Trường THPT chuyên Lê Quý Đôn, Khánh Hòa

Môn học: ĐẠI SỐ 10

Ngày giảng: 27/04/2020

GV: Nguyễn Trung Hưng

Bài giảng: CÔNG THỨC LƯỢNG GIÁC

1. Công thức cộng:

$$\sin(a+b) = \sin a.\cos b + \sin b.\cos a$$
$$\sin(a-b) = \sin a.\cos b - \sin b.\cos a$$
$$\cos(a+b) = \cos a.\cos b - \sin a.\sin b$$
$$\cos(a-b) = \cos a.\cos b + \sin a.\sin b$$
$$\tan(a+b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a.\tan b}$$
$$\tan(a-b) = \frac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a.\tan b}$$

Ví dụ 1: Tính các giá trị lượng giác sau: $\cos 795^0$, $\tan\frac{7\pi}{12}$.

Lời giải

- Vì $795^0 = 75^0 + 2.360^0 = 30^0 + 45^0 + 2.360^0$ nên

$$\cos 795^0 = \cos 75^0 = \cos 30^0 \cos 45^0 - \sin 30^0 \sin 45^0 = \frac{\sqrt{3}}{2}.\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2}.\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

- $\tan\frac{7\pi}{12} = \tan\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\tan\frac{\pi}{3}+\tan\frac{\pi}{4}}{1-\tan\frac{\pi}{3}\tan\frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{3}+1}{1-\sqrt{3}} = -2-\sqrt{3}$

Ví dụ 2: Tính giá trị biểu thức lượng giác sau: $A = \frac{1}{\cos 290^0} + \frac{1}{\sqrt{3}\sin 250^0}$

Lời giải

a) Ta có $\cos 290^0 = \cos\left(180^0 + 90^0 + 20^0\right) = -\cos\left(90^0 + 20^0\right) = \sin 20^0$

$$\sin 250^0 = \sin\left(180^0 + 90^0 - 20^0\right) = -\sin\left(90^0 - 20^0\right) = -\cos 20^0$$

$$A = \frac{1}{\sin 20^0} - \frac{1}{\sqrt{3}\cos 20^0} = \frac{\sqrt{3}\sin 20^0 - \sin 20^0}{\sqrt{3}\sin 20^0.\cos 20^0} = 4\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}\cos 20^0 - \frac{1}{2}\sin 20^0}{\sqrt{3}.2.\sin 20^0.\cos 20^0}$$

$$= 4\frac{\sin 60^0 \cos 20^0 - \cos 60^0 \sin 20^0}{\sqrt{3}\sin 40^0} = \frac{4\sin 40^0}{\sqrt{3}\sin 40^0} = \frac{4\sqrt{3}}{3}$$

2. Công thức nhân đôi, hạ bậc:

a) Công thức nhân đôi.

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha.\cos\alpha$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = 1 - 2\sin^2\alpha$$

$$\tan 2\alpha = \frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$$

b) Công thức hạ bậc.

$$\sin^2\alpha = \frac{1-\cos 2\alpha}{2}$$
$$\cos^2\alpha = \frac{1+\cos 2\alpha}{2}$$
$$\tan^2\alpha = \frac{1-\cos 2\alpha}{1+\cos 2\alpha}$$

Ví dụ 3: Tính các giá trị lượng giác sau: $\sin 18^0,\ \cot\frac{5\pi}{8}$.

Lời giải

- Vì $54^0 + 36^0 = 90^0$ nên $\sin 54^0 = \cos 36^0$

Mà $\cos 36^0 = \cos\left(2.18^0\right) = 1 - 2\sin^2 18^0$

$\sin 54^0 = \sin\left(18^0 + 36^0\right) = \sin 18^0\cos 36^0 + \sin 36^0\cos 18^0$

$= \sin 18^0.\left(1-2\sin^2 18^0\right) + 2\sin 18^0\cos^2 18^0 = \sin 18^0.\left(1-2\sin^2 18^0\right) + 2\sin 18^0\left(1-\sin^2 18^0\right)$

$= 3\sin 18^0 - 4\sin^3 18^0$

Do đó $3\sin 18^0 - 4\sin^3 18^0 = 1 - 2\sin^2 18^0 \Leftrightarrow \left(\sin 18^0 - 1\right)\left(4\sin^2 18^0 + 2\sin 18^0 - 1\right) = 0$

$\Leftrightarrow \sin 18^0 = 1$ hoặc $\sin 18^0 = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ hoặc $\sin 18^0 = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$

Vì $0 < \sin 18^0 < 1$ nên $\sin 18^0 = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

- $\cot\frac{5\pi}{8} = \cot\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{8}\right) = -\tan\frac{\pi}{8}$

Ta lại có $1 = \tan\frac{\pi}{4} = \tan\left(2.\frac{\pi}{8}\right) = \frac{2\tan\frac{\pi}{8}}{1-\tan^2\frac{\pi}{8}}$ suy ra $1 - \tan^2\frac{\pi}{8} = 2\tan\frac{\pi}{8} \Leftrightarrow \tan^2\frac{\pi}{8} + 2\tan\frac{\pi}{8} - 1 = 0$

$\Leftrightarrow \tan\frac{\pi}{8} = -1-\sqrt{2}$ hoặc $\tan\frac{\pi}{8} = -1+\sqrt{2}$

Do $\tan\frac{\pi}{8} > 0$ nên $\tan\frac{\pi}{8} = -1+\sqrt{2}$

Vậy $\cot\frac{5\pi}{8} = 1-\sqrt{2}$

Ví dụ 4: Tính giá trị biểu thức lượng giác sau: $B = 4\sin^4\frac{\pi}{16} + 2\cos\frac{\pi}{8}$

Lời giải

$$B = \left(2\sin^2\frac{\pi}{16}\right)^2 + 2\cos\frac{\pi}{8} = \left[1-\cos\left(2.\frac{\pi}{16}\right)\right]^2 + 2\cos\frac{\pi}{8}$$

$$= 1 - 2\cos\frac{\pi}{8} + \cos^2\frac{\pi}{8} + 2\cos\frac{\pi}{8} = 1 + \frac{1+\cos\frac{\pi}{4}}{2} = 1 + \frac{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}{2} = \frac{6+\sqrt{2}}{4}$$

3. Công thức biến đổi tích thành tổng.

$$\cos a\cos b = \frac{1}{2}\left[\cos(a+b) + \cos(a-b)\right]$$
$$\sin a\sin b = -\frac{1}{2}\left[\cos(a+b) - \cos(a-b)\right]$$
$$\sin a\cos b = \frac{1}{2}\left[\sin(a+b) + \sin(a-b)\right]$$

Ví dụ 5: Tính giá trị biểu thức lượng giác sau: $A = \sin 22^0 30'\cos 202^0 30'$

Lời giải

$$A = \frac{1}{2}\left[\sin\left(22^0 30' + 202^0 30'\right) + \sin\left(22^0 30' - 202^0 30'\right)\right] = \frac{1}{2}\left[\sin 225^0 + \sin\left(-180^0\right)\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\sin\left(180^0 + 45^0\right) - \sin 180^0\right] = -\frac{1}{2}\sin 45^0 = -\frac{\sqrt{2}}{4}$$

Ví dụ 6: Chứng minh các biểu thức sau: $\sin(\alpha+\beta).\sin(\alpha-\beta) = \sin^2\alpha - \sin^2\beta$.

Lời giải

$$\sin(\alpha+\beta).\sin(\alpha-\beta) = -\frac{1}{2}\left[\cos 2\alpha - \cos 2\beta\right] = -\frac{1}{2}\left[\left(1-2\sin^2\alpha\right) - \left(1-2\sin^2\beta\right)\right] = \sin^2\alpha - \sin^2\beta.$$

4. Công thức biển đổi tổng thành tích.

$$\cos a + \cos b = 2\cos\frac{a+b}{2}.\cos\frac{a-b}{2} \qquad \tan a + \tan b = \frac{\sin(a+b)}{\cos a.\cos b}$$

$$\cos a - \cos b = -2\sin\frac{a+b}{2}.\sin\frac{a-b}{2} \qquad \tan a - \tan b = \frac{\sin(a-b)}{\cos a.\cos b}$$

$$\sin a+\sin b = 2\sin\frac{a+b}{2}.\cos\frac{a-b}{2} \qquad \cot a+\cot b = \frac{\sin(a+b)}{\sin a.\sin b}$$

$$\sin a-\sin b = 2\cos\frac{a+b}{2}.\sin\frac{a-b}{2} \qquad \cot a-\cot b = \frac{\sin(b-a)}{\sin a.\sin b}$$

Ví dụ 7: Tính giá trị biểu thức lượng giác sau: $C=\dfrac{\sin\frac{\pi}{5}-\sin\frac{2\pi}{15}}{\cos\frac{\pi}{5}-\cos\frac{2\pi}{15}}$

Lời giải

$$C=\frac{\sin\frac{\pi}{5}-\sin\frac{2\pi}{15}}{\cos\frac{\pi}{5}-\cos\frac{2\pi}{15}}=\frac{2\cos\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{5}+\frac{2\pi}{15}\right)\sin\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{5}-\frac{2\pi}{15}\right)}{-2\sin\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{5}+\frac{2\pi}{15}\right)\sin\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{5}-\frac{2\pi}{15}\right)}=-\frac{\cos\frac{\pi}{6}}{\sin\frac{\pi}{6}}=-\cot\frac{\pi}{6}=-\sqrt{3}$$

Ví dụ 8 : Chứng minh rằng với mọi góc lượng giác α làm cho biểu thức xác định thì

$$\frac{\sin\alpha+\sin\beta\cos\left(\alpha+\beta\right)}{\cos\alpha-\sin\beta\sin\left(\alpha+\beta\right)}=\tan\left(\alpha+\beta\right).$$

Lời giải

Ta có $\dfrac{\sin\alpha+\sin\beta\cos\left(\alpha+\beta\right)}{\cos\alpha-\sin\beta\sin\left(\alpha+\beta\right)}=\dfrac{\sin\alpha+\frac{1}{2}\left[\sin\left(\alpha+2\beta\right)+\sin\left(-\alpha\right)\right]}{\cos\alpha-\left(-\frac{1}{2}\right)\left[\cos\left(\alpha+2\beta\right)-\cos\left(-\alpha\right)\right]}=\dfrac{\sin\alpha+\sin\left(\alpha+2\beta\right)}{\cos\alpha+\cos\left(\alpha+2\beta\right)}$

$$=\frac{2\sin\left(\alpha+\beta\right)\cos\left(-\beta\right)}{2\cos\left(\alpha+\beta\right)\cos\left(-\beta\right)}=\tan\left(\alpha+\beta\right).$$

Ví dụ 9: Đơn giản biểu thức sau: $A=\dfrac{\cos a+2\cos 2a+\cos 3a}{\sin a+\sin 2a+\sin 3a}$

Lời giải

$$A=\frac{\left(\cos a+\cos 3a\right)+2\cos 2a}{\left(\sin a+\sin 3a\right)+2\sin 2a}=\frac{2\cos 2a\cos a+2\cos 2a}{2\sin 2a\cos a+2\sin 2a}=\frac{2\cos 2a\left(\cos a+1\right)}{2\sin 2a\left(\cos a+1\right)}=\cot 2a$$

BÀI TẬP VỀ NHÀ

Bài 1. Tính giá trị biểu thức lượng giác sau

a) $A=\dfrac{1}{\cos 290^0}+\dfrac{1}{\sqrt{3}\sin 250^0}$.

b) $B=\left(1+\tan 20^0\right)\left(1+\tan 25^0\right)$.

c) $C=\tan 9^0-\tan 27^0-\tan 63^0+\tan 81^0$.

d) $D=\sin^2\dfrac{\pi}{9}+\sin^2\dfrac{2\pi}{9}+\sin\dfrac{\pi}{9}\sin\dfrac{2\pi}{9}$.

Bài 2. Cho $\cos 2x = -\dfrac{4}{5}$, với $\dfrac{\pi}{4} < x < \dfrac{\pi}{2}$. Tính $\sin x,\ \ \cos x,\ \sin\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right),\ \ \cos\left(2x-\dfrac{\pi}{4}\right)$.

Bài 3. Chứng minh rằng với mọi góc lượng giác α làm cho biểu thức xác định thì

a) $\sin^4\alpha + \cos^4\alpha = \dfrac{3}{4} + \dfrac{\cos 4\alpha}{4}$.

b) $\dfrac{1-\sin 2\alpha}{1+\sin 2\alpha} = \cot^2\left(\dfrac{\pi}{4}+\alpha\right)$

c) $\sin^2 x\left(\dfrac{\pi}{8}+a\right) - \sin^2 x\left(\dfrac{\pi}{8}-a\right) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\sin 2a$

d) $\cos^2\alpha + \cos^2\left(\alpha-\dfrac{\pi}{3}\right) + \cos^2\left(\dfrac{2\pi}{3}-\alpha\right) = \dfrac{3}{2}$

e) $\dfrac{1+\sin 2\alpha - \cos 2\alpha}{1+\sin 2\alpha + \cos 2\alpha} = \tan\alpha$