Geometria Analitica e coniche

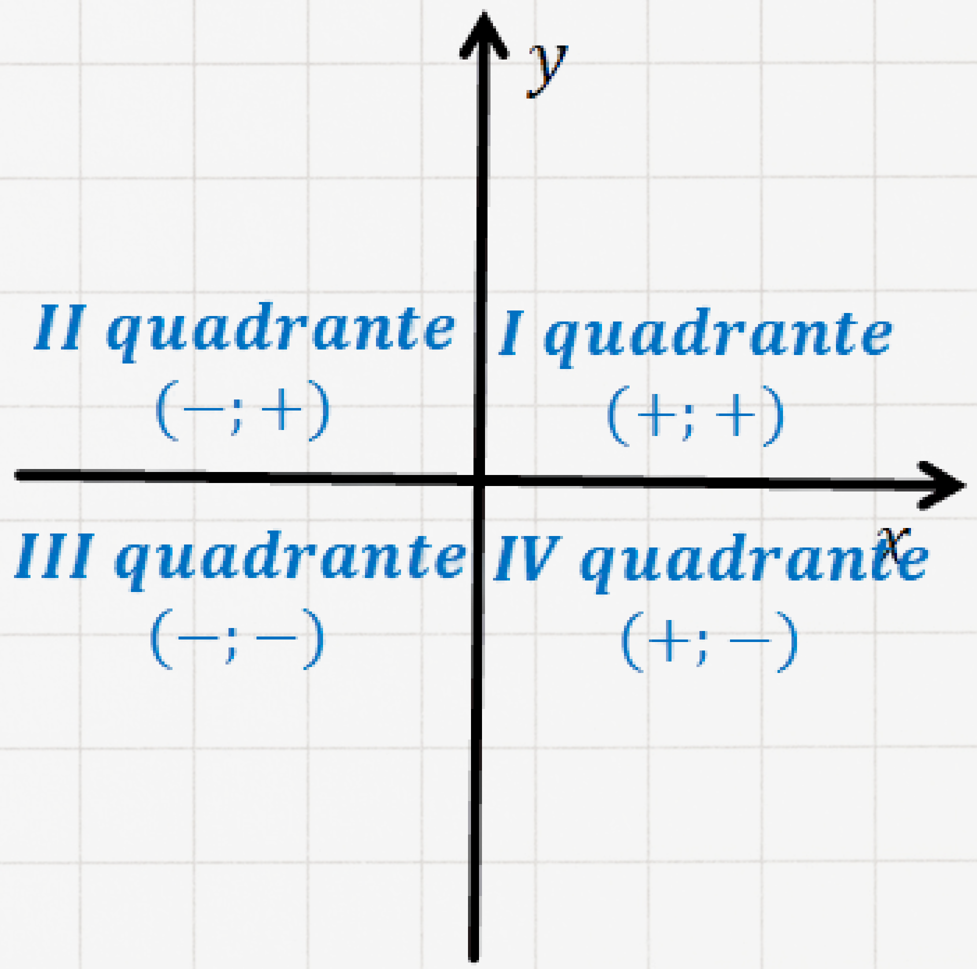
Lavoro di Giuliani, Scorticchini, Pinti, Nitrati e Domeniconi
4BM informatica
2024-25

indice:

Geometria Analitica

Definizione

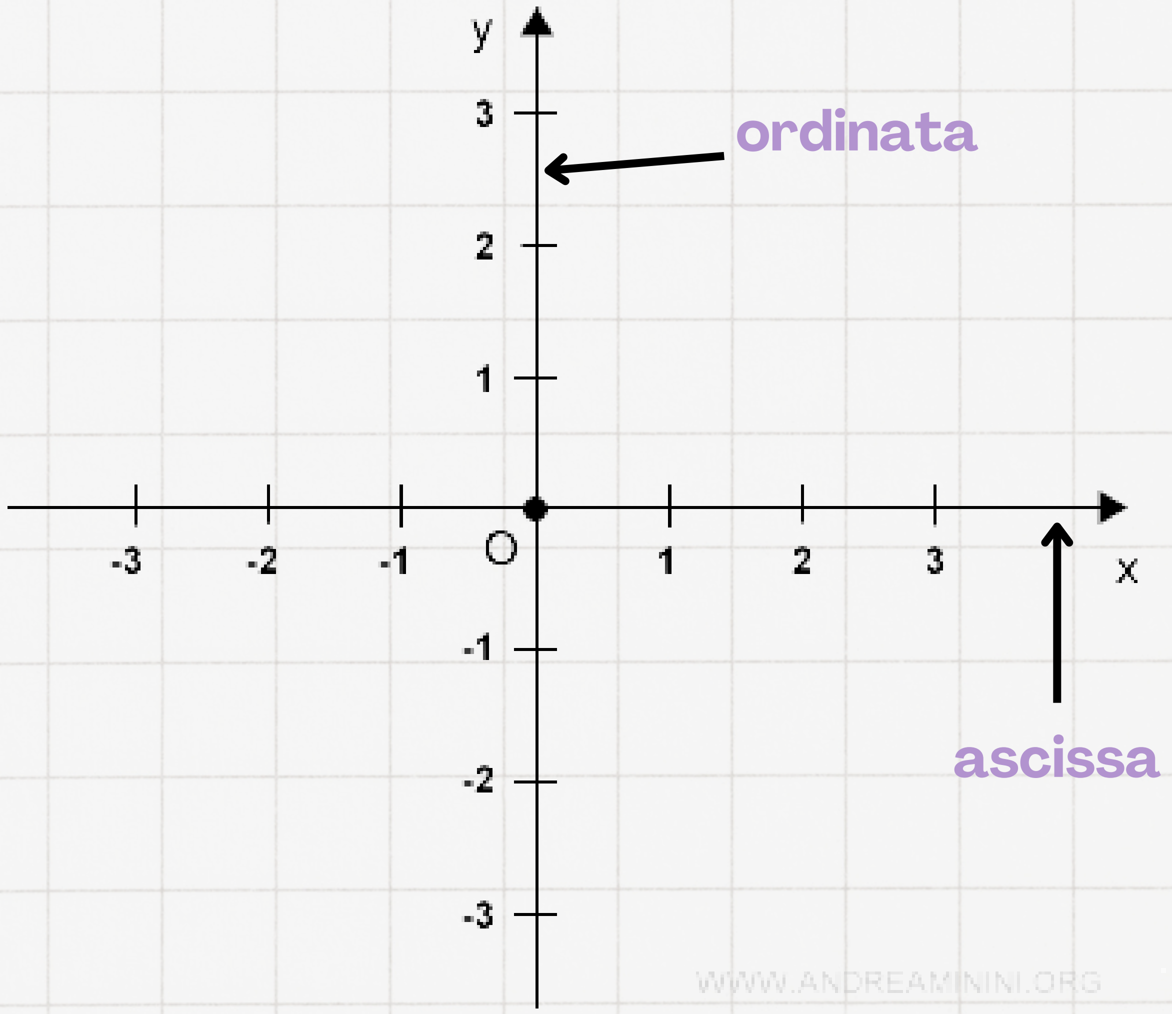
La geometria analitica è il ramo della geometria che studia le figure geometriche mediante un sistema di coordinate (x, y) e li descrive tramite equazioni e disequazioni



Il punto nel piano cartesiano e le sue coordinate

Il punto nel piano cartesiano si rappresenta con una coppia ordinata di numeri: **P(x, y)**

- **x**: distanza dall'asse verticale (ascissa)
- **y**: distanza dall'asse orizzontale (ordinata)



Distanza tra due punti

Per calcolare la distanza tra due punti, ad esempio: A(1, 2) e B(4, 6)

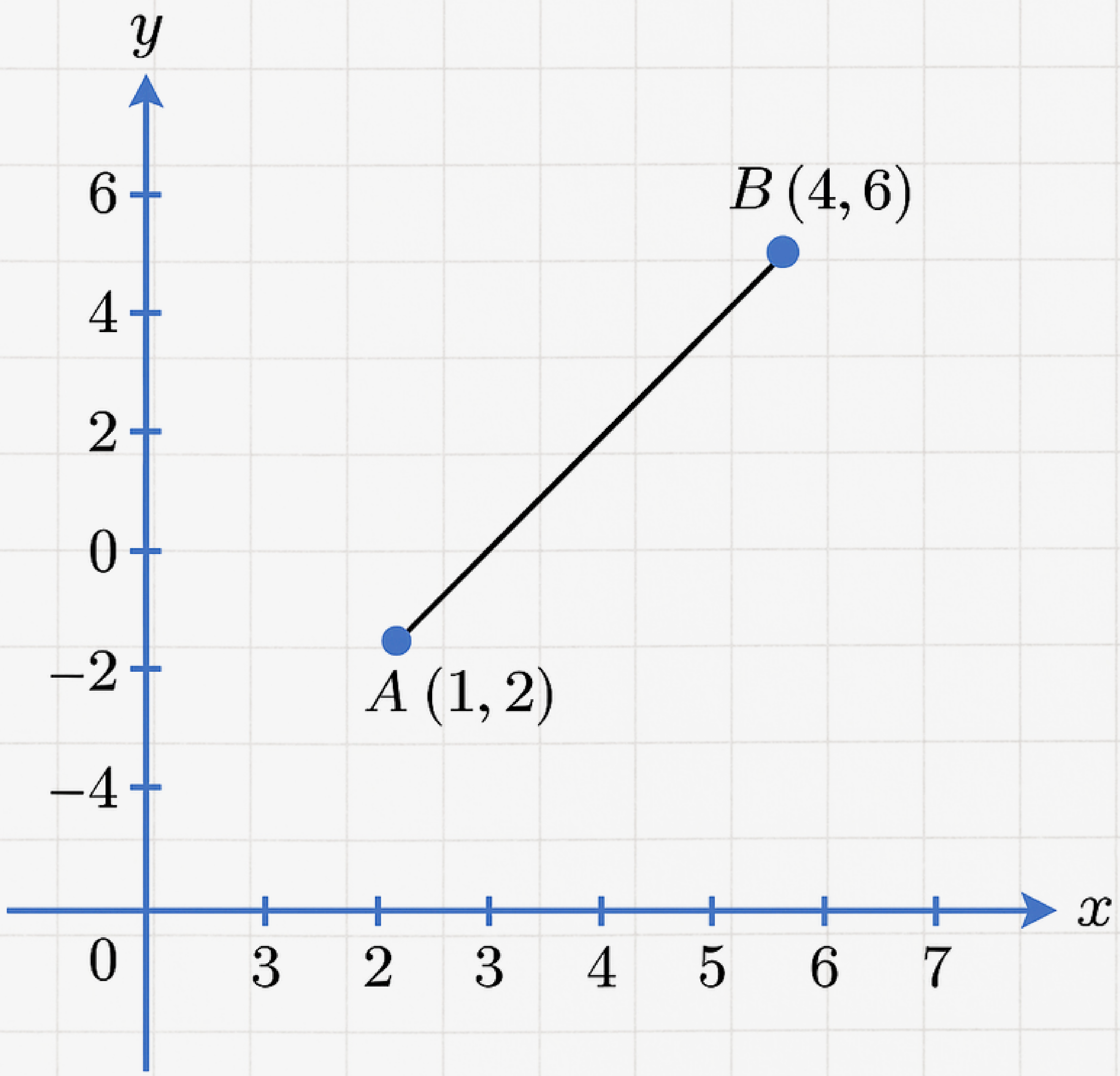
si usa la formula: $\mathbf{AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}}$

Applicazione della formula:

1. sostituzione delle coordinate: $\sqrt{(4 - 1)^2 + (6 - 2)^2} =$
2. calcolo delle differenze: $= \sqrt{3^2 + 4^2} =$
3. elevamento al quadrato: $= \sqrt{9 + 16} =$
4. somma finale e radice quadrata: $= \sqrt{25}$
5. risultato finale: 5

Distanza tra due punti

Grafico dei punti: A(1, 2) e B(4, 6)



La Retta

Definizione

La retta è un ente geometrico fondamentale, caratterizzato da lunghezza infinita e larghezza nulla. È formata da un insieme infinito di punti allineati nella stessa direzione e una retta nel piano cartesiano viene individuata da un equazione.

Equazione della retta in forma esplicita

L’equazione della retta in forma esplicita è:

Intercetta

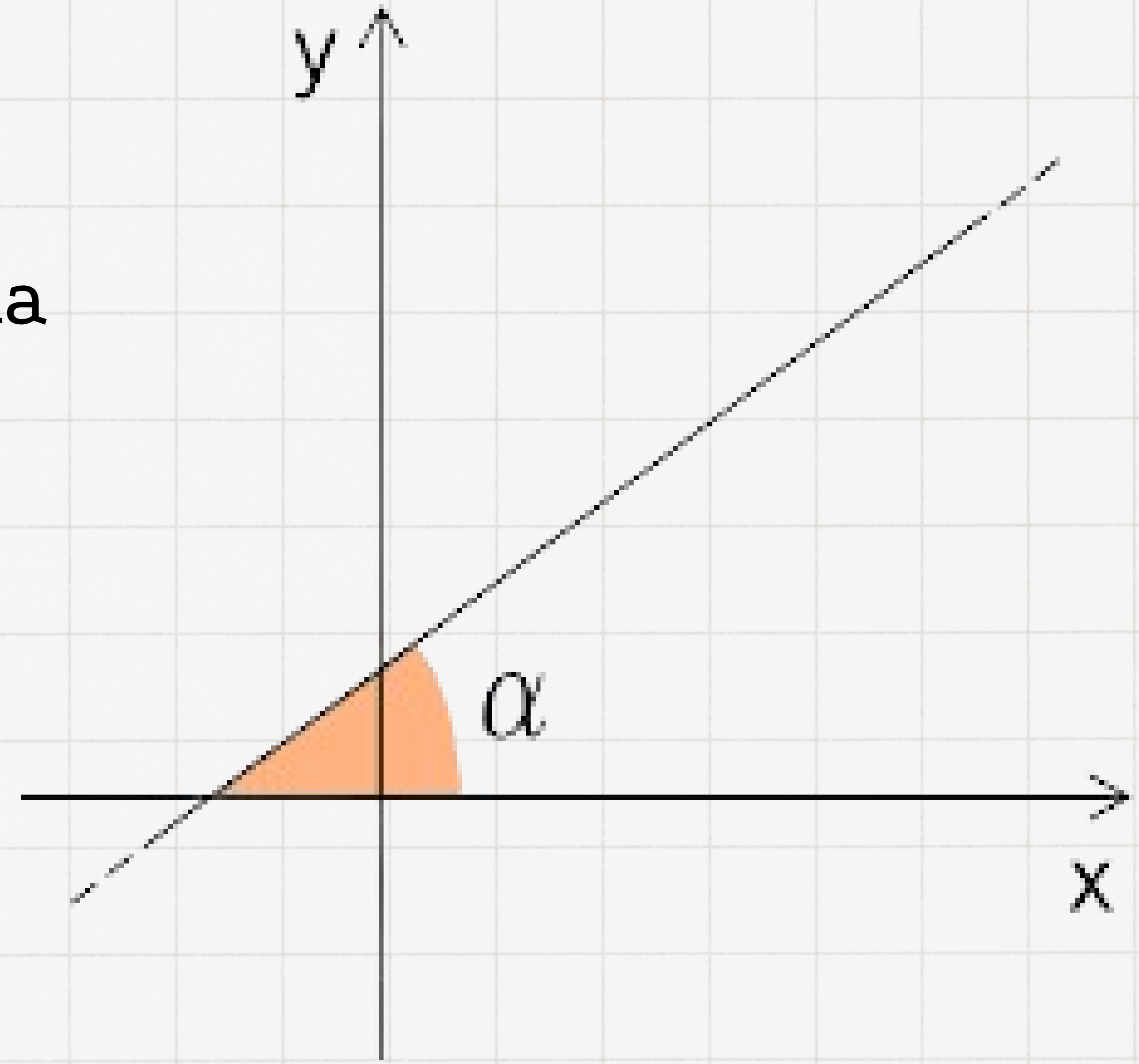
$$y = mx + q$$

Coefficiente angolare

Significato del coefficiente angolare

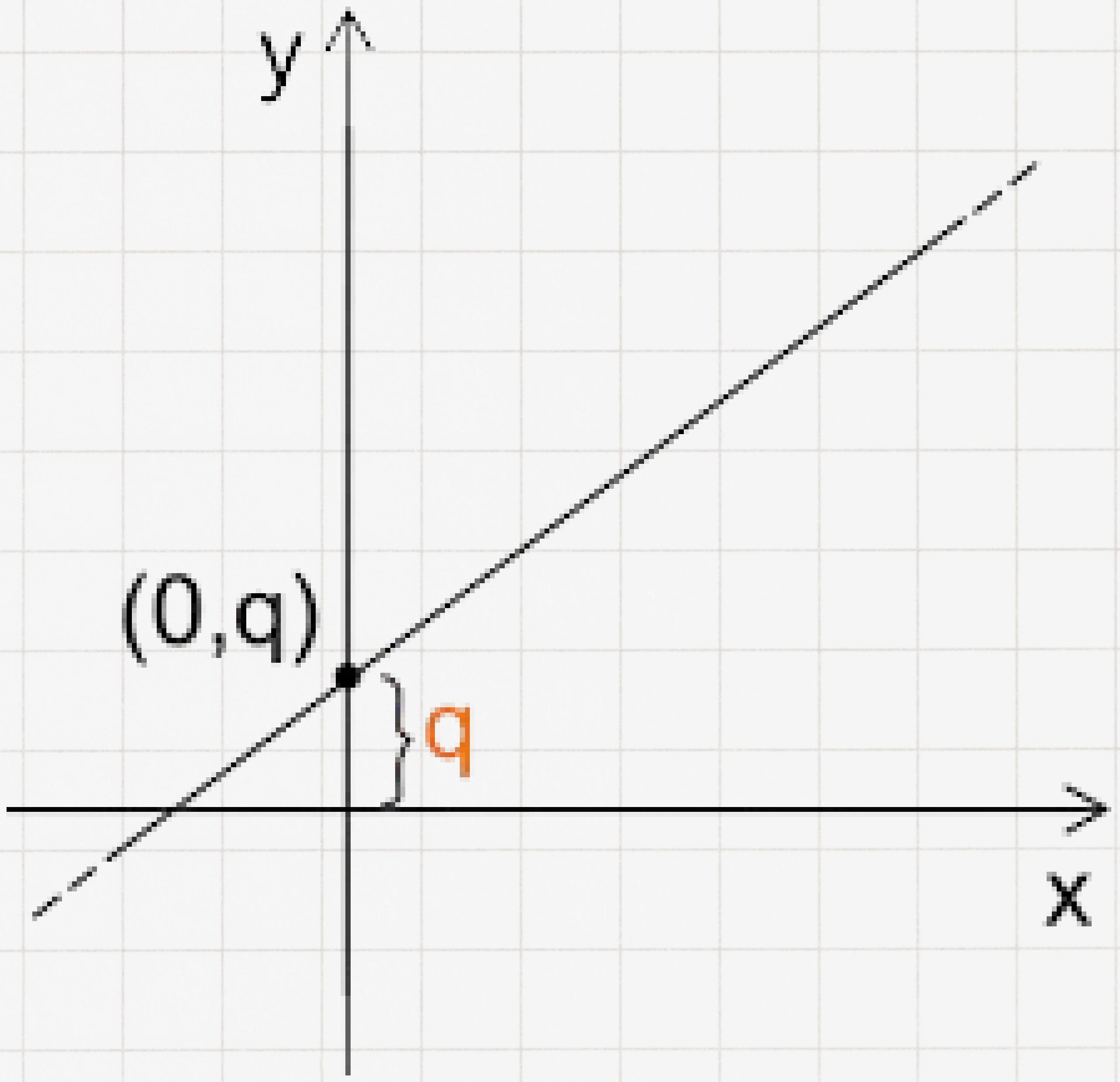
Il **coefficiente angolare** m indica quanto e in che verso la retta sale o scende:

- Se m>0 la retta sale da sinistra verso destra.
- Se m<0 la retta scende da sinistra verso destra.
- Se m=0 la retta è orizzontale.

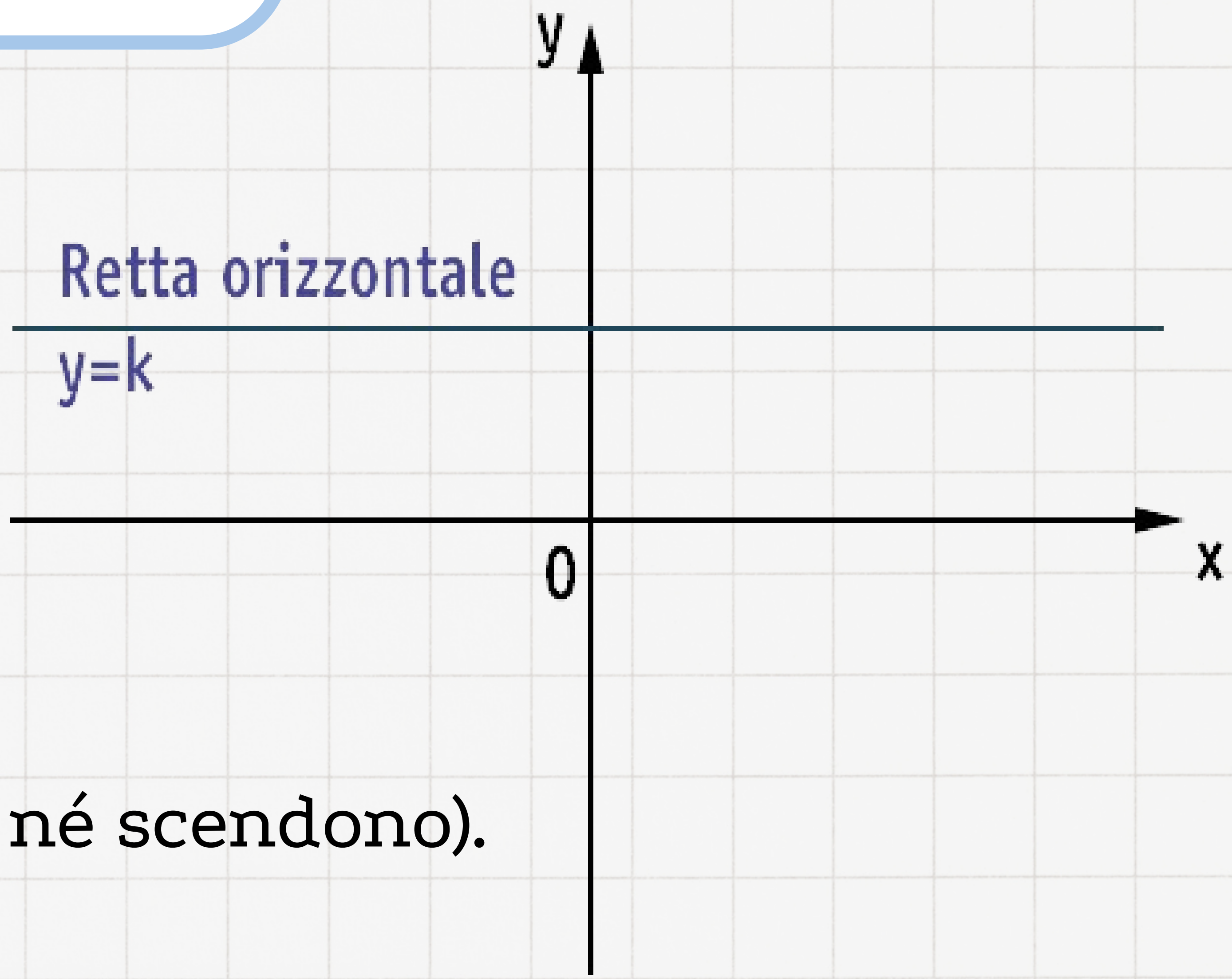


Significato dell’intercetta

l'intercetta q rappresenta il punto esatto dove la retta incontra l'asse y, in pratica è il valore di y quando x=0.



Rette particolari



Rette orizzontali

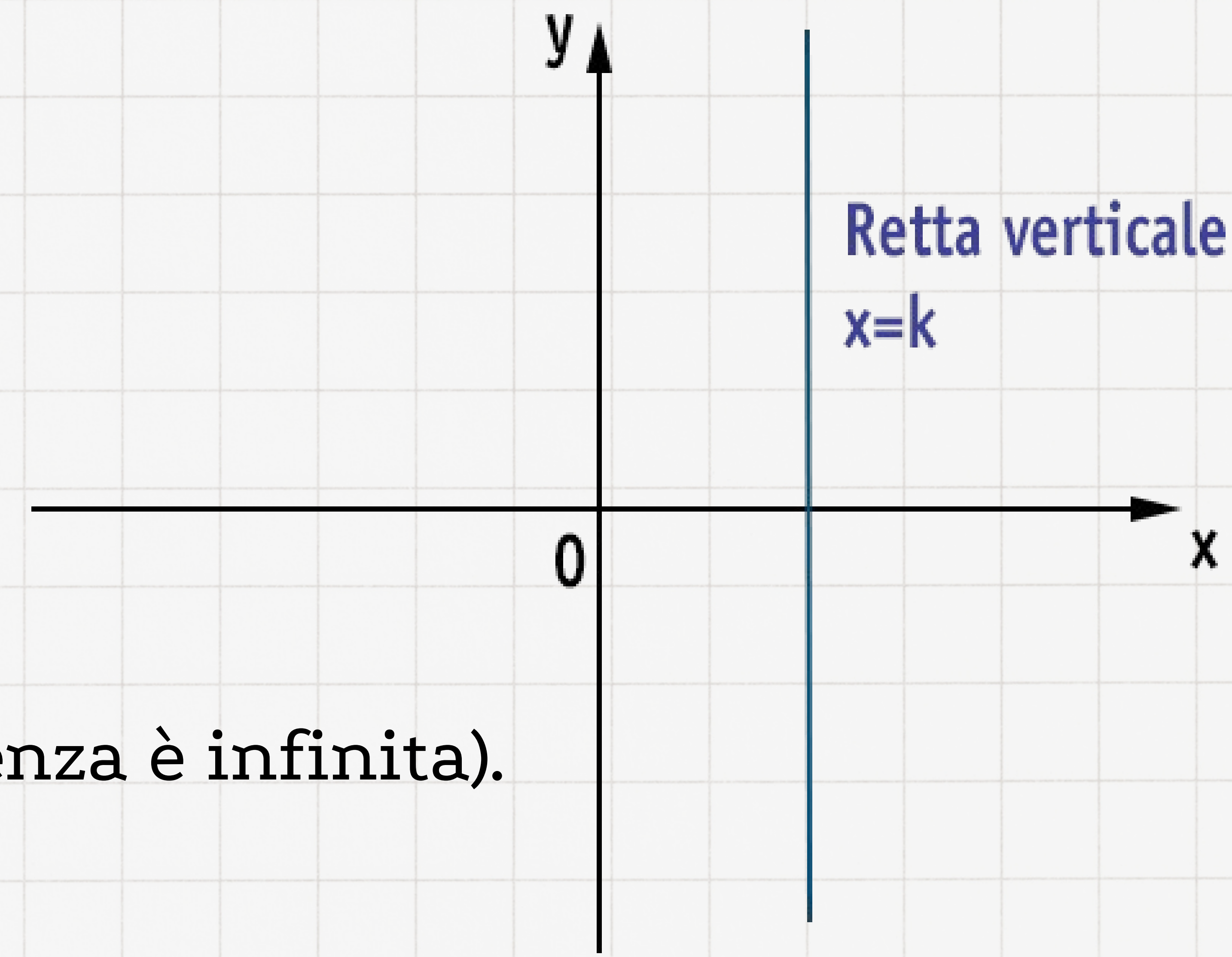
- Sono parallele all'asse x.
- Hanno coefficiente angolare m=0(quindi non salgono né scendono).

L'equazione in forma esplicita è:

y=n

- dove n è il punto dove la retta interseca con l'asse y.

Rette particolari



Rette verticali

- Sono parallele all'asse y.
- Non hanno coefficiente angolare definito (la pendenza è infinita).

l’equazione è di tipo:

x=n

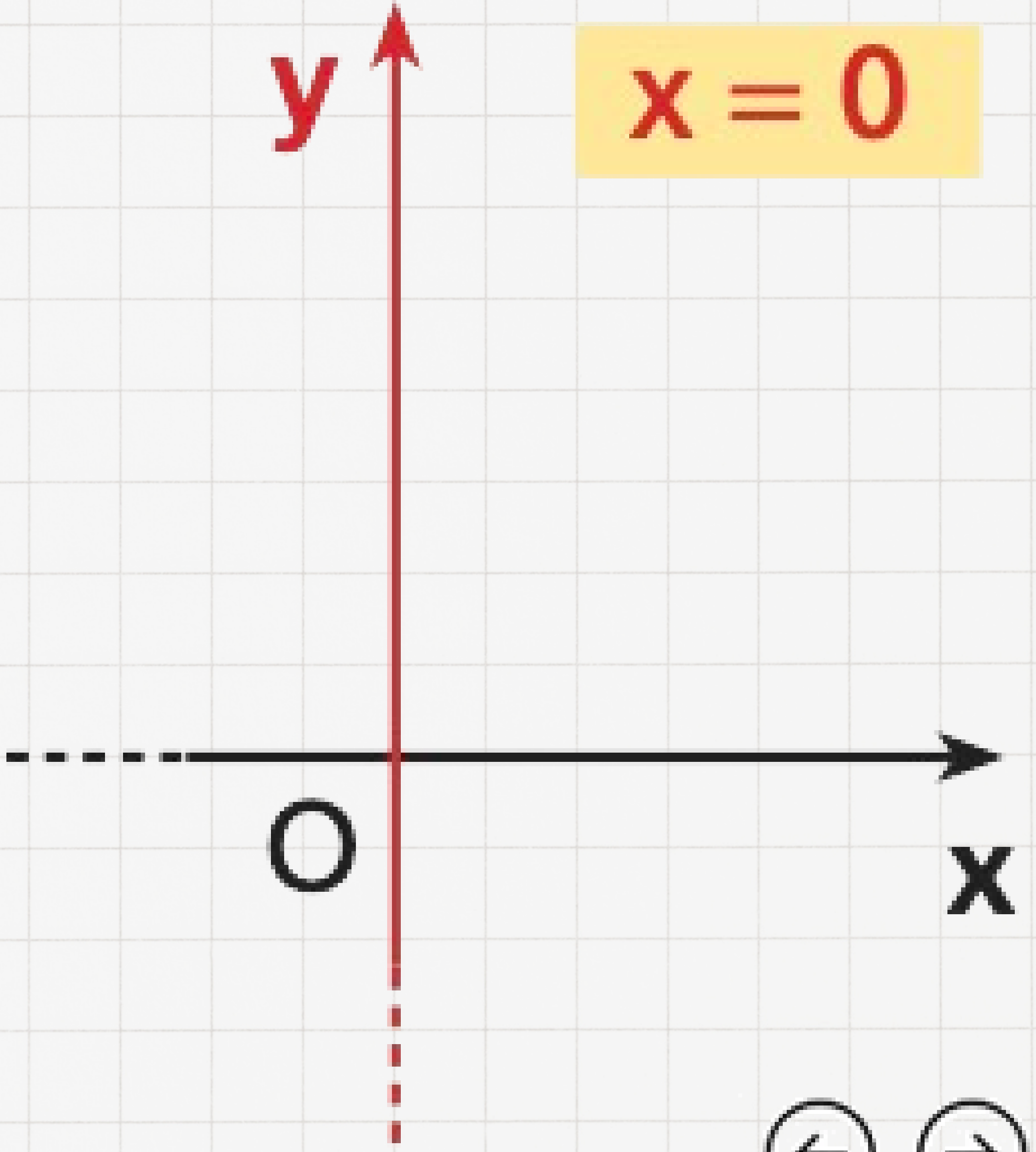
- dove n è il punto dove la retta interseca l’asse x.

Equazione dell'asse y

L'asse y è l'insieme dei punti del piano con ascissa (cioè la x) uguale a 0.

equazione:

x=0

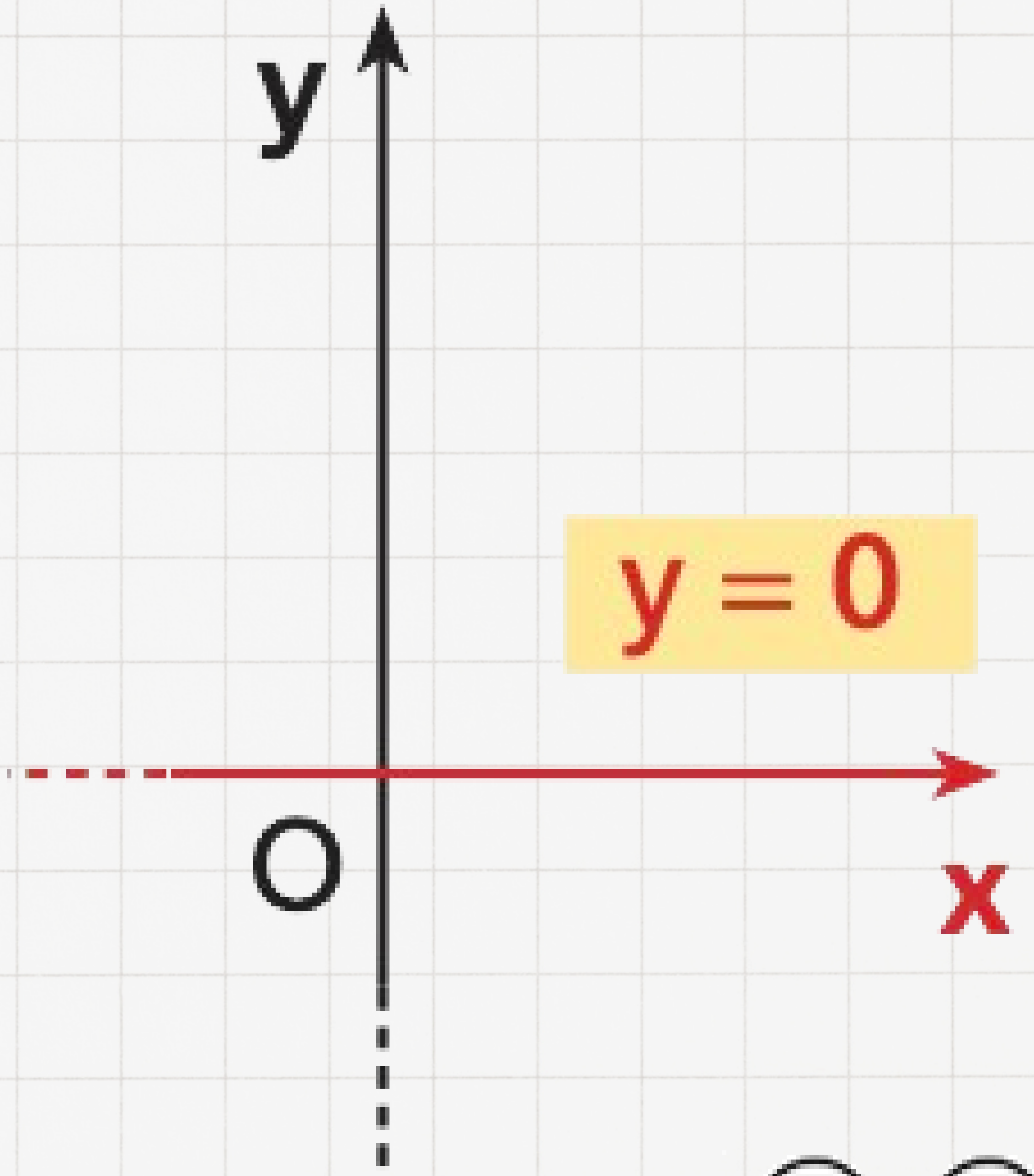


Equazione dell’asse x

L'asse x è l'insieme dei punti del piano con ordinata (cioè la y) uguale a 0.

equazione:

y=0

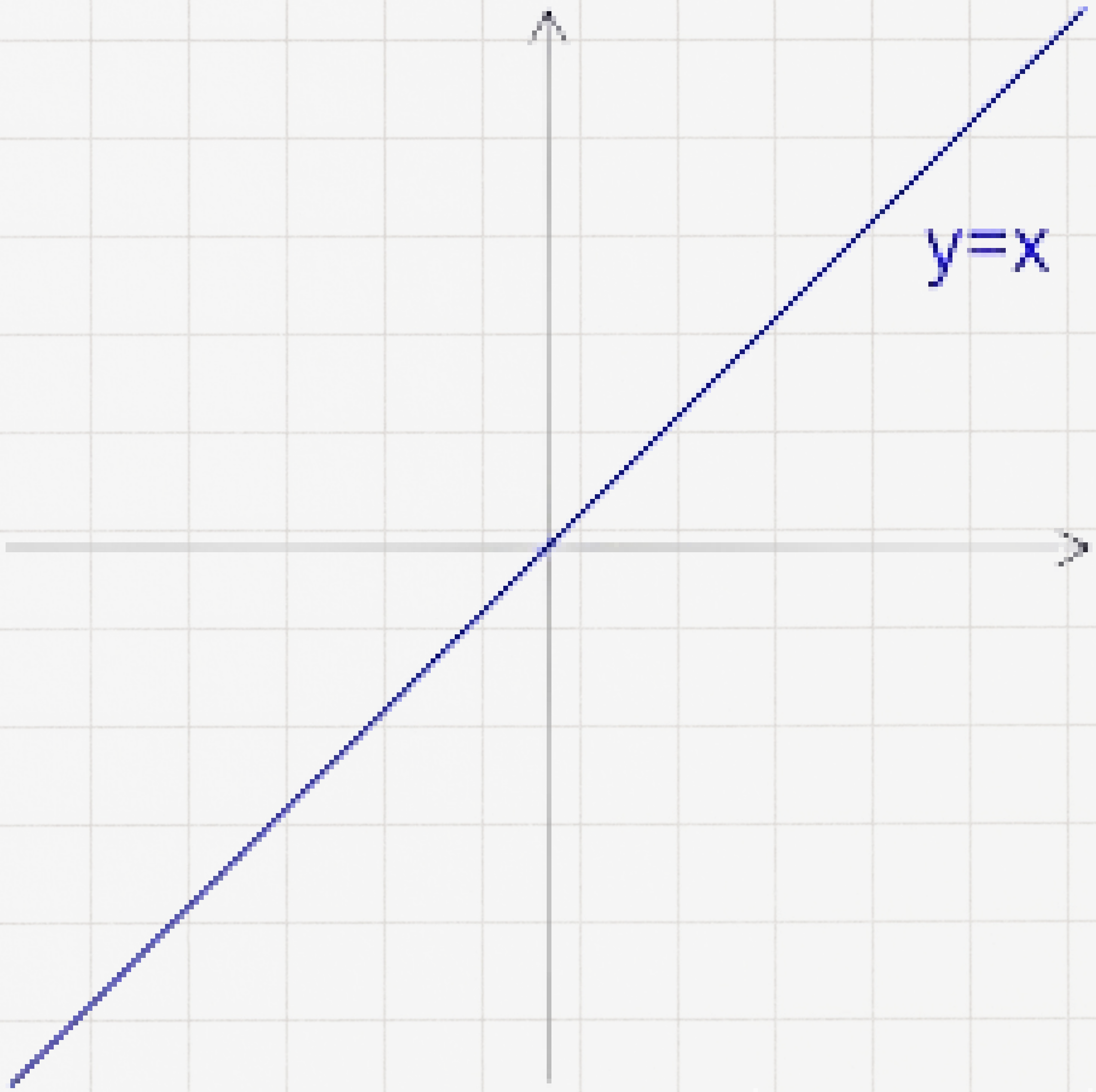


Bisettrice del I e III

È la retta che divide a metà l'angolo che viene formato dagli assi dei quadranti I e III

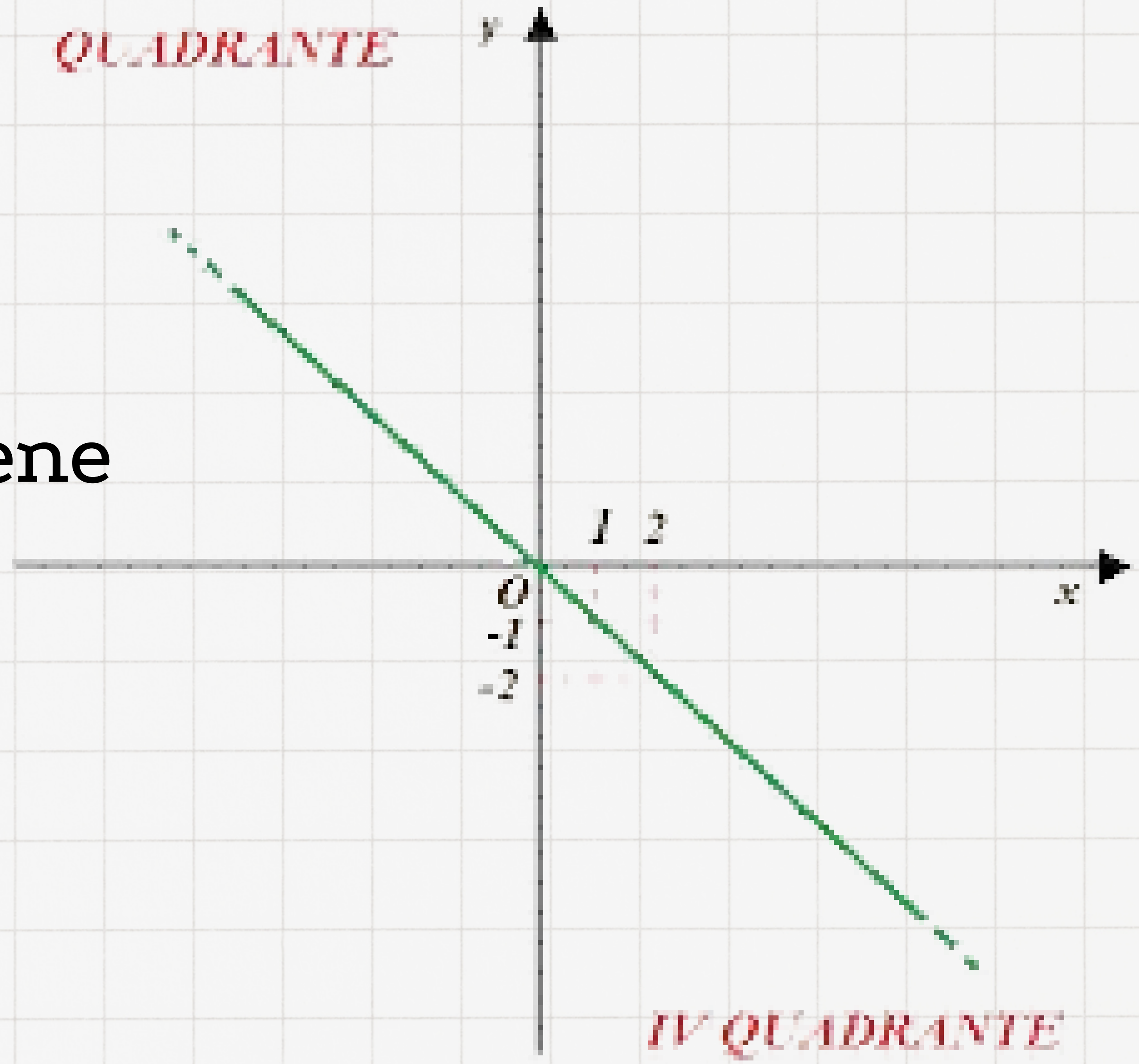
Equazione:

$y=x$



Bisettrice del II e IV

È la retta che divide a metà l'angolo che viene formato dagli assi dei quadranti II e IV



Equazione:

$y=-x$

Capire se un punto appartiene ad una retta

Supponiamo che abbiamo:

Un punto $P(x0,y0)$

Una retta con equazione $y=mx+q$ (o qualsiasi altra forma)

Procedure:

Passo 1: Sostituisci $x=x0$ nell'equazione della retta.

Passo 2: Calcola y.

Passo 3: Confronta il valore ottenuto con y0.

Esempio:

$y=2x+1$

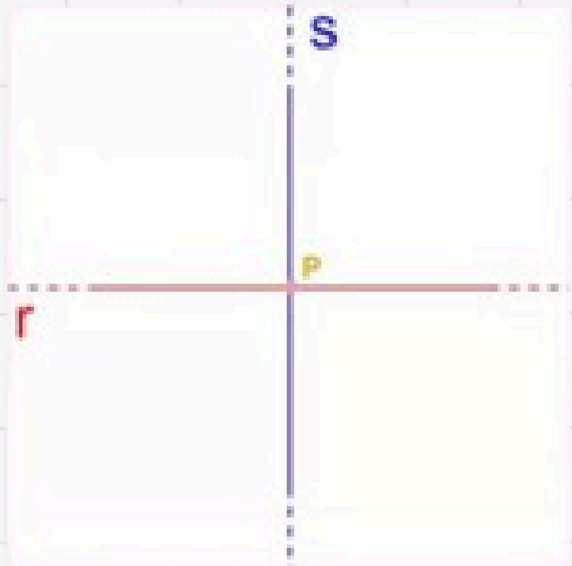
Punto: $P(1,3)$

Sostituisco:

$y=2(1)+1=3$

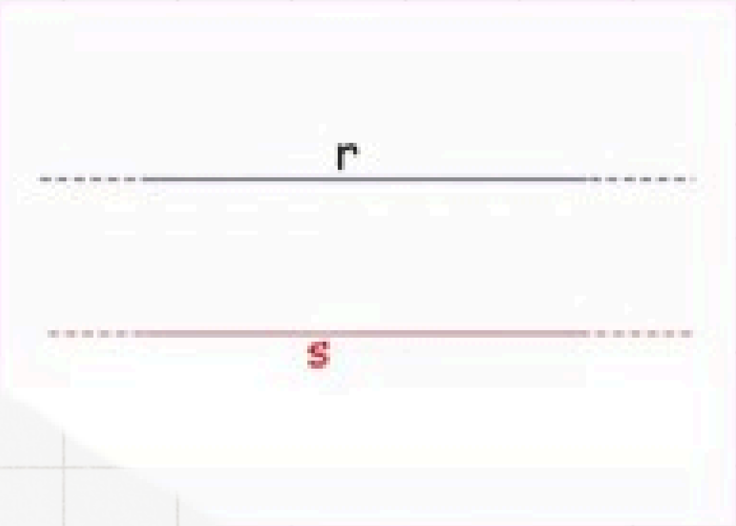
Il valore coincide con $y0=3$ quindi il punto appartiene alla retta

Capire algebricamente se due rette sono parallele o perpendicolari



Per capire algebricamente se due rette sono parallele o perpendicolari, si analizzano i coefficienti angolari delle due rette.

- Sono due rette **parallele** se hanno lo stesso coefficiente angolare, $m_1 = m_2$
- Sono due rette **perpendicolari** se il prodotto dei coefficienti angolari è -1, $m_1 \cdot m_2 = -1$

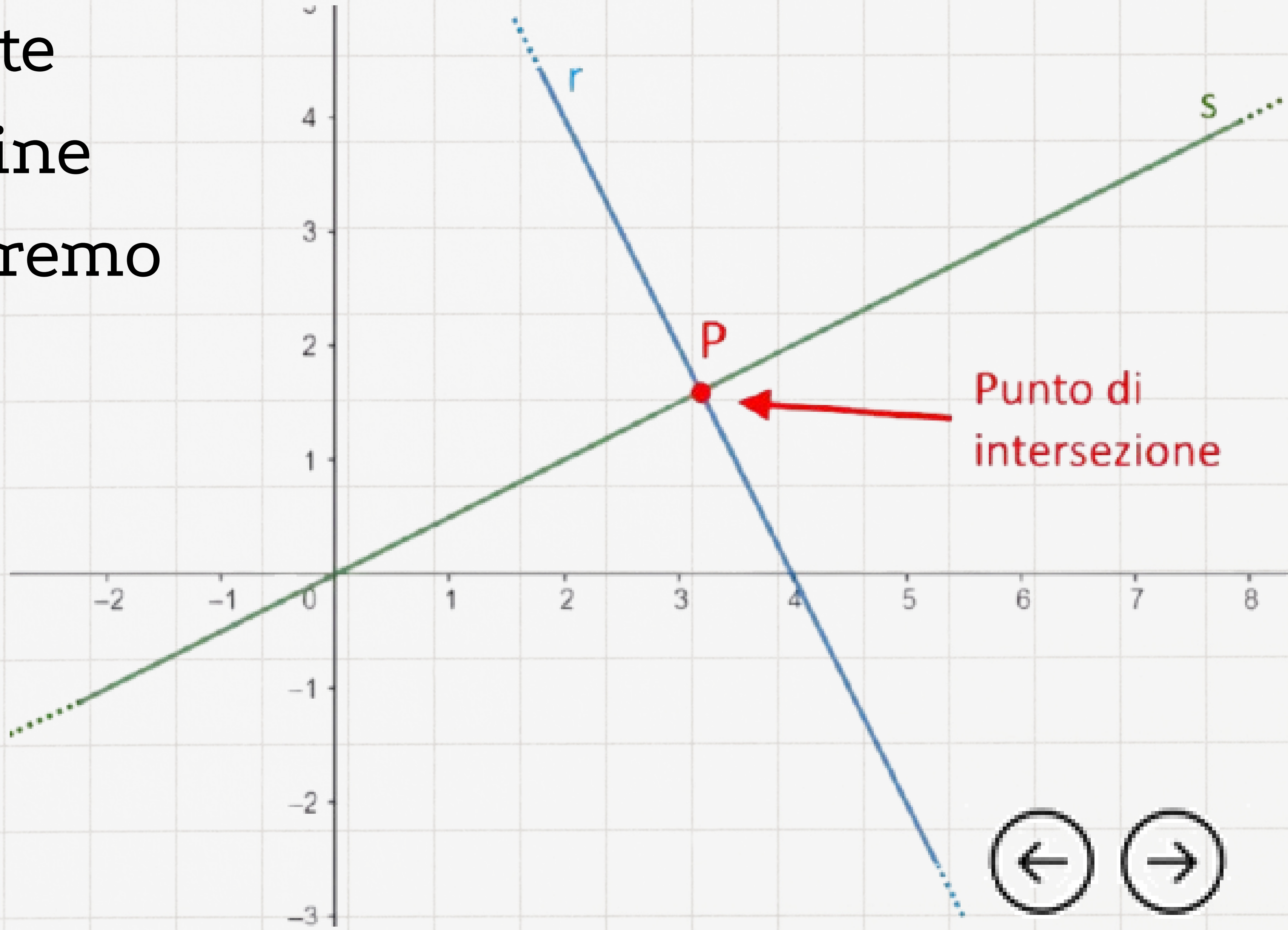


Trovare algebricamente il punto d’intersezione tra due rette

Per trovare il punto d’intersezione tra due rette bisogna **eguagliare** le due rette,risolvere e infine **sostituire la x** in una delle due equazioni ora faremo un esempio cosi da capire meglio:

1. y=2x+1 e y=-x+4y
2. 2x+1=-x+4⇒3x=3⇒x=1
3. Sostituiamo in una delle due:

y=2(1)+1=3 punto di intersezione: P(1, 3)



Trovare l'equazione di una retta passante per un punto e con coefficiente angolare assegnato

Per trovare l'equazione di una retta passante per un punto P(x0,y0) e con coefficiente angolare assegnato m, si usa la formula punto-pendenza:

$$y-y0=m(x-x0)$$

Esempio:

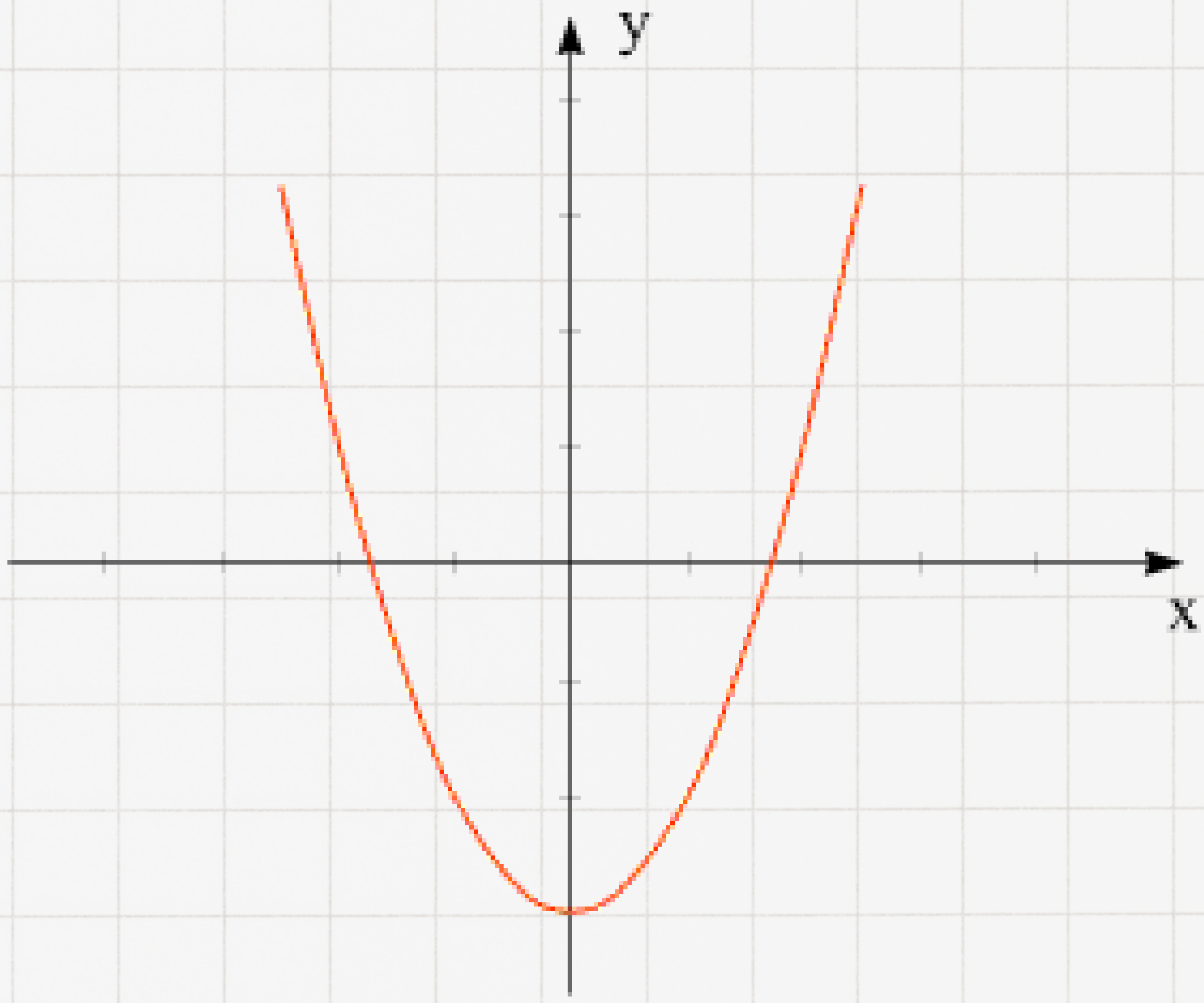
Trova l'equazione della retta passante per (2,3) m=-1:

$$y-3=-1(x-2)\Rightarrow y-3=-x+2\Rightarrow y=-x+5$$

La Parabola

Definizione

La parabola è il luogo geometrico dei punti di un piano equidistanti da un punto fisso, detto fuoco, e da una retta, detta direttrice.



Equazione di una parabola in forma esplicita:

$$y = ax^2 + bx + c$$

a, b, c:
Questi sono coefficienti numerici che determinano la forma e la posizione della parabola nel piano cartesiano.

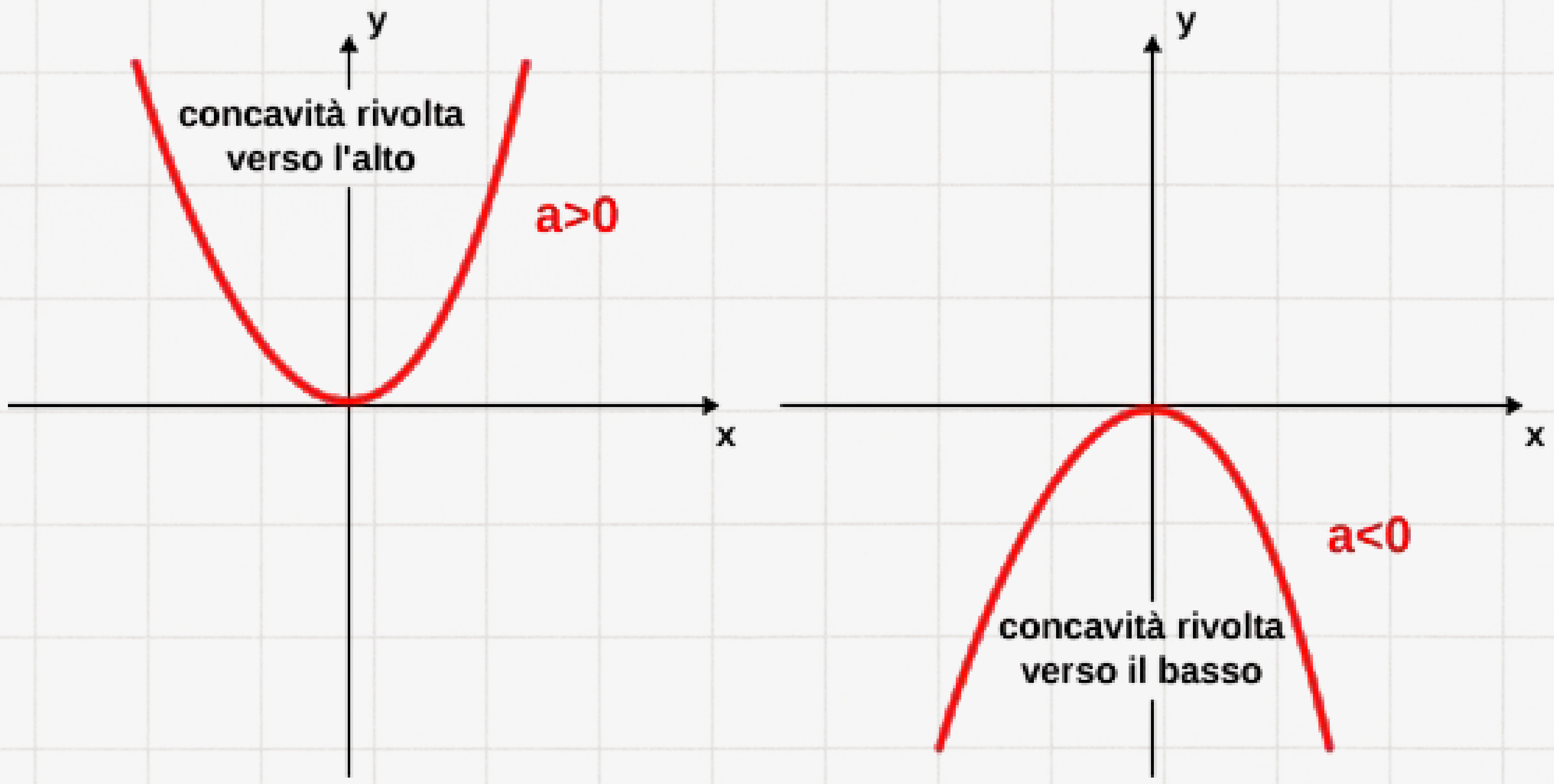
$a \neq 0$:

Il coefficiente 'a' non può essere zero.

Significato dei coefficienti a e c:

$$y = ax^2 + bx + c$$

a: concavità di una parabola.



c: intersezione con asse delle ordinate.

Formule:

Vertice

$$V = \left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right)$$

Fuoco

$$F = \left(-\frac{b}{2a}, \frac{1-\Delta}{4a}\right)$$

Asse

$$x = -\frac{b}{2a}$$

Direttrice

$$y = -\frac{1+\Delta}{4a}$$

Retta tangente-secante in un punto:

Tangente

Una retta è tangente se interseca la parabola in un solo punto.

Secante

Una retta non può essere secante in un punto.

Retta secante in due punti - esterna:

Secante

Una retta è considerata secante ad una parabola quando la interseca in due punti distinti.

Eserna

Una retta è esterna ad una parabola se non la interseca in alcun punto.

Trovare i punti di intersezione tra retta e parabola:

Per individuare i punti di intersezione tra una parabola e una retta, metto a sistema l'equazione della parabola e quella della retta:

$$\begin{cases} y = ax^2 + bx + c \\ y = mx + q \end{cases}$$

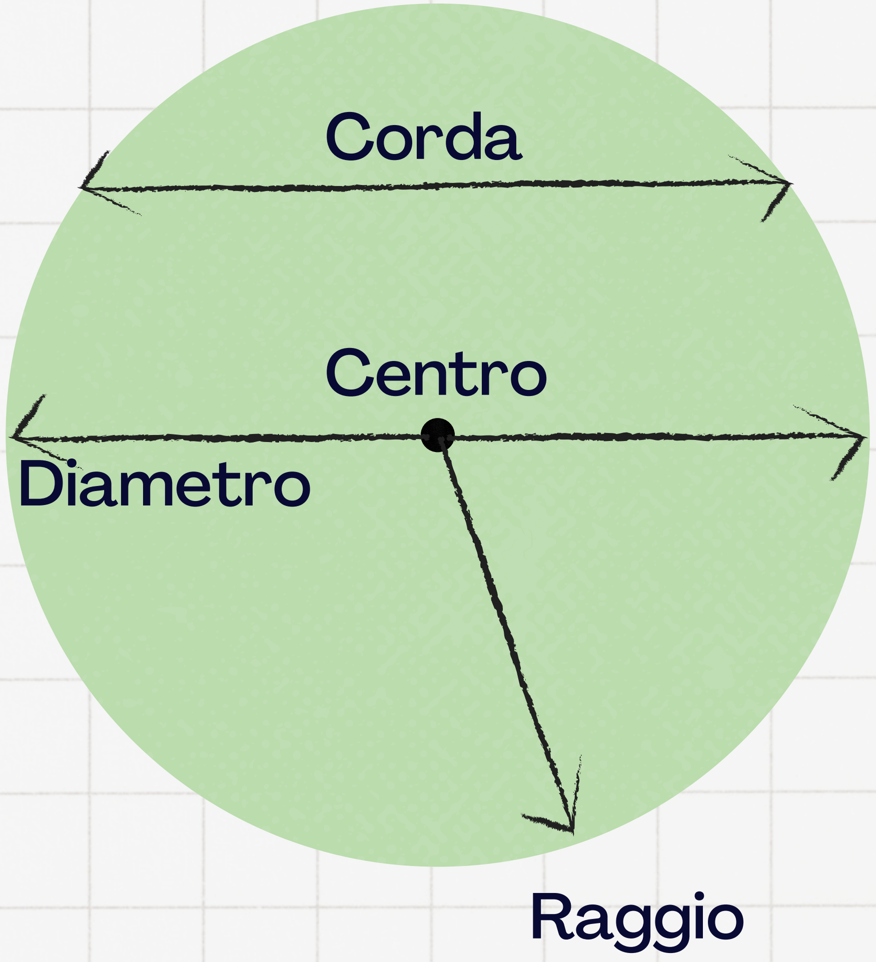
Come trovare i punti di intersezione:

- Sostituzione: Uguaglia l'equazione della retta a quella della parabola:
- $mx+q=ax2+bx+c$
- Risoluzione: Porta tutto a secondo membro per ottenere un’equazione di secondo grado:
- $ax2+(b-m)x+(c-q)=0$
- Calcola il discriminante $\Delta=(b-m)2-4a(c-q)$
- Se $\Delta>0$: due punti di intersezione
- Se $\Delta=0$: un punto (retta tangente)
- Se $\Delta<0$: nessuna intersezione
- Intersezione: Risolvi l’equazione per trovare le ascisse (x).
- Sostituiscile nella retta $y=mx+q$ per ottenere le ordinate (y).

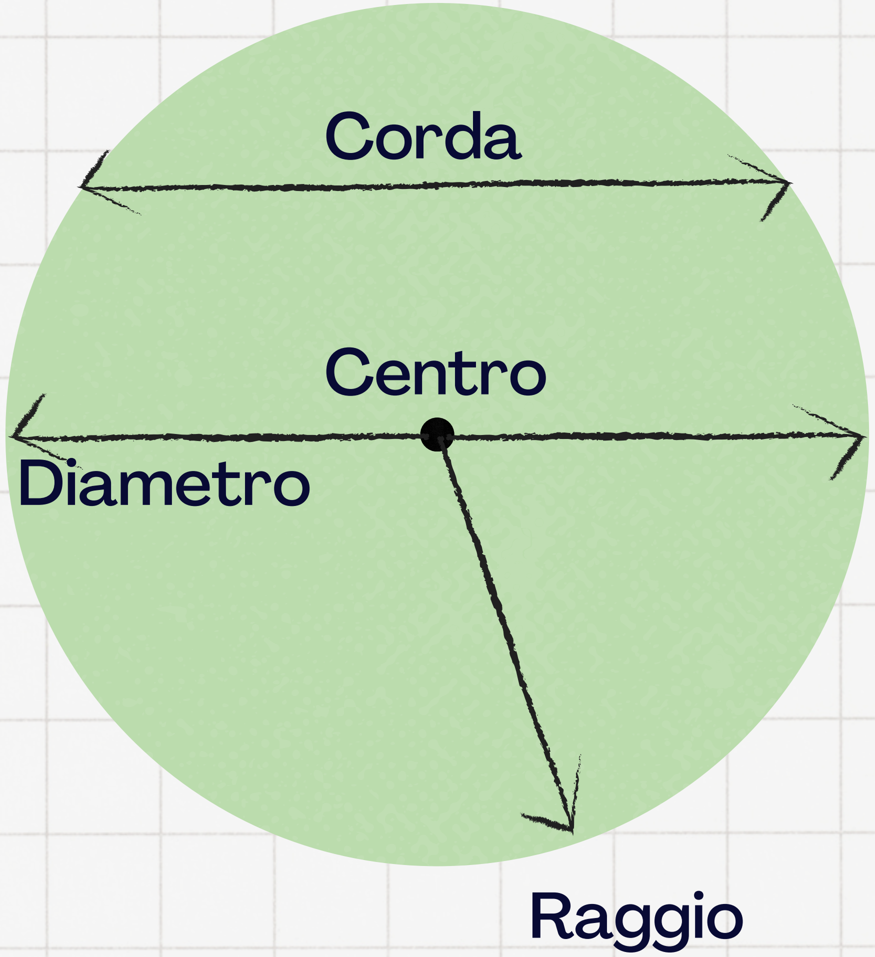
La Circonferenza

Definizione

la circonferenza è il luogo geometrico dei punti del piano equidistanti da un punto fisso detto centro.



La Circonferenza



Elementi fondamentali

Centro(C)
Punto fisso da cui tutti i punti della circonferenza sono equidistanti.

Corda
Segmento che congiunge due punti qualsiasi sulla circonferenza.

Raggio(r)
Distanza costante tra il centro e qualsiasi punto sulla circonferenza.

Diametro
Corda passante per il centro, pari a 2r.

Equazioni

Equazione in forma Esplicita o Canonica
$(X - X_c)^2 + (Y - Y_c)^2 = r^2$

Esempio
-Centro C(4, 1)
-Raggio r=3

equazione:
$(X - 4)^2 + (Y - 1)^2 = 9$

Equazione in forma Implicita
$x^2+y^2+ax+by+c=0$ (con a, b e c appartenenti a R)

Questa formula ci permette di trovare il **centro** e il **raggio**:

-centro: $X_c = -\,a/2$ $\quad$ $Y_c = -\,b/2$

-raggio: $\sqrt{\frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4} - c}$

!ATTENZIONE!
Un'equazione del tipo: $x^2+y^2+ax+by+c=0$ rappresenta una circonferenza **solo se** il raggio(r) è positivo, quindi **solo se**

$$\frac{a^2}{4}+\frac{b^2}{4}-c \geq 0$$

Formule

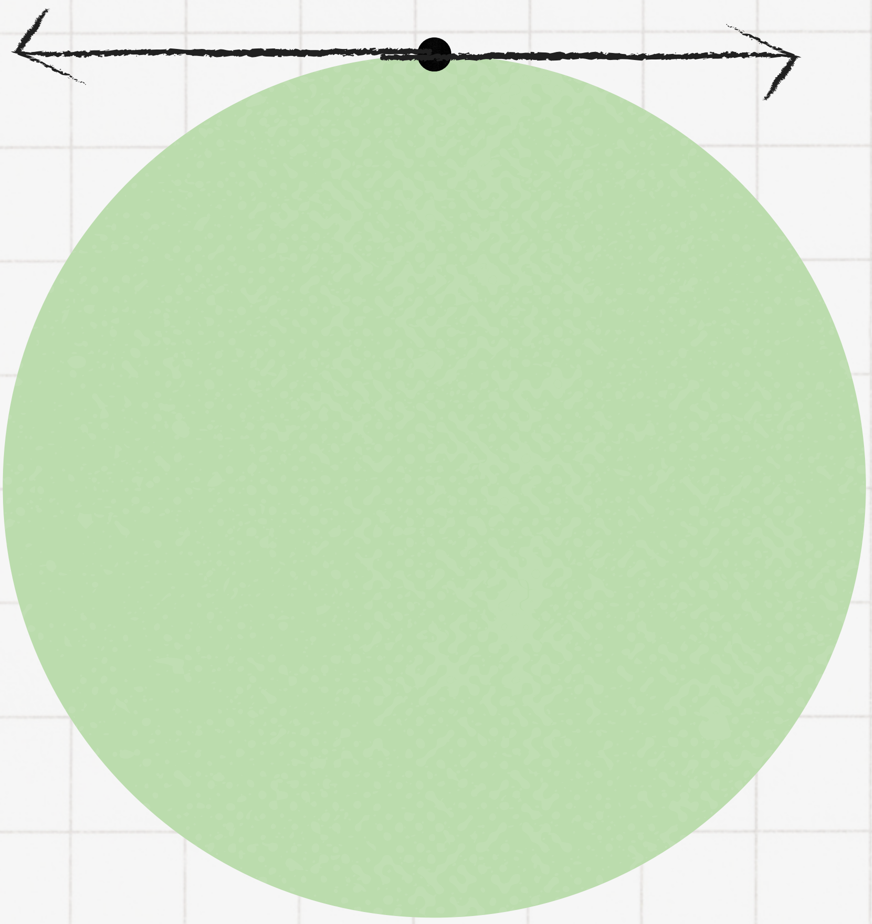
Lunghezza della circonferenza

$l(r) = 2\pi r$

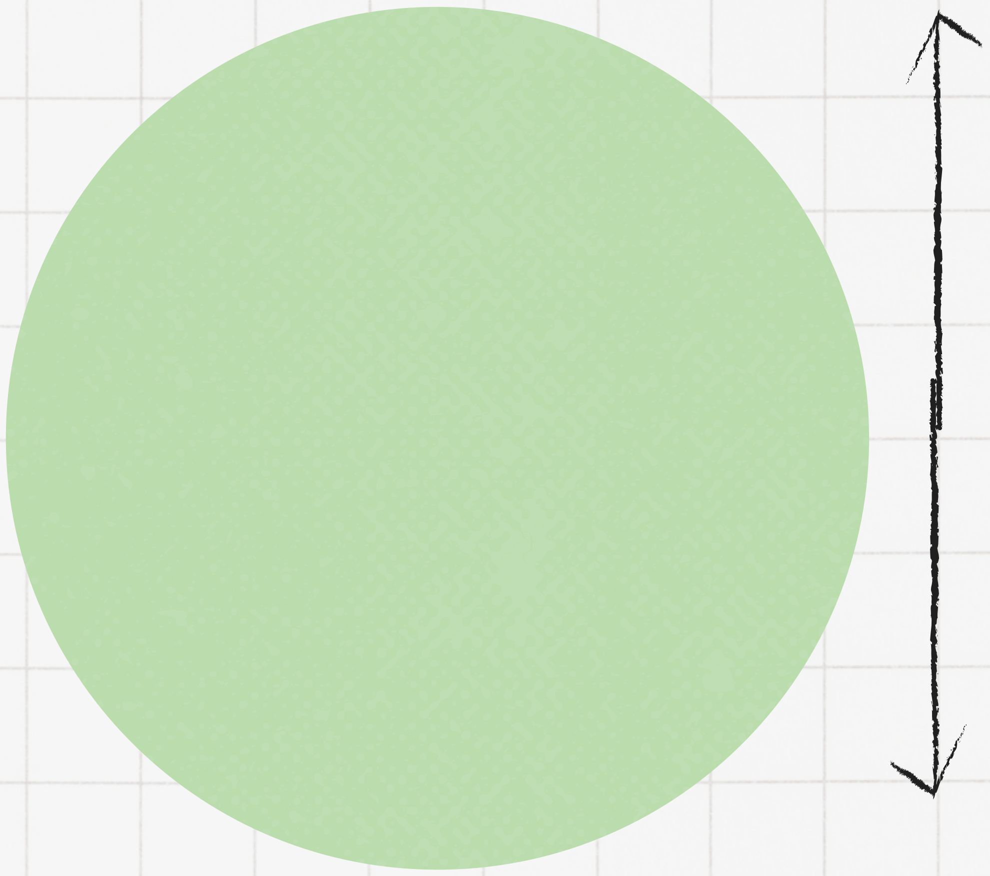
Area del cerchio

$A(r) = \pi r^2$

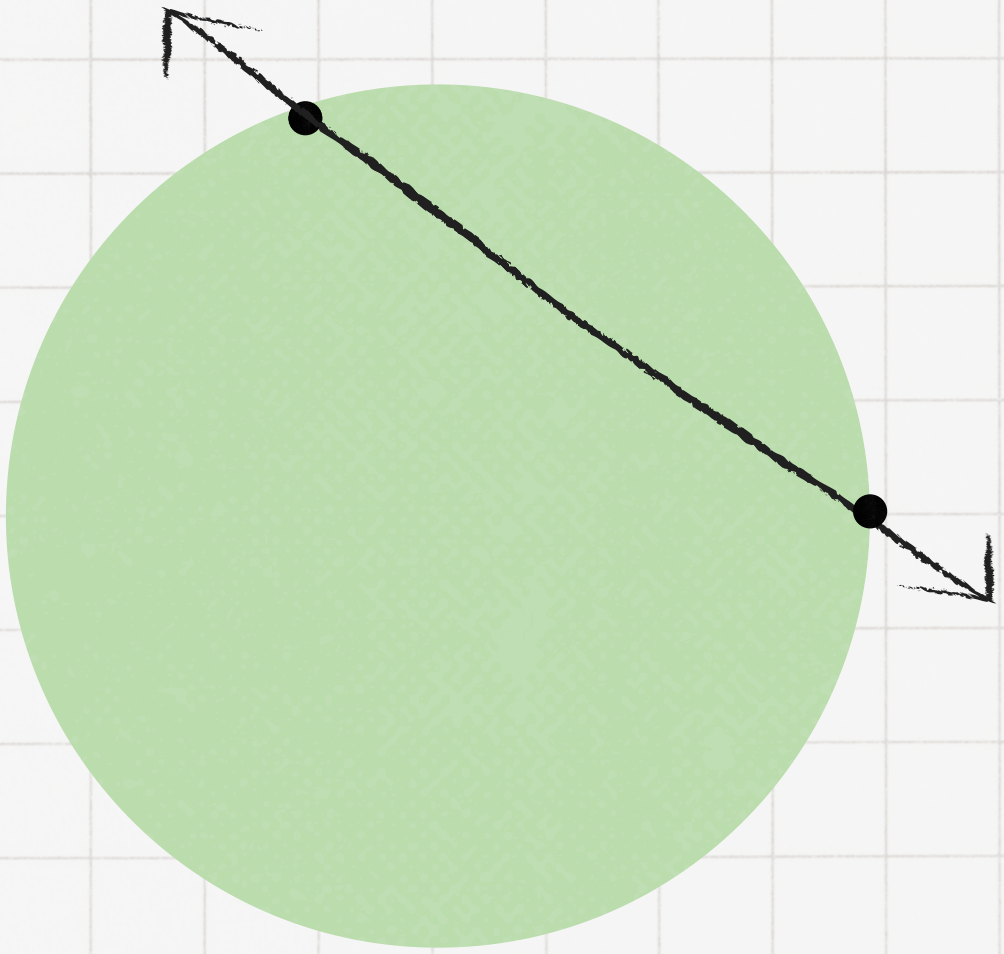
Posizione reciproca retta-circonferenza



Tangenti
un solo punto
d’intersezione.



Esterne
nessun punto
d’intersezione



Secanti
2 punti d’intersezione.

Trovare i punti di intersezione tra retta e circonferenza

Per trovare i punti in cui una circonferenza e una retta si intersecano, metto a sistema l'equazione della circonferenza e l'equazione della retta.

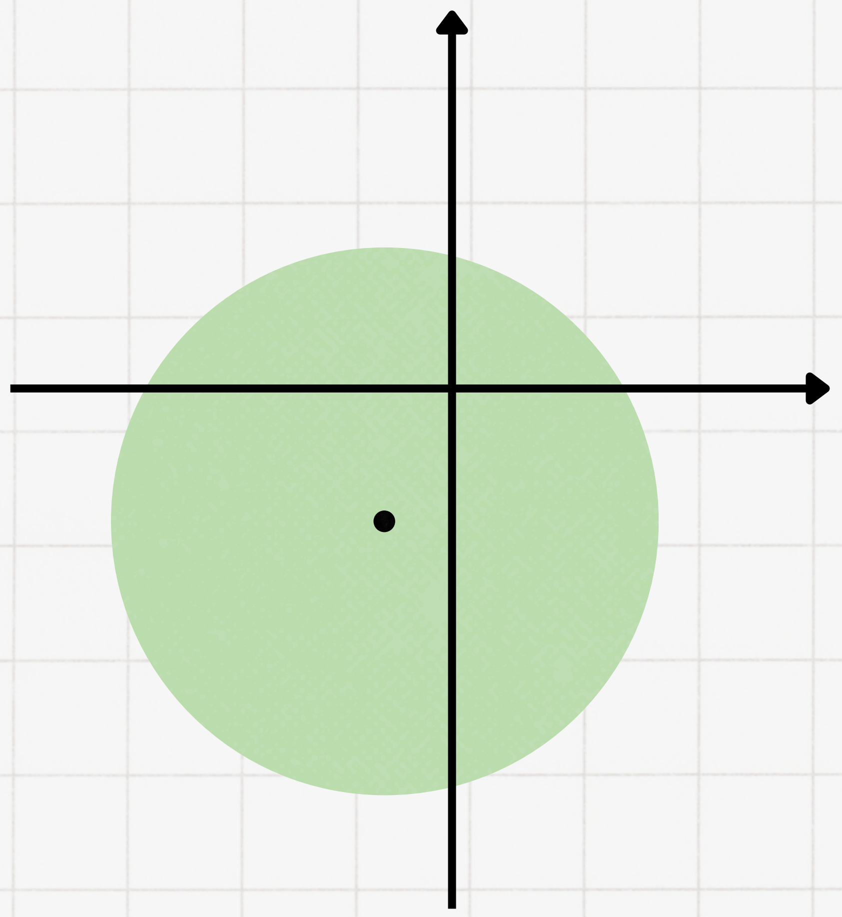
$$\begin{cases} y = (x - x_c)^2 + (y - y_c)^2 = r^2 \\ y = mx + q \end{cases}$$

Trovare l'equazione di una circonferenza conoscendo il centro e il raggio

Per trovare l'equazione di una circonferenza dato il centro e il raggio si usa la formula della circonferenza in forma esplicita:

$(X - Xc)^2 + (Y - Yc)^2 = r^2$

Esempio per trovare l'equazione di una circonferenza conoscendo il centro e il raggio



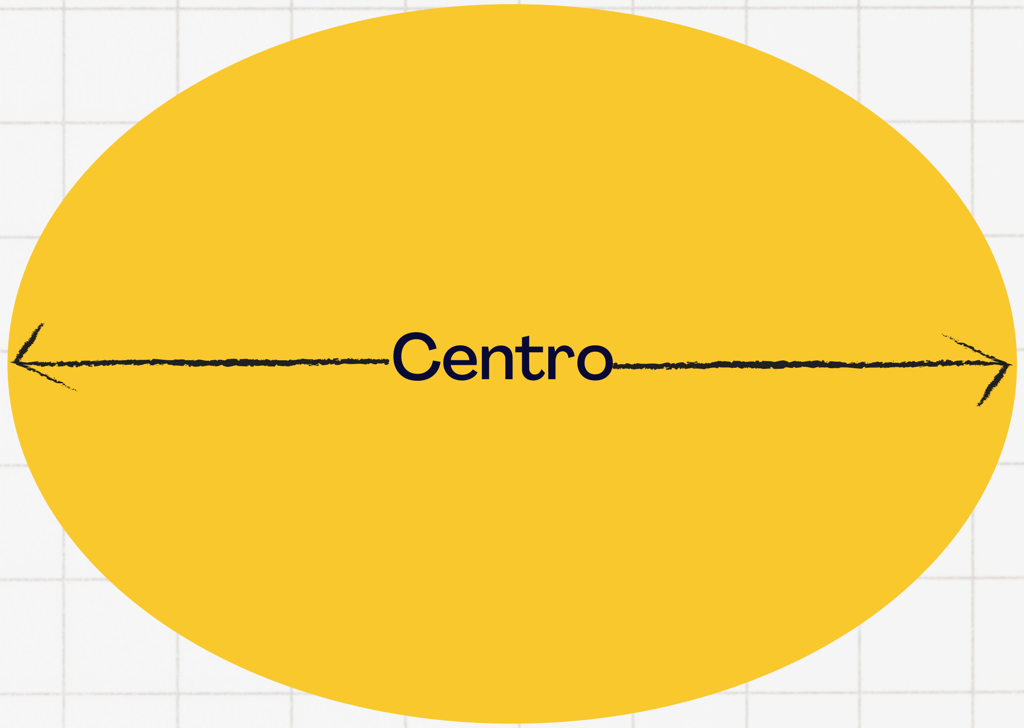
Dati:
C= (-3, -2)
r=4

Mettiamo i seguenti dati nell'equazione della circonferenza in forma esplicita e quindi:
$(X - (-3))^2 + (Y - (-2))^2 = r^2$
ovvero: $(X + 3)^2 + (Y + 2)^2 = 16$

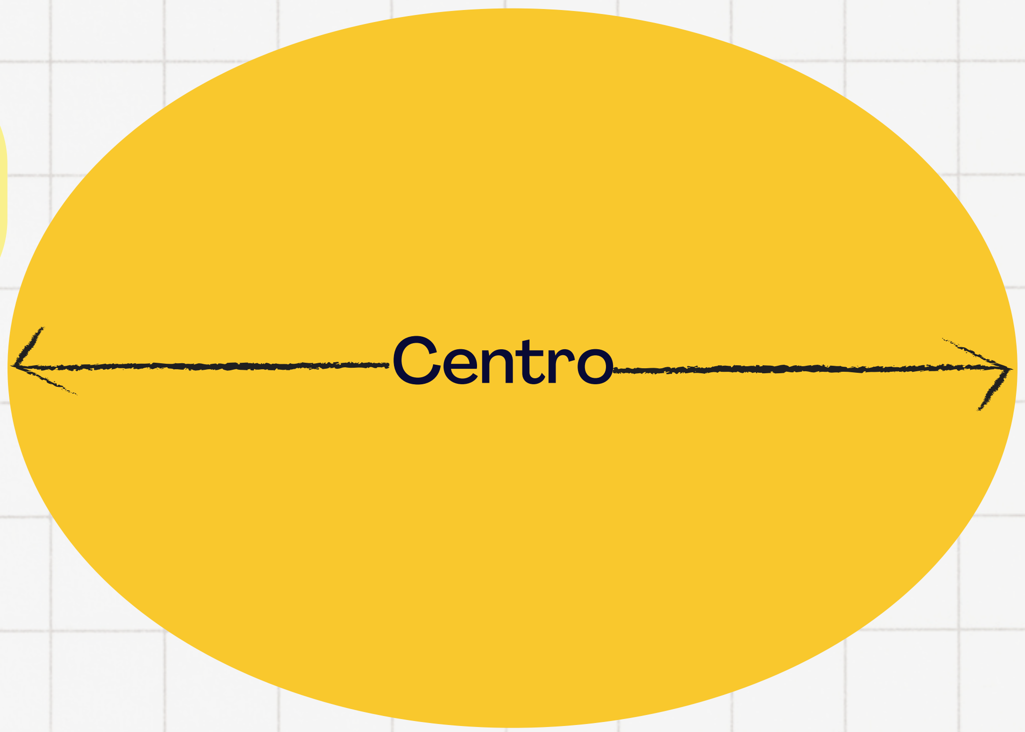
svolgendo i calcoli si arriverebbe l' equazione implicita.

L'Ellisse

Un'ellisse è il luogo geometrico dei punti del piano per i quali la somma delle distanze da due punti fissi, detti fuochi, è costante.



Equazioni di un’ellisse



Equazioni di un’ellisse dato il centro:

- **Orizzontale:**

$((x-x0)^2) / (a^2) + ((y-y0)^2) / (b^2) = 1$

- **Verticale:**

$((x-x0)^2) / (b^2) + ((y-y0)^2) / (a^2) = 1$

Ellisse centrata nell’origine:

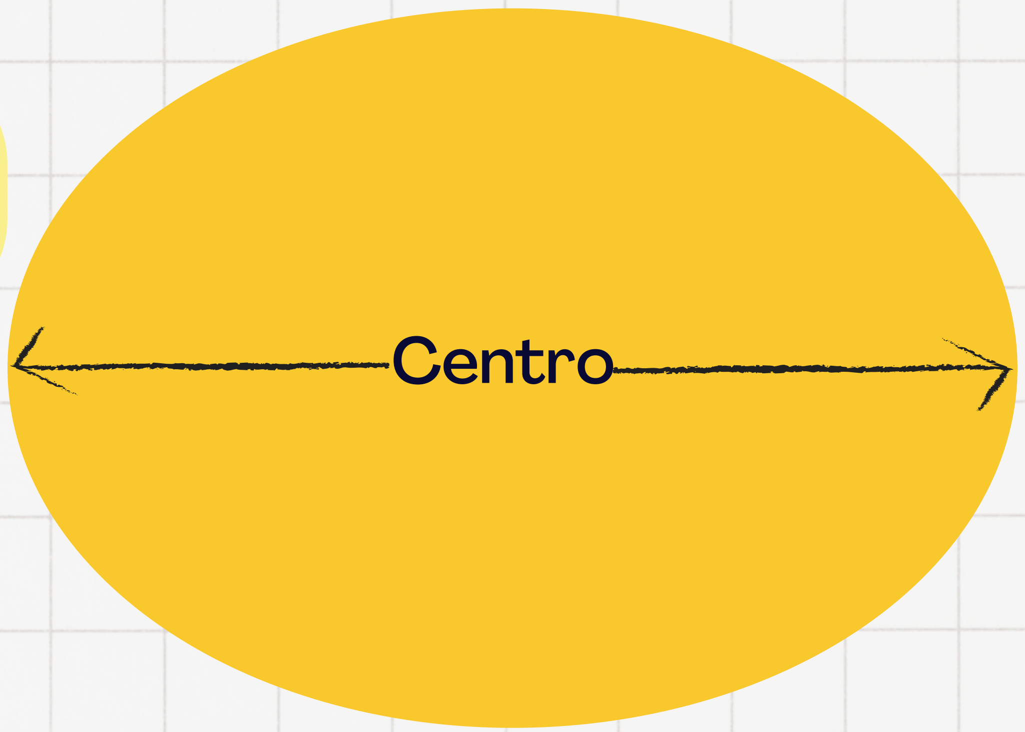
- **Orizzontale:**

$(x^2) / (a^2) + (y^2) / (b^2) = 1$

- **Verticale:**

$(x^2) / (b^2) + (y^2) / (a^2) = 1$

Eccentricità e posizione



Eccencitricità di un ellisse:

- l'eccentricità (e) di un ellisse, misura quanto l'ellisse è allungata e viene definita con una formula:

$$e = c/a \quad \text{dove } c = \sqrt{a^2 - b^2}$$

Posizione reciproca tra retta ed ellisse:

- Data una retta $y = mx+q$ e un'ellisse, si studia il sistema:

$$\begin{cases} x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1 \\ y = mx + q \end{cases}$$

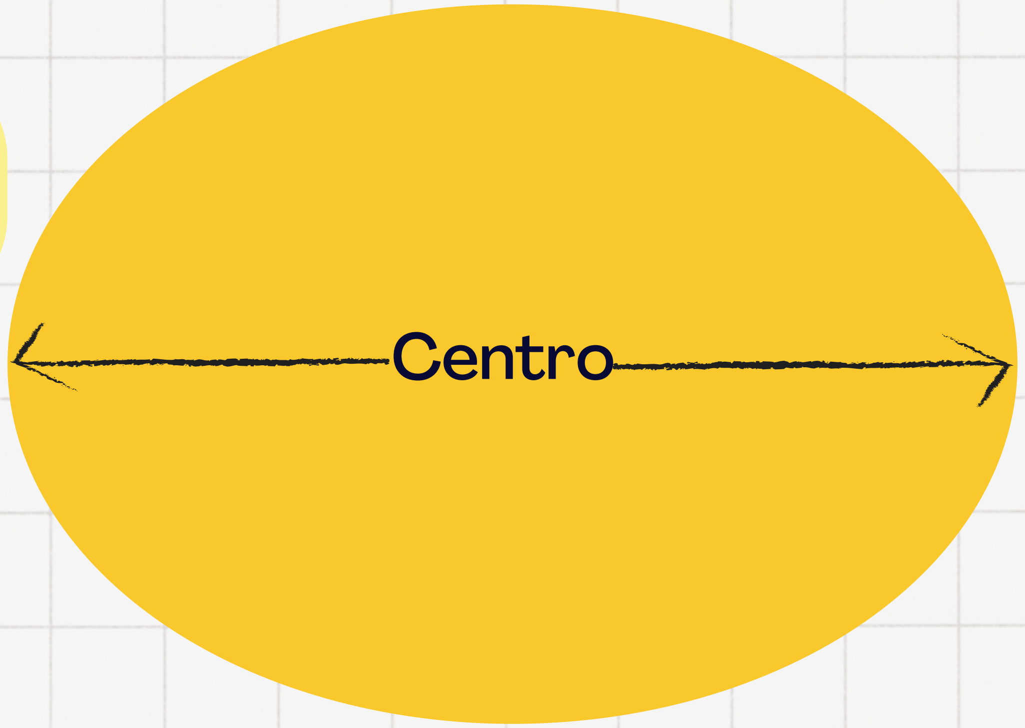
Sostituendo, si ottiene un'equazione di secondo grado in x.
Il discriminante Δ determina la posizione:

$\Delta > 0$ → Secante (2 punti di intersezione).

$\Delta = 0$ → Tangente (1 punto di intersezione).

$\Delta < 0$ → Esterna (nessuna intersezione).

Equazione conoscendo i vertici

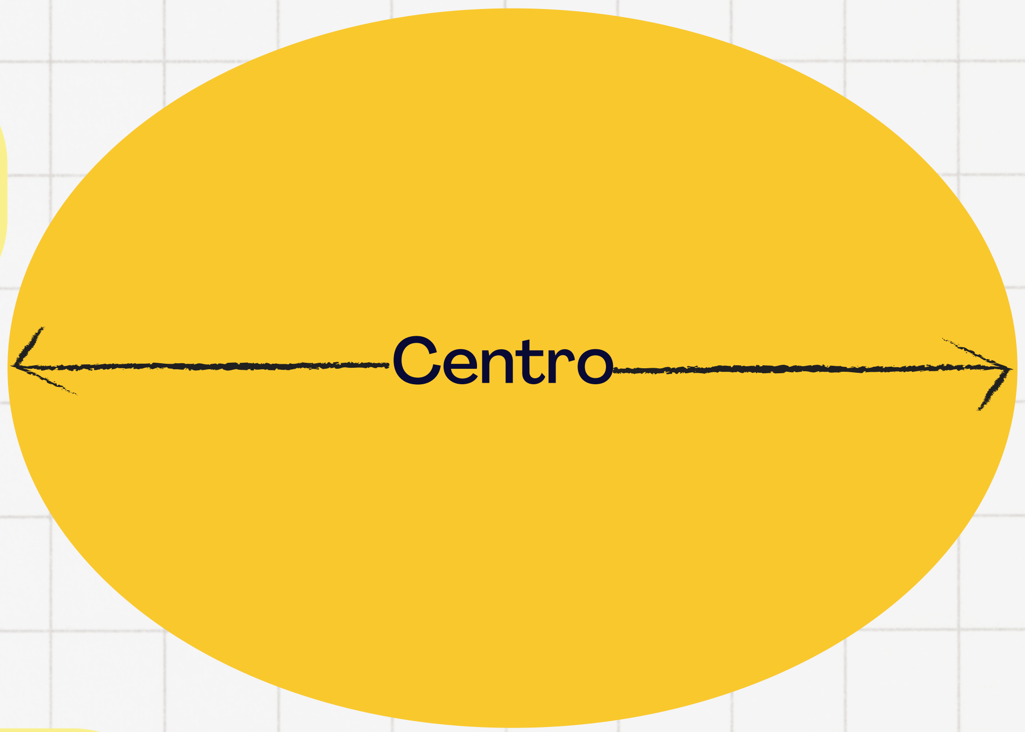


Trovare l’equazione di un’ellisse conoscendo i vertici:
Se sono noti i vertici V1(a,0)**V1**(**a**,0), V2(−a,0)**V2**(−**a**,0), V3(0,b)**V3**(0,**b**), V4(0,−b)**V4**(0,−**b**),
l'equazione é:

x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1

Se il centro è (x0,y0)(x0,y0), l'equazione diventa:
[((x-x0)^2):(a^2)] + [((y-y0)^2):(b^2)] = 1

Esempio



Trovare l'equazione di un'ellisse conoscendo i vertici ed il centro:

orizzontale:

$$\{[(x-x0)^2]: a^2 + [(y-y0)^2]: b^2\} = 1$$

verticale:

$$\{[(x-x0)^2]: b^2 + [(y-y0)^2]: a^2\} = 1$$

esempio:

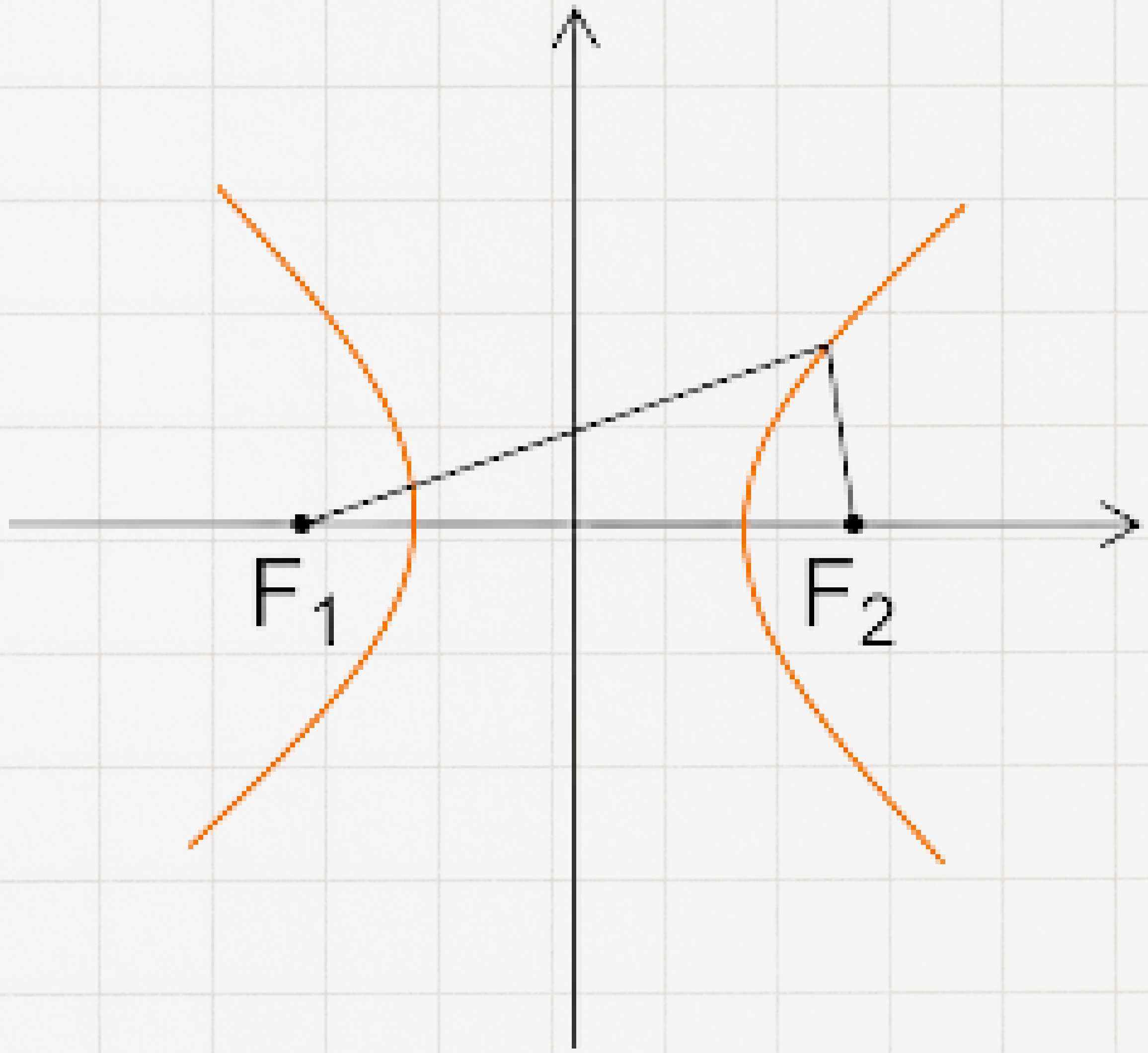
Se C(2,−1)C(2,−1), 2a=62a=6 (a=3a=3), 2b=42b=4 (b=2b=2), e l'ellisse è orizzontale:

$$\{[((x-2)^2):9] + [((y+1)^2):4]\} = 1$$

L'Iperbole

Definizione

Un'iperbole è il luogo geometrico dei punti del piano per cui la differenza delle distanze da due punti fissi (F_1 e F_2) chiamati fuochi è costante.



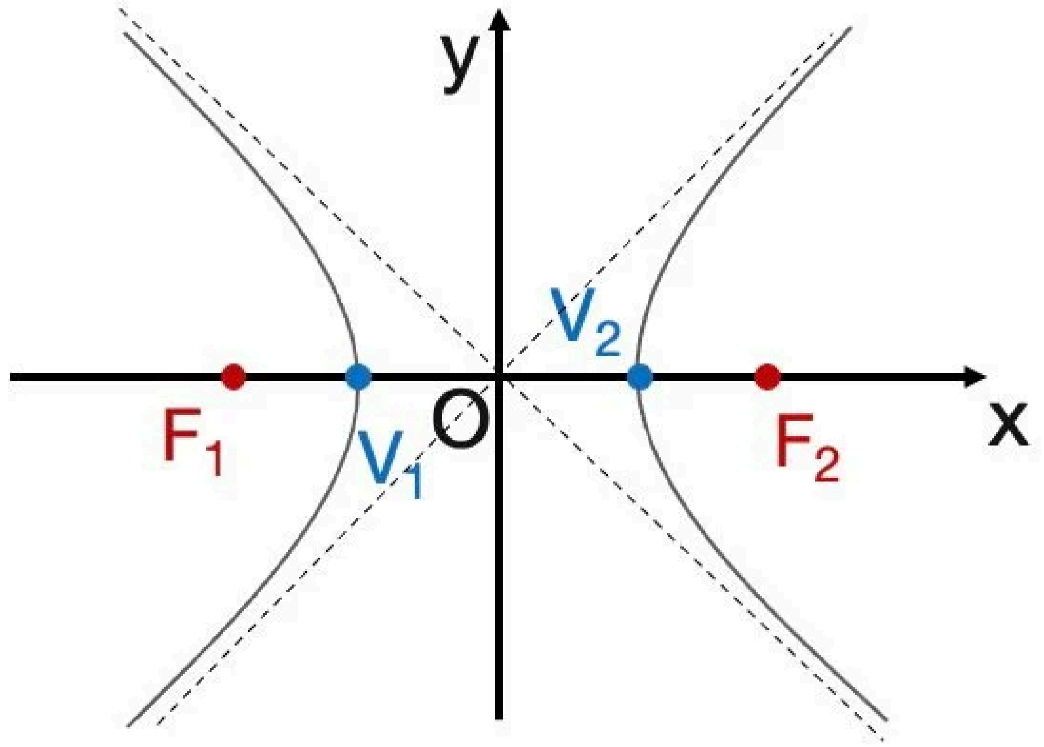
Equazione dell'iperbole con centro nell'origine

Equazioni canoniche dell'iperbole con centro nell'origine:
l'equazione dipende dalla direzione di apertura:

- Apertura orizzontale (i rami si aprono a destra e a sinistra):
  $(x^2/a^2) - (y^2/b^2) = 1$ con $a \neq 0$ e $b \neq 0$

l'equazione è valida solo se i coefficienti sono diversi da zero.

Grafico asse x e centro nell'origine:



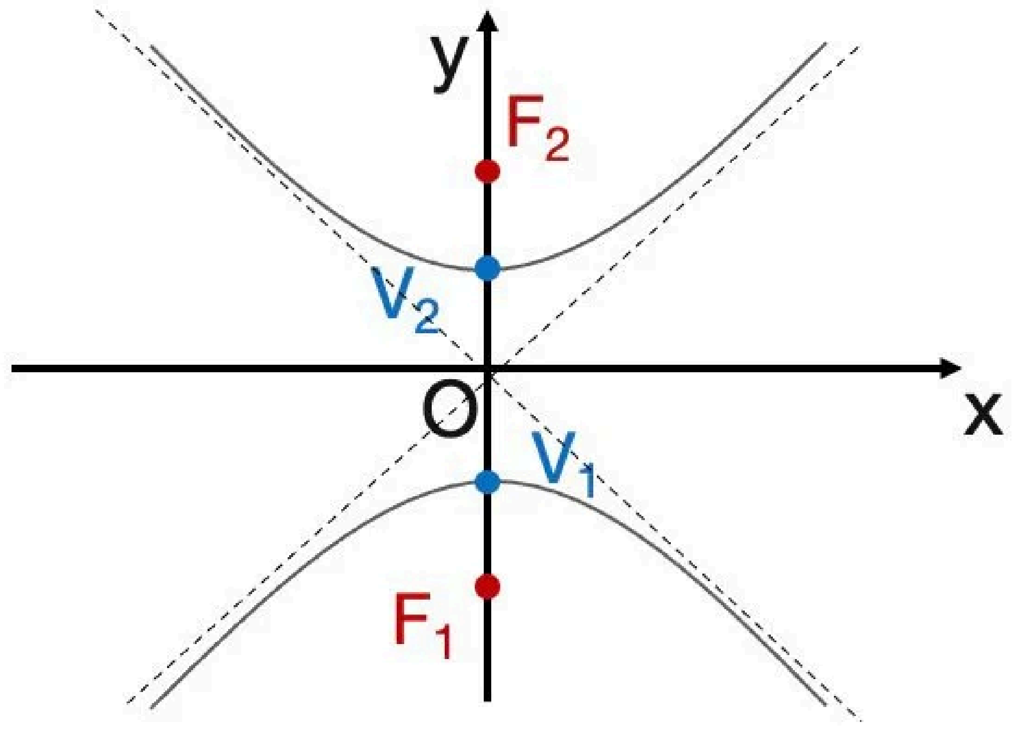
Equazione dell'iperbole con centro nell'origine

Equazioni canoniche dell'iperbole con centro nell'origine:
l'equazione dipende dalla direzione di apertura:

- Apertura verticale (i rami si aprono in alto e in basso):
  $(x^2/a^2) - (y^2/b^2) = -1$ con $a \neq 0$ e $b \neq 0$

l'equazione è valida solo se i coefficienti sono diversi da zero.

Grafico asse y e centro nell'origine:

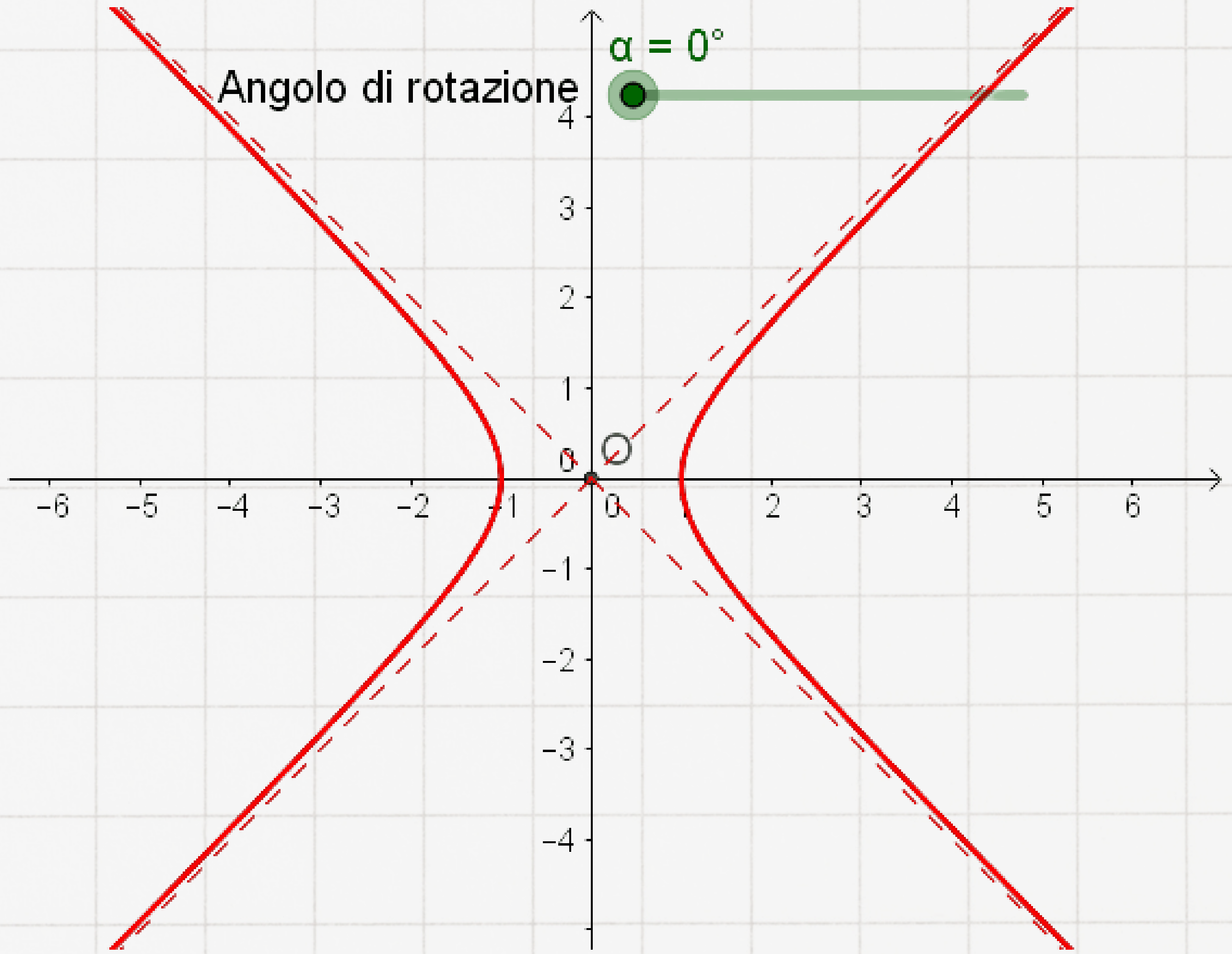


Iperbole particolare: riferita agli asintoti

Definizione

L’iperbole **ha come riferimento diretto gli asintoti stessi.**

Gli asintoti sono le **due rette fondamentali** rispetto a cui l'iperbole si dispone e sono le **rette x = 0 (asse y) e y = 0 (asse x).**



Iperbole particolare: riferita agli asintoti - equazione

La sua equazione è:

- **$xy = k$ e $xy = -k$**

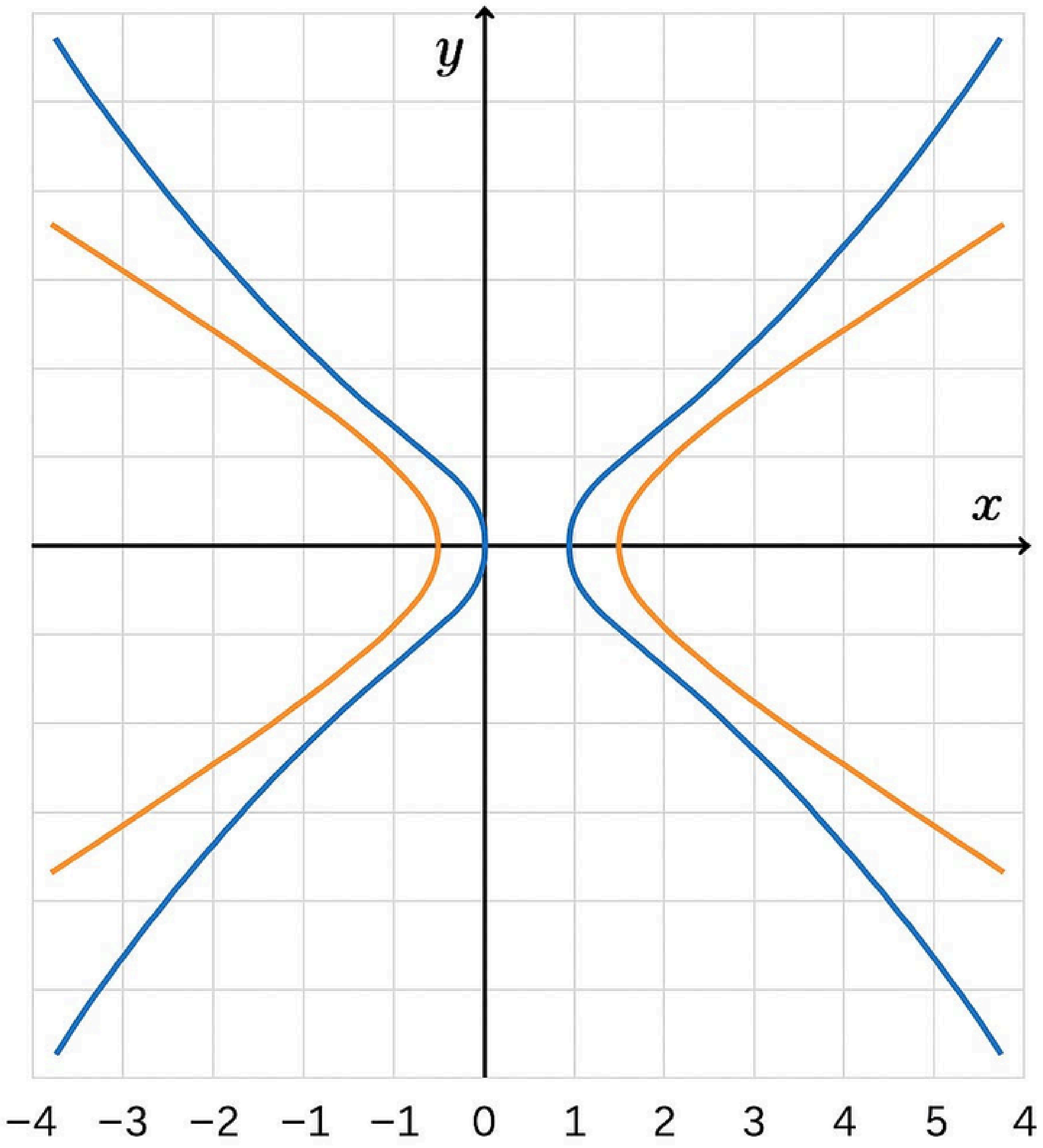
Dove:

- $xy = k$ → iperbole "positiva"
- $xy = -k$ → iperbole "negativa”

Cosa rappresenta questa equazione?

- **Centro nell’origine (0,0):**
  L’iperbole è centrata nell’origine del piano
- **Asintoti:**
  Gli asintoti sono le direzioni verso cui l’iperbole tende, ma non tocca mai. Si avvicinano sempre di più agli assi.
- **Forma:**
  I rami dell’iperbole appaiono come curve aperte che occupano due quadranti opposti

Differenze tra k>0 e k<0



$$xy = k$$

Se $k > 0 \rightarrow$ rami nei quadranti *I* e III

$$xy = -k$$

Se $k < 0 \rightarrow$ rami nei quadranti II e IV

FONTI UTILIZZATE

- Appunti del prof
- Chat gpt
- YouMath
- Wikipedia
- WeSchool

Grazie per l'attenzione