Esercitazione di laboratorio 3

Dati N campioni di un processo casuale stazionario $x(n)$, la *stima spettrale* è l'operazione che consente di stimare la sua densità spettrale di potenza $S_X(f)$. Come visto a lezione, la disponibilità di un numero finito di campioni del segnale è un fattore che va tenuto in conto, dato che influisce sulla risoluzione e affidabilità della stima.

L'operazione più semplice di stima spettrale è il *periodogramma*, basato sulla Trasformata Discreta di Fourier (DFT).

Esercizio 1 (periodogramma semplice) Selezionare un segnale audio tra `bass.flac`, `drums.flac`, `guitar.flac` e `toms.flac`, tutti campionati a $f_s = 44\,100$ Hz. Importali in MATLAB usando la funzione `audioread`, selezionarne una porzione di durata 1 secondo (corrispondente a $N = 44\,100$ campioni), chiamata $x(n)$, e calcolarne il periodogramma semplice, definito come

$$P_X(k) = \frac{|X(k)|^2}{N}$$

dove $X(k)$ è la trasformata discreta di Fourier di $x(n)$. Rappresentare il periodogramma in un diagramma quotato in frequenza (Hertz).

Calcolare ora il periodogramma su una porzione di 5 secondi del segnale. Che cosa cambia?

Esercizio 2 (periodogramma di Bartlett) Come osservato nel punto precedente, il periodogramma semplice ha elevata risoluzione in frequenza ma è "rumoroso". Una tecnica per ridurre il rumore è eseguire il cosiddetto *periodogramma di Bartlett*, ottenuto dividendo la sequenza $x(n)$ in M intervalli disgiunti di N/M campioni ciascuno, calcolando il periodogramma di ciascuna sotto-sequenza e mediando il risultato. In

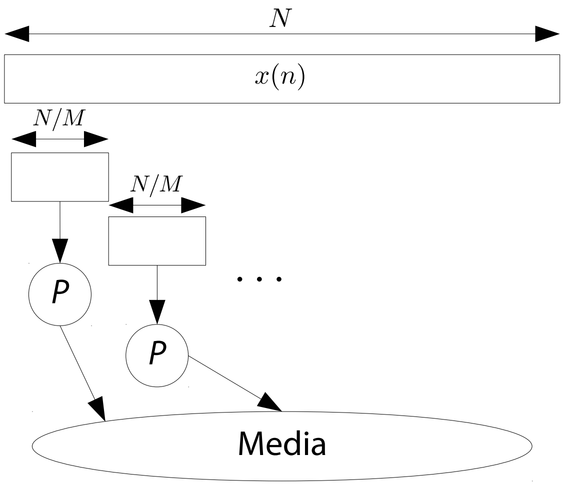

Figura 1: Periodogramma di Bartlett.

formule:

$$P_X(k) = \frac{1}{M} \sum_{i=0}^{M-1} \frac{|X^{(i)}(k)|^2}{N/M}$$

dove $X^{(i)}(k)$ è la DFT dell'i-esimo intervallo di $x(n)$. Graficamente, l'operazione è raffigurata nella Fig. 1, dove $\mathcal{P}$ indica l'operazione di periodogramma semplice.

Eseguire il periodogramma di Bartlett della sequenza $x(n)$ di 1 secondo considerando $M = 10, 50, 100$ intervalli disgiunti. Rappresentare i vari periodogrammi in un diagramma quotato. Che cosa cambia rispetto al periodogramma semplice? Usando la sequenza $x(n)$ di lunghezza 5 secondi, che cosa cambia?

Esercizio 3 (periodogramma di Welch) Come visto al punto precedente, il periodogramma di Bartlett consente di ridurre il "rumore" sulla stima di densità spettrale di potenza, riducendone al contempo la risoluzione. Una tecnica più avanzata è il cosiddetto *periodogramma di Welch*. Rispetto al periodogramma di Bartlett, introduce le seguenti modifiche:

- Le sotto-sequenze su cui si calcola il periodogramma non sono disgiunte ma sono sovrapposte del 50%.

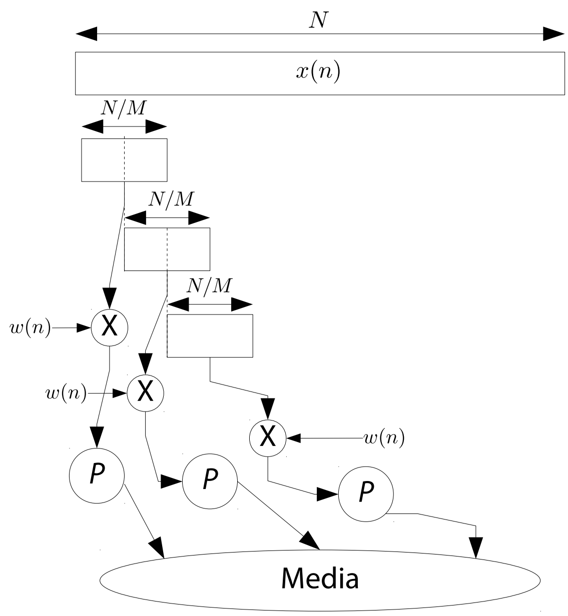

Figura 2: Periodogramma di Welch.

- Prima di eseguire la DFT, ogni sotto-sequenza viene moltiplicata per una funzione $w(n)$ chiamata *finestra di Hamming*

$$w(n) = \alpha - \beta \cos\left(\frac{2\pi n}{N/M - 1}\right)$$

  con $\alpha = 0.54$ e $\beta = 1 - \alpha = 0.46$. Tale funzione è presente nella libreria di MATLAB come `hamming()`.

Questa operazione è illustrata graficamente nella Fig. 2.

Eseguire il periodogramma di Welch della sequenza $x(n)$ usando gli stessi parametri usati per il periodogramma di Bartlett. Che differenza c'è rispetto al periodogramma di Bartlett?