ANALISI MATEMATICA II

ESERCITAZIONE 3

Argomenti: approssimazione di dati e di funzioni

1. Determinare i polinomi di grado 5, 9 e 13 che interpolano la funzione di Runge $f(x) = 1/(1+x^2)$ in nodi equidistanti nell'intervallo $[-5, 5]$ e, per ciascuno dei tre casi, riportare su un grafico la funzione di Runge, il polinomio e i nodi di interpolazione. Ripetere l'esercizio utilizzando i nodi di Chebyshev
$$t_i = -\cos\left(\frac{2i-1}{n+1}\frac{\pi}{2}\right), \quad i = 1, ..., n+1$$
definiti sull'intervallo $[-1, 1]$, appropriatamente modificati sull'intervallo di interesse $[a, b]$ mediante la trasformazione $x_i = \frac{b-a}{2}t_i + \frac{b+a}{2}$.

2. Approssimare con un polinomio interpolante di grado 9 le funzioni $f(x) = \log(1 + x^2)$ e $f(x) = \sin(x)$ negli intervalli $[-5, 5]$ e $[0, \pi]$, rispettivamente. Utilizzare sia i nodi equispaziati che i nodi di Chebyshev. Successivamente, rappresentare graficamente gli errori commessi nelle due interpolazioni in 100 punti equidistanti dei rispettivi intervalli di interpolazione e dire quale dei due polinomi fornisce un'approssimazione migliore.

3. Disegnare la spline cubica soddisfacente la condizione "not a knot" ed interpolante la funzione $f(x) = 1/(1 + x^2)$ su 6, 10, 14 nodi equidistanti nell'intervallo $[-5, 5]$. Confrontare i grafici ottenuti con quelli dell'esercizio 1 e commentare i risultati.

4. Utilizzare la *function* `spline` di MATLAB per costruire le spline cubiche, $S_3(x)$ soddisfacente la condizione "not a knot" e $\bar{S}_3(x)$ soddisfacente le condizioni $\bar{S}_3'(x_0) = f'(x_0)$ e $\bar{S}_3'(x_n) = f'(x_n)$, interpolanti la funzione $f(x) = (1 - x^2)^{5/2}$ nei nodi $x_i = -1 + 2i/n$, $i = 0, 1, \ldots, n$, $n = 2^k$, $k = 2, 3, 4, 5$. Rappresentare graficamente gli errori commessi nelle due approssimazioni in 100 punti equidistanti dell'intervallo di interpolazione $[-1, 1]$ e dire quale delle due approssimazioni è più accurata. Stampare per ogni valore di k il massimo errore assoluto commesso e commentare i risultati.