Relazione Sistema a Tempo Continuo

Traccia 26

a. Si consideri il seguente sistema proprio LTI-TC

$$\begin{cases} \dot{x}(t) &= A\,x(t) + B\,u(t) \\ y(t) &= C\,x(t) \end{cases}$$

dove

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 & -1 \\ -\frac{271}{4} & -623 & \frac{1063}{4} & -\frac{1349}{4} \\ -\frac{271}{4} & -626 & \frac{1071}{4} & -\frac{1357}{4} \\ \frac{275}{4} & 622 & -\frac{1059}{4} & \frac{1345}{4} \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} -8 & 4 & 2 & 6 \end{pmatrix}$$

Determinare:

1. I modi naturali del sistema
2. La risposta libera nell'ipotesi che lo stato iniziale sia

$$x_0 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$$

3. studiare la configurazione degli stati iniziali che attivano sulla risposta libera alcuni modi naturali ed altri no;
4. la funzione di trasferimento, i suoi poli e zeri;
5. la risposta al gradino unitario ed il suo grafico (mettere in evidenza la risposta transitoria e la risposta a regime);
6. la risposta al segnale periodico elementare $u(t) = A\,\sin(\omega\,t + \psi)\,1(t)$ (lo studente scelga una terna appropriata di valori A, ω, ψ e discuta le caratteristiche di tale risposta forzata in maniera simile al punto precedente);
7. un suo modello ARMA equivalente, individuando le condizioni iniziali sull'uscita compatibili con lo stato iniziale

$$x_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Una volta individuata tale rappresentazione e le condizioni iniziali sull'uscita valutare la risposta alla rampa unitaria (no grafico) mettendo in evidenza la risposta transitoria (risposta libera inclusa) e la componente legata algebricamente all'ingresso;

8. determinare lo stato iniziale x0 tale che la risposta al gradino coincida con il suo valore di regime (assenza di componente transitoria);
9. valutare la risposta al segnale $u(t) = 1(-t)$.

Modi naturali del sistema

Il termine "modi naturali di un sistema" si riferisce alle configurazioni, alle oscillazioni o ai comportamenti che un sistema mostra senza l'intervento esterno di forze o agenti che lo influenzino. Questi modi sono determinati dalle caratteristiche intrinseche del sistema stesso.

Per il calcolo dei modi naturali del sistema proprio LTI-TC, si calcolino gli autovalori della matrice dinamica A, ergo lo spettro della matrice A.

```
In[ ]:= λ = Eigenvalues[A]
```

$$Out[\,]= \left\{-8, -7, -2+\frac{i}{2}, -2-\frac{i}{2}\right\}$$

Individuiamo due autovalori reali e distinti e due autovalori complessi e coniugati. Partendo dagli autovalori reali, si sa che dato un autovalore reale $\lambda_i \in \mathbb{R}$ il suo modo naturale associato è $e^{\lambda_i t}$. Segue dunque:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= -8 \quad \rightarrow \quad e^{-8t} \\ \lambda_2 &= -7 \quad \rightarrow \quad e^{-7t} \end{aligned}$$

Si ricerchino ora i modi naturali associati agli autovalori complessi e coniugati calcolando la matrice T degli autovettori correlati a ciascun autovalore:

```
In[ ]:= T0 = Transpose[Eigenvectors[A]]
```

$$Out[\,]= \left\{\left\{\frac{63}{646}, \frac{24}{223}, \frac{3792}{19433}+\frac{34\,i}{19433}, \frac{3792}{19433}-\frac{34\,i}{19433}\right\}, \left\{-\frac{291}{323}, -\frac{397}{446}, -\frac{14745}{19433}+\frac{698\,i}{19433}, -\frac{14745}{19433}-\frac{698\,i}{19433}\right\}, \left\{-\frac{511}{646}, -\frac{171}{223}, -\frac{8829}{19433}+\frac{1612\,i}{19433}, -\frac{8829}{19433}-\frac{1612\,i}{19433}\right\}, \{1, 1, 1, 1\}\right\}$$

```
In[ ]:= T0 // MatrixForm
```

$$Out[\,]//MatrixForm= \begin{pmatrix} \frac{63}{646} & \frac{24}{223} & \frac{3792}{19433}+\frac{34\,i}{19433} & \frac{3792}{19433}-\frac{34\,i}{19433} \\ -\frac{291}{323} & -\frac{397}{446} & -\frac{14745}{19433}+\frac{698\,i}{19433} & -\frac{14745}{19433}-\frac{698\,i}{19433} \\ -\frac{511}{646} & -\frac{171}{223} & -\frac{8829}{19433}+\frac{1612\,i}{19433} & -\frac{8829}{19433}-\frac{1612\,i}{19433} \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Per visualizzare i modi naturali si calcoli la nostra matrice Λ, una matrice simile ad A ma ottenuta tramite la matrice di cambiamento di base T, strutturata come segue:

```
In[ ]:= T = Transpose[{T0[[All, 1]], T0[[All, 2]], Re[T0[[All, 3]]], Im[T0[[All, 3]]]}]
```

$$Out[\,]= \left\{\left\{\frac{63}{646}, \frac{24}{223}, \frac{3792}{19433}, \frac{34}{19433}\right\}, \left\{-\frac{291}{323}, -\frac{397}{446}, -\frac{14745}{19433}, \frac{698}{19433}\right\}, \left\{-\frac{511}{646}, -\frac{171}{223}, -\frac{8829}{19433}, \frac{1612}{19433}\right\}, \{1, 1, 1, 0\}\right\}$$

```
In[ ]:= T // MatrixForm
```

$$Out[\,]//MatrixForm= \begin{pmatrix} \frac{63}{646} & \frac{24}{223} & \frac{3792}{19433} & \frac{34}{19433} \\ -\frac{291}{323} & -\frac{397}{446} & -\frac{14745}{19433} & \frac{698}{19433} \\ -\frac{511}{646} & -\frac{171}{223} & -\frac{8829}{19433} & \frac{1612}{19433} \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

In particolare si noti che si prendono in considerazione soltanto i complessi positivi e non quelli negativi, segue che con:

- $T_0\big[[All, 1]\big]$ ci riferiamo al primo autovalore λ_1
- $T_0\big[[All, 2]\big]$ ci riferiamo al secondo autovalore λ_2
- $Re[T_0[[All, 2]]\,]$ si riferisce alla parte reale del primo autovalore complesso $Re[\lambda_3]$
- $Im[T_0[[All, 2]]\,]$ si riferisce alla parte immaginaria del primo autovalore complesso $Im[\lambda_3]$

Calcolata la matrice di cambiamento di base procediamo con il calcolo della matrice Λ ottenuta tramite il prodotto vettoriale tra la matrice A, la matrice cambiamento di base T e la sua inversa:

```
In[∘]:= Λ = Simplify[Inverse[T].A.T]
Out[∘]= {{-8, 0, 0, 0}, {0, -7, 0, 0}, {0, 0, -2, 1/2}, {0, 0, -1/2, -2}}

In[∘]:= Λ // MatrixForm
Out[∘]//MatrixForm=
```

$$\begin{pmatrix} -8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & -2 \end{pmatrix}$$

Si ottiene una matrice diagonale a blocchi, in particolare tre blocchi distinti:

- il primo blocco è associato all'autovalore reale $\lambda_1 = -8$
- il secondo blocco è associato all'autovalore reale $\lambda_2 = -7$
- il terzo blocco, di grandezza due, è associato alla coppia di autovalori complessi coniugati e contiene sia la parte reale che la parte immaginaria di λ_3

Ottenuta la matrice Λ, è ora possibile costruire l'esponenziale di matrice $e^{\Lambda t}$ sapendo che $\sigma = -2$ e $\omega = \frac{1}{2}$ degli autovalori complessi e coniugati, *rispettivamente σ è la parte reale e ω è la parte immaginaria,* seguono i modi naturali relativi all'autovalore λ_3 pari a:

$$\lambda_3 = -2 + \frac{1}{2} \quad \rightarrow \quad e^{-2t}\cos\left(\frac{t}{2}\right) \quad e \quad e^{-2t}\sin\left(\frac{t}{2}\right)$$

Segue quindi l'esponenziale di matrice $e^{\Lambda t}$:

$$e^{\Lambda t} = \begin{bmatrix} e^{-8t} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{-7t} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{-2t}\cos\left(\frac{t}{2}\right) & e^{-2t}\sin\left(\frac{t}{2}\right) \\ 0 & 0 & -e^{-2t}\sin\left(\frac{t}{2}\right) & e^{-2t}\cos\left(\frac{t}{2}\right) \end{bmatrix}$$

Segue la verifica del risultato ottenuto a mano su Mathematica:

```
In[64]:= MatrixExp[Λ t] // MatrixForm
Out[64]//MatrixForm=
```

$$\begin{pmatrix} e^{-8t} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{-7t} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{-2t}\,\mathrm{Cos}\left[\frac{t}{2}\right] & e^{-2t}\,\mathrm{Sin}\left[\frac{t}{2}\right] \\ 0 & 0 & -e^{-2t}\,\mathrm{Sin}\left[\frac{t}{2}\right] & e^{-2t}\,\mathrm{Cos}\left[\frac{t}{2}\right] \end{pmatrix}$$

Si ottengono quattro modi naturali**,** tra cui:

- due esponenziali pure con i modi associati a e^{-8t} e e^{-7t}
- due modi pseudo-oscillatori con autovalori complessi, rappresentati da $e^{-2t}\cos\left(\frac{t}{2}\right)$ e $e^{-2t}\sin\left(\frac{t}{2}\right)$

Questi modi indicato oscillazioni smorzate nel tempo con una frequenza angolare variabile.

Calcolo della risposta libera

Prendiamo in considerazione il seguente stato iniziale:

$$x_0 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Con il calcolo della risposta libera si vuole dimostrare come il sistema proprio $LTI - TC$ si configuri come una combinazione lineare dei suoi modi naturali. Si noti come nella formula del calcolo della risposta libera si ritrovi il prodotto vettoriale tra la nostra matrice esponenziale e lo stato iniziale:

$$x_l(t) = e^{\Lambda t}x_0$$

Prima di calcolare la risposta libera si proietti lo stato iniziale lungo le colonne della matrice di cambiamento di base T:

In[82]:= z_0 = Inverse[T].x_0

Out[82]= $\left\{\left\{\frac{85918}{29}\right\}, \left\{-\frac{337622}{101}\right\}, \left\{\frac{1107462}{2929}\right\}, \left\{-\frac{3175885}{5858}\right\}\right\}$

Si scriva la decomposizione modale del sistema per valutare l'evoluzione delle componenti dello stato nella risposta libera nella seguente forma:

$$x_l[\text{t\_}] := T.MatrixExp[\Lambda t].z_0$$

Segue:

In[83]:= x_l[t_] := Simplify[T.MatrixExp[Λ t].z_0]

In[84]:= x_l[t] // MatrixForm

Out[84]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} \frac{e^{-8t}\left(846279-1053744\,e^{t}+213323\,e^{6t}\,\text{Cos}\left[\frac{t}{2}\right]-311796\,e^{6t}\,\text{Sin}\left[\frac{t}{2}\right]\right)}{2929} \\ \frac{e^{-8t}\left(-15636012+17430682\,e^{t}-1794670\,e^{6t}\,\text{Cos}\left[\frac{t}{2}\right]+2330181\,e^{6t}\,\text{Sin}\left[\frac{t}{2}\right]\right)}{5858} \\ \frac{e^{-8t}\left(38\left(-361277+395154\,e^{t}\right)-1269752\,e^{6t}\,\text{Cos}\left[\frac{t}{2}\right]+1259169\,e^{6t}\,\text{Sin}\left[\frac{t}{2}\right]\right)}{5858} \\ \frac{e^{-8t}\left(17355436-19582076\,e^{t}+2214924\,e^{6t}\,\text{Cos}\left[\frac{t}{2}\right]-3175885\,e^{6t}\,\text{Sin}\left[\frac{t}{2}\right]\right)}{5858} \end{pmatrix}$$

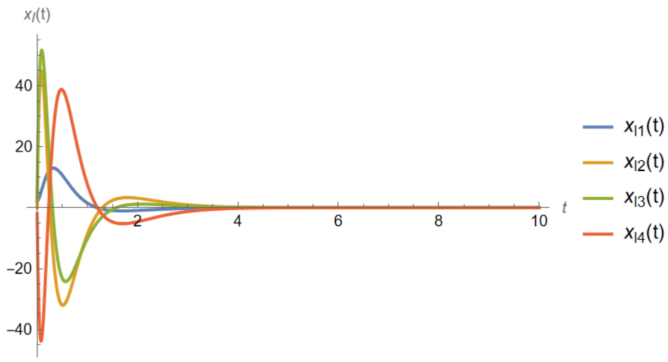
Rappresentiamo il grafico ponendo sull'asse delle ordinate la risposta libera $x_l(t)$ e sull'asse delle ascisse t.

Il grafico rappresenta l'andamento delle componenti dello stato, si noti come ogni singola commponente converge a zero.

Considerato che le componenti dello stato convergono a zero, anche la risposta libera lato uscita seguirà tale andamento.

```
In[208]:= Plot[{xl[t][[1]], xl[t][[2]], xl[t][[3]], xl[t][[4]]}, {t, 0, 10},
  PlotRange → All, AxesLabel → {t, "xl(t)"},
  PlotLegends → {"xl1(t)", "xl2(t)", "xl3(t)", "xl4(t)"}]
```

Out[208]=



Studio della configurazione degli stati iniziali che attivano sulla risposta libera alcuni modi naturali e altri no

Per esaminare la configurazione degli stati iniziali che attivano sulla risposta libera alcuni modi naturali e altri no si può esprimere la risposta come combinazione lineare dei modi naturali del sistema.

Si prenda in considerazione la matrice di cambiamento di base T, le sue colonne rappresentano autovettori linearmente indipendenti, e lo stato iniziale è una combinazione lineare di questi autovettori. Ad ogni autovettore viene associato un modo naturale, e la selezione degli autovettori determina quali modi naturali saranno evidenziati.

Come stato iniziale andremo a prendere le colonne della matrice di cambiamento di base T, la quale determina numericamente quali modi naturali saranno attivati nella risposta libera. Si proceda al calcolo dei valori in Mathematica:

In[23]:= x_{01} = Transpose[T][[1]]

Out[23]= $\left\{\frac{63}{646}, -\frac{291}{323}, -\frac{511}{646}, 1\right\}$

In[24]:= z_{01} = Inverse[T].x_{01}

Out[24]= {1, 0, 0, 0}

In[25]:= x_{02} = Transpose[T][[2]]

Out[25]= $\left\{\frac{24}{223}, -\frac{397}{446}, -\frac{171}{223}, 1\right\}$

In[26]:= z_{02} = Inverse[T].x_{02}

Out[26]= {0, 1, 0, 0}

In[27]:= x_{03} = Transpose[T][[3]]

Out[27]= $\left\{\frac{3792}{19433}, -\frac{14745}{19433}, -\frac{8829}{19433}, 1\right\}$

In[28]:= z_{03} = Inverse[T].x_{03}

Out[28]= {0, 0, 1, 0}

In[29]:= x_{04} = Transpose[T][[4]]

Out[29]= $\left\{\frac{34}{19433}, \frac{698}{19433}, \frac{1612}{19433}, 0\right\}$

In[30]:= z_{04} = Inverse[T].x_{04}

Out[30]= {0, 0, 0, 1}

A seguito dei calcoli si è dimostrato che è possibile trovare stati iniziali specifici che attivano singoli modi naturali senza influenzare gli altri.

Questo è un aspetto importante nello studio delle risposte libere di sistemi dinamici, in quanto permette di analizzare e controllare singolarmente ciascun modo.

Si definiscono proprio gli stati iniziali una base ortogonale nella quale ogni vettore isola un singolo modo naturale.

La funzione di trasferimento, i suoi poli e zeri

Lo studio della funzione di trasferimento risulta essenziale ai fini dell'analisi della risposta forzata. Quando si vuole analizzare una risposta totale di un sistema, per semplificare la risoluzione delle equazioni si passa rispettivamente nel dominio della variabile complessa z tramite la trasformata Z e nel dominio della variabile complessa s tramite la trasformata di Laplace.

Nel caso di un sistema proprio $LTI - TC$, la funzione di trasferimento sappiamo essere una funzione di variabile complessa che moltiplicata per la $\mathcal{L} - trasformata$ dell'ingresso, questa restituisce $\mathcal{L} - Trasformata$ dell'uscita forzata, ovvero:

$$Y_f(s) = G(s) * U(s)$$

CALCOLO DEI FDT → Nel caso di un sistema $LTI - TC$ il calcolo della Fdt è pari a:

$$G(s) = C * (s * I_n - A)^{-1} * B + D$$

```
In[∘]:= G[s_] := Simplify[C₁.Inverse[s IdentityMatrix[4] - A].B]

In[∘]:= G[s][[1, 1]]
```

$$\text{Out[∘]=}\quad \frac{8\,(-3+s)}{952 + 1151\,s + 481\,s^2 + 76\,s^3 + 4\,s^4}$$

Dal valore ottenuto si noti come il denominatore, *diviso 4,* risulti uguale al polinomio caratteristico della matrice A:

```
In[∘]:= CharacteristicPolynomial[A, x]
```

$$\text{Out[∘]=}\quad 238 + \frac{1151\,x}{4} + \frac{481\,x^2}{4} + 19\,x^3 + x^4$$

Verifichiamo che la funzione di trasferimento $G(s)$ è corretta, considerando il modello della funzione di trasferimento:

```
In[∘]:= Σ = StateSpaceModel[{A, B, C₁}]
```

$$\text{Out[∘]=}\quad \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & -2 & 2 & -1 & 0 \\ -\frac{271}{4} & -623 & \frac{1063}{4} & -\frac{1349}{4} & -1 \\ -\frac{271}{4} & -626 & \frac{1071}{4} & -\frac{1357}{4} & -1 \\ \frac{275}{4} & 622 & -\frac{1059}{4} & \frac{1345}{4} & 1 \\ \hline -8 & 4 & 2 & 6 & 0 \end{array}\right)^{\mathcal{S}}$$

```
In[∘]:= TransferFunctionModel[Σ]
```

$$\text{Out[∘]=}\quad \left(\frac{-6 + 2\,s}{238 + \frac{1151\,s}{4} + \frac{481\,s^2}{4} + 19\,s^3 + s^4}\right)^{\mathcal{T}}$$

Il modello della funzione di trasferimento risulta uguale alla FdT ottenuta in precedenza, unica differenza è che il modello divide tutto per 4.

CALCOLO DEI POLI → SI proceda ora con il calcolo dei poli della nostra funzione di trasferimento che ricordiamo essere gli zeri del denominatore della nostra $G(s)$:

```
In[•]:= Solve[Denominator[G[s][[1]]] == 0, s]
Out[•]= {{s → -8}, {s → -7}, {s → -2 - i/2}, {s → -2 + i/2}}

In[•]:= λ
Out[•]= {-8, -7, -2 + i/2, -2 - i/2}
```

Si evince che i poli della FdT sono un sottoinsieme degli autovalori di A, questi due insiemi coincidono quando il grado del denominatore della FdT è uguale al numero di stati del sistema. Si noti che, prendendo in considerazione solo funzioni Right-Sided, ovvero funzioni che assumono un valore diverso da zero solo per istanti di tempo non negativi, questo è confermato dal segno negativo dei poli del sistema, tutti i valori che annullano il denominatore si trovano a sinistra nel piano complesso garantendo che la risposta sia causata solo da ingressi passati e presenti.

Si verifichi la correttezza dei poli prendendo in considerazione il modello di trasferimento della FdT:

```
In[•]:= TransferFunctionPoles[Σ]
Out[•]= {{{-8, -7, -2 - i/2, -2 + i/2}}}
```

CALCOLO DEGLI ZERI→ Si proceda ora con il calcolo degli zeri della nostra funzione di trasferimento che ricordiamo essere gli zeri del numeratore della nostra $G(s)$:

```
In[•]:= Solve[Numerator[G[s][[1]]] == 0, s]
Out[•]= {{s → 3}}
```

Si verifichi facendo uso del modello di trasferimento della FdT se il valore ottenuto è corretto:

```
In[•]:= TransferFunctionZeros[Σ]
Out[•]= {{{3}}}
```

Calcolo della risposta al gradino

Si proceda ora con il calcolo della risposta al gradino, una particolare risposta forzata del sistema che considera come ingresso la funzione gradino unitario così definita:

$$1(t) = \begin{cases} 1 & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

Questa funzione costante right-sided soddisfa i requisiti per essere $\mathcal{L} - Trasformabile$. La trasformata di Laplace del gradino unitario corrisponde a $\frac{1}{s}$. A questo punto, esprimiamo l'espressione generale della risposta forzata nel modo seguente:

$$Y_f(s) = G(s) * U(s)$$

Dove con $G(s)$ indichiamo la nostra FdT calcola poc'anzi, mentre $U(s)$ è la $\mathcal{L} - Trasformata$ dell'ingresso e corrisponde al segnale $\frac{1}{s}$. Segue quindi che per il calcolo della risposta al gradino si ha:

$$Y_f(s) = \frac{G(s)}{s}$$

```
In[45]:= Yf[s_] := Factor[G[s][[1, 1]] × LaplaceTransform[UnitStep[t], t, s]]
In[46]:= Yf[s]
```

$$\text{Out[46]=} \frac{8(-3+s)}{s(7+s)(8+s)(17+16s+4s^2)}$$

Calcolata la risposta, ci occupiamo di scomporla e calcolare i coefficienti utilizzando la formula di Heaviside, si fa uso della funzione $Apart$ di Mathematica ricordando che questa non spacchetta i complessi, ergo si proceda con il semplificare "a mano" l'ultimo termine:

```
In[47]:= Apart[Yf[s]]
```

$$\text{Out[47]=} -\frac{3}{119\,s}+\frac{80}{707\,(7+s)}-\frac{11}{145\,(8+s)}-\frac{32\,(-4259+376\,s)}{248965\,(17+16\,s+4\,s^2)}$$

Scriviamo in maniera verbosa i fratti semplici e procediamo con il loro calcolo:

$$\frac{C_1}{s}+\frac{C_2}{(7+s)}+\frac{C_3}{(8+s)}+\frac{C_4}{(17+16s+4s^2)}$$

Semplifico l'ultimo termine:

$$\frac{C_1}{s}+\frac{C_2}{(7+s)}+\frac{C_3}{(8+s)}+\frac{C_4}{\left(s+2+\frac{i}{2}\right)}+\frac{C_5}{\left(s+2-\frac{i}{2}\right)}$$

Si noti come C_1 è il coefficiente di distorsione che il sistema apporta sul gradino d'ingresso.

Calcoliamo i coefficienti $C_1, C_2, C_3, C_4\ e\ C_5$:

$$C1=\lim_{s\to 0} s*Y_f(s)=\lim_{s\to 0} s*G(s)\frac{1}{2}=\lim_{s\to 0} G(s)=G(0)=-\frac{3}{119}$$

$$C_2=\lim_{s\to -7} s*Y_f(s)=\lim_{s\to -7}(7+s)*Y[s]=\frac{80}{707}$$

$$C_3=\lim_{s\to -8} s*Y_f(s)=\lim_{s\to -8}(8+s)*Y[s]=-\frac{11}{145}$$

$$C_4=\lim_{s\to -2-\frac{i}{2}}\left(s+2+\frac{i}{2}\right)*Y[s]=-\frac{1504}{248965}+\frac{40088i}{248965}$$

Dato che i complessi sono coniugati abbiamo che $C_5=-\frac{1504}{248965}-\frac{40088i}{248965}$

Scriviamo ora la risposta forzata nel dominio del tempo scrivendo la $\mathcal{L}-Trasformata$ di tutti i termini:

$$C_1 1(t)+C_2e^{-7t}1(t)\ \ +C_3e^{-8t}1(t)+C_4e^{\left(-2-\frac{i}{2}\right)t}+C_5e^{\left(-2+\frac{i}{2}\right)t}=$$

$$-\frac{3}{119}1(t)+\frac{80}{707}e^{-7t}1(t)-\frac{11}{145}e^{-8t}1(t)-\left(\frac{1504}{248965}+\frac{40088i}{248965}\right)e^{\left(-2-\frac{i}{2}\right)t}-\left(\frac{1504}{248965}-\frac{40088i}{248965}\right)e^{\left(-2+\frac{i}{2}\right)t}$$

Si proceda al calcolo della risposta forzata nel dominio del tempo:

```
In[54]:= F[Z_, γ_, t_] := ComplexExpand[Re[Z Exp[I γ t]]]
In[55]:= Yf[t_] := C1 UnitStep[t] + C2 Exp[-7 t] UnitStep[t] + C3 Exp[-8 t] UnitStep[t] + 2 Exp[-2 t] F[C4, -1/2, t] UnitStep[t]; Yf[t]
```

$$\text{Out[55]=} -\frac{3\,\text{UnitStep}[t]}{119}-\frac{11}{145}e^{-8t}\text{UnitStep}[t]+\frac{80}{707}e^{-7t}\text{UnitStep}[t]+2e^{-2t}\left(-\frac{1504\,\text{Cos}\left[\frac{t}{2}\right]}{248965}+\frac{40088\,\text{Sin}\left[\frac{t}{2}\right]}{248965}\right)\text{UnitStep}[t]$$

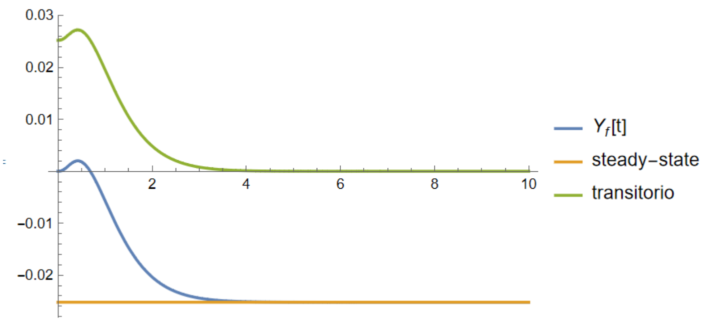
Si verifichi che il calcolo della nostra risposta forzata sia corretto:

In[428]:= $\texttt{FullSimplify}\left[Y_f[t] - \left(-\frac{3}{119} - \frac{11\,e^{-8t}}{145} + \frac{80\,e^{-7t}}{707} - \left(\frac{1504}{248965} - \frac{40088\,i}{248965}\right) e^{\left(-2-\frac{i}{2}\right)t} - \left(\frac{1504}{248965} + \frac{40088\,i}{248965}\right) e^{\left(-2+\frac{i}{2}\right)t}\right) \texttt{UnitStep}[t]\right]$

Out[428]= 0

Segue il grafico relativo alla risposta:

In[239]:= $\texttt{Plot}\left[\left\{Y_f[t], -\frac{3}{119}\texttt{UnitStep}[t], -\frac{11}{145}e^{-8t}\texttt{UnitStep}[t] + \frac{80}{707}e^{-7t}\texttt{UnitStep}[t] + 2e^{-2t}\left(-\frac{1504\,\texttt{Cos}\left[\frac{t}{2}\right]}{248965} + \frac{40088\,\texttt{Sin}\left[\frac{t}{2}\right]}{248965}\right)\texttt{UnitStep}[t]\right\}, \{t, 0, 10\}, \texttt{PlotRange} \to \texttt{All},\right.$
$\left.\texttt{PlotLegends} \to \{\text{"}Y_f[t]\text{"}, \text{"steady-state"}, \text{"transitorio"}\}\right]$



Notiamo come a transitorio esaurito la risposta forzata si stabilizza su un valore di regime corrispondente alla componente di regime della risposta forzata $\left(-\frac{3}{119} \cong -0{,}0252\right)$.

Si noti inoltre come la risposta transitoria si esaurisce in quanto i modi naturali del sistema convergono a zero.

Risposta al segnale periodico elementare $u(t) = A\sin(\omega t + \psi)1(t)$

Per semplicità prendiamo in considerazione la terna $A = 1, \omega = 1, \psi = 0$. Si ricordi la $\mathcal{L} - Trasformata$ della funzione $\sin(\omega t)$, calcolabile come segue:

$$\sin(\omega t) = \frac{e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}}{2j} \to L[\sin(\omega t)] = \frac{1}{2j}\left[L\left(e^{j\omega t}\right) - L\left(e^{-j\omega t}\right)\right]$$

dato che:

$$e^{\alpha t} \fallingdotseq \frac{1}{s-a}$$

Allora segue:

$$L[\sin(\omega t)] = \frac{1}{2j}\left(\frac{1}{s - j\omega} - \frac{1}{s + j\omega}\right) = \cdots = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$$

Essendo $\omega = 1$ allora:

$$U(s) = \frac{1}{s^2 + 1}$$

Si riportino tutti i valori su Mathematica:

```
In[689]:= A = 1
Out[689]= 1

In[690]:= ω = 1
Out[690]= 1

In[691]:= ψ = 0
Out[691]= 0

In[692]:= u_segnale[t_] := A Sin[ω t + ψ]

In[693]:= U[s_] = LaplaceTransform[u_segnale[t] * UnitStep[t], t, s]
```

Out[693]= $\frac{1}{1 + s^2}$

Si Prenda in considerazione la funzione di trasferimenti $G[s]$ e $U[s]$:

```
In[694]:= G[s]⟦1, 1⟧
```

Out[694]= $\frac{8\,(-3 + s)}{952 + 1151\,s + 481\,s^2 + 76\,s^3 + 4\,s^4}$

```
In[695]:= U[s]
```

Out[695]= $\frac{1}{1 + s^2}$

Si scriva la funzione della risposta forzata $y_{segnalef}$:

```
In[696]:= y_segnalef[s_] := Factor[G[s] * U[s]]⟦1, 1⟧

In[697]:= y_segnalef[s]
```

Out[697]= $\frac{8\,(-3 + s)}{(7 + s)\,(8 + s)\,(1 + s^2)\,(17 + 16\,s + 4\,s^2)}$

```
In[698]:= Apart[y_segnalef[s]]
```

Out[698]= $-\frac{8}{505\,(7 + s)} + \frac{88}{9425\,(8 + s)} + \frac{8\,(-7 + 74\,s)}{27625\,(1 + s^2)} - \frac{128\,(18258 + 2903\,s)}{6224125\,(17 + 16\,s + 4\,s^2)}$

Si fa uso nuovamente della formula di Heaviside, come già fatto i precedenza, per i fratti multipli, in questo caso abbiamo un fratto in più rispetto al caso precedente, ovvero $(1+s^2)$, si risolva e si calcolino i rispettivi coefficienti di Heaviside:

In[700]:= $\frac{D_1}{s+i} + \frac{D_2}{s-i} + \frac{D_3}{(s+7)} + \frac{D_4}{(8+s)} + \frac{D_5}{\left(s+2+\frac{i}{2}\right)} + \frac{D_6}{\left(s+2-\frac{i}{2}\right)}$

In[701]:= $D_1 = \lim_{s\to i} (s-i)\, y_{segnalef}[s]$

Out[701]= $\frac{296}{27625} + \frac{28\, i}{27625}$

In[702]:= $D_2 = \text{Conjugate}[D_1]$

Out[702]= $\frac{296}{27625} - \frac{28\, i}{27625}$

In[703]:= $D_3 = \lim_{s\to -7} (7+s)\, y_{segnalef}[s]$

Out[703]= $-\frac{8}{505}$

In[704]:= $D_4 = \lim_{s\to -8} (8+s)\, y_{segnalef}[s]$

Out[704]= $\frac{88}{9425}$

In[705]:= $D_5 = \lim_{s\to -2-\frac{i}{2}} \left(s+2+\frac{i}{2}\right) y_{segnalef}[s]$

Out[705]= $-\frac{46448}{6224125} - \frac{398464\, i}{6224125}$

In[706]:= $D_6 = \text{Conjugate}[D_5]$

Out[706]= $-\frac{46448}{6224125} + \frac{398464\, i}{6224125}$

Si va a determinare la componente di regime $Y_{ss}[t]$:

```
In[708]:= F[Z_, γ_, t_] := ComplexExpand[Re[Z Exp[I γ t]]]
In[709]:= Yss[t_] := 2 ComplexExpand[F[D1, 2, t]]
          Yss[t]
```

Out[710]= $2\left(\frac{296\,\text{Cos}[2t]}{27625} - \frac{28\,\text{Sin}[2t]}{27625}\right)$

Si prenda in considerazione la componente transitoria trovata in precedenza pari a:

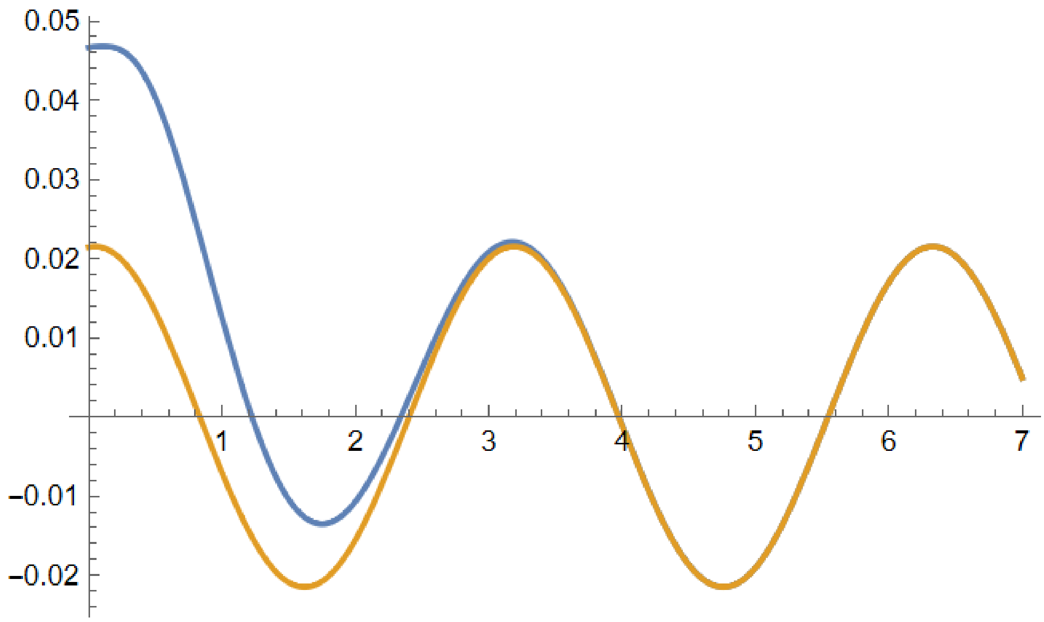
$$-\frac{11}{145}e^{-8t}\text{UnitStep}[t] + \frac{80}{707}e^{-7t}\text{UnitStep}[t] + 2e^{-2t}\left(-\frac{1504\text{Cos}[\frac{t}{2}]}{248965} + \frac{40088\text{Sin}[\frac{t}{2}]}{248965}\right)\text{UnitStep}[t]$$

Si va a sommare alla componente di regime per ottenere la risposta libera e la si affianca alla componente transitoria per dimostrare che questa converga dopo un t sufficientemente grande:

TRANSITORIA REGIME

In[715]:= $\text{Plot}\left[\left\{-\frac{11}{145}e^{-8t}\,\text{UnitStep}[t]+\frac{80}{707}e^{-7t}\,\text{UnitStep}[t]+2e^{-2t}\left(-\frac{1504\,\text{Cos}\left[\frac{t}{2}\right]}{248965}+\frac{40088\,\text{Sin}\left[\frac{t}{2}\right]}{248965}\right)\text{UnitStep}[t]+2\left(\frac{296\,\text{Cos}[2t]}{27625}+\frac{28\,\text{Sin}[2t]}{27625}\right),\right.\right.$
$\left.2\left(\frac{296\,\text{Cos}[2t]}{27625}+\frac{28\,\text{Sin}[2t]}{27625}\right)\right\},\{t,0,7\},\text{PlotRange}\to\text{All}\Big]$

Out[715]=



Da $t = 3{,}42$ circa si noti come la componente transitoria vada a convergere verso la risposta a regime. Si calcolino ora l'ampiezza e la fase del segnale risolvendo un equazione a due incognite:

In[712]:= $\text{Solve}\left[\left\{\left(2\left(\frac{296\,\text{Cos}[2t]}{27625}+\frac{28\,\text{Sin}[2t]}{27625}\right)==\text{Ampiezza}\,\text{Sin}[\omega*t+\text{angolo}]\right)\,/.\,\{t\to 0\},\right.\right.$
$\left.\left.\left(D\left[2\left(\frac{296\,\text{Cos}[2t]}{27625}+\frac{28\,\text{Sin}[2t]}{27625}\right),t\right]==D[\text{Ampiezza}\,\text{Sin}[\omega*t+\text{angolo}],t]\right)\,/.\,\{t\to 0\},\ \text{Ampiezza}>0\right\},\{\text{Ampiezza},\text{angolo}\}\right]$

Out[712]= $\left\{\left\{\text{Ampiezza}\to\frac{16\sqrt{1418}}{27625}\ \text{if}\ c_1\in\mathbb{Z},\ \text{angolo}\to -2\,\text{ArcTan}\left[\frac{-1418+7\sqrt{1418}}{37\sqrt{1418}}\right]+2\pi c_1\ \text{if}\ c_1\in\mathbb{Z}\right\}\right\}$

In[713]:= $N\left[\frac{16\sqrt{1418}}{27625}\right]$

Out[713]= 0.02181

In[714]:= $N\left[-2\,\text{ArcTan}\left[\frac{-1418+7\sqrt{1418}}{37\sqrt{1418}}\right]\right]\left(\frac{180}{\pi}\right)$

Out[714]= 79.2869

Al termine dei calcoli abbiamo ottenuto i valori dell'ampiezza e della fase pari a:

- ampiezza (A) = 0.02181, si va ad attenuare di fatti il suo valore è minore di 1
- fase(ψ) = 79.2869, rappresenta un anticipo poiché si trova sull'asse positiva.

Un suo modello ARMA equivalente, individuando le condizioni iniziali sull'uscita compatibili con lo stato iniziale

Una rappresentazione alternativa alla $I - S - U$, ingresso-stato- uscita, è la $I - U$, anche definita come modello ARMA, che mette in relazione esplicitamente l'ingresso e l'uscita, mentre la variabile dipendente è implicita.

Si vuole trovare un modello ARMA equivalente al nostro sistema proprio LTI-TC. Si parte dalla funzione di trasferimento $G(s)$ e si costruisca la seguente identità:

```
In[443]:= identità = Expand[Denominator[G[s][[1, 1]]] Y_arma[s]] == Expand[Numerator[G[s][[1, 1]]] U_arma[s]]
```

Out[443]= $952\, Y_{arma}[s] + 1151\, s\, Y_{arma}[s] + 481\, s^2\, Y_{arma}[s] + 76\, s^3\, Y_{arma}[s] + 4\, s^4\, Y_{arma}[s] == -24\, U_{arma}[s] + 8\, s\, U_{arma}[s]$

Un modello ARMA equivalente, nel caso in cui il vettore delle condizioni iniziali è il vettore nullo è la seguente:

```
In[444]:= InverseLaplaceTransform[identità, s, t] /. {Y_arma[s] → LaplaceTransform[yarma[t], t, s], U_arma[s] → LaplaceTransform[uarma[t], t, s]} /.
      {yarma[0] → 0, yarma'[0] → 0, yarma''[0] → 0, yarma'''[0] → 0, uarma[0] → 0}
```

Out[444]= $952\, yarma[t] + 1151\, yarma'[t] + 481\, yarma''[t] + 76\, yarma^{(3)}[t] + 4\, yarma^{(4)}[t] == -24\, uarma[t] + 8\, uarma'[t]$

Essendo assegnato un vettore di condizioni iniziali, si trovi un modello ARMA che possa tenere conto di un vettore di stato iniziale:

```
In[445]:= eqdiff = 952 yarma[t] + 1151 yarma'[t] + 481 yarma''[t] + 76 yarma^(3)[t] + 4 yarma^(4)[t] == -24 uarma[t] + 8 uarma'[t]
```

Out[445]= $952\, yarma[t] + 1151\, yarma'[t] + 481\, yarma''[t] + 76\, yarma^{(3)}[t] + 4\, yarma^{(4)}[t] == -24\, uarma[t] + 8\, uarma'[t]$

Torno nel dominio della variabile complessa s senza imporre condizioni:

```
In[446]:= eqdiffs =
      Simplify[LaplaceTransform[eqdiff, t, s] /.
        {yarma[t] → InverseLaplaceTransform[Y_arma[s], s, t], uarma[t] → InverseLaplaceTransform[U_arma[s], s, t], uarma[0] → 0}]
```

Out[446]= $(952 + 1151\, s + 481\, s^2 + 76\, s^3 + 4\, s^4)\, Y_{arma}[s] == (1151 + 481\, s + 76\, s^2 + 4\, s^3)\, yarma[0] + 8\,(-3 + s)\, U_{arma}[s] + 481\, yarma'[0] + 76\, s\, yarma'[0] + 4\, s^2\, yarma'[0] + 76\, yarma''[0] + 4\, s\, yarma''[0] + 4\, yarma^{(3)}[0]$

Si separino ora le componenti legati alla steady-state-response dalla risposta libera:

```
In[447]:= Y_dif[s_] := Collect[Solve[eqdiffs, Y_arma[s]][[1, 1]][[2]], U_arma[s]]

In[448]:= Y_dif[s]
```

Out[448]=

$$\frac{(-24 + 8\, s)\, U_{arma}[s]}{952 + 1151\, s + 481\, s^2 + 76\, s^3 + 4\, s^4} + \left(1151\, yarma[0] + 481\, s\, yarma[0] + 76\, s^2\, yarma[0] + 4\, s^3\, yarma[0] + 481\, yarma'[0] + 76\, s\, yarma'[0] + 4\, s^2\, yarma'[0] + 76\, yarma''[0] + 4\, s\, yarma''[0] + 4\, yarma^{(3)}[0]\right) \Big/ \left(952 + 1151\, s + 481\, s^2 + 76\, s^3 + 4\, s^4\right)$$

Ci si assicuri di aver determinato un modello ARMA corretto ricavando la funzione di trasferimento $G(s)$ imponendo $U(s) = 1$. Si ottiene la funzione di trasferimento G(s):

$$G[s] = \frac{(-24 + 8s)}{952 + 1151s + 481s^2 + 76s^3 + 4s^4}$$

Risposta alla rampa unitaria mettendo in evidenza la risposta transitoria e la componente legata algebricamente all'ingresso

Si prenda in considerazione la rampa unitaria:

$$\begin{cases} t & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

Si prendano in considerazione le seguenti componenti iniziali sull'uscita:

$$x_0 = \{0, -2, -2, -1\}$$

Si proceda al calcolo della risposta libera nel dominio della variabile complessa s.

```
In[695]:= RispostaLiberaArma =
  ((1151 yarma[0] + 481 s yarma[0] + 76 s^2 yarma[0] + 4 s^3 yarma[0] + 481 yarma'[0] + 76 s yarma'[0] + 4 s^2 yarma'[0] + 76 yarma''[0] + 4 s yarma''[0] + 4 yarma^(3)[0]) /
   (952 + 1151 s + 481 s^2 + 76 s^3 + 4 s^4)) /. {yarma[0] → y_condArmaIU, yarma'[0] → y'_condArmaIU, yarma''[0] → y''_condArmaIU, yarma'''[0] → y'''_condArmaIU}
```

$$\left\{\frac{-7056 + 376\,s + 24\,s^2}{952 + 1151\,s + 481\,s^2 + 76\,s^3 + 4\,s^4}\right\}$$

Si sa che la $\mathcal{L} - Trasformata$ della rampa unitaria è pari a:

```
In[815]:= U_ru[s_] = LaplaceTransform[t UnitStep[t], t, s]
```

$$\text{Out[815]=} \quad \frac{1}{s^2}$$

Si sostituisca la $\mathcal{L}$-Trasformata all'interno di $Y_{dif}[s]$, segue:

$$\text{In[816]:=} \quad \frac{(-24 + 8\,s)\left(\frac{1}{s^2}\right)}{952 + 1151\,s + 481\,s^2 + 76\,s^3 + 4\,s^4} + \left(1151 * 0 + 481\,s * 0 + 76\,s^2 * 0 + 4\,s^3 * 0 + 481 * 6 + 76\,s * 6 + 4\,s^2 * 6 + 76 * (-20) + 4\,s * (-20) + 4\,(-4211/2)\right) / \left(952 + 1151\,s + 481\,s^2 + 76\,s^3 + 4\,s^4\right)$$

Si ottiene come risultato:

$$\text{Out[816]=} \quad \frac{-24 + 8\,s}{s^2\left(952 + 1151\,s + 481\,s^2 + 76\,s^3 + 4\,s^4\right)} + \frac{-7056 + 376\,s + 24\,s^2}{952 + 1151\,s + 481\,s^2 + 76\,s^3 + 4\,s^4}$$

Calcolata la risposta libera nel dominio s torniamo nel dominio del tempo t, calcolando la trasformata di Laplace inversa del risultato ottenuto poc'anzi:

$$Y_{rampaUnitariaArma}[t\_] := \text{InverseLaplaceTransform}\left[\frac{-24 + 8\,s}{s^2\left(952 + 1151\,s + 481\,s^2 + 76\,s^3 + 4\,s^4\right)} + \frac{-7056 + 376\,s + 24\,s^2}{952 + 1151\,s + 481\,s^2 + 76\,s^3 + 4\,s^4}, s, t\right]$$

$$Y_{rampaUnitariaArma}[t]$$

$$\frac{4405}{113\,288} + \frac{13\,647\,e^{-8t}}{232} - \frac{417\,168\,e^{-7t}}{4949} + \frac{2\,e^{\left(-2-\frac{i}{2}\right)t}\left((5\,381\,764 - 26\,486\,333\,i) + (5\,381\,764 + 26\,486\,333\,i)\,e^{i\,t}\right)}{846\,481} - \frac{3\,t}{119}$$

Come si può notare dal risultato la risposta alla rampa unitaria presenta tutti i modi naturali del sistema. Si noti come la seconda, terza e quarta componente sono legate ai poli del sistema e restituiscono i modi naturali, prima ed ultima invece sono legate algebricamente all'ingresso.

Dalla risposta alla rampa unitaria ottenuta si può identificare la componente di regime e la componente transitoria, rispettivamente:

In[819]:= $Y_{componenteRegime} = -\frac{3\,t}{119} + \frac{4405}{113\,288}$

Out[819]= $\frac{4405}{113\,288} - \frac{3\,t}{119}$

$Y_{componenteTransitoria} = +\frac{13\,647\,e^{-8t}}{232} - \frac{417\,168\,e^{-7t}}{4949} + \frac{2\,e^{\left(-2-\frac{i}{2}\right)t}\left((5\,381\,764 - 26\,486\,333\,i) + (5\,381\,764 + 26\,486\,333\,i)\,e^{i\,t}\right)}{846\,481}$

$\frac{13\,647\,e^{-8t}}{232} - \frac{417\,168\,e^{-7t}}{4949} + \frac{2\,e^{\left(-2-\frac{i}{2}\right)t}\left((5\,381\,764 - 26\,486\,333\,i) + (5\,381\,764 + 26\,486\,333\,i)\,e^{i\,t}\right)}{846\,481}$

Determinare lo stato iniziale x_0 tale che la risposta al gradino coincida con il suo valore di regime (assenza di componente transitoria)

Affinché la risposta di un sistema coincida con il valore di regime è necessario che la risposta libera e la risposta transitoria vadano a compensarsi. A seguito di questa affermazione, definiamo la risposta totale come la somma della risposta libera, la componente di regime e la componente transitoria.

Si prenda in considerazione il vettore delle condizioni iniziali che dobbiamo determinare:

In[825]:= $x_{statoIniziale7} = \{\{x1\}, \{x2\}, \{x3\}, \{x4\}\}$

Out[825]= $\{\{x1\}, \{x2\}, \{x3\}, \{x4\}\}$

Si prenda nuovamente la funzione di trasferimento $G(s)$:

$$\frac{8\,(-3+s)}{952 + 1151\,s + 481\,s^2 + 76\,s^3 + 4\,s^4}$$

La risposta forzata all'ingresso a gradino risulta essere:

```
In[821]:= rispostaForzata := G[s][[1, 1]] / s

In[822]:= rispostaForzata
```

Out[822]= $\frac{8\,(-3+s)}{s\,(952 + 1151\,s + 481\,s^2 + 76\,s^3 + 4\,s^4)}$

La componente di regime della risposta forzata sarà pari a:

```
In[832]:= G[0][[1, 1]] / s
```

Out[832]= $-\frac{3}{119\,s}$

La componente transitoria della risposta forzata sarà pari a:

In[823]:= $Y_{componenteTransitoriaRisF}$[s_] := FullSimplify[rispostaForzata - G[0][[1, 1]] / s]

In[824]:= $Y_{componenteTransitoriaRisF}$[s]

Out[824]= $\frac{4405 + 3\,s\,(481 + 4\,s\,(19+s))}{119\,(7+s)\,(8+s)\,(17 + 4\,s\,(4+s))}$

Si proceda al calcolo della risposta libera del sistema:

```
In[826]:= rispostaLiberaGradino[s_] :=
           Simplify[C1.Inverse[s IdentityMatrix[4] - A].xstatoIniziale7][[1, 1]]

In[827]:= rispostaLiberaGradino[s]
```

Out[827]=
$$\frac{1}{952+1151\,s+481\,s^2+76\,s^3+4\,s^4}\Big(-4\left(1475+850\,s+146\,s^2+8\,s^3\right)x1+4\left(3032+565\,s+80\,s^2+4\,s^3\right)x2-2862\,x3+498\,s\,x3+128\,s^2\,x3+8\,s^3\,x3+9242\,x4+2766\,s\,x4+448\,s^2\,x4+24\,s^3\,x4\Big)$$

Si proceda ora alla somma della risposta libera e transitoria. Poiché queste due devono annullarsi impongono che il numeratore sia proprio pari a zero, in questo modo si arriva a trovare le componenti del vettore delle condizioni iniziali cercato

```
In[828]:= Numerator[Simplify[Expand[rispostaLiberaGradino[s] + YcomponenteTransitoriaRisF[s]]]]
```

Out[828]=
$$4405-702100\,x1+1443232\,x2-340578\,x3+1099798\,x4+4\,s^3\left(3-952\,x1+476\,x2+238\,x3+714\,x4\right)+4\,s^2\left(57-17374\,x1+9520\,x2+3808\,x3+13328\,x4\right)+s\left(1443-404600\,x1+268940\,x2+59262\,x3+329154\,x4\right)$$

```
In[829]:= CoefficientList[
           Numerator[Simplify[Expand[rispostaLiberaGradino[s] + YcomponenteTransitoriaRisF[s]]]],
           s]
```

Out[829]=
$$\{4405-702100\,x1+1443232\,x2-340578\,x3+1099798\,x4,\ 1443-404600\,x1+268940\,x2+59262\,x3+329154\,x4,\ 4\left(57-17374\,x1+9520\,x2+3808\,x3+13328\,x4\right),\ 4\left(3-952\,x1+476\,x2+238\,x3+714\,x4\right)\}$$

```
In[830]:= Solve[
           CoefficientList[
             Numerator[
              Simplify[Expand[rispostaLiberaGradino[s] + YcomponenteTransitoriaRisF[s]]]], s] ==
            {0, 0, 0, 0}, {x1, x2, x3, x4}]
```

Out[830]=
$$\left\{\left\{x1\to\frac{1}{238},\ x2\to-\frac{1}{119},\ x3\to-\frac{1}{238},\ x4\to\frac{1}{119}\right\}\right\}$$

Valutare la risposta al segnale $u(t) = 1(-t)$

Per prima cosa, bisogna capire la struttura di questo segnale: si tratta di un gradino con l'asse temporale invertito. Questo segnale gradino particolare è stato attivato in un passato remoto e si disattiva al tempo t = 0. Questo segnale si comporta in maniera opposta al segnale gradino unitario u(t). P

Per definizione si ha che

$$u(t) = \begin{cases} 1 & t < 0 \\ 0 & t > 0 \end{cases}$$

Si ha quindi una componente a regime pari a $G[0]$, e successivamente la risposta libera che si esaurirà e dato che il sistema risulta essere asintoticamente stabile, questo in quanto valutare il segnale $u(t)1(-t)$ ha senso solo in un sistema BIBO stabile.

Si prenda in considerazione il modello ARMA precedentemente calcolato, segue la seguente relazione:

$$\begin{bmatrix} y(0) \\ y'(0) \\ y''(0) \\ y'''(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CAA \\ CAAA \end{bmatrix} x_0$$

Dove $\begin{bmatrix} C \\ CA \\ CAA \\ CAAA \end{bmatrix}$ è identificata come la matrice di osservabilità:

```
In[110]:= M_O = {C_1[[1]], (C_1.A)[[1]], (C_1.A.A)[[1]], (C_1.A.A.A)[[1]]}
```

$$\text{Out[110]=}\ \left\{\{-8, 4, 2, 6\}, \{6, 4, -6, -2\}, \{-2, 8, -2, 8\}, \left\{\frac{287}{2}, 1248, -\frac{1063}{2}, \frac{1345}{2}\right\}\right\}$$

Calcolando il determinante questa risulta invertibile. Si applichi l'inversa della matrice di osservabilità:

$$x_0 = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CAA \\ CAAA \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} y(0) \\ y'(0) \\ y''(0) \\ y'''(0) \end{bmatrix} x_0$$

Si proceda al calcolo della risposta libera nel dominio della variabile complessa s:

```
In[112]:= Y_liberas = FullSimplify[(C_1.Inverse[s IdentityMatrix[4] - A].x_condARMA)[[1, 1]]]
```

$$\text{Out[112]=}\ -\frac{2\,(13887 + s\,(4141 + 12\,s\,(56 + 3\,s)))}{(7 + s)\,(8 + s)\,(17 + 4\,s\,(4 + s))}$$

Si porti la risposta nel dominio del tempo:

```
In[113]:= Y_liberat = Expand[FullSimplify[InverseLaplaceTransform[Y_liberas, s, t]]]
```

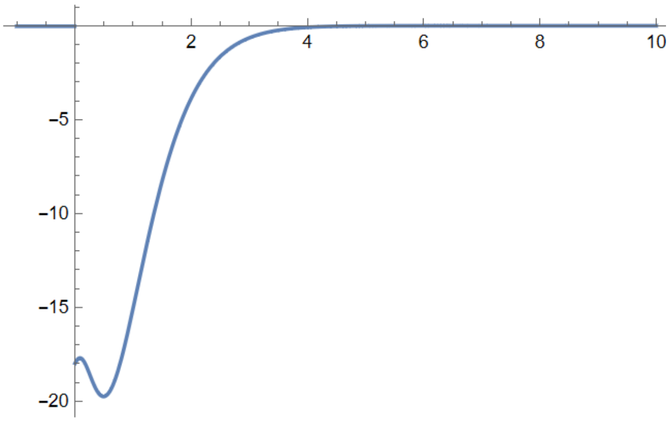
$$\text{Out[113]=}\ \frac{2134\,e^{-8t}}{29} - \frac{10960\,e^{-7t}}{101} + \frac{49584\,e^{-2t}\,\text{Cos}\left[\frac{t}{2}\right]}{2929} - \frac{767732\,e^{-2t}\,\text{Sin}\left[\frac{t}{2}\right]}{2929}$$

Si metta insieme le due parti della funzione, rispettivamente $Y_{liberat}$ e $G[0]$. Ci si aspetta un valore costante a sinistra dell'asse delle ordinate, quindi fino a $t = 0$, ed una convergenza a 0 quando si spende l'interruttore.

```
In[118]:= segnaleGraf[t_] := { G[0]       t < 0
                               Y_liberat   t ≥ 0

In[121]:= Plot[segnaleGraf[t], {t, -1, 10}, PlotRange → All]
```

Out[121]=



Relazione Sistema LTI a Tempo Discreto

Traccia 26

b. Si consideri il seguente sistema proprio LTI-TD

$$\begin{cases} x(k+1) = A\,x(k) + B\,u(k) \\ y(k) = C\,x(k) \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{5}{16} & -\frac{11}{48} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} -\frac{7}{4} & \frac{9}{4} & 0 \end{pmatrix}$$

Determinare:

1. I modi naturali del sistema
2. La risposta libera nell'ipotesi che lo stato iniziale sia

$$x_0 = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

3. studiare la configurazione degli stati iniziali che attivano sulla risposta libera alcuni modi naturali ed altri no;
4. la funzione di trasferimento, i suoi poli e zeri;
5. la risposta al gradino unitario ed il suo grafico (mettere in evidenza la risposta transitoria e la risposta a regime);
6. i suoi modelli ARMA equivalenti, individuando (ove necessario) le condizioni iniziali sull'uscita compatibili con lo stato iniziale

$$x_0 = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$$

   Valutare la risposta all'ingresso

$$u(k) = \begin{cases} 1 & 0 \leqslant k \leqslant 10 \\ 0 & k > 10 \\ 0 & k < 0 \end{cases}$$

7. determinare, sul modello ARMA apposito, le condizioni iniziali tali che la risposta al gradino coincide con il suo valore di regime (assenza di componente transitoria).

Modi naturali del sistema

I modi naturali sono funzioni right-sided che evidenziano la connessione con i poli del sistema. Queste funzioni ci danno informazioni sull'evoluzione di un sistema specifico quando si trova in stato di regime libero. Per determinare i modi naturali del sistema, andiamo a calcolare gli autovalori della matrice A:

```
In[ ]:= λ = Eigenvalues[A]
Out[ ]= {2/3, -1/4, -1/4}
```

Prima di spiegare il risultato ottenuto si riportino alcune definizioni importarti che risulteranno utili nell'analisi del sistema:

- Molteplicità algebrica: numero di volte in cui un autovalore λ_i è uno zero del polinomio caratteristico
- Molteplicità geometrica: al numero di vettori linearmente indipendenti all'interno dell'autospazio associato ad un autovalore λ_i

Il sistema presenta tre autovalori, di cui uno ha molteplicità algebrica pari a due, in particolare $-\frac{1}{4}$, e uno di molteplicità algebrica pari ad uno $\frac{2}{3}$. Per verificare che la matrice A sia diagonalizzabile si calcoli la molteplicità geometrica e, se questa risulterà uguale alla molteplicità algebrica, allora la nostra matrice risulterà diagonalizzabile. Calcoliamo la molteplicità geometrica:

```
In[ ]:= NullSpace[A + 1/4 IdentityMatrix[3]]
Out[ ]= {{6, 10, 1}}
```

Ottenuta che la molteplicità geometrica risulta diversa della molteplicità algebrica, quindi la matrice non è diagonalizzabile e per proseguire con l'analisi del sistema bisogna fare uso della matrice di Jordan.

La matrice di Jordan in realtà è una generalizzazione della forma diagonale, infatti Jordan presenta la matrice come una matrice diagonale a blocchi con tanti blocchi quanti sono gli autovalori. Ciascun blocco risulta a sua volta diagonale a blocchi, con il numero di sotto-blocchi pari alla molteplicità geometrica dell'autovalore corrispondente. Calcoliamo la matrice di Jordan:

```
In[ ]:= {T, Λ} = JordanDecomposition[A]
Out[ ]= {{{6, 56, 15/8}, {10, 72, 3/8}, {1, 0, 1}},
         {{-1/4, 1, 0}, {0, -1/4, 0}, {0, 0, 2/3}}}

In[ ]:= T // MatrixForm
Out[ ]//MatrixForm=
```

$$\begin{pmatrix} 6 & 56 & \frac{15}{8} \\ 10 & 72 & \frac{3}{8} \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

```
In[ ]:= Λ // MatrixForm
Out[ ]//MatrixForm=
```

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{4} & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

Calcolo la matrice potenza:

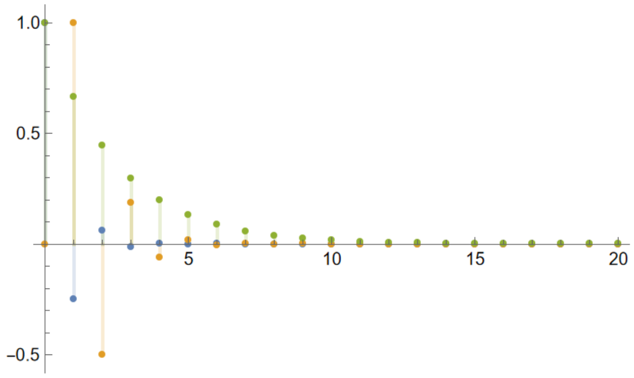
```
In[ ]:= MatrixPower[Λ, k] // MatrixForm
Out[ ]//MatrixForm=
```

$$\begin{pmatrix} \left(-\frac{1}{4}\right)^k & -(-1)^k 4^{1-k} k & 0 \\ 0 & \left(-\frac{1}{4}\right)^k & 0 \\ 0 & 0 & \left(\frac{3}{2}\right)^{-k} \end{pmatrix}$$

Otteniamo che i suoi modi naturali sono: $\left(-\frac{1}{4}\right)^k$, $-(-1)^k 4^{1-k} k$ e $\left(\frac{3}{2}\right)^{-k}$. Si mostri graficamente l'andamento pseudo-oscillatorio. Notiamo la convergenza di tali modi naturali attraverso il grafico:

In[45]:= DiscretePlot$\left[\left\{\left(-\frac{1}{4}\right)^k, -(-1)^k 4^{1-k} k, \left(\frac{3}{2}\right)^{-k}\right\}, \{k, 0, 20\}, \text{PlotRange} \to \text{All}\right]$

Out[45]=



Calcolo della risposta libera

Si prenda uno stato iniziale:

$$x_0 = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Si definisce la risposta libera come la funzione che descrive l'andamento del sistema quando non è applicato alcun ingresso, si considerano invece determinare condizioni iniziali. Procediamo con il calcolo della risposta libera:

In[82]:= `z0 = Inverse[T].x0`

Out[82]= $\left\{\left\{-\frac{335}{121}\right\}, \left\{\frac{63}{176}\right\}, \left\{-\frac{28}{121}\right\}\right\}$

In[83]:= `x1[k_] := Simplify[T.MatrixPower[Λ, k].x0]`

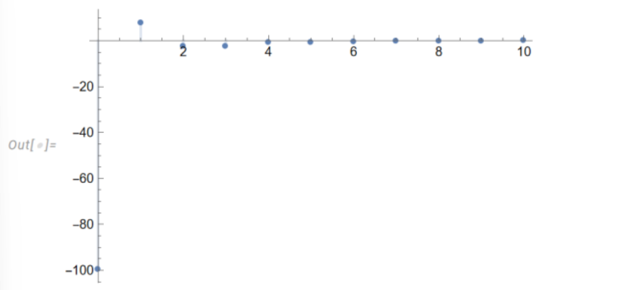
In[84]:= `x1[k] // MatrixForm`

Out[84]//MatrixForm=

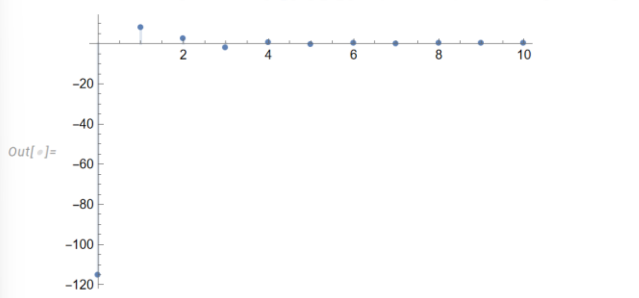
$$\begin{pmatrix} 2^{-3-2k} \times 3^{-k} \left(-752\,(-3)^k - 45 \times 8^k + 128\,(-1)^k\, 3^{1+k}\, k\right) \\ 2^{-3-2k} \times 3^{-k} \left(-3\left(304\,(-3)^k + 3 \times 8^k\right) + 640\,(-3)^k\, k\right) \\ 12^{-k}\left(3\left((-3)^k - 8^k\right) + 8\,(-3)^k\, k\right) \end{pmatrix}$$

La tendenza verso zero della risposta libera è in linea con il comportamento convergente di ciascun modo naturale del sistema, confermando una successione che si avvicina gradualmente allo stato di equilibrio definito dalle condizioni iniziali. Di seguito la rappresentazione degli ingressi e dell'uscita:

In[ ]:= `DiscretePlot[Evaluate[x1[k][[1]]], {k, 0, 10}, PlotRange → All]`



In[ ]:= `DiscretePlot[Evaluate[x1[k][[2]]], {k, 0, 10}, PlotRange → All]`



In[ ]:= `DiscretePlot[Evaluate[x1[k][[3]]], {k, 0, 10}, PlotRange → All]`

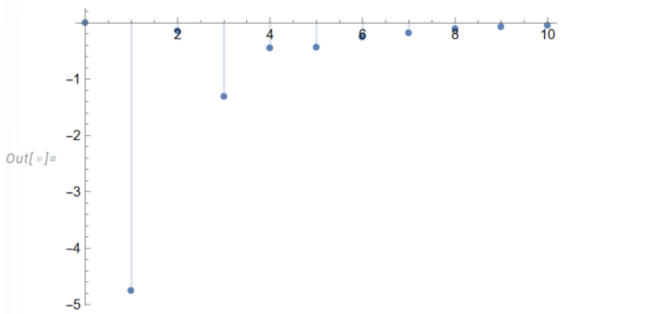
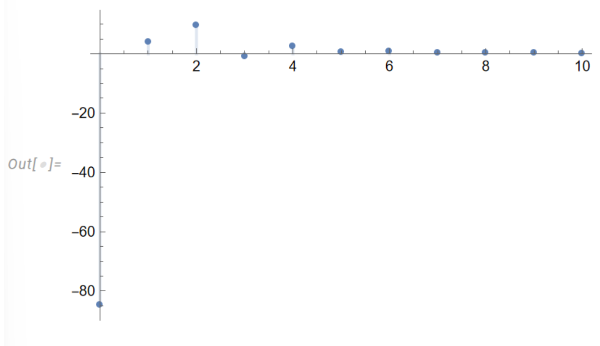


Grafico dell'uscita:

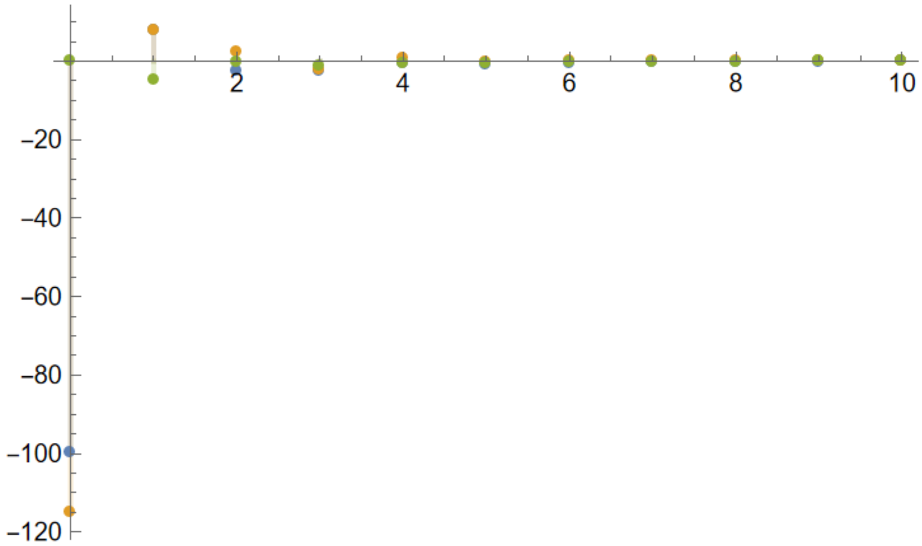
In[ ]:= `DiscretePlot[Y1[k], {k, 0, 10}, PlotRange → All]`



Con il grafico finale della risposta libera si noti come tutti i modi naturali si attivano con lo stato iniziale dato, successivamente troveremo altri stati iniziali tali per cui si attivino solo alcuni modi naturali.

In[2]:=
$$\text{DiscretePlot}\left[\begin{pmatrix} 2^{-3-2k}\times 3^{-k}\left(-752\,(-3)^k - 45\times 8^k + 128\,(-1)^k\,3^{1+k}\,k\right) \\ 2^{-3-2k}\times 3^{-k}\left(-3\left(304\,(-3)^k + 3\times 8^k\right) + 640\,(-3)^k\,k\right) \\ 12^{-k}\left(3\left((-3)^k - 8^k\right) + 8\,(-3)^k\,k\right)\end{pmatrix},\ \{k, 0, 10\},\ \text{PlotRange}\to\text{All}\right]$$

Out[2]=



Studio della configurazione degli stati iniziali che attivano sulla risposta libera alcuni modi naturali e altri no

Procediamo in modo del tutto analogo al sistema a tempo Continuo visto in precedenza:

```
In[116]:= x01 = Transpose[T][[1]]
Out[116]= {6, 10, 1}

In[117]:= z01 = Inverse[T].x01
Out[117]= {1, 0, 0}

In[118]:= x02 = Transpose[T][[2]]
Out[118]= {56, 72, 0}

In[119]:= z02 = Inverse[T].x02
Out[119]= {0, 1, 0}

In[120]:= x03 = Transpose[T][[3]]
Out[120]= {15/8, 3/8, 1}

In[121]:= z03 = Inverse[T].x03
Out[121]= {0, 0, 1}
```

Anche in questo caso si è dimostrato che è possibile trovare stati iniziali specifici che attivano singoli modi naturali senza influenzare gli altri. Si definiscono proprio gli stati iniziali una base ortogonale nella quale ogni vettore isola un singolo modo naturale.

La funzione di trasferimento, i suoi poli e zeri

La funzione di trasferimento di un sistema Lineare Tempo-Invariante (LTI) nel dominio delle trasformate zeta, quindi a tempo discreto, è definita dalla seguente relazione:

$$G(z) = C(zI_n - A)^{-1}B + D$$

CALCOLO DEI FDT → Per ottenere la funzione di trasferimento in Mathematica abbiamo:

```
In[715]:= G[z_] := Simplify[C1.Inverse[z IdentityMatrix[3] - A].B]

In[716]:= G[z]
```

$$\text{Out[716]= } \left\{\frac{12\,(-1+8\,z)}{(-2+3\,z)\,(1+4\,z)^2}\right\}$$

Il risultato ottenuto è una funzione razionale di z con coefficienti reali. Per verificare il risultato ottenuto calcoliamo il polinomio caratteristico di A:

```
In[740]:= Factor[CharacteristicPolynomial[A, z]]
```

$$\text{Out[740]= } -\frac{1}{48}\,(-2+3\,z)\,(1+4\,z)^2$$

```
In[741]:= Factor[Denominator[G[z]]]
```

$$\text{Out[741]= } \left\{(-2+3\,z)\,(1+4\,z)^2\right\}$$

Si noti come il denominatore della funzione di trasferimento, moltiplicato per un fattore costante, coincide con il polinomio caratteristico di A. Ci si aspetta di ottenere tre poli e uno zero, facendo riferimento rispettivamente al denominatore al numeratore della funzione di trasferimento.

CALCOLO DEI POLI → Si procede ora al calcolo dei poli, ovvero i valori di z che annullano il denominatore della funzione di trasferimento:

```
In[742]:= Solve[Denominator[G[z][[1]]] == 0, z]
```

$$\text{Out[742]= } \left\{\left\{z \to -\frac{1}{4}\right\}, \left\{z \to -\frac{1}{4}\right\}, \left\{z \to \frac{2}{3}\right\}\right\}$$

Questi coincidono con gli autovalori.

CALCOLO DEGLI ZERI → Si procede ora al calcolo degli zeri, ovvero i valori di z che annullato il numeratore della funzione di trasferimento:

```
In[743]:= Solve[Numerator[G[z][[1]]] == 0, z]
```

$$\text{Out[743]= } \left\{\left\{z \to \frac{1}{8}\right\}\right\}$$

Per verificare che i risultati siano corretti possiamo fare uso di uno StateSpaceModel, come fatto in precedenza nel caso del sistema LTI- TC.

Calcolo della risposta al gradino unitario discreto

La risposta al gradino in un sistema a tempo discreto corrisponde a una funzione *right-sided* definita come segue:

$$1(k) = \begin{cases} 1, & k \geq 0 \\ 0, & k < 0 \end{cases}$$

La sua trasformata zeta è rappresentata dalla funzione:

$$U(z) \risingdotseq \frac{z}{z-1}$$

La risposta forzata è definita come:

$$Y_f(z) = G(z) * U(z) = G(z) * \frac{z}{z-1}$$

Dove $G(z)$ è la funzione di trasferimento del sistema e $U(z)$ è il segnale d'ingresso, in questo caso gradino unitario discreto, entrambi nel dominio delle trasformate zeta. Si effettui il calcolo della risposta forzata ottenendo:

```
In[35]:= Yf[z_] := G[z] × ZTransform[UnitStep[k], k, z]
In[36]:= Yf[z][[1]] // Apart
Out[36]= 12
In[37]:= Yf[z] / z
```

$$\text{Out[37]=} \quad \frac{12\,(-1+8z)}{(-1+z)\,(-2+3z)\,(1+4z)^2}$$

Per come è scritta la $Z - Trasformata$ non si può scrivere questa come fratti , questo in quanto non conosco la $Z - Trasformata$ di $\frac{z}{z-1}$ ma solo di $\frac{1}{z-a}$. Dobbiamo quindi spacchettare questa frazione dividendo tutto per z:

```
In[38]:= Apart[Yf[z] / z]
```

$$\text{Out[38]=} \quad \frac{84}{25\,(-1+z)} - \frac{1404}{121\,(-2+3z)} - \frac{576}{55\,(1+4z)^2} + \frac{6144}{3025\,(1+4z)}$$

Riscriviamola:

$$\frac{Y(z)}{z} = \frac{84}{25(z-1)} - \frac{1404}{121\left(z-\frac{2}{3}\right)} - \frac{576}{55\left(z+\frac{1}{4}\right)^2} + \frac{6144}{3025\left(z+\frac{1}{4}\right)}$$

Calcoliamo i coefficienti di Heaviside $D_1, \dots, D_n$, avremo:

$$\frac{Y(z)}{z} = \frac{D_1}{(z-1)} + \frac{D_2}{\left(z-\frac{2}{3}\right)} + \frac{D_3}{\left(z+\frac{1}{4}\right)^2} + \frac{D_4}{\left(z+\frac{1}{4}\right)}$$

Applicando la formula di Heaviside seguono i seguenti limiti:

$$D_1 = \lim_{z\to1}\left(\frac{Y(z)}{z}(z-1)\right) = \lim_{z\to1}\left(\frac{84}{25} - \frac{1404(z-1)}{121\left(z-\frac{2}{3}\right)} - \frac{576(z-1)}{55\left(z+\frac{1}{4}\right)^2} + \frac{6144(z-1)}{3025\left(z+\frac{1}{4}\right)}\right) = \frac{84}{25}$$

Un altro modo per calcolare il primo coefficiente di Heaviside è valutare la funzione di trasferimento in 1:

```
In[64]:= G[1]
Out[64]= {84/25}
```

$$D_2 = \lim_{z\to\frac{2}{3}}\left(\frac{Y(z)}{z}\left(z-\frac{2}{3}\right)\right) = \lim_{z\to\frac{2}{3}}\left(\frac{84\left(z-\frac{2}{3}\right)}{25(z-1)} - \frac{1404}{121} - \frac{576\left(z-\frac{2}{3}\right)}{55\left(z+\frac{1}{4}\right)^2} + \frac{6144\left(z-\frac{2}{3}\right)}{3025\left(z+\frac{1}{4}\right)}\right) = -\frac{468}{121}$$

$$D_3 = \lim_{z\to-\frac{1}{4}}\frac{d}{dz}\left(\frac{Y(z)}{z}\left(z+\frac{1}{4}\right)^2\right) = \frac{d}{dz}\left(\frac{84\left(z+\frac{1}{4}\right)^2}{25(z-1)} - \frac{1404\left(z+\frac{1}{4}\right)^2}{121\left(z-\frac{2}{3}\right)} - \frac{576}{55} + \frac{6144\left(z+\frac{1}{4}\right)}{3025}\right) = \frac{1536}{3025}$$

$$D_4 = \lim_{z\to-\frac{1}{4}}\left(\frac{Y(z)}{z}\left(z+\frac{1}{4}\right)^2\right) = \lim_{z\to-\frac{1}{4}}\left(\frac{84\left(z+\frac{1}{4}\right)^2}{25(z-1)} - \frac{1404\left(z+\frac{1}{4}\right)^2}{121\left(z-\frac{2}{3}\right)} - \frac{576}{55} + \frac{6144}{3025}\right) = -\frac{36}{55}$$

Verifichiamo questi risultati in Mathematica:

In[40]:= $D_1 = \lim_{z\to 1} (z-1)\left(\frac{Y_f[z]}{z}\right)$

Out[40]= $\frac{84}{25}$

Un altro modo per calcolare D_1 è il seguente:

D_1 =G[1]

```
In[41]:= G[1]
Out[41]= 84/25
```

In[42]:= $D_2 = \lim_{z\to 2/3} (z-2/3)\left(\frac{Y_f[z]}{z}\right)$

Out[42]= $-\frac{468}{121}$

In[43]:= $D_3 = \lim_{z\to -1/4} D\left[(z+1/4)^2\left(\frac{Y_f[z]}{z}\right), z\right]$

Out[43]= $\frac{1536}{3025}$

In[44]:= $D_4 = \lim_{z\to -1/4} (z+1/4)^2\left(\frac{Y_f[z]}{z}\right)$

Out[44]= $-\frac{36}{55}$

Scriviamo ora la nostra risposta forzata $Y_f[z]$ moltiplicando a destra e sinistra il termine z:

In[45]:= $D_1\left(\frac{z}{z-1}\right) + D_2\left(\frac{z}{z-2/3}\right) + D_3\left(\frac{z}{(z+1/4)^2}\right) + D_4\left(\frac{z}{z+1/4}\right)$

Out[45]= $\frac{84\,z}{25\,(-1+z)} - \frac{468\,z}{121\,\left(-\frac{2}{3}+z\right)} + \frac{1536\,z}{3025\,\left(\frac{1}{4}+z\right)^2} - \frac{36\,z}{55\,\left(\frac{1}{4}+z\right)}$

Calcoliamo ora la risposta forzata nel dominio del tempo al gradino unitario facendo uso dell'Antitrasformata Z:

```
In[47]:= yf[k_] := Expand[InverseZTransform[Yf2[z], z, k]] UnitStep[k]
In[48]:= yf[k]
```

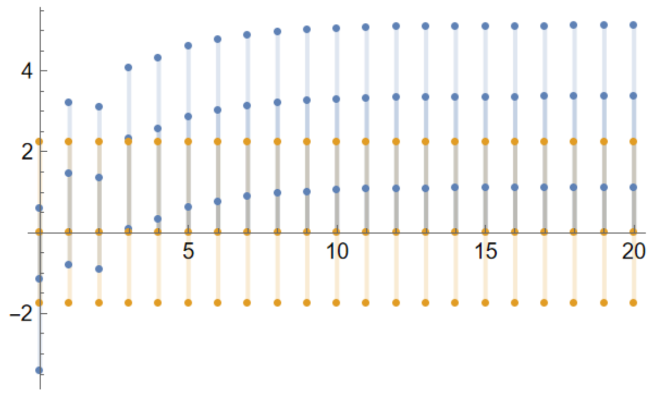
Out[48]= $\left(\frac{84}{25} - \frac{13}{121}\times 2^{2+k}\times 3^{2-k} - \frac{9}{55}\,(-1)^k\,4^{1-k} - \frac{3\,(-1)^k\,2^{11-2k}\,k}{3025}\right)$ UnitStep[k]

I risultati sono corretti poiché i coefficienti dell'antitrasformata coincidono con quelli calcolati tramite la formula di Heaviside, a meno di raccoglimenti vari.

Ora si proceda con la rappresentazione grafica della componente a regime e transitoria:

```
In[89]:= DiscretePlot[{yf[k] - C1, C1}, {k, 0, 20}, PlotRange → All]
```

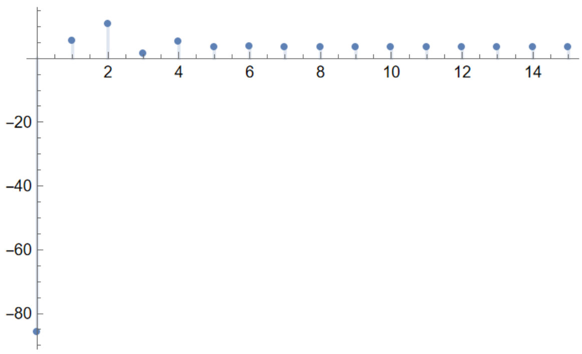
Out[89]=



Si può notare come la risposta transitoria gradualmente scompare per diventare una risposta a regime.
Si rappresenti ora il grafico del gradino unitario:

```
In[51]:= DiscretePlot[yf[k] + Y1[k], {k, 0, 15}, PlotRange → All]
```

Out[51]=



I suoi modelli ARMA equivalenti, individuando le condizioni iniziali all'uscita compatibili con lo stato iniziale

Si conservano su Mathematica le condizioni iniziali:

```
In[52]:= condInizialiARMA = {{-3}, {0}, {-2}}
Out[52]= {{-3}, {0}, {-2}}
```

Si inizia con il valutare l'equazione partendo dalla funzione di trasferimento $G[z]$:

```
In[53]:= eqArma = Expand[Y[z] × Denominator[G[z]]] == U[z] × Numerator[G[z]]]
```

$$\text{Out[53]=}\; -2\,Y[z] - 13\,z\,Y[z] - 8\,z^2\,Y[z] + 48\,z^3\,Y[z] == -12\,U[z] + 96\,z\,U[z]$$

Essendo in un sistema $LTI - Tempo\ Discreto$ faremo uso della $\mathcal{Z} - Trasformata$ inversa che trasformeremo nuovamente per ottenere successivamente le condizioni iniziali.

```
In[54]:= eqDiff = InverseZTransform[eqArma, z, k] /. {Y[z] → ZTransform[y[k], k, z], U[z] → ZTransform[u[k], k, z]} /.
           {InverseZTransform[z ZTransform[y[k], k, z], z, k] → y[k + 1],
            InverseZTransform[z^2 ZTransform[y[k], k, z], z, k] → y[k + 2],
            InverseZTransform[z^3 ZTransform[y[k], k, z], z, k] → y[k + 3],
            InverseZTransform[z ZTransform[u[k], k, z], z, k] → u[k + 1]}
Out[54]= -2 y[k] - 13 y[1 + k] - 8 y[2 + k] + 48 y[3 + k] == -12 u[k] + 96 u[1 + k]

In[55]:= eqDiff2 = ZTransform[eqDiff, k, z] /. {ZTransform[y[k], k, z] → Y[z], ZTransform[u[k], k, z] → U[z]}
```

$$\text{Out[55]=}\; -2\,Y[z] - 13\,(-z\,y[0] + z\,Y[z]) - 8\,(-z^2\,y[0] - z\,y[1] + z^2\,Y[z]) + 48\,(-z^3\,y[0] - z^2\,y[1] - z\,y[2] + z^3\,Y[z]) == -12\,U[z] + 96\,(-z\,u[0] + z\,U[z])$$

Risolvendo l'equazione alle differenze, $eqDiff2$, si ottiene la risposta forzata e libera insieme, che successivamente separeremo:

```
In[56]:= rispostaForzataLibera = Collect[Solve[eqDiff2, Y[z]][[1, 1]][[2]], U[z]]
```

$$\text{Out[56]=}\; \frac{(-12 + 96\,z)\,U[z]}{(-2 + 3\,z)\,(1 + 4\,z)^2} + \frac{-96\,z\,u[0] - 13\,z\,y[0] - 8\,z^2\,y[0] + 48\,z^3\,y[0] - 8\,z\,y[1] + 48\,z^2\,y[1] + 48\,z\,y[2]}{(-2 + 3\,z)\,(1 + 4\,z)^2}$$

Si noti come la risposta forzata è a sinistra mentre la risposta libera è a destra, ed inoltre si noti come il termine che moltiplica $U[z]$, a sinistra dell'equazione, risulti essere la risposta all'impulso discreto. Si prosegue con il separare la risposta libera della forzata:

```
In[57]:= Yarmaforzata[z_] := rispostaForzataLibera[[1]]
In[58]:= Yarmaforzata[z]
```

$$\text{Out[58]=}\; \frac{(-12 + 96\,z)\,U[z]}{(-2 + 3\,z)\,(1 + 4\,z)^2}$$

```
In[59]:= Yarmalibera[z_] := (rispostaForzataLibera[[2]] /. {y[0] → C1.condInizialiARMA, y[1] → C1.A.condInizialiARMA, y[2] → C1.A.A.condInizialiARMA})[[1, 1]]
         Yarmalibera[z]
```

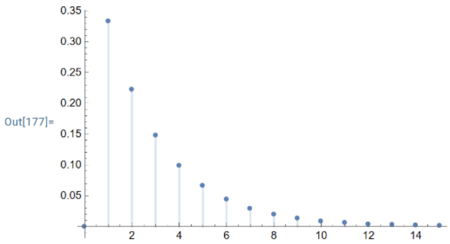
$$\text{Out[60]=}\; \frac{1}{-2 + 3\,z}$$

```
In[61]:= yarmaLibera[k_] := Expand[InverseZTransform[Yarmalibera[z], z, k]]
         yarmaLibera[k]
```

$$\text{Out[62]=}\; 2^{-1+k} \times 3^{-k}\,\text{UnitStep}[-1 + k]$$

Ottenuta la risposta libera visualizziamo il grafico:

```
In[177]:= DiscretePlot[yarmaLibera[k], {k, 0, 15}, PlotRange → All]
```



Si proceda ora con il calcolo della risposta all'ingresso definita come segue:

$$u(k) = \begin{cases} 1 & 0 \leqslant k \leqslant 10 \\ 0 & k > 10 \\ 0 & k < 0 \end{cases}$$

Calcoliamo in Mathematica la $\mathcal{Z} - Trasformata$ di questa funzione:

In[154]:= $u_{gT}[k\_] := \begin{cases} 1 & 0 \leq k \leq 10 \\ 0 & k > 10 \\ 0 & k < 0 \end{cases}$

In[155]:= $U_{gT}[z\_]$:= ZTransform[u_{gT}[k], k, z]

In[156]:= U_{gT}[z]

Out[156]= $$\frac{1 + z + z^2 + z^3 + z^4 + z^5 + z^6 + z^7 + z^8 + z^9 + z^{10}}{z^{10}}$$

Notiamo che il seguente risultato è dovuto a seguito della definizione di $\mathcal{Z} - Trasformata$:

$$F(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n) z^{-n}$$

Essendo che la nostra funzione $F(z) = U_{gT}(z)\ e\ f(n) = u(k)$, e viene valutata solo per valori che sono diversi da zero, e limitata fino a 10, come possiamo notare dalle condizioni nel sistema riportare sopra, allora seguente che la sommatoria sarà pari a:

$$F(z) = \sum_{n=0}^{10} u(k) z^{-n}$$

Si prenda ora in considerazione il modello ARMA e si determini la risposta forzata sostituendo $U[z]$ con $U_{gT}[z]$, calcolato poc'anzi:

In[157]:= $Y_{forgT}[z\_] := Y_{armaforzata}[z]$ /. $U[z] \to U_{gT}[z]$

In[158]:= Y_{forgT}[z]

Out[158]= $$\frac{(-12 + 96 z)\left(1 + z + z^2 + z^3 + z^4 + z^5 + z^6 + z^7 + z^8 + z^9 + z^{10}\right)}{z^{10}(-2 + 3 z)(1 + 4 z)^2}$$

Essendo nel dominio della variabile complessa z, riportiamo la risposta forzata nel dominio della variabile complessa k:

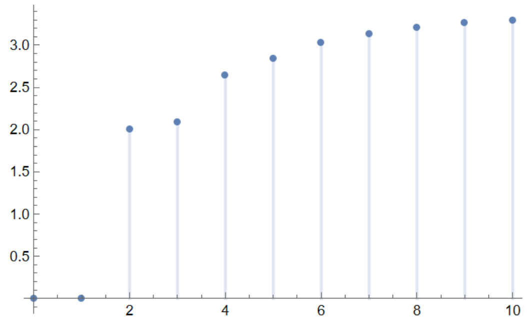
In[159]:= $y_{forgT}[k\_]$:=
FullSimplify[Expand[InverseZTransform[Y_{forgT}[z], z, k]]]

In[160]:= y_{forgT}[k]

Out[160]= $$\begin{cases} 2 & k == 2 \\ \frac{25}{12} & k == 3 \\ \frac{95}{36} & k == 4 \\ \frac{4903}{1728} & k == 5 \\ \frac{31357}{10368} & k == 6 \\ \frac{779461}{248832} & k == 7 \\ \frac{1197907}{373248} & k == 8 \\ \frac{116786563}{35831808} & k == 9 \\ \frac{707954635}{214990848} & k == 10 \\ \frac{1}{121} \times 2^{-9-2k}\left(2276287 \times 3^{2-k} \times 8^k + 24576(-1)^k(-299137760 + 27682413 k)\right) & k > 10 \\ 0 & \text{True} \end{cases}$$

In[162]:= DiscretePlot[$\begin{cases} 2 & k == 2 \\ \frac{25}{12} & k == 3 \\ \frac{95}{36} & k == 4 \\ \frac{4903}{1728} & k == 5 \\ \frac{31\,357}{10\,368} & k == 6 \\ \frac{779\,461}{248\,832} & k == 7 \\ \frac{1\,197\,907}{373\,248} & k == 8 \\ \frac{116\,786\,563}{35\,831\,808} & k == 9 \\ \frac{707\,954\,635}{214\,990\,848} & k == 10 \\ \frac{1}{121} \times 2^{-9-2k} \left(2\,276\,287 \times 3^{2-k} \times 8^k + 24\,576\,(-1)^k\,(-299\,137\,760 + 27\,682\,413\,k)\right) & k > 10 \\ 0 & \text{True} \end{cases}$, {k, 0, 10}, PlotRange → All]

Out[162]=



È importante ricordare che la risposta forzata nel dominio del tempo può essere determinata come la somma della convoluzione discreta. Se indichiamo con g(k) la risposta all'impulso del sistema al tempo k, allora la risposta forzata può essere espressa matematicamente come la somma della convoluzione discreta tra la sequenza di ingresso e g(k). Segue:

```
In[163]:= g[k_] := InverseZTransform[G[z], z, k]

In[164]:= g[k]
```

Out[164]= $\frac{1}{121} \times 2^{1-2k} \times 3^{1-k} \left(-160\,(-3)^k + 39 \times 2^{3k} + 88\,(-1)^k\,3^{1+k}\,k\right)\,(1 - \text{UnitStep}[-k])$

In[165]:= sommaConvoluzione[k_] := $\sum_{i=0}^{k} g[i]\, u_{gT}[i]$

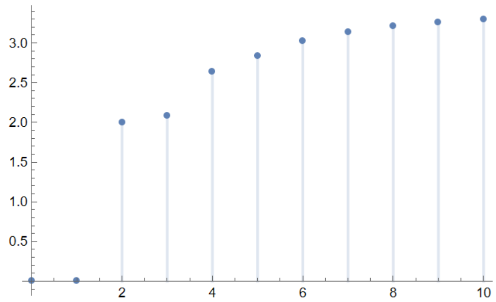
In[166]:= sommaConvoluzione[k]

Out[166]= $\begin{cases} \frac{707\,954\,635}{214\,990\,848} & k > 10 \\ \frac{12^{1-k}\left(128\,(-3)^k - 975 \times 8^k + 847 \times 12^k + 220\,(-1)^k\,3^{1+k}\,k\right)}{3025} & 0 < k \leq 10 \\ 0 & \text{True} \end{cases}$

Si rappresenti il grafico della somma di convoluzione:

```
In[167]:= DiscretePlot[sommaConvoluzione[k], {k, 0, 10}, PlotRange → All]
```

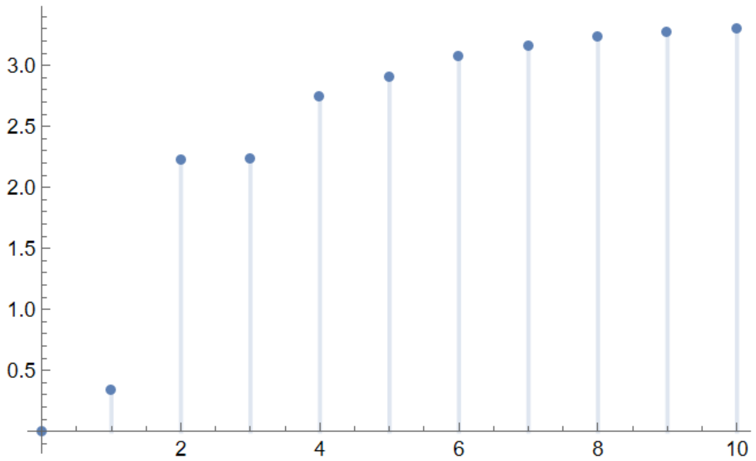
Out[167]=



Si rappresenti ora il grafico della risposta complessiva pari a risposta forzata, che equivale alla somma di convoluzione, + risposta libera:

In[168]:= $\texttt{DiscretePlot}[y_{\text{armaLibera}}[k] + \texttt{sommaConvoluzione}[k],\ \{k, 0, 10\},\ \texttt{PlotRange} \to \texttt{All}]$

Out[168]=



Determino le condizioni iniziali tali che la risposta al gradino coincide con la risposta a regime

Prendendo in considerazione il modello ARMA precedentemente calcolato, si sostituiscono le condizioni iniziali con il vettore incognito v_0:

In[256]:= $v_0 = \{\{v_1\}, \{v_2\}, \{v_3\}\}$

Out[256]= $\{\{v_1\}, \{v_2\}, \{v_3\}\}$

In[257]:= $Y_{\text{liberaPunto7}} = (\texttt{rispostaForzataLibera}[\![2]\!]\ /.\ \{y[0] \to C_1.v_0,\ y[1] \to C_1.A.v_0,\ y[2] \to C_1.A.A.v_0\})[\![1]\!]$

Out[257]= $$\frac{-13 z \left(-\frac{7 v_1}{4} + \frac{9 v_2}{4}\right) - 8 z^2 \left(-\frac{7 v_1}{4} + \frac{9 v_2}{4}\right) + 48 z^3 \left(-\frac{7 v_1}{4} + \frac{9 v_2}{4}\right) - 8 z \left(\frac{v_1}{4} - \frac{v_2}{4} - 2 v_3\right) + 48 z^2 \left(\frac{v_1}{4} - \frac{v_2}{4} - 2 v_3\right) + 48 z \left(-\frac{5 v_1}{8} + \frac{11 v_2}{24} - \frac{v_3}{12}\right) - 96 z\, u[0]}{(-2 + 3 z)\,(1 + 4 z)^2}$$

Si calcola la risposta forzata:

In[258]:= $\texttt{rispostaForzataz}_g = \texttt{rispostaForzataLibera}[\![1]\!]\ /.\ U[z] \to \frac{z}{z-1}$

Out[258]= $$\frac{z\,(-12 + 96 z)}{(-1 + z)\,(-2 + 3 z)\,(1 + 4 z)^2}$$

Facendo uso nuovamente della serie di convoluzione, otteniamo la componente a regime pari a:

In[259]:= $\texttt{componenteRegime}[k\_] := \sum_{i=0}^{\infty} g[i]$

In[260]:= $\texttt{componenteRegime}[k]$

Out[260]= $\frac{84}{25}$

Tornando indietro al calcolo di $y_f[k]$, o di $G[1]$, notiamo che questi restituiscano proprio la nostra componente a regime ora ottenuta, ovviamente non è un caso che coincidano.

Si calcoli ora la componente transitoria:

In[261]:= `componenteTransitoria = Factor[rispostaForzataz_g - ZTransform[componenteRegime[k], k, z]]`

Out[261]= $-\frac{12\, z\, (-11 + 280\, z + 336\, z^2)}{25\, (-2 + 3\, z)\, (1 + 4\, z)^2}$

Si sommino ora componente transitoria con la risposta libera:

In[262]:= `zer = Factor[componenteTransitoria + Y_1liberaPunto7]`

Out[262]= $-\frac{z\, (-528 + 13\,440\, z + 16\,128\, z^2 + 925\, v_1 - 2600\, z\, v_1 + 8400\, z^2\, v_1 + 525\, v_2 + 3000\, z\, v_2 - 10\,800\, z^2\, v_2 - 1200\, v_3 + 9600\, z\, v_3 + 9600\, u[0])}{100\, (-2 + 3\, z)\, (1 + 4\, z)^2}$

In[263]:= `Solve[CoefficientList[Numerator[Simplify[Expand[zer]]], z] == {0, 0, 0}, {v1, v2, v3}]`

Out[263]= { }

Calcolando la lista dei coefficienti notiamo che questa risulta essere vuota, ergo significa che non esiste un vettore che annulla la componente libera e quella transitoria.

Relazione Catena di Markov

Traccia 26

c. Si consideri la catena di Markov Tempo Discreto avente numero di stati finiti

$$x(k+1) = A\,x(k) \tag{1}$$

la cui matrice di transizione è

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{9} & \frac{8}{17} & \frac{10}{21} \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{21} \\ \frac{5}{9} & \frac{9}{17} & \frac{10}{21} \end{pmatrix}$$

Determinare:

1. il grafo di transizione della catena;
2. lo stato stazionario della catena a partire da
   (a) ricorsione numerica a partire da uno stato iniziale stocastico scelto in maniera pseudo-casuale (si lascia allo studente la scelta dello stato iniziale e l'individuazione di un numero sufficiente di passi per garantire la convergenza della catena);
   (b) calcolo in forma chiusa dell'equilibrio stocastico della catena;
3. evidenziare nel grafo individuato al punto 1. un possibile *spanning tree*.

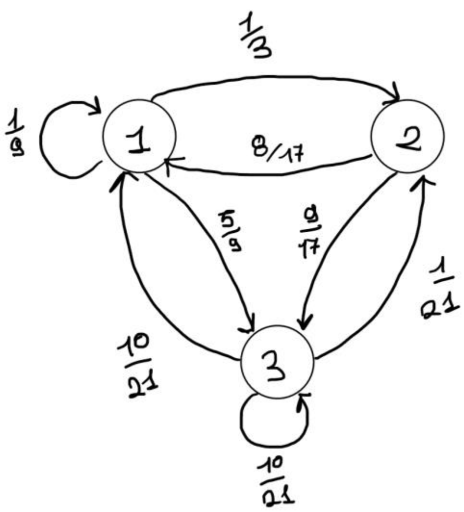
Grafo di transizione della catena

Nei grafi di transizione andiamo ad analizzare la probabilità di transizione da uno stato ad un altro dove lo stato è la probabilità della presenza o meno di un attributo e le transizioni sono definite dalle probabilità di "spostarsi" da uno stato all'altro. È possibile la presenza di un auto-anello su uno stato il quale indica la possibilità che lo stato rimanga invariato fra un evento e l'altro e l'arco fra i due nodi indica la possibilità di una transizione fra i due stati associati.

Nei modelli di transizione facciamo un assunzione definita come ipotesi di markov, questa dice che lo stato successivo $x(k+1)$ dipende solo dallo stato corrente $x(k)$.

Essendo la Matrice caratterizzata da tre righe e tre colonne avremo allora tre stati, ogni arco va dallo stato j allora stato i ed ha un peso pari all'elemento α_{ij} della matrice.

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \end{array} \\ A = \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} & \begin{pmatrix} \frac{1}{9} & \frac{8}{17} & \frac{10}{21} \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{21} \\ \frac{5}{9} & \frac{9}{17} & \frac{10}{21} \end{pmatrix} \end{array}$$



Il grafo risulta essere fortemente connesso in quanto ogni nodo è raggiungibile.

Stato stazionario della catena

Lo stato stazionario è uno stato per cui vale la seguente proprietà:

$$\pi = A\pi$$

In generale lo stato stazionario potrebbe non essere unico, questo potrebbe variare in base allo stato stocastico iniziale. Si scegli uno stato iniziale stocastico scelto in maniera pseudo casuale, e si prova con 60 passi se questo garantisce la convergenza della catena:

```python
A = np.array([[1/9,8/17,10/21],[1/3,0,1/21],[5/9,9/17,10/21]])
x0=np.random.rand(3,1)

x0=x0/np.sum(x0)

# Divido per la somma e genero il vettore stocastico

npassi=50

# Numero di passi rispetto al quale voglio valutare
# stato della catena di Markov

for i in range(npassi):
    x0=A@x0

print('Stato dopo 60 passi :', x0)
```

Si ottiene il seguente vettore

$$x(50) = \begin{bmatrix} 0.34826087 \\ 0.14043478 \\ 0.51130435 \end{bmatrix}$$

Si cerchi ora il vettore stazionario in forma chiusa sapendo che:

$$VettoreStazionario = A.vettoreStazionario$$

Quindi la somma delle componenti del vettore stazionario deve risultare pari ad 1, questo in quanto deve risultare stocastico. Mettendo a sistema queste due equazioni troviamo la soluzione, segue che:

```
In[6]:= vS = {{v1}, {v2}, {v3}}

Out[6]= {{v1}, {v2}, {v3}}

In[7]:= vS = Solve[{vS == A.vS, v1 + v2 + v3 == 1}, {v1, v2, v3}]
```

$$\text{Out[7]=} \left\{\left\{v1 \to \frac{801}{2300},\ v2 \to \frac{323}{2300},\ v3 \to \frac{294}{575}\right\}\right\}$$

```
In[8]:= vS // N

Out[8]= {{v1 → 0.348261, v2 → 0.140435, v3 → 0.511304}}
```

Facendo la somma delle componenti del vettore vS otteniamo che questo è stocastico.

Evidenziare uno spanning tree

Lo spanning tree è un particolare grafo che risulta essere aciclico e non unico, ovvero non è detto che non esistano altri alberi ricoprenti. Per la ricerca di uno spanning tree è necessario connette tutti i nodi senza creare cicli.

Segue dunque che il grafo diventa: