Sólitons auto-duais em (1+1)-dimensões

MARCELINO[a], Giuseppe Braz da Silva, FERREIRA[a], Luiz Agostinho

(a) Instituto de Física de São Carlos

RESUMO

As soluções auto-duais são muito importantes no estudo de fenômenos não-lineares pois saturam cotas de energia em cada setor topológico, portanto são bastante estáveis. Recentemente conseguimos entender o mecanismo básico pelo qual teorias de campos podem possuir setores auto-duais. Neste trabalho, vamos construir teorias de campos escalares em (1+1)-dimensões que possuam setor auto dual, e estudar as propriedades de suas soluções.

AUTO-DUALIDADE

O sistema mais simples possuindo sólitons topológicos e equações de auto-dualidade é a teoria de um campo escalar em (1+1)-dimensões

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial_\mu\varphi\,\partial^\mu\varphi - V(\varphi)\,, \tag{1}$$

em que $V(\varphi) \geq 0$, com o funcional de energia estática

$$E[\varphi] = \int dx\left(\frac{1}{2}(\partial_x\varphi)^2 + V\right) = \frac{1}{2}\int dx\left(\partial_x\varphi \mp \sqrt{2V}\right)^2 \pm \int dx\;\partial_x\varphi\sqrt{2V}\,. \tag{2}$$

Se o potencial tiver pelo menos dois vácuos φ_i, então em geral soluções topológicas tipo *kink* interpolando entre dois vácuos adjacentes existem. Assumindo $\varphi_1 < \varphi_2$, os *kink/antikink* interpolando entre os dois vácuos satisfaz a equação de auto-dualidade de primeira ordem

$$\partial_x\varphi = \pm\sqrt{2V}\;;\quad \lim_{x\to\pm\infty}\varphi(x) = \varphi_1\,,\quad \lim_{x\to\mp\infty}\varphi(x) = \varphi_2. \tag{3}$$

Introduzindo a notação $\partial_\varphi U(\varphi) = \sqrt{2V(\varphi)}$, a energia do *kink* (mínimo da energia) é

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} dx\;\partial_x\varphi\;\partial_\varphi U = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi\;\partial_\varphi U = U(\varphi_2) - U(\varphi_1)\,, \tag{4}$$

que depende somente do potencial e das condições de contorno, mas não das configurações dos campos.

GENERALIZAÇÃO

A generalização da auto-dualidade necessita de uma carga topológica com representação integral, que escrevemos da forma

$$Q = \int d^dx\;\mathcal{A}_\alpha\,\tilde{\mathcal{A}}_\alpha\,, \tag{5}$$

as quantidades $\mathcal{A}_\alpha$ e $\tilde{\mathcal{A}}_\alpha$ são funções dos campos e de suas primeiras derivadas. Por ”topológico” queremos dizer que Q é invariante por variações suaves (homotópicas) dos campos, ou seja,

$$\delta Q = 0\,,\qquad \text{sem usar as equações de movimento.} \tag{6}$$

As equações de auto-dualidade correspondem à igualdade:

$$\mathcal{A}_\alpha = \pm\tilde{\mathcal{A}}_\alpha\,. \tag{7}$$

As condições (6) e (7) implicam as equações de Euler-Lagrange que correspondem à extremizar o funcional

$$S = \frac{1}{2}\int d^nx\;\left[\mathcal{A}_\alpha^2 + \tilde{\mathcal{A}}_\alpha^2\right]\,. \tag{8}$$

No caso do funcional ser positivo e $d = n$, as equações (7) implicam a saturação de um limite inferior no valor do funcional, segue

$$S = \frac{1}{2}\int d^dx\;\left[\mathcal{A}_\alpha \mp \tilde{\mathcal{A}}_\alpha\right]^2 \pm Q \quad\to\quad S \geq |Q|\,. \tag{9}$$

(1+1)-DIMENSÕES

Em teorias de campo escalar em 1 dimensão espacial, podemos tomar:

$$\mathcal{A}_a \equiv k_{ab}\frac{\mathrm{d}\varphi_b}{\mathrm{d}x}\;;\quad \tilde{\mathcal{A}}_a \equiv \frac{\delta U}{\delta\varphi_b}k^{-1}_{ba}\,,\quad\to\quad \eta_{ab}\frac{\mathrm{d}\varphi_b}{\mathrm{d}x} = \pm\frac{\delta U}{\delta\varphi_a}\,. \tag{10}$$

Com essa escolha, teremos:

$$S = \frac{1}{2}\int dx\left[\eta_{ab}\partial_\mu\varphi_a\partial^\mu\varphi_b - V(\varphi)\right]\;;\quad V(\varphi) = \frac{1}{2}\,\eta^{-1}_{ab}\,\frac{\delta U}{\delta\varphi_a}\frac{\delta U}{\delta\varphi_b} \tag{11}$$

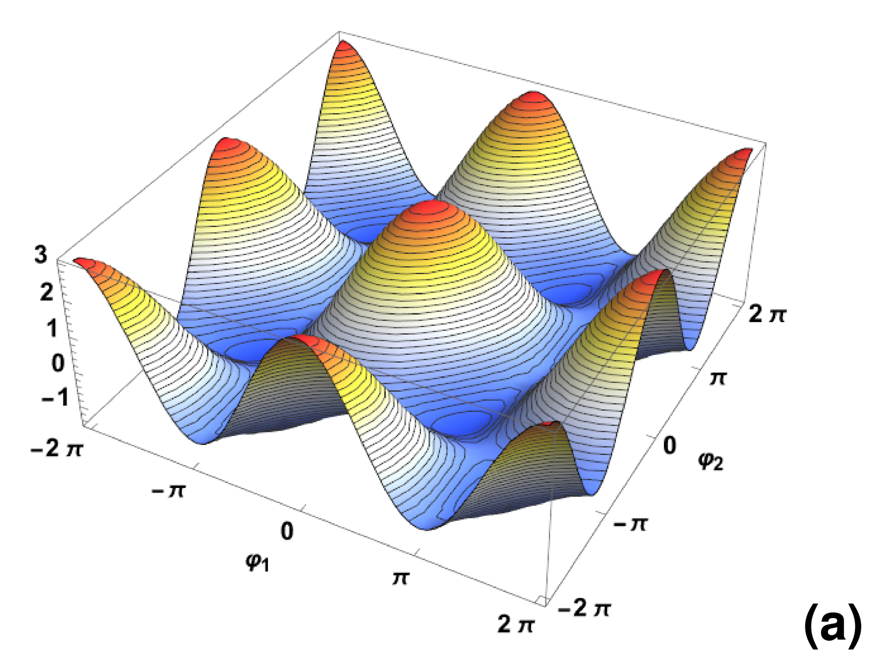
com a Carga Topológica sendo da mesmo forma que em (4). As equações de Euler Lagrange, associadas à (11), são obtidas diferenciando em relação à x a equação (10), obtendo

$$\eta_{ab}\frac{\partial^2\varphi_b}{\partial x^2} = \frac{\delta V}{\delta\varphi_a}\,. \tag{12}$$

Agora, para o caso de dois campos, escolhemos

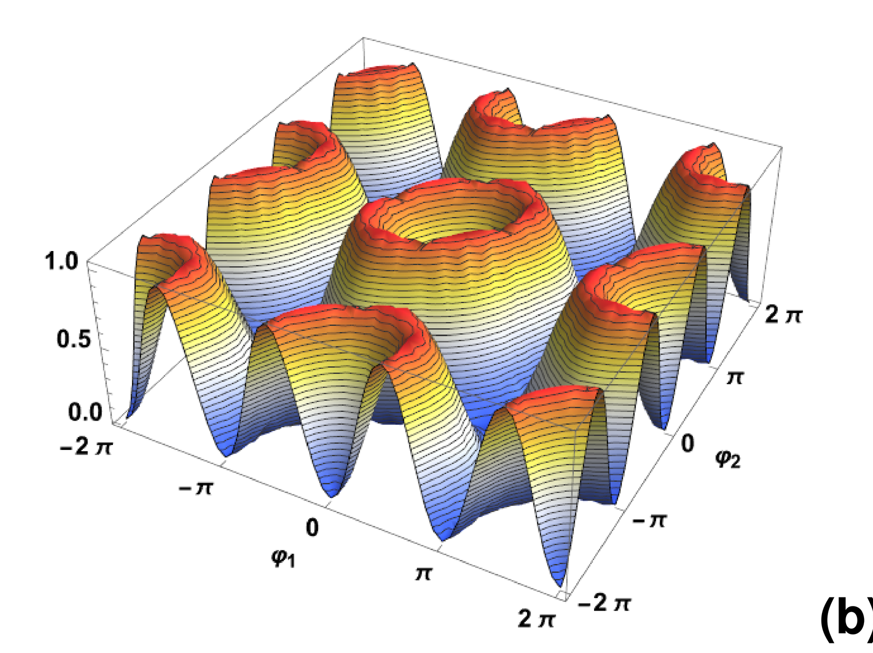
$$\eta = \begin{pmatrix} 2 & -\lambda \\ -\lambda & 2 \end{pmatrix};\quad U = \gamma_1\cos(\varphi_1) + \gamma_2\cos(\varphi_2) + \gamma_3\cos(\varphi_1 - \varphi_2)\,, \tag{13}$$

As equações de movimento são dadas por (10), podemos analisar a forma do pré-potencial e do potencial associado ($\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma_3 = \lambda = 1$):



(a)

Pré-potencial de dois campos



(b)

Potencial de dois campos

Nosso objetivo é estudar numericamente o espalhamento de soluções auto-duais e comparar com o comportamento de teorias integráveis.

REFERÊNCIAS

[1] ADAM, C. *et al.* Some aspects of self-duality and generalised BPS theories. **Journal of High Energy Physics**, v. 2013, n. 8, p. 1-26, 2013.

[2] FERREIRA, L. A.; KLIMAS, P.; ZAKRZEWSKI, W. J. Self-dual sectors for scalar field theories in (1+ 1) dimensions. **Journal of High Energy Physics**, v. 2019, n. 1, p. 1-38, 2019.

APOIADORES

Agradecemos ao IFSC e à CAPES (processo: 88887.990250/2024-00) pelo apoio.

IFSC UNIVERSITY OF SÃO PAULO São Carlos Institute of Physics

CAPES