

INTRODUZIONE ALLA RELATIVITA' GENERALE

Giuliano Aprovitola

September 5, 2025

Introduzione

Questi appunti si basano in parte sulle lezioni del corso di Relatività Generale tenuto dal Prof. Giovanni Amelino-Camelia all'Università Federico II di Napoli nell'anno accademico 2024-2025, ma forniscono una personale rielaborazione di quelle lezioni da parte dell'autore. Seguirò anche il Carroll da cui prenderò prettamente le immagini(Spacetime and Geometry, Cambridge University Press), in ogni caso non prendete ciò che leggete per oro colato e cercate sempre di double-check le fonti. Inizieremo cercando di dare un tono il più "misterioso" possibile a quanto dobbiamo ricercare, quasi come se fosse avvenuto un delitto e stiamo cercando di capire quale sia l'arma migliore in nostra dotazione per poter spiegare cioè che sia avvenuto, è naturale trovare confusione nella sezione di "applicazioni della relatività generale", l'idea che mi sono fatto è che essendo il corso ristretto questa parte cerca di dare solo un impronta di tanti concetti.

"In ogni difficoltà si nasconde un'opportunità. La teoria della relatività è nata da un problema" -Albert Einstein

Metto questa frase perchè credo riassume perfettamente l'impronta che cercherò di dare a questi appunti (non a merito mio ovviamente, ma grazie agli eccezionali docenti who taught me this), inoltre la metto anche per motivi prettamente personali sperando che ognuno ci si possa rivedere un minimo.

"When I was a child I caught a fleeting glimpse
 Out of the corner of my eye
 I turned to look but it was gone
 I cannot put my finger on it now
 The child is grown
 The dream is gone
 I have become comfortably numb"
 -Pink Floyd, The Wall, Comfortably Numb, 1979

"Kicking around on a piece of ground in your hometown
 Waiting for someone or something to show you the way
 Tired of lying in the sunshine, staying home to watch the rain
 You are young and life is long and there is time to kill today
 And then, one day, you find ten years have got behind you
 No one told you when to run, you missed the starting gun "
 -Pink Floyd, The Dark Side of the Moon, Time, 1973

"Knowledge is a deadly friend
 If no one sets the rules
 The fate of all mankind, i see
 Is in the hands of fools" -King Crimson, In the Court of the Crimson King, Epitaph, 1969

Contents

1 Urano e Mercurio: Il crimine	5
1.1 Il contesto	5
1.1.1 Il problema di Urano	6
1.1.2 E Mercurio?	7
2 Il bisogno di pensare nuovamente la gravità	9
2.1 Il principio di equivalenza	9
2.1.1 Una doverosa precisazione e il principio di equivalenza di Einstein	11
2.2 Il problema della varietà	13
2.2.1 Il primo strumento matematico utile: i vettori	15
2.2.2 Ora che abbiamo i vettori, cosa possiamo dire?	19
2.2.3 Formalizziamo i nostri risultati, I tensori	21
2.2.4 La derivata covariante e le varietà	24
2.2.5 Ancora sul concetto di SDR localmente inerziale e le equazioni tensoriali	27
2.2.6 Ancora sul trasporto parallelo e le geodetiche	30
2.3 Verso l'equazione di Einstein	32
2.3.1 Sul tensore energia impulso	32
2.3.2 Sul tensore di Riemann	33
2.3.3 Alcune proprietà del tensore di Riemann	35
2.3.4 L'equazione di campo di Einstein	37
3 Le applicazioni della relatività generale	41
3.1 Un primo accenno alla soluzione di Schwarzschild	41
3.1.1 Un approccio con le simmetrie	45
3.1.2 Test Sperimentali	54
3.2 La teoria perturbativa	56
3.2.1 La deflessione della luce	59
3.3 Il redshift gravitazionale	64
3.4 Gli spazi massimamente simmetrici	65
3.4.1 L'esempio semplice di R^n	65
3.4.2 Il problema della costante cosmologica	67
3.4.3 La metrica di Robertson-Walker	69

3.4.4	L'equazione di Friedmann	71
3.5	Il concetto di velocità ed accelerazione relativa, la deviazione geodetica	76
3.6	Le onde gravitazionali	78
4	I principi variazionali in relatività generale	83
5	Appendice I-Aspetti dinamici della Relatività Speciale	85
5.0.1	Il concetto di roba in meccanica newtoniana	85
5.0.2	In relatività speciale?	87
6	APPENDICE II-Una discussione sui vettori di Killing	89
6.1	Le mappe tra varietà	89
6.2	I diffeomorfismi	91

Chapter 1

Urano e Mercurio: Il crimine

Iniziamo il nostro percorso attraverso la promessa fatta, ossia quella di seguire l'approccio investigativo il più possibile: presenteremo due casi che hanno messo in crisi il modello della gravità newtoniana.

1.1 Il contesto

Fino alla metà dell'800' la gravità newtoniana, che ricordiamo essere basata su una interazione dettata da un potenziale:

$$\mathbf{F} = -\frac{GMm}{r^2}\mathbf{e}_{(r)} \quad (1.1)$$

Riusciva a tradurre perfettamente i fenomeni riguardanti le orbite dei pianeti in numeri, dove in particolare intendiamo dire che la teoria era in perfetto accordo con i dati sperimentali entro le incertezze. Ma cosa ci dice in particolare l'equazione (1.1)? Sappiamo dai corsi del primo anno che:

- Immagina di avere il sole ed un pianeta: la gravità newtoniana prevede un ellisse
- prevede anche una velocità di percorrenza che dipende da punto a punto

Giustamente potresti chiederti, ma proprio a metà dell'800' iniziano i problemi? Certo, e non è un caso: infatti le nostre osservazioni sperimentali migliorano di molto, siamo quindi in grado di analizzare i fenomeni gravitazionali con una sensibilità maggiore.

1.1.1 Il problema di Urano

Le osservazioni sperimentali con i telescopi aventi una sensibilità maggiore riuscirono a rivelare per Urano la velocità di percorrenza in certi punti era più veloce e in altri più lenta rispetto alle predizioni fatte con la teoria di *Newton*, tutto questo anche se considerassimo le correzioni dovute agli altri pianeti. Proviamo a schematizzare la situazione in questo modo: Fu così che due matematici

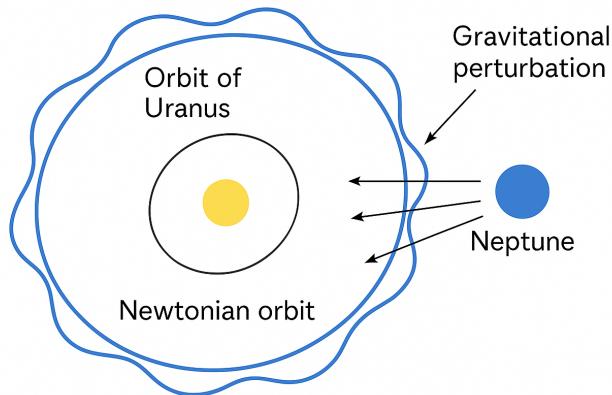


Figure 1.1: Le deviazioni osservate nell'orbita di Urano rispetto a quella prevista dalla meccanica newtoniana furono spiegate introducendo l'influenza gravitazionale di Nettuno, qui rappresentata con vettori di perturbazione. Questo episodio mostrò l'estrema sensibilità delle orbite planetarie a piccole forze esterne, suggerendo i limiti del modello newtoniano e ponendo le basi per successive revisioni della teoria gravitazionale.

di nome Urbain Le Verrier e John Couch Adams indipendentemente ipotizzarono l'esistenza di un nuovo pianeta che potesse spiegare le anomalie di Urano: **Nettuno**, che fu scoperto nel 1846 quasi esattamente dove previsto, potresti iniziare a pensare che abbiamo già risolto tutti i nostri problemi (e il mio lavoro sarebbe già finito) ma non è così, questo è solo un piccolo indizio per farti capire che le cose non stavano andando nella direzione giusta.

1.1.2 E Mercurio?

Per quanto riguarda Mercurio, si ricorda che la teoria di Newton prediceva un orbita appunto ellittica ma con un asse fisso. Questo asse fisso, non rientrava nelle previsioni sperimentali proviamo a vederlo con un'immagine:

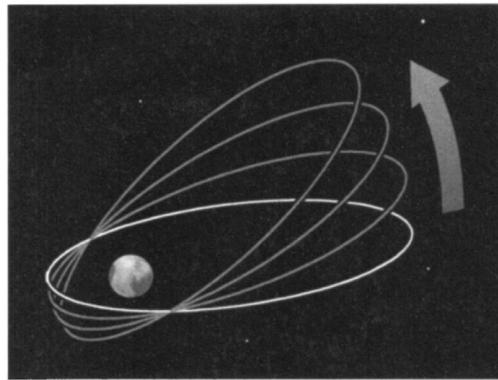


FIGURE 5.6 Orbiti in general relativity descrivono ellissi che si spostano.

Figure 1.2: La precessione dell'asse di rotazione di Mercurio, perfettamente descritto dalla relatività generale

Proviamo ad aggiungere il contributo degli altri pianeti, abbiamo che in generale i calcoli mostrano che il 99% dell'effetto reso noto dagli esperimenti era spiegato da essi, infatti davano addirittura il segno giusto! Il problema, rimaneva però quell' 1%, devi provare ad immaginarla da un punto di vista prettamente sperimentale: infatti anche se era piccolissima la differenza non ci si trovava con il calcolo fatto in laboratorio:

$$|M_{teorica} - M_{sperimentale}| \leq |\Delta M_{teorica} - \Delta M_{sperimentale}|? \quad (1.2)$$

. Allora, da Fisico mi trovo di fronte ad un bivio:

- Ho mancato dei protagonisti
- La mia teoria è sbagliata

Come possiamo immaginare **Le Verrier** provò ad iterarare la sua intuizione avuta in precedenza ossia di inserire un nuovo pianeta ossia: **Vulcano**, i risultati teorici e sperimentali però dimostravano che il pianeta non esisteva; è evidente, che la seconda ipotesi ha più senso.

Chapter 2

Il bisogno di pensare nuovamente la gravità

Non ti spaventare per il nome che ho dato a questo capitolo, cercherò di condurti passo passo al perchè ne abbiamo bisogno. Siamo dunque arrivati alla formulazione di un vero e proprio problema sperimentale ossia quello della precessione dell'orbita di Mercurio: c'era però un altro indizio che condusse alla formulazione della teoria che stiamo cercando di costruire; esso sarà il nostro punto di partenza per le future discussioni.

2.1 Il principio di equivalenza

Questo principio, ossia **il principio di equivalenza** viene in una varietà di forme differenti, il primo di essi è il **WEP**, tradotto in italiano il **principio di equivalenza debole**, esso ci dice che la massa inerziale e quella gravitazionale di qualsiasi oggetto sono uguali. Cerchiamo però di ricordare il secondo principio della *dinamica*, esso mette in relazione la forza esercitata su un oggetto all'accelerazione che esso possiede, infatti tale principio le mette in proporzine attraverso una costante ossia la massa inerziale, in formule:

$$\mathbf{F} = m_i \mathbf{a} \quad (2.1)$$

Ha senso pensare che preso un oggetto, la sua massa inerziale presenta una caratteristica **universale** in relazione alla resistenza che senti quando provi a muovere l'oggetto; questa quantità prende infatti lo stesso valore indipendentemente dalla forza che è esercitata. In particolare, tra le tante forze che conosciamo abbiamo la forza gravitazionale che può essere pensata nel senso che la forza esercitata su un oggetto è proporzionale al gradiente di un campo scalare Φ , noto come il potenziale gravitazionale (pensa a (1.1)). In questo caso, la costante di proporzionalità è la massa gravitazionale m_g :

$$\mathbf{F}_g = -m_g \nabla \Phi \quad (2.2)$$

10CHAPTER 2. IL BISOGNO DI PENSARE NUOVAMENTE LA GRAVITÀ

Sulla superficie, m_g ha una caratteristica molto diversa rispetto a m_i nel senso che la prima è una quantità specifica della forza gravitazionale. Già Galileo ai suoi tempi riuscì però a dimostrare che la risposta della materia alla gravitazione è universale-ogni oggetto cade con lo stesso rate in un campo gravitazionale indipendentemente da come è composto l'oggetto. In meccanica Newtoniana affinchè ciò sia possibile questo si traduce in formula:

$$m_i = m_g \quad (2.3)$$

Una conseguenza diretta è che il comportamento di oggetti che cadono in caduta libera è universale, indipendentemente dalla loro massa; infatti abbiamo:

$$\mathbf{a} = -\nabla\Phi \quad (2.4)$$

Sperimentalmente, l'indipendenza dell'accelerazione per via della gravità dalla composizione dell'oggetto è stata verificata con estrema precisione dagli esperimenti di *Eötvös* e dai suoi successori moderni. Proviamo allora a dare una definizione equivalente di questo principio: immaginiamo una situazione del genere:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 0 \quad (2.5)$$

Ossia un sistema di riferimento inerziale, del resto è quello che ci ha insegnati Galileo. Ora, da questo sistema di riferimento inerziale, proviamo a metterci in uno in cui accendiamo la gravità e siamo in caduta libera; il passaggio logico è il seguente:

$$x \rightarrow x' = x - \frac{1}{2}gt^2 \quad (2.6)$$

Ossia avremo che:

$$m_i \left[\frac{d^2x}{dt^2} + g \right] = m_g g \quad (2.7)$$

Ma per l'uguaglianza (2.3) avremo che:

$$m_i \frac{d^2x}{dt^2} = 0 \quad (2.8)$$

Ossia quello che abbiamo ottenuto per (2.5). Tutto questo può sembrare controintuitivo, ma non devi abbatterti: quello che abbiamo ottenuto è che in generale dal momento che la **carica gravitazionale** è la stessa per tutti gli oggetti, questo sta sostanzialmente a significare che **non riesco a distinguere se mi trovo sulla terraferma o in un moto in accelerazione verso l'alto con $a=9,81 \text{ m/s}^2$, ossia non esistono esperimenti che mi permettono di dirlo.**

2.1.1 Una doverosa precisazione e il principio di equivalenza di Einstein

Dobbiamo però stare attenti, supponiamo infatti che l'esperimento di equazione (2.8) lo abbiamo fatto in un box chiuso per bene e in caduta libera, se il box fosse abbastanza grande ci renderemmo conto che in generale due particelle test una "affianco a me" e l'altra estremamente lontana, avremmo che quella estremamente lontana potrebbe risentire di un altro campo gravitazionale! Per questo motivo il principio WEP può essere formulato in questa maniera:

Il moto di oggetti in caduta libera sono gli stessi in un campo gravitazionale e in un sistema di riferimento uniformemente accelerato allo stesso modo, in regioni abbastanza piccole dello **spaziotempo**

Prova a dimostrare quanto detto in una maniera equivalente a fatto prima per la dimostrazione che va da (2.5) a (2.8), vedrai che ti troverai gli stessi risultati. Ora, i motivi per cui dico questo(da non prendere seriamente, è solo un modo per farti capire veramente le cose) possono essere i seguenti:

- Immagina di stare sulla terra oppure in un'astronave che accelera in maniera uniforme verso l'alto con $a = 9,81 \text{ m/s}^2$
- Esiste sempre un sistema di riferimento (quando tale accelerazione è uniforme e costante, quindi in approssimazione di **spaziotempo** abbastanza piccolo) tale che il moto è inerziale.

Tutto questo, mi porta ad affermare l'equivalenza di tutti i sistemi di riferimento uguali con accelerazione uguale alla gravità, ma quindi ciò che diciamo è che essa è una proprietà **dello spazio**, infatti essa dipende dal cambio di coordinate che sto effettuando! Facciamo subito un'analisi: la teoria di Newton è una teoria di campo, quale altra teoria di campo conosciamo? Quella dell'elettrodinamica, in generale riusciremo sicuramente a trovare una situazione in cui riusciamo a distinguere una situazione di accelerazione uniforme (che appunto, dipenderà dalla massa inerziale) rispetto a quella in cui è presente un campo elettromagnetico (che dipende dalle cariche in gioco), comprendiamo subito la differenza tra le i due discorsi.

Ma perchè hai usato il termine Spaziotempo?

Il motivo dovrebbe essere ovvio, ma voglio comunque provare a spiegarlo: infatti in generale dobbiamo ricordare che con l'avvento della relatività speciale il frame del sistema localmente inerziale non è quello euclideo bensì quello di Minkowski e per questo parliamo di **spaziotempo**, tutto questo si può riassumere nel principio che è ora noto come *EEP* ossia **Einstein equivalence principle** che ci dice:

In regioni abbastanza piccole dello spaziotempo, le leggi della fisica si riducono a quelle della relatività speciale; è impossibile registrare l'esistenza di un campo gravitazionale in esperimenti locali.

Dove per "locali" si intende sempre rispetto ad un ipotetico cambio di riferimento non necessariamente lineare. Ma allora, in generale abbiamo capito che se però facessi un cambio di coordinate; non necessariamente lineare allora avrei che in generale questo **spaziotempo** non lo vedo piatto, infatti la nozione di esso riguarda qualcosa di **locale** ad esso, se lo vedessi da "lontano" allora cosa vedrei in termini geometrici? Qualcosa che deforma il **piatto**, dobbiamo quindi iniziare a prendere sul serio l'idea di qualcosa come lo **spaziotempo curvo**.

Va bene, ma i sistemi di riferimento globalmente inerziali?

La domanda è ben posta, e forse ho cercato di rispondere in maniera "frettolosa" ad inizio **subchapter**, in realtà questa nozione crea difficoltà già in SR e peggio ancora in quella generale. Immagina infatti di voler costruire questo famigerato sistema di riferimento globalmente inerziale, prova a costruire dal tuo punto minkowskiano un sistema di aste rigide con degli orologi attaccati; non puoi sapere cosa succede precisamente ad un orologio molto distante da te, perché la velocità della luce è finita e quindi appena ti arriva l'informazione nel frattempo qualcosa è cambiato, peggio ancora in relatività generale le distanze che misuri lontano con le aste potrebbero essere diverse da riferimento a riferimento; infatti devi ricordare che quanto abbiamo detto vale in generale da un punto di vista **locale**, se noi provassimo a dare una nuova definizione di **non accelerato** come **free falling** (e quindi in questo senso inerziale) allora una particella molto lontana non la vedresti come inerziale.

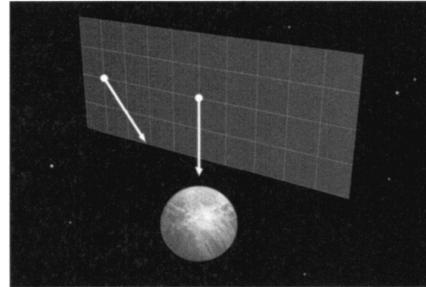


FIGURE 2.1 Failure of global frames. Since every particle feels the influence of gravity, we define "unaccelerating" as "freely falling." As a consequence, it becomes impossible to define globally inertial coordinate systems by the procedure outlined in Chapter 1, since particles initially at rest will begin to move with respect to such a frame.

Comprendiamo benissimo che quindi la struttura matematica appropriata per descrivere la curvatura è quella di una **varietà differenziabile**, non spaventarti dinanzi a questa parola; essenzialmente è un una struttura matematica che ti permette localmente di avere uno **spaziotempo piatto** ma in maniera più generale (ossia allontanandoci) una differente geometria globale.

2.2 Il problema della varietà

Le varietà sono uno dei concetti più importanti in matematica e fisica. Dalla triennale siamo abituati alle proprietà dello spazio euclideo n-dimensionale \mathbf{R}^n e il set delle $n - \text{tuples}$ (x^1, \dots, x^n) molto spesso equipaggiate con una metrica di componenti δ_{ij} . I matematici, hanno lavorato per molti anni per costruire la teoria dell'analisi in \mathbf{R}^n con i più grandi risultati ossia-differenziazione, integrazione e proprietà delle funzioni in generale. Chiaramente però ci sono altri spazi (ad esempio le sfere) che possiamo intuitivamente pensare come "curve" dove vorremmo eseguire operazioni analoghe. Per risolvere questo problema ci inventiamo la nozione di varietà, che corrisponde ad uno spazio che può essere curvo ma che "localmente" è proprio uguale ad \mathbf{R}^n , questo metodo di risoluzione ci piace, perché è spaventosamente simile al metodo che volevamo adottare per risolvere i nostri requisiti fisici. L'intera varietà è costruita unendo in maniera smooth tali regioni locali; un punto cruciale è affermare che la dimensionalità n dello spazio euclideo deve essere la stessa in ogni punto della varietà; diciamo quindi che essa ha dimensione n . Grazie a questo approccio possiamo analizzare le funzioni di tale spazio convertendole localmente a funzioni in uno spazio Euclideo. Un esempio perfetto è il seguente.

- Il Toro n -dimensionale T^n risultato dal prendere un cubo n -dimensionale ed identificando i lati opposti. Otteniamo quindi il toro T^2 . (nota come localmente è proprio \mathbf{R}^2).

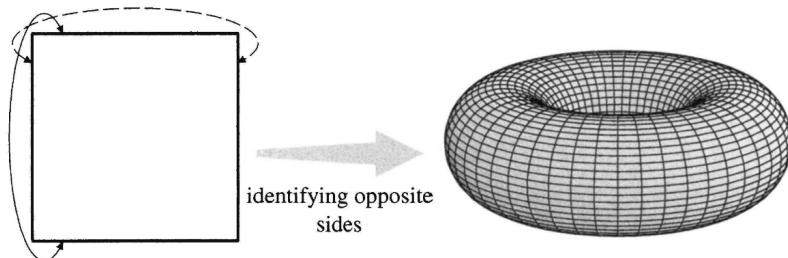


FIGURE 2.5 The torus, T^2 , constructed by identifying opposite sides of a square.

Cerca di notare una cosa, prova a prendere una lente e a guardare precisamente sulla superficie del nostro toro; localmente è proprio \mathbf{R}^n ! Comprendiamo che stiamo costruendo la nostra teoria con il passo giusto.

14 CHAPTER 2. IL BISOGNO DI PENSARE NUOVAMENTE LA GRAVITÀ

Sembra però che costruire delle varietà sia estremamente semplice, in generale però è spesso sottintesa una proprietà di essere che prima ho citato ma sembra che avessi fatto cadere. Noi parliamo più nello specifico di dei **differentiable manifolds**; un esempio che non lo è può essere il seguente: Perchè no?

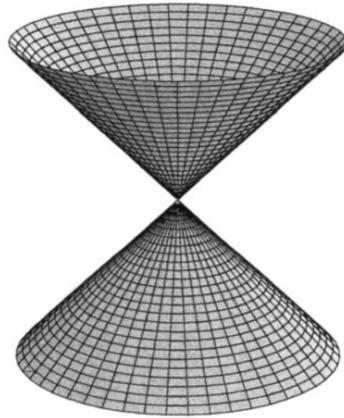


Figure 2.1: **Non** un manifold nel senso che stiamo intendendo noi

perchè in generale come stavo dicendo intendiamo qualcosa di **differentiable**, notiamo infatti che seppur il sistema di coni è smooth ovunque, presenta un problema al punto di incontro e in particolare ci aspettiamo qualche problema per la differenziazione, motivo per cui questo **Non** lo definiamo come un **manifold** nel senso che ci stiamo abituando a costruire. Noi non daremo la definizione formale di varietà, cercheremo più che altro con queste poche basi prettamente **intuitive** di costruire gli oggetti di uso comune in matematica su questi spazi.

La chain rule

Abbiamo capito che in generale questi **manifolds** sono interessanti specialmente per le loro proprietà locali: immaginiamo però di voler passare da una descrizione **locale** di un manifold ad un'altra e così via: in particolare quello che ti sto chiedendo è di definire una mappa: $f : \mathbf{R}^m \rightarrow \mathbf{R}^n$ e $g : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^l$, te lo mostro attraverso la seguente immagine: Allora, con opportune scelte di coordinate

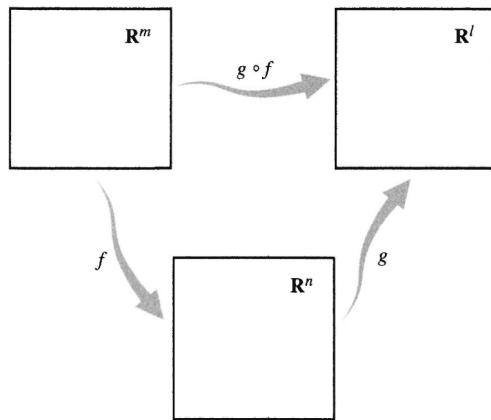


FIGURE 2.17 The chain rule relates the partial derivatives of $g \circ f$ to those of g and f .

ossia x^a su \mathbf{R}^m , y^b su \mathbf{R}^n e z^c su \mathbf{R}^l abbiamo che la chain rule si applica nel seguente modo:

$$\frac{\partial}{\partial x^a}(g \circ f)^c = \sum_b \frac{\partial f^b}{\partial x^a} \frac{\partial g^c}{\partial y^b} \quad (2.9)$$

Di solito abbreviato in:

$$\frac{\partial}{\partial x^a} = \sum_b \frac{\partial y^b}{\partial x^a} \frac{\partial}{\partial y^b} \quad (2.10)$$

Quando $m = n$ il determinante della matrice in (2.10) è chiamata lo **Jacobiano** della mappa, la mappa è invertibile quando lo Jacobiano è diverso da 0.

2.2.1 Il primo strumento matematico utile: i vettori

Ci rendiamo conto che dobbiamo costruire la nostra teoria su degli strumenti geometrici che sono in generale molto più complessi rispetto quelli a cui siamo abituati. Proviamo ad esempio a voler definire la velocità, ricordiamo dai corsi di Analisi II che tale definizione passava per quella di vettore tangente ad una curva: proviamo quindi a costruire lo spazio di tutte le mappe $\gamma : \mathbf{R} \rightarrow M$ tale che p è un'immagine di γ . Ora, proviamo a dare una definizione di **spazio tangente ad una curva**, certo la definizione più banale possibile potrebbe essere **lo spazio di tutti i vettori tangentì al nostro manifold** but that's cheating, infatti non abbiamo ancora definito cosa sia precisamente un vettore.

16 CHAPTER 2. IL BISOGNO DI PENSARE NUOVAMENTE LA GRAVITÀ

Vogliamo ovviamente una definizione di questa derivata direzionale che sia il più possibile indipendente dal set di coordinate che ho scelto, motivo per cui definisco l'insieme di tutte le smooth functions C^∞ :

$$f : M \rightarrow \mathbf{R} \quad (2.11)$$

tale che:

$$f \rightarrow \frac{df}{d\lambda}|_{\lambda=\lambda(P)} \quad (2.12)$$

Allora facciamo il seguente statement ossia che:

Lo spazio tangente \mathbf{T}_p può essere identificato come lo spazio degli operatori di derivata direzionale lungo le curve passanti per P .

Si lo so cosa stai pensando, tu sei pazzo: cioè che senso ha questa cosa? sembra solo un artificio matematico, lascia che ti convinca di due cose ossia che:

- Lo spazio così definito è effettivamente uno spazio vettoriale
- è proprio lo spazio vettoriale che vogliamo (infatti ha la stessa dimensione di M e conduce ad una naturale idea di un vettore puntato su una certa direzione)

Allora, il primo *item* non è difficile da accontentare, il secondo è una sfida concettuale molto più complessa. Siamo sicuri che lo spazio così costruito sia proprio lo spazio tangente? per andare al cuore della questione, proviamo a vedere una base per il nostro manifold (ed immaginiamo, si è proprio un atto che avrà poi matematicamente senso) di fare il nostro classico zoom in \mathbf{R}^n ; Sicuramente le derivate parziali per loro stessa costruzione possono essere un buon indizio

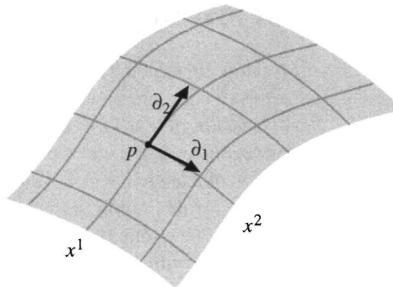


FIGURE 2.18 Partial derivatives define directional derivatives along curves that keep all of the other coordinates constant.

Ciò che ci accingiamo a fare è dimostrare che le ∂_μ siano effettivamente una base per il nostro spazio tangente, per farlo costruiamo una macchina un po' complessa a primo occhio ma che è molto chiara osservandola pazientemente. Proviamo quindi ad usare quanto visto:

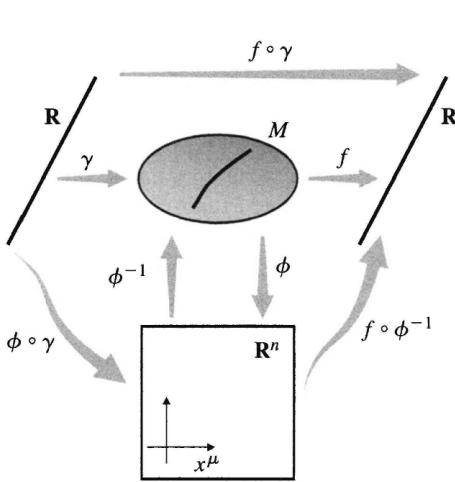


FIGURE 2.19 Decomposing the tangent vector to a curve $\gamma : \mathbf{R} \rightarrow M$ in terms of partial derivatives with respect to coordinates on M .

$$\frac{d}{d\lambda} f = \frac{d}{d\lambda} (f \circ \gamma) = \frac{d}{d\lambda} [(f \circ \phi^{-1}) \circ (\phi \circ \gamma)] = \quad (2.13)$$

Ossia, usando la chain-rule:

$$= \frac{d(\phi \circ \gamma)^\mu}{d\lambda} \frac{\partial(f \circ \phi^{-1})}{\partial x^\mu} = \frac{dx^\mu}{d\lambda} \partial_\mu f \quad (2.14)$$

E in maniera più generica possiamo quindi esprimere:

$$\frac{d}{d\lambda} = \frac{dx^\mu}{d\lambda} \partial_\mu \quad (2.15)$$

Ma allora, abbiamo rispettato il nostro goal, abbiamo infatti dimostrato che le derivate parziali ∂_μ sono effettivamente una buona base per il nostro spazio tangente! chiamiamo quindi il set ∂_μ come la base di coordinate per T_p . Voglio però farti rendere conto di una cosa, in generale non è detto che punto per punto questo set di coordinate sia lo stesso! Ha perfettamente senso se ci pensi, noi non riusciamo a quantificare la nozione di spazio locale ma sappiamo sicuramente che in uno spazio non locale (e quindi abbastanza lontano dal mio "qui ed ora") non potrò utilizzare questa base di coordinate. A questo punto dovrebbe quindi essere chiaro che:

- locale \neq non locale \neq globale

Ok, ma quindi come facciamo a trasformare l'espressione (2.15) ? in generale possiamo sempre usare la magia della chain rule e avere che la base:

$$\partial_{\mu'} = \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x^{\mu'}} \partial_{\mu} \quad (2.16)$$

Dove sto sottintendendo la sommatoria di Einstein. Abbiamo che però in generale, indipendentemente da dove ci troviamo lo scalare deve rimanere lo stesso:

$$V^{\mu} \partial_{\mu} = V^{\mu'} \partial_{\mu'} = V^{\mu'} \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x^{\mu'}} \partial_{\mu} \quad (2.17)$$

e quindi avremo che:

$$V^{\mu'} = \frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x_{\mu}} V^{\mu} \quad (2.18)$$

ed è così, che definiamo un vettore in relatività generale; ossia un oggetto matematico che si trasforma nel modo dato da (2.18).

2.2.2 Ora che abbiamo i vettori, cosa possiamo dire?

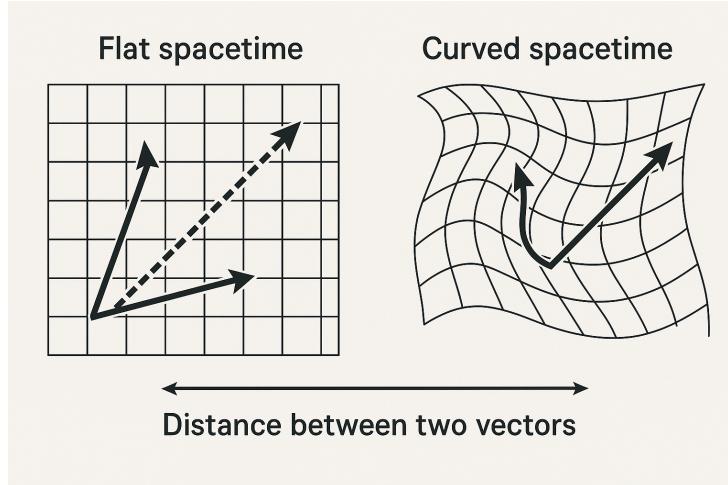
Abbiamo fatto un bel passo in avanti, abbiamo definito in generale il concetto di vettore *indipendentemente* dalle coordinate (si perchè la funzione che abbiamo definito non poggiava su una particolare scelta di coordinate; ci siamo ancorati a quelle in R^n perchè possiamo farlo per ogni manifold e passare da una descrizione all'altra con la chain rule). Adesso però, cerchiamo di tornare per un momento con i piedi per terra e in particolare supponiamo di essere un osservatore in caduta libera, allora secondo quanto detto fino ad ora ci troviamo in uno spaziotempo minkowskiano. Vogliamo provare a definire la distanza tra due vettori? In particolare, sappiamo dai corsi di relatività ristretta che tra un riferimento inerziale ed un altro le **quadrildistanze** devono essere un invariante, la richiesta ha senso immaginando che adesso entra in gioco anche la variabile tempo. Definiamo quindi:

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 - c^2 dt^2 \quad (2.19)$$

Si può dimostrare che scritto in questa forma esso è un invariante relativistico tra un sistema di riferimento inerziale ad un altro, sicuramente esiste un modo più compatto di scrivere questa quadrildistanza che è il seguente:

$$ds^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \quad (2.20)$$

Dove cerchiamo di non preoccuparci per il momento di definirlo da un punto di vista matematico questo oggetto; vediamolo semplicemente come un modo per calcolare le distanze tra vettori. Adesso però, cerchiamo di fare un passo logico; immagina due situazioni diverse, ossia di calcolare le distanze nel tuo frame minkowskiano ed in un frame il più esotico possibile; come se, adesso la distanza tra questi due vettori non la vedi più nel tuo punto minkowskiano ma la stai vedendo da lontano ossia in uno spaziotempo curvo. Adesso, è ora di



due importanti passi logici: abbiamo capito che quindi in generale l'oggetto che

20CHAPTER 2. IL BISOGNO DI PENSARE NUOVAMENTE LA GRAVITÀ

abbiamo scritto in equazione (2.20) non può essere lo stesso per tutti i sistemi di riferimento; motivo per cui dobbiamo renderci conto che in generale saremo costretti ad effettuare un passaggio di questo tipo:

$$\eta_{\mu\nu} \rightarrow g_{\mu\nu}(\mathbf{x}) \quad (2.21)$$

Ovviamente però, noi vogliamo sempre poter ritornare al nostro punto minkowskiano e quindi avere che:

$$g_{\mu\nu}(\mathbf{x}) \rightarrow_{limiteSR} \eta_{\mu\nu} \quad (2.22)$$

E questo, è un primo indizio che serve per costruire la nostra teoria. Potremmo inoltre pensare che in generale l'oggetto che abbiamo costruito ossia $g_{\mu\nu}$ possa essere un protagonista essenziale per la nostra storia, infatti dalla distanza tra i vettori posso ricavare informazioni dello spaziotempo curvo. Allora, proviamo a fare un salto pindarico ed immaginare un oggetto più generale, che descriva bene la la curvatura dello spaziotempo; secondo quanto abbiamo detto sicuramente deve essere legato a qualcosa che causi questa curvatura che nel caso della gravità abbiamo imparato ad essere una massa..ma non dobbiamo dimenticare che in generale nella nozione special-relativistica più che di massa si parla di energia che è in generale legata all'impulso, inoltre questo oggetto dovrà avere gli stessi gradi di libertà dell'oggetto di cui parlavamo in partenza. E' quindi evidente, che stiamo parlando di una relazione di questo tipo:

$$G_{\mu\nu} \propto T_{\mu\nu} \quad (2.23)$$

Ovviamente, per ogni teoria fisica che si rispetti nel limite classico dobbiamo tornare alle situazioni che conosciamo, in particolare quindi nel limite newtoniano dobbiamo tornare ad una forma di questo tipo:

$$\nabla^2 \phi \propto \rho \quad (2.24)$$

Ha perfettamente senso, infatti la definizione di forza gravitazionale che abbiamo dato in (1) ci permette senza dubbio di costruire una teoria di potenziale con delle equazioni analoghe a quelle di Maxwell per il campo elettrostatico. Inoltre, abbiamo cercato di chiarire che in generale adesso non stiamo più parlando di forza gravitazionale nel senso newtoniano, anche perchè essa presenta dei problemi da un punto di vista specialrelativistico, (prova a pensare questo esperimento mentale con due masse, se ne facessei sparire una l'informazione arriverebbe instantaneamente violando il postulato della relatività ristretta) di conseguenza adesso noi non vediamo più il corpo che si muove attraverso una certa traiettoria per via di una forza, ma semplicemente si muove su di essa in quanto è presente una certa curvatura, il corpo quindi è libero! Come del resto abbiamo cercato di far capire con l'esperimento dell'uomo in caduta libera. Ci possiamo chiedere, quale sarà l'equazione che descrive questo corpo libero? Non possiamo rispondere per il momento, ma sicuramente nel limite newtoniano sarà di questa forma:

$$\frac{d^2 \mathbf{x}}{dt^2} = 0 \quad (2.25)$$

2.2.3 Formalizziamo i nostri risultati, I tensori

Come sempre, non ti spaventare per il nome brutto che ho dato a questa **subsection**, cercherò di farti capire il motivo per cui è necessario introdurli. Ripensa per un secondo all'equazione che abbiamo scritto ossia:

$$ds^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \quad (2.26)$$

L'oggetto $\eta_{\mu\nu}$ ha un azione molto particolare, ossia prende due vettori e restituisce un numero reale; ha senso che quindi presenti due indici. Proviamo allora a pensare ad un oggetto che in generale prenda un vettore e restituisca un numero reale. Come prima abbiamo definito uno spazio vettoriale T_p possiamo definirne uno (di stessa dimensione) noto come lo **spazio vettoriale duale**. Lo spazio vettoriale duale è di solito denotato con un asterisco, quindi lo spazio duale dello spazio tangente T_p di solito con nome **spazio cotangente** è denotato come T_p^* . Lo spazio duale è lo spazio di tutte le mappe lineari che vanno dallo spazio vettoriale di partenza all'insieme dei numeri reali. In linguaggio matematico questo si esprime come:

$$\omega(aV + bW) = a\omega(V) + b\omega(W) \in \mathbf{R} \quad (2.27)$$

Si può dimostrare, ma è banale farlo; che queste mappe lineari formino uno spazio vettoriale. Essendo uno spazio vettoriale, siamo interessati a costruire una base. Possiamo introdurre una base per i vettori durali richiedendo che:

$$\hat{\theta}^v(\hat{e}_\mu) = \delta_\mu^v \quad (2.28)$$

Ossia richiedendo di generare una mappa che ad ogni versore dello spazio tangente ne associa uno dello spazio cotangente e quindi scrivere per ogni mappa lineare una cosa di questo tipo:

$$\omega = \omega_\mu \hat{\theta}^{(\mu)} \quad (2.29)$$

e quindi di conseguenza avere che:

$$\omega(V) = \omega_\mu \hat{\theta}^{(\mu)}(V^v \hat{e}_{(v)}) = \omega_\mu V^\mu \in \mathbf{R} \quad (2.30)$$

E' interessante quanto abbiamo scritto in (2.30) perché infatti io posso pensare anche al problema al contrario e avere che:

$$V(\omega) \equiv \omega(V) = \omega_\mu V^\mu \quad (2.31)$$

Ossia, si scopre che lo spazio duale allo spazio duale è lo spazio vettoriale di partenza stesso. Chiamiamo gli elementi (V^μ) dello spazio vettoriale come componenti **contravarianti**, mentre quelli del duale ω_μ come **covarianti**. Però non ci possiamo accontentare così banalmente, infatti dalla (2.18) richiediamo che voglio capire come questi vettori si trasformino! Va bene, però cerca di fare un ragionamento estremamente semplice, cerca di guardare la (2.31), quello che ho scritto è un numero reale! Ti può sembrare che cambi rispetto al sistema di

22CHAPTER 2. IL BISOGNO DI PENSARE NUOVAMENTE LA GRAVITÀ

riferimento scelto? evidentemente no; deve essere quindi vera una relazione di questo tipo:

$$V^\mu \omega_\mu = V(\omega) = V'(\omega') = V^{\mu'} \omega'_\mu \quad (2.32)$$

Ma noi abbiamo già scoperto come si trasformano le componenti contravarianti attraverso (2.18) di conseguenza abbiamo che per garantirci la (2.32) sarà necessariamente vero che:

$$\omega'_\mu = \frac{\partial x^v}{\partial x'_u} \omega_v \quad (2.33)$$

Diciamo che quindi i vettori che si trasformano in questo modo sono **covarianti**. Va bene, ma non abbiamo ancora risposto alla domanda che è stata posta in (2.26) perchè in generale noi prendiamo ben **due vettori!**; la verità è che non dobbiamo porre freno alla nostra fantasia in quanto possiamo costruire un oggetto di questo tipo:

$$T : T_p^* \times \dots \times T_p^* \times T_p \times \dots \times T_p \rightarrow \mathbf{R} \quad (2.34)$$

Questa è una generalizzazione del concetto di vettore e covettore; come infatti un vettore duale è una mappa lineare da vettori ad **R** un tensore T di tipo (rango) (l,k) è una mappa lineare che parte da una collezione di vettori e vettori duali e arriva in **R**. Ricorda che in generale quelle \times che stiamo utilizzando stanno a simboleggiare il prodotto cartesiano. Ora, come potevamo aspettarci lo spazio dei tensori di rango (k,l) forma uno spazio vettoriale, è in questo senso che si introduce una nuova operazione detta **prodotto tensore**, siano quindi due tensori T di rango (k,l) ed uno S di rango (m,n), definiamo allora un tensore di rango (k+m,l+n) di nome $T \otimes S$ e lo denotiamo come:

$$T \otimes S(\omega^1, \dots, \omega^k, \dots, \omega^{(k+m)}, V^{(1)}, \dots, V^{(l)}, \dots, V^{(l+n)}) = \quad (2.35)$$

Ossia:

$$= T(\omega^1, \dots, \omega^k, V^1, \dots, V^l) \times S(\omega^{k+1}, \dots, \omega^{k+m}, V^{l+1}, \dots, V^{l+n}) \quad (2.36)$$

Ossia prima fai agire T sul set appropriato di vettori duali e vettori, poi fai agire S e poi moltiplichi quello che ti esce. Nota importantissima: in generale vale che:

$$T \otimes S \neq S \otimes T \quad (2.37)$$

Perchè ti ho fatto fare questo casino? per farti capire in generale come costruire una base per il tuo spazio vettoriale: se volessimo prendere quella per tutti i tensori di tipo (k,l) sicuramente avremo che:

$$\hat{e}_{\mu_1} \otimes \dots \otimes \hat{e}_{\mu_k} \otimes \hat{\theta}^{v_1} \otimes \dots \otimes \hat{\theta}^{v_l} \quad (2.38)$$

E se volessi creare uno spazio vettoriale più grande, mi basta fare riferimento alla (2.35). In generale quindi un tensore è un oggetto di questo tipo:

$$T = T_{v_1, \dots, v_l}^{\mu_1, \dots, \mu_k} \hat{e}_{\mu_1} \otimes \hat{e}_{\mu_2} \otimes \dots \otimes \hat{e}_{\mu_k} \otimes \hat{\theta}^{v_1} \otimes \dots \otimes \hat{\theta}^{v_l} \quad (2.39)$$

Ovviamente, sullo stessa filosofia dei ragionamenti fatti in precedenza vogliamo definire l'oggetto matematico attraverso il modo in cui si trasforma, sicuramente quindi avremo che (pensaci, hai tante volte contraviarante e tante volte covariante di conseguenza..):

$$T_{\nu'_1 \dots \nu'_l}^{\mu'_1 \dots \mu'_k} = \frac{\partial x^{\mu'_1}}{\partial x^{\mu_1}} \dots \frac{\partial x^{\mu'_k}}{\partial x^{\mu_k}} \frac{\partial x^{\nu'_1}}{\partial x^{\nu'_1}} \dots \frac{\partial x^{\nu'_l}}{\partial x^{\nu'_l}} T^{\mu_1 \dots \mu_k}_{\nu_1 \dots \nu_l} \quad (2.40)$$

Dovrebbe essere chiaro, e se non lo fosse ci provo io che in generale quindi tutti gli oggetti che conosciamo sono tensori, dagli scalari che sono tensori di tipo (0,0) (infatti non cambiano per cambi di coordinate), ai vettori che sono di tipo (1,0) ai covettori che sono di tipo (0,1) e così via.

Il tensore metrico

Quindi abbiamo chiarito il mistero su chi fosse effettivamente $g_{\mu\nu}$, esso è infatti un tensore (0,2) ossia 2 volte covariante. Facciamo alcune richieste matematiche che servono per poggiare la nostra teoria su fondamenta sicure, richiediamo che tale tensore sia simmetrico e che il determinante sia sempre diverso da 0. Questo ci permette di definire il tensore metrico inverso ossia:

$$g^{\mu\nu} g_{\nu\sigma} = \delta^\mu_\sigma \quad (2.41)$$

Adesso capirai il perchè abbiamo fatto queste richieste: infatti questo tensore viene utilizzato per poter abbassare ed alzare gli indici degli altri tensori, gli esempi sono infiniti ma a me piace fare sempre quello della quadridistanza, infatti il nostro tensore abbassa gli indici al tensore due volte contravariante $dx^\mu dx^\nu$, in particolare avremo quindi che:

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \quad (2.42)$$

Qualcuno si potrebbe chiedere di mostrare* un esempio di metrica in relazione alla (2.21) in cui abbiamo una dipendenza dal punto, prova quindi ad immaginare la **superficie sferica** in \mathbf{R}^3 , avremo che in generale ci sarà una situazione di questo tipo:

$$ds^2 = d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2 \quad (2.43)$$

Ossia la metrica stessa o se vogliamo la **signature** dipende dal punto che stiamo scegliendo di analizzare. Una caratterizzazione utile per la metrica è quindi quella della forma canonica, in generale avremo che:

$$g_{\mu\nu} = \text{diag}(-1, -1, \dots, +1, +1, \dots, +1, 0, \dots, 0) \quad (2.44)$$

Se tutti i segni sono positivi parliamo di metrica **Euclidea o Riemanniana**, se c'è un solo segno negativo parliamo di una metrica **Lorentziana o pseudo-Riemanniana**

2.2.4 La derivata covariante e le varietà

Torniamo nel nostro spazio newtoniano, in generale sin dalle superiori siamo sempre stati interessati a comprendere quando una certa quantità resti costante rispetto alle variabili che abbiamo in gioco. Quando io mi muovo attraverso queste variabili, vorrei che la mia quantità (che possiamo pensare per il momento come un vettore) resti costante. Motivo per cui mi serve un rate per capire se, rispetto alle coordinate che ho in gioco essa resti costante, lo so cosa stai pensando: certo che esiste questo oggetto ed è la derivata! Non così veloce, proviamo a descrivere la situazione in uno spaziotempo piatto. Allora, è banale

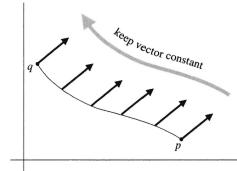


FIGURE 3.1 In flat space, we can parallel transport a vector by simply keeping its Cartesian components constant.

immaginare che in uno spaziotempo piatto il trasporto avviene indipendentemente dalla curva che sto prendendo lungo cui farlo, quindi posso banalmente definire che una quantità (un vettore, oppure più generalmente un tensore) viene trasportato parallelamente quando è vero che:

$$\partial_\mu T_{\eta,\gamma\dots}^{\mu,\nu\dots} = 0 \quad (2.45)$$

Però cerca di non cadere in inganno, proviamo a fare la stessa situazione per quanto riguarda una sfera in \mathbf{R}^3 , prova a vedere dall'immagine:

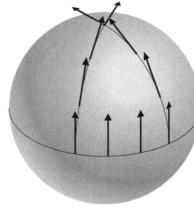


FIGURE 3.2 Parallel transport on a two-sphere. On a curved manifold, the result of parallel transport can depend on the path taken.

Il motivo matematico per cui avviene questa cosa, è che lo spazio tangente come abbiamo visto in partenza dipende da punto per punto; ha quindi senso che otteniamo ciò che vediamo nell'immagine. Allora abbiamo capito qual è il problema, ossia che dobbiamo tenere conto del cambio della base punto per punto quindi abbiamo che in generale:

$$\partial_v (V^\mu e_\mu) = \partial_v (V^\mu) e_\mu + \partial_v (e_\mu) V^\mu \quad (2.46)$$

Ora, evidentemente noi vogliamo scrivere un'espressione che sia indipendente dalla base che stiamo scegliendo, ma è imprescindibile che dobbiamo tenere

conto della matrice $n \times n$ che abbiamo ottenuto a (2.46) e che, in generale mantenga le dipendenze (nel senso di gradi di libertà) della derivata ordinaria, allora avremo che:

$$\nabla_\mu V^\nu = \partial_\mu V^\nu + \Gamma_{\mu\lambda}^\nu V^\lambda \quad (2.47)$$

Dove i simboli, $\Gamma_{\mu\lambda}^\nu$ sono detti simboli di Christoffel o anche **coefficienti di connessione**, ovviamente per quanto detto fino ad ora siamo interessati al fatto che (per manipolazioni future) l'espressione in (2.47) sia un tensore, potresti quindi aspettarti che ogni singolo pezzo dei due presi singolarmente lo siano (dove per tensore ricordo che significa che si trasforma come esso ossia secondo la (2.40)), ma non è così e te lo dimostro. Vorremmo che in generale la (2.47) si trasformi in questo modo:

$$\nabla_{\mu'} V^{\nu'} = \frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\mu'}} \frac{\partial x^{\nu'}}{\partial x^\nu} \nabla_\mu V^\nu \quad (2.48)$$

In accordo con (2.40), allora proviamo effettivamente a fare questo calcolo, usando le proprietà di trasformazione troviamo una cosa di questo tipo:

$$\begin{aligned} \nabla_{\mu'} V^{\nu'} &= \partial_{\mu'} V^{\nu'} + \Gamma_{\mu'\lambda'}^{\nu'} V^{\lambda'} \\ &= \frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\mu'}} \frac{\partial x^{\nu'}}{\partial x^\nu} \partial_\mu V^\nu + \frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\mu'}} V^\nu \frac{\partial}{\partial x^\mu} \left(\frac{\partial x^{\nu'}}{\partial x^\nu} \right) + \Gamma_{\mu'\lambda'}^{\nu'} \frac{\partial x^{\lambda'}}{\partial x^\lambda} V^\lambda \end{aligned} \quad (2.49)$$

Va bene, prendiamo come sempre (2.48), abbiamo che in generale noi possiamo espandere il lato destro ed avere:

$$\frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\mu'}} \frac{\partial x^{\nu'}}{\partial x^\nu} \nabla_\mu V^\nu = \frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\mu'}} \frac{\partial x^{\nu'}}{\partial x^\nu} \partial_\mu V^\nu + \frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\mu'}} \frac{\partial x^{\nu'}}{\partial x^\nu} \Gamma_{\mu\lambda}^\nu V^\lambda \quad (2.50)$$

Ma le due espressioni ossia (2.49) e (2.50) dobbiamo necessariamente imporre che siano uguali, allora avremo che:

$$\Gamma_{\mu'\lambda'}^{\nu'} \frac{\partial x^{\lambda'}}{\partial x^\lambda} V^\lambda + \frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\mu'}} V^\lambda \frac{\partial}{\partial x^\mu} \left(\frac{\partial x^{\nu'}}{\partial x^\lambda} \right) = \frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\mu'}} \frac{\partial x^{\nu'}}{\partial x^\nu} \Gamma_{\mu\lambda}^\nu V^\lambda, \quad (2.51)$$

Questa equazione deve essere vera per ogni V^λ di conseguenza avremo che:

$$\Gamma_{\mu'\lambda'}^{\nu'} = \frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\mu'}} \frac{\partial x^\lambda}{\partial x^{\lambda'}} \frac{\partial x^{\nu'}}{\partial x^\nu} \Gamma_{\mu\lambda}^\nu + \frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\mu'}} \frac{\partial x^\lambda}{\partial x^{\lambda'}} \frac{\partial^2 x^{\nu'}}{\partial x^\mu \partial x^\lambda} \quad (2.52)$$

Ossia, è evidente che la formula di trasformazione non coincide per niente con quella di (2.40), quindi i coefficienti di connessione **non si trasformano in maniera tensoriale** I più attenti avranno notato però un passaggio un po curioso dalla (2.51) alla (2.52) nel senso che ho moltiplicato entrambi i lati per una derivata parziale, la domanda che dovrebbe nascere è: **e il simbolo di christoffel non agisce su di essi?** la risposta è che: I simboli di Christoffel non agiscono sui tensori, perché non sono operatori. Sono semplicemente le

componenti della connessione in una base scelta. La loro presenza in espressioni come (2.47) serve a correggere la derivata parziale per il cambiamento della base, ma l'azione vera è compiuta dall'operatore di derivata covariante In questo senso, nessuna definizione formale attribuisce ai simboli di Christoffel un potere di "agire" su un campo, esattamente come un numero in una somma non "agisce" su un altro numero, ma ne modifica il valore.

Hai analizzato solo un tipo di tensore, gli altri?

In generale, come abbiamo visto ci siamo interessati all'analisi di solo un tipo di tensore ossia quelli (1,0); potrei in generale voler costruire una legge per i tensori di tipo (0,1) avendo una cosa di questo tipo:

$$\nabla_\mu \omega_v = \partial_\mu \omega_v + \tilde{\Gamma}_{\mu v}^\lambda \omega_\lambda \quad (2.53)$$

Si perchè in generale non è detto che i coefficienti di connessione debbano essere gli stessi; allora adesso per poter capire se ci può essere una relazione tra quelli definiti adesso e quelli definiti prima proviamo a prendere la derivata covariante dello scalare:

$$\begin{aligned} \nabla_\mu (\omega_\lambda V^\lambda) &= (\nabla_\mu \omega_\lambda) V^\lambda + \omega_\lambda (\nabla_\mu V^\lambda) \\ &= (\partial_\mu \omega_\lambda) V^\lambda + \tilde{\Gamma}_{\mu\lambda}^\sigma \omega_\sigma V^\lambda + \omega_\lambda (\partial_\mu V^\lambda) + \omega_\lambda \Gamma_{\mu\rho}^\lambda V^\rho \end{aligned} \quad (2.54)$$

Va bene, ma devo ricordarmi che a primo membro ho uno scalare e di conseguenza avrò che:

$$\begin{aligned} \nabla_\mu (\omega_\lambda V^\lambda) &= \partial_\mu (\omega_\lambda V^\lambda) \\ &= (\partial_\mu \omega_\lambda) V^\lambda + \omega_\lambda (\partial_\mu V^\lambda). \end{aligned} \quad (2.55)$$

E allora si arriva all'equazione:

$$0 = \tilde{\Gamma}_{\mu\lambda}^\sigma \omega_\sigma V^\lambda + \Gamma_{\mu\lambda}^\sigma \omega_\sigma V^\lambda \quad (2.56)$$

che può evidentemente essere vera se e solo se:

$$\tilde{\Gamma}_{\mu\lambda}^\sigma = -\Gamma_{\mu\lambda}^\sigma \quad (2.57)$$

Ossia, in generale avremo che:

$$\nabla_\mu \omega_v = \partial_\mu \omega_v - \Gamma_{\mu v}^\lambda \omega_\lambda \quad (2.58)$$

Abbiamo ottenuto la formulazione covariante che ci permette di applicare i nostri ragionamenti alle 1-forme, a questo punto quindi non sarà una sorpresa se ti mostro la formulazione di derivazione covariante generale di un tensore ossia:

$$\begin{aligned} \nabla_\sigma T_{\nu_1 \nu_2 \dots \nu_l}^{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_k} &= \partial_\sigma T_{\nu_1 \nu_2 \dots \nu_l}^{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_k} \\ &\quad + \Gamma_{\sigma\lambda}^{\mu_1} T_{\nu_1 \nu_2 \dots \nu_l}^{\lambda \mu_2 \dots \mu_k} + \Gamma_{\sigma\lambda}^{\mu_2} T_{\nu_1 \nu_2 \dots \nu_l}^{\mu_1 \lambda \dots \mu_k} + \dots \\ &\quad - \Gamma_{\sigma\nu_1}^\lambda T_{\lambda \nu_2 \dots \nu_l}^{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_k} - \Gamma_{\sigma\nu_2}^\lambda T_{\nu_1 \lambda \dots \nu_l}^{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_k} - \dots \end{aligned} \quad (2.59)$$

2.2.5 Ancora sul concetto di SDR localmente inerziale e le equazioni tensoriali

Oramai non siamo più al livello da cui eravamo iniziati, possiamo sicuramente dare una formulazione più esaustiva di cosa significhi trovarsi in un sistema di riferimento localmente inerziale; l'intuizione fisica che abbiamo costruito all'inizio delle dispense ci suggerisce che in generale deve sempre esistere un cambio di coordinate (o meglio, un diffeomorfismo) che ci permette di affermare che (nota che stiamo portando la metrifica nella sua formulazione canonica):

$$g_{\hat{u}\hat{v}}(p) = \eta_{\hat{u}\hat{v}} \quad \partial_{\hat{\sigma}} g_{\hat{u}\hat{v}}(p) = 0 \quad (2.60)$$

La richiesta ha senso, le coordinate di questo tipo si chiamano **coordinate localmente inerziali** e la base assciata costituisce il **frame lorentziano**, indichiamo con dei cappelli gli indici nel momento in cui ci troviamo in queste coordinate **speciali**; certo lo so cosa stai pensando **va bene l'intuizione fisica ma chi mi garantisce che effettivamente queste coordinate esistano?** faremo una discussione complessa quindi cerca di essere più attent* possibile, arriveremo a dimostrare che la (2.60) è in generale vera ma che non possiamo spingerci a più delle derivate seconde. Allora, in generale noi vogliamo che il tensore metrico secondo quanto abbiamo detto si traformi in questo modo:

$$g_{\hat{u}\hat{v}} = \frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\hat{u}}} \frac{\partial x^\nu}{\partial x^{\hat{v}}} g_{\mu\nu} \quad (2.61)$$

Il che ha perfettamente senso, però posso sviluppare secondo taylor in questo frame localmente inerziale attraverso:

$$\begin{aligned} x^\mu &= \left(\frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\hat{\mu}}} \right)_p x^{\hat{\mu}} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 x^\mu}{\partial x^{\hat{\mu}_1} \partial x^{\hat{\mu}_2}} \right)_p x^{\hat{\mu}_1} x^{\hat{\mu}_2} \\ &\quad + \frac{1}{6} \left(\frac{\partial^3 x^\mu}{\partial x^{\hat{\mu}_1} \partial x^{\hat{\mu}_2} \partial x^{\hat{\mu}_3}} \right)_p x^{\hat{\mu}_1} x^{\hat{\mu}_2} x^{\hat{\mu}_3} + \dots \end{aligned} \quad (2.62)$$

Allora, possiamo scrivere (2.61) nel seguente modo:

$$\begin{aligned} (\hat{g})_p + (\hat{\partial}\hat{g})_p \hat{x} + (\hat{\partial}\hat{\partial}\hat{g})_p \hat{x}\hat{x} &= \left(\frac{\partial x}{\partial \hat{x}} \frac{\partial}{\partial \hat{x}} g \right)_p \\ &\quad + \left(\frac{\partial x}{\partial \hat{x}} \frac{\partial^2 x}{\partial \hat{x} \partial \hat{x}} g + \frac{\partial x}{\partial \hat{x}} \frac{\partial}{\partial \hat{x}} \hat{\partial} g \right)_p \hat{x} \\ &\quad + \left(\frac{\partial x}{\partial \hat{x}} \frac{\partial^3 x}{\partial \hat{x} \partial \hat{x} \partial \hat{x}} g + \frac{\partial^2 x}{\partial \hat{x} \partial \hat{x}} \frac{\partial^2 x}{\partial \hat{x} \partial \hat{x}} g + \frac{\partial x}{\partial \hat{x}} \frac{\partial^2 x}{\partial \hat{x} \partial \hat{x}} \hat{\partial} g + \frac{\partial x}{\partial \hat{x}} \frac{\partial}{\partial \hat{x}} \hat{\partial} \hat{\partial} g \right)_p \hat{x}\hat{x}. \end{aligned} \quad (2.63)$$

Allora, possiamo uguagliare il primo membro con il secondo in base ai coefficienti \hat{x} che abbiamo, allora a sinistra ci rendiamo conto che per il primo pezzo abbiamo 10 gradi di libertà, infatti ne sono in partenza 16 ma la matrice è simmetrica; poi, il primo pezzo a destra ne ha 16 senza restrizioni particolari

di conseguenza ci rendiamo conto che per il primo pezzo a sinistra abbiamo abbastanza gradi di libertà per fissarlo, i rimanenti 6 parametri possono essere interpretati esattamente come i 6 parametri del gruppo di Lorenz. Poi, il secondo pezzo a sinistra abbiamo in totale 40 gradi di libertà infatti sono 10 per quelli di partenza e 4 per le derivate e quindi $4 \times 10 = 40$, il secondo pezzo a destra è una derivata seconda e potresti pensare che abbiamo $4 \times 4 \times 4$ gradi di libertà ma la derivata seconda (assumendo che valga il teorema di Schwarz) è interscambiabile di conseguenza sono precisamente 40, quindi possiamo fissare la derivata prima e la mettiamo uguale a 0. Infine, il terzo membro a sinistra ha 100 gradi di libertà (posso scambiare i primi due ordini delle derivate e la matrice è simmetrica) e di conseguenza ottengo questo numero, ma a destra la derivata terza mi dà solo 80 gradi di libertà (i tre ordini di derivazione sono interscambiabili) di conseguenza non posso fissare la derivata seconda a 0 motivo per cui non lo facciamo. In realtà, questa cosa ci piace infatti noi **NON VOGLIAMO** fissare la derivata seconda a 0 in un sistema di riferimento localmente inerziale, devi ricordare che noi qui vogliamo:

$$\nabla^2 \phi \propto \rho \quad (2.64)$$

Ma perchè così tanta insistenza?

Oltre che da un punto di vista puramente fisico, la richiesta matematica ci aiuterà molto nelle equazioni tensoriali; sto parlando di equazioni del tipo:

$$A_{\rho\sigma\dots}^{\mu\nu\dots} = B_{\epsilon\chi\dots}^{\xi\eta\dots} \quad (2.65)$$

Infatti, sfruttando le proprietà (e soprattutto quindi, la semplicità) dei SDR localmente inerziali possiamo risolvere l'equazione in tali sistemi e questi poi in generale varranno sempre! Perchè ti chiedi? pensaci, in un uguaglianza tensoriale le quantità ad entrambi i membri devono trasformarsi allo stesso modo per un dato diffeomorfismo, di conseguenza a meno di trasformazioni le nuove quantità che otteniamo (tramite appunto, tali trasformazioni) saranno sempre uguali! Quando utilizzeremo la proprietà di un sistema di riferimento localmente inerziale, metteremo l'uguale con un cappello sopra. Innanzitutto, ha senso pensare che i simboli di Christoffel siano 0 in un sistema di riferimento localmente inerziale infatti qui siamo nell'approssimazione minkowskiana, detto questo dovrebbe essere evidente che:

$$[\nabla_\alpha, \nabla_\beta] \phi \equiv [\partial_\mu, \partial_\nu] \phi = 0 \quad (2.66)$$

Ma allora, mettendo in maniera "fittizia" i simboli di christoffel arriviamo ad affermare che:

$$\Gamma_{\alpha\beta}^\rho = \Gamma_{\beta\alpha}^\rho \quad (2.67)$$

Ossia si dice essere **torsion-free**, il passaggio che abbiamo fatto in realtà è di una raffinatezza incredibile infatti abbiamo detto che di base nella espansione del termine a primo membro di (2.66) sono anche le derivate del simbolo di Christoffel ad annullarsi, cosa che in generale non è sempre vera infatti possiamo

dirlo solo qui in quanto tale simbolo è 0 ovunque e la derivata di conseguenza sarà costretta ad esserlo, inoltre a secondo membro abbiamo usato una vera e propria definizione di derivata covariante di uno scalare, senza trucchi. Per farti capire la raffinatezza di quanto appena fatto interrogati su questo commutatore:

$$[\nabla_\alpha, \nabla_\beta] A^\mu \hat{=} 0 ? NO! \quad (2.68)$$

Infatti anche se provi a metterti in un sistema di riferimento localmente inerziale, la definizione dell'operatore stesso richiede che si facciano delle derivate del simbolo di Christoffel, che in questo caso si annullano solo in un punto, non ovunque. In generale, questa cosa è più chiara costruendo a partire dal commutatore in (2.68) il **tensores di Riemann**. Adesso, ha anche perfettamente senso richiedere che

$$\nabla_\rho g_{\mu\nu} \hat{=} 0 \quad (2.69)$$

Allora, proviamo a considerare le seguenti tre identità:

$$\begin{aligned} \nabla_\rho g_{\mu\nu} &= \partial_\rho g_{\mu\nu} - \Gamma_{\rho\mu}^\lambda g_{\lambda\nu} - \Gamma_{\rho\nu}^\lambda g_{\mu\lambda} = 0 \\ \nabla_\mu g_{\nu\rho} &= \partial_\mu g_{\nu\rho} - \Gamma_{\mu\nu}^\lambda g_{\lambda\rho} - \Gamma_{\mu\rho}^\lambda g_{\nu\lambda} = 0 \\ \nabla_\nu g_{\rho\mu} &= \partial_\nu g_{\rho\mu} - \Gamma_{\nu\rho}^\lambda g_{\lambda\mu} - \Gamma_{\nu\mu}^\lambda g_{\rho\lambda} = 0 \end{aligned} \quad (2.70)$$

Sottraiamo la seconda e la terza dalla prima e otteniamo:

$$\partial_\rho g_{\mu\nu} - \partial_\mu g_{\nu\rho} - \partial_\nu g_{\rho\mu} + 2\Gamma_{\mu\nu}^\lambda g_{\lambda\rho} = 0 \quad (2.71)$$

Ossia, è banale a questo punto vedere che:

$$\Gamma_{\mu\nu}^\sigma = \frac{1}{2} g^{\sigma\rho} (\partial_\mu g_{\nu\rho} + \partial_\nu g_{\rho\mu} - \partial_\rho g_{\mu\nu}) \quad (2.72)$$

Voglio comunque che sia palese il fatto che la derivata parziale non si trasforma come un tensore di conseguenza non vale quel discorso fatto per i SDR localmente inerziali e le equazioni tensoriali, puoi vederlo chiaramente dalla derivazione in (2.49). Non voglio però che pensi che in generale l'equazione (2.68) ci dica che la derivata covariante e quella ordinaria non coincidano mai, infatti solo in un sistema di riferimento localmente inerziale abbiamo che:

$$\nabla_\alpha V^\mu \hat{=} \partial_\alpha V^\mu \quad (2.73)$$

Nota, come questa non sia però un'equazione tensoriale, infatti a destra non abbiamo un tensore.

2.2.6 Ancora sul trasporto parallelo e le geodetiche

Abbiamo utilizzato il concetto di trasporto parallelo per introdurre quello di derivata covariante, ho però imbrogliato ad un certo punto; infatti ho introdotto la nozione di coordinate senza specificare quello dicurva in cui mi sto muovendo, che è il testimone del problema originale da cui siamo partiti! In generale pretendiamo che la definizione di trasporto parallelo assomigli a:

$$\frac{d}{d\lambda} T_{v_1, \dots, v_l}^{\mu_1, \dots, \mu_k} = \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{\partial}{\partial x^\mu} T_{v_1, \dots, v_l}^{\mu_1, \dots, \mu_k} = 0 \quad (2.74)$$

Per renderlo propriamente tensoriale ha allora perfettamente senso che facciamo la sostituzione con:

$$\frac{D}{d\lambda} = \frac{dx^\mu}{d\lambda} \nabla_\mu \quad (2.75)$$

Allora, ha perfettamente senso dire che:

$$\left(\frac{D}{d\lambda} T_{v_1 v_2 \dots v_l}^{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_k} \right) \equiv \frac{dx^\sigma}{d\lambda} \nabla_\sigma T_{v_1 v_2 \dots v_l}^{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_k} = 0 \quad (2.76)$$

E che quindi per un vettore prendere ovviamente la forma:

$$\frac{dV^\mu}{d\lambda} + \Gamma_{\sigma\rho}^\mu \frac{dx^\sigma}{d\lambda} V^\rho = 0 \quad (2.77)$$

Per quanto detto prima, è ovvio che il trasporto parallelo del tensore metrico è sempre ugale a 0, inoltre segue che presi due vettori trasportati parallelamente lungo una curva $x^\sigma(\lambda)$ abbiamo che il loro prodotto interno avrà un trasporto parallelo sempre uguale a 0, infatti:

$$\frac{D}{d\lambda} (g_{\mu\nu} V^\mu W^\nu) = \left(\frac{D}{d\lambda} g_{\mu\nu} \right) V^\mu W^\nu + g_{\mu\nu} \left(\frac{DV^\mu}{d\lambda} \right) W^\nu + g_{\mu\nu} V^\mu \left(\frac{DW^\nu}{d\lambda} \right) = 0 \quad (3.42)$$

Va bene, ma sicuramente una cosa che ci interessa è anche il trasporto parallelo del vettore tangente infatti se provi a vedere l'equazione (2.15) allora capisci che dobbiamo richiedere che:

$$\frac{D}{d\lambda} \frac{dx^\mu}{d\lambda} = 0 \quad (2.78)$$

Ossia, in forma estesa:

$$\frac{d^2x^\mu}{d\lambda^2} + \Gamma_{\rho\sigma}^\mu \frac{dx^\rho}{d\lambda} \frac{dx^\sigma}{d\lambda} = 0 \quad (2.79)$$

che prende il nome di **equazione delle geodetiche**, cerca di notare una cosa ossia che abbiamo perfettamente risposto alla richiesta (2.25), questa equazione rappresenta infatti quella del moto libero!(vedi prossima pagina sarà più chiaro) ovviamente su un manifold curvo, ti potrai facilmente rendere conto che se provi a fare l'approssimazione di SDR localmente inerziale torni a (2.25).

La derivazione parametrica

Siamo abituati in relatività ristretta ad utilizzare il parametro del tempo proprio per poter descrivere situazioni di stazionarietà, il motivo per cui facciamo questa cosa è dovuto principalmente al fatto che vogliamo che l'accelerazione si trasformi come un quadrvettore, se mettessimo il tempo come parametro al denominatore avremo una forma strana di trasformazione. Allora, come dicevamo definiamo la quadrivelocità in questo modo:

$$U^\mu = \frac{d\xi^\mu}{d\tau} \quad (2.80)$$

Dove appunto τ è il nostro parametro di tempo libero, siamo interessati ad una descrizione di moto libero almeno per un sistema di riferimento localmente inerziale motivo per cui mettiamo il punto:

$$\frac{dU^\mu}{d\tau} \hat{=} 0 \quad (2.81)$$

Allora, sempre in coordinate localmente inerziali abbiamo che:

$$0 \hat{=} \frac{dU^\mu}{d\tau} \hat{=} \frac{d\xi^\alpha}{d\tau} \frac{\partial U^\mu}{\partial \xi^\alpha} = U^\alpha \partial_\alpha U^\mu \hat{=} U^\alpha \nabla_\alpha U^\mu \quad (2.82)$$

Allora, possiamo espandere questa derivata covariante e avere che:

$$U^\alpha (\partial_\alpha U^\mu + \Gamma_{\alpha\beta}^\mu U^\beta) = 0 \quad (2.83)$$

e quindi:

$$U^\alpha \partial_\alpha U^\mu + U^\alpha \Gamma_{\alpha\beta}^\mu U^\beta = 0 \quad (2.84)$$

Ma io ho definito U^α come la quadrivelocità, ha quindi perfettamente senso esprimelo in funzione della posizione (ossia del vettore tangente):

$$\frac{dx^\alpha}{d\tau} \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \frac{dx^\mu}{d\tau} + \Gamma_{\alpha\beta}^\mu \frac{dx^\alpha}{d\tau} \frac{dx^\beta}{d\tau} = 0 \quad (2.85)$$

Ma allora è palese che:

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} + \Gamma_{\alpha\beta}^\mu \frac{dx^\alpha}{d\tau} \frac{dx^\beta}{d\tau} = 0 \quad (2.86)$$

che è letteralmente quello che ci siamo trovati prima, comprendiamo quindi quanto la nostra descrizione abbia senso. E' quindi normale pensare in maniera generale ad una generalizzazione di questa equazione in questo modo:

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} + \Gamma_{\rho\sigma}^\mu \frac{dx^\rho}{d\tau} \frac{dx^\sigma}{d\tau} = \frac{q}{m} F_v^\mu \frac{dx^v}{d\tau} \quad (2.87)$$

2.3 Verso l'equazione di Einstein

Cerchiamo di riassumere quello che abbiamo fatto, abbiamo descritto in generale il problema della gravità in un manifold curvo e poi ci siamo preoccupati di trovare alcuni risultati della meccanica newtoniana nella nuova teoria che stiamo costruendo e un esempio spettacolare è stato proprio quello dell'equazione delle geodetiche che sicuramente avrai compreso che torna all'equazione che tutti conosciamo nel limite classico. Adesso, ci preoccupiamo di investigare le particolarità di alcuni tensori.

2.3.1 Sul tensore energia impulso

Abbiamo già chiarito come questo tensore debba entrare nella nostra equazione principale, in particolare però sappiamo che in relatività ristretta avremo che:

$$\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0 \quad (2.88)$$

Adesso, si tratta di passare da uno spaziotempo minkowskiano ad uno generico, avremo quindi che:

$$0 = \partial_\mu T^{\mu\nu} \hat{=} \nabla_\mu T^{\mu\nu} \quad (2.89)$$

Ma questa è un'equazione tensoriale! di conseguenza abbiamo che:

$$\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0 \quad (2.90)$$

Questo tensore è simmetrico, di conseguenza sappiamo che anche il tensore di spaziotempo che stiamo cercando di costruire dovrà esserlo.

2.3.2 Sul tensore di Riemann

Cerchiamo di tornare ad una discussione per quanto riguarda lo spaziotempo e le sue proprietà, in generale vogliamo ricordare che se ci trovassimo in uno spaziotempo piatto allora in generale il trasporto lungo una curva di un vettore non dipende dal percorso che abbiamo scelto, motivo per cui ha perfettamente senso pensare che in SR se prendessimo una luna chiusa allora il vettore tornerà esattamente a come lo abbiamo visto in partenza. Ora, la domanda che ci dobbiamo fare è la seguente: in relatività generale questa cosa è vera? **ovviamente no**, infatti supponiamo di prendere gli stessi due punti, uno di inizio ed uno di fine di un percorso ma prendiamo due path differenti, avrai sicuramente capito a questo punto che ovviamente ci saranno delle differenze infatti i due vettori alla fine saranno totalmente differenti. Questo ci fa capire che in generale il problema della relatività generale più che i punti sono i **percorsi che scegliamo**, motivo per cui se prendessimo un closed loop e ci facciamo girare un vettore sopra sicuramente non ci possiamo aspettare che in generale torni ad essere lo stesso. Ci piacerebbe che in generale esista uno strumento che ci permetta di descrivere punto per punto le proprietà dello spaziotempo. Cerchiamo di immaginare come il nostro strumento potrà essere, immaginiamo di prendere un vettore V^μ e di muoverlo lungo un closed loop il tutto in una regione di spazio infinitesima; come ci aspettiamo la risposta? Allora, il risultato finale deve essere un vettore quindi ci aspettiamo un indice alto, allo stesso tempo deve essere una trasformazione lineare quindi ci aspettiamo un indice in basso, inoltre dovrà dipendere dai due vettori che ho preso in considerazione, motivo per cui ci saranno due ulteriori indici in basso. Inoltre, ci aspettiamo che il tensore sia antisimmetrico in questi ultimi due indici il che ha senso perché scambiare i vettori corrisponde a percorrere il loop in maniera opposta.

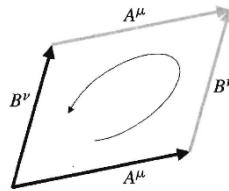


FIGURE 3.5 An infinitesimal loop defined by two vectors A^μ and B^ν .

Ma allora è chiaro cosa ci aspettiamo, sicuramente una cosa di questo tipo:

$$\delta V^\rho = R_{\sigma\mu\nu}^\rho V^\sigma A^\mu B^\nu \quad (2.91)$$

E inoltre per una delle ultime richieste abbiamo che:

$$R_{\sigma\mu\nu}^\rho = -R_{\sigma\nu\mu}^\rho \quad (2.92)$$

Portare un vettore lungo una linea però significa anche cercare di applicare un trasporto parallelo, infatti noi cerchiamo di fare una cosa del genere per valutare la differenza in a closed loop: adesso comprendiamo ancora meglio il perchè tale commutatore facesse 0 per uno scalare

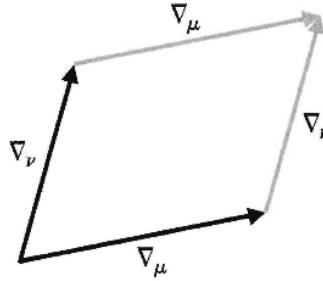


FIGURE 3.6 The commutator of two covariant derivatives.

Perfetto, adesso non ci resta che effettivamente effettuare il calcolo avremo quindi che:

$$\begin{aligned}
 [\nabla_\mu, \nabla_\nu] V^\rho &= \nabla_\mu \nabla_\nu V^\rho - \nabla_\nu \nabla_\mu V^\rho \\
 &= \partial_\mu (\nabla_\nu V^\rho) - \Gamma_{\mu\nu}^\lambda \nabla_\lambda V^\rho + \Gamma_{\mu\sigma}^\rho \nabla_\nu V^\sigma - (\mu \leftrightarrow \nu) \\
 &= \partial_\mu \partial_\nu V^\rho + (\partial_\mu \Gamma_{\nu\sigma}^\rho) V^\sigma + \Gamma_{\nu\sigma}^\rho \partial_\mu V^\sigma + \Gamma_{\mu\sigma}^\rho \partial_\nu V^\sigma + \Gamma_{\mu\sigma}^\rho \Gamma_{\nu\lambda}^\sigma V^\lambda \\
 &\quad - \Gamma_{\mu\nu}^\lambda \partial_\lambda V^\rho - \Gamma_{\mu\nu}^\lambda \Gamma_{\lambda\sigma}^\rho V^\sigma - (\mu \leftrightarrow \nu) \\
 &= \left(\partial_\mu \Gamma_{\nu\sigma}^\rho - \partial_\nu \Gamma_{\mu\sigma}^\rho + \Gamma_{\mu\lambda}^\rho \Gamma_{\nu\sigma}^\lambda - \Gamma_{\nu\lambda}^\rho \Gamma_{\mu\sigma}^\lambda \right) V^\sigma - 2\Gamma_{[\mu\nu]}^\lambda \nabla
 \end{aligned} \tag{2.93}$$

Dove l'ultimo termine è quello del tensore di torsione definito come la differenza tra i simboli di Christoffel solo con indici scambiati che sappiamo fare 0 ma lo inserisco per rendere nota una cosa: infatti in generale il termine a primo membro è un tensore, il termine del tensore di torsione lo è quindi il termine in parentesi dovrà per forza esserlo e noi lo chiamiamo **tensore di Riemann**, avremo alla fine una cosa del genere:

$$[\nabla_\mu, \nabla_\nu] V^\rho = R_{\sigma\mu\nu}^\rho V^\sigma - T_{\mu\nu}^\lambda \nabla_\lambda V^\rho, \tag{2.94}$$

Ricorda che in generale per le nostre discussini, e in particolare per quanto dimostrato fino ad ora, il tensore di torsione è pari a 0:

$$T_{\mu\nu}^\lambda = 0 \tag{2.95}$$

Quindi, in definitiva il **tensore di Riemann** è:

$$R_{\sigma\mu\nu}^\rho = \partial_\mu \Gamma_{\nu\sigma}^\rho - \partial_\nu \Gamma_{\mu\sigma}^\rho + \Gamma_{\mu\lambda}^\rho \Gamma_{\nu\sigma}^\lambda - \Gamma_{\nu\lambda}^\rho \Gamma_{\mu\sigma}^\lambda \tag{2.96}$$

Discutiamone

Mi piacerebbe farti notare una cosa che mi ha piacevolmente colto di sorpresa, prendiamo il tensore di Riemann in (2.96), abbiamo già notato che questo è un tensore allora qualcun* potrebbe pensare, **Provo a mettermi in un sistema di riferimento localmente inerziale, prendo magari un closed loop come ho fatto nella derivazione precedente, trovo 0 quindi il tensore di Riemann è sempre nullo?**, ASSOLUTAMENTE NO! torniamo sempre alla discussione precedente, se vedi la (2.96) ti rendi conto che in generale ci sono le derivate del simbolo di christoffel il che significa che l'unico modo affinchè si possano annullare è che tale simbolo sia ovunque nullo cosa che in generale non è vera! infatti noi parlando di sistemi di riferimento localmente inerziali dobbiamo sempre pensare ad un intorno, la nozione di globalmente inerziale non esiste più! A che serve questa discussione? perchè adesso possiamo caratterizzare i sistemi di riferimento globalmente inerziali in geometria differenziale:

- Se esiste un sistema di riferimento globalmente inerziale, allora il **Tensore di Riemann** è nullo
- Altrimenti, se il tensore di Riemann è nullo, esiste sempre un sistema di riferimento globalmente inerziale (ossia con componenti della metrica costanti)

Non dimostreremo questi due item, ma è importante che tu li sappia.

2.3.3 Alcune proprietà del tensore di Riemann

Si può dimostrare che secondo tutte le proprietà del caso il tensore di Riemann presenta 20 gradi di libertà, noi possiamo sia alzare che abbassare gli indici con questa tecnica:

$$R_{\rho\sigma\mu\nu} = g_{\rho\lambda} R_{\sigma\mu\nu}^{\lambda} \quad (2.97)$$

Allora, possiamo dimostrare che per un sistema di riferimento localmente inerziale (e quindi specificando un certo punto P) avremo che:

$$R_{\rho\sigma\mu\nu} \hat{=} \frac{1}{2} (\partial_{\mu}\partial_{\sigma}g_{\rho\nu} - \partial_{\mu}\partial_{\rho}g_{\nu\sigma} - \partial_{\nu}\partial_{\sigma}g_{\rho\mu} + \partial_{\nu}\partial_{\rho}g_{\mu\sigma}) \quad (2.98)$$

Allora, devi notare che in generale questo non è un tensore e anche quanto ci sia tornata utile la nostra discussione sulle derivate seconde del tensore metrico, infatti se per assurdo avessimo trovato che esse sono 0, avremmo trovato che il tensore di Riemann è nullo ma quindi per gli statement precedenti potrei costruire un sistema di riferimento globalmente inerziale che in RG non ha senso. Si può inoltre vedere che:

$$R_{\rho\sigma\mu\nu} = -R_{\sigma\rho\mu\nu} \quad (2.99)$$

e anche che:

$$R_{\rho\sigma\mu\nu} = -R_{\rho\sigma\nu\mu} \quad (2.100)$$

così come:

$$R_{\rho\sigma\mu\nu} = R_{\mu\nu\rho\sigma} \quad (2.101)$$

Ricorda che per dimostrarle stiamo sempre usando (2.98), avremo quindi che:

$$R_{\rho\sigma\mu\nu} + R_{\rho\mu\nu\sigma} + R_{\rho\nu\sigma\mu} = 0 \quad (2.102)$$

Perfetto, allora adesso consideriamo l'espressione seguente:

$$\nabla_\lambda R_{\rho\sigma\mu\nu} = \frac{1}{2} \partial_\lambda (\partial_\mu \partial_\sigma g_{\rho\nu} - \partial_\mu \partial_\nu g_{\rho\sigma} - \partial_\nu \partial_\sigma g_{\rho\mu} + \partial_\nu \partial_\rho g_{\mu\sigma}) \quad (2.103)$$

E allora, si può facilmente dimostrare che:

$$\begin{aligned} & \nabla_\lambda R_{\rho\sigma\mu\nu} + \nabla_\rho R_{\sigma\lambda\mu\nu} + \nabla_\sigma R_{\lambda\rho\mu\nu} \\ &= \frac{1}{2} (\partial_\lambda \partial_\mu \partial_\sigma g_{\rho\nu} - \partial_\mu \partial_\lambda \partial_\sigma g_{\nu\sigma} - \partial_\lambda \partial_\nu \partial_\sigma g_{\rho\mu} + \partial_\lambda \partial_\nu \partial_\rho g_{\mu\sigma} \\ & \quad + \partial_\rho \partial_\mu \partial_\lambda g_{\sigma\nu} - \partial_\rho \partial_\mu \partial_\sigma g_{\nu\lambda} - \partial_\rho \partial_\nu \partial_\lambda g_{\mu\sigma} + \partial_\rho \partial_\nu \partial_\sigma g_{\mu\lambda} \\ & \quad + \partial_\sigma \partial_\mu \partial_\rho g_{\lambda\nu} - \partial_\sigma \partial_\mu \partial_\lambda g_{\nu\rho} - \partial_\sigma \partial_\nu \partial_\rho g_{\mu\lambda} + \partial_\sigma \partial_\nu \partial_\lambda g_{\mu\rho}) = 0. \end{aligned}$$

che prende il nome di **identità di Bianchi**, possiamo ancora giocare con questo tensore infatti potremmo contrarre su due indici e definire il **tensore di Ricci** come:

$$R_{\mu\nu} = R_{\mu\lambda\nu}^\lambda \quad (2.105)$$

che si scopre essere simmetrico:

$$R_{\mu\nu} = R_{\nu\mu} \quad (2.106)$$

Prendendone la traccia definiamo quindi lo **scalare di Ricci** come:

$$R = R_\mu^\mu = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} \quad (2.107)$$

Ora, una forma speciale dell'identità di Bianchi si ottiene se:

$$\begin{aligned} 0 &= g^{\nu\sigma} g^{\mu\lambda} (\nabla_\lambda R_{\rho\sigma\mu\nu} + \nabla_\rho R_{\sigma\lambda\mu\nu} + \nabla_\sigma R_{\lambda\rho\mu\nu}) \\ &= \nabla^\mu R_{\rho\mu} - \nabla_\rho R + \nabla^\nu R_{\rho\nu}, \end{aligned}$$

La cui forma finale è la seguente:

$$\nabla^\mu R_{\rho\mu} = \frac{1}{2} \nabla_\rho R \quad (2.109)$$

A questo punto, definiamo il **tensore di Einstein** come:

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} \quad (2.110)$$

E quindi, usando la (2.109) otteniamo che:

$$\nabla^\mu G_{\mu\nu} = 0 \quad (2.111)$$

Che è spaventosamente simile a (2.90), forse questo tensore ci servirà.

2.3.4 L'equazione di campo di Einstein

Come abbiamo detto, siamo interessati ad una equazione che possa riprodurre il limite newtoniano che è definito da tre items:

- Le particelle si muovono lentamente (rispetto alla velocità della luce)
- Il campo gravitazionale è debole (e quindi possiamo considerarlo come una perturbazione dello spaziotempo piatto)
- e il campo è anche statico (ossia non cambia col tempo)

Riprendiamo l'equazione delle geodetiche, che ricordiamo essere:

$$\frac{d^2x^\mu}{d\lambda^2} + \Gamma_{\rho\sigma}^\mu \frac{dx^\rho}{d\lambda} \frac{dx^\sigma}{d\lambda} = 0 \quad (2.112)$$

Allora, imponendo $c = 1$ diciamo che in generale siamo nel limite di basse velocità quando:

$$\frac{dx^i}{d\tau} \ll \frac{dt}{d\tau} \quad (2.113)$$

E quindi nell'equazione (2.112) i contributi maggiori sono quelli di ordine 0, ossia avremo che:

$$\frac{d^2x^\mu}{d\tau^2} + \Gamma_{00}^\mu \left(\frac{dt}{d\tau} \right)^2 = 0 \quad (2.114)$$

Ora, il field è statico ($\partial_0 g_{\mu\nu} = 0$) di conseguenza avremo che:

$$\Gamma_{00}^\mu = \frac{1}{2} g^{\mu\lambda} (\partial_0 g_{\lambda 0} + \partial_0 g_{0\lambda} - \partial_\lambda g_{00}) = -\frac{1}{2} g^{\mu\lambda} \partial_\lambda g_{00} \quad (2.115)$$

Allora, adesso siamo interessati ad una perturbazione piccola del campo ossia:

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} \quad |h_{\mu\nu}| \ll 1 \quad (2.116)$$

Allora a partire dalla (2.115) otteniamo che:

$$\Gamma_{00}^\mu = -\frac{1}{2} \eta^{\mu\lambda} \partial_\lambda h_{00} \quad (2.117)$$

Dove abbiamo trascurato secondi ordini in h , adesso continuiamo avremo che quindi:

$$\frac{d^2x^\mu}{d\tau^2} = \frac{1}{2} \eta^{\mu\lambda} \partial_\lambda h_{00} \left(\frac{dt}{d\tau} \right)^2 \quad (2.118)$$

Ma usando il fatto che il campo è statico otteniamo che:

$$\frac{d^2t}{d\tau^2} = 0 \quad (2.119)$$

e quindi torniamo agli indici latini nel mondo classico ossia che:

$$\frac{d^2x^i}{d\tau^2} = \frac{1}{2} \left(\frac{dt}{d\tau} \right)^2 \partial_i h_{00} \quad (2.120)$$

38 CHAPTER 2. IL BISOGNO DI PENSARE NUOVAMENTE LA GRAVITÀ

Con una semplice divisione ambo i membri otteniamo che:

$$\frac{d^2x^i}{dt^2} = \frac{1}{2}\partial_i h_{00} \quad (2.121)$$

e mettendo

$$h_{00} = -2\Phi \quad (2.122)$$

ossia il potenziale newtoniano, otteniamo l'equazione di Newton gravitazionale; questo in particolare significa imporre che:

$$g_{00} = -(1 + 2\Phi) \quad (2.123)$$

Sembra quindi che la nostra teoria stia funzionando, continuiamo con il nostro obiettivo. Come le equazioni di Maxwell governano campi elettrici e magnetici, l'ipotetica equazione di Einstein che stiamo costruendo risponde ad energia e momento. Noi vogliamo un'equazione che nel limite newtoniano torni ad essere:

$$\nabla^2\Phi = 4\pi G\rho \quad (2.124)$$

Come abbiamo già discusso, la generalizzazione della densità di massa è proprio $T_{\mu\nu}$, qualcun* potrebbe pensare che in generale si può costruire un'equazione del genere:

$$[\nabla^2 g]_{\mu\nu} \propto T_{\mu\nu} \quad (2.125)$$

Ma si può dimostrare che a sinistra non abbiamo un tensore, quindi si potrebbe pensare di utilizzare l'operatore d'alambertiano generalizzato ossia: $\square = \nabla^\mu \nabla_\mu$ ma per le equazioni scritte in precedenza sappiamo che questo farà 0, serve quindi qualcosa che abbia le derivate seconde della metrica (e anche prime), forse questo strumento è proprio il tensore di Riemann $R^\rho_{\sigma\mu\nu}$, però scatta l'allarme perché effettivamente questo ha quattro indici, ma noi conosciamo una forma contratta e quindi possiamo usare il **tensore di Ricci** in questo modo:

$$R_{\mu\nu} = kT_{\mu\nu} \quad (2.126)$$

c'è però un problema, infatti in generale per la conservazione dell'energia eravamo interessati a:

$$\nabla^\mu T_{\mu\nu} = 0 \quad (2.127)$$

ma sappiamo che per (2.109) questa cosa non è vera, allora saremo interessati ad un tensore tipo (2.111), quindi il nostro claim adesso diventa:

$$G_{\mu\nu} = kT_{\mu\nu} \quad (2.128)$$

Ma ci permette questa equazione effettivamente di riprodurre quella di Poisson? Per poterlo vedere, proviamo a contrarre (2.128) (in quattro dimensioni) e otteniamo:

$$R = -kT \quad (2.129)$$

In questo modo possiamo usare l'espressione del tensore di Einstein per scrivere:

$$R_{\mu\nu} = k(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Tg_{\mu\nu}) \quad (2.130)$$

Allora dobbiamo tornare con i piedi per terra, ci emettiamo quindi nel limite di campo debole, indipendente dal tempo e limite di particelle che si muovono lentamente. Consideriamo l'espressione del tensore energia-impulso come:

$$T_{\mu\nu} = (\rho + p)U_\mu U_\nu + pg_{\mu\nu} \quad (2.131)$$

La pressione si può dimostrare essere rilevante solo nel momento in cui il nostro fluido possiede particelle che si muovono alla velocità della luce, di conseguenza potremmo scrivere che:

$$T_{\mu\nu} = \rho U_\mu U_\nu \quad (2.132)$$

Ci concentreremo nel SDR inerziale al fluido ossia avremo che:

$$U^\mu = (U^0, 0, 0, 0) \quad (2.133)$$

Questa componente timelike può essere costruita attraverso la condizione di normalizzazione tale che:

$$g_{\mu\nu}U^\mu U^\nu = -1 \quad (2.134)$$

Ora, in accordo con la (2.116) possiamo sicuramente scrivere che:

$$g_{00} = -1 + h_{00} \quad (2.135)$$

e quindi di conseguenza avere che:

$$U^0 = 1 + \frac{1}{2}h_{00} \quad (2.136)$$

(nota cosa ho fatto, per l'indice controvariante ho cambiato segno), nell'espressione (2.132) possiamo evitare di inserire termini quadratici nella correzione di campo e quindi semplicemente scrivere che:

$$T_{00} = \rho \quad (2.137)$$

Allora lo scalare T sarà:

$$T = g^{00}T_{00} = -T_{00} = -\rho \quad (2.138)$$

E mettendo tutto in (2.130) otteniamo semplicemente che:

$$R_{00} = \frac{1}{2}k\rho \quad (2.139)$$

Ok ma ricordi il nostro claim? volevamo ottenere qualcosa che avesse a che fare con la metrica, per poter strappare al tensore di Ricci questa informazione dobbiamo ricordare l'espressione del tensore di Riemann contratto e quindi avere:

$$R_{00} = R_{0i0}^i = \partial_i [\frac{1}{2}g^{i\lambda}(\partial_0 g_{\lambda 0} + \partial_0 g_{0\lambda} - \partial_\lambda g_{00})] = -\frac{1}{2}\delta^{ij}\partial_i\partial_j h_{00} = -\frac{1}{2}\nabla^2 h_{00} \quad (2.140)$$

40CHAPTER 2. IL BISOGNO DI PENSARE NUOVAMENTE LA GRAVITÀ

Dove abbiamo trascurato i termini di Christoffel del secondo ordine e il termine di derivata rispetto al tempo, per chiarezza ti scrivo l'espressione completa che avremmo dovuto utilizzare:

$$R_{0j0}^i = \partial_j \Gamma_{00}^i - \partial_0 \Gamma_{j0}^i + \Gamma_{j\lambda}^i \Gamma_{00}^\lambda - \Gamma_{0\lambda}^i \Gamma_{j0}^\lambda \quad (2.141)$$

Nota cosa abbiamo fatto in (2.140), abbiamo considerato il fatto che il campo è statico e di conseguenza le derivate temporali sono nulle, poi dell'ultimo termine in parentesi quadre a destra abbiamo considerato l'espressione (2.136) ed ecco spiegato il nostro risultato. Alla fine, ciò che abbiamo ottenuto è proprio questo ossia:

$$\nabla^2 h_{00} = -k\rho \quad (2.142)$$

Ma dobbiamo sempre ricordare (2.122) e quindi di conseguenza avere che affinchè ci sia il potenziale newtoniano sarà vero che:

$$k = 8\pi G \quad (2.143)$$

Allora, mi sa che siamo arrivati ad una risposta (con un c^4 che questa volta inseriamo!) ossia:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu}$$

Ossia **l'equazione di campo di Einstein**, è quindi palese che nel vuoto tale equazione diventa:

$$R_{\mu\nu} = 0 \quad (2.145)$$

Esiste anche una formulazione lagrangiana che permette di arrivare a questa equazione ma che va oltre gli scopi di questi appunti, infatti il nostro scopo era cercare di arrivare ad essa attraverso argomentazioni euristiche e ci siamo riusciti, forse nel futuro lo inserirò in qualche appendice a richiesta di qualcun*, in ogni caso l'argomento ora presentato chiude la prima parte dei nostri appunti; grazie a chiunque abbia avuto la pazienza di arrivare fino a qui e soprattutto a chi come me in questa teoria abbia trovato armonia e semplicità.

Chapter 3

Le applicazioni della relatività generale

Siamo arrivati alla seconda parte di questi appunti, nella prima parte abbiamo presentato i problemi sperimentalni e di conseguenza teorici che hanno portato alla elaborazione della nostra teoria, abbiamo quindi cercato di costruirla e siamo arrivati all'equazione di Einstein che sarà la base per i nostri ragionamenti. Quello che ci resta adesso da fare è assicurarci che effettivamente quanto abbiamo costruito possa essere all'altezza dei crimini investigativi che abbiamo presentato all'inizio, ovviamente però procederemo per gradi.

3.1 Un primo accenno alla soluzione di Schwarzschild

L'applicazione più ovvia di una teoria della gravità è per un campo gravitazionale simmetrico sfericamente. Questa situazione potrebbe essere rilevante ad esempio per la terra oppure il sole, quindi la nostra prima applicazione riguarderà quello di particelle test (ossia per definizione che non perturbano il campo gravitazionale) all'esterno di questi oggetti, come abbiamo detto quindi siamo interessati all'equazione di Einstein nel vuoto ossia:

$$R_{\mu\nu} = 0 \quad (3.1)$$

Il pianeta, o meglio l'oggetto che genera questo campo gravitazionale è nelle nostre ipotesi statico e sfericamente simmetrico quindi andremo a controllare le soluzioni che godono di questa proprietà; adesso però dobbiamo essere più rigorosi ossia cosa significa esattamente indipendente dal tempo? accontenteremo questa richiesta richiedendo che le componenti della metrica siano indipendenti dalla coordinata tempo e che non ci sono termini crossed ossia $(dtdx^i + dx^i dt)$ nella metrica, si lo cosa stai pensando: che senso ha quest'ultima richiesta? il motivo è semplice: se provassimo a fare un inversione temporale ossia $t \rightarrow -t$ allora avremo che in generale quei termini crossed ne dipenderebbero. Ora, per

imporre la simmetria sferica iniziamo scrivendo la metrica di Minkowski (è solo uno starting point!) in coordinate polari, dove ho sottintestato l'angolo polare:

$$ds_{Minkowski}^2 = -dt^2 + dr^2 + r^2 d\Omega^2 \quad (3.2)$$

Un requisito per mantenere la simmetria sferica vogliamo che il termine in $d\phi^2$ deve essere $\sin^2(\theta)$ volte $d\theta^2$, ossia da un punto di vista angolare la situazione deve rimanere costante, allora possiamo immaginare una situazione che dipenda solo dall'angolo radiale r e quindi di conseguenza avere che:

$$ds^2 = -e^{2\alpha(r)} dt^2 + e^{2\beta(r)} dr^2 + e^{2\gamma(r)} r^2 d\Omega^2 \quad (3.3)$$

Abbiamo espresso le funzioni come esponenziali semplicemente perchè facendo così i segni della metrica non cambiano (l'esponenziale è sempre positivo). Adesso, siamo interessati a manipolare questa equazione, definiamo quindi la variabile:

$$\bar{r} = e^{\gamma(r)} r \quad (3.4)$$

Ma allora il differenziale sarà:

$$d\bar{r} = e^\gamma dr + e^\gamma r d\gamma = (1 + r \frac{d\gamma}{dr}) e^\gamma dr \quad (3.5)$$

Ma allora è chiaro che in termini nella nuova variabile avremo che:

$$ds^2 = -e^{2\alpha(r)} dt^2 + (1 + r \frac{d\gamma}{dr})^{-2} e^{2\beta(r) - 2\gamma(r)} d\bar{r}^2 + \bar{r}^2 d\Omega^2 \quad (3.6)$$

Dove ogni funzione di r è funzione di \bar{r} grazie a (3.4). A questo punto facciamo la seguente sostituzione:

$$\bar{r} \rightarrow r \quad (1 + r \frac{d\gamma}{dr})^{-2} e^{2\beta(r) - 2\gamma(r)} \rightarrow e^{2\beta} \quad (3.7)$$

E otteniamo quindi per (3.6):

$$ds^2 = -e^{2\alpha(r)} dt^2 + e^{2\beta(r)} dr^2 + r^2 d\Omega^2 \quad (3.8)$$

La metrica quindi la conosciamo, a questo punto calcoliamo i simboli di Christoffel che saranno dati da:

$$\begin{aligned} \Gamma_{tr}^t &= \partial_r \alpha \\ \Gamma_{tt}^r &= e^{2(\alpha-\beta)} \partial_r \alpha \\ \Gamma_{rr}^r &= \partial_r \beta \\ \Gamma_{r\theta}^\theta &= \frac{1}{r} \\ \Gamma_{\theta\theta}^r &= -r e^{-2\beta} \\ \Gamma_{r\phi}^\phi &= \frac{1}{r} \\ \Gamma_{\phi\phi}^r &= -r e^{-2\beta} \sin^2 \theta \\ \Gamma_{\phi\phi}^\theta &= -\sin \theta \cos \theta \\ \Gamma_{\theta\phi}^\phi &= \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \end{aligned}$$

Tutto quello che non ho scritto deve esplicitamente essere 0 o collegato a quanto scritto per via di simmetrie. Allora, possiamo calcolare i vari pezzi del tensore di Riemann come:

$$\begin{aligned} R_{rtr}^t &= \partial_r \alpha \partial_r \beta - \partial_r^2 \alpha - (\partial_r \alpha)^2 \\ R_{\theta t \theta}^t &= -r e^{-2\beta} \partial_r \alpha \\ R_{\phi t \phi}^t &= -r e^{-2\beta} \sin^2 \theta \partial_r \alpha \\ R_{\theta r \theta}^r &= r e^{-2\beta} \partial_r \beta \\ R_{\phi r \phi}^r &= r e^{-2\beta} \sin^2 \theta \partial_r \beta \\ R_{\phi \theta \phi}^\theta &= (1 - e^{-2\beta}) \sin^2 \theta \end{aligned}$$

E quindi otteniamo il tensore di Ricci contraendo sugli indici:

$$\begin{aligned} R_{tt} &= e^{2(\alpha-\beta)} \left[\partial_r^2 \alpha + (\partial_r \alpha)^2 - \partial_r \alpha \partial_r \beta + \frac{2}{r} \partial_r \alpha \right] \\ R_{rr} &= -\partial_r^2 \alpha - (\partial_r \alpha)^2 + \partial_r \alpha \partial_r \beta + \frac{2}{r} \partial_r \beta \\ R_{\theta \theta} &= e^{-2\beta} [r(\partial_r \beta - \partial_r \alpha) - 1] + 1 \\ R_{\phi \phi} &= \sin^2 \theta R_{\theta \theta} \end{aligned}$$

Cerca di capire cosa stiamo facendo: stiamo calcolando le varie forme del tensore per poi usare la (3.1) per ottenere condizioni sulle funzioni da noi scelte. A questo punto possiamo calcolare lo scalare di curvatura come:

$$R = -2e^{-2\beta} \left[\partial_r^2 \alpha + (\partial_r \alpha)^2 - \partial_r \alpha \partial_r \beta + \frac{2}{r} (\partial_r \alpha - \partial_r \beta) + \frac{1}{r^2} (1 - e^{2\beta}) \right] \quad (3.9)$$

Ok adesso usiamo la (3.1) per fare la seguente manipolazione (infatti le varie componenti si annullano singolarmente):

$$0 = e^{2(\beta-\alpha)} R_{tt} + R_{rr} = \frac{2}{r} (\partial_r \alpha + \partial_r \beta) \quad (3.10)$$

Dove quindi questo implica (a meno di una costante che possiamo imporre essere 0) ad avere:

$$\alpha = -\beta \quad (3.11)$$

Adesso, imponiamo essere 0 $R_{\theta \theta}$ per cui avremo che:

$$e^{2\alpha} (2r \partial_r \alpha + 1) = 1 \quad (3.12)$$

Ed usando le proprietà delle derivate questo è equivalente a:

$$\partial_r (r e^{2\alpha}) = 1 \quad (3.13)$$

Possiamo risolvere questo per ottenere:

$$e^{2\alpha} = 1 - \frac{R_S}{r} \quad (3.14)$$

Ma allora è tutto molto chiaro, infatti la nostra metrica adesso sarà:

$$ds^2 = -(1 - \frac{R_S}{r})dt^2 + (1 - \frac{R_S}{r})^{-1}dr^2 + r^2d\Omega^2 \quad (3.15)$$

Come facciamo a determinare R_S ? ricorda (2.123) e avrai la risposta infatti è palese che avremo:

$$R_S = 2GM \quad (3.16)$$

Qualche piccolo appunto

Il nostro risultato finale ossia la (3.15) insieme alla (3.16) costituisce la soluzione della metrica di Schwarzschild, ricorda che abbiamo messo per costruzione che tale metrica è:

- Simmetricamente sferica
- Nel vuoto
- indipendente dal tempo

Nota inoltre che per $M \rightarrow 0$ ritroviamo lo spaziotempo di Minkowski e che lo stesso risultato lo otteniamo per $r \rightarrow +\infty$, questa proprietà è nota come **asymptotic flatness**. Si potrebbe inoltre eseguire una discussione estremamente lunga sulla unicità della soluzione di Schwarzschild nel vuoto e a simmetrica sferica (e che inoltre non ci sono soluzioni dipendenti dal tempo di questa forma) che è il contenuto del **teorema di Birkhoff's** che però noi non dimostreremo. Nota inoltre una cosa: nella (3.15) se provassimo a prendere il limite $r \rightarrow 0$ avremo che ci sarà una singolarità, vogliamo capire se essa è effettivamente eliminabile (e quindi, definire una funzione che a $r = 0$ presenta uno scalare) oppure è proprio una predizione della teoria. Come facciamo in generale a fare ciò? Dobbiamo prendere lo strumento più generale possibile ossia il **tensore di Riemann** e provare a vedere gli scalari che escono fuori attraverso:

$$R_{\mu\nu\sigma\rho}R^{\mu\nu\sigma\rho} \quad (3.17)$$

Ora, se questo scalare effettivamente diverge allora è una divergenza fisica. Si dimostra che in generale quella di *Schwarzschild* è una **vera** singolarità. Consideriamo adesso un'analogia, quando in elettrodinamica risolviamo l'equazione di Laplace ossia:

$$\nabla^2\Phi = 0 \quad (3.18)$$

La soluzione, in forma della funzione di Green tiene implicitamente all'interno una delta di Dirac il che significa che stiamo considerando il limite di punto materiale per quanto riguarda la sorgente, ad esempio un guscio sferico metallico lo potremo considerare come un punto materiale. Qui, risolvendo la (3.1) abbiamo implicitamente fatto la stessa cosa, con questo sto cercando di dirti che il Sole ad esempio lo stiamo vedendo come un punto materiale; la piena realizzazione di questo lo vediamo per $r \rightarrow 0$ e per $r \rightarrow +\infty$ dove torniamo al limite

pienamente newtoniano, ha quindi senso aspettarsi che più ci avviciniamo ad $r \rightarrow 0$ più saremo in grado di vedere gli effetti della nostra nuova teoria (guarda (3.15)), dovremo inoltre considerare che in generale è vero che:

$$R_{\text{Sole}} = R_{\text{SCHW},S} \cdot 10^6 \quad (3.19)$$

La (3.19) per quanto poss sembrare solo un appunto puramente speculativo contiene in sè un importante discussione ossia: quando mi posso fermare a fidarmi della metrica di Schwarzschild? Circa ad un milionesimo di volte il raggio che abbiamo trovato con i nostri argomenti, più in basso entriamo in un altro regime su cui non abbiamo dati sulla gravità e devi anche notare che vicino al raggio del sole abbiamo effetti molto grandi. Ora, ci potremmo quindi chiedere R_{schw} cosa identifichi, non possiamo ancora dare una risposta ma per il momento definiremo questa zona di frontiera come **orizzonte degli eventi**, un esempio alternativo a (3.19) potrebbe essere quello di un oggetto molto più piccolo del suo raggio di Schwarzschild, per renderci conto di quanto piccolo potremmo addirittura pensare che nemmeno la luce riesca a scappare da esso, ha allora senso chiamarlo **buc nero**, e diciamo che esso è caratterizzato dal fatto che:

$$R_{BH} \ll R_{\text{SCHW}} \quad (3.20)$$

Ma quindi (3.20) cosa significa? che in generale potremmo continuare a considerare la (3.15) anche per $R < R_{\text{SCHW}}$.

3.1.1 Un approccio con le simmetrie

Fino ad ora abbiamo cercato di ricavare con forza brutta i nostri risultati, in particolare prendendo l'equazione di Einstein e con qualche ragionamento puramente fisico abbiamo ricavato con non poche difficoltà i risultati della metrica di Schwarzschild, saremo interessati per il futuro a comprendere se sono presenti dei metodi più raffinati; ci vengono quindi in mente le simmetrie. Quando pensiamo ad una varietà M , è naturale immaginare che essa possiede una simmetria se la geometria è invariante sotto una certa trasformazione che mappa M in se stessa (sembrano parole complicate ma non lo sono, pensa alle traslazioni); abbiamo in generale capito che gli strumenti in nostro possesso per spiegare le proprietà della geometria sono i tensori e il più importante è sicuramente il **tensore metrico**, le simmetrie di questo oggetto sono chiamate **isometrie**. Partiamo da un esempio semplice, consideriamo per esempio lo spazio Minkowskiano quadr-dimensionale:

$$ds^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = -dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2 \quad (3.21)$$

Basta guardare la relazione precedente per rendersi conto che sia le traslazioni che le trasformazioni di Lorentz sono isometrie di questo spazio. Passiamo ad un livello superiore, stiamo studiando le isometrie e quindi vogliamo lasciare la nostra metrica invariata e definiamo quindi una trasformazione denotata con un certo σ^* , vorremmo che la trasformazione ci lasci con:

$$\partial_{\sigma^*} g_{\mu\nu} = 0 \quad (3.22)$$

Cerchiamo di capire cosa significhi questo per una particella test, ha quindi senso richiamare il concetto di geodetica utilizzando il formalismo del quadri-impulso, avremo quindi che:

$$p^\lambda \nabla_\lambda p^\mu = 0 \quad (3.23)$$

grazie alla compatibilità metrica (ossia $\nabla_\lambda g_{\mu\nu} = 0$) possiamo abbassare l'indice e quindi avere che:

$$p^\lambda \partial_\lambda p_\mu - \Gamma_{\lambda\mu}^\sigma p^\lambda p_\sigma = 0 \quad (3.24)$$

Ricordando il formalismo del tempo proprio potremmo sicuramente scrivere che:

$$p^\lambda \partial_\lambda p_\mu = m \frac{dx^\lambda}{d\tau} \partial_\lambda p_\mu = m \frac{dp_\mu}{d\tau} \quad (3.25)$$

Il secondo termine dell'equazione (3.24) è invece:

$$\Gamma_{\lambda\mu}^\sigma p^\lambda p_\sigma = \frac{1}{2} g^{\sigma\nu} (\partial_\lambda g_{\mu\nu} + \partial_\mu g_{\nu\lambda} - \partial_\nu g_{\lambda\mu}) p^\lambda p_\sigma = \quad (3.26)$$

$$= \frac{1}{2} (\partial_\lambda g_{\mu\nu} + \partial_\mu g_{\nu\lambda} - \partial_\nu g_{\lambda\mu}) p^\lambda p^\nu \quad (3.27)$$

Adesso voglio che noti una cosa, se facessimo applicare le derivate parziali alle p che ci sono, e usando la (3.24) potremmo utilizzare la simmetria dei simboli di Christoffel per mettere tutto uguale a 0, di conseguenza avremo che:

$$= \frac{1}{2} (\partial_\mu g_{\nu\lambda}) p^\lambda p^\nu \quad (3.28)$$

Ossia l'equazione finale sarebbe:

$$m \frac{dp_\mu}{d\tau} = \frac{1}{2} (\partial_\mu g_{\nu\lambda}) p^\lambda p^\nu \quad (3.29)$$

Ma la richiesta (3.22) parla chiaro, evidentemente dovremo trovarci che:

$$\partial_{\sigma*} g_{\mu\nu} = 0 \rightarrow \frac{dp_{\sigma*}}{d\tau} = 0 \quad (3.30)$$

Ossia deve essere vero che questa quantità resti conservata. Possiamo formalizzare quanto detto introducendo un vettore che labelliamo con K e lo chiamiamo:

$$K = \partial_{\sigma*} \quad (3.31)$$

Ovviamente, ha perfettamente senso pensare che:

$$K^\mu = (\partial_{\sigma*})^\mu = \delta_{\sigma*}^\mu \quad (3.32)$$

Ma cerchiamo di guardare a pieno (3.30), sicuramente la quantità conservata potrà essere espressa come:

$$p_{\sigma*} = K^v p_v = K_v p^v \quad (3.33)$$

E' sicuramente meglio formulare questa legge di conservazione attraverso il moto geodetico e avremo quindi che:

$$p^\mu \nabla_\mu (K_v p^v) = 0 \quad (3.34)$$

E che, si può sviluppare usando le equazioni del moto geodetico e anche considerando la simmetria di $p^\mu p^v$ come:

$$p^\mu p^v \nabla_{(\mu} K_{v)} = 0 \quad (3.35)$$

Dove con il simbolo $\nabla_{(\mu} K_{v)} = 0$ intendiamo le parti simmetriche che contribuiscono. L'equazione (3.35) porta quindi a:

$$\nabla_{(\mu} K_{v)} = 0 \quad (3.36)$$

che prende il nome di **equazione di Killing** e i vettori che la soddisfano sono noti come **vettori di Killing**. Allora, lo so che sei confuso* perché tutto questo discorso non sembra avere molto senso ma lascia che ti faccia vedere meglio, devi pensare ai vettori di Killing come i **generatori delle simmetrie**, infatti ricorda sempre che noi utilizziamo le derivate parziali come base per il nostro manifold, questo ha senso in una metrica che abbiamo già adattato alla richiesta della simmetria infatti se essa non dipende dalla coordinata specifica $x^{\sigma*}$ allora ha senso individuare nella derivata parziale rispetto a σ^* il vettore di simmetria. Possiamo fare un esempio molto semplice, infatti abbiamo che in uno spaziotempo del tipo:

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 \quad (3.37)$$

Questa metrica è indipendente da (x, y, z) di conseguenza ha senso scegliere come vettori di Killing i tre:

$$X^\mu = (1, 0, 0) \quad (3.38)$$

$$Y^\mu = (0, 1, 0) \quad (3.39)$$

$$Z^\mu = (0, 0, 1) \quad (3.40)$$

Che chiaramente rappresentano le tre traslazioni. E' presente anche una simmetria rispetto alle rotazioni in R^3 (lo sappiamo euristicamente vogliamo solo confermare il risultato), per trovarle immaginiamo di voler passare alle coordinate sferiche (il motivo per cui facciamo questo è che la metrica (3.37) non è manifestamente invariante per rotazioni, passiamo quindi a quella sferica e di conseguenza otteniamo dei vettori di killing nella forma più semplice possibile ossia (3.31) ma è naturale pensare che quando torniamo indietro a quelle cartesiane non avremo una forma così bella e pronta, infatti la sua definizione è implicitamente assegnata a metriche manifestamente invarianti per tale simmetria):

$$x = r \sin(\theta) \cos(\phi) \quad (3.41)$$

$$y = r \sin(\theta) \sin(\phi) \quad (3.42)$$

$$z = r \cos(\theta) \quad (3.43)$$

Sappiamo che tale metrica è manifestamente invariante per ϕ ossia avremo un killing vector che è:

$$R = \partial_\phi \quad (3.44)$$

Ora, in coordinate cartesiane questo significa che:

$$R = -y\partial_x + x\partial_y \quad (3.45)$$

che ovviamente si riassume in:

$$R^\mu = (-y, x, 0) \quad (3.46)$$

Sta attenzione alle altre due, infatti la metrica dipende da (r, θ) , ci rendiamo però conto che in generale (3.46) rappresenta la rotazione attorno all'asse z (basta pensarla come prodotto vettore e imporre che z pari a 0) allora possiamo costruire anche le altre semplicemente come:

$$S^\mu = (z, 0, -x) \quad (3.47)$$

$$T^\mu = (0, -z, y) \quad (3.48)$$

Ok, questo però per il momento non risponde alla nostra seconda domanda ossia come facciamo a determinare i vettori di Killing per la metrica in coordinate sferiche? Portando con una trasformazione in $x^\mu = (r, \theta, \phi)$ e otterremo quindi che:

$$R = \partial_\phi \quad (3.49)$$

$$S = \cos(\phi)\partial_\theta - \cot(\theta)\sin(\phi)\partial_\phi \quad (3.50)$$

$$T = -\sin(\phi)\partial_\theta - \cot(\theta)\cos(\phi)\partial_\phi \quad (3.51)$$

Dove abbiamo set $r = 1$, devi notare che non ci sono vettori di Killing dipendenti da r il che ha perfettamente senso in quanto siamo solo in via pienamente rotazionale. Si può dimostrare, ma noi non lo faremo che in generale per un numero $n \geq 2$ ci possono essere più vettori di Killing che dimensioni.

Un primo esempio importante

Ha senso in generale scrivere l'equazione delle geodetiche attraverso il parametro del tempo proprio ossia τ , definiamo un parametro che riesce a soddisfare ugualmente l'equazione delle geodetiche come un **parametro affine**, avremo in particolare che λ lo sarà se:

$$\frac{d^2x^\mu}{d\lambda^2} + \Gamma_{\sigma\rho}^\mu \frac{dx^\sigma}{d\lambda} \frac{dx^\rho}{d\lambda} = 0 \quad (3.52)$$

Ma allora dobbiamo trasportare tutte le discussioni fatte in precedenza con questo nuovo parametro, avremo che quindi la (3.30) diventa una cosa del tipo:

$$K_\mu \frac{dx^\mu}{d\lambda} = \text{cost} \quad (3.53)$$

Se provassimo a farci il conto, vedremo che queste quantità sono quattro ossia tre per simmetria sferica e una temporale, inoltre è anche presente una per il moto geodetico ossia:

$$\epsilon = -g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda} \quad (3.54)$$

Ti potrebbe aver lasciato spiazzat* ma lascia che ti spieghi, se tu provassi a fare la derivata:

$$\frac{d}{d\lambda} (g_{\mu\nu} U^\mu U^\nu) = 0 \quad (3.55)$$

Potrei banalmente scrivere che:

$$\frac{dx^\rho}{d\lambda} \partial_\rho (g_{\mu\nu} U^\mu U^\nu) \hat{=} U^\rho \nabla_\rho (g_{\mu\nu} U^\mu U^\nu) \quad (3.56)$$

Sfruttando la condizione sulla metrica e l'equazione delle geodetiche è palese faccia 0. Questa discussione non è poi così diversa da quella fatta in meccanica classica, infatti ci aspettiamo l'energia conservata per simmetria temporale e per rotazioni spaziali le tre quantità del momento angolare di cui due componenti e una di magnitudine. Iniziamo l'analisi, il vettore timelike di Killing è sicuramente:

$$K^\mu = (\partial_t)^\mu = (1, 0, 0, 0) \quad (3.57)$$

Inoltre, un altro sarà sicuramente:

$$R^\mu = (\partial_\phi)^\mu = (0, 0, 0, 1) \quad (3.58)$$

Allora, usiamo la metrica che abbiamo trovato per Schwarzschild per abbassare gli indici:

$$K_\mu = \left(-\left(1 - \frac{2GM}{r}\right), 0, 0, 0 \right) \quad (3.59)$$

E anche:

$$R_\mu = (0, 0, 0, r^2 \sin^2(\theta)) \quad (3.60)$$

Il fatto che il momento angolare si conservi, significa che possiamo risolvere il problema in un piano e in particolare scegliere:

$$\theta = \frac{\pi}{2} \quad (3.61)$$

ma allora avremo inizieremo a trovare due quantità conservative ossia:

$$E = -K_\mu \frac{dx^\mu}{d\lambda} = \left(1 - \frac{2GM}{r}\right) \frac{dt}{d\lambda} \quad (3.62)$$

$$L = R_\mu \frac{dx^\mu}{d\lambda} = r^2 \frac{d\phi}{d\lambda} \quad (3.63)$$

Allora adesso utilizziamo (3.54) e scriviamo quindi:

$$-\left(1 - \frac{2GM}{r}\right) \left(\frac{dt}{d\lambda}\right)^2 + \left(1 - \frac{2GM}{r}\right)^{-1} \left(\frac{dr}{d\lambda}\right)^2 + r^2 \left(\frac{d\phi}{d\lambda}\right)^2 = -\epsilon \quad (3.64)$$

Moltiplichiamo questo per $(1 - \frac{2GM}{r})$ e usiamo le nostre espressioni per E ed L otteniamo che:

$$-E^2 + \left(\frac{dr}{d\lambda}\right)^2 + \left(1 - \frac{2GM}{r}\right) \left(\frac{L^2}{r^2} + \epsilon\right) 9 \quad (3.65)$$

e imponendo:

$$V(r) = \frac{1}{2}\epsilon - \epsilon \frac{GM}{r} + \frac{L^2}{2r^2} - \frac{GML^2}{r^3} \quad (3.66)$$

$$\varepsilon = \frac{1}{2}E^2 \quad (3.67)$$

Ottenendo quindi:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{dr}{d\lambda}\right)^2 + V(r) = \varepsilon \quad (3.68)$$

Cerchiamo di analizzare quanto ottenuto, il potenziale in (3.66) è proprio lo stesso di Newton se non fosse per l'ultimo termine che darà grandi contributi per piccoli r , i parametri di nostro interesse sono sicuramente $r(\lambda), t(\lambda), \phi(\lambda)$ (si perché ricorda che θ è fissato!). Per poter studiare il moto della particella test, cerchiamo di studiare (3.68) nel seguente modo ossia:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{dr}{d\lambda}\right)^2 = \varepsilon - V(r) \quad (3.69)$$

e cerchiamo di capire quando questa differenza faccia 0 per poter comprendere se sia presente un **turning point**, possiamo trovare anche casi in cui la particella si muove con un raggio $r_c = const$, è possibile ottenerlo imponendo che:

$$\frac{dV}{dr} = 0 \quad (3.70)$$

Per cui si trova che ($\gamma=1$ in relatività generale):

$$\epsilon GMr_c^2 - L^2r_c + 3GML^2\gamma = 0 \quad (3.71)$$

In particolare queste saranno (ovviamente) (è costante) orbite circolari che sono stabili se corrispondono a dun minimo e instabili se invece corrispondono ad un massimo, tornando alla gravità newtoniana troviamo che questo raggio corrisponde a:

$$r_c = \frac{L^2}{\epsilon GM} \quad (3.72)$$

Voglio che però adesso tu guardi in faccia (3.54), secondo te a cosa corrisponde? in un SDR inerziale alla particella ovviamente il tempo proprio del vettore tangente alla geodetica infatti in SR ricorda che abbiamo:

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \quad (3.73)$$

ma in un SDR inerziale abbiamo che:

$$ds^2 = -d\tau^2 \quad (3.74)$$

Quindi l'espressione citata adesso ha senso, ora in un sistema di riferimento localmente inerziale alla luce ad esempio (e quindi, una massless particle) quale sarà il tempo proprio? se hai capito la relatività, sarà esattamente 0 motivo per cui i seguenti grafici per te avranno senso considerando la (3.72). Perchè dico

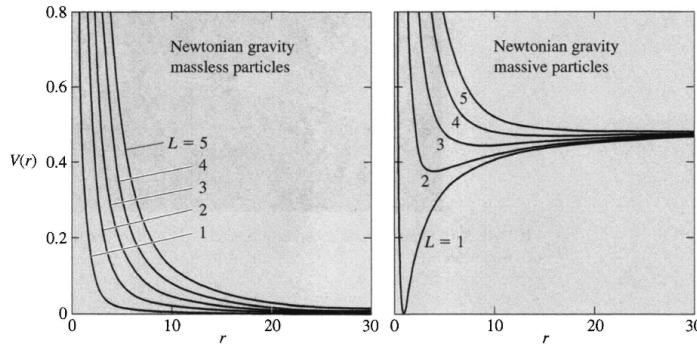


FIGURE 5.4 Effective potentials in Newtonian gravity. Five curves are shown, corresponding to the listed values of the angular momentum (per unit mass) L , and we have chosen $GM = 1$. Note that, for large enough energy, every orbit reaches a turning point and returns to infinity.

che avranno senso? perchè infatti per masless particles non ci sono dei bound states ossia degli r_c . Riprendiamo la formula:

$$\frac{1}{2} \left(\frac{dr}{d\lambda} \right)^2 = \varepsilon - V(r) \quad (3.75)$$

Proviamo a pensare ad un fotone, che arriva da $r = \infty$ e si avvicina al corpo massivo, ha senso pensare che dal grafico l'energia aumenta sempre di più e di conseguenza ad un certo punto (3.75) sarà 0, di conseguenza ci sarà un turning point e la particella tornerà indietro a $r = \infty$. I valori più piccoli di L (e nota che la salita ripida inizia prima) sono semplicemente associati a traiettorie che sono inizialmente più vicine al corpo massivo. Analizziamo il grafico per quanto riguarda le particelle massive, cerca di dare sempre un occhio alla (3.75) in particolare avremo che:

- se $E > 0$ abbastanza grande (ma non troppo) avremo due punti di intersezione in particolare questi corrispondono ad un orbita ellittica
- se $E < 0$ abbastanza piccolo avremo un solo punto di intersezione che corrisponde ad un orbita parabolica o iperbolica
- se abbiamo contemporaneamente $E > 0$ abbastanza piccolo e $\frac{dV}{dr} = 0$ abbiamo un orbita circolare

Lo so cosa stai pensando, ma perchè proprio le coniche? si può dimostrare che nel caso newtoniano sono le uniche traiettorie possibili.

in **relatività generale** la situazione è un pò diversa, basta che ti faccio vedere la situazione tramite il seguente grafico: Da come si comprende facilmente per

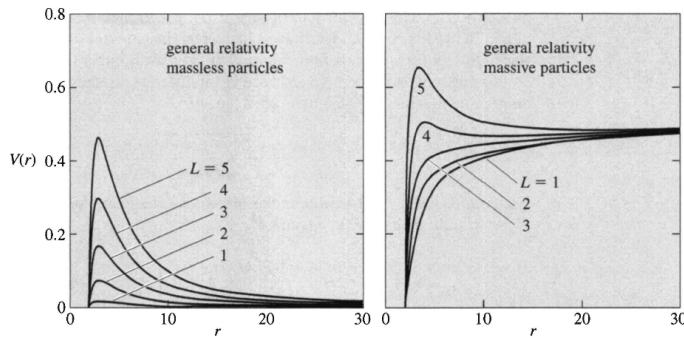


FIGURE 5.5 Effective potentials in general relativity. Again, five curves are shown, corresponding to the listed values of the angular momentum (per unit mass) L , and we have chosen $GM = 1$. In GR there is an innermost circular orbit greater than or equal to $3GM$, and any orbit that falls inside this radius continues to $r = 0$ (for particles on geodesics).

la nostra discussione precedente, il problema risiede nel termine $\frac{1}{r^3}$, infatti è evidente dai grafici che per $r = \infty$ abbiamo gli stessi tipi di andamenti ma non per $r \rightarrow 0$ dove il potenziale della particella addirittura tende a $-\infty$! Notiamo inoltre che è presente per $r = 2GM$ un punto in cui il potenziale è sempre 0, per $r < 0$ diremo esserci un **black hole**. Ora, per le particelle massless (pensa sempre ad un fotone) abbiamo $\epsilon = 0$ ossia (3.71) si risolve facilmente per cui avremo:

$$r_c = 3GM \quad (3.76)$$

che è un punto di massimo e quindi instabile, di conseguenza avremo che una qualsiasi piccola perturbazione può far oscillare la nostra particella o verso $r = 0$ oppure verso $r = +\infty$, anche qui per particelle massive abbiamo dei regimi circolari che in questo caso sono due ossia (dipendono dal momento angolare):

$$r_c = \frac{L^2 \pm \sqrt{L^4 - 12G^2M^2L^2}}{2GM} \quad (3.77)$$

Supponiamo allora di prendere grandi L , avremo in generale due orbiti stabili una instabile ed una stabile (vedi il grafico) in particolare queste saranno per:

$$r_c = \frac{L^2 \pm L^2(1 - 6G^2M^2/L^2)}{2GM} = \left(\frac{L^2}{GM}, 3GM\right) \quad (3.78)$$

In questo limite l'orbita stabile va molto lontana, mentre quella instabile approssima $3GM$, comportamento uguale al caso per particelle massless. Possiamo quindi provare a ridurre L fino a quando il discriminante è 0 e questo avviene per $L = \sqrt{12}GM$ e si trova quindi:

$$r_c = 6GM \quad (3.79)$$

Per L più piccoli ovviamente spariscono, quindi $6GM$ è il valore più piccolo possibile di orbita circolare per la metrica di Schwarzschild. In relatività generale non avremo comportamenti di coniche anche se questo è difficile da dimostrare, in ogni caso abbiamo che quindi abbiamo trovato che la soluzione di Schwarzschild possiede orbite circolari stabili per $r > 6GM$ e instabili per $3GM < r < 6GM$, ricorda che tutto questo è per un approccio con le geodetiche, le discussioni infatti non si applicano per particelle accelerate.

3.1.2 Test Sperimentali

Molti dei test sperimentali della relatività generale riguardano il moto di particelle test nel sistema solare, e quindi geodetiche nella metrica di Schwarzschild. Einstein in particolare propose tre test: la deflessione della luce, la precessione del perielio, e il redshift gravitazionale. La deflessione della luce è osservabile nel limite di campo debole e per questo ne discuteremo dopo. Concentriamoci quindi adesso sulla precessione del perielio delle orbite dei pianeti.

La precessione del perielio

In particolare, avremo che questa precessione riflette il fatto che orbite non circolari in relatività generale non sono ellissi perfette chiuse, con una buona approssimazione possono essere considerate come ellissi che danno luogo ad una precessione e che descrivono un pattern floreare. In particolare questo è osservabile qui: Un modo per far vedere l'effetto del perielio è utilizzare un

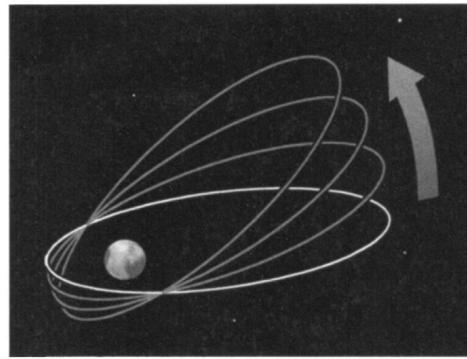


FIGURE 5.6 Orbits in general relativity describe precessing ellipses.

approccio perturbativo per mostrare che, mentre nel caso classico la funzione $r(\phi)$ presenta un periodo 2π riflettendo il fatto che il perielio occorre alla stessa posizione angolare ad ogni orbita, usando un approccio perturbativo possiamo mostrare come la RG introduce una piccola alterazione del periodo, dando luogo alla precessione. Riprendiamo allora (3.68), e utilizziamo:

$$\left(\frac{d\phi}{d\lambda}\right)^{-2} = \frac{r^4}{L^2} \quad (3.80)$$

Allora, moltiplicando ambo i membri di (3.68) avremo che:

$$\left(\frac{dr}{d\phi}\right)^2 + \frac{r^4}{L^2} - \frac{2GM}{L^2}r^3 + r^2 - 2GMr = \frac{2\varepsilon}{L^2}r^4 \quad (3.81)$$

Usiamo quindi un trick, definiamo una nuova variabile ossia:

$$x = \frac{L^2}{GMr} \quad (3.82)$$

Otteniamo quindi:

$$\left(\frac{dx}{d\phi}\right)^2 + \frac{L^2}{G^2 M^2} - 2x + x^2 - \frac{2G^2 M^2}{L^2} x^3 = \frac{2\varepsilon L^2}{G^2 M^2} \quad (3.83)$$

Differenzio tutto per ϕ e ottengo quindi:

$$\frac{d^2x}{d\phi^2} - 1 + x = \frac{3GM}{L^2} x^2 \quad (3.84)$$

Allora, ha senso pensare a x come una soluzione newtoniana più una piccola deviazione, avremo quindi che:

$$x = x_0 + x_1 \quad (3.85)$$

Ottenendo quindi due equazioni ossia:

$$\frac{d^2x_0}{d\phi^2} - 1 + x_0 = 0 \quad (3.86)$$

$$\frac{d^2x_1}{d\phi^2} + x_1 = \frac{3G^2 M^2}{L^2} x_0^2 \quad (3.87)$$

La soluzione dell'equazione di ordine 0 è ovviamente (lo sappiamo da Newton):

$$x_0 = 1 + e \cos(\phi) \quad (3.88)$$

Mettendola in quella del primo ordine otteniamo:

$$\frac{d^2x_1}{d\phi^2} + x_1 = \frac{3G^2 M^2}{L^2} (1 + e \cos \phi)^2 = \frac{3G^2 M^2}{L^2} \left[\left(1 + \frac{1}{2} e^2 \right) + 2e \cos \phi + \frac{1}{2} e^2 \cos 2\phi \right] \quad (5.84)$$

La cui soluzione è:

$$x_1 = \frac{3G^2 M^2}{L^2} \left[\left(1 + \frac{1}{2} e^2 \right) + e \phi \sin \phi - \frac{1}{6} e^2 \cos 2\phi \right] \quad (3.89)$$

E allora combinando questa con il termine 0 otteniamo:

$$x = 1 + e \cos \phi + \frac{3G^2 M^2 e}{L^2} \phi \sin \phi \quad (3.90)$$

Ossia chiamando:

$$\alpha = \frac{3G^2 M^2}{L^2} \quad (3.91)$$

Troviamo:

$$x = 1 + e \cos[(1 - \alpha)\phi] \quad (3.92)$$

Ossia un periodo non proprio di 2π , in particolare ogni volta il periolio avanza di un angolo:

$$\Delta\phi = 2\pi\alpha = \frac{6\pi G^2 M^2}{L^2} \quad (3.93)$$

In perfetto accordo con i dati sperimentali.

3.2 La teoria perturbativa

Quando abbiamo derivato le equazioni di Einstein siamo stati attenti a considerare il limite newtoniano nel caso in cui ci fossimo trovati in:

- campo gravitazionale debole
- indipendente dal tempo
- le particelle si muovevano lentamente

Allora, quello che faremo adesso è sempre considerare una approssimazione ma meno restrittiva in particolare quella di campo debole ma che può variare col tempo e senza nessuna restrizione sulla velocità delle particelle. La debolezza del campo gravitazionale risiede nel poter decomporre la metrica nello spazio piatto di Minkowski più una piccola pertrurbazione:

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} \quad |h_{\mu\nu}| << 1 \quad (3.94)$$

Dobbiamo avere occhio: l'assunzione che $h^{\mu\nu}$ sia abbastanza piccolo ci permette di alzare e abbassare gli indici attraverso la seguente relazione:

$$h^{\mu\nu} = \eta^{\mu\rho}\eta^{\nu\sigma}h_{\rho\sigma} \quad (3.95)$$

Possiamo fare ciò nel contesto in cui sappiamo che correzioni di ordine maggiore non hanno senso secondo la seconda relazione in (3.94). A questo punto un discorso che avrebbe molto senso fare sarebbe quello della trasformazione di tale correzione alla metrica, ci aspettiamo di avere una relazione del tipo:

$$h_{\mu'\nu'} = \Lambda_\mu^{\mu'}\Lambda_\nu^{\nu'}h_{\mu\nu} \quad (3.96)$$

Siamo quindi interessati a cercare le equazioni del moto in questo regime, ovviamente come per tutte le nostre discussioni iniziamo dai simboli di Christoffel, avremo quindi una situazione di questo tipo:

$$\begin{aligned} \Gamma_{\mu\nu}^\rho &= \frac{1}{2}g^{\rho\lambda}(\partial_\mu g_{\nu\lambda} + \partial_\nu g_{\lambda\mu} - \partial_\lambda g_{\mu\nu}) \\ &= \frac{1}{2}\eta^{\rho\lambda}(\partial_\mu h_{\nu\lambda} + \partial_\nu h_{\lambda\mu} - \partial_\lambda h_{\mu\nu}). \end{aligned}$$

Essendo correzioni al primo ordine, nel momento in cui andiamo a calcolare il tensore di Riemann non ci preoccupiamo di eventuali termini in Γ^2 , avremo quindi che:

$$\begin{aligned} R_{\mu\nu\rho\sigma} &= \eta_{\mu\lambda}\partial_\rho\Gamma_{\nu\sigma}^\lambda - \eta_{\mu\lambda}\partial_\sigma\Gamma_{\nu\rho}^\lambda \\ &= \frac{1}{2}(\partial_\rho\partial_\nu h_{\mu\sigma} + \partial_\sigma\partial_\mu h_{\nu\rho} - \partial_\sigma\partial_\nu h_{\mu\rho} - \partial_\rho\partial_\mu h_{\nu\sigma}). \end{aligned}$$

Allora calcoliamo il tensore di Ricci semplicemente contraendo μ e ρ per avere:

$$R_{\mu\nu} = \frac{1}{2}(\partial_\sigma\partial_\nu h_{\mu\sigma}^\sigma + \partial_\sigma\partial_\mu h_{\nu\sigma}^\sigma - \partial_\mu\partial_\nu h - \square h_{\mu\nu}) \quad (3.97)$$

Dove abbiamo definito lo scalare di correzione metrica ossia:

$$h = \eta^{\mu\nu} h_{\mu\nu} \quad (3.98)$$

Insieme all'operatore d'alambertiano:

$$\square = \partial_\mu \partial^\mu \quad (3.99)$$

Allora potrei contrarre ancora per ottenere lo scalare di Ricci ossia:

$$R = \partial_\mu \partial_\nu h^{\mu\nu} - \square h \quad (3.100)$$

Allora mettiamo tutto nel tensore di Einstein per ottenere:

$$\begin{aligned} G_{\mu\nu} &= R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} R \\ &= \frac{1}{2} (\partial_\sigma \partial_\nu h^\sigma_\mu + \partial_\sigma \partial_\mu h^\sigma_\nu - \partial_\mu \partial_\nu h - \square h_{\mu\nu} - \eta_{\mu\nu} \partial_\rho \partial_\lambda h^{\rho\lambda} + \eta_{\mu\nu} \square h) \end{aligned}$$

Che prende il nome di **tensore di Einstein linearizzato**. Ovviamente però la domanda sorge spontanea nel senso che la (3.94) non specifica il tipo di coordinate che stiamo scegliendo, mi spiego meglio, in teoria ci potrebbero essere infiniti spazi equivalenti con questa perturbazione e di conseguenza siamo interessati a poter passare dall'uno all'altro, questo è possibile attraverso la formula:

$$h_{\mu\nu}^{(\varepsilon)} = h_{\mu\nu} + 2\varepsilon \partial_{(\mu} \xi_{\nu)} \quad (3.101)$$

che chiameremo una **trasformazione di Gauge** in teoria linearizzata. Preoccupiamoci adesso di scomporre la perturbazione del tensore metrico in vari settori, uno scalare, uno vettoriale ed uno tensoriale e avremo quindi:

$$h_{00} = -2\Phi \quad (3.102)$$

$$h_{0i} = w_i \quad (3.103)$$

$$h_{ij} = 2s_{ij} - 2\Psi\delta_{ij} \quad (3.104)$$

Dove per trovarci con le definizioni definiamo:

$$\Psi = -\frac{1}{6} \delta^{ij} h_{ij} \quad (3.105)$$

$$s_{ij} = \frac{1}{2} (h_{ij} - \frac{1}{3} \delta^{kl} h_{kl} \delta_{ij}) \quad (3.106)$$

Ma quindi è ovvio che a questo punto (ricorda, ha senso pensare che adesso la matrice non sia più diagonale) avremo che:

$$ds^2 = -(1 + 2\Phi)dt^2 + w_i(dt dx^i + dx^i dt) + [(1 - 2\Psi)\delta_{ij} + 2s_{ij}]dx^i dx^j \quad (3.107)$$

Cerca di capire quello che stiamo facendo per quanto difficile possa essere, stiamo definendo delle notazioni convenienti per risolvere il nostro problema senza fare alcuna scelta di Gauge.

Senza effettuare scelte di Gauge si trovano i seguenti risultati:

$$\begin{aligned} G_{00} &= 2\nabla^2\Psi + \partial_k\partial_ls^{kl} \\ G_{0j} &= -\frac{1}{2}\nabla^2w_j + \frac{1}{2}\partial_j\partial_kw^k + 2\partial_0\partial_j\Psi + \partial_0\partial_ks_j^k \\ G_{ij} &= (\delta_{ij}\nabla^2 - \partial_i\partial_j)(\Phi - \Psi) + \delta_{ij}\partial_0\partial_kw^k - \partial_0\partial_{(i}w_{j)} \\ &\quad + 2\delta_{ij}\partial_0^2\Psi - \square s_{ij} + 2\partial_k\partial_{(i}s_j^k - \delta_{ij}\partial_k\partial_ls^{kl} \end{aligned}$$

Ok quindi avevamo la metrica e grazie ad essa abbiamo trovato le componenti del tensore di Einstein (nota gli indici latini, non ci sono quelli greci per un motivo infatti abbiamo calcolato a se stante quelli temporali) allora adesso vediamo cosa succede utilizzando l'equazione di campo di Einstein, per iniziare sviluppiamo:

$$G_{00} = 4\pi GT_{00} - \frac{1}{2}\partial_k\partial_ls^{kl} \quad (3.108)$$

e quindi troviamo:

$$\nabla^2\Psi = 4\pi GT_{00} - \frac{1}{2}\partial_k\partial_ls^{kl} \quad (3.109)$$

Come ti puoi benissimo rendere conto questa è un'equazione per Ψ senza derivate temporali, se conosciamo T_{00} e s_{ij} stanno facendo ad ogni istante di tempo possiamo determinare cosa sarà Ψ (a meno di eventuali condizioni al contorno), quindi Ψ non è di per sé un grado di libertà bensì è determinato dal tensore energia-impulso e dalla deformazione gravitazionale s_{ij} . Ora, per l'equazione $0j$ otteniamo:

$$(\delta_{jk}\nabla^2 - \partial_j\partial_k)w^k = -16\pi GT_{0j} + 4\partial_0\partial_j\Psi + 2\partial_0\partial_ks_j^k. \quad (3.110)$$

Ancora, se conosciamo la deformazione e il tensore energia impulso troveremo anche w^i (nota inoltre che non ci sono derivate temporali), infine abbiamo che:

$$\begin{aligned} (\delta_{ij}\nabla^2 - \partial_i\partial_j)\Phi &= 8\pi GT_{ij} + (\delta_{ij}\nabla^2 - \partial_i\partial_j - 2\delta_{ij}\partial_0^2)\Psi \\ &\quad - \delta_{ij}\partial_0\partial_kw^k + \partial_0\partial_{(i}w_{j)} + \square s_{ij} - 2\partial_k\partial_{(i}s_j^k - \delta_{ij}\partial_k\partial_ls^{jl}. \end{aligned}$$

comprendiamo benissimo quindi che nella metrica gli unici gradi di libertà veramente importanti sono quelli della deformazione s_{ij} . **Siamo quindi interessati adesso a fare una scelta di Gauge**, effettuiamo le seguenti trasformazioni:

$$\begin{aligned} \Phi &\rightarrow \Phi + \partial_0\xi^0 \\ w_i &\rightarrow w_i + \partial_0\xi^i - \partial_i\xi^0 \\ \Psi &\rightarrow \Psi - \frac{1}{3}\partial_i\xi^i \\ s_{ij} &\rightarrow s_{ij} + \partial_{(i}\xi_{j)} - \frac{1}{3}\partial_k\xi^k\delta_{ij} \end{aligned}$$

Consideriamo allora la **gauge transversa** imponendo quindi che:

$$\partial_is^{ij} = 0 \quad (3.111)$$

e scegliamo ξ in modo tale che possa soddisfare:

$$\nabla^2 \xi^j + \frac{1}{3} \partial_j \partial_i \xi^i = -2 \partial_i s^{ij} \quad (3.112)$$

Dove però la componente temporale resta ancora non determinata, motivo per cui scegliamo che:

$$\partial_i w^i = 0 \quad (3.113)$$

e quindi scegliamo ξ^0 tale che soddisfi:

$$\nabla^2 \xi^0 = \partial_i w^i + \partial_0 \partial_i \xi^i \quad (3.114)$$

In realtà le condizioni appena scritte non fissano veramente i valori di ξ^μ ma sappiamo da Fourier che esse esistono, in particolare saranno fondamentali le condizioni al contorno. In questa gauge quindi l'equazione di Einstein diventa:

$$G_{00} = 2\nabla^2 \Psi = 8\pi G T_{00} \quad (3.115)$$

e avremo anche che:

$$\begin{aligned} G_{0j} &= -\frac{1}{2} \nabla^2 w_j + 2\partial_0 \partial_j \Psi = 8\pi G T_{0j}, \\ G_{ij} &= (\delta_{ij} \nabla^2 - \partial_i \partial_j) (\Phi - \Psi) - \partial_0 \partial_{(i} w_{j)} + 2\delta_{ij} \partial_0^2 \Psi - \square s_{ij} = 8\pi G T_{ij}. \end{aligned}$$

Le equazioni precedenti ci serviranno per discutere alcuni effetti come la deflessione della luce.

3.2.1 La deflessione della luce

Possiamo utilizzare le equazioni precedenti per descrivere l'effetto della deflessione della luce. Iniziamo quindi considerando i nostri corpi come un fluido perfetto ossia quando la pressione svanisce, questa ipotesi è approssimativamente vera per oggetti come stelle, pianeti, galassie e anche la materia oscura. Avremo quindi che il tensore energia-impulso prenderà questa forma:

$$T_{\mu\nu} = \rho U_\mu U_\nu = \begin{pmatrix} \rho & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.116)$$

Ma quindi con la (3.116) è ovvio che le equazioni precedenti in gauge transversa assumano questa forma:

$$\nabla^2 \Psi = 4\pi G \rho \quad (3.117)$$

$$\nabla^2 w_j = 0 \quad (3.118)$$

$$(\delta_{ij} \nabla^2 - \partial_i \partial_j) (\Phi - \Psi) - \nabla^2 s_{ij} = 0. \quad (3.119)$$

Imporremo come condizioni al contorno la non divergenza a 0 e ad infinito, di conseguenza avremo che (equazione di laplace):

$$w^i = 0 \quad (3.120)$$

e anche che:

$$\Phi = \Psi \quad (3.121)$$

Allora, avremo di conseguenza che:

$$\nabla^2 s_{ij} = 0 \quad (3.122)$$

che implica ovviamente che:

$$s_{ij} = 0 \quad (3.123)$$

Allora riprendi la definizione in (3.107) e ti renderai conto di avere che:

$$ds^2 = -(1 + 2\Phi)dt^2 + (1 - 2\Phi)(dx^2 + dy^2 + dz^2) \quad (3.124)$$

Ossia in questo caso la metrica è **traceless** e il potenziale quindi obbedisce a:

$$\nabla^2 \Phi = 4\pi G\rho \quad (3.125)$$

Perfetto allora adesso vogliamo vedere il path di un fotone, analizziamo quindi la seguente figura: Ma allora è chiaro che possiamo descrivere la geodetica

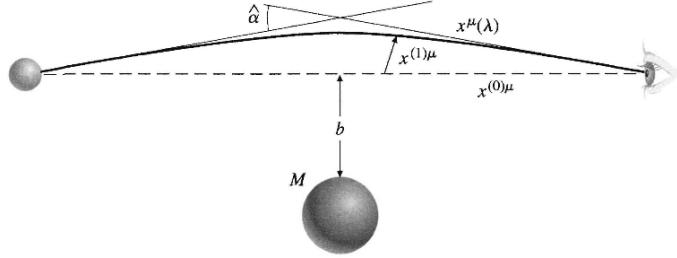


FIGURE 7.3 A deflected geodesic $x^\mu(\lambda)$, decomposed into a background geodesic $x^{(0)\mu}$ and a perturbation $x^{(1)\mu}$. The deflection angle $\hat{\alpha}$ represents (minus) the amount by which the wave vector rotates along the path. A single mass M with impact parameter b is depicted, although the setup is more general.

totale come un path di background più una perturbazione, avremo quindi che:

$$x^\mu(\lambda) = x^{(0)\mu}(\lambda) + x^{(1)\mu}(\lambda) \quad (3.126)$$

E' palese quindi che all'ordine 0 avremo una linea dritta mentre all'ordine 1 una perturbazione da essa, scriviamo quindi:

$$x^\mu(\lambda) = x^{(0)\mu}(\lambda) + x^{(1)\mu}(\lambda) \quad (3.127)$$

Assumiamo allora di scrivere i vettori tangenti come:

$$k^\mu = \frac{dx^{(0)\mu}}{d\lambda} \quad (3.128)$$

$$l^\mu = \frac{dx^{(1)\mu}}{d\lambda} \quad (3.129)$$

La condizione che un path sia nullo è ovviamente:

$$g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda} = 0 \quad (3.130)$$

Allora svolgendo l'equazione (3.130) al primo ordine troviamo che:

$$2\eta_{\mu\nu} k^\mu l^\nu + h_{\mu\nu} k^\mu k^\nu = 0 \quad (3.131)$$

ma allora io potrei definire i vettori d'onda:

$$k^\mu = (k, \vec{k}) \quad (3.132)$$

$$l^\mu = (l^0, \vec{l}) \quad (3.133)$$

e potrei utilizzare la definizione di (3.124) e avere quindi che:

$$-kl^0 + \vec{l} \cdot \vec{k} = 2k^2\Phi \quad (3.134)$$

Allora, prendend l'equazione delle geodetiche:

$$\frac{d^2x^\mu}{d\lambda^2} + \Gamma_{\rho\sigma}^\mu \frac{dx^\rho}{d\lambda} \frac{dx^\sigma}{d\lambda} = 0 \quad (3.135)$$

Allora, all'ordine 0 sappiamo perfettamente cosa aspettarci ossia una straight trajectory, ma all'ordine (1)? può essere incoraggiante scrivere (3.135) come:

$$\frac{dl^\mu}{d\lambda} = -\Gamma_{\rho\sigma}^\mu k^\rho k^\sigma \quad (3.136)$$

(non ti riporto il calcolo dei simboli di Christoffel in approssimazione lineare, ti do direttamente i risultati quindi ti devi fidare) abbiamo chela componente $\mu = 0$ sarà:

$$\frac{dl^0}{d\lambda} = -2k(\vec{k} \cdot \vec{\nabla}\Phi) \quad (3.137)$$

mentre le componenti spaziali saranno:

$$\frac{d\vec{l}}{d\lambda} = -2k^2 \vec{\nabla}_\perp \Phi \quad (3.138)$$

Voglio che tu noti una cosa fondamentale, ossia che al primo ordine il vettore di perturbazione \vec{l} è ortogonale a \vec{k} , per vederlo chiediamoci quanto valga l^0 (sto cercando di utilizzare la (3.134)):

$$\begin{aligned} l^0 &= \int \frac{dl^0}{d\lambda} d\lambda = \\ &= -2k \int (\vec{k} \cdot \vec{\nabla}\Phi) d\lambda = \\ &= -2k \int \left(\frac{d\vec{x}}{d\lambda} \cdot \vec{\nabla}\Phi \right) d\lambda \\ &= -2k \int \vec{\nabla}\Phi \cdot d\vec{x} \\ &= -2k\Phi \end{aligned}$$

Quindi possiamo scrivere che:

$$\vec{l} \cdot \vec{k} = k^0 + 2k^2\Phi = 0 \quad (3.139)$$

che verifica quanto avevamo detto. Ora, nel senso dell'immagine (7.3) e nel senso della differenza tra vettori ha perfettamente senso (per piacere ricorda un po di trigonometria e lo sviluppo di Taylor della tangente):

$$\hat{\alpha} = -\frac{\Delta\vec{l}}{k} \quad (3.140)$$

Ossia:

$$\Delta\vec{l} = \int \frac{d\vec{l}}{d\lambda} d\lambda = -2k^2 \int \vec{\nabla}_\perp \Phi d\lambda \quad (3.141)$$

e usando una nuova variabile di integrazione ossia $s = k\lambda$ avremo che:

$$\hat{\alpha} = 2 \int \vec{\nabla}_\perp \Phi ds \quad (3.142)$$

Perfetto, ma allora scegliendo un potenziale del tipo:

$$\Phi = -\frac{GM}{r} = -\frac{GM}{(b^2 + x^2)^{1/2}} \quad (3.143)$$

Ossia:

$$\vec{\nabla}_\perp \Phi = \frac{GM}{(b^2 + x^2)^{3/2}} \vec{b} \quad (3.144)$$

e quindi eseguendo l'integrale tra $-\infty$ e $+\infty$ troviamo che:

$$\hat{\alpha} = \frac{4GM}{bc^2} \quad (3.145)$$

In perfetto accordo con i dati sperimentali. Ti potresti chiedere, ma dopo tutte queste discussioni non abbiamo utilizzato la gauge trasversa di cui tanto hai parlato? la risposta è *no*, qui abbiamo solo utilizzato la linearizzazione delle equazioni di Einstein, vedremo più nel particolare le applicazioni della gauge trasversa nel futuro.

3.3 Il redshift gravitazionale

Questo capitolo è una vera e propria toccata e fuga, torneremo all'analisi del caso lineare delle equazioni di Einstein (e con annesse gauge studiate) nel caso delle onde gravitazionali ecc. Per quanto riguarda questo capitolo, ci interessiamo ad una trattazione in metrica indipendente dal tempo ossia che è caratterizzata da una metrica del tipo:

$$ds^2 = g_{00}(x_p)dt^2 + g_{jk}(x_p)dx^j dx^k \quad (3.146)$$

Immagina quindi un segnale periodico con un certo periodo T , esso può essere calcolato nel seguente modo (ricorda, siamo nel SDR localmente inerziale al fascio):

$$T = \int dt = \int \sqrt{\frac{-g_{ij}dx^i dx^j}{g_{00}}} \quad (3.147)$$

Questo non è un tempo fisico e misurabile (capisci la scelta di sistema di riferimento) infatti può cambiare se cambio le coordinate. Allora, chiamo Δt , ha senso pensare che in una metrica indipendente dal tempo (dove per piacere fai attenzione, ti sto parlando del tempo coordinato t non di quello proprio) avremo che:

$$\Delta t_{emiss} = \Delta t_{oss} \quad (3.148)$$

Ha quindi senso definire da un punto di vista sperimentale il tempo proprio che possiamo definire in questo modo usando le notazioni della relatività ristretta, dove tieni a mente che qui adesso siamo nel punto di emissione:

$$\Delta\tau_{emission} = \sqrt{g_{00}(x_j^{alice})} \Delta t_{emiss} \quad (3.149)$$

Dove appunto Alice è ferma rispetto alle coordinate x^j , altrimenti nella formula precedente ci sarebbero ulteriori contributi di velocità. Allora, ha perfettamente senso pensare che per Bob che eventualmente si trova sulla terra:

$$\Delta\tau_{obs} = \sqrt{g_{00}(x_j^{bob})} \Delta t_{obs} \quad (3.150)$$

Ma allora a questo punto siamo pronti, infatti possiamo calcolare il rapporto:

$$\frac{\Delta\tau_{emiss}}{\Delta\tau_{obs}} = \left[\frac{g_{00}(x_j^{alice})}{g_{00}(x_j^{bob})} \right]^{1/2} \quad (3.151)$$

e quindi di conseguenza avremo che:

$$\frac{v_{obs}}{v_{emiss}} = \left[\frac{g_{00}(x_j^{alice})}{g_{00}(x_j^{bob})} \right]^{1/2} \quad (3.152)$$

Ossia, lo spettro osservato in B non è lo stesso spettro emesso in A.

3.4 Gli spazi massimamente simmetrici

Dobbiamo fare una sosta per caratterizzare questi spazi, c'è un buon motivo che viene dalla cosmologia. La cosmologia che inizieremo a studiare tra poco vuole caratterizzare le geometrie a grandi scale, le osservazioni di questa branca della fisica suggeriscono che ci sia una isotropia e omogeneità negli spazi che consideriamo, necessitiamo quindi di un modello che tenga conto di queste informazioni, motivo per cui introduciamo gli **spazi massimamente simmetrici**.

3.4.1 L'esempio semplice di R^n

E' palese che, lo spazio più semplice che possiamo costruire è sicuramente R^n , le isometrie di questo spazio sono ovviamente **traslazioni** e **rotazioni**, ma quante ne sono effettivamente? Cerchiamo di contarle, ad esempio sicuramente avremo n traslazioni indipendenti mentre per le rotazioni dobbiamo contare n moltiplicati per tutti gli assi con cui nel frattempo ruotiamo (infatti, una rotazione dell'asse z è una rotazione muovendo x e y mantenendo costante z), allo stesso modo dovremo dividere per due per questa quantità perché ruotare y e x è la stessa cosa di farlo con x e y, di conseguenza avremo che:

$$n + \frac{1}{2}n(n - 1) = \frac{1}{2}n(n + 1) \quad (3.153)$$

A questo punto ha senso definire il numero di queste isometrie come il numero di vettori di killing indipendenti. Parleremo quindi in generale di una varietà n -dimensionale con $\frac{1}{2}n(n + 1)$ vettori di Killing come uno spazio massimamente simmetrico. Voglio però che tu tenga a mente una cosa, ossia che tutto questo lo facciamo sempre in riferimento ad un certo punto P , infatti le isometrie sono applicate in un suo neighborhood. Ora, costruendo un passo alla volta per tutte queste isometrie a partire dal nostro punto P , diciamo che se uno spazio è massimamente simmetrico la curvatura è la stessa ovunque (espresso da isometrie traslazionali) e la stessa in ogni direzione (espresso dalle isometrie rotazionali), di conseguenza se conoscessimo la curvatura di uno spazio massimamente simmetrico in un punto, la conoscerebbero ovunque! Ha senso pensare che però ci sia un numero ridotto di spazi massimamente simmetrici e che essi siano classificati da un certo scalare (eh si! uguale ovunque..) la dimensionalità n , la signature della metrica e alcuni pezzi di nozioni della topologia.

L'effettiva costruzione

L'idea di base è veramente molto semplice, dal momento che la geometria sembra la stessa in ogni direzione, il tensore di curvatura dovrebbe essere lo stesso in ognuna di esse. Partiamo dal particolare per andare al generale, partiamo quindi da un punto p in un set di coordinate localmente inerziali e di conseguenza per quanto detto fino ad ora avremo che $g_{\mu\nu} \hat{=} \eta_{\mu\nu}$, io voglio però che il mio spazio sia lo stesso ovunque motivo per cui (appunto, partendo dal punto P) sono interessato ad utilizzare le trasformazioni di Lorentz e volere che il tensore di

Riemann non cambi sotto questa trasformazione. Ma ovviamente, se facciamo l'assunto di spazio massimamente simmetrico ci sarà sicuramente un tensore che resta invariato, ossia **la metrica** (si perché sto supponendo di spostarmi da localmente inerziale a localmente inerziale, poi generalizzo in concetto al caso più grande perché ovunque dovrà essere così). Di conseguenza, ci aspettiamo una osa del tipo:

$$R_{\rho\sigma\mu\nu} \hat{\times} g_{\rho\mu}g_{\sigma\nu} - g_{\rho\nu}g_{\sigma\mu} \quad (3.154)$$

E contraendo gli indici di sinistra e di destra otteniamo che:

$$R_{\rho\sigma\mu\nu} = \frac{R}{n(n-1)}(g_{\rho\mu}g_{\sigma\nu} - g_{\rho\nu}g_{\sigma\mu}) \quad (3.155)$$

Ha perfettamente senso pensare che nel caso di Minkowski si avrà che $R = 0$. Da questo momento in poi scriveremo che in generale:

$$R_{\rho\sigma\mu\nu} = \kappa(g_{\rho\mu}g_{\sigma\nu} - g_{\rho\nu}g_{\sigma\mu}) \quad (3.156)$$

dove quindi per κ intendiamo:

$$\kappa = \frac{R}{n(n-1)} \quad (3.157)$$

allora, proviamo ad analizzare varie situazioni: prima tra tutte quella per $\kappa = 0$ avremo infatti che il tensore di Riemann sarà pari a 0 e quindi avremo che conseguenza:

$$ds^2 = -dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2 \quad (3.158)$$

che è uno spazio che conosciamo molto bene, è quello minkowskiano. Adesso, proviamo ad analizzare il caso con $\kappa > 0$, lo spazio massimamente simmetrico è chiamato **spazio di De Sitter**. Consideriamo infatti uno spazio di minkowski 5-dimensionale con metrica:

$$ds_5^2 = -du^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2 + dw^2 \quad (3.159)$$

Ma nulla ci vieta allora di considerare un iperboloido contenuto in esso ossia:

$$-u^2 + x^2 + y^2 + z^2 + w^2 = \alpha^2 \quad (3.160)$$

Perfecto, ma allora introduciamo coordinate del tipo t, χ, θ, ϕ e definiamo quindi le coordinate come:

$$u = \alpha \sinh(t/\alpha) \quad (3.161)$$

$$w = \alpha \cosh(t/\alpha) \cos \chi \quad (3.162)$$

$$x = \alpha \cosh(t/\alpha) \sin \chi \cos \theta \quad (3.163)$$

$$y = \alpha \cosh(t/\alpha) \sin \chi \sin \theta \cos \phi \quad (3.164)$$

$$z = \alpha \cosh(t/\alpha) \sin \chi \sin \theta \sin \phi \quad (3.165)$$

ma allora è chiaro che la metrica sull'iperboloide sarà:

$$ds^2 = -dt^2 + \alpha^2 \cosh^2(t/\alpha) [d\chi^2 + \sin^2 \chi (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2)] \quad (3.166)$$

Riconosciamo subito l'espressione in parentesi tonde come quelle della metrica su una sfera bidimensionale, e quella in parentesi quadre come quella di una sfera tridimensionale. Allora, considerando anche la variabile tempo ha senso pensare che in generale la topologia di De Sitter è $\mathbf{R} \times S^3$. Voglio che tu ti renda conto che lo spazio di de sitter è un iperboloide immerso in uno spaziotempo minkowsiano 5D, esso prende un vincolo su di esso e di conseguenza è 4-dimensionale come lo mostra la metrica esibita in 3.166 di conseguenza avremo che lo spazio di de sitter presenta 10 simmetrie. Si possono far vedere dei casi analoghi per gli spazi di **anti-de Sitter**, la costruzione è analoga a prima costruendo sempre:

$$-u^2 - v^2 + x^2 + y^2 + z^2 = -\alpha^2 \quad (3.167)$$

Si possono quindi indurre delle coordinate del tipo $/ t', \rho, \theta, \phi \}$ si trova per la metrica una espressione di questo tipo:

$$ds^2 = \alpha^2 (-\cosh^2(\rho) dt'^2 + d\rho^2 + \sinh^2(\rho) d\Omega_2^2) \quad (3.168)$$

Come puoi benissimamente vedere è sempre uno spazio 4-dimensionale e quindi ci aspettiamo in totale 10 simmetrie (ossia 10 vettori di killing indipendenti). Come facciamo a sapere che siano massimamente simmetrici? potremmo utilizzare il tensore di Riemann in queste metriche che abbiamo trovato e vedere che corrispondono a (3.155), però c'è una maniera più elegante di dimostrare questa cosa utilizzando le metriche viste in precedenza in particolare abbiamo che se vediamo che sono Lorentz-invarianti allora ci troveremo con quanto detto, insieme al fatto che lo scalare di curvatura è maggiore di 0.

3.4.2 Il problema della costante cosmologica

Una caratteristica molto interessante dell'equazione di Einstein è che l'origine per il campo gravitazionale è il solo tensore energia-impulso. Nella fisica non gravitazionale, pensa ad esempio all'elettrostatica, quello che conta è il gradiente del potenziale quindi uno shift iniziale non ci sarà veramente una differenza. Ora, il fatto che questo non si verifichi in relatività generale ci fa pensare che dovremmo essere sensibili di una eventuale **energia di fondo** o meglio una **energia di vuoto**, ossia una densità di energia caratteristica dello spazio vuoto. Essendo quindi una trattazione del vuoto, non vogliamo che abbia una direzione particolare; come sempre per la trattazione andiamo dal particolare al generale ossia dalla invarianza per Lorentz a quella general-relativistica. Avremo quindi che:

$$T_{\mu\nu}^{vac} \hat{=} -\rho_{vac} \eta_{\mu\nu} \quad (3.169)$$

E quindi generalizzato è naturalmente:

$$T_{\mu\nu}^{vac} = -\rho_{vac} g_{\mu\nu} \quad (3.170)$$

Ha senso però considerare il vuoto come un fluido perfetto ed isotropo e quindi considerare:

$$T_{\mu\nu} = (\rho + p)U_\mu U_\nu + pg_{\mu\nu} \quad (3.171)$$

$$p_{vac} = -\rho_{vac} \quad (3.172)$$

Ossia il vuoto è un fluido perfetto con una pressione isotropica di segno opposto alla densità di energia. Perfetto, ma allora ha perfettamente senso scrivere:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = 8\pi G(T_{\mu\nu}^{(M)} - \rho_{vac}g_{\mu\nu}) \quad (3.173)$$

Chiamando quindi la ρ con una nuova lettera ossia Λ (a meno di un fattore costante ovviamente) che prende il nome di **costante cosmologica**, abbiamo che:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = 8\pi GT_{\mu\nu} \quad (3.174)$$

Con ovviamente:

$$\rho_{vac} = \frac{\Lambda}{8\pi G} \quad (3.175)$$

Nel momento in cui abbiamo costruito questa nuova teoria siamo arrivati alla conclusione che nel limite newtoniano dovevamo avere nuovamente l'equazione di newton della gravità ossia $-\nabla^2\phi = \rho$ che era giusta nel senso degli accordi con i dati sperimentali, se aggiungo anche il termine costante $\Lambda g_{\mu\nu}$ mi cambia il limite newtoniano, quindi nelle incertezze doveva ritornare ad essere in accordo con i dati sperimentali dei tempi di Galilei e Newton, si era capito che questa costante cosmologica fosse effettivamente in accordo. Ovviamente, si capisce che questo contributo Λ deve necessariamente essere abbastanza piccolo perchè per $\Lambda = 0$ ci eravamo trovati con le discussioni in ambito ad esempio della precessione del perielio di mercurio. Ma perchè tutto questo? perchè in cosmologia questo termine ha perfettamente senso. Ma perchè questa discussione con quella precedente? perchè si dimostra che:

$$T_{\mu\nu} = 0 \quad (3.176)$$

$$\Lambda > 0 \quad (3.177)$$

è proprio lo spazio di De Sitter. Voglio che adesso tu faccia un passo logico molto importante, ti devi rendere conto che quindi adesso se dovessimo avere il tensore energia-impulso pari a 0 questo non significa più che il tensore di Einstein ammette come soluzione lo spaziotempo di Minkowski, nel senso che adesso devi comprendere che il nostro nuovo framework è quello di De Sitter. Andiamo quindi nello spazio di De Sitter, consideriamo l'espressione del tensore di Riemann in esso (e quindi massimamente simmetrico):

$$R_{\rho\sigma\mu\nu} = \frac{R}{12}(g_{\rho\mu}g_{\sigma\nu} - g_{\rho\nu}g_{\sigma\mu}) \quad (3.178)$$

Posso saturare con il tensore di Ricci e trovare che:

$$R_{\mu\nu} = 3\kappa g_{\mu\nu} \quad (3.179)$$

così come R sarà:

$$R = 12\kappa \quad (3.180)$$

da (3.157). Ma conoscendo il tensore di Ricci possiamo facilmente ricostruire il tensore di Einstein come:

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = -3\kappa g_{\mu\nu} \quad (3.181)$$

Ma quindi è evidente che, dalla "nuova equazione di Einstein" abbiamo che:

$$\kappa = \frac{\Lambda}{3} \quad (3.182)$$

Ora, potremmo quindi preoccuparci del segno e comprendiamo che se avremo $\Lambda > 0$ ci sarà De Sitter altrimenti avremo Anti-De Sitter.

3.4.3 La metrica di Robertson-Walker

Per descrivere il mondo reale dobbiamo rinunciare alla interpretazione del "perfetto" principio Copernicano che implica simmetria attraverso lo spazio e il tempo, in particolare dobbiamo necessariamente renderlo più debole nel senso che lo spazio continua ad essere omogeneo ed isotropo ma che evolve nel tempo. Per questo motivo, può avere senso applicare un ragionamento di "fogliare" lo spaziotempo in slices ognuna tridimensionale e a tempo costante tale che ognuna di esse sia massimamente simmetrica (principio cosmologico). Quindi, ha senso considerare che il nostro spaziotempo sia $\mathbf{R} \times \Sigma$ dove R rappresenta la direzione del tempo mentre Σ è una varietà tridimensionale massimamente simmetrica. Scriviamo quindi:

$$ds^2 = -dt^2 + R^2(t)d\sigma^2 \quad (3.183)$$

stiamo quindi parlando di $R(t)$ come fattore di scala mentre $d\sigma^2$ è la metrica su Σ , quindi avremo che:

$$d\sigma^2 = \gamma_{ij}(u)du^i du^j \quad (3.184)$$

Dove quindi:

$$\gamma_{ij} \quad (3.185)$$

è una metrica massimamente simmetrica. il fattore di scala ci dice quanto è grande la foglia spacelike al momento t . Ricorda che quindi per ogni foglia lo scalare di curvatura può cambiare. La discussione in (3.185) ha senso vista in questo modo:

$$R_{ijkl}^3 = \kappa_{3D}(\gamma_{ik}\gamma_{jl} - \gamma_{il}\gamma_{jk}) \quad (3.186)$$

Quindi, fissata una foglia (ad esempio una sfera) avremo che avranno tutti gli stessi κ che dovranno corrispondere a:

$$\kappa = \frac{R}{6} \quad (3.187)$$

Ma quindi il tensore di Ricci sarà:

$$R_{jl}^{(3)} = 2\kappa\gamma_{jl} \quad (3.188)$$

Non a caso prima ho accennato alle sfere, è ovvio che se uno spazio è massimamente simmetrico allora sarà tridimensionale. Ma noi sappiamo già qualcosa dagli spazi sfericamente simmetrici attraverso la metrica che può essere messa nella forma:

$$d\sigma^2 = \gamma_{ij} du^i du^j = e^{2\beta(\bar{r})} d\bar{r}^2 + \bar{r}^2 d\Omega^2 \quad (3.189)$$

Come facciamo a trovare γ ? dobbiamo usare la (3.188), possiamo calcolare le componenti del tensore di Ricci usando le stesse tecniche viste per Schwarzschild per uno spaziotempo statico e sfericamente simmetrico con:

$$\begin{aligned} {}^{(3)}R_{11} &= \frac{2}{r}\partial_1\beta \\ {}^{(3)}R_{22} &= e^{-2\beta}(r\partial_1\beta - 1) + 1 \\ {}^{(3)}R_{33} &= [e^{-2\beta}(r\partial_1\beta - 1) + 1]\sin^2\theta \end{aligned}$$

Allora facendo così abbiamo trovato che sarà vero che:

$$\beta = -\frac{1}{2}\ln(1 - \kappa\bar{r}) \quad (3.190)$$

Ossia, sulla metrica della foglia tridimensionale avremo che:

$$d\sigma^2 = \frac{d\bar{r}^2}{1 - \kappa\bar{r}^2} + \bar{r}^2 d\Omega^2 \quad (3.191)$$

La metrica scritta nel seguente modo:

$$ds^2 = -dt^2 + R^2(t)\left[\frac{d\bar{r}^2}{1 - \kappa\bar{r}^2} + \bar{r}^2 d\Omega^2\right] \quad (3.192)$$

che prende il nome di **metrica di Robertson-Walker**. Questa famiglia di geometrie è quindi descritta dai parametri $k, R(t)$. Posso fare una scelta alternativa in cui scalo (3.187) per darmi come valori -1, 0, 1. Da questi, posso ricavare sempre che la metrica la diciamo essere rispettivamente **aperta, piatta, chiusa** inoltre la metrica (3.192) è invariante sotto:

$$R \rightarrow \lambda^{-1}R \quad r \rightarrow \lambda r \quad k \rightarrow \lambda^{-2}k. \quad (3.193)$$

Ora, nella convenzione in cui k è normalizzato il fattore di scala ha dimensioni di una distanza mentre la coordinata radiale \bar{r} no ne ha. Si può inoltre scegliere un'altra convenzione come:

$$a(t) = \frac{R(t)}{R_0} \quad (3.194)$$

di conseguenza avremo che:

$$r = R_0\bar{r} \quad (3.195)$$

e quindi definiamo il parametro di curvatura:

$$k = \frac{\kappa}{R_0^2} \quad (3.196)$$

dove quest'ultimo può quindi a questo punto prendere qualsiasi valore. Quindi, la metrica sarà:

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t)\left[\frac{dr^2}{1 - \kappa r^2} + r^2 d\Omega^2\right] \quad (3.197)$$

3.4.4 L'equazione di Friedmann

Riprendiamo la metrica che abbiamo trovato precedentemente ossia:

$$ds^2 = dt^2 + a^2(t) \left[\frac{dr^2}{1 - \kappa r^2} + r^2 d\Omega^2 \right] \quad (3.198)$$

Scegliamo la convenzione che il fattore di scala a sia adimensionale mentre κ è $\frac{1}{r^2}$ dimensionale, tieni quindi conto che in generale la "sistematizzazione" delle dimensioni viene poi aggiustata dalla metrica. Voglio ricordare una cosa: abbiamo ricavato questa metrica utilizzando l'ipotesi cosmologica di conseguenza questa è una candidata metrica di tutto l'universo. Vogliamo quindi usare questa metrica per risolvere l'equazione di Einstein e vedere le condizioni sotto cui gioca, abbiamo già parlato dell'ipotesi di modellare la materia e l'energia come un fluido perfetto, l'isotropia e omogeneità spaziale ci permettono quindi di metterci in un frame tale che(NOTA: per isotropo intendiamo il fatto che in un sistema di riferimento comovente, ossia che si muove con il fluido le osservazioni fatte in ogni punto sono sempre le stesse, lo so cosa ti stai chiedendo: ma scusami noi siamo in relatività generale non dovremmo scrivere leggi della fisica che siano uguali in tutti i sistemi di riferimento? si questo è vero, ma è anche vero che in questo ambito specifico vogliamo vedere le simmetrie dell'universo dettate dal principio cosmologico):

$$U^\mu = (1, 0, 0, 0) \quad (3.199)$$

Il tensore energia-impulso quindi:

$$T_{\mu\nu} = (\rho + p)U_\mu U_\nu + pg_{\mu\nu} \quad (3.200)$$

Che quindi nel frame scelto diventa:

$$T_\nu^\mu = diag(-\rho, p, p, p) \quad (3.201)$$

E quindi la traccia sarà:

$$T = T_\mu^\mu = -\rho + 3p \quad (3.202)$$

Sappiamo ovviamente che deve anche valere:

$$\nabla_\mu T_v^\mu = 0 \quad (3.203)$$

e anche ovviamente:

$$G_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu} \quad (3.204)$$

da cui ricaviamo il tensore di ricci: $R_{\mu\nu}$. Come dicevamo per (3.203) questo deve valere per ogni v e avremo quindi che:

$$0 = \nabla_\mu T_0^\mu = \partial_\mu T_0^\mu + \Gamma_{\mu\lambda}^\mu T_0^\lambda - \Gamma_{\mu 0}^\lambda T_\lambda^\mu = -\partial_0 \rho - 3\frac{\dot{a}}{a}(\rho + p) \quad (3.205)$$

Con la metrica trovata, scegliendo un parametro con:

$$p = w\rho \quad (3.206)$$

avremo che:

$$\frac{\dot{\rho}}{\rho} = -3(1+w)\frac{\dot{a}}{a} \quad (3.207)$$

e quindi avremo che se w è costante sarà vero che:

$$\rho \propto a^{-3(1+w)} \quad (3.208)$$

In cosmologia, esistono due tipi di fluidi popolari che sono la **materia** e la **radiazione**, la materia è un set di particelle non relativistiche senza collisioni che avranno di conseguenza pressione pari a 0 quindi:

$$p_M = 0 \quad (3.209)$$

gli esempi possono essere stelle ordinarie e galassie, per cui la pressione è trascurabile rispetto alla densità di energia, di conseguenza in un fluido dominato dalla materia avremo che:

$$\rho_M \propto a^{-3} \quad (3.210)$$

che può essere interpretato semplicemente come la densità del numero di particelle che decresce per l'universo che si espande (ricorda che $a(t)$ è una funzione del tempo!). E per particelle ultrarelativistiche? ha senso pensare che in questo caso rientri la radiazione elettromagnetica quindi avremo un tensore energia-impulso visto in questo modo:

$$T^{\mu\nu} = F^{\mu\lambda}F_\lambda^\nu - \frac{1}{4}g^{\mu\nu}F^{\lambda\sigma}F_{\lambda\sigma} \quad (3.211)$$

e palese che la traccia sia 0, di conseguenza per la (3.202) avremo che:

$$p_R = \frac{1}{3}\rho_R \quad (3.212)$$

e quindi, usando la (3.208) avremo che:

$$\rho_R \propto a^{-4} \quad (3.213)$$

che si dice, permettetemi l'anglosassone **radiation-dominated**, ossia la densità di energia cade leggermente in maniera più veloce di quella nella materia, questo è dovuto al fatto che i fotoni perdono ulteriormente energia con a^{-1} per via del redshift. Ma come dimenticarci anche dell'energia di vuoto, che prende un equazione del tipo:

$$\rho_\Lambda = -p_\Lambda \quad (3.214)$$

e di conseguenza avremo che:

$$\rho_\Lambda \propto a^0 \quad (3.215)$$

Cerca di capire una cosa, abbiamo visto che materia e radiazione decrescono con l'espansione dell'universo ma questo invece non avviene per il vuoto motivo per cui se è valida l'ipotesi dell'espansione dell'universo diciamo che esso è dominato dal vuoto.

Piccola nota

Vedendo tutta questa costruzione che può sembrare artificiosa del tensore energia-impulso non ti sei chiest* perchè non abbiamo semplicemente usato la costruzione che abbiamo visto per il vuoto? la domanda potrebbe sembrare quasi banale ma credimi non lo è. L'ipotesi cosmologica ci impone il sistema di riferimento che definiamo essere **comovente**, motivo per cui abbiamo avuto la scelta di sistema di riferimento in (3.199), mentre per il vuoto eravamo estremamente liberi (il che ha senso, ovunque guardiamo in ogni sistema di riferimento odobbiamo vedere la stessa cosa) ecco perchè le due costruzioni sono diverse.

Torniamo a noi

Ora, torniamo all'equazione di Einstein che può essere scritta nella forma:

$$R_{\mu\nu} = 8\pi G(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}T) \quad (3.216)$$

Calcolando i vari pezzi del tensore di Ricci troviamo:

$$-3\frac{\dot{a}}{a} = 4\pi G(\rho + 3p) \quad (3.217)$$

e anche:

$$\frac{\ddot{a}}{a} + 2\left(\frac{\dot{a}}{a}\right) + 2\frac{\kappa}{a^2} = 4\pi G(\rho - p) \quad (3.218)$$

si ottengono quindi:

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho - \frac{\kappa}{a^2} \quad (3.219)$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}(\rho + 3p) \quad (3.220)$$

Queste equazioni prendono il nome di **equazioni di Friedmann** e insieme alla metrica definita prima definiscono gli universi di Friedmann-Robertson-Walker. Potrei voler considerare più contributi nello stesso momento di densità (che sia di materia, vuoto oppure radiativo) e quindi si possono definire delle variabili tale che la prima equazione di Friedmann diventa:

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right) = \frac{8\pi G}{3} \sum_i \rho_i \quad (3.221)$$

Ricorda che qui sono contenuti i tre pezzi di prima e il quarto pezzo presente in (3.219).

Una piccola nota importantissima, il potere dell'equazione di Friedmann

Si può dimostrare che per $t \rightarrow 0$, $a(0) = 0$ che è singolare, riprendi la metrica in (3.198) e capirai che significa che non c'è parte spaziale ossia una singolarità (ti sto parlando del **Big Bang**), ha inoltre con il confronto dei dati emerge il dominio del contributo di particelle ultrarelativistiche (ha senso, vedi come scalano le densità di energia), col tempo però mentre aumenta $a(t)$ così domina a^{-3} su a^{-4} , sono varie fasi dell'evoluzione dell'universo e ha senso pensare che con l'avanzare del tempo il contributo predominante sarà quello del vuoto. Ovviamente, ha senso pensare che in fasi intermedie ci saranno più contributi in gioco ma noi faremo la semplificazione di vedere:

$$\sum_i \rho_i \rightarrow \rho_n \quad \rho_n \propto a^{-n} \quad (3.222)$$

Allora, ricostruiamo facilmente l'evoluzione temporale dell'equazione di Friedmann infatti:

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3} a^{-n} \rightarrow a \propto t^{2/n} \quad (3.223)$$

Ossia ad esempio per il dust avremo:

$$\rho = a^{-3} \rightarrow a(t) \propto t^{2/3} \quad (3.224)$$

e poi:

$$\rho = a^{-4} \rightarrow a(t) \propto t^{1/2} \quad (3.225)$$

Adesso, ha perfettamente senso pensare quindi che l'universo tornando indietro nel tempo si si shrink sempre più per arrivare ad una singolarità. Domande del tipo: cosa c'era prima del Big Bang ? non hanno senso in quanto secondo questo modello il tempo inizia dal Big Bang, ti potresti chiedere: **ma il tempo è una coordinata, con che coraggio adesso lo usiamo in questo modo?** ricorda però che all'inizio della discussione ci siamo messi nelle coordinate comovinghe e di conseguenza questo è il tempo proprio della nostra osservazione, è quindi un tempo fisico che ha senso di essere usato come parametro, pensa che noi abbiamo fatto questa assunzione nel $T^{\mu\nu}$. Giustamente, ti potresti chiedere per la costante cosmologica come si risolve il problema, oggi sappiamo che è una cosa del genere:

$$a(t) \propto e^{Ht} \quad (3.226)$$

che è lo spazio di De Sitter, tutto questo con H costante, diventa quindi uno spazio massimamente simmetrico. Per gli altri $a(t)$ non è massimamente simmetrico, ma le foglie lo sono il che ha perfettamente senso con le discussioni fatte da noi fino ad ora.

Una nota su Einstein, come ha fatto a perdersi il Big Bang?

Lavoriamo nella notazione che mette $R \propto [m]$, avremo quindi che possiamo scrivere le equazioni di Friedmann con il contributo di costante cosmologica (sto parlando di $R(t)$ non R scalare di curvatura):

$$\left(\frac{dR}{dt}\right)^2 - \frac{8\pi G}{3}\rho R^2 + k_0 c^2 - \frac{\Lambda}{3}c^2 R^2 = 0 \quad (3.227)$$

$$\frac{d^2R}{dt^2} - \frac{4\pi G}{3}\left(\rho + \frac{3p}{c^2}\right)R + \frac{\Lambda}{3}c^2 R = 0 \quad (3.228)$$

Einstein pensava che l'universo dovesse essere statico infatti impose che $R(t) = 1$, per questo inserì la costante cosmologica ossia proprio per trovarsi questo risultato e per questo ti ho scritto le due equazioni precedenti. Useremo anche che $\rho = \rho_0$ ossia che la densità di energia è costante. Proviamo a risolvere l'equazione e avremo che :

$$-\frac{8\pi G}{3}\rho_0 + k_0 c^2 - \frac{\Lambda}{3}c^2 = 0 \quad (3.229)$$

$$-\frac{4\pi G}{3}\rho_0 + \frac{\Lambda c^2}{3} = 0 \quad (3.230)$$

E quindi Einstein si trova:

$$\Lambda = \frac{4\pi G}{c^2}\rho_0 \quad (3.231)$$

Nota che se non metti la costante cosmologica e fai l'ipotesi di Einstein avresti $\rho = 0$ ossia non avresti l'universo il che non ha senso, quindi Λ in questo framework è una costante della natura, quindi ρ_0 è fissata. Inoltre, presa la R legata alla k_0 si trova che:

$$R = \sqrt{\frac{1}{k_0}} = \frac{c}{\sqrt{4\pi G\rho_0}} \quad (3.232)$$

3.5 Il concetto di velocità ed accelerazione relativa, la deviazione geodetica

Poniamoci una domanda, come posso da queste dedurre informazioni sulla geometria spaziotemporale? Osservando una sola particella non si può dire nulla infatti posso sempre scegliere un sistema di riferimento in cui essa è a riposo, se però considerassimo una misura non locale con due particelle, infatti il fatto che il loro moto è diretto verso un punto è una manifestazione del campo gravitazionale (l'accelerazione gravitazionale essendo locale e non globale non mi permette di trovare un sistema di riferimento in cui entrambe sono a riposo). Da un punto di vista geometrico, ha senso parlare del fatto che se tra i due osservatori uno in A e uno in B vede che i due set di coordinate sono collegate da diffeomorfismo non banale ossia la presenza di curvatura, lo so cosa stai pensando che magari con un sistema di riferimento tricky come una specie di baricentro potrei vedere le particelle entrambe ferme, questa deduzione in relatività generale non ha senso in quanto qui non stiamo parlando più di forze che sono agenti della forza gravitazionale ma di particelle che si muovono su geodetiche per via della curvatura spaziotemporale. In questo senso, vogliamo capire quando due geodetiche si avvicinano o si allontanano. Costruiamo quindi un artificio matematico un pò complesso, prendiam un parametro t che mi faccia muovere lungo la geodetica ed uno s che mi faccia muovere tra le geodetiche Tieni conto che questo è

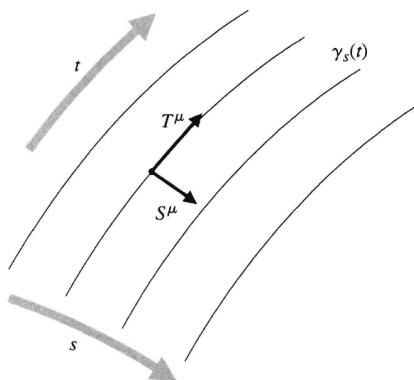


FIGURE 3.9 A set of geodesics $\gamma_s(t)$, with tangent vectors T^μ . The vector field S^μ measures the deviation between nearby geodesics.

un insieme infinitesimo, abbastanza da permettere di far passare almeno una geodetica e quindi caratterizziamo le geodetiche come:

$$x^\mu(s, t) \quad (3.233)$$

La s-esima geodetica quindi è caratterizzata da:

$$\gamma_s(t) \quad (3.234)$$

Definiamo quindi:

$$T^\mu = \frac{\partial x^\mu}{\partial t} \text{ vettore tangente lungo le geodette} \quad (3.235)$$

$$S^\mu = \frac{\partial x^\mu}{\partial s} \text{ vettore ortogonale a quello tangente} \quad (3.236)$$

Allora, ha senso definire:

$$V^\mu = (\nabla_T S)^\mu = T^\rho \nabla_\rho S^\mu \quad (3.237)$$

$$A^\mu = (\nabla_T V)^\mu = T^\rho \nabla_\rho V^\mu \quad (3.238)$$

rispettivamente la velocità e l'accelerazione relativa tra i due punti.
Calcoliamo allora la differenza:

$$S^\rho \nabla_\rho T^\mu - T^\rho \nabla_\rho S^\mu = S^\rho \partial_\rho T^\mu - T^\rho \partial_\rho S^\mu + \Gamma_{\beta\lambda}^\mu (S^\rho T^\lambda - T^\rho S^\lambda) \quad (3.239)$$

ma ad estrema destra abbiamo un tensore antisimmetrico per uno simmetrico quindi annulla mentre i primi due termini a destra sono 0 uno ad uno infatti dall'immagine (3.9) è palese che sono vettori di base di conseguenza con un opportuna scelta di coordinate le derivate si annullano. Allora adesso abbiamo gli strumenti per calcolare A^μ che sarà quindi:

$$\begin{aligned} A^\mu &= T^\rho \nabla_\rho (T^\sigma \nabla_\sigma S^\mu) \\ &= T^\rho \nabla_\rho (S^\sigma \nabla_\sigma T^\mu) \\ &= (T^\rho \nabla_\rho S^\sigma) (\nabla_\sigma T^\mu) + T^\rho S^\sigma \nabla_\rho \nabla_\sigma T^\mu \\ &= (S^\rho \nabla_\rho T^\sigma) (\nabla_\sigma T^\mu) + T^\rho S^\sigma (\nabla_\sigma \nabla_\rho T^\mu + R^\mu_{\nu\rho\sigma} T^\nu) \\ &= (S^\rho \nabla_\rho T^\sigma) (\nabla_\sigma T^\mu) + S^\sigma \nabla_\sigma (T^\rho \nabla_\rho T^\mu) \\ &\quad - (S^\sigma \nabla_\sigma T^\rho) (\nabla_\rho T^\mu) + R^\mu_{\nu\rho\sigma} T^\nu T^\rho S^\sigma \\ &= R^\mu_{\nu\rho\sigma} T^\nu T^\rho S^\sigma. \end{aligned}$$

Ossia, per le nostre discussioni fatte sul tensore di Riemann è palese che non ci sarà un sistema di riferimento in cui l'accelerazione relativa è pari a 0, in accordo con quanto detto in precedenza.

3.6 Le onde gravitazionali

Ricordiamo le equazioni di Einstein in campo debole linearizzate e soprattutto in gauge trasversa, avremo quindi che:

$$\begin{aligned} G_{00} &= 2\nabla^2\Psi = 8\pi GT_{00}, \\ G_{0j} &= -\frac{1}{2}\nabla^2w_j + 2\partial_0\partial_j\Psi = 8\pi GT_{0j}, \\ G_{ij} &= (\delta_{ij}\nabla^2 - \partial_i\partial_j)(\Phi - \Psi) - \partial_0\partial_{(i}w_{j)} + 2\delta_{ij}\partial_0^2\Psi - \square s_{ij} = 8\pi GT_{ij}. \end{aligned}$$

Nel vuoto quindi la prima diventa:

$$\nabla^2\Psi = 0 \quad (3.240)$$

e con eventuali condizioni al contorno (laplace) avremo che $\Psi = 0$, poi dalla seconda avremo che:

$$\nabla^2w_j = 0 \quad (3.241)$$

e quindi ancora $w_j = 0$, mettendo queste nella terza avremo:

$$\nabla^2\Phi = 0 \quad (3.242)$$

che ancora ci darà $\Phi = 0$, di conseguenza avremo che ci rimane:

$$\square s_{ij} = 0 \quad (3.243)$$

Quindi ha senso fare un ansatz in cui (Φ, Ψ, w_i) sono 0 mentre s_{ij} è trasverso, questa prende il nome di gauge trasversa dove avremo quindi che:

$$\square h_{\mu\nu}^{TT} = 0 \quad (3.244)$$

Il d'alambertiano nullo ha molto a che fare con la soluzione delle onde. Ricordiamo inoltre che $h_{\mu\nu}^{TT}$:

$$\begin{aligned} h_{0v}^{TT} &= 0 \\ \eta^{\mu\nu}h_{\mu\nu}^{TT} &= 0 \\ \partial_\mu h_{TT}^{\mu\nu} &= 0 \end{aligned}$$

La prima differenza con l'elettrodinamica è proprio il fatto che non stiamo più parlando di un campo vettoriale bensì tensoriale:

$$\begin{aligned} h_{\mu\nu}^{TT} &= C_{\mu\nu}e^{ik_\sigma x^\sigma} \\ C_{0v} &= 0 \\ \eta^{\mu\nu}C_{\mu\nu} &= 0 \end{aligned}$$

L'annullamento del d'alambertiano ci porta ad affermare che:

$$k_\sigma k^\sigma = 0 \quad (3.245)$$

Inoltre, dobbiamo ancora usare il fatto che:

$$0 = \partial_\mu h_{TT}^{\mu\nu} = iC^{\mu\nu}k_\mu e^{ik_\sigma x^\sigma} \quad (3.246)$$

$$k_\mu C^{\mu\nu} = 0 \quad (3.247)$$

Scegliamo inoltre un S.R in cui è vero che:

$$k^\mu = (\omega, 0, 0, k^3) = (\omega, 0, 0, \omega) \quad (3.248)$$

Dove l'ultima relazione l'ho potuta ricavare da (3.245), è corretto affermare che in questo caso ci troviamo in un sistema di riferimento globalmente inerziale perchè siamo in regime di campo debole, infatti ricorda che è vero che:

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} \quad (3.249)$$

Cerchiamo adesso di caratterizzare la matrice $C_{\mu\nu}$, sapendo che $k^3 = \omega$ e che $C_{0v} = 0$ avremo quindi che:

$$C_{3v} = 0 \quad (3.250)$$

Di conseguenza la matrice (in una gauge con questa direzione) assume una forma:

$$C_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & C_{11} & C_{12} & 0 \\ 0 & C_{12} & -C_{11} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ossia l'onda gravitazionale ha solo due gradi di libertà, ossia C_{11} e C_{12} . Adesso però, immagina di volerti effettivamente rendere conto di questa perturbazione della gravità, sei sulla tua particella ma per il principio di equivalenza sai benissimo che se ti chiudessi in un box allora non potresti dire la differenza tra te e un osservatore fermo, allora evidentemente si segue il ragionamento fatto prima per la deviazione geodetica usando il fatto che la gravità è non locale. Allora, scriveremo in notazione covariante:

$$\frac{D^2}{d\tau^2} S^\mu = R_{v\rho\sigma}^\mu U^v U^\rho S^\sigma \quad (3.251)$$

Considereremo un campo vettoriale del tipo $U^\mu(x)$, possiamo immaginare uno sviluppo in serie in cui consideriamo all'ordine 0:

$$U^v = (1, 0, 0, 0) \quad (3.252)$$

più degli ordini correttivi in $h_{TT}^{\mu\nu}$, sappiamo che però il tensore di Riemann è già del primo ordine in $h_{\mu\nu}^{TT}$ di conseguenza comprendiamo che ha senso tenere solo (3.252) (il motivo per cui inoltre scegliamo questo sistema di riferimento osservato solo rispetto al tempo è dovuto al fatto che inizialmente le nostre particelle sono tutte in quiete, poi vediamo come si evolvono l'una rispetto all'altra). A questo punto, guardando l'espressione (3.251) ci rendiamo conto che le uniche componenti del tensore di Riemann che sopravvivono sono:

$$R_{00\sigma}^\mu \quad (3.253)$$

E ci daranno equazioni del tipo:

$$R_{\mu 00\sigma} = \frac{1}{2} \partial_0 \partial_0 h_{\mu\sigma}^{TT} \quad (3.254)$$

La letteratura ci obbliga a cambiare notazione per la matrice precedente infatti adesso avremo:

$$C_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & h_+ & h_\times & 0 \\ 0 & h_\times & -h_+ & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Per capire cosa significhino, consideriamo gli effetti separatamente in primis $h_x = 0$, avremo due equazioni interessanti ossia:

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} S^1 = \frac{1}{2} S^1 \frac{\partial^2}{\partial t^2} (h_+ e^{ik_\sigma x^\sigma}) \quad (3.256)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} S^2 = -\frac{1}{2} S^2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} (h_+ e^{ik_\sigma x^\sigma}) \quad (3.257)$$

Le soluzioni sono:

$$S^1 = \left(1 + \frac{1}{2} h_+ e^{ik_\sigma x^\sigma}\right) S^1(0) \quad (3.258)$$

$$S^2 = \left(1 - \frac{1}{2} h_+ e^{ik_\sigma x^\sigma}\right) S^2(0) \quad (3.259)$$

Ossia, se analizzi le equazioni (sono palesemente oscillanti) ti rendi conto che i punti oscillano tra loro come un + come si vede nell'immagine che segue:

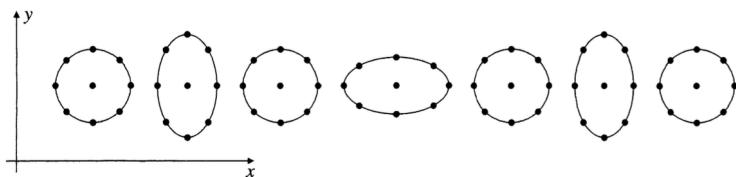


FIGURE 7.4 The effect of a gravitational wave with + polarization is to distort a circle of test particles into ellipses oscillating in a + pattern.

Invece, se considerassimo il caso con $h_+ = 0$ e invece $h_x \neq 0$ otterremo la soluzione:

$$S^1 = S^1(0) + \frac{1}{2} h_x e^{ik_\sigma x^\sigma} S^2(0) \quad (3.260)$$

$$S^2 = S^2(0) + \frac{1}{2} h_x e^{ik_\sigma x^\sigma} S^1(0) \quad (3.261)$$

che invece palesemente da un contributo a "X" infatti è presente sia la componente x che y (bisettrice primo e secondo quadrante):

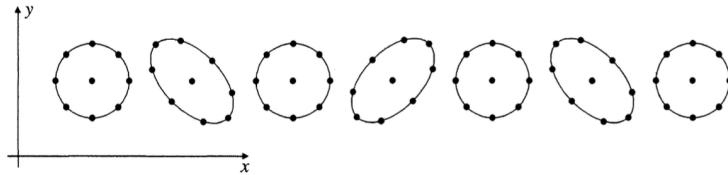


FIGURE 7.5 The effect of a gravitational wave with \times polarization is to distort a circle of test particles into ellipses oscillating in a \times pattern.

Concludiamo questo paragrafo con una nota dal sapore prettamente sperimentale: The onde gravitazionali produce molto piccoli effetti, prodotti da collisioni tra *buchi neri* with masse 10 volte più grandi di quelle del Sole, che possiamo osservare come oscillazioni di 10^{-20} m su distanze di 3–4 km. Osserviamo questi effetti con specchi molto *grandi* e di diverse *tonnellate*, realizzati a forma di lettera L ($\mathcal{L} \sim 3$ km).

Con oscillazioni del genere le *geodetiche* non possono intersecarsi, da qui la validità della **deviazione geodetica**. Per osservare questi fenomeni occorre avere una *buona* precisione e una *buona* risoluzione sperimentale.

Gli interferometri sono *perfetti* delle proprietà quantomeccaniche delle *lasers* usati e delle *particelle di prova*, ma lavorando al primo ordine questi effetti sono più che trascurabili.

Chapter 4

I principi variazionali in relatività generale

Analizziamo adesso un metodo alternativo per ricavare i risultati principali della relatività generale, il problema venne formulato da Hilbert nello stesso periodo di Einstein e ha senso che ci preoccupiamo di esso in quanto in generale trovare uno scalare (da cui appunto far partire i principi variazionali) è molto più semplice di ricercare campi tensoriali. Come facciamo a costruire questo scalare? partiamo dallo scalare di Klein-Gordon:

$$\int d^4x \left[-\frac{1}{2} \eta^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - V(\phi) \right] \quad (4.1)$$

Ci rendiamo conto che ci sono dei problemi, ad esempio sappiamo benissimo che $\eta^{\mu\nu}$ non è general relativistico, così come la presenza di quelle derivate parziali che sappiamo essere problematiche. Inoltre, in generale vogliamo pensare che questo scalare debba rimanere lo stesso in tutti i sistemi di riferimento (ossia, sotto diffeomorfismi) e di conseguenza siamo interessati ad un cambio di coordinate che "aggiusti la misura" (pensaci, se hai un quadrato in coordinate cartesiane in un cambio di riferimento esotico potrebbe non essere così, serve qualcosa che ti aggiusti ciò) e quindi (con lo spirito dello jacobiano) ha senso pensare di inserire $\sqrt{-g}$ dove g è il determinante del tensore metrico, avremo quindi che:

$$\int d^4x \sqrt{-g} \left[-\frac{1}{2} g^{\mu\nu} \nabla_\mu \phi \nabla_\nu \phi - V(\phi) \right] \quad (4.2)$$

Allora, per la gravità si potrebbe pensare di scrivere:

$$S_H = \int d^4x \sqrt{-g} R \quad (4.3)$$

che prende il nome di azione di Einstein-Hilbert. scrivendo $R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}$ quindi ci aspettiamo tre contributi ossia:

$$\delta S_H = (\delta S)_1 + (\delta S)_2 + (\delta S)_3 \quad (4.4)$$

Ossia:

$$(\delta S)_1 = \int d^n x \sqrt{-g} g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu}$$

$$(\delta S)_2 = \int d^n x \sqrt{-g} R_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu}$$

$$(\delta S)_3 = \int d^n x R \delta \sqrt{-g}$$

Allora, il primo si dimostra essere un termine che si comporta bene all'infinito e va a 0, invece mettendo insieme la tre e la 2 otteniamo (basta che sommi)

$$G_{\mu\nu} = 0 \quad (4.6)$$

Che nel contesto dell'equazione di Einstein ha perfettamente senso! (non abbiamo inserito materia).

Chapter 5

Appendice I-Aspetti dinamici della Relatività Speciale

In questa appendice vorremo focalizzarci sugli aspetti dinamici della Relatività Speciale, inizieremo con una riformulazione della meccanica newtoniana in meccanica dei continui per poi vedere l'analogo in relatività speciale, in questo contesto il tensore energia-impulso esce naturalmente e ci giustifichiamo quindi il dubbio che ci siamo portati lungo tutto il corso del perché effettivamente abbiamo dato così tanta importanza a questo oggetto matematico.

5.0.1 Il concetto di roba in meccanica newtoniana

Vogliamo caratterizzare il concetto di "roba", definiamo un "continuo" come qualcosa fatto di "roba". Per caratterizzare questa "roba" ne definiamo le caratteristiche ossia:

è estensiva nel senso che deve essere vero che:

$$R(V_1, t) + R(V_2, t) = R(V_1 \cup V_2, t) \quad (5.1)$$

Si conserva in tutto lo spazio, sarà quindi vero che:

$$\frac{d}{dt} R(\mathbf{R}^3, t) = 0 \quad (5.2)$$

Deve inoltre esserci la permanenza: detto volgarmente, se definiamo un volume di spazio dobbiamo quantificare quanta "roba" entra, se entra e se esce. Questa è chiamata formalmente come **conservazione locale**. Avremo quindi:

$$\frac{dR(V, t)}{dt} = \Phi(\partial V, t) \quad (5.3)$$

Adesso, per caratterizzare la "roba", ha senso considerare il fatto che se provasimo ad affettare questa "roba" sempre di più avremo che si arriverà ad una unità fondamentale (Democrito) di conseguenza in un volume infinitesimo saranno contenuti tot elementi infinitesimi detti:

$$\propto \rho(\vec{r}, t) dV \quad (5.4)$$

Quindi la "roba" la definisco come:

$$R(V, t) = \int_V \rho(\vec{r}, t) dV \quad (5.5)$$

Chiediamoci cosa succeda alle proprietà che abbiamo elencato prima, avremo che la proprietà di superficie subirà la stessa sorte di quella di volume per cui avremo che:

$$\Phi(\partial V, t) = \int_{\partial V} \phi(\vec{x}, t, \hat{n}) dS \quad (5.6)$$

Ma quindi l'equazione di continuità locale diventa:

$$\frac{d}{dt} \int \rho(\vec{x}, t) d^3x = \int_{\partial V} \phi(\vec{x}, t, \hat{n}) dS \quad (5.7)$$

Se uso il teorema di Cauchy posso scrivere:

$$\int_V \partial_t \rho(\vec{x}, t) d^3x = \int \vec{\pi}(\vec{x}, t) \cdot \hat{n} dS \quad (5.8)$$

Applico il teorema della Divergenza ed essendo un equazione che deve valere per ogni equazione aveò che:

$$\partial_t \rho + \vec{\nabla} \cdot \vec{\pi} = 0 \quad (5.9)$$

Questa è la caratterizzazione della matematica della "roba", abbiamo infatti una densità di un campo scalare (densità di roba) e la densità di un campo vettoriale (densità di impulso). Però c'è un problema, l'impulso non è una roba infatti per esso valgono le prime due affermazioni esibite in precedenza ma la terza no e il motivo risiede nelle forze a distanza infatti l'impulso si conserva globalmente ma non localmente. Vorremmo caratterizzare questa densità di impulso, è quindi naturale utilizzare la seconda legge di Newton:

$$\frac{d}{dt} \int_V \vec{\pi}(\vec{x}, t) dV = \int \vec{f} dV + \int_{\partial V} \vec{t}(\vec{x}, t, \hat{n}) \cdot dS \quad (5.10)$$

Dove ha senso pensare che le forze a distanza rientrino nel concetto di volume, se infatti immagini un volumetto infinitesimo tale per cui le azioni tra più punti materiali tra loro è trascurabile, essi risentiranno tutti della stessa forza a distanza (pensa alla legge di gravitazione universale). Allora, posso scrivere:

$$\frac{d}{dt} \int_V \vec{\pi}(\vec{x}, t) dV - \int \vec{f} dV = \int_{\partial V} \vec{t}(\vec{x}, t, \hat{n}) \cdot dS \quad (5.11)$$

Allora, da un campo vettoriale devo passare a qualcosa di più grande, ci viene in mente un tensore di conseguenza pensiamo al **tensore degli sforzi di Cauchy** e possiamo scrivere:

$$\partial_t \vec{\pi} + \vec{\nabla} \cdot \overleftrightarrow{T} = \vec{f} \quad (5.12)$$

Questa equazione per quanto può sembrare semplice è un disastro, infatti mentre a primo membro abbiamo un'equazione di campi locale (vengono da Cauchy, equazione di continuità), mentre a secondo membro abbiamo qualcosa che non è locale per definizione stessa di forze a distanza.

5.0.2 In relatività speciale?

Dobbiamo ricordare da elettrodinamica che qui le forze a distanza non esistono più, si parla di interazione tra campi che hanno una velocità inferiore a quella della luce. In particolare grazie alla legge di Gauss ha senso pensare ad un concetto locale di campo gravitazionale come:

$$\partial_t \vec{\pi} + \vec{\nabla} \cdot \overleftrightarrow{T} = \vec{\nabla} \rho \quad (5.13)$$

Ma ha senso pensare che in un continuo special-relativistico isolato il termine a secondo membro si annulla di conseguenza **l'impulso diventa una roba**, abbiamo quindi due equazioni:

$$\partial_t \rho + \vec{\nabla} \cdot \vec{\pi} = 0 \quad (5.14)$$

$$\partial_t \vec{\pi} + \vec{\nabla} \cdot \overleftrightarrow{T} = 0 \quad (5.15)$$

Questa quantità localmente deve essere conservata, se non ti dovessere essere chiaro il passaggio logico che abbiamo effettuato cerca di pensarla così: cercavamo di caratterizzare la roba ma abbiamo incontrato una difficoltà con l'impulso per via delle azioni a distanza che non permettevano il concetto di località, siamo riusciti a ridurlo con l'approccio della relatività ristretta di vedere le forze come campi la cui propagazione è inferiore della velocità della luce e siamo potuti passare ad una descrizione locale attraverso l'equazione di gauss motivo per cui siamo riusciti a parlare di contenuto isolato e quindi chiamare "roba" anche l'impulso. Le equazioni precedenti possono essere formulate in forma tensoriale come:

$$\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0 \quad (5.16)$$

Ogni continuo special-relativistico deve soddisfare questa equazione. Siamo quindi passati da una formulazione in punti materiali di Newton in cui abbiamo una conservazione della massa come "roba" ad una descrizione special-relativistica in cui la "roba" è l'energia-impulso. Ma il campo che cos'è? È un continuo, che associa proprietà fisiche ad un certo punto nello spazio. Quindi in questo paradigma ci sono più continui che interagiscono tra di loro (attenzione: non siamo più nel regime esposto poco fa), posso però vedere la situazione globalmente e dire che:

$$\partial_\mu (T_1^{\mu\nu} + T_2^{\mu\nu}) = 0 \quad (5.17)$$

Ossia:

$$\partial_\mu T_1^{\mu\nu} = -\partial_\mu T_2^{\mu\nu} \quad (5.18)$$

Ossia ritroviamo:

$$\partial_\mu T^{\mu\nu} = f^\nu \quad (5.19)$$

Noether ci garantisce che le equazioni di campo sono queste.

Chapter 6

APPENDICE II-Una discussione sui vettori di Killing

La discussione fatta per i vettori di Killing era molto semplicistica, nel senso che aveva un sapore prettamente fisico: vogliamo adesso vedere come arrivare alla stessa discussione utilizzando un approccio più formale o meglio, interamente matematico.

6.1 Le mappe tra varietà

Consideriamo due varietà ossia M ed N , che possono anche avere dimensione differenti (ricorda lo zoom che facevamo in, rispettivamente R^m ed R^n). Bene, consideriamo allora una mappa $\phi : M \rightarrow N$ ed una funzione $f : N \rightarrow R$. A questo punto è ovvio che possiamo effettuare una composizione per ottenere $(f \circ \phi) : M \rightarrow R$ che è semplicemente una funzione su M : questo tipo di funzione ha un proprio nome ed è il **pullback** di f da ϕ ed è denotato come $\phi^* f$ anche noto come:

$$\phi^* f = (f \circ \phi) \quad (6.1)$$

Ora, in base a quanto imparato ad *Analisi I, II* ha senso pensare ad un vettore come una derivata che associa ad una funzione un numero reale (recall la somiglianza con le 1-forme), avrebbe senso che in generale se stiamo definendo un campo vettoriale V su un manifold M e vorremmo poter giocare anche sul manifold N allora definisco il **pushforward** di un vettore come $\phi_* V$ al punto $\phi(p)$, ovviamente se la funzione è definita su N ma V è definito su M ha senso pensare che il **pushforward** di V sarà il **pullback** di f , in formule:

$$(\phi_* V)(f) = V(\phi^* f) \quad (6.2)$$

Ma noi stiamo pur sempre agendo un campo vettoriale, di conseguenza ha perfettamente senso voler definire una legge di trasformazione per questo pushforward, dobbiamo recall che una base di vettori per il manifold M è dato dal set di derivate parziali $\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu}$ mentre per N avremo che: $\partial_\alpha = \frac{\partial}{\partial y^\alpha}$. Prendiamo quindi una funzione test, ha perfettamente senso definire:

$$\begin{aligned} (\phi_* V)^\alpha \partial_\alpha f &= V^\mu \partial_\mu (\phi^* f) = \\ V^\mu \partial_\mu (f \circ \phi) &= \\ V^\mu \frac{\partial y^\alpha}{\partial x^\mu} \partial_\alpha f \end{aligned}$$

Ossia, ha perfettamente senso:

$$(\phi_*)_\mu^\alpha = \frac{\partial y^\alpha}{\partial x^\mu} \quad (6.3)$$

Dal momento che le 1-forme sono duali ai vettori (resemble l'esempio fatto prima) ha perfettamente senso pensare che per esse avremo il pullback più che il pushforward: ovviamente l'indice contratto sarà diverso però:

$$\begin{aligned} (\phi^* \omega)_\mu &= (\phi^*)_\mu^\alpha \omega_\alpha \\ (\phi^*)_\mu^\alpha &= \frac{\partial y^\alpha}{\partial x^\mu} \end{aligned}$$

Perfetto, ma allora ha perfettamente senso definire in generale una legge per un tensore che ricordiamo essere un oggetto il più generico possibile, ad esempio per un tensore del tipo (0,l) (l volte covariante):

$$(\phi^* T)(V^{(1)}, \dots, V^l) = T(\phi_* V^1, \phi_* V^2, \dots, \phi_* V^l) \quad (6.4)$$

il che ha anche perfettamente senso ricordando la gerarchia di manifolds. Perfetto, ma allora a questo punto ha senso definire:

$$(\phi^* T)_{\mu_1 \dots \mu_l} = \frac{\partial y^{\alpha_1}}{\partial x^{\mu_1}} \dots \frac{\partial y^{\alpha_l}}{\partial x^{\mu_l}} T_{\alpha_1 \dots \alpha_l}$$

e anche:

$$(\phi_* S)^{\alpha_1 \dots \alpha_k} = \frac{\partial y^{\alpha_1}}{\partial x^{\mu_1}} \dots \frac{\partial y^{\alpha_k}}{\partial x^{\mu_k}} S^{\mu_1 \dots \mu_k}$$

6.2 I diffeomorfismi

Noi non dimostreremo la seguente proposizione ma è importante ricordarla ossia che: **il motivo per cui non è possibile definire il pullback per un vettore e il pushforward per una 1-forma risiede nel fatto che la funzione non è invertibile.** Se però considerassimo una ϕ invertibile il problema non si porrebbe, da qui nasce il concetto di **diffeomorfismo** e grazie a ciò possiamo definire ad esempio il **pushforward** anche per la parte di **1-forma** di un vettore, ad esempio:

$$(\phi_* T)(\omega^{(1)}, \dots, \omega^{(k)}, V^{(1)}, \dots, V^{(l)}) = T(\phi^* \omega^{(1)}, \dots, \phi^* \omega^{(k)}, [\phi^{-1}]_* V^{(1)}, \dots, [\phi^{-1}]_* V^{(l)}).$$

ossia:

$$(\phi_* T)_{\beta_1 \dots \beta_l}^{\alpha_1 \dots \alpha_k} = \frac{\partial y^{\alpha_1}}{\partial x^{\mu_1}} \dots \frac{\partial y^{\alpha_k}}{\partial x^{\mu_k}} \frac{\partial x^{\nu_1}}{\partial y^{\beta_1}} \dots \frac{\partial x^{\nu_l}}{\partial y^{\beta_l}} T_{\nu_1 \dots \nu_l}^{\mu_1 \dots \mu_k}.$$

Si ma a cosa ci serve tutto questo? il motivo è semplice per poter vedere la relazione tra cambi di coordinate, in particolare è noto il fatto che in relatività generale io potrei utilizzare qualsiasi coordinate io voglia e la fisica rimane la stessa. Il punto che voglio cercare di mettere a fuoco è che io posso effettuare un cambio di coordinate o attraverso una semplice introduzione di funzioni come ad esempio $y^\mu : M \rightarrow R^n$, oppure attraverso un diffeomorfismo: $\phi : M \rightarrow M$, devi anche notare che in generale io potrei definire per le equazioni precedenti un pullback ma non c'è ne sta il bisogno perchè posso passare dall'una all'altra semplicemente attraverso la mappa inversa (che per i diffeomorfismi è definita). Bene, come stavamo dicendo posso definire un pullback: $((\phi^* x)^\mu : M \rightarrow R^n)$. Va bene, io posso pensare più in grande però e non considerare un vettore bensì un tensore e vedere come si comporta sotto cambio di queste coordinate, valutare la differenza e considerare quindi la derivata che prenderà il nome di **derivata di Lie**, allora ha senso però per una derivata associare un parametro ad esempio s , ma uno solo è ovviamente insufficiente quindi dovrò considerare una famiglia intera di parametri che chiameremo ϕ_t , tutto questo ci fa pensare ad un campo vettoriale: immagina infatti di prendere una sfera con una superficie bidimensionale e supponi di applicare un diffeomorfismo su tale superficie tale per cui le nuove coordinate naturali sono quelle ruotate di un certo angolo, ha senso pensare che tale rotazione può essere associata ad un campo vettoriale che chiameremo il **generatore del Diffeomorfismo**. Allora, come abbiamo fatto per **Analisi I** consideriamo la differenza tramite il parametro t ossia:

$$\Delta_t T_{v_1, \dots, v_l}^{\mu_1, \dots, \mu_k}(p) = \phi_t^*[T_{v_1, \dots, v_l}^{\mu_1, \dots, \mu_k}(\phi_t(p))] - T_{v_1, \dots, v_l}^{\mu_1, \dots, \mu_k}(p) \quad (6.7)$$

definisco quindi:

$$\mathcal{L}_V T_{v_1, \dots, v_l}^{\mu_1, \dots, \mu_k} = \lim_{t \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta_t T_{v_1, \dots, v_l}^{\mu_1, \dots, \mu_k}}{t} \right) \quad (6.8)$$

Ossia completamente indipendente dalle coordinate. Si può far vedere che è possibile esprimere la derivata di Lie nel seguente modo:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_V T_{\nu_1 \nu_2 \dots \nu_l}^{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_k} &= V^\sigma \partial_\sigma T_{\nu_1 \nu_2 \dots \nu_l}^{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_k} \\ &\quad - (\partial_\lambda V^{\mu_1}) T_{\nu_1 \nu_2 \dots \nu_l}^{\lambda \mu_2 \dots \mu_k} - (\partial_\lambda V^{\mu_2}) T_{\nu_1 \nu_2 \dots \nu_l}^{\mu_1 \lambda \dots \mu_k} - \dots \\ &\quad + (\partial_{\nu_1} V^\lambda) T_{\lambda \nu_2 \dots \nu_l}^{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_k} + (\partial_{\nu_2} V^\lambda) T_{\nu_1 \lambda \dots \nu_l}^{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_k} + \dots\end{aligned}$$

E in formulazione covariante avremo che:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_V T_{\nu_1 \nu_2 \dots \nu_l}^{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_k} &= V^\sigma \nabla_\sigma T_{\nu_1 \nu_2 \dots \nu_l}^{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_k} \\ &\quad - (\nabla_\lambda V^{\mu_1}) T_{\nu_1 \nu_2 \dots \nu_l}^{\lambda \mu_2 \dots \mu_k} - (\nabla_\lambda V^{\mu_2}) T_{\nu_1 \nu_2 \dots \nu_l}^{\mu_1 \lambda \dots \mu_k} - \dots \\ &\quad + (\nabla_{\nu_1} V^\lambda) T_{\lambda \nu_2 \dots \nu_l}^{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_k} + (\nabla_{\nu_2} V^\lambda) T_{\nu_1 \lambda \dots \nu_l}^{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_k} + \dots\end{aligned}$$

e quindi per la metrica:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_V g_{\mu\nu} &= V^\sigma \nabla_\sigma g_{\mu\nu} + (\nabla_\mu V^\lambda) g_{\lambda\nu} + (\nabla_\nu V^\lambda) g_{\mu\lambda} \\ &= \nabla_\mu V_\nu + \nabla_\nu V_\mu\end{aligned}$$

che prende in nome di equazione di Killing, basta che il primo membro della equazione precedente sia 0 affinchè posso avere un generatore di isometria ossia tale che:

$$\nabla_\mu V_\nu + \nabla_\nu V_\mu = 0 \tag{6.9}$$

Ossia:

$$\nabla_{(\mu} V_{\nu)} = 0 \tag{6.10}$$

che è quanto volevamo dimostrare.