Backtrack

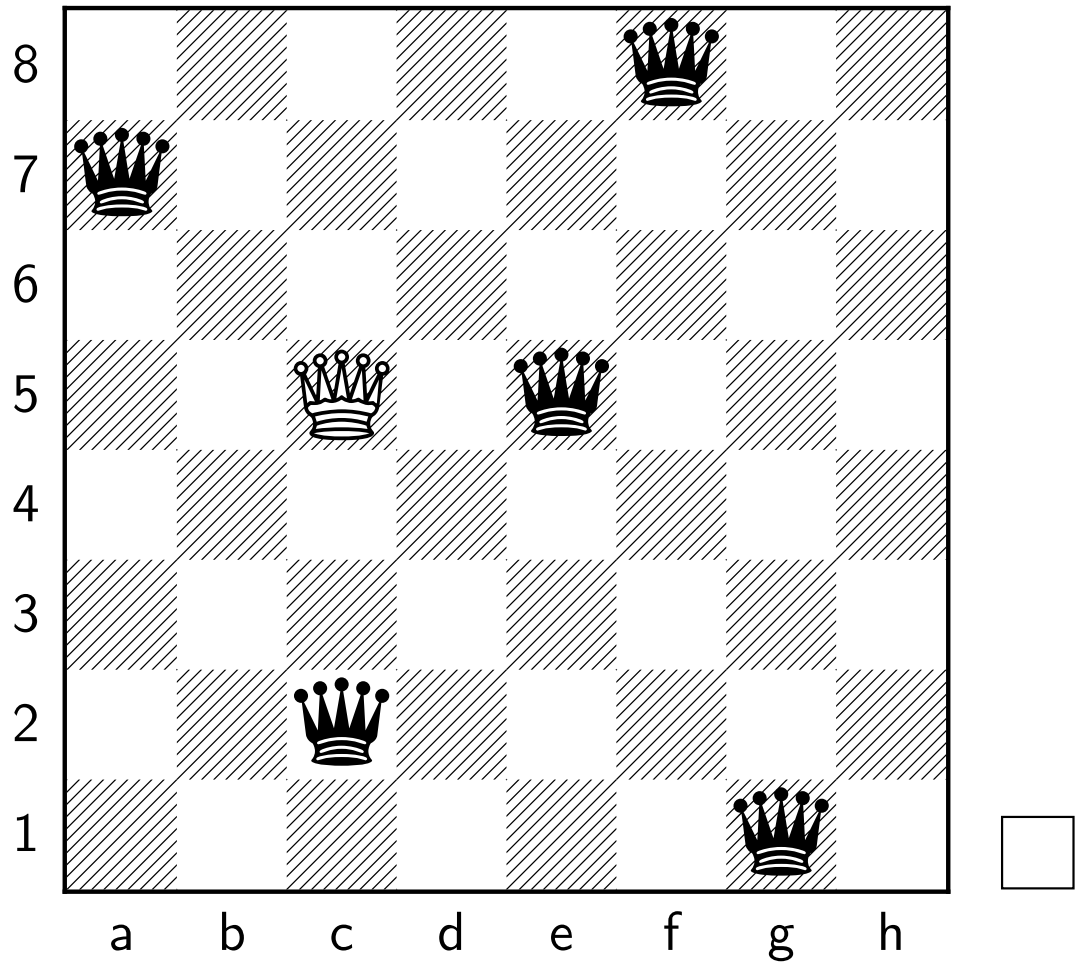
Giuseppe Persiano

Università di Salerno

Novembre, 2021

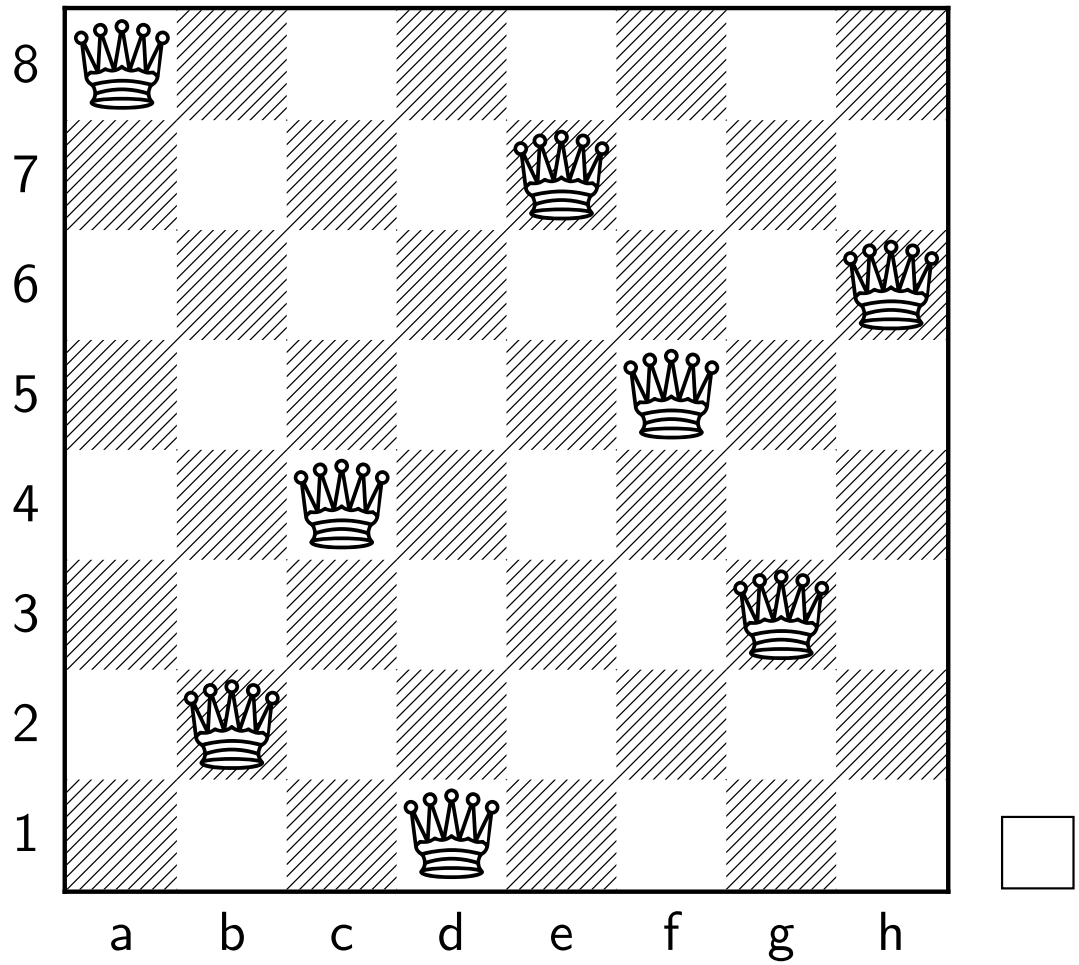
N regine

Piazzare 8 regine su una scacchiera in modo tale che nessuna regina attacchi un'altra regina.



N regine

Piazzare 8 regine su una scacchiera in modo tale che nessuna regina attacchi un'altra regina.



Algoritmo di backtrack

La filosofia del backtrack

- prova tutte le scelte che non sono in conflitto con quelle precedenti
- se non hai alternative, torna indietro e cambia una delle scelte precedenti

8 righe: 0,1,. . .,7

Backtrack applicato al problema delle 8 regine

Prova a piazzare una regina sulla riga R

Regine sulle righe $0, 1, 2, \ldots, R-1$

- se $R = 8$

  termina con successo

- se $R < 8$

  per ogni possibile posizione C sulla riga R
  - se posizione (R, C) non è sotto attacco
    - annota dove hai messo la regina e passa ricorsivamente alla riga $R+1$
    - se la chiamata ricorsiva ha successo, termina con successo (torna alla chiamata precedente alla riga $R-1$)

  se hai provato tutte le posizioni, termina con insuccesso (torna alla chiamata precedente alla riga $R-1$)

prima chiamata $R = 0$ e nessuna regina piazzata

```
def solve(R,regine):
    if R==len(regine):
        return True
    for C in range(len(regine)):
        if checkQueen(R,regine,C):
            regine[R]=C
            if solve(R+1,regine):
                return True
    return False
```

Per risolvere il problema con $N = 8$

```
soluzione=[None]*8
if solve(R=0,regine=soluzione):
    print(soluzione)
```

```
##controlla se la colonna C e' una posizione della regina della riga R
##compatibile con le regine nelle righe 0,1,...,R-1
def checkQueen(R,regine,C):
    r1=R
    c1=C
    for r in range(R):
        r2=r
        c2=regine[r]
        if attackingQ(r1,c1,r2,c2):
            return False
    return True

def attackingQ(r1,c1,r2,c2):
    return samecolumn(r1,c1,r2,c2) or sameMajorD(r1,c1,r2,c2) \
            or sameMinorD(r1,c1,r2,c2)
```

Controllare se due regine si attaccano

Regine a (r_1, c_1) e (r_2, c_2)

- controlla se sono sulla stessa riga:

Controllare se due regine si attaccano

Regine a (r_1, c_1) e (r_2, c_2)

- controlla se sono sulla stessa riga:
  - $r_1 == r_2$

Controllare se due regine si attaccano

Regine a (r_1, c_1) e (r_2, c_2)

- controlla se sono sulla stessa riga:
  - $r_1 == r_2$
- controlla se sono sulla stessa colonna:

Controllare se due regine si attaccano

Regine a (r_1, c_1) e (r_2, c_2)

- controlla se sono sulla stessa riga:
  - $r_1 == r_2$
- controlla se sono sulla stessa colonna:
  - $c_1 == c_2$

Controllare se due regine si attaccano

Regine a (r_1, c_1) e (r_2, c_2)

- controlla se sono sulla stessa riga:
  - $r_1 == r_2$
- controlla se sono sulla stessa colonna:
  - $c_1 == c_2$
- controlla se sono sulla stessa diagonale maggiore:

Controllare se due regine si attaccano

Regine a (r_1, c_1) e (r_2, c_2)

- controlla se sono sulla stessa riga:
  - $r_1 == r_2$
- controlla se sono sulla stessa colonna:
  - $c_1 == c_2$
- controlla se sono sulla stessa diagonale maggiore:
  - $c_1 - r_1 == c_2 - r_2$

Controllare se due regine si attaccano

Regine a (r_1, c_1) e (r_2, c_2)

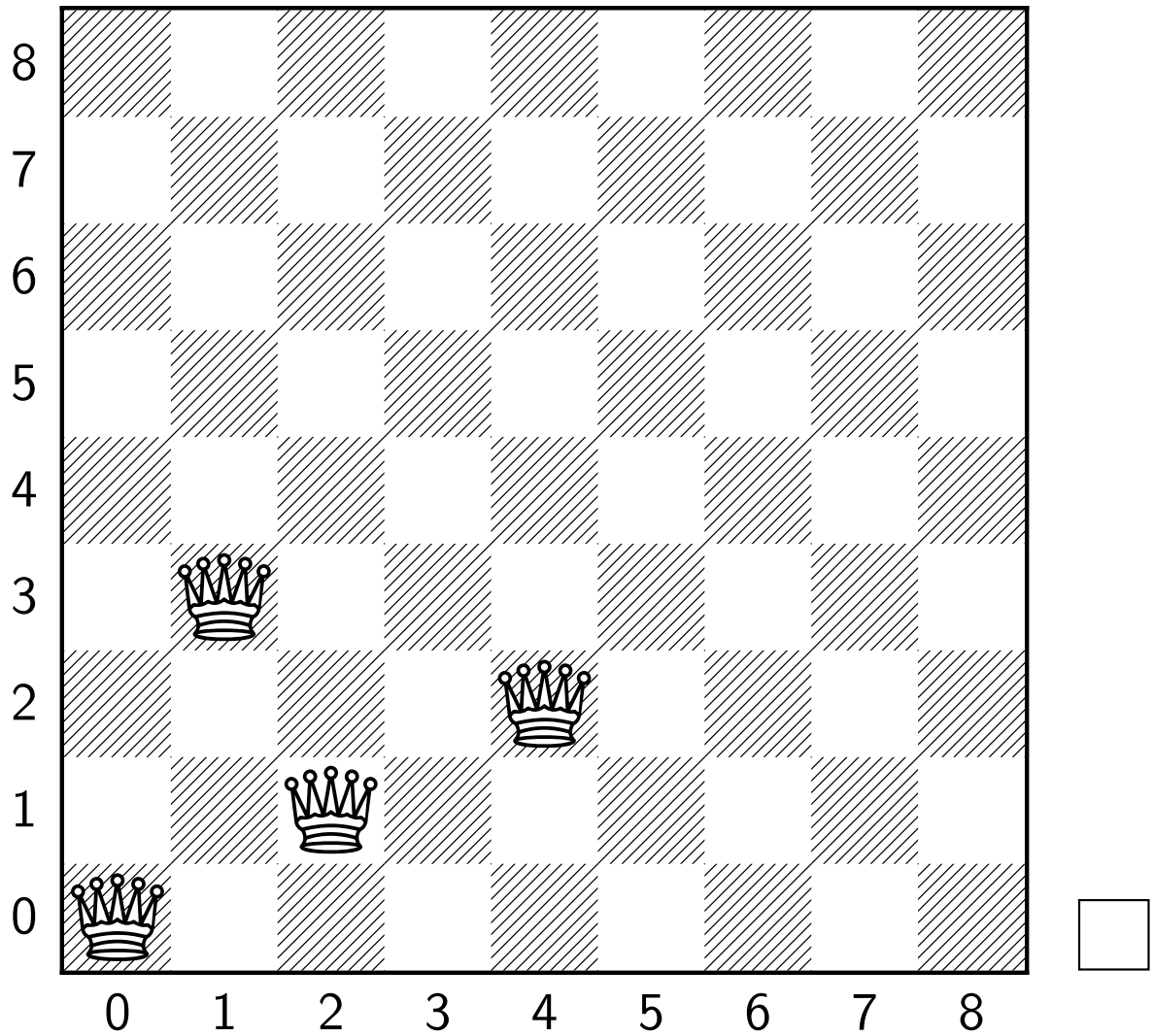
- controlla se sono sulla stessa riga:
  - $r_1 == r_2$
- controlla se sono sulla stessa colonna:
  - $c_1 == c_2$
- controlla se sono sulla stessa diagonale maggiore:
  - $c_1 - r_1 == c_2 - r_2$
- controlla se sono sulla stessa diagonale minore:

Controllare se due regine si attaccano

Regine a (r_1, c_1) e (r_2, c_2)

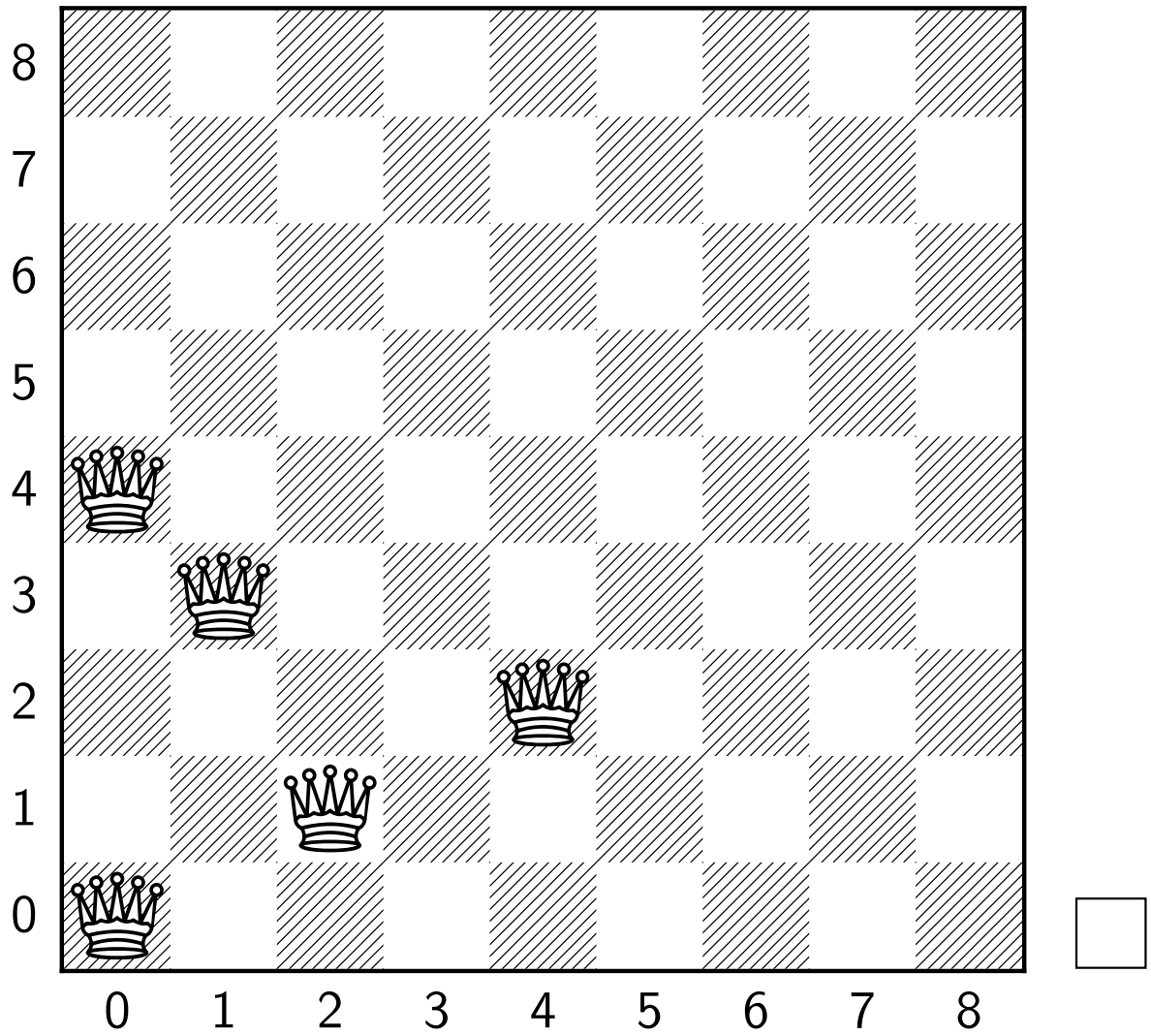
- controlla se sono sulla stessa riga:
  - $r_1 == r_2$
- controlla se sono sulla stessa colonna:
  - $c_1 == c_2$
- controlla se sono sulla stessa diagonale maggiore:
  - $c_1 - r_1 == c_2 - r_2$
- controlla se sono sulla stessa diagonale minore:
  - $c_1 + r_1 == c_2 + r_2$

$R = 4$ $\texttt{regine} = [0, 2, 4, 1, \texttt{None}, \texttt{None}, \texttt{None}, \texttt{None}, \texttt{None}]$ $N = 9$



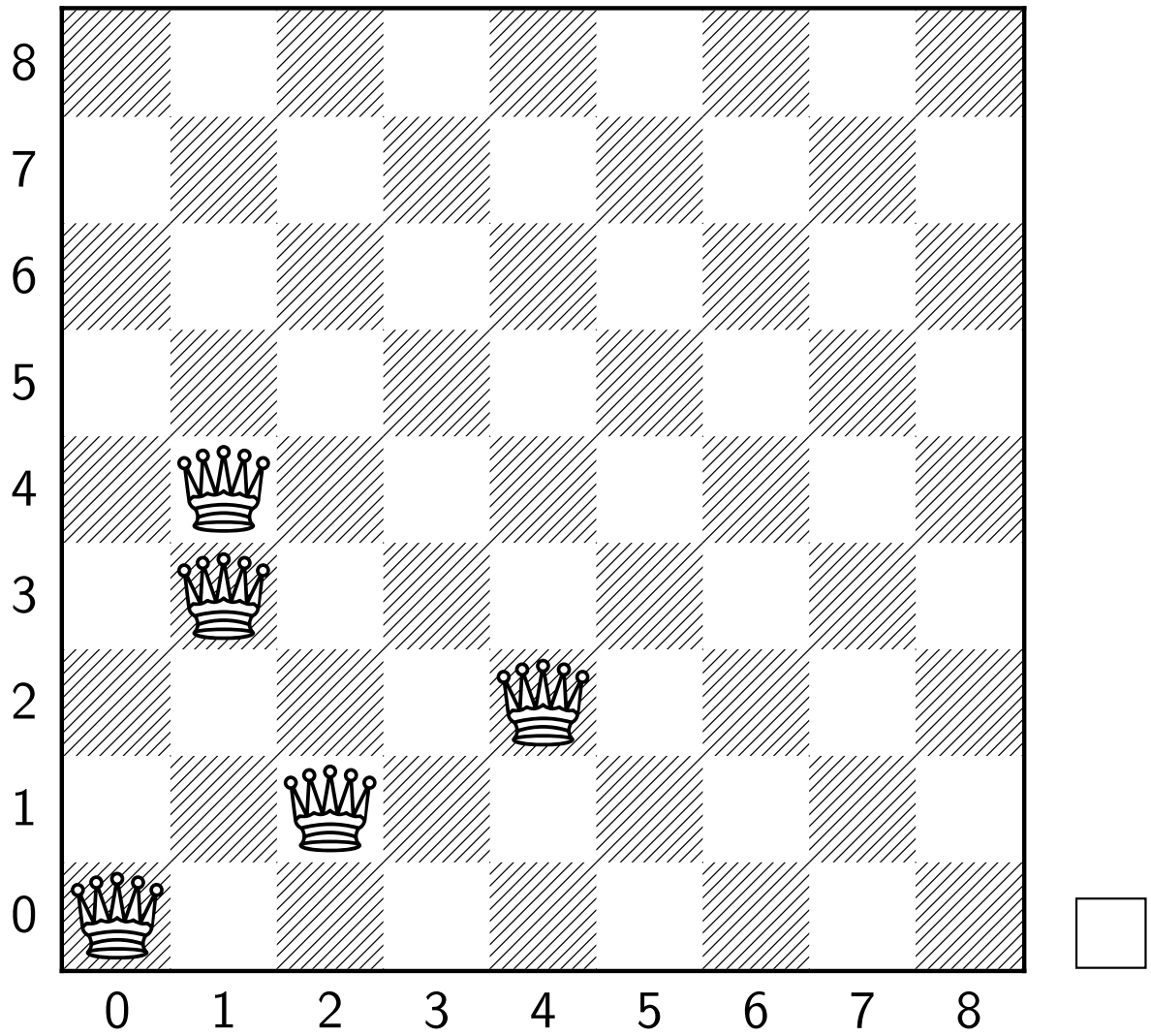
R = 4 regine = [0, 2, 4, 1, None, None, None, None, None] N = 9

C=0



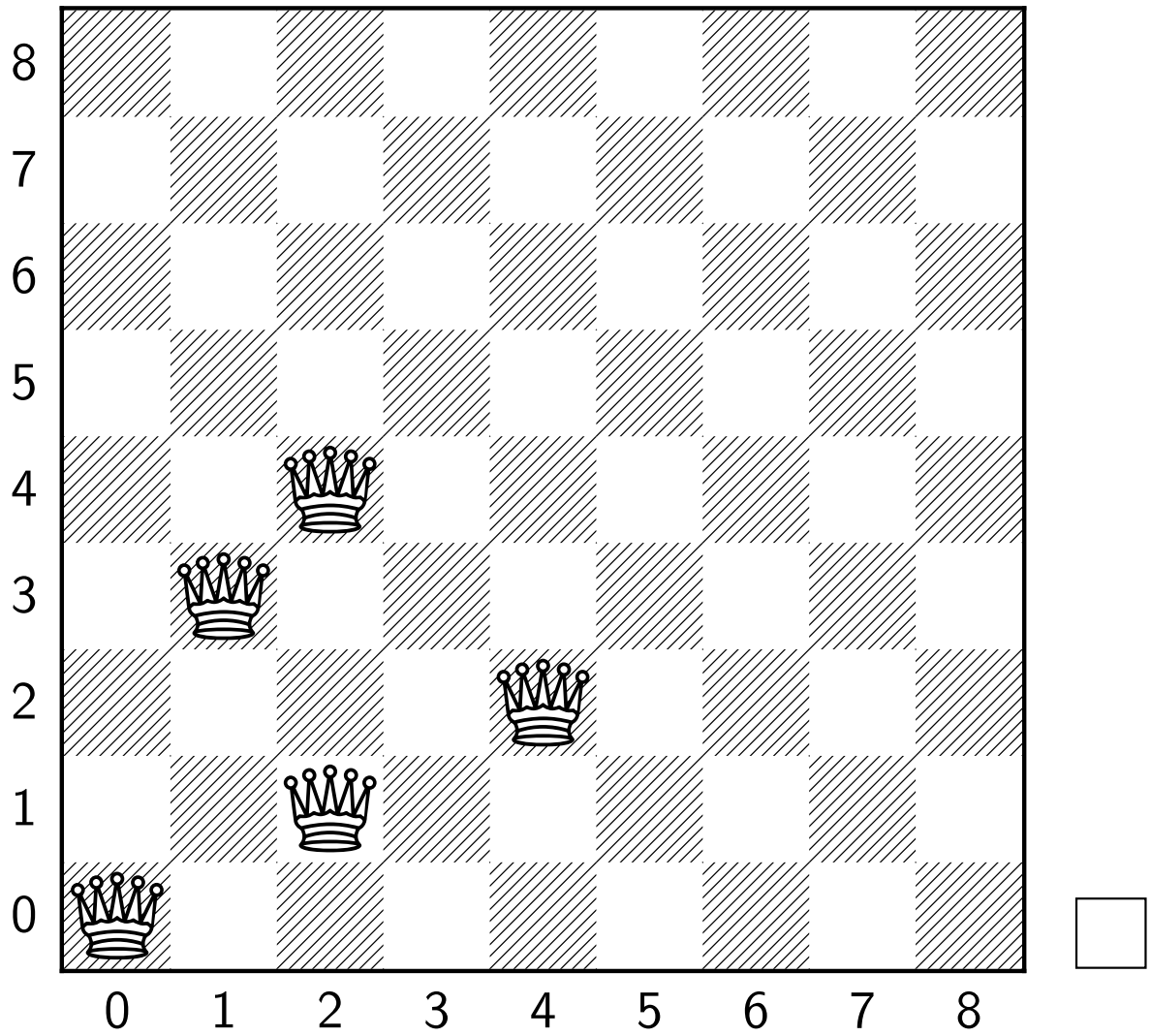
R = 4 regine = [0, 2, 4, 1, None, None, None, None, None] N = 9

C=1



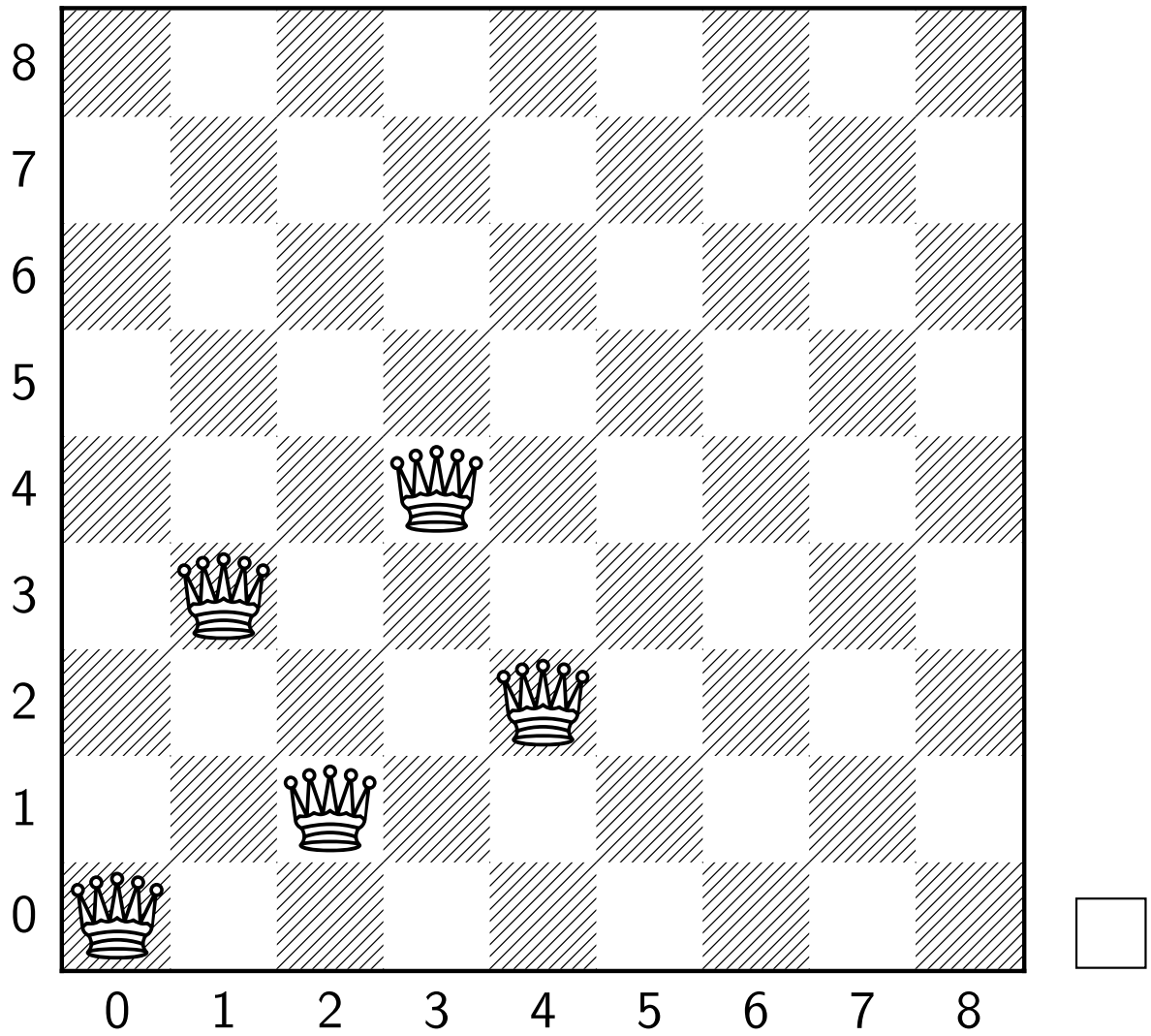
R = 4 regine = [0, 2, 4, 1, None, None, None, None, None] N = 9

C=2



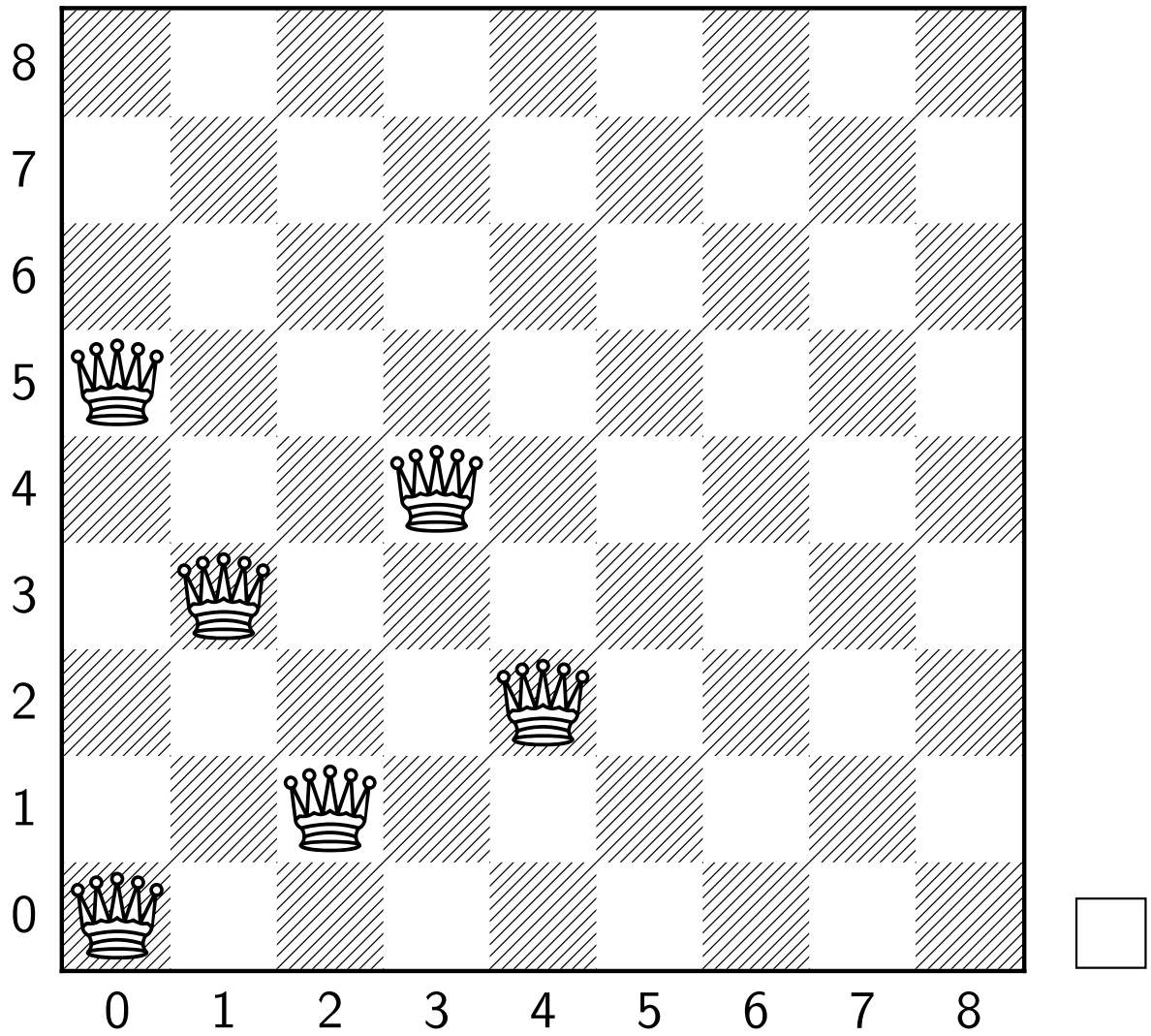
$R = 4$ $\texttt{regine} = [0, 2, 4, 1, \texttt{None}, \texttt{None}, \texttt{None}, \texttt{None}, \texttt{None}]$ $N = 9$

C=3



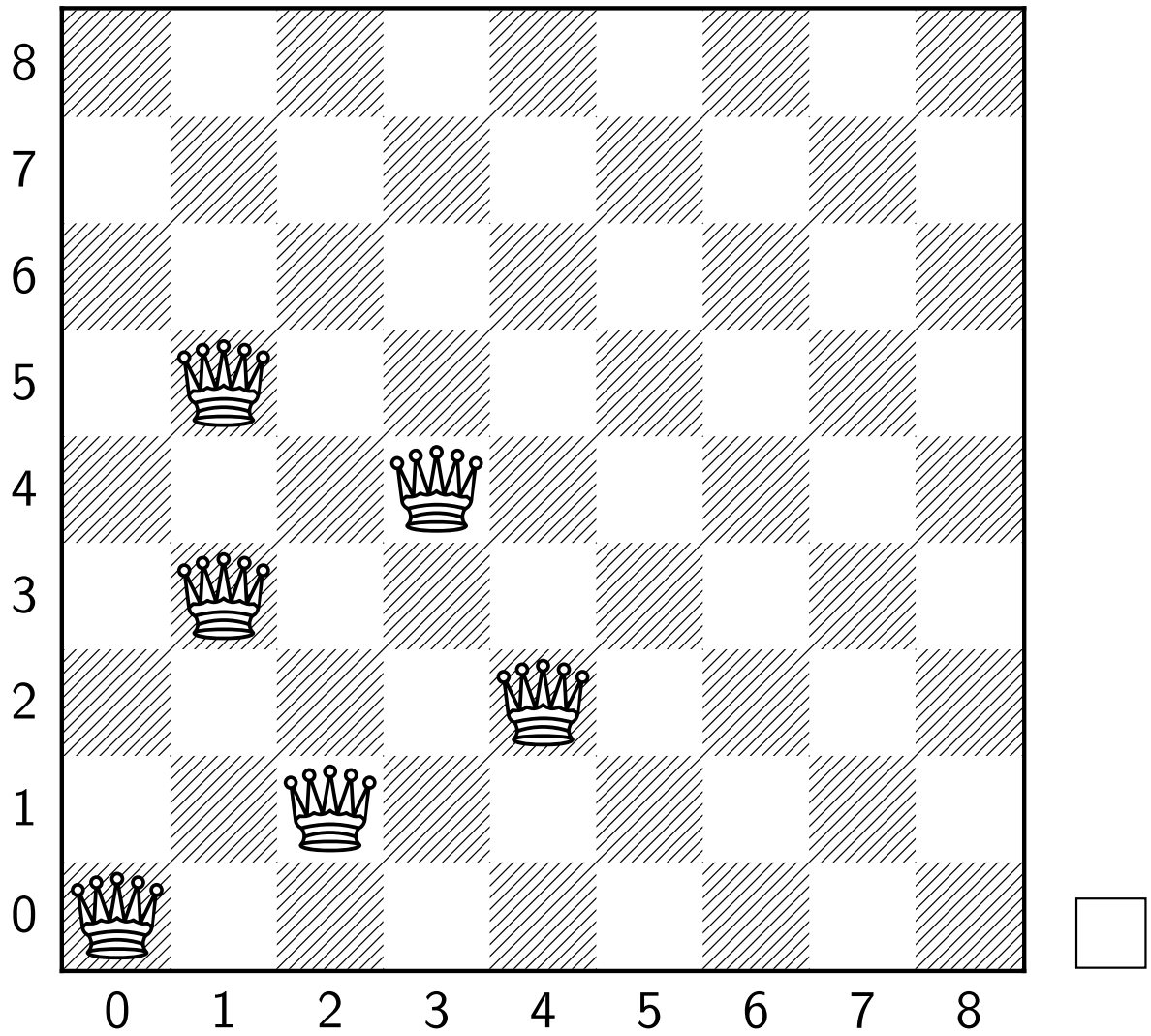
R = 5 regine = [0, 2, 4, 1, 3, None, None, None, None] N = 9

C=0



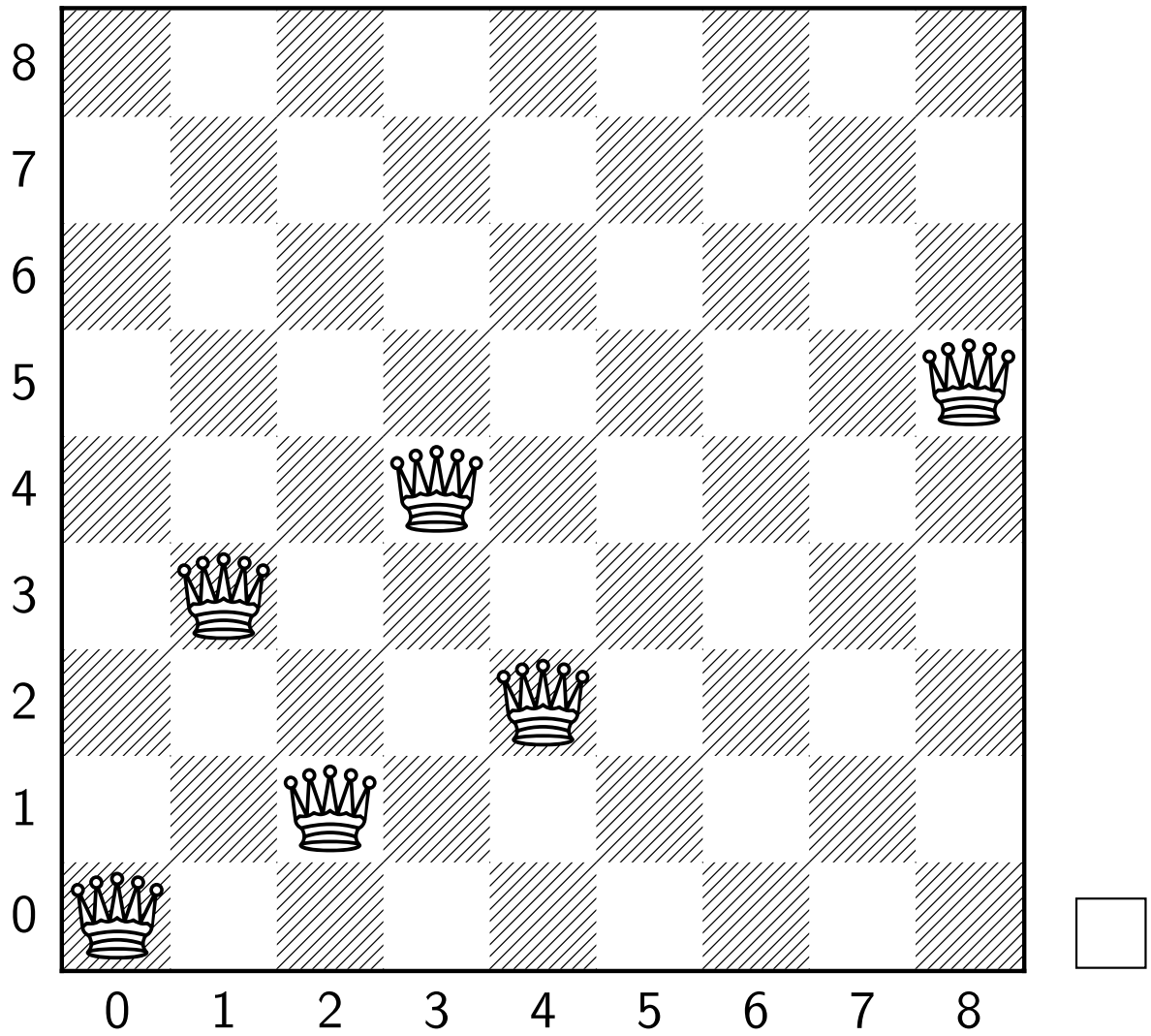
R = 5 regine = [0, 2, 4, 1, 3, None, None, None, None] N = 9

C=1



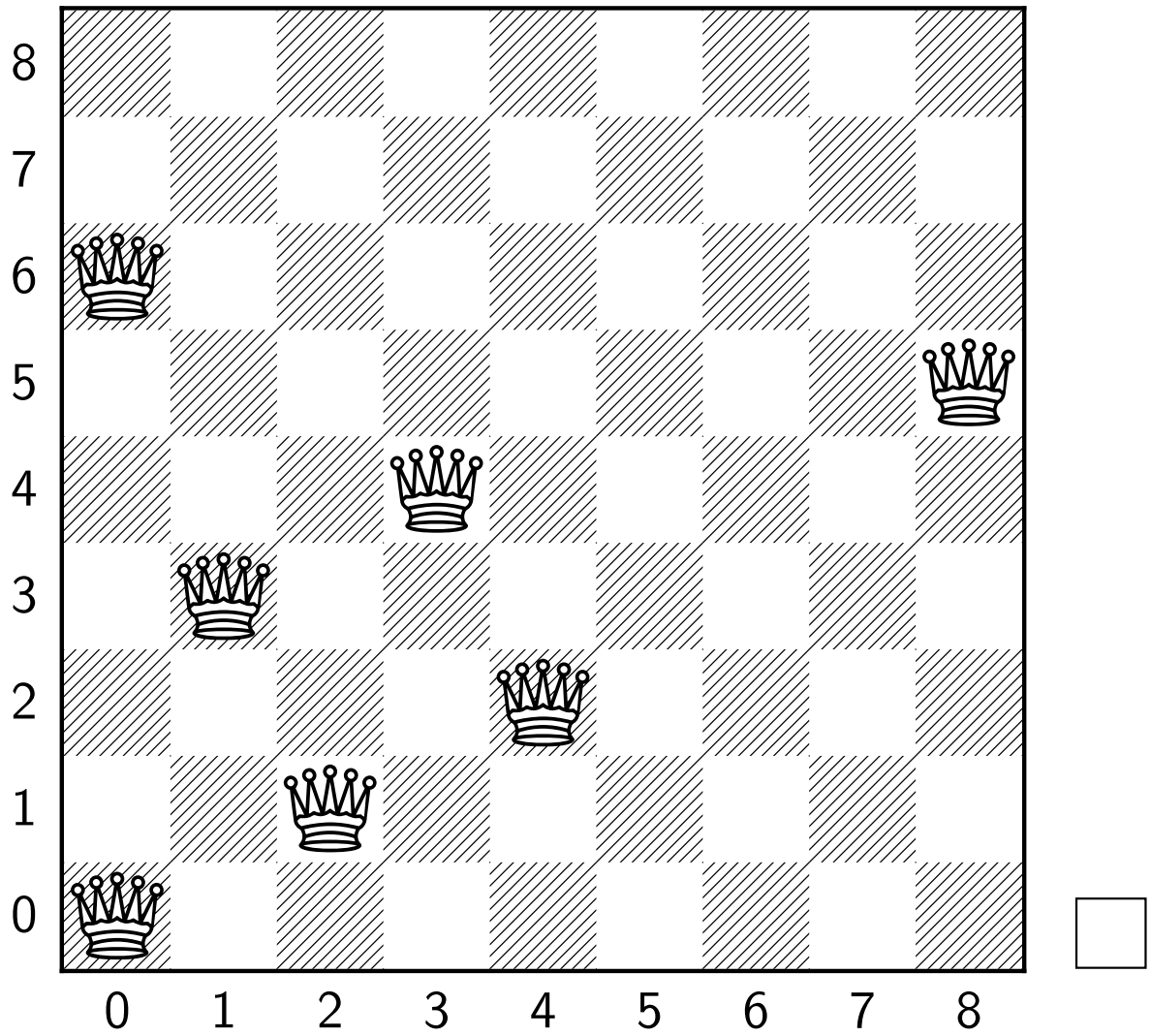
R = 5 regine = [0, 2, 4, 1, 3, None, None, None, None] N = 9

C=8



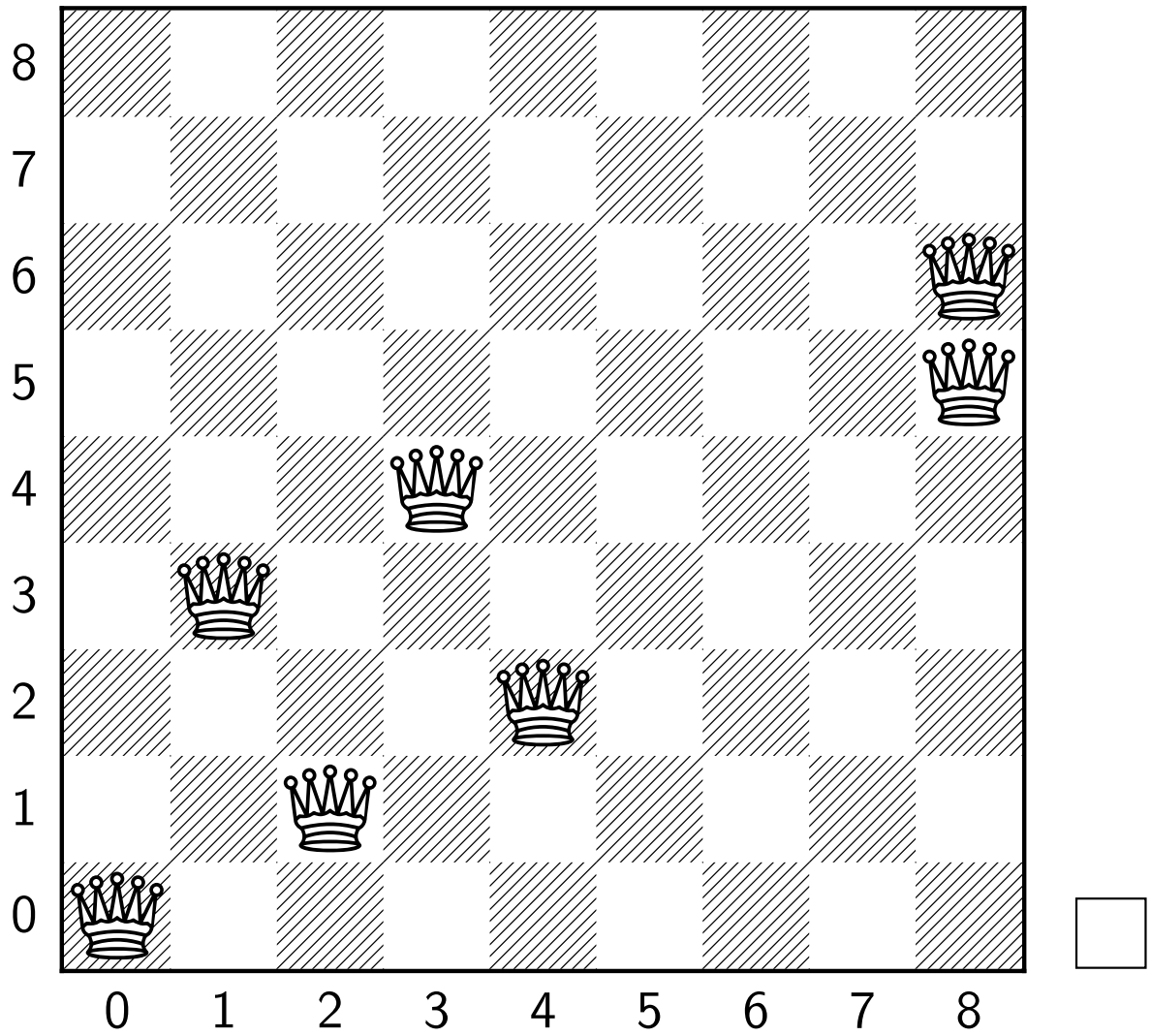
R = 6 regine = [0, 2, 4, 1, 3, 8, None, None, None] N = 9

C=0



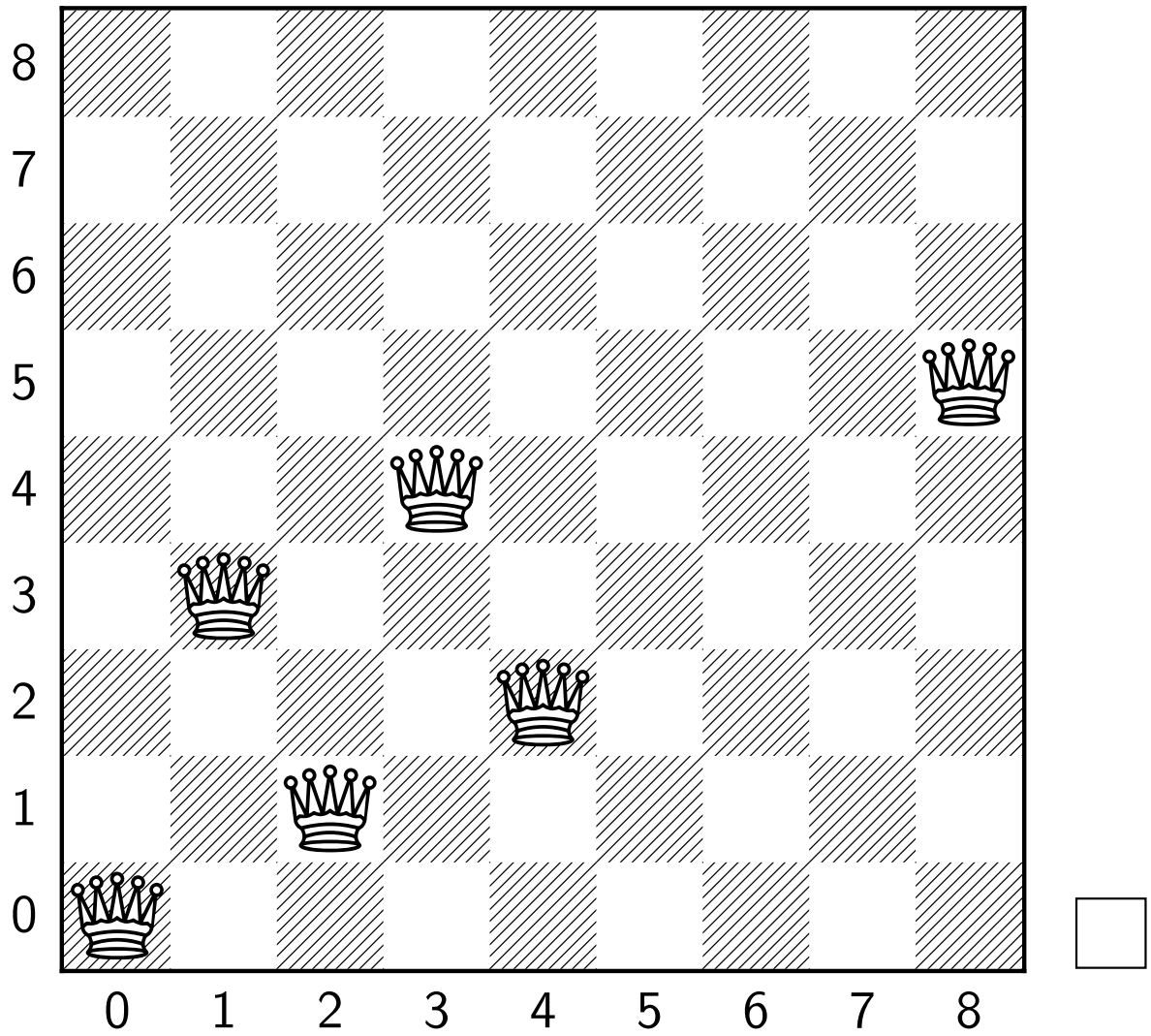
R = 6 regine = [0, 2, 4, 1, 3, 8, None, None, None] N = 9

C=8



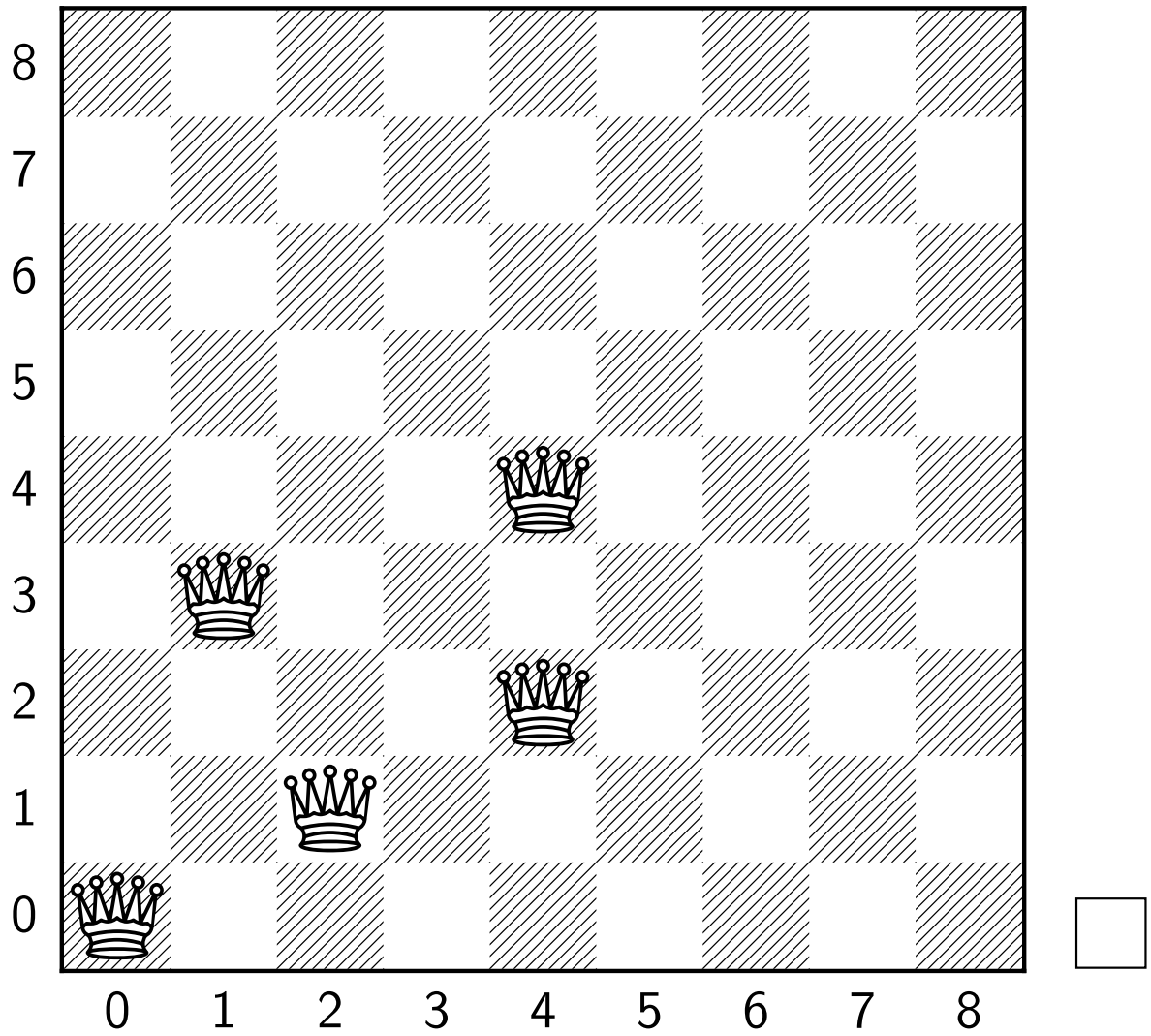
R = 5 regine = [0, 2, 4, 1, 3, None, None, None, None] N = 9

C=8



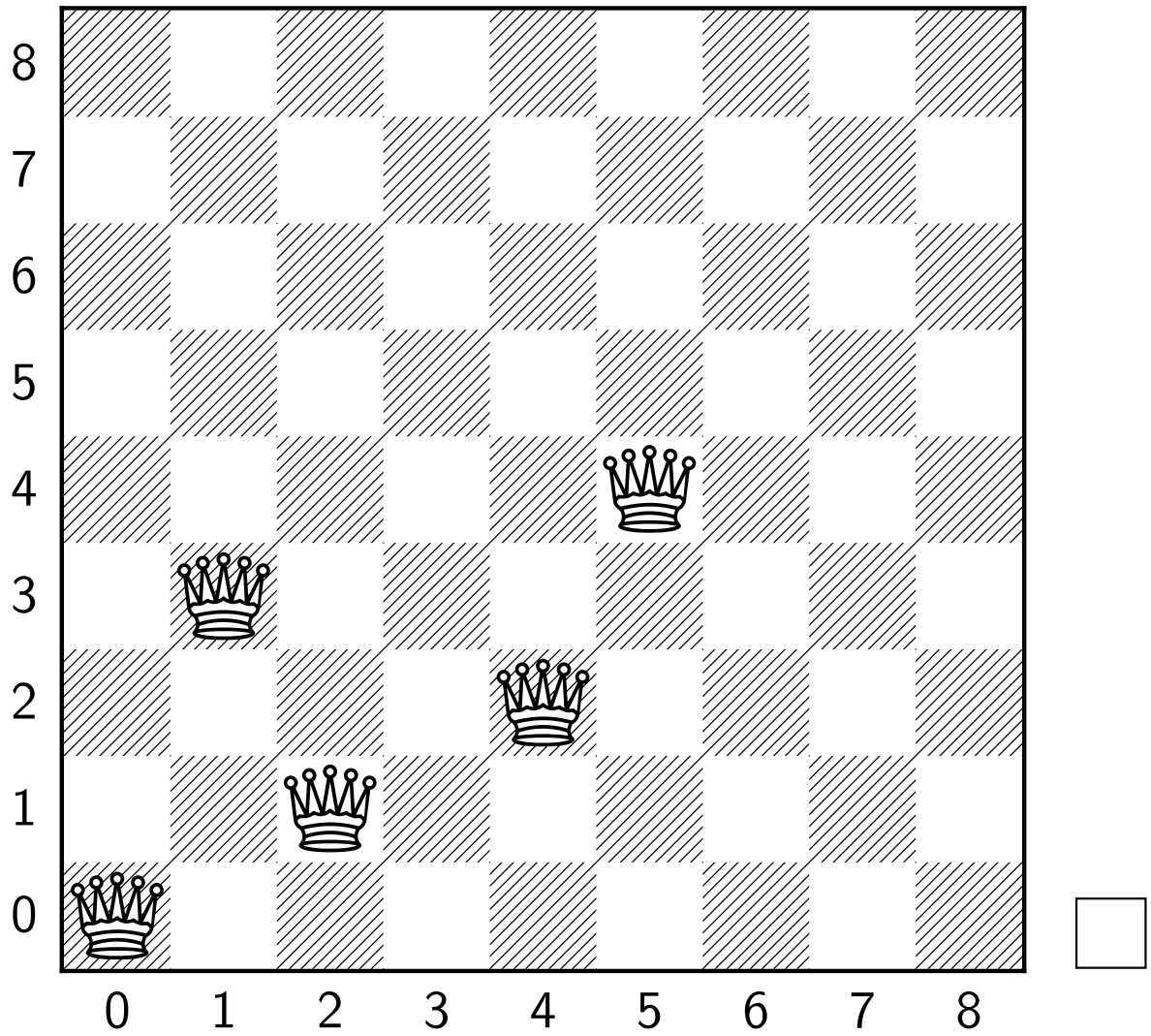
R = 4 regine = [0, 2, 4, 1, None, None, None, None, None] N = 9

C=3 $\Rightarrow$ C=4

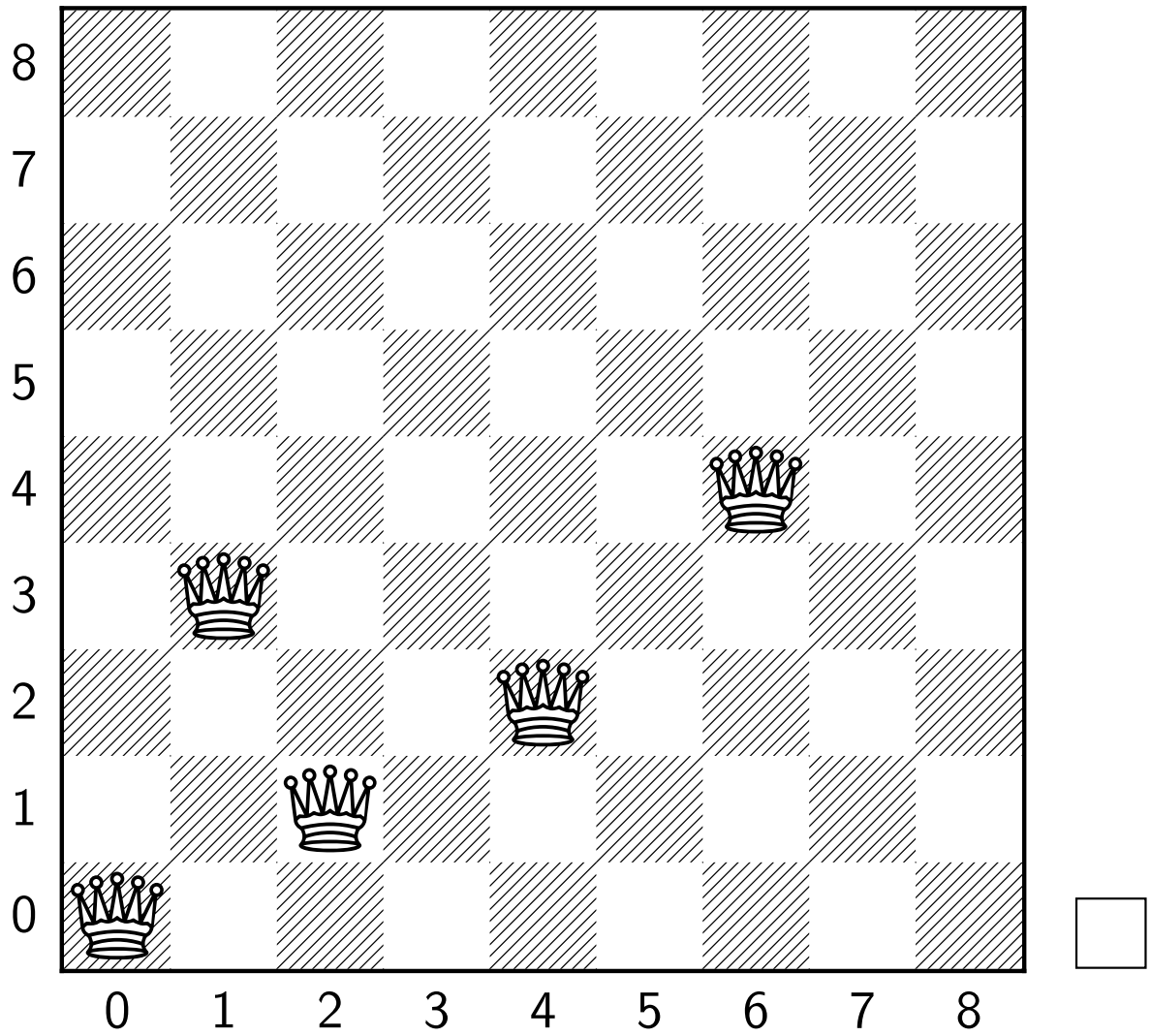


R = 4 regine = [0, 2, 4, 1, None, None, None, None, None] N = 9

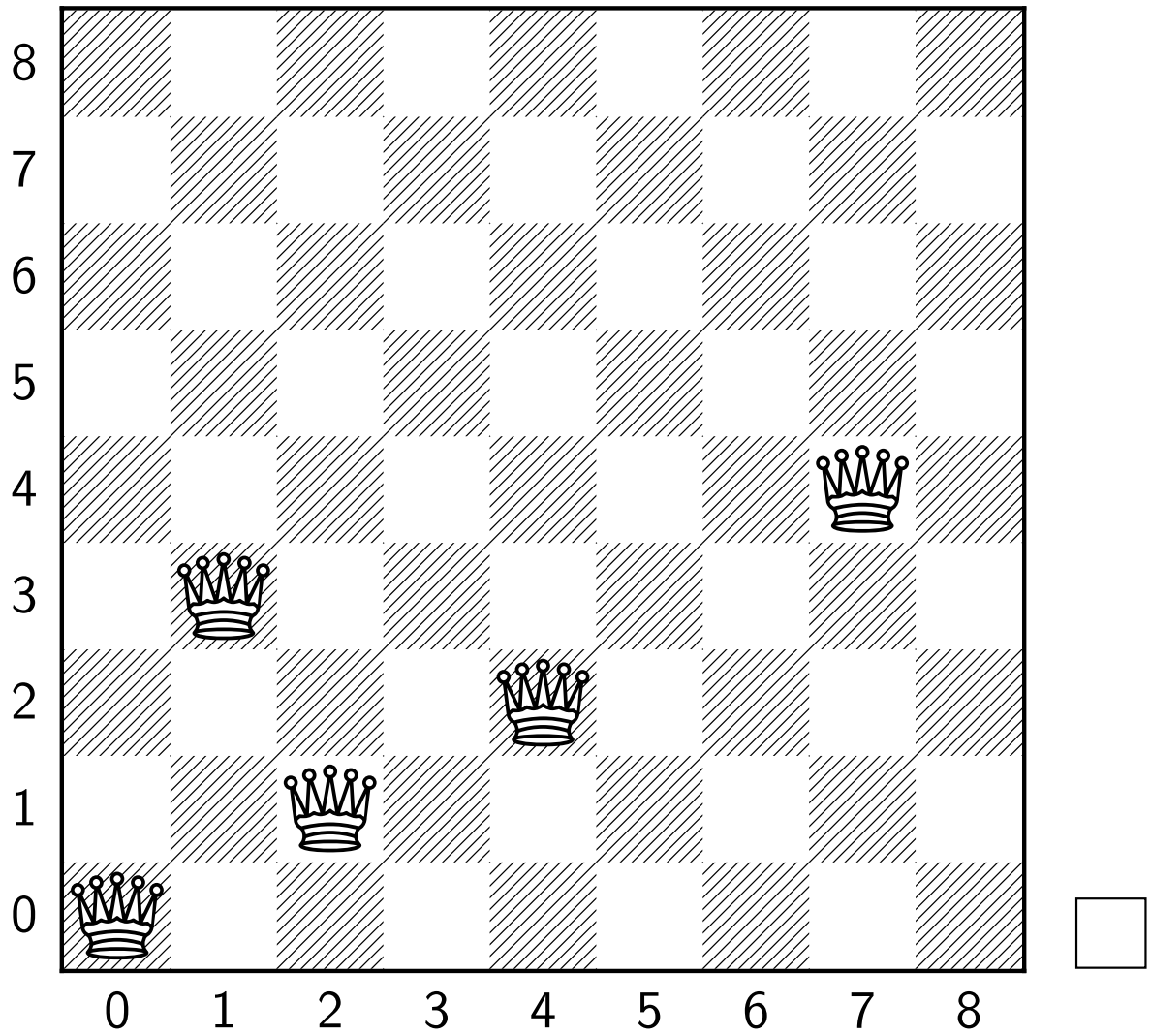
C=5



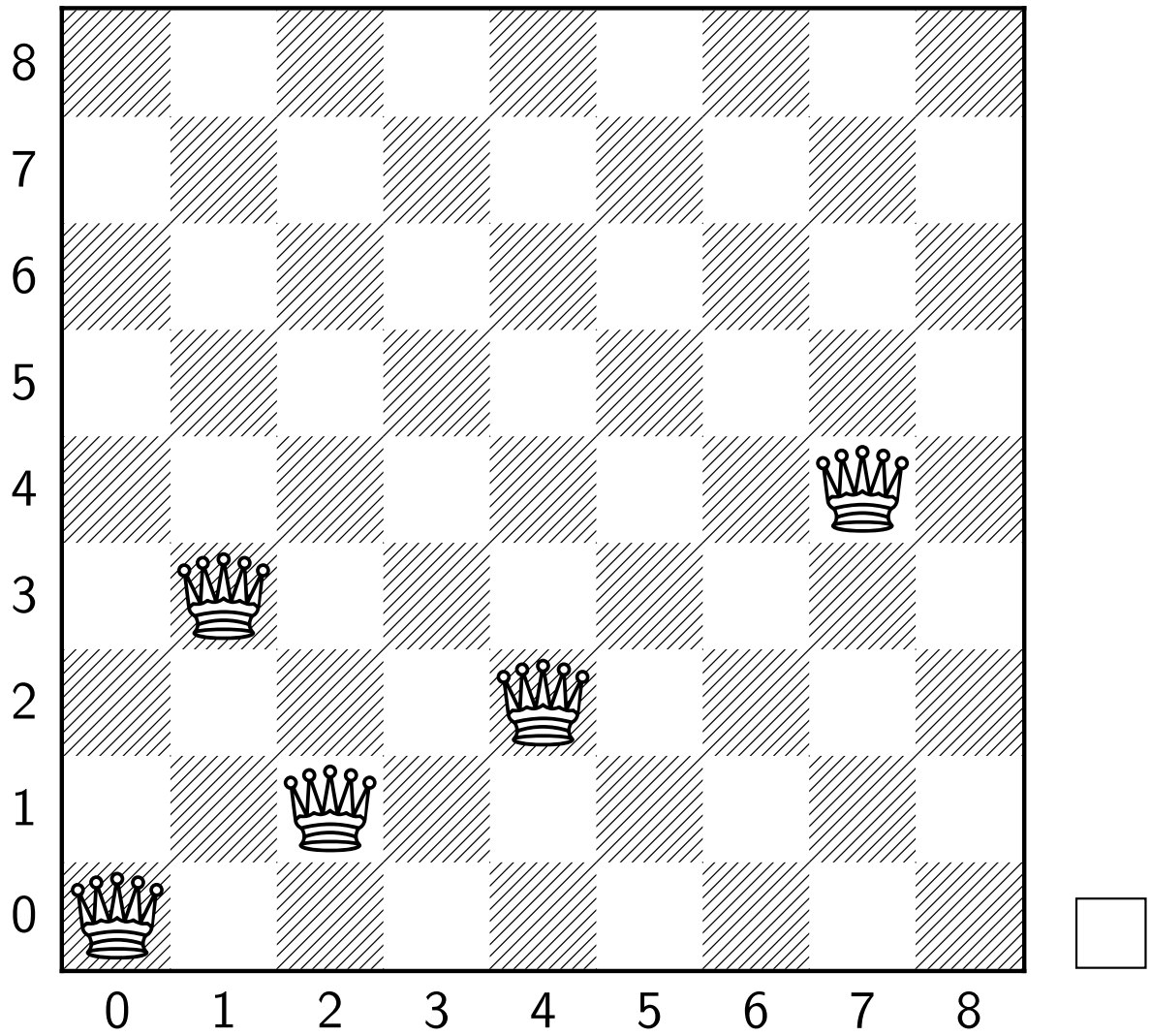
R = 4 regine = [0, 2, 4, 1, None, None, None, None, None] N = 9
C=6



R = 4 regine = [0, 2, 4, 1, None, None, None, None, None] N = 9
C=7

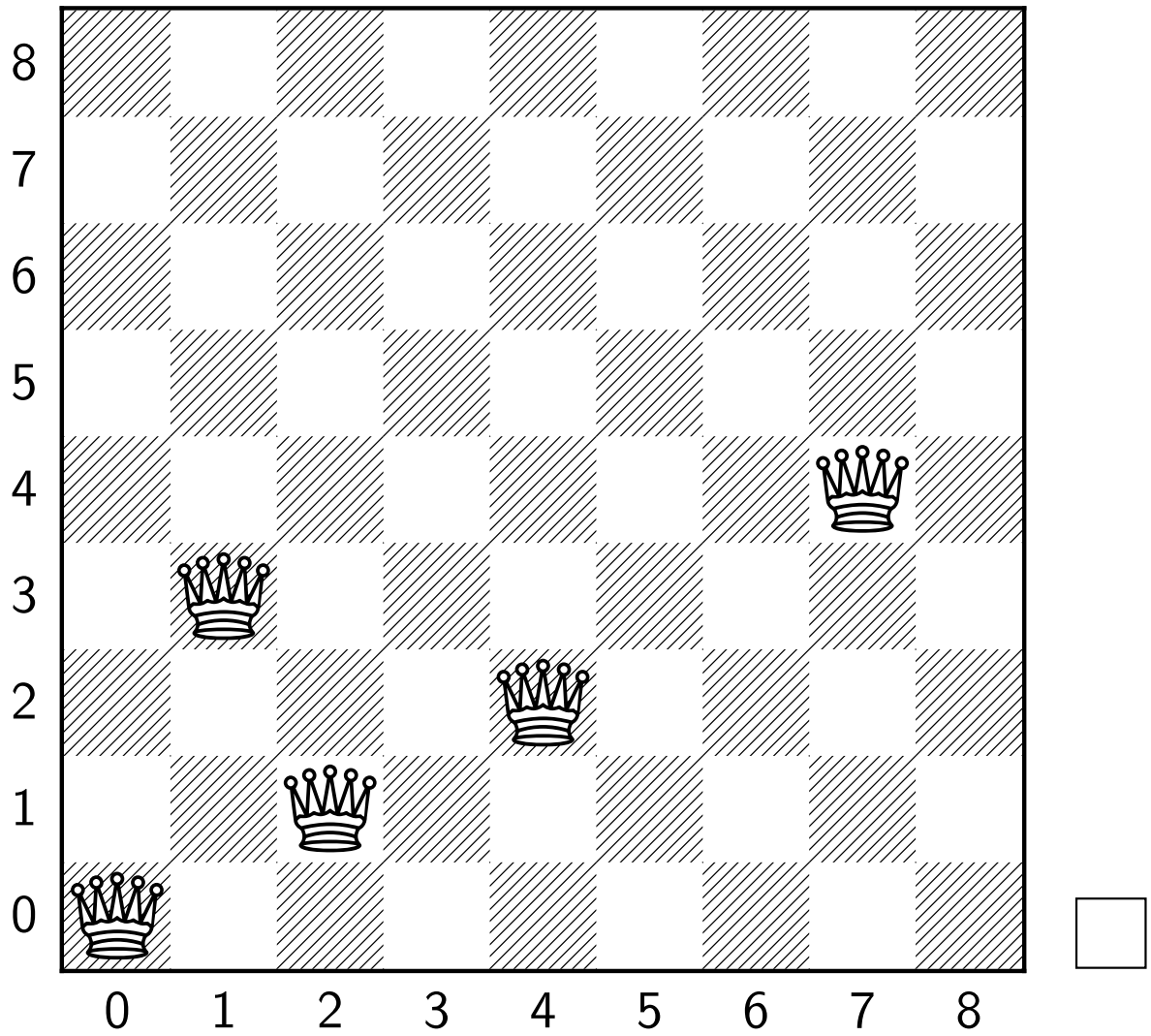


$R = 5$ `regine` $= [0, 2, 4, 1, 7, \text{None}, \text{None}, \text{None}, \text{None}]$ $N = 9$



R = 5 regine = [0, 2, 4, 1, 7, None, None, None, None] N = 9

C=0



Cosa abbiamo fatto?

```
def solve(R,regine):
    if R==len(regine):
        return True
    for C in range(len(regine)):
        if checkQueen(R,regine,C):
            regine[R]=C
            if solve(R+1,regine):
                return True
    return False
```

- ad ogni passo dell'algoritmo, abbiamo uno `stato`
  - `stato` $= [R,$ `regine`$]$
- controlliamo se lo stato è finale
  - $R ==$ `len(regine)`
- per ogni mossa C controlliamo se la mossa è ammissibile nello `stato`
  - `for C in range(len(N))`
  - `checkQueen(R, regine, C)`
- se è ammissibile costruiamo lo stato che si ottiene applicando la mossa ed effettuiamo la chiama ricorsiva

Approccio generale

I 4+1 ingredienti per un Backtrack perfetto

Definizione dello `stato`

1. funzione che controlla se uno `stato` è finale
2. funzione che restituisce la lista di tutte le mosse per uno stato
3. funzione che controlla se una mossa è ammissibile per uno stato
4. funzione che costruisce il nuovo stato

```
##restituisce una lista
##all'indice 0 True/False
##se l'indice 0 e' uguale a True, l'indice 1 contiene uno stato finale
    def _Solve(self,stato):

        if self.isFinal(stato):
            return [True,stato]

        for m in self.allMoves(stato):
            if not self.isAdm(stato,m):
                continue
            newStato=self.newStato(stato,m)
            risultato=self._Solve(newStato,verbose)
            if risultato[0]:
                return risultato

        return [False]
```

Approccio generale

1. Costruisco una classe BackTrack con un solo metodo

```
class BackTrack:

#la classe derivata deve implementare
# allMoves(stato)   -- restituisce la lista di mosse nello stato
# isAdm(stato,m)    -- True sse mossa m e' ammissibile in stato
# newStato(stato,m) -- restituisce lo stato che si ottiene applicando m
# isFinal(stato)    -- Ture sse lo stato e' finale


##restituisce una lista
##all'indice 0 True/False
##se l'indice 0 e' uguale a True, l'indice 1 contiene uno stato finale
    def _Solve(self,stato):
```

2. Derivo la classe Queen da BackTrack e fornisco l'implementazione dei metodi mancanti

Approccio generale

```
from back import BackTrack

##lo stato per questo problema consiste di una lista di due elementi
##all'indice 0 abbiamo una lista che contiene le posizioni delle regine
##gia' decise
##all'indice 1 abbiamo l'indice della prossima regina da considerare
##stato iniziale
##0  -->  [None]*n  nessuna posizione decisa
##1  -->   0        prossima regina da considerare
##                  e' la regina in riga 0

class Queen(BackTrack):


    def allMoves(self,stato):
        return list(range(self.n))

    def isAdm(self,stato,m):
        R=stato[1]
        return self._checkQueen(stato[0],R,m)

    def newStato(self,stato,m):
        newStato=[]
        newStato.append(stato[0].copy())
        R=stato[1]
        newStato[0][R]=m
        newStato.append(R+1)
        return newStato

    def isFinal(self,stato):
        return stato[1]==self.n
```

Perché?

Vantaggi dell'approccio generale

- scriviamo BackTrack una sola volta
- utilizziamo la stessa classe BackTrack per più problemi
- basta solo
  1. definire lo `stato`
  2. implementare le 4 funzioni