swag di una pandemia con un modello SIRV

Giulio Pastorello

Ottobre 2023

1 Il Modello

Per descrivere l'andamento della pandemia si è scelto di usare un modello SIR al quale è stata aggiunta un quarta equazione per rappresentare i vaccinati.
Le equazioni che descrivono l'evoluzione della pandemia sono quindi:

- $S(t)$: "Susceptible". Descrive il numero delle persone non malate che non hanno mai contratto l'infezione.
- $I(t)$: "Infected". Il numero di persone che ad un dato tempo t sono malate.
- $R(t)$: "Removed". Una volta che una persona è stata contagiata, dopo un certo intervallo di tempo viene *rimossa*, ovvero guarisce o muore. Si assume che, una volta guariti, i soggetti diventino immuni. L'unica possibilità di transizione da uno stato all'altro è quindi: $S \to I \to R$.
- $V(t)$: "Vaccinated". Questa equazione è un'aggiunta al modello SIR "standard", che prevede solo le prime tre equazioni. Anche in questo caso si fa l'assunzione che una persona vaccinata non possa più ammalarsi.

Il vincolo fondamentale del modello è che la popolazione totale sia costante:

$$S(t) + I(t) + R(t) + V(t) = N$$

Questa è un'approssimazione ragionevole se si fa l'assunzione che il numero totale di persone che muoiono a causa del virus sia trascurabile rispetto alla popolazione totale.

1.1 Parametri

Il modello descrive l'andamento della pandemia attraverso alcuni parametri:

- $\beta \in [0, 1]$: questo è interpretabile come la *contagiosità* del virus, ovvero la probabilità di trasmissione a seguito di un contatto tra un suscettibile e un infetto.
- $\gamma \in [0, 1]$: è l'inverso della durata media di un'infezione, che corrisponde alla probabilità di guarigione o morte.
- $\eta \in \mathbb{N}, \eta < N$: il numero di persone non vaccinabili, per motivi medici o personali.
- $\mu \in [0, 1]$: rappresenta la velocità delle vaccinazioni.
- $\xi \in [0, 1]$: rappresenta l'efficacia delle vaccinazioni. Si usa come fattore moltiplicativo.

1.2 Condizioni Iniziali

Per studiare la diffusione del virus vengono anche usati come condizioni iniziali i seguenti termini:

- $I_0 \in \mathbb{N}, I_0 < N$: malati al tempo $t = 0$.
- $V_0 \in \mathbb{N}, V_0 < N$: vaccinati al tempo $t = 0$.
- $R_0 \in \mathbb{N}, R_0 < N$: rimossi al tempo $t = 0$.

Ovviamente si avrà che il numero di suscettibili dall'inizio della simulazione ($t = 0$) S_0 sarà:
$S_0 = N - I_0 - V_0 - R_0$.

1.3 Equazioni

Usando i parametri descritti sopra, le equazioni differenziali che descrivono la diffusione della pandemia sono quindi quattro:

$$\frac{dS}{dt}(t) = -\beta \frac{S(t)}{N} I(t) - \frac{dV}{dt}(t) \tag{1}$$

$$\frac{dI}{dt}(t) = \beta \frac{S(t)}{N} I(t) - \gamma I(t) \tag{2}$$

$$\frac{dR}{dt}(t) = \gamma I(t) \tag{3}$$

$$\frac{dV}{dt}(t) = \mu \frac{V(t)}{\xi} \left(1 - \frac{V(t)}{\xi(N-\eta)}\right) \tag{4}$$

Una simulazione basata su dati rappresentativi dell'Emilia-Romagna è mostrata in figura (1). Si è usato: popolazione totale $N = 4459000$, $\beta = 0.05$, $\gamma = 0.02$, $I_0 = 530502$, $R_0 = 320000$, $V_0 = 600437$, non vaccinabili $\eta = 251042$, velocità vaccinazioni $\mu = 0.05$, efficacia vaccino $\xi = 0.83$.

1.4 Curva Logistica

Per rappresentare la progressione della campagna vaccinale, nell'equazione (4) si è scelto di usare un'equazione logistica generalizzata: $f'(x) = f(x)(1 - f(x))$, che ha come soluzione un sigmoide. Quest'approssimazione è ragionevole perché ci si aspettava un inizio più lento dovuto alla scarsità di vaccini e all'organizzazione non ancora rodata, seguito da una crescita veloce della quantità di persone vaccinate, seguito inevitabilmente da una diminuzione dovuta al fatto che le persone da vaccinare sono sempre meno. COME CAZZO HO STIMATO QUEI PARAMETRI. Il limite dell'equazione logistica è che usando come numero di vaccinati iniziali $\nu = 0$ la campagna vaccinale resta a zero, ma partendo da un qualsiasi altro numero si arriverà sicuramente a vaccinare tutti i vaccinabili, in un tempo che dipende dalla velocità delle vaccinazioni μ. In figura (2) un andamento possibile della curva dei vaccinati.

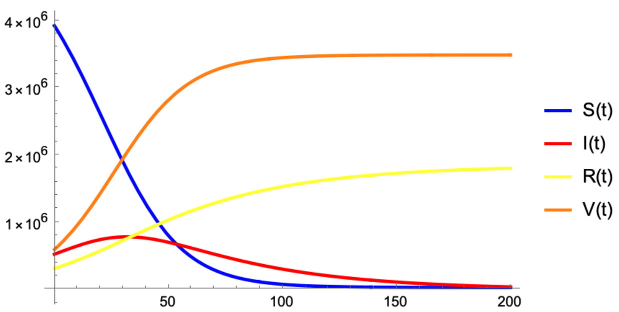

Figure 1: *Comportamento del modello SIRV con dati rappresentativi dell'Emilia-Romagna*

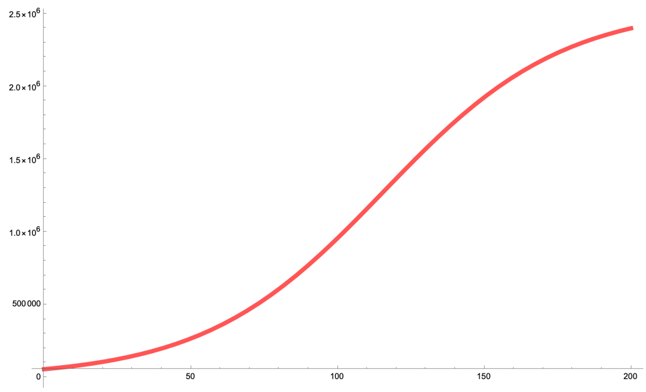

Figure 2: *Curva logistica con* $\nu = 56980, \mu = 0.0274216, \eta = 1418957$, *e popolazione totale della regione Emilia-Romagna.*