Binary Search

Giuseppe Persiano

Università di Salerno

Ottobre, 2020

Cercare un elemento in una Lista

Impieghiamo tempo $O(N)$
Se la lista è **ordinata** riusciamo a farlo in tempo $O(\log N)$

Ricerca binaria

1. Abbiamo una lista ordinata A di N elementi: $A[0], \ldots, A[N-1]$

Ricerca binaria

1. Abbiamo una lista ordinata A di N elementi: $A[0], \ldots, A[N-1]$
2. Vogliamo cercare l'elemento x

Ricerca binaria

1. Abbiamo una lista ordinata A di N elementi: $A[0], \ldots, A[N-1]$
2. Vogliamo cercare l'elemento x
   - trovare i tale che $A[i] = x$

Ricerca binaria

1. Abbiamo una lista ordinata A di N elementi: $A[0], \ldots, A[N-1]$
2. Vogliamo cercare l'elemento x
   - trovare i tale che $A[i] = x$
     - Se $A = [3, 5, 8, 9, 14]$ e $x = 8$ allora $i = 2$

Ricerca binaria

1. Abbiamo una lista ordinata A di N elementi: $A[0], \ldots, A[N-1]$
2. Vogliamo cercare l'elemento x
   - trovare i tale che $A[i] = x$
     - Se $A = [3, 5, 8, 9, 14]$ e $x = 8$ allora $i = 2$
   - trovare i tale che se inseriamo x alla posizione i, A resta ordinato.

Ricerca binaria

1. Abbiamo una lista ordinata A di N elementi: $A[0], \ldots, A[N-1]$
2. Vogliamo cercare l'elemento x
   - trovare i tale che $A[i] = x$
     - Se $A = [3, 5, 8, 9, 14]$ e $x = 8$ allora $i = 2$
   - trovare i tale che se inseriamo x alla posizione i, A resta ordinato.
     - Se $A = [3, 5, 8, 9, 14]$ e $x = 4$ allora $i = 1$

Ricerca binaria

1. Abbiamo una lista ordinata A di N elementi: $A[0], \ldots, A[N-1]$
2. Vogliamo cercare l'elemento x
   - trovare i tale che $A[i] = x$
     - Se $A = [3, 5, 8, 9, 14]$ e $x = 8$ allora $i = 2$
   - trovare i tale che se inseriamo x alla posizione i, A resta ordinato.
     - Se $A = [3, 5, 8, 9, 14]$ e $x = 4$ allora $i = 1$
     - `A.insert(1,4)=[3,4,5,8,9,14]`

Ricerca binaria

1. Abbiamo una lista ordinata A di N elementi: $A[0], \ldots, A[N-1]$
2. Vogliamo cercare l'elemento x
   - trovare i tale che $A[i] = x$
     - Se $A = [3, 5, 8, 9, 14]$ e $x = 8$ allora $i = 2$
   - trovare i tale che se inseriamo x alla posizione i, A resta ordinato.
     - Se $A = [3, 5, 8, 9, 14]$ e $x = 4$ allora $i = 1$
     - `A.insert(1,4)=[3,4,5,8,9,14]`
3. All'inizio so che $l = 0 \leq i \leq h = N - 1$

Ricerca binaria

1. Abbiamo una lista ordinata A di N elementi: $A[0], \ldots, A[N-1]$
2. Vogliamo cercare l'elemento x
   - trovare i tale che $A[i] = x$
     - Se $A = [3, 5, 8, 9, 14]$ e $x = 8$ allora $i = 2$
   - trovare i tale che se inseriamo x alla posizione i, A resta ordinato.
     - Se $A = [3, 5, 8, 9, 14]$ e $x = 4$ allora $i = 1$
     - `A.insert(1,4)=[3,4,5,8,9,14]`
3. All'inizio so che $l = 0 \leq i \leq h = N - 1$
4. Se $l > h$, return l

Ricerca binaria

1. Abbiamo una lista ordinata A di N elementi: $A[0], \ldots, A[N-1]$
2. Vogliamo cercare l'elemento x
   - trovare i tale che $A[i] = x$
     - Se $A = [3, 5, 8, 9, 14]$ e $x = 8$ allora $i = 2$
   - trovare i tale che se inseriamo x alla posizione i, A resta ordinato.
     - Se $A = [3, 5, 8, 9, 14]$ e $x = 4$ allora $i = 1$
     - `A.insert(1,4)=[3,4,5,8,9,14]`
3. All'inizio so che $l = 0 \leq i \leq h = N - 1$
4. Se $l > h$, return l
5. Calcolo indice centrale $m = (h + l)//2$

Ricerca binaria

1. Abbiamo una lista ordinata A di N elementi: $A[0], \ldots, A[N-1]$
2. Vogliamo cercare l'elemento x
    - trovare i tale che $A[i] = x$
        - Se $A = [3, 5, 8, 9, 14]$ e $x = 8$ allora $i = 2$
    - trovare i tale che se inseriamo x alla posizione i, A resta ordinato.
        - Se $A = [3, 5, 8, 9, 14]$ e $x = 4$ allora $i = 1$
        - `A.insert(1,4)=[3,4,5,8,9,14]`
3. All'inizio so che $l = 0 \leq i \leq h = N - 1$
4. Se $l > h$, return l
5. Calcolo indice centrale $m = (h + l)//2$
6. Tre casi sono possibili

Ricerca binaria

1. Abbiamo una lista ordinata A di N elementi: $A[0], \ldots, A[N-1]$
2. Vogliamo cercare l'elemento x
   - trovare i tale che $A[i] = x$
     - Se $A = [3, 5, 8, 9, 14]$ e $x = 8$ allora $i = 2$
   - trovare i tale che se inseriamo x alla posizione i, A resta ordinato.
     - Se $A = [3, 5, 8, 9, 14]$ e $x = 4$ allora $i = 1$
     - `A.insert(1,4)=[3,4,5,8,9,14]`
3. All'inizio so che $l = 0 \leq i \leq h = N-1$
4. Se $l > h$, return l
5. Calcolo indice centrale $m = (h+l)//2$
6. Tre casi sono possibili
   - $A[m] = x$. Return $i = m$

Ricerca binaria

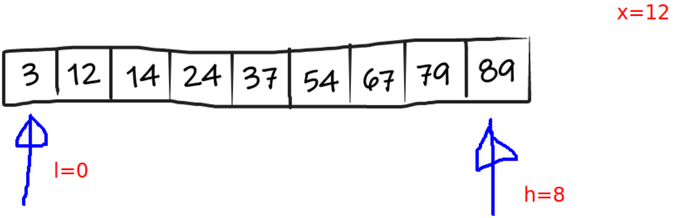
1. Abbiamo una lista ordinata A di N elementi: $A[0], \ldots, A[N-1]$
2. Vogliamo cercare l'elemento x
   - trovare i tale che $A[i] = x$
     - Se $A = [3, 5, 8, 9, 14]$ e $x = 8$ allora $i = 2$
   - trovare i tale che se inseriamo x alla posizione i, A resta ordinato.
     - Se $A = [3, 5, 8, 9, 14]$ e $x = 4$ allora $i = 1$
     - `A.insert(1,4)=[3,4,5,8,9,14]`
3. All'inizio so che $l = 0 \leq i \leq h = N - 1$
4. Se $l > h$, return l
5. Calcolo indice centrale $m = (h + l)//2$
6. Tre casi sono possibili
   - $A[m] = x$. Return $i = m$
   - $A[m] < x$. Allora so che $l \leq i \leq h = m - 1$

Ricerca binaria

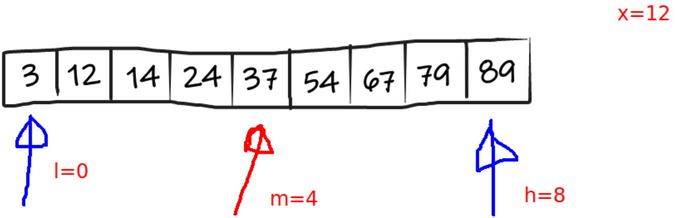
1. Abbiamo una lista ordinata A di N elementi: $A[0], \ldots, A[N-1]$
2. Vogliamo cercare l'elemento x
   - trovare i tale che $A[i] = x$
     - Se $A = [3, 5, 8, 9, 14]$ e $x = 8$ allora $i = 2$
   - trovare i tale che se inseriamo x alla posizione i, A resta ordinato.
     - Se $A = [3, 5, 8, 9, 14]$ e $x = 4$ allora $i = 1$
     - `A.insert(1,4)=[3,4,5,8,9,14]`
3. All'inizio so che $l = 0 \leq i \leq h = N - 1$
4. Se $l > h$, return l
5. Calcolo indice centrale $m = (h + l)//2$
6. Tre casi sono possibili
   - $A[m] = x$. Return $i = m$
   - $A[m] < x$. Allora so che $l \leq i \leq h = m - 1$
   - $A[m] > x$. Allora so che $l = m + 1 \leq i \leq h$

Ricerca binaria

1. Abbiamo una lista ordinata A di N elementi: $A[0], \ldots, A[N-1]$
2. Vogliamo cercare l'elemento x
   - trovare i tale che $A[i] = x$
     - Se $A = [3, 5, 8, 9, 14]$ e $x = 8$ allora $i = 2$
   - trovare i tale che se inseriamo x alla posizione i, A resta ordinato.
     - Se $A = [3, 5, 8, 9, 14]$ e $x = 4$ allora $i = 1$
     - `A.insert(1,4)=[3,4,5,8,9,14]`
3. All'inizio so che $l = 0 \leq i \leq h = N - 1$
4. Se $l > h$, return l
5. Calcolo indice centrale $m = (h + l)//2$
6. Tre casi sono possibili
   - $A[m] = x$. Return $i = m$
   - $A[m] < x$. Allora so che $l \leq i \leq h = m - 1$
   - $A[m] > x$. Allora so che $l = m + 1 \leq i \leq h$
7. Torna al passo 4

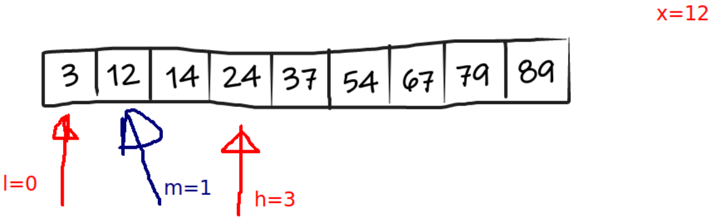


Cerchiamo x tra l'indice $l = 0$ e l'indice $h = 8$



Cerchiamo x tra l'indice $l = 0$ e l'indice $h = 8$

$m = 4$ e $A[m] > x$



Cerchiamo x tra l'indice $l = 0$ e l'indice $h = 3$

$m = 1$ e $A[m] = x$

Complessità di Ricerca Binaria

- Ad ogni passo, l'intervallo si dimezza

Complessità di Ricerca Binaria

- Ad ogni passo, l'intervallo si dimezza
- Ci fermiamo quando l'intervallo ha solo 1

Complessità di Ricerca Binaria

- Ad ogni passo, l'intervallo si dimezza
- Ci fermiamo quando l'intervallo ha solo l
- Al massimo $O(\log N)$ passi