATTIVO

Un'equazione differenziale molto simile alle precedenti

- Radioattività: Scoperta di Henri Bequerel (1896)
- I nuclei con $\mathbb{Z} > 83$ sono instabili e decadono
- Il decadimento è un evento casuale, ma si può prevedere l'andamento

MODELLO ESPONENZIALE

$$I(t) = I(0) \cdot (\lambda + 1)^t$$

- A. $I(t)$:numero di infetti al giorno t
- B. $I(0)$:numero iniziale di infetti
- C. λ: costante di contagi giornalieri

DECADIMENTO RADIOATTIVO

$$N(t) = N(0) \cdot e^{-\lambda t}$$

- A. $N(t)$: nuclei radioattivi all'istante t
- B. $N(0)$: nuclei radioattivi iniziali
- C. λ: costante di decadimento

UNO SGUARDO ALL'EQUAZIONE DEL DECADIMENTO RADIOATTIVO

Un'equazione differenziale molto simile alle precedenti

- Radioattività: Scoperta di Henri Bequerel (1896)
- I nuclei con $\mathbb{Z} > 83$ sono instabili e decadono
- Il decadimento è un evento casuale, ma si può prevedere l'andamento

MODELLO ESPONENZIALE

$$I(t) = I(0) \cdot (\lambda + 1)^t$$

- A. $I(t)$:numero di infetti al giorno t
- B. $I(0)$:numero iniziale di infetti
- C. λ: costante di contagi giornalieri
- D. $\lim_{t \to +\infty} I(t) = +\infty$

DECADIMENTO RADIOATTIVO

$$N(t) = N(0) \cdot e^{-\lambda t}$$

- A. $N(t)$: nuclei radioattivi all'istante t
- B. $N(0)$: nuclei radioattivi iniziali
- C. λ: costante di decadimento
- D. $\lim_{t \to +\infty} N(t) = 0$