

■ **Bài tập tìm điều kiện tham số:**

Bài 1. (VMO, Bảng A, 1995 – 1996) Hãy biện luận số nghiệm thực của hệ phương trình với ẩn x, y :

$$\begin{cases} x^3y - y^4 = a^2 \\ x^2y + 2xy^2 + y^3 = b^2 \end{cases}.$$

Bài 2. Với những giá trị nào của b thì tồn tại a sao cho hệ phương trình

$$\begin{cases} (x-1)^2 + (y+1)^2 = b \\ y = x^2 + (2a+1)x + a^2 \end{cases}$$

có nghiệm?

Bài 3. Tìm điều kiện cần và đủ của m để hệ phương trình sau có nghiệm duy nhất:

$$\begin{cases} x^2 = (2+m)y^3 - 3y^2 + my \\ y^2 = (2+m)z^3 - 3z^2 + mz \\ z^2 = (2+m)x^3 - 3x^2 + mx \end{cases}$$

Bài 4. (Bulgaria MO, 2001) Tìm tất cả các số thực t sao cho tồn tại các số thực x, y, z thỏa mãn

$$\begin{cases} 3x^2 + 3xz + z^2 = 1 \\ 3y^2 + 3yz + z^2 = 4 \\ x^2 - xy + y^2 = t \end{cases}$$

Bài 5. (Bulgaria MO, 2002) Tìm tất cả các số nguyên dương n sao cho tồn tại các số thực

dương x, y, z thỏa mãn $\begin{cases} x = y - \frac{1}{y^n} \\ y = z - \frac{1}{z^n} \\ z = x - \frac{1}{x^n} \end{cases}$

Bài 6. (IMO, 1961) Giải hệ phương trình sau đây

$$\begin{cases} x + y + z = a \\ x^2 + y^2 + z^2 = b^2 \\ xy = z^2 \end{cases}$$

trong đó a, b là các hằng số thực. Hãy xác định điều kiện của a và b để nghiệm $(x; y; z)$ của hệ thỏa mãn x, y, z là các số thực dương phân biệt.

Bài 7. (Germany TST, 1997) Tìm tất cả các giá trị $a \in \mathbb{R}$ sao cho hệ phương trình sau có nghiệm duy nhất

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = z \\ x + y + z = a \end{cases}.$$

Bài 8. (Bulgaria MO, 1968) Tìm tất cả các giá trị tự nhiên có thể của k để hệ phương trình

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + \dots + x_k = 9 \\ \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_k} = 1 \end{cases}$$

Bài 9. (Poland MO, 2000) Cho số nguyên $n \geq 2$. Hỏi hệ phương trình

$$\begin{cases} x_1 + x_n^2 = 4x_n \\ x_2 + x_1^2 = 4x_1 \\ \dots \\ x_n + x_{n-1}^2 = 4x_{n-1} \end{cases}$$

có bao nhiêu nghiệm thực không âm x_1, x_2, \dots, x_n ?

■ **Bài tập giải bất phương trình:**

Bài 10. (HSG Lâm Đồng, 2009 – 2010) Giải hệ phương trình sau:

$$\begin{cases} 4x^2 + y^4 - 4xy^3 = 1 \\ 4x^2 + 2y^2 - 4xy = 2 \end{cases}.$$

Bài 11. (HSG Đồng Nai, Bảng A, 2009 – 2010) Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} x^2 - 2xy + x + y = 0 \\ x^4 - 4x^2y + 3x^2 + y^2 = 0 \end{cases}.$$

Bài 12. (ĐH Khối A, 2014) Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} x\sqrt{12-y} + \sqrt{y(12-x^2)} = 12 \\ x^3 - 8x - 1 = 2\sqrt{y-2} \end{cases} \quad (x, y \in \mathbb{R}).$$

Bài 13. (ĐH Khối B, 2013) Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} 2x^2 + y^2 - 3xy + 3x - 2y + 1 = 0 \\ 4x^2 - y^2 + x + 4 = \sqrt{2x+y} + \sqrt{x+4y}. \end{cases}$$

Bài 14. (Austria MO, 1998) Giải hệ phương trình với x, y là số thực:

$$\begin{cases} (x-1)(y^2+6) = y(x^2+1) \\ (y-1)(x^2+6) = x(y^2+1) \end{cases}$$

Bài 15. (HSG Nghệ An, Vòng 1, 2010 – 2011) Giải hệ phương trình sau trên tập số thực:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = \frac{1}{5} \\ 4x^2 + 3x - \frac{57}{25} = -y(3x+1) \end{cases}$$

Bài 16. HSG Bà Rịa-Vũng Tàu, Bảng A, 2010 – 2011) Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} \sqrt{2x} + \sqrt{2y} = 4 \\ \sqrt{2x+5} + \sqrt{2y+5} = 6 \end{cases}$$

Bài 17. (HSG Bắc Giang, Bảng A, 2010 – 2011) Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} x\sqrt{x} - 8\sqrt{y} = \sqrt{x} + y\sqrt{y} \\ x - y = 5 \end{cases}$$

Bài 18. (VMO, 2009) Giải hệ phương trình sau:

$$\begin{cases} \frac{1}{\sqrt{1+2x^2}} + \frac{1}{\sqrt{1+2y^2}} = \frac{2}{\sqrt{1+2xy}} \\ \sqrt{x(1-2x)} + \sqrt{y(1-2y)} = \frac{2}{9} \end{cases}$$

Bài 19. (VMO, 2013) Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} \sqrt{\sin^2 x + \frac{1}{\sin^2 x}} + \sqrt{\cos^2 y + \frac{1}{\cos^2 y}} = \sqrt{\frac{20y}{x+y}} \\ \sqrt{\sin^2 y + \frac{1}{\sin^2 y}} + \sqrt{\cos^2 x + \frac{1}{\cos^2 x}} = \sqrt{\frac{20x}{x+y}} \end{cases}$$

Bài 20. (THTT, T7/428) Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} \sqrt{x - \frac{1}{4}} + \sqrt{y - \frac{1}{4}} = \sqrt{3} \\ \sqrt{y - \frac{1}{16}} + \sqrt{z - \frac{1}{16}} = \sqrt{3}. \\ \sqrt{z - \frac{9}{16}} + \sqrt{x - \frac{9}{16}} = \sqrt{3} \end{cases}$$

Bài 21. (Chọn đội tuyển HSG Hà Tĩnh, 2012 – 2013) Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} \left(\frac{1-x^2}{x^2} \right)^3 + xy + \frac{3}{2} = y^3 \\ (xy+2)^2 + \frac{1}{x^2} = 2y + \frac{4}{x} \end{cases}$$

Bài 22. (HSG Lớp 12, Bảng B, Khánh Hòa, 2014 – 2015) Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} 2(2y^2 + 1)\sqrt{2x^2 + 1} = x^2 + 4y^2 + 2 \\ (x+4)\sqrt{x+1} = 8y^3 + 6y \end{cases}$$

Bài 23. (HSG Lớp 12, Bảng B, Khánh Hòa, 2011 – 2012) Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} x^5 + xy^4 = y^{10} + y^6 \\ \sqrt{4x+5} + \sqrt{y^2 + 8} = 6 \end{cases}$$

Bài 24. Giải các hệ phương trình sau:

$$\begin{cases} 2(2x+1)^3 + 2x+1 = (2y-3)\sqrt{y-2} \\ \sqrt{4x+2} + \sqrt{2y+4} = 6 \end{cases}$$

Bài 25. (Trường THPT Chuyên ĐHSP Hà Nội, chọn đội dự tuyển Quốc gia 2010 – 2011)

Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} (2x^2 - 3x + 4)(2y^2 - 3y + 4) = 18 \\ x^2 + y^2 + xy - 7x - 6y + 14 = 0 \end{cases}$$