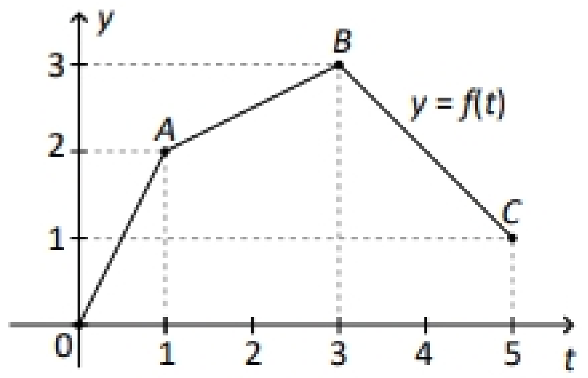
Tarefa 4 - Prof Sávio

Nome: Giullio Emmanuel da Cruz Di Gerolamo RA: 790965

1. Considere a função $f(t)$ cujo gráfico é a linha poligonal OABC indicada no diagrama. Deduza uma expressão que define $f(t)$ dando sua resposta na forma

$$f(t) = \begin{cases} & \text{se } 0 \leq t \leq 1 \\ & \text{se } 1 \leq t \leq 3 \\ & \text{se } 3 \leq t \leq 5 \end{cases}$$



para $0 \leqslant t \leqslant 1$:

$(y - y_0) = m \cdot (t - t_0)$

$2 - 0 = m \cdot (1 - 0)$

$m = 2$

$y = 2t$

para $1 \leqslant t \leqslant 3$

$(y - y_0) = m \cdot (t - t_0)$

$3 - 2 = m \cdot (3 - 1)$

$m = \frac{1}{2}$

$y = \frac{t}{2} - \frac{1}{2} + 2$

$y = \frac{t + 3}{2}$

para $3 \leqslant t \leqslant 5$

$(y - y_0) = m \cdot (t - t_0)$

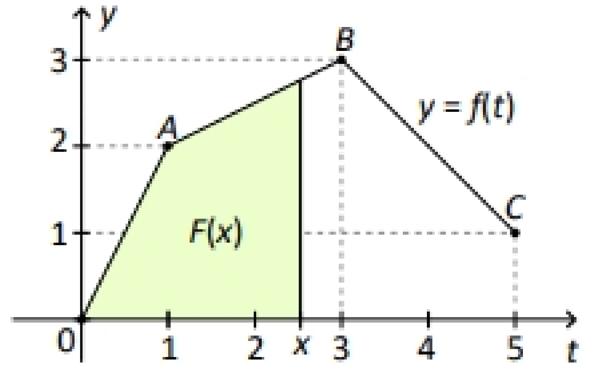
$1 - 3 = m \cdot (5 - 3)$

$m = -1$

$y = -t + 6$

$$f(t) = \begin{cases} 2t & \text{se } 0 \leqslant t \leqslant 1 \\ \frac{t+3}{2} & \text{se } 1 \leqslant t \leqslant 3 \\ -t + 6 & \text{se } 3 \leqslant t \leqslant 5 \end{cases}$$

2. Para cada x, $0 \leq x \leq 5$, $F(x)$ é a área sob o gráfico de f, e acima do eixo t, no intervalo $0 \leq t \leq x$. Usando apenas conceitos de geometria elementar (áreas de triângulos, trapézios, etc.), deduza uma expressão para $F(x)$ trabalhando separadamente os casos $0 \leq x \leq 1$, $1 \leq x \leq 3$, $3 \leq x \leq 5$.



para $0 \leqslant t \leqslant 1$:

$f(t) = 2$

$$F(x) = \frac{x \cdot y}{2} = \frac{x \cdot 2x}{2}$$

$$F(x) = x^2$$

para $1 \leqslant t \leqslant 3$

$f(t) = \frac{t+3}{2}$

$$F(x) = \frac{(y+2)\cdot(x-1)}{2} + 1^2$$

$$F(x) = \frac{\frac{x+7}{2}\cdot(x-1)}{2} + 1$$

$$F(x) = \frac{x^2+6x-3}{4}$$

para $3 \leqslant t \leqslant 5$

$f(t) = -t+6$

$$F(x) = \frac{(3+y)\cdot(x-3)}{2} + 6$$

$$F(x) = \frac{(-x+9)\cdot(x-3)}{2} + 6$$

$$F(x) = \frac{-x^2+12x-15}{2}$$

3. Para cada x, $0 \leq x \leq 5$, deduza uma expressão para $F(x)$ calculando integrais definidas. Neste caso, $F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$.

Deduza uma expressão para $F(x)$ trabalhando separadamente os casos $0 \leq x \leq 1$, $1 \leq x \leq 3$, $3 \leq x \leq 5$. Por exemplo, se $1 \leq x \leq 3$, $F(x) = \int_0^1 f(t)\,dt + \int_1^x f(t)\,dt$.

Os resultados obtidos neste problema devem coincidir com os resultados do problema 2.

para $0 \leqslant t \leqslant 1$:

$$F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$$

$$F(x) = x^2$$

para $1 \leqslant t \leqslant 3$

$$F(x) = \int_0^1 f(t)\,dt + \int_1^x f(t)\,dt$$

$$\int_1^x f(t)\,dt = \frac{x^2+6x}{4} - \frac{7}{4}$$

$$F(x) = \frac{x^2+6x}{4} - \frac{7}{4} + 1$$

$$F(x) = \frac{x^2+6x-3}{4}$$

para $3 \leqslant t \leqslant 5$

$$F(x) = \int_0^1 f(t)\,dt + \int_1^3 f(t)\,dt + \int_3^x f(t)\,dt$$

$$\int_3^x f(t)\,dt = \frac{-x^2}{2} + 6x - \left(-\frac{9}{2} + 18\right)$$

$$F(x) = \frac{-x^2+12x}{2} - \left(\frac{-9+36}{2}\right) + \frac{27}{4} - \frac{7}{4} + 1$$

$$F(x) = \frac{-x^2+12x-15}{2}$$

4. Agora calcule $F'(x)$ para cada x no intervalo $[0, 5]$. Embora a função $f(t)$ não tenha derivadas nos pontos 1 e 3, verifique que, no entanto, $F'(1)$ e $F'(3)$ estão definidas, calculando-as.

para $0 \leqslant t \leqslant 1$:

$$F(x) = x^2$$

$$F'(x) = 2x$$

para $1 \leqslant t \leqslant 3$

$$F(x) = \frac{x^2 + 6x - 3}{4}$$

$$F'(x) = \frac{2x + 6}{4}$$

$$F'(x) = \frac{x + 3}{2}$$

para $3 \leqslant t \leqslant 5$

$$F(x) = \frac{-x^2 + 12x - 15}{2}$$

$$F'(x) = \frac{-2x + 12}{2}$$

$$F'(x) = -x + 6$$

5. Qual é a relação entre $F'(x)$ e a função $f(t)$ definida no problema 1?

$F'(x)$ é a mesma equação que $f(t)$, porém com a variável "t" trocada por "x".

Assim, conclue-se que, a derivada da integral de uma função é a própria função.