a. Si consideri il seguente sistema proprio LTI-TC

$$\begin{cases} \dot{x}(t) & = & A\,x(t) + B\,u(t) \\ y(t) & = & C\,x(t) \end{cases}$$

dove

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 & -1 \\ -\frac{271}{4} & -623 & \frac{1063}{4} & -\frac{1349}{4} \\ -\frac{271}{4} & -626 & \frac{1071}{4} & -\frac{1357}{4} \\ \frac{275}{4} & 622 & -\frac{1059}{4} & \frac{1345}{4} \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} -8 & 4 & 2 & 6 \end{pmatrix}$$

Determinare:

1. I modi naturali del sistema
2. La risposta libera nell'ipotesi che lo stato iniziale sia

$$x_0 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$$

3. studiare la configurazione degli stati iniziali che attivano sulla risposta libera alcuni modi naturali ed altri no;
4. la funzione di trasferimento, i suoi poli e zeri;
5. la risposta al gradino unitario ed il suo grafico (mettere in evidenza la risposta transitoria e la risposta a regime);
6. la risposta al segnale periodico elementare $u(t) = A\ \sin(\omega\, t + \psi)\, 1(t)$ (lo studente scelga una terna appropriata di valori A, ω, ψ e discuta le caratteristiche di tale risposta forzata in maniera simile al punto precedente);
7. un suo modello ARMA equivalente, individuando le condizioni iniziali sull'uscita compatibili con lo stato iniziale

$$x_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

   Una volta individuata tale rappresentazione e le condizioni iniziali sull'uscita valutare la risposta alla rampa unitaria (no grafico) mettendo in evidenza la risposta transitoria (risposta libera inclusa) e la componente legata algebricamente all'ingresso;
8. determinare lo stato iniziale x0 tale che la risposta al gradino coincida con il suo valore di regime (assenza di componente transitoria);
9. valutare la risposta al segnale $u(t) = 1(-t)$.

b. Si consideri il seguente sistema proprio LTI-TD

$$\begin{cases} x(k+1) & = & A\,x(k) + B\,u(k) \\ y(k) & = & C\,x(k) \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{5}{16} & -\frac{11}{48} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} -\frac{7}{4} & \frac{9}{4} & 0 \end{pmatrix}$$

Determinare:

1. I modi naturali del sistema
2. La risposta libera nell'ipotesi che lo stato iniziale sia
$$x_0 = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}$$
3. studiare la configurazione degli stati iniziali che attivano sulla risposta libera alcuni modi naturali ed altri no;
4. la funzione di trasferimento, i suoi poli e zeri;
5. la risposta al gradino unitario ed il suo grafico (mettere in evidenza la risposta transitoria e la risposta a regime);
6. i suoi modelli ARMA equivalenti, individuando (ove necessario) le condizioni iniziali sull'uscita compatibili con lo stato iniziale
$$x_0 = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$$
Valutare la risposta all'ingresso
$$u(k) = \begin{cases} 1 & 0 \leqslant k \leqslant 10 \\ 0 & k > 10 \\ 0 & k < 0 \end{cases}$$
7. determinare, sul modello ARMA apposito, le condizioni iniziali tali che la risposta al gradino coincide con il suo valore di regime (assenza di componente transitoria).

c. Si consideri la catena di Markov Tempo Discreto avente numero di stati finiti

$$x(k+1) = A\,x(k) \tag{1}$$

la cui matrice di transizione è

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{9} & \frac{8}{17} & \frac{10}{21} \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{21} \\ \frac{5}{9} & \frac{9}{17} & \frac{10}{21} \end{pmatrix}$$

Determinare:

1. il grafo di transizione della catena;
2. lo stato stazionario della catena a partire da
   (a) ricorsione numerica a partire da uno stato iniziale stocastico scelto in maniera pseudo-casuale (si lascia allo studente la scelta dello stato iniziale e l'individuazione di un numero sufficiente di passi per garantire la convergenza della catena);
   (b) calcolo in forma chiusa dell'equilibrio stocastico della catena;
3. evidenziare nel grafo individuato al punto 1. un possibile *spanning tree*.